Loti sekmīgi
6. II. 42

A. Lusis
E. Leimanis
E. Grīnbergs

Variāciju rēķinu direktās metodes.

Georgs Enģelis (mat. № 21342).

(Maģistra darbs).

5. III. 42. fak. p.

Šinī darbā variāciju rēķinu directās metodes apskatītas neatkarīgi no to izlietājumiem un vēstures. Tas rada iespēju izcelt problēmai raksturīgākos jautājumus un klasificēt un analizēt tos sīkāki, nekā tas attiecīgajā literātūrā parasts. Darba saturs šāds:

§1. Directo metožu būtība un nozīme;

§2. Minimētājas virknes konstrukcija;

§3. Minimētājas virknes konvergence;

§4. Aproksimācijas pakāpes noteikšana.

Darba īpatnības, ar ko tas atšķiras no līdzīga veida apskatiem, vislabāk redzamas otrajā un trešajā paragrafā, kur galvenā vērība piegriesta dažādo metožu pamatdomu iespējami plašiem formulējumiem un trīs svarīgo konvergences jautājumu nošķiršanai un to sakariem ar Osgood'a teorēmu. Arī interesantos Trefftz'a resultātus neesmu atradis apskatītus to sakarībā ar citām directo metožu problēmām.

§1. Directo metožu būtība un nozīme.

Klasiskā variāciju rēķinu metode reducē problēmu: „noteikt integrāla

$$\int_A \cdots \int F\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial^p y_i}{\partial x_1^{q_1} \ldots \partial x_n^{q_n}}, \ldots \frac{\partial^k y_m}{\partial x_n^k}\right) dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= J(y_1, \ldots, y_m) \qquad (q_1 + \cdots + q_n = p \leq k)$$

extremālo vērtību pie dotajiem blakus un robežu nosacījumiem" resp. „noteikt tās funkcijas $y_i(x_1, \ldots, x_n)$, kas integrālam dod šo extremālo vērtību" reducē uz Eulera diferenciālvienādojumu sistēmas (speciālā gadījumā diferenciālvienādojuma) atrisināšanu. Šai metodei līdz ar daudzām priekšrocībām piemīt arī divi trūkumi. Pirmkārt, ir iespējams, ka Eulera diferenciālvienādojumam nav jēgas, kaut gan pašai variāciju problēmai tāda ir un ir arī noteikts atrisinājums; tā var būt piemēram gadījumā, ja zem integrāla zīmes ir funkcijas, kam nevienā punktā nav atvasinājuma (šādas problēmas piemēru devis Carathéodory 1908. g.). Otrkārt, ir iespējams, ka Eulera diferenciālvienādojums nav integrējams tā, kā to prasa attiecīgā problēma, tā tad nav iespējams uzrakstīt meklēto funkciju atklātā formā, un nav arī iespējams no paša vienādojuma nolasīt kādas vajadzīgas funkcijas īpašības.

Šo iemeslu dēļ ir izveidotas t. s. variāciju rēķinu directās metodes, kas cenšas noteikt integrāla ekstremālo vērtību resp. funkciju, kas dod šo ekstremālo vērtību, bez Eulera vienādojumu starpniecības.

Arī directām metodēm ir svarīgi trūkumi: tās parasti saistītas ar smagu analizes aparātu un (apskatot speciālas problēmas) samērā garīem skaitliskiem aprēķiniem. Kaut cik efektīvu resultātu iegūšanai tās prasa arī vairāk vai mazāk individuālu pieeju katrai problēmai. Tāpēc vispārīgas dabas jautājumos tās derīgas gandrīz vienīgi eksistences teorēmu pierādīšanai. Turpretī lielu nozīmi directās metodes ieguvušas speciālu diferenciālvienādojumu, sevišķi matēmatiskās fisikas diferenciālvienādojumu praksē. Tas izskaidrojams tādā veidā, ka daudzus praktiski svarīgus diferenciālvienādojumus var uzskatīt par zināmu Eulera vienādojumiem variāciju rēķinu problēmu. Atrisinot directā ceļā šīs variāciju problēmas, atrisina arī līdzvērtīgos Eulera vienādojumus. Tā piemēram, problēma: „noteikt funkciju $z(x,y)$, kas apmierina diferenciālvienādojumu

$$z_{xx} + z_{yy} = f(x,y,z)$$

un uz slēgtas līnijas L pieņem iepriekš dotu vērtību" ir līdzvērtīga ar problēmu: „noteikt funkciju $z(x,y)$, kas dod minimālo vērtību integrālam

$$\iint_A \left(z_x^2 + z_y^2 + 2\int f(x,y,z)\,dz\right) dx\,dy$$

un uz apgabala A robežās L pieņem iepriekš dotas vērtības";

otrs tipisks piemērs: problēma: „noteikt Sturm'a-Liouville'a diferenciālvienālvienādojuma

$$Py - \frac{d}{dx}(Ry') - \lambda y = 0 \quad (P = P(x);\ R = R(x) > 0, \text{ jā } a \leq x \leq b;$$

λ - pagaidām nenoteikta konstante.)
atrisinājumu, kas izpilda nosacījumu
$$y(a) = y(b) = 0 \text{ "}$$
ir līdzvērtīga ar problēmu: „noteikt funkciju, kas dod minimu integrālam
$$\int_a^b (Py^2 + Ry'^2)\,dx$$
pie noteikumiem
$$\int_a^b y^2 dx = 1 \quad , \; y(a) = y(b) = 0. \text{"}$$

Directo metožu būtība šāda (aprobežojos ar gadījumu, ja meklē integrāla minimu): ja problēma ir atrisināma, tad ~~tad~~ integrāla $I(y_1, \dots, y_m)$ vērtības pieļaujamo funkciju kompleksu $\{y_1, \dots, y_m\}$ kopumā ir ierobežotas no apakšas, $I(y_1, \dots, y_m) \geq p$. Tādā gadījumā no pieļaujamo funkciju kompleksiem var izvēlēties virkni
$$\{y_1^1, \dots, y_m^1\}, \{y_1^2, \dots, y_m^2\}, \dots, \{y_1^k, \dots, y_m^k\}, \dots \qquad (1)$$
tā, lai
$$\lim_{k\to\infty} I(y_1^k, \dots, y_m^k) = p.$$
(Dažos gadījumos funkcijas y_i^k var arī pašas nepiederēt pieļaujamo funkciju klasei, bet tad tām jābūt tādām, ar kurām var aproksimēt kādā zināmā nozīmē katru pieļaujamo funkciju.) Ja virkne (1) konverģē, t.i. eksistē
$$\lim_{k\to\infty} y_i^k = \bar{y}_i \qquad i = 1, 2, \dots, m$$
un eksistē $I(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m)$, tad iespējams, ka
$$I(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m) = p$$
un ir arī iespējams, ka visas funkcijas $\bar{y}_i$ ir pieļaujamas funkcijas. Tad funkciju komplekss $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n\}$ ir variāciju problēmas atrisinājums.

No sacītā redzams, ka praksē izlietājot directās metodes, izšķiŗami šādi trīs galvenie jautājumi: 1) t.s. minimētājas virknes (1) konstrukcija; 2) šīs virknes konverģences pētīšana; 3) aproksimācijas pakāpes noteikšana, ja atrisinājums nav precīzi nosakāms un jāapmierinās ar tuvinājumiem. Šie jautājumi sastāda nākošo paragrafu saturu.

§2. Minimētājas virknes konstrukcija.

Tā kā no pareizas minimētājas virknes izvēles lielā mērā atkarīga problēmas praktiskas atrisināšanas iespēja un visa tālākā atrisinājuma gaita, tad directās metodes klasificē pēc šīs virknes konstrukcijas principa. Varam izšķirt divas galvenās metodes: Ritz'a metodi (plašākā nozīmē) un interpolācijas metodi. Pirms šīm metodēm tomēr vēl īsi apskatīsim kādu directu metodi, kas principā iztiek bez minimētājas virknes konstrukcijas, t.s. bezgalīgi daudzu mainīgo metodi. Izlietājot šo metodi nezināmās funkcijas meklē formā

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_i^1, a_i^2, a_i^3, \dots, a_i^l, \dots),$$

kur a_i^l nezināmi parametri bezgalīgi lielā skaitā. Šie parametri tad nu jānosaka tā, lai $I(y_1, \dots, y_m)$ būtu ekstrēmālā integrāla vērtība. Praktiski gandrīz vienmēr tas noved pie bezgalīgi daudzu vienādojumu sistēmas.

$$\frac{\partial I(y_1,\dots,y_n)}{\partial a_i^l} = 0 \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ l=1,2,3,\dots \end{matrix} ,$$

kas atrisināma samērā reti. Tāpēc arī šai metodei nav praktiskas nozīmes, bet tās pamatdomu izlietā citas direktās metodes, izmeklējot minimētājas virknes funkcijas y_i^l no l-parametru funkciju saimes

$$y_i^l = f_i^l(x_1,\dots,x_n; a_i^1, a_i^2,\dots, a_i^l).$$

a) Ritz'a metode.

Ritz'a metodi (plašākā nozīmē) raksturo šāda domu gaita: minimētājas virknes konverģence ~~tās~~ ir vienkāršāk noskaidrojama, ja attiecīgās integrāla vērtības mainās monotoni, t.i.

$$I(y_1^l,\dots y_m^l) \geq I(y_1^{l+1},\dots,y_m^{l+1}).$$

Bet šī nevienlīdzība ir katrā ziņā izpildīta tad, ja y_i^{l+1} izvēlas no funkciju saimes, kas sevī satur arī to funkciju saimi, no kuŗas izvēlas y_i^l. Tas panākams, ja visas saimes f_i^l funkcijas iegūstamas no saimes f_i^{l+1} funkcijām, dodot parametram a_{l+1} kādu speciālu vērtību. Tāpēc minimētāju virkni sastādam tā: izvēlamies l-parametru funkciju saimes skaitā m

$$y = f_i^l(x_1,\dots,x_n; a_i^1,\dots, a_i^l)\ , \quad i=1,2,\dots,m$$

ar noteikumu, lai katra šīs saimes funkcija apmierinātu dotajā problēmā attiecīgajai funkcijai y_i uzliktos robežnosacījumus un lai, pievienojot jaunu parametru a_i^{l+1}, būtu iespējams katru saimi paplašināt tā, ka tā nezaudē nevienas no tanī ietilpstošām funkcijām.

Pēc tam aprēķinam
$$I(f_1^l, \dots f_m^l) = \Phi(a_1^1, \dots a_1^l, \dots, a_i^k, \dots, a_m^1, \dots a_m^l)$$
un no lm vienādojumu sistēmas
$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_i^k} = 0 \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots, l \\ i = 1, 2, \dots, m \end{matrix} \qquad (2)$$
atrodam tās parametru a_i^k vērtības, kas dod lielumam Φ ekstrēmu. Izvēlamies tās a_i^k vērtības $\bar{a}_i^k$, kas atbilst Φ mazākajai vērtībai. Tad
$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n; \bar{a}_i^1, \dots, \bar{a}_i^l) \qquad i = 1, 2, \dots, m$$
ir minimētajās virsmes funkciju komplekss.

Praksē gandrīz vienmēr funkciju saimes f_i^l ņem formā
$$f_i^l = \varphi_0(x_1, \dots, x_n) + a_1\varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_l\varphi_l(x_1, \dots, x_n) \quad (3)$$
(Ritz'a metode šaurākā nozīmē, ko W. Ritz's publicēja 1908. g.) Šādai funkciju saimes izvēlei daudz priekšrocību, sevišķi, ja jāatrisina t. s. pirmā veida robežproblēma, kur meklējamai funkcijai y uz integrācijas apgabala robežas jāpieņem iepriekš dotas vērtības. Tad funkciju φ_0 izvēlas tā, lai tā apmierinātu šo robežnosacījumu un φ_i $(i = 1, 2, \dots)$ tā, lai šīs funkcijas uz apgabala robežas būtu 0. Bez tam svarīgākajās matēmatiskās fizikas problēmās sistēma (2) ir lineāra, kas, saprotams, ļoti atvieglo tās atrisināšanu.

Kā piemēru apskatīsim problēmu: noteikt funkciju $y(x_1, x_2)$, kas ir vienāda ar 0 uz kvadrāta
$$-1 < x_1 < 1 \;, \; -1 < x_2 < 1$$
kontūras un dod minimālo vērtību integrālam

$$J(y) = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 + 2y\right] dx_1 dx_2 .$$

Te par t.s. koordinātu funkcijām φērti izvēlēties funkcijas

$$\varphi_{kj} = \cos\frac{2k+1}{2}\pi x_1 \cos\frac{2j+1}{2}\pi x_2 .$$

Tā tad meklējam y^l formā

$$y^l = \sum_{k,j=0}^{l} a_{kj} \cos\frac{2k+1}{2}\pi x_1 \cos\frac{2j+1}{2}\pi x_2 .$$

Tad
$$\frac{\partial y^l}{\partial x_1} = \sum_{k,j=0}^{l} - a_{kj} \sin\frac{2k+1}{2}\pi x_1 \cos\frac{2j+1}{2}\pi x_2 \cdot \frac{2k+1}{2}\pi$$

un
$$\left(\frac{\partial y^l}{\partial x_1}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k,j,p,q=0}^{l}(2k+1)(2p+1)\, a_{kj}\, a_{pq} \sin\frac{2k+1}{2}\pi x_1 \sin\frac{2p+1}{2}\pi x_1 \cdot$$
$$\cdot \cos\frac{2j+1}{2}\pi x_2 \cdot \cos\frac{2q+1}{2}\pi x_2 .$$

Tā kā
$$\int_{-1}^{+1} \sin\frac{2k+1}{2}\pi x_1 \sin\frac{2j+1}{2}\pi x_1\, dx_1 =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2k+1)z \,\sin(2j+1)z\, dz = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

un analoga formula pastāv arī kosiniem, tad

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\partial y^l}{\partial x_1}\right)^2 dx_1 dx_2 = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k,j=0}^{l}(2k+1)^2 a_{kj}^2$$

Līdzīgā kārtā dabūjam

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\partial y^l}{\partial x_2}\right)^2 dx_1 dx_2 = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k,j=0}^{l}(2j+1)^2 a_{kj}^2$$

un
$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} 2y^l dx_1 dx_2 = \frac{32}{\pi^2}\sum_{k,j=0}^{l}\frac{(-1)^{k+j}}{(2k+1)(2j+1)} a_{kj} .$$

Tā tad
$$J(y^l) = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k,j=0}^{l}\left[(2k+1)^2 + (2j+1)^2\right] a_{kj}^2 +$$

$$+\frac{32}{\pi^2}\sum_{k,j=0}^{l}\frac{(-1)^{k+j}}{(2k+1)(2j+1)}a_{kj} = \Phi(a_{kj}).$$

Seko: $$\frac{\partial\Phi}{\partial a_{kj}} = \frac{\pi^2}{2}\left[(2k+1)^2+(2j+1)^2\right]a_{kj} +$$

$$+\frac{32}{\pi^2}\sum_{k,j=0}^{l}\frac{(-1)^{k+j}}{(2k+1)(2j+1)} = 0,$$

$$a_{kj} = \frac{64(-1)^{k+j+1}}{\pi^4(2k+1)(2j+1)\left[(2k+1)^2+(2j+1)^2\right]}$$ un galīgi

$$y^l = \frac{64}{\pi^4}\sum_{k,j=0}^{l}\frac{(-1)^{k+j+1}}{(2k+1)(2j+1)\left[(2k+1)^2+(2j+1)^2\right]}\cos\frac{2k+1}{2}\pi x_1\cos\frac{2j+1}{2}\pi x_2.$$

Kā jau minēts, parasti funkciju saimi f_i^l izvēlas augstāk minētā veidā (3). Dažos gadījumos tomēr efektīvus rezultātus var sasniegt arī ar citādu saimes izvēli. Piemēram, problēmā: „noteikt ekstrēmu integrālam

$$\int_0^1\left[P(x)y + R(x)y^2 + P_1(x)y' + R_1(x)y'^2\right]dx$$

($P(x)$, $R(x)$, $R_1(x)$, $P_1(x)$ – polinomi) ar robežnosacījumiem

$$y(0)=0,\ y(1)=1\text{"}$$

var iegūt samērā labus rezultātus, ņemot

$$y^{2k+1} = x^{a_1} - x^{a_2} + x^{a_3} - \dots + x^{a_{2k+1}},$$

$$a_i > 0.$$

Sistēma (2) šinī gadījumā ir stipri simetriska, kam dažos gadījumos var būt liela nozīme.

Kā redzams no Ritz'a metodes būtības, tad, meklējot minimu, vienmēr

$$I(y_1^l, \dots, y_m^l) \geq I(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m),$$

t.i. integrāla vērtība tiek aproksimēta no augšas. Trefftz's ir devis kādu metodi, kur integrāla vērtību aproksimē no apakšas. Šī metode gan praktiski izlietājama samērā šaurai problēmu grupai, bet te svarīga tās pamatdoma, kas diametrāli pretēja Ritz'a metodes idejai. Īsumā tā formulējama šādi: lai būtu

$$I(y_1^l, \dots, y_m^l) \leq I(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m),$$

tad y_i^l jāizvēlas no funkciju saimes, kas plašāka par pielaujamo funkciju saimi. Šādu saimi iegūstam, ja mīkstinām problēmas robežnosacījumus; ja pēc tam tos pakāpeniski padarām stingrākus, liekot „konverģēt" uz dotās problēmas robežnosacījumiem, tad domājam, ka arī minimizāja virkne konverģē uz atrisinājumu. Kādā veidā izdarīt šo robežnosacījumu maiņu - tas atkarīgs no pašiem robežnosacījumiem un zemintegrāla funkcijas.

Ilustrācijai apskatīsim problēmu: „noteikt funkciju, kas dod minimu integrālam

$$\iint_A (y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2)\, dx_1 dx_2$$

un apgabala A robežas L punktos sakrīt ar funkciju $z = f(s)$ (s - līnijas L loka garums, skaitot no kāda zināma punkta)."
Šinī gadījumā Eulera vienādojums ir

$$\Delta y = 0,$$

kam var viegli uzrakstīt pēc patikas daudz partikulāro integrālu; to izmantojot, varam robežnosacījumu atvietot ar $l+1$ nosacījumiem

$$\int_L (y-z)\, ds = 0, \quad \int_L (y-z)\varphi_i\, ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l$$

kur φ_i ir kādas potenciālfunkcijas ψ_i atvasinājums kontūres L normāles virzienā. Uzskatot tagad doto problēmu par izoperimetrisku problēmu ar l blakus nosacījumiem

$$\int_L (y-z)\varphi_i \, ds = 0,$$

dabūjam ekstrēma eksistencei nepieciešamo noteikumu:

$$\iint_A (2y_{x_1}\delta y_{x_1} + 2y_{x_2}\delta y_{x_2})dx_1 dx_2 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \int_L \varphi_i \delta y \, ds = 0$$

katrai variācijai δy. Ar parciālo integrāciju dabūjam:

$$2\iint_A \Delta y \, \delta y \, dx_1 dx_2 + \int_L \frac{\partial y}{\partial n} \delta y \, ds = -\int_L \delta y \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \varphi_i \, ds$$

($\frac{\partial}{\partial n}$ - atvasinājums normāles virzienā). Ši vienlīdzība ir pareiza, ja

$$y = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \psi_i.$$

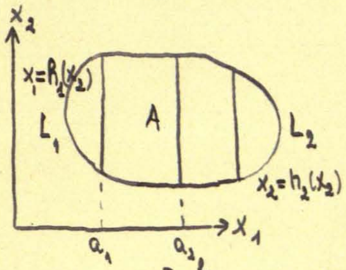
λ_0, λ_i varam atrast no robežnosacījumiem (4).

6) <u>Interpolācijas metode</u>. Sastādot minimētāju virkni pēc šīs metodes, iedomājas funkcijas y_i vērtības integrācijas apgabala A dažos punktos vai punktu kopumos fiksētas, un pašu y_i noteic interpolējot šīs vērtības. Ar šādiem y_i tad noteic integrāla $I(y_1, \ldots, y_n)$ vērtību kā fiksēto y_i vērtību funkciju. Šīs fiksētās vērtības tad izvēlas tā, lai integrāla vērtība būtu minimālā, un, ievietojot tās interpolācijas formulā, atrod derīgāko y_i tuvinājumu, ko lietātā interpolācijas formula var dot. Palielinot to punktu vai punktu kopumu skaitu, kur funkcijas vērtības fiksētas, dabū minimētāju virkni.

Piemēram te minēšu Канторович'a metodi gadījumam $n=2$, $m=1$. Integrācijas apgabalā A novelk l taisnes $x_1 = a_i$ un katrai taisnei piekārto funkciju

$$y = f_i(a_i, x_2) = \varphi_i(x_2)$$

Apzīmēsim tās apgabala robežas daļas, kas nav ieslēgtas starp divām parallēlām palīgtaisnēm ar L_1 un L_2. Robežnosacījumi fiksē y vērtības L_1 un L_2 punktos. Apzīmēsim šīs y vērtības ar $g_1(x_1,x_2)$ un $g_2(x_1,x_2)$. Lietājot Lagrange'a interpolācijas formulu, dabūjam



$$y^l = \frac{\left[\prod_{i=1}^{l}(x_1-a_i)\right]\cdot(x_1-h_1)(x_1-h_2)}{\left[\prod_{i=1}^{l}(h_1-a_i)\right](h_1-h_2)(x_1-h_1)}\, g_1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{l} \frac{\left[\prod_{i=1}^{l}(x_1-a_i)\right](x_1-h_1)(x_1-h_2)}{\left[\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{l}(a_k-a_i)\right](a_k-h_1)(a_k-h_2)(x_1-a_k)}\, \varphi_k +$$

$$+ \frac{\left[\prod_{i=1}^{l}(x_1-a_i)\right](x_1-h_1)(x_1-h_2)}{\left[\prod_{i=1}^{l}(h_2-a_i)\right](h_2-h_1)(x_1-h_2)}\, g_2 = \sum_{p=1}^{l} H_p(x_1,x_2)\varphi_p(x_2) + H(x_1,x_2)$$

($x_1 = h_1(x_2)$ un $x_1 = h_2(x_2)$ ir L_1, L_2 vienādojumi.)

Ievietojot šo y^l izteiksmi integrālā un integrējot pēc x_1, dabūjam integrālu

$$\int G(x_2, \varphi_1, \dots, \varphi_l, \varphi_1', \dots)\, dx_2$$

Tādā kārtā jautājums par divkāršā integrāla ekstrēmu reducēts uz jautājumu par vienkāršā integrāla ekstrēmu. Tas rādā iespēju noteikt φ_i no parasto diferenciālvienādojumu sistēmas (ar klasisko metodi dabū vienu vienādojumu ar parciāliem atvasinājumiem) un līdz ar to atrast y^l. Viegli saprotams, ka izdarīt pāreju uz robežu un noteikt $\bar{y}$ atvērtā formā iespējams tikai izņēmuma gadījumos, parasti jāapmierinās ar vairāk vai mazāk precīziem tuvinājumiem y^l.

Kā otru interpolācijas metodes paveidu var minēt Eulera jeb lineārās interpolācijas metodi, kas dažos gadījumos dod iespēju ļoti elementārā veidā atrisināt vienkāršāko variāciju problēmu

$$\int_a^b F(x,y,y')\,dx = \min \qquad y(a)=c\,,\ y(b)=d\,.$$

Še izvēlas l skaitļus x_i

$$x_1 = a < x_2 < x_3 < \cdots < x_{l-1} < x_l = b,$$

iedomājas fiksētus $y(x_i)=y_i$ un meklē y formā

$$y = y_{k-1} + \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\,x \qquad (x_{k-1} \leq x \leq x_k).$$

§3. Minimētājas virknes konverģence.

Pētot minimētājas virknes konverģenci, jāizšķir trīs jautājumi: 1) vai minimētāja virkne vispār konverģē; 2) vai tā konverģē uz pieļaujamu funkciju kompleksu; 3) vai šis robežkomplekss tiešām dod integrālam minimālo vērtību. Pirmais jautājums jānoskaidro katrā gadījumā atsevišķi, jo diskusija pilnīgi atkarīga no minimētājas virknes konstrukcijas metodes. Otrais un trešais jautājums atļauj vispārīgāku pieeju un dažām problēmu klasēm (to starpā gandrīz visām praktiski svarīgām) var dot pozitīvu atbildi bez tālākas speciālas diskusijas. Noskaidrojot šos jautājumus, apskatīsim atsevišķi problēmas ar $n=1$ (vienkārši integrāli) un $n>1$ (vairākkārtēji integrāli).

a) Vienkāršie integrālu problēmas. Ja divas funkcijas

$$y=f(x) \quad (a\leq x\leq b),$$
$$y=f_1(x) \quad (a_1\leq x\leq b_1),$$

apmierina nevienlīdzības

$$|f(x)-f_1(x)|<\varrho$$

(definīcijas intervalu kopīgajā daļā) un

$$|f(a)-f(a_1)|<\varrho, \quad |a-a_1|<\varrho$$
$$|f(b)-f(b_1)|<\varrho, \quad |b-b_1|<\varrho$$

tad saka, ka funkcija $f_1(x)$ atrodas funkcijas $f(x)$ ϱ-apkārtnē un otrādi. Ja divu funkciju komplexu atbilstošās funkcijas atrodas viena otras ϱ-apkārtnē, tad saka, ka paši komplexi atrodas viens otra ϱ-apkārtnē. Tā kā katrs šāds komplexs reprezentē kādu līniju, tad saka arī, ka šīs līnijas atrodas viena otras ϱ-apkārtnē. Izmantojot pēdējo jēdzienu varam formulēt variāciju rēķinu Osgood'a teorēmu, no kuras iespējams secināt atbildi paragrafa sākumā uzstādītajam jautājumam. Osgood'a teorēma ir šāda:

ja 1) zemintegrāla funkcija un problēmas blakus un robežu nosacījumi izpilda zināmus noteikumus (par kuriem runāsim vēlāk),

2) E ir integrāla ekstremāle, kas dod integrālam minimālo vērtību,

tad eksistē ekstremālei E kāda ϱ-apkārtne ar šādu īpašība: katram skaitlim $\varrho_1 < \varrho$ var piekārtot tādu pielaujamu skaitli ε, ka integrāla vērtība, aprēķināta pa katru līkni, kas atrodas $\mathcal{E}$ ϱ-apkārtnē, bet ne ϱ_1-apkārtnē, atšķiŗas no integrāla vērtības, aprēķinātas pa līkni $\mathcal{E}$, vismaz par ε.

Teorēmas pierādījums līdz šim literatūrā sastopamā vispārīgākajā gadījumā (Hahn, Heinrich Weber-Festschrift), kad m neaprobežots galīgs skaitlis ~~vai~~, robežnosacījumi prasa līnijas gala punktu atrašanos kādos slēgtos punktu kopumos un problēmai uzlikts neaprobežots, bet galīgs skaits blakus nosacījumu diferenciālvienādojumu formā, diezgan komplicēts. Vienkāršākajos gadījumos, kad apskata problēmas ar m = 1 un ja teorēmas formulējumā ar 1) apzīmētie nosacījumi nav plašākie, pie kuŗiem teorēma vēl pareiza, pierādījumi stipri vienkāršojas. Tāpēc došu pilnīgu teorēmas pierādījumu kādam vienkāršam gadījumam un pēc tam skicēšu pierādījumu gaitu vispārīgākam gadījumam.

Apskatīsim Osgood'a teorēmu problēmai: noteikt līkni $y = f(x)$, kas iet caur dotiem punktiem A un B, sastāv no galīga skaita gludu loku un dod integrālam $\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\,dx$ minimālo vērtību. Teorēmu formulēsim šādi:

ja 1) līnija L_0 ar vienādojumu $y = y_0(x)$ ir integrāla ekstremāle, kas iet caur punktiem A un B;

2) L_0 var ieslēgt ekstremāļu laukā G

$$y = g(x,\alpha),\quad g(x,0) = y_0(x),\quad |\alpha| \le \alpha_0,$$

kas izpilda nosacījumu

$$0<\mu_1<\frac{\partial q}{\partial \alpha}<\mu_2 \quad (\mu_1, \mu_2 \text{ konstantes})$$

visos lauka pārklātā apgabala punktos;

3) katrā lauka pārklātā apgabala punktā

$$F_{y'y'}(x,y,y')>0$$

visām y' vērtībām;

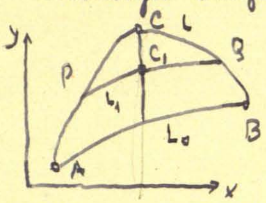
tad katram lauka punktam $C(\xi,\eta)$

$$|\eta-y_0(\xi)|>\rho, \quad x_1<\xi<x_2$$

var piekārtot kādu konstanti ε tā, ka

$$\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx-\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y_0)dx=J(L)-J(L_0)>\varepsilon,$$

ja $y(x)$ patvaļīga pieļaujama funkcija, kam $y(\xi)=\eta$ (un L attiecīgā līnija.



Vispirms konstatēsim, ka konstantam ξ diference

$$J(L)-J(L_0)$$

ir augoša ρ funkcija. Tiešām, aplūkosim punktu $C_1(\xi,\eta_1)$, kas atrodas tanī pašā līknes L_0 pusē, kur atrodas C un kam

$$\rho_1<|\eta_1-y_0(\xi)|<\rho.$$

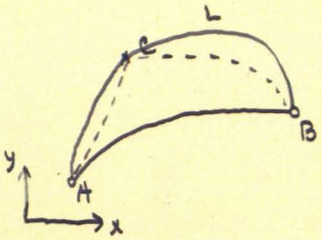
Konstruējam laukā Q ekstremāli, kas iet caur C_1 un apzīmējam šīs ekstremāles krustpunktus ar L ar P un Q. Apmainām līknes L loku PQ ar ekstremāles loku PQ un nosaucam tā izveidoto pieļaujamo līniju par L_1. Tad

$$J(L_1)<J(L)$$

un

$$J(L_1)-J(L_0)<J(L)-J(L_0).$$

Ar to augšējais apgalvojums pierādīts, un no tā varam secināt, ka pietiek teorēmu pierādīt tikai mazām ρ.



Konstruējam divas ekstremāļu saišķus ar centriem A un B. Pieņemam ξ par tik mazu, ka

1) caur C iet pa vienai ekstremālei no katras saišķa;

2) ekstremāļu lokus AC un CB var ieslēgt ekstremāļu laukos;

3) šo lauku pārklātais plāksnes apgabals satur līknes L lokus AC un CB.

(Šo noteikumu izpildāmība seko no tā, ka ekstremāli AB var ieslēgt ekstremāļu laukā.)

No ekstremāļu lauka teorijas zinām, ka

$$J(L) > J(\text{extr. } AC) + J(\text{extr. } CB) = J(L_0)$$

Apzīmēsim ar $y = \bar{y}(x)$ ekstremāles AC vienādojumu un ar $u(x,y)$ lauka Q virziena funkciju (ekstremāles virzienu punktā (x,y)). No Weierstrass'a formulas secinām

$$J(L) - J(L_0) > \frac{1}{2}\int_{x_1}^{\xi} (\bar{y}' - u)^2 F_{y'y'}(x, y, t)\, dx,$$

kur t ir starp $\bar{y}'(x)$ un $u(x,\bar{y})$. Tā kā uz ekstremāles loka AC $\bar{y}'$ un u ir ierobežoti, tad uz šīs loka $F_{y'y'}$ ir ierobežota no apakšas; apzīmējot attiecīgo robežu ar μ_3, dabūjam

$$J(L) - J(L_0) > \frac{1}{2}\mu_3 \int_{x_1}^{\xi} (\bar{y}' - u)^2 dx.$$

Izmantojot Schwarz'a nevienlīdzību, secinām

$$J(L) - J(L_0) > \frac{\mu_3}{2(\xi - x_1)}\left[\int_{x_1}^{\xi} (\bar{y}' - u)\, dx\right]^2.$$

Tā kā pastāv sakars:

$$\bar{y}'(x) - u(x, y(x)) = \frac{\partial g(\alpha, x)}{\partial \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx}$$

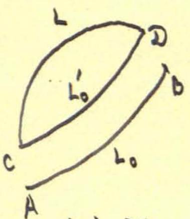
un extremāles lokam AC atbilstošo funkciju $\alpha = \alpha(x)$ var uzskatīt par monotonu, tad

$$J(L) - J(L_0) > \frac{\mu_3}{2(\xi - x_1)} \left(\int_0^{\alpha_1} \frac{\partial g}{\partial \alpha} d\alpha \right)^2 > \frac{\mu_3 \mu_4^2 \alpha_1^2}{2(\xi - x_1)},$$

kur α_1 ir parametra α vērtība, kas raksturo caur C ejošo lauka Q extremāli. Apzīmējot

$$\frac{\mu_3 \mu_4^2 \alpha_1^2}{2(\xi - x_1)} = \varepsilon,$$

Osgood'a teorēma pierādīta.



Pierādot šo teorēmu komplicētākām problēmām, galvenās grūtības sagādā apstāklis, ka pieļaujamo līkņu gala punktiem nav jāsakrīt ar problēmas atrisinājuma L_0 gala punktiem. Te jāņem palīgā extremāle L_0' caur salīdzināmās līknes L gala punktiem un jāpierāda, ka

$$J(L) - J(L_0') > \varepsilon.$$

Tas izdarāms, pierādot, ka uz L_0' var attiecināt Osgood'a teorēmu iepriekš apskatītajam vienkāršākajam gadījumam. Tad no

$$J(L_0') - J(L_0) > 0$$

seko

$$J(L) - J(L_0) > \varepsilon.$$

Teorēmas paplašinājums uz problēmām ar vairākām nezināmām funkcijām un uz problēmām ar blakus noteikumiem sevišķu grūtību nesagādā.

Atgriezīsimies pie minimētājām virknēm. Apzīmēsim problēmas atrisinājumu ar $\{u_1, \ldots, u_m\}$. Ja uz problēmu var attiecināt Osgood'a teorēmu un minimētājas virknes funkcijas ir pieļaujamas funkcijas, tad no

$$J(y_1^l, \dots, y_m^l) - J(u_1, \dots, u_m) =$$
$$= J(y_1^l, \dots, y_m^l) - p < \varepsilon \quad , \text{ja } l > L$$

seko, ka pietiekami lieliem l minimētājas virknes funkcijas atrodas problēmas atrisinājuma ρ-apkārtnē un $\rho \to 0$. Bet tā kā minimētāja virkne konverģē uz $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m\}$, tad šai robežai jābūt identiskai ar problēmas atrisinājumu. Ja minimētājas virknes funkcijas nav pieļaujamas funkcijas, tad katrā ziņā iepriekš jānoskaidro vai virknes robežā ir pieļaujamu funkciju komplekss. Ja tā ir, tad Osgood'a teorēma ļauj secināt, ka šis komplekss ir problēmas atrisinājums.

$\varepsilon \to 0$

<u>b) Vairākkārtēju integrālu problēmas.</u> Arī še dažiem problēmu tipiem ir pierādīta Osgood'a teorēma, bet to vairs nevar izlietāt konverģences pierādījumiem. Iemesls te tāds, ka Osgood'a teorēma vairākkārtējiem integrāliem atļauj minimētājas virknes robežai atšķirties no problēmas atrisinājuma bezgalīgi daudzos punktos. Piemēram minēšu Fubini resultātu (Atti delle R. Acad. dei Lincei 19_1):

ja 1) V_0 ir virsas $y = y(x_1, x_2)$ gabals ar robežu L, kas piešķiŗ integrālam

$$\iint_A F(x_1, x_2, y, y_{x_1}, y_{x_2})\, dx_1 dx_2$$

mazāku vērtību kā citi virsas gabali ar to pašu robežu;

2) V_0 var ieslēgt ekstremālu lauka;

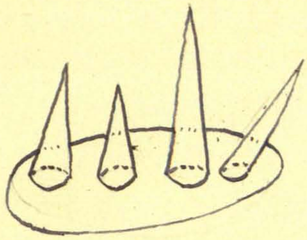
3) virsas V_0 ρ-apkārtnē

$$F_{y_{x_1}y_{x_1}}>0,\ F_{y_{x_2}y_{x_2}}>0,\ F_{y_{x_1}y_{x_1}} - \frac{(F_{y_{x_1}y_{x_2}})^2}{F_{y_{x_2}y_{x_2}}} \geqslant h>0;\ F_{y_{x_2}y_{x_2}} - \frac{(F_{y_{x_1}y_{x_2}})^2}{F_{y_{x_1}y_{x_1}}} \geqslant k>0;$$

4) ar P apzīmē punktu kopumu, kuŗa visi elementi ir ārpus V_0, bet V_0 ρ-apkārtnē un kuŗa projekcijas uz plāksnēm $x_1=0$, $x_2=0$ veido punktu kopumus ar mēru 0;

tad katram P var piekārtot tādu pozitīvu skaitli ε, ka katra pielaujama virsa, kas iet caur visiem P punktiem, dod integrālam vismaz par ε lielāku vērtību kā V_0.

Ka šo rezultātu nevar būtiski pastiprināt, rāda pazīstamā problēma: noteikt virsu, kas iet caur dotu slēgtu līniju un no kuŗas šī līnija izgriež gabalu ar minimālo laukumu. Atvietojam l minimālvirsas gabalus,



katru ar perimetru 2^{-l} ar koniem, kuŗu vadītājas ir šo gabalu robežas, bet virsotnes - kaut kādi punkti, kuŗu attālums no minimālvirsas ierobežots. Palielinot tagad l, iegūstam minimētāju virkni, kas tomēr nekonverģē uz minimālvirsu, bet uz figūru, ko sastāda minimālvirsa un sanumurējams taisnes nogriežņu kopums, un ko parasti neuzskata par problēmas atrisinājumu.

Šo iemeslu dēļ vairākkārtīgu integrālu problēmās minimētājas virknes izvēlē jārīkojas ļoti uzmanīgi. Courant's ir devis metodi, kas daudzos gadījumos ļauj izvairīties no nederīgām minimētājām virknēm. Tā balstās uz fakta, ka integrāla $I(y_1, \dots, y_m)$ vērtība mainās straujāki līdz ar pašu funkciju y_i maiņu, ja zemintegrāla funkcija satur augstākas kārtas atvasinājumus. Bet problēmas Eulera vienādojums

$$E(y_1,\dots,y_n)=0$$

parasti satur atvasinājumus ar divreiz augstāku kārtu kā zemintegrāla funkcija. Tāpēc atrisinot problēmas

$$I(y_1,\dots,y_n)=\min$$

vietā problēmu

$$I(y_1,\dots,y_n)+\int\cdots\int_A [E(y_1,\dots,y_n)]^2 dx_1\dots dx_n=\min$$

minimētājas virknes konverģence uz pieļaujamu funkciju kompleksu ir varbūtīgāka. Bez tam integrāla minimālā vērtība otrajā problēmā nav mazāka kā pirmajā un ir vienāda ar to, ja $\{y_1,\dots,y_n\}$ ir pirmās problēmas atrisinājums, tā tad abas problēmas ir līdzvērtīgas. Vajadzības gadījumā var arī izteiksmi $E(y_1,\dots,y_n)$ vēl dažas reizes atvasināt un šo atvasinājumu izmantot $E(y_1,\dots,y_n)$ vietā.

(Līdzīgu metodi var izlietāt, ja grūtības minimētājas virknes konstrukcijā rada robežnosacījumi. Piemēram, 10. lp. apskatītajā problēmā var meklēt minimu izteiksmei

$$\iint_A (y_{x_1}^2+y_{x_2}^2)dx_1dx_2+t^2\int(y-z)^2 ds.$$

Tad dabūjam Ritz'a koeficientus a^{l} kā parametra t funkcijas un, liekot parametram bezgalīgi pieaugt, tie konverģē uz sākumā dotās problēmas koeficientiem.)

§4. Aproksimācijas parcāpes noteikšana.

Dandzās variācijn rēķinu problēmās minimētājas virknes robežas noteikšana praktiski nav iespējama, tāpēc jāapmierinās ar tuvinājumiem. Tādā gadījumā svarīgi

noteikt pielaisto kļūdu. Te jāizšķir divas problemas:
1) jānosaka aproksimācijas pakāpe integrāla minimālajai vērtībai; 2) jānosaka aproksimācijas pakāpe funkcijai, kas dod integrālam šo minimalo vērtību.

Pirmajam jautājumam principiālas dabas atbildi devis Trefftz's, izmantojot 9. un 10. lp. minētos faktus. Ja ar Ritz'a metodi konstruētas minimētājas virknes vispārīgais loceklis ir $\{y_1^l, \dots, y_m^l\}$ un ar Trefftz'a metodi $\{z_1^k, \dots, z_m^k\}$, tad

$$J(y_1^l, \dots, y_m^l) \geqslant p \geqslant J(z_1^k, \dots, z_m^k).$$

No tā seko

$$|J(y_1^l, \dots, y_m^l) - p| \leq J(y_1^l, \dots, y_m^l) - J(z_1^k, \dots, z_m^k),$$
$$|J(z_1^k, \dots, z_m^k) - p| \leq J(y_1^l, \dots, y_m^l) - J(z_1^k, \dots, z_m^k).$$

Šādam novērtējumam tomēr maz praktiskas nozīmes, jo pirmkārt, problēma jāatrisina divas reizes, otrkārt, ir iespējams, ka viena metode dod labu tuvinājumu jau mazam l resp. k, bet otra metode nav problēmai piemērota, minimētāja virkne konverģē lēni un novērtējums rāda lielāku kļūdu, kā tas ir pielaižams. Pie tam nav pat redzams, vai jāuzlabo aproksimācija no augšas vai no apakšas.

Šo iemeslu dēļ ir radīts daudz citu novērtējuma formulu, kas nepieciešami tomēr jāspeciālizē, piemērojot kādai šaurākai problēmu grupai. Šīm formulām jābūt ļoti precīzām, jo praktiski, strādājot, piemēram, pēc biežāk lietātas Ritz'a metodes, nevarēdz ņemt $l > 6$. Tas savkārt padara te lietātas izteiksmes un formulu izvedumus ļoti speciālizētas un ļoti sarežģītus, tā kā še lietotos paņēmienus šādā vispārīgas dabas apskatā nebūtu vērts minēt. Piemēram pietiks ar Kryloff'a rezultātu problēmai:

$$\int_0^1 p(x)y'^2dx = \min, \quad \int_0^1 q(x)y^2dx = 1$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

Tas ir (ja lietāta Ritz'a metode)

$$|J(y_l) - p| < \frac{2\max|q|^{\frac{3}{2}}}{\min|q|\left[\min|q|^{\frac{3}{2}}(l+1)^2 - 2\max|q|^{\frac{3}{2}}\right]}.$$

Līdzīgs stāvoklis ir otrajā jautājumā, t.i. pašas minimētājas funkcijas kļūdas novērtējumā. Arī te Trefftz's devis principā svarīgu metodi, kuras praktiskā vērtība tomēr nevar būt liela. Trefftz'a ideja ir: izteikt minimētājas funkcijas vērtību kādā punktā ar kādas citas variāciju problēmas integrāla minimālās vērtības palīdzību. Nosakot aproksimācijas pakāpi šām integrālu vērtībām, nosakama arī funkcijas vērtības aproksimācijas pakāpe. Vienkāršības dēļ apskatīsim Trefftz'a domu gaitu tikai vienkāršākajai problēmai

$$J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx = \min.$$

Pieņemsim, ka $y = u(x)$ ir problēmas atrisinājums un mēģināsim noteikt $u(\xi)$ $(a<\xi<b)$. Šini nolūkā ievedam palīgfunkciju $v(x,\alpha)$, kas dod minimālo vērtību izteiksmei

$$N(\xi,\alpha) = J(v) + \alpha v(\xi,\alpha).$$

Liekot $\alpha = 0$, dabūjam

$$N(\xi,0) = J(v)$$

tā tad

$$v(x,0) = u(x)\,, \quad \left[\frac{\partial I(v)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} = 0.$$

Tā kā

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = \frac{\partial I(v)}{\partial \alpha} + v(\xi,\alpha) + \alpha\,\frac{\partial v(\xi,\alpha)}{\partial \alpha},$$

tad

$$\left[\frac{\partial N}{\partial \alpha}\right]_{\alpha=0} = v(\xi,0) = u(\xi).$$

Redzam, ka $u(\xi)$ noteikšanai, jāatrisina problēma

$$I(y) + \alpha\, y(\xi) = \min,$$

un jāatrod minimālās vērtības atvasinājums pēc α vērtības punktā 0. Gadījumā, ja problēmas Eulera vienādojums ir lineārs, var pierādīt, ka pastāv vēl otrs, ērtāk izlietājams sakars:

$$u(\xi) = \frac{1}{2\alpha}\left[N(\xi,\alpha) - N(\xi,-\alpha)\right].$$

Arī funkcijas vērtību aproksimācijas paraupes noteikšanai izstrādātas speciālas metodes, par kurām sakāms tas pats, kas par integrāla minimālās vērtības kļūdu novērtējumiem. Šiem novērtējumiem niecīga teorētiska, bet diezgan liela praktiska nozīme un to iegūšanas metode pilnīgi jāspecializē katrai kaut cik atšķirīgai problēmu grupai.

Darbam izlietātā literatūra

a) Grāmatas:

1) Frank und v. Mises – Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, 1930.

2) Hilbert und Courant – Methoden der Mathematischen Physik, 1932.

3) Канторович и Крылов – Методы приближенного решения уравнений в частных производных, 1936.

4) Kryloff – Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. XLIX), 1931.

5) Лаврентьев и Люстерник – Основы вариационного исчисления, 1935.

6) Tonelli – Fondamenti di Calcolo delle Variazioni, 1921-23.

b) Žurnālu u. c. mazāku apmēru raksti:

7) Courant – Über directe Methoden bei Variations- und Randwertproblemen (Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 34), 1926.

8) Hahn – Über einen Satz von Osgood in der Variationsrechnung (Monatshefte für Mathematik 17), 1906.

9) Hahn – Allgemeiner Beweis des Osgoodschen Satzes für einfache Integrale (Heinrich Weber-Festschrift), 1912.

10) Hammerstein – Eine Restabschätzung für das Ritzsche Verfahren bei gewissen Variationsproblemen mit Nebenbedingungen (Sitzungsberichte der Berliner Math. Ges. 26), 1927.

11) Trefftz – Konvergenz und Fehlerschätzung beim Ritzschen Verfahren (Mathematische Annalen 100), 1928.

c) Referāti no Jahrbuch über Fortschritte der Mathematik.