

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР

Институт механики полимеров

Р.И.Шлица

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА СТЕРЖНЕЙ С ПРЯМОЙ
И КРУГОВОЙ ОСЬЮ ИЗ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИКОВ.

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научные руководители:

доктор техн. наук, проф. Э.И. Гарнопольский

кандидат техн. наук А.В. Розе

Рига, 1971.

О г л а в л е н и е.

Стр.

§ 1. Введение; цель и содержание работы.

1.1. Вводные замечания.

5

1.2. Цель и содержание работы.

9

I глава. Экспериментальное изучение сплюснутости материалов, армированных волокнами.

§ 2. Сплюснутость; материалы и методика эксперимента.

§ 2.1. Краткий литературный обзор и цель эксперимента.

14

2.2. Материалы и методика эксперимента.

17

§ 3. Переход в зависимости между напряжениями и деформациями.

3.1. Испытания при комнатной температуре.

23

3.2. Испытания при повышенных температурах.

25

§ 4. Соотношение между продольными и поперечными деформациями.

28

II глава. Изгиб балки на упругом основании.

§ 5. Вводные замечания.

41

§ 6. Поперечный изгиб свободно опертой балки.

43

6.1. Синусоидальная нагрузка.

45

6.2. Равномерно распределенная нагрузка.

47

6.3. Сосредоточенная сила посередине балки.

49

6.4. Параболическое распределение изогнутых напряжений.

51

6.5. Влияние длины балки и сдвигов на прогибы и изогнутые напряжения.

58

§ 7. Экспериментальное исследование.	
7.1. Методика и техника эксперимента.	66
7.2. Результаты и их обоснование.	71
§ 8. Продольно-поперечный изгиб.	74
8.1. Равномерно распределенная нагрузка.	74
8.2. Сосредоточенная сила.	77
8.3. Влияние сдвигов на прогиб балок на упругом основании при действии поперечной и продольной силы.	79
§ 9. Устойчивость.	
9.1. Выращение для определения критической силы.	83 80
9.2. Влияние упругого основания и податливости балки на критическую силу.	85
9.3. Влияние параметров анизотропии, длины и высоты балки на критическую силу.	86
<u>III глава.</u> Приложение теории изгиба балок на упругом основании к исследованию цилиндрических оболочек.	
§ 10. Оценка краевого эффекта у осесимметрично нагруженных цилиндрических оболочек.	
10.1. Балочная аналогия.	95
10.2. Оценка С.А. Амбарцумяна.	95
10.3. Влияние сдвигов.	96
10.4. Основные зависимости.	99
10.5. Максимальные прогибы и напряжения.	101
10.6. Протяженность зоны краевого эффекта.	105

§ II. Оценка верхней критической силы цилиндрических оболочек.	113
--	-----

IV глава. Изгиб стержней с круговой осью.

§ 12. Схемы испытания колец из материалов, армированных волокнами.	116
§ 13. Тонкостенное кольцо.	120
§ 14. Изгиб плоского кривого бруса радиальными силами; основные зависимости.	124
§ 15. Замкнутое кольцо, нагруженное радиальными силами.	131
§ 16. Подход Тимошенко С.П.	138
§ 17. Изгиб свободно опертого сегмента со сосредоточенной силой посередине пролета.	143
§ 18. Экспериментальное определение упругих и прочностных характеристики немоточных материалов.	
18.1. Материалы и методика эксперимента.	151
18.2. Жесткость.	153
18.3. Прочность.	163

Выводы	166
--------	-----

Литература	170
------------	-----

§ I. Введение; цель и содержание работы.

I. I. Вводные замечания. В настоящее время в технике широко применяются материалы, армированные волокнами.^{х)} Перспективность этих материалов общепризнана [49], [17]; она неоспоримо доказана всесторонними исследованиями и практикой эксплуатации ответственных конструкций. Производство и применение стеклопластиков в ряде стран мира представляет собой крупную область промышленности. Все мире изучаются и используются материалы, армированные волокнами металлов, графита, сапфира, рубина и т.д. Ведутся поиски новых схем армирования, создаются материалы с пространственной схемой армирования, образованной системой двух и даже трех нитей.

Интерес к композитам непрерывно возрастает. Об этом свидетельствуют как рост числа исследований в этой области (см., например, [17], [35], [40], [55]) (в мире издается уже несколько специальных журналов), так непрерывный рост затрат на изучение и внедрение композитных материалов. Особое внимание привлекают вопросы механики композитов — они становятся предметом обсуждения специальных конференций, а также занимают все больше места в программах конференций по расчету самых различных конструкций (см., например, [95], [113]).

х) В работе под этими материалами понимаются материалы у которых податливая матрица армирована в заданных направлениях непрерывными волокнами. Примеры применения этих материалов в технике даны, например, в работах [88] — [85], [94] — [96], [99], [100], [104], [109], [110], [114] — [116], список которых может быть существенно продолжен.

При существующей технологии производства большинство конструкций из материалов, армированных волокнами, имеют слоистую или волокнистую структуру; разработка пространственных схем армирования находится еще в начальной стадии. Такое строение порождает ряд достаточно хорошо изученных отрицательных особенностей армированных пластмасс: сдвиговая жесткость и прочность и механические свойства в направлении перпендикулярном армирующим волокнам в основном определяются матрицей и адгезионной связью между матрицей и армирующими волокнами, жесткость и прочность которых по крайней мере на порядок ниже соответствующих характеристик армированных волокон (см., например, [5], [3, 2]).

Особенности строения и свойств материалов, армированных волокнами изучены достаточно подробно; этому посвящены, в частности, монографии [61], [66], в которых использованы и результаты автора диссертации. Поэтому в данной работе нет необходимости подробно анализировать отрицательные особенности рассматриваемых материалов. Для дальнейшего изложения требуется оценка степени анизотропии последующих материалов. О ней можно судить по данным таблицы I, полученным при испытаниях широкого класса армированных пластмасс с различной укладкой арматуры. Если следуя С.А. Амберцуняну [3], [4], к существенно анизотропным материалам отнести материалы, у которых отношения типа $\frac{E_x}{G_{xz}}$; $\frac{E_y}{G_{yz}}$; $\frac{E_x}{E_z}$ не менее 5, то как видно из приведенной таблицы, стеклопластики относятся к существенно анизотропным материалам. Применение для армирования более жестких волокон, например, волокон бора, увеличивает степень анизотропии.

Типичные соотношения, характеризующие сопротивление армированных
пластиков межслойному сдвигу и скатыванию, перпендикулярно волокну

Анизотропные свойства	Стеклопластики				Боропластики	Углепластики
	Однонаправленные 1 : 0	слоистые укладка 1 : 1		пространственные волокнистые стекло-текстолиты	однонаправленные	однонаправленные
		1 : 0	1 : 1	стекло-текстолиты	1 : 0	1 : 0
$\frac{E_x}{G_{xz}}$	20-35	10-20	10-15	8-10	до 100	40-80
$\frac{\Pi_x}{\Pi_{xz}}$	30-40	10-15	7-10	2-5	20-50	20-40
$\frac{E_x}{E_z}$	5-8	8	8	1-5	8-12	20-30
$\frac{\Pi_x^+}{\Pi_z^-}$	6-10	8	2	1,00	10	6-10
$\frac{\Pi_x^+}{\Pi_z^+}$	до 25	-	до 15	1,00	15-30	20-40

Примечание: E_x , Π_x - модуль упругости и прочность в направлении армирования;
 E_z , Π_z - модуль упругости и прочность в направлении перпендикулярно
 направлению армирования; G_{xz} ; Π_{xz} - модуль и прочность межслойного сдвига;
 знаком (+) обозначено растяжение, знаком (-) скатывание.

Слабое сопротивление сдвигу и растяжению-сжатию перпендикулярно армирующим волокнам потребовали пересмотра границ применимости традиционных гипотез прикладной теории упругости при расчете изделий из этих материалов. В задачах изгиба стержней, пластин и оболочек из изотропных материалов используют гипотезу недеформируемых нормалей если высота h мала по сравнению с длиной l или радиусом R (соответственно $(\frac{h}{l})^2 \ll 1$ или $(\frac{h}{R})^2 \ll 1$). При расчете конструкций из анизотропных материалов необходимость учета межслойных сдвигов определяется не только отношением $\frac{h}{l}$ или $\frac{h}{R}$, но и отношением $\frac{E_x}{G_{xz}}$, необходимостью учета растяжения-сжатия в трансверсальном направлении — отношением $\frac{h}{l}$ или $\frac{h}{R}$ и отношением $\frac{E_x}{E_z}$.

Изучение слабого сопротивления сдвигу имеет еще одну сторону. Как показал опыт, у изделий из материалов, армированных волокнами (особенно при слоистой структуре), проявляется склонность к трещинообразованию. Ряд данных [14], [45], [32] свидетельствуют, что растрескивание материала могут вызывать касательные напряжения τ_{xz} . Уже при изготовлении материалов, состоящих из двух или более компонентов, трудно избежать образования микро и макро дефектов. Существенное отличие между механическими свойствами обших композитов способствует появлению и развитию трещин в процессе деформирования материалов. Поэтому изделия из армированных пластиков теряют сплошность задолго до полной потери несущей способности. Это должно быть учтено при расчете конструкций, к которым предъявляется требование герметичности. Однако склонность композитов к трещинообразованию изучена слабо, хотя при разработке уточненных методов расчета деталей

необходима оценка верхней границы применимости предлагаемых расчетных методов.

1.2. Цель и содержание работы. Предметом изучения в данной работе является поведение стержней с прямой и круговой осью. Выполненные исследования подчинены цели создания основ расчета сосудов (труб, резервуаров, емкостей), когда преждевременный выход из строя может определяться не только потерей несущей способности, но и потерей герметичности. Эти изделия являются весьма ответственными элементами конструкций; в то же время для их изготовления широко применяются материалы, армированные волокнами. Решения построены с учетом специфических особенностей механических свойств композитных материалов - сильной анизотропии и слабого сопротивления сдвигу. Рассмотрены типовые случаи нагружения, когда радиальная нагрузка постоянна, или существенно меняется только в осевом или только в окружном направлениях (рис. I). Полученные решения позволяют учитывать также влияние осевой нагрузки.

Исследования проводятся на примере балки на упругом основании и кольца. Разумеется, такой подход не является исчерпывающим, однако позволяет в достаточной мере оценить влияние основных параметров.^{х)} Поэтому полученные результаты могут быть использованы при разработке методов расчета рассматриваемых конструкций. Кроме того, эти же результаты важны при выборе и регламентации методов испытаний материалов, армированных волокнами [97], [113]. Оболочки из этих матери-

х) Об этом свидетельствует методика изложения классических курсов сопротивления материалов [78], [81].

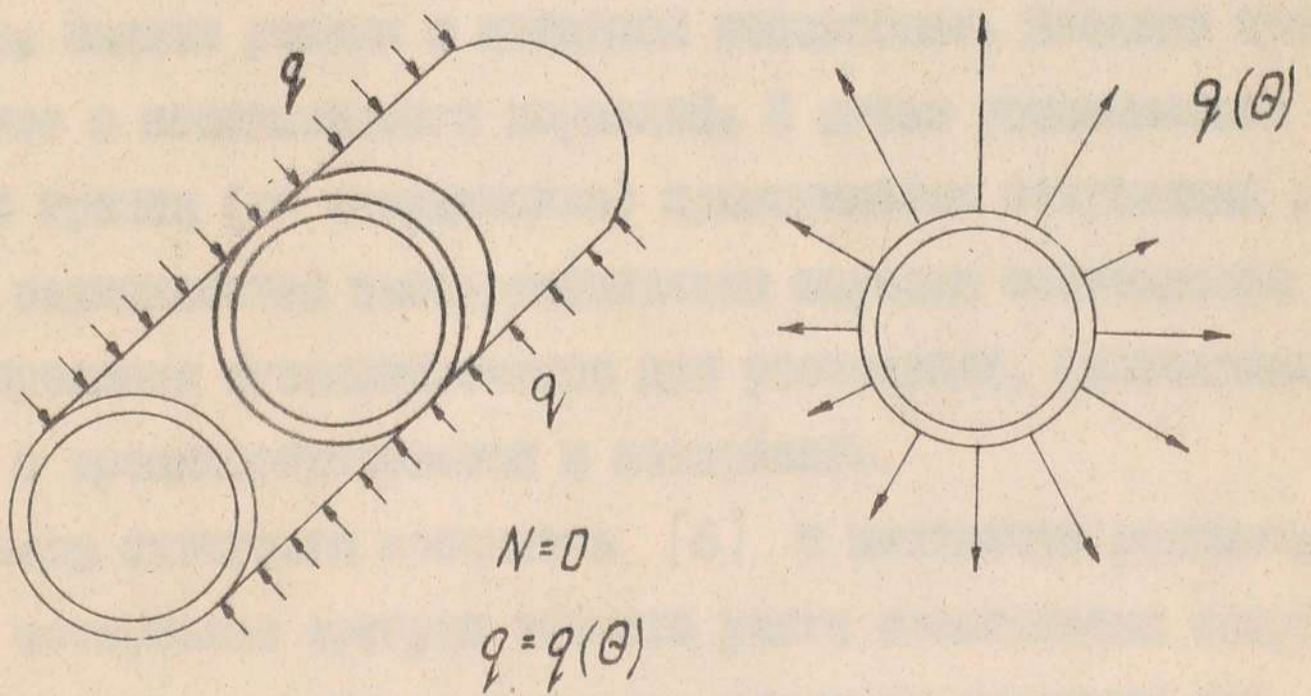
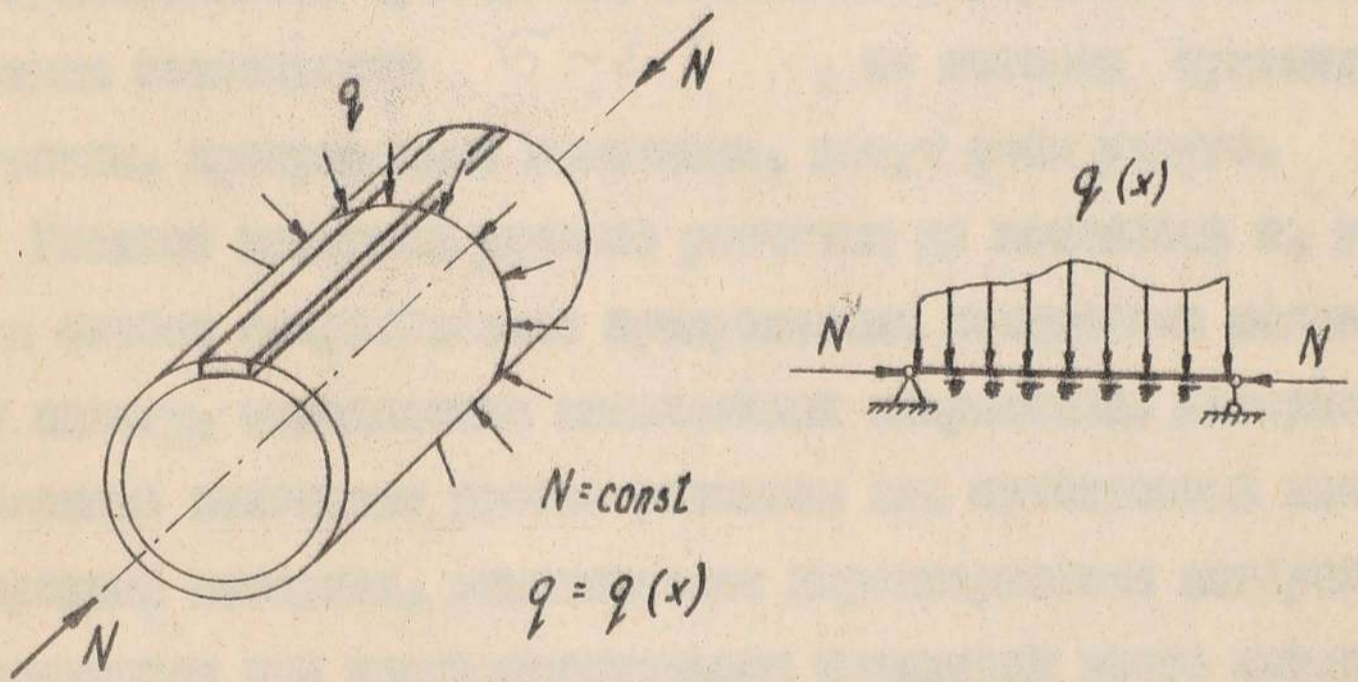
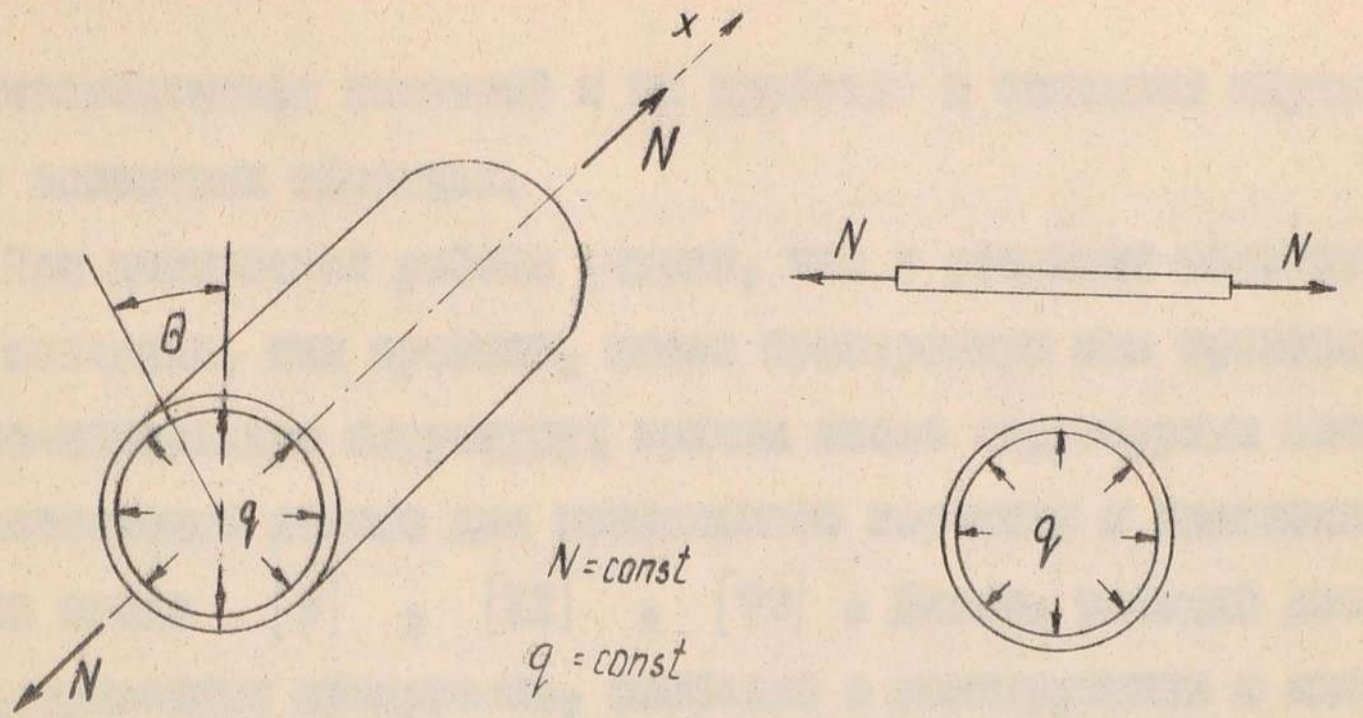


Рис. 1. Типовые схемы нагружения цилиндрических оболочек.

лов изготавливаются намоткой и их свойства в основном изучаются на кольцевых образцах.

При построении работы учтено, что в реальных конструктивных материалах, как правило, имеет ортотропную или трансверсально-изотропную структуру; причем число структурных элементов достаточно велико для предельного перехода к квазиоднородной среде [9], [11], [79]. Далее, рабочий диапазон рассматриваемых материалов, особенно в конструкциях к которым предъявляются требования сплошности, ограничен начальным участком зависимости $\sigma \sim \varepsilon$, на котором существующие материалы, армированные волокнами, ведут себя упруго.

Главное внимание уделено расчетам на жесткость и, учитывая слабое сопротивление армированных материалов межслойному сдвигу, определению касательных напряжений. Материалы, армированные волокнами, рассматриваются как ортотропный квазиоднородный материал, механические характеристики которого определяются при экспериментальном испытании всего материала в целом. Задачи решены в линейной постановке. Введено предположение о несжимаемости нормалей. С целью установления верхних границ (по напряжениям) применимости полученных расчетных зависимостей экспериментально изучены особенности деформирования стеклопластиков при растяжении, позволяющие судить о трещинообразовании в материале.

Малая сдвиговая прочность [6] и жесткость рассматриваемых материалов требует точного учета касательных напряжений, поэтому в работе решения в основном получены без постулирования распределения касательных напряжений по высоте стержней. Оценивается точность аппроксимаций закона распределения квадратной параболой. Дана оценка погрешности

применения гипотезы прямых нормалей для рассмотренных задач. Отмечено, что полученные решения не пригодны для изучения локальных эффектов, т.е. в зонах, расположенных в непосредственной близости закрепления краев и приложения сосредоточенных сил.

Экспериментальная проверка выполнена на отечественных серийных стеклопластиках, армированных ровницей и тканью сатинового переплетения. Укладка ровницы 1:0 или 1:1 в взаимно-перпендикулярных направлениях. Связующее: фенолформальдегидное (материалы ЛСО-Р-2М), эпоксиполиэфирное (материал ЛСБ-*F*), эпоксифенольное (стеклотекстолит). Хотя экспериментальная проверка проводилась на стеклопластиках, полученные результаты характерны для всех материалов, когда податливая матрица армирована непрерывными волокнами. Применение более жесткой и более прочной арматуры лишь усиливает анизотропию и тем самым увеличивается важность учета изученных факторов.

Особенность построения работы состоит в том, что литературный обзор дан не в диссертации в целом - в настоящее время нет необходимости доказательства важности учета отмеченных отрицательных особенностей при расчете конструкций из композитных материалов, а отдельно по главам. Все главы содержат литературный обзор, непосредственно относящийся к рассматриваемой задаче, и доказательства ее важности. Каждая глава заканчивается выводами. Такое изложение материала наилучшим образом подчинено цели работы.

ГЛАВА I

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ СПЛОШНОСТИ МАТЕРИАЛОВ, АРМИРОВАННЫХ ВОЛОКНАМИ.

§ 2. Сплошность; материалы и методика эксперимента.

2.1. Краткий литературный обзор и цель эксперимента.

Отрицательной особенностью материалов, армированных золотыми нитями является появление трещин задолго до полного разрушения материала. Начало трещинообразования определяет допустимые напряжения в деталях к которым предъявляются требования герметичности. В частности, требования герметичности почти всегда предъявляются к оболочкам.

Экспериментально, главным образом, изучено трещинообразование стеклопластиков. При испытаниях гидростатическим давлением цилиндров из стеклопластиков, имеющих слоистую структуру наблюдается "порог" трещинообразования, при котором понижается жесткость материала и нарушается герметичность [103]. Зависимость деформация-давление имеет перелом [20]. Эти особенности, как показано в работе [20], могут быть объяснены преждевременным разрушением связующего при нагружении оболочки. Работами иностранных авторов показано, что зависимость

$\sigma_x \sim \epsilon_x$ для этих материалов при растяжении в направлении

армирования после начального прямолинейного участка тоже имеет перелом, после которого начинается нелинейная зависимость

$\sigma_x \sim \epsilon_x$ или второй более или менее продолжительный прямолинейный участок [93], [98], [106], [108], [114].^{х)} При нагружении выше перелома в зависимости $\sigma_x \sim \epsilon_x$ скачкообразно увеличивается

способность материала впитывать воду (водопогло-

^{х)} Интересно отметить, что зависимость $\sigma_x \sim \epsilon_x$ естественного анизотропного материала - дерева, по данным работы [105] также имеет перелом и два прямолинейных участка.

прочность) [106] , [108] . Как свидетельствуют микрошлифы, в структуре появляются трещины [106] , [114] . О границе трещинообразования также свидетельствует увеличиваемый на слух треск при испытаниях на растяжение. При исследовании скорости затухания свободных колебаний было обнаружено [66] , что нагружение стеклопластиков выше предела в зависимости $\sigma_x \sim \epsilon_x$ сопровождается резким увеличением демпфирующей способности материала. Это объясняется тем, что наличие трещин увеличивает рассеивание энергии.

Возникновение трещин задолго до разрушения материала способствует искривления волокон. В структуре стеклотекстолитов регулярные искривления волокон являются обязательными, в стеклопластиках, армированных ровницей во все где встречаются случайные искривления. А.Меттинг и Х.Хафферманн [107] при помощи поляризационно-оптического метода показали, что возникновение искривлений отдельных волокон происходит во время полимеризации связующих. При растяжении в направлении армирования искривленные волокна, как показано в работах М.В.Дэсэй и Ф.Д.Мак-Герри [101] , В.В.Болотина [14] , А.С.Вранча и В.П.Тамуза [45] , И.Г.Кигуна [25] вызывают появление касательных напряжений τ_{xz} (x - направление армирования и растяжения, z - направление перпендикулярно армирующим слоям). Наиболее напряженной, как показано в работах [37] , [112] , является область матрицы у поверхности стекловолокна. Так как прочность связующего и адгезионная прочность пары связующее-стекло гораздо ниже прочности стекловолокна, то возникающие касательные напряжения τ_{xz} уже начиная с среднего напряжения σ_x^* могут вызвать расслоивание образца в более напряженных местах.

В то же время кривые деформирования при растяжении в на -

правления армирования, приведенные в отечественной литературе, часто были сняты только на начальном линейном участке зависимости $\sigma_x \sim \epsilon_x$ (например [52], [92]). В случаях, когда кривые деформирования сняты до момента разрушения, зависимости $\sigma_x \sim \epsilon_x$ показаны без пореломов: они были представлены или в виде одной прямой, которая переходит в кривую только незадолго до разрушения (стеклопластики, армированные ровницей [24]), или пологой кривой (стеклопластики, армированные тканью [53]).

Таким образом, между экспериментальными данными зависимости $\sigma_x \sim \epsilon_x$ имеется некоторое разногласие. Совершенно отсутствует данные о виде зависимости между напряжением и коэффициентами Пуассона - сохраняется ли при деформировании стеклопластиков соотношение между продольными и поперечными деформациями постоянным, а если меняется, то при каком минимальном уровне растягивающего напряжения это происходит. Недостаточно исследован характер деформации до и после напряжения σ_x^* .

Поэтому представляет интерес определение зависимости $\sigma_x \sim \epsilon_x$, а также соотношения между продольными и поперечными деформациями, при растяжении стеклопластиков на разных (эластичных и пластичных) связующих и с различным армированием (ровница в одном и в двух взаимно перпендикулярных направлениях, ткань), определение характера деформации до и после σ_x^* . В случае выявления перелома в зависимости $\sigma_x \sim \epsilon_x$, приняв во внимание экспериментальные результаты работ [65], [93], [103], [106], [108], [114], напряжение соответствующее перелому в кривой деформирования могут одновременно являться границей применимости решений прикладной теории упругости и границей герметичности (границей сохранения монолитности во всем объеме материала).

2.2. Материалы и методика эксперимента. Испытывались

отечественные стеклотекстолиты стандартного производства на костном (феноло-формальдегидном, материал АГ-4С, АГ-4В), жестко-пластичном (эпоксидная смола с феноло-эпихлоридно-формальдегидной добавкой, материал 27-63С) и пластичном (эпоксо-фенольное, стеклотекстолит) связующих. Жестким принято считать связующее, у которого зависимость между напряжением и деформацией остается практически линейной до самого разрушения. Пластичным связующее, у которого зависимость $\sigma_x \sim \epsilon_x$ после достижения определенного уровня напряжений заметно отклоняется от линейной и включает пластичный участок. Испытывались материалы с укладкой волокон в одном направлении (27-63С, АГ-4С), в двух взаимно-перпендикулярных направлениях (с укладкой волокон 1:1, 27-63С, АГ-4С), армированные стеклотканью сатинового переплетения (стеклотекстолит на эпокси-фенольном связующем) и с хаотическим расположением стекловолокон (АГ-4В). Материалы с ориентированным расположением армирующих волокон готовились без предварительного натяжения волокон; волокна имели начальные искривления (регулярные у стеклотекстолита и случайные у материалов 27-63С и АГ-4С)^х).

Образцы из каждого материала изготавливались при одинаковом оптимальном технологическом режиме, чаще всего вырезались из одного и того же листа. Учитывая возможные отклонения в режимах прессования и влияние технологии изготовления на свой-

х) Наличие искривленных волокон у испытанных образцов позволяет объяснить механизм возникновения трещин по [101].

ства армированных пластинок, предварительно на материалах АГ-4С и АГ-4В была сделана проверка влияния температуры t_0 и давления прессования p_0 (при постоянном времени прессования T_0 и одинаковом процентном содержании стекла по весу) на прочность и модуль упругости стеклопластиков. Если прочность материалов существенно зависит от параметров формования [59], то на модуль упругости в направлении вдоль волокон параметры формования влияют незначительно (рис.2). Это дает возможность сопоставить данные по модулю упругости, полученные на образцах, изготовленных при технологических режимах, несколько отклоняющихся от оптимальных.

Образцы имели форму полоски длиной $l = 250$ мм, шириной $\sim 12-15$ мм, толщиной $5-8$ мм. Поперечное сечение составило $0,75-1,0$ см² и было достаточным для устранения существенного влияния поперечного эффекта [58], [24]. Подсчеты по формулам работы [51] показывают, что при выбранных размерах образца напряженное состояние можно считать однородным на длине 100 мм (рис.3); без измерения была выбрана 100 мм. Деформация и усиление растяжения измерялись при помощи термостойких тензодатчиков. Для измерения деформаций применялся тензомер, включающий преобразователь деформации (рис.4): две тонкие стальные пластинки, у задних концов которых наклеены два термостойких тензодатчика сопротивления. В качестве регистрирующей аппаратуры использовался маячковый осциллограф К-12. Точность определения относительной деформации $\pm 0,03\%$; усилия ± 20 кг. Так как изучалось упругое поведение материалов, скорость деформирования в соответствии с рекомендациями работы [48] была выбрана такой, чтобы исключить влияние высокоэластической деформации и равня-

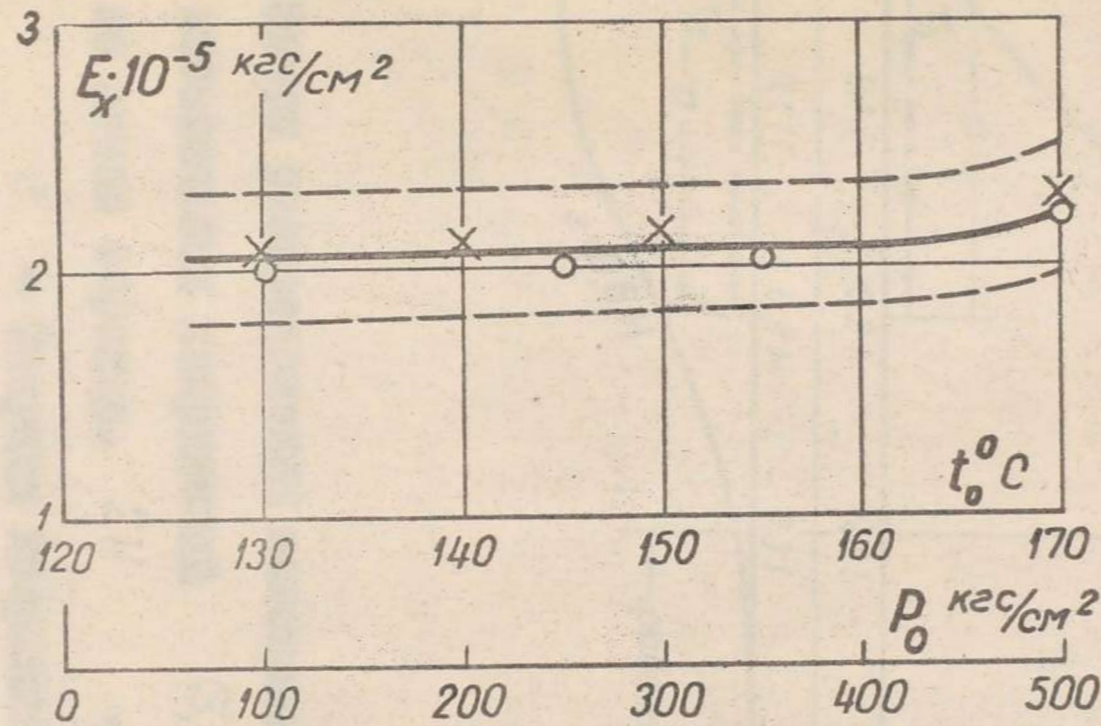


Рис.2. Влияние параметров формования на модуль упругости стекло -
 пластики АГ-4С (укладка 1:1)

$$\begin{array}{l}
 x - E_x = f(p_0) \quad (T_0 = 3 \text{ мин/мм} = \text{const} \quad , \quad t_0 = 145^\circ\text{C} = \text{const}) \\
 o - E_x = f(t_0) \quad (T_0 = 3 \text{ мин/мм} = \text{const} \quad , \quad p_0 = 400 \text{ кгс/см}^2 = \text{const})
 \end{array}$$

Пунктирными линиями обозначен осредненный доверительный интервал
 (построенный в соответствии с рекомендациями работы [57])

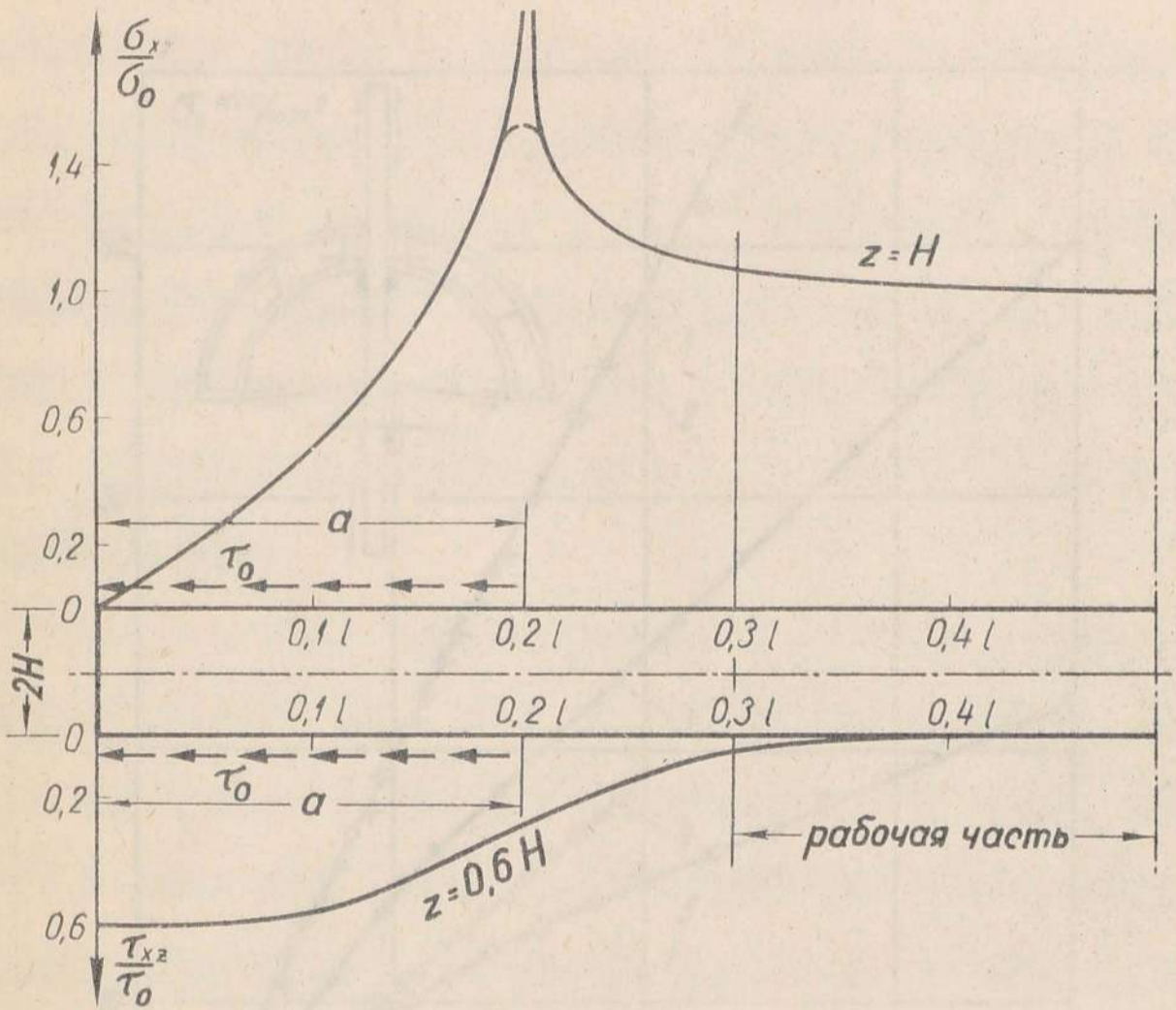


Рис. 3. Эпюры распределения максимальных нормальных и касательных напряжений σ_x и τ_{xz} по длине образца. $2H$ — толщина образца; z — текущая координата по толщине образца; $\sigma_0 = \tau_0 \frac{a}{H}$; τ_0 — интенсивность приложенных касательных усилий.

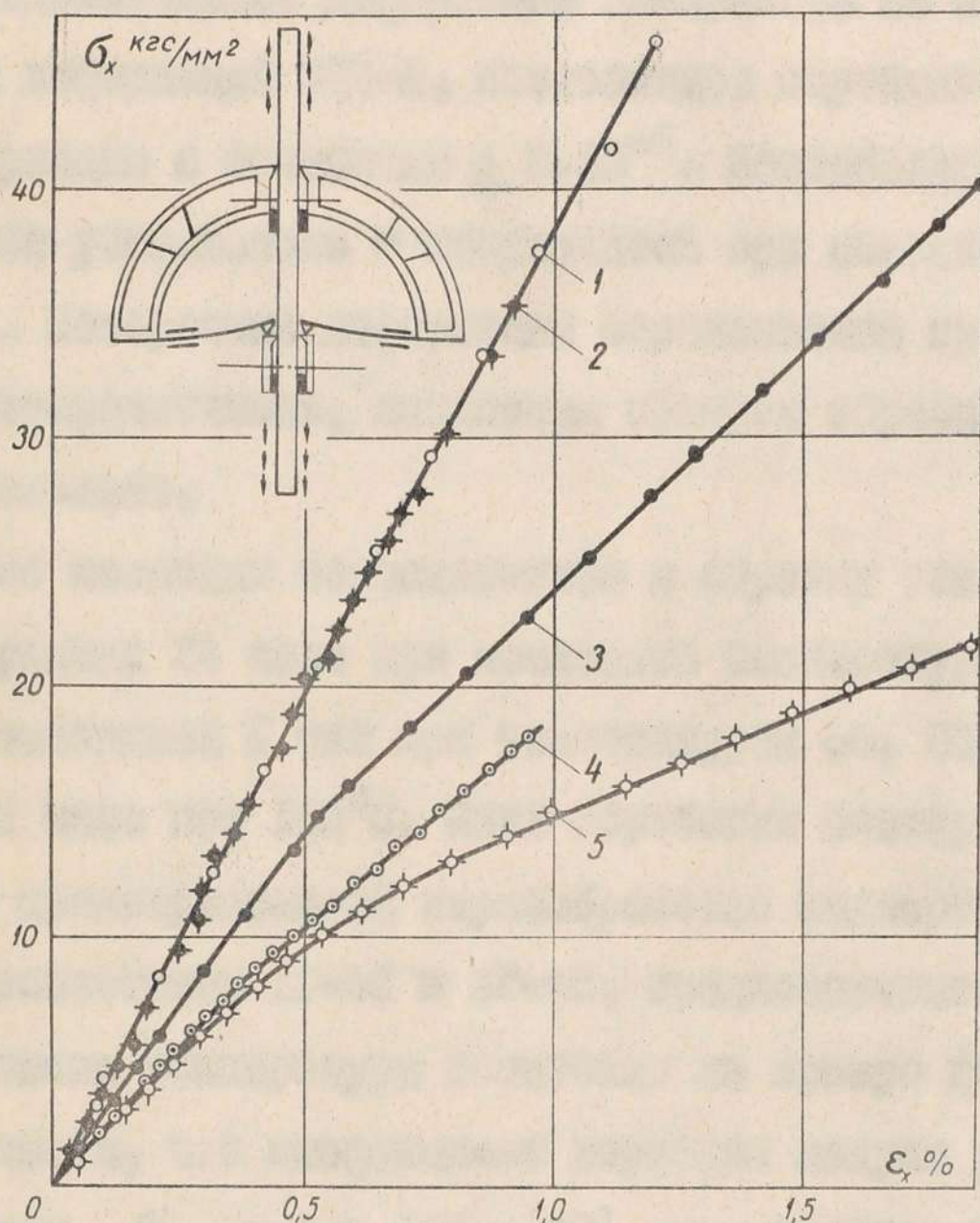


Рис. 4. Кривые деформирования стеклопластиков при растяжении при комнатной температуре: 1 - 27 63 С (однонаправленный); 2 - АГ-4С (однонаправленный); 3 - 27 63С (укладка 1:1); 4 - АГ-4С (укладка 1:1); 5 - стеклотекстолит с эпоксиэфенольными связующими.

ласть ($0,05 \pm 0,005$) ссек.

Для изучения остаточных деформаций по середине образца с двух сторон наклеивались термостойкие тензодатчики, соединенные последовательно. Деформации измерялись на измерителе статических деформаций ИСД-2, позволяющем определить относительную деформацию с точностью $\pm 3 \cdot 10^{-6}$. Нестабильность показаний во времени учитывалась и исключалась при помощи контрольных датчиков. Поперечные деформации определялись при помощи термостойких тензодатчиков, наклеенных поперек образца и соединенных последовательно.

После наклейки тензодатчиков к образцу режим отверждения был следующим: 24 часа при комнатной температуре, потом нагревание с выдержкой 1 час при температурах 60, 80, 100, 120, 140°C и 2 часа при 160°C. Цикл обработки повторялся две раза. Такой же предварительной термообработке подвергались образцы из стеклопластиков АГ-4С и АГ-4Б, предназначенные для определения влияния температуры испытания на кривую деформирования.

Учитывая, что коэффициент вариации модуля упругости стеклопластиков $v_E = 4 - 12\%$ [68], для построения каждой кривой деформирования испытывалось по 5-8 образцов.

Поперечные деформации при выбранной температуре определялись по 8 образцам. Остаточные деформации определялись по 12 образцам. Для оценки рассеивания экспериментальных результатов определялись коэффициенты вариации: прочности - v_{σ} , напряжения σ_x^* , при котором происходит перелом в кривой деформирования - v_{σ}^* , модуля упругости - v_E , и коэффициенты вариации, характеризующие разброс деформаций при

постоянные напряжения $\rightarrow \nu_E$, в разрыве отношения

$$\frac{\sigma_x^*}{\Pi_x} = \nu_x \cdot$$

§ 3. Переход в зависимости между напряжениями и деформациями.

3.1. Доказательство при комплексной деформации. На рис. 4 представлены характерные кривые деформирования стеклопластиков с различной укладкой стекловолокон. Кривые 1 и 2 характеризуют зависимость напряжение - деформация при растяжении одноосевных стеклопластиков 27-63С и АГ-4С (с одинаковым процентным содержанием арматуры); кривые 1 и 2 практически совпадают между собой. Кривые деформирования состоят из двух прямолинейных участков с модулями упругости E_{1x} и модулем E_{2x} . Кривоизменение модуля упругости наблюдается при напряжениях $\sigma_x^* = 0,45 \Pi_x$ (27-63С) и $\sigma_x^* = 0,55 \Pi_x$ (АГ-4С); коэффициент вариации соответственно равен 12% и 15%. Π_x - кратковременная статическая прочность при растяжении. Так как модуль упругости E_{1x} отличается от модуля E_{2x} менее, чем на 5%, то кривые деформирования ориентированных стеклопластиков могут быть аппроксимированы одной прямой. С удивительной для практики точностью можно считать, что эти материалы вплоть до разрушения следуют закону Гука.

Кривые 3 и 4 иллюстрируют связь между напряжением и деформацией в стеклопластиках 27-63С и АГ-4С, армированных равным количеством стекловолокон в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Кривые включают две прямолинейных участка, но при

этой укладке стекловолокон разница между модулем упругости E_{1x} и модулем E_{2x} проявляется более отчетливо, чем в случае однонаправленных стеклопластиков, и составляет 15-25% для АГ-4С и 25-33% для 27-63С. Перелом в зависимости напряже-ние-деформация для стеклопластика 27-63С происходит при $\sigma_x^* = 0,38 \Pi_x$ (коэффициент вариации $\nu_x = 8\%$), а для стеклопластика АГ-4С при $\sigma_x^* = 0,40 \Pi_x$ (коэффициент вариации $\nu_x = 13\%$).

Влияние предварительной термообработки образцов на ха-рактер кривой напряжение-деформация было исследовано на АГ-4С (укладка стекловолокон 1:1). Оказалось, что предварительная термообработка (максимальная температура 160°C) практически не изменяет предела прочности Π_x , но снижает σ_x^* до $0,80 \Pi_x$.

Кривая деформирования стеклоэпоксидита с эпоксо-фенольным связующим (рис.4, кривая 5) при растяжении вдоль угла при комнатной температуре имеет нелинейный характер.

Перелом в кривой деформирования может быть вызван двумя причинами. Во-первых, учетом нелинейных эффектов при деформиро-вании связующих. Деформация связующего в начале нагружения яв-ляется линейной функцией напряжения, но после достижения пре-дела пропорциональности связующего, что соответствует напря-жению σ_x^* для стеклопластиков в целом [86], начинается значительное отклонение от линейной зависимости, причине кото-рых — неупругие деформации связующего. Во-вторых, срезом адге-зионных связей или разрушением отдельных компонентов стекло-пластика [27], [66], [114].

Можно ожидать, что при нагружении материала выше напряжения σ_x^* в стеклопластике будут образовываться остаточные деформации. Для проверки на одном из испытываемых материалов (АГ-4С, укладке 1:1) были исследованы величина и характер остаточной деформации до и после достижения напряжения σ_x^* . Сначала к образцам прикладывалось растягивающее напряжение $\sigma_{1x} \approx 0,25 \Pi_x < \sigma_x^*$. Деформация образцов после разгрузки составляла всего 0,001-0,003%. Потом к образцам прикладывалось напряжение $\sigma_{2x} \approx 0,60 \Pi_x < \sigma_x^*$. Деформации образцов, замеренные сразу после разгрузки составляли 0,02-0,04%. В течение 1,5 часов эти деформации уменьшались примерно на 10-15%, а в последующие 24 часа изменения деформаций в пределах точности эксперимента не наблюдались. Если деформации носят высокоэластический характер, нагревание материала приводит к быстрому их уменьшению [28]. Нагрев образцов в течение 2 часов при температуре 120°C в пределах точности эксперимента не изменил измеренную величину деформаций. Таким образом, нагружение материала выше σ_x^* сопровождается возникновением остаточных деформаций.

3.2. Испытания при повышенных температурах. Были сняты кривые деформирования следующих материалов: АГ-4С (укладке волокон 1:1), стеклотекстолите с эпоксифенольным связующим и АГ-4В. Чтобы отчетливо показать перелом в зависимости напряжения-деформация на рис.5 показаны характерные кривые деформирования АГ-4С. Из рисунка видно, что в последованном диапазоне температур характер кривой $\sigma_x \sim \epsilon_x$ не меняется; модуль упругости материала АГ-4С мало зависит от температуры испытания. Кривые деформирования стеклотекстолита (рис.6) и

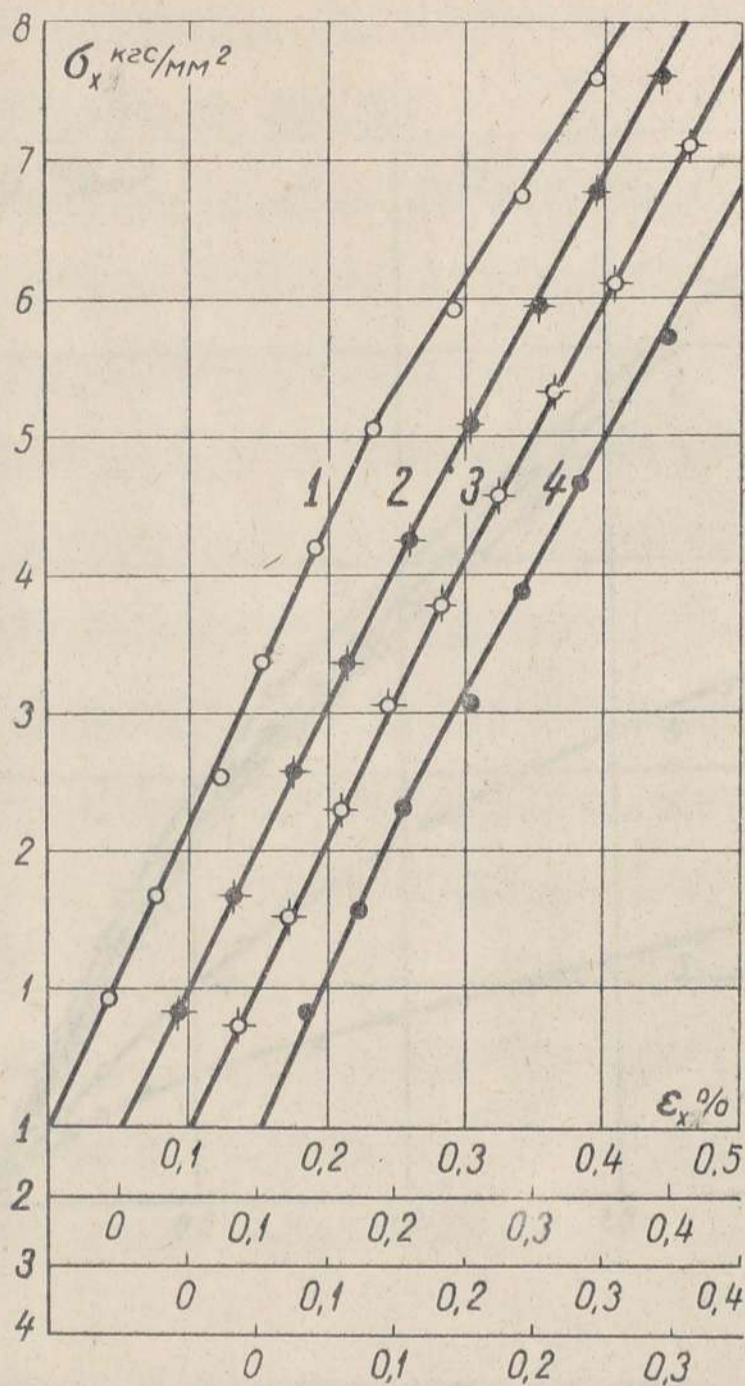


Рис. 5. Кривые деформирования стеклопластика АГ-4С (уиледия 1:1) при растяжении в направлении армирования; 1 - $t = 18^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 2,4\%$); 2 - $t = 60^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 8\%$); 3 - $t = 120^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 4,7\%$); 4 - $t = 150^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 7\%$).

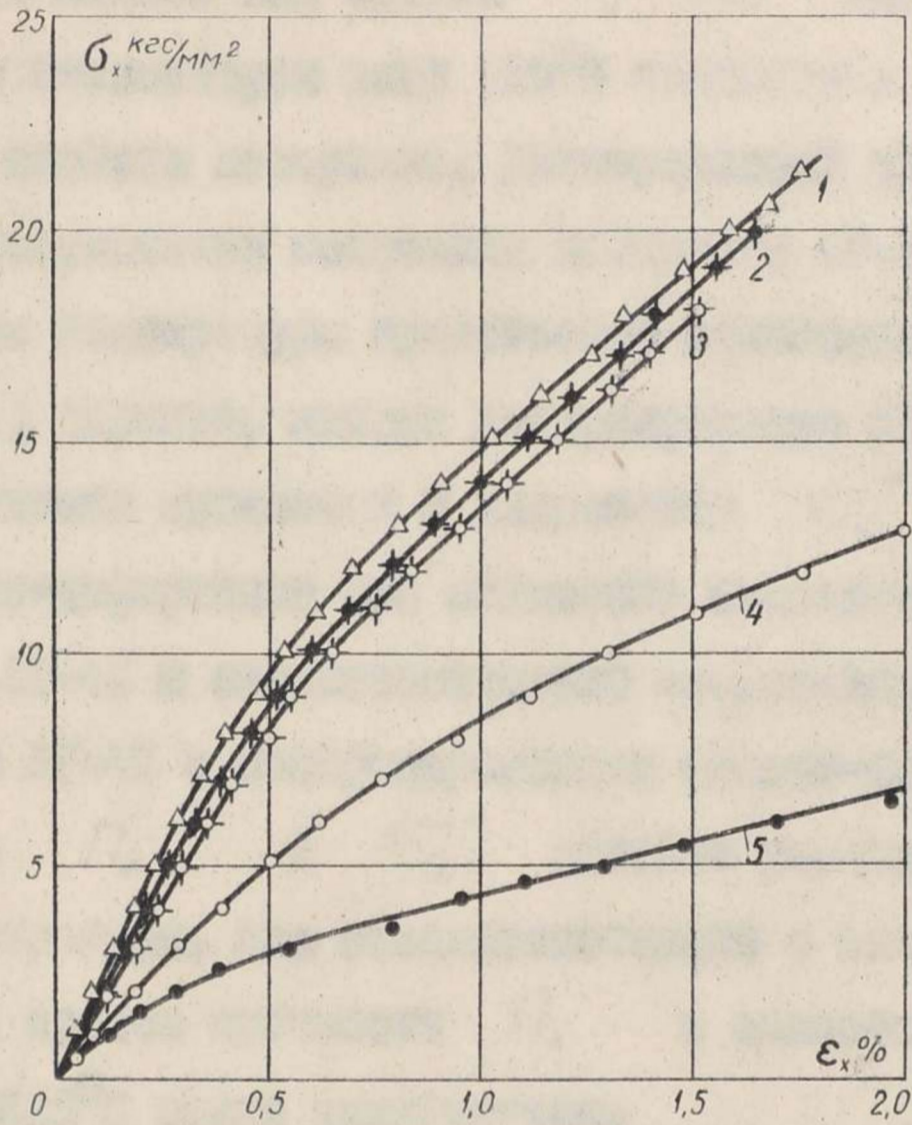


Рис.6. Кривые деформирования стеклотекстолита с эпокси-фенольным связующим при растяжении в направлении узла; 1 - $t = 18^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 6\%$); 2 - $t = 60^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 11\%$); 3 - $t = 100^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 9\%$); 4 - $t = 125^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 9\%$); 5 - $t = 150^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 21\%$).

материала АГ-4В (рис.7) являются осредненными по результатам испытания 5-8 образцов. Повышение температуры испытания до 100°C мало меняет вид кривой $\sigma_x \sim \epsilon_x$ стеклотекстолита; повышение температуры выше 100°C приводит к изменению деформативных свойств материала. Дисперсионный анализ экспериментальных результатов испытания материала АГ-4В показал, что с повышением температуры существенно изменяется его модуль упругости; характер кривых деформирования остается линейным.

Изменения прочности и напряжения σ_x^* в зависимости напряжение-деформация при повышении температуры для стеклопластика АГ-4С и стеклотекстолита представлены на рис.8. Для материала АГ-4С с модифицированным феноло-формальдегидным связующим Π_x и σ_x^* линейно уменьшаются с повышением температуры. Для стеклотекстолита с эпоксифенольным связующим предел прочности Π_x с повышением температуры выше $100-125^{\circ}\text{C}$ резко уменьшается.

§ 4. Соотношение между продольными и поперечными деформациями.

Поперечные деформации при растяжении определялись на образцах стеклотекстолита и материала 27-63С (укладка 1:1). Образцы нагружались выше предела пропорциональности (при растяжении стеклотекстолита) или напряжения σ_x^* перелома кривой деформирования (при растяжении стеклопластика 27-63С). Образцы из стеклотекстолита испытывались при комнатной температуре и температуре 150°C ; образцы из стеклопластика 27-63С только при комнатной температуре.

Результаты испытаний показали, что для данного материала при постоянной температуре зависимость деформаций ϵ_x ,

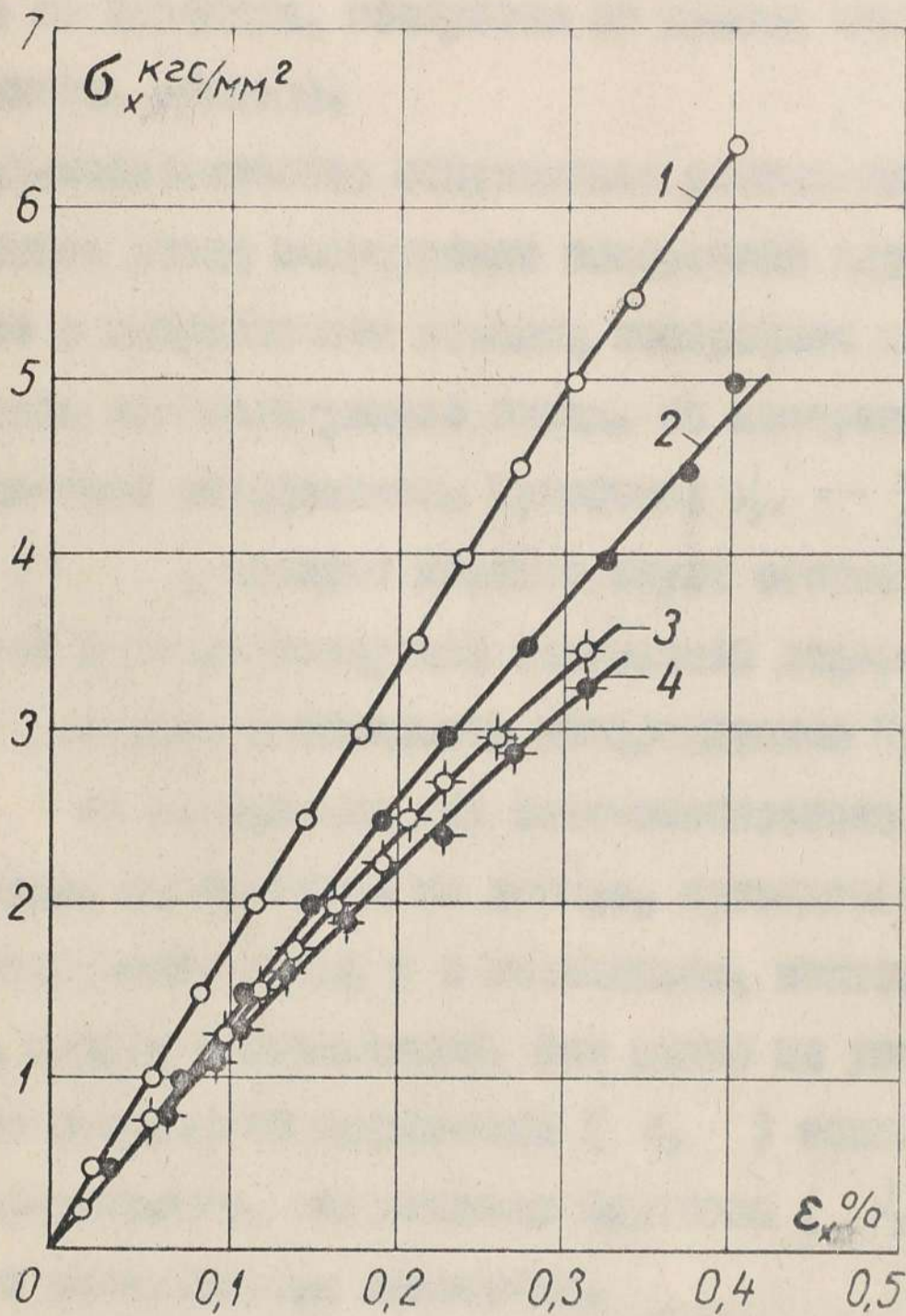


Рис. 7. Кривые деформирования стеклокерамики ЛГ-4В при растяжении: 1 - $t = 18^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 4,4\%$); 2 - $t = 60^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 11\%$); 3 - $t = 120^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 12\%$); 4 - $t = 150^{\circ}\text{C}$ ($\nu_{\epsilon} = 12\%$).

ϵ_y , ϵ_z от растягивающего напряжения имеет одинаковый характер для всех образцов. Поэтому зависимости, приведенные на графиках, построены по данным одного, наиболее характерного, образца.

У стеклотекстолита направление растяжения совпадало с направлением утка; направление поперечной деформации ϵ_y совпадало с направлением основы; поперечная деформация ϵ_z развивалась перпендикулярно слоям. По измеренным деформациям подсчитывались коэффициенты Пуассона: $\nu_{yx} = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$;

$\nu_{zx} = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$, которые характеризуют отношение между продольной и соответствующей поперечной деформацией. На рис. 9-а показана зависимость коэффициентов Пуассона ν_{yx} и ν_{zx} от напряжения для стеклотекстолита при комнатной температуре, построенная по данным, приведенным на рис. 9-б. Первое нагружение здесь и в дальнейшем, показано сплошными линиями, второе - штриховыми. Как видно из рис. 9-а, если направление поперечной деформации (ϵ_y) совпадает с направлением армирования, коэффициент Пуассона (ν_{yx}) не претерпевает значительных изменений.

Поперечная деформация ϵ_z в основном определяется свойствами полимерной матрицы и силой воздействия между связующим и стекловолокнами. Соответствующий коэффициент Пуассона ν_{zx} после достижения определенного уровня напряжений начинает уменьшаться. При первом нагружении уменьшение коэффициента Пуассона в среднем начинается при напряжении

$\sigma_x = 0,3 \Pi_x$, коэффициент вариации $\nu = 12\%$ (Π_x - кратковременная статическая прочность при соответствующей температуре). При втором нагружении коэффициент

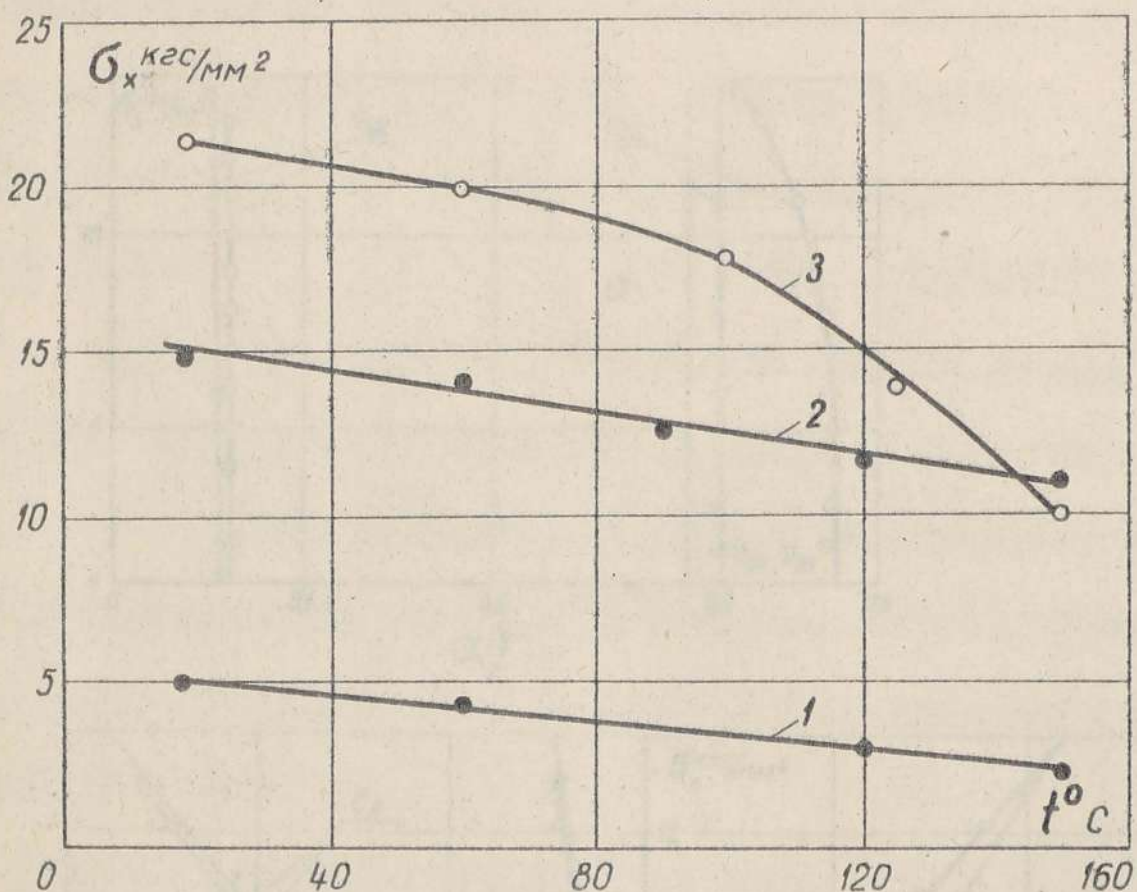


Рис. 8. Влияние температур испытания на σ_x^* и Π_x : 1, 2 — σ_x^* ($\nu_{\sigma_x^*} = 21\%$) и Π_x ($\nu_{\Pi_x} = 16\%$), стеклокерамика АГ-4С (утолща (1:1) (эта партия стеклокерамики АГ-4С имеет заниженный предел прочности); 3 — Π_x ($\nu_{\Pi_x} = 7\%$), стеклотекстолит с эпоксидно-полиэфирными связующими.

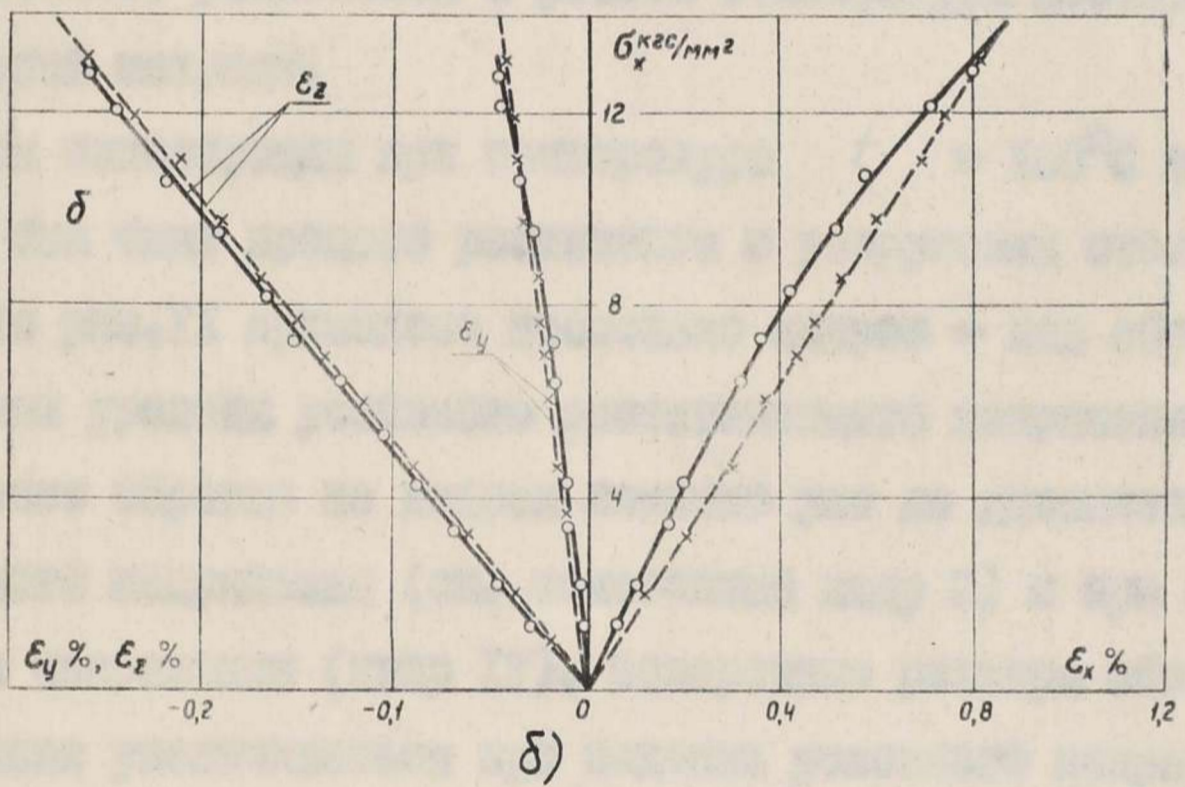
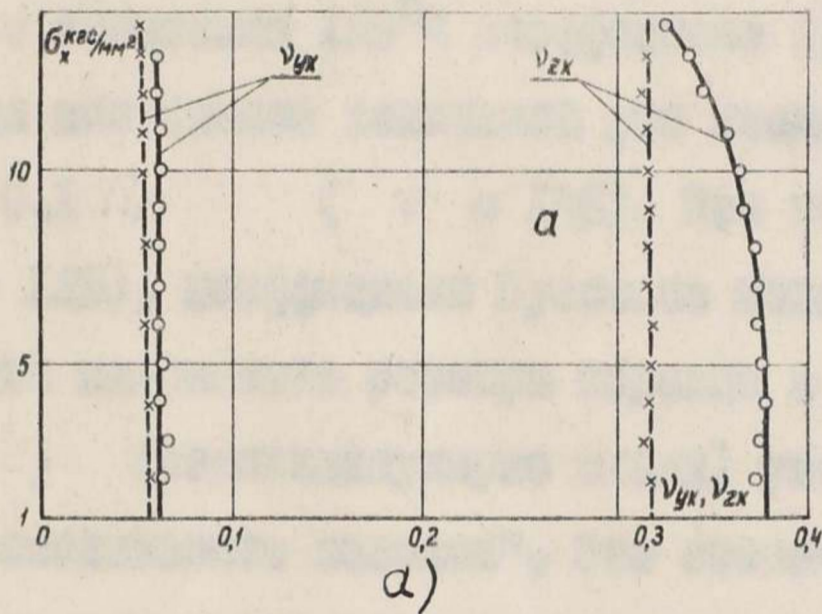


Рис. 9. Зависимость коэффициентов Пуассона (а) и деформаций (б) от растягивающего напряжения при комнатной температуре для стеклотекстолита с эпоксифенольным связующим.

Пуассона имеет меньшее значение, чем при первом. х)

Коэффициенты Пуассона ν_{yx} и ν_{zx} при температуре 150°C в зависимости от напряжения приведены на рис. 10-а.

Они подсчитаны по данным, приведенным на рис. 10-б. При температуре испытания 150°C коэффициент Пуассона ν_{zx} не является постоянной величиной уже начиная с напряжения

$$\bar{\sigma}_x = 0,1 \Pi_x \quad (\nu = 14\%). \text{ При напряжении } \bar{\sigma}_x = 0,28 \Pi_x$$

($\nu = 12\%$), коэффициент Пуассона меняет знак; после достижения этого напряжения размеры образца в направлении деформации ϵ_z (перпендикулярно слоям) увеличиваются; происходит "расталивание волокон". Это становится возможным, вследствие резкого уменьшения с ростом температуры вязкости полимерной матрицы.

Для иллюстрации при температуре $t = 160^{\circ}\text{C}$ на киноплёнке был снят процесс растяжения и разрушения стеклотекстолита. На рис. 11 приведено несколько кадров - вид образца при различных уровнях условного растягивающего напряжения $\bar{\sigma}_x$. Расширение образца на кадрах заметно уже до достижения максимального напряжения (см. показанный кадр III) и при максимальном напряжении (кадр IV). Поперечные размеры образца продолжают увеличиваться при падении условного напряжения (кадры V-IX). На последнем кадре - вид образца после окончательной потери сопротивления материала.

х) Десятикратное нагружение образцов выше предела пропорциональности показало, что значение коэффициента Пуассона стабилизируется после пяти - семи нагружений.

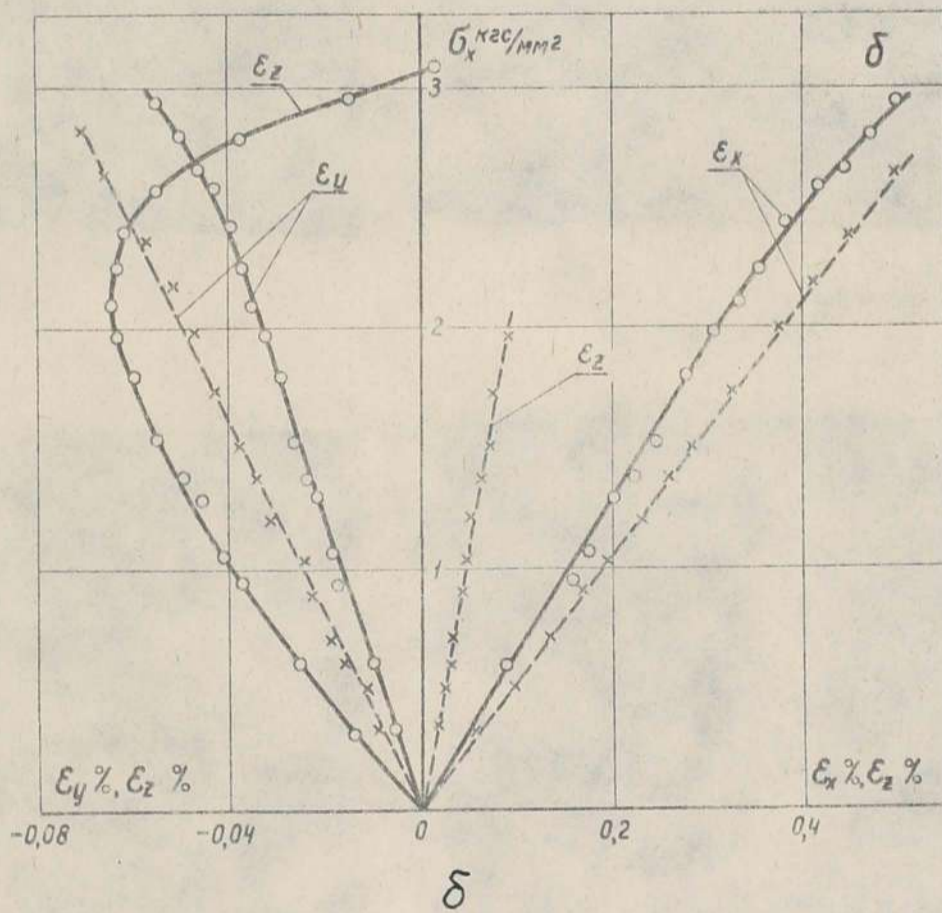
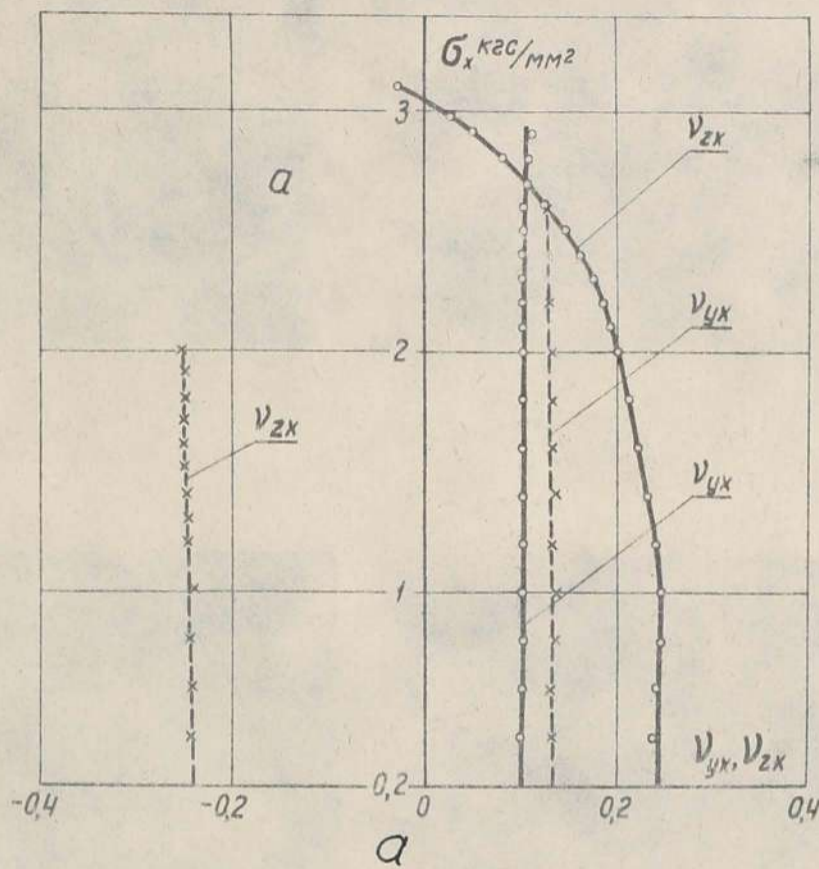
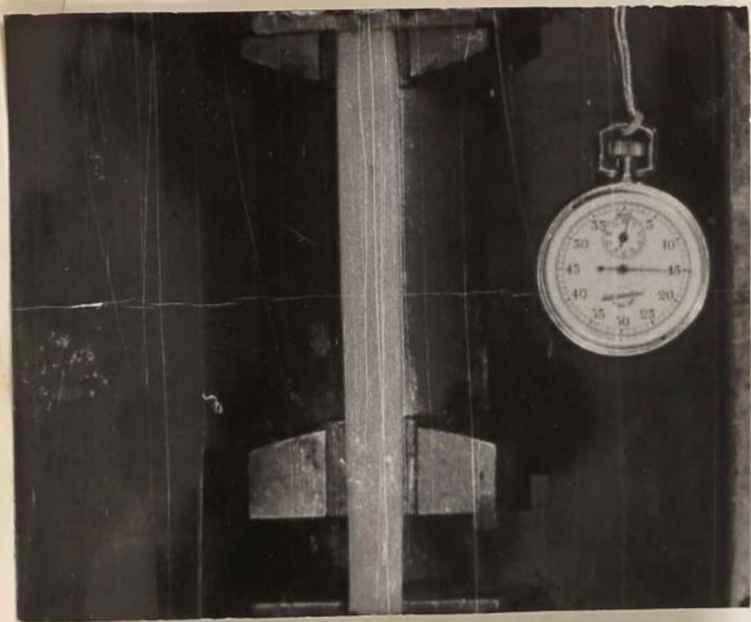
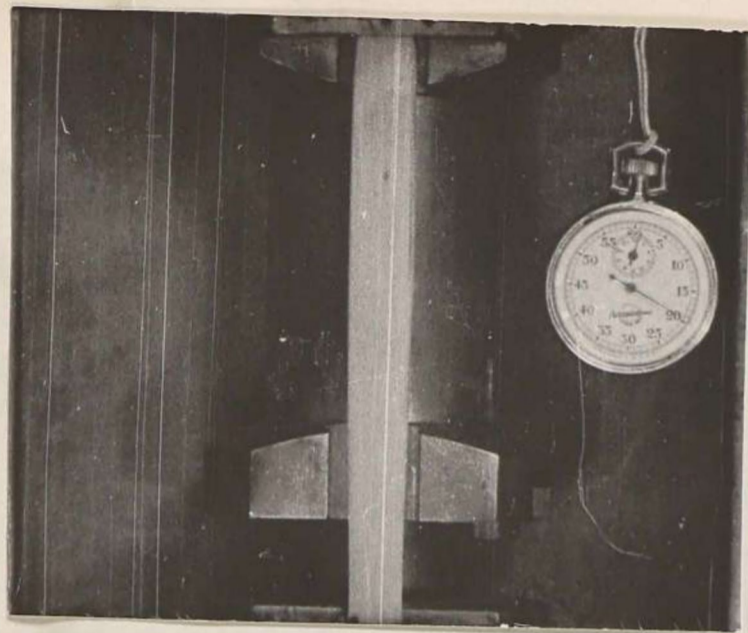


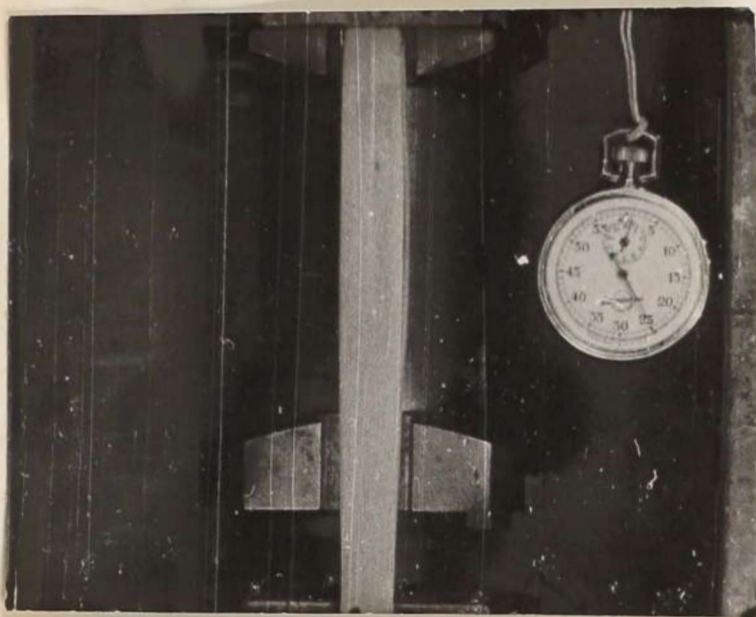
Рис. 10. Зависимость коэффициентов Пуассона (а) и деформаций (б) от растягивающего напряжения при температуре 150°С для стеклотекстолита с эпоксифенольным связующим.



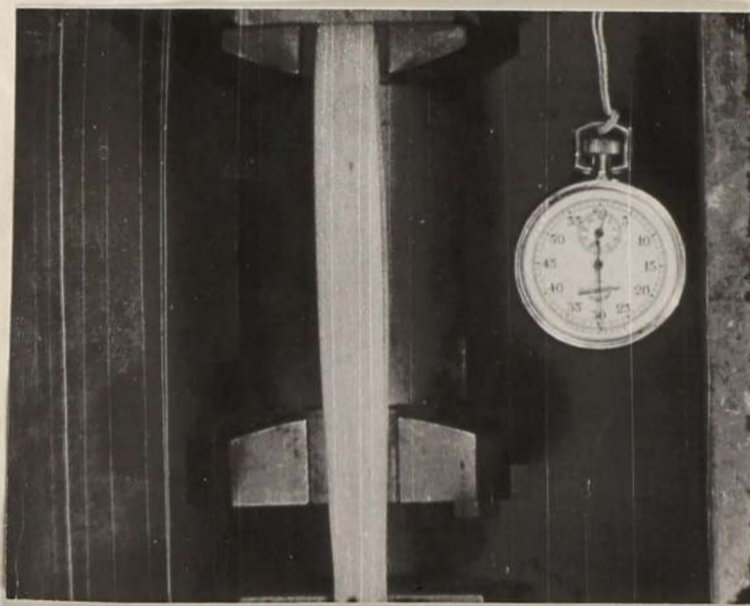
$\bar{I}, \bar{\sigma}_x \approx 515 \text{ кгс/см}^2$



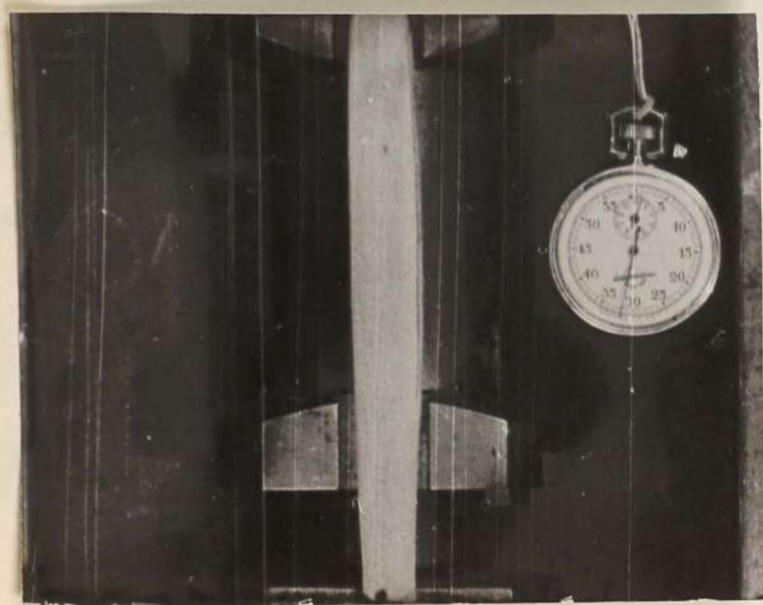
$\bar{II}, \bar{\sigma}_x \approx 645 \text{ кгс/см}^2$



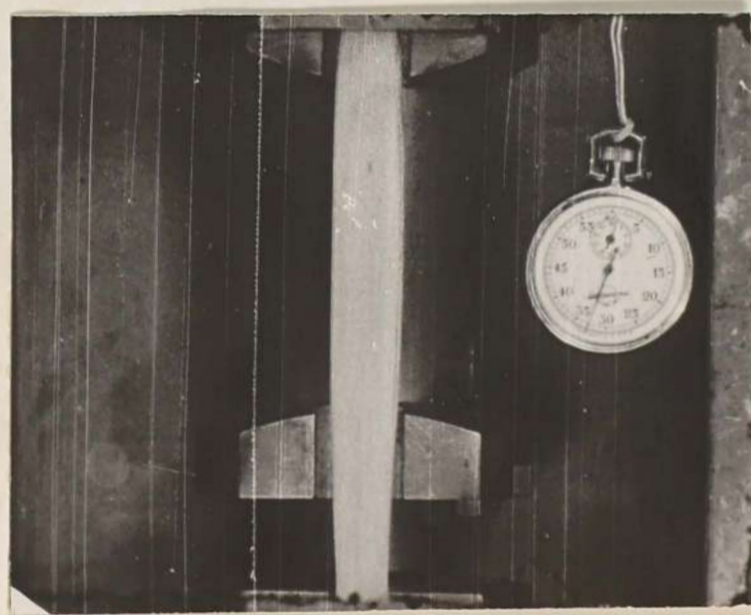
$\bar{III}, \bar{\sigma}_x \approx 775 \text{ кгс/см}^2$



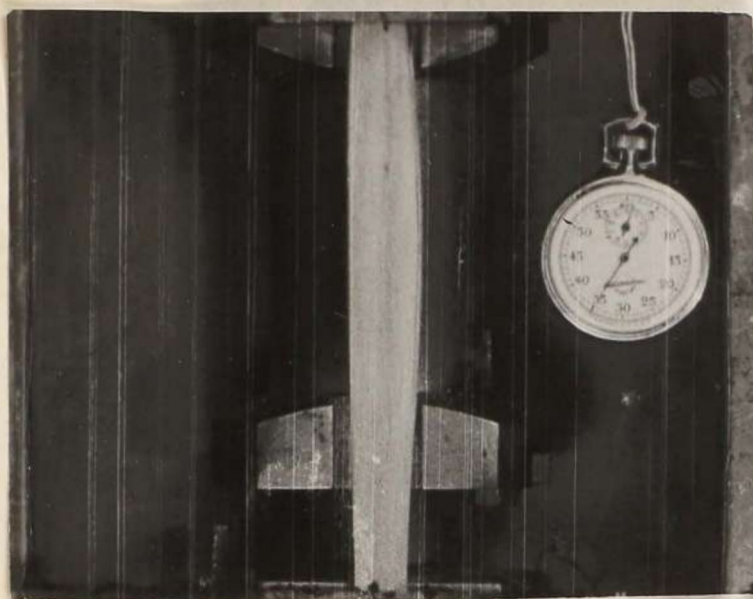
$\bar{IV}, \bar{\sigma}_x = \bar{\pi}_x \approx 895 \text{ кгс/см}^2$



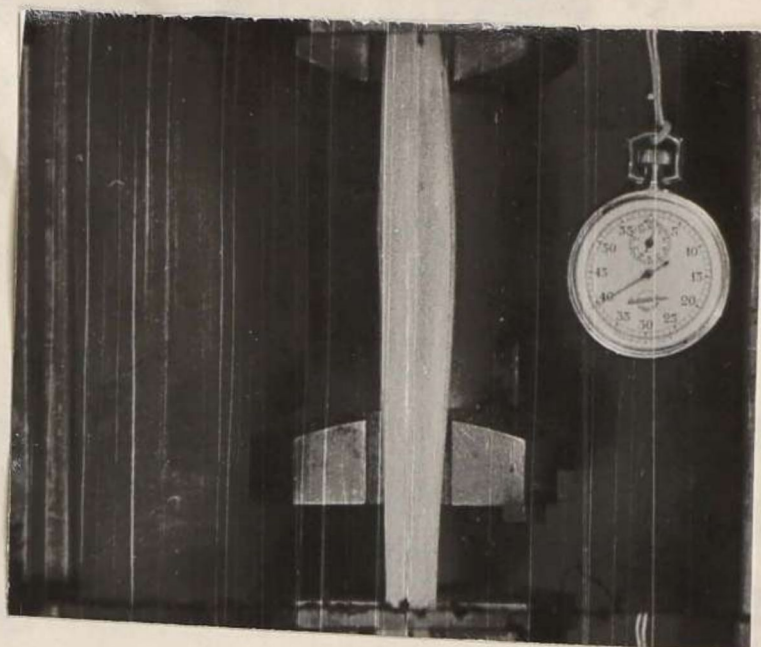
$\bar{V}, \bar{\sigma}_x \approx 875 \text{ кгс/см}^2$



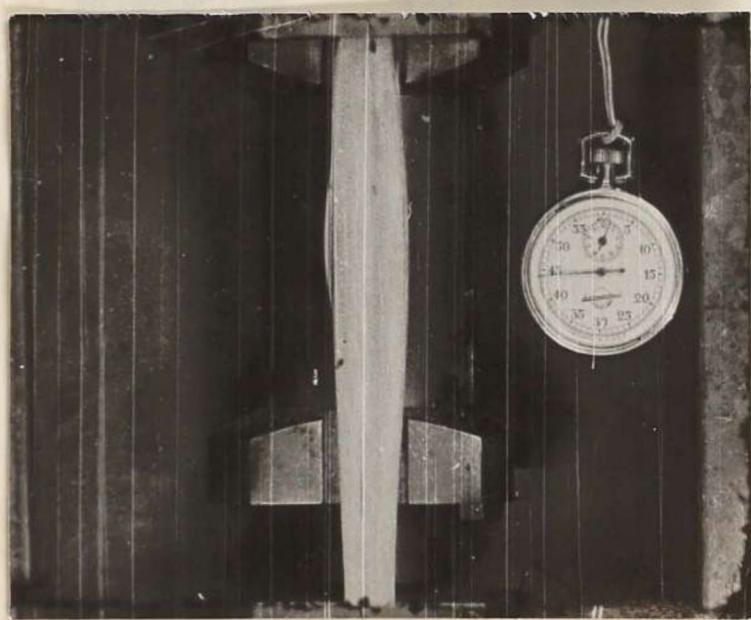
$\bar{VI}, \bar{\sigma}_x \approx 565 \text{ кгс/см}^2$



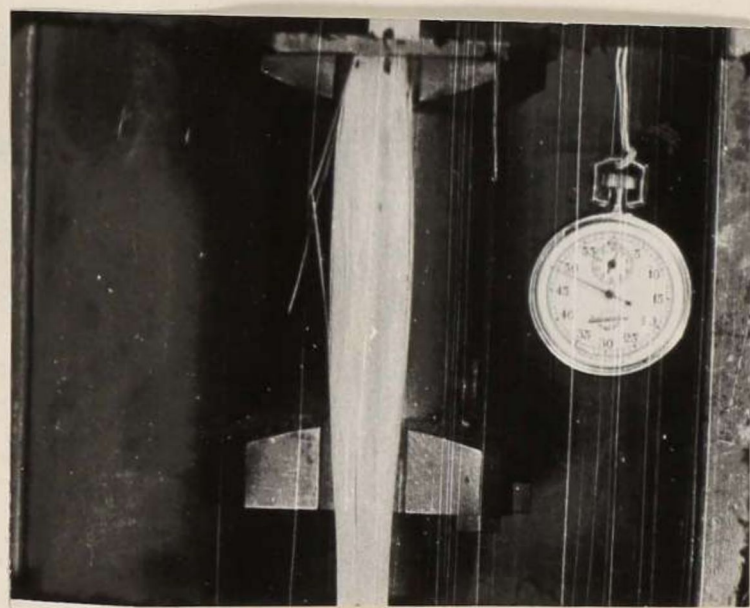
$\overline{\text{VII}}, \sigma_x \approx 517 \text{ кгс/см}^2$



$\overline{\text{VIII}} \sigma_x \approx 260 \text{ кгс/см}^2$



$\overline{\text{IX}}, \sigma_x \approx 105 \text{ кгс/см}^2$



$\overline{\text{X}}, \sigma_x = 0$

Рис. 11. Кадры из кинограммы деформирования и разрушения стеклотекстолита.

При повторном нагружении коэффициент Пуассона ν_{zx} является отрицательным уже с самого начала нагружения. Коэффициент Пуассона ν_{yx} , как видно из рис. 10-а, в исследованном диапазоне напряжений не зависит от напряжений, второе нагружение несколько увеличивает его значение.

У материала 27-630 направление растягивающего усилия совпадало с одним направлением арматуры, а поперечная деформация ϵ_z определялась перпендикулярно слою. На рис. 12-а показан коэффициент Пуассона ν_{zx} , в зависимости от напряжения, а данные, по которым эта зависимость построена, приведены на рис. 12-б. Для этого материала коэффициент Пуассона ν_{zx} при первом нагружении в среднем при напряжении $\sigma_x = 0,4 \Pi_x$ ($\nu = 15\%$) перестает быть постоянной величиной и начинает уменьшаться. Коэффициент Пуассона при втором нагружении принимает наименьшее значение, достигнутое при первом нагружении.

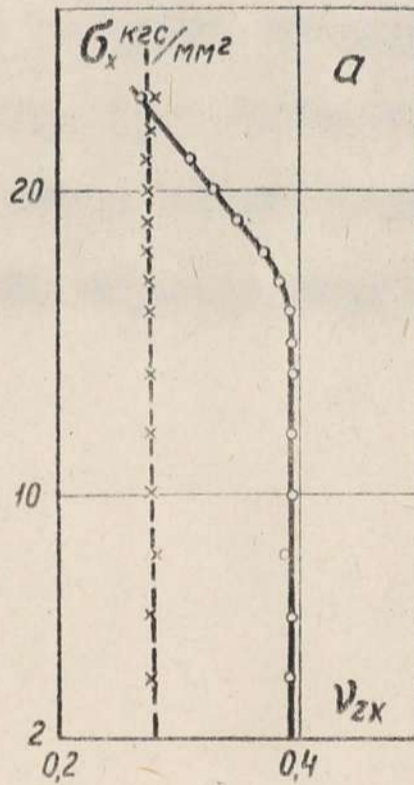
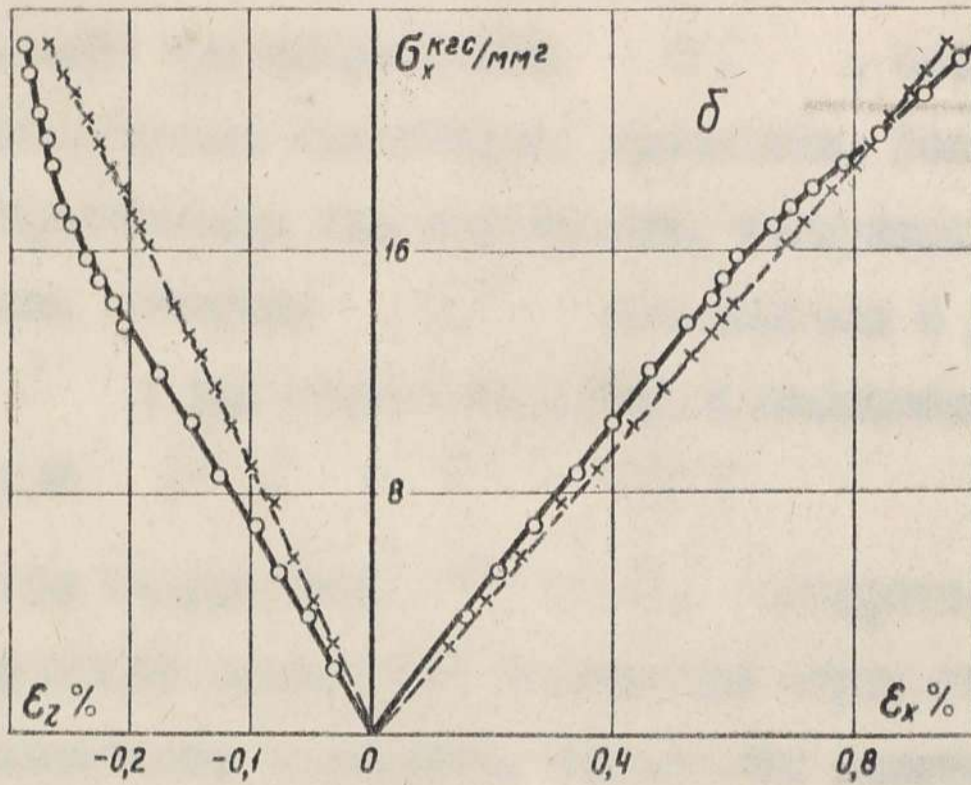


Рис. 12. Зависимость коэффициента Пуассона (а) и деформаций (б) от растягивающего напряжения при комнатной температуре для стеклоэпоксидов 27-63 Б.

Выводы. 1. При растяжении вдоль арматуры кривые деформирования изученных стеклопластиков, армированных ровницей, имеют перелом при напряжениях σ_x^* , составляющих 30-50% от кратковременной статической прочности. Более отчетливо перелом проявляется для материалов, армированных в двух направлениях. Значение σ_x^* уменьшается с ростом температуры t ; для материала АГ-4С зависимость $\sigma_x^* = f(t)$ линейна при $18^\circ\text{C} \leq t \leq 150^\circ\text{C}$.

2. При напряжениях $\sigma_x > \sigma_x^*$ коэффициент Пуассона, характеризующий поперечные деформации перпендикулярно плоскости армирования, становится переменной величиной. Это свойство может быть использовано для регулирования уровня напряжений σ_x^* , до которого стеклопластик можно считать монолитным материалом. При постоянных температурах коэффициент Пуассона может стать отрицательным; с помощью интроскопии обнаружено разбухание образца перед разрушением.

Г Л А В А П

ИЗГИБ БАЛКИ НА УПРУГОМ

ОСНОВАНИИ

§ 5. Вводные замечания.

При хорошо разработанной теории расчета балок на упругом основании (см., например, работы В.Г. Шухова [90], [91], П.Ф. Папковича [41], А.Н. Крылова [83], М.Н. Филопоново-Бородича [80], А.А. Угленского [76], С.Н. Клешинова [29]) только в ряде работ учтено влияние поперечных сдвигов при изгибе балок, лежащих на упругом основании. Имеются решения, учитывающие сдвиги при поперечном изгибе изотропных [34] [60] и анизотропных [31] балок на упругом основании; они в основном базируются на априорном задании закона распределения касательных напряжений по высоте балки; в работе [60] принимается, что по всему сечению действуют максимальные касательные напряжения, а в работах [31], [34] — что эти напряжения распределены по закону квадратной параболы. Однако, как оценено в работе [18], закон распределения касательных напряжений, особенно у концов балки из стеклопластика, может сильно отличаться от параболического.

Сравнительно малое количество работ посвящено и продольно-поперечному изгибу балок на упругом основании, и тому же в существующих работах рассмотрен продольно-поперечный изгиб только изотропных балок. Уравнение упругой линии без учета сдвигов приведено в работе [56], в замкнутом виде решение получено С.М. Заверцевым [26] и И.В. Урбаном [77], приближенным методом поставленная задача решена В.Н. Копыленко [30]. Решение, приведенное в работе [22] является неверным; это ясно видно из сравнения определенного в работе выражения для критической нагрузки с общеизвестной формулой критической

нагрузки балки на упругом основании (см., например, [21], [70]).

В настоящей главе задачи поперечного и продольно-поперечного изгиба балки на упругом основании решены с учетом специфических свойств материалов, армированных волокнами — они — ^ивотропны слабого сопротивления сдвигу. Главное внимание уделено расчету на жесткость и оценке касательных напряжений. Рассмотренные задачи решены без постулирования закона распределения касательных напряжений по высоте балки, точность аппроксимации закона f квадратной параболой оценивается при определении прогибов в случае поперечного изгиба балки на упругом основании. В этом случае дана также экспериментальная оценка влияния сдвигов на прогиб.

Реакция упругого основания предполагается пропорциональной прогибу в данной точке. При таком подходе полученные решения применимы и расчету осесимметрично нагруженных цилиндрических оболочек из материалов, армированных волокнами.

Как известно [71], цилиндрическую оболочку можно представить как систему полосок, отделенных друг от друга плоскостями, проходящими через ось цилиндра. В случае осесимметричной деформации каждая полоска находится в тех же условиях, что и балка на упругом основании с коэффициентом реакции упругого основания $K = \frac{E_y h}{R^2}$. При этом изгибная жесткость полоски

$$D = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}$$

- Здесь h — толщина оболочки
 R — средний радиус оболочки
 E_x, E_y — модули упругости в осевом и в окружном направлении
 ν_{xy}, ν_{yx} — коэффициенты Пуассона.

Поэтому полученные в этой главе выражения применены в III главе для оценки краевого эффекта и для определения критической силы при осевой сжатии цилиндрических оболочек из материалов, армированных волокнами.

§ 6. Поперечный изгиб свободно опертой бочки.

Рассмотрим свободный изгиб бочки длиной l , высотой $2H$ и шириной b , лежащей на упругом основании, при воздействии поперечной силы $q(x)$ (рис. 13). Для решения задачи используется подход, описанный в § 2.2.2 работы [61]. При этом подходе не требуется постулирования закона распределения напряжений по высоте бочки, полученное решение учитывает влияние поперечных сдвигов. Так как реакция упругого основания принята пропорциональной прогибу, со стороны основания на бочку действует нагрузка kw и уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

$$2Hb \frac{d^2 w}{dx^2} + b \int_{-H}^H \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dz = \frac{-q(x) + kw}{G_{xz}} \quad (2.2)$$

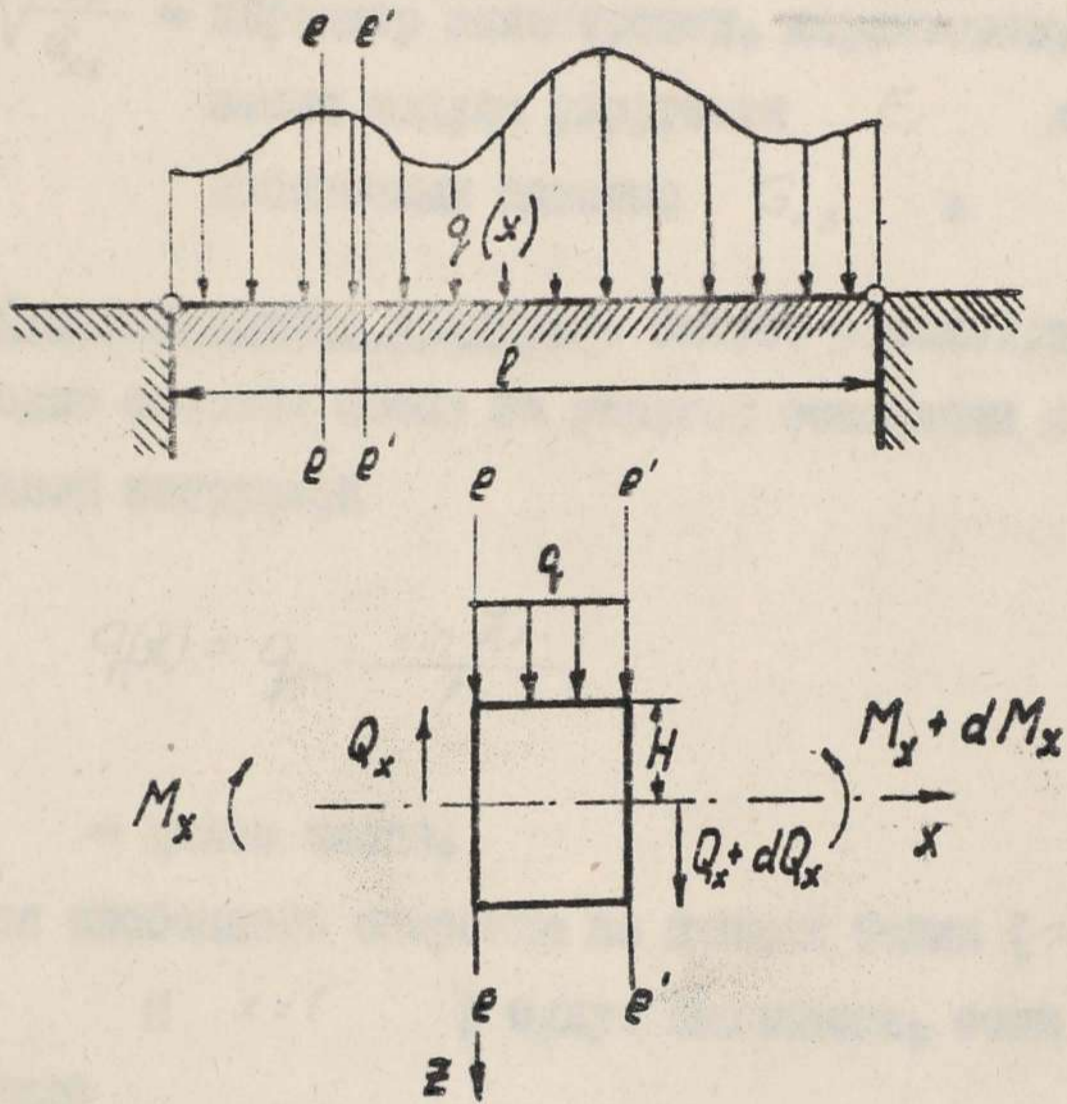


Рис. 13. Правило знаков.

Здесь w — прогиб балки (перемещения вдоль оси z);
 u — поперечная вдоль оси x ;
 K — реакция упругого основания;
 $\beta = \sqrt{\frac{E_x}{G_{xz}}}$ — параметр влияния, характеризующий отношение модуля упругости E_x и модуля поперечных сдвигов G_{xz} .

6.1. Синусоидальная нагрузка. Сначала рассмотрим случай, когда свободно опертая балка на упругом основании нагружена синусоидальной нагрузкой

$$q(x) = q_m \frac{\sin \pi x}{l},$$

где m — целое число.

Условия свободного опирания на концах балки ($w = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ при $x=0$ и $x=l$) будут выполнены, если искать решения в виде

$$\begin{aligned} w &= w_m^l \sin \frac{m \pi x}{l}; \\ u &= u_m(z) \cos \frac{m \pi x}{l}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.1), с учетом граничных условий $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ при $z = \pm H$ (отсутствие касательных напряжений на поверхности балки), находим:

$$u_m(z) = - \frac{w_m}{\beta} \frac{\operatorname{sh} m \beta \frac{z}{H}}{\operatorname{ch} m \beta}, \quad (2.4)$$

где $\beta = \frac{\pi H \beta}{l}$.

Значение w_m находим подстановкой выражения (2.4) в уравнение (2.2):

$$w_m = \frac{q_m l^4 \alpha^3}{3 \pi^4 m E_x J (m \alpha - \operatorname{th} m \alpha) + \kappa l^4 \alpha^3},$$

где $J = \frac{2 H^3 b}{3}$ — момент инерции балки.

Вводя приведенную длину балки на упругом основании

$L = \frac{\sqrt{2} \alpha l}{\pi}$, где $\alpha = \sqrt[4]{\frac{\kappa}{4 E_x J}}$, и приведенную — с учетом сдвигов — высоту $B = \sqrt{2} \alpha \beta H$, получим:

$$w_m = \frac{q_m B^4}{\kappa} A_m, \quad (2.5)$$

где

$$A_m = \frac{1}{3 m^2 \alpha^2 - 3 m \alpha \operatorname{th} m \alpha + B^4}; \quad \alpha = \frac{B}{L}.$$

Если балка нагружена произвольной нагрузкой, то, разлагая её в тригонометрический ряд Фурье

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m \pi x}{l}, \quad (2.6)$$

перемещения u и w находим суммированием перемещений от членов нагрузки

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m \pi x}{l};$$

$$u = -\frac{1}{\beta} \sum_{m=1}^{\infty} w_m \frac{\operatorname{sh} m \alpha \frac{z}{H}}{\operatorname{ch} m \alpha} \cos \frac{m \pi x}{l}. \quad (2.7)$$

Нормальные и поперечные напряжения σ_x и τ_{xz} определяются по известным формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E_x \frac{\partial u}{\partial x}; \\ \tau_{xz} &= G_{xz} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

6.2. Равномерно распределенная нагрузка. Для равномерно распределенной нагрузки интенсивности q имеем

$$q_m = \frac{4q}{m\pi} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.9)$$

и, соответственно, прогиб:

$$w = W_\infty^* \frac{4B^4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_m}{m} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (2.10)$$

где $W_\infty^* = \frac{q}{K}$ — прогиб по середине бесконечно длинной балки.

По середине балки имеем прогиб:

$$W = W_\infty^* \frac{4B^4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{A_m}{m}. \quad (2.11)$$

Сходимость ряда (2.11) хорошая; при $B < 1$ и $L < 1$ удержание только первого члена дает погрешность $< 3\%$.

Если пренебречь единицами, т.е. положить $G_{xz} \rightarrow \infty$, то получим выражение

$$\lim_{G_{xz} \rightarrow \infty} W = W^* = W_{\infty}^* \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \frac{L^4}{m^4 + L^4}, \quad (2.12)$$

которое практически (с точностью до третьего знака) совпадает с выражением

$$\bar{W}^* = W_{\infty}^* \left(1 - \frac{2 \operatorname{ch} \frac{\alpha l}{2} \cos \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l} \right), \quad (2.13)$$

полученным на основании гипотезы плоских сечений [71]

Легко показать, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W = \lim_{l \rightarrow \infty} W^* = \lim_{l \rightarrow \infty} \bar{W}^* = W_{\infty}^* = \frac{q}{k}, \quad (2.14)$$

т.е., единицы не влияют на величину прогиба бесконечной равно-мерно нагруженной балки.

Выражения для нормальных и касательных напряжений в соответствии с (2.6) имеют вид:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{3q}{\pi \alpha^2 b H^2} \alpha B^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m \frac{\operatorname{sh} m \alpha \frac{z}{H}}{\operatorname{ch} m \alpha} \sin \frac{m \pi x}{l}; \quad (2.15)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3q}{\pi \alpha b H} \sqrt{2} \alpha B \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m \left(1 - \frac{\operatorname{ch} m \alpha \frac{z}{H}}{\operatorname{ch} m \alpha} \right) \cos \frac{m \pi x}{l}. \quad (2.16)$$

6.3. Сосредоточенная сила посередине балки. В случае сосредоточенной силы P , приложенной по середине балки

$$q_m = \frac{2P}{l} \quad (2.17)$$

и прогиб балки на упругом основании:

$$w = W_\infty^* \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \alpha B^3 \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (2.18)$$

максимальный прогиб по середине пролета:

$$W = W_\infty^* \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \alpha B^3 \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} A_m, \quad (2.19)$$

где $W_\infty^* = \frac{P_\alpha}{2K}$ — максимальный прогиб бесконечно длинной балки без учета сдвигов.

Сходимость ряда (2.19) можно улучшить, если выделить из него ряд, сумма которого известна в замкнутом виде (так мож — но поступить также для улучшения сходимости рядов (2.11), (2.12), (2.15), (2.16)):

$$\begin{aligned} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} A_m &= \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{1}{3m^2\alpha^2} + \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{A_m (3m\alpha \operatorname{th} m\alpha - B^4)}{3m^2\alpha^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{24\alpha^2} + \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{A_m (3m\alpha \operatorname{th} m\alpha - B^4)}{3m^2\alpha^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Если удерживать только первый член ряда (2.20), то при $L < 1$ погрешность не превышает 3%.

Сумму $\sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \varkappa A_m$ можно оценить интегралами с аргументом $m\varkappa$;

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} A_m d(m\varkappa) \geq \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \varkappa A_m \geq \frac{1}{2} \int_{\varkappa}^{\infty} A_m d(m\varkappa). \quad (2.21)$$

В случае бесконечно длинной балки $\varkappa=0$, следовательно, пределы обоих интегралов выражения (2.21) совпадают. Поэтому

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W = W_{\infty} = W_{\infty}^* \frac{2\sqrt{2}}{\pi} B^3 \int_0^{\infty} A_m d(m\varkappa). \quad (2.22)$$

Интеграл (2.22) вычисляется графоаналитически, учитывая, что при значениях $m\varkappa < 0,05$ и $m\varkappa > 3$ его можно приближенно заменить табличными интегралами соответственно

$$\int_0^{\infty} \frac{d(m\varkappa)}{B^4} \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \frac{d(m\varkappa)}{3m^2\varkappa^3 - m\varkappa + B^4}$$

Если пренебречь сдвигами, т.е. при $G_{xz} \rightarrow \infty$

$$\lim_{G_{xz} \rightarrow \infty} W = W^* = W_{\infty}^* \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \frac{L^3}{m^4 + L^4}. \quad (2.23)$$

Это выражение практически (с точностью до третьего знака) совпадает с выражением, полученным на основании гипотезы плоских сечений [71]

$$\bar{W}^* = W_\infty^* \frac{\operatorname{sh} \alpha l - \sin \alpha l}{\operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l} \quad (2.24)$$

Отметим, что при небольших значениях L , когда можно удерживать только первый член ряда (2.12), соответственно (2.23), определение прогиба по этим выражениям удобнее, чем при использовании формулы (2.13), соответственно (2.24).

Оценивая сумму (2.25) интегралом, аналогично сумме (2.16), легко показать, что для бесконечно длинной бочки:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W^* = W_\infty^* \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{L^3 dm}{m^4 + L^4} = W_\infty^* \quad (2.25)$$

Выражения для нормальных и касательных напряжений

имеют вид:

$$\sigma_x = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \frac{P}{\alpha \delta H^2} B \alpha e^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{m-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \frac{\operatorname{sh} m \alpha \frac{z}{H}}{\operatorname{ch} m \alpha} \sin \frac{m\pi x}{l}; \quad (2.26)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3P}{\pi \delta H} \alpha e^2 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{m-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \left(1 - \frac{\operatorname{sh} m \alpha \frac{z}{H}}{\operatorname{ch} m \alpha}\right) \cos \frac{m\pi x}{l}. \quad (2.27)$$

Выражения (2.26) и (2.27) неприменимы при $x = \frac{l}{2}$.

6.4. Параболическое распределение касательных напряжений. Предыдущие выражения перемещений и напряжений получены без постулирования закона распределения напряжений по высоте бочки. При решении задач изгиба с учетом сдвигов

что принимают, что нормальные напряжения распределены линейно, а касательные по квадратной параболы по высоте (толщине) рассматриваемой балки, пластины или оболочки [4], [31].

Решения с учетом сдвигов при такой аппроксимации рас-
пределения σ_x и τ_{xz} впервые более подробно
было рассмотрено в работах Тимошенко (см., например, [69],
[71]), поэтому в отечественной литературе этот подход
иногда назван подходом С.П.Тимошенко. Известно [61], что
применительно к материалам, армированным волокнами, пополь-
зование в решениях подхода Тимошенко часто дает хорошее
приближение и, в ряде случаев, позволяет получить более про-
стые расчетные зависимости.

Дифференциальное уравнение упругой линии с учетом сдви-
гов по С.П.Тимошенко при поперечном изгибе балки на упругом
основании имеет вид:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 0,8 B^2 \alpha^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + 4 \alpha^4 w = \frac{q(x)}{E_x J} - \frac{0,2 B^2}{\alpha^2 E_x J} \frac{d^2 q(x)}{dx^2} \quad (2.28)$$

Уравнения для изгиба изотропных балок на упругом основании
приведено в работе С.Лези [34]. Общее решение уравнения,
при $B^2 < 5$ (что соблюдается в реальных конструкциях
из армированных пластмасс):

$$w = C_1 \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{cose} \alpha x + C_2 \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{sine} \alpha x + \\ + C_3 \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{cose} \alpha x + C_4 \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{sine} \alpha x + \phi(x), \quad (2.29)$$

где $\phi(x)$ — частное решение уравнения (2.28)

$$a = \alpha \sqrt{1 + 0,2 B^2}, \quad c = \alpha \sqrt{1 - 0,2 B^2}.$$

Рассмотрим решение дифференциального уравнения (2.28) в случае свободного опирания балки на упругом основании при двух видах приложенных нагрузок: равномерно распределенной и сосредоточенной силе посередине пролета.

В случае равномерно распределенной нагрузки $q_1(x) = q_1$, решая дифференциальное уравнение (2.28) с учетом граничных условий ($w = 0$ и $M_x = 0$ при $x = 0$ и $x = l$), получаем:

$$C_1 = \frac{q_1}{K}; \quad C_2 = \frac{q_1}{K} \frac{\sin cl - \frac{0,2 B^2}{\sqrt{1 - 0,04 B^4}} \operatorname{sh} cl}{\operatorname{ch} cl + \cos cl};$$

$$C_3 = -\frac{q_1}{K} \frac{\operatorname{sh} cl + \frac{0,2 B^2}{\sqrt{1 - 0,04 B^4}} \sin cl}{\operatorname{ch} cl + \cos cl};$$

(2.30)

$$C_4 = \frac{q_1}{K} \frac{0,2 B^2}{\sqrt{1 - 0,04 B^4}}; \quad \phi(x) = -\frac{q_1}{K}.$$

Прогиб посередине балки:

$$W = W_{\infty}^* \left[1 - \frac{2 \left(\operatorname{ch} \frac{al}{2} \cos \frac{cl}{2} - \frac{0,2 B^2}{\sqrt{1-0,04B^4}} \operatorname{sh} \frac{al}{2} \sin \frac{cl}{2} \right)}{\operatorname{ch} al + \cos cl} \right]. \quad (2.31)$$

Если пренебречь сдвигами ($G_{xz} \rightarrow \infty, B=0, a=c=\alpha$) формула (2.31) вырождается в формулу (2.13)

В случае сосредоточенной силы, приложенной посередине пролета, аналогично работе [8] половину балки на двух опорах трактуем как консоль. Вследствие отсутствия вязкой распределенной по поверхности балки нагрузки, $\phi(x) = 0$

[72]. Следуя [69], полагаем, что в сечении под силой

$$Q_{xz} = Q_0 = \frac{P}{2} \quad \text{и} \quad \frac{dw}{dx} = + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \frac{Q_0}{Hb G_{xz}} = + \frac{3}{10} \frac{P}{Hb G_{xz}}$$

(упругая линия под сосредоточенной силой имеет излом). Учи-

тывая граничные условия на конце балки $w=0$ и $M_x=0$

при $x = \frac{l}{2}$, получаем:

$$C_1 = \frac{P\alpha}{2k} \frac{(1+0,4B^2)\sqrt{1-0,2B^2} \operatorname{sh} al - (1-0,4B^2)\sqrt{1+0,2B^2} \sin cl}{\sqrt{1-0,04B^4} (\operatorname{ch} al + \cos cl)};$$

$$C_2 = \frac{P\alpha}{2k} \frac{1-0,4B^2}{\sqrt{1-0,2B^2}}; \quad C_3 = - \frac{P\alpha}{2k} \frac{1+0,4B^2}{\sqrt{1+0,2B^2}};$$

(2.32)

$$C_4 = - \frac{P\alpha (1-0,4B^2)\sqrt{1+0,2B^2} \operatorname{sh} al + (1+0,4B^2)\sqrt{1-0,2B^2} \sin cl}{\sqrt{1-0,04B^4} (\operatorname{ch} al + \cos cl)}.$$

Прогиб по середине пролета:

$$W = W_{\infty}^* \frac{(1+0,4B^2)\sqrt{1-0,2B^2} \operatorname{sh} cl - (1-0,4B^2)\sqrt{1+0,2B^2} \sin cl}{\sqrt{1-0,04B^4} (ch cl + \cos cl)} \quad (2.33)$$

в случае бесконечно длинной балки это выражение совпадает с выражением работы [31]:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W = W_{\infty} = W_{\infty}^* \frac{1+0,4B^2}{\sqrt{1+0,2B^2}}$$

Если пренебречь сдвигами, то получим формулу (2.24):

$$\lim_{G_{xz} \rightarrow \infty} W = W^*$$

Выражение для момента M_x с учетом сдвигов имеет следующий вид [31]:

$$M_x = - \left(E_x J \frac{d^2 w}{dx^2} + \beta^2 q(x) \right) \quad (2.34)$$

Поперечная сила Q_{xz} определяется как производная от момента:

$$Q_{xz} = \frac{d M_x}{dx}$$

Нормальные и касательные напряжения определяются по известным выражениям:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{M_x}{J} z ; \\ \tau_{xz} &= \frac{Q_{xz}}{2J} (H^2 - z^2). \end{aligned} \quad (2.35)$$

В случае нагружения бели на упругом основании постоянной равномерно распределенной нагрузкой q :

$$M_x = -E_x J \frac{d^2 w}{dx^2} - \beta^2 q + \beta^2 K w, \quad (2.36)$$

и нормальные и касательные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3q}{4\alpha^2 b H^2} \frac{1}{\sqrt{1-0,04B}} \frac{z}{H} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha l}{\operatorname{ch} \alpha l + \operatorname{cos} \alpha l} \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{sin} \alpha x + \right. \\ &+ \left. \frac{\operatorname{sin} \alpha l}{\operatorname{ch} \alpha l + \operatorname{cos} \alpha l} \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{cos} \alpha x - \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{sin} \alpha x \right); \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{3}{8} \frac{q}{\alpha b H} \frac{1}{\sqrt{1-0,04B^4}} \left(1 - \frac{z^2}{H^2} \right) \left(\frac{\sqrt{1-0,2B^2} \operatorname{sh} \alpha l + \sqrt{1+0,2B^2} \operatorname{sin} \alpha l}{\operatorname{ch} \alpha l + \operatorname{cos} \alpha l} \right) \times \\ &\times \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{cos} \alpha x - \sqrt{1+0,2B^2} \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{sin} \alpha x - \sqrt{1-0,2B^2} \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{cos} \alpha x + \\ &+ \frac{\sqrt{1+0,2B^2} \operatorname{sh} \alpha l - \sqrt{1-0,2B^2} \operatorname{sin} \alpha l}{\operatorname{ch} \alpha l + \operatorname{cos} \alpha l} \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{sin} \alpha x \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

В случае сосредоточенной силы, приложенной посередине пролета, выражения для нормальных и касательных изгибов в соответствии с (2.36) имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{3}{8} \frac{P}{\alpha b H^2} \frac{z}{H} \left(\frac{\sqrt{1-0,2B^2} \operatorname{sh} \alpha l + \sqrt{1+0,2B^2} \operatorname{sin} \alpha l}{\sqrt{1-0,04B^4} (\operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l)} \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{cos} \alpha x - \right. \\ & - \frac{1}{\sqrt{1-0,2B^2}} \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{sin} \alpha x - \frac{1}{\sqrt{1+0,2B^2}} \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{cos} \alpha x + \\ & \left. + \frac{\sqrt{1+0,2B^2} \operatorname{sh} \alpha l - \sqrt{1-0,2B^2} \operatorname{sin} \alpha l}{\sqrt{1-0,04B^4} (\operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l)} \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{sin} \alpha x \right); \quad (2.39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = & \frac{3P}{8bH} \left(1 - \frac{z^2}{H^2} \right) \left(\operatorname{ch} \alpha x \operatorname{cos} \alpha x - \right. \\ & - \frac{0,2B^2 \operatorname{sh} \alpha l - \sqrt{1-0,04B^4} \operatorname{sin} \alpha l}{\sqrt{1-0,04B^4} (\operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l)} \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{sin} \alpha x - \\ & \left. - \frac{\sqrt{1-0,04B^4} \operatorname{sh} \alpha l + 0,2B^2 \operatorname{sin} \alpha l}{\sqrt{1-0,04B^4} (\operatorname{ch} \alpha l + \cos \alpha l)} \operatorname{sh} \alpha x \operatorname{cos} \alpha x \right). \quad (2.40) \end{aligned}$$

6.5. Влияние длины балки и сдвигов на прогибы и касательные напряжения. Полученные зависимости позволяют оценить влияние длины балки и межслойных сдвигов на прогибы и касательные напряжения. Вкратце оценим влияние длины балки и сдвигов на прогиб посередине пролета. В случае нагружения балки на упругом основании сосредоточенной силой посередине пролета, прогиб является максимальным посередине пролета независимо от длины балки. При нагружении равномерно распределенной нагрузкой прогиб является максимальным посередине пролета только для балок конечной длины. Если приведенная длина балки L принимает значение больше 1,5, прогиб не является максимальным посередине пролета. Влияние сдвигов на максимальный прогиб бесконечно длинных балок рассмотрено в следующей главе - при изучении краевого эффекта цилиндрических оболочек.

Для построения графиков, показывающих влияние приведенной длины балки и сдвигов на её прогиб посередине пролета использованы полученные формулы (2.11) и (2.19). Соответствующие формулы (2.31) и (2.33), полученные на основе гипотезы о параболическом распределении касательных напряжений, дают величины прогибов, которые несколько отличаются от результатов, подсчитанных по формулам (2.11) и (2.19). Для случая равномерно распределенной нагрузки это различие составляет $< 2\%$ при $L > 0,6$ и $< 5\%$ при $L < 0,6$; для случая сосредоточенной силы различие $< 10\%$ при $\alpha < 8$ и $< 5\%$ при $\alpha < 4$. Следовательно, постулирование параболического закона распределения касательных напряжений редко вносит существенные погрешности при определении прогибов. Зависимость прогиба посередине пролета, отнесенного к

прогибу бесконечно длинной балки, от приведенной длины при различных значениях приведенной высоты изображено на рис. 14-а (равномерно распределенная нагрузка $q(x) = q = const$) и рис. 14-б (сосредоточенная сила P). Как видно из этих рисунков, для большинства значений B балки можно считать практически бесконечно длинными, если $L > 3$

Влияние сдвигов на прогиб можно оценить по рисункам 15-а ($q(x) = q = const$) и 15-б (P), где приведены графики $\frac{W}{W^*} = f(B)$. Видно, что это влияние весьма существенно для всех балок, нагруженных сосредоточенной силой, а также для коротких балок под равномерно распределенной нагрузкой.

Влияние сдвигов и длины балки на максимальные касательные напряжения. В случае нагружения балки на упругом основании равномерно распределенной нагрузкой касательные напряжения τ_{xz} согласно формулам (2.16) и (2.38) принимают максимальное значение у конца балки - в сечении $x=0$. По середине балки $\tau_{xz} = 0$. Распределение касательных напряжений по длине балки показано на рис. 16, где

$$\omega = \frac{3}{8} \frac{q}{2\beta H}$$

Как видно из рисунка, учет сдвигов не меняет характер распределения касательных напряжений по длине балки. Для определения влияния сдвигов на максимальные касательные напряжения τ_{xz} балки различной приведенной длиной L использована формула (2.16), полученная без постулирования закона распределения напряжений по высоте балки, а также для сравнения формула (2.38), полученная на основе гипотезы о распределении касательных напряжений по квадратной параболе. Расчеты показали, что максимальные касательные напряжения, подсчитанные по фор-

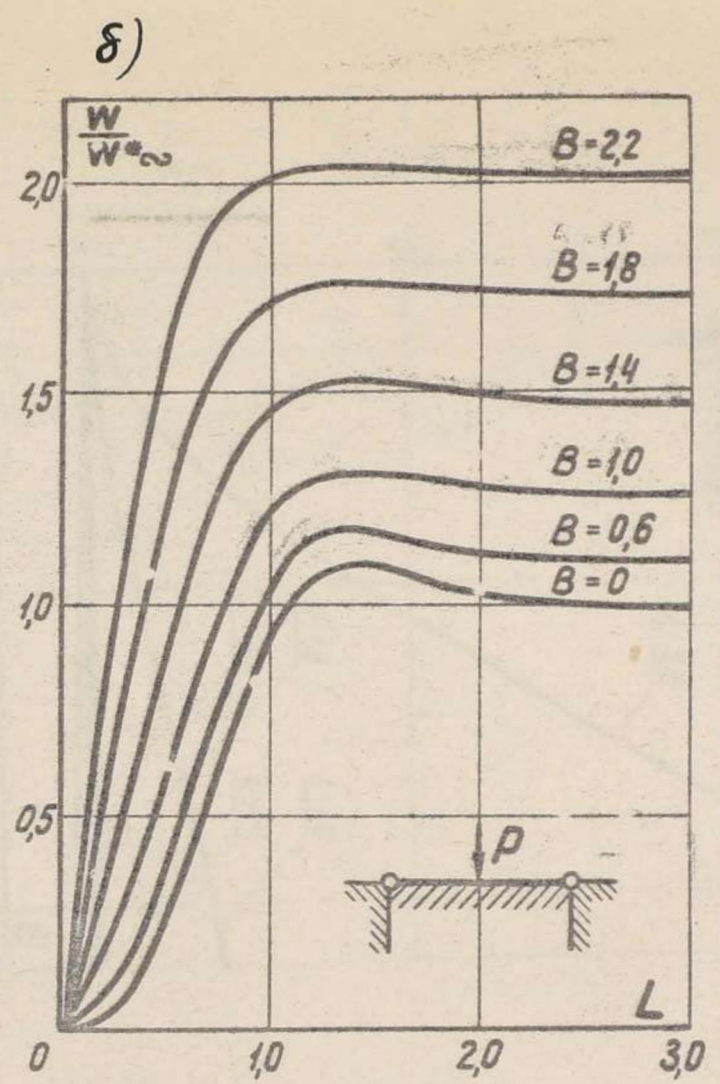
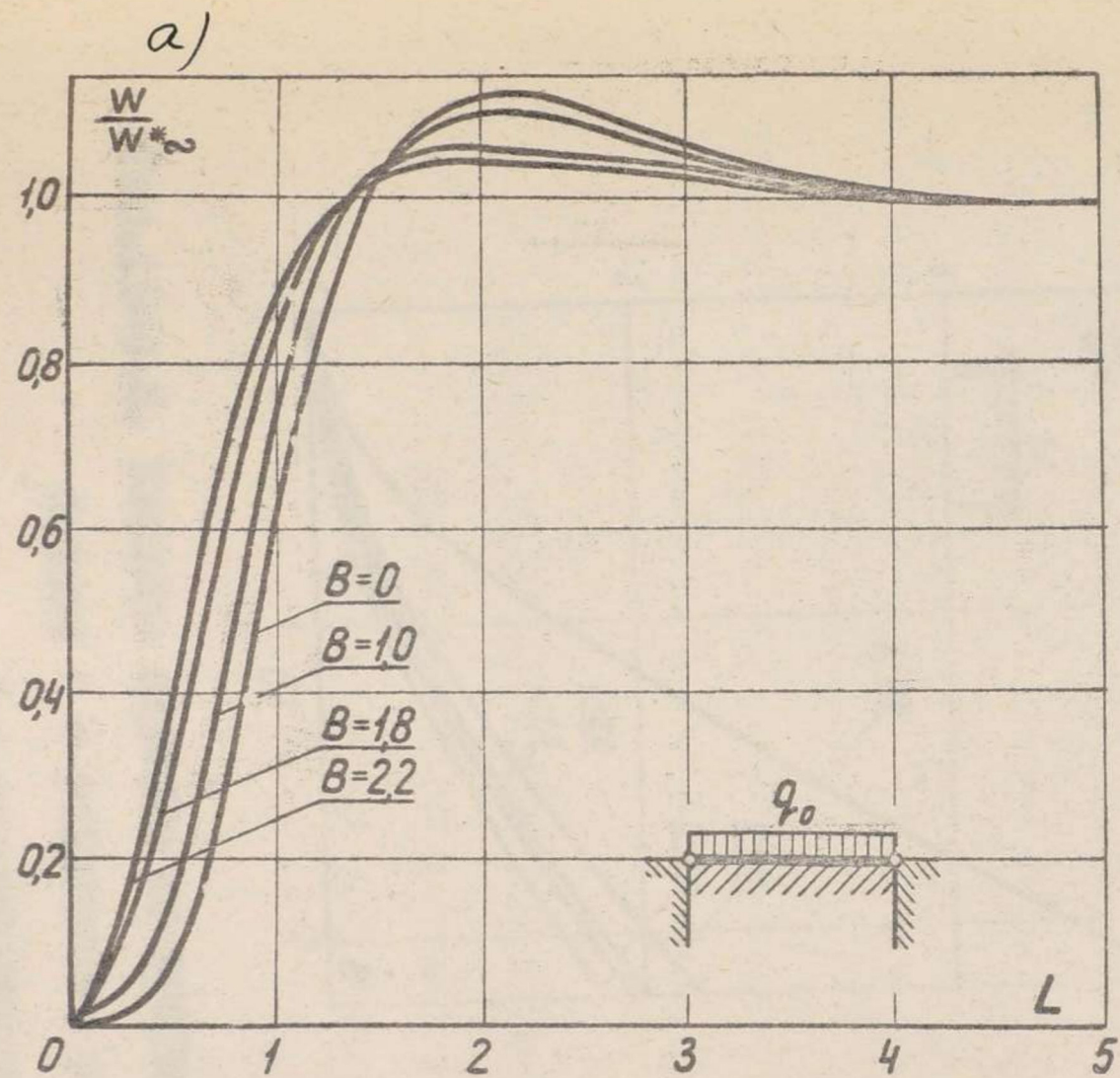


Рис. 14. Влияние длины балки на прогиб посередине пролета:
 а) равномерно распределенной нагрузкой; б) сосредоточенной силе посередине пролета.

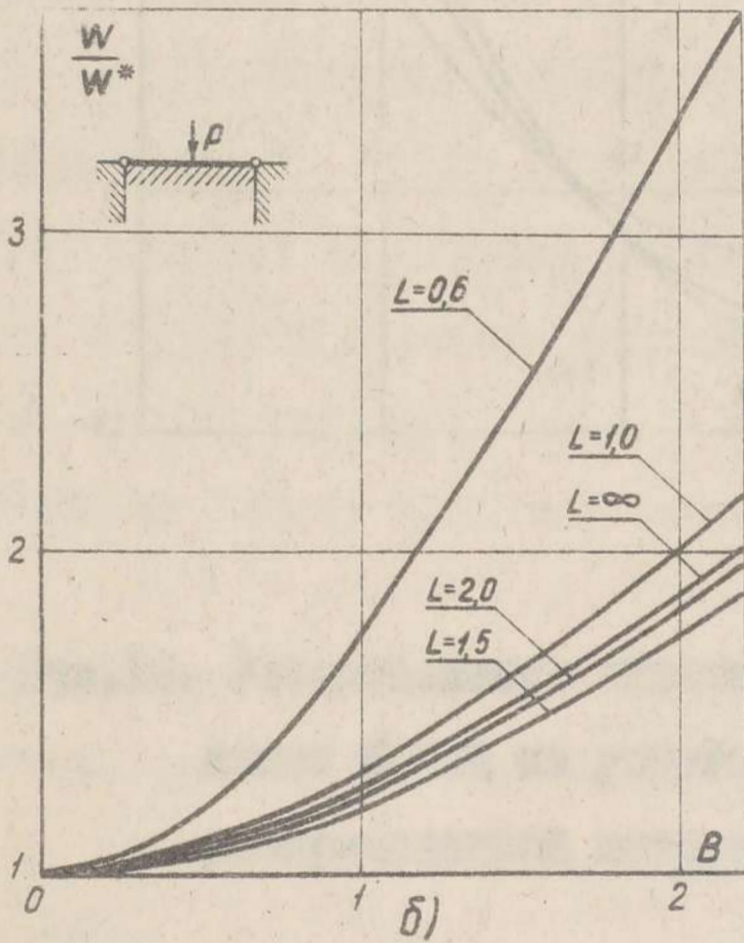
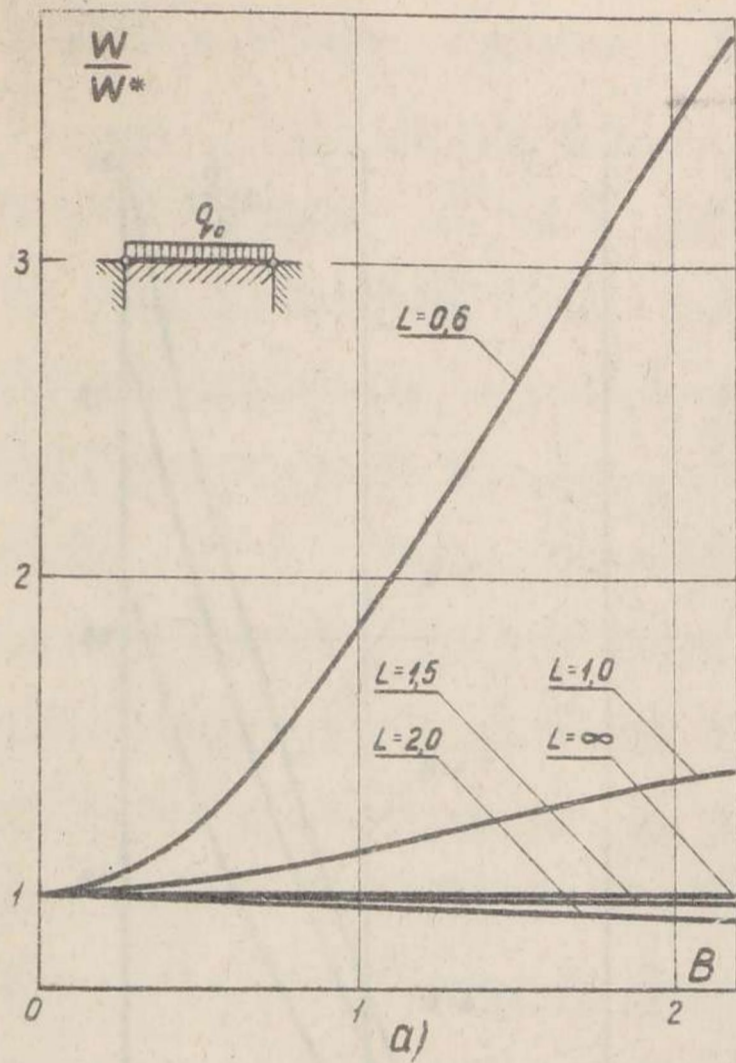


Рис. 15-а, б. Влияние смитгов на прогиб в среднем сечении
белки: а - равномерно распределенная нагрузка;
б - сосредоточенная сила посередине
пролета.

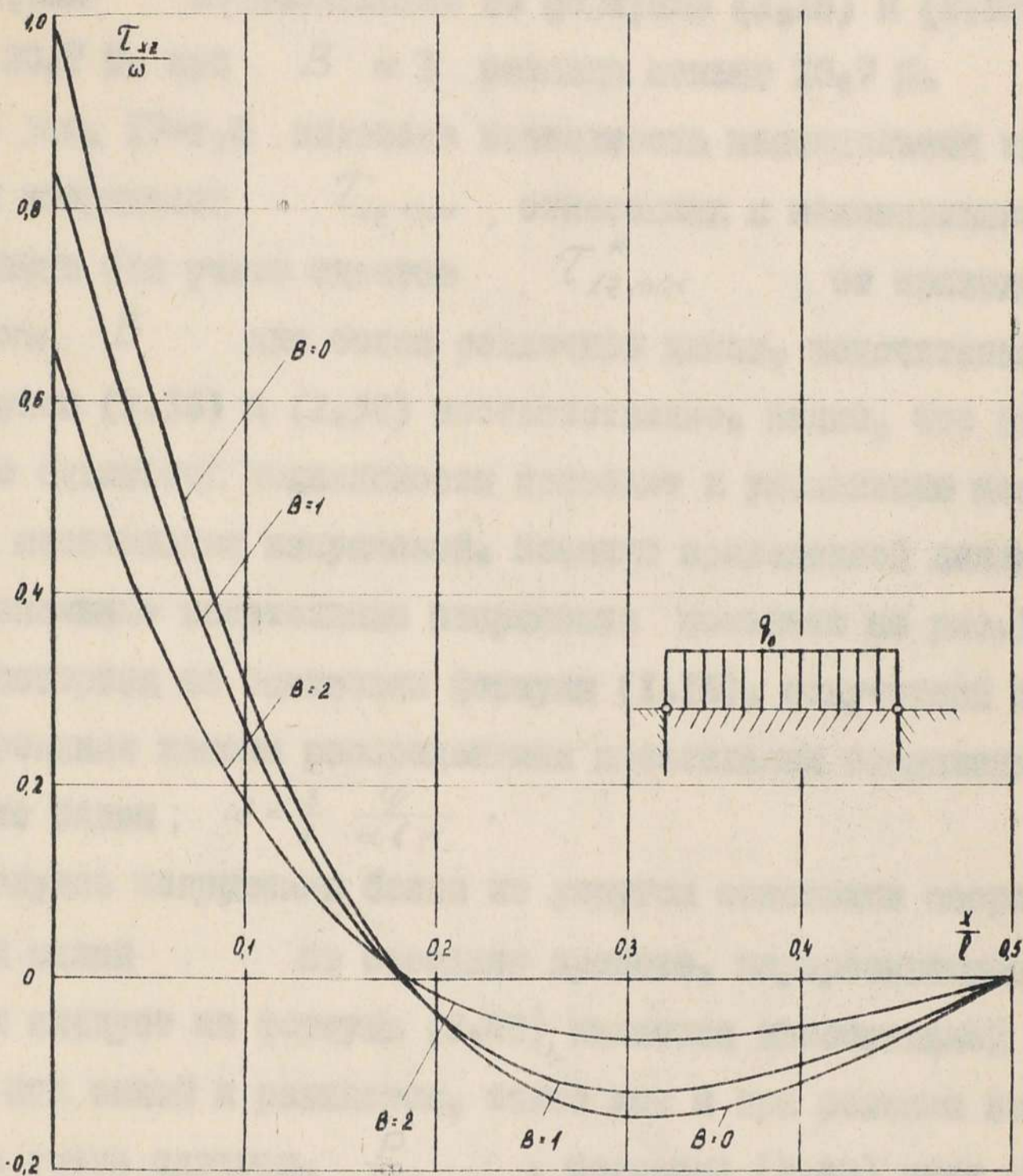


Рис. 16. Распределение касательных напряжений по длине балки на упругом основании при равномерно распределенной нагрузке; $L = 2$.

муде (2.38) несколько возмущены. При $B < 2$ разница между $\tau_{xz \max}$ подсчитанными по формулам (2.16) и (2.38) меньше 20,7 %, при $B < 1$ разница меньше 10,7 %.

На рис. 17-э, б показана зависимость максимальных касательных напряжений $\tau_{xz \max}$, отнесенных к максимальным напряжениям без учета сдвигов $\tau_{xz \max}^*$, от приведенной высоты B для балок различной длины, подсчитанных по формулам (2.16) и (2.38) соответственно. Видно, что возрастание сдвиговой податливости приводит к уменьшению максимальных касательных напряжений. Влияние приведенной длины L на максимальные касательные напряжения показано на рис. 18. График построен на основании формулы (1.16), полученной без постулирования закона распределения касательных напряжений по высоте балки; $\omega = \frac{3}{8} \frac{q}{\alpha l H}$.

В случае нагружения балки на упругом основании сосредоточенной силой P по середине пролета, перерезывающей силой как следует из формулы (2.40), является максимальной в сечении под силой и равняется, также как и при решении задачи без учета сдвигов, $\frac{P}{2}$. Согласно (2.40) учет сдвигов также не меняет величину максимальных касательных напряжений.

Для бесконечно длинных балок наличие малой сдвиговой жесткости сужает, как это следует из формул (2.29) и (2.40), зону, в которой касательные напряжения практически отличаются от нуля.

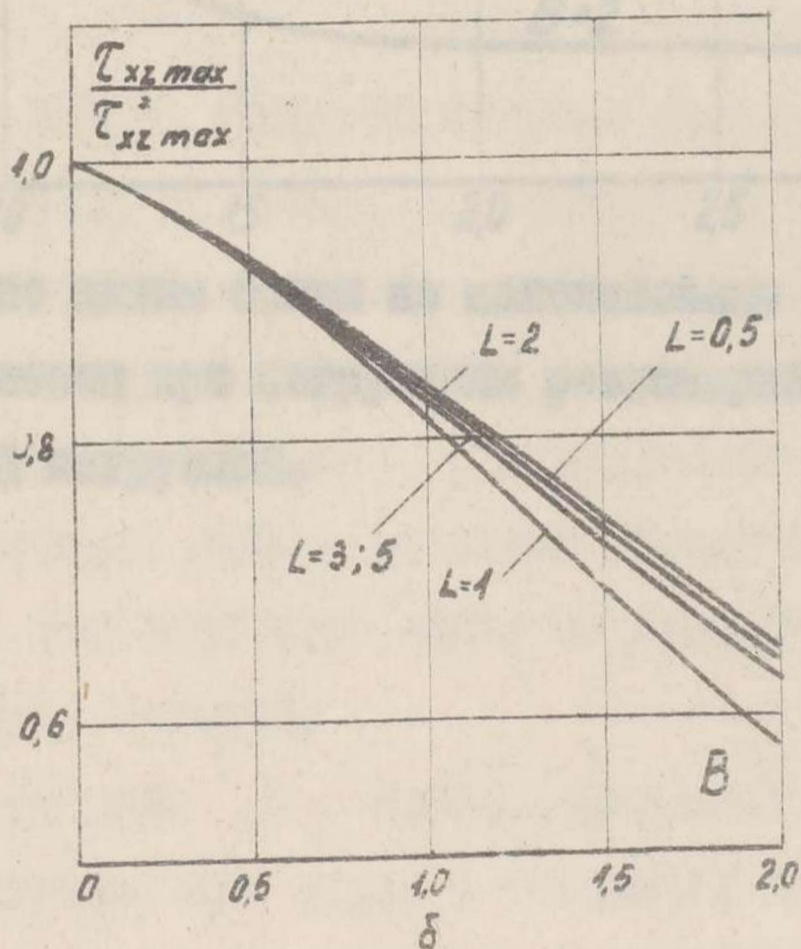
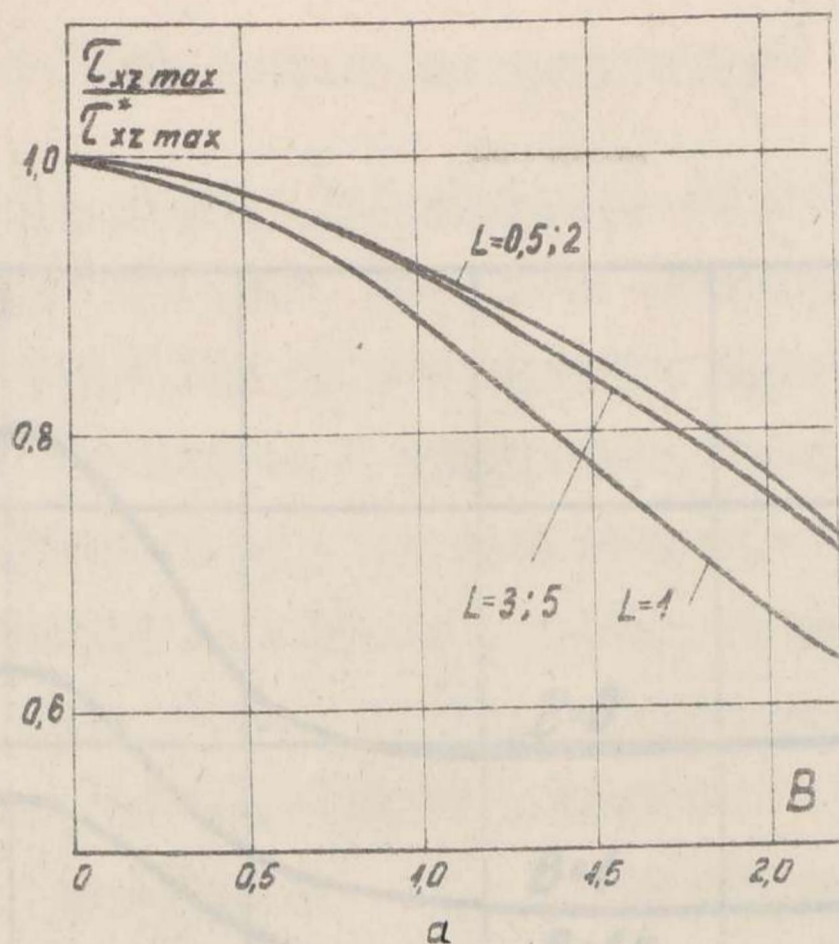


Рис. 17-а, б. Влияние сдвигов на максимальные касательные напряжения для балок различной длины при равномерно распределенной нагрузке:

- а) — без постулирования закона распределения касательных напряжений;
- б) — приняв переболическое распределение касательных напряжений по высоте балки.

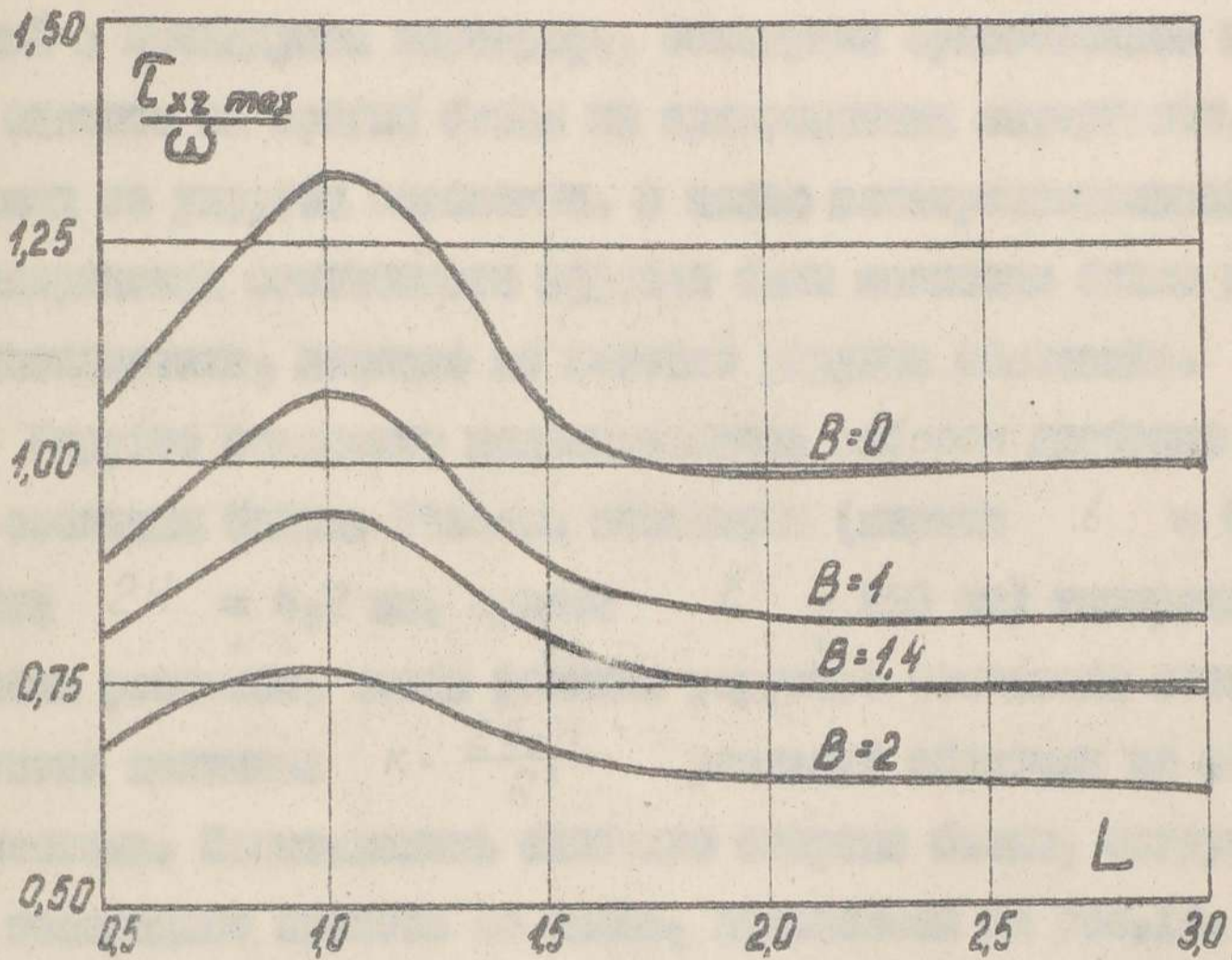


Рис. 18. Влияние длины балки на максимальные касательные напряжения при нагружении равномерно распределенной нагрузкой.

§ 7. Экспериментальное исследование.^{х)}

7.1. Методика и техника эксперимента. Анализ, проведенный в предыдущем параграфе, обнаружил существенное влияние сдвигов на прогиб балок из армированных материалов, лежащих на упругом основании. С целью экспериментального подтверждения отмеченного эффекта были испытаны балки из стеклопластика, лежащие на линейно упругом основании.

Упругое основание моделировалось набором свободно опертых стальных балок. Размеры последних (ширина $b = 8$ мм, высота $2H = 4,7$ мм, пролет $l = 250$ мм) выбирались с таким расчетом, чтобы реакция упругого основания соответствовала величине $K = \frac{2E_y H}{R^2}$ реальной оболочки из стеклопластика. Испытывались свободно опертые балки, нагруженные посередине пролета по схеме, показанной на рис.19. При нагружении по указанной схеме эпюра прогибов меняет знак. Поэтому для обеспечения совместной работы (без отрыва) балки и упругого основания установка (рис.20) была снабжена дополнительной системой гибких стальных стержней, закрепленных по концам. Они отчетливо видны на рис.20-а. Нагружение осуществлялось вручную.

Коэффициент постели K определялся экспериментально. Стальные балки моделирующие упругое основание нагружались заданной сосредоточенной нагрузкой, приложенной по середине пролета и измерялся прогиб под силой. Измерения осуществ-

х) Автору не известно ни одной работы по экспериментальному изучению изгиба балок из композитов, опирающихся на упругое основание.

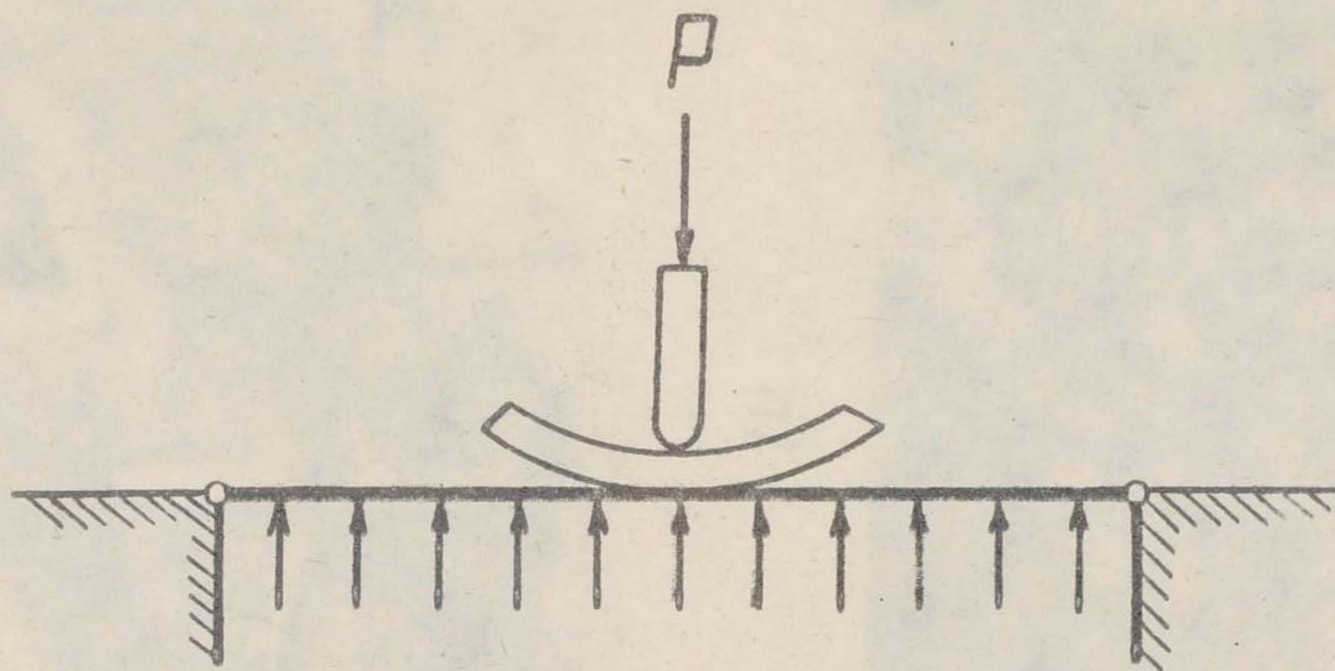
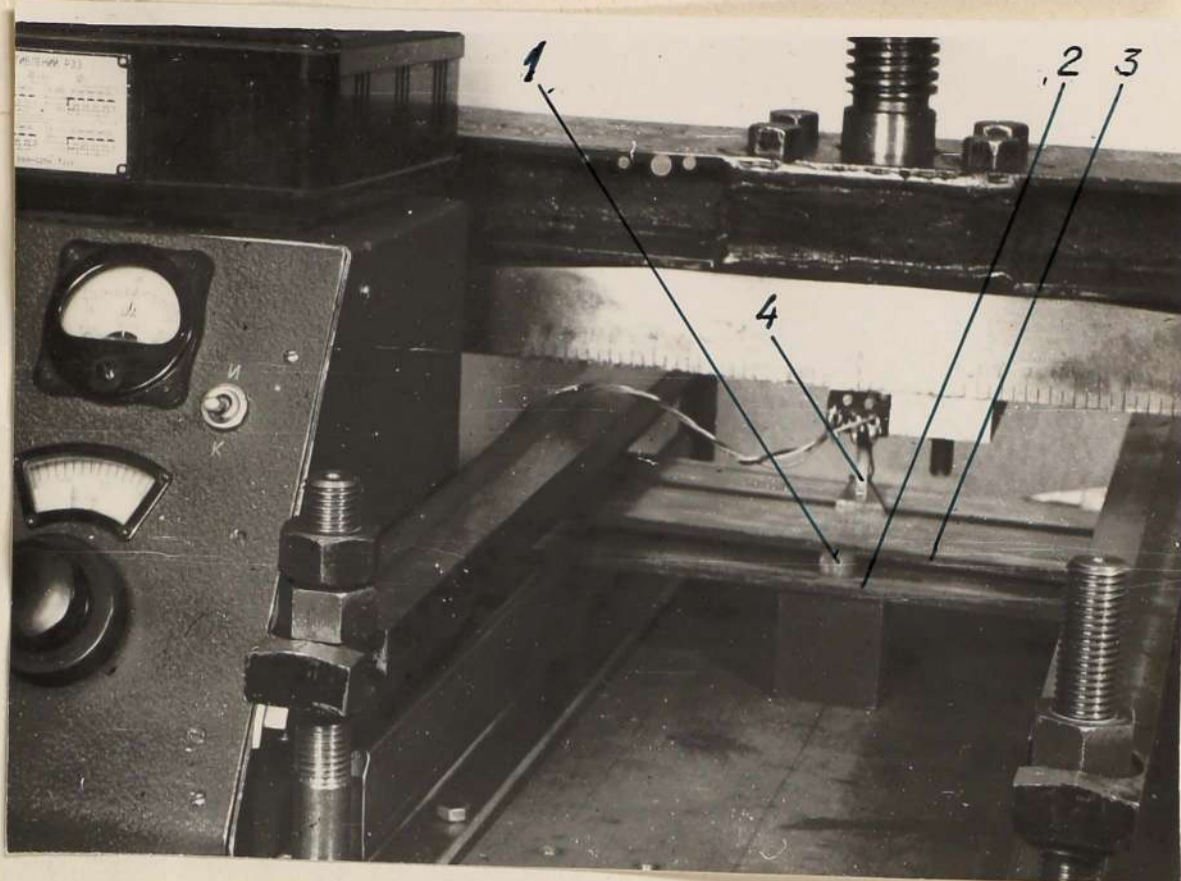
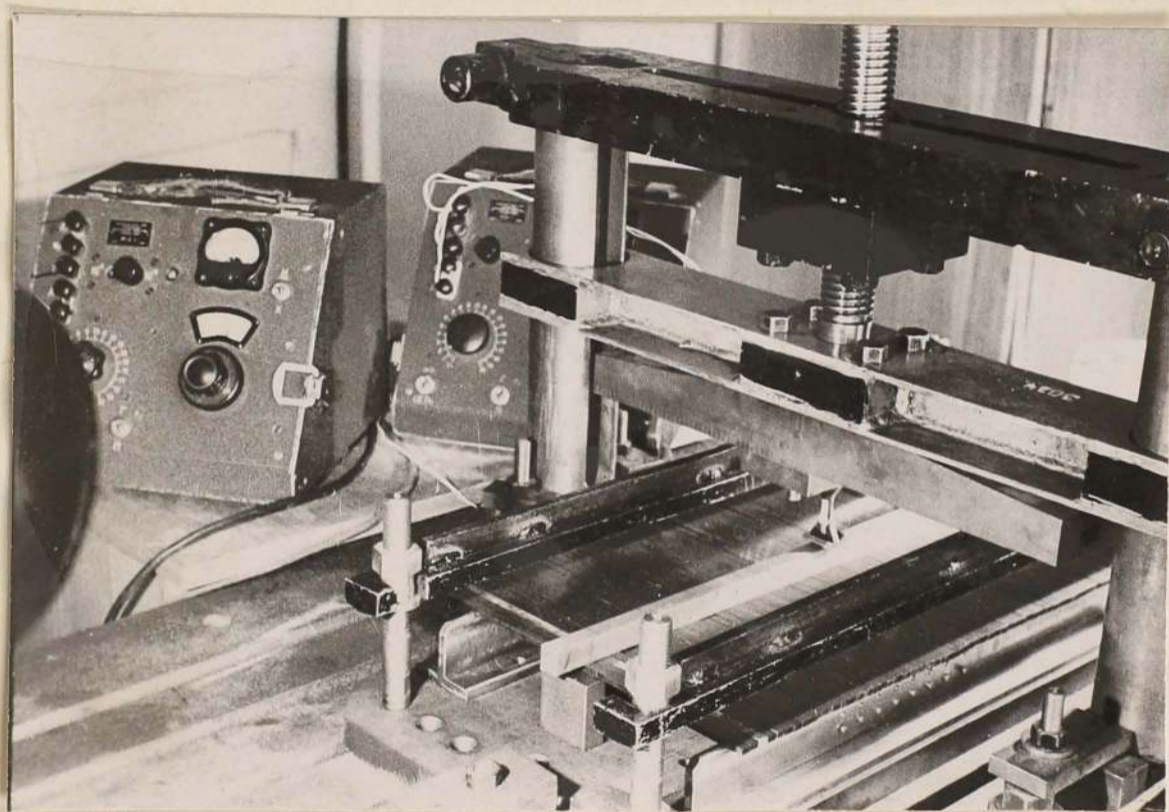


Рис. 19. Принципиальная схема нагрузки.



a)



б)

Рис. 20. Установка для испытания болта на упругом основании: а) во время испытания; б) со снятым верхним основанием (стальными стержнями); 1 — болты — весовой образец; 2 — нижнее упругое основание; 3 — верхнее основание; 4 — грузик для нагружения.

влялись при помощи тензодатчиков сопротивления. Для измерения силы датчики были наклеены на призматическую часть пуансона, при помощи которого осуществлялось нагружение; прогиб измерялся при помощи тонкой консольно закрепленной балочки из пружинной стали, у заделки которой наклеен тензодатчик, а на свободном конце прикреплено острие, которое следило за прогибом. В качестве измерительной аппаратуры использовался измеритель статических деформаций ИСД-2. Экспериментально определенная величина реакции упругого основания $K = (150 \pm 12) \text{ кгс/см}^2$.

При испытании балок на упругом основании сила и прогиб определялись по той же методике, как при определении реакции упругого основания. Прогиб определялся в месте максимального значения — под приложенной силой.

Грубая модуль упругого основания, а также практическая неосуществляемость приложения сосредоточенной силы без локальных эффектов, потребовала выбрать для балки на упругом основании материал с большим отношением E_x / G_{xz} , чтобы исследуемый эффект — влияние сдвигов на прогиб балки на упругом основании — превысил неточности практического осуществления схемы испытания. Таким свойством обладает стеклопластик ЛСБ- F (материал армирован в одном направлении), особенно если процесс полимеризации связующего не проводить до конца. Это практически не влияет на E_x , но приводит к существенному уменьшению модуля межслойного сдвига G_{xz} .

Для испытания образцы изготавливались следующим образом. Предварительно пропитанные связующим стеклокленты закладывались в форму, потом материал вместе с

формой выдерживался при температуре $(170 \pm 5)^\circ\text{C}$ в течение 40 минут на мм ширины заложенной ленты.^{х)} Изготовленная пластине разрезалась вдоль укладки на образцы. Ширина образцов $b = 15,3 \div 16,4$ мм, высота $2H = (5 \pm 0,1)$ мм; $(10 \pm 0,1)$ мм, $(15 \pm 0,1)$ мм.

Испытания проводились при следующих относительных высотах балок на упругом основании: $\frac{2H}{l} = 0,05; 0,10; 0,15; 0,20$. При каждой относительной высоте испытывались 5-6 образцов. Образцы испытывались в линейной части зависимости $w = f(P)$.

Модуль упругости E_x и модуль межслойного сдвига G_{xz} определялись по данным испытания на изгиб свободно опертых балок с различной относительной высотой $\frac{2H}{l}$, нагруженных сосредоточенной силой посередине пролета. Методика определения E_x и G_{xz} изложена в работе [51]. Были получены следующие значения упругих постоянных:

$$E_x = (4,2 \pm 0,4) \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2, \quad G_{xz} = (8,14 \pm 0,52) \cdot 10^3 \text{ кгс/см}^2$$

По данным испытания вероятность нахождения среднего арифметического упругих постоянных в указанных пределах

$p = 99\%$. Среднее значение для квадрата параметра вариации $\beta^2 = 133$, а пределы изменения: $\beta^2 = 104 \div 156$.

х) В работе [16] показано, что максимальные упругие и прочностные свойства плоских образцов толщиной 5 мм достигаются если полимеризация проводится в течение 2,5 часа на мм толщины.

7.2. Результаты и их обоснование. Проведенное экспериментальное испытание показало значительное влияние сдвигов на максимальный прогиб балок из испытанного материала. Это видно из таблицы 2, где показано среднее арифметическое значение отношения $\frac{W}{W^*}$ в зависимости от относительной высоты балки (W^* — прогиб без учета сдвигов, определенный по формуле (2.24)). Из таблицы видно, что для испытанного материала, даже для балок с $\frac{2H}{l} = 0,1$, прогиб от касательных напряжений τ_{xz} в два раза больше прогиба от нормальных напряжений. Коэффициент вариации ν отношения $\frac{W}{W^*}$ составляет 4,7 — 15%.

Таблица 2.

$\frac{2H}{l}$	W/W^*		Абсолютная разность	Разница в % от расчетной
	Расчетное	Среднее экспериментальное определение		
0,05	1,3	1,15 ($\nu = 4,7\%$)	0,15	11
0,10	2,2	2,0 ($\nu = 15,0\%$)	0,2	9
0,15	3,9	3,3 ($\nu = 11,3\%$)	0,6	15
0,20	6,7	5,9 ($\nu = 6,2\%$)	0,8	12

Экспериментальные результаты сравнивались с расчетными, подочитанными на основе гипотезы о параболическом распределении касательных напряжений. Значения упругих постоянных E_x и G_{xz} определены экспериментально по данным

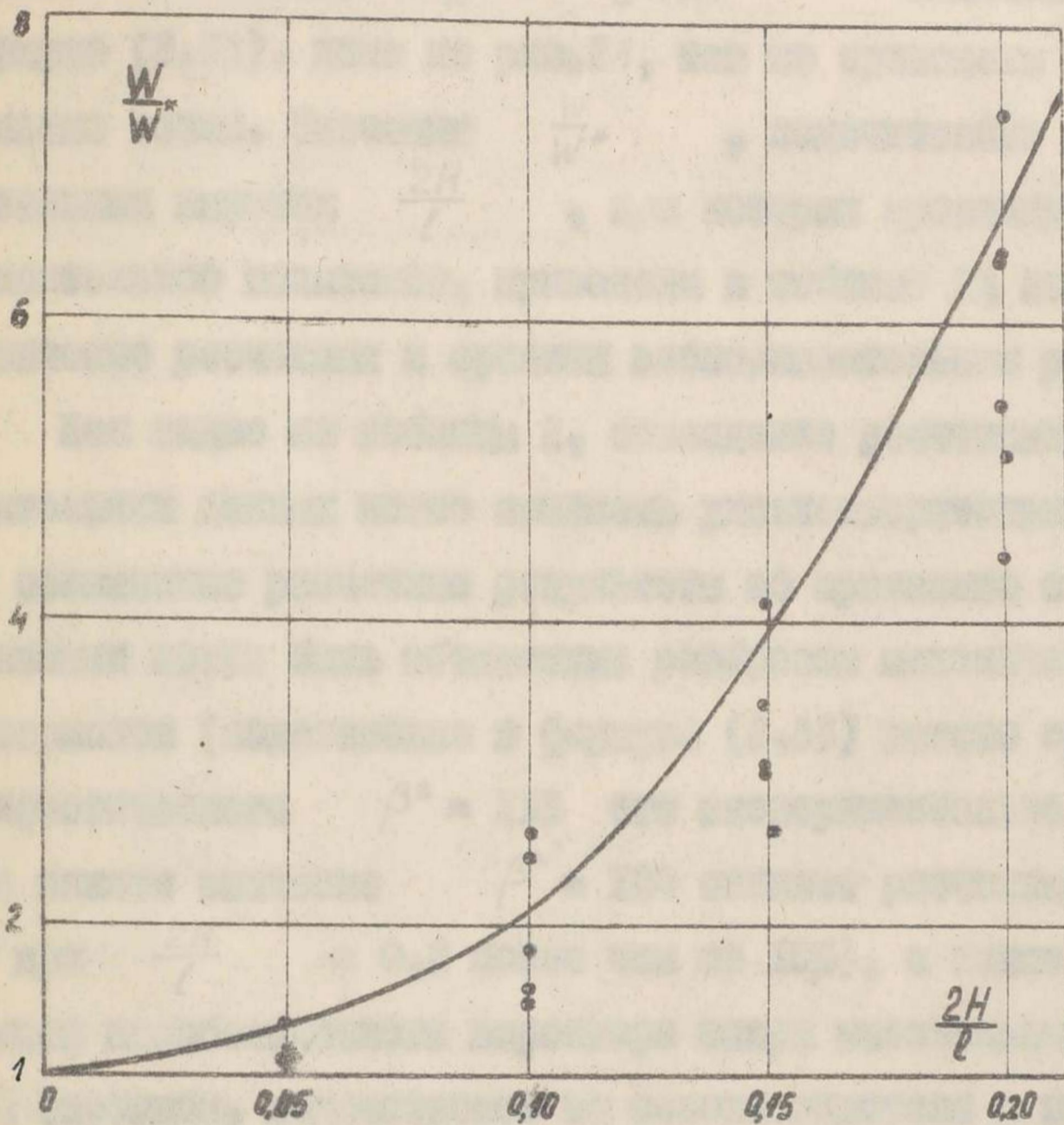


Рис. 21. Влияние сдвигов на максимальный прогиб при нагружении сосредоточенной силой посередине пролета балки из ДСБ - F , лежащей на упругом основании.

испытания свободно опертых балок из материалов ЛСБ- F на изгиб. Зависимость $\frac{W}{W^*}$, где W подсчитано по формуле (2.33), дана на рис. 2¹, там же приведены экспериментальные точки. Значения $\frac{W}{W^*}$, подсчитанные при относительных высотах $\frac{2H}{l}$, при которых проводилось экспериментальное испытание, приведены в таблице 2; там же дано сравнение расчетных и средних экспериментальных результатов.

Как видно из таблицы 2, совпадение расчетных и экспериментальных данных можно признать удовлетворительным. Несколько завышенные расчетные результаты по сравнению с экспериментальными могут быть объяснены: разбросом механических свойств материалов (подстановка в формуле (2.33) вместо среднего арифметического $\beta^2 = 133$ его экспериментально определенное наименьшее значение $\beta^2 = 104$ снижает расчетные результаты при $\frac{2H}{l} = 0,2$ более чем на 10%), а также постулированием параболического характера эпюры касательных напряжений (прогибы, подсчитанные на основе гипотезы о параболическом распределении касательных напряжений на 4-9% больше, чем прогибы подсчитанные без постулирования распределения напряжений по высоте балки).

Проведенный эксперимент подтверждает вывод о существенном влиянии поперечных сдвигов на прогиб стеклопластиковых балок на упругом основании. Дополнительный прогиб, обусловленный сдвигами, с достаточной для практики точностью, может быть определен по зависимостям, полученным в § 6.

§ 8. Продольно - поперечный изгиб.

В случае, когда кроме поперечной нагрузки $q(x)$ на балку длиной l , шириной b и высотой $2H$ действует продольная растягивающая или сжимающая сила N , уравнения равновесия записываются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \quad (2.41)$$

$$\left(2Hb \pm \frac{N}{G_{xz}}\right) \frac{d^2 w}{dx^2} + b \int_{-H}^H \frac{\partial u}{\partial x \partial z} dz = \frac{q(x) + kw}{G_{xz}}, \quad (2.42)$$

где K — реакция упругого основания
 $\beta = \sqrt{\frac{E_x}{G_{xz}}}$ — параметр анизотропии.

Знак "+" перед одночленом содержит продольную силу соответствует растяжению, знак "-" соответствует сжатию.

Рассмотрим жесткость балок на упругом основании при двух видах поперечных нагрузок — равномерно распределенной с интенсивностью q и сосредоточенной силы P по середине пролета.

8.1. Равномерно распределенная нагрузка. При периодическом опирании, решив систему уравнений (2.41 — 2.42) методом Фурье, получим:

$$w = W_{\infty}^* \frac{4B^4}{\pi} \sum_{m=1,3,5...}^{\infty} \frac{A_m}{m} \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (2.43)$$

где

$$A_m = \frac{1}{3m^2 \alpha^2 - 3m \alpha \operatorname{th} m \alpha + \frac{m^2 \alpha^2 N B^2}{\sqrt{\kappa E_x J}} + B^4}$$

и приняты следующие обозначения: $J = \frac{2\beta H^3}{3}$ — момент инерции поперечного сечения; $\alpha = \frac{\pi H \beta}{l}$; $B = \sqrt{2} \alpha \beta H$ — приведенная (с учетом сдвигов) высота балки; $\alpha = \sqrt[4]{\frac{\kappa}{4E_x J}}$; $W_\infty^* = \frac{q}{\kappa}$ — прогиб в середине балки при $N=0$.

Из (2.43) прогиб посередине балки:

$$W = W_\infty^* \frac{4B^4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} A_m. \quad (2.44)$$

Если пренебречь сдвигами ($G_{xz} = \infty$, $B = 0$), получаем выражение

$$\lim_{G_{xz} \rightarrow \infty} W = W_\infty^* \frac{4L^4}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \frac{1}{m^4 + \frac{m^2 N L^2}{\sqrt{\kappa E_x J}} + L^4}, \quad (2.45)$$

совпадающее с выражением приведенным в работе [56]. В выражении (2.45) $L = \frac{B}{\alpha} = \frac{\sqrt{2} \alpha l}{\pi}$ — приведенная длина балки.

Для бесконечно длинной балки

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W = \lim_{l \rightarrow \infty} W^* = W_\infty^*.$$

Для определения изгибаемой линии в случае жестко закрепленных концов суммируется решение для свободно опартой и нагруженной опорными моментами M_0 балок. Величина M_0 определяется —

отоя из условия равенства нулю первой производной по x суммарного прогиба на концах балки. Выражение упругой линии имеет вид:

$$W = W_{\infty}^* \left[\frac{4B^4}{\pi} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{A_m}{m} \sin \frac{m\pi x}{l} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{B^4}{L} K(x,l) \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} A_m \right], \quad (2.46)$$

где

$$K(x,l) = \frac{\operatorname{sh} \alpha (l-x) \sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x \sin \alpha (l-x)}{\operatorname{sh} \alpha l + \sin \alpha l}.$$

Прогиб по середине балки:

$$W = W_{\infty}^* \left[\frac{4B^4}{\pi} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} A_m - \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \frac{B^4}{L} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi L}{2\sqrt{2}} \sin \frac{\pi L}{2\sqrt{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi L}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\pi L}{\sqrt{2}}} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} A_m \right]. \quad (2.47)$$

Если пренебречь сдвигами, то есть, $G_{xz} \rightarrow \infty$, имеют

$$\lim_{G_{xz} \rightarrow \infty} W = W^* = W_{\infty}^* \left[\frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \frac{L^4}{m^4 + \frac{m^2 N L^2}{\sqrt{\kappa E_x J}} + L^4} - \right. \quad (2.48)$$

$$\left. - \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi L}{2\sqrt{2}} \sin \frac{\pi L}{2\sqrt{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi L}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\pi L}{\sqrt{2}}} \sum_{m=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{L^3}{m^4 + \frac{m^2 N L^2}{\sqrt{\kappa E_x J}} + L^4} \right].$$

Для бесконечно длинной балки имеют

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W = \lim_{l \rightarrow \infty} W^* = W_{\infty}^*.$$

8.2. Сосредоточенная сила посередине пролета. При равномерном опирении балки на упругом основании упругая линия имеет вид:

$$w = W_{\infty}^* \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{B^4}{L} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad (2.49)$$

где $W_{\infty}^* = \frac{P\alpha}{2k}$ — прогиб под силой P бесконечно длинной балки без учета подвигов при $N=0$

Прогиб по середине балки

$$W = W_{\infty}^* \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{B^4}{L} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m = W_{\infty}^* \frac{4\sqrt{2}}{\pi} B^3 \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \varkappa A_m \quad (2.50)$$

Сумму $\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \varkappa A_m$ можно оценить интегралами с аргументом $m\varkappa$;

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} A_m d(m\varkappa) \leq \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \varkappa A_m \leq \varkappa \frac{A_1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} A_m d(m\varkappa), \quad (2.51)$$

где A_1 — первое слагаемое ряда $\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} A_m$.

В случае бесконечно длинной балки $\varkappa = \frac{B}{L} = 0$ и

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W = W_{\infty} = W_{\infty}^* \frac{2\sqrt{2}}{\pi} B^3 \int_0^{\infty} A_m d(m\varkappa). \quad (2.52)$$

Интеграл в выражении (2.52) вычисляется графоаналитически, учитывая, что при значении $m\varkappa < 0,03$ и $m\varkappa > 3$ его

можно приближенно заменить табличными интегралами $\int_0^{\infty} \frac{d(m \alpha e)}{B^4}$
 и $\int_0^{\infty} \frac{d(m \alpha e)}{(3 \pm \frac{NB^2}{\sqrt{kE_x J}}) m^2 \alpha e^2 - 3m \alpha e + B^4}$ соответственно.

При $G_{xz} \rightarrow \infty$ из (2.50) получаем:

$$\lim_{G_{xz} \rightarrow \infty} W = W^* = W_{\infty}^* \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{L^3}{m^4 \pm \frac{m^2 N L^2}{\sqrt{kE_x J}} + L^4} \quad (2.53)$$

Оценивая сумму в выражении (2.53) интегралами подобно выраже-
 ниям (2.51) имеем для бесконечно длинной балки (при $N < 2\sqrt{kE_x J}$)

$$\lim_{l \rightarrow \infty} W = W_{\infty}^* \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 \pm \frac{N}{\sqrt{kE_x J}}}} \quad (2.54)$$

Для растянуто-изогнутых балок из стеклопластиков растягиваю-
 щее напряжение σ_x обычно меньше $2\sqrt{kE_x}$, а шири-
 на и высота балки величинами одного порядка, поэтому $N < 2\sqrt{kE_x J}$
 В случае сжатого-изогнутой балки тоже всегда имеем $N < 2\sqrt{kE_x J}$
 поскольку при $N = 2\sqrt{kE_x J}$ бесконечно длинная балка на
 упругом основании теряет устойчивость под действием только
 сжимающей силы [20].

для балок с жестко закрепленными концами упругий лания
 имеет вид:

$$w = W_{\infty}^* \left[\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{B^4}{L} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} - \right. \\ \left. - \frac{8}{\pi} B^2 \mathcal{K}(x, l) \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} m \alpha e^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \right] \quad (2.55)$$

Прогиб по середине пролета:

$$W = W_{\infty}^* \left[\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{B^4}{L} \sum_{m=1,3,5\dots} A_m - \frac{16}{\pi} B^2 \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi L}{2\sqrt{2}} \sin \frac{\pi L}{2\sqrt{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi L}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\pi L}{\sqrt{2}}} \sum_{m=1,3,5\dots} m \alpha^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m \right]. \quad (2.56)$$

Сумма $\sum_{m=1,3,5\dots} m \alpha^2 (-1)^{\frac{m-1}{2}} A_m$ сходится, так как интеграл $\int_0^{\infty} m \alpha^2 A_m d(m)$ имеет конечное значение, если только в случае скато-изогнутой балки продольная сила не равна критической.

Без учета сдвигов, т.е. при $G_{xz} \rightarrow \infty$, из (2.54) получаем:

$$\lim_{G_{xz} \rightarrow \infty} W = W^* = W_{\infty}^* \left[\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sum_{m=1,3,5\dots} \frac{L^3}{m^4 \pm \frac{m^2 N L^2}{\sqrt{K E_x J}} + L^4} - \frac{16}{\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi L}{2\sqrt{2}} \sin \frac{\pi L}{2\sqrt{2}}}{\operatorname{sh} \frac{\pi L}{\sqrt{2}} + \sin \frac{\pi L}{\sqrt{2}}} \sum_{m=1,3,5\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{m L^2}{m^4 \pm \frac{m^2 N L^2}{\sqrt{K E_x J}} + L^4} \right]. \quad (2.57)$$

В случае бесконечно длинной балки, когда условия закрепления не влияют на прогиб посередине пролета, выражение (2.56) и (2.57) совпадают с решением для случая шарнирного опирания (2.50) и (2.53).

8.3. Влияние сдвигов на прогиб балок на упругом основании при действии поперечной и продольной силы. Полученные формулы (2.44, 2.47, 2.50, 2.56) используются для построения графиков, иллюстрирующих влияние сдвигов на прогиб посередине пролета при действии поперечной нагрузки и продольной сжимающей силы. Графики при равномерно распределенной поперечной нагрузке и при поперечной нагрузке в виде сосредоточенной силы посередине пролета для балок с различной приведенной длиной L представлены на рис. 22 и 23, соответственно. Из сравнения

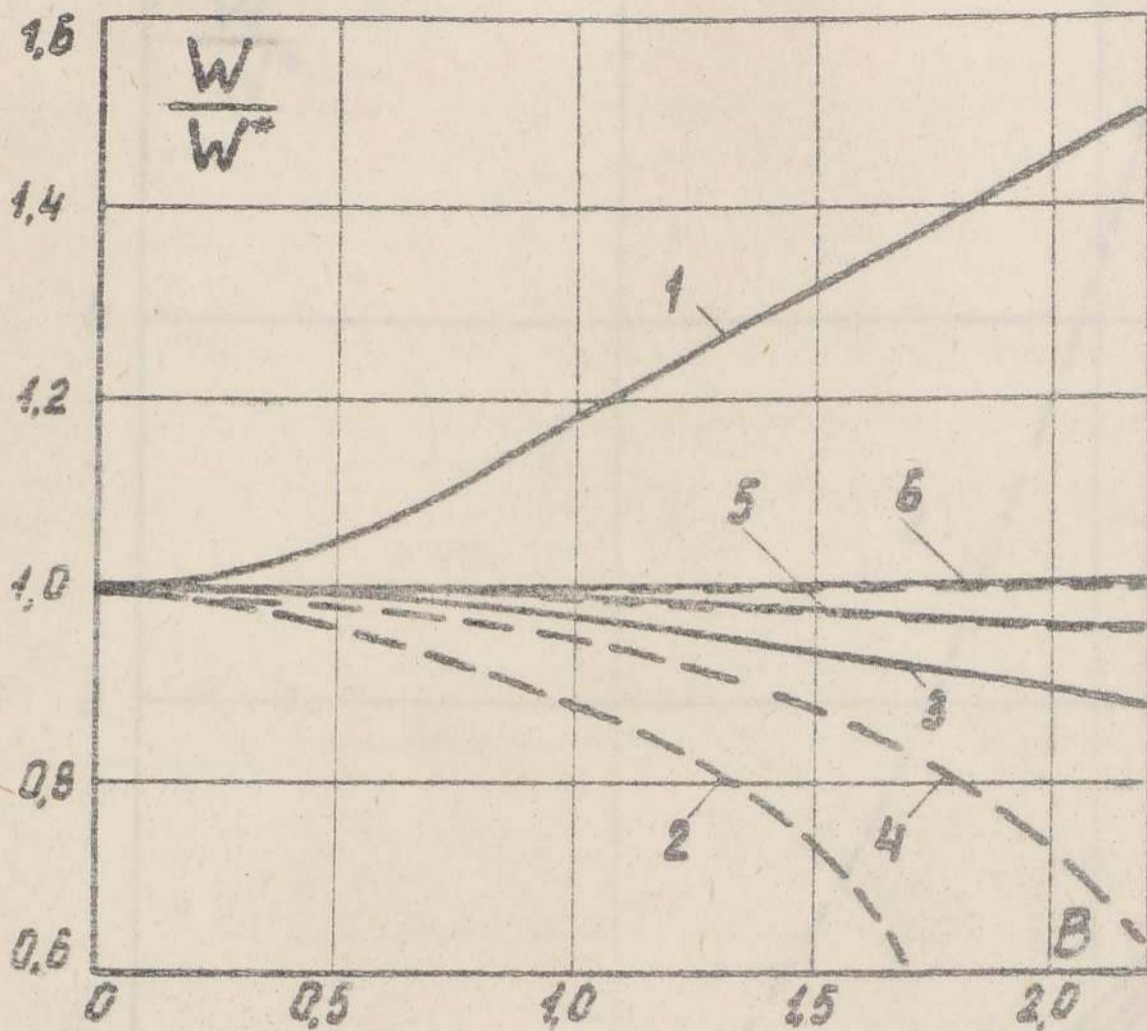


Рис. 22. Влияние сдвигов на прогиб посередине пролета скато-изогнутых балок на упругом основании при действии равномерно распределенной нагрузки; $\frac{N}{\sqrt{k E_y J}} = 0,25$;

— варириное опирание;

--- жестко защемленные концы;

1, 2 — $L = 1$; 3, 4 — $L = 2$; 5 — $L = 3$ — варириное опирание и жестко защемленные концы; 6 — $L = 4$; 5;

∞ — варириное опирание и жестко защемленные концы.

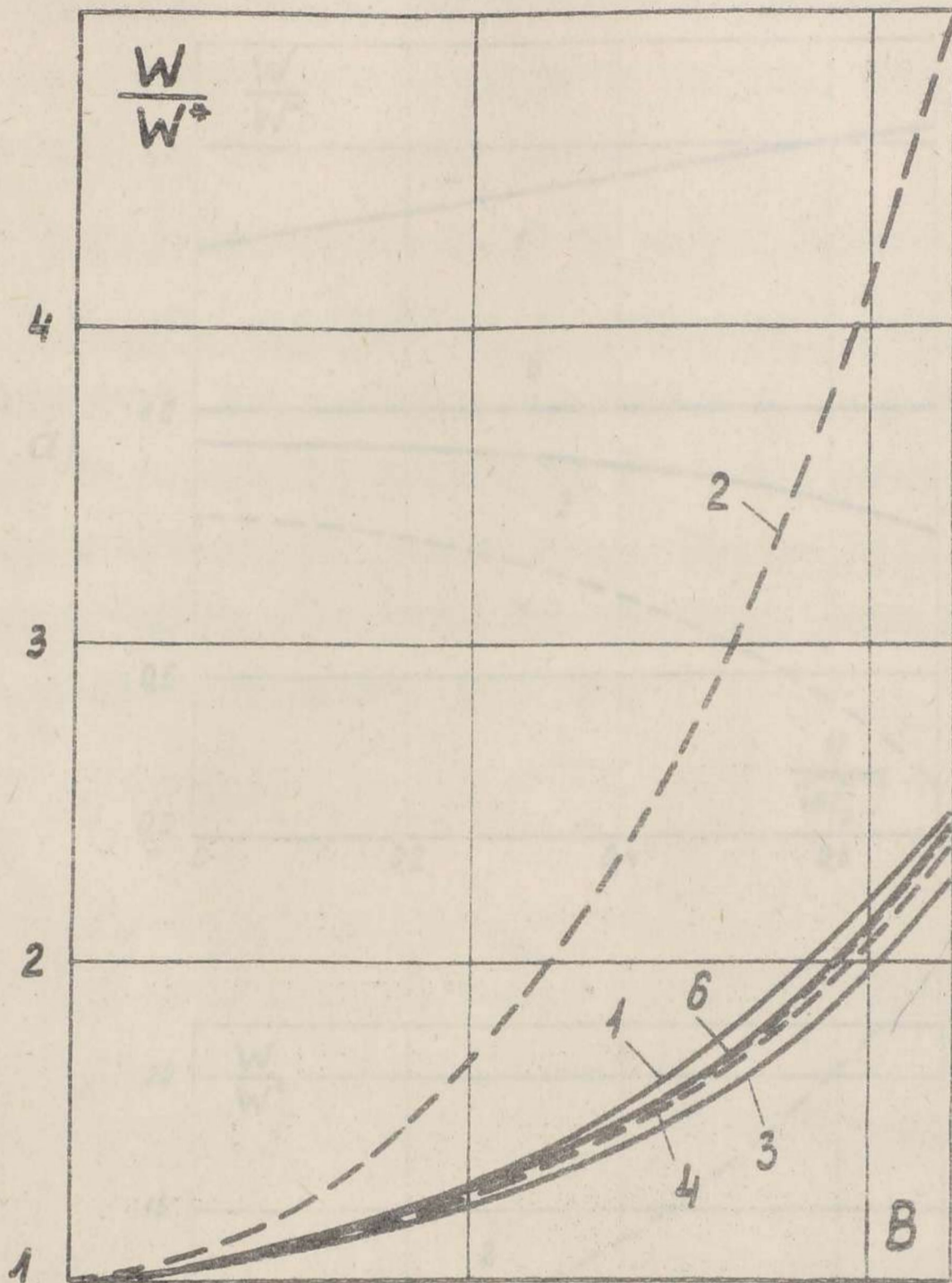


Рис. 23. Влияние сдвига на изгибаемый стержень ското-изогнутых балок на упругом основании при действии сосредоточенной силы посередине пролета; $\frac{N}{\sqrt{k E_y J}} = 0,25$

— шарнирное опирание;

- - - жестко защемленные концы;

1,2 — $L = 1$; 3,4 — $L = 2$; 6 — $L = 4,5$

∞ — шарнирное опирание и жестко защемленные концы.

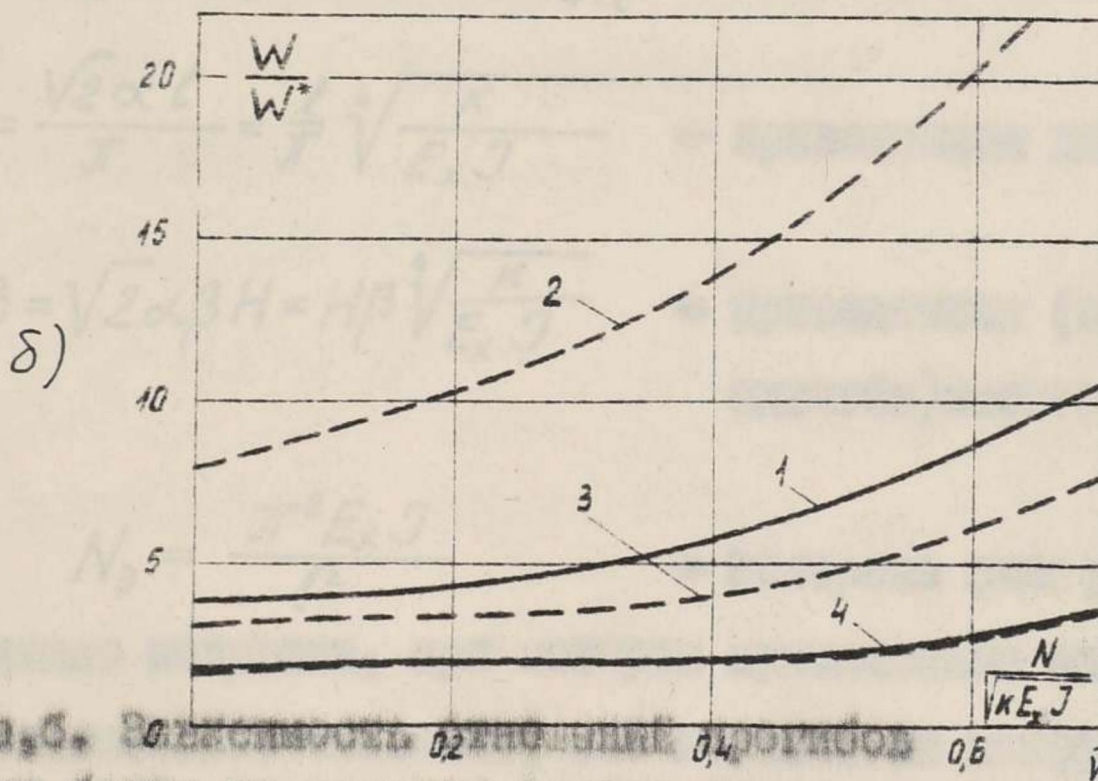
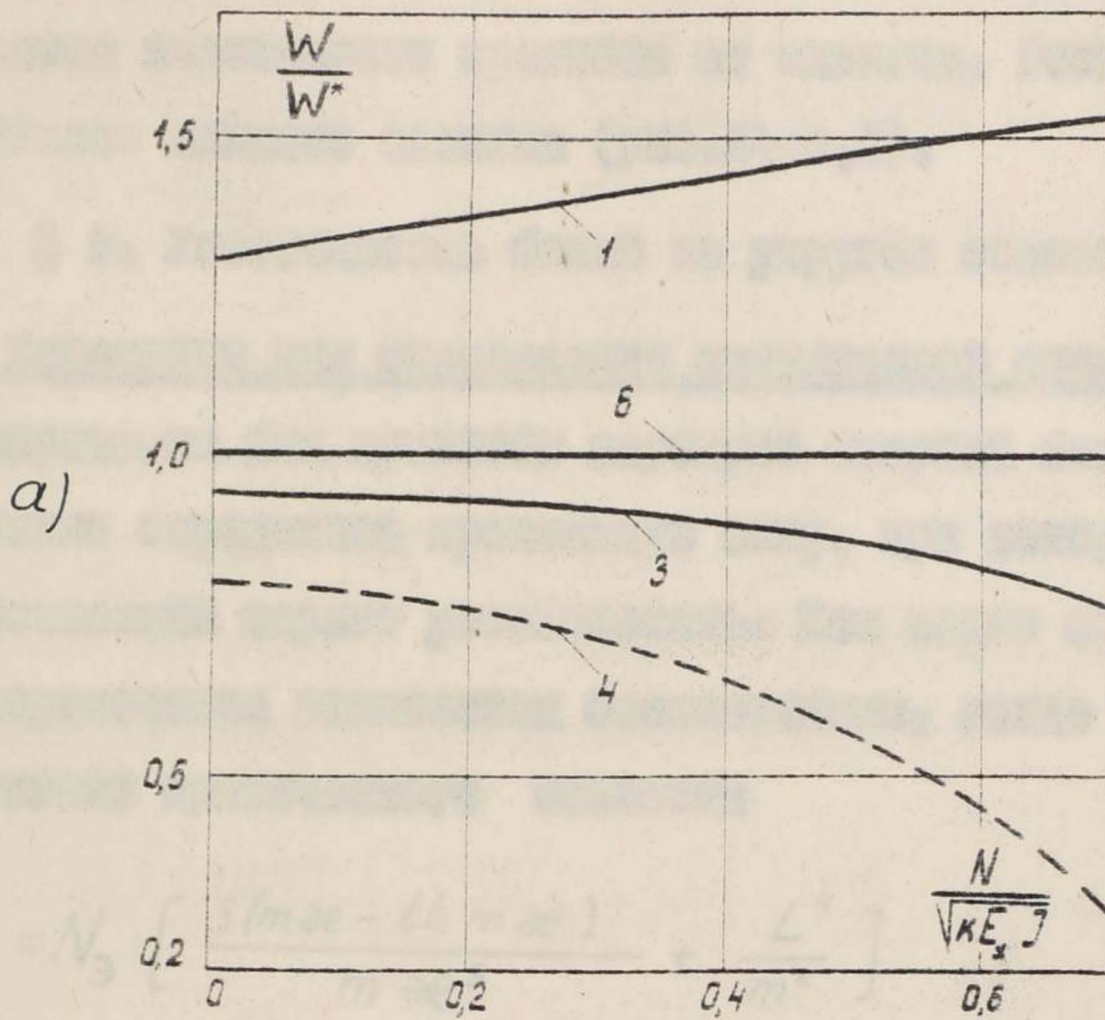


Рис. 24-а, б. Зависимость $\frac{W}{W^*}$ от величины $\frac{N}{\sqrt{kE_x J}}$ для изогнутых балок на упругом основании от приложенной продольной силы; $B = 1,8$. ———— шарнирное опирание
 - - - - жестко защемленные концы.

а) равномерно распределенная нагрузка: 1- $L=1$; 3,4- $L=2$;
 6- $L=4$; 5; ∞ — шарнирное опирание и жестко защемленные концы. б) сосредоточенная сила по середине пролета:
 1,2- $L=0,6$; 3- $L=1$; 4- $L=1$ — шарнирное опирание;
 4- $L=2$; 5; ∞ шарнирное опирание и жестко защемленные концы.

рисунков 22, 23 с соответствующими рисунками 15-а, б в случае поперечного изгиба видно, что действие продольной силы не меняет характер зависимости прогибов от сдвигов. Рост продольной силы усиливает влияние сдвигов (рис. 24-а, б).

§ 9. Устойчивость балки на упругом основании.

9.1. Выражения для определения критической силы. Из полученного выражения для прогибов шарнирно опертой балки (формула (2.43)) легко определить предельную силу, при которой балка на упругом основании теряет устойчивость. Как видно из формулы (2.43), перемещения становятся бесконечными, когда продольная сила достигает критического значения

$$N_{кр} = N_Э \left[\frac{3(m\alpha - th m\alpha)}{m\alpha^3} + \frac{L^4}{m^2} \right] \quad (2.58)$$

Здесь $\alpha = \frac{B}{L} = \frac{\pi\beta H}{l}$; $\beta = \sqrt{\frac{E_x}{G_{xz}}}$ — параметр анизотропии;

$L = \frac{\sqrt{2}\alpha l}{\pi} = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{K}{E_x J}}$ — приведенная длина балки;

$B = \sqrt{2}\alpha\beta H = H\beta \sqrt[4]{\frac{K}{E_x J}}$ — приведенная (с учетом сдвигов) высота балки;

$N_Э = \frac{\pi^2 E_x J}{l^2}$ — Эйлерова сила;

m — число полуволн, при котором критическая сила имеет минимальное значение, оно зависит от коэффициента постели K , длины и жесткости балки.

Переход от m полуволны к $m+1$ полуволне определяется из условия

$$\frac{3(m\alpha - thm\alpha)}{m\alpha^3} + \frac{L^4}{m^2} = \quad (2.59)$$

$$= \frac{3[(m+1)\alpha - th(m+1)\alpha]}{(m+1)\alpha^3} + \frac{L^4}{(m+1)^2}.$$

При бесконечной сдвиговой жесткости балки на упругом основании, то есть при $G_{xz} \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} N_{кр} = N_{кр}^* = N_{\text{э}} \left(m^2 + \frac{L^4}{m^2} \right) \quad (2.60)$$

и получаем общеизвестное выражение для критической силы балки на упругом основании [21], [70].

Если число полуволн m велико, то критическая нагрузка может быть определена из упрощенного выражения

$$N_{кр}^{\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} N_{\text{э}} \left[\frac{3(m\alpha - thm\alpha)}{m\alpha^3} + \frac{L^4}{m^2} \right] = \frac{3}{\alpha^2} \quad (2.61)$$

Подсчеты показали, что ошибка в определении критической нагрузки, вносимая заменой формулы (2.58) формулой (2.61)

$< 5\%$, если m и, соответственно L^4 , принимают следующие значения:

$$m \geq 25; L^4 \geq 300 \quad \text{при } \alpha \geq 0,5;$$

$$m \geq 12; L^4 \geq 18 \quad \text{при } \alpha \geq 1;$$

$$m \geq 5; L^4 \geq 1 \quad \text{при } \alpha \geq 2.$$

Как следует из выражений (2.58), критическая сила балки на упругом основании, определенная с учетом сдвигов, зависит от реакции упругого основания K , податливости балки

$\frac{1}{E_x J}$, длины балки l , жесткости балки H и параметра анизотропии $\beta = \sqrt{\frac{E_x}{G_{xz}}}$, влияние которых должно и рассматривается.

9.2. Влияние упругого основания и податливости балки.

Влияние упругого основания и податливости балки на критическую силу, определенную с учетом сдвигов, будем характеризовать параметром $\bar{K} = L^4 = \frac{\kappa l^4}{\pi^4 E_x J}$, который линейно зависит как от реакции упругого основания, так и от податливости балки. С другой стороны, как это видно по зависимости (2.58), критическая нагрузка линейно зависит от параметра \bar{K} .

При $\kappa = 0$, что соответствует балке без упругого основания $m = 1$, а формула (2.58) переходит в формулу для определения критической силы равномерно обжатой балки без упругого основания с учетом сдвигов [61]. С ростом параметра $\bar{K} = L^4$ число полуволн, при котором достигается минимум критической силы увеличивается, возрастает критическая нагрузка.

Как следует из равенства (2.59), переход от потери устойчивости по m полуволнам к потере устойчивости по $(m + 1)$ полуволнам происходит при

$$\bar{K} = m^2(m + 1)^2 \frac{(m + 1)^2 \psi_{m+1} - m^2 \psi_m}{(m + 1)^2 - m^2}, \tag{2.62}$$

где

$$\psi_m = \frac{3(m \alpha - \text{th } m \alpha)}{m^3 \alpha^3};$$

$$\gamma_{m+1} = \frac{3[(m+1)\alpha - th(m+1)\alpha]}{(m+1)^3 \alpha^3}$$

Зависимость между отношением $\frac{N_{кр}}{N_3}$ и параметром \bar{K} при разных значениях параметра α представлена на рис. 25.

9.3. Влияние параметров анизотропии, длины и высоты балки на критическую нагрузку. Влияние отношений $\frac{E_x}{G_{xz}}$ и высоты балки будем характеризовать при помощи параметра α , а также параметре $B = \sqrt{2} \alpha \beta H = \sqrt{\frac{K}{E_x J}} \beta H$ влияние длины балки — при помощи параметра L .

Из зависимости (2.59) и рис. 25 следует, что наклон прямой $\frac{N_{кр}}{N_3} = f(\bar{K})$ не зависит от параметра α . Последний влияет на расположение точки пересечения прямой с осью ординат $\frac{N_{кр}}{N_3}$. Как видно на рис. 25, влияние α на ось отложено $\frac{E_x}{G_{xz}}$ и $\frac{H}{l}$, проявляется также в том, что границы перехода от меньшего числа волн к большому сдвигаются в сторону меньших значений \bar{K} (х).

Об этом можно судить по рис. 26, на котором показаны зоны соответствующие $m = 1 \div 4$ в зависимости от параметров α и \bar{K} . Поэтому с увеличением высоты и сдвиговой податливости балки на упругом основании уменьшается отношение

$N_{кр}/N_3$. Увеличение α также приводит к тому,

х) Аналогичные результаты получены в работе Н.Л.Целева, Г.А.Хетерова, Р.В.Мельникова [42] при рассмотрении устойчивости при продольном цилиндрическом изгибе стенок пластинчатых плоскостей, связанных с упругим основанием.

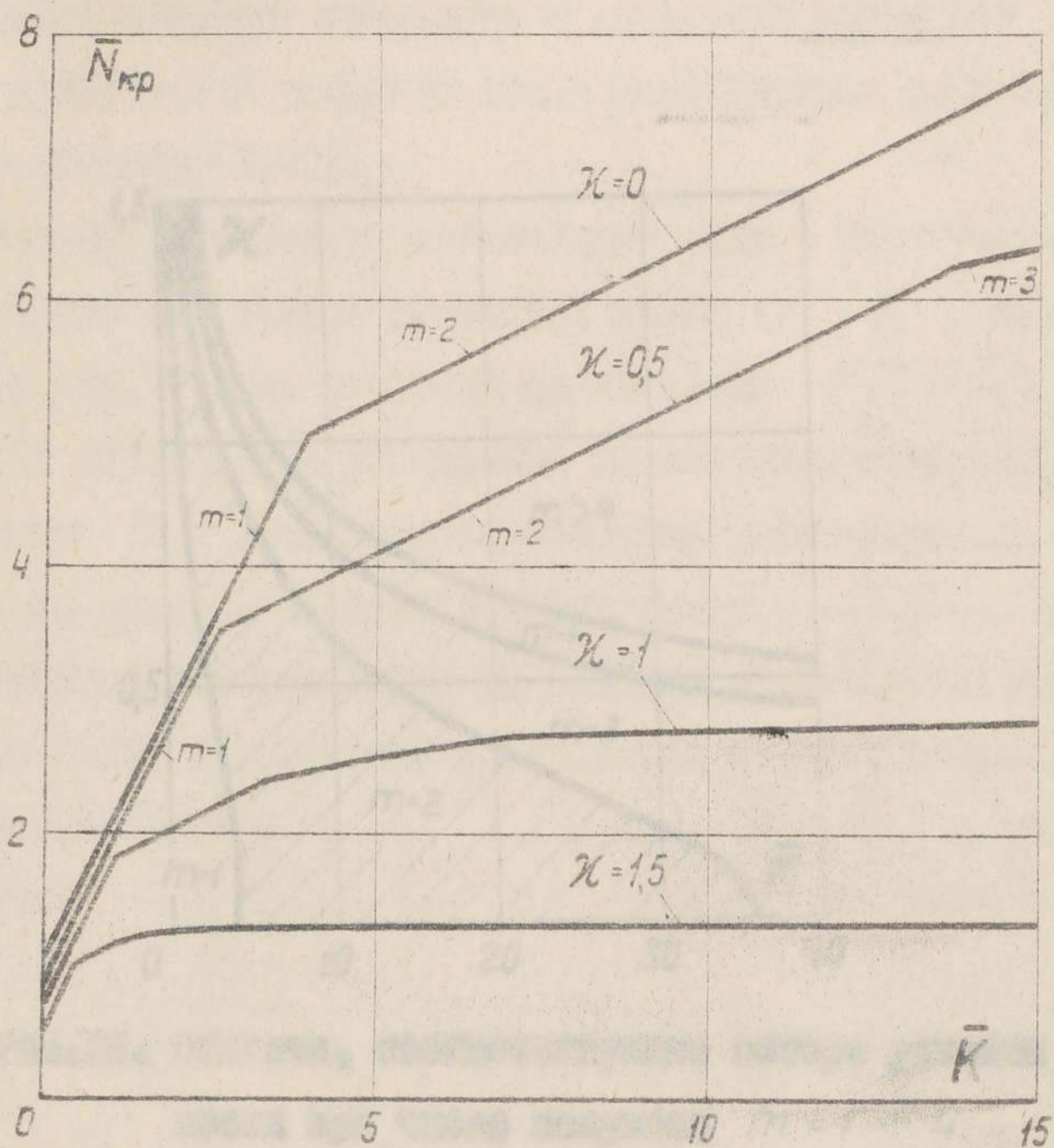


Рис. 25. Изменение критической силы в зависимости от жесткости упругого основания (или от диаметра балки на упругом основании) при различных значениях параметра χ и коэффициента \bar{K} ; $\bar{N}_{кр} = \frac{N_{кр}}{N_3}$.

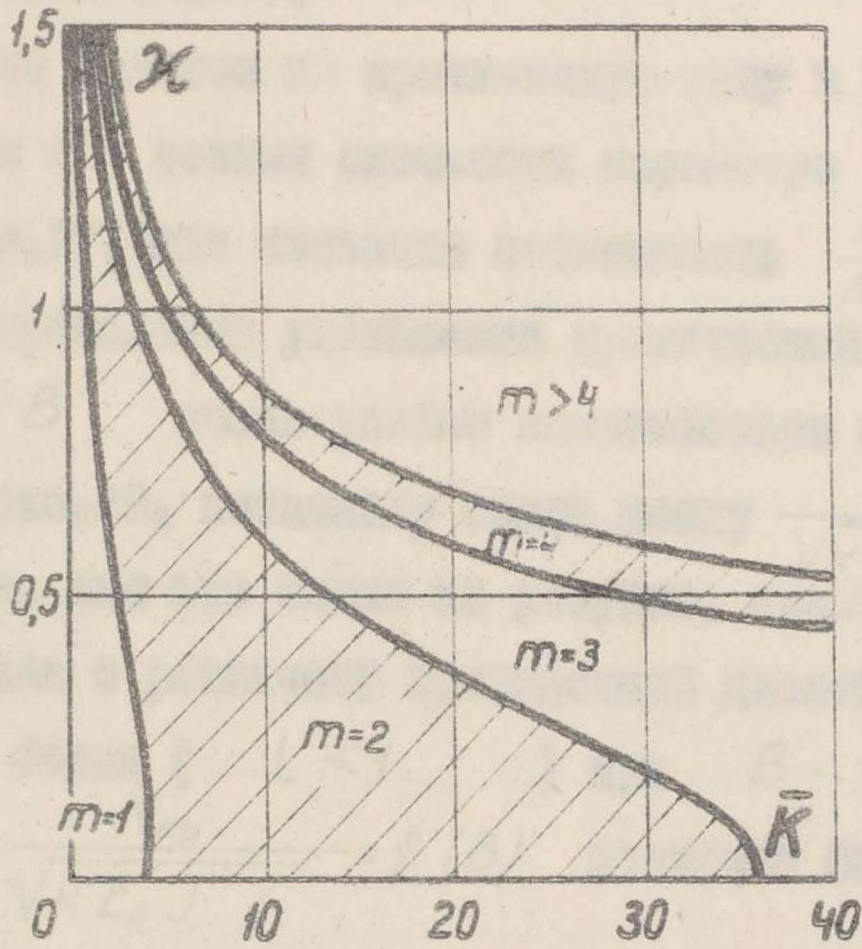


Рис. 26. Области, соответствующие потерю устойчивости в осевом направлении при члене $m = 1 \div 4$.

что быстрее достигается независимость критической нагрузки от реакции упругого основания и жесткости балки при определении критической нагрузки можно пользоваться формулой (2.61) вместо формулы (2.58).

Влияние сдвигов на критическую силу в зависимости от длины балки при разных значениях параметра B представлено на рис. 27, где показана зависимость $\frac{N_{кр}}{N_{кр}^*} = f(L)$.

Для определения уменьшения критической нагрузки с возрастанием B очень удобно пользоваться графиком, построенным на рис. 28, поскольку связь между $\frac{N_{кр}}{\sqrt{k E_x J}}$ и B описывается, как это видно из рисунка, практически одной кривой для балок с различной приведенной длиной L . Исключение составляют короткие балки ($L < 1$) при $B < 1$, когда во зависимости $\frac{N_{кр}}{\sqrt{k E_x J}} = f(B)$ различие для разных L .

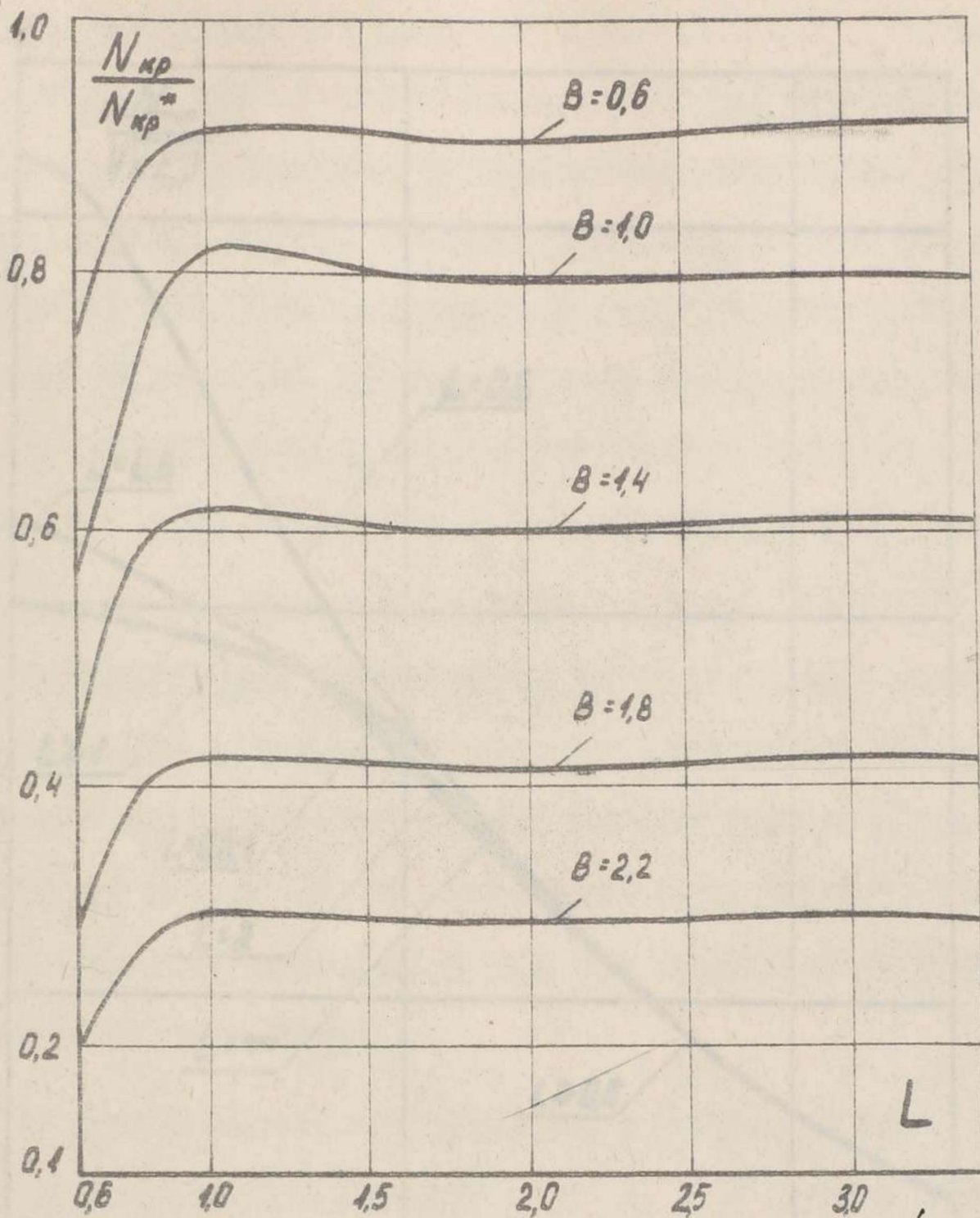


Рис. 27. Влияние длины бруса на отношение $\frac{N_{кр}}{N_{кр}^*}$ при различных значениях параметра B .

$N_{кр}^*$ — критическая сила без учета B сдвига.

$$\frac{N_{кр}}{N_{кр}^*}$$

B

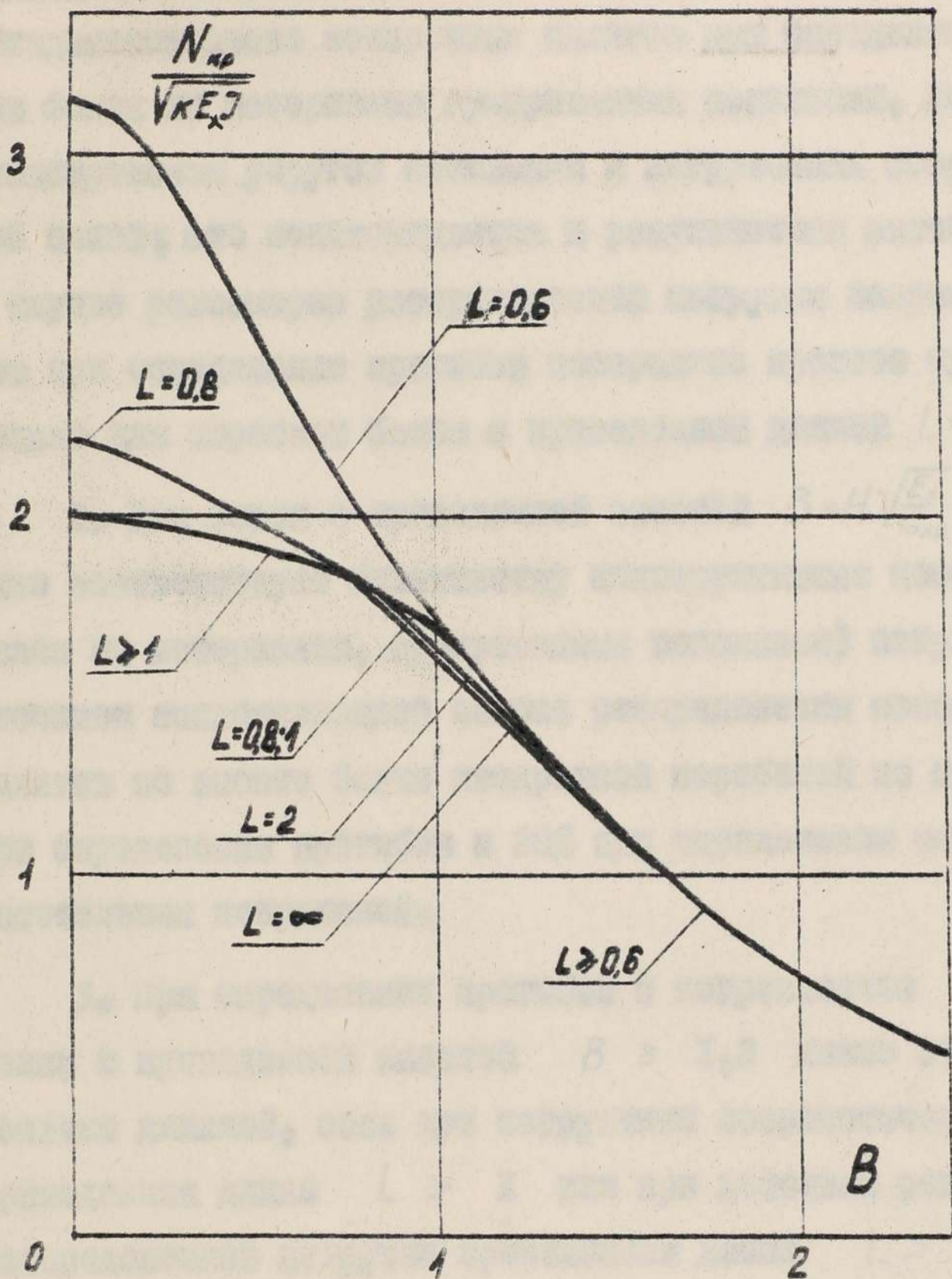


Рис. 20. Влияние параметра B на критическую силу балки на упругом основании.

Выводы. I. Полученные расчетные зависимости показывают необходимость учета поперечных сдвигов при определении прогибов балок из материалов армированных волокнами, лежащих на винклеровском упругом основании и нагруженных сосредоточенной силой; это подтверждается и результатами эксперимента. В случае равномерно распределенной нагрузки поправка от сдвигов при определении прогибов посередине пролета существенно только для коротких балок с приведенной длиной $L = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\kappa}{E_x J}} < 1,4$.

2. Для балок с приведенной высотой $B = H \sqrt{\frac{E_x}{G_{xz}}} \sqrt[4]{\frac{\kappa}{E_x J}} < 2,2$ (что соответствует большинству конструктивных исполнений балок из материалов, армированных волокнами) погрешность, вносимая аппроксимацией закона распределения поперечных сдвигов по высоте балки квадратной параболой не превышает 10% при определении прогибов и 20% при определении максимальных касательных напряжений.

3. При определении прогибов с погрешностью $< 5\%$ балку с приведенной высотой $B \geq 1,2$ можно считать бесконечно длинной, если при нагружении сосредоточенной силой приведенная длина $L > 1$ или при действии равномерно распределенной нагрузки приведенная длина $L > 3$. Если $B < 1,2$, балку соответственно можно считать бесконечно длинной при $L > 2$ или $L > 3,5$. Максимальные касательные напряжения практически не зависят от длины, если $L > 2$.

4. При продольно-поперечном изгибе рост продольной силы в случае действия поперечной сосредоточенной силы увеличивается в максимальном прогибе доли, обусловленную действием неслышных касательных напряжений. При действии рав-

номерно распределенной поперечной нагрузки отмеченный эффект проявляется только для коротких балок (при $L < 1,4$).

Жесткое защемление увеличивает долю прогибов от сдвигов по сравнению с свободным опиранием только для коротких балок ($L < 2$) в случае сосредоточенной нагрузки.

При расчете на устойчивость балок с шарнирно закрепленными концами пренебрежение сдвигами допустимо только при

$B < 0,6$ и $L > 0,9$. В этом случае пренебрежение сдвигами приводит к увеличению критической нагрузки меньше чем на 10%.