REDUKCIJAS PRINCIPS DINAMISKAJĀS SISTĒMĀS

Andrejs Reinfelds

Habilitācijas darba kopsavilkums

LZA un LU Matemātikas institūts

Andrejs Reinfelds

Latvijas Zinātņu akadēmijas un
Latvijas universitātes
Matemātikas institūts

Akadēmijas laukums 1
LV–1524 Rīga
LATVIJA

e-mail: reinf@latnet.lv
reinf@lanet.lv

Habilitācijas darba aizstāvēšana notiks 1998. gada 30. martā plkst 15.00 LU Matemātikas un informātikas institūtā (Raiņa bulvārī 29, 413. auditorijā) LU Habilitācijas un promocijas padomes matemātikā atklātā sēdē.

Recenzenti:

Prof., Dr. hab. mat. U. Raitums (Latvijas universitāte)

Prof., Dr. mat. G. Osipenko (St. Pēterburgas Valsts Tehniskā universitāte, Krievija)

Prof., Dr. hab. mat. B. Aulbahs (Augsburgas universitāte, Vācija)

Darba raksturojums

1. DARBA RAKSTUROJUMS. Darbu kopa.
2. DARBA SATURS.
   (a) PRIEKŠMETS. Diskrētas dinamiskas un semidinamiskas sistēmas un to paplašinājumi pilnā metriskā telpā. Impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas Banaha telpā.
   (b) MĒRĶIS. Diskrēto dinamisko un semidinamisko sistēmu, kā arī impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu redukcija uz vienkāršāku formu, tai skaitā daļēja sadalīšana un linearizācija.
   (c) GALVENIE REZULTĀTI. Dinamisko un semidinamisko sistēmu, kā arī impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu redukcijas nosacījumi.
   (d) TEORĒTISKĀ NOZĪME. Izstrādāta jauna oriģināla dinamiskās ekvivalences pierādījuma metode un tās modifikācijas.
   (e) PRAKTISKĀ NOZĪME. Darbam ir teorētisks raksturs, bet izstrādātās metodes var efektīvi pielietot praktisku uzdevumu izpētei, noskaidrojot atrisinājuma stabilitātes jautājumus, kā arī noskaidrojot atrisinājuma izturēšanos pie lielām mainīga vērtībām.
   (f) DARBA APROBĀCIJA. Rezultāti referēti sekojošos semināros un starptautiskajās konferencēs:
      i. 3rd International Colloquium on Differential Equations. Plovdiv, Bulgaria, August 18–22, 1992.
      ii. 8th UIC conference "Qualitative Theory of Differential Equations". Samarkand, Uzbekistan, September 5–10, 1992.
      iii. 4th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations. Szeged, Hungary, August 18–21, 1993.
      iv. Equadiff 8. Czecho–Slovak Conference on Differential Equations and their Applications. Bratislava, Slovakia, August 24–28, 1993.

v. Workshop "Dynamical Systems". Augsburg, Germany, June 27 – July 2, 1994.

vi. International Congress of Mathematicians. Zürich, Switzerland, August 3–11, 1994.

vii. 3rd SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems. Snowbird, UT, USA, May 21–24, 1995.

viii. 2nd International Conference on Dynamic Systems and Applications. Atlanta, GA, USA, May 24–27, 1995.

ix. NSF–CBMS Regional Conference on Aproximation Dynamics with Applications to Numerical Analysis. Columbia, MO, USA, June 1–5, 1995.

x. 2nd International Conference on Difference Equations and Applications. Veszprém, Hungary, August 7–11, 1995.

xi. 6th International Colloquium on Differential Equations. Plovdiv, Bulgaria, August 18–23, 1995.

xii. 5th International Conference on Differential Equations and Applications. Rousse, Bulgaria, August 24–29, 1995.

xiii. Conference "Problems of Pure and Applied Mathematics". Tallinn, Estonia, October 13–14, 1995.

xiv. 1st Latvian Mathematical Conference. Rīga, October 20–21, 1995.

xv. Seminar on Dynamical systems (Prof. F. Dumortier). Limburgs Universitair Centrum, Diepenbeek, Belgium, March 29, 1996.

xvi. 4th International Conference on Integral Methods in Science and Engineering. Oulu, Finland, June 17–20, 1996.

xvii. 2nd World Congress of Nonlinear Analysts. Athens, Greece, July 10–17, 1996.

xviii. Conference "Topological Methods in Differential Equations and Dynamical Systems". Krakóv–Przegorzaly, Poland, July 17–20, 1996.

xix. 2nd European Congress of Mathematics. Budapest, Hungary, July 22–26, 1996.

xx. 5th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations. Szeged, Hungary, July 29 – August 2, 1996.

xxi. 2nd International Conference "Mathematical Modelling and Complex Analysis". Vilnius, Lithuania, June 3–4, 1997.

xxii. International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems. Waterloo, Ontario, Canada, August 1–4, 1997.

xxiii. Equadiff 9. Conference on Differential Equations and their Applications. Brno, Czech Republic, August 25–29, 1997.

xxiv. Conference "Topological, Variational & Singularities Methods in Nonlinear Analysis". Gdansk–Jurata, Poland, September 15–19, 1997.

xxv. 2nd Latvian Mathematical Conference. Rīga, October 31 – November 1, 1997.

(g) PUBLIKĀCIJAS. Galvenie rezultāti nopublicēti sekojošos rakstos:

i. A. Reinfelds, *Global topological equivalence of nonlinear flows*, Differentsial'nye Uravneniya **8** (1972), no. 10, 1901–1903 (Russian), English transl. in Differential Equations **8** (1974), 1474–1476. MR 47 # 9592, Zbl 244.54026, 288.54043.

ii. A. Reinfelds, *A reduction theorem*, Differentsial'nye Uravneniya **10** (1974), no. 5, 838–843 (Russian), English transl. in Differential Equations **10** (1975), no. 5, 645–649. MR 58 # 1397, Zbl 286.34054, 315.34046.

iii. A. Reinfelds, *A reduction theorem for closed trajectories*, Differentsial'nye Uravneniya **11** (1975), no. 10, 1811–1818 (Russian), English transl. in Differential Equations **11** (1976), 1353–1358. MR 52 # 11202, Zbl 318.34058, 345.34036.

iv. A. Reinfelds, *A generalized Grobman–Hartman theorem*, Latv. Mat. Ezhegodnik **29** (1985), 84–88 (Russian). MR 87a:34074, Zbl 582.34057.

v. A. Reinfelds, *Invariant sets in a metric space*, Latv. Mat. Ezhegodnik **30** (1986), 83–91 (Russian). MR 88d:54056, Zbl 634. 58028.

vi. A. Reinfelds, *Conjugation of homeomorphisms in a metric space*, Latv. Mat. Ezhegodnik **31** (1988), 236 (Russian).

vii. A. Reinfelds, *A reduction theorem for extensions of dynamical systems*, Latv. Mat. Ezhegodnik **33** (1989), 67–75 (Russian). MR 90m:34096, Zbl 695.34047.

viii. A. Reinfelds, *Dynamical equivalence of dynamical extensions*, Reports of the extended sessions of the seminar of the I. N. Vekua Institute of Applied Mathematics **5** (1990), no. 3, 164–166 (Russian).

ix. A. Reinfelds and L. Sermone, *Equivalence of differential equations with impulse action*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **553** (1990), 124–130 (Russian). MR 92j:34021.

x. A. Reinfelds and L. Sermone, *Equivalence of nonlinear differential equations with impulse effect in Banach space*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **577** (1992), 68–73. MR 95b:34014.

xi. A. Reinfelds, *Existence of central manifold for differential equations with impulses in a Banach space*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **577** (1992), 81–88. MR 95b:34015.

xii. A. Reinfelds, *Invariant sets for splitting mapping in metric space*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **588** (1993), 35–44. MR 96j:54041.

xiii. A. Reinfelds, *Decoupling of mappings in a metric space*, Proc. Latv. Acad. Sci. Sect. **B 1994**, no. 2(559), 67–75. Zbl 865.54038.

xiv. A. Reinfelds, *The reduction principle for discrete dynamical and semidynamical systems in metric spaces*, Z. Angew. Math. Phys. **45** (1994), no. 6, 933–955. MR 95m:54039, Zbl 824.34049.

xv. A. Reinfelds, *Invariant sets for noninvertible mapping*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **592** (1994), 115–124. MR 96m:54079, Zbl 852.39011.

xvi. A. Reinfelds, *Partial decoupling for semidynamical system*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **593** (1994), 54–61. MR 96j:54042, Zbl 854.34045.

xvii. A. Reinfelds, *Partial decoupling for noninvertible mappings*, Differential Equations Dynam. Systems **2** (1994), no. 3, 205–215. MR 97c:39007, Zbl 869.39009.

xviii. A. Reinfelds, *The stability of semidynamical system in metric space*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **599** (1995), 140–145. MR 97a:54045, Zbl 854.34046.

xix. A. Reinfelds, *The reduction principle for discrete dynamical and semidynamical systems in metric spaces*, in S. Bilchev and S. Tersian (eds.), *Differential equations and applications*. Proceedings of the fifth international conference on differential equations and applications, Rousse, Bulgaria, August 24–29, 1995. Union of Bulgarian Mathematicians, Rousse, 1995, pp. 94–102. MR 97d:54067, Zbl 857.34047.

xx. A. Reinfelds, *Reduction theorem for differential equations with impulse effect in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **203** (1996), no. 1, 187–210. MR 97h:34010, Zbl 860.34027.

xxi. A. Reinfelds, *Invariant sets and dynamical equivalence*, Proc. Est. Acad. Sci. Phys. Math. **45** (1996), no. 2–3, 216–225. MR 97g:54057, Zbl 862.34039.

xxii. A. Reinfelds, *The reduction of discrete dynamical and semidynamical systems in metric spaces*, in B. Aulbach and F. Colonius (eds.), *Six lectures on dynamical systems*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996, pp. 267–312. MR 98d:58138.

xxiii. A. Reinfelds, *The shadowing lemma in metric space*, Univ. Iagel. Acta Math. **35** (1997), 205–210. MR 98d:58139.

xxiv. A. Reinfelds, *The reduction of discrete dynamical systems in metric space*, in S. Elaydi, I. Győri and G. Ladas (eds.), *Advances in difference equations*. Proceedings of the second international conference on difference equations, Veszprém, Hungary, August 7–11, 1995. Gordon and Breach, Yverdon, 1997, pp. 525–536. Zbl 980.22938.

xxv. A. Reinfelds, *Grobman's–Hartman's theorem for time–dependent difference equations*, Latv. Univ. Zinātt. Raksti **605** (1997), 9–13.

xxvi. A. Reinfelds, *Decoupling of impulsive differential equations in a Banach space*, in C. Constanda, J. Saranen and S. Seikkala (eds.), *Integral methods in science and engineering. Volume one: analytic methods*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **374**, Longman, Harlow, 1997, pp. 144–148. MR 98i:00021, Zbl 980.34434.

xxvii. A. Reinfelds, *Decoupling of impulsive differential equations*, in R. Čiegis (ed.), *Mathematical modelling and complex analysis*. Proceedings of the second international conference "Mathematical modelling and complex analysis", Vilnius, Lithuania, June 3–4, 1997. "Technika", Vilnius, 1997, pp. 130–137.

xxviii. A. Reinfelds, *Dynamical equivalence of impulsive differential equations*, Nonlinear Anal. **30** (1997), no. 5, 2743–2752. MR 98m:34024, Zbl 980.11174.

xxix. A. Reinfelds, *Partial decoupling of semidynamical system in metric space*, J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl. Ser. A Pure Appl. Math. **5** (1997), 33–40. CMP 98:12.

xxx. A. Reinfelds, *Dynamical equivalence of dynamical systems*, Univ. Iagel. Acta Math. **36** (1998), 149–155.

xxxi. O. Dumbrajs, R. Meyer–Spasche and A. Reinfelds, *Analysis of electron trajectories in a gyrotron resonator*, IEEE Trans. Plasma Science **26** (1998), no. 3, 846–853.

xxxii. A. Reinfelds, *Partial decoupling of impulsive differential equations*, Latv. Univ. Zinātt. Raksti **612** (1998), 107–114.

Saturs

1. Ievads

Diferenciālvienādojumu kvalitatīvās teorijas pamatproblēma ir pēc dažām raksturīgām atrisinājumu īpašībām klasificēt diferenciālvienādojumu sistēmas. Tāda klasifikācija atļauj sarežģītas diferenciālvienādojumu sistēmas izpēti aizvietot ar vienkāršākas tās pašas klases diferenciālvienādojumu sistēmas izpēti. Pietiekoši mazā invariantas kopas apkārtnē apmierinošu klasifikāciju dod topoloģiskās (dinamiskās) ekvivalences jēdziens.

Divas autonomu diferenciālvienādojumu sistēmas ir topoloģiski ekvivalentas, ja eksistē to fāzu telpu homeomorfisms, kurš jebkuru pirmās diferenciālvienādojumu sistēmas trajektoriju attēlo par otrās diferenciālvienādojumu sistēmas trajektoriju saglabājot orientāciju.

Ja, bez tam, atbilstošais homeomorfisms transformē jebkuru pirmās diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājumu par otrās diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājumu, tad apskatāmās diferenciālvienādojumu sistēmas ir dinamiski ekvivalentas. Ja apskata tikai diferenciālvienādojumu sistēmu sašaurinājumus mazā invariantās kopas apkārtnē, tad runā par lokālo topoloģisko (dinamisko) ekvivalenci.

Diferenciālvienādojumu sistēmu topoloģiskās ekvivalences jēdziena pamatideju var atrast A. Puankarē [104] darbos. Viņš apskatīja jautājumu par tādas fāzu telpas analītiskas transformācijas eksistenci, kura autonomu nelineāru diferenciālvienādojumu sistēmu pārviedo lineārā, vai modernā interpretācijā meklēja analītisku difeomorfismu, kurš realizē nelineāras un lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas dinamisko ekvivalenci. 50-os gados S. Sternbergs [161, 162] vājināja difeomorfisma analītiskuma prasību aizvietojot to ar pietiekama gluda difeomorfisma eksistenci. Stingru diferenciālvienādojumu topoloģiskās ekvivalences jēdzienu ieveda A. A. Andronovs un L. S. Pontrjagins [2] darbā par strukturāli stabīlām diferenciālvienādojumu sistēmām plaknē 1937. gadā.

Problēmu par diferenciālvienādojumu sistēmu topoloģiskās ekvivalences pazīmju atrašanu nekustīgā punkta apkārtnē formulēja V. V. Ņemickis [73]. Problēmas atrisinājumu lineāro autonomo diferenciālvienādojumu sistēmām, kurām ir tikai elementāri nekustīgie punkti, deva E. M. Vaisbords [163],

A. Reiziņa un L. Reiziņš [149] un V. I. Arnolds [5]. Vispārīgā gadījumā lineāras autonomas diferenciālvienādojumu sistēmas topoloģiski klasificēja N. N. Ladis [59].

D. M. Grobmanis [24, 35, 36, 37, 38, 39] un F. Hartmanis [43, 44, 45, 46] pierādīja, ka autonoma diferenciālvienādojumu sistēma

$$dx/dt = Ax + f(x, y), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ir dinamiski ekvivalenta lineārai diferenciālvienādojumu sistēmai

$$dx/dt = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

ja matricai A nav tādu īpašvērtību, kuru reālā daļa vienāda ar nulli, f ir Lipšica attēlojums ar pietiekoši mazu Lipšica konstanti un tāds, kas anulējās koordinātu sākumu punktā. Lai pierādītu šo teorēmu, D. M. Grobmanis ar konstantu variācijas formulas palīdzību konstruēja attēlojumu un tālāk parādīja, ka šādi konstruētais attēlojums ir homeomorfisms, kurš realizē nelineāras un lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas dinamisko ekvivalenci. Saskaņā ar F. Hartmaņa metodi dotā diferenciālvienādojumu sistēma tiek reducēta uz difeomorfismu un tiek atrasts atbilstošo difeomorfismu topoloģiskās ekvivalences nosacījums. Atzīmēsim vēl, ka ekvivalences pierādījumā būtisks ir apstāklis, ka $\mathbb{R}^n$ ir lokāli kompakta telpa.

1962. gadā L. Reiziņš [150, 151, 153] vispārināja Grobmaņa–Hartmaņa teorēmu elementāro slēgto trajektoriju apkārtnēs. Lai to realizētu viņš slēgtās trajektorijas apkārtnē ieved pseidolokālās koordinātes un dinamiskas sistēmas topoloģiskās struktūras izpēti slēgtās trajektorijas apkārtnē reducē uz pusperiodiskas diferenciālvienādojuma sistēmas izpēti koordinātu sākuma punkta apkārtnē. Analoģisku rezultātu vēlāk ieguva arī M. Irvins [50], kurš pierādījumā izlietoja Hartmaņa metodi atbilstošam Puankarē attēlojumam. Tālāk K. Palmers [85, 90] vispārināja Vaisborda un Grobmaņa–Hartmaņa teorēmu tādam neautonomām diferenciālvienādojumu sistēmām, kuru lineārā daļa apmierina eksponenciālās dihotomijas nosacījumus.

Banaha telpā Vaisborda teorēmas analogu pierādīja A. Reinfelds [108]. Lai pierādītu Grobmaņa–Hartmaņa teorēmu Banaha telpā bija nepieciešams principiāli jauns pierādījums. Izmantojot J. Mosera [70] idejas to veica Č. Pjū [102] un J. Palis [83]. Īsu Gromaņa–Hartmaņa teorēmas pierādījumu dinamisko sistēmu paplašinājumiem Banaha telpā, izlietojot Grīna tipa attēlojumu, deva A. Reinfelds [117]. Atbilstošais homeomorfisms, kurš realizē dinamisko ekvivalenci tiek meklēts kā speciāla funkcionāl–integrālvienādojuma atrisinājums. Jāatzīmē, ka šāda pieeja izradījās ļoti veiksmīga, un to A. Reinfelds tālāk attīstīja un lietoja, lai pierādītu redukcijas teorēmas impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām Banaha telpā. Grobmaņa–Hartmaņa teorēmu un tās modifikācijas, lietojot dažādas metodes ir pierādījuši arī M. A. Boudourides [20, 21],

I. U. Bronšteins un V. A. Glavans [23], Nguyen Van Minhs [65], A. Reinfelds [105, 110, 139].

L. Reiziņš [153, 154, 155], R. M. Minca [68], N. N. Ladis [56, 57, 58], K. Kolmens [31, 32] un A. Reinfelds [106, 111] veica pētījumus par sadalošos diferenciālvienādojumu sistēmu dinamisko ekvivalenci saliktu nekustīgo punktu un saliktu slēgtu trajektoriju apkārtnēs.

Diferenciālvienādojumu sistēmu topoloģiskās ekvivalences pētījumos svarīga loma ir redukcijas teorēmai. Saskaņā ar redukcijas teorēmu eksistē tāds Lipšica attēlojums v, ka nelineāra diferenciālvienādojumu sistēma

$$\begin{cases} dx/dt &= Ax + f(x,y), \\ dy/dt &= By + g(x,y) \end{cases}$$

dinamiski ekvivalenta daļēji linearizētai diferenciālvienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} dx/dt &= Ax \\ dy/dt &= By + g(v(y),y), \end{cases}$$

ja matricai A nav īpašvērtību ar nulles reālo daļu, visu matricas B īpašvērtību reālās daļas vienādas ar nulli, f un g ir Lipšica attēlojumi ar pietiekoši mazu Lipšica konstanti un tādi kuri anulējās koordinātu sākuma punktā. Teorēmas pierādījumu speciālā gadījumā, kad y ir viendimensionāls un vēl pie papildus nosacījumiem deva L. Reiziņš [152]. Vispārīgā gadījumā teorēmu anonsēja A. N. Šošitaišvili [6, 159] diferenciālvienādojumu sistēmām, kuru labā puse ir C^2 gluda (pierādījums tika publicēts tikai 1975. gadā [160]). A. Reinfelds [107, 109] izlietojot citu metodi pierādīja redukcijas teorēmu, pie kam no attēlojumiem f un g tika prasīta tikai Lipšica nosacījumu izpilde ar pietiekoši mazu Lipšica konstanti. K. Palmers [55, 86, 87, 88, 89, 91] ar nedaudz atšķirīgu metodi pierādīja redukcijas teorēmu un dažādas tās modifikācijas telpā $\mathbb{R}^n$. Neautonomām diferenciālvienādojumu sistēmām redukcijas teorēmu arī pierādīja Nguen Van Minhs [66].

Dažādas topoloģiskās ekvivalences pazīmes normāli hiperboliskas invariantas kopas, tai skaitā invarianta tora apkārtnē ir atraduši G. S. Osipenko [76, 77, 78, 79, 80, 81, 82], J. Palis un F. Takens [84], M. Hiršs, C. Pjū un M. Šubs [49], C. Pjū un M. Šubs [103] un A. Reinfelds, kā $\mathbb{R}^n$ [112, 113, 114, 115, 116], tā Banaha telpā [118, 119].

Banaha telpā tādu diferenciālvienādojumu sistēmu dinamisko ekvivalenci, kuru lineārā daļa ir neierobežots slēgts operators, ir pētījuši K. Lu [63] un P. W. Bates un K. Lu [16].

Topoloģiskās ekvivalences pētījumi diskrētām dinamiskām sistēmām $\mathbb{R}^n$ sākās ar F. Hartmaņa [43, 44, 45, 46] un M. Irvina [50] darbiem. U. Kirchgrabers [53, 54, 55] pierādīja redukcijas teorēmu diskrētām dinamiskām sistēmām

$\mathbb{R}^n$. Savukārt G. Papaschinopoulos [95] pierādīja redukcijas teorēmu diferenču vienādojumiem.

1991.–1993. g. B. Aulbahs un B. M. Garai [9, 10, 11] publicēja pirmos darbus par neapgriežamu attēlojumu ekvivalenci Banaha telpā. Pie šādiem attēlojumiem noved arī pētījumi par vienā virzienā turpināmu evolūcijas tipa parciāldiferenciālvienādojumu atrisinājumiem. B. Aulbahs un B. M. Garai izvirzīja hipotēzi par neapgriežamu attēlojumu redukciju un pierādīja to speciālgadījumā. A. Reinfelds [129, 132, 137] pierādīja izvirzīto hipotēzi vispārīgā gadījumā.

Habilitācijas darba kopsavilkuma otrajā nodaļā tiek definēti pamatjēdzieni, tai skaitā dinamisko (semidinamisko) sistēmu topoloģiskā ekvivalence. Apskata diskrētu dinamisku sistēmu, kuru inducē homeomorfisms divu pilnu metrisku telpu Dekarta reizinājumā. Atbilstošais homeomorfisms apmierina fiksētas metriskas nevienādības. Šāda tipa nevienādības ir raksturīgas attēlojumiem, kuriem ir spēkā Grobmaņa–Hartmaņa teorēma vai redukcijas teorēma telpā $\mathbb{R}^n$. Līdzīgas nevienādības ir izmantojoši J. I. Neimarks [71, 72] un V. A. Pliss [100, 101], lai pierādītu invariantas varietātes eksistenci. Redukcijas tipa teorēmās svarīgu lomu spēlē globālie Lipšica attēlojumi, kuru grafiki ir invariantas kopas. Šāda tipa Lipšica attēlojumiem izpildās unitātes īpašības. Invarianto kopu eksistencei attēlojumiem un diferenciālvienādojumu sistēmām, kā $\mathbb{R}^n$, tā Banaha telpā matemātiskajā literatūrā veltītas daudz publikāciju. Darbā dotie nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi vispārina un konkretizē J. Adamāra [40] un citu matemātiķu iegūtos rezultātus [3, 17, 18, 19, 25, 28, 30, 34, 41, 42, 47, 48, 49, 51, 52, 61, 62, 69, 92, 94, 97, 164, 165]. Iegūtie rezultāti dod iespēju konkretizēt redukcijas teorēmu formulējumus. Jaunā oriģinālā pierādījuma metode ļauj pierādīt redukcijas teorēmu un dažādas šīs teorēmas modifikācijas atkārībā no dotajiem nosacījumiem pilnā metriskā telpā, tai skaitā arī Banaha telpā. Jāatzīmē, ka bieži teorēmas nosacījumus nav iespējams uzlabot. Bez tam tiek pierādītas redukcijas tipa teorēmas neapgriežamu attēlojumu inducētām semidinamiskām sistēmām. Reizē ar to ir pierādīta B. Aulbaha un B. M. Garai hipotēze.

Trešajā nodaļā tiek vispārināti iepriekšējās nodaļas rezultāti dinamiskajiem paplašinājumiem. Tie ir neautonomu sistēmu dabiskie vispārinājumi.

Ceturtajā nodaļā tiek pētīta impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu dinamiskā ekvivalence Banaha telpā. No vienas puses tie aptver neautonomu diferenciālvienādojumu sistēmas, no otras puses tādas diferenciālvienādojumu sistēmas, kuru atrisinājumi ir turpināmi tikai vienā virzienā. Impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas ir adekvāts matemātiskais modelis evolūcijas procesiem, kuri pēkšņi maina savu stāvokli fiksētos laika momentos. Pirmie impulsīvos diferenciālvienādojumus sāka pētīt A. D. Miškis un V. D. Milmanis [67]. V. Lakshmikanthama, D. D. Bainova un P. S. Simeonova [60], kā arī A. M. Samoilenko un N. A. Perestjuka [156] monogrāfijās dots impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu teorijas sistemātisks izklāsts.

Impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu dinamisko ekvivalenci pirmie sāka apskatīt autors [124, 125, 135, 141, 142, 143, 146, 148] un L. Sermone [124, 125, 157, 158] un mazliet vēlāk arī D. D. Bainovs, S. I. Kostadinovs un Nguyen Van Minhs [14, 15]. Dotajā nodaļā pierādītas redukcijas teorēmas dažādas modifikācijas impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām Banaha telpā (tai skaitā arī neapgriežamām sistēmām), ja sistēma sadalās divās daļās. Arī pierādot redukcijas teorēmas impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām svarīga loma ir globāliem Lipšica attēlojumiem, kuru grafiki ir invariantas kopas [12, 13, 126, 135, 143]. Bieži redukcijas tipa teorēmas ir atkārtoti lietojamas jau reizi reducētai sistēmai, kas atļauj tālāk vienkāršot doto sistēmu. Izmantojot standarta paņēmienus var iegūt arī redukciju teorēmu lokālos variantus.

Dinamiskās ekvivalences pietiekamie nosacījumi ir uzdoti ar nevienādībām, kuras satur integrāļus no atbilstošiem evolūcijas operatoriem. Iegūtie rezultāti no vienas puses precizē jau zināmos rezultātus parasto diferenciālvienādojumu sistēmām $\mathbb{R}^n$, no otras puses tie dod metodi kā risināt analoģiskās problēmas funkcionālās telpās.

Pēdējā piektajā nodaļa aplūkoti iepriekšējās nodaļās attīstīto metožu pielietojumi. Redukcijas principu stabilitātes teorijā autonomām diferenciālvienādojumu sistēmām pierādīja V. A. Pliss [98, 99, 101]. Neautonomām diferenciālvienādojumu sistēmām to vispārināja B. Aulbahs [7, 8]. Redukcijas principa dažādiem aspektiem stabilitātes teorijā ir veltīti darbi [14, 15, 26, 64, 69, 96, 156]. Dotajā darbā dots īss redukcijas principa pierādījums stabilitātes teorijā semidinamiskām sistēmām pilnā metriskā telpā, izlietojot attēlojumu topoloģisko ekvivalenci.

Aizklātā veidā ēnas lemma parādās saistībā ar D. V. Anosova difeomorfismiem [4]. Ir diezgan plaša matemātiskā literatūra, kura veltīta ēnas lemmas dažādu modifikāciju pierādījumiem lokāli kompaktās telpās [22, 29, 74, 75, 93], gan Banaha telpā [1, 27]. Dots īss ēnas lemmas pierādījums metriskā telpā, izlietojot funkcionālvienādojumus, kuri zināmā mērā līdzīgi tiem, kurus izlieto dinamiskās ekvivalences pierādījumā.

Nodaļas beigās pierādīta divu nelineāru vienādojumu, kuri sastopami aprakstot elektronu kustību girotrona rezonatorā, asimptotiskā ekvivalence [33].

2. Diskrēto dinamisko un semidinamisko sistēmu topoloģiskā ekvivalence

2.1 Ievads

Patvaļīgā pilnā metriskā telpā aplūkojam homeomorfisma (nepārtraukta attēlojuma) T

$$T(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$$

inducēto diskrēto dinamisko (semidinamisko) sistēmu. Iegūstam nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, lai eksistētu globāls Lipšica attēlojums, kura grafiks ir dinamiskas (semidinamiskas) sistēmas invarianta kopa. Iegūtie starprezultāti atļauj atrast pietiekamos nosacījumus dinamiskās (semidinamiskās) sistēmas sadalīšanai un vienkāršošanai un tātad dod iespēju dotās sistēmas pētīšanu reducēt uz daudz vienkāršākas sistēmas izpēti. Iegūtas teorēmas ir klasiskās Grobmaņa–Hartmaņa teorēmas un redukcijas principa vispārinājums pilnā metriskā telpā.

2.2 Pamatjēdzieni

Šajā paragrāfā definēsim dažus pamatjēdzienus, kuri ir nepieciešami tālākās nodaļās, kā arī precizēsim attēlojuma T formu.

Pieņemsim, ka $\mathbf{X}_1$ un $\mathbf{X}_2$ ir pilnas metriskas telpas ar atbilstošiem attālumiem ρ_1 un ρ_2.

Definīcija 2.1 Attēlojumu $T\colon \mathbf{X}_1 \to \mathbf{X}_2$ sauc par *Lipšica* (ar konstanti k), ja visiem $x, x' \in \mathbf{X}_1$ izpildās nevienādība

$$\rho_2(T(x), T(x')) \leq k\rho_1(x, x').$$

Definīcija 2.2 Puntu $x \in \mathbf{X}$ sauc par attēlojuma T *nekustīgo punktu*, ja izpildās vienādība $T(x) = x$.

Teorēma 2.3 Saspiešanas attēlojuma teorēma. *Ja* $T\colon \mathbf{M} \to \mathbf{X}$ *ir Lipšica attēlojums ar konstanti* $k < 1$, $\mathbf{M}$ *ir pilnas metriskas telpas* $\mathbf{X}$ *slēgta apakškopa, kur* $T(\mathbf{M}) \subset \mathbf{M}$, *tad attēlojumam* T *ir viens un tikai viens nekustīgais punkts kopā* $\mathbf{M}$.

Definīcija 2.4 Nepārtrauktu attēlojumu $H\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ sauc par *homeomorfismu*, ja tas ir bijektīvs un tā inversais attēlojums arī ir nepārtraukts.

Definīcija 2.5 Nepārtrauktu vienparametra attēlojumu saimi $\{T^n\}$, $n \in \mathbf{Z}$, kur $T^1 = T\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, sauc par *diskrētu dinamisko sistēmu* ja:

(i) $T^0 = id$, kur id ir identiskais attēlojums;

(ii) $T^n \circ T^k = T^{n+k}$.

Diskrēta semidinamiska sistēma ir vienparametra attēlojumu saime, kura definēta tikai nenegatīviem veseliem skaitļiem.

Ievērojam, ka diskrētas dinamiskās sistēmas gadījumā attēlojums T ir homeomorfisms.

Definīcija 2.6 Divas diskrētas dinamiskās (semidinamiskās) sistēmas T_1^n, $T_2^n\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ ir *topoloğiski ekvivalentas*, ja eksistē tāds homeomorfisms $H\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, ka diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "T_1^n"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X} \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, "T_2^n"] & \mathbf{X} \end{tikzcd}$$

komutē.

Definīcija 2.7 Divi attēlojumi $T_1, T_2\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ ir *topoloğiski ekvivalenti*, ja eksistē tāds homeomorfisms $H\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, ka diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X} \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{X} \arrow[r, "T_2"] & \mathbf{X} \end{tikzcd}$$

komutē.

Viegli pārliecināties, ka divas diskrētas dinamiskās (semidinamiskās) sistēmas T_1^n un T_2^n, kuras inducē attēlojumi T_1 un T_2, ir topoloģiski ekvivalentas tad un tikai tad, ja attēlojumi T_1 un T_2 ir topoloģiski ekvivalenti.

Pieņemsim, ka $\mathbf{X}$ un $\mathbf{Y}$ ir pilnas metriskas telpas ar atbilstošiem attālumiem ρ_1 un ρ_2. Aplūkosim nepārtrauktu attēlojumu $T\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ formā

$$T(x,y) = (f(x,y), g(x,y)),$$

kurš apmierina sekojošus nosacījumus:

(H1) $\rho_1(x,x') \le \alpha\rho_1(f(x,y), f(x',y))$, $\alpha > 0$;

(H2) $\rho_1(f(x,y), f(x,y')) \le \beta\rho_2(y,y')$;

(H3) $\rho_2(g(x,y), g(x',y')) \le \gamma\rho_1(x,x') + \delta\rho_2(y,y')$, kur $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$;

(H4) attēlojums $f(\cdot, y)\colon \mathbf{X}\to\mathbf{X}$ ir surjektīvs.

Mūsu mērķis ir atrast nosacījumus pie kuriem dotais attēlojums T ar topoloģiskas transformācijas palīdzību sadalās un vienkāršojās.

Piemērs 2.8 Apskatīsim sekojošu attēlojumu Banaha telpā

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax + F(x,y),\\ y^1 &= By + G(x,y), \end{aligned} \tag{2.1}$$

kur $x\in\mathbf{X}$, $y\in\mathbf{Y}$, A un B ir ierobežoti lineāri attēlojumi, attēlojumam A eksistē inversais, $\|B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$, attēlojumi $F\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$, $G\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}$ apmierina Lipšica nosacījumus

$$|F(x,y) - F(x',y')| \le \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|),$$

$$|G(x,y) - G(x',y')| \le \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|).$$

Var viegli pārliecināties, ka attēlojums T apmierina nosacījumus (**H1**)–(**H4**), kur $\alpha = (\|A^{-1}\|^{-1} - \varepsilon)^{-1}$, $\beta = \gamma = \varepsilon$, $\delta = \|B\| + \varepsilon$. Nosacījums $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$ reducējās uz nevienādību

$$\varepsilon < \frac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}{4}.$$

Ar vienādību $x^1 = Ax + F(x,y)$ definētais attēlojums fiksētam y ir surjektīvs, ja $\varepsilon\|A^{-1}\| < 1$. Atzīmējam, ka $\varepsilon\|A^{-1}\| < 1/4$.

Piezīme. Apskatām attēlojumu, kurš parāda, ka vispārīgā gadījumā nevienādību $\alpha(\delta+2\sqrt{\beta\gamma})<1$ nevar aizvietot ar vienādību. Viegli pārliecināties, ka lineārais attēlojums

$$x^1 = \alpha^{-1}x - \beta y,$$
$$y^1 = \gamma x + \delta y,$$

kur $x \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$ un $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$, apmierina nosacījumus (**H1**)–(**H4**).

Ja $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$, tad dotajam attēlojumam ir nekustīgais punkts koordinātu sākumpunktā un divas invariantas taisnes – Lipšica attēlojumu grafiki. Ja turpretīm $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) = 1$, tad dotajam attēlojumam caur koordinātu sākumpunktu iet tikai viena invarianta taisne. Atbilstošā lineārā attēlojuma raksturīgajam vienādojumam ir divkārša sakne, pie kam elementārā dalītāja pakāpe ir 2. Teorēma 2.22 nav spēkā.

2.3 Palīglemmas

Pamata rezultātu pierādījumā izlietosim sekojošas trīs lemmas. Apskatam attēlojumu kopu

$$\mathbf{Lip}(k) = \{u \mid u\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y} \text{ un } \rho_2(u(x), u(x')) \le k\rho_1(x, x')\}.$$

Lemma 2.9 *Ja $\alpha\beta k < 1$ un $u \in \mathbf{Lip}(k)$, tad ar vienādību $\varphi(x) = f(x, u(x))$ definētais attēlojums $\varphi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ ir homeomorfisms.*

Tālāk ar vienādību

$$(\mathcal{L}u)(f(x, u(x))) = g(x, u(x))$$

definējam operatoru $\mathcal{L}$ kopā $\mathbf{Lip}(k)$.

Lemma 2.10 *Eksistē tāds $k \ge 0$, ka $\mathcal{L}(\mathbf{Lip}(k)) \subset \mathbf{Lip}(k)$.*

Tālāk apskatām attēlojumu kopu

$$\mathbf{Lip}(l) = \{v \mid v\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X} \text{ un } \rho_1(v(y), v(y')) \le l\rho_2(y, y')\}$$

un definējam operatoru $\mathcal{K}$ kopā $\mathbf{Lip}(l)$ ar vienādību

$$f(\mathcal{K}v(y), y) = v(g(v(y), y)).$$

Operators $\mathcal{K}$ ir korekti definēts, jo attēlojums $f(\cdot, y)\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ is surjektīvs un izpildās nosacījums (**H1**).

Lemma 2.11 *Eksistē tāds* $l \geq 0$*, ka* $\mathcal{K}(\mathbf{Lip}(l)) \subset \mathbf{Lip}(l)$*.*

Tālāk nodaļās 1 un 2 pieņemsim, ka

$$k = \frac{2\alpha\gamma}{1 - \alpha\delta + \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}$$

un

$$l = \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha\delta + \sqrt{(1-\alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}.$$

Jāatzīmē, ka $\beta k = \gamma l$, $\alpha(\gamma + \delta k)(1 - \alpha\beta k)^{-1} = k$, $\alpha l(\gamma l + \delta) + \alpha\beta = l$. $\alpha\beta k = \alpha\gamma l < 1/2$ un $kl < 1$.

Piemērs 2.12 Apskatām attēlojumu (2.1). Aprēķinām

$$k = l = \frac{2\varepsilon}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\| - 2\varepsilon + \sqrt{(\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|)(\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\| - 4\varepsilon)}}$$

$$= \frac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\| - 2\varepsilon - \sqrt{(\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|)(\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\| - 4\varepsilon)}}{2\varepsilon} < 1.$$

2.4 Nekustīgais punkts

Dosim pietiekamos nosacījumus nekustīgā punkta eksistencei.

Teorēma 2.13 *Ja* $(1-\alpha)(1-\delta) - \alpha\beta\gamma > 0$*, tad attēlojumam* T *ir viens un tikai viens nekustīgais punkts* $T(x_0, y_0) = (x_0, y_0)$*.*

Piemērs 2.14 Pieņemsim, ka attēlojums ir formā (2.1). Nosacījums $(1-\alpha)(1-\delta) > \alpha\beta\gamma$ reducējās uz nevienādību

$$\varepsilon < \frac{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}.$$

Izlietojot sakaru starp ğeometrisko un aritmētisko vidējo iegūstam

$$\frac{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}{4}.$$

2.5 Invariantas kopas

Dosim nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, lai eksistētu tādi globāli Lipšica attēlojumi $u\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un $v\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, kuru grafiki ir invariantas kopas.

Teorēma 2.15 *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**). *Lai eksistētu attēlojumi $u\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un $v\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, kuri apmierina funkcionālvienādojumus*

$$u(f(x, u(x))) = g(x, u(x)), \tag{2.2}$$

$$f(v(y), y) = v(g(v(y), y)) \tag{2.3}$$

un Lipšica nosacījumus

$$\rho_2(u(x), u(x')) \leq k\rho_1(x, x'), \tag{2.4}$$

$$\rho_1(v(y), v(y')) \leq l\rho_2(y, y'), \tag{2.5}$$

ir nepieciešami un pietiekami, lai attēlojumam T būtu nekustīgais punkts.

Atzīmējam, ka ja $\alpha\delta + 1 \leq 2\alpha$, tad

$$\beta k + \delta = \frac{1 - \alpha\delta - \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}{2\alpha} + \delta < \frac{1 - \alpha\delta}{2\alpha} + \delta \leq 1.$$

Gadījumā, kad $\alpha\delta + 1 \geq 2\alpha$, iegūstam

$$\alpha(1 + \gamma l) = \alpha + \frac{1 - \alpha\delta - \sqrt{(1 - \alpha\delta)^2 - 4\alpha^2\beta\gamma}}{2} < \alpha + \frac{1 - \alpha\delta}{2} \leq 1.$$

Lemma 2.16 *Ja $\beta k + \delta < 1$ un $\alpha(1 + \gamma l) < 1$, tad $(1 - \alpha)(1 - \delta) > \alpha\beta\gamma$, un apgriezti, ja $(1 - \alpha)(1 - \delta) > \alpha\beta\gamma$, tad $\beta k + \delta < 1$ un $\alpha(1 + \gamma l) < 1$.*

Teorēma 2.17 *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**), *un pieņemsim, ka $\beta k + \delta < 1$. Lai eksistētu attēlojums $u\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$, kurš apmierina funkcionālvienādojumu* (2.2) *un Lipšica nosacījumus* (2.4) *nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu tāds attēlojums $u_0 \in \mathbf{Lip}(k)$, ka izpildās nevienādība*

$$\sup_x \rho_2(u_0(f(x, u_0(x))), g(x, u_0(x))) < +\infty. \tag{2.6}$$

Teorēma 2.18 *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**), *un pieņemsim, ka $\alpha(1 + \gamma l) < 1$. Lai eksistētu attēlojums*

$v\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, kurš apmierina funkcionālvienādojumu (2.3) un Lipšica nosacījumus (2.5) nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu tāds attēlojums $v_0 \in \mathbf{Lip}(l)$, ka izpildās nevienādība

$$\sup_y \rho_1(v_0(g(v_0(y), y)), f(v_0(y), y)) < +\infty. \tag{2.7}$$

Piezīme. Viegli var pārliecināties, ka izpildās sekojošas nevienādības

$$\rho_2(u(f(x,y)), g(x,y)) \leq \rho_2(u(f(x,y)), u(f(x,u(x))))$$

$$+\rho_2(g(x,u(x)), g(x,y)) \leq (\beta k + \delta)\rho_2(u(x), y)$$

un

$$\rho_1(v(y), x) \leq \alpha\rho_1(f(v(y), y), f(x,y))$$

$$= \alpha\rho_1(v(g(v(y), y)), f(x,y)) \leq \alpha\rho_1(f(x,y), v(g(x,y))) + \alpha\gamma l\rho_1(v(y), x).$$

Seko

$$\rho_1(v(y), x) \leq \alpha(1 - \alpha\gamma l)^{-1}\rho_1(v(g(x,y)), f(x,y)).$$

Piemērs 2.19 Aplūkojam attēlojumu (2.1). Nosacījums (2.6) izpildās, ja

$$\sup_x |G(x,0)| < +\infty,$$

un nosacījums (2.7) izpildās, ja

$$\sup_y |F(0,y)| < +\infty.$$

Lemma 2.20 *Ja T ir homeomorfisms un ja attēlojums $v\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ apmierina (2.3) un (2.5), tad ar vienādību $\psi(y) = g(v(y), y)$ definētais attēlojums $\psi\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ ir homeomorfisms.*

Sekas 2.21 *Ja T ir homeomorfisms un ja attēlojumi $u\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un $v\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ apmierina (2.2)–(2.5), tad ar vienādību $S(x,y) = (f(x,u(x)), g(v(y),y))$ definētais attēlojums $S\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ ir homeomorfisms.*

2.6 Homeomorfismu ekvivalence. 1

Apskatām gadījumu, kad homeomorfismam T ir nekustīgais punkts.

Teorēma 2.22 *Ja homeomorfisms T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**) *un ja tam ir nekustīgais punkts, tad eksistē tāds homeomorfisms $H\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$, ka diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}\times\mathbf{Y} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{X}\times\mathbf{Y} \arrow[r, "S"] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}
\end{tikzcd}$$

komutē, kur $S(x,y) = (f(x,u(x)), g(v(y),y))$.

Pierādījums. Pierādījums sastāv no vairākiem soļiem.

Solis 1. Attēlojums p. Funkcionālvienādojumam

$$f(p(x,y), u(p(x,y))) = p(T(x,y))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $p \in \mathbf{M}_1$, kur

$$\mathbf{M}_1 = \left\{ p \,\middle|\, p\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X} \text{ is nepārtraukts un } \sup_{x,y} \frac{\rho_1(p(x,y),x)}{\rho_2(u(x),y)} < +\infty \right\}$$

ir pilna metriska telpa.

Solis 2. Attēlojums π. Funkcionālvienādojumam

$$g(v(\pi(x,y)), \pi(x,y)) = \pi(T(x,y))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $\pi \in \mathbf{M}_2$, kur

$$\mathbf{M}_2 = \left\{ \pi \,\middle|\, \pi\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{Y} \text{ is nepārtraukts un } \sup_{x,y} \frac{\rho_2(\pi(x,y),y)}{\rho_1(v(y),x)} < +\infty \right\}$$

ir pilna metriska telpa.

Solis 3. Attēlojums q. Funkcionālvienādojumam

$$f(q(x,z),z) = q(f(x,u(x)), g(q(x,z),z))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $q \in \mathbf{M}_1(l)$, kur

$$\mathbf{M}_1(l) = \left\{ q \,\middle|\, q \in \mathbf{M}_1,\ \sup_{x,y} \frac{\rho_1(q(x,y),x)}{\rho_2(u(x),y)} \le l \text{ un } \rho_1(q(x,z),q(x,z')) \le l\rho_2(z,z') \right\}$$

ir pilna metriska telpa.

Solis 4. Attēlojums θ. Funkcionālvienādojumam

$$\theta(S(x,y)) = g(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $\theta \in \mathbf{M}_3$, kur

$$\mathbf{M}_3 = \left\{\theta \,\middle|\, \theta\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{Y} \text{ is nepārtraukts un} \sup_{x,y}\frac{\rho_2(\theta(x,y),y)}{\rho_1(q(x,y),v(y))} < +\infty\right\}$$

ir pilna metriska telpa.

Solis 5. Attēlojums P. Funkcionālvienādojumam

$$P(S(x,y)) = f(P(x,y),u(P(x,y)))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $P \in \mathbf{M}_4$, kur

$$\mathbf{M}_4 = \left\{P \,\middle|\, P\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X} \text{ is nepārtraukts un} \sup_{x,y}\frac{\rho_1(P(x,y),x)}{\rho_2(\theta(x,y),u(x))} < +\infty\right\}$$

ir pilna metriska telpa un

$$P(x,y) = p(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)) = x.$$

Solis 6. Attēlojums Π. Funkcionālvienādojumam

$$\Pi(S(x,y)) = g(v(\Pi(x,y)),\Pi(x,y))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $\Pi \in \mathbf{M}_3$, kur

$$\Pi(x,y) = \pi(q(x,\theta(x,y)),\theta(x,y)) = y.$$

Solis 7. Attēlojums Q. Funkcionālvienādojumam

$$Q(T(x,y),g(Q(x,y,z),z)) = f(Q(x,y,z),z)$$

ir viens vienīgs atrisinājums $Q \in \mathbf{M}_5$, kur

$$\mathbf{M}_5 = \left\{Q \,\middle|\, Q\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X} \text{ is nepārtraukts,}\right.$$

$$\left.\rho_1(Q(x,y,z),Q(x,y,z')) \le l\rho_2(z,z') \text{ un } \sup_{x,y,z}\frac{\rho_1(Q(x,y,z),x)}{\max\left(\rho_2(u(x),y),\rho_2(z,y)\right)} < \infty\right\}$$

ir pilna metriska telpa. Seko $Q(x,y,z) = q(p(x,y),z)$. Viegli pārliecināties, ka $Q(x,y,y) = x$. Tādēļ $q(p(x,y),y) = x$.

Solis 8. Attēlojums Θ. Funkcionālvienādojumam

$$\Theta(T(x,y)) = g(Q(x,y,\Theta(x,y)),\Theta(x,y))$$

ir viens vienīgs atrisinājums $\Theta \in \mathbf{M}_2$, kur

$$\Theta(x,y) = \theta(p(x,y), \pi(x,y)) = y.$$

Iegūstam, ka ar vienādībām

$$H(x,y) = (p(x,y), \pi(x,y))$$

un

$$\Gamma(x,y) = (q(x, \theta(x,y)), \theta(x,y))$$

definētie attēlojumi $H, \Gamma\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ ir savstarpēji inversi un H ir homeomorfisms, kurš nodrošina attēlojumu T un S topoloģisko ekvivalenci. Teorēma ir pierādīta.

Piemērs 2.23 Pieņemam papildus, ka attēlojums (2.1) ir homeomorfisms ar nekustīgo punktu. Izmantojot Teorēmu 2.22 iegūstam ka homeomorfisms (2.1) is topoloģiski ekvivalents homeomorfismam

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax + F(x, u(x)), \\ y^1 &= By + G(v(y), y). \end{aligned}$$

2.7 Neapgriežamu attēlojumu ekvivalence

Apskatīsim nepārtraukta attēlojuma T gadījumu.

Teorēma 2.24 *Ja nepārtrauktais attēlojums T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**) *un ja attēlojums $u\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ apmierina nosacījumus* (2.2) *un* (2.4)*, tad eksistē tāds nepārtraukts attēlojums $q\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, un homeomorfisms $H\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, ka diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \arrow[r, "R"] & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

komutē, kur $R(x,y) = (f(x, u(x)), g(q(x,y), y))$.

Teorēma 2.25 *Ja nepārtrauktais attēlojums T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**)*, eksistē tāds homeomorfisms $f_0\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, ka f_0^{-1} ir Lipšica attēlojums ar konstanti mazāku par* 1*, $\alpha(1 + \gamma l) < 1$ un*

$$\sup_{x,y} \rho_1(f(x,y), f_0(x)) < +\infty,$$

tad eksistē nepārtraukts attēlojums $q\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$*, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, un homeomorfisms* $H\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$*, ka diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \arrow[r, "N_1"] & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

komutē, kur $N_1(x,y) = (f_0(x), g(q(x,y),y))$.

Piemērs 2.26 Vispārīgā gadījumā neapgriežamiem attēlojumiem izlietojot Teorēmu 2.24 iegūstam ka (2.1) ir topoloģiski ekvivalents attēlojumam

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax + F(x, u(x)), \\ y^1 &= By + G(q(x,y), y). \end{aligned}$$

2.8 Homeomorfismu ekvivalence. 2

Apskatām gadījumu, kad T ir homeomorfisms, un nav zināms vai eksistē nekustīgais punkts.

Teorēma 2.27 *Ja homeomorfisms* T *apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**) *un ja attēlojums* $v\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *apmierina nosacījumus* (2.3) *un* (2.5)*, tad eksistē nepārtraukts attēlojums* $\theta\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$*, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret pirmo mainīgo, un homeomorfisms* $H\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$*, ka diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \arrow[r, "N"] & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \end{tikzcd}$$

komutē, kur $N(x,y) = (f(x, \theta(x,y)), g(v(y), y))$.

Teorēma 2.28 *Ja homeomorfisms* T *apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**)*, eksistē tāds homeomorfisms* $g_0\colon \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$*, kurš ir Lipšica attēlojums ar konstanti mazāku par* 1*,* $\beta k + \delta < 1$ *un*

$$\sup_{x,y} \rho_2(g(x,y), g_0(y)) < +\infty, \tag{2.8}$$

tad eksistē homeomorfisms $H\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \to \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ *tāds, ka diagramma*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}\times\mathbf{Y} & \xrightarrow{T} & \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \\ H\downarrow & & \downarrow H \\ \mathbf{X}\times\mathbf{Y} & \xrightarrow{R_0} & \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \end{array}$$

komutē, kur $R_0(x,y) = (f(x,u(x)), g_0(y))$.

Teorēma 2.29 *Ja homeomorfisms* T *apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**)*, eksistē tāds homeomorfisms* $f_0\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$*, ka* f_0^{-1} *ir Lipšica attēlojums ar konstanti mazāku par* 1*,* $\alpha(1+\gamma l) < 1$ *un*

$$\sup_{x,y} \rho_1(f(x,y), f_0(x)) < +\infty, \tag{2.9}$$

tad eksistē homeomorfisms $H\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \to \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ *tāds, ka diagramma*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X}\times\mathbf{Y} & \xrightarrow{T} & \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \\ H\downarrow & & \downarrow H \\ \mathbf{X}\times\mathbf{Y} & \xrightarrow{N_0} & \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \end{array}$$

komutē, kur $N_0(x,y) = (f_0(x), g(v(y),y))$.

Piemērs 2.30 Apskatām attēlojumu (2.1). Nosacījums (2.8) izpildās, ja

$$\sup_{x,y} |G(x,y) - G(0,y)| < +\infty$$

un nosacījums (2.9) izpildās, ja

$$\sup_{x,y} |F(x,y) - F(x,0)| < +\infty.$$

Pieņemsim, ka attēlojums (2.1) ir homeomorfisms, un pieņemsim, ka B eksistē inversais attēlojums, $\|B\| < 1$, $\sup_{x,y} |G(x,y)| < +\infty$ un

$$\varepsilon < \begin{cases} \dfrac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}{4}, & \text{ja } \|A^{-1}\|^{-1} + \|B\| \leq 2 \\ \dfrac{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}, & \text{ja } \|A^{-1}\|^{-1} + \|B\| > 2. \end{cases}$$

Izlietojot Teorēmu 2.28 iegūsim, ka homeomorfisms (2.1) ir topoloģiski ekvivalents

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax + F(x, u(x)), \\ y^1 &= By. \end{aligned}$$

Ja $\|A^{-1}\| < 1$, $\sup_{x,y} |F(x,y)| < +\infty$ un

$$\varepsilon < \begin{cases} \dfrac{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}, & \text{ja } \|A^{-1}\|^{-1} + \|B\| \leq 2 \\ \dfrac{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}{4}, & \text{ja } \|A^{-1}\|^{-1} + \|B\| > 2, \end{cases}$$

tad no Teorēmas 2.29 izriet ka homeomorfisms (2.1) ir topoloģiski ekvivalents

$$\begin{aligned} x^1 &= Ax, \\ y^1 &= By + G(v(y), y). \end{aligned}$$

2.9 Piezīmes

Otrā nodaļa uzrakstīta pēc darbu [105, 120, 121, 128, 129, 137] materiāliem.

3. Diskrēto dinamisko paplašinājumu ekvivalence

3.1 Pamatjēdzieni

Šajā nodaļā definēsim dažus pamatjēdzienus, kuri ir nepieciešami tālākās nodaļās un precizēsim attēlojuma T formu.

Pieņemsim, ka $\mathbf{X}$ un $\mathbf{Y}$ ir pilnas metriskas telpas ar atbilstošiem attālumiem ρ_1 un ρ_2, un $\boldsymbol{\Lambda}$ ir topoloģiska telpa. Šīs nodaļas mērķis ir vispārināt redukcijas teorēmu uz homeomorfismu (nepārtrauktu attēlojumu) inducētu diskrētu dinamisko (semidinamisko) sistēmu paplašinājumiem pilnā metriskā telpā.

Aplūkosim nepārtrauktu attēlojumu T formā

$$(x, y, \lambda) \mapsto (f(x, y, \lambda), g(x, y, \lambda), \sigma(\lambda)),$$

kurš apmierina sekojošus nosacījumus:

(**H1**) $\rho_1(x, x') \leq \alpha\rho_1(f(x, y, \lambda), f(x', y, \lambda))$, $\alpha > 0$;

(**H2**) $\rho_1(f(x, y, \lambda), f(x, y', \lambda)) \leq \beta\rho_2(y, y')$;

(**H3**) $\rho_2(g(x, y, \lambda), g(x', y', \lambda)) \leq \gamma\rho_1(x, x') + \delta\rho_2(y, y')$, kur $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$;

(**H4**) attēlojums $f(\cdot, y, \lambda)\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ ir surjektīvs;

(**H5**) attēlojums $\sigma\colon \boldsymbol{\Lambda} \to \boldsymbol{\Lambda}$ ir homeomorfisms.

Mūsu mērķis ir atrast nosacījumus pie kuriem dotais attēlojums T ar topoloģiskas transformācijas palīdzību sadalās un vienkāršojās.

Piemērs 3.1 Apskatīsim sekojošu neautonomu diferenču vienādojumu sistēmu formā

$$\begin{aligned} x(n+1) &= A(n)x(n) + F(x(n), y(n), n), \\ y(n+1) &= B(n)y(n) + G(x(n), y(n), n), \end{aligned}$$

kur $n \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$ un $\mathbf{Y}$ ir Banaha telpas, $A(n)$ un $B(n)$ ir ierobežoti lineāri attēlojumi, $A(n)$ eksistē inversais, $\|B(n)\| < \|A^{-1}(n)\|^{-1}$ un attēlojumi $F\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \mathbb{Z} \to \mathbf{X}$, $G\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \mathbb{Z} \to \mathbf{Y}$ apmierina Lipšica nosacījumus

$$|F(x,y,n) - F(x',y',n)| \le \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|),$$
$$|G(x,y,n) - G(x',y',n)| \le \varepsilon(|x-x'| + |y-y'|).$$

Var viegli pārliecināties, ka attēlojums T apmierina nosacījumus (**H1**)–(**H5**), kur $\alpha = ((\sup_n \|A^{-1}(n)\|)^{-1} - \varepsilon)^{-1}$, $\beta = \gamma = \varepsilon$, $\delta = \sup_n \|B(n)\| + \varepsilon$ un $\sigma(n) = n+1$. Nosacījums $\alpha(\delta + 2\sqrt{\beta\gamma}) < 1$ reducējās uz nevienādību

$$\varepsilon < \frac{(\sup_n \|A^{-1}(n)\|)^{-1} - \sup_n \|B(n)\|}{4}.$$

Ar vienādību $x_1 = A(n)x + F(x,y,n)$ definētais attēlojums fiksētam n un y ir surjektīvs, ja $\varepsilon \sup_n \|A^{-1}(n)\| < 1$. Atzīmēsim, ka $\varepsilon \sup_n \|A^{-1}(n)\| < 1/4$.

3.2 Palīglemmas

Pamata rezultāta pierādījumā izlietosim sekojošas trīs lemmas. Apskatam attēlojumu kopu

$$\mathbf{Lip}(k) = \{u \mid u\colon \mathbf{X} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y} \text{ un } \rho_2(u(x,\lambda), u(x',\lambda)) \le k\rho_1(x,x')\}.$$

Lemma 3.2 *Ja $\alpha\beta k < 1$ un $u \in \mathbf{Lip}(k)$, tad ar vienādību $\varphi(x,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda),\sigma(\lambda))$ definētais attēlojums $\varphi\colon \mathbf{X} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X} \times \boldsymbol{\Lambda}$ ir homeomorfisms.*

Tālāk ar vienādību

$$(\mathcal{L}u)(f(x,u(x,\lambda),\lambda),\sigma(\lambda)) = g(x,u(x,\lambda),\lambda)$$

definējam operatoru $\mathcal{L}$ kopā $\mathbf{Lip}(k)$.

Lemma 3.3 *Eksistē tāds $k \ge 0$, ka $\mathcal{L}(\mathbf{Lip}(k)) \subset \mathbf{Lip}(k)$.*

Tālāk apskatām attēlojumu kopu

$$\mathbf{Lip}(l) = \{v \mid v\colon \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X} \text{ un } \rho_1(v(y,\lambda), v(y',\lambda)) \le l\rho_2(y,y')\}$$

un definējam operatoru $\mathcal{K}$ kopā $\mathbf{Lip}(l)$ ar vienādību

$$f(\mathcal{K}v(y,\lambda),y,\lambda) = v(g(v(y,\lambda),y,\lambda),\sigma(\lambda)).$$

Operators $\mathcal{K}$ ir korekti definēts, jo attēlojums $f(\cdot, y, \lambda)\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ ir surjektīvs un izpildās nosacījums (**H1**).

Lemma 3.4 *Eksistē tāds* $l \geq 0$, *ka* $\mathcal{K}(\mathbf{Lip}(l)) \subset \mathbf{Lip}(l)$.

3.3 Invariantas kopas

Dosim nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, lai eksistētu tādi attēlojumi $u\colon \mathbf{X} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}$ un $v\colon \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$, kuru grafiki ir invariantas kopas.

Teorēma 3.5 *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums* T *apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H5**). *Lai eksistētu attēlojumi* $u\colon \mathbf{X} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}$ *un* $v\colon \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$, *kuri apmierina funkcionālvienādojumus*

$$u(f(x, u(x, \lambda), \lambda), \sigma(\lambda)) = g(x, u(x, \lambda), \lambda), \tag{3.1}$$

$$f(v(y, \lambda), y, \lambda) = v(g(v(y, \lambda), y, \lambda), \sigma(\lambda)) \tag{3.2}$$

un Lipšica nosacījumus

$$\rho_2(u(x, \lambda), u(x', \lambda)) \leq k\rho_1(x, x'), \tag{3.3}$$

$$\rho_1(v(y, \lambda), v(y', \lambda)) \leq l\rho_2(y, y') \tag{3.4}$$

ir nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu nepārtraukti attēlojumi $x_0\colon \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$ *un* $y_0\colon \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}$ *tādi, ka*

$$f(x_0(\lambda), y_0(\lambda), \lambda) = x_0(\sigma(\lambda)) \text{ un } g(x_0(\lambda), y_0(\lambda), \lambda) = y_0(\sigma(\lambda)).$$

Teorēma 3.6 *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums* T *apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H5**), *un pieņemsim, ka* $\beta k + \delta < 1$. *Lai eksistētu attēlojums* $u\colon \mathbf{X} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}$, *kurš apmierina funkcionālvienādojumu* (3.1) *un Lipšica nosacījumu* (3.3) *nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu tāds attēlojums* $u_0 \in \mathbf{Lip}(k)$, *ka izpildās nevienādība*

$$\sup_{x,\lambda} \rho_2(u_0(f(x, u_0(x, \lambda), \lambda), \sigma(\lambda)), g(x, u_0(x, \lambda), \lambda)) < +\infty. \tag{3.5}$$

Teorēma 3.7 *Pieņemsim, ka nepārtrauktais attēlojums* T *apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H5**), *un pieņemsim, ka* $\alpha(1+\gamma l) < 1$. *Lai eksistētu attēlojums* $v\colon \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$, *kurš apmierina funkcionālvienādojumu* (3.2) *un Lipšica nosacījumu*

(3.4) *nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu tāds attēlojums* $v_0 \in \mathbf{Lip}(l)$, *ka izpildās nevienādība*

$$\sup_{y,\lambda} \rho_1(v_0(g(v_0(y,\lambda),y,\lambda),\sigma(\lambda)), f(v_0(y,\lambda),y,\lambda)) < +\infty. \tag{3.6}$$

Lemma 3.8 *Ja* T *ir homeomorfisms un ja nepārtrauktais attēlojums* $v\colon \mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$ *apmierina* (3.2) *and* (3.4), *tad ar vienādību* $\psi(y,\lambda) = (g(v(y,\lambda),y,\lambda),\sigma(\lambda))$ *definētais attēlojums* $\psi\colon \mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}$, *ir homeomorfisms.*

Sekas 3.9 *Ja* T *ir homeomorfisms un ja nepārtrauktie attēlojumi* $u\colon \mathbf{X}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}$ *un* $v\colon \mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$ *apmierina* (3.1)–(3.4), *tad ar vienādību* $S(x,y,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda), g(v(y,\lambda),y,\lambda),\sigma(\lambda))$ *definētais attēlojums* $S\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}$ *ir homeomorfisms.*

3.4 Homeomorfismu ekvivalence. 1

Apskatām gadījumu, kad attēlojums T ir homeomorfisms.

Teorēma 3.10 *Ja homeomorfisms* T *apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H5**) *un ja nepārtrauktie attēlojumi* $x_0\colon \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$ *un* $y_0\colon \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}$ *ir tādi, ka*

$$f(x_0(\lambda),y_0(\lambda),\lambda) = x_0(\sigma(\lambda)) \text{ un } g(x_0(\lambda),y_0(\lambda),\lambda) = y_0(\sigma(\lambda)),$$

tad eksistē tāds homeomorfisms $H\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}$, *ka diagramma*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "S"] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}
\end{tikzcd}$$

komutē, kur $S(x,y,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda), g(v(y,\lambda),y,\lambda),\sigma(\lambda))$.

3.5 Neapgriežamu attēlojumu ekvivalence

Teorēma 3.11 *Ja nepārtrauktais attēlojums* T *apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**) *un ja nepārtraukts attēlojums* $u\colon \mathbf{X}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}$ *apmierina nosacījumus* (3.1) *un* (3.3), *tad eksistē nepārtraukts attēlojums* $q\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$, *kurš ir Lipšica* *attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, un homeomorfisms* $H\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$, *ka diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "R"] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \end{tikzcd}$$

komutē, kur $R(x,y,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda), g(q(x,y,\lambda),y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

Pieņemsim, ka eksistē nepārtraukts attēlojums $f_0\colon \mathbf{X}\times\boldsymbol{\Lambda}\to\mathbf{X}$, kurš apmierina nosacījumus:

(i) $\rho_1(x,x') \le c_1\rho_1(f_0(x,\lambda), f_0(x',\lambda))$ un $c_1 < 1$;

(ii) attēlojums $f_0(\cdot,\lambda)\colon \mathbf{X}\to\mathbf{X}$ ir surjektīvs.

Teorēma 3.12 *Ja nepārtrauktais attēlojums T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H4**), $\alpha(1+\gamma l) < 1$ *un*

$$\sup_{x,y,\lambda} \rho_1(f(x,y,\lambda), f_0(x,\lambda)) < +\infty, \tag{3.7}$$

tad eksistē nepārtraukts attēlojums $q\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}\to\mathbf{X}$, *kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, un homeomorfisms* $H\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}\to\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}$, *ka diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "N_1"] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \end{tikzcd}$$

komutē, kur $N_1(x,y,\lambda) = (f_0(x,\lambda), g(q(x,y,\lambda),y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

3.6 Homeomorfismu ekvivalence. 2

Teorēma 3.13 *Ja homeomorfisms T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H5**) *un ja nepārtrauktais attēlojums* $v\colon \mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}\to\mathbf{X}$ *apmierina nosacījumus* (3.2) *un* (3.4), *tad eksistē nepārtraukts attēlojums* $\theta\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}\to\mathbf{Y}$, *kurš ir Lipšica* *attēlojums attiecībā pret pirmo mainīgo, un homeomorfisms* $H\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y} \to \mathbf{X}\times\mathbf{Y}$*, ka diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "N"] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \end{tikzcd}$$

komutē, kur $N(x,y,\lambda) = (f(x,\theta(x,y,\lambda)), g(v(y,\lambda),y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

Pieņemsim, ka nepārtraukts attēlojums $g_0\colon \mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}$ apmierina nosacījumus:

(i) $\rho_2(g_0(y,\lambda), g_0(y',\lambda)) \le c_2\rho_2(y,y')$ un $c_2 < 1$;

(ii) attēlojums $(y,\lambda) \mapsto (g_0(y,\lambda), \sigma(\lambda))$ ir homeomorfisms.

Teorēma 3.14 *Ja homeomorfisms T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H5**)*, nepārtrauktais attēlojums* $u\colon \mathbf{X}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{Y}$ *apmierina nosacījumus* (3.1) *un* (3.3)*,* $\beta k + \delta < 1$ *un*

$$\sup_{x,y,\lambda} \rho_2(g(x,y,\lambda), g_0(y,\lambda)) < +\infty, \tag{3.8}$$

tad eksistē homeomorfisms $H\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda}$ *tāds, ka diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[d, "H"] \\ \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "R_0"] & \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\boldsymbol{\Lambda} \end{tikzcd}$$

komutē, kur $R_0(x,y,\lambda) = (f(x,u(x,\lambda),\lambda), g_0(y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

Pieņemsim, ka nepārtraukts attēlojums $f_0\colon \mathbf{X}\times\boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$ apmierina nosacījumus:

(i) $\rho_1(x,x') \le c_1\rho_1(f_0(x,\lambda), f_0(x',\lambda))$ un $c_1 < 1$;

(ii) attēlojums $(x,\lambda) \mapsto (f_0(x,\lambda), \sigma(\lambda))$ ir homeomorfisms.

Teorēma 3.15 *Ja homeomorfisms T apmierina nosacījumus* (**H1**)–(**H5**), *nepārtrauktais attēlojums $v\colon \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X}$ apmierina nosacījumus* (3.2) *un* (3.4), $\alpha(1+\gamma l) < 1$ *un*

$$\sup_{x,y,\lambda} \rho_1(f(x,y,\lambda), f_0(x,\lambda)) < +\infty, \tag{3.9}$$

tad eksistē homeomorfisms $H\colon \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda} \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda}$ tāds, ka diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "H"'] & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda} \arrow[d, "H"] \\
\mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda} \arrow[r, "N_0"] & \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \boldsymbol{\Lambda}
\end{tikzcd}$$

komutē, kur $N_0(x,y,\lambda) = (f_0(x,\lambda), g(v(y,\lambda),y,\lambda), \sigma(\lambda))$.

3.7 Piezīmes

Trešā nodaļa uzrakstīta pēc darbu [127, 130, 131, 132, 133, 136, 139, 140, 144, 145, 147] materiāliem.

4. Impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu ekvivalence

4.1 Ievads

Impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu dinamisko ekvivalenci pirmie sāka apskatīt autors un L. Sermone un mazliet vēlāk arī D. D. Bainovs, S. I. Kostadinovs un Nguyen Van Minhs. Dotajā nodaļā pierādītas redukcijas teorēmas dažādas modifikācijas impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām Banaha telpā (tai skaitā arī neapgriežamām sistēmām), ja sistēma sadalās divās daļās. Bieži redukcijas tipa teorēmas ir lietojamas jau reizi reducētai sistēmai, kas atļauj tālāk vienkāršot doto sistēmu. Izmantojot standarta paņēmienus var iegūt arī redukciju teorēmu lokālos variantus.

4.2 Pamatjēdzieni

Pieņemam, ka $\mathbf{X}$ un $\mathbf{Y}$ ir Banaha telpas. Ar $\mathcal{L}(\mathbf{X})$ un $\mathcal{L}(\mathbf{Y})$ apzīmējam lineāru ierobežotu operatoru Banaha telpas. Aplūkojam sekojošu impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\left\{\begin{array}{lcl} dx/dt & = & A(t)x + f(t,x,y), \\ dy/dt & = & B(t)y + g(t,x,y), \\ \Delta x|_{t=\tau_i} & = & x(\tau_i+0) - x(\tau_i-0) \\ & = & C_i x(\tau_i-0) + p_i(x(\tau_i-0), y(\tau_i-0)), \\ \Delta y|_{t=\tau_i} & = & y(\tau_i+0) - y(\tau_i-0) \\ & = & D_i y(\tau_i-0) + q_i(x(\tau_i-0), y(\tau_i-0)), \end{array}\right. \tag{4.1}$$

kur:

(i) attēlojumi $A\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{X})$ un $B\colon \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathbf{Y})$ ir lokāli integrējami Bohnera nozīmē;

(ii) attēlojumi $f\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$ un $g\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}$ ir lokāli integrējami Bohnera nozīmē attiecībā pret t fiksētiem x un y, un apmierina Lipšica nosacījumus

$$|f(t,x,y)-f(t,x',y')|\leq\varepsilon(|x-x'|+|y-y'|),$$

$$|g(t,x,y)-g(t,x',y')|\leq\varepsilon(|x-x'|+|y-y'|);$$

(iii) visiem $i\in\mathbb{Z}$, $C_i\in\mathcal{L}(\mathbf{X})$, $D_i\in\mathcal{L}(\mathbf{Y})$, attēlojumi $p_i\colon\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$, $q_i\colon\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}$ apmierina Lipšica nosacījumus

$$|p_i(x,y)-p_i(x',y')|\leq\varepsilon(|x-x'|+|y-y'|),$$

$$|q_i(x,y)-q_i(x',y')|\leq\varepsilon(|x-x'|+|y-y'|);$$

(iv) attēlojumi $(x,y)\mapsto(x+C_ix+p_i(x,y),y+D_iy+q_i(x,y))$, $x\mapsto x+C_ix$ ir homeomorfismi;

(v) impulsu momenti τ_i veido monotoni augošu virkni

$$\ldots<\tau_{-2}<\tau_{-1}<\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots,$$

kuras robežpunkti var būt vienīgi $\mp\infty$.

Dosim impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājuma un globālās dinamiskās ekvivalences jēdziena definīcijas.

Definīcija 4.1 Impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas *atrisinājums* ir gabaliem absolūti nepārtraukts attēlojums ar pirmā veida pārtraukumiem punktos $t=\tau_i$, kurš gandrīz visiem t apmierina impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu (4.1) un punktos $t=\tau_i$ apmierina "lēciena" nosacījumus.

Atzīmējam, ka nosacījums (iv) garantē (4.1) atrisinājuma turpināmību negatīvā virzienā. Nosacījums (v) kopā ar labās puses Lipšica nosacījumiem attiecībā pret x un y nodrošina atrisinājuma unitāti uz $\mathbb{R}$.

Apzīmējam ar $\varPhi(\cdot,s,x,y)=(x(\cdot,s,x,y),y(\cdot,s,x,y))\colon\mathbb{R}\to\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ sistēmas (4.1) atrisinājumu, kur $\varPhi(s+0,s,x,y)=(x(s+0,s,x,y),y(s+0,s,x,y))=(x,y)$. Pārtraukuma punktos τ_i visu atrisinājumu vērtības aprēķinātas punktos τ_i+0, ja nav speciāli norādīts. Tālāk lietosim saīsināto apzīmējumu $\varPhi(t)=(x(t),y(t))$.

Pieņemsim, ka $\mathbf{U}$ ir Banaha telpa. Apskatām divas impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas

$$du/dt=P(t,u),\ \ \varDelta u|_{t=\tau_i}=S_i(u(\tau_i-0)) \tag{4.2}$$

un

$$du/dt = Q(t,u), \ \ \Delta u|_{t=\tau_i} = T_i(u(\tau_i - 0)), \tag{4.3}$$

kuras apmierina atrisinājuma eksistences un unitātes teorēmas nosacījumus. Pieņemsim, ka maksimālais atrisinājuma eksistences intervals ir $\mathbb{R}$. Apzīmēsim ar $\phi(\cdot, s, u)\colon \mathbb{R} \to \mathbf{U}$ un $\psi(\cdot, s, u)\colon \mathbb{R} \to \mathbf{U}$ augstāk minēto sistēmu atrisinājumus attiecīgi. Pieņemsim, ka eksistē tāda funkcija $e\colon \mathbf{U} \to \mathbb{R}_+$, ka

$$\max\{|P(t,u) - Q(t,u)|, \sup_i |S_i(u) - T_i(u)|\} \leq e(u).$$

Definīcija 4.2 Divas impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas (4.2) un (4.3) ir *globāli dinamiski ekvivalentas*, ja eksistē tāds attēlojums $H\colon \mathbb{R} \times \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ un pozitīva konstante c ka:

(i) $H(t,\cdot)\colon \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ ir homeomorfisms;

(ii) $H(t, \phi(t,s,u)) = \psi(t,s,H(s,u))$ visiem $t \in \mathbb{R}$;

(iii) $\max\{|H(t,u) - u|, |H^{-1}(t,u) - u|\} \leq ce(u)$;

(iv) ja diferenciālvienādojumu sistēma ir autonoma un tā ir bez impulsa iedarbības, tad attēlojums H nav atkarīgs no t.

Atzīmēsim, ka bez nosacījumiem (iii) un (iv) dinamiskās ekvivalences jēdziens kļūst triviāls, jo šajā gadījumā ar vienādību $H(s,u) = \psi(s,0,\phi(0,s,u))$ definētais attēlojums H apmierina nosacījumus (i) un (ii). Ir svarīgi atzīmēt, ka klasiskajā globālajā Grobmaņa–Hartmana teorēmā autonomu diferenciālvienādojumu sistēmām atbilstošā funkcija ir $e(x) = a > 0$ un atbilstošā konstante c ir atkarīga tikai no lineārā tuvinājuma.

4.3 Palīglemmas

Apzīmējam ar $X(t,\tau)$ un $Y(t,\tau)$ lineāro impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= x(\tau_i + 0) - x(\tau_i - 0) = C_i x(\tau_i - 0) \end{cases}$$

un attiecīgi

$$\begin{cases} dy/dt &= B(t)y, \\ \Delta y|_{t=\tau_i} &= y(\tau_i + 0) - y(\tau_i - 0) = D_i y(\tau_i - 0) \end{cases}$$

evolūcijas operatorus. Apzīmējam ar

$$\nu_1 = \sup_s \int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||X(t,s)|\,dt + \sup_s \sum_{\tau_i \le s} |Y(s,\tau_i)||X(\tau_i - 0, s)|,$$

$$\nu_2 = \sup_s \int_{s}^{+\infty} |X(s,t)||Y(t,s)|\,dt + \sup_s \sum_{s < \tau_i} |X(s,\tau_i)||Y(\tau_i - 0, s)|$$

un

$$\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}.$$

Pieņemam, ka $\mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ ir to attēlojumu $u\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ kopa, kuri ir nepārtraukti ja $(t,x) \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \times \mathbf{X}$ un kuriem ir pirmā veida pārtraukumi, ja $t = \tau_i$. Attēlojumu kopa

$$\mathbf{B}_1 = \left\{ u \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \,\middle|\, \sup_{s,x} |u(s,x)| < +\infty \right\}$$

ir Banaha telpa, ja lietojam normu

$$\|u\| = \sup_{s,x} |u(s,x)|.$$

Ja $k > 0$, tad kopa

$$\mathbf{B}_1(k) = \{u \in \mathbf{B}_1 \mid |u(s,x) - u(s,x')| \le k|x - x'|\}$$

ir Banaha telpas $\mathbf{B}_1$ slēgta apakškopa. Apzīmējam ar

$$\mu_1 = \sup_s \left(\int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)|\,dt + \sum_{\tau_i \le s} |Y(s,\tau_i)| \right) < +\infty.$$

Lemma 4.3 *Ja $u, u' \in \mathbf{B}_1(k)$ un $\varepsilon(1+k)\nu_1 < 1$, tad pastāv novērtējums*

$$\int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||z(t) - z'(t)|\,dt + \sum_{\tau_i \le s} |Y(s,\tau_i)||z(\tau_i - 0) - z'(\tau_i - 0)|$$

$$\le \nu_1 \left(1 - \varepsilon\nu_1(1+k)\right)^{-1} \left(|x - x'| + \varepsilon\mu_1 \|u - u'\|\right),$$

kur $z\colon (-\infty, s] \to \mathbf{X}$ ir impulsīvas diferenciālvienādojuma sistēmas

$$\begin{cases} dz/dt &= A(t)z + f(t,z,u(t,z)), \;\; z(s) = x, \\ \Delta z|_{t=\tau_i} &= C_i z(\tau_i - 0) + p_i(z(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, z(\tau_i - 0))) \end{cases}$$

atrisinājums.

Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_1 = \left\{ u \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{X}, \mathbf{Y}) \,\middle|\, \sup_{s,x\neq 0} \frac{|u(s,x)|}{|x|} < +\infty \right\}$$

ir Banaha telpa, ja lietojam normu

$$\|u\| = \sup_{s,x\neq 0} \frac{|u(s,x)|}{|x|}.$$

Ja $k > 0$, tad kopa

$$\mathbf{N}_1(k) = \{u \in \mathbf{N}_1 \mid |u(s,x) - u(s,x')| \leq k|x - x'|\}$$

ir Banaha telpas $\mathbf{N}_1$ slēgta apakškopa.

Lemma 4.4 *Ja $u, u' \in \mathbf{N}_1(k)$, $f(t,0,0) = 0$, $p_i(0,0) = 0$ un $\varepsilon(1+k)\nu_1 < 1$, tad pastāv novērtējums*

$$\int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||z(t) - z'(t)|\, dt + \sum_{\tau_i \leq s} |Y(s,\tau_i)||z(\tau_i - 0) - z'(\tau_i - 0)|$$

$$\leq \nu_1 \left(1 - \varepsilon\nu_1(1+k)\right)^{-1} \left(|x - x'| + \varepsilon\nu_1(1 - \varepsilon\nu_1(1+k))^{-1}|x|\|u - u'\|\right),$$

kur $z\colon (-\infty, s] \to \mathbf{X}$ ir impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} dz/dt &= A(t)z + f(t,z,u(t,z)), \;\; z(s) = x, \\ \Delta z|_{t=\tau_i} &= C_i z(\tau_i - 0) + p_i(z(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, z(\tau_i - 0))) \end{cases}$$

atrisinājums.

Piezīme. Lemmas 4.3 un 4.4 paliek spēkā arī neapgriežamām impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām, ja nosacījums $\varepsilon(1+k)\nu_1 < 1$ ir aizvietots ar stingrāku nosacījumu

$$\varepsilon(1+k)\max\{\nu_1, \sup_i |(id_x + C_i)^{-1}|\} < 1.$$

Attēlojumu kopa

$$\mathbf{B}_2 = \left\{ v \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \,\middle|\, \sup_{s,y} |v(s,y)| < +\infty \right\}$$

ir Banaha telpa, ja lieto normu

$$\|v\| = \sup_{s,y} |v(s,y)|.$$

Ja $l > 0$, tad kopa

$$\mathbf{B}_2(l) = \{v \in \mathbf{B}_2 \mid |v(s,y) - v(s,y')| \le l|y - y'|\}$$

ir Banaha telpas $\mathbf{B}_2$ slēgta apakškopa. Apzīmējam ar

$$\mu_2 = \sup_s \left(\int_s^{+\infty} |X(s,t)|\, dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)| \right) < +\infty.$$

Lemma 4.5 *Ja* $v, v' \in \mathbf{B}_2(l)$ *un* $\varepsilon(1+l)\nu_2 < 1$, *tad pastāv novērtējums*

$$\int_s^{+\infty} |X(s,t)||w(t) - w'(t)|\, dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)||w(\tau_i - 0) - w'(\tau_i - 0)|$$

$$\le \nu_2 \left(1 - \varepsilon\nu_2(1+l)\right)^{-1} \left(|y - y'| + \varepsilon\mu_2\|v - v'\|\right),$$

kur $w\colon [s,+\infty) \to \mathbf{Y}$ *ir impulsīvas diferenciālvienādojuma sistēmas*

$$\begin{cases} dw/dt &= B(t)w + g(t, v(t,w), w), \;\; w(s) = y, \\ \Delta w|_{t=\tau_i} &= D_i w(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, w(\tau_i - 0)), w(\tau_i - 0)) \end{cases}$$

atrisinājums.

Analoģiski, attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_2 = \left\{ v \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \,\middle|\, \sup_{s,y\neq 0} \frac{|v(s,y)|}{|y|} < +\infty \right\}$$

ir Banaha telpa, ja ieved normu

$$\|v\| = \sup_{s,y\neq 0} \frac{|v(s,y)|}{|y|}.$$

Ja $l > 0$, tad kopa

$$\mathbf{N}_2(l) = \{v \in \mathbf{N}_2 \mid |v(s,y) - v(s,y')| \le l|y - y'|\}$$

ir Banaha telpas $\mathbf{N}_2$ slēgta apakškopa.

Lemma 4.6 *Ja* $v, v' \in \mathbf{N}_2(l)$, $g(t,0,0) = 0$, $q_i(0,0) = 0$ *un* $\varepsilon(1+l)\nu_2 < 1$, *tad pastāv novērtējums*

$$\int_s^{+\infty} |X(s,t)||w(t) - w'(t)|\, dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)||w(\tau_i - 0) - w'(\tau_i - 0)|$$

$$\leq \nu_2 \left(1 - \varepsilon\nu_2(1+l)\right)^{-1} \Big(|y - y'| + \varepsilon\nu_2(1 - \varepsilon\nu_2(1+l))^{-1}|y| \|v - v'\|\Big),$$

kur $w \colon [s, +\infty) \to \mathbf{Y}$ *impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} dw/dt &= B(t)w + g(t, v(t,w), w), \ w(s) = y, \\ \Delta w|_{t=\tau_i} &= D_i w(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, w(\tau_i - 0)), w(\tau_i - 0)) \end{cases}$$

atrisinājums.

Tālāk pieņemsim, ka

$$k = (2\varepsilon\nu_1)^{-1}(1 - 2\varepsilon\nu_1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_1})$$

un

$$l = (2\varepsilon\nu_2)^{-1}(1 - 2\varepsilon\nu_2 - \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_2}).$$

4.4 Invariantas kopas

Invariantām kopām ir liela nozīme ekvivalences teorijā.

Teorēma 4.7 *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$, $f(t,0,0) = 0$, $g(t,0,0) = 0$, $p_i(0,0) = 0$ *un* $q_i(0,0) = 0$, *tad eksistē viens un tikai viens attēlojums* $u \in \mathbf{N}_1(k)$ *un viens un tikai viens attēlojums* $v \in \mathbf{N}_2(l)$, *kuriem ir sekojošas īpašības:*

(i) $u(t, x(t,s,x,u(s,x))) = y(t,s,x,u(s,x))$ *visiem* $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $|u(s,x) - u(s,x')| \leq k|x - x'|$;

(iii) $$\int_s^{+\infty} |X(s,t)||y(t,s,x,y) - u(t, x(t,s,x,y))|\, dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)||y(\tau_i - 0, s, x, y) - u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0, s, x, y))| \leq \nu_2(1 - \varepsilon(1+k)\nu_2)^{-1}|y - u(s,x)|;$$

(iv) $v(t, y(t,s,v(s,y),y)) = x(t,s,v(s,y),y)$ *visiem* $t \in \mathbb{R}$;

(v) $|v(s,y) - v(s,y')| \leq l|y - y'|$;

(vi) $$\int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||x(t,s,x,y) - v(t, y(t,s,x,y))|\, dt + \sum_{\tau_i \leq s} |Y(s,\tau_i)||x(\tau_i - 0, s, x, y) - v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0, s, x, y))| \leq \nu_1(1 - \varepsilon(1+l)\nu_1)^{-1}|x - v(s,y)|.$$

Pierādījums. Fukcionālvienādojumiem

$$u(s,x) = \int_{-\infty}^{s} Y(s,\tau) g(\tau, z(\tau), u(\tau, z(\tau)))\, d\tau$$

$$+ \sum_{\tau_i \le s} Y(s,\tau_i) q_i(z(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, z(\tau_i - 0)))$$

un

$$v(s,y) = \int_{s}^{+\infty} X(s,\tau) f(\tau, v(\tau, w(\tau)), w(\tau))\, d\tau$$

$$+ \sum_{s < \tau_i} X(s,\tau_i) p_i(v(\tau_i - 0, w(\tau_i - 0)), w(\tau_i - 0))$$

Banaha telpā $\mathbf{N}_1(k)$ (attiecīgi $\mathbf{N}_2(l)$) eksistē viens un tikai viens atrisinājums, kur $z\colon (-\infty, s] \to \mathbf{X}$ ir impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} dz/dt &= A(t)z + f(t, z, u(t,z)),\ z(s) = x, \\ \varDelta z|_{t=\tau_i} &= C_i z(\tau_i - 0) + p_i(z(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, z(\tau_i - 0))) \end{cases}$$

un $w\colon [s, +\infty) \to \mathbf{Y}$ ir impulsīvas diferenciālvienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} dw/dt &= B(t)w + g(t, v(t,w), w),\ w(s) = y, \\ \varDelta z|_{t=\tau_i} &= D_i w(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, w(\tau_i - 0)), w(\tau_i)) \end{cases}$$

atrisinājumi.

Piezīme. Teoremas 4.7 nosacījumi (i)–(v) paliek spēkā arī neapgriežamām impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām, ja pievienojam papildus nosacījumu

$$2\varepsilon \sup_i |(id_x + C_i)^{-1}| < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_1}.$$

Teorēma 4.8 *Ja $4\varepsilon\nu \le 1$, $\sup_{t,x} |g(t,x,0)| < +\infty$, $\sup_{i,x} |q_i(x,0)| < +\infty$ un $2\varepsilon\mu_1 < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_1}$, tad eksistē viens un tikai viens attēlojums $u \in \mathbf{B}_1(k)$, kuram ir sekojošas īpašības:*

(i) $u(t, x(t,s,x,u(s,x))) = y(t,s,x,u(s,x))$ *visiem* $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $|u(s,x) - u(s,x')| \le k|x - x'|$;

(iii) $$\int_s^{+\infty} |X(s,t)||y(t,s,x,y) - u(t, x(t,s,x,y))|\, dt + \sum_{s<\tau_i} |X(s,\tau_i)||y(\tau_i - 0, s, x, y) - u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0, s, x, y))| \le \nu_2(1 - \varepsilon(1+k)\nu_2)^{-1}|y - u(s,x)|.$$

Piezīme. Teorēma 4.8 paliek spēkā arī neapgriežamām impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām, ja pievienojam papildus nosacījumu

$$2\varepsilon \sup_i |(id_x + C_i)^{-1}| < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_1}.$$

Teorēma 4.9 *Ja* $4\varepsilon\nu \le 1$, $\sup_{t,y} |f(t,0,y)| < +\infty$, $\sup_{i,y} |p_i(0,y)| < +\infty$ *un* $2\varepsilon\mu_2 < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_2}$, *tad eksistē viens un tikai viens attēlojums* $v \in \mathbf{B}_2(l)$, *kuram ir sekojošas īpašības:*

(iv) $v(t, y(t, s, v(s, y), y)) = x(t, s, v(s, y), y)$ *visiem* $t \in \mathbb{R}$;

(v) $|v(s, y) - v(s, y')| \le l|y - y'|$;

(vi) $$\int_{-\infty}^{s} |Y(s,t)||x(t,s,x,y) - v(t, y(t,s,x,y))|\, dt + \sum_{\tau_i \le s} |Y(s,\tau_i)||x(\tau_i - 0, s, x, y) - v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0, s, x, y))| \le \nu_1(1 - \varepsilon(1 + l)\nu_1)^{-1}|x - v(s, y)|.$$

4.5 Apgriežamu sistēmu dinamiskā ekvivalence. 1

Tālāk apskatām reducētu impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f(t, x, u(t, x)), \\ dy/dt &= B(t)y + g(t, v(t, y), y), \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_i(x(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0))), \\ \Delta y|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0)), y(\tau_i - 0)). \end{cases} \tag{4.4}$$

Pēdējā sistēma sadalās divās daļās. Pirmā no tām nesatur mainīgo y, kamēr otrā ir neatkarīga no x. Pieņemsim, ka $\Psi(\cdot, s, x, y) = (x_0(\cdot, s, x), y_0(\cdot, s, y)) \colon \mathbb{R} \to \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ ir sistēmas (4.4) atrisinājums, kur $\Psi(s + 0, s, x, y) = (x, y)$. Ievedīsim saīsināto apzīmējumu $\Psi(t) = (x_0(t), y_0(t))$.

Teorēma 4.10 *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$ *un attēlojumi* $u \colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *un* $v \colon \mathbb{R} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *apmierina nosacījumus* (i) – (vi), *tad impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (4.1) *un* (4.4) *ir globāli dinamiski ekvivalentas.*

Pierādījums. Teorēmas pierādījums sastāv no vairākiem soļiem.

Solis 1. Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_3 = \left\{ \kappa \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \;\middle|\; \sup_{s,x,y} \frac{|\kappa(s,x,y)|}{|y - u(s,x)|} < +\infty \right\}$$

ar normu
$$\|\kappa\| = \sup_{s,x,y} \frac{|\kappa(s,x,y)|}{|y - u(s,x)|}$$
ir Banaha telpa. Eksistē viens un tikai viens funkcionalvienādojuma

$$\kappa_1(s,x,y)$$
$$= \int_s^{+\infty} X(s,\tau)(f(\tau,\Phi(\tau)) - f(\tau, x(\tau) + \kappa_1(\tau,\Phi(\tau)), u(\tau, x(\tau) + \kappa_1(\tau,\Phi(\tau))))) \, d\tau$$
$$+ \sum_{s<\tau_i} X(s,\tau_i)(p_i(\Phi(\tau_i - 0))$$
$$-p_i(x(\tau_i - 0) + \kappa_1(\tau_i - 0, \Phi(\tau_i - 0)), u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0) + \kappa_1(\tau_i - 0, \Phi(\tau_i - 0)))))$$
atrisinājums telpā $\mathbf{N}_3$.

Solis 2. Attēlojumu kopa
$$\mathbf{N}_4 = \left\{ \lambda \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \;\middle|\; \sup_{s,x,y} \frac{|\lambda(s,x,y)|}{|x - v(s,y)|} < +\infty \right\}$$
ar normu
$$\|\lambda\| = \sup_{s,x,y} \frac{|\lambda(s,x,y)|}{|x - v(s,y)|}$$
ir Banaha telpa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\lambda_1(s,x,y)$$
$$= \int_{-\infty}^{s} Y(s,\tau)(g(\tau, v(\tau, y(\tau) + \lambda_1(\tau,\Phi(\tau))), y(\tau) + \lambda_1(\tau,\Phi(\tau))) - g(\tau,\Phi(\tau))) \, d\tau$$
$$+ \sum_{\tau_i \le s} Y(s,\tau_i)(q_i(v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0) + \lambda_1(\tau_i - 0, \Phi(\tau_i - 0))), y(\tau_i - 0)$$
$$+\lambda_1(\tau_i - 0, \Phi(\tau_i - 0))) - q_i(\Phi(\tau_i - 0)))$$
atrisinājums telpā $\mathbf{N}_4$.

Apzīmēsim ar $H_1(s,x,y) = (x + \kappa_1(s,x,y),\, y + \lambda_1(s,x,y))$. No atrisinājuma unitātes visiem $t \in \mathbb{R}$ iegūstam
$$H_1(t, \Phi(t,s,x,y)) = \Psi(t,s,H_1(s,x,y)).$$

Solis 3. Attēlojumu kopa
$$\mathbf{N}_3(l) = \{\kappa \in \mathbf{N}_3 \mid |\kappa(s,x,y) - \kappa(s,x,y')| \le l|y - y'|\}$$
ir Banaha telpas $\mathbf{N}_3$ slēgta apakškopa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\kappa_2(s,x,w)$$
$$= \int_s^{+\infty} X(s,\tau)(f(\tau,x_0(\tau),u(\tau,x_0(\tau))) - f(\tau,x_0(\tau)+\kappa_2(\tau,x_0(\tau),\eta(\tau)),\eta(\tau)))\,d\tau$$
$$+\sum_{s<\tau_i} X(s,\tau_i)(p_i(x_0(\tau_i-0),u(\tau_i-0,x_0(\tau_i-0)))$$
$$-p_i(x_0(\tau_i-0)+\kappa_2(\tau_i-0,x_0(\tau_i-0),\eta(\tau_i-0)),\eta(\tau_i-0))),$$
$$\eta(t) = Y(t,s)w + \int_s^t Y(t,\tau)g(\tau,x_0(\tau)+\kappa_2(\tau,x_0(\tau),\eta(\tau)),\eta(\tau))\,d\tau$$
$$+\sum_{s<\tau_i\le t} Y(t,\tau_i)q_i(x_0(\tau_i-0)+\kappa_2(\tau_i-0,x_0(\tau_i-0),\eta(\tau_i-0)),\eta(\tau_i-0))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_3(l)$.

Solis 4. Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_5 = \left\{\lambda \in \mathbf{PC}(\mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y},\mathbf{Y}) \;\middle|\; \sup_{s,x,y} \frac{|\lambda(s,x,y)|}{|x+\kappa_2(s,x,y)-v(s,y)|} < +\infty\right\}$$

ar normu

$$\|\lambda\| = \sup_{s,x,y} \frac{|\lambda(s,x,y)|}{|x+\kappa_2(s,x,y)-v(s,y)|}$$

ir Banaha telpa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\lambda_2(s,x,y) = \int_{-\infty}^s Y(s,\tau)(g(\tau,x_0(\tau)+\kappa_2(\tau,x_0(\tau),y_0(\tau)$$
$$+\lambda_2(\tau,\Psi(\tau))),y_0(\tau)+\lambda_2(\tau,\Psi(\tau))) - g(\tau,v(\tau,y_0(\tau)),y_0(\tau)))\,d\tau$$
$$+\sum_{\tau_i\le s} Y(s,\tau_i)(q_i(x_0(\tau_i-0)+\kappa_2(\tau_i-0,x_0(\tau_i-0),y_0(\tau_i-0)$$
$$+\lambda_2(\tau_i-0,\Psi(\tau_i-0))),y_0(\tau_i-0)+\lambda_2(\tau_i-0,\Psi(\tau_i-0)))$$
$$-q_i(v(\tau_i-0,y_0(\tau_i-0)),y_0(\tau_i-0)))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_5$.

Definējam attēlojumu H_2 ar vienādību

$$H_2(s,x,y) = (x+\kappa_2(s,x,y+\lambda_2(s,x,y)),y+\lambda_2(s,x,y)).$$

Tad attēlojums H_2 visiem $t\in\mathbb{R}$ apmierina funkcionālvienādojumu

$$H_2(t,\Psi(t,s,x,y)) = \Phi(t,s,H_2(s,x,y)).$$

Solis 5. Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_6 = \left\{\kappa \in \mathbf{PC}(\mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y},\mathbf{X}) \;\middle|\; \sup_{s,x,y} \frac{|\kappa(s,x,y)|}{|y+\lambda_2(s,x,y)-u(s,x)|} < +\infty\right\}$$

ar normu

$$\|\kappa\| = \sup_{s,x,y} \frac{|\kappa(s,x,y)|}{|y + \lambda_2(s,x,y) - u(s,x)|}$$

ir Banaha telpa. Triviālais atrisinājums ir vienīgais funkcionālvienādojuma

$$\kappa_3(s,x,y) = \int_s^{+\infty} X(s,\tau)(f(\tau, x_0(\tau), u(\tau, x_0(\tau)))$$

$$-f(\tau, x_0(\tau) + \kappa_3(\tau, \Psi(\tau)), u(\tau, x_0(\tau) + \kappa_3(\tau, \Psi(\tau))))) \, d\tau$$

$$+ \sum_{s<\tau_i} X(s,\tau_i)(p_i(x_0(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, x_0(\tau_i - 0))) - p_i(x_0(\tau_i - 0)$$

$$+\kappa_3(\tau_i - 0, \Psi(\tau_i - 0)), u(\tau_i - 0, x_0(\tau_i - 0) + \kappa_3(\tau_i - 0, \Psi(\tau_i - 0)))))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_6$.

Solis 6. Triviālais atrisinājums ir vienīgais funkcionālvienādojuma

$$\lambda_3(s,x,y) = -\int_{-\infty}^{s} Y(s,\tau)(g(\tau, v(\tau, y_0(\tau)), y_0(\tau))$$

$$-g(\tau, v(\tau, y_0(\tau) + \lambda_3(\tau, \Psi(\tau))), y_0(\tau) + \lambda_3(\tau, \Psi(\tau)))) \, d\tau$$

$$+ \sum_{\tau_i \le s} Y(s,\tau_i)(q_i(v(\tau_i - 0, y_0(\tau_i - 0) + \lambda_3(\tau_i - 0, \Psi(\tau_i - 0))), y_0(\tau_i - 0))$$

$$+\lambda_3(\tau_i - 0, \Psi(\tau_i - 0))) - q_i(v(\tau_i - 0, y_0(\tau_i - 0)), y_0(\tau_i - 0)))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_5$.

Solis 7. Atzīmējam, ka attēlojumi $\alpha_1 \colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ un $\beta_1 \colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$, kuri definēti ar vienādībām

$$\alpha_1(s,x,y)$$

$$= \kappa_2(s,x,y + \lambda_2(s,x,y)) + \kappa_1(s, x + \kappa_2(s,x,y + \lambda_2(s,x,y)), y + \lambda_2(s,x,y))$$

un

$$\beta_1(s,x,y) = \lambda_2(s,x,y) + \lambda_1(s, x + \kappa_2(s,x,y + \lambda_2(s,x,y)), y + \lambda_2(s,x,y))$$

arī attiecīgi apmierina soļu 5 un 6 funkcionālvienādojumus. Bez tam $\alpha_1 \in \mathbf{N}_6$ un $\beta_1 \in \mathbf{N}_5$. No šejienes $\alpha_1(s,x,y) = 0$ un $\beta_1(s,x,y) = 0$. Seko, spēkā identitāte

$$H_1(s, H_2(s,x,y)) = (x,y).$$

Solis 8. Attēlojumu kopa

$$\mathbf{N}_7 = \Big\{ \kappa \in \mathbf{PC}(\mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X}) \Big|$$

$$\left. \sup_{s,x,y,w} \frac{|\kappa(s,x,y,w)|}{\max\{|y-u(s,x)|, |y-w|\}} < +\infty \right\}$$

ar normu

$$\|\kappa\| = \sup_{s,x,y,w} \frac{|\kappa(s,x,y,w)|}{\max\{|y-u(s,x)|, |y-w|\}}$$

ir Banaha telpa. Kopa

$$\mathbf{N}_7(l) = \{\kappa \in \mathbf{N}_7 \mid |\kappa(s,x,y,w) - \kappa(s,x,y,w')| \le l|w-w'|\}$$

ir $\mathbf{N}_7$ slēgta apakškopa. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\kappa_4(s,x,y,w)$$

$$= \int_s^{+\infty} X(s,\tau)(f(\tau,\Phi(\tau)) - f(\tau, x(\tau) + \kappa_4(\tau,\Phi(\tau),\eta(\tau)),\eta(\tau)))\,d\tau$$

$$+ \sum_{s<\tau_i} X(s,\tau_i)(p_i(\Phi(\tau_i-0)) - p_i(x(\tau_i-0)$$

$$+\kappa_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0),\eta(\tau_i-0)),\eta(\tau_i-0))),$$

$$\eta(t) = Y(t,s)w + \int_s^t Y(t,\tau)g(\tau,x(\tau)+\kappa_4(\tau,\Phi(\tau),\eta(\tau)),\eta(\tau))\,d\tau$$

$$+ \sum_{s<\tau_i\le t} Y(t,\tau_i)q_i(x(\tau_i-0)+\kappa_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0),\eta(\tau_i-0)),\eta(\tau_i-0))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_7(l)$.

Solis 9. Eksistē viens un tikai viens funkcionālvienādojuma

$$\lambda_4(s,x,y) = -\int_{-\infty}^s Y(s,\tau)(g(\tau,\Phi(\tau))$$

$$-g(\tau,x(\tau)+\kappa_4(\tau,\Phi(\tau),y(\tau)+\lambda_4(\tau,\Phi(\tau))),y(\tau)+\lambda_4(\tau,\Phi(\tau))))\,d\tau$$

$$+ \sum_{\tau_i\le s} Y(s,\tau_i)(q_i(x(\tau_i-0)+\kappa_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0),y(\tau_i-0)$$

$$+\lambda_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0))),y(\tau_i-0)+\lambda_4(\tau_i-0,\Phi(\tau_i-0))) - q_i(\Phi(\tau_i-0)))$$

atrisinājums telpā $\mathbf{N}_4$.

Solis 10. Attēlojumi $\alpha_2\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}$ un $\beta_2\colon \mathbb{R}\times\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}$, kuri definēti ar vienādībām

$$\alpha_2(s,x,y,w) = \kappa_1(s,x,y) + \kappa_2(s,x+\kappa_1(s,x,y),w)$$

un

$$\beta_2(s,x,y) = \lambda_1(s,x,y) + \lambda_2(s,x+\kappa_1(s,x,y),y+\lambda_1(s,x,y))$$

arī attiecīgi apmierina soļu 8 un 9 funkcionālvienādojumus. Bez tam $\alpha_2 \in \mathbf{N}_7(l)$ un $\beta_2 \in \mathbf{N}_4$. No šejienes $\alpha_2(s,x,y,y) = 0$ un $\beta_2(s,x,y) = 0$. Iegūstam sekojošu identitāti

$$H_2(s, H_1(s,x,y)) = (x,y).$$

Ievērojot soļus 1, 2, 7 un 10, iegūstam, ka $H_1(s,\cdot)$ ir homeomorfisms, kurš realizē (4.1) un (4.4) globālo dinamisko ekvivalenci. Viegli pārliecināties, ka ja diferenciālvienādojumu sistēma (4.1) ir autonoma un nav impulsu iedarbības, tad attēlojumi u, v, H_1 un H_2 ir neatkarīgi no $s \in \mathbb{R}$. Atzīmēsim, ka mūsu gadījumā $e(x,y) = \varepsilon(|x| + |y|)$. Teorēma ir pierādīta.

4.6 Neapgriežamu sistēmu dinamiskā ekvivalence

Neapgriežamām impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmām nosacījumu (iv) aizvietojam ar nosacījumu:

(iv') attēlojums $x \mapsto x + C_i x$ ir homeomorfisms.

Teorēma 4.11 *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$ *un attēlojums* $u\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *apmierina* (i)–(iii), *tad eksistē attēlojums* $q\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$, *kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret trešo mainīgo, tāds ka impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (4.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f(t,x,u(t,x)), \\ dy/dt &= B(t)y + g(t,q(t,x,y),y), \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_i(x(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0))), \\ \Delta y|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i - 0) + q_i(q(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0), y(\tau_i - 0)), y(\tau_i - 0)) \end{cases} \tag{4.5}$$

ir dinamiski ekvivalentas, ja $t \geq s$.

Dosim citu pietiekamo nosacījumu divu impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmu dinamiskai ekvivalencei. Pieņemsim, ka eksistē attēlojumi $f_0\colon \mathbb{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ un $p_{i0}\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ lokāli integrējami Bohnera nozīmē attiecībā pret t fiksētam x un tādi ka

$$\sup_{t,x,y} |f(t,x,y) - f_0(t,x)| < +\infty;$$

$$\sup_{i,x,y} |p_i(x,y) - p_{i0}(x)| < +\infty;$$

$$|f_0(t,x) - f_0(t,x')| \leq \varepsilon|x - x'|;$$

$$|p_{i0}(x) - p_{i0}(x')| \leq \varepsilon|x - x'|.$$

Teorēma 4.12 *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$ *un* $2\varepsilon\mu_2 < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_2}$*, tad eksistē attēlojums* $q: \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$*, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret trešo mainīgo, tāds, ka impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (4.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f_0(t,x), \\ dy/dt &= B(t)y + g(t, q(t,x,y), y), \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_{i0}(x(\tau_i - 0)), \\ \Delta y|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i - 0) + q_i(q(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0), y(\tau_i - 0)), y(\tau_i - 0)) \end{cases} \tag{4.6}$$

ir dinamiski ekvivalentas, ja $t \geq s$*.*

4.7 Apgriežamu sistēmu dinamiskā ekvivalence. 2

Teorēma 4.13 *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$ *un attēlojums* $v: \mathbb{R} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *apmierina* (iv)–(vi)*, tad eksistē attēlojums* $\theta: \mathbb{R} \times \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$*, kurš ir Lipšica attēlojums attiecībā pret otro mainīgo, tāds ka impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (4.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f(t, x, \theta(t,x,y)), \\ dy/dt &= B(t)y + g(t, v(t,y), y), \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_i(x(\tau_i - 0), \theta(x(\tau_i - 0), y(\tau_i - 0))), \\ \Delta y|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0)), y(\tau_i - 0)) \end{cases} \tag{4.7}$$

ir globāli dinamiski ekvivalentas.

Pieņemsim, ka eksistē attēlojumi $g_0: \mathbb{R} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ un $q_{i0}: \mathbf{Y} \to \mathbf{Y}$ lokāli integrējami Bohnera nozīmē attiecībā pret t fiksētam y un, bez tam tie apmierina novērtējumus:

$$\sup_{t,x,y} |g(t,x,y) - g_0(t,y)| < +\infty;$$

$$\sup_{i,x,y} |q_i(x,y) - q_{i0}(y)| < +\infty;$$

$$|g_0(t,y) - g_0(t,y')| \leq \varepsilon |y - y'|;$$

$$|q_{i0}(y) - q_{i0}(y')| \leq \varepsilon |y - y'|.$$

Teorēma 4.14 *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$*,* $2\varepsilon\mu_1 < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_1}$*, attēlojums* $u: \mathbb{R} \times \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *apmierina* (i)–(iii) *un attēlojumi* $y \mapsto y + D_i y + q_{i0}(y)$ *ir homeomorfismi, tad impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (4.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt &= A(t)x + f(t, x, u(t,x)), \\ dy/dt &= B(t)y + g_0(t,y), \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= C_i x(\tau_i - 0) + p_i(x(\tau_i - 0), u(\tau_i - 0, x(\tau_i - 0))), \\ \Delta y|_{t=\tau_i} &= D_i y(\tau_i - 0) + q_{i0}(y(\tau_i - 0)) \end{cases} \tag{4.8}$$

ir globāli dinamiski ekvivalentas.

Teorēma 4.15 *Ja* $4\varepsilon\nu < 1$, $2\varepsilon\mu_2 < 1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon\nu_2}$, *attēlojums* $v\colon \mathbb{R} \times \mathbf{Y} \to \mathbf{X}$ *apmierina* (iv)–(vi) *un attēlojumi* $x \mapsto x + C_i x + p_{i0}(y)$ *ir homeomorfismi, tad impulsīvo diferenciālvienādojumu sistēmas* (4.1) *un*

$$\begin{cases} dx/dt & = & A(t)x + f_0(t,x), \\ dy/dt & = & B(t)y + g(t, v(t,y), y), \\ \Delta x|_{t=\tau_i} & = & C_i x(\tau_i - 0) + p_{i0}(x(\tau_i - 0)), \\ \Delta y|_{t=\tau_i} & = & D_i y(\tau_i - 0) + q_i(v(\tau_i - 0, y(\tau_i - 0)), y(\tau_i - 0)) \end{cases} \tag{4.9}$$

ir globāli dinamiski ekvivalentas.

4.8 Piezīmes

Ceturtajā nodaļa uzrakstīta pēc darbu [107, 109, 117, 122, 123, 124, 125, 126, 135, 141, 142, 143, 146, 148] materiāliem.

5. Lietojumi

5.1 Lietojumi stabilitātes teorijā

Pierādīsim, ka nepārtraukta attēlojuma $T\colon \mathbf{X}\times\mathbf{Y}\to\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$, kur

$$T(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$$

inducētās semidinamiskas sistēmas asimptotisko izturēšanos nosaka reducētā nepārtraukta attēlojuma $\varphi\colon \mathbf{X}\to\mathbf{X}$, kur

$$\varphi(x)=f(x,u(x)),$$

inducētā semidinamiskā sistēma.

Teorēma 5.1 *Ja attēlojumam T izpildās nosacījumi* (**H1**)–(**H4**) *un ir nekustīgais punkts $T(x_0,y_0)=(x_0,y_0)$, tad jebkuram $(x,y)\in\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ eksistē tāds $\xi\in\mathbf{X}$, ka*

$$\rho_1(x^n,x_0)\le l_1(k\beta+\delta)^n(\rho_2(y,y_0)+k\rho_1(x,x_0))+\rho_1(\xi^n,x_0),$$
$$\rho_2(y^n,y_0)\le (1+kl_1)(k\beta+\delta)^n(\rho_2(y,y_0)+k\rho_1(x,x_0))+k\rho_1(\xi^n,x_0)$$

un

$$\rho_1(\xi,x_0)\le l_1\rho_2(y,y_0)+(1+kl_1)\rho_1(x,x_0),$$

kur

$$T^n(x,y)=(f^n(x,y),g^n(x,y))=(x^n,y^n)$$

ir T n–tā iterācija un

$$l_1=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{(1-\alpha\delta)^2-4\alpha^2\beta\gamma}}.$$

Sekas 5.2 *Ja $\beta k+\delta\le 1$ un x_0 ir stabīls attēlojuma φ nekustīgais punkts, tad (x_0,y_0) ir stabīls attēlojuma T nekustīgais punkts. Ja $\beta k+\delta<1$ un x_0 ir* *asimptotiski stabīls attēlojuma φ nekustīgais punkts, tad (x_0, y_0) ir asimptotiski stabīls attēlojuma T nekustīgais punkts.*

Piemērs 5.3 Apskatām attēlojumu (2.1) un pieņemsim, ka $F(0,0) = 0$ un $G(0,0) = 0$. Saskaņā ar teorēmu 5.1 iegūstam novērtējumus

$$|x^n| \leq l_1(k\beta + \delta)^n(|y| + k|x|) + |\xi^n|,$$

$$|y^n| \leq (1 + kl_1)(k\beta + \delta)^n(|y| + k|x|) + k|\xi^n|,$$

kur

$$\xi^{n+1} = A\xi^n + F(\xi^n, u(\xi^n))$$

un

$$|\xi| \leq l_1|y| + (1 + kl_1)|x|.$$

5.2 Ēnas lemma

Pierādīsim, ka attēlojumam T ir ēnas īpašība.

Definīcija 5.4 Virkne $\{x^n, y^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ir attēlojuma T *orbita*, ja visiem $n \in \mathbb{Z}$

$$(x^{n+1}, y^{n+1}) = T(x^n, y^n).$$

Definīcija 5.5 Virkne $\{\zeta^n, \eta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ir attēlojuma T *Δ–pseidoorbita*, ja visiem $n \in \mathbb{Z}$

$$\max\{\rho_1(f(\zeta^n, \eta^n), \zeta^{n+1}), \rho_2(g(\zeta^n, \eta^n), \eta^{n+1})\} \leq \Delta.$$

Definīcija 5.6 Attēlojumam T *ir ēnas* īpašība, ja katram $e > 0$ eksistē tāds $\Delta > 0$, ka jebkura Δ–pseidoorbita $\{\zeta^n, \eta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ir e attālumā no īstās orbitas $\{x^n, y^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, t.i. visiem $n \in \mathbb{Z}$

$$\max\{\rho_1(x^n, \zeta^n), \rho_2(y^n, \eta^n)\} \leq e.$$

Teorēma 5.7 *Ja izpildās nosacījumi* (**H1**)–(**H4**) *un* $(1-\alpha)(1-\delta) > \alpha\beta\gamma$*, tad attēlojumam T ir ēnas īpašība.*

Piezīme. Teorēma 5.7 paliek spēkā *pozitīvas orbitas* un *pozitīvas Δ–pseidoorbitas* gadījumā.

Piemērs 5.8 Apskatīsim attēlojumu (2.1). Izlietojot teorēmu 5.7 iegūstam, ka attēlojumam (2.1) ir ēnas īpašība, ja

$$\varepsilon < \frac{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|)}{\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|}$$

un

$$e = \frac{\max\{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1), (1 - \|B\|)\}}{(\|A^{-1}\|^{-1} - 1)(1 - \|B\|) - \varepsilon(\|A^{-1}\|^{-1} - \|B\|)} \Delta.$$

5.3 Girotrona rezonatora vienādojums

Elektrona kustības girotrona rezonatorā vienādojuma standarta forma ir

$$p' + i(\Delta + |p|^2 - 1)p = iFf(t). \tag{5.1}$$

Apskatām neperturbēto vienādojumu ($f(t) \equiv 0$)

$$q' + i(\Delta + |q|^2 - 1)q = 0. \tag{5.2}$$

Definīcija 5.9 Divi diferenciālvienādojumi (5.1) un (5.2) ir *asimptotiski ekvivalenti*, ja eksistē tāds attēlojums $H\colon [t_0, +\infty) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ka:

(i) $H(t, \cdot)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ir homeomorfisms;

(ii) $H(t, p(t, t_0, p_0)) = q(t, t_0, H(t_0, p_0))$ visiem $t \in [t_0, +\infty)$;

(iii) $\lim_{t\to+\infty} |p(t, t_0, p_0) - q(t, t_0, H(t_0, p_0))| = 0$.

Teorēma 5.10 *Ja integrāļi* $\int_{t_0}^{+\infty} f(s)\,ds$ *un* $\int_{t_0}^{+\infty} (s-t_0)f(s)\,ds$ *konverģē absolūti, tad diferenciālvienādojumi* (5.1) *and* (5.2) *ir asimptotiski ekvivalenti.*

Sekas 5.11 Spēkā asimptotiskā izteiksme

$$p(t, t_0, p_0) = H(t_0, p_0) \exp\Big(i(1 - \Delta - |H(t_0, p_0)|^2)(t - t_0)\Big) + \delta(t, t_0, p_0),$$

kur

$$\lim_{t\to+\infty} \delta(t, t_0, p_0) = 0.$$

5.4 Piezīmes

Piektā nodaļa uzrakstīta pēc darbu [134, 137, 138, 33] materiāliem.

Literatūra

[1]E. Akin, *The general topology of dynamical systems*, Grad. Stud. Math., **1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[2]A. A. Andronov and L. S. Pontryagin, *Systemes grosiers*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **14** (1937), no. 5, 247–250.

[3]D. V. Anosov, *Many–dimensional analog of Hadamard's theorem*, Nauchn. Dokl. Vyssh. Shkoly. Ser. Fiz.–Mat. Nauk **1959**, no. 1, 3–12 (Russian).

[4]D. V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math. **90** (1967).

[5]V. I. Arnol'd, *Ordinary differential equations*, "Nauka", Moscow, 1971 (Russian).

[6]V. I. Arnol'd, *Lectures on bifurcations in versal families*, Uspekhi Mat. Nauk **27** (1972), no. 5, 119–184 (Russian), English transl. in Russian Math. Surveys **27** (1972), 54–123.

[7]B. Aulbach, *A reduction principle for nonautonomous differential equations*, Arch. Mat. **39** (1982), no. 3, 217–232.

[8]B. Aulbach, *Continuous and discrete dynamics near manifolds of equilibria*, Lecture Notes in Math., **1058**, Springer, Berlin, 1984.

[9]B. Aulbach and B. M. Garay, *Linearization and decoupling of dynamical and semidynamical systems*, in D. Bainov and V. Covachev (eds.), *The second colloquium on differential equations*, World Sci. Publishing, Singapore, 1992, pp. 15–27.

[10]B. Aulbach and B. M. Garay, *Linearizing the expanding part of noninvertible mappings*, Z. Angew. Math. Phys. **44** (1993), no. 3, 469–494.

[11]B. Aulbach and B. M. Garay, *Partial linearization for noninvertible mappings*, Z. Angew. Math. Phys. **45** (1994), no. 4, 505–542.

[12]D. D. Bainov, S. I. Kostadinov, Nguyen Hong Thai and P. P. Zabreiko, *Existence of integral manifolds for impulsive differential equations in a Banach space*, Internat. J. Theoret. Phys. **28** (1989), no. 7, 815–833.

[13]D. D. Bainov, S. I. Kostadinov, Nguyen Van Minh, Nguyen Hong Thai and P. P. Zabreiko, *Integral manifolds of impulsive differential equations*, J. Appl. Math. Stochastic Anal. **5** (1992), no. 2, 99–110.

[14]D. D. Bainov, S. I. Kostadinov and Nguyen Van Minh, *Dichotomies and integral manifolds of impulsive differential equations*, Science Culture Techn. Publishing, Singapore, 1994.

[15] D. D. Bainov and S. I. Kostadinov, *Abstract impulsive differential equations*, Descartes Press, Koriyama, 1996.

[16] P. W. Bates and K. Lu, *A Hartman–Grobman theorem for Cahn–Hillard equations and phases–field equations*, J. Dynam. Differential Equations **6** (1994), no. 1, 101–145.

[17] N. N. Bogolyubov, *On some statistical methods in mathematical physics*, AN USSR, L'vov, 1945 (Russian).

[18] N. N. Bogolyubov and Ju. A. Mitropol'skiĭ, *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*, Gordon and Breach, New York, 1962.

[19] P. Bohl, *Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage*, J. Reine Angew. Math. **127** (1904), no. 3–4, 179–276.

[20] M. A. Boudourides, *Topological equivalence of monotone nonlinear nonautonomous differential equations*, Portugal. Math. **41** (1982), no. 1–4, 287–294.

[21] M. A. Boudourides, *Hyperbolic Lipschitz homeomorphisms and flows*, in *Equadiff* 82, *Proceedings* 82, Lecture Notes in Math., **1017**, 1983, pp. 101–106.

[22] R. Bowen, *ω–limit sets for Axiom A diffeomorphisms*, J. Differential Equations, **18**, (1975), no. 2, 333–339.

[23] I. U. Bronshtein and V. A. Glavan, *The Grobman–Hartman theorem for extensions of dynamical systems*, Differentsial'nye Uravneniya **14** (1978), no. 8, 1504–1506 (Russian), English transl. in Differential Equations **14** (1978), no. 8, 1071–1073.

[24] B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman and V. V. Nemytskiĭ, *Theory of Lyapunov exponents*, "Nauka", Moscow, 1966 (Russian).

[25] J. Carr, *Applications of centre manifold theory*, Springer, Berlin, 1981.

[26] O. O. Chernikova, *A reduction principle for systems of differential equations that have impulses effect*, Ukrain. Mat. Zh. **34** (1982), no. 5, 601–607 (Russian), English trans. in Ukrainian Math. J. **34** (1983), 487–492.

[27] S. N. Chow, X. B. Lin and K. J. Palmer, *A shadowing lemma with applications in semi–linear parabolic equations*, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), no. 3, 547–557.

[28] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, McGraw–Hill, New–York, 1955.

[29] B. A. Coomes, H. Koçak and K. J. Palmer, *A shadowing theorem for ordinary differential equations*, Z. Angew. Math. Phys. **46** (1995), no. 1, 85–106.

[30] E. Cotton, *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (**3**) **28** (1911), 473–521.

[31] C. Coleman, *Local trajectory equivalence of differential systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), no. 5, 890–892.

[32] C. Coleman, *Addendum Ibid*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 770.

[33] O. Dumbrajs, R. Meyer–Spasche and A. Reinfelds, *Analysis of electron trajectories in a gyrotron resonator*, IEEE Trans. Plasma Science **26** (1998), no. 3, 846–853.

[34] N. Fenishel, *Persistence and smoothness of invariant manifolds and flows*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1971/72), no. 3, 193–226.

[35]D. M. Grobman, *Homeomorphisms of systems of differential equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **128** (1959), no. 5, 880–881 (Russian).

[36]D. M. Grobman, *Topological classification of neighborhoods of a singularity in n-space*, Mat. Sb. (N.S.) **56**(**98**) (1962), no. 1, 77–94 (Russian).

[37]D. M. Grobman, *Topological equivalence of dynamical systems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **175** (1967), no. 6, 1211–1212 (Russian).

[38]D. M. Grobman, *Topological equivalence in the large for systems of differential equations*, Mat. Sb. (N.S.) **73**(**115**) (1967), no. 4, 600–609 (Russian), English trans in Math. USSR, Sb. **2** (1967), 535–542.

[39]D. M. Grobman, *Homeomorphism of dynamical systems*, Differentsial'nye Uravneniya **5** (1969), no. 8, 1351–1359 (Russian), English transl. in Differential Equations **5** (1972), 995–1001.

[40]J. Hadamard, *Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Bull. Soc. Math. France **29** (1901), 224–228.

[41]J. K. Hale, *Integral manifolds of perturbed differential systems*, Ann. of Math. (**2**) **73** (1961), no. 3, 496–531.

[42]J. K. Hale, *Oscillations in nonlinear systems*, McGraw–Hill, New York, 1963.

[43]P. Hartman, *On local homeomorphisms of Euclidean spaces*, Bol. Soc. Mat. Mexicana (**2**) **5** (1960), no. 2, 220–241.

[44]P. Hartman, *A lemma in the theory of structural stability of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), no. 4, 610–620.

[45]P. Hartman, *On the local linearization of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **14** (1963), no. 4, 568–573.

[46]P. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Willey & Sons, New York, 1964.

[47]D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Springer, Berlin, 1981.

[48]M. W. Hirsch and C. C. Pugh, *Stable manifolds and hyperbolic sets*, in *Global analysis*. Proc. Sympos. Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1970, pp. 133–163.

[49]M. W. Hirsch, C. C. Pugh and M. Shub, *Invariant manifolds*, Lecture Notes in Math., **583**, Springer, Berlin, 1977.

[50]M. Irwin, *A classification of elementary cycles*, Topology **9**, (1970), no. 1, 35–47.

[51]A. Kelley, *The stable, center–stable, center, center–unstable, unstable manifolds*, J. Differential Equations **3** (1967), no. 4, 546-570.

[52]A. Kelley, *Stability of the center–stable manifold*, J. Math. Anal. Appl. **18** (1967), no. 2, 336–344.

[53]U. Kirchgraber, *Sur les propriétés géométriques au voisinage d'une variété invariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. **A 288** (1979), no. 9, 511–514.

[54]U. Kirchgraber, *The geometry in the neighbourhood of an invariant manifold and topological conjugacy*, Research Report 83–01, ETH Zürich, 1983.

[55]U. Kirchgraber and K. J. Palmer, *Geometry in the neighborhood of invariant manifolds of maps and flows and linearization*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **233**, Longman, Harlow, 1990.

[56] N. N. Ladis, *The structural stability of certain systems of differential equations*, Differentsial'nye Uravneniya **7** (1971), no. 3, 419–423 (Russian), English transl. in Differential Equations **7** (1971), 322–325.

[57] N. N. Ladis, *Topological equivalence of certain differential systems*, Differentsial'nye Uravneniya **8** (1972), no. 6, 1116–1119 (Russian), English transl. in Differential Equations **8** (1972), 856–859.

[58] N. N. Ladis, *Conditions for the structural stability of differential systems that splits*, Vestnik Beloruss. Gos. Univ. Ser. I Fiz. Mat. Mekh. **2** (1972), 18–19 (Russian).

[59] N. N. Ladis, *Topological equivalence of linear flows*, Differentsial'nye Uravneniya **9** (1973), no. 7, 1222–1235 (Russian), English transl. in Differential Equations **9** (1975), 938–947.

[60] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, *Theory of impulsive differential equations*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1989.

[61] S. Lattes, *Sur les équations fonctionelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation*, Ann. Mat. Pura Appl. (**3**) **13** (1906), 1–137.

[62] D. C. Lewis, *Invariant manifolds near an invariant point of unstable type*, Amer. J. Math. **60** (1938), no. 3, 577–587.

[63] K. Lu, *A Hartman–Grobman theorem for scalar reaction–diffusion equations*, J. Differential Equations **93** (1991), no. 2, 364–394.

[64] O. B. Lykova, *The reduction principle in Banach space*, Ukrain. Mat. Zh. **23** (1971), no. 4, 464–471 (Russian), English trans. in Ukrainian Math. J. **23** (1971), 391–397.

[65] Nguyen Van Minh, *On a topological classification of non–autonomous differential equations*, in B. Sz.–Nagy and L. Hatvani (eds.), *Qualitative theory of differential equations*, pp. 421–426, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **53**, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[66] Nguyen Van Minh, *A reduction principle for topological classification of nonautonomous differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. **A 123** (1993), no. 4, 621–632.

[67] V. D. Mil'man and A. D. Myshkis, *On the stability of motion in the presence of impulses*, Sibirsk. Mat. Zh. **1** (1960), no. 2, 233-237 (Russian).

[68] R. M. Mints, *Toplogical equivalence of singular points for system of three differential equations*, Nauchn. Dokl. Vyssh. Shkoly Fiz.–Mat. Nauk **1958**, no. 1, 19–24 (Russian).

[69] Ju. A. Mitropol'skiĭ and O. B. Lykova, *Integral manifolds in nonlinear mechanics*, "Nauka", Moscow, 1973 (Russian).

[70] J. Moser, *On a theorem of Anosov*, J. Differential Equations **5** (1969), no. 3, 411–440.

[71] Ju. I. Neĭmark, *Existence and structural stability of invariant manifolds of pointwise mappings*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz. **10** (1967), no. 3, 311–320 (Russian).

[72]Ju. I. Neĭmark, *The method of point transformations in the theory of nonlinear oscillations*, "Nauka", Moscow, 1972 (Russian).

[73]V. V. Nemytskiĭ, *Topological classification of singular points and generalized Lyapunov functions*, Differentsial'nye Uravneniya **3** (1967), no. 3, 359–370 (Russian), English transl. in Differential Equations **3** (1967), 179–185.

[74]S. E. Newhouse, *Lectures on dynamical systems*, in *Dynamical Systems*, Progr. Math., **8**, Birkhäuser, Boston, 1980, pp. 1–114.

[75]J. Ombach, *The simplest shadowing*, Ann. Polon. Math. **58** (1993), no. 3, 253–258.

[76]G. S. Osipenko, *Topological equivalence of differential equations*, Differentsial'nye Uravneniya **11** (1975), no. 8, 1366–1374 (Russian), English transl. in Differential Equations **11** (1976), 1023–1029.

[77]G. S. Osipenko, *Local dynamical equivalence of differential equations*, Differentsial'nye Uravneniya **12** (1976), no. 12, 2193–2200 (Russian), English transl. in Differential Equations **12** (1976), no. 12, 1530–1535.

[78]G. S. Osipenko, *Dynamical equivalence near invariant manifolds*, Differentsial'nye Uravneniya **14** (1978), no. 9, 1703–1705 (Russian), English transl. in Differential Equations **14** (1978), no. 9, 1214–1216.

[79]G. S. Osipenko, *The behavior of solutions of differential equations near invariant manifolds*, Differentsial'nye Uravneniya **15** (1979), no. 2, 262–271 (Russian), English transl. in Differential Equations **15** (1979), no. 2, 179–185.

[80]G. S. Osipenko, *Perturbation of dynamic systems near invariant manifolds. I*, Differentsial'nye Uravneniya **15** (1979), no. 11, 1967–1979 (Russian), English transl. in Differential Equations **15** (1979), no. 11, 1403–1412.

[81]G. S. Osipenko, *Perturbation of dynamic systems near invariant manifolds. II*, Differentsial'nye Uravneniya **16** (1980), no. 4, 620–628 (Russian), English transl. in Differential Equations **16** (1980), no. 4, 381–387.

[82]G. S. Osipenko, *On the problem of linearization in the neighborhood of invariant manifolds*, Differentsial'nye Uravneniya **17** (1981), no. 4, 638–642 (Russian), English transl. in Differential Equations **17** (1981), no. 4, 433–436.

[83]J. Palis, *On the local structure of hyperbolic fixed points in Banach spaces*, An. Acad. Brasil. Ci. **40** (1968), no. 3, 263–266.

[84]J. Palis and F. Takens, *Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems*, Topology **16** (1977), no. 4, 335–345.

[85]K. J. Palmer, *A generalization of Hartman's linearization theorem*, J. Math. Anal. Appl. **41** (1973), no. 3, 753–758.

[86]K. J. Palmer, *Linearization near an integral manifold*, J. Math. Anal. Appl. **51** (1975), no. 1, 243–255.

[87]K. J. Palmer, *Linearization of systems with an integral*, J. Math. Anal. Appl. **60** (1977), no. 3, 781–793.

[88]K. J. Palmer, *Linearization of reversible systems*, J. Math. Anal. Appl. **60** (1977), no. 3, 794–808.

[89]K. J. Palmer, *Topological equivalence and the Hopf bifurcation*, J. Math. Anal. Appl. **66** (1978), no. 3, 586–598.

[90] K. J. Palmer, *A characterization of exponential dichotomy in terms of topological equivalence*, J. Math. Anal. Appl. **69** (1979), no. 1, 8–16.

[91] K. J. Palmer, *Qualitative behavior of a system of ODE near an equilibrium point – a generalization of the Hartman–Grobman theorem*, Preprint No. 372, Universität Bonn, 1980.

[92] K. J. Palmer, *On the stability of the center manifold*, Z. Angew. Math. Phys. **38** (1987), no. 2, 273–278.

[93] K. J. Palmer, *Exponential dichotomies, the shadowing lemma and transversal homoclinic points*, Dynamics Reported, vol. 1, Teubner, Stuttgart, 1988, pp. 265–306.

[94] G. Papaschinopoulos, *On the summable manifold for discrete systems*, Math. Japon. **33** (1988), no. 3, 457–468.

[95] G. Papaschinopoulos, *Linearization near the summable manifold for discrete systems*, Studia Sci. Math. Hungar. **25** (1990), no. 3, 275–289.

[96] N. A. Perestyuk, *Invariant sets of a class of discontinuous dynamical systems*, Ukrain. Mat. Zh. **36** (1984), no. 1, 63–68 (Russian), English trans. in Ukrainian Math. J. **36** (1984), no. 1, 58–62.

[97] O. Perron, *Über Stabilität and asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen*, Math. Z. **29** (1928), no. 1, 129–169.

[98] V. A. Pliss, *The reduction principle in the theory of stability of motion*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **154** (1964), no. 5, 1044–1046 (Russian), English trans. in Soviet Math. Dokl. **5** (1964), 247–250.

[99] V. A. Pliss, *A reduction principle in the theory of stability of motion*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28** (1964), no. 6, 1297–1324 (Russian).

[100] V. A. Pliss, *On the theory of invariant surfaces*, Differentsial'nye Uravneniya **2** (1966), no. 9, 1139–1150 (Russian).

[101] V. A. Pliss, *Integral sets of periodic systems of differential equations*, "Nauka", Moscow, 1977 (Russian).

[102] C. C. Pugh, *On a theorem of P. Hartman*, Amer. J. Math. **91** (1969), no. 2, 363–367.

[103] C. C. Pugh and M. Shub, *Linearization of normally hyperbolic diffeomorphisms and flows*, Invent. Math. **10** (1970), no. 3, 187–198.

[104] H. Poincaré, *Sur le properties des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, Thése, Gautier–Villars, Paris, 1879.

[105] A. Reinfelds, *Global topological equivalence of nonlinear flows*, Differentsial'nye Uravneniya **8** (1972), no. 10, 1901–1903 (Russian), English transl. in Differential Equations **8** (1974), 1474–1476.

[106] A. Reinfelds, *Topological equivalence of differential equations with delayed truncation*, Differentsial'nye Uravneniya **9** (1973), no. 3, 465–468 (Russian), English transl. in Differential Equations **9** (1975), 356–358.

[107] A. Reinfelds, *A reduction theorem*, Differentsial'nye Uravneniya **10** (1974), no. 5, 838–843 (Russian), English transl. in Differential Equations **10** (1975), no. 5, 645–649.

[108] A. Reinfelds, *Topological equivalence of linear differential equations in a Banach space*, Latv. Mat. Ezhegodnik **15** (1974), 97–99 (Russian).

[109] A. Reinfelds, *A reduction theorem for closed trajectories*, Differentsial'nye Uravneniya **11** (1975), no. 10, 1811–1818 (Russian), English transl. in Differential Equations **11** (1976), 1353–1358.

[110] A. Reinfelds, *Conjugacy of flows in a Banach space*, Latv. Mat. Ezhegodnik **16** (1975), 233–240 (Russian).

[111] A. Reinfelds, *Dynamical equivalence of the full and truncated equation*, Latv. Mat. Ezhegodnik **19** (1976), 222–232 (Russian).

[112] A. Reinfelds, *Dynamical equivalence of differential equations in the neighborhood of a torus*, Latv. Mat. Ezhegodnik **21** (1977), 90–93 (Russian).

[113] A. Reinfelds, *Dynamic equivalence of differential equations in the neighborhood of an invariant manifold*, Latv. Mat. Ezhegodnik **24** (1980), 156–171 (Russian).

[114] A. Reinfelds, *Dynamical equivalence of dynamical systems in a neighbourhood of a torus*, in M. Farkas (ed.), *Qualitative theory of differential equations*, Vol. II, pp. 857–864, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **30**, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[115] A. Reinfelds, *The homeomorphism of dynamical systems in the neighborhood of a stable invariant manifold*, Differentsial'nye Uravneniya **19** (1983), no. 12, 2056–2065 (Russian). English transl. in Differential Equations **19** (1983), no. 12, 1491–1499.

[116] A. Reinfelds, *Dynamic equivalence near a conditionally stable invariant manifold*, Latv. Mat. Ezhegodnik **27** (1983), 119–121 (Russian).

[117] A. Reinfelds, *A generalized Grobman-Hartman theorem*, Latv. Mat. Ezhegodnik **29** (1985), 84–88 (Russian).

[118] A. Reinfelds, *Differential equations in the neighborhood of a stable invariant manifold in Banach space*, Differentsial'nye Uravneniya **21** (1985), no. 12, 2068–2071 (Russian), English transl. in Differential Equations **21** (1985), no. 12, 1387–1390.

[119] A. Reinfelds, *Dynamic equivalence in a neighborhood of an asymptotically stable manifold in a Banach space*, Latv. Mat. Ezhegodnik **30** (1986), 76–82 (Russian).

[120] A. Reinfelds, *Invariant sets in a metric space*, Latv. Mat. Ezhegodnik **30** (1986), 83–91 (Russian).

[121] A. Reinfelds, *Conjugation of homeomorphisms in a metric space*, Latv. Mat. Ezhegodnik **31** (1988), 236 (Russian).

[122] A. Reinfelds, *A reduction theorem for extensions of dynamical systems*, Latv. Mat. Ezhegodnik **33** (1989), 67–75 (Russian).

[123] A. Reinfelds, *Dynamical equivalence of dynamical extensions*, Reports of the extended sessions of the seminar of the I. N. Vekua Institute of Applied Mathematics **5** (1990), no. 3, 164–166 (Russian).

[124] A. Reinfelds and L. Sermone, *Equivalence of differential equations with impulse action*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **553** (1990), 124–130 (Russian).

[125] A. Reinfelds and L. Sermone, *Equivalence of nonlinear differential equations with impulse effect in Banach space*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **577** (1992), 68–73.

[126] A. Reinfelds, *Existence of central manifold for differential equations with impulses in a Banach space*, Latv. Univ. Zināt. Rakstі **577** (1992), 81–88.
[127] A. Reinfelds, *Invariant sets for splitting mapping in metric space*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **588** (1993), 35–44.
[128] A. Reinfelds, *Decoupling of mappings in a metric space*, Proc. Latv. Acad. Sci. Sect. **B 1994**, no. 2(559), 67–75.
[129] A. Reinfelds, *The reduction principle for discrete dynamical and semidynamical systems in metric spaces*, Z. Angew. Math. Phys. **45** (1994), no. 6, 933–955.
[130] A. Reinfelds, *Invariant sets for noninvertible mapping*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **592** (1994), 115–124.
[131] A. Reinfelds, *Partial decoupling of semidynamical system*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **593** (1994), 54–61.
[132] A. Reinfelds, *Partial decoupling for noninvertible mappings*, Differential Equations Dynam. Systems **2** (1994), no. 3, 205–215.
[133] A. Reinfelds, *The reduction principle for discrete dynamical and semidynamical systems in metric spaces*, in S. Bilchev and S. Tersian (eds.), *Differential equations and applications.* Proceedings of the fifth international conference on differential equations and applications, Rousse, Bulgaria, August 24–29, 1995. Union of Bulgarian Mathematicians, Rousse, 1995, pp. 94–102.
[134] A. Reinfelds, *The stability of semidynamical system in metric space*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **599** (1995), 140–145.
[135] A. Reinfelds, *A reduction theorem for systems of differential equations with impulse effect in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **203** (1996), no. 1, 187–210.
[136] A. Reinfelds, *Invariant sets and dynamical equivalence*, Proc. Est. Acad. Sci., Phys. Math. **45** (1996), no. 2–3, 216–225.
[137] A. Reinfelds, *The reduction of discrete dynamical and semidyna-mical systems in metric spaces*, in B. Aulbach and F. Colonius (eds.), *Six lectures on dynamical systems*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1996, pp. 267–312.
[138] A. Reinfelds, *The shadowing lemma in a metric space*, Univ. Iagel. Acta Math. **35** (1997), 205–210.
[139] A. Reinfelds, *Grobman's–Hartman's theorem for time–dependent difference equations*, Latv. Univ. Zināt. Raksti **605** (1997), 9–13.
[140] A. Reinfelds, *The reduction of discrete dynamical systems in metric space*, in S. Elaydi, I. Győri and G. Ladas (eds.), *Advances in difference equations.* Proceedings of the second international conference on difference equations, Veszprém, Hungary, August 7–11, 1995. Gordon and Breach, Yverdon, 1997, pp. 525–536.
[141] A. Reinfelds, *Decoupling of impulsive differential equations*, in R. Čiegis (ed.), *Mathematical modelling and complex analysis.* Proceedings of the second international conference "Mathematical modelling and complex analysis", Vilnius, Lithuania, June 3–4, 1997. "Technika", Vilnius, 1997, pp. 130–137.
[142] A. Reinfelds, *Decoupling of impulsive differential equations in a Banach space*, in C. Constanda, J. Saranen and S. Seikkala (eds.), *Integral methods in science and engineering. Volume one: analytic methods*, Pitman Res. Notes Math. Ser., **374**, Longman, Harlow, 1997, pp. 144–148.

[143] A. Reinfelds, *Dynamical equivalence of impulsive differential equations*, Nonlinear Anal. **30** (1997), no. 5, 2743–2752.

[144] A. Reinfelds, *Partial decoupling of semidynamical system in metric space*, J. Tech. Univ. Plovdiv Fundam. Sci. Appl. Ser. A Pure Appl. Math. **5** (1997), 33–40.

[145] A. Reinfelds, *Dynamical equivalence of dynamical systems*, Univ. Iagel. Acta Math. **36** (1998), 149–155.

[146] A. Reinfelds, *Partial decoupling of impulsive differential equations*, Latv. Univ. Zinād. Raksti **612** (1998), 107–114.

[147] A. Reinfelds, *The reduction principle for discrete dynamical systems in metric space*, J. Difference Equations Appl. (submitted).

[148] A. Reinfelds, *Partial decoupling of noninvertible impulsive differential equations*, Funct. Differ. Equ. (in print).

[149] A. Reiziņa and L. Reiziņš, *Topological classification of linear systems of differential equations*, Latv. Mat. Ezhegodnik **2** (1967), 261–264.

[150] L. Reiziņš, *A homeomorphism of a system of differential equations in neighbourhoods of closed trajectories*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **154** (1964), no. 6, 1280–1282, English transl. in Soviet Math. Dokl. **5** (1964), 290–293.

[151] L. Reiziņš, *A homeomorphism of systems of differential equations in neighbourhoods of closed trajectories*, Mat. Sb. **63(105)** (1964), no. 3, 392–408. (Russian)

[152] L. Reiziņš, *Local topological equivalence of systems of differential equations*, Differentsial'nye Uravneniya **4** (1968), no. 2, 199–214 (Russian), English transl. in Differential Equations **4** (1968), 99-107.

[153] L. Reiziņš, *Local equivalence of differential equations*, "Zinātne", Rīga, 1971 (Russian).

[154] L. Reiziņš, *Local equivalence of certain flows*, VII Internationale Konferenz über Nichtlineare Schwingungen (Berlin, 1975), vol. 1, no. 2, Akademie–Verlag, Berlin, 1977, pp. 163–169. (Russian).

[155] L. Reiziņš, *Local topological equivalence of differential equations*, in M. Farkas (ed.), *Differential equations*, pp. 355–363, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **15**, North–Holland, Amsterdam, 1977.

[156] A. M. Samoĭlenko and N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.

[157] L. Sermone, *Equivalence of linear differential equations with impulse effect*, Proc. Latv. Acad. Sci. Sect. **B 1994**, no. 2(559), 78–80.

[158] L. Sermone, *Reduction of differential equations with impulse effect*, J. Appl. Math. Stochastic. Anal. **10** (1997), no. 1, 79–87.

[159] A. N. Shoshitaĭshvili, *Bifurcations of topological type at singular points of parametrized vector fields*, Funktsional Anal. i Prilozhen. **6** (1972), no. 2, 97–98 (Russian), English trans. in Funct. Anal. Appl. **6** (1972), 169–170.

[160] A. N. Shoshitaĭshvili, *The bifurcation of the topological type of the singular points of vector fields that depend on parameters*, Trudy Sem. Petrovsk. **1** (1975), 279–309 (Russian).

[161] S. Sternberg, *On the behavior of invariant curves near a hyperbolic point of a surface transformation*, Amer. J. Math. **77** (1955), no. 3, 526–534.

[162] S. Sternberg, *Local contractions and a theorem of Poincaré*, Amer. J. Math. **79** (1957), no. 4, 809–824.

[163] E. M. Vaisbord, *About equivalence of systems of differential equations in the neighbourhood of singular point*, Nauchn. Dokl. Vyssh. Shkoly Fiz.–Mat. Nauk **1958**, no. 1, 37–42 (Russian).

[164] M. Yorinaga, *Invariant manifolds under a certain transformation*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A–I Math. **25** (1961), no. 2, 117–125.

[165] J. C. Wells, *Invariant manifolds of non–linear operators*, Pacific. J. Math. **62** (1976), no. 1, 285–293.