A. L ū s i s ,
Latvijas Valsts Universitātes profesors

I N T E G R Ā L I E   R Ē Ķ I N I

I daļa.

NENOTEIKTIE INTEGRĀLI.

K o n s p e k t s .
Ar rokraksta tiesībām.

Lasīts Latvijas Valsts
Universitātes Fīzikas
un matemātikas fak-tē.

R ī g ā , 1 9 4 1 .

Latvijas Valsts Universitātes izdevniecība

N e n o t e i k t i e   i n t e g r ā l i .

I VISPĀRĪGĀS INTEGRĒŠANAS METODES.

1.§. Jēdziens par primitīvo funkciju un nenoteikto integrālu.

Integrālrēķinu pamatuzdevums ir: atrast tādu funkciju, lai tās atvasinājums būtu dotā funkcija.

Funkcija $y = y(x)$, kuŗas atvasinājums $y' = \frac{dy}{dx}$ ir dotā funkcija $f(x)$, sauc par dotās funkcijas primitīvo jeb pirmatnējo funkciju.

Piemērs: atrast funkciju $y = F(x)$ tā, lai $y' = x$.

No diferenciālrēķiniem zinām, ka $(x^2)' = 2x$, tā tad $F(x) = y = \frac{x^2}{2}$; patiešām $y' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$.

Bet tā nav viena vienīga primitīva funkcija, jo tai varam pieskaitīt kaut kuŗu patvaļīgu konstanti C un konstatēt, ka

$$y' = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x.$$

Vispār dotai funkcijai var atrast bezgala daudz primitīvo funkciju. Ja dots $F'(x) = f(x)$, tad ņemot $y = F(x) + C$ būs

$$y' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Pierādīsim, ka tā var izteikt katru primitīvo funkciju. Pieņemsim, ka $y' = f(x)$ un $F'(x) = f(x)$. Tad

$$y' - F'(x) = 0,$$

vai

$$\varphi'(x) = 0,$$

kur $y - F(x) = \varphi(x)$. Bet ja funkcijas atvasinājums definīcijas intervalla visos punktos ir nulle, tad šī funkcija ir konstanta.

Tiešām, ja $\varphi(x)$ nebūtu konstanta, tad $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Bet pēc Lagranža teorēmas

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (x_1 - x_2) \cdot \varphi'(\xi), \text{kur } x_1 < \xi < x_2.$$

Tā kā funkcijas $\varphi(x)$ atvasinājums visos intervalla punktos ir nulle, tad arī $\varphi'(\xi) = 0$ un

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = 0,$$

no kuŗienes seko, ka

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2),$$

tas nozīmē, ka funkcija φ ir konstanta.

Apzīmējot šo konstanti ar C varam rakstīt

$$y - F(x) = C,$$

tā tad

$$y = F(x) + C;$$

secinam, ka katru primitīvo funkciju var izteikt šādā formā.

Grafiski visas primitīvās funkcijas attēlojas kā kongruentu līniju saime. Piemēram, līniju saime

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

sastāv no kongruentām parabolām. (1.zīm.).

Primitīvo funkciju vispārīgo izteiksmi sauc arī par <u>nenoteikto integrālu.</u> Ja $dy = f(x)dx$, tad

$$y = F(x) + C = \int f(x)\,dx$$

Te $\int$ ir nenoteiktā integrāla zīme. $f(x)$ sauc par zemintegrāla funkciju, $f(x)dx$ - par zemintegrāla izteiksmi.

Integrēt doto funkciju nozīmē: sastādīt tai visas primitīvās funkcijas, resp. nenoteikto integrālu. Ja

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

tad

$$\left[\int f(x)dx\right]' = F'(x) = f(x),$$

jeb

$$d\int f(x)dx = f(x)\,dx \ldots (1)$$

Tā kā

$$f(x)dx = F'(x)dx = dF(x),$$

tad

$$\int dF(x) = F(x) + C \ldots (2)$$

No (1.) un (2.) secinam, ka funkcijas integrēšana un diferencēšana ir savstarpēji apgrieztas darbības.

2.§. <u>Integrāla dažas pamatīpašības.</u>

I. Konstantu faktoru var izcelt priekš integrāla zīmes:

$$\int A f(x)dx = A\int f(x)dx \ldots\ldots (A - \text{konstante}).$$

Pierādījumam diferencēsim abas puses:

$$\left[\int A f(x)dx\right]' = A f(x); \quad \left[A\int f(x)dx\right]' = A\left[\int f(x)dx\right]' = A f(x)$$

II, Summas integrāls vienlīdzīgs integrālu summai.

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

Pierādījumam konstatē, ka

$$\left\{\int [f_1(x) + f_2(x)]dx\right\}' = f_1(x) + f_2(x)$$

un

$$\left[\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right]' = \left[\int f_1(x)dx\right]' + \left[\int f_2(x)dx\right]' = f_1(x) + f_2(x).$$

Šo īpašību var vispārināt galīga skaita funkcijām, ar matemātiskās indukcijas slēdzienu pierādot, ka

$$\int \sum_{k=1}^{n} f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int f_k(x)dx \ldots \quad (n - \text{galīgs skaitlis}).$$

3.§. Integrēšanas pamatformulas.

Katrai funkcijas atvasināšanas formulai atbilst sava integrēšanas formula. Piem., no pakāpes funkcijas atvasinājuma izteiksmes $(x^m)' = mx^{m-1}$ jeb $\left(\frac{x^m}{m}\right)' = x^{m-1} \ldots (m \neq 0)$, secina

$$\int x^{m-1}dx = \frac{x^m}{m} + C$$

Ja $m-1$ vietā liek n resp. m vietā $n+1$, tad dabū pakāpes funkcijas integrēšanas pamatformulu:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ldots\ldots (1)$$

Izņēmuma gadījumā, kad $n = -1$, dabū

$$\int x^{-1}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C \ldots (x>0), \text{ jo } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Ja $n = -1$ un $x < 0$, tad $-x > 0$ un

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Tā tad

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \quad \ldots \quad (x<0)$$

Apvienojot abus gadījumus, dabū

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ldots\ldots (2)$$

Sastādīsim no atvasināšanas formulām citas integrēšanas pamatformulas:

$$(e^x)' = e^x; \qquad \int e^x dx = e^x + C \ldots (3)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ldots (4)$$

$$(\cos x)' = -\sin x; \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C \ldots (5)$$

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad \int \cos x dx = \sin x + C \ldots (6)$$

$$(tg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C \ldots (7)$$

$$(ctg x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C \ldots (8)$$

$$(ch x)' = sh x; \qquad \int sh\, x dx = ch\, x + C \ldots (9)$$

$$(sh x)' = ch x; \qquad \int ch\, x dx = sh\, x + C \ldots (10)$$

$$sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \qquad ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Tā kā $(\arcsin x)' = \frac{1}{+\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$,

tad $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C' \ldots (11)$

No $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ un $(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ secina

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C = -arcctg\, x + C' \ldots (12).$$

Ar diferencēšanu pārbauda šādas formulas pareizību:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \ldots (a \text{ konstante}) \ldots (13).$$

4.§. Integrēšanas metodes.

a) Zemintegrāla funkcijas sadalīšana summā.

Pēc šīs metodes mēgina integrējamo funkciju $f(x)$ sadalīt citu funkciju $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ summā:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x),$$

lai tad katru saskaitāmo integrētu atsevišķi:

$$\int f(x)dx = \int f_1(x) + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$$

Piemērs: $\int\frac{dx}{1-x^2}$

Sadalīsim integrējamo funkciju summā:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x},$$

kur A un B ir nezināmas konstantes. Atbrīvojoties no saucējiem, dabū identitāti

$$1 \equiv A(1-x) + B(1+x)$$

jeb

$$1 \equiv (A+B) - (A-B)x.$$

Tā tad

$$A - B = 0$$
$$A + B = 1,$$

no kuŗienes $A = \frac{1}{2};\ B = \frac{1}{2}.$

Tā kā $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x},$

tad

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C,$$

vai

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

b) Substitūcijas metode.

Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta un ja tās viena primitīva funkcija ir $F(x)$, t.i. $F'(x) = f(x)$, tad $\int f(x)dx = F(x) + C$. Ievedīsim x vietā jaunu argumentu t tā, lai $x = \varphi(t)$, kur funkcijai $\varphi(t)$ eksistē atvasinājums $\frac{d\varphi}{dt} = \varphi'(t)$ un $\varphi'(t) \neq 0$. Tad dabūjam kādu jaunu funkciju

$$G(t) = F[\varphi(t)].$$

Te

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = F'(x)\frac{d\varphi}{dt};$$

t.i.

$$G'(t) = F'[\varphi(t)]\cdot\frac{d\varphi}{dt} = g(t)$$

Tā tad

$$\int g(t)dt = G(t) + C,$$

jeb

$$\int f[\varphi(t)]\frac{d\varphi}{dt}\cdot dt = G(t) + C.$$

Bet ja $x=\varphi(t)$ un $\varphi'(t)\neq 0$,tad eksistē inversā funkcija $t=\psi(x)$. Tā kā

$$G(t)=G[\psi(x)]=F(x),$$

tad

$$\left\{\int f[\varphi(t)]\frac{d\varphi}{dt}\,dt\right\}_{t=\psi(x)}=F(x)+C=\int f(x)\,dx,$$

jeb

$$\int f(x)\,dx=\left\{\int f[\varphi(t)]\frac{d\varphi}{dt}\,dt\right\}_{t=\psi(x)}$$

Pēdējā formula izteic mainīgā transformācijas likumu: lai nenoteiktā integrālā ievestu jaunu mainīgo, pietiek ievietot izteiksmi ar jauno mainīgo zemintegrāla izteiksmē, t.i. $f(x)dx$.

Piemēri:

1. $\int(ax+b)^n dx$

Lietojam substitūciju $t=ax+b$; tad $dx=\frac{dt}{a}$ un

$$\int(ax+b)^n dx=\int\frac{t^n\,dt}{a}=\begin{cases}\frac{1}{a}\frac{t^{n+1}}{n+1}+C=\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}+C, & ja\ n\neq 1\\ \frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{\ln|ax+b|}{a}+C, & ja\ n=-1.\end{cases}$$

2. $\int tg\,x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int-\frac{dt}{t}=-\ln|t|+C=-\ln|\cos x|+C;$
$t=\cos x;\quad dt=-\sin x\,dx.$

3. $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2tg\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|tg\frac{x}{2}|+C;$
$tg\frac{x}{2}=t;\quad\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=dt$

4. $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$
$=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C=\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+C=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+C;$
$x=\sin t;\quad dx=\cos t\,dt$

c) Parciālās integrēšanas metode (integrēšana pa daļām).

Šīs metodes pamatā ir divu funkciju reizinājuma atvasināšanas likums.

Ja dotas diferencējamas funkcijas $u(x)$ un $v(x)$,tad

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

No šejienes

$$uv'=(uv)'-u'v$$

Tā tad

$$\int uv'dx=uv-\int u'v\,dx,$$

vai citādi rakstot

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

Šī parciālās integrēšanas formula reducē integrāla $\int u\,dv$ aprēķināšanu uz cita veida integrāla $\int v\,du$ noteikšanu.

Piemēri:

1. $\int xe^x dx=\int x\,de^x=x.e^x-\int e^x dx=x.e^x-e^x+C;\quad u=x;\quad v=e^x.$

2. $\int x\sin x\,dx = \int x\,d(-\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

$u = x; \quad v = -\cos x.$

3. $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C \ldots (x>0)$

$u = \ln x; \quad v = x.$

Piezīme. Ar iepriekšējām metodēm reducē dotās funkcijas nenoteikto integrālu uz zināmu integrālu tipu pamatformulu tabulā. Bet šāda redukcija nav iespējama visos gadījumos, piem., ar integrāliem $\int\frac{dx}{\ln x}$, $\int\frac{\sin x}{x}dx$.

Tomēr pastāv pamatteorēma jeb eksistences teorēma (ko pierādīsim turpmākā kursā):

Ja dota kāda nepārtraukta funkcija $f(x)$, tad tai eksistē vismaz viena primitīva funkcija $F(x)$, t.i. $F'(x) = f(x)$, vai eksistē nenoteiktais integrāls $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Teorēma norāda, ka ir divas funkcijas $F(x)$ un $G(x)$, kuru atvasinājumi ir $F'(x) = \frac{1}{\ln x}$ un $G'(x) = \frac{\sin x}{x}$. Bet šīs funkcijas atklātā veidā nav izsakāmas ar mums pazīstamām funkcijām. Ir jāieved jaunas funkcijas, piem. tā sauktais integrāllogaritms: $F(x) = \int\frac{dx}{\ln x}, \ldots (x>0)$.

5.§. Nenoteiktā integrāla geometriskās interpretācijas. Noteiktais integrāls.

Nepārtrauktu funkciju $y = f(x)$, definētu intervallā $a \leq x \leq b$, attēlo xy -koordinātu sistēmā nepārtraukta līnija, kas atrodas virs x -ass, ja $f(x) \geq 0$.

(2.zīm.)

Pieņemsim, ka ar līniju $y = f(x)$, ordinātām gala punktos x_0 un x un x -asi ierobežotais laukums (2.zīm.) ir $S = S(x)$.

Pierādīsim, ka
$$\frac{dS(x)}{dx} = S'(x) = f(x).$$

Pēc atvasinājuma definīcijas
$$\frac{dS(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}.$$

Te ΔS attēlo 2.zīmējumā slīpi nosvītroto laukumu.

Ja m ir funkcijas $f(x)$ minims un M šīs funkcijas maksims intervallā ($x, x+\Delta x$), tad no figūru laukumu salīdzināšanas secina:
$$m.\Delta x \leq \Delta S \leq M.\Delta x$$

jeb
$$m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M \quad (\Delta x > 0).$$

Tā kā $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija, tad būs viena vērtība
$$x \leq \xi \leq x + \Delta x$$
tāda, ka
$$f(\xi) = \frac{\Delta S}{\Delta x} = \mu,$$
kur $m \leq \mu \leq M$.

Ja $\Delta x \to 0$, tad $\xi \to x$, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to \frac{dS}{dx} = S'(x)$ un $f(\xi) \to f(x)$.

Tādēļ tiešām
$$\frac{d\,S(x)}{dx} = f(x),$$
jeb
$$\int f(x)dx = S(x) + C.$$

Laukuma funkcija $S(x)$ ir funkcijas $f(x)$ viena primitīva funkcija, kas ir nulle, ja $x = x_0$, t.i. $S(x_0) = 0$. Ar šo papildu nosacījumu var noteikt integrēšanas konstanti C šādā veidā.

Apzīmējot ar
$$F(x) = \int f(x)dx = S(x) + C$$
un ņemot $x = x_0$, atrod
$$F(x_0) = C$$
Tā tad
$$S(x) = F(x) - F(x_0) = \left[F(x)\right]_{x_0}^{x} = \left[\int f(x)dx\right]_{x_0}^{x};$$
sastādīto izteiksmi sauc arī par noteikto integrālu ar robežām x_0 un x un raksta:
$$S(x) = F(x_0) - F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$
Noteiktais integrāls ir vienlīdzīgs kautkuŗas primitīvās funkcijas vērtību diferencei, aprēķinātai ar integrāla robežām.

Ja par robežām ņem $x_0 = a$ un $x = b$, tad
$$S = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$
attēlo noteikto laukumu, ko ierobežo līnija $y = f(x)$, x-ass un ordinātas punktos $x = a$ un $x = b$.

Pēdējo formulu sauc par Ņutona-Leibnica (Newton-Leibniz) pamatformulu; tā izteic pamatsakaru noteiktā un nenoteiktā integrāla starpā.

<u>Piemēri:</u>

1. Pierādīt, ka parabolas segmenta laukums $S = \frac{2}{3}ab$, ja a ir segmenta augstums un b - pamata chorda (3.zīm.).

Ja laukuma izteiksmē $S = 2\int_0^a y\,dx$ ievieto $y = +\sqrt{2px}$

(p - parabolas parametrs), tad

$$S = 2\int_0^a \sqrt{2px}\,dx.$$

Tā kā

$$\int\sqrt{2px}\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}} + C,$$

tad

$$S = 2\int_0^a\sqrt{2px}\,dx = 2\left[\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{4}{3}\sqrt{2p}\,a^{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{4}{3}a\sqrt{2pa}.$$

Tā kā no parabolas vienādojuma, kad $x = a$, $y = \frac{b}{2}$, var izteikt

$$\frac{b}{2} = \sqrt{2pa}, \text{ resp. } b = 2\sqrt{2pa},$$

tad tiešām

$$S = \frac{2}{3}ab \qquad \text{(Archimeda rezultāts).}$$

2. Elipses ierobežotais laukums (4.zīm.)

Ja elipses pusasis ir a un b, tad no kanoniskā vienādojuma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ var izteikt

$$y = +b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

Tādēļ

$$S = 2\int_{-a}^{a} y\,dx = 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Nenoteikto integrālu aprēķina ar substitūciju $x = a\sin t$:

$$\int\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \int\sqrt{1-\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = a\int\cos^2 t\,dt = \frac{a}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C$$

vai

$$\int y\,dx = \frac{ab}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) + C.$$

Tādēļ

$$S = 2\cdot\frac{ab}{2}\left[\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]_{-a}^{+a} = ab\left[\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right] = \pi ab.$$

Tā tad elipses ierobežotais laukums ir

$$S = \pi ab$$

Riņķa gadījumā $a = b$ un

$$S = \pi a^2$$

3. Vienādsānu hiperbolas segmenta un sektora laukums (5.zīm.). Hiperbolas parametriskie vienādojumi.

Pieņemsim, ka vienādsānu hiperbolai $a = 1$; tad tās vienādojums ir

$$x^2 - y^2 = 1,$$

no kuŗienes hiperbolas daļai virs x -ass

$$y = +\sqrt{x^2-1}$$

Segmenta laukums $S = 2\int_1^x y\,dx = 2\int_1^x\sqrt{x^2-1}\,dx$

Nenoteikto integrālu

$$J = \int\sqrt{x^2-1}\,dx = x\sqrt{x^2-1} - \int x\,d\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{x^2-1} - \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= x\sqrt{x^2-1} - \int\frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = x\sqrt{x^2-1} - \int\sqrt{x^2-1}\,dx - \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

saista ar sakarības formulu

$$J = x\sqrt{x^2-1} - J - \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C,$$

no kuŗas izteic

$$J = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1})\right] + C'$$

Tādēļ

$$S(x) = 2\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1})\right]_1^x = x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1}) - 0 - \ln 1.$$

Tā tad hiperbolas segmenta laukums

$$S(x) = x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

Sektora laukums

$$\sigma = S_\Delta - S = xy - S = x\sqrt{x^2-1} - x\sqrt{x^2-1} + \ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

jeb

$$\sigma(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

Sastādot inverso funkciju, dabūjam

$$x+\sqrt{x^2-1} = e^{\sigma} \ldots\ldots (1)$$

Tā kā

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = x - \sqrt{x^2-1} = e^{-\sigma} \ldots\ldots (2),$$

tad $(1)+(2)$ dod .... $x = \frac{e^{\sigma}+e^{-\sigma}}{2} = ch\,\sigma$,

un $(1)-(2)$ dod .... $y = \frac{e^{\sigma}-e^{-\sigma}}{2} = sh\,\sigma$

Tie ir vienādsānu hiperbolas parametriskie vienādojumi. Te parametrs σ ir sektora laukums.

Hiperbolai $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ parametriskie vienādojumi ir

$$\begin{cases} x = a\,ch\,\sigma \\ y = b\,sh\,\sigma \end{cases}$$

Otrā geometriskā interpretācija ir attēlot grafiski nenoteikto integrālu $Y = F(x) = \int y\,dx = \int f(x)dx.$

Grafikas sauc par integrāllīnijām un tās veido savā starpā kongruentu līniju saimi

$$Y(x) = Y_1(x) + C$$

kur $Y_1(x) = F(x)$ ir viena noteikta integrāllīnija, resp. $F_1(x)$ ir noteikta primitīvā funkcija. Integrāllīniju tangentēm visos krustpunktos ar taisni, parallelu ordinātu asij, ir vienāds virziens, jo $Y' = Y_1' = y = f(x)$.

Integrēšanas konstanti C var noteikt, zinot Y nozīmi Y_0 kādā punktā $x = x_0$, resp. var atrast noteiktu integrāllīniju, kas iet caur doto punktu (x_0, Y_0).

Tiešām, ja $x = x_0$ un $Y = Y_0$, tad

$$Y_0 = F_1(x_0) + C$$

un

$$C = Y_0 - F_1(x_0)$$

Tādēļ

$$Y = [F_1(x) - F_1(x_0)] + Y_0,$$

vai ar noteikta integrālu izteicot

$$Y = Y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

II Racionālo funkciju integrēšana.

6.§. Polinomu dalīšana.

Dots n. pakāpes polinoms

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Apskatīsim tā dalīšanu ar binomu $x - \alpha$

Vispārīgā gadījumā

$$f(x) = (x - \alpha)\cdot q(x) + r.$$

Šāds sakars pastāv visām x nozīmēm; tas nozīmē, ka $r = f(\alpha)$, jo tad $(x-\alpha)\cdot q(x) = 0$

Ievedīsim apzīmējumu

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-2} x + b_{n-1}$$

Tad

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \equiv (x-\alpha)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + r \equiv$$

$$\equiv b_0 x^n + (b_1 - \alpha b_0) x^{n-1} + \dots + (b_{n-1} - \alpha b_{n-2}) x + r - \alpha b_{n-1}$$

Pēc koeficientu salīdzināšanas dabū:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 + \alpha b_0 \\ b_2 &= a_2 + \alpha b_1 \\ &= = = = = = \\ b_{n-1} &= a_{n-1} + \alpha b_{n-2} \\ b_n &= r = a_n + \alpha b_{n-1} \end{aligned}$$

Angļu matemātiķis Horners (Horner) ir devis koeficientu atrašanai praktisku paņēmienu, kas saskatams no schēmas:

	a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
α	$b_0 = a_0$;	$b_1 = \alpha a_0 + a_1$;	$b_2 = \alpha b_1 + a_2$;	$\dots$;	$b_{n-1} = \alpha b_{n-2} + a_{n-1}$;	$r = \alpha b_{n-1} + a_n$

Šo schēmu sauc par Hornera schēmu; te katru locekli apakšējā rindā dabū, pareizinot iepriekšējo ar α un pieskaitot augšējās rindas locekli.

VZ - 100
1941/V

Piemērs: $f(x)=x^3-x+3$, $\alpha=-2$; $x-\alpha=x+2$

	1	0	-1	3
-2	1	-2	3	$\underline{-3}$
-2	1	-4	$\underline{11}$	
-2	1	$\underline{-6}$		

$$x^3-x+3=(x+2)(x^2-2x+3)-3$$

Dalīšanu turpinot, dabū:

$$x^2-2x+3=(x+2)(x-4)+11$$

un

$$x-4=(x+2)\cdot 1-6$$

Tādēļ varam rakstīt:

$$x^3-x+3=(x+2)(x^2-2x+3)-3=(x^2+2)^2(x-4)+11(x+2)-3=$$
$$=(x+2)^3-6(x+2)^2+11(x+2)-3.$$

Atradīsim tagad sakarību starp šiem koeficientiem un Teilora (Taylor) formulas koeficientiem:

$$f(x)=x^3-x+3=f(-2)+\frac{f'(-2)}{1!}(x+2)+\frac{f''(-2)}{2!}(x+2)^2+\frac{f'''(-2)}{3!}(x+2)^3,$$
$$f(-2)=-3;\quad f'(-2)=11;\quad f''(-2)=-12;\quad f'''(-2)=6.$$

Vispārīgā veidā koeficienti ir izteikti ar funkcijas atvasinājumu vērtībām, jo

$$f(x)=f[\alpha+(x-\alpha)]=A_0+A_1(x-\alpha)+A_2(x-\alpha)^2+\ldots+A_n(x-\alpha)^n$$

un

$$A_0=f(\alpha),\quad A_1=\frac{f'(\alpha)}{1!},\quad A_2=\frac{f''(\alpha)}{2!},\ldots,\quad A_n=\frac{f^{n}(\alpha)}{n!}$$

7.§. Algebriskā vienādojuma saknes un to sakars ar koeficientiem.

Ja $x=\alpha$ pārvērš polinomu $f(x)$ par 0, tad $f(x)$ bez atlikuma dalās ar $x-\alpha$. Tas nozīmē, ka α ir vienādojuma $f(x)=0$ sakne, vai citiem vārdiem, α ir polinoma $f(x)$ nulle. Šādā gadījumā

$$f(x)=(x-\alpha)\,q(x).$$

Eksistences teorēma x) apgalvo, ka katram algebriskam vienādojumam ir vismaz viena sakne.

Konstatēsim, ka n-tās pakāpes vienādojumam

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

ir n saknes.

Ja $x=x_1$ un $f(x_1)=0$, tad

$$f(x)=(x-x_1)\,f_1(x),$$

---

x) Pierādījumu skat., piem., prof.E.Lejnieka darbā "Augstākā algebra", Rīgā, 1936.g.

kur $f_1(x)$ ir $(n-1)$ pakāpes polinoms. Tālāk ņemot $x=x_2$ tādu, lai $f_1(x_2)=0$, dabūjam
$$f_1(x)=(x-x_2)\cdot f_2(x)$$
Tā turpinot dabūjam $x=x_n$, $f_{n-1}(x_n)=0$ un $f_{n-1}(x)=(x-x_n)\cdot f_n$,

kur $f_n = a_0$. Galīgi izteic
$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$
Tā tad n-tās pakāpes polinomu var sadalīt n lineāros faktoros. Bet $x_1, x_2, \dots, x_n$ ir arī dotā vienādojuma saknes, jo
$$f(x_1)=f(x_2)=\dots=f(x_n)=0.$$
Lai pierādītu, ka nav vairāk kā n saknes, pieņemsim pretējo, ka ir vēl viena cita sakne $x=x_0$, t.i. $f(x_0)=0$

No otras puses
$$f(x_0)=a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)$$
Neviena no iekavām nav nulle, tā tad $a_0=0$; līdzīgā kārtā konstatē, ka arī visi nākamie koeficienti ir nulles. Tā tad vienādojumam, kuŗa visi koeficienti nav nulles, nevar būt vairāk kā n sakņu.

Ja polinoma sadalījuma formulā
$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$
sareizina binomus labajā pusē, tad dabū
$$f(x)=a_0\left[x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}\dots+(-1)^nS_n\right],$$
un pēc salīdzināšanas ar polinoma izteiksmi
$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$
rodas sakņu un koeficientu sakarības <u>Žirāra-Vjeta</u> (Girard-Viète) <u>formulas:</u>

$$S_1=x_1+x_2+\dots+x_n=\sum x_1=-\frac{a_1}{a_0}$$
$$S_2=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_1x_n+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n=\sum x_1x_2=\frac{a_2}{a_0}$$
$$S_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\dots+x_2x_3x_4+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=\sum x_1x_2x_3=-\frac{a_3}{a_0}$$
$$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$$
$$S_n=x_1x_2x_3\dots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}$$

Funkcijas $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ sauc par sakņu elementārām simmetriskām funkcijām.

8.§. Vienādojuma vairākkārtējās saknes.

Ja sadalījuma formulā
$$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$$
ir
$$x_1=x_2=\dots=x_k=\alpha,\ x_{k+1}\neq\alpha,\ x_{k+2}\neq\alpha,\dots,x_n\neq\alpha,$$
tad
$$f(x)=(x-\alpha)^k\varphi(x),$$

kur $\varphi(x)$ ir polinoms ar pakāpi $n-k$ un $\varphi(\alpha)\neq 0$. Šajā gadījumā saka, ka α ir polinoma $f(x)$ nulle ar kārtu k ,resp.vienādojuma $f(x)=0$ sakne ar kārtu k.

Sastādot atvasināto polinomu $f'(x)$,konstatēsim, ka tam α ir nulle ar kārtu $k-1$. Tiešām,

$$f'(x)=k(x-\alpha)^{k-1}\varphi(x)+(x-\alpha)^k\varphi'(x),$$

jeb

$$f'(x)=(x-\alpha)^{k-1}[k\varphi(x)+(x-\alpha).\varphi'(x)]=(x-\alpha)^{k-1}\psi(x)$$

Te $\psi(\alpha)=k\varphi(\alpha)+(\alpha-\alpha).\varphi'(\alpha)\neq 0,$ jo $\varphi(\alpha)\neq 0.$
Tā tad tiešām α ir atvasinātā polinoma $f'(x)$ nulle ar kārtu $k-1$. Tamlīdzīgi konstatē, ka

$$f''(x)=(x-\alpha)^{k-2}\omega(x) \qquad [\omega(\alpha)\neq 0],$$

$$f^{(k-1)}(x)=(x-\alpha)\,\tau(x) \qquad [\tau(\alpha)\neq 0],$$

$$f^{(k)}(\alpha)\neq 0.$$

Otrādi, ja pastāv nosacījumi

$$f(\alpha)=0,\quad f'(\alpha)=0,\ \ldots,\ f^{(k-1)}(\alpha)=0,\quad f^{(k)}(\alpha)\neq 0,$$

tad α ir polinoma $f(x)$ nulle ar kārtu k.

Tiešām, no Teilora formulas

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{x-\alpha}{1!}f'(\alpha)+\ldots+\frac{(x-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^k}{k!}f^{(k)}(\alpha)+$$
$$+\ldots+\frac{(x-\alpha)^n}{n!}f^{(n)}(\alpha)$$

ar minētiem nosacījumiem secina

$$f(x)=(x-\alpha)^k\varphi(x),$$

kur

$$\varphi(x)=\frac{1}{k!}f^{(k)}(\alpha)+\frac{x-\alpha}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\alpha)+\ldots+\frac{(x-\alpha)^{n-k}}{n!}f^{(n)}(\alpha)$$

un

$$\varphi(\alpha)=\frac{1}{k!}f^{(k)}(\alpha)\neq 0$$

Vispārīgā gadījumā, kad $x_1=x_2=\ldots=x_k=\alpha, x_{k+1}=x_{k+2}=\ldots=x_{k+l}=\beta,\ldots,$ dabū polinoma $f(x)$ sadalījuma izteiksmi

$$f(x)=a_0(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\ldots(x-\lambda)^p$$

kur $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ir savā starpā dažādas polinoma nulles un to kārtu summa $k+l+\ldots+p=n.$

Kā atrast vairākkārtējās saknes?

Dots polinoms $f(x)$. Sastādam atvasināto polinomu

$$f'(x)=(x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots(x-\lambda)^{p-1}.\psi(x),$$

kur $\psi(\alpha)\neq 0,\ \psi(\beta)\neq 0,\ldots,\psi(\lambda)\neq 0$. Ja nu dotam un atvasinātam polinomam meklē augstāko kopīgo dalītāju $D(x)$,tad

$$D(x)=(x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots(x-\lambda)^{p-1}.$$

Dalījumam

$$\frac{f(x)}{D(x)}=a_0(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda)=Q(x)$$

$\alpha, \beta, \ldots \lambda$ ir vienkāršas nulles. Tā tad vienādojuma $Q(x)=0$ atrisināšana dod dotā vienādojuma dažādās saknes $\alpha, \beta, \ldots \lambda$. Augstāko kopīgo dalītāju $D(x)$ var atrast ar Euklida algoritma paņēmienu.

Piemērs. $f(x)=x^3+2x^2+x;\ f'(x)=3x^2+4x+1$

$$
\begin{array}{l}
3f=3x^3+6x^2+3x \mid \underline{3x^2+4x+1} = f' \\
\underline{3x^3+4x^2+x} \qquad x;\ 1 \\
\underline{2x^2+2x} \\
3x^2+3x \\
\underline{3x^2+4x+1} \\
-x-1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
3x^2+4x+1 \mid \underline{x+1} \\
\underline{3x^2+3x} \qquad 3x+1 \\
x+1 \\
\underline{x+1} \\
0
\end{array}
$$

Augstākais kopīgais dalītājs $D(x)=x+1$

un

$$Q(x)=\frac{f(x)}{D(x)}=x^2+x.$$

No vienādojuma

$$x^2+x=0$$

atrod

$$x_1=0,\quad x_2=-1$$

Tā kā $f'(0)=1\neq 0,\ f'(-1)=0,\ f''(-1)=-2\neq 0,$ tad $x_1=0$ ir vienkārša, bet $x_2=-1$ divkārša polinoma nulle. Viegli pārbauda, ka $f(x)=x(x+1)^2$.

<u>Teorēma:</u> <u>Ja vienādojuma koeficienti ir reāli skaitļi, tad vienādojuma katrai kompleksai saknei atbilst saistīta kompleksa sakne ar to pašu kārtu.</u>

Pieņemsim, ka polinoma $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ koeficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ir reāli skaitļi un ka $x=\alpha=a+bi$ ir polinoma nulle $(i=\sqrt{-1})$. Tad

$$f(a+bi)=a_0(a+bi)^n+a_1(a+bi)^{n-1}+\ldots+a_n=A+Bi=0$$

Tā tad $A=0$ un $B=0$

Savukārt

$$f(a-bi)=a_0(a-bi)^n+a_1(a-bi)^{n-1}+\ldots+a_n=A-Bi,$$

jo polinoma koeficienti ir reāli. Tā kā $A=B=0$, tad arī $f(a-bi)=0$, t.i. ir arī sakne $\beta=a-bi$.

Ja α ir k-tās kārtas sakne, tad

$$f(\alpha)=f'(\alpha)=\ldots=f^{(k-1)}(\alpha)=0,\ f^{(k)}(\alpha)\neq 0.$$

Tāpat arī

$$f(\beta)=f'(\beta)=\ldots=f^{(k-1)}(\beta)=0,\ f^{(k)}\beta\neq 0$$

Tā tad arī β ir k-tās kārtas sakne.

Polinoma sadalījuma formulā $f(x)=a_0(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\ldots(x-\lambda)^p$, gadījumā, kad koeficienti ir reāli, α un β ir saistīti kompleksi skaitļi, $\kappa = l$ un

$$(x-\alpha)^{\kappa}(x-\beta)^{l} = [x-(a+bi)]^{\kappa} = [(x-a)^2+b^2]^{\kappa}$$

Tas nozīmē, ka katru polinomu ar reāliem koeficientiem var sadalīt reālos faktoros - lineāros vai kvadratiskos.

9.§. Racionālo funkciju integrēšana gadījumā, kad poli reāli.

Racionālo funkciju $R(x)$ var izteikt ar divu polinomu

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{un} \quad g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m$$

dalījumu $R(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

Gadījumā, kad $m \geq n$,skaitītāja polinomu $g(x)$ var izdalīt ar $f(x)$ .Rodas dalījumā kāds polinoms $Q(x)$ un atlikumā polinoms $g_1(x)$ ar pakāpi $m_1 < n$ .Tad integrālā

$$\int \frac{g(x)}{f(x)}dx = \int Q(x)dx + \int \frac{g_1(x)}{f(x)}dx$$

pirmā sastāvdaļa $\int Q(x)\,dx$ ir viegli atrisināma.

Diskusija ir vajadzīga vienīgi tādam gadījumam,kad $m < n$,t.i. kad $\frac{g(x)}{f(x)}$ ir īstā daļa.

Racionālās funkcijas $R(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ integrēšanā ir jāatrod vispirms tās poli, t.i. saucēja polinoma nulles $\alpha, \beta, \dots$ (kad $g(x)$ un $f(x)$ nav kopīgu dalītāju, tad $g(\alpha) \neq 0, g(\beta) \neq 0, \dots$ un $R(x) \to \infty$, ja $x \to \alpha, x \to \beta, \dots$). Atšķirsim gadījumus, kad poli reāli vai kompleksi.

Reāla pola $x = \alpha$ gadījumā, ja pola kārta ir κ ,var izteikt

$$f(x) = (x-\alpha)^{\kappa}\cdot\varphi(x), \qquad [\varphi(\alpha) \neq 0]$$

Pierādīsim, ka var atrast tādu konstanti A_1, lai pastāvētu identitāte

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\kappa}} + \frac{\psi(x)}{(x-\alpha)^{\kappa-1}\varphi(x)} \dots (1)$$

Sastādīsim starpību

$$\frac{g(x)}{f(x)} - \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\kappa}} = \frac{g(x) - A_1\varphi(x)}{(x-\alpha)^{\kappa}\cdot\varphi(x)}$$

Lai dabūtu sakaru (1.), jāprasa, lai $F(x) = g(x) - A_1\varphi(x)$ dalās bez atlikuma ar $(x-\alpha)$; citādi - lai $F(\alpha) = 0$. Tas nozīmē, ka

$$A_1 = \frac{g(\alpha)}{\varphi(\alpha)}$$

Šādā veidā var atrast pirmo parciālo daļu $\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\kappa}}$.
Šo sadalīšanu var turpināt un atrast racionālās funkcijas sadalījumu parciālās daļās:

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\kappa}} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{\kappa-1}} + \dots + \frac{A_{\kappa}}{x-\alpha} \dots$$

$$+\frac{B_1}{(x-\beta)^l}+\frac{B_2}{(x-\beta)^{l-1}}+\dots+\frac{B_l}{x-\beta}+\dots+$$

$$+\frac{L_1}{(x-\lambda)^p}+\frac{L_2}{(x-\lambda)^{p-1}}+\dots+\frac{L_p}{x-\lambda},$$

ja funkcijas dažādie poli ir $\alpha, \beta, \dots \lambda$ ar attiecīgām kārtām $k, l, \dots p$, resp. $f(x)=a_0(x-\alpha)^k(x-\beta)^l\dots(x-\lambda)^p$.

Racionālās funkcijas integrāls $\int\frac{g(x)}{f(x)}dx$ sastāv no divu integrālu pamattipiem:

$$\int\frac{A_1}{(x-\alpha)^k}dx=A_1\int(x-\alpha)^{-k}dx=\frac{A_1}{-k+1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}},\quad (k\neq 1)$$

un

$$\int\frac{A_k}{x-\alpha}dx=A_k\ln|x-\alpha|$$

Tādēļ

$$\int R(x)dx=\sum\frac{A}{(x-\alpha)^{k-1}}+\sum A'\ln|x-\alpha|+C,$$

kur pirmā summa attēlo racionālo sastāvdaļu, otrā - transcendento sastāvdaļu ar logaritmiskām funkcijām.

10.§. Racionālo funkciju integrēšana gadījumā, kad poli kompleksi.

Tā kā polinoma $f(x)$ koeficienti ir reāli, tad poli α un β ir savā starpā saistīti kompleksi skaitļi: $\alpha=a+bi$, $\beta=a-bi$, un to kārtas ir vienādas: $k=l$.

Tādēļ

$$f(x)=[(x-a)^2+b^2]^k\cdot\varphi(x),\ \text{kur } \varphi(\alpha)\neq 0,\ \varphi(\beta)\neq 0.$$

Izteicam $(x-a)^2+b^2=x^2+px+q$ ar $p=-2a$ un $q=a^2+b^2$.

Tā kā $\frac{p^2}{4}-q=a^2-a^2-b^2=-b^2<0$, tad šī kvadratiskā trinoma nulles ir kompleksas. Tā kā $\varphi(\alpha)\neq 0$, $\varphi(\beta)\neq 0$, tad $\varphi(x)$ nedalās ar x^2+px+q.

Kā nu sadalīt funkciju $R(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$ parciāldaļās? Pierādīsim, ka var atrast divas reālas konstantes A un B, ar kurām pastāv identitāte

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}+\frac{g_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\varphi(x)}\dots(1)$$

Sastādam starpību

$$\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}=\frac{g(x)-(Ax+B)\cdot\varphi(x)}{(x^2+px+q)^k\cdot\varphi(x)}=\frac{F(x)}{f(x)}$$

Pietiek pierādīt, ka $F(x)=(x^2+px+q)\cdot g_1(x)$, lai būtu pierādīta identitāte (1.).

Dalam $g(x)$ ar x^2+px+q. Atlikumā dabūsim pirmās pakāpes polinomu $ax+b$, kur a un b nav reizē nulles.

Tā tad $$g(x)=(x^2+px+q)\ Q_1(x)+ax+b.$$

Līdzīgi arī

$$\varphi(x) = (x^2+px+q)\cdot Q_2(x) + cx + d,$$

kur c un d nav reizē nulles.

No šejienes

$$F(x) = (x^2+px+q)[Q_1(x) - (Ax+B)Q_2(x)] + ax + b - (Ax+B)(cx+d)$$

Apzīmējot $Q(x) = Q_1(x) - (Ax+B).Q(x)$ un atverot pēdējās iekavas, dabū

$$F(x) = (x^2+px+q)Q(x) - Acx^2 + x(a - Ad - Bc) + b - Bd.$$

Dalam

$$\begin{array}{l|l} -Acx^2 + x(a-Ad-Bc) + b - Bd & x^2+px+q \\ \hline Acx^2 + xAcp \qquad + Acq & -Ac \\ \hline x(a-Ad-Bc+Acp) + b - Bd + Acq & \end{array}$$

un pārveidojam

$$F(x) = (x^2+px+q)[Q(x) - Ac] + x[a + A(cp-d) - Bc] + Acq + b - Bd$$

Šī funkcija dalās ar x^2+px+q tikai tad, ja lineārais locekļa koeficients un brīvais loceklis ir nulle. Tas dod

$$(2)\ldots\begin{cases} a + A(cp-d) - Bc = 0 \\ b + Acq - Bd = 0 \end{cases}$$

Vienīgi tad $F(x) = (x^2+px+q)\cdot q_1(x)$, ja noteikumi (2.) izpildīti.

Tagad meklēsim A un B nozīmes no lineārās algebriskās sistēmas

$$(2')\ldots\begin{cases} A(d-cp) + Bc = a \\ -Acq \qquad + Bd = b \end{cases}$$

Sistēmas determinants

$$\Delta = \begin{vmatrix} d-cp & c \\ -cq & d \end{vmatrix} = d^2 - cpd + c^2q = \left(d - \frac{cp}{2}\right)^2 + c^2\left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Tā kā c un d nav reizē nulles un $q - \frac{p^2}{4} > 0$, tad $\Delta \neq 0$.

Tādēļ nezinamos koeficientus A un B var aprēķināt pēc Kramera (Cramer) formulām:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}{\Delta}; \qquad B = \frac{\begin{vmatrix} d-cp & a \\ -cq & b \end{vmatrix}}{\Delta}$$

Pakāpeniski lietojot pierādīto identitāi (1.), dabū sadalījumu

$$\frac{g(x)}{H(x)} = \frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{x^2+px+q} + \frac{\psi(x)}{\varphi_1(x)},$$

kur pēdējai daļai α un β vairs nav poli. Dabūtai daļai $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ atkal varam piemērot sadalīšanu parciālās daļās, ja ir zināmi tās poli.

Praktikā var lietot <u>nenoteikto koeficientu metodi.</u>

Piemērs: $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

Te ir viens reāls pols $x=0$ un divi kompleksi divkāršie poli $x = \pm i$.

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+1} \qquad (A, B, C, D, E \text{ - konstantes})$$

$$1 \equiv A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x + (Dx+E)(x^2+1)\,x$$

$$1 \equiv x^4(A+D) + x^3 E + x^2(2A+B+D) + x(C+E) + A$$

$$\begin{cases} A+D=0 \\ E=0 \\ 2A+B+D=0 \\ C+E=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=1 \\ C=E=0 \\ D=-1 \\ B=-1 \end{matrix}$$

Tā tad $\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{x}{x^2+1}$

un

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + const = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} + const.$$

Vispārīgā gadījumā, kad poli ir kompleksi, ir jāatrod integrāls

$$J = \int \frac{A_1 x + B_1}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{A_1 x + B_1}{\left[(x-\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^k}\,dx$$

Ar apzīmējumiem $-\frac{p}{2} = a$ un $q - \frac{p^2}{4} = b^2$ izteic

$$J = \int \frac{A_1 x + B_1}{[(x-a)^2 + b^2]^k}\,dx$$

Pēc substitūcijas: $x - a = bt$, $t = \frac{x-a}{b}$, $dx = b\,dt \; (b \neq 0)$

rodas

$$J = \int \frac{A_1(a+bt)+B_1}{(b^2t^2+b^2)^k} = \int \frac{At+B}{(t^2+1)^k},$$

kur A un B ir jaunas konstantes. Sadalot divu integrālu summā

$$J = A\int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^k} + B\int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$$

secinam, ka integrācija ir reducēta uz šādiem diviem pamattipiem.

1) $J = \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^k}$

Ar substitūciju $t^2+1 = u$ izteic

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^k} = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-k+1}}{-k+1} + C, & ja \; k \neq 1 \\ \frac{1}{2}\ln u + C & ja \; k = 1 \end{cases}$$

Liekot atpakaļ $u = t^2+1$, dabūjam:

$$J = \int \frac{t\,dt}{(t^2+1)^k} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-k)(t^2+1)^{k-1}} + C, & ja \; k \neq 1 \\ \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C, & ja \; k = 1. \end{cases}$$

Liekot $t = \frac{x-a}{b}$ dabūjam integrālu atkarībā no x.

2) $J_k = \int \frac{dt}{(t^2+1)^k}$

Ja $k = 1$, tad $J_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C$

Sastādīsim pēc šādiem pārveidojumiem redukcijas (rekurences) formulu gadījumam, kad $k > 1$,

$$J_k = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^k}\,dt = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^k} = J_{k-1} - \int t\,\frac{t\,dt}{(1+t^2)^k} =$$

$$= J_{k-1} + \frac{1}{2}\int t\,d\left[\frac{1}{(k-1)(t^2+1)^{k-1}}\right] = J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2+1)^{k-1}} - \frac{1}{2(k-1)}J_{k-1}$$

Meklējamā redukcijas formula ir

$$J_k = \frac{t}{2(k-1)(t^2+1)^{k-1}} - \frac{2k-3}{2k-2}J_{k-1}$$

Zinot J_1 un ņemot pēc kārtas $k = 2, 3, 4, \ldots$, varam atrast $J_2, J_3, J_4, \ldots$

Slēdziens: Ja racionālās funkcijas poli ir kompleksi $\alpha = a + bi$, $\beta = a - bi$, tad tās integrāla sastāvdaļā ir racionālas funkcijas un transcendentas funkcijas: $\ln[(x-a)^2 + b^2]$ un $\operatorname{arctg}\frac{x-a}{b}$.

11.§. Ermita (Hermite) metode.

Franču matemātiķis Ermits[x] ir devis metodi, pēc kuras racionālās funkcijas integrālā var noteikt racionālo sastāvdaļu, nesadalot doto funkciju parciālās daļās.

Ja poli $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, dažādi un reāli, tad $f(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \ldots (x-\lambda)^p$ un (sk. 9. nodalījumu)

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-\alpha} +$$

$$+ \frac{B_1}{(x-\beta)^l} + \frac{B_2}{(x-\beta)^{l-1}} + \ldots + \frac{B_l}{x-\beta} + \ldots +$$

$$+ \frac{L_1}{(x-\lambda)^p} + \frac{L_2}{(x-\lambda)^{p-1}} + \ldots + \frac{L_p}{x-\lambda}$$

Tā kā

$$\int \frac{A_1\,dx}{(x-\alpha)^k} = \frac{A_1}{(1-k)(x-\alpha)^{k-1}} + \mathrm{const}, \qquad \text{ja } k \neq 1,$$

tad integrāla

$$\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx = \frac{H(x)}{(x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots(x-\lambda)^{p-1}} + \int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda)}\,dx$$

struktūru var izteikt ar diviem polinomiem $H(x)$ un $P(x)$. Te

$$(x-\alpha)^{k-1}(x-\beta)^{l-1}\ldots(x-\lambda)^{p-1} = D(x)$$

ir $f(x)$ un $f'(x)$ augstākais kopīgais dalītājs un

$$(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda) = \frac{f(x)}{D(x)} = Q(x)$$

x) Arī krievu matemātiķis Ostrogradski, neatkarīgi no Ermita, ir lietojis šo metodi.

Tā tad pastāv Ermita struktūrformula

$$\int \frac{g(x)}{f(x)}dx = \frac{H(x)}{D(x)} + \int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Kā atrast $H(x)$ un $P(x)$ koeficientus? Atvasinot pēc x, dabūjam

$$\frac{g}{f} = \left(\frac{H}{D}\right)' + \frac{P}{Q} = \frac{H'D - HD'}{D^2} + \frac{P}{Q},$$

vai

$$g = \frac{H'f}{D} - \frac{HD'f}{D^2} + \frac{Pf}{Q}$$

Tā kā $f = D\cdot Q$, tad $\frac{f}{Q} = D$ un $\frac{f}{D} = Q$ ir polinomi. Arī $\frac{HD'f}{D^2} = \frac{HD'\cdot D\cdot Q}{D^2} = \frac{HD'Q}{D}$ ir polinoms. Tiešām, atvasinot $f = DQ$, dabū $f' = D'Q + Q'D$, vai $D'Q = f' - DQ'$.
Bet D ir f un f' augstākais kopīgais dalītājs, tā tad $\frac{f'}{D}$ ir polinoms un $\frac{D'Q}{D} = S(x)$ arī polinoms. Tā tad

$$g(x) = H'(x)\,Q(x) - H(x)\,S(x) + P(x)\,D(x)$$

Ja dažādi poli $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ir skaitā r un dotā polinoma $f(x)$ pakāpe ir n, tad $P(x)$ pakāpe ir augstākais $r-1$ un $H(x)$ pakāpe - augstākais $n-r-1$. Pēdējie divi polinomi satur attiecīgi augstākais r un $n-r$ koeficientus. Sastādītās identitates labajā pusē pēc locekļu pārkārtošanas rodas polinoms, kuŗa koeficienti izteikti ar n nezināmiem $H(x)$ un $P(x)$ koeficientiem. Kreisajā pusē ir polinoms $g(x)$, kuŗa pakāpe ir augstākais $n-1$, resp. kuŗā ir augstākais n koeficienti.

Salīdzinot koeficientus varam noteikt $H(x)$ un $P(x)$

Piemērs: $\int \frac{dx}{x^5 - 2x^3 + x}$

Te $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$, $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1$, $D(x) = x^2 + 1$

(ar Euklida algortimu), $Q(x) = x^3 + x$

$$\int \frac{dx}{x^5 - 2x^3 + x} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \int \frac{Cx^2 + Dx + E}{x^3 + x}dx$$

Atvasinot dabū

$$\frac{1}{x^5 - 2x^3 + x} = \frac{A(x^2+1) - 2(Ax+B)x}{(x^2+1)^2},\ \frac{Cx^2 + Dx + E}{x^3 + x}$$

$$1 \equiv x^4 C + x^3(A - 2A + D) + x^2(-2B + C + E) + x(A + D) + E$$

$$\begin{cases} C = 0 \\ D - A = 0 \\ C + E - 2B = 0 \\ A + D = 0 \\ E = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A &= D = 0 \\ E &= 1 \\ B &= \tfrac{1}{2} \\ C &= 0 \end{aligned}$$

Tā tad

$$\int \frac{dx}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \int \frac{dx}{x^3 + x}$$

Sadala parciālās daļās

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{L}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1};\quad 1\equiv x^2(L+M)+Nx+L$$

$$L+M=0 \qquad L=1$$

$$N=0 \qquad M=-1$$

$$L=1 \qquad N=0$$

un $$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+const.=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+const$$

Galīgi: $$\int\frac{dx}{x^5+2x^3+x}=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+const$$

Piezīme: Ermita metodi racionālās sastāvdaļas atdalīšanai var lietot arī gadījumā, kad poli ir kompleksi (illustrēts ar iepriekšējo piemēru).

Pēc Ermita metodes racionālai funkcijai ar vairākkārtējiem poliem integrālu reducē uz integrālu racionālai funkcijai ar vienkāršiem poliem.

Apskatīsim $\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, ja funkcijas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ poli vienkārši, t.i. $Q(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\lambda)$. Sadalam $\frac{P(x)}{Q(x)}$ parciāldaļās $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\ldots+\frac{L}{x-\lambda}$$

Kā noteikt koeficientus $A,B,\ldots,L$? Lai aprēķinātu, piem. A, reizinam abas puses ar $x-\alpha$:

$$\frac{P(x)(x-\alpha)}{Q(x)}=A+\frac{B(x-\alpha)}{x-\beta}+\ldots+\frac{L(x-\alpha)}{x-\lambda};$$

ja nu $x=\alpha$, tad labā pusē paliek tikai A, bet kreisajā dabūjam nenoteiktu izteiksmi, Tā tad $A=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha).P(x)}{Q(x)}=$

$$=\lim_{x\to\alpha}\frac{P(x)}{(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}=\frac{P(\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda)}=\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

Arī pēc Lopitāla (L'Hospital) likuma:

$$A=\lim_{x\to\alpha}\frac{[(x-\alpha).P(x)]'}{Q'(x)}=\lim_{x\to\alpha}\frac{P(x)+(x-\alpha).P'(x)}{Q'(x)}=\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

Līdzīgi var atrast arī citus koeficientus un sastādīt sadalījumu formulu

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)(x-\alpha)}+\frac{P(\beta)}{Q'(\beta)(x-\beta)}+\ldots+\frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)(x-\lambda)} \qquad x)$$

---

x) Šīs formulas sekas ir algebrā lietojamā Lagranža (Lagrange)

Tādēļ $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}\ln|x-\alpha| + \frac{P(\beta)}{Q'(\beta)}\ln|x-\beta| + \ldots + \frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)}\ln|x-\lambda| + C$

III Algebriski irracionālu funkciju integrēšana.

12.§. Funkciju $R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots x^{\frac{p_n}{q_n}})$ integrēšana.

Te integrējama funkcija ir algebriski irracionāla attiecībā pret x ,bet integrāla aprēķināšanu var reducēt uz racionālas funkcijas integrēšanu, lietojot piemērotu substitūciju.

Pieņemsim, ka $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots \frac{p_n}{q_n}$ ir nesaīsināmas daļas. Atrodam $q_1, q_2, \ldots, q_n$ mazāko kopīgo dalāmo q un apzīmējam veselos skaitļus $r_1 = \frac{p_1 q}{q_1}$, $r_2 = \frac{p_2 q}{q_2}, \ldots, r_n = \frac{p_n q}{q_n}$

Ar substitūciju $x^{\frac{1}{q}} = t$ izteic $x = t^q$, $dx = q\cdot t^{q-1}dt$ un

$$J = \int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, x^{\frac{p_n}{q_n}})dx = \int R(t^q, t^{r_1}, t^{r_2}, \ldots, t^{r_n})\cdot q\, t^{q-1}dt =$$
$$= \int R_1(t)dt$$

Integrējot sastādīto racionālo funkciju $R_1(t)$ un ievietojot $t = x^{\frac{1}{q}}$,dabū $J = \int R_1(t)dt = F(t) + const. = F(x^{\frac{1}{q}}) + const.$

Ar analogu metodi racionalizē vispārīgās formas integrālu

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right]dx$$

Te jālieto substitūcija $\frac{ax+b}{cx+d} = t^q$ (q ir $q_1, q_2, \ldots, q_n$ mazākais kopīgais dalāmais) un inversā funkcija $x = \frac{-dt^q + b}{ct^q - a}$

Apskatīsim integrālu $\int R(x, \sqrt{ax+b})dx$,kas ietilpst iepriekšējā formā.

Ar substitūciju $y = \sqrt{ax+b}$ izteic $ax + b = y^2$; $x = \frac{y^2}{a} - \frac{b}{a}$, $\therefore dx = \frac{2y\,dy}{a}$ un

$$\int R(x, \sqrt{ax+b})dx = \int R\left(\frac{1}{a}y^2 - \frac{b}{a}, y\right)\frac{2y\,dy}{a} = \int R_1(y)dy =$$
$$= F(y) + const. = F(\sqrt{ax+b}) + const.$$

---

interpolācijas formula:

$$P(x) = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}\cdot\frac{Q(x)}{x-\alpha} + \frac{P(\beta)}{Q'(\beta)}\cdot\frac{Q(x)}{x-\beta} + \ldots + \frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)}\cdot\frac{Q(x)}{x-\lambda},$$

vai

$$P(x) = P(\alpha)\frac{(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\lambda)} + P(\beta)\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\ldots(\beta-\lambda)} + \ldots +$$
$$+ P(\lambda)\frac{(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\varkappa)}{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)\ldots(\lambda-\varkappa)}$$

Šī formula dod iespēju noteikt $(n-1)$.pakāpes polinomu, zinot polinoma vērtības n dotos punktos.

Te $y = \sqrt{ax+b}$ ir x-sa funkcija, kuŗas grafiskais attēls ir parabola (6.zīm.).

Dotajā integrālā $\int R(x, y)\,dx$ funkcija $R(x, y)$ ir sastādīta ar parabolas loka AB punkta koordinātām. Apskatāmais integrāls ir t.s. Abela integrāla atsevišķs veids.

13.§. Abela integrāls. Eulera substitūcijas funkciju $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ integrēšana.

Abela integrāls ir $\int R(x, y)\,dx$, kur $R(x, y)$ ir racionāla funkcija un x, y ir kādas algebriskās līnijas $f(x, y) = 0$ punkta koordinātas. Saka, ka Abela integrāls ir piekārtots šai līnijai.

Svarīgākais ir gadījums, kad dotā līnija ir racionāla jeb unikursāla, t.i. kad

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

ir viena parametra t racionālas funkcijas. Šajā gadījumā Abela integrālu var reducēt uz racionālas funkcijas integrālu. Tiešām

$$\int R(x, y)\,dx = \int R[\varphi(t), \psi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt = \int R_1(t)\,dt = F_1(t) + const$$

Ja te ievieto $x = \varphi(t)$ inverso funkciju $t = g(x)$, tad dabū

$$\int R(x, y)\,dx = F_1[g(x)] + const. = F(x) + const.$$

Tā kā konikas ir racionālas līknes, tad sastādot Abela integrālu, piekārtotu konikām, to var izteikt ar racionālas funkcijas integrālu.

Lai konikas $f(x, y) = 0$ punkta koordinātas izteiktu racionāli ar vienu parametru t, lieto šādu vispārīgu metodi. Velk kaut kuŗu taisni $y = y_0 + t(x - x_0)$ caur konikas punktu (x_0, y_0) un meklē tās otru krustojuma punktu ar koniku. Pēdējo nosaka analītiski, atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} y = y_0 + t(x - x_0) \\ f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \end{cases}$$

Apskatīsim atsevišķu veidu integrālam $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, ja $a \neq 0$ un $b^2 - 4ac \neq 0$. Tad $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ vai $y^2 = ax^2 + bx + c$ attēlo ellipsi, ja $a < 0$, bet hiperbolu, ja $a > 0$.

Lai noteiktu kanoniskos vienādojumus, pārveido konikas vienādojumu šādi:

$$y^2 = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

jeb
$$y^2-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{4ac-b^2}{4a}=A$$

Ja nu par sākuma punktu jaunām koordinātu asīm ξ,η ņemam punktu $O'\left(-\frac{b}{2a};0\right)$, tad $y=\eta$, $x=\xi-\frac{b}{2a}$ un $\eta^2-a\xi^2=A$.

I gadījums: $a>0$

Konika ir hiperbola, kuŗas asimptotas ir taisnes $\eta^2-a\xi^2=0$ jeb $\eta=\pm\xi\sqrt{a}$. Ja $A>0$, hiperbola krustojas reālos punktos ar η-asi, ja $A<0$, tad - ar ξ-asi (7.zīm.).

Lai hiperbolas punkta koordinātas izteiktu racionāli, pietiek ņemt taisni, parallelu asimptotai, un atrast tās krustošanos ar koniku. Šāda taisne ir $y=\pm x\sqrt{a}+u$. Ievietojot konikas vienādojumā $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$, atrod krustpunkta koordinātas:
$$ax^2+bx+c=ax^2\pm 2u\,x\sqrt{a}+u^2.$$
No šejienes (viena sakne $=\infty$)
$$x=\frac{u^2-c}{b\pm 2u\sqrt{a}}=\varphi(u),\qquad y=\pm\frac{u^2-c}{b\pm 2u\sqrt{a}}+u=\psi(u),$$
kur φ un ψ ir parametra u racionālas funkcijas.

Tad
$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx=\int R_1(u)\,du=F(u)+Const.$$

Ievedot $u=y\mp x\sqrt{a}=\sqrt{ax^2+bx+c}\mp x\sqrt{a}$, dabūjam vajadzīgo izteiksmi.

Integrāla racionalizēšanai ir lietota <u>pirmā Eulera substitūcija</u> $y=\pm x\sqrt{a}+u$.

II gadījums: $a<0$

Konika ir ellipse $\eta^2-a\xi^2=A$, te arī $A>0$, jo citādi ellipse būtu imaginārа.

Tā kā $A=\frac{4ac-b^2}{4a}>0$ un $a<0$, tad $4ac-b^2<0$ vai $b^2-4ac>0$. Tas nozīmē, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir reālas un dažādas saknes α un β, vai $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=-a(x-\alpha)(\beta-x)$, ja x mainās intervallā (α,β), tad šī izteiksme ir pozitīva.

Tagad velkam kādu taisni caur α vai β (8.zīm.). Tās vienādojums ir $y=t(x-\alpha)$ vai $y=t(x-\beta)$, un krustpunktus ar koniku $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ atrod, atrisinot kopīgi vienādojumus, piemēram,
$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha),\quad ax^2+bx+c=t^2(x-\alpha)^2;$$
$$a(x-\alpha)(x-\beta)=t^2(x-\alpha)^2.$$

Otram krustpunktam $x\neq\alpha$, tādēļ
$$a(x-\beta)=t^2(x-\alpha),$$

vai

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}=\varphi(t),\quad y=t(x-\alpha)=\psi(t)$$

Integrālu var racionalizēt un izteikt

$$\int R(x,y)\,dx=\int R_1(t)\,dt=F(t)+\text{const},$$

ievietojot $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\alpha}$

Lietoto substitūciju $y=t(x-\alpha)$ vai $y=t(x-\beta)$ sauc par otro Eulera substitūciju.

III gadījums: $c>0$

Šinī gadījumā konika (ellipse vai hiperbola) krustojas ar y-asi reālos punktos. Tiešām, ja $x=0$, tad $y^2=c$, $y=\pm\sqrt{c}$.

Ar $y=\pm\sqrt{c}+tx$ ir noteikta taisne, kas iet caur vienu no y-ass un konikas krustpunktiem. Tās otru krustpunktu ($x\neq 0$) ar koniku atrod šādi:

$$ax^2+bx+c=c\pm 2tx\sqrt{c}+t^2x^2,$$

no kurienes

$$x=\frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}=\varphi(t),\qquad y=\pm\sqrt{c}+\frac{\pm 2t^2\sqrt{c}-bt}{a-t^2}=\psi(t)$$

Integrālu $\int R(x,y)\,dx=\int R_1(t)\,dt=F(t)+\text{const}.$ izteic galīgi, ievietojot $t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}\mp\sqrt{c}}{x}$

Te integrāls racionalizēts, lietojot trešo Eulera substitūciju: $y=tx\pm\sqrt{c}$

Uzrakstīsim kopā visas trīs Eulera substitūcijas:

$$y=\sqrt{ax^2+bx+c}=\begin{cases} t\pm x\sqrt{a}, & \text{ja } a>0 \;\ldots\ldots (1)\\ t(x-\alpha) \text{ vai } t(x-\beta), & \text{ja } a<0 \;\ldots\ldots (2)\\ tx\pm\sqrt{c}, & \text{ja } c>0 \;\ldots\ldots (3)\end{cases}$$

Piemērs: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}$

Lietojam pirmo Eulera substitūciju, jo $a=1>0$:

$$\sqrt{x^2+c}=t-x;\qquad x^2+c=t^2-2tx+x^2;$$

$$x=\frac{t^2-c}{2t}=\frac{t}{2}-\frac{c}{2t};\qquad dx=\left[\frac{1}{2}+\frac{c}{2t^2}\right]dt$$

$$\sqrt{x^2+c}=t-\frac{t}{2}+\frac{c}{2t}=\frac{t}{2}+\frac{c}{2t}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+c}}=\int\frac{\frac{t^2+c}{2t^2}}{\frac{t^2+c}{2t}}\,dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+\text{const.}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+\text{const.}$$

14.§. Abela integrālu $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ redukcija.

Šādus integrālus var arī reducēt uz pamattipiem un tad tos tieši aprēķināt.

Ja

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c},$$

tad

$$y^2 = ax^2+bx+c$$
$$y^3 = y^2 y = (ax^2+bx+c)\,y$$
$$y^{2n} = (y^2)^n = (ax^2+bx+c)^n$$
$$y^{2n+1} = y^{2n}\, y = (ax^2+bx+c)^n\, y$$

Integrējamo funkciju $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R(x,y)$ var izteikt kā divu polinomu $g(x,y)$ un $f(x,y)$ dalījumu $\frac{g(x,y)}{f(x,y)}$, ko var galīgi pārveidot šādi:

$$R(x,y) = \frac{g_1(x)+g_2(x)\,y}{f_1(x)+f_2(x)\,y} = \frac{(g_1+g_2 y)(f_1-f_2 y)}{f_1^2-f_2^2\,y^2} =$$

$$= \frac{g_1 f_1 - g_2 f_2 y^2}{f_1^2-f_2^2 y^2} + \frac{(f_1 g_2 - g_1 f_2)\,y^2}{f_1^2-f_2^2\,y^2}\cdot\frac{1}{y} = R_1(x) + R_2(x)\cdot\frac{1}{y}$$

Tādēļ

$$\int R(x,y)\,dx = \int R_1(x)\,dx + \int \frac{R_2(x)}{y}\,dx$$

Pirmais integrāls ir racionālas funkcijas $R_1(x)$ integrāls. Ja otrā integrālā racionālo funkciju $R_2(x)$ izteic formā

$$R_2(x) = \frac{G(x)}{F(x)} = P(x) + \frac{Q(x)}{F(x)},$$

ar polinomiem $P(x)$, $Q(x)$ un $F(x)$, tad pēdējais integrāls reducējas uz divu integrālu summu:

$$\int P(x)\,\frac{dx}{y} + \int \frac{Q(x)}{F(x)}\cdot\frac{dx}{y}.$$

Ja te racionālo funkciju $\frac{Q(x)}{F(x)}$ sadala parciālās daļās, tad reāla pola $x=\alpha$ gadījumā dabū sadalījuma sastāvdaļu

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)^n} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n}{x-\alpha} = \frac{Q_1(x)}{(x-\alpha)^n},$$

kur polinoma $Q_1(x)$ pakāpe $\leq n-1$, bet kompleksa pola gadījumā -

$$\frac{A_1 x+B_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{A_2 x+B_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{A_n x+B_n}{x^2+px+q} = \frac{Q_2(x)}{(x^2+px+q)^n},$$

kur polinoma $Q_2(x)$ pakāpe $\leq 2n-1$.

Esam dabūjuši trīs <u>integrālu pamattipus:</u>

1) $\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx$ 2) $\int \frac{Q_1(x)}{(x-\alpha)^n}\,\frac{dx}{y}$, 3) $\int \frac{Q_2(x)}{(x^2+px+q)^n}\cdot\frac{dx}{y}$

Vēlāk konstatēsim, ka otro un trešo pamattipu var reducēt uz pirmo.

Tagad aprēķināsim pirmo integrāla pamattipu.

Ar polinoma izteiksmi $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$

atrod

$$\int P_n(x)\,\frac{dx}{y} = a_0\int\frac{x^n dx}{y} + a_1\int\frac{x^{n-1}dx}{y} + \dots + a_{n-1}\int\frac{x\,dx}{y} + a_n\int\frac{dx}{y}$$

jeb
$$\int P_n(x)\frac{dx}{y} = a_0 J_n + a_1 J_{n-1} + \dots + a_{n-1} J_1 + a_n J_0.$$

Visus integrālus labajā pusē var reducēt uz J_1 un J_0, un J_1 - savukārt uz J_0. Tā tad dotā integrāla aprēķināšana reducējas uz J_0 aprēķināšanu.

Ievērojot šādas sakarības:
$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$
$$2yy' = 2ax + b,$$
$$y' = \frac{2ax+b}{2y},$$

var izteikt
$$J_n = \int \frac{x^n dx}{y} = \int x^{n-1}\frac{x}{y}dx = \int x^{n-1}\frac{2ax+b-b}{2ay}dx =$$
$$= \frac{1}{a}\int x^{n-1}\frac{2ax+b}{2y}dx - \frac{b}{2a}\int\frac{x^{n-1}}{y}dx = \frac{1}{a}\int x^{n-1}y'dx - \frac{b}{2a}J_{n-1}$$

Lietojot parciālo integrēšanu, dabū
$$J_n = \frac{x^{n-1}y}{a} - \frac{n-1}{a}\int y\, x^{n-2}dx - \frac{b}{2a}J_{n-1}$$
jeb
$$J_n = \frac{x^{n-1}y}{a} - \frac{n-1}{a}\int\frac{y^2}{y}x^{n-2}dx - \frac{b}{2a}J_{n-1}$$

Pēc substitūcijas $y^2 = ax^2 + bx + c$ un pārveidojumiem rodas
$$J_n = \frac{x^{n-1}y}{a} - \frac{n-1}{a}\cdot a\int\frac{x^n dx}{y} - \frac{n-1}{a}b\int\frac{x^{n-1}dx}{y} - \frac{n-1}{a}c\int\frac{x^{n-2}dx}{y} - \frac{b}{2a}J_{n-1}$$
jeb
$$J_n = \frac{x^{n-1}y}{a} - (n-1)J_n - \frac{b(n-1)}{a}J_{n-1} - \frac{c(n-1)}{a}J_{n-2} - \frac{b}{2a}J_{n-1}.$$

No šejienes izteic
$$nJ_n = \frac{x^{n-1}y}{a} - \frac{b(2n-1)}{2a}J_{n-1} - \frac{c(n-1)}{a}J_{n-2}$$
vai
$$J_n = \frac{x^{n-1}y}{an} - \frac{b(2n-1)}{2an}J_{n-1} - \frac{c(n-1)}{an}J_{n-2}$$

Piemēram, kad $n = 2$, dabū
$$J_2 = \frac{xy}{2a} - \frac{3b}{4a}J_1 - \frac{c}{2a}J_0;$$
kad $n=3$, izteic J_3 ar J_2 un J_1 vai galīgi ar J_1 un J_0, u.t.t.

Tā tad visus integrālus J_n var izteikt ar J_1 un J_0

Bet savukārt
$$J_1 = \int\frac{x\,dx}{y} = \int\frac{2ax+b-b}{2ay}dx = \frac{1}{a}\int\frac{2ax+b}{2y}dx - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{y}$$
$$J_1 = \frac{1}{a}\int y'dx - \frac{b}{2a}J_0 = \frac{y}{a} - \frac{b}{2a}J_0.$$

Tādēļ ir šāda integrāla <u>struktūrformula:</u>

$$(*)\quad \int P_n(x)\frac{dx}{y} = P_{n-1}(x)\,y + B\int\frac{dx}{y},$$

kur $P_{n-1}(x)$ ir $(n-1)$ pakāpes polinoms un B konstante.

Praktikā lieto nenoteikto koeficientu metodi, izteicot

$$P_{n-1}(x) = A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \dots + A_{n-1}$$

Atvasinot struktūrformulas (*) abas puses, dabū

$$\frac{P_n(x)}{y} = P'_{n-1}(x)\, y + P_{n-1}\, y' + \frac{B}{y},$$

vai

$$P_n(x) = P'_{n-1}(x)\, y^2 + P_{n-1}\, y y' + B$$

Pēc substitūcijām

$$y^2 = ax^2 + bx + c, \quad yy' = \frac{2ax+b}{2}$$

rodas identitāte

$$P_n(x) = (ax^2+bx+c)\, P'_{n-1}(x) + \frac{2ax+b}{2} P_{n-1}(x) + B.$$

No šejienes, salīdzinot koeficientus, atrod polinoma $P_{n-1}(x)$ koeficientus un B (nezināmo konstantu skaits ir $n+1$).

<u>Piemērs:</u> $\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx = (A_0 x + A_1)\sqrt{x^2+1} + B\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$y = \sqrt{x^2+1}, \quad y^2 = x^2+1, \quad yy' = x$$

$$\frac{x^2+1}{y} = A_0 y + (A_0 x + A_1) y' + \frac{B}{y}$$

$$x^2+1 = A_0 x^2 + A_0 + (A_0 x + A_1)x + B$$

$$x^2+1 = 2A_0 x^2 + A_1 x + (A_0 + B)$$

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad A_1 = 0, \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + C$$

Struktūrformula (*) rāda, ka pirmā integrāla pamattipa $\int P_n(x)\frac{dx}{y}$ aprēķināšanai pietiek aprēķināt $J_0 = \int\frac{dx}{y}$
jeb

$$J_0 = \int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int\frac{dx}{\sqrt{a(x^2+\frac{b}{a}x)+c}} = \int\frac{dx}{\sqrt{a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c}}$$

Atšķirsim <u>divus gadījumus</u>: $a>0$ vai $a<0$.

1) $a>0$.

Integrālu

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2+\underbrace{\frac{4ac-b^2}{4a^2}}_{=A}}}$$

var aprēķināt ar substitūciju: $x+\frac{b}{2a} = t$, ar kuru izteic

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+A}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+A}\right| + C$$

Ievietojot t un A vietā to nozīmi, dabū

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left| x + \frac{b}{a} + \sqrt{\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}} \right| + C$$

2) $a < 0$ vai $-a > 0$

Integrāla izteiksme

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}}$$

rāda, ka kvadrātsaknei zemintegrāla izteiksmes saucējā ir reāla nozīme tikai tad, ja diskriminants $D = b^2 - 4ac > 0$

Ar substitūciju

$$x + \frac{b}{2a} = t\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{t\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} = -\frac{t\sqrt{D}}{2a} \quad (a < 0)$$

izteic

$$t = -\frac{2ax + b}{\sqrt{D}}, \qquad dx = dt \cdot \sqrt{\frac{D}{4a^2}}$$

un

$$J_0 = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt \cdot \sqrt{\frac{D}{4a^2}}}{\sqrt{\frac{D}{4a^2} - \frac{D}{4a^2}t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin t + C,$$

jeb galīgi

$$J_0 = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

<u>Otrais integrāla pamattips</u> $\int \frac{Q_1(x)}{(x-\alpha)^n y} dx$

Ar substitūciju $x - \alpha = \frac{1}{t}$, to reducē uz pirmo pamattipu. Var izteikt $x = \alpha + \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $t = \frac{1}{x-\alpha}$ un

$$y = \sqrt{a\left(\alpha + \frac{1}{t}\right)^2 + b\left(\alpha + \frac{1}{t}\right) + c} = \frac{\sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}}{\varepsilon t},$$

kur $a_1 = a\alpha^2 + b\alpha + c$, $b_1 = 2a\alpha + b$, $c_1 = a$ un $\varepsilon = \pm 1$, lai $\varepsilon t > 0$

Vispārīgā gadījumā, kad α nav trinoma $ax^2 + bx + c$ nulle, tad $a_1 \neq 0$ un zem saknes dabū otrās pakāpes polinomu: $a_1 t^2 + b_1 t + c_1$. Integrāls

$$\int \frac{Q_1(x)}{(x-\alpha)^n y} dx = \int \frac{Q_1\left(\alpha + \frac{1}{t}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)^n \frac{\sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}}{\varepsilon t}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt =$$

$$= \int \frac{-\varepsilon t^{n-1} Q_1\left(\alpha + \frac{1}{t}\right)}{\sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}} dt = \int \frac{P_{n-1}(t)\,dt}{\sqrt{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}}$$

reducējas ur pirmo integrāla tipu. Te $P_{n-1}(t) = -\varepsilon t^{n-1} Q_1\left(\alpha + \frac{1}{t}\right)$ ir polinoms ar pakāpi $n-1$, jo $Q_1(x)$ ir polinoms ar pakāpi $\leq n-1$.

Izņēmuma gadījumā, kad $a_1 = 0$, resp. $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, integrālu racionalizē ar substitūciju $b_1 t + c_1 = u^2$.

<u>Piezīmes:</u> 1. Ar piemērotām substitūcijām arī trešo integrāla pamatipu $\int \frac{Q_2(x)\,dx}{(x^2 + px + q)^n y}$ var reducēt uz pirmā tipa integrālu.

2. Arī integrālu $J = \int R\left(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{cx + d}\right) dx$ var reducēt uz iepriekš apskatīto ar substitūciju $ax + b = z^2$.

Tiešam, ar

$$x = \frac{z^2 - b}{a}, \qquad dx = \frac{2z\,dz}{a}$$

izteic

$$J = \int R\left(\frac{z^2 - b}{a}, z, \sqrt{c\frac{z^2 - b}{a} + d}\right) \cdot \frac{2z\,dz}{a} = \int R_1(z, \sqrt{a_1 z^2 + b_1})\,dz.$$

3. Abela integrālus $\int R(x, y)\,dx$, ja $y = \sqrt{P_n(x)}$ izteikts ar 3. vai 4. pakāpes polinomu $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(n = 3$ vai $4)$, sauc par eliptiskiem integrāliem. Savu nosaukumu tie ieguvuši no tā, ka tos dabū aprēķinot elipses loka garumu. Redukcija te analoga gadījumam, kad $n = 2$.

Ja $n \geq 5$, tad rodas hipereliptiskie integrāli.

15.§. Binomālā diferenciāla integrēšana.

Izteiksmi $(ax^\alpha + bx^\beta)^p\,dx$, kur α, β un p racionāli skaitļi, sauc par binomālo diferenciālu.

Šo izteiksmi var pārveidot, ņemot x^β ārpus iekavām:

$$x^{\beta p}(ax^{\alpha-\beta} + b)^p\,dx.$$

Ievedot jaunus racionālus skaitļus $\beta p = m$, $\alpha - \beta = n$, dabū

$$x^m(ax^n + b)^p\,dx$$

Tā ir binomālā diferenciāla kanoniskā dorma.

Apskatīsim integrālu

$$(1) \quad \int x^m(ax^n + b)^p\,dx$$

Tas ir Abela integrāla veids, jo sakars $y = x^m(ax^n + b)^p$ dod algebriskas līnijas vienādojumu $f(x, y) = 0$.

Ar jauno mainīgo $t = x^n$ izteic $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n} - 1}\,dt$ $(n \neq 0)$

un

$$J = \int x^m(ax^n + b)^p\,dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n} - 1}(at + b)^p\,dt.$$

Ir jānoteic integrāls

$$(2.) \quad J = \frac{1}{n}\int t^q(at + b)^p\,dt$$

kur $q = \frac{m+1}{n} - 1$.

Atšķirsim šādus trīs gadījumus.

1. p - vesels skaitlis vai nulle.

Tā kā q racionāls, tad $q = \frac{r}{s}$, kur $r \gtrless 0$, $s > 0$ ir veseli skaitļi. Ar substitūciju

$$t = u^s$$

izteic $dt = s u^{s-1}\,du$, $t^q = u^r$ un $J = \int \frac{1}{n} u^r(au^s + b)^p \cdot s\,u^{s-1}\,du = \int R(u)\,du$

Te $R(u)$ ir racionāla funkcija pret u, jo p, r un s ir veseli skaitļi. Tādēļ

$$J = \int R(u)\,du = F(u) + C = F(x^{\frac{n}{s}}) + C.$$

2. q -vesels skaitlis vai nulle.

Izteicam racionālo skaitli $p = \frac{r}{s}$ kā divu veselu skaitļu r un $s > 0$ dalījumu un lietojam substitūciju

$$at + b = u^s$$

Tad dabū

$$(at+b)^p = u^r$$

$$t = \frac{u^s - b}{a}, \quad dt = \frac{s u^{s-1}}{a} du$$

un

$$J = \int \frac{1}{n} \left(\frac{u^s - b}{a}\right)^q \cdot u^r \cdot \frac{s u^{s-1}}{a} du = \int R_1(u) du = F(u) + C$$

Ja ievieto

$$u = (at+b)^{\frac{1}{s}} = (ax^n + b)^{\frac{1}{s}},$$

tad rodas

$$J = F[(ax^n + b)^{\frac{1}{s}}] + C.$$

3. $p+q$ - vesels skaitlis vai nulle.

Pārveidojot integrālu (2.), dabūjam

$$J = \frac{1}{n} \int t^q [t(a + bt^{-1})]^p dt = \frac{1}{n} \int t^{p+q} (a + bt^{-1})^p dt.$$

Ja izteic $p = \frac{r}{s}$ kā veselu skaitļu dalījumu un lieto substitūciju

$$a + bt^{-1} = u^s,$$

tad

$$t^{-1} = \frac{u^s - a}{b}, \quad t = \frac{b}{u^s - a},$$

$$dt = \frac{-b\, s\, u^{s-1}}{(u^s - a)^2} du, \quad (a + bt^{-1})^p = u^r$$

un

$$J = \int \frac{1}{n} \left(\frac{b}{u^s - a}\right)^{p+q} \cdot u^r \frac{-b s u^{s-1}}{(u^s - a)^2} du = \int R_2(u) du = F_2(u) + C.$$

Pēc izteiksmes

$$u = \left(\frac{at+b}{t}\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\frac{ax^n + b}{x^n}\right)^{\frac{1}{s}}$$

ievietošanas primitīvā funkcijā $F_2(u)$ dabū

$$J = F_2\left[\left(\frac{ax^n + b}{x^n}\right)^{\frac{1}{s}}\right] + C$$

Piezīme. Krievu matemātiķis Čebiševs ie pierādījis, ka šie gadījumi ir vienīgie, kad binomālā diferenciāla integrālu var izteikt ar algebriskām un elementārām transcendentām funkcijām.

Speciālā gadījumā, kad $m = -1$, integrāls

$$\int x^{-1} (ax^n + b)^p dx$$

vienmēr ir izsakams ar elementārām funkcijām (t.i. $q = -1$)

Piemērs: $p = \frac{1}{2}, n = 1, a = b = 1, m = -1$

$$J = \int x^{-1} (x+1)^{1/2} dx = \int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$$

$$x + 1 = u^2, \; x = u^2 - 1, \; dx = 2u\,du,$$

$$J = \int (u^2 - 1)^{-1} u \cdot 2u\, du = 2 \int \frac{u^2 du}{u^2 - 1} = 2 \int \frac{u^2 - 1 + 1}{u^2 - 1} du,$$

jeb
$$J = 2u + 2\int \frac{du}{u^2-1} = 2u + 2\int\frac{du}{u^2-1} = 2u + \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

IV Transcendento funkciju integrēšana.

16.§. Integrāls $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$.

Vispārīgi šo integrālu var racionalizēt ar substitūciju $u = tg\frac{x}{2}$. Tiešām, var izteikt

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

un

$$x = 2\,arc\,tg\,u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

Tad dotais integrāls pārveidojas par

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2du}{1+u^2} = \int R_1(u)\,du = F_1(u) + C,$$

pēc substitūcijas $u = tg\frac{x}{2}$ dabū

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = F_1\left(tg\frac{x}{2}\right) + C.$$

Dažos gadījumos izdevīgāk lietot citas substitūcijas.

<u>1.gadījums.</u> $F(x) = R(\sin x, \cos x)$ ir periodiska funkcija ar periodu π, t.i. $F(\pi + x) = F(x)$. Ir zināms, ka arī $tg\,x$ funkcijai ir periods π, jo $tg(\pi + x) = tg\,x$. Pierādīsim, ka tad $F(x) = F_1(tg\,x)$.

Ievērojot sakarības

$$\sin x = \cos x \cdot tg\,x$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x},$$

var izteikt funkciju

$$F(x) = R(\sin x, \cos x) = \frac{g(\sin x, \cos x)}{f(\sin x, \cos x)} \qquad [g,\ f \text{ - polinomi}]$$

formā

$$F(x) = \frac{g_1(tg\,x) + g_2(tg\,x)\cdot\cos x}{f_1(tg\,x) + f_2(tg\,x)\cdot\cos x},$$

kur f_1, f_2, g_1 un g_2 apzīmē polinomus.

Sastādam nozīmi

$$F(x+\pi) = \frac{g_1[tg(x+\pi)] + g_2[tg(x+\pi)]\cos(x+\pi)}{f_1[tg(x+\pi)] + f_2[tg(x+\pi)]\cos(x+\pi)} = \frac{g_1(tg\,x) - g_2(tg\,x)\cos x}{f_1(tg\,x) - f_2(tg\,x)\cos x}$$

Tā kā funkcija $F(x)$ ir periodiska ar periodu π, tad no sakara $F(x+\pi) = F(x)$ secina

$$\frac{g_1(tg\,x) + g_2(tg\,x)\cos x}{f_1(tg\,x) + f_2(tg\,x)\cos x} = \frac{g_1(tg\,x) - g_2(tg\,x)\cos x}{f_1(tg\,x) - f_2(tg\,x)\cos x} =$$

$$= \frac{2g_1(tg\,x)}{2f_1(tg\,x)} \overset{*)}{=} \frac{g_1(tg\,x)}{f_1(tg\,x)} = R_1(tg\,x)$$

---

*) Ir lietota proporcijas īpašība

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Dabūjam tiešām $F(x) = R_1(tg\,x)$. Integrālu

$$J = \int R_1(tg\,x)\,dx$$

aprēķina ar substitūciju

$$tg\,x = u.$$

Tad

$$x = arctg\,u, \qquad dx = \frac{du}{1+u^2}$$

un

$$J = \int R_1(tg\,x)\,dx = \int R_1(u)\frac{du}{1+u^2} = \int R_2(u)\,du = F_2(u) + C = F_2(tg\,x) + C$$

2.gadījums: zemintegrāla funkcija $F(x) = R(\sin x, \cos x)$ ir nepāru funkcija, t.i. $F(-x) = -F(x)$. Tad var pierādīt līdzīgi iepriekšējam, ka funkcijai $F(x)$ jābūt ar veidu

$$F(x) = R_1(\cos x)\cdot\sin x$$

Lai aprēķinātu integrālu

$$\int F(x)\,dx = \int R_1(\cos x)\cdot\sin x\,dx,$$

lietojam substitūciju

$$\cos x = u,$$

ar kuŗu

$$-\sin x\,dx = du$$

un

$$\int R_1(\cos x)\sin x\,dx = -\int R_1(u)\,du = F_1(u) + C = F_1(\cos x) + C.$$

3.gadījumā, kad $F(\pi - x) = -F(x)$. Var pierādīt, ka šinī gadījumā funkcijai $F(x)$ ir veids

$$F(x) = R_1(\sin x).\cos x$$

Integrālu

$$\int R_1(\sin x)\cos x\,dx$$

aprēķina ar substitūciju

$$\sin x = u,$$

ar kuŗu izteic

$$\int F(x)\,dx = \int R_1(\sin x)\cos x\,dx = \int R_1(u)\,du = F_1(u) + C = F_1(\sin x) + C$$

Integrāla $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ atsevišķo veidu

$$J_{m,n} = \int \sin^m x\cdot\cos^n x\,dx,$$

kur m un n veseli skaitļi[x] var reducēt uz vienkāršākiem integrāliem, lietojot šādas rekurences formulas.

1. gadījums, kad $n > 0$.

$$J_{m,n} = \int \cos^{n-1}x\cdot\sin^m x\cos x\,dx = \int \cos^{n-1}x\,d\frac{\sin^{m+1}x}{m+1} =$$

$$= \frac{\sin^{m+1}x\cdot\cos^{n-1}x}{m+1} - \int \frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\cdot(n-1)\cos^{n-2}x\,(-\sin x)\,dx =$$

$$= \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx$$

x) Vispārīgā gadījumā, kad m un n ir racionāli skaitļi, minēto integrālu ar substitūciju $\sin^2 x = u$ reducē uz binomāla diferenciāla integrālu.

Tā kā

$$\sin^{m+2}x = \sin^m x \cdot \sin^2 x = \sin^m x(1-\cos^2 x),$$

tad

$$J_{m,n} = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}J_{m,n-2} - \frac{n-1}{m+1}J_{m,n}$$

Ja $m+n \neq 0$, tad

$$J_{m,n} = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}J_{m,n-2} \dots\dots\dots (1)$$

2.gadījums, kad $m>0$

$$J_{m,n} = \int \underbrace{\sin^{m-1}x}_{u} \cdot \underbrace{\cos^n x \sin x dx}_{du} = -\underbrace{\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1}}_{A}$$

$$+\int \frac{\cos^{n+1}x}{n+1}(m-1)\sin^{m-2}x\cos x dx = -A + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n+2}x \sin^{m-2}x dx,$$

Tā kā $\cos^{m+2}x = \cos^m x \cdot \cos^2 x = \cos^m x(1-\sin^2 x)$,

tad $J_{m,n} = -A + \frac{m-1}{n+1}J_{m-2,n} - \frac{m-1}{m+n}J_{m,n}$

No šejienes, kad $m+n \neq 0$, secina,

$$J_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}J_{m-2,n} \dots\dots (2)$$

Negatīvu kāpinātāju gadījumiem no sastādītām divām formulām var atvasināt divas citas.

3.gadījums, kad $n < 0$.

No formulas (1.) izteic

$$J_{m,n-2} = -\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1}J_{m,n}$$

Liekot n vietā $n+2$, dabū

$$J_{m,n} = -\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}J_{m,n+2} \dots (3)$$

4.gadījums, kad $m < 0$.

No formulas (2.) dabūjam

$$J_{m-2,n} = \frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m-1} + \frac{m+n}{m-1}J_{m,n}$$

Ja ņem $m-2$ vietā m, tad rodas

$$J_{m,n} = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n+1}x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}J_{m+2,n} \dots (4)$$

Ar šīm rekurences formulām visus integrālus $J_{m,n}$ varam reducēt uz šādiem pamatintegrāliem:

1. $m=n=0$

$$J_{0,0} = \int dx = x + C$$

2. $m=0,\ n=1$

$$J_{0,1} = \int \cos x dx = \sin x + C$$

3. $m=1,\ n=0$

$$J_{1,0}=\int \sin x\,dx=-\cos x+C$$

4. $m=n=1$

$$J_{1,1}=\int \sin x\cos x\,dx=-\frac{\cos^2 x}{2}+C=-\frac{\cos 2x}{4}+C'$$

5. $m=-1,\ n=0$

$$J_{-1,0}=\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$$

6. $m=0,\ n=-1$

$$J_{0,-1}=\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

7. $m=-1,\ n=-1$

$$J_{-1,-1}=\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{d2x}{\sin 2x}=\ln|tg x|+C$$

8. $m=+1,\ n=-1$

$$J_{1,-1}=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$$

9. $m=-1,\ n=1$

$$J_{-1,1}=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}=\ln|\sin x|+C$$

Rekurences formulas (1.) un (2.) pastāv, ja $m+n\neq 0$

Izņēmuma gadījumā, kad $n=-m$, integrāls

$$J_{m,-m}=\int\frac{\sin^m x}{\cos^m x}dx=\int tg^m x\,dx.$$

Meklēsim rekurences formulas integrālam

$$K_m=\int tg^m x\,dx,$$

pārveidojot to šādi:

$$K_m=\int tg^m x\,dx=\int\underbrace{\sin^{m-1}x}_{u}\cdot\underbrace{\cos^{-m}x\sin x\,dx}_{dv}=$$

$$=\frac{\sin^{m-1}x\cos^{-m+1}x}{m-1}+\frac{1}{-m+1}\int\cos^{-m+1}x(m-1)\sin^{m-2}x\cos x\,dx=$$

$$=\frac{1}{m-1}\,\frac{\sin^{m-1}x}{\cos^{m-1}x}-\frac{m-1}{m-1}\int\frac{\sin^{m-2}x}{\cos^{m-2}x}dx=\frac{tg^{m-1}x}{m-1}-\int tg^{m-2}x\,dx,$$

vai ar ievestajiem apzīmējumiem:

$$K_m=\frac{tg^{m-1}x}{m-1}-K_{m-2}\quad\ldots\ldots\quad(5)$$

Ja m negatīvs, tad no iepriekšējās formulas atvasina citu formulu:

$$K_{m-2}=\frac{tg^{m-1}x}{m-1}-K_m.$$

Ja liekam $m-2$ vietā m ,tad rodas

$$K_m = \frac{tg^{m+1}x}{m+1} - K_{m+2} \quad \ldots\ldots (6)$$

Ar formulām (5.) un (6.) K_m galīgi reducējas uz šādiem integrāliem:

1. $m = 1$

$$K_1 = \int tg\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

2. $m = -1$

$$K_{-1} = \int \frac{dx}{tg\,x} = \ln|\sin x| + C$$

3. $m = 0$

$$K_0 = \int dx = x + C$$

17.§. Integrāls $\int f(x) e^{ax} dx$

Aprēķināsim integrālu

$$\int f(x) e^{ax} dx$$

kur $a \neq 0$ un $f(x)$ ir n-pakāpes polinoms

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

Ar parciālo integrēšanu dabū sakarības formulu

$$\int f(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a} \int f(x) d e^{ax} = \frac{1}{a} f(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int f'(x) e^{ax} dx$$

un analogā kārtā citas formulas

$$\int f'(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a} f'(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int f''(x) e^{ax} dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int f^{(n-1)}(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a} f^{(n-1)}(x) e^{ax} - \frac{1}{a} \int f^{(n)}(x) e^{ax} dx.$$

Tā kā te $f^{(n)}(x) = const$,tad

$$\int f^{(n)}(x) e^{ax} dx = \frac{1}{a} f^{(n)}(x) e^{ax} + C$$

Pakāpeniski ievietojot, dabūjam

$$\int f(x) e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} \left[f(x) - \frac{1}{a} f'(x) + \frac{1}{a^2} f''(x) - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{a^{n-1}} f^{(n-1)}(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^n}{a^n} f^{(n)}(x) \right] + C = \frac{e^{ax}}{a} F(x) + C$$

Speciālā gadījumā, kad $a = -1$,polinoms

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \ldots + f^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x)$$

un

$$\int f(x) e^{-x} dx = -e^{-x} F(x) + C.$$

Tādēļ noteiktais integrāls

$$\int_0^x f(x) e^{-x} dx = \left[-e^{-x} F(x) \right]_0^x = -e^{-x} F(x) + F(0),$$

resp. $F(x) = e^{x} F(0) - e^{x} \int_0^x f(x) e^{-x}\, dx$ *)

18.§. Integrāls $\int e^{\alpha x} [f(x)\cos\beta x + g(x)\sin\beta x]\, dx$.

Lai šo integrālu reducētu uz apskatīto integrālu

$$\int f(x) e^{ax} dx,$$

izteiç no Eulera sakariem

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

ar eksponentfunkciju trigonometriskās funkcijas

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Pierādīsim, ka

$$(e^{ax})' = a e^{ax},$$

ja a ir komplekss skaitlis $\alpha + \beta i$

Tiešām no izteiksmes

$$e^{ax} = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

ar diferencēšanu sastāda

$$(e^{ax})' = \alpha \cdot e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}(-\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x) =$$
$$= e^{\alpha x}[\alpha(\cos\beta x + i\sin\beta x) + i\beta(\cos\beta x + i\sin\beta x)] =$$
$$= (\alpha + \beta i) e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = a e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x}$$

jeb

$$(e^{ax})' = a e^{\alpha x + i\beta x} = a \cdot e^{ax}$$

Tas nozīmē, ka eksponentfunkcijas atvasinājuma formula derīga arī tad, ja a ir komplekss skaitlis. Tādēļ derīga arī integrēšanas formula:

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \qquad (a \neq 0)$$

Doto integrālu

$$J = \int e^{\alpha x} [f(x)\cos\beta x + g(x)\sin\beta x]\, dx$$

var sadalīt divu integrālu

$$J_1 = \int e^{\alpha x} f(x)\cos\beta x \cdot dx, \qquad J_2 = \int e^{\alpha x} g(x)\sin\beta x\, dx$$

summā

$$J = J_1 + J_2$$

---

*) Šo formulu lieto pierādījumam par e transcendenci. Pierāda, ka nevar būt $C_0 e^{k} + C_1 e^{k-1} + \dots + C_k = 0$, ja C_i $(i = 0, 1, 2, \dots k)$ veseli skaitļi. Pirmais to pierādījis Ermits (Hermite). Līdzīgi pierāda arī π transcendenci (Lindemann).

Pēc trigonometrisko funkciju izteiksmju

$$\cos\beta x = \frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i}$$

ievietošanas zemintegrāla funkcijās, dabū

$$J_1 = \frac{1}{2}\int f(x)(e^{ax}+e^{\bar{a}x})dx$$

un

$$J_2 = \frac{1}{2i}\int g(x)(e^{ax}-e^{\bar{a}x})dx,$$

kur $a=\alpha+i\beta$ un $\bar{a}=\alpha-i\beta$ ir saistīti kompleksi skaitļi.

Konstatēsim, ka pastāv struktūrformula integrālam

$$(*) \int e^{ax}f(x)dx = F(x)e^{ax}+C \qquad (a=\alpha+\beta i)$$

kur $f(x)$ un $F(x)$ ir n-pakāpes polinomi

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ - reāli})$$

un

$$F(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n \qquad (A_0, A_1, \ldots, A_n \text{ - kompleksi})$$

Tiešām, atvasinot (*) pēc x, dabū

$$f(x).e^{ax}=F'(x)e^{ax}+F(x).a.e^{ax}$$

jeb

$$aF(x)+F'(x)=f(x).$$

Ja te ievieto polinomu izteiksmes un salīdzina koeficientus, tad rodas formulas:

$$\begin{aligned} &aA_0 = a_0 \\ &aA_1 + nA_0 = a_1 \\ &aA_2 + (n-1)A_1 = a_2 \\ &- - - - - - - \\ &aA_k + (n-k+1)A_{k-1} = a_k, \\ &- - - - - - - \\ &aA_n + 1.A_{n-1} = a_n, \end{aligned}$$

no kuŗām pakāpeniski var aprēķināt polinoma $F(x)$ koeficientus:

$$A_0 = \frac{a_0}{a}, \quad A_1 = \frac{a_1-nA_0}{a}, \ldots$$

Iepriekšējās formulas rāda, ka ar kompleksi saistīto skaitli $\bar{a}=\alpha-\beta i$ arī rodas kompleksi saistīti koeficienti $\bar{A}_0, \bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_n$, ja dotā polinoma $f(x)$ koeficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ir reāli. Tādēļ

$$\int e^{\bar{a}x}f(x)dx = \bar{F}(x)e^{\bar{a}x}+C,$$

kur

$$\bar{F}(x) = \bar{A}_0x^n+\bar{A}_1x^{n-1}+\ldots+\bar{A}_n$$

Abu apskatīto integrālu pussuma ir integrāls

$$J_1 = \frac{1}{2}\left[F(x)e^{ax}+\bar{F}(x)e^{\bar{a}x}\right]+\text{const}$$

Ievietojot izteiksmes

$$e^{ax} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$e^{\bar{a}x} = e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

un pārveidojot, dabū

$$J_1 = e^{\alpha x}\left[\frac{F(x)+\bar{F}(x)}{2}\cos\beta x + i\cdot\frac{F(x)-\bar{F}(x)}{2}\sin\beta x\right]$$

jeb

$$J_1 = e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x],$$

kur n-pakāpes polinomi

$$P_1(x) = \frac{F(x)+\bar{F}(x)}{2}, \quad Q_1(x) = i\frac{F(x)-\bar{F}(x)}{2}$$

ir ar reāliem koeficientiem, jo divu saistītu kompleksu skaitļu summa ir reāls skaitlis, bet to diference - tīri imaginārs skaitlis.

Tamlīdzīgā kārtā konstatē, ka integrāls

$$J_2 = e^{\alpha x}[P_2(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x] + const.$$

kur $P_2(x)$ un $Q_2(x)$ ir divi polinomi ar reāliem koeficientiem un pakāpi m, vienlīdzīgu dotā polinoma $g(x)$ pakāpei.

Tādēļ pastāv vispārīgā integrāla struktūrformula

$$\int e^{\alpha x}[f(x)\cos\beta x + g(x)\sin\beta x]dx = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x] + const.$$

kur $P(x)$ un $Q(x)$ ir divi polinomi, kuŗu pakāpes ir vienlīdzīgas ar doto polinomu $f(x)$ un $g(x)$ augstāko pakāpi.

Praktikā $P(x)$ un $Q(x)$ noteikšanai var lietot nenoteikto koeficientu metodi.

Piemērs: $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) + const.$

Pēc atvasināšanas rodas

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \alpha e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) + e^{\alpha x}(-A\beta\sin\beta x - B\beta\cos\beta x)$$

jeb

$$\cos\beta = (\alpha A + \beta B)\cos\beta x + (\alpha B - \beta A)\sin\beta x.$$

Tā tad

$$\begin{cases} \alpha A + \beta B = 1 \\ \alpha B - \beta A = 0 \end{cases}$$

no kurienes

$$A = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$B = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Piezīmes: 1. Uz apskatāmo integrāla tipu reducējas arī šāda veida integrāli

$$\int e^{\alpha x} f(x)\cos(\beta_1 x + \gamma_1)\cos(\beta_2 x + \gamma_2)\cdots\sin(\delta_1 x + \varepsilon_1)\sin(\delta_2 x + \varepsilon_2)\cdots dx$$

2. Arī dažu citu transcendento funkciju, piem. $\ln x$ integrāli reducējas uz iepriekšējiem integrāla tipiem.

Piemēram, integrālu

$$\int f(\ln x)\,dx$$

ar substitūciju $\ln x = t, \quad x = e^t, \quad dx = e^t dt$

var izteikt kā $\int f(\ln x)dx = \int f(t)e^t dt = F(t)e^t + C$

jeb

$$\int f(\ln x)dx = x F(\ln x) + C,$$

ja $f(t)$ un $F(t)$ apzīmē polinomus.

Turpretīm, kaut kādas <u>racionālās</u> funkcijas $R(\ln x)$ integrāls

$$\int R(\ln x)\, dx = \int R(t)e^t dt$$

vispārīgi nav izsakāms ar elementārām funkcijām.

Piemēram, integrāls

$$\int \frac{dx}{\ln x} = \int \frac{e^t}{t} dt$$

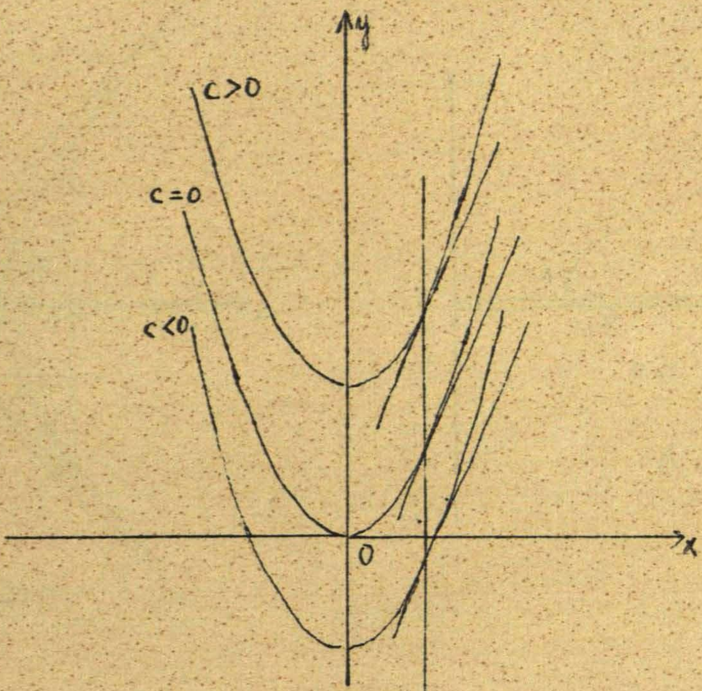
definē jaunu transcendentu funkciju - integrāllogaritmu.

<u>VZ - 100</u>
1941/V

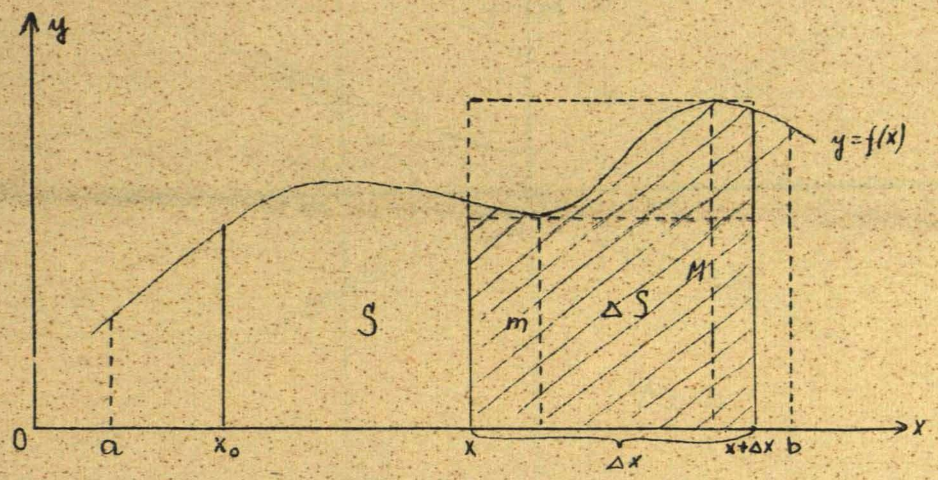
S a t u r s .

VZ = 100

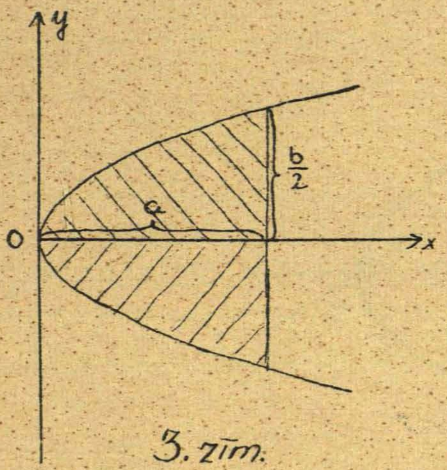
V /1941.



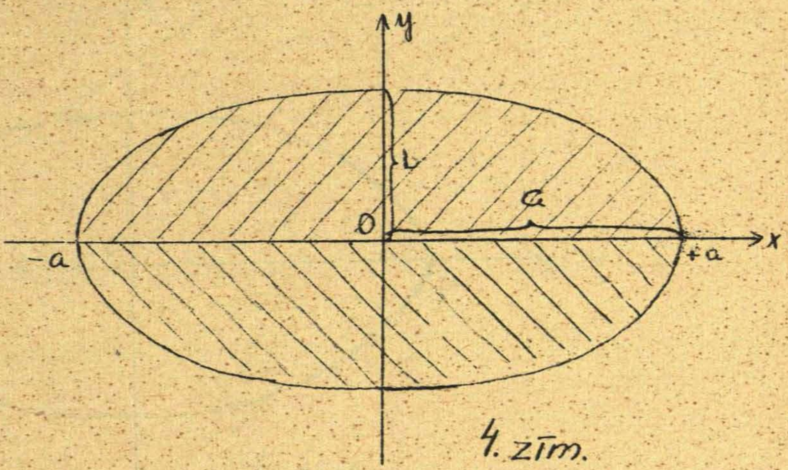
1. zīm.



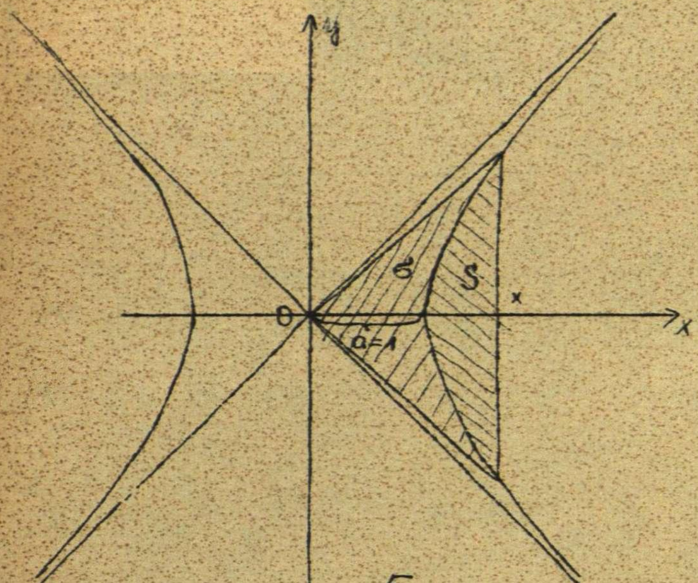
2. zīm.



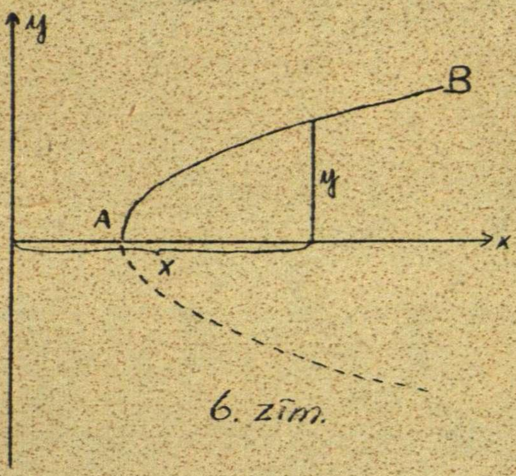
3. zīm.



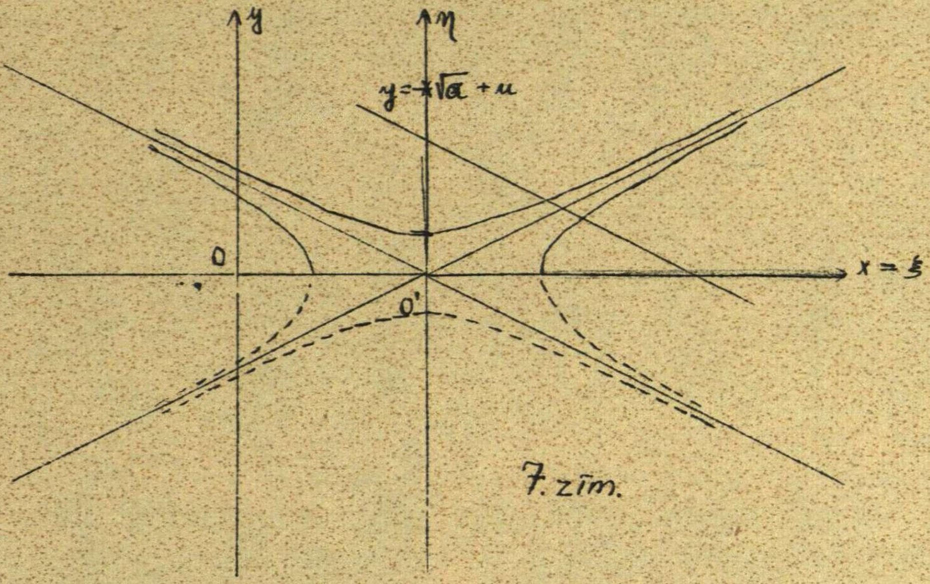
4. zīm.



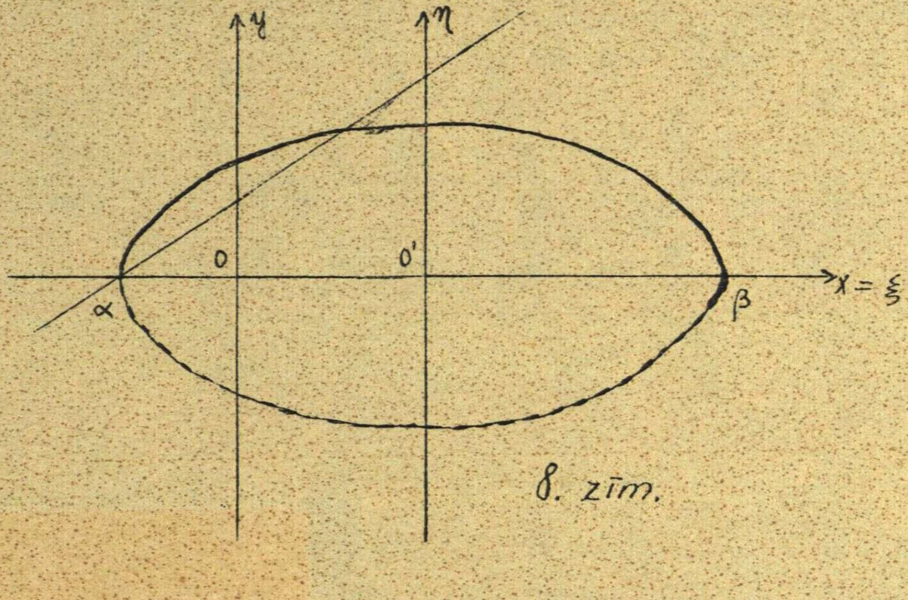
5. zīm.



6. zīm.



7. zīm.



8. zīm.