Version released: July 11, 2013

Latvijas Universitāte
Matemātikas un informātikas institūts

Kārlis Podnieks, Dr. math.

VARBŪTĪBAS

Mācību grāmata vidusskolām

Rīga 1992 (kļūdu labojumi – 2013)

Saturs

1. Trīs etīdes

Pirmā. X noķēra dīķī 32 zivis, iezīmēja tās un palaida atpakaļ dīķī. Pēc dažām dienām X noķēra dīķī 28 zivis, 10 no tām izrādījās iezīmētas. Cik pavisam zivju dzīvo dīķī? Nelasiet tālāk, neatbildējuši paši sev uz šo jautājumu.

Y noķēra savā dīķī 2 zivis, iezīmēja tās un palaida atpakaļ. Pēc dažām dienām Y noķēra 3 zivis, viena izrādījās iezīmēta. Cik zivju dzīvo Y dīķī?

Vienā gadījumā iznāca daļskaitlis, vai ne? Par to nav jābrīnās, jo apskatītajā veidā precīzi noteikt zivju skaitu dīķī nav iespējams. Nelasiet tālāk, neatbildējuši paši sev uz jautājumu: cik droši var ticēt katram no abiem iegūtajiem rezultātiem?

Uzdevumu risinājuma gaitai vajadzēja būt šādai. Pēc iezīmēto zivju ielaišanas X dīķī ir 32 iezīmētas zivis. Noķerot 28 zivis, 10 no tām izrādījās iezīmētas, t.i. iezīmētas bija 10/28 daļas noķerto zivju. Var domāt, ka, ja pēc iezīmēto 32 zivju ielaišanas dīķa zivis bija labi sajaukušās, tad aptuveni 10/28 daļas iezīmētu zivju ir arī dīķī kopumā. Tāpēc, ja x ir zivju kopskaits dīķī, tad $10x/28 \approx 32$ un $x \approx 90$.

Noteikums "zivis labi sajaukušās" ir būtisks. Ja sākumā noķertās 32 zivis ir no īpašas sugas, kura dzīvo tikai noteiktā dīķa stūrī (tajā, kur X tās noķēra), un dīķi apdzīvo vēl citas sugas, tad iegūtais rezultāts 90 ne tuvu neizsaka zivju kopskaitu. Labi apdomājiet šo momentu.

Otro uzdevumu var risināt analoģiski pirmajam: $x/3 \approx 2$, tātad $x \approx 6$. Diemžēl šim rezultātam absolūti nevar ticēt. Iegūtie dati neļauj apgalvot, ka dīķī dzīvo "aptuveni" 6 zivis. Arī tad, ja dīķī būtu 20 zivis un Y iezīmētu 2 no tām, nav neticami, ka pēc tam noķerot 3 zivis, no tām tikai viena būs iezīmēta.

Pirmā uzdevuma rezultātam var ticēt daudz drošāk. (Cik droši − to var pateikt tikai pēc diezgan sarežģītiem aprēķiniem.) Vēl drošāk varētu ticēt rezultātam 894, ja uzdevumā dotie skaitļi būtu 321, 284, 102.

Secinājums. Ja "eksperimenta" datos figurējošie skaitļi ir nelieli, tad nevar pielietot principu: iezīmēto zivju procents nozvejā ir aptuveni tāds pats kā zivju kopskaitā. Šo principu var lietot tikai **masveida** "eksperimentos", kad ir pietiekami daudz iezīmēto un nozvejoto zivju.

Uz līdzīgām idejām balstās t.s. **kvalitātes statistiskā kontrole**. Lielās izstrādājumu partijās grūti izsekot katra atsevišķa izstrādājuma kvalitātei. Pilnas pārbaudes vietā var pārbaudīt mazāku skaitu izstrādājumu, kuri "uz labu laimi" izvēlēti no dotās lielās partijas. Piemēram, ja sērijā ir pavisam 5000 detaļu, var izvēlēties pārbaudei tikai 100. Ja no šīm 100 derīgas izrādījās 95 detaļas, var diezgan droši apgalvot, ka arī 5000 detaļu sērijā brāķa procents nepārsniedz 5-7%. Izvēle "uz labu laimi" šeit ir ļoti svarīga, jo pārbaudot, piemēram, tikai pēdējās 100 detaļas (vai tikai katru 50. detaļu), nevar iegūt pietiekamu priekšstatu par visu sēriju.

Otrā etīde. Jau XIY gadsimtā tika izgudrota **īpašuma apdrošināšana**. Ideja šāda: katrs, kas vēlas apdrošināt savu īpašumu (piemēram, pret ugunsgrēku), iemaksā apdrošināšanas firmai noteiktu (nelielu) naudas summu. Ja apdrošinātais īpašums nodeg, īpašnieks saņem no firmas pilnu īpašuma vērtību naudā (tā ir summa, kas daudz lielāka par iemaksu). Varētu likties, ka šeit pārkāpts "naudas nezūdamības likums" − iemaksā maz, bet saņem daudz. Gluži tā nav. Nodeg taču tikai neliela daļa no visiem apdrošinātajiem īpašumiem. Tātad, tikai nedaudzi no īpašniekiem saņem lielās summas, toties visi iemaksā apdrošināšanas firmai katrs savu nelielo summu. Ģeniāls izgudrojums!

Jāatzīmē tomēr, ka ar vēlēšanos "palīdzēt cilvēcei" vien ir par maz, lai dibinātu apdrošināšanas firmu. Cik lielām jābūt īpašnieku iemaksām? Ja tās būs noteiktas par mazām, nauda ātri izsīks un firma bankrotēs. Ja iemaksas būs noteiktas pārāk lielas, reti kāds gribēs šķirties no tādas summas: tad jau labāk riskēt pazaudēt visu (šis risks parasti nav sevišķi liels).

Aplūkosim šādu (vienkāršotu) situāciju. Kādā pilsētā ir 10000 māju, katra 1000 dināru vērtībā. Ik gadu nodeg vidēji 80 mājas. Mūsu uzdevums ir organizēt šajā pilsētā apdrošināšanas firmu. Kādu iemaksas lielumu apdrošināšanas fondā noteikt? Pieņemsim, ka visi 10000 māju īpašnieki katru gadu iemaksā x dināru katrs, tad firmas ienākumi būs 10000x dināru gadā. Ik gadu nāksies izmaksāt kompensācijās vidēji $80\cdot1000=80000$ dināru. Tādi ir ikgadējie firmas izdevumi. Ienākumi nedrīkst būt mazāki, tātad $10000x\geq80000$ un $x\geq8$ dināriem.

Ja iemaksu noteiksim zemāku par 8 dināriem, firma ātri vien bankrotēs. Faktiski pat 8 dināri būtu par maz, jo jāņem vērā arī ugunsgrēku skaita svārstības pa gadiem (vienu gadu − 70, citu − 100), izdevumi firmas uzturēšanai (personāla algas, telpu īre, maksa par komunālajiem pakalpojumiem u.c.), valsts un vietējie nodokļi, kā arī firmas īpašnieka (t.i. mūsu) vēlēšanās, lai pasākums nestu peļņu. Tātad pie 80000 dināru izdevumiem jāpieskaita: rezerves fonds (pieņemsim, 30000), ekspluatācijas fonds (pieņemsim, 10000), nodokļi (pieņemsim, 5% no firmas ienākumiem) un firmas īpašnieka peļņa (pieņemsim, 5000). Ja tagad iemaksa tiks noteikta x dināru (gadā), tad kopējais ienākums būs 10000x gadā, bet izdevumi būs 125000+500x. Lai nedraudētu bankrots, vajag, lai pastāvētu nevienādība:

$$10000x\geq125000+500x,$$

tātad $9{,}5x \geq 125$ un $x \geq 13{,}2$ dināriem. Tāpēc 13,2 dināri gadā ir tā minimālā iemaksa, kas jāprasa no katra klienta, lai firma varētu sekmīgi darboties. Vai māju īpašnieki varēs to atļauties? Šķiet, varēs, jo 13,2 dināri ir tikai 1,3% no mājas vērtības (un tātad apmēram 76 gados iznāk iemaksāt pilnu mājas vērtību).

Šai vienkāršotajā piemērā mēs redzam, ka sekmīgai apdrošināšanas firmas darbībai nepieciešams visu laiku vākt ugunsgrēku skaita statistiku. Citādi var nonākt krāpnieka lomā. Svarīgi, lai ugunsgrēku procents būtu zināmā mērā ierobežots, tikai tad mūsu izdarītajiem aprēķiniem ir tā jēga, ko mēs tiem gribētu piešķirt. Ja, piemēram, apbūves blīvumam pieaugot, ugunsgrēku biežums kļūst lielāks, iemaksu apmēri jāpalielina vai arī jādiferencē atkarībā no katras mājas ugunsdrošības pakāpes (piemēram, no koka mājas īpašnieka var prasīt lielāku iemaksu nekā no mūra mājas īpašnieka). Lai šīs ieceres varētu īstenot konkrētos skaitļos, vajadzīga vēl sīkāka un pamatīgāka ugunsgrēku statistika.

Trešā etīde. Metot divus (kubiskus) spēļu kauliņus reizē, var izkrist punktu summa 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 vai 12. Vai visas summas krīt vienādi bieži? Nelasiet tālāk, nepamēģinājuši patstāvīgi atrast atbildi.

Metot vienu kauliņu, ja tas ir pilnīgi simetrisks, visi cipari (1, 2, 3, 4, 5, 6) krīt apmēram vienādi bieži. Tas ir svarīgs dabas likums. Ja kāds cipars krīt daudz biežāk nekā citi, mēs tūlīt domājam, ka kauliņam ir kāds defekts (nobīdīts smaguma centrs). Metot divus kauliņus A un B, vienādi bieži kritīs pāri (A1,B1), (A1,B2), (A2,B1), ..., (A6,B6). Pavisam te ir 36 iespējas (katra no kauliņa A sešām iespējām brīvi kombinējas ar kauliņa B sešām iespējām, tātad kopā iznāk $6 \cdot 6 = 36$ varianti).

Visas šīs iespējas var attēlot tabulā:

B \ A	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	56	66

Katrai no iespējām atbilst noteikta ciparu summa:

B \ A	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Katra no 36 kombinācijām krīt apmēram vienādi bieži, tāpēc, acīmredzot, visbiežāk jākrīt summai 7: sešos gadījumos no 36. Aiz 7 nāk 6 un 8: piecos gadījumos no 36. Visretāk, kā to azarta spēļu cienītāji jau būs ievērojuši, krīt summas 2 un 12 − tikai vienā gadījumā no 36.

1. uzdevums. Noskaidrojiet, kāda summa visbiežāk sastopama, metot trīs kauliņus reizē.

2. Varbūtības jēdziens

Praksē nereti jāsastopas ar norisēm, kuras dod dažādus rezultātus atkarībā no apstākļiem, kurus mēs nezinām vai arī nespējam ņemt vērā. Piemēram, metot spēļu kauliņu, mēs nevaram iepriekš paredzēt, kāds cipars uzkritīs, jo tas atkarīgs no ļoti daudziem apstākļiem, kurus mēs nespējam ņemt vērā: rokas kustības detaļas, tās virsmas īpatnības, uz kuru kauliņš krīt utml. Tāpat nevar iepriekš precīzi paredzēt, cik lietainu dienu būs nākamgad, nevar droši zināt, cik kļūdu būs skolniekam nākošajā kontroldarbā...

Nevajag tomēr domāt, ka šajās norisēs nav nekādu likumsakarību. Tiesa, atsevišķa "mēģinājuma" (kauliņa metiena, kontroldarba utt.) rezultātu iepriekš paredzēt mēs nespējam. Bet ja "mēģinājumus" **daudzreiz atkārto**? Daudzreiz metot kauliņu, var ievērot, ka visi cipari krīt apmēram vienādi bieži. Tā taču **ir** likumsakarība! Tātad, lai arī atsevišķs kauliņa metiens dod nejaušu, iepriekš neparedzamu rezultātu, garā metienu sērijā nejaušība daļēji zūd − parādās likumsakarība: dažādu ciparu krišanas biežums ir aptuveni viens un tas pats.

Precīzi runājot, biežums ir to "mēģinājumu" skaita, kuros mūs interesējošais rezultāts parādījās, attiecība pret visu "mēģinājumu" kopskaitu. Piemēram, spēļu kauliņu met 6000 reizes, sešinieks uzkrīt 980 gadījumos. Sešinieka biežums šajā sērijā tātad ir 980/6000. Tas ir diezgan tuvu skaitlim 1/6. Citā 6000 metienu sērijā var izrādīties, ka sešinieks uzkrīt 1025 reizes. Tomēr arī šeit biežums 1025/6000 1ir tuvu 1/6. Garās metienu sērijās visi seši cipari krīt apmēram vienādi bieži − tāpēc arī katra cipara biežums dažādās sērijās svārstās tuvu 1/6.

Līdzīgu gadījumu ir samērā daudz: katra atsevišķa "mēģinājuma" rezultātu paredzēt mēs nespējam, toties garā "mēģinājumu" sērijā mūs interesējošā rezultāta parādīšanās biežums svārstās tuvu kādam nemainīgam skaitlim. Piemēram, ir novērots, ka katram konkrētam šāvējam trāpījumu biežums mērķī (dotajos šaušanas apstākļos) gandrīz vienmēr ir aptuveni viens un tas pats (piemēram, 87 no 100), tikai ļoti nedaudz novirzoties no vidējās vērtības. (Ar laiku šī vidējā vērtība, protams, var izmainīties, tad mēdz teikt, ka šāvējs pilnveido savu māku − vai arī otrādi − "zaudē formu".)

Katrā no šādiem gadījumiem tātad eksistē kāds noteikts skaitlis, kas **objektīvi raksturo** spēļu kauliņu, šāvēju utt. un kuram apkārt visu laiku svārstās attiecīgā rezultāta (sešinieka uzkrišana, trāpījums mērķī utt.) parādīšanās biežums garās "mēģinājumu" sērijās. Šo skaitli, kura tuvumā svārstās rezultāta (vai "notikuma") parādīšanās biežums, pieņemts saukt par **varbūtību**. Ja mēs sakām, ka sešinieka uzkrišanas varbūtība ir 1/6, tas nozīmē, ka pietiekami garā spēļu kauliņa metienu sērijā aptuveni viena sestā daļa metienu dos sešnieku. (Sērijai obligāti jābūt garai, lai varbūtība spētu "sevi parādīt" − ja metienu skaits būs tikai daži desmiti, biežuma novirzes no varbūtības var būt ļoti lielas, piemēram, 18 metienu sērijā var uzkrist 5 sešinieki un nevis 3).

Tā vai cita notikuma varbūtību var tuvināti novērtēt, apkopojot statistiku: garās mēģinājumu sērijās jāsaskaita, cik gadījumos notikums parādījies un jāizdala šis skaitlis ar visu mēģinājumu kopskaitu sērijā. Tomēr pašas varbūtības pastāvēšana, protams, nav atkarīga no tā, vai mēģinājumus izdara vai nē. Tāpēc rodas dabisks jautājums: vai nevarētu izgudrot kādas metodes, kas ļautu noteikt dažādu notikumu varbūtības bez iepriekšējiem mēģinājumiem? Zinot tādas metodes, mēs varētu mēģinājumu rezultātus paredzēt uz priekšu (protams, ne jau atsevišķa meģinājuma rezultātu, bet gan garu sēriju rezultātus!). Praksē tas varētu būt ļoti noderīgi.

Aplūkosim šādu piemēru. Ņemsim slēgtu kasti, kuras vākā ir caurums. Ievietosim šai kastē 10 nelielas lodītes (5 baltas, 3 melnas, 2 sarkanas). Kastes saturu pamatīgi samaisīsim. (Jāatzīmē, ka literatūrā šo slaveno kasti visbiežāk sauc par urnu.) Izvilksim no urnas (neieskatoties tajā, t.i., "uz labu laimi") vienu lodīti. Jājautā: kāda varbūtība, ka izvilktā lodīte būs iepriekš izvēlētā krāsā, piemēram, baltā? Pilnīgi skaidrs, ka mums ir 5 iespējas no 10 izvilkt baltu lodīti, 3 no 10 − izvilkt melnu un 2 no 10 − sarkanu lodīti. Citiem vārdiem sakot, varbūtība izvilkt baltu, melnu vai sarkanu lodīti ir attiecīgi: 5/10, 3/10, 2/10.

Un tiešām, ja mēs šādus mēģinājumus ar lodītes vilkšanu daudzreiz atkārtotu (katru reizi atliekot izvilkto lodīti atpakaļ urnā un urnas saturu pamatīgi samaisot), mēs varētu pārliecināties, ka apmēram 50% visu gadījumu tiek izvilkta balta lodīte, 30% − melna un 20% − sarkana.

Līdzīgā veidā būtu risināmi uzdevumi par varbūtību noteikšanu, ja urnā ir arī jebkurš cits skaits lodīšu jebkurā skaitā krāsu.

Daudzi uzdevumi varbūtību noteikšanai viegli reducējami uz urnu ar lodītēm. Piemēram, monētas mešana. Monēta griezdamās un virpuļodama uzlido augstu gaisā: nokrītot zemē, tai virspusē ir vai nu "cipars", vai "ģērbonis". Liekas skaidrs, ka tos pašus rezultātus var iegūt, ņemot urnu ar 2 vienādām lodītēm − uz vienas uzrakstīts "cipars", uz otras − "ģērbonis". Monētas mešana ir līdzvērtīga lodītes vilkšanai no urnas. Abu lodīšu izvilkšana ir vienādi iespējama, tātad gan ciparam, gan ģērbonim jāpieraksta viena un tā pati varbūtība 1/2. Un tiešām, ja ilgi met monētu, var ievērot, ka cipars un ģērbonis krīt aptuveni vienādi bieži − uz katru iznāk vidēji 50% metienu.

Vēl viens piemērs. Kāda varbūtība, ka, metot spēļu kauliņu, uzkritīs cipars, kurš dalās ar 3? Kauliņa mešanai var būt seši iznākumi − 1, 2, 3, 4, 5, 6. Tā vietā varam iedomāties urnu ar 6 lodītēm, uz kurām uzrakstīts katrai savs cipars. Ar 3 dalās tikai 3 un 6; nokrāsosim šīs lodītes melnas, pārējās atstājot baltas. Urnā tātad ir 6 lodītes, no tām 2 melnas. Varbūtība izvilkt melnu lodīti tāpēc ir 2/6 = 1/3. Tāda pati ir varbūtība pie kauliņa mešanas uzkrist skaitlim, kurš dalās ar 3.

Un beidzot, atgriezīsimies pie uzdevuma, ko aplūkojām 1.sadaļas trešajā etīdē par kauliņu pāra mešanu. Kāda varbūtība, ka uzkritīs summa 7? Kauliņu pāra vietā var iedomāties urnu ar 36 lodītēm, uz katras uzrakstīts savs ciparu pāris: 11, 12, 21,...,66. Nodzēsīsim šos ciparus, vietā uzrakstot to summas. Tad uz katras lodītes atradīsies kāds skaitlis no 2 līdz 12. Skaitlis 7 būs uz 6 lodītēm (uz tām, uz kurām sākumā bija 16, 25, 34, 43, 52, 61). Tātad varbūtība izvilkt summu 7 iznāk 6/36 = 1/6. Varbūtība izvilkt summu 8 ir tikai 5/36, jo skaitlis 8 ir uz 5 lodītēm no 36 36(26, 35, 44, 53, 62). Un tiešām, ja ilgi met kauliņus, var ievērot, ka summa 7 krīt biežāk nekā summa 8 un citas summas.

Tagad nebūs grūti formulēt vispārīgo principu šādu uzdevumu risināšanai. Noteikums, ka lodītes urnā ir pamatīgi sajaukušās un ka lodīte jāvelk, neskatoties urnā, garantē, ka mums ir pilnīgi vienāds pamats sagaidīt, ka tiks izvilkta jebkura no lodītēm, kas atrodas urnā. Visu lodīšu izvilkšana ir vienādi iespējama. Ja lodīšu urnā ir pavisam 10, dabiski uzskatīt, ka katra no tām var tikt izvilkta ar varbūtību 1/10 (summā iznāk 1). Ja baltu lodīšu urnā ir 5 (no 10), tad varbūtībai izvilkt baltu jābūt 5/10 = 1/2. Līdzīgi jāspriež arī pārējos piemēros. **Pieredze rāda**, ka apskatītajā veidā izrēķinātās varbūtības arī ir tie pastāvīgie skaitļi, ap kuriem svārstās notikumu (baltas lodītes izvilkšana, summas 7 uzkrišana un tml.) parādīšanās biežums garās "mēģinājumu" sērijās. **Tas ir svarīgs dabas likums, bez kura varbūtību teorijai nebūtu nekādas praktiskas nozīmes.**

Tomēr ne mazāk skaidri jāapzinās, ka šis apgalvojums nav matemātiski pierādīts fakts, bet cilvēces simtiem gadu pieredzē no novērojumiem izkristalizējusies pārliecība. No matemātikas viedokļa tā pareizība nav pierādīta ne par vienu procentu vairāk kā, piemēram, Ņūtona likums: ķermenis, uz kuru neiedarbojas ārēji spēki, kustas taisnā virzienā ar nemainīgu ātrumu.

Vispārinot aplūkotos piemērus, nonākam pie šāda principa. Ja kādam procesam, to atkārtojot vienādos apstākļos, var būt n vienādi iespējami iznākumi, tad katram no tiem pierakstāma varbūtība $\frac{1}{n}$. Ja m iznākumus (no kopskaita n) pavada notikums A (piemēram, A = "uzkrīt summa 7"). tad notikumam A jāpieraksta varbūtība m/n. Simboliski:

$$P(A)=\frac{m}{n} \quad ,$$

ko lasa "A varbūtība" vai "varbūtība priekš A". Vārdiem to mēdz formulēt arī tā: notikuma varbūtība vienāda "labvēlīgo" iznākumu skaita attiecībai pret visu (vienādi iespējamo) iznākumu skaitu. Nedomājiet, ka tā ir varbūtības jēdziena definīcija. Šeit aprakstīta tikai varbūtību aprēķināšanas metode plašai uzdevumu klasei − kad izdodas izdalīt vienādi iespējamu "pamatnotikumu" sistēmu.

3. Varbūtību īpašības

Jebkura notikuma varbūtība ir reāls skaitlis, kas atrodas starp 0 un 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad .$$

Tajos gadījumos, kad lietojama iepriekšējā paragrāfā aprakstītā varbūtību aprēķināšanas metode, P(A) iznāk racionāls skaitlis. Šajos gadījumos viegli raksturot notikumus, kam P(A)=1 vai P(A)=0. Varbūtību 1 var pierakstīt tikai "obligātam" notikumam, piemēram, kauliņa mešanas gadījumā: "uzkritīs cipars, kas nepārsniedz 6". Varbūtība 0 pierakstāma **neiespējamiem** notikumiem, piemēram, "uzkritīs cipars 9".

Aplūkosim procesu, kas var dot n vienādi iespējamus iznākumus; pieņemsim, ka m iznākumos parādās notikums A. Tad $P(A)=\frac{m}{n}$. Bet līdzās A varam aplūkot notikumu "ne A" vai "nav A". Šis notikums (pēc definīcijas) parādās tieši tad, kad A neparādās, tātad n−m iznākumos no kopskaita n. Simboliski "ne A" pieņemts apzīmēt ar −A, tāpēc:

$$P(-A)=\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-P(A) \quad .$$

Dažkārt −A sauc arī par A pretējo notikumu, tāpēc var teikt, ka A pretējā notikuma varbūtība vienāda A varbūtības papildinājumam līdz skaitlim 1.

Aplūkosim tagad divus notikumus A un B, kuri var parādīties vienā un tajā pašā procesā. No A, B var izveidot divus saliktus notikumus "A vai B", "A un B". Notikums "A vai B" (simboliski pieņemts rakstīt A+B) parādās, ja parādās vismaz viens no abiem notikumiem (vai abi kopā). "A un B" (simboliski A·B vai vienkārši AB) parādās, ja A un B parādās vienlaicīgi. Ko var teikt par varbūtībām P(A+B), P(AB), zinot P(A) un P(B)?

Izrādās, ka

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Pierādījums. Pieņemsim, ka procesam, kurā var parādīties notikumi A, B, ir vienādi n iespējami iznākumi. Pieņemsim arī, ka no šiem iznākumiem notikums A parādās k gadījumos, bet notikums B parādās t gadījumos, bez tam, A un B parādās vienlaicīgi m gadījumos (dabiski, $m \le k$ un $m \le t$). Tas nozīmē, ka

$$P(A)=\frac{k}{n}, P(B)=\frac{t}{n}, P(AB)=\frac{m}{n} \quad .$$

Cik gadījumos parādīsies A+B (t.i., A vai B)? Varbūt k+t gadījumos? Diemžēl, summā k+t tie iznākumi, kuros A un B parādās kopā, ieiet divreiz (vienreiz pie k, otrreiz pie t). Šo iznākumu skaits ir m, resp., summa k+t satur m "liekas" vienības. Tātad A+B parādās k+t−m iznākumos un

$$P(A+B)=\frac{k+t-m}{n}=\frac{k}{n}+\frac{t}{n}-\frac{m}{n} \quad ,$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

Šis pierādījums kļūst uzskatāmāks, ja situāciju attēlo zīmējumā:

----------------|-----------A-----------|--------

--|-----------B------------|---------------------

----------------|----AB---|---------------------

--|----------------A+B-----------------|--------

Notikumus A, B sauc par **nesavienojamiem**, ja tie nekad neparādās kopā. Piemēram, metot monētu, cipars un ģērbonis nevar uzkrist reizē. Ja A, B ir nesavienojami, tad, protams, P(AB)=0 un tātad

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Šo pēdējo vienādību sauc par **varbūtību saskaitīšanas likumu**: nesavienojamu notikumu summas varbūtība vienāda atsevišķo notikumu varbūtību summai.

Iepriekšējā sadaļā mēs aplūkojām lodīšu vilkšanu no urnas, kurā bija 10 lodītes (5 baltas, 3 melnas un 2 sarkanas). Zinot, ka notikumam A "tiks izvilkta balta lodīte" un notikumam B "tiks izvilkta melna lodīte", varbūtības ir attiecīgi P(A)=5/10 un P(B)=3/10, un, ievērojot, ka A un B ir nesavienojami, mēs uzreiz varam rakstīt:

$$P(A+B)=\frac{5}{10}+\frac{3}{10}=\frac{8}{10} \quad .$$

Notikums A+B šeit nozīmē "tiks izvilkta balta vai melna lodīte". Pretējais notikums −(A+B) šai gadījumā nozīmē "tiks izvilkta sarkana lodīte". Tā varbūtība

$$P(-(A+B))=1-P(A+B)=1-\frac{8}{10}=\frac{2}{10} \quad .$$

Šajā vienkāršajā uzdevumā, protams, nebija vajadzības lietot rēķināšanā varbūtību saskaitīšanas likumu u.c. kārtulas. Visas varbūtības varēja aprēķināt tieši. Toties sarežģītākos uzdevumos tāda tieša rēķināšana ne vienmēr būs iespējama.

Piezīme. Saskaitīšanas likumu viegli pierādīt ne tikai diviem, bet arī jebkuram citam skaitam notikumu A_1, A_2, ..., A_k. Nepieciešams tikai, lai šie notikumi piedalītos vienā procesā un lai nevieni divi no tiem nebūtu savienojami. Tad:

$$P(A_1+A_2+...+A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k).$$

2.uzdevums. Pieņemsim, ka trīs notikumi A, B, C piedalās vienā procesā un ka mums zināmas varbūtības P(A), P(B), P(C), P(AB), P(AC), P(BC), P(ABC). Kā aprēķināt varbūtību P(A+B+C)?

Nelasiet tālāk, neatrisinājuši šo uzdevumu.

Tagad jūs redzat, ka notikumu summām varbūtības varētu aprēķināt itin viegli, ja mēs prastu rēķināt varbūtības notikumu reizinājumiem. Diemžēl vispārīgā gadījumā rēķināt varbūtības reizinājumiem nebūt nav vieglāk kā summām.

Ir zināms tikai viens speciāls gadījums, kad notikuma AB varbūtību var viegli izrēķināt, zinot varbūtības P(A), P(B). Tas ir gadījums, kad A un B ir **neatkarīgi notikumi**, t.i., kad A parādīšanās vai neparādīšanās nekādi neietekmē B parādīšanās apstākļus, un otrādi, B nekādi neietekmē A.

Piemērs. Dotas divas urnas, no kurām vienlaicīgi velk pa vienai lodītei, A = "no pirmās urnas izvilks melnu lodīti", B = "no otrās urnas izvilks melnu lodīti". Skaidrs, ka − notiks A vai nenotiks − tas nekādi neizmaina B iespējas notikt vai nenotikt. Un otrādi, B neietekmē A iespējas notikt. Šeit notikumi A, B ir neatkarīgi.

Piemērs. No vienas un tās pašas urnas izvelk vispirms vienu un pēc tam (**neatliekot pirmo atpakaļ**) − otru lodīti. A = "pirmā izvilktā lodīte būs melna", B = "otra izvilktā lodīte būs melna". Šie notikumi jau vairs nav neatkarīgi, jo, piemēram, A parādīšanās samazina B izredzes (melno lodīšu urnā kļuvis par vienu mazāk!). Toties, ja pirmo izvilkto lodīti atliktu atpakaļ un urnas rūpīgi samaisītu, tad tie paši notikumi A un B būtu jau neatkarīgi, jo A vairs neietekmētu B (un B neietekmē A, jo pats notiek vēlāk par A!).

Parādīsim tagad, kā rēķināt P(AB), ja A, B – neatkarīgi notikumi un varbūtības P(A), P(B) ir zināmas. Pieņemsim, ka notikums A piedalās procesā, kam ir n_1 vienādi iespējami iznākumi, no tiem m_1 iznākumi dod notikumu A. Notikums B piedalās citā, neatkarīgā procesā, kuram ir n_2 vienādi iespējami iznākumi, no tiem m_2 dod notikumu B. Aplūkosim tagad saliktu procesu, kurš sastāv no abiem iepriekš minētajiem. Acīmredzot šim saliktajam procesam ir n_1n_2 dažādi (vienādi iespējami) iznākumi, jo katrs no n_1 pirmā procesa iznākumiem var kombinēties ar jebkuru no n_2 otrā procesa iznākumiem. Cik no šiem saliktajiem n_1n_2 iznākumiem dos notikumu AB, t.i., A un B vienlaicīgi? Tā kā abi procesi ir neatkarīgi, tad tie m_1 pirmā procesa iznākumi, kas dod A, **pilnīgi brīvi** kombinējas ar tiem m_2 otra procesa iznākumiem, kas dod B. Kopā sanāk m_1m_2 kombinācijas. Tātad no n_1n_2 saliktā procesa iznākumiem m_1m_2 dod iznākumu AB. Simboliski:

$$P(AB)=\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=P(A)P(B) \quad .$$

Esam ieguvuši t.s. **varbūtību reizināšanas likumu**: neatkarīgu notikumu reizinājuma varbūtība vienāda atsevišķo notikumu varbūtību reizinājumam. Šo likumu mēs te izvedām divu notikumu gadījumam. Jums nebūs grūti pārliecināties, ka likums

$$P(A_1A_2...A_k) = P(A_1)\ P(A_2)\ ...\ P(A_k)$$

derīgs jebkuram skaitam k, ja vien notikumi $A_1, A_2, ..., A_k$ ir neatkarīgi, t.i., ja neviena notikuma parādīšanās vai neparādīšanās neietekmē citu notikumu parādīšanās apstākļus.

Piemērs. Met divus spēļu kauliņus reizē. A = "uz pirmā kauliņa uzkritīs cipars 1", B = "uz otrā kauliņa uzkritīs cipars 6". A+B nozīmē "uz pirmā 1 vai uz otrā 6". Mēs jau zinām, ka

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Zinām arī, ka P(A)=P(B)= 1/6. Atliek atrast P(AB). Notikumi A, B ir neatkarīgi (pārdomājiet to!), tātad:

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\quad .$$

Rezultātā:

$$P(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}\quad .$$

Šo varbūtību varēja aprēķināt arī tieši: no 36 vienādi iespējamiem ciparu pāriem notikumu A+B dod 11 pāri:

11, 12, 13, 14, 15, 16, 26, 36, 46, 56, 66,

tātad P(A+B) = 11/36, kas sakrīt ar "teorētisko" iznākumu.

3.uzdevums. Trīs reizes pēc kārtas tiek mesta monēta. Kāda varbūtība, ka vismaz vienu reizi uzkritīs cipars? Tiek mesti trīs spēļu kauliņi reizē. Kāda varbūtība, ka uzkritīs vismaz viens skaitlis, kas lielāks par 2?

4.uzdevums. Jefreitors X trāpa mērķī vidēji 67 gadījumos no 100. Cik reizes viņam jāizšauj, lai varbūtība "trāpīt mērķī vismaz vienreiz" būtu ne mazāka par 0,99? Šo uzdevumu var reducēt uz urnu ar lodītēm: jefreitors X velk lodītes no urnas, kurā ir 100 lodītes (67 sarkanas un 33 baltas). Pēc katras vilkšanas lodīti ieliek atpakaļ urnā un urnas saturs tiek samaisīts.

5.uzdevums. Urnā ir 1000 lodītes, sanumurētas ar skaitļiem 1, 2, 3, ..., 1000. Kāda varbūtība, ka, velkot vienu lodīti, uz tās būs pilna pakāpe (t.i., vesela skaitļa kvadrāts, kubs, ceturtā pakāpe utt.)?

4. Kombinatorikas lietošana varbūtību teorijā

Monētu met 10 reizes pēc kārtas. Kāda varbūtība, ka cipars uzkritīs tieši 4 reizes? Šo uzdevumu grūti atrisināt ar tiešu skaitīšanu, jo te ir 2^{10} =1024 vienādi iespējami iznākumi (tieši tik ir ciparu un ģērboņu virknīšu garumā 10). Izrādās, ka no šiem 1024 iznākumiem tieši

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210$$

dod četrus ciparus (un sešus ģērboņus). Tātad meklētā varbūtība ir aptuveni 0,205.

Sastādīt sarakstu no visiem 210 gadījumiem, kad uzkrīt 4 cipari, būtu pārāk apgrūtinoši. Bet, ja 10 metienu vietā ņemtu 20, tad sarakstu sastādīt vispār nebūtu fiziski iespējams. Tomēr, kā redzat, skaitli 210 varēja iegūt arī vienkāršākā ceļā − kā izteiksmes

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

vērtību. Izstrādāt metodes, kuras ļauj visu gadījumu uzskaitīšanu aizstāt ar vienkāršākiem aprēķiniem − tas ir īpašas matemātikas nozares − **kombinatorikas** uzdevums. Atcerēsimies galvenos kombinatorikas rezultātus.

1. Ja doti n dažādi priekšmeti, tos var izvietot vienā rindā $n!=n(n-1)(n-2)...2\cdot 1$ veidos (n! lasa "en faktoriāls"). Piemēram, $4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$.

2. Ja alfabētā ir k burtu, tad no tiem var izveidot pavisam k^m dažādu vārdu garumā m. Piemēram, ja alfabēts sastāv no 0 un 1, tad iespējami $2^3 = 8$ dažādi vārdi garumā 3:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

3. No kopas, kas sastāv no n dažādiem priekšmetiem, jāizvēlas m priekšmeti ($0\le m\le n$). Cik veidos to var izdarīt? Teorija atbild:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m(m-1)...1}$$

veidos. (Simbolu C_n^m lasa "kombinācijas no n pa m.) Piemēram:

$$C_{10}^4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=210 \quad .$$

Šeit gan saucējā, gan skaitītājā ir 4 (t.i. m) reizinātāji, skaitītājā reizinājums sākas ar 10 (t.i. ar n).

4. Kombināciju īpašības:

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

(šeit der arī m=0, jo C_n^0 =1 pēc definīcijas),

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n.$$

Pirmā īpašība dažreiz ļauj vienkāršot aprēķinus: piemēram, tiešā veidā rēķinot:

$$C_{10}^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \quad ,$$

bet, izmantojot pirmo īpašību:

$$C_{10}^7 = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \quad .$$

Atgriezīsimies tagad pie uzdevuma, ar kuru sākās šī sadaļa. Desmit reizes pēc kārtas met monētu. Kāda varbūtība, ka uzkritīs tieši četri cipari (un seši ģērboņi)? Apzīmēsim ciparu ar 1 un ģērboni ar 0. Desmit metienu rezultātu tad var pierakstīt kā nuļļu un vieninieku virknīti (t.i., kā vārdu alfabētā, kurš sastāv no diviem burtiem: 0 un 1), piemēram: 0010111010. Visas šādas virknītes ir vienādi iespējamas. To kopskaits ir 2^{10} =1024 (sk. pieminēto otro kombinatorikas rezultātu). Lai aprēķinātu prasīto varbūtību ("būs 4 cipari"), atliek saskaitīt, cik virknītes no visām 1024-ām satur tieši 4 vieniniekus. Šādu virknīšu būs tik, cik veidos no skaitļiem 1, 2, ...,10 var izvēlēties četrus skaitļus (to vietu numurus virknītē, kurās jābūt vieniniekiem), t.i.,

$$C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210 \quad .$$

Meklējamā varbūtība tāpēc ir

$$\frac{210}{1024} \approx 0{,}205 \quad .$$

(Varbūtību parasti ieteicams izteikt tuvinātā decimāldaļā, tā var labāk novērtēt tās lielumu, salīdzinot ar citām varbūtībām.)

Nedaudz grūtāk ir risināt līdzīgu uzdevumu spēļu kauliņa mešanai: kāda varbūtība, ka 10 kauliņa metienu rezultātā uzkritīs **tieši** 4 sešinieki (un 6 "nesešinieki")? Arī šeit mēs katra metiena rezultātu varam atzīmēt ar ciparu 1 (uzkritis sešinieks) vai 0 (uzkritis "nesešinieks"). Desmit metienu sērijas rezultātu arī var pierakstīt kā ciparu virknīti $x_1\ x_2\ ...\ x_{10}$ (šeit katrs x_i ir 0 vai 1). Notikums B = "10 metienos uzkritīs tieši $x_1\ x_2\ ...\ x_{10}$" ir reizinājums no 10 notikumiem $A_1, A_2, A_3, ..., A_{10}$, kur

$$A_i = \text{"i-tajā metienā uzkritīs } x_i\text{".}$$

Skaidrs, ka $P(A_i)=1/6$, ja $x_i=1$ un $P(A_i)=5/6$, ja $x_i=0$. Bez tam notikumi A_i ir savā starpā neatkarīgi (tie parādās dažādos metienos!). Tātad:

$$P(B) = P(A_1A_2...A_{10}) = P(A_1)\,P(A_2)\,...\,P(A_{10}) = \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^t ,$$

kur k − vieninieku skaits virknītē, t − nuļļu skaits tajā. Notikums C = "10 metienos uzkritīs 4 vieninieki un 6 nulles" ir summa no 210 **nesavienojamiem** notikumiem B_a, kur a ir jebkura virknīte, kas satur tieši 4 vieniniekus un 6 nulles (šādu virknīšu ir pavisam 210). Visiem a:

$$P(B_a)=\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 ,$$

tāpēc, pielietojot varbūtību saskaitīšanas likumu (3.sadaļa), iegūstam:

$$P(C)=210\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0{,}054 .$$

6. uzdevums. Vispāriniet šo spriedumu, aplūkojot procesu, kurā notikums A parādās ar varbūtību p ($0 \le p \le 1$). Pierādiet, ka atkārtojot šo procesu n reizes ($n \ge 1$), notikums A parādīsies tieši m reizes ($0 \le m \le n$) ar varbūtību $C_n^m\, p^m(1-p)^{n-m}$.

7. uzdevums. Monētu met 10 reizes. Kāda varbūtība, ka uzkritīs vismaz 3 ģērboņi? Spēļu kauliņu met 5 reizes. Kāda varbūtība, ka uzkritīs tieši 2 sešinieki? Vienlaicīgi met trīs monētas un trīs spēļu kauliņus. Kāda varbūtība, ka uzkritušo ģērboņu skaits sakritīs ar uzkritušo sešinieku skaitu?

8. uzdevums. Septiņi grenadieri izklaidējās, šaujot mērķī. Pavisam doti 3 mērķi. Uz katru mērķi grenadieri šauj visi reizē (vienu šāvienu katrs). Trīs no viņiem mēdz trāpīt vidēji 70 gadījumos no 100, pārējie četri − 60 gadījumos no 100. Kāda varbūtība, ka vismaz viens no mērķiem paliks nesašauts?

5. Nosacītās varbūtības

Divus notikumus A, B mēs nosaucām par neatkarīgiem, ja process, kurā parādās A, neietekmē tā procesa apstākļus, kurā var parādīties B, un otrādi. Šis noteikums ne vienmēr izpildās.

Piemērs. Urnā ir 10 lodītes: 3 baltas un 7 melnas. Izvilksim no urnas vispirms vienu lodīti un pēc tam (neatliekot pirmo atpakaļ) − otru. Aplūkosim divus notikumus:

A = "pirmā izvilktā lodīte ir balta",

B = "otrā izvilktā lodīte ir balta".

Ja notikums A ir iestājies, tad urnā palikušas 2 baltas un 7 melnas lodītes, un varbūtība pēc tam izvilkt baltu lodīti (t.i., notikuma B varbūtība) ir 2/9. Toties, ja iestājies notikums "ne A" (t.i., pirmā izvilktā lodīte bija melna), tad urnā palikušas 3 baltas un 6 melnas lodītes, tātad šai gadījumā B parādās ar varbūtību 3/9. Kā redzat, notikuma B parādīšanās apstākļi ir atkarīgi no tā, vai notikums A iestājies vai nē.

Varbūtību, ka notikums B parādīsies **pie nosacījuma**, ka parādījies notikums A, apzīmēsim ar P(B|A) (lasa "B varbūtība, ja A"). Mūsu piemērā P(B|A)=2/9. Analoģiski, P(B|−A)=3/9 (atcerēsimies, ka −A apzīmē notikumu "ne A"). Abas šīs nosacītās varbūtības atšķiras no notikuma B **pilnās varbūtības** P(B) (iepriekšējos paragrāfos mēs aplūkojām tikai pilnās varbūtības).

Varbūtību P(B) mūsu piemērā var aprēķināt šādi. Sanumurēsim visas 10 lodītes ar skaitļiem 1, 2, ...,10, numuri 1, 2, 3 lai tiek baltajām lodītēm. Divām secīgām lodīšu vilkšanām no urnas (pirmā izvilktā lodīte netiek likta atpakaļ) ir šādi vienādi iespējami iznākumi:

(1,2) (1,3) (1,4)... (1,10)

(2,1) (2,3) (2,4)... (2,10)

(3,1) (3,2) (3,4)... (3,10)

...

(10,1) (10,2) (10,3)... (10,9).

Kopā tātad ir 10·9=90 iznākumu. Cik no tiem dod notikumu B ("otrā lodīte balta")? Jāsaskaita, cik pāriem tabulā otrais skaitlis ir 1, 2 vai 3. Pirmajā rindā tādu pāru ir divi, otrajā un trešajā rindā − arī pa divi, pārējās septiņās − pa trīs. Tātad kopā 3·2+7·3=27, un mēs iegūstam

$$P(B)=\frac{27}{90}=\frac{3}{10} \quad .$$

Salīdzināsim P(B) ar P(B|A) un P(B|A). Vispirms

$$P(B|A)=\frac{2}{9}<\frac{3}{10}=P(B) \quad .$$

Tātad notikuma A parādīšanās samazina B izredzes notikt. Tā arī vajadzēja iznākt − A taču "izņem no apgrozības" vienu baltu lodīti. Tālāk,

$$P(B|-A)=\frac{3}{9}>\frac{3}{10}=P(B) \quad .$$

Notikuma −A parādīšanās (t.i., A neparādīšanās) palielina B izredzes notikt. Te arī izpaužas notikumu A, B atkarība. Ja šie notikumi būtu neatkarīgi, tad taču būtu jāiznāk

$$P(B|A) = P(B|-A) = P(B),$$

jo A vai −A parādīšanās te nedrīkst ietekmēt B izredzes parādīties.

Zinot varbūtības P(A) un P(B|A), viegli aprēķināt varbūtību P(AB), t.i. varbūtību, ka A un B parādīsies kopā. Tas ir dabiski, jo AB parādās, ja parādās A, un tad − pie nosacījuma, ka A jau ir parādījies − parādās B. Pierādīsim, ka

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

Pieņemsim, ka notikums A parādās m iznākumos procesā, kam pavisam ir n vienādi iespējami iznākumi. Tātad P(A)=m/n. Pieņemsim, ka katram šī procesa iznākumam seko otrs process, kam ir t vienādi iespējami iznākumi, pie tam tajos gadījumos, kad pirmā procesa iznākums dod notikumu A, no šiem iznākumiem k iznākumi dod notikumu B. Tātad P(B|A)=k/t.

Aplūkosim tagad saliktu procesu, kurā darbojas abi tikko minētie procesi kopā. Šim "lielajam" procesam ir pavisam nt vienādi iespējami iznākumi (katrs pirmā procesa iznākums kombinējas ar t otrā procesa iznākumiem). No šiem nt iznākumiem notikums AB (t.i., "A kopā ar B") parādās mk iznākumos (m pirmā procesa iznākumi, kuri dod A, kombinējas katrs ar tiem k otrā procesa iznākumiem, kuri dod B pie nosacījuma, ka A jau bija). Tātad:

$$P(AB)=\frac{mk}{nt}=\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{t}=P(A)P(B|A) \quad .$$

Šo formulu arī sauc par **varbūtību reizināšanas likumu**. Trešajā sadaļā mēs par varbūtību reizināšanas likumu nosaucām formulu

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

kur notikumiem A, B bija jābūt neatkarīgiem. Te nav nekādas pretrunas, jo gadījumā, kad A un B ir neatkarīgi, pirmajā formulā būs P(B|A)=P(B), un tas ir nupat iegūtās formulas speciālgadījums.

9. uzdevums. Pierādīt t.s. **pilnās varbūtības formulu**:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(-A)P(B|-A).$$

Zinot šo formulu, atgriezīsimies pie šīs sadaļas sākumā minētā uzdevuma: urnā ir 3 baltas un 7 melnas lodītes, vispirms no urnas izvelk vienu lodīti, pēc tam (neatliekot pirmo atpakaļ) − otru. Aplūkosim notikumus:

A = "pirmā izvilktā lodīte būs balta",

B = "otrā izvilktā lodīte būs balta".

Mūsu uzdevums − aprēķināt P(B) (notikuma B pilno varbūtību), izmantojot nosacītās varbūtības P(B|A), P(B|−A), ko var viegli aprēķināt:

$$P(A)=\frac{3}{10},\ P(-A)=\frac{7}{10},\ P(B|A)=\frac{2}{9},\ P(B|-A)=\frac{3}{9}\quad .$$

Pēc pilnās varbūtības formulas:

$$P(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{27}{90}=\frac{3}{10}\quad .$$

Sadaļas sākumā mēs to pašu varbūtību ieguvām, tieši saskaitot gadījumus, kad B var parādīties.

Analoģiski var pierādīt arī vispārīgāku formulu: ja A_1, A_2, A_3, ..., A_s ir nesavienojami notikumi, kuru summas varbūtība ir 1, tad jebkuram notikumam B:

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + ... + P(A_s)P(B|A_s).$$

(Sal. ar 9. uzdevumu, kur s=2, A_1=A, A_2 =−A.)

No varbūtību reizināšanas likuma izriet arī šāda metode varbūtības P(ABC) aprēķināšanai:

$$P(ABC)=P(AB)P(C|AB)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

Jums nebūs grūti iegūt līdzīgu formulu priekš P(ABCD) utt. Visas šīs formulas nepieciešamas sekojošo uzdevumu risināšanai.

10. uzdevums. Urnā ir 20 lodītes (12 baltas, 8 melnas). Jūs izvelkat no urnas vispirms vienu lodīti, pēc tam (neatliekot pirmo atpakaļ) − otru, pēc tam (neko neliekot atpakaļ) − vēl vienu. Kāda varbūtība, ka visas trīs lodītes būs baltas? Kāda varbūtība, ka baltas būs vismaz divas lodītes?

11. uzdevums. Papīra sloksnīti, uz kuras rakstīts ABRAKADABRA, sagriež atsevišķos burtos. Iegūtos kvadrātiņus saber kaudzē, labi samaisa un tad izvelk no tiem 4 pēc kārtas (neatliekot nevienu atpakaļ). Kāda varbūtība, ka tiks iegūts vārds DABA? Kāda varbūtība, ka no izvilktajiem kvadrātiņiem **varēs sastādīt** vārdu DABA?

6. Beijesa formula

Pavadot svētdienas atvaļinājumu pilsētā, jefreitors Jozefs Šveiks vidēji vienā gadījumā no diviem atgriežas iedzēris. Skaidrā prātā Šveiks mēdz trāpīt mērķī vidēji 60 gadījumos no 100, bet iedzēris − tikai 20 gadījumos no 100. Kārtējo reizi Šveikam atgriežoties no pilsētas, virsleitnants Lukašs liek Šveikam divreiz izšaut mērķī, jo viņam ir radušās aizdomas, ka Šveiks dzēris. Šveiks abas reizes aizšauj garām. Kāda varbūtība, ka **šoreiz** Šveiks tiešām ir piedzēries?

Pirmajā brīdī šķiet, ka varbūtība vienāda ar 1. Bet tā tas, protams, nav. Mums te ir darīšana ar diviem notikumiem:

A − "Šveiks divas reizes aizšauj garām",

B − "Šveiks ir piedzēries".

Uzdevums ir aprēķināt B varbūtību pie nosacījuma, ka iestājies notikums A, t.i., jāaprēķina varbūtība P(B|A). Kā to izdarīt? No kādas formulas? Varbūtība P(B|A) ieiet formulā

$$P(AB)=P(A)P(B|A).$$

No šīs formulas to varētu aprēķināt, ja būtu zināmas varbūtības P(AB) un P(A).

P(AB) rēķināšana prasa zināmu viltību: vajag ievērot, ka ne tikai P(AB)=P(A)P(B|A), bet arī

$$P(AB)=P(B)P(A|B).$$

Tā kā Šveiks atnāk no atvaļinājuma piedzēries vidēji pusē gadījumu, tad P(B)=1/2. Arī varbūtību P(A|B) aprēķināt nav grūti. Varbūtība, ka Šveiks, būdams iedzēris, netrāpīs, šaujot vienreiz, ir 4/5 (sk. uzdevuma formulējumu). Tāpēc varbūtība, šaujot divreiz, netrāpīt nevienu reizi, ir $(4/5)^2$ (atcerieties varbūtību reizināšanas likumu, šāvieni taču ir neatkarīgi!). Savelkot kopā:

$$P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{8}{25} \quad .$$

Tagad, lai no formulas P(AB)=P(A)P(B|A) aprēķinātu P(B|A), atliek atrast P(A). Šī varbūtība jārēķina pēc pilnās varbūtības formulas:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(-B)P(A|-B).$$

Pirmā saskaitāmā vērtība mums jau zināma: 8/25. Pārliecinieties paši, ka P(−B) =1/2 un P(A|−B)= $(2/5)^2$. Tātad otrā saskaitāmā vērtība ir 2/25 un tāpēc P(A)=10/25. Rezultātā

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{8}{25}/\frac{10}{25}=0{,}800 \quad .$$

Tas nozīmē, ka šaušanas rezultātā iegūtā informācija stipri palielina virsleitnanta Lukaša aizdomas: vidēji Šveiks piedzeras pusē gadījumu, bet varbūtība, ka viņš piedzēries **tieši šoreiz**, ir jau 0,800. Tomēr neveiksmīgā šaušana (divas reizes garām!) pilnīgi neizslēdz iespēju, ka Šveiks šoreiz ir atgriezies skaidrā − varbūtība, ka tā arī ir, vienāda 0,200 (lielāka nekā varbūtība uzkrist sešiniekam, metot spēļu kauliņu!).

Šeit aprakstīto varbūtības P(B|A) aprēķināšanas metodi var uzrakstīt ar vienu formulu:

$$P(B \vee A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(-B)P(A|-B)} \quad .$$

Par godu angļu garīdzniekam Tomasam Beijesam (*Thomas Bayes*, ≈1701−1761), kura pētījumi veicināja varbūtības jēdziena precizēšanu, šo formulu tagad pieņemts saukt par **Beijesa formulu**.

Beijesa formulu lieto šādos gadījumos. Pieņemsim, ka mums zināms, cik bieži dotajā eksperimentā parādās notikums B, t.i., zināma varbūtība P(B). Pieņemsim arī, ka mēs zinām, kā notikuma B parādīšanās vai neparādīšanās ietekmē notikuma A izredzes parādīties, t.i., uzskatīsim, ka zināmas varbūtības P(A|B) un P(A|−B). Ja tagad pēc kārtējā eksperimenta mums paziņo, ka parādījies notikums A (bet nesaka neko par B parādīšanos), tad Beijesa formula ļauj aprēķināt varbūtību P(B|A), t.i., varbūtību, ka **tieši šoreiz** B ir parādījies.

Varbūtība P(B) atspoguļo **vidējos datus** par B iestāšanās biežumu eksperimentos. **Neko nezinot** par kārtējā eksperimenta rezultātiem, mēs esam spiesti uzskatīt, ka šoreiz B var būt parādījies ar varbūtību P(B). Toties zinot, ka šoreiz parādījies notikums A, t.i., saņemot papildu informāciju par kārtējā eksperimenta rezultātiem, šai gadījumā mēs varam precizēt varbūtību, ka B var būt parādījies tieši šoreiz. Šo varbūtības precizēšanu arī veic Beijesa formula.

12. uzdevums. Kādā procesā var parādīties notikums A un notikumi H_1, H_2, H_3, pie tam pēdējie trīs notikumi ir nesavienojami (t.i., divi no tiem nekad neparādās kopā) un to varbūtību summa vienāda ar 1, t.i., $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$. Pierādīt, ka tad jebkuram i=1, 2, 3 der formula:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)} \quad .$$

Arī šo formulu sauc par Beijesa formulu. (Iepriekš tika aplūkots gadījums, kad ir tikai A, H_1 un H_2, kur H_1=B un H_2=−B.)

13. uzdevums. Urnā ir 2 baltas, 3 melnas un 5 sarkanas lodītes. Jums neredzot, es izvelku no urnas vienu lodīti. Pēc tam Jūs izvelkat no urnas otru lodīti (pirmā netiek likta atpakaļ), tā izrādās melna. Kāda varbūtība, ka pirmā izvilktā lodīte bija: 1) balta, 2)melna, 3) sarkana?

7. Gadījuma lielumi

Dažādu procesu rezultāti parasti satur arī skaitlisku informāciju. Piemēram, spēļu kauliņa mešanas rezultāts ir viens no skaitļiem 1, 2, 3, 4, 5, 6. Metot divus kauliņus reizē, iegūtā summa ir skaitlis no 2 līdz 12. Šaujot mērķī, rezultāts ir skaitlis no 0 līdz 10, utt.

Šādās situācijās pieņemts runāt par **gadījuma lielumiem**, un apzīmēt tos ar burtiem, tāpat kā mainīgos. Tā, metot spēļu kauliņu, uzmestais punktu skaits ir gadījuma lielums K_1, kas pieņem vērtības no 1 līdz 6 ar vienādām varbūtībām:

m	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$P(K_1 = m)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Šo tabulu pieņemts saukt par gadījuma lieluma K_1 varbūtību sadalījumu. Pieraksts $P(K_1 = m)$ nozīmē "varbūtība, ka K_1 vienāds ar m". Piemēram: $P(K_1 = 6) = 1/6$.

Šādā pierakstā nav nekā neparasta: vienādība $K_1 = 6$ ir **notikums**, kas kauliņa mešanas procesā var notikt vai nenotikt. Tikpat dabiski būtu rakstīt arī tā:

$$P(K_1 \le 4) = 1 - P(K_1 = 5) - P(K_1 = 6) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad ,$$

$$P(K_1 \text{ dalās ar } 3) = P(K_1 = 3) + P(K_1 = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad .$$

1.sadaļā (trešā etīde) mēs aplūkojām gadījuma lielumu K_2 − punktu summu, kas rodas, metot divus spēļu kauliņus reizē. Pie tam mēs konstatējām, ka lieluma K_2 varbūtību sadalījums ir šāds:

m	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
$P(K_2 = m)$	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Tāpēc mēs varam rakstīt arī, piemēram, ka:

$$P(K_2 \ne 7) = \frac{5}{6} \quad ,$$

$$P(|K_2 - 7| > 1) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{36} - \frac{5}{36} = \frac{5}{9} \quad .$$

Mūsu trešajam gadījuma lielumam

$Š_A$ = "trāpīto punktu skaits, šāvējam A vienreiz šaujot mērķī"

varbūtību sadalījums ir atkarīgs no A meistarības. Šo sadalījumu var novērtēt tikai tuvināti, apkopojot šaušanas rezultātu statistiku.

Pieņemsim, ka mēs esam šo statistiku apkopojuši diviem šāvējiem − A un B, pie tam rezultāti ir šādi:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(Š_A = m)$	0,02	0,03	0,05	0,10	0,15	0,20	0,20	0,10	0,07	0,05	0,03
$P(Š_B = m)$	0,01	0,01	0,04	0,10	0,25	0,30	0,18	0,05	0,03	0,02	0,01

(šis piemērs aizgūts no A. un I. Jaglomu grāmatas [1973]). Kurš no abiem − A vai B jāuzskata par labāku šāvēju? Kurš sacensībās iegūs augstāku vietu? Nelasiet tālāk, nepamēģinājuši patstāvīgi atbildēt uz šo jautājumu.

Manuprāt, varētu spriest tā. Šāvējs A no katriem 100 šāvieniem vidēji 2 reizes trāpa "pļavā", vidēji 3 reizes − vieniniekā, 5 reizes − divniekā, utt,. 3 reizes − desmitniekā. Kopā sanāk vidēji

$$2\cdot0+3\cdot1+5\cdot2+10\cdot3+15\cdot4+20\cdot5+20\cdot6+10\cdot7+7\cdot8+5\cdot9+3\cdot10=524.$$

Tātad, šaujot 100 reizes, A iegūs vidēji 524 punktus. Tagad vidējais B rezultāts:

$$1\cdot0+1\cdot1+4\cdot2+10\cdot3+25\cdot4+30\cdot5+18\cdot6+5\cdot7+3\cdot8+2\cdot9+1\cdot10=484.$$

Acīmredzot, B ir sliktāks šāvējs: sacensībās A iegūst vidēji 524 punktus, bet B − tikai vidēji 484.

Šo aprēķinu metodi var padarīt neatkarīgu no kopējā šāvienu skaita (ja 100 šāvienu vietā mēs gribētu aplūkot 50 vai 200 šāvienus, spriedumi taču būtu līdzīgi). Ideja: aprēķināt **viena** šāviena vidējo rezultātu:

$$E(Š_A)=0{,}02\cdot0+0{,}03\cdot1+...+0{,}03\cdot10=5{,}24;$$

$$E(Š_B)=0{,}01\cdot0+0{,}01\cdot1+...+0{,}01\cdot10=4{,}84.$$

Tātad šāvējs A ar katru šāvienu iegūst "vidēji" 5,24 punktus, bet B − 4,84 punktus. Tātad 50, 100 un 200 šāvienu vidējie rezultāti būtu attiecīgi:

$$50\cdot5{,}24=262;\ \ 50\cdot4{,}84=242;$$

$$100\cdot5{,}24=524;\ \ 100\cdot4{,}84=484;$$

$$200\cdot5{,}24=1048;\ \ 200\cdot4{,}84=968.$$

Skaitļus $E(Š_A)$, $E(Š_B)$ pieņemts saukt par gadījuma lielumu $Š_A$, $Š_B$ **vidējām vērtībām**. Tas, ka vidējās vērtības iznāk daļskaitļi (kaut gan lielumi $Š_A$, $Š_B$

pieņem tikai veselas vērtības), laikam mūs nemulsina: tā tas mēdz būt ar visiem "vidējiem" lielumiem (ja mans kaimiņš ir apēdis vistu, tad "vidēji" katram no mums iznāk pa pusvistai).

Vispārīgā gadījumā, ja gadījuma lielums X pieņem vērtības a_1, a_2, ..., a_n attiecīgi ar varbūtībām p_1, p_2, ..., p_n (t.i., $P(X = a_i) = p_i$ un, protams, $p_1+p_2 +...+p_n = 1$), tad X vidējo vērtību definē šādi:

$$E(X)=p_1a_1 + p_2a_2 + ... + p_na_n.$$

Ievērosim, ka vērtības a_1, a_2, ..., a_n varētu būt arī vienādas (dažas vai pat visas).

14.uzdevums. Gadījuma lielumam

K_1 = "punktu skaits, kas uzkrīt, metot vienu spēļu kauliņu"

vidējā vērtība iznāk

$E(K_1) = 1/6·1 + 1/6·2 + 1/6·3 + 1/6·4 + 1/6·5 + 1/6·6 = 1/6·(1+2+3+4+5+6) =$

$= 1/6·(6·7)/2 = 3,5.$

Aprēķiniet vidējo vērtību lielumam

K_2 = "punktu summa, kas uzkrīt, metot divus spēļu kauliņus".

Pamēģiniet izdarīt to pašu arī lielumiem K_3, K_4 utt.

Šī uzdevuma risinājums stipri vienkāršojas, ja tajā izmanto **gadījuma lielumu summas** jēdzienu. Ja kāda procesa rezultātā parādās divi gadījuma lielumi X, Y, tad X+Y arī ir gadījuma lielums, kas parādās tajā pašā procesā. Piemēram, metot divus spēļu kauliņus reizē, parādās divi gadījuma lielumi:

K' = "uzkritušais pirmā kauliņa punktu skaits",

K" = "uzkritušais otrā kauliņa punktu skaits".

Skaidrs, ka katra no sešām K' vērtībām "krīt" ar varbūtību 1/6, tāpēc $E(K')=E(K_1)=3,5$. Analoģiski arī E(K")=3,5. Tā kā K_2 =K'+K", tad kā būs ar $E(K_2)$? Vai tiešām

$$E(K_2) = E(K') + E(K'') = 3,5+3,5 = 7?$$

Teorēma. Ja divi gadījuma lielumi X, Y parādās vienā procesā, tad

$$E(X+Y) = E(X)+E(Y).$$

Bez tam, ja a, b − jebkuri reāli skaitļi, tad E(aX+b) = aE(X)+b.

Pierādījums. Pieņemsim, ka minētajam procesam ir pavisam n iznākumi i_1, i_2, ..., i_n, kas parādās attiecīgi ar varbūtībām p_1, p_2, ..., p_n, un ka pie iznākuma i_k ($1 \leq k \leq n$) lielums X pieņem vērtību x_k, bet lielums Y − vērtību y_k. Tad:

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n,$$

$$E(Y) = p_1y_1 + p_2y_2 + ... + p_ny_n.$$

Lielums X+Y pie iznākuma i_k pieņem vērtību x_k+y_k, tāpēc

$$E(X+Y) = p_1(x_1+y_1) + p_2(x_2+y_2) + ... + p_n(x_n+y_n) = E(X)+E(Y),$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

Teorēmas otro daļu pamēģiniet pierādīt patstāvīgi.

Secinājums. Ja gadījuma lielumi X_1, X_2, ..., X_m parādās vienā procesā, tad

$$E(X_1+X_2+...+X_m) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_m).$$

Atgriezīsimies tagad pie uzdevuma aprēķināt vidējo vērtību gadījuma lielumam

K_2 = "punktu summa, kas uzkrīt, metot divus spēļu kauliņus reizē".

Tā kā K_2=K'+K", kur E(K')=E(K")=3,5, tad saskaņā ar tikko pierādīto teorēmu: $E(K_2)=7$. Spriežot līdzīgi, iznāk, ka jebkuram n:

$$E(K_n) = 3{,}5n.$$

Tādā veidā, darbojoties ar vidējām vērtībām, daudzus uzdevumus var atrisināt (vai vismaz − uzminēt atrisinājumu) vieglāk nekā tiešu aprēķinu ceļā. Tas nozīmē, ka būs arī uzdevumi, kurus tiešā ceļā vispār nebūs fiziski iespējams atrisināt, bet vidējo vērtību izmantošana ļaus to izdarīt.

Līdzīgi summām, var mēģināt izmantot arī **gadījuma lielumu reizinājumu**: ja X,Y ir gadījuma lielumi, kas parādās vienā procesā, tad arī reizinājums XY parādās tajā pašā procesā. Izrādās, ka vispār ņemot, E(XY) nav vienāds ar E(X)E(Y). Tiešām, ja aplūkojam viena spēļu kauliņa mešanu, un ievedam lielumus $X=K_1$ un $Y=2K_1$, tad, no vienas puses:

$$E(X)E(Y) = 3{,}5 \cdot 2 \cdot 3{,}5 = 24{,}5;$$

bet, no otras puses:

$$E(XY) = E(2K_1^2) = \frac{1}{6} \cdot 2\,(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = \frac{91}{3} \approx 30{,}3 \quad .$$

15.uzdevums. Aplūkosim divu kauliņu mešanu un divus gadījuma lielumus

K', K" (skat. iepriekš). Pārliecinieties, ka E(K'K")=E(K')E(K")=$(3{,}5)^2$.

Kāpēc šoreiz reizinājuma vidējā vērtība iznāca vienāda vidējo vērtību reizinājumam? Izrādās, ka visam pamatā ir lielumu K', K" **neatkarība** (K' atkarīgs tikai no pirmā kauliņa, K" − tikai no otrā). Divus gadījuma lielumus, kas parādās vienā procesā, sauc par **neatkarīgiem gadījuma lielumiem**, ja viena lieluma pieņemtā vērtība nekādi neietekmē otra lieluma vērtības, un otrādi.

Ja X, Y − neatkarīgi gadījuma lielumi, tad jebkuriem skaitļiem a, b notikumi X=a, Y=b arī būs neatkarīgi, tāpēc

$$P(X=a \text{ un } Y=b) = P(X=a)P(X=b).$$

Izmantojot šo īpašību, varam pierādīt mūs interesējošo teorēmu.

Teorēma. Ja gadījuma lielumi X,Y parādās vienā procesā un ir neatkarīgi, tad

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

Pierādījums. Iepriekšējā pierādījuma apzīmējumos:

$$E(X)=a_1P(X=a_1) + a_2P(X=a_2) + ... + a_nP(X=a_n),$$

$$E(Y)=b_1P(Y=b_1)+ b_2P(Y=b_2)+ ... + b_nP(Y=b_n).$$

Sareizinot abas šīs summas, no vienas puses, iegūsim E(X)E(Y), bet no otras puses − summu no visiem iespējamiem reizinājumiem

$$a_kP(X=a_k)b_tP(Y=b_t). \qquad (*)$$

Šeit skaitļi k, t neatkarīgi viens no otra pieņem vērtības no 1 līdz n. Saskaņā ar minēto īpašību (jo lielumi X, Y ir neatkarīgi), saskaitāmais (*) būs vienāds ar

$$a_kb_tP(X=a_k \text{ un } Y=b_t).$$

Summējot visus iespējamos šādus saskaitāmos, mēs iegūstam (pēc definīcijas) vidējo vērtību E(XY). Tātad E(X)E(Y)=E(XY), ko arī vajadzēja pierādīt.

Zinot šo teorēmu, iepriekšējā uzdevuma risinājums kļūst triviāls.

16.uzdevums. Aplūkosim monētas mešanu un gadījuma lielumu C_n = "n metienos uzkritušo ciparu skaits". Pārliecinieties, ka $E(C_n)=\frac{n}{2}$.

8. Dispersija. Čebiševa nevienādība

Aplūkosim divus gadījuma lielumus X,Y, kuriem abiem ir vienāda vidējā vērtība: E(X)=E(Y)=a. Ja šie lielumi nav pilnīgi vienādi, ar ko tie var savā starpā atšķirties? Kā tūlīt redzēsim, ļoti būtiska atšķirība var būt: cik bieži un cik tālu lielumi X,Y novirzās no savas vidējās vērtības. Ja lieluma X vērtības parasti atrodas tuvu vidējai vērtībai E(X), tad šī vidējā vērtība ir labs lieluma X raksturojums. Toties otrajam lielumam Y, ja tas bieži novirzās tālu no savas vidējās vērtības E(Y), šī vidējā vērtība ir vairs tikai ļoti tuvināts raksturojums. Piemēram aplūkosim divus šādus gadījuma lielumus:

m	1	2	3	4	5	6
P(X=m)	1/12	1/12	1/3	1/3	1/12	1/12
P(Y=m)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Viegli pārliecināties, ka E(X)=E(Y)=3,5. Toties:

$$P(|X-3{,}5| > 1) = \frac{1}{3}\ , \text{ bet } P(|Y-3{,}5| > 1) = \frac{2}{3}\ .$$

Redzam, ka X (salīdzinot ar Y) "ciešāk turas" pie savas vidējās vērtības 3,5.

Kā precīzāk izmērīt gadījuma lieluma "izkliedes pakāpi"? Pirmā ideja, kas nāk prātā: par gadījuma lieluma "izkliedes mēru" ņemsim vidējo X vērtības attālumu no "centrālās" vērtības E(X), t.i., $E(|X-E(X)|)$. Jo mazāka ir izteiksmes $E(|X-E(X)|)$ vērtība, jo mazāk lielums X "tiecas" novirzīties no E(X).

17.uzdevums. Aplūkosim neatkarīgus gadījuma lielumus $G_1, G_2, ..., G_n, ...$, katrs no tiem pieņem vērtību 1 ar varbūtību p ($0 \le p \le 1$), un vērtību 0 − ar varbūtību $1-p$. Summu $G_1+G_2+...+G_n$ apzīmēsim ar S_n. Zinot, ka $E(S_n)=np$, pārliecinieties, ka:

$$E(|S_1 - p|) = 2p(1-p),$$

$$E(|S_2 - 2p|) = 4p(1-p)\max(p,1-p).$$

Vai Jums izdosies aprēķināt arī $E(|S_3 - 3p|)$?

Kā redzat, "izkliedes mērs" $E(|X-E(X)|)$ pat ļoti vienkāršās situācijās noved pie pārāk sarežģītām formulām. Šī neveiksme piespiedusi matemātiķus izmēģināt citu "izkliedes mēru":

$$D(X)=E((X - E(X))^2),$$

nosaucot to par gadījuma lieluma X **dispersiju**. Šeit attāluma $|X - E(X)|$ vietā tiek ņemts šī attāluma kvadrāts. Arī te var teikt: jo dispersija D(X) ir mazāka, jo mazāk X "tiecas" novirzīties no savas vidējās vērtības.

Izvēršot dispersijas definīciju, iznāk, ka ja gadījuma lielums X pieņem vērtības

$a_1, a_2, ..., a_k$ ar varbūtībām $p_1, p_2, ..., p_k$ (visu p_i summa ir 1) tad

$$D(X)=p_1(a_1 - E(X))^2 + p_2(a_2 - E(X))^2 + ... + p_k(a_k - E(X))^2. \qquad (*)$$

Piezīme. Tagad − datoru laikmetā "izkliedes mēra" $E(|X - E(X)|)$ "sliktās" matemātiskās īpašības vairs neliekas tik nopietns šķērslis. Dators viegli aprēķinās kā $D(X)$, tā $E(|X - E(X)|)$. Varbūt, matemātiķu pieņemtais lēmums tagad būtu jāpārskata?

Izrādās, ka $D(X)$ aprēķini gadījuma lielumiem S_n iznāk stipri vienkāršāki. Piemēram, aprēķināsim $D(S_1)$. Mēs jau zinām, ka $E(S_1)=p$. Lielums $(S_1-p)^2$ pieņem divas vērtības:

$(1-p)^2$ − ar varbūtību p,

$(0-p)^2$ − ar varbūtību $1-p$.

Tātad, pēc definīcijas:

$$D(S_1)=p(1-p)^2 + (1-p)p^2 = p(1-p)(1-p+p)=p(1-p).$$

Līdzīgi spriežot: $E(S_2)=2p$, bet lielums $(S_2-2p)^2$ pieņem 3 vērtības:

$(2-2p)^2$ − ar varbūtību p^2,

$(1-2p)^2$ − ar varbūtību $2p(1-p)$,

$(0-2p)^2$ − ar varbūtību $(1-p)^2$.

Tātad:

$$D(S_2) = p^2(2-2p)^2 + 2p(1-p)(1-2p)^2 + (1-p)^2(2p)^2 =$$

$$= 2p(1-p)(p\cdot 2(1-p) + (1-2p)^2 + 2p(1-p)) = 2p(1-p).$$

Ja vēlaties, varat pārliecinieties, ka arī $D(S_3)=3p(1-p)$ un vispār, visiem $n\geq 1$:

$$D(S_n) = np(1-p).$$

Šo formulu var iegūt daudz vieglāk, ja ievēro, ka **neatkarīgu** gadījuma lielumu summas dispersija ir šo lielumu dispersiju summa.

Teorēma. Ja X,Y ir neatkarīgi gadījuma lielumi, kas parādās vienā procesā, tad

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

Bez tam, jebkuriem reāliem skaitļiem a, b: $D(aX+b)=a^2D(X)$.

Teorēmas pirmās daļas pierādījums balstās uz vienkāršu, bet svarīgu lemmu.

Lemma. Jebkuram gadījuma lielumam X:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

t.i., lieluma dispersiju var iegūt, atņemot lieluma vidējās vērtības kvadrātu no lieluma X^2 vidējās vērtības.

Lemmas pierādījums.

$$D(X)=E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) =$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2,$$

ko arī vajadzēja pierādīt.

Piezīme. Starp citu, risinot praktiskus uzdevumus, lemmas dotā formula parasti ir labākais dispersijas aprēķina paņēmiens. Tiešām, ja X pieņem vērtības $a_1, a_2, ..., a_k$ ar varbūtībām $p_1, p_2, ..., p_k$, tad E(X) un D(X) var rēķināt paralēli, piemēram, programmējot valodā *Pascal*:

E:=0; D:=0;

for i:=1 **to** k **do begin**

S:=a_i*p_i; E:=E+S; S:=S*a_i; D=D+S;

end;

D:=D−E*E;

Turpretim, ja mēs gribētu sekot tieši D(X) definīcijai (sk. formulu (*)), tad vispirms vajadzētu aprēķināt E(X) un tikai pēc tam varētu rēķināt un summēt izteiksmes $p_i(a_i-E(X))^2$. Tas būtu daudz garāks ceļš.

18.uzdevums. Aprēķiniet dispersiju gadījuma lielumiem $Š_A$, $Š_B$ (sk. 7.sadaļas sākumu).

Teorēmas pierādījums. Saskaņā ar lemmu:

$$D(X)=E(X^2) - (E(X))^2,$$

$$D(Y)=E(Y^2) - (E(Y))^2.$$

$$D(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 = (E(X+Y)^2) - (E(X)+E(Y))^2 =$$

$$= E(X^2+2XY+Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 =$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2.$$

Tā kā lielumi X, Y ir neatkarīgi, tad E(XY)=E(X)E(Y), tāpēc reizinājumi saīsinās un:

$$D(X+Y) = E(X^2) + E(Y^2) - (E(X))^2 - (E(Y))^2 = D(X)+D(Y).$$

Teorēmas otro daļu pierādiet patstāvīgi.

Tagad, izmantojot šo teorēmu, varam viegli pierādīt, ka $D(S_n) = np(1-p)$. Tiešām, $S_n = X_1+X_2+...+X_n$, kur visi X_i ir neatkarīgi gadījuma lielumi, kas ekvivalenti S_1. Tā kā $D(S_1) = p(1-p)$ mēs jau pierādījām, tad $D(X_i) = p(1-p)$ visiem i un saskaņā ar teorēmu: $D(S_n) = np(1-p)$.

19.uzdevums. Pārliecinieties, ka gadījuma lielumam X dispersija vienāda ar nulli tad un tikai tad, ja X ar varbūtību 1 pieņem vienu un to pašu vērtību (t.i., ja X "nemaz nav" gadījuma lielums).

Jāņem vērā (sevišķi praktiskos aprēķinos), ka dispersija nebūt nav universāli piemērojams "izkliedes mērs". Aplūkosim, piemēram, divus šādus gadījuma lielumus X, Y:

m	**−5**	**0**	**+5**
P(X=m)	1/75	73/75	1/75

E(X) = 0,

$$D(X)=\frac{1}{75}\cdot 5^2+\frac{73}{75}\cdot 0^2+\frac{1}{75}\cdot 5^2=\frac{2}{3} \quad ;$$

m	**−1**	**0**	**+1**
P(Y=m)	1/3	1/3	1/3

E(Y) = 0,

$$D(Y)=\frac{1}{3}\cdot 1^2+\frac{1}{3}\cdot 0^2+1/3\cdot 1^2=2/3 \quad .$$

Kā redzat, abiem lielumiem ir vienādas dispersijas. Vai tāpēc tie ir "vienādi izliedēti"? Lielums X novirzās no vidējās vērtības "tālu" − par +−5, taču tas notiek ar samērā nelielu varbūtību. Lielums Y novirzās no 0 daudz mazāk − tikai par +−1, taču tas notiek ar diezgan lielu varbūtību. "Tālumam" un biežumam savstarpēji kompensējoties, iznāk vienādas dispersijas!

Dispersijas jēdzienam ir svarīga teorētiska nozīme. Ar tā palīdzību var pierādīt t.s. **lielo skaitļu likumu** (sk. nākošo sadaļu), kas teorētiski pamato varbūtības jēdziena lietojamību praksē.

Vispirms pierādīsim t.s. **Čebiševa nevienādību** (Pafnutijs Čebiševs, Пафну́тий Чебышёв, 1821−1894, krievu matemātiķis).

Teorēma. Jebkuram gadījuma lielumam X un jebkuram pozitīvam reālam skaitlim a:

$$P(|X-E(X)|\geq a)\leq\frac{D(X)}{a^2} \quad .$$

Izsakot to vārdiem, šī nevienādība it kā neko citu neapgalvo kā jau labi zināmo: jo mazāka dispersija, jo mazāka varbūtība, ka lielums X tālu novirzīsies no savas vidējās vērtības. Taču jāievēro, ka šeit tomēr ir arī kaut kas jauns: katram novirzes lielumam a Čebiševa nevienādība ļauj aptuveni novērtēt tik lielas novirzes varbūtību.

Teorēmas pierādījums. Ja lielums X pieņem vērtības a_1, a_2, ..., a_k ar varbūtībām p_1, p_2, ..., p_k (visu p_i summa vienāda ar 1), tad P(|X−E(X)| ≥a) ir visu to p_i summa, kam izpildās nosacījums $|a_i - E(X)|\geq a$. Citādi sakot (un tā ir galvenā ideja!):

$$\frac{(a_i-E(X))^2}{a^2}\geq 1 \quad \text{, jeb} \quad p_i\leq p_i\frac{(a_i-E(X))^2}{a^2} \quad .$$

Tagad kreisajā pusē summējam visus tos p_i, kam izpildās nosacījums $|a_i-E(X)|\geq a$, bet labajā pusē summējam pa visiem i no 1 līdz k. Tad nevienādība saglabājas, bet kreisajā pusē iznāk P(|X−E(X)|≥a), un labajā iznāk $\frac{D(X)}{a^2}$, ko arī vajadzēja pierādīt.

Pamēģināsim tagad ar Čebiševa nevienādības palīdzību novērtēt varbūtību, ka 1000 monētas metienos uzkritušo ciparu skaits stipri atšķirsies no savas teorētiskās vidējās vērtības 500. Ņemsim tāpēc X vietā gadījuma lielumu S_n, tad saskaņā ar Čebiševa nevienādību:

$$P(|S_n - np| \geq a) \leq \frac{np(1-p)}{a^2} \quad .$$

Tā kā monētai p=1/2 un mūs interesē n=1000, tad:

$$P(|S_{1000} - 500| \geq a) \leq \frac{250}{a^2} \quad .$$

Ja tagad izvēlēsimies a=50, tad

$$P(|S_{1000} - 500| \geq 50) \leq \frac{250}{2500}=\frac{1}{10} \quad ,$$

bet, ja a=100, tad

$$P(|S_{1000} - 500| \geq 100) \leq \frac{250}{10000} = 0{,}025.$$

Ja lielums X būtu garums, izteikts metros, tad arī vidējā vērtība E(X) būtu garums metros. Toties dispersijas D(X) mērvienība būtu jau... kvadrātmetri! Vai tas ir normāli: garuma novirzi no "vidējā garuma" mērīt kvadrātmetros? Tāpēc dažkārt dispersijas vietā lieto tās **kvadrātsakni** $\sqrt{D(X)}$, un šo lielumu pieņemts saukt par **standartnovirzi**. Gadījuma lieluma standartnovirzei ir tā pati mērvienība, kas pašam lielumam.

Izmantojot standartnovirzi, Čebiševa nevienādību var pārrakstīt dažiem uzdevumiem ērtākā formā: ja ņemsim $a = b\sqrt{D(X)}$, tad

$$P(|X - E(X)| \geq b\sqrt{D(X)}) \leq \frac{1}{b^2} .$$

Šī nevienādība apgalvo, ka gadījuma lieluma X novirze no vidējās vērtības E(X) var pārsniegt standartnovirzi b reizes tikai ar varbūtību, kas nav lielāka par $\frac{1}{b^2}$.

9. Lielo skaitļu likums

Kāpēc pie monētas mešanas mēs ģērboņa uzkrišanas iespējai pierakstām varbūtību 0,5? Kāpēc spēļu kauliņa katrai skaldnei mēs pierakstām varbūtību 1/6? Kāda tam jēga?

No vienas puses, mums likās, ka monētas abas puses ir līdzvērtīgas, tāpēc, ja jau tām ir jāpieraksta skaitļi, kas summā dod 1, tad nekas cits neatliek kā pierakstīt katrai pusei varbūtību 0,5. Tāpat mums likās, ka (simetriska) spēļu kauliņa visas sešas skaldnes ir līdzvērtīgas, tāpēc katrai no tām mēs pierakstījām varbūtību 1/6. Vai šie skaitļi izsaka tikai mūsu **subjektīvo pārliecību**, ka monētas puses vai kauliņa skaldnes ir līdzvērtīgas?

Kādu **taustāmu labumu** var dot notikuma varbūtības zināšana? Jau 1.sadaļā tika minēts viens no fundamentāliem dabas likumiem: ja kāda procesa visi iespējamie iznākumi ir līdzvērtīgi, tad, šo procesu daudzreiz atkārtojot, visi iznākumi parādās aptuveni **vienādi bieži**. Tas nozīmē, ka, ja notikuma A varbūtība ir P(A), tad, procesu atkārtojot N reizes (N − liels skaitlis), notikums A parādīsies aptuveni N·P(A) gadījumos. Piemēram, monētai ģērbonis krīt aptuveni pusē gadījumu, bet spēļu kauliņam sešinieks − aptuveni 1/6 gadījumu. Šāda informācija jau ir kaut kas "taustāms": tā ļauj paredzēt notikumus uz priekšu. Ja esam nolēmuši 1000 reizes mest monētu, tad jau iepriekš varam rēķināties ar to, ka uzkritušo ģērboņu skaits daudz neatšķirsies no 500. Monētas mešana, protams, ir niekošanās, toties tajos gadījumos, kad mums izdodas iepriekš noteikt kāda praktiski nozīmīga notikuma parādīšanās biežumu, varbūtību teorija dažkārt dod pat naudā izsakāmu efektu (sk., piemēram, otro etīdi 1.sadaļā). "Efekta" mehānisms vienmēr paliek viens un tas pats − kā pie monētas mešanas: ir iespējams uz priekšu paredzēt notikumu parādīšanās biežumu (lai arī ne notikuma parādīšanos vai neparādīšanos katrā atsevišķā gadījumā).

Jūs droši vien ievērojāt, ka, runājot par notikuma varbūtības un notikuma parādīšanās biežuma attiecībām, mēs pastāvīgi lietojām izteicienus "aptuveni sakrīt", "daudz neatšķiras". Tā nav nejaušība. Nevar prasīt, lai parādīšanās biežums (t.i., notikuma parādīšanās skaita attiecība pret visu mēģinājumu kopskaitu) precīzi sakristu ar varbūtību. Tiešām, ja monētu met 1000 reizes, tad varbūtība, ka uzkritīs tikai cipari (un nevis 500 cipari un 500 ģērboņi) ir $\frac{1}{2^{1000}}$ (pārliecinieties paši). Tas ir ļoti niecīgs skaitlis, tomēr pozitīvs skaitlis un nevis nulle! Tātad teorētiski pastāv iespēja, ka 1000 monētas metienu dos 1000 ciparu un neviena ģērboņa. Mūsu pārliecība, ka šī teorētiskā iespēja nekad nerealizēsies praksē, balstās uz attiecīgā notikuma varbūtības niecīguma apziņu:

$$\frac{1}{2^{1000}} < \frac{1}{10^{300}} \quad ,$$

t.i., vairāk nekā 300 pirmie cipari aiz komata ir nulles!

20.uzdevums. Ja n monētas metienos uzkritušo ciparu skaitu apzīmēsim ar S_n, tad viegli pārliecināties, ka:

$$P(S_2=1)= 0{,}5,\ P(S_4=2)=0{,}375,\ P(S_6=3) \approx 0{,}31,\ P(S_8=4)\approx 0{,}27,$$

t.i. varbūtība, ka n metienos uzkritīs tieši puse ciparu, n pieaugot, arvien samazinās. Pamēģiniet pierādīt, ka $P(S_{2n}=n)$ tiecas uz 0, ja n tiecas uz bezgalību.

Šie piemēri rāda, ka ir vērts pamēģināt precizēt mūsu apgalvojumu, ka biežums "daudz neatšķiras" no varbūtības. Jo ar nelielu varbūtību biežums, kā redzējām, var tālu novirzīties no varbūtības. Gribētos, lai mums būtu metode, kas ļautu aprēķināt, piemēram, ar kādu varbūtību 1000 monētas metienos uzkritušo ciparu skaits var novirzīties no 500, teiksim, vairāk par 50. Ja šīs novirzes varbūtība izrādītos niecīga, piemēram, 0,001, mēs varētu droši cerēt, ka praktiski vienmēr uzkritušo ciparu skaits būs starp 450 un 550.

Pirmajā brīdī, pēc visu iepriekš doto uzdevumu atrisināšanas, var likties, ka nekā sarežģīta te nav. Tiešām, kā redzējām 4.sadaļā, varbūtība, ka ciparu skaits būs mazāks par 450, ir

$$\frac{C_{1000}^{0}+C_{1000}^{1}+\ldots+C_{1000}^{449}}{2^{1000}} \quad ,$$

bet varbūtība, ka ciparu skaits būs lielāks par 550, ir

$$\frac{C_{1000}^{551}+C_{1000}^{552}+\ldots+C_{1000}^{1000}}{2^{1000}} \quad .$$

Pamēģiniet iesākt šo varbūtību aprēķināšanu. Jau pirmās minūtes laikā Jūs pārliecināsieties, ka uzdevums nav reāli paveicams. Nepalīdzēs arī tas, ja Jūs pamanīsiet, ka abas varbūtības ir vienādas un ka to summa faktiski ir vienāda ar

$$1-\frac{C_{1000}^{450}+C_{1000}^{451}+\ldots+C_{1000}^{550}}{2^{1000}} \quad .$$

Šeit ir tikai 101 saskaitāmais (abās pirmajās izteiksmēs bija pa 450 saskaitāmo). Bet ar to nekas nav līdzēts! Mēs tāpat nespējam ne vien aprēķināt šīs izteiksmes tuvinātu vērtību, mēs nespējam pat izteikt kaut cik saprātīgus spriedumus par tās lielumu: tā ir lielāka par 1/10 vai mazāka? Lielāka par

1/100 vai mazāka?

Radušās tehniskās grūtības izdodas apiet tikai ar nopietnas teorijas palīdzību.

Aplūkosim procesu, kurā notikums A var parādīties ar varbūtību p ($0<p<1$). Atkārtosim šo procesu n reizes, skaitot, cik reižu parādīsies notikums A. Šo reižu skaitu apzīmēsim ar S_n. No 4.sadaļas mēs jau zinām, ka visiem m, n ($0\le m\le n$):

$$P(S_n=m) = C^m_n\, p^m(1-p)^{n-m}.$$

Taču, kā tikko konstatējām, šī formula nepalīdz atrisināt mūs interesējošo uzdevumu līdz galam.

Tāpēc, sekojot vēsturiskai tradīcijai, vispirms pierādīsim t.s. **lielo skaitļu likumu**: jo vairāk reižu atkārto procesu, kurā ar varbūtību p parādās notikums A, jo mazāka varbūtība, ka A parādīšanās biežums stipri novirzīsies no p. Precīzāk, ja process atkārtots ("izmēģināts") n reižu, tad apzīmēsim ar S_n to mēģinājumu skaitu, kuros parādījies notikums A. Tad A parādīšanās biežums būs S_n/n. Ja mūs interesē novirzes par 1%, tad mums gribētos zināt, ar kādu varbūtību biežums S_n/n novirzīsies no p ne vairāk kā par 0,01, t.i. mums gribētos novērtēt varbūtību

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\le 0{,}01\right) \quad .$$

Katram n šī varbūtība ir noteikts skaitlis. Lielo skaitļu likums apgalvo, ka n augot, šis skaitlis tiecas uz 1. T.i., jo lielāks n, jo mazāka varbūtība, ka notikuma A parādīšanās biežums S_n/n atšķirsies no varbūtības p vairāk par 0,01. Gluži to pašu lielo skaitļu likums apgalvo par vēl mazāko novirzi 0,001 utt.

Teorēma. Jebkuram (arī ļoti mazam) pozitīvam skaitlim c varbūtība, ka notikuma A parādīšanās biežums n mēģinājumos novirzīsies no notikuma varbūtības p ne vairāk par c, tiecas uz 1, ja n tiecas uz bezgalību:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\le c\right)\to 1 \quad .$$

Pierādījums. Sāksim ar Čebiševa nevienādību gadījuma lielumam S_n:

$$P\left(\left|S_n-np\right|\ge a\right)\le\frac{np(1-p)}{a^2} \quad .$$

Dalīsim pirmās nevienādības abas puses ar n:

$$P(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq\frac{a}{n})\leq\frac{np(1-p)}{a^2} \quad .$$

Ievietosim a vietā cn:

$$P(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\geq c)\leq\frac{p(1-p)}{nc^2} \qquad (*)$$

Ja n tiecas uz bezgalību, tad labās puses izteiksme tiecas uz 0. Teorēma pierādīta.

Lielo skaitļu likumu šādā formulējumā jau 17.gadsimta beigās zināja Šveices matemātiķis Jakobs Bernulli (*Jacob Bernoulli*, 1654−1705). Čebiševa nevienādība ir pusotru gadsimtu "jaunāka", taču tā dod lielo skaitļu likuma viselegantāko pierādījumu, vienlaikus padarot to "praktiskāku". Tiešām, šis likums apgalvo tikai, ka varbūtība $P(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\leq c)$ tiecas uz 1, neko nesakot par to, cik ātri tas notiek (piemēram, nenosakot, cik lielam jābūt n, lai varbūtība pārsniegtu 0,999). Nevienādība (*) šai ziņā dod vairāk informācijas (sīkāk par to sk. iepriekšējās sadaļas beigās).

Taču izrādās, ka elegantā un ļoti universālā Čebiševa nevienādība (tā lietojama jebkuriem gadījuma lielumiem!), ja to lieto gadījuma lielumam S_n, dod noviržu varbūtībām ne gluži precīzu novērtējumu. Precīzāku, bet stipri sarežģītāku metodi 18.gadsimtā izstrādāja franču matemātiķi Abrahams de Muavrs (*Abraham de Moivre*, 1667−1754) un Pjērs Simons Laplass (*Pierre-Simon Laplace*, 1749−1827).

Ja procesu atkārtojam n reizes, tad notikumam A būtu jāparādās "vidēji" np reizes. Tas nozīmē, ka izteiksmes S_n-np vērtībai ar lielu varbūtību vajadzētu būt "mazai". Muavrs pirmais pamanīja, ka ja S−np izdalām ar standartnovirzi $\sqrt{np(1-p)}$, tad iegūtais gadījuma lielums

$$T_n=\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

"uzvedas ļoti regulāri": ja n ir ļoti liels skaitlis, tad šī lieluma varbūtību sadalījums vairs tikpat kā nav atkarīgs ne no p, ne no n. Simboliski to var pierakstīt tā: ja n tiecas uz bezgalību, tad jebkuram reālam skaitlim x:

$$P(\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x)\rightarrow N(x) \quad .$$

Tā kā N(x) ir viena konkrēta funkcija, tad matemātiķiem ir izdevies tās vērtības aprēķināt ļoti precīzi, sastādot t.s. **varbūtību integrāļa tabulu**. Lūk, neliels šīs tabulas fragments:

x	N(x)	x	N(x)	x	N(x)	x	N(x)
0,0	0,50	1,0	0,84	2,0	0,977	3,00	0,9986
0,2	0,58	1,2	0,89	2,2	0,986	3,10	0,9990
0,4	0,66	1,4	0,92	2,4	0,992	3,20	0,9993
0,6	0,73	1,6	0,95	2,6	0,995	3.23	0,9994
0,8	0,79	1,8	0,96	2,8	0.997	3,28	0,9995

Var pierādīt, ka N(−x)=1−N(x). Šī sakarība ļauj, izmantojot mūsu tabulu, atrast N(x) arī negatīvām x vērtībām.

21.uzdevums. Pārliecinieties, ka jebkuriem diviem reāliem skaitļiem a,b (a<b): ja n tiecas uz bezgalību, tad

$$P(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b) \to N(b) - N(a) \quad ,$$

kā arī, ka jebkuram pozitīvam x:

$$P(\frac{|S_n - np|}{\sqrt{np(1-p)}} > x) \to 2(1 - N(x)) \quad .$$

Izrādās, ka pēdējā sakarība ļauj ievērojami precīzāk (salīdzinot ar Čebiševa nevienādību) aprēķināt varbūtību, ka 1000 monētas metienos uzkritušo ciparu skaits novirzīsies no 500 vairāk par doto lielumu. Tā kā šai gadījumā p=0,5 un n=1000, tad $\sqrt{np(1-p)} \approx 15{,}81$ un

$$P(|S_n - 500| > 15{,}81x) \approx 2(1 - N(x)).$$

Ja ņemsim x=2, tad (saskaņā ar tabulu) N(x) ≈ 0,977, tātad $P(|S_n - 500| > 31{,}62) \approx 0{,}046 \approx 1/20$. Tātad nebūs nekāds brīnums, ja pēc 1000 metieniem Jūs konstatēsiet, ka uzkritušo ciparu skaits ir nevis 500, bet 468 vai 532 (kaut arī tik lielas novirzes negadīsies bieži).

Ja ņemsim x=3, tad N(x) ≈ 0,9986, un

$$P(|S_n - 500| > 47{,}43) \approx 0{,}0028 \approx \frac{1}{350} < \frac{1}{256} = \frac{1}{2^8} \quad .$$

Tātad varbūtība, ka ciparu skaits atšķirsies no 500 vairāk par 47, ir jau mazāka nekā varbūtība, ka uzkritīs 8 cipari pēc kārtas.

Un beidzot, ja ņemsim x=3,28, tad N(x) ≈ 0,9995, un

$$P(|S_n - 500|>51{,}86) \approx 0{,}001.$$

Tātad varbūtība, ka ciparu skaits atšķirsies no 500 vairāk par 51, ir jau mazāka par 1/1000. Ar šo varbūtību var nerēķināties: tātad praktiski droši, ka 1000 metienos uzkritušo ciparu skaits būs starp 449 un 551. (Salīdziniet šos rezultātus ar tiem, ko iepriekšējās sadaļas beigās mums izdevās iegūt, izmantojot Čebiševa nevienādību).

22.uzdevums. Spēļu kauliņu met 6000 reizes. Izpētiet, cik tālu no vidējā skaita 1000 var novirzīties uzkritušo sešinieku skaits.

10. Korelācija

Gadījuma lielumi, kas parādās vienā procesā, var būt neatkarīgi, bet var būt arī atkarīgi. Ja process ir divu kauliņu mešana, tad katra kauliņa uzkritušo punktu skaits ir divi neatkarīgi lielumi. Toties, ja aplūkojam viena kauliņa mešanu un ar K_1 apzīmējam gadījuma lielumu "uzkritušo punktu skaits", bet ar L_1 − lielumu "uzkritušo punktu skaita kvadrāts", tad šie divi lielumi, protams, ir atkarīgi. Šo atkarību izsaka vienādība $L_1=(K_1)^2$.

Tas ir t.s. **funkcionālās atkarības** piemērs: viens no lielumiem ir otra lieluma funkcija (L_1 vērtību var aprēķināt, zinot K_1 vērtību). Funkcionālās atkarības speciālgadījums ir **lineārā atkarība**: gadījuma lielumus X, Y, kas parādās vienā procesā, sauc par lineāri atkarīgiem, ja eksistē divi reāli skaitļi a, b ($a \neq 0$) tādi, ka vienmēr $Y = aX+b$. (Tā kā vienlaicīgi arī $X = Y/a - b/a$, tad lineārā atkarība ir simetriska īpašība). Lielumi K_1, L_1 ir atkarīgi, bet, protams, nav lineāri atkarīgi.

Dažkārt gadījuma lielumi nav gan "precīzi" funkcionāli atkarīgi, tomēr to starpā "kaut kāda sakarība ir". Piemēram, aplūkojot divu spēļu kauliņu mešanu:

K = "punktu skaits, kas uzkrīt pirmajam kauliņam",

K' = "punktu skaits, kas uzkrīt otrajam kauliņam".

Ievedīsim vēl vienu gadījuma lielumu: $L=K+0{,}01K'$. Ko var teikt par lielumu K un L savstarpējo atkarību? Protams, L nav vienkārša K funkcija: piemēram, ja mēs esam uzzinājuši, ka K=1, tad L ar vienādām varbūtībām var pieņemt jebkuru no sešām vērtībām:

1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05; 1,06.

Tomēr "pavisam neatkarīgi" lielumi K, L, protams, arī nav: uzzinot K vērtību, mēs arī L vērtību uzzinām jau diezgan precīzi. Šādā situācijā, kad divi gadījuma lielumi, nebūdami funkcionāli atkarīgi, "zināmā mērā" atkarīgi tomēr ir, pieņemts runāt par **korelāciju** šo lielumu starpā. Sarežģītākos procesos, kuru mehānisms nav pilnīgi izpētīts, gadījuma lielumu korelācija dažkārt jānoskaidro eksperimentāli − balstoties uz šo lielumu pieņemto vērtību **statistiku**.

Ja kādā procesā parādās divi gadījuma lielumi X, Y, tad kā praktiski pārliecināties, ir to starpā kaut kas līdzīgs lineārai korelācijai vai nav? Protams, jāvāc statistika, daudzkārt novērojot procesa atkārtojumus. Pēc n novērojumiem tad mūsu rīcībā būs n skaitļu pāri:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n).$$

Ja šo skaitļu pārus attēlosim kā plaknes punktus, tad varētu iznākt, piemēram, šāda aina:

```
Y
|....................................o........
|.............................o...............
|.........................o....o.............
|...............o......o......................
|..................o......o...................
|.............o..o...........................
|............o...............................
|........o...................................
|.....o....o.................................
|-------------------------------- X
```

Šai gadījumā ir gribot negribot jāsecina, ka punkti "pulcējas" ap kādu taisni. Ja taisnes vienādojums ir y=ax+b, tad kā atrast koeficientus a, b? Laikam taču tie jāsameklē tādi, lai atzīmētie punkti būtu šai taisnei "pēc iespējas tuvāk".

Sākumā uzdevums liekas vienkāršs. Aprēķināsim punkta (x_i, y_i) attālumu līdz taisnei y=ax+b. Tā būs kāda funkcija $f(a, b, x_i, y_i)$. Mūsu uzdevums ir izvēlēties skaitļus a,b tā, lai attālumu summa

$$\sum_{i=1}^{n} f(a, b, x_i, y_i) \qquad (*)$$

būtu vismazākā. Pamēģināsim atrast funkcijas f izteiksmi. Attāluma kvadrāts no punkta (x, y) līdz punktam (x_i, y_i) ir $(x-x_i)^2+(y-y_i)^2$. Ļausim punktam (x,y) "slīdēt" pa taisni y=ax+b un aplūkosim attāluma kvadrātu kā funkciju no x:

$$g(x) = (x-x_i)^2+(ax+b-y_i)^2 = (1+a^2)x^2 - 2(x_i+a(y_i-b))x+(x_i^2+(y_i-b)^2).$$

Tā kā koeficients pie x^2 ir pozitīvs, tad šim kvadrāt-trinomam vismazākā vērtība būs pie

$$x=\frac{x_i+a(y_i-b)}{1+a^2} \quad .$$

Ievietojot šo x un y=ax+b funkcijas g(x) izteiksmē, iznāk, ka:

$$min\, g(x)=f^2(a,b,x_i,y_i)=\frac{((1+a^2)(y_i-ax_i)^2-2\mathrm{b}(1+a)(y_i-ax_i)+ab^2)}{(1+a^2)^2} \quad .$$

Ja summēsim kvadrātsaknes no šādām izteiksmēm, vai mums izdosies atrast tās a un b vērtības, kurām summas vērtība ir vismazākā? Skaidrs, ka izteiksmes "briesmīgās" sarežģītības dēļ mums tas nevar izdoties. Neglābs arī matemātiķu parastā metode − attāluma summas vietā ievest attālumu **kvadrātu** summu − arī bez kvadrātsaknēm izteiksme jau ir pietiekami "briesmīga".

Izeju no šīs situācijas atrada vācu matemātiķis Kārlis Frīdrihs Gauss (*Carl Friedrich Gauss*, 1777−1855). Viņš iedomājās minimizēt nevis punktu attālumus līdz taisnei vai šo attālumu kvadrātus, bet **attālumu kvadrātus pa vertikāli**! Patiesi, tad izteiksme (*) iznāk daudz vienkāršāka. Punktam (x, y) pa vertikāli atbilst taisnes y=ax+b punkts (x, ax+b), attāluma kvadrāts tāpēc būs $(ax+b-y)^2$, un izteiksme (*) tad būs šāda:

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b_i-y_i)^2 \quad .$$

Stingri ņemot, tā ir haltūra, "vieglākais ceļš", taču kādi lieliski rezultāti tūlīt sekos!

Pirms aiziet "pa vieglāko ceļu", pāriesim tomēr uzreiz no eksperimenta datu analīzes pie divu gadījuma lielumu X, Y iespējamās atkarības teorētiskas analīzes. Tad mums ir jāieved nedaudz citādi pamatjēdzieni. Procesam, kurā abi lielumi parādās, ir n iznākumi i_1, i_2,... i_n, pie tam iznākums i_k parādās ar varbūtību p_k (visi p_k ir pozitīvi un to summa ir vienāda ar 1), un to pavada X vērtība x_k un Y vērtība y_k.

Katram procesa iznākumam i_k atbilst plaknes punkts (x_k, y_k). Varbūtību p_k tad var uzskatīt par punkta "svaru" (jo lielāka varbūtība, jo "smagāks" punkts). Plaknē novilksim taisni y=ax+b. Atkārtojot mūsu procesu, mēs iegūstam plaknes "gadījuma" punktu (X, Y) (katru reizi tas sakrīt ar kādu no punktiem (x_k, y_k)). Šī punkta attāluma kvadrāts pa vertikāli no taisnes y=ax+b ir gadījuma lielums $(aX+b-Y)^2$. Šī lieluma vidējā vērtība ir

$$S(a, b) = E(aX+b-Y)^2 = E(a^2X^2+b^2+Y^2+2abX-2aXY-2bY) =$$
$$= a^2E(X^2)+b^2+E(Y^2)+2abE(X)-2aE(XY)-2bE(Y).$$

Mūsu uzdevums ir atrast tādus a, b, kuri dotu vismazāko iespējamo izteiksmes S(a, b) vērtību (t.i., "vistuvāko" taisni punktu (X,Y) "mākonim").

Ja a vērtība būtu fiksēta, tad S(a, b) kā funkcija no b būtu kvadrāt-trinoms:

$$S(a,b) = b^2-2b(E(Y)-aE(X))+...,$$

kurš savu vismazāko vērtību pieņem pie $b=E(Y)-aE(X)$, jeb:

$$E(Y) = aE(X) + b.$$

Tas nozīmē, ka "vistuvākā" taisne iet caur punktu "mākoņa" smaguma centru − punktu (E(X), E(Y)).

Tagad izteiksim b ar a: $b=E(Y)-aE(X)$, un ievietosim S(a, b) izteiksmē:

$$S(a, b) = E(aX+b-Y)^2 = E(aX+E(Y)-aE(X)-Y)^2 =$$
$$= E(a(X-E(X))-(Y-E(Y)))^2 =$$
$$= E(a^2(X-E(X))^2 - 2a(X-E(X))(Y-E(Y)) + (Y-E(Y))^2) =$$
$$= a^2E(X-E(X))^2 - 2aE((X-E(X))(Y-E(Y))) + E(Y-E(Y))^2 =$$
$$= a^2D(X) - 2aE((X-E(X))(Y-E(Y))) + D(Y).$$

Šis kvadrāt-trinoms pieņem vismazāko vērtību pie

$$a=\frac{E((X-E(X))(Y-E(Y)))}{D(X)} \quad .$$

Skaitītāja izteiksmi pārveidosim aprēķiniem ērtākā formā:

$$E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY-XE(Y)-YE(X) + E(X)E(Y)) =$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) =$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y);$$
$$a=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{D(X)} \quad .$$

Atrastajām a, b vērtībām atbilst vismazākā S(a, b) vērtība. Tātad "vistuvākās" taisnes vienādojums ir

$$y = ax+b = ax+(E(Y)-aE(X)) ;$$
$$y-E(Y) = a(x-E(X)) .$$

Koeficients a nav simetrisks pret X un Y. To var "izlabot" šādā veidā:

$$\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}=a\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}\cdot\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \quad .$$

Izteiksmi

$$K(X,Y)=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

pieņemts saukt par gadījuma lielumu X un Y **korelācijas koeficientu**. Kāpēc tā?

Atcerēsimies mūsu sākotnējo izteiksmi $E(aX+b-Y)^2$. Koeficientus a, b mēs tagad protam izvēlēties tā, lai $E(aX+b-Y)^2$ (punkta (X, Y) un taisnes y=ax+b attāluma kvadrāta) vidējā vērtība būtu vismazākā. Kāda tad ir šī vismazākā vērtība?

$$\min E(aX+b-Y)^2 = a^2D(X) - 2a(E(XY)-E(X)E(Y)) + D(Y).$$

"Garais" reizinātājs otrajā saskaitāmajā ir vienāds ar aD(X), tāpēc:

$$\min E(aX+b-Y)^2 = D(Y) - a^2D(X) = D(Y) - k^2\cdot D(Y) = (1-k^2)D(Y), \qquad (**)$$

kur k=K(X, Y) ir lielumu X un Y korelācijas koeficients.

No šīs sakarības var iegūt vairākus svarīgus secinājumus:

1. Tā kā $E(aX+b-Y)^2 \geq 0$ un $D(Y)>0$, tad $1-k^2 \geq 0$ un tātad $-1 \leq K(X, Y) \leq 1$.

T.i., divu gadījumu lielumu korelācijas koeficients vienmēr ir robežās no −1 līdz +1.

2. Ja K(X, Y)=+1 vai −1, tad $E(aX+b-Y)^2=0$ (mūsu atrastajām a, b vērtībām). Tas nozīmē, ka

$$\sum_{k=1}^{n} p_k(ax_k+b-y_k)^2=0 \quad ,$$

tātad $ax_k+b-y_k=0$ visiem k, t.i., lielumi X, Y ir lineāri atkarīgi: Y=aX+b.

Pie tam a un b vērtības tad ir aprēķināmas šādi:

$$a=K(X,Y)\sqrt{\frac{D(Y)}{D(X)}}; \qquad (***)$$
$$b=aE(X)-E(Y)$$

23.uzdevums. Pārliecinieties, ka arī otrādi: ja X un Y ir lineāri atkarīgi, tad K(X, Y)=+1 vai −1.

3. Nemainoties D(Y), jo tuvāk K(X, Y) ir +1 vai −1, jo mazāka ir vidējā vērtība $\min E(aX+b-Y)^2$, t.i., jo mazāka ir "mākoņa" (X, Y) punktu vidējā

novirze no taisnes Y=aX+b (kur a, b iegūti ar formulām (***)). Tātad, ja divu lielumu korelācijas koeficients ir tuvs +1 vai −1, tas nozīmē, ka šie lielumi ir "tuvu lineārai atkarībai', "gandrīz lineāri atkarīgi" vai tml.

Pie tam, ja K(X, Y) ir tuvu +1, tad ir pieņemts runāt par **pozitīvu korelāciju** (augot X vērtībai, gandrīz vienmēr pieaug arī Y). Ja K(X, Y) tuvu −1, tad runā par **negatīvu korelāciju** (augot X vērtībai, Y vērtība gandrīz vienmēr samazinās). Šis prātojums nav sevišķi korekts: konkrētā situācijā vislabāk visus secinājumus izdarīt no sakarības (**): ja min $E(aX+b-Y)^2$ vērtība ir maza, tad korelācija ir liela (un otrādi).

4. Ja gadījuma lielumi X, Y ir neatkarīgi, tad E(XY)=E(X)E(Y) un tāpēc K(X, Y)=0. Būtu ideāli, ja arī no K(X, Y)=0 sekotu, ka lielumi X un Y ir neatkarīgi. Diemžēl, tas tā nav (un nevar būt).

Aplūkosim spēļu kauliņa mešanu un divus gadījuma lielumus, kuri parādās šajā procesā:

K = "uzkritušo punktu skaits",

M = min(K,7−K).

Skaidrs, ka lielums M ir funkcionāli atkarīgs no K. Abu lielumu varbūtību sadalījums:

K	1	2	3	4	5	6
M	1	2	3	3	2	1
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Tātad E(K) = 3,5, E(M) = 2, E(KM) = 1/6·(1+4+9+12+10+6) = 7. Tas nozīmē, ka E(KM) − E(K)E(M)=0 un K(K, M)=0. Tātad lielumu K un M korelācijas koeficients ir 0, kaut arī lielums M ir funkcionāli atkarīgs no K.

No K(X, Y)=0 gadījuma lielumu X un Y neatkarība tātad neseko.

24. uzdevums. a) Aprēķiniet šīs sadaļas sākumā minēto lielumu K, L korelācijas koeficientu. Vai korelācija starp K un L ir "izteikti liela"?

b) Aprēķiniet 7.sadaļas sākumā minēto gadījuma lielumu $Š_A$ un $Š_B$ korelācijas koeficientu. Ko nozīmē Jūsu iegūtais rezultāts?

Piezīme. Korelācijas koeficienta K(X, Y) aprēķina process ir diezgan darbietilpīgs. Vislabāk ir paralēli rēķināt E(X), E(Y), $E(X^2)$, $E(Y^2)$ un E(XY), un tikai beigās aprēķināt $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, D(Y) − analoģiski, un beidzot – K(X,Y).

LITERATŪRA

1. Г. Кимбл. Как правильно пользоваться статистикой. Москва, "Финансы и статистика", 1982, 290 с.

2. Л. Е. Майстров. Развитие теории вероятностей. Москва, "Наука", 1980, 270 с.

3. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей. Москва, "Мир", 1984 (том 1− 525 с., том 2 − 750 с.)

4. А. М. Яглом, И. М. Яглом. Вероятность и информация. Москва, "Наука", 1973, 510 с.

Uzdevumu atrisinājumi

1. uzdevums.

Visieteicamākais (bet ne visīsākais) risinājuma ceļš ir tieša visu variantu pārlūkošana. Katrs kauliņš krīt sešos vienādi iespējamos variantos, tāpēc kauliņu trijnieks krīt 6x6x6=216 vienādi iespējamos variantos, sākot ar (1 1 1) un beidzot ar (6 6 6). Pārlūkojot visus 216 variantus, atrodot katram atbilstošo summu, nebūs vairs grūti saskaitīt, ka summa 10 un 11 krīt katra 27 variantos no 216, bet pārējās summas − retāk. Kopējā tabula izskatās šādi:

Summa	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Variantu skaits:	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

Šo pašu tabulu var iegūt arī īsākā ceļā, izmantojot jau izpētītā divu kauliņu gadījuma tabulu:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Triju kauliņu summa sastāv no divām daļām:

a) pirmā kauliņa cipars,

b) otrā un trešā kauliņa ciparu summa.Tā, piemēram, summa 10 var rasties šādos veidos:

$$10 = 1+9 = 2+8 = 3+7 = 4+6 = 5+5 = 6+4.$$

Otrā un trešā kauliņa summas 9, 8, 7, 6, 5, 4 krīt attiecīgi 4, 5, 6, 5, 4, 3 veidos, tātad summa 10 krīt pavisam

$$4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 = 27$$

veidos. Gluži tāpat jārīkojas visos pārējos gadījumos.

2. uzdevums.

Ja mēs gribētu, lai P(A+B+C) būtu P(A)+P(B)+P(C), tad būtu tūlīt jāpamana, ka tie procesa iznākumi, kuros parādās divi no notikumiem A, B, C, tiek ieskaitīti divreiz, bet tie iznākumi, kuros A, B, C parādās **visi** kopā − pat trīsreiz. Pamēģināsim kaut ko atskaitīt nost:

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC).$$

Katrs iznākums, kurā parādās divi notikumi reizē (piemēram, AB) tagad ieiet izteiksmē tieši vienreiz (AB gadījumā tas ieiet P(A), P(B) un −P(AB)). Diemžēl, tie iznākumi, kuros ABC parādās visi kopā, tagad izteiksmē vispār neieiet. Lai stāvokli izlabotu, jāpieskaita izteiksmei P(ABC). Galarezultāts:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

3. uzdevums.

1. Metot monētu 3 reizes, jebkura virknīte no cipariem un ģērboņiem ir vienādi iespējama. Šādu virknīšu ir pavisam astoņas:

CCC CCĢ CĢC CĢĢ ĢCC ĢCĢ ĢĢC ĢĢĢ

No tām septiņas dod vismaz vienu ciparu, tātad prasītā varbūtība vienāda 7 / 8 = 0,875. Varēja risināt arī citādi. Notikumam A = "uzkritīs vismaz viens cipars" pretējais notikums ir $\bar{A}$ = "uzkritīs trīs ģērboņi". Šis $\bar{A}$ savukārt ir trīs neatkarīgu notikumu G_1, G_2, G_3 reizinājums, kur G_i = "i-tajā metienā uzkritīs ģērbonis". Tālākais ir skaidrs:

$$P(A)=1 - P(\bar{A}) = 1 - P(G_1)\cdot P(G_2)\cdot P(G_3) = 1 - (1/2)\cdot(1/2)\cdot(1/2) = 7/8.$$

2. Arī šo uzdevumu varēja risināt divos veidos. Šoreiz gan tieša visu gadījumu pārlūkošana ir apgrūtinoša. Toties otrais ceļš ir pavisam viegls.

A = "uzkritīs vismaz viens cipars, lielāks par 2",

$\bar{A}$ = "visi uzkritušie cipari nepārsniedz 2".

$\bar{A} = G_1G_2G_3$, kur G_i = "i-tajam kauliņam uzkrīt cipars, kas nepārsniedz 2".

Tā kā $P(G_i) = 1/3$ visiem i, tad

$$P(A) = 1 - (1/3)\cdot(1/3)\cdot(1/3) = 26/27 \approx 0,961.$$

4. uzdevums.

Katrs atsevišķs jefreitora X šāviens trāpa mērķī ar varbūtību 0,67. Kāda varbūtība, ka no k šāvieniem vismaz viens trāpa? Rīkojamies kā iepriekšējos uzdevumos.

A ="no k šāvieniem vismaz viens trāpa".

$\bar{A}$ ="no k šāvieniem netrāpa neviens".

$\bar{A} = G_1G_2...G_k$, kur G_i = "i-tais šāviens netrāpa".

Notikumi G_i ir neatkarīgi, bez tam $P(G_i) = 1 - 0,67 = 0,33$. Tātad $P(A) = 1 -$

$(0,33)^k$. Kādam jābūt k, lai $P(A) \geq 0,99$? Izmēģinām k=1,2,3,4,5:

k	1	2	3	4	5
P(A)	0,67	0,8911	0,96406	0,98814	>0,99

Tātad, ja X šauj 5 reizes, tad varbūtība trāpīt vismaz vienreiz ir >0,99.

5. uzdevums.

Jāsaskaita, cik pilnu pakāpju ir starp skaitļiem 1, 2, 3, ..., 999, 1000:

− Kvadrāti: $31^2 < 1000 < 32^2$
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400, 441, 484, 529, 576, 625, 676, 729, 784, 841, 900, 961 (kopā 31 gab.).

− Kubi: $10^3 = 1000 < 11^3$
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000 (kopā 10 − 3 = 7 kubi, kas nav kvadrāti) .

− Ceturtās pakāpes nav jāskaita (tās visas ir arī kvadrāti).

− Piektās pakāpes: $3^5 < 1000 < 4^5$
1, 32, 243 (kopā 3 − 1 = 2 piektās pakāpes, kas nav zemākas pakāpes).

− Sestās pakāpes nav jāskaita (tās ir vienlaikus kvadrāti un kubi).

− Septītās pakāpes: 1, 128 (kopā 2−1=1).

− Astotās pakāpes nav jāskaita.

− Devītās pakāpes ir kubi.

− Desmitās pakāpes: tikai 1, jo $1000 < 2^{10}$.

Tātad pavisam līdz 1000 ir 41 pilna pakāpe, un prasītā varbūtība ir 41 / 1000 = 0,041.

7.uzdevums.

Mūs interesējošais notikums A = "uzkritīs vienāds skaits ģērboņu un sešinieku" ir summa četriem nesavienojamiem notikumiem B_i = "uzkritīs i ģērboņi un i sešinieki", šeit i = 0, 1, 2, 3. Tālāk, B_i ir reizinājums diviem neatkarīgiem notikumiem C_i un D_i, kur C_i = "uzkritīs i ģērboņi", D_i = "uzkritīs i sešinieki". Tātad, pielietojot saskaitīšanas un reizināšanas likumus, iegūstam:

$$P(A) = P(C_0)P(D_0) + P(C_1)P(D_1) + P(C_2)P(D_2) + P(C_3)P(D_3).$$

Aprēķināt varbūtības $P(C_i)$ un $P(D_i)$ vairs nav grūti:

$$P(C_0) = C_3^0(1/2)^3 = 1/8 \qquad P(D_0) = C_3^0(1/6)^0(5/6)^3 = 125/6^3.$$

$$P(C_1) = C_3^1(1/2)^3 = 3/8 \qquad P(D_1) = C_3^1(1/6)^1(5/6)^2 = 75/6^3.$$

$$P(C_2) = C_3^2(1/2)^3 = 3/8 \qquad P(D_2) = C_3^2(1/6)^2(5/6)^1 = 15/6^3.$$

$$P(C_3) = C_3^3(1/2)^3 = 1/8 \qquad P(D_3) = C_3^3(1/6)^3(5/6)^0 = 1/6^3.$$

Tātad kopā:

$P(A) = (125 + 3 \cdot 75 + 3 \cdot 15 + 1) / (8 \cdot 6^3) = 396 / (8 \cdot 6^3) = 66 / (8 \cdot 6^2) = 11/48 \approx 0{,}229$.

8. uzdevums.

Pirmais mērķis var palikt vesels tikai tajā gadījumā, ja visi 5 grenadieri aizšauj garām. Notikums A = "visi pieci garām" ir reizinājums pieciem neatkarīgiem notikumiem B_i ="i-tais grenadieris aizšauj garām", šeit i = 1, 2, 3, 4, 5. Tā kā pēc dotā $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}4$; $P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = 0{,}3$; tad

$$P(A) = (0{,}4)^2 \cdot (0{,}3)^3 = 0{,}00432.$$

Notikums C = "visi trīs mērķi būs sašauti" ir reizinājums trim neatkarīgiem notikumiem D_i = "i-tais mērķis būs sašauts", šeit i = 1, 2, 3 un

$$P(D_i) = 1 - 0{,}00432 = 0{,}99568.$$

Tātad $P(C) = (0{,}99568)^3 \approx 0{,}987$.

Tātad varbūtība, ka vismaz viens mērķis paliks nesašauts, ir aptuveni tikai 0,013. Un tas viss − neskatoties uz to, ka visi pieci grenadieri ir tikai viduvēji šāvēji!

Šeit mēs sastopamies ar interesantu un praksē ļoti noderīgu efektu: ja atsevišķie "elementi" strādā "nedroši", tad, ņemot pietiekami daudz tādu "elementu" un liekot tiem strādāt **vienlaicīgi (paralēli)**, iegūtā sistēma būs praktiski "droša".

Piemērs. No punkta A uz punktu B iet sakaru līnija.Varbūtība, ka šī līnija izies no ierindas, ir 1/100. Tas nav slikti, ja šo līniju lietojat jūs pats, bet ir pavisam slikti, ja līniju lieto ģenerālis un jūs esat tikai jefreitors. Šajā gadījumā, lai neizaicinātu likteni, jūs no A uz B iekārtosiet vēl otru tādu pašu sakaru līniju. Varbūtība, ka vismaz viena no līnijām darbosies ir $1 - (1/100)^2 = 0{,}9999$. Tātad varbūtība, ka ģenerālis jūs nodos tribunālam, ir vairs tikai 1/10000. Ja jums arī tas liekas pārāk daudz, iekārtojiet vēl trešo tādu pašu līniju. Tad varbūtība nonākt tribunālā būs jau vairs tikai $(1/100)^3 = 1/1000000$.

9. uzdevums.

Pieņemsim, ka notikums A parādās procesā, kam ir n vienādi iespējami iznākumi, pie tam A parādās m iznākumos. Tātad

$$P(A) = m / n, P(-A) = (n-m) / n.$$

Pieņemsim arī, ka notikums B parādās otrā procesā, kurš atkarīgs no pirmā procesa iznākuma, tomēr jebkurā gadījumā šim procesam vienādi iespējamo iznākumu skaits ir l. Ja pirmajā procesa iznākumā parādījās A, tad no šiem l iznākumiem k iznākumi dod notikumu B. Tātad

$$P(B|A) = k / l.$$

Ja pirmā procesa iznākumā parādījās Ā, tad no l otrā procesa iznākumiem k_1 iznākumi dod B. Tātad

$$P(B|-A) = k_1 / l.$$

Aprēķināsim tagad varbūtību P(B). Notikums B parādās saliktā procesā, kurš sastāv no abiem pieminētajiem procesiem. Katram no n pirmā procesa iznākumiem atbilst l otrā procesa dažādi iznākumi. Tātad kopā: saliktajam procesam ir nl vienādi iespējami iznākumi. Cik no šiem iznākumiem dod notikumu B? Acīmredzot, šādu iznākumu skaits ir $mk+(n-m)k_1$. Tātad:

$$P(B)=\frac{mk+(n-m)k_1}{nl}=\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{k_1}{l} \quad ;$$

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(-A)P(B|-A) \quad .$$

10. uzdevums.

Notikums A="visas trīs izvilktās lodes būs baltas" ir reizinājums no trim notikumiem B_1, B_2, B_3, kur B_i = "i-tā izvilktā lode ir balta". Šoreiz notikumi vairs nav neatkarīgi, tāpēc nāksies lietot formulu

$$P(A) = P(B_1B_2B_3) = P(B_1)P(B_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1B_2).$$

Urnā ir 12 baltas un 8 melnas lodes, tāpēc $P(B_1) = 12/20$. Ja notikums B_1 iestājies, urnā ir 11 baltas un 8 melnas lodes, varbūtība **tad** izvilkt baltu ir $P(B_2|B_1) = 11/19$. Ja iestājušies jau **abi** notikumi B_1B_2, tad urnā ir 10 baltas un 8 melnas lodes, tātad $P(B_3 \mid B_1B_2) = 10/18$. Savelkot visu kopā:

$$P(A) = (12/20)\cdot(11/19)\cdot(10/18) \approx 0{,}193.$$

Notikums C = "izvilktas vismaz divas baltas lodes" ir summa diviem nesavienojamiem notikumiem: A = "visas trīs izvilktās lodes ir baltas", B = "no izvilktajām lodēm **divas** ir baltas". P(A) mēs jau zinām. Rēķināsim P(B).

Notikums B ir summa no trim nesavienojamiem notikumiem C_i = "i-tā izvilktā lode ir melna, pārējās − baltas" (i = 1, 2, 3). Šo C_i varbūtības rēķina tāpat kā tikko rēķinājām P(A):

$P(C_1) = (9/20)\cdot(12/19)\cdot(11/18) \approx 0{,}154;$

$P(C_2) = (12/20)\cdot(8/19)\cdot(11/18) \approx 0{,}154;$

$P(C_3) = (12/20)\cdot(11/19)\cdot(8/18) \approx 0{,}154.$

Tātad $P(C) = P(A) + P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) \approx 0{,}656.$

11. uzdevums.

Pēc vārda ABRAKADABRA sagriešanas atsevišķos burtos tiek iegūti: burti A − 5 gab., B − 2 gab., D − 1 gab., K − 1 gab., R − 2 gab.. Lai no šādas burtu kaudzes "izvilktu" vārdu DABA,vispirms jāizvelk burts D (varbūtība 1/11), pēc tam − burts A (varbūtība 5/10), burts B (varbūtība 2/9) un atkal burts A (varbūtība 4/8). Kopējā varbūtība tātad ir:

$$(1/11)\cdot(5/10)\cdot(2/9)\cdot(4/8) = 1/198.$$

Lai no izvilktajiem četriem burtiem varētu sastādīt vārdu DABA, vajag izvilkt divus A, vienu B un vienu D (jebkurā secībā). Vilkšanas secībai var būt pavisam 12 varianti:

AABD ABAD ADAB BAAD BDAA DAAB

DBAA AADB ABDA ADBA BADA DABA

Katra varianta varbūtību var aprēķināt tāpat kā tikko aprēķinājām varbūtību variantam DABA. Šīs varbūtības būs daļskaitļi ar saucēju $11\cdot10\cdot9\cdot8$. Bet skaitītāji būs šādi:

$5\cdot4\cdot2\cdot1$ $\quad$ $5\cdot2\cdot4\cdot1$ $\quad$ ... $\quad$ $5\cdot4\cdot1\cdot2$ $\quad$ ...

Kā redzams, skaitītāji visi iznāk vienādi, tāpēc varbūtība, ka no izvilktajiem 4 burtiem varēs sastādīt vārdu DABA, ir 12/198 = 2/33.

13. uzdevums.

Izmantosim 12. uzdevuma formulu (Beijesa formulu trim notikumiem):

A ="otrā izvilktā lodīte ir melna",
H_1, H_2, H_3 = "pirmā izvilktā lodīte ir balta (melna, sarkana)".
$P(H_1) = 2/10$, $P(H_2) = 3/10$, $P(H_3) = 5/10$,
$P(A \mid H_1) = 3/9$, $P(A \mid H_2) = 2/9$, $P(A \mid H_3) = 3/9$.
Reizinājumi: 6/90, 6/90, 15/90.

Pēc Beijesa formulas:

$P(H_1 \mid A) = 6/(6+6+15) = 6/27 = 2/9$.
$P(H_2 \mid A) = 6/27 = 2/9$. $P(H_3 \mid A) = 15/27 = 5/9$.

14. uzdevums.

Izmantojot tabulu no 1.sadaļas trešās etīdes:

$$E(K_2) = (1/36)\cdot(1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+6\cdot7+5\cdot8+4\cdot9+3\cdot10+2\cdot11+1\cdot12) = 7.$$

Izmantojot 1.uzdevuma tabulu: $E(K_3) = 10{,}5$.

15. uzdevums.

Lai aprēķinātu $E(K_1'\cdot K_1'')$, vispirms sastādīsim visu iespējamo iznākumu tabulu:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$E(K_1'\cdot K_1'')$ iegūsim, dalot katru tabulas skaitli ar 36, un dalījumus summējot. Tāpēc (šeit $S = 1+2+3+4+5+6$):

$E(K_1' \cdot K_1'') = (1/36) \cdot (1 \cdot S+2 \cdot S+3 \cdot S+4 \cdot S+5 \cdot S+6 \cdot S) = (1/36) \cdot S^2 = (21/6)^2 = (3,5)^2$.

16. uzdevums.

Uzskatīsim ģērboni par 0, bet ciparu − par 1. Ievedīsim gadījuma lielumus X_i ="i-jā metienā uzkrīt cipars". Tad $C_n = X_1+X_2+...+X_n$. Tā kā

$$E(X_i)=0 \cdot \frac{1}{2}+1 \cdot \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad ,$$

tad $E(C_n)=\frac{n}{2}$.

17. uzdevums.

Lielums $|S_1-p|$ pieņem: ar varbūtību p − vērtību 1−p, ar varbūtību 1−p − vērtību $|0-p|=p$. Tātad

$$E(|S_1-p|) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p).$$

Lielums $|S_2 - 2p|$ pieņem šādas vērtības:

$|2-2p|$ − ar varbūtību p^2,
$|1-2p|$ − ar varbūtību $2p(1-p)$,
$|0-2p| = 2p$ − ar varbūtību $(1-p)^2$.

Tātad

$$E(|S_2-p|) = 2p^2(1-p)+2p(1-p)(1-2p)+2p(1-p)^2 = 2p(1-p)(|1-2p|+1).$$

Šo izteiksmi var vienkāršot, šķirojot divus gadījumus:

a) $p \le 1/2$. Tad $1-2p \ge 0$ un

$$E(|S_2-p|) = 4p(1-p)^2 = 4p(1-p)\max(p, 1-p).$$

b) $p>1/2$. Tad $|1-2p| = 2p-1$ un

$$E(|S_2-p|) = 4p^2(1-p) = 4p(1-p)\max(p, 1-p).$$

Mazliet pacietības, un var parādīt arī, ka

$$E(|S_3-3p|) = 6p(1-p) \max(p^2, 2p(1-p), (1-p)^2),$$

$$E(|S_4-4p|) = 8p(1-p) \max(p^3, 3p^2(1-p), 3p(1-p)^2, (1-p)^3).$$

Uz šo piemēru pamata es iedrošinos izteikt hipotēzi, ka visiem n:

$$E(|S_n - np|) = 2\mathrm{np}(1-p) \max_{i=1..n-1} C_{n-1}^{i} p^{i}(1-p)^{n-1-i} \quad .$$

Vai jūs spēsiet šo hipotēzi pierādīt? V.Fellera grāmatas [1984] 1.sējuma 168.lpp. var izlasīt, ka (pie dotajiem n, p) izteiksme $C^i_n p^i(1-p)^{n-i}$ vislielākā ir pie $i \approx np$, pie tam šī vislielākā vērtība ir aptuveni $\frac{1}{\sqrt{(2\pi \cdot np(1-p))}}$. Tātad:

$$E(|Sn - np|) \approx \frac{2\mathrm{np}(1-p)}{\sqrt{2\pi\, np(1-p)}} = \sqrt{\frac{2}{\pi} np(1-p)} \quad .$$

Ja atceramies, ka $D(S_n) = np(1-p)$, tad iznāk, ka

$$E(|Sn - np|) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{D(S_n)} \approx 0{,}798 \sqrt{D(S_n)} \quad .$$

Tātad vismaz gadījuma lielumiem S_n standartnovirze $\sqrt{D(S_n)}$ iznāk proporcionāla "dabiskajam" izkliedes mēram $E(|S_n - np|)$. Tas nozīmē, ka matemātiķu izmisīgais mēģinājums aizstāt "dabisko" izkliedes mēru $E(|X-E(X)|)$ ar dispersiju $D(X) = E((X-E(X))^2)$ pārāk tālu no "patiesības" tomēr neaizved.

19. uzdevums.

Ja D(X)=0, tad

$$p_1(X_1 - E(X))^2 + ... + p_k(X_k - E(X))^2 = 0.$$

Tā kā visas varbūtības $p_i > 0$, tad $X_i = E(X_i)$ visiem i, t.i., X = E(X) ar varbūtību 1. Tātad X vienmēr pieņem vienu un to pašu vērtību.

Arī otrādi, ja X vienmēr pieņem vienu un to pašu vērtību a, tad E(X) = a, un D(X) = 0.

20. uzdevums.

Mēs jau zinām, ka

$$P(S_{2\mathrm{n}} = n) = \frac{C_{2\mathrm{n}}^{n}}{2^{2\mathrm{n}.}} \quad .$$

Apzīmēsim $\frac{1}{P(S_{2\mathrm{n}} = n)}$ ar d_n, tad mums būs jāpierāda, ka d_n tiecas uz bezgalību. Tā kā $d_0 = 1$ un

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\frac{4(n+1)^2}{(2\mathrm{n}+2)(2\mathrm{n}+1)}=\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}>1 \quad ,$$

tad skaitļi d_n veido augošu virkni. Tālāk:

$$d_{n+1}-d_n=d_n\left(\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}-1\right)=\frac{d_n}{2\mathrm{n}+1}\geq\frac{1}{2\mathrm{n}+1} \quad .$$

Tātad:

$$d_n\geq\frac{1}{2\mathrm{n}-1}+\frac{1}{2\mathrm{n}-3}+...+\frac{1}{3}+1 \quad .$$

Parādiet, ka labās puses summa tiecas uz bezgalību.

Piezīme. Izmantojot nopietnāku matemātiku − t.s. **Stirlinga formulu** (*James Stirling*, 1692–1770, skotu matemātiķis), var pierādīt, ka $P(S_{2\mathrm{n}}=n)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ (sk. arī V. Fellera grāmatu [1984]).

21. uzdevums.

Saskaņā ar varbūtību saskaitīšanas likumu:

$$P(T_n<a) + P(a\leq T_n\leq b) = P(T_n\leq b).$$

Ja $n\to\infty$, tad $P(T_n\leq b)\to N(b)$. Mēs zinām arī, ka $P(T_n\leq a)\to N(a)$, taču kreisās puses pirmais saskaitāmais nedaudz citāds − $P(T_n<a)$. Ko darīt? Ievērosim, ka

$$P(T_n\leq a) - P(T_n<a) = P(T_n=a).$$

Šī varbūtība ir vai nu vienāda ar 0, vai arī tā ir izteiksme $C^i_n\, p^i(1-p)^{n-i}$ (kādai i vērtībai no 0 līdz n). Vispārinot 20.uzdevuma risinājumu, pierādiet, ka arī

$$\max_{i=1..\mathrm{n}-1} C^i_{n-1}\, p^i(1-p)^{n-1-i}\to 0 \quad .$$

Tātad $P(T_n<a)\to N(a)$ un $P(a\leq T_n\leq b)\to N(b) - N(a)$, ko arī vajadzēja pierādīt.

Uzdevuma otrā daļa ir triviāla:

$$P(|T_n|>x) = P(T_n<-x) + P(T_n>x)\to N(-x) + 1 - N(x) = 2(1-N(x)).$$

22. uzdevums.

Šai gadījumā p = 1/6 un n = 6000, tātad $\sqrt{np(1-p)} \approx 28{,}87$ un

$$P(|S_n - 1000| > 28{,}87x) \approx 2(1 - N(x)).$$

Ja ņemsim x=2, tad (saskaņā ar tabulu) N(x) ≈ 0,977, tātad

$$P(|S_n - 1000| > 57{,}73) \approx 0{,}046 \approx 1/20.$$

Tātad nebūs nekāds brīnums, ja pēc 6000 metieniem Jūs konstatēsiet, ka uzkritušo sešinieku skaits ir nevis 1000, bet 942 vai 1058 (kaut arī tik lielas novirzes negadīsies bieži).

Ja ņemsim x=3, tad N(x) ≈ 0,9986, un

$$P(|S_n - 1000| > 86{,}60) \approx 0{,}0028 \approx 1/350 < 1/256.$$

Tātad varbūtība, ka sešinieku skaits atšķirsies no 1000 vairāk par 86, ir jau mazāka nekā varbūtība, ka, metot monētu, uzkritīs 8 cipari pēc kārtas.

Un beidzot, ja ņemsim x=3,28, tad N(x) ≈0,9995, un

$$P(|S_n - 1000| > 94{,}69) \approx 0{,}001.$$

Tātad varbūtība, ka sešinieku skaits atšķirsies no 1000 vairāk par 94, ir jau mazāka par 1/1000. Ar šo varbūtību var nerēķināties: tātad praktiski droši, ka 6000 metienos uzkritušo ciparu skaits būs starp 906 un 1094.

23.uzdevums.

Ja Y = aX+b, tad E(Y) = aE(X)+b, $D(Y)=a^2D(X)$, bet

$$E(XY) = E(aX^2 + bX) = aE(X^2) + bE(X).$$

Tālāk:

$$E(XY) - E(X)E(Y) =$$

$$aE(X^2) + bE(X) - a(E(X))^2 - bE(X) = a(E(X^2) - (E(X))^2) = aD(X);$$

$$K(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = aD\frac{(X)}{\sqrt{a^2 \cdot D(X)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2}} = +1 \text{ vai } -1.$$

24. uzdevums.

Tiek mesti divi spēļu kauliņi. Pirmajam kauliņam uzkritušo punktu skaitu apzīmē ar K, otrajam − ar K'. Ieved vēl vienu gadījuma lielumu: L = K+0,01K'. Jāaprēķina korelācijas koeficients K(K, L).

Mēs jau zinām, ka E(K)=E(K')=3,5. Tātad:

E(L) = E(K)+0,01E(K') = 3,535.

Pēc tam rēķinām dispersijas:

$E(K^2) = (1/6)(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2) = 91/6$,

$D(K) = E(K^2) - (E(K))^2 = 91/6 - (3{,}5)^2 \approx 2{,}9166...$,

$D(L) = D(K) + (0{,}01)^2 D(K')$ (lielumi K, K' ir neatkarīgi),

$D(L) \approx 2{,}9169582$.

Atliek aprēķināt E(KL):

$E(KL) = E(K^2 + 0{,}01KK') = E(K^2) + 0{,}01E(K)E(K') =$

(jo lielumi K, K' ir neatkarīgi)

$= 91/6 + 0{,}01\cdot(3{,}5)^2 \approx 15{,}289166...$

Un beidzot:

$$K(K,L) = \frac{E(KL) - E(K)E(L)}{\sqrt{D(K)}\cdot\sqrt{D(L)}} \approx \frac{2{,}9166...}{2{,}9168123} \approx 0{,}99995 \quad .$$

Tā kā lielumu K, L korelācijas koeficients ir ļoti tuvu 1, tad šos lielumus jāuzskata par lineāri cieši saistītiem. Tā tas patiešām arī ir: K≈L (jo starpība |K−L| nevar būt lielāka par 0,06).

25.(atvadu) uzdevums.

Urnā ir 3 baltas, 5 melnas un 7 sarkanas lodītes. No urnas izvelk vienu lodīti un paziņo Jums, ka tā nav balta. Kāda varbūtība, ka šī lodīte ir sarkana?

Uz jautājumu, kurš iesākas "Vai jums patīk...?", ne katrs būs gatavs uzreiz atklāti atbildēt. Pieņemsim, ka nepieciešams noskaidrot, cik lielai iedzīvotāju daļai "patīk A". Ja jautājums ir delikāts, tad aptauju varētu mēģināt izdarīt šādi. Intervētājs uzdod jautājumu, pēc tam aptaujājamais cilvēks ieiet blakus istabā un vienu reizi met spēļu kauliņu. Ja uzkrīt 1 vai 2 − tad viņam ir jāsaka patiesība, ja kas cits − jāmelo. (Intervētājs nezina, kas uzkritis). Pēc tam aptaujājamais ienāk atpakaļ pie intervētāja un pasaka "jā" vai "nē". Pieņemsim, ka tādas aptaujas rezultātā 60% cilvēku atbildēja "jā". Ko var teikt par to cilvēku procentu, kuriem patiešām "patīk A"? Ja persona X ir atbildējusi "jā", kāda varbūtība, ka viņai tiešām "patīk A"?