This page represents the introductory chapter "The Nature of Formal Theories" of the book:
K. Podnieks. Around Goedel's theorem. Latvian State University Press, Riga, 1981, 105 pp. (in Russian)

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра дискретной математики и программирования

К.М.Подниекс

ВОКРУГ ТЕОРЕМЫ ГЁДЕЛЯ

Решением Ред.-изд. совета ЛГУ им.П.Стучки
от 26 декабря 1980 г. утверждается как
учебное пособие
для студентов специальности 0647
"прикладная математика"

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1981

УДК 681.142.2

В учебном пособии излагаются доказательство теоремы Гёделя о неполноте и связанные с ней результаты. Подробно обсуждается методологическое значение достижений математической логики.

Издание предназначается для студентов курса специальности "прикладная математика" и содержит материал спецкурса.

Рецензенты: Я.Цирулис – ст.преп. каф.дискретной математики и программирования физ.-мат. фак. ЛГУ им. П.Стучки;

Э.Икауниекс – доц. зав.каф.дискретной математики и программирования физ.-мат. фак. ЛГУ им. П.Стучки

Ц $\frac{20204-005У}{М 812(11)-81}$ 28.81.1702070000

Предисловие

Настоящее пособие представляет спецкурс по логике, который много раз читался студентам 4 курса физико-математического факультета ЛГУ им. П.Стучки специальности "прикладная математика". Центральное место в курсе занимает теорема Гёделя о неполноте. В отличие от обычных курсов логики, в которых дается детальное доказательство теоремы Гёделя, мы пропускаем этапы, требующие лишь утомительного применения несложной логической техники. Как правило, слишком большое количество деталей отвлекает внимание и силы от основных идей (их немало вокруг теоремы о неполноте и они имеют большое методологическое значение). Кроме того, наш спецкурс ориентирован на специальность "прикладная математика". Подавляющая часть выпускников по этой специальности будут программистами – им логическая техника в больших дозах не нужна. Те же выпускники, которые будут вести научную работу в области вычислительной науки, смогут овладеть ею самостоятельно.

Для полного понимания курса требуется знание основных понятий теории алгоритмов, знакомство с основами математической логики (исчисление предикатов) и элементами теории множеств. Методологические выводы будут понятны и читателям нематематического профиля.

Курс рассчитан на один семестр, 2 часа в неделю.

Введение. ПРИРОДА ФОРМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

I. Что делает математическую теорию чем-то определенным? Предположим, что во всем многообразии мыслительной деятельности человечества мы находим нужным выделить особо некую сферу, называемую теорией Т. По-видимому, это следствие того, что в этой теории признаются справедливыми только определенные виды утверждений и умозаключений. Все прочие же виды считаются либо неправильными, либо не относящимися к данной теории. Так, например, все математики сходятся во мнениях относительно того, какие рассуждения о свойствах натуральных чисел следует признать доказательными, а какие приводят только к гипотезам или ошибкам. И это - несмотря на то, что большинство математиков не знает ничего о каких-либо аксиомах арифметики. Даже в тех случаях, когда теория вроде бы построена на аксиомах (например, геометрия в "Началах" Евклида), позднее в рассуждениях этой теории могут быть обнаружены моменты, не вызывающие разногласий относительно их справедливости, но в аксиомах, тем не менее, не отраженные. Например, различные свойства понятия "точка А лежит на прямой между В и С" используются у Евклида без всякого обоснования. Только в XIX веке М.Паш ввел "аксиомы порядка", характеризующие это понятие.

Таким образом, определенность любой математической теории распадается на две части:

а) явно выделенные основные принципы теории, сформулированные в виде аксиом и правил вывода теорем;

б) вся остальная часть.

Определенность (а) не вызывает сомнений. Но как может быть чем-то определенным (б)? Хотя понятие "А лежит между В и С" до М.Паша не было аксиоматизировано, все математики, тем не менее, рассуждали о нем одинаково, не сознавая, как это у них получается. Здесь мы имеем дело с определенным комплексом "интеллектуальных рефлексов", которые наряду с аксиомами (или совсем без них) управляют

рассуждениями теории. Такие бессознательные управляющие факторы принято называть интуицией. Можно сказать поэтому, что помимо явно сформулированных аксиом и правил вывода, теория может быть фиксирована в особой определяющей ее интуиции. Можно говорить об "интуиции натурального ряда", которая (без всяких аксиом) однозначно управляет нашими рассуждениями о натуральных числах, или о "евклидовой интуиции", которая делает геометрию вполне определенной (поскольку она всегда одинаково управляет нашими рассуждениями о точках, прямых и плоскостях, хотя в аксиомах Евклида содержатся далеко не все предпосылки геометрических рассуждений).

Как объяснить возникновение интуиций, одинаково управляющих рассуждениями стольких людей? По-видимому, решающим здесь является то, что эти люди - существа примерно одинаковые, что все они имеют дело с примерно одинаковым внешним миром, что в процессе обучения, воспитания, практической и научной деятельности они стремятся к согласию между собой.

Некоторые теории в свое время были чисто интуитивными (как арифметика натуральных чисел до конца XIX века). Большинство же математических теорий определяется, как правило, смешанным образом - часть основных принципов формулируется в виде аксиом, часть - оставляется в определяющей интуиции. В процессе развития математики первая часть имеет тенденцию возрастать за счет второй части: время от времени появляется необходимость в явном выделении принципов, которые до этого относились к интуиции. Это выделение не всегда бывает "механическим", скорее этот процесс можно сравнить с реконструкцией (интуитивных понятий в аксиоматические). Иногда реконструированное понятие обладает неожиданными свойствами, которых у его интуитивного прообраза не было. Например, непрерывная (в "аксиоматическом" смысле этого слова) функция может оказаться нигде не дифференцируемой.

Насколько далеко может зайти процесс возрастания аксиоматической части за счет интуитивной? Возможно ли полное исчезновение интуитивной части, т.е. исчерпывающее сведение определяющей интуиции какой-либо теории к системе аксиом и правил вывода?

2. Формальные теории. В трудах Г.Фреге, Б.Рассела и Д.Гильберта (относящихся к концу XIX и началу XX века) сделаны попытки довести процесс выделения аксиом до конца, т.е. представить ту или иную математическую теорию в виде исчерпывающей системы аксиом и правил вывода, без всякой примеси интуиции.

Как же выглядят такие полностью аксиоматизированные теории? Чаще всего их называют формальными, подчеркивая, что ни один шаг рассуждения в них нельзя сделать, не сославшись на "документ" - точно сформулированный список аксиом и правил вывода. Даже "очевидные" логические принципы вроде "если A влечет B и B влечет C, то A влечет C" должны быть явно сформулированы в списке аксиом.

Более точно, "формальность" некоторой формальной теории T выражается в существовании механически применяемой процедуры P_T для проверки правильности рассуждений. Если некто предлагает математический текст, являющийся, по его мнению, доказательством теоремы A в теории T, то мы можем проверить, механически применяя процедуру P_T, действительно ли предложенный текст соответствует стандартам правильности, принятым в T. Механический характер процедуры P_T следует понимать так, что стандарт правильности рассуждений для T определен настолько точно, что применение P_T можно передать вычислительной машине. (Напомним, что речь идет о процедуре проверки доказательств, а не о процедуре поиска их!) Если проверку правильности доказательств в теории T нельзя возложить на машину и она доступна в полной мере только человеку, это значит, что еще не все принципы этой теории аксиоматизированы (то, что мы не умеем передать машине, остается в нашей интуиции и "оттуда" управляет нашими рассуждениями).

В качестве несерьезного примера формальной теории

рассмотрим шахматы - теорию Ш. "Утверждениями" в Ш будем считать позиции (всевозможные расположения фигур на доске вместе с указаниями "ход белых", "ход черных"). Тогда "аксиомой" теории Ш естественно назвать начальную позицию. "Правилами вывода" будем считать правила, определяющие, какие ходы допустимы в каждой позиции. Эти "правила вывода" позволяют получать из одних "утверждений" другие, в частности, отправляясь от нашей "аксиомы", мы будем получать "теоремы" теории Ш. Общая характеристика "теорем" Ш состоит, очевидно, в том, что это - всевозможные позиции, которые могут появиться, играя по правилам. В чем же выражается формальность теории Ш? Если некто предлагает нам "математический текст" и утверждает, что это - доказательство теоремы A в теории Ш, ясно, что речь идет о непроверенной записи шахматной партии, отложенной в позиции A. Проверка не составляет, однако, проблемы: правильность записи может быть проверена чисто механически - настолько точно сформулированы правила игры в шахматы. Можно даже составить программу для ЭВМ, которая будет осуществлять такие проверки.

Несколько серьезнее другой пример формальной "теории" (мы заимствуем его у П.Лоренцена). Утверждениями в теории L считаются всевозможные цепочки, составленные из букв алфавита $\{a, b\}$, например: aa, aba и т.д. Единственной аксиомой L является цепочка a. Наконец, в L имеются два правила вывода:

$$\frac{A}{Ab}, \quad \frac{A}{aAa}.$$

Такая запись означает, что из цепочки A в теории L можно вывести цепочки Ab и aAa. Примером теоремы L является цепочка $aababb$:

$$a \vdash ab \vdash aaba \vdash aabab \vdash aababb.$$

Этот факт обычно записывается так: $\vdash_L aababb$ (читается: "в теории L выводимо утверждение $aababb$ ").

Упражнение 0.1. Попытайтесь дать общую характеристику теоремам теории L. Чем они отличаются от "нетеорем"?

3. Проблема адекватности формализаций. Было уже отмечалось, что процесс выделения аксиом из определяющей интуиции не всегда является буквально выделением, что этот процесс является скорее реконструкцией интуитивных понятий "на другом материале". Так, например, в 1870-х годах было впервые получено определение понятия действительного числа через рациональные числа. В результате многие подразумеваемые свойства действительных чисел превратились в доказываемые теоремы. Но возникает вопрос - почему мы считаем эти реконструкции (Р.Дедекинда, Г.Кантора и др.) удовлетворительными? Достаточно ли точно и полно передают они исходное интуитивное понятие действительного числа? Как обосновать точность и полноту реконструкции, если исходное понятие существует только в интуиции и всякое его "выделение" оттуда становится новой реконструкцией, адекватность которой опять-таки нуждается в обосновании? Не остается ничего другого, как руководствоваться тем, как интуитивное понятие проявляет себя в практике математических рассуждений. Все свойства действительных чисел, которые ранее считались "сами-собой разумеющимися" и которые хотя бы раз где-то фиксировались на бумаге, удалось доказать как теоремы, основанные на новом реконструированном понятии. Все теоремы анализа, ранее доказанные с использованием интуитивного понятия о действительном числе, теперь могли быть "передоказаны" на основе реконструированного понятия. Т.е. те стороны интуитивного понятия, которые успели проявить себя в математической практике, были в реконструкции отражены. Но, быть может, некоторые стороны интуитивного понятия еще не проявили себя, но могут проявить в будущем? Оспаривать такое предположение трудно. Предположим, однако, что так оно и случится: явится лет через что математик М и докажет теорему анализа, используя свойство действительных чисел, которое ранее себя никак не проявляло. И все сразу согласятся, что это на самом деле "неотъемлемое" свойство действительных чисел? Что оно "подразумевалось" и 100 лет назад? Последнее, во

всяком случае, уже нельзя будет доказать - никто из ныне живущих математиков до "открытия" М не доживет! Так или иначе, но что касается действительных чисел, между математиками сегодня царит полное согласие: реконструкции Дедекинда, Кантора и др. точно и исчерпывающим образом передают интуитивное понятие действительного числа.

Аналогичная ситуация возникает и в случае формальных теорий. Если ранее мы имели дело с интуитивной (или полуинтуитивной, частично аксиоматизированной) теорией $T1$, а теперь некто предлагает заменить $T1$ формальной теорией $T2$, как может он обосновать адекватность такой замены? В теории $T2$ все принципы рассуждений явно и точно сформулированы, тогда как часть принципов $T1$ все еще скрыта в интуиции. О каком соответствии между $T1$ и $T2$ может идти речь?

Об адекватности аксиом интуиции следует судить только по тем сторонам последней, которые проявляют себя в математической практике ("на бумаге"), т.е. в теоремах и всеми признаваемых доказательствах. Если будет установлено, что все доказанные до сих пор теоремы теории $T1$ могут быть переформулированы и передоказаны в теории $T2$, то нам придется поверить автору $T2$: эта теория действительно адекватно формализует $T1$. И если после этого сторонникам $T1$ она все еще не нравится (по "метафизическим" соображениям или просто эмоционально - как теория формальная), какое это может иметь значение?

4. Программа Гильберта. Возможна ли формальная теория, которая формализовала бы всю существующую математику? Этот вопрос был поставлен в свое время вовсе не из праздного любопытства. Давид Гильберт поставил его в самом начале XX века под впечатлением парадоксов (противоречий), обнаруженных в теории множеств Г.Кантора. К этому времени теория множеств уже успела показать себя как естественная основа и плодотворнейшее орудие математики. Путь спасения "основы и орудия" Гильберт видел в своей программе перестройки оснований математики, которая состояла из двух

дения $\vdash_L A \longrightarrow \vdash_L aaA$ мы воспользовались математической индукцией). Так в какой же теории следует доказывать непротиворечивость формальной теории, охватывающей всю существующую математику?

Ясно, что средства рассуждения, используемые для обоснования непротиворечивости некоторой теории T, должны быть более надежными (в смысле непротиворечивости) по сравнению со средствами, допускаемыми в самой теории T. В самом деле, можно ли доверять доказательству непротиворечивости, если в нем используются сомнительные средства? Но если теория T охватывает всю математику, никаких средств рассуждения, выходящих за пределы T, математик знать не может. Поэтому нужные для доказательств непротиворечивости средства рассуждения мы вынуждены черпать из самой теории T - из той ее части, которая представляется нам наиболее надежной.

В математике обычно выделяют три уровня "надежности":

1) арифметические ("дискретные") рассуждения - используют только понятие целого числа,

2) аналитические ("непрерывные") рассуждения - используют понятия действительного числа, понятия действительной и комплексной функции,

3) теоретико-множественные рассуждения - используют канторовское понятие о произвольном множестве.

Первый уровень считается наиболее надежным, третий - наиболее опасным. Гильберт рассчитывал на доказательство непротиворечивости всей математики средствами первого уровня.

Сразу, как только Гильберт объявил о своем проекте, не кто иной как Анри Пуанкаре высказал сомнения в его реальности. По его мнению, Гильберт, доказывая непротиворечивость математики с помощью математической индукции (средство первого уровня!), допускает в своих рассуждениях порочный круг. Непротиворечивость математики означает и непротиворечивость математической индукции ... доказанную с ее же помощью. Тогда Гильберт не понял намека ...

Но через 25 лет Курт Гёдель доказал, что Пуанкаре был прав...

5. Место формальных теорий в науке. Все научные теории можно разделить на два класса:

а) теории с развивающейся системой принципов,

б) теории с застывшей системой принципов (т.е. математические теории).

Теории класса (а) в ходе своего развития постоянно обогащаются новыми положениями, правомерность которых нельзя обосновать ранее принятыми принципами. В качестве примера такой теории в области биологии можно назвать теорию строения клетки. Некоторые стороны своего объекта эта теория раскрывает уже достаточно хорошо, многие другие - недостаточно хорошо, некоторые - не может объяснить вообще. Прогресс теории состоит здесь в постоянном обогащении новыми принципами, которые опираются на новую, более совершенную экспериментальную базу и, как правило, не могут быть полностью выведены из признанных ранее принципов.

С другой стороны, в математике, физике, отчасти - в химии и совсем редко - в других науках встречаются теории, принципиальная основа которых со временем не меняется, а если и меняется - это изменение квалифицируется как переход к новой теории. Так, например, на специальную теорию относительности А.Эйнштейна можно смотреть как на уточнение классической механики И.Ньютона, как на дальнейшее развитие той же ньютоновской теории. Но так как обе теории очень точно определены, на переход "от Ньютона к Эйнштейну" можно смотреть и как на переход к новой теории. Развитие обеих этих теорий продолжается: доказываются новые теоремы, изобретаются новые методы расчетов и т.д. Однако, принципиальная основа (исходные постулаты) каждой из них остается неизменной (такой, какой она была при жизни создателей этих теорий). Только те положения признаются относящимися к данной теории, которые выводимы из давно известных принципов. Все, что выходит за рамки этих принципов, относится уже к другой теории.

Застывшая система принципов всегда воплощена в аксиомах, совместно с тем, что мы назвали выше определяющей интуицией теории. В тех случаях, когда аксиоматизацию определяющей интуиции удается довести до конца, мы получаем формальную теорию, принципиальные возможности которой совпадают с возможностями исходной интуитивной теории. Это не означает, однако, что полученная "модель" может заменить "оригинал" в практике исследования. Многие рассуждения, которые в интуитивной теории опытный специалист проводит очень быстро и представляет компактно, в формальной теории оказались бы настолько громоздкими, что будь только она на свете, развитие теории прекратилось бы. В чем же тогда польза от формализации?

Во-первых, формализация позволяет подвергнуть подробному исследованию отношения между принципами теории (установить их зависимость или независимость, инвариантность относительно изменений в других принципах и т.п.). Во-вторых, и это самое важное, в некоторых случаях после формализации удается установить недостаточность исходной теории для решения отдельных проблем, естественно возникающих в ней (как это произошло с континуум-проблемой в теории множеств).

Итак, <u>формальные теории - это модели научных теорий, основанных на застывших системах принципов</u>. В практике исследования эти модели не способны заменить "оригинал", назначение их другое - сделать доступным исследованию систему основных принципов теории. Такое понимание места формальных теорий в науке предостережет нас от ошибок в истолковании математических результатов К.Гёделя и его последователей.

Глава I. КЛАССИЧЕСКИЕ ФОРМАЛЬНЫЕ ТЕОРИИ

§ I. Логика в формальных теориях

Общую часть основных принципов всех теорий составляет <u>логика</u>. Соответственно и каждая серьезная формальная теория имеет среди своих аксиом - <u>логические аксиомы</u>, а среди своих правил вывода - <u>логические правила</u>. Поэтому в некоторых своих чертах эти теории устроены одинаково. Основой теории является ее <u>язык</u>. Первичными неделимыми единицами языков являются:

а) <u>переменные</u> (в своем интуитивном понимании теории мы всегда "неофициально" приписываем ~~каждой~~ переменной какую-либо область значений: "все натуральные числа", "все множества" и т.п.),

б) <u>константы</u> (например, 0 в арифметике; интуитивно мы приписываем каждой константе "неофициальное" конкретное значение из области значений переменных),

в) <u>функциональные символы</u> (например, $+$ в арифметике; "неофициально" это функция $x+y$),

г) <u>предикатные символы</u> (во всех языках содержится, как минимум, символ $=$, интуитивно понимаемый нами как равенство),

д) <u>логические связки и кванторы</u> (отрицание $\neg$, дизъюнкция $\vee$, конъюнкция $\&$, импликация $\supset$, эквивалентность $\equiv$, квантор существования $\exists$, квантор всеобщности $\forall$),

е) <u>скобки и запятые</u>.

Из переменных, констант и функциональных символов (а также скобок и запятых) по особым для каждой формальной теории правилам составляются <u>термы</u>. Например, в арифметике допустим терм $(x+y)+1$, где x, y - переменные, 1 - константа, $+$ - функциональный символ. Интуитивно, терм - либо более сложное обозначение для объекта из области значений переменных (например, $(1+1)+1$), либо обо-

The End.