PROF. J. CIZAREVIČS

PARASTO DIFERENCIALVIENĀDOJUMU INTEGRĒŠANA

LATVIJAS VALSTS IZDEVNIECĪBA

PROF. J. CIZAREVIČS

PARASTO DIFERENCIALVIENĀDOJUMU INTEGRĒŠANA

LATVIJAS VALSTS IZDEVNIECĪBA
RĪGĀ 1949

Проф. Я. Цизаревич

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На латышском языке

Redaktors J. Eiduss. Techn. redaktors A. Auziņš.
Izdevn. korekt. H. Sīpola. Tipogr. korekt. Z. Brauere.

JT 00772. Nodota salikšanai 1948. g. 31. decembrī Parakstīta iespiešanai 1949. g. 29. martā. Papīra formats 61×86. Metiens 1000 eks. Iespiedlokšņu skaits 16. Izdevn. lokšņu skaits 14,25. Izdevniecības № 2205 Z79. Pasūt. № 9843.
Iespiesta LPT Paraugtipogrāfijā, Rīgā, Maskavas ielā № 11.

Maksā 7 rbļ. 50 kap.

SATURA RĀDĪTĀJS

Pirmā nodaļa

Vispārīgas ziņas par diferencialvienādojumiem

Otra nodaļa

Pirmās kārtas diferencialvienādojumi

A. Vispārīgas ziņas par pirmās kārtas diferencialvienādojumiem

B. Pirmās kārtas un pirmās pakāpes diferencialvienādojumu integrēšana ar kvadraturām

G. Dažas techniskas problemas

Trešā nodaļa

Augstākas kārtas diferencialvienādojumi

A. Vispārīgas ziņas

B. Otras kārtas diferencialvienādojumu veidi, kuri elementari integrējami

C. n-tās kārtas diferencialvienādojumu veidi, kurus var elementari izintegrēt

Sestā nodaļa

Linearu diferencialvienādojumu simboliskā integrēšana

A. Lineari diferencialvienādojumi ar konstantiem koeficientiem

B. Lineari diferencialvienādojumi ar mainīgiem koeficientiem

Septītā nodaļa

Furjē rindas

Pirmā nodaļa

Vispārīgas ziņas par diferencialvienādojumiem

1. Diferencialvienādojumu iedalījums. Diferencialvienādojuma kārta un pakāpe.

Vienādojumu, kurā atrodas nezināmas noteicamās funkcijas un to atvasinātās, sauc par diferencialvienādojumu. Diferencialvienādojumus iedala divās saimēs: parastos diferencialvienādojumos un parcialos diferencialvienādojumos.

a) Parastie diferencialvienādojumi. Tie ir tādi diferencialvienādojumi, kuros atrodas tikai viens neatkarīgais mainīgais atklātā vai neatklātā veidā un šī mainīgā funkcijas un to atvasinātās.

Ja vairāki mainīgie ir atkarīgi no viena neatkarīgā mainīgā, tad, lai tos varētu pilnīgi noteikt kā dotā neatkarīgā mainīgā funkcijas, vajadzīgs tik daudz diferencialvienādojumu, cik vienādojumā atrodas atkarīgo mainīgo. Šādu diferencialvienādojumu kopību tad sauc par diferencialvienādojumu sistemu vai arī par simultaniem diferencialvienādojumiem. Tā, piemēram,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ux = 0 \tag{1}$$

ir parastais diferencialvienādojums, kurā x ir no t atkarīga funkcija.

Vienādojumi

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x + y + 2z \\ \frac{dz}{dx} &= x + z + 2y \end{aligned}\right| \tag{2}$$

veido parasto diferencialvienādojumu sistemu ar atkarīgiem mainīgiem y un z un neatkarīgo mainīgo x.

b) Parcialie diferencialvienādojumi ir vienādojumi, kuros atrodas vismaz divi neatkarīgie mainīgie un, attiecībā uz tiem veidotie, visu vai dažu atkarīgo mainīgo dažādu kārtu parcialie diferencialkvocienti.

Ja vairāki atkarīgie mainīgie atkarīgi vismaz no diviem neatkarīgiem mainīgiem, tad, lai pilnīgi noteiktu šos atkarīgos mainīgos kā doto neatkarīgo mainīgo funkcijas, diferencialvienādojumu skaitam jābūt vienādam ar atkarīgo mainīgo skaitu. Šādu diferencialvienādojumu kopību sauc par parcialo diferencialvienādojumu sistemu. Tā, piemēram, diferencialvienādojums

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{dy^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0 \tag{3}$$

ir parcialais diferencialvienādojums; tas noteic z kā neatkarīgo mainīgo x un y funkciju.

Vienādojumi

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

veido parcialu diferencialvienādojumu sistemu, ar kuru z un u noteikti kā x un y funkcijas.

Diferencialvienādojuma kārtu noteic vienādojumā esošā augstākā diferencialkvocienta kārta.

Šeit pieņemsim, ka turpmāk apskatāmie diferencialvienādojumi attiecībā uz tajos esošajiem diferencialkvocientiem veido algebrisku vienādojumu.

Par diferencialvienādojuma pakāpi sauc augstākā diferencialkvocienta pakāpi, pēc tam kad diferencialvienādojumi pārveidoti racionalā veidā un atsvabināti no daļām. Saskaņā ar teikto diferencialvienādojums (1) ir parastais otras kārtas un pirmās pakāpes diferencialvienādojums; vienādojumi (2) veido pirmās kārtas un pirmās pakāpes parasto diferencialvienādojumu sistemu;

vienādojums (3) ir parcialais otras kārtas un otras pakāpes diferencialvienādojums;

vienādojumi (4) veido pirmās kārtas un pirmās pakāpes parcialo diferencialvienādojumu sistemu.

2. Diferencialvienādojuma integrals. Atrisināt vai integrēt doto diferencialvienādojumu nozīmē dabūt visas doto neatkarīgo mainīgo funkcijas, kas ar saviem diferencialkvocientiem identiski apmierina doto vai dotos diferencialvienādojumus.

Kad esam dabūjuši meklēto nezināmo funkciju, tad sakām, ka dabūts dotā diferencialvienādojuma i n t e g r a l s.

Teorijā diferencialvienādojumu uzskata par atrisinātu, ja atkarīgais mainīgais izteikts kā neatkarīgā mainīgā funkcija. Šī funkcija var būt kāda no „pazīstamām" vai arī izteikta integrala veidā, pie kam vienalga, vai integracija iespējama ar „pazīstamām" funkcijām, vai ne. Tā, piemēram, par diferencialvienādojuma

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = e^x$$

integralu uzskata izteiksmi

$$y = \int \frac{e^x}{x} dx + C,$$

lai gan to nointegrēt slēgtā veidā nevaram.

Diferencialvienādojumu sauc par elementari atrisināmu (integrējamu), ja tā vispārīgais atrisinājums izteicams ar galīgu elementaru funkciju skaitu un parastās integracijās (kvadraturās).

Inženieru praksē vajadzīgi skaitliski rezultati, tādēļ nevar apmierināties ar norādīto atrisinājuma veidu. Tālāk redzēsim paņēmienus, kā dabūt pielietošanai derīgus atrisinājumus tajos gadījumos, kad teoretiskais atrisinājums elementarās funkcijās slēgtā veidā nav dabūjams.

3. Diferencialvienādojuma veidošana. Pēc augšējām definicijām diferencialvienādojumus var veidot teoretiski tīri analitiski. Pielietojumos diferencialvienādojumus dabū, izteicot matematikas valodā infinitesimalus sakarus, kā tas bieži vajadzīgs ģeometrijā, mechanikā un fizikā.

Bieži iespējams izteikt kāda ģeometriska veidojuma īpašības, ja to aplūkojam ļoti mazā iecirknī; kādas laikā noritošas parādības likumu iespējams noteikt, ja apskatām tās norisi bezgalīgi mazā laika sprīdī. Ja tas ir izdevies, tad apskatāmā problema ir izteikta matemātikas valodā ar diferencialvienādojumu. Atrisinot šo vienādojumu, dabūjam attiecīgā galīgā ģeometriskā veidojuma īpašības vai dotās parādības norises likumu galīgā laika sprīdī.

Otrā nodaļa

Pirmās kārtas diferencialvienādojumi

A. Vispārīgas ziņas par pirmās kārtas diferencialvienādojumiem

4. Pirmās kārtas diferencialvienādojuma forma un diferencialvienādojuma veidošana. Vienādība

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

ir pirmās kārtas diferencialvienādojums. Šajā vienādojumā atrodas atkarīgā mainīgā y pirmais diferencialkvocients. Pieņemsim, ka augšējā vienādojuma funkcija F attiecībā uz $\frac{dy}{dx}$ ir racionala.

Vienādojumu (1) varam dabūt analitiski šādā ceļā. Pieņemam, ka dotā vienādojumā

$$\psi(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

x un y izteic kāda punkta koordinatas plaknē. Tad vienādojuma (2) ģeometriskais attēls dod līkni plaknē. Ar mainīgu C šis vienādojums dod līkņu saimi. Ja prasām, ka kādai šīs saimes līknei jāiet caur punktu P_0 (x_0, y_0), tad, ievietojot x_0 un y_0 vienādojumā (2), dabūjam vienādību, no kuras varam atrast C vērtību.

Kādas šīs saimes līknes pieskares virziena koeficients ir noteikts ar

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Izslēdzot C no vienādojumiem (2) un (3), dabūjam vienādojumu

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{4}$$

kas noteic $\frac{dy}{dx}$ kā funkciju no x un y. Vienādība (4) ir līkņu saimes

$$\psi\,(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

diferencialvienādojums.

Diferencialvienādojums (4) izteic kādu īpašību, kas pieder katrai saimes (2) līknei.

P i e m ē r s. Dota līkņu saime ar vienādojumu

$$y^2 - 2Cx = 0. \tag{5}$$

Katra šīs saimes līkne ir parabola. Diferencējot (5), dabūjam

$$y \cdot \frac{dy}{dx} - C = 0. \tag{6}$$

Izslēdzam C no vienādojumiem (5) un (6):

$$2x\,\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{7}$$

Rakstot $\frac{dy}{dx}$ vietā y', no vienādojuma (7) dabūjam

$$\frac{y}{y'} = 2x. \tag{8}$$

Kā zināms, izteiksmes (8) kreisā puse dod līknes apakšpieskari s_t; tātad

$$s_t = 2x.$$

No augšējā redzams: diferencialvienādojums (7) izteic visām līkņu saimes (5) līknēm (parabolām) piederošu īpašību, proti — to apakšpieskare ir $2x$.

Tātad ar doto vienādojumu

$$\psi(x, y, C) = 0,$$

kas satur vienu patvaļīgu konstanti C, ir noteikts pirmās kārtas diferencialvienādojums; pēdējais nav no C atkarīgs.

Diferencialvienādojumu (7) še dabūjam tīri analitiskā ceļā. Šo pašu diferencialvienādojumu dabūsim, atrisinot ģeometrisku problemu: atrast līknes, kuru apakšpieskare ir $2x$. Apzīmējo apakšpieskari ar s_t, rakstām

$$s_t = 2x.$$

Diferencialģeometrija dod

$$s_t = \frac{y}{y'}.$$

Tātad

$$\frac{y}{y'} = 2x$$

jeb

$$2xy' - y = 0.$$

Izejot no šī diferencialvienādojuma, dabūsim to līkņu saimi kuras īpašību šis diferencialvienādojums izteic.

Rakstot vienādojumu šādi:

$$2x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

un pārveidojot to, dabūjam

$$2\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integrējot abas šī vienādojuma puses, dabūjam

$$2 \ln y = \ln x + \ln 2C$$

jeb

$$\ln(y^2) = \ln(2Cx)$$

un, beidzot,

$$y^2 = 2Cx.$$

No tā redzams, ka pirmās kārtas diferencialvienādojumam atbilst vienādojums, kurš dod sakaru starp x un y un kurā atrodas viena patvaļīga konstante. Šis vienādojums izteic līkņu saimi.

5. Pirmās kārtas diferencialvienādojuma integrals. Patvaļīgā konstante. Sākuma noteikumi.

Kā redzējām, diferencialvienādojuma

$$2xy' - y = 0 \tag{1}$$

integralvienādojums jeb vienkāršāk integrals ir

$$y^2 - 2Cx = 0. \tag{2}$$

Šinī vienādojumā atrodas patvaļīgs pastāvīgs lielums C. Šis diferencialvienādojuma integrals, ģeometriski apskatīts, izteic līkņu — parabolu — saimi, kurā katrai līknei atbilst sava C vērtība.

Dotā gadījumā īpašība, ka līknes apakšpieskare ir $2x$, pieder ne tikai vienai saimes parabolai, bet it visām. Šis apstāklis izpaužas integralā ar to, ka tajā atrodas patvaļīgs pastāvīgs lielums C, kuram dodot atsevišķas vērtības, varam dabūt katru šīs saimes līkni.

Diferencialvienādojuma integralu, kurā atrodas patvaļīga konstante C, sauc par dotā diferencialvienādojuma p i l n ī g o vai arī v i s p ā r ī g o i n t e g r a l u. Ievietojot vispārīgajā integralā nenoteiktā C vietā noteiktu vērtību, no visas līkņu saimes izņemam vienu vienīgu līkni; šādu vispārīgā integrala atsevišķu vērtību vai atsevišķu līkni sauc par dotā diferencialvienādojuma p a r t i k u l a r o integralu.

Kā vēlāk redzēsim, ir gadījumi, kad diferencialvienādojumam ir integrals, ko nevar dabūt, specializējot konstanti C; šādu integralu sauc par s i n g u l a r u integralu.

Pirmās kārtas diferencialvienādojuma integralā esošo patvaļīgo konstanti C sauc par i n t e g r ē š a n a s k o n s t a n t i. Šīs konstantes nozīme augšā jau apskatīta.

Lai dabūtu integrēšanas konstantes vērtību, jādod tā saucamie s ā k u m a n o t e i k u m i, kas pirmās kārtas diferencialvienādojuma gadījumā izsaka, ka integrallīknei jāiet caur kādu doto punktu $P_0 (x_0, y_0)$.

Tātad, ja diferencialvienādojuma integrals ir

$$\psi (x, y, C) = 0,$$

tad, ievietojot augšējā vienādojumā x un y vietā x_0 un y_0 un atrisinot vienādojumu attiecībā uz C, dabūjam

$$C = f (x_0, y_0).$$

Tā, ja dotajā piemērā sākuma noteikums ir, ka līknei jāiet caur punktu P_0 (3,5), tad, ievietojot šīs x un y vērtības integralā (2), dabūjam

$$5^2 - 2C \cdot 5 = 0$$

vai

$$C = \frac{25}{10} = 2{,}5;$$

un dotajam diferencialvienādojuma (1) sākuma noteikumam atbilstošais partikularais integrals tad ir

$$y^2 - 2 \cdot 2{,}5x = 0$$

jeb

$$y^2 - 5x = 0.$$

6. Pirmās kārtas diferencialvienādojuma ģeometriskā nozīme. Pieņemsim, ka pirmās kārtas diferencialvienādojumu

$$F (x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

varam atrisināt attiecībā uz y', dabūjot

$$y' = f (x, y), \qquad (2)$$

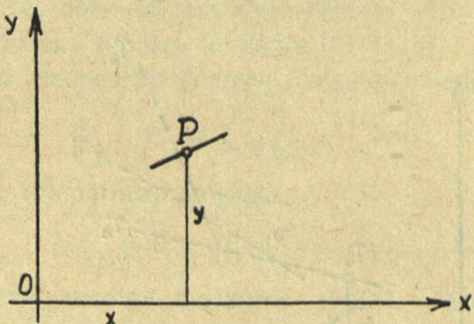
un ka šī pēdējā x un y funkcija ir viennozīmīga. Ja y' ir vairāknozīmīga x un y funkcija, tad apskatām vienu no tās nozīmēm; vēlāk ar pārējām rīkojamies tāpat kā ar apskatīto.

Pieņemsim (1. zīm.) plaknē punktu ar koordinatām x un y; šajā punktā pieņemsim līnijas elementu un šī līnijas elementa virzienu apzīmēsim ar y'.

Punktu $P (x, y)$ saucam par līnijas elementa nesēju. No teiktā redzams, ka ar vienādojumu (2) katram punktam plaknē vai kādā plaknes iecirknī piekārtots līnijas elements ar virzienu y'. To izsakām arī šādi: vienādojums

$$y' = f(x, y)$$

izteic virzienu lauku. Diferencialvienādojuma (1) atrisināšana tad ir darbība, ar kuru plaknē atrodošos līnijas elementus kārtojam visos iespējamos sakārtojumos tādējādi, lai līnijas elementus nesošie punkti atrastos uz kādas līknes un līnijas elementi veidotu līknes pieskares minētos punktos.



Zīm. 1.

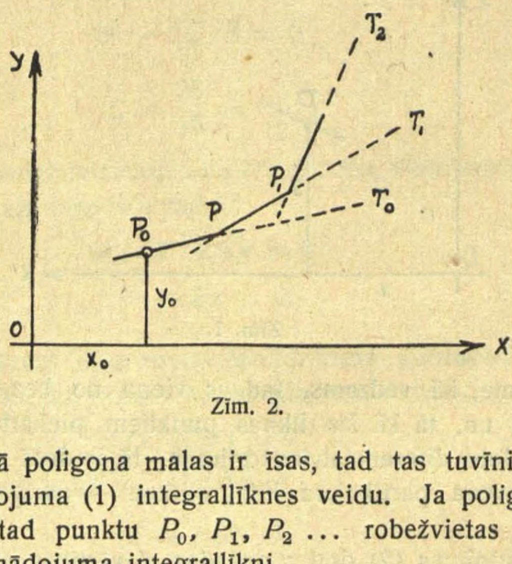
Šāda līkne, kā redzams, tad ir viena no bezgala daudzām iespējamām un, tā kā šīs līknes punktiem piekārtotie x, y, y' apmierina doto diferencialvienādojumu, tā ir dotā diferencialvienādojuma viena partikulara integrallīkne — partikularais integrals.

Ja vienādojums (2) dod n dažādas y' vērtības, tad caur katru plaknes (vai plaknes iecirkņa) punktu iet n integrallīknes.

7. Katram pirmās kārtas diferencialvienādojumam ir integrals. To pierādīsim grafiski šādā veidā. Plaknes iecirknī, kur izteiksme

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

ir reala, izvēlēsimies punktu P_0 $(x_0\ y_0)$., Ievietojot punkta P_0 koordinatas (x_0, y_0) vienādojumā (1), dabūjam y_0', t. i., līnijas elementa virziena koeficientu punktā P_0, un varam uzzīmēt šī līnijas elementa virzienu $P_0 T_0$. Uz šīs taisnes tuvu punktam P_0 izvēlamies punktu P_1, kura koordinatas (x_1, y_1) dabūjam no zīmējuma. Ievietojot x_1 un y_1 vienādojumā (1), dabūjam punkta P_1 līnijas elementa virziena koeficientu un tad arī virzienu $P_1 T_1$. Uz šī virziena tuvu punktam P_1 izvēlēsimies punktu P_2 un norādītā kārtā dabūjam šī punkta līnijas elementa virziena koeficientu y_2' un virzienu $P_2 T_2$. Turpinot norādīto konstrukciju, dabūjam poligonu $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4$ u. t. t.



Zīm. 2.

Ja augšējā poligona malas ir īsas, tad tas tuvīni rāda diferencialvienādojuma (1) integrallīknes veidu. Ja poligona malas tiecas uz 0, tad punktu P_0, P_1, P_2 ... robežvietas veido dotā diferencialvienādojuma integrallīkni.

Pierādīt analitiski, ka pirmās kārtas diferencialvienādojumam ir integrals, varam šādi. Pieņemsim, ka, atrisinot pirmās kārtas diferencialvienādojumu attiecībā uz y', dabūjam

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

un ka $f(x, y)$ ir viennozīmīga funkcija. Gadījumā, ja dabū vairākas y' vērtības, apskata katru no tām atsevišķi. Diferencējot augšējo vienādojumu, dabūjam

$$\left.\begin{aligned}
y'' &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = f_1(x, y) \\
y''' &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \cdot y' = f_2(x, y) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y^{(n)} &= \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-2}}{\partial y} y' = f_{n-1}(x, y).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Kā redzams, ja dots diferencialvienādojums (1), tad pilnīgi noteiktas un zināmas ir visas funkcijas $f_1(x, y), \ldots, f_{n-1}(x, y)$.

Nezināmo un meklēto diferencialvienādojuma (1) integralu apzīmēsim ar

$$y = \varphi(x). \tag{3}$$

Vienādojumu (3) pārrakstīsim šādi:

$$y = \varphi(x_0 + x - x_0), \tag{4}$$

kur x_0 ir kāda mainīgā x sākuma vērtība. Izvirzot labo pusi Teilora rindā, dabūjam

$$y = \varphi(x_0) + (x - x_0)\varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\varphi''(x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0) + \ldots \tag{5}$$

Pieņemsim, ka x_0 ir tāda vērtība, ka ar $x = x_0$, funkcija $\varphi(x)$ un arī visas tās atvasinātās pieņem galīgas vērtības. Ievērojot (3), izteiksmē (5) pirmo locekli rakstām šādi:

$$\varphi(x_0) = y_0, \tag{6}$$

pie kam y_0 ir tā vērtība, kuru iegūst y, kad x pieņem vērtību x_0. No (6) redzam, ka y_0 ir pieņemams patvaļīgi, ja funkcijas φ vērtība punktā x_0 nav zināma. Ievērojot (3), (6) un (2), redzams, ka vienādībā (5)

$$\varphi'(x_0) = y_0' = f(x_0, y_0).$$

Tāpat redzam, ka

$$\varphi''(x_0) = y_0'' = f_1(x_0, y_0),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)} = f_{n-1}(x_0, y_0).$$

Ievietojot šīs vērtības vienādībā (5), dabūjam

$$y = y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f_1(x_0, y_0) + \ldots + \\ + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f_{n-1}(x_0, y_0) + \ldots \tag{7}$$

Kā redzams, izvirzījumā (7) visi koeficienti, izņemot pirmo, ir noteikti un zināmi, bet pirmais loceklis y_0 jāpieņem patvaļīgi.

Diferencējot (7) pēc x, dabūjam

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x_0, y_0) + (x - x_0) f_1(x_0, y_0) + \ldots + \\ + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f_{n-1}(x_0, y_0) + \ldots \tag{8}$$

Rinda (8), kā viegli saprast, ir diferencialvienādojuma (1) labās puses izvirzījums Teilora rindā. Ja rindas (7) un (8) ir savirzāmas kādā zināmā intervalā, kurā atrodas x_0, tad meklētais y ir izteikts ar (7) kā x funkcija. Tātad, ja izpildīti šie noteikumi, diferencialvienādojumam (1) ir integrals.

Rindā (7) atrodas visi parametri, kas atradās diferencialvienādojumā (1), bet, kā redzams, rindā atrodas arī vēl x_0 un y_0. Lielums x_0 pieņemams kā kāds noteikts skaitlis, bet y_0 paliek nenoteikts.

Rinda (7) noteic savā konverģences intervalā y kā x funkciju. Šajā funkcijā atrodas nenoteikts, patvaļīgi pieņemams lielums y_0; to apzīmējot ar C, rakstām

$$y = \varphi(x, C).$$

Šī izteiksme ir dotā diferencialvienādojuma integrals. Liekot rindā (7) $x_0 = 0$, dabūjam Maklorena rindu

$$y = y_0 + \frac{x}{1!} y_0' + \frac{x^2}{2!} y_0'' + \frac{x^3}{3!} y_0''' + \dots \qquad (9)$$

Piemērs. Dots diferencialvienādojums

$$y' = y. \qquad (\alpha)$$

Dabūt šī vienādojuma integralu. Tā kā

$$y' = y,$$

tad

$$y'' = y' = y$$

$$y''' = y' = y$$

$$\dots\dots$$

$$y^{(n)} = y.$$

Ar $x = 0$ jāpieņem patvaļīgi y_0, bet tad, kā redzams,

$$y_0' = y_0'' \dots = y_0^{(n)} = y_0.$$

Ievietojot šīs vērtības rindā (9), dabūjam

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) = y_0 e^x. \qquad (\beta)$$

Diferencējot augšējo vienādojumu, dabūjam

$$y' = y_0 e^x;$$

tātad

$$y' = y;$$

tas rāda, ka vienādojums (β) tiešām ir diferencialvienādojuma (α) integrals.

B. Pirmās kārtas un pirmās pakāpes diferencialvienādojumu integrēšana ar kvadraturām

8. Pirmās kārtas un pirmās pakāpes diferencialvienādojuma forma ir šāda:

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

kur y' ir pirmajā pakāpē. Atrisinot šo diferencialvienādojumu attiecībā uz y', dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \tag{2}$$

Še M un N ir x un y funkcijas.

Pārveidojot (2), dabūjam:

$$Mdx + Ndy = 0. \tag{3}$$

Šinī veidā parasti apskata pirmās kārtas un pirmās pakāpes diferencialvienādojumus.

Diferencialvienādojumu sauc par elementari atrisināmu (integrējamu), ja tā vispārīgo integralu var izteikt ar galīgu elementaru funkciju skaitu un parastām integracijām (kvadraturām). Vispār lielāko vairumu diferencialvienādojumu nevar atrisināt elementari; šāds atrisinājums iespējams tikai pie šādiem atsevišķiem veidiem:

a) diferencialvienādojumi, kuros mainīgos var šķirt,

b) pilnīgs diferencials,

c) vienādojumi, kas integrējami, apmainot atkarīgo un neatkarīgo mainīgo,

d) vienādojumi, kas integrējami katrs ar tam īpatnēju substituciju.

Še apskatīsim pirmās kārtas un pirmās pakāpes diferencialvienādojumu veidus un elementarus to integrēšanas paņēmienus.

Pirmās kārtas un pirmās pakāpes diferencialvienādojumus var elementari nointegrēt, ja iespējams mainīgos šķirt, jeb separēt, t. i., diferencialvienādojumu var pārveidot šādā veidā:

$$\varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy = 0.$$

To panākam galvenā kārtā ar dažāda veida substitucijām. Minētā pārveidošana ir iespējama pie šādiem diferencialvienādojumu tipiem:

1) $X_1(x)\,Y_1(y)\,dx + X_2(x)\,Y_2(y)\,dy = 0$,

2) linearie diferencialvienādojumi,

3) Bernulli diferencialvienādojumi,

4) homogenie diferencialvienādojumi.

Šajos tipos var mainīgos separēt. Elementari nointegrēt var arī diferencialvienādojumu, ja tā viena puse ir pilnīgs diferencials.

a) Integrēšana ar mainīgo separēšanu.

9. Veids $X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0$.

Ja vienādojumam ir šāds veids:

$$X dx + Y dy = 0, \tag{1}$$

kur X ir tikai x funkcija un Y tikai y funkcija, tad saka, ka diferencialvienādojumā mainīgie ir separēti. Pārrakstām vienādojumu (1) šādi:

$$X dx = Y dy. \tag{2}$$

Vienādojums (2) rāda, ka divu funkciju diferenciali ir vienādi. Kā zināms, tādā gadījumā pašas funkcijas atšķiras ar patvaļīgu pastāvīgu lielumu C.

Tātad:

$$\int X dx = \int Y dy + C.$$

jeb

$$\int X dx - \int Y dy = C. \tag{3}$$

Šī sakarība dod y kā x funkciju; tātad tas ir diferencialvienādojuma (1) integrals.

Piemērs. Diferencialvienādojumā

$$-x^2 dx + \frac{dy}{y} = 0, \tag{4}$$

kā redzams, mainīgie ir separēti. Integrējam:

$$-\frac{x^3}{3} + \mathrm{n}\, y = C$$

jeb

$$\ln y = C + \frac{x^3}{3}$$

un

$$y = e^{C + \frac{x^3}{3}} = C_1 e^{\frac{x^3}{3}}. \tag{5}$$

Ja dots sākuma noteikums, kā, piemēram, ar $x = 0$ jābūt $y = 3$, tad izvietojot šīs vērtības integralā (5), dabūjam

$$3 = C_1 e^0 \text{ jeb } C_1 = 3.$$

Ievietojot C_1 vērtību vienādojumā (5), dabūjam

$$y = 3 e^{\frac{x^3}{3}}. \tag{6}$$

Vienādojums (5) ir diferencialvienādojuma (4) vispārīgais (pilnīgais) integrals, un vienādojums (6) ir diferencialvienādojuma (4) partikularais integrals.

Apskatītais gadījums ir samērā rets. Biežāk sastopamais diferencialvienādojuma veids, kurā mainīgo šķiršana izdarāma viegli, ir šāds:

$$X_1 Y_1 \, dx + X_2 Y_2 \, dy = 0.$$

Še X_1 un X_2 ir katrs tikai x funkcija, Y_1 un Y_2 katrs tikai y funkcija. Dalot vienādojumu ar $Y_1 X_2$, dabūjam

$$\frac{X_1}{X_2} dx + \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0.$$

Kā redzams, ar šādu pārveidojumu esam dabūjuši jau apskatītā diferencialvienādojuma (1) veidu, kurā mainīgie separēti. Integrējot dabūjam

$$\int \frac{X_1}{X_2} dx + \int \frac{Y_2}{Y_1} dy = C.$$

Šī sakarība dod y kā x funkciju.

P i e m ē r s. Diferencialvienādojums

$$2x (1 + y^3) \, dx + 3 (x^2 - 1) y^2 \, dy = 0$$

atbilst aprakstītajam veidam; dalot vienādojumu ar

$$(1 + y^3)(x^2 - 1)$$

dabūjam

$$\frac{2x \, dx}{x^2 - 1} + \frac{3y^2 \, dy}{1 + y^3} = 0.$$

Integrējam:

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2-1} + \int \frac{3y^2\,dy}{1+y^3} = C,$$

$$\ln(x^2-1) + \ln(1+y^3) = C = \ln C_1.$$

Augšējā vienādojumā rakstām C vietā $\ln C_1$, kas arī ir patvaļīgs pastāvīgs lielums. Šāda aizstāšana, kā redzams, dod ērtības vienādojuma pārveidošanā, un tāpēc tā ir lietderīga. No pēdējā vienādojuma dabūjam

$$(x^2-1)(1+y^3) = C_1.$$

Šis vienādojums ir dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals.

Piemērs. Dabūt līkni, kurai katra punkta apakšpieskare ir šī punkta trīskārtēja abscisa. Līknei jāiet caur punktu P_0 (3,2).

No diferencialģeometrijas zinām, ka līknes apakšpieskari s_t izteic ar

$$s_t = \frac{y}{y'}.$$

Saskaņā ar uzdevuma noteikumu rakstām

$$\frac{y}{y'} = 3x.$$

Liekot $y' = \frac{dy}{dx}$ un pārveidojot, dabūjam

$$y\,dx - 3x\,dy = 0.$$

Šis diferencialvienādojums ir apskatītā tipa vienkāršs gadījums; dalot to ar xy, dabūjam

$$\frac{dx}{x} - \frac{3\,dy}{y} = 0.$$

Integrējam:

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{3\,dy}{y} = C$$

jeb

$$\ln x - 3\ln y = \ln C_1$$

un

$$\frac{x}{y^3} = C_1.$$

Meklētās līknes vienādojums tātad ir

$$y^3 = \frac{x}{C_1}.$$

Tā kā šeit C_1 patvaļīgs, tad redzam, ka uzdevuma atrisinājums dod līkņu saimi.

No sākuma noteikuma dabūjam

$$C = \frac{x}{y^3} = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8}.$$

Meklētās līknes vienādojums tātad ir

$$y^3 = \frac{x}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3}x.$$

10. Linears diferencialvienādojums. Diferencialvienādojumu ar veidu

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \tag{1}$$

sauc par linearu; tajā kā meklētā funkcija y, tā arī tās atvasinātā y' ir pirmajā pakāpē, un tās nav savā starpā reizinātas.

P un Q katrs ir tikai x funkcija:

$$P = \varphi(x) \text{ un } Q = \psi(x).$$

Diferencialvienādojumu (1) sauc par pilnu jeb arī par linearu diferencialvienādojumu ar otru locekli. Vienādojumu

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0 \tag{2}$$

sauc par nepilnu jeb arī par reducētu linearu diferencialvienādojumu. Šajā vienādojumā, šķirot mainīgos, dabūjam

$$\frac{dy}{y} + P\,dx = 0.$$

Integrējam:

$$\int \frac{dy}{y} + \int P\,dx = \ln C$$

jeb

$$\ln y - \ln C = -\int P\,dx,$$

$$\ln \frac{y}{C} = -\int P\,dx,$$

$$y = Ce^{-\int P dx}.$$

Izteiksme (3) ir nepilnā linearā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals. Pilnu linearu diferencialvienādojumu

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \tag{1}$$

atrisina šādi:

Dabū vispirms reducētā diferencialvienādojuma

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0 \tag{2}$$

integralu

$$y = C\,e^{-\int P dx}. \tag{3}$$

Apzīmējot $e^{-\int P dx} = \eta$, rakstām

$$y = C\eta. \tag{3a}$$

Izteiksme (3), kurā C ir patvaļīgs pastāvīgs lielums, gan apmierina reducēto vienādojumu (2), bet ar konstantu C tā nevar apmierināt pilno linearo diferencialvienādojumu (1). Pieņemsim, ka C nav konstants, bet ir kāda x funkcija un meklēsim, kādai jābūt šai funkcijai, lai izteiksme (3) resp. (3a) varētu apmierināt pilno linearo diferencialvienādojumu (1). Tam nolūkam ievietojam vienādojumā (1) y vērtību no (3a) un y' vērtību, ko dabūjam no (3a), uzskatot C par kādu x funkciju. Ievietojot vienādojumā (1)

$$y = C\eta \text{ un } y' = \frac{dC}{dx}\cdot\eta + C\,\frac{d\eta}{dx},$$

dabūjam

$$\frac{dC}{dx}\eta + C\left(\frac{d\eta}{dx} + P\eta\right) = Q. \tag{3b}$$

No vienādojuma (3) redzams, ka η ir reducētā diferencialvienādojuma (2) partikularais integrals, tāpēc iekavas pie faktora C vienādojumā (3b) ir nulle

$$\frac{d\eta}{dx} + P\eta = 0$$

un vienādojumā (3b) paliek

$$\frac{dC}{dx}\cdot\eta = Q. \tag{3c}$$

Šo pēdējo diferencialvienādojumu pārrakstām tā:

$$\frac{dC}{dx} = Q\eta^{-1}; \tag{4}$$

to integrējot, dabūjam

$$C = \int Q\eta^{-1}\cdot dx = \int Q\cdot e^{\int P dx}\cdot dx + C_1. \tag{5}$$

Šī C vērtība, kā redzams, ir x funkcija. Liekot to vienādībā $y = C\eta$, dabūsim tādu y, kas apmierina pilno linearo diferencialvienādojumu (1). Ievietojot šo C vērtību vienādojumā (3), dabūjam

$$y = \left(\int Q\, e^{\int P dx} dx + C_1\right) e^{-\int P dx}. \tag{6}$$

(6) ir pilnā lineārā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals.

Norādīto paņēmienu sauc par Lagranža konstantu variacijas paņēmienu.

Piemērs. Diferencialvienādojumu

$$x\frac{dy}{dx} - y = x^2,$$

dalot ar x, dabūjam

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x, \tag{α}$$

Šis vienādojums, kā redzams, ir pilns linears diferencialvienādojums. Pielietojot norādīto paņēmienu, atrisinām reducēto vienādojumu

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0. \tag{β}$$

Separējam mainīgos:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Integrējam

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = C_0,$$

$$\ln y - \ln x = C_0 = \ln C,$$

$$\ln \frac{y}{x} = \ln C,$$

$$\frac{y}{x} = C,$$

$$y = Cx. \tag{γ}$$

(γ) ir reducētā diferencialvienādojuma (β) integrals. No tās veidojam

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \cdot x + C. \tag{δ}$$

Ievietojot izteiksmes (γ) un (δ) vienādojumā (α), dabūjam

$$\frac{dC}{ax} x + C - \frac{Cx}{x} = x$$

jeb

$$\frac{dC}{dx} = 1$$

un

$$dC = dx,$$

$$C = x + C_1. \tag{ε}$$

Ievietojot C vērtību no (ε) izteiksmē (γ), dabūjam dotā diferencialvienādojuma (α) integralu

$$y = (x + C_1)x = x^2 + C_1 x.$$

Pilnu linearu diferencialvienādojumu atrisina arī ar šādu paņēmienu, sauktu par Bernulli paņēmienu. Diferencialvienādojumā

$$y' + Py = Q \tag{l}$$

ievieto

$$y = u \cdot v \tag{m}$$

(u un v ir x funkcijas) un

$$y' = u\,v' + u'v.$$

Tad

$$u\,v' + u'\,v + Pu\,v - Q = 0.$$

Dalot ar u, dabūjam:

$$v' + \left(\frac{u'}{u} + P\right)v - \frac{Q}{u} = 0. \tag{n}$$

Lai atrastu u un v, vajadzīgi divi noteikumi. Ar vienādojumu (m) ir dots tikai viens noteikums, tādēļ varam dot vēl otru noteikumu, un to izvēlamies tādu, lai vienkāršotu vienādojumu (n), liekot

$$\frac{u'}{u} + P = 0. \tag{o}$$

Šis vienādojums dod iespēju noteikt u; ievedam $u' = \frac{du}{dx}$ un separējot mainīgos:

$$\frac{du}{u} + P\,dx = 0.$$

Integrējam:

$$\int\frac{du}{u} + \int P\,dx = C,$$

$$\ln u + \int P\,dx = \ln C_1,$$

$$\ln\frac{u}{C_1} = -\int P\,dx,$$

$$\frac{u}{C_1} = e^{-\int P\,dx}.$$

Tātad

$$u = C_1\,e^{-\int P\,dx}. \tag{p}$$

Ievērojot sakarību (o), redzam, ka vienādojumā (n) paliek

$$v' - \frac{Q}{u} = 0.$$

Šinī vienādojumā ievietojam u vērtību no (p)

$$v' - \frac{Q}{C_1} e^{\int P\,dx} = 0.$$

Liekam $v' = \frac{dv}{dx}$:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{Q}{C_1} e^{\int P\,dx} = 0.$$

Separējam mainīgos un integrējam:

$$\int dv = \frac{1}{C_1} \int Q\, e^{\int P\,dx}\, dx + C_2$$

jeb

$$v = \frac{1}{C_1} \int Q\, e^{\int P\,dx}\, dx + C_2. \tag{q}$$

Tā kā ar vienādojamu (m) ievedām

$$y = u \cdot v,$$

tad, ievietojot še u un v vērtības no (p) un (q), dabūjam

$$y = C_1\, e^{-\int P\,dx} \cdot \left[\frac{1}{C_1} \int Q\, e^{\int P\,dx}\, dx + C_2\right]$$

jeb

$$y = e^{-\int P\,dx} \left(\int Q\, e^{\int P\,dx}\, dx + C_1\, C_2\right).$$

Reizinājums $C_1\, C_2$ ir jauns patvaļīgs pastāvīgs lielums, ko apzīmējam ar C, un augšējo izteiksmi rakstām šādi:

$$y = e^{-\int P\,dx} \left(\int Q\, e^{\int P\,dx}\, dx + C\right).$$

Kā redzams, ar Bernulli paņēmienu dabūtais vispārīgais integrals ir tieši tas pats, ko dabūjam, atrisinot diferencialvienādojumu ar konstantes variacijas paņēmienu.

Piemērs. Atrisināsim ar Bernulli paņēmienu jau ar konstantu variaciju atrisināto vienādojumu

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x.$$

Ievietojot

$$y = u\,v$$

un

$$y' = u\,v' + u'\,v$$

dotajā diferencialvienādojumā, dabūjam

$$u\,v' + u'\,v - \frac{u\,v}{x} - x = 0$$

jeb

$$v' + \left(\frac{u'}{u} - \frac{1}{x}\right)v - \frac{x}{u} = 0. \qquad \text{(n)}$$

Liekam

$$\frac{u'}{u} - \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{(o)}$$

jeb

$$\frac{du}{u} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Integrējam:

$$\int \frac{du}{u} - \int \frac{dx}{x} = \ln C_1,$$

$$\ln u - \ln x = \ln C_1,$$

$$u = C_1\,x. \qquad \text{(p)}$$

Ievērojot (o), no vienādojuma (n) dabūjam

$$v' - \frac{x}{u} = 0.$$

Še ievietojam u vērtību no vienādības (p):

$$\frac{dv}{dx} - \frac{x}{C_1 x} = 0$$

un

$$dv = \frac{dx}{C_1},$$

$$v = \frac{x}{C_1} + C_2.$$

Tā kā

$$y = u \cdot v,$$

tad, ievietojot šajā izteiksmē u un v vērtības, dabūjam

$$y = C_1 x \left(\frac{x}{C_1} + C_2 \right) = x^2 + C_1 C_2 x = x^2 + Cx.$$

11. Bernulli diferencialvienādojums. Diferencialvienādojumu

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n \qquad (n \neq 1) \tag{1}$$

sauc par Bernulli vienādojumu. Tas atšķiras no lineara diferencialvienādojuma ar faktoru y^n vienādojuma labajā pusē. Dalot vienādojumu ar y^n, dabūjam

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q. \tag{2}$$

Ar substituciju

$$y^{1-n} = z \tag{3}$$

Bernulli vienādojumu pārveidojam linearā diferencialvienādojumā, kā tas redzams no sekojošā. Diferencējot izteiksmi (3) pēc x, dabūjam

$$(1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

un

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx}. \tag{4}$$

Ievērojot (3) un (4), vienādojums (2) iegūst šādu veidu:

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + Pz = Q$$

vai

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)\,Pz = (1-n)\,Q. \tag{5}$$

Šis vienādojums ir linears diferencialvienādojums.

Piemērs.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{x^2-1}\,y = xy^{\frac{1}{2}}.$$

Še $n = \frac{1}{2}$. Ņemot vērā (5), dabūjam

$$2\,\frac{dz}{dx} + \frac{x}{x^2-1}\,z = x.$$

Šo vienādojumu atrisinot ar paņēmieniem, kas parādīti [9], dabūjam

$$z = \frac{C}{\sqrt[4]{x^2-1}} + \frac{1}{5}\,(x^2-1) = \sqrt{y}.$$

Ievedot šo z izteiksmi vienādojumā (3), atrodam dotā diferencialvienādojuma (1) integralu.

12. Homogens diferencialvienādojums. Pieņemsim, ka diferencialvienādojumā

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1}$$

M un N ir homogenas vienādu dimensiju x un y funkcijas.

Dotais diferencialvienādojums (1) šādā gadījumā pieņem veidu

$$x^n\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + x^n\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0. \tag{2}$$

Dalot šo vienādojumu ar x^n, dabūjam

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0. \tag{3}$$

Šo vienādojumu atrisinām, ievedot jaunu mainīgo

$$\frac{y}{x} = t$$

jeb liekot

$$y = tx. \tag{4}$$

Diferencējot (4), dabūjam

$$dy = t\,dx + x\,dt. \tag{5}$$

Ievietojot y un dy vērtību no (4) un (5) vienādojumā (3), dabūjam

$$\varphi(t)\,dx + \psi(t)\,(t\,dx + x\,dt) = 0. \tag{6}$$

Sakārtojot vienādojumu (6) pēc dx un dt, dabūjam

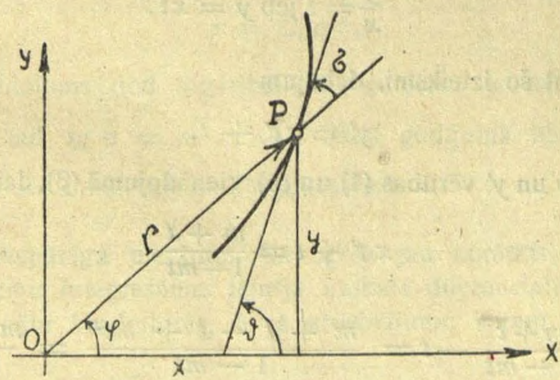
$$[\varphi(t) + t\psi(t)]\,dx + x\psi(t)\,dt = 0. \tag{7}$$

Ar substituciju $y = tx$ ir panākta diferencialvienādojuma (3) pārvēršana tādā veidā, kurā mainīgos var separēt. To izdarot, dabūjam

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t) + t\psi(t)} = 0. \tag{8}$$

Šis vienādojums ir integrējams ar kvadraturām.

Piemērs.



3. zīm.

Atrast plaknē līknes, kuras krusto visus radiusus-vektorus ar vienu un to pašu leņķi σ. Ar 3. zīmējuma apzīmējumiem

dabūjam

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{tg}\Theta = y' \tag{1}$$

$$\Theta = \varphi + \sigma. \tag{2}$$

No (2) atrodam

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\sigma}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\sigma}.$$

Ievietojot šajā izteiksmē vērtības no (1) un liekot $\operatorname{tg}\sigma = m$, kur m dots un pastāvīgs, dabūjam:

$$y' = \frac{m + \frac{y}{x}}{1 - m\frac{y}{x}}. \tag{3}$$

Šis vienādojums ir meklēto līkņu diferencialvienādojums. Kā redzams, tas ir pirmās kārtas, pirmās pakāpes un homogens, jo tajā M un N ir $\frac{y}{x}$ funkcijas. Šo vienādojumu atrisinām, liekot

$$\frac{y}{x} = t \text{ jeb } y = xt. \tag{4}$$

Diferencējot šo izteiksmi, dabūjam

$$y' = xt' + t. \tag{5}$$

Ievietojot y un y' vērtības (4) un (5) vienādojumā (3), dabūjam

$$xt' + t = \frac{m + t}{1 - mt}$$

vai

$$x\frac{dt}{dx} = \frac{m + t}{1 - mt} - t = \frac{m + t - t + mt^2}{1 - mt} = \frac{m(1 + t^2)}{1 - mt}.$$

Pēc mainīgo separēšanas dabūjam vienādojumu

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 - mt}{m(1 + t^2)}\, dt,$$

ko integrējam:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{m(1+t^2)} - \int \frac{t\,dt}{1+t^2} + C,$$

$$\ln x = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tg} t - \frac{1}{2} \ln (1+t^2) + \ln C_1. \qquad (6)$$

Vienādojumā (6) ievietojam $t = \frac{y}{x}$:

$$\ln x = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) + \ln C_1$$

jeb

$$\ln \frac{1}{x} \sqrt{x^2+y^2} + \ln x = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \ln C_1,$$

$$\ln \sqrt{x^2+y^2} = \ln (C_1 e^{\frac{1}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}).$$

Ievedot polarkoordinatas un ievērojot, ka

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \varphi,$$

dabūjam

$$r = C_1 e^{\frac{\varphi}{m}}.$$

Šis vienādojums dod logaritmiskās spirales. Ja pieņemam, ka $\sigma = \frac{\pi}{2}$, tad $\operatorname{tg} \sigma = m = \infty$. Šādā gadījumā līkņu vienādojums ir $r =$ konst. un dod riņķu saimi.

13. Vispārīga piezīme. Kā agrāk jau norādīts, diferencialvienādojumu integrēšanas teorijā uzskata diferencialvienādojumu par atrisinātu kvadraturās, ja tā atrisinājumu varam izteikt šādā veidā:

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C. \qquad (1)$$

Prakses jautājumos šāds atrisinājuma veids nav pietiekams. Ir vajadzīgs atrisinājums, kas izteikts ar pazīstamām elementarām funkçijām. Šīs prasības izpildīšanā jāizšķir divi gadījumi:

1) Izteiksmes (1) integralu varam dabūt ar pazīstamām elementarām funkcijām galīgā skaitā. Šādā gadījumā saka, ka integrals dabūts slēgtā veidā.

2) Izteiksmes (1) integrals dabūjams ar pazīstamām elementarām funkcijām, bet ar bezgalīgu locekļu skaitu. Šādā gadījumā saka, ka integrals dabūts neslēgtā veidā.

Tādu gadījumu, kad diferencialvienādojuma integralu var dabūt slēgtā veidā, samērā nav daudz, bet šiem gadījumiem praksē piekrīt svarīga loma.

Kā redzams no augšējā, dotā diferencialvienādojuma integralu var dabūt slēgtā veidā atsevišķos gadījumos, proti, kad diferencialvienādojumus var integrēt ar mainīgo separēšanas paņēmieniem un, kā vēlāk redzēsim, pilnīga diferenciala gadījumos.

b) Pilnīgs diferencials.

14. Pilnīgs diferencials. Vienādojuma

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

kreisā puse ir kādas funkcijas $u(x, y)$ pilnīgs diferencials, ja

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

Še pieņemam, ka M un N, kā arī $\frac{\partial M}{\partial y}$ un $\frac{\partial N}{\partial x}$, ir nepārtrauktas x un y funkcijas kādā iecirknī.

a) Augšējais noteikums ir vajadzīgs, kā redzams no sekojošā. Funkcijas $u(x, y)$ pilnīgais diferencials ir

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy. \tag{3}$$

Ja vienādojuma (1) kreisā puse ir funkcijas $u(x, y)$ pilnīgais diferencials, tad no (2) un (3) redzams, ka jābūt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \text{ un } \frac{\partial u}{\partial y} = N. \tag{4}$$

Diferencējot pirmo izteiksmi pēc y un otru pēc x, dabūjam

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} \text{ un } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5}$$

Tā kā saskaņā ar diferencialrēķiniem jābūt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \tag{6}$$

tad, ievērojot (5) un (6), redzam, ka pilnīga diferenciala gadījumā jābūt

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

Ar to noteikuma (2) vajadzība ir pierādīta.

b) Noteikums (2) ir pietiekams, lai izteiksme (1) būtu kādas funkcijas $u(x, y)$ pilnīgs diferencials. Pieņemsim, ka dotā izteiksme

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \tag{6}$$

atbilst noteikumam

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

Šādā gadījumā pastāv tāda funkcija $u(x, y)$, kuras pilnīgais diferencials ir (1). Šīs meklētās funkcijas $u(x, y)$ parcialiem diferencialkvocientiem tad jābūt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M \text{ un } \frac{\partial u}{dy} = N. \tag{7}$$

Lai dabūtu šo funkciju $u(x, y)$, meklējam vispirms tādu vispārīgāko funkciju $u(x, y)$, kas izpilda noteikumu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M.$$

To dabūsim integrējot:

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + Y(y); \tag{8}$$

tālāk, diferencējot pēc x, jādabū M, jo $\frac{\partial Y(y)}{\partial x} = 0$. Izteiksmē (8) integrēšanas konstante apzīmēta ar $Y(y)$, kas ir kāda patvaļīga y funkcija, tādēļ ka, veidojot M un diferencējot u pēc x, y uzskatāms par konstantu. Integrala apakšrobežu x_0 varam izvēlēties katrā gadījumā tā, lai vienkāršotu rēķinus.

Funkcijas $Y(y)$ atrašanai izlietosim noteikumu, ka jābūt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y). \tag{9}$$

Ja ievērojam, ka izteiksmē (8) zem integrala y ir parametrs un integrala robežas nav atkarīgas no y, tad, diferencējot izteiksmi (8) pēc y un ņemot vērā (9), dabūjam

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \frac{dY(y)}{dy} = N(x, y).$$

Saskaņā ar pieņēmumu, liekot zem integrala

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

dabūjam

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \frac{dY(y)}{dy} = N(x, y).$$

Integrējam:

$$\Big[N(x, y)\Big]_{x_0}^{x} + \frac{dY(y)}{dy} = N(x, y)$$

jeb
$$N(x, y) - N(x_0, y) + \frac{dY(y)}{dy} = N(x, y),$$

tātad
$$\frac{dY(y)}{dy} = N(x_0, y)$$

un

$$Y(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C. \tag{10}$$

Ievietojot izteiksmē (8) $Y(y)$ vērtību no (10), dabūjam

$$u = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\, dy + C. \tag{11}$$

Apakšrobežu y_0 varam ņemt pēc patikas. Šeit C nav atkarīgs no x un y un ir patvaļīgs pastāvīgs lielums. Redzam, ka gadījumā, ja diferencialvienādojuma (1) kreisā puse ir pilnīgs diferencials un izpildīts noteikums (2), diferencialvienādojuma (1) integrals ir ar izteiksmi (11) noteiktā funkcija

$$u(x, y) = C. \tag{12}$$

Piemērs. Apskatot diferencialvienādojumu

$$(2x^2 + 2xy + y^2)\, dx + (x^2 + 2xy + 3y^2)\, dy = 0,$$

redzam, ka

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y \quad \text{un} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y. \tag{α}$$

Šīs izteiksmes rāda, ka dotā diferencialvienādojuma kreisā puse ir kādas funkcijas $u(x, y)$ pilnīgs diferencials. Saskaņā ar (11) un (12) šo funkcīju dabūjam integrējot:

$$\int_{x_0}^{x} (2x^2 + 2xy + y^2)\, dx + \int_{y_0}^{y} (x_0^2 + 2x_0 y + 3y^2)\, dy = C,$$

$$\left[\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2y}{2} + xy^2\right]_{x_0}^{x} + \left[x_0^2 y + \frac{2x_0 y^2}{2} + y^3\right]_{y_0}^{y} = C.$$

Izvēloties, lai rēķinus vienkāršotu,

$$x_0 = 0 \quad \text{un} \quad y_0 = 0,$$

dabūjam

$$\frac{2}{3}x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = C. \tag{β}$$

Šī izteiksme ir dotā diferencialvienādojuma (α) pilnīgais integrals. Izteiksmes (β) pilnīgais diferencials ir dotais diferencialvienādojums.

15. Integrējošais reizinātājs. Ja diferencialvienādojums

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{1}$$

ir tāds, ka

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

tad meklējam tādu funkciju $\mu(x, y)$ lai, ar to pareizināta, diferencialvienādojuma (1) kreisā puse top par pilnīgu diferencialu. Tātad funkcijai $\mu(x, y)$ jābūt tādai, ka vienādojuma

$$\mu(x, y)\, M(x, y)\, dx + \mu(x, y)\, N(x, y)\, dy = 0 \tag{2}$$

kreisā puse ir pilnīgs diferencials. Šādā gadījumā, kā redzējām, jābūt

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \tag{3}$$

Katru funkciju $\mu(x, y)$, kas izpilda šo noteikumu, sauc par diferencialvienādojuma integrējošo reizinātāju.

Integrējošo reizinātāju ir daudz. Ja kāds no tiem atrasts, tad ar to reizinot diferencialvienādojumu (1), dabūjam diferencialvienādojumu (2), kam tad kreisā puse ir pilnīgs diferencials. Diferencialvienādojumu (2) tad atrisinām, kā norādīts augšā pilnīgā diferencialvienādojuma gadījumā.

Lai dabūtu integrējošo reizinātāju $\mu(x, y)$, jāatrisina parcialais diferencialvienādojums

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}. \tag{4}$$

Izdarot diferencēšanu, dabūjam

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5}$$

vai

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

Dalot ar μ un ievērojot, ka

$$\frac{\partial \mu}{\mu \partial y} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \text{ un } \frac{\partial \mu}{\mu \partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x},$$

dabūjam

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{6}$$

Vispārīgā gadījumā parciālā diferencialvienādojuma (6) integrēšana ir grūtāka nekā dotā diferencialvienādojuma (1) integrēšana. Atsevišķos vienkāršos gadījumos integrējošo reizinātāju tomēr viegli atrast.

P i e m ē r s. Ja pieņemam, ka integrējošais reizinātājs ir atkarīgs tikai no x, tad iegūstam

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0.$$

Vienādojums (6) tad dabū šādu veidu:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right). \tag{7}$$

Ja kādā dotā diferencialvienādojumā atrodam, ka

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

ir tikai x funkcija, tad integrējošo reizinātāju dabūjam no (7):

$$\mu = e^{\int\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\frac{dx}{N}}.$$

Mēs šeit integracijas konstanti nerakstām, tāpēc šī μ vērtība ir tikai viena no daudzām iespējamām.

Tā dotā diferencialvienādojumā

$$ydx + (2x^2y - x)\,dy = 0$$

redzam, ka

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad \text{un} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy - 1.$$

Tātad

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x},$$

tas ir, dotā diferencialvienādojuma kreisā puse nav pilnīgs diferencials. Šinī gadījumā

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\frac{1}{N}=\frac{1-4xy+1}{2x^2y-x}=-\frac{2(2xy-1)}{x(2xy-1)}=-\frac{2}{x},$$

kas rāda, ka integrējošais reizinātājs ir tikai x funkcija. Tātad saskaņā ar augšējo ir

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{2}{x}.$$

No šī vienādojuma seko

$$d\ln\mu=-2\frac{dx}{x},$$

$$\ln\mu=-2\ln x=-\ln x^2,$$

$$\mu=\frac{1}{x^2}.$$

Reizinot doto diferencialvienādojumu ar $\frac{1}{x^2}$, dabūjam diferencialvienādojumu

$$\frac{y}{x^2}\,dx+\frac{1}{x^2}(2x^2y-x)\,dy=0,$$

kura kreisā puse tagad ir pilnīgs diferencials, jo še $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{1}{x^2}$ un $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{x^2}$. Diferencialvienādojuma integralu dabūjam ar (11) formulu no [**14**]. Tātad

$$\int_{x_0}^{x}\frac{y}{x^2}dx+\int_{y_0}^{y}\left(2y-\frac{1}{x_0}\right)dy=C.$$

Tā kā y_0 varam pieņemt pēc patikas, tap integrējot un liekot $y_0=0$, dabūjam

$$-\frac{y}{x}+\frac{y}{x_0}+y^2-\frac{y}{x_0}=C,$$

tātad

$$y^2-\frac{y}{x}=C$$

ir dotā diferencialvienādojuma pilnīgais integrals.

Līdzīgi dabūjam

a) ja $\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{M}$ ir tikai y funkcija, tad integrējošais reizinātājs ir

$$\mu = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dy}{M}};$$

b) ja $\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{xM-yN}$ ir tikai $xy=z$ funkcija, tad integrējošais reizinātājs ir

$$\mu = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{xM-yN}};$$

c) ja $\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{x^2}{xM+yN}$ ir tikai $z=\frac{y}{x}$ funkcija, tad integrējošais reizinātājs ir

$$\mu = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{x^2dz}{xM+yN}};$$

d) ja $\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{2(yM-xN)}$ ir tikai $z=x^2+y^2$ funkcija, tad

$$\mu = e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{dz}{2(yM-xN)}}.$$

c) Integrēšana ar mainīgo pārmaiņas palīdzību.

16. Integrēšana ar mainīgo pārmaiņas palīdzību. Dažkārt dotais diferencialvienādojums dabū veidu, kāds ir vienam no aprakstītajiem integrējamiem diferencialvienādojumiem, ja uzskata y par neatkarīgo un x par atkarīgo mainīgo. Tā, piemēram, diferencialvienādojums

$$(y^3+x)\frac{dy}{dx}+1=0$$

nav atrodams to jau apskatīto diferencialvienādojumu starpā, kurus var elementari atrisināt.

Pārveidojam šo vienādojumu, rakstot

$$(y^3+x)\,dy+dx=0.$$

Tad dabūjam

$$\frac{dx}{dy} + x = -y^3.$$

Šis vienādojums ir pirmās kārtas un linears, ja uzskatām x par atkarīgo un y par neatkarīgo mainīgo.

d) Vienādojumi, kas integrējami ar katram īpatnēju substituciju.

17. Integrēšana ar substitucijas palīdzību, ievedot jaunu mainīgo. Ar šo paņēmienu dažos gadījumos var doto diferencialvienādojumu vienkāršot un pārveidot vienā no agrāk apskatītiem tipiem, ko var elementari atrisināt.

a) Diferencialvienādojumu

$$(x + y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2 \tag{α}$$

vienkāršojam, liekot

$$x + y = z. \tag{β}$$

Tad

$$1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

un

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1. \tag{γ}$$

Ievedot vērtības no (β) un (γ) vienādojumā (α), dabūjam:

$$z^2 \left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a^2,$$

$$z^2 \frac{dz}{dx} = a^2 + z^2$$

un

$$\frac{z^2\, dz}{a^2 + z^2} - dx = 0.$$

Šajā vienādojumā mainīgie tagad ir separēti.

b) Vienādojumu

$$(x - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0,$$

liekot

$$z = y^2,$$

pārveidojam vienādojumā

$$(x - z)\,dx + x\,dz = 0.$$

Šis vienādojums ir homogens attiecībā uz x un z.

c) Vienādojumu

$$x\frac{dy}{dx} - y + x\sqrt{x^2 + y^2} = 0, \tag{α}$$

dalot ar x, pārveidojam vienādojumā

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + x\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0. \tag{β}$$

Liekot

$$\frac{y}{x} = z, \tag{γ}$$

dabūjam

$$y = zx \text{ un } \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z. \tag{δ}$$

Ievietojot vērtības no (γ) un (δ) vienādojumā (β), dabūjam

$$x\frac{dz}{dx} + z - z + x\sqrt{1 + z^2} = 0$$

jeb

$$\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} + dx = 0.$$

Šajā vienādojumā tagad mainīgie ir separēti. Piemēros a, b, c parādītās substitucijas ir derīgas tikai dotajam gadījumam. Šīs substitucijas ir atkarīgas no vienādojuma veida un katrā atsevišķā gadījumā jāatrod mēģinājuma ceļā.

d) Vienādojumā

$$y' = \varphi(ax + by + c),$$

kur a, b ($\neq 0$) un $c =$ konst.,
liekam

$$ax + by + c = u,$$

kur u ir jauna, nezināma x funkcija.

Diferencējot dabūjam

$$a + by' = u'.$$

Ievietojot vienādojumā $y' = \varphi(u)$, dabūjam

$$a + b\varphi(u) = u' = \frac{du}{dx}$$

jeb

$$\frac{du}{a + b\varphi(u)} - dx = 0.$$

Te atkal mainīgie ir separēti.

e) Diferencialvienādojumu

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{α}$$

pārveidojam homogenā vienādojumā, liekot

$$x = x_0 + \xi \quad \text{un} \quad y = y_0 + \eta. \tag{β}$$

Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (1), dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\xi}{d\eta} = \varphi\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}\right). \tag{γ}$$

Lielumus x_0 un y_0 atrodam, liekot

$$\left.\begin{aligned} a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{δ}$$

Tad vienādojums (γ) pieņem šādu veidu:

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \varphi\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right). \tag{ε}$$

Šis vienādojums ir attiecībā uz ξ un η homogens, to atrisinām ar jau zināmo paņēmienu, liekot

$$\eta = \xi t. \tag{ζ}$$

Vienādojumu (ε) atrisinot, dabūjam (pēc substitucijas (ζ))

$$F_1(\xi, t) = 0.$$

Šajā izteiksmē ievietojam $t = \frac{\eta}{\xi}$;

$$F_1\left(\xi, \frac{\eta}{\xi}\right) = F(\xi, \eta) = 0. \tag{η}$$

Vienādojumā (η) ievietojam

$$\xi = x - x_0 \quad \text{un} \quad y = y - y_0$$

un dabūjam vienādojuma (α) integralu

$$F(x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Šajā izteiksmē esošās lielumu x_0 un y_0 vērtības dabūjam no (δ). Šo paņēmienu nevar lietot, ja

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Šādā gadījumā diferencialvienādojums dabū veidu

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\lambda a_1x + \lambda b_1y + c_2}\right). \tag{ϑ}$$

Še liekam

$$a_1x + b_1y + c_1 = u_1, \tag{ι}$$

kur u ir x funkcija.

Diferencējot (ι) dabūjam:

$$a_1 + b_1y' = u',$$

$$y' = \frac{u' - a_1}{b_1}. \quad (b_1 \neq 0) \tag{$\varkappa$}$$

Ar (ι) un ($\varkappa$) vienādojumam (ϑ) varam piedot šādu veidu:

$$\frac{u' - a_1}{b_1} = \varphi\left(\frac{u}{\lambda(u - c_1) + c_2}\right). \tag{λ}$$

Vienādojumā (λ) mainīgos nu var separēt.

18. Uzdevumi

Mainīgie tieši separējami:

1) $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}} = 0.$ Atb. $\arcsin x + \arcsin y = C.$

2) $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,\frac{dy}{dx}=0.$

Atb. $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+(1+y^2)^{\frac{1}{2}}=C.$

3) $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0.$ Atb. $\ln(xy)+x-y=C.$

Linearie diferencialvienādojumi:

4) $\frac{dy}{dx}-\frac{ny}{x+1}=e^x(x+1)^n.$ Atb. $y=(x+1)^n(e^x+C).$

5) $x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+(2x^2-1)y=ax^3.$

Atb. $y=ax+Cx\sqrt{1-x^2}.$

6) $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}.$

Atb. $y=Ce^{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$

Bernulli vienādojumi:

7) $\frac{dz}{dx}+2xz=2ax^3z^3.$ Atb. $z^{-2}=Ce^{2x^2}+ax^2+\frac{1}{2a}.$

8) $(1-x^2)\frac{dz}{dx}-xz=axz^2.$ Atb. $z^{-1}=C(x^2-1)^{\frac{1}{2}}-a.$

9) $\frac{dy}{dx}(x^2y^3+xy)=1.$ Atb. $x^{-1}=Ce^{\frac{-y^2}{2}}-y^2+2.$

Homogenie vienādojumi:

10) $x+y\frac{dy}{dx}=2y.$ Atb. $(x-y)e^{\frac{x}{x-y}}=C.$

11) $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}.$ Atb. $y=Ce^{\frac{y}{x}}.$

12) $(y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx-x\,dy=0.$ Atb. $2Cy=C^2x^2-1.$

Vienādojumi, kas pārveidojami homogenos:

13) $(7x - 3y + 3)\,dx + (3x - 7y + 7)\,dy = 0.$

Atb. $\left(x - y + 1\right)^{\frac{2}{5}} (x + y - 1) = C.$

14) $(x - 2y + 9)\,dx - (3x - 6y + 19)\,dy = 0$ (atsev. gad.).

Atb. $x - 3y + 8\ln(x - 2y + 1) = C.$

Pilnīgs diferencials:

15) $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)\dfrac{dy}{y} = 0.$

Atb. $y^2 = C^2 - 2Cx.$

16) $2xy\,dx + (y^2 - 3x^2)\,dy = 0.$ Atb. $x^2 - y^2 = Cy^3.$

C. Pirmās kārtas augstākas pakāpes diferencialvienādojumi

19. Pirmās kārtas augstākas pakāpes diferencialvienādojuma forma. Līdz šim apskatījām diferencialvienādojumus, kuros y' atradās pirmajā pakāpē. Še apskatīsim diferencialvienādojumus, kas dod vairākas y' vērtības. Šādu diferencialvienādojumu, kas dod n dažādas y' vērtības, forma ir

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + A_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n = 0.$$

Šajā vienādojumā koeficienti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vispārīgā gadījumā ir x un y funkcijas. Atsevišķā gadījumā šie koeficienti ir pastāvīgi lielumi.

20. Pirmās kārtas n pakāpes diferencialvienādojumi ar konstantiem koeficientiem. Pieņemsim, ka vienādojuma

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + A_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + A_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots +$$
$$+ A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n = 0 \qquad (1)$$

koeficienti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ir konstanti lielumi; ja uzskatām $\dfrac{dy}{dx}$ par algebrisku nezināmo, tad vienādojums (1) arī ir algebrisks.

Pieņemsim, ka algebriskā vienādojuma attiecībā uz $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ saknes ir $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Vienādojuma (1) polinomu sadalot sakņu faktoros, dabūjam

$$\left(\frac{dy}{dx} - a_1\right)\left(\frac{dy}{dx} - a_2\right) \ldots \left(\frac{dy}{dx} - a_n\right) = 0. \quad (2)$$

No (2) secinām:

$$\frac{dy}{dx} - a_1 = 0; \ \frac{dy}{dx} - a_2 = 0; \ \ldots; \ \frac{dy}{dx} - a_n = 0. \quad (3)$$

Šo diferencialvienādojumu integrali ir:

$$y_1 = a_1 x + C_1; \ y_2 = a_2 x + C_2; \ \ldots; \ y = a_n x + C_n. \quad (4)$$

Šo integralu kopība ir līdzvērtīga vienam šādam integralam:

$$(y - a_1 x - C_1)(y - a_2 x - C_2) \ldots (y - a_n x - C_n) = 0. \quad (5)$$

Šī vienādojuma atsevišķos partikularos integralos atrodošos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ varam aizstāt ar vienu C, jo, dodot šim C visas iespējamās vērtības, dabūjam visus partikularos integralus, ko katrs faktors var dot. Tātad, neierobežojot vienādojuma (5) vispārīgumu, varam diferencialvienādojuma (1) integralu rakstīt šādi:

$$(y - a_1 x - C)(y - a_2 x - C) \ldots (y - a_n x - C) = 0. \quad (6)$$

Šo izteiksmi pārveidojam, dalot abas vienādojuma puses ar x^n:

$$\left(\frac{y-C}{x} - a_1\right)\left(\frac{y-C}{x} - a_2\right) \ldots \left(\frac{y-C}{x} - a_n\right) = 0. \quad (7)$$

Salīdzinot vienādojumu (7) ar doto diferencialvienādojumu, izteiktu veidā (2), redzam, ka no dotā diferencialvienādojuma dabūjam tā integralvienādojumu, liekot diferencialvienādojumā $\frac{dy}{dx}$ vai y' vietā $\frac{y-C}{x}$; tātad diferencialvienādojuma (1) integrals ir:

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^n + A_1\left(\frac{y-C}{x}\right)^{n-1} + A_2\left(\frac{y-C}{x}\right)^{n-2} + \ldots +$$

$$+ A_{n-1}\left(\frac{y-C}{x}\right) + A_n = 0.$$

Piemērs.

$$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 7\frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

Saskaņā ar augšā norādīto šī diferencialvienādojuma integrals ir:

$$5\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 - 7\left(\frac{y-C}{x}\right) - 2 = 0.$$

21. Pirmās kārtas augstākas pakāpes diferencialvienādojuma vispārīgais gadījums. Pieņemsim, ka diferencialvienādojums

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

dod šādas n vērtības $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x,y); \ \frac{dy}{dx} = f_2(x,y); \ \ldots ; \ \frac{dy}{dx} = f_n(x,y). \tag{2}$$

Pieņemsim, ka šo pirmās kārtas un pirmās pakāpes n diferencialvienādojumu n dažādie integrali ir:

$$\varphi_1(x,y,C_1) = 0; \ \varphi_2(x,y,C_2) = 0; \ \ldots; \ \varphi_n(x,y,C_n) = 0. \tag{3}$$

Tad diferencialvienādojuma (1) vispārīgā integrala veids būs

$$\varphi_1(x,y,C_1) \ \varphi_2(x,y,C_2) \ \ldots \ \varphi_n(x,y,C_n) = 0. \tag{4}$$

Kā norādīts, arī še varam C_1, C_2, . . ., C_n vietā rakstīt C, tad

$$\varphi_1(x,y,C) \ \varphi_2(x,y,C) \ \ldots \ \varphi_n(x,y,C) = 0 \tag{5}$$

ir dotā diferencialvienādojuma (1) vispārīgais integrals.

Piemērs.

Diferencialvienādojumā

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0$$

uzskatām $\frac{dy}{dx}$ par algebrisku nezināmo. Atrisinot vienādojumu attiecībā uz šo nezināmo, dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{x}{y},$$

tātad divus pirmās kārtas un pirmās pakāpes diferencialvienādojumus:

$$y\frac{dy}{dx}+x=0 \text{ un } y\frac{dy}{dx}-x=0.$$

Šo diferencialvienādojumu integrali ir

$$y^2+x^2-C=0 \quad \text{un} \quad y^2-x^2-C=0. \qquad (\alpha)$$

Dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals tad ir

$$(y^2+x^2-C)(y^2-x^2-C)=0. \qquad (\beta)$$

Kā no (α) un (β) redzams, vispārīgais integrals izteic divas līkņu saimes; pirmā saime ir riņķi, otra — hiperbolas.

D. Atsevišķu pirmās kārtas augstākas pakāpes diferencialvienādojumu veidu integrēšana ar Lagranža paņēmienu

22. Vienādojumu diferencēšanas paņēmiens pēc Lagranža. Kā redzējām [21], apskatītā pirmās kārtas augstākas pakāpes diferencialvienādojuma atrisināšanas paņēmiens pamatojas uz pieņēmumu, ka diferencialvienādojumu, kurā $\frac{dy}{dx}$ atrodas kādā augstākā pakāpē, iespējams atrisināt attiecībā uz $\frac{dy}{dx}$. Šādi vienādojumi var būt attiecībā uz $\frac{dy}{dx}$ algebriski vai transcendenti. Lai novērstu grūtības, kas var gadīties minēto vienādojumu atrisināšanā, apskatīsim integrēšanas paņēmienu, kuru pielietojot nav vajadzīgs vienādojumu atrisināt attiecībā uz $\frac{dy}{dx}$. Šis Lagranža dotais paņēmiens pēc savas būtības pamatojas uz diferencialvienādojuma iepriekšējas diferencēšanas.

Apskatīsim Lagranža paņēmiena pielietošanu atsevišķos gadījumos.

23. Diferencialvienādojums, kurā neatrodas y. Pieņemsim, ka diferencialvienādojumā

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}\right)=0, \qquad (1)$$

kurā nav y, atvasinātā $\frac{dy}{dx}$ ir kādā augstākā pakāpē un ka vienādojums attiecībā uz $\frac{dy}{dx}$ nav atrisināms, vai atrisināšana savienota ar grūtībām. Pieņemsim, ka vienādojumu var viegli atrisināt attiecībā uz x. Tad no (1) dabūjam

$$x = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right). \tag{2}$$

Apzīmējot

$$\frac{dy}{dx} = p, \tag{3}$$

vienādojumu (2) rakstām šādi:

$$x = \varphi(p). \tag{4}$$

Vienādojums (4) izteic sakaru starp x un p. Lagranža diferencēšanas paņēmiens dod iespēju dabūt sakaru starp y un p. Ar šī sakara palīdzību dabūjam dotā diferencialvienādojuma atrisinājumu. Diferencējot (4), dabūjam

$$dx = \varphi'(p)\,dp. \tag{5}$$

No (3) seko

$$dx = \frac{dy}{p}. \tag{3a}$$

Ievietojot šo dx vērtību vienādojumā (5), dabūjam

$$\frac{dy}{p} = \varphi'(p)\,dp. \tag{6}$$

Šajā diferencialvienādojumā separējam mainīgos:

$$dy = p \cdot \varphi'(p)\,dp. \tag{7}$$

Vienādojumu (7) integrējam:

$$y = \int p\varphi'(p)\,dp + C. \tag{8}$$

Vienādojums (8) dod sakaru starp y un p. Izslēdzot p no vienādojumiem (4) un (8), dabūjam:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

dotā diferencialvienādojuma (1) integralu. Ja p izslēgt nav iespējams, tad vienādojumus

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(p) \\ y &= \int p\varphi'(p)\,dp + C \end{aligned}\right\}$$

uzskata par diferencialvienādojuma (1) integralu parametriskā veidā.

P i e m ē r s. Diferencialvienādojumu

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx} + 1 - x = 0, \qquad (\alpha)$$

liekot $\frac{dy}{dx} = p$ un atrisinot attiecībā uz x, rakstām šādi:

$$x = 1 + p + p^3.$$

Diferencējot dabūjam:

$$dx = (1 + 3p^2)\,dp.$$

Tā kā

$$dx = \frac{dy}{p},$$

tad augšējo vienādojumu rakstām šādi:

$$\frac{dy}{p} = (1 + 3p^2)\,dp.$$

Separējam mainīgos:

$$dy = (p + 3p^3)\,dp.$$

Integrējam:

$$y = \frac{p^2}{2} + \frac{3}{4}p^4 + C.$$

Vienādojuma atrisinājumu parametriskā veidā dod vienādojumi

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + p + p^3 \\ y &= \frac{p^2}{2} + \frac{3}{4}p^4 + C. \end{aligned}\right\}$$

24. Diferencialvienādojums, kurā neatrodas x. Pieņemsim, ka diferencialvienādojumu

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{1}$$

kurā nav x un kurā $\frac{dy}{dx}$ ir augstākā pakāpē, var viegli atrisināt attiecībā uz y. Liekam

$$\frac{dy}{dx} = p. \tag{2}$$

Tad no (1) dabūjam

$$y = \varphi(p). \tag{3}$$

Diferencējam:

$$dy = \varphi'(p)\,dp. \tag{4}$$

No (2) seko

$$dy = p\,dx. \tag{5}$$

Šo vērtību ievietojam vienādojumā (4), tad

$$p\,dx = \varphi'(p)\,dp. \tag{6}$$

Separējam mainīgos:

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp. \tag{7}$$

Integrējam:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C. \tag{8}$$

Šis vienādojums dod sakaru starp x un p. Izslēdzot p no vienādojumiem (2) un (8), dabūjam

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

dotā diferencialvienādojuma integralu. Ja p no vienādojumiem (2) un (8) izslēgt nevar, tad uzskata vienādojumus

$$\left.\begin{aligned} y &= \varphi(p) \\ x &= \int \frac{\varphi'(p)}{p}\,dp + C \end{aligned}\right\}.$$

par diferencialvienādojuma (1) atrisinājumu parametriskā veidā.

Piemērs. Diferencialvienādojumu

$$y = \ln\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3, \tag{1}$$

liekot

$$\frac{dy}{dx} = p, \tag{2}$$

rakstām šādi:

$$y = \ln(1 + p^2) - p^3. \tag{3}$$

Tad

$$dy = \frac{2p\,dp}{1 + p^2} - 3p^2 dp. \tag{4}$$

Atvietojot dy ar $p\,dx$, rakstām:

$$p\,dx = \frac{2p\,dp}{1 + p^2} - 3p^2 dp. \tag{5}$$

Separējam mainīgos:

$$dx = \frac{2dp}{1 + p^2} - 3p\,dp. \tag{6}$$

Šī diferencialvienādojuma integrals ir

$$x = 2 \operatorname{arc\,tg} p - \frac{3}{2} p^2 + C.$$

Diferencialvienādojuma (1) galīgo atrisinājumu dod vienādojumi

$$\left.\begin{aligned} y &= \ln(1 + p^2) - p^3 \\ x &= 2 \operatorname{arc\,tg} p - \frac{3}{2} p^2 + C. \end{aligned}\right\}$$

25. Diferencialvienādojums, kurā atrodas abi mainīgie x un y un atvasinātā y', un kas viegli atrisināms attiecībā uz x.

Šāda vienādojuma forma ir

$$x = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right). \tag{1}$$

Liekot

$$\frac{dy}{dx} = p, \tag{2}$$

vienādojumu (1) rakstām šādi:

$$x = f(y, p). \tag{3}$$

Diferencējam:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp. \tag{4}$$

Liekot

$$dx = \frac{dy}{p},$$

rakstām:

$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp. \tag{5}$$

Sakārtojot šo vienādojumu, rakstām:

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy - \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0. \tag{6}$$

Vienādojums (6) ir pirmās kārtas un arī pirmās pakāpes attiecībā uz $\frac{dy}{dp}$. Šis vienādojums ir vienkāršāks par doto. Ja vienādojumu (6) varam izintegrēt, tad dabūjam sakaru starp y un p

$$\varphi(y, p, C) = 0. \tag{7}$$

Izslēdzot p no vienādojumiem (3) un (7), dabūjam diferencialvienādojuma (1) integralu.

Piemērs.

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0. \tag{α}$$

Liekam

$$\frac{dy}{dx} = p \tag{β}$$

un vienādojumu (α) rakstām šādi:

$$yp^2 - 2px + y = 0. \tag{γ}$$

Atrisinot vienādojumu (γ) attiecībā uz x, dabūjam

$$x = y \frac{(1+p^2)}{2p}. \tag{δ}$$

Diferencējot un ņemot vērā (β), dabūjam

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1+p^2}{2p} dy + \frac{y}{2} \frac{2p^2 - (1+p^2)}{p^2} dp.$$

Pēc mainīgo separēšanas rakstām:

$$dy = \frac{1+p^2}{2} dy + y \frac{(2p^2 - 1 - p^2)}{2p} dp. \tag{ε}$$

No (ε) pēc sakārtošanas dabūjam:

$$(1-p^2)(p\,dy + y\,dp) = 0.$$

No šī vienādojuma izriet

$$1 - p^2 = 0$$

un arī

$$p\,dy + y\,dp = 0.$$

Vienādojums

$$1 - p^2 = 0$$

dod

$$p = \pm 1.$$

Ievietojot šo p vērtību vienādojumā (γ), dabūjam diferencialvienādojuma (α) atrisinājumu:

$$y = \pm x. \tag{A}$$

Kā redzams, šis atrisinājums nav diferencialvienādojuma (1) vispārīgais integrals, jo šinī atrisinājumā nav patvaļīgās konstantes C Šādu diferencialvienādojuma atrisinājuma veidu sauc par diferencialvienādojuma singularo integralu.

No vienādojuma

$$p\,dy + y\,dp = 0,$$

separējot mainīgos, dabūjam

$$\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0.$$

Šī vienādojuma integrals ir

$$\ln y + \ln p = \ln C.$$

jeb

$$py = C$$

un

$$p = \frac{C}{y}.$$

Ievietojot šo p vērtību vienādojumā (γ), dabūjam

$$y\frac{C^2}{y^2} - 2x\frac{C}{y} + y = 0$$

jeb

$$y^2 - 2Cx + C^2 = 0. \qquad \text{(B)}$$

Šis vienādojums ir diferencialvienādojuma (α) pilnīgais integrals. Kā, salīdzinot (A) un (B), redzams, singularo integralu $y = \pm x$ nevar dabūt no pilnīgā integrala, specializējot konstanti C.

26. Diferencialvienādojumā atrodas x, y, y' ar y' augstākā pakāpē. Vienādojums viegli atrisināms attiecībā uz y. Šāda vienādojuma veids ir

$$y = f(x, p). \qquad \text{(A)}$$

Diferencējot šo vienādojumu, dabūjam

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp.$$

Liekam

$$dy = p\,dx,$$

tad

$$p\,dx = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp.$$

Pārveidojot vienādojumu, rakstām:

$$\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{p}\right) = 0. \qquad (\alpha)$$

Šis vienādojums ir attiecībā uz $\frac{dp}{dx}$ pirmās kārtas un arī pirmās pakāpes, tātad vienkāršāks nekā dotais diferencialvienādojums, kurā $\frac{dy}{dx}$ atrodas augstākā pakāpē. Ja vienādojumu (α) izintegrējam, tad dabūjam vienādojumu:

$$\varphi(x, p, C) = 0. \tag{B}$$

Izslēdzot p no vienādojumiem (A) un (B), dabūjam dotā diferencialvienādojuma pilnīgo integralu. Ja nav iespējams izdarīt p izslēgšanu, tad vienādojumi (A) un (B) dod dotā diferencialvienādojuma atrisinājumu parametriskā veidā.

27. Lagranža vienādojums. Vienādojumā atrodas x, y, y' ar y' augstākā pakāpē, pie kam x un y pirmajā pakāpē un x ar y nav reizināti. Šāda vienādojuma forma ir

$$y = x f(p) + \varphi(p) \tag{1}$$

Diferencējam vienādojumu (1):

$$dy = p\,dx = f(p)\,dx + x f'(p)\,dp + \varphi'(p)\,dp. \tag{2}$$

Šo vienādojumu pārveidojam:

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} - x f'(p) = \varphi'(p). \tag{3}$$

Dabūtais vienādojums ir pirmās kārtas linears diferencialvienādojums ar atkarīgo mainīgo x un neatkarīgo mainīgo p. Atrisinot šo vienādojumu, dabūjam

$$\varphi(x, p, C) = 0. \tag{4}$$

Izslēdzot p no vienādojumiem (1) un (4), dabūjam diferencialvienādojuma (1) vispārīgo integralu.

Piemērs. Vienādojumā

$$y = 2xy' + (y')^n$$

liekot

$$y' = p,$$

dabūjam

$$y = 2xp + p^n$$

un

$$dy = p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp + np^{n-1}\,dp.$$

Šo vienādojumu pārveidojot, dabūjam diferencialvienādojumu

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -np^{n-2},$$

kurā x ir atkarīgais un p — neatkarīgais mainīgais.

Šī lineārā diferencialvienādojuma integrals ir

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{n}{n+1}p^{n-1} \qquad (n + 1 \neq 0).$$

Pēdējais vienādojums kopā ar

$$y = 2px + p^n$$

ir dotā diferencialvienādojuma atrisinājums parametriskā veidā.

28. Klero vienādojums. Lagranža vienādojuma atsevišķu veidu, kad $f(p) = p$ sauc par Klero vienādojumu; tātad Klero vienādojums ir

$$y = px + \varphi(p). \tag{1}$$

To diferencējot, dabūjam

$$dy = p\,dx = p\,dx + x\,dp + \varphi'(p)\,dp. \tag{2}$$

No (2) izriet

$$[x + \varphi'(p)]\,dp = 0 \tag{3}$$

un tālāk

$$dp = 0, \tag{4}$$

vai

$$x + \varphi'(p) = 0. \tag{5}$$

No (4) dabūjam

$$p = C. \tag{6}$$

Ievietojot p vērtību no (6) vienādojumā (1), dabūjam diferencialvienādojuma (1) integralu.

$$y = Cx + \varphi(C).$$

No (5) izriet

$$p = \omega(x).$$

Ievietojot šo p vērtību vienādojumā (1), dabūjam dotā diferencialvienādojuma atrisinājumu, ko sauc par singularo integralu

$$y = x\omega(x) + \varphi[\omega(x)].$$

Piemērs.

$$y = xy' + \frac{a}{y'}. \tag{1}$$

Liekam

$$y' = p,$$

tad

$$y = xp + \frac{a}{p}. \tag{2}$$

Diferencējot dabūjam

$$dy = p\,dx = p\,dx + x\,dp - \frac{a\,dp}{p^2}$$

jeb

$$dp\left(x - \frac{a}{p^2}\right) = 0.$$

No $dp = 0$ seko $p = C$, ko ievietojot diferencialvienādojumā dabūjam vispārīgo integralu.

$$y = Cx + \frac{a}{C}.$$

No

$$x - \frac{a}{p^2} = 0$$

seko

$$p^2 = \frac{a}{x} \text{ un } p = \pm\sqrt{\frac{a}{x}}.$$

Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (2), dabūjam

$$y^2 = 4ax,$$

dotā diferencialvienādojuma singularo integralu.

29. Singularais integrals. Klero diferencialvienādojuma gadījumā redzējām, ka pirmās kārtas diferencialvienādojumam bez vispārīgā integrala, kurā atrodas patvaļīgā konstante C, ir arī vēl integrals, ko nevar dabūt specializējot vispārīgā integrala konstanti C. Šis integrals tātad nav dotā diferencialvienādojuma partikulars integrals. Šādu integralu sauc par diferencialvienādojuma singularo integralu.

Pieņemsim, ka diferencialvienādojuma

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

vispārīgais integrals ir

$$F(x, y, C) = 0. \tag{2}$$

Dodot konstantei C vērtības C_1, C_2, C_3, ... dabūjam partikularos integralus

$$F(x, y, C_1) = 0; \quad F(x, y, C_2) = 0; \quad F(x, y, C_3) = 0, \ldots$$

Ģeometriski apskatīts katra partikulara integrala attēls ir līkne — integrallīkne. Šo integrallīkņu kopība veido partikularo integrallīkņu saimi. Kādas šīs saimes līknes punkta P koordinatas x, y un pieskares virziena koeficients y' līknes punktā P apmierina diferencialvienādojumu (1), un otrādi, ja kāda punkta P koordinatas x, y un punktam P piekārtota līnijas elementa virziena koeficients y' apmierina diferencialvienādojumu (1), tad šāds punkts atrodas uz kādas partikularo integralu saimes līknes. Pieņemsim, ka diferencialvienādojumam (1) ir singulars integrals, t. i., integrals, ko nevaram dabūt, specializējot vispārīgā integralā atrodošos C. Singularā integrala attēls, kāda līkne, tad ir viena vienīga līkne, un tā nepieder partikularo integrallīkņu saimei, bet tomēr tā ir integrallīkne. Kāda šīs līknes punkta P_0 koordinatas x_0, y_0 un pieskares punktā P_0 virziena koeficients y_0' apmierina diferencialvienādojumu (1). Kā augšā redzējām, šādā gadījumā punkts P_0 (x_0, y_0) un līnijas elements ar virziena koeficientu y_0' atrodas arī uz kādas partikularo integralu līkņu saimei piederošas līknes. No augšējā secinām, ka singularā integrala līkne katrā savā punktā pieskaras kādai partikularo integralu līkņu saimes līknei, un tādēļ singularā integrala līkne ir partikularo integralu līkņu saimes aptvērēja līkne. Tātad, ja dotam diferencialvienādojumam (1) ir singulars integrals, tad singulara integrala līkne ir vispārīgā integrala (2) līkņu saimes aptvērēja līkne

No augšējā redzams, ka, ja zināms diferencialvienādojuma (1) pilnīgais integrals $F(x, y, C) = 0$, tad singularo integralu dabūjam, izslēdzot C no vienādojumiem

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, C) &= 0 \\ \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Šādā kārtā dabūtais vienādojums

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{4}$$

ir diferencialvienādojuma (1) singularais integrals, ja pārbaudot atrodam, ka tas apmierina šo diferencialvienādojumu. Pretējā gadījumā vienādojums (4) izteic integrallīkņu singularo punktu ģeometrisko vietu. Ja funkcija $\varphi(x, y)$ sadalās faktoros $\psi(x, y)$ un $\omega(x, y)$, tad jāpārbauda sakarības $\psi(x, y) = 0$ un $\omega(x, y) = 0$. Tā no šīm sakarībām, kas apmierina diferencialvienādojumu (1), tad ir singularais integrals.

P i e m ē r s. Diferencialvienādojuma

$$xp^2 - 2yp + ax = 0 \qquad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

integrals ir

$$2y = \frac{x^2}{C} + aC$$

vai

$$2yC - x^2 - aC^2 = 0. \tag{α}$$

Diferencējam pēc C:

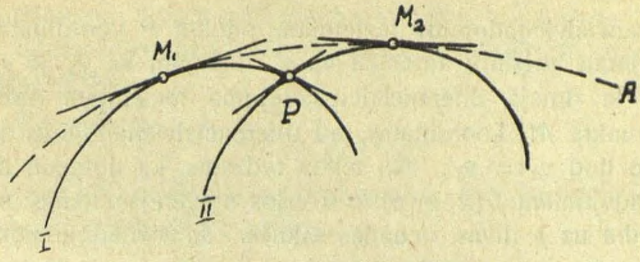
$$\frac{\partial F}{\partial C} = 2y - 2aC = 0. \tag{β}$$

Izslēdzot C no vienādojumiem (α) un (β), dabūjam

$$y^2 = ax^2. \tag{γ}$$

Šis vienādojums ir dotā diferencialvienādojuma singularais integrals; tanī nav konstantes C, un vienādojums, kā varam pārliecināties, apmierina doto diferencialvienādojumu.

Dotā diferencialvienādojuma singularo integralu var arī dabūt ar paņēmienu, kas neprasa diferencialvienādojuma integrēšanu, izejot tieši no diferencialvienādojuma.



4. zīm.

Pieņemsim, ka līknes I un II ir divu diferencialvienādojuma (1) partikularo integralu attēli ar vienādojumiem

$$F(x, y, C) = 0 \tag{I}$$

$$F(x, y, C + \Delta C) = 0. \tag{II}$$

Pieņemsim arī, ka līkne A ir diferencialvienādojuma singularā integrala attēls. Tā kā līkne A ir partikularo integralu līkņu aptvērēja, tā pieskaras līknēm I un II attiecīgos punktos M_1 un M_2. Līkņu I un II krustpunktā P pievilkto pieskaru virziena koeficientus apzīmēsim ar y_1' un y_2'. Šos virziena koeficientus dabūjam no vienādojumiem

$$\frac{\partial F(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial y} \cdot y_1' = 0$$

un

$$\frac{\partial F(x, y, C + \Delta C)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y, C + \Delta C)}{\partial y} \cdot y_2' = 0,$$

kuros x un y ir līkņu I un II krustpunkta P koordinatas. Ja $\Delta C \to 0$, tad, kā redzams no augšējiem vienādojumiem,

$$\lim_{\Delta C \to 0} y_2' = y_1'$$

Kā no aptvērējas līknes teorijas zināms, ja $\Delta C \to 0$, tad līkņu I un II krustpunkts P tiecas uz punktu M_1, kurā tad ir

$$y_2' = y_1'.$$

Ja diferencialvienādojumā ievietojam punkta P koordinatas, tad, vienādojumu atrisinot attiecībā uz y', dabūjam ka $y_2' \neq y_1'$.

Bet, ja dotajā diferencialvienādojumā ievietojam aptvērējas līknes punkta M_1 koordinatas, tad diferencialvienādojums saskaņā ar teikto dod $y_2' = y_1'$. No teiktā redzams, ka dotajam diferencialvienādojumam $f(x, y, p) = 0$ visos aptvērējas līknes punktos ir attiecībā uz p divas vienādas saknes. Ja vienādojumam attiecībā uz p ir divas vienādas saknes, tad p ir arī vienādojuma

$$\frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

sakne. Izslēdzot p no vienādojumiem

$$f(x, y, p) = 0$$

un

$$\frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0,$$

dabūjam

$$\psi(x, y) = 0,$$

kas dod to punktu ģeometrisko vietu, kuros diferencialvienādojumam $f(x, y, p) = 0$ ir attiecībā uz p divas vienādas saknes. Saskaņā ar teikto, sakarība

$$\psi(x, y) = 0,$$

ja tā apmierina doto diferencialvienādojumu, dod diferencialvienādojuma integrallīkņu saimes aptvērēju un tātad ir diferencialvienādojuma singularais integrals.

P i e m ē r s. Diferencialvienādojumu

$$xp^2 - 2yp + ax = 0 \qquad (\alpha)$$

diferencējot pēc p, dabūjam

$$xp - y = 0. \qquad (\beta)$$

Izslēdzot p no vienādojumiem (α) un (β), dabūjam

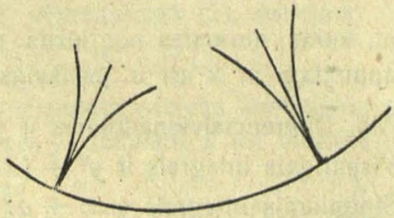
$$y^2 = ax^2.$$

Te jāpārbauda, vai šādi dabūtais vienādojums apmierina diferencialvienādojumu; dotajā gadījumā tas notiek. Vienādojums $y^2 = ax^2$ tad ir diferencialvienādojuma singularais integrals, kas saskan arī ar iepriekšējo.

Ja vienādojums

$$\psi(x, y) = 0$$

neapmierina doto diferencialvienādojumu, tad tas izteic integrallīkņu smaiļu ģeometrisko vietu:



5. zīm.

30. Uzdevumi.

1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2x.$ Atb. $(y - C)^2 = \frac{8}{9}x^3.$

2) $\frac{dy}{dx}\left(\frac{dy}{dx} + y\right) = x(x + y).$

Atb. $\left(y - \frac{x^2}{2} - C\right)(y + x - 1 + Ce^{-x}) = 0.$

3) $x = \frac{dy}{dx} - \sin\frac{dy}{dx}.$ Atb. Izslēgt p no vienādojumiem

$$y = \frac{p^2}{2} - p\sin p - \cos p + C \text{ un } x = p - \sin p.$$

4) $y\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = 2a.$ Atb. Izslēgt p no vienādojumiem

$$x - C = -2a\left(\frac{p}{1 + p^2} + \operatorname{arc\,tg} p\right) \text{ un } y = \frac{2a}{1 + p^2}.$$

5) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$. Atb. $y = Cx - \frac{C^2}{2}$.

Singularais integrals ir $x^2 = 2y$.

6) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0$. Atb. $y^2 = 2Cx - C^2$.

Singularais integrals ir $y = \pm x$.

7) $x = \frac{y}{p} + \ln p - \ln y$. Atb. Izslēgt p no vienādojumiem

$$p = Ce^{\frac{p}{y}} \text{ un } x = \frac{y}{p} + \ln\frac{p}{y}.$$

8) Dabūt līkni, kuras normales nogriežņa garums no līknes punkta līdz krustpunktam ar x asi ir pastāvīgs lielums a.

Atb. Diferencialvienādojums ir $y\sqrt{1+p^2} = a$.
Vispārīgais integrals ir $y^2 + (x - C)^2 = a^2$.
Singularais integrals $y = \pm a$.

9) Dabūt tādu līkni, kuras pieskares attālums no koordinatu sākuma ir proporcionals pieskaršanās punkta abscisai.

Atb. Diferencialvienādojums ir: $\frac{y - xp}{\sqrt{1+p^2}} = ax$,
un integrals parametriskā veidā ir:

$$x\sqrt{1+p^2}\,\sqrt[a]{p+\sqrt{1+p^2}} = C,$$

$$y\sqrt{1+p^2}\,\sqrt[a]{p+\sqrt{1+p^2}} = C\left(p + a\sqrt{1+p^2}\right).$$

E. Diferencialvienādojumu tuvīni integrēšanas paņēmieni

Ja dotais pirmās kārtas diferencialvienādojums neatrodas starp tiem veidiem, kurus var izintegrēt ar norādītajiem elementarajiem paņēmieniem, tad jāpielieto tuvīni diferencialvienādojumu integrēšanas paņēmieni. Dažus no tiem še apskatīsim.

31. Eilera-Košī integrēšanas paņēmiens. Doto diferencialvienādojumu

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

atrisinot attiecībā uz y', dabūjam

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

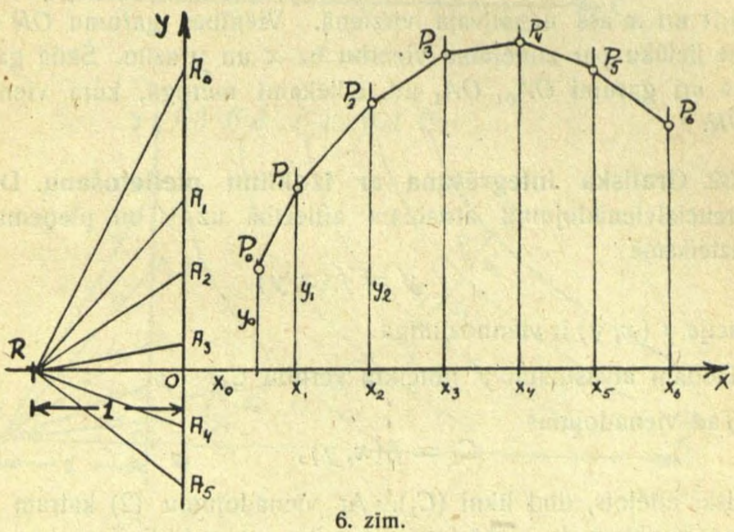
Pieņemsim, ka $f(x, y)$ ir vienvērtīga; ja tā būtu vairākvērtīga, tad mēs apskatītu vienu no vērtībām. Tātad uzskatīsim funkciju $f(x, y)$ par vienvērtīgu. Pieņemsim sākuma noteikumu, ka integrallīknei jāiet caur punktu

$$P_0(x_0, y_0). \tag{3}$$

Ievietojot x_0 un y_0 vienādojumā (2), dabūjam

$$y_0' = f(x_0, y_0).$$

Še y_0' izteic līnijas elementa virziena koeficientu punktā P_0. Koordinatu sistemā (O, x, y) iedalām x asi vienādās daļās.



6. zīm.

Caur dalījuma punktiem velkam taisnes $\parallel$ y asij. Šajā koordinatu sistemā iezīmējam punktu P_0. Uz y ass atliekam $OA_0 = y_0'$. Atliekam uz x ass pa kreisi no O garumu 1, tad $RO = 1$ ir zīmējuma mēroga vienība. Staram RA_0 tad ir punkta P_0 līnijas elementa virziens. Velkot taisni caur $P_0 \parallel RA_0$, dabūjam punktu P_1. Ievietojot vienādojumā (2) punkta P_1 koordinatu x_1 un y_1 vērtības, ko ņemam no zīmējuma, dabūjam caur punktu P_1 ejošā līnijas elementa virziena koeficientu y_0'. Šo y vērtību atliekot uz y ass, dabūjam punktu A_1. Stars RA_1 dod minētā līnijas elementa virzienu. Velkam caur P_1 taisni $\parallel RA_1$ un dabūjam punktu P_2. Punkta P_2 koordinatu x_2 un y_2 vērtības ieliekot vienādojumā (2), dabūjam caur punktu P_2 ejošā līnijas elementa virziena koeficientu y_2'. Šo y_2' vērtību uz y ass atliekot, dabūjam punktu A_2. Stars RA_2 tad dod caur P_2 ejošā līnijas elementa virzienu. Velkot caur P_2 taisni $\parallel RA_2$, dabūjam punktu P_3. Norādītā kārtā konstrukciju turpinot, dabūjam poligonu $P_0 P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 \ldots$, kas, ja nogriežņi $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$ utt. ir mazi, tuvīni attēlo ar sākuma noteikumu izvēlēto dotā diferencialvienādojuma partikularā integrala līkni. Līdzīgā kārtā šo konstrukciju varam izdarīt arī x ass negativajā virzienā. Vienības garumu OR var ņemt lielāku par zīmējuma vienību uz x un y asīm. Šādā gadījumā arī garumi OA_0, OA_1 utt. atliekami mērogā, kura vienība r OR.

32. Grafiska integrēšana ar izoklinu pielietošanu. Doto diferencialvienādojumu atrisinām attiecībā uz y' un pieņemam, ka izteiksmē

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

funkcija $f(x, y)$ ir viennozīmīga.

Dodam atvasinātai y' noteiktu vērtību C_1.

Tad vienādojums

$$C_1 = f(x, y), \tag{2}$$

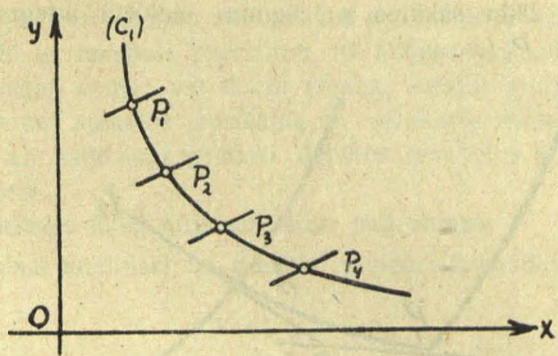
grafiski attēlots, dod līkni (C_1). Ar vienādojumu (2) katram šīs līknes punktam ir piekārtots viens un tas pats līnijas elementa virziena koeficients C_1. Šādu līkni sauc par i z o k l i n u. Saskaņā ar teikto 7. zīmējumā ar C_1 apzīmētā līkne ir izoklina, kas dota ar vienādojumu (2).

Izoklīnas punktos P_1, P_2, P_3 ... iezīmētie līnijas elementi ir paralēli; to virziena koeficienti ir C_1.

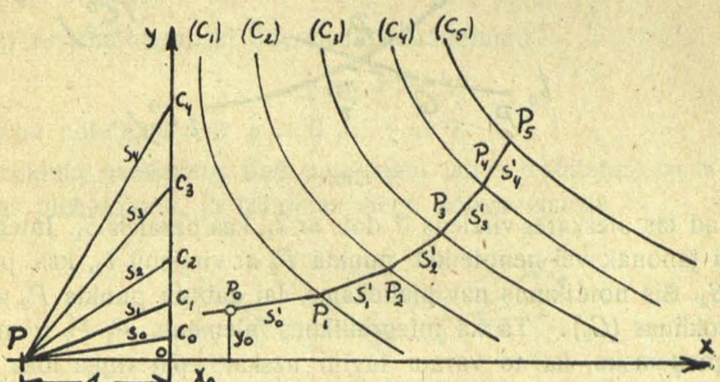
Liekot vienādojumā (1) $y' = C_2$, zīmējam līkni (C_2):

$$C_2 = f(x, y).$$

Tādā kārtā zīmējam līknes (C_3), (C_4) utt.



7. zīm.



8. zīm.

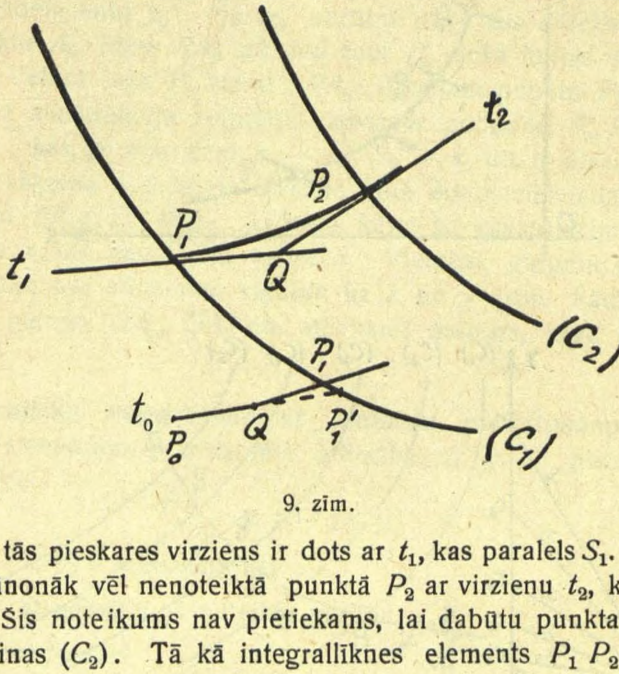
Katru līkni apzīmējam ar tai piekārtotā līnijas elementa virziena koeficienta vērtību (C_1), (C_2), (C_3) utt.

Šiem virziena koeficientiem atbilstošos virzienus dabūjam šādi: No punkta O atliekam kādā pieņemtā mērogā vienības garumu OP. Tai pašā mērogā atliekam y ass virzienā garumus $OA_1 = C_1$, $OA_2 = C_2$, $OA_3 = C_3$ utt.

Tad taisnes, piemēram, S_1, virziena koeficienti ir

$$\operatorname{tg} \sphericalangle OPC_1 = \frac{C_1}{1} = C_1.$$

Pieņemsim šādu sākuma noteikumu: meklētā integrallīkne iet caur punktu $P_1 (x_1, y_1)$.



9. zīm.

Tad tās pieskares virziens ir dots ar t_1, kas paralels S_1. Integrallīknei jānonāk vēl nenoteiktā punktā P_2 ar virzienu t_2, kas paralels S_2. Šis noteikums nav pietiekams, lai dabūtu punkta P_2 vietu uz izoklinas (C_2). Tā kā integrallīknes elements $P_1 P_2$ ir mazs, tad pieņemsim, ka to varam tuvīni uzskatīt par riņķa loka elementu.

Šādā gadījumā $QP_2 = QP_1$. No teiktā redzams, ka punkts Q uz t_1 mēģinājumu ceļā tā noteicams, lai $QP_2 = QP_1$. Šādā kārtā noteiktais punkts P_2 ir integrallīknes nākošā elementa sākuma punkts, kurā atkārtojam norādīto konstrukciju. Tādā kārtā turpinot konstrukciju, dabūjam punktus P_3, P_4 utt.

Ja integrallīknes sākuma punkts, ko apzīmēsim ar P_0, neatrodas uz izoklinas, tad rīkojamies šādi. Ieliekam punkta P_0 koordinatas x_0 un y_0 diferencialvienādojumā, dabūjam virziena koeficientu $y_0' = f(x_0, y_0) = C_0$, kam atbilst pieskares virziens S_0. Caur punktu P_0 velkam taisni, paralelu staram S_0 un tālāko konstrukciju izdarām kā iepriekšējā gadījumā norādīts.

Ieskatu par pielietojamo mērogu, par izoklinu savstarpīgo attālumu iespaidu uz rezultata precizitati, kā arī par grafiskās integrēšanas precizitati vispār, var dabūt vienīgi, izdarot grafisku integrēšanu, mainot minētos apstākļus un rezultatus savstarpēji salīdzinot, kā arī salīdzinot grafiski dabūtos rezultatus ar analitiskā ceļā dabūtiem.

Nepieciešams tādēļ atrisināt šādus uzdevumus:

1) Atrisināt analitiski un grafiski diferencialvienādojumu

$$y' = \frac{1}{y}.$$

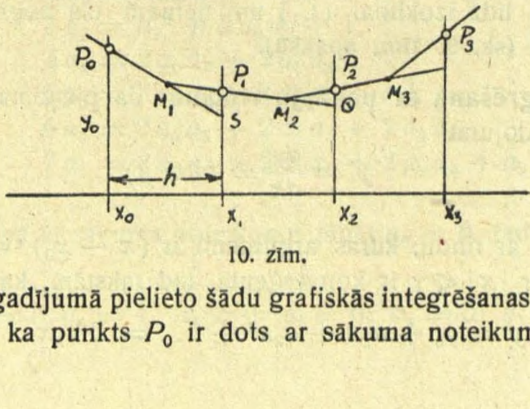
Sākuma noteikums: ja $x = 0$, $y = 0$. Salīdzināt rezultatus punktā $x = 4$.

2) Atrisināt grafiski diferencialvienādojumu

$$y' = x^2 + y^2.$$

Sākuma noteikums: ar $x = 0$ arī $y = 0$.

Izoklinu paņēmiens dod pietiekami labus rezultatus; tas ir parocīgs pielietošanā, ja izoklinas viegli konstruējamas.



10. zīm.

Pretējā gadījumā pielieto šādu grafiskās integrēšanas paņēmienu. Pieņemam, ka punkts P_0 ir dots ar sākuma noteikumu.

No diferencialvienādojuma

$$y' = f(x, y),$$

ievietojot tajā x_0 un y_0, dabūjam

$$y_0' = f(x_0, y_0).$$

Ar šo virziena koeficientu y_0' zīmējam taisni P_0S. Punkta S koordinatas ir $x_1 = x_0 + h$ un $\eta = y_0 + hy_0'$. Še h ir mazs.

Punktā S līnijas elementa virziena koeficients ir

$$\eta' = f(x_1, \eta).$$

Ar šo virziena koeficientu velkam taisni caur P_0S viduspunktu M_1; tā krusto abscisai x_1 piekārtoto ordinatu punktā P_1. Var pierādīt, ka punkts P_1 tuvīni ir integrallīknes punkts un $M_1 P_1$ šī punkta pieskare. Atkārtojot konstrukciju, dabūjam integrallīknes punktu P_2 un $M_2 P_2$ — šī punkta pieskari utt.

Šis paņēmiens ir vienkāršāks par izoklinu paņēmienu.

Poligona $P_0 Q_1 Q_2 Q_3 Q_4 \ldots$ malas ir integrallīknes pieskares, un punkti $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 \ldots$ ir integrallīkņu un poligona malu pieskaršanās punkti, jo, piemēram, punkta P_1 koordinatas un poligona malas $Q_1 Q_2$ virziena koeficients C_1 apmierina doto diferencialvienādojumu. Staru $S_0, S_1, \ldots$ konstrukcijai ieteicams ņemt vienību OP pietiekami lielu, lai zīmējot virzienus paraleli stariem $S_0, S_1, \ldots$ tos varētu precizi novilkt. Ja virzienu poligona divu vienas otrai sekojošu malu virzieni maz atšķiras viens no otra, piem., S_0 un S_1, tad punktu Q_1 var dabūt vienkārši tā, ka pieskari t_0 turpinām līdz izoklinai (C_1) un ņemam tās nogriežņa $P_0 P_1$ viduspunktu (sk. 9. zīm. apakšā).

33. Integrēšana ar pakāpju rindām. Ja pieņemam, ka diferencialvienādojumu

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

var integrēt ar rindu, kuras argumenti ir $(x - x_0)$ vai vienkārši x un kas ar $|x| < \gamma$ ir konverģenta, tad rakstām, ka

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \Sigma\, a_\lambda x^\lambda. \tag{2}$$

Augšējās rindas koeficientu a_λ atrodam ar šādu paņēmienu. Liekot y vērtību diferencialvienādojumā, dabūjam

$$y' = \Sigma\, \lambda\, a_\lambda x^{\lambda-1} = f(x, \Sigma\, a_\lambda\, x^\lambda) = f(x, y). \qquad (3)$$

Pielietojot nenoteikto koeficientu paņēmienu, salīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm, dabūjam vienādojumus koeficientu noteikšanai.

Piemērs. Dabūt diferencialvienādojuma

$$y' = x^2 + y^2$$

integralu pie sākuma noteikuma: ja $x = 0$, ja $y = 0$.

Šis diferencialvienādojums ir tā sauktā Rikati vienādojuma atsevišķs gadījums un nepieder pie elementari integrējamiem diferencialvienādojumiem.

Liekam

$$y = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \ldots \qquad (1)$$

tad

$$y' = a_1 + 2\, a_2 x + 3\, a_3\, x^2 + 4\, a_4 x^3 + \ldots \qquad (2)$$

Ievietojot vērtības (1) un (2) dotajā diferencialvienādojumā, dabūjam:

$$a_1 + 2\, a_2 x + 3\, a_3\, x^2 + 4\, a_4 x^3 + 5\, a_5 x^4 + 6\, a_6 x^5 + 7\, a_7 x^6 + \\ + \ldots = x^2 + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)^2.$$

Salīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm, dabūjam vienādības:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_0^2, \\
2\, a_2 &= 2\, a_0\, a_1, \\
3\, a_3 &= a_1^2 + 2\, a_0 a_2 + 1, \\
4\, a_4 &= 2\, a_0 a_3 + 2\, a_1\, a_2, \\
5\, a_5 &= 2\, a_0 a_4 + 2\, a_1\, a_3 + a_2^2, \\
6\, a_6 &= 2\, a_0 a_5 + 2\, a_1\, a_4 + 2\, a_2 a_3, \\
7\, a_7 &= 2\, a_0 a_6 + 2\, a_1\, a_5 + 2\, a_2 a_4 + a_3^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Tā kā saskaņā ar sākuma noteikumu jābūt $a_0 = 0$, tad no augšējā dabūjam:

$$a_1 = 0;\ a_2 = 0;\ a_3 = \frac{1}{3};\ a_4 = 0;\ a_5 = 0;\ a_6 = 0;\ a_7 = \frac{1}{7.9} = \frac{1}{63}.$$

Ievietojot šos koeficientus vienādojumā (1), dabūjam:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \ldots$$

Šajā gadījumā, pielietojot Maklorena rindu, kā parādīts [27], arī dabūtu šo atrisinājumu.

34. Integrēšana ar atkārtotām kvadraturām. Diferencialvienādojumam

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

kam sākuma noteikums ir, ka pie $x = x_0, y = y_0$, rakstām integralu šādā veidā:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{2}$$

Ja diferencēsim vienādojumu (2) pēc x, tad acīm redzot dabūsim vienādojumu (1).

Uzskatām y_0 par y tuvīnu vērtību. Ieliekot y_0 zem integrala, dabūjam y uzlabotu tuvīnu vērtību y_1:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx. \tag{3}$$

Ievietojot y_1 vērtību zem integrala, dabūjam atkal uzlabotu y tuvīnu vērtību y_2:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx. \tag{4}$$

Šādā kārtā turpinot, dabūjam tuvīnu vērtību

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx. \tag{5}$$

Piemērs. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$y' = x^2 + y^2$$

ar sākuma noteikumu: ja $x = 0$, $y = 0$. Šajā gadījumā diferencialvienādojumam rakstām šādu integralu

$$y_n = \int_{0}^{x} (x^2 + [y_{n-1}(x)]^2)\,dx.$$

Tad

$$y_1 = \int_0^x (x^2 + 0)\,dx = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2 = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3}\right)^2\right] dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3 = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}\right)^2\right] dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 +$$

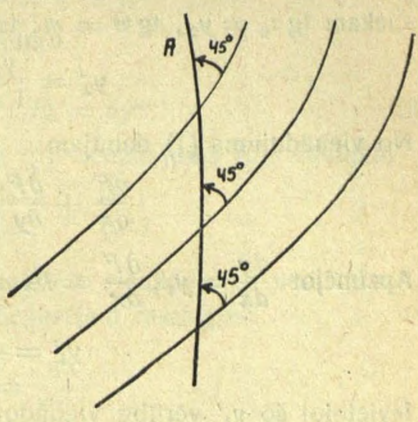
$$+ \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}.$$

F. Pielietojumi ģeometrijā

35. Trajektorijas vienādojumam

$$F(x, y, C) = 0 \tag{1}$$

koordinatu sistemā OXY atbilst līkņu kopa, ko sauksim par līkņu saimi. Katrai C vērtībai atbilst viena noteikta līkne no šīs saimes. 11. zīmējumā parādītas dažas ar vienādojumu (1) dotās saimes C_1, C_2, C_3 līknes. Līkni, kas krusto šīs saimes līknes noteiktā leņķī, sauc par izogonalu trajektoriju. 11. zīmējumā līkne A ir dotās līkņu saimes izogonalā trajektorija; krustošanās leņķis še pieņemts 45°. Dotās līkņu saimes izogonalo trajektoriju kopība arī veido līkņu saimi, kas atkarīga no dotās līkņu saimes (1). Dabūsim līkņu saimei (1) piekārtoto izogonalo trajektoriju saimes vienādojumu. 12. zīmējumā pieņemam, ka līkne I ir viena no tām, kas dotas ar vienādojumu



11. zīm.

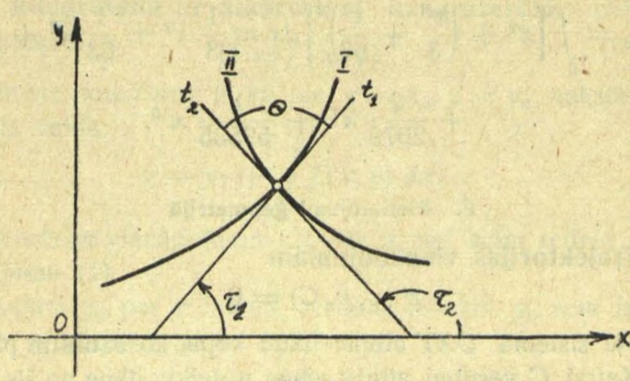
$$F(x, y, C) = 0 \tag{1}$$

un ka līkne II ir viena no izogonalo trajektoriju saimes līknēm. No 12. zīmējuma dabūjam:

$$\tau_2 = \tau_1 + \Theta$$

un

$$\operatorname{tg}\tau_2 = \frac{\operatorname{tg}\tau_1 + \operatorname{tg}\Theta}{1 - \operatorname{tg}\tau_1 \operatorname{tg}\Theta}. \tag{2}$$



12. zīm.

Liekam $\operatorname{tg}\tau_2 = y_2'$, $\operatorname{tg}\Theta = m$; tad

$$y_2' = \frac{y_1' + m}{1 - my_1'}. \tag{3}$$

No vienādojuma (1) dabūjam:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Apzīmējot $\frac{dy}{dx} = y_1'$, $\frac{\partial F}{\partial x} = F_x$ un $\frac{\partial F}{\partial y} = F_y$, dabūjam

$$y_1' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Ievietojot šo y_1' vērtību vienādojumā (3), dabūjam

$$y_2' = \frac{-\frac{F_x}{F_y} + m}{1 + m\frac{F_x}{F_y}} = \frac{m\,F_y - F_x}{F_y + m\,F_x} \tag{4}$$

jeb (atmetot indeku 2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m F_y - F_x}{F_y + m F_x}. \tag{5}$$

Izslēdzot konstanti C no vienādojumiem (1) un (5), dabūjam diferencialvienādojumu, ko integrējot dabūjam līkņu saimes (1) izogonalo trajektoriju saimes integralvienādojumu. Ja pieņemam $\Theta = 90^\circ$, tad $m = \infty$. Šādā gadījumā trajektorijas sauc par ortogonalām.

Dalot vienādojuma (5) labajā pusē skaitītāju un saucēju ar m un liekot $m \to \infty$, dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}. \tag{6}$$

Izslēdzot no vienādojumiem (6) un (1) konstanti C, kas vispārīgā gadījumā vienādojumā (6) atrodas, dabūjam līkņu saimes (1) ortogonalo trajektoriju diferencialvienādojumu.

Piemērs. Dabūt līkņu saimes

$$x^n + y^n - C = 0 \tag{α}$$

ortogonalo trajektoriju vienādojumu.

No (α) dabūjam

$$F_x = nx^{n-1}; \; F_y = ny^{n-1}. \tag{β}$$

Ievietojot F_x un F_y vērtības no (β) vienādojumā (5), dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n \cdot y^{n-1}}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{y^{n-1}}{x^{n-1}}.$$

Kā redzams, šinī gadījumā augšējā vienādojumā neatrodas C; tātad C izslēgšana še atkrīt. Separējam mainīgos:

$$\frac{dy}{y^{n-1}} = \frac{dx}{x^{n-1}}.$$

Integrējam:

$$\frac{y^{-n+2}}{-n+2} - \frac{x^{-n+2}}{-n+2} = C_1$$

jeb

$$x^{2-n} - y^{2-n} = C_2.$$

Piemērs. Dabūt līkņu saimes

$$y^2 - Cx = 0. \tag{α}$$

ortogonalo trajektoriju saimes vienādojumu.

Šajā gadījumā

$$F_x = -C; F_y = 2y. \tag{β}$$

Ievietojot šīs F_x un F_y vērtības vienādojumā (5), dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{-C}. \tag{γ}$$

No vienādojumiem (α) un (γ) izslēdzam C un tad integrējam:

$$y\,dy + 2x\,dx = 0,$$

$$\frac{y^2}{2} + x^2 = C_1^2. \tag{δ}$$

Vienādojums (δ) ir ar vienādojumu (α) dotās parabolu saimes ortogonalo trajektoriju saimes vienādojums. Kā redzams, šīs trajektorijas ir elipses.

36. Evolventas. Ar vienādojumu

$$y = f(x) \tag{1}$$

dotās līknes pieskaru kopība veido taišņu sistemu. Šīs sistemas ortogonalās trajektorijas ir dotās līknes evolventas.

13. zīmējumā viena no ∞ daudzām līknes L evolventām ir līkne E. Līknes L evolventu vienādojumu dabūsim, kā norādīts [35], izejot no līknes L pieskaru kopības vienādojuma. Apzīmējot kāda līknes L pieskares pieskaršanās punkta koordinatas ar x, y un pieskares tekošās koordinatas ar ξ, η, pieskares vienādojumu rakstām:

$$\eta - y = y'(\xi - x). \tag{2}$$

Ņemot vērā līknes L vienādojumu, rakstām (2) šādi:

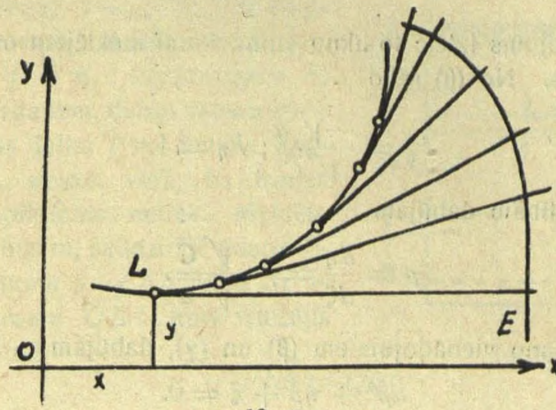
$$\eta - f(x) - f'(x)(\xi - x) = 0. \tag{3}$$

Vienādojums (3) izteic līknes (1) pieskaru kopību; katrai x vērtībai atbilst ar vienādojumu (3) noteikta pieskare; tātad x ir līknes (1) pieskaru kopības izteicēja vienādojuma (3) parametrs, ko apzīmējam ar C. Liekot x vietā C, vienādojumu (3) rakstām šādi:

$$\eta - f(C) - f'(C)(\xi - C) = 0. \tag{4}$$

Vienādojums (4) izteic dotā gadījumā taišņu saimi, kurai meklējam ortogonalo trajektoriju saimes vienādojumu. Saskaņā ar [35] no vienādojuma (4) izriet

$$F_\xi = -f'(C) \text{ un } F_\eta = 1. \tag{5}$$



13. zīm.

Šīs vērtības ievietojot vienādojumā

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{F_\eta}{F_\xi}, \tag{6}$$

dabūjam

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{f'(C)}. \tag{7}$$

Izslēdzot (C) no vienādojumiem (4) un (7), dabūjam meklēto trajektoriju, — dotā gadījumā — līknes (1) evolventu vienādojumu.

P i e m ē r s. Dabūt ar vienādojumu

$$y^2 = 4ax \tag{α}$$

dotās līknes evolventu vienādojumu.

Še $y = 2\sqrt{ax}$; tātad $f(C) = 2\sqrt{aC}$;

$$y' = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}; \text{ tātad } f'(C) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{C}}.$$

Ievietojam $f(C)$ un $f'(C)$ izteiksmes vienādojumā (4):

$$F(\xi, \eta, C) = \eta - 2\sqrt{aC} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{C}}(\xi - C) = 0. \qquad (\beta)$$

Šis vienādojums izteic to līkņu saimi, kurai meklējam ortogonalās trajektorijas. No (β) seko

$$F_\xi = \frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{C}}; \; F_\eta = 1.$$

Ar šīm vērtībām dabūjam

$$p = \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{a}}. \qquad (\gamma)$$

Izslēdzot C no vienādojumiem (β) un (γ), dabūjam

$$ap^2 + \eta p + \xi = 0. \qquad (\delta)$$

Vienādojums (δ) ir meklēto līkņu saimes (α) evolventu diferencialvienādojums.

G. Dažas techniskas problemas

37. Vispārīga piezīme. Kā jau norādījām [3], daudzās fizikas, mechanikas un technikas problemās sakarība starp neatkarīgo un atkarīgo mainīgo pieņem diferencialvienādojuma veidu. Še apskatīsim problemas, kuru diferencialvienādojumi ir pirmās kārtas.

Sekojošo problemu atrisināšanā izšķiram divus posmus:

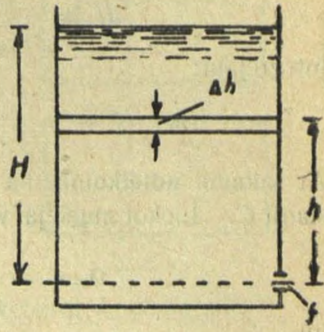
1) Diferencialvienādojuma veidošana, pamatojoties uz dotās problemas datiem; vispār šo darbību māca atsevišķas zinātnes, kā mechanika, stiprības mācība, hidraulika utt.

2) Diferencialvienādojuma integrēšana, ar ko tad dabūjam problemas atrisinājumu.

38. Ūdens iztecēšana no trauka. Še apskatīsim divus gadījumus.

1. piemērs. 14. zīmējumā parādītā trauka pamata laukums ir apzīmēts ar F cm^2. Trauka sānos ierīkotā cauruma laukums ir f cm^2.

Laika momentā $t_0 = 0$ sākas ūdens iztecēšana no trauka pa caurumu f, ko pieņemam kā mazu, salīdzinot ar F. Šajā momentā ūdens līmenis virs cauruma ir H cm. Pieņemsim, ka kādā laika momentā t ūdens līmenis virs cauruma f ir h. Pamatojoties uz augšējiem datiem, dabūt sakaru starp iztecēšanas laiku t un līmeņa augstumu h, ņemot vērā, ka traukā ūdens papildināts netiek. Meklēto sakaru dabūsim, salīdzinot ūdens tilpuma zudumu $-F\Delta h$ laikā Δt ar ūdens tilpumu $Q\Delta t$, kurš iztecējis pa f. Tātad



14. zīm.

$$-F\Delta h = Q\Delta t. \tag{α}$$

Laikā Δt ūdens līmenis traukā izmainās par $-\Delta h$. Ūdens šajā laikā iztek zem kāda vidēja spiediena augstuma h_1 ar kādu vidēju ātrumu v_1, tā ka, ja $\Delta t \to 0$, tad $h_1 \to h$ un $v_1 \to v$, kur v ir augstumam h atbilstošais iztecēšanas ātrums. Saskaņā ar Toričelli formulu rakstām:

$$v_1 = k\sqrt{2gh_1}. \tag{β}$$

Šajā formulā atrodas koeficients k, tā sauktais iztecēšanas koeficients, ko dod hidraulika. Laikā Δt iztecējušā ūdens tilpums ir

$$Q\Delta t = f \cdot k\sqrt{2gh_1}\,\Delta t. \tag{γ}$$

Saskaņā ar (α) rakstām:

$$-F\Delta h = f \cdot k\sqrt{2gh_1} \cdot \Delta t.$$

Dalot vienādojuma abas puses ar Δt, dabūjam

$$-F\frac{\Delta h}{\Delta t} = f \cdot k\sqrt{2gh_1} \tag{δ}$$

un tā kā, ja $\Delta t \to 0$, arī $h_1 \to h$, tad

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(- F \frac{\Delta h}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0} (f \cdot k \sqrt{2gh})$$

vai ievērojot, ka, ja $\Delta t \to 0$, arī $h_1 \to h$,

$$- F \frac{dh}{dt} = f \cdot k \sqrt{2gh}.$$

Separējam mainīgos:

$$dt = - \frac{F}{f \cdot k \sqrt{2g}} h^{-\frac{1}{2}} dh.$$

Integrējam:

$$t = - \frac{2F}{f \cdot k \sqrt{2g}} h^{\frac{1}{2}} + C. \qquad (\varepsilon)$$

Ar sākuma noteikumu, ka laikā $t_0 = 0$ ir $h = H$, nosakām konstanti C. Liekot augšējā vienādojumā $t = 0$ un $h = H$, dabūjam

$$0 = - \frac{2F}{f \cdot k \sqrt{2g}} H^{\frac{1}{2}} + C$$

un

$$C = \frac{2F}{f \cdot k \sqrt{2g}} H^{\frac{1}{2}}.$$

Ievietojam C vērtību vienādojumā (ε):

$$t = \frac{2F}{f \cdot k \sqrt{2g}} \left(H^{\frac{1}{2}} - h^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (\zeta)$$

Šis vienādojums ir dotās problemas atrisinājums. Laiku T, kurā trauks iztukšojas, dabūjam no izteiksmes (ζ), liekot tajā $h = 0$:

$$T = \frac{2F}{f \cdot k \sqrt{2g}} H^{\frac{1}{2}}.$$

2. piemērs 15. zīmējumā plānā un pretskatā parādītajā trauka sienā atrodas caurums, kura laukums F samērā ar trauka pamata laukumu ir liels. Pa šo caurumu no trauka iztek ūdens, pie kam, ūdeni pievadot, līmenis traukā tiek uzturēts pastāvīgā augstumā H. Atrast vienā sekundē no trauka iztekošā ūdens tilpumu Q.

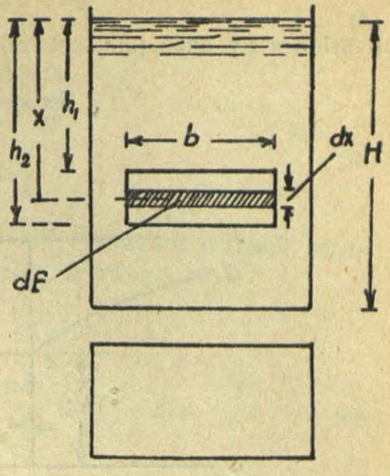
Tā kā še cauruma augstums, salīdzinot ar ūdens spiediena augstumu H, samērā liels, tad še nevar pieņemt, ka cauruma vertikalos punktos iztecēšanas ātrums ir konstants. Svītrotā elementarā laukumā dF ūdens iztecēšanas ātrums ir

$$v = \sqrt{2gx}.$$

Sekundē iztekošā ūdens tilpums Q tad dabūjams, ievērojot, ka $dF = b\,dx$:

$$Q = \int_{h_1}^{h_2} v\,dF =$$

$$= \sqrt{2g}\int_{h_1}^{h_2} \sqrt{x}\,b\,dx.$$



15. zīm.

Integrējot un ievedot iztecēšanas koeficientu k, dabūjam:

$$Q = \frac{2}{3}\,bk\sqrt{2g}\left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}}\right).$$

39. Gruntsūdens akas aprēķināšana. 16. zīmējumā ar līniju CD apzīmēts ūdens necaurlaidīgais slānis, ar AB gruntsūdens līmenis. Līnija IK apzīmē cilindriskas akas asi. Cilindra radiuss ir r. Ja katrā sekundē no akas ņemam ūdens tilpumu Q, tad ūdens līmenis akā pazeminās. Pieņemsim, ka, turpinot ūdens smelšanu, pēc kāda laika iestājas stacionars stāvoklis, t. i., ūdens akā nostājas nemainīgā līmenī EF. Šādā gadījumā sekundē akā ieplūstošā ūdens tilpums līdzinās no akas ņemtajam ūdens tilpumam Q. No pētījumiem zināms, ka šādā gadījumā gruntsūdens līmenis veido kādu līniju $GEFH$ un ka gruntsūdens pieteces ātrums v attālumā x no akas ass ir proporcionals līknes pieskares virziena koeficientam šajā vietā. Tātad

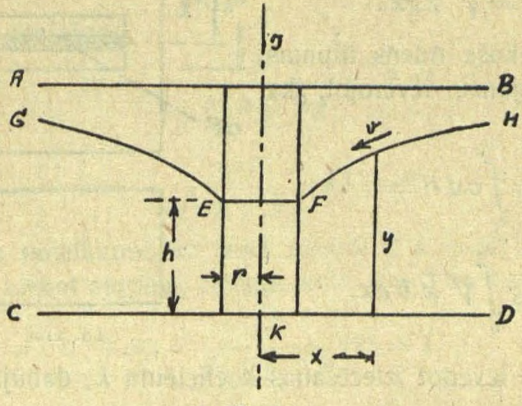
$$v = k \cdot \frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

Iedomāsimies ap aku cilindru ar radiusu x, tad caur šī cilindra saslapināto virsmu

$$2\pi xy$$

no ārienes uz akas pusi sekundē caurtekošā ūdens tilpums ir

$$2\pi xy \cdot k \frac{dy}{dx}. \tag{2}$$



16. zīm.

Stacionarā stāvoklī no akas ņemtais ūdens tilpums līdzinās pieplūstošam ūdens tilpumam; tātad

$$Q = 2\pi xyk \frac{dy}{dx}. \tag{3}$$

Diferencialvienādojumā separējam mainīgos:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2\pi k}{Q} y\,dy. \tag{4}$$

Integrējam:

$$\ln x = \frac{\pi k}{Q} y^2 + C. \tag{5}$$

Sākuma noteikums, ka pie $x = r$, $y = h$, dod

$$\ln r = \frac{\pi k}{Q} h^2 + C$$

un

$$C = \ln r - \frac{\pi k}{Q} h^2. \tag{6}$$

C vērtību no (6) ievietojam vienādojumā (5):

$$Q = \pi k \frac{y^2 - h^2}{\ln \frac{x}{r}}. \tag{7}$$

Pieņemsim, ka attālumā R no akas ass stacionarā stāvoklī novērots gruntsūdeņa līmenis H; tad, liekot izteiksmē (7)

$$y = H, \; x = R \text{ un } H - h = s,$$

dabūjam

$$Q = \pi k \cdot \frac{H^2 - h^2}{\ln \frac{R}{r}} = \frac{\pi k}{\ln \frac{R}{r}} (2H - s) s. \tag{8}$$

Šis vienādojums dod sakaru starp s un Q. Ja ūdens necaurlaidīgais slānis atrodas dziļi un H ļoti liels, salīdzinot ar s, tad augšējo formulu varam rakstīt šādi:

$$Q = \frac{\pi k}{\ln \frac{R}{r}} s \cdot 2H.$$

Šādā gadījumā Q tieši proporcionals līmeņa pazeminājumam s.

40. Slodzēts stabs ar pastāvīgu šķēluma spriegumu. Pieņemsim, ka jāveido smags balsts ar horizontalu riņķa šķēlumu tā, lai no slodzes P un staba pašsvara cēlušies spriegumi visos staba horizontalos šķēlumos būtu vienādi.

Apzīmēsim spriegumu ar σ un materiala īpatnējo svaru ar γ. Saskaņā ar 17. zīmējumu staba šķēlums I ar laukumu $F(x)$ ir padots slodzei P un staba daļas $ABCD$ pašsvaram Q. Staba šķēlumā I tad ir

$$\sigma F(x) = P + Q \tag{1}$$

un staba šķēlumā II

$$\sigma [F(x) + dF(x)] = P + Q + dQ. \tag{2}$$

Atņemot (1) no (2), dabūjam

$$\sigma \cdot dF(x) = dQ. \tag{3}$$

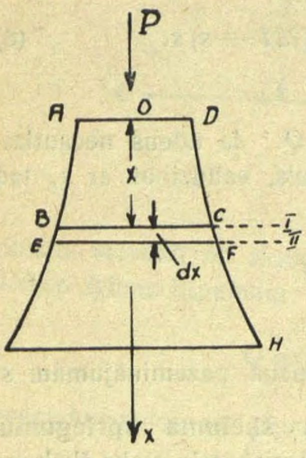
No zīmējuma redzam, ka

$$dQ = \frac{F(x) + [F(x) + dF(x)]}{2} \gamma \cdot dx = \gamma F(x)\, dx +$$

$$+ \gamma \frac{dF(x)}{2} dx.$$

$dF(x)\,dx$ ir otrās kārtas bezgalīgi mazs lielums, salīdzinot ar $F(x)\,dx$, augšējā summā tāpēc to varam atmest; tad

$$dQ = \gamma F(x)\, dx. \tag{4}$$



17. zīm.

Šo dQ vērtību ievietojam vienādojumā (3):

$$\sigma\, dF(x) = \gamma F(x)\, dx.$$

Separējam mainīgos:

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = \frac{\gamma}{\sigma} dx.$$

Integrējam:

$$\ln F(x) = \frac{\gamma}{\sigma} x + C$$

un

$$F(x) = C_1 e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}. \tag{5}$$

Sākuma noteikums še ir pie $x = 0, F(0) = \frac{P}{\sigma}$; to ievērojot, no (5) dabūjam

$$C_1 = \frac{P}{\sigma}.$$

Tad vienādojums (5) dod

$$F(x) = \frac{P}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}. \tag{6}$$

Apzīmējot staba šķēluma riņķa radiusu ar y, rakstām:

$$F(x) = y^2\pi = \frac{P}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma}x}$$

un

$$y = \sqrt{\frac{P}{\pi\sigma}} \cdot e^{\frac{\gamma}{2\sigma}x}.$$

Tā esam dabūjuši līknes $ABEG$ vienādojumu šķēlumā caur staba asi.

41. Ķermeņa temperaturas sakars ar laiku atdzišanas procesā. Ja kāda ķermeņa temperatura ir T un apkārtnes gaisa temperatura T_0, tad saskaņā ar Ņutona likumu temperaturas T krišanas ātrums ir proporcionals starpībai $T - T_0$. Apzīmējot laiku ar t, saskaņā ar teikto rakstām:

$$-\frac{dT}{dt} = k(T - T_0). \tag{1}$$

Še k ir proporcionalitates faktors, kas jādabū no temperaturas krišanas procesa apstākļiem.

Vienādojumā (1) šķiram mainīgos:

$$\frac{dT}{T - T_0} = -k\,dt. \tag{2}$$

Integrējam:

$$\ln(T - T_0) = -kt + C. \tag{3}$$

Šis vienādojums dod sakaru starp ķermeņa temperaturu T un atdzišanas laiku t.

Piemērs. Pieņemsim, ka gaisa temperatura $T_0 = 20^\circ$ un ka apskatāmā ķermeņa temperatura 20 minutēs krīt no $T_1 = 100^\circ$ uz 60°.

Kad ķermeņa temperatura būs 30°?

Vienādojumā

$$\ln(T - T_0) = -kt + C \tag{α}$$

aprēķināsim C no sākuma noteikuma, ka laikā $t = 0$ $T = 100°$. Šīs vērtības ievietojam augšējā vienādojumā:

$$\ln(100 - 20) = -k \cdot 0 + C;$$

tātad

$$C = \ln(100 - 20) = \ln 80.$$

Ievietojam C vērtību vienādojumā (α):

$$\ln(T - T_0) = -kt + \ln 80. \qquad (\beta)$$

Šajā vienādojumā nezināms vēl k; to dabūjam no noteikuma: $T = 60°$, kad $t = 20$ min. Ievietojam šīs vērtības vienādojumā (β):

$$\ln(60 - 20) = -k \cdot 20 + \ln 80.$$

Tad

$$k = \frac{\ln 80 - \ln 40}{20} = \frac{1}{20} \ln \frac{80}{40} = \frac{1}{20} \ln 2.$$

Ievietojot šo k vērtību vienādojumā (β), dabūjam:

$$\ln(T - T_0) = -\left(\frac{1}{20} \ln 2\right) t + \ln 80 = \ln \frac{80}{2^{\frac{1}{20}t}}$$

$$\text{jeb } T - T_0 = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}t}. \qquad (\gamma)$$

Vienādojums (γ) dod apskatāmajā problemā sakaru starp ķermeņa temperaturu un atdzišanas laiku t.

Ar $T = 30$ dabūjam

$$30 - 20 = 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}t}$$

jeb

$$1 = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}t}.$$

Tā kā $8 = 2^3$, tad

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}t}.$$

Tā dabūjam

$$t = 60,$$

t. i., ķermeņa temperatura krīt no 100° uz 30° 60 minutēs.

Trešā nodaļa

Augstākas kārtas diferencialvienādojumi

A. Vispārīgas ziņas

42. Augstākas kārtas diferencialvienādojuma forma. Integrala eksistence. Sākuma noteikums. Augstākas n-tās kārtas diferencialvienādojuma veids ir

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{1}$$

vai ar atvasināto simboliem

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1a}$$

Še zīme $F(\ )$ apzīmē kaut kādu sakaru starp neatkarīgo mainīgo x, atkarīgo mainīgo y un atkarīgā mainīgā atvasinātām, līdz n-tai atvasinātai ieskaitot. Daži no mainīgiem, piemēram, x vai y, vai y' utt. var arī vienādojumā nebūt; pat gadījumā, ja vienādojumā atrodas tikai $y^{(n)}$, šāds vienādojums tomēr ir n kārtas diferencialvienādojums. Atrisinot diferencialvienādojumu attiecībā uz $y^{(n)}$, dabūjam

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = 0. \tag{2}$$

Redzam, ka vienādojumā esošo augstāko atvasināto varam izteikt pilnīgi noteiktā kārtā ar vienādojumā esošiem pārējiem mainīgiem. Ja norādītais atrisinājums dod vairākas $y^{(n)}$ vērtības, tad apskatām vienu no tām. Tālāk pieņemsim funkciju f par noteiktu un viennozīmīgu.

Diferencējot vienādojumu (2), dabūjam

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}. \tag{3}$$

Ievietojot augšējā vienādojumā $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ redzam, ka vienādojuma (3) labajā pusē atrodas noteikta izteiksme, kurā kā mainīgie atrodas $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, un tāpēc varam rakstīt:

$$y^{(n+1)} = f_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{3a}$$

Šajā vienādojumā f_1 ir pilnīgi noteikta zināma funkcija ar parādītiem argumentiem. Diferencējot vienādojumu (3a) augšā norādītā kārtā, dabūjam

$$y^{(n+2)} = f_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Turpinot diferencēšanu, dabūjam:

$$y^{(n+3)} = f_3(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

$$y^{(n+4)} = f_4(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Visas funkcijas $f_1, f_2, f_3, f_4, \ldots$ ir pilnīgi noteiktas un zināmas; tās dabūtas augšā norādītā diferencēšanas ceļā, izejot no dotās funkcijas $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. No augšējā redzam sekojošo. Ja pieņemam x sākuma vērtību x_0 un apzīmējam šai sākuma vērtībai piekārtotās funkcijas y un tās atvasināto vērtības ar $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, tad no diferencialvienādojuma nevaram atrast šīs n vērtības. Tās atbilst vienai vienīgai noteiktai $x = x_0$ vērtībai; tām jābūt pastāvīgām, bet patvaļīgi pieņemamām. Turpretim

$$y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, y_0^{(n+2)}, \ldots$$

ir pilnīgi noteiktas ar vērtībām $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ un dotas ar vienādojumu (3) un tā diferencēšanas rezultatiem.

Pieņemsim, ka

$$y = \varphi(x),$$

kur $\varphi(x)$ ir meklētā funkcija. Šo izteiksmi rakstām šādā veidā:

$$y = \varphi(x_0 + x - x_0)$$

un, izvirzot to Teilora rindā, dabūjam

$$y = \varphi(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}\varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\varphi^{(n)}(x_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(x_0) + \ldots$$

Kā redzams, še

$$\varphi(x_0) = y_0;$$

$$\varphi'(x_0) = y_0, \ldots, \varphi^{(n)}(x_0) = y_0^{(n)} = f(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)});$$

$$\varphi^{(n+1)}(x_0) = f_1(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)});$$

$$\varphi^{(n+2)}(x_0) = f_2(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}).$$

Ievērojot šīs izteiksmes, augšējo rindu rakstām tā:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} y_0' + \ldots +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} y_0^{(n-1)} + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f_1(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!} f_2(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) + \ldots \tag{4}$$

Pieņemsim, ka funkcijas $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ pie argumentu vērtībām $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ ir tādas, ka augšējā rinda ir savirzāma visām x vērtībām kādā intervalā, kas satur x_0. Tā kā savirzāmā rinda (4) izteic meklēto y kā x funkciju, tad tas pierāda, ka diferencialvienādojumam (2) ir integrals. Viegli redzams, ka diferencējot n reizes rindu (4), dabūjam funkcijas $f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ izvirzījumu rindā. Šis pierādījums nav pilnīgi precizs, ja še pieņemam, ka x atrodas tuvu x_0, ka rinda diferencējama, un vispārīgi neielaižamies tās atsevišķu īpašību apskatā.

Kā noskaidrojām, lielumi $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ visi ir pastāvīgi un patvaļīgi. Šīs savirzāmās rindas (4) suma ir kāda x funkcija; šajā funkcijā saskaņā ar augšējo jāatrodas minētiem n patvaļīgiem lielumiem

$$y_0, y_0', y_0'', \ldots, y^{(n-1)}.$$

Apzīmējot šos lielumus ar C_1, C_2, $C_3, \ldots, C_n$, varam rakstīt, ka n-tās kārtas diferencialvienādojuma (1) integrals ir

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n).$$

Tātad n-tās kārtas diferencialvienādojuma integralā atrodas n patvaļīgi pastāvīgi lielumi. Šādu diferencialvienādojuma integralu sauc par pilnīgo vai arī vispārīgo integralu. Specializējot vispārīgā integrala konstantes, dabūjam partikularus integralus.

Piemērs. Diferencialvienādojumu

$$y'' = -y$$

saskaņā ar augšā norādīto atrisinām šādi.

Diferencējot dabūjam:

$$\begin{aligned} y''' &= -y', \\ y^{IV} &= -y'' = -(-y) = y, \\ y^{V} &= y', \\ y^{VI} &= y'' = -y \text{ utt.} \end{aligned}$$

Kā redzam, ja pieņemam y_0 un y_0', tad no augšējā seko:

$$\left.\begin{aligned} y_0'' &= -y_0 \\ y_0''' &= -y_0' \\ y_0^{IV} &= y_0 \\ y_0^{V} &= y_0' \\ y_0^{VI} &= -y_0 \text{ utt.} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha)$$

Izvirzām izteiksmi $y = f(x)$ Maklorena rindā:

$$y = y_0 + \frac{y_0' x}{1!} + \frac{y_0'' x^2}{2!} + \frac{y_0''' x^3}{3!} + \frac{y_0^{IV} x^4}{4!} +$$

$$+ \frac{y_0^{V} x^5}{5!} + \frac{y_0^{VI} x^6}{6!} + \ldots$$

Ievietojam šajā rindā y_0'', y_0''' utt. vērtības no (α):

$$y = y_0 + y_0' x + (-y_0)\frac{x^2}{2!} + (-y_0')\frac{x^3}{3!} + y_0\frac{x^4}{4!} +$$

$$+ \frac{y_0' x^5}{5!} + (-y_0)\frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Sakārtojam šīs savirzāmās rindas locekļus:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) +$$

$$+ y_0' \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right).$$

Kā redzams, pirmajās iekavās rinda izteic $\cos x$ un rinda otrās iekavās izteic $\sin x$. Apzīmējot vēl y_0 ar C_1 un y_0' ar C_2, augšējo sakarību rakstām šādi:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{β}$$

Šis vienādojums ir dotā diferencialvienādojuma $y'' = -y$ integrals. Diferencējot vienādojumu (β), dabūjam:

$$\frac{dy}{dx} = - C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - C_1 \cos x - C_2 \sin x = - (C_1 \cos x + C_2 \sin x). \tag{γ}$$

No (β) un (γ) redzams, ka še

$$y'' = -y.$$

43. Diferencialvienādojuma veidošana no attiecīgā integrala. Pieņemsim, ka diferencialvienādojuma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

integrals ir

$$\varphi (x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{2}$$

Vienādojumu (2) diferencējot vienu reizi, dabūjam

$$\varphi_1 (x, y, y', C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Otru reizi diferencējot, dabūjam

$$\varphi_2 (x, y, y', y'', C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0;$$

un pēc diferencēšanas n reizes —

$$\varphi_n (x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0.$$

Tātad ar diferencēšanu dabūjam n vienādojumus, kuriem pievienojot arī integralu (2), dabūjam $n + 1$ vienādojumus. Izslēdzot no šiem $n + 1$ vienādojumiem n konstantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$, dabūjam vienu vienādojumu, kurā atrodas $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$; Šim vienādojumam jābūt identiskam ar doto diferencialvienādojumu (1); ja izslēgšanas rezultats būtu sakarība

$$\omega(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{3}$$

un tā nebūtu identiska ar diferencialvienādojumu (1), tad ar (3) palīdzību varētu izslēgt $y^{(n)}$ no dotā diferencialvienādojuma. Tā kā tādā gadījumā nebūtu iespējas pie dotā $x = x_0$ izvēlēties patvaļīgas vērtības n funkcijām $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, tad redzams, ka pieņēmums par funkciju ω nav pareizs, tātad izslēgšanas rezultatam ir jābūt identiskam ar doto diferencialvienādojumu (1).

44. Diferencialvienādojuma pirmie integrali. Par diferencialvienādojuma

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

pirmo integralu sauc vienādojumu

$$\psi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0. \tag{2}$$

Pirmā integralā tātad atrodas par vienu kārtu zemāka y atvasinātā, nekā dotajā diferencialvienādojumā (1), un viena patvaļīga konstante. Ja vienādojumu (2) atslēdzam attiecībā uz C_1, un rezultatu

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = C_1$$

diferencējam pēc x un dabūjam vienādojumu (1), tad tas ir pierādījums tam, ka vienādojums (2) ir diferencialvienādojuma (1) pirmais integrals. Divi pirmie integrali ir neatkarīgi viens no otra, ja to konstantes ir neatkarīgas. Ja dotam diferencialvienādojumam (1) zināmi n neatkarīgi pirmie integrali:

$$\psi_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0, \quad \psi_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_2) = 0,$$
$$\psi_3(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_3) = 0, \ldots \psi_n(x, y, y', \ldots, y^{n-1}, C_n) = 0,$$

tad, izslēdzot no šiem n vienādojumiem $(n - 1)$ lielumus $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$, dabūjam vienādojumu

$$\varphi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

kas ir dotā diferencialvienādojuma (1) pilnīgais integrals.

45. Veids $y'' = k$, kur k pastāvīgs dotais lielums. Otras kārtas diferencialvienādojumus integrē, pielietojot vispārīgu paņēmienu: ar substitucijas palīdzību pārveido otras kārtas diferencialvienādojumu pirmās kārtas vienādojumā. Šo vienādojumu integrē, kā parādīts pirmās kārtas diferencialvienādojumu integrēšanā. Pēc tam integrē substitucijas vienādojumu, kas arī ir pirmās kārtas, ar to tad dabūjot dotā diferencialvienādojuma integralu. Tā kā to dabū, izdarot divas integrēšanas, tad integralā, kā redzams, un no agrākā arī zināms, jāatrodas divām patvaļīgām konstantēm. Šo konstantu aprēķināšanai vajadzīgi divi sākuma noteikumi. Pielietojot minēto paņēmienu diferencialvienādojuma

$$y' = k \tag{1}$$

integrēšanā, liekam

$$y' = p. \tag{2}$$

Tad

$$y'' = \frac{dp}{dx}. \tag{3}$$

Ievietojam šo y'' vērtību diferencialvienādojumā (1):

$$\frac{dp}{dx} = k. \tag{4}$$

Kā redzams, diferencialvienādojuma (1) integrēšana ir reducējama uz diferencialvienādojumu (4) un (2) integrēšanu. Integrējam vienādojumu (4):

$$p = kx + C_1. \tag{5}$$

Ievietojam šo p vērtību vienādojumā (2):

$$\frac{dy}{dx} = kx + C_1.$$

Šo vienādojumu integrējam:

$$y = \frac{kx^2}{2} + C_1 x + C_2. \tag{6}$$

Vienādojums (6) ir dotā diferencialvienādojuma (1) vispārīgais integrals.

46. Veids $y'' = f(x)$. Šo diferencialvienādojumu integrējam līdzīgi iepriekšējam. Liekam

$$y' = p, \tag{1}$$

tad

$$y'' = \frac{dp}{dx} \tag{2}$$

un dotais diferencialvienādojums dabū šādu veidu:

$$\frac{dp}{dx} = f(x). \tag{3}$$

Integrējam vienādojumu (3):

$$p = \int f(x)\,dx + C_1. \tag{4}$$

Ievietojam šo p vērtību vienādojumā (1):

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)\,dx + C_1.$$

Separējam mainīgos:

$$dy = dx \int f(x)\,dx + C_1\,dx.$$

Integrējot dabūjam

$$y = \int dx \int f(x)\,dx + C_1 x + C_2,$$

kas ir dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals.

47. Veids $F(y', y'') = 0$. Liekam

$$y' = p, \text{ tad } y'' = \frac{dp}{dx}.$$

Ievietojot y' un y'' vērtības diferencialvienādojumā, dabūjam pirmās kārtas diferencialvienādojumu

$$F\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

Šo vienādojumu atrisina ar agrāk iztirzātiem paņēmieniem.

Piemērs. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$y'' = y'^2 + 1.$$

Liekot

$$y' = p \text{ un } y'' = \frac{dp}{dx},$$

dabūjam

$$\frac{dp}{dx} = p^2 + 1.$$

Separējam mainīgos:

$$\frac{dp}{1+p^2} = dx.$$

Šī vienādojuma integrals ir

$$\text{arc tg } p = x + C_1$$

jeb

$$\text{tg } (x + C_1) = p.$$

Ievietojam p $= \dfrac{dy}{dx}$:

$$\text{tg } (x + C_1) = \frac{dy}{dx}.$$

Mainīgo separēšana dod

$$dy = \text{tg } (x + C_1)\, dx.$$

Integrējot dabūjam

$$y + C_2 = \int \text{tg} (x + C_1)\, dx = \int \frac{\sin (x + C_1)}{\cos (x + C_1)}\, d\,(x + C_1)$$

jeb

$$y + C_2 = \ln \cos (x + C_1).$$

Šis vienādojums ir dotā diferencialvienādojuma integrals.

48. Veids $F(y, y'') = 0$. Liekam

$$y' = p; \text{ tad } y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}.$$

Ievietojot dotajā diferencialvienādojumā $y'' = p\,\dfrac{dp}{dy}$, dabūjam

$$F\left((y, p\,\frac{dp}{dy}\right) = 0. \tag{1}$$

Šis vienādojums ir pirmās kārtas attiecībā uz y un p. Vienādojumu atrisinām, kā norādīts pirmās kārtas diferencialvienādojuma integrēšanā. Vienādojumu (1) atrisinām attiecībā uz y'':

$$y'' = p\frac{dp}{dy} = f(y).$$

Separējam mainīgos:

$$p\,dp = f(y)\,dy.$$

Šī vienādojuma integrals ir:

$$\frac{p^2}{2} = \int f(y)\,dy + C.$$

No augšējā vienādojuma seko:

$$p = \sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}, \qquad (\text{šeit } C_1 = 2\,C)$$

jeb

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2\int f(x)\,dy + C_1}$$

un

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}}.$$

Integrējot dabūjam

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)\,dy + C_1}} + C_2.$$

Šis vienādojums ir dotā diferencialvienādojuma integrals.

P i e m ē r s. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$y'' = -ky.$$

Ar substitucijām

$$y' = p$$

un

$$y'' = p\frac{dp}{dy}$$

dotais vienādojums iegūst šādu veidu:

$$p \frac{dp}{dx} = -ky \qquad (k > 0).$$

Separējam mainīgos un integrējam:

$$p\,dp = -ky\,dy,$$

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{ky^2}{2} + C,$$

$$p = \sqrt{C_1 - ky^2}.$$

Liekam $p = \frac{dy}{dx}$, separējam mainīgos un integrējam:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1 - ky^2},$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{C_1 - ky^2}},$$

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - ky^2}},$$

$$x + C_2 = \frac{1}{\sqrt{k}} \int \frac{dy\sqrt{\frac{k}{C_1}}}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{k}{C_1}}\,y\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ arc sin } \sqrt{\frac{k}{C_1}}\,y.$$

Pārveidojot dabūjam:

$$\sqrt{k}(x + C_2) = \text{arc sin } \sqrt{\frac{k}{C_1}}\,y,$$

$$\sqrt{\frac{k}{C_1}}\,y = \sin\sqrt{k}\,(x + C_2) = \sin\left(\sqrt{k}x + C_3\right),$$

$$y = \sqrt{\frac{C_1}{k}}\left(\sin\sqrt{k}x \cos C_3 + \cos\sqrt{k}x \sin C_3\right)$$

jeb

$$y = A\cos\sqrt{k}x + B\sin\sqrt{k}x.$$

49. Veids. $F(x, y', y'') = 0$. Liekot, kā agrāk,

$$y' = p \text{ un } y'' = \frac{dp}{dx},$$

dabūjam diferencialvienādojumu

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right),$$

kas ir pirmās kārtas attiecībā uz x un p. Ja šo vienādojumu varam ar agrāk parādītiem paņēmieniem izintegrēt, tad dabūjam $\varphi(x, p, C_1) = 0$. Šo vienādojumu atrisinām attiecībā uz p:

$$p = \frac{dy}{dx} = f(x, C_1),$$

tad

$$y = \int f(x, C_1)\,dx + C_2.$$

Ja vienādojumu $\varphi(x, p, C_1) = 0$ nevár atrisināt attiecībā uz p, bet atrisināšana iespējama attiecībā uz x, tad dabūjam:

$$x = \psi(p, C_1) \tag{α}$$

un

$$dx = \psi'(p, C_1)\,dp.$$

No

$$p = \frac{dy}{dx} \text{ dabūjam } dx = \frac{dy}{p}.$$

Šo dx vērtību ievietojam augšējā vienādojumā:

$$\frac{dy}{p} = \psi'(p, C_1)\,dp.$$

Separējam mainīgos un integrējam:

$$dy = p\,\psi'(p, C_1)\,dp,$$

$$y = \int p\,\psi'(p, C_1)\,dp + C_2. \tag{β}$$

Dotā diferencialvienādojuma integralu šādā gadījumā dabūjam, izslēdzot p no vienādojumiem (α) un (β), bet, ja tas nav iespējams, tad šie vienādojumi dod diferencialvienādojuma atrisinājumu parametriskā veidā ar parametru p.

P i e m ē r s. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$xy'' + y' = 0.$$

Liekam:

$$y' = p \text{ un } y'' = \frac{dp}{dx}:$$

$$x\frac{dp}{dx} + p = 0.$$

Separējam mainīgos un integrējam:

$$\frac{dp}{p} + \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\ln p + \ln x = \ln C_1,$$

$$px = C_1,$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x}.$$

Atkal separējam mainīgos un integrējam:

$$dy = C_1 \frac{dx}{x}$$

un

$$y = C_1 \ln x + C_2.$$

Šis vienādojums ir dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals.

50. Veids F $(y, y', y'') = 0$. Liekam $y' = p$, tad

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}. \quad (1)$$

Dotais diferencialvienādojums ar šīm vērtībām pieņem šādu veidu:

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0. \quad (2)$$

Šis vienādojums ir pirmās kārtas attiecībā uz mainīgajiem y un p. Ja šo diferencialvienādojumu varam atrisināt ar agrāk norādītiem paņēmieniem, tad dabūjam vienādojumu

$$f(y, p, C_1) = 0. \quad (3)$$

Ja šo vienādojumu var atrisināt attiecībā uz p, tad

$$p = \varphi(y, C_1),$$

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$$

$$dx = \frac{dy}{\varphi(y, C_1)}$$

un

$$x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} + C_2. \tag{4}$$

Šis vienādojums ir dotā diferencialvienādojuma integrals. Ja vienādojumu (3) nevar atrisināt attiecībā uz p, bet var atrisināt attiecībā uz y, tad

$$y = \psi(p, C_1). \tag{5}$$

$$dy = \psi'(p, C_1)\, dp,$$

$$dy = p\, dx = \psi'(p, C_1)\, dp.$$

Separējam mainīgos:

$$dx = \frac{\psi'(p, C_1)}{p} dp.$$

Integrējam:

$$x = \int \frac{\psi'(p, C_1)}{p} dp + C_2. \tag{6}$$

Dotā diferencialvienādojuma integralu dabūjam, izslēdzot p no vienādojumiem (5) un (6); bet, ja tas nav iespējams, tad vienādojumus (5) un (6) uzskata par dotā diferencialvienādojuma atrisinājumu parametriskā veidā ar p kā parametru.

Piemērs.

Atrisināt diferencialvienādojumu:

$$y y'' + y'^2 = 1.$$

Ar substitucijām

$$y' = p \text{ un } y'' = p \frac{dp}{dy}.$$

augšējais vienādojums pieņem šādu veidu:

$$y\, p \frac{dp}{dy} + p^2 = 1.$$

Šo vienādojumu pārveidojam un separējam mainīgos:

$$y p\, dp + (p^2 - 1)\, dy = 0,$$

$$\frac{p\, dp}{p^2 - 1} + \frac{dy}{y} = 0.$$

Integrējam:

$$\int \frac{p\, dp}{p^2 - 1} + \int \frac{dy}{y} = C_1$$

jeb

$$\frac{1}{2} \ln (p^2 - 1) + \ln y = \ln C_1$$

un

$$\sqrt{p^2 - 1}\, y = C_1.$$

Šo vienādojumu pārveidojam:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \sqrt{C_1^2 + y^2}.$$

Separējam mainīgos:

$$dx = \frac{y\, dy}{\sqrt{C_1^2 + y^2}}.$$

Šī diferencialvienādojuma integrals ir

$$x + C_2 = \int \frac{y\, dy}{\sqrt{C_1^2 + y^2}} = \sqrt{C_1^2 + y^2}$$

jeb

$$y^2 = x^2 + 2C_2 x + C_3.$$

51. Veids $F(x, y, y', y'') = 0$. Pieņemsim, ka šis diferencialvienādojums ir homogens attiecībā uz y, y' un y''. Šādā gadījumā jabūt:

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = \lambda^n F(x, y, y', y'').$$

Še liekam

$$y = e^{\int z dx}.$$

Tad

$$y' = z e^{\int z dx}$$

un

$$y'' = z' e^{\int z dx} + z^2 e^{\int z dx} = (z' + z^2) e^{\int z dx}.$$

Augšējās izteiksmēs z ir kāda nezināma x funkcija. Ievietojot y' un y'' izteiksmes dotajā diferencialvienādojumā un dalot to ar kopējo reizinātāju $e^{\int z dx}$, dabūjam pirmās kārtas diferencialvienādojumu

$$F(x, z, z' + z^2) = 0.$$

No šī vienādojuma dabūjam z kā x funkciju. Dabūto z vērtību ievietojam substitucijas vienādojumā

$$y = e^{\int z dx},$$

kas tad dod y kā x funkciju.

Piemērs. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$y y'' - y'^2 - 6 x y^2 = 0.$$

Tas ir homogens attiecībā uz y, y' un y'' ar dimensijas rādītāju 2. Liekam

$$y = e^{\int z dx}; y' = z e^{\int z dx}; y'' = (z' + z^2) e^{\int z dx}.$$

Ievietojam šīs izteiksmes dotajā diferencialvienādojumā:

$$e^{\int z dx} (z' + z^2) e^{\int z dx} - z^2 e^{2\int z dx} - 6 x e^{2\int z dx} = 0.$$

Šo vienādojumu dalām ar $e^{2\int z dx}$:

$$z' + z^2 - z^2 - 6x = 0$$

jeb

$$z' - 6x = 0.$$

Šajā vienādojumā separējam mainīgos un integrējam:

$$dz - 6 x dx = 0,$$

$$z = 3x^2 + C.$$

Šo z vērtību ievietojam substitucijas vienādojumā $y = e^{\int z dx}$;

tad

$$v = e^{\int (3x^2 + C)\, dx} = e^{x^3 + Cx + C_1}$$

jeb

$$y = C_2 e^{x^3 + Cx}$$

52. Uzdevumi.

1) $y(y'')^2 = a^2$. Atb. $x + C_1 = \frac{1}{6a^2} \sqrt{4a\sqrt{y} + C}$
$(2a\sqrt{y} - C)$.

2) $yy'' - y'^2 = 0$. Atb. $y = C_1 e^{Cx}$.

3) $yy'' + y'^2 = 1$. Atb. $y^2 - (x + C_1)^2 = C$.

4) $y'' - 2xy' + x^2 y = 0$. Atb. $y = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \cos(x + C)$.

Piezīme. Pirmās kārtas diferencialvienādojuma atrisināšanā jālieto substitucija $z - x = u$.

5) $x^2 y'' + xy' - y = 0$. Atb. $y = Cx + \frac{C_1}{x}$.

Piezīme. Pirmās kārtas diferencialvienādojuma atrisināšanā jālieto substitucija $zx = \frac{1}{u}$.

6) $y'' - k^2 y = 0$. Atb. $y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$.

7) $xy'' + y' = 1$. Atb. $y = x + C_1 + C_2 \ln x$.

C. n-tās kārtas diferencialvienādojumu veidi, kurus var elementari izintegrēt

53. Vispārīgas ziņas. n-tās kārtas diferencialvienādojumu vispārīgais veids ir

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = 0.$$

Nav tādu paņēmienu, ar kuriem šādu vienādojumu varētu katrā gadījumā slēgtā veidā izintegrēt. Integrēšanu var izdarīt tikai atsevišķos gadījumos, kad diferencialvienādojums dots atsevišķos noteiktos veidos. Integrēšanas paņēmiens arī še galvenā kārtā pastāv substitucijas pielietošanā.

54. **Veids** $y^{(n)} = k$ ir visvienkāršākais. Ievērojot, ka

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}$$

diferencialvienādojumu rakstām šādi:

$$\frac{dy^{(n-1)}}{dx} = k.$$

Separējam mainīgos un vienādojumu integrējam:

$$y^{(n-1)} = kx + C_1.$$

Šo vienādojumu rakstām tā:

$$\frac{dy^{(n-2)}}{dx} = kx + C_1.$$

Atkal separējam mainīgos un integrējam:

$$y^{(n-2)} = \frac{kx^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Tādā kārtā turpinot, pēc n-kārtīgas integrēšanas dabūjam

$$y = \frac{kx^n}{n!} + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n.$$

55. **Veids** $y^{(n)} = f(x)$. Šo diferencialvienādojumu integrējam līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā.

P i e m ē r s. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$y''' = x^2 + \sin x$$

Integrēšanu izdarām šādi:

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = x^2 + \sin x,$$

$$dy'' = (x^2 + \sin x)\, dx,$$

$$y'' = \frac{x^3}{3} - \cos x + C_1,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{x^3}{3} - \cos x + C_1,$$

$$dy' = \left(\frac{x^3}{3} - \cos x + C_1\right) dx,$$

$$y' = \frac{x^4}{12} - \sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{12} - \sin x + C_1 x + C_2,$$

$$dy = \left(\frac{x^4}{12} - \sin x + C_1 x + C_2\right) dx,$$

$$y = \frac{x^5}{60} + \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

56. Veids $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$. Šo vienādojumu integrējam ar substituciju

$$y^{(n-1)} = p; \text{ tad } y^{(n)} = \frac{dp}{dx}.$$

Ievietojot šīs izteiksmes diferencialvienādojumā, dabūjam pirmās kārtās vienādojumu

$$F\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0. \tag{1}$$

Ja šo vienādojumu var atrisināt attiecībā uz $\frac{dp}{dx}$, tad

$$\frac{dp}{dx} = f(p).$$

Separējam mainīgos un integrējam:

$$dx = \frac{dp}{f(p)}, \tag{2}$$

$$x = \int \frac{dp}{f(p)} + C_1. \tag{3}$$

Še dabūjam

$$x = \varphi(p, C_1). \tag{4}$$

Atrisinām šo vienādojumu attiecībā uz p:

$$p = y^{(n-1)} = \psi(x, C_1).$$

Pēdējo vienādojumu integrējam, kā norādīts [55]. Ja vienādojumu (4) nevar atrisināt attiecībā uz p, tad pielieto šādu paņēmienu.

Tā kā

$$p = y^{(n-1)} = \frac{dy^{(n-2)}}{dx},$$

tad

$$dy^{(n-2)} = pdx.$$

Šajā vienādojumā ievietojam dx vērtību no (2):

$$dy^{(n-2)} = \frac{pdp}{f(p)}.$$

Šo vienādojumu integrējam:

$$y^{(n-2)} = \int \frac{pdp}{f(p)} + C_1.$$

Pārveidojot augšējā vienādojuma kreiso pusi, rakstām:

$$\frac{dy^{(n-3)}}{dx} = \int \frac{pdp}{f(p)} + C_1$$

un

$$dy^{(n-3)} = dx \int \frac{pdp}{f(p)} + C_1\,dx,$$

$$y^{(n-3)} = \int dx \int \frac{pdp}{f(p)} + C_1 x + C_2 = \int \frac{dp}{f(p)} \int \frac{pdp}{f(p)} + C_1 x + C_2.$$

Turpinām diferencialvienādojuma integrēšanu ar norādīto paņēmienu; rezultatā dabūjam šādu izteiksmi:

$$y = \varphi(p) + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + N. \tag{5}$$

Dotā diferencialvienādojuma integralu dabūjam, izslēdzot p no vienādojumiem (3) un (5).

Piemērs. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$y''' - y'' = 0.$$

Liekam $y'' = p$ un $y''' = \frac{dp}{dx}$; tad dotais diferencialvienādojums pieņem šādu veidu:

$$\frac{dp}{dx} - p = 0.$$

Šķiram mainīgos un integrējam:

$$\frac{dp}{p} = dx,$$

$$\ln p + \ln C = x,$$

$$p = \frac{1}{C} e^x = C_1 e^x,$$

$$p = y'' = \frac{dy'}{dx} = C_1 e^x,$$

$$dy' = C_1 e^x \, dx,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = C_1 e^x + C_2,$$

$$dy = C_1 e^x \, dx + C_2 \, dx,$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x + C_3.$$

57. Veids $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$.

Šo liekam

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p; \text{ tad } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^2 p}{dx^2}. \tag{1}$$

Ar augšējiem apzīmējumiem diferencialvienādojums dabū šādu veidu:

$$F\left(p, \frac{d^2p}{dx^2}\right) = 0. \tag{2}$$

Ja iespējams šo vienādojumu atrisināt attiecībā uz $\frac{d^2p}{dx^2}$, tad

$$\frac{d^2p}{dx^2} = f(p) \tag{3}$$

jeb

$$p'' = f(p).$$

Tā kā $p'' = \frac{dp'}{dx} = \frac{dp'}{dp} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{p'dp'}{dp}$, tad augšējo vienādojumu varam rakstīt šādi:

$$\frac{p'dp'}{dp} = f(p). \tag{4}$$

Separējam mainīgos un integrējam:

$$p'\,dp' = f(p)\,dp \text{ un } \frac{p'^2}{2} = \int f(p)\,dp + C;$$

$$p' = \frac{dp}{dx} = \sqrt{2\int f(p)\,dp + C_1}; \tag{5}$$

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{2\int f(p)\,dp + C_1}}; \tag{6}$$

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\int f(p)\,dp + C_1}} + C_2 = \varphi(p, C_1, C_2). \tag{7}$$

Ja augšējo vienādojumu var atrisināt attiecībā uz p, tad

$$p = \psi(x, C_1, C_2),$$

un varam rakstīt

$$y^{(n-2)} = \psi(x, C_1, C_2).$$

Šo diferencialvienādojumu atrisinām ar paņēmienu, kas parādīts [55]. Ja vienādojumu (7) nevar atrisināt attiecībā uz p, tad lietojam šādu paņēmienu.

Tā kā

$$y^{(n-2)} = \frac{dy^{(n-3)}}{dx} = p,$$

tad

$$dy^{(n-3)} = p\,dx.$$

Šajā vienādojumā ievietojam dx vērtību no (6):

$$dx = \frac{dp}{\sqrt{2\int f(p)\,dp + C_1}} = \frac{dp}{\psi(p)}; \tag{8}$$

dabūjam

$$dy^{(n-3)} = \frac{pdp}{\psi(p)}.$$

Šo vienādojumu integrējam:

$$y^{(n-3)} = \int \frac{pdp}{\psi(p)} + C_3 = \frac{dy^{(n-4)}}{dx}.$$

Separējam mainīgos:

$$dy^{(n-4)} = dx \int \frac{pdp}{\psi(p)} + C_3 dx.$$

Šinī vienādojumā ievietojam dx vērtību no (8); tad

$$dy^{(n-4)} = \frac{dp}{\psi(p)} \int \frac{pdp}{\psi(p)} + C_3\, dx$$

un

$$y^{(n-4)} = \int \frac{dp}{\psi(p)} \int \frac{pdp}{\psi(p)} + C_3\, x + C_4 = \frac{dy^{(n-5)}}{dx}. \tag{9}$$

Turpinot integrēšanu pēc šī parauga, dabūjam

$$y = \varphi(p) + Dx^{n-3} + Ex^{n-4} + \ldots + N\ldots \tag{10}$$

Izslēdzot p no vienādojumiem (7) un (10), kā rezultatu dabūjam dotā diferencialvienādojuma integralu.

58. Veids $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$. Liekam

$$y^{(n-1)} = p \text{ un } y^{(n)} = \frac{dp}{dx}.$$

Ar šīm izteiksmēm diferencialvienādojums dabū šādu veidu:

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0.$$

8*

Šo pirmās kārtas diferencialvienādojumu starp x un p atrisinot, dabūjam

$$p = f(x, C)$$

un

$$y^{(n-1)} = f(x, C).$$

Šo vienādojumu integrējam, kā parādīts [55].

Piemērs. Diferencialvienādojumu

$$x y^{IV} - 3y''' - x^4 = 0$$

integrējam, liekot

$$y''' = p.$$

Tad dotais diferencialvienādojums dabū šādu veidu:

$$x \frac{dp}{dx} - 3p - x^4 = 0$$

jeb

$$\frac{dp}{dx} - \frac{3}{x} p = x^3.$$

Šo pirmās kārtas linearo diferencialvienādojumu integrējam ar Bernulli vai ar konstantu variacijas paņēmienu:

$$p = x^4 + C_1 x^3.$$

Ar šo p nozīmi rakstām

$$y''' = x^4 + C_1 x^3.$$

Šo vienādojumu integrējot, kā parādīts [55], dabūjam

$$y = \frac{x^7}{210} + \frac{C_1}{120} x^6 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$$

jeb

$$y = \frac{x^7}{210} + Ax^6 + Bx^2 + Cx + D.$$

59. Viendimensionali diferencialvienādojumi. Ja uzskatām diferencialvienādojumā atrodošos y par m-tās un x par pirmās dimensijas lielumiem, tad $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ir $(m - 1)$ dimensijas lielums. Še m uzskatām par veselu skaitli. Izteiksme $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{dp}{dx}$, kā redzams, ir $(m - 2)$ dimensijas lielums, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\frac{dp}{dx}}{dx}$ ir $(m - 3)$ dimensijas utt.

Ja visiem diferencialvienādojuma locekļiem ir augšā minētā nozīmē viena un tā pati dimensija, tad tādu diferencialvienādojumu sauc par **viendimensionalu**. Apskatīsim viendimensionala diferencialvienādojuma gadījumu, kad $m = 1$; tad x un y ir abi pirmās dimensijas lielumi. Šādā gadījumā liekam

$$y = xz \text{ un } x = e^{\vartheta}, \tag{1}$$

Šīs izteiksmes diferencējot, dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx} = z + e^{\vartheta}\frac{dz}{e^{\vartheta}\,d\vartheta} = z + \frac{dz}{d\vartheta} \tag{2}$$

un

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{d\vartheta^2}\cdot\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{dz}{e^{\vartheta}d\vartheta} + \frac{d^2z}{d\vartheta^2}\cdot\frac{d\vartheta}{e^{\vartheta}d\vartheta} =$$

$$= \left(\frac{dz}{d\vartheta} + \frac{d^2z}{d\vartheta^2}\right)e^{-\vartheta}. \tag{3}$$

Ievietojot augšējās $\frac{dy}{dx}$ un $\frac{d^2y}{dx^2}$ vērtības dotajā diferencialvienādojumā, dabūjam diferencialvienādojumu starp z un ϑ. Še jāpiezīmē, ka izteiksmes (3) labajā pusē faktora $e^{-\vartheta}$ pakāpes rādītājam var būt kāds koeficients, kas, ja diferencialvienādojums ir viendimensionals, noteic pa kreisi stāvošā diferencialkvocienta dimensiju. Dotajā gadījumā ar pieņēmumu $m = 1$ koeficients (-1) faktorā $e^{-\vartheta}$ rāda, ka $\frac{d^2y}{dx^2}$ ir (-1) dimensija.

Ievērojot teikto, ja izdarām parādīto substituciju viendimensionalā diferencialvienādojumā, reizinātāja $e^{-\vartheta}$ pakāpes koeficients (šinī gadījumā (— 1) katrā diferencialvienādojuma loceklī būs tas pats; vienādojumu tāpēc var dalīt ar šo reizinātāju $e^{-\vartheta}$.

Piemērs. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \left[mx^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ny^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Kā redzams, šis diferencialvienādojums ir viendimensionals, ja x un y abus pieņemam par pirmās dimensijas lielumiem. Pielietojot norādīto substituciju, dabūjam

$$e^{2\vartheta}\left[\frac{dz}{d\vartheta} + \frac{d^2z}{d\vartheta^2}\right)e^{-\vartheta} = \left[me^{2\vartheta}\left(\frac{dz}{d\vartheta} + z\right)^2 + n\, e^{2\vartheta} z^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Vienādojumu varam dalīt ar e^{ϑ}; tad

$$\frac{dz}{d\vartheta} + \frac{d^2z}{d\vartheta^2} = \left[m\left(\frac{dz}{d\vartheta} + z\right)^2 + n\, z^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Šis diferencialvienādojums starp ϑ un z ir formā

$$F(z'', z', z) = 0.$$

Tā integrēšana ar substituciju $z' = p$ parādīta [50]. Ar šo substituciju augšējais diferencialvienādojums dabū pirmās kārtas diferencialvienādojuma veidu. Vispārīgā gadījumā pieņemam, ka y ir m-tās dimensijas. Tad liekam

$$x = e^{\vartheta} \text{ un } y = x^m z = ze^{m\vartheta}.$$

Dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} + z\right)e^{(m-1)\vartheta};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + (2m-1)\frac{dz}{d\vartheta} + m(m-1)\,z\right]e^{(m-2)\vartheta} \text{ utt.}$$

Piemērs. Diferencialvienādojums

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} = \left(x^3 + 2xy\right)\frac{dy}{dx} - 4y^2$$

ir viendimensionals, ja uzskatām x par pirmās un y par otrās dimensijas lielumiem. Izdarot norādīto substituciju, dabūjam diferencialvienādojumu

$$\frac{d^2z}{d\vartheta^2} + 2(1-z)\frac{dz}{d\vartheta} = 0,$$

kura veids ir

$$F(z'', z', z) = 0.$$

60. Mainīgo maiņa. Ar šo paņēmienu var daudzreiz vienkāršot dotā diferencialvienādojuma veidu. Apskatīsim dažus gadījumus.

a) Atkarīgā mainīgā maiņa.

Diferencialvienādojumā

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\cdot\frac{dy}{dx} - n^2y = 0$$

liekam

$$z = xy.$$

Tad diferencialvienādojums dabū ļoti vienkāršu veidu

$$\frac{d^2z}{dx^2} - n^2 z = 0.$$

b) Neatkarīgā mainīgā maiņa.

Diferencialvienādojumā

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{tg} x\frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$$

liekam

$$z = \sin x$$

un arī dabūjam ļoti vienkāršu veidu

$$\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0.$$

61. Uzdevumi.

1) $ay''' = y''$. Atb. $y = Ae^{\frac{x}{a}} + Bx + C$.

2) $a^2y^{IV} = y''$. Atb. $y = Ae^{\frac{x}{a}} + Be^{-\frac{x}{a}} + Cx + D$.

3) $y^{IV} = x \sin x$. Atb. $y = x \sin x + 4 \cos x + Cx^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

4) $(y''')^2 - 3y'' + 2 = 0$. Atb. $y = \frac{1}{16}(x + C)^4 + \frac{1}{3}x^2 + C_1 x + C_2$.

5) $xy''' + y'' = x + 1$. Atb. $y = \frac{x^3 + 6x^2}{12} + Cx \ln x + C_1x + C_2$.

D. Augstākas kārtas diferencialvienādojuma tuvīnas integrēšanas paņēmieni

***62. Otras kārtas diferencialvienādojuma grafiska integrēšana.** Diferencialvienādojumu

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

atrisinām attiecībā uz y'', pie kam sakarībā

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2}$$

funkciju f pieņemam kā viennozīmīgu. Ja atrisinājums dod vairākas y'' vērtības, tad apskatām vienu no tām. Kā redzams no (2), y'' ir noteikts lielums, ja doti lielumi x, y, y'. No ģeometriskā viedokļa raugoties, tas nozīmē, ka y'' ir noteikts, ja pieņem plaknē kādu punktu P ar koordinatām x, y un šajā punktā virzienu ar virziena koeficientu y'. Ievērojot teikto, pieņemam ka punktā $P(x, y)$ zināmi y' un y''. Šādā gadījumā diferencialģeometrija dod

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}, \tag{3}$$

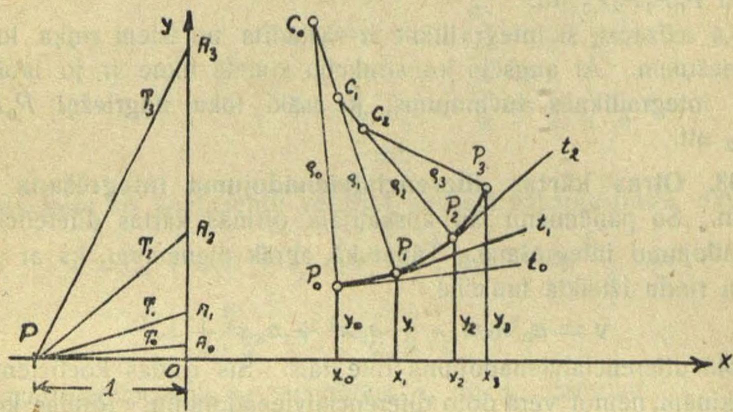
t. i., integrallīknes liekuma radiusu punktā P; ar tā palīdzību varam zīmēt integrallīknes turpinājumu, lietojot šādu paņēmienu.

Ar sākuma noteikumiem dots integrallīknes punkts $P_0\ (x_0, y_0)$ ar virziena koeficientu $\operatorname{tg} \tau_0 = y_0'$. Ievietojot šos dotos lielumus vienādojumā (2), dabūjam integrallīknes punktam P_0 piekārtoto

y_0''. Ievietojot y_0' un y_0'' vērtības formulā (3), dabūjam integrallīknes punktam P_0 piekārtoto liekuma radiusu ρ_0:

$$\rho_0 = \frac{(1 + y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y_0''}.$$

Ar dotiem lielumiem x_0, y_0,y_0' un aprēķināto liekuma radiusu ρ_0 sākam integrallīknes zīmēšanu šādā kārtā: 18. zīmējumā atliekam uz x ass $OP = 1$, šajā mērogā atliekam uz y ass pieņemto lielumu $y_0' = OA_0$. Taisnes T_0 virziena koeficients tad ir y_0'. Zīmējam plaknē doto punktu P_0 un zīmējam šajā punktā



18. zīm.

taisni t_0 ar doto virziena koeficientu y_0'. To izdarām, zīmējumā velkot $t_0 \parallel T_0$. Punktā P_0 velkam stateni pret t_0. Uz šī stateņa atliekam aprēķināto ρ_0 un dabūjam liekuma centru C_0. Ap C_0 velkam riņķi ar radiusu ρ_0. Uz šī riņķa, kas ir punkta P_0 liekuma riņķis, pieņemam punktu P_1. Ja loks P_0P_1 ir mazs, tad punkts P_1 tuvīni atrodas uz integrallīknes. Punktā P_1 velkam stateni t_1 pret C_0P_1. Taisne t_1 tad dod integrallīknes pieskari punktā P_1. Caur P velkam taisni $T_1 \parallel t_1$; taisne T_1 nogriež arī uz y ass OA_1, ko izmērījot staru diagramas mērogā dabūjam taisnes t_1 virziena koeficientu y_1'. y_1'' dabūjam, ievietojot formulā (2) punkta P_1 koordinatu x_1 un y_1 vērtības, mērītas zīmējuma mērogā, un y_1' vērtību, mērītu staru mērogā. Šo y_1'' un y_1' vērtību ievietojot formulā (3), dabūjam ρ_1. Atliekot uz taisnes P_1C_0 garumu ρ_1, dabūjam liekuma centru C_1. Ap liekuma centru C_1 velkam riņķi ar radiusu ρ_1 un uz šī riņķa pieņemam punktu P_2 tuvu punktam P_1. Ar šādu pieņēmumu konstruētais punkts P_2 atradīsies tuvīni uz integrallīknes. Punktā P_2 velkam stateni t_2 pret taisni P_2C_1. Tad taisne t_2 ir integrallīknes pieskare punktā P_2. Caur punktu P velkam $T_2 \parallel t_2$. Stars T_2 nogriež uz y ass OA_2, kas, mērīts staru mērogā, dod punktam P_2 piekārtoto y_2'. Šādā kārtā, konstrukciju turpinot, dabūjam integrallīknes tuvīnu attēlu $P_0P_1P_2P_3$ utt.

Kā redzams, šī integrallīkne ir sastādīta no īsiem riņķa loka nogriežņiem. Ar augšējo konstrukciju zīmētā līkne ir jo labāks īstās integrallīknes tuvinājums, jo īsāki loku nogriežņi P_0P_1, P_1P_2 utt.

63. Otras kārtas diferencialvienādojuma integrēšana ar rindu. Šo paņēmienu jau apskatījām pirmās kārtas diferencialvienādojumu integrēšanā. Tāpat kā agrāk pieņemam, ka ar pakāpju rindu izteiktā funkcija

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

ir dotā diferencialvienādojuma integrals. Šīs rindas koeficientus aprēķinām, ņemot vērā doto diferencialvienādojumu. Rindas konverģence jāpārbauda, ņemot vērā aprēķinātos koeficientus.

P i e m ē r s. Nointegrēt diferencialvienādojumu

$$y'' - xy' - y = 0.$$

Ievietojot šajā diferencialvienādojumā

$$y = \sum a_\lambda x^\lambda$$

un, savelkot kopā koeficientus pie x^λ, dabūjam:

$$\sum [(\lambda + 2)(\lambda + 1)\, a_{\lambda+2} - \lambda a_\lambda - a_\lambda]\, x^\lambda = 0$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \dots).$$

Tā kā augšējai sakarībai jāpastāv pie katras x vērtības, tad koeficientiem pie katras x pakāpes jābūt 0; tātad:

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1)\, a_{\lambda+2} - (\lambda + 1)\, a_\lambda = 0$$

jeb

$$a_{\lambda+2} = \frac{a_\lambda}{\lambda+2} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

No augšējās izteiksmes dabūjam:

$$\text{ja } \lambda = 0, \quad a_2 = \frac{a_0}{2},$$

$$\text{„ } \lambda = 1, \quad a_3 = \frac{a_1}{3},$$

$$\text{„ } \lambda = 2, \quad a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{1}{2 \cdot 4} a_0,$$

$$\text{„ } \lambda = 3, \quad a_5 = \frac{a_3}{5} = \frac{1}{3 \cdot 5} a_1,$$

$$\text{„ } \lambda = 4, \quad a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} a_0$$

utt.

Ievietojot šīs koeficientu vērtības augšējā pakāpju rindā, dabūjam

$$y = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2} a_0 x^2 + \frac{1}{3} a_1 x^3 + \frac{1}{2 \cdot 4} a_0 x^4 + \\ + \frac{1}{3 \cdot 5} a_1 x^5 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} a_0 x^6 + \ldots$$

Sakārtojot locekļus ar reizinātāju a_0 un a_1, dabūjam:

$$y = a_0 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \ldots\right) + \\ + a_1 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} x^5 + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} x^7 + \ldots\right).$$

Iekavās esošās rindas ir arvien savirzāmas, un tā kā integrala izteiksmē atrodas divas patvaļīgas konstantes a_0 un a_1, tad, ievērojot teikto, redzams, ka dabūtā rinda ir dotā diferencialvienādojuma pilnīgs integrals. Iekavās atrodošās rindas ir dotā diferencialvienādojuma neatkarīgie partikularie integrali. Pirmās rindas suma, kā redzams, ir:

$$1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \ldots = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Paņēmienu var pielietot arī augstākas kārtas diferencialvienādojumu integrēšanai. To var arī izdarīt ar Teilora vai Maklorena rindu, kā tas parādīts [42]. Integrēšana ar minētām rindām parocīga tikai vienkāršos gadījumos.

64. Otras kārtas diferencialvienādojuma integrēšana ar atkārtotām kvadraturām. Šo paņēmienu jau pielietojām pirmās kārtas diferencialvienādojuma integrēšanai [34].

Doto diferencialvienādojumu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

rakstām ar integrala palīdzību šādā veidā

$$y = y_0 + y_0'x - \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} [p(x)y' + q(x)y]\, dx. \tag{2}$$

Sākuma noteikumi te pieņemti šādi:

$$\text{ja } x = x_0,\ y = y_0 \text{ un } y' = y_0'.$$

Kā redzams, diferencējot izteiksmi (2) divas reizes attiecībā uz x, dabūjam doto vienādojumu (1).

P i e m ē r s. Pielietosim atkārtoto kvadraturu paņēmienu diferencialvienādojuma

$$y'' - xy = 0$$

integrēšanā. Pieņemam šādus sākuma noteikumus:

$$\text{ja } x = 0,\ y = 1 \text{ un } y' = 0$$

Šādā gadījumā integralvienādojums (2) dabū veidu

$$y = 1 + \int_0^x dx \int_0^x xy\, dx. \tag{3}$$

Ievietojam augšējā izteiksmē (3) $y = 1$ kā y pirmo tuvīno vērtību; tad integrējot, dabūjam

$$y_1 = 1 + \int_0^x dx \int_0^x x \cdot 1 dx = 1 + \int_0^x dx \frac{x^2}{2} = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}.$$

Ievietojot vienādojumā (3) tuvīno vērtību $y = 1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3}$, dabūjam

$$y_2 = 1 + \int_0^x dx \int_0^x x\left(1 + \frac{x^3}{2\cdot 3}\right) dx = 1 +$$

$$+ \int_0^x dx \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 5}\right) = 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}$$

jeb arī

$$y = 1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 4x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$$

Turpinot paņēmiena pielietošanu, dabūjam

$$y = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 4x^6}{6!} + \frac{1\cdot 4\cdot 7x^9}{9!} \dots$$

Atmetot rindā pirmo locekli, dabūjam

$$u_n = \frac{1\,.\,4\cdot 7\dots(3n-2)}{(3n)!}\,x^{3n},$$

$$u_{n+1} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\dots(3n+1)}{(3n+3)!}\,x^{3n+3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 0.$$

Augšējā rinda tātad ir savirzāma ar katru galīgu x. Parādīto integrēšanas paņēmienu var pielietot arī augstākas kārtas diferencialvienādojumu integrēšanā.

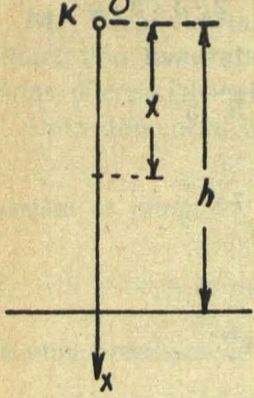
E. Problemu atrisināšana

65. Smaga ķermeņa krišana, ievērojot gaisa pretestību. Izpētīt ķermeņa kustību, pieņemot, ka: 1) ķermeņa masa ir m, 2) ķermenis krīt brīvi no augstuma h virs zemes ar sākuma ātrumu $v_0 = 0$ un 3) gaisa pretestība $W = k^2v^2$. Še v ir ķermeņa krišanas ātrums un k^2 koeficients, kas atkarīgs no ķermeņa veida, izmēriem, gaisa īpatnēja svara.

Pieņemsim x ass pozitivo virzienu krišanas virzienā. Saskaņā ar Ņutona likumu rakstām kustības vienādojumu:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F. \qquad (1)$$

F še ir uz ķermeni darbojošos spēku rezultante. Šie spēki ir ķermeņa svars $G = mg$ pozitivā virzienā un gaisa pretestība $W = k^2v^2$ negativā virzienā. Tātad $F = mg - k^2v^2$, un ķermeņa kustības vienādojumu tad rakstām:



19. zīm.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - k^2v^2. \tag{2}$$

Dalot vienādojumu (2) ar m, dabūjam

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k^2}{m} v^2. \tag{3}$$

Ievērojot, ka $\frac{dx}{dt} = v$, vienādojumu (3) rakstām šādi:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k^2}{m} v^2; \tag{4}$$

tā otras kārtas diferencialvienādojums pārveidots pirmās kārtas vienādojumā.

Vienādojums (3) rāda, ka, ja

$$g - \frac{k^2}{m} v^2 = 0, \tag{5}$$

tad paātrinājums $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ un ķermenis krīt ar pastāvīgu ātrumu. No vienādojuma (5) dabūjam, ka šādā gadījumā:

$$v = \frac{\sqrt{mg}}{k} = \text{const.} \tag{6}$$

Tas nozīmē, ka maksimalais ātrums, ko ķermenis krītot var sasniegt, ir tas, ko dod formula (6). No vienādojuma (4), separējot mainīgos, dabūjam

$$dt = \frac{dv}{g - \frac{k^2}{m} v^2}. \tag{7}$$

Integrējam:

$$t=\int\frac{dv}{g-\frac{k^2}{m}v^2}+C=\frac{\sqrt{m}}{k\sqrt{g}}\int\frac{d\frac{k}{\sqrt{mg}}v}{1-\left(\frac{k}{\sqrt{mg}}v\right)^2}+C,$$

$$t=\frac{\sqrt{m}}{k\sqrt{g}}\operatorname{arc\,tg}h\frac{k}{\sqrt{mg}}v+C. \tag{8}$$

Tā kā ar $t=0$ pieņemts arī $v=0$, tad, ievietojot šīs vērtības vienādojumā, dabūjam $C=0$.

Tātad

$$t=\frac{\sqrt{m}}{k\sqrt{g}}\operatorname{arc\,tg}h\frac{k}{\sqrt{mg}}v=\frac{\sqrt{m}}{2k\sqrt{g}}\ln\frac{\sqrt{mg}+kv}{\sqrt{mg}-kv}. \tag{9}$$

Šī formula dod t kā v funkciju.

No (9) seko

$$\operatorname{arc\,tg}h\frac{k}{\sqrt{mg}}v=\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t. \tag{10}$$

Apgriežot izteiksmi (10), dabūjam:

$$\frac{k}{\sqrt{mg}}v=\operatorname{tg}h\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t$$

un

$$v=\frac{\sqrt{mg}}{k}\operatorname{tg}h\left(\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t\right) \tag{11}$$

vai arī

$$v=\frac{\sqrt{mg}}{k}\cdot\frac{e^{\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t}-e^{-k\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t}}{e^{\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t}+e^{\frac{-k\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t}}=\frac{\sqrt{mg}}{k}\cdot\frac{e^{\frac{2k\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t}-1}{e^{\frac{2k\sqrt{g}}{\sqrt{m}}t}+1}. \tag{12}$$

Šī formula dod v kā t funkciju.

Liekot formulā (12) $t=\infty$, dabūjam

$$v_{t=\infty}=\frac{\sqrt{mg}}{k}.$$

Salīdzinot ar (6), redzam, ka dabūts agrākais rezultats: v dabū pastāvīgu vērtību, kas izteikta ar formulu (6), tikai ja $t = \infty$, bet, ievērojot formulu (11) un *tgh* funkcijas grafiku, redzam, ka v sasniedz jau galīgā laikā tādu vērtību, kas maz atšķiras no vērtības, ko dod formula (6).

Liekot formulā (11) $v = \frac{dx}{dt}$, dabūjam

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{mg}}{k} \operatorname{tg}h \left(\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t \right).$$

Separējam mainīgos:

$$dx = \frac{\sqrt{mg}}{k} \operatorname{tg}h \left(\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t \right) dt.$$

Integrējam

$$x = \frac{\sqrt{mg}}{k} \int \left(\operatorname{tg}h \frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t \right) \cdot dt + C =$$

$$= \frac{m}{k^2} \ln \cos h \left(\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t \right) + C.$$

Ar $t = 0$ arī $x = 0$ un tāpēc $C = 0$. Tātad

$$x = \frac{m}{k^2} \ln \cos h \frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t = \frac{m}{k^2} \ln \frac{e^{\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t} + e^{\frac{-k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t}}{2}. \tag{13}$$

No (13) dabūjam

$$\ln \cos h \frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t = \frac{k^2}{m} x, \tag{14}$$

$$\cos h \frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t = e^{\frac{k^2}{m} x}.$$

No (14) seko

$$\frac{k\sqrt{g}}{\sqrt{m}} t = \operatorname{arc} \cos h\, e^{\frac{k^2}{m} x}$$

un

$$t = \frac{\sqrt{m}}{k\sqrt{g}} \operatorname{arc\,cosh} e^{\frac{k^2}{m}x} = \frac{\sqrt{m}}{k\sqrt{g}} \ln \left(e^{\frac{k^2}{m}x} + \sqrt{e^{\frac{k^4 x^2}{m^2}} - 1} \right). \quad (15)$$

Formula (13) dod x kā t funkciju, un formula (15) dod t kā x funkciju. Sakaru starp x un v dabūjam šādi. Vienādojumā

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k^2}{m} v^2$$

liekam

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}.$$

Tad

$$v \frac{dv}{dx} = g - \frac{k^2}{m} v^2.$$

Separējam mainīgos:

$$dx = \frac{v\,dv}{g - \frac{k^2}{m} v^2}$$

un

$$x = \int \frac{v\,dv}{g - \frac{k^2}{m} v^2} = -\frac{m}{2k^2} \ln \left(g - \frac{k^2}{m} v^2 \right) + C.$$

Ar $x = 0$ arī $v = 0$. Ievietojam šīs vērtības augšējā izteiksmē

$$C = \frac{1}{2} \frac{m}{k^2} \ln g.$$

Ar šo vērtību dabūjam

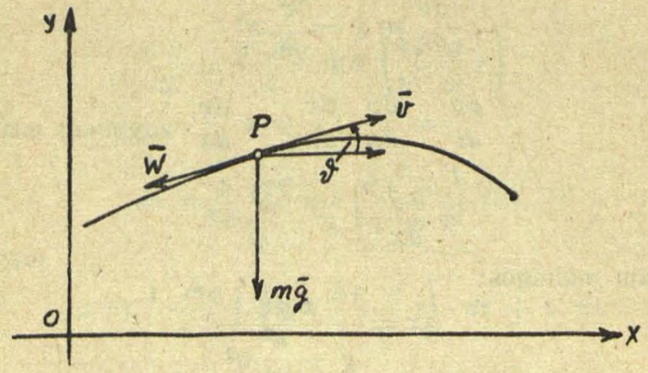
$$x = \frac{m}{2k^2} \ln \frac{g}{g - \frac{k^2}{m} v^2}. \quad (16)$$

Šī formula dod x kā v funkciju. No formulas (16) dabūjam v kā x funkciju:

$$v = \frac{1}{k} \sqrt{mg \left(1 - e^{\frac{-2k^2}{m}x} \right)}. \quad (17)$$

66. Balistikas problema. Pieņemsim, ka ķermenis kustas gaisā un ka uz ķermeni iedarbojas smaguma spēks un gaisa pretestība $W(v)$, kas pastāvīgi pretēja ātrumam $\bar{v}$.

Pieņemam x asi $\perp$ $m\bar{g}$ un tās pozitivo virzienu kustības virzienā. Y asi pieņemam pretēji $m\bar{g}$ virzienam. Apzīmējam ar ϑ leņķi, ko $\bar{v}$ veido ar horizontali.



20. zīm.

Ceļa līknes dabīgā koordinatu sistemā (pieskare, normale) kustības vienādojumus rakstām šādi:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\vartheta - W(v), \tag{1}$$

$$m\cdot\frac{v^2}{\rho} = mg\cos\vartheta. \tag{2}$$

Vienādojums (2) rāda, ka $\cos\vartheta$ arvien ir pozitivs un tāpēc

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Tā kā $m\bar{g}$ virziens ir uz leju, tad līkne ir konkava uz leju; tāpēc leņķis ϑ pastāvīgi dilst un

$$\frac{d\vartheta}{dt} \leqslant 0.$$

Tā kā līkņu liekums še arvien ir pozitivs, tad ar $\frac{1}{\rho} > 0$ un $\frac{d\vartheta}{dt} \leqslant 0$ jābūt

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\vartheta}{ds} = -\frac{d\vartheta}{dt} \cdot \frac{1}{v}.$$

Ar to vienādojums (2) pieņem šādu veidu:

$$\frac{-v d\vartheta}{dt} = g \cos \vartheta. \tag{2'}$$

Ņemam ϑ kā neatkarīgo mainīgo. Dalot (1) ar (2′), dabūjam

$$\frac{dv}{v} = \frac{mg \sin \vartheta + W(v)}{mg \cos \vartheta} d\vartheta. \tag{3}$$

Šis vienādojums ir pirmās kārtas un, ja pieņemam, ka $W = kv$ vai $W = k^2 v^2$, tad vienādojums ir Bernulli tipa. Integrējot vienādojumu (3), dabūjam

$$v = f(\vartheta). \tag{4}$$

No (2′) seko

$$dt = -\frac{v d\vartheta}{g \cos \vartheta} \tag{5}$$

un

$$t = -\int \frac{v d\vartheta}{g \cos \vartheta} = -\frac{1}{g} \int \frac{f(\vartheta) d\vartheta}{\cos \vartheta}. \tag{6}$$

No

$$dx = ds \cos \vartheta = v \cos \vartheta\, dt, \text{ dabūjam}$$

$$x = \int f(\vartheta) \cos \vartheta\, dt = -\frac{1}{g} \int [f(\vartheta)]^2 d\vartheta \tag{7}$$

un no

$$dy = ds \sin \vartheta = v \sin \vartheta\, dt \text{ seko}$$

$$y = -\frac{1}{g} \int [f(s)]^2 \, tg \vartheta\, d\vartheta. \tag{8}$$

Vienādojumi (6), (7), (8) dod problemas atrisinājumu.

67. Dzelzceļa pārejas līkne. Dzelzceļa līknēs paceļ ārējo sliedi augstāk pret iekšējo par

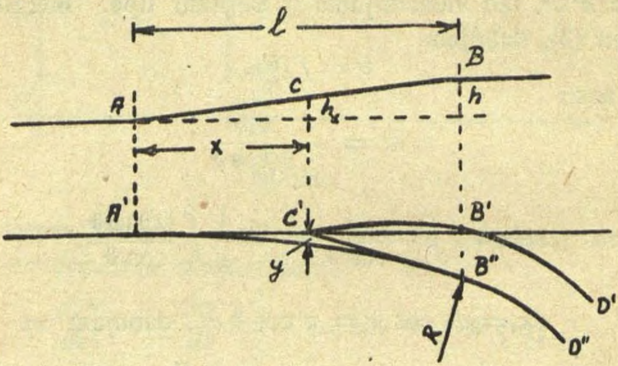
$$h = \frac{s \cdot v^2}{gR}. \tag{1}$$

$A'B'D'$ ceļš bez pārejas līknes

$A''B''D''$ „ ar „ līkni,

kur s — ceļa platums, v — vilciena kustības ātrums, R — ceļa līknes riņķa radiuss un g — gravitacijas paātrinājums.

Ar minēto pacēlumu panāk to, ka vagona svara un vagona masas centrifugalā spēka rezultante ir $\perp$ pret plakni, ko īsā ceļa gabalā varam likt caur sliežu virsām. Ar šādu konstrukciju novēršam centrifugalā spēka iedarbību, kas izpaustos kā vagona spiediens uz ārējo sliedi. Pacēlumu h ieved taisnē uz garuma l proporcionali attālumam no A 21. zīm. Ja ceļš izveidots tā, ka



21. zīm.

taisne pieskaras līknei, tad pieskaršanās punktā B' vilcienam ejot $A' - B'$ virzienā pēkšņi parādās vai pretējā virzienā pēkšņi pazūd centrifugalais spēks, kas izpaužas triecienā starp ceļu un ripojošo materialu. Pie lieliem ātrumiem šis trieciens ir jāņem vērā un jānovērš. To izdara, būvējot starp taisni un riņķi „pārejas līkni" $A'B''$, kurai ir šādas īpašības: 1) Pārejas līkne pieskaras taisnei punktā A'. Pārejas līknes radiuss šajā punktā ir $R = \infty$. 2) Pārejas līkne pieskaras līknei — riņķim — punktā B'' ar radiusu $\rho_0 = R$. 3) Starppunktā C' pārejas līknes radiuss ir tāds, kāds seko no formulas (1).

No 21. zīmējuma dabūjam

$$h_x = \frac{h}{l} x. \quad (2)$$

No (1) seko

$$h_x = \frac{sv^2}{g\rho} \quad (\rho \text{ — pārejas līknes mainīgais radiuss}). \quad (3)$$

Tad

$$\frac{h}{l} \cdot x = \frac{sv^2}{g\rho}. \quad (4)$$

No (3) un (4) dabūjam

$$\rho = \frac{sv^2 l}{gh \cdot x}. \quad (5)$$

Lielumi s, v, l, g, h ir doti; apzīmējam

$$P = \frac{s \cdot v^2 l}{gh};$$

tad formula (5) dod

$$\rho = \frac{P}{x}. \quad (6)$$

Ievietojot vienādojumā (6) $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$, dabūjam

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{P}{x}. \quad (7)$$

Tā kā y'^2 ir ļoti mazs, salīdzinot ar 1, tad y'^2 varam atmest; no (7) tad dabūjam

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x}{P}. \quad (8)$$

Tas ir meklētās pārejas līknes diferencialvienādojums.

Integrējot (8), dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2P} + C_1. \quad (9)$$

Še sākuma noteikumi ir: 1) ja $x = 0$, arī $y' = 0$ un 2) ja $x = 0$, arī $y = 0$. Ievērojot pirmo sākuma noteikumu, no (9) dabūjam

$$C_1 = 0.$$

Tad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2P}.$$

Šo vienādojumu integrējot, dabūjam

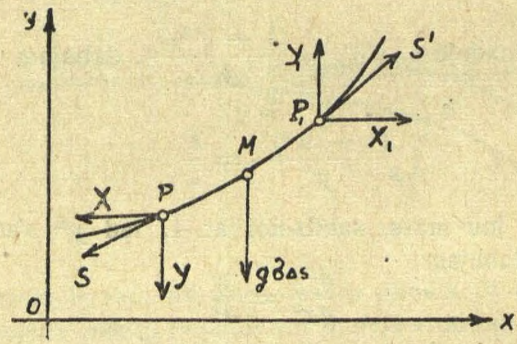
$$y = \frac{x^3}{6P} + C_2.$$

Ievērojot sākuma noteikumu, ka pie $x = 0$, $y = 0$, dabūjam $C_2 = 0$. Tātad pārejas līknes vienādojums ir

$$y = \frac{x^3}{6P}.$$

Tas dod kubisko parabolu.

68. **Ķēdes līnija** ir homogenas neizstiepjamas tievas ķēdes līdzsvara līkne. Ķēdes elementa PP_1 galos iedarbojošos spēkus S un S' daļām komponentēs X, Y un X_1, Y_1 koordinātu asu virzienos. Ja apzīmējam ar σ ķēdes garuma vienības masu, ķēdes elementa svars ir $\sigma \Delta s g$.



22. zīm.

Pielietojot elementam PP_1 līdzsvara noteikumus, dabūjam:

$$X_1 - X = 0,$$

$$Y_1 - Y - \sigma \Delta s g = 0,$$

$$X(y_1 - y) - Y(x_1 - x) - \sigma \Delta s g (x_1 - \xi_1) = 0$$

(ξ_1, η punkta M koordinatas). Momentu punkts: P_1.

Dalot vienādojumus ar $\Delta x = x_1 - x$ un liekot $\Delta x \to 0$, dabūjam

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta x} = \frac{dX}{dx} = 0, \tag{a}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Y}{\Delta x} - \sigma g \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{dY}{dx} - \sigma g \frac{ds}{dx} = 0, \tag{b}$$

$$X \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - Y - \sigma g \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} (x_1 - \xi_1) = X \frac{dy}{dx} - Y = 0 \tag{c}$$

(ja $\Delta x \to 0$, tad $\xi_1 \to x_1$).

No (a) redzams, ka s horizontalā komponente ir pastāvīgs lielums. Vienādojums (b) rāda, ka Y mainās proporcionali loka garumam s. Vienādojums (c) rāda, ka spēks S darbojas līknes pieskares virzienā. Ievērojot, ka $X = \text{const.}$ un diferencējot (c), dabūjam

$$X \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dY}{dx}.$$

Šajā vienādojumā ievietojam $\frac{dy}{dx}$ vērtību no (b), tad

$$X \frac{d^2y}{dx^2} = \sigma g \frac{ds}{dx}$$

un

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sigma g}{X} \sqrt{1 + y'^2}. \tag{1}$$

Tā kā $X = \text{konst.}$ un konstanti ir arī lielumi σ un g, tad faktors saknes priekšā ir pastāvīgs. Apzīmējam to ar $\frac{1}{h}$, rakstām

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h} \sqrt{1 + y'^2}. \tag{1a}$$

Šis vienādojums ir meklētās līdzsvara līknes diferencialvienādojums. Liekot $\frac{dy}{dx} = p$, rakstām

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{h} \sqrt{1 + p^2}.$$

Separējam mainīgos un integrējam:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{h}$$

un

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{x-x_0}{h}$$

vai

$$\operatorname{arc\,sinh} p = \frac{x-x_0}{h}$$

un

$$p = \sinh \frac{x-x_0}{h}.$$

Ievietojot $p = \frac{dy}{dx}$, dabūjam

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \frac{x-x_0}{h}$$

un

$$y - y_0 = h \cosh \frac{x-x_0}{h}. \tag{2}$$

Šis vienādojums izteic ķēdes līniju ar vertikalu asi. Lielumi x_0 un y_0 ir integrēšanas konstantes. Lielums h ir noteikts ar σ, g un X. Integrēšanas konstantes x_0 un y_0 noteicamas ar ķēdes uzkares punktu $P_1(x_1, y_1)$ un $P_2(x_2, y_2)$ koordinatām un ar ķēdes garumu starp šiem punktiem.

Vienādojumu (2) divas reizes diferencējot, dabūjam

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h} \cosh \frac{x-x_0}{h}. \tag{3}$$

Formulu (1) varam rakstīt šādi:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h} \cdot \frac{ds}{dx}. \tag{4}$$

Salīdzinot (3) un (4), redzams, ka

$$ds = \cosh \frac{x-x_0}{h}\, dx$$

un

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \cosh \frac{x - x_0}{h} dx = h \left(\sinh \frac{x_2 - x_0}{h} - \sinh \frac{x_1 - x_0}{h} \right). \quad (5)$$

Šīs formulas labo pusi pārveidojam tā:

$$s = 2h \sinh \frac{x_2 - x_1}{2h} \cdot \cosh \frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2h}. \quad (6)$$

No (2) seko:

$$y_1 - y_0 = h \cosh \frac{x_1 - x_0}{h}; \quad y_2 - y_0 = h \cosh \frac{x_2 - x_0}{h}. \quad (7)$$

No (7) dabūjam

$$y_2 - y_1 = h \left(\cosh \frac{x_2 - x_0}{h} - \cosh \frac{x_1 - x_0}{h} \right). \quad (8)$$

Pārveidojot (8), rakstām:

$$y_2 - y_1 = 2h \sinh \frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2h} \sinh \frac{x_2 - x_1}{2h}. \quad (9)$$

Liekam

$$\frac{x_2 - x_1}{2h} = \xi; \quad \text{tātad } 2h = \frac{x_2 - x_1}{\xi};$$

tad no (6) un (9) seko:

$$s = (x_2 - x_1) \frac{\sinh \xi}{\xi} \cosh \frac{x_1 + x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \xi, \quad (10)$$

un

$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) \frac{\sinh \xi}{\xi} \sinh \frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{x_2 - x_1} \xi. \quad (11)$$

Ievērojot, ka $\cosh^2 n - \sinh^2 n = 1$, no (10) un (11) dabūjam

$$\frac{\sinh \xi}{\xi} = \frac{\sqrt{s^2 - (y_2 - y_1)^2}}{x_2 - x_1}. \quad (12)$$

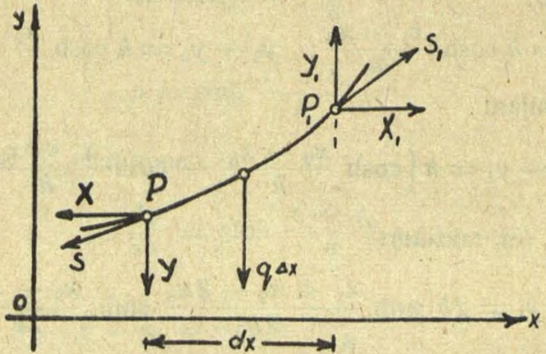
No (12) dabūjam ξ. Ievietojot ξ vērtību vienādojumā (11), dabūjam x_0. No (7) atrodam y_0, ievietojot vienā no formulām x_0.

69. Virves līnija. Tā ir virves līdzsvara līnija, ja virves slodze ir q uz virves projekcijas tekošā metra. Sastādot līdzsvara noteikumus, dabūjam:

$X_1 - X = 0$ līdzīgi agrākam, tātad X ir konstants $= H$; (1)

$$\Delta Y = q \Delta x \text{ un } \frac{dY}{dx} = q \tag{2}$$

$$X \frac{dy}{dx} = Y. \tag{3}$$



23. zīm.

Beidzamā formula rāda, ka spēki s un s_1 iedarbojas attiecīgo punktu P un P_1 pieskaru virzienos. Diferencējot (3) un ievērojot, ka x ir const., dabūjam

$$X \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dY}{dx}. \tag{4}$$

Tā kā $\frac{dY}{dx} = q$, tad no (4) seko:

$$X \frac{d^2y}{dx^2} = q. \tag{5}$$

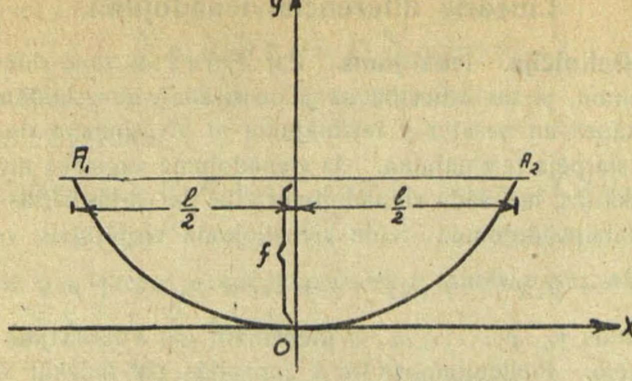
Vienādojums (5) ir virves līnijas diferencialvienādojums. Integrējot (5) un ievērojot, ka $X = H$, dabūjam virves līnijas vienādojumu

$$Hy' = qx + C_1, \tag{6}$$

$$Hy = q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2. \tag{7}$$

Šis vienādojums rāda, ka līkne ir parabola.

Pieņemam



24. zīm.

uzkares punktus A_1 un A_2 vienādā augstumā un x asi kā pieskari līknes vidus punktā O. Līknes zemākā punkta O attālumu no horizontalās uzkaru punktu līnijas apzīmējam ar f. Ordinatu asi liekam caur punktu O. Ievērojot dotos noteikumus, še dabūjam ja $x = 0$ arī $y = 0$; ar $x = 0$, $y' = 0$ un ar $x = \frac{l}{2}$, $y = f$. No (6) ar $x = 0$ un $y' = 0$ dabūjam $C_1 = 0$. No (7) ar $C_1 = 0$, $x = 0$ un $y = 0$ dabūjam $C_2 = 0$. Līknes vienādojums dotajā koordinatu sistemā tad ir

$$Hy = \frac{qx^2}{2}. \tag{8}$$

H dabūjam, vienādojumā (8) ievietojot $x = \frac{l}{2}$ un $y = f$; tad

$$H = \frac{ql^2}{8f}. \tag{9}$$

Ar šo H vērtību no (9) dabūjam šādu virves līnijas vienādojumu:

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2. \tag{10}$$

Linearie diferencialvienādojumi

70. Definicija. Iedalījums. Par l i n e a r u sauc diferencialvienādojumu, ja tas attiecībā uz y un visām y atvasinātām ir pirmās pakāpes un nesatur y reizinājuma ar atvasinātām un atvasināto savstarpēja reizinājuma. Ja vienādojumā augstākā atvasinātā ir n-tās kārtas, tad šādu vienādojumu sauc par n-tās kārtas linearu diferencialvienādojumu. Šāda vienādojuma vispārīgais veids ir:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = p. \quad (1)$$

Koeficientus p_0, p_1, $\ldots$, p_n, p pieņemam par x funkcijām vai par konstantēm. Pielietojumos šīs x funkcijas pa lielākai daļai ir veselas funkcijas, kas kādā galīgā iecirknī ir viennozīmīgas, galīgas un nepārtrauktas. Bieži vienādojumu dala ar p_0, tad koeficients pie augstākās atvasinātās ir 1. Funkcijas p_0 nullvietas tad no apskates jāizslēdz, jo tajās vienādojuma koeficienti top bezgalīgi.

Vienādojumu (1) sauc par p i l n ī g u, n e h o m o g e n u jeb arī par v i e n ā d o j u m u a r o t r u p u s i. Bieži funkciju p, vienādojuma (1) labo pusi, sauc par „t r a u c ē j o š o f u n k c i j u".

Gadījumā, kad $p = 0$, vienādojums (1) dabū šādu veidu:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \quad (2)$$

Šo diferencialvienādojumu sauc par r e d u c ē t u vai h o m o g e n u vienādojumu, vai par vienādojumu bez o t r a s p u s e s. Vienādojumu (2) sauc arī par vienādojumam (1) p i e k ā r t o t o h o m o g e n o vienādojumu. Saīsinātā rakstā vienādojumu (1) apzīmējam ar

$$\sum p_s y^{(n-s)} = p \quad (1a)$$

un vienādojumu (2) ar

$$\sum p_s y^{(n-s)} = 0; \quad (2a)$$

še $\quad s = 0, 1, 2, \ldots, n$ un $y^{(0)} = y$.

71. Teoremas.

Teorema 1.

$$\sum p_s (Cy)^{(n-s)} = C \sum p_s y^{(n-s)}.$$

Še y ir kāda x funkcija un C pastāvīgs lielums.

Pierādījums.

$$\sum p_s (Cy)^{(n-s)} = p_0 C y^{(n)} + p_1 C y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} C y' + p_n C y =$$
$$= C (p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y).$$

Ievērojot, ka iekavas augšējās sakarības labajā pusē varam rakstīt kā $\sum p_s (y)^{(n-s)}$, dabūjam

$$\sum p_s (Cy)^{(n-s)} = C \sum p_s y^{(n-s)},$$

ar ko tad teorema ir pierādīta.

Teorema 2. Gadījumā, ja u un v ir x funkcijas, pastāv sakarība

$$\sum p_s (u + v)^{(n-s)} = \sum p_s u^{(n-s)} + \sum p_s v^{(n-s)}.$$

Pierādījums.

$$\sum p_s (u + v)^{(n-s)} = \sum p u^{(n-s)} + p_s v^{(n-s)} =$$
$$= \sum p_s u^{(n-s)} + \sum p_s v^{(n-s)}.$$

Pēdējā sakarība teoremu pierāda. Vispārīgi, ja u_1, u_2, u_3, ..., u_n ir x funkcijas, tad

$$\sum p_s (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^{(n-s)} = \sum p_s u_1^{(n-s)} +$$
$$+ \sum p_s u_s^{(n-s)} + \ldots + \sum p_s u_n^{(n-s)}.$$

Teorema 3. Ja y_1, y_2, y_3, ..., y_i ir x funkcijas un C_1, C_2, C_3, ..., C_i patvaļīgi pastāvīgi lielumi, tad

$$\sum p_s (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_i y_i)^{(n-s)} =$$
$$= C_1 \sum p_s y_1^{(n-s)} + C_2 \sum p_s y_2^{(n-s)} + \ldots + C_i \sum p_s y_i^{(n-s)}.$$

Šī teorema ir secinājums no teoremām 1 un 2.

72. Lineara vienādojuma vispārīgā integrala veids. Pieņemsim, ka $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_i$ apmierina diferencialvienādojumu

$$\sum p_s y^{(n-s)} = 0, \tag{1}$$

t. i.,

$$\sum p_s y_1^{(n-s)} = 0; \quad \sum p_s y_2^{(n-s)} = 0, \ldots, \sum p_s y_i^{(n-s)} = 0; \tag{2}$$

tad izteiksme

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_i y_i$$

arī apmierina diferencialvienādojumu (1).

P i e r ā d ī j u m s. Saskaņā ar [71] teoremu 3. rakstām:

$$\sum p_s (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_i y_i)^{(n-s)} =$$

$$= C_1 \sum p_s y_1^{(n-s)} + C_2 \sum p_s y_2^{(n-s)} + \ldots + C_i \sum p_s y_i^{(n-s)}. \tag{3}$$

Saskaņā ar pieņēmumu katra suma šīs vienādības labajā pusē ir 0; tātad arī vienādības kreisā pusē ir 0; tas teoremu pierāda. Atsevišķus $y_1, y_2, \ldots, y_i$, kas katrs ir x funkcija un apmierina vienādojumu (1), sauc par diferencialvienādojuma (1) partikulariem integraliem. Ja zināmi tik daudzi partikularie integrali kā vienādojumam kārtas rādītājs, t. i., ja n-tās kārtas diferencialvienādojuma gadījumā doti n partikularie integrali $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ tad diferencialvienādojuma (1) vispārīgais integrals ir:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n.$$

Še jāievēro, ka partikulariem integraliem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jābūt lineari neatkarīgiem; jo, ja, piemēram, y_2 lineari atkarīgs no y_1, t. i., ja $y_2 = ky$, tad izteiksme pārvēršas šādā:

$$y = (C_1 + kC_2) y_1 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n.$$

Tā kā

$$C_1 + kC_2 = C,$$

tad

$$y = C y_1 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n. \tag{4}$$

Izteiksme (4) nav diferencialvienādojuma (1) vispārīgais integrals, jo šajā izteiksmē nav n, bet tikai $(n-1)$ patvaļīgas konstantes.

Diferencējot $(n-1)$ reizes diferencialvienādojuma pilnīgo integralu, dabūjam:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + C_n y_n,$$

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_3 y_3' + \ldots + C_n y_n',$$

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_3 y_3'' + \ldots + C_n y_n'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + C_3 y_3^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}.$$

Šīs vienādojumu sistemas kreisajā pusē ievietojam vērtībai x_0 atbilstošās pēc patikas pieņemamās $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ vērtības, sistemas labajā pusē visās x funkcijās vērtību x_0. Tad dabūjam:

$$\left.\begin{aligned}
y_0 &= C_1 (y_1)_0 + C_2 (y^2)_0 + C_3 (y_3)_0 + \ldots + C_n (y_n)_0, \\
y_0' &= C_1 (y_1')_0 + C_2 (y_2')_0 + C_3 (y_3')_0 + \ldots + C_n (y_n')_0, \\
y_0'' &= C_1 (y_1'')_0 + C_2 (y_2'')_0 + C_3 (y_3'')_0 + \ldots + C_n (y_n'')_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_0^{(n-1)} &= C_1 (y_1^{(n-1)})_0 + C_2 (y_2^{(n-1)})_0 + C_3 (y_3^{(n-1)})_0 + \\
&+ \ldots + C_n (y_n^{(n-1)})_0.
\end{aligned}\right\}$$

No šiem n vienādojumiem jānoteic n vērtības $C_1, C_2, \ldots, C_n$ Lai šīs vērtības būtu galīgas un noteiktas, kā zināms, augšējās vienādojumu sistemas koeficientu determinante nedrīkst būt 0; tātad jabūt:

$$D = \begin{vmatrix}
(y_1)_0 & (y_2)_0 & (y_3)_0 & \ldots & (y_n)_0 \\
(y_1')_0 & (y_2')_0 & (y_3')_0 & \ldots & (y_n')^0 \\
(y_1'')_0 & (y_2'') & (y_3'')_0 & \ldots & (y_n'')_0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(y_1^{(n-1)})_0 & (y_2^{(n-1)})_0 & (y_3^{(n-1)})_0 & \ldots & (y_n^{(n-1)})_0
\end{vmatrix} \neq 0.$$

Bet, tā kā x_0 vērtību varam izvēlēties pēc patikas, tad redzam, ka jābūt:

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5)$$

ar visām x vērtībām, izņemot tās x vērtības, ar kurām kādi diferencialvienādojuma koeficienti top ∞ vai iegūst nenoteiktu vērtību.

Determinanti D sauc par Vronska determinanti. No augšējās determinantes arī redzams, ka partikulariem integraliem jābūt lineari neatkarīgiem; pretējā gadījumā, piemēram, ja $y_2 = ky_2$, augšējā determinantē pirmais un otrs stabiņš ir vienlīdzīgi un determinante dabū vērtību 0. Ievērojot teikto, redzam, ka izteiksme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n$$

tikai tad ir dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals, ja partikularo integralu $y_1, y_2, \dots, y_n$ determinantes D neanulējas identiski. Partikularo integralu sistemu, kas atbilst 5. noteikumam sauc par pamatsistemu un $y_1, y_2, \dots, y_n$ par pamatsistemas elementiem.

73. Homogena diferencialvienādojuma kārtas pazemināšana ar partikulara integrala palīdzību. Pārskatāmības dēļ pieņemsim noteiktu trešās kārtas diferencialvienādojumu

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0 \qquad (1)$$

un par šī vienādojuma partikularo integralu kādu x funkciju u. Tā kā u ir (1) partikulars integrals, tad jābūt

$$a_0 u''' + a_1 u'' + a_2 u' + a_3 u = 0. \qquad (2)$$

Liekam

$$y = u\, Y. \qquad (3)$$

Še Y ir nezināma x funkcija. Diferencējot (3), dabūjam

$$\left.\begin{aligned} y' &= u\,Y' + u'\,Y, \\ y'' &= u\,Y'' + 2u'\,Y' + u''\,Y, \\ y''' &= u\,Y''' + 3u'\,Y'' + 3u''\,Y' + u'''\,Y \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Ievietojot vērtības no (3) un (4) diferencialvienādojumā (1), dabūjam

$$a_0\,u\,Y''' + (a_0\,3u' + a_1\,u)\,Y'' + (a_0\,3u'' + a_1\,2u' + a_2\,u)\,Y' +$$
$$+ (a_0\,u''' + a_1\,u'' + a_2\,u' + a_3\,u)\,Y = 0. \tag{5}$$

Apzīmējot koeficientus pie Y'' un Y' ar A_1 un A_2 un ievērojot, ka vienādojuma koeficients pie Y saskaņā ar (2) ir 0, vienādojumu (5) rakstām šādi:

$$a_0\,u\,Y''' + A_1\,Y'' + A_2\,Y' = 0. \tag{6}$$

Liekam

$$Y' = Z \tag{7}$$

un vienādojumu (6) rakstām tā:

$$a_0\,u\,Z'' + A_1\,Z' + A_2\,Z = 0. \tag{8}$$

Vienādojums (8) ir attiecībā uz Z otras kārtas; tātad ar ievietojumu (3) vienādojumu kārta ir pazemināta.

No (7) dabūjam

$$Y = \int Z\,dx$$

un

$$y = u\,Y = u\int Z\,dx.$$

a) Vienādojumi ar konstantiem koeficientiem

74. Vienādojuma forma. Raksturīgais vienādojums. Homogens linears diferencialvienādojums ar konstantiem koeficientiem ir šāds:

$$\sum a_s y^{(n-s)} = a_0 y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + a_2\,y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}\,y' +$$
$$+ a_n y = 0. \tag{1}$$

Koeficientus a_0, a_1, a_2, ..., a_n pieņemam kā realus un pastāvīgus.

Liekam $$y = e^{rx}. \tag{2}$$
r še ir pastāvīgs, bet vēl nezināms lielums. Diferencējot (2) n reizes, dabūjam:

$$y' = re^{rx};\ y'' = r^2 e^{rx},\ \ldots,\ y^{(n)} = r^n e^{rx}. \tag{3}$$

Ievietojam vērtības no (2) un (3) diferencialvienādojumā (1):

$$\sum a_s (e^{rx})^{(n-s)} = e^{rx} (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + \\ + a_n) = 0. \tag{4}$$

Apzīmējot ar

$$\varphi (r) = a_0 r^n + a r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n , \tag{5}$$

vienādojumu (4) rakstām šādi:

$$\sum a_s (e^{rx})^{(n-s)} = e^{rx} \varphi (r) = 0. \tag{6}$$

Kā redzams, vienādojums (4), tātad arī vienādojums (1) ir izpildīts, ja r ir vienādojuma

$$\varphi (r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{7}$$

sakne.

Vienādojumu (7) sauc par diferencialvienādojuma (1) raksturīgo vienādojumu. Funkcija $\varphi (r)$ ir raksturīgā vienādojuma polinoms.

75. Raksturīgā vienādojuma saknes ir realas un vienkāršas. Pieņemsim, ka diferencialvienādojuma raksturīgā vienādojuma

$$\varphi (r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{1}$$

saknes $r_1, r_2, \ldots, r_n$ visas ir realas un vienkāršās.

Sakne, piemēram, r_1, apmierina vienādojumu (1), bet tad, kā redzams, jābūt

$$\sum a_s (e^{r_1 x})^{(n-s)} = e^{r_1 x} \cdot \varphi (r_1) = 0. \tag{2}$$

Vienādojums (2) izteic, ka $y_1 = e^{r_1 x}$ ir dotā diferencialvienādojuma

$$\sum a_s y^{(n-s)} = 0$$

partikulars integrals. Līdzīgi redzams, ka arī

$$y_2 = e^{r_2 x},\ y_3 = e^{r_3 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$$

ir dotā diferencialvienādojuma partikularie integrali; un tā kā šie partikularie integrali ir lineari neatkarīgi, tie veido pamatsistemu Diferencialvienādojuma (1) vispārīgais integrals saskaņā ar augšā norādīto ir

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} +$$
$$+ C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}.$$

Piemērs. $y'' - 4y = 0$.

Še liekot $y = e^{rx}$, dabūjam raksturīgo vienādojumu un tā saknes

$$r^2 - 4 = 0,$$
$$r_1 = 2 \text{ un } r_2 = -2.$$

Dotā diferencialvienādojuma partikularie integrali tad ir

$$y_1 = e^{2x} \text{ un } y_2 = e^{-2x}.$$

Diferencialvienādojuma vispārīgais integrals ir

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

76. Raksturīgā vienādojuma saknes ir kompleksas. Ja raksturīgam vienādojumam

$$\varphi(r) = 0$$

ir kompleksas saknes, tad tās parādās saistītos pāros. Tā, piemēram, ja raksturīgā vienādojuma saknes ir

$$r_1 = \alpha + \beta i \text{ un } r_2 = \alpha - \beta i,$$

tad saskaņā ar norādīto

$$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(\alpha+\beta i)x},\ y_2 = e^{r_2 x} = e^{(\alpha-\beta i)x}$$

un

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(x-\beta i)x} =$$
$$= C_1 e^{\alpha x} \cdot e^{\beta i x} + C_2 e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta i x} =$$

$$= e^{\alpha x}\,[C_1(\cos\beta x + i\sin\beta x) + C_2(\cos\beta x - i\sin\beta x)] =$$

$$= e^{\alpha x}\,[(C_1 + C_2)\cos\beta x + (C_1 - C_2)\,i\sin\beta x]. \quad (1)$$

Šinī izteiksmē C_1 un C_2 ir patvaļīgi pastāvīgi lielumi; tos varam pieņemt arī kā saistītus kompleksus lielumus, liekot

$$C_1 = a + bi,$$

$$C_2 = a - bi.$$

Tad

$$C_1 + C_2 = 2a,$$

$$C_1 - C_2 = 2bi.$$

Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (1), dabūjam

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x}(2a\cos\beta x + 2b\sin\beta x). \quad (2)$$

Liekot $2a = A$ un $-2b = B$, vienādojumu (2) rakstām tā:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x). \quad (3)$$

Gadījumā, ja saknes ir tīri imaginaras, $\alpha = 0$, tad

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = A\cos\beta x + B\sin\beta x. \quad (4)$$

Piemērs.

$$y''' - 8y = 0.$$

Še $r_1 = 2$; $r_2 = -1 + i\sqrt{3}$; $r_3 = -1 - i\sqrt{3}$ un

$$\alpha = -1;\quad \beta = \sqrt{3}.$$

Tad

$$C_1 y_1 = C_1 e^{r_1 x} = C_1 e^{2x};\quad C_2 y_2 + C_3 y_3 =$$

$$= e^{-x}(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x).$$

Ar to diferencialvienādojuma vispārīgais integrals ir

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 e^{2x} +$$

$$+ e^{-x}(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x).$$

Piemērs.

$$y'' + 4y = 0.$$

Šeit $r_1 = 2i$ un $r_2 = -2i$; $\alpha = 0$; $\beta = 2$.

Vienādojuma vispārīgais integrals ir

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

77. Raksturīgā vienādojuma saknes ir vairakkārtējas. Ja raksturīgā vienādojuma $\varphi(r) = 0$ saknes ir $r_1 = r_2$, tad vispārīgā integralā

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}, \quad (1)$$

ievērojot, ka $e^{r_1 x} = e^{r_2 x}$, dabūjam

$$y = (C_1 + C_2) e^{r_1 x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \quad (2)$$

Tā kā $(C_1 + C_2)$ ir tikai viens patvaļīgs lielums, tad (2) nav diferencialvienādojuma vispārīgais integrals, jo izteiksmē (2) nav pietiekams konstantu skaits.

Kā zināms, ja r_1 ir vienādojuma $\varphi(r) = 0$ divkārtēja sakne, tad jābūt arī $\varphi'(r_1) = 0$. Vispārīgi, ja vienādojumam $\varphi(r) = 0$ ir m-kārtējā sakne, tad jābūt:

$$\varphi(r_1) = \varphi'(r_1) = \ldots = \varphi(r_1)^{(m-1)} = 0.$$

Kā redzējām [74] (6),

$$\sum a_s (e^{rx})^{(n-s)} = e^{rx} \varphi(r).$$

Diferencējot augšējo sakarību pēc r, dabūjam

$$\sum a_s (xe^{rx})^{(n-s)} = xe^{rx} \varphi(r) + e^{rx} \varphi'(r). \quad (3)$$

Ja r_1 ir $\varphi(r) = 0$ divkārtēja sakne, tad ievietojot r_1 vienādojumā (3) r vietā, vienādojuma labajā pusē dabūjam 0, jo $\varphi(r_1) = 0$ un arī $\varphi'(r_1) = 0$.

No teiktā secinām, ka

$$\sum a_s (xe^{r_1 x})^{(n-s)} = 0.$$

Šī sakarība rāda, ka gadījumā, ja $r_1 = r_2$ ir raksturīgā vienādojuma saknes, tad

$$y_2 = x e^{r_1 x}$$

arī ir diferencialvienādojuma partikulars integrals.

Ka $y_1 = e^{r_1 x}$ ir partikulars integrals, zināms no agrākā. Dotajā gadījumā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals ir

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} + C_3 e^{r_1 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \qquad (4)$$

Līdzīgi dabūjam, ka, ja raksturīgam vienādojumam $\varphi(r) = 0$ r_1 ir m-kārtēja sakne, tad, šai m-kārtējai saknei atbilstošie partikularie integrali ir

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = x e^{r_1 x},\ y_3 = x^2 e^{r_1 x}, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{r_1 x}$$

un diferencialvienādojuma vispārīgais integrals ir

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x} + C_3 x^2 e^{r_1 x} + \ldots + C_m x^{m-1} e^{r_1 x} +$$
$$+ C_{m+1} e^{r_{m+1}} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \qquad (5)$$

Ja raksturīgam vienādojumam $\varphi(r) = 0$ ir kompleksas vairākkārtējas saknes, piemēram,

$$r_1 = \alpha + \beta i,\ r_2 = \alpha - \beta i,\ r_3 = \alpha + \beta i \text{ un } r_4 = \alpha - \beta i,$$

tad

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} + C_3 x e^{(\alpha+\beta i)x} + C_4 x e^{(\alpha-\beta i)x}$$

vai

$$y = e^{\alpha x} [C_1 e^{\beta i x} + C_2 e^{-\beta i x} + C_3 x e^{\beta i x} + C_4 x e^{-\beta i x}],$$

vai

$$y = e^{\alpha x} [A_1 \cos \beta x + B_1 \sin \beta x + x (A_2 \cos \beta x + B_2 \sin \beta x)],$$

vai

$$y = e^{\alpha x} [(A_1 + x A_2) \cos \beta x + (B_1 + x B_2) \sin \beta x].$$

Piemērs.

$$y^{IV} - 4y''' + 3y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Šī diferencialvienādojuma raksturīgam vienādojumam

$$r^4 - 4r^3 + 3r^2 + 4r - 4 = 0$$

saknes ir

$$r_1 = 1,\quad r_2 = -1,\quad r_3 = 2 \text{ un } r_4 = 2.$$

Še $r_3 = r_4$. Ar šīm saknēm diferencialvienādojuma vispārīgais integrals ir

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 x e^{2x}.$$

Piemērs. $y^{IV} + 2y'' + y = 0$.

Raksturīgā vienādojuma $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ saknes ir:

$$r_1 = i, \quad r_2 = -i, \quad r_3 = i \text{ un } r_4 = -i.$$

Tātad $r_1 = r_3$ un $r_2 = r_4$. Ar šīm saknēm dabūjam vispārīgo integralu, kā augšā norādīts:

$$y = (A_1 + x A_2) \cos x + (B_1 + x B_2) \sin x.$$

b) Lineari homogeni vienādojumi ar mainīgiem koeficientiem.

78. Integrēšana ar rindas palīdzību. Lineara homogena augstākas kārtas diferencialvienādojuma integrēšanu, ja koeficienti ir mainīgi, nevar izdarīt ar kvadraturām. Tādu vienādojumu atrisinājumus vispārīgi nevar izteikt ar elementarām funkcijām (izņemot gadījumu, ko vēlāk apskatīsim). Vispārējā gadījumā šie atrisinājumi veido jaunas transcendentas funkcijas. Visbiežāk meklē atrisinājumu pakāpju rindas veidā, kā norādīts [63]. Šis paņēmiens sevišķi ērti lietojams linearu diferencialvienādojumu gadījumā. Integrēšanas piemērs parādīts [63].

79. Eilera diferencialvienādojums ir linears diferencialvienādojums ar šādu formu:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} xy' + a_n y = X. \quad (1)$$

Koeficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir pastāvīgi. Katrā loceklī atrodas x tādā pakāpē, kādā kārtā ir atvasinātā šinī loceklī. Vienādojuma (1) piekārtotais reducētais vienādojums ir

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} xy' + a_n y = 0. \quad (2)$$

Šo vienādojumu atrisinām, liekot

$$y = x^r;$$

tad

$$y' = rx^{r-1}; \quad y'' = r(r-1)x^{r-2} \text{ utt.}$$

Ievietojot šīs vērtības vienādojumā (2) un dalot ar x^r, dabūjam

$$\varphi(r) = a_n + a_{n-1} r + a_{n-2} r(r-1) + \ldots$$
$$+ a_0 r(r-1) \ldots (r-n+1) = 0. \quad (3)$$

Apzīmēsim šī n-tās pakāpes vienādojuma n saknes (pieņemot tās kā vienkāršas un realas) ar

$$r_1, r_2, \ldots, r_n.$$

Tad vienādojuma (2) vispārīgais integrals ir

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \ldots + C^n x^{r_n}. \tag{4}$$

Vienādojumu (3) sauc par reducētā diferencialvienādojuma raksturīgo vienādojumu.

Ja saknes ir kompleksas, piemēram,

$$r_1 = \alpha + \beta i \text{ un } r_2 = \alpha - \beta i,$$

tad divu partikularu integralu suma pieņem šādu veidu:

$$C_1 x^{\alpha+\beta i} + C_2 x^{\alpha-\beta i} = x^{\alpha} (C_1 x^{\beta i} + C_2 x^{-\beta i}).$$

Tā kā

$$x^{\beta i} = e^{\beta i l n x} = \cos(\beta l n x) + i \sin(\beta l n x),$$

$$x^{-\beta i} = e^{-\beta i l n x} = \cos(\beta l n x) - i \sin(\beta l n x),$$

tad

$$C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} = x^{\alpha} [A \cos(\beta l n x) + B \sin(\beta l n x)].$$

Ja vienādojumam $\varphi(r) = 0$ ir vairākkārtējas saknes, piemēram,

$$r_1 = r_2 = r_3 = r,$$

tad, kā zināms, no [77],

$$\ln x\, e^{r l n x} = x^r \ln x;\ (\ln x)^2 e^{r l n x} = x^r (\ln x)^2;\ (\ln x)^3 e^{r l n x} = x^r (\ln x)^3$$

ir partikularie integrali. Vienādojuma (2) vispārīgais integrals tad ir

$$y = C_1 x^r + C_2 x^r \ln x + C_3 x^r (\ln x)^2 + C_4 x^{r_4} + \ldots + C_n x r^n.$$

Ja vienādojuma veids ir

$$a_0 y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} y' + \frac{a_n}{x^n} y = 0,$$

tad, reizinot šo vienādojumu ar x^n, dabūjam veidu (2).

Nehomogeno vienādojumu (1) apskatīsim tālāk.

Piemērs. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$x^2 y'' + xy' - y = 0.$$

Še liekam
$$y = x^\alpha.$$

Diferencējot, dabūjam

$$y' = \alpha x^{\alpha-1};\ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.$$

Ievietojot šīs vērtības diferencialvienādojumā, dabūjam

$$x^2 \alpha (\alpha-1)x^{\alpha-2} + x \alpha x^{\alpha-1} - x^\alpha = 0.$$

vai

$$\alpha(\alpha-1) + \alpha - 1 = 0,$$

$$\alpha^2 - 1 = 0.$$

Šī vienādojuma saknes ir $r_1 = 1$ un $r_2 = -1$.

Dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals tātad ir

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

B. Lineari nehomogeni vienādojumi

80. Nehomogena vienādojuma forma. Integrēšanas paņēmieni. Nehomogena vai pilnīga diferencialvienādojuma forma ir šāda:

$$\sum a_s y^{(n-s)} = X. \tag{1}$$

Še koeficienti a_s ($s = 0, 1, 2, \ldots, n$) var būt no x atkarīgi vai arī visi pastāvīgi lielumi. X ir funkcija, kas atkarīga tikai no x. Pieņemsim, ka diferencialvienādojumam (1) piekārtotā reducētā vienādojuma

$$\sum a_s y^{(n-s)} = 0 \tag{2}$$

vispārīgais integrals

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{3}$$

ar augšā aprakstītiem paņēmieniem jau dabūts. Šādā gadījumā pilnīgā diferencialvienādojuma (1) vispārīgo integralu dabū ar vienu no diviem sekojošiem paņēmieniem:

1) atrodot pilnīgā diferencialvienādojuma partikularo integralu,

2) pielietojot Lagranža konstantu variacijas paņēmienu.

Kā vēlāk redzēsim, Lagranža konstantu variacijas paņēmiens ir vispārīgs. Partikulara integrala paņēmiens nav vispārīgs; tas ērti pielietojams funkcijas X dažu atsevišķu veidu gadījumos.

a) Nehomogenā vienādojuma integrēšana ar partikulara integrala palīdzību.

81. Teoremas par nehomogena vienādojuma vispārīgā integrala veidu.

Teorema 1. Pieņemsim, ka u, kāda x funkcija, ir nehomogenā diferencialvienādojuma

$$\sum a_s y^{(n-s)} = X \tag{1}$$

partikulars integrals; tad

$$\sum a_s u^{(n-s)} = X. \tag{2}$$

Ja Y ir vienādojumam (1) piekārtotā reducētā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals, tad

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

un

$$\sum a_s Y^{(n-s)} = 0. \tag{3}$$

Šādā gadījumā nehomogenā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals y ir

$$y = Y + u. \tag{4}$$

Pierādījums. Ja $Y + u$ ir diferencialvienādojuma (1) integrals, tad jābūt

$$\sum a_s (Y + u)^{(n-s)} = X. \tag{5}$$

Šī vienādojuma kreiso pusi pārveidojot, varam rakstīt:

$$\sum a_s Y^{(n-s)} + \sum a_s u^{(n-s)} = X. \tag{6}$$

Ievērojot sakarības (2) un (3), redzam, ka vienādojums (6) ir izpildīts;

$$y = Y + u \tag{7}$$

tātad apmierina diferencialvienādojumu (1), un, tā kā Y izteiksmē atrodas arī n patvaļīgas konstantes, izteiksme (7) ir diferencialvienādojuma (1) vispārīgais integrals.

Tātad

nehomogena lineara diferencialvienādojuma vispārīgo integralu dabūjam, pieskaitot tā partikularajam integralam piekārtotā reducētā diferencialvienādojuma vispārīgo integralu.

Nehomogena lineara diferencialvienādojuma partikularu integralu var dažos gadījumos viegli atrast. Šos gadījumus še zemāk apskatīsim.

Teorema 2. Ja nehomogena lineara diferencialvienādojuma

$$\sum a_s y^{(n-s)} = X \tag{1}$$

labā puse ir vairāku x funkciju suma, t. i., ja

$$X = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \tag{2}$$

un ja $u_1\, u_2, \ldots, u_n$ ir attiecīgo diferencialvienādojumu

$$\sum a_s y^{(n-s)} = x_1; \quad \sum a_s y^{(n-s)} = x_2; \ldots; \quad \sum a_s y^{(n-s)} = x_n \tag{3}$$

partikularie integrali, tad

$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ ir vienādojuma (1) partikulars integrals.

Pierādījums. Saskaņā ar pieņēmumu pastāv sakarības

$$\left.\begin{aligned} &\sum a_s u_1^{(n-s)} = x_1, \\ &\sum a_s u_2^{(n-s)} = x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\sum a_s u_n^{(n-s)} = x_n. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Tās saskaitot dabūjam:

$$\sum a_s u_1^{(n-s)} + \sum a_s u_2^{(n-s)} + \ldots + \sum a_s u_n^{(n-s)} = x_1 + \\ + x_2 + \ldots + x_n \tag{5}$$

va

$$\sum a_s (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^{(n-s)} = X. \qquad (6)$$

Vienādība (6) rāda, ka

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

ir diferencialvienādojuma (1) partikulars integrals.

82. Funkcija X ir vesels algebrisks polinoms. Ievedot apzīmējumu

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = P(x), \qquad (1)$$

diferencialvienādojumu rakstām šādi:

$$\sum a_s y^{(n-s)} = P(x). \qquad (2)$$

Še $P(x)$ ir algebrisks n-tās pakāpes polinoms. Pieņemsim šajā gadījumā

$$u = \lambda_0 x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} x + \lambda_n, \qquad (3)$$

arī n-tās pakāpes polinomu, par vienādojuma (2) partikularo integralu un meklēsim tā koeficientus

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n.$$

Tāda gadījumā jābūt

$$\sum a_s u^{(n-s)} = P(x). \qquad (4)$$

Vienādojuma (4) kreisajā pusē pēc attiecīgo darbību izpildīšanas izrādīsies algebrisks n-tās pakāpes polinoms. Salīdzinot koeficientus vienādojuma abās pusēs pie vienādām x pakāpēm, dabūjam tieši tādu vienādojumu skaitu, lai noteiktu meklētos koeficientus $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Piemērs.

$$y'' - y = x^2 + 1.$$

Lai dabūtu šī vienādojuma partikularu integralu, ņemsim vērā, ka še X ir otras pakāpes algebrisks polinoms un pieņemsim, ka meklētais partikularais integrals ir pilnīgs otras pakāpes polinoms; tātad

$$u = \lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2. \qquad (\alpha)$$

Šo izteiksmi diferencējot, dabūjam

$$u' = 2\lambda_0 x + \lambda_1,$$
$$u'' = 2\lambda_0.$$

Šīs u' un u'' vērtības ievietojam dotajā diferencialvienādojumā:

$$2\lambda_0 - \lambda_0 x^2 - \lambda_1 x - \lambda_2 = x^2 + 1.$$

Salīdzinām, koeficientus pie vienādām x pakāpēm:

$$-\lambda_0 = 1; \ \lambda_1 = 0 \text{ un } 2\lambda_0 - \lambda_2 = 1,$$

tātad

$$\lambda_0 = -1 \text{ un } \lambda_2 = 2\lambda_0 - 1 = -2 - 1 = -3.$$

Ar šīm koeficientu vērtībām no (α) dabūjam dotā vienādojuma partikularu integralu $u = -x^2 - 3$.

Dotajam vienādojumam piekārtotā reducētā vienādojuma

$$y'' - y = 0$$

raksturīgā vienādojuma

$$r^2 - 1 = 0$$

saknes ir $r_1 = 1$ un $r_2 = -1$.

Reducētā vienādojuma vispārīgais integrals tad ir

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

un dotā nehomogenā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals ir

$$y = Y + u = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 3.$$

Viegli redzēt, ka, ja diferencialvienādojumā trūkst y, partikularā integrala polinoms jāņem par vienu pakāpi augstāks nekā polinoms $P(x)$. Ja diferencialvienādojumā nav locekļu ar y un y', tad polinoms jāņem par divām pakāpēm augstāks par polinomu $P(x)$ utt. Tā, piemēram, diferencialvienādojumā

$$y''' + y' = x^4$$

nav locekļa ar y; še partikularā integrala polinoms jāpieņem

$$u = \lambda_0 x^5 + \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5.$$

Tāpat arī jāievēro, ka visos gadījumos partikularā integrala polinoms jāpieņem pilnīgs neatkarīgi no tā, vai tāds ir polinoms $P(x)$.

Ar norādīto paņēmienu dabūjam vienādojuma partikularo integralu

$$u = \frac{1}{5} x^5 - 4 x^3.$$

Augšējā diferencialvienādojuma raksturīgā vienādojuma saknes ir

$$r_1 = 0;\ r_2 = i;\ r_3 = -i,$$

tātad

$$Y = C_1 + A \cos x + B \sin x,$$

un

$$y = Y + u = C_1 + A \cos x + B \sin x + \frac{1}{5} x^5 - 4 x^3$$

ir dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals.

83. $X = A e^{\alpha x}$. Diferencialvienādojuma veids ar šādu otru daļu ir

$$\sum a_s y^{(n-s)} = A e^{\alpha x}. \tag{1}$$

Še A un α ir pastāvīgi lielumi. Pieņemam diferencialvienādojuma partikularo integralu šādā veidā:

$$u = \lambda e^{\alpha x}. \tag{2}$$

Še λ ir pastāvīgs un nezināms noteicams lielums. Ja (2) ir partikulars integrals, tad jābūt izpildītam vienādojumam

$$\sum a_s (\lambda e^{\alpha x})^{(n-s)} = A e^{\alpha x}. \tag{3}$$

Izņemot reizinātāju λ ārpus sumas un ievērojot, ka

$$\sum a_s (e^{\alpha x})^{(n-s)} = e^{\alpha x} \cdot \varphi(\alpha),$$

vienādojumu (3) rakstām tā:

$$\lambda \cdot e^{\alpha x} \cdot \varphi(\alpha) = A \cdot e^{\alpha x}. \tag{4}$$

No (4) dabūjam

$$\lambda = \frac{A}{\varphi(\alpha)}. \tag{5}$$

Tātad

$$u = \lambda e^{\alpha x} = \frac{A}{\varphi(\alpha)} e^{\alpha x}. \tag{6}$$

Piemērs.

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}.$$

$$\text{Še } A = 1;\quad \alpha = 3;\ \varphi(r) = r^2 - 3r + 2;$$

$$\varphi(\alpha) = \varphi(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2;$$

$$\lambda = \frac{A}{\varphi(\alpha)} = \frac{1}{2};$$

$$u = \frac{1}{2} e^{3x}.$$

Raksturīgā vienādojuma

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

saknes ir $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Ar šīm saknēm dabūjam

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x},$$

Tātad

$$y = Y + u = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$$

ir dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals. Ja α ir raksturīgā vienādojuma sakne, tad $\varphi(\alpha) = 0$ un, kā redzams no (5), $\lambda = \infty$. Šādā gadījumā λ dabūjam tā: kā zināms,

$$\sum a_s (e^{rx})^{(n-s)} = e^{rx} \varphi(r).$$

Diferencējot pēc r, dabūjam

$$\sum a_s (xe^{rx})^{(n-s)} = xe^{rx} \varphi(x) + e^{rx} \varphi'(r) = e^{rx} [x \varphi(r) + \varphi'(r)]. \quad (7)$$

Pieņemsim, ka partikularais integrals šādā gadījumā ir

$$u = \lambda x e^{\alpha x}.$$

Tad jābūt

$$\sum a_s (\lambda x e^{\alpha x})^{(n-s)} = A e^{\alpha x}.$$

Izņemot faktoru λ ārpus sumas, dabūjam

$$\lambda \sum a_s (x e^{\alpha x})^{(n-s)} = A e^{\alpha x}. \quad (8)$$

Ievērojot (7), vienādojuma kreiso pusi rakstām šādi:

$$\lambda\, e^{\alpha x}\,[(x\,\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)] = A\,e^{\alpha x}. \tag{9}$$

Tā kā α pieņemts par raksturīgā vienādojuma sakni, tad augšējā izteiksmē $\varphi(\alpha) = 0$ un (9) dabū šādu veidu:

$$\lambda\, e^{\alpha x} \cdot \varphi'(\alpha) = A\,e^{\alpha x}$$

un

$$\lambda = \frac{A}{\varphi'(\alpha)}.$$

Ar šo λ vērtību dabūjam

$$u = \lambda\, x\, e^{\alpha x} = \frac{A}{\varphi'(\alpha)}\, x\, e^{\alpha x},$$

diferencialvienādojuma partikularo integralu.

Ja α ir raksturīgā vienādojuma divkārtēja sakne, tad

$$\lambda = \frac{A}{\varphi''(\alpha)}$$

un

$$u = \frac{A}{\varphi''(\alpha)}\, x^2 e^{\alpha x}.$$

Piemērs.

$$y'' - 3y' + 2y = e^x.$$

$$\text{Še } \varphi(r) = r^2 - 3r + 2 = 0; \quad \varphi'(r) = 2r - 3;$$

$$r_1 = 1 \text{ un } r_2 = 2;$$

$$A = 1; \quad \alpha = 1;$$

$$Y = C_1\, e^x + C_2\, e^{2x}.$$

Tā kā še $\alpha = 1$ ir raksturīgā vienādojuma sakne, tad

$$\lambda = \frac{A}{\varphi'(\alpha)} = \frac{1}{2\alpha - 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 - 3} = -1$$

un

$$u = -1 \cdot x e^x.$$

Tātad
$$y = Y + u = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x$$

ir dotā vienādojuma vispārīgais integrals.

84. Piemēri. Tā kā funkcijas $\sin x$, $\cos x$, $\sin h\ x$, $\cos h\ x$ varam izteikt ar eksponentfunkcijām, tad, ievērojot [82] un [83] norādītos paņēmienus, kā arī [81] teoremu 2, varam dabūt nehomogena lineara diferencialvienādojuma partikularu integralu, ja vienādojuma labajā pusē esošā funkcija ir:

algebriska vesela funkcija $P(x)$, eksponentfunkcija e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sin h x$, $\cos\ h x$ vai arī kāda šo funkciju suma.

P i e m ē r s. $$y'' + y = 2x + \cos x. \qquad (\alpha)$$

Izteicot $\cos x$ ar eksponentfunkcijām, vienādojumu rakstām tā:

$$y'' + y = 2x + \frac{1}{2} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-ix}.$$

Raksturīgā vienādojuma

$$\varphi(r) = r^2 + 1 = 0 \qquad (\beta)$$

saknes ir $r_1 = i$ un $r_2 = -i$.

Ar šīm saknēm dabūjam reducētā vienādojuma vispārīgo integralu

$$Y = A \cos x + B \sin x. \qquad (\gamma)$$

Saskaņā ar [82] veidojam diferencialvienādojumus:

$$1)\ u_1'' + u_1 = 2x,$$

$$2)\ u_2'' + u_2 = \frac{1}{2} e^{ix},$$

$$3)\ u_3'' + u_3 = \frac{1}{2} e^{-ix}.$$

Dabūsim šo vienādojumu partikularos integralus.

Vienādojumu atrisināšana:

$$1)\ u_1'' + u_1 = 2x,$$

$$u_1 = \lambda_0 x + \lambda_1,$$

$$u_1' = \lambda_0,$$

$$u_1'' = 0.$$

Ievietojot u_1, u_1'' vērtības vienādojumā (1), dabūjam

$$0 + \lambda_0 x + \lambda_1 = 2x;$$

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_0 = 2;$$

$$u_1 = 2x.$$

$$2)\ u_2'' + u_2 = \frac{1}{2} e^{ix}.$$

Še $A = \frac{1}{2}$; $\alpha = i$ ir raksturīgā vienādojuma sakne; tādēļ liekam

$$u_2 = \lambda x e^{ix},$$

$$\lambda = \frac{A}{\varphi'(\alpha)}.$$

Tā kā saskaņā ar (β) $\varphi'(r) = 2r$, tad $\varphi'(\alpha) = 2i$ un

$$\lambda = \frac{1}{2} 2i = \frac{1}{4i}.$$

Ievērojot šo λ vērtību, dabūjam

$$u_2 = \frac{1}{4i} x e^{ix}.$$

Trešā vienādojuma partikularo integralu u_3 dabūjam līdzīgā kārtā:

$$u_3 = -\frac{1}{4i} x e^{-ix}.$$

Dotā diferencialvienādojuma (α) vispārīgais integrals ir

$$y = Y + u_1 + u_2 + u_3 = A \cos x + B \sin x + 2x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Še ņemts vērā, ka

$$u_2 + u_3 = \frac{1}{2} x \sin x.$$

Gadījumā, ja $X = e^{\alpha x}(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)$,

liekam $u = e^{\alpha x}(\lambda_0 x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_n)$.

Ievietojam u un tā atvasinātās diferencialvienādojumā; dabūtajā sakarībā abas puses dalām ar $e^{\alpha x}$; tad dabūsim vienādojuma abās pusēs x polinomus. Salīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm, dabūjam vienādojumus koeficientu $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ aprēķināšanai.

Piemērs.

$$y'' - 7y' + 12y = e^x x.$$

Liekam

$$u = e^x(\lambda_0 x + \lambda_1).$$

Diferencējot dabūjam

$$u' = e^x(\lambda_0 x + \lambda_1) + \lambda_0 e^x = e^x[\lambda_0 x + \lambda_0 + \lambda_1],$$

$$u'' = e^x(\lambda_0 x + \lambda_1) + \lambda_0 e^x + \lambda_0 e^x = e^x[\lambda_0 x + \lambda_1 + 2\lambda_0].$$

Ievietojam šīs vērtības diferencialvienādojumā un dalām to ar e^x; tad

$$\lambda_0 x + \lambda_1 + 2\lambda_0 - 7(\lambda_0 x + \lambda_0 + \lambda_1) + 12(\lambda_0 x + \lambda_1) = x,$$

$$6\lambda_0 x + 6\lambda_1 - 5\lambda_0 = x,$$

$$6\lambda_0 = 1,$$

$$\lambda_0 = \frac{1}{6},$$

$$\lambda_1 = \frac{5}{36}.$$

Ar šīm vērtībām dabūjam

$$u = e^x\left(\frac{1}{6}x + \frac{5}{36}\right) = e^x\left(\frac{6x+5}{36}\right).$$

Raksturīgā vienādojuma

$$r^2 - 7r + 12 = 0$$

saknes ir $r_1 = 3$; $r_2 = 4$.

Reducētā vienādojuma vispārīgais integrals tad ir

$$Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$$

Dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals ir

$$y = Y + u = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \left(\frac{6x+5}{36}\right)e^x.$$

b) Nehomogena lineara diferencialvienādojuma integrēšana ar Lagranža konstantu variaciju paņēmienu.

85. Lagranža konstantu variacijas paņēmiens. Ja zināms homogenā diferencialvienādojuma

$$\sum a_s y^{(n-s)} = 0 \tag{1}$$

vispārīgais integrals

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{2}$$

tad nehomogenā diferencialvienādojuma

$$\sum a_s y^{(n-s)} = X, \tag{3}$$

vispārīgo integralu varam dabūt ar kvadraturām. To panāk, pielietojot Lagranža konstantu variaciju, ko izdara šādā kārtā.

Reducētā vienādojuma vispārīgā integrala (2) konstantes C_1, C_2, C_3, ..., C_n aizstāj ar nezināmām x funkcijām $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ un atrod šīs nezināmās funkcijas tā, lai izteiksme

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n \tag{4}$$

apmierinātu nehomogeno diferencialvienādojumu (3). Tas ir iespējams, ja liekam:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1' y_1 + C_2' y_2 + \ldots + C_n' y_n = 0,\\
&C_1' y_1' + C_2' y_2' + \ldots + C_n' y_n' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0,\\
&C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = X.
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Še ar C_1', C_2', ..., C_n' apzīmētas atvasinātās pēc x.

Diferencējam (4) un ievērojam (5):

$$\left.\begin{aligned}
&y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \ldots + C_n y_n',\\
&y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \ldots + C_n y_n'',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)},\\
&y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + C_2 y_2^{(n)} + \ldots + C_n y_n^{(n)} + \frac{X}{a_0}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ievietojam y vērtību no (4) un y', y'', ..., $y^{(n)}$ vērtības no (6) izteiksmē $\sum a_s y^{(n-s)}$

un ņemam vērā, ka sakarībās (6) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ uzskatīti kā konstanti; tad

$$\sum a_s y^{(n-s)} = C_1 \sum a_s y_1^{(n-s)} + C_2 \sum a_s y_2^{(n-s)} + \ldots +$$

$$+ C_n \sum a_s y_n^{(n-s)} + X. \tag{7}$$

Tā kā $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ir reducētā diferencialvienādojuma partikularie integrali, tad

$$\sum a_s y_1^{(n-s)} = 0; \ \sum a_s y_2^{(n-s)} = 0; \ldots; \sum a_s y_n^{(n-s)} = 0.$$

Ar šīm izteiksmēm no (7) dabūjam

$$\sum a_s y^{(n-s)} = X,$$

kas rāda, ka izteiksme (4) tiešām ir nehomogenā diferencialvienādojuma integrals.

Lai dabūtu $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$, atrisinām vienādojumu sistemu (5) attiecībā uz $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$. Šīs sistemas vienādojumi ir lineari attiecībā uz nezināmiem $C_1'(x)$, $C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$. Pieņemsim, ka dabūjām

$$C_1'(x) = \frac{d\, C_1(x)}{dx} = z_1; \ C_2'(x) = \frac{d\, C_2(x)}{dx} = z_2 \text{ utt.},$$

kur z_1, z_2 utt. ir x funkcijas; tad

$$C_1(x) = \int z_1\, dx + C_1; \ C_2(x) = \int z_2\, dx + C_2 \text{ utt.}$$

Še $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ir patvaļīgi pastāvīgi lielumi.

Ievietojot $C_1(x)$, $C_2(x)$ utt. vērtības vienādojumā (4), dabūjam nehomogenā vienādojuma vispārīgo integralu.

P i e m ē r s. Atrisināt nehomogenu linearu diferencialvienādojumu

$$y'' + y = \operatorname{ctg} x. \tag{a}$$

Reducētā vienādojuma

$$y'' + y = 0 \tag{b}$$

raksturīgā vienādojuma

$$r^2 + 1 = 0$$

saknes ir $r_1 = i$, $r_2 = -i$.

Reducētā vienādojuma (2) vispārīgais integrals tad ir

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{c}$$

Še vienādojumu grupa [85, 5] ir:

$$\left.\begin{aligned} \cos x \frac{dC_1}{dx} + \sin x \frac{dC_2}{dx} &= 0, \\ -\sin x \frac{dC_1}{dx} + \cos x \frac{dC_2}{dx} &= \operatorname{ctg} x. \end{aligned}\right\} \tag{d}$$

Atrisinot šos vienādojumus, dabūjam

$$\frac{dC_1}{dx} = -\cos x,$$

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \sin x.$$

Integrējam:

$$C_1 = -\sin x + C_1,$$

$$C_2 = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + C_2.$$

Ievietojot C_1 un C_2 vērtības vienādojumā (3), dabūjam diferencialvienādojuma (1) vispārīgo integralu

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

86. Uzdevumi.

1) $y'' - 5y' + 6y = 0.$ Atb. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$

2) $y'' - 4y' + 13y = 0.$ Atb. $y = e^{2x}(A \cos 3x + B \sin 3x).$

3) $y''' - y'' - y' + y = 0.$ Atb. $y = (A + Bx) e^x + C e^{-x}.$

4) $y^{IV} + 2n^2 y'' + n^4 y = 0.$
Atb. $y = (A + Bx) \cos nx + (C + Dx) \sin nx.$

5) $y'' - 7y' + 12y = 0.$ Atb. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$

6) $y'' - 6y' + 13y = 0.$ Atb. $y = e^{3x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$

7) $y'' - 12y' + 36y = 0.$ Atb. $y = (A + A_2 x)\, e^{6x}.$

8) $y'' - k^2 y = 0.$ Atb. $y = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}.$

9) $y'' - 7y' + 12y = 2x.$ Atb. $y = \frac{12x + 7}{72} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$

10) $y'' - 2y' + y = ax^3.$

Atb. $y = a\,(x^3 + 6x^2 + 18x + 24) + (C_1 + C_2 x)\, e^x.$

11) $y'' - 2ay' + a^2 y = e^x.$ Atb. $y = \frac{e^x}{(a-1)^2} + (C_1 + C_2 x)\, e^{ax}.$

12) $y'' + n^2 y = \cos ax.$ Atb. $y = \frac{\cos ax}{n^2 - a^2} + C_1 \cos nx + C_2 \sin nx.$

13) $y'' - y = \cos x.$ Atb. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos x.$

14) $y'' + y = x^2.$ Atb. $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 - 2.$

15) $y'' - 2y' - 3y = e^{3x}.$ Atb. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4} x\, e^{3x}.$

16) $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}(1 - x).$ Atb. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x^2 e^{2x}}{2}.$

17) $y'' + y = 5 + \cos x.$ Atb. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x + 5.$

18) $y''' - y = e^x + 2.$

Atb. $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \frac{1}{3} x e^x - 2.$

19) $y''' - 2y' + 4y = e^x \cos x.$

Atb. $y = C_1 e^{-2x} + (C_2 \cos x + C_3 \sin x)\, e^x - \frac{1}{20} x\, e^x (\cos x - 3 \sin x).$

20) $x^2 y'' + xy' + y = \ln x$. Atb. $y = C_1 \cos(\ln x) +$
$+ C_2 \sin(\ln x) + \ln x$.

21) $y'' = x^2$. Atb. $y = C_1 + C_2 x + \frac{x^4}{12}$.

Uzdevumu (21) atrisināt kā linearu diferencialvienādojumu, lietojot Y un u.

22) $x^4 y^{IV} + 3x^2 y'' - 7xy' + 8y = 0$.

Atb. $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x + C_3 x \cos \ln x + C_4 x \sin \ln x$.

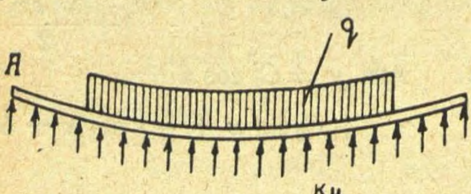
23) $x^4 y^{IV} + 6x^3 y''' + 9x^2 y'' + 3xy' + y = 0$.

Atb. $y = A \cos \ln x + B \sin \ln x + C \ln x \cos \ln x +$
$+ D \ln x \sin \ln x$.

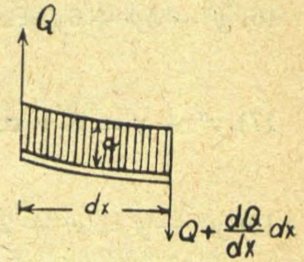
C. Dažas techniskas problemas

87. Sija uz elastīga pamata. Pieņemsim, ka prizmatiska sija AB (25. zīm.) balstās visā garumā uz nepārtraukta elastīga pamata.

Slodze q uz tekoša metra rada elastīgā pamata reakciju, bet, tā kā sija slodzes un reakcijas iedarbē izliecas, tad reakcijas intensitate nav vienāda visos sijas punktos. Pieņemsim, ka reakcijas intensitate ir proporcionala y — sijas elementa iespiedumam pamatā. Šādā gadījumā reakciju kādā sijas punktā varam izteikt ar ky.



25. zīm.



26. zīm.

Sijas izlieces līkni dabūjam šādi. Stiprības mācība dod formulas:

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = - M \ (1) \quad \text{un} \quad \frac{dM}{dx} = Q. \qquad (2)$$

Še M ir lieces moments un Q šķērsspēks.

Diferencējot (1) divas reizes un ievērojot (2), dabūjam

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{dQ}{dx}. \tag{3}$$

Ievērojot uz sijas elementa dx iedarbojošos spēkus, dabūjam līdzsvara izteiksmi, (pieņemot y ass pozitivo virzienu uz apakšu):

$$q\,dx + \left(Q + \frac{dQ}{dx}dx\right) - Q - ky\,dx = 0 \tag{4}$$

vai

$$\frac{dQ}{dx} = ky - q. \tag{5}$$

Šo izteiksmi ievietojam vienādojumā (3):

$$EJ\frac{d^4y}{dx^4} = q - ky. \tag{6}$$

Izteiksme (6) ir uz elastīga pamata balstītās slogotās sijas izlieces līnijas diferencialvienādojums. To rakstām šādā veidā:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{k}{EJ}y = \frac{q}{EJ}. \tag{7}$$

Reducētais vienādojums ir

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{k}{EJ}y = 0.$$

Raksturīgā vienādojuma

$$r^4 + \frac{k}{EJ} = 0; \quad \sqrt[4]{\frac{k}{EJ}} = \beta \tag{8}$$

saknes ir:

$$r_1 = \frac{\beta\sqrt{2}}{2} + i\frac{\beta\sqrt{2}}{2}; \quad r_2 = -\frac{\beta\sqrt{2}}{2} + i\frac{\beta\sqrt{2}}{2};$$

$$r_3 = -\frac{\beta\sqrt{2}}{2} - i\frac{\beta\sqrt{2}}{2}; \quad r_4 = \frac{\beta\sqrt{2}}{2} - i\frac{\beta\sqrt{2}}{2}.$$

Reducētā vienādojuma vispārīgais integrals ir:

$$Y = e^{\frac{\beta\sqrt{2}}{2}x}\left(A\cos\frac{\beta\sqrt{2}}{2}x + B\sin\frac{\beta\sqrt{2}}{2}x\right) +$$

$$+ e^{-\frac{\beta\sqrt{2}}{2}x}\left(C\cos\frac{\beta\sqrt{2}}{2}x + D\sin\frac{\beta\sqrt{2}}{2}x\right). \tag{9}$$

Vienādojuma (7) partikularu integralu dabūjam, liekot

$$u = \lambda \frac{q}{EJ}. \tag{10}$$

Ievietojot šo vērtību diferencialvienādojumā, dabūjam

$$\frac{k}{EJ} \cdot \lambda \frac{q}{EJ} = \frac{q}{EJ}$$

vai

$$\lambda = \frac{EJ}{k}$$

un

$$u = \lambda \frac{q}{EJ} = \frac{EJ}{k} \cdot \frac{q}{EJ} = \frac{q}{k}. \tag{11}$$

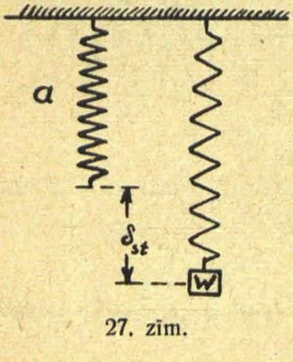
Diferencialvienādojuma (7) vispārīgais integrals tātad ir:

$$y = Y + u = e^{\frac{\beta\sqrt{2}}{2}x}\left(A \cos \frac{\beta\sqrt{2}}{2}x + B \sin \frac{\beta\sqrt{2}}{2}x\right) +$$

$$+ e^{\frac{-\beta\sqrt{2}}{2}x}\left(C \cos \frac{\beta\sqrt{2}}{2}x + D \sin \frac{\beta\sqrt{2}}{2}x\right) + \frac{q}{k}. \tag{12}$$

Konstantes A, B, C, D katrā atsevišķā gadījumā aprēķina no sākuma un robežu noteikumiem.

88. Brīva neslāpēta elastīga svārstība. 27. zīmējumā ar a apzīmēta spiralveida atspere. Pieņemsim, ka atsperi pakāpeniski slogojam, kamēr slodze sasniedz svaru W. Slodze rada atsperes pagarinājumu; pieņemsim, ka svaram W atbilst atsperes pagarinājums δ_{st} un ka pagarinājums ir proporcionals slodzes lielumam.



27. zīm.

Tad

$$\delta_{st} = e . W$$

jeb

$$\frac{1}{e} \delta_{st} = W.$$

Liekam

$$\frac{1}{e} = k,$$

tad

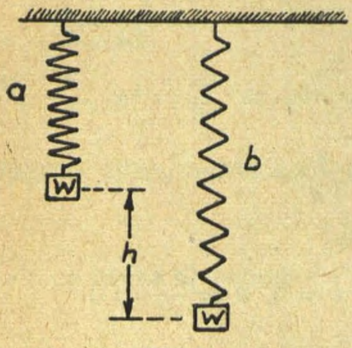
$$k \delta_{st} = W. \tag{1}$$

Kā redzams no (1), k ir tas svars, kas pagarina atsperi par garuma vienību. Koeficientu k sauc par atsperes konstanti. Lielumu δ_{st} sauc par atsperes statisko pagarinājumu, ko rada slodze W.

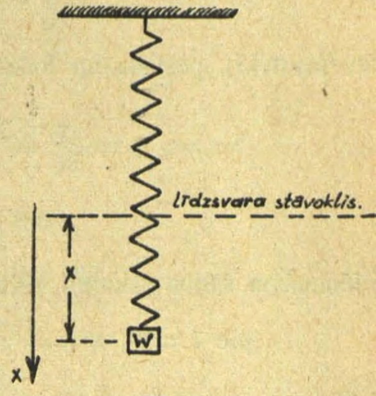
No (1) dabūjam

$$\delta_{st} = \frac{W}{k}. \tag{2}$$

28. zīmējumā ar a apzīmēta atspere ar piekārtu svaru W līdzsvara stāvoklī. Ar b apzīmēta tā pati atspere, bet pastiepta līdz attālumam h no līdzsvara stāvokļa. Ja pastiepto atsperi palaidīsim vaļā, tad sāksies svārstības.



28. zīm.



29. zīm.

Apzīmējam svārstības kustībā svara W attālumu no līdzsvara stāvokļa ar x, skaitot x pozitivu uz leju (29. zīm.). Kustības diferencialvienādojumu dabūsim no dinamikas pamatlikuma:

$$\frac{W}{g} \cdot x'' = -kx, \quad (g \text{ — gravitac. paātrinājums})$$

vai arī

$$x'' + \frac{kg}{W} x = 0.$$

Ja apzīmēsim

$$p^2 = \frac{kg}{W} = \frac{g}{\delta_{st}}, \tag{3}$$

tad kustības diferencialvienādojums būs

$$x'' + p^2 x = 0. \tag{4}$$

Kā zināms, diferencialvienādojuma (4) atrisinājums ir:

$$x = A \cos pt + B \sin pt. \tag{5}$$

Šis vienādojums rāda, ka svara W kustība ir svārstība.

Šīs svārstības periods ir:

$$\tau = \frac{2\pi}{p}. \tag{6}$$

Svārstības frekvence ir:

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{p}{2\pi}. \tag{7}$$

Ievērojot (3), perioda un frekvences izteiksmes rakstām šādi:

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}, \tag{8}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}. \tag{9}$$

Pieņemsim šādus sākuma noteikumus:

$$\text{pie } t = 0,\ x = h \text{ un pie } t = 0,\ v = \frac{dx}{dt} = 0.$$

Ievietojot vienādojumā (5) $t = 0$ un $x = h$, dabūjam

$$A = h.$$

Diferencējam vienādojumu (5):

$$\frac{dx}{dt} = -Ap \sin pt + Bp \cos pt.$$

Ievietojam šajā vienādojumā $t = 0$ un $\frac{dx}{dt} = 0$, tad seko:

$$B = 0.$$

Ar dotiem sākuma noteikumiem apskatāmās svārstības vienādojums ir $x = h \cos pt$.

Kā redzams, h te ir svara lielākais attālums no līdzsvara stāvokļa; h sauc par svārstības kustības a m p l i t u d u.

Ar vienādojumu (5) noteikto svārstību, kas atkarīga tikai no atsperes elastības, sauc par brīvu svārstību vai arī par sistemas, sastāvošas no atsperes un svara W, pašsvārstību.

89. Uzspiestas svārstības. Pieņemsim, ka uz svaru W, kas piekārts atsperei, iedarbojas periodisks mainīgs ierosinātājs spēks Q. Šādā gadījumā iestājas sistemas uzspiestās svārstības. Šīs kustības diferencialvienādojums ir:

$$\frac{W}{g} x'' + kx = Q$$

jeb

$$x'' + \frac{kg}{W} x = \frac{Qg}{W}.$$

Še apzīmēsim

$$p^2 = \frac{kg}{W} \text{ un pieņemsim, ka } \frac{Qg}{W} = q \cos mt. \qquad (1)$$

Kustības diferencialvienādojums tad būs

$$x'' + p^2 x = q \cos mt. \qquad (2)$$

Mainīgā spēka Q periods še pieņemts.

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{m} \qquad (3)$$

un šī spēka frekvence

$$f_1 = \frac{m}{2\pi}. \qquad (4)$$

Ja spēka Q maiņas ir ļoti lēnas, t. i., ja m samērā ar p ļoti mazs (τ_1 ļoti liels samērā ar τ), tad vienādojumā (2) varam atmest locekli ar x'' un rakstīt:

$$x_{st} = \frac{q \cos mt}{p^2}. \qquad (5)$$

Tā kā slogošanas paātrinājums ir ļoti mazs, tad izteiksme (5) dod x_{st}, ko dabū, slogojot sistemu ar mainīgo spēku Q.

Kā redzams, x_{st} max ir:

$$x_{st} \max = \frac{q}{p^2} = \frac{\frac{Qg}{W}}{\frac{k.g}{W}} = \frac{Q}{k}.$$

Diferencialvienādojuma (2) reducētā vienādojuma

$$x'' + p^2 x = 0$$

vispārīgais integrals ir

$$X = A \cos pt + B \sin pt.$$

Apzīmējot vienādojuma (2) partikularo integralu ar u un ievedot cos vietā eksponentfunkcijas, vienādojumu (2) rakstām tā:

$$u'' + p^2 u = q \cos mt = q. \frac{e^{imt} + e^{-imt}}{2}.$$

Še dabūjam divus diferencialvienādojumus:

$$u_1'' + p^2 u_1 = \frac{q}{2} e^{imt} \text{ un } u_2'' + p^2 u_2 = \frac{q}{2} e^{-imt}.$$

Raksturīgais vienādojums šinī gadījumā ir:

$$\varphi(r) = r^2 + p^2 = 0.$$

Šī vienādojuma saknes ir:

$$r_1 = pi \text{ un } r_2 = -pi.$$

Tā kā še

$$pi \neq mi,$$

tad augšējo diferencialvienādojumu partikularie integrali ir:

$$u_1 = \lambda_1 e^{imt} \text{ un } u_2 = \lambda_2 e^{-imt},$$

kur

$$\lambda = \frac{A_1}{\varphi(\alpha_1)} = \frac{q}{2(p^2 - m^2)},$$

un

$$\lambda_2 = \frac{A_2}{\varphi(\alpha_2)} = \frac{q}{2(p^2 - m^2)}.$$

Tad

$$u_1 = \frac{q}{2(p^2 - m^2)} e^{imt} \text{ un } u_2 = \frac{q}{2(p^2 - m^2)} e^{-imt}.$$

Tā kā

$$u = u_1 + u_2,$$

tad

$$u = \frac{q}{p^2 - m^2} \cos mt.$$

Diferencialvienādojuma (2) vispārīgais integrals ir:

$$x = X + u = A \cos pt + B \sin pt + \frac{q}{p^2 - m^2} \cos mt. \qquad (5)$$

Vienādojumā (5) izteiksme

$$x = A \cos pt + B \sin pt$$

dod sistemas pašsvārstības un izteiksme

$$u = \frac{q}{p^2 - m^2} \cos mt$$

izsaka sistemas uzspiestās svārstības. Šo svārstību amplituda, ko apzīmējam ar C, ir

$$C = \frac{q}{p^2 - m^2}.$$

Ja $p = m$, t. i., gadījumā, kad pašsvārstību un uzspiestās svārstības periodi ir vienādi, tad augšējā izteiksme rāda, ka uzspiesto svārstību amplituda $C = \infty$. Šādā gadījumā saka, ka svārstībās iestājas r e z o n a n c e.

Attiecīgo ierosinātāja spēka Q frekvenci tad sauc par k r i t i s k o frekvenci.

$$\frac{C}{x_{st}\mathrm{max}} = \beta$$

sauc par amplitudas p a v a i r o š a n a s f a k t o r u. Ievietojot augšējā formulā attiecīgas x_{st} un C vērtības, dabūjam

$$\beta = \frac{q}{p^2 - m^2} \cdot \frac{p^2}{q} = \frac{1}{1 - \frac{m^2}{p^2}}$$

Ievietojot šinī izteiksmē periodus

$$\tau = \frac{2\pi}{p} \text{ un } \tau_1 = \frac{2\pi}{m},$$

dabūjam

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}}.$$

Šī izteiksme rāda, ka gadījumā, ja pašsvārstību periods, salīdzinot ar uzspiesto svārstību periodu, ir mazs, β ir tuvīni 1, un uzspiesto svārstību amplituda maz atšķiras no x_{st} max. Koeficients β aug, augot attiecībai $\frac{\tau}{\tau_1}$, un gadījumā, kad šī attiecība ir 1, tad β ir ∞.

Pieņemam šādus sākuma noteikumus:

$$\text{ja } t = 0, \quad x = 0$$

un

$$\text{ja } t = 0, \; x' = 0.$$

Liekot vienādojumā (5) $t = 0$ un $x = 0$, dabūjam

$$A = -\frac{q}{p^2 - m^2}.$$

Diferencējot vienādojumu (5) pēc t un liekot $t = 0$ un $x' = 0$, dabūjam

$$B = 0.$$

Ievietojam koeficientu A un B vērtības vienādojumā (5):

$$x = -\frac{q}{p^2 - m^2}(\cos pt - \cos mt).$$

Rezonances gadījumā, kad $m = p$, šī izteiksme dod

$$x = -q\,\frac{\cos pt - \cos mt}{p^2 - m^2} = q \cdot \frac{0}{0}.$$

Pielietojot Lopitala paņēmienu un diferencējot šīs izteiksmes skaitītāju un saucēju pēc m, dabūjam

$$x = -q\,\frac{t \sin mt}{-2m} = \frac{q\,t \sin mt}{2m}.$$

Pēdējā izteiksme rāda, ka x aug ar laiku t neaprobežoti. Uzspiestās svārstības amplitudas C izteiksmi varam pārveidot šādi:

$$C = \frac{q}{p^2 - m^2} = \frac{q}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m^2}{p^2}} = \frac{q}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}}.$$

Tā kā

$$x_{st} \max = \delta_{st} = \frac{q}{p^2},$$

tad

$$C = \frac{\delta_{st}}{1 - \frac{m^2}{p^2}} = \frac{\delta_{st}}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}} = \delta_{st} \cdot \beta.$$

Svārstība notiek tā, kā tikko apskatīts, tikai tādā gadījumā, ja nav berzes vai citas pretestības kustībai.

90. Pašsvārstības ar pretestību. Pieņemsim, ka kustība sastop pretestību un ka pretestība ir proporcionala kustības ātrumam. Šādā gadījumā kustības diferencialvienādojums ir:

$$\frac{W}{g} x'' = -\alpha x' - kx$$

jeb

$$x'' + \frac{\alpha g}{W} x' + \frac{kg}{W} x = 0 \quad (\alpha \text{ — proporc. faktors}).$$

Liekam

$$2n = \frac{\alpha g}{W} \text{ un } p^2 = \frac{kg}{W}; \tag{1}$$

tad kustības diferencialvienādojums būs

$$x'' + 2nx' + p^2 x = 0. \tag{2}$$

Šī diferencialvienādojuma raksturīgā vienādojuma

$$r^2 + 2nr + p^2 = 0$$

saknes ir

$$r_1 = -n + \sqrt{n^2 - p^2} \text{ un } r_2 = -n - \sqrt{n^2 - p^2}.$$

Še izšķiram trīs gadījumus:

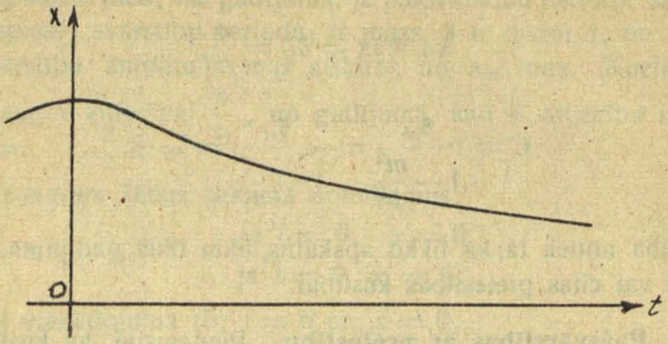
1) Ja $n^2 - p^2 > 0$, tad liekot $\sqrt{n^2 - p^2} = \beta$, rakstām

$$r_1 = -n + \beta \text{ un } r_2 = -n - \beta.$$

Diferencialvienādojuma (2) integrals tad ir:

$$x = e^{-nt}\left(Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}\right). \tag{3}$$

Šī vienādojuma attēls parādīts 30. zīmējumā.

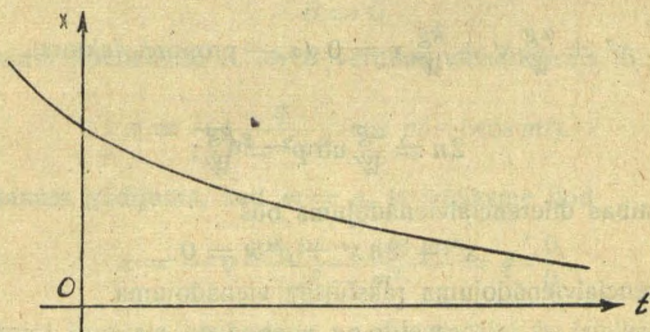


30. zīm.

2) Ja $n^2 - p^2 = 0$, tad $r_1 = r_2$ un diferencialvienādojuma (2) integrals ir:

$$x = e^{-nt}(A + Bt). \tag{4}$$

Šī vienādojuma attēls ir 31. zīmējumā parādītā līkne.



31. zīm.

3) Ja $n^2 - p^2 < 0$, tad apzīmējam $p^2 - n^2 = p_1^2$; raksturīga vienādojuma saknes tad ir:

$$r_1 = -n + p_1 i \text{ un } r_2 = -n - p_1 i,$$

un diferencialvienādojuma (2) integrals tad ir:

$$x = e^{-nt}(A \cos p_1 t + B \sin p_1 t). \tag{5}$$

Kā redzams,

$$p_1 < p,$$

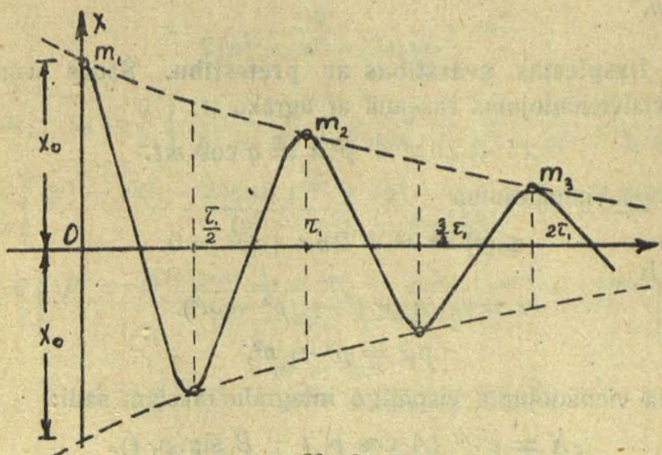
tādēļ arī

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{p_1} > \frac{2\pi}{p}.$$

Ja n samērā ar p ir mazs lielums, tad $p - p_1$ ir otras kārtas mazs lielums. Šādā gadījumā var teikt, ka mazs pretestības spēks, kas proporcionals ātrumam, svārstības periodu maz iespaido.

Še apskatītajā trešajā gadījumā kustībai ir svārstības raksturs, bet kustības amplituda ar augošu t samazinās, un ar pietiekoši lielu galīgu t ir praktiski uzskatāma par 0. Pirmajā un otrā gadījumā kustībai nav svārstības rakstura. Atkarībā no sākuma noteikumiem vienādojums (5) var dabūt dažādus veidus; kādā atsevišķā gadījumā vienādojums (5) ir:

$$x = x_0 e^{-nt} \cos p_1 t.$$



32. zīm.

Šī vienādojuma attēls parādīts 32. zīmējumā.

Pārtraukto līkņu vienādojumi ir:

$$x = \pm x_0 e^{-nt}.$$

Apzīmējot amplitudu laika momentā t_0 ar x_0, rakstām:

$$x_0 = e^{-nt_0} (A \cos p_1 t_0 + B \sin p_1 t_0).$$

Par vienu periodu lielāks laiks tad ir $t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{p_1}$. Apzīmējot šim laikam atbilstošo amplitudu ar x_1, rakstām:

$$x_1 = e^{-n\left(t_0+\frac{2\pi}{p_1}\right)}\left[A\cos p_1\left(t_0 + \frac{2\pi}{p_1}\right) + B\sin p_1\left(t_0 + \frac{2\pi}{p_1}\right)\right]$$

No augšējiem vienādojumiem dabūjam:

$$\frac{x_1}{x_0} = e^{-\frac{2n\pi}{p_1}}$$

jeb

$$\ln x_0 - \ln x_1 = \frac{2\pi n}{p_1}. \qquad (6)$$

Lielumu $\frac{2n\pi}{p_1}$ sauc par logaritmisko dekrementu. Ar izteiksmes (6) palīdzību var, novērojot x_0 un x, dabūt slāpēšanas skaitli n.

91. Uzspiestas svārstības ar pretestību. Šādas svārstības diferencialvienādojums saskaņā ar agrāko ir:

$$x'' + 2nx' + p^2 x = q\cos mt. \qquad (1)$$

Raksturīgā vienādojuma

$$\varphi(r) = r^2 + 2nr + p^2 = 0$$

saknes ir

$$r = -n \pm \sqrt{-(p^2 - n^2)}.$$

Liekot

$$p_1^2 = p^2 - n^2, \qquad (2)$$

reducētā vienādojuma vispārīgo integralu rakstām šādi:

$$X = e^{-nt}(A\cos p_1 t + B\sin p_1 t). \qquad (3)$$

Lai dabūtu vienādojuma (1) partikularo integralu u, vienādojumu (1) rakstām šādi:

$$x'' + 2nx' + p^2 x = \frac{q}{2}e^{imt} + \frac{q}{2}e^{-imt}. \qquad (4)$$

Kā redzams, šajā gadījumā

$$u = u_1 + u_2,$$

kur u_1 un u_2 atrodami, atrisinot diferencialvienādojumus:

$$u_1'' + 2n\,u_1' + p^2 u_1 = \frac{q}{2} e^{imt},$$

$$u_2'' + 2n\,u_2' + p^2 u_2 = \frac{q}{2} e^{-imt}.$$

Še $A_1 = \frac{q}{2}$, $\alpha_1 = im$, $A_2 = \frac{q}{2}$ un $\alpha_2 = -im$; $\varphi(r) = r^2 + 2n\,r + p^2$;

$$\lambda = \frac{A_1}{\varphi(\alpha_1)} \text{ un } \lambda_2 = \frac{A_2}{\varphi(\alpha_2)};$$

$$\lambda_1 = \frac{q}{2(p^2 - m^2 + 2mni)}; \quad \lambda_2 = \frac{q}{2(p^2 - m^2 - 2mni)};$$

$$u_1 = \lambda_1 e^{imt} = \frac{q}{2(p^2 - m^2 + 2mni)} e^{imt}; \; u_2 = \lambda_2 e^{-imt} = \frac{q}{2(p^2 - m^2 - 2mni)} e^{-imt};$$

$$u = u_1 + u_2 = \frac{q}{2}\left[\frac{e^{imt}}{p^2 - m^2 + 2mni} + \frac{e^{-imt}}{p^2 - m^2 - 2mni}\right] =$$

$$= \frac{q}{2}\left[\frac{(p^2 - m^2 - 2mni)\,e^{imt} + (p^2 - m^2 + 2mni)\,e^{-imt}}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2 n^2}\right] =$$

$$= \frac{q}{2}\left[\frac{(p^2 - m^2)(e^{imt} + e^{-imt}) - 2mni\,(e^{imt} - e^{-imt})}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2 n^2}\right] =$$

$$= q\left[\frac{p^2 - m^2}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2 n^2} \cos mt - \frac{2mni\,i}{i[(p^2 - m^2)^2 + 4m^2 n^2]} \cdot \left(\frac{e^{imt} - e^{-imt}}{2}\right)\right];$$

$$u = q\left[\frac{p^2 - m^2}{(p^2 - m^2)^2 + 4m^2 n^2} \cos mt + \frac{2mn}{(p^2 - m^2) + 4m^2 n^2} \sin mt\right].$$

Liekam

$$\frac{q\,2mn}{(p^2-m^2)+4m^2n^2}=C\sin E \text{ un } \frac{q(p^2-m^2)}{(p^2-m^2)^2+4m^2n^2}=$$

$$=C\cos E, \quad (\alpha)$$

tad

$$u=C(\cos mt\cos E+\sin mt\sin E)=C\cos(mt-E). \quad (\beta)$$

No augšējiem vienādojumiem (α) dabūjam:

$$C=\frac{q}{\sqrt{(p^2-m^2)^2+4m^2n^2}}. \quad (\gamma)$$

Diferencialvienādojuma (1) vispārīgais integrals ir:

$$x=X+u.$$

Ievietojot še dabūtās x un u vērtības, rakstām

$$x=e^{-nt}(A\cos p_1t+B\sin p_1t)+$$

$$+\frac{q}{\sqrt{(p^2-m^2)^2+4m^2n^2}}\cos(mt-E). \quad (5)$$

Vienādojuma (5) pirmais loceklis ar augošu t tiecas uz 0. Šī vienādojuma otrs loceklis izteic uzspiestās svārstības. Leņķi E vienādojumā (5) sauc par fazu nobīdnes leņķi starp uzspiestām svārstībām un ierosinātāju spēku. No vienādojumiem (α) dabūjam

$$tg\,E=\frac{2mn}{p^2-m^2}. \quad (\delta)$$

Ja $p>m$, kas ir gadījumā, ja pašsvārstību periods ir mazāks par ierosinātāja spēka periodu, tad leņķis E ir pozitīvs un mazāks par $\frac{\pi}{2}$. No vienādojuma (β) redzams, ka uzspiestās svārstības novēlojas pret ierosinātāju spēku $q\cos mt$.

Ja $p<m$, tad

$$\frac{\pi}{2}<E<\pi.$$

Še novēlošanās lielāka par $\frac{\pi}{2}$. Kad $p=m$, t. i. rezonances gadījumā, no (λ) dabūjam $tg\,E=\infty$; tad fazu nobīdne ir $\frac{\pi}{2}$.

Uzspiestās svārstības amplitudas C izteiksmi pārveidojam šādi. Tā kā

$$q = \frac{gQ}{W} \text{ un } p^2 = \frac{kg}{W},$$

tad

$$\frac{q}{p^2} = \frac{Q}{k} = \delta_{st}.$$

Izteiksmi (γ) rakstām šādi:

$$C = \frac{q}{p^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4m^2n^2}{p^4}}} = \frac{q}{p^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}\right)^2 + \frac{\tau^2\gamma^2}{\tau_1^2}}}.$$

Še $\gamma = \frac{2n}{p}$.

Ievērojot, ka $\frac{q}{p^2} = \delta_{st}$, C izteiksmes rakstām tā:

$$C = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4m^2n^2}{p^2}}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}\right)^2 + \frac{\tau^2\gamma^2}{\tau_1^2}}}.$$

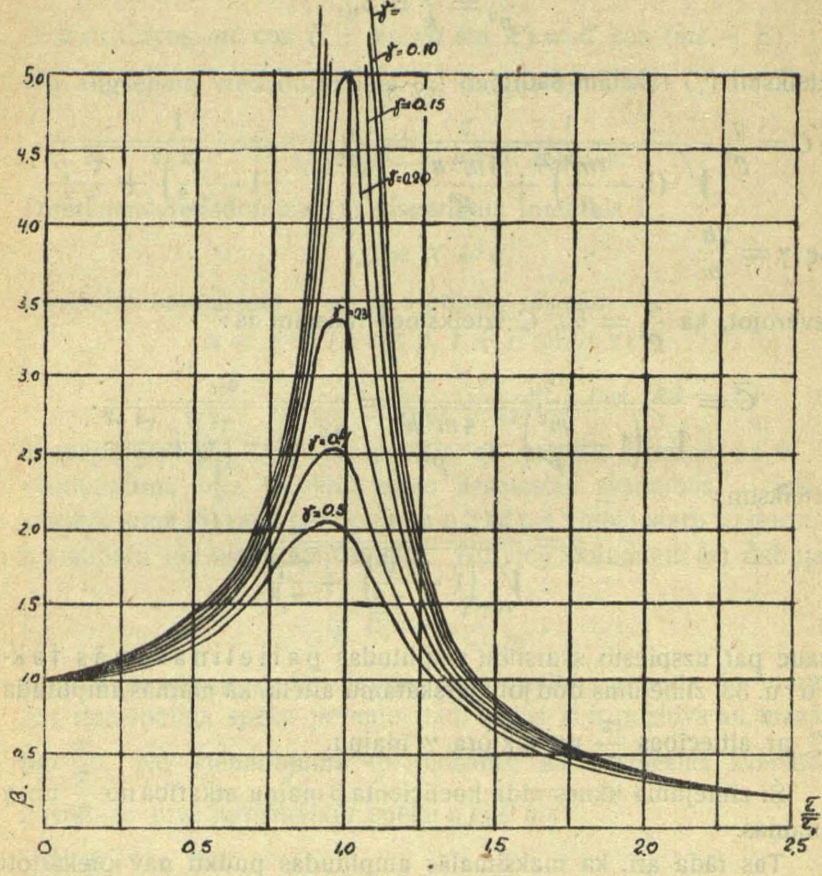
Izteiksmi

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_1^2}\right)^2 + \frac{\tau^2\gamma^2}{\tau_1^2}}}$$

sauc par uzspiesto svārstību amplitudas *palielināšanās faktoru*. 33. zīmējums dod ļoti pārskatāmu attēlu, kā mainās amplituda C ar attiecības $\frac{\tau}{\tau_1}$ un faktora γ maiņu.

Šī zīmējuma līknes rāda koeficienta β maiņu atkarībā no $\frac{\tau}{\tau_1}$ un γ maiņas.

Tas rāda arī, ka maksimālās amplitudas punkti nav piekārtoti $\frac{\tau}{\tau_1} = 1$ vērtībai. Minētais maksims atbilst $\frac{\tau}{\tau_1}$ vērtībai, kas nedaudz mazāka par 1. No 33. zīmējuma redzam, ka slāpēšanai (pretestībai) ir ļoti liels iespaids uz uzspiestām svārstībām rezonances tuvumā no $\frac{\tau}{\tau_1} = 0{,}75$ līdz $\frac{\tau}{\tau_1} = 1{,}25$. Šinīs robežās pretestība ievērojami samazina uzspiesto svārstību amplitudu un uzspiež tai galīgu vērtību rezonances gadījumā. Tālāk redzams arī, ka jo lielāka pretestība, jo mazāka ir rezonances ietekme.



33. zīm.

Šo laiku technikā svārstību parādībām ir visai liela nozīme, kādēļ inženierim nepieciešama pamatīga iepazīšanās ar svārstību teoriju.

Diferencialvienādojumu sistema

92. Definicija. Piemērs. Mechanikā un mechanikas pielietojumos bieži gadās, ka jāintegrē vienādojumu kopība, sastāvoša no n dažādu kārtu diferencialvienādojumiem ar n no viena argumenta atkarīgiem mainīgiem.

Tā, piemēram, vienādojumu kopība

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= F\,(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= F_1\,(x, y, z) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

noteic y un z kā x funkcijas. Lai dabūtu y kā x funkciju, tad ar sistemas vienādojumiem jāveido diferencialvienādojums, kas satur vienīgi mainīgos y un x, tātad jāizslēdz z un $\frac{dz}{dx}$. No sistemas diviem vienādojumiem nav iespējams izslēgt divus lielumus, bet šādam nolūkam vajadzīgi trīs vienādojumi. Trešo vienādojumu, kas ar sistemu nav tieši dots, dabūjam, diferencējot vienu no sistemas vienādojumiem; ja aprēķinām y, tad diferencējam vienādojumu, kurā atrodas $\frac{dy}{dx}$. Tā tad dotajā gadījumā diferencējam sistemas pirmo vienādojumu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}. \qquad (2)$$

No vienādojumiem (1) un (2) izslēdzam z un $\frac{dz}{dx}$ un dabūjam otras kārtas diferencialvienādojumu

$$f\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x\right) = 0, \qquad (3)$$

no kura dabūjam y kā x funkciju:

$$y = \varphi_1\,(x, C_1, C_2). \qquad (4)$$

Ja y kā x funkcija dabūts, tad, lai dabūtu z kā x funkciju, integrēšana nav vajadzīga. Dotajā gadījumā, ievietojot y vērtību no

(4) sistemas pirmajā vienādojumā, dabūjam vienādojumu, no kura bez integrešanas atrodam z kā x funkciju.

Piemērs. Integrēt diferencialvienādojumu sistemu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x + y + 2z \qquad (1) \\ \frac{dz}{dx} &= x + z + 2y \qquad (2) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Ja vēlamies dabūt y kā x funkciju, tad diferencējam pirmo vienādojumu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + 2\frac{dz}{dx}. \qquad (3)$$

Vienādojumā (3) ievietojam $\frac{dz}{dx}$ vērtību no (2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + 2(x + 2y + z) = 1 + \frac{dy}{dx} + 2x + 4y + 2z. \qquad (4)$$

Vienādojumā (4) ievietojam no (1) $2z$ vērtību

$$2z = \frac{dy}{dx} - x - y;$$

dabūjam:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + 2x + 4y + \frac{dy}{dx} - x - y$$

vai

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 1 + x.$$

Šo diferencialvienādojumu atrisinot, dabūjam

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

un

$$u = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9}.$$

Tad

$$y = Y + u = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9}. \qquad (\beta)$$

No sistemas pirmā vienādojuma dabūjam:

$$z = \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y.$$

Šajā vienādojumā ievietojot y vērtību, dabūjam:

$$z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9}. \tag{γ}$$

Vienādojumi (β) un (γ) dod diferencialvienādojumu sistemas (α) atrisinājumu.

93. Diferencialvienādojumu sistemas ģeometriskā nozīme. Ja uzskatām x, y, z par punkta M koordinatām telpā, tad punkti, kuriem y un z ir noteiktas x funkcijas, veido līkni telpā. Kā zināms, telpas līknes pieskares koeficienti ir proporcionali dx, dy, dz, t. i.,

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = dx : dy : dz.$$

Šo sakarību varam rakstīt arī tā:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1 : \frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx}.$$

Ievērojot diferencialvienādojumu sistemu [92,1], rakstām:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 1 : F(x, y, z) : F_1(x, y, z).$$

Redzam, ka atrisināt diferencialvienādojumu sistemu [92, 1] ģeometriski nozīmē uzmeklēt tādas līknes telpā, kuru pieskares virziena koeficienti punktā (x, y, z) ir proporcionali:

$$1 : F(x, y, z) : F_1(x, y, z).$$

Sistemas [92,1] integrēšana dod meklēto līkņu vienādojumus:

$$\left.\begin{array}{l} y = \varphi_1(x, C_1, C_2) \\ z = \varphi_2(x, C_1, C_2) \end{array}\right\}. \tag{1}$$

Caur punktu P_0 (x_0, y_0, z_0) telpā iet viena no līknēm, kas dotas ar vienādojumiem (1). Ievietojot vienādojumos (1) x, y, z vietā x_0, y_0, z_0, dabūjam no (1) šīs līknes parametru C_1 un C_2 vērtības.

94. Spēka līnijas. Pieņemsim, ka kādā telpas iecirknī katram punktam ar kādu likumu piekārtots spēks $\bar{F}$ un ka

$$\bar{F} = \bar{f}(x, y, z). \tag{1}$$

Apzīmēsim $\bar{F}$ projekcijas uz koordinatu asīm ar

$$X = \varphi(x, y, z),\ Y = \psi(x, y, z),\ Z = \omega(x, y, z). \tag{2}$$

Telpas iecirkni ar šādu īpašību sauc par spēka lauku, vektoru $\bar{F}$ par šī lauka spēku.

Līkni ar īpašību, ka katrā līknes punktā punkta pieskare sakrīt ar šim punktam piekārtota spēka vektoru $\bar{F}$, sauc par spēka līniju.

Spēka līnijas elements $d\bar{s}$ ir paralels spēkam $\bar{F}$; tāpēc starp $d\bar{s}$ un $\bar{F}$ projekcijām pastāv sakarība:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \tag{3}$$

vai

$$\frac{dx}{\varphi(x, y, z)} = \frac{dy}{\psi(x, y, z)} = \frac{dz}{\omega(x, y, z)}, \tag{4}$$

ko pārveidojot rakstām:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\psi(x, y, z)}{\varphi(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{\omega(x, y, z)}{\varphi(x, y, z)} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Vienādojumi (5) ir spēka līniju diferencialvienādojumi. Integrējot šos vienādojumus, dabūjam spēka līniju vienādojumus.

95. Virsmu saimes ortogonalo trajektoriju vienādojums. Vienādojums

$$f(x, y, z) = \lambda \tag{1}$$

ar mainīgu parametru λ izteic virsmu saimi.

Ar mainīgu λ virsma maina veidu un vietu telpā tādā kārtā, ka telpas iecirknī, kurā pastāv vienādojums (1), viena no saimes virsmām iet caur šajā telpas iecirknī atrodošos punktu

$$P_0(x_0, y_0, z_0).$$

Līknes, kas krusto stateniski dotās virsmu saimes (1) virsmas, sauc par virsmu saimes (1) ortogonalām trajektorijām.

Virsmu saimes (1) ortogonalo trajektoriju vienādojumus dabūjam, ievērojot trajektoriju īpašību, ka trajektorijas pieskare tajā punktā, kur trajektorija krusto kādu saimes (1) virsmu, sakrīt ar virsmas normali šajā punktā. Pieskares vienādojums ortogonalai trajektorijai caur krustpunktu (x, y, z) ar virsmu ir:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}. \tag{2}$$

Virsmas normales vienādojums šajā pašā punktā ir:

$$\frac{\xi - x}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\eta - y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\zeta - z}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{3}$$

Tā kā taisnes (2) un (3) ir paralelas, tad jābūt:

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}}. \tag{4}$$

Vienādojumi (4) ir virsmu saimes (1) ortogonalo trajektoriju vienādojumi. No augšējā un [94] redzams, ka, ja kāda spēka $\overline{F}$ projekcijas ir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

tad vienādojums (4) rāda, ka virsmu saimes (1) ortogonalās trajektorijas ir spēka līnijas. Šādā gadījumā saka, ka spēkam $\overline{F}$ ir spēka funkcija $f(x, y, z)$ un ar vienādojumu

$$f(x, y, z) = \lambda$$

doto līkņu saimi sauc par līmeņa virsmām.

Piemērs. Dabūt paraboloidu saimes

$$\frac{xy}{z} - \lambda = 0$$

ortogonalās trajektorijas. Še ir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}.$$

Ievietojam šīs vērtības vienādojumos (4):

$$\frac{dx}{\frac{y}{z}} = \frac{dy}{\frac{x}{z}} = \frac{dz}{-\frac{xy}{z^2}}. \tag{5}$$

Salīdzinot pirmo un otru locekli ar pēdējo, no (5) dabūjam:

$$x\,dx + z\,dz = 0, \quad y\,dy + z\,dz = 0. \tag{6}$$

Integrējam:

$$x^2 + z^2 = C_1; \quad y^2 + z^2 = C_2. \tag{7}$$

Šie vienādojumi ir meklēto trajektoriju vienādojumi.

Vienādojumi (7) rāda, ka trajektoriju varam uzskatīt kā divu cilindru krustošanās līkni. Pirmais cilindrs ir statenisks pret xz plakni; tā ass ir y ass. Otrs cilindrs ir statenisks pret yz plakni; tā ass ir x ass.

A. Pirmās kārtas diferencialvienādojumu sistema

96. Sistemas integrēšanas paņēmiens. Pieņemsim, ka dota pirmās kārtas diferencialvienādojumu sistema (simultani vienādojumi) ar n vienādojumiem un n nezināmām funkcijām $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dx} &= F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Šī vienādojumu sistema noteic nezināmos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kā x funkcijas.

Lai atrisinātu šo sistemu, pielietosim šādu paņēmienu. Diferencējam sistemas (1) pirmo vienādojumu:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}.$$

Šinī izteiksmē ievietojam $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ vērtības no (1); tad dabūjam vienādojumu

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = G_2\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{2}$$

Diferencējot (2) un norādītā kārtā atvietojot atvasinātās, dabūjam

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = G_3\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{3}$$

Diferencējot pirmo vienādojumu (n—1) reizes, beidzot dabūjam

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = G_n\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{4}$$

Ar diferencēšanu iegūtiem vienādojumiem $G_2, G_3, G_4, \ldots, G_n$ pievienojot sistemas (1) pirmo vienādojumu, dabūjam diferencial-vienādojumu sistemu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{d^2y_1}{dx} &= G_2\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{d^3y_1}{dx^3} &= G_3\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} &= G_n\,(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Šajā sistemā atrodas n vienādojumi; izslēdzot no tiem (n—1) lielumus $y_2, y_3, \ldots, y_n$, dabūjam n-tās kārtas diferencialvienādojumu starp y_1 un x:

$$\psi\left(\frac{d^n y_1}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{dy_1}{dx}, y_1, x\right) = 0. \tag{6}$$

Šo vienādojumu atrisinot, dabūjam

$$y_1 = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{7}$$

Lai dabūtu $(n-1)$ nezināmos $y_2, y_3, \ldots, y_n$ kā x funkcijas, ievietojam y_1 vērtību no (7) vienādojumu sistemas (5) $(n-1)$ pirmajos vienādojumos, tad dabūjam vienādojumu sistemu ar $(n-1)$ vienādojumiem un $(n-1)$ nezināmiem $y_2, \ldots, y_n$, kurus tad no šīs vienādojumu sistemas varam dabūt. Šīs vienādojumu sistemas atrisināšana neprasa integrēšanu, bet gan tikai diferencēšanu un algebriskas darbības. Atrisinājums dod $y_2, y_3, \ldots, y_n$ katru kā x un konstantu $C_1, C_2, \ldots, C_n$ funkciju.

97. Sistemas integrēšana ar rindu palīdzību. Dota sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Integrējam to ar Maklorena rindu. Rakstām:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= (y_1)_0 + (y_1')_0\, x + (y_1'')_0 \frac{x^2}{2!} + (y_1''')_0 \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ y_2 &= (y_2)_0 + (y_2')_0\, x + (y_2'')_0 \frac{x^2}{2!} + (y_2''')_0 \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= (y_n)_0 + (y_n')_0\, x + (y_n'')_0 \frac{x^2}{2!} + y_n''')_0 \frac{x^3}{3!} + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Še $(y_1)_0$, $(y_1')_0$ $(y_2)_0$, $(y_2')_0$ utt. ir tās vērtības, ko pieņem y_1, $y_1', \ldots, y_2, y_2', \ldots$, kad $x = 0$.

Apskatīsim rindu ar y_1. Šajā rindā atrodošās y_1 atvasinātās visas dabūjam no sistemas [**96**,5], ievietojot atvasināto izteiksmēs $x = 0$ un $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ vietā šo lielumu vērtības pie $x = 0$. Redzams, ka visi pirmās rindas koeficienti tad ir noteikti lielumi. Tie ir funkcijas no n patvaļīgām konstantēm

$(y_1)_0$, $(y_2)_0$, $(y_3)_0$ utt. Tādā pašā kārtā kā ar y_1 rindu rīkojamies arī ar rindām, kas izteic $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

Arī šo rindu koeficienti ir funkcijas no tiem pašiem patvaļīgiem lielumiem $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$.

Kā redzams, funkcijas $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, kas apmierina sistemu (1), ir noteiktas, ja dodam šo funkciju vērtības, ko tās pieņem pie $x = 0$.

98. Pirmie integrali. Par diferencialvienādojumu sistemas

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

p i r m o i n t e g r a l u sauc vienādojumu starp neatkarīgo mainīgo x, nezināmām funkcijām $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un vienu patvaļīgo konstanti C_1. Saskaņā ar sistemu (1) šim vienādojumam jābūt apmierinātam ar patvaļīgo lielumu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sākuma vērtībām $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$ pie $x = x_0$.

Pirmā integrala veids ir:

$$f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, C_1) = 0. \quad (2)$$

Pieņemsim šo vienādojumu atrisinātu attiecībā uz C_1, tad sistemas (1) pirmā integrala veids ir:

$$f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1. \quad (3)$$

Ka vienādojums (3) ir pirmais integrals, par to pārliecināmies šādi. Diferencējam vienādojumu (3):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = 0. \quad (4)$$

Šajā vienādojumā ievietojam atvasināto $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$ utt. vērtības no sistemas (1):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1} F_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2} F_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} F_n = 0. \quad (5)$$

Vienādojumā (5) atrodas tikai lielumi $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Vienādojumam (3) jābūt apmierinātam ar šām funkcijām, kas apmierina sistemu (1), bet, tā kā, integrējot sistemu (1), varam pie pieņemtā $x = x_0$ dot patvaļīgas vērtības $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$, tad redzams, ka vienādojumam (5) jābūt izpildītam ar visām vērtībām, ko dodam lielumiem $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Tas nozīmē, ka vienādojumam (5) jābūt izpildītam identiski.

Piemērs: Diferencialvienādojumu sistemas

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 - y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3 - y_1, \\ \frac{dx_3}{dx} &= y_1 - y_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

pirmais integrals ir

$$y_1 + y_2 + y_3 = C. \tag{2}$$

Diferencējot šo izteiksmi, dabūjam

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = 0.$$

Ievietojot atvasināto vērtības no diferencialvienādojumu sistemas šinī vienādojumā, dabūjam

$$y_2 - y_3 + y_3 - y_1 + y_1 - y_2 = 0.$$

Šī sakarība ir identiski izpildīta, tātad vienādojums (2) ir diferencialvienādojumu sistemas (1) pirmais integrals.

99. Pirmo integralu neatkarība. Pirmo integralu pielietošana. Divi pirmie integrali

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_1 \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ir patstāvīgi, neatkarīgi viens no otra, ja f_2 nav f_1 funkcija. Pretējā gadījumā, kā redzams, augšējie divi vienādojumi pārvēršas vienā vienādojumā. Redzams, ka, rakstot

$$f_1 = C_1$$

un

$$f_1^2 = C_2$$

vai rakstot $\sin f_1 = C_3$,

izteicam tikai to vienu faktu, ka f_1 ir konstants. Ja pirmie integrali (1) ir patstāvīgi, tad trešais pirmais integrals $f_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_3$ ir patstāvīgs un neatkarīgs no f_1 un f_2, ja f_3 nav f_1 un f_2 funkcija. Tā piemēram, [98] apskatītās sistemas divi neatkarīgi pirmie integrali ir:

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= C_1, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= C_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Vienādojums

$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = C_3 \tag{3}$$

arī ir diferencialvienādojumu sistemas [98,1] pirmais integrals, bet šis integrals nav neatkarīgs no pirmajiem diviem, jo, kā redzams,

$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = \frac{1}{2}[(y_1 + y_2 + y_3)^2 - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)].$$

Šī sakarība rāda, ka trešais pirmais integrals (3) ir atkarīgs no pirmajiem integraliem f_1 un f_2.

Ja zināms diferencialvienādojumu sistemas

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned}\right| \tag{4}$$

viens pirmais integrals

$$f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1, \tag{5}$$

tad varam sistemas (4) integrēšanu vienkāršot, dabūjot no vienādojuma (5) y_n kā funkciju no $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ un C_1. Šo y_n vērtību ievietojot $(n-1)$ pirmajos vienādojumos, dabūjam sistemu ar $(n-1)$ vienādojumiem un $(n-1)$ nezināmām funkcijām $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Ja zināmi sistemas (4) divi neatkarīgi pirmie integrali

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1, \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

tad no šiem vienādojumiem dabūjam y_n un y_{n-1}, kā funkcijas no x, y_1, y_2, ..., y_{n-2} un C_1 un C_2. Šīs y_n un y_{n-1} vērtības ievietojam sistemas (4) pirmajos (n—2) vienādojumos. Tad dabūjam (n—2) diferencialvienādojumu sistemu ar (n—2) nezināmām funkcijām. Kā redzams, katrs neatkarīgs pirmais integrals dod iespēju samazināt sistemas vienādojumu skaitu par vienu.

Ja zināmi sistemas (4) n neatkarīgi pirmie integrali.

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_1, \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_n, \end{aligned}\right| \tag{7}$$

tad sistema (4) ir izintegrēta, jo no šiem n vienādojumiem varam dabūt ar algebras darbībām nezināmās funkcijas y_1, y_2, ..., y_n kā x un pastāvīgo lielumu C_1, C_2, ..., C_n funkcijas.

P i e m ē r s. Doti diferencialvienādojumu sistemas

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_2 - y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_3 - y_2, \\ \frac{dy_3}{dx} &= y_1 - y_3 \end{aligned}\right| \tag{α}$$

divi neatkarīgi pirmie integrali:

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= C_1, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= C_2. \end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Sistemas vienādojumu skaitu varam samazināt par diviem, izlietojot šos divus pirmos integralus.

Atrisinot vienādojumus (β) attiecībā uz y_2 un y_3, dabūjam

$$y_2 + y_3 = C_1 - y_1,$$
$$y_2^2 + y_3^2 = C_2 - y_1^2.$$

No šiem vienādojumiem seko:

$$(y_2 - y_3)^2 = 2(C_2 - y_1^2) - (C_1 - y_1)^2,$$
$$y_2 - y_3 = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_1 - 3y_1^2}.$$

Šo izteiksmi ievietojam sistemas (α) pirmajā vienādojumā:

$$\frac{dy_1}{dx} = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_1 - 3y_1^2}. \qquad (\gamma)$$

No vienādojuma (γ) dabūjam y_1 kā funkciju no x, C_1, C_2, C_3. Ievietojot dabūto y_1 vērtību vienādojumos (β), no tiem atrodam y_2 un y_3.

B. Augstākas kārtas diferencialvienādojumu sistema

100. Sistemas integrēšana ar mainīgo izslēgšanu. Ja dota diferencialvienādojumu sistema:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, y', \ldots, y^{(m)}, z, z', z'', \ldots, z^{(p)}) = 0, \\ \varphi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}, z, z', z'', \ldots, z^{(q)}) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

tad, lai dabūtu diferencialvienādojumu starp x un y, jāizslēdz z un visas z atvasinātās. Mainīgā z un tā atvasināto izslēgšanu izdarām no sistemas (1) vienādojumiem un vienādojumiem, ko dabūjam, diferencējot q reizes sistemas pirmo un p reizes sistemas otru vienādojumu. Ar diferencēšanu dabūjam $p + q$ vienādojumus, tiem pievienojam divus sistemas vienādojumus un dabūjam

$$p + q + 2$$

vienādojumus. Jāizslēdz ir z un visas z atvasinātās līdz $p + q$ kārtai ieskaitot; tātad pavisam jāizslēdz $p + q + 1$ lielumi, ko var izdarīt ar $p + q + 2$ iegūtiem vienādojumiem. Kā izslēgšanas rezultātu dabūjam diferencialvienādojumu starp x un y, kura kārtu noteic lielākais no skaitļiem

$$m + q \text{ vai } n + p.$$

Otru nezināmo funkciju z dabūjam no diferencialvienādojuma, ko iegūstam, ievietojot $y, y', y'', \ldots$ vērtības vienā no sistemas (1) diferencialvienādojumiem.

Piemērs. Atrisināt diferencialvienādojumu sistemu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} - 2z = 0, \\ \frac{d^2z}{dx^2} + 2y = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Izslēdzam no sistemas mainīgo z. Tad še $p = 0$ un $q = 2$. Kā redzams, pirmais vienādojums jādiferencē $q = 2$ reizes. Otrs vienādojums nav jadiferencē, jo $p = 0$. Diferencējam pirmo vienādojumu 2 reizes:

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{2\,dz}{dx} = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{2\,d^2z}{dx^2} = 0. \qquad (3)$$

Ievietojam vienādojumā (3) $\frac{d^2z}{dx^2}$ vērtību no sistemas otrā vienādojuma:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0. \qquad (4)$$

Atrisinot šo ceturtās kārtas linearo diferencialvienādojumu (4), dabūjam

$$y = f(x, C_1, C_2, C_3, C_4). \qquad (5)$$

No sistemas pirmā vienādojuma seko:

$$z = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (6)$$

Diferencējot (5) un ievietojot $\frac{d^2y}{dx^2}$ vērtību vienādojumā (6), dabūjam z vērtību bez integrēšanas.

Ja dota diferencialvienādojumu sistema, sastāvoša no trijiem vienādojumiem $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ ar neatkarīgo mainīgo x un atkarīgiem mainīgiem y, z, u, tad ar norādīto paņēmienu izslēdzam u un u atvasinātās no vienādojumiem, piemēram, $F_1=0$ un $F_2=0$; kā rezultatu dabūjam vienādojumu $\psi_1=0$. Tāpat izslēdzam u un u atvasinātās no vienādojumiem $F_2=0$ un $F_3=0$; kā rezultatu dabūjam vienādojumu $\psi_2=0$. No vienādojumiem $\psi_1=0$ un $\psi_2=0$ izslēdzam z un z atvasinātās. Kā rezultatu dabūjam vienu diferencialvienādojumu starp x un y.

Apskatītais diferencialvienādojumu sistemas atrisināšanas paņēmiens samērā ērti pielietojams, ja sistemas diferencialvienādojumi ir lineari. Nelinearu diferencialvienādojumu gadījumā vispārīgā paņēmiena pielietošana sarežģīto izteiksmju dēļ savienota ar grūtībām.

101. Augstākas kārtas vienādojumu sistemas integrēšana, reducējot sistemu uz pirmās kārtas vienādojumu sistemu. Ja jāintegrē diferencialvienādojumu sistema ar n dažādas kārtas vienādojumiem un n nezināmām funkcijām, tad šo sistemu pārveido pirmās kārtas diferencialvienādojumu sistemā, pieņemot par nezināmiem palīga mainīgiem ievesto nezināmo funkciju atvasinātās.

Apskatīsim piemēru no mechanikas. Iedomāsimies materialu punktu ar masu m un koordinatām x, y, z. Uz šo punktu iedarbojas spēks F, kas atkarīgs no laika t, no punkta koordinatām un punkta ātruma.

Dinamikas pamatlikums dod vienādojumus:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X;\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y;\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

Šinīs izteiksmēs X, Y, Z apzīmē spēka F projekcijas. Tās ir dotas kā argumentu $t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ funkcijas.

Kustības vienādojumus tādēļ varam rakstīt tā:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=f\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\varphi\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=\psi\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Šie vienādojumi veido otras kārtas diferencialvienādojumu sistemu ar trijiem vienādojumiem un trijām nezināmām funkcijām x, y, z, un ar neatkarīgo mainīgo t.

Lai šo sistemu pārveidotu pirmās kārtas sistemā, pieņemsim par nezināmām palīga funkcijām atvasinātās

$$\frac{dx}{dt} = x'; \quad \frac{dy}{dt} = y'; \quad \frac{dz}{dt} = z'.$$

Tad sistema dabū šādu veidu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', \\ \frac{dy}{dt} &= y', \\ \frac{dz}{dt} &= z', \\ \frac{dx'}{dt} &= f(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \frac{dy'}{dt} &= \varphi(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \frac{dz'}{dt} &= \psi(t, x, y, z, x', y', z'). \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Šī sistema sastāv no sešiem pirmās kārtas diferencialvienādojumiem un sešām nezināmām funkcijām x, y, z, x', y', z'.

Šīs sistemas vispārīgie integrali ir noteikti, ja zinām šo sešu nezināmo funkciju sākuma vērtības $x_0, y_0, z_0, x_0', y_0'$ un z_0' momentā $t = t_0$. No mechanikas viedokļa tas nozīmē, ka materialā punktā kustība ir noteikta, ja momentā $t = t_0$ zinām materialā punkta koordinatas x_0, y_0, z_0 un punkta ātruma projekcijas x_0', y_0' un z_0'.

Dotajā gadījumā pirmā integrala veids ir:

$$\omega(t, x, y, z, x', y', z') = C. \qquad (3)$$

No sakarības (3) dabūjam z' kā funkciju no t, x, y, z, x', y'. Šo z vērtību ievietojot pirmajos piecos sistemas (2) vienādojumos, dabūjam sistemu ar pieciem vienādojumiem un piecām nezināmām funkcijām x, y, z, x', y'.

Katrs pirmais integrals dod iespēju samazināt par vienību kā vienādojumu kārtu, tā arī nezināmo skaitu.

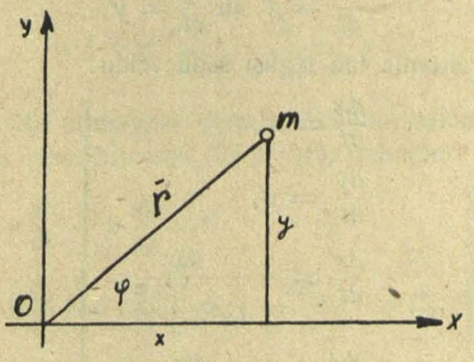
Pirmos integralus dažos gadījumos var dabūt ar mechanikas teoremām: 1) dzīvā spēka teoremu, 2) inerces centra kustības teoremu, 3) impulsa momenta teoremu.

Piemērs. Plaknē esošu materialu punktu ar masu m, no centra O pievelk spēks, kas proporcionals punkta masai un pretēji proporcionals punkta attālumam no centra kvadratā.

Dabūt punkta kustības ceļa vienādojumu.

Saskaņā ar uzdevumu dots:

$$\bar{F} = -\frac{m \cdot k}{r^2} \cdot \bar{r}_0. \tag{1}$$



34. zīm.

Še $\bar{r}_0$ ir vienības vektors, vektora $\bar{r}$ virzienā. Spēka $\bar{F}$ projekcijas X un Y uz koordinatu asīm ir:

$$X = -\frac{mk}{r^2}\cos\varphi = -\frac{mk}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{mkx}{r^3} = -\frac{kxm}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Y = -\frac{mk}{r^2}\sin\varphi = -\frac{mk}{r^2}\cdot\frac{y}{r} = -\frac{mky}{r^3} = -\frac{kym}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Saskaņā ar dinamikas pamatlikumu dabūjam:

$$\frac{md^2x}{dt^2} = -\frac{kxm}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ un } \frac{md^2y}{dt^2} = -\frac{kym}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

jeb

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{d^2y}{d^2x} = -\frac{ky}{(k^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (2)$$

Šo nelinearo otras kārtas diferencialvienādojumu sistemu varētu integrēt, izslēdzot no sistemas y un y atvasinātās. Pirmais vienādojums tad jādiferencē divas reizes, kas, tā kā izteiksme nav lineara, dod sarežģītu rezultatu, kura dēļ izslēgšana būtu ļoti apgrūtināta. Mēģinām tāpēc integrēt doto sistemu ar pirmo integralu palīdzību. Ievedam jaunas nezināmas funkcijas

$$\frac{dx}{dt} = x' \text{ un } \frac{dy}{dt} = y';$$

vienādojumu sistema tad iegūst šādu veidu:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', \\ \frac{dy}{dt} &= y', \\ \frac{dx'}{dt} &= -\frac{kx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{dy'}{dt} &= -\frac{ky}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Šo četru pirmās kārtas diferencialvienādojumu sistemu integrējam ar pirmo integralu palīdzību. Dotajā gadījumā varam dabūt divus pirmos integralus, pielietojot impulsa momenta un enerģijas principus. Kustības daudzuma momenta princips šajā gadījumā dod šādu izteiksmi:

$$\frac{d}{dt}(mx'y - my'x) = M \text{ } (M \text{ — ārējo spēku moments}). \qquad (4)$$

Šajā gadījumā ievērojot, ka spēks F arvien iet caur punktu O, spēka F moments ap punktu O ir 0. Izteiksme (4) tāpēc dod pirmo integralu

$$x'y - y'x = C_1. \tag{5}$$

Enerģijas princips še dod šādu izteiksmi:

$$\frac{mv^2}{2} = m \cdot \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} = \int (X\,dx + Y\,dy);$$

dotajā gādījumā dabūjam:

$$\frac{x'^2 + y'^2}{2} = \int -k \cdot \frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C_2. \tag{6}$$

Tātad sistemas (3) pirmie integrali ir:

$$x'y - y'x = C_1 \tag{5}$$

un

$$x'^2 + y'^2 = \frac{2k}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C_2. \tag{6}$$

No sistemas (3) pirmajiem diviem vienādojumiem, ievietojot x' un y' vērtības vienādojumos (5) un (6), dabūjam

$$\left.\begin{aligned} & y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = C_1 \\ & \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2k}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Redzams, ka ar pirmo integralu palīdzību panākts, ka sistemas (2) vietā jāintegrē vienkāršāka sistema (7). Tā kā sistema (7) nav lineara, tad arī še rodas grūtības integrēšanā, kuras var novērst, pārejot uz polarkoordinatu sistemu.

102. Uzdevumi.

1) $\left.\begin{aligned} & \frac{dy}{dx} + y - z = 0 \\ & \frac{dz}{dx} - 2y + z = 0. \end{aligned}\right|$ Atb. $z = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{-(1+\sqrt{2})x}$.

$$y = \frac{1}{2}\left(z + \frac{dz}{dx}\right).$$

2) $\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}+y+z+t=0 \\ &\frac{dz}{dx}-t=0 \\ &\frac{dt}{dx}-y=0. \end{aligned}\right\}$ Atb. $z=C_1 e^{-x}+C_2\cos x+C_3\sin x;$ y un t dabūjami algebriski.

3) $\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t \\ &\frac{dy}{dt}+3y-x=e^{2t} \end{aligned}\right\}$ Atb. $x=(C_2-C_1t)e^{-4t}+\frac{4}{25}e^t-\frac{1}{36}e^{2t}.$
$y=(C_1-C_2+C_1t)e^{-4t}+\frac{1}{25}e^t+\frac{7}{36}e^{2t}.$

4) $\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}+5x-2y=e^t \\ &\frac{dy}{dt}-x+6y=e^{2t}. \end{aligned}\right\}$ Atb. $x=C_1e^{-4t}+C_2e^{-7t}+\frac{7}{40}e^t+\frac{1}{27}e^{2t}.$
$y=\frac{1}{2}C_1e^{-4t}-C_2e^{-7t}+\frac{1}{40}e^t+\frac{7}{54}e^{2t}.$

5) $\left.\frac{dx}{3x-y}=\frac{dy}{x+y}=dt.\right\}$ Atb. $x=(C_1+C_2t)e^{2t};$
$y=(C_1-C_2+C_2t)e^{2t}.$

6) $\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{dx}+n^2y=e^x \\ &\frac{dy}{dx}+z=0. \end{aligned}\right\}$ Atb. $y=C_1e^{nx}+C_2e^{-nx}+\frac{e^x}{n^2-1}.$
$z=-nC_1e^{nx}+nC_2e^{-nx}-\frac{e^x}{n^2-1}.$

7) $\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}+2x+y=0 \\ &\frac{dy}{dt}+5x+3y=0. \end{aligned}\right\}$ Atb. $y=C_1\cos t+C_2\sin t.$
$x=-\frac{3C_1+C_2}{5}\cos t+\frac{C_1-3C_2}{5}\sin t.$

8) $$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - a\frac{dy}{dx} + k^2 x = 0\\ \frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + k^2 y = 0.\end{aligned}\right\}$$ Atb. Apzīmējot raksturīgā vienādojuma saknes $\pm \alpha_1 i$ un $\pm \alpha_2 i$,

dabūjam:

$$x = A\cos\alpha_1 t + B\sin\alpha_1 t + C\cos\alpha_2 t + D\sin\alpha_2 t,$$
$$y = -B\cos\alpha_1 t + A\sin\alpha_1 t - D\cos\alpha_2 t + C\sin\alpha_2 t.$$

9) $$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 3x - 4y = 0\\ \frac{d^2y}{dt^2} + x + y = 0.\end{aligned}\right|$$ Atb. $$x = (A_1 + B_1 t)e^t + (A_2 + B_2 t)e^{-t},$$ $$y = \frac{1}{2}(B_1 - A_1 - B_1 t)e^t - -\frac{1}{2}(A_2 + B_2 + B_2 t)e^{-t}.$$

10) $$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 8x = 8t\\ \frac{dx}{dt} + \frac{2dy}{dt} - 3y = 0.\end{aligned}\right|$$ Atb. $$x = (A + Bt)e^{2t} + Ce^{-3t} - t$$ $$y = (3B - 2A - 2Bt)e^{2t} - -\frac{1}{3}Ce^{-3t} - \frac{1}{3}.$$

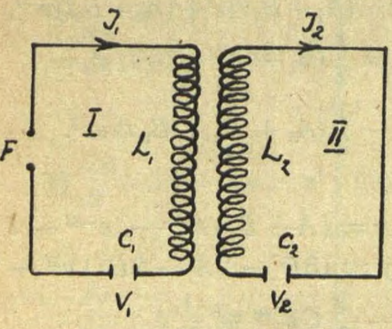
11) $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2 y = 0$ un $\frac{d^2y}{dt^2} - m^2 x = 0.$

Atb. $$x = e^{\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(A_1\cos\frac{mt}{\sqrt{2}} + A_2\sin\frac{mt}{\sqrt{2}}\right) + $$
$$+ e^{\frac{-mt}{\sqrt{2}}}\left(A_3\cos\frac{mt}{\sqrt{2}} + A_4\sin\frac{mt}{\sqrt{2}}\right),$$
$$y = e^{\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(A_1\sin\frac{mt}{\sqrt{2}} - A_2\cos\frac{mt}{\sqrt{2}}\right) + $$
$$+ e^{\frac{-mt}{\sqrt{2}}}\left(A_4\cos\frac{mt}{\sqrt{2}} - A_3\sin\frac{mt}{\sqrt{2}}\right).$$

103. Dažas problemas, kas atrisināmas ar diferencialvienādojumu sistemas palīdzību.

1) Elektriskas saistītas svārstības (35. zīm.) strāvas konturās.

Strāvas konturas I kondensatora spriegums ir V_0 voltu. Šis spriegums tiek lādēts caur dzirksteļu starpu F. Ar to izceļas konturā I elektriskas svārstības, kas ar spoli L_1 konturas II spolē L_2 inducē elektriskās svārstības. Kā mainās ar laiku t konturās I un II strāvas stiprumi J_1 un J_2 un kondensatoros spriegumi V_1 un V_2?



35. zīm.

Kondensatoru kapacitates C_1, C_2, spoļu pašindukcijas L_1, L_2 un spoļu savstarpējā indukcija M ir doti lielumi. Elektrotechnika še dod vienādojumus, kas integrējami pie sākuma noteikumiem: ar $t = 0$ jābūt: $V_1 = V_0$; $V_2 = 0$; $J_1 = 0$; $J_2 = 0$. Sakaru vienādojumi ir šādi:

$$1)\ C_1 \frac{dV_1}{dt} + J_1 = 0; \quad 2)\ L_1 \frac{dJ_1}{dt} + M\frac{dJ_2}{dt} - V_1 = 0;$$

$$3)\ C_2 \frac{dV_2}{dt} - J_2 = 0; \quad 4)\ L_2 \frac{dJ_2}{dt} + M\frac{dJ_1}{dt} + V_2 = 0.$$

Šo pirmās kārtas linearo vienādojumu sistemu atrisinām, izslēdzot vispirms mainīgos J_1 un J_2; tad dabūjam:

$$MC_1 \frac{d^2V_1}{dt^2} - L_2 C_2 \frac{d^2V_2}{dt^2} - V_2 = 0, \tag{5}$$

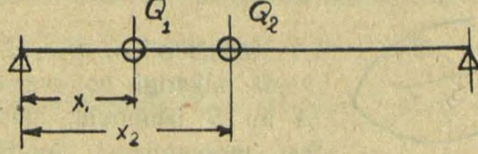
$$MC_2 \frac{d^2V_2}{dt^2} - L_1 C_1 \frac{d^2V_1}{dt^2} - V_1 = 0. \tag{6}$$

No vienādojumiem (5) un (6) V_2 izslēdzam šādi: reizinām vienādojumu (5) ar MC_2 un pēc divreizējas diferencēšanas attiecībā uz t, tajā ievietojam $\frac{d^2V_2}{dt^2}$ vērtību no (6), tad dabūjam:

$$C_1 C_2 (L_1 L_2 - M^2) \frac{d^4 V_1}{dt^4} + (C_1 L_1 + C_2 L_2) \frac{d^2 V_1}{dt^2} + V_1 = 0. \quad (7)$$

Šis diferencialvienādojums ir ceturtās kārtas linears un homogens; to atrisinām, kā norādīts linearu diferencialvienādojumu teorijā.

2) Dabūt elastīgas sijas svārstības vienādojumus. Sija balstīta abos galos un slogota ar svariem Q_1 un Q_2 (36. zīm.).



36. zīm.

Sijas pašsvaru neievērojam. Ja siju izvirzām no līdzsvara stāvokļa un tad palaižam, sija un svari Q_1 un Q_2 izdara svārstības. Apzīmējam ar y_1 un y_2 svaru Q_1 un Q_2 svārstības ceļus; stiprības mācība šajā gadījumā dod šādus diferencialvienādojumus:

$$\frac{Q_1}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -(\beta_1 y_1 - \gamma y_2).$$

$$\frac{Q_2}{g} \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -(\beta_2 y_2 - \gamma y_1).$$

Še koeficienti β_1, β_2, γ ir atkarīgi un noteikti ar sijas elastīgām īpašībām un svaru novietošanas abscisām x_1 un x_2.

Šie otras kārtas diferencialvienādojumi ir lineari un homogeni.

Diferencējot sistemas pirmo vienādojumu divas reizes un izslēdzot y_2 un y_2 atvasinātās no sistemas vienādojumiem un ar diferencēšanu iegūtiem vienādojumiem, dabūjam

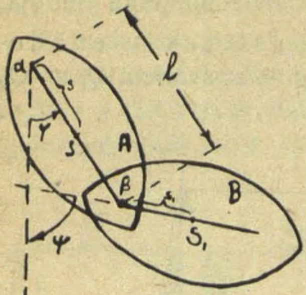
$$m_1 m_2 \frac{d^4 y_1}{dt^4} + (m_1 \beta_2 + m_2 \beta_1) \frac{d^2 y_1}{dt^2} + (\beta_1 \beta_2 - \gamma^2) y_1 = 0,$$

kur $m_1 = \frac{Q_1}{g}$ un $m_2 = \frac{Q_2}{g}$.

Šo ceturtās kārtas linearo homogeno vienādojumu ar konstantiem koeficientiem atrisinām ar linearu diferencialvienādojumu teorijā norādītiem paņēmieniem.

3) Divkāršs svārsts.

Šāda svārsta (37. zīm.) mazām svārstībām mechanika dod kustības diferencialvienādojumu sistemu:



37. zīm.

$$\left.\begin{aligned} c\frac{d^2\psi}{dt^2}+b\frac{d^2\varphi}{dt^2}+a\varphi=0 \\ c\frac{d^2\varphi}{dt^2}+e\frac{d^2\psi}{dt^2}+d\psi=0 \end{aligned}\right\}.$$

Koeficienti a, b, c, d, e ir zināmā veidā atkarīgi no svārsta sastāvdaļu A un B izmēriem, māsām un inerces momentiem. Augšējās sistemas diferencialvienādojumi ir otras kārtas, lineari un homogeni. Lieluma ψ izslēgšanu še izdara ar diferencēšanas palīdzību un dabū

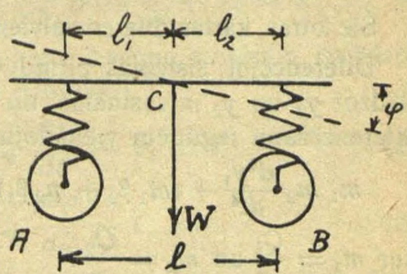
$$(be-c^2)\frac{d^4\varphi}{dt^4}+(ae+bd)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+da\varphi=0.$$

Šo ceturtās kārtas linearo homogeno diferencialvienādojumu integrē ar norādītiem paņēmieniem.

4) Ekipažas svārstības. Še apskatītas tikai vertikalas svārstības, kas noteiktas ar smaguma centra C ceļu z, un gareniskās svārstības, kas noteiktas ar leņķi Θ kā norādīts 38. zīmējumā.

Mechanika še dod šādus kustības diferencialvienādojumus:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2z}{dt^2}+az+b\Theta=0 \\ \frac{d^2\Theta}{dt^2}+\frac{b}{i^2}+\frac{C}{i^2}\Theta=0 \end{aligned}\right\}.$$



38. zīm.

Koeficienti a, b, c še zināmā kārtā atkarīgi no ekipažas izmēriem, svara un atsperu koeficientiem; i — ekipažas virsbūves inerces radiuss.

Kustības diferencialvienādojumu sistemu še veido divi otras kārtas lineari homogeni vienādojumi. Tā kā šie vienādojumi ir lineari, tad atrisināšana izdarāma ar diferencēšanas paņēmienu.

Sestā nodaļa

Linearu diferencialvienādojumu simboliskā integrēšana

A. Lineari diferencialvienādojumi ar konstantiem koeficientiem

104. Darbības simbols D. Ja rakstām $\frac{d}{dx}$ vietā D un $\frac{d^2}{dx^2}$ vietā D^2, t. i., ja $\frac{dy}{dx}$ vietā rakstām Dy un $\frac{d^2y}{d^2x}$ vietā D^2y, tad izrādās, ka simbols D ir padots aritmetikas pamata likumiem, jo redzams, ka

$$(D^r + D^n)\,u = (D^n + D^r)\,u,$$

$$D^r \cdot D^n\,u = D^n \cdot D^r\,u = D^{n+r}\,u,$$

$$D\,(u + v) = Du + Dv.$$

Še u un v ir x funkcijas. Ievērojot augšējo, kļūst skaidra sekojošo simbolu nozīme:

$$(D + a)\,y = Dy + ay = \frac{dy}{dx} + ay; \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(D + b)\,(D + a)\,y &= (D + b)\,(Dy + ay) = D^2y + aDy + \\ &+ bDy + aby = D^2y + (a + b)\,Dy + aby = \\ &= [D^2 + (a + b)\,D + ab]\,y;\end{aligned} \tag{2}$$

$$De^{\alpha x} = \frac{d}{dx}\,e^{\alpha x} = \alpha\,e^{\alpha x}; \tag{3}$$

$$D^n\,e^{\alpha x} = \alpha^n\,e^{\alpha x}; \tag{4}$$

$$\begin{aligned}D\,(e^{\alpha x}X) &= (D\,e^{\alpha x})\,X + e^{\alpha x}\,DX = \alpha\,e^{\alpha x}\,X + e^{\alpha x}\,DX = \\ &= e^{\alpha x}\,(D + \alpha)\,X;\end{aligned} \tag{5}$$

$$D^n\,(e^{\alpha x}X) = e^{\alpha x}\,(D + \alpha)^n\,X. \tag{6}$$

Augšējās sakarībās X ir X funkcija.

Pierādījums.

Tā kā $$D(e^{\alpha x}X) = e^{\alpha x}(D+\alpha)X,$$

tad $$D^2(e^{\alpha x}X) = D[e^{\alpha x}(D+\alpha)X].$$

Liekam:

$$(D+\alpha)X = X_1,$$

tad

$$D^2(e^{\alpha x}X) = D[e^{\alpha x}X_1] = e^{\alpha x}(D+\alpha)X_1 = e^{\alpha x}(D+\alpha)^2 X.$$

Turpinot operaciju, dabūjam:

$$D^n(e^{\alpha x}X) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^n X.$$

105. Darbības simbols D^{-1}. Šo simbolu ievedam šādā nozīmē. Ja

$$Du = v, \tag{1}$$

tad $$u = \frac{1}{D}v = D^{-1}v. \tag{2}$$

Vienādībā (1)

$$v = Du$$

ievietojot u vērtību no (2), dabūjam:

$$v = DD^{-1}v. \tag{3}$$

No (3) redzam, ka darbībai D^{-1} ir šāda nozīme: ja lielumu v pakļaujam darbībai D^{-1} un pēc tam darbībai D, tad šī pēdējā darbība atceļ D^{-1} darbību un lielums v paliek nemainīts. No augšējā secinām arī, ka simboli ar negativiem rādītājiem padoti aritmetikas likumiem un ka darbības simbols ar negativu rādītāju izteic integrēšanu.

Tātad $$D^{-1}u = \int u\,dx.$$

Še jāpiezīmē, ka īpašie mērķi, kuru dēļ pielietosim inverso operaciju D^{-1}, neprasa pilnīgo integralu dabūšanu, bet tikai kādu atsevišķu integralu; tāpēc še varam integrēšanas konstanti atmest.

106. Darbības simbols $\psi(D)$. Sekojošās izteiksmēs ar ψ apzīmēta vesela racionala algebriska funkcija.

Še apskatīsim darbības simbolu ψ (D) dažos pielietošanas gadījumos.

I $$\psi(D)\, e^{\alpha x} = \psi(\alpha)\, e^{\alpha x}.$$

Pierādījums. Tā kā

$$D^n e^{\alpha x} = \alpha^n e^{\alpha x}, \tag{1}$$

tad, ievērojot, ka ψ (D) ir vesela algebriska funkcija, varam rakstīt, ka

$$\psi(D)\, e^{\alpha x} = [A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + \ldots + A_n D^n] e^{\alpha x},$$

vai arī, ievērojot (1), ka

$$\psi(D)\, e^{\alpha x} = [A_0 + A_1 \alpha + A_2 \alpha^2 + \ldots + A_n \alpha^n]\, e^{\alpha x}.$$

Tātad

$$\psi(D)\, e^{\alpha x} = \psi(\alpha)\, e^{\alpha x}.$$

Gadījumā, ja darbības simbols ir negativā pakāpē, pastāv sakarība:

$$\psi(D)^{-1} e^{\alpha x} = \frac{1}{\psi(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\psi(\alpha)} e^{\alpha x}.$$

Pierādījums.

$$\psi(D)\, e^{\alpha x} = \psi(\alpha)\, e^{\alpha x},$$

$$\psi(D)^{-1} \psi(D)\, e^{\alpha x} = \psi(\alpha)\, \psi(D)^{-1} e^{\alpha x},$$

$$e^{\alpha x} = \psi(\alpha) \frac{e^{\alpha x}}{\psi(D)}$$

un

$$\frac{e^{\alpha x}}{\psi(D)} = \frac{e^{\alpha x}}{\psi(\alpha)}.$$

Gadījumā, ja $\psi(\alpha) = 0$, liekam $\psi(D) = (D - \alpha)\, \psi_1(D)$, tad

$$\frac{1}{\psi(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{(D-\alpha)\,\psi_1(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{\psi_1(\alpha)} \cdot \frac{1}{D-\alpha} e^{\alpha x}.$$

II
$$\psi(D)\{e^{x}X\} = e^{\alpha x}\psi(D+\alpha)X.$$
Tā kā
$$D^n(e^{\alpha x}X) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^n X, \tag{1}$$
tad, pieņemot
$$(D+\alpha)^n X = X_1,$$
atrod
$$X = (D+\alpha)^{-n} X_1.$$
Ievietojot šo X vērtību formulā (1), dabūjam:
$$D^n[e^{\alpha x}(D+\alpha)^{-n}X_1] = e^{\alpha x}X_1.$$
Izdarot augšējā vienādojuma abās pusēs operaciju D^{-n}, secinām:
$$e^{\alpha x}(D+\alpha)^{-n}X_1 = D^{-n}(e^{\alpha x}X_1).$$
Attiecībā uz X veidu nav nekādu noteikumu, tāpēc nav arī noteikumu attiecībā uz X_1, kas var būt patvaļīga x funkcija. Ievērojot teikto, X_1 varam aizstāt ar X, tad
$$D^{-n}(e^{\alpha x}X) = e^{\alpha x}(D+\alpha)^{-n}X. \tag{2}$$
Salīdzinot (1) un (2), redzam, ka formula (1) derīga arī ar negativu rādītāju.

Ievērojot, ka $\psi(D)$ pieņemta kā vesela racionala algebriska funkcija, varam rakstīt:
$$\psi(D) = A_0 + A_1 D + A_2 D^2 + \ldots + A_n D^n. \tag{3}$$
No (1) un (3) redzams, ka
$$\psi(D)(e^{\alpha x}X) = e^{\alpha x}\psi(D+\alpha)X, \tag{4}$$
ar ko teorema II ir pierādīta.

Arī gadījumā, kad darbības simbola pakāpes rādītājs ir negativs, pastāv sakarība:
$$\psi(D)^{-1}\{e^{\alpha x}X\} = e^{\alpha x}\psi(D+\alpha)^{-1}X.$$
Pierādījums. Tā kā
$$\psi(D)\{e^{\alpha x}X\} = e^{\alpha x}\psi(D+\alpha)X, \tag{5}$$
tad, pieņemot
$$\psi(D+\alpha)X = X_1,$$

dabūjam:

$$X = \frac{X_1}{\psi(D+\alpha)}. \tag{6}$$

Ievietojot šo izteiksmi vienādojumā (5), atrodam:

$$e^{\alpha x} X_1 = \psi(D) \left\{ e^{\alpha x} \frac{X_1}{\psi(D+\alpha)} \right\}.$$

Pielietojot augšējā vienādojuma abās pusēs simbolu $\psi(D)^{-1}$, secinām:

$$\frac{1}{\psi(D)} \left\{ e^{\alpha x} X_1 \right\} = e^{\alpha x} \frac{X_1}{\psi(D+\alpha)}.$$

Augšējā formulā funkcija X_1 ir kaut kāda x funkcija, jo funkcija X nebija ierobežota. Ievērojot teikto, X_1 vietā varam rakstīt X, tad

$$\psi(D)^{-1} \{ e^{\alpha x} X \} = e^{\alpha x} \psi(D+\alpha)^{-1} X,$$

kas teoremu pierāda.

Sakarību (4) pārveidojam, liekot

$$e^{\alpha x} X = Y,$$

tad

$$X = e^{-\alpha x} Y.$$

Ievietojot šo X vērtību formulā (4), dabūjam:

$$\psi(D) Y = e^{\alpha x} \psi(D+\alpha)(Y e^{-\alpha x}). \tag{7}$$

Šīs formulas pielietošanu rāda šāds piemērs.

Jādabū partikulars integrals, kas apmierina vienādojumu

$$\frac{dy}{dx} + ky = V. \tag{m}$$

Še V ir kāda x funkcija. Vienādojumu rakstām, pielietojot darbības simbolu D, šādi:

$$(D+k) y = V,$$

tad

$$y = \frac{1}{D+k} V.$$

Šī vienādojuma labā puse ir:

$$\psi(D) V.$$

Ievērojot formulu (7), dabūjam, ka

$$y = \frac{1}{D+k} V = e^{\alpha x} \frac{1}{D+k+\alpha} (V e^{-\alpha x}). \qquad (n)$$

Izvēlamies α tādu, ka $k + \alpha = 0$, tad $\alpha = -k$. Ar šo α vērtību formula (n) dabū šādu veidu:

$$y = e^{-kx} \frac{1}{D} V e^{kx} = e^{-kx} \int e^{kx} V \, dx.$$

Šī y izteiksme ir diferenciālvienādojuma (m) partikulars integrals.

III Ja $\psi(x^2)$ ir x pāra funkcija, tad

$$\psi(D^2) \sin(ax + \alpha) = \psi(-a^2) \sin(ax + \alpha), \qquad (1)$$

jo

$$D \sin(ax + \alpha) = a \cos(ax + \alpha),$$

$$D^2 \sin(ax + \alpha) = D[a \cos(ax + \alpha)] = -a^2 \sin(ax + \alpha). \qquad (2)$$

Ievērojot beidzamo sakarību un pieņēmumu par funkcijas ψ veidu, formulas (1) pastāvēšana viegli secināma.

Viegli redzams, ka pastāv arī formula

$$\psi(D^2) \cos(ax + \alpha) = \psi(-a^2) \cos(ax + \alpha).$$

Reizinot formulas (1) abas puses ar $\psi(D^2)^{-1}$, dabūjam:

$$\psi(D^2)^{-1} \psi(D^2) \sin(ax + \alpha) = \psi(-a^2) \psi(D^2)^{-1} \sin(ax + \alpha)$$

vai

$$\sin(ax + \alpha) = \psi(-a^2) \psi(D^2)^{-1} \sin(ax + \alpha)$$

un

$$\frac{\sin(ax + \alpha)}{\psi(D^2)} = \frac{\sin(\alpha x + a)}{\psi(-a^2)}. \qquad (3)$$

No (3) redzam, ka formula (1) pastāv arī ar $\psi(D^2)^{-1}$.

107. Darbības simbols $(D - \alpha)^{-1}$. Kā redzējām, simbols D^{-1} nozīmē integrēšanas darbību. Tā, piemēram,

$$D^{-1} f(x) = \int f(x) \, dx.$$

Kā to augšā norādījām, integrēšanas konstanti še varam atmest. Apskatīsim simbola $(D-\alpha)^{-1}$ darbības nozīmi, t. i., ko nozīmē darbība, kas simboliski izteikta ar

$$(D-\alpha)^{-1} f(x).$$

Diferencialvienādojumu

$$\frac{dy}{dx}-\alpha y=f(x) \tag{1}$$

rakstām simboliskā veidā šādi:

$$(D-\alpha) y=f(x). \tag{2}$$

No augšējās sakarības dabūjam:

$$y=(D-\alpha)^{-1} f(x). \tag{3}$$

Redzam, ka darbībai $(D-\alpha)^{-1} f(x)$ atbilst diferencialvienādojuma (1) atrisināšana.

Kā zināms no [**106**, II]

$$D(e^{-\alpha x} y)=e^{-\alpha x}(D-\alpha) y.$$

Šīs formulas labajā pusē, ievērojot (2), varam rakstīt:

$$D(e^{-\alpha x} y)=e^{-\alpha x} f(x).$$

Pielietojot vienādojuma abās pusēs operaciju D^{-1}, dabūjam:

$$e^{-\alpha x} y=D^{-1} e^{-\alpha x} f(x)$$

un

$$y=e^{\alpha x} D^{-1} e^{-\alpha x} f(x)=e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} f(x)\, dx. \tag{4}$$

Salīdzinot formulas (3) un (4), redzam, ka

$$(D-\alpha)^{-1} f(x)=e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} f(x)\, dx. \tag{5}$$

Secinājumi. Apskatīsim sakarības

$$v=(D-\alpha)^{-1}(D-\beta)^{-1} f(x)$$

nozīmi.

Pieņemsim, ka jāatrisina diferencialvienādojums

$$(D-\alpha)(D-\beta) y=f(x),$$

t. i.,

$$[D^2 - (\alpha + \beta) D + \alpha\beta] y = f(x)$$

jeb

$$y'' - (\alpha + \beta) y + \alpha\beta = f(x).$$

Tā kā saskaņā ar (5)

$$(D - \beta)^{-1} f(x) = e^{\beta x} \int e^{-\beta x} f(x)\, dx = \varphi(x),$$

tad

$$(D - \alpha)^{-1} (D - \beta)^{-1} f(x) = (D - \alpha)^{-1} \varphi(x) =$$

$$= e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} \varphi(x) dx = e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} e^{\beta x}\, dx \int e^{-\beta x} f(x)\, dx.$$

Tātad

$$(D - \alpha)^{-1} (D - \beta)^{-1} f(x) = e^{\alpha x} \int e^{(-\alpha+\beta)x}\, dx \int e^{-\beta x} f(x)\, dx. \quad (a)$$

Kā agrāk norādīts, še atmesti integrēšanas pastāvīgie lielumi.

Simbola $(D - \alpha)^{-2}$ nozīmi dabūjam no augšējās izteiksmes (a), tajā liekot $\beta = \alpha$; tad

$$(D - \alpha)^{-2} f(x) = e^{\alpha x} \int dx \int e^{-\alpha x} f(x)\, dx.$$

108. Darbības simbols $f(D)^{-1}$. Ar šo simbolu noteikto iedarbību uz kādu funkciju $\varphi(x)$ dabūjam šādi:

$$f(D)^{-1} = \frac{1}{f(D)}.$$

Kā zinām, funkcija $f(D)$ ir attiecībā uz D vesela racionala algebriska funkcija; to rakstām tā:

$$f(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n.$$

Šo polinomu sadalām sakņu faktoros. Pieņemot, ka polinoma $f(D) = 0$ saknes ir $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, rakstām:

$$f(D) = (D - \alpha_1)(D - \alpha_2) \ldots (D - \alpha_n).$$

Tātad

$$f(D)^{-1} = \frac{1}{f(D)} = \frac{1}{(D-\alpha_1)(D-\alpha_2) \ldots (D-\alpha_n)}.$$

Šo daļu saliekot parcialdaļās, dabūjam:

$$\frac{1}{f(D)}=\frac{A_1}{D-\alpha_1}+\frac{A_2}{D-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_n}{D-\alpha_n}.$$

No augšējā redzams, ka simbola

$$\frac{1}{f(D)}\cdot\varphi(x)$$

nozīme ir šāda:

$$\frac{1}{f(D)}\varphi(x)=\frac{A_1 f(x)}{D-\alpha_1}+\frac{A_2 f(x)}{D-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_n f(x)}{D-\alpha_n}$$

jeb arī

$$\frac{1}{f(D)}\varphi(x)=A_1(D-\alpha_1)^{-1}f(x)+A_2(D-\alpha_2)^{-1}f(x)+\ldots+$$
$$+A_n(D-\alpha_n)^{-1}f(x).$$

Ievērojot simbolu $(D-\alpha_1)^{-1}$, $(D-\alpha_2)^{-1}$, . . ., $(D-\alpha_n)^{-1}$ nozīmi, augšējo sakarību rakstām tā:

$$\frac{1}{f(D)}\varphi(x)=A_1 e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x}\varphi(x)\,dx+A_2 e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x}\varphi(x)\,dx+$$
$$+\ldots+A_n e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x}\varphi(x)\,dx.$$

Ja kāda sakne, piemēram, α_1, atkārtojas, $\alpha_1=\alpha_2$, tad šāda sakne, kā zināms, dod parcialdaļas

$$\frac{A_1}{D-\alpha_1}+\frac{A_2}{(D-\alpha_1)^2}.$$

Šo simbolu nozīme ir zināma. Ja vienādojumam $f(D)=0$ ir pāris saistītu kompleksu sakņu, tad šāds sakņu pāris, kā zināms dod parcialdaļu

$$\frac{M_1 D+M_2}{(D-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Šādā gadījumā vispirms izdarām darbību

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}X \quad (\text{še } X=\varphi(x)),$$

un tad norādītās darbības rezultatam pielietojam darbību $M_1 D + M_2$. Daļu

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}$$

saliekam parcialdaļās:

$$\frac{1}{2i\beta}\left[\frac{1}{D-\alpha-i\beta}-\frac{1}{D-\alpha+i\beta}\right].$$

Tad

$$\frac{1}{2i\beta}\left(\frac{1}{D-\alpha-i\beta}-\frac{1}{D-\alpha+i\beta}\right)X=$$

$$=\frac{1}{2i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}\int e^{-(\alpha+i\beta)x}X\,dx-\frac{1}{2i\beta}e^{(\alpha-i\beta)x}\int e^{-(\alpha-i\beta)x}X\,dx.$$

Augšējās izteiksmes locekļi atšķiras viens no otra ar to, ka otrā loceklī i zīme ir mainīta. Pirmais loceklis ir komplekss skaitlis, ko rakstām $P+iQ$. Ar augšējo norādījumu otra locekļa veids tad ir $P-iQ$. P un Q ir reali. Augšējā izteiksme tad ir $(P+Qi)+(P-Qi)=2P$. Šo lielumu $2P$, kā redzams, dabūjam, ņemot pirmā locekļa divkāršo realo daļu. Tātad

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}X=\text{izteiksmes}\left[\frac{2\cdot 1}{2i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}\int e^{-(\alpha+i\beta)x}X\,dx\right]$$

realā daļa. Augšējās izteiksmes labo pusi pārveidojam, ievedot trigonometriskas funkcijas; tad dabūjam:

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}X=\text{realai daļai no}$$

$$\left[\frac{e^{\alpha x}}{i\beta}(\cos\beta x+i\sin\beta x)\int e^{-\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)X\,dx\right]=$$

$$=\frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta}\int e^{-\alpha x}\cos\beta x\,X\,dx-\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta}\int e^{-\alpha x}\sin\beta x\,X\,dx.$$

109. Vispārīgas ziņas par lineariem diferencialvienādojumiem ar konstantiem koeficientiem. Kā zināms no agrākā, lineara diferencialvienādojuma veids ar konstantiem koeficientiem ir šāds:

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=X. \quad (1)$$

Šim nehomogenam vienādojumam ir piekārtots homogens vienādojums

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{dy^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0. \quad (2)$$

Nehomogeno vienādojumu (1), ievērojot simbola D nozīmi, varam rakstīt tā:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = X. \quad (1a)$$

Un šim vienādojumam piekārtotais homogenais vai reducētais vienādojums tad būs:

$$(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = 0. \quad (2a)$$

Vienādojumus (1a) un (2a) savukārt varam rakstīt tā:

$$f(D)\, y = X \quad (1b)$$

un

$$f(D)\, y = 0. \quad (2b)$$

Reducēto vienādojumu (2b) atrisinām, kā zināms, liekot

$$y = e^{rx}.$$

Tad, kā zināms no [74], dabūjam:

$$f(r)\, e^{rx} = 0. \quad (3)$$

No šīs formulas secinām, ka $y = e^{rx}$ ir diferencialvienādojuma (2) integrals ja, piemēram, r, ir vienādojuma

$$f(r) = 0 \quad (4)$$

sakne. Apzīmējot šī algebriskā racionalā vienādojuma saknes ar $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$, vienādojuma (4) polinomu varam sadalīt sakņu faktoros un rakstīt (2*b*) veidā:

$$(D - r_1)(D - r_2)(D - r_3) \ldots (D - r_n)\, y = 0. \quad (5)$$

No vienādojuma (5) secinām:

$$(D - r_1)\, y = 0;\ (D - r_2)\, y = 0;\ \ldots (D - r_n)\, y = 0. \quad (6)$$

Katrs no šiem vienādojumiem dod diferencialvienādojuma (2b) partikularu integralu; tātad

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$$

ir vienādojuma (2b) partikulari integrali.

Vienādojumu (4) sauc, kā agrāk norādīts, par reducētā diferencialvienādojuma (2b) *raksturīgo vienādojumu*. Reducētā vienādojuma vispārīgais integrals, kā jau agrāk norādīts, ir

$$Y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x} \tag{7}$$

un nehomogenā diferencialvienādojuma (1b) vispārīgais integrals

$$y = Y + u, \tag{8}$$

ja u ir kāds nehomogenā diferencialvienādojuma partikulars integrals.

Attiecībā uz Y dabūšanu še nekas jauns nav sakāms. Tālāk apskatīsim simboliskas integrēšanas pielietošanu nehomogenā vienādojuma partikulara integrala atrašanā.

110. Nehomogenā diferencialvienādojuma partikulara integrala atrašana. No nehomogenā diferencialvienādojuma simboliskā veida

$$f(D)\, y = X \tag{1}$$

dabūjam

$$y = \frac{1}{f(D)} X. \tag{2}$$

Šis vienādojums dod lineارā nehomogenā ar konstantiem koeficientiem diferencialvienādojuma (1) atrisinājumu. Kā redzējām izteiksmi $\frac{1}{f(D)}$ izvirzot parcialdaļās, dabūjam:

$$y = \left[\frac{N_1}{D - r_1} + \frac{N_2}{D - r_2} + \ldots + \frac{N_n}{D - r_n}\right] X. \tag{3}$$

Kā izdarāmas izteiksmes (3) operacijas, jau norādīts [108]. Tāpat jau norādīti parcialdaļu veidi, ja raksturīgam vienādojumam kāda sakne r atkārtojas, vai ja vienādojumam ir kompleksas saknes.

Kā redzam no augšējā, vienādojuma

$$f(D)\, y = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = X$$

atrisināšana pastāv galvenā kartā raksturīgā vienādojuma

$$f(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

sakņu atrašanā un daļas

$$\frac{1}{f(D)}$$

izvirzīšanā parcialdaļās.

Kad minētās darbības ir izpildītas, tad reducētā vienādojuma vispārīgo integralu varam tūlīt rakstīt; pilnīgā vienādojuma partikularo integralu dabūjam ar kvadraturām. Kā redzams, še nav vajadzīgs pielietot konstantu variacijas paņēmienu.

Piemērs. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$y'' - 2y' + y = x e^x.$$

Se raksturīgā vienādojuma

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

saknes

$$r_1 = 1 \text{ un } r_2 = 1,$$

tātad reducētā vienādojuma vispārīgais integrals ir

$$Y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x} = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Še

$$f(D) = D^2 - 2D + 1$$

un

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} = \frac{1}{(D-1)^2},$$

$$u = \frac{1}{f(D)} x \cdot e^x = \frac{1}{(D-1)^2} x e^x.$$

Saskaņā ar [108] dabūjam:

$$u = e^x \int dx \int x dx = e^x \int \frac{x^2}{2} dx = \frac{e^x x^3}{6},$$

$$y = Y + u,$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + e^x \frac{x^3}{6} = e^x \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6} \right).$$

Apskatītais linearu nehomogenu diferencialvienādojumu atrisināšanas paņēmiens no teoretiska viedokļa ir uzskatāms par pilnīgu, bet daudzkārt apskatītā vispārīgā paņēmiena pielietošana partikulara integrala u atrašanai savienota ar sarežģītiem rēķiniem. Funkcijas X atsevišķu veidu gadījumos atrisinājums viegli atrodams ar specialiem paņēmieniem, kurus še tālāk apskatīsim.

111. $X = a\, x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a^m$. Šādā gadījumā dabūjam:

$$f(D)\, y = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

$$y = \frac{1}{f(D)} (a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m).$$

Še izvirzām $\frac{1}{f(D)}$ pēc augošām D pakāpēm. Šajā izvirzījumā augstākā D pakāpe jāpatur D^m, ja dotā x polinomā x^m ir augstākā pakāpe.

Piemērs. Dabūt diferencialvienādojuma

$$y'' - 4y' + 4y = x^2,$$

partikularo integralu. Šo vienādojumu rakstām simboliski:

$$(D^2 - 4D + 4)y = x^2.$$

Tad partikularais integrals ir:

$$y = u = \frac{1}{4 - 4D + D^2} x^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} D + \frac{3}{16} D^2 + \ldots\right) x^2 =$$

$$= \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8}.$$

Piemērs.

$$y^{IV} + y''' + y'' = x^3 + 3x^2.$$

Šo vienādojumu rakstām simboliski:

$$(D^4 + D^3 + D^2) y = x^3 + 3x^2.$$

No augšējā vienādojuma dabūjam partikularu integralu:

$$y = u = \frac{1}{D^2 (1 + D + D^2)} (x^3 + 3x^2).$$

Šajā vienādojumā izvirzām daļu

$$\frac{1}{1 + D + D^2} = 1 - D + D^3 + \ldots$$

Tā kā loceklī $X = x^3 + 3x^2$ augstākā pakāpe ir trešā, tad izvirzījumā kā augstāko pakāpi paturam arī trešo, jo D^4x šinī gadījumā dotu 0. Tātad

$$u = \frac{1}{D^2}(1 - D + D^3)(x^3 + 3x^2) = \frac{1}{D^2}(x^3 - 6x + 6) =$$

$$= \frac{x^5}{20} - x^3 + 3x^2.$$

Reducētā vienādojuma raksturīgais vienādojums ir

$$r^2(r^2 + r + 1) = 0.$$

Šī vienādojuma saknes ir

$$r_1 = 0, r_2 = 0, r_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Reducētā vienādojuma vispārīgais integrals ir

$$Y = C_1 + C_2x + e^{-\frac{x}{2}}\left(A \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Nehomogenā vienādojuma vispārīgais integrals ir

$$y = Y + u = C_1 + C_2x + e^{-\frac{x}{2}}\left(A \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) +$$

$$+ \frac{x^5}{20} - x^3 + 3x^2.$$

112. $X = e^{\alpha x} \cdot V$. Še V ir kāda x funkcija. Diferencialvienādojuma veids tad ir

$$f(D)y = e^{\alpha x}V,$$

un
$$y = \frac{e^{\alpha x}V}{f(D)} = e^{\alpha x}\frac{V}{f(D + \alpha)} \quad \text{(sk. [106, II])}$$

P i e m ē r s. Dabūt diferencialvienādojuma

$$y'' + y' + y = e^{2x}$$

partikularo integralu u. Šo vienādojumu rakstām tā:

$$f(D)y = (D^2 + D + 1)u = e^{2x}.$$

Tā kā še $f(r) \neq 0$, tad saskaņā ar [106] še

$$u = \frac{e^{2x}}{f(D)} = \frac{e^{2x}}{f(2)} = \frac{e^{2x}}{2^2 + 2 + 1} = \frac{e^{2x}}{7}.$$

Piemērs. Dabūt diferencialvienādojuma

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^{3x} \, (V = 2)$$

partikularu integralu u. Rakstām vienādojumu:

$$(D^2 - 4D + 3)\, u = 2e^{3x}.$$

Še $f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$. Tādēļ saskaņā ar [106] še dabūjam:

$$u = \frac{2}{D^2 - 4D + 3} e^{3x} = \frac{2e^{3x}}{(D-1)(D-3)} = \frac{2}{D-1} \cdot \frac{e^{3x}}{D-3},$$

$$u = \frac{2}{3-1} \cdot \frac{e^{3x}}{D-3} = 1 \cdot e^{3x} \int e^{-3x} e^{3x}\, dx = x\, e^{3x}.$$

Piemērs. Dabūt vienādojuma

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^{3x},$$

partikularo integralu u. Rakstām vienādojumu

$$(D^2 - 2D + 1)\, u = x^2 e^{3x},$$

$$u = \frac{e^{3x}}{D^2 - 2D + 1} x^2 = \frac{e^{3x} x^2}{(D-1)^2}.$$

Saskaņā ar [106], dabūjam:

$$u = e^{3x} \frac{1}{(D + 3 - 1)^2} x^2 = e^{3x} \frac{1}{(D+2)^2} x^2 =$$

$$= e^{3x} \frac{1}{4 + 4D + D^2} x^2 = e^{3x} \left(\frac{1}{4} - \frac{D}{4} + \frac{3}{16} D^2 \ldots\right) x^2;$$

$$u \doteq e^{3x} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\right).$$

113. $X = \cos(\alpha x + m) V$, kur V ir kāda x funkcija. Še izšķirsim gadījumus: V ir konst. un V ir x funkcija.

I. $X = \cos(\alpha x + m)$ vai arī $\sin(\alpha x + m)$, tad jāaprēķina izteiksme

$$y = \frac{\cos(\alpha x + m)}{f(D)}.$$

Še pieņemam, ka funkcija f ir atkarīga no D^2; tad

$$y = \frac{\cos(\alpha x + m)}{f(D^2)}, \tag{1}$$

un saskaņā ar [106] rakstām:

$$y = \frac{\cos(\alpha x + m)}{f(D^2)} = \frac{\cos(\alpha x + m)}{f(-\alpha^2)}. \tag{2}$$

Piemērs. $y'' - y = \cos(\alpha x + m)$,

$$(D^2 - 1)\,y = \cos(\alpha x + m),$$

$$y = \frac{\cos(\alpha x + m)}{D^2 - 1} = \frac{\cos(\alpha x + m)}{-\alpha^2 - 1}\,x = -\frac{\cos(\alpha x + m)}{\alpha^2 + 1}.$$

Ja funkcija f nav atkarīga no D^2, tad to pārveidojam šādi:

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{1}{f_1(D^2) + D \cdot f_2(D^2)}. \tag{3}$$

Šo izteiksmi reizinot ar $f_1(D^2) - D \cdot f_2(D^2)$, dabūjam saucējā funkciju no D^2, tātad

$$\frac{1}{f(D)} = \frac{f_1(D^2) - D \cdot f_2(D^2)}{[f_1(D^2)]^2 - [Df_2(D^2)]^2}.$$

Piemērs.

$$y'' + y' - 2y = \sin 2x.$$

Lietojot simbolu D, šo vienādojumu rakstām tā:

$$(D^2 + D - 2)\,y = \sin 2x,$$

$$y = \frac{1}{D^2 + D - 2}\sin 2x =$$

$$= \frac{(D^2 - 2) - D}{[(D^2 - 2) + D]\,[(D^2 - 2) - D]}\sin 2x =$$

$$= \frac{D^2 - D - 2}{(D^2 - 2)^2 - D^2}\sin 2x.$$

Augšējā izteiksmē saskaņā ar [106] liekam $D^2 = -\alpha^2 = -2^2$; tad dabūjam:

$$y = \frac{-4 - D - 2}{40} \sin 2x = -\frac{D+6}{40} \sin 2x =$$

$$= -\frac{\cos 2x + 3 \sin 2x}{20}.$$

Gadījumā, ja vienādojumā (2) $f(-\alpha^2) = 0$, tad $\cos(\alpha x + m)$ vai $\sin(\alpha x + m)$ vietā jālieto eksponentfunkcijas.

II. $X = \cos(\alpha x + m) V$, kur V ir x funkcija.

Še cos vietā var būt sin funkcija. Abos gadījumos cos vai sin funkcijas vietā jālieto eksponentfunkcijas un tālāk jārīkojas, kā norādīts [112].

B. Lineari diferencialvienādojumi ar mainīgiem koeficientiem

114. Darbības simbols $x \frac{d}{dx} = \vartheta$ Šī simbola iedarbību uz kādu x funkciju, piemēram, $\sin x$, rakstām šādi:

$$x \frac{d}{dx} (\sin x); \tag{1}$$

un to izdarām tā: veidojam $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ un šīs darbības rezultatu $\cos x$ reizinām ar x, tātad

$$x \frac{d}{dx} \cdot \sin x = x \cos x.$$

Līdzīgi dabūjam, ka

$$x \frac{d}{dx} e^x = x \frac{de^x}{dx} = xe^x.$$

Še jāievēro, ka simbola $x \frac{d}{dx}$ faktori x un $\frac{d}{dx}$ nav komutativi, bet $x \frac{d}{dx} \cdot a \cos x = a x \frac{d}{dx} \cos x = -ax \sin x$, kas rāda, ka pats simbols $x \frac{d}{dx}$ ir komutativs ar konstantu faktoru. Attiecībā uz simbolu $x \frac{d}{dx}$ pastāv šādas sakarības:

I. $$x^r \frac{d^r}{dx^r} = x \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} - 1\right)\left(x \frac{d}{dx} - 2\right)\ldots\left(x \frac{d}{dx} - r + 1\right) \quad (1)$$

Pierādījums. Saskaņā ar norādīto simbola $x \frac{d}{dx}$ iedarbības veidu dabūjam:

$$x \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx}\right) = x\left[\frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx}\right)\right] = x\left[\frac{dx}{dx} \cdot \frac{d}{dx} + x \frac{d^2}{dx^2}\right],$$

$$x \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx}\right) = x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2}.$$

Seko:

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} = x \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} - 1\right) \quad (\alpha)$$

Vispārīgi dabūjam:

$$x^r \frac{d^r}{dx^r} = x \frac{d}{dx}\left(x \frac{d}{dx} - 1\right)\left(x \frac{d}{dx} - 2\right)\ldots\left(x \frac{d}{dx} - r + 1\right).$$

Liekot $x \frac{d}{dx}$ vietā ϑ, dabūjam, ņemot vērā (α),

$$x \frac{d}{dx} = \vartheta; \; x^2 \frac{d^2}{dx^2} = \vartheta(\vartheta - 1)$$

un vispārīgi

$$x^r \frac{d^r}{dx^r} = \vartheta(\vartheta - 1)(\vartheta - 2)\ldots(\vartheta - r + 1). \quad (1a)$$

II. $f(\vartheta)\, x^m = f(m)\, x^m.$

Pierādījums. Še ar f apzīmēta vesela racionala algebriska funkcija. Tā kā

$$\vartheta x^m = x \frac{d}{dx} x^m = xm\, x^{m-1} = mx^m,$$

$$\vartheta^2 x^m = x \frac{d}{dx} mx^m = mx \frac{d}{dx} x^m = mx\, mx^{m-1} = m^2 x^m,$$

tad

$$\vartheta^r x^m = m^r x^m.$$

Ievērojot augšējo un funkcijas f veidu, redzams, ka

$$f(\vartheta)\, x^m = f(m)\, x^m.$$

115. Viendimensionali lineari diferencialvienādojumi ar mainīgiem koeficientiem. Diferencialvienādojumu

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = V \qquad (1)$$

sauc par viendimensionalu. Šajā vienādojumā koeficienti A_1, $A_2, \ldots, A_n$ ir pastāvīgi lielumi, labās puses loceklis V ir tikai x funkcija vai konstants lielums. Ja pieņemam, ka x un y katrs ir pirmās dimensijas, tad, kā redzams, vienādojuma (1) katrs loceklis ir pirmās dimensijas.

Šis vienādojums jau apskatīts [85] kā Eilera vienādojums. Ievērojot [114] ievesto simbolu $x\,\frac{d}{dx} = \vartheta$, šo diferencialvienādojumu rakstām tā:

$$f(\vartheta) y = V \qquad (2)$$

un saucam par pilnīgo diferencialvienādojumu, bet

$$f(\vartheta) y = 0 \qquad (3)$$

par pilnīgam vienādojumam (1) piekārtoto reducēto vienādojumu. Ja ar Y apzīmējam vienādojuma (3) vispārīgo integralu, un ar u vienādojuma (1) partikularu integralu, tad, kā [81] pierādīts, vienādojuma (1) vispārīgais integrals ir:

$$y = Y + u. \qquad (4)$$

116. Reducētā vienādojuma vispārīgais integrals. Ja reducētā diferencialvienādojumā

$$f(\vartheta) y = 0 \qquad (1)$$

liekam $y = x^m$, tad saskaņā ar [114, II] dabūjam:

$$f(\vartheta)\, x^m = f(m)\, x^m = 0. \qquad (2)$$

Šī prasība ir izpildīta, ja

$$f(m) = 0. \tag{3}$$

Ja vienādojuma (3) saknes ir $r_1, r_2, \ldots, r_n$, tad

$$y_1 = x^{r_1};\ y_2 = x^{r_2};\ \ldots;\ y_n = x^{r_n}$$

ir vienādojuma (1) partikularie integrali un

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} + \ldots + \\ + C_n x^{r_n} \tag{4}$$

ir reducētā vienādojuma vispārīgais integrals. Gadījumi, kad raksturīgam vienādojumam (1) ir vairākkārtējas vai kompleksas saknes, apskatīti [76, 77].

117. Pilnīgā Eilera vienādojuma partikularais integrals. Pilnīgu Eilera vienādojumu, ievedot simbolu ϑ, rakstām šādi:

$$f(\vartheta) y = X. \tag{1}$$

No (1) dabūjam

$$y = \frac{X}{f(\vartheta)}. \tag{2}$$

Šī simboliskā izteiksme dod vienādojuma (1) partikularo integralu. Izteiksmi (2) aprēķinām, izvirzot $\frac{1}{f(\vartheta)}$ parcialdaļās, kuru veidi ir:

$$\frac{A}{\vartheta - \alpha} X, \quad \frac{B}{(\vartheta - \beta)^2} X \text{ utt.}$$

Pirmo no augšējām parcialdaļām dabūjam, atrisinot diferencialvienādojumu

$$(\vartheta - \alpha) y = X \tag{3}$$

jeb

$$x \frac{dy}{dx} - \alpha y = X. \tag{3a}$$

Vienādojums (3 a) ir linears un pirmās kārtas; tā partikulars integrals ir:

$$y = \frac{1}{\vartheta - \alpha} X. \tag{4}$$

Atrisinot vienādojumu (3a), dabūjam:

$$y = x^{\alpha} \int x^{-\alpha-1} X dx. \tag{4a}$$

Salīdzinot (4) un (4a), redzam, ka

$$\frac{1}{\vartheta - \alpha} x = x^{\alpha} \int x^{-\alpha-1} X dx. \tag{5}$$

Pielietojot darbību $\frac{1}{\vartheta - \alpha}$ vienādojuma (5) abās pusēs, dabūjam:

$$\frac{1}{(\vartheta - \alpha)(\vartheta - \alpha)} X = \frac{1}{(\vartheta - \alpha)^2} X =$$

$$= \frac{1}{\vartheta - \alpha} (x^{\alpha} \int x^{-\alpha-1} X dx). \tag{6}$$

$$\frac{1}{(\vartheta - \alpha)^2} X = x^{\alpha} \int x^{-\alpha-1} \cdot x^{\alpha} dx \int x^{-\alpha-1} X dx. \tag{6a}$$

Tātad

$$\frac{1}{(\vartheta - \alpha)^2} X = x^{\alpha} \int x^{-1} dx \int x^{-\alpha-1} X dx. \tag{6b}$$

Vispārīgi varam rakstīt:

$$\frac{1}{(\vartheta - \alpha)^r} X = x^{\alpha} \int x^{-1} dx \int x^{-1} dx \int x^{-1} dx \ldots \int x^{-\alpha-1} X dx. \tag{6c}$$

Šinī izteiksmē integralu skaits ir r.

118. Simbola $\frac{1}{f(\vartheta)}$ pielietošana gadījumā, kad $X = x^{\alpha}$.

Saskaņā ar [114, II]

$$\frac{1}{f(\vartheta)} x^{\alpha} = \frac{1}{f(\alpha)} x^{\alpha}. \tag{1}$$

Šī sakarība ir spēkā, ja $f(\alpha) \neq 0$. Gadījumā, ja $f(\alpha) = 0$, tad $f(\vartheta)$ varam rakstīt kā $(\vartheta - \alpha)^r \Phi(\vartheta)$, kur $\Phi(\alpha) \neq 0$. Šādā gadījumā

$$\frac{1}{(\vartheta - \alpha)^r \Phi(\vartheta)} x^{\alpha} = \frac{1}{\Phi(\alpha)} \frac{1}{(\vartheta - \alpha)^r} x^{\alpha}. \tag{2}$$

Ievērojot [117, 6 c], ar $X = x^{\alpha}$ dabūjam:

$$\frac{1}{(\vartheta - \alpha)^r} x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha}}{r!} (\ln x)^r. \tag{3}$$

Tātad

$$\frac{1}{(\vartheta - \alpha)^r \Phi(\vartheta)} x^{\alpha} = \frac{1}{\Phi(\alpha)} \cdot \frac{x^{\alpha}}{r!} (\ln x)^r.$$

P i e m ē r s. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 + x. \tag{α}$$

Reducētais vienādojums ir

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} - 2y = 0, \tag{β}$$

ko atrisinām, ievietojot

$$y = x^m;$$

tad

$$y' = mx^{m-1} \text{ un } y'' = m(m-1)x^{m-2}.$$

Ar šīm vērtībām un dalot ar x^m, no (2) dabūjam:

$$m^2 + m - 2 = 0$$

un

$$m_1 = 1; \quad m_2 = -2.$$

Reducētā vienādojuma (2) vispārīgais integrals tātad ir:

$$Y = C_1 x + C_2 x^{-2}.$$

Pilnīgā diferencialvienādojuma (1) partikularo integralu u dabūjam, ievedot simbolu ϑ un rakstot vienādojumu (1) šādi:

$$[\vartheta(\vartheta - 1) + 2\vartheta - 2]\, u = x^3 + x$$

jeb

$$(\vartheta^2 + \vartheta - 2)\, u = x^3 + x$$

un

$$u = \frac{1}{\vartheta^2 + \vartheta - 2} (x^3 + x).$$

Sadalot izteiksmi $(\vartheta^2 + \vartheta - 2)$ reizinātājos, rakstām:

$$u = \frac{1}{\vartheta - 1} \cdot \frac{1}{\vartheta + 2} (x^3 + x).$$

No šīs izteiksmes seko

$$u = \frac{1}{\vartheta - 1} \cdot \frac{1}{\vartheta + 2} x^3 + \frac{1}{\vartheta - 1} \cdot \frac{1}{\vartheta + 2} x.$$

Integrēšanu izdarām katrā loceklī šādi:

$$\frac{1}{\vartheta - 1} \cdot \frac{1}{\vartheta + 2} x^3 = x \int x^{-1-1} dx\, x^{-2} \int x^{2-1} x^3 dx =$$

$$= x \int x^{-4} dx \int x^4 dx = x \int x^{-4} \frac{x^5}{5} dx = \frac{x^3}{10}.$$

Tālāk rakstām:

$$\frac{1}{\vartheta - 1} \cdot \frac{1}{\vartheta + 2} x = \frac{1}{\vartheta - 1} \cdot \frac{1}{1 + 2} x = \frac{1}{\vartheta - 1} \cdot \frac{1}{3} x =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\vartheta - 1} x = \frac{1}{3} x \int x^{-1-1} x\, dx = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} x \ln x.$$

Tātad

$$\frac{1}{\vartheta^2 + \vartheta - 2} (x^3 + x) = \frac{x^3}{10} + \frac{1}{3} x \ln x.$$

Dotā diferencialvienādojuma vispārīgais integrals tātad ir:

$$y = Y + u = C_1 x + C_2 x^{-2} + \frac{x^3}{10} + \frac{1}{3} x \ln x.$$

119. Simboliski atrisinājumi. Linearu diferencialvienādojumu ar pastāvīgiem koeficientiem rakstām šādi:

$$f(D) y = X.$$

Linearu diferencialvienādojumu ar mainīgiem koeficientiem varam rakstīt tā:

$$f(D, x)y = X$$

Šādā gadījumā darbības simbolu izteicam ar xD, ko apzīmējām ar simbolu ϑ. Ir gadījumi, kad simbolu $f(D, x)$ var izteikt kā kāda viena simbola funkciju, kas tāpat kā ϑ satur D tikai pirmajā pakāpē. Šādā gadījumā vienādojumu var viegli atrisināt, kā to rāda sekojošais piemērs. Atrisināt diferencialvienādojumu

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2bx\frac{dy}{dx} + b^2x^2y = 0. \tag{1}$$

Ievedam simbolu $\frac{d}{dx} = D$.

Tad

$$\begin{aligned}(D - bx)(D - bx)y &= (D - bx)(Dy - bxy) = \\ &= D^2y - bxDy - D(bxy) + b^2x^2y = \\ &= D^2y - bxDy - by - bxDy + b^2x^2y = \\ &= D^2y - 2bxDy + b^2x^2y - by.\end{aligned}$$

Ievērojot augšējo, diferencialvienādojumu (1) varam rakstīt tā:

$$(D - bx)^2y - by = 0. \tag{2}$$

Liekot

$$D - bx = \xi,$$

vienādojums (2) dabū izskatu:

$$(\xi^2 - b)y = 0. \tag{3}$$

Izteiksmi iekavās sadalām faktoros un vienādojumu (3) rakstām tā:

$$(\xi - \sqrt{b})(\xi + \sqrt{b})y = 0. \tag{4}$$

No (4) dabūjam:

$$(\xi - \sqrt{b})y = 0 \text{ un } (\xi + \sqrt{b})y = 0. \tag{5}$$

Pirmais vienādojums no (5) ar ievesto ξ nozīmi dod:

$$(D - bx - \sqrt{b})y = 0$$

vai arī

$$\frac{dy}{dx} - (bx + \sqrt{b})\, y = 0.$$

Separējot mainīgos, dabūjam:

$$\frac{dy}{y} = (bx + \sqrt{b})\, dx.$$

Šo vienādojumu integrējam:

$$\ln y = \frac{1}{2} bx^2 + \sqrt{b} x + C_1. \tag{6}$$

Tāpat integrējam arī otru vienādojumu (5). Ar to tad ir dabūti vienādojuma (1) partikularie integrali; tos saskaitot, dabūjam 1) vispārīgo integralu.

120. Uzdevumi.

1) $x^3y''' + 4x^2y'' - 2y = 0$; Atb. $y = C_1x^{-1} + C_2x^{\sqrt{2}} + C_3x^{-\sqrt{2}}$.

2) $x^2y''' + xy'' - 4y' = 0$; Atb. $y = C_1x^3 + \frac{C_2}{x} + C_3$.

3) $x^2y''' - 2y' = 0$; Atb. $y = C_1x^3 + C_2 + C_3 \ln x$.

4) $x^2y''' + 3xy'' + 2y' = x$; Atb. $y = A \cos \ln x + B \sin \ln x + C + \frac{1}{10} x^2$.

5) $y'' + 4xy' + 4x^2y = 0$; Atb. $y = C_1e^{-x^2 - x\sqrt{2}} + C_2e^{-x^2 + x\sqrt{2}}$.

121. Linearu diferencialvienādojumu sistema ar konstantiem koeficientiem. Arī sistemas atrisināšanā ar labām sekmēm pielietojama simboliskā metode.

Pieņemam, ka dota diferencialvienādojuma sistema, ar diviem vienādojumiem, diviem atkarīgiem un vienu neatkarīgo mainīgo. Pielietojot simbolu D, šos vienādojumus rakstām tā:

$$\left.\begin{aligned} &(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n)\, x + \\ &+ (b_0 D^m + b_1 D^{m-1} + \ldots + b_m)\, y = R(t) \\ &(c_0 D^p + c_1 D^{p-1} + \ldots + c_p)\, x + \\ &+ (d_0 D^r + d_1 D^{r-1} + \ldots + d_r)\, y = S(t) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Ar x un y apzīmēti atkarīgie mainīgie, ar t neatkarīgais mainīgais. $R(t)$ un $S(t)$ ir t funkcijas. Saīsināti augšējos vienādojumus rakstām šādi:

$$\left.\begin{aligned} P_1(D)\, x + Q_1(D)\, y = R \\ P_2(D)\, x + Q_2(D)\, y = S \end{aligned}\right\}. \tag{1a}$$

Tā kā simboli $P_1(D)$, $Q_1(D)$ utt. padoti algebras likumiem, tad še varam šos likumus pielietot nezināmo x un y aprēķināšanai. Lai dabūtu x, reizinām pirmo vienādojumu ar $Q_2(D)$ un otru ar $Q_1(D)$. Atņemot otru izteiksmi no pirmās, dabūjam:

$$[P_1(D)\, Q_2(D) - P_2(D)\, Q_1(D)]\, x = Q_2(D)\, R - Q_1(D)\, S. \tag{2}$$

Tādā pašā kārtā dabūjam:

$$[P_1(D)\, Q_2(D) - P_2(D)\, Q_1(D)]\, y = P_1(D)\, S - P_2(D)\, R. \tag{2a}$$

Vienādojumi (2) un (2a) ir lineari; katrā atrodas tikai viena meklētā funkcija. Vienādojumi jāatrisina ar augšā norādītiem paņēmieniem.

P i e m ē r s. Atrisināt vienādojumu sistemu:

$$\left.\begin{aligned} 2x'' - y' - 4x = 2t \\ 2x' + 4y' - 3y = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{a}$$

Rakstām dotos vienādojumus simbolos:

$$\left.\begin{aligned} (2D^2 - 4)\, x - Dy = 2t \\ 2Dx + (4D - 3)\, y = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{b}$$

Reizinot pirmo vienādojumu ar $(4D - 3)$ un otru ar D, dabūjam:

$$(2D^2 - 4)\,(4D - 3)\, x - D(4D - 3)\, y = (4D - 3)\, 2t,$$

$$2D^2 x + (4D - 3)\, Dy = 0.$$

Saskaitot augšējos vienādojumus dabūjam:

$$[(2D^2 - 4)(4D - 3) + 2D^2]x = (4D - 3)2t. \qquad (c)$$

Līdzīgi dabūjam:

$$[2D^2 + (2D^2 - 4)(4D - 3)]y = -2D2t. \qquad (d)$$

No (c) un (d) dabūjam:

$$4(2D^3 - D^2 - 4D + 3)x = 8 - 6t, \qquad (e)$$

$$4(2D^3 - D^2 - 4D + 3)y = -4. \qquad (f)$$

Vienādojumam (e) raksturīgais vienādojums ir:

$$2r^3 - r^2 - 4r + 3 = 0;$$

$$r_1 = 1;\ r_2 = 1;\ r_3 = -1{,}5;$$

$$X = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Vienādojuma (e) partikularais integrals u ir:

$$u = \frac{1}{4(2D^3 - D^2 - 4D + 3)}(8 - 6t)$$

vai

$$u = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{9}D\right)(8 - 6t) = -\frac{t}{2}.$$

Tātad diferencialvienādojuma (e) vispārīgais integrals ir:

$$x = X + u = (C_1 + C_2 t)e^t + C_3 e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{2}t. \qquad (g)$$

Līdzīgi dabūjam:

$$y = (k_1 + k_2 t)e^t + k_3 e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{3}. \qquad (h)$$

Patvaļīgās integrēšanas konstantes, kas atrodas atrisinājumos, nav neatkarīgas, bet nav arī identiskas.

Lai dabūtu nepieciešamo sakaru starp konstantēm, atrisinājums jāievieto vienā no vienādojumiem.

Ievietojot izteiksmes (g), (h) otrā diferencialvienādojumā, dabūjam

$$2\left(C_1 e^t + C_2 e^t + C_2 t e^t - \frac{3}{2} C_3 e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+4\left(k_1 e^t + k_2 e^t + k_2 t e^t - \frac{3}{2} k_3 e^{-\frac{3}{2}t}\right) -$$

$$-3\left(k_1 e^t + k_2 t e^t + k_3 e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{3}\right) = 0$$

vai

$$e^t(2C_1 + 2C_2 + k_1 + k_2) + te^t(2C_2 + k_2) -$$

$$3e^{-\frac{3}{2}t}(C_3 + 3k_3) = 0.$$

Tā kā e^t, te^t un $e^{-\frac{3}{2}t}$ ir neatkarīgi, tad augšējais vienādojums var pastāvēt, ja koeficienti pie šiem lielumiem ir 0; tātad jābūt:

$$C_3 + 3k_3 = 0;\ 2C_2 + k_2 = 0;\ 2C_1 + 2C_2 + k_1 + k_2 = 0$$

un

$$C_3 = -3k_3;\ 2C_2 = -k_2;\ 2C_1 = -k_1.$$

Ievietojot šīs izteiksmes, dabūjam:

$$x = (C_1 + C_2 t)e^t - 3k_3 e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{2}t,$$

$$y = -2(C_1 + C_2 t)e^t + k_3 e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{3}.$$

Šīs izteiksmes ir dotās diferencialvienādojumu sistemas atrisinājums. Kā redzam, attiecībā uz x un t, tāpat uz y un t, diferencialvienādojumi ir trešās kārtas; tāpēc atrisinājumos jābūt trim patvaļīgām neatkarīgām konstantēm, kas augšējos atrisinājumos arī ir izpildīts.

Septītā nodaļa

Furjē rindas

122. Furjē (Fourier) rindas definicija. Uzspiestās svārstības kustības apskatā redzējām, ka tās cēlonis ir periodisks spēks, ko analitiski izteicām kā periodisku, no laika atkarīgu funkciju un nosaucām to par ierosinātāju funkciju.

Minētajā apskatā pieņēmām šo funkciju vienkāršā veidā, kā sin vai cos funkciju; šī funkcija var arī būt sarežģītāka.

Šī funkcija var periodā vietām būt pārtraukta; tā var būt dota tikai grafiskā attēlā. Šādos gadījumos funkciju izteicam ar trigonometrisku rindu.

Sakarībā

$$y = A \sin (nx + \alpha) \qquad (n \text{ vesels skaitlis}) \quad (1)$$

apzīmē: ar A kustības amplitudu, $\frac{2\pi}{n}$ periodu un $A \sin \alpha$ funkcijas sākuma vērtību. Šie lielumi dod iespēju veidot funkcijas ar patvaļīgi lielu vai mazu amplitudu, periodu un sākuma vērtību. To panākam ar A, n un α izvēli.

Tā kā $A \sin (nx + \alpha) = A \sin nx \cos \alpha + A \cos nx \sin \alpha$, tad, liekot $B = A \cos \alpha$ un $C = A \sin \alpha$, sakarību (1) rakstām tā:

$$y = B \sin nx + C \cos nx. \qquad (2)$$

Kā redzams, funkciju (1) varam arī dabūt, saskaitot funkcijas

$$y_1 = B \sin nx \text{ un } y_2 = C \cos nx. \qquad (3)$$

Ievērojot to apstākli, ka ar n izvēli varam panākt abām funkcijām pēc patikas ātru zīmju maiņu, ar B un C izvēli pēc patikas lielu vai mazu amplitudu, secinām, ka, saskaitot vairākas (3) veida izteiksmes, varam veidot visdažādākās funkcijas. Ģeometriski tas nozīmē, ka, saskaitot ar dažādiem B, C un n veidotās līkņu (3) ordinatas, var izveidot visdažādākās līknes.

Sakarā ar teikto rodas jautājums, vai ir iespējams izteikt doto funkciju $f(x)$ ar (3) veida izteiksmju sumu, t. i., vai var izvirzīt doto x funkciju šādā trigonometriskā bezgalīgā rindā:

$$f(x) = \frac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + b_3 \cos 3x + \ldots +$$

$$+ a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots \qquad (4)$$

Uz augšējo jautājumu matematika dod ar zināmiem noteikumiem apstiprinošu atbildi, un, tā kā pirmais, kas plaši pielietoja iespēju izvirzīt doto x funkciju trigonometriskā rindā (4), bija Furjē (Fourier), tad augšējo rindu sauc par Furjē rindu.

123. Furjē rindas koeficienti. Vispārīgi var teikt, ka nav iespējams precīzi izteikt kādu periodisku funkciju $f(x)$ ar galīgu trigonometrisku funkciju sumu. Apzīmējam šo sumu ar $f_n(x)$, tad

$$f_n(x) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{1}^{n} (b_\lambda \cos \lambda x + a_\lambda \sin \lambda x). \qquad (1)$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Liekam

$$E(x) = f(x) - f_n(x) = f(x) - \frac{1}{2} b_0 -$$

$$- \sum_{1}^{n} (b_\lambda \cos \lambda x + a_\lambda \sin \lambda x). \qquad (2)$$

Kā redzams, $E(x)$ izteic to kļūdu, ko izdarām, atvietojot $f(x)$ ar funkcijas tuvinājumu, t. i., ar trigonometrisko funkciju sumu, sastāvošu no n locekļiem. Kļūdu izlīdzināšanas teorija rāda, ka tas tuvinājums ir visizdevīgākais, kura viena perioda kļūdas kvadratiskā vidējā vērtība top par minimu.

Tas nozīmē, ka $(2n + 1)$ koeficienti

$$\frac{b_0}{2}, \; b_1, b_2, \ldots, b_n \text{ un } a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \qquad (3)$$

ir jānoteic tā, lai

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int^{2\pi} [E(x)]^2 \, dx}$$

ir minims.

Tā kā izteiksmes $E(x)$ vērtība ir augšējo koeficientu funkcija, tad jābūt:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial b_\lambda} \int_0^{2\pi} [E(x)]^2 \, dx = \int_0^{2\pi} 2E(x) \frac{\partial E(x)}{\partial b_\lambda} dx = 0, \\ &\text{un arī} \\ &\frac{\partial}{\partial a_\lambda} \int_0^{2\pi} [E(x)]^2 \, dx = \int_0^{2\pi} 2E(x) \frac{\partial E(x)}{\partial a_\lambda} dx = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Ievietojot $E(x)$ izteiksmi no (2) integralos (4), dabūjam:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}[f(x)-\frac{1}{2}b_0-\sum_1^n(b_\lambda\cos\lambda x+a_\lambda\sin\lambda x)]\cos\lambda x\,dx=0\\ &\text{un}\\ &\int_0^{2\pi}[f(x)-\frac{1}{2}b_0-\sum_1^n(b_\lambda\cos\lambda x+a_\lambda\sin\lambda x)]\sin\lambda x\,dx=0.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Aprēķinot augšējās izteiksmes, dabūjam šādus integralu veidus:

$$1)\int_0^{2\pi}\cos\lambda x\cos\mu x\,dx,\quad 2)\int_0^{2\pi}\sin\lambda x\sin\mu x\,dx,$$

$$3)\int_0^{2\pi}\cos\lambda x\sin\lambda x\,dx,\quad 4)\int_0^{2\pi}\cos^2\lambda x\,dx,\ 5)\int_0^{2\pi}\sin^2\lambda x\,dx.$$

Augšējās izteiksmēs λ un μ dabū vērtības: $0, 1, 2, \ldots, n$.

No integralrēķiniem zināms, ka ar 1), 2), 3) apzīmēto noteikto integralu vērtības ir 0 un ar 4), 5) apzīmēto noteikto integralu vērtības ir π.

Ievērojot teikto, no (5) dabūjam koeficientu $b_o, b_1, \ldots, b_n$ un koeficientu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vērtības:

$$\left.\begin{aligned}b_\lambda&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos\lambda x\,dx\\ a_\lambda&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\right\}\qquad \lambda=0, 1, 2, \ldots, n.\ (6)$$

cos rindas pirmais loceklis apzīmēts ar $\frac{b_0}{2}$. Tam ir sekojošs pamats.

Ja apzīmētu šīs rindas pirmo locekli ar b_0, tad no (5) dabūtu, liekot $x=0$:

$$\int_0^{2\pi}b_0\,dx=\int^{2\pi}f(x)\,dx$$

vai
$$2\pi\, b_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$
$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$
Specializējot izteiksmē (6) $b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \lambda x\, dx$, dabūjam:
$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$
t. i. dabūjam divi reizes lielāku vērtību par īsto. Lai cos rindas pirmo locekli varētu dabūt no vispārīgās b_λ formulas, tad ieved kā pirmo locekli $\frac{b_0}{2}$.

Šādā gadījumā specializējot b_λ formulu, dabūjam pirmo locekli pareizu.

Augšējās formulās $f(x)$ pieņemta kā integrējama funkcija izteiksmēs (6) dotās b_o, b_n, a_n vērtības sauc par Furjē koeficientiem. Šos koeficientus pirmie devuši Eilers un Furjē.

124. Dirichlē (Dirichlet) noteikumi. Par Furjē rindas savirzāmību dod noteikumus sekojošā Dirichlē teorema: Ja funkcija $f(x)$ ar periodu 2π slēgtā intervalā $(0, 2\pi)$ ir viennozīmīga un galīga un tai šajā intervalā ir galīgs skaits pārtraukuma vietu, kā arī galīgs skaits maksima un minima vietu, tad bezgalīgā rinda
$$\frac{b_o}{2} + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \ldots + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \ldots$$
ar [123 (6)] dabūtiem Furjē koeficientiem pie katra galīga x ir savirzāma. Šī Furjē rinda izteic $f(x)$ visām x vērtībām intervalā $(0, 2\pi)$, izņemot $f(x)$ pārtrauktības vietas. Ja funkcija $f(x)$ vietā $x = c$ ir pārtraukta, tad Furjē rindas vērtība šajā vietā ir
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \left[f(c - \varepsilon) + f(c + \varepsilon) \right].$$

Ja intervala galos, pie $x = 0$ un $x = 2\pi$, funkcijas vērtības nav vienādas, tad Furjē rindas vērtība pie $x = 0$ vai $x = 2\pi$ ir

$$\frac{1}{2}[f(0) + f(2\pi)].$$

Dirichlē teoremas pierādījums atrodams: Проф. В. И. Смирнов „Курс высшей математики" un Dr. R. Fricke „Lehrbuch der Differential — und Integralrechnung und ihrer Anwendung". Dirichlē noteikumam atbilst visas līdz šim dabas zinātnēs un technikā lietotās funkcijas.

125. Koeficienti harmoniskā analizē. Funkcijas $f(x)$ vērtības tuvīnu izteikšanu ar trigonometrisku rindu un Furjē koeficientiem sauc par funkcijas $f(x)$ harmonisko analizi, vai arī par funkcijas $f(x)$ salikšanu pamata un virssvārstībās.

Funkciju harmoniskā analizē var būt divi gadījumi: funkcija dota analitiski un funkcija dota ar grafisku attēlu. Abos gadījumos jānoteic Furjē rindas koeficienti. Apskatīsim Furjē koeficientu un Furjē rindas izteiksmes, atkarībā no intervala, kādā funkcija dota.

1. Funkcija $f(x)$ dota analitiski intervalā $(0, 2\pi)$. Šajā gadījumā, kā to redzējām koeficienti būs:

$$\left.\begin{aligned} b_\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi \\ a_\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Furjē rindas koeficienti b_λ un a_λ ir izteikti ar noteiktiem integraliem. Šādā gadījumā, kā zināms, integrala vērtība nav atkarīga no integrēšanas mainīgā apzīmējuma. Ievērojot teikto, formulās (1) x vietā rakstīts ξ. Iemesls, kamdēļ izdarīta šāda maiņa, būs vēlāk redzams. Ar šiem koeficientiem Furjē rinda pieņem šādu veidu:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\cos\lambda x\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}\sin\lambda x\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \tag{2}$$

Ja funkcija $f(x)$ dota intervalā $(0, c)$, tad x vietā liekam kā argumentu $\frac{2\pi x}{c}$, punkts ar abscisu $\frac{2\pi x}{c}$ notek intervalu $(0, 2\pi)$, kad x mainās no 0 līdz c.

Šādā gadījumā koeficientus rakstām tā:

$$\left.\begin{aligned} b_\lambda &= \frac{2}{c}\int_0^{c} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi \\ a_\lambda &= \frac{2}{c}\int_0^{c} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

un Furjē rinda dabū šādu veidu:

$$f(x)=\frac{1}{c}\int_0^{c} f(\xi)\,d\xi+\frac{2}{c}\sum_1^{\infty}\cos\frac{2\lambda\pi x}{c}\int_0^{c} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi+$$

$$+\frac{2}{c}\sum_1^{\infty}\sin\frac{2\lambda\pi x}{c}\int_0^{c} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \tag{4}$$

Lai atšķirtu koeficientos (1) un (3) integrēšanas mainīgo no funkcijas $f(x)$ argumenta x, koeficientu integrēšanas mainīgais apzīmēts ar ξ.

2. Ja funkcija $f(x)$ dota intervalā $(-\pi, \pi)$, tad koeficienti un rinda dabū šādu veidu:

$$\left.\begin{aligned} b_\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi \\ a_\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \cos\lambda x \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \sin\lambda x \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \tag{6}$$

Ja funkcija $f(x)$ dotā intervalā $(-c,c)$, tad koeficienti un rinda būs:

$$\left.\begin{aligned} b_\lambda &= \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(\xi)\cos\frac{\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi \\ a_\lambda &= \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(\xi)\sin\frac{\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi. \end{aligned}\right| \tag{7}$$

$$f(x) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(\xi)\,d\xi + \frac{1}{c}\sum_{1}^{\infty} \cos\frac{\lambda\pi x}{c}\int_{-c}^{c} f(\xi)\cos\frac{\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{c}\sum_{1}^{\infty} \sin\frac{\lambda\pi x}{c}\int_{-c}^{c} f(\xi)\sin\frac{\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi. \tag{8}$$

Kā redzam, salīdzinot izteiksmes (5), (6) un (7), (8), pēdējās dabūtas no pirmajām, liekot x vietā $\frac{\pi x}{c}$, jo, ja x noiet intervalu no $-c$ līdz c, tad πx noiet intervalu $(-\pi, \pi)$.

Ja funkcija $f(x)$ ir pāra funkcija, tad rindā nevar atrasties locekļi ar sin, jo sin funkcija ir nepāra funkcija.

Formulās (5), (6), (7), (8) tādēļ atkrīt locekļi ar sin funkciju un paliekošos integralos no pāra funkcijām integrēšanas intervalu var reducēt uz pusi. Šādā gadījumā dabūjam formulas:

$$b_\lambda = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi. \tag{9}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\xi)\,d\xi + \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \cos\lambda x \int_{0}^{\pi} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi. \tag{10}$$

$$b_\lambda = \frac{2}{c}\int_0^c f(\xi)\cos\frac{\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi. \tag{11}$$

$$f(x) = \frac{1}{c}\int_0^c f(\xi)\,d\xi + \frac{2}{c}\sum_1^\infty \cos\frac{\lambda\pi\xi}{c}\int_0^c f(\xi)\cos\frac{\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi. \tag{12}$$

Ja funkcija $f(x)$ ir nepāra funkcija, tad rindās (5), (6), (7), (8) atkrīt labajā pusē pirmais loceklis un loceklis ar cos funkciju, kas ir pāru funkcija. Tā kā nepāra funkcijas $f(x)$ reizinājumi ar nepāra sin funkcijām dod pāra funkcijas, tad arī paliekošos integralos varam reducēt integrēšanas intervalu uz pusi. To ievērojot, dabūjam nepāra funkcijas gadījumā:

$$a_\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi. \tag{13}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \sin\lambda x\int_0^\pi f(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi \tag{14}$$

un

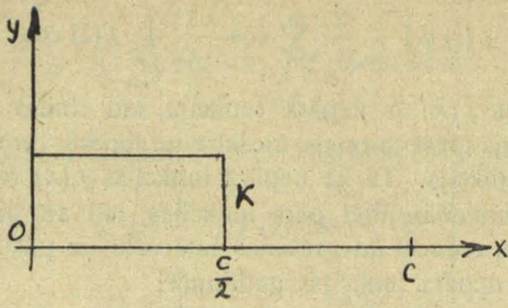
$$a_\lambda = \frac{2}{c}\int_0^c f(\xi)\sin\frac{\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi. \tag{15}$$

$$f(\xi) = \frac{2}{c}\sum_1^\infty \sin\frac{\lambda\pi x}{c}\int_0^c f(\xi)\sin\frac{\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi. \tag{16}$$

Ārpus intervala 2π rindas atkārto periodiski to, ko tās dod intervalā 2π.

Formulas (10) un (14), (12) un (16) varam lietot, lai kaut kādā intervalā $(0,\pi)$ vai $(0, c)$ dotu funkciju $f(x)$ izvirzītu šajā intervalā Furjē rindā. Šim nolūkam var lietot tikpat cos rindas (10), (12), kā arī sin rindas (14), (16). Še jāievēro, ka intervala galos trigonometriskās rindas suma var nesaskanēt ar funkcijas vērtību šajās vietās. Tā, piemēram, pie $x = 0$ un $x = \pi$ rindas (14), (16) dod vērtību 0, kamēr vispārīgā gadījumā izvirzāmās funkcijas $f(x)$ vērtība var nebūt nulle. Tālāk jāievēro, ka funkcija $f(x)$ ir dota intervalā $(0,\pi)$ vai $(0, c)$ un izvirzītās rindas

(10), (12), (14), (16) dod funkcijas $f(x)$ vērtības šajā intervalā Ārpus intervala $(0, \pi)$ vai $(0, c)$ cos rinda attēlo doto funkciju kā pāra funkciju, un sin rinda to attēlo kā nepāra funkciju.



39. zīm.

126. Piemēri.

1) Izvirzīt Furjē rindā funkciju intervalā $(0, c)$, ja funkcijai intervalā $\left(0, \frac{c}{2}\right)$ ir pastāvīga vērtība k un intervalā $\left(\frac{c}{2}, c\right)$ funkcijas vērtība ir 0. Šīs funkcijas attēlu rāda 39. zīmējums.

Šajā gadījumā pielietosim formulu (4).

Še, kā redzam,

$$\int_0^c f(\xi)\,d\xi = \int_0^{\frac{c}{2}} k\,d\xi = \frac{kc}{2}.$$

$$\int_0^c f(\xi)\cos\frac{2\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi = \int_0^{\frac{c}{2}} k\cos\frac{2\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi =$$

$$= \frac{kc}{2\lambda\pi}\left[\sin\frac{2\lambda\pi\xi}{c}\right]_0^{\frac{c}{2}} = 0.$$

$$\int_0^c f(\xi)\sin\frac{2\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi = \int_0^{\frac{c}{2}} k\sin\frac{2\lambda\pi\xi}{c}\,d\xi =$$

$$= \frac{kc}{2\lambda\pi}\left[\cos\frac{2\lambda\pi\xi}{c}\right]_{\frac{c}{2}}^{0} = \begin{cases} 0 \text{ ar } \lambda \text{ pāru skaitli.} \\ \frac{kc}{\lambda\pi} \text{ ar } \lambda \text{ nepāru skaitli.} \end{cases}$$

Ievietojot augšējās vērtības rindā (4), dabūjam 39. zīmējumā parādītās funkcijas Furjē rindu:

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left[\sin\frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{2\cdot 3\pi x}{c} + \frac{1}{5}\sin\frac{2\cdot 5\pi x}{c} + \dots\right]$$

Ar $x = \frac{c}{4}$ augšējā rinda dod:

$$f\left(\frac{c}{4}\right) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \dots\right] =$$

$$= \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots\right].$$

Kā zināms, iekavās atrodošās rindas suma ir $\frac{\pi}{4}$, ko ievērojot, dabūjam:

$$f\left(\frac{c}{4}\right) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = k.$$

Tāpat dabūjam, ka $f\left(\frac{3}{4}c\right)$ ir 0.

Šīs $f(x)$ vērtības saskan ar dotās funkcijas definiciju.

Ar $x = 0$ un $x = \frac{c}{2}$ dabūjam $f(0) = f\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{k}{2}$, kas neatbilst dotās funkcijas definicijai.

Vietās $x = 0$ un $x = \frac{c}{2}$ dotā funkcija ir pārtraukta ar galīgu lēcienu, un, kā augšā norādīts, šādās vietās rinda dabū vērtību

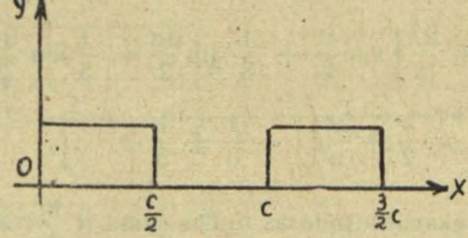
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{c}{2} - \varepsilon\right) + f\left(\frac{c}{2} + \varepsilon\right)\right].$$

Šinī gadījumā $f\left(\frac{c}{2} - \varepsilon\right) = k$ un $f\left(\frac{c}{2} + \varepsilon\right) = 0$, ko ievērojot, dabūjam rindas vērtību $\frac{k}{2}$. Ārpus intervala $(0, c)$ rinda attēlo funkciju, kā rādīts 40. zīmējumā.

2) Intervalā $(0, c)$ pieņemam $f(x) = x$.

Šo funkciju varam izvirzīt rindā, lietojot formulu (12), vai arī formulu (16). Izvirzot pēc formulas (12), dabūjam:

$$\int_0^c f(\xi)\, d\xi = \int_0^c \xi\, d\xi = \frac{c^2}{2},$$



40. zīm.

$$\int_0^c f(\xi) \cos \frac{\lambda\pi\xi}{c} d\xi = \int_0^c \xi \cos \frac{\lambda\pi\xi}{c} d\xi = \left[\frac{c\xi}{\lambda\pi} \sin \frac{\lambda\pi\xi}{c} + \frac{c^2}{\lambda^2\pi^2} \cos \frac{\lambda\pi\xi}{c}\right]_0^c = \begin{cases} 0 \text{ ar } \lambda \text{ pāru skaitli.} \\ -\dfrac{2c^2}{\lambda^2\pi^2} \text{ ar } \lambda \text{ nepāru skaitli.} \end{cases}$$

Ievietojam šīs vērtības rindā (12):

$$x = \frac{c}{2} - \frac{4c}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi x}{c} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{c} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{c} + \ldots \right\}. \qquad (\alpha$$

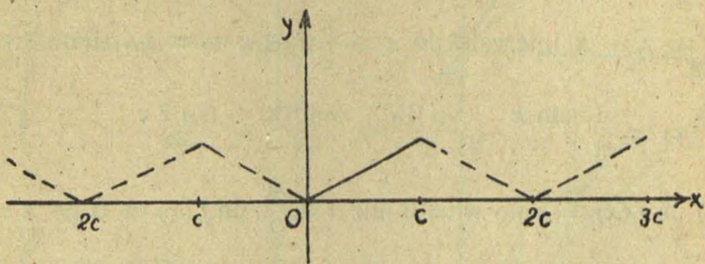
Pielietojot izvirzīšanai sin rindu (16), dabūjam:

$$\int_0^c \xi \sin \frac{\lambda\pi\xi}{c} d\xi = \left[-\frac{c\xi}{\lambda\pi} \cos \frac{\lambda\pi\xi}{c} + \frac{c^2}{\lambda^2\pi^2} \sin \frac{\lambda\pi\xi}{c}\right]_0^c = \begin{cases} \dfrac{c^2}{\lambda\pi} \text{ ar } \lambda \text{ nepāru skaitli.} \\ -\dfrac{c^2}{\lambda\pi} \text{ ar } \lambda \text{ pāru skaitli.} \end{cases}$$

Ievietojam šīs vērtības rindā (16):

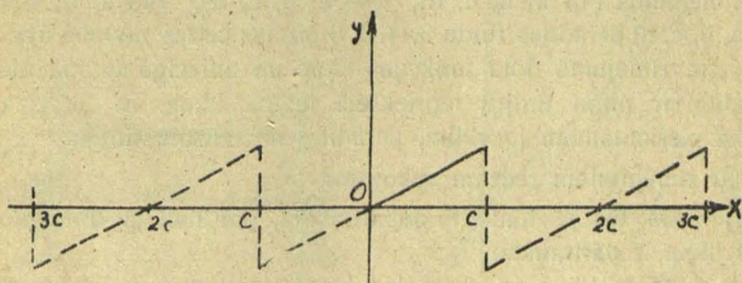
$$x = \frac{2c}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{c} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c} - \dots\right] \qquad (\beta)$$

Formulas (α) grafisku attēlojumu dod 41. zīmējums



41. zīm.

Formulas (β) grafisku attēlojumu dod 42. zīmējums. Formula (α) dod intervalā ($-c, c$) pāru funkciju un ārpus šī intervala periodisku pāra funkciju. Formula (β) dod intervalā ($-c, c$) nepāra



42. zīm.

funkciju un ārpus šī intervala periodisku nepāra funkciju, bet intervalā $(0, c)$ abas formulas dod to pašu funkciju $f(x) = x$.

3) Funkcijas $f(x) = \frac{\pi}{4}$ izvirzījums ir intervalā $(0, \pi)$,

$$\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\right).$$

4) Funkcijas $f(x) = x$ izvirzījums intervalā $(0, \pi)$ ir:

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right).$$

5) Funkcijas $f(x) = x$ intervalā no $x = 0$ līdz $x = \frac{\pi}{2}$ un $f(x) = \pi - x$ intervalā no $x = \frac{\pi}{2}$ līdz $x = \pi$ izvirzījums ir:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots\right).$$

6) Ja $f(x) = \frac{\pi}{2}$ no $x = 0$ līdz $x = \frac{\pi}{2}$, un $f(x) = 0$ no $x = \frac{\pi}{2}$ līdz $x = \pi$, tad izvirzījums ir:

$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right).$$

Pārbaudīt izvirzījumus (3), (4), (5), (6).

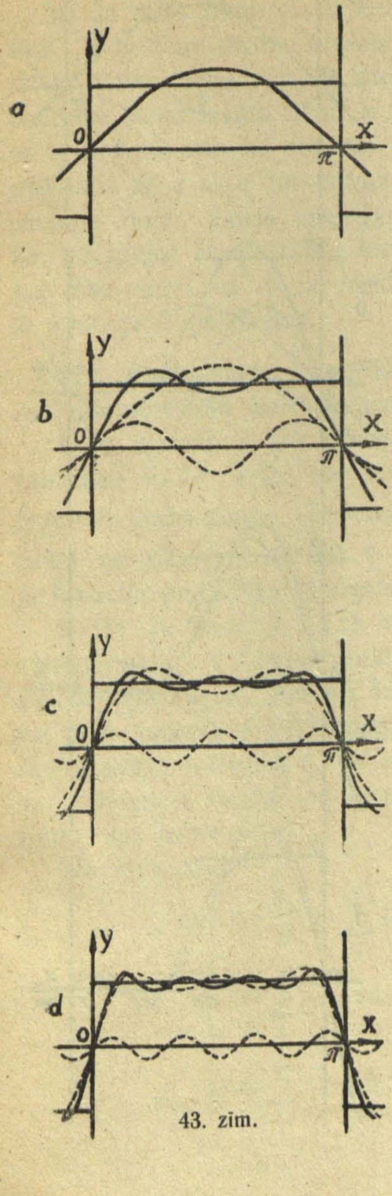
Zīmējumos (43 a, b, c, d), (44 a, b, c, d), (45 a, b, c, d), (46 a, b, c, d) parādītas rindu 3, 4, 5, 6 pirmās četras tuvīnās līknes. Katrā zīmējumā dotā funkcijas līkne un attiecīgā tuvīnā līkne parādīta ar pilnu līniju; iepriekšējā tuvīnā līkne un līkne, kas atbilst pieskaitāmam loceklim, parādītas ar svītrotu līniju.

No zīmējumiem redzam sekojošo:

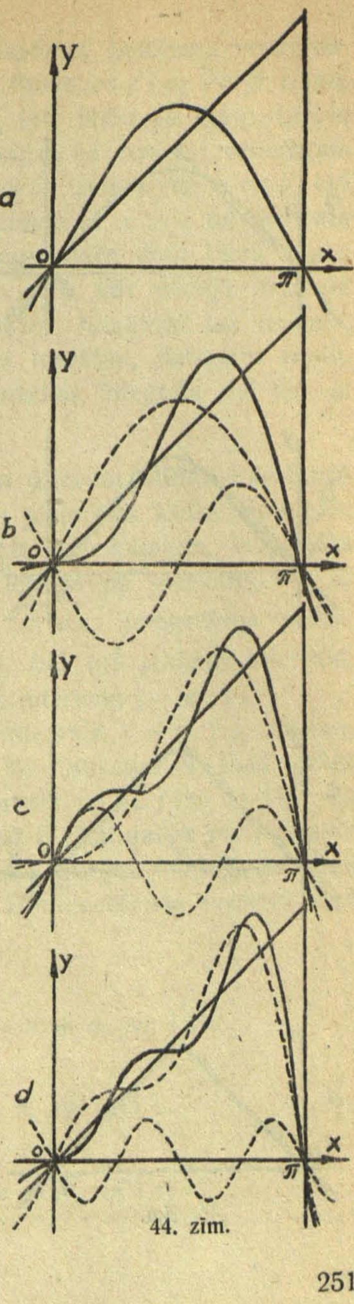
a) Katra tuvīnā līkne ir nepārtraukta, pat tad, ja dotā funkcijas līkne ir pārtraukta.

b) Ja dotā līkne ir pārtraukta un pārtrauktības vietās abscisa ir $x = a$, tad tuvīnās līknes tuvojas arvien vairāk statenim pret x asi punktā $x = a$.

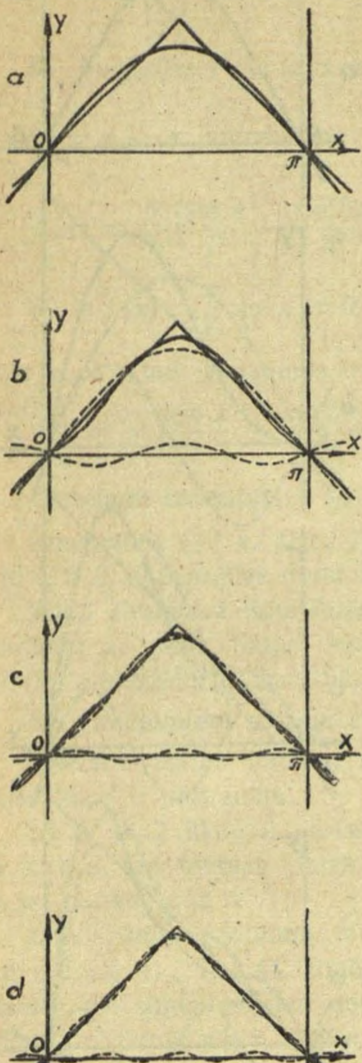
c) Vispārīgā gadījumā tuvīnās līknes nezaudē viļņa raksturu, ko redzam 41., 42., 44. zīmējumā kuros dotā līkne ir pārtraukta, kamēr 43. zīmējumā, kur dotā līkne ir nepārtraukta, rezultējošā līkne ātri zaudē viļņa raksturu. Tāpat no 43., 44., 45. zīmējuma redzams, ka vispārīgi pie dotas abscisas x_1 tuvīnās līknes pieskares virziens nesakrīt ar dotās līknes pieskares virzienu; tas no-



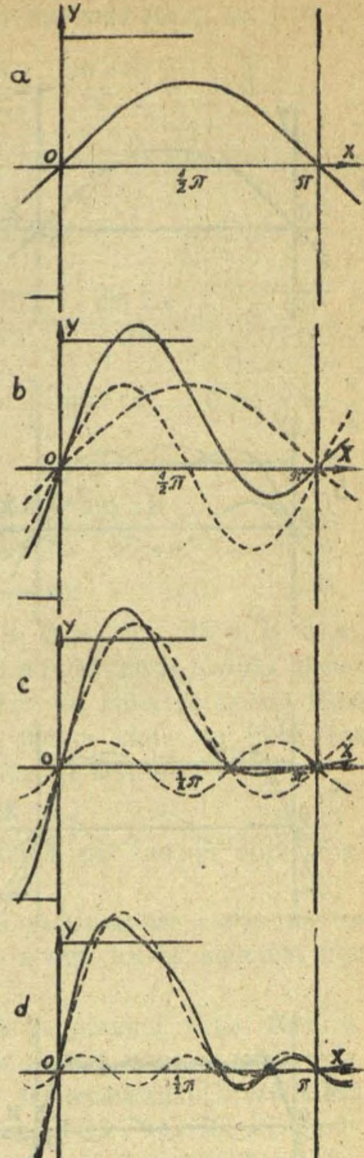
43. zīm.



44. zīm.



45. zīm.



46. zīm.

zīmē, ka funkcijas $f(x)$ atvasināto vispārīgā gadījumā nevar dabūt, diferencējot locekli pa loceklim, funkcijas $f(x)$ Furjē rindu.

d) Ja dotā līkne ir nepārtraukta, tad laukums starp tuvīno līkni, x asi un divām ordinatām tuvojas kā robežai attiecīgam dotās līknes laukumam. Ja dotai līknei ir lēciens pie $x = b$, tad laukums starp tuvīno līkni, x asi, ordinatu ar $x = a$ un ordinatu ar $x = b$ tuvojas kā robežai laukumam starp doto līkni, x asi, ordinatu ar $x = a$ un ordinatu ar $x = b$, kur pēdējā ordinata savieno dotās līknes atsevišķus gabalus. Analitiski tas nozīmē, ka, integrējot Furjē rindu locekli pa loceklim, dabūjam rindu, kas dod dotās ar rindu izteiktās funkcijas integralu pat tad, ja šī funkcija ir pārtraukta.

127. Furjē rindu integrēšana un diferencēšana. Par Furjē rindu integrēšanu un diferencēšanu ir pierādītas šādas teoremas:

I. Ja funkcija $f(x)$ atbilst Dirichlē noteikumiem, tad šādas funkcijas Furjē rindu var integrēt locekli pa loceklim, un kā rezultatu dabū rindu, kas izteic $\int f(x)\,dx$. Integrēšana pielaižama ne tikvien intervalā $(-\pi, \pi)$, bet arī jebkurā intervalā, ja funkcija periodiski turpināta ārpus intervala $(-\pi, \pi)$.

II. 1) Ja funkcija $f(x)$ slēgtā intervalā $(-\pi, \pi)$, viennozīmīga, galīga un nepārtraukta, ja šai funkcijai ir tikai galīgs skaits maksimu un minimu šajā intervalā un ja $f(\pi) = f(-\pi)$; vai 2) ja funkcija $f'(x)$ ir galīga, ja tai ir tikai galīgs pārtraukumu skaits slēgtā intervalā $(-\pi, \pi)$, — tad funkcijas $f(x)$ Furjē rindu var diferencēt locekli pa loceklim. Diferencēšanas rezultati dod rindu, kas izteic $f'(x)$.

No formulām

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_1^{\infty} (b_\lambda \cos \lambda x + a_\lambda \sin \lambda x),$$

$$f'(x) = \sum_1^{\infty} (a_\lambda \cos \lambda x - b_\lambda \sin \lambda x)\,\lambda,$$

$$f''(x) = \sum_1^{\infty} (-b_\lambda \cos \lambda x - a_\lambda \sin \lambda x)\,\lambda^2$$

redzams, ka katru reizi, kad diferencējam Furjē rindu, reizinām ar λ rindas koeficientu. Tā kā Furjē rinda ir savirzāma vienīgi tad, ja koeficientu (b_n) un (a_n) rindas ir savirzāmas, tad redzams, ka Furjē rindas diferencēšana padara rindas savirzāmību mažāk ātru un dažos gadījumos pat iznīcina to.

Turpretim sakarība

$$\int \sum_{1}^{\infty} (b_\lambda \cos \lambda x + a_\lambda \sin \lambda x)\, dx =$$

$$= C + \sum_{1}^{\infty} \frac{(- a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x)}{\lambda}$$

rāda, ka, integrējot Furjē rindu, dabūjam rindu, kas ātrāk savirzāma nekā dotā rinda.

128. Harmoniskā analize. Par dotās funkcijas $f(x)$ harmonisko analizi sauc šīs funkcijas izvirzīšanu Furjē rindā, noteicot šīs rindas koeficientus b_λ un a_λ. Atkarībā no tā veida, kādā dota funkcija $f(x)$, atrodas arī koeficientu b_λ un a_λ noteikšanas paņēmieni. Ja funkcija $f(x)$ dota analitiski, tad formulas [**123, 125**] dod problemas atrisinājumu. Ja funkcija $f(x)$ dota empiriski, kā tas daudzkārt mēdz būt praksē, tad koeficientu b_λ un a_λ noteikšanai lieto divus sekojošus paņēmienus:

1) Furjē rindas koeficientus noteic skaitliska aprēķina ceļā, pielietojot empiriski dotās funkcijas datus;

2) Furjē rindas koeficientus, vai arī atsevišķās harmoniskās funkcijas noteic ar specialiem aparatiem. Šādiem aparatiem ir komplicēta uzbūve; to lietošana nav visai vienkārša, un tie nav arī vispārīgi pieejami. Prakses gadījumos parasti lieto minēto aprēķina metodi, kas pamatota uz formulās

$$b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos \lambda x\, dx \text{ un } a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin \lambda x\, dx$$

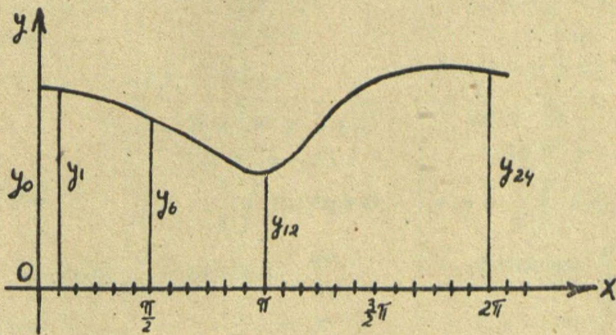
esošo integralu tuvīnu vērtību aprēķinu. Atkarībā no tā, kādu no integralrēķinu tuvīnām formulām lieto augšējo integralu aprēķinam, mainās arī koeficientū a_λ un b_λ noteikšanas precizitate. Lai dabūtu jēdzienu par koeficientu b_λ un a_λ noteikšanu, apskatīsim augšējo integralu aprēķinu, pielietojot paralelograma formulu.

Intervalu $(0, 2\pi)$ iedalām n vienlīdzīgās daļās:

$$x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = 2\pi.$$

Attiecīgās funkcijas $f(x)$ vērtības šajos punktos apzīmējam ar

$$Y_0,\ Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_{n-1},\ Y_n.$$



47. zīm.

Pielietojot šo integralu aprēķinam visvienkāršāko (paralelograma) formulu, dabūjam:

$$b_\lambda = \frac{2}{n} \sum_{0}^{n-1} Y_i \cos \lambda x_i,$$

$$a_\lambda = \frac{2}{n} \sum_{0}^{n-1} Y_i \sin \lambda x_i.$$

Šajā vietā varam sniegt tikai šos īsos norādījumus par harmonisko analizi; plašākus norādījumus varam iegūt speciālā literaturā, kas šajā priekšmetā ir pietiekami plaša.

Kļūdu izlabojums

Lpp.	Rinda	Iespiests	Jābūt
48	formulās (γ) un (ε)	$\frac{d\xi}{d\eta}$	$\frac{d\eta}{d\xi}$
49	4. r. no augšas	$y=y-y_0$	$\eta=y-y_0$
99	formula (1)	$y'=k$	$y''=k$
109	uzd. (1)	Atb. $x+C_1= =\frac{1}{6a^2}\sqrt{4a\sqrt{y+C}}\,(2a\sqrt{y}-C)$.	Atb. $x=x+C_1= =\frac{1}{6a^2}\sqrt{4a\sqrt{y}+C}\cdot(2a\sqrt{y}-C)$.
131	formula (8)	$y=-\frac{1}{g}\int[f(s)]^2 tg\vartheta\, d\vartheta.$	$y=-\frac{1}{g}\int[f(\vartheta)]^2 \mathrm{tg}\vartheta\, d\vartheta.$
135	11. r. no augšas	ievietojam $\frac{dy}{dx}$	ievietojam $\frac{dY}{dx}$
164	formula (5) pēdējā izteiksmē	$\ldots=X$	$\ldots=\frac{X}{a_0}$
188	formula (3)	$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$	$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$
202	formula (3) pēdējā izteiksmē	$\frac{dy'}{dt}=-\frac{ky}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$	$\frac{dy'}{dt}=-\frac{ky}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$
212	1. r. no augšas	$\psi(D)\{e^{x}X\}=$	$\psi(D)\{e^{\alpha x}X\}=$
214	formula (3)	$=\frac{\sin(\alpha x+a)}{\psi(-a^2)}.$	$=\frac{\sin(ax+\alpha)}{\psi(-a^2)}.$
216	2. r. no augšas	$y''-(\alpha+\beta)y+\alpha\beta=f(x).$	$y''-(\alpha+\beta)y'+\alpha\beta y=f(x).$
217	1. r. no apakšas	$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}\quad X(\text{še}X=\varphi(x)),$	$\frac{1}{(D-\alpha)^2+\beta^2}X\quad(\text{še}X=\varphi(x))$

Prof. J. Cizarevičs — Parasto diferencialvienādojumu integrēšana.

Maksā 7 rbļ. 50 kap.