Version released: July 12, 2013

Einšteina relativitātes teorija

Matemātiķa piedzīvojumi

Kārlis Podnieks, LU profesors

Karlis.Podnieks@lu.lv

Kaut kad 1960-jos gados, vēl students būdams, lasīju (krievu tulkojumā) Einšteina 1916.gadā uzrakstīto populārzinātnisko grāmatiņu:

[1] Albert Einstein. Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie: Gemeinverständlich. *Sammlung Vieweg, Heft 38*; Braunschweig: F. Vieweg & Sohn, 1917 (online English translation).

Tur pirmoreiz ieraudzīju Lorenca transformāciju formulu izvedumu. Salīdzinot ar citiem populārzinātniskiem apstāstiem "uz pirkstiem", tas likās aizraujoši kompakts. Palikusi atmiņā "autentiskuma piegarša" (pats Einšteins!), tad pieņēmums, ka formulām ir jābūt lineārām pret x un t (kāpēc to nepamato?), t.s. relativitātes principa izmantošana un vēl pieņēmums (fiziķiem – eksperimentāls fakts) par gaismas ātruma neatkarību no atskaites sistēmas.

Tuvāk pensijas gadiem, 2005.gada vasarā man sagribējās saprast precīzi matemātiski, kādi tieši pieņēmumi ir Einšteina speciālās relativitātes teorijas (Lorenca formulu) pamatā. Nonācu pie secinājuma, ka šo formulu izvedumā pieņēmums par gaismas ātruma neatkarību no atskaites sistēmas nav nepieciešams, jo maksimālā robežātruma eksistence seko jau no relativitātes principa. Arī tas bija aizraujoši: izrādās, ka no ļoti vispārīgiem pieņēmumiem ("dabas likumiem"?) seko, ka ir iespējami tikai divi varianti: Galileja-Ņūtona absolūtā telpa un absolūtais laiks, un Einšteina laiktelpa, kurā telpa un laiks ir savīti kopā, un mehāniski ķermeņi nevar kustēties ātrāk par kādu konstantu ātrumu c (c ir teorijas parametrs, kura konkrēta vērtība no tās nav izrēķināma). Citu variantu nav – neko citu kā Lorenca transformācijas Einšteins izgudrot (vai atklāt?) nevarēja!

Mēģinot visu maksimāli vispārināt, sapinos un beidzot nolēmu paskatīties, ko šajā virzienā ir izdarījuši citi. Un, protams, atklāju, ka mans "atklājums" ir atklāts jau 1910.gadā (Vladimirs Ignatovskis, sk. piemiņas plāksni šī raksta beigās). Izskatās gan, ka "īstie" fiziķi šādus meklējumus par nopietniem neuzskata, un grāmatās piemin tikai garāmejot. Tas laikam tāpēc, ka neko jaunu fizikas teoriju attīstībā šie meklējumi nav devuši. Toties uzgāju vairākus "off mainstream" sacerējumus, kuru autori, likās, "manu" problēmu ir atrisinājuši pat labāk nekā es to spēju (sk. tālāk tekstā minētos avotus). Jutos sevī ļoti vīlies, tāpēc šos sacerējumus nemaz nelasīju un visu pasākumu pametu uz 8 gadiem...

Un tikai tagad, 2013.gada jūlijā man sagribējās lietu noskaidrot līdz galam. Un divu nedēļu laikā tiešām tiku līdz galam...

Lūk, kas man sanāca – liekas, relativitātes teorijas formulu izvedums no tīri matemātiskiem pieņēmumiem?

Slavenās formulas

Pieņemsim, ka mums ir *laiktelpa*, kurā ir tikai viena telpas dimensija x un laiks t, un aplūkosim divas inerciālas atskaites sistēmas S un S' (nav svarīgi, kas tas ir). Otrā sistēma kustas kustas pret pirmo ar kādu konstantu ātrumu v, attiecīgi – pirmā pret otro kustas ar ātrumu −v. Sākumā abu sistēmu koordinātu sākumpunkti sakrīt (x'=x=0, t'=t=0).

Ja kāda laiktelpas punkta P koordinātes sistēmā S ir (x, t), bet sistēmā S' tās ir (x', t'), tad kā šīs koordinātes ir savā starpā saistītas, t.i., zinot (x, t), kā var aprēķināt (x', t'), un otrādi? Ir zināmi divi varianti:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned} \quad \text{(t.s. Galileja transformācija);}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
$$t' = \frac{-\frac{v}{c^2}x + t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{(t.s. Lorenca transformācija, c ir gaismas ātrums).}$$

Ļoti vienkāršās Galileja transformācijas atbilst **Ņūtona mehānikai** (pats Galilejs par "savām" transformācijām gan neko nezināja). Lorenca transformācijas atbilst **Einšteina speciālajai relativitātes teorijai**, kurā nekas nevar kustēties ātrāk par gaismu (t.i. mehāniskiem objektiem: v<c, pati gaisma ir īpašs gadījums).

Matemātiķa izvedums

Pārfrazējot Feinmana teicienu: nav svarīgi, kādā veidā Jūs izvedat Lorenca transformācijas, ja vien rezultāts ir ... Lorenca transformācijas. Tas ir fiziķa viedoklis.

Kā jau teicu, tas, kas tiek piedāvāts tālāk, pirmkārt, nav nekas jauns. Jau no pašiem relativitātes teorijas sākuma gadiem atsevišķi cilvēki ir interesējušies par minimālajām pieņēmumu kopām, no kuram var izvest Lorenca transformācijas (sk. šī raksta beigās). Un, otrkārt, mēs šo izvedumu veidosim nevis kā fiziķi, bet kā matemātiķi (ko tas nozīmē – redzēsiet paši).

Viens no Einšteina relativitātes teorijas pamaprincipiem nosaka, ka **visās inerciālās atskaites sistēmās visiem mehāniskajiem procesiem ir jāizskatās vienādi.** Tas ir Einšteina ievestais "relativitātes princips". Tik izplūdis princips (tā nav kritika!), protams, nav noformulējams kā aksioma. Paskatīsimies, kā tas (īstenībā – ļoti maza daļa no tā) tiek izmantots teorijas uzbūvēšanai.

Tātad vēlreiz: pieņemsim, ka mums ir *laiktelpa*, kurā ir tikai viena telpas dimensija x un laiks t, un aplūkosim divas inerciālas atskaites sistēmas S un S' (nav svarīgi, kas tas ir). Otrā sistēma kustas pret pirmo ar kādu konstantu ātrumu v, attiecīgi – pirmā pret otro kustas ar ātrumu −v. Sākumā abu sistēmu koordinātu sākumpunkti sakrīt (x=x'=0, t=t'=0).

Sāksim ar jautājumu, ko diezvai kāds fiziķis pašā sākumā sev uzdos: **kādas "likumīgas" vērtības var pieņemt ātrums v?** Pieņemsim, ka v nevar būt bezgalīgs, t.i. ka **v ir reāls skaitlis.** Bet vai jebkurš reāls skaitlis? Pieņemsim, ka ātrumu spektrs ir **nepārtraukts**, t.i. ja v>0 ir "likumīgs" ātrums, tad tāds ir arī jebkurš reāls nenegatīvs mazāks ātrums $v_1 < v$. Un, protams, pieņemsim, ka **eksistē vismaz viens pozitīvs** "likumīgs" ātrums v_0, un ka ja v ir "likumīgs" ātrums, tad tāds ir arī −v.

[Ja no paša sākuma gribam atļaut arī **diskrētu ātrumu spektru**, tad problēma kļūst savādāka, un zemāk piedāvātais risinājums pilnībā vairs neder. Vai nebūtu interesanti izpētīt šo situāciju līdz galam?]

Interesanti, ka jau tagad, no mūsu pašiem pirmajiem pieņēmumiem seko, ka **ir iespējami tikai divi varianti** (vai divarpus): vai nu "likumīgie" ātrumi v aizņem visu reālo skaitļu taisni (**Galilejs?**), vai arī tie aizņem tikai kādu intervālu (−c, +c), kur c ir kāds reāls skaitlis (**Lorencs?**). Vai, varbūt, intervāla vietā varētu būt segments [−c, +c]?

Ja kāda laiktelpas punkta P koordinātes sistēmā S ir (x, t), bet sistēmā S' tās ir (x', t'), tad pieņemsim, ka šīs koordinātes no viena sistēmas otrā ir pārveidojamas, izmantojot *lineāru transformāciju*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x' = ax + bt \\ t' = dx + et \end{matrix} .$$

Koeficienti a, b, d, e, iespējams, ir atkarīgi (t.i. ir noteiktas funkcijas) no ātruma v (bet ne no x un t). Uzskatīsim šo pieņēmumu par **vienu no mūsu postulātiem**.

[Zemāk minētajos rakstos transformācijas linearitāte tiek izvesta no relativitātes principa, vai pat bez tā, sīkāk par to sk. raksta beigās. Šie izvedumi izmanto fizikālus apsvērumus, piemēram, tajos figurē stieņi un to garumi. **Bet ja linearitāti pieņem bez pamatojuma, tad viss formulu izvedums sanāk tīri matemātisks!**]

Pie v=0 sistēmas S un S' ir identiskas, tātad $a(0)=e(0)=1; b(0)=d(0)=0$. Arī tas ir pieņēmums, nevis teorēma! Tiesa, šo pieņēmumu mēs neizmantosim, jo tas seko no citiem pieņēmumiem, ko izmantosim.

Nākamais solis: sistēmā S aplūkojam sistēmas S' koordinātu sākuma punktu, tam $x = vt$. Sistēmā S' šis punkts ir nekustīgs un tam $x' = ax + bt = avt + bt = (av + b)t \equiv 0$. Tā kā a un b nav atkarīgi no t, tad av+b=0 un $b = -av$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -av \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x' = a(x - vt) \\ t' = dx + et \end{matrix} .$$

Ja a=0, tad x'=0 visiem x, kas nebūtu interesanti. Tāpēc **pieņemsim, ka a≠0** (jebkuram ātrumam v).

Vēl vairāk, **uzskatīsim, ka a>0** (ja tā nav, tad mainīsim x' ass virzienu uz pretējo). Ievērosim, ka a=a(v) ir funkcija no v, un **pieņemsim, ka tā ir nepārtraukta funkcija**, tad nebūs iespējams, ka a(v)<0 vienām v vērtībām, un a(v)>0 – citām, jo tad kādam v būtu jābūt a(v)=0.

Lai otrā vienādība kļūtu līdzīga pirmajai, ievedīsim apzīmējumus $d = -ad_1; e = ae_1$, tad:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -d_1 & e_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x' = a(x - vt) \\ t' = a(-d_1 x + e_1 t) \end{matrix} .$$

Starp citu, transformācijas matricas determinants nedrīkst būt 0: $a^2(e_1 - vd_1) \neq 0$ t.i. $e_1 - vd_1 \neq 0$ (jo pieņemam, ka **ir jāeksistē inversajai transformācijai**).

Vēl vairāk, uzskatīsim, ka $e_1 - vd_1 > 0$ (ja tā nav, tad mainīsim t' ass virzienu uz pretējo). Ievērosim, ka e=e(v) un d=d(v) ir funkcijas no v, **pieņemsim, ka tās ir nepārtrauktas funkcijas**, tad nebūs iespējams, ka $e_1 - vd_1 > 0$ vienām v vērtībām, un $e_1 - vd_1 < 0$ – citām, jo tad kādam v būtu jābūt $e_1 - vd_1 = 0$.

Tagad, tīri matemātiski, no (x', t') varam aprēķināt (x, t):

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{a(e_1 - d_1 v)} \begin{pmatrix} e_1 & v \\ d_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{matrix} x = \dfrac{e_1 x' + vt'}{a(e_1 - d_1 v)} \\ t = \dfrac{d_1 x' + t'}{a(e_1 - d_1 v)} \end{matrix} .$$

Starp citu, **šīs** transformācijas matricas determinants ir $\frac{1}{a^2(e_1-vd_1)}$.

Saskaņā ar relativitātes principu, abu matricu determinantiem ir jābūt vienādiem ar 1 (citādi vienai sistēmai tas būs mazāks par 1, bet otrai – lielāks par 1, kā var būt tāda atšķirība, ja sistēmas viena pret otru kustas pilnīgi vienādi?). Tātad: $a^2(e_1-vd_1)=1$. **Te izmantots "mazs gabaliņš" no relativitātes principa.**

Nākamais solis: sistēmā S' aplūkojam sistēmas S koordinātu sākuma punktu, tam $x'=-vt'$. Sistēmā S šis punkts ir nekustīgs un tam: $x=\frac{-e_1vt+vt'}{a(e_1-vd_1)}=\frac{(-e_1+1)vt'}{a(e_1-vd_1)}\equiv 0$. Tā kā a, d_1 un e_1 nav atkarīgi no t, tad $e_1=1$, tāpēc:

$$\begin{pmatrix}x'\\t'\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & -v\\-d_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}\text{, jeb }\begin{matrix}x'=a(x-vt)\\t'=a(-d_1x+t)\end{matrix}\ ;$$

$$\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}=\frac{1}{a(1-vd_1)}\begin{pmatrix}1 & v\\d_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\t'\end{pmatrix}\text{, jeb }\begin{matrix}x=\frac{x'+vt'}{a(1-vd_1)}\\t=\frac{d_1x'+t'}{a(1-vd_1)}\end{matrix}\ .$$

Determinanta vienādība $a^2(e_1-vd_1)=1$ tagad pārvēršas par $a^2(1-vd_1)=1$, jeb

$$a=\frac{1}{\sqrt{1-vd_1}}\ ,$$

plus secinājums, ka $1-vd_1>0$. Skaidrs arī, ka $a(1-vd_1)=\sqrt{(1-vd_1)}$.

Esam ieguvuši jau kaut ko līdzīgu Galileja un Lorenca transformācijām:

$$\begin{matrix}x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-vd_1}}\\t'=\frac{-d_1x+t}{\sqrt{1-vd_1}}\end{matrix}\ ;\ \begin{matrix}x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-vd_1}}\\t=\frac{d_1x'+t'}{\sqrt{1-vd_1}}\end{matrix}\ .$$

Ja $d_1=0$, tad esam ieguvuši Galileja transformācijas:

$$\begin{matrix}x'=x-vt\\t'=t\end{matrix}\ ;\ \begin{matrix}x=x'+vt'\\t=t'\end{matrix}\ .$$

Bet ja $d_1\neq 0$? Tad d_1 ir jāaplūko kā funkcija no v: no $1-vd_1>0$ mēs zinām, ka $d_1(v)<\frac{1}{v}$, kā arī zinām, ka $d_1(0)=0$ (jo, ja v=0, tad abas sistēmas pilnīgi sakrīt). Caur koordinātu sākumu zem hiperbolas zara $\frac{1}{v}$ var novilkt ļoti dažādas līnijas.

Bet izrādās, ka $d_1(v)$ ir jābūt **lineārai** funkcijai no v.

Lai to pamatotu, jau 1910.gadā V. Ivanovskis (sk. piemiņas plāksni raksta beigās) kā vēl vienu pieņēmumu izmantoja šādu "slēgtību pret kompozīciju": aplūkojam 3 atskaites sistēmas: ja S' kustas pret S ar ātrumu v, S'' kustas pret S' ar ātrumu w, tad S'' kustas pret S ar kādu ātrumu u, ko var aprēķināt, zinot v un w (visu sistēmu koordinātu sākumpunkti sakrīt: x''=x'=x=0, t''=t'=t=0). Te atkal ir **izmantots "mazs gabaliņš" no relativitātes principa**.

Tātad, no vienas puses, ņemot punktu P, kura koordinātes sistēmā S ir (x, t), tā koordinātes sistēmā S", t.i. (x", t") var aprēķināt caur koordinātēm sistēmā S':

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = a(w)\begin{pmatrix} 1 & -w \\ -d_1(w) & 1 \end{pmatrix} a(v)\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -d_1(v) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = a(w)a(v)\begin{pmatrix} 1+wd_1(v) & -v-w \\ -d_1(w)-d_1(v) & 1+vd_1(w) \end{pmatrix}$$

No otras puses:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ t'' \end{pmatrix} = a(u)\begin{pmatrix} 1 & -u \\ -d_1(u) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad .$$

Pirmais secinājums: $1+wd_1(v)=1+vd_1(w)$, jeb $\frac{d_1(v)}{v}=\frac{d_2(w)}{w}$ jebkuriem nenulles v un w. **Tātad** $d_1(v)$ **tiešām ir jābūt lineārai funkcijai no v**, ko varam apzīmēt ar $d_1(v)=\alpha v$, kur koeficients α **ir kāda universāla konstante**, kas nav atkarīga no v:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\alpha v & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{ , jeb } \begin{matrix} x' = a(x-vt) \\ t' = a(-\alpha v x + t) \end{matrix} \quad .$$

Otrs secinājums no matricu elementu pielīdzināšanas (tuvojamies ātrumu saskaitīšanas likumam):

$$\begin{matrix} a(u)=a(w)a(v)(1+\alpha vw) \\ a(u)u=a(v)a(w)(v+w) \end{matrix} \quad .$$

Tātad:

$$u=\frac{v+w}{1+\alpha vw} \quad .$$

Tagad būtu jāizsecina, ka $\alpha\geq 0$, tad pie $\alpha=0$ mēs iegūtu Galileja transformācijas, bet pie $\alpha>0$ mēs varētu apzīmēt $\alpha=\frac{1}{c^2}$ (universālās konstantes c dimensija tad būtu ātrums) un iegūtu Lorenca transformācijas.

Bet ja nu $\alpha<0$? Apzīmēsim $\alpha=-\frac{1}{c^2}$, tad $u=\frac{v+w}{1-\frac{vw}{c^2}}$, un ja w=v, tad $u=\frac{2\mathrm{v}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Tas nozīmē, ka šai gadījumā v=c nav "likumīgs" ātrums (jo tad būtu "likumīgs" arī u=∞). Ja $v=(\sqrt{2}-1)c$, tad u=c, tātad arī $(\sqrt{2}-1)c$ nav "likumīgs" ātrums, un, spriežot līdzīgi, tāds nav arī jebkurš ātrums $(\sqrt{2}-1)^n c$. Ja n ir tik liels, ka $(\sqrt{2}-1)^n c<v_0$, tad esam ieguvuši pretrunu ar saviem pieņēmumiem par "likumīgajiem" ātrumiem. Tātad nav iespējams, ka $\alpha<0$.

Esam galā. Pie $\alpha=0$ iegūstam Galileja transformācijas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{ , jeb } \begin{matrix} x' = x-vt \\ t' = t \end{matrix} \quad ;$$

un Ņūtona mehānikas ātrumu saskaitīšanas likumu: $u=v+w$.

Pie $\alpha>0$, apzīmējot $\alpha=\frac{1}{c^2}$, tad $a=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, un iegūstam Lorenca transformācijas:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -v \\ -\frac{v}{c^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ t' &= \frac{-\frac{v}{c^2}x+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} ;$$

un Einšteina **ātrumu saskaitīšanas likumu**:

$$u = \frac{v+w}{1+\frac{vw}{c^2}} .$$

Secinājumi

Apkoposim visus izvedumā izmantotos pieņēmumus, tie visi ir tīri matemātiski:

1. Mums ir *laiktelpa*, kurā ir tikai viena telpas dimensija x un laiks t, un aplūkosim divas inerciālas atskaites sistēmas S un S' (nav svarīgi, kas tas ir). Otrā sistēma kustas pret pirmo ar kādu konstantu ātrumu v, attiecīgi – pirmā pret otro kustas ar ātrumu −v. Sākumā abu sistēmu koordinātu sākumpunkti sakrīt (x'=x=0, t'=t=0).

2. Kādas "likumīgas" vērtības var pieņemt ātrums v? Pieņemsim, ka v nevar būt bezgalīgs, t.i. ka v ir reāls skaitlis. Bet vai jebkurš reāls skaitlis? Pieņemsim, ka ātrumu spektrs ir nepārtraukts, t.i. ja v>0 ir "likumīgs" ātrums, tad tāds ir arī jebkurš reāls nenegatīvs mazāks ātrums $v_1 < v$. Un, protams, pieņemsim, ka eksistē vismaz viens pozitīvs "likumīgs" ātrums v_0 , un ka ja v ir"likumīgs" ātrums, tad tāds ir arī −v.

3. Ja kāda laiktelpas punkta P koordinātes sistēmā S ir (x, t), bet sistēmā S' tās ir (x', t'), tad šīs koordinātes no viena sistēmas otrā ir pārveidojamas, izmantojot *lineāru transformāciju*:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \text{, jeb } \begin{aligned} x' &= ax+bt \\ t' &= dx+et \end{aligned} .$$

Koeficienti a, b, d, e, iespējams, ir atkarīgi (t.i. ir noteiktas funkcijas) no ātruma v (bet ne no x un t). Pieņemsim arī, ka a=a(v), d=d(v) un e=e(v) ir nepārtrauktas funkcijas no v.

4. Pieņemsim, ka a≠0 (jebkuram ātrumam v). Vēl vairāk, uzskatīsim, ka a>0 (ja tā nav, tad mainīsim x' ass virzienu uz pretējo).

5. Ievedīsim apzīmējumus $d=-ad_1 ; e=ae_1$. Uzskatīsim, ka $e_1 - vd_1 > 0$ (ja tā nav, tad mainīsim t' ass virzienu uz pretējo).

6. Transformācijas matricas determinantam (no S uz S') ir jābūt vienādam ar 1. Citādi transformācijai vienā virzienā determinants būs mazāks par 1, bet otrā – lielāks par 1, kā var būt tāda atšķirība? Te izmantots "mazs gabaliņš" no relativitātes principa.

7. "Slēgtība pret kompozīciju": aplūkojam 3 atskaites sistēmas (visu sistēmu koordinātu sākumpunkti sakrīt: x''=x'=x=0, t''=t'=t=0): ja S' kustas pret S ar ātrumu v, S'' kustas pret S' ar ātrumu w, tad S'' kustas pret S ar kādu ātrumu u, ko var aprēķināt, zinot v un w. Te izmantots "mazs gabaliņš" no relativitātes principa.

No šiem pieņēmumiem seko, ka vai nu $d_1(v)=0$, un tad:

$$\begin{array}{r} x'=x-vt \\ t'=t \end{array} \quad \text{(Galileja transformācijas),}$$

vai arī eksistē tāds universāls ātrums c, ka $d_1(v)=\frac{v}{c^2}$, un tad "likumīgi" ir tikai ātrumi v, kas mazāki par c, kā arī:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$t'=\frac{-\frac{v}{c^2}x+t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{(Lorenca transformācijas).}$$

Citu variantu nav – ja vien neatsakāmies no kāda no minētajiem matemātiskajiem pieņēmumiem! Neko citu kā Lorenca transformācijas Einšteins izgudrot (vai atklāt?) nevarēja! Bet, protams, to, ka c ir gaismas ātrums, tīri matemātiski izsecināt nevar, te gan būs vajadzīgs fiziķis!

Priekšteči

Pirmkārt, mans šodienas domu gājiens diezgan labi atbilst tam, kas ir atrodams jau 10 gadus vecākā sacerējumā:

[2] Palash B. Pal. Nothing but Relativity. *European Journal of Physics,* Vol. 24 N 3, May 2003 (online copy: http://arxiv.org/abs/physics/0302045)

Papildus minētajam, kolēģis *Palash B. Pal* **izved transformācijas linearitāti** no telpas un laika homogenitātes (lokālās).

Sākumā pieņemam, ka sistēmā S' punkta koordinātes iegūst no koordinatēm sistēmā S ar **diferencējamu** funkciju palīdzību:

$$\begin{array}{c} x'=X(x,t,v) \\ t'=T(x,t,v) \end{array} \; .$$

Sistēmā S aplūkojam **cietu stieni** (x_1, x_2) , pārvietojam to par h uz priekšu: (x_1+h, x_2+h) . Sistēmā S' tad šis stienis pārvietosies no pozīcijas $(X(x_1,t,v), X(x_2,t,v))$ uz pozīciju $(X(x_1+h,t,v), X(x_2+h,t,v))$. Stieņa garums pie pārvietošanas nedrīkst mainīties, tātad:

$$X(x_1+h,t,v)-X(x_2+h,t,v)=X(x_1,t,v)-X(x_2,t,v) \quad \text{,jeb}$$

$$X(x_1+h,t,v)-X(x_1,t,v)=X(x_2+h,t,v)-X(x_2,t,v) \; .$$

Dalot abas puses ar h un liekot h→0, iegūstam:

$$\frac{\partial X(x_1,t,v)}{\partial x}=\frac{\partial X(x_2,t,v)}{\partial x} \; ; \text{t.i.} \quad \frac{\partial X(x,t,v)}{\partial x}\equiv const \; .$$

Tātad funkcija X ir argumenta x lineāra funkcija.

Līdzīgā veidā secinām, ka X ir lineāra arī pret t, un ka arī T ir lineāra x un t funkcija. Funkciju koeficienti, protams, var būt atkarīgi no v.

[3] Joel W. Gannett. Nothing but Relativity, Redux. *European Journal of Physics,* Vol. 28, N 6, November 2007 (online copy: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1005/1005.2062.pdf)

Šī raksta autors slavē [2], bet uzrāda vienu nepilnību transformācijas linearitātes izvedumā, kā arī piedāvā šīs linearitātes izvedumu no vēl vispārīgākiem pieņēmumiem (piemēram, viņam nevajag, lai transformāciju funkcijas būtu diferencējamas).

Minētā nepilnība ir interesanta, atgriežamies pie sprieduma par pārvietoto stieni.

"Sistēmā S stieni (x_1, x_2) pārvietojam par h uz priekšu: (x_1+h, x_2+h) . Sistēmā S' tad stienis $(X(x_1,t,v), X(x_2,t,v))$ pārvietojas uz $(X(x_1+h,t,v), X(x_2+h,t,v))$, bet stieņa garums nedrīkst mainīties, t.i. ..."

Bet kas te notiek ar laikiem? Ja sistēmā S abus stieņa galus ņemam vienā laika momentā t, tad sistēmā S' atbilstošie laika momenti $T(x_1+h,t,v); T(x_2+h,t,v)$ jau var atšķirties! Un tad pieņēmums par garumu vienādību vairs nav izmantojums! Tā vietā kolēģis *Joel W. Gannett* piedāvā sarežģītāku izvedumu no vēl vispārīgākiem pieņēmumiem.

Visos šajos transformāciju linearitātes pamatojumos tiek izmantoti **fizikāli apsvērumi**. Matemātiķis var sevi mierināt, pārfrazējot Feinmana teicienu: nav svarīgi, kādā veidā Jūs pamatojat transformāciju linearitāti, ja vien rezultāts ir ... transformāciju linearitāte.

Ir arī citi priekšteči, sākot jau ar 1910.gadu:

Vēsturisks citāts no

[4] Sebastiano Sonego and Massimo Pin. Foundations of anisotropic relativistic mechanics. *Journal of mathematical physics*, 2009, N.4, Vol.50, pp.042902-1 - 042902-28 (online copy: http://arxiv.org/pdf/0812.1294.pdf, šajā rakstā ir ļoti liela bibliogrāfija "par tēmu"):

"Note that the possibility for the existence of invariant speeds has been derived as a kinematical possibility only from the postulates of relativity, homogeneity, and pre-causality. This approach to relativistic kinematics was pioneered by von Ignatowsky in 1910 [11], and was later rediscovered many times in different ways [3, 9, 12, 13]. See also [14] for a rigorous treatment, and [15, 16] for clear presentations at a textbook level."

Tēmas pioniera piemiņai

Игнатовский Владимир Сергеевич (1875-1942)

(Notiesāts kopā ar sievu un nošauts Ļeņingradā 1942.gada janvārī.)

Wikipedia: Vladimir Ignatowski.

[5] W. von Ignatowsky, "Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip", *Berichte der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 20/1910, 788-796 (online English translation).

[6] W. von Ignatowsky, "Das Relativitätsprinzip," *Archiv Der Mathematik Und Physik*, 17/1911, 1-24, and 18/1911, 17-40.

Pateicības

Paldies Dainim Zepam un Paulim Ķikustam par vērtīgajām diskusijām.