

Г Л А В А III

ПРИЛОЖЕНИЕ ТВОРИМ КРИВОЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ  
ОСНОВАНИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК

$$S = \frac{c \sqrt{4R}}{V \frac{3E_1}{E_2} (1 - \nu_2 \nu_1)}$$

## § 10. Оценка краевого эффекта у осесимметрично нагруженных цилиндрических оболочек.

10.1. Балочная аналогия. В настоящей главе под зоной краевого эффекта подразумевается область, в которой нельзя пренебрегать неоднородностью напряженного состояния, т.е. явлениями изгиба.

Балочная аналогия позволяет применять результаты предыдущей главы по изгибу балки на упругом основании для оценки краевого эффекта у осесимметрично нагруженных цилиндрических оболочек. Целесообразно использовать решение, полученное на основе аппроксимации распределения касательных напряжений по высоте квадратной мембраной, так как в этом случае расчетные зависимости более просты, в отличие, вносимая аппроксимацией, как показано в предыдущей главе, пренебрежимо. Естественно, что полученное решение применимо <sup>только</sup> в зоне краевого эффекта и является неверным на краях оболочки, где, как отмечает С.А. Амбарцумян "не одна уточненная теория в разумных пределах приближения не может дать конкретных результатов о напряженно-деформированном состоянии" [2].

10.2. Оценка С.А. Амбарцумяна. Выражения для оценки зоны краевого эффекта у упругих ортотропных осесимметрично нагруженных цилиндрических оболочек, полученное С.А. Амбарцумяном [1], [3] на основании гипотезы Киркгоффа-Лява, имеет вид:

$$S^x = \frac{c \sqrt{hR}}{\sqrt{\frac{3E_y}{E_x} (1 - \nu_{yx} \nu_{xy})}} \quad (8.1)$$

- Здесь  $h = 2H$  — толщина оболочки;
- $R$  — средний радиус оболочки;
- $E_x, E_y$  — модули упругости в осевой и кольцевом направлениях;
- $\nu_{xy}, \nu_{yx}$  — коэффициенты Пуассона (первый индекс показывает направление поперечного сдвига, второй — направление действия силы);
- $c$  — постоянная, зависящая от заданной точности оценки протяженности зоны краевого эффекта, х)

Это выражение применяется и при расчете оболочек из ориентированных стеклопластиков (см., например, [46], [47]) которые, как это неоднократно подчеркивалось, являются материалами с низкой осевой жесткостью и прочностью.

10.3. Влияние сдвигов. В работах [31], [18], [19], [73], [74] и др. показано необходимость учета сдвигов при расчете цилиндрических оболочек из стеклопластиков.

Учет сдвигов при устойчивости вихвостовых цилиндров и при исследовании поведения толстостенных подкрепленных цилиндров из стеклопластика содержится в работах В.И.Томашовского [73], [74].

В работе [31] отмечено, что низкая межслойная сдвиговая жесткость способствует возникновению краевых эффектов, однако подробно этот вопрос в указанной работе не исследовался.

х) В работах [1], [46], [47]  $c = \sqrt{\pi}$ .

В работе [18] В.В.Васильев в главном внимание уделено построению закона распределения касательных напряжений по толщине оболочки в зоне краевого эффекта, а не оценки длины зоны краевого эффекта.

Необходимо отметить, что характерной чертой напряженного состояния тонких оболочек является наличие малого множителя  $\frac{h}{R}$  в выражении для максимального касательного напряжения; касательные напряжения по сравнению с нормальными имеют второ-степенное значение [36]. Этот вывод справедлив для материа-лов, у которых прочность по нормальным  $\sigma_s$  и касательным напряжениям  $\tau$  близки по величине; для ориентированных армированных материалов  $\sigma_s$  и  $\tau$  могут различать-ся более чем на порядок. Следовательно касательные напряжения могут стать решающими для прочности и особенно для монит-ности конструкции. Для установления длины участка усиления и схемы "подмотки" оболочек из армированных материалов необходи-мо более точное определение величин касательных напряжений и зоны их распространения.

Влияние сдвигов на протяженность зоны краевого эффекта и напряженное состояние в этой зоне оценим на примере тонко-стенной цилиндрической оболочки, шарнирно-опертой или имеющей на конце жесткий фланец, нагруженной постоянно внутренним давлением  $q$ . Неправильное координатных осей и принятое правило знаков показано на рис. 29. Длину оболочки будем считать достаточной, чтобы взаимным влиянием краев оболочки можно бы-ло пренебречь, в осевую растягивающую силу примем равной нулю. Будем полагать, что в осевых сечениях нормальные напряжения распределены равномерно по толщине оболочки ( $\sigma_y = const.$ )

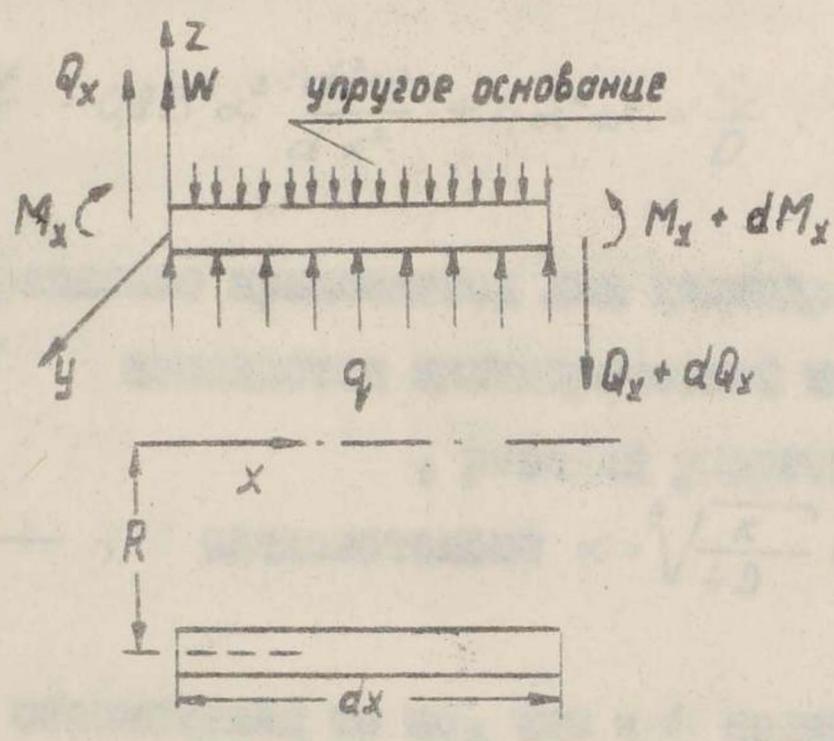


Рис. 29. Простая опора.

$$\beta = \sqrt{\frac{q}{R}}$$

$$a = \alpha \sqrt{1 + 0.2\beta^2}, \quad b = \alpha \sqrt{1 - 0.2\beta^2}$$

и используем традиционную гипотезу  $\varepsilon_z = 0$ . Таким образом, рассматривается обычная задача сопротивления материалов [78] применительно к ортотропным материалам, обладающим высокой сдвиговой прочностью и жесткостью.

Ю.4. Основные зависимости. Для решения задачи воспользуемся дифференциальным уравнением (2.28). При  $q(x) = q = \text{const}$  имеем:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 0,8 B^2 \alpha^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + 4 \alpha^4 w = \frac{q}{D} \quad (3.2)$$

Так как уравнение применяется для цилиндрической оболочки, то

$E_x J$  заменяется цилиндрической жесткостью  $D = \frac{2 H^3 E_x}{3(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}$ ,

$\kappa$  — реакция упругого основания

$$\kappa = \frac{2 H E_y}{R^2}, \quad \text{следовательно } \alpha = \sqrt[4]{\frac{\kappa}{4 D}} = \sqrt[4]{\frac{3}{4} \frac{1}{R^2 H^2} \frac{E_y (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}{E_x}}$$

Остальные обозначения те же, что и в примененном уравнении (2.28) для расчета балки на упругом основании, то есть

$$B = \sqrt{2} \alpha \beta H,$$

$$\beta = \sqrt{\frac{E_x}{G_{xz}}}$$

Затемняя часть решения уравнения (3.2) имеет вид:

$$w = \frac{q}{\kappa} + e^{-ax} (A_1 \cos bx + A_2 \sin bx),$$

(3.3)

где

$$a = \alpha \sqrt{1 + 0,2 B^2}, \quad b = \alpha \sqrt{1 - 0,2 B^2}.$$

При определении постоянных  $A_1$  и  $A_2$  воспользуемся следующими граничными условиями. В случае шарнирного опирания при  $x=0$  ;  $w=0; M_x=0$ . Для заделки прогиба  $w$  в начале отсчета  $x=0$ , т.е. в месте сопряжения оболочки с жестким фланцем, равен нулю. При формулировке второго граничного условия необходимо учесть возможные варианты осуществления заделки. Закрепление опорного сечения осуществляют двумя обычно рассматриваемыми способами [69], [82]: потребуем, чтобы элемент  $dx$  у опорного конца оставался горизонтальным (при  $x=0$  ;  $\frac{dw}{dx} = 0$ ) или чтобы элемент  $dz$  опорного сечения оставался вертикальным (при  $x=0$  и осреднении и учете сдвигов  $\frac{dw}{dx} = -\gamma_{\text{сред}}$ ). Таким образом,

1) при  $x=0$  ;  $w=0$  ;  $\frac{dw}{dx} = 0$  ;

2) при  $x=0$  ;  $w=0$  ;  $\frac{dw}{dx} = -\gamma_{\text{сред}}$

( $\gamma_{\text{сред}}$  — осредненный угол сдвига на опоре). В первом случае заделку будем считать жесткой, во втором — податливой. Эти случаи являются предельными. Они выбраны для анализа, чтобы оценить влияние возможного конструктивного ужесточения заделки на краевой эффект. Если в статически определенных системах различная трещиноватость заделки оказывает влияние только на форму упругой линии, то в статически неопределимых задачах различная трещиноватость заделки приводит не только к изменению величины максимального прогиба, но и к перераспределению внутренних усилий [60].

Выражения для прогибов  $w$ , нормальных  $\sigma_x$  и касательных напряжений  $\tau_{xz}$  сведены в табл.3; там же включены выражения для прогибов  $w^*$  и напряжений  $\sigma_x^*$  и  $\tau_{xz}^*$ , полученные без учета сдвигов; здесь и в дальнейшем нормальные напряжения  $\sigma_x$  оценены на поверхность оболочки ( $z = \pm \frac{h}{2}$ ) ; в касательные  $\tau_{xz}$  - в срединной поверхности оболочки ( $z = 0$ ). Как видно из приведенных выражений, учет сдвигов решен с помощью параметра

$$B^2 = \frac{\alpha^2 \beta^2 h^2}{2} = \frac{\sqrt{3} h}{2 R} \sqrt{\frac{E_x E_y (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}{G_{xz}}}$$

, который возрастает при  $\rightarrow$

уменьшению сдвиговой жесткости материала. Легко обнаружить, что при  $B=0$  (то есть при  $G_{xz} \rightarrow \infty$ ) выражения (3.4) - (3.12) переходят в зависимости, построенные без учета сдвигов (3.13) - (3.18).

10.5. Максимальные прогибы и напряжения. В таблице 4

приведены координаты  $x$  максимальных прогибов  $x_{w \max}$  и  $x_{w^* \max}$ , касательных  $x_{\tau \max}$  и  $x_{\tau^* \max}$  и нормальных напряжений  $x_{\sigma \max}$  и  $x_{\sigma^* \max}$ , вычисленных с учетом и без учета сдвигов. Как уже отмечалось, решение на краях оболочки является не корректным, поэтому оминательными являются величинами максимальных напряжений в тех случаях, когда координаты максимальных напряжений совпадают с краем оболочки (см. табл.4). Однако можно полагать, что качественная картина влияния сдвигов будет правильной и в тех случаях, когда напряжения являются максимальными вблизи края

оболочки. Зависимости  $\frac{\sigma_x \max}{\sigma_x^* \max} = f(B^2)$  и  $\frac{\tau_{xz \max}}{\tau_{xz^* \max}} = f(B^2)$

представлены на рис.30. В случае жесткой заделки учет сдвигов приводит к резкому увеличению нормальных напряжений в заделке и к некоторому увеличению касательных напряжений в зависимости

Таблица 3

		Жесткий фланец		
		Шарнирное опирание		
			Жесткая заделка	
			Податливая заделка	
С учетом сдвигов	$W$	$\frac{q}{k} \left[ 1 - e^{-\alpha x} \left( \cos bx - \frac{0,2B^2}{\sqrt{1-0,04B^2}} \sin bx \right) \right]$ (3.4)	$\frac{q}{k} \left[ 1 - e^{-\alpha x} \left( \cos bx + \frac{a}{b} \sin bx \right) \right]$ (3.5)	$\frac{q}{k} \left[ 1 - e^{-\alpha x} \left( \cos bx + \frac{a}{b} \frac{1-0,4B^2}{1+0,4B^2} \sin bx \right) \right]$ (3.6)
	$\sigma_x$	$\mp \frac{3q}{h^2 \alpha^2} e^{-\alpha x} \frac{1}{\sqrt{1-0,04B^2}} \sin bx$ (3.7)	$\pm \frac{3q}{h^2 \alpha^2} e^{-\alpha x} \left[ (1+0,4B^2) \cos bx - \frac{a}{b} (1-0,4B^2) \sin bx \right]$ (3.8)	$\pm \frac{3q}{h^2 \alpha^2} e^{-\alpha x} \left( \frac{1}{1+0,4B^2} \cos bx - \frac{a}{b} \frac{1}{1+0,4B^2} \sin bx \right)$ (3.9)
	$\tau_{xy}$	$-\frac{3}{4} \frac{q}{h \alpha} e^{-\alpha x} \left( \frac{1}{\sqrt{1+0,2B^2}} \cos bx - \frac{1}{\sqrt{1-0,2B^2}} \sin bx \right)$ (3.10)	$-\frac{3}{2} \frac{q}{h \alpha} e^{-\alpha x} \left( \sqrt{1+0,2B^2} \cos bx + \frac{0,2B^2}{\sqrt{1-0,2B^2}} \sin bx \right)$ (3.11)	$-\frac{3}{2} \frac{q}{h \alpha} e^{-\alpha x} \left( \frac{\sqrt{1+0,2B^2}}{1+0,4B^2} \cos bx - \frac{0,2B^2}{(1+0,4B^2)\sqrt{1-0,2B^2}} \sin bx \right)$ (3.12)
По гипотезе Кирхгофа - Лява	$W^*$	$\frac{q}{k} (1 - e^{-\alpha x} \cos \alpha x)$ (3.13)	$\frac{q}{k} [1 - e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x)]$ (3.14)	
	$\sigma_x^*$	$\mp \frac{3q}{h^2 \alpha^2} e^{-\alpha x} \sin \alpha x$ (3.15)	$\pm \frac{3q}{h^2 \alpha^2} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x)$ (3.16)	
	$\tau_{xy}^*$	$-\frac{3}{4} \frac{q}{h \alpha} e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x)$ (3.17)	$-\frac{3}{2} \frac{q}{h \alpha} e^{-\alpha x} \cos \alpha x$ (3.18)	

Таблица 4

Метод		Шарнирное опирание	Жесткий фланец	
			Жесткая заделка	Податливая заделка
С учетом сдвигов	$X_{w \max}$	$\frac{1}{\beta} \left( n\pi - \arctg \frac{1+3,4B^2}{1+0,4B^2} \sqrt{\frac{1-0,2B^2}{1+0,2B^2}} \right)$ $n=1$ при $B^2 \leq 2,5$ ; $n=0$ при $B^2 \geq 2,5$	$\frac{\pi}{\beta}$	$\frac{1}{\beta} \left( n\pi - \arctg \frac{0,4B^2 \sqrt{1-0,04B^4}}{1-0,08B^4} \right)$ $n=1$ при $B^4 \leq 12,5$ ; $n=0$ при $B^4 \geq 12,5$
	$X_{\sigma \max}$	$\frac{1}{\beta} \arctg \sqrt{\frac{1-0,2B^2}{1+0,2B^2}}$	0	0
	$X_{\xi \max}$	0	0	0
По гипотезе Кирхгофа - Лява	$X_{w^* \max}$	$\frac{3}{4} \frac{\pi}{\beta}$		$\frac{\pi}{\beta}$
	$X_{\sigma^* \max}$	$\frac{\pi}{4\beta}$		0
	$X_{\xi^* \max}$	0		0

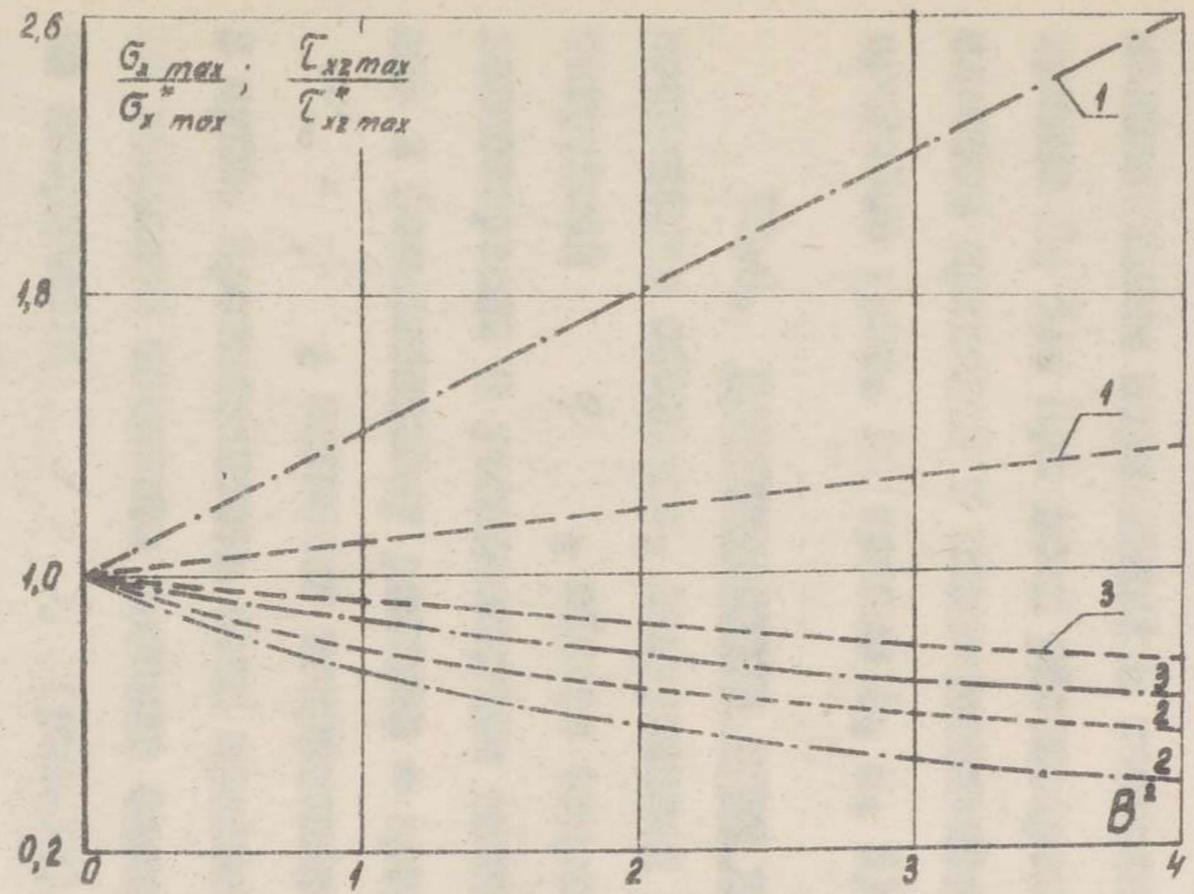


Рис. 80. Отношения максимальных нормальных  $\sigma_{x \max}$  и касательных  $\tau_{xz \max}$  напряжений (подсчеты с учетом сдвига) и напряжений  $\sigma_{x \max}^*$  и  $\tau_{xz \max}^*$  (подсчеты без учета сдвига) в зависимости от диаметра  $B^2$ :

————  $\frac{\sigma_{x \max}}{\sigma_{x \max}^*}$ ;      - - - - -  $\frac{\tau_{xz \max}}{\tau_{xz \max}^*}$ ;

1 — жесткая задняя; 2 — податливая задняя; 3 — шарнирная опора.

от  $B^2$  (см. рис. 30 кривые 1). В случае податливой заделки и шарнирного опирания небольшая сдвиговая жесткость армированных пластиков приводит к существенному уменьшению максимальных нормальных и касательных напряжений (см. рис. 30, кривые 2, 3). При всех рассмотренных видах опирания учет сдвигов приводит к незначительному уменьшению максимальных прогибов (рис. 31 кривые 1, 2, 3).

10.6. Протяженность зоны краевого эффекта. Прогиб и напряжение оболочки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , вблизи закрепления краев изменяется волнообразно с уменьшающейся амплитудой, постоянно приближаясь к безмоментному решению - прогиб приближается к величине

$$w_{\infty} = \frac{q}{K}$$

, изгибные напряжения  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$  стремятся к нулю. Протяженность зоны краевого эффекта в зависимости от заданной точности принято оценивать двумя способами: по координате  $x = S_0$  (рис. 32), при которой прогиб или напряжения после первой полуволны пересекает безмоментное решение (см., например, [1], [46], [47]) или координате  $x = S$ , после которой с заданной  $\rho$  - процентной погрешностью, напряженное состояние можно считать безмоментным [78].

Длина зоны краевого эффекта различна по напряжениям и деформациям. Для армированных материалов, являющихся металлами с низкой сдвиговой жесткостью и прочностью, прежде всего необходима оценка зоны краевого эффекта по прогибам  $w$  и касательным напряжениям  $\tau_{xz}$ . Выражения  $S_{0w}$  и  $S_{0\tau}$

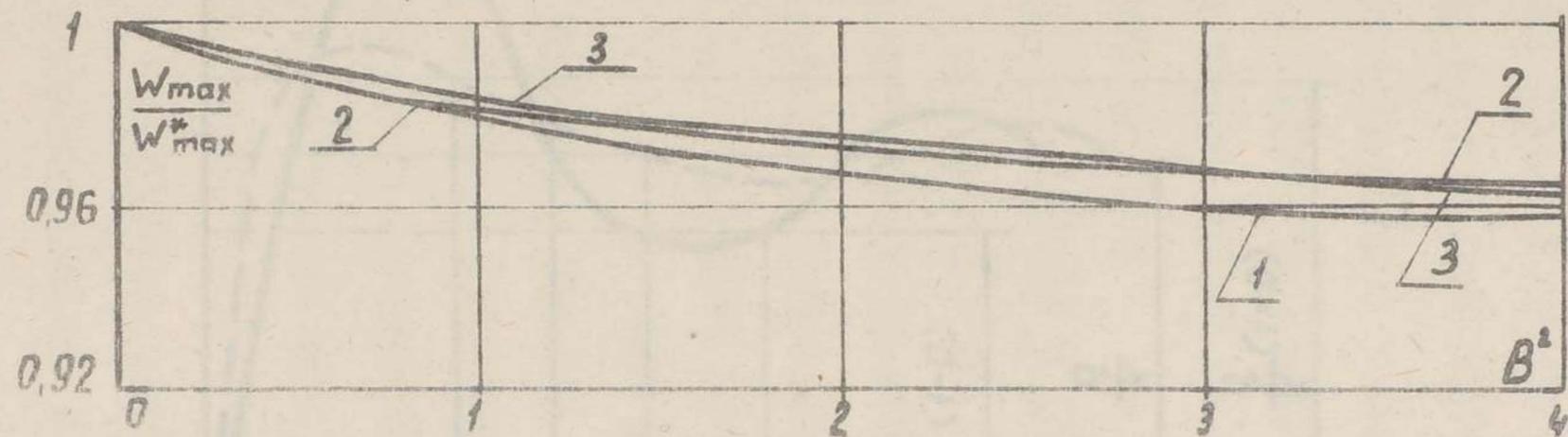


Рис. 51. Влияние сдвигов на максимальный проток: 1 — жесткая втулка; 2 — подкливлен; втулка; 3 — шарнирное соединение.

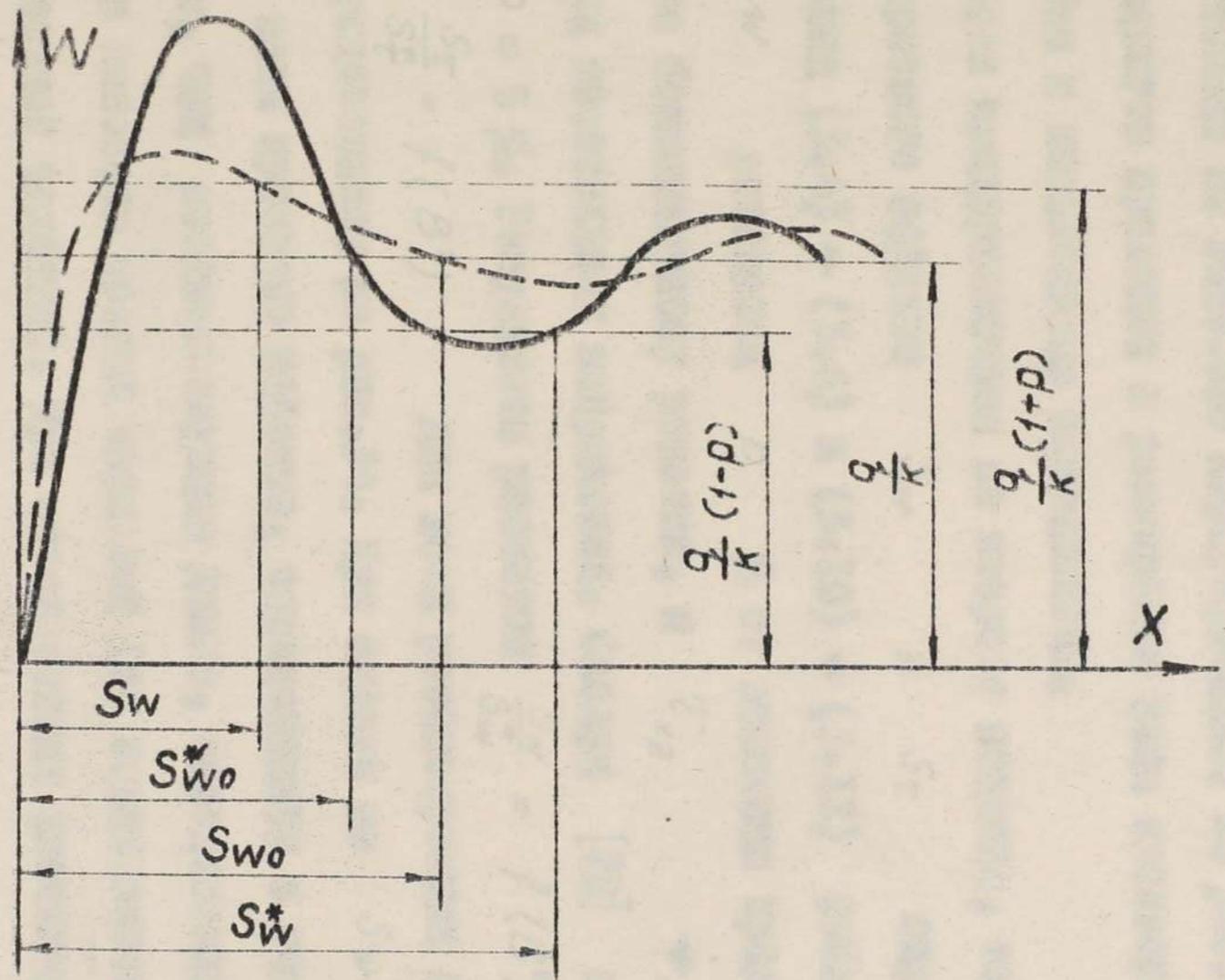


Рис. 32. Изгибные прогибы в зоне провала: — без учета  
 смещения; - - - с учетом смещения.

Для продолжения зоны краевого эффекта по прогибам и касательным напряжениям соответственно представлены в таблице 5. Там же приведены выражения  $S_{ow}^*$  и  $S_{ot}^*$  продолжения зоны краевого эффекта по прогибам и касательным напряжениям, подсчитанные по гипотезе Кирхгофа-Лива. Из рис. 33 видно, что учет сдвигов приводит к расширению зоны краевого эффекта по прогибам и касательным напряжениям.

Если придерживаться не второго подхода, то продолжительность зоны краевого эффекта  $S_w$  и  $S_T$  определяются из выражения (3.4) + (3.6) и (3.10) + (3.12) табл. 3 при условии, что  $w$  равняется  $p$  % от величины прогиба полученного по безмоментному решению, а  $T_{xz}$  —  $p$  % от максимальной касательных напряжений. Следуя [78] принимаем

$p = 5$  %. Результаты расчетов  $\frac{S_w}{S_w^*} = f(B^2)$  и

$\frac{S_T}{S_T^*} = f(B^2)$  для всех рассмотренных случаев опира-

ния представлены на рис. 34. При оценке по  $S_w$  и  $S_T$  длине зоны краевого эффекта, определенной с учетом сдвигов, меньше, чем соответствующая длина, определенная с помощью зондем гипотезы прямых нормалей (за исключением оценки  $S_w$  для жесткой заделки). При определенных значениях параметра

$B^2$  наблюдаются пережоги, обусловленные принятой

точностью оценки краевого эффекта ( $p = 5$  %); причина возникновения пережогов ясно на рис. 35. — учет сдвигов приводит к уменьшению экстремальных значений  $w$  и  $T_{xz}$ ,

пережок имеет место при  $B$ , при которой экстремальные значения  $w$  или  $T_{xz}$  <sup>становятся</sup> меньше 5 % от безмоментного, соответственно, максимального значения.

Таблица 5

Шарнирное опирание		Жесткий фланец		
		Жесткая заделка	Податливая заделка	
С учетом сдвигов	$S_{0w}$	$\frac{1}{8} \left( \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-0,04B^4}}{0,2B^2} \right)$	$\frac{1}{8} \left( 2\pi - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-0,2B^2}{1+0,2B^2}} \right)$	$\frac{1}{8} \left( n\pi - \operatorname{arctg} \frac{1+0,4B^2}{1-0,4B^2} \sqrt{\frac{1-0,2B^2}{1+0,2B^2}} \right)$ $n=2$ при $B^2 \leq 2,5$ ; $n=1$ при $B^2 > 2,5$
	$S_{0\tau}$	$\frac{1}{8} \left( \pi + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-0,2B^2}{1+0,2B^2}} \right)$	$\frac{1}{8} \left( 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-0,04B^4}}{0,2B^2} \right)$	$\frac{1}{8} \left( \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-0,04B^4}}{0,2B^2} \right)$
По гипотезе Кирхгофа - Лява	$S_{0w}^*$	$\frac{3\pi}{2\alpha}$		$\frac{7\pi}{4\alpha}$
	$S_{0\tau}^*$	$\frac{5\pi}{4\alpha}$		$\frac{3\pi}{2\alpha}$

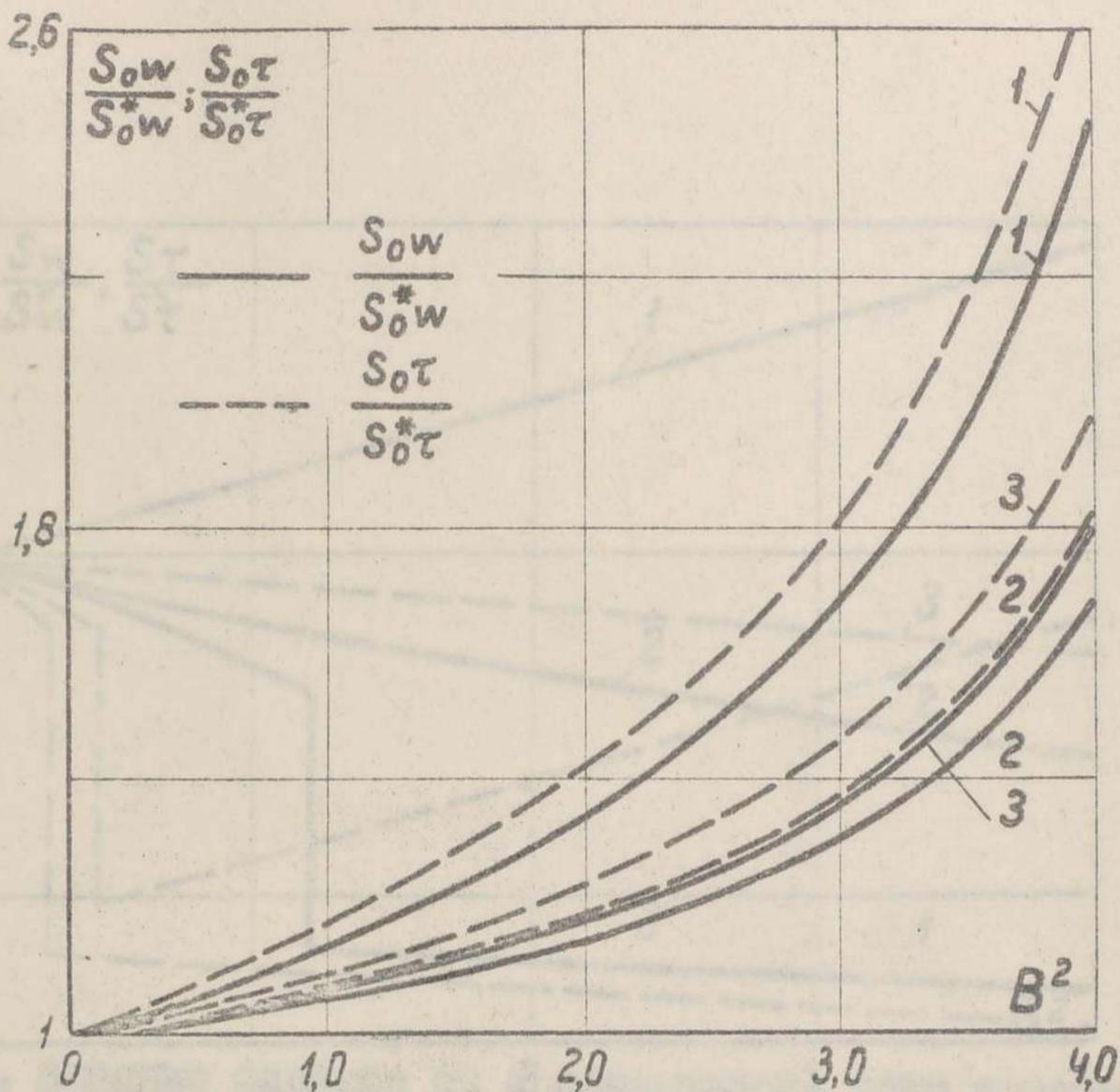


Рис.33. Влияние сдвигов на пропорцию значений касательного эффекта (границы поворота по рис.32):

$\text{—————} \frac{S_{0w}}{S_{0w}^*}; \quad \text{- - - - -} \frac{S_{0\tau}}{S_{0\tau}^*};$

1 → жесткая фиксация; 2 → подогретая  
 водонепроницаемая; 3 → верхнее отверстие.

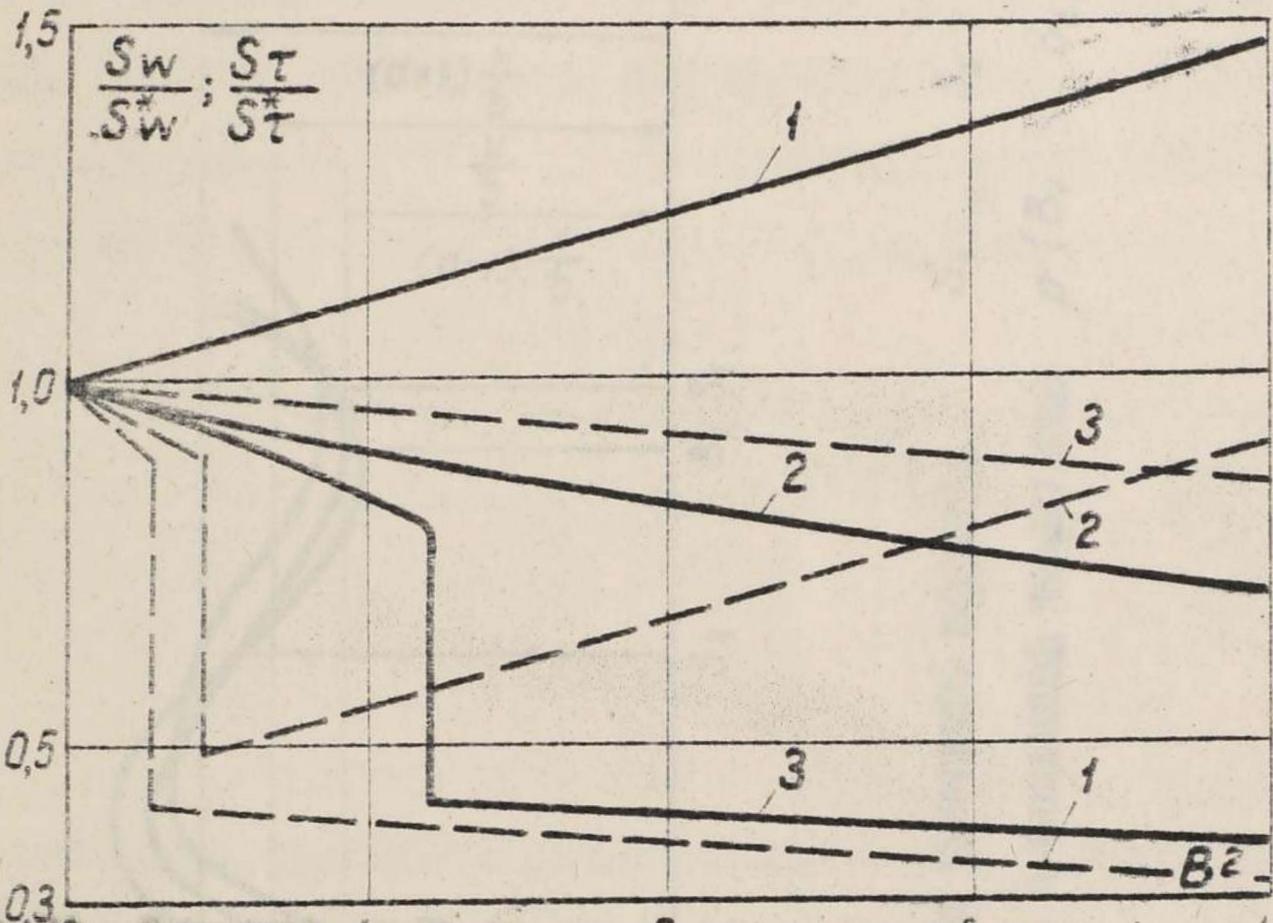


Рис. 20. Влияние факторов на  $\frac{S_w}{S_w^*}$  и  $\frac{S_t}{S_t^*}$  в зоне круглого  
 эффекта при оценке с погрешностью 5%:

—————  $\frac{S_w}{S_w^*}$ ;      - - - - -  $\frac{S_t}{S_t^*}$ ;

1 — жесткая подложка; 2 — подложка из алюминия;  
 3 — перфорированная подложка;  
 Bz — перфорированная подложка.

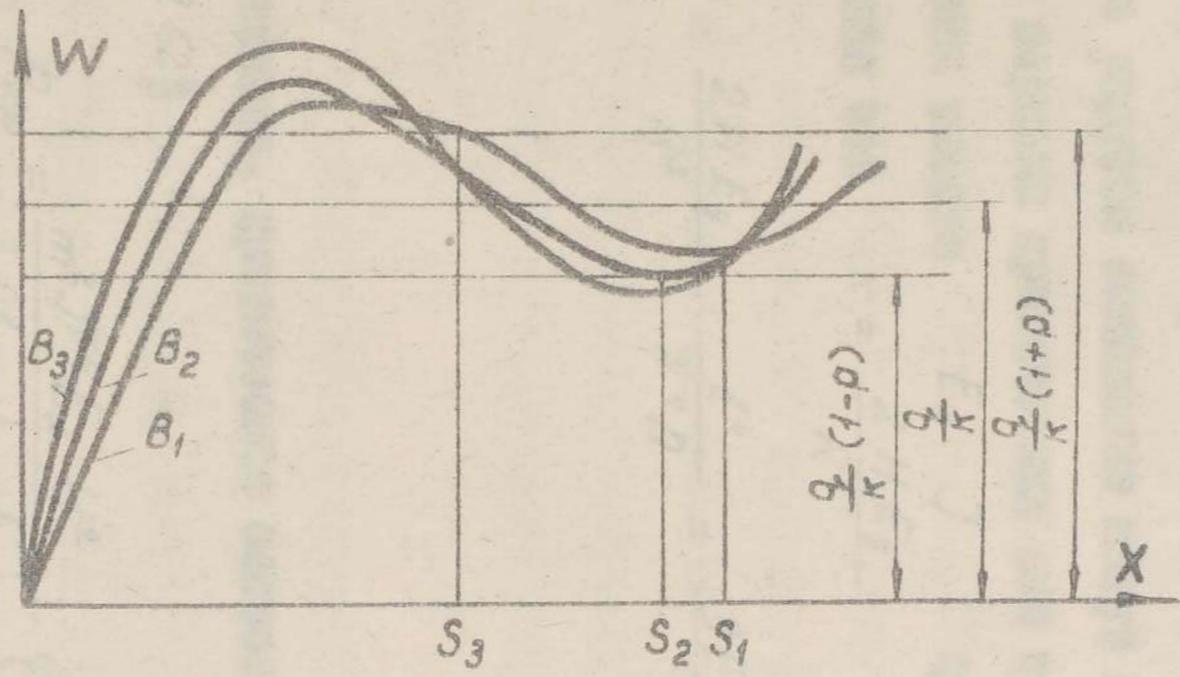


Рис. 35. Границы зон нулевого эффекта  
 при изменении значения температуры

$$S_1 \quad S_2 \quad S_3$$

$$p(B_1 > B_2 > B_3).$$

§ II. Оценка верхней критической силы цилиндрических оболочек.

Результаты полученные при рассмотрении устойчивости балки на упругом основании могут быть использованы для определения верхней критической сил цилиндрических оболочек.

Подставив вместо  $E_x J$  цилиндрическую жесткость  $D$  и учитывая что  $\kappa = \frac{2HE_y}{R^2}$ , получим

$$L^4 = \frac{2HE_y}{R^2} \frac{l^4}{\pi^4 D} = \frac{3E_y(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}{E_x} \frac{l^4}{H^2 R^2}$$

Следовательно, критическое осевое давление согласно формуле (2.58, 2.62)

$$P_{кр} = \frac{m^2 \pi^2 E_x H^2}{3(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \varphi_m + \frac{E_y l^2}{m^2 R^2} \quad (3.19)$$

Влияние длины, жесткости оболочки и сдвигов на критическое давление оболочки соответствует влиянию длины, жесткости и сдвигов на критическую силу балки на упругом основании.

Выводы. I. При принятом параболическом законе распределения касательных напряжений необходимость учета сдвигов при оценке краевого эффекта определяется параметром  $B^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h}{R} \sqrt{\frac{E_x E_y}{G_{xz}} (1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}$  принятой схемой опирания и требуемой точностью оценки напряжений и деформаций.

2. В случае жесткой заделки низкая сдвиговая жесткость материала приводит к росту максимальных напряжений и протяженности зоны краевого эффекта  $S_w$ , реализация поделливой заделки в конструкции приводит к существенному уменьшению максимальных напряжений и, следовательно, к уменьшению опасности расслоения материала в местах закрепления оболочки.

3. При оценке зоны краевого эффекта с пятипроцентной погрешностью для оболочек из стеклопластиков можно пользоваться выражением, полученным без учета сдвига (исключением является оценка  $S_w$  для случая жесткой заделки). Протяженность зоны в таком случае будет оценена с небольшим запасом, величина которого зависит от  $B^2$ . Если требуется более точная оценка протяженности этой зоны, необходимость учета сдвигов определяется величиной параметра  $B^2$ .

ГЛАВА IV

ИВЫЕ СЕРПЕНА С КРУГОВОЙ ОСЕЮ

$P_0$

$P_1$

$P_2$

$E_1$

$E_2$

$G_1$

$E_3$

## § 12. Типовые схемы нагружения колец из материалов, армированных волокнами.

Поведение цилиндрической оболочки, нагруженной радиальной нагрузкой, не меняющейся (или мало меняющейся) по осевой координате (рис. I), может быть изучено на примере кольца. Далее, изучение деформирования колец (а также сегментов из них) представляет самостоятельный интерес. Дело в том, что в последнее время намотка становится одним из основных способов изготовления ответственных конструкций из материалов, армированных волокнами [III]. Сильное влияние параметров намотки (усилия натяжения, числа витков, режимы полимеризации и др.) на свойства материала в изделии [44] потребовало разработки соответствующих способов испытаний намоточных изделий и материалов. Привлечено (см., например, [97], [113]), что наиболее приемлемыми являются образцы, имеющие форму кольца. При изготовлении кольцевых образцов сравнительно легко воспроизводится технология намотки; в то же время техника их испытания достаточно проста. Существующие намоточные изделия из слоистых и волокнистых материалов не имеют армирования в направлении радиуса, поэтому модуль Юнга в окружном направлении  $E_{\theta}$  значительно больше модуля Юнга в радиальном направлении  $E_z$  и межслойного сдвига  $G_{\theta z}$ ; последние определяются в основном податливым связующим. Прочность  $\Pi_{\theta}$  при растяжении в направлении  $\theta$  также значительно превышает прочность при растяжении  $\Pi_z^+$  и сжатии  $\Pi_z^-$  в радиальном направлении и прочность при

сдвига  $\Pi_{\theta z}$ . Примерные соотношения для материалов, образующих волоконные маты имеют порядок  $\frac{E_{\theta}}{G_{\theta z}} \approx 10 \div 100$ ;

$$\frac{E_{\theta}}{E_z} \approx 3 \div 20; \quad \frac{\Pi_{\theta}^+}{\Pi_z^-} \approx 3 \div 10; \quad \frac{\Pi_{\theta}^+}{\Pi_{\theta z}} \approx 10 \div 40.$$

(см. гл. I, табл. 1).

Низкая сдвиговая жесткость ограничивает область применения классического сопротивления материалов и, кроме того, требует поисков схемы испытаний, при которых можно определить не только прочность и жесткость в направлении волокон, но и сопротивление этих материалов неослоному сдвигу.

На рис. 36 показаны различные схемы испытаний кольцевых образцов. Равномерное давление реализуется при помощи жестких полудисков (рис. 36-а) или резинового кольца, сжимаемого по торцевым поверхностям жестким пуансоном (рис. 36-б). При испытаниях по схеме 36-б достигается более равномерное распределение давления, схема позволяет осуществить как растяжение и сжатие <sup>так</sup> кольцевых образцов. На точность эксперимента (по схеме 36-б) мало сказываются относительная толщина кольца и степень анизотропии материала, тогда как точность испытания при помощи полудисков резко падает с ростом относительной толщины кольца и с увеличением степени анизотропии материала [15], [113].

Обе схемы нагружения позволяют оценить сопротивление немоточных материалов нормальным напряжением. Информацию о жесткости и прочности немоточных материалов при действии касательных напряжений можно получить нагружая кольцо сосредоточенными силами.

Некоторые схемы испытаний сосредоточенными силами пока-

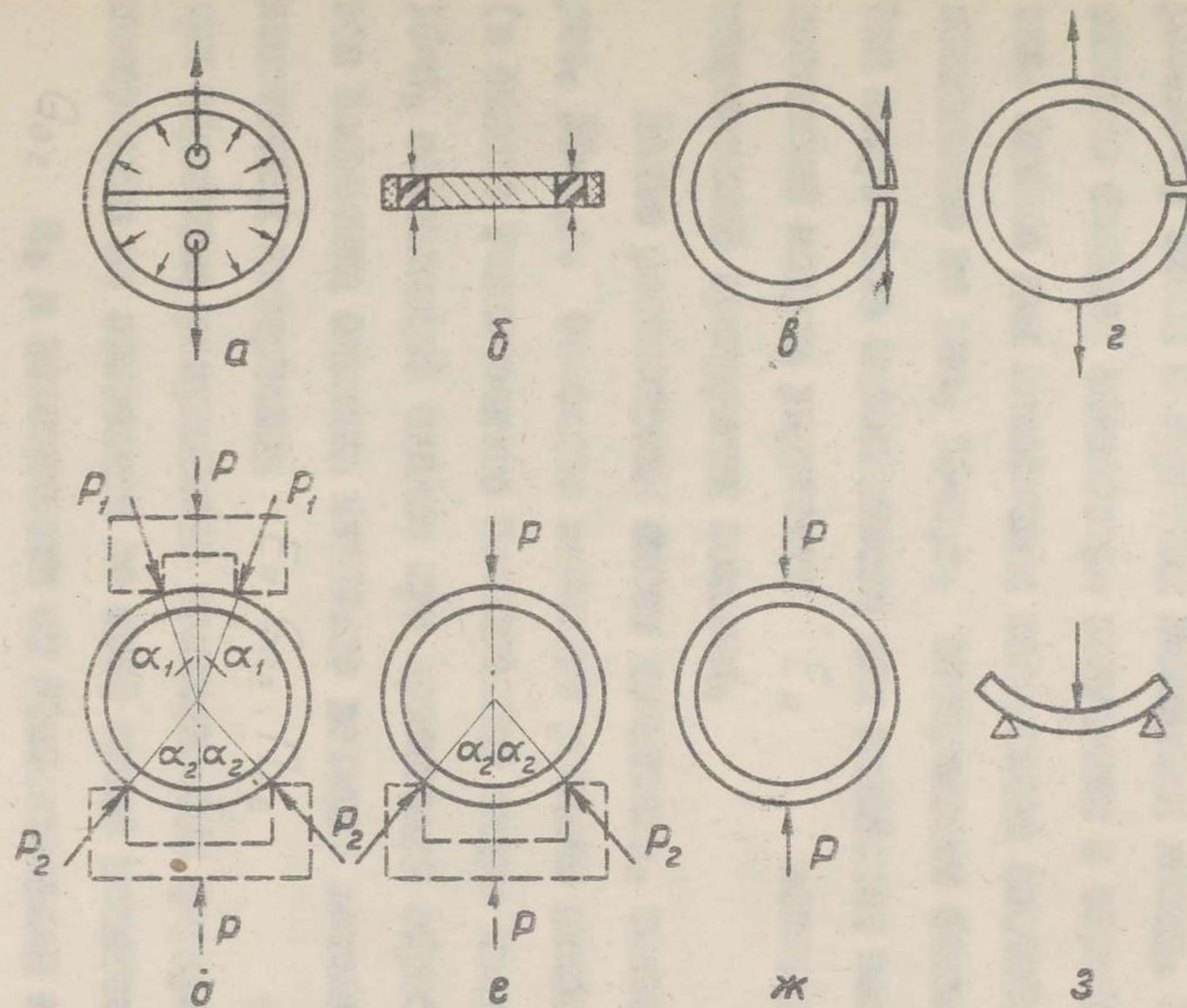


Рис. 36. Схемы нагружения кольцевых образцов: а- при помощи жестких полудисков; б- при помощи резиновой пайбы; в-г- испытание сосредоточенным усилием.

заны на рис. 36-в,з). Образцы в виде разрезных колец (см. рис. 36-в,г) применяются редко, так как их испытание относительно сложное. Техника испытаний разрезных колец из стеклонепластиков и необходимые для обработки результатов формулы приведены в работе [39]. Сравнительно редко используются также четырех- (см. рис. 36-д) и трехточечные (см. рис. 36-е) схемы нагружения замкнутого кольца. Это вызвано не столько большей сложностью получения и обработки результатов. Однако для комочных материалов способы нагружения, показанные на рис. 36-д,е, заслуживают большого внимания. Они могут быть использованы для выявления мест с возможными провалами модуля упругости  $E_0$  вследствие локальных искривлений армирующих волокон.

Далее рассмотрены схемы испытания, показанные на рис. 36-д,з. Основное внимание уделено наиболее простой (в смысле технического исполнения) схеме испытания - схеме 36-з, позволяющей однако при правильной обработке результатов испытания оценить наиболее важные механические свойства комочных материалов -  $E_0, G_{0z}, P_{0z}$ . Использование при обработке результатов традиционных формул сопротивления материалов не позволяет по этой схеме испытания определить  $G_{0z}$  и, в зависимости от относительной толщины образца и степени анизотропии, может привести к большим погрешностям в определении  $E_0$ . Возможны две опасности. Для относительно тонких образцов уже при малых значениях нагрузки в следствие относительно низкой жесткости армированных пластинок проявляется геометрическая нелинейность. С ростом относительной толщины кольца все большую роль начинает играть слабое сопротивление материалу сдвигу.

### § 13. Тонкостенное кольцо.

При нагружении тонкостенных колец сосредоточенными силами для получения информации о модуле  $E_\theta$  и особенно о прочности в направлении волокон  $\Pi_\theta$  не удастся, как правило, остаться в области малых перемещений. Измеряемые радиальные перемещения точек кольца становятся соизмеримыми с диаметром. В этих условиях обнаруживается существенная нелинейность зависимости между силой  $P$  и радиальным перемещением точки её приложения  $w_0$ . Типичная кривая  $w = f(P)$  при растяжении-сжатии колец из стеклопластика показана на рис. 37 [97]. Видно, что линейная зависимость, даваемая формулой сопротивления материалов, справедлива только для малых значений нагрузки.

Получение аналитической зависимости, описывающей даже слабую нелинейность, для колец значительно сложнее, чем для прямых или слабоизогнутых стержней. Так при решении в геометрически линейной постановке в выражении для радиуса кривизны  $\rho$  удерживаются только члены первого порядка малости

$$\frac{1}{\rho} = \frac{z^2 - z z'' + 2 z'^2}{(z^2 + z'^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{R} - \frac{w + w''}{R^2}$$

При решении с учетом слабой нелинейности удерживаются члены второго порядка малости, выражение для  $\rho$  существенно усложняется:

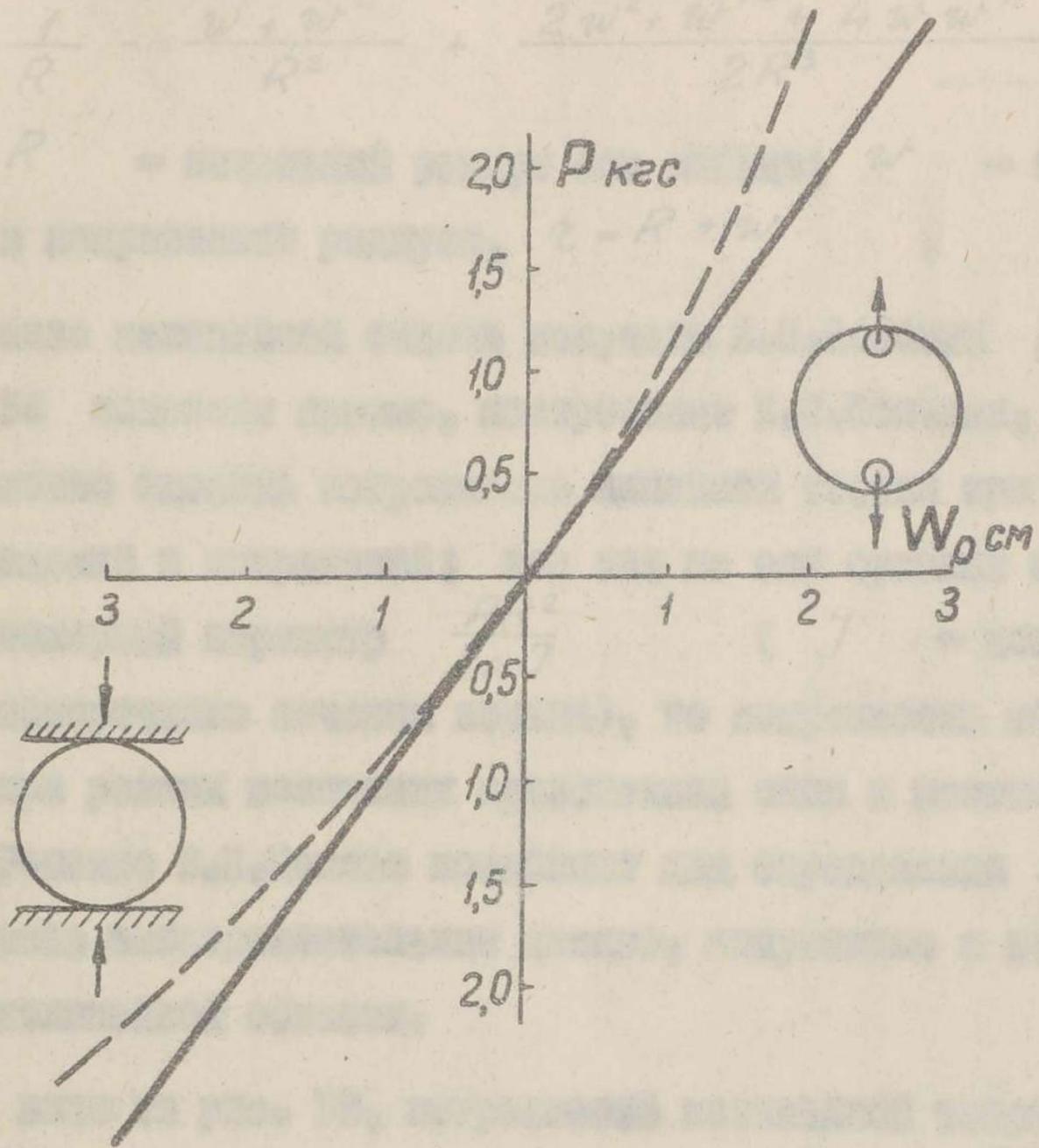


Рис. 37. Кривые деформирования *NOL* -полец, нагруженных сосредоточенными силами (диаметр  $\sim 140$  мм, толщина  $\sim 1,4$  мм). Прогноб  $W_0$  размер под приложенной силой.

----- экспериментальные кривые;  
 ————— линейной теории.

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{R} - \frac{w + w''}{R^2} + \frac{2w^2 + w'^2 + 4ww''}{2R^3}$$

Здесь  $R$  — начальный радиус оси кольца;  $w$  — перемещение в направлении радиуса,  $r = R + w$ .

Решение нелинейной задачи получено Е.П. Поповым [43]

На рис. 38 показаны кривые, построенные Е.П. Поповым, по которым можно оценить погрешность линейной теории при оценке перемещений и напряжений; так как на оси ординат отложен безразмерный параметр  $\frac{PR^2}{E_0 J}$  ( $J$  — момент инерции поперечного сечения кольца), то погрешность можно оценить при разных величинах приложенной силы и жесткости кольца. Решение Е.П. Попова позволяет для определения  $E_0$  использовать экспериментальные данные, полученные в бесконечно нелинейной области.

Как видно из рис. 38, погрешность нелинейной теории не превышает обычно требуемой 10% точности если  $\frac{PR^2}{E_0 J} < 0,5$  т.е. при

$$\frac{P}{bh} < 0,04 \frac{h^2}{R^2} E_0$$

Следовательно для колец из материалов типа стеклопластиков ( $E_0 = 2000 - 5000 \text{ кг/см}^2$ ) с поперечным сечением  $b \times h = 10 \times (3 + 5) \text{ см}^2$  при испытаниях в стандартных машинах (когда нежелательно работать в диапазоне нагрузок  $< 20 \text{ кг}$ ) учет нелинейности при обработке результатов опытов требуется если  $\frac{h}{R} < \frac{1}{15}$ .

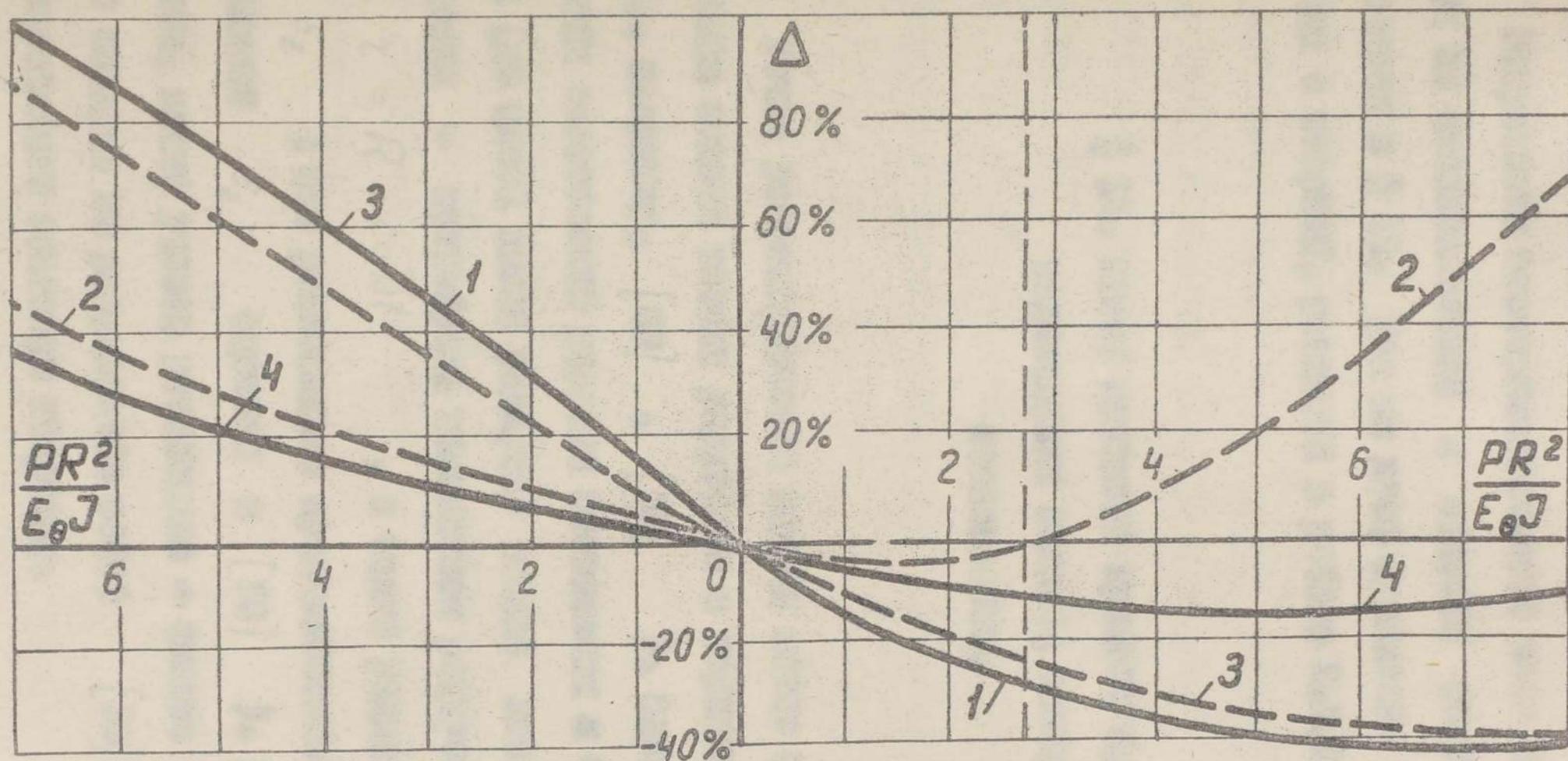


Рис. 38. Погрешность  $\Delta$ , вносимая из-за учета геометрической нелинейности:  
 1 — ошибка при измерении перемещения  $w_0$  в точке приложения силы;  
 2 — то же при измерении перемещения  $w_1$  точек по горизонтальному диаметру; 3 — ошибка в определении логичных изгибов в сечении по горизонтальному диаметру; 4 — ошибка в определении логичных изгибов в сечении под приложенной силой. Справа — сжатие, слева — растяжение.

Результаты экспериментального исследования тонких колец из стеклопластика в области слабой нелинейности приведены в § 13. Тем же дано сравнение экспериментальных данных с теорией, развитой в работе Е.Л.Попова [43].

§ 14. Изгиб плоского кривого бруса радиальными силами; основные зависимости.

Точно рассматриваемая задача может быть решена как плоская задача теории упругости в полярных координатах (см., например, [69], [35]). Однако для рассмотрения соотношений упругих постоянных и относительных толщин (до одной пятой радиуса) можно ввести некоторые упрощения — пренебречь изменением радиуса по толщине кольца:  $r = R = const$ , а также радиальной деформацией  $\epsilon_z$ ; это равносильно предположению  $\frac{1}{E_z} = \nu_z \theta = 0$  (величина  $\epsilon_z$  оценена в [50]). Поступая таким образом, можно учесть растяжение — сжатие оси и сдвиг, что — это следует из результатов работ [39], [50], [71] — определяет основную поправку.

Рассмотрим плоский кривой брусок, ограниченный цилиндрическими поверхностями радиусов  $a$  и  $b$  и радиальными плоскостями  $\theta = 0$  и  $\theta = \theta_0$ , нагруженный радиальной нагрузкой  $q_r(x)$  (см. рис. 39). Брусок отнесен к системе координат  $\theta, z$ , соответствующие перемещения обозначены через  $u, w$ . Поперечное сечение — прямоугольник единичной ширины и высотой  $2H = b - a$ . Если ось  $ob$  цилиндрической ортотропии материала находится в точке  $O$ , то, с учетом принятых допущений  $\epsilon_z = 0$  и  $r = R = \frac{a+b}{2} = \text{const}$ , закон Гука и связь между деформациями и перемещениями получает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= E_\theta \epsilon_\theta; \quad \tau_{\theta z} = G_{\theta z} \gamma_{\theta z}; \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right); \end{aligned} \quad (4.1)$$

смысл обозначений очевиден.

Выражения для потенциальной энергии деформации  $\mathcal{E}_1$  и потенциальной энергии  $\mathcal{E}_2$  нормальной нагрузки  $q_r(x)$  имеют вид:

$$\mathcal{E}_1 = \int_0^{\theta_0} \int_{-H}^H L_1 d\theta dz; \quad \mathcal{E}_2 = \int_0^{\theta_0} L_2 d\theta, \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{R}{2} (\epsilon_\theta \sigma_\theta + \gamma_{\theta z} \tau_{\theta z}) = \\ &= \frac{1}{2R} \left[ E_\theta \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right)^2 + G_{\theta z} \left( R \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right)^2 \right]; \end{aligned}$$

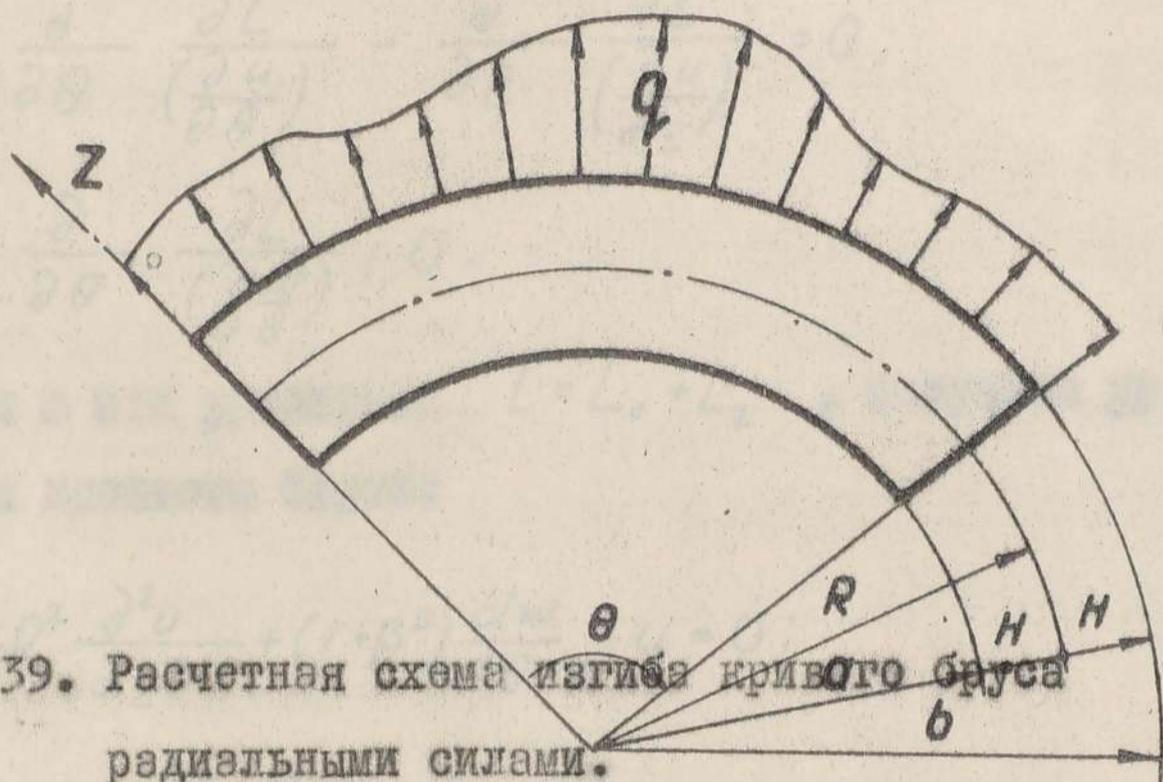


Рис.39. Расчетная схема изгиба кривого бруса радиальными силами.

$$2H \left( \frac{d^2 u}{dz^2} - \beta^2 u \right) + \int_0^H \left[ R \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (1-\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] dz = \frac{q R^2}{G_0}$$

$$\beta^2 = \frac{E_0}{G_0}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\mu}{\beta^2 R} \frac{du}{dz} - \frac{1}{\beta^2 R} u = 0$$

$$L_2 = q_w R; \quad q_w = \int_{-H}^H q_z dz \quad \rightarrow \text{общая радиальная нагрузка.}$$

Тем как в состоянии равновесия полная энергия системы

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad \text{должна иметь минимум, то её вариация } \delta \mathcal{E}$$

должна равняться нулю. Вариационной задаче  $\delta \mathcal{E} = 0$

$$\text{где } \mathcal{E} = \int_0^{\theta_0} L(u, w, \frac{\partial u}{\partial \theta}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial \theta}) d\theta, \quad \text{соответствует}$$

уравнения Эйлера - Остроградского

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial L}{\partial \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)} \right) = 0.$$

Подставляя в эти уравнения  $L = L_1 + L_2$ , получаем уравне-  
ния изгиба кривого бруса:

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + R^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (1 + \beta^2) \frac{dw}{d\theta} - u = 0; \quad (4.3)$$

$$2H \left( \frac{d^2 w}{d\theta^2} - \beta^2 w \right) + \int_{-H}^H \left[ R \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial z} - (1 + \beta^2) \frac{\partial u}{\partial \theta} \right] dz = -\frac{qR^2}{G\theta z}, \quad (4.4)$$

здесь параметр  $\beta^2 = \frac{E\theta}{G\theta z}$  характеризует относительное сопротивление сдвигу.

Введи вместо угловой координаты  $\theta$  криволинейную координату  $x = R\theta$ , получаем вместо (4.3 - 4.4) систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1 + \beta^2}{\beta^2 R} \frac{dw}{dx} - \frac{1}{\beta^2 R^2} u = 0;$$

(4.5)

$$2H \frac{d^2 w}{dx^2} + \int_{-H}^H \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dz - \frac{2H\beta^2}{R^2} w - \frac{1+\beta^2}{R} \int_{-H}^H \frac{\partial u}{\partial x} dz = -\frac{q}{G_{xz}}, \quad (4.6)$$

которая для случая, когда радиус кривизны  $R \rightarrow \infty$  переходит в систему уравнений для прямого стержня [61].

Следует отметить, что уравнения (4.5-4.6) не учитывают неоднородность материалов, армированных волокнами. Эту неоднородность ~~материалов~~, с достаточной простотой можно учесть при помощи теории армированных сред В.В.Болотина. Для этого кривой брус представляется в виде многослойного стержня, состоящего из жестких слоев арматуры толщиной  $h'$ , работающих на сжатие — растяжение и изгиб, и мягких прослоек связующего толщиной  $h''$ , работающих на сдвиг. При таком подходе правые части уравнений (4.3) и (4.4) дополняются соответственно членами [10]

$$- \frac{1}{n^2} \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \frac{1}{3} \left( \beta \frac{H}{R} \right)^2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right); \quad (4.7a)$$

$$- \frac{1}{n^2} \left( \frac{h'}{h} \right)^2 \frac{1}{3} \left( \beta \frac{H}{R} \right)^2 \left( 2H \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \int_{-H}^H \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} dz \right), \quad (4.7b)$$

$(h = h' + h'')$

которые учитывают изгибные эффекты в жестких слоях. Вес этих членов убывает обратно пропорционально квадрату числа слоев  $n$ . Так как в реальных конструкциях число слоев, как правило, достаточно велико, то для широкого класса задач слагаемыми (4.7) можно пренебречь [39].

Рассмотрим случай, когда кривой брус нагружен поперечной нагрузкой  $q = q_0 + q_n \sin K_n x + q_m \cos K_m x$ , (4.8)

где  $K_n = \frac{n \pi}{s}$ ;  $K_m = \frac{m \pi}{s}$ ,

$n$  и  $m$  — число полупериодов приложенной синусоидальной и косинусоидальной нагрузки на длине дуги  $s$ . Каса-гольцевой нагрузки на поверхности кольца отсутствует, т.е. внешние граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{dw}{dx} - \frac{u}{R} = 0 \quad \text{при } z = \pm H. \quad (4.9)$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что система уравнений (4.5, 4.6) и граничные условия (4.9) будут удовлетворительными, если искать перемещения в виде

$$u = (C_n \operatorname{sh} \mu_n z + C'_n \operatorname{ch} \mu_n z + B_n) \cos K_n x + (C_m \operatorname{sh} \mu_m z + C'_m \operatorname{ch} \mu_m z + B_m) \sin K_m x; \quad (4.10)$$

$$w = w^0 + A_n \sin K_n x + A_m \cos K_m x.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (4.5) и учитывая, что уравнение должно удовлетворяться при всех значениях  $x$  и  $y$ , получаем:

$$B_n = \frac{(1 + \beta^2) K_n A_n}{\mu_n^2 R};$$

$$B_m = - \frac{(1 + \beta^2) K_m A_m}{\mu_m^2 R},$$

где

$$\mu_{n,m}^2 = \frac{K_{n,m} R^2 \beta^2 + 1}{R^2}. \quad (4.11)$$

Граничные условия (4.9) при всех значениях  $x$  удовлетворяются, если

$$C_n' = \frac{C_n}{\mu_n R}; \quad C_n = - \frac{\kappa_n^2 R^2 - 1}{\mu_n \kappa_n R^2 \operatorname{ch} \alpha_n} A_n; \quad (4.12)$$

$$C_m' = \frac{C_m}{\mu_m R}; \quad C_m = \frac{\kappa_m^2 R^2 - 1}{\mu_m \kappa_m R^2 \operatorname{ch} \alpha_m} A_m.$$

Значения коэффициентов  $A_n$  и  $A_m$ , а также  $w_0$  найдем, подставив выражения (4.8, 4.10), с учетом (4.11, 4.12), в уравнение (4.6)

$$A_n = - \frac{q_n R^4}{E_0 J (\kappa_n^2 R^2 - 1)^2 \varphi_n}; \quad A_m = \frac{q_m R^4}{E_0 J (\kappa_m^2 R^2 - 1)^2 \varphi_m}; \quad (4.13)$$

$$w_0 = \frac{q_0 R^2}{2 H E_0}; \quad \text{где } \varphi_{n,m} = \frac{3(\alpha_{n,m} - \operatorname{th} \alpha_{n,m})}{\alpha_{n,m}^3};$$

$$J = \frac{2 H^3}{3}; \quad \alpha_{n,m} = \mu_{n,m} H.$$

В случае произвольной нагрузки, нагрузку следует разложить в ряд Фурье  $q(x) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin \kappa_n x + \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos \kappa_m x$  и суммировать перемещения, соответствующие частным нагрузкам  $q_n \sin \kappa_n x$  и  $q_m \cos \kappa_m x$ . Коэффициенты Фурье разложения  $q_n$  и  $q_m$  определяются формулами

$$q_n = \frac{2}{s} \int_0^s q(x) \sin \kappa_n x dx;$$

(4.14)

$$q_m = \frac{2}{s} \int_0^s q(x) \cos k_m x dx.$$

Далее будут рассмотрены некоторые случаи нагружения замкнутого кольца и сегмента.

### § 15. Замкнутое кольцо, нагруженное радиальными силами.

В случае замкнутого кольца  $2s = 2\pi R$  ; решение должно удовлетворять условия периодичности для перемещений  $u$  и  $w$  по координате  $x$  (период  $2\pi R$  ). Упростим решение, начав отсчет координаты  $x$  (или  $\theta$  ) от оси симметрии деформированного кольца. Тогда необходимо удовлетворить также условия чётности для перемещения  $w$  и нечётности для перемещения  $u$  . Все условия будут выполнены, если  $k_n = 0$  (следовательно  $q_n = 0$  ) и  $k_m x = m\theta$  . Произвольную нагрузку следует разложить в

ряд Фурье  $q(\theta) = q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos m\theta$ , где

$$q_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(\theta) \cos m\theta d\theta$$

В случае равномерно распределённой нагрузки  $q(\theta) = \text{const} = q_0$  и очевидно  $u = 0$  ;

$$w = w^0 = \frac{q_0 R^2}{2 H E_0} \quad (4.15)$$

При этой нагрузке деформация кольца является осесимметричной (сдвиги отсутствуют) и поэтому совпадает с общеизвестной формулой сопротивления материалов [71] .

Далее рассмотрим четырехточечное нагружение кольца (схема показано на рис. 40), поскольку от этой схемы легко перейти к трехточечному или двухточечному нагружению (рис. 36).

Сосредоточенные силы  $P_1$  и  $P_2$  представим как равномерно распределенные с интенсивностью  $q_{\alpha_1}$  и  $q_{\alpha_2}$  действующие на участках  $2\delta \rightarrow 0$ ; в остальной области  $q(x) = 0$ . Таким образом имеем

$$q_m = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1 - \delta}^{\alpha_1 + \delta} q_{\alpha_1} \cos m \theta d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \alpha_2 - \delta}^{\pi - \alpha_2 + \delta} q_{\alpha_2} \cos m \theta d\theta, \quad (4.16)$$

где

$$q_{\alpha_1} = \frac{P_1}{4R\delta \cos \alpha_1}; \quad q_{\alpha_2} = \frac{P_2}{4R\delta \cos \alpha_2}.$$

После интегрирования, переходя к пределу  $\delta \rightarrow 0$ , получим

$$q_m = \frac{P}{\pi R} \left( \frac{\cos m \alpha_1}{\cos \alpha_1} + \frac{\cos m \alpha_2}{\cos \alpha_2} \cos m \pi \right); \quad (4.17)$$

при  $m = 0$ ;  $q_m = q_0 = \frac{P}{\pi R} \left( \frac{1}{\cos \alpha_1} + \frac{1}{\cos \alpha_2} \right).$

Выражения для перемещений  $u$  и  $w$  будут следующими:

$$u = \sum_{m=1,2,3}^{\infty} \left( C_m \operatorname{sh} \mu_m z + \frac{C_m}{\mu_m R} \operatorname{ch} \mu_m z + B_m \right) \sin m \theta;$$

$$w = w^0 + \sum_{m=1,2,3}^{\infty} A_m \cos m \theta, \quad (4.18)$$

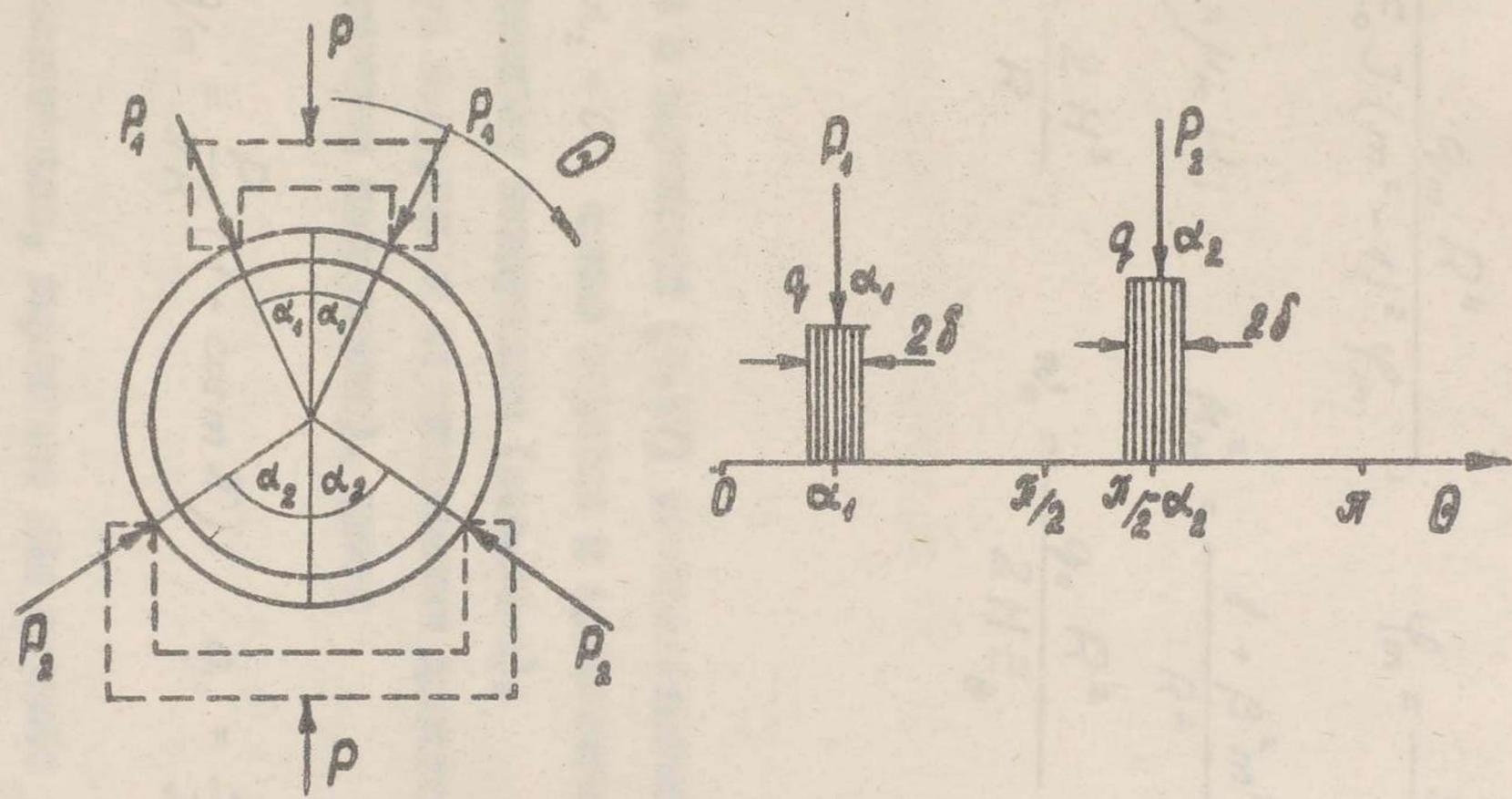


Рис. 40. Расчетная схема.

где

$$C_m = \frac{(m^2 - 1) A_m}{m \mu_m R \operatorname{ch} \alpha_m}; \quad B_m = - \frac{(1 + \beta^2) m A_m}{\mu_m^2 R^2};$$

$$A_m = \frac{q_m R^4}{E_0 J (m^2 - 1)^2 \psi_m}; \quad \psi_m = \frac{3(\alpha_m - \operatorname{th} \alpha_m)}{\alpha_m^3};$$

$$\alpha_m = \mu_m H; \quad \mu_m^2 = \frac{1 + \beta^2 m^2}{R^2};$$

$$J = \frac{2 H^3}{R}; \quad w_0 = \frac{q_0 R^2}{2 H E_0}.$$

Подставив в выражение (4.17) соответственно  $\alpha_1 = 0$  или  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  можно перейти к трехточечному (рис. 36-в) или двухточечному нагружению (рис. 36-г).

При нагружении вертикальными диаметрными силами  $P$  (двухточечное нагружение), имеем

$$q_m = \frac{P}{\pi R} (1 + \cos m \pi); \quad q_0 = \frac{2P}{\pi R} \quad (4.19)$$

и, следовательно, выражение для прогиба

$$w = \frac{P R}{\pi H E_0} + \frac{2 P \cdot R^3}{\pi J E_0} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\cos m \theta}{(m^2 - 1)^2 \psi_m} \quad (4.20)$$

В сечениях кольца  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$  действуют макс-  
симальные касательные напряжения и имеется максимальный прогиб

$$w(0) = w(\pi) = w_0 = \frac{PR^3}{E_\theta J} \left( \frac{2}{3\pi} \frac{H^2}{R^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2-1)^2} \psi_m \right) =$$

$$= \frac{PR^3}{E_\theta J} \cdot \frac{2}{3\pi} \left[ \frac{H^2}{R^2} + \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\left( \frac{H}{R} \sqrt{1+\beta^2 m^2} \right)^3}{(m^2-1)^2 \left( \frac{H}{R} \sqrt{1+\beta^2 m^2} - \operatorname{th} \frac{H}{R} \sqrt{1+\beta^2 m^2} \right)} \right]. \quad (4.21)$$

Если переходить к суммированию по  $m_1 = \frac{m}{2}$ , то прогиб

$$w_0 = \frac{PR^3}{E_\theta J} \cdot \frac{2}{3\pi} \left[ \frac{H^2}{R^2} + \sum_{m_1=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{\left( \frac{H}{R} \sqrt{1+4\beta^2 m_1^2} \right)^3}{(4m_1^2-1)^2 \left( \frac{H}{R} \sqrt{1+4\beta^2 m_1^2} - \operatorname{th} \frac{H}{R} \sqrt{1+4\beta^2 m_1^2} \right)} \right]. \quad (4.22)$$

Сходимость ряда в выражениях (4.21, 4.22) хорошая, однако величина полной суммы в таблицах не приведена (см., например [25]). Необходимо при некоторых значениях  $\frac{2H}{R}$  и параметра  $\beta$  оценить значение полной суммы и выяснить число членов ряда, которыми можно ограничиваться при практическом расчете. Для оценки полной суммы сначала вычисляются первые  $i$  члены ряда (4.22), а сумма остальных членов оценивается при помощи двух сумм, значения которых известны. Одна из сумм — известна для оценки сумм меньше, а другая — больше сумм в выражении (4.22). Начиная с определенного (конечного)  $i$  имеет место неравенство:

$$\sum_i^{\infty} \frac{\left(\frac{H}{R}\right)^2 (1 + 4m_1^2 \beta^2)}{(4m_1^2 - 1)^2} <$$

$$< \sum_i^{\infty} \frac{\left(\frac{H}{R} \sqrt{1 + 4m_1^2 \beta^2}\right)^3}{(4m_1^2 - 1)^2 \left(\frac{H}{R} \sqrt{1 + 4m_1^2 \beta^2} - \text{th} \frac{H}{R} \sqrt{1 + 4m_1^2 \beta^2}\right)} < \quad (4.23)$$

$$< \sum_i^{\infty} \frac{\left(\frac{H}{R}\right)^2 (1 + 4m_1^2 \beta^2) + 2 \frac{H}{R} m_1 \beta + 2}{(4m_1^2 - 1)^2}$$

ИЗВОДНО [23], 4808

$$\sum_{m_1=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(4m_1^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}; \quad \sum_{m_1=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{4m_1^2 - 1} = \frac{1}{2};$$

$$\sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{4m^2}{(4m^2 - 1)^2} = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(4m^2 - 1)^2} + \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{4m^2 - 1} =$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{16};$$

$$\sum_{m_1=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{m_1}{(4m_1^2 - 1)^2} = \frac{1}{8}.$$

В таблице 6 приведен прогиб  $w_0$ , оцененный при помощи неравенства (4.23), и оценка прогиба  $w_{03}$  по первым трем членам ряда (4.21)

Таблица 6

$\frac{2H}{R}$	$\beta$	$w_{0min} < w_0 < w_{0max}$	$w_{03}$	$\frac{w_{0max} - w_{03}}{w_{0max}}$ %
0,1	0	$0,0750 \frac{P \cdot R^3}{E_0 J}$	$0,0746 \frac{PR^3}{E_0 J}$	0,7
	5	$0,0840 \frac{PR^3}{E_0 J} < w_0 < 0,0845 \frac{P \cdot R^3}{E_0 J}$	$0,0831 \frac{PR^3}{E_0 J}$	1,7
	10	$0,1123 \frac{PR^3}{E_0 J} < w_0 < 0,1131 \frac{PR^3}{E_0 J}$	$0,1085 \frac{PR^3}{E_0 J}$	4,1
0,2	0	$0,0768 \frac{PR^3}{E_0 J}$	$0,0765 \frac{PR^3}{E_0 J}$	0,4
	5	$0,1147 \frac{P \cdot R^3}{E_0 J} < w_0 < 0,1155 \frac{PR^3}{E_0 J}$	$0,1109 \frac{PR^3}{E_0 J}$	4,2
	10	$0,2274 \frac{PR^3}{E_0 J} < w_0 < 0,2286 \frac{PR^3}{E_0 J}$	$0,2121 \frac{PR^3}{E_0 J}$	3,7

Как видно из таблицы 6, при практических расчетах вполне можно ограничиваться первыми тремя членами ряда в выражении (4.21) или (4.22) и ошибки в определении прогиба не будут превышать 5% (при  $2H/R < 0,2$  и  $\beta < 15$ ).

### § 16. Подход С.П. Тимошенко.

В предыдущих параграфах задача изгиба кривого бруса, нагруженного радиальными силами в плоскости бруса, рассмотрена без постулирования закона распределения напряжений по высоте. Однако, решение имеет более простой вид, если принять парабол-линейное распределение касательных и линейное распределение нормальных напряжений по высоте бруса. При таком подходе решение некоторых задач изгиба кривого бруса дано С.П. Тимошенко [71].

В настоящем параграфе решение С.П. Тимошенко для замкнутого кольца, нагруженного по схеме 36-а, сравнивается с выражением (4.21) полученным в § 15. Приводятся также некоторые упрощенные выражения (4.21).

При парабол-линейном распределении касательных напряжений по высоте кольца при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  прогиб

$$\bar{w}_0 = \frac{PR^3}{E_\theta J} \left[ \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} + \frac{H^2}{R^2} \left( \frac{2}{3\pi} - \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{20} \beta^2 \right) - \frac{1}{9} \frac{H^4}{R^4} \right] \quad (4.24)$$

Сперва сравним решения (4.21) и (4.24) в предельном случае, когда  $\beta \rightarrow 0$ . Тогда:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{w}_0 = \frac{PR^3}{E_\theta J} \left[ \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} + \frac{H^2}{R^2} \left( \frac{2}{3\pi} - \frac{\pi}{24} \right) - \frac{1}{9} \frac{H^4}{R^4} \right]; \quad (4.25)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \omega_0 = \frac{PR^3}{E_0 J} \cdot \frac{2}{3\pi} \frac{H^2}{R^2} \left( 1 + \frac{\frac{H}{R}}{\frac{H}{R} - \operatorname{th} \frac{H}{R}} \sum_{m=1,2,3}^{\infty} \frac{1}{(4m^2-1)^2} \right). \quad (4.26)$$

Или, так как  $\sum_{m=1,2,3...}^{\infty} \frac{1}{(4m^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$ , [23]

то

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \omega_0 = \frac{PR^3}{E_0 J} \cdot \frac{2}{3\pi} \frac{H^2}{R^2} \left( 1 + \frac{\frac{H}{R}}{\frac{H}{R} - \operatorname{th} \frac{H}{R}} \cdot \frac{\pi^2 - 8}{16} \right). \quad (4.27)$$

Сравнение выражений (4.25) и (4.27) производилось численно. Оказалось, что даже для коротких колец (но при  $\frac{2H}{R} < \frac{1}{5}$ ) разница процентов  $\bar{\omega}_0$  и  $\omega_0$  меньше 3%. Для колец с  $\frac{2H}{R} < \frac{1}{10}$  это отличие уже меньше 0,5%.

Для взаимного сопоставления прогибов, определенных формулами (4.21) и (4.24), по формуле (4.24) (параболическое распределение касательных напряжений), построен график  $\bar{\omega}_0 \times \frac{E_0 J}{PR^3} = f(B)$  (рис. 41), на этом графике штрихами показаны значения  $\omega_0$ , которые определены формулой (4.21) и оценены при помощи неравенства (4.23). Прогресс, определенные по формулам (4.21), (4.27), (4.24) и (4.25) также сопоставлены в таблице 7.

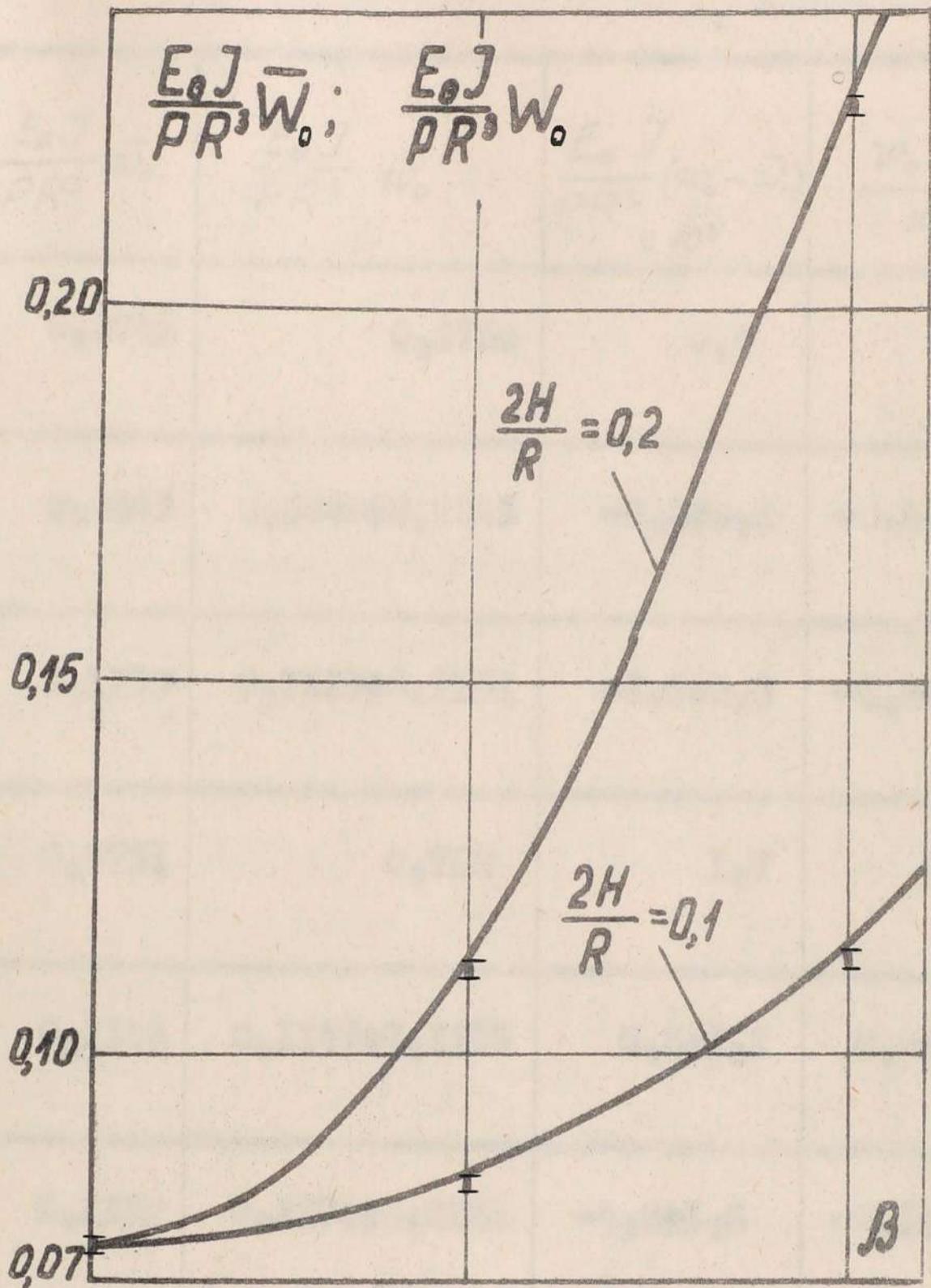


Рис. 41. Величина прогиба кольца  $W_0$  от нагрузки  $P$  для цилиндра единичной длины  $\beta = \sqrt{\frac{E_0}{G_0 z}}$ . Кривые построены при принятом переболическом распределении касательных напряжений по высоте кольца. Вертикали показывают прогибы относительно без поступательных заволов распределению касательных напряжений по (4.20) при помощи неравенства (4.23).

Таблица 7.

$\frac{2H}{R}$	$\beta$	$\frac{E_0 J}{PR^3} \bar{w}_0$	$\frac{E_0 J}{PR^3} w_0$	$\frac{E_0 J}{PR^3} (w_0 - \bar{w}_0) \times 10^3$	$\frac{w_0 - \bar{w}_0}{w_0}, \%$
	0	0,0746	0,0750	0,4	0,5
0,1	5	0,0843	0,0840±0,0845	+0,3±0,2	+0,4±0,3
	10	0,1139	0,1123±0,1131	-1,6±0,8	-1,4±0,7
	0	0,0751	0,768	1,7	2,3
0,2	5	0,1144	0,1147±0,1155	0,0±1,1	0,3±1
	10	0,2322	0,2274±0,2286	-4,8±3,6	-2,1±-1,6

Как видно, что при величинах  $\beta$ , свойственных для армированных пластинок, прогибы, определенные на основании формулы (4.24), практически совпадают с прогибами, определенными без постулирования закона распределения касательных напряжений по высоте кольца.

Аналитическое совпадение формул (4.21) и (4.24) можно получить при некоторых упрощениях формул (4.21) и (4.24). В фор-

в формуле (4.21) параметр  $\varphi_m$  заменяется его приближенным значением  $\varphi_m \approx (1 + 0,4 \alpha_m^2)^{-1}$  (при  $\alpha_m < 3$  погрешность не превышает 1%), тогда [61]

$$w_0 = \frac{PR^3}{E_0 J} \left[ \frac{2}{3\pi} \frac{H^2}{R^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1 + 0,4 \frac{H^2}{R^2} (1 + m^2 \beta^2)}{(m^2 - 1)^2} \right].$$

Учитывая, что для рассматриваемых материалов  $\beta^2 \gg 1$ , то есть, отбрасывая члены содержащие  $\frac{H^2}{R^2}$  без множителя  $\beta^2$  и зная, что [23]

$$\sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}; \quad \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 - 1} = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{m^2}{(m^2 - 1)^2} &= \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 - 1} + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{(m^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{16}, \end{aligned}$$

получаем уравнение

$$w_0 = \frac{PR^3}{E_0 J} \left[ \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{20} \frac{H^2}{R^2} \beta^2 \right],$$

(4.28)

которое совпадает с выражением (4.24), полученным С.П.Тимошенко, принимая параболическое распределение касательных напряжений по высоте кольца, если в выражении (4.24) также отбросить члены содержащие  $\frac{H^2}{R^2}$  и  $\frac{H^4}{R^4}$  без множителя  $\beta$ , то есть не учитывая растяжимость оси кольца. Это упрощение допустимо, так как учет растяжимости оси кольца при  $\frac{2H}{R} < 0,2$  вносит поправку меньше 2%.

### § 17. Изгиб свободно опертого сегмента сосредоточенной силой посередине пролета.

Эксперименты по определению механических свойств армированных материалов, особенно изготовленных методом намотки, часто проводятся на свободно опертых сегментах при нагружении сосредоточенной силой посередине пролета (см., например [75], [97]). Необходимо установить влияние сдвигов, "раствора" (угла  $\theta_0$ , см. рис. 42-а, б) и способа опирания на прогиб сегментов. Рассмотрим две схемы опирания (рис. 42-а, б), обычно применяемые при испытании сегментов. При реализации схемы 42-а опорные реакции направлены перпендикулярно к оси стержня, при нагружении по схеме 42-б опорные реакции действуют параллельно приложенной силе.

Решения при схеме нагружения 42-а получим, применяя основные зависимости § 14. Условия свободного опирания  $w=0$  и  $\theta_0=0$  при  $x=0$  и  $x=l$  автоматически удовлетворяются, если  $K_m=0$ ,  $q_0=0$ ,  $K_n = \frac{n \cdot \pi}{s}$  ( $s$  — длина недеформированной дуги сегмента). Радиальную нагрузку  $q(x)$  следует разложить в ряд Фурье по синусам.

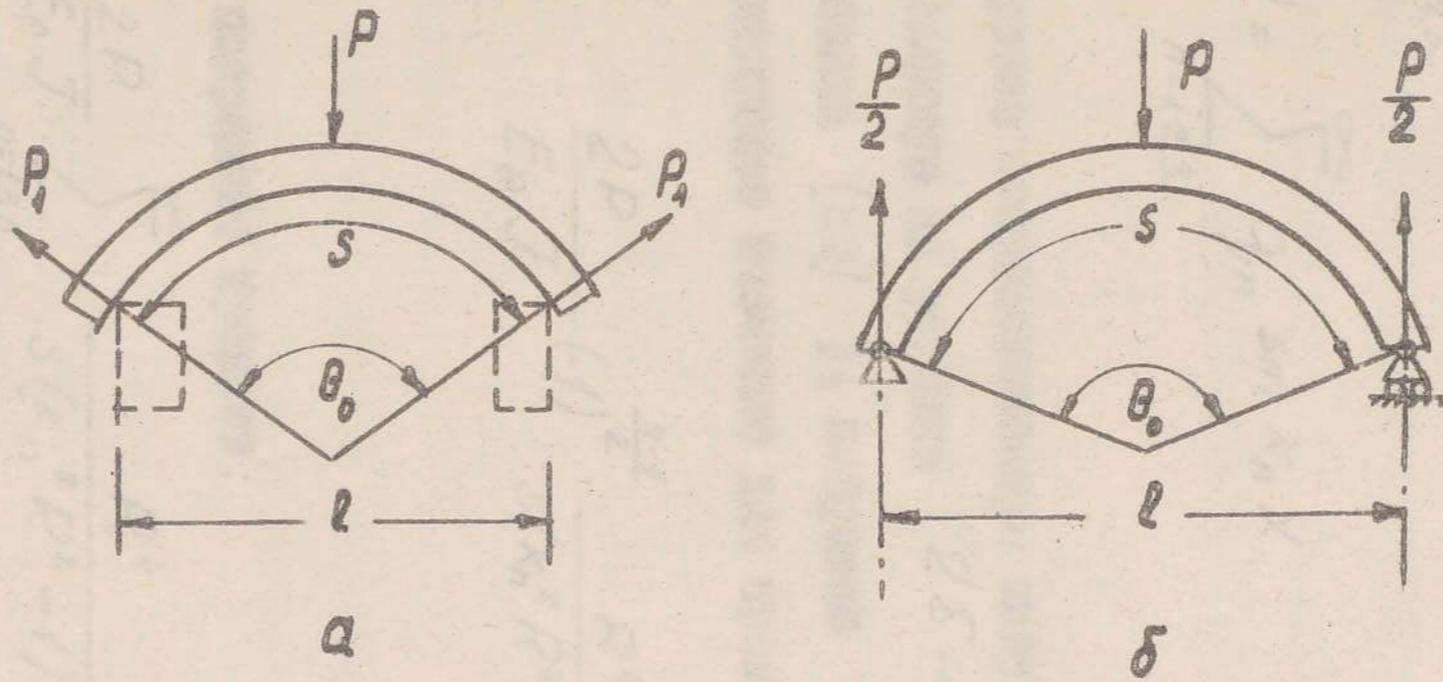


Рис. 42-а, б. Схемы опирания, разрезаемые в жёсткой сечении сегментов.

Тогда

$$u = \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left( C_n \operatorname{sh} \mu_n z + \frac{C_n}{\mu_n R} \operatorname{ch} \mu_n z + B_n \right) \cos K_n x;$$

$$w = \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} A_n \sin K_n x;$$

(4.29)

$$q(x) = \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} q_n \sin K_n x.$$

Рассматривая сосредоточенную силу  $P$  как равномерно распределенную по участку  $2\delta \rightarrow 0$  (аналогично как для прямой балки [69]), получим  $q_n = -\frac{2P}{S} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$  и имеем следующее значение для прогибов  $w$

$$w = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{2P}{E_0 J} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{R^4}{S(K_n^2 R^2 - 1)^2 \psi_n} \sin \frac{n\pi x}{S}. \quad (4.30)$$

Прогиб посредине пролета:

$$W = \frac{2P}{E_0 J} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{R^4}{S(K_n^2 R^2 - 1)^2 \psi_n} =$$

$$= \frac{PR^3}{E_0 J} \cdot \frac{2}{3\theta_0} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\frac{H^3}{R^3} \left( \frac{n^2 \pi^2 \beta^2}{\theta_0^2} + 1 \right)^{3/2}}{\left( \frac{n^2 \pi^2}{\theta^2} - 1 \right)^2 \left( \frac{H}{R} \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 \beta^2}{\theta_0^2} + 1} - \operatorname{th} \frac{H}{R} \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 \beta^2}{\theta_0^2} + 1} \right)}. \quad (4.31)$$

формула дает решение при  $\theta_0 = \pi$

В § 15 было показано, что, ограничиваясь при расчете первыми тремя членами ряда (4.21), имеем ошибку меньше 5%. Из сравнения ряда (4.31) с рядом (4.21) видно, что ряд (4.31) сходится быстрее, следовательно, ограничиваясь в вычислениях первыми тремя членами ряда (4.31) тоже имеем ошибку меньше 5%. При  $R \rightarrow \infty$  из выражения (4.31) получим выражение для определения прогиба прямой балки с учетом единиц

$$\lim_{R \rightarrow \infty} W = \frac{2P\alpha^3 l^2}{E_\theta J} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{3n\pi^4(n\alpha - \text{th } n\alpha)}$$

где  $\alpha = \frac{\pi H \beta}{l}$ ,

см. [51].

Задача также была решена на основе гипотезы о параболическом распределении поперечных напряжений. Тогда прогиб посередине пролета:

$$\bar{W} = \frac{PR^3}{E_\theta J} \frac{\theta_0 - \sin \theta_0}{8 \cos^2 \frac{\theta_0}{2}} \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{H^2}{R^2} + \frac{2}{5} \frac{\theta_0 + \sin \theta_0}{\theta_0 - \sin \theta_0} \frac{H^2}{R^2} \beta^2 \right). \quad (4.32)$$

На рис. 43 для сравнения показаны прогибы  $W$  и  $\bar{W}$  при  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  в зависимости от  $\beta$ . Прогибы сегментов, определенные по формулам (4.31) и (4.32), весьма близки; даже при  $\frac{2H}{R} = 0,2$  и  $\beta = 15$ , что соответствует  $\frac{E\theta}{G\theta_2} = 225$ , разница между  $W$  и  $\bar{W}$  составляет примерно 2%.

На рис. 44 показано влияние  $\theta_0$  на  $\frac{\bar{W}}{W^*}$  для сегментов с постоянным отношением  $\frac{2H}{R} = 0,1$  при некоторых значениях  $\beta$ . ( $W^* = \frac{PR^2 \theta_0 \sin \theta_0}{E_0 J 8 \cos^2 \frac{\theta_0}{2}}$  — прогиб посередине пролета без учета отягогов). Возрастание  $\theta_0$  приводит к резкому уменьшению влияния отягогов, так как  $\theta_0 = \frac{s}{R}$ , то при одинаковой длине дуги  $s$  влияние отягогов будет меньше, если уменьшить радиус сегмента.

В случае изгиба сегмента по схеме 42-б прогиб по середине пролета

$$\begin{aligned} \bar{W} = & \frac{PR^3}{E_0 J} \cdot \frac{1}{4} \left[ \theta_0 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \right. \\ & + \left( 1 - \frac{H^2}{3R^2} \right) \left( \frac{\theta_0}{2} + 1,5 \sin \theta_0 - 4 \sin \frac{\theta_0}{2} \right) + \\ & \left. + \frac{2}{5} \frac{H^2}{R^2} \beta^2 \left( \frac{\theta_0}{2} + 0,5 \sin \theta_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Решение получено приняв параболическое распределение касательных напряжений по высоте кривого бруса, что, как видно из выше сказанного, вполне оправдано при  $\frac{2H}{R} < 0,2$ .

На рис. 45 сравниваются прогибы, подсчитанные по формулам (4.32) и (4.33). Графики построены при  $\frac{2H}{R} = 0,1$  и

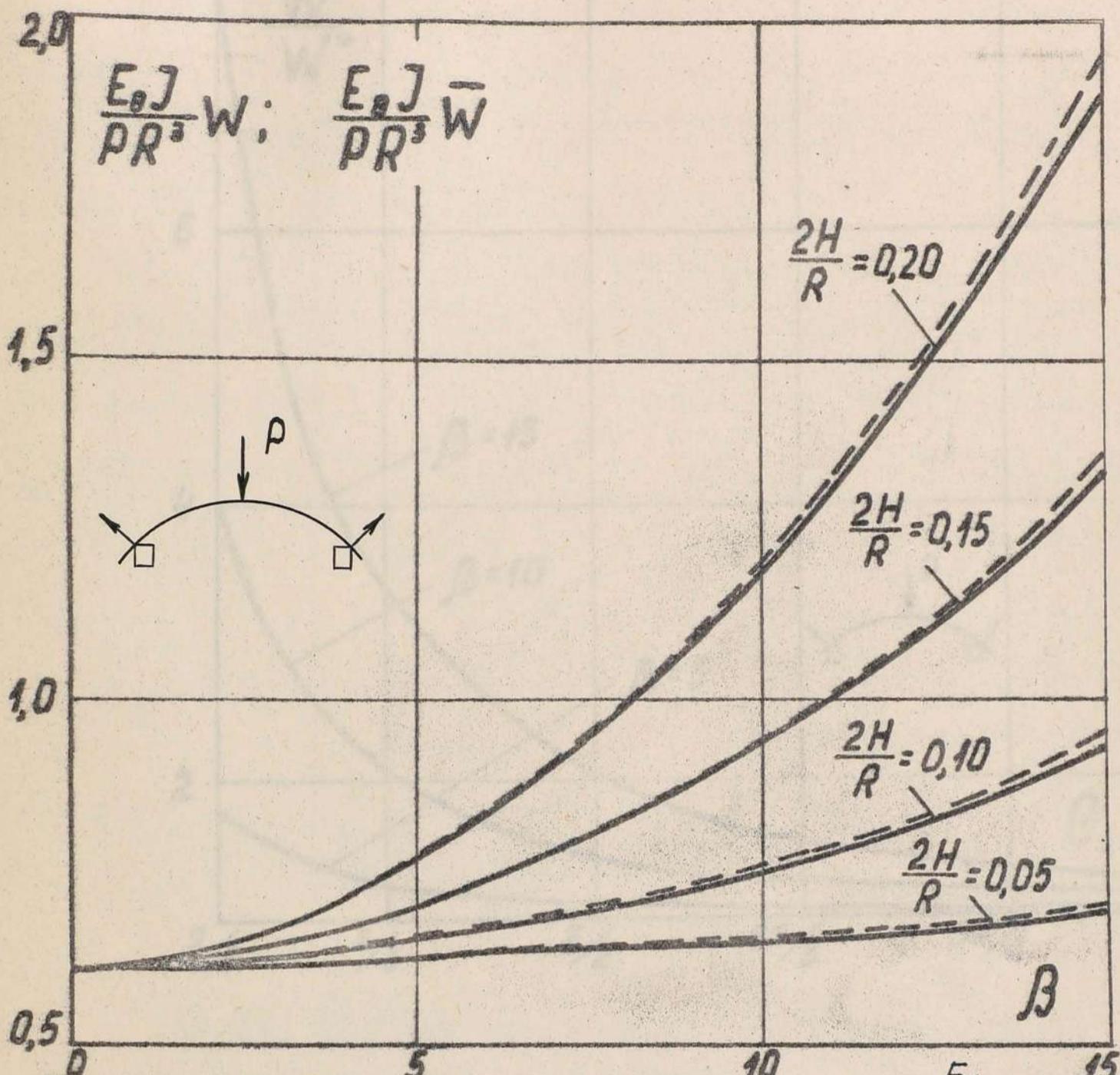


Рис. 43. Влияние параметра анизотропии  $\beta = \frac{E_0}{E_{0z}}$  на

- прогиб поперечно свободно опертого сегмента;
- на основе гипотезы о параболическом распределении касательных напряжений по высоте;
- без постулирования закона распределения касательных напряжений.

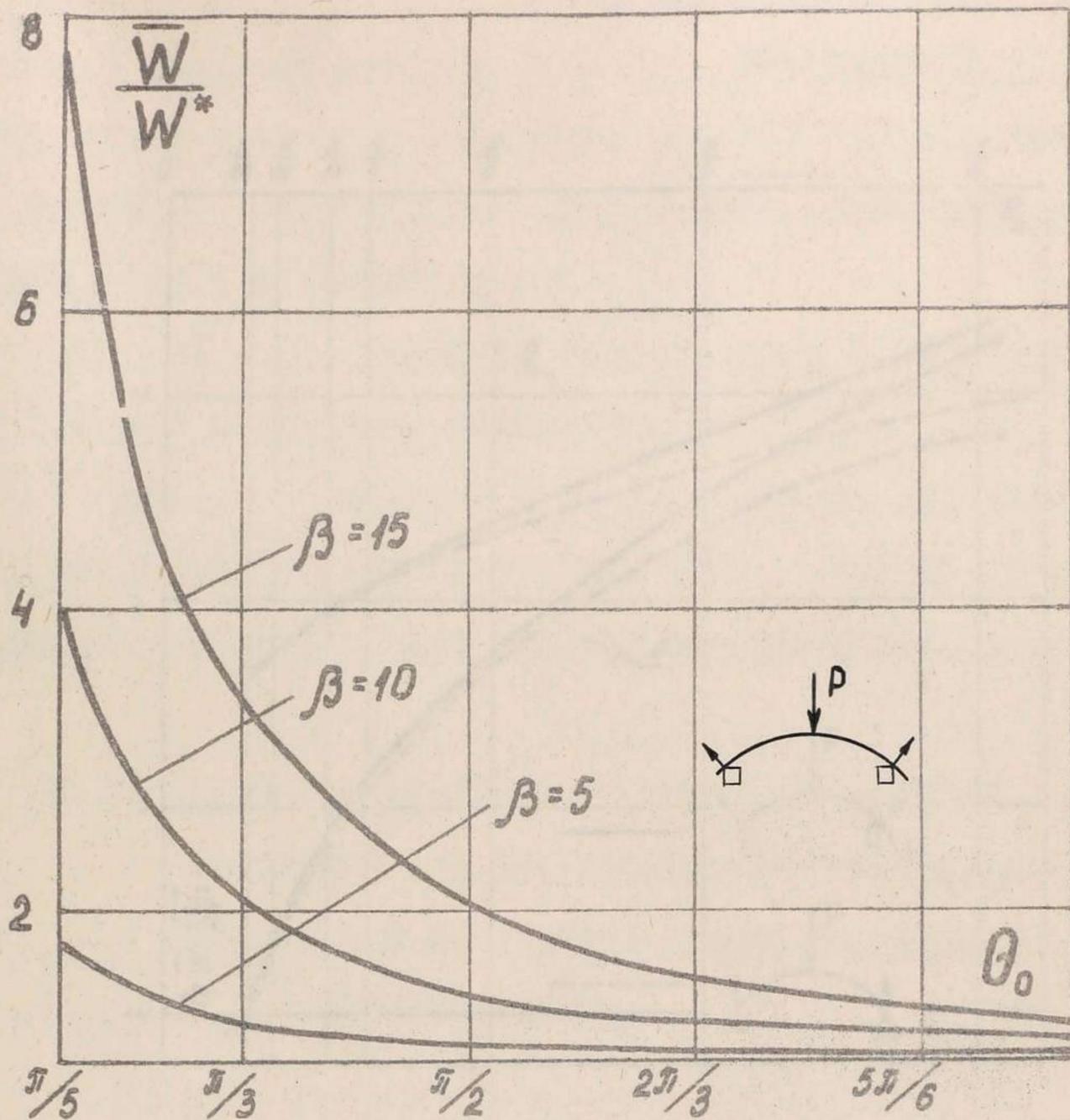


Рис. 44. Зависимость влияния угла от  $\theta_0$  для свободно опертых сегментов при фиксированном параметре изогнутости  $2H/R = 0.1$

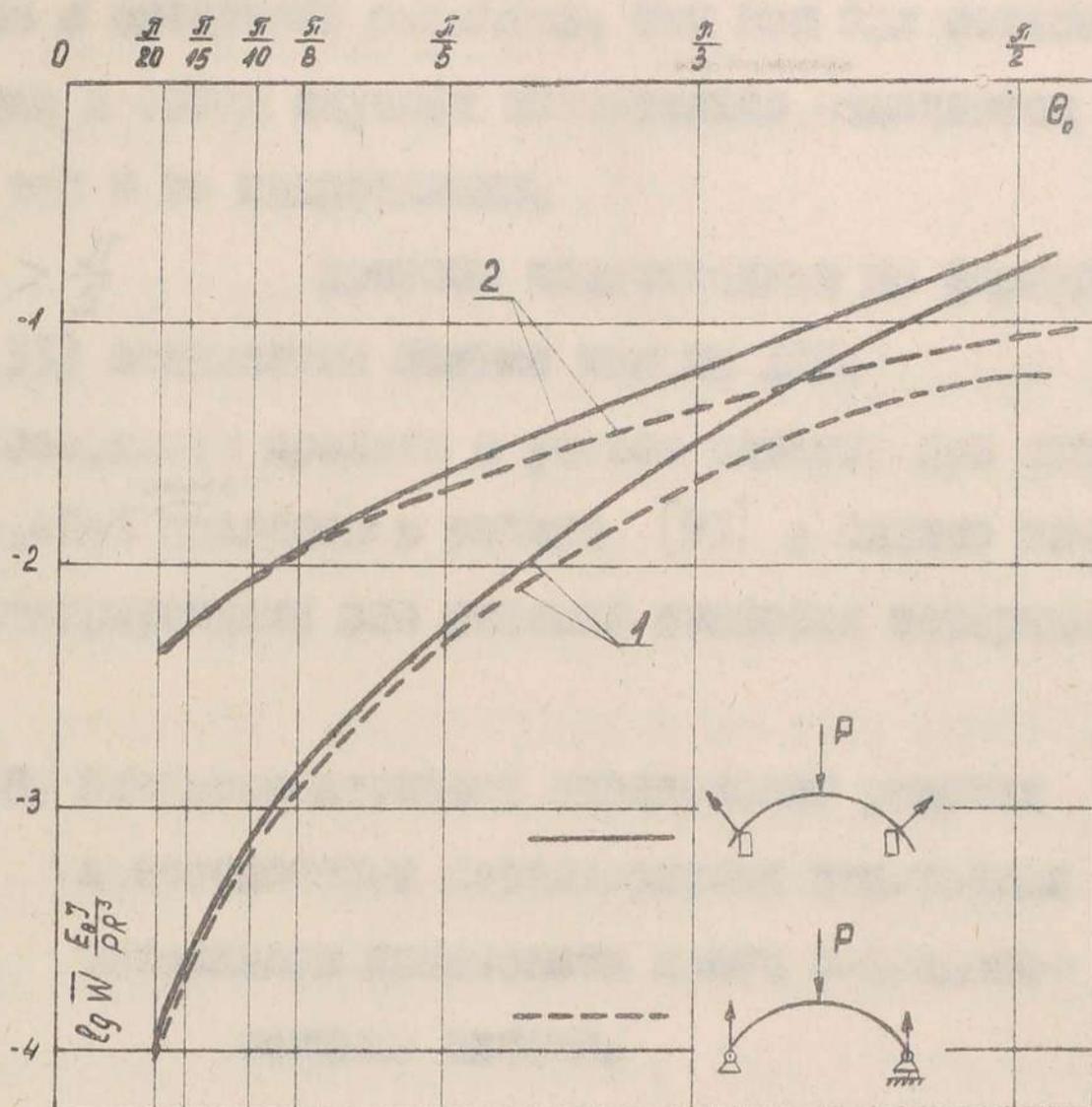


Рис. 45. Влияние схемы опорности на максимальную прогиб относительно

1 -  $\beta = 0$ ; 2 -  $\beta = 10$ .

$\beta = 0$  и  $\beta = 10$  . Как видно из рисунка, способ осуществления опирания при  $\theta_0 > \frac{\pi}{5}$  значительно влияет на прогиб. Это и следовало ожидать, так как при больших  $\theta_0$  опорные реакции в обоих случаях значительно отличаются как по величине, так и по направлению.

При  $\theta_0 > \frac{\pi}{5}$  прогибы, подсчитанные по формулам (43.2) и (4.33) отличаются больше чем на 10%.

*Выражения для прогибов* посередине пролета с учетом сдвигов при схеме испытания рис. 42-б <sup>также</sup> приведено в работе [75] . Однако из-за ошибок при интегрировании это решение является неверным.

§ 18. Экспериментальное определение упругих и прочностных характеристик немоточных материалов испытанием колец сосредоточенными силами.

18.1. Материалы и методика эксперимента. Для получения экспериментальных данных о жесткости и прочности немоточных материалов наиболее целесообразно использовать образцы в виде целых колец, так как при такой форме образцов возможно более чисто осуществить эксперимент. Испытание образцов в виде части кольца — сегмента сложно тем, что такие образцы при испытании проскальзывают на опорах, тем самым затруднено точное измерение прогибов. При испытании прямых балок проскальзыванием на опорах при малых прогибах (следовательно при малом угле  $\theta_0$ , рис. 42) можно пренебречь, при испытании сегментов, вырезанных из кольца с размерами, например, полу —

лярных *NOL* -колец, это недопустимо.<sup>х)</sup> При испытании колец эти трудности не возникают.

Экспериментально испытывались кольца, изготовленные методом намотки из однонаправленных материалов ЛСБ-*F* и ЛСО-Р-2М, поставленных в виде предварительно пропитанной ровницы.

Выбор марок стеклопластиков определяла цель - экспериментально оценить применимость приведенных выражений для расчета колец из армированных материалов с сильно отличающимися параметрами анизотропии. материал ЛСО-Р-2М обладает упругими свойствами, типичными для серийных отечественных однонаправленных материалов, изготовленных методом намотки;

$\beta^2 = 18,3 \pm 1,7$ . Кольца из материала ЛСБ-*F* изготавливались по режиму (см. § 7), при котором процесс полимеризации не проводился до конца. Изготовленный таким образом материал обладает низкой подвижной жесткостью ( $G_{\theta z} = 3 \cdot 10^3 \text{ кгс/см}^2$ ). Соответственно у этого материала параметр анизотропии ( $\beta^2 = 127 \pm 31$ )<sup>хх)</sup> близок по величине с параметрами ани -

---

х) Из работы [97] ясно видно, что при испытании сегментов пренебрежение проскальзыванием на опорах совершенно искажает вид зависимости  $E_{\theta} = f(\frac{l}{2H})$ .

хх) Для материала ЛСО-Р-2М приводится значение  $\beta^2$ , полученное на основе испытания колец, для материала ЛСБ-*F* приведенные значения  $\beta^2$  и  $G_{\theta z}$  являются средними по данным испытания колец и прямых образцов.

вотронии высокомодульных материалов (углепластиков, боропластиков). Эксперимент, проведенный на кольцах из такого материала, позволяет судить о возможности определения механических свойств высокомодульных намоточных материалов по испытанию колец.

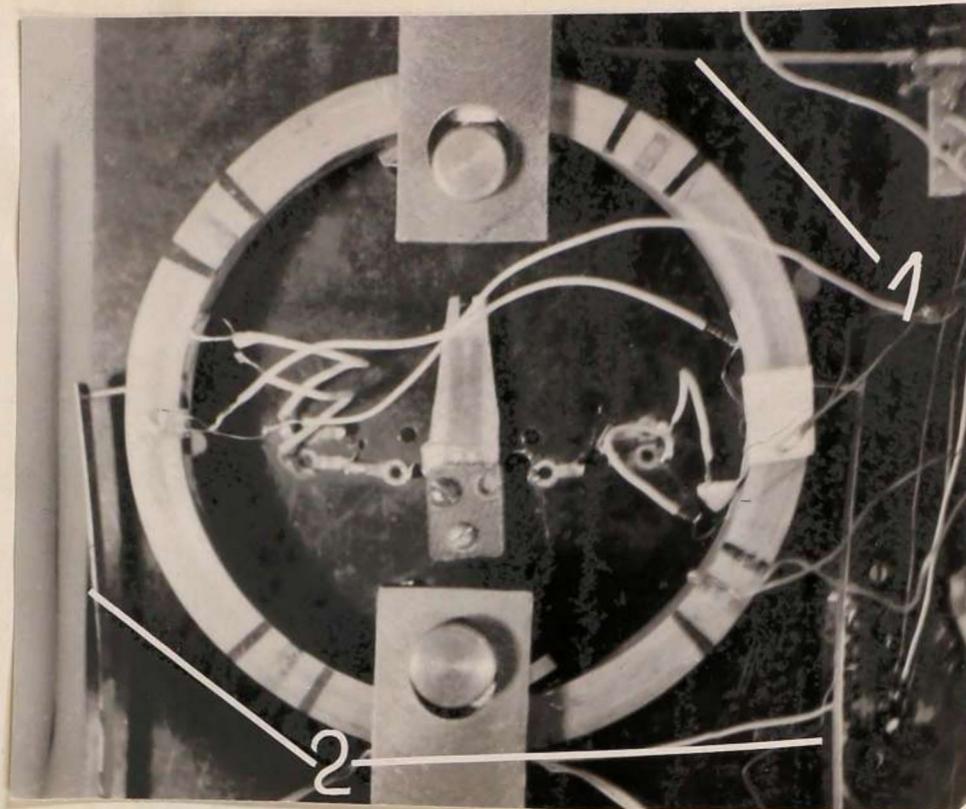
Технологические свойства ленты ЛСО-Р-2М требовали изготовления кольцевых образцов с небольшим предварительным натяжением (0,2 от разрушающей нагрузки). Кольца из материала ЛСБ- F изготавливались без предварительного натяжения. Из материала ЛСБ- F было изготовлено 15 колец, из материала ЛСО-Р-2М - 24 кольца; диапазон относительных толщин

$$0,03 < \frac{2H}{R} < 0,20$$

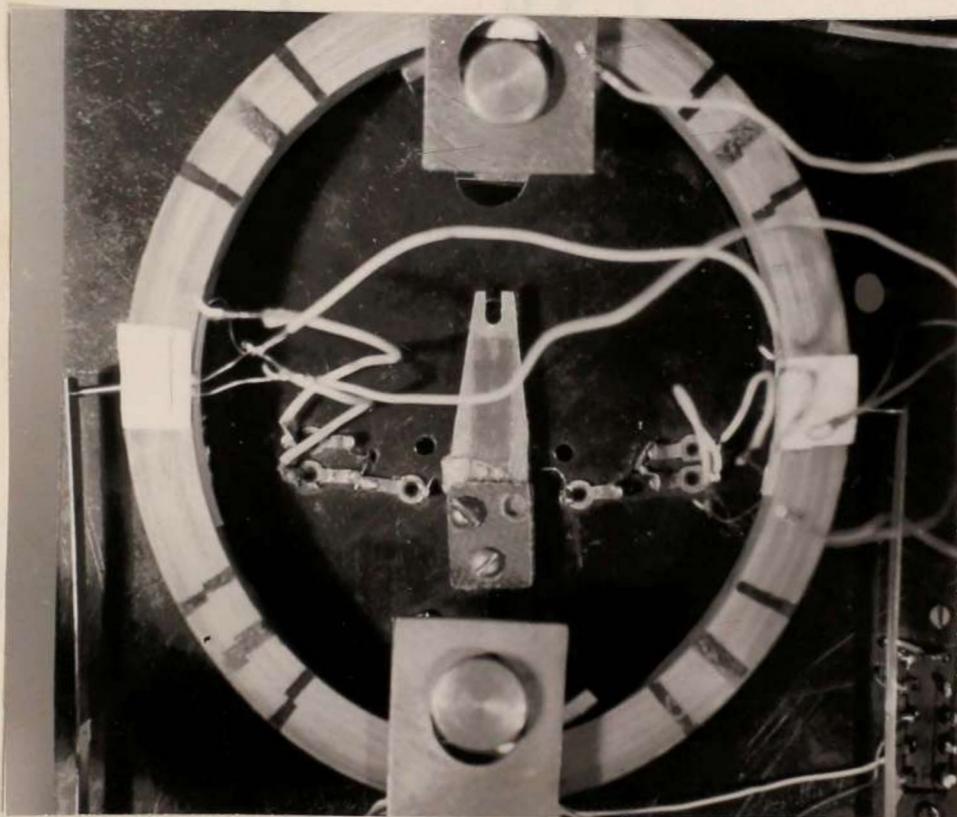
позволил исследовать эффекты, обусловленные сдвигами и геометрической нелинейностью.

При постоянной скорости нагружения 20 мм/мин измерялись радиальные перемещения (прогибы) точек вертикального и горизонтального диаметра  $2w_0 = w(0) + w(\pi)$  и  $2w_1 = w(\frac{\pi}{2}) + w(-\frac{\pi}{2})$  и приложенная сила  $P$ . Эти величины записывались на осциллографе. На рис. 46-а, б показаны кольцо в приспособлении для испытания. (1 - стальная балка с тензодатчиками для определения  $2w_0$ ; 2 - для определения  $2w_1$ ).

**18.2. Жесткость.** При испытаниях тонких колец уже при небольших нагрузках ( $\frac{PR^3}{E_0 J} \geq 0,5$ ) радиальные перемещения точек кольца становятся соизмеримыми с диаметром, наблюдаются отклонения зависимости  $w = f(P)$  от линейной и решения, основанные на предположении геометрической линейности, несправедливы. Возможность применения решения В.П.Новова для определения прогибов тонких колец из армированных пластиков проверялось на физически линейном, при нагружении в направлении армирования, стеклопластике ЛСО-Р-2М. На рис. 47 показаны средние экспериментальные результаты ис-



a



b

Рис. 46. Кольцо в приспособлении для испытания:  
а — до испытания; б — после разрушения от несетельных  
напряжений.

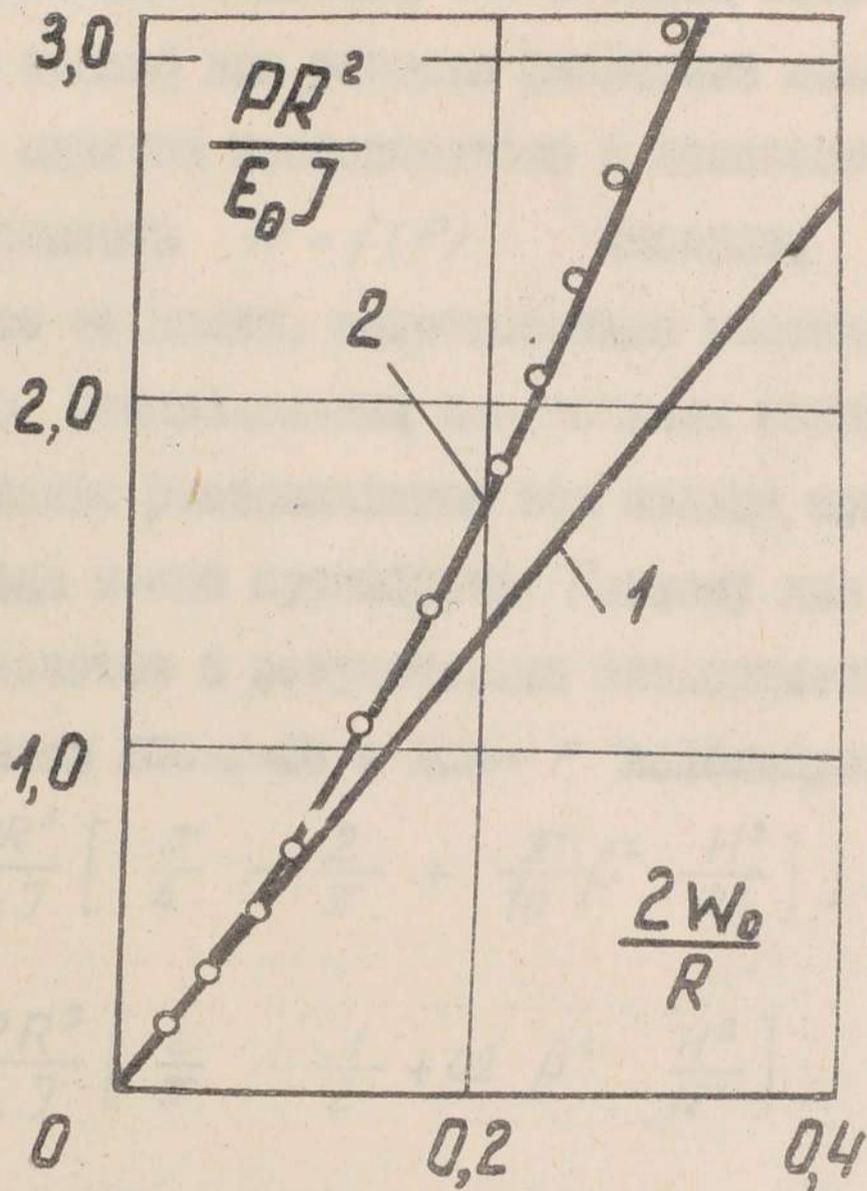


Рис. 47. Зависимость прогибов от приложенной силы для тонкостенных колец из окисленного стекла ЛСО-Р-2М;  
 $2H/R = 0,042$ ;  
1 — линейная теория; 2 — нелинейная теория;  
0 — средние экспериментальные данные.

пытания колец из материала ЛСО-Р-2М с отношением  $\frac{2H}{R} = 0,042$ .

Там же нанесена теоретическая кривая, полученная по методу Е.И.Попова и прямая линейного приближения. Совпадение теоретической кривой и экспериментальных точек можно считать удовлетворительным. Отметим, что методом Е.И.Попова можно пользоваться только при расчете (физически) линейных материалов.

Влияние сдвигов исследовалось в диапазоне нагрузок, в котором зависимость  $w = f(P)$  линейна.

Как ранее показано, погрешностями вносимыми постулатом закона распределения касательных напряжений в виде параболы, а также растяжимостью оси кольца, при определении прогибов кольца можно пренебречь. Поэтому для сравнения теоретических расчетов с результатами экспериментального испытания материалов ЛСО-Р-2М и ЛСБ- F используются формулы

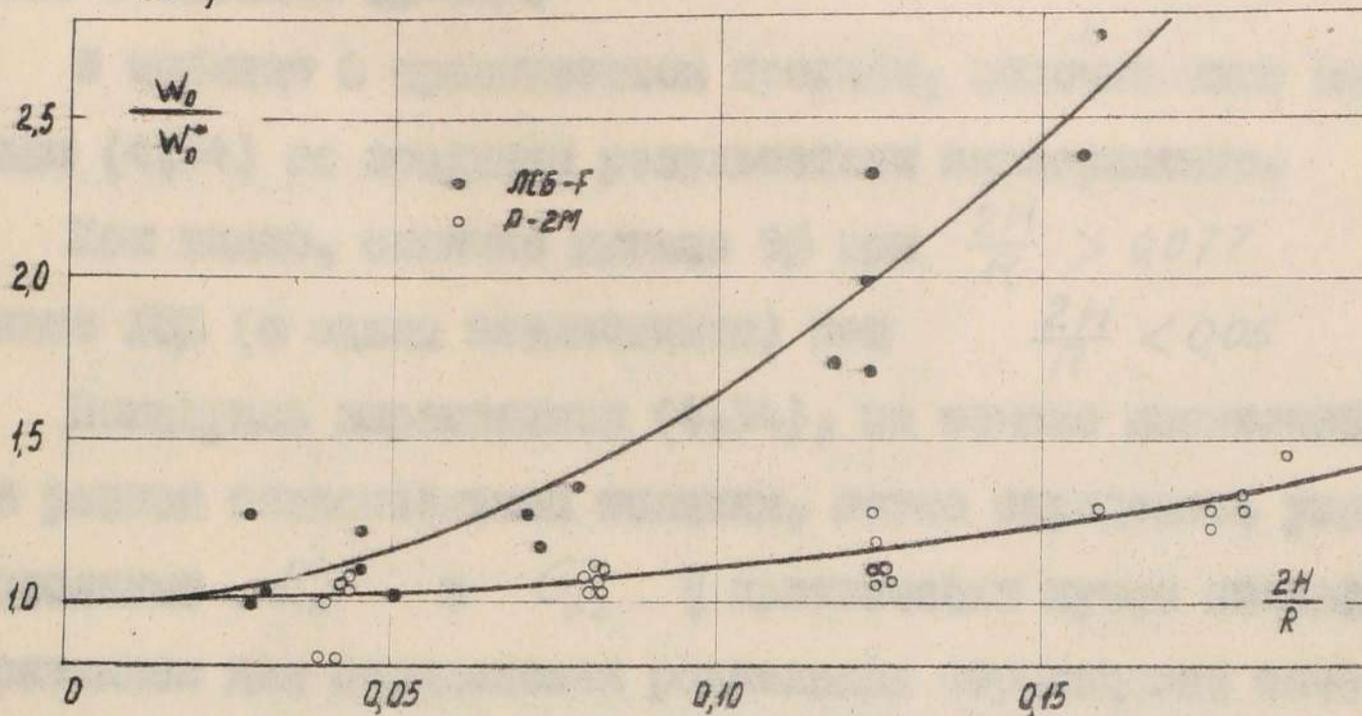
$$2w_0 = \frac{PR^3}{E_0 J} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{10} \beta^2 \frac{H^2}{R^2} \right];$$

$$2w_1 = -\frac{PR^3}{E_0 J} \left[ \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} + 0,2 \beta^2 \frac{H^2}{R^2} \right], \quad (4,34)$$

полученные на основе параболического распределения касательных напряжений и без учета растяжимости оси кольца.

На рис. 48-а,б показаны зависимости  $\frac{w_0}{w_0^*} = f\left(\frac{2H}{R}\right)$  и  $\frac{w_1}{w_1^*} = f\left(\frac{2H}{R}\right)$ , построенные по формулам (4,34) ( $w_0^*$  и  $w_1^*$  — прогибы без учета сдвигов). Там же нанесены экспериментальные результаты испытания колец из стеклопластиков ЛСО-Р-2М и ЛСБ- F. Для колец, отношение  $\frac{2H}{R}$  которых отличалось меньше чем на 0,005, подсчитывались средние экспериментально определенные отношения прогибов  $\left(\frac{w_0}{w_0^*}\right)_{cp}$  и  $\left(\frac{w_1}{w_1^*}\right)_{cp}$ , а также коэффициент вариации  $\nu$  %.

a)



б)

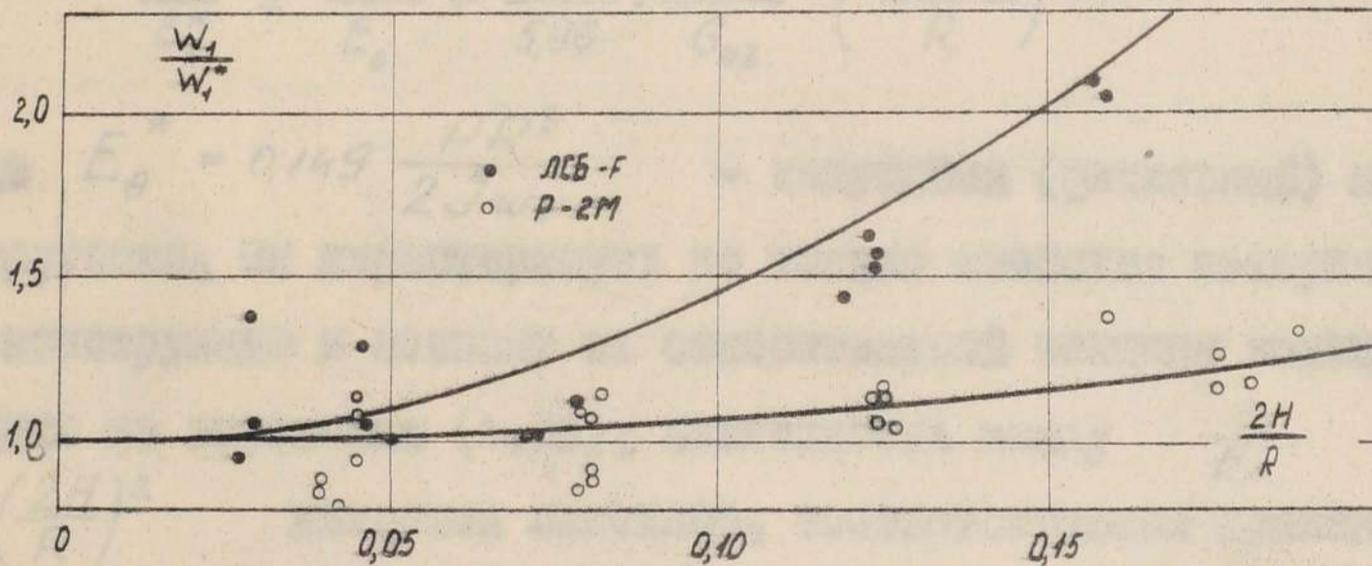


Рис. 45-а, б. Влияние отрыва на радиальные перемещения

при изгибании колец из стеклопластиков  
сосредоточенной силой:

а - перемещения под приложенной силой;

б - перемещения точек по горизонтальному  
диаметру;

ЛСБ-F ; Р-2М.

Для обоих материалов коэффициент вариации при измерении прогибов составлял 2%-12%.

В таблице 8 сравниваются прогибы, подсчитанные по формулам (4.34) со средними результатами эксперимента.

Как видно, отличие меньше 5% при  $\frac{2H}{R} > 0,077$  и меньше 10% (с одним исключением) при  $\frac{2H}{R} < 0,05$

Пользуясь выражениями (4.34), на основе испытаний образцов разной относительной толщины, легко определять упругие постоянные  $E_{\theta}$  и  $G_{\theta z}$ ; практически лучше пользоваться выражением для определения радиальных перемещений точек вертикального диаметра, так как сдвиговая составляющая в этом выражении имеет "удельный вес" несколько больше.

Расчетная зависимость:

$$\frac{1}{E_{\theta}^*} = \frac{1}{E_{\theta}} + \frac{\pi}{5,96} \cdot \frac{1}{G_{\theta z}} \left( \frac{2H}{R} \right)^2 \quad (4.35)$$

где  $E_{\theta}^* = 0,149 \frac{PR^3}{2J\omega_0}$  — кажущийся (фиктивный) модуль упругости. Он характеризует не только свойства материала, но и конструкцию и зависит от относительной толщины кольца. Как видно из выражения (4.35), зависимость между  $\frac{1}{E_{\theta}}$  и  $\left( \frac{2H}{R} \right)^2$  является линейной, соответствующая прямая пересекает ось ординат в точке  $\frac{1}{E_{\theta}}$ , а с осью абсцисс образует угол, тангенс которого равен  $\frac{\pi}{5,96} \cdot \frac{1}{G_{\theta z}}$ .

На основе экспериментальных данных прямые строятся методом наименьших квадратов. Построенные прямые и экспериментальные данные, на основе которых они построены, для обоих испытанных материалов приведены на рис. 49. Штриховыми линиями показаны 99% доверительные интервалы. Подсчитанные упругие постоянные  $E_{\theta}$  и  $G_{\theta z}$  приведены в таблице 9. Точность

Таблица 8.

ЛСБ- F					
№	$\left(\frac{2H}{R}\right)_{\text{сред.}}$	$w_0/w_0^*$		Абсолютная разни-ца	Разни-ца % от рас-четной
		Среднее эк-сперимен-тальное	Расчетное		
1.	0,158	2,56 ( $v = 7,6\%$ )	2,580	0,020	0,8
2.	0,123	1,93 ( $v = 11,8\%$ )	1,945	0,015	0,8
3.	0,074	1,26 ( $v = 4,6\%$ )	1,35	0,090	6,7
4.	0,0475	1,11 ( $v = 5,7\%$ )	1,143	0,033	2,9
5.	0,029	1,05 ( $v = 10,6\%$ )	1,052	0,002	0,2
$w_1/w_1^*$					
1.	0,158	2,06 ( $v = 1,3\%$ )	2,116	0,056	2,7
2.	0,123	1,54 ( $v = 2,6\%$ )	1,666	0,126	7,6
3.	0,074	1,05 ( $v = 2,6\%$ )	1,243	0,193	15,5
4.	0,0475	1,11 ( $v = 2,7\%$ )	1,099	0,011	1,0
5.	0,029	1,12 ( $v = 11,7\%$ )	1,037	0,083	8,1
ЛСО-Р-2И					
№	$\left(\frac{2H}{R}\right)_{\text{сред.}}$	$w_0/w_0^*$		Абсолютная разни-ца	Разни-ца % от рас-четной
		Среднее эк-сперимен-тальное	Расчетное		
1.	0,180	1,31 ( $v = 3,3\%$ )	1,313	0,003	0,3
2.	0,125	1,12 ( $v = 3,0\%$ )	1,151	0,031	2,7
3.	0,081	1,06 ( $v = 1,5\%$ )	1,063	0,003	0,3
4.	0,042	0,95 ( $v = 5,1\%$ )	1,017	0,067	6,6
$w_1/w_1^*$					
1.	0,180	1,01 ( $v = 10,6\%$ )	1,221	0,211	17,3
2.	0,125	1,09 ( $v = 2,0\%$ )	1,103	0,013	1,2
3.	0,081	0,99 ( $v = 5,1\%$ )	1,044	0,054	5,2
4.	0,042	0,95 ( $v = 5,4\%$ )	1,012	0,062	6,1

Точность определения  $E_0$  и  $G_{02}$  получена изменяя наклон прямых в пределах 99% доверительного интервала.

Таблица 9.

Способ определения	ЛСБ- F		ЛСО-Р-2М	
	$E_0 \cdot 10^5$ кгс/см <sup>2</sup>	$G_{02} \cdot 10^5$ кгс/см <sup>2</sup>	$E_0 \cdot 10^5$ кгс/см <sup>2</sup>	$G_{02} \cdot 10^5$ кгс/см <sup>2</sup>
Нагруженные кольца сосредоточенными силами	3,25± 0,15	0,027± 0,0023	4,76± 0,05	0,26± 0,02
Изгиб прямой балки	4,2± 0,4	0,0314± 0,0052		
Растяжение прямой балки			4,0± 0,27	

Для сравнения для материала ЛСБ- F упругие постоянные  $E_0$  и  $G_{02}$  определялись на основе испытаний прямых балок на изгиб, а для материала ЛСО-Р-2М модуль упругости  $E_0$  определялся при растяжении прямых балок. Соответствующие данные также приведены в таблице 9.

Как видно, модуль сдвига, определенный по испытаниям колец и по испытаниям прямых балок, в пределах точности эксперимента совпадает. Модули упругости, определенные на кольцах и прямых балках, в пределах точности эксперимента являются различными.

Методом выжигания определялось процентное содержание стекла по весу в испытанных балках и кольцах. Данные приведенные в таблице 10.

Таблица 10.

Материал	Содержание стекла по весу, %	
	кольцо	балка
ЛСБ- F	72,3 ± 0,2	79,8 ± 0,2
ЛСО-Р-2М	79,6 ± 0,2	69,9 ± 0,2

Как видно из таблицы, содержание стекла в материале испытанных балок и колец различное. При данном соотношении компонентов модуль упругости в направлении армирования более чувствителен к колебаниям содержания стекла, чем модуль сдвига  $G_{02}$ . Если по методу приведенных сечений (применительно к стеклопластике впервые использованным Дидцем [102]) привести к одинаковому содержанию стекла, то разница модуля упругости, измеренного на балках и кольцах в пределах точности эксперимента совпадает (таблица II) x).

Таблица II.

Материал	Процентное содержание стекла по весу, %	Модуль упругости: $10^5 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$	
		испытание балок	испытание колец
ЛСБ- F	72,3	3,58 ± 0,25	3,25 ± 0,15
ЛСО-Р-2М	79,6	4,95 ± 0,3	4,76 ± 0,05

x) Как известно, различные имеющиеся методы подсчета модуля упругости в направлении армирования в зависимости от процентного содержания компонентов материала дают очень близкие результаты и хорошо согласуются с опытными данными (см., например, работу [54]).

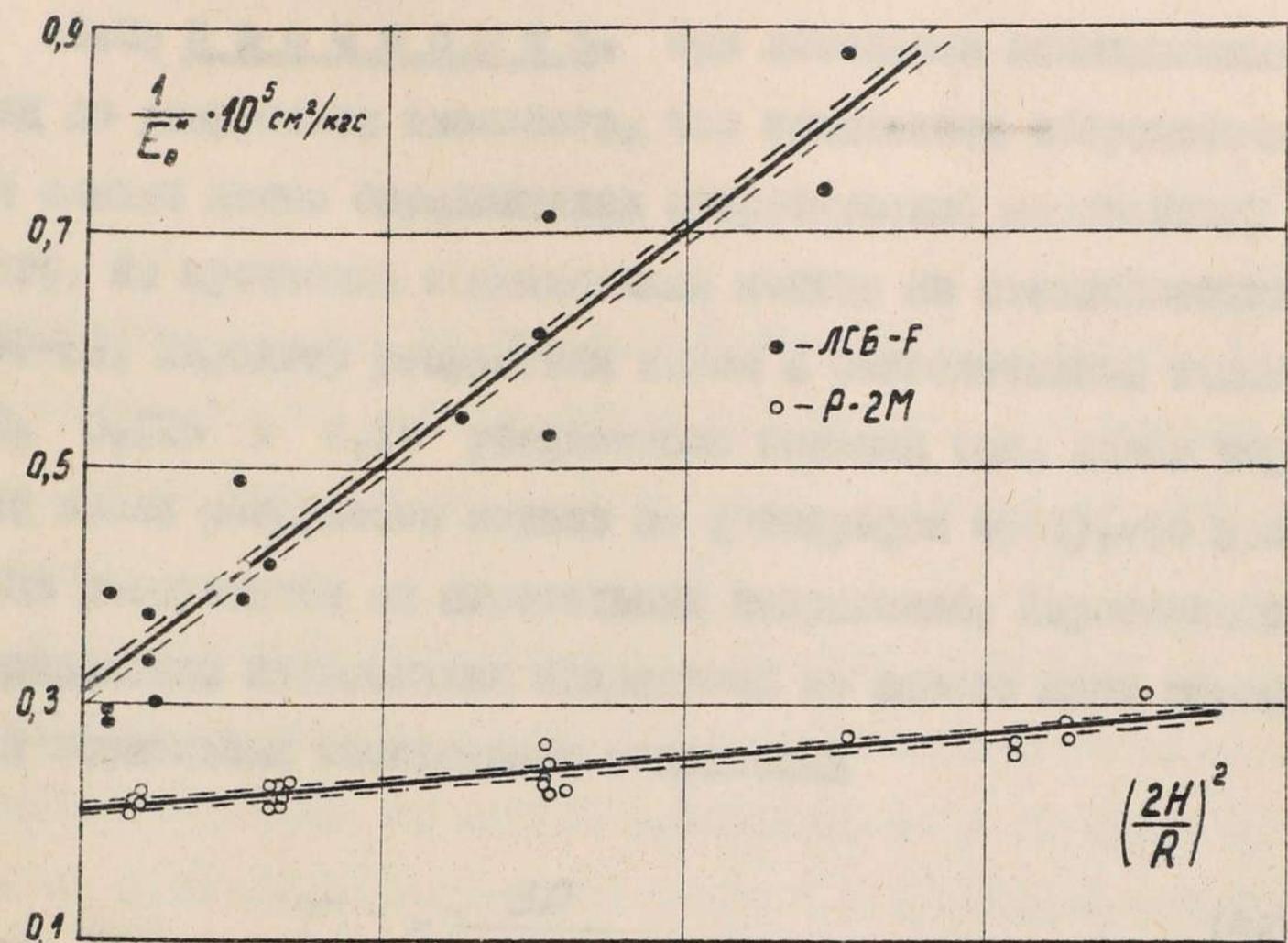


Рис. 49. Определение  $E_0$  по данным испытаний ползучих образцов с разной относительной толщиной.

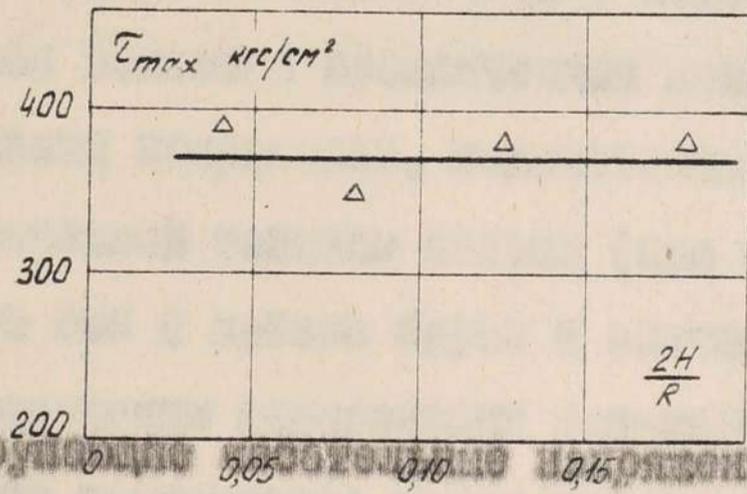


Рис. 50. Зависимость  $\tau_{max}$  от  $\frac{2H}{R}$  для стеклопластика ЛСВ-Р-2М.

18.3. Прочность. При доведении испытываемых колец до разрушения оказалось, что испытанием сосредоточенными силами легко определяется сопротивление возможному сдвигу. На прочность испытываемых колец из стеклопластика ДСР-Р-2М. Характер разрушения колец в относительной толщине 0,08, 0,125 и 0,18 убедительно показывает (см. сдвиг черных линий после разрушения колец на фотографии 46-б), что эти кольца разрушаются от касательных напряжений. Параболическое распределение касательных напряжений по высоте дает выражение для и касательных напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{3P}{8Hb} \quad (4.36)$$

которое не зависит от радиуса и поэтому применимо и в тех случаях, когда при разрушении кольца прогибы не являются пренебрежимо малыми по сравнению с радиусом.

Применимость выражения (4.36) для расчета предела прочности по сдвиг колец из стеклопластиков подтверждается также рис. 50, на котором показана практическая независимость разрушающих касательных напряжений, подсчитанных по формуле (4.36), от относительной толщины колец (при существенном смещении нейтральной оси в кривом брусе и значительном изменении закона распределения касательных напряжений по высоте должно наблюдаться зависимость разрушающих касательных напряжений от  $\frac{2H}{R}$ ).

Оценки прочности по нормальным напряжениям по формуле

$$\sigma = \frac{3PR}{2\pi H^2 b} \quad (4.37)$$

недопустима, так как от нормальных напряжений, как правило, разрушаются только тонкие концы при больших деформациях, когда радиус, входящий в выражение (4.37), нельзя считать постоянным.

У испытываемого стеклопластика ЛСО-Р-2М кольца с  $\frac{2H}{R} = 0,042$  разрушились от нормальных напряжений. Показав образец по полученным результатам по методу Б.И.Полова дано значение прочности от нормальных напряжений рав в 4 + 5 больше, чем при поперечном кольце из ЛСО-Р-2М внутренним давлением [15]. Следовательно, нагруженным кольцом сосредоточенными силами можно получать данные о жесткости немотивных материалов, а также о прочности на межслойный сдвиг. Определение прочности от нормальных напряжений требует другого вида испытания, например, нагружение внутренним давлением (при этом виде испытания в свою очередь нельзя получить данные о прочности при сдвиге).

**Выводы.** 1. Влияние<sup>м</sup> геометрической нелинейности при обработке результатов испытания диаметрально сжатых или растянутых колец из материалов типа стеклопластика можно пренебречь при относительных толщинах  $\frac{2H}{R} > \frac{1}{15}$ ; экспериментально показано, что расчет на жесткость более тонких колец с удовлетворительной для практики точностью можно вести по зависимости Е.И.Попова.

2. Испытания колец сосредоточенными силами позволяют получить достоверные данные о модулях Юнга и сдвига немоточных материалов, а также определить прочность на межслойный сдвиг. Для определения прочности вдоль волокон этот вид испытания мало пригоден, так как толстые кольца разрушаются вследствие сдвигов, а более тонкие — при весьма больших деформациях, когда точный учет геометрической нелинейности весьма затруднителен.

3. При оценке жесткости колец и сегментов из материалов, типа стеклопластиков, не учет сдвигов (с погрешностью  $< 15\%$ ) допустим только при относительной высоте  $\frac{2H}{R} < 0.1$ .

4. Для определения прогибов применимы выражения, полученные на основе гипотезы о параболическом распределении касательных напряжений по высоте; ошибки по сравнению с выражениями, полученными без постулирования распределения касательных напряжений по высоте меньше 3%, разница с полученными экспериментальными результатами при  $\frac{2H}{R} < 0.2$  не превышает в среднем 10%.

5. При испытании сегментов с углом раствора  $\theta_0 > \frac{\pi}{5}$  необходимо различать опирание по цилиндрической поверхности и опирание на кромках, а также учитывать проскальзывания на опорах

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Рассмотренные в работе задачи изгиба колец и балок на упругом основании подчинены разработке методов расчета сосудов давления из армированных пластинок. Изучены особенности деформирования стеклопластиков при растяжении. Показана возможность определения расслоения материала по изменению коэффициента Пуассона. Теоретически и экспериментально оценена необходимость учета поперечных сдвигов при определении прогибов, критической нагрузки и максимальных напряжений в стержнях из армированных пластинок лежащих на упругом основании. Показана возможность учета сдвигов по методике Тимошенко. Определена область параметров, при которой балку можно считать бесконечно длинной. Решена задача о определении протяженности краевой зоны цилиндрической оболочки. Рассмотрены задачи изгиба колец и сегментов с учетом поперечных сдвигов и геометрической нелинейности. Теоретически и экспериментально определены относительные толщины колец, при которых учет этих факторов обязателен. Оценены возможности определения прочности и жесткости немоточных материалов при испытании колец сосредоточенными силами.

Все это позволяет сделать следующие основные выводы:

I. До напряжения  $\sigma_x^*$ , соответствующему перелому в зависимости  $\sigma_x \sim \epsilon_x$ , допустимо предположение, что стеклопластики являются линейно-упругими телами. Изменение коэффициента Пуассона  $\nu_{zx}$ , характеризующего поперечные деформации перпендикулярно плоскости армирования, служит одним из критериев, указывающих уровень напряжения до которого при расчете конструкций и изделий из стеклопластиков, эти материалы можно считать монолитными.

2. В области напряжений, где материалы, армированные волокнами являются линейными, оценены границы применимости формул, полученных на основе гипотезы плоских сечений, для расчетов балок, лежащих на упругом основании и для стержней с круговой осью. Необходимость учета сдвигов определяется видом нагружения, принятой схемой опирания, относительной высотой и параметром анизотропии

3. При расчете на жесткость свободно опертых балок, лежащих на упругом основании, учет сдвигов необходим для всех балок, нагруженных сосредоточенной силой, а также для коротких балок ( $L = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\kappa}{E_x J}} < 1,4$ ) под распределенной нагрузкой. Приложение, кроме поперечных сил, и продольных сжимающих сил увеличивает в максимальном прогибе долю, обусловленную действием мембранных касательных напряжений для всех балок, нагруженных сосредоточенной поперечной нагрузкой, а для коротких балок ( $L < 1,4$ ) при действии равномерно распределенной поперечной нагрузки.

При оценке жесткости колец и сегментов, нагруженных сосредоточенными силами использование выражений на основе гипотезы плоских сечений допустимо только при относительной высоте  $2H/R < 0,1$ , а для армированных материалов с параметром анизотропии  $\beta > 10$  только при относительной высоте  $2H/R < 0,05$ . Для учета геометрической нелинейности доказана возможность использования зависимостей, полученных Е.П. Поповым.

4. Показано, что в расчетах на жесткость балок на упругом основании и стержней с круговой осью закон изменения касательных напряжений по высоте можно аппроксимировать квадратной параболой. Ошибка, вносимая такой аппроксимацией в основных конструктивных исполнениях балок на упругом

основании (при  $B = H\beta \sqrt[4]{\frac{\kappa}{E_x J}} < 2.2$  ) меньше 10%, для стержней с круговой осью, при  $2H/R < 0.2$ , меньше 5%.

5. На примере балки с шарнирно закрепленными концами установлено необходимость учета сдвигов при расчете на устойчивость балок из материалов, армированных волокнами, лежащих на упругом основании. Исключение - балки с значениями параметров  $B < 0.6$  и  $L > 0.9$ ; для таких балок пренебрежение сдвигами вносит ошибку в определении критической силы меньше чем на 10%.

6. У цилиндрических оболочек, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой необходимость учета сдвигов при оценке краевого эффекта главным образом определяются краевыми условиями. Только в случае жесткой заделки нижняя сдвиговая жесткость материала приводит к росту максимальных напряжений и протяженности зоны краевого эффекта  $S_w$ ; реализация податливой заделки (также как и свободного опирания) приводит к уменьшению максимальных напряжений и, следовательно, к уменьшению опасности расслаивания материала в местах закрепления оболочки.

При оценке зоны краевого эффекта с пяти процентной погрешностью использование выражений без учета сдвигов приводит к оценке протяженности зоны краевого эффекта с запасом (исключение  $S_w$  для случаев жесткой заделки).

7. Испытание концев сосредоточенными силами позволяет определить сопротивление немоющих материалов касательным напряжениям  $\tau_{xz}$ , вызывающим растрескивание конструкций из этих материалов.

Экспериментально подтверждено, что для определения модуля -

ля упругости в окружном направлении  $E_{\theta}$ , модуля  
сдвига  $G_{\theta z}$  и прочности на осевый сдвиг  $\Pi_{xz}$   
по данным изгиба колес применимы выражения, полученные на  
основе гипотезы о параболическом распределении касательных  
напряжений.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Амбарцумян С.А. Длинноанізотропные оболочки вращения. Известия АН Армянской ССР, Физико-математические науки, 4, 1951, № 6.
2. Амбарцумян С.А. Специфические особенности теории оболочек из современных материалов. Известия АН Армянской ССР, Механика, 21, 1960, № 4.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М., Физматгиз, 1967.
5. Андреевский Г.Д. Высокопрочные ориентированные стеклопластики. М., Наука, 1966.
6. Ашкенази В.К. Прочность анизотропных древесных синтетических материалов. М., Лесная промышленность, 1966.
7. Баязит З.М. Влияние искривления армирующих волокон на модуль упругости и прочность составных материалов. Механика полимеров, 1968, № 2.
8. Безухов Н.А. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М., Высшая школа, 1961.
9. Видерман В.А. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. В кн.: Прочность, устойчивость, колебания, т.2, М., Машинностроение, 1968.
10. Бологян В.В. Колебания многослойных криволинейных стержней. Инженерный журнал, 1964, № 4.

11. Болозгин В.В. Проблемы механики приращенных сред. Доклады научно-технической конференции МЭИ по итогам научно-исследовательских работ за 1964-1965 гг. Секция электромагнитостроения, подсекция динамики и прочности. М., 1965.
12. Болозгин В.В. Теория приращенной сплошной среды со случайными начальными непрямолинейностями. Механика полимеров, 1966, № 1.
13. Болозгин В.В. Об оценке погрешностей уравнений в приращенной теории упругости. В сб. Строительная механика. М., Издательство литературы по строительству, 1966.
14. Болозгин В.В. Свойства упругие и вязко-упругие среды с малыми начальными непрямолинейностями. Инженерный журнал, Механика твердого тела, 1966, № 3.
15. Брайкович Р.Э., Гагенор А.И. Неплоточные конструкции в электрических машинах и аппаратах. Энергия (в печати), 1971.
16. Брайкович Р.Э., Тилик А.Г. Изменение степени анизотропии однонаправленных стеклопластиков при намотке. Механика полимеров, 1970, № 5.
17. Ван Фо Фн Г.А., гл. I-X в кн.: Композиционные материалы водонепроницаемого строения. АН Украинской ССР. Институт проблем материаловедения, Институт механики. Киев, Наукова думка, 1970.
18. Васильев В.В. Исследования краевого эффекта в цилиндрической оболочке из стеклопластика. Инженерный журнал, 5, 1965, № 1.

19. Васильев В.В. К теории ортотропных слоистых цилиндрических оболочек. Механика полимеров, 1968, № 1.
20. Васильев В.В., Власъевский А.П. Об особенностях деформирования цилиндрических оболочек, намотанных из однонаправленной стеклоленты, при действии внутреннего давления. Механика полимеров, 1967, № 5.
21. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., Наука, 1967.
22. Глушков Г.С., Савельев Н.Г. О расчете скато-изогнутых боек на упругом основании. В сб.: Расчеты на прочность, жесткость, устойчивость и колебания. Московский станко-строительный институт, 1955.
23. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений. М., Физматгиз, 1968.
24. Гуревич В.Г., Стреляев В.С. Исследование прочностных характеристик некоторых стеклопластиков. Пластические массы, 1968, № 5.
25. Кигун И.Г. Влияние искривления армированных волокон на жесткость и прочность композитных материалов. Канд.дисс., Рига, 1969.
26. Заверцев С.И. Продольно-поперечный изгиб брусьев малой жесткости, лежащих на жестких опорах и упругом основании. Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ им. Баумана, разд.2, 1947.
27. Каргин В.А., Малиновский В.М., Разиневич А.Л., Трифель Б.В. О прочности модельных образцов однонаправленных структур. ДАН СССР, 157, 1964, № 6.
28. Каргин В.А., Словимский Г.Л. Краткие очерки по физико-химии полимеров. Ч., 1960.

29. Клепиков С.И. Расчет конструкций на упругом основании. Киев, Будивольник, 1967.
30. Копытенко В.П. О продольно-поперечном изгибе балок, лежащих на упругом основании. Сб. Расчеты на прочность и колебания. Московский специализированный институт. М., Москва, 1955.
31. Королев В.И. Свойства анизотропные пластины и оболочки на армированных пластмассах. М., Машиностроение, 1965.
32. Кортен Х.Т. Разрушение армированных пластинок. М., Химия, 1967.
33. Крылов А.И. О расчете балок, лежащих на упругом основании. Изд. Академии наук СССР, 1930.
34. Леви С. Сдвиг и изгиб коротких цилиндрических оболочек. Конструирование и технологии машиностроения (США, пер. с англ.), 1965, № 3.
35. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластины. М., ГИИЛ, 1957.
36. Лурье А.Б. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
37. Малкинцев И.И., Трифелев В.В., Картин В.А. Изучение разрушения армированных пластинок. Высокмолекулярные соединения, 1964, № 5.
38. Малмейстер А.Е., Тамук В.И., Тетере Г.А. Сравнительные жестких полимерных материалов. Рига, Зинтне, 1967.
39. Николаев В.А. Температуре влияния, связанные с влиянием анизотропных материалов на прочность и жесткость. Хим. дисс., ИАН, М., 1968.
40. Огибалов А.И., Суворова В.В. Механика армированных пластинок. М., Изд-во ИГУ, 1965.

41. Папилов П.Ф. Строительная механика корабля, ч.1, том 2. М.-Л., Морской транспорт, 1947.
42. Пелех В.А., Тетерс Г.А., Мельник Р.В. Об устойчивости стеклопластиковых пластин, связанных с упругим основанием. Механика полимеров, 1968, № 6.
43. Попов В.Н. Теория и расчет гибких упругих деталей. Л., Либена, 1947.
44. Портнов Г.Г. Особенности механики изотропных стеклопластиков. Канд. дисс., Рига, 1967.
45. Праич А.С., Томул В.И. О зависимости между структурными и прочностными характеристиками стеклопластиков. Механика полимеров, 1967, № 2.
46. Протасов В.А., Копнов В.А. Исследование прочности стеклопластиков при плоском напряженном состоянии. Механика полимеров, 1965, № 5.
47. Рабинович А.Л., Вилик И.В. Определение предела прочности труб из стеклопластиков при сжатии. Вестник машиностроения, 1960, № 4.
48. Рабинович А.Л., Верховский И.А. Об упругих постоянных ориентированных стеклопластиков. Инженерный журнал, 1964, № 1.
49. Реботнов В.Н. Механика твердых тел и полимерных материалов. Вестник АН СССР, 1965, № 7.
50. Риндпорт Р.М., Брагинская Н.Я., Катранова Л.Н., Бзефович Г.И. Некоторые вопросы расчета толстых пров. Труды Ленинградского института железнодорожного транспорта, 1965, в.230.

51. Розе А.В. Особенности расчета деталей из материалов с низкой адвигативной жесткостью и прочностью. Канд. дисс., Рига, 1966.
52. Ромзевский И.Г. Влияние вязкостных факторов на ползучесть стеклопластиков. Вязкостные течения, 1963, № 7.
53. Сидорин Я.С. Об экспериментальном последовании при взрыве стеклопластиков. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 3.
54. Скудра А.М. Деформативность и статическая устойчивость ориентированных пластинок при простом плоском нагружении. Докт. дисс. М., 1967.
55. Смирнова Н.К., Соколов В.П., Сидорин Я.С., Иванов А.П. Прочность корпуса судна из стеклопластика (под редакцией Н.К.Смирновой), Л., 1965.
56. Справочник по строительной механике корабля, т.1. (под редакцией акад. Шимановского В.М.). Л., Судпрогиз, 1958.
57. Стрелнев В.С., Защев Г.П. Рассеяние характеристики кратковременной статической прочности стеклопластиков в связи с эффектом абсолютных размеров и неоднородностью напряженного состояния. Изв. высш. учебн. заведений, Машиностроение, 1964, № 3.
58. Стрелнев В.С. Статическая конструктивная прочность ориентированных стеклопластиков. Канд. дисс. М., 1963.
59. Стрелнев В.С., Тернопольский В.М., Тимофеев А.Ф., Шлица Р.Я. Влияние параметров формирования на прочность деталей из стеклопластиков. В сб. Вопросы динамики и прочности, II, Рига, Изд-во АН Латв.ССР, 1964.

60. Тарнопольский Ю.М., Влияние сдвигов при изгибе балки на упругом основании. Сб. вопросы динамики и прочности, 4, Рига, изд-во АН Латв.ССР, 1959.
61. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Особенности расчета деталей из армированных пластинок. Рига, Зинатне, 1969.
62. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Портнов Г.Г. Отрицательные особенности материалов, армированных волокнами. Механика полимеров, 1969, № 1.
63. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Портнов Г.Г., Шлица Р.П., Жигун И.Г. Особенности расчета деталей из стеклопластиков. В сб. Полимеры в машинах. Труды третьей всесоюзной научно-технической конференции по применению полимерных материалов. М., 1968.
64. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Шлица Р.П. Изгиб балок из материалов, слабо сопротивляющихся сдвигу на упругом основании. Механика полимеров, 1967, № 5.
65. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Шлица Р.П. Испытание сосредоточенными силами колец, изготовленных намоткой. Механика полимеров, 1969, № 4.
66. Тарнопольский Ю.М., Скудра А.П. Конструктивная прочность и деформативность стеклопластиков. Рига, Зинатне, 1966.
67. Тарнопольский Ю.М., Шлица Р.П., Смирнов Г.С. Учет сдвигов при оценке кривого эффекта у осесимметрично нагруженных оболочек из ориентированных стеклопластиков. Сб. Вопросы динамики и прочности, 16, Рига, Зинатне, 1968.

68. Тимофеев В.И. Расчет элементов конструкций из стекло - пластинок. НИИПО, 13-63-253/12, М., ГОСНИТИ, М., 1963.
69. Тимошенко С.П. Теория упругости. М.-Л., ОНТИ, 1934.
70. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М., ГИТЛ, 1955.
71. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов, т.1,2. М., Наука, 1965.
72. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластики и оболочки. М., Физматгиз, 1963.
73. Томашевский В.Т. Осесимметричная деформация толстого кругового цилиндра из стеклопластика, подкрепленного ребрами жесткости. Механика полимеров, 1966, № 1.
74. Томашевский В.Т. О влиянии поперечных сдвигов и напряженного состояния на устойчивость анизотропного цилиндра. Прикладная механика, 2, 1966, 6.
75. Томашевский В.Т., Туник А.Л. Экспериментальное определение модуля макслоидного сдвига при ползучести стекло - пластина, изготовленного намоткой. Механика полимеров, 1969, № 2.
76. Уманский А.А. Расчет брусев по методу начальных параметров. Изд. Военно-воздушной инженерной академии имени Н.В. Жуковского, 1952.
77. Урбан Н.В. Общая теория продольно-поперечного изгиба в упругой среде. Труды московского электромеханического института инженеров железнодорожного транспорта им. Ф.Э. Дзержинского. М., в. 53, 1945.
78. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Физматгиз, М., 1960.

79. Феодосьев В.И. Десять лекций — бесед по сопротивле-  
нию материалов. М., Наука, 1969.
80. Филоненко-Бородич М.И. Некоторые приближенные теории  
упругого основания. Ученые записки Московского госу-  
дарственного университета, вып. 46, Механика, 1940.
81. Филоненко-Бородич М.И., Изюмов С.М., Осипов Б.А.,  
Кудрявцев И.И., Мальгинов Л.И.; Курс сопротивления  
материалов, ч. II. М., А., ГИТИЛ, 1949.
82. Филоненко-Бородич М.И. Теория упругости. М., Физматгиз,  
1959.
83. Финн А.Я., Тернополюский В.И., Акулицин К.А., Петров А.В.  
Коллекторы электрических машин на пластмассе.  
М., Энергия, 1963.
84. Цыпленков О.Г. Производство судовых крупногабаритных  
изделий из стеклопластиков. Л., Судостроение, 1967.
85. Цыпленков О.Г. Судовые трубопроводы из стеклопластиков.  
Л., Судостроение, 1967.
86. Хоффер Б. Соотношение между напряжениями и деформация-  
ми для армированных пластинок при действии внешних сил  
параллельно и нормально их внутренним волокнам. Ракет-  
ная техника и космонавтика, 1964, № 2.
87. Шлиця Р.П. Особенности деформирования стеклопластиков при  
растяжении. I. Перелом в кривой зависимости между на-  
пряжениями и деформациями. Механика полимеров, 1966,  
№ 2.
88. Шлиця Р.П. Особенности деформирования стеклопластиков  
при растяжении. 2. Соотношение между продольными и по-  
перечными деформациями. Механика полимеров, 1969, № 2.

89. Влище Р.П. Прочность и жесткость колец из стеклопластиков. Двухдневный научно-технический семинар по применению пластмассовых материалов в машиностроении. Казань, 25/XI - 27/XI, 1969.
90. Шухов В.Г. По поводу уравнения  $EJ^{\bar{V}} = -k\psi$ . Вестники Политехнического общества, 1902, № 8.
91. Шухов В.Г. Теория изгиба брусьев на упругой опоре. Вестники Политехнического общества, 1903.
92. Эгма В.И. Деформационные и прочностные свойства стеклопластиков. Пластические массы, 1964, № II.
93. Adams A.L., Sachs L.L. The emerging composites. Space/Aeronaut., vol. 51, No.6, 1969.
94. Advances in structural composites. SAMPE 12th National Symposium and Exhibition. Anaheim, Calif., 1967.
95. AIAA/ASME 3th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, 1969.
96. Algra E.A.H., Van der Beek M.H.B. Standards and Test Methods for Filament Wound Reinforced Plastics. Conference on Filament Winding, Paper 12, London, 1967.
97. Chambers P.E., Mc Garry F.J. Resin Shrinkage Pressures During Cure. Proceedings of the 14th Annual SPI Conference. Reinforced Plastics Div., Chicago, 1959.
98. Christie T. Carbon Fibres. Factory Management, vol.39, No. 1, 1970.
99. Composites. Mater. Engineering, vol. 70, No.1, 1969.
100. Desai M.B., Mc Garry F.J. Failure Mechanisms in Glass Fiber Reinforced Plastics Laminates. ASTM Bull., 76, July 1959.
101. Diets A.G.H., Sonneborn R.H. Fiberglass Reinforced

Plastics, N.J., 1954.

102. Epstein G., Bandaruik W. New Light on Cracking of Filament-Wound Composites. *Plastics Technology*, No.9, August 1963.
103. Gunston W.T. Carbon Fibres. *Sci. J.*, vol.5, No.2, 1969.
104. King E.G. Time Dependent Strain Behavior of Wood in Tension Parallel to the Grain. *Forest Products Journal*, March 1961.
105. Krolakowski W. Stress-Strain Characteristics of Glass-Fibre Reinforced Polyesters. *SPE Journal*, Vol. 20, No.9, 1964.
106. Matting A., Raferkamp H. Spannungsoptische Grenzflächenuntersuchungen an glasfaserverstärkten Kunststoffen. *Glastechn. Ber.*, Jg. 37, Nr.1, 1964.
107. Mc Abes H., Chaura H. Effects of Rate on the Mechanical Properties of Glass Reinforced Polyesters. *SPE Journal*, vol. 13, No. 4, 1963.
108. Mooney R.D., Mc Garry F.J. Resin-Glass Bond Study. Proceedings of the 14th Annual SPI Conference. Reinforced Plastics Div., Chicago, 1959.
109. Raymond J.A. Carbon Fibre- the New Material for Industry. *Reinforced Plastics*, vol. 14, No. 5, 1970.
110. Reinforced Plastics Developments. *British Plastics*, vol.42, No.8, 1969.
111. Rossato D.V. Reinforced Plastics, What They Can Do for You in the Next 10 Years. *SAE Preprints*, s.a. No.660643.
112. Storm I.P. van Leeuwen. The Influence of Processing Variables on the Properties of Glass Reinforced Plastics Pipes Problems of Choice in the Field of Plastics. International Congress, Amsterdam, 1962.

- II3. Symposium on Standards for Filament-Wound Reinforced  
Plastics. Silver Springs, 1962.
- II4. Throckmorton P.E., Hickman H.H., Browne M.F. Failure in  
Glass-Reinforced Plastics Modern Plastics, Nov. 1963.
- II5. Williamson H. Widening Areas for Use of Carbon Fibres in  
Plastics Technology. Austral. Plast. and Rubber, vol.24,  
No.290, 1969.
- II6. Wriedt H. Glasfaserverstärkte Kunststoffe in den U.S.A.  
Kunststoffe, Jg.59, Nr.12, 1969.