АКАДЕМИЯ НАУК СССР
Ордена Ленина Математический институт им. В. А. Стеклова
Ордена Ленина Институт прикладной математики
Институт философии

АКАДЕМИЯ НАУК МССР
Ордена Трудового Красного Знамени Институт математики с ВЦ

ЧЕТВЕРТАЯ ВСЕСОЮЗНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

Тезисы докладов и сообщений

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ШТИИНЦА"
КИШИНЕВ • 1976

К.М.ПОДНИЕКС (Рига)

ТЕОРЕМА О ДВОЙНОЙ НЕПОЛНОТЕ

Рассматриваются только теории первого порядка с равенст-
вом в языке формальной арифметики (FA). Будем говорить, что
M—м е т а т е о р и я д л я T, если фиксированы формулы
$PRF_T(x,y)$, $REF_T(x,y)$, выражающие в теории M
отношения:" x есть T-доказательство формулы y ", "x есть
T-опровержение формулы y ". Теорию T назовем д о с т а -
т о ч н о с и л ь н о й, если функция подстановки представи-
ма в T , всякое рекурсивное отношение выразимо в T ([I] ,
стр.I32) и для всякого $k>0$:

$$\vdash_T (x<\bar{k}) \equiv (x=\bar{0}) \vee \ldots \vee (x=\overline{k-1}).$$

ТЕОРЕМА. Пусть теория T достаточно сильна, M—метатео-
рия для T , обе теории непротиворечивы. Тогда найдется зам-
кнутая формула H , неразрешимая в T , но такая, что в M
нельзя доказать ни то, что H недоказуема в T , ни то, что
H неопровержима в T .

ПРОБЛЕМА. Указать е с т е с т в е н н ы й аналог форму-
лы H для $T=ZFC$ и $M=ZFC+Con(ZF)$ (или $ZFC+SM$).
Гипотеза "существует недостижимый кардинал" не подходит для
этой цели: ZFC - неопровержимость ее действительно нельзя
доказать в $ZFC+SM$, но к сожалению, ZFC-недоказуемость
ее можно установить уже в $FA+Con(ZF)$ ([2],стр.40-4I).

Теорему о тройной неполноте и другие см. [3].

ЛИТЕРАТУРА. I. Э.Мендельсон. Введение в математическую
логику.М., "Наука",I97I.2. Т.Йех. Теория множеств и метод
форсинга. М., "Мир", I973. 3. К.М.Подниекс. Теорема о двойной
неполноте."Уч.зап.Латв.унив.",I975,т.233, I9I.