Sturm'a metodes parasto. otrās kārtas diferenciāl-

vienādojumu robežproblēmās.

Magistra darbs 1942.g.

Irīna Auziņa.
matr.20580.

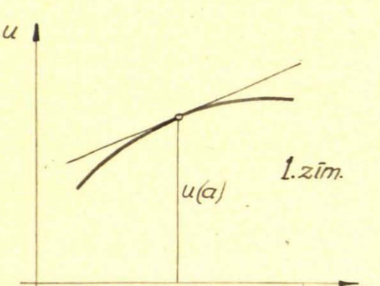
I. ROBEŽPROBLĒMAS DEFINĪCIJA.

Atrisinot parasto otrās kārtas lineāro diferenciālvienādojumu

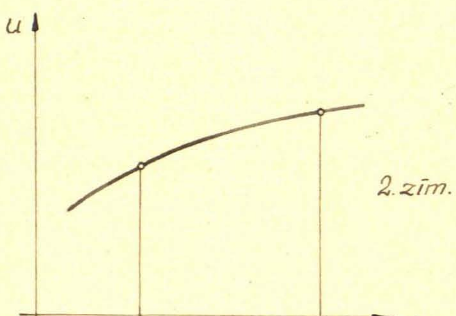
$$(1) \quad p_2 \frac{d^2u}{dx^2} + p_1 \frac{du}{dx} + p_0 u = r,$$

kuŗa koeficienti p_2, p_1, p_0 un r ir reālas, vienvērtīgas un nepārtrauktas x funkcijas intervallā $A \leq x \leq B$ vai arī reālas, vienvērtīgas un nepārtrauktas x un λ funkcijas intervallā $A \leq x \leq B$, un $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ un $p_2 \neq 0$ visos minēto intervallu punktos, atrodam tā vispārīgo atrisinājumu u, kas atkarīgs no divām integrācijas konstantēm. Šo integrācijas konstanšu noteikšanai vajadzīgi divi noteikumi.

1/. Integrācijas konstantes var noteikt ar atrisinājuma u un tā pirmā atvasinājuma pēc x t.i. u' vērtībām kādā intervalla $A \leq x \leq B$ punktā a.
Tā kā šo problēmu pirmais atrisinājis Cauchy, tad to sauc par Cauchy problēmu jeb sākuma vērtību problēmu. Noteikumus, kas dod u un u' vērtības punktā a, par Cauchy noteikumiem jeb sākuma noteikumiem.
Ģeometriskā interpretācijā Cauchy problēma prasa pēc tās integrāllīnijas, kas iet caur dotu punktu ar noteiktu tangentes virzienu šajā punktā. / Skat. 1. zīm. /



1. zīm.



2. zīm.

No parasto diferenciālvienādojumu eksistences teorēmas ir zināms, ka Cauchy problēmai ir tikai viens vienīgs atrisinājums.

2/.Integrācijas konstantes var noteikt ar kaut kādiem divi noteikumiem,kas saista diferenciālvienādojuma atrisinājuma u un tā pirmā atvasinājuma pēc x, t.i.u' vērtības divos kaut kādos diferenciālvienādojuma definīcijas intervalla punktos a un b.
Šo problēmu sauc par robežproblēmu un abus noteikumus par robežnoteikumiem.
Ģeometriskā interpretācijā robežproblēma prasa pēc tām integrāllīnijām,kas iet caur divi dotiem punktiem./2.zīm./

Robežnoteikumi parasti ir lineāras $u(a), u'(a), u(b)$ un $u'(b)$ funkcijas un tos raksta veidā

$$(2)\quad \begin{cases} \alpha_1 u(a)+\alpha_2 u(b)+\alpha_3 u'(a)+\alpha_4 u'(b)=\alpha \\ \beta_1 u(a)+\beta_2 u(b)+\beta_3 u'(a)+\beta_4 u'(b)=\beta, \end{cases}$$

kur $\alpha_i, \beta_i \ (i=1,2,3,4)$ un α un β ir kaut kādas konstantes,vai arī kaut kādas reālas,vienvērtīgas un nepārtrauktas λ funkcijas intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$.

Ja dotais diferenciālvienādojums (1) un robežnoteikumi (2) ir homogēni,t.i. $r=\alpha=\beta=0$, tad robežproblēmu sauc par homogēnu,bet ja kāds no minētiem koeficientiem nav nulle,tad robežproblēmu sauc par nehomogēnu.
Šturma homogēno robežnoteikumu veidi ir šādi:

$$\begin{cases} u(a)=0 \\ u(b)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u'(a)=0 \\ u'(b)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha' u(a)-\alpha u'(a)=0 \\ \beta' u(b)+\beta u'(b)=0. \end{cases}$$

Bez tam pastāv vēl ceturtā veida homogēni robežnoteikumi,kas rakstās veidā

$$\begin{cases} u(a)-u(b)=0 \\ u'(a)-u'(b)=0. \end{cases}$$

Runājot par Cauchy problēmu,mēs redzējām,ka tā vienmēr diferenciālvienādojuma definīcijas intervallā ir viennozīmīgi atrisināma.Par robežproblēmām to turpretim nevar teikt, mēs redzēsim,ka robežproblēmas vienmēr nav viennozīmīgi atrisināmas.

Apskatīsim dažus robežproblēmu piemērus.

1. Atrast diferenciālvienādojuma

$$(3)\quad u''+u=0$$

atrisinājumu, kas apmierina robežnoteikumus

$$(4)\begin{cases} u(a)=0 \\ u(b)=0. \end{cases}$$

Diferenciālvienādojuma (3) vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Integrācijas konstantes C_1 un C_2 noteiksim ar robežnoteikumu palīdzību. Dabūjam sistēmu

$$(5)\begin{cases} C_1 \sin a + C_2 \cos a = 0 \\ C_1 \sin b + C_2 \cos b = 0, \end{cases}$$

kas attiecībā pret nezināmiem C_1 un C_2 ir homogēna algebriska vienādojumu sistēma. No algebras mēs zinām, ka, lai šāda sistēma būtu atrisināma, tad tās sistēmas determinantei jābūt nullei. Sistēmas (5) sistēmas determinante ir

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix} = \sin(a-b).$$

un $\sin(a-b)$ ir nulle vienīgi tad, ja $a-b=n\pi$ (n vesels skaitlis). Pieņemot, ka $a=b$ un $b=\pi$, no sistēmas (5) atrodam, ka $C_2=0$ un robežproblēmas atrisinājums tā tad ir

$$u = C_1 \sin x$$

Mainot C_1, dabūjam bezgala daudz robežproblēmas atrisinājumu, bet visi šie atrisinājumi ir lineāri atkarīgi, jo tie viens no otra atšķiras tikai ar konstantu faktoru.

2. Atrast diferenciālvienādojuma

$$(6)\; u'' - u = 0$$

atrisinājumu, kas apmierina robežnoteikumus (4).
Diferenciālvienādojuma (6) vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Lai šis atrisinājums apmierinātu robežnoteikumus (4), tad C_1 un C_2 jābūt sistēmas

$$(7)\begin{cases} C_1 e^{a} + C_2 e^{-a} = 0 \\ C_1 e^{b} + C_2 e^{-b} = 0 \end{cases}$$

atrisinājumiem. Šīs homogēnās algebriskās vienādojumu sistēmas sistēmas determinante ir

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{a} & e^{-a} \\ e^{b} & e^{-b} \end{vmatrix} = e^{a-b} - e^{-(a-b)} \neq 0, \quad \text{ja } a \neq b.$$

Tā tad $C_1 = C_2 = 0$ un diferenciālvienādojuma (6) ar robežnoteikumiem (4) vienīgais atrisinājums ir $u \equiv 0$. Bet ja robežproblēmas vienīgais atrisinājums ir $u \equiv 0$, tad saka, ka tā nemaz nav atrisināma.

3. Atrast diferenciālvienādojuma

$$(6)\; u'' - u = 0$$

atrisinājumu, kas apmierina robežnoteikumus

$$(8)\begin{cases} u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta, \end{cases}$$

kur α un β ir konstantes, kas abas reizē nav nulles, t.i. $|\alpha| + |\beta| > 0$.

Diferenciālvienādojuma (6) vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}.$$

Konstanšu C_1 un C_2 noteikšanai no robežnoteikumiem (8), dabūjam vienādojumu sistēmu

$$(9)\begin{cases} C_1 e^{a} + C_2 e^{-a} = \alpha \\ C_1 e^{b} + C_2 e^{-b} = \beta, \end{cases}$$

kuŗas sistēmas determinante $\Delta = e^{a-b} - e^{-(a-b)} \neq 0$. Sistēmai (9) tā tad ir tikai viens vienīgs noteikts atrisinājums

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & e^{-a} \\ \beta & e^{-b} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\alpha e^{-b} - \beta e^{-a}}{\Delta},$$

$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{a} & \alpha \\ e^{b} & \beta \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-\alpha e^{b} + \beta e^{a}}{\Delta},$$

un tādēļ arī robežproblēmai ir pilnīgi noteikts atrisinājums

$$u = \frac{\alpha\, \mathrm{sh}(x-b) - \beta\, \mathrm{sh}(x-a)}{\mathrm{sh}(a-b)}.$$

Apskatītos piemēros mēs redzējām, ka robežproblēmai var būt viens pilnīgi noteikts atrisinājums, tā var būt neatrisināma un tai var būt bezgala daudz atrisinājumu.

Ja robežproblēmas koeficienti nav konstantes, bet ir parametra λ funkcijas, tad meklē tās λ vērtības, kuŗām robežproblēma atrisināma. Piemēram:

4. Atrisināt robežproblēmu

$$(10)\quad u'' + \lambda u = 0$$

$$(10')\quad \begin{cases} u'(0) = 0 \\ u'(\pi) = 0 \end{cases}$$

Atkarībā no tā, vai $\lambda \gtreqless 0$, jāapskata trīs gadījumi.

a/. $\lambda < 0$.

Tad diferenciālvienādojuma (10) vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$$

un tā atvasinājums pēc x

$$u' = C_1\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\,x} - C_2\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

No robežnoteikumiem $(10')$ konstanšu C_1 un C_2 noteikšanai dabūjam vienādojumu sistēmu

$$(11)\quad \begin{cases} C_1\sqrt{-\lambda} - C_2\sqrt{-\lambda} = 0 \\ C_1\sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} - C_2\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} = 0. \end{cases}$$

Šīs sistēmas ~~sistēmas~~ determinante ir

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{-\lambda} & -\sqrt{-\lambda} \\ \sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} & -\sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} \end{vmatrix} = \lambda\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi}\right)$$

un, lai sistēma būtu atrisināma, tad tai jābūt nullei, bet $\Delta \neq 0$, jo $\lambda < 0$ un $e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} \neq 0$. /Ja pieņem, ka $e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} = 0$, tad $e^{2\sqrt{-\lambda}\,\pi} = 1$ un logaritmējot, mēs dabūjam, ka $2\sqrt{-\lambda}\,\pi = 0$, bet tas nav iespējams, jo neviens no reizinātājiem nav nulle./

Tā tad homogēnās algebriskās vienādojumu sistēmas (11) vienīgais atrisinājums ir $C_1 = C_2 = 0$, un robežproblēmas atrisinājums ir

$$u \equiv 0.$$

b/. $\lambda = 0$.

Šajā gadījumā diferenciālvienādojuma (10) vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 x + C_2$$

un tā pirmais atvasinājums pēc x

$$u' = C_1 .$$

Ievērojot robežnoteikumus (10'), atrodam, ka $C_1 = 0$, tā tad robežproblēmas atrisinājums ir $u = C_2$, kur C_2 ir brīvi izvēlēta konstante.

c/. $\lambda > 0$.

Diferenciālvienādojuma (10) vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 \sin \sqrt{\lambda}\, x + C_2 \cos \sqrt{\lambda}\, x$$

un tā pirmais atvasinājums pēc x

$$u' = C_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\, x - C_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, x.$$

No robežnoteikumiem (10') integrācijas konstanšu C_1 un C_2 noteikšanai, dabūjam vienādojumu sistēmu

$$(12) \begin{cases} C_1 \sqrt{\lambda} = 0 \\ C_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\, \pi - C_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, \pi = 0, \end{cases}$$

kuŗas sistēmas determinante ir

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}\, \pi & -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}\, \pi \end{vmatrix} = -\lambda \sin \sqrt{\lambda}\, \pi.$$

Lai vienādojumu sistēmai (12) būtu netriviāli atrisinājumi, tad sistēmas determinantei jābūt vienlīdzīgai ar nulli, t.i.

$$-\lambda \sin \sqrt{\lambda}\, \pi = 0.$$

Tā kā $\lambda \neq 0$, tad $\sin \sqrt{\lambda}\, \pi = 0$, kas dod $\sqrt{\lambda}\, \pi = n\pi \ (n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$ un

$$\lambda = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

tas ir $\lambda = 1^2, 2^2, 3^2, \dots$.

Redzam, ka robežproblēmai ir atrisinājums, ja par λ izvēlamies nupat atrastās nozīmes. Robežproblēmas atrisinājums ir

$$u = C \cos \sqrt{\lambda}\, x,$$

kur C kaut kāda konstante un $\lambda = 1^2, 2^2, 3^2, \ldots$.
Katrai λ vērtībai atbilst viens vienīgs lineāri neatkārīgs robežproblēmas atrisinājums.

5. Atrisināt robežproblēmu

$$(10)\quad u'' + \lambda u = 0$$

$$(10')\quad \begin{cases} u(0) - u(\pi) = 0 \\ u'(0) - u'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Šeit tāpat kā iepriekšējā piemērā jāapskata trīs gadījumi.

a/. $\lambda < 0$.

Diferenciālvienādojuma (10) vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$$

un tā pirmais atvasinājums pēc x

$$u' = C_1 \sqrt{-\lambda}\, e^{\sqrt{-\lambda}\, x} - C_2 \sqrt{-\lambda}\, e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}.$$

Robežnoteikumi $(10')$ dod vienādojumu sistēmu

$$(13)\quad \begin{cases} C_1 (1 - e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi}) + C_2 (1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi}) = 0 \\ C_1 \sqrt{-\lambda}(1 - e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi}) - C_2 \sqrt{-\lambda}(1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi}) = 0, \end{cases}$$

kuras sistēmas determinante ir

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} & 1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} \\ 1 - e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} & -(1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi}) \end{vmatrix} = -2(1 - e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi})(1 - e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi}) \neq 0,$$

jo neviens no reizinātājiem nav nulle.
Tādēļ sistēma (13) nav atrisināma, un arī robežproblēmai šajā gadījumā nav atrisinājuma.

b/. $\lambda = 0$.

Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 x + C_2$$

un tā pirmais atvasinājums pēc x

$$u' = C_1 .$$

Robežnoteikumi $(10'')$ dod $C_1 = 0$, tā tad robežproblēmas vienīgais atrisinājums ir $u = C_2$, kur C_2 kaut kāda konstante, kas nav nulle.

c/. $\lambda > 0$.

Diferenciālvienādojuma (10) vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\,x$$

un tā pirmais atvasinājums pēc x

$$u' = C_1\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,x - C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Konstanšu C_1 un C_2 noteikšanai no robežnoteikumiem $(10'')$ dabūjam vienādojumu sistēmu

$$(14)\quad \begin{cases} C_1 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi + C_2(\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - 1) = 0 \\ C_1\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - 1) - C_2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0, \end{cases}$$

kuŗas sistēmas determinante ir

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}\,\pi & \cos\sqrt{\lambda}\,\pi - 1 \\ \sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - 1) & -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,\pi \end{vmatrix} = 2\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - 1).$$

Lai apskatāmai robežproblēmai būtu netriviāli atrisinājumi, tad $\cos\sqrt{\lambda}\,\pi - 1 = 0$, kas dod $\sqrt{\lambda}\,\pi = 2n\pi$ $(n = \pm1, \pm2, \pm3, \dots)$ vai

$$\lambda = (2n)^2, \quad \lambda = 2^2, 4^2, 6^2, \dots$$

Tā tad visus robežproblēmas atrisinājumus dabūjam, ja ņemam

$$u = C_1 \sin\sqrt{\lambda}\,x + C_2 \cos\sqrt{\lambda}\,x,$$

kur C_1 un C_2 patvaļīgi izvēlētas konstantes un λ var pieņemt iepriekš atrastās nozīmes.

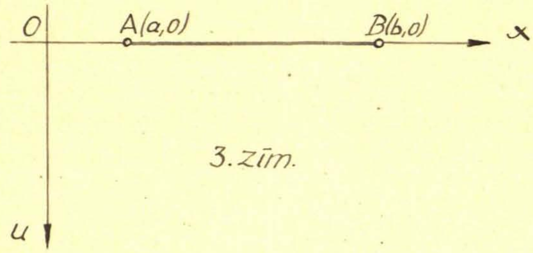
Tās parametra λ nozīmes, kuŗām atbilst robežproblēmas netriviālie atrisinājumi, sauc par īpatnējām vērtībām. Vienādojumu, kuŗa saknes ir īpatnējās vērtības, sauc par īpatnējo vērtību vienādojumu. Īpatnējām vērtībām atbilstošos robežproblēmas lineāri neatkarīgos atrisinājumus sauc par robežproblēmas īpatnējām funkcijām. Tā 4. piemērā, ja $\lambda > 0$ īpat-

nējās vērtības ir $1^2, 2^2, 3^2, \dots$, īpatnējo vērtību vienādojums $\sin\sqrt{\lambda}\, x = 0$ un īpatnējās funkcijas $C\sin x,\ C\sin 2x,\ C\sin 3x, \dots$.
Ja katrai īpatnējai vērtībai atbilst tikai viens lineāri neatkarīgs robežproblēmas atrisinājums,tad īpatnējo vērtību sauc par vienkāršu,ja divi lineāri neatkarīgi atrisinājumi, tad par divkāršu u.t.t.Tā 4.uzdevuma īpatnējās vērtības ir vienkāršas,bet 5.uzdevuma īpatnējās vērtības divkāršas.

II. ROBEŽPROBLĒMU SAKARS AR DAŽĀM MATEMATISKĀS FIZIKAS PROBLĒMĀM.

Jau pirms robežproblēmu pastāvīgas pētīšanas matemātiķiem Euler'am, D'Alembert'am, Fourier un citiem, nodarbojoties ar fiziku, nācās sastapties ar robežproblēmām. Piemēram:

1. Atrast homogēna ar viscaur vienādu šķērsgriezumu stieņa, kas piestiprināts punktos $A(a,0)$ un $B(b,0)$,



3. zīm.

ikviena punkta attālumu u līdz x asij, ja uz stieni darbojas kaut kāds ārējs spēks, kas nav atkarīgs no punkta attāluma no x ass, t.i. no u.

Mechanikas likumu dēļ ikvienā punktā stieņa liece ir proporcionāla ārējo spēku vertikālai komponentei. Ja šo vertikālo komponenti apzīmē ar $p(x)$, tad dabū diferenciālvienādojumu

$$(1) \quad u'' = p(x).$$

Tā kā stienis ir piestiprināts punktos A un B, tad punkta attālumam no x ass jāapmierina robežnoteikumi

$$(2) \quad \begin{cases} u(a) = 0 \\ u(b) = 0 \end{cases}.$$

(1) un (2) kopā dod atrisināmo robežproblēmu.

Diferenciālvienādojumu (1) divreiz integrējot, dabūjam tā vispārīgo integrālu

$$u = \int_a^x d\xi \int_a^\xi p(\eta)\,d\eta + C_1(x-a) + C_2,$$

kur C_1 un C_2 ir integrācijas konstantes, kuras nosakāmas ar robežnoteikumiem (2).

Tā tad

$$0 = c_2 \quad \text{un} \quad 0 = \int_a^b d\xi \int_a^\xi p(\eta)\,d\eta + c_1(b-a)$$

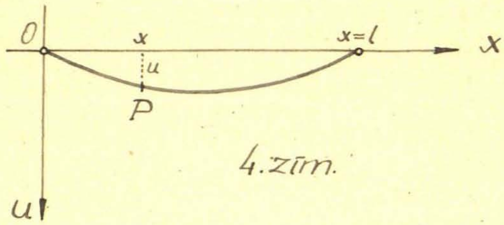
$$c_1 = \frac{\int_a^b d\xi \int_a^\xi p(\eta)\,d\eta}{a-b}.$$

Robežproblēmas atrisinājums ir

$$(3)\quad u = \int_a^x d\xi \int_a^\xi p(\eta)\,d\eta + \frac{x-a}{a-b}\int_a^b d\xi \int_a^\xi p(\eta)\,d\eta.$$

Redzam,ka šī robežproblēma vienmēr ir atrisināma.

2. Apskatīsim homogēnas stīgas brīvas svārstības.Iedomāsimies,ka stīgas gali piestiprināti x asij,pie kam tās viens gals atrodas koordinātu sākuma punktā



4.zīm.

un,ka līdzsvara stāvoklī stīga sakrīt ar x asi.Izvirzīsim stīgu no līdzsvara stāvokļa un tad palaidīsim atkal vaļā,ja vienīgais spēks,kas pēc nostiepšanas darbojas uz stīgu, ir inerces spēks,tad stīgas svārstības sauc par brīvām svārstībām un vienādojums,kas dod stīgas kustību, ir

$$(4)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

kur u ir stīgas elongacija,ko iegūst punkts P ar abscisu x laika momentā t ; a^2 ir dotai stīgai raksturīgs lielums un tā kā mēs stīgu uzskatām par homogēnu,tad konstants lielums. Ja stīgas garumu apzīmējam ar l, tad, tā kā stīga ir piestiprināta,tās gali vienmēr ir miera stāvoklī, un mēs dabūjam robežnoteikumus

$$(5)\quad \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$$

Lai atrisinātu parciālo diferencialvienādojumu (4), tad lietosim Bernoulli partikulāro atrisinājumu metodi.Meklēsim diferenciālvienādojuma (4) atrisinājumu formā

$$(6)\quad u(x,t)=v(x)w(t).$$

Ja (6) ir diferenciālvienādojuma (4) atrisinājums, tad, ievietojot to diferenciālvienādojumā, dabūjam

$$(7)\quad \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{w}\cdot\frac{d^2w}{dt^2}=\frac{1}{v}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}.$$

(7) kreisā puse ir vienīgi t funkcija, bet labā puse vienīgi x funkcija, tādēļ identitāte (7) var pastāvēt tikai tad, ja tās abas puses vienlīdzīgas vienai un tai pašai konstantei, teiksim $-\lambda$. Citiem vārdiem

$$(8)\quad \frac{d^2w}{dt^2}+a^2\lambda w=0.$$

$$(9)\quad \frac{d^2v}{dx^2}+\lambda v=0.$$

Robežnoteikumi (4) dod

$$\begin{cases} v(0)\cdot w(t)=0 \\ v(l)\cdot w(t)=0, \end{cases}$$

kas pareizi katrai t nozīmei. Tā kā $w(t)\neq 0$, jo citādi u vienmēr būtu nulle, tad v noteikšanai pastāv robežnoteikumi

$$(10)\quad \begin{cases} v(0)=0 \\ v(l)=0. \end{cases}$$

Robežproblēmu (9), (10) atrisinot, jāapskata 3 gadījumi:

a/. $\lambda=0$.

Diferenciālvienādojuma (9) vispārīgais integrāls tad ir

$$v=C_1x+C_2$$

Robežnoteikumi (10) dod $C_2=0,\ C_1=0,$ tas ir, robežproblēmas vienīgais atrisinājums ir triviālais atrisinājums $v\equiv 0$. Stīgas problēmai tas dod atrisinājumu $u\equiv 0$, kas izsaka, ka stīga ir miera stāvoklī. Šo gadījumu tādēļ neapskatīsim.

b/. $\lambda<0$

Diferenciālvienādojuma (9) vispārīgais integrāls tad ir

$$v=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Integrācijas konstanšu noteikšanai no robežnoteikumiem (10) dabūjam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda} l} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda} l} = 0, \end{cases}$$

kuras sistēmas determinante ir $\Delta = e^{-\sqrt{\lambda} l} - e^{\sqrt{\lambda} l}$, kas nav nulle, jo $l \neq 0$. Tādēļ vienādojumu sistēmas vienīgais atrisinājums ir $C_1 = 0, C_2 = 0$ un robežproblēmai atkal vienīgais atrisinājums ir triviālais $v \equiv 0$, un arī stīgas problēmas vienīgais atrisinājums ir triviālais $u \equiv 0$.

c/. $\lambda > 0$.

Diferenciālvienādojuma (9) vispārīgais integrāls tad ir

$$v = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x.$$

Integrācijas konstanšu noteikšanai no robežnoteikumiem (10) dabūjam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} C_1 \sin \sqrt{\lambda} \cdot 0 + C_2 \cos \sqrt{\lambda} \cdot 0 = 0 \\ C_1 \sin \sqrt{\lambda} l + C_2 \cos \sqrt{\lambda} l = 0 \end{cases}$$

kuru pārveidojot atrodam, ka $C_2 = 0$, $C_1 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$.

Ja $C_1 = 0$, tad robežproblēmai un arī stīgas problēmai vienīgais atrisinājums ir nulle. Tādēļ pieņemsim, ka $C_1 \neq 0$, bet $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$. Pēdējais ir robežproblēmas (9), (10) īpatnējo vērtību vienādojums, no kura atrodam robežproblēmas īpatnējās vērtības

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Šīm īpatnējām vērtībām atbilstošās īpatnējās funkcijas ir

$$(11) \quad u_n = C \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Ar robežproblēmas (9), (10) īpatnējām vērtībām diferenciālvienādojums (8) top par diferenciālvienādojumu

$$(12) \quad \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} w = 0,$$

un tā vispārīgais integrāls ir formā

$$(13) \quad w_n = A_n \sin \frac{an\pi}{l} t + B_n \cos \frac{an\pi}{l} t \quad (n = 1, 2, 3 \ldots),$$

kur A_n un B_n ir integrācijas konstantes.
Diferenciālvienādojuma (4) partikulāros atrisinājumus dabūjam, sareizinot (11) un (13)

$$(14)\quad u_n = C\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n \sin\frac{an\pi t}{l} + B_n\cos\frac{an\pi t}{l}\right).$$

Tā kā diferenciālvienādojums (4) ir lineārs, tad tā vispārīgais atrisinājums ir partikulāro atrisinājumu summa

$$(15)\quad u = C\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(A_n \sin\frac{an\pi t}{l} + B_n\cos\frac{an\pi t}{l}\right),$$

ja vien rinda konvergē vienmērīgi.
Diferenciālvienādojumam (4) pastāv arī sākuma noteikumi, citiem vārdiem, katrā laika momentā katram stīgas punktam ir sava noteikta elongacija un noteikts ātrums. Tā laika momentam $t=0$ pastāv sākuma noteikumi

$$(16)\quad \begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \left[\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = F(x). \end{cases}$$

Sākuma noteikumus (16) izlietosim, lai noteiktu integrāla (15) integrācijas konstantes A_n un B_n, un tad dabūjam

$$(17)\quad f(x) = C\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$(18)\quad F(x) = C\frac{a\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Pēdējās vienlīdzības rāda, ka dotās funkcijas $f(x)$ un $F(x)$ ir izvirzītas rindā pēc robežproblēmas (9), (10) īpatnējām funkcijām.
Pieņemsim, ka funkcijas $f(x)$ un $F(x)$ apmierina robežnoteikumus (10), tās ar savu pirmo atvasinājumu pēc x ir nepārtrauktas x funkcijas intervallā $0\le x\le l$ un otrie atvasinājumi intervallā $0\le x\le l$ pārtraukti galīga skaita reizes, tad ar to pietiek, lai funkcijas $f(x)$ un $F(x)$ varētu izvirzīt vienmērīgi konverģējošā Fourier rindā pēc robežproblēmas (9), (10) īpatnējām funkcijām. Lai pierādītu, ka funkcijas var izvirzīt Fourier rindā, jāpierāda, ka koeficientus var noteikt ar Fourier paņēmienu.
Pierādīsim, ka

$$(19)\quad \int_0^l \vartheta_n \vartheta_m \, dx = C^2 \int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l} \cdot \sin\frac{m\pi x}{l} \, dx = 0$$

$$(20)\quad \int_0^l \vartheta_n^2 \, dx = C^2 \int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l} \, dx = 1, \text{ ja } C = \sqrt{\frac{2}{l}}$$

$$\int_0^l \sin\frac{n\pi x}{l} \cdot \sin\frac{m\pi x}{l} \, dx = \frac{1}{2}\int_0^l \cos\frac{(n-m)\pi x}{l} \, dx - \frac{1}{2}\int_0^l \cos\frac{(n+m)\pi x}{l} \, dx =$$

$$= \frac{l}{2(n-m)\pi}\left[\sin\frac{(n-m)\pi x}{l}\right]_0^l - \frac{l}{2(n+m)\pi}\left[\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\right]_0^l = 0$$

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{1}{2}\int_0^l dx - \frac{1}{2}\int_0^l \cos\frac{2n\pi x}{l} \, dx = \frac{l}{2} - \frac{l}{4n\pi}\left[\sin\frac{2n\pi x}{l}\right]_0^l = \frac{l}{2}.$$

Redzam, ka integrāls $C^2 \int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l} \, dx = 1$, ja $C = \sqrt{\frac{2}{l}}$.
Uz priekšu ar ϑ_n sapratīsim to nozīmi, kur $C = \sqrt{\frac{2}{l}}$, tas ir,

$$\vartheta_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Mēs atradām, ka

$$(17')\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} B_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \sqrt{\frac{2}{l}} B_1 \sin\frac{\pi x}{l} + \sqrt{\frac{2}{l}} B_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \dots + \sqrt{\frac{2}{l}} B_k \sin\frac{k\pi x}{l} + \dots$$

Lai noteiktu koeficientus B_k, reizināsim rindu $(17')$ ar ϑ_k un reizinājumu integrēsim no 0 līdz l, mainot summēšanas un integrēšanas kārtību, ko drīkstam, jo rinda konverģē vienmērīgi, dabūjam

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \sin\frac{k\pi x}{l} \, dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right] dx =$$

$$= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l B_n \sin\frac{k\pi x}{l} \cdot \sin\frac{n\pi x}{l} \, dx.$$

Ievērojot (19) un (20), atrodam, ka

$$B_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f(x) \sin\frac{k\pi x}{l} \, dx.$$

Tādā pašā veidā atrodam, ka

$$A_k = \frac{\sqrt{2l}}{ak\pi} \int_0^l F(x) \sin\frac{k\pi x}{l} \, dx.$$

Diferenciālvienādojuma (4) vispārīgais atrisinājums, kas apmierina robežnoteikumus (5) un sākuma noteikumus (16), tad ir

$$(21)\quad u = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left[\frac{\sqrt{2l}}{an\pi} \sin\frac{an\pi t}{l} \int_0^l F(x) \sin\frac{n\pi x}{l} \, dx + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\frac{an\pi t}{l} \int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi x}{l} \, dx\right]$$

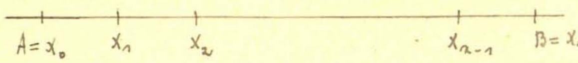
III. ROBEŽPROBLĒMU UN LINEĀRU ALGEBRISKU VIENĀDOJUMU SISTĒMU ANALOĢIJA.

Apskatīsim robežproblēmu sakarību ar algebru. Salīdzināsim lineāru parasto otrās kārtas diferenciālvienādojumu ar lineāru galīgu diferenču vienādojumu sistēmu.

Ņemsim diferenciālvienādojumu

$$(1)\quad p_2 \frac{d^2u}{dx^2} + p_1 \frac{du}{dx} + p_0 u = r,$$

kuŗa koeficienti p_2, p_1, p_0 un r ir reālas, vienvērtīgas un nepārtrauktas x funkcijas intervallā $A \le x \le B$ un $p_2 \neq 0$ minētajā intervallā. Sadalīsim intervallu n vienlīdzīgās daļās un ap-



zīmēsim dalījuma punktus ar $x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}$, /intervalla gala punktus A un B ar x_0 un x_n / attālumu starp diviem dalījuma punktiem ar Δx, t.i. $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ $(i = 0, 1, 2, \dots n-1)$,
nezināmās funkcijas u vērtību intervalla $A \le x \le B$ punktā x_i ar $u(x_i)$.
Ja x_i pieaug par Δx, tad funkcijas u vērtība $u(x_i)$ pieaug par

$$(2)\quad \Delta u(x_i) = u(x_{i+1}) - u(x_i).$$

Funkcijas u un tās argumenta pieaugumu attiecība jeb funkcijas pirmās kārtas diference ir

$$(3)\quad \frac{\Delta u(x_i)}{\Delta x} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x}$$

un otrās kārtas diference

$$(4)\quad \frac{\Delta^2 u(x_i)}{\Delta x^2} = \frac{u(x_{i+2}) - 2u(x_{i+1}) + u(x_i)}{\Delta x^2}.$$

Ja diferenciālvienādojumā (1)

$$\frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{du}{dx},\ u,\ p_2(x),\ p_1(x),\ p_0(x) \text{ un } r(x)$$

vietās attiecīgi liekam

$$\frac{\Delta^2 u(x_i)}{\Delta x^2},\ \frac{\Delta u(x_i)}{\Delta x},\ u(x_i),\ p_2(x_i),\ p_1(x_i),\ p_0(x_i) \text{ un } r(x_i),$$

tad dabūjam

$$(5)\quad p_2(x_i)\frac{\Delta^2 u(x_i)}{\Delta x^2} + p_1(x_i)\frac{\Delta u(x_i)}{\Delta x} + p_0(x_i)u(x_i) = r(x_i) \qquad (i = 0,1,2,\dots n-2),$$

kas ir $n-1$ lineāru galīgu diferenču vienādojumu sistēma. Liekot $\frac{\Delta^2 u(x_i)}{\Delta x^2}$ un $\frac{\Delta u(x_i)}{\Delta x}$ vietās to nozīmes no formulām (3) un (4), dabūjam

$$p_2(x_i)\frac{u(x_{i+2}) - 2u(x_{i+1}) + u(x_i)}{\Delta x^2} + p_1(x_i)\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + p_0(x_i)u(x_i) = r(x_i) \quad (i = 0,1,2,\dots n-2)$$

un pārveidojot

$$p_2(x_i)u(x_{i+2}) + [p_1(x_i)\Delta x - 2p_2(x_i)]u(x_{i+1}) + [p_0(x_i)\Delta x^2 - p_1(x_i)\Delta x +$$
$$+ p_2(x_i)]u(x_i) = r(x_i)\Delta x^2 \quad (i = 0,1,2,\dots n-2).$$

Ja ievedam apzīmējumus

$$p_2(x_i) = P_2(x_i)$$
$$p_1(x_i)\Delta x - 2p_2(x_i) = P_1(x_i)$$
$$p_0(x_i)\Delta x^2 - p_1(x_i)\Delta x + p_2(x_i) = P_0(x_i)$$
$$r(x_i)\Delta x^2 = R(x_i),$$

tad $n-1$ lineāru galīgu diferenču vienādojumu sistēma rakstāma veidā

$$(6)\quad P_2(x_i)u(x_{i+2}) + P_1(x_i)u(x_{i+1}) + P_0(x_i)u(x_i) = R(x_i) \quad (i = 0,1,2,\dots n-2).$$

Sakarība (6) nav nekas cits kā $n-1$ lineāru algebrisku vienādojumu sistēma ar $n+1$ nezināmiem $u(x_0), u(x_1), \dots u(x_{n-1}), u(x_n)$. Vienādojumu sistēmas (6) sistēmas matricas

$$\left\|\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & P_2(x_0) & P_1(x_0) & P_0(x_0) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & P_2(x_1) & P_1(x_1) & P_0(x_1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & P_2(x_2) & P_1(x_2) & P_0(x_2) & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & P_2(x_{n-3}) & P_1(x_{n-3}) & P_0(x_{n-3}) & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P_2(x_{n-2}) & P_1(x_{n-2}) & P_0(x_{n-2}) & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}\right\|$$

un paplašinātās matricas

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & P_2(x_0) & P_1(x_0) & P_0(x_0) & R(x_0) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & P_2(x_1) & P_1(x_1) & P_0(x_1) & 0 & R(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & P_2(x_2) & P_1(x_2) & P_0(x_2) & 0 & 0 & R(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & P_2(x_{n-3}) & P_1(x_{n-3}) & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R(x_{n-3}) \\ P_2(x_{n-2}) & P_1(x_{n-2}) & P_0(x_{n-2}) & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R(x_{n-2}) \end{Vmatrix}$$

rangi ir $n-1$, jo abu matricu $n-1$ rindīgā determinante

$$7) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & P_2(x_0) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & P_2(x_1) & P_1(x_1) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & P_2(x_2) & P_1(x_2) & P_0(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & P_2(x_{n-3}) & P_1(x_{n-3}) & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ P_2(x_{n-2}) & P_1(x_{n-2}) & P_0(x_{n-2}) & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= P_2(x_{n-2})\, P_2(x_{n-3}) \ldots P_2(x_2)\, P_2(x_1)\, P_2(x_0) =$$

$$= p_2(x_{n-2})\, p_2(x_{n-3}) \ldots p_2(x_2)\, p_2(x_1)\, p_2(x_0) \neq 0,$$

jo $p_2 \neq 0$ nevienā intervalla $A \leq x \leq B$ punktā.
No lineāru algebrisku vienādojumu teorijas zināms, ka, lai atrisinātu vienādojumu sistēmu (6), tad divu nezināmo nozīmes var izvēlēties patvaļīgi, bet pārējo $n-1$ nezināmo nozīmes tad ir aprēķināmas atkarībā no izvēlētajām. Ja izvēlamies $u(x_0)$ un $u(x_1)$ nozīmes, tad atlikušos $n-1$ nezināmos varam atrast no noteiktas un saderīgas $n-1$ lineāru nehomogēnu algebrisku vienādojumu sistēmas ar $n-1$ nezināmiem, jo mēs atradām, ka deter-

minante /7/, kas ir ~~sistēmas~~ sistēmas determinante, nav nulle. Redzam, ka sistēmas /6/ vispārīgais atrisinājums ir lineāri atkarīgs no divām konstantēm. Arī diferenciālvienādojuma /1/ vispārīgais atrisinājums ir lineāri atkarīgs no divām konstantēm. Ja intervalla $A \le x \le B$ dalījumu skaits $n \to \infty$, tad diferenču vienādojumu sistēmas /5/ robeža ir lineārais diferenciālvienādojums /1/.

Tāpat kā lineāram otrās kārtas diferenciālvienādojumam /1/ sastādījām atbilstošo galīgu diferenču vienādojumu sistēmu /5/, varam lineāram n-tās kārtas diferenciālvienādojumam

$$(8) \quad p_n \frac{d^n u}{dx^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + p_0 u = r,$$

sastādīt atbilstošo galīgo diferenču vienādojumu sistēmu, kuras vispārīgais atrisinājums ir lineāri atkarīgs no n kaut kādām konstantēm. Arī n-tās kārtas lineāra diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir lineāri atkarīgs no n patvaļīgām konstantēm. Ja intervalla daļu skaits $n \to \infty$, tad n-tās kārtas lineāru galīgu diferenču vienādojumu sistēmas, kas satur funkcijas u pirmās n diferences $\frac{\Delta^n u}{\Delta x^n}, \frac{\Delta^{n-1} u}{\Delta x^{n-1}}, \ldots \frac{\Delta u}{\Delta x}$, robeža ir n-tās kārtas lineārais diferenciālvienādojums /8/. Lai varētu salīdzināt robežproblēmas ar lineārām algebriskām vienādojumu sistēmām, tad atcerēsimies dažas algebras teorēmas.

Apskatīsim m homogēnu lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu ar m nezināmiem

$$(9) \quad \begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1m}\xi_m = 0 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2m}\xi_m = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 + \cdots + a_{mm}\xi_m = 0 \end{cases}$$

un m nehomogēnu lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu ar m nezināmiem

$$(10) \quad \begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1m}\xi_m = b_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2m}\xi_m = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\xi_1 + a_{m2}\xi_2 + \cdots + a_{mm}\xi_m = b_m . \end{cases}$$

Homogēnu algebrisku vienādojumu sistēmu (9) sauc par saderīgu, ja tai ir atrisinājumi, kas nav identiski nulle. Ja šādu atrisinājumu ir k un tie ir lineāri neatkarīgi, tas ir, nav iespējams atrast tādas konstantes, kas reizē nebūtu nulles, ar kurām reizinot atrisinājumus un saskaitot, dabūtu nulli, tad saka, ka sistēmas saderības indeks ir k, vai vienkārši sistēmas indeks ir k. Ja homogēnas sistēmas vienīgais atrisinājums ir $(0, 0, \dots 0)$, tad saka, ka tai nav atrisinājuma, un homogēnu sistēmu sauc par nesaderīgu, vai arī saka, ka tās saderības indeks ir nulle.

1. T e o r ē m a.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums, lai lineārai homogēnai algebrisku vienādojumu sistēmai (9) būtu k lineāri neatkarīgi atrisinājumi ir, ka tās sistēmas matricas

$$(11)\qquad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{matrix} \right\|$$

rangs ir $m-k$.

Sistēmas (9) vispārīgais atrisinājums ir k lineāri neatkarīgo atrisinājumu lineāra kombinācija, citiem vārdiem, sistēmas vispārīgais atrisinājums ir lineāri atkarīgs no k patvaļīgi izvēlētām konstantēm.

S e c i n ā j u m s.

Ja matricas (11) rangs ir m, tad vienādojumu sistēmas (9) vienīgais atrisinājums ir triviālais, citiem vārdiem, sistēmai nav atrisinājuma.

2. T e o r ē m a.

Ja homogēnai lineārai algebrisko vienādojumu sistēmai (9) ir k lineāri neatkarīgi atrisinājumi, tad nepieciešamais un pietiekošais noteikums, lai nehomogēnai lineārai algebrisko vienādojumu sistēmai (10) būtu atrisinājums, ir, lai matricas

$$(12)\qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & b_m \end{Vmatrix}$$

rangs būtu $m - k$.

Nehomogēnās sistēmas (10) vispārīgais atrisinājums tad lineāri atkarīgs no k patvaļīgi izvēlētām konstantēm.

3. T e o r ē m a.
Ja homogēnai lineārai algebrisko vienādojumu sistēmai (9) nav atrisinājuma, tad nehomogēnai lineārai algebrisko vienādojumu sistēmai (10) tikai viens noteikts atrisinājums.

Apskatot lineāru diferenciālvienādojumu un tam atbilstošo galīgu diferenču vienādojumu sistēmu, redzējām, ka homogēnu lineāru algebrisku vienādojumu sistēmas, resp. nehomogēnu lineāru algebrisku vienādojumu sistēmas, kuŗu vispārīgie atrisinājumi satur n konstantes, atbilst homogēnam lineāram n-tās kārtas diferenciālvienādojumam, resp. nehomogēnam n-tās kārtas diferenciālvienādojumam.

Pieņemsim, ka sistēmu (9) un (10) atrisinājumi satur mazāk konstanšu kā attiecīgo diferenciālvienādojumu atrisinājumi. Šo lieko konstanšu noteikšanai diferenciālvienādojuma atrisinājumā varam pievienot dažus noteikumus. Ja par šiem noteikumiem izvēlamies robežnoteikumus, tad dabūjam robežproblēmas.

Apskatīsim homogēnu robežproblēmu

$$(13)\quad \begin{cases} \mathcal{L}(u) = 0 \\ U_i(u) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \dots n) \end{cases}$$

un nehomogēnu robežproblēmu

$$(14)\begin{cases} \mathcal{L}(u) = r \\ U_i(u) = \gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3, \dots n) \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(u) = p_n \frac{d^n u}{dx^n} + p_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + p_0 u,$$

kur p_i $(i = 0, 1, 2, \dots n)$ ir reālas, vienvērtīgas un nepārtrauktas x funkcijas intervallā $A \leq x \leq B$ un $p_n \neq 0$ minētajā intervallā.

$$U(u) = \alpha u(a) + \alpha' u'(a) + \dots + \alpha^{(n-1)} u^{(n-1)}(a) + \beta u(b) + \beta' u'(b) + \dots + \beta^{(n-1)} u^{(n-1)}(b),$$

kur $\alpha, \alpha', \dots \alpha^{(n-1)}, \beta, \beta', \dots \beta^{(n-1)}$ konstantes, $u(a), u'(a), \dots u^{(n-1)}(a)$, $u(b), u'(b), \dots u^{(n-1)}(b)$ diferenciālvienādojuma atrisinājuma u un tā pirmo $n-1$ atvasinājumu vērtības intervalla $A \leq x \leq B$ punktos a un b.

Robežproblēmu (13), tāpat kā homogēnu lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu (9) sauc par saderīgu, ja tai ir atrisinājumi, kas nav identiski nulle; par nesaderīgu, ja tai ir tikai triviālais atrisinājums. Saka, ka robežproblēmas (13) saderības indeks ir $\varkappa$, ja tai ir $\varkappa$ lineāri neatkarīgi atrisinājumi. Teorēmas par robežproblēmu (13) un (14) atrisinājumu eksistenci atgādina jau minētās lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu atrisinājumu eksistences teorēmas.

1'. T e o r ē m a.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums, lai homogēnās robežproblēmas (13) saderības indeks būtu $\varkappa$, ir, ka matricas

$$(15) \qquad \left\| \begin{matrix} U_1(u_1) & U_1(u_2) & \dots & U_1(u_n) \\ U_2(u_1) & U_2(u_2) & \dots & U_2(u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(u_1) & U_n(u_2) & \dots & U_n(u_n) \end{matrix} \right\|$$

rangs ir $n - \varkappa$.

Šeit $u_1, u_2, \dots u_n$ apzīmē robežproblēmas diferenciālvienādojuma fundamentālo atrisinājumu sistēmu. Vispirms pierādīsim, ka teorēmā minētais noteikums pietiekošs, t.i. ja matricas (15) rangs ir $n-x$, tad homogēnai robežproblēmai (13) ir x lineāri neatkarīgi atrisinājumi.
Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$(16)\quad u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n,$$

kur $C_1, C_2, \dots C_n$ patvaļīgas konstantes. To noteikšanai robežproblēmas robežnoteikumi dod homogēnu lineāru algebrisku vienādojumu sistēmu

$$(17)\quad \begin{cases} C_1 U_1(u_1) + C_2 U_1(u_2) + \dots + C_n U_1(u_n) = 0 \\ C_1 U_2(u_1) + C_2 U_2(u_2) + \dots + C_n U_2(u_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 U_n(u_1) + C_2 U_n(u_2) + \dots + C_n U_n(u_n) = 0 \end{cases}$$

Šīs sistēmas matricas (15) rangs ir $n-x$ un tāpēc tai ir x lineāri neatkarīgi atrisinājumi

$$\begin{matrix} C_1^{[1]}, & C_2^{[1]}, & \dots & C_n^{[1]} \\ C_1^{[2]}, & C_2^{[2]}, & \dots & C_n^{[2]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1^{[x]}, & C_2^{[x]}, & \dots & C_n^{[x]}. \end{matrix}$$

Robežproblēmas (13) atrisinājumi tad ir

$$(18)\quad C_1^{[i]} u_1 + C_2^{[i]} u_2 + \dots + C_n^{[i]} u_n \qquad (i = 1, 2, 3, \dots x).$$

Sakarībā (18) uzrakstītie x atrisinājumi ir lineāri neatkarīgi, jo tie ir lielumu $u_1, u_2, \dots u_n$ homogēni polinomi, kuŗu koeficientu sistēmas $C_1^{[i]}, C_2^{[i]}, \dots C_n^{[i]}$ $(i = 1, 2, 3, \dots x)$ ir lineāri neatkarīgas.
Tā kā homogēnai lineārai algebrisko vienādojumu sistēmai (17) ir x lineāri neatkarīgi atrisinājumi, tad robežproblēmai (13) nevar būt mazāk par x lineāri neatkarīgiem atrisinājumiem.

Pierādīsim, ka tai nav arī vairāk par $\varkappa$ lineāri neatkarīgiem atrisinājumiem.

Pieņemsim, ka robežproblēmai (13) ir $\varkappa+1$ lineāri neatkarīgi atrisinājumi, pie kam $(\varkappa+1)$. atrisinājums uzrakstāms veidā

$$(19)\quad \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n .$$

Konstantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$ tad ir algebriskās vienādojumu sistēmas (17) atrisinājums, un pie tam lineāri atkarīgs no atrisinājumiem $c_1^{[i]}, c_2^{[i]}, \dots c_n^{[i]}$ $(i=1,2,3,\dots \varkappa)$; jo ir dots, ka sistēmai (17) ir tikai $\varkappa$ lineāri neatkarīgi atrisinājumi.

Algebrā ir teorēma: ja homogēnu polinomu koeficientu sistēmas ir lineāri atkarīgas, tad arī paši polinomi ir lineāri atkarīgi. /Pierādījums Л. М. Шапиро. Высшая алгебра 269 lp./ Tādēļ robežproblēmas (13) atrisinājums (19) ir lineāri atkarīgs no tās atrisinājumiem (18), tā tad robežproblēmai (13) ir tikai $\varkappa$ lineāri neatkarīgu atrisinājumu.

Pierādīsim, ka teorēmā minētais noteikums ir arī nepieciešams, tas ir, ja robežproblēmai (13) ir $\varkappa$ lineāri neatkarīgi atrisinājumi, tad matricas (15) rangs ir $n-\varkappa$.

Pieņemot, ka matricas (15) rangs nav $n-\varkappa$, bet teiksim $n-\varkappa+1$, vai arī $n-\varkappa-1$, teorēmas pietiekošā nosacījuma dēļ dabūjam, ka tad robežproblēmai (13) ir vai nu $n-\varkappa+1$, vai arī $n-\varkappa-1$ lineāri neatkarīgi atrisinājumi. Kas ir pretrunā ar doto. Tā tad matricas (15) rangs ir $n-\varkappa$.

S e c i n ā j u m s.

Ja matricas (15) rangs ir n, tad robežproblēmai (13) nav atrisinājuma.

2'. T e o r ē m a.

Ja homogēnās robežproblēmas (13) saderības indeks ir $\varkappa$, tad nepieciešamais un pietiekošais noteikums, lai nehomogēnai robežproblēmai (14) būtu atrisinājums, ir tas, lai matricas

$$(20)\quad \left\|\begin{matrix} U_1(u_1) & U_1(u_2) \dots & U_1(u_n) & U_1(u_0)-f_1 \\ U_2(u_1) & U_2(u_2) \dots & U_2(u_n) & U_2(u_0)-f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_n(u_1) & U_n(u_2) \dots & U_n(u_n) & U_n(u_0)-f_n \end{matrix}\right\|$$

rangs būtu $n-\varkappa$.

$u_1, u_2, \dots u_n$ ir robežproblēmas (13) diferenciālvienādojuma fundamentālā atrisinājumu sistēma un u_0 robežproblēmas (14) diferenciālvienādojuma speciālais atrisinājums.
Vispirms pierādīsim,ka minētais teorēmas noteikums ir pietiekošs,tas ir,ja matricu (15) un (20) rangi ir vienlīdzīgi,tad robežproblēmai (14) ir atrisinājums.
Robežproblēmas (14) diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$(21)\quad C_1 u_1 + C_2 u_2 + \dots + C_n u_n + u_0 .$$

Konstantu noteikšanai no robežproblēmas (14) robežnoteikumiem,dabūjam lineāru algebrisko vienādojumu sistēmu

$$(22)\quad \begin{cases} C_1 U_1(u_1) + C_2 U_1(u_2) + \dots + C_n U_1(u_n) + U_1(u_0) = f_1 \\ C_1 U_2(u_1) + C_2 U_2(u_2) + \dots + C_n U_2(u_n) + U_2(u_0) = f_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 U_n(u_1) + C_2 U_n(u_2) + \dots + C_n U_n(u_n) + U_n(u_0) = f_n , \end{cases}$$

kas vienmēr ir atrisinājama,jo dots,ka tās sistēmas matricas (15) un paplašinātās matricas (20) rangi ir vienlīdzīgi.
Noteikums ir arī nepieciešams,tas ir,ja robežproblēmai (14) ir atrisinājums,tad matricu (15) un (20) rangi ir vienlīdzīgi.Ja pieņemam,ka matricu (15) un (20) rangi nav vienlīdzīgi,tad algebrisko vienādojumu sistēma (22) nav atrisināma, un tādēļ arī robežproblēmai (14) nav atrisinājuma.Pēdējais ir pretrunā ar doto,tā tad matricu (15) un (20) rangi ir vienlīdzīgi.

3. T e o r ē m a.
Ja homogēnas robežproblēmas (13) saderības indeks ir nulle,tad nehomogēnai robežproblēmai (14) vienmēr ir atrisinājums.

Ja robežproblēmas (13) saderības indeks ir nulle, tad no 1'. teorēmas dabūjam, ka matricas (15) rangs ir n. Arī matricas (20) rangs ir n un 2'. teorēma saka, ka nehomogēnai robežproblēmai (14) vienmēr ir atrisinājums, ja matricu (15) un (20) rangi ir vienlīdzīgi.

Mēs redzam, ka robežproblēmai un lineārai algebrisku vienādojumu sistēmai ir liela analogija.

IV. AR SEVI SAISTĪTAIS DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMS UN ROBEŽNOTEIKUMI.

Par homogēna lineāra diferenciālvienādojuma

$$(1)\quad p_n(x)\frac{d^n u}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + p_1(x)\frac{du}{dx} + p_0 u = 0$$

saistīto diferenciālvienādojumu sauc tās pašas kārtas lineāru-homogēnu diferenciālvienādojumu

$$(2)\quad \frac{d^n(p_n v)}{dx^n} - \frac{d^{n-1}(p_{n-1} v)}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-2}(p_{n-2} v)}{dx^{n-2}} - \dots - (-1)^n\frac{d(p_1 v)}{dx} + (-1)^n p_0 v = 0.$$

Otrās kārtas diferenciālvienādojuma

$$(3)\quad p_2 u'' + p_1 u' + p_0 u = 0$$

saistītais diferenciālvienādojums ir

$$(p_2 v)'' - (p_1 v)' + p_0 v = 0$$

jeb

$$p_2 v'' + (2p_2' - p_1)v' + (p_2'' - p_1' + p_0)v = 0.$$

Lai diferenciālvienādojums (3) būtu ar sevi saistīts, tas ir, lai tas sakristu ar savu saistīto diferenciālvienādojumu, tad jāpastāv vienlīdzībām

$$p_1 = 2p_2' - p_1, \quad p_0 = p_2'' - p_1' + p_0$$

jeb

$$p_2' = p_1, \quad p_2'' = p_1'.$$

Ja p_2 un p_0 vietā rakstām p un q, tad otrās kārtas ar sevi saistītais diferenciālvienādojums ir ar formu

$$pu'' + p'u' + qu = 0$$

vai arī

$$(4)\quad (pu')' + qu = 0.$$

Ja vienādojuma (4) kreiso pusi apzīmējam ar $L(u)$ un ar

$$L(v) = (pv')' + qv,$$

tad pastāv identitāte

$$(5)\quad v\mathcal{L}(u) - u\mathcal{L}(v) = p(vu'' - uv'') + p'(vu' - uv') = \\ = \frac{d}{dx}[p(vu' - uv')].$$

Identitāti (5) sauc par Lagrange identitāti. To integrējot robežās no a līdz b, kur a un b ir intervalla $A \leq x \leq B$ divi punkti, dabūjam Green'a formulu

$$(6)\quad \int_a^b [v\mathcal{L}(u) - u\mathcal{L}(v)]dx = [p(vu' - uv')]_a^b .$$

Pārveidosim diferenciālvienādojumu (3) ar sevi saistītā veidā. Tam nolūkam reizināsim diferenciālvienādojumu (3) ar tādu X funkciju z, lai pastāvētu vienlīdzība

$$z p_1 = (z p_2)' .$$

Uzskatot z kā nezināmo, varam to atrast no lineārā homogēnā diferenciālvienādojuma

$$(7)\quad p_2 z' - (p_1 - p_2')z = 0$$

$$z = C e^{\int \frac{p_1 - p_2'}{p_2} dx}$$

$$z = C \cdot \frac{1}{p_2} e^{\int \frac{p_1}{p_2} dx} .$$

C ir integrācijas konstante un tā var pieņemt bezgala daudz nozīmes, bet visas tās dos tādas z nozīmes, ka vienmēr pastāvēs vienlīdzība $zp_1 = (zp_2)'$. Tādēļ varam pieņemt, ka $C = 1$, un tad funkcija $z(x)$, ar kuru reizinot diferenciālvienādojumu (3), tas pāriet ar sevi saistītā veidā, ir $\frac{1}{p_2} e^{\int \frac{p_1}{p_2} dx}$.

Tā mēs redzam, ka katru homogēnu lineāru otrās kārtas diferenciālvienādojumu (3) var pārveidot ar sevi saistītā veidā un tādēļ uz priekšu katru šādu diferenciālvienādojumu pēc Sturm'a parauga rakstīsim veidā

$$(8)\quad \frac{d}{dx}\left(K \frac{du}{dx}\right) - Gu = 0,$$

kur K un G ir nepārtrauktas x funkcijas intervallā $A \leq x \leq B$ un $K \neq 0$ minētajā intervallā.

Ja diferenciālvienādojumu rakstām formā (8), tad tā ir vispārīgāka kā forma (3), jo funkcija $\mathcal{K}$ var būt bez atvasinājuma. Lai parastā veida (3) diferenciālvienādojumam atrisinājums būtu nepārtraukta x funkcija intervallā $A \leq x \leq B$, tad tā koeficientiem ir jābūt nepārtrauktām x funkcijām intervallā $A \leq x \leq B$. Turpretim, lai ar sevi saistītajam diferenciālvienādojumam atrisinājums būtu nepārtraukta x funkcija, pietiek ar koeficientu $\mathcal{K}$ un G nepārtrauktību, bet koeficienta $\mathcal{K}$ atvasinājums $\mathcal{K}'$ var neeksistēt. Ja koeficienta $\mathcal{K}$ atvasinājums $\mathcal{K}'$ neeksistē un gribam, lai varētu pāriet no ar sevi saistītā veida diferenciālvienādojuma (8) uz parastā veida diferenciālvienādojumu (3), tad diferenciālvienādojumā (8) ievedam jaunu neatkarīgo mainīgo

$$\xi = \int_a^x \frac{dx}{\mathcal{K}(x)}$$

un dabūjam

$$\frac{1}{\mathcal{K}(x)} \frac{d^2u}{d\xi^2} - G u = 0$$

$$(9) \quad \frac{d^2u}{d\xi^2} - G_1(\xi) u = 0 .$$

Diferenciālvienādojumā (9) $G_1(\xi)$ ir nepārtraukta ξ funkcija, un tādēļ arī diferenciālvienādojuma (9) atrisinājums u ir nepārtraukta ξ funkcija tā maiņas intervallā. Bet ξ ir nepārtraukta x funkcija intervallā $A \leq x \leq B$ un tādēļ arī u ir nepārtraukta x funkcija minētajā intervallā.

Ja diferenciālvienādojuma (8) kreiso pusi apzīmējam ar $\mathcal{L}(u)$ un ar

$$\mathcal{L}(v) = \frac{d}{dx}(\mathcal{K} v') - G v,$$

tad Lagrange identitāte pārrakstās veidā

$$(10) \quad v\mathcal{L}(u) - u\mathcal{L}(v) = \frac{d}{dx}\left[\mathcal{K}(u'v - u v')\right]$$

un Green'a formula

$$(11) \quad \int_a^b \left[v\mathcal{L}(u) - u\mathcal{L}(v)\right] dx = \left[\mathcal{K}(u'v - u v')\right]_a^b .$$

Tā kā Sturm's savos pētījumos par homogēno lineāro parasto otrās kārtas diferenciālvienādojumu robežproblēmām apskata galvenām kārtām tās robežproblēmas, kuŗām diferenciālvienādojums un robežnoteikumi ar sevi saistīti,tad atradīsim homogēnu robežproblēmu,kuras diferenciālvienādojums un robežnoteikumi saistīti ar robežproblēmas

$$(12)\quad \begin{cases} L(u) = \frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0 \\ U_1(u) = \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u(b) + \alpha_3 u'(a) + \alpha_4 u'(b) = 0 \\ U_2(u) = \beta_1 u(a) + \beta_2 u(b) + \beta_3 u'(a) + \beta_4 u'(b) = 0 \end{cases}$$

diferenciālvienādojumu un robežnoteikumiem.
Robežnoteikumus sauc par saistītiem robežnoteikumiem,ja to kreisās puses saistītas savā starpā ar Green'a formulu un labās puses vienlīdzīgas nullei.
Ja pieņemam,ka meklējamās robežproblēmas diferenciālvienādojums ar sevi saistīts,tad robežnoteikumu atrašanai varam izlietot Green'a formulu
Tā kā $U_1(u)$ un $U_2(u)$ ir lielumu $u(a), u(b), u'(a), u'(b)$ lineāri neatkarīgas formas,tad matricas

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{Vmatrix}$$

rangs ir 2,t.i.vismaz viena tās divrindīgā determinante nav nulle.Apzīmēsim šo no nulles atšķirīgo determinanti ar d_{ij}, tad

$$d_{ij} = \alpha_i \beta_j - \alpha_j \beta_i \neq 0 \qquad (i,j = 1,2,3,4;\ i \neq j).$$

Pieņemsim,ka mums ir vēl divas lineāras formas

$$U_3(u) = u'(a)$$
$$U_4(u) = u'(b),$$

kas kopā ar $U_1(u)$ un $U_2(u)$ ir lineāri neatkarīgas.Tad mēs varam sastādīt vienādojumu sistēmu

$$(13)\quad \begin{cases} \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u(b) + \alpha_3 u'(a) + \alpha_4 u'(b) = U_1 \\ \beta_1 u(a) + \beta_2 u(b) + \beta_3 u'(a) + \beta_4 u'(b) = U_2 \\ u'(a) = U_3 \\ u'(b) = U_4 \end{cases}$$

no kuŗas var atrast $u(a)$, $u(b)$, $u'(a)$, $u'(b)$ atkarībā no U_1, U_2, U_3, U_4.

$$u(a) = \frac{1}{d_{12}} \begin{vmatrix} U_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ U_2 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ U_3 & 0 & 1 & 0 \\ U_4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_{12}} \left\{ U_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - U_2 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + U_3 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - U_4 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \frac{1}{d_{12}} \left[U_1 \beta_2 - U_2 \alpha_2 + U_3 d_{23} + U_4 d_{24} \right],$$

$$u(b) = \frac{1}{d_{12}} \begin{vmatrix} \alpha_1 & U_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & U_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & U_3 & 1 & 0 \\ 0 & U_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{d_{12}} \left\{ -U_1 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + U_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - U_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + U_4 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_3 & \beta_4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right\} = \frac{1}{d_{12}} \left[-U_1 \beta_1 + U_2 \alpha_1 - U_3 d_{13} - U_4 d_{14} \right].$$

Green'a formulu (11), ieliekot robežas, varam rakstīt veidā

$$\int_a^b [v L(u) - u L(v)] dx = K(a) v'(a) u(a) - K(b) v'(b) u(b) - K(a) v(a) u'(a) + K(b) v(b) u'(b),$$

un, ja $u(a), u(b), u'(a), u'(b)$ vietās ieliekam nupat atrastās nozīmes, tad dabūjam

$$\int_a^b [v\mathcal{L}(u) - u\mathcal{L}(v)]dx = K(a)v'(a)\frac{1}{d_{12}}[U_1\beta_2 - U_2\alpha_2 + U_3 d_{23} + U_4 d_{24}] -$$
$$- K(b)v'(b)\cdot\frac{1}{d_{12}}[-U_1\beta_1 + U_2\alpha_1 - U_3 d_{13} - U_4 d_{14}] -$$
$$- K(a)v(a)U_3 + K(b)v(b)U_4 =$$
$$= \frac{1}{d_{12}}[K(a)v'(a)\beta_2 + K(b)v'(b)\beta_1]U_1 +$$
$$+ \frac{1}{d_{12}}[-K(a)v'(a)\alpha_2 - K(b)v'(b)\alpha_1]U_2 +$$
$$+ \frac{1}{d_{12}}[K(a)v'(a)d_{23} + K(b)v'(b)d_{13} - K(a)v(a)d_{12}]U_3 +$$
$$+ \frac{1}{d_{12}}[K(a)v'(a)d_{24} + K(b)v'(b)d_{14} + K(b)v(b)d_{12}]U_4 .$$

Apzīmējot koeficientus pie U_1, U_2, U_3, U_4 attiecīgi ar $\vartheta_4, \vartheta_3, \vartheta_2, \vartheta_1$, tad

$$\vartheta_1 = \frac{1}{d_{12}}[K(a)v'(a)d_{24} + K(b)v'(b)d_{14} + K(b)v(b)d_{12}]$$
$$\vartheta_2 = \frac{1}{d_{12}}[K(a)v'(a)d_{23} + K(b)v'(b)d_{13} - K(a)v(a)d_{12}],$$

un robežproblēma,kuŗas diferenciālvienādojums ar sevi saistīts un robežnoteikumi saistīti ar robežproblēmas (12) robežnoteikumiem, ir

$$(14)\quad \begin{cases} \mathcal{L}(v) = \frac{d}{dx}(Kv') - Gv = 0 \\ \vartheta_1 = 0 \\ \vartheta_2 = 0 . \end{cases}$$

Lai robežproblēmas (12) robežnoteikumi un robežproblēmas (14) robežnoteikumi būtu arī ar sevi saistīti,tad ir nepieciešami un pietiekoši,ka formas ϑ_1 un ϑ_2 ir formu U_1 un U_2 lineāras kombinācijas.Meklēsim tādas konstantes C_1 un C_2, ar kuŗām reizinot formu U_1 un U_2 koeficientus un tos attiecīgi saskaitot,dabūjam formas ϑ_1 koeficientus.Tad dabūjam vienādojumu sistēmu

$$(15)\quad \begin{cases} C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 = 0 \\ C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 = K(b) \\ C_1\alpha_3 + C_2\beta_3 = \frac{K(a)d_{24}}{d_{12}} \\ C_1\alpha_4 + C_2\beta_4 = \frac{K(b)d_{14}}{d_{12}} . \end{cases}$$

Tā kā $\alpha_{12} \neq 0$, tad no sistēmas (15) pirmiem diviem vienādojumiem varam atrast,ka

$$C_1 = \frac{-\beta_1 K(b)}{\alpha_{12}}, \quad C_2 = \frac{\alpha_1 K(b)}{\alpha_{12}}.$$

Ieliekot šīs C_1 un C_2 nozīmes sistēmas (15) trešajā vienādojumā, dabūjam,ka

$$-\beta_1 \alpha_3 K(b) + \alpha_1 \beta_3 K(b) = K(a) \alpha_{24}$$

$$(16) \quad K(b) \alpha_{13} = K(a) \alpha_{24}.$$

Ja ņemtu formu V_2 kā formu U_1 un U_2 lineāru kombināciju, tad arī dabūtu,ka jābūt izpildītam noteikumam (16). Tā tad, lai robežproblēmas (12) robežnoteikumi un robežproblēmas (14) robežnoteikumi būtu ar sevi saistīti,ir nepieciešami un pietiekoši,lai pastāvētu sakars (16), ja $\alpha_{12} \neq 0$.

P i e z ī m e.

Viss šinī un iepriekšējā nodaļā apskatītais der arī tām robežproblēmām,kuŗām diferenciālvienādojuma un robežnoteikumu koeficienti ir netikai reālas,vienvērtīgas un nepārtrauktas x, bet arī λ funkcijas intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$,jo ņemot λ kādu noteiktu vērtību diferenciālvienādojuma koeficienti kļūst par x funkcijām,bet robežnoteikumu koeficienti par konstantēm.

V. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMA ATRISINĀJUMU SAKŅU VISPĀRĪGĀS ĪPAŠĪBAS. STURM'A SALĪDZINĀŠANAS TEORĒMAS.

Lai varētu pierādīt nākamā nodaļā apskatītās oscilāciju teorēmas, pierādīsim dažas teorēmas, kas dod diferenciālvienādojuma atrisinājumu sakņu vispārīgās īpašības. Apskatīsim ar sevi saistīto diferenciālvienādojumu

$$(1) \quad \frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0,$$

kur K un G ir reālas, vienvērtīgas un nepārtrauktas x funkcijas intervallā $A \leq x \leq B$ un $K > 0$.

1. T e o r ē m a.
Ikvienam diferenciālvienādojuma (1) atrisinājumam intervallā $A \leq x \leq B$ ir galīgs sakņu skaits, izņemot to atrisinājumu, kas šai intervallā identiski nulle.

Pieņemsim, ka kādam diferenciālvienādojuma (1) atrisinājumam u ir bezgala daudz sakņu intervallā $A \leq x \leq B$. Šīs bezgala daudzās saknes izveido ierobežotu skaitļu virkni ar noteiktu robežpunktu. Ja diferenciālvienādojuma atrisinājuma u saknes apzīmējam ar $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$, bet to robežpunktu ar c, tad, tā kā

$$u(x_1) = u(x_2) = \dots = u(x_n) = \dots = 0$$

un atrisinājums ir nepārtraukta x funkcija, tad $u(c) = 0$ un

$$\frac{u(x_n) - u(c)}{x_n - c} = 0.$$

Ja $n \to \infty$, tad $\frac{u(x_n) - u(c)}{x_n - c} \to u'(c)$, un tāpēc $u'(c) = 0$.
Bet diferenciālvienādojuma (1) vienīgais atrisinājums, kas apmierina noteikumus $u(c) = 0$ un $u'(c) = 0$, ir $u \equiv 0$.
Ar to tad arī teorēma pierādīta.

2. T e o r ē m a.

Ja u_1 un u_2 ir diferenciālvienādojuma (1) divi lineāri neatkarīgi atrisinājumi un x_1 un x_2 divas viena otrai sekojošas atrisinājuma u_1 saknes, tad starp x_1 un x_2 ir taisni viena atrisinājuma u_2 sakne.

Lai teorēmu pierādītu, pieņemsim, ka starp atrisinājuma u_1 saknēm x_1 un x_2 nav nevienas atrisinājuma u_2 saknes. Tad funkcija $\varphi(x) = \frac{u_1}{u_2}$ ir intervallā $x_1 \leq x \leq x_2$ nepārtraukta x funkcija un vienlīdzīga ar nulli tikai minētā intervalla gala punktos. Rollā teorēmas dēļ tādā gadījumā starp punktiem x_1 un x_2 var atrast vismaz vienu punktu ξ tādu, ka $\varphi'(\xi) = 0$. Bet

$$\varphi'(x) = \frac{u_2 u_1' - u_1 u_2'}{u_2^2},$$

kas nav nulle nevienā minētā intervalla punktā, jo daļas skaitītājs $u_2 u_1' - u_1 u_2' \neq 0$, kā diferenciālvienādojuma (1) divu lineāri neatkarīgu atrisinājumu Vronska determinants. Tas norāda, ka starp atrisinājuma u_1 saknēm x_1 un x_2 ir vismaz viena u_2 sakne. Atrisinājumam u_2 starp atrisinājuma u_1 saknēm x_1 un x_2 vairāk par vienu sakni nevar būt, jo, kā tikko redzējām, tad starp katru u_2 sakni jābūt vismaz vienai u_1 saknei, bet tas tad ir pretrunā ar teorēmas noteikumu, ka x_1 un x_2 ir divas sekojošas u_1 saknes.

3. T e o r ē m a.

Ja u_1 un u_2 ir diferenciālvienādojuma (1) divi lineāri neatkarīgi atrisinājumi, pie kam

$$u_2(A) \neq 0, \quad \frac{u_1'(A)}{u_1(A)} > \frac{u_2'(A)}{u_2(A)},$$

un atrisinājumam u_1 intervallā $A < x \leq B$ ir n saknes $x_1, x_2, \dots x_n$ tādas, ka $A < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq B$, tad atrisinājumam u_2 ir n saknes intervallā $A < x < x_n$.

2. teorēmas dēļ starp katru u_1 sakni $x_\varkappa$ un $x_{\varkappa+1}$ $(\varkappa = 1, 2, \dots n)$ ir tikai viena u_2 sakne, tā tad lai teorēmu pierādītu, tad jāpierāda, ka starp intervalla gala punktu A un u_1 pirmo sakni x_1 atrisinājumam u_2 arī ir tikai viena sakne.

Ja $u_1(A)=0$, tad A un x_1 ir atrisinājuma u_1 divas sekojošas saknes, un tad mēs zinām, ka starp tām ir tikai viena atrisinājuma u_2 sakne.
Ja $u_1(A)\neq 0$, tad atrisinājumam u_2 starp A un x_1 var būt tikai viena sakne, jo teorēmā dots, ka x_1 ir atrisinājuma u_1 pirmā sakne intervallā $A<x\leq B$.
Pieņemsim, ka atrisinajumam u_2 starp A un x_1 nav nevienas saknes, tad $u_2(A)$ un $u_2(x_1)$ ir ar vienādām zīmēm. Sastādīsim diferenciālvienādojuma (1) atrisinājumu

$$\bar{u}(x)=\frac{u_1(x)}{u_1(A)}-\frac{u_2(x)}{u_2(A)},$$

kas lineāri atkarīgs no u_1.
Sastādītā atrisinajuma vērtība punktā A ir $\bar{u}(A)=0$, bet $\bar{u}'(A)>0$, jo teorēmā bija dots, ka $\frac{u_1'(A)}{u_1(A)}>\frac{u_2'(A)}{u_2(A)}$. Ja izvēlamies kādu pietiekoši mazu konstanti $\varepsilon>0$, tad atrisinājuma nepārtrauktības dēļ $\bar{u}(A+\varepsilon)>0$.
Sastādītā atrisinājuma vērtība punktā x_1 ir $\bar{u}(x_1)=-\frac{u_2(x_1)}{u_2(A)}<0$, jo $u_2(x_1)$ un $u_2(A)$ zīmes vienādas. Tā kā $\bar{u}(A+\varepsilon)>0$ un $\bar{u}(x_1)<0$, tad starp A un x_1 ir vismaz viena atrisinājuma $\bar{u}(x)$ sakne ξ. 2. teorēmas dēļ tagad starp A un ξ ir vismaz viena atrisinājuma u_1 sakne, bet tas ir pretrunā ar teorēmas noteikumu, ka u_1 pirmā sakne ir x_1. Ar to tad arī teorēma pierādīta.

4. T e o r ē m a.
Ja intervallā $A\leq x\leq B$ diferenciālvienādojumu

$$(2)\quad \frac{d}{dx}(K_1u')-G_1u=0$$
$$(3)\quad \frac{d}{dx}(K_2u')-G_2u=0$$

koeficienti K_1, K_2, G_1 un G_2 ir reālas, vienvērtīgas un nepārtrauktas x funkcijas, un

$$K_1\geq K_2,\quad G_1\geq G_2,$$

un $K_1=K_2$ un $G_1=G_2$ reizē nepastāv intervalla $A\leq x\leq B$ kādas daļas visos punktos, tad minētajā intervallā starp diferenciālvienādojuma (2) kāda atrisinājuma u_1 divi sekojošām saknēm ir vismaz viena diferenciālvienādojuma

(3) atrisinājuma u_2 sakne.

Teorēmas pierādīšanai sastādīsim M.Picone identitāti. Diferencējot izteksmes $K_1 u_1' u_2$ un $K_2 u_1 u_2'$, dabūjam

$$(4)\quad \frac{d}{dx}(K_1 u_1' u_2) = u_2 \frac{d}{dx}(K_1 u_1') + K_1 u_1' u_2'$$
$$(5)\quad \frac{d}{dx}(K_2 u_1 u_2') = u_1 \frac{d}{dx}(K_2 u_2') + K_2 u_1' u_2'.$$

Tā kā u_1 ir diferenciālvienādojuma (2) atrisinājums, tad pastāv identitāte

$$\frac{d}{dx}(K_1 u_1') - G_1 u_1 = 0.$$

Reizinot pēdējo identitāti ar u_2, dabūjam

$$(6)\quad u_2 \frac{d}{dx}(K_1 u_1') = G_1 u_1 u_2.$$

Tādā pat veidā atrodam, ka

$$(7)\quad u_1 \frac{d}{dx}(K_2 u_2') = G_2 u_1 u_2.$$

Liekot izteiksmē (4) $u_2 \frac{d}{dx}(K_1 u_1')$ vietā tās vērtību no (6), un izteiksmē (5) $u_1 \frac{d}{dx}(K_2 u_2')$ vietā tās nozīmi no (7), dabūjam

$$(8)\quad \frac{d}{dx}(K_1 u_1' u_2) = G_1 u_1 u_2 + K_1 u_1' u_2'$$
$$(9)\quad \frac{d}{dx}(K_2 u_1 u_2') = G_2 u_1 u_2 + K_2 u_1' u_2'.$$

No (8) atskaitot (9), dabūjam identitāti

$$(10)\quad \frac{d}{dx}(K_1 u_1' u_2 - K_2 u_1 u_2') = (G_1 - G_2) u_1 u_2 + (K_1 - K_2) u_1' u_2'.$$

Diferencējot izteiksmi

$$\frac{u_1}{u_2}(K_1 u_1' u_2 - K_2 u_1 u_2'),$$

dabūjam

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u_1}{u_2}(K_1 u_1' u_2 - K_2 u_1 u_2')\right] = \frac{u_1}{u_2}\frac{d}{dx}(K_1 u_1' u_2 - K_2 u_1 u_2') +$$
$$+ (K_1 u_1' u_2 - K_2 u_1 u_2')\frac{d}{dx}\left(\frac{u_1}{u_2}\right).$$

Ievērojot (10), pēdējo izteiksmi varam pārveidot

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u_1}{u_2}\left(\mathcal{K}_1 u_1' u_2 - \mathcal{K}_2 u_1 u_2'\right)\right] = \frac{u_1}{u_2}\left[(G_1 - G_2) u_1 u_2 + (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2) u_1' u_2'\right] +$$

$$+ \left(\mathcal{K}_1 u_1' u_2 - \mathcal{K}_2 u_1 u_2'\right) \frac{u_2 u_1' - u_1 u_2'}{u_2^2} =$$

$$= (G_1 - G_2) u_1^2 + \frac{(\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2) u_1 u_2 u_1' u_2'}{u_2^2} + \frac{\mathcal{K}_1 u_1'^2 u_2^2 - \mathcal{K}_1 u_1 u_2 u_1' u_2'}{u_2^2} + \frac{\mathcal{K}_2 u_1^2 u_2'^2 - \mathcal{K}_2 u_1 u_2 u_1' u_2'}{u_2^2} =$$

$$= (G_1 - G_2) u_1^2 + \frac{\mathcal{K}_1 u_1'^2 u_2^2 + \mathcal{K}_2 u_1^2 u_2'^2 - 2\mathcal{K}_2 u_1 u_2 u_1' u_2'}{u_2^2}.$$

Ja pēdējās identitātes labai pusei pieskaita un atņem izteiksmi $\frac{\mathcal{K}_2 u_1'^2 u_2^2}{u_2^2}$, tad dabū M.Picone identitāti

$$(11)\quad \frac{d}{dx}\left[\frac{u_1}{u_2}\left(\mathcal{K}_1 u_1' u_2 - \mathcal{K}_2 u_1 u_2'\right)\right] = (G_1 - G_2) u_1^2 + (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2) u_1'^2 +$$

$$+ \mathcal{K}_2 \left(\frac{u_2 u_1' - u_1 u_2'}{u_2}\right)^2,$$

kas derīga visām x nozīmēm, kuŗām $u_2 \neq 0$.

Lai teorēmu pierādītu, pieņemsim, ka starp atrisinājuma u_1 divi sekojošām x_1 un x_2 saknēm nav nevienas atrisinājuma u_2 saknes, arī x_1 un x_2 nav atrisinājuma u_2 saknes, tad M.Picone identitāte (11) ir derīga visām intervalla $x_1 \leq x \leq x_2$ x vērtībām. Integrējot šo identitāti robežās no x_1 līdz x_2, dabūjam

$$(12)\quad \left[\frac{u_1}{u_2}\left(\mathcal{K}_1 u_1' u_2 - \mathcal{K}_2 u_1 u_2'\right)\right]_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (G_1 - G_2) u_1^2 dx + \int_{x_1}^{x_2} (\mathcal{K}_1 - \mathcal{K}_2) u_1'^2 dx +$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{K}_2 \left(\frac{u_2 u_1' - u_1 u_2'}{u_2}\right)^2 dx.$$

Identitātes (12) kreisā puse ir nulle, bet labā puse teorēmas noteikumu dēļ pozitīva, tā tad esam dabūjuši pretrunu, kas rāda, ka starp x_1 un x_2 ir vismaz viena u_2 sakne.

Ja pieņemam, ka x_1 un x_2 ir atrisinājuma u_2 saknes, tad identitātes (12) kreisā puse dod nenoteiktību $\frac{0}{0}$; to novēršot ar L'Hospital'a likuma palīdzību, atrodam, ka

$$\lim_{x \to x_1}\left[\frac{u_1}{u_2}\left(\mathcal{K}_1 u_1' u_2 - \mathcal{K}_2 u_1 u_2'\right)\right] = \lim_{x \to x_1} \frac{u_1}{u_2} \cdot \lim_{x \to x_1} \left(\mathcal{K}_1 u_1' u_2 - \mathcal{K}_2 u_1 u_2'\right) = \frac{u_1'(x_1)}{u_2'(x_1)} \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to x_2}\left[\frac{u_1}{u_2}\left(\mathcal{K}_1 u_1' u_2 - \mathcal{K}_2 u_1 u_2'\right)\right] = \lim_{x \to x_2} \frac{u_1}{u_2} \lim_{x \to x_2} \left(\mathcal{K}_1 u_1' u_2 - \mathcal{K}_2 u_1 u_2'\right) = \frac{u_1'(x_2)}{u_2'(x_2)} \cdot 0 = 0.$$

Atkal identitātes (12) kreisās puses robeža ir nulle, bet labās puses kāds pozitīvs lielums, kas norāda, ka atrisinājumam u_2 starp x_1 un x_2 ir vismaz viena sakne.

Pieņemot,ka intervalla $A\le x\le B$ kādas daļas punktos reizē $K_1=K_2$ un $G_1=G_2$, tad diferenciālvienādojumi (2) un (3) šai daļā ir identiski, un u_1 un u_2 ir divi diferenciālvienādojuma lineāri atkarīgi vai arī lineāri neatkarīgi atrisinājumi. Ja atrisinājumi u_1 un u_2 ir lineāri atkarīgi, tad ikviena atrisinājuma u_1 sakne ir arī atrisinājuma u_2 sakne un otrādi. Ja intervalla $A\le x\le B$ daļa, kuŗā $K_1=K_2$ un $G_1=G_2$ ir $x_1\le x\le x_2$, tad atrisinājumam u_1 vienīgās saknes šajā intervallā ir x_1 un x_2, bet starp x_1 un x_2 nevienas saknes vairāk nav.

Ja u_1 un u_2 ir lineāri neatkarīgi, tad mums ir 2. teorēma.

Ja diferenciālvienādojuma atrisinājumam ir augošas saknes, tad saka, ka atrisinājums oscillē. Atkarībā no tā, kā sakņu skaits pieaug, atrisinājums oscillē lēnāk vai ātrāk. Vienādojumu, kuŗa atrisinājums oscillē, sauc par oscillējošu.

Nupat apskatītā 4. teorēma mums rāda, ka intervallā $A\le x\le B$ ikviens diferenciālvienadojuma (1) atrisinājums ātrāk oscillē, ja vienu vai abus diferencālvienādojuma (1) koeficientus K un G samazina.

Ar 4. teorēmas palīdzību mēs varam noskaidrot, kad diferenciālvienādojuma (1) kaut kuŗam atrisinājumam

1° augstākais viena sakne intervalla $A\le x\le B$ daļā $a\le x\le b$,

2° vismaz viena sakne intervallā $a<x<b$,

3° vismaz k saknes intervallā $a<x<b$.

1° Ja diferenciālvienādojuma (1) koeficientu K un G minimus apzīmējam ar $\min K$ un $\min G$, tad varam sastādīt diferenciālvienādojumu

$$(13)\quad \frac{d}{dx}\left[(\min K)u'\right]-(\min G)u=0.$$

Apskatīsim kopā diferenciālvienādojumu (1) un (13).

a/. Ja $\min G>0$, tad diferenciālvienādojumam (13) ir atrisinājums $e^{\sqrt{\frac{\min G}{\min K}}x}$. Pieņemsim, ka diferencālvienādojuma (1) atrisinājumam intervallā $a\le x\le b$ ir vismaz divas saknes, tad pēc 4. teorēmas starp šīm divām diferenciālvienādojuma (1) saknēm ir vismaz viena diferenciālvienādojuma (13) sakne. Bet diferenciālvienādojuma (13) atrisinājumam $e^{\sqrt{\frac{\min G}{\min K}}x}$ nav sakņu intervallā $a\le x\le b$, ja a un b galīgi skaitļi. Tā tad diferenciālvienādojuma

(1) atrisinājumam intervallā $a \le x \le b$ ir augstākais viena sakne.
b/. Ja $\min G = 0$, tad diferenciālvienādojums (13) pāriet par diferenciālvienādojumu

$$(14) \quad \frac{d}{dx}\left[(\min K)u'\right] = 0,$$

kuŗa vispārīgais atrisinājums ir $u = C_1 x + C_2$.
Konstantes C_1 un C_2 var atrast tādas, ka atrisinājumam intervallā $a \le x \le b$ nav sakņu un tāpēc tāpat kā iepriekšējā gadījumā varam teikt, ka diferenciālvienādojuma (1) kaut kuŗam atrisinājumam intervallā $a \le x \le b$ ir augstākais viena sakne.
c/. Ja $\min G < 0$, tad diferenciālvienādojuma (13) vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 \sin\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}\, x + C_2 \cos\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}\, x.$$

Apzīmējot $\frac{C_2}{C_1} = \operatorname{tg} \varphi$, dabūjam

$$\begin{aligned} u &= C_1\left(\sin\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}\, x + \operatorname{tg}\varphi \cos\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}\, x\right) = \\ &= \frac{C_1}{\cos\varphi}\left(\sin\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}\, x \cos\varphi + \sin\varphi \cos\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}\, x\right) = \\ &= \frac{C_1}{\cos\varphi} \sin\left(\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}\, x + \varphi\right). \end{aligned}$$

Vēl apzīmējot $\frac{C_1}{\cos\varphi} = C$, dabūjam, ka

$$u = C \sin\left(\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}\, x + \varphi\right).$$

Šim atrisinājumam vispārīgi ir saknes intervallā $a \le x \le b$, bet, ja izvēlamies intervallu $a \le x \le b$ mazāku par $\frac{\pi}{\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}}$, tad atrisinājumam saknes šajā intervallā nav. No intervalla izvēles dabūjam noteikumu

$$b - a < \frac{\pi}{\sqrt{-\frac{\min G}{\min K}}}$$

$$-\frac{\min G}{\min K} < \frac{\pi^2}{(b-a)^2}.$$

2° Ja diferenciālvienādojuma (1) koeficientu K un G maksimus apzīmējam ar $\max K$ un $\max G$, tad varam sastādīt diferenciālvienādojumu

$$(15) \quad \frac{d}{dx}\left[(\max K)u'\right] - (\max G)u = 0$$

Ja $\max G < 0$, tad diferenciālvienādojuma (15) atrisinājumu var uzrakstīt tāpat kā iepriekšējo reizi veidā

$$u = C \sin\left(\sqrt{-\frac{\max G}{\max K}}\, x + \varphi\right).$$

Šim atrisinājumam ir vismaz divas saknes intervallā $a \le x \le b$, ja

$$-\frac{\max G}{\max K} \geq \frac{\pi^2}{(b-a)^2},$$

un tādēļ 4.teorēmas dēļ diferenciālvienādojuma (1) atrisinājumam ir vismaz viena sakne intervallā $a < x < b$.

3° Iepriekšējo noteikumu paplašinot, tas ir, ņemot

$$-\frac{\max G}{\max K} \geq \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2},$$

dabūjam, ka diferenciālvienādojuma (1) ir vismaz k saknes intervallā $a < x < b$.

5. T e o r ē m a.

Ja diferenciālās sistēmas

$$(16)\ \begin{cases} \frac{d}{dx}(K_1 u') - G_1 u = 0 \\ u(a) = \alpha_1 \\ u'(a) = \alpha_1' \end{cases} \qquad (17)\ \begin{cases} \frac{d}{dx}(K_2 u') - G_2 u = 0 \\ u(a) = \alpha_2 \\ u'(a) = \alpha_2' \end{cases}$$

izpilda noteikumus

1° abu sistēmu diferenciālvienādojumu koeficienti apmierina 4.teorēmā minētos noteikumus,

2° a ir intervalla $A \le x \le B$ punkts un visi α ir konstantes, pie kam $|\alpha_1| + |\alpha_1'| > 0$, $|\alpha_2| + |\alpha_2'| > 0$,

3° $\frac{K_1(a)\alpha_1'}{\alpha_1} \geq \frac{K_2(a)\alpha_2'}{\alpha_2}$ un $\alpha_2 \neq 0$, ja $\alpha_1 \neq 0$.

Ja $\alpha_1 = 0$, tad šis noteikums atkrīt.

4° diferenciālās sistēmas (16) atrisinājumam u_1 intervallā $a < x \le b$ ir n saknes $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ tādas, ka $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n \le b$, tad diferenciālās sistēmas (17) atrisinājumam u_2 ir tikpat daudz sakņu starp a un x_n.

Ja atrisinājuma u_2 x-to sakni apzīmējam ar x_2', tad $x_2' < x_2$. 4.teorēmas dēļ starp atrisinājuma u_1 katrām divām sekojošām saknēm x_i un x_{i+1} $(i = 1, 2, 3, \dots n-1)$ ir vismaz viena u_2 sakne. Ja pierādīsim, ka starp a un x_1 ir atrisinājuma u_2 viena sakne, tad teorēma būs pierādīta.

a/. Pieņemsim, ka starp a un x_1 nav neviena atrisinājuma u_2 sakne, bet arī x_1 nav u_2 sakne, tad M. Picone identitāti (11) varam integrēt robežās no a līdz x_1 un dabūjam

$$\left[\frac{u_1}{u_2}\left(K_1 u_1' u_2 - K_2 u_1 u_2'\right)\right]_a^{x_1} = \int_a^{x_1}(G_1 - G_2)u_1^2 dx + \int_a^{x_1}(K_1 - K_2)u_1'^2 dx + \int_a^{x_1} K_2\left(\frac{u_2 u_1' - u_1 u_2'}{u_2}\right)^2 dx.$$

Šīs identitātes kreisā puse teorēmas noteikumu dēļ ir negatīva vai nulle, bet labā puse vienmēr pozitīva, tā tad starp a un x_1 ir vismaz viena atrisinājuma u_2 sakne.

b/. Pieņemsim, ka starp a un x_1 nav neviena atrisinājuma u_2 sakne, bet x_1 ir u_2 sakne. Integrējot M. Picone identitāti robežās no a līdz x_1, dabūjam tādu pašu izteiksmi kā iepriekšējā gadījumā, tikai tagad, pārejot uz robežām, kreisā pusē dabūjam nenoteiktību $\frac{0}{0}$, kuŗu novēršot ar L'Hospital'a likumu, atrodam identitāti

$$-\alpha_1^2\left(\frac{K_1(a)\alpha_1'}{\alpha_1} - \frac{K_2(a)\alpha_2'}{\alpha_2}\right) = \int_a^{x_1}(G_1 - G_2)u_1^2 dx + \int_a^{x_1}(K_1 - K_2)u_1'^2 dx + \int_a^{x_1} K_2\left(\frac{u_2 u_1' - u_1 u_2'}{u_2}\right)^2 dx,$$

kuŗas kreisā puse teorēmas noteikumu dēļ ir negatīva vai nulle, bet labā puse vienmēr pozitīva. Atkal esam nonākuši pie pretrunas, kas rāda, ka starp a un x_1 ir vismaz viena u_2 sakne.

4. teorēmā mums bija gadījums, ka pastāvēja vienlīdzības $K_1 = K_2$ un $G_1 = G_2$ intervalla $A \leq x \leq B$ daļā $a \leq x \leq x_1$. Ja to apskatām arī šajā teorēmā, tad abu sistēmu diferenciālvienādojumi šajā intervallā sakrīt un noteikums

$$\frac{K_1(a)\alpha_1'}{\alpha_1} \geq \frac{K_2(a)\alpha_2'}{\alpha_2}$$

kļūst par noteikumu

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} \geq \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}.$$

Ja $\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}$, tad u_1 un u_2 apskatītā intervallā ir lineāri atkarīgi un abu atrisinājumu saknes sakrīt. Šajā gadījumā atrisinājumam u_2 nevar būt sakņu starp a un x_1.

Ja $\frac{\alpha_1'}{\alpha_1} > \frac{\alpha_2'}{\alpha_2}$, tad u_1 un u_2 ir diferenciālvienādojuma divi

lineāri neatkarīgi atrisinājumi un 3.teorēmas dēļ starp a un x_1 atrisinājumam u_2 ir taisni viena sakne.
Ja a ir u_1 sakne, t.i. $u_1(a)=\alpha_1=0$, bet $u_2(a)=\alpha_2\neq 0$, tad intervallā $a\leq x\leq x_1$ atrisinājumi u_1 un u_2 ir lineāri neatkarīgi un 2.teorēmas dēļ starp a un x_1 ir tikai viena u_2 sakne.
Ja $u_1(a)=u_2(a)=0$, tad u_1 un u_2 ir lineāri atkarīgi atrisinājumi un tiem ir vienas un tās pašas saknes un tādēļ starp a un x_1 atrisinājumam u_2 sakņu nav.

6. T e o r ē m a.

Ja

1° diferenciālo sistēmu (16) un (17) koeficienti izpilda 5.teorēmas 1°, 2° un 3° noteikumu,

2° diferenciālvienādojumu atrisinājumiem u_1 un u_2 ir vienāds sakņu skaits intervallā $a<x<b$,

3° $u_1(b)\neq 0$ un $u_2(b)\neq 0$,

tad pastāv sakarība

$$\frac{K_1(b)u_1'(b)}{u_1(b)} > \frac{K_2(b)u_2'(b)}{u_2(b)}.$$

a/. Pieņemsim, ka atrisinājumiem u_1 un u_2 nav sakņu intervallā $a<x\leq b$ un arī a nav atrisinājuma u_1 sakne. Integrējot M.Picone identitāti (11) robežās no a līdz b, dabūjam

$$\left[\frac{u_1}{u_2}\left(K_1u_1'u_2-K_2u_1u_2'\right)\right]_a^b=\int_a^b(G_1-G_2)u_1^2dx+\int_a^b(K_1-K_2)u_1'^2dx+$$
$$+\int_a^b K_2\left(\frac{u_2u_1'-u_1u_2'}{u_2}\right)^2dx.$$

Labā puse 5.teorēmas 1° noteikuma dēļ pozitīva, lai arī kreisā puse

$$u_1^2(b)\left[\frac{K_1(b)u_1'(b)}{u_1(b)}-\frac{K_2(b)u_2'(b)}{u_2(b)}\right]-u_1^2(a)\left[\frac{K_1(a)\alpha_1'}{\alpha_1}-\frac{K_2(a)\alpha_2'}{\alpha_2}\right]$$

būtu pozitīva, tad jāpastāv sakarībai

$$\frac{K_1(b)u_1'(b)}{u_1(b)} > \frac{K_2(b)u_2'(b)}{u_2(b)},$$

kas arī bija jāpierāda.
b/. Pieņemsim, ka atrisinājumiem u_1 un u_2 ir intervallā $a<x<b$

n saknes, pie kam pēdējo sakni apzīmējam ar x_n. 5.teorēma tad dod, ka šī sakne ir u_1 sakne.
Integrējot M.Picone identitāti (11) robežās no x_n līdz b, dabūjam

$$\left[\frac{u_1}{u_2}\left(K_1 u_1' u_2 - K_2 u_1 u_2'\right)\right]_{x_n}^{b} = \int_{x_n}^{b}(G_1 - G_2)u_1^2\,dx + \int_{x_n}^{b}(K_1 - K_2)u_1'^2\,dx + \int_{x_n}^{b} K_2\left(\frac{u_2 u_1' - u_1 u_2'}{u_2}\right)^2 dx,$$

un pēc robežu ielikšanas kreisā pusē dabūjam izteiksmi

$$u_1^2(b)\left[\frac{K_1(b)u_1'(b)}{u_1(b)} - \frac{K_2(b)u_2'(b)}{u_2(b)}\right].$$

Tā kā pēdējās izteiksmes labā puse ir pozitīva, tad arī tās kreisai puse jābūt pozitīvai, tas ir, jāpastāv noteikumam

$$\frac{K_1(b)u_1'(b)}{u_1(b)} > \frac{K_2(b)u_2'(b)}{u_2(b)},$$

kas arī bija jāpierāda.
Pēdējās divas teorēmas sauc arī par Sturm'a pirmo un otro salīdzināšanas teorēmu.

7. T e o r ē m a.

Ja

1° diferenciālvienādojuma (1) koeficienti ir ne tikai x, bet arī λ reālas, vienvērtīgas un nepārtrauktas funkcijas intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$,

2° $K(x,\lambda') \geq K(x,\lambda'') > 0$, $G(x,\lambda') \geq G(x,\lambda'')$, kad $\Lambda_1 < \lambda' < \lambda'' < \Lambda_2$, pie kam vienlīdzības $K(x,\lambda') = K(x,\lambda'')$ un $G(x,\lambda') = G(x,\lambda'')$ reizē nepastāv intervalla $a \leq x \leq b$ kādas daļas visos punktos,

3° diferenciālvienādojuma (1) atrisinājumam $u(x,\lambda)$ ir intervallā $a < x \leq b$ n saknes $x_1, x_2, \dots x_n$, pie kam

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b,$$

tad tās ir viennozīmīgas un nepārtrauktas λ funkcijas intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$.

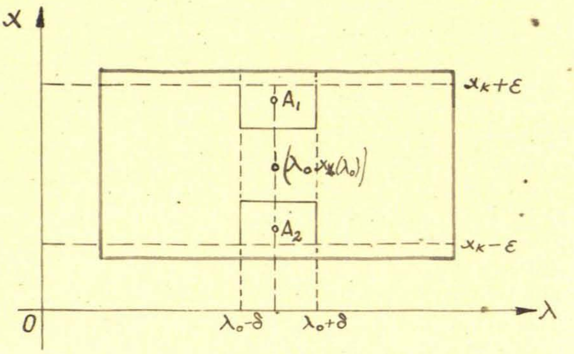
Izvēlēsimies diferenciālvienādojuma atrisinājuma $u(x,\lambda)$ vienkāršu sakni x_α, tad, lai šī sakne būtu nepārtraukta λ funkcija, jāpastāv sakarībām

$$|x_\varkappa(\lambda) - x_\varkappa(\lambda_0)| < \varepsilon, \quad \text{ja } |\lambda - \lambda_0| < \delta,$$

kur ε un δ pēc patikas mazi pozitīvi skaitļi un λ_0 kāda λ vērtība intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$.
Ja $x_\varkappa$ ir atrisinājuma u vienkārša sakne, tad

$$u(x_\varkappa(\lambda_0), \lambda_0) = 0, \text{ bet } u'(x_\varkappa(\lambda_0), \lambda_0) \neq 0.$$

Pieņemsim, ka $u'(x_\varkappa(\lambda_0), \lambda_0) > 0$. Atrisinājuma nepārtrauktības dēļ pietiekoši mazā punkta $(\lambda_0, x_\varkappa(\lambda_0))$ apkārtnē $u'(x,\lambda) > 0$.
Ap punktu $(\lambda_0, x_\varkappa(\lambda_0))$ uzzīmēsim taisnstūri, kurā $u(x,\lambda)$ un $u'(x,\lambda)$ ir nepārtrauktas x un λ funkcijas un $u'(x,\lambda) > 0$.



Caur punktu $(\lambda_0, x_\varkappa(\lambda_0))$ vilksim paralleli x asij. Uz šīs paralleles virs punkta $(\lambda_0, x_\varkappa(\lambda_0))$ var atrast tādu punktu A_1, kurā $u(x,\lambda_0) > 0$, bet zem šī punkta tādu punktu A_2, kurā $u(x,\lambda_0) < 0$.
Tā kā $u(x,\lambda)$ ir nepārtraukta x un λ funkcija, tad $u(x,\lambda) > 0$ pietiekoši mazā taisnstūrī ap A_1, bet $u(x,\lambda) < 0$ pietiekoši mazā taisnstūrī ap A_2. Pieņemsim, ka abi taisnstūri kongruenti, un ka abu taisnstūru visu punktu abscisas guļ starp $\lambda_0 - \delta$ un $\lambda_0 + \delta$, bet ordinātas starp $x_\varkappa(\lambda_0) - \varepsilon$ un $x_\varkappa(\lambda_0) + \varepsilon$, tas ir, ja $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, tad $|x_\varkappa - x| < \varepsilon$.
Katrai intervalla $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ λ vērtībai vienmēr var atrast vismaz vienu tādu x vērtību $x_\varkappa(\lambda)$, ka $u(x_\varkappa(\lambda)) = 0$.
Tālāk pierādīsim, ka katrai λ vērtībai atbilst tikai viena vienīga x vērtība.
Visā taisnstūrī $u'(x,\lambda) > 0$, tādēļ arī apgabalā $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $|x - x_\varkappa| < \varepsilon$, kas ir minētā taisnstūra daļa, $u'(x,\lambda) > 0$. Pēdējais norāda, ka funkcija $u(x,\lambda)$ minētā apgabalā ir monotoni augoša x funkcija. Tādēļ ikvienam λ šai apgabalā atbilst tikai

viens vienīgs $x = x_x(\lambda)$, kam $u(x_x(\lambda), \lambda) = 0$. Pēdējais rāda, ka x_x ir viennozīmīga λ funkcija. Bez tam $/x_x(\lambda) - x_x(\lambda_0)/ < \varepsilon$, ja $/\lambda - \lambda_0/ < \delta$ norāda uz funkcijas $x_x(\lambda)$ nepārtrauktību. Tā tad teorēma pierādīta.

VI. STURM'A OSCILLĀCIJU TEORĒMAS.

Par oscillāciju teorēmām sauc teorēmas, kas apgalvo, ka robežproblēmām, ja ir izpildīti zināmi noteikumi, ir bezgala daudz īpatnējo vērtību, un ka katrai īpatnējai vērtībai atbilst viena vai vairākas īpatnējās funkcijas, kuŗām noteikts sakņu skaits intervallā, kuŗā robežproblēma definēta.

Apskatīsim oscillāciju teorēmas dažām robežproblēmām.

1. O s c i l l ā c i j u t e o r ē m a.

Ja

1° robežproblēmas

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}(\mathcal{K}u') - Gu = 0 \\ \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0 \\ \beta' u(b) + \beta u'(b) = 0 \end{cases}$$

koeficienti $\mathcal{K}$ un G apmierina iepriekšējā nodaļā minētās 7. teorēmas noteikumus,

2° α, α', β un β' ir reālas, vienvērtīgas un nepārtrauktas λ funkcijas intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$,

3° $|\alpha| + |\alpha'| > 0$ un $|\beta| + |\beta'| > 0$,

4° $\frac{\mathcal{K}(a)\alpha'}{\alpha}$ un $\frac{\mathcal{K}(b)\beta'}{\beta}$ dilst λ augot, vai nemainās,

5° $\lim\limits_{\lambda\to\Lambda_1} -\frac{\min G}{\min \mathcal{K}} = -\infty$ un $\lim\limits_{\lambda\to\Lambda_2} -\frac{\max G}{\max \mathcal{K}} = +\infty$,

tad robežproblēmai (1) intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_{\varkappa}, \ldots$, kas sakārtotas augošā kārtībā. Katrai īpatnējai vērtībai $\lambda_\varkappa$ atbilst viena vienīga lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija $u_\varkappa(x)$, kuŗai ir taisni $\varkappa$ saknes intervallā $a < x < b$, tas ir, tik daudz sakņu, kāds ir pašas funkcijas un attiecīgās īpatnējās vērtības indeks.

Pierādīsim, ka katrai robežproblēmas īpatnējai vērtībai atbilst tikai viens lineāri neatkarīgs robežproblēmas atrisinājums. Pieņemsim, ka kādai īpatnējai vērtībai $\lambda_\varkappa$ atbilst divi lineāri neatkarīgi robežproblēmas atrisinājumi $u_\varkappa$ un $v_\varkappa$. Tad tiem abiem jāapmierina robežnoteikumi

$$\begin{cases} \alpha' u_x(a) - \alpha u_x'(a) = 0 \\ \alpha' v_x(a) - \alpha v_x'(a) = 0 \end{cases}$$

Lai atrisinātu šo sistēmu pret α un α', tad sastādām sistēmas determinantu

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_x(a) & -u_x'(a) \\ v_x(a) & -v_x'(a) \end{vmatrix} = u_x'(a) v_x(a) - u_x(a) v_x'(a) = 0.$$

Pēdējais ir abu atrisinājumu Vronska determinants un, tā kā tas ir nulle, tad atrisinājumi lineāri atkarīgi, citiem vārdiem, īpatnējai vērtībai λ_x atbilst tikai viens lineāri neatkarīgs robežproblēmas (1) atrisinājums.

Lai pierādītu bezgala daudz īpatnējo vērtību eksistenci robežproblēmai (1), vispirms pierādīsim bezgala daudz īpatnējo vērtību eksistenci robežproblēmas (1) vienkāršākam veidam

$$(2) \begin{cases} \frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0 \\ \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0 \\ u(b) = 0. \end{cases}$$

Šo veidu dabūjam no (1), ja $\beta = 0$.

Apskatīsim robežproblēmas (2) diferenciālvienādojuma atrisinājumu, kas apmierina pirmo robežnoteikumu. Tādu atrisinājumu ir bezgala daudz. Tie visi lineāri atkarīgi, citiem vārdiem, atšķiras cits no cita ar konstantu faktoru, un tādēļ to saknes sakrīt. Sakņu pētīšanai no šiem bezgala daudzajiem atrisinājumiem vienkāršības dēļ izvēlēsimies atrisinājumu, kas noder arī diferenciālai sistēmai

$$(3) \begin{cases} \frac{d}{dx}(Ku') - Gu = 0 \\ u(a) = \alpha \\ u'(a) = \alpha'. \end{cases}$$

Skaidrs, ka tāds atrisinājums ir viens vienīgs. Salīdzināsim to ar diferenciālvienādojuma

$$(4)\quad \frac{d}{dx}\left[(\min K)\vartheta'\right] - (\min G)\vartheta = 0$$

atrisinājumu ϑ, kas punktā a apmierina robežnoteikumus

$$(5)\quad \begin{cases} \vartheta(a) = \alpha \\ \vartheta'(a) = \alpha' . \end{cases}$$

Apzīmēsim $\frac{\min G}{\min K}$ ar δ. Izvēlēsimies kādu λ vērtību Λ_1 tuvumā. Tad $\delta > 0$, jo $\min K > 0$ un no

$$\lim_{\lambda\to\Lambda_1} - \frac{\min G}{\min K} = -\infty$$

dabūjam, ka arī $\min G > 0$ λ vērtībām Λ_1 tuvumā. Diferenciālvienādojums (4) tad ir

$$(4')\quad \vartheta'' - \delta\vartheta = 0.$$

Meklēsim diferenciālās sistēmas $(4')$, (5) atrisinājumu. Diferenciālvienādojuma $(4')$ fundamentālā atrisinājumu sistēma ir

$$e^{\sqrt{\delta}x},\quad e^{-\sqrt{\delta}x}$$

un vispārīgais atrisinājums

$$\vartheta = C_1 e^{\sqrt{\delta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\delta}x}.$$

Noteiksim ar (5) palīdzību C_1 un C_2

$$\begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\delta}a} + C_2 e^{-\sqrt{\delta}a} = \alpha \\ C_1\sqrt{\delta}\, e^{\sqrt{\delta}a} - C_2\sqrt{\delta}\, e^{-\sqrt{\delta}a} = \alpha' \end{cases}$$

Šīs lineāro algebrisko vienādojumu sistēmas ar nezināmiem C_1 un C_2 sistēmas determinante ir

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{\sqrt{\delta}a} & e^{-\sqrt{\delta}a} \\ \sqrt{\delta}\, e^{\sqrt{\delta}a} & -\sqrt{\delta}\, e^{-\sqrt{\delta}a} \end{vmatrix} = -2\sqrt{\delta},$$

un atrisinājums

$$C_1 = \frac{\alpha\sqrt{\delta} + \alpha'}{2\sqrt{\delta}}\, e^{-\sqrt{\delta}a}, \qquad C_2 = \frac{\alpha\sqrt{\delta} - \alpha'}{2\sqrt{\delta}}\, e^{\sqrt{\delta}a}.$$

Diferenciālās sistēmas $(4')$, (5) atrisinājums tad ir

$$(6)\quad \vartheta = \frac{\alpha\sqrt{\sigma}-\alpha'}{2\sqrt{\sigma}}\, e^{\sqrt{\sigma}(x-a)} + \frac{\alpha\sqrt{\sigma}-\alpha'}{2\sqrt{\sigma}}\, e^{-\sqrt{\sigma}(x-a)}$$

un pēc pārveidojumiem

$$(7)\quad \vartheta = \operatorname{ch}\sqrt{\sigma}(x-a)\left[\alpha + \frac{\alpha'}{\sqrt{\sigma}}\operatorname{tgh}\sqrt{\sigma}(x-a)\right].$$

Ja $\sqrt{\sigma}$ ir ļoti liels, tad $\operatorname{tgh}\sqrt{\sigma}(x-a)$ maz atšķiŗas no 1. / $\operatorname{tgh}\sqrt{\sigma}(x-a) = \frac{e^{\sqrt{\sigma}(x-a)} - e^{-\sqrt{\sigma}(x-a)}}{e^{\sqrt{\sigma}(x-a)} + e^{-\sqrt{\sigma}(x-a)}}$ ļoti lielam $\sqrt{\sigma}$ arī $e^{\sqrt{\sigma}(x-a)}$ ir ļoti liels, bet $e^{-\sqrt{\sigma}(x-a)}$ ļoti mazs, un šī iemesla dēļ $\operatorname{tgh}\sqrt{\sigma}(x-a)$ tad maz atšķiŗas no 1;/ un kvadrātiekavu otrs saskaitāmais tāpēc ir ļoti mazs, salīdzinot ar pirmo saskaitāmo α. Tā kā $\operatorname{ch}\sqrt{\sigma}(x-a)$ vienmēr pozitīvs, tad ϑ zīmi nosaka tikai α. Ja $\alpha = 0$, tad ϑ zīmi nosaka α'.
Ja $\alpha \neq 0$, tad intervallā $a < x \le b$ ϑ visu laiku ir ar α zīmi, bet ja $\alpha = 0$, tad ar α' zīmi, citiem vārdiem, diferenciālās sistēmas $(4'), (5)$ atrisinājumam, ja λ paņemts Λ_1 tuvumā, nav sakņu intervallā $a < x \le b$. Bet ja $(4'), (5)$ atrisinājumam ϑ nav sakņu intervallā $a < x \le b$, tad to nav arī (3) atrisinājumam u. Citādi iepriekšējā nodaļā apskatītās 5.teorēmas dēļ atrisinājumam ϑ starp a un šo atrisinājuma u sakni arī būtu vismaz viena sakne.
Ja parametra λ vērtības esam izvēlējušies Λ_2 tuvumā, tad salīdzināsim u ar diferenciālvienādojuma

$$(8)\quad \frac{d}{dx}\left[(\max K)\vartheta'\right] - (\max G)\vartheta = 0$$

atrisinājumu ϑ, kas punktā a apmierina noteikumus (5). Ņemot λ cik patīk tuvu Λ_2, mēs $-\frac{\max G}{\max K}$ pataisām cik patīk lielu un pozitīvu, ja pieņemam, ka $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_2} -\frac{\max G}{\max K} = +\infty$.
Diferenciālās sistēmas $(8), (5)$ atrisinājumam minētā slēdziena dēļ tad ir cik patīk daudz sakņu starp a un b, un iepriekšējā nodaļā apskatītās 5.teorēmas dēļ (3) atrisinājumam u vismaz tikpat daudz sakņu starp a un pēdējo ϑ sakni.
Liksim sistēmā (3) parametram λ augt no kādas vērtības Λ_1 tuvumā. Tad, kā to redzējām, ja λ ir tuvu Λ_1, šīs sistēmas atrisinājumam u nav sakņu starp a un b, bet tās ierodas λ augot. Ja λ' un λ'' ir divas tādas intervalla $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ vērtības, ka $\lambda' < \lambda''$ un $u(x, \lambda')$ un $u(x, \lambda'')$ ir tām atbilstošie (3) at-

risinājumi, tad iepriekšējā nodaļā apskatītās 5. teorēmas dēļ $u(x, \lambda'')$ pirmā sakne, skaitot no a, atrodas pirms $u(x, \lambda')$ pirmās saknes un starp katrām divi $u(x, \lambda')$ saknēm atrodas vismaz viena $u(x, \lambda'')$ sakne. Tādēļ atrisinājumam $u(x, \lambda'')$ ir vismaz tikpat daudz sakņu starp a un atrisinājuma $u(x, \lambda')$ pēdējo sakni, cik to atrisinājumam $u(x, \lambda')$ ir intervallā $a < x \leq b$. Tas liecina, ka λ augot neviena (3) atrisinājuma u sakne neiziet no intervalla $a < x \leq b$.

(3) atrisinājuma u saknes iepriekšējā nodaļā apskatītās 7. teorēmas dēļ ir viennozīmīgas un nepārtrauktas, bet 5. teorēmas dēļ arī dilstošas λ funkcijas. Tādēļ tās intervallā $a < x < b$ ienāk vienīgi pa b. Pierādīsim, ka tās intervallā nevar ienākt pa a.

Ja $u(a) = 0$, tad skaidrs, ka nepārtrauktības dēļ saknes minētajā intervallā nevar ienākt. Pieņemsim pretējo, ka pie $\mu > \lambda'$ sakne ir ienākusi pa a. Tad $u(a, \mu) = 0$ un $u(x_1, \mu) = 0$, ja ar x_1 apzīmējam sakni. Rolla teorēmas dēļ kādā punktā c starp a un x_1 $u'(c, \mu) = 0$.

Ja $\mu \to \lambda'$, tad $c \to a$, jo $x_1 \to a$. Tādēļ

$$\lim_{\mu \to \lambda'} u'(c, \mu) = \lim_{\mu \to \lambda'} u(a, \mu) = 0.$$

Bet dots ir, ka $u'(a, \lambda') = \alpha' \neq 0$, kad $\alpha = 0$.

Pieņemsim, ka λ_0 ir pirmā λ vērtība, kuŗai sistēmas (3) atrisinājumam ir sakne punktā b, bet starp a un b sakņu nav. Apzīmēsim šo (3) atrisinājumu ar $\bar{u}_0$. λ augot, minētā sakne ienāk starp a un b. Nākošo λ vērtību, kuŗai atbilstošais (3) atrisinājums punktā b atkal ir nulle, apzīmēsim ar $\bar{\lambda}_1$ un attiecīgo atrisinājumu ar $\bar{u}_1$, pie kam atrisinājumam $\bar{u}_1$ starp a un b ir taisni viena sakne, u.t.t.

Bet ja kādai λ vērtībai atbilstošais diferenciālās sistēmas (3) atrisinājums ir nulle punktā b, tad šis atrisinājums noder arī robežproblēmai (2) un minētā λ vērtība nav nekas cits kā robežproblēmas (2) īpatnējā vērtība. Tādēļ $\bar{\lambda}_0$ ir robežproblēmas (2) īpatnējā vērtība, $\bar{u}_0$ attiecīgā īpatnējā funkcija, u.t.t.

Ņemot (2) īpatnējās vērtības cik patīk tuvu λ_ν panākam, ka tā atrisinājumam cik patīk daudz sakņu intervallā $a < x < b$, bet, tā kā λ augot, ar katru īpatnējo vērtību dabūjam atrisi-

nājumu,kam viena sakne vairāk kā iepriekšējam,tad tas liecina,ka pirms šīs īpatnējās vērtības,kas Λ_2 tuvumā ir cik patīk daudz citu (2) īpatnējo vērtību,t.i.intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ ir bezgala daudz robežproblēmas (2) īpatnējo vērtību.
Tagad pierādīsim oscillāciju teorēmu robežproblēmai (1).
Ne β, ne $\beta' \neq 0$ vai arī $\beta \neq 0$ un $\beta' = 0$. Noskaidrosim,ka starp $\bar{\lambda}_{\varkappa-1}$ un $\bar{\lambda}_{\varkappa}$ atrodas taisni viena robežproblēmas (1) īpatnējā vērtība $\lambda_{\varkappa}$.

$\dfrac{K(b,\lambda)\, u'(b,\lambda)}{u(b,\lambda)}$ iepriekšējā nodaļā apskatītās 6.teorēmas dēļ, ja λ mainās no $\bar{\lambda}_{\varkappa-1}$ līdz $\bar{\lambda}_{\varkappa}$ dilst nepārtraukti no $+\infty$ līdz $-\infty$, jo $u(b,\bar{\lambda}_{\varkappa-1})$ un $u(b,\bar{\lambda}_{\varkappa}) = 0$.

$\dfrac{K(b,\lambda)\beta'}{\beta}$ pieņēmuma dēļ dilst monotoni vai nemainās λ augot,bet

$-\dfrac{K(b)\beta'}{\beta}$ tad aug vai nemainās.

Starp $\bar{\lambda}_{\varkappa-1}$ un $\bar{\lambda}_{\varkappa}$ tādēļ ir tikai viena vienīga tāda λ vērtība $\lambda_{\varkappa}$, ka

$$\frac{K(b,\lambda_\varkappa)\, u'(b,\lambda_\varkappa)}{u(b,\lambda_\varkappa)} = -\frac{K(b,\lambda_\varkappa)\, \beta'(\lambda_\varkappa)}{\beta(\lambda_\varkappa)}$$

$$\beta'(\lambda_\varkappa)\, u(b,\lambda_\varkappa) + \beta(\lambda_\varkappa)\, u'(b,\lambda_\varkappa) = 0.$$

Ar to robežproblēmas (1) īpatnējās vērtības $\lambda_\varkappa$ eksistence pierādīta.Apzīmēsim tai atbilstošo īpatnējo funkciju ar $u_\varkappa$.
No tā,ka atrisinājumam $\bar{u}_{\varkappa-1}$ ir $\varkappa-1$ saknes starp a un b un $\bar{u}_{\varkappa-1}(b) = 0$, atrisinājumam $\bar{u}_\varkappa$ $\varkappa$ saknes starp a un b un $\bar{u}_\varkappa(b) = 0$, dabūjam,ka atrisinājumam $u_\varkappa$ ir $\varkappa$ saknes starp a un b.
Pierādīsim,ka intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \bar{\lambda}_0$ ir taisni viena robežproblēmas (1) īpatnējā vērtība λ_0.
Izvēlēsimies λ vērtību Λ_1 tuvumā.Tad 6.teorēmas dēļ

$$\frac{K(b,\lambda)\, u'(b,\lambda)}{u(b,\lambda)} > \frac{\min K(\lambda)\, v'(b,\lambda)}{v(b,\lambda)},$$

ja u ir sistēmas (3) un v sistēmas $(4'), (5)$ atrisinājums.
Ievietojot izteiksmē

$$\frac{\min K(\lambda)\, v'(b,\lambda)}{v(b,\lambda)}$$

$v(b,\lambda)$ un $v'(b,\lambda)$ vietās to nozīmes,dabūjam,ka

$$(9)\quad \frac{\min \mathcal{K}(\lambda)\, v'(b,\lambda)}{v(b,\lambda)} = \min \mathcal{K}(\lambda)\sqrt{s}\, \operatorname{tgh}\sqrt{s}(b-a)\, \frac{1+\dfrac{\alpha' \operatorname{cotgh}\sqrt{s}(b-a)}{\alpha\sqrt{s}}}{1+\dfrac{\alpha' \operatorname{tgh}\sqrt{s}(b-a)}{\alpha\sqrt{s}}}\,.$$

Tā kā λ maz atšķiras no Λ_1, tad $\sqrt{s}$ ir ļoti liels un pozitīvs, un $\operatorname{cotgh}\sqrt{s}(b-a)$ un $\operatorname{tgh}\sqrt{s}(b-a)$ maz atšķiras no 1. Ja $\lambda \to \Lambda_1$, tad $\operatorname{tgh}\sqrt{s}(b-a)$ un $\operatorname{cotgh}\sqrt{s}(b-a) \to 1$ un

$$\frac{\min \mathcal{K}(\lambda)\, v'(b,\lambda)}{v(b,\lambda)} \to +\infty,$$

kā tas redzams no formulas (9). Skaidrs, ka arī

$$\frac{\mathcal{K}(b,\lambda)\, u'(b,\lambda)}{u(b,\lambda)} \to +\infty.$$

$u(b,\bar{\lambda}_0)=0$, un 6.teorēmas dēļ $\frac{\mathcal{K}(b,\lambda)\, u'(b,\lambda)}{u(b,\lambda)}$ dilst, λ augot. Tādēļ λ, mainoties no Λ_1 līdz $\bar{\lambda}_0$, tad ir tāda vērtība λ_0, ka,

$$\frac{\mathcal{K}(b,\lambda_0)\, u'(b,\lambda_0)}{u(b,\lambda_0)} = -\frac{\mathcal{K}(b,\lambda_0)\,\beta'(\lambda_0)}{\beta(\lambda_0)},$$

tas dod

$$\beta'(\lambda_0)\, u(b,\lambda_0) + \beta(\lambda_0)\, u'(b,\lambda_0) = 0.$$

Ar to (1) īpatnējās vērtības λ_0 eksistence ir pierādīta. Atbilstošai īpatnējai funkcijai u_0 nav sakņu intervallā $a < x < b$, jo citādi starp a un šo u_0 sakni 5.teorēmas dēļ būtu vismaz viena $\bar{u}_0$ sakne, bet $\bar{u}_0$ nav sakņu starp a un b. Robežproblēmai (2) ir bezgala daudz īpatnējo vērtību intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ un starp katrām divi (2) īpatnējām vērtībām, kā to pierādījām, ir taisni viena (1) īpatnējā vērtība. Tādēļ arī robežproblēmai (1) bezgala daudz īpatnējo vērtību šai intervallā.

/Ar $\min \mathcal{K}$ un $\min G$, resp. $\max \mathcal{K}$ un $\max G$ apzīmēti funkciju $\mathcal{K}$ un G minimi, resp. maksimi intervallā $a \leq x \leq b$ vienai un tai pašai λ vērtībai./

2. O s c i l l ā c i j u t e o r ē m a.

Ja robežproblēmas (1) koeficienti izpilda noteikumus

$$(10)\quad \min G(\Lambda_1) > 0,\ \alpha(\Lambda_1)\,\alpha'(\Lambda_1) > 0,\ \beta(\Lambda_1)\,\beta'(\Lambda_1) > 0$$

un visus 1.oscillāciju teorēmā minētos noteikumus, izņemot

$$\lim_{\lambda\to\Lambda_1} - \frac{\min G}{\min K} = -\infty,$$

un λ mainās intervallā $\Lambda_1 \leq \lambda < \Lambda_2$,
tad robežproblēmai (1) ir tāda pati oscillāciju teorēma kā pirmā.

Noteikums $\lim_{\lambda\to\Lambda_1} - \frac{\min G}{\min K} = -\infty$ bija vajadzīgs, lai pierādītu, ka robežproblēmai (1) intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ ir tāda īpatnējā vērtība λ_0 kā atbilstošai īpatnējai funkcijai u_0 nav sakņu intervallā $a < x \leq b$. Intervallā $\Lambda_1 \leq \lambda < \Lambda_2$ īpatnējās vērtības λ_0 eksistenci robežproblēmai (1) pierādīsim, izlietojot noteikumu (10).
Salīdzināsim diferenciālās sistēmas

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left[\min K(\Lambda_1) v'\right] - \min G(\Lambda_1) v = 0 \\ v(a,\Lambda_1) = \alpha(\Lambda_1) \\ v'(a,\Lambda_1) = \alpha'(\Lambda_1) \end{cases}$$

un

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}\left[K(x,\Lambda_1) u'\right] - G(x,\Lambda_1) u = 0 \\ u(a,\Lambda_1) = \alpha(\Lambda_1) \\ u'(a,\Lambda_1) = \alpha'(\Lambda_1) \end{cases}$$

atrisinājumus v un u. Apzīmēsim $\frac{\min G(\Lambda_1)}{\min K(\Lambda_1)}$ ar σ, $\sigma > 0$, jo $\min G(\Lambda_1)$ un $\min K(\Lambda_1)$ pieņēmuma dēļ lielāki par nulli un tādēļ diferenciālās sistēmas (11) atrisinājums ir

$$(13)\quad v = \alpha(\Lambda_1)\, ch\sqrt{\sigma}(x-a) + \frac{\alpha'(\Lambda_1)}{\sqrt{\sigma}}\, sh\sqrt{\sigma}(x-a).$$

Vienmēr $ch(x-a) > 0$.

$sh\sqrt{\sigma}(x-a) > 0$, ja $x > a$

$sh\sqrt{\sigma}(x-a) = 0$, ja $x = a$

$sh\sqrt{\sigma}(x-a) < 0$, ja $x < a$.

Skaidrs, ka intervallā $a < x \leq b$, $\mathrm{sh}\sqrt{\sigma}(x-a) > 0$. No (13) tad dabūjam:
1. ja $\alpha(\Lambda_1) > 0$ un $\alpha'(\Lambda_1) > 0$, tad $v(x,\Lambda_1) > 0$ intervallā $a \leq x \leq b$,
2. ja $\alpha(\Lambda_1) < 0$ un $\alpha'(\Lambda_1) < 0$, tad $v(x,\Lambda_1) < 0$ intervallā $a \leq x \leq b$,
3. ja $\alpha(\Lambda_1) = 0$ un $\alpha'(\Lambda_1) \gtrless 0$, tad $v(x,\Lambda_1) \gtrless 0$ intervallā $a < x \leq b$,
4. ja $\alpha(\Lambda_1) \gtrless 0$ un $\alpha'(\Lambda_1) = 0$, tad $v(x,\Lambda_1) \gtrless 0$ intervallā $a \leq x \leq b$.

Apvienojot visus četrus gadījumus varam teikt, ka $v(x,\Lambda_1)$ nav sakņu intervallā $a < x \leq b$. Bet, ja $v(x,\Lambda_1)$ nav sakņu intervallā $a < x \leq b$, tad nav sakņu šai intervallā arī sistēmas (12) atrisinājumam $u(x,\Lambda_1)$. Pieņemot, ka $u(x,\Lambda_1)$ vismaz viena sakne intervallā $a < x \leq b$, 5. teorēmas dēļ dabūjam, ka starp a un šo $u(x,\Lambda_1)$ sakni vismaz viena $v(x,\Lambda_1)$ sakne.

Ja $\lambda = \Lambda_1$, diferenciālā sistēma (3) pāriet par (12) un (3) atrisinājums $u(x,\lambda)$ par (12) atrisinājumu $u(x,\Lambda_1)$. Tādēļ varam teikt, ka (3) atrisinājumam, ja $\lambda = \Lambda_1$ nav sakņu intervallā $a < x \leq b$.

Ar noteikuma $\lim\limits_{\lambda \to \Lambda_2} -\frac{\max G}{\max K} = +\infty$ palīdzību jau 1. oscillāciju teorēmā atradām, ka diferenciālās sistēmas (3) atrisinājumam $u(x,\lambda)$ cik patīk daudz sakņu intervallā $a < x < b$, ja λ cik patīk tuvu Λ_2.

Tāpat kā 1. oscillāciju teorēmā, arī tagad varam pierādīt, ka robežproblēmai (2) intervallā $\Lambda_1 \leq \lambda < \Lambda_2$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību $\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \dots \bar{\lambda}_\alpha, \dots$, ka katrai īpatnējai vērtībai $\bar{\lambda}_\alpha$ atbilst tikai viena īpatnējā funkcija u_α, kuŗai tik daudz sakņu intervallā $a < x \leq b$, kāds attiecīgās īpatnējās vērtības indeks un ka starp katrām divi sekojošām (2) īpatnējām vērtībām $\bar{\lambda}_{\alpha-1}$ un $\bar{\lambda}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3, \dots)$ atrodas taisni viena $(1)/(3 \neq 0)$ īpatnējā vērtība λ_α, kuŗai atbilst īpatnējā funkcija u_α ar α saknēm intervallā $a < x < b$.

Vēl jānoskaidro, ka starp Λ_1 un $\bar{\lambda}_0$ arī robežproblēmas $1)$ īpatnējā vērtība ir tikai viena, tad 2. oscillāciju teorēmu būsim pierādījuši.

Tam nolūkam noteiksim $\dfrac{\min K(\Lambda_1)\, v'(b,\Lambda_1)}{v(b,\Lambda_1)}$ zīmi.

$$\frac{\min K(\Lambda_1)\, v'(b,\Lambda_1)}{v(b,\Lambda_1)} = \min K(\Lambda_1) \frac{\alpha(\Lambda_1)\,\mathrm{sh}\sqrt{\sigma}(b-a)\cdot\sqrt{\sigma} + \alpha'(\Lambda_1)\sqrt{\sigma}(b-a)}{\alpha(\Lambda_1)\,\mathrm{ch}\sqrt{\sigma}(b-a) + \frac{\alpha'(\Lambda_1)}{\sqrt{\sigma}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\sigma}(b-a)}.$$

Izteiksmei labajā pusē otrs reizinātājs ir daļa, kuŗas skaitītājs un saucējs abi pozitīvi, ja $\alpha(\Lambda_1)$ un $\alpha'(\Lambda_1)$ ir pozitīvi,un abi negatīvi,ja $\alpha(\Lambda_1)$ un $\alpha'(\Lambda_1)$ ir negatīvi.Pati daļa tā tad vienmēr pozitīva,un tādēļ

$$\frac{\min K(\Lambda_1)\alpha'(b,\Lambda_1)}{\alpha(b,\Lambda_1)} > 0.$$

Atrisinājumiem $u(x,\Lambda_1)$ un $v(x,\Lambda_1)$ nav sakņu intervallā $a<x\leq b$ un punktā a vai nu $\alpha(\Lambda_1)=0$, vai arī pastāv sakarība

$$\frac{K(a,\Lambda_1)\alpha'(\Lambda_1)}{\alpha(\Lambda_1)} \geq \frac{\min K(\Lambda_1)\alpha'(\Lambda_1)}{\alpha(\Lambda_1)}, \text{ jo } K(a,\Lambda_1) \geq \min K(\Lambda_1).$$

Kā vienā ,tā otrā gadījumā 6.teorēmas dēļ

$$\frac{K(b,\Lambda_1)u'(b,\Lambda_1)}{u(b,\Lambda_1)} > \frac{\min K(\Lambda_1)v'(b,\Lambda_1)}{v(b,\Lambda_1)} > 0.$$

Liksim λ augt no Λ_1 līdz $\bar{\lambda}_0$.

$u(b,\bar{\lambda}_0)=0$ un atrisinājumam $u(x,\bar{\lambda}_0)$ nav sakņu intervallā $a<x<b$. Teorēmas noteikumā dots,ka $\frac{K(a,\lambda)\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$ samazinājas λ augot vai nemainās.Tādēļ 6.teorēmas dēļ $\frac{K(b,\lambda)u'(b,\lambda)}{u(b,\lambda)}$ dilst no pozitīvas vērtības $\frac{K(b,\Lambda_1)u'(b,\Lambda_1)}{u(b,\Lambda_1)}$ līdz $-\infty$, ja λ mainās no Λ_1 līdz $\bar{\lambda}_0$. λ augot no Λ_1, $-\frac{K(b,\lambda)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ aug no kādas negatīvas vērtības vai nemainās,jo $K(b,\lambda)>0$ un $\beta(\Lambda_1)\beta'(\Lambda_1)\geq 0$. Tādēļ starp Λ_1 un $\bar{\lambda}_0$ ir tikai viena vienīga tāda λ vērtība λ_0, ka

$$\frac{K(b,\lambda_0)u'(b,\lambda_0)}{u(b,\lambda_0)} = -\frac{K(b,\lambda_0)\beta'(\lambda_0)}{\beta(\lambda_0)},$$

vai arī

$$\beta'(\lambda_0)u(b,\lambda_0)+\beta(\lambda_0)u'(b,\lambda_0)=0.$$

Šī sakarība rāda,ka λ_0 ir robežproblēmas (1) īpatnējā vērtība.Attiecīgajam atrisinājumam $u_0=u(x,\lambda_0)$ nav sakņu intervallā $a<x\leq b$, jo citādi 5.teorēmas dēļ starp a un šo $u(x,\lambda_0)$ sakni vajadzētu būt vismaz vienai $\bar{u}_0=u(x,\bar{\lambda}_0)$ saknei. Noskaidrosim,kad robežproblēmas (1) īpatnējā vērtība λ_0 sakrīt ar Λ_1.

Ja $\lambda_0=\Lambda_1$, tad

$$\frac{K(b,\Lambda_1)u'(b,\Lambda_1)}{u(b,\Lambda_1)} = -\frac{K(b,\Lambda_1)\beta'(\Lambda_1)}{\beta(\Lambda_1)}. \tag{14}$$

Šīs formulas kreisā puse,kā to pierādījām ir pozitīva,bet labā puse teorēmas noteikumu $\beta'(\Lambda_1)\beta(\Lambda_1)\geq 0$ un $K(x,\lambda)>0$ dēļ negatīva.Lai vienlīdzība varētu pastāvēt,tās abām pusēm jābūt nullei, kas dod

$$u'(b, \lambda_1) = 0, \quad \beta'(\lambda_1) = 0$$
$$u(b, \lambda_1) = \infty, \quad \beta(\lambda_1) = \infty.$$

Otrais gadījums atkrīt, jo $K, G, \alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ir dotajā intervallā galīgas λ funkcijas.
Mēs atradām nevienlīdzību

$$\frac{K(b,\lambda_1)\, u'(b,\lambda_1)}{u(b,\lambda_1)} \geq \frac{\min K(\lambda_1)\, v'(b,\lambda_1)}{v(b,\lambda_1)} > 0.$$

No šīs nevienlīdzības, tāpēc ka

$$\frac{K(b,\lambda_1)\, u'(b,\lambda_1)}{u(b,\lambda_1)} = 0,$$

dabūjam, ka

$$\frac{\min K(\lambda_1)\, v'(b,\lambda_1)}{v(b,\lambda_1)} = 0$$

un no pēdējās $v'(b,\lambda_1) = 0$
Ievietosim funkcijas u un v M.Picone identitātē u_1 un u_2 vietā. Šī pārveidotā M.Picone identitāte pareiza intervallā $a \leq x \leq b$, jo 1/. $v(x,\lambda_1) \neq 0$ intervallā $a < x \leq b$ un 2/. ja $v(a,\lambda_1) = 0$, tad arī $u(a,\lambda_1) = 0$.
Integrēsim to no a līdz b

$$(15) \quad \left\{ \frac{u}{v}\left[K(x,\lambda_1)u'v - \min K(\lambda_1)uv'\right]\right\}_a^b = \int_a^b \left[G(x,\lambda_1) - \min G(\lambda_1)\right]u^2 dx +$$
$$+ \int_a^b \left[K(x,\lambda_1) - \min K(\lambda_1)\right]u'^2 dx + \int_a^b \min K(\lambda_1)\left[\frac{u'v - uv'}{u}\right]^2 dx.$$

1/. $u(a,\lambda_1) = v(a,\lambda_1) = \alpha(\lambda_1) \neq 0$.
Pārveidojot identitātes (15) kreiso pusi, dabūjam

$$u^2(b,\lambda_1)\left[\frac{K(b,\lambda_1)\,u'(b,\lambda_1)}{u(b,\lambda_1)} - \frac{\min K(\lambda_1)\,v'(b,\lambda_1)}{v(b,\lambda_1)}\right] -$$
$$- u^2(a,\lambda_1)\left[\frac{K(a,\lambda_1)u'(a,\lambda_1)}{u(a,\lambda_1)} - \frac{\min K(\lambda_1)\,v'(a,\lambda_1)}{v(a,\lambda_1)}\right]$$

un apmainot $u(a,\lambda_1)$, $u'(a,\lambda_1)$, $v(a,\lambda_1)$ un $v'(a,\lambda_1)$ ar to nozīmēm $\alpha(\lambda_1)$ un $\alpha'(\lambda_1)$ un liekot $u(b,\lambda_1)$ un $v(b,\lambda_1)$ vietā nulli, dabūjam

$$(16) \quad -\alpha^2(\lambda_1)\left[\frac{K(a,\lambda_1)\,\alpha'(\lambda_1)}{\alpha(\lambda_1)} - \frac{\min K(\lambda_1)\,\alpha'(\lambda_1)}{\alpha(\lambda_1)}\right]$$

Pēdējā izteiksme ≤ 0, tāpēc ka

$$\frac{K(a,\Lambda_1)\alpha'(\Lambda_1)}{\alpha(\Lambda_1)} \geqslant \frac{\min K(\Lambda_1)\alpha'(\Lambda_1)}{\alpha(\Lambda_1)} \quad \text{un} \quad \alpha^2(\Lambda_1) > 0.$$

2/. $u(a,\Lambda_1) = v(a,\Lambda_1) = \alpha(\Lambda_1) = 0.$

Ar L'Hospital'a likuma palīdzību dabūjam, ka tagad (15) kreisā puse ir nulle.

Kā pirmajā, tā otrajā gadījumā (15) labā puse > 0. Lai vienlīdzība (15) varētu pastāvēt, tās abām pusēm jābūt nullei. No (16) dabūjam, ka kreisā puse ir nulle, ja $\alpha(\Lambda_1) = 0$, vai arī $\alpha'(\Lambda_1) = 0$, vai arī $G(x,\Lambda_1) = \min G(x,\Lambda_1)$, $u'(x,\Lambda_1) = 0$ un $v'(x,\Lambda_1) = 0$.

No $u'(x,\Lambda_1) = 0$ nepārtrauktības, dabūjam, ka arī $u'(a,\Lambda_1) = \alpha'(\Lambda_1) = 0$.

Lai diferenciālās sistēmas (12) atrisinājums nebūtu $u \equiv 0$, tad jāpieņem, ka $\alpha(\Lambda_1) \neq 0$, t.i. pirmais gadījums, kad (15) kreisā puse varētu būt nulle atkrīt.

Apskatīsim diferenciālvienādojumu

$$\frac{d}{dx}[K(x,\Lambda_1)u'] - G(x,\Lambda_1)u = 0.$$

Šim diferenciālvienādojumam ir atrisinājums $u(x,\Lambda_1)$, kuŗa atvasinājums $u'(x,\Lambda_1)$, kā to noskaidrojām, ir identiski nulle, bet pats $u(x,\Lambda_1)$ nav identiski nulle, tādēļ $G(x,\Lambda_1) = 0$.

Nepieciešamais noteikums, lai $\Lambda_1 = \lambda_0$, tad nu ir

$$G(x,\Lambda_1) = 0, \quad \alpha'(\Lambda_1) = 0, \quad \beta'(\Lambda_1) = 0.$$

Pierādīsim, ka tas ir arī pietiekošais noteikums, citiem vārdiem, pierādīsim, ka robežproblēmai

$$(17) \begin{cases} \frac{d}{dx}[K(x,\Lambda_1)u'] = 0 \\ u'(a,\Lambda_1) = 0 \\ u'(b,\Lambda_1) = 0 \end{cases}$$

ir arī atrisinājumi, kas nav identiski nulle. Robežproblēmas (17) diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 \int_a^x \frac{dx}{K(x,\Lambda_1)} + C_2$$

Noteiksim C_1 un C_2 tā, lai diferenciālvienādojuma atrisinājums u apmierinātu noteikumus

$$u'(a,\Lambda_1)=0,\quad u'(b,\Lambda_1)=0.$$

Tad no $u'(x,\Lambda_1)=\frac{c_1}{K(x,\Lambda_1)}$, dabūjam,ka

$$\frac{c_1}{K(a,\Lambda_1)}=0,\quad \frac{c_1}{K(b,\Lambda_1)}=0.$$

Ne $K(a,\Lambda_1)$, ne $K(b,\Lambda_1)$ nav ∞, un tādēļ no abiem vienādojumiem atrodam,ka $c_1=0$.

Robežproblēmas (17) atrisinājums tad ir $u=c$, ja c_2 vietā raksta c.

Tas,ka robežproblēmai (17) ir arī atrisinājums,kas nav identiski nulle,rāda,ka noteikums

$$G(x,\Lambda_1)=0,\ \alpha'(\Lambda_1)=0,\ \beta'(\Lambda_1)=0$$

ir pietiekošs,lai Λ_1 būtu robežproblēmas (1) īpatnējā vērtība λ_0.

3. O s c i l l ā c i j u   t e o r ē m a.

Apskatīsim Sturm'a - Liouville robežproblēmu

$$(18)\quad\begin{cases}\frac{d}{dx}(\varkappa u')+(\lambda g-l)u=0\\ \alpha' u(a)-\alpha u'(a)=0\\ \beta' u(b)+\beta u'(b)=0,\end{cases}$$

kuŗas koeficienti $\varkappa, g, l$ ir reālas,viennozīmīgas un nepārtrauktas x funkcijas intervallā $A\le x\le B$, bet $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ reālas,viennozīmīgas un nepārtrauktas λ funkcijas intervallā $-\infty<\lambda<+\infty$ un a un b ir intervalla $A\le x\le B$ divi tādi punkti,kas apmierina noteikumus $|\alpha|+|\alpha'|>0$ un $|\beta|+|\beta'|>0$.

Oscillāciju teorēmu pierādīsim šīs robežproblēmas dažādiem veidiem atsevišķi.Apskatīsim 3 gadījumus.

1. $\varkappa>0$ un $g>0$ intervallā $a\le x\le b$.

$\frac{\varkappa(a)\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$ un $\frac{\varkappa(b)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ dilst nepārtraukti vai nemainās, λ augot no $-\infty$ līdz $+\infty$.

Speciālajā gadījumā pastāv vēl noteikumi:

$\ell > 0$ intervallā $a \leq x \leq b$ un $\alpha(0)\alpha'(0) \geq 0$, $\beta(0)\beta'(0) \geq 0$.

Lai pierādītu bezgala daudz īpatnējo vērtību eksistenci robežproblēmai (1), pieņēmām, ka tās diferenciālvienādojuma koeficienti izpilda noteikumus

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} - \frac{\max G}{\max \mathcal{K}} = +\infty, \quad \lim_{\lambda \to \Lambda_1} - \frac{\min G}{\min \mathcal{K}} = -\infty.$$

Pārrakstīsim robežproblēmas (18) diferenciālvienādojumu ar ~~xvi~~ saistītā veidā

$$\frac{d}{dx}(xu') - (\ell - \lambda g)u = 0,$$

un pierādīsim, ka šim vienādojumam bez kāda pieņēmuma pastāv iepriekšējie noteikumi

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} - \frac{\max G}{\max \mathcal{K}} = \lim_{\lambda \to +\infty} - \frac{\max(\ell - \lambda g)}{\max x} = +\infty$$

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_1} - \frac{\min G}{\min \mathcal{K}} = \lim_{\lambda \to -\infty} - \frac{\min(\ell - \lambda g)}{\min x} = -\infty.$$

Tiešām, ja λ ir pietiekoši liels, $\max(\ell - \lambda g) < 0$, jo $\ell - \lambda g$ tad mazāks par nulli intervallā $a \leq x \leq b$, $\max x > 0$, jo $x > 0$ intervallā $a \leq x \leq b$, tādēļ

$$\lim_{\lambda \to +\infty} - \frac{\max(\ell - \lambda g)}{\max x} = +\infty.$$

Tāpat varam noskaidrot, ka $\lim_{\lambda \to -\infty} - \frac{\min(\ell - \lambda g)}{\min x} = -\infty.$

Bez kāda pieņēmuma pastāv arī citi oscillāciju teorēmas pierādīšanai vajadzīgie noteikumi. Tā vienai un tai pašai x vērtībai $\ell - \lambda g$ samazinājas, bet x nemainās, λ augot. 1. oscillāciju teorēmas dēļ tad varam teikt, ka robežproblēmai (18) intervallā $-\infty < \lambda < +\infty$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ un ka katrai īpatnējai vērtībai atbilst tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija, kuŗai tik daudz saknu intervallā $a < x < b$, kāds attiecīgas īpatnējās vērtības indeks. Īpatnējās vērtības $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots$ ir sakārtotas augošā kārtībā.

Pierādīsim, ka speciālajā gadījumā visas bezgala daudzās īpatnējās vērtības pozitīvas.

$\ell > 0$ dod, ka $\min \ell > 0$, un tad mūms ir 2. oscillāciju teorēmā apskatītais gadījums:

$$\min G(\Lambda_1) > 0, \alpha(\Lambda_1)\alpha'(\Lambda_1) \geq 0, \beta(\Lambda_1)\beta'(\Lambda_1) \geq 0.$$

Šoreiz $\lambda_1 = 0$.

Robežproblēmai (18) 2.oscillāciju teorēmas dēļ intervallā $0 \le \lambda < +\infty$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību. Tās arī ir visas īpatnējās vērtības.

Starp $-\infty$ un 0 nekādu (18) īpatnējo vērtību nav, jo $\frac{k(b)u'(b,\lambda)}{u(b,\lambda)}$, λ mainoties no $-\infty$ līdz 0, visu laiku > 0 /pierādījumu skat. 1.un 2.oscillāciju teorēmā/, bet $-\frac{k(b)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)} < 0$, jo tas aug nepārtraukti vai nemainās, λ augot un $-\frac{k(b)\beta'(0)}{\beta(0)}$ ir negatīvs.

2. $x > 0$ un $g < 0$ intervallā $a \le x \le b$.

$\frac{k(a)\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$ un $\frac{k(b)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ aug nepārtraukti vai nemainās, λ mainoties no $-\infty$ līdz $+\infty$.

Speciālajā gadījumā pastāv arī noteikumi:

$l \geq 0$ intervallā $a \le x \le b$ un $\alpha(0)\cdot\alpha'(0) \geq 0$, $\beta(0)\cdot\beta'(0) \geq 0$.

Šo gadījumu var novest uz iepriekš apskatīto, ja $-\lambda$ apzīmē ar ν. Tad $l - \lambda g = l + \nu g$ un ν tāpat mainās intervallā $-\infty < \nu < +\infty$.

Ikvienai x vērtībai $l + \nu g$ dilst, ν augot, bet aug, ν dilstot. Tādēļ

$$\lim_{\nu \to +\infty} -\frac{\max(l+\nu g)}{\max x} = +\infty, \quad \lim_{\nu \to -\infty} -\frac{\min(l+\nu g)}{\min x} = -\infty.$$

Izteiksmes $\frac{k(a)\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$ un $\frac{k(b)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}$, liekot λ vietā $-\nu$, kļūst par izteiksmēm $\frac{k(a)\alpha'(-\nu)}{\alpha(-\nu)}$ un $\frac{k(b)\beta'(-\nu)}{\beta(-\nu)}$, kas aug nepārtraukti vai nemainās, ν augot.

1.gadījuma dēļ robežproblēmai

$$(19)\begin{cases} \frac{d}{dx}(ku') - (l + \nu g)u = 0 \\ \alpha'(-\nu)u(a) - \alpha(-\nu)u'(a) = 0 \\ \beta'(-\nu)u(b) + \beta(-\nu)u'(b) = 0. \end{cases}$$

starp $-\infty$ un $+\infty$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību $\nu_0, \nu_1, \ldots$

Katrai īpatnējai vērtībai atbilst tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija, un īpatnējo vērtību indeks atkal norāda atbilstošās īpatnējās funkcijas sakņu skaitu intervallā $a < x < b$.

Robežproblēmu (19) dabūjam no robežproblēmas (18), apmainot λ ar $-\nu$, tādēļ viss tikko teiktais noder arī robežproblēmai (18). Robežproblēmas (18) īpatnējās vērtības atšķiras no (19)

īpatnējām vērtībām vienīgi ar zīmi.
Speciālajā gadījumā, tāpat kā pirmā gadījumā, varam pierādīt, ka visas bezgala daudzās robežproblēmas (19) īpatnējās vērtības $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \dots$ ir pozitīvas. Skaidrs, ka robežproblēmas (18) īpatnējās vērtības tad ir negatīvas.
3. $\varkappa > 0$, g maina zīmi un $\ell \geq 0$ intervallā $a \leq x \leq b$ un

$\alpha(0) \cdot \alpha'(0) \geq 0$, $\beta(0) \cdot \beta'(0) \geq 0$.

$\frac{\varkappa(a)\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$ un $\frac{\varkappa(b)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ dilst nepārtraukti vai nemainās, λ augot no 0 līdz $+\infty$ un λ dilstot no 0 līdz $-\infty$.
a/. Pieņemsim, ka λ mainās intervallā $0 \leq \lambda < +\infty$.
Dalīsim visus diferenciālvienādojuma $\frac{d}{dx}(\varkappa u') - (\ell - \lambda g) = 0$ locekļus ar λ. Tad dabūjam diferenciālvienādojumu

$$(20) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\varkappa}{\lambda} u'\right) - \left(\frac{\ell}{\lambda} - g\right) u = 0.$$

λ augot vienam un tam pašam x, funkcijas $K = \frac{\varkappa}{\lambda}$ un $G = \frac{\ell}{\lambda} - g$ nepārtraukti dilst.
Oscillāciju teorēmas pierādījumam vēl nepieciešams, lai

$$\frac{\varkappa(a)\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)} \quad un \quad \frac{\varkappa(b)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}$$

diltu vai vismaz nemainītos, λ augot.
No tā, ka $\frac{\varkappa(a)\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)}$ un $\frac{\varkappa(b)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)}$ dilst nepārtraukti vai nemainās, λ augot no 0 līdz $+\infty$, dabūjam, ka arī

$$\frac{K(a)\alpha'(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \frac{\varkappa(a)\alpha'(\lambda)}{\lambda\,\alpha(\lambda)} \quad un \quad \frac{K(b)\beta'(\lambda)}{\beta(\lambda)} = \frac{\varkappa(b)\beta'(\lambda)}{\lambda\,\beta(\lambda)}$$

dilst nepārtraukti vai nemainās, λ augot no 0 līdz $+\infty$.
Noskaidrosim

$$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} - \frac{\max G}{\max K} = \lim_{\lambda \to +\infty} - \frac{\max\left(\frac{\ell}{\lambda} - g\right)}{\max \frac{\varkappa}{\lambda}}$$

vērtību intervallā $a \leq x \leq b$.
Ļoti lielai λ vērtībai $G = \frac{\ell}{\lambda} - g$ zīmi nosaka $-g$. g maina zīmi intervallā $a \leq x \leq b$, un tādēļ arī G, kad λ pietiekoši liels, maina zīmi šai intervallā, kam seko $\max G > 0$ un pēdējam

$$\lim_{\lambda \to +\infty} - \frac{\max G}{\max K} = -\infty,$$

jo $\max K = \max \frac{\varkappa}{\lambda} > 0$ un tas tiecas uz nulli, ja λ tiecas uz $+\infty$.
Atrastā sakarība neder bezgala daudz īpatnējo vērtību eksistences pierādīšanai. Tādēļ rīkosimies tā: ir dots, ka g maina

zīmi intervallā $a \leq x \leq b$. Sameklēsim tādu minētā intervalla daļu $a' \leq x \leq b'$, kuŗā $-g$ visu laiku negatīvs. Tad intervallā $a' \leq x \leq b'$ ļoti lielai λ vērtībai $\max G < 0$, bet $-\max G > 0$ un tādēļ

$$\lim_{\lambda \to +\infty} - \frac{\max G}{\max K} = +\infty.$$

Pēdējās sakarības dēļ diferenciālvienādojuma (20) ikvienam atrisinājumam, ja λ cik patīk liels, ir cik patīk daudz sakņu intervallā $a' < x < b'$ un, tā kā $a' \leq x \leq b'$ ir $a \leq x \leq b$ daļa, tad arī intervallā $a < x < b$.
Robežproblēma (18), kā to redzējām, apmierina visus 2. oscillāciju teorēmas noteikumus, tādēļ tai intervallā $0 \leq \lambda < +\infty$ bezgala daudz īpatnējo vērtību $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n, \dots$, kas sakārtotas augošā kārtībā, un katrai īpatnējai vērtībai atbilst viena vienīga lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija, kuŗai tik daudz sakņu intervallā $a < x < b$ kāds attiecīgās īpatnējās vērtības indeks.
b/. λ mainās intervallā $-\infty < \lambda \leq 0$.
Šo gadījumu var novest uz a/. gadījumu, apzīmējot λ ar $-\nu$.
Robežproblēma (18) tad pāriet par (19) un ν mainās intervallā $0 \leq \nu < +\infty$. Robežproblēmai (19) intervallā $0 \leq \nu < +\infty$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \dots$, kas sakārtotas augošā kārtībā un katrai īpatnējai vērtībai atbilst tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija, kuŗai tik daudz sakņu intervallā $a < x < b$, kāds attiecīgās īpatnējās vērtības indeks.
Robežproblēmai (18), tā kā $\lambda = -\nu$ ir savukārt starp 0 un $-\infty$ bezgala daudz īpatnējo vērtību $\lambda_0, \lambda_1, \dots$, kas sakārtotas dilstošā kārtībā, un arī tām atbilst katrai tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija ar tik daudz saknēm intervallā $a < x < b$, kāds attiecīgās īpatnējās vērtības indeks.
c/. λ mainās intervallā $-\infty < \lambda < +\infty$.
Sadalam šo intervallu divi intervallos

$$0 \leq \lambda < +\infty \quad \text{un} \quad 0 > \lambda > -\infty.$$

a/. gadījuma dēļ intervallā $0 \leq \lambda < +\infty$ ir bezgala daudz robežproblēmas (18) īpatnējo vērtību. Minētās īpatnējās vērtības visas ir pozitīvas un tādēļ apzīmēsim tās ar

$$\lambda_0^+, \lambda_1^+, \dots \lambda_n^+; \dots$$

Šīs īpatnējās vērtības sakārtotas augošā kārtībā. Katrai īpatnējai vērtībai atbilst viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija ar tik daudz saknēm intervallā $a<x<b$, kāds īpatnējās vērtības indeks.

b/. gadījuma dēļ arī intervallā $0>\lambda>-\infty$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību, kuŗas apzīmēsim ar

$$\bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_x, \dots,$$

jo tās visas negatīvas. Šīs īpatnējās vērtības atkal sakārtotas dilstošā kārtībā. Ikvienai īpatnējai vērtībai atbilstošās īpatnējās funkcijas sakņu skaits intervallā $a<x<b$ atkal ir vienlīdzīgs ar īpatnējās vērtības indeku.

Tā tad, ja g intervallā $a\leq x\leq b$ maina zīmi un λ mainās intervallā $-\infty<\lambda<+\infty$, tad robežproblēmai (18) ir intervallā $-\infty<\lambda<+\infty$ bezgala daudz pa divi tādu īpatnējo vērtību $\overset{+}{\lambda}_x, \bar{\lambda}_x$ $(x=0,1,\dots)$, kuŗām atbilst īpatnējās funkcijas ar vienādu sakņu skaitu intervallā $a<x<b$. Ar to šis gadījums atšķiras no gadījuma, kad g intervallā $a\leq x\leq b$ zīmi nemaina.

Ja $l=0$ un $\alpha'(0)=\beta'(0)=0$, tad robežproblēmas (18) īpatnējās vērtības $\overset{+}{\lambda}_0=\bar{\lambda}_0=0$. To dabūjam ar 2. oscillāciju teorēmas un a/. un b/. gadījuma palīdzību.

Pierādīsim, ka robežproblēmai (18) nav kompleksu īpatnējo vērtību, ja x, g, l ir reālas, viennozīmīgas un nepārtrauktas x funkcijas intervallā $A\leq x\leq B$, $x>0$ un g nemaina zīmi intervallā $a\leq x\leq b$ / a un b ir divi kaut kādi intervallā $A\leq x\leq B$ punkti/ un $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ir reālas konstantes.

1. pierādījums. Pieņemsim pretējo, ka robežproblēmai (18) ir kompleksa īpatnējā vērtība $\lambda'=\mu+i\nu$. Robežproblēmas (18) diferenciālvienādojuma koeficients $l-\lambda g$ ir analītiska λ funkcija, un tādēļ kādas diferenciālvienādojumu atrisinājumu eksistences teorēmas dēļ tā atrisinājumi arī ir analītiskas λ funkcijas, t.i.

$$u=y+iz$$

y un z ir reālas x, μ, ν funkcijas un tāpat kā u apmierina abus robežnoteikumus, jo, ieliekot robežnoteikumos u un u' vietā $y+iz$ un $y'+iz'$ un atdalot reālās daļas no imaginārājām, dabūjam no pirmā robežnoteikuma

$$(21)\begin{cases}\alpha' y(a) - \alpha y'(a) = 0\\ \alpha' z(a) - \alpha z'(a) = 0\end{cases}$$

un no otrā

$$(22)\begin{cases}\beta' y(b) + \beta y'(b) = 0\\ \beta' z(b) + \beta z'(b) = 0.\end{cases}$$

Ievietosim robežproblēmas /18/ diferenciālvienādojumā λ un u vietā to nozīmes, tad

$$\frac{d}{dx}[\varkappa(y'+iz')] + [(\mu+i\nu)g - \ell](y+iz) = 0$$

un, atdalot šai identitātei reālo daļu no imaginārās

$$(23)\begin{cases}\frac{d}{dx}(\varkappa y') + (\mu y - \nu z)g - \ell y = 0\\ \frac{d}{dx}(\varkappa z') + (\mu z + \nu y)g - \ell z = 0.\end{cases}$$

Reizinot pirmo ar z un otro ar y un atņemot no pirmā otro, dabūjam

$$\frac{d}{dx}(\varkappa zy' - \varkappa z'y) + (\mu y - \nu z)zg - (\mu z + \nu y)gy = 0$$

$$\frac{d}{dx}[\varkappa(zy' - z'y)] + (\mu yz - \nu z^2 - \mu yz - \nu y^2)g = 0$$

$$\frac{d}{dx}[\varkappa(zy' - z'y)] - (z^2 + y^2)\nu g = 0$$

$$\frac{d}{dx}[\varkappa(y'z - yz')] = \nu g(y^2 + z^2)$$

un, integrējot no a līdz b,

$$[\varkappa(y'z - yz')]_a^b = \int_a^b \nu g(y^2 + z^2)dx.$$

Šīs identitātes kreisā puse ir nulle, jo y un z punktos a un b apmierina robežnoteikumus.

/No pirmā robežnoteikuma dabūjam, ka

$$y(a) = c_1\alpha, \quad y'(a) = c_1\alpha'$$

$$z(a) = c_2\alpha, \quad z'(a) = c_2\alpha'.$$

Tādēļ $y'(a)z(a) - y(a)z'(a) = c_1c_2\alpha\alpha' - c_1c_2\alpha'\alpha = 0.$

Tāpat varam pierādīt, ka $y'(b)z(b) - y(b)z'(b) = 0$/.

Identitātes labā puse turpretim, tāpēc ka g intervallā $a \le x \le b$

zīmi nemaina un nav identiski nulle un $y^2+z^2>0$, ir nulle vienīgi tad, ja $\vartheta=0$. Bet $\vartheta=0$ dod, ka robežproblēmai (18) nav kompleksu īpatnējo vērtību.

Pierādījuma gaita rāda, ka $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ ir reālas konstantes ir nepieciešams, lai noskaidrotu, ka y un z apmierina abus robežnoteikumus. Ja $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ būtu kompleksā mainīgā λ funkcijas, tad robežnoteikumos tāds reālās daļas atdalījums no imaginārās kā iepriekšējais nebūtu iespējams, un tādēļ y un z neapmierinātu abus robežnoteikumus.

2. pierādījums. / Poisson'a pierādījums /.

Apzīmēsim ar λ' un λ'' robežproblēmas (18) divas īpatnējās vērtības un ar u_1 un u_2 tām atbilstošās īpatnējās funkcijas. Ievietojot pēc kārtas λ', u_1 un λ'', u_2 robežproblēmas (18) diferenciālvienādojumā, dabūjam identitātes

$$\frac{d}{dx}(\varkappa u_1') - (l - \lambda' g)u_1 = 0$$
$$\frac{d}{dx}(\varkappa u_2') - (l - \lambda'' g)u_2 = 0,$$

reizinot tās attiecīgi ar u_2 un u_1, atņemot no pirmās otro un starpību integrējot no a līdz b, dabūjam Sturm'a formulu

$$\left[\varkappa(u_1'u_2 - u_1u_2')\right]_a^b + \int_a^b (\lambda' - \lambda'')g u_1 u_2 \, dx = 0$$

u_1 un u_2 ir robežproblēmas (18) atrisinājumi, t.i. tie punktos a un b apmierina dotos robežnoteikumus, tādēļ

$$\left[\varkappa(u_1'u_2 - u_1u_2')\right]_a^b = 0.$$

Sturm'a formula tad dod, ka

$$(24) \quad \int_a^b g u_1 u_2 \, dx = 0, \quad \text{jo } \lambda' \neq \lambda''.$$

Ar (24) palīdzību pierādīsim, ka, pieņemot, ka λ' un λ'' ir kompleksas īpatnējās vērtības, nonākam pie pretrunas.

Pieņemsim, ka robežproblēmai (18) ir kompleksa īpatnējā vērtība $\lambda'=\mu+i\vartheta$. Pirmajā pierādījumā jau noskaidrojām, ka robežproblēmas (18) atrisinājums u_1, tad ir analitiska λ' funkcija, t.i.

$$u_1 = y + iz$$

pie kam y un z ir reālas x, μ, ν funkcijas. Redzējām arī, ka y un z, tāpat kā u_1 apmierina abus robežnoteikumus. Pierādīsim, ka arī $\lambda'' = \mu - i\nu$ ir robežproblēmas (18) īpatnējā vērtība un $u_2 = y - iz$ tai atbilstošā īpatnējā funkcija. Reizinot (23) otro identitāti ar $-i$ un saskaitot ar pirmo, dabūjam identitāti

$$\frac{d}{dx}\left[\alpha(y' - iz')\right] + \left[(\mu + i\nu)g - \ell\right](y - iz) = 0,$$

kas rāda, ka $y - iz$ ir robežproblēmas (18) diferenciālvienādojuma atrisinājums, ja λ ir $\mu - i\nu$. Tādā pat ceļā ar (21) un (22) palīdzību atrodam, ka $y - iz$ arī apmierina abus robežnoteikumus, citiem vārdiem, ir robežproblēmas (18) atrisinājums. Ieliksim formulā (24) u_1 un u_2 vietā $y + iz$ un $y - iz$. Tad dabūjam

$$(25)\quad \int_a^b g(y^2 + z^2)\,dx = 0.$$

Šī vienlīdzība ir neiespējama, jo g intervallā $a \le x \le b$ zīmi nemaina un $y^2 + z^2 > 0$, tādēļ ka y un z ir reālas x funkcijas. Tas rāda, ka robežproblēmai (18) nav kompleksu īpatnējo vērtību.

Pierādīsim, ka arī tai gadījumā, kad g maina zīmi, $\alpha > 0$, $\ell \geq 0$ intervallā $a \le x \le b$ un $\alpha\alpha' \geq 0$ un $\beta\beta' \geq 0$, pie kam $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ atkal ir reālas konstantes, robežproblēmai (18) nav kompleksu īpatnējo vērtību.

Pieņemsim pretējo, ka robežproblēmas (18) īpatnējā vērtība λ' ir kompleksa, t.i. $\lambda' = \mu + i\nu$. Atbilstošā īpatnējā funkcija u ir analītiska λ funkcija un tādēļ $u = y + iz$.

Reizināsim (23) pirmo identitāti ar y, otro ar z, pēc tam saskaitīsim tās un iznākumu integrēsim robežās no a līdz b. Tad dabūjam

$$(26)\quad \left[\alpha(yy' + zz')\right]_a^b - \int_a^b \alpha(y'^2 + z'^2)\,dx + \int_a^b g(y^2 + z^2)\,dx - \int_a^b \ell(y^2 + z^2)\,dx = 0.$$

Identitātes (26) trešais saskaitāmais (25) dēļ ir nulle un ceturtais saskaitāmais negatīvs vai nulle, jo $\ell \geq 0$. Noskaidrosim pirmā saskaitāmā zīmi.

y un z punktos a un b apmierina abus robežnoteikumus, tādēļ

$$y(a) = c_1\alpha,\quad y(b) = c_2\beta,\quad z(a) = c_3\alpha,\quad z(b) = c_4\beta$$

$$y'(a) = c_1\alpha',\quad y'(b) = -c_2\beta',\quad z'(a) = c_3\alpha',\quad z'(b) = -c_4\beta'$$

/ c_1, c_2, c_3, c_4 ir kaut kādas konstantes/.
Ievietojot šīs $y(a), y'(a), y(b), y'(b), z(a), z'(a), z(b), z'(b)$ nozīmes izteiksmē $[x(yy'+zz')]_a^b$, dabūjam

$$[x(yy'+zz')]_a^b = x(b)y(b)y'(b) + x(b)z(b)z'(b) + x(a)y(a)y'(a) - x(a)z(a)z'(a) = -x(b)c_2^2\beta\beta' - x(b)c_4^2\beta\beta' - x(a)c_1^2\alpha\alpha' - x(a)c_3^2\alpha\alpha' \leq 0,$$

jo $\alpha\alpha' \geq 0, \beta\beta' \geq 0$, pie kam nulle ir vienīgi tad, ja $\alpha\alpha' = 0, \beta\beta' = 0$. (26) otrais saskaitāmais $-\int_a^b x(y'^2+z'^2)dx < 0$, jo $x > 0$ un $y' \neq 0$ un $z' \neq 0$. Pieņemot, ka $y' = 0$ un $z' = 0$, dabūjam, ka arī $u' = 0$. Liekot robežproblēmas (18) diferenciālvienādojumā λ vietā $\mu + i\nu$ un u' vietā nulli, dabūjam

$$[(\mu+i\nu)g - l]u = 0.$$

u ir funkcija, kas nav identiski nulle, jo atrisinājumu $u \equiv 0$ neapskatām. Tādēļ pēdējā vienlīdzība dod sakarību

$$(\mu + i\nu)g - l = 0$$

un, ja atdalam reālo daļu no imaginārās, tad dabūjam

$$\nu g = 0.$$

Tā kā pieņēmuma dēļ, ka robežproblēmai (18) ir kompleksa īpatnējā vērtība $\nu \neq 0$, tad $g = 0$. Bet tas nevar būt, jo g intervallā $a \leq x \leq b$ maina zīmi. Tādēļ saskaitāmais $-\int_a^b x(y'^2+z'^2)dx$ tiešām negatīvs, kam seko, ka (26) kreisā puse vienmēr < 0. Labā puse turpretim ir nulle. Šī pretruna rāda, ka robežproblēmai (18), ja tās koeficienti izpilda iepriekš minētos noteikumus, nav kompleksu īpatnējo vērtību.

Apskatot 3. oscillāciju teorēmu, redzējām, ka robežproblēmas (18) katrai īpatnējai vērtībai atbilst tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija, citiem vārdiem, visas robežproblēmas īpatnējās vērtības ir vienkāršas. Noskaidrosim, vai šīs īpatnējās vērtības ir robežproblēmas (18) īpatnējo vērtību vienādojumu vienkāršas, vai vairākkārtīgas saknes.

Apzīmēsim ar u_1 un u_2 robežproblēmas (18) diferenciālvienādojuma lineāri neatkarīgos atrisinājumus, tad īpatnējo vērtību vienādojums minētai robežproblēmai ir

$$\begin{vmatrix} \alpha' u_1(a) - \alpha u_1'(a) & \alpha' u_2(a) - \alpha u_2'(a) \\ \beta' u_1(b) + \beta u_1'(b) & \beta' u_2(b) + \beta u_2'(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Ja

$$(27)\ \begin{cases} u_1(a,\lambda) = \alpha & u_1'(a,\lambda) = \alpha' \\ u_2(a,\lambda) = \gamma & u_2'(a,\lambda) = \gamma' \end{cases}$$

un

$$(28)\ \alpha'\gamma - \alpha\gamma' = 1,$$

tad īpatnējo vērtību vienādojums pāriet vienkāršākā veidā

$$(29)\ \beta' u_1(b,\lambda) + \beta u_1'(b,\lambda) = 0.$$

Apskatīsim vispirms gadījumu, kad g intervallā $a \le x \le b$ zīmi nemaina, $r > 0$ šai intervallā un $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ir konstantes. Apzīmēsim (29) kreiso pusi ar $F(\lambda)$, t.i.

$$F(\lambda) = \beta' u_1(b,\lambda) + \beta u_1'(b,\lambda).$$

Ja λ ir $F(\lambda)$ divkārša vai vairākkārtīga sakne, tad arī $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = 0$. Aprēķināsim $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$ vērtību, ja λ ir $F(\lambda) = 0$ sakne.

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \beta' \frac{\partial u_1(b,\lambda)}{\partial \lambda} + \beta \frac{\partial u_1'(b,\lambda)}{\partial \lambda}$$

$u_1(a,\lambda) = \alpha$ un $u_1'(a,\lambda) = \alpha'$, tādēļ

$$\frac{\partial u_1(a,\lambda)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial u_1'(a,\lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

Diferencēsim pēc λ identitāti

$$\frac{d}{dx}(r u_1') + (\lambda g - l) u_1 = 0,$$

tad dabūjam

$$\frac{d}{dx}\left[r \frac{\partial u_1'}{\partial \lambda}\right] + (\lambda g - l) \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = -g u_1.$$

Šī vienlīdzība ir lineārs nehomogēns diferenciālvienādojums, ja pieņemam, ka $\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}$ ir nezināmā funkcija. Attiecīgā homogēnā diferenciālvienādojuma atrisinājumi u_1 un u_2 ir doti, un tādēļ $\frac{\partial u_1}{\partial \lambda}$ varam atrast ar Lagrange integrācijas konstantu variācijas metodi.

Pieņemsim, ka

$$(30)\quad \frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = C_1 u_1 + C_2 u_2$$

C_1 un C_2 ir pagaidām nezināmas x un λ funkcijas.
Diferencējam šo vienlīdzību pēc x, tad

$$(31)\quad \frac{\partial u_1'}{\partial \lambda} = C_1 u_1' + C_2 u_2' + C_1' u_1 + C_2' u_2 .$$

Pieņemam, ka $C_1' u_1 + C_2' u_2 = 0$, un sastādam

$$(32)\quad \frac{\partial u_1''}{\partial \lambda} = C_1 u_1'' + C_2 u_2'' + C_1' u_1' + C_2' u_2' .$$

Reizinot (30), (31) un (32) pēc kārtas ar $(\lambda g - \ell)$, x' un x, saskaitot un ievērojot, ka u_1 un u_2 ir attiecīgā homogēnā vienādojuma atrisinājumi, dabūjam, ka

$$C_1' u_1' + C_2' u_2' = -\frac{g u_1}{x} .$$

Nezināmās funkcijas C_1' un C_2' atradīsim no algebrisko vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} C_1' u_1 + C_2' u_2 = 0 \\ C_1' u_1' + C_2' u_2' = -\frac{g u_1}{x} . \end{cases}$$

Šīs vienādojumu sistēmas sistēmas determinante ir

$$u_1 u_2' - u_1' u_2 = C e^{-\int \frac{x'}{x} dx}$$

jeb

$$(33)\quad u_1 u_2' - u_1' u_2 = \frac{C}{x(x)}$$

C ir kaut kāda konstante, kuŗu noteiksim, izlietojot noteikumus (27) un (28). Tad no (33) dabūjam, ka

$$1 = -\frac{C}{x(a)} ;$$

kas dod

$$C = -x(a) .$$

Formula (33), liekot C vietā $-x(a)$, pāriet par

$$(34)\quad u_1 u_2' - u_2 u_1' = -\frac{x(a)}{x(x)}$$

Beidzot

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ -\frac{gu_1}{x} & u_2' \end{vmatrix}}{-\frac{x(a)}{x(x)}} = -\frac{g u_1 u_2}{x(a)}, \quad C_2' = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u_1' & -\frac{gu_1}{x} \end{vmatrix}}{-\frac{x(a)}{x(x)}} = \frac{g u_1^2}{x(a)}.$$

Integrējot atrodam,ka

$$C_1 = \int_a^x \frac{g(t)u_1(t,\lambda)u_2(t,\lambda)}{x(a)}dt + k_1$$

$$C_2 = \int_a^x \frac{g(t)u_1^2(t,\lambda)}{x(a)}dt + k_2$$

/ k_1 un k_2 ir kaut kādas konstantes/.
Liekot formulā (30) C_1 un C_2 vietās to nozīmes,dabūjam

$$\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} = -u_1\int_a^x \frac{g(t)u_1(t,\lambda)u_2(t,\lambda)}{x(a)}dt + k_1u_1 + u_2\int_a^x\frac{g(t)u_1^2(t,\lambda)}{x(a)}dt + k_2u_2$$

un pēc pārveidojumiem

$$(35)\quad \frac{\partial u_1(x,\lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^x \frac{u_1(t,\lambda)g(t)}{x(a)}\left[u_1(t,\lambda)u_2(x,\lambda) - u_1(x,\lambda)u_2(t,\lambda)\right]dt + $$
$$+ k_1u_1(x,\lambda) + k_2u_2(x,\lambda).$$

Sastādam

$$\frac{\partial u_1'(x,\lambda)}{\partial \lambda} = \int_a^x \frac{u_1(t,\lambda)g(t)}{x(a)}\left[u_1(t,\lambda)u_2'(x,\lambda) - u_1'(x,\lambda)u_2(t,\lambda)\right]dt + $$
$$+ k_1u_1'(x,\lambda) + k_2u_2'(x,\lambda)$$

k_1 un k_2 noteiksim izlietojot noteikumus $\frac{\partial u_1(a,\lambda)}{\partial\lambda} = 0$, $\frac{\partial u_1'(a,\lambda)}{\partial\lambda} = 0$.
No (35) un (36) dabūjam k_1 un k_2 atrašanai vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} k_1u_1(a,\lambda) + k_2u_2(a,\lambda) = 0 \\ k_1u_1'(a,\lambda) + k_2u_2'(a,\lambda) = 0, \end{cases}$$

kuŗas sistēmas determinante ir

$$u_1(a,\lambda)u_2'(a,\lambda) - u_1'(a,\lambda)u_2(a,\lambda) = \alpha\beta' - \alpha'\beta = -1.$$

Tādēļ $k_1 = k_2 = 0$.
Izteiksmē $\frac{dF}{d\lambda}$ ievietojot $\frac{\partial u_1(b,\lambda)}{\partial\lambda}$ un $\frac{\partial u_1'(b,\lambda)}{\partial\lambda}$ vietā to nozīmes, dabūjam

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \beta' \int_a^b \frac{u_1(t,\lambda)g(t)}{x(a)} \left[u_1(t,\lambda)u_2(b,\lambda) - u_1(b,\lambda)u_2(t,\lambda)\right]dt +$$
$$+\beta \int_a^b \frac{u_1(t,\lambda)g(t)}{x(a)} \left[u_1(t,\lambda)u_2'(b,\lambda) - u_1'(b,\lambda)u_2(t,\lambda)\right]dt$$

un pēc pārveidojumiem

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b \frac{g(t)}{x(a)} \Big\{\left[\beta' u_2(b,\lambda) + \beta u_2'(b,\lambda)\right] u_1^2(t,\lambda) -$$
$$- \left[\beta' u_1(b,\lambda) + \beta u_1'(b,\lambda)\right] u_1(t,\lambda) u_2(t,\lambda)\Big\} dt.$$

Zemintegrāla izteiksmes otrs reizinātājs ir kvadratiska forma /kvadratiska forma $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \frac{1}{a}\left[(ax+by)^2 - (b^2 - ac)y^2\right]$ ir visu laiku ar vienu un to pašu zīmi, t.i. ar a zīmi, ja tās diskriminante $\Delta = b^2 - ac \leq 0$ /, kuŗas dikriminante

$$\Delta = \left[\beta' u_1(b,\lambda) + \beta u_1'(b,\lambda)\right]^2$$

ir nulle, ja λ ir $F(\lambda) = \beta' u_1(b,\lambda) + \beta u_1'(b,\lambda) = 0$ sakne. Tādēļ pie šīs λ vērtības minētā forma intervallā $a \leq x \leq b$ zīmi nemaina, un to nosaka $\beta' u_2(b,\lambda) + \beta u_2'(b,\lambda)$, kas nav nulle, jo citādi u_1 un u_2 būtu lineāri atkarīgi. Arī pirmais zemintegrāla izteiksmes reizinātājs $\frac{g(t)}{x(a)}$ intervallā $a \leq x \leq b$ zīmi nemaina un $\neq 0$, jo dots, ka g un x intervallā $a \leq x \leq b$ zīmi nemaina. Tādēļ zemintegrāla izteiksme visu laiku ar vienu zīmi un $\neq 0$, kam seko, ka $F'(\lambda) \neq 0$, ja λ ir $F(\lambda) = 0$ sakne.
Tā tad. robežproblēmas (18) īpatnējo vērtību vienādojumam $F(\lambda) = 0$, ja $x > 0$ un g nemaina zīmi intervallā $a \leq x \leq b$ un α, α', β, β' ir konstantes, ir tikai vienkāršas saknes.
Tagad apskatīsim gadījumu, kad g maina zīmi, $x > 0$, $c \geq 0$ intervallā $a \leq x \leq b$, $\alpha\alpha' \geq 0$, $\beta\beta' \geq 0$ un $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ir konstantes.
Pieņemsim, ka u ir robežproblēmas atrisinājums. Reizināsim identitāti

$$\frac{d}{dx}(xu') + (\lambda g - c)u = 0$$

ar u un integrēsim pēc tam robežās no a līdz b, tad dabūjam

$$(37) \quad \lambda \int_a^b g u^2 dx = -\left[x u u'\right]_a^b + \int_a^b x u'^2 dx + \int_a^b c u^2 dx.$$

No robežnoteikumiem

$$\alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0$$

$$\beta' u(b) + \beta u'(b) = 0.$$

Dabūjam,ka

$$u(a) = c_1\alpha, \quad u(b) = c_2\beta$$

$$u'(a) = c_1\alpha', \quad u'(b) = -c_2\beta'$$

/ c_1 un c_2 ir kaut kādas konstantes/.
Tādēļ

$$-[\varkappa u u']_a^b = \varkappa(b) c_2^2 \beta\beta' + \varkappa(a) c_1^2 \alpha\alpha' \geqslant 0$$

pie kam nulli dabūjam vienīgi tad, ja $\alpha\alpha' = 0$ un $\beta\beta' = 0$.
Arī

$$\int_a^b l u^2 dx \geqslant 0,$$

jo $l \geqslant 0$ un $u^2 > 0$.
Otrais loceklis

$$\int_a^b \varkappa u'^2 dx > 0,$$

jo $\varkappa > 0$ un pagaidām gadījumu $u' = 0$ izslēdzam.
Identitātes (37) labā puse tādēļ vienmēr pozitīva,kas dod, ka arī kreisajai pusei jābūt pozitīvai,t.i.

$$(38) \quad \lambda \int_a^b g u^2 dx > 0.$$

Apskatīsim īpatnējo vērtību vienādojumu

$$F(\lambda) = \beta' u_1(b,\lambda) + \beta u_1'(b,\lambda) = 0.$$

Pieņemsim,ka λ_1 ir šī vienādojuma sakne.Tai atbilstošā īpatnējā funkcija tad ir $u_1(x,\lambda_1)$.
Diferenciālvienādojuma

$$\frac{d}{dx}(\varkappa u') + (\lambda g - l)u = 0$$

atrisinājumu,kas apmierina pirmo robežnoteikumu apzīmēsim ar $u_1(x,\lambda)$. No identitātēm

$$\frac{d}{dx}\left[\varkappa u_1'(x,\lambda_1)\right] + (\lambda_1 g - l)u_1(x,\lambda_1) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[\varkappa u_1'(x,\lambda)\right] + (\lambda g - l)u_1(x,\lambda) = 0$$

reizinot tās attiecīgi ar $u_1(x,\lambda)$ un $u_1(x,\lambda_1)$, atņemot no pirmās otro un pēc tam integrējot, dabūjam

$$\left\{x[u_1'(x,\lambda_1)u_1(x,\lambda)-u_1'(x,\lambda)u_1(x,\lambda_1)]\right\}_a^b =$$
$$=-(\lambda_1-\lambda)\int_a^b g(x)u_1(x,\lambda)u_1(x,\lambda_1)dx.$$

$u_1(x,\lambda_1)$ un $u_1(x,\lambda)$ apmierina punktā a robežnoteikumu, $u_1(x,\lambda_1)$ punktā b robežnoteikumu, tādēļ pēdējo identitāti varam pārveidot vienkāršākā veidā, t.i.

$$(39)\ \int_a^b g(x)u_1(x,\lambda_1)u_1(x,\lambda)dx = \frac{x(b)[u_1'(b,\lambda_1)u_1(b,\lambda)-u_1'(b,\lambda)u_1(b,\lambda_1)]}{\lambda-\lambda_1}.$$

No $\beta' u_1(b,\lambda_1)+\beta u_1'(b,\lambda_1)=0$; dabūjam, ja $\beta'\neq 0$, ka $u_1(b,\lambda_1)=\frac{-\beta u_1'(b,\lambda_1)}{\beta'}$
/ Ja $\beta'=0$, tad varam izrēķināt $u_1'(b,\lambda_1)$, jo tad $\beta\neq 0$, tāpēc, ka $|\beta|+|\beta'|>0$. Tālākā pierādījuma gaita šai gadījumā tādi pati kā tad, kad $\beta\neq 0$ /.
Liekot šo $u_1(b,\lambda_1)$ nozīmi identitātē (39), atrodam

$$(40)\int_a^b g(x)u_1(x,\lambda_1)u_1(x,\lambda)dx = \frac{x(b)u_1'(b,\lambda_1)}{\beta'}\cdot\frac{\beta' u_1(b,\lambda)+\beta u_1'(b,\lambda)}{\lambda-\lambda_1}.$$

Identitātes (40) labās puses otrā reizinātāja skaitītājs ir

$$\beta' u_1(b,\lambda)+\beta u_1'(b,\lambda)=F(\lambda)=F(\lambda)-F(\lambda_1),\ \text{jo } F(\lambda_1)=0.$$

Ja $\lambda\to\lambda_1$, tad $\frac{F(\lambda)-F(\lambda_1)}{\lambda-\lambda_1}\to F'(\lambda)$ un identitāte (40) pāriet identitātē

$$\int_a^b g u_1^2(x,\lambda_1)dx=\frac{x(b)u_1'(b,\lambda_1)}{\beta'}\cdot F'(\lambda),$$

kuŗas kreisā puse (38) dēļ nekad nav nulle. Tādēļ arī tās labā puse $\neq 0$, kam seko $F'(\lambda_1)\neq 0$.
No šejienes slēdziens, ka arī tai gadījumā, kad g maina zīmi intervallā $a\leq x\leq b$, $x>0$, $c\geq 0$ minētajā intervallā, $\alpha\alpha'\geq 0$, $\beta\beta'\geq 0$ un $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ ir konstantes, robežproblēmas (18) īpatnējo vērtību vienādojumam nav vairākkārtīgu sakņu, ja vien pieņemam, ka šai robežproblēmai nav atrisinājuma u, kam atvasinājums $u'=0$ visā intervallā $a\leq x\leq b$.
Tagad apskatīsim izņēmuma gadījumu, kad $u'=0$.
Pieņemot, ka $u'=0$, dabūjam, ka $u=0$ vai $u=C$ / C ir konstante, kas nav nulle/.
$u=C$ dod, ka $\lambda g-c=0$ vai $\lambda g=c$ intervallā $a\leq x\leq b$. Ja $\lambda\neq 0$ un $C\neq 0$ šī vienlīdzība nav iespējama, jo dots, ka g maina zīmi,

bet ℓ intervallā $a \leq x \leq b$ lielāks par nulli. Lai minētā vienlīdzība varētu pastāvēt, jāpieņem, ka $\lambda = 0$ un $\ell = 0$ intervallā $a \leq x \leq b$. Ja $\lambda = 0$ identitātes (37) kreisā puse ir nulle, tā tad arī labajai pusei jābūt nullei, citiem vārdiem, tās pirmajam saskaitāmam $[-\varkappa u u']_a^b$, jo $\int_a^b \varkappa u'^2 dx$ un $\int_a^b \ell u^2 dx$ jau ir nulle, tādēļ ka $u' = 0$ un $\ell = 0$. No

$$-[\varkappa u u']_a^b = \varkappa(b) c_2^2 \beta\beta' + \varkappa(a) c_1^2 \alpha\alpha' = 0,$$

atrodam, ka $\beta\beta' = 0$ un $\alpha\alpha' = 0$, kam seko $\alpha' = \beta' = 0$, jo α un β nav nulle, ja $u = C$ un $C \neq 0$.
Tā tad $u' = 0$ un $u = C$ dod $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\ell = 0$, un $\lambda = 0$.
$\lambda = 0$ ir robežproblēmas (18) īpatnējā vērtība, jo tai atbilst atrisinājums $u = C$, kas nav identiski nulle.
Pie tam $\lambda = 0$ ir (18) īpatnējo vērtību vienādojuma divkārša sakne, jo 3. oscillāciju teorēmā redzējām, ka λ_0^+ un λ_0^- abas sakrīt ar nulli, ja $\ell = 0$, $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$.

4. O s c i l l ā c i j u t e o r ē m a:

Mason's, Bôcher's ir pierādījuši oscillāciju teorēmu robežproblēmai

$$(41) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\mathcal{K} u') - G u = 0 \\ u(a) = u(b) \\ u'(a) = u'(b), \end{cases}$$

pie kuŗas nonāca jau Fourier's, pētot siltuma vadīšanu tievā drāts riņķī. Mason's savā pierādījumā lieto integrālvienādojumu, bet Bôcher's Sturm'a metodes. Pierādīsim šo teorēmu pēc Bocher'a parauga.

T e o r ē m a.

Robežproblēmas (41) koeficients $\mathcal{K}$ ir tāda x un G tāda x un λ funkcija intervallā $A \leq x \leq B$ un $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$, ka pastāv oscillāciju teorēma robežproblēmai (1) un tā tad arī tās speciāliem veidiem

$$(42)\begin{cases}\frac{d}{dx}(Ku')-Gu=0\\ u(a)=0\\ u(b)=0\end{cases}\qquad (43)\begin{cases}\frac{d}{dx}(Ku')-Gu=0\\ u'(a)=0\\ u'(b)=0\end{cases}$$

/ a un b ir divi kaut kādi intervallā $A\le x\le B$ punkti/, $\frac{\partial G}{\partial \lambda}$ ir reāla, viennozīmīga un nepārtraukta x un λ funkcija intervallā $A\le x\le B$ un $\Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$. Bez tam robežproblēmas (41) robežnoteikumi ir ar sevi saistīti, t.i. $K(a)=K(b)$.

/ Šo noteikumu dabūjam no vispārīgāka noteikuma $K(a)d_{24}=K(b)d_{13}$, kurā K ir diferenciālvienādojuma $\frac{d}{dx}(Ku')-Gu=0$ koeficients,

$$d_{13}=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix} \quad un \quad d_{24}=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_4\\ \beta_2 & \beta_4\end{vmatrix},$$

pie kam α_i, β_i $(i=1,2,3,4)$ ir lineāri neatkarīgu robežnoteikumu

$$\begin{cases}U_1=\alpha_1 u(a)+\alpha_2 u(b)+\alpha_3 u'(a)+\alpha_4 u'(b)=0\\ U_2=\beta_1 u(a)+\beta_2 u(b)+\beta_3 u'(a)+\beta_4 u'(b)=0\end{cases}$$

koeficienti./

Pastāvot šiem noteikumiem, robežproblēmai (41) intervallā $\Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību $\lambda_0, \lambda_1, \dots$, kas sakārtotas augošā kārtībā.

Izvēlēsimies divus lineāri neatkarīgus robežproblēmas (41) diferenciālvienādojuma atrisinājumus, kas apmierina noteikumus

$$(44)\begin{cases}u_1(a,\lambda)=1 & u_1'(a,\lambda)=0\\ u_2(a,\lambda)=0, & u_2'(a,\lambda)=1.\end{cases}$$

Apzīmēsim ar $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$ robežproblēmas (42) īpatnējās vērtības un ar $\rho_0, \rho_1, \rho_2, \dots$ robežproblēmas (43) īpatnējās vērtības.

Ja $\rho_{2r}\neq\mu_{2r-1}$ vai arī $\rho_{2r}=\mu_{2r-1}$, bet $u_2(b,\mu_{2r-1})\neq 1$ un $u_1'(b,\rho_{2r})\neq 1$, tad intervallā $max(\rho_{2r-1},\mu_{2r-2})<\lambda<min(\rho_{2r+1},\mu_{2r})$

bez λ_α citu īpatnējo vērtību nav.
Ja $\nu_{2\alpha} \neq \mu_{2\alpha-1}$ tad katrai (41) īpatnējai vērtībai atbilst tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija, bet, ja $\nu_{2\alpha} = \mu_{2\alpha-1}$, tad katrai (41) īpatnējai vērtībai atbilst divas lineāri neatkarīgas īpatnējās funkcijas. (41) īpatnējai vērtībai, kas atrodas intervallā $\nu_0 < \lambda < \min(\nu_1, \mu_0)$ vai sakrīt ar ν_0, atbilst tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija.
Robežproblēmas (41) diferenciālvienādojuma atrisinājumu u_1 un u_2 Vronska determinante ir

$$u_1(x,\lambda)u_2'(x,\lambda) - u_1'(x,\lambda)u_2(x,\lambda) = \frac{K(a)}{K(x)},$$

un punktā b tās nozīme

$$(45) \quad u_1(b,\lambda)u_2'(b,\lambda) - u_1'(b,\lambda)u_2(b,\lambda) = \frac{K(a)}{K(b)} = 1, \text{ jo } K(a) = K(b).$$

Sastādīsim robežproblēmas (41) īpatnējo vērtību vienādojumu.
Robežproblēmas (41) diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 .$$

Noteiksim C_1 un C_2 tā, lai u apmierinātu abus robežnoteikumus, t.i. lai pastāvētu vienlīdzības

$$\begin{cases} C_1 u_1(a,\lambda) + C_2 u_2(a,\lambda) = C_1 u_1(b,\lambda) + C_2 u_2(b,\lambda) \\ C_1 u_1'(a,\lambda) + C_2 u_2'(a,\lambda) = C_1 u_1'(b,\lambda) + C_2 u_2'(b,\lambda) . \end{cases}$$

Šīs vienlīdzības varam uzskatīt par divu lineāru algebrisko vienādojumu sistēmu ar nezināmiem C_1 un C_2. Lai minētajai algebrisko vienādojumu sistēmai nebūtu vienīgi atrisinājums $(0,0)$, bet arī citi, tad tās sistēmas determinantei jābūt nullei

$$(46) \quad \begin{vmatrix} 1 - u_1(b,\lambda) & -u_2(b,\lambda) \\ -u_1'(b,\lambda) & 1 - u_2'(b,\lambda) \end{vmatrix} = 0 .$$

To pārveidojot, atrodam, ka

$$1 - u_1(b,\lambda) - u_2'(b,\lambda) + u_1(b,\lambda)u_2'(b,\lambda) - u_1'(b,\lambda)u_2(b,\lambda) = 0$$

un, izlietojot formulu (45),

$$(47) \quad F(\lambda) = u_1(b,\lambda) + u_2'(b,\lambda) - 2 = 0 .$$

Robežproblēmas (41) indeks var būt 2, jo, pieņemot, ka matricas

$$(48)\quad \begin{Vmatrix} 1-u_1(b,\lambda) & -u_2(b,\lambda) \\ -u_1'(b,\lambda) & 1-u_2'(b,\lambda) \end{Vmatrix}$$

rangs ir nulle, t.i. ikviens tās loceklis ir nulle, pretrunu nedabūjam. Robežproblēmai (41) tādēļ var būt kā vienkāršas, tā divkāršas īpatnējās vērtības.

Pirms oscillāciju teorēmas pierādīšanas noskaidrosim, ka robežproblēmas (41) vienkāršās īpatnējās vērtības ir tās īpatnējo vērtību vienādojuma vienkāršas saknes, bet divkāršās īpatnējās vērtības - divkāršas saknes, t.i. ka $F(\lambda)$ pie vienkāršām īpatnējām vērtībām zīmi maina, bet pie divkāršām nemaina. Tam nolūkam sastādīsim

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial u_1(b,\lambda)}{\partial\lambda} + \frac{\partial u_2'(b,\lambda)}{\partial\lambda}.$$

Izteiksim $\frac{\partial u_1(b,\lambda)}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial u_1'(b,\lambda)}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial u_2(b,\lambda)}{\partial\lambda}$, $\frac{\partial u_2'(b,\lambda)}{\partial\lambda}$ atkarībā no u_1 un u_2 tāpat kā pierādījumā, ka robežproblēmas (18) īpatnējo vērtību vienādojumam nav divkāršu sakņu, ja g intervallā $a \le x \le b$ zīmi nemaina. Tad

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1(b,\lambda)}{\partial\lambda} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{u_1(\xi,\lambda)}{K(a)}\left[u_1(\xi,\lambda)u_2(b,\lambda) - u_1(b,\lambda)u_2(\xi,\lambda)\right]d\xi \\[2ex] \dfrac{\partial u_1'(b,\lambda)}{\partial\lambda} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{u_1(\xi,\lambda)}{K(a)}\left[u_1(\xi,\lambda)u_2'(b,\lambda) - u_1'(b,\lambda)u_2(\xi,\lambda)\right]d\xi \\[2ex] \dfrac{\partial u_2(b,\lambda)}{\partial\lambda} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{u_2(\xi,\lambda)}{K(a)}\left[u_1(\xi,\lambda)u_2(b,\lambda) - u_1(b,\lambda)u_2(\xi,\lambda)\right]d\xi \\[2ex] \dfrac{\partial u_2'(b,\lambda)}{\partial\lambda} = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{u_2(\xi,\lambda)}{K(a)}\left[u_1(\xi,\lambda)u_2'(b,\lambda) - u_1'(b,\lambda)u_2(\xi,\lambda)\right]d\xi \end{cases}$$

un

$$(50)\quad \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}\Big\{u_2(b,\lambda)u_1^2(\xi,\lambda) + \left[u_2'(b,\lambda) - u_1(b,\lambda)\right]u_1(\xi,\lambda)u_2(\xi,\lambda) - u_1'(b,\lambda)u_2^2(\xi,\lambda)\Big\}d\xi.$$

Integranda reizinātājs figūriekavās ir lielumu $u_1(\xi,\lambda)$ un $u_2(\xi,\lambda)$ kvadratiska forma, kuŗas diskriminante ir

$$\Delta = \frac{[u_2'(b,\lambda) - u_1(b,\lambda)]^2}{4} + u_1'(b,\lambda)\,u_2(b,\lambda).$$

Pārveidojot to ar formulas (45) palīdzību, dabūjam

$$\Delta = \frac{u_2'^2(b,\lambda) - 2u_1(b,\lambda)u_2'(b,\lambda) + u_1^2(b,\lambda)}{4} - 1 + u_1(b,\lambda)u_2'(b,\lambda)$$

un beidzot

$$\Delta = \left[\frac{u_1(b,\lambda) + u_2'(b,\lambda)}{2}\right]^2 - 1.$$

Ja λ ir $F(\lambda)$ sakne, tad $u_1(b,\lambda) + u_2'(b,\lambda) = 2$ un kvadratiskās formas diskriminante ir nulle, kas rāda, ka pie $F(\lambda)$ saknēm minētā forma, ξ mainoties, zīmi nemaina. Ja izslēdzam divkāršās īpatnējās vērtības, tad forma nekad nav nulle un tās zīmi nosaka vai nu $-u_1'(b,\lambda)$ vai $u_2(b,\lambda)$, kas robežproblēmas (41) vienkāršām īpatnējām vērtībām abi reizē nav nulle.
Pieņemot, ka $u_2(b,\lambda) = u_1'(b,\lambda) = 0$ kādai (41) vienkāršai īpatnējai vērtībai λ, no (46) dabūjam, ka $[1-u_1(b,\lambda)][1-u_2'(b,\lambda)] = 0$, kas dod, ka $u_1(b,\lambda) = 1$, vai arī $u_2'(b,\lambda) = 1$.
Ja $u_1(b,\lambda) = 1$, tad no (47) atrodam, ka arī $u_2'(b,\lambda) = 1$.
Ja $u_2'(b,\lambda) = 1$, tad atkal no (47) atrodam, ka $u_1(b,\lambda) = 1$.
Bet ja kādai λ vērtībai $u_1'(b,\lambda) = u_2(b,\lambda) = 0$ un $u_1(b,\lambda) = u_2'(b,\lambda) = 1$, tad tā ir robežproblēmas (41) divkārša īpatnējā vērtība. Teorēmas noteikumu dēļ arī pārējie integranda reizinātāji $\frac{1}{K(a)}$ un $\frac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}$ intervallā $a \leq x \leq b$ zīmi nemaina, un $\frac{1}{K(a)} > 0$, jo $K(x) > 0$ intervallā $a \leq x \leq b$ un $\frac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda} < 0$, jo G dilst λ augot.
Tam seko, ka λ vērtībām, kas ir (41) vienkāršas īpatnējās vērtības $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$ un ir ar pretēju zīmi kvadratiskās formas zīmei, citiem vārdiem, ar $u_1'(b,\lambda)$ vai $-u_2(b,\lambda)$ zīmi.
Tādēļ ka pie robežproblēmas (41) vienkāršām īpatnējām vērtībām $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \neq 0$, vienkāršās īpatnējās vērtības ir īpatnējo vērtību vienādojuma $F(\lambda) = 0$ vienkāršas saknes, un funkcija $F(\lambda)$ nemaina zīmi pie šīm vērtībām.
Ja λ ir robežproblēmas (41) divkārša īpatnējā vērtība, tad no (50) redzam, ka $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = 0$.
Sastādam

$$\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2} = \int_a^b \frac{\partial^2 G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda^2}\cdot\frac{1}{K(a)}\left\{u_2(b,\lambda)u_1^2(\xi,\lambda) + [u_2'(b,\lambda) - u_1(b,\lambda)]u_1(\xi,\lambda)u_2(\xi,\lambda) - u_1'(b,\lambda)u_2^2(\xi,\lambda)\right\}d\xi +$$

$$+\int_a^b \frac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}\Big\{\frac{\partial u_2(b,\lambda)}{\partial\lambda}u_1^2(\xi,\lambda)+2u_2(b,\lambda)u_1(\xi,\lambda)\frac{\partial u_1(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}+$$

$$+\Big[\frac{\partial u_2'(b,\lambda)}{\partial\lambda}-\frac{\partial u_1(b,\lambda)}{\partial\lambda}\Big]\cdot u_1(\xi,\lambda)u_2(\xi,\lambda)+\big[u_2'(b,\lambda)-u_1(b,\lambda)\big]\frac{\partial u_1(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot u_2(\xi,\lambda)+$$

$$+\big[u_2'(b,\lambda)-u_1(b,\lambda)\big]u_1(\xi,\lambda)\frac{\partial u_2(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}-\frac{\partial u_1'(b,\lambda)}{\partial\lambda}u_2^2(\xi,\lambda)-$$

$$-2u_1'(b,\lambda)u_2(\xi,\lambda)\frac{\partial u_2(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\Big\}d\xi.$$

Pārveidosim šīs vienlīdzības labo pusi ar formulu (49) palīdzību, ievērojot, ka λ ir robežproblēmai (41) divkārša īpatnējā vērtība. Tad

$$\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2}=\int_a^b\frac{\partial G(\xi,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}\Big\{u_1^2(\xi,\lambda)\int_a^b-\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{u_2^2(\eta,\lambda)}{K(a)}d\eta+$$

$$+2u_1(\xi,\lambda)u_2(\xi,\lambda)\int_a^b\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}\cdot u_1(\eta,\lambda)u_2(\eta,\lambda)d\eta+$$

$$+u_2^2(\xi,\lambda)\int_a^b-\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{u_1^2(\eta,\lambda)}{K(a)}d\eta\Big\}d\xi.$$

Izteiksme figūriekavās ir lielumu $u_1(\xi,\lambda)$ un $u_2(\xi,\lambda)$ kvadratiska forma ar diskriminanti

$$\Delta=\Big[\int_a^b-\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}u_1(\eta,\lambda)u_2(\eta,\lambda)d\eta\Big]^2-$$

$$-\int_a^b-\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}u_1^2(\eta,\lambda)d\eta\cdot\int_a^b-\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}u_2^2(\eta,\lambda)d\eta.$$

Diskriminantes zīmi noteiksim, izlietojot Schwarz'a nevienlīdzību

$$\Big[\int_a^b fg\,d\eta\Big]^2-\int_a^b f^2d\eta\cdot\int_a^b g^2d\eta<0,$$

f un g ir lineāri neatkarīgas, reālas un nepārtrauktas η funkcijas intervallā $a\le\eta\le b$. Diskriminantē Δ funkcijai f atbilst funkcija

$$u_1(\eta,\lambda)\cdot\sqrt{-\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}}$$

un funkcijai g atbilst funkcija

$$u_2(\eta,\lambda)\cdot\sqrt{-\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}},$$

kas abas ir nepārtrauktas, lineāri neatkarīgas un reālas η funkcijas intervallā $a \leq \eta \leq b$, jo $u_1(\eta,\lambda)$, $u_2(\eta,\lambda)$ un $\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}$ ir nepārtrauktas η funkcijas, $u_1(\eta,\lambda)$ un $u_2(\eta,\lambda)$ lineāri neatkarīgas η funkcijas un zemsaknes funkcija $-\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{1}{K(a)}>0$ minētajā intervallā.

Schwarz'a nevienlīdzība rāda, ka $\Delta<0$, kam seko, ka kvadratiskā forma figūriekavās zīmi nemaina. Šī forma nevienai $F(\lambda)$ saknei nav nulle, jo $u_1^2(\xi,\lambda)$ un $u_2^2(\xi,\lambda)$ koeficienti

$$\int_a^b -\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{u_2^2(\eta,\lambda)}{K(a)}d\eta,\quad \int_a^b -\frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}\cdot\frac{u_1^2(\eta,\lambda)}{K(a)}d\eta$$

nav nulles, bet gan lielāki par nulli. Formas zīme ir vienlīdzīga ar šo lielumu zīmi un tādēļ forma >0.

$$\frac{d^2F(\lambda)}{\partial\lambda^2}<0,\quad jo\quad \frac{\partial G(\eta,\lambda)}{\partial\lambda}<0.$$

Tas, ka $\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2}\neq 0$, bet $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}=0$, ja λ ir $F(\lambda)=0$ sakne, rāda, ka λ ir divkārša $F(\lambda)=0$ sakne.

Visām divkāršām īpatnējām vērtībām $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}=0$, bet $\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2}\neq 0$. Tādēļ visas divkāršās īpatnējās vērtības ir īpatnējo vērtību vienādojuma $F(\lambda)=0$ divkāršas saknes, un $F(\lambda)$ pie divkāršām īpatnējām vērtībām zīmi nemaina.

No $\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2}<0$ divkāršām īpatnējām vērtībām, dabūjam, ka funkcijai $F(\lambda)$ ir maksims, ja λ ir divkārša īpatnējā vērtība.

Tagad noteiksim robežproblēmas (41) īpatnējo vērtību vietu un pierādīsim, ka robežproblēmai (41) intervallā $\Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$ bezgala daudz īpatnējo vērtību.

Ņemsim Sturm'a robežproblēmu (42). No 1. oscillāciju teorēmas zināms, ka tai intervallā $\Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$ bezgala daudz īpatnējo vērtību $\mu_0, \mu_1, \ldots$ un ka katrai īpatnējai vērtībai atbilst viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija, kuŗai tik daudz sakņu intervallā $a<x<b$, kāds attiecīgās īpatnējās vērtības indeks.

Ja $\lambda=\mu_i$, tad ikviens diferenciālvienādojuma

$$\frac{d}{dx}(Ku')-Gu=0$$

atrisinājums, kas ir nulle punktā a, ir nulle arī punktā b. $u_2(a,\mu_i)=0$ un tādēļ arī $u_2(b,\mu_i)=0$. No formulas (45) tad dabūjam, ka

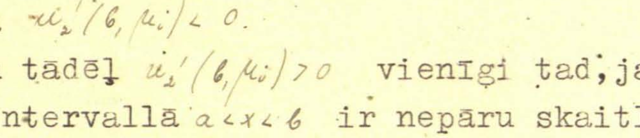
(51) $u_1(b,\mu_i)\cdot u_2'(b,\mu_i)=1.$

Ar (51) palīdzību pārveidojot, dabūjam

$$F(\mu_i)=u_2'(b,\mu_i)+\frac{1}{u_2'(b,\mu_i)}-2=$$
$$=\frac{1}{u_2'(b,\mu_i)}\left[u_2'(b,\mu_i)-1\right]^2.$$

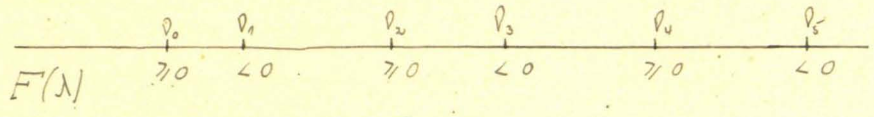
Pēdējā vienlīdzība rāda, ka:
1. $F(\mu_i)\geq 0$, ja $u_2'(b,\mu_i)>0$, pie kam $F(\mu_i)=0$ tikai tad, ja $u_2'(b,\mu_i)=1$.
2. $F(\mu_i)<0$, ja $u_2'(b,\mu_i)<0$.

$u_2'(a,\mu_i)=1$ un tādēļ $u_2'(b,\mu_i)>0$ vienīgi tad, ja $u_2(x,\mu_i)$ sakņu skaits intervallā $a<x<b$ ir nepāru skaitlis. Bet robežproblēmas (42) atrisinājumu sakņu skaits intervallā $a<x<b$ ir vienlīdzīgs ar attiecīgās īpatnējās vērtības indeku. Tas dod, ka $u_2'(b,\mu_i)>0$, ja īpatnējās vērtības indeks ir nepāru skaitlis, citiem vārdiem, $u_2'(b,\mu_i)>0$ īpatnējām vērtībām $\mu_1,\mu_3,\mu_5,\dots$. Arī $F(\mu_i)\geq 0$ šīm īpatnējām vērtībām.
$u_2'(b,\mu_i)<0$ īpatnējām vērtībām ar pāru skaitļu indeku, t.i. $\mu_0,\mu_2,\mu_4,\dots$, jo $u_2'(b,\mu_i)<0$ vienīgi tad, ja $u_2(x,\mu_i)$ sakņu skaits intervallā $a<x<b$ ir pāru skaitlis. Arī $F(\mu_i)<0$ īpatnējām vērtībām $\mu_0,\mu_2,\dots$.



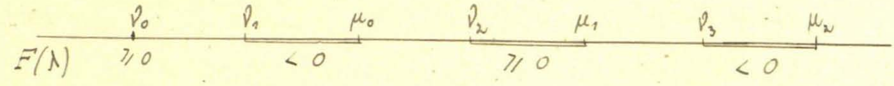
5. zīm.

1. oscillāciju teorēmas dēļ Sturm'a robežproblēmai (43) tāpat ir bezgala daudz īpatnējo vērtību $\nu_0,\nu_1,\nu_2,\dots$ intervallā $\Lambda_1<\lambda<\Lambda_2$. Katrai īpatnējai vērtībai atbilst tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija, kuŗas sakņu skaits intervallā $a<x<b$ ir vienlīdzīgs ar īpatnējās vērtības indeku.
Spriežot tāpat kā robežproblēmas (42) gadījumā atrodam, ka
1. $u_1(b,\nu_i)>0$ īpatnējām vērtībām, kam pāru skaitļu indeks, t.i. $\nu_0,\nu_2,\nu_4,\dots$. Tādēļ $F(\nu_i)\geq 0$ minētajām vērtībām, pie kam $F(\nu_i)=0$ tikai tad, ja $u_1(b,\nu_i)=1$.
2. Īpatnējām vērtībām ar nepāru skaitļa indeku, t.i. $\nu_1,\nu_3,\nu_5,\dots$ $u_1(b,\nu_i)<0$ un tādēļ arī $F(\nu_i)<0$.



6.zīm.

Salīdzināsim robežproblēmu (42) un (43) īpatnējās vērtības. $\nu_i < \mu_i$ $(i=0,1,2,\dots)$, jo pieņemot, ka $\nu_i=\mu_i$, u_1 un u_2 ir viena un tā paša diferenciālvienādojuma lineāri neatkarīgi atrisinājumi. Atrisinājumam u_1 tad ir $i+1$ sakne intervallā $a<x<b$, jo atrisinājumam u_2 ieskaitot intervallā galus a un b ir pavisam $i+2$ saknes šai intervallā, bet dots, ka $u_1(x,\nu_i)$ ir intervallā $a<x<b$ tikai i saknes. Pieņemot, ka $\nu_i>\mu_i$ arī dabūjam pretrunu. Tādēļ $\nu_{i+1} \gtrless \mu_i$ un $\nu_{i+2}>\mu_i$.
Apvienosim 5.un 6.zīmējumu/, pieņemot, ka $\nu_{i+1}<\mu_i$.



7. zīm.

7. zīmējums rāda, ka $F(\lambda)\geq 0$, ja $\lambda=\nu_0$, $\lambda=\nu_{2k}$ un $\lambda=\mu_{2k-1}$ $(k=1,2,3,\dots)$, bet $F(\lambda)<0$, ja $\lambda=\nu_{2k-1}$ un $\lambda=\mu_{2k-2}$ $(k=1,2,3,\dots)$.
Nosakot robežproblēmas (41) īpatnējo vērtību vietas, jāapskata divi gadījumi.
1. $\nu_{2k}\neq\mu_{2k-1}$, ja $\nu_{2k}=\mu_{2k-1}$, tad $u_2'(b,\mu_{2k-1})\neq 1$ un $u_1(b,\nu_{2k})\neq 1$.
2. $\nu_{2k}=\mu_{2k-1}$, $u_1(b,\nu_{2k})=1$ un $u_2'(b,\mu_{2k-1})=1$.
1.gadījumu vēl var sadalīt vairāk speciālgadījumos.
ν_{2k-1} un μ_{2k-2} kā 1.tā 2.gadījumā var būt vai nu dažādi, vai vienlīdzīgi. Bet gadījums $\nu_{2k-1}\neq\mu_{2k-2}$ neatšķiras no gadījuma $\nu_{2k-1}=\mu_{2k-2}$, jo $F(\lambda)$ minētajām vērtībām vienalga vai tās dažādas vai vienlīdzīgas <0 un tādēļ gadījumi $\nu_{2k-1}\neq\mu_{2k-2}$ un $\nu_{2k-1}=\mu_{2k-2}$ nav atsevišķi jāapskata. Teorēmu pierādot pieņemsim, ka $\nu_{2k-1}\neq\mu_{2k-2}$.
1. Robežproblēmai (41) šai gadījumā nav divkāršu īpatnējo vērtību. Lai robežproblēmas (41) īpatnējās vērtības būtu divkāršas, tad matricas (48) visiem elementiem jābūt nullēm šīm īpatnējām vērtībām. $u_2(b,\lambda)=0$ tikai (42) īpatnējām vērtībām $\mu_0,\mu_1,\mu_2,\dots$ un $u_1(b,\lambda)$ tikai (43) īpatnējām vērtībām $\nu_0,\nu_1,\dots$ Tādēļ (41) divkāršās īpatnējās vērtības var būt vienīgi starp (42) un (43) īpatnējām vērtībām, izņemot ν_{2k-1} un μ_{2k-2} $(k=1,2,\dots)$

jo tām $F(\lambda)<0$. Bet ja $\nu_{2\kappa}\neq\mu_{2\kappa-1}$, tad $u_1'(b,\mu_{2\kappa-1})\neq 0$ un $u_2(b,\nu_{2\kappa})\neq 0$, t.i.šīm vērtībām visi matricas (48) elementi nav nulle,kam seko,ka robežproblēmai (41) nav divkāršu īpatnējo vērtību. Tāpat varam noskaidrot,ka arī tad,kad $\nu_{2\kappa}=\mu_{2\kappa-1}$, bet $u_2'(b,\mu_{2\kappa-1})\neq 1$ un $u_1(b,\nu_{2\kappa})\neq 1$, robežproblēmai (41) nav divkāršu īpatnējo vērtību.

Apskatīsim speciālgadījumus.

a/. $\nu_{2\kappa}\neq\mu_{2\kappa-1}$, $u_1(b,\nu_{2\kappa})\neq 1$ un $u_2'(b,\mu_{2\kappa-1})\neq 1$, $(\kappa=1,2,3,\ldots)$.

$F(\lambda)$ divām sekojošām ν vērtībām un tāpat arī divām sekojošām μ vērtībām ir ar pretējām zīmēm.Tādēļ intervallā $\nu_i<\lambda<\nu_{i+1}$ $(i=0,1,\ldots)$ un intervallā $\mu_i<\lambda<\mu_{i+1}$ $(i=0,1,2,\ldots)$ ir vismaz viena $F(\lambda)$ sakne.Lai pierādītu,ka minētajos intervallos tikai viena $F(\lambda)$ sakne,apskatām $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$. $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$ zīmi,ja λ ir $F(\lambda)$ vienkārša sakne,kā to redzējām, nosaka $u_1'(b,\lambda)$ vai $-u_2(b,\lambda)$. Intervallā $\nu_i<\lambda<\nu_{i+1}$, $u_1'(b,\lambda)$ zīmi nemaina,jo ν_i un ν_{i+1} ir divas sekojošas $u_1'(b,\lambda)$ saknes un tāda paša iemesla dēļ $u_2(b,\lambda)$ intervallā $\mu_i<\lambda<\mu_{i+1}$ zīmi nemaina.Bet divi sekojošām $F(\lambda)$ vienkāršām saknēm $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$ ir ar pretējām zīmēm,tadēļ nevienā no minētajiem intervalliem nav vairāk par vienu $F(\lambda)$ sakni.

Noskaidrosim,ka starp ν_{i+1} un μ_i nav nevienas $F(\lambda)$ saknes. Punktos ν_{i+1} un μ_i funkcija $F(\lambda)$ ir ar vienu un to pašu zīmi,un tādēļ starp ν_{i+1} un μ_i nav nevienas $F(\lambda)$ saknes, vai arī $F(\lambda)$ sakņu skaits starp minētajiem punktiem ir pāru skaitlis.Pēdējais gadījums neiespējams,jo intervalls starp ν_{i+1} un μ_i sakarību $\nu_{i+1}\gtrless\mu_i$, $\nu_i<\mu_i$ un $\nu_{i+2}>\mu_i$ dēļ ir vai nu intervalla $\nu_i<\lambda<\nu_{i+1}$ vai arī intervalla $\nu_{i+1}<\lambda<\nu_{i+2}$ daļa,bet šais intervallos,kā to redzējām,ir katrā tikai viena $F(\lambda)$ sakne.Intervalli $\nu_{i+1}<\lambda<\nu_{i+2}$ un $\mu_i<\lambda<\mu_{i+1}$ pa daļai sedz viens otru,jo $\nu_{i+1}\gtrless\mu_i$ un $\nu_{i+2}\gtrless\mu_{i+1}$.

/ Vienlīdzība $\nu_{i+1}=\mu_i$ $(i=0,1,\ldots)$ šajā speciālgadījumā nepastāv/.

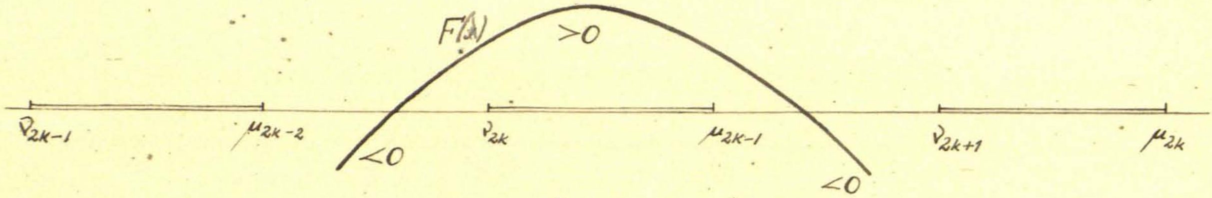
Mēs redzējām,ka starp ν_{i+1} un μ_i nav $F(\lambda)$ sakņu,tādēļ $F(\lambda)$ sakne intervallā $\nu_{i+1}<\lambda<\nu_{i+2}$ sakrīt ar $F(\lambda)$ sakni intervallā $\mu_i<\lambda<\mu_{i+1}$ un atrodas starp $\max(\nu_{i+1},\mu_i)$ un $\min(\nu_{i+2},\mu_{i+1})$. Piešķirot i vērtības $0,1,2,\ldots$ mēs dabūjam intervallu $\nu_0<\lambda<\min(\nu_1,\mu$ Tāpat kā par citiem intervalliem,tā arī par šo,varam pierādīt, ka tanī tikai viena $F(\lambda)$ sakne.

(41) īpatnējām vērtībām,kā jau redzējām,atbilst katrai tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija. Apzīmēsim (41) īpatnējo vērtību intervallā $\rho_0 < \lambda < \min(\rho_1, \mu_0)$ ar λ_0 un tai atbilstošo īpatnējo funkciju ar ϑ_0. Robežnoteikumu dēļ ϑ_0 sakņu skaits intervallā $a<x<b$ var būt tikai pāru skaitlis vai nulle. Pierādīsim, ka tas ir nulle. Pieņemsim, ka ϑ_0 ir divas saknes intervallā $a<x<b$. Tad pie λ vērtībām, kas lielākas par λ_0 ikvienam diferenciālvienādojuma $\frac{d}{dx}(Ku')-Gu=0$ atrisinājumam, un tā tad arī $u_2(x,\mu_0)$ ir vismaz viena sakne starp abām ϑ_0 saknēm, bet $u_2(x,\mu_0)$ nav sakņu intervallā $a<x<b$. Šī pretruna rāda, ka ϑ_0 nav sakņu intervallā $a<x<b$. Arī intervalla galos a un b funkcijai ϑ_0 sakņu nav, jo citādi ϑ_0 būtu robežproblēmas (42) īpatnējā funkcija un λ_0 sakristu ar tās īpatnējo vērtību μ_0, bet mēs pierādījām, ka λ_0 ir starp ρ_0 un $\min(\rho_1,\mu_0)$.

Īpatnējo vērtību intervallā $\max(\rho_1,\mu_0)<\lambda<\min(\rho_2,\mu_1)$ apzīmēsim ar λ_1 un tai atbilstošo īpatnējo funkciju ar ϑ_1. Robežnoteikumu dēļ tai sakņu skaits intervallā $a<x<b$ ir pāru skaitlis un iepriekšējā nodaļā apskatītās V teorēmas dēļ tas nav lielāks par divi, jo funkcijai $u_2(x,\mu_1)$ ir tikai viena sakne intervallā $a<x<b$. Tāpat varam noskaidrot, ka īpatnējai funkcijai ϑ_2, kas atbilst īpatnējai vērtībai λ_2 arī ir divas saknes, un vispārīgi, īpatnējai funkcijai ϑ_{i+1}, kas atbilst īpatnējai vērtībai λ_{i+1} no intervalla $\max(\rho_{i+1},\mu_i)<\lambda<\min(\rho_{i+2},\mu_{i+1})$, $i+1$ sakne intervallā $a<x<b$, ja $i+1$ ir pāru skaitlis, un $i+2$ saknes, ja $i+1$ ir nepāru skaitlis. Intervalla galos a un b funkcijai ϑ_{i+1} sakņu nav, jo tad λ_{i+1} būtu arī robežproblēmas (42) īpatnējā vērtība, bet mēs pierādījām, ka λ_{i+1} atrodas starp $\max(\rho_{i+1},\mu_i)$ un $\min(\rho_{i+2},\mu_{i+1})$.

Lai šis speciālgadījums atgādinātu nākošos, tad teiksim, ka robežproblēmai (41) intervallā $\max(\rho_{2k-1},\mu_{2k-2})<\lambda<\min(\rho_{2k+1},\mu_{2k})$ ir taisni divas īpatnējās vērtības. Tas vienmēr iespējams, jo intervalls $\max(\rho_{2k-1},\mu_{2k-2})<\lambda<\min(\rho_{2k+1},\mu_{2k})$ satur intervallu $\max(\rho_{2k-1},\mu_{2k-2})<\lambda<\min(\rho_{2k},\mu_{2k-1})$ un intervallu $\max(\rho_{2k},\mu_{2k-1})<\lambda<\min(\rho_{2k+1},\mu_{2k})$, bet katrā no šiem intervalliem ir taisni viena robežproblēmas (41) īpatnējā vērtība. Īpatnējai vērtībai λ_{2k-1} no intervalla $\max(\rho_{2k-2},\mu_{2k-1})<\lambda<\min(\rho_{2k+1},\mu_{2k})$ atbilst īpatnējā funkcija ϑ_{2k-1} ar $2k-1$ saknēm intervallā

$a<x<b$ un īpatnējai vērtībai λ_{2k} īpatnējā funkcija ψ_{2k} ar $2k$ saknēm intervallā $a<x<b$.
Šī gadījuma īpatnējo vērtību stāvokli varam attēlot zīmējumā.



8. zīm.

b/. $\nu_{2k} \neq \mu_{2k-1}$, $u_2'(b,\mu_{2k-1}) = 1$ un $u_1(b,\nu_{2k}) \neq 1$.
No

$$F(\mu_{2k-1}) = \frac{1}{u_2'(b,\mu_{2k-1})}\left[u_2'(b,\mu_{2k-1}) - 1\right]^2$$

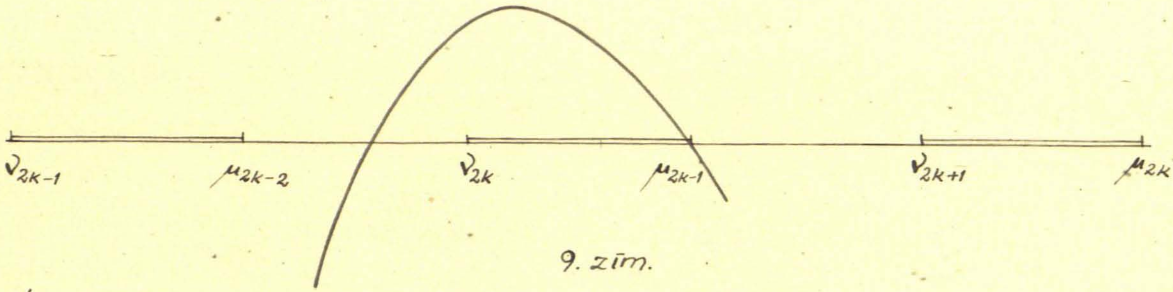
dabūjam,ka $F(\mu_{2k-1}) = 0$, t.i.,ka μ_{2k-1} ir (41) īpatnējā vērtība un no

$$F(\mu_{2k-1}) = u_2'(b,\mu_{2k-1}) + u_1(b,\mu_{2k-1}) - 2 = 0,$$

ka $u_1(b,\mu_{2k-1}) = 1$, $u_1'(b,\mu_{2k-1}) \neq 0$, jo tad $\mu_{2k-1} = \nu_{2k}$, bet šo gadījumu pagaidām neapskatām.
Noskaidrosim,ka intervallā $\max(\nu_{2k-1},\mu_{2k-2}) < \lambda < \min(\nu_{2k+1},\mu_{2k})$ ir tikai divas $F(\lambda)$ saknes. Ja μ_{2k-1} ir $F(\lambda)$ sakne,kas atrodas intervallā $\nu_{2k} < \lambda < \nu_{2k+1}$, tad citu $F(\lambda)$ sakņu šai intervallā nav,ko var pierādīt kā iepriekšējā speciālgadījumā. Tas pats jāsaka par μ_{2k-1}, ja tas atrodas intervallā $\nu_{2k-1} < \lambda < \nu_{2k}$. Šeit iepriekšējā speciālgadījumā minēto iemeslu dēļ funkcijai $F(\lambda)$ vēl ir sakne intervallā $\nu_{2k} < \lambda < \nu_{2k-1}$, bet ja μ_{2k-1} atrodas intervallā $\nu_{2k} < \lambda < \nu_{2k+1}$, tad $F(\lambda)$ ir vēl sakne intervallā $\nu_{2k-1} < \lambda < \nu_{2k}$. Starp ν_{2k-1} un μ_{2k-2}, starp ν_{2k} un μ_{2k-1} un starp ν_{2k+1} un μ_{2k} kā to pierādījām iepriekšējā speciālgadījumā, funkcijai $F(\lambda)$ sakņu nav. Tādēļ varam teikt,ka intervallā $\max(\nu_{2k-1},\mu_{2k-2}) < \lambda < \min(\nu_{2k+1},\mu_{2k})$ ir taisni divas $F(\lambda)$ saknes un viena no tām ir μ_{2k-1}. Intervallā $\nu_0 < \lambda < \min(\nu_1,\mu_0)$ ir tikai viena $F(\lambda)$ sakne.

(41) īpatnējām vērtībām,kas nesakrīt ar μ_{2k-1} $(k=1,2,3,\dots)$ atbilst (41) īpatnējās funkcijas,kuŗām sakņu skaits intervallā $a<x<b$ vienlīdzīgs ar attiecīgās īpatnējās vērtības indeku, ja tas ir pāru skaitlis,bet par vienu lielāks,ja nepāru skaitlis.

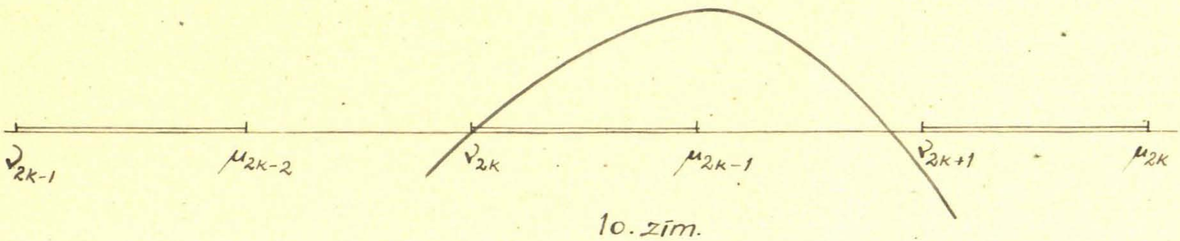
Īpatnējām funkcijām,kas atbilst īpatnējām vērtībām,kas sakrīt ar μ_{2k-1} ir $2k-1$ saknes intervallā $a<x<b$ un šīs īpatnējās funkcijas nav nekas cits kā robežproblēmas (42) īpatnējās funkcijas $u_2(x,\mu_{2k-1})$.



9. zīm.

c/. $\nu_{2k} \neq \mu_{2k-1}$, $u_2'(b,\mu_{2k-1}) \neq 1$ un $u_1(b,\nu_{2k}) = 1$ $(k=1,2,3,\ldots)$.

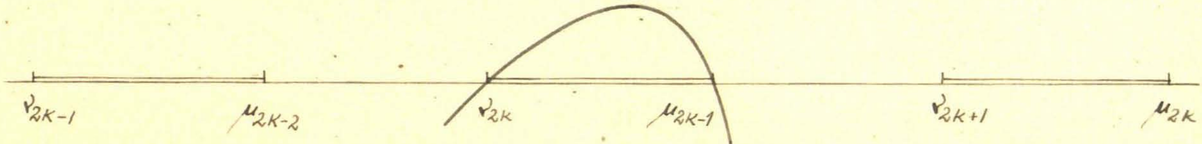
Robežproblēmai (41) intervallā $\max(\nu_{2k-1},\mu_{2k-2}) < \lambda < \min(\nu_{2k+1},\mu_{2k})$ ir divas īpatnējās vērtības un viena no tām ir ν_{2k}. Arī ν_0 var būt (41) īpatnējā vērtība. (41) īpatnējām funkcijām,kas atbilst īpatnējai vērtībai ν_0 vai īpatnējai vērtībai,kas atrodas intervallā $\nu_0 < \lambda < \min(\nu_1,\mu_0)$ nav sakņu intervallā $a<x<b$. Robežproblēmas (41) īpatnējās funkcijas,kas atbilst (41) īpatnējām vērtībām,kas sakrīt ar ν_{2k} nav nekas cits kā (43) īpatnējās funkcijas $u_1(x,\nu_{2k})$. Tāpat arī (41) īpatnējā funkcija,kas atbilst īpatnējai vērtībai ν_0 nav nekas cits kā (43) īpatnējā funkcija $u_1(x,\nu_0)$.



10. zīm.

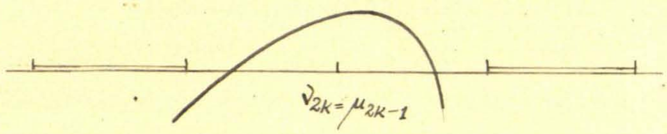
d/. $\nu_{2k} \neq \mu_{2k-1}$, $u_2'(b,\mu_{2k-1}) = 1$, $u_1(b,\nu_{2k}) = 1$ $(k=1,2,3,\ldots)$

Intervallā $\max(\nu_{2k-1},\mu_{2k-2}) < \lambda < \min(\nu_{2k+1},\mu_{2k})$ robežproblēmai (41) atkal ir divas īpatnējās vērtības un tās sakrīt ar ν_{2k} un μ_{2k-1}. Īpatnējai vērtībai,kas sakrīt ar ν_{2k} atbilst īpatnējā funkcija,kas sakrīt ar $u_1(x,\nu_{2k})$, bet īpatnējai vērtībai, kas sakrīt ar μ_{2k-1} atbilst īpatnējā funkcija,kas sakrīt ar $u_2(x,\mu_{2k-1})$. Pirmajai,kā zināms, $2k$ saknes,bet otrajai $2k-1$ saknes intervallā $a<x<b$.



11. zīm.

e/. $\nu_{2k}=\mu_{2k-1}$, $u_2'(b,\mu_{2k-1})\neq 1$ un $u_1(b,\mu_{2k-1})\neq 1$.
Robežproblēmai (41) intervallā $\max(\nu_{2k-1},\mu_{2k-2})<\lambda<\min(\nu_{2k+1},\mu_{2k})$ ir taisni divas īpatnējās vērtības, un tās sakrīt ar $\nu_{2k}=\mu_{2k-1}$.
Par īpatnējām funkcijām, kas atbilst šīm īpatnējām vērtībām, jāsaka viss tas pats, kas par a/. speciālgadījuma īpatnējām funkcijām.



12. zīm.

2. $\nu_{2k}=\mu_{2k-1}=\lambda_k$ $(k=1,2,3,\dots)$, $u_2'(b,\lambda_k)=1$ un $u_1(b,\lambda_k)=1$.
No $\nu_{2k}=\mu_{2k-1}=\lambda_k$, dabūjam, ka $u_1'(b,\lambda_k)=0$ un $u_2(b,\lambda_k)=0$. Pastāvot visiem šiem noteikumiem, λ_k ir robežproblēmas (41) īpatnējā vērtība un pie tam divkārša. Šīs divkāršās īpatnējās vērtības, kā to redzējām, ir $F(\lambda)$ dubultsaknes, jo tad $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}=0$, bet $\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2}\neq 0$.
Skaidrs, ka citu $F(\lambda)$ dubultsakņu bez λ_k intervallā $\max(\nu_{2k-1},\mu_{2k-2})<\lambda<\min(\nu_{2k+1},\mu_{2k})$ nav, jo dubultsaknēm visi matricas (48) elementi ir nulles, bet $u_1'(b,\lambda)$ ir nulle tikai (43) īpatnējām vērtībām un $u_2(b,\lambda)$ tikai (42) īpatnējām vērtībām.
Pierādīsim, ka šai intervallā nav arī vienkāršu $F(\lambda)$ sakņu. Ja minētajā intervallā būtu vienkāršas $F(\lambda)$ saknes, tad to skaits būtu pāru skaitlis, jo intervalla galos $F(\lambda)$ ar vienu un to pašu zīmi. Pieņemsim, ka intervallā $\max(\nu_{2k-1},\mu_{2k-2})<\lambda<\min(\nu_{2k+1},\mu_{2k})$ divas $F(\lambda)$ saknes. Tām abām jāatrodas vai nu pa labi, vai pa kreisi no λ_k, tādēļ ka $\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2}<0$, ja λ ir $F(\lambda)$ dubultsakne un intervalla galos $F(\lambda)<0$. Bet ne intervallā $\max(\nu_{2k-1},\mu_{2k-2})<\lambda<\lambda_k$, ne arī intervallā $\lambda_k<\lambda<\min(\nu_{2k+1},\mu_{2k})$ nav divi vienkāršu $F(\lambda)$ sakņu, ko var noskaidrot tāpat kā 1. gadījumā.
Intervallā $\nu_0\leq\lambda<\min(\nu_1,\mu_0)$ robežproblēmai (41) īpatnējā vērtība λ_0 var sakrist arī ar intervalla galu ν_0. Bet λ_0 lai arī $\lambda_0=\nu_0$ ir tikai (41) vienkārša īpatnējā vērtība, jo pirmā λ vērtība, kuŗai matricas (48) elements $u_2'(b,\lambda)$ ir nulle, ir μ_0.

Abās lineāri neatkarīgās īpatnējās funkcijas,kas atbilst īpatnējai vērtībai $\lambda_k = \mu_{2k-1} = \nu_{2k}$ ir tās pašas robežproblēmu (42) un (43) īpatnējās funkcijas $u_2(x, \mu_{2k-1})$ un $u_1(x, \nu_{2k})$, pie kam pirmajai ir $2k-1$ sakne,bet otrajai $2k$ saknes intervallā $a < x < b$.

Ja $\lambda_0 = \nu_0$ ir (41) īpatnējā vērtība,tad tai atbilst (41) īpatnējā funkcija,kas sakrīt ar $u_1(x, \nu_0)$.
Robežproblēmai (41) kā 1.tā 2.gadījumā ir intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ bezgala daudz īpatnējo vērtību,jo tādu intervallu $\max(\nu_{2k-1}, \mu_{2k-2}) < \lambda < \min(\nu_{2k+1}, \mu_{2k})$ ar divi vienkāršām vai vienu divkāršu (41) īpatnējo vērtību intervallā $\Lambda_1 < \lambda < \Lambda_2$ ir bezgala daudz,tāpēc ka robežproblēmām (42) un (43) ir minētajā intervallā bezgala daudz īpatnējo vērtību.

Piemērs.

Atrisināt robežproblēmu

$$
I \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \\ u(0) = u(2\pi) \\ u'(0) = u'(2\pi) \end{cases}
$$

un noteikt tās īpatnējo vērtību vietu starp robežproblēmu

$$
II \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(2\pi) = 0 \end{cases} \quad . \quad III \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0 \\ u'(0) = 0 \\ u'(2\pi) = 0 \end{cases}
$$

īpatnējām vērtībām.

1. $\lambda < 0$. Tāpat kā pirmās nodaļas 5.~~piektā~~ piemērā varam noskaidrot,ka nevienai no pētāmām robežproblēmām nav atrisinājuma.
2. $\lambda = 0$. Robežproblēmām I un III tad ir atrisinājums $u = C$ / C konstante/ un tādēļ nulle ir robežproblēmas I īpatnējā vērtība λ_0 un robežproblēmas III īpatnējā vērtība ν_0. Robežproblēmai II nav atrisinājuma.
3. $\lambda > 0$. Diferenciālvienādojuma $u'' + \lambda u = 0$ divi lineāri neatkarī-

gi atrisinājumi u_1 un u_2, kas punktā nulle apmierina noteikumus

$$\begin{cases} u_1(0,\lambda)=1 \\ u_2(0,\lambda)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1'(0,\lambda)=0 \\ u_2'(0,\lambda)=1, \end{cases}$$

ir $u_1(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x$, $u_2(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x$,
un vispārīgais atrisinājums

$$u=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Meklēsim robežproblēmas II īpatnējās vērtības. Izlietojot robežnoteikumus, dabūjam vienādojumu sistēmu

$$C_1=0$$
$$C_2\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi=0$$

un no šīs vienādojumu sistēmas robežproblēmas II īpatnējo vērtību vienādojumu

$$\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi=0,$$

kas dod īpatnējās vērtības $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, 4, \ldots$
Robežproblēmas II īpatnējās funkcijas ir $C\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x$, ja λ vietā liekam nupat atrastās vērtības.
Robežproblēmas III īpatnējo vērtību vienādojums ir $\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi=0$ un īpatnējās vērtības $\nu_1, \nu_2, \ldots \frac{1}{4}, 1, \frac{9}{4}, \ldots$
Īpatnējās funkcijas dod $C\cos\sqrt{\lambda}x$, ja λ vietā liek atrastās nozīmes.
Robežproblēmas I īpatnējo vērtību vienādojums ir

$$\begin{vmatrix} 1-\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi & -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi & 1-\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi \end{vmatrix}=0$$

vai pēc pārveidošanas $1-\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi=0$.
Šī vienādojuma saknes $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ ir robežproblēmas I divkāršas īpatnējās vērtības. Arī $\lambda=0$ ir vienādojuma $1-\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi=0$ sakne, bet to neņemam, jo vienādojumu sastādījām, pieņemot, ka $\lambda>0$.
Robežproblēmas I īpatnējās funkcijas atrodam no $C\cos\sqrt{\lambda}x$ un $C\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\sqrt{\lambda}x$.

Robežproblēmas I	īpatnējās vērtības īpatn. funk.	0 C	1 $C\sin x;\ C\cos x$	4 $\frac{1}{2}C\sin 2x,\ C\cos 2x$	9 $\frac{1}{3}C\sin 3x,\ C\cos 3x$
Robežproblēmas II		$\frac{1}{4}$ $2C\sin\frac{x}{2}$	1 $C\sin x$	$\frac{9}{4}$ $\frac{2}{3}C\sin\frac{2x}{3}$	4 $\frac{1}{2}C\sin 2x$
Robežproblēmas III		0 C	$\frac{1}{4}$ $C\cos\frac{x}{2}$	1 $C\cos x$	$\frac{9}{4}$ $C\cos\frac{3}{2}x$

VII. ROBEŽPROBLĒMU SAKARS AR INTEGRĀLVIENĀDOJUMIEM.

1. IV.nodaļā atradām,ka ar sevi saistīto otrās kārtas diferenciālvienādojumu var rakstīt veidā

$$(1)\quad \mathcal{L}(u)=(pu')'+qu=0$$

un Green'a formulu

$$(2)\quad \int_a^b [v\mathcal{L}(u)-u\mathcal{L}(v)]dx=[p(vu'-uv')]_a^b .$$

Ja funkcijas u' un v' intervalla $a\le x\le b$ punktos η un ζ ir pārtrauktas,tad integrējot intervalls jāsadala trīs daļās.Pieņemsim,ka $\zeta>\eta$, tad intervallu $a\le x\le b$ varam sadalīt intervallos $a\le x<\eta$, $\eta<x<\zeta$, $\zeta<x\le b$ un Green'a formulu (2) pārrakstīt veidā

$$\int_a^b [v\mathcal{L}(u)-u\mathcal{L}(v)]dx=\lim_{\varepsilon\to 0}[p(vu'-uv')]_a^{\eta-\varepsilon}+\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}[p(vu'-uv')]_{\eta+\varepsilon_1}^{\zeta-\varepsilon_2}+$$
$$+\lim_{\varepsilon\to 0}[p(vu'-uv')]_{\zeta+\varepsilon}^{b}.$$

Izdarot robežpāreju,dabūjam

$$(3)\quad \int_a^b [v\mathcal{L}(u)-u\mathcal{L}(v)]dx=[p(vu'-uv')]_a^b+p(\eta)v(\eta)[u'(\eta+0)-u'(\eta-0)]-$$
$$-p(\zeta)u(\zeta)[v'(\zeta+0)-v'(\zeta-0)].$$

2. Ja diferenciālvienādojuma (1) divi lineāri neatkarīgi atrisinājumi ir $u_1(x)$ un $u_2(x)$, tad tā vispārīgo atrisinājumu var rakstīt veidā

$$u(x)=C_1u_1(x)+C_2u_2(x).$$

Ja atrisinājums $u(x)$ intervallā $a\le x\le b$ ir nepārtraukts,bet tā pirmais atvasinājums pēc x, t.i. $u'(x)$ intervalla kādā punktā t ir pārtraukts / pārtraukuma punktā $u'(x)$ ir ar lēcienu c /,tad vispārīgā atrisinājuma patvaļīgām konstantēm C_1 un C_2 intervallos $a\le x<t$ un $t<x\le b$ jābūt ar dažādām vērtībām.

Ja

$$u(x) = (A-\alpha)u_1(x) + (B-\beta)u_2(x) \quad \dots \quad x \le t$$
$$u(x) = (A+\alpha)u_1(x) + (B+\beta)u_2(x) \quad \dots \quad x \geq t,$$

tad konstantēm A, B, α, β jāizpilda sekoši noteikumi

$$\begin{cases} (A-\alpha)u_1(t) + (B-\beta)u_2(t) = (A+\alpha)u_1(t) + (B+\beta)u_2(t) \\ (A-\alpha)u_1'(t) + (B-\beta)u_2'(t) = (A+\alpha)u_1'(t) + (B+\beta)u_2'(t) - c \end{cases}$$

vai

$$\begin{cases} \alpha u_1(t) + \beta u_2(t) = 0 \\ \alpha u_1'(t) + \beta u_2'(t) = \frac{c}{2} . \end{cases}$$

Tā kā $u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t)$ ir diferenciālvienādojuma Vronska determinante, kas lineāri neatkarīgiem atrisinājumiem nav nulle, tad atrodam, ka

$$\alpha = -\frac{c\, u_2(t)}{2[u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t)]}$$

$$\beta = \frac{c\, u_1(t)}{2[u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t)]}$$

un diferenciālvienādojuma (1) vispārīgo atrisinājumu varam rakstīt veidā

$$(4) \quad u(x) = \delta(x,t) + Au_1(x) + Bu_2(x),$$

kur A un B ir patvaļīgas konstantes un

$$\delta(x,t) = \pm \frac{c}{2} \cdot \frac{u_2(t)u_1(x) - u_1(t)u_2(x)}{u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t)}, \quad \text{ja} \quad \begin{matrix} x \le t, \\ x \geq t \end{matrix}$$

pie kam pēc iepriekšējiem noteikumiem par $u(x)$ nepārtrauktību un $u'(x)$ pārtrauktību punktā t redzam, ka

$$\delta(x,t) = 0, \text{ ja } x = t \text{ un } \frac{\partial\delta(x,t)}{\partial x} = \mp\frac{c}{2}, \text{ ja } \begin{matrix} x = t-0 \\ x = t+0. \end{matrix}$$

3. Atrasto diferenciālvienādojuma (1) atrisinājumu (4) sauc par diferenciālvienādojuma (1) attiecīgo Green'a funkciju $G(x,t)$, ja tas apmierina sekošus nosacījumus:

a/. $c = -\frac{1}{p(t)}$

b/. ja liek $u = G(x,\eta)$, $v = G(x,\xi)$, kur η un ξ ir apskatītā intervalla divi punkti, tad jāpastāv

$$(5)\quad p(a)[u(a)v'(a)-u'(a)v(a)]=p(b)[u(b)v'(b)-u'(b)v(b)]$$

Liekot identitātē $3)$ nupat definētās funkcijas u un v un ievērojot,ka $\mathcal{L}(u)=\mathcal{L}(v)=0$ un

$$u'(\eta+0)-u'(\eta-0)=-\frac{1}{p(\eta)},\quad v'(\xi+0)-v'(\xi-0)=-\frac{1}{p(\xi)},$$

dabūjam $G(\eta,\xi)=G(\xi,\eta)$.
Pēdējā vienlīdzība rāda,ka diferenciālvienādojuma (1) Green'a funkcija $G(x,t)$ ir simmetriska funkcija,jo punkti η un ξ bija divi patvaļīgi intervalla punkti.

4. Apskatīsim diferenciālvienādojumu

$$(6)\quad \mathcal{L}(u)+\lambda u=0.$$

Kad $\lambda=0$, dabūjam diferenciālvienādojumu (1), kuŗa Green'a funkcija $G(x,t)$. Ja diferenciālvienādojuma (6) Green'a funkciju apzīmējam ar $\Gamma(x,t)$, tad no Green'a formulas (3), liekot $u=G(x,\eta)$, $v=\Gamma(x,\xi)$, dabūjam

$$(7)\quad \lambda\int_a^b G(x,\eta)\Gamma(x,\xi)dx=\Gamma(\eta,\xi)-G(\xi,\eta).$$

Ja no otras puses Green'a formulā (3) v vietā liek diferenciālvienādojuma (6) atrisinājumu $v=\varphi(x)$, kuŗa atvasinājums ir nepārtraukts un kas kopā ar G apmierina noteikumu (5), tad dabūjam

$$(8)\quad \lambda\int_a^b G(x,\eta)\varphi(x)dx=\varphi(\eta).$$

Ja vienādojumā $7)$ x,η,ξ vietās attiecīgi rakstām u,x,t un ievērojam,ka G ir simmetriska funkcija,tad dabūjam

$$G(x,t)=\Gamma(x,t)-\lambda\int_a^b G(x,u)\Gamma(u,t)du.$$

Pēdējais vienādojums saka,ka, ja $G(x,t)$ ir diferenciālvienādojuma (1) Green'a funkcija,tad diferenciālvienādojuma (6) Green'a funkcija $\varphi(x)=\Gamma(x,t)$ ir atrisinājums otrā veida Fredholm'a vienādojumam.
Ja otrā veida Fredholm'a vienādojumu rakstām veidā

$$f(x)=\varphi(x)-\lambda\int_a^b G(x,y)\varphi(y)dy,$$

tad, salīdzinot ar iepriekšējo,

$$f(x) = G(x,t) \text{ un } \varphi(x) = \Gamma(x,t),$$

kur t patvaļīgs lielums.
Ja vienādojumā (7) x, η, ξ vietās liekam v, x, u, tad dabūjam

$$G(x,u) - \Gamma(x,u) = -\lambda\int_a^b G(x,v)\,\Gamma(v,u)\,dv.$$

Pēdējais vienādojums rāda, ka, ja $G(x,u)$ uzskata par integrālvienādojuma kodolu, tad $\Gamma(x,u)$ ir attiecīgais atrisinātājs kodols.
Ja vienādojumā (8) x un η vietās liek u un x, tad dabū

$$(9)\quad \varphi(x) = \lambda\int_a^b G(x,u)\,\varphi(u)\,du.$$

Pēdējais vienādojums rāda, ka diferenciālvienādojuma (6) atrisinājumi, kuŗiem ir nepārtraukti atvasinājumi un kuŗi apmierina noteikumus (5) ir īpatnējām vērtībām λ atbilstošās kodola $G(x,u)$ īpatnējās funkcijas. Arī otrādi: katrs integrālvienādojuma (9) atrisinājums ir arī diferenciālvienādojuma (6) atrisinājums. Tā redzam, ka otrās kārtas diferenciālvienādojumu var aizvietot ar ekvivalentu integrālvienādojumu.

5. Apskatīsim, kādu integrālvienādojumu dod Sturm'a - Liouville'a robežproblēma

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}(zu') + (\lambda g - l)u = 0 \\ U_1(u) = \alpha' u(a) - \alpha u'(a) = 0 \\ U_2(u) = \beta' u(b) + \beta u'(b) = 0. \end{cases}$$

Iepriekšējā nodaļā mēs redzējām, ka šai robežproblēmai intervallā $-\infty < \lambda < +\infty$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību un katrai īpatnējai vērtībai atbilst tikai viena lineāri neatkarīga īpatnējā funkcija.
Pieņemsim, ka $\lambda = 0$ nav robežproblēmas (10) īpatnējā vērtība, citiem vārdiem robežproblēmas

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{d}{dx}(zu') - lu = 0 \\ U_1(u) = 0 \\ U_2(u) = 0 \end{cases}$$

vienīgais atrisinājums ir $u \equiv 0$.
Ņemsim robežproblēmas (11) diferenciālvienādojuma divus lineāri neatkarīgus atrisinājumus u un v un sastādīsim Lagrange identitāti. Tad dabūsim

$$(12)\quad u\,\mathcal{L}(v) - v\,\mathcal{L}(u) = \frac{d}{dx}\left[x(uv' - u'v)\right],$$

kur

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d}{dx}(xu') - cu$$
$$\mathcal{L}(v) = \frac{d}{dx}(xv') - cv.$$

Konstruēsim robežproblēmas (10) Green'a funkciju $G(x,t)$. Tad šai funkcijai $G(x,t)$, kur t ir robežās $a < t < b$ ir šādas īpašības:

a/. $G(x,t)$ ir nepārtraukta x funkcija intervallā $a \le x \le b$.

b/. $G(x,t)$ pirmais atvasinājums pēc x ir nepārtraukta x funkcija intervallos $a \le x < t$ un $t < x \le b$.

c/. $G(x,t)$ apmierina robežnoteikumus $U_1(G) = 0$ un $U_2(G) = 0$,

d/. $G'(x,t)_{x=t-0} - G'(x,t)_{x=t+0} = \frac{1}{x(t)}$ $\left(šeit\ G'(x,t) = \frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\right)$.

Robežproblēmas (11) diferenciālvienādojumam mēs ņēmām divus lineāri neatkarīgus atrisinājumus u un v, ar tiem mēs varam atrast, ka

$$G(x,t) = \begin{cases} A_1 u + B_1 v & a \le x \le t \\ A_2 u + B_2 v & t \le x \le b. \end{cases}$$

$G(x,t)$ ir nepārtraukta x funkcija intervallā $a \le x \le b$, jo atrisinājumi u un v ir nepārtrauktas x funkcijas minētajā intervallā. Konstantes A_1, A_2, B_1, B_2 atradīsim no tā, ka $G(x,t)$ pēc tā trešās īpašības apmierina robežnoteikumus $U_1(G) = 0$ un $U_2(G) = 0$. Šie robežnoteikumi mums dod, ka

$$U_1(G) = U_1(A_1 u + B_1 v) = A_1 U_1(u) + B_1 U_1(v) = B_1 U_1(v) = 0$$
$$U_2(G) = U_2(A_2 u + B_2 v) = A_2 U_2(u) + B_2 U_2(v) = A_2 U_2(u) = 0.$$

Tā kā atrisinājumi u un v ir lineāri neatkarīgi, tad $B_1 = 0$ un $A_2 = 0$, un Green'a funkciju varam pārrakstīt

$$G(x,t) = \begin{cases} A_1 u & a \le x \le t \\ B_2 v & t \le x \le b. \end{cases}$$

Tā kā $G(x,t)$ ir nepārtraukta funkcija, tad

$$A_1 u'(t) = B_2 v(t),$$

kas dod

$$A_1 = Cv(t) \text{ un } B_2 = Cu(t),$$

un Green'a funkcija dabū veidu

$$G(x,t) = \begin{cases} Cv(t)u(x) & a \le x \le t \\ Cu(t)v(x) & t \le x \le b. \end{cases}$$

Konstanti C noteiksim ar Green'a funkcijas d/. īpašību. No turienes dabūjam, ka

$$C = \frac{1}{\alpha(t)\,[v(t)u'(t) - u(t)v'(t)]},$$

ja $vu' - uv'$ izvēlamies vienlīdzīgu ar $-\frac{1}{\alpha(t)}$, tad $C = 1$ un Green'a funkcija tad ir

$$(13)\quad G(x,t) = \begin{cases} v(t)u(x) = G_1(x,t) & a \le x \le t \\ u(t)v(x) = G_2(x,t) & t \le x \le b. \end{cases}$$

Green'a funkcija ir simmetriska funkcija. Izvēlamies intervallā $a \le x \le b$ divas vērtības ξ_1 un ξ_2, tā kā $a \le \xi_1 < \xi_2 \le b$. Ņemot $G(x,t)$ intervalla pirmā daļā, ξ_1 atbilst x un ξ_2 atbilst t, tādēļ $G(\xi_1, \xi_2) = v(\xi_2)u(\xi_1)$. Ņemot $G(x,t)$ intervalla otrā daļā, ξ_1 atbilst t un ξ_2 atbilst x, jo tagad $t < x$, tādēļ $G(\xi_2, \xi_1) = u(\xi_1)v(\xi_2)$. Salīdzinot abas pēdējās vienlīdzības redzam, ka $G(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1)$. Tā kā ξ_1 un ξ_2 bija brīvi izvēlētas vērtības, tad arī

$$G(x,t) = G(t,x).$$

Lai varētu atrast sakaru starp robežproblēmu (10) un integrālvienādojumiem, apskatīsim divas teorēmas.

T e o r ē m a.

Ja F ir robežproblēmas

$$(14)\quad \begin{cases} \mathcal{L}(F) + f = 0 \\ \mathcal{U}_1(F) = 0 \\ \mathcal{U}_2(F) = 0 \end{cases}$$

atrisinājums, pie kam funkcija f ir reāla, vienvērtīga un nepārtraukta x funkcija intervallā $a \le x \le b$, tad F, F' un F'' ir nepārtrauktas x funkcijas intervallā $a \le x \le b$ un

$$(15)\quad F(x) = \int_a^b G(x,t) f(t)\,dt,$$

kur $G(x,t)$ ir robežproblēmas (10) Green'a funkcija.

Tā kā F ir robežproblēmas (14) diferenciālvienādojuma atrisinājums, tad F' un F'' ir nepārtrauktas x funkcijas intervallā $a \le x \le b$ un

$$(16)\quad \mathcal{L}(F) = -f$$

intervallā $a \le x \le b$, bet

$$(17)\quad \mathcal{L}(G) = 0$$

katrā no intervalliem $a \le x < t$ un $t < x \le b$ atsevišķi.
Reizinām (16) ar $-G$ un (17) ar F un saskaitām, tad dabūjam

$$(18)\quad F\mathcal{L}(G) - G\,\mathcal{L}(F) = Gf.$$

Pēdējā vienlīdzība pareiza intervalliem $a \le x < t$ un $t < x \le b$ atsevišķi. Ievērojot Lagrange identitāti (12), dabūjam

$$(19)\quad \frac{d}{dx}\left[\alpha(FG' - GF')\right] = Gf.$$

Integrējot (19) robežās no a līdz b un sadalot integrācijas intervallu $a \le x \le b$ divos intervallos $a \le x < t$, $t < x \le b$, dabūjam

$$(20)\quad \left[\alpha(FG' - GF')\right]_a^{t-0} + \left[\alpha(FG' - GF')\right]_{t+0}^b = \int_a^b G(x,t) f(x)\,dx.$$

$$\left[\alpha(FG' - GF')\right]_a^{t-0} + \left[\alpha(FG' - GF')\right]_{t+0}^b = \alpha(t)F(t)G'(t-0) - \alpha(t)G(t)F'(t) - \alpha(a)F(a)G'(a) +$$
$$+ \alpha(a)G(a)F'(a) + \alpha(b)F(b)G'(b) - \alpha(b)G(b)F'(b) - \alpha(t)F(t)G'(t+0) + \alpha(t)G(t)F'(t);$$

$$-\alpha(a)F(a)G'(a) + \alpha(a)G(a)F'(a) = \alpha(a)\begin{vmatrix} G(a) & G'(a) \\ F(a) & F'(a) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\alpha(a)}{\alpha'}\begin{vmatrix} \alpha' G(a) - \alpha G'(a) & G'(a) \\ \alpha' F(a) - \alpha F'(a) & F'(a) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ja } \alpha' \ne 0.$$

Tāpat atrodam, ka

$$\alpha(b)F(b)G'(b) - \alpha(b)G(b)F'(b) = 0$$

un identitāte (20) pārrakstās

$$x(t)F(t)G'(t-0)-\alpha(t)F(t)G'(t+0)=\int_a^b G(x,t)f(x)dx$$

$$F(t)=\int_a^b G(x,t)f(x)dx.$$

Tā kā $G(x,t)$ ir simmetriska funkcija, tad, x un t apmainot, dabūjam

$$F(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)dt.$$

A p g r i e z t ā t e o r ē m a.

Ja

$$F(x)=\int_a^b G(x,t)f(t)dt,$$

tad F, F' un F'' ir nepārtrauktas x funkcijas intervallā $a\le x\le b$ un F ir robežproblēmas (14) atrisinājums.

Funkcija $F(x)$ ir nepārtraukta intervallā $a\le x\le b$ funkciju $G(x,t)$ un $f(t)$ nepārtrauktības dēļ šai intervallā. $F(x)$ varam uzrakstīt veidā

$$(21)\quad F(x)=\int_a^x G_2(x,t)f(t)dt+\int_x^b G_1(x,t)f(t)dt.$$

Sastādam $F'(x)$ un $F''(x)$.

$$(22)\quad F'(x)=\int_a^x G_2'(x,t)f(t)dt+\int_x^b G_1'(x,t)f(t)dt+G_2(x,x)f(x)-G_1(x,x)f(x)=$$

$$=\int_a^x G_2'(x,t)f(t)dt+\int_x^b G_1'(x,t)f(t)dt,$$

jo $G_2(x,x)-G_1(x,x)=0$

$$(23)\quad F''(x)=\int_a^x G_2''(x,t)f(t)dt+\int_x^b G_1''(x,t)f(t)dt+G_2'(x,x)f(x)-G_1'(x,x)f(x)=$$

$$=\int_a^x G_2''(x,t)f(t)dt+\int_x^b G_1''(x,t)f(t)dt-\frac{f(x)}{\alpha(x)},$$

jo $G_2'(x,x)-G_1'(x,x)=-\frac{1}{\alpha(x)}$.

Ka $F'(x)$ un $F''(x)$ ir nepārtrauktas, to viegli redzēt, ja $G_2(x,t)$ un $G_1(x,t)$ vietā ieliek to nozīmes no (13). Ka F ir robežproblēmas atrisinājums, atrod, reizinot $(21), (22), (23)$ ar $-\ell(x), \alpha'(x)$ un $\alpha(x)$ un saskaitot, tad

$$\mathcal{L}(F)=\int_a^x \mathcal{L}(G_2)f(t)dt+\int_x^b \mathcal{L}(G_1)f(t)dt-f(x).$$

tā kā $\mathcal{L}(G_2) = \mathcal{L}(G_1) = 0$, tad

$$\mathcal{L}(F) = -f(x).$$

Ka F apmierina robežnoteikumus, dabūjam, sastādot $U_1(F)$ un $U_2(F)$ ar (21) un (22) palīdzību.

Ja vienādojumā (15) $f(t)$ vietā liekam $\lambda g(t)\,u(t)$ un $F(x)$ vietā $u(x)$, tad dabūjam integrālvienādojumu

$$(24) \quad u(x) = \lambda \int_a^b H(x,t)\,u(t)\,dt,$$

kur $H(x,t) = G(x,t)\,g(t)$, ko sauc par integrālvienādojuma kodolu. Redzam, ka robežproblēma (10) ir līdzvērtīga integrālvienādojumam (24). Robežproblēmai (10) intervallā $-\infty < \lambda < +\infty$ ir bezgala daudz īpatnējo vērtību un katrai īpatnējai vērtībai atbilst tikai viens lineāri neatkarīgs robežproblēmas (10) atrisinājums. No iepriekšējā seko, ka arī integrālvienādojums būs atrisināms tām pašām λ vērtībām, kuras šeit sauc par kodola īpatnējām vērtībām, bet atbilstošos integrālvienādojuma atrisinājumus par kodola īpatnējām funkcijām.

VIII. KOPSAVILKUMS.

Iepriekšējā darbā apskatītas robežproblēmas,kuŗu diderenciālvienādojumi ir lineāri otrās kārtas vienādojumi un robežnoteikumi arī ir lineāri.Par šādām robežproblēmām mēs atradām,ka tās var uzskatīt kā lineāru algebrisko vienādojumu sistēmu robežgadījumu.Tālāk darbā apskatīts robežproblēmas atrisinājuma raksturs un tā maiņas,ko izsauc maiņas diferenciālvienādojuma koeficientos un robežnoteikumos.Tas ietverts Sturm'a salīdzināšanas teorēmās.
Tad apskatīta speciāla robežproblēmu šķira,kur robežnoteikumi ir tā sauktie Sturm'a robežnoteikumi,kas raksturoti ar to,ka tie katrs ietver sevī tikai vienu intervalla gala punktu.Par šīm robežproblēmaām apskatīta to īpatnējo vērtību eksistence,īpatnējo funkciju daba un īpatnējo vērtību un īpatnējo funkciju maiņas,ko rada maiņas diferenciālvienādojuma koeficientos un robežnoteikumos.Šīs lietas apskatītas oscillāciju teorēmās.

Bez Sturm'a metodēm robežproblēmas var pētīt vēl ar citām metodēm.Pazīstamākās no tām ir:

1. Liouville'a asimptotisko izteiksmju metode.
2. Pakāpeniskā tuvinājumu metode.
3. Variāciju rēķinu metode.
4. Integrālvienādojumu teorijas metode.

1. Liouville's apskata jau iepriekšējās nodaļās apskatīto Sturm'a - Liouville'a robežproblēmu un parāda,ka tās atrisinājumu u var uzrakstīt veidā

$$u = \cos \lambda x + \frac{Y_1(x,\lambda)}{\lambda},$$

kur λ ir īpatnējā vērtība un $Y_1(x,\lambda)$ nepārtraukta x un λ funkcija.Ja λ ir liels,tad u maz atšķiras no $\cos \lambda x$. Tā tad lielām īpatnējām vērtībām atrisinājuma u vietā var ņemt $\cos \lambda x$.
2. Pakāpeniskā tuvinājumu metodē sastāda tuvinājumu rindu $u_0, u_1, \dots u_n, \dots$ un pierāda,ka šī rinda konverģē un gadījumā,

kad $n \to \infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$.

3. Variāciju rēķinu metode izlieto, ka robežproblēmu var vest tuvā sakarā ar variāciju rēķiniem, un atrod, ka integrāļiem, kas sastādīti no robežproblēmas īpatnējām funkcijām, minimālās vērtības ir robežproblēmas īpatnējās vērtības.

4. Kā jau redzējām iepriekšējā nodaļā, katru robežproblēmu var reducēt uz integrālvienādojumu un, atrisinot integrālvienādojumu, ir atrisināta arī robežproblēma.

No visām metodēm visplašākā ir integrālvienādojumu metode. To var lietot arī gadījumos, kad robežproblēmu apskata ne tikai vienā dimensijā, bet divās un vairākās.

Literatūra.

1. M.Bôcher.Leçons sur les Méthodes de Sturm / 1917 /.
2. M.Bôcher.The Theorems of Oscillation of Sturm and Klein / First paper.Second paper.Bull.of the Amer. Math.soc.IV.1898. /
3. M.Bôcher.Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen /Enc.der math.Wissenschaften II.1900./
4. M.Bôcher.Boundary Problems in one Dimension / Proc. of the intern.congr.of Math.Vol.I.1913./
5. M.Bôcher.Einführung in die höhere Algebra / 1910. /
6. E.L.Ince.Ordinary differential equations / 1927./
7. C.M.Mason.Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen / 1903./
8. Haupt.Untersuchungen über Oscillationstheoreme / 1911./
9. J.Horn.Partielle Differentialgleichungen / 1929./
10. R.v.Mises.Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. / 1925. /
11. Vivanti - Schwank.Lineare Integralgleichungen / 1929./
12. G.Hoheisel.Gewöhnliche Differentialgleichungen / 1930./
13. G.Wiarda.Integralgleichungen / 1930. /