A. L ū s i s,

Latvijas Valsts Universitātes profesors

I N T E G R Ā L I E   R Ē Ķ I N I

II daļa

NOTEIKTIE INTEGRĀLI.

K o n s p e k t s.
Ar rokraksta tiesībām.

Lasīts Latvijas Valsts Universitātes Fīzikas un matemātikas fak-tē.

R ī g ā, 1 9 4 1.g.

Latvijas Valsts Universitātes izdevniecība.

II daļa. NOTEIKTIE INTEGRĀLI.

I NOTEIKTO (VIENKĀRŠO) INTEGRĀLU APRĒĶINĀŠANAS METODES.

1.§. Noteikto integrālu galvenās īpašības un aprēķināšana.

Noteiktā integrāla jēdziens saistās ar figūras laukuma aprēķināšanu.

Ņemsim nepārtrauktu funkciju $y = f(x)$, definētu intervalā $a \leq x \leq b$ (1.zīm.). Aprēķināsim laukumu, ko ieslēdz līnija AB, x-ass gabals ab un ordinātas aA un bB.

1.zīm.

Sadalīsim n daļās intervalu (a, b) ar dalījuma punktiem $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}, b = x_n$ un caur dalījuma punktiem vilksim taisnes paraleli y-asij. Šīs taisnes sadala figūru $aABb$ "trapezās", kam augšējās malas ir līkās līnijas gabali. Šo trapezu laukumu novērtēšanai konstruē taisnstūŗus, kam pamats ir parciālie intervali $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ un augstumi - funkcijas $f(x)$ minimālās vērtības $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots, m_n$, resp.maksimālās vērtības $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots, M_n$ šajos intervalos.

Apskatīsim intervalu $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ un taisnstūŗus, kuŗu pamatne ir Δx_k. Kad Δx_k pietiekami mazs, trapezas laukumu varēsim aizstāt ar taisnstūŗu laukumu, kuŗa pamatne ir Δx_k un augstums $f(\xi_k)$, kur ξ_k ir kaut kāda argumenta nozīme intervalā (x_{k-1}, x_k). Apskatāmā taisnstūŗa laukums ir $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$. Figūras $aABb$ laukumu S var aizstāt ar atsevišķo taisnstūŗu laukumu summu:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_k)\cdot\Delta x_k + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k,$$

ko sauksim par funkcijas $f(x)$ <u>integrālsummu</u>, sastādītu parciāliem intervaliem

Pierādīsim, ka šai integrālsummai ir robeža, kad dalījumu skaits $n \to \infty$ un katrs parciālais intervals $\Delta x_k \to 0$. Šo robežu sauc par funkcijas $f(x)$ <u>noteikto integrālu</u> $\int_a^b f(x)dx$, kas izteic arī figūras $aABb$ laukumu S.

Ja aplūkojamā intervalā Δx_k minimālā līnijas ordinātas vērtība ir m_k un maksimālā M_k, tad

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k.$$

Reizināsim šo nevienlīdzību ar $\Delta x_k > 0$ (jo $x_k > x_{k-1}$):

$$m_k \cdot \Delta x_k \leq f(\xi_k)\cdot\Delta x_k \leq M_k \cdot \Delta x_k.$$

un summējam pēc k :

$$\sum_{k=1}^{n} m_k.\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k).\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k\cdot \Delta x_k.$$

Minimālā summa $s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k.\Delta x_k$ izsaka mazāko taisnstūŗu laukumu summu un maksimālā summa $S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k\cdot\Delta x_k$ - lielāko taisnstūŗu laukumu summu.

Savukārt šīs summas ir ierobežotas. Tiešām, ja ar m, resp. M apzīmē nepārtrauktās funkcijas $f(x)$ minimālo, resp. maksimālo vērtību visā intervalā (a,b), tad no nevienlīdzībām $m_k.\Delta x_k \geq m.\Delta x_k$, resp. $M_k\,\Delta x_k \leq M\,\Delta x_k$ ar summēšanu dabū

$$s_n \geq m(b-a),\ \text{resp}\ S_n \leq M(b-a),$$

jo $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a$. Tādēļ pastāv nevienlīdzības

$$(*)\quad m(b-a) \leq s_n \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \leq S_n \leq M(b-a)$$

Ja dalījumu skaits $n \to \infty$ un intervals $\Delta x_k \to 0$, tad $s_n \to S$ un $S_n \to S$. Bet, ja divi lielumi tiecas uz kopēju robežu, tad arī ikviens lielums, kas atrodas starp šiem lielumiem, tiecas uz to pašu robežu. Tā tad

$$S \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

Var konstatēt, ka reizē ar n augšanu minimālā summa s_n monotoni aug un maksimālā summa S_n monotoni dilst, diference $S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k \longrightarrow 0$, kad $n \to \infty$ un $\Delta x_k \to 0$.

Starpību starp funkcijas maksimālo un minimālo vērtību kādā intervalā $M_k - m_k = \omega_k$ sauc par funkcijas oscilāciju šajā intervalā. Ja dalījumu skaitu n pastāvīgi palielina un intervalu Δx_k samazina, funkcijas oscilācija samazinās. Var atrast pietiekami mazus Δx_k, ka ar pozitīvu skaitli ε novērtē $\omega_k < \varepsilon$. Tad $S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k < \varepsilon(b-a)$. Tādēļ $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = S$

1.piemērs: Aprēķināt laukumu, ko ieslēdz taisne $y = x$, x-ass gabals $(0,b)$ un ordināta $x = b$ (2.zīm.)

2.zīm.

Sadalīsim intervalu $(0,b)$ n vienlīdzīgās daļās un ņemsim $\xi_k = x_k$. Tad $\Delta x_k = \frac{b}{n}$.

un

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot\frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Tā kā

$$x_1 = \frac{b}{n},\ x_2 = \frac{2b}{n},\ x_3 = \frac{3b}{n},\ \ldots,\ x_n = \frac{nb}{n} = b,$$

tad

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{b}{n}(1+2+3+\ldots+n) = \frac{b}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{b}{2}(n+1)$$

un

$$S = \lim_{n\to\infty}\frac{b^2}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{b^2}{2}.$$

Šo pašu rezultātu var dabūt ar integrēšanu:

$$S = \int_0^b x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b = \frac{b^2}{2}.$$

2.piemērs: Aprēķināt laukumu, ko ieslēdz parabola $y=x^2$, x -ass un ordināta $x=b$ (3.zīm.)

Sadalam intervalu $(0, b)$ n vienlīdzīgās daļās un konstruējam kāpņu veida figūru, ņemot $\xi_k = x_k$. Tad

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\cdot\frac{b}{n} = b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

3.zīm.

Tā kā

$$x_k = k\cdot\frac{b}{n},$$

tad

$$S = b^3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)$$

Aprēķināsim rindas $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ summu, lietojot formulas

$$\begin{cases} (1+1)^3 = 1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1, \\ (2+1)^3 = 2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1, \\ \text{---}\;\text{---}\;\text{---}\;\text{---}\;\text{---} \\ n^3 = (n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1, \\ (n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1 \end{cases}$$

Pēc saskaitīšanas un vienkāršošanas dabū

$$(n+1)^3 = 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+2+3+\ldots+n)+n+1,$$

jeb

$$n^3+3n^2+3n+1 = 3(1^2+2^2+\ldots+n^2)+3(1+2+\ldots+n)+n+1;$$

$$3(1^2+2^2+\ldots+n^2) = n^3+3n^2+2n-3(1+2+\ldots+n);$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n^3}{3}+n^2+\frac{2n}{3}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

Tā tad

$$S = b^3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(2n+1)(n+1)}{6} = \frac{b^3}{6}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

jeb

$$S = \frac{b^3}{3}.$$

Ar integrāciju rodas:

$$S = \int_0^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^3}{3}$$

Piezīme. Ja figūra atrodas zem x-ass, tās laukums ir negatīvs (4.zīm.), jo $f(\xi_k) < 0$ un tā tad arī

$$\int_a^b f(x) dx < 0.$$

4.zīm.

Ja figūras daļa atrodas zem x-ass, daļa virs x-ass, tad $\int f(x)\, dx$ attēlo laukumu algebrisko summu.

Var gadīties, ka $S = 0$. Tā piemēram ir 5.zīm. gadījumā. Te $y = \sin x$ un intervalā $(0, 2\pi)$

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = -1+1 = 0.$$

5.zīm.

2.§. Noteiktā integrāla pamatīpašības.

Integrāla definīcijas formulu

$$(1.)\ \int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta x_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_k - x_{k-1};\ x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k),$$

kas sastādīta gadījumam, kad $a < b$, pieņemsim par pareizu arī tad, ja $a > b$ (tad $\Delta x_k < 0$ un $x_k \leq \xi_k \leq x_{k-1}$). Ar šo pieņēmumu no (1) secina, ka

$$(2.)\quad \int_b^a f(x) = -\int_a^b f(x) dx,$$

t.i. ja apmaina savā starpā integrācijas robežas, tad integrāls maina zīmi uz pretējo (1.īpašība).

Speciālā gadījumā, kad $a = b$, no (2.) dabū

$$\int_a^a f(x) dx = -\int_a^a f(x) dx, \quad 2\int_a^a f(x) dx = 0, \quad \int_a^a f(x) dx = 0,$$

t.i. integrāls ar vienlīdzīgām robežām ir nulle (2.īpašība).

Lietojot (1.) un (2.), konstatē integrāla 3.īpašību: ja a, b, c ir kaut kādi intervala punkti, tad

$$(3.)\ \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad \text{jeb} \quad \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \int_c^a f(x) dx = 0.$$

Gadījumā, kad punkts c atrodas ārpus intervala (a, b), šo īpašību pierāda tieši ar definīcijas formulu (1.). Pretējā gadījumā, kad c ir intervala (a, b) iekšējs punkts, no sakara

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

secina

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx \quad \text{jeb} \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx,$$

ja lieto 1.īpašību

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx$$

3.Īpašību var vispārināt gadījumam, kad ir vairāk nekā trīs intervala punkti. Tā ir analoga Šāla (Chasles) sakaram orientētu taisnes gabalu starpā.

4.Īpašība. Konstantu faktoru var izcelt no integrāla zīmes. Tiešām, pēc definīcijas formulas

$$\int_a^b A\,f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} A\,f(\xi_k)\Delta x_k = A\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

jeb

$$\int_a^b A f(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

Ja $A = -1$,tad

$$\int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx.$$

5.Īpašība. Summas integrāls vienlīdzīgs ar saskaitāmo integrālu summu:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k)+g(\xi_k)]\Delta x_k = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k +$$

$$+\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

6.Īpašība. Ja $f(x) \geq 0$ un $a < b$,tad $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0.$

Turpretim, ja $f(x) \leq 0$ un $a<b$,tad $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq 0.$

7.Īpašība. Ja $f(x) \leq g(x)$ un $a < b$,tad $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Tiešām $g(x) - f(x) = \varphi(x) \geq 0$ un ievērojot sesto īpašību, varam teikt, ka $\int_a^b \varphi(x)dx \geq 0$, vai $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0,$

t.i. $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Speciālā gadījumā, kad $g(x) = |f(x)|$,dabū

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

3.§. Teorēma par vidējo vērtību.

Teorēma. Ja $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija, definēta intervalā $a \leq x \leq b$,tad tās integrāls

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a),$$

kur c ir viens intervala (a, b) punkts, t.i. $c = a + \theta(b-a)$, ja $0 \leq \theta \leq 1$.

Ģeometriskā uztverē teorēma apgalvo, ka figūra $aABb$ (6.zīm.) vienliela ar taisnstūri $aCDb$,kam pamats ir intervala garums $(b-a)$ un augstums ir t.s.funkcijas vidējā vērtība intervalā (a, b)

$$\mu = f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Analītiskais pierādījums.

No integrālsummas novērtēšanas formulas (sk.1.§.)

$$m(b-a) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leq M(b-a),$$

kur m ,resp. M ir funkcijas minimālā, resp.maksimālā vērtība intervalā (a, b), secina, ka arī robežgadījumā

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Tādēļ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a),$$

ja $m \leq \mu \leq M$. Tā kā $f(x)$ ir slēgtā intervalā (a, b) definēta nepārtraukta funkcija, tad tā pieņem šajā intervalā visas starpvērtības, kas mazākas par maksimālo un lielākas par minimālo vērtību, resp.būs vismaz viens šī intervala punkts c , kur

$$\mu = f(c) \quad \ldots \quad (a \leq c \leq b,\ c = a + \theta(b-a),\ 0 \leq \theta \leq 1)$$

Teorēma pastāv arī tad, ja $b < a$. Tiešām, no

$$\int_b^a f(x)\,dx = f(c)\cdot(a-b)$$

secina

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\cdot(b-a)$$

Teorēmas vispārinājums. Ja dotas intervalā (a, b)definētas divas nepārtrauktas funkcijas $f(x)$ un $\varphi(x)$ un ja $\varphi(x)$ šajā intervalā nemaina zīmi, tad

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx = f(c)\cdot\int_a^b \varphi(x)\,dx \ldots \quad (c = a + \theta(b-a),\ 0 \leq \theta \leq 1)$$

Pierādījums. Pieņemsim, ka $a < b$ un $\varphi(x) > 0$ visos intervala punktos. Tad pastāv nevienlīdzība

$$m\cdot\varphi(x) \leq f(x)\cdot\varphi(x) \leq M\cdot\varphi(x),$$

kur m , resp. M ir funkcijas $f(x)$ minimālā, resp.maksimālā vērtība intervalā (a, b). Pēc integrēšanas rodas

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)\,dx \leq M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Intervalā (a,b) ir kāds punkts c, kuŗā funkcija $f(x)$ pieņem starpvērtību $\mu = f(c)$ $(m \le \mu \le M)$ un

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi(x)dx = \mu\int_a^b \varphi(x)dx$$

Gadījumā, kad $\varphi(x) < 0$, tad $-\varphi(x) > 0$ un

$$\int_a^b [-\varphi(x)]\cdot f(x)dx = \mu\int_a^b -\varphi(x)\cdot dx,$$

jeb

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) = \mu\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Tālāk pierādīsim, ka <u>funkcijas vidējā vērtība</u>

$$\mu = \frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$$

<u>ir vienlīdzīga ar vidējo aritmetisko robežvērtību.</u>

Sadalīsim intervalu (a,b) n vienlīdzīgās daļās. Tad $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ un

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)}{n}$$

Aprēķināsim vidējo vērtību μ, liekot μ izteiksmē nupat dabūto integrāla izteiksmi. Tad

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)}{n}.$$

Te var ņemt

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) = \begin{cases} f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}), & \text{ja } \xi_k = x_{k-1},\\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & \text{ja } \xi_k = x_k\end{cases}$$

Tādēļ tiešām

$$\mu = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n+1}$$

<u>4.§. Sakars noteiktā un nenoteiktā integrāla starpā.</u>

Noteiktais integrāls $\int_a^b f(x)dx$ pēc definīcijas ir noteikts skaitlis, kas atkarājas no ņemtās funkcijas $f(x)$ un no intervala (a,b) gala punktiem, bet nav atkarīgs no integrācijas mainīgā x. Tādēļ var lietot kādu citu šī mainīgā apzīmējuma, piem.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt,$$

ja tikai $a \le t \le b$.

Kad ņemsim noteiktu apakšējo robežu a, bet augšējo robežu

x mainīgu, tad ar integrālu $\int_a^x f(t)\,dt$ ir definēta intervalā $a \leq t \leq x \leq b$ funkcija

$$(1.)\quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

kur vērtība $F(a) = 0$.

Pierādīsim pamatteorēmu: Funkcija (1.) ir nepārtraukta un diferencējama funkcija intervalā (a,b); tās atvasinājums $F'(x)$ ir dota funkcija $f(x)$,t.i. funkcija (1.) ir dotās funkcijas $f(x)$ primitīva funkcija, kam punktā $x=a$ ir vērtība nulle.

No pamatteorēmas secinams, ka katrai nepārtrauktai funkcijai eksistē primitīvā funkcija, resp.nenoteiktais integrāls.

Pierādījums. Ir jāpierāda, ka eksistē robeža, ar kuŗu definē atvasinājumu

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Ar $F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt$ un $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ izteic funkcijas pieaugumu

$$\Delta F = F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

Tā kā

$$\int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt,$$

tad

$$\Delta F = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Pēc teorēmas par vidējo vērtību izteic

$$\Delta F = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)\cdot(x+h-x) = h\cdot f(\xi) \qquad (\xi = x + \Theta h,\ 0 \leq \Theta \leq 1)$$

Bezgala mazam argumenta pieaugumam h atbilst bezgala mazs funkcijas pieaugums ΔF , jo $f(\xi)$ ir galīgs lielums. Tādēļ $F(x)$ ir nepārtraukta funkcija.

Sastādam diferenču kvocientu

$$\frac{\Delta F}{h} = f(\xi)$$

Ja $h \to 0$, tad $\xi \to x$ un $f(\xi) \to f(x)$,vienalga vai $h \to +0$, vai $h \to -0$ .Secinām, ka $F(x)$ ir diferencējama funkcija un tās atvasinājums tiešām ir $F'(x) = f(x)$

Ņemsim nenoteiktu integrālu $\int f(x)\,dx = \phi(x)$,resp. kaut kuŗu primitīvu funkciju $\phi(x)$,kuŗai $\phi'(x) = f(x)$ .Tā kā

$$[\phi(x) - F(x)]' = 0,$$

tad

$$\phi(x) - F(x) = C,$$

kur C ir patvaļīga integrācijas konstante. Aprēķināsim C ,zinot,

ka $F(a)=0$ .Tad
$$\phi(a)-F(a)=c$$
dod
$$c=\phi(a).$$
Tādēļ
$$\phi(x)-F(x)=\phi(a)$$
jeb
$$F(x)=\phi(x)-\phi(a)=\int_a^x f(t)\,dt.$$
Ir atrasts pamatsakars noteiktā un nenoteiktā integrāla starpā (Leibniz - Newton'a formula).

Gadījumā, kad $x=b$,dabū
$$\int_a^b f(t)\,dt=\phi(b)-\phi(a),$$
jeb
$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\int f(x)\,dx\Big]_a^b$$

5.§. Mainīgo substitūcijas metode.

Nenoteiktā integrāla $\int f(x)\,dx$ aprēķināšanai pēc substitūcijas metodes x vietā liek diferencējamu funkciju $\varphi(t)$.
Tad $f(x)=f[\varphi(t)]$, $dx=\varphi'(t)\,dt$ un
$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=G(t).$$
Ja te izteic inverso funkciju $t=\psi(x)$,tad
$$\int f(x)\,dx=G[\psi(x)]=H(x)$$
Apskatīsim, kā mainīsies integrāla robežas, ja jāpārveido noteiktais integrāls $\int f(x)\,dx$ ar substitūciju $x=\varphi(t)$, kur $\varphi(t)$ ir vienvērtīga un diferencējama funkcija intervalā $\alpha\leq t\leq\beta$.

Ir jāprasa, lai 1) $a=\varphi(\alpha)$ un $b=\varphi(\beta)$ un 2) katrai x vērtībai intervalā (a,b) atbilstu viena $t=\psi(x)$ vērtība intervala (α,β) un otrādi, pie kam $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$.

Konstatēsim, ka tad
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$
Sastādīsim divas funkcijas
$$(1.)\quad F(x)=\int_a^x f(x)\,dx$$
un
$$(2.)\quad G(t)=\int_\alpha^t f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot dt$$
un ar $x=\varphi(t)$ funkciju
$$F[\varphi(t)]=\bar{F}(t).$$

Pierādīsim, ka $\bar{F}(t) \equiv G(t)$, konstatējot, ka šo funkciju atvasinājumi ir vienādi un kādā punktā šo funkciju vērtības sakrīt. Tiešām, no formulām

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \left[\frac{dF(x)}{dt}\right]_{x=\varphi(t)} = \left[\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\right]_{x=\varphi(t)} = [f(x)]_{x=\varphi(t)}\cdot\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$$

un

$$\frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\alpha}^{t} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)$$

secina atvasinājumu identitāti

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \frac{dG}{dt}$$

Apskatot integrālu (1.), konstatējam, ka a ir izvēlēts tā, lai $F(a) = 0$. Integrāls (2.) izvēlēts tā, lai $G(\alpha) = 0$. Tā kā

$$F(a) = F[\varphi(\alpha)] = \bar{F}(\alpha) = 0 \quad \text{un} \quad G(\alpha) = 0,$$

resp.

$$\bar{F}(\alpha) = G(\alpha) = 0$$

un

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \frac{dG}{dt},$$

tad tiešām

$$G(t) \equiv \bar{F}(t).$$

Ja x vietā integrālā (1.) liek b, tad $F(b) = F[\varphi(\beta)] = \bar{F}(\beta) = \int_a^b f(x)\,dx$

Ja t vietā integrālā (2.) liek β, tad $G(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$

Tā tad

$$(3.)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt \qquad [\text{ja } x = \varphi(t),\ a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)]$$

<u>Piezīme.</u> 1. Ja funkcija $\varphi(t)$ nav vienvērtīga, tad šī substitūcijas formula var dot nepareizu rezultātu. To rāda šāds <u>piemērs:</u> $\int_{-1}^{1} dx = 2$.

Ņemsim $t = x^2$, tad

$$\begin{cases} x = -1, & t = +1 \\ x = +1, & t = +1 \end{cases}$$

un

$$\int_{-1}^{+1} dx = \frac{1}{2}\int_{1}^{1} t^{-\frac{1}{2}}\,dt = 0.$$

Te radusies pretruna. Pretruna izskaidrojama ar to apstākli, ka $x = \pm\sqrt{t}$ ir divvērtīga funkcija.

Lai pareizi lietotu substitūcijas formulu, sadala intervalu (-1, +1) divos atsevišķos intervalos (-1,0) un (0,+1) un te lieto $x = -\sqrt{t}$, resp. $x = +\sqrt{t}$.

2. Pāru un nepāru funkciju integrāli.

Ja funkcija $f(x)$ ir pāru funkcija, tad $f(x) = f(-x)$, resp. funkcijas grafika ir simmetriska pret y-asi (7.zīm.). Pierādīsim, ka šādā gadījumā

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Turpretim, ja funkcija $f(x)$ ir nepāru funkcija, tad $f(-x) = -f(x)$, resp. funkcijas grafika ir simmetriska pret sākuma punktu (8.zīm.). Tad

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$$

Tiešām, sadalot

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

un izteicot ar substitūciju $x = -t$ integrālu $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$, dabū formulu

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t).d(-t) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-t).dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]\,dx$$

jeb

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{ja } f(x) \text{ pāru funkcija,} \\ 0, & \text{ja } f(x) \text{ nepāru funkcija.} \end{cases}$$

Piemērs: $\cos(-x) = \cos x.$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 2\left[\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 0$$

6.§. Parciālās integrēšanas metode.

No atvasinājuma formulas

$$(uv)' = uv' + u'v$$

ar integrēšanu sastāda sakaru

$$\int_{a}^{b} (uv)'\,dx = \int_{a}^{b} uv'\,dx + \int_{a}^{b} u'v\,dx$$

jeb

$$\left[uv\right]_{a}^{b} = \int_{a}^{b} uv'\,dx + \int_{a}^{b} u'v\,dx$$

Tādēļ ir šāda parciālās integrēšanas formula

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx,$$

ko raksta arī simboliski

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Ar parciālās integrācijas metodi var pierādīt Taylor'a formulu ar atlikumu $R_n(x)$ integrāla formā.

Pieņemsim, ka $f(x)$ ir nepārtraukta un n reiz diferencējama funkcija, t.i. ka eksistē $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$.

No

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

izteic

$$f(x) = f(a) - \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Zinot, ka eksistē $f''(x)$, pārveido ar parciālo integrēšanu

$$\int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x f'(t)\cdot d(t-x) = \Big[f'(t)(t-x)\Big]_{t=x}^{t=a} - \int_a^x (t-x)\cdot f''(t)\,dt$$

jeb

$$\int_a^x f'(t)\,dt = (x-a)\cdot f'(a) + \int_a^x f''(t)\cdot(x-t)\,dt$$

Savukārt

$$\int_a^x f''(t)\cdot(x-t)\,dt = \left[-f''(t)\cdot\frac{(x-t)^2}{2}\right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f'''(t)\,\frac{(x-t)^2}{2}\,dt$$

jeb

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt = f''(a)\,\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f'''(t)\,\frac{(x-t)^2}{2}\,dt \quad u.t.t.$$

Vispārīgi ir pareiza Taylor'a formula

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n(x),$$

kur

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n)}(t)\cdot\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

Pēc teorēmas par vidējo vērtību

$$\int_a^b F(x)\cdot\varphi(x)\,dx = F(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad (\varphi(x)>0,\ c = a+\theta b,\ 0 \le \theta \le 1)$$

ar funkcijām

$$F(t) = f^{(n)}(t) \text{ un } \varphi(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (a \le t \le x,\ \varphi(t) > 0)$$

izteic atlikumu Lagrange'a formā

$$R_n(x) = f^{(n)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = f^{(n)}(\xi)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!},$$

kur $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 \le \theta \le 1$.

7.§. Integrālu atvasināšana pēc parametra.

Dažos gadījumos integrālu var aprēķināt, lietojot likumu par integrāla atvasināšanu pēc parametra.

Var gadīties, ka zemintegrāla funkcija $f(x,\alpha)$ atkarīga netikvien no argumenta x ,bet arī no kāda parametra α . Jāizšķir divi gadījumi: 1) Integrācijas robežas ir konstantas; tad

$$F(\alpha)=\int_a^b f(x;\alpha)\,dx$$

2) Robežas mainās atkarībā no parametra; tad

$$F(\alpha)=\int_u^v f(x;\alpha)\,dx$$

kur $u=u(\alpha)$ un $v=v(\alpha)$ ir α funkcijas.

Atvasināsim doto integrālu pēc parametra α. Apskatīsim pirmo gadījumu. Zemintegrāla funkcija $f(x;\alpha)$ ir divu mainīgo funkcija, definēta (9.zīm.) taisnstūrī (A), kur $a\leq x\leq b$ $\alpha_0\leq\alpha\leq\alpha_1$

Lai varētu integrālu atvasināt pēc α , pieņemsim, ka 1) funkcija $f(x;\alpha)$ apgabalā (A) ir nepārtraukta un 2) funkcija $f(x;\alpha)$ ir divreiz parciāli diferencējama pēc α.

Pierādīsim, ka

$$\frac{dF}{d\alpha}=\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x;\alpha)\,dx=\int_a^b f'_\alpha(x;\alpha)\,dx$$

Jāpierāda, ka eksistē robeža

$$\frac{dF}{d\alpha}=\lim_{h\to 0}\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}$$

Tā kā

$$F(\alpha+h)=\int_a^b f(x;\alpha+h)\,dx,$$

tad

$$F(\alpha+h)-F(\alpha)=\int_a^b[f(x;\alpha+h)-f(x;\alpha)]\,dx.$$

Pārveidosim zemintegrāla funkciju, izlietojot Lagrange'a formulu (diferenciālrēķinu teorēmu par vidējo vērtību)

$$f(x,\alpha+h)-f(x;\alpha)=h\,f'_\alpha(x,\alpha+\theta h);\quad(0<\theta<1)$$

Tad rodas

$$F(\alpha+h)-F(\alpha)=h\int_a^b f'_\alpha(x;\alpha')\,dx\qquad(\alpha'=\alpha+\theta h)$$

Sastādītā funkcija ir nepārtraukta, jo $F(\alpha+h)-F(\alpha)\to 0$, ja $h\to 0$. Tiešām integrāls $\int_a^b f'_\alpha(x;\alpha')\,dx$ ir ierobežots, jo

$$\left|\int_a^b f'_\alpha(x;\alpha')\,dx\right|\leq\int_a^b|f'_\alpha(x;\alpha')|\,dx<M'(b-a)\ldots\ (|f'_\alpha|<M')$$

No diferenču kvocienta izteiksmes

$$\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}=\int_a^b f'_\alpha(x;\alpha')\,dx$$

atrastu atvasinājumu

$$\frac{dF}{d\alpha}=\lim_{h\to 0}\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha+\theta h)dx=\int_a^b \lim_{h\to 0} f(x,\alpha+\theta h)dx=\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx,$$

ja būtu atļauta robežas pārejas un integrēšanas darbību savstarpēja apmaiņa.

Jākonstatē, ka

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}-\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx\right]=0.$$

Lai to konstatētu, pieņemsim, ka eksistē otrais atvasinājums pēc α dotai funkcijai $f(x,\alpha)$.

Pēc Lagranža formulas var izteikt integrālu

$$\int_a^b[f'_\alpha(x,\alpha')-f'_\alpha(x,\alpha)]dx=\int_a^b(\alpha'-\alpha)f''_{\alpha\alpha}(x,\alpha'')dx\ldots\quad(\alpha''=\alpha+\theta'h,\ 0<\theta'<1)$$

Tādēļ var novērtēt

$$\left|\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}-\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx\right|=\left|\int_a^b(\alpha'-\alpha)f''_{\alpha\alpha}(x,\alpha'')dx\right|\leq$$

$$\leq\int_a^b|\alpha'-\alpha|\cdot|f''_{\alpha\alpha}(x,\alpha'')|dx<|h|\int_a^b|f''_{\alpha\alpha}(x,\alpha'')|dx$$

Savukārt var novērtēt

$$\int_a^b|f''_{\alpha\alpha}(x,\alpha'')|dx<M''(b-a),\quad \text{ja } |f''_{\alpha\alpha}|<M''$$

Tā tad

$$\left|\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h}-\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx\right|<|h|\,M''(b-a),$$

kas norāda, ka tiešām

$$\frac{dF}{d\alpha}=\int_a^b\frac{\partial F(x;\alpha)}{\partial\alpha}dx$$

<u>II gadījums:</u> $F(\alpha)=\int_u^v f(x,\alpha)dx \quad [u=u(\alpha),\ v=v(\alpha)].$

Te $F(\alpha)=\Phi(\alpha,u,v)$ uzskata kā saliktu funkciju, kuŗai atvasinājums ir $\frac{dF}{d\alpha}=\Phi'_\alpha+\Phi'_u\frac{du}{d\alpha}+\Phi'_v\cdot\frac{dv}{d\alpha}$

Sastādīsim funkcijas

$$\Phi(\alpha,u,v)=\int_u^v f(x;\alpha)dx$$

parciālos atvasinājumus:

1) $\Phi'_\alpha=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_u^v f(x;\alpha)dx=\int_u^v f'_\alpha(x,\alpha)dx$ (pēc I gadījuma),

2) $\Phi'_v=\frac{\partial}{\partial v}\int_u^v f(x;\alpha)dx=f(v,\alpha)$

3) $\Phi'_u=\frac{\partial}{\partial u}\left(-\int_v^u f(x;\alpha)dx\right)=-f(u,\alpha)$

Tā tad pastāv <u>vispārīgā formula</u> par integrāla atvasināšanu pēc parametra

$$(*)\quad\frac{dF}{d\alpha}=\int_u^v f'_\alpha(x;\alpha)dx+f(v,\alpha)\frac{dv}{d\alpha}-f(u,\alpha)\frac{du}{d\alpha}$$

Piemērs: $F(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)dt$

Pēc formulas (*) dabū

$$F'(x)=\int_a^x \frac{(n-1)(x-t)^{n-2}}{(n-1)!}\varphi(t)dt+\left[\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(t)\right]_{t=x}\cdot 1=\int_a^x \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}\varphi(t)dt$$

un tamlīdzīgā kārtā

$$F''(x)=\int_a^x \frac{(x-t)^{n-3}}{(n-3)!}\varphi(t)dt, \ldots, F^{(n-1)}(x)=\int_a^x \varphi(t)dt,\ F^{(n)}(x)=\varphi(x)$$

Piezīme. Analoga funkcijas izteiksme ir Taylor'a formulas atlikumam integrāla formā (sk.6.§.)

8.§. Skaitliskās kvadratūras.

Ne vienmēr integrāli ir atrisināmi, atrodot primitīvo funkciju. Šādus integrālus var aprēķināt aptuveni ar t.s. skaitlisko kvadratūru metodēm.

Noteikto integrālu

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x\to 0}}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

var izteikt (10.zīm.) kā laukumu S ,ko ieslēdz līnijas loks, X -ass un ordinātas $x=a$ un $x=b$. Ir vairākas skaitlisko kvadratūru metodes, ar kuŗām izteic tuvināti

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k.$$

I Taisnstūra metode. Sadalam intervalu (a,b) n vienlīdzīgās daļās $\Delta x_k=\frac{b-a}{n}=h$, caur dalījuma punktiem velkam ordinātas (10.zīm.) un zīmējumā rādītā veidā konsturējam divas taisnstūŗu sistēmas: vienu zem līnijas, otru virs tās. Iekšējo taisnstūru laukumu summa

$$S_1<S,$$

ārējo taisnstūru laukumu summa

$$S_2>S.$$

Summas S_1 un S_2 var viegli aprēķināt.

Apzīmēsim X vērtībām $x=x_0=a,\ x=x_1, \ldots, x=x_n=b$ atbilstošās y vērtības ar $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Tā kā katra taisnstūra laukums ir $\Delta x_k\cdot y_k=h\,y_k$, tad

$$S_1=hy_0+hy_1+\ldots+hy_{n-1}=h(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1})$$

un

$$S_2=hy_1+hy_2+\ldots+hy_n=h(y_1+y_2+\ldots+y_n)$$

Var pieņemt, ka $S\approx S_1$, $S\approx S_2$ vai arī $S\approx\frac{S_1+S_2}{2}$

Starpību $S_2-S_1=\frac{b-a}{n}(y_n-y_0)=h(y_n-y_0)$, ja funkcija ir monotoni augoša, attēlo ar taisnstūri, kam pamats ir h un augstums y_n-y_0.

Kļūdas novērtējumu gadījumā, kad $f(x)$ ir vienreiz diferencējama funkcija, var atrast, sadalot doto integrālu atsevišķo integrāļu summā

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx$$

un lietojot katrā parciālā intervalā diferenciālrēķinu teorēmu par vidējo vērtību, piem.

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(\xi_1); \quad \xi_1 = a + \theta_1 (x-a), \; 0 < \theta_1 < 1$$

Tad

$$\int_a^{x_1} f(x)dx = \int_a^{x_1} [f(a) + (x-a) f'(\xi_1)] dx = \underbrace{f(a)}_{y_0} \underbrace{(x_1 - a)}_{h} + \int_a^{x_1} (x-a) f'(\xi_1) dx$$

jeb

$$\int_a^{x_1} f(x)dx - y_0 h = \int_a^{x_1} (x-a) f'(\xi_1) dx$$

Var novērtēt sastādīto diferenci

$$\left| \int_a^{x_1} f(x)dx - y_0 h \right| < M \int_a^{x_1} (x-a)dx = M \frac{(x_1-a)^2}{2} = \frac{M h^2}{2} \qquad (|f'(\xi_1)| < M);$$

analogā kārtā dabū

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - y_1 h \right| < \frac{M h^2}{2}$$

$$- - - - - - - - - - - -$$

$$\left| \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx - y_{n-1} h \right| < \frac{M h^2}{2}$$

Tādēļ

$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)dx - h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) \right| < n \frac{M h^2}{2} = nh \frac{M h}{2} = (b-a) \frac{M h}{2}$$

Izteicot

$$\int_a^b f(x)dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$

dabū atlikuma R_n novērtēšanai šādu formulu

$$|R_n| < (b-a) \cdot \frac{M h}{2}$$

jeb

$$|R_n| < \frac{(b-a)^2 M}{2n}$$

No formulas secinams, ka $R_n \to 0$, kad $n \to \infty$.

II <u>Trapezu metode.</u> Citu tuvinājumu dod trapezu metode. Te aizstāj figūru, ko ierobežo līkne, X-ass un ordinātas $x = x_{k-1}$ un $x = x_k$ ar trapezu. Tā kā trapezas laukums ir $\frac{y_k + y_{k-1}}{2} \Delta x_k =$ $= \frac{y_k + y_{k-1}}{2} \cdot h$, tad

$$S \approx S_3 = h\left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right)$$

jeb

$$S \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$

un
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right)$$

III Tangentu metode (11.zīm.).

Sadala intervalu (a,b) pāru skaita $n=2m$ vienlīdzīgās daļās: $\Delta x = h = \frac{b-a}{2m}$. Velk caur "nepāru" ordinātu $y_1, y_3, \dots, y_{2m-1}$ gala punktiem tangentes un pagarina "pāru" ordinātas $y_0, y_2, \dots, y_{2m}$ līdz krustpunktiem ar šīm tangentēm. Rodas trapezas, kuŗu augstumi ir $2h$ un viduslīnijas $y_1, y_3, \dots, y_{2m-1}$. Katras atsevišķas trapezas laukums ir $2h\, y_{2k+1}$ $(k=0,1,2,\dots,m-1)$ un visu trapezu laukumu summa
$$S_y = 2h(y_1+y_3+\dots+y_{2m-1}).$$
Tādēļ
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m}(y_1+y_3+\dots+y_{2m-1})$$

Piemērs: $y = \sin x$. $\int_0^\pi \sin x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$

$n=6$

$\frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{6}$ (12.zīm.)

Ar trapezu formulu dabū tuvinājumu
$$\int_0^\pi \sin x\,dx \approx \frac{\pi}{6}(2+\sqrt{3}) \approx \frac{3{,}14}{6}(2+1{,}7) \approx 1{,}95,$$
kas mazāks par īsto vērtību.

Bet tangentu metode dod tuvinājumu
$$\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \approx \frac{6{,}28}{3} \approx 2{,}09,$$ kas lielāks par īsto vērtību.

IV Simsona (Simpson) metode. Simpson'a metode dod vislabāko tuvinājumu salīdzinājumā ar iepriekšējām metodēm. Pēc Simpson'a metodes apmaina līkās līnijas loku, ko ierobežo divas "pāru" ordinātas ar parabolas loku (13.zīm.), kas iet caur 3 punktiem.

Visu intervalu (a, b) sadala pāru skaita $n=2m$ vienlīdzīgās daļās un izteic
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \quad (a=x_0,\ b=x_{2m})$$
Katrā parciālā intervalā funkcijas $f(x)$ vietā liek $g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, kas attēlo parabolu, piem.:
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} g(x)dx$$
Tā kā
$$\int_{x_0}^{x_2} g(x)dx = \int_{x_0}^{x_2}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx = \left[\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{\beta x^2}{2}+\gamma x\right]_{x_0}^{x_2} = \frac{\alpha(x_2^3-x_0^3)}{3}+\frac{\beta(x_2^2-x_0^2)}{2}+\gamma(x_2-x_0) =$$
$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[2\alpha(x_2^2+x_0x_2+x_0^2)+3\beta(x_2+x_0)+6\gamma\right] =$$
$$= \frac{x_2-x_0}{6}\left[(\alpha x_0^2+\beta x_0+\gamma)+(\alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma)+\alpha(x_2+x_0)^2+2\beta(x_2+x_0)+4\gamma\right]$$

un
$$x_1 = \frac{x_2 + x_0}{2},$$
tad galīgi var izteikt
$$\int_{x_0}^{x_2} g(x)dx = \frac{x_2 - x_0}{6}\left[g(x_0) + g(x_2) + 4g(x_1)\right].$$
Ar ordinātu vērtībām $g(x_0) = y_0,\ g(x_1) = y_1, \dots, g(x_{2m}) = y_{2m}$ izteic
$$\int_{x_0}^{x_2} g(x)dx = \frac{x_2 - x_0}{6}(y_0 + y_2 + 4y_1),$$
$$\int_{x_2}^{x_4} g(x)dx = \frac{x_4 - x_2}{6}(y_2 + y_4 + 4y_3),$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} g(x)dx = \frac{x_{2m} - x_{2m-2}}{6}(y_{2m-2} + y_{2m} + 4y_{2m-1})$$
Tā kā $x_2 - x_0 = x_4 - x_2 = \dots = x_{2m} - x_{2m-2} = 2h$, tad
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2h}{6}(y_0 + y_2 + 4y_1) + \frac{2h}{6}(y_2 + y_4 + 4y_3) + \dots + \frac{2h}{6}(y_{2m-2} + y_{2m} + 4y_{2m-1})$$
jeb
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})\right]$$
Šo formulu sauc par Simpson'a formulu.

Simpson'a formulu pierādījām, lietojot šādu parabolas īpašību: trīs punkti viennozīmīgi nosaka parabolu, kam ass ir paralela ordinātu asij.

Analītiski šo īpašību konstatē, aprēķinot α, β, γ no vienādojumu sistēmas
$$\begin{cases} y_0 = \alpha x_0^2 + \beta x_0 + \gamma \\ y_1 = \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma \\ y_2 = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma \end{cases}$$
Ja lineārās sistēmas determinants nav nulle, tad sistēma ir atrisināma pēc Cramer'a formulām. Te
$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_2) \qquad (*)$$
tiešām nav nulle, jo $x_0 \neq x_1 \neq x_2$.

Piezīme. Simpson'a formulu var pārveidot arī šādi:
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\, 2\left[\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2} + 2(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})\right] =$$
$$= \frac{b-a}{3m}\left[\left(\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_{2m-1}\right) + (y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})\right]$$

(*) Uzrakstītais trīsrindu determinants ir Vandermonda determinants (sk.piem.,prof.Lejnieka Augstāko algebru,17.lp.)

jeb

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{b-a}{n} \left[\left(\frac{y_0 - y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right) + (y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1})\right].$$

Secinam, ka Simpson'a formulas struktūrā ir taisnstūru un trapezu formulu sastāvdaļas.

II NOTEIKTO INTEGRĀLU LIETOŠANA ĢEOMETRIJĀ UN MECHANIKĀ.

9.§. Laukumu noteikšana.

Pirmajā nodaļā konstatēts, ka laukums (14.zīm.), ko ieslēdz līknes loks, X -ass un odrinātas $x=a$ un $x=b$ ir aprēķinams ar integrālu

$$S = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)dx$$

Tagad apskatīsim gadījumu (15.zīm.), kad y ir divvērtīga funkcija

$$y_1 = f(x), \quad y_2 = g(x), \quad g(x) \geq f(x).$$

Apzīmējot ar S_1 un S_2 attiecīgo figūru $aNDBb$ un $aMCBb$ laukumus, izteic

$$S = S_2 - S_1$$

un

$$S = \int_a^b y_2\,dx - \int_a^b y_1\,dx = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx$$

jeb

$$S = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$$

Noteiksim sektora laukumu polārās koordinātās. Ir dota līkne $r = r(\varphi)$ un jāaprēķina laukums, ko ieslēdz līknes loks AB un radijvektori OA un OB (16.zīm.)

Sektora OCD laukumu ΔS var novērtēt ar divu riņķa sektoru OLK un OMN laukumiem

$$\frac{1}{2} r_{min}^2 \,\Delta\varphi \leq \Delta S \leq \frac{1}{2} r_{max}^2 \,\Delta\varphi$$

ja $OL = r_{min}$ un $OM = r_{max}$.

Dalot šīs nevienlīdzības abas puses ar $\Delta\varphi$, rodas

$$\frac{1}{2} r_{min}^2 \leq \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} \leq \frac{1}{2} r_{max}^2$$

Tā kā $r = r(\varphi)$ ir nepārtraukta funkcija, tad var atrast tādu r nozīmi $r = \rho$, lai $\frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2}\rho^2$. Jau nu $\Delta\varphi \to 0$,tad $r_{min} \to r$, $r_{max} \to r$ un $\rho \to r$. Tādēļ

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2} r^2$$

jeb

$$\frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{2} r^2$$

Laukuma diferenciāla izteiksme ir

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi ,$$

sektora OAC laukums

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2 d\varphi$$

un sektora OAB laukums

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 d\varphi$$

Tamlīdzīgi kā Dekarta koordinātās atrod slēgtas figūras laukumu (17.zīm.). Šinī gadījumā katrai φ vērtībai atbilst divas r vērtības: $r_1 = r_1(\varphi)$ un $r_2 = r_2(\varphi)$,kur $r_2(\varphi) \geq r_1(\varphi)$.
Ar $S_1 = S_{OACB}$ un $S_2 = S_{OADB}$ izteic figūras $ACBD$ laukumu

$$S = S_2 - S_1$$

jeb

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r_2^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r_1^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (r_2^2 - r_1^2) d\varphi$$

Ja pols atrodas slēgtas figūras iekšienē, tad jāintegrē starp robežām 0 un 2π un

$$S = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} r^2 d\varphi$$

Piemērs: Laukums, ko ieslēdz riņķa līnija ar radiju a ir

$$S = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} a^2 d\varphi = \frac{1}{2} \left[a^2 \varphi \right]_0^{2\pi} = \pi a^2$$

10.§. Loka garums.

Par līnijas loka garumu sauc robežu, uz kuru tiecas ievilktās lauztās līnijas perimetrs, ja malu skaits tiecas uz bezgalību un katras malas garums tuvojas nullei.

Līnijas loka garuma aprēķināšanu sauc arī par loka rektifikāciju.

Uzskatīsim līnijas loka AB (18.zīm.) punkta koordinātas x un y par parametra t funkcijām:

$$x = f(t) , \quad y = g(t) , \qquad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

Pieņemsim, ka funkcijas $f(t)$ un $g(t)$ ir nepārtrauktas un tām eksistē pirmās kārtas atvasinājumi.

Līnijas loka AB jeb $M_0 M_n$ garumu s definējam kā ievilktās lauztās līnijas malu summas (perimetra) $P_{M_0 M_1 \ldots M_{k-1} M_k \ldots M_n}$ robežu. Perimetra izteiksmē

$$P_{M_0 M_1 \ldots M_n} = \sum_{k=1}^{n} M_{k-1} M_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$$

ar $x_k = f(t_k), x_{k-1} = f(t_{k-1}), y_k = g(t_k), y_{k-1} = g(t_{k-1}) \; (t_0 = \alpha ; \; t_n = \beta)$

diferences $x_k - x_{k-1}$ un $y_k - y_{k-1}$ nosaka pēc Lagrange'a galīgo pieaugumu formulas

$$x_k - x_{k-1} = f(t_k) - f(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1}) f'(\tau_k), \; [\tau_k = t_{k-1} + \theta(t_k - t_{k-1}), \; 0 < \theta < 1]$$

un

$$y_k - y_{k-1} = g(t_k) - g(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1}) g'(\tau'_k), \; [\tau'_k = t_{k-1} + \theta'(t_k - t_{k-1}), \; 0 < \theta' < 1]$$

Tādēļ

$$s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta t_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(\tau_k)]^2 + [g'(\tau'_k)]^2} \cdot \Delta t_k \qquad (\Delta t_k = t_k - t_{k-1})$$

Pierādīsim, ka loka garums

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt$$

Šim nolūkam mums būs vajadzīga kāda algebras palīgformula, kuŗu geometriski pierāda šādi: Apskatīsim trīsstūrus OCD un CDE (19.zīm.), kur

$$OA = \xi, \quad OB = \xi_1; \quad AC = BE = \eta, \quad BD = \eta_1$$

Tā kā

$$|OC - OD| \leq CD \leq CE + ED,$$

tad

$$\left| \sqrt{\xi^2 + \eta^2} - \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} \right| \leq \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2} \leq |\xi - \xi_1| + |\eta - \eta_1| \; \ldots (A)$$

Salīdzināsim izteiksmes

$$\underline{I} = \sqrt{f'^2(\tau_k) + g'^2(\tau_k)} \quad \text{un} \quad \underline{II} = \sqrt{f'^2(\tau_k) + g'^2(\tau'_k)}$$

Palīgformula (A) rāda, ka

$$\left| \sqrt{f'^2(\tau_k) + g'^2(\tau_k)} - \sqrt{f'^2(\tau_k) + g'^2(\tau'_k)} \right| \leq |g'(\tau'_k) - g'(\tau_k)|$$

jeb

$$|\underline{I} - \underline{II}| \leq |g'(\tau'_k) - g'(\tau_k)|$$

Ja t_{k-1} un t_k ir pietiekami tuvu un funkcija $g'(t)$ nepārtraukta, atvasinājumu diferenci $|g'(\tau'_k) - g'(\tau_k)|$ var padarīt mazāku par jebkuŗu iepriekš dotu pozitīvu skaitli ε_k. No

$$|g'(\tau'_k) - g'(\tau_k)| < \varepsilon_k$$

un diferences /I - II/ novērtējuma secina, ka

/I - II/ $< \varepsilon_k$, t.i. I - II $= \delta_k$, kur $|\delta_k| < \varepsilon_k$.

Tādēļ

$$s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta t_k \to 0}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k \left[\sqrt{f'^2(\tau_k) + g'^2(\tau_k)} + \delta_k \right] \right\}$$

jeb

$$s = \lim_{\substack{\Delta t_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{f'^2(\tau_k) + g'^2(\tau_k)}\, \Delta t_k + \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta t_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \delta_k \Delta t_k$$

Tā kā

$$|\delta_k| < \varepsilon_k < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0,\ k = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

tad

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \delta_k \Delta t_k\right| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |\Delta t_k| = \varepsilon(\beta - \alpha).$$

Tādēļ

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta t_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} \delta_k \cdot \Delta t_k = 0,$$

un tiešām

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,dt .$$

Līnijas tekošo punktu M (20.zīm.) var noteikt ar orientēto loku AM ,kuŗa garumu $s = s(t)$ sauc par līnijas tekošā punkta M <u>līklīnijas koordinātu.</u> Ar sastādīto formulu var aprēķināt jebkura līnijas punkta līklīnijas koordinātu

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,dt = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt,$$

ja apzīmē

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}.$$

Tādēļ

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Ja $\frac{ds}{dt} > 0$, tad augošam t vērtībām atbilst augošas loka s vērtības. Ja $\frac{ds}{dt} < 0$, tad augošam t vērtībām atbilst dilstošas loka s vērtības. No loka atvasinājuma izteiksmes dabū loka diferenciāla izteiksmi

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

jo $dx = \dot{x}dt,\ dy = \dot{y}dt$, ko var rakstīt arī veidā

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Speciālā gadījumā, kad par parametru uzskata x un līniju nosaka ar diferencējamu funkciju $y = y(x)\ (a \le x \le b)$, tad $\dot{x} = 1, \dot{y} = y' = \frac{dy}{dx}$ un $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}$, resp.

$$s_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

Lai aprēķinātu loka garumu polārās koordinātās, izsaka x un y kā r un φ funkcijas:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

Tā kā līnijas punktos $r = r(\varphi)$,tad arī $x = x(\varphi)$ un $y = y(\varphi)$, t.i. varam ņemt φ par parametru. Diferencējot pēc φ ,dabū

$$(*)\begin{cases} \dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{dr}{d\varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi \\ \dfrac{dy}{d\varphi} = \dfrac{dr}{d\varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi \end{cases}$$

Ievērojot sastādīto loka garuma formulu Dekarta koordinātās, varam rakstīt

$$s_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

Ievietojot šajā formulā izteiksmes (*), pēc viegliem pārveidojumiem dabū

$$s_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} d\varphi$$

Piemēri: 1) Aprēķināt riņķa līnijas garumu c, ja radijs ir a. Tā kā $r = a = const$, tad $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ un

$$c = \int_0^{2\pi} a d\varphi = 2\pi a$$

2) Ja elipsi ar pusasīm a un $b<a$ nosaka parametriski

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

tad

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a\cos t$$

un loka garums

$$c = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt$$

Var konstatēt, ka šis integrāls ir eliptiskais integrāls, ko nevar izteikt ar elementārām funkcijām.

11.§. Tilpuma aprēķināšana. Kavaljeri (Cavalieri) princips.

Ķermeņa tilpuma noteikšana jeb kubatūra vispārīgā gadījumā saistās ar vairākkārtīgu integrēšanu. Bet gadījumos, kad ir zināms likums par ķermeņa paralelo šķēlumu laukuma maiņu, pietiek ar vienkāršo integrāciju.

Iedomāsimies, ka ķermenis šķelts ar paralelām plāksnēm, kas perpendikulāras noteiktam virzienam, piem. x-asij (21.zīm.), un ka šķēluma laukums $S = S(x)$ ir dota nepārtraukta funkcija, kas definēta intervalā $a \leq x \leq b$. Pierādīsim, ka tad ķermeņa tilpums

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Pietiek konstatēt, ka funkcijas $v(x)$, kas izteic mainīga lieluma tilpumu ķermenim, ierobežotam ar pamatu $x = a$ un kaut kuŗu paralelo šķēlumu x, ir atvasinājums $\frac{dv(x)}{dx} = S(x)$

Konstruēsim šķēlumu attālumā $x + \Delta x$ $(\Delta x > 0)$ un novērtēsim tilpumu Δv, kas ieslēgts šķēlumu x un $x + \Delta x$ starpā.

Ja intervalā $(x, x+\Delta x)$ šķēluma funkcijai $S(x)$ ir maksimālā nozīme S_{max} un minimālā nozīme S_{min}, tad tilpuma Δv salīdzinājumā ar divu cilindru tilpumiem dabū

$$S_{min} \cdot \Delta x \leq \Delta v \leq S_{max} \cdot \Delta x$$

jeb

$$S_{min} \leq \frac{\Delta v}{\Delta x} \leq S_{max}.$$

Tā kā $S(x)$ ir nepārtraukta funkcija slēgtā intervalā, tad

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = S_{vid.} = S(\xi) \qquad [\xi = x + \theta\,\Delta x,\ 0 < \theta < 1]$$

un

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} \to S(x),$$

kad $\Delta x \to 0$. Tā tad tiešām pastāv sakars

$$\frac{dv}{dx} = S(x)$$

No tā secinam

$$v(x) = \int^{x} S(x)\,dx$$

un

$$V = \int_{a}^{b} S(x)\,dx$$

No šīs formulas secinams Kavaljeri (Cavalieri) princips: divi ķermeņi ir vienlieli, ja to augstumi ir vienlīdzīgi un šķēlumos, kas ņemti vienādos attālumos no pamatiem, rodas vienlielas figūras.

Tiešām, ja ķermeņu augstumi ir vienlīdzīgi, vienādi ir integrācijas intervali, ja šķēlumos, kas ņemti vienādos attālumos no pamatiem, rodas vienlielas figūras, funkcijas $S(x)$ ir vienlīdzīgas.

<u>Piemēri:</u> 1. Aprēķināt elipsoida $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ tilpumu. Šķēluma figūru nosaka ar vienādojumu

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

jeb

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

Ja elipses pusasis ir α, β, tad tās laukums ir $\pi\alpha\beta$. Mūsu gadījumā $\alpha = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $\beta = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ un tādēļ

$$S(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

un

$$V = \pi bc \int_{-a}^{+a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{3}\pi abc$$

2. Ja $S(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, tad tilpumu var aprēķināt pēc Keplera formulas:

$$V = \frac{b-a}{6}\left[S(a) + S(b) + 4\,S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] = \frac{h}{6}\left(S_1 + S_2 + 4S_0\right)$$

Tiešām

$$V = \int_{a}^{b}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)\,dx = \left[\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x\right]_{a}^{b} = \frac{1}{6}\left[2\alpha(b^3 - a^3) + 3\beta(b^2 - a^2) + 6\gamma(b-a)\right] =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[2\alpha(b^2 + ab + a^2) + 3\beta(b+a) + 6\gamma\right] = \frac{b-a}{6}\Big\{(\alpha a^2 + \beta a + \gamma) + (\alpha b^2 + \beta b + \gamma) +$$

$$+ \left[\alpha b^2 + 2\alpha ab + \alpha a^2 + 2\beta(a+b) + 4\gamma\right]\Big\} = \frac{b-a}{6}\left\{S(a) + S(b) + 4\left[\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \beta\,\frac{a+b}{2} + \gamma\right]\right\}$$

VZ - 100
1941/V

jeb
$$V=\frac{b-a}{6}\left[S(a)+S(b)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]=\frac{h}{6}\left(S_1+S_2+4S_0\right)$$

Gadījumā, kad dots elipsoids $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, ir $S_1=S_2=0$, $S_0=\pi bc$ un $h=2a$. Tādēļ arī pēc Keplera formulas
$$V=\frac{2a}{6}\cdot 4\pi bc=\frac{4\pi abc}{3}$$

3. Ja dots rotācijas ķermenis, kam x-ass ir rotācijas ass, tad šķēlumi, kas perpendikulāri x-asij, ir riņķi ar radiju y (22.zīm.). Tādēļ
$$S(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2$$
un rotācijas ķermeņa tilpums
$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx,$$
ja veidotājas figūras līnijas vienādojums ir $y=f(x)$.

12.§. Rotācijas virsas laukums.

Rotācijas līkās virsas laukums ir robeža rotācijas virsas laukumam, kas rodas ievilktai lauztai līnijai rotējot ap rotācijas asi, ja malu skaits neierobežoti pieaug un katras malas garums tiecas uz nulli.

Pieņemsim, ka ievilktā lauztā līnija $M_0M_1\ldots M_n$ rotē ap x-asi (23.zīm.). Caur punktiem $A=M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}, M_k, \ldots, M_n=B$ vilksim plāksnes, perpendikulāras x-asij. Tās šķeļ x-asi punktos
$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_n \quad (x_0=a,\ x_n=b)$$

Līkās līnijas tekošā punkta koordinātas x un y izteiksim kā viena parametra t nepārtrauktas un diferencējamas funkcijas:
$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t); \end{cases} \quad [\alpha\le t\le\beta;\ a=f(\alpha),\ b=f(\beta)]$$

Pierādīsim, ka loka AB veidotās virsas laukumu, resp. rotācijas ķermeņa sānu virsas laukumu izteic ar
$$S_{rot.virs.}=2\pi\int_{s_0}^{s_1}y\,ds=2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt$$

Katra ievilktās lauztās līnijas mala $M_{k-1}M_k$ veido rotācijas kona sānu virsu, kuŗas laukums
$$S_{rot.konam}=\pi(y_k+y_{k-1})M_{k-1}M_k$$
izteicams pēc vispārīgās formulas $S_{rot.konam}=\pi(R+r)\cdot l$, ja R un r ir pamatu radiji un l-veidotāja.

Rotācijas ķermeņa virsas laukums ir šo rotācijas konu sānu virsu laukumu summas robeža:

$$S_{rot.\,virsai} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ M_{k-1}M_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \pi(y_k+y_{k-1})\, M_{k-1}M_k$$

Chordu $M_{k-1}M_k$ var aprēķināt kā attālumu starp diviem punktiem pēc formulas

$$M_{k-1}M_k = \sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2}$$

jeb

$$M_{k-1}M_k = \sqrt{[f(t_k)-f(t_{k-1})]^2+[g(t_k)-g(t_{k-1})]^2}$$

Pēc Lagranža teorēmas par vidējo vērtību izteic

$$f(t_k)-f(t_{k-1}) = (t_k-t_{k-1})\, f'(\tau_k) \quad (t_{k-1}<\tau_k<t_k)$$

un

$$g(t_k)-g(t_{k-1}) = (t_k-t_{k-1})\, g'(\tilde{\tau}_k) \quad (t_{k-1}<\tilde{\tau}_k<t_k)$$

Tādēļ

$$M_{k-1}M_k = (t_k-t_{k-1})\sqrt{[f'(\tau_k)]^2+[g'(\tilde{\tau}_k)]^2}$$

Līdzīgi tam, kā aprēķina loka garumu (10.§.), novērtē diferenci

$$\left|\sqrt{[f'(\tau_k)]^2+[g'(\tilde{\tau}_k)]^2}-\sqrt{[f'(t_k)]^2+[g'(t_k)]^2}\right| \le |f'(\tau_k)-f'(t_k)|+|g'(\tilde{\tau}_k)-g'(t_k)|$$

Tā kā

$$|f'(\tau_k)-f'(t_k)|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad |g'(\tilde{\tau}_k)-g'(t_k)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

tad

$$\left|\sqrt{[f'(\tau_k)]^2+[g'(\tilde{\tau}_k)]^2}-\sqrt{[f'(t_k)]^2+[g'(t_k)]^2}\right|<\varepsilon,$$

ja diferences $t_k - t_{k-1}$ pietiekami mazas.

Ievērojot arī, ka $y_k+y_{k-1} = 2y_k+\varepsilon_k$ un $\varepsilon_k\to 0$, ja $t_k-t_{k-1}\to 0$, dabū robežgadījumā tiešām rotācijas virsas laukuma formulu

$$S_{rot.\,virsai} = 2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = 2\pi\int_\alpha^\beta g(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Speciālā gadījumā, kad par parametru t pieņem x, tad $\dot{x}=1$, $\dot{y}=y'=\frac{dy}{dx}$ un

$$S_{rot.\,virsai} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

13.§. Masu centru noteikšana. Guldin un Pappus teorēmas.

Ja materiālas sistēmas punktos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ iedomāsimies pieliktus spēkus, kas proporcionāli punktu masām $m_1, m_2, \ldots, m_n$ un paraleli, tad šo spēku centrs ir sistēmas masu centrs.

Divu materiālu punktu m_1 un m_2 masu centra C' attālumi līdz attiecīgiem materiāliem punktiem (24.zīm.) ir apgriezti proporcionāli masām. Tādēļ sadalījuma attiecība

$$\lambda' = \frac{P_1C'}{C'P_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

un pēc analītiskās geometrijas formulas $\vec{r}_{C'} = \dfrac{\vec{r}_1+\lambda'\vec{r}_2}{1+\lambda'}$ aprēķina masu centra vietas vektoru šādi

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}\vec{r}_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Lai atrastu masu centru trīs materiāliem punktiem P_1, P_2 un P_3, meklēsim masu centru punktu P_1 un P_2 masu centram G' un punktam P_3. Tad

$$\lambda = \frac{G'G}{GP_3} = \frac{m_3}{m_1+m_2}$$

un

$$\vec{r}_G = \frac{\vec{r}_{G'} + \lambda\vec{r}_3}{1+\lambda} = \frac{\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} + \frac{m_3}{m_1+m_2}\vec{r}_3}{1 + \frac{m_3}{m_1+m_2}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1+m_2+m_3}$$

Vispārīgi masu centru punktiem nosaka ar vietas vektoru

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}$$

jeb simboliski

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m\vec{r}}{\sum m}$$

Te $\sum_{k=1}^{n} m_k = M$ jeb $\sum m = M$ ir visas sistēmas masa. Projecējot $\vec{r}_G$ uz koordinātu asīm, rodas masu centra koordinātas

$$x_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k}{M}, \qquad y_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k y_k}{M}$$

jeb

$$x_G = \frac{\sum mx}{\sum m}, \qquad y_G = \frac{\sum my}{\sum m}$$

Ar masu centra definīcijas formulām viegli pierāda šādu masu centra distributīvo īpašību:

Ja iedomājas doto materiālo sistēmu sadalītu divās parciālās sistēmās un šo parciālo sistēmu masas koncentrētas to masu centros, tad tādu divu materiālo punktu masu centrs ir dotās sistēmas masu centrs.

Ja materiālo punktu ir bezgala daudz, tad var izveidoties sistēma ar nepārtrauktu masas sadalījumu. Šādas sistēmas masu centra koordinātas definē ar

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\lim \sum x\,\Delta m}{\lim \sum \Delta m} \\[2ex] y_G = \dfrac{\lim \sum y\,\Delta m}{\lim \sum \Delta m} \end{cases}$$

Apzīmējot ar $\lim \sum \Delta m = \int\limits_{(masa)} dm = M$ sistēmas masu, izteic

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\int\limits_{(masa)} x\,dm}{M} \\[2ex] y_G = \dfrac{\int\limits_{(masa)} y\,dm}{m} \end{cases}$$

jeb

$$\vec{r}_G = \frac{\int\limits_{(masa)} \vec{r}\,dm}{M}$$

Apskatīsim divus materiālās sistēmas veidus: 1) materiālu līniju, un 2) materiālu plakanu figūru.

1. Materiālās līnijas gadījumā masu sadalījuma raksturojumam ieveeīsim jēdzienu par lineāro blīvumu. Ja līnija ir homogena, tad lineāro blīvumu λ definē kā masas attiecību $\lambda = \frac{M}{L}$ pret loka garumu $L = S_1 - S_0$ (25.zīm.) Ja līnija nav homogena, runā par vidējo blīvumu $\bar{\lambda} = \frac{\Delta m}{\Delta S}$ loka elementā ΔS, kur atrodas masa Δm. Robežgadījumā, kad $\Delta s \to 0$, dabū blīvumu dotajā punktā $\lambda = \frac{dm}{ds} = \lambda(s)$.

Integrējot dabūjam masu:

$$M = \int_{s_0}^{s_1} \lambda\, ds = \int_{0}^{b} \lambda \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

Masu centra koordinātas ir

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\int_{s_0}^{s_1} \lambda x\, ds}{\int_{s_0}^{s_1} \lambda\, ds} = \dfrac{\int_a^b \lambda x \sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_a^b \lambda \sqrt{1+y'^2}\, dx} \\[2ex] y_G = \dfrac{\int_{s_0}^{s_1} \lambda y\, ds}{\int_{s_0}^{s_1} \lambda\, ds} = \dfrac{\int_a^b \lambda y \sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_a^b \lambda \sqrt{1+y'^2}\, dx} \end{cases}$$

Ja līnija ir homogena, tad $\lambda = const.$ var iznest pirms integrāla zīmes un saīsināt:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\int_{s_0}^{s_1} x\, ds}{L} = \dfrac{\int_a^b x \sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx} \\[2ex] y_G = \dfrac{\int_{s_0}^{s_1} y\, ds}{L} = \dfrac{\int_a^b y \sqrt{1+y'^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\, dx} \end{cases}$$

Zinot līnijas masu centru, var atrast no līnijas veidotās rotācijas virsas laukumu.

Pirmā Guldin un Pappus teorēma: Ja līnija rotē ap asi, kas to nekrusto, tad līnijas veidotās rotācijas virsas laukumu dabū reizinot līnijas garumu ar tādas riņķa līnijas garumu, kuŗas radijs ir vienāds ar līnijas masu centra attālumu līdz rotācijas asij (līniju uzskata par homogenu).

Pierādījums. Rotācijas virsas laukums

$$S_{rot.virsai} = 2\pi \int_{s_0}^{s_1} y\, ds,$$

ja pieņemam, ka līnija rotē ap X-asi. Masu centra attālums līdz rotācijas asij

$$y_G = \frac{\int_{s_0}^{s_1} y\, ds}{L}$$

Tadēļ

$$\int_{s_0}^{s_1} y\, ds = y_G \cdot L$$

un tiešām

$$S_{rot.virsai} = 2\pi y_G\, L.$$

Ja zinams rotācijas virsas laukums, var aprēķināt masu centra y koordinātu

$$y_G = \frac{S_{rot.\ virsa}}{2\pi L}$$

Piemērs: Tora virsas laukums (26.zīm.). Tors rodas riņķim rotējot ap kādu asi, kas riņķi nekrusto. Ja riņķa radijs ir r, centra attālums līdz rotācijas asij $a \geq r$, tad $y_G = a$, $L = 2\pi r$ un pēc pirmās Guldin un Pappus teorēmas izteic

$$S_{tora} = 2\pi r\, 2\pi a = 4\pi^2 ar.$$

2. Materiālās plakanas figūras jeb diska masu centrs.

Aprēķināsim diska masu centra koordinātas, ja disks ir homogens, t.i. laukuma blīvums $\mu = \frac{M}{S} = const$ (M-diska masa, S - diska lauk.)

Vilksim ordinātas caur punktiem x un $x+\Delta x$. Abscisai x atbilstošo ordinātu garumi ir y_1 un y_2 (27.zīm.). Noteiksim masu centru diska daļai, ko ieslēdz diska kontūra un ordinātas caur x un $x+\Delta x$. Pēc tam atradīsim masu centra koordinātas visam diskam kā tādas materiālas līnijas AB masu centru, kuŗas punktos koncentrētas diska atsevišķo daļu masas (masu centra distributīvā īpašība).

Figūras $CDEF$ masu centra koordinātas ir $\bar{x} = x + \varepsilon$, $\bar{y} = \frac{y_1+y_2}{2} + \varepsilon'$, kur ε un ε' ir mazi, ja Δx pietiekami mazs. Robežgadījumā, kad $\Delta x \to 0$, rodas masu centri G'

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = \frac{y_1+y_2}{2}, \end{cases}$$

kas veidos līniju $AG'B$. Ir jānoteic šīs līnijas lineārais blīvums λ.

Ja uz laukuma $CDEF$ ir masa Δm un laukuma blīvums μ = const., tad

$$(y_2 - y_1)_{min}\, \mu \Delta x \leq \Delta m \leq (y_2 - y_1)_{max}\, \mu \Delta x.$$

Pēdējo nevienlīdzību sastāda, salīdzinot ar tādu divu taisnstūru masām, kuŗiem pamats ir $\Delta x > 0$ un augstumi ir funkcijas $(y_2 - y_1)$ minimālā, resp. maksimālā nozīme intervalā $(x, x + \Delta x)$.

Tādēļ

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = (y_2 - y_1)_{vid}\, \mu$$

un robežgadījumā

$$\lambda = \frac{dm}{dx} = (y_2 - y_1)\mu.$$

Tā kā materiālās līnijas $\eta = \eta(\xi)$ masu centru noteic ar

$$x_G = \frac{\int\limits_{(AB)} \xi\, dm}{M}, \qquad y_G = \frac{\int\limits_{(AB)} \eta\, dm}{M},$$

kur $M = \int_{(\text{līn.})} dm = \int_a^b \lambda dx = \mu \int_a^b (y_2 - y_1)\, dx$ ir līnijas masa, tad pēc $\xi = x$, $\eta = \frac{y_1+y_2}{2}$ substitūcijas un saīsināšanas ar konstantu faktoru μ dabū homogena diska masu centra koordinātas

$$x_G = \frac{\int_a^b x(y_2-y_1)\,dx}{\int_a^b (y_2-y_1)\,dx}, \qquad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx}{\int_a^b (y_2-y_1)\,dx}$$

Speciālā gadījumā, kad diskam ir līklīnijas "trapezas" forma (28.zīm.), masu centra koordinātu izteiksmes kļūst vienkāršākas:

$$x_G = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \qquad y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx},$$

jo te $y_1 = 0$, $y_2 = y(x)$.

<u>Otrā Guldin un Pappus teorēma.</u> <u>Ja plakana figūra griežas ap asi, kas figūru nekrusto, tad veidotā rotācijas ķermeņa tilpums dabūjams, reizinot figūras laukumu ar tāda riņķa garumu, kam radijs ir figūras masu centra attālums no rotācijas ass.</u>

Kā zinams, no "trapezas" $aABb$ veidotā rotācijas ķermeņa tilpums (28.zīm.)

$$V_{rot.\,ķerm.} = \pi \int_a^b y^2\,dx$$

Vispārīgā gadījumā, kad plakanā figūra nekrusto x-asi (29.zīm.), rotācijas ķermeņa tilpums ir divu tādu "trapezu" veidotu ķermeņu tilpumu starpība:

$$V_{rot.\,ķerm.} = \pi\int_a^b y_2^2\,dx - \pi\int_a^b y_1^2\,dx = \pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$$

Tā kā figūras laukums $S = \int_a^b (y_2-y_1)\,dx$ un tās masu centra ordināta $y_G = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx}{S}$, tad $\int_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx = 2S\cdot y_G$.
Tādēļ tiešām

$$V_{rot.\,ķerm.} = S\cdot 2\pi y_G.$$

<u>Piemēri:</u> 1. Tora (26.zīm.) tilpums $V_{tora} = \pi r^2\cdot 2\pi a = 2\pi^2 a r^2$
2. Noteikt homogenas pusripas un pusriņķa līnijas masu centrus.

No otrās Guldin un Pappus teorēmas izteic $y_G = \frac{V}{2\pi S}$. Pusripai rotējot rodas lode, kuras tilpums $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; pusripas laukums ir $\frac{1}{2}\pi r^2$ un tādēļ

$$y_G = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi\cdot\frac{1}{2}\pi r^2} = \frac{4}{3\pi}r.$$

Pusriņķa līnija ar garumu πr veido lodes virsu ar laukumu $4\pi r^2$. Tādēļ tās masu centra ordināta

$$y_G = \frac{4\pi r^2}{2\pi\cdot\pi r} = \frac{2}{\pi}r.$$

VZ - 100
1941/V

Secinam, ka $\quad M_\varepsilon \to y_\varepsilon$.

III INTEGRĀLA JĒDZIENA PAPLAŠINĀJUMI.

14.§. Integrālu konvergence gadījumā, kad zemintegrāla funkcija ir pārtraukta.

Funkcijas pārtraukumu veidi ir šādi.

1. Ja funkcija $f(x)$ kādā intervala (a, b) punktā c nav definēta, tad apskata funkciju intervalos ($a, c-\varepsilon'$) un ($c+\varepsilon''$, b), kur $\varepsilon' > 0$ un $\varepsilon'' > 0$. Figūras $aAC'c'$ (30.zīm.) laukums $S' = \int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx$ un figūras $c''C''Bb$ laukums $\int_{c+\varepsilon''} f(x)dx$. Apskatīsim, kas notiek, ja $\varepsilon' \to 0$ un $\varepsilon'' \to 0$. Ja $\varepsilon' \to 0$, tad $c-\varepsilon' \to c$ no kriesās puses; pieņemsim, ka eksistē $f(c-0) = \lim\limits_{\varepsilon'\to 0} f(c-\varepsilon')$. Ja $\varepsilon'' \to 0$, tad $c+\varepsilon'' \to c$ no labās puses un arī $f(c+0) = \lim\limits_{\varepsilon''\to 0} f(c+\varepsilon'')$. Ja funkcija punktā c nav definēta, bet eksistē $f(c-0)$ un $f(c+0)$, laukums, ko nosaka
$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$
ir galīgs lielums. Te definē
$$S = \lim_{\varepsilon'\to 0} S' + \lim_{\varepsilon''\to 0} S'' = \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx + \lim_{\varepsilon''\to 0}\int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)dx = \int_a^{c-0} f(x)dx + \int_{c+0}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

2. Funkcija kādā intervala (a, b) punktā c pieņem bezgala lielu nozīmi (31.zīm.).

Šinī gadījumā definē integrālu
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx + \lim_{\varepsilon''\to 0}\int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)dx,$$
ja abas norādītās robežās eksistē, neatkarīgi no tā veida, kā $\varepsilon' \to 0$ un $\varepsilon'' \to 0$.

Piemērs: $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}}$ $\quad$ Funkcija $f(x) = \frac{1}{x^{2/3}} \to \infty$ kad $x \to 0$. Bet
$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon'} \frac{dx}{x^{2/3}} + \lim_{\varepsilon''\to 0}\int_{\varepsilon''}^{1} \frac{dx}{x^{2/3}} = \lim_{\varepsilon'\to 0}\left[3x^{1/3}\right]_{-1}^{-\varepsilon'} + \lim_{\varepsilon''\to 0}\left[3x^{1/3}\right]_{\varepsilon''}^{1} = 6.$$

3. Funkcija intervala (a, b) gala punktā b pieņem bezgala lielu nozīmi (32.zīm.), resp. $f(x) \to \infty$, kad $x \to b$. Te zemintegrāla funkcija ir nepārtraukta intervalā $a \leq x < b$. Integrāls $\int_a^b f(x)\,dx$ konvergē, ja var atrast robežu
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \quad \text{Tad} \quad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Piemēri. 1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ Te $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to \infty$, ja $x \to 1$, resp. funkcija $f(x)$ punktā +1 nav definēta.

Jāmeklē robeža

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\arcsin x\right]_0^{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}.$$

Tādēļ

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Zemintegrāla funkcija $f(x)=\frac{1}{x}$ nav definēta punktā $x=0$ un

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln x\right]_\varepsilon^1 = -\infty$$

Tādēļ $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ nekonverģē.

Gadījumā, kad dotai funkcijai $f(x)$ var atrast primitīvu funkciju $F(x)=\int f(x)\,dx$, tad

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = F(b-\varepsilon) - F(a).$$

Ja $F(x)$ ir nepārtraukta funkcija, tad

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(b-\varepsilon) = F(b),$$

un pastāv Leibniz'a un Newton'a pamatsakarības formula

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

arī paplašinātā veida noteiktajam integrālam.

Tagad meklēsim konverģences pazīmi integrālam, neatrodot primitīvo funkciju.

Pieņemsim, ka $f(x) > 0$ visos intervala (a, b) punktos un ka var atrast tādu citu funkciju $g(x)$, kurai integrāla $\int_a^b g(x)\,dx$ konverģence ir zināma.

Ja sakot no kādas intervala vietas, piem. a' (33.zīm.) pastāv nevienlīdzība

$$f(x) < g(x),$$

tad

$$\int_{a'}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx < \int_{a'}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx$$

Ievērojot arī to, ka integrālu vērtības

$$\int_a^{a'} f(x)\,dx \quad \text{resp.} \quad \int_a^{a'} g(x)\,dx$$

ir galīgas, secina, ka integrāls $\int_a^b f(x)\,dx$ konverģē, ja $\int_a^b g(x)\,dx$ konverģē.

Turpretīm, ja

$$f(x) > g(x) \qquad (a' < x < b)$$

un ja $\int_a^b g(x)\,dx \to \infty$, resp. $\int_a^b g(x)\,dx$ diverģē, tad arī

$\int_a^b f(x)\,dx$ noteikti diverģē.

Par $g(x)$ parasti izvēlas šādu funkciju: $g(x) = \frac{M}{(b-x)^m}$ (M - const)

Tās integrāla

$$\int_a^{b-\varepsilon} g(x)dx = M\int_a^{b-\varepsilon}\frac{dx}{(b-x)^m} = \begin{cases} -M\left[\ln(b-x)\right]_a^{b-\varepsilon}, & \text{ja } m=1\\ -M\left[\frac{(b-x)^{1-m}}{1-m}\right]_a^{b-\varepsilon}, & \text{ja } m\neq 1\end{cases}$$

vērtības ir šādas:

1. Ja $m=1$, tad

$$\int_a^{b-\varepsilon}\frac{M\,dx}{b-x} = -M\ln\varepsilon + M\ln(b-a).$$

Tā kā $\ln\varepsilon \to -\infty$, ja $\varepsilon\to 0$, tad $\int_a^b \frac{M\,dx}{b-x}$ diverģē.

2. Ja $m>1$, tad

$$\int_a^{b-\varepsilon}\frac{M\,dx}{(b-x)^m} = -\frac{M\,\varepsilon^{1-m}}{1-m} + \frac{M(b-a)^{1-m}}{1-m}$$

Tā kā $\varepsilon^{1-m} = \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \to\infty$, ja $\varepsilon\to 0$, tad $\int_a^b\frac{M\,dx}{(b-x)^m}$ diverģē.

3. Ja $m<1$, tad $\varepsilon^{1-m}\to 0$, kad $\varepsilon\to 0$, un

$$\int_a^{b-\varepsilon}\frac{M\,dx}{(b-x)^m} \to \frac{M(b-a)^{1-m}}{1-m} = K$$

(K -galīgs skaitlis)

Tā tad pastāv integrāla konvergences, resp.divergences pazīme: ja sākot no kādas intervala (a,b) vietas, pastāvīgi

$$f(x) < \frac{M}{(b-x)^m}\ \text{jeb}\ (b-x)^m f(x) < M\quad (M>0,\ m<1),$$

tad integrāls $\int_a^b f(x)\,dx$ konverģē, turpretim, ja

$$f(x)\geq\frac{M}{(b-x)^m},\ \text{jeb}\ f(x)(b-x)^m > M\quad (M>0,\ m\geq 1),$$

tad minētais integrāls noteikti diverģē.

Praktikas daudzos gadījumos pietiek atrast

$$\lim_{x\to b}\left[(b-x)^m\cdot f(x)\right] = A$$

Ja šāda robeža A eksistē un $A\neq 0$, tad vienmēr var uzrādīt tādu M, lai minētais nosacījums par integrāla konvergenci, resp.diverggnci būtu izpildīts.

Piemērs: Legendre'a eliptiskais integrāls

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\qquad (0<k<1)$$

Te $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ ir pārtraukta punktā $x=1$, jo $f(x)\to\infty$, kad $x\to 1$. Tā kā

$$\lim_{x\to1}\left[(1-x)^{\frac12} f(x)\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}} = A,$$

tad $m=\frac12<1$ un $A\neq0$. Tādēļ dotais integrāls konverģē.

VZ - 100
1941/V

Piezīme. Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervalā $a<x\le b$ un ja $f(x)\to\infty$, kad $x\to a$, tad definē integrāla konvergenci šādi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Integrāla konvergences, resp.divergences pazīmei lieto funkciju

$$g(x)=\frac{M}{(x-a)^m},\ \text{resp.}\ \lim_{x\to a}\left[(x-a)^m f(x)\right]=A.$$

15.§. Integrālu konvergence gadījumā, kad integrācijas intervals bezgala liels.

Tagad apskatīsim, kā paplašina integrāla jēdzienu, ja integrācijas intervals ir bezgala liels. Pieņemsim, ka $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija katrā intervala (a, b) punktā, kur a ir noteikts skaitlis un $b>a$ - brīvi izvēlēts skaitlis. Integrālam $\int_a^b f(x)\,dx$ ir noteikta vērtība, lai cik liels arī b būtu. Ja šis integrāls ar neierobežoti augošu b tiecas uz noteiktu robežu, tad saka, ka integrāls konverģē. Var gadīties, ka integrāls kļūst bezgala liels, vai robeža neeksistē, ja $b\to\infty$.

Piemēri: 1. $\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} b$. Tā kā $\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} b=\frac{\pi}{2}$, tad integrāls

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$$ konverģē.

2. $\int_1^b \frac{dx}{x}=\ln b$. Tā kā $\lim_{b\to\infty}\ln b=\infty$ tad $\int_1^\infty\frac{dx}{x}=\infty$ un dotais integrāls noteikti diverģē.

3. $\int_0^b \sin x\,dx = 1-\cos b$; tā kā $\lim_{b\to\infty}(1-\cos b)$ nav noteikta, tad integrāls $\int_0^\infty \sin x\,dx$ netuvojas nekādai noteiktai robežai /nenoteikti diverģē/.

Ja $\int f(x)\,dx = F(x)$ un ja $F(x)\to B=f(\infty)$, kad $x\to\infty$, tad $\int_a^\infty f(x)\,dx = F(\infty)-F(a)$.

Kad primitīvo funkciju nevar konstruēt, tad salīdzina zemintegrāla funkciju $f(x)$ ar citu funkciju $g(x)$. Ja, sākot no kādas intervala vietas pastāvīgi $f(x)<g(x)$ un $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konverģē, tad arī $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konverģē. Ja turpretim $f(x)>g(x)$ un $\int_a^\infty g(x)\,dx$ diverģē, tad arī $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverģē.

Par funkciju $g(x)$ parasti ņem $g(x)=\frac{M}{x^m}$, kur $M>0$ ir konstants skaitlis un $m>0$. Te integrāla

$$\int_a^b g(x)\,dx = M\int_a^b\frac{dx}{x^m}=\begin{cases} M\left[\ln x\right]_a^b, & ja\ m=1,\\ M\left[\frac{x^{1-m}}{1-m}\right]_a^b, & ja\ m\neq 1,\end{cases}$$

vērtības ir šādas:

VZ - 100
1941/V

1. Ja $m = 1$, tad $\int_a^b g(x)dx = \ln b - \ln a \to \infty$, kad $b \to \infty$, jo $\ln b \to \infty$. Tā tad integrāls diverģē.

2. Ja $m < 1$, tad $\int_a^b g(x)dx = M\left(\frac{b^{1-m}}{1-m} - \frac{a^{1-m}}{1-m}\right) \to \infty$, ja $b \to \infty$, tā tad integrāls diverģē.

3. Ja $m > 1$, tad $b^{1-m} \to 0$, ja $b \to \infty$ un $\int_a^b g(x)dx \to M\frac{a^{1-m}}{1-m} = \mu$ t.i. integrāls konverģē.

Tā tad

1. ja $f(x) < \frac{M}{x^m}$ un $m > 1$, tad $\int_a^\infty f(x)dx$ konverģē.

2. ja $f(x) > \frac{M}{x^m}$ un $m \leq 1$, tad $\int_a^\infty f(x)dx$ diverģē.

Vienādojums $y = \frac{M}{x^m}$ attēlo hiperbolai līdzīgu līniju (34.zīm.). Ja $m = 1$, tad nav galīga laukuma starp līkni un x-asi. Tāpat nav galīga laukuma arī gadījumā, kad $m < 1$, piem. $m = \frac{1}{2}$, $y = \frac{M}{\sqrt{x}}$. Turpretim, ja $m > 1$, piem. $m = 2$, $y = \frac{M}{x^2}$, laukums starp līkni un x-asi ir galīgs.

Piezīme. Praktikā integrāla konvergenci, resp. divergenci var izšķirt, meklējot

$$\lim_{x \to \infty} [x^m f(x)] = A$$

Ja $A \neq 0$ un $m > 1$, tad $\int_a^\infty f(x)dx$ konverģē, bet ja $A \neq 0$ un $m \leq 1$, tad šis integrāls diverģē.

Piemērs. Eulera gamma funkcija.

Ar integrālu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

definē Eulera gamma funkciju, gadījumā, ja $\alpha > 0$. Viegli konstatē, ka tad integrāls konverģē. Integrēsim parciāli

$$\Gamma(\alpha) = \left[-e^{-x} x^{\alpha-1}\right]_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x} dx.$$

Ja $x \to \infty$ un $\alpha \leq 1$, tad $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} = \lim \frac{1}{x^{1-\alpha} e^x} = 0$,

ja $\alpha > 1$, tad $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{e^x} = 0$.

Tādēļ

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$$

Tāpat turpinot, dabū

$$\Gamma(\alpha-1) = (\alpha-2)\Gamma(\alpha-2) \text{ u.t.t.}$$

Ja $\alpha = n$ ir vesels pozitīvs skaitlis, tad

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot \Gamma(1).$$

Tā kā

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=1,$$

tad

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

Piezīme. Integrāla konvergences kriterijs nedod atbildi gadījumā, kad $f(x)$ maina bezgala daudz reiz zīmi. Te jālieto citas pazīmes, piem.rindu konvergence.

IV LĪNIJU (KONTŪRU) INTEGRĀLI.

16.§. Plaknes līnijas integrāls.

Integrāla jēdzienu var paplašināt vēl šādā veidā.

Ņemsim nepārtrauktu un rektificējamu līniju AB (35.zīm.), noteiktu ar vienādojumu $y=f(x)$,un divu argumentu nepārtrauktu funkciju $P(x,y)$,kas definēta plāksnes figūras apgabalā. Šī apgabala punktam $M(x,y)$ atbilst noteikta funkcijas vērtība $P(M)=P(x,y)$.

Iedomāsimies līniju AB sadalītu n daļās ar dalījuma punktiem $M_0=A, M_1, \ldots, M_{k-1}, M_k, \ldots, M_n=B$ un uz līnijas gabaliem ņemtus punktus $N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, N_n$ ar koordinātām $(\xi_1,\eta_1), (\xi_2,\eta_2), \ldots, (\xi_n,\eta_n)$. Sastādīsim summu

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} P(N_k)\,\Delta x_k$$

un tās robežu

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n} P(N_k)\,\Delta x_k.$$

Ja šī robeža eksistē, tad to sauc par līklīnijas integrālu $\int_{AB} P(x,y)\,dx$, un lasa: funkcijas $P(x,y)$ integrāls pa līniju AB. Tā kā līnijas punktos $y=f(x)$,tad arī $\eta_k=f(\xi_k)$ un $P(\xi_k,\eta_k)=\bar{P}(\xi_k)$. Robežgadījumā

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}\bar{P}(\xi_k)\,\Delta x_k=\int_a^b\bar{P}(x)\,dx$$

un

$$\int_{AB}P(x,y)\,dx=\int_a^b\bar{P}(x)\,dx$$

Vispārīgā gadījumā, ja dotā līnija AB ir noteikta ar vienādojumiem

$$\begin{cases} x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\qquad (\alpha\le t\le\beta)$$

un $\varphi(t)$ ir diferencējama funkcija,tad

$$x_k-x_{k-1}=\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})=(t_k-t_{k-1})\,\varphi'(\tau_k)\quad (t_{k-1}\le\tau_k'\le t_k)$$

Integrālsumma

$$\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}P[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\,\varphi'(\tau_k)\,\Delta t_k$$

robežgadījumā dod

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \bar{P}(t)\varphi'(t)dt.$$

Līdzīgā kārtā dabū $\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$. Te uzskata līnijas punktos $x = g(y)$ un definē

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} Q(N_k)\Delta y_k = \int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} \bar{Q}(y)dy.$$

Ar parametrisko attēlojumu

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

kur $\psi(t)$ ir diferencējama funkcija, izteic

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \bar{Q}(t)\cdot\psi'(t)dt \quad [\bar{Q}(t) = Q(\varphi(t), \psi(t))]$$

Saskaitot abus integrālus, dabūjam

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \bar{P}(x)dx + \int\limits_{c}^{d} \bar{Q}(y)dy$$

vai

$$\int\limits_{AB} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [\bar{P}(t)\varphi'(t) + \bar{Q}(t)\psi'(t)]dt$$

Parasti te iekavas neliek, un raksta $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$.

Līnijas integrāls $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ mechaniskā interpretācijā izteic pa līniju AB padarīto darbu vektoru laukā, ko nosaka vektors $\bar{V}$ ar komponentēm $V_x = P$ un $V_y = Q$.

Tiešām, elementārais darbs pa ceļa elementu $\bar{ds}$ ir skalārais produkts

$$dW = \vec{V}\cdot\vec{ds} = V\cdot\cos(\vec{V}, \vec{ds})\cdot ds = V_x dx + V_y dy = Pdx + Qdy$$

un totālais darbs pa loku

$$W_{AB} = \int\limits_{AB} V_x dx + V_y dy = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy.$$

Līnijas integrālam ir šādas vispārīgas īpašības.

1. Ja līnija - integrācijas ceļš - sastāv no atsevišķiem rektificējamiem lokiem, piem., AC un CB (36.zīm.), tad

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy + \int\limits_{CB} Pdx + Qdy.$$

2. Ja maina integrācijas virzienu uz pretējo, tad arī līnijas integrāla vērtībai zīme mainās uz pretējo

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$$

Tiešām

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} F(t)dt = -\int\limits_{\beta}^{\alpha} F(t)dt = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy,$$

ja apzīmē $F(t) = \bar{P}(t)\varphi'(t) + \bar{Q}(t)\psi'(t)$.

3. Ja integrē pa slēgtu līniju L ,tad jāuzrāda arī integrācijas virziens. Virzienu pret pulksteņa rādītāja kustību pieņem par pozitīvu, pa pulksteņa rādītāja kustību - par negatīvu. Attiecīgi integrālu pa slēgtu kontūru apzīmē ar $\oint_L Pdx + Qdy$, resp. $\oint Pdx + Qdy$ .Pastāv vispārīgā īpašība

$$\oint Pdx + Qdy = -\oint Pdx + Qdy.$$

Plaknes figūras laukumu S var aprēķināt arī lietojot līnijas integrālu. Ņemsim figūru AM_1BM_2 (37.zīm.). Šīs figūras laukums

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx,$$

kur $y_1 = y_1(x)$, resp. $y_2 = y_2(x)$ nosaka līnijas daļas AM_1B, resp. AM_2B . Pēc pārveidojumiem

$$S = \int_a^b y_2 dx - \int_a^b y_1 dx = \int_{AM_2B} y\,dx - \int_{AM_1B} y\,dx = -\int_{BM_2A} y\,dx - \int_{AM_1B} y\,dx$$

laukumu S tiešām izsaka ar līnijas integrālu:

$$S = -\oint_L y\,dx \ldots (I)$$

Līdzīgi uzskatot $x = x(y)$,izteic

$$S = \int_c^d (x_2 - x_1)\,dx$$

un pēc pārveidojumiem dabū

$$S = \oint_L x\,dy \ldots (II)$$

No formulām (I) un (II) var arī izteikt

$$S = \frac{1}{2}\oint x\,dy - y\,dx$$

Piemērs: Aprēķināt elipses laukumu ar līklīnijas integrālu. No elipses parametriskiem vienādojumiem

$$\begin{cases} x = a\cos t & (0 \le t \le 2\pi) \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

dabū

$$\begin{cases} dx = -a\sin t\,dt \\ dy = b\cos t\,dt \end{cases}$$

Tādēļ

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt = \pi ab$$

17.§. Izteiksmes $Pdx + Qdy$ analīze.

Dažreiz svarīgi zināt, kad $\oint Pdx + Qdy = 0$.Šis integrāls ir nulle tad un tikai tad, ja zemintegrāla izteiksme ir totāls diferenciāls, t.i.

$$Pdx + Qdy = dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Ja ar nepārtrauktu deformāciju apgabalā katru slēgtu līniju var savilkt vienā punktā, tad šādu apgabalu sauc par vienkārši sakarīgu apgabalu; pretējā gadījumā ir vairākkārt sakarīgs apgabals. Turpmāk pieņemsim, ka funkciju $P(x,y)$ un $Q(x,y)$ definīcijas apgabals ir vienkārši sakarīgs.

Dota slēgta līnija $ACBDA$ (38.zīm.). Ja

$$\oint\limits_{ACBDA} Pdx + Qdy = 0,$$

tad

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BDA} Pdx + Qdy = 0$$

jeb

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy = -\int\limits_{BDA} Pdx + Qdy = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy.$$

Integrāls ir neatkarīgs no integrācijas ceļa, bet atkarīgs vienīgi no gala punktu A un B stāvokļa.

Arī otrādi, ja integrāls aprēķināts pa līniju starp diviem punktiem ir neatkarīgs no ceļa formas, tad slēgtas kontūras integrāls ir nulle.

Tiešām, ja

$$\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy,$$

tad

$$\oint\limits_{ACBDA} Pdx + Qdy = \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BDA} Pdx + Qdy = \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy - \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy = 0$$

Ja ir zināms, bet ka integrāla vērtība ir neatkarīga no integrācijas ceļa, atkarājas vienīgi no gala punktiem $A(x_0, y_0)$ un $B(x,y)$, tad raksta

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = f(x,y)$$

Ja vienu gala punktu, piem. $A(x_0, y_0)$ uzskata par nemainīgu, bet otru - $B(\cdot, y)$ par mainīgu, tad ar integrālu ir definēta divu argumentu funkcija $f(x,y)$.

Pierādīsim, ka konstruētai funkcijai ir īpašības:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y).$$

Jākonstatē, ka eksistē, piemēram, robeža

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Sastādam funkcijas izteiksmi punktā $B_1(x+\Delta x, y)$

$$f(x+\Delta x, y) = \int\limits_{(A)}^{(B_1)} Pdx + Qdy,$$

aprēķinot integrālu pa kautkuŗu ceļu ACB_1 (39.zīm.).

Tā kā integrāla vērtība no ceļa formas ir neatkarīga, tad ņemsim ceļa ACB vietā ceļu ABB_1, un sadalīsim inte-

grālu $\int_{A}^{(B_1)} Pdx + Qdy$ divu integrālu summā
$$\int_{(A)}^{(B_1)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy + \int_{(B)}^{(B_1)} Pdx + Qdy.$$
Te
$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = f(x,y) \quad \text{un} \quad \int_{(B)}^{(B_1)} Pdx + Qdy = \int_{x}^{x+\Delta x} Pdx,$$
jo y ceļā no B uz B_1, paliek konstants, t.i. $dy = 0$.

Pēc teorēmas par vidējo vērtību
$$\int_{x}^{x+\Delta x} Pdx = P(\xi, y)\Delta x \quad (\xi = x + \theta\Delta x,\ 0 < \theta < 1).$$
Tā tad
$$f(x+\Delta x, y) = f(x,y) + P(\xi, y)\cdot\Delta x$$
un
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y).$$

Tamlīdzīgi var pierādīt, ka $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y)$. Sakari $P = \frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ rāda, ka diferenciālā izteiksme
$$Pdx + Qdy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df(x,y)$$
ir funkcijas $f(x,y)$ totāls diferenciāls, un līnijas integrāla vērtību
$$\int_{(A)}^{(B)} Pdx + Qdy = \int_{(A)}^{(B)} df(x,y) = f(B) - f(A)$$
var izteikt ar šīs funkcijas nozīmju diferenci, aprēķinātu ceļa gala punktos. Vienkārši sakarīgā apgabalā funkcija $f(x,y)$ ir vienvērtīga. Tādēļ, ja A un B sakrīt, resp. ir slēgta līnija L, tad
$$\oint_L Pdx + Qdy = \oint_L df(x,y) = 0.$$

Ir sastādīta viena funkcija $f(x,y)$, kuras totālais diferenciāls ir dotā diferenciālā izteiksme $Pdx + Qdy$. Kaut kuru citu funkciju $F(x,y)$, kurai arī
$$dF(x,y) = Pdx + Qdy$$
var izteikt formā
$$F(x,y) = f(x,y) + C \quad (C \text{ - konstante}).$$

Tiešām, pēc izteiksmju salīdzināšanas secina
$$dF = df \quad \text{jeb} \quad d(F - f) = 0,$$
un tā tad
$$F(x,y) - f(x,y) = C \quad \text{jeb} \quad F(x,y) = f(x,y) + C$$

<u>Teorēma. Nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai diferenciālā izteiksme $Pdx + Qdy$ ar diferencējamām funkcijām</u>

$P(x,y)$ un $Q(x,y)$ būtu totāls diferanciāls, ir t.s.integrabilitātes nosacījums: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Nosacījums ir nepieciešams, jo no

$$d f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\partial x+\frac{\partial f}{\partial y}\partial y=Pdx+Qdy$$

secina

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=Q$$

un

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Lietojot funkcijas $f(x,y)$ īpašību

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},$$

tiešām dabū

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

Nosacījums ir arī pietiekams, t.i. ja pastāv šāds nosacījums, tad var sastādīt funkciju $f(x,y)$, kas apmierina sakarus

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=Q$$

Funkciju $f(x,y)$ sastāda pēc šādas Koši (Cauchy) metodes.

Integrējot pirmo sakaru, dabū

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\varphi(y) \qquad (\varphi(y)\ \text{- patvaļīga funkcija})$$

Diferencēsim šo funkciju pēc y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\frac{d\varphi(y)}{dy}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)=Q(x,y)$$

Ievērojot doto nosacījumu

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

dabū

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dx+\varphi'(y)$$

jeb

$$\frac{\partial f}{\partial y}=Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y).$$

Tā kā

$$\frac{\partial f}{\partial y}=Q(x,y),$$

tad pastāv sakars

$$Q(x,y)=Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y),$$

no kuŗa var izteikt

$$\varphi'(y)=Q(x_0,y)$$

Šo izteiksmi integrējot, dabūjam

$$\varphi(y)=\int_{y_0}Q(x_0,y)\,dy+C \qquad (C\ \text{- patvaļīga konstante})$$

Tā tad

$$f(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+C$$

Praksē parasti atkārto augšējo domu gaitu katrā **atsevišķā** gadījumā.

Sastādīto funkciju $f(x,y)=f_1(x,y)+C$ var izteikt ar kontūras integrāliem (40.zīm.) šādi:

$$f_1(x,y)=\int_{ACB} Pdx+Qdy=\int_{AC} Pdx+Qdy+\int_{CB} Pdx+Qdy$$

Tiešām, integrējot pa AC, $dx=0$; integrējot pa CB, $dy=0$, un tādēļ

$$f_1(x,y)=\int_{AC} Qdy+\int_{CB} Pdx=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy+\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx.$$

Ja integrējam pa kontūru $AC'B$,tad, integrējot pa AC' $dy=0$, integrējot pa $C'B$, $dx=0$. Var sastādīt citu funkciju

$$f_2(x,y)=\int_{AC'} Pdx+Qdy+\int_{CB} Pdx+Qdy=\int_{AC'} Pdx+\int_{C'B} Qdy=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy,$$

kas atšķiras no $f_1(x,y)$ vienīgi ar konstanti

Piezīme. Ja diferenciālo izteiksmi $Pdx+Qdy$ pielīdzina nullei, tad sastāda pirmās kārtas diferenciālvienādojumu. Gadījumā, kad $Pdx+Qdy=dF$ ir totāls diferenciāls, rodas t.s. eksaktais diferenciālvienādojums, kam vispārīgais integrāls ir $F(x,y)=C$.

Piemērs: Atrisināt diferenciālvienādojumu $(ax+by)dx+(bx+cy)dy=0$.

Te $ax+by=P$, $bx+cy=Q$

Tā kā

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=b,$$

tad ir izpildīts integrabilitātes nosacījums.

Meklēsim $f(x,y)$,kuŗai $\frac{\partial f}{\partial x}=P$, $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$.

$$P=\frac{\partial f}{\partial x}=ax+by,\quad f(x,y)=\frac{ax^2}{2}+bxy+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=Q=bx+\varphi'(y);\quad \varphi'(y)=cy,\quad \varphi(y)=\int cy\,dy=\frac{cy^2}{2}+C_1$$

un

$$f(x,y)=\frac{ax^2}{2}+bxy+\frac{cy^2}{2}+C_1=C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ - konstantes})$$

jeb

$$ax^2+2bxy+cy^2=C_3 \quad (C_3=C_2-C_1 \text{ - konstante})$$

18. §. Telpas līnijas integrāls.

Pieņemsim, ka rektificējama līnija AB telpā (41.zīm.) noteikta ar parametriskiem vienādojumiem

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t) \qquad (\alpha \leq t \leq \beta),$$

kur $t = \alpha$ atbilst punktam A un $t = \beta$ - punktam B. Līnijas AB punktos $M(x,y,z)$ ir definētas trīs funkcijas $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Telpas līnijas AB integrālu (definīcija ir analoga plaknes līnijas integrāla definīcijai)

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

reducē par vienkāršo integrālu pēc formulas

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} [\bar{P}(t)\dot{x} + \bar{Q}(t)\dot{y} + \bar{R}(t)\dot{z}]\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} F(t)\,dt,$$

kur

$$F(t) = \bar{P}(t)\dot{x} + \bar{Q}(t)\dot{y} + \bar{R}(t)\dot{z} \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \dot{y} = \frac{dy}{dt},\ \dot{z} = \frac{dz}{dt}\right)$$

un funkcijas

$$\bar{P}(t) = P(x(t), y(t), z(t)),\ \bar{Q}(t) = Q(x(t), y(t), z(t)),\ \bar{R}(t) = R(x(t), y(t), z(t))$$

ir sastādītas dotās līnijas punktiem.

Ja integrācijas ceļš ACB (42.zīm.) sastāv no diviem gabaliem, kur katrā no tiem tangentes virziens mainas nepārtraukti, tad pēc definīcijas

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CB}$$

Kad maina integrācijas ceļa virzienu uz pretējo, tad arī līnijas integrāls maina zīmi uz pretējo

$$\int_{BA} = -\int_{AB}$$

Slēgtās kontūras L gadījumā gala punkti A un B sakrīt, t.i.

$$x(\alpha) = x(\beta),\quad y(\alpha) = y(\beta),\quad z(\alpha) = z(\beta).$$

Kontūras integrāli

$$\oint_{L} = \int_{\alpha}^{\beta} F(t)\,dt,\quad \oint_{L} = \int_{\beta}^{\alpha} F(t)\,dt,$$

sastādīti pa integrācijas ceļiem pretējos virzienos, ir viens otram pretēji lielumi

$$\oint_{L} = -\oint_{L}.$$

<u>Konstatēsim, ka integrāls pa slēgtu kontūru ir nulle tad un tikai tad, ja zemintegrāla izteiksme ir totāls diferenciāls:</u>

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = d\,f(x,y,z).$$

Nosacījumu, ka slēgtās kontūras integrāls ir nulle, var līdzvērtīgi aizstāt ar to, ka līnijas AB integrāls (43.zīm.) nav atkarīgs no integrācijas ceļa formas, bet gan tikai no gala punktu stāvokļiem. Tiešām, ja dots

$$\oint_{\mathcal{L}} = \int_{ACB} + \int_{BDA} = \int_{ACB} - \int_{ADB} = 0,$$

tad $\int_{ACB} = \int_{ADB}$, un otrādi: kad $\int_{ACB} = \int_{ADB}$, tad $\int_{ACBDA} = \oint_{\mathcal{L}} = 0$.

Ja $\int_{ACB}$ ir atkarīgs vienīgi no gala punktu $A(x_0, y_0, z_0)$ un $B(x, y, z)$ koordinātām, tad raksta

$$\int_{ACB} = \int_{(A)}^{(B)}$$

resp. ar integrālu definē funkciju

$$f(x,y,z) = \int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

kad A stāvoklis fiksēts, bet B -mainīgs (kādā apgabalā).

Pierādīsim, ka sastādītās funkcijas $f(x,y,z)$ totālais diferenciāls ir zemintegrāla izteiksme

$$df = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

jeb

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R.$$

Pēc parciālā atvasinājuma definīcijas var izteikt, piem.,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x} = \lim_{B_1 \to B} \frac{f(B_1) - f(B)}{B_1 B},$$

kur punkts $B_1(x+\Delta x, y, z)$ ņemts uz taisnes, vilktas caur punktu $B(x, y, z)$ paralēli x -asij (44.zīm.). Tā kā

$$f(B_1) = \int_{(A)}^{(B_1)} = \int_{(A)}^{(B)} + \int_{(B)}^{(B_1)} = f(B) + \int_{(B)}^{(B_1)}$$

un uz nogriežņa BB_1 ir $dy = dz = 0$, tad

$$f(B_1) - f(B) = \int_{(B)}^{(B_1)} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y,z)\,dx.$$

Lietojot pēdējam integrālam teorēmu par vidējo vērtību, dabū

$$f(B_1) - f(B) = \Delta x \cdot P(\xi, y, z) \qquad (\xi = x + \theta \Delta x,\ 0 < \theta < 1).$$

Tādēļ

$$\frac{f(B_1) - f(B)}{\Delta x} = P(\xi, y, z),$$

un robežgadījumā, kad $\Delta x \to 0$, tiešām rpdas sakars

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y, z).$$

Analogā kārtā pierāda citas sakarības

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R.$$

Teorēma. Nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi, kad diferenciālizteiksme $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ ir kādas funkcijas $F(x, y, z)$ totāls diferenciāls, ir šādi t.s. integrabilitātes nosacījumi

$$(*) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Tiešām, nosacījumi (*) ir nepieciešami, jo no dotā sakara $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dF$ izteic

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial F}{\partial z}$$

un ar atvasināšanu pēc norādītiem mainīgiem un salīdzināšanu sastāda sakarus (x), pieņemot, ka $F(x,y,z)$ ir divreiz diferencējama funkcija.

Pierādīsim, ka nosacījumi ir arī pietiekami, t.i. ka ar dotiem nosacījumiem (x) var konstruēt funkciju $F(x,y,z)$. Pēc Cauchy metodes var noteikt $F(x,y,z)$ integrējot, piem. sakaru $P=\frac{\partial F}{\partial x}$ un ievērojot citus sakarus un integrābilitātes nosacījumus (x). Var izteikt funkciju

$$F(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx+\varphi(y,z)$$

ar nezinamo funkciju $\varphi(y,z)$. Lai atrastu $\varphi(y,z)$ izteic sakarā

$\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y,z)$ atvasinājumu

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}\,dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

un pārveido,

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y,z)-Q(x_0,y,z)+\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

ievērojot integrābilitātes nosacījumu

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pēc salīdzināšanas dabū

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x_0,y,z),$$

un analogā kārtā atrod

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=R(x_0,y,z)$$

Tā kā

$$\frac{\partial Q(x_0,y,z)}{\partial z}=\frac{\partial R(x_0,y,z)}{\partial y},$$

tad pēc Cauchy formulas ar divi mainīgiem (17.§.) var noteikt nezinamo funkciju

$$\varphi(y,z)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,dz+\text{const.}$$

Tā tad galīgi rodas šāda funkcijas $F(x,y,z)$ izteiksme

$$F(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,dz+C,$$

ko var attēlot arī ar līnijas integrālu pa kontūru $ACDB$ (45.zīm.) ar virsotnēm $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x,y,z)$, $C(x_0,y_0,z)$, $D(x_0,y,z)$.

Tiešām, dabū

$$\int_{ACDB}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{AC}P\,dx+Q\,dy+R\,dz+\int_{CD}P\,dx+Q\,dy+R\,dz+\int_{DB}P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$$
$$=\int_{z_0}^{z}R(x_0,y_0,z)\,dz+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y,z)\,dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y,z)\,dx,$$

jo pa taisni AC ir $dx=dy=0$, pa taisni CD ir $dx=dz=0$ un pa taisni DB ir $dz=dy=0$.

Ja sastāda funkciju $F(x,y,z)$, integrējot pa citu ceļu, kas savieno punktus A un B, tad dabūtā funkcija atšķiras no konstruētās vienīgi ar konstanti.

Piezīme. Diferenciālvienādojumu

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

sauc par eksaktu tad, ja diferenciālā izteiksme ir totāls diferenciāls

$$Pdx + Qdy + Rdz = dF(x,y,z)$$

Šāda vienādojuma vispārīgais integrāls

$$F(x, y, z) = const$$

attēlo viena parametra virsu saimi telpā.

Piemērs: Integrēt vienādojumu

$$ydx + xdy + dz = 0.$$

Te $P=y, Q=x, R=1$ un integrabilitātes nosacījumi (*) ir izpildīti. Viegli atrod no $d(xy+z)=0$ vispārīgo integrālu

$$xy + z = const.$$

V DIVKĀRŠIE INTEGRĀLI.

19.§. Divu mainīgo nepārtrauktās funkcijas vispārīgās īpašības.

Divu mainīgo funkcija $z = f(x, y)$ nosaka pret xyz- koordinātu sistēmu (46.zīm.) virsu. Funkcijas definīcijas apgabala (A) punktam P top piesaistīts viens virsas punkts Q, ja funkcija $f(x,y)$ ir vienvērtīga. Tā kā punktu P nosaka ar tā koordinātām (x,y), tad funkciju $z = f(x,y)$ sauc par punkta P funkciju, un raksta:

$$z = f(P).$$

Nepārtraukta funkcija attēlo nepārtrauktu virsu. Funkcijas nepārtrauktības nosacījumu punktā P izsaka ar nevienlīdzību

$$(*) \qquad |f(P) - f(P')| < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0),$$

ja P' ir cits apagabala (A) punkts, kura attālums no P ir pietiekami mazs: $PP' < \eta$ ($\eta > 0$). Ja nepārtrauktības nosacījums ir izpildīts katrā apgabala (A) punktā, tad funkciju sauc par nepārtrauktu šajā apgabalā. Kad definīcijas apgabalā ieskaita arī apgabala kontūras L punktus, rodas t.s. slēgts apgabals. Ir pierādamas šādas vispārīgās nepārtraukto funkciju īpašības.

I Ja $f(P)$ ir nepārtraukta funkcija, definēta slēgtā apgabalā (A), tad tā ir arī vienmērīgi nepārtraukta, t.i. nepārtrauktības nosacījums (*) pastāv neatkarīgi no punktu stāvokļa apgabalā (A): kuram katram citam apgabala (A) punktu pārim R un R' ir

$$|f(R) - f(R')| < \varepsilon, \text{ ja } RR' < \eta.$$

II <u>Slēgtā apgabalā (A)definētai nepārtrauktai funkcijai $f(x,y)$ ir vismaz vienā punktā maksimālā vērtība $M \geq f(x,y)$ kā arī minimālā vērtība $m \leq f(x,y)$; tā pieņem apgabala punktos arī visas starpvērtības $m \leq \mu \leq M$.</u>

20.§. Nepārtrauktās funkcijas divkāršais integrāls.

Pēc analogijas ar vienkāršā integrāla definīciju funkcijas $f(x,y)$ divkāršo integrālu $\iint\limits_{(A)} f(x,y)d\omega$ definē šādi. Funkcijas definīcijas (integrēšanas) apgabalu (A) sadala parciālos apgabalos (A_1),(A_2)..., (A_k),...,(A_n), kuŗu laukumi ir attiecīgi

$$\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \dots, \Delta\omega_k, \dots \Delta\omega_n.$$

Ņem katrā parciālā apgabalā punktus $P_1(\xi_1,\eta_1)$, $P_2(\xi_2,\eta_2)$, ..., $P_k(\xi_k,\eta_k)$, ..., $P_n(\xi_n,\eta_n)$ un ar funkcijas $z=f(x,y)$ vērtībām šajos punktos

$$f(\xi_1,\eta_1)=f(P_1), f(\xi_2,\eta_2)=f(P_2), \dots, f(\xi_k,\eta_k)=f(P_k), \dots, f(\xi_n,\eta_n)=f(P_n)$$

sastāda integrālsummu

$$(1.)\quad \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\omega_k = \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k.$$

Iedomāsimies, ka dalījumu skaits $n\to\infty$ un katra parciālā apgabala diametrs (apgabala kontūras punktu maksimālais attālums) $d_k\to 0$ resp.katrs apgabals (A_k) visos virzienos neierobežoti samazinas ($\Delta\omega_k\to 0$). Ja ar šādiem robežpārejas nosacījumiem pastāv sastādītās integrālsummas robeža, neatkarīga no punktu $P_k(\xi_k,\eta_k)$ stāvokļa izvēles parciālā apgabalā (A_k), tad šī robeža definē divkāršo integrālu

$$(2.)\quad \iint\limits_{(A)} f(x,y)d\omega = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\omega_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\omega_k$$

jeb

$$(2')\quad \iint\limits_{(A)} f(P)d\omega = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\omega_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k.$$

Gadījumā, kad $z=f(x,y)\geq 0$, katrs integrālsummas saskaitāmais

$$f(\xi_k,\eta_k)\Delta\omega_k = f(P_k)\Delta\omega_k = z_k\Delta\omega_k = v_k$$

geometriski izteic tilpumu v_k cilindrim, kuŗa augstums ir $z_k=f(P_k)$, pamata laukums $\Delta\omega_k$ un veidotājas parallelas z-asij (47.zīm.). Tādēļ ar divkāršo integrālu

$$\iint\limits_{(A)} f(x,y)d\omega = \iint\limits_{(A)} z\,d\omega = V$$

aprēķina tilpumu V ķermenim, ko norobežo līkā virsa S ,cilindriskā virsa ar veidotājām, parallelām z-asij, un plakanā figūra (A).

Vispārīgā gadījumā, kad funkcija $z=f(x,y)$ maina zīmi, divkāršais integrāls izteic tādu tilpumu algebrisko summu.

Nepārtrauktai funkcijai $f(x,y)$ integrālsummas robežas, resp. divkāršā integrāls eksistence ir konstatējama šādi.

Ja ar m_k, resp. M_k apzīmē funkcijas minimālo, resp. maksimālo vērtību parciālā apgabalā (A_k) un ar m, resp. M - tādas vērtības visā apgabalā (A), tad no nevienlīdzībām

$$m \le m_k \le f(P_k) \le M_k \le M$$

pēc reizināšanas ar $\Delta\omega_k > 0$ un summēšanas dabū integrālsummas novērtēšanas formulu

$$(3.)\quad mA \le s_n \le \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k \le S_n \le MA.$$

Te

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta\omega_k, \quad \text{resp.} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta\omega_k$$

ir t.s. "minimālā" summa, resp. "maksimālā" summa un $A = \sum_{k=1}^{n} \Delta\omega_k$ apzīmē apgabala (A) laukumu. Formula (3.) rāda, ka integrālsumma un summas s_n un S_n ir ierobežotas divu pastāvīgu skaitļu mA un MA starpā. Diferences izteiksmē

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta\omega_k$$

funkcijas oscillāciju $M_k - m_k$ apgabalā (A_k) var izteikt ar funkcijas vērtību diferenci. Kad katra apgabala (A_k) diametrs d_k pietiekami mazs, var dabūt pēc nepārtrauktās funkcijas īpašībām novērtējumu oscillācijai

$$M_k - m_k < \varepsilon,$$

un tādēļ

$$S_n - s_n < \varepsilon A.$$

Tā tad, kad $d_k \to 0$ vai $\Delta\omega_k \to 0$, pastāv

$$\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0,$$

resp.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k = \iint_{(A)} f(P)\,d\omega,$$

ja ievēro (3.).

No novērtēšanas formulas

$$mA \le \iint_{(A)} f(P)\,d\omega \le MA$$

secina, ka

$$(4.)\quad \iint_{(A)} f(P)\,d\omega = uA \quad (m \le u \le M).$$

Tā kā $f(x,y)$ ir nepārtraukta funkcija un apgabals (A) ir slēgts, tad starpvērtība μ ir funkcijai kādā apgabala punktā (ξ, η). Šo starpvērtību

(5.) $\mu = f(\xi,\eta) = \frac{1}{A} \iint\limits_{(A)} f(x,y)\,d\omega$

sauc par funkcijas $f(x,y)$ vidējo vērtību apgabalā (A).

Sakars (4.) jeb

(4') $\iint\limits_{(A)} f(x,y)\,d\omega = A f(\xi,\eta)$

izteic teorēmu par vidējo vērtību divkāršam integrālam: nepārtrauktai funkcijai divkāršais integrāls ir vienlīdzīgs integrācijas apgabala laukumam reizinātam ar funkcijas vidējo vērtību šajā apgabalā.

No definīcijas formulas (2.) secināmas citas divkāršā integrāla vispārīgās īpašības:

1. Summas integrāls vienlīdzīgs integrālu summai:

$$\iint\limits_{(A)} [f_1(x,y)+f_2(x,y)]\,d\omega = \iint\limits_{(A)} f_1(x,y)\,d\omega + \iint\limits_{(A)} f_2(x,y)\,d\omega.$$

2. Konstantu faktoru var ņemt ārpus integrāla zīmes:

$$\iint\limits_{(A)} c f(x,y)\,d\omega = c \iint f(x,y)\,d\omega \qquad (c - const.)$$

3. Ja $f(x,y) \le g(x,y)$, tad $\iint\limits_{(A)} f(x,y)\,d\omega \le \iint\limits_{(A)} g(x,y)\,d\omega$.

Speciālā gadījumā

$$\left| \iint\limits_{(A)} f(x,y)\,d\omega \right| \le \iint\limits_{(A)} |f(x,y)|\,d\omega$$

4. Pastāv sakars

$$\iint\limits_{(A)} f(x,y)\,d\omega = \iint\limits_{(A_1)} f(x,y)\,d\omega + \iint\limits_{(A_2)} f(x,y)\,d\omega,$$

kad apgabals (A) sastāv no divām daļām (A_1) un (A_2), kas viena otru nepārklāj.

21.§. Divkāršā integrāla aprēķināšana Dekarta koordinātās.

Atšķirsim divus gadījumus, kad integrācijas apgabals (A) ir taisnstūris vai plakana figūra, ierobežota ar līku līniju.

1.gadījums: integrācijas apgabals ir taisnstūris

$$(A) \ldots \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$$

ar malām, parallelām koordinātu asīm (48.zīm.). Divkāršo integrālu $\iint\limits_{(A)} f(x,y)\,d\omega$ aprēķina, sadalot taisnstūri (A) parciālos apgabalos (A_k) - mazos taisnstūros ar taisnēm, parallelām koordinātu asīm. Var sadalīt, piem., intervallu (a, b) ar dalījuma punktiem

$x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}$

parciālos intervallos

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots m),$$

resp. intervallu (c, d) ar punktiem

$$y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_j, \dots y_{p-1}$$

parciālos intervallos

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1} \quad (j = 1, 2, \dots p)$$

Ja caur šiem dalījuma punktiem velk taisnes, parallelas koordinātu asīm, tad rodas $n = mp$ taisnstūri, kuŗu laukuma vispārīgā izteiksme ir

$$\Delta\omega_k = \Delta\omega_{ij} = \Delta x_i \, \Delta y_j$$

Divkāršā integrāla definīcijas formulā ir jālieto divkāršās summas robeža

$$(1.) \quad \iint_{(A)} f(x, y)\, d\omega = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta\omega_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\, \Delta\omega_k = \lim_{\substack{m \to \infty \\ p \to \infty \\ \Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\, \Delta x_i \, \Delta y_j ,$$

ja parciālā apgabalā (A_k) ņemtam punktam P_k ir koordinātas (ξ_{ij} , η_{ij}). Tā kā divkāršā integrāla vērtība nav atkarīga no punktu P_k stāvokļa izvēles katrā apgabalā (A_k), tad ņemsim piem., $\eta_{ij} = \bar{\eta}_j$ t.i. punktus P_k ar vienu un to pašu ordinātu visos taisnstūŗos, kas ieslēgti starp taisnēm $y = y_j$, $y = y_{j-1}$.

Tad dubultsummai

$$(2.) \quad \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\, \Delta x_i \, \Delta y_j = \sum_{j=1}^{p} \left[\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{ij}, \bar{\eta}_j)\, \Delta x_i \right] \Delta y_j$$

robežu var atrast, summējot vispirms pēc pirmā indeka i un pēc tam pēc otrā indeka j. Pirmās summas robeža

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{ij}, \bar{\eta}_j)\, \Delta x_i = \int_a^b f(x, \bar{\eta}_j)\, dx = F(\bar{\eta}_j)$$

ir nepārtraukta funkcija $F(\bar{\eta}_j)$, jo ar vienkāršo integrālu nosaka parametra $\bar{\eta}_j$ nepārtrauktu funkciju. Savukārt pēc vienkāršā integrāla definīcijas

$$\lim_{\substack{p \to \infty \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{j=1}^{p} F(\bar{\eta}_j)\, \Delta y_j = \int_c^d F(y)\, dy$$

Tā tad

$$(3.) \quad \iint_{(A)} f(x, y)\, d\omega = \int_c^d F(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Kad maina summēšanas kārtību, tad dabū

$$(4.) \quad \iint_{(A)} f(x, y)\, d\omega = \int_a^b \Phi(x)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy,$$

ja parametriski definē funkciju

$$E(x) = \int\limits_{c}^{d} f(x,y)\,dy.$$

Rezultātu salīdzinājumā rodas integrēšanas kārtības maiņas formula

$$(5.)\quad \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)\,dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} f(x,y)\,dx$$

Ģeometriski (49.zīm.) divkāršais integrāls izteic tilpumu V prizmas formas ķermenim, ko ierobežo virsa $z = f(x,y)$. Pirmā aprēķināšanas formula (3.) rāda, ka tilpumu V var aprēķināt, šķeļot ķermeni ar plaknēm $y = const$. Tad katra šķēluma laukums ir $F(y)$ un divu šķēlumu y un $y+dy$ ieslēgtais tilpums ir $F(y)\,dy$. Turpretim pēc formulas (4.) to pašu tilpumu dabū, šķelot ķermeni ar plāksnēm $x = const.$ un summējot elementāros tilpumus $E(x)\,dx$.

<u>Piezīme.</u> Pēc apgabala sadalīšanas veida secinam, ka laukuma elementu $d\omega$ Dekarta koordinātās var izteikt ar

$$d\omega = dx\,dy.$$

<u>2.gadījums: integrācijas apgabals (A) ir plakana figūra, kas ar taisnēm, parallelām koordinātu asīm, šķeļas divos punktos.</u>

Lietojot divkāršā integrāla geometrisko interpretāciju, var šinī gadījumā ķermeņa tilpumu V resp. divkāršo integrālu

$$V = \iint\limits_{(A)} f(x,y)\,d\omega = \iint\limits_{(A)} f(x,y)\,dx\,dy$$

aprēķināt, šķeļot ķermeni ar plāksnēm $y = const.$ vai $x = const.$ (50.zīm.). Parallelo šķēlumu $y = const$ laukumu nosaka ar vienkāršo integrālu

$$\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx = F(y),$$

ja $x_1 = x_1(y)$, $x_2 = x_2(y)$ ir apgabala (A) kontūras L krustošanas punkti ar taisni $y = const.$, resp. šīs konturas daļu vienādojumi. Ar sastādīto šķēluma funkciju $F(y)$ galīgi izteic

$$(6)\quad V = \iint\limits_{(A)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{c}^{d} F(y)\,dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Ja šķeļ ķermeni ar plaknēm $x = const$ (51.zīm.), tad šķēluma laukums ir

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = E(x)$$

un ķermeņa tilpums

$$(7)\quad V = \iint\limits_{(A)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{a}^{b} E(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Te funkcijas $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ nosaka, sameklējot kontūras L

krustošanos punktus ar taisnēm $x = const.$

Salīdzinot formulas (6.) un (7.), secina integrēšanas kārtības maiņas formulu vispārīgā gadījumā

$$(8)\quad \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

Piemērs: Dirichlet formula.

Kad integrācijas apgabals (A) ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris (52.zīm.)

$$a \leq y \leq x \leq b,$$

ko ierobežo koordinātu leņķa bisektrisa $y = x$ un taisnes $y = a, x = b$, tad formulā (8.) jālieto šādas izteiksmes:

$$y_1 = a,\ y_2 = x;\ x_1 = y;\ x_2 = b;\ c = a,\ d = b.$$

Dabū Dirichlet formulu

$$(9)\quad \int_a^b dx \int_a^x f(x,y)\,dy = \int_a^b dy \int_y^b f(x,y)\,dx.$$

22.§. Divkāršā integrāla aprēķināšana polārās koordinātās.

Integrācijas apgabalu (A) ir izdevīgi sadalīt ar koordinātu līnijām $r = const.$, $\varphi = const.$ parciālos apgabalos. Tā kā $r = const.$ attēlo koncentriskas riņķu līnijas un $\varphi = const.$ starus no nullpunkta, tad parciālais apgabals, ko ierobežo koordinātu līnijas ar r, $r + \Delta r$, $\varphi + \Delta\varphi$, (53.zīm.) ir divu riņķu sektoru diference. Tā laukumu aprēķina šādi:

$$\Delta\omega = \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Delta\varphi - \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\varphi$$

jeb

$$\Delta\omega = r\,\Delta r\,\Delta\varphi + \tfrac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\varphi.$$

Ja Δr un $\Delta\varphi$ ir bezgala mazi lielumi, tad saskaitāmais $\frac{1}{2}(\Delta r)^2 \Delta\varphi$ ir augstākās kārtas lielums, salīdzinājumā ar $\Delta r . \Delta\varphi$. Tādēļ $\Delta\omega \approx r\,\Delta r\,\Delta\varphi$ un laukuma elementu $d\omega$ polārās koordinātās izteic ar

$$d\omega = r\,dr\,d\varphi.$$

Ar koordinātu transformāciju $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ divkāršais integrāls J top par

$$J = \iint_{(A)} f(x,y)\,d\omega = \iint_{(A)} F(r,\varphi)\, r\,dr\,d\varphi,$$

kur $F(r,\varphi) = f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$.

Gadījumā, kad pols neatrodas integrācijas apgabalā, var aprēķināt J ar divām sekojošām vienkāršām integracijām:

$$(1.)\quad J = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(r,\varphi)\,r\,dr = \int_{R_0}^{R_1} r\,dr \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} F(r,\varphi)\,d\varphi,$$

kur integrācijas robežas ir nosakāmas pēc 53.zīm.

Pretējā gadījumā, kad pols atrodas integrācijas apgabalā, integrālu var aprēķināt pēc formulas

(2.) $$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} F(r,\varphi)\, r\, dr,$$

ja $r = r(\varphi)$ ir apgabala kontūras vienādojums polārās koordinātās.

Piemēri. 1. Plaknes figūras laukums A polārās koordinātās. Ja formulā (1.), resp.(2.) pieņem $F(r,\varphi) = 1$, tad

$$J = A = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1}^{r_2} r\, dr = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2^2 - r_1^2)\, d\varphi,$$

resp.

$$J = A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r\, dr = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi.$$

Speciālā gadījumā, kad $r_1 = 0$ un $r_2 = r(\varphi)$ no pirmās formulas dabū zināmo sektora OBC laukuma (54.zīm.) izteiksmi polārās koordinātās.

2. Viviani problēma: lodes lielajā riņķī konstruēti divi riņķi, kas pieskaras savā starpā, kā arī ar lodes lielo riņķi; noteikt tilpumu ķermenim, kas rodas no lodes izšķelot divus taisnus cilindrus ar vadītājām - konstruētiem diviem riņķiem.

Aprēķināsim tilpumu V cilindriem, ko ierobežo lodes virsa (55.zīm.)

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (a \text{ - lodes radijs})$$

Ievērojot simmetriju, var izteikt

$$V = 8 \iint_{(A)} z\, dx\, dy.$$

Ar polārām koordinātām r, φ izteic

$$z = +\sqrt{a^2 - (x^2+y^2)} = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

un

$$V = 8 \iint_{(A)} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\varphi.$$

No integrācijas apgabala (A) - pusriņķa xy - plaknē (56.zīm.) atrod, ka ar $\varphi = const$ ir jāmaina r no 0 līdz $a\cos\varphi$. Tādēļ var izteikt

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr$$

Aprēķinot, dabū

$$\int_0^{a\cos\varphi} r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr = \left[-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{r=0}^{r=a\cos\varphi} = \frac{a^3}{3}(1 - \sin^3\varphi)$$

un

$$V = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi)\, d\varphi = \frac{8a^3}{3}\left[\varphi + \cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

jeb
$$V = \frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16}{9}a^3$$

Tā kā lodes tilpums $V_{lod} = \frac{4\pi a^3}{3}$, tad Viviani problēmā prasītam ķermenim ir tilpums
$$V_1 = V_{lod} - V = \frac{16}{9}a^3.$$

Ja ap lodi apvilktu kubu, tad tā tilpums
$$V_{apv.kub.} = 8a^3.$$

Tādēļ salīdzinājumā var konstatēt, ka Viviani problēmā ķermeņa tilpums
$$V_1 = \frac{2}{9} V_{apv.kub.},$$

resp. attiecība
$$V_1 : V_{a.k.} = \frac{2}{9}$$ ir racionāls skaitlis.

23.§. Līkās virsas laukuma izteiksme Dekarta koordinātās.

Pieņemsim, ka funkcijai $z = f(x,y)$ eksistē pirmās kārtas parciālie atvasinājumi
$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Tad ar funkciju $z = f(x,y)$ attēlotai virsai katrā virsas punktā (x,y,z) var vilkt tangentplakni
$$(\xi - x)p + (\eta - y)q = \zeta - z \quad (\xi, \eta, \zeta$$ – tekošās koordinātas),

resp. virsas normāli
$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1} \text{ jeb } \frac{\xi - x}{-p} = \frac{\eta - y}{-q} = \frac{\zeta - z}{1}.$$

Orientēsim virsas normāli ν tā, lai tā ar z-asi veido šauru leņķi; tad no normāles vienādojumiem var izteikt virziena kosinu

(1.) $$\cos(\nu, z) = \frac{1}{+\sqrt{p^2+q^2+1}} \qquad \left(\sphericalangle(\nu, z) < \frac{\pi}{2}\right)$$

Līkās virsas laukumu S definē šādi (57.zīm.). Iedomājas sadalītu virsas gabalu ar kaut kādām virsas līnijām n daļās
$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_k, \ldots \Delta\sigma_n.$$

Ņem uz katra elementa $\Delta\sigma_k$ brīvi izvēlētu punktu Q_k un konstruē šajā punktā tangentplakni T_k. Ar projekciju uz xy-plakni rodas no virsas apgabals (A), no virsas elementa $\Delta\sigma_k$ – laukuma elements $\Delta\omega_k$.

Ja iedomājas projecējošos starus turpinātus līdz krustošanai ar tangentplakni T_k, tad uz tangentplaknes rodas laukuma elements $\Delta\sigma_k'$, ar kuru tad atvieto virsas īsto laukuma elementu

Definējam virsas laukumu S kā robežu laukuma elementu $\Delta\sigma_k'$ summai

(2.) $$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\sigma_k'\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k'.$$

Tā kā $\Delta\omega_k = \text{proj}_{xy}\,\Delta\sigma_k'$ un xy-plakne ar tangentplakni T_k veido tādu pat leņķi kā šo plakņu normales (z-ass un virsas normale ν_k), tad pēc projekciju formulas dabū

$$\Delta\omega_k = \Delta\sigma_k' \cos(\nu_k, z)$$

Ja ar $p_k = p(P_k)$, $q_k = q(P_k)$ apzīmē parciālo atvasinājumu $p(x,y)$, $q(x,y)$ vērtības virsas punktā Q_k ,tad no formulas (1.) var izteikt

$$\cos(\nu_k, z) = \frac{1}{\sqrt{p_k^2+q_k^2+1}}$$

un tādēļ

$$\Delta\sigma_k' = \frac{\Delta\omega_k}{\cos(\nu_k, z)} = \sqrt{p_k^2+q_k^2+1}\;\Delta\omega_k.$$

Pēc virsas laukuma un divkāršā integrāla definīcijas atrod izteiksmi

(3.) $$S = \iint_{(A)} \sqrt{p^2+q^2+1}\; d\omega.$$

<u>Piemērs.</u> Aprēķināt Viviani "logu" virsas laukumu S (sk. iepriekšējā §-fā Viviani problēmu un 55.zīm.). Ievērojot simmetriju,var izteikt

$$S = 8 \iint_{(A)} \sqrt{p^2+q^2+1}\; d\omega.$$

Parciālos atvasinājumus p un q atrod no lodes virsas vienādojuma $x^2+y^2+z^2=a^2$ ar parciālo atvasināšanu:

$$2x+2zp=0, \quad \text{resp.} \quad 2y+2zq=0$$

Ar izteiksmju

$$p=-\frac{x}{z}, \quad q=-\frac{y}{z}$$

substitūciju un pārveidojumiem dabū

$$\sqrt{p^2+q^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z} = \frac{a}{z}.$$

Ir izdevīgi lietot divkāršā integrāla aprēķināšanai polārās koordinātas (r, φ), ar kuŗām izteic $z=\sqrt{a^2-r^2}$ un

$$S = 8a \iint_{(A)} \frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}} \quad \text{jeb} \quad S = 8a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Aprēķinot pēdējos integrālus dabū galīgi izteiksmi

$$S = 4\pi a^2 - 8a^2.$$

Salīdzinājumā ar lodes virsas laukumu $S_{lode} = 4\pi a^2$, konstatē, ka atlikušai lodes virsas daļai ir laukums

$$S_1 = S_{lode} - S = 8a^2.$$

Tā kā ap lodes lielo riņķi apvilktā kvadrāta laukums ir $4a^2$, tad laukums S_1 ir divas reizes lielāks par šī kvadrāta laukumu.

24.§. Divkāršā integrāla transformācija kontūras integrālā (Riemann - Green'a formula).

Apgabalu (A) sauc par vienkārši sakarīgu, ja šajā apgabalā vilktu slēgtu līniju ar nepārtrauktu deformāciju var reducēt par punktu. Pretējā gadījumā ir vairākkārtīgi sakarīgs apgabals.

Pieņemsim, ka vienkārši sakarīgā apgabalā (A) ir definētas divas nepārtrauktas un parciāli diferencējamas funkcijas $P(x,y)$ un $Q(x,y)$ un ka apgabalu noslēdz rektificējama līnija $\mathcal{L}$. Pierādīsim Rīmana un Grīna (Riemann, Green) formulu

$$(1.)\quad \iint_{(A)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint_{\mathcal{L}} P\,dx + Q\,dy,$$

ar kuŗu noteikta veida divkāršo integrālu transformē kontūras (līnijas) integrālā.

Pierādījumam konstatē, ka pastāv sakari

$$(2.)\quad I_1 = \iint_{(A)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_{\mathcal{L}} Q\,dx,\quad I_2 = \iint_{(A)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_{\mathcal{L}} P\,dx.$$

Pieņemsim, ka kontura $\mathcal{L}$ ar taisnēm, parallelām koordinātu asīm, krustojas divos punktos (58.zīm.). Tad var izteikt, piem., integrālu

$$I_1 = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx = \int_c^d [Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)]\,dy$$

ar līnijas integrāliem

$$\int_{CBD} Q(x,y)\,dy = \int_c^d Q(x_2(y),y)\,dy$$

un

$$\int_{CAD} Q(x,y)\,dy = \int_c^d Q(x_1(y),y)\,dy$$

Mainot integrēšanas virzienu pa līniju CAD, dabū

$$\int_{DAC} Q(x,y)\,dy = -\int_c^d Q(x_1(y),y)\,dy,$$

un tā tad tiešām

$$I_1 = \int_{CBD} Q(x,y)\,dy + \int_{DAC} Q(x,y)\,dy = \int_{CBDAC} Q(x,y)\,dy = \oint_{\mathcal{L}} Q\,dy.$$

Tamlīdzīgā kārtā pārveido otro integrālu

$$I_2 = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b P(x,y_2(x))\,dx - \int_a^b P(x,y_1(x))\,dx,$$

ievedot līnijas integrālus

$$\int\limits_{ADB} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(x,y_2(x))\,dx, \quad \int\limits_{ACB} P(x,y)\,dx = \int\limits_a^b P(x,y_1(x))\,dx.$$

Dabū galīgo izteiksmi

$$J_2 = -\int\limits_{BDA} P(x,y)\,dx - \int\limits_{ACB} P(x,y)\,dx = -\int\limits_{BDACB} P\,dx = -\oint\limits_{\mathcal{L}} P\,dx.$$

Sastādot diferenci $J_1 - J_2$, rodas tiešām Riemann - Green'a formula (1.)

Piezīme. 1. Riemann - Green'a formula ir pareiza arī vienkārši sakarīgiem apgabaliem, kuŗu kontūra krustojas ar taisnēm, parallelām koordinātu asīm, vairāk (pāru skaitā) nekā 2 punktos. Pierādījumam pietiek sadalīt doto apgabalu atsevišķos apgabalos, kuŗiem šī formula pierādīta. Līnijas integrāli pa atsevišķo apagabalu kopīgām robežām top aprēķināti pretējos virzienos, tādēļ to summa ir nulle.

2. Riemann - Green'a formula vairākkārtsakarīgam, piem. divkārši sakarīgam apagabalam (59.zīm.) paplašina šādi. Apgabalu (A) ierobežo divas slēgtas līnijas $\mathcal{L}_1$ un $\mathcal{L}_2$. Ja kontūras $\mathcal{L}_1$ un $\mathcal{L}_2$ kautkuŗus divus punktus B_1 un B_2 savieno ar kādu līniju (kas atrodas apgabalā), tad rodas vienkārši sakarīgs apagabals ar kontūru $B_1C_1\mathcal{L}_1B_1B_2C_2\mathcal{L}_2B_2B_1$,

kam var lietot Riemann - Green'a formulu

$$\iint\limits_{(A)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{B_1C_1\mathcal{L}_1B_1} + \int\limits_{B_1B_2} + \int\limits_{B_2C_2\mathcal{L}_2B_2} + \int\limits_{B_2B_1}$$

Tā kā

$$\int\limits_{B_1B_2} + \int\limits_{B_2B_1} = 0, \qquad \text{tad dabū galīgi}$$

$$(3.) \quad \iint\limits_{(A)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \oint\limits_{\mathcal{L}_1} P\,dx + Q\,dy + \oint\limits_{\mathcal{L}_2} P\,dx + Q\,dy = \oint\limits_{\mathcal{L}_1} - \oint\limits_{\mathcal{L}_2}$$

Riemann - Green'a formulas (1.) daži lietojumi.

1. Nepieciešamais un pietiekamais nosacījums, lai slēgtās kontūras integrāls

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} P\,dx + Q\,dy = 0,$$

ir zināmais integrabilitātes nosacījums

$$(4.) \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{jeb} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ka nosacījums (4.) ir nepieciešams, pierāda šādi. Pieņemsim pretējo, ka

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = F(x,y) \neq 0,$$

piemēram, ka vienā punktā (x_0, y_0) ir $F(x_0, y_0) > 0$. Tā kā $F(x,y)$ ir nepārtraukta funkcija, tad $F(x,y) > 0$ visos punktos pietiekami tuvā apkārtnē, resp. riņķī K ar pietiekami mazu radiju r un centru (x_0, y_0)

Integrālu
$$\iint_{(K)} F(x,y)\,dx\,dy = \pi r^2 F(\xi,\eta)$$
pēc teorēmas par vidējo vērtību var izteikt ar zemintegrāla funkcijas vērtību kādā riņķa punktā (ξ,η). Tā kā $F(\xi,\eta)>0$, tad arī
$$\iint_{(K)} F(x,y)\,dx\,dy > 0,$$
kas runā pretī dotajam nosacījumam, ka katram apgabalam
$$\iint_{(A)} F(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

2. Ja sastāda divas funkcijas $P(x,y)$ un $Q(x,y)$ tā, lai
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$
tad integrāls
$$\iint_{(A)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = A$$
izteic apgabala laukumu A. Riemann - Green'a formula rāda, ka ar tādām funkcijām P un Q var figūras laukumu izteikt ar kontūras integrālu
$$A = \oint_{\mathcal{L}} P\,dx + Q\,dy.$$

Piemēram, var ņemt 1) $Q = x$, $P = 0$, vai 2) $Q = 0$ un $P = -y$, vai 3) $Q = \frac{x}{2}$ un $P = -\frac{y}{2}$. Tad rodas zinamas laukuma izteiksmes:

1) $A = \oint_{\mathcal{L}} x\,dy$, 2) $A = -\oint_{\mathcal{L}} y\,dx$, 3) $A = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{L}} x\,dy - y\,dx$.

25.§. <u>Divkāršo integrālu daži lietojumi mechanikā.</u>

1. <u>Diska masu centra noteikšana.</u>

Par <u>disku</u> saprot ķermeni, kam viena dimensija ir ignorējama, resp.materiālu plakanu figūru (A). Diska masas sadalījumu raksturo ar tā <u>blīvumu.</u> Ja laukumā $\Delta\omega$ ir masa Δm ,tad vidējais blīvums ir
$$\mu_v = \frac{\Delta m}{\Delta\omega}$$
un blīvums dotajā punktā $P(x,y)$ ir
$$\mu = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta\omega} = \frac{dm}{d\omega}$$

Vispārīgā gadījumā $\mu = \mu(P) = \mu(x,y)$ un diska totālo masu $M = \int_{(mas)} dm$ var izteikt ar divkāršo integrālu
$$M = \iint_{(A)} \mu(P)\,d\omega = \iint_{(A)} \mu(x,y)\,dx\,dy$$

Homogenam diskam $\mu = const.$ un $M = \mu A$,ja A apzīmē diska laukumu.

Materiālās sistēmas masu centru G (60.zīm.) nosaka ar vietas vektoru

$$\vec{r}_G = \frac{\int_{(mas)} \vec{r}\, dm}{M},$$

ja sistēmas masas elementa dm vietas vektors ir $\vec{r}$ un sistēmas totālā masa M. Diska gadījumā, sastādot projekcijas uz koordinātu asīm, dabū masu centra koordinātas

$$(1)\quad x_G = \frac{\iint_{(A)} x\,\mu(x,y)\,dx\,dy}{M}, \qquad y_G = \frac{\iint_{(A)} y\,\mu(x,y)\,dx\,dy}{M}$$

Ja disks ir homogens, tad šīs formulas vienkāršojas par

$$(2)\quad x_G = \frac{\iint_{(A)} x\,dx\,dy}{A}, \qquad y_G = \frac{\iint_{(A)} y\,dx\,dy}{A}$$

Šeit var izteikt

$$\iint_{(A)} x\,dx\,dy = \int_a^b x\,dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy = \int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx$$

un

$$\iint_{(A)} y\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y\,dy = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx$$

Arī laukumu var aprēķināt ar vienkāršo integrālu

$$A = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\,dx.$$

Dabū zināmas izteiksmes masu centra koordinātām, lietojot vienkāršos integrālus.

2. Diska inerces moments.

Izšķir aksiālo inerces momentu un polāro inerces momentu. Par materiālās sistēmas inerces momentu attiecībā pret kādu asi ℓ jeb aksiālo inerces momentu sauc lielumu (61.zīm.)

$$I_\ell = \sum m r^2,$$

kur r ir sistēmas materiāla punkta P īsākais attālums līdz asij ℓ. Sistēmai ar nepārtrauktu masas sadalījumu (diskam) der izteiksme

$$I_\ell = \int_{(mas)} r^2\,dm.$$

Attiecībā pret koordinātu asīm diska plaknē (62.zīm.) aksiālie inerces momenti ir

$$I_x = \int_{(mas)} y^2\,dm; \qquad I_y = \int_{(mas)} x^2\,dm$$

Polāro inerces momentu attiecībā pret koordinātu sistēmas sākumu O definē ar

$$I_0 = \int_{(mas)} \rho^2\,dm,$$

kur ρ ir sistēmas masas elementa dm attālums no punkta O.

Ir šāds sakars polārā un aksiālo inerces momentu starpā:

$$I_0 = I_x + I_y.$$

Diska gadījumā izteic

$$I_x = \iint\limits_{(A)} \mu y^2 d\omega; \qquad I_y = \iint\limits_{(A)} \mu x^2 d\omega,$$

resp.

$$I_0 = \iint\limits_{(A)} \mu (x^2+y^2) d\omega.$$

Ja disks ir homogens, tad $\mu = const$ un

$$I_x = \mu \iint\limits_{(A)} y^2 dx\,dy = \mu \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} y^2 dy = \mu \int_a^b \frac{y_2^3 - y_1^3}{3} dx$$

$$I_y = \mu \iint\limits_{(A)} x^2 dx\,dy = \mu \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} x^2 dx = \int_c^d \frac{x_2^3 - x_1^3}{3} dy.$$

Ar polārkoordinātām var izteikt: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

$d\omega = \rho\, d\rho\, d\varphi$ un

$$I_x = \mu \iint\limits_{(A)} \rho^3 \sin^2\varphi\, d\rho\, d\varphi = \mu \int_\alpha^\beta \sin^2\varphi\, d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho^3 d\rho$$

jeb

$$I_x = \mu \int_\alpha^\beta \frac{\rho_2^4 - \rho_1^4}{4} \sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Tamlīdzīgā kārtā dabū

$$I_y = \mu \iint\limits_{(A)} \rho^3 \cos^2\varphi\, d\rho\, d\varphi = \mu \int_\alpha^\beta \cos^2\varphi\, d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho^3 d\rho$$

jeb

$$I_y = \mu \int_\alpha^\beta \frac{\rho_2^4 - \rho_1^4}{4} \cos^2\varphi\, d\varphi$$

un

$$I_0 = \mu \int_\alpha^\beta \frac{\rho_2^4 - \rho_1^4}{4} d\varphi.$$

VI TRĪSKĀRŠIE INTEGRĀLI.

26.§. Trīskāršā integrāla definīcija un pamatīpašības.

Ja jāintegrē trīs mainīgo funkcijas, nonākam pie trīskāršiem integrāliem. Funkcija $f(x,y,z)$ nosaka (63.zīm.) punkta $P(x,y,z)$ stāvokli telpas apgabalā (V), tādēļ raksta:

$$f(P) = f(x,y,z).$$

Funkcija ir nepārtraukta, ja diferencei

$$|f(P) - f(P')| < \varepsilon,$$

kad attālums starp P un P' ir pietiekami mazs: $PP' < \eta$. Ja apgabals (V) ir slēgts, funkcija definēta arī punktos, kas atrodas uz virsas, kas ierobežo šo apgabalu.

Atzīmēsim nepārtrauktās funkcijas šādas īpašības.

1. Slēgtā apgabalā definēta funkcija ir vienmērīgi nepārtraukta. Vienmērīgo nepārtrauktību izteic ar nosacījumu,ka ikvienam citam punktu pārim Q un Q' pastāv nevienlīdzība

$$|f(Q)-f(Q')|<\varepsilon,$$

ja arī attālums $QQ'<\eta$.

2. Funkcija slēgtā apgabalā pieņem maksimālo vērtību M, resp. minimālo vērtību m.

3. Ja $m\leq\mu\leq M$,funkcija slēgtā apgabalā šo starpvērtību μ pieņem vismaz vienā punktā.

Par telpas apgabala diametru sauc attālumu starp diviem apgabala virsas vistālākiem punktiem. Telpas apgabals neaprobežoti samazinās, ja tā diametrs tuvojas nullei.

Tamlīdzīgi, kā diska masu izteic ar divkāršo integrālu, ķermeņa masu M nosaka ar trīskāršo integrālu. Iedomāsimies ķermeni sadalītu ar trīs virsu sistemām tilpuma elementos kuŗu masa ir Δm .Vidējo blīvumu tilpumā Δv definē ar

$$\bar{\rho}=\frac{\Delta m}{\Delta v}.$$

Ja $\Delta v\to 0$,tad $\bar{\rho}\to\rho=\frac{dm}{dv}$-blīvumam ķermeņa punktā (x,y,z). Tādēļ ķermeņa totālā masa

$$M=\lim\sum\Delta m=\int\limits_{(M)}dm,$$

jeb

$$M=\lim_{\Delta v\to 0}\sum\bar{\rho}\,\Delta v=\iiint\limits_{(V)}\rho\,dv$$

Tā kā $\rho=f(x,y,z)$,tad

$$M=\iiint\limits_{(V)}f(x,y,z)\,dv$$

Trīskāršo integrālu, neatkarīgi no mēchaniskās interpretācijas, definē šādi. Sadala apgabalu (V) parciālos apgabalos (tilpuma elementos)

$$\Delta v_1,\ \Delta v_2,\ \ldots,\ \Delta v_k,\ \ldots\ \Delta v_n,$$

un ņem katrā parciālā apgabalā kautkur punktus P_k ,kam koordinātas ir

$$(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\qquad(k=1,2,3,\ \ldots\ ,n)$$

Trīskāršo integrālu definē ar integrālsummas robežu

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta v_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}f(P_k)\Delta v_k=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta v_k\to 0}}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k=\iiint\limits_{(V)}f(x,y,z)\,dv.$$

Te $\Delta v_k\to 0$ nozīmē, ka katra tilpuma elementa Δv_k diametrs $d_k\to 0$.

Ja funkcija ir nepārtraukta, tās trīskāršais integrāls eksistē. Integrācijas apgabala (V) parciālā daļā Δv_k funkcijas minimālo, resp.maksimālo nozīmi apzīmēsim ar m_K, resp. M_K, bet šīs nozīmes visā apgabalā (V) ar m, resp M. Tad no nevienlīdzībām

$$m \leq m_K = f(P_K) \leq M_K \leq M$$

ar reizināšanu sastāda

$$m\,\Delta v_K \leq m_K\,\Delta v_K \leq f(P_K)\,\Delta v_K \leq M_K\,\Delta v_K \leq M\,\Delta v_K.$$

Izdarot summēšanu, dabū

$$mV \leq \sum_{K=1}^{n} m_K\,\Delta v_K \leq \sum_{K=1}^{n} f(P_K)\,\Delta v_K \leq \sum_{K=1}^{n} M_K\,\Delta v_K \leq MV,$$

jo visa apgabala tilpums

$$V = \sum_{K=1}^{n} \Delta v_K.$$

Salīdzināsim summas

$$\sum_{K=1}^{n} m_K\,\Delta v_K = s_n, \quad \sum_{K=1}^{n} M_K\,\Delta v_K = S_n,$$

sastādot diferenci

$$S_n - s_n = \sum_{K=1}^{n} (M_K - m_K)\,\Delta v_K.$$

Tā kā $M_K = f(Q_K)$, $m_K = f(Q'_K)$, tad

$$|M_K - m_K| = |f(Q_K) - f(Q'_K)| < \varepsilon, \text{ ja } Q_K Q'_K < \eta$$

Tādēļ

$$|S_n - s_n| < \varepsilon \sum_{K=1}^{n} \Delta v_K = \varepsilon V,$$

vai

$$S_n - s_n \to 0, \text{ ja } n \to \infty \text{ un } \Delta v_K \to 0.$$

Integrāla

$$J = \iiint\limits_{(V)} f(P)\,dv = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv$$

eksistence konstatēta gadījumā,kad $f(x,y,z)$ ir nepārtraukta funkcija. No nevienlīdzībām

$$mV \leq s_n \leq S_n \leq MV$$

robežgadījumā dabū

$$mV \leq J \leq MV.$$

Tādēļ $J = \mu V$, kur $m \leq \mu \leq M$. Ievērojot funkcijas $f(x,y,z)$ nepārtrauktību, var izteikt $\mu = f(\xi, \eta, \zeta)$.

No otras puses

$$\mu = \frac{J}{V} = \frac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv,$$

μ sauc par funkcijas $f(x,y,z)$ vidējo vērtību attiecībā pret funkcijas definīcijas apgabalu (V)

Trīskāršam integrālam citas pamatīpašības ir šādas:

1. Konstantu faktoru var izcelt pirms integrāla zīmes:

$$\iiint\limits_{(V)} cf\,dv = c\iiint\limits_{(V)} f\,dv.$$

2. Summas integrāls vienlīdzīgs saskaitāmo integrālu summai:

$$\iiint\limits_{(V)} (f+g)\,dv = \iiint\limits_{(V)} f\,dv + \iiint\limits_{(V)} g\,dv.$$

3. Ja funkcija $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$ visos apgabala (V) punktos, tad

$$\iiint\limits_{(V)} f\,dv \leq \iiint\limits_{(V)} g\,dv$$

4. Ja apgabalu (V) var sadalīt divos atsevišķos apgabalos (V_1) un (V_2) bez kopējas daļas, resp. $(V) = (V_1) + (V_2)$, tad

$$\iiint\limits_{(V)} f\,dv = \iiint\limits_{(V_1)} f\,dv + \iiint\limits_{(V_2)} f\,dv.$$

27.§. Trīskāršā integrāla aprēķināšana Dekarta koordinātās.

Trīskāršā integrāla aprēķināšanu reducē uz trīs vienkāršu integrālu aprēķināšanu.

Šeit izšķir divus gadījumus:

1. Integrācijas apgabals (lauks) ir taisnstūŗa paralelplaknis (64.zīm.), ko nosaka ar nevienlīdzībām

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \\ e \leq z \leq h. \end{cases}$$

Integrācijas apgabalu (V) sadala ar plaknēm, kas paralelas koordinātu plaknēm tilpuma elementos. Dabūjam elementārus taisnstūŗa paralelplakņus ar malām Δx_i, Δy_j, Δz_k. Ņemam punktu (ξ_i, η_j, ζ_k) kāda šī ķermenīša iekšienē. Izdaram trīskārtīgu summēšanu un pārejam uz robežu, definējot trīskāršo integrālu J ar

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty\\ p\to\infty\\ \Delta x_i\to 0\\ \Delta y_j\to 0\\ \Delta z_k\to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv = J.$$

Lai noteiktu integrālsummas robežu, ņemsim visos elementāros paralelplakņos, kas veido taisnu prizmu ar pamatu $\Delta x_i\,\Delta y_j$ un sānu šķautnēm paralelām z-asij, punktus ar kopīgām koordinātām ξ_i, η_j .Tad var izteikt

$$J = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_j \lim_{\substack{p\to\infty \\ \Delta z_s \to 0}} \sum_{s=1}^{p} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_s)\Delta z_s$$

jeb

$$J = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty \\ \Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_j \to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g(\xi_i, \eta_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint_{(A)} g(x,y)\,dx\,dy$$

ar funkciju

$$g(x,y) = \int_e^h f(x,y,z)\,dz.$$

Tad trīskāršais integrāls ir reducēts par funkcijas dubultintegrālu, kuŗu viegli aprēķināt:

$$J = \iint_{(A)} g(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d g(x,y)\,dy.$$

Tā tad

$$J = \iiint_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x,y,z)\,dz.$$

Var arī mainīt integrēšanas kārtību, piem.:

$$J = \int_a^b dx \int_e^h dz \int_c^d f(x,y,z)\,dy.$$

2. <u>Integrācijas lauks ierobežots ar slēgtu līku virsu,</u> kas ar taisnēm, paralelām koordinātu asīm, krustojas divos punktos. Tad sadala integrācijas apgabalu (V) ar plaknēm, kas paralelas koordinātu plaknēm, taisnstūŗa paralelplaknes. Pēc tam izdara summēšanu un pāriet uz robežu. Līkās virsas ierobežotās daļas, pārejot uz summas robežu, rezultātā dod nulli. Ja taisne, (65.zīm.) vilkta paraleli z-asij caur punktu (ξ_i, η_j), krusto virsu divos punktos

$$z_1(\xi_i, \eta_j), \quad z_2(\xi_i, \eta_j),$$

tad ar iepriekšējā gadījumā lietotiem apzīmējumiem izteic funkciju

$$g(\xi_i, \eta_j) = \int_{z_1(\xi_i,\eta_j)}^{z_2(\xi_i,\eta_j)} f(\xi_i, \eta_j, z)\,dz = \lim_{\substack{p\to\infty \\ \Delta z_s \to 0}} \sum_{s=1}^{p} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_s)\Delta z_s,$$

un trīskāršo integrālu J - ar sastādītās funkcijas divkāršo integrālu:

$$J = \iint_{(A)} g(x,y)\,dx\,dy$$

Tā kā

$$J = \iint_{(A)} g(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} g(x,y)\,dy,$$

tad galīgi

$$J=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

t.i. trīskāršā integrāla aprēķināšana reducējas uz trim viena otram sekojošu vienkāršo integrālu aprēķināšanu.

Apskatīsim, kā mainīt integrācijas kārtību trīskāršā integrālā. Šķelsim integrācijas apgabalu (V) ar plakni, paralelu yz -plaknei. Šai plaknei $x=const.$ Varam izteikt trīskāršo integrālu $J=\int F(x)dx$ ar funkciju

$$F(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz=\iint_{(A_x)} f(x,y,z)\,dy\,dz,$$

ja ar (A_x) apzīmē mainīgo apgabala (V) šķēlumu $x=const.$ (66.zīm.).

Ja šķeļam apgabalu (V) ar plakni paralelu xz -plaknei (67.zīm.), dabūjam apgabalu (A_y). Tad ar funkciju

$$G(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz=\iint_{(A_y)} f(x,y,z)\,dz\,dx$$

izteic

$$J=\int_c^d G(y)\,dy.$$

Ja šķeļam apgabalu (V) ar plakni paralelu xy -plaknei (68.zīm.), dabūjam apgabalu (A_z) uz šīs plaknes. Ar funkciju

$$H(z)=\int_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy\int_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx=\iint_{(A_z)} f(x,y,z)\,dy\,dx$$

izteic

$$J=\int_e^h H(z)\,dz$$

Šīs formulas rāda, kā var mainīt integrācijas kārtību trīskāršā integrālā.

Piemērs. Noteikt homogenas lodes Newton'a potenciālu, ja potencējamais punkts atrodas ārpus lodes. Newton'a potenciāls ir

$$U=\varkappa\int_{(masa)}\frac{dm}{R},$$

kur $\varkappa$ ir gravitācijas konstante. R - potencējamā punkta attālums līdz masas elementam dm.

Ja ρ ir ķermeņa blīvums, tad $dm=\rho\,dv$ un

$$U=\varkappa\iiint_{(V)}\frac{\rho\,dv}{R}$$

Homogenai lodei $\rho=const$ un

$$U=\varkappa\rho\iiint_{(V)}\frac{dv}{R}=k\iiint_{(V)}\frac{dv}{R}\quad(k=\varkappa\rho)$$

Ja lodes radijs ir a un tās centrs ņemts koordinātu sākuma punktā, tad lodes vienādojums ir (69.zīm.)

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

Šķelsim lodi pa mazo riņķi (A_2) ar plakni,paralelu xy - plaknei. Lodes mazā riņķa (A_2) radijs ir $\sqrt{a^2-z^2}$.

Ja potencējamais punkts ņemts uz z-ass attālumā $z_0 > a$ no centra, tad

$$R=\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}$$

un

$$U=\kappa\int_{-a}^{a}dz\iint_{(A_2)}\frac{dx\,dy}{R}.$$

Divkāršo integrālu var aprēķināt,lietojot punkta (x,y) polārās koordinātas (r,φ) ar kuŗām izteic

$$R=\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}$$

un

$$\iint_{(A_2)}\frac{dx\,dy}{R}=\iint_{(A_2)}\frac{r\,dr\,d\varphi}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}$$

Atklātā veidā dabū

$$\iint_{(A_2)}\frac{dx\,dy}{R}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}}\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}}=$$

$$=2\pi\Big[\sqrt{r^2+z^2-2zz_0+z_0^2}\Big]_{r=0}^{r=\sqrt{a^2-z^2}}=2\pi\Big[\sqrt{a^2-2zz_0+z_0^2}-(z_0-z)\Big]\quad(z_0>z).$$

Tādēļ lodei potenciālu var izteikt ar

$$U=2\pi\kappa\int_{-a}^{+a}\left(\sqrt{a^2-2zz_0+z_0^2}+z-z_0\right)dz$$

jeb

$$U=2\pi\kappa\Big[-\frac{1}{3z_0}(a^2-2zz_0+z_0^2)^{3/2}+\frac{z^2}{2}-zz_0\Big]_{-a}^{+a}.$$

Ievērojot to, ka $z_0>a$,dabū

$$U=2\pi\kappa\Big[-\frac{1}{3z_0}(z_0-a)^3+\frac{1}{3z_0}(z_0+a)^3-2az_0\Big]$$

jeb

$$U=\frac{4\pi\kappa a^3}{3z_0}$$

Tā kā $\kappa=\varkappa\,\varrho$ un lodes tilpums $V=\frac{4}{3}\pi a^3$,tad var izteikt

$$U=\varkappa\frac{M}{z_0}$$

Atrastā potenciāla izteiksme rāda, ka <u>homogenās lodes Newton'a potenciāls ir tāds pat kā vienam gravitējošam centram,kas it kā atrastos lodes centrā un kam masa ir vienlīdzīga ar lodes totālo masu.</u>

Tā kā atrakcija $\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U$,tad

$$F = \frac{\varkappa M}{r_0^2},$$

t.i. homogenās gravitējošās lodes atrakcija punktā ārpus lodes ir tāda pati, kāda rastos no lodes centra, ja tur iedomātos koncentrētu lodes masu.

28.§. Trīskāršais integrāls cilindriskās un sfēriskās koordinātās.

Cilindriskās koordinātās (r, φ, z) punktu nosaka ar trīs koordinātu virsu krustošanos; te $r = const$ ir rotācijas cilindru virsas, kam rotācijas ass ir z-ass, $\varphi = const$ — pusplaknes, kas iet caur z-asi un $z = const$ plaknes, paralelas xy-plaknei (70.zīm.). Šīs koordinātu virsas ir savstarpēji ortogonālas. Ja konstruē arī kordinātu virsas ar

$$r + \Delta r, \quad \varphi + \Delta\varphi, \quad z + \Delta z,$$

tad ar iepriekšējām virsām ieslēdz ķermeni, kuŗa tilpums (71.zīm.)

$$\Delta v \approx (r\cdot\Delta\varphi\cdot\Delta r)\,\Delta z.$$

Tādēļ ir saprotams, ka tilpuma elementu cilindriskās koordinātās izteic ar

$$dv = r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

Ar transformācijas formulām

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$

sastāda funkciju

$$F(r,\varphi,z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) = f(x,y,z)$$

Trīskāršo integrālu

$$J = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv = \iiint\limits_{(V)} F(r,\varphi,z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz$$

var aprēķināt dažādos veidos, piem.tā:

$$J = \int_e^h dz \iint\limits_{(A_z)} F(r,\varphi,z)\,r\,dr\,d\varphi,$$

kur (A_z) ir integrācijas apgabala (V) šķēlums (72.zīm.) ar plakni $z = const$ .Te

$$\iint\limits_{(A_z)} F(r,\varphi,z)\,r\,dr\,d\varphi = \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} d\varphi \int_{r_1(\varphi,z)}^{r_2(\varphi,z)} F(r,\varphi,z)\,r\,dr,$$

un tā tad

$$J = \int_e^h dz \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} d\varphi \int_{r_1(\varphi,z)}^{r_2(\varphi,z)} F(r,\varphi,z)\,r\,dr.$$

Sfēriskās koordinātas ρ, φ, θ saista ar Dekarta koordinātām pēc formulām

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Ja $\rho = \text{const.}$, dabū sfēru, ja $\varphi = \text{const.}$, dabū pusplakni, kas iet caur z-asi; ja $\theta = \text{const.}$, dabūjam konisku virsu (73.zīm.). Punktu nosaka ar šo trīs ortogonālo virsu krustošanos. Ar $\rho + \Delta\rho$, $\varphi + \Delta\varphi$, $\theta + \Delta\theta$ konstruējam koordinātu virsas. Tad dabūjam ķermeni (74.zīm.), kuŗa tilpums Δv ir

$$\Delta v \approx (\rho\Delta\theta)(\rho\sin\theta\,\Delta\varphi)\Delta\rho,$$

ja uzskata to tuvināti par taisnstūŗa paralelplakni ar šķautnēm

$$\rho\Delta\theta,\quad \rho\sin\theta\,\Delta\varphi,\quad \Delta\rho.$$

Tilpuma elementu sfēriskās koordinātās izteic ar

$$dv = \rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\rho,$$

un tādēļ

$$J = \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv = \iiint\limits_{(V)} F(\rho,\varphi,\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\varphi\,d\rho\,d\theta,$$

ja

$$F(\rho,\varphi,\theta) = f(\rho\cos\varphi\sin\theta,\ \rho\sin\varphi\sin\theta,\ \rho\cos\theta).$$

Lai noteiktu integrālu robežas, konstruē (75.zīm.) lodi ar radiju 1 un centru O, un integrācijas apgabala (V) virsu S centrāli projecē uz lodes virsu. Pieņemot, ka stars no punkta O krusto virsu S divos punktos, kuŗos $\rho = \rho_1$ un $\rho = \rho_2$, var ar funkciju

$$\Phi(\theta,\varphi) = \int\limits_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} F(\rho,\varphi,\theta)\,\rho^2\,d\rho$$

reducēt trīskāršo integrālu J uz divkāršo integrālu

$$J = \iint\limits_{(\sigma)} \Phi(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

ja (σ) ir virsas S projekcija uz lodes virsu. Savukārt pēdējo integrālu izteic ar diviem vienkāršiem integrāliem:

$$\iint\limits_{(\sigma)} \Phi(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \Phi(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta,$$

ja integrācijas robežas nosaka pēc 76.zīmējuma.

Tā tad

$$J = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin\theta\,d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} F(\rho,\varphi,\theta)\,\rho^2\,d\rho.$$

<u>Piezīme.</u> Var arī citādā kārtībā izpildīt integrēšanu.

<u>Piemērs.</u> Aprēķināt Newton'a potenciālu homogenam ķermenim, ko ierobežo divas koncentriskas lodes, ja potencējamais punkts A ir mazākās lodes iekšienē (ķermeņa dobumā). Potenciāla

$$u = \kappa\iiint\limits_{(V)} \frac{dv}{R}$$

izteiksmē R apzīmē attālumu

$$R = \sqrt{\rho^2 + z_0^2 - 2\rho z_0 \cos\theta},$$

ko aprēķina no trijstūra BOA ,kur $OA = z_0$, $OB = \rho$ un $AB = R$ (77.zīm.). Ja ložu radiji ir a un b ,tad ar lietotām izteiksmēm dabū

$$U = \kappa \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{b} \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \sin\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2 - 2z_0 \rho\cos\theta}},$$

ja ievēro, ka šeit projekcija (σ) ir visa palīga sfēras virsa.

Pēc integrālu aprēķināšanas dabū

$$U = 2\pi\kappa \int_a^b \rho^2 d\rho \left[\frac{\sqrt{\rho^2 + z_0^2 - 2\rho z_0 \cos\theta}}{\rho z_0}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

jeb

$$U = 2\pi\kappa \int_a^b \frac{\rho^2 d\rho}{\rho z_0}\left[(\rho + z_0) - (\rho - z_0)\right] = 4\pi\kappa \int_a^b \rho d\rho = 2\pi\kappa (b^2 - a^2).$$

Konstatējam, ka potenciāls $U = const.$ visos dobuma punktos. Tā kā atrakcija

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, U, \quad \text{tad} \quad \vec{F} = 0,$$

t.i. nav nekāda atrakcijas kopspēka šo ložu ieslēgta dobuma katrā punktā.

Piezīme. Ar atrastām potenciāla izteiksmēm var izteikt homogenas lodes potenciālu, ja potencējamais punkts atrodas lodē. Tā kā integrējamā funkcija $\frac{1}{R}$ potencējamā punktā ir pārtraukta ($R = 0$ atbilst ∞),tad potenciālu U lodes iekšējā punktā definē kā robežu divu ķermeņu potenciālu summai

$$U = \lim_{\varepsilon' \to 0} U' + \lim_{\varepsilon'' \to 0} U''.$$

Te U' ir potenciāls koncentriskai lodei (78.zīm.), kurai radijs ir $r - \varepsilon' (\varepsilon' > 0)$ un U'' - potenciāls ķermenim, ko ierobežo dotā lodes virsa un koncentriska lode ar radiju $r + \varepsilon'' (\varepsilon'' > 0)$. Var izteikt

$$U'' = 2\pi\kappa \left[a^2 - (r + \varepsilon'')^2\right]$$

un atrast robežgadījumā

$$\lim_{\varepsilon'' \to 0} U'' = 2\pi\kappa (a^2 - r^2).$$

lietojot potenciāla izteiksmi (skat.iepriekšējo §-fu) gadījumam, kad punkts ir ārpus lodes, dabū

$$U' = \frac{\varkappa M'}{r - \varepsilon'}$$ ($\varkappa$ - gravitācijas konstante, M' - lodes masa)

un robežgadījumu

$$\lim_{\varepsilon' \to 0} U' = \frac{\varkappa M}{r}.$$

Ar lodes masas izteiksmi

$$M = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \qquad (\rho \text{ - lodes blīvums})$$

un konstanti $K = \varkappa \rho$ var pārveidot galīgi

$$\lim_{\varepsilon' \to 0} U' = \frac{4}{3}\pi K r^2.$$

Tā tad

$$U = \frac{4}{3}\pi K r^2 + 2\pi K[a^2 - r^2] = \frac{2}{3}\pi K(3a^2 - r^2).$$

Pieņemot, ka arī lodes iekšējā punktā atrakcija

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, U, \quad \text{resp.} \quad F_r = \frac{dU}{dr},$$

dabū

$$F_r = -\frac{4}{3}\pi K r,$$

t.i. lodes iekšienē atrakcija ir tieši proporcionāla attālumam r. Salīdzinot ar atrakciju lodes ārējā punktā, kur

$$F = \frac{\varkappa\rho\cdot\frac{4}{3}\pi a^3}{r^2} = \frac{K\cdot\frac{4}{3}\pi a^3}{r^2}$$

konstatē, ka atrakcija ir attāluma nepārtraukta funkcija. Rezultātu attēlo atrakcijas grafika (79.zīm.), kur

$$F = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi K r, & \text{ja } 0 \leq r \leq a \\ \frac{\frac{4}{3}\pi K a^3}{r^2}, & \text{ja } a \leq r < \infty \end{cases}$$

VII VEKTORU ANALĪZES ELEMENTI.

29.§. Divergences teorēma.

Ar trim nepārtrauktām un diferencējamām funkcijām $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, definētām telpas apgabalā (V), ir noteikts vektoru lauks $\vec{F}(P, Q, R)$. Te vektora $\vec{F}$ komponentes ir

$$F_x = P(x,y,z), \quad F_y = Q(x,y,z), \quad F_z = R(x,y,z).$$

Vektoru lauka divergenci definē šādi:

$$\text{div}\, F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Šī izteiksme ir diferenciālinvariants, kas nemainās no koordinātu transformācijas. Ja ar jaunām koordinātām x', y', z' izteic vektora komponentes P', Q', R', tad viegli pārbauda, ka

$$\frac{\partial P'}{\partial x'} + \frac{\partial Q'}{\partial y'} + \frac{\partial R'}{\partial z'} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

VZ - 100
1941/V

Vektora divergence ir skalārs lielums,atkarīgs vienīgi no punkta stāvokļa vektoru laukā.

Lai izteiktu divergences teorēmu, lieto arī <u>vektoru plūsmas</u> jēdzienu. Vektoru laukā ņemtai virsai S katrā punktā omāsimies (80.zīm.) konstruētu vektoru $\vec{F}$ un virsas normāli ν. Ar vektora projekciju F_ν uz virsas normāli un ar virsas laukuma elementu $d\sigma$ definē vektora <u>elementāro plūsmu</u> $F_\nu d\sigma$,bet <u>pilno</u> vektora plūsmu caur virsu S ar virsas integrālu $\iint_{(S)} F_\nu d\sigma$.

Tā kā ar normales ν virziena leņķiem $\alpha = \angle(\nu,x), \beta = \angle(\nu,y), \gamma = \angle(\nu,z)$ pret koordinātu asīm izteic projekciju

$$F_\nu = F_x \cos(\nu,x) + F_y \cos(\nu,y) + F_z \cos(\nu,z) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma,$$

tad pilna vektoru plūsma ir izsakāma ar dubultintegrālu

$$\iint_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma = \iint_{(S)} F_\nu\, d\sigma = \iint_{(S)} F\cos\theta\, d\sigma,$$

kur θ apzīmē leņķi starp normāli ν un vektoru $\vec{F}$.

<u>Divergences teorēma. Vektoru laukā divergences integrāls ir vienlīdzīgs ar vektoru plūsmu, noteiktu apgabala noslēgtās virsas ārējās normales virzienā:</u>

$$\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F}\, dv = \oiint_{(S)} F_\nu\, d\sigma.$$

Atklātā veidā šo teorēmu izteic <u>Gauss'a</u> un <u>Ostrogradsk'a</u> formula

$$\iiint_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oiint_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma$$

Pierādīsim, ka

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x}\, dv = \oiint_{(S)} P\cos\alpha\, d\sigma; \qquad \iiint_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dv = \oiint_{(S)} Q\cos\beta\, d\sigma;$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \oiint_{(S)} R\cos\gamma\, d\sigma$$

Pieņemsim, ka apgabalu (V) noslēdz virsa S , kas krustojas divos punktos ar taisnēm, paralelām koordinātu asīm (81.zīm.). Pierādīsim,piem.,pēdējo sakarības formulu (citu formulu pierādījumi analogi),

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dv = \oiint_{(S)} R\cos\gamma\, d\sigma.$$

Tā kā virsas laukuma elementiem $d\sigma_1$ un $d\sigma_2$ ir kopīga projekcija $d\omega$ uz xy-plakni, t.i.

$$d\omega = \mathrm{proj}_{xy}\, d\sigma_1 = \mathrm{proj}_{xy}\, d\sigma_2,$$

tad pēc projekciju formulas

$$d\omega = d\sigma_1 |\cos\gamma_1| = d\sigma_2 |\cos\gamma_2|$$

Virsas ārējā normāle ν_1 laukuma $d\sigma_1$ punktos veido ar pozitīvo z-asi platu leņķi, bet normale ν_2 - šauru leņķi; tādēļ

$$d\omega = -\cos\gamma_1 d\sigma_1 = \cos\gamma_2 d\sigma_2.$$

Trīskāršo integrālu

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} d\tau = \iint\limits_{(A)} dx dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

var reducēt par divkāršo integrālu:

$$\iiint\limits_{(A)} \frac{\partial R}{\partial z} d\tau = \iint\limits_{(A)} [R(x,y,z_2) - R(x,y,z_1)] d\omega =$$

$$= \iint\limits_{(A)} R(x,y,z_2) d\omega - \iint\limits_{(A)} R(x,y,z_1) d\omega,$$

kam integrācijas lauks (A) ur virsas S projekcija uz xy-plakni. Ievērojot sakarības laukumu elementu starpā, dabū

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} d\tau = \iint\limits_{(S_2)} R(x,y,z_2) \cos\gamma_2 d\sigma_2 + \iint\limits_{(S_1)} R(x,y,z_1) \cos\gamma_1 d\sigma_1$$

jeb

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} d\tau = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z) d\sigma.$$

Piezīmes. 1. Vektora projekciju F_ν var izteikt ar skalāro produktu

$$F_\nu = \vec{F} \cdot \vec{\nu},$$

ja $\vec{\nu}$ apzīmē normāles vienības vektoru. Tādēļ divergences teorēmu var uzrakstīt šādi:

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} d\tau = \iint\limits_{(S)} (\vec{F} \cdot \vec{\nu}) d\sigma.$$

2. Ja apgabala (V) virsu S taisnes, paralelas koordinātu asīm, krusto vairāk kā divos punktos, to var sadalīt vairākos apgabalos, kuŗus šādas taisnes šķeļ tikai divos punktos. Piemēram, apgabalu (V) (82.zīm.) ar plakni S_0 var sadalīt trīs apgabalos (V_1), (V_2), (V_3), kuŗiem pastāv divergences teorēma

$$\iiint\limits_{(V)} / = \iiint\limits_{(V_1)} / + \iiint\limits_{(V_2)} / + \iiint\limits_{(V_3)} / = \iint\limits_{(S_1)} / + \iint\limits_{(S)} / + \iint\limits_{(S_2)} / + \iint\limits_{(S')} / + \iint\limits_{(S_3)} / + \iint\limits_{(S_0)} / =$$

$$= \iint\limits_{(S_1)} / + \iint\limits_{(S_2)} / + \iint\limits_{(S_3)} / = \oint\limits_{(S)} /$$

Te $\iint\limits_{(S_0)} + \iint\limits_{(S')} + \iint\limits_{(S'')} = 0$, jo integrējot pa (S_0) iet vienā virzienā, bet pa (S') un (S'') pretējā.

30.§. Gradienta teorēma.

Gradienta (Green'a) teorēma ir divergences teorēmas

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div} \vec{F}\, dv = \oint\limits_{(S)} F_\nu\, d\sigma$$

speciāls gadījums, kad

$$\vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U$$

Pēdējais vektorālais sakars nozīmē to, ka vektora $\vec{F}$ projekcija F_s uz kādu virzienu s ir vienlīdzīga ar punkta funkcijas $U = U(x,y,z)$ atvasinājumu šajā virzienā

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds} =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}\cos(s,x) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(s,y) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(s,z).$$

Atsevišķā gadījumā, kad par virzienu s ņem koordinātu asis, pastāv sakari

$$F_x = P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Pieņemot, ka $U(x,y,z)$ ir divreiz diferencējama funkcija un $\vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U$,var izteikt

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

ar

$$\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U.$$

Otro atvasinājumu summu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$$

sauc par <u>Laplace'a diferenciālizteiksmi</u>, bet operatoru

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$$

par <u>Laplace'a operatoru.</u>

Izsakot arī vektora projekciju

$$F_\nu = (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U)_\nu = \frac{\partial U}{\partial \nu} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

ar funkcijas U atvasinājumu $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ virsas ārējās normales virzienā, dabū <u>Green'a gradienta teorēmu:</u>

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U)\, dv = \oint\limits_{(S)} (\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, U)_\nu\, d\sigma$$

jeb

$$\iiint\limits_{(V)} \Delta U\, dv = \oint\limits_{(S)} \frac{\partial U}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Funkcijas, kurām

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0,$$

sauc par harmoniskām funkcijām. No gradienta teorēmas secinams, ka harmoniskām funkcijām U pastāv īpašība:

$$\oint\limits_{(S)} \frac{\partial U}{\partial \nu} d\sigma = \oint\limits_{(S)} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos\gamma \right) d\sigma = 0.$$

Piemēram, ķermeņa Newton'a potenciāls

$$U = \kappa \iiint\limits_{(v)} \frac{\varrho\, dv}{R}$$

ir harmoniska funkcija, ja potencējamais punkts (x, y, z) ir ārpus masām. Tiešām, no Laplace'a diferenciāloperatora definīcijas secinams, ka

$$\Delta U = \kappa \iiint\limits_{(v)} \varrho \Delta \left(\frac{1}{R} \right) dv = 0,$$

jo $\Delta \left(\frac{1}{R} \right) = 0.$

Pēdējo vienlīdzību secina no attāluma R formulas

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

(ξ, η, ζ) - punkts masā), sastādot atvasinājumus pēc x, y, z, piem.

$$R \frac{\partial R}{\partial x} = x - \xi; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{x-\xi}{R}$$

un izsakot

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{\frac{\partial R}{\partial x}}{R^2} = - \frac{x-\xi}{R^3} = -(x-\xi) R^{-3},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R} \right) = - \frac{1}{R^3} + \frac{3(x-\xi)}{R^4} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} = - \frac{1}{R^3} + \frac{3(x-\xi)^2}{R^5}.$$

Piezīme. Divergences un gradienta teorēmas divām dimensijām secinamas no Riemann'a un Green'a formulas

$$\iint\limits_{(A)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint\limits_{\mathcal{L}} P dx + Q dy.$$

Ņemot $Q = f_1(x,y)$ un $P = -f_2(x,y)$, dabū sakarības formulas

$$\iint\limits_{(A)} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dx\, dy = \oint\limits_{\mathcal{L}} f_1 dy - f_2 dx.$$

Ja divās dimensijās (xy -plaknē) nosaka vektoru $\vec{a}$ ar komponentēm $a_x = f_1$ un $a_y = f_2$ tad

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Konstatēsim, ka

$$\oint\limits_{\mathcal{L}} f_1 dy - f_2 dx$$

izteic vektora plūsmu $\oint\limits_{\mathcal{L}} a_n ds$ caur apgabala (A) kontūru $\mathcal{L}$

(83.zīm.). Ja α un β ir līnijas ārējās normales n leņķi ar koordinātu asīm, tad

$$a_n = f_1 \cos\alpha + f_2 \cos\beta,$$

un pēc 83.zīmējuma ir konstatējams, ka ar tangentes t slīpuma leņķi $\measuredangle(t,x)$ var izteikt

$$\alpha = \measuredangle(t,x) - \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \pi - \measuredangle(t,x)$$

Tādēļ

$$\cos\alpha = \sin(t,x) = \frac{dy}{ds} \text{ un } \cos\beta = -\cos(t,x) = -\frac{dx}{ds}$$

un

$$\oint_{\mathcal{L}} f_1 dy - f_2 dx = \oint_{\mathcal{L}} \left(f_1 \frac{dy}{ds} - f_2 \frac{dx}{ds}\right) ds =$$

$$= \oint_{\mathcal{L}} (f_1 \cos\alpha + f_2 \cos\beta) ds = \oint_{\mathcal{L}} a_n ds.$$

Tā tad tiešām Riemann-Green'a formula ar $Q = f_1$ un $P = -f_2$ izteic divergences teorēmu divām dimensijām

$$\iint_{(A)} \operatorname{div} \vec{a} \, dx dy = \oint_{\mathcal{L}} a_n ds.$$

Speciālā gadījumā, kad $\vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad} u}$, t.i. kad

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad a_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

dabū gradienta teorēmu divām dimensijām

$$\iint_{(A)} \Delta u \, dx dy = \oint_{\mathcal{L}} \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

kur $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ir Laplace'a diferenciālizteiksme un

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n,y) = (\overrightarrow{\operatorname{grad} u})_n$$

ir gradienta vektora normalkomponente.

Divu argumentu harmoniskām funkcijām $\Delta u = 0$, pastāv īpašība:

$$\oint_{\mathcal{L}} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

31.§. Stoksa un Ampera (Stokes, Ampire) teorēma.

Ir dota telpā slēgta līnija $\mathcal{L}$ un virsa S, kas iet caur šo līniju (84.zīm.). Projecēsim šo līniju uz xy -plakni. Dabūsim slēgtu kontūru $\mathcal{L}_1$. Pieņemsim, ka punkta cirkulācijas virziens pa $\mathcal{L}$ saskan ar projekcijas pozitīvo cirkulāciju pa $\mathcal{L}_1$. Ja $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ ir trīs diferencējamas funkcijas, definētas virsas S un līnijas $\mathcal{L}$ punktos, tad pēc Stokes'a un Ampire'a teorēmas līnijas integrālu

$$\oint_{\mathcal{L}} P dx + Q dy + R dz$$

transformē vienā virsas S integrālā.

Pieņemsim, ka divreiz diferencējama vienvērtīga funkcija

$z = f(x,y)$ attēlo doto virsu S. Tad ar parciāliem atvasinājumiem

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

izteic

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = p\,dx + q\,dy,$$

un tādēļ

$$\oint_{\mathcal{L}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \oint_{\mathcal{L}_1} (P + Rp)\,dx + (Q + Rq)\,dy =$$

$$= \oint_{\mathcal{L}_1} P_1(x,y)\,dx + Q_1(x,y)\,dy,$$

ja apzīmē

$$P_1(x,y) = (P + Rp)_{z = f(x,y)}, \quad Q(y) = (Q + Rq)_{z = f(x,y)}$$

Tagad var lietot Riemann'a un Green'a formulu:

$$\oint_{\mathcal{L}_1} P_1 dx + Q_1 dy = \iint_{(A)} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} \right) d\omega$$

apgabalam (A), ko noslēdz līnija $\mathcal{L}_1$. Transformēsim sastādīto divkāršo integrālu par virsas (S) integrālu, ievedot vispirms laukuma elementa $d\omega$ vietā virsas laukuma elementu $d\sigma$. Ja virsas normali ν orientē tā, ka tā veido šauru leņķi $\gamma < \frac{\pi}{2}$ ar z-asi, tad $d\omega = d\sigma \cos\gamma$.

Sastādam vajadzīgos atvasinājumus:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z} p + \frac{\partial R}{\partial x} q + \frac{\partial R}{\partial z} pq + R \frac{\partial q}{\partial x} \right]_{z = f(x,y)}$$

un

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} q + \frac{\partial R}{\partial y} p + \frac{\partial R}{\partial z} pq + R \frac{\partial p}{\partial y} \right]_{z = f(x,y)}$$

Tā kā

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

tad

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Tādēļ

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) - p \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \right]_{z = f(x,y)} =$$

$$= [w - up - vq]_{z = f(x,y)}$$

ja apzīmē

$$w = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}; \quad u = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial z}; \quad v = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Ar atrastām izteiksmēm dabū

$$\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(A)} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) d\omega = \iint_{(S)} (w - pu - qv)\cos\gamma \, d\sigma$$

Tā kā virsas normales virziena kosinu sttiecība ir

$$\frac{\cos\alpha}{-p} = \frac{\cos\beta}{-q} = \frac{\cos\gamma}{1},$$

tad $\cos\alpha = -p\cos\gamma$, $\cos\beta = -q\cos\gamma$.

To ievērojot,dabū galīgi Stokes'a un Ampire'a formulu

$$\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma) d\sigma.$$

Vektoriālā interpretācijā funkcijas P, Q, R nosaka vektoru lauku, kur katrā punktā ir pielikts vektors $\vec{F}(P, Q, R)$.

Lielumi u, v, w ir vektora $\vec{T}$ komponentes. Vektoru $\vec{T}$ sauc par lauka vektora $\vec{F}$ rotāciju (rotoru) un apzīmē

$$\vec{T} = \vec{rot}\, \vec{F}.$$

Šī vektora komponentes var noteikt no simboliskās matricas

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{Vmatrix}$$

sastādot cikliskā kārtībā simboliskos determinantus:

$$T_x = u = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ Q & R \end{vmatrix} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$T_y = v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ R & P \end{vmatrix} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$T_z = w = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Stokes'a un Ampère'a formulā virsas integrāls izteic lauka vektora $\vec{F}$ rotācijas plūsmu caur virsu S orientētās normāles ν virzienā.

Līnijas integrālu

$$\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{L} \left[P\frac{dx}{ds} + Q\frac{dy}{ds} + R\frac{dz}{ds}\right] ds$$

var izteikt formā

$$\oint_{L} Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{L} [P\cos(s,x) + Q\cos(s,y) + R\cos(s,z)] ds =$$

$$= \oint_{L} F_s \, ds,$$

kur

$$F_s = P\cos(s,x) + Q(s,y) + R\cos(s,z)$$

ir lauka vektora $\vec{F}$ projekcija uz līnijas L tangenti. Šo integrālu sauc par vektora $\vec{F}$ cirkulāciju pa kontūru $\mathcal{L}$. Stokes'a un Ampère'a formula, rakstīta formā

$$\oint_{\mathcal{L}} F_s\,ds = \iint_{(S)} (\overrightarrow{\mathrm{rot}\,F})_\nu\,d\sigma,$$

izteic sekojošo teorēmu: vektora $\vec{F}$ cirkulācija pa slēgtu kontūru $\mathcal{L}$ ir vienlīdzīga ar šī vektora rotācijas plūsmu caur virsu S, kas ierobežota ar kontūru $\mathcal{L}$ (cirkulācijas virziens ir direktais salīdzinājumā ar pozitīvi orientēto virsas normāles virzienu).

Ja līnijas L tangentes virzienu nosaka ar vienības vektoru $\vec{t}$ un virsas normāli ar vienības vektoru $\vec{\nu}$, tad Stokes'a un Ampère'a formulu var uzrakstīt formā

$$\oint_{\mathcal{L}} (\vec{F}\cdot\vec{t})\,ds = \iint_{(S)} (\vec{\nu}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F})\,d\sigma,$$

kurā lietoti vektoru skalārie produkti.

Piezīme. Stokes'a un Ampère'a formulu var lietot, lai atrastu nepieciešamās un pietiekamās pazīmes, kad diferenciālā izteiksme

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

ir vienas funkcijas $U(x,y,z)$ totāls diferenciāls. Nosacījums, kad

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU$$

ir līdzvērtīgs ar to, ka kuras katras slēgtās kontūras L integrāls

$$\oint_{\mathcal{L}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

No Stokes'a un Ampere'a formulas secina, ka tad arī

$$\iint_{(S)} (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,d\sigma = 0,$$

kas ir vienīgi iespējams tad, ja

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Citiem vārdiem, dabū nosacījumu vektoriālā formā

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F} = 0.$$

Saka, ka tad vektoru lauks ir bezvirpuļains. Tā kā no diferenciālā sakara

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU$$

var secināt arī

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

resp.

$$\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U,$$

tad vektoru lauks $\vec{F}(P,Q,R)$ ir arī konservatīvs. Salīdzinājumā konstatē, ka vektoru lauks ir konservatīvs tad un tikai tad, ja tas ir bezvirpuļains.

S a t u r s .

II daļa. NOTEIKTIE INTEGRĀLI.

§§ I Noteikto (vienkāršo) integrālu aprēķināšanas metodes. lpp.

1. Noteikto integrālu galvenās īpašības un aprēķināšana..
2. Noteiktā integrāla pamatīpašības.....................
3. Teorēma par vidējo vērtību ....
4. Sakars noteiktā un nenoteiktā integrāla starpā ....
5. Mainīgo substitūcijas metode ....
6. Parciālās integrēšanas metode ....
7. Integrālu atvasināšana pēc parametra ....
8. Skaitliskās kvadratūras ....

II Noteikto integrālu lietošana geometrijā un mechanikā.

9. Laukumu noteikšana ....
10. Loka garums ....
11. Tilpuma aprēķināšana. Kavaljeri (Cavalieri) princips..
12. Rotācijas virsas laukums ....
13. Masu centra noteikšana. Guldin un Pappus teorēmas.....

III Integrāla jēdziena paplašinājumi.

14. Integrāla konvergence gadījumā,kad zemintegrāla funkcijas ir pārtrauktas ....
15. Integrāla konvergence gadījumā,kad integrācijas intervalls bezgala liels ....

IV Līniju (kontūru) integrāli.

16. Plaknes līnijas integrāls ....
17. Izteiksmes $Pdx + Qdy$ analīze ....
18. Telpas līnijas integrāls ....

V Divkāršie integrāli.

19. Divu mainīgo nepārtrauktās funkcijas vispārīgās īpašības ....
20. Nepārtrauktās funkcijas divkāršais integrāls ....
21. Divkāršā integrāla aprēķināšana Dekarta koordinātās...
22. Divkāršā integrāla aprēķināšana polārās koordinātās...
23. Līkās virsas laukuma izteiksme Dekarta koordinātās ...
24. Divkāršā integrāla transformācija kontūras integrālā (Riemann'a un Green'a formula) ....
25. Divkāršo integrālu daži lietojumi mechanikā ....

VI Trīskāršie integrāli.

26. Trīskāršā integrāla definīcija un pamatīpašības.......
27. Trīskāršā integrāla aprēķināšana Dekarta koordinātās..
28. Trīskāršais integrāls cilindriskās un sfēriskās koordinātās ....

VII Vektoru analīzes elementi.

29. Divergences teorēma ....
30. Gradienta teorēma ....
31. Stokes'a un Ampère'a teorēma ....