

LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE  
PSRS AUGSTĀKĀS IZGLĪTĪBAS MINISTRIJA  
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР  
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# ZINĀTNISKIE RAKSTI УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

X SĒJUMS \* X TOM

RĪGĀ, 1957 РИГА

REDAKCIJAS KOLEĢIJA

Technisko zinātņu doktors, profesors J. G. Panovko

Technisko zinātņu kandidats, docents K. K. Gailis

Technisko zinātņu kandidats J. B. Vasermanis

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Доктор технических наук, профессор Я. Г. Пановко

Кандидат технических наук, доцент К. К. Гайлис

Кандидат технических наук Е. Б. Васерман

TECHNISKĀS ZINĀTNES  
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

III SĒJUMS    ВЫПУСК III

## **ОТ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ**

Предлагаемый выпуск является публикацией работ, выполненных на механическом и инженерно-строительном факультетах Латвийского государственного университета.

Ранее техническим наукам были посвящены следующие тома Ученых записок Латвийского государственного университета: том I (1949 г.) и том IV (1953 г.)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*К. К. ТАБАКС, доцент, канд. технических наук*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ

За последнее время, при внедрении новой техники, все шире в технологических процессах применяется метод нагрева материалов при помощи электрического тока. Преимуществами этого метода являются возможность получения равномерного прогрева всего материала, широкие возможности управления процессом и его автоматизации.

Однако, при внедрении нагрева материала электрическим током возникают значительные трудности, связанные с расчетом распределения температуры. Для определения поля температур необходимо решить уравнение теплопроводности, но аналитическое решение его возможно только в отдельных частных случаях. В большинстве случаев приходится прибегать к очень приближенным решениям, проводить предварительные экспериментальные исследования или пользоваться сложными интеграторами.

Поэтому, для внедрения этого несомненно прогрессивного метода нагрева необходим простой и удобный метод определения распределения температуры в нагреваемом материале.

Ниже предлагается сравнительно простой метод определения стационарного температурного поля в нагреваемом материале при помощи моделирования в электролитической ванне [3].

### 1. Нагрев однородного материала.

Рассмотрим уравнение теплопроводности, которое для стационарного режима в случае, когда источником тепла является электрическое поле, принимает следующий вид:

$$\nabla^2 \vartheta = - \frac{\gamma (\nabla \varphi)^2}{\lambda} \quad (1)$$

Здесь обозначено:

- $\vartheta$  — температура в любой точке нагреваемого тела.
- $\gamma$  — удельная электропроводность материала,
- $\lambda$  — удельная теплопроводность материала,
- $\varphi$  — потенциал электрического поля.

Решая уравнение (1), необходимо определить температуру нагрева ( $\vartheta$ ) при заданной температуре на границах рассматриваемой области ( $\vartheta_{гр}$ ). Свойства материала ( $\gamma$  и  $\lambda$ ) даны, и будем их считать постоянными. Известны конфигурация и потенциалы электродов, и будем рассматривать случай, когда потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа.

Тогда любое решение уравнения (1) можно представить [1] как

$$\vartheta = -\frac{\gamma\varphi^2}{2\lambda} + \Theta, \quad (2)$$

где  $\Theta$  — некоторая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа.

Так как функция потенциала удовлетворяет уравнению Лапласа и известны ее граничные условия, то потенциал в любой точке рассматриваемой области можно определить моделированием в электролитической ванне.

После этого, зная температуру на границе нагреваемого тела, из (2) можно определить значения функции  $\Theta$  на границе:

$$\Theta_{гр} = \vartheta_{гр} + \frac{\gamma}{2\lambda}\varphi_{гр}^2. \quad (3)$$

Так как функция  $\Theta$  удовлетворяет уравнению Лапласа и найдены ее значения на границе, то  $\Theta$  по всей области можно также определить моделированием в электролитической ванне.

Температуру в любой точке нагреваемого материала можно найти согласно уравнению (2), так как  $\varphi$  и  $\Theta$  определены моделированием.

Рассмотренным способом можно моделировать двух- и трехмерные электротепловые поля. Электролитическая ванна должна обеспечивать возможность создания нужного потенциала в любой точке на границах рассматриваемой области. Изготовление такой плоской ванны не представляет трудностей [2].

Пример 1.

Нагреваемый материал имеет форму призмы с сечением  $60 \times 60$  см; длина призмы значительно больше чем остальные размеры.

Свойства нагреваемого материала:  $\gamma = 0,2 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{м}}$ ;

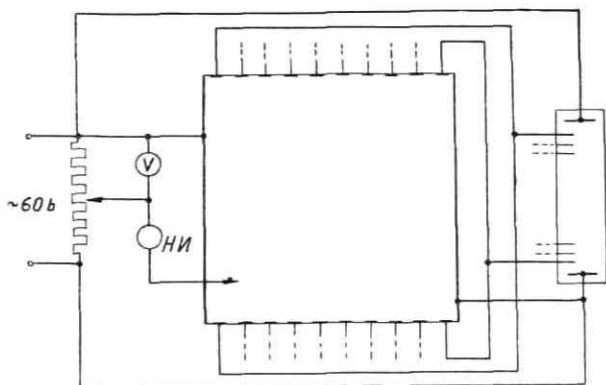
$$\lambda = 1 \frac{\text{вт}}{\text{м} \cdot \text{°C}}.$$

Электроды приложены к противоположным граням призмы; напряжение между электродами 60 в. Нагрев производится током промышленной частоты.

Условия охлаждения таковы, что можно пренебречь падением температуры при проходе тепла через поверхность тела. Температура окружающей среды  $\vartheta_{rp} = 0^\circ\text{C}$ .

В условиях данной задачи электрическое и тепловое поле можно считать плоскопараллельными и воспользоваться двухмерной электролитической ванной.

На фиг. 1 показана электролитическая ванна и схема соеди-



Фиг. 1.

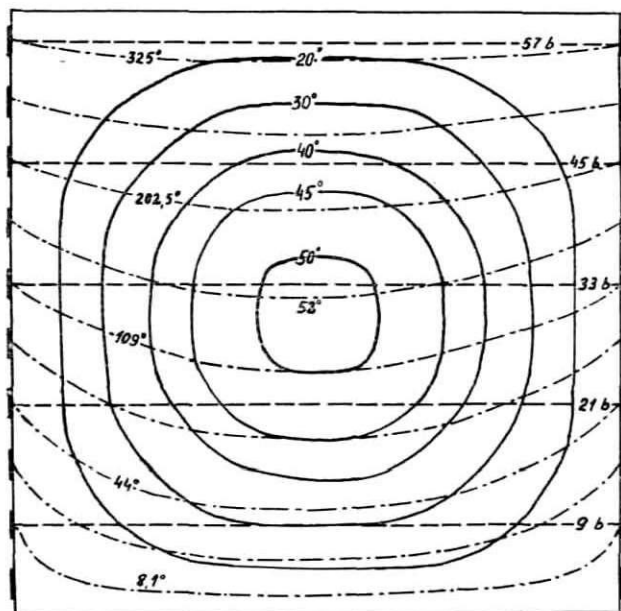
нения для моделирования функции  $\Theta$ . Размеры ванны  $60 \times 60$  см. Для создания необходимых граничных условий на двух границах расположены сплошные электроды, а на остальных двух — по 10 пластинок длиной 3 см. Нужный потенциал на пластинках создается при помощи вспомогательной ванны — потенциометра. Эквипотенциальные линии определяются с помощью зонда и нульиндикатора.

Результаты моделирования показаны на фиг. 2. На чертеже штрихованными линиями показаны линии равного потенциала. В данном случае для их определения не требуется моделирования. В общем случае их можно найти моделированием.

После определения эквипотенциальных линий из (3) подсчитаны значения  $\Theta$  на электродах и к электродам из вспомогательной ванны подведены потенциалы пропорционально значениям  $\Theta$ . После этого проведено моделирование  $\Theta$ . Линии одинаковых значений  $\Theta$  показаны на фиг. 2 штрихпунктирными линиями.

Так как на основе указанных линий трудно определить изо-термы, то найдены  $\varphi$  и  $\Theta$  еще в других точках, что дало воз-

возможность на основе выражения (2) подсчитать температуру нагрева и начертить линии равной температуры. Линии равной температуры показаны на фиг. 2 сплошными линиями.



Фиг. 2.

## 2. Нагрев однородного материала, содержащего металлическое включение

В рассматриваемой области 1 со свойствами  $\gamma$  и  $\lambda$  имеется область 2, представляющая собой металлическое включение в первой области. Так же как и в первом случае известны граничные условия функций температуры и потенциала на внешней границе первой области.

Пренебрегая разностью потенциалов и температур в пределах включения, можем во второй области принять  $\gamma = \infty$  и  $\lambda = \infty$ .

Тогда электрический потенциал и температура являются постоянными во всей второй области

$$\varphi_2 = \text{const}, \quad \vartheta_2 = \text{const}. \quad (4)$$



Моделирование электрического поля можно провести так же, как и в предыдущем случае, только в ванне вторую область надо заменить металлическим электродом.

Для выявления возможностей моделирования  $\Theta$  необходимо определить ее граничные условия. На внешней границе граничные условия  $\Theta$  аналогичны предыдущему случаю и  $\Theta_{\text{гр}}$  определяются из (3).

Найдем граничные условия  $\Theta$  на границе между первой и второй областями. Так как  $\varphi_2 = \text{const}$ , то на указанной границе тепловой поток не может иметь тангенциальной составляющей, т. е.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\text{гр}2} = 0. \quad (5)$$

Используя выражение (2), из (5) получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\text{гр}2} &= \left. -\frac{\gamma}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial t} \varphi^2 \right|_{\text{гр}2} + \left. \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right|_{\text{гр}2} = \\ &= -\frac{\gamma}{\lambda} \left. \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{\text{гр}2} + \left. \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right|_{\text{гр}2} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Как известно, граничные условия электрического потенциала на границе между первой и второй областями следующие:

$$E_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

где  $E_t$  — тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля.

Из (6) с учетом (7) определяем граничные условия для функции  $\Theta$  на границе между первой и второй областями:

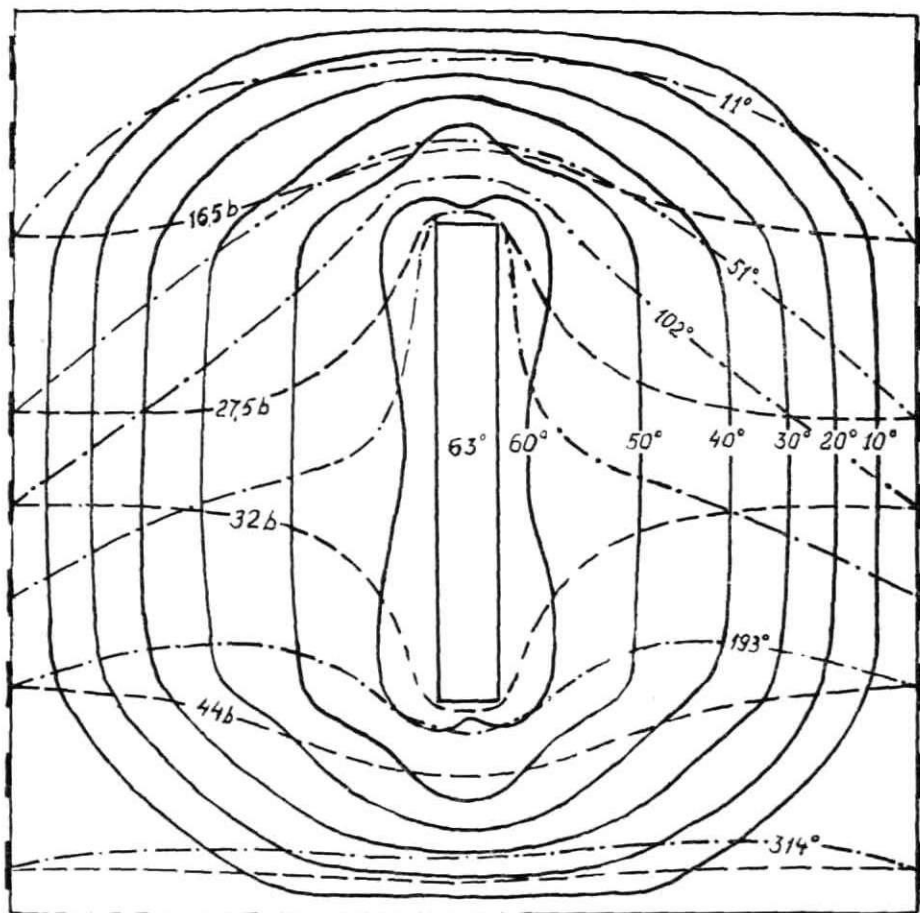
$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right|_{\text{гр}2} = 0. \quad (8)$$

Таким образом, граничные условия для функции  $\Theta$  на границе между первой и второй областями такие же, как функции электрического потенциала. Поэтому значения функции  $\Theta$  в любой точке нагреваемого тела можно определить моделированием в электролитической ванне.

Поле температур нагреваемого материала определяется после моделирования  $\varphi$  и  $\Theta$  согласно (2).

**Пример 2.**

Пусть призма, рассмотренная в первом примере, содержит металлический стержень сечением  $4 \times 32$  см (фиг. 3). Остальные данные те же, что в первом примере.



Фиг. 3.

Сначала проводится моделирование потенциала  $\varphi$ , причем область, занимаемая стержнем, при моделировании в ванне заменяется электродом. Линии равного потенциала показаны на фиг. 3 штрихованными линиями.

После моделирования  $\varphi$  по (3) подсчитаны значения  $\Theta$  на границах призмы. Для моделирования  $\Theta$  к электродам на границах ванны подводятся потенциалы из вспомогательной ванны пропорционально подсчитанным значениям  $\Theta_{гр}$ . При моделировании  $\Theta$  металлический стержень в ванне также заменяется электродом. Результаты моделирования показаны на фиг. 3 штрихпунктирными линиями.

Для более удобного определения изотерм при моделировании измерены  $\varphi$  и  $\Theta$  еще в ряде других точек, и согласно (2) подсчитана температура. После этого найдены линии одинаковых температур, которые на фиг. 3 показаны сплошными линиями.

Моделирование приведенных примеров проведено инж. Э. К. Кумсаром.

При вычерчивании изотерм (в масштабе 1 : 1) максимальные отклонения отдельных точек от показанных линий не превышают  $\pm 1,5$  см.

Наибольшее отклонение отдельных точек наблюдалось в местах, где электрический потенциал выше, так как там температура является разностью двух больших чисел, что повышает относительную ошибку результата.

Если условия отдачи тепла на границах нагреваемого тела не соответствуют принятым выше, то нельзя правильно найти абсолютные значения температуры, но можно приближенно определить картину теплового поля и выбрать наиболее целесообразное расположение электродов при нагреве.

#### ЛИТЕРАТУРА :

1. А. В. Нетушил, Условия сосуществования установившихся тепловых и электрических полей при электронагреве бетона. Журнал технической физики, 1951, т. XXI, вып. 4-й.
2. А. В. Нетушил, Размеры контактных решеток при моделировании полей в электролитической ванне. Электричество, 1955, № 4.
3. К. К. Табакс, Моделирование в электролитической ванне некоторых частных случаев уравнения Пуассона. Известия АН Латв. ССР, 1956, № 4.

*Э. К. Янкоп*  
*ст. преподаватель*

## **РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОТОКА И МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ ДАВЛЕНИЯ В ГОРЛОВИНЕ КООКСИАЛЬНОГО ИНДУКЦИОННОГО НАСОСА<sup>1)</sup>**

Из всех многочисленных типов насосов только один тип оказался вполне приемлемым для перекачивания расплавленных жидких металлов — электромагнитные насосы. Большие преимущества, которыми обладает этот тип насоса по сравнению с другими типами, вызвали значительный интерес к нему в самых различных областях техники и в первую очередь — в атомной энергетике [1]. Поэтому разработка методики расчета этих новых электрических машин имеет первостепенное значение.

Одним из основных вопросов расчета электромагнитных насосов является определение потерь давления в горловине, обусловленных внутренним трением в перекачиваемой жидкости.

Как известно из гидродинамики, подобная задача может быть решена, если известно распределение скорости течения жидкости по сечению трубопровода.

Для двух частных случаев плоского насоса распределение скорости найдено в работах [2, 3]. Настоящая работа ставит своей целью аналитически найти распределение скорости ламинарного потока по сечению горловины и определить магнито-гидродинамические потери давления в ней для коаксиального индукционного насоса. Формулы, полученные для коаксиального насоса, могут считаться более общими, так как из них могут быть получены формулы и для плоских насосов, если положить радиусы стенок горловины равными бесконечности.

В статье [2] дается система дифференциальных уравнений, определяющих магнито-гидродинамическое состояние жидкости,

---

<sup>1)</sup> Работа выполнена под руководством к. т. н. И. А. Тютина.

Из этой системы используем второе основное уравнение магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{u} \nabla) \bar{u} = \frac{\gamma}{\rho} \left[ \left[ \bar{u} \operatorname{rot} \bar{A} \right] - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right] \operatorname{rot} \bar{A} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \bar{u}, \quad (1)$$

где:  $\bar{u}$  — скорость движения жидкости,  
 $\bar{A}$  — векторный потенциал магнитного поля,  
 $\gamma$  — электропроводность жидкости,  
 $\rho$  — массовая плотность жидкости,  
 $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости,  
 $p$  — давление.

Ограничимся рассмотрением случая, когда толщина горловины значительно меньше глубины проникновения бегущей электромагнитной волны в металл [4], т. е. когда

$$b \ll \sqrt{\frac{2}{\alpha^2 + \sqrt{\alpha^4 + (\omega \mu_0 \gamma)^2}}} \quad (2)$$

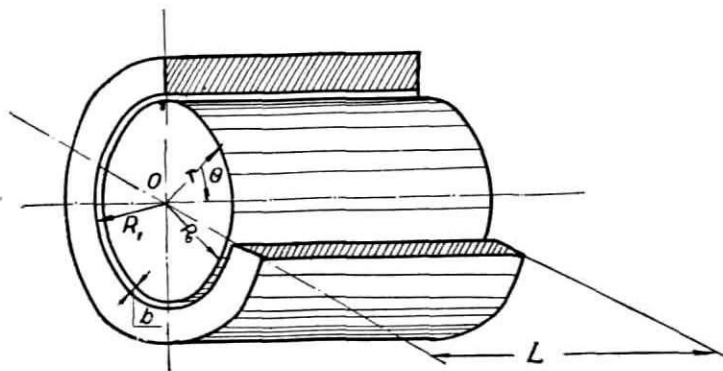
Здесь:  $b$  — толщина горловины,

$\alpha = \frac{\pi}{\tau}$ , причем  $\tau$  — полюсное деление,

$\omega$  — угловая частота тока,

$\mu_0$  — магнитная проницаемость жидкости, принятая равной магнитной проницаемости пустоты.

Для решения задачи используем цилиндрические координаты (фиг. 1).



Фиг. 1. Схема коаксиального индукционного насоса горловины.

При условии (2) поле в жидкости можно считать незатухающим в направлении радиуса. Это позволяет усреднить массовые электромагнитные силы в жидкости и полагать, что

$\frac{\partial A}{\partial r} = 0$ ;  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ,  $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p}{L}$  ( $L$  — длина горловины),  
 причем  $A_z = A_r = 0$ ;  $A = A_\theta$  (Для бегущего поля  $A = A_m e^{j(\omega t - \alpha z)}$ );  $u_r = u_\theta = 0$ ;  $u = u_z$ .

Тогда уравнение (1) получит следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\gamma}{\nu \rho} \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 u - \frac{\gamma}{\nu \rho} \cdot \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{p}{\nu \rho L} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) сводится к уравнению Бесселя. Чтобы привести его к канонической форме, введем новую функцию:

$$v = \frac{\gamma}{\nu \rho} \left( \frac{\partial A}{\partial z} \right)^2 u + \frac{\gamma}{\nu \rho} \frac{\partial A}{\partial t} \cdot \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{p}{\nu \rho L}, \quad (4)$$

а также новую переменную  $\xi = jm_1 r$ ,

где  $m_1 = B_r \sqrt{\frac{\gamma}{\nu \rho}}$ , а  $B_r$  — действующее значение индукции в жидкости.

После преобразований получаем:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + v = 0. \quad (5)$$

Решением уравнения (5) являются модифицированные функции Бесселя нулевого порядка:

$$v = C_1 I_0(m_1 r) + (C_2 K_0(m_1 r)) \quad (6)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находим из граничных условий:

- 1) при  $r = R_0$   $u = 0$
- 2) при  $r = R_1$   $u = 0$ .

Используя (4), (5) и (6), получаем искомый закон распределения скорости по сечению горловины:

$$u = \left( \frac{\omega}{\alpha} - \frac{p}{B_r^2 \gamma L} \right) \left[ 1 - \frac{M I_0(m_1 r) + N K_0(m_1 r)}{D} \right], \quad (7)$$

причем:  $D = I_0(m_1 R_1) K_0(m_1 R_0) - I_0(m_1 R_0) K_0(m_1 R_1)$ ,  
 $M = K_0(m_1 R_0) - K_0(m_1 R_1)$ , а  
 $N = I_0(m_1 R_1) - I_0(m_1 R_0)$ .

Для больших значений аргумента ( $\xi > 15$ ), применяя к функциям Бесселя асимптотические формулы, получаем следующий вид для выражения (7):

$$u = \left( \frac{\omega}{\alpha} - \frac{p}{B_r^2 \gamma L} \right) \left[ 1 - \frac{V \sqrt{R_1} \operatorname{sh} m_1 (r - R_0) + V \sqrt{R_0} \operatorname{sh} m_1 (R_1 - r)}{V r \operatorname{sh} m_1 (R_1 - R_0)} \right]. \quad (8)$$

Переходя к прямоугольным координатам с началом в середине горловины, получим:

$$u = \left( \frac{\omega}{\alpha} - \frac{p}{B_r^2 \gamma L} \right) \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} m_1 x}{\operatorname{ch} \frac{m_1 b}{2}} \right] \quad (9)$$

Это выражение полностью совпадает с соответствующим выражением, найденным в работе [2].

Средняя скорость течения жидкости в горловине насоса равна:

$$u_{cp} = \frac{1}{s} \int_s u ds, \quad (10)$$

где  $s$  — площадь поперечного сечения горловины  $s = \pi(R_1^2 - R_0^2)$ ;  $ds = d\pi r^2 = 2\pi r dr$ .

Из (7) и (10) получаем:

$$u_{cp} = \left( \frac{\omega}{\alpha} - \frac{p}{B_r^2 \gamma L} \right) \left\{ 1 - \frac{M[R_1 I_1(m_1 R_1) - R_0 I_1(m_1 R_0)] - N[R_1 K_1(m_1 R_1) - R_0 K_1(m_1 R_0)]}{\frac{m_1}{2} \cdot D \cdot (R_1^2 - R_0^2)} \right\}. \quad (11)$$

Производительность насоса:

$$Q = u_{cp} \cdot S = u_{cp} \cdot \pi(R_1^2 - R_0^2). \quad (12)$$

Перейдем к определению потери давления в активной зоне горловины. Давление, необходимое для преодоления внутреннего трения в элементарной струйке жидкости, определяется следующим выражением:

$$\Delta p' = -\nu \rho L \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (13)$$

Подставляя в (13) значение  $u$  из (7), после дифференцирования и преобразований получим:

$$\Delta p' = \frac{B_r^2 \gamma L}{D} \left( \frac{\omega}{\alpha} - \frac{p}{B_r^2 \gamma L} \right) [M I_0(m_1 r) + N K_0(m_1 r)]. \quad (14)$$

Потеря давления во всем объеме жидкости, заключенном в горловине:

$$\Delta p = \frac{1}{s} \int_s \Delta p' ds. \quad (15)$$

Из (13), (14) и (11) будем иметь:

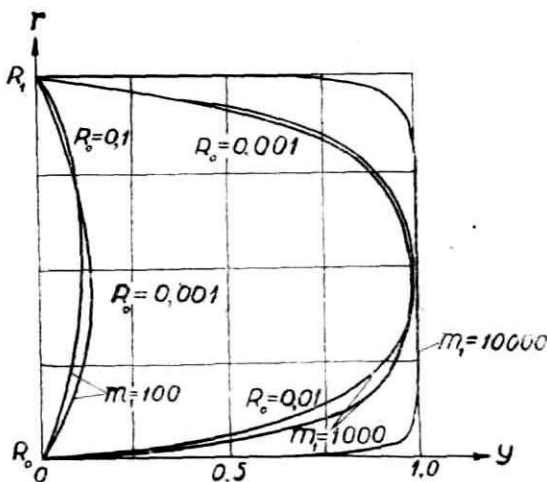
$$\Delta p = \frac{u_{cp} \cdot B_r^2 \gamma L}{\frac{m_1}{2} D (R_1^2 - R_0^2)} \cdot \frac{1}{\frac{M/R_1 I_1(m_1 R_1) - R_0 I_1(m_1 R_0)}{M/R_1 K_1(m_1 R_1) - R_0 K_1(m_1 R_0)} - 1} \quad (16)$$

При больших значениях аргумента выражение (16) принимает вид:

$$\Delta p_{\text{плоск.}} = B_r^2 \gamma L u_{cp} \cdot \frac{1}{\frac{\frac{m_1 b}{2}}{\text{th} \frac{m_1 b}{2}} - 1} \quad (17)$$

Нетрудно убедиться, что это выражение совпадает с соответствующим выражением, полученным в работе [2].

На фиг. 2 и 3 показаны графики, построенные на основе полученных выше формул.



Фиг. 2. Характер распределения скорости потока по сечению горловины насоса.

На фиг. 2 показан характер распределения скорости по сечению головки при различных  $m_1$  и постоянном  $b=0,01$ , причем по оси абсцисс отложена величина  $y$ , равная

$$y = 1 - \frac{M I_0(m_1 r) + N K_0(m_1 r)}{D}$$

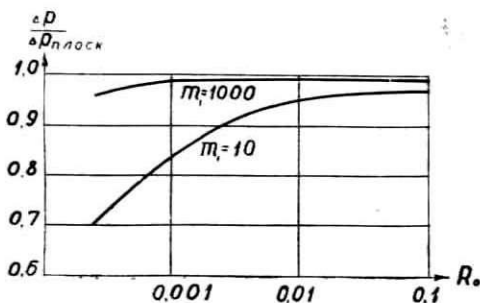


Величина  $m_1$  может принимать различные значения в зависимости от свойств перекачиваемой жидкости и интенсивности магнитного поля. Значения  $m_1$  лежат в границах:

$$0 < m_1 < 10.000$$

Пределы возможных изменений  $R_0$  определяются из конструктивных соображений.

Из полученных кривых видно, что во всех практических конструкциях насосов распределение скорости потока можно принять симметричным относительно середины сечения и, таким образом, на распределение скорости кривизна стенок горловины существенного значения не имеет.



Фиг. 3. Зависимость относительной потери давления от кривизны стенок горловины.

С ростом  $m_1$  отношение скорости в середине сечения к скорости в какой-либо другой точке сечения (исключая область вблизи стенок) приближается к единице.

На фиг. 3 показано влияние кривизны стенок горловины на относительную потерю давления  $\frac{\Delta p}{\Delta p_{плоск}}$  при различных  $m_1$  и постоянных  $b$  и средней скорости течения жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. И. А. Тютин и Э. К. Янкоп, Электромагнитные насосы. Труды Института физики АН Латв. ССР. Прикладная магнитогидродинамика. Вып. VIII. 1956.
2. И. А. Тютин, Введение в теорию индукционных насосов. Труды Института физики АН Латв. ССР. Прикладная магнитогидродинамика. Вып. VIII. 1956.
3. Ю. А. Бирзвалк и И. А. Тютин, Распределение скорости и магнитогидравлические потери давления в прямоугольном канале. Труды Института физики АН Латв. ССР. Прикладная магнитогидродинамика. Вып. VIII. 1956.
4. И. А. Тютин, Механические силы в бегущем электромагнитном поле. АН Латв. ССР. Вопросы энергетики III. 1955.

*R. Jukna, inženieris*

## **ELEKTROMAGNETISKĀS EKSPANĒŠANAS PAKĀPES NOTEIKŠANA ĪSO UN ULTRAĪSO VIĻŅU DIAPAZONOS, IZMANTOJOT SAVSTARPĒJO PRETESTĪBU STARP IEKŠĒJO UN ĀRĒJO SISTEMU**

Ik gadus arvien vairāk tautsaimniecībā izlieto augstfrekvences iekārtas, līdz ar ko aizvien asāks kļūst jautājums par cīņu ar traucējumiem, ko rada šīs augstfrekvences iekārtas augstjūtīgā radio sakaru aparaturā.

Kā viens no labākajiem līdzekļiem cīņai ar radiotraucējumiem ir traucētāju iekārtu ekranēšana.

Ekranēšanas pētīšanai ir veltīts daudz teoretisku darbu, kas atļauj aprēķināt ekranēšanas efekta lielumu dažādas formas ekrāniem, ar dažādiem sienu izveidojumiem.

Eksaktie elektrodinamiskie aprēķini tomēr ir iespējami tikai idealizētās ģeometriskās formas ekrāniem un ir ļoti komplicēti.

Izmantojot tuvinātas aprēķina metodes, šos aprēķinus gan var vienkāršot, kā tas redzams D. N. Šapiro darbā (1), bet tomēr tie ir aprobežoti ar pieņēmumu, ka ekrāna ģeometriskie izmēri ir mazi, salīdzinot ar ekranējamā elektromagnetiskā lauka viļņa garumu.

Līdz šim izlietotās parastās augstfrekvences rūdišanas, kausēšanas un dielektriskās žāvēšanas iekārtas šīs noteikums arī tika izpildīts. Bet pēdējā laikā arvien vairāk sāk lietot arī lielas jaudas ģeneratoru ultraīso viļņu diapazonā, kam ir priekšrocības birstošo vielu žāvēšanas ietaisēs, un tādā gadījumā ekrāna izmēri pēc lieluma var iznākt salīdzināmi ar viļņa garumu un tādā kļūst par efektīviem augstfrekvences enerģijas izstarotājiem.

Ja ekranēšanas kamera novietota ēkas augstākajos stāvos un drošības tehnikas noteikumu dēļ apgādāta ar zemējuma vadu, tad šādas sistēmas svārstību frekvence var iznākt arī īso viļņu un pat vidējo viļņu diapazonā. Ekrānam cauri ejošie vadi, caurumi un spraugas sienās rada saites ekranēšanas kameras iekšīnei ar ārējo izstarojošo sistemu, kas sastāv no pašas kameras un zemējuma vada. Šai sistēmā tiek ierosinātas jo intensīvākas

svārstības, jo tuvāk ģenerators frekvence ir kādai no ārējās sistēmas rezonanses frekvencēm un jo ciešāka saite starp iekšējo un ārējo sistēmu. Tāpēc pie diviem traucējumu izklūšanas ceļiem tieši cauri ekranam un tanī ierīkoti caurumiem nāk klāt vēl trešais ceļš — caur saitēm ierosinātā ārējā sistēma.

Blīva skārda ekrāniem, caur kuru sienām īsie un ultraīsie viļņi cauri netiek, šis pēdējais traucējuma izklūšanas ceļš var kļūt par galveno.

Noteikt šo izstarojumu aprēķina ceļā praktiskos gadījumos ir grūti, pat neiespējami, jo ārējā sistēma tiek izveidota no kameras, zemējuma vada, barošanas līnijas u. c. tuvumā esošiem metāliskiem ķermeņiem. Sādā gadījumā arī parastais ekranēšanas koeficienta jēdziens

$$K_e = \frac{\text{el. magn. lauka intensitāte bez ekrana}}{\text{el. magn. lauka intensitāte ar ekranu}},$$

zaudē savu praktisko nozīmi, jo kļūst daudznozīmīgs.

Tas izskaidrojams ar to, ka gadījumā, ja ārējā sistēmā ir horizontālas daļas, tad tās izstarošanas virziena raksturojums var stipri atšķirties no paša traucētāja (bez ekrana) izstarošanas virziena raksturojuma. Tādēļ dažādos virzienos bet vienādā atstatumā no traucētāja izmērītais ekranēšanas koeficienta skaitliskais lielums var iznākt dažāds.

Arī pašu mērījumu bieži nav iespējams izdarīt atbilstoši definējumam, jo tas prasa ekrana noņemšanu, kas lielām ekranēšanas kamerām ir grūti izpildāms. Tāpēc praktiski rikojas tā, ka mēri lauka intensitāti kameras iekšpusē un ārpusē, kas vēl palielina daudznozīmību gadījumos, ja kameras iekšpusē ir stāvviļņi.

Lai gūtu priekšstatu par ietaises darbību gadījumos, kad ekranēšanas efekts kļūst daudznozīmīgs, pēdējais jānotic ļoti daudziem punktiem vai arī jāmeklē jauns lielums, kas raksturotu sumaro ekrana darbību.

Sinī darbā par šādu raksturojošu lielumu pieņemta savstarpējā pretestība starp ekranēšanas ietaises ārējo un iekšējo sistēmu vai arī citi no tās atvasinātie lielumi, piem., saites ciešums u. c.

Savstarpēja pretestība starp diviem izstarotājiem ļoti plaši tiek lietota virziena darbības antenu aprēķinos un raksturo no vienas antenas strāvām otrā antenā inducēto sumaro spriegumu. Tāpēc tā arī dod sumaro savstarpējās iedarbības efektu. Līdz ar to no komplicētā elektromagnetiskā lauka sadalījuma telpā un šī lauka teorijas pārējam uz ķēžu teoriju, kura daudzos gadījumos ir vienkāršāka un atļauj visu sistēmu aizstāt ar ekvivalento shēmu.

Ekranēšanas ietaises gadījumā arī var izlietot savstarpējās pretestības jēdzienu starp tās iekšējo un ārējo sistēmu un tā pa-

nākt viennozīmīgu raksturojumu tai ekranēšanas efekta daļai, kura ir atkarīga no ārējās sistēmas izstarošanas. Ekranēšanas ietaises ārējā sistēmā bez kameras un saņemšanas vada ietilpst arī vēl citi ar to savienotie metaliskie ķermeņi.

Tāpat iekšējā sistēmā bez iekšpusē sienu virsmas ietilpst arī visi citi tanī novietotie metaliskie ķermeņi — izstarotāji. Tāpēc ekranēšanas efekta noteikšanas unificēšanai jāpieņem, ka kameras iekšpusē novietots tikai viens vai nu elektriskais (antena), vai arī magnetiskais izstarotājs (konturs).

Pats traucējumu avots parasti ir abu veidu izstarotāju sako-  
pojums, un tā izmantošana savstarpējās pretestības noteikšanai uzdevumu padara sarežģītāku.

Turpmākos izvedumos pieņemts, ka kameras iekšpusē novie-  
tots elektriskais izstarotājs — antena, bet iegūtie rezultāti pilnā  
mērā izlietojami arī magnetiskajam izstarotājam.

Izlietojot reciprocitātes teoremu, jānāk pie slēdziena, ka sav-  
starpējā pretestība starp iekšējo un ārējo sistēmu vienādi raksturo  
gadījumus, kad traucējumu avots novietots ekrana iekšpusē vai  
arī ārpusē.

Praksē ekranēšanas ietaises darbojas ļoti komplikētos elektro-  
dinamiskos apstākļos, kuros savstarpējās pretestības teoretiska  
aprēķināšana nav iespējama. Savstarpējās pretestības teoretiskie  
aprēķini ir izdarīti tikai vienkāršos divu lineāru antenu gadījumos.

Tāpēc šinī darbā ir attīstīta eksperimentāla mērīšanas me-  
tode, ar kuras palīdzību savstarpējās pretestības lielumu var  
izmērīt. Šī metode ir secinājums no saistīto ķēžu teorijas.

Izdarot mērījumus praktiski, nepieciešams izmērīt vienas sis-  
tēmas ieejas pretestību, ja otras sistēmas noskaņojumu maina  
plašās robežās.

Mazu reaktīvu pretestību izmaiņu noteikšanai lieto interfe-  
rences metodi.

Lai noskaidrotu, kādas sakarības pastāv starp ieejas pretestī-  
bām un savstarpējo pretestību, apskatīsim ekranēšanas kamerā  
novietotas antenas ieejas pretestību.

## § 1. Ekranētas antenas ieejas pretestība

Ja ekrana iekšpusē novietots izstarotājs — antena, bet pats  
ekrans ir saņemts (zīm. 1), tad varam uzrakstīt šādas sakarī-  
bas starp strāvām un spriegumiem iekšējai antenai un ārējai

izstarojošai sistamai gadījumos, kad abas tiek vienlaicīgi ierosinātas:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_{12} \quad (1)$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z_{22} + \dot{I}_1 Z_{21} \quad (2)$$

kur:

$\dot{U}_1, \dot{I}_1$  — spriegums un strāva iekšējās antenas ieejā\*),

$\dot{U}_2, \dot{I}_2$  — spriegums un strāva ārējās antenas ieejā,

$Z_{11}, Z_{22}$  — iekšējās un ārējās antenas ieejas pretestības (bez otras iespaida),

$Z_{12}, Z_{21}$  — savstarpējās pretestības starp abām antenām.

Ja visa sistema ir lineara, tad

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_m$$

Linearitāti tuvināti var pieņemt arī tādā gadījumā, kad ekrans ir no feromagnetiska materiāla, jo augstu frekvenču gadījumos piesātinājums ir niecīgs un praktiski jārēķinās tikai ar sākuma magnetisko caurlaidību.

Gadījumā, ja tiek ierosināta tikai iekšējā antena,  $\dot{U}_2 = 0$  un

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_{11} + \dot{I}_2 Z_m \quad (3)$$

$$0 = \dot{I}_2 Z_{22} + \dot{I}_1 Z_m \quad (4)$$

No izteiksmes (4) izrēķinot  $\dot{I}_2 = -\dot{I}_1 \frac{Z_m}{Z_{22}}$  (4a)

un to ievēdot izteiksmē (3), iegūstam :

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \left( Z_{11} - \frac{Z_m^2}{Z_{22}} \right) \quad (5)$$

Ievedam pilno pretestību apzīmējumus:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= R_{11} + jX_{11} = z_{11} e^{j\varphi_1} \\ Z_{22} &= R_{22} + jX_{22} = z_{22} e^{j\varphi_2} \\ Z_m &= R_m + jX_m = z_m e^{j\varphi_m} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Šeit:  $R_{11}, R_{22}, R_m$  — aktīvie komponenti,  
 $X_{11}, X_{22}, X_m$  — reaktīvie komponenti,  
 $z_{11}, z_{22}, z_m$  — šķietamo pretestību moduļi,  
 $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_m$  — fāzu leņķi attiecīgajām šķietamajām pretestībām.

\* Turpmāk vienkāršības dēļ ārējās un iekšējās sistēmas sauksim par ārējām un iekšējām antenām.

Ievietojot pretestību lielumus no izteiksmēm (6) izteiksmē (5) un izlietojot Eilera formulu, dabūjam:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 \left\{ \left[ R_{11} - \frac{z_m^2}{z_{22}} \cos(2\varphi_m - \varphi_2) \right] + \right. \\ \left. + j \left[ X_{11} - \frac{z_m^2}{z_{22}} \sin(2\varphi_m - \varphi_2) \right] \right\} \end{aligned}$$

Izdalot šīs izteiksmes abas puses ar  $\dot{I}_1$ , dabūjam iekšējās antenas ieejas pretestību, kurā ir ietverts ārējās antenas iespaids. Šīs pretestības aktīvā un reaktīvā daļa būs:

$$R_1 = R_{11} - \frac{z_m^2}{z_{22}} \cos(2\varphi_m - \varphi_2) \quad (7)$$

$$X_1 = X_{11} - \frac{z_m^2}{z_{22}} \sin(2\varphi_m - \varphi_2) \quad (8)$$

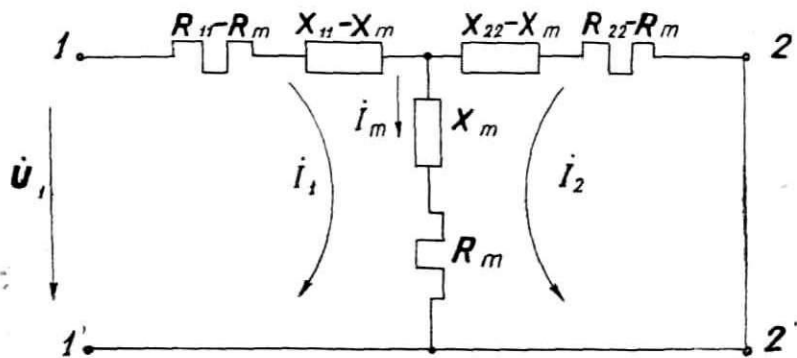
Apzīmējot  $\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = Z_1$  īsākā izteiksme ir:

$$Z_1 = R_1 + j X_1$$

## § 2. Ekranēšanas ietaisais ekvivalentā schema

Pamatojoties uz izejas sakarībām (3) un (4), varam dot visai sistamai atbilstošu ekvivalento schemu (2. zīm.). Lai pierādītu tās pareizumu, uzrakstām tai konturstrāvu vienādojumus zīmējumā pieņemtiem konturstrāvu virzieniem:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{I}_1 [R_{11} - R_m + j(X_{11} - X_m) + R_m + jX_m] + \dot{I}_2 [R_m + jX_m] \\ 0 = \dot{I}_2 [R_{22} - R_m + j(X_{22} - X_m) + R_m + jX_m] + \dot{I}_1 [R_m + jX_m] \end{aligned}$$



2. zīm.

Pēc iekavu atvēršanas un saīsināšanas šie vienādojumi pārveidojas:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1(R_{11} + jX_{11}) + \dot{I}_2(R_m + jX_m)$$

$$0 = \dot{I}_2(R_{22} + jX_{22}) + \dot{I}_1(R_m + jX_m)$$

Ievērojot sakarības (6), redzams, ka pēdējie vienādojumi ir identiski ar izejas vienādojumiem (3) un (4), līdz ar ko ekvivalentās shēmas pareizums ir pierādīts.

Lietojot šo ekvivalento shēmu, var atrast pareizāko veidu visas sistēmas ekranēšanas efektu raksturojošā koeficienta noteikšanai.

Šim nolūkam var izlietot vai nu pašu savstarpējo pretestību, vai citus no tās atkarīgus lielumus. Tāpēc turpmāk nepieciešams noteikt, kuru no tiem ieteicams lietot praktiskām vajadzībām.

### § 3. Ekranēšanas efekta noteikšanas veidi

#### a) Savstarpējā pretestība

Ar savstarpējo pretestību ( $Z_m$ ) var raksturot ekranēšanas efektu viena un tā paša tipa ietaisēs.

Salīdzinot divu dažādu ietaišu tipus, ekranēšanas efektu raksturot tikai ar savstarpējo pretestību vien nevar, jo tas ir atkarīgs arī no citiem ekranējošās sistēmas elektriskiem lielumiem, kā var saprast no ekvivalentās shēmas (sk. 2. zīm.). Var gadīties, ka ietaisei ar lielāku ekranējumu, bet ar lielākām ieejas pretestībām,  $Z_m$  ir mazāka nekā citai ietaisei ar mazāku ekranējumu un mazākām ieejas pretestībām. Bez tam  $Z_m$  dažādām ietaisēm var būt gan pozitīva, gan negatīva.

#### b) Saites pretestība

Dažkārt ekranēšanas jautājumu apskatā ievieš saites pretestības jēdzienu, kurš šinī gadījumā ir iekšējās antenas sprieguma un ārējās antenas strāvas kompleksu attiecība. Tāpēc arī saites pretestība ir komplekss lielums:

$$Z_p = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}$$

Jo lielāka ir saites pretestība, jo mazāks ir tai atbilstošais ekranēšanas efekts un otrādi.

Saites pretestības sakarību ar savstarpējo pretestību varam

dabūt no pamatvienādojumiem (3) un (4). Izdalot pirmo no tiem ar  $I_2$ , dabūjam:

$$\frac{U_1}{I_2} = Z_p = \frac{I_1}{I_2} Z_{11} + Z_m$$

un ievērojot (4a)

$$Z_p = \frac{Z_m^2 - Z_{11}Z_{22}}{Z_m}$$

Novērtējot saites pretestību kā ekranēšanu raksturojošo koeficientu, nonākam pie tāda pat slēdziena, kāds bija savstarpējās pretestības gadījumā, proti, ka šis lielums arī der vienas ietaises ekranējuma maiņas raksturošanai, bet nevar tikt lietots dažādu ietaišu ekranēšanas efektu salīdzināšanai.

### c) Saites koeficients

Dažādu ietaišu tipu ekranēšanas efekta salīdzināšanai var lietot saites koeficientu, kādu izlieto arī parastajām antenām. Atšķirībā no saites koeficienta saistītām ķēdēm ar vienāda rakstura konturu pretestībām, kad tas ir reāls lielums, šinī gadījumā saites koeficients ir komplekss lielums.

Saites koeficientu var atrast, izejot no ekvivalentās shēmas (zīm. 2) un saites koeficienta definējuma pēc šādas formulas:

$$K^2 = \frac{(R_m + jX_m)^2}{[(R_{11} - R_m) + j(X_{11} - X_m) + R_m + jX_m][R_{22} - R_m + j(X_{22} - X_m) + R_m + jX_m]} = \frac{Z_m^2}{Z_{11}Z_{22}} \quad (9)$$

Šādu lielumu dabūjam, ja vienādojumā (5) abas puses nodalām ar  $I_1$ :

$$\frac{U_1}{I_1} = Z_1 = Z_{11} - \frac{Z_m^2}{Z_{22}} = Z_{11} \left(1 - \frac{Z_m^2}{Z_{11}Z_{22}}\right) = Z_{11}(1 - K^2)$$

un no šā vienādojuma dabūjam:

$$K = \sqrt{1 - \frac{Z_1}{Z_{11}}} \quad (10)$$

Saites koeficients ievēro abu antenu ieejas pretestības, tāpēc to var izlietot arī dažādu konstrukciju ekranējošo ietaišu salīdzināšanai, analogi kā tas ir saistītās ķēdēs, kur ar saites koeficientu salīdzina saites ciešumu dažāda rakstura ķēdēs (piem. induktīvās un kapacitatīvās).



Ekranēšanas efekta raksturošanai ar saites koeficientu ir tomēr zināmi trūkumi.

1) Tas ir grūti salīdzināms ar parasto ekranēšanas koeficientu, jo pēdējais ir izteicams ar lieliem skaitļiem, bet saites koeficientam vislielākā vērtība robežgadījumā ir 1.

2) Saites koeficients neievēro pašas sistēmas jaudas zudumus. Šos zudumus ievērot tomēr ir nepieciešami, lai raksturotu izstaroto jaudu.

#### § 4. Savstarpējās pretestības un saites koeficienta mērīšana

Gadījumos, kad ekranēšanas efekts ir mazs, savstarpējās pretestības mērīšanai var lietot tādu pat metodi, kādu lieto parastām antenām, kā tas aprakstīts G. H. Brauna darbā (2). Šīs metodes būtība ir šāda:

Vispirms vienu no antenām (ārējo) noskaņo rezonansē ar mērijamo frekvenci tad, kad otras antenas (iekšējās) nav, vai tā ir izskaņota. Pēc tam mērī ārējās antenas ieejas pretestību. Tādā gadījumā:

$$X_{22} = 0; \quad \varphi_2 = 0; \quad Z_{22} = R_{22}$$

un izteiksmes (7) un (8) vienkāršojas:

$$R_1 = R_{11} - \frac{Z_m^2}{R_{22}} \cos 2 \varphi_m$$

$$X_1 = X_{11} - \frac{Z_m^2}{R_{22}} \sin 2 \varphi_m$$

No šīm izteiksmēm atrodam:

$$z_m = \sqrt{R_{22} [(R_1 - R_{11})^2 - (X_1 - X_{11})^2]}^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$\varphi_m = \frac{1}{2} \arctg \frac{X_1 - X_{11}}{R_1 - R_{11}} \quad (12)$$

No izteiksmēm (11) un (12) redzam, ka  $Z_m$  noteikšanai nepieciešams izmērīt iekšējās antenas ieejas pretestību ar un bez ārējās antenas iespaida (kad tā ir noskaņota un izskaņota), un bez tam vēl ārējās antenas ieejas pretestību bez iekšējās antenas iespaida (to var novākt).

Ārējo antenu noskaņo, ieslēdzot zemejuma vadā maināmus reaktīvos elementus ( $L$ ,  $C$ ).

Ieejas pretestības var izmērīt ar parastām metodēm: aizstāšanas metodi vai kumetra metodi.

Ja ekranēšanas efekts ir liels, tad grūti lietot parastās ieejas pretestības mērīšanas metodes, jo tās ir pārāk neprecīzas, lai

varētu noteikt mazās izmaiņas  $X_1 - X_{11}$  un  $R_1 - R_{11}$ . Lai noteiktu mazas reaktivās pretestības maiņas, var izmantot šīs maiņas iespaidu uz oscilatora frekvenci. Oscilatora frekvences maiņu var precīzi noteikt ar interferences metodi. Šim nolūkam iekšējo antenu saista ar oscilatora konturu un novēro oscilatora frekvences maiņu, izskaņojot ārējo antenu (pārtraucot zemējuma vadu vai īsi saslēdzot noskaņošanas elementus).

Frekvences maiņu noteic ar heterodina viļņmēru, noskaņojot to vispirms tā, lai interferences frekvence ar oscilatora frekvenci būtu nulle. Pēc tam ārējo antenu izskaņo un heterodina viļņmēru no jauna nostāda tā, lai svārstības frekvence būtu nulle. Nolasījumu stāpība uz heterodina viļņmēra skalas dos oscilatora frekvences maiņu. Sevīšķi mazu izmaiņu gadījumos (daži simti vai desmiti hercu) heterodina viļņmēru vairs nepārskāņo, bet interferences frekvences noteikšanai to salīdzina ar toņģenerators frekvenci, izmantojot stāvošās Lisazū figuras uz katodstaru lampas ekrana.

No tādā veidā izmērītās oscilatora frekvences maiņas, zinot oscilatora konturu datus, var noteikt  $X_1 - X_{11}$ . Praktiski mēģinājumi pierādīja, ka tādā veidā frekvences maiņu var vēl noteikt ļoti liela ekranēšanas efekta gadījumā.

Iejas pretestības aktīvo komponentu maiņu ( $R_1 - R_{11}$ ) liela ekranēšanas efekta gadījumā nevar noteikt, izejot no oscilatora režīma maiņas, izskaņojot ārējo antenu, kā tas bija reaktivā komponenta gadījumā, tāpēc te jāmeklē cits ceļš. No izteiksmes (4), zinot strāvas  $I_1$ ,  $I_2$  un  $Z_{22}$ , varam atrast  $Z_m$  moduli

$$z_m = - z_{22} \frac{I_2}{I_1}.$$

Tad gadījumā, ja ārējā antena ir noskaņota, no izteiksmes (11) dabūjam:

$$R_1 - R_{11} = \frac{1}{R_{22}} \sqrt{z_{22}^4 \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^4 + R_{22}(X_1 - X_{11})^2}.$$

Pēc formulas (12) tagad varam aprēķināt arī  $\varphi_m$  un atrast savstarpējās pretestības komplekso lielumu.

Saites koeficientu arī nevar noteikt ar tiešu mērīšanu, bet tas jānoteic aprēķina ceļā pēc formulas (10).

No iepriekš sacītā var secināt:

a) Ekranēšanas ietaisēm, kurām ekrana izmēri ir salīdzināmi ar viļņa garumu, saites koeficientam kā ekranēšanas pakāpes raksturotājam ir priekšrocības, salīdzinot ar citiem šī raksta § 3. minētiem lielumiem. Tāpat arī, salīdzinot ar parastā veidā noteikto ekranēšanas koeficientu.

Pēdējais ir daudznozīmīgs, bet pārējie, kaut gan viennozīmīgi, dod skaitļus, ko nevar izmantot dažādu konstrukciju tipu ekranēšanas ietaišu salīdzināšanai.

Praktiski šādi apstākļi ir tad, ja ekrans ir izveidots no skārda (nevis sieta) un ja ekranā nav lielu caurumu, bet ir spraugas un cauri ejoši vadi (saites).

Gadījumos, ja tas tā nav, saites koeficients raksturo tikai to ekranēšanas efekta daļu, kura ir atkarīga no ārējās sistēmas izstarošanas.

Izstarošanu pa caurumiem un cauri ekrana materialam (sieta gadījumā) samērā viegli aprēķināt (1), tāpēc arī šādos gadījumos saites koeficienta ieviešanai ir praktiska nozīme, jo tā noteikšana aprēķina ceļā nav iespējama, bet dotā eksperimentālā metode atļauj to atsevišķi izmērīt.

b) Izklāstītā eksperimentālā metode sevišķi ērti izlietojama maza ekranēšanas efekta gadījumos, kad ieejas pretestību var mērīt ar parastām metodēm.

Lietojot interferences metodi, ieejas pretestības maiņas noteikšanai, saites koeficientu vēl var noteikt ļoti liela ekranēšanas efekta gadījumos, kā to pierādīja izdarītie eksperimenti. Mērījumu izdarīšana prasa, lai būtu iespēja plašās robežās mainīt ārējās sistēmas noskaņojumu, kas praktiski pa lielākai daļai arī ir iespējams, ja ekranēšanas kameras nav novietotas tieši uz zemes.

Prētējā gadījumā aprēķinos jāievēro zemējuma vadam paraleli slēgtā kapacitāte un izolācijas pretestība pret zemi. Mērīšanas precizitāte tādā gadījumā samazinās.

c) Elektriskās antenas vietā savstarpējo pretestību var noteikt arī pret ekrana iekšpusē novietotu magnetisko dipolu, tomēr šādā gadījumā iespējams, ka samazināsies mērījumu metodes jutība.

d) Gadījumā, ja ekrans darbojas otrādi (t. i. ekranē telpas daļu no ārpuses traucējumiem, kā tas ir, piem., radiouztvērēju rūpnīcās), aprakstītā veidā izdarītie mērījumi nezaudē savu nozīmi, jo, izlietojot reciprocitātes teoremu, jāsecina, ka saites koeficients raksturo enerģijas plūšanu arī pretējā virzienā.

## L I T E R A T U R A

1. Д. Н. Шапиро, Расчет эффективности экранирующих камер, Радиотехника, 1955 г., № 4, стр. 36.
2. G. H. Brown, Directional antennas, Proc. I. R. C., January 1937, pg. 78.

*Р. Д. ЮКНА, инженер*

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ЭКРАНИРОВАНИЯ В ДИАПАЗОНАХ КОРОТКИХ И УЛЬТРАКОРОТКИХ ВОЛН ВЗАИМНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ МЕЖДУ ВНУТРЕННЕЙ И ВНЕШНЕЙ СИСТЕМАМИ**

В диапазонах коротких и ультракоротких волн размеры экранирующих клеток становятся соизмеримыми с длиной волны источника помех. В таких случаях внешняя система, — экранирующая клетка и заземление, при наличии связей с внутренней системой, возбуждается и становится интенсивным излучателем помех.

Для экспериментального определения связи в клетке помещается антенна и обычным методом измеряется взаимное сопротивление между нею и внешней системой (фиг. 1).

В случае большого эффекта экранирования применяется метод биений. Для этого входные зажимы внутренней антенны связываются с контуром осциллятора и изменение генерируемой им частоты, при настройке в резонанс и расстройке внешней системы, измеряется гетеродинным волномером.

По данным  $L$  и  $C$  контура и изменению частоты осциллятора можно определить изменение реактивной составляющей входного сопротивления внутренней антенны. Изменение активной составляющей входного сопротивления определяется при помощи последней формулы, выведенной в данной статье. Для этого необходимо измерение токов внутренней антенны и провода заземления клетки.

Для теоретического обоснования вышеизложенного метода системе фиг. 1 определяется соответствующая эквивалентная схема (фиг. 2), на основе которой также оценивается целесообразность определения эффекта экранирования следующими величинами: взаимным сопротивлением, сопротивлением связи и коэффициентом связи. Из этих величин только коэффициент связи оказывается пригодным также для характеристики эффекта экранирования в случае различных типов экранировочных клеток.

Л. Э. ДОМБУР, инженер

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ УРАВНИТЕЛЬНОГО ТОКА В ПАРАЛЛЕЛЬНО РАБОТАЮЩИХ ТРАНСФОРМАТОРАХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИХ ПАРАМЕТРОВ КОРОТКОГО ЗАМЫКАНИЯ

### § 1. Введение

На практике иногда бывает необходимо в рабочих условиях без отключения трансформаторов уточнить их параметры короткого замыкания, определить величину уравнительного тока  $I_y$  под нагрузкой при заданных коэффициентах трансформации  $K_I$  и  $K_{II}$ , а также характер нагрузки ( $\cos \varphi$ ) на шинах станции. Для этой цели можно использовать свойства уравнительного тока, протекающего в параллельно работающих трансформаторах с различными коэффициентами трансформации  $K_{TP}$ . Предлагаемая ниже методика дает возможность найти эти величины в рабочих условиях и не требует никаких специальных схем для проведения испытания.

Уравнительный ток появляется в обмотках трансформаторов с различными  $K_{TP}$ , когда имеется разность э. д. с.:

$$\Delta E = U_{20} (K_{II} - K_I) \quad (1)$$

где  $U_{20}$  — установившееся значение напряжения на вторичных шинах; величина уравнительного тока равна:

$$I_y = \frac{\Delta E}{Z_{KI} + Z_{KII}} \quad (2)$$

где  $Z_{KI}$  и  $Z_{KII}$  — сопротивления короткого замыкания каждого трансформатора.

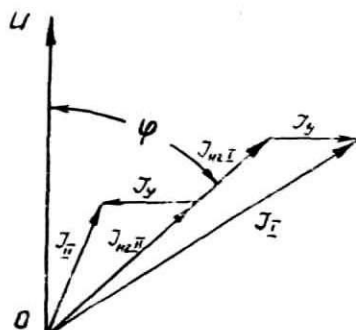
Угол сдвига этого тока относительно напряжения изменяется для трансформаторов разной мощности в определенных пределах и для трансформаторов средней и большой мощности приближается к  $90^\circ$ . Как видно из формулы (2), уравнительный ток практически не изменяется при изменении нагрузки от холостого хода до номинальной. При параллельной работе двух

трансформаторов с одинаковыми коэффициентами трансформации  $K_{\text{ТР}}$  они, как известно, загружаются прямо пропорционально их номинальным мощностям  $P_{\text{Н}}$  и обратно пропорционально их напряжениям короткого замыкания  $U_{\text{К}}$ .

$$\frac{i_{\text{I}}}{i_{\text{II}}} = \frac{P_{\text{НI}}}{P_{\text{НII}}} \cdot \frac{U_{\text{КII}}}{U_{\text{КИ}}} \quad (3)$$

где  $I_{\text{I}}$  и  $I_{\text{II}}$  — токи нагрузки обоих трансформаторов;  
 $P_{\text{НI}}$  и  $P_{\text{НII}}$  — их номинальные мощности;  
 $U_{\text{КИ}}$  и  $U_{\text{КII}}$  — напряжения короткого замыкания обоих трансформаторов.

При разных  $K_{\text{ТР}}$  в обмотках трансформаторов появляется уравнительный ток и трансформаторы загружаются не пропорционально их  $P_{\text{Н}}$  и  $U_{\text{К}}$ , а следующим образом: трансформатор



Фиг. 1: Диаграмма токов при нагрузке.

с меньшим  $K_{\text{ТР}}$  (с более высоким вторичным напряжением) нагружается больше, а трансформатор с большим  $K_{\text{ТР}}$  нагружается меньше значений нагрузок при  $K_{\text{I}} = K_{\text{II}}$ , что видно из диаграммы (фиг. 1). При этом отношение токов  $I_{\text{I}}$  и  $I_{\text{II}}$  обоих трансформаторов изменяется с изменением общего тока нагрузки ([2] стр. 162).

Общие токи трансформаторов  $I_{\text{I}}$  и  $I_{\text{II}}$  при работе их с разными  $K_{\text{ТР}}$  можно рассматривать как сумму двух токов: а) тока внешней нагрузки  $I_{\text{НрI}}$  и  $I_{\text{НрII}}$  и б) уравнительного тока  $I_{\text{y}}$ , который играет роль индуктивного по отношению к первому трансформатору и роль емкостного по отношению ко второму.

## § 2. Определение параметров короткого замыкания трансформаторов

Для определения параметров короткого замыкания трансформатора по обычной схеме опыта короткого замыкания необходимо устройство, понижающее напряжение (поворотный автотрансформатор или специальный трансформатор с регулируемыми ответвлениями) и комплект приборов, состоящий из амперметров, вольтметра и ваттметров.

Однако, иногда отсутствует возможность понижения напряжения (нет специального устройства или нельзя его подключить). В этом случае предлагаемая ниже методика определения параметров короткого замыкания трансформаторов, работающих параллельно, представляет некоторый интерес. При этом *необходимым условием* является возможность изменения  $K_{\text{ТР}}$  у одного из исследуемых трансформаторов, для образования в обмотках трансформаторов уравнительного тока.

Для нахождения неизвестных параметров короткого замыкания  $Z_{\text{KI}}$  и  $Z_{\text{KII}}$  необходимо составить два уравнения, в которые входят эти неизвестные, и решить их совместно. Из формулы (2) видно, что сумму полных сопротивлений короткого замыкания  $Z_{\text{KI}} + Z_{\text{KII}}$  можно найти, если известны разность э. д. с.  $\Delta E$  и величина уравнительного тока  $I_y$ :

$$Z_{\text{KI}} + Z_{\text{KII}} = \frac{\Delta E}{I_y} \quad (4)$$

В качестве второго уравнения используем выражение (3)

$$\frac{I_I}{I_{II}} = \frac{Z_{\text{KII}}}{Z_{\text{KI}}} \quad (5)$$

Решив совместно уравнения (4) и (5), находим параметры короткого замыкания  $Z_{\text{KI}}$  и  $Z_{\text{KII}}$ . Входящие в уравнения (4) и (5) величины  $\Delta E$ ,  $I_I$  и  $I_{II}$  определяем на основании замеров. При расчетах иногда удобнее (см. приложение), вместо величины  $\Delta E$  определить  $\Delta K$  — разность коэффициентов трансформации — по следующей формуле:

$$\Delta K = -\frac{K_{II} - K_I}{K} \cdot 100 \quad (6)$$

где

$$K = \sqrt{K_I \cdot K_{II}} \quad (7)$$

— средний коэффициент трансформации обоих трансформаторов ([1] стр. 220).

Тогда отношение уравнильного тока к номинальному можно написать таким образом:

$$\frac{I_y}{I_H} \cdot 100 = \frac{\Delta K}{U_{KI} + U_{KII}} \cdot 100 \quad (8)$$

Уравнильный ток  $I_y$  можно определить двумя путями: а) непосредственным замером при параллельной работе двух трансформаторов с разными  $K_{ТР}$  при холостом ходе и б) графическим путем при любой нагрузке трансформаторов. Рассмотрим подробнее графический прием определения величины уравнильного тока.

### § 3. Определение уравнильного тока графическим путем

Необходимо ввести следующие допущения:

I. При равных коэффициентах трансформации ( $K_I = K_{II}$ ) нагрузочные токи обоих трансформаторов совпадают по фазе. В общем случае эти токи отличаются друг от друга по фазе, однако для параллельно работающих трансформаторов с отношением наибольшей мощности к наименьшей не больше, чем 3 : 1, расхождение по фазе весьма мало и геометрическое сложение нагрузочных токов можно без особой погрешности заменить алгебраическим, что весьма облегчает графическое построение.

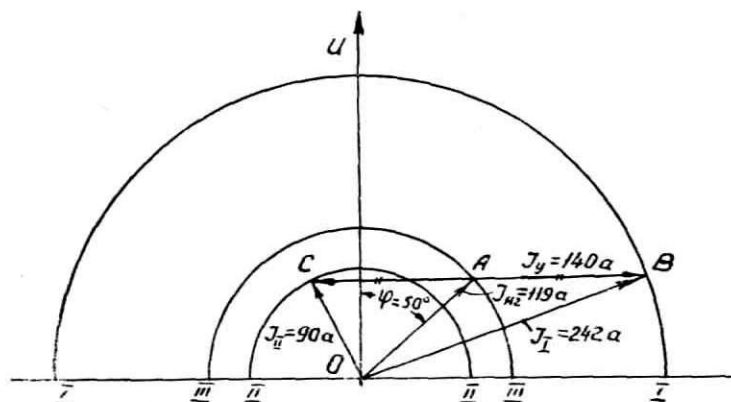
II. Угол сдвига между искомым уравнильным током и напряжением известен. Этот угол относительно быстро растет вместе с ростом мощности трансформаторов. Для трансформаторов мощностью свыше 5600 ква считаем, что уравнильный ток является чисто индуктивным.

Ниже приведена таблица, в которой даны приближенные значения угла  $\varphi_K$  в зависимости от мощности трансформаторов ([1] стр. 193).

Таблица 1

№ п. п.	Мощность трансформатора	Угол $\varphi_{K\text{ ср}}$
	квa	град.
1	5 ÷ 50	60
2	50 ÷ 560	70
3	560 ÷ 5600	80
4	свыше 5600	90

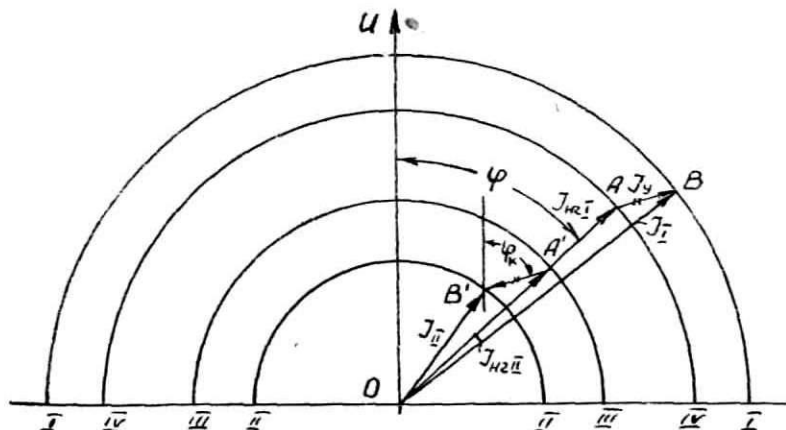




$m_T = 0,25 \text{ a/ми}$   
 $\text{I}$  и  $\text{II}$  - окружности токов трансформаторов при  $K_I \neq K_{II}$   
 $\text{III}$  - окружность тока идеальной нагрузки ( $K_I = K_{II}$ )

Фиг. 2: Определение тока  $I_y$  для случая параллельной работы 2-х трансформаторов по 15 тыс. ква.

На фигурах 2 и 3 показано графическое построение, причем на фиг. 2 приведен случай, когда равны номинальные мощности и напряжения короткого замыкания трансформаторов ( $P_{HI} = P_{HII}$  и  $U_{KI} = U_{KII}$ ). Общий случай ( $P_{HI} \neq P_{HII}$  и  $U_{KI} \neq U_{KII}$ ) показан на фиг. 3. Согласно векторной диаграмме на фиг. 1



$\text{I}$  и  $\text{II}$  - окружности токов трансформаторов при  $K_I \neq K_{II}$   
 $\text{III}$  и  $\text{IV}$  - окружности нагрузочных токов при  $K_I = K_{II}$

Фиг. 3: Определение тока  $I_y$  для случая  $P_{HI} \neq P_{HII}$  и  $U_{KI} \neq U_{KII}$ .

определение уравнивающего тока можно производить следующим путем:

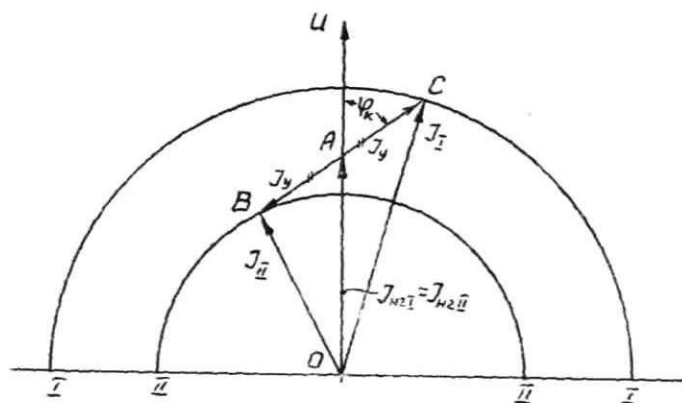
- а) Откладываем из центра  $O$  по направлению оси ординат вектор напряжения  $U$ ;
- б) при параллельной работе с равными  $K_{\text{ТР}}$  замеряем нагрузочные токи трансформаторов  $I_{\text{НгI}}$  и  $I_{\text{НгII}}$  и проводим данными радиусами в масштабе тока вспомогательные полуокружности нагрузочных токов;
- в) замеряем токи трансформаторов  $I_{\text{I}}$  и  $I_{\text{II}}$  при параллельной работе трансформаторов с  $K_{\text{I}} \neq K_{\text{II}}$  и проводим данными радиусами в масштабе тока вспомогательные полуокружности I и II;
- г) через окружность (окружности) нагрузочных токов проводим ряд вспомогательных линий под углом  $\varphi_{\text{к ср}}$  (см. табл. I) к оси ординат и путем сравнения находим точку  $A$  (или точки  $A$  и  $A'$ ), которая делит пополам отрезок  $CB$  между полуокружностями токов трансформаторов I и II (или которые дают равенство отрезков  $AB = A'B'$ ). Соединив эту точку  $A$  с центром  $O$ , получим вектор тока нагрузки  $I_{\text{Нг}}$  и угол  $\varphi$  между напряжением и током на шинах, а равные отрезки  $AB = AC$  (или  $AB = A'B'$ ) дадут в масштабе тока величину уравнивающего тока  $I_{\text{у}}$ .

Для большей точности рекомендуется проделать опыт для одной и той же нагрузки при различных значениях  $\Delta E$  ( $\Delta K$ ) и затем взять среднее значение  $Z_{\text{к}}$  и угла  $\varphi$ .

Заметим, что при активной нагрузке ( $\cos \varphi = 1$ ) допущение II о необходимости задания угла  $\varphi_{\text{к ср}}$  не требуется. Наоборот, в этом случае возможно определить величину угла сдвига  $\varphi_{\text{к}}$  уравнивающего тока относительно напряжения. Графическое построение показано на фигурах 4 ( $P_{\text{HI}} = P_{\text{HII}}$  и  $U_{\text{KI}} = U_{\text{KII}}$ ) и 5 ( $P_{\text{HI}} \neq P_{\text{HII}}$  и  $U_{\text{KI}} \neq U_{\text{KII}}$ ). При этом порядок графического построения таков:

- а) на оси ординат из центра  $O$  откладываем в масштабе тока нагрузочные токи  $I_{\text{HI}}$  и  $I_{\text{HII}}$ , замеренные для случая параллельной работы трансформаторов с  $K_{\text{I}} = K_{\text{II}}$ , при этом по фазе ток нагрузки совпадает с напряжением на шинах;
- б) из того же центра радиусами токов трансформаторов в масштабе тока проводим вспомогательные полуокружности токов, замеренные для случая параллельной работы трансформаторов с  $K_{\text{I}} \neq K_{\text{II}}$ ;

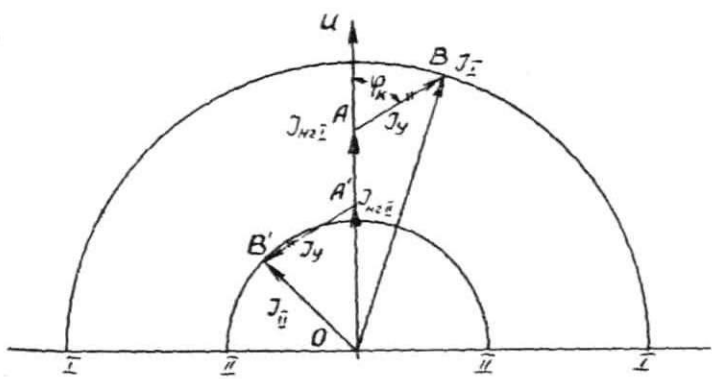
в) накладываем на точку  $A$  конца вектора тока нагрузки (или на точки  $A$  и  $A'$ ) линейку и, поворачивая ее вокруг этой



$I$  и  $II$  - окружности токов трансформаторов при  $K_I \neq K_{II}$

Фиг. 4: Определение тока  $I_y$  и угла  $\varphi_K$  для случая  $P_{HI} = P_{HII}$  и  $U_{KI} = U_{KII}$ .

точки, находим такое положение линейки, когда при пересечении ее с полуокружностями токов трансформаторов  $I_I$  и  $I_{II}$  получатся равные отрезки  $AB = AC$  (или равные и параллельные отрезки  $AB = A'B'$ ). Проводим через точки  $A$  и  $B$  вспомогательную линию. Угол между осью ординат и этой линией показывает значение угла  $\varphi_K$ . Равные отрезки  $AB = AC$  ( $AB = A'B'$ ) дают в масштабе значение уравнивающего тока  $I_y$ .



$I$  и  $II$  - окружности токов трансформаторов при  $K_I \neq K_{II}$

Фиг. 5: Определение тока  $I_y$  и угла  $\varphi_K$  для случая  $P_{HI} \neq P_{HII}$  и  $U_{KI} \neq U_{KII}$ .

В подтверждение сказанного автором был проведен ряд опытов в лаборатории электрических машин ЛГУ с трансформаторами малой мощности (по 7 кВа) и на Угличской ГЭС с мощными трансформаторами (15 тыс. кВа). В первом случае для режима чисто активной нагрузки был определен угол  $\varphi_{к ср}$ , причем результат хорошо совпал с величиной угла  $\varphi_{к}$ , найденной обычным путем из опыта короткого замыкания. На Угличской ГЭС были определены в рабочих условиях напряжения короткого замыкания обоих трансформаторов; результаты опыта сравнительно с заводскими данными были достаточно точные (см. приложение).

#### § 4. Выводы

1. Уравнильный ток в параллельно работающих трансформаторах, который всегда рассматривался как нежелательный фактор, может быть использован для нахождения некоторых важных в эксплуатации величин.

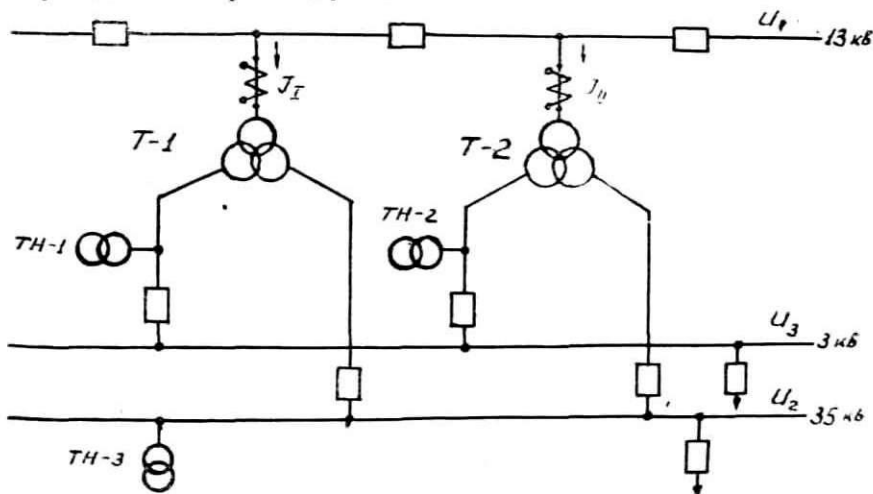
2. Предложенная в статье методика может быть использована для определения параметров короткого замыкания в случае параллельной работы двух трансформаторов при возможности изменения коэффициента трансформации  $K_{Тр}$  одного из них под нагрузкой, причем не нарушается ни схема установки, ни снабжение потребителя. При определении параметров короткого замыкания нет нужды в понижающей установке.

3. Предложенная методика позволяет также легко найти графическим путем уравнильный ток в параллельно работающих трансформаторах и угол сдвига между током и напряжением на шинах трансформаторов. Это имеет значение при невозможности непосредственного замера данных величин.

4. Изложенная методика определения параметров короткого замыкания, как показали расчеты (см. приложение) является достаточно точной и более простой по сравнению с обычным опытом короткого замыкания.

5. Методика представляет собой, кроме того, интерес с точки зрения использования ее в лабораторных работах по трансформаторам для уяснения студентами свойств уравнильного тока.

Для 2-х трансформаторов по 15000 ква, включенных на параллельную работу, (см. фиг. 6) с помощью амперметров и переносного вольтметра класса 0,5 для обмоток СН-ВН были проведены замеры следующих величин:



Фиг. 6: Схема параллельной работы трансформаторов на Угличской ГЭС.

Таблица 2

№№ п. п.	Регулир. трансформатор				Параллельн. работа при $K_I = K_{II}$				Параллельн. работа при $K_I \neq K_{II}$						
	$U_1$	$U_a$	полож. анцапф	$K_{TP}$	$U_1$	$U_a$	$I_{HrI}$	$I_{HrII}$	$U_1$	$U_a$	$I_I$	$I_{II}$	полож. анцапф		
	кв	кв			кв	кв	а	а	кв	кв	а	а			
1	13050	2980	2	4,38	1	13100	2960	122,0	115	1	12050	2980	90	242	3
2	13050	3080	3	4,24						2	12950	3030	195	405	4
3	13050	3200	4	4,08											

При проведении опыта не имелось возможности непосредственного замера уравнивающего тока, поэтому он был найден графическим путем. Выше было показано графическое построение для определения величины уравнивающего тока при следую-

щих коэффициентах трансформации  $K_{I_{23}} = 4,38$  и  $K_{II_{23}} = 4,24$  (фиг. 2).

Определим величины напряжений короткого замыкания трансформаторов Т-1 и Т-2:

Графическим построением (фиг. 2) находим уравнивающий ток.

Коэффициенты трансформации:

$$K_{I_{23}} = 4,38 \quad K_{II_{23}} = 4,24$$

$$K_{23} = \sqrt{K_{I_{23}} \cdot K_{II_{23}}} = \sqrt{4,38 \cdot 4,24} = 4,31$$

$$\Delta K_{23} = \frac{K_{I_{23}} - K_{II_{23}}}{K_{23}} = \frac{4,38 - 4,24}{4,31} = 3,25\%$$

$$\frac{I_{HrI}}{I_{HrII}} = \frac{U_{KII}}{U_{KI}} = \frac{122}{115} = 1,06; \quad U_{KII} = 1,06 U_{KI}$$

$$U_{KI} + U_{KII} = \frac{\Delta K \cdot I_H}{I_y}; \quad U_{KI} + 1,06 U_{KI} = \frac{3,25 \cdot 602}{140} = 14\%$$

Здесь  $I_H = 602$  а — номинальный ток трансформатора

$I_y = 140$  а — уравнивающий ток, найденный из графика.

$$2,06 U_{KI} = 14\%; \quad U_{KI} = 6,8\% \text{ и } U_{KII} = 1,06 U_{KI} = 7,2\%.$$

2-й опыт при той же нагрузке и уравнительном токе  $I_y = 298$  а ( $K_{I_{23}} = 4,38$  и  $K_{II_{23}} = 4,08$ ) дал следующие значения  $U_{KI}$  и  $U_{KII}$ :

$$U_{KI} = 6,85\%$$

$$U_{KII} = 7,25\%$$

Согласно заводскому паспорту напряжение короткого замыкания  $U_K = 6,55\%$  для каждого трансформатора. Расхождение результатов испытания с заводскими данными можно объяснить погрешностью приборов и некоторыми колебаниями нагрузки.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Л. М. Пиотровский, «Электрические машины», Госэнергоиздат, 1949.
2. В. С. Кондахчан, «Эксплуатация трансформаторов», Госэнергоиздат, 1950.

*В. В. НИЦЕЦКИЙ, инженер*

## **ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ТРАНСФОРМАТОРЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ОДНИМ Ш-ОБРАЗНЫМ МАГНИТОПРОВОДОМ**

Авторами статьи (Л. 2) предложена конструкция измерительного трансформатора постоянного тока, основанная на принципе ферромагнитного удвоителя частоты, работающего в режиме, близком к режиму короткого замыкания.

В расчетах подобных устройств широко применяется аппроксимация реальной кривой намагничивания (или семейства частных циклов гистерезиса) некоторой аналитической кривой. Однако упрощение задачи достается не даром. На полученную картину изучаемых физических явлений накладывается в значительной мере случайный выбор вида аппроксимации, а область применимости полученных закономерностей зачастую необоснованно ограничивается.

Так, например, оптимальные свойства измерителя по (Л. 2) гарантированы только для случая, если кривая намагничивания материала сердечников имеет вид параболы

$$H = AB^n,$$

где  $n$  — целое нечетное число,  $n = 1$ . При этом необходимо достаточно большое отношение переменной составляющей индукции к постоянной составляющей.

Вопрос о справедливости выявленных закономерностей также и при кривой намагничивания более общего вида не ставится.

В схемах измерительных трансформаторов постоянного тока почти исключительно применяются два магнитно не связанные магнитопровода. Лишь в (Л. 1, стр. 291) приводится схема с Ш-образным магнитопроводом (см. рис. 1). Схема работает по принципу ферромагнитного удвоителя частоты в режиме холостого хода и предназначена для измерения постоянных напряжений.

Наша цель — исследовать режим короткого замыкания подобной схемы. Однако вторичную обмотку более рационально располагать на среднем стержне. Во-первых, при этом сократится расход меди, т. к. каждая из обмоток на крайних стерж-

нях (рис. 1) должна быть с тем же числом витков, как эквивалентная обмотка на среднем стержне. Во-вторых, во вторичной обмотке не будет наводиться эдс от основной волны маг-

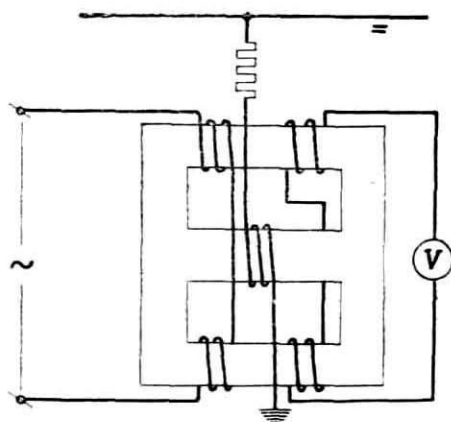


Рис. 1. Схема трансформатора постоянного напряжения, данная в (Л. 1).

нитного потока (в схеме рис. 1 эти эдс взаимно компенсируются), а это улучшит условия работы изоляции.

Экспериментально исследовались два трехфазных трех-

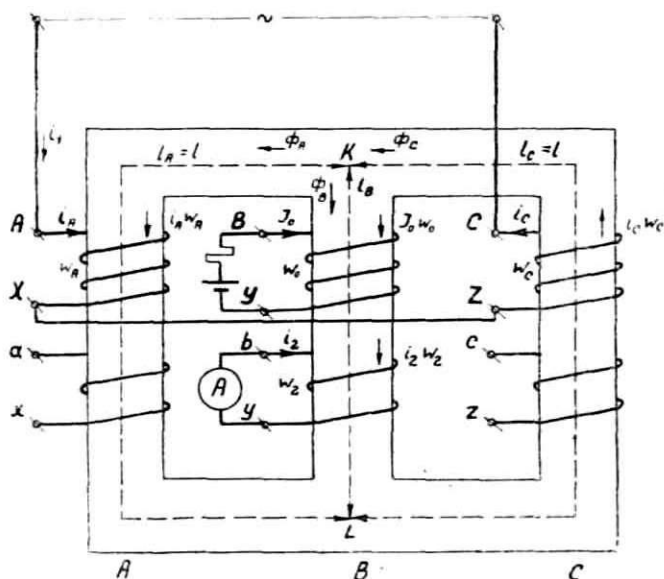


Рис. 2. Основная схема измерителя.



стержневых силовых трансформатора, не предназначенные специально для этой цели и включенные по схеме рис. 2.

Первичными будем называть обмотки AX и CZ, т. е. контур, по которому замыкаются нечетные гармоники тока. Приложенное напряжение  $u_1 = U_{1m} \sin \omega t$  назовем первичным или вспомогательным. Вторичной будем называть обмотку BY, которая замыкается накоротко измерительным прибором. (В литературе по измерителям первого типа применяют другие обозначения: цепь постоянного тока называют первичной, цепь вспомогательного переменного тока — вторичной (Л. 3)).

Составим электрическую схему, эквивалентную магнитной цепи измерителя (рис. 3).

Электромагнитные процессы в Ш-образном магнитопроводе измерителя характеризуются следующими моментами (Л. 1). Магнитный поток  $\Phi_B$  и соответственно индукция  $B_B$  в среднем сердечнике измерителя имеет постоянную составляющую и при

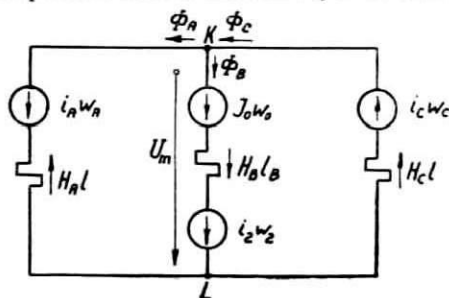


Рис. 3. Эквивалентная схема магнитной цепи измерителя рис. 2.

отсутствии короткозамкнутых обмоток также и четные гармоники. Магнитные потоки в крайних сердечниках измерителя  $\Phi_A$  и  $\Phi_C$  и соответственно индукции  $B_A$  и  $B_C$  имеют постоянную составляющую, основную волну и, при отсутствии короткозамкнутых обмоток, также и четные гармоники. Нечетные гармоники высших порядков в большинстве случаев в потоках практически отсутствуют.

Напряженности магнитного поля  $H_A$  и  $H_C$  имеют постоянную составляющую и гармоники всех порядков. В режиме короткого замыкания четные гармоники в составе  $H_A$ ,  $H_B$  и  $H_C$  полностью уравновешиваются вторичными ампервитками  $i_2 \omega_2$ , поэтому четные гармоники в магнитных потоках отсутствуют.

Постоянные составляющие  $\Phi_{A0}$ ,  $B_{A0}$  и  $H_{A0}$  направлены встречно положительному направлению основной волны, а  $\Phi_{C0}$ ,  $B_{C0}$  и  $H_{C0}$  — согласованно. Нечетные гармоники магнитных потоков замыкаются по внешнему контуру AC и в сред-

ний сердечник В не заходят, а четные гармоники и постоянная составляющая наоборот замыкаются по среднему сердечнику.

Вышесказанное относится не только к приведенной схеме с последовательным соединением первичных обмоток. Один и тот же Ш-образный магнитопровод может весьма различными способами сцепляться с соответствующими контурами токов. Некоторые из возможных вариантов показаны на рис. 4.

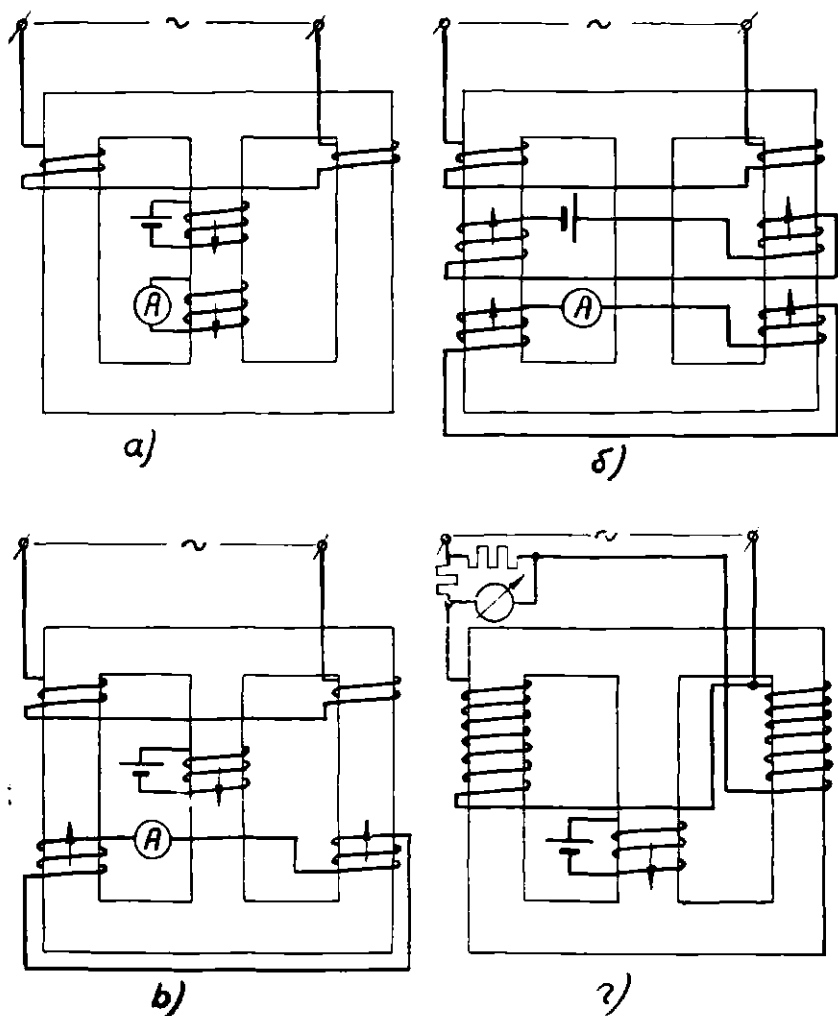


Рис. 4. Некоторые варианты расположения обмоток в Ш-образных измерителях.

Во всех вариантах удвоителей частоты намагничивающие силы можно разделить на постоянные, на н. с. нечетных и н. с. четных порядков. Обозначим их через  $F_0 = I \omega_0$ ,  $F_{2n+1}$  и  $F_{2n}$ . Соответственно можно представить себе контур постоянного тока, контур нечетных гармоник (первичный) и контур четных гармоник (вторичный). Наиболее четко и физически ясно намагничивающие силы и контуры разделены в режиме короткого замыкания рассматриваемой схемы (рис. 2):

$$\begin{aligned} F_0 &= I_0 \omega_0, \\ F_{2n+1} &= 2 i_1 \omega_1, \\ F_{2n} &= i_2 \omega_2. \end{aligned}$$

Здесь каждая н. с. создается отдельной обмоткой. В других режимах и в других схемах характер распределения компонентов н. с. между обмотками усложняется.

## 1. Основные уравнения измерителя

Произведем анализ режима короткого замыкания схемы (рис. 2), следуя в основном методу (Л. 2), применительно к Ш-образным измерителям. Цель анализа — выявить характерные особенности Ш-образного измерителя по сравнению с обычным, рассмотренным в (Л. 2).

Выразим основную кривую намагничивания материала сердечников измерителя в следующей форме:

$$H = AB^n, \quad (1)$$

где:  $n$  — целое нечетное число;  $n > 1$ ,

$A$  — некоторая положительная величина.

Введем ряд допущений:

- 1) пренебрежем активными сопротивлениями и потоками рассеяния первичных и вторичных обмоток;
- 2) пренебрежем явлением гистерезиса и вихревых токов в сердечниках;
- 3) допустим, что сопротивление  $z_0$  цепи постоянного тока для четных гармоник велико и что четные гармоники тока в ней отсутствуют;
- 4) напряжение  $u_1$  вспомогательного источника питания считаем изменяющимся по синусоидальному закону.

Тогда при равенстве сечений стержней магнитопровода электромагнитные процессы в Ш-образном измерителе в режиме короткого замыкания описываются системой уравнений:

$$\frac{d}{dt} \omega_1 S(B_C + B_A) = U_{1m} \sin \omega_1 t, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_2 S(B_C - B_A) = 0, \quad (3)$$

$$i_1 \omega_1 = \frac{Al}{2} (B_A^n + B_C^n), \quad (4)$$

$$i_2 \omega_2 + i_0 \omega_0 = \frac{Al}{2} (B_C^n - B_A^n) + H_B l_B. \quad (5)$$

Предположим, что включение вспомогательного напряжения произошло в момент  $t = \frac{\pi}{2\omega_1}$ , так что переходных процессов не возникает. В таком случае можно показать, что индукция в крайних стержнях содержит только постоянную составляющую  $B_0$  и основную волну с амплитудой  $B_{1m}$ , а в среднем стержне — только постоянную составляющую:

$$B_C = B_{1m} \cos \omega_1 t + B_0, \quad (6)$$

$$B_A = B_{1m} \cos \omega_1 t - B_0, \quad (7)$$

$$B_B = 2 B_0. \quad (8)$$

## 2. Определение первичного тока

Подставив значения  $B_C$  и  $B_A$  из выражений (6) и (7) в уравнение (4), получаем:

$$i_1 \omega_1 = Al B_0^n \sum_{m=1}^{\frac{n+1}{2}} C_n^{2m-1} k^{2m-1} \frac{1}{2^{2(m-1)}} \sum_{j=0}^{m-1} C_{2m-1}^j \times \\ \times \cos [(2m-1) - 2j] \omega_1 t, \quad (9)$$

или при  $\kappa \gg 1$ :

$$i_1 \omega_1 = Al B_0^n \frac{k^n}{2^{n-1}} \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^j \cos (n - 2j) \omega_1 t. \quad (10)$$

Здесь  $\kappa = \frac{B_{1m}}{B_0}$ ,  $C_n^m$  — биномиальные коэффициенты.

Действующее значение первичного тока:

$$I_1 = \frac{IAB_{\text{им}}^n}{\sqrt{2} \cdot 2^{n-1}} \sqrt{\sum_{j=0}^{j=\frac{n-1}{2}} (C_n^j)^2}.$$

Следовательно, первичный ток при Ш-образном магнитопроводе имеет аналогичные выражения, как и при двух отдельных магнитопроводах по (Л. 5) и содержит только нечетные гармоники.

### 3. Определение вторичного тока

Учитывая формулы (6), (7), (8), уравнение (5) приобретает следующий вид:

$$i_2 \omega_2 + I_0 \omega_0 = AIB_0^n \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{m=\frac{n-1}{2}} C_n^{2m} k^{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \left[ \frac{C_{2m}^m}{2} + \sum_{j=0}^{j=m-1} C_{2m}^j \cos 2(m-j)\omega_1 t \right] + \frac{I_B}{I} 2^n \right\}. \quad (11)$$

Полагаем, что ток  $i_2$  не содержит постоянной составляющей, а величина  $I_0 \omega_0$  заведомо постоянна. Приравняв переменные составляющие в левой и правой части уравнения (11), получим выражение для  $i_2 \omega_2$ :

$$i_2 \omega_2 = AIB_0^n \sum_{m=1}^{m=\frac{n-1}{2}} C_n^{2m} k^{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{j=0}^{j=m-1} C_{2m}^j \cos 2(m-j)\omega_1 t, \quad (12)$$

или при  $k \gg 1$ :

$$i_2 \omega_2 = AIB_0^n \frac{n k^{n-1}}{2^{n-2}} \sum_{j=0}^{j=\frac{n-3}{2}} C_{n-1}^j \cos [(n-1)-2j]\omega_1 t. \quad (13)$$

Следовательно, наличие Ш-образного магнитопровода не вносит отличия в выражении для тока  $i_2$  по сравнению с конструкцией, рассмотренной в (Л.2). В токе  $i_2$  содержатся только четные гармоники.

#### 4. Пропорциональность между постоянным и вторичным токами

Для определения связи постоянного тока  $I_0$  и постоянной составляющей индукции  $B_0$  приравняем постоянные составляющие в левой и правой части уравнения (11):

$$I_0 \omega_0 = AlB_0^n \left[ 1 + \sum_{m=1}^{m=\frac{n-1}{2}} C_n^{2m} k^{2m} \frac{1}{2^{2m-1}} \frac{C_{2m}^m}{2} + \frac{l_B}{l} 2^n \right] = \\ = AlB_0^n \left( 1 + \sum_{m=1}^{m=\frac{n-1}{2}} \lambda k^{2m} \frac{1}{2^m} + \frac{l_B}{l} 2^n \right). \quad (14)$$

Здесь через  $\lambda$  обозначено произведение  $C_n^{2m} \cdot C_{2m}^m$ .

В (Л. 5) дано следующее выражение для  $I_0 \omega_0$  (в наших обозначениях):

$$I_0 \omega_0 = lAB_0^n \left[ \sum_{m=1}^{m=\frac{n-1}{2}} \lambda \frac{k^{2m}}{2^m} \right]. \quad (15)$$

Как видно, при Ш-образной конструкции выражение в квадратных скобках дополняется членом

$$\frac{l_B}{l} 2^n.$$

Физически это соответствует падению магнитного напряжения в среднем сердечнике  $B$ , в котором в режиме короткого замыкания существует только постоянный магнитный поток. У удвоителя частоты обычной конструкции нет такого участка, где не действовал бы также и переменный магнитный поток.

При условии  $k = \frac{B_{1m}}{B_0} \gg 1$  вместо (14) получаем:

$$I_0 \omega_0 = AlB_0^n \left\{ \frac{k^{n-1}}{2^{n-1}} \left[ \frac{n!}{\left( \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right)^2} \right] + \frac{l_B}{l} 2^n \right\}. \quad (16)$$

Отсюда определяем  $B_0$ :

$$B_0^n = \frac{I_0 \omega_0}{Al \left\{ \frac{k^{n-1}}{2^{n-1}} \left[ \frac{n!}{\left( \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right)^2} \right] + \frac{l_B}{l} 2^n \right\}}.$$

Действующее значение вторичного тока с учетом (13) выразится следующим образом:

$$I_2 = \frac{All_0 \omega_0 \cdot nk^{n-1} \sqrt{\sum_{j=0}^{j=\frac{n-3}{2}} (C_{n-1}^j)^2}}{\sqrt{2} \omega_2 Al \left\{ \frac{k^{n-1}}{2^{n-1}} \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right]^2 + \frac{l_B}{l} 2^n \right\} 2^{n-2}} =$$

$$= \frac{I_0 \omega_0 n \sqrt{\sum_{j=0}^{j=\frac{n-3}{2}} (C_{n-1}^j)^2}}{\sqrt{2} \omega_2 \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right]^2 + \frac{l_B}{l} \frac{1}{k^{n-1}} 2^{2n-2} \right\}}. \quad (17)$$

Выясним, при каком условии членом  $\varkappa = \frac{l_B}{l} \frac{1}{k^{n-1}} 2^{2n-2}$  в полученном выражении можно пренебречь. Выразим  $\varkappa$  в иной форме:

$$\varkappa = \frac{l_B}{l} \left( \frac{4}{k} \right)^{n-1}. \quad (18)$$

При достаточно большом отношении  $\kappa = \frac{B_{1m}}{B_0}$  величина  $\varkappa = \frac{l_B}{l} \left( \frac{4}{k} \right)^{n-1}$  становится исчезающе малой по сравнению с величиной выражения  $\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right]^2$ . Например, при  $n=7$  и  $\kappa=4$  вносимая погрешность составляет примерно 1%.

Выражение (18) справедливо при  $S_B = S_A = S_C$ . Если принять  $S_B = 2 S_A = 2 S_C$ , то

$$\varkappa = \frac{l_B}{l} \cdot \frac{1}{k^{n-1}}$$

и вносимая погрешность существенно меньше (в  $4^{n-1}$  раза). Введем обозначение:

$$\varphi(n) = \frac{\sqrt{2} n \sqrt{\sum_{j=0}^{j=\frac{n-3}{2}} (C_{n-1}^j)^2}}{\left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right]^2}.$$

Тогда окончательно получаем выражение для действующего значения вторичного тока:

$$I_2 = I_0 \frac{\omega_0}{\omega_2} \varphi(n). \quad (19)$$

Полученное выражение позволяет делать выводы, аналогичные полученным в (Л. 5) для обычной конструкции измерителя, а именно:

Для измерителя с Ш-образным магнитопроводом при достаточно большом отношении  $\kappa = \frac{B_{1m}}{B_0}$ .

1) действующее значение тока  $I_2$  прямо пропорционально величине измеряемого тока  $I_0$ ;

2) коэффициент отношения токов  $T = \frac{I_0}{I_2}$  зависит только от

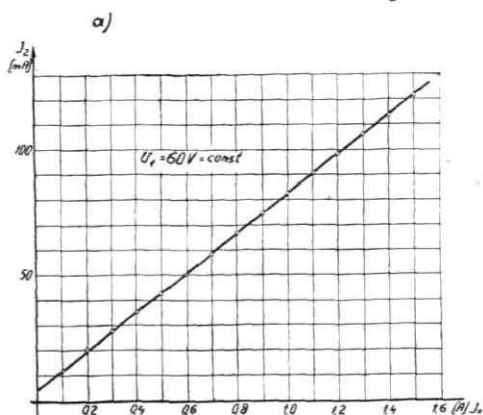


Рис. 5. Зависимость вторичного тока от измеряемого постоянного тока: а) при основной схеме измерителя, б) при схеме измерителя по рис. 4-г.

соотношения числа витков подмагничивающей и вторичной обмоток  $\frac{\omega_0}{\omega_2}$  и формы кривой намагничивания и не зависит ни от напряжения, ни от частоты вспомогательного источника питания. Экспериментально это подтверждается только в некоторых пределах колебаний амплитуды вспомогательного напряжения, соответствующих сильному насыщению магнитной системы (рис. 8).

На рис. 5 показана зависимость  $I_2(I_0)$ , которая снята при монотонном увеличении измеряемого тока. Как видно, пропорциональная связь (19)

$$I_2 = I_0 \frac{\omega_0}{\omega_2} \varphi(n)$$



экспериментально подтверждается почти идеально, если отвлечься от влияния частных циклов перемагничивания. Такой результат получен в условиях, когда кривая  $H = AB_n$  значительно отличается от реальной кривой намагничивания, особенно в областях малых  $H$ . Это обстоятельство наталкивает на мысль проверить, не сохраняется ли пропорциональность между  $I_2$  и  $I_0$  при других формах кривой намагничивания. Оказывается, что это действительно так.

Условие  $k \gg 1$  в (Л. 2), а также в предшествующих выкладках настоящей работы нашло свое выражение в том, что учитывался только  $k$  в наибольшей степени при разложении бинома Ньютона  $B^n = (\pm B_0 + B_{1m} \cos \omega t)^n$  в ряд.

Подобные соображения о порядке малости некоторых величин применимы и для более общего случая. На рис. 6 показано общеизвестное построение кривой вторичного тока по заданным значениям индукции в режиме короткого замыкания удвоителя частоты. Задается кривая намагничивания произвольного вида  $F(B)$ . В таком случае имеем:

$$H_C l = F(B_C) = F(B_{1m} \cos \omega_1 t + B_0) = F(B + B_0);$$

$$H_A l = F(B_A) = F(B_{1m} \cos \omega_1 t - B_0) = F(B - B_0).$$

Здесь через  $B$  обозначено мгновенное значение переменной составляющей индукции в стержнях А и С. Разлагая полученные выражения в ряд Тэйлора, получаем:

$$H_C l = F(B) + \frac{B_0}{1!} \frac{dF}{dB} + \frac{B_0^2}{2!} \frac{d^2 F}{dB^2} + \frac{B_0^3}{3!} \frac{d^3 F}{dB^3} + \dots \quad (20)$$

$$H_A l = F(B) - \frac{B_0}{1!} \frac{dF}{dB} + \frac{B_0^2}{2!} \frac{d^2 F}{dB^2} - \frac{B_0^3}{3!} \frac{d^3 F}{dB^3} + \dots \quad (21)$$

Из рассмотрения схемы рис. 3 с учетом симметрии  $i_A w_A = i_C w_C$  следует, что мгновенное значение магнитного напряжения между точками К и Л равно:

$$U_m = \frac{1}{2} (H_C l - H_A l)$$

или после подстановки соответствующих разложений (20) и (21):

$$U_m = B_0 \frac{dF}{dB} + \frac{B_0^3}{3!} \frac{d^3 F}{dB^3} + \frac{B_0^5}{5!} \frac{d^5 F}{dB^5} + \dots \quad (22)$$

В разложении (22) можно учитывать только первое слагаемое при выполнении следующих условий: 1)  $B_0$  достаточно мало; 2) все нечетные производные функции  $F(B)$  ограничены определенным пределом.

При сделанном допущении формула (22) существенно упрощается:

$$U_m(t) = B_0 \frac{dF}{dB}. \quad (23)$$

Это соответствует спрямлению кривой намагничивания в окрестности точки  $M'$  (рис. 6): вместо участка кривой  $A'C'$  пользуемся отрезком  $A''C''$ .

Следовательно, при сделанных допущениях о малости  $B_0$  и о гладкости кривой намагничивания каждое из мгновенных

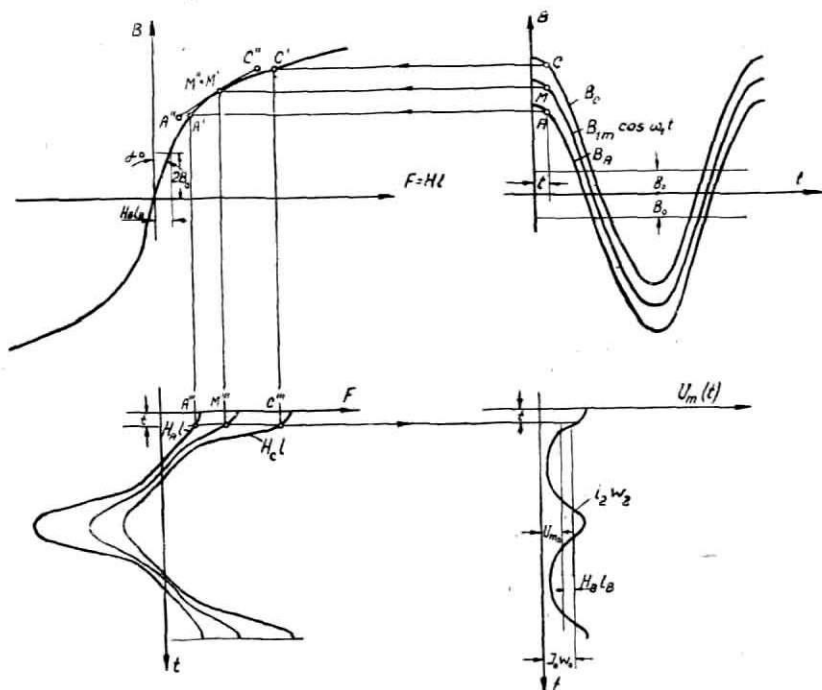


Рис. 6. Построение кривой вторичного тока.

значений  $U_m(t)$  пропорционально  $B_0$ . Очевидно, пропорциональными  $B_0$  будут также: постоянная составляющая  $U_{m0} = I_0 \omega_0 - H_B l_B$ , переменная составляющая  $i_2 \omega_2$  и действующее значение переменной составляющей  $I_2 \omega_2$ .

Итак, можно записать:

$$I_0 \omega_0 - H_{B0} l_B = c_1 B_0; \quad (24)$$

$$I_2 \omega_2 = c_2 B_0; \quad (25)$$

где  $c_1, c_2$  — коэффициенты пропорциональности.

Если принять кривую намагничивания прямолинейной с наклоном  $\alpha_0$  (рис. 6) в начальном участке, соответствующем индукции  $2B_0$ , то, учитывая (8), получим:

$$H_{B_0} l_B = B_B \operatorname{tg} \alpha_0 = 2B_0 \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Подставив полученное значение  $H_{B_0} l_B$  в формулу (24) и решив систему уравнений, (24), (25), получаем:

$$I_2 = \frac{w_0}{w_2} \frac{c_2}{c_1 + 2 \operatorname{tg} \alpha_0} I_0.$$

Введем обозначение

$$\frac{c_2}{c_1 + 2 \operatorname{tg} \alpha_0} = c_3. \quad (26)$$

Тогда зависимость между постоянным и вторичным токами окончательно выражается следующей формулой:

$$I_2 = \frac{w_0}{w_2} c_3 I_0. \quad (27)$$

Здесь  $c_3$  — постоянная, зависящая от формы кривой намагничивания и амплитуды вспомогательного напряжения.

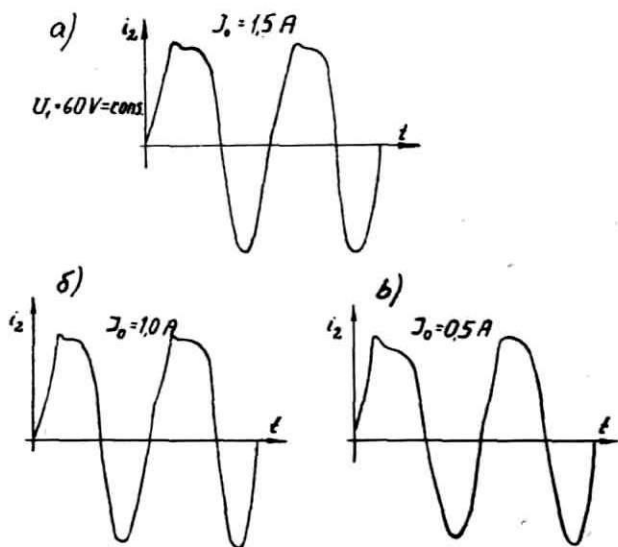


Рис. 7. Кривые вторичного тока при различных измеряемых токах (усиления различны).

Следовательно, действующее значение вторичного тока измерителя  $I_2$  пропорционально измеряемому постоянному току  $I_0$  при любой форме кривой намагничивания материала сердечников, не ограниченной определенным видом уравнения аппроксимации, если выполнены следующие условия:

- 1) постоянная составляющая индукции  $B_0$  достаточно мала;
- 2) все нечетные производные функции аппроксимации ограничены определенным пределом;
- 3) кривая намагничивания прямолинейна в начальном участке, соответствующем индукции от 0 до  $2B_0$ .

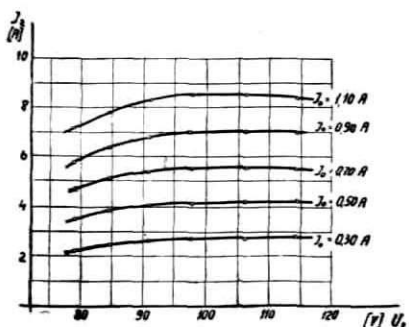


Рис. 8. Зависимость вторичного тока  $I_2$  от колебаний вспомогательного напряжения  $U_1$ .

Форма кривой  $i_2(t)$  при сделанных допущениях практически не зависит от величины  $B_0$ , а зависит только от формы кривой намагничивания и амплитуды вспомогательного напряжения. Сказанное хорошо согласуется с опытом. Так на рис. 7 сопоставлены три осциллограммы вторичного тока  $i_2$ , полученные при трех различных величинах постоянного тока. Усиление осциллограмм подобрано таким образом, чтобы амплитуды кривых были примерно одинаковыми и искажения формы проявлялись наиболее отчетливо.

Настоящие выводы в одинаковой мере распространяются как на измеритель с Ш-образным магнитопроводом, так и на общую конструкцию удвоителя частоты. В последнем случае формулы (24) и (26) упрощаются, т. к. отсутствует участок магнитной цепи, соответствующий стержню В.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Л. А. Бессонов, Электрические цепи со сталью, ГЭИ. 1948.
2. К. т. н. И. А. Зайцев и инж. А. В. Каляев, Измерительный трансформатор постоянного тока, «Электричество», № 2, 1954.
3. Ю. Г. Толстов, Измерительные трансформаторы постоянного тока, ГЭИ, 1951.
4. И. А. Зайцев, Об измерении постоянных токов с помощью статических устройств с железом, Труды ЛПИ им. М. И. Калинина, № 3, 1950.
5. И. А. Зайцев и А. В. Каляев, Метод измерения постоянного тока при высоком напряжении, Труды ЛПИ им. М. И. Калинина, № 3, 1953.
6. С. И. Новоселов, Специальный курс тригонометрии, «Советская Наука». 1953.

Н. А. БРАЗМА, доцент, канд. физико-матем. наук

## О ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В работе сравниваются некоторые известные методы исследования переходных процессов на примере простейшей электрической цепи. Здесь имеются в виду обычное преобразование Фурье, преобразование Лапласа и преобразование Фурье так называемых обобщенных функций. Для устранения недостатков существующих методов предлагается применение последнего из указанных методов в теории электрических цепей.

Исходные положения по теории обобщенных функций имеются у С. Л. Соболева [1]. Капитальными трудами по этой теории являются работы Л. Шварца [2] и И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [3] (см. также [4] и [5]).

В данной работе рассмотрен пример электрической цепи, содержащей последовательно включенные положительные сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ . Ток  $i$  в такой цепи удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = v'(t), \quad (1)$$

где  $v(t)$  — приключенная к цепи электродвижущая сила.

### § 1. Применение преобразования Фурье к исследованию переходных процессов в электрических цепях

Будем рассматривать прямое и обратное преобразования Фурье, определенные равенствами (при действительном  $\omega$ ).

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \hat{\varphi}(\overline{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \varphi(t) dt, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \tilde{\varphi}(\omega) d\omega \quad (2)$$

и существующие при известных условиях, накладываемых на функцию  $\varphi(t)$ . Функцию  $\tilde{\varphi}(\omega)$  будем называть изображением по

Фурье функции  $\varphi(t)$ . она имеет смысл комплексного частотного спектра процесса, выражаемого функцией  $\varphi(t)$ .

Известны следующие равенства:

$$\frac{\widetilde{d\varphi}}{dt} = j\omega\widetilde{\varphi(t)}, \quad \frac{\widetilde{d^2\varphi}}{dt^2} = (j\omega)^2\widetilde{\varphi(t)}, \quad (3)$$

справедливые при некоторых условиях, например, в предположении существования левых частей этих равенств.

Применим преобразование Фурье к уравнению (1) в предположении существования изображений по Фурье  $\widetilde{v}(\omega)$  и  $\widetilde{i}(\omega)$  данной функции  $v(t)$  соответственно искомой функции  $i(t)$  и соответствующих их производных:

$$\left[ (j\omega)^2L + j\omega R + \frac{1}{C} \right] \widetilde{i}(\omega) = j\omega\widetilde{v}(\omega),$$

откуда следует

$$\widetilde{i}(\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega)^2L + j\omega R + \frac{1}{C}} \widetilde{v}(\omega) = \frac{1}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}} \widetilde{v}(\omega). \quad (4)$$

Здесь выражение  $Z(j\omega) = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}$  называется комплексным сопротивлением рассматриваемой цепи. Уравнение (4) выражает закон Ома для изображений по Фурье функций  $i(t)$  и  $v(t)$ .

**Пример.** Пусть будет  $v(t) = \delta(t)$ , где  $\delta(t)$  — известная импульсная функция, формально определенная равенствами:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t=0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

и обладающая основным свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0).$$

Из этого свойства следует изображение по Фурье  $\delta$ -функции:  $\widetilde{\delta(t)} = 1$ . Отсюда получаем  $\widetilde{v(t)} = \widetilde{\delta(t)} = 1$  и

$$\widetilde{i} = \frac{j\omega}{(j\omega)^2L + j\omega R + \frac{1}{C}} = \frac{1}{L(z_1 - z_2)} \left[ \frac{z_1}{j\omega - z_1} - \frac{z_2}{j\omega - z_2} \right],$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — корни уравнения  $Lz^2 + Rz + 1/C = 0$ . Ввиду положительности коэффициентов, корни этого уравнения имеют отрицательную действительную часть, и поэтому имеем

$$\frac{1}{j\omega - z_1} = \overline{e^{z_1 t} 1(t)}, \quad \frac{1}{j\omega - z_2} = \overline{e^{z_2 t} 1(t)}, \quad (5)$$

где  $1(t)$  — единичная функция, определенная равенствами:  $1(t) = 0$  при  $t \leq 0$  и  $1(t) = 1$  при  $t > 0$ . Таким образом получаем:

$$i(t) = \frac{1}{L(z_1 - z_2)} [z_1 e^{z_1 t} - z_2 e^{z_2 t}] 1(t). \quad (6)$$

**З а к л ю ч е н и е к § 1.** Достоинствами метода преобразования Фурье являются:

Наличие непосредственного физического смысла примененного функционального преобразования — перехода от временных функций к их частотным спектрам и, в связи с этим, основанное на равенстве (4) единство формального аппарата для исследования как установившихся синусоидальных процессов, так и для переходных процессов в электрических цепях. Именно, это равенство одновременно выражает как зависимость между комплексными амплитудами напряжения и тока установившегося синусоидального процесса с частотой  $\omega$  (закон Ома для переменного тока), так и зависимость между комплексными частотными спектрами напряжения и тока как функциями частоты  $\omega$  при переходном процессе.

Недостатками метода являются:

1. Сильные ограничения, накладываемые на рассматриваемые функции для обеспечения сходимости их интегралов Фурье. Даже в случае функции  $v(t) = I(t)$  метод непосредственно не применим ввиду несуществования ее изображения по Фурье  $\overline{v(t)} = \overline{I(t)}$ .

2. Формализм действий над часто применяемой импульсной  $\delta$ -функцией и родственными с нею функциями. Следует, однако, учесть, что с целью устранения этого формализма могут быть привлечены интегралы Стильтьеса [6].

## § 2. Применение преобразования Лапласа к исследованию переходных процессов в электрических цепях

Первый недостаток предыдущего метода устраняется внесением произвольного вспомогательного затухающего экспоненциального множителя под знак интеграла в преобразовании Фурье, вызывающего сходимость интеграла во многих случаях расходимости обычного интеграла Фурье. Такое внесение мно-



жителя реализуется преобразованием Лапласа [7]. Однако недостатком этого внесения множителя является отступление от непосредственного физического смысла функционального преобразования как перехода от временных функций к их частотным спектрам.

Рассмотрим преобразование Лапласа, определенное равенством

$$\tilde{\varphi}(p) \equiv L\{\varphi(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt.$$

Применение этого преобразования к уравнению (1) при условиях  $v(0) = 0$ ,  $i(0) = i'(0) = 0$ , предполагая существование изображений по Лапласу  $\tilde{v}(p)$  и  $\tilde{i}(p)$  функций  $v(t)$ ,  $i(t)$  и соответствующих их производных, приводит к равенству

$$\tilde{i}(p) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}} \tilde{v}(p) = \frac{1}{Lp + R + \frac{1}{Cp}} \tilde{v}(p). \quad (7)$$

Здесь выражение  $Z(p) = Lp + R + 1/Cp$  называют операторным сопротивлением рассматриваемой цепи. Уравнение (7) выражает закон Ома для изображений по Лапласу функций  $i(t)$  и  $v(t)$ , т. е. закон Ома в операторной форме.

**Пример.** Пусть будет  $v(t) = \delta(t)$ . Ввиду известного изображения по Лапласу импульсной  $\delta$ -функции  $L\{\delta(t)\} = 1$  получаем:  $\tilde{v}(p) = 1$ . Следовательно:

$$\tilde{i}(p) = \frac{p}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}},$$

откуда находим обычным путем

$$i(t) = \frac{1}{L(z_1 - z_2)} [z_1 e^{z_1 t} - z_2 e^{z_2 t}] 1(t) \quad (6)$$

при обозначениях § 1.

**Заключение к § 2.** Большим достоинством метода преобразования Лапласа является отказ от сильных ограничений, накладываемых на рассматриваемые функции с целью обеспечения сходимости несобственных интегралов, содержащих эти функции. Однако недостатками метода являются:

1. Отсутствие непосредственного физического смысла примененного функционального преобразования, ввиду произвольного вспомогательного экспоненциального множителя в интегральном преобразовании, что вызывает ослабление единства формального аппарата (в смысле § 1) для исследования уста-

новившихся синусоидальных процессов и переходных процессов. Именно, в равенстве (7), называемом законом Ома в операторной форме, можно придать параметру  $p$  лишь смысл комплексной частоты, произвольная действительная часть которой выражает затухание колебательного процесса.

2. Формализм действий над импульсной  $\delta$ -функцией и родственными с нею функциями, несмотря на возможность привлечения интегралов Стильтьеса с целью устранения этого формализма [6].

### § 3. Предварительные сведения об обобщенных функциях

Настоящий § содержит сводку основных фактов, касающихся обобщенных функций и изложенных подробно в статье И. М. Гельфанда и Г. Е. Шилова [3].

#### 1. Основные функции.

Комплексно-значную функцию  $\varphi(t)$  ( $-\infty < t < \infty$ ) называют основной функцией, если она непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка, причем каждая из этих производных стремится при  $|t| \rightarrow \infty$  к нулю быстрее любой степени  $1/|t|$ . Последнее условие уточним требованием удовлетворения любой основной функцией  $\varphi(t)$  неравенства вида

$$\left| \frac{d^q \varphi(t)}{dt^q} \right| \leq \frac{C_{qr}}{(1+t^2)^r}$$

при любых целых неотрицательных  $q$  и  $r$ .

Пространство, образованное из всех основных функций, будем называть пространством  $S$ . Очевидно, что  $S$  — линейное пространство с умножением на комплексные числа. Сходимость последовательности  $\varphi_n(t) \in S$  ( $n=1, 2, \dots$ ) к нулю определяют условием: Для любой пары целых неотрицательных чисел  $q$  и  $r$  и любого положительного  $\varepsilon$  существует номер  $N$ , начиная с которого (т. е. при  $n \geq N$ ) выполняется неравенство

$$(1+t^2)^r \left| \frac{d^q \varphi_n(t)}{dt^q} \right| \leq \varepsilon.$$

Всякую функцию  $f(t)$ , обладающую тем свойством, что из  $\varphi(t) \in S$  следует  $f(t)\varphi(t) \in S$  и из  $\varphi_n \rightarrow 0$  следует  $f\varphi_n \rightarrow 0$ , называют мультипликатором в пространстве  $S$ . Известно, что в  $S$  мультипликатором служит любая бесконечно дифференцируемая функция  $f(t)$ , которая, так же как и ее производные, возрастает

при  $|t| \rightarrow \infty$  не быстрее некоторой степени  $|t|$ . В частности, мультипликатором является любой многочлен.

Прямое и обратное преобразования Фурье (2) основных функций обладают свойствами (3).

Под  $\widetilde{S}$  будем понимать совокупность всех функций  $\widetilde{\varphi}(\omega)$ , являющихся преобразованиями Фурье функций  $\varphi(t)$  из  $S$ . Оказывается, что  $\widetilde{S}$  совпадает с  $S$ . В частности, из формул (2) следует, что

$$\widetilde{\varphi}(-t) = 2\pi\varphi(t). \quad (8)$$

## 2. Обобщенные функции.

Пусть имеется функционал  $T$ , сопоставляющий каждой функции  $\varphi \in S$  соответствующее комплексное число  $(T, \varphi)$ , причём выполняются следующие условия:

- 1)  $(T, \varphi_1 + \varphi_2) = (T, \varphi_1) + (T, \varphi_2)$  для любых  $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ ;
- 2)  $(T, \alpha\varphi) = \alpha(T, \varphi)$  для любого комплексного  $\alpha$ ;
- 3) если  $\varphi_n \rightarrow 0$ , то  $(T, \varphi_n) \rightarrow 0$ .

Любой такой функционал  $T$  называют обобщенной функцией. Число  $(T, \varphi)$  является результатом применения обобщенной функции  $T$  к функции  $\varphi \in S$ .

В частности, обычная функция  $f(t)$  определяет при помощи равенства

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\varphi(t)} dt \quad *) \quad (9)$$

функционал — обобщенную функцию  $f$ , если этот интеграл сходится для всех  $\varphi \in S$  и, кроме того, удовлетворяет условию 3) (\*\*). Такой функционал называется функционалом типа функции.

Некоторым достаточным условием того, что функция  $f(t)$  определяет функционал  $f$  типа функции, является удовлетворение неравенства

$$|f(t)| \leq C(1+t^2)^m \quad (10)$$

при некотором  $m \geq 0$ . Такой функционал называют г л а в н ы м. Главный функционал  $f$  типа функции отождествляют с самой функцией  $f(t)$ .

\*)  $\overline{f(t)}$  означает комплексно-сопряженную к  $f(t)$  функцию.

\*\*) Удовлетворение условиям 1) и 2) здесь очевидно.

Примером функционала, не принадлежащего к рассмотренному типу, является « $\delta$  функция»  $\delta(t-a)$ . Функционал  $\delta(t-a)$ , примененный к функции  $\varphi(t)$ , по определению дает число  $\varphi(a)$ :

$$(\delta(t-a), \varphi(t)) = \varphi(a). \quad (11)$$

Совокупность всех обобщенных функций, действующих в пространстве  $S$ , обозначают через  $T(S)$ .

### 3. Действия с обобщенными функциями.

Правила действий с обобщенными функциями определяют так, чтобы для главных функционалов типа функции эти правила были согласованы с таковыми для обычных функций.

Пусть будет  $T \in T(S)$  и  $\varphi(t) \in S$ .

Тогда, если  $f(t)$  — мультипликатор в пространстве  $S$ , то обобщенную функцию  $fT$  определяют формулой

$$(fT, \varphi) = (T, \bar{f}\varphi). \quad (12)$$

Производную по  $t$  от обобщенной функции  $T$  определяют равенством

$$\left(\frac{dT}{dt}, \varphi\right) = -\left(T, \frac{d\varphi}{dt}\right). \quad (13)$$

Отсюда следует, что каждая обобщенная функция имеет производную любого порядка.

Преобразование Фурье  $\tilde{T}$  обобщенной функции  $T$  определяем равенством

$$(\tilde{T}, \tilde{\varphi}(\omega)) = 2\pi(T, \varphi(t)), \quad (14)$$

что формально получается из соотношения

$$\begin{aligned} (\tilde{f}, \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\varphi(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \bar{f}(t) dt \right\} \varphi(\omega) d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \varphi(\omega) d\omega \right\} \bar{f}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(-t) \bar{f}(t) dt = (f, \tilde{\varphi}(-t)), \end{aligned}$$

справедливого для любых функций  $f$  и  $\varphi \in S$ , если заменить в этом соотношении  $f$  на  $T$ ,  $\varphi$  на  $\tilde{\varphi}$ ,  $\tilde{\varphi}$  на  $\tilde{\varphi}$  и, следовательно,  $\tilde{\varphi}(-t)$  на  $\tilde{\varphi}(-t) = 2\pi\varphi(t)$ .

В частности, преобразование Фурье « $\delta$ -функции» получается такое:

$$\widetilde{\delta}(t) \equiv \widetilde{\delta}(\omega) = 1. \quad (15)$$

Это следует из формул (14), (11) и (2):

$$\begin{aligned} (\widetilde{\delta}(\omega), \widetilde{\varphi}(\omega)) &= 2\pi(\delta(t), \varphi(t)) = 2\pi\varphi(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \widetilde{\varphi}(\omega) d\omega = (1, \widetilde{\varphi}(\omega)). \end{aligned}$$

#### § 4. Применение преобразования Фурье обобщенных функций к исследованию переходных процессов в электрических цепях

1. Дифференциальное уравнение (1) заменим некоторым уравнением для обобщенных функций, которое формально получим следующим путем.

В предположении, что  $i$ ,  $\frac{di}{dt}$ ,  $\frac{d^2i}{dt^2}$ ,  $v(t)$  и  $v'(t)$  удовлетворяют неравенствам вида (10), умножим уравнение (1) на  $\varphi(t) \in \mathcal{S}$  и проинтегрируем по  $t$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . Таким образом получаем уравнение в функционалах типа функции

$$L\left(\frac{d^2i}{dt^2}, \varphi(t)\right) + R\left(\frac{di}{dt}, \varphi(t)\right) + \frac{1}{C}(i, \varphi(t)) = (v'(t), \varphi(t)),$$

которое ввиду свойств (13), 1) и 2) переходит в такое:

$$(i, L\varphi''(t) - R\varphi'(t) + \frac{1}{C}\varphi(t)) = -(v, \varphi'(t)). \quad (16)$$

Уравнение (16) при любой  $\varphi(t) \in \mathcal{S}$  и любой обобщенной функции  $v$  будем называть обобщенным уравнением электрической цепи, а любую обобщенную функцию  $i$ , удовлетворяющую уравнению (16), — решением этого уравнения.

2. Предполагая существование решения уравнения (16), будем искать его, пользуясь преобразованием Фурье обобщенных функций.

Согласно формулам (14) и (3) получаем:

$$\begin{aligned} 2\pi(i, \varphi(t)) &= (\widetilde{i}, \widetilde{\varphi}(\omega)), \\ 2\pi(i, \varphi'(t)) &= \left(\widetilde{i}, \frac{d\widetilde{\varphi}}{dt}\right) = (\widetilde{i}, j\omega\widetilde{\varphi}(\omega)), \\ 2\pi(i, \varphi''(t)) &= \left(\widetilde{i}, \frac{d^2\widetilde{\varphi}}{dt^2}\right) = (\widetilde{i}, (j\omega)^2\widetilde{\varphi}(\omega)), \\ 2\pi(v, \varphi'(t)) &= \left(\widetilde{v}, \frac{d\widetilde{\varphi}}{dt}\right) = (\widetilde{v}, j\omega\widetilde{\varphi}(\omega)). \end{aligned}$$

Итак, ввиду свойств 1) и 2) уравнение (16) переходит в такое:

$$\left(\tilde{i}, \left[ (j\omega)^2 L - j\omega R + \frac{1}{C} \right] \tilde{\varphi}(\omega)\right) = - \left(\tilde{v}, j\omega \tilde{\varphi}(\omega)\right). \quad (17)$$

Далее учтем, что функции  $P(\omega) = (j\omega)^2 L - j\omega R + 1/C$ ,  $1/P(\omega)$  и  $j\omega/P(\omega)$  являются мультипликаторами в пространстве  $S$ . Для функции  $P(\omega)$  это утверждение очевидно, а для  $1/P(\omega)$  и  $j\omega/P(\omega)$  это получается после разложения функций на простейшие дроби вида

$$\frac{A}{j\omega + z_1} + \frac{B}{j\omega + z_2},$$

где  $z_1$  и  $z_2$  пояснены в § 1.

Таким образом функция

$$\tilde{\varphi}^*(\omega) = P(\omega) \tilde{\varphi}(\omega) \equiv \left[ (j\omega)^2 L - j\omega R + \frac{1}{C} \right] \tilde{\varphi}(\omega)$$

тоже  $\in S$ , причем в качестве  $\tilde{\varphi}^*(\omega)$  может быть любая функция  $\in S$ , так как  $1/P(\omega)$  является мультипликатором в  $S$ .

Преобразуем правую часть уравнения (17), пользуясь свойством (12):

$$\begin{aligned} - \left(\tilde{v}, j\omega \tilde{\varphi}(\omega)\right) &= - \left(\tilde{v}, \frac{1}{j\omega L - R + \frac{1}{j\omega C}} \tilde{\varphi}^*(\omega)\right) = \\ &= \left(\frac{\tilde{v}}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}}, \tilde{\varphi}^*(\omega)\right), \end{aligned}$$

после чего уравнение (17) переписывается так:

$$\left(\tilde{i}, \tilde{\varphi}^*(\omega)\right) = \left(\frac{\tilde{v}}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}}, \tilde{\varphi}^*(\omega)\right).$$

Наконец, учитывая, что  $\tilde{\varphi}^*(\omega)$  может быть любой функцией  $\in S$ , отбрасываем \* и получаем:

$$\left(\tilde{i}, \tilde{\varphi}(\omega)\right) = \left(\frac{\tilde{v}}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}}, \tilde{\varphi}(\omega)\right) \quad (18)$$

Уравнение (18) эквивалентно с (17). Это уравнение (18) является аналогом для обобщенных функций уравнения (4), и оно выражает закон Ома для изображений по Фурье обобщенных функций  $i$  и  $v$ .

Пример. Пусть будет  $v = \delta(t)$ . Ввиду (15) получаем  $\tilde{v} = 1$ , и уравнение (18) переходит в такое:

$$(\tilde{i}, \tilde{\varphi}(\omega)) = \left( \frac{1}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}}, \tilde{\varphi}(\omega) \right). \quad (19)$$

Далее, после разложения дроби в правой части уравнения (19) на простейшие дроби, имеем

$$(\tilde{i}, \tilde{\varphi}(\omega)) = \left( \frac{1}{L(z_1 - z_2)} \left[ \frac{z_1}{j\omega - z_1} - \frac{z_2}{j\omega - z_2} \right], \tilde{\varphi}(\omega) \right).$$

Отсюда, учитывая (5) и пользуясь свойством (14), получаем

$$(i, \varphi(t)) = \left( \frac{1}{L(z_1 - z_2)} \left[ z_1 e^{z_1 t} - z_2 e^{z_2 t} \right] 1(t), \varphi(t) \right). \quad (20)$$

Очевидно, что уравнение (20) удовлетворяется обычной функцией

$$i(t) = \frac{1}{L(z_1 - z_2)} \left[ z_1 e^{z_1 t} - z_2 e^{z_2 t} \right] 1(t), \quad (6)$$

причем функционалы в уравнении (20) переходят в функционалы типа функции. Ввиду обратимости выполненных в § 4 действий функция (6) удовлетворяет и обобщенному уравнению электрической цепи (16) при  $v = \delta(t)$ .

**З а к л ю ч е н и е к § 4.** При применении преобразования Фурье обобщенных функций сохраняются достоинства метода обычного преобразования Фурье, если рассматривать переход от уравнения (16) к уравнению (18) как переход от временных обобщенных функций к их частотным спектрам переходного процесса и если, кроме того, рассматривать уравнение (18) также как зависимость между комплексными амплитудами напряжения и тока установившегося синусоидального процесса с частотой  $\omega$ . Т. е. сохраняются физический смысл примененного метода и, в некотором смысле, и единство формального аппарата для исследования установившихся синусоидальных процессов и переходных процессов.

В то же время отпадают недостатки 1 и 2 метода обычного преобразования Фурье. Именно, отпадают ограничения, накладываемые на рассматриваемые функции для обеспечения сходимости их интегралов Фурье, а формальные действия над  $\delta$ -функцией заменяются обоснованными действиями над обобщенными функциями.

Таким образом, метод преобразования Фурье обобщенных функций объединяет в себе достоинства как обычного преобразования Фурье, так и преобразования Лапласа.

Приведенные рассуждения опираются на пример простейшей электрической цепи. Полная оценка достоинств и недостатков рассмотренных методов может стать возможной лишь после детальной разработки формального аппарата обобщенных функций в применении его к исследованию различных конкретных задач электрических цепей.

Уточнения требует также вопрос единственности решения таких задач.

Автор полагает, что ввиду преимуществ метода преобразования Фурье обобщенных функций, в будущем может оказаться целесообразным применение этого метода в теории электрических цепей вместо преобразования Лапласа, а также и вместо обычного преобразования Фурье.

Август 1956 года.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. С. Л. Соболев, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy. Матем. сб., т. 1 (43), 1936.
2. L. Schwartz, Théorie des distributions, I et II, Paris, 1950—51.
3. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилор, Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. Успехи матем. наук, т. VIII, № 6 (58), 1953, стр. 3—54.
4. И. Гальперин, Введение в теорию обобщенных функций. Изд. иностр. лит., Москва, 1954, добавление редактора перевода, стр. 56—60.
5. Г. Е. Шилор, Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Успехи матем. наук, т. X, № 4 (66), 1955, стр. 89—100.
6. Б. Вандер Поль и Х. Бреммер, Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. Изд. иностр. лит., Москва, 1952, стр. 75—109.
7. М. Ф. Гарднер и Дж. Л. Бэрнс, Переходные процессы в линейных системах с сосредоточенными постоянными. Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1949, стр. 128—129.

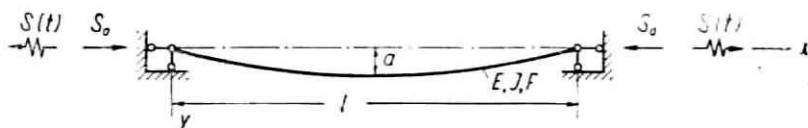


И. К. МЕЛДЕР, кандидат техн. наук

## СВОБОДНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЫПУЧИВШЕГОСЯ СТЕРЖНЯ

### § 1. Постановка задачи

В статье рассматриваются свободные поперечные колебания стержня, схематически изображенного на фиг. 1.



Фиг. 1.

Начальное отклонение стержня от прямолинейного состояния вызвано постоянной осевой силой  $S_0$ , превосходящей эйлерову. Во время колебаний на постоянную осевую силу налагается переменная осевая сила реактивного характера  $S(t)$ . Эта сила возникает из-за устройства опор, предотвращающих осевые смещения концов стержня.

Рассматриваемая задача имеет актуальный характер при уточненном исследовании устойчивости стержней, учитывающем динамику загрузки и его поведение после потери устойчивости (1).

Случай когда  $S_0 < P_{\epsilon}$  ( $P_{\epsilon}$  — эйлерова сила) рассматривался Бугриным (2) и автором (3); для полноты и удобства анализа ниже даны краткие результаты этих работ. Для выпучившегося стержня приводится точное решение в простейшем случае, когда форма колебаний имеет характер полуволны синусоиды. Материал стержня предполагается идеально упругим, амплитуды колебаний — малыми, но конечными.

## § 2. Дифференциальное уравнение задачи.

Дифференциальное уравнение задачи записывается так:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - [S_0 + S(t)] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Здесь:

- $EJ$  — жесткость стержня при изгибе,  
 $S_0$  и  $S(t)$  — постоянная и переменная осевые силы,  
 $m$  — погонная масса стержня,  
 $\frac{\partial y}{\partial x}$  и  $\frac{\partial y}{\partial t}$  — частные производные от прогибов по абсциссе и времени.

В случае опор, не имеющих смещений в направлении оси стержня, сила  $S(t)$  имеет выражение:

$$S(t) = \frac{EF}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx,$$

поэтому окончательный вид дифференциального уравнения будет:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left[ S_0 + \frac{EF}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

## § 3. Решение дифференциального уравнения и анализ полученных результатов в случае $S_0 < P_s$ .

При рассмотрении колебаний основного тона частное решение дифференциального уравнения задачи ищем в форме:

$$y(x, t) = a \sin \frac{\pi x}{l} H(t),$$

где:

- $a$  — амплитуда колебаний, отсчитываемая от прямолинейного положения равновесия,  
 $H(t)$  — безразмерная функция времени.

Подстановка  $y(x, t)$  в уравнение колебаний приводит к разделению переменных и для  $H$  получается уравнение:

$$m\dot{H} + \alpha^2 H^3 + \delta H = 0. \quad (1)$$

где:

$$\alpha^2 = a^2 \frac{\pi^4 EF}{4l^2}, \quad \delta = \frac{\pi^2}{l^2} (P_s + S_0).$$

Используя начальные условия:  $t=0$ ;  $H=1$ ;  $\dot{H}=0$  получим решение уравнения (1):

$$t = \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{m}{EJ}} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta + 1}} F(\varphi, k);$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a}{2r} && \text{— относительная амплитуда,} \\ \eta &= \frac{S_0}{P_0} && \text{— отношение постоянной осевой силы к эйлеровой,} \\ r &= \sqrt{\frac{J}{F}} && \text{— радиус инерции стержня,} \\ F(\varphi, k) &= \int_{\varphi}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} && \text{— эллиптический интеграл первого рода,} \\ k^2 &= \frac{\xi^2}{2(\xi^2 + \eta + 1)} && \text{— квадрат модуля эллиптического интеграла.} \end{aligned}$$

Переменная  $H$  связана с  $\varphi$  соотношением

$$H = \cos \varphi$$

Приняв верхний предел интегрирования  $H=1$  и учетверив результат, найдем период колебаний и частоту  $p$ .

$$p = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \frac{\pi}{2K(k)} \sqrt{\xi^2 + \eta + 1}.$$

Здесь  $K(k)$  полный эллиптический интеграл первого рода, зависящий от модуля  $k$ .

Формуле частоты для удобства анализа придадим следующий вид:

$$p = p_0 \chi, \quad (2)$$

где:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} && \text{— частота поперечных колебаний обычного стержня,} \\ \chi &= \frac{\pi}{2K(k)} \sqrt{\xi^2 + \eta + 1} && \text{— поправка, учитывающая начальное нагружение стержня и особенности устройства опор.} \end{aligned}$$

Уравнение движения стержня будет:

$$y(\chi, t) = a \sin \frac{\pi \chi}{l} \operatorname{cn} \left[ \frac{2p}{\pi} K(k)t \right].$$

Движение, описываемое этой формулой, весьма близко к гармоническому.

Анализ формулы частоты приводит к выводу о существовании двух нулевых значений частоты. Эти нулевые значения

образуются когда  $\xi^2 + \eta + 1 = 0$  или когда  $K(\kappa) = \infty$ , ( $\kappa = 1$ ). Учитывая, что  $\xi^2$  является существенно положительной величиной, можем заключить, что первое условие соблюдается при отрицательном значении параметра  $\eta$  (т. е. при сжимающей силе  $S_0$ ). К тому же выводу приходим, записав второе условие в развернутой форме:

$$\xi^2 + 2(\eta + 1) = 0.$$

Можно показать, что первое из условий характеризует статическое равновесие выпучившегося стержня. В частности это условие может быть использовано для получения стрелки прогиба выпучившегося стержня:

$$a_{cm} = 2r \sqrt{\frac{S_0}{P_s} - 1}.$$

Этот же результат был получен при рассмотрении равновесия стержня на основании энергетических соображений.

Используя второе условие получим амплитуду, соответствующую пулевой частоте:

$$a_0 = 2r \sqrt{2} \sqrt{\frac{S_0}{P_s} - 1}.$$

Отметим, что и во втором случае сила  $S_0$  имеет отрицательное значение, причем  $S_0 \geq P_s$ . Если амплитуда колебаний

$a > \sqrt{2} a_{cm}$  параметр  $\xi > \frac{\sqrt{2} a_{cm}}{2r}$  и, как легко убедиться, переписав выражение для модуля  $k$  в развернутом виде

$$k^2 = \frac{1}{2(1 - \frac{\eta - 1}{\xi^2})},$$

$\kappa$  становится меньше единицы и  $K(\kappa)$  приобретает конечное значение. Если  $a$  заключено в пределы

$$a_{cm} \leq a \leq \sqrt{2} a_{cm} \quad (a)$$

модуль  $\kappa$  становится больше единицы и как формула частоты так и приведенное решение дифференциального уравнения (1) не имеет смысла. Условие (a) можно записать также через коэффициенты  $\alpha^2$  и  $\delta$  следующим образом:

$$\alpha^2/2 \leq |\delta| \leq \alpha^2$$

При этом надо учитывать, что коэффициент  $\delta$  отрицателен. Колебания при этих условиях, как это будет показано в даль-

нейшем, происходят около криволинейной формы равновесия; амплитуды колебаний не превосходят  $(\sqrt{2}-1)a_{\text{см}}$ . Эти колебания обладают рядом характерных и резко выраженных особенностей.

#### § 4. Решение дифференциального уравнения в случае $S_0 < P_3$ .

Учтя знак коэффициента  $\delta$ , заменим уравнение (1) на уравнение:

$$m\dot{H} + \alpha^2 H^3 - \delta H = 0, \quad (\delta = \frac{\pi^2}{l^2}(S_0 - P_3)).$$

После первого интегрирования найдем:

$$t = \sqrt{m} \int_1^H \frac{-dH}{\sqrt{\delta(H^2 - 1) + \frac{\alpha^2}{2}(1 - H^4)}}.$$

Чтобы избежать мнимых величин преобразуем подкоренное выражение под знаком интеграла так:

$$t = \sqrt{m} \int_1^H \frac{-dH}{\sqrt{\delta - \frac{\alpha^2}{2} \sqrt{(1 - H^2) \left( \frac{\alpha^2}{2\delta - \alpha^2} H^2 - 1 \right)}}}.$$

Так как  $\frac{\alpha^2}{2\delta - \alpha^2} > 1$  применяем подстановку:

$$H = z \sqrt{\frac{2\delta - \alpha^2}{\alpha^2}}$$

после чего получим:

$$t = \frac{\sqrt{2m}}{\alpha} \int_z^{\sqrt{\frac{1}{c^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - 1)(1 - c^2 z^2)}}$$

где:

$$c^2 = \frac{2\delta - \alpha^2}{\alpha^2}.$$

Применив вторично подстановку

$$z^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{1 - c^2}{c^2} \sin^2 \varphi.$$

приводим эллиптический интеграл к нормальной форме Лежандра и получим:

$$t = \frac{\sqrt{2m}}{\alpha} F(\varphi, k_1),$$

где:

$$k_1 = 2 \frac{\alpha^2 - \delta}{\alpha^2}.$$

Обращением эллиптического интеграла в данном случае является функция  $dn$ , имеющая период  $2K(k_1)$ , поэтому период  $T_1$  будет:

$$T_1 = \frac{2\sqrt{2m}}{\alpha} K(k_1).$$

В соответствии с этим результатом частота колебаний:

$$p_1 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2m} K(k_1)},$$

где  $k_1$  определяется из зависимости:

$$k_1^2 = \frac{2[\xi^2 + 1 + \eta]}{\xi^2}.$$

Подставив в формулу частоты значение коэффициента  $\alpha$  найдем:

$$p_1 = \xi \frac{\pi^3}{\sqrt{2} l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \frac{1}{K(k_1)}.$$

Частота  $p_1$  не зависит от момента инерции стержня, характеризующего изгибную жесткость. (В этом можно убедиться подстановкой  $\xi = \frac{a}{2r}$ ). Это, очевидно, соответствует известному явлению отсутствия изгибной жесткости у стержня, нагруженного эйлеровой силой.

Вводя частоту поперечных колебаний  $p_0$  обычного стержня, придаем формуле частоты для удобства анализа следующий вид:

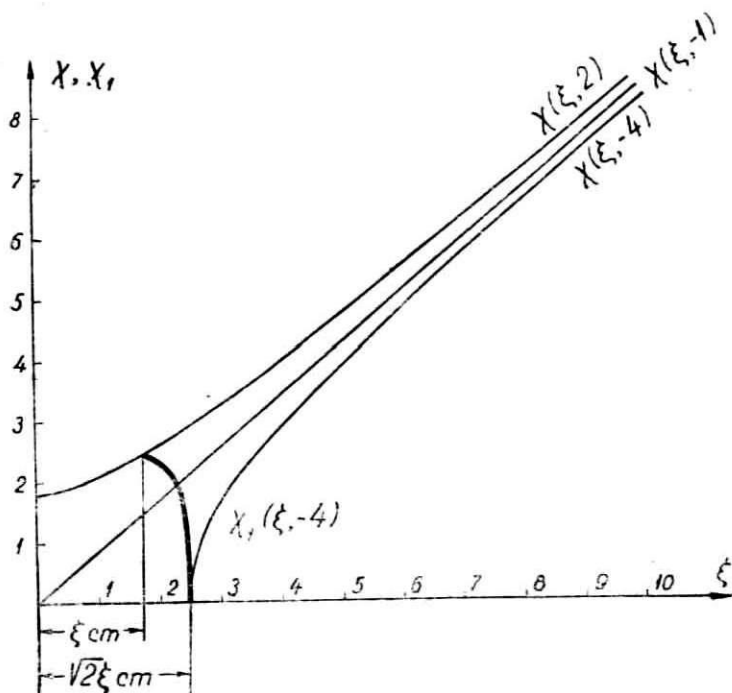
$$p_1 = p_0 \chi_1,$$

$$\xi \text{ где: } \chi_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2} K(k_1)}.$$

Графики поправок  $\chi$  и  $\chi_1$  в зависимости от относительной амплитуды  $\xi$  даны на фиг. 2.

Приведенный график показывает, что частота колебаний выпучившегося стержня *резко падает с увеличением относи-*

тельной амплитуды и принимает пулевое значение при  $\xi = \sqrt{2}\xi_{cm}$ . Значение амплитуды, определенное этим соотношением является критическим, так как при  $\xi > \sqrt{2}\xi_{cm}$  происходит скачкообразное нарушение колебательного движения, сопровождающееся перескоком через прямолинейное положение равновесия; при этом форма колебаний становится симметричной относительно оси прямого стержня. При дальнейшем росте относи-



Фиг. 2.

тельной амплитуды частота растет, при этом для ее вычисления снова становится применима формула (2). Применимость этой формулы для значений  $\xi > \sqrt{2}\xi_{cm}$  становится ясна, так как условие  $\alpha^2/2 \leq |\delta| \leq \alpha^2$  заменяется на  $|\delta| > \alpha^2$ ; при этом решение уравнения (1) сохраняется.

Анализируя далее полученные результаты, отметим случай, когда отклонения келеблющегося стержня от криволинейной формы равновесия бесконечно малы. Формула (3) позволяет

обнаружить существование своеобразной собственной частоты, определяемой выражением:

$$\bar{p}_1 = \xi_{cm} \frac{\pi^3}{\sqrt{2} l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \frac{1}{K(k_1)},$$

$$\bar{k}_1^2 = \frac{2(\xi_{cm}^2 + 1 + \eta)}{\xi_{cm}^2}.$$

Подставив сюда  $\xi_{cm}^2 = -(\eta - 1)$  получим  $\bar{k}_1^2 = 0$ ;  $K(0) = \frac{\pi}{2}$  и  $\bar{p} = \sqrt{2} \xi_{cm} p_0$ .

Частота этого типа линейно зависит от стрелки прогиба выпучившегося стержня.

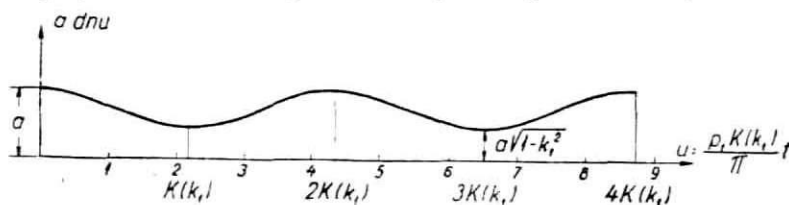
Общий характер колебательного движения выпученного стержня может быть получен путем обращения эллиптического интеграла и учета сделанных подстановок; после указанных действий получим:

$$H(t) = \operatorname{dn} \left[ \frac{p_1 K(k_1)}{\pi} t \right].$$

и уравнение движения будет

$$y(x, t) = a \sin \frac{\pi x}{l} \operatorname{dn} \left[ \frac{p_1 K(k_1)}{\pi} t \right].$$

График движения середины стержня приведен на фиг. 3.



Фиг. 3.

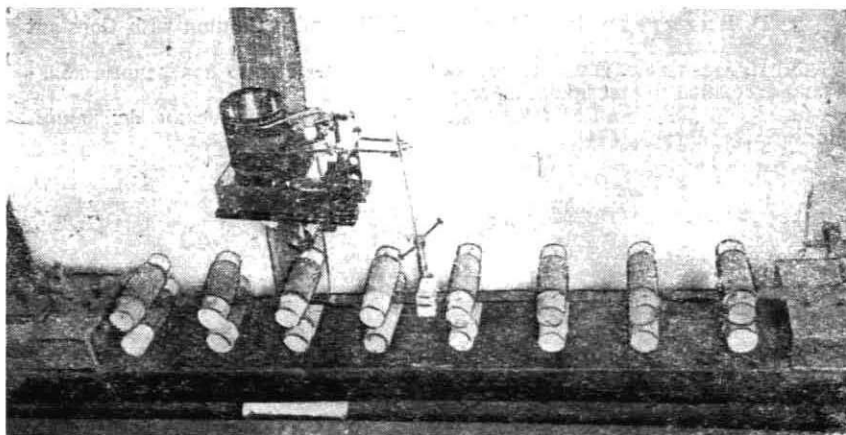
Характерным для этого движения является отсутствие симметрии размахов относительно прямолинейного положения стержня. При значении  $\xi \gg \sqrt{2} \xi_{cm}$  переход несимметричной формы колебаний в симметричную сопровождается внезапным удвоением амплитуд и периода колебаний.

## § 5. Опытная проверка результатов теории

Для качественной проверки результатов, полученных теорией, был поставлен опыт со стальным стержнем размерами  $0,4 \times 2,5 \times 109,7$  см. Для удобства работы с механическим виб-

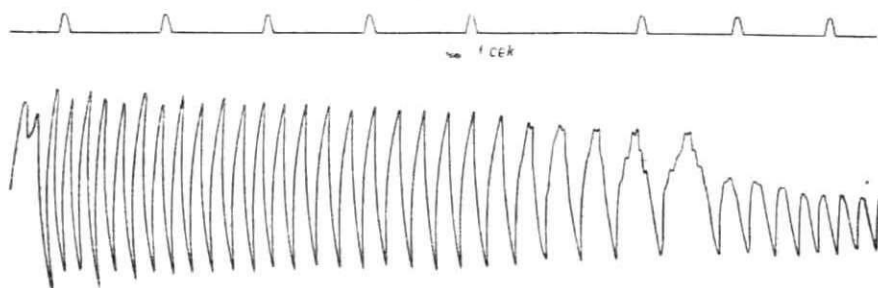


рографом, плохо записывающим высокие частоты, стержень был снабжен восьмью сосредоточенными массами, замедляющими колебания. Стержень был приварен к усилениям станины, состоящей из швеллера № 22. Общий вид установки приведен на фиг. 4.



Фиг. 4.

Путем изгиба станины стержню придавалась выпукленная форма, после чего, при вертикальном положении стержня возбуждались колебания, близкие по форме к синусоидальным. Характерная виброграмма приведена на фиг. 5.



Фиг. 5.

Обработка виброграммы приводит к выводу о большой точности утверждения, касающегося удвоения периода при переходе относительной амплитуды за значение  $\sqrt{2}\xi_{\text{см}}$ ; утверж-

дение об удвоении амплитуды подтверждается со значительной ошибкой, очевидно связанной с игнорированием сил затухания.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Н. Хофф, Продольный изгиб и устойчивость, Москва, 1955.
2. D. Burgreen, Free Vibrations of Pin-Ended Column with Constant Distance between Pin Ends, Journal of Applied Mechanics Nr. 18, 1951.
3. И. Мелдер. Влияние переменных осевых сил на поперечные колебания стержней и пластинок. Диссертация, Рига 1954.
4. А. М. Журавский, Справочник по эллиптическим функциям. Москва, Ленинград, 1941.

Е. Б. ВАСЕРМАН, кандидат технических наук

## ВЛИЯНИЕ ПОВЕДЕНИЯ НАГРУЗКИ НА ЧАСТОТУ СВОБОДНЫХ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВОЙ АРКИ

### Введение

В настоящей работе рассматриваются свободные *плоские* колебания упругих круговых, бесшарнирных и двухшарнирных арок, нагруженных равномерно распределенной радиальной нагрузкой, и попутно решается задача об их устойчивости. Предполагается, что возможны следующие три случая поведения нагрузки в процессе деформирования:

- 1) Нагрузка остается нормальной к искривленной оси арки.
- 2) Нагрузка остается нормальной к неискривленной оси арки (т. е. параллельной своему первоначальному направлению).
- 3) Нагрузка остается направленной к центру первоначальной кривизны арки.

Ден-Гартог [1], Ф. В. Валткинг [2], Б. П. Демидович [3], Н. К. Снитко [4], И. М. Рабинович [5], Е. С. Сорокин [6], ([7] глава 4) и К. К. Керопян [8] ограничивались исследованием свободных колебаний *ненагруженных* арок.

Последние два автора хотя и поставили задачу о колебаниях нагруженной арки, однако в процессе решения лишили нагрузку свойства силы и приписали ей лишь свойство массы; другими словами, они, как и другие авторы, не учли вызываемые нагрузкой продольные силы.

Для одного случая поведения нагрузки (случай 1), частоты свободных колебаний *нагруженных* арок определяли К. Федергофер [9], А. И. Оседелько [10], В. Г. Чудновский ([11] раздел IV); первые два автора дали приближенные решения, а третий — точное решение.

Таким образом влияние характера поведения нагрузки в процессе деформирования на частоты свободных колебаний арок осталось неисследованным; настоящая работа посвящается восполнению этого пробела.

## § 1. Основные дифференциальные уравнения и их решение

Основные дифференциальные уравнения, определяющие формы колебаний кругового стержня для трех рассматриваемых нами случаев поведения нагузки в процессе деформирования, имеют вид: (см. [12] стр. 57):

Для случая 1

$$\bar{w}^{VI} + (2+q)\bar{w}^{IV} + (1+q-f)\bar{w}^{II} + f\bar{w} = 0 \quad (1.01)$$

Для случая 2

$$\bar{w}^{VI} + (2+q)\bar{w}^{IV} + (1+2q-f)\bar{w}^{II} + (q+f)\bar{w} = 0 \quad (1.02)$$

Для случая 3

$$\bar{w}^{VI} + (2+q)\bar{w}^{IV} + (1+2q-f)\bar{w}^{II} + f\bar{w} = 0 \quad (1.03)$$

Здесь обозначено:

Римскими цифрами — производные по переменному центральному углу  $\Theta$  (отсчитываемому от оси симметрии арки по ходу часовой стрелки);

$\bar{w}$	— касательное перемещение;
$q = \frac{pR^3}{B_y}$	— безразмерный параметр нагузки;
$p$	— интенсивность нагузки;
$R$	— радиус оси арки;
$B_y = EJ_y$	— жесткость изгиба в плоскости арки;
$f = \frac{mR^4}{B_y} \omega^2$	— безразмерный параметр частоты;
$m$	— масса единицы длины арки;
$\omega$	— частота колебаний.

При выводе, как обычно, было предположено, что

- 1) размеры поперечного сечения арки малы по сравнению с радиусом осевой линии;
- 2) одна из главных центральных осей поперечного сечения расположена в плоскости кривизны арки;
- 3) ось арки нерастяжима;
- 4) влияние перерезывающей силы и инерции вращения пренебрежимо мало.

Принимая частный интеграл уравнений (1.01)—(1.03) в виде:

$$a \cdot \sin(n\Theta + \alpha)$$

получены следующие характеристические уравнения:

Для случая 1:

$$n^6 - (2+q)n^4 + (1+q-f)n^2 - f = 0 \quad (1.04)$$

Для случая 2:

$$n^6 - (2+q)n^4 + (1+2q-f)n^2 - (f+q) = 0 \quad (1.05)$$

Для случая 3:

$$n^6 - (2+q)n^4 + (1+2q-f)n^2 - f = 0 \quad (1.06)$$

Общий интеграл основных дифференциальных уравнений (1.01) — (1.03) имеет вид:

$$\bar{\omega} = \sum_{k=1}^3 (A_k \cos n_k \Theta + B_k \sin n_k \Theta) \quad (1.07)$$

где  $\pm n_1, \pm n_2, \pm n_3$  — корни соответствующих характеристических уравнений, а  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  — постоянные.

## А. БЕСШАРНИРНАЯ АРКА

### § 2. Частотные уравнения

В настоящем параграфе аналогично выводу Валткинга для двухшарнирной арки выводятся точные уравнения частот плоских колебаний нагруженной бесшарнирной арки.

#### 2. 1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Граничные условия для бесшарнирной арки

$$\bar{\omega} = \bar{u} = \bar{\beta} = 0 \text{ при } \Theta = \pm \Theta_0 \quad (2.01)$$

где  $\bar{u}$  — радиальное перемещение,

$\bar{\beta}$  — угол поворота сечения вокруг его центральной оси инерции, направленной перпендикулярно к плоскости арки.

Используя известные зависимости

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{\omega}' \\ \bar{\beta} &= \frac{1}{R} (\bar{u}'' + \bar{\omega}), \end{aligned}$$

эти граничные условия могут быть записаны в форме:

$$\bar{u} = \bar{\omega}' = \bar{\omega}'' = 0 \text{ при } \Theta = \pm \Theta_0 \quad (2.02)$$

Согласно выражению (1.07), для  $\bar{\omega}$  граничные условия дают следующую систему шести уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{k=1}^3 (A_k \cos n_k \Theta_0 + B_k \sin n_k \Theta_0) = 0 \\ 2) \quad & \sum_{k=1}^3 (-A_k n_k \sin n_k \Theta_0 + B_k n_k \cos n_k \Theta_0) = 0 \end{aligned}$$

$$3) \sum_{k=1}^3 (A_k n_k^2 \cos n_k \Theta_0 + B_k n_k^2 \sin n_k \Theta_0) = 0 \quad (2.03)$$

$$4) \sum_{k=1}^3 (A_k \cos n_k \Theta_0 - B_k \sin n_k \Theta_0) = 0$$

$$5) \sum_{k=1}^3 (A_k n_k \sin n_k \Theta_0 + B_k n_k \cos n_k \Theta_0) = 0$$

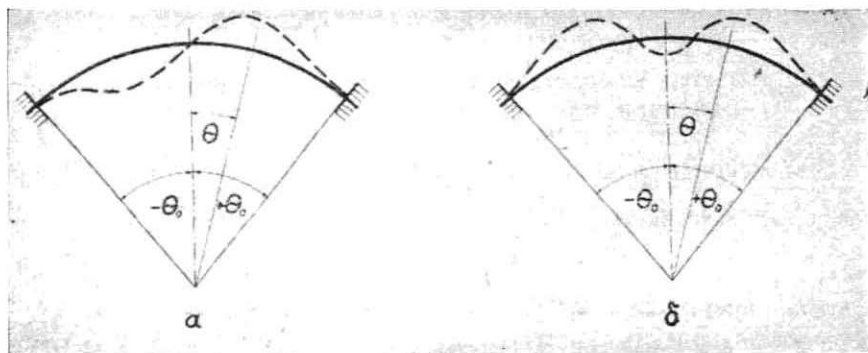
$$6) \sum_{k=1}^3 (A_k n_k^2 \cos n_k \Theta_0 - B_k n_k^2 \sin n_k \Theta_0) = 0$$

Симметрия арки позволяет рассмотреть отдельно антисимметричную и симметричную формы колебаний.

Напомним, что понятия «антисимметричная» и «симметричная» формы колебаний относятся к радиальным перемещениям  $\bar{u}$ . Естественно, что при симметричной форме колебаний касательные перемещения  $\bar{w}$  распределяются антисимметрично, а при антисимметричной форме — симметрично.

## 2. 2. АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Симметричные колебания с одной полуволной возможны лишь за счет сжимаемости оси. Только у пологих арок их частота ниже, чем при антисимметричной форме колебаний.



Фиг. 1. Антисимметричная и симметричная формы плоских колебаний бесшарнирной арки.

Антисимметричной форме колебаний с двумя полуволнами (фиг. 1а) соответствует более низкая частота, чем симметричной форме колебаний с тремя полуволнами (фиг. 1б).

При антисимметричной форме колебаний в выражении и:

$$\bar{u} = \bar{w}^1 = \sum_{k=1}^3 (-A_k n_k \sin n_k \Theta + B_k n_k \cos n_k \Theta) \quad (2.04)$$

должны быть удержаны члены, содержащие только синусы. Поэтому условие антисимметрии колебаний можно записать так:

$$B_k = 0 \quad k=1, 2, 3. \quad (2.05)$$

Тогда в уравнениях (2.03) первое уравнение совпадает с четвертым, второе — с пятым, а третье — с шестым; независимыми остаются только три первых уравнения:

$$\begin{aligned} A_1 \cos n_1 \Theta_0 + A_2 \cos n_2 \Theta_0 + A_3 \cos n_3 \Theta_0 &= 0 \\ A_1 n_1 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 n_2 \sin n_2 \Theta_0 + A_3 n_3 \sin n_3 \Theta_0 &= 0 \\ A_1 n_1^2 \cos n_1 \Theta_0 + A_2 n_2^2 \cos n_2 \Theta_0 + A_3 n_3^2 \cos n_3 \Theta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.06)$$

Система однородных уравнений (2.06) имеет ненулевое решение лишь при условии равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов при  $A_k$ :

$$\begin{vmatrix} \cos n_1 \Theta_0, & \cos n_2 \Theta_0, & \cos n_3 \Theta_0 \\ n_1 \sin n_1 \Theta_0, & n_2 \sin n_2 \Theta_0, & n_3 \sin n_3 \Theta_0 \\ n_1^2 \cos n_1 \Theta_0, & n_2^2 \cos n_2 \Theta_0, & n_3^2 \cos n_3 \Theta_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.07)$$

Развертывая определитель, получаем частотное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} n_1(n_2^2 - n_3^2) \operatorname{tg} n_1 \Theta_0 + n_2(n_3^2 - n_1^2) \operatorname{tg} n_2 \Theta_0 + \\ + n_3(n_1^2 - n_2^2) \operatorname{tg} n_3 \Theta_0 = 0 \quad ^1) \end{aligned} \quad (2.08a)$$

Здесь  $n_1, n_2, n_3$  — корни характеристических уравнений (1.04) — (1.06).

### 2. 3. СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Из выражения (2.04) следует следующее условие симметрии колебаний:

$$A_k = 0 \quad k=1, 2, 3. \quad (2.09)$$

Это условие приводит к попарному совпадению тех же уравнений системы (2.03), которая в данном случае принимает вид:

$$\begin{aligned} B_1 \sin n_1 \Theta_0 + B_2 \sin n_2 \Theta_0 + B_3 \sin n_3 \Theta_0 &= 0 \\ B_1 n_1 \cos n_1 \Theta_0 + B_2 n_2 \cos n_2 \Theta_0 + B_3 n_3 \cos n_3 \Theta_0 &= 0 \\ B_1 n_1^2 \sin n_1 \Theta_0 + B_2 n_2^2 \sin n_2 \Theta_0 + B_3 n_3^2 \sin n_3 \Theta_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

<sup>1)</sup> Аналогичное уравнение получено Б. П. Демидовичем ([3] стр. 120).

Отсюда получаем уравнение частот в виде следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} \sin n_1\Theta_0, & \sin n_2\Theta_0, & \sin n_3\Theta_0 \\ n_1 \cos n_1\Theta_0, & n_2 \cos n_2\Theta_0, & n_3 \cos n_3\Theta_0 \\ n_1^2 \sin n_1\Theta_0, & n_2^2 \sin n_2\Theta_0, & n_3^2 \sin n_3\Theta_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

Развертывая определитель, получаем окончательно для уравнения частот:

$$n_1(n_2^2 - n_3^2) \operatorname{ctg} n_1\Theta_0 + n_2(n_3^2 - n_1^2) \operatorname{ctg} n_2\Theta_0 + n_3(n_1^2 - n_2^2) \operatorname{ctg} n_3\Theta_0 = 0 \quad (2.12a)$$

где  $n_1, n_2, n_3$  — корни тех же уравнений (1.04) — (1.06).

## 2. 4. РЕШЕНИЕ ЧАСТОТНЫХ УРАВНЕНИИ

Уравнения частот нами решались следующим образом:

1) При данном значении  $q$  и принятому ряду значений  $f$  из характеристических уравнений (1.04), (1.05) и (1.06) определялись соответствующие значения корней  $n_k$ .

Для этого подстановкой  $y = n^2$  характеристические уравнения принимали вид кубических уравнений, которые затем решались при помощи таблиц Б. М. Шумягского (13).

2) Для данного угла  $\Theta_0$ , при найденных значениях  $n_1, n_2, n_3$  строился график зависимости левой части частотного уравнения от  $f$ . Точка пересечения построенной кривой с осью  $f$  определяла искомое значение параметра частоты соответствующее принятым значениям  $q$  и  $\Theta_0$ .

3) Полученный графически результат уточнялся аналитически с помощью соответствующего преобразованного уравнения частот, которые выводятся ниже.

Используя существующие зависимости между корнями кубического уравнения и его коэффициентами, можно доказать, что корни полученных из (1.04), (1.05) и (1.06) кубических уравнений могут быть следующими:

- а) все три корня положительные,
- б) один корень положительный и два отрицательных,
- в) один корень положительный и два комплексно сопряженных.

Для упрощения вычислений преобразуем частотные уравнения (2.08) и (2.12) так, чтобы они содержали только действительные числа.

1) Аналогичное уравнение получено Б. П. Демидовичем ([3] стр. 121).



### С л у ч а й а.

В случае *a* можно пользоваться непосредственно уравнениями (2.08) и (2.12).

### С л у ч а й б.

Обозначим корни кубического уравнения через

$$y_1 \quad -y_2 \quad -y_3$$

где  $y_1, y_2, y_3$  — положительны.

Тогда

$$n_1 = \sqrt{y_1} \quad n_2 = \sqrt{y_2} i \quad n_3 = \sqrt{y_3} i$$

Так как

$$\operatorname{tg} iy = i \operatorname{th} y \quad \operatorname{ctg} iy = -i \operatorname{cth} y$$

то частотные уравнения (2.08) и (2.12) принимают вид:

$$\begin{aligned} \sqrt{y_1}(-y_2+y_3) \operatorname{tg} \sqrt{y_1} \Theta_0 + \sqrt{y_2}(y_3+y_1) \operatorname{th} \sqrt{y_2} \Theta_0 - \\ - \sqrt{y_3}(y_1+y_2) \operatorname{th} \sqrt{y_3} \Theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.086)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{y_1}(-y_2+y_3) \operatorname{ctg} \sqrt{y_1} \Theta_0 - \sqrt{y_2}(y_3+y_1) \operatorname{cth} \sqrt{y_2} \Theta_0 + \\ + \sqrt{y_3}(y_1+y_2) \operatorname{cth} \sqrt{y_3} \Theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

### С л у ч а й в.

Пусть кубическое уравнение имеет корни:

$$\begin{aligned} y_1 & \text{ — положительное число,} \\ y_2 & = a + bi \quad y_3 = a - bi \end{aligned}$$

Тогда корни характеристических уравнений будут такими:

$$n_1 = \sqrt{y_1} \quad n_2 = m + ni \quad n_3 = m - ni$$

где

$$m = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} + a)} \quad n = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2 + b^2} - a)}$$

Подставляя в (2.08а) и (2.12а) значения корней, получим следующие выражения для коэффициентов при тригонометрических функциях частотных уравнений

$$n_1(n_2^2 - n_3^2) = 2n_1 bi$$

$$n_2(n_3^2 - n_1^2) = [(a - n_1^2)m + bn] + [(a - n_1^2)n - bm]i$$

$$n_3(n_1^2 - n_2^2) = -[(a - n_1^2)m + bn] + [(a - n_1^2)n - bm]i$$

Кроме того, учитывая, что

$$\operatorname{tg}(m\Theta_0 \pm in\Theta_0) = \frac{\sin 2m\Theta_0 \pm \operatorname{sh} 2n\Theta_0}{\cos 2m\Theta_0 \pm \operatorname{ch} 2n\Theta_0}$$

$$\operatorname{ctg}(m\Theta_0 \pm in\Theta_0) = -\frac{\sin 2m\Theta_0 \mp \operatorname{ish} 2n\Theta_0}{\cos 2m\Theta_0 - \operatorname{ch} 2n\Theta_0}$$

получаем частотные уравнения в следующем виде:

Вместо (2.08а)

$$n_1 b \operatorname{tg} n_1 \Theta_0 (\cos 2m\Theta_0 + \operatorname{ch} 2n\Theta_0) + [(a - n_1^2)n - bm] \sin 2m\Theta_0 + \\ + [(a - n_1^2)m + bn] \operatorname{sh} 2n\Theta_0 = 0 \quad (2.08в)$$

Вместо (2.12а)

$$n_1 b \operatorname{ctg} n_1 \Theta_0 (\cos 2m\Theta_0 - \operatorname{ch} 2n\Theta_0) - [(a - n_1^2)n - bm] \sin 2m\Theta_0 + \\ + [(a - n_1^2)m + bn] \operatorname{sh} 2n\Theta_0 = 0 \quad (2.12в)$$

Таким образом для всех возможных видов корней характеристических уравнений получены такие частотные уравнения, которые содержат только действительные числа.

### § 3. Критические нагрузки

В этом параграфе методом малых колебаний выводятся точные решения для критических нагрузок при антисимметричной и симметричной деформации в плоской задаче. При этом получены, отсутствовавшие до сих пор, точные решения устойчивости бесшарнирных арок при симметричной деформации для случаев 2 и 3.

#### 3. 1. С л у ч а й 1.

##### 3. 1. 1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Полагая в уравнении (1.01) параметр частоты  $f$  равным нулю, параметр нагрузки  $q$  переходит в коэффициент устойчивости  $q_{кр}$ , и получаем:

$$\bar{\omega}^{VI} + (2 + q_{кр}) \bar{\omega}^{IV} + (1 + q_{кр}) \bar{\omega}^{II} = 0 \quad (3.01)$$

и вместо характеристического уравнения (1.04) следующее:

$$n^2(n^2 - 1)(n^2 - 1 - q_{кр}) = 0 \quad (3.02)$$

Это уравнение имеет следующие шесть корней:

$$n_{1,4} = \pm \sqrt{1 + q_{кр}} \quad n_{2,5} = \pm 1 \quad n_{3,6} = 0 \quad (3.03)$$

Так как характеристическое уравнение имеет два кратных нулевых корня, то общий интеграл уравнения (3.01) имеет вид:

$$\bar{\omega} = A_1 \cos n_1 \Theta + B_1 \sin n_1 \Theta + A_2 \cos \Theta + \\ + B_2 \sin \Theta + A_3 + B_3 \Theta \quad (3.04)$$

Из граничных условий (2.02) получаем следующие шесть уравнений:

$$A_1 \cos n_1 \Theta_0 \pm B_1 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \cos \Theta_0 \pm B_2 \sin \Theta_0 + A_3 \pm B_3 \Theta_0 = 0 \\ \pm A_1 n_1 \sin n_1 \Theta_0 + B_1 n_1 \cos n_1 \Theta_0 \pm A_2 \sin \Theta_0 + B_2 \cos \Theta_0 + B_3 = 0 \\ A_1 n_1^2 \cos n_1 \Theta_0 \pm B_1 n_1^2 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \cos \Theta_0 \pm B_2 \sin \Theta_0 = 0 \quad (3.05)$$

Рассмотрим и здесь отдельно антисимметричную и симметричную форму деформаций.

### 3. 1. 2. АНТИСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

При антисимметричных деформациях  $B_k = 0$  и вместо (3.05) будет:

$$\begin{aligned} A_1 \cos n_1 \Theta_0 + A_2 \cos \Theta_0 + A_3 &= 0 \\ A_1 n_1 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \sin \Theta_0 &= 0 \\ A_1 n_1^2 \cos n_1 \Theta_0 + A_2 \cos \Theta_0 &= 0 \end{aligned}$$

Эта система имеет ненулевое решение при условии:

$$\begin{vmatrix} \cos n_1 \Theta_0, & \cos \Theta_0, & 1 \\ n_1 \sin n_1 \Theta_0, & \sin \Theta_0, & 0 \\ n_1^2 \cos n_1 \Theta_0, & \cos \Theta_0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Развертывая определитель, получаем:

$$\operatorname{tg} n_1 \Theta_0 = n_1 \operatorname{tg} \Theta_0$$

Подставляя значение  $n_1$  из (3.03) имеем окончательно для коэффициента устойчивости:

$$1 + q_{\text{кр}} = \frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{1 + q_{\text{кр}}} \Theta_0}{\operatorname{tg}^2 \Theta_0} \quad 1) \quad (3.06)$$

### 3. 1. 3. СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Условие симметрии  $A_k = 0$ ; тогда вместо (3.05) имеем:

$$\begin{aligned} B_1 \sin n_1 \Theta_0 + B_2 \sin \Theta_0 + B_3 \Theta_0 &= 0 \\ B_1 n_1 \cos n_1 \Theta_0 + B_2 \cos \Theta_0 + B_3 &= 0 \\ B_1 n_1^2 \sin n_1 \Theta_0 + B_2 \sin \Theta_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ненулевое решение системы имеем при условии:

$$\begin{vmatrix} \sin n_1 \Theta_0, & \sin \Theta_0, & 0 \\ n_1 \cos n_1 \Theta_0, & \cos \Theta_0, & 1 \\ n_1^2 \sin n_1 \Theta_0, & \sin \Theta_0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Развертывая определитель, получаем:

$$n_1 \Theta_0 \operatorname{ctg} n_1 \Theta_0 - 1 = n_1^2 (\Theta_0 \operatorname{ctg} \Theta_0 - 1) \quad 2)$$

Подставляя сюда значение  $n_1$  из (3.03), имеем:

$$\sqrt{1 + q_{\text{кр}}} \Theta_0 \operatorname{ctg} \sqrt{1 + q_{\text{кр}}} \Theta_0 - 1 = (1 + q_{\text{кр}}) (\Theta_0 \operatorname{ctg} \Theta_0 - 1) \quad (3.07)$$

<sup>1)</sup> Это решение другим путем получено Е. Л. Николаи ([14] стр. 356) и А. Н. Динником ([15] стр. 30).

<sup>2)</sup> Это уравнение получено другим методом Е. Л. Николаи ([14] стр. 357) и А. Н. Динником ([15] стр. 31).

### 3. 2. С л у ч а й 2.

#### 3. 2. 1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Полагая  $f=0$ , получаем вместо (1.02)

$$\bar{\omega}^{VI} + (2 + q_{кр}) \bar{\omega}^{IV} + (1 + 2q_{кр}) \bar{\omega}^{II} + q_{кр} \bar{\omega} = 0 \quad (3.08)$$

а вместо характеристического уравнения (1.05) имеем:

$$(n^2 - 1)^2 (n^2 - q_{кр}) = 0 \quad (3.09)$$

Корни этого характеристического уравнения:

$$n_{1,4} = \pm \sqrt{q_{кр}} \quad n_{2,5} = \pm 1 \quad n_{3,6} = \pm 1 \quad (3.10)$$

Общий интеграл уравнения (3.08), учитывая кратность корней, имеет вид:

$$\bar{\omega} = A_1 \cos n_1 \Theta + B_1 \sin n_1 \Theta + A_2 \cos \Theta + B_2 \sin \Theta + B_3 \Theta \cos \Theta + A_3 \Theta \sin \Theta \quad (3.11)$$

Из граничных условий (2.02) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & A_1 \cos n_1 \Theta_0 \pm B_1 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \cos \Theta_0 \pm B_2 \sin \Theta_0 \pm \\ & \pm B_3 \Theta_0 \cos \Theta_0 + A_3 \Theta_0 \sin \Theta_0 = 0 \\ \mp & A_1 n_1 \sin n_1 \Theta_0 + B_1 n_1 \cos n_1 \Theta_0 \mp A_2 \sin \Theta_0 + B_2 \cos \Theta_0 - \\ & - B_3 \Theta_0 \sin \Theta_0 + B_3 \cos \Theta_0 \pm A_3 \Theta_0 \cos \Theta_0 \pm A_3 \sin \Theta_0 = 0 \\ & A_1 n_1^2 \cos n_1 \Theta_0 \pm B_1 n_1^2 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \cos \Theta_0 \pm B_2 \sin \Theta_0 - \\ & - (2 \cos \Theta_0 - \Theta_0 \sin \Theta_0) A_3 \pm (2 \sin \Theta_0 + \Theta_0 \cos \Theta_0) B_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Рассмотрим опять отдельно антисимметричные и симметричные формы деформаций.

#### 3. 2. 2. АНТИСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

При условии антисимметрии  $B_k = 0$ , граничные условия дают вместо (3.12) систему трех уравнений, которая имеет ненулевое решение при условии равенства нулю следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} \cos n_1 \Theta_0, & \cos \Theta_0, & \Theta_0 \sin \Theta_0 \\ n_1 \sin n_1 \Theta_0, & \sin \Theta_0, & -(\Theta_0 \cos \Theta_0 + \sin \Theta_0) \\ n_1^2 \cos n_1 \Theta_0, & \cos \Theta_0, & (\Theta_0 \sin \Theta_0 - 2 \cos \Theta_0) \end{vmatrix} = 0$$

Развертывая этот определитель после некоторых преобразований, получаем:

$$n_1 \Theta_0 \operatorname{tg} n_1 \Theta_0 = \frac{1}{2} (n_1^2 - 1) (\Theta_0^2 + \Theta_0^2 \operatorname{tg}^2 \Theta_0 + \Theta_0 \operatorname{tg} \Theta_0) + \Theta_0 \operatorname{tg} \Theta_0$$

Подставляя вместо  $n_1$  его значение из (3.10) имеем:

$$\sqrt{q_{\text{кр}}} \Theta_0 \operatorname{tg} \sqrt{q_{\text{кр}}} \Theta_0 = \frac{1}{2} (q_{\text{кр}} - 1) (\Theta_0^2 + \Theta_0^2 \operatorname{tg}^2 \Theta_0 + \Theta_0 \operatorname{tg} \Theta_0) + \Theta_0 \operatorname{tg} \Theta_0 \quad (3.13)$$

### 3. 2. 3. СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Условие симметрии  $A_k = 0$  дает вместо (3.12) систему трех уравнений. Приравнявая соответствующий определитель нулю, получаем:

$$\begin{vmatrix} \sin n_1 \Theta_0, & \sin \Theta_0, & \Theta_0 \cos \Theta_0 \\ n_1 \cos n_1 \Theta_0, & \cos \Theta_0, & \cos \Theta_0 - \Theta_0 \sin \Theta_0 \\ n_1^2 \sin n_1 \Theta_0, & \sin \Theta_0, & \Theta_0 \cos \Theta_0 + 2 \sin \Theta_0 \end{vmatrix} = 0$$

Развертывая определитель и подставляя из (3.10)  $n_1 = \sqrt{q_{\text{кр}}}$ , получаем уравнение для определения коэффициента устойчивости:

$$\operatorname{tg} \sqrt{q_{\text{кр}}} \Theta_0 = \frac{(\sqrt{q_{\text{кр}}} - 1) \Theta_0 \sin 2\Theta_0 + 2\sqrt{q_{\text{кр}}} (1 - \cos 2\Theta_0)}{(\sqrt{q_{\text{кр}}} + 1) \sin 2\Theta_0 - 2\Theta_0 (q_{\text{кр}} - 1)} \quad (3.14)$$

## 3. 3. С л у ч а й 3.

### 3. 3. 1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Полагая в (1.03)  $f=0$  получаем:

$$\bar{\omega}^{\text{VI}} + (2 + q_{\text{кр}}) \bar{\omega}^{\text{IV}} + (1 + 2q_{\text{кр}}) \bar{\omega}^{\text{II}} = 0 \quad (3.15)$$

Характеристическое уравнение (1.06) принимает вид:

$$n^2 [(n^2 - 1)^2 - (n^2 - 2) q_{\text{кр}}] = 0 \quad (3.16)$$

Корни этого характеристического уравнения:

$$\begin{aligned} n_{1,4} &= \pm \sqrt{\frac{2 + q_{\text{кр}} + \sqrt{q_{\text{кр}}^2 - 4q_{\text{кр}}}}{2}} \\ n_{2,5} &= \pm \sqrt{\frac{2 + q_{\text{кр}} - \sqrt{q_{\text{кр}}^2 - 4q_{\text{кр}}}}{2}} \\ n_{3,6} &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

<sup>1)</sup> Это уравнение приведено у А. Н. Динника ([15] стр. 35) и в ([16] стр. 190) с опечаткой — знак минус перед первым слагаемым во второй скобке.

В таком случае общий интеграл уравнения (3.15) получает вид:

$$\bar{\omega} = A_1 \cos n_1 \Theta + B_1 \sin n_1 \Theta + A_2 \cos n_2 \Theta + B_2 \sin n_2 \Theta + A_3 + B_3 \Theta \quad (3.18)$$

Граничные условия (2.02) дают следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & A_1 \cos n_1 \Theta_0 \pm B_1 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \cos n_2 \Theta_0 \pm \\ & \quad \pm B_2 \sin n_2 \Theta_0 + A_3 \pm B_3 \Theta_0 = 0 \\ \mp A_1 n_1 \sin n_1 \Theta_0 + B_1 n_1 \cos n_1 \Theta_0 \mp A_2 n_2 \sin n_2 \Theta_0 + \\ & \quad + B_2 n_2 \cos n_2 \Theta_0 + B_3 = 0 \\ & A_1 n_1^2 \cos n_1 \Theta_0 \pm B_1 n_1^2 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 n_2^2 \cos n_2 \Theta_0 \pm \\ & \quad \pm B_2 n_2^2 \sin n_2 \Theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3. 3. 2. АНТИСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Аналогично предыдущему приходим к уравнению:

$$\begin{vmatrix} \cos n_1 \Theta_0, & \cos n_2 \Theta_0, & 1 \\ n_1 \sin n_1 \Theta_0, & n_2 \sin n_2 \Theta_0, & 0 \\ n_1^2 \cos n_1 \Theta_0, & n_2^2 \cos n_2 \Theta_0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

решая которое, получаем:

$$\frac{\operatorname{tg} n_1 \Theta_0}{n_1} = \frac{\operatorname{tg} n_2 \Theta_0}{n_2} \quad (3.20)$$

Подставляя сюда значения  $n_1$  и  $n_2$  из (3.17), можно определить критическую нагрузку.

### 3. 3. 3. СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Соответствующее уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \sin n_1 \Theta_0, & \sin n_2 \Theta_0, & \Theta_0 \\ n_1 \cos n_1 \Theta_0 & n_2 \cos n_2 \Theta_0 & 1 \\ n_1^2 \sin n_1 \Theta_0, & n_2^2 \sin n_2 \Theta_0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Развертывая определитель и преобразуя, получаем:

$$\frac{\Theta_0 n_1 \operatorname{ctg} n_1 \Theta_0 - 1}{n_1^2} = \frac{\Theta_0 n_2 \operatorname{ctg} n_2 \Theta_0 - 1}{n_2^2} \quad (3.21)$$

Значения  $n_1$  и  $n_2$  следует брать из (3.17).

## § 4. Приближенное определение частот и критических нагрузок

### 4. 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Определение частот по точным уравнениям (2.08) и (2.12) требует сравнительно большой вычислительной работы. То же можно сказать относительно некоторых формул для определения критических нагрузок.

Поэтому, естественно искать упрощенный метод для приближенного определения частот и критических нагрузок. Зная приближенные значения частот или критических нагрузок, мы всегда сможем, в случае надобности, улучшить результаты по точным решениям; при этом затрата времени на вычисление здесь уже будет значительно меньшей.

Для приближенного определения частот и критических нагрузок воспользуемся методом Бубнова-Галеркина.

### 4. 2. АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

#### 4. 2. 1. Аппроксимирующая функция

Возьмем в качестве аппроксимирующей функции для касательного перемещения:

$$\bar{w} = a(3 \cos c\Theta + \cos 3c\Theta) \quad (4.01)$$

где

$$c = \frac{\pi}{2\theta_0} \quad (4.02)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям, и соответствует ожидаемой форме колебаний. Рассмотрим каждый случай поведения нагрузки в отдельности.

#### 4. 2. 2. Случай 1.

Подставляя аппроксимирующую функцию (4.01) в уравнение (1.01), умножаем полученное выражение на

$$\bar{w}d\Theta = a(3 \cos c\Theta + \cos 3c\Theta)d\Theta$$

интегрируем по всей длине арки и приравниваем результат нулю. Имеем:

$$\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} [-3ac^6(\cos c\Theta + 243 \cos 3c\Theta) + (2+q) \cdot 3ac^4(\cos c\Theta + 27 \cos 3c\Theta) - (1+q-f) \cdot 3ac^2(\cos c\Theta + 3 \cos 3c\Theta) + fa(3 \cos c\Theta + \cos 3c\Theta)] \cdot a(3 \cos c\Theta + \cos 3c\Theta)d\Theta = 0$$

После некоторых преобразований получаем следующую формулу для определения параметра частоты:

$$f = \frac{9c^2[(41c^4 - 10c^2 + 1) - q(5c^2 - 1)]}{9c^2 + 5} \quad (4.03)$$

Полагая в (4.03)  $f=0$ , находим коэффициент устойчивости:

$$q_{кр} = \frac{41c^4 - 10c^2 + 1}{5c^2 - 1} \quad (4.04)$$

#### 4. 2. 3. Случай 2.

Подставим аппроксимирующую функцию (4.01) в уравнение (1.02) и произведем те же операции, как в предыдущем случае. Тогда после преобразований получаем формулы для параметра частоты:

$$f = \frac{9c^2[(41c^4 - 10c^2 + 1) - q(5c^2 - 2 + \frac{5}{9c^2})]}{9c^2 + 5} \quad (4.05)$$

и коэффициента устойчивости:

$$q_{кр} = \frac{41c^4 - 10c^2 + 1}{5c^2 - 2 + \frac{5}{9c^2}} \quad (4.06)$$

#### 4. 2. 4. Случай 3.

Аппроксимирующую функцию (4.01) подставляем в (1.03) и аналогично предыдущим двум случаям получаем:

$$f = \frac{9c^2[(41c^4 - 10c^2 + 1) - q(5c^2 - 2)]}{9c^2 + 5} \quad (4.07)$$

$$q_{кр} = \frac{41c^4 - 10c^2 + 1}{5c^2 - 2} \quad (4.08)$$

Полагая в (4.03), или (4.05), или (4.07)  $q=0$ , получаем параметр частоты ненагруженной арки

$$f_0 = \frac{9c^2(41c^4 - 10c^2 + 1)}{9c^2 + 5} \quad (4.09)$$

### 4. 3. СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

#### 4. 3. 1. Аппроксимирующая функция

Аппроксимирующую функцию для касательного перемещения принимаем в виде:

$$\bar{w} = a(\sin 2c\Theta + \frac{1}{2}\sin 4c\Theta) \quad (4.10)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям и соответствует ожидаемой форме колебаний.

<sup>1)</sup> Эта формула имеется в работе Малкиной ([17] стр. 127).



#### 4. 3. 2. Случай 1.

Подставляя аппроксимирующую функцию (4.10) в уравнение (1.01), умножим полученное выражение на  $\overline{wd}\Theta$ , и интегрируя по всей длине арки, получаем, приравнявая результат нулю:

$$f = \frac{16c^2[(272c^4 - 40c^2 + 2) - q(20c^2 - 2)]}{32c^2 + 5} \quad (4.11)$$

Коэффициент устойчивости получим, полагая в (4.11)  $f=0$

$$q_{кр} = \frac{272c^4 - 40c^2 + 2}{20c^2 - 2} \quad (4.12)$$

#### 4. 3. 3. Случай 2.

Аналогично, подставляя (4.10) в уравнение (1.02) и производя те же операции, как и в случае 1, получаем:

$$f = \frac{16c^2[(272c^4 - 40c^2 + 2) - q(20c^2 - 4 + \frac{5}{16c^2})]}{32c^2 + 5} \quad (4.13)$$

Полагая в (4.13)  $f=0$ , имеем:

$$q_{кр} = \frac{272c^4 - 40c^2 + 2}{20c^2 - 4 + \frac{5}{16c^2}} \quad (4.14)$$

#### 4. 3. 4. Случай 3.

Подставляя выражение (4.10) в уравнение (1.03) и производя то же, что и в случаях 1 и 2, получаем:

$$f = \frac{16c^2[(272c^4 - 40c^2 + 2) - q(20c^2 - 4)]}{32c^2 + 5} \quad (4.15)$$

Полагая в (4.15)  $f=0$ , имеем:

$$q_{кр} = \frac{272c^4 - 40c^2 + 2}{20c^2 - 4} \quad (4.16)$$

Из (4.11), или (4.13), или (4.15) полагая  $q=0$ , получаем для параметра частоты ненагруженной арки

$$f_0 = \frac{16c^2(272c^4 - 40c^2 + 2)}{32c^2 + 5} \quad (4.17)$$

### § 5. Сопоставление результатов, полученных по приближенным и точным решениям

Из выведенных формул следует, что для антисимметричных и симметричных деформаций бесшарнирной арки (как и в случае кольца), имеют место следующие неравенства:

$$f_1 < f_2 < f_3 \quad \text{т. е. } \omega_1 < \omega_2 < \omega_3$$

$$\text{и } q_{1кр} < q_{2кр} < q_{3кр} \quad \text{т. е. } p_{1кр} < p_{2кр} < p_{3кр}$$

Здесь индексы 1, 2, 3 соответствуют рассматриваемым вариантам поведения нагрузки.

Из приближенных формул также следует, что между параметрами  $f$  и  $q$  существует линейная зависимость. Поэтому в случае плоских колебаний бесшарнирной арки удобно пользоваться графиками зависимости  $f$  от  $q$ .

Для построения этих графиков предварительно вычислим параметры частот ненагруженных арок  $f_0$  и коэффициенты устойчивости  $q_{кр}$  при разном характере поведения нагрузки в зависимости от центрального угла арки. Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1  
Приближенные значения  $f_0$ ,  $q_{1кр}$ ,  $q_{2кр}$ ,  $q_{3кр}$  для бесшарнирной арки в зависимости от  $2\theta_0$

$2\theta_0$	Антисимметричные колебания (2 полуволны)				Симметричные колебания (3 полуволны)			
	$f_0$	$q_{1кр}$	$q_{2кр}$	$q_{3кр}$	$f_0$	$q_{1кр}$	$q_{2кр}$	$q_{3кр}$
20°	266365	663,8	655,5	665,5	888962	1101,0	1102,2	1102,3
30°	51975	294,8	296,5	296,5	174778	489,0	490,3	490,3
40°	16168	165,7	167,3	167,4	54941	274,8	276,1	276,1
60°	3044	73,5	75,1	75,2	10652	121,8	123,1	123,1
90°	542	32,5	34,0	34,3	2018	53,8	55,1	55,2
120°	149	18,1	19,6	20,1	603	30,0	31,3	31,4
145°	61,0	12,4	13,7	14,5	266	20,3	21,7	21,9
150°	51,7	11,6	12,8	13,8	229	19,0	20,5	20,7
180°	20,6	8,0	9,0	10,7	101	13,0	14,3	14,6

О степени точности приближенных формул можно судить по следующим двум таблицам.

Таблица 2  
Сопоставление точных и приближенных значений коэффициента устойчивости  $q_{1кр}$  бесшарнирной арки при антисимметричных деформациях.

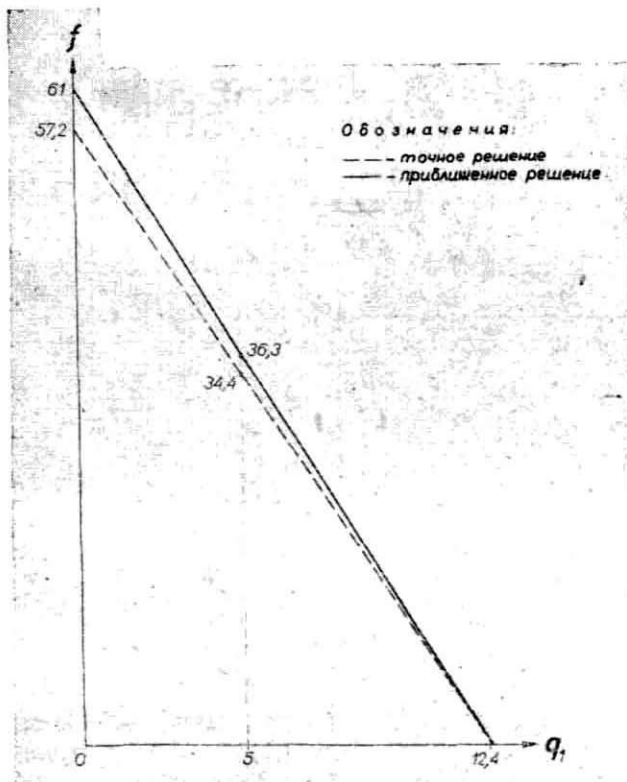
$2\theta_0$	Коэффициент устойчивости $q_{1кр}$		Разница в %
	По приближ. ф-ле (4.04)	По точному уравнению (3.06)	
20°	663,8	662,5	0,20
30°	294,8	294,2	0,20
40°	165,7	165,4	0,18
60°	73,5	73,3	0,27
90°	32,5	32,4	0,31
120°	18,2	18,1	0,55
145°	12,4	12,4	0,00
150°	11,6	11,6	0,00
180°	8,0	8,0	0,00

Таблица 3

Сопоставление точных и приближенных параметров  $f_0$ ,  $f_1$  и  $q_{1кр}$  бесшарнирной арки с центральным углом  $2\Theta_0=145^\circ$  при антисимметричных деформациях.

	По приближ. формулам	По точным уравнениям	Разница в %
$f_0$ ( $q=0$ )	61,0	57,2	6,6
$f_1$ при ( $q=5$ )	36,3	34,4	5,5
$q_{1кр}$	12,4	12,4	0,0

Из таблиц № 2 и 3 видно, что приближенные результаты отличаются от точных не более, чем на 7%.



Фиг. 2. Точные и приближенные значения параметра частоты антисимметричных плоских колебаний бесшарнирной арки с центральным углом  $2\Theta_0=145^\circ$ .

Для примера на фиг. 2 показан график зависимости параметра частоты  $f$  от параметра нагрузки  $q$  для антисимметричных плоских колебаний басшарнирной арки с центральным углом  $2\Theta_0=145^\circ$  при первом случае поведения нагрузки.

## Б. ДВУХШАРНИРНАЯ АРКА

### § 6. Частотные уравнения

Ф. В. Валткинг [3] вывел следующие два уравнения для частот плоских колебаний *ненагруженной* двухшарнирной арки:

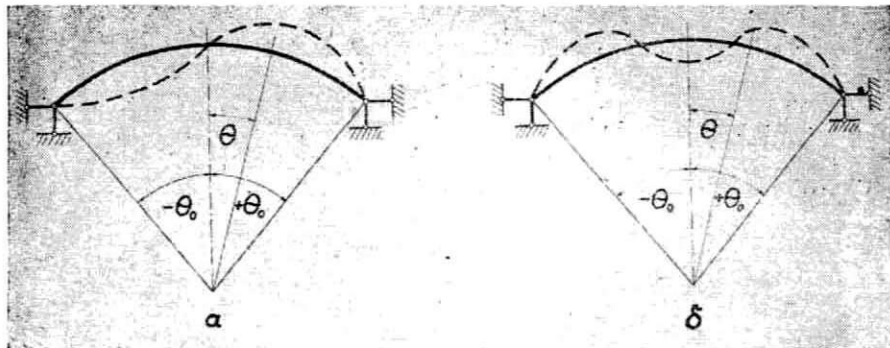
Для антисимметричных колебаний по двум полуволнам (фиг. 3а)

$$n_2 n_3 (n_2^2 - n_3^2) \operatorname{ctg} n_1 \Theta_0 + n_3 n_1 (n_3^2 - n_1^2) \operatorname{ctg} n_2 \Theta_0 + n_1 n_2 (n_1^2 - n_2^2) \operatorname{ctg} n_3 \Theta_0 = 0 \quad (6.01)$$

Для симметричных колебаний по трем полуволнам (фиг. 3б)

$$n_2 n_3 (n_2^2 - n_3^2) \operatorname{tg} n_1 \Theta_0 + n_3 n_1 (n_3^2 - n_1^2) \operatorname{tg} n_2 \Theta_0 + n_1 n_2 (n_1^2 - n_2^2) \operatorname{tg} n_3 \Theta_0 = 0 \quad (6.02)$$

В этих уравнениях  $n_1, n_2, n_3$  — корни соответствующего характеристического уравнения.



Фиг. 3. Антисимметричная и симметричная формы плоских колебаний двухшарнирной арки.

Уравнения (6.01) и (6.02) могут быть использованы и для определения частот колебаний *нагруженной* двухшарнирной арки, если значения  $n_1, n_2$  и  $n_3$  определять из уравнений (1.04) — (1.06).

Частотные уравнения для двухшарнирной арки решаются аналогично указанному в § 2, и могут также быть преобразо-

ваны таким образом, чтобы они содержали только действительные числа.

Так, например, для антисимметричных колебаний по двум полуволнам, с случае комплексно сопряженных корней, при тех же обозначениях, как в § 2 — случай *в*, получено следующее частотное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n_1} b \operatorname{ctg} n_1 \Theta_0 (\cos 2m\Theta_0 - \operatorname{ch} 2n\Theta_0) + \\ + [(a-n_1^2)m - bn] \operatorname{sh} 2n\Theta_0 = 0 \\ + [(a-n_1^2)m - bn] \operatorname{sh} 2n\Theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (6.01a)$$

## § 7. Критические нагрузки

### 7. 1. С л у ч а й 1.

#### 7. 1. 1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Граничные условия на концах арки

$$\bar{w} = \bar{u} = \bar{M}_y = 0 \quad \text{при } \Theta = \pm \Theta_0 \quad (7.01)$$

где  $\bar{M}_y$  — изгибающий момент.

Так как

$$M_y = \frac{B_y}{R^2} (\bar{u}'' + \bar{u}) \quad (7.02)$$

то граничные условия принимают следующий вид:

$$\bar{w} = \bar{w}' = \bar{w}'''' = 0 \quad \text{при } \Theta = \pm \Theta_0 \quad (7.03)$$

Критическую нагрузку определим пользуясь тем же путем, как в случае бесшарнирной арки (§ 3).

Тогда общим интегралом уравнения (1.01), в котором параметр частоты  $f$  положен равным нулю, будет выражение (3.04).

Граничные условия (7.03) дают следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 \cos n_1 \Theta_0 \pm B_1 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \cos \Theta_0 \pm B_2 \sin \Theta_0 + A_3 \pm B_3 \Theta_0 = 0 \\ \mp A_1 n_1 \sin n_1 \Theta_0 + B_1 n_1 \cos n_1 \Theta_0 \mp A_2 \sin \Theta_0 + B_2 \cos \Theta_0 + B_3 = \mp 0 \\ \pm A_1 n_1^3 \sin n_1 \Theta_0 - B_1 n_1^3 \cos n_1 \Theta_0 \pm A_2 \sin \Theta_0 - B_2 \cos \Theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (7.04)$$

#### 7. 1. 2. АНТИСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

При антисимметричных деформациях  $B_k = 0$ . Тогда вместо (7.04) получаем систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 \cos n_1 \Theta_0 + A_2 \cos \Theta_0 + A_3 = 0 \\ A_1 n_1 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \sin \Theta_0 = 0 \\ A_1 n_1^3 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \sin \Theta_0 = 0 \end{aligned}$$

Эта система имеет ненулевое решение при условии:

$$\begin{vmatrix} \cos n_1\Theta_0, & \cos \Theta_0, & 1 \\ n_1 \sin n_1\Theta_0, & \sin \Theta_0, & 0 \\ n_1^3 \sin n_1\Theta_0, & \sin \Theta_0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Развертывая определитель, получаем:

$$\sin n_1\Theta_0 = 0 \quad (7.05)$$

Это возможно при  $n_1\Theta_0 = k\pi$ , где  $k=1, 2, 3, \dots$

Соответственно значению  $n_1$  из (3.03) получаем:

$$q_{кр} = \frac{k^2\pi^2 - \theta_0^2}{\theta_0^2}$$

Полагая  $k=1$ , получим наименьшее значение коэффициента устойчивости

$$q_{кр} = \frac{\pi^2}{\theta_0^2} - 1 \quad (7.06)$$

Это решение было получено другими путями Е. Гурльбринком ([18] стр. 517), Е. Л. Николаи ([14] стр. 353), А. Н. Динником ([15] стр. 28), С. П. Тимошенко ([19] стр. 236).

### 7. 1. 3. СИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Условие симметрии  $A_k = 0$ . Тогда вместо (7.04) получаем:

$$\begin{aligned} B_1 \sin n_1\Theta_0 + B_2 \sin \Theta_0 + B_3\Theta_0 &= 0 \\ B_1 n_1 \cos n_1\Theta_0 + B_2 \cos \Theta_0 + B_3 &= 0 \\ B_1 n_1^3 \cos n_1\Theta_0 + B_2 \cos \Theta_0 &= 0 \end{aligned}$$

Ненулевое решение системы имеем при условии:

$$\begin{vmatrix} \sin n_1\Theta_0, & \sin \Theta_0, & \Theta_0 \\ n_1 \cos n_1\Theta_0, & \cos \Theta_0, & 1 \\ n_1^3 \cos n_1\Theta_0, & \cos \Theta_0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Развертывая определитель, получаем:

$$\operatorname{tg} n_1\Theta_0 - n_1\Theta_0 = n_1^3 (\operatorname{tg} \Theta_0 - \Theta_0)^{-1} \quad (7.07)$$

Подставляя в (7.07) значение  $n_1$  из (3.03), получаем:

$$\begin{aligned} (1 + q_{кр}) \sqrt{1 + q_{кр}} (\operatorname{tg} \Theta_0 - \Theta_0) + \\ + \sqrt{1 + q_{кр}} \Theta_0 - \operatorname{tg} \sqrt{1 + q_{кр}} \Theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (7.08)$$

<sup>1)</sup> Это решение получено другими способами Е. Л. Николаи ([14] стр.354) и А. Н. Динником ([15] стр. 30).

## 7. 2. С л у ч а й 2.

### 7. 2. 1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Касательное перемещение в данном случае выражается через (3.11). Используя граничные условия (7.03), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & A_1 \cos n_1 \Theta_0 \pm B_1 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \cos \Theta_0 \pm B_2 \sin \Theta_0 \pm \\ & \quad \pm B_3 \Theta_0 \cos \Theta_0 + A_3 \Theta_0 \sin \Theta_0 = 0 \\ & \mp A_1 n_1 \sin n_1 \Theta_0 + B_1 n_1 \cos n_1 \Theta_0 \mp A_2 \sin \Theta_0 + \\ & \quad + B_2 \cos \Theta_0 - B_3 \Theta_0 \sin \Theta_0 + B_3 \cos \Theta_0 \pm \\ & \quad \pm A_3 \Theta_0 \cos \Theta_0 \pm A_3 \sin \Theta_0 = 0 \quad (7.09) \\ & \pm A_1 n_1^3 \sin n_1 \Theta_0 - B_1 n_1^3 \cos n_1 \Theta_0 \pm A_2 \sin \Theta_0 - B_2 \cos \Theta_0 \mp \\ & \quad \mp A_3 (3 \sin \Theta_0 + \Theta_0 \cos \Theta_0) - B_3 (3 \cos \Theta_0 - \Theta_0 \sin \Theta_0) = 0 \end{aligned}$$

### 7. 2. 2. АНТИСИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

При условии антисимметрии  $B_k = 0$ , граничные условия (7.03) дают вместо (7.09) систему трех уравнений, определитель которой приравняем нулю.

$$\begin{vmatrix} \cos n_1 \Theta_0, & \cos \Theta_0, & \Theta_0 \sin \Theta_0 \\ n_1 \sin n_1 \Theta_0, & \sin \Theta_0, & -(\sin \Theta_0 + \Theta_0 \cos \Theta_0) \\ n_1^3 \sin n_1 \Theta_0, & \sin \Theta_0, & -(3 \sin \Theta_0 + \Theta_0 \cos \Theta_0) \end{vmatrix} = 0$$

тогда получаем:

$$\operatorname{tg} \sqrt{q_{\text{кр}}} \Theta_0 = \frac{4 \sin^2 \Theta_0}{\sqrt{q_{\text{кр}}} [(3 - q_{\text{кр}}) \sin 2\Theta_0 - 2(q_{\text{кр}} - 1) \Theta_0]} \quad (7.10)$$

### 7. 2. 3. СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Условия симметрии  $A_k = 0$  дает вместо (7.09) систему трех уравнений; приравняв определитель системы нулю, получаем:

$$\begin{vmatrix} \sin n_1 \Theta_0, & \sin \Theta_0, & \Theta_0 \cos \Theta_0 \\ n_1 \cos n_1 \Theta_0, & \cos \Theta_0, & \cos \Theta_0 - \Theta_0 \sin \Theta_0 \\ n_1^3 \cos n_1 \Theta_0, & \cos \Theta_0, & 3 \cos \Theta_0 - \Theta_0 \sin \Theta_0 \end{vmatrix} = 0$$

Подставляя из (3.10)  $n_1 = \sqrt{q_{\text{кр}}}$ , получаем в результате уравнение для определения коэффициента устойчивости:

$$2 \operatorname{tg} \sqrt{q_{\text{кр}}} \Theta_0 = \sqrt{q_{\text{кр}}} \Theta_0 (q_{\text{кр}} - 1) (1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_0) - \sqrt{q_{\text{кр}}} (q_{\text{кр}} - 3) \operatorname{tg} \Theta_0 \quad (7.11)$$

<sup>1)</sup> Это решение другим путем получено А. Н. Динником ([15] стр. 39).

### 7. 3. С л у ч а й 3.

#### 7. 3. 1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Общим интегралом для этого случая является выражение (3.18). Тогда граничные условия (7.03) дают следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & A_1 \cos n_1 \Theta_0 \pm B_1 \sin n_1 \Theta_0 + A_2 \cos n_2 \Theta_0 \pm \\ & \quad \pm B_2 \sin n_2 \Theta_0 + A_3 \pm B_3 \Theta_0 = 0 \\ \mp & A_1 n_1 \sin n_1 \Theta_0 + B_1 n_1 \cos n_1 \Theta_0 \mp A_2 n_2 \sin n_2 \Theta_0 + \\ & \quad + B_2 n_2 \cos n_2 \Theta_0 + B_3 = 0 \\ & \pm A_1 n_1^3 \sin n_1 \Theta_0 - B_1 n_1^3 \cos n_1 \Theta_0 \pm A_2 n_2^3 \sin n_2 \Theta_0 - \\ & \quad - B_2 n_2^3 \cos n_2 \Theta_0 = 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

#### 7. 3. 2. АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Аналогично предыдущему случаю приходим к уравнению:

$$\begin{vmatrix} \cos n_1 \Theta_0, & \cos n_2 \Theta_0, & 1 \\ n_1 \sin n_1 \Theta_0, & n_2 \sin n_2 \Theta_0 & 0 \\ n_1^3 \sin n_1 \Theta_0, & n_2^3 \sin n_2 \Theta_0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получаем:

$$n_1 n_2 (n_2^2 - n_1^2) \sin n_1 \Theta_0 \cdot \sin n_2 \Theta_0 = 0 \quad (7.13)$$

Это уравнение имеет четыре варианта решения:

Первый вариант:

$$\sin n_1 \Theta_0 = 0 \quad n_1 \Theta_0 = k\pi, \text{ где } k = 1, 2, 3 \dots$$

Следовательно

$$n_1 = \frac{k\pi}{\Theta_0} \quad (7.14)$$

Приравнивая значение  $n_1$  из (3.17) выражению (7.14) получаем:

$$q_{кр} = \frac{(k^2 \pi^2 - \Theta_0^2)^2}{(k^2 \pi^2 - 2\Theta_0^2)\Theta_0^2} \quad 1) \quad (7.15)$$

Второй вариант:

$$\sin n_2 \Theta_0 = 0$$

Он приводит к тому же результату (7.15).

<sup>1)</sup> При  $k=1$  получаем формулу, полученную А. Н. Динником ([15] стр. 44) или ([16] стр. 188). В обоих работах формула ошибочно напечатана в виде:

$$K = \frac{(\pi^2 - \alpha^2)^2 \cdot \alpha}{\pi^2 - 2\alpha^2} \text{ вместо } K = \frac{(\pi^2 - \alpha^2)^2}{(\pi^2 - 2\alpha^2) \cdot \alpha^2}$$



Третий вариант:

$$n^2 - n_1^2 = 0$$

согласно (3.17) возможен лишь при  $q=4$ , что соответствует  $\Theta_0=104^\circ$ . Тогда корни характеристического уравнения являются кратными и общий интеграл (3.18) должен иметь другую форму.

Четвертый вариант  $n_1 n_2 = 0$  невозможен, так как подставляя значения  $n_1$  и  $n_2$  из (3.17), получаем:  $n_1 n_2 = 1$ .

### 7. 3. 3 СИММЕТРИЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Условие симметрии  $A_k = 0$  дает вместо (7.09) систему уравнений, определитель которой имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \sin n_1 \Theta_0, & \sin n_2 \Theta_0, & \Theta_0 \\ n_1 \cos n_1 \Theta_0, & n_2 \cos n_2 \Theta_0, & 1 \\ n_1^3 \cos n_1 \Theta_0, & n_2^3 \cos n_2 \Theta_0, & 0 \end{vmatrix}$$

Приравнивая определитель нулю, получаем уравнение для определения коэффициента устойчивости:

$$n_1^3 (\operatorname{tg} n_2 \Theta_0 - n_2 \Theta_0) + n_2^3 (\Theta_0 n_1 - \operatorname{tg} n_1 \Theta_0) = 0 \quad (7.16)$$

где значения  $n_1$  и  $n_2$  следует брать из (3.17).

Большинство полученных в этом параграфе решений требует громоздких вычислений; в следующем параграфе даются упрощенные приближенные решения.

## § 8. Приближенное определение частот и критических нагрузок

### 8. 1. АНТИСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

#### 8. 1. 1. Аппроксимирующая функция

В качестве аппроксимирующей функции возьмем выражение:

$$\bar{w} = \frac{a}{2} (1 + \cos 2c\Theta) \quad (8.01)$$

где

$$c = \frac{\pi}{2\Theta_0} \quad (8.02)$$

Эта функция удовлетворяет граничным условиям (7.03) и соответствует ожидаемой форме колебаний.

### 8. 1. 2. Случай 1.

Подставив аппроксимирующую функцию (8.01) в уравнение (1.01) и применяя метод Бубнова-Галеркина, получаем:

$$\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \left[ -32ac^6 \cos 2c\Theta + (2+q) \cdot 8ac^4 \cos 2c\Theta - (1+q-f) \cdot 2ac^2 \cos 2c\Theta + f \cdot \frac{a}{2} (1 + \cos 2c\Theta) \right] \cdot \frac{a}{2} (1 + \cos 2c\Theta) d\Theta = 0$$

Интегрируя получаем после преобразований следующую формулу для определения параметра частоты:

$$f = \frac{4c^2[(4c^2-1)^2 - q(4c^2-1)]}{4c^2+3} \quad (8.03)$$

Полагая в (8.03)  $f=0$ , находим коэффициент устойчивости

$$q_{кр} = 4c^2 - 1 \quad (8.04)$$

Эта формула совпадает с точным решением (7.06), так как аппроксимирующая функция достаточно точно соответствует форме колебаний.

### 8. 1. 3. Случай 2.

Решая методом Бубнова-Галеркина уравнение (1.02), получаем на основе (8.01) следующую формулу:

$$f = \frac{4c^2 \left[ (4c^2-1)^2 - q \left( 4c^2 - 2 + \frac{3}{4c^2} \right) \right]}{4c^2+3} \quad (8.05)$$

Отсюда для коэффициента устойчивости находим:

$$q_{кр} = \frac{(4c^2-1)^2}{4c^2-2+\frac{3}{4c^2}} \quad (8.06)$$

<sup>1)</sup> Эта формула получена Федергофером с помощью энергетического метода ([9] стр. 279).

<sup>2)</sup> Формула получена другим путем Е. Гульбринком ([18] стр. 517).

### 8. 1. 4. Случай 3.

Подставляя аппроксимирующую функцию (8.01) в уравнение (1.03) и произведя те же операции, как в предыдущем случае, получаем:

$$\bar{f} = \frac{4c^2(4c^2 - 1)^2 - q(4c^2 - 2)}{4c^2 + 3} \quad (8.07)$$

$$q_{кр} = \frac{(4c^2 - 1)^2}{4c^2 - 2} \quad (8.08)$$

Формула (8.08) совпадает с точным решением (7.15) (полагая в нем  $k=1$ ), так как и в этом случае аппроксимирующая функция точно изображает форму колебаний.

Полагая в (8.03), или (8.05), или (8.07)  $q=0$ , получаем параметр частоты ненагруженной арки.

$$f_0 = \frac{4c^2(4c^2 - 1)^2}{4c^2 + 3} \quad (8.09)$$

## 8. 2. СИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### 8. 2. 1. Аппроксимирующая функция

В качестве аппроксимирующей функции для касательного перемещения принимаем:

$$\bar{w} = a(\sin c\Theta + \sin 3c\Theta), \quad (8.10)$$

что удовлетворяет граничным условиям (7.03) и соответствует ожидаемой форме колебаний.

### 8. 2. 2. Случай 1.

Подставив функцию (8.10) в уравнение (1.01) и применяя метод Бубнова-Галеркина, имеем:

$$\int_{-\Theta_0}^{+\Theta_0} \left[ -ac^6(\sin c\Theta + 729 \sin 3c\Theta) + \right. \\ \left. + (2+q)ac^4(\sin c\Theta + 81 \sin 3c\Theta) - \right. \\ \left. - (1+q-f)ac^2(\sin c\Theta + 9 \sin 3c\Theta) + fa(\sin c\Theta + \sin 3c\Theta) \right] \cdot \\ \cdot a(\sin c\Theta + \sin 3c\Theta) d\Theta = 0$$

Интегрируя и преобразуя, получаем:

$$f = \frac{c^2[(365c^4 - 82c^2 + 5) - q(41c^2 - 5)]}{5c^2 + 1} \quad (8.11)$$

Отсюда имеем:

$$q_{кр} = \frac{365c^4 - 82c^2 + 5}{41c^2 - 5} \quad (8.12)$$

### 8. 2. 3. С л у ч а й 2.

Аналогично, подставляя (8.10) в (1.02), получаем,

$$f = \frac{c^2 \left[ (365c^4 - 82c^2 + 5) - q \left( 41c^2 - 10 + \frac{1}{c^2} \right) \right]}{5c^2 + 1} \quad (8.13)$$

Отсюда имеем:

$$q_{кр} = \frac{365c^4 - 82c^2 + 5}{41c^2 - 10 + \frac{1}{c^2}} \quad (8.14)$$

### 8. 2. 4. С л у ч а й 3.

Аналогично двум предыдущим случаям получаем:

$$f = \frac{c^2 [(365c^4 - 82c^2 + 5) - q(41c^2 - 10)]}{5c^2 + 1} \quad (8.15)$$

Отсюда для коэффициента устойчивости следует формула:

$$q_{кр} = \frac{365c^4 - 82c^2 + 5}{41c^2 - 10} \quad (8.16)$$

Из (8.11), или (8.13), или (8.15) полагая  $q=0$ , получаем для параметра частоты ненагруженной арки:

$$f_0 = \frac{c^2(365c^4 - 82c^2 + 5)}{5c^2 + 1}$$

## § 9. Сопоставление результатов, полученных по приближенным и точным решениям

Из выведенных формул следует, что для двухшарнирной арки (как и в случае кольца и бесшарнирной арки) имеют место следующие неравенства:

$$f_1 < f_2 < f_3 \text{ т. е. } \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \\ \text{и } q_{1кр} < q_{2кр} < q_{3кр} \text{ т. е. } P_{1кр} < P_{2кр} < P_{3кр}$$

Индексы 1, 2, 3 соответствуют рассматриваемым случаям поведения нагрузки.

Из приближенных формул также следует, что зависимость между параметром частоты  $f$  и параметром нагрузки  $q$  линейна.

Поэтому и здесь удобно пользоваться графиками зависимости  $f$  от  $q$ .

Для построения этих графиков, приведем в таблице значения  $f_0$  и  $q_{кр}$  в зависимости от центрального угла арки  $2\theta_0$  при разном характере поведения нагрузки.

Таблица 4

Приближенные значения  $f_0$ ,  $q_{1кр}$ ,  $q_{2кр}$  и  $q_{3кр}$  для двухшарнирной арки в зависимости от  $2\theta_0$ .

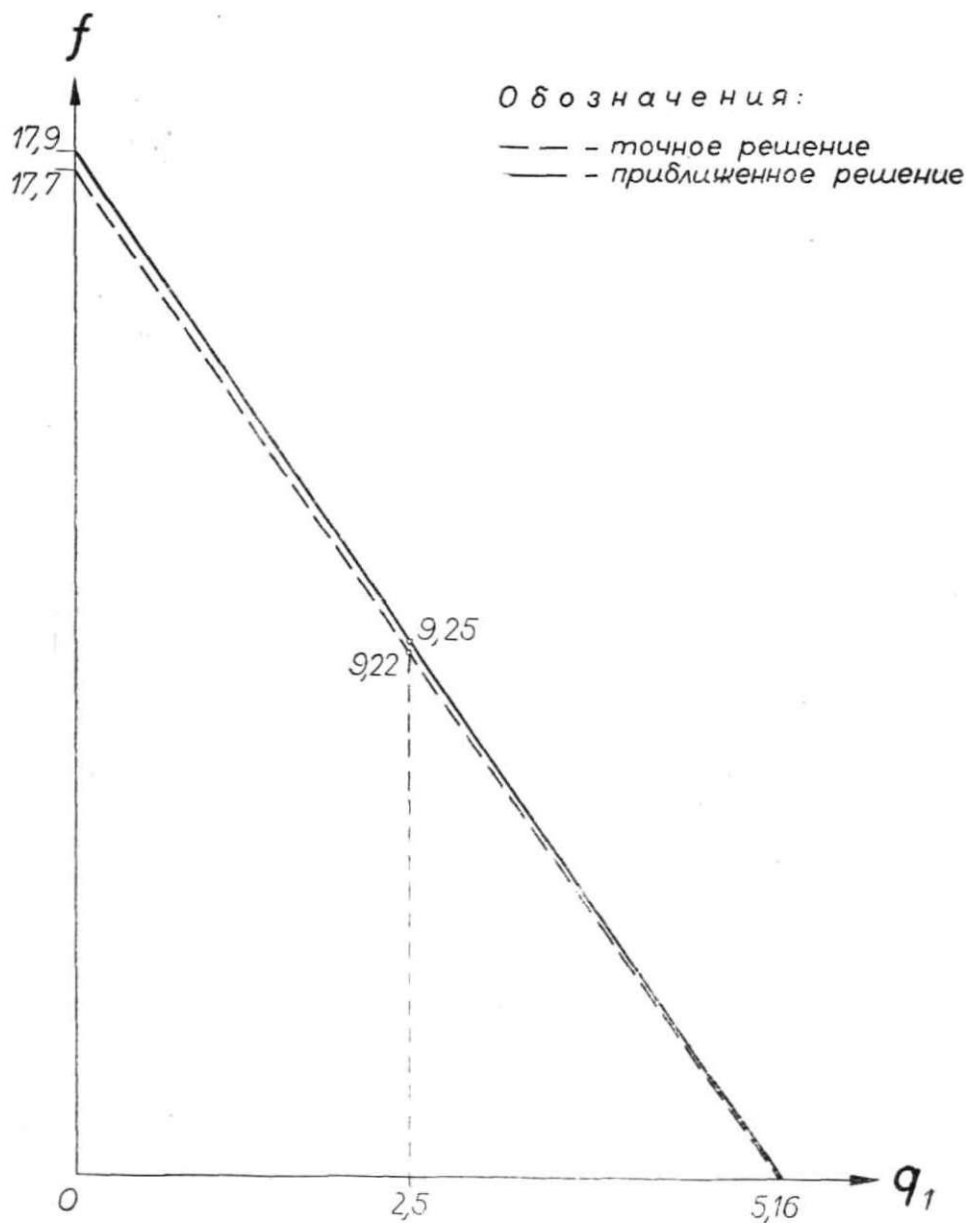
$2\theta_0$	Антисимметричные колебания (2 полуволны)				Симметричные колебания (3 полуволны)			
	$f_0$	$q_{1кр}$	$q_{2кр}$	$q_{3кр}$	$f_0$	$q_{1кр}$	$q_{2кр}$	$q_{3кр}$
20°	103372	323	324	324	476448	720	721	721
30°	20032	143	144	144	93499	320	321	321
40°	6171	80	81	81	29314	179,4	180,4	180,5
60°	1131	35,0	35,9	36,0	5641	79,2	80,3	80,3
90°	189	15,0	15,9	16,0	1051	34,7	35,8	35,8
120°	48	8,0	8,7	9,1	306	19,1	20,2	20,3
145°	17,9	5,2	5,7	6,4	132	12,8	13,8	14,0
150°	14,9	4,8	5,3	6,0	113	11,9	12,9	13,1
180°	5,1	3,0	3,3	4,5	48	8,0	9,0	9,3

О степени точности приближенных формул можно судить по следующим двум таблицам.

Таблица 5

Сопоставление точных и приближенных значений коэффициента устойчивости  $q_{2кр}$  двухшарнирной арки при антисимметричной деформации.

$2\theta_0$	По приближенной формуле (8.06)	По точному уравнению (7.11)	Разница в %
20°	324	323,9	0,03
30°	144	143,9	0,07
40°	81	80,9	0,12
60°	35,9	35,9	0,00
90°	15,9	15,8	0,63
120°	8,73	8,73	0,00
145°	5,73	5,73	0,00
150°	5,29	5,29	0,00
180°	3,27	3,27	0,00



Фиг. 4. Точные и приближенные значения параметра частоты антисимметричных плоских колебаний двухшарнирной арки с центральным углом  $2\theta_0 = 145^\circ$ .

Таблица 6

Сопоставление точных и приближенных параметров  $f_0$ ,  $f_1$  и  $q_{1кр}$  двухшарнирной арки с центральным углом  $2\theta_0 = 145^\circ$  при антисимметричных деформациях.

	По приближенным формулам	По точным уравнениям	Разница в %
$f_0$ ( $q=0$ )	17,9	17,7	1,1
$f_1$ при $q=5$	0,571	0,556	2,7
$f_1$ при $q=2,5$	9,25	9,22	0,3
	Формулы совпадают		
$q_{1кр}$	5,16	5,16	0

Из таблиц № 5 и 6 видно, что в данных примерах приближенные результаты отличаются от точных не более, чем на 3%.

Для примера построен график зависимости  $f$  от  $q$  для антисимметричных плоских колебаний двухшарнирной арки с центральным углом  $2\theta_0 = 145^\circ$  при первом случае поведения нагрузки (фиг. 4).

### Заключение

В настоящей статье исследован вопрос о свободных плоских колебаниях нагруженных бесшарнирных и двухшарнирных круговых арок. При этом:

#### 1. Для бесшарнирной арки.

- а) Выведены точные уравнения частот (аналогично выводу Валткинга для двухшарнирной арки). Для упрощения вычислений эти частотные уравнения преобразованы так, что они содержат только действительные числа. Полученные частотные уравнения использованы также для решения вопроса устойчивости. При этом получены, отсутствовавшие до сих пор, точные решения устойчивости при симметричной деформации для случаев 2 и 3.
- б) Так как точные решения привели к трансцендентным уравнениям, решение которых требует сравнительно большого труда, далее найдены приближенные решения, как для частот, так и для критических нагрузок. Среди этих решений новыми являются (как для частот, так и критических нагрузок) при антисимметричной деформации случаи 2 и 3, а при симметричной деформации случаи 1, 2, и 3.

## 2. Для двухшарнирой арки.

- а) Точные уравнения частот, выведенные Ф. В. Валткингом для *ненагруженной* арки, распространяются для определения частот свободных колебаний *нагруженных* арок при различном поведении нагрузки, а также для вывода точных выражений для определения критических нагрузок (среди них новыми являются выражения коэффициента устойчивости при симметричной деформации для случаев 2 и 3).
- б) Выведены приближенные решения, как для частот, так и для критических нагрузок. При этом новыми являются решения для определения частот при антисимметричных колебаниях для случаев 2 и 3 и при симметричных колебаниях для случаев 1, 2, 3, а также для определения критических нагрузок при антисимметричной деформации для случая 2, и при симметричной деформации для случаев 1, 2, 3.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. J. P. Den Hartog, The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs. *Philos Mag.* S. 7, Vol. 5, Nr. 28 1928 (p. 400—408).
2. F. W. Walting, Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern. *Ingenieur-Archiv*, Bd. V, Heft 6, 1934.
3. Б. П. Демидович, Колебания стержня, изогнутого по дуге круга. *Инженерный сборник*, т. 5, вып. 2, 1949 (стр. 112—132).
4. Н. К. Снитко, Определение частот собственных колебаний рамных систем и арок методом моментов. *Исследования по теории сооружений*, вып. 5, Госстройиздат, 1951 (стр. 62—76).
5. И. М. Рабинович, Приближенный способ определения частот и форм собственных колебаний параболических и других арок. *Исследования по теории сооружений*, вып. 5, Госстройиздат, 1951 (стр. 77—96).
6. Е. С. Сорокин, Колебания арок. *Строительная промышленность* № 11—12, 1939.
7. Е. С. Сорокин, Динамика междуэтажных перекрытий. М. Л. Госстройиздат, 1941.
8. К. К. Керопян, Свободные колебания изгиба кривого бруса малой кривизны, очерченного по дуге окружности. *Труды Краснодарского ин-та пищевой промышленности*, вып. 5, 1949.
9. K. Federhofer, Berechnung der niedrigsten Eigenschwingzahl des radialbelasteten Kreisbogen. *Ing. Archiv*, Bd. IV, 1933 (S. 276—286).
10. А. И. Оселедько, Влияние упругости закрепления концов круговой арки на частоту ее собственных колебаний. *Исследования по теории сооружений*, вып. 4, Госстройиздат, 1949.
11. В. Г. Чудновский, Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. Изд. АН УССР, Киев, 1952.
12. Е. В. Васерман, Влияние поведения нагрузки на частоту свободных колебаний кольца. *Вопросы динамики и динамической прочности*. Выпуск IV, 1956 г. Изд. АН Латв. ССР.
13. Б. М. Шумягский, Таблицы для решения кубических уравнений. Гостехиздат, 1950.



14. Е. Л. Николаи, Об устойчивости кругового кольца и круговой арки, сжатых равномерно распределенным нормальным давлением. Изв. Петроград. политехнич. ин-та, т. 27, 1918 (см. также Труды по механике, Гостехиздат, 1955).
15. А. Н. Динник, Устойчивость арок М. Л. Гостехиздат, 1946.
16. А. Н. Динник, Продольный изгиб. ГОНТИ, 1939.
17. Малкина, Устойчивость круговых арок под действием продольных периодических сил. Инженерный сборник т. XIV, 1953.
18. E. Hurlbrink, Festigkeits-Berechnung von röhrenartigen Körpern, die unter äusserem Drucke stehen. «Schiffbau» Bd. 9, 1908.
19. С. П. Тимошенко, Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1955.

A. Vācietis, *techn. zinātņu kandidāts*

## JAUNAS KONSTRUKCIJAS ŠTANCES TECHNISKAIS RAKSTUROJUMS

### Ievads

Aukstās štancēšanas tehnoloģija, kas ieguvusi plašu pielietojumu lielsēriju ražošanā, nepārtraukti uzlabojas un pilnveidojas. Tomēr parasti norāda noteiktas robežas aukstās štancēšanas pielietošanai, kas galvenokārt saistītas ar spiedņa un matricas izturību. Tā, piemēram, uzskata, ka izcērtot apaļu caurumu mīkstā tērauda skārdā, šī materiāla biezums  $s$  nedrīkst pārsniegt spiedņa diametru  $d$ , t. i. jābūt  $\frac{s}{d} < 1$ . Lai iegūtu caurumu biezākos materiālos ieteic lietot urbšanu, kas ir mazražīgāka operācija un bez tam prasa papildus apstrādi (asumu noņemšanu).

Minēto robežu štancēšanā izdevās pārsniegt rūpnīcas VEF inženierim — konstruktoram E. Oliņam, kurš 1949. gadā ieteica izgatavot oriģinālas konstrukcijas štanci, ar kuru varētu izcirst caurumus arī biezākos materiālos. Pēc šīs štances izgatavošanas 1951. gadā izrādījās, ka ar tās palīdzību var izcirst caurumus arī tad, ja materiāla biezums ir 2—2,5 reizes lielāks nekā spiedņa diametrs.

Pašlaik rūpnīcā VEF izgatavotas vairāk nekā 70 šādas štances, kas ievērojami samazināja urbšanas darbus un 1955. gadā deva rūpnīcai ekonomiju 500.000 rubļu apmērā. Darba ražīgums atsevišķās operācijās pieauga vairāk nekā 30 reizes.

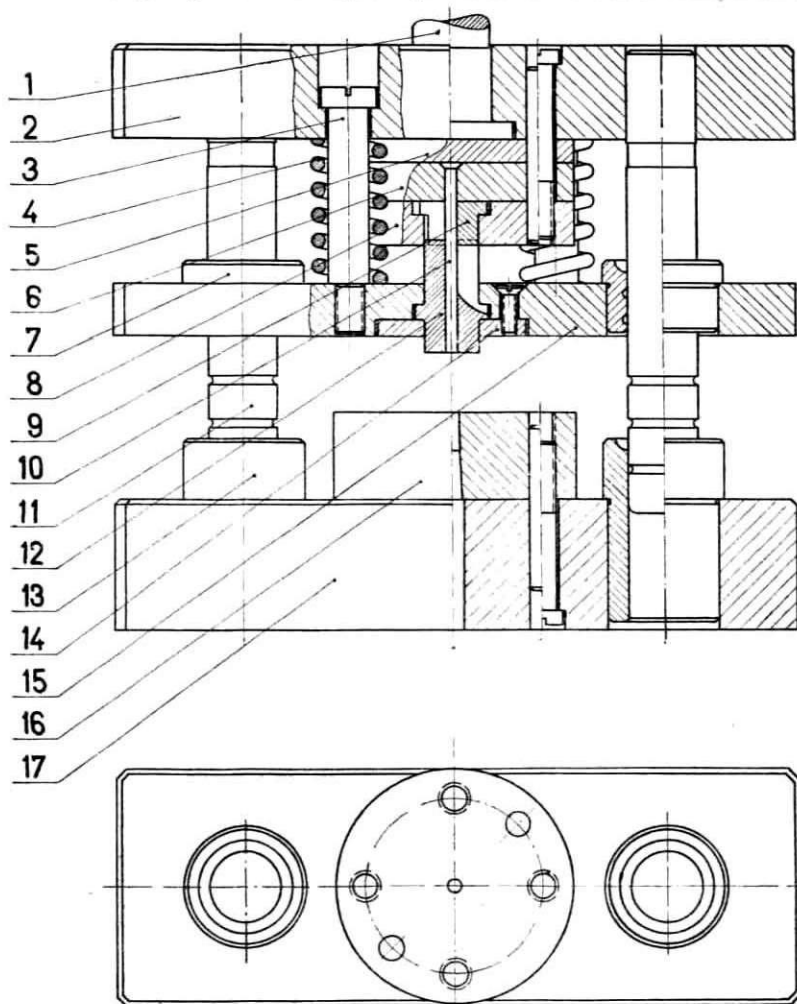
Neskatoties uz sekmīgu jaunās štances konstrukcijas pielietojumu rūpnīcā VEF, citās mūsu zemes rūpnīcās tā ieviešas ļoti gausi. Tas izskaidrojams, no vienas puses, ar tehnisko normatīvu trūkumu jaunās štances konstruēšanai, no otras puses, ar pastāvošo teoriju, kas apgalvo, ka nav iespējams štancēt caurumus tērauda skārdos, ja  $\frac{s}{d} > 1$ . Šo teoriju apstiprināja arī līdzšinējā prakse, štancējot ar parastās konstrukcijas štancēm. Literatūrā nav nekādu tehnisku datu par štancēšanas procesa norisi, ja  $\frac{s}{d} > 1$ .

Zemāk sniegti daži tehniski un konstruktīvi dati par jauno štances konstrukciju, štancēšanas procesa norisi biezos materia-

los, štancētā cauruma kvalitatīvo raksturojumu un galvenajiem faktoriem, kas paaugstina spiedņa izturību jaunās konstrukcijas štancēs.

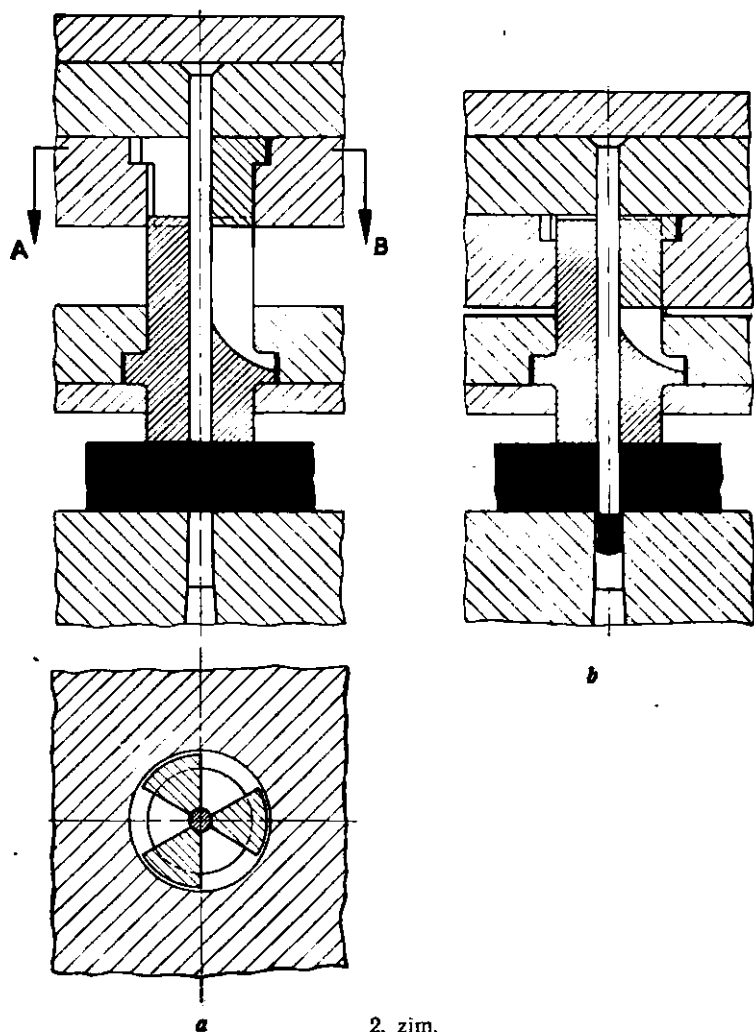
### 1. § Štances konstrukcija

Štances konstrukcija parādīta 1. zīm. Lai spiediņi 10 pasargātu no salocišanās, tas novietots vadčaulā 12, kuras augšgalā ir trīs sektorveidīgi iegriezumi. Sajos iegriezumos ieiet trīs sektorveidīgi



1. zīm.

ieliktņi 9, kas nostiprināti plāksnē 8. Šādi izveidoti vadelementi aptver spiediņi visā tā garumā un nedod tam iespēju izlocīties. 2. zīm. a parādīti spiediņa vadelementi darba gājiena sākumā, bet 2. zīm. b — darba gājiena beigās.



2. zīm.

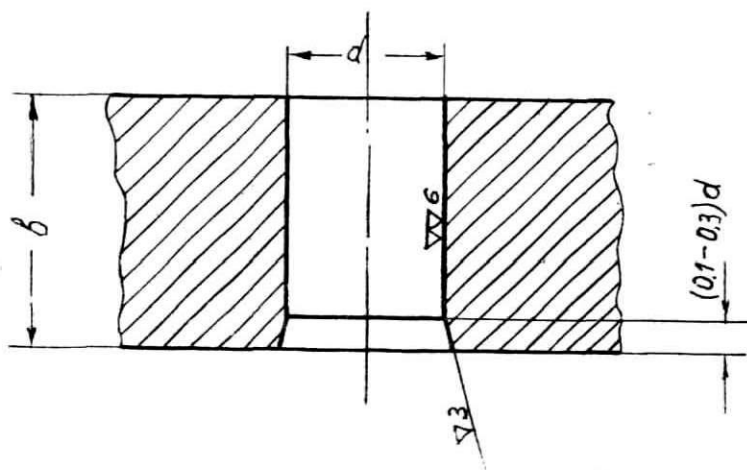
## 2. § Izciršanas process

Izciršanas procesa norises pētīšanai tika ņemts tērauds ar šādu raksturojumu:  $\sigma_B = 45,5 \text{ kg cm}^2$ ,  $H_B = 128$  un  $\delta_{10} =$

= 27,8%, no kura izgatavoja dažāda biezuma plāksnes. Spiedņa diametri tika ņemti robežās no 1,8—4,5 mm

Ja spēli starp spiedi un matricu izvēlas mazu, tad štancētā cauruma virsma ir gluda, spoža ar nelielu atdalīšanās konusu matricas pusē. (3. zīm.). Jāatzīmē arī izštancēto caurumu augstā precizitāte, kas atbilst 2 a un 3. precizitātes klasei.

Štancēšanas procesa norisi, ja  $\frac{s}{d} > 1$ , var iedalīt piecos posmos. Šie atsevišķie posmi, izcērtot caurumu 2,4 mm diametrā 7 mm biežā tērauda plāksnē, parādīti 4. zīm.



3. zīm.

1. Spiednim iespīēzoties materiālā uz tā virsmas ap spiedi parādas neliels valnītis, kā parastā štancēšanā. Tajā materiāla pusē, kas vērsta pret matricu, nekādas izmaiņas nav novērojamas.

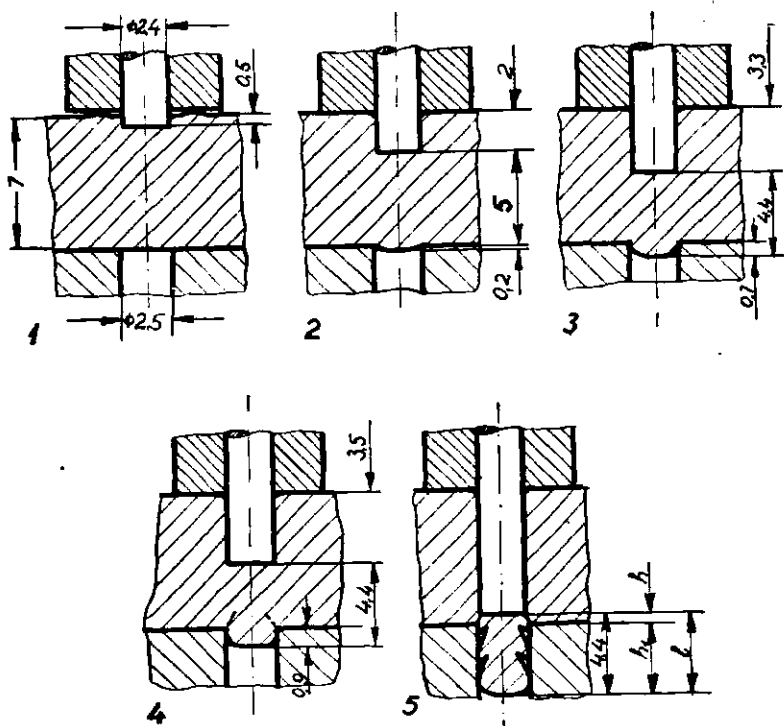
2. Tālākā iedziļināšanās procesā valnītis nozūd un pēc tam ap cauruma malām rodas neliels ierāvums (noapaļojums). Tajā materiālā pusē, kas vērsta pret matricu var novērot tikai nelielu materiāla ielikšanu matricas caurumā.

Spiedņa izspiestais materiāls pārvietojas uz sāniem un uz leju, kas izsauc materiāla nocietināšanos un nelielas struktūras izmaiņas ap štancēto caurumu. Nedaudz palielinās arī materiāla biezums štancētā cauruma tuvumā. Aplūkotā gadījumā materiāla biezums pieauga no 7,0 mm līdz 7,05—7,10 mm, zonā, kuru ierobežo rādiuss 7,5—9 mm. Izcērtot caurumu vēl biežākos materi-

alos ( $s=5d$ ) tā biezuma pieaugums ir vēl lielāks un izspiedums novērojams arī tajā materiāla pusē, kas vērsta pret spiedi.

Šim posmam atbilstošā makrostruktūra parādīta 5. zīm.

3. Kad spiednis sasniedzis noteiktu dziļumu (dotā gadījumā 3,3 mm) materiāla izspiešanās uz sāniem izbeidzas un sākas izstāncējuma iespiešanās matricā proporcionāli spiedņa gājienam. Šajā posmā var novērot materiāla tecēšanu visā cirpes šķērsgrī-



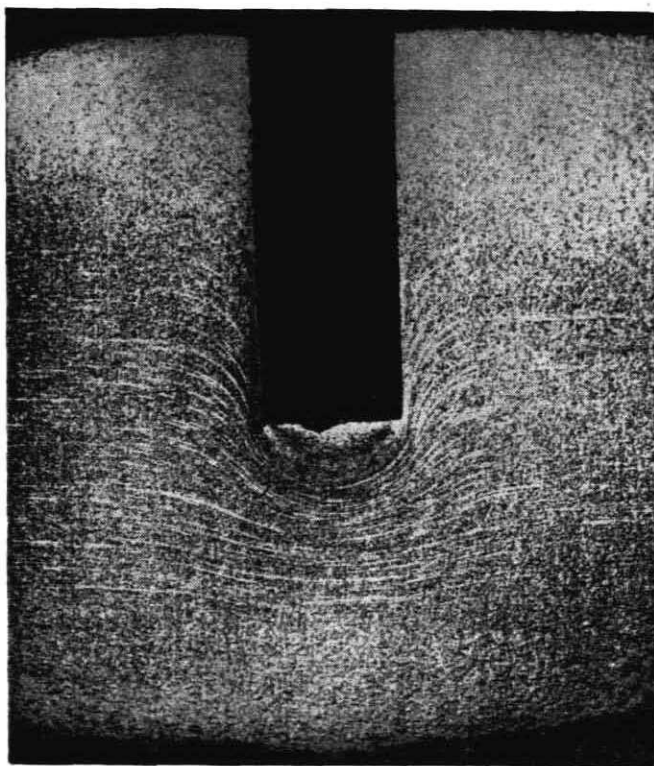
4. zīm.

zumā, kas redzams mikrofotografijā (6. zīm.). Plaisas netika novērotas ne pret spiedņa griezošām šķautnēm, ne arī pret matricas griezošām šķautnēm. Izciršanas spēks šajā posmā sasniedz maksimālās vērtības.

4. Cirpas šķērsgrīzumā parādās plaisas, kas nedaudz samazina izciršanas pretestību. Plaisas var novērot tikai nelielā dziļumā pret matricas griezošajām šķautnēm. Turpinoties štāncēšanas procesam, plaisas tālāk neattīstas, bet līdz ar izstāncējumu

tiek izstumtas no pamatmateriala. Šo plaisu rezultātā uz izštancējuma virsmas var novērot gredzenveidīgas joslas. 6. zīm. dotajā mikrofotografijā redzams, ka divas plaisas tiek izstumtas līdz ar izštancēto materialu caur matricu.

5. Kad spiednis nonācis pietiekoši tuvu matricai, notiek izštancētā materiala pilnīga atdalīšanās no pamatmateriala. At-



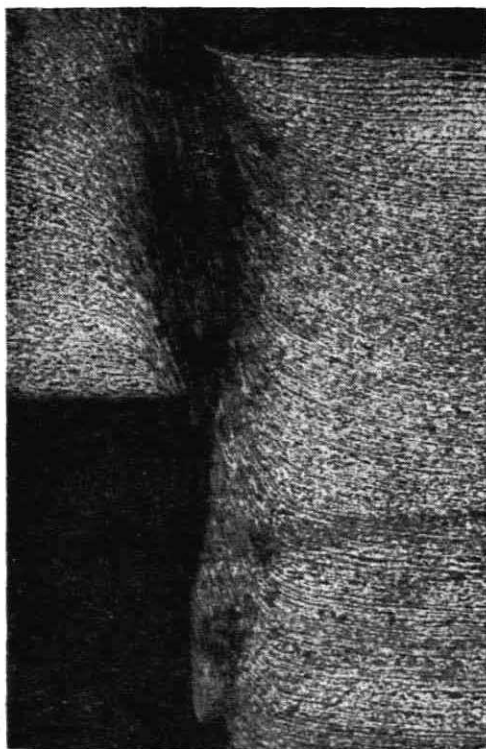
5. zīm.

lišanās rezultātā izštancētā cauruma apakšējā malā izveidojas atraušāns konuss, kura augstums vienlīdzīgs  $(0,1-0,3) d$ . Konusa augstums ir atkarīgs no spēles starp spiedi un matricu, štancējamā materiala plastiskuma un no vadčaulas piespiešanas spēka.

Gar izštancētā cauruma malām novērojama deformēta mikrostruktūra (7.zīm.) ar paaugstinātu cietību.

Stancējot materialus, kuru biezums lielāks par spiedņa diametru, izštancējuma garums vienmēr ir mazāks nekā materiāla biezums.

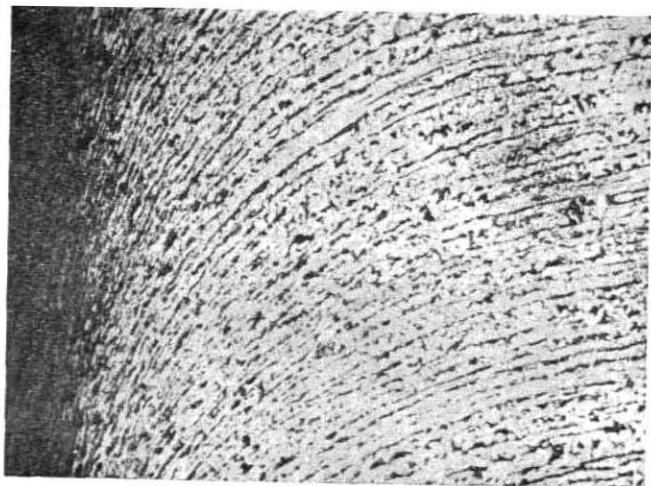
Štancēšanas procesa norisi dažāda biezuma materiālos attēlo 8. zīm. parādītā grafika. Šajā grafikā uz abscisas atlikts spiedņa gājiens, bet uz ordinatas izspieduma garums matricas pusē. No



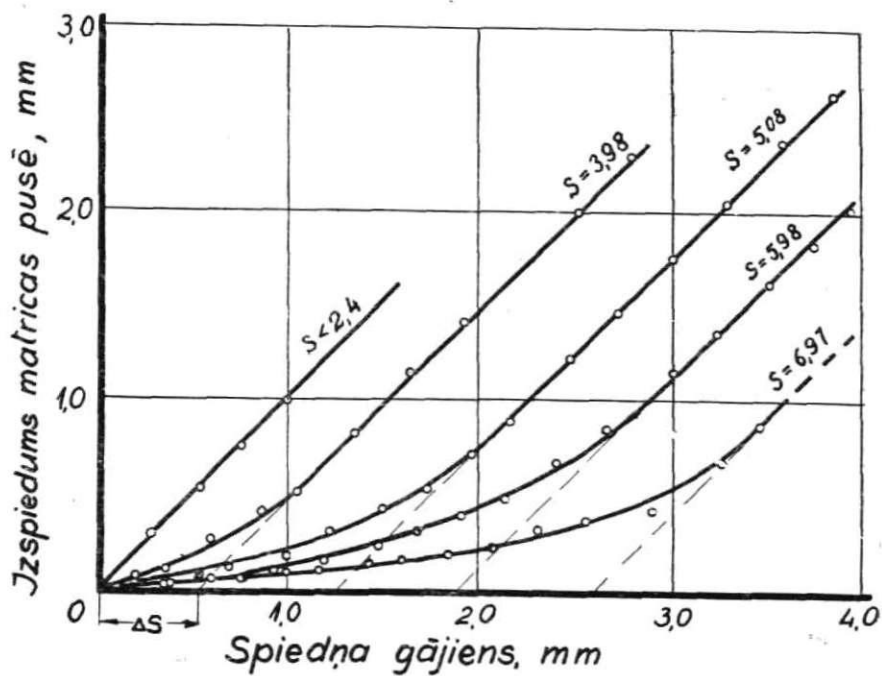
6. zīm.

grafikas redzams, ka pieaugot materiāla attiecinātam biezumam, pieaug tā štancēšanas procesa daļa, kas saistīta ar spiedņa iedziļināšanos štancējamā materiālā. Līdz ar to saīsinās izštancējuma garums. Saīsināšanās lielumu katram materiāla biezumam grafikā attēlo nogriežņi  $\Delta s$ , kurus veido līknes taisnās daļas turpinājums līdz krustpunktam ar abscisu.





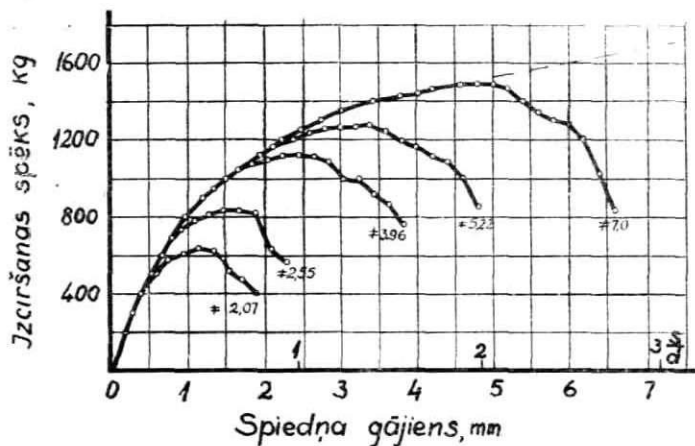
7. zīm.



8. zīm.

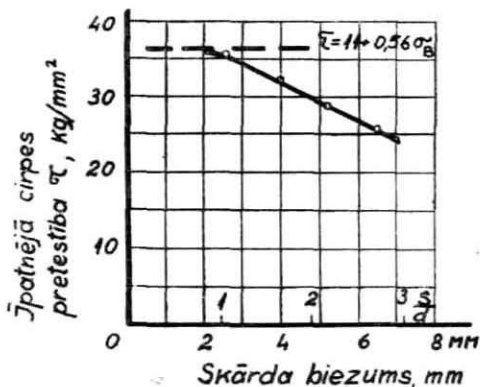
### 3. § Izciršanas spēks

Izciršanas spēks tika noteikts uz lēngaitas hidrauliskās preses štancējot dažāda biezuma materiālu. 9. zīm. parādīti eksperimentāli iegūtie rezultāti, štancējot caurumu 2,4 mm diametrā (mat-



9. zīm.

ricas diametrs — 2,5 mm). Visos gadījumos tika ņemts vienāds materials ar  $\sigma_B = 45,5 \text{ kg/cm}^2$  un  $H_B = 128$ , no kura izgatavoja dažāda biezuma plāksnītes: 2,07 mm, 2,55 mm, 2,96 mm, 5,22 mm un 7,0 mm. No grafikām redzams, ka sākuma posmā, kamēr notiek spiedņa iedziļināšanās process, visas līknes sakrīt. Tas nozīmē, ka spiedņa iedziļināšanās pretestība nav atkarīga no materiāla biezuma, bet tikai no tā raksturojuma.

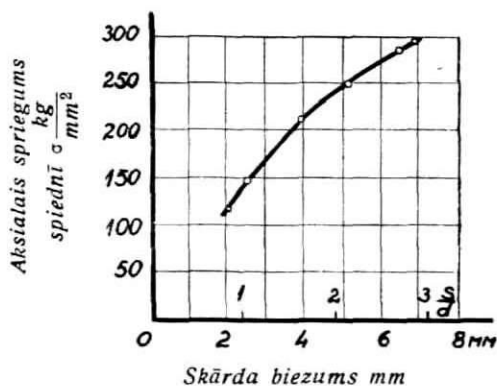


10. zīm.

Īpatnējā cirpes pretestība, ar kuru nosaka štancēšanas spēku projektējot štancēšanas operācijas, samazinās līdz ar biezuma pieaugšanu. 10. zīm. ar pārtrauktu līniju attēlota aprēķina ceļā iegūtā cirpes pretestība, bet ar pilnu līniju eksperimentāli iegūtā īpatnējā cirpes pretestība. Kā redzams no grafikas, pieaugot attiecinātam biezumam, īpatnējā cirpes pretestība samazinās. Aprēķinātā un eksperimentāli iegūtā cirpes pretestība sakrīt tikai līdz attiecībai  $\frac{s}{d} = 1$ .

#### 4. § Spriegumi spiednī

No eksperimentāli iegūtām spēka-ceļa grafikām aprēķināti spriegumi, kādi attīstas spiednī. Pieaugot materiāla attiecinātam biezumam  $\frac{s}{d}$ , spriegumi spiednī nepārtraukti pieaug. Sprieguma pieaugšana spiednī, atkarībā no materiāla attiecinātā biezuma,



11. zīm.

attēlota 11. zīmējumā, no kura redzams, ka gadījumā, ja štancējamā materiāla biezums ir trīs reizes lielāks par spiedņa diametru, spriegums spiednī sasniedz  $300 \text{ kg/mm}^2$ . Tas apmēram divkārtīgi pārsniedz tos spriegumus, kurus var pieļaut spiednīm parastās konstrukcijas štancēs. Jāatzīmē, ka šādu noslodzi spiedņi iztur ilgstoši, izpildot vairākus desmitus tūkstošus sitienu.

#### 5. § Spiedņa izturība

Viens no galveniem jautājumiem, pētot jaunās štances panākumus, ir noskaidrot faktorus, kuri rada paaugstināto spiedņa izturību.

Līdz šim literatūrā kā vienīgais faktors, kas paaugstina spiedņa izturību, tika minēts telpiskā spriegumstāvokļa izveidošanās darba gājiena laikā. Tomēr tuvāk izpētot spiedņa darba apstākļus jaunās štancēs, izrādījās, ka tas nav galvenais un vienīgais faktors, kas paaugstina spiedņa izturību.

Lai spiedni deformējot aksialā virzienā tajā rastos telpiskais spriegumstāvoklis, ir nepieciešams, ka deformācijas šķērsvirzienā  $\Delta d$  būtu lielākas nekā faktiskā sākotnējā spēle starp spiedni un vadčaulu  $a_t$ , pēc štances izgatavošanas

$$\Delta d > a_t \quad (1)$$

Tādā gadījumā vadčaula ierobežos spiedņa radialās deformācijas un pret spiedni vērsīsies reakcija no vadčaulas puses, tādējādi radot tilpisko spriegumstāvokli.

Pieņemot, ka deformācijas nepārsniedz proporcionalitātes robežu, nevienlīdzības kreiso pusi nosaka izteiksme:

$$\Delta d = \frac{\sigma}{E} d \cdot \mu \quad (2)$$

kur  $\sigma$  — aksialais spriegums spiednī  $\text{kg/mm}^2$ ,

$E$  — elastības modulis  $\text{kg/mm}^2$ ,

$d$  — spiedņa diametrs  $\text{mm}$ ,

$\mu$  — Puasona koeficients.

Nevienlīdzības labajā pusē ir faktiskais spēles lielums starp spiedni un vadčaulu, kas atkarīgs no izvēlētās sēžas un izgatavošanas precizitātes. Rūpnīca VEF šim salāgojumam lieto sēžu  $A_3/C_3$ .

Attiecība starp lielumiem  $\Delta d$  un  $a$  nav konstanta, bet ir atkarīga no spiedņa diametra. Šo lielumu savstarpējās attiecības redzamas no 12. zīm. parādītās grafikas.

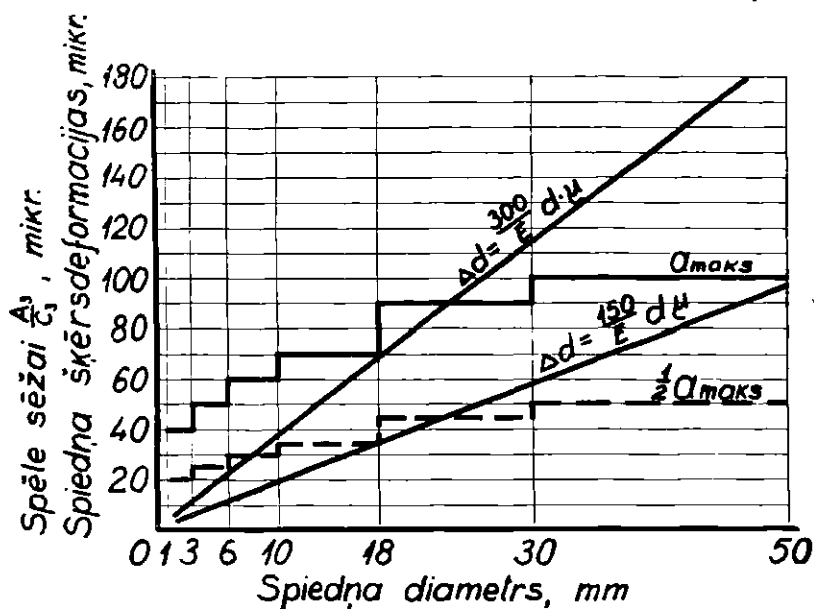
Spiedņa šķērsdeformācijas  $\Delta d$  atkarībā no diametra, saskaņā ar (1), grafikā attēlo starveidīgā likne. Sākotnējās spēles lielumu  $a$  starp spiedni un vadčaulu, pēc štances izgatavošanas, pieņemot starp tiem OCT sēžu  $A_3/C_3$ , grafikā raksturo kāpņveidīgās liknes. Augšējā kāpņveidīgā likne atbilst spēles maksimālai nozīmei, bet apakšējā likne spēles vidējai vai visvarbūtīgākai nozīmei ( $1/2 a$  maks.).

No grafikas redzams, ka spiedņiem ar diametru līdz 20 mm elastiskās šķērsdeformācijas ir mazākas nekā visbiežāk sagaidāmā vidējā spēle starp spiedni un vadčaulu. No tā seko, ka sloģojot spiedni elastisko deformāciju robežās telpiskais spriegumstāvoklis var izveidoties tikai liela diametra spiedņiem. Maza diametra spiedņiem elastiskās radialās deformācijas  $\Delta d$  var aizpildīt tikai nelielu daļu no sākotnējās spēles un tādēļ tiem telpiskais spriegumstāvoklis parasti neizveidojas.

Tomēr rūpnīcā labi panākumi sasniegti strādājot tieši ar maza diametra (apm. 2 mm) spiedņiem, neskatoties uz to, ka aksialie spriegumi spiedņi sasniedz 300 kg/mm<sup>2</sup>.

Rezumējot teikto jāsecina, ka jaunā štances konstrukcija pieļauj spiedņa plastiskās deformācijas, spiedņim atrodoties lineārā spriegumstāvoklī.

Pateicoties oriģinālas konstrukcijas vadelementiem paliekošās deformācijas neizsauc spiedņa salocišanos un lūšanu, kā tas ir parastās konstrukcijas štancēs, bet gan rada spiedņa nostiprinā-



12. zīm.

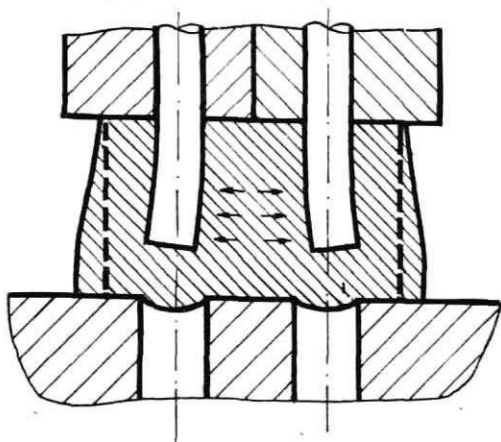
šanos un tā nestspējas paaugstināšanos. Lai pārbaudītu šo tezi, tika izdarīti eksperimenti ar spiedņiem no V8A tērauda, kas bija norūdināti no 790°C ūdenī un atlaidināti 20 min. pie temperatūras 150°C un pēc tam noslīpēti uz bezcentra slīpmašīnas līdz diametram 4,30 mm. Iegūtā cietība bija  $H_{Rc} = 61-62$ . Sos spiedņus novietoja starp vadelementiem, kuru iekšējais diametrs bija 4,53 mm un pakāpeniski slogoja līdz  $\sigma = 418$  kg/mm<sup>2</sup>. Pēc atslogošanas spiedņus no vadelementiem izņēma un pārbaudīja. Izrādījās, ka spiedņa diametrs bija palielinājies par 0,17 mm un tas nedaudz salicis. Izdarītais eksperiments pierāda, ka noteiktos apstākļos rūdīta tērauda spiedņi var ievērojami plastiski deformēties atrodoties lineārā spriegumstāvoklī, un ka šī plastiskās deformācijas paaugstina spiedņa nestspēju.

## 6. § Berzes spēku ietekme

Zināma loma spiedņa izturības paaugstināšanā var būt arī telpiskā spriegumstāvokļa ietekmei, tomēr izmantot pilnā mērā šo nestspējas paaugstināšanos traucē berzes spēki starp spiedi un vadčaulu.

Štancējot ar jaunās konstrukcijas štanci jāizšķir: berzes spēki starp spiedi un štancējamo materialu un berzes spēki starp spiedi un tā vadelementiem. Pārējās štances kustīgās daļas jāizgatavo tā, lai starp tām nerastos vērā ņemami berzes spēki.

Darba gājienā berzes spēki starp spiedi un štancējamo materialu tiek ietverti kopējā izciršanas spēkā (sk. 9. zīm.). Štances



13. zīm.

atpakaļgājienā šie berzes spēki apgrūtina spiedņa izvilkšanu no izštancētā cauruma. Šie spēki jāpārvar norāvēja atsperēm (sk. 1. zīm. 4. poz.), kuras savu uzdevumu veic labi, ja kopējais spēks norāvēja atsperēm vienlīdzīgs 5—10% no spēka, kāds vajadzīgs cauruma izciršanai darba gājienā.

Berzes spēki štances atpakaļgājienā var ievērojami pieaugt, ja vienlaicīgi štancē vairākus caurumus tuvu vienu otram, vai arī atsevišķu caurumu tuvu detaļas konturam. Tādā gadījumā pretestība, kādu sastop materiala izspiešanā sāņus nav visos virzienos vienlīdzīga un tā rada spiedņa salikšanu un ieķīlēšanos (sk. 13. zīm.).

Berzes spēki starp spiedi un vadčaulu rodas līdz ar telpiskā spriegumstāvokļa izveidošanos spiednī. Šo berzes spēku lielums  $N$  ir proporcionāls spriegumam starp saskares virsmām  $\sigma_r$ , berzes virsmas laukumam  $F$  un berzes koeficientam

$$N = f \cdot F \cdot \sigma_r$$

Tā kā vadčaulas zari ir daudz nestingrāki par vadčaulas apakšējo cilindrisko daļu, tad šie berzes spēki rodas galvenokārt starp vadčaulas apakšējo cilindrisko daļu un spiediņi.

Izejot no vadčaulas konstruktīvā izveidojuma un rūpnīcas normatīviem, berzes laukumu var noteikt ar izteiksmi:

$$F = 2\pi r \cdot 5,5r = 11r^2 \quad (3)$$

Pieņemot berzes koeficientu  $\mu = 0,15$  [3] iegūstam, ka berzes spēki ir

$$N = 0,15 \cdot \sigma_r \cdot 11r^2 = 5,18 \sigma_r \cdot r^2$$

t. i. berzes spēki aug proporcionāli radiusa kvadrātam. Tā kā liela diametra spiediņiem telpiskais spriegumstāvoklis iestājas ātrāk (sk. 12. zīm.), bet berzes spēku lielums aug proporcionāli radiusa kvadrātam, tad kļūst skaidrs, ka berzes spēku ietekme sevišķi spilgti izpaužas liela diametra spiediņiem.

Sakarības starp aksialiem un radially spriegumiem spiediņi var noteikt analītiski.

Radialo spriegumu starp berzes virsmām var noteikt analītiski, ja ir zināms sākotnējās spēles lielums starp spiediņi un vadčaulu  $a$ , spiedņa materiāla elastības un nostiprināšanās moduļi  $E_1$  un  $E_2$ , un vadčaulas deformēšanās spēja  $K$ .

Pieņemot, ka sākotnējā spēle starp spiediņi un vadčaulu vienlīdzīga nullei, radially spriegumu  $\sigma_r$  var aprēķināt ar izteiksmi:

$$\sigma_r = \sigma_e \frac{0,4}{K + 0,4} + (\sigma_a - \sigma_e) \left( \frac{1}{1 + 2K \frac{E_2}{E_1}} \right), \quad (4)$$

kur  $\sigma_e$  — elastības robežai atbilstošais spriegums

$\sigma_a$  — aksialais spriegums spiediņi

$K$  — vadčaulas deformēšanās koeficients, kas cilindriskai vadčaulai vienlīdzīgs

$$K = \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} + \mu, \quad (5)$$

kur  $R$  — vadčaulas ārējais radiuss

$r$  — vadčaulas iekšējais radiuss

$\mu$  — Puasona koeficients.

Ar izteiksmi (4) var aprēķināt  $\sigma_r$  atkarībā no aksialā sprieguma spiediņi.

Ja pieņemam, ka aksialais slogojums spiediņi vienlīdzīgs divkārtšam elastības robežas spriegumam, t. i.  $\sigma_a = 2\sigma_e$ , bet  $E_2 = 0,5 E_1$  un vadčaulas konstruktīvie parametri dod  $K = 1,5$ , kas atbilst rūp-

nīcas VEF normatīviem, tad iegūstam, ka darba gājiena laikā starp berzes virsmām rodas spriegums

$$\sigma_r = \sigma_e \left( \frac{0,3}{K+0,4} + \frac{1}{1+2K \frac{E_2}{E_1}} \right) = 0,56 \sigma_e, \quad (6)$$

t. i. spriegums starp berzes virsmām ir lielāks nekā puse no rūdītu tēraudu elastības robeža.

Kaut arī berzes spēki štances darba gājiena laikā ir ļoti lieli, tie nerada ievērojamus traucējumus darbā. Spiedņa pārsnāšanās vidus daļā praksē novērojama tikai tad, ja spiednis nav ar maksimālo cietību, t. i. ja  $E_2 \gg E_1$ .

Berzes spēki starp spiediņi un vadčaulu štances atpakaļgājiena laikā rodas tad, ja spiedņa paliekošās radialās deformācijas ir lielākas nekā sākotnējā spēle starp berzes virsmām. Ja sākotnējā spēle  $a=0$ , tad paliekošo spriegumu starp berzes virsmām  $\sigma_{ro}$  var noteikt ar analītiski iegūtu izteiksmi:

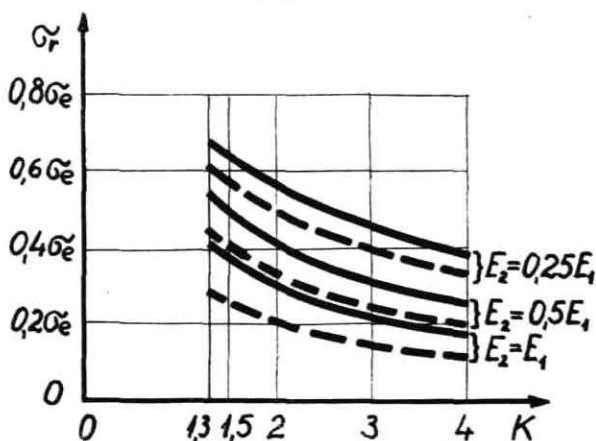
$$\sigma_{ro} = (\sigma_a - \sigma_e) \left( \frac{1}{1+2K \frac{E_2}{E_1}} - \frac{0,3}{K+0,7} \right) \quad (7)$$

Ievērojot šajā formulā iepriekšminētos konkrētos lielumus, gadījumam, ja  $\sigma = 2 \sigma_e$ , iegūstam:

$$\sigma_{ro} = 0,26 \sigma_e,$$

kas rāda, ka arī štances atpakaļgājiena laikā starp berzes virsmām var attīstīties lieli spriegumi.

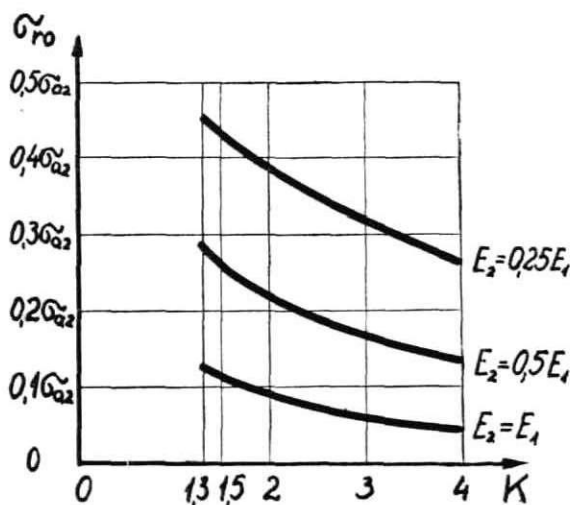
Aplūkojot izteiksmes (6) un (7) redzams, ka lielumu  $\sigma_r$  un  $\sigma_{ro}$  skaitliskās nozīmes ir atkarīgas no nostiprināšanās modula  $E_2$  un vadčaulas deformēšanās spējas  $K$ .



14. zīm.



Bez tam faktori  $\sigma_r$  un  $\sigma_{r_0}$  ir atkarīgi arī no sākotnējās spēles starp spiedi un vadelementiem. Jo lielāka sākotnējā spēle, jo vēlāk iestājas telpiskais spriegumstāvoklis un jo mazāki šie spriegumi un berzes spēki. Lai varētu savstarpēji salīdzināt šos lielumus, pieņemts, ka spiedi attīstas spriegums  $\sigma_a = 2\sigma_e$  un aprēķināti radiale spriegumi dažādiem gadījumiem. 14. zīm. dotas  $\sigma_r$  nozīmes izteiktas ar spriegumu, atbilstošu elastības robežai  $\sigma_e$ , gadījumā, ja  $E_2 = E_1$ ;  $E_2 = 0,5 E_1$  un  $E_2 = 0,25$ , bet  $K$  mainās robežās no 1,3 līdz 4. Ar pilnu līniju attēlotas  $\sigma_r$  nozīmes gadījumam ja  $a=0$ , bet ar raustīto gadījumam, ja  $a=0,35\%$   $d$ , kur  $d$  — spiedņa diametrs.



15. zīm.

Līdzīgā kārtā uzbūvēta grafika, kas parādīta 15. zīm., kur aprēķināti paliekošie radiale spriegumi  $\sigma_{r_0}$ , slogojot spiedi līdz spriegumam  $\sigma_a = 2\sigma_e$ . Šajā grafikā sākotnējā spēle pieņemta vienlīdzīga nullei.

Bērzes spēki starp spiedi un vadčaulu štances atpakaļgājiena laikā  $N_2$  var izsaukt spiedi stiepes spriegumus, kas pārsniedz stiepes izturību.

Stiepes spriegumi ir vienlīdzīgi:

$$\sigma_{st} = \frac{N_2}{\pi r^2} = \frac{5,18 \sigma_{r_0} \cdot r^2 \cdot 4}{\pi \cdot r^2} = 6,6 \sigma_{or}. \quad (8)$$

Izteiksme (8) rāda, ka samērā mazi paliekošie spriegumi starp berzes virsmām var izsaukt spiedni lielus stiepes spriegumus, kas tālu pārsniedz rūditu tēraudu stiepes izturību. Arī rūpnīcu praksē bieži novērots, ka spiedņi tiek norauti to augšējā (atlaidinātajā) zonā.

Aplūkotais piemērs uzskatāmi rāda, ka nav pareiza spiedņa ielaikošana vadčaulās bez spēles.

Eksperimentāli noteikts, ka normalai štances darbībai nepieciešams, lai minimalā spēle starp spiedni un vadčaulu būtu vienlīdzīga 1%  $d$ , bet maksimalā nedrīkst pārsniegt 3%  $d$ , lai nenotiktu spiedņa salikšana.

Izdarītie eksperimenti un arī grafikas 14. un 15. zīm. rāda, ka vislielākā ietekme spiedņa nestspējas paaugstināšanā ir rūditu tēraudu nostiprināšanās modulim  $E_2$ , kura konkrētās nozīmes pagaidām vēl maz izpētītas.

Neskatoties uz to, ka pašlaik nav precīzu datu par  $\sigma_e$  un  $E_2$  nozīmēm rūdītiem tēraudiem spiedē, izdarītā analīze atklāj spiedņa izturības paaugstināšanās faktoros.

#### SECINĀJUMI

Izdarītā spiedņa darbības analīze un eksperimenti atļauj izdarīt šādus secinājumus.

1. Paaugstināto spiedņa izturību jaunās konstrukcijas štancēs nevar izskaidrot vienīgi ar telpiskā spriegumstāvokļa izveidošanos spiednī. Maza diametra spiedņiem telpiskais spriegumstāvoklis neiestājas elastisko deformācijas rezultātā, jo tās ir ievērojami mazākas nekā sākotnējā spēle starp spiedni un vadčaulu.

2. Eksperimenti apstiprina, ka noteiktos apstākļos rūditus darba rīku tēraudus var ievērojami plastiski deformēt un spiedes spriegumi līdz 400 kg/mm<sup>2</sup> neizsauc spiedņa salūšanu arī tad, ja spiednis atrodas lineārā spriegumstāvoklī.

3. Plastisko deformāciju rezultātā rūditos tēraudos notiek ievērojama materialā nostiprināšanās, kas palielina spiedņa nestspēju. Prasmīgi izmantojot rūditu tēraudu spēju plastiski deformēties spiedē, ir iespējams ievērojami palielināt to nestspēju.

4. Telpiskā spriegumstāvokļa izmantošanu spiedņa nestspējas palielināšanā ierobežo lieli berzes spēki starp spiedni un vadčaulu.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Б. Айнбиндер, О штамповке глубоких отверстий, Известия АН Латв. ССР № 7, 1953.
2. А. Vācietis, Spiedņa izturība jaunas konstrukcijas štancēs. Disertācija, 1955. g.
3. М. В. Крагельский и И. Э. Виноградова. Коэффициенты трения, Машгиз, М. 1955.

## **ТЕХНИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ШТАМПА НОВОЙ КОНСТРУКЦИИ**

В работе описаны некоторые экспериментальные данные, полученные при пробивке отверстий в стальных листах, толщина которых превышает диаметр пуансона. Приводится техническая характеристика пробитого отверстия (фиг. 3), анализ отдельных этапов протекания процесса (см. микрофотографии на фиг. 4—8), определение напряжений, возникающих в пуансоне при пробивке (фиг. 9—11).

Рассчитана возможность возникновения объемного напряженного состояния в материале пуансона (фиг. 12) и влияние сил трения на его нормальную работу. Даются формулы и графики (фиг. 13, 14) для расчета радиальных давлений между пуансоном и направляющей втулкой при прямом и обратном ходе.

Выполненная работа позволяет сделать следующие выводы:

1. Повышенная прочность пуансонов в штампах новой конструкции не может быть объяснена только наличием объемного напряженного состояния. Для пуансонов с диаметром до 20 мм объемное напряженное состояние обычно не создается, так как упругие поперечные деформации меньше первичного зазора между пуансоном и направляющей втулкой.

2. Эксперименты подтверждают, что в определенных условиях закаленные инструментальные стали могут в значительных размерах пластически деформироваться, причем напряжения сжатия до  $400 \text{ кг/мм}^2$  в линейном напряженном состоянии не являются для них разрушающими.

3. Повышение несущей способности пуансона, возникающее вследствие объемного напряженного состояния, не может быть полностью использовано, вследствие значительных сил трения появляющихся между пуансоном и направляющей втулкой.

4. Небольшие пластические деформации в закаленных сталях сопровождаются большим упрочнением материала и повышают несущую способность пуансона. Умелое использование пластических деформаций при сжатии дает возможность значительно повысить несущую способность пуансонов.

*В. Н. ПАНТЕЛЕЕВ, доцент, кандидат технических наук*

## **МАСШТАБНЫЙ ФАКТОР ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ ОБРАЗЦОВ С КОНЦЕНТРАТОРОМ НАПРЯЖЕНИЯ**

### **§ 1. Введение**

Действие масштабного фактора в большинстве случаев циклического нагружения является общепризнанным. Его существование было доказано опытным путем уже первой работой в этой области, опубликованной Петерсоном [1] в 1930 году. В 1933 году Лер и Майлендер [2] по накопившимся к этому времени опытным данным имели основание утверждать, что «Предел усталости, определяемый до сих пор по тонким образцам 7,5 и 10 мм диаметром, имеет лишь сравнительное значение и ни в коем случае не может быть численной технической характеристикой металла».

В настоящее время опубликовано более ста работ посвященных влиянию размеров образца на предел выносливости. Многие из этих работ не представляют ценности в смысле установления закономерности масштабного фактора, поскольку не исключались побочные факторы, влияющие на величину предела выносливости.

Так в работе Михелсена [3] были подвергнуты различным испытаниям образцы диаметром 8, 16, 40 и 80 мм, изготовленные из двух сталей. Но образцы разных размеров изготовлялись из заготовок, прокатанных на разные сечения, следовательно, помимо масштабного фактора, введен был дополнительный фактор — влияние степени обжатия при прокатке. Другим примером могут служить испытания Хорджера и Нейферта [4] образцов диаметром 7,5; 37,5 и 320 мм. Образцы первых двух размеров испытывались после чистовой обточкой, а образцы большого диаметра — после обдирки с сохранением черновин на поверхности. Кроме того, малые образцы вытачивались, как и большие, из вагонной оси, а средние — из специально прокатанной заготовки.

Третьим примером может служить работа Хейфеца [5]. Испытанные им образцы 5; 7; 10; 11,7 и 30 мм диаметром выре-

зались из круглой заготовки 65 мм диаметром. Наибольший образец вытачивался из центральной, т. е. ликвационной зоны. Помимо того, относительная длина образцов была не одинакова, т. е. длина образцов не была пропорциональна диаметру.

Это только отдельные примеры; их можно было бы назвать гораздо больше. Сказанное заставляет очень внимательно приглядываться к методике проведения испытаний, прежде чем использовать их результаты.

Первые работы в рассматриваемой области привели к выводу, что масштабный фактор в своей основе имеет чисто геометрическую закономерность (Фаулхабер [6], Фаулхабер, Бухгольц и Шульц [7]). Это лежит в основе кривой Лера и его рекомендации определять предел выносливости образца большого диаметра путем снижения предела выносливости малого образца на определенный процент без учета состава и свойств стали. Однако, как показали дальнейшие опыты, чем прочнее сталь, тем больше крутизна падения кривой Лера, т. е. тем больше масштабный фактор.

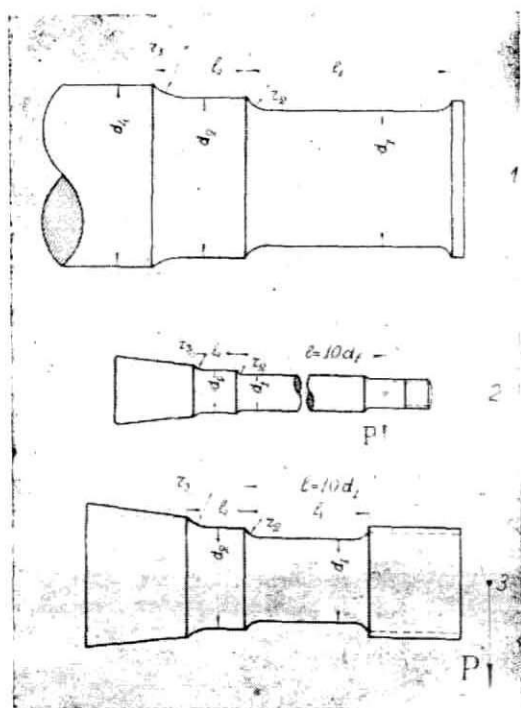
Впоследствии был предложен целый ряд математических выражений, позволяющих вычислить предел выносливости образца любого диаметра, если известны пределы выносливости образцов одного или двух диаметров. Эти формулы нельзя принять состоятельными, так как их вывод не обоснован правильным вскрытием физической сущности явления усталости и масштабного фактора, и поэтому естественно частое несовпадение результатов вычисления с опытными данными.

К наиболее известным относятся: формула Мура [8], формула Афанасьева [9], гипотеза Одингга [10], ее обобщение, данное Хейфецом [5] и другие.

Наиболее глубоко теоретически обоснованными надо считать работы Н. Н. Афанасьева. Не вдаваясь здесь в подробный разбор недостатков обоснований его теории, необходимо отметить, что по теории Н. Н. Афанасьева должен существовать масштабный фактор и при растяжении-сжатии, чего в действительности не наблюдается. Группа формул Мура, Одингга и Хейфеца представляют из себя модификации конструктивно идентичных математических выражений; все они приводят к постоянству по величине пластически деформированной зоны металла образца независимо от его абсолютных размеров.

Предлагаемая гипотеза автора отличается от других своей большой простотой, так как масштабный фактор, несмотря на сложность самого явления усталости, имеет некоторую геометрическую закономерность. Состоятельность этой гипотезы подтверждается универсальностью приложения его формулы ко

всем случаям усталости, где действует масштабный фактор. Основую для создания гипотезы автора послужили опыты по испытанию образцов из осевой стали [11] диаметром 10; 20; 30; 50 и 70 мм. Форма образцов была пропорциональна пред-



Фиг. 1. Часть вагонной оси и форма образцов, испытанных автором.

подступичной части и удлиненной до  $10 d_1$  цапфы железнодорожной вагонной оси с сохранением пропорциональными всех выкружек (см. фиг. 1 и таблицу 1).

Размеры образцов

Таблица 1.

$d_1$	$d_2$	$l_1$	$l_2$	$r_2$	$r_3$	Обозначение образца на фиг. 1
110	130	170	76	20	40	1 — цапфа вагонной оси
10	11,8	100	7	1,8	3,6	
20	23,6	200	13,8	3,6	7,2	
30	35,5	300	20,7	5,5	10,9	2
50	59,1	80	34,6	9,1	18,2	
70	82,7	100	48,4	12,7	25,4	3 — испытывались с удлинителем $l_1 = 500$ и $700$ мм

Для исключения влияния посторонних факторов соблюдались аналогичность строения стали, режимов механической обработки, чистоты поверхности и условий испытания.

Дальнейшее изучение проблемы привело к приложимости гипотезы ко всем случаям циклического нагружения, вызывающего распределение среднестатистического напряжения в сечении образца по линейному закону (изгиб, кручение, изгиб с растяжением и т. п.).

Главным в работе автора являются не сами формулы и не теоретический вывод об отсутствии масштабного фактора при статистически равном напряжении всего сечения образца (растяжение—сжатие или срез), а то, что при увеличении диаметра (или высоты) образца сверх 40 мм предел выносливости практически не снижается (конечно, при исключении побочных факторов, влияющих на величину предела усталости, т. е. при идентичности условий испытания).

## § 2. Вывод формул и проверка их правильности

В настоящее время считается общепризнанным, что процесс усталости состоит в образовании очагов усталости в пределах одного или нескольких зерен металла, претерпевших многократные сдвиги, приведшие к нарушению сплошности этих отдельных зерен или групп зерен. Причинами возникновения сдвигов при циклическом нагружении в отдельном зерне или в группе зерен могут быть:

а) неблагоприятная ориентация плоскостей малого сопротивления сдвигу одного или группы зерен металла по отношению к действующим максимальным напряжениям сдвига, возникающих в материале при нагружениях и

б) местные случайные концентраторы напряжений (неблагоприятной формы неметаллические включения, микротрещины и т. д.).

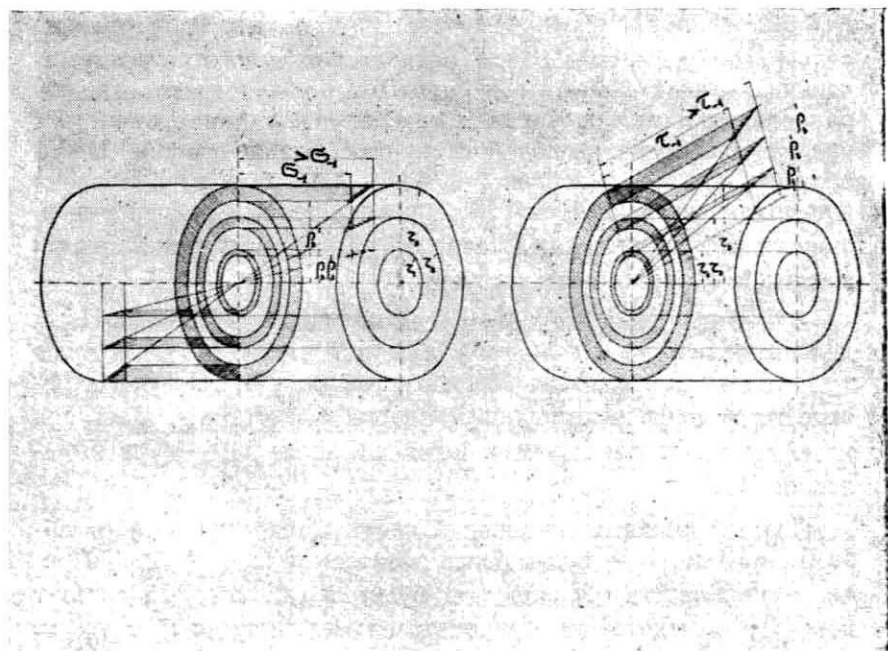
Для возникновения очага усталости необходимо, чтобы среднее статистическое напряжение при циклическом нагружении было бы достаточно большим, хотя по величине может быть значительно ниже предела пропорциональности. Однократное нагружение среднестатистическим напряжением меньшим предела пропорциональности, обычно не вызывает сдвигов в отдельных зернах металла, но многократное повторение таких напряжений вызывает сдвиги. Опытами автора установлено появление первых сдвигов в отдельных зернах или в группах только после повторения циклов напряжения, немного больших предела усталости, 10000—15000 раз. Подобное же явление наблюдал раньше Н. Н. Афанасьев [12]; им были обнаружены первые явно видимые сдвиги после 10000—30000 циклов напряжения. Это показывает, что действительное на-

пряжение в поликристаллическом металлическом образце весьма неоднородно. Подсчитать действительное напряжение в отдельных зернах металла пока не представляется возможным.

Очагами разрушения от усталости необходимо считать все участки, в которых при циклическом нагружении возникают повторные сдвиги. Этих участков, в практически однородном материале, на единицу опасной напряженной площади сечения образца будет  $k$  единиц.

В случае циклического нагружения, вызывающего напряжения в материале, изменяющиеся по закону треугольника, возникают зоны максимального напряжения. Если максимальное напряжение будет хотя бы немного превышать предел выносливости, то вероятность образования трещин усталости  $\Omega$  будет пропорциональна числу очагов усталости  $k$  и величине площади сечения образца, находящейся под напряжением, превосходящим предел выносливости. Определяя вероятность возникновения усталости  $\Omega$  из схем, изображенных на фиг. 2, получим:

$$\Omega = \lambda k \pi (r_x^2 - \rho_x^2) \quad (1)$$



Фиг. 2. Схемы изменения площади опасно напряженной зоны при изменении диаметра образца.



где:  $\lambda$  — коэффициент пропорциональности,  
 $r$  — радиус образца и  
 $\rho$  — радиус ядра образца, находящегося под безопасным напряжением — напряжением меньшим предела выносливости.

Как видно, для упрощения решения задачи в схемах допущено, что предел выносливости одинаков для всех образцов (чего в действительности не наблюдается).

Опасными на схемах отмечены напряжения начиная от безопасного  $\sigma_{-1}$  (или  $\tau_{-1}$ ) и до максимального напряжения, большего предела выносливости ( $>\sigma_{-1}$  или  $>\tau_{-1}$ ). Как видно на схемах, с увеличением поперечного размера образца, при том же максимальном напряжении ( $>\sigma_{-1}$ ) опасно напряженная площадь сечения возрастает. Следовательно, возрастет и вероятность образования трещин усталости, так как в выражении (1)  $\rho_x$  уменьшается. Предел выносливости с увеличением вероятности, естественно, понижается и достигает своего минимума при радиусе образца, равном бесконечности. Этот предел выносливости обозначим через  $\sigma_{-1(\infty)}$ . Это является пределом выносливости образца, равнонапряженного по всему сечению: в левой схеме вместо треугольников появятся две параллельные линии на уровнях максимальных напряжений, что превращает схему изгиба в схему растяжение-сжатие. Таким образом, предел выносливости бесконечно большого образца при циклическом изгибе  $\sigma_{-1(\infty)}$  превращается в предел выносливости при растяжении-сжатии  $\sigma_{-1p}$  (при растяжении-сжатии масштабный фактор отсутствует).

В противоположность этому самому низкому значению предел выносливости с толщиной образца, стремящейся к нулю  $\sigma_{-1(0)}$  будет наибольшим. Это объясняется уменьшением вероятности образования трещин усталости вследствие возрастания  $\rho_x$  до  $r_x$ , что ведет к уменьшению разности  $r_x^2 - \rho_x^2$  в выражении (1).

Полный диапазон изменений предела выносливости от образца  $r=0$  до  $r=\infty$  будет равен разности  $\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}$ . Предел выносливости образца  $r=x$  будет  $\sigma_{-1(x)}$ , который состоит из  $\sigma_{-1(\infty)}$  с некоторым приростом на величину  $\Delta\sigma_x$ :  $\sigma_{-1(x)} = \sigma_{-1(\infty)} + \Delta\sigma_x$ .

Это увеличение  $\Delta\sigma_x$  представляет собою некоторую долю

от разности  $\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}$ , обратно пропорциональную вероятности образования трещин усталости:

$$\Delta\sigma_x = \alpha \frac{\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}}{\Omega} \quad (2)$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности.

Таким образом предел выносливости образца радиусом равным  $x$  будет:

$$\sigma_{-1(x)} = \sigma_{-1(\infty)} + \alpha \frac{\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}}{\lambda k \pi (r_x^2 - \rho_x^2)} \quad (3)$$

Отсюда:

$$\Delta\sigma_x = \sigma_{-1(x)} - \sigma_{-1(\infty)} = \frac{\alpha(\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)})}{\lambda k \pi (r_x^2 - \rho_x^2)} \quad (4)$$

Из схем фиг. 2 следует, что:

$$\frac{\rho_1^2}{r_1^2} = \frac{\rho_2^2}{r_2^2} = \dots = \frac{\rho_x^2}{r_x^2} = c \quad (5)$$

Поэтому выражение (4) переписывается так:

$$\sigma_{-1(x)} - \sigma_{-1(\infty)} = \frac{\alpha(\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)})}{\lambda k \pi (1 - c) r_x^2} \quad (6)$$

или, обозначая  $\frac{\alpha}{\lambda k \pi (1 - c)} = \beta$ :

$$\sigma_{-1(x)} - \sigma_{-1(\infty)} = \beta \frac{\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}}{r_x^2} \quad (7)$$

Полагая теперь, что  $x = r_1$  и  $x = r_2$  получим:

$$\sigma_{-1(1)} - \sigma_{-1(\infty)} = \frac{\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}}{r_1^2} \quad (8)$$

$$\text{и } \sigma_{-1(2)} - \sigma_{-1(\infty)} = \beta \frac{\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}}{r_2^2} \quad (9)$$

вычитанием (9) из (8) находим:

$$\begin{aligned} \sigma_{-1(1)} - \sigma_{-1(2)} &= \beta \left( \frac{\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}}{r_1^2} - \frac{\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}}{r_2^2} \right) = \\ &= \beta (\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}) \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

откуда:

$$\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)} = \frac{\sigma_{-1(1)} - \sigma_{-1(2)}}{\beta \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right)} \quad (11)$$

Подставляя значение  $\sigma_{-1(0)} - \sigma_{-1(\infty)}$  из (7) в (11), получим:

$$\sigma_{-1(x)} - \sigma_{-1(\infty)} = \frac{\sigma_{-1(1)} - \sigma_{-1(2)}}{\frac{r_x^2}{r_1^2} - \frac{r_x^2}{r_2^2}} \quad (12)$$

Окончательно, после простых преобразований получим:

$$\sigma_{B(x)} = \sigma_{B(\infty)} + \frac{\sigma_{B(1)} - \sigma_{B(2)}}{\frac{d_x^2}{d_1^2} - \frac{d_x^2}{d_2^2}} \quad (13)$$

здесь предел выносливости для частного случая симметричного цикла ( $\sigma_{-1}$ ) заменен пределом выносливости любого цикла  $\sigma_B$ .

С помощью этой формулы (13) можно вычислить предел выносливости  $\sigma_{B(x)}$  образца любого диаметра  $d_x$ . Для этого необходимо предварительно определить пределы выносливости  $\sigma_{B(1)}$  и  $\sigma_{B(2)}$  образцов, имеющих соответственно диаметры  $d_1$  и  $d_2$ , а затем вычислить предел выносливости  $\sigma_{B(\infty)}$ ; для этого в выражении (13)  $\sigma_{B(x)}$  заменяется через  $\sigma_{B(1)}$ ;

$$\sigma_{B(\infty)} = \sigma_{B(1)} - \frac{\sigma_{B(1)} - \sigma_{B(2)}}{1 - \frac{d_1^2}{d_2^2}} \quad (14)$$

Как уже отмечалось выше, материалом для вывода формул служили опытные данные испытания образцов диаметром 10; 20; 30; 50 и 70 мм, обозначенные большими кружками на фиг. 3 и перечисленные в таблице на фиг. 3. По формуле (14) были вычислены восемь значений  $\sigma_{-1(\infty)}$  и пределы выносливости образцов диаметром от 5 до 80 мм [13]. Результаты вычислений сведены в сокращенную таблицу фиг. 3 и на самой фигуре нанесены максимальные, минимальные и средние арифметические значения, полученные при вычислении. Ясно видно полное совпадение расчетных и опытных данных.

Выводами, аналогичными изложенным выше, получают формулы для случаев знакопеременного кручения и плоского изгиба;

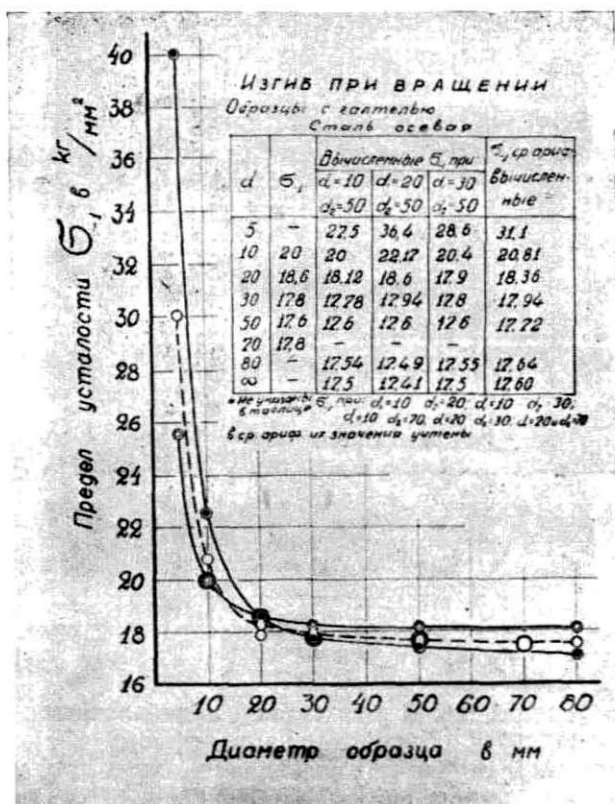
$$\text{для кручения } \tau_{B(x)} = \tau_{B(\infty)} + \frac{\tau_{B(1)} - \tau_{B(2)}}{\frac{d_x^2}{d_1^2} - \frac{d_x^2}{d_2^2}} \quad (15)$$

$$\text{плоского изгиба } \sigma_{B(x)} = \sigma_{B(\infty)} + \frac{\sigma_{B(1)} - \sigma_{B(2)}}{\frac{h_x}{h_1} - \frac{h_x}{h_2}} \quad (16)$$

где  $h$  — высота образца.

От ширины образца, как видно из формулы, предел выносливости не зависит.

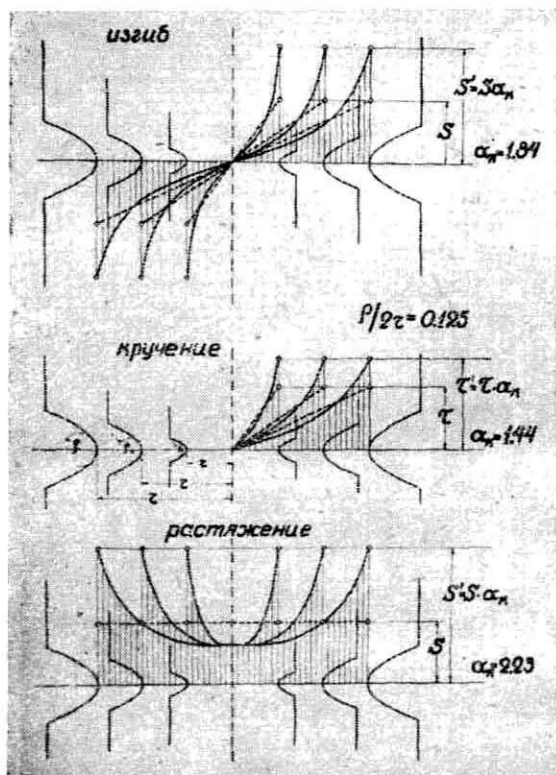
Эти формулы приложимы ко всем случаям циклического нагружения, где имеется проявление масштабного фактора, не-



Фиг. 3. Кривые изменения предела усталости в зависимости от диаметра образца. Большими кружками обозначены результаты испытания. Сплошными линиями охватываются крайние результаты вычисления, а пунктирной — средние арифметические.

зависимо от наличия или отсутствия искусственных концентраторов напряжения.

Объяснение приложимости этих выводов и формул к случаям образцов с концентраторами напряжений так же просто, как и для гладких образцов. Концентраторы напряжения вы-

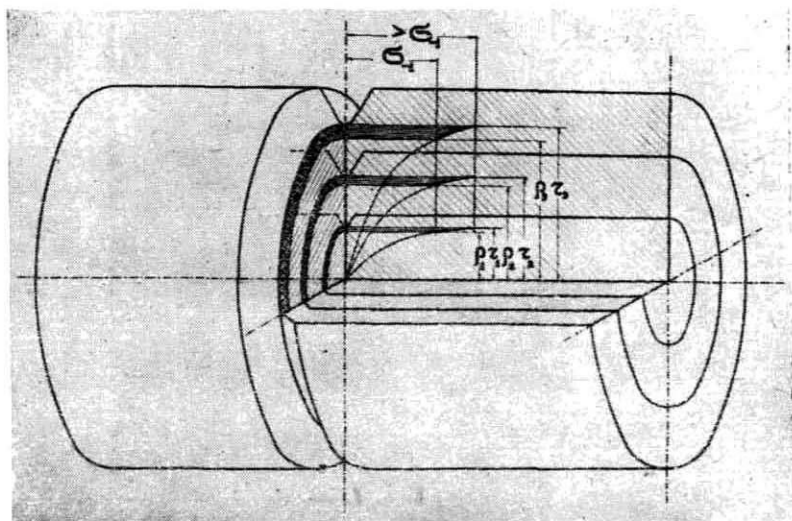


Фиг. 4. Схемы распределения напряжений по сечению образцов, имеющих концентраторы напряжений (по Нейберу).

зывают появление пиков напряжений и добавочных напряжений, приводящих к объемному напряженному состоянию. В рассматриваемом случае для упрощения дополнительными напряжениями можно пренебречь. По Нейберу [14], в случае глубокого гиперболического надреза, коэффициент концентрации  $\alpha_k$  в круглом образце достигает значений: при изгибе  $\alpha_k = 1,84$ , при кручении  $\alpha_k = 1,44$  и при растяжении  $\alpha_k = 2,23$ . При пропорциональном изменении всех размеров образца, т. е.

изменении диаметра и надреза с сохранением постоянными отношения радиуса выкружки и глубины надреза к радиусу образца и т. д., коэффициенты концентрации не изменяются и имеют место схем, приведенных на фиг. 4. В этих случаях относительный градиент напряжения  $\frac{d\sigma}{d\frac{D}{n}}$  или  $\frac{dS}{d\frac{D}{n}}$  остается одинаковым

в каждой из трех приведенных схем фиг. 4. Относительным градиент назван потому, что отношение приращения напряжения  $d\sigma$  принято не к абсолютному элементу длины  $dx$ , а к доле диаметра образца  $d\frac{D}{n}$ . Это приводит к схеме, пока-



Фиг. 5. Схема изменения площади опасно напряженной зоны при изменении диаметра образца с концентратором напряжений.

занной на фиг. 5, как видно, совершенно одинаковой со схемами фиг. 2. Отсюда:

$$\frac{\rho_1^2}{r_1^2} = \frac{\rho_2^2}{r_2^2} = \dots = \frac{\rho_x^1}{r_x^2} = c,$$

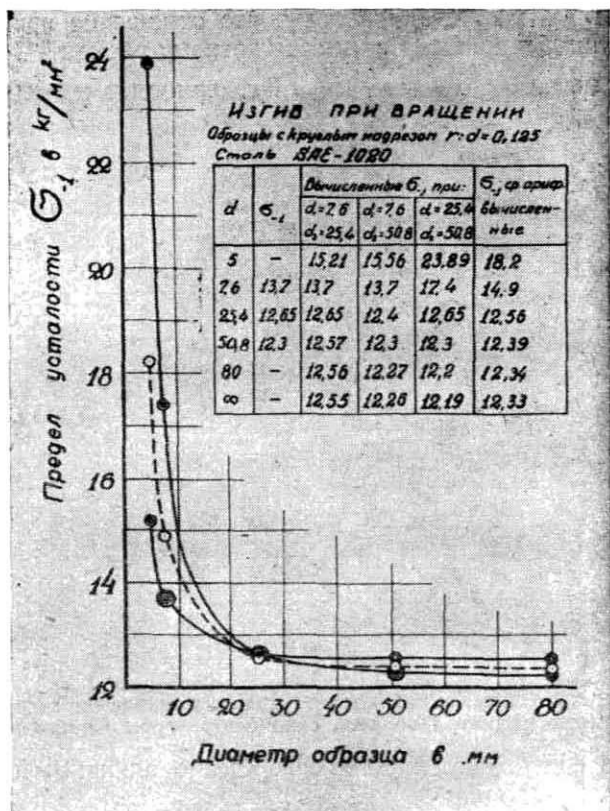
т. е. попережнему получается выражение (5).

Следовательно весь вывод формул (13), (15) и (16) остается таким же и для образцов с концентраторами напряжений.

Примерами проверки правильности формул могут служить вычисления пределов выносливости образцов диаметром от 5 до 80 мм и  $\sigma_{-1(\infty)}$  (или  $\tau_{-1(\infty)}$ ) по опытным данным, заимствованным из работ других авторов.

# 1. ИСПЫТАНИЕ НА ЦИКЛИЧЕСКИЙ ИЗГИБ НАДРЕЗАННЫХ ОБРАЗЦОВ (МУР И ДЖОРДЕН [21])

Испытывались стали: а) 1020, предел выносливости гладкого образца диаметром 6,35 мм этой стали  $\sigma_{-1} = 20,4$  кг/мм<sup>2</sup> и б) 2345, содержащей 0,46% С и 3,32% Ni, предел выносли-



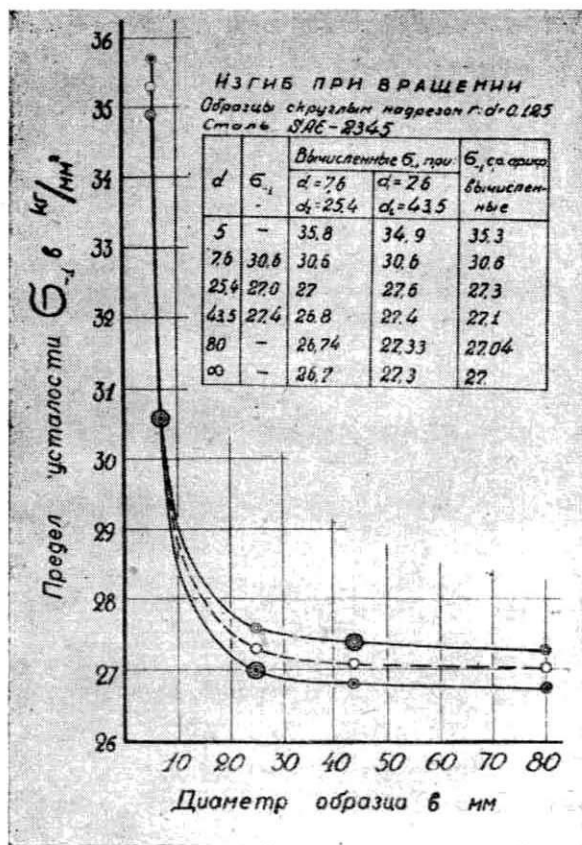
Фиг. 6. Зависимость предела усталости от диаметра образца. Образцы с круглым надрезом  $r/d = 0,125$ , по опытам Мура и Джордена.

вости гладкого образца  $d = 7,6$  мм этой стали  $\sigma_{-1} = 49$  кг/мм<sup>2</sup>.

Образцы имели поперечную канавку полукруглой формы с отношением радиуса закругления  $r$  к диаметру образца  $d$  постоянной величины:  $\frac{r}{d} = 0,125$ .

Результаты испытаний и расчетов пределов усталости образцов из стали 1020 приведены в таблице фиг. 6.

Расчеты по  $d_1=25,4$  и  $d_2=50,8$  мм в выведении средних арифметических значений не приняты, так как из за разброса опытных данных, вычисленный  $\sigma_{-1(5)}$  значительно превышает  $\sigma_{-1(6,35)}$  образца, не имеющего надреза.



Фиг. 7. Зависимость предела усталости от диаметра образца. Образцы с круглым надрезом  $r/d=0,125$ , по опытам Мура и Джордена.

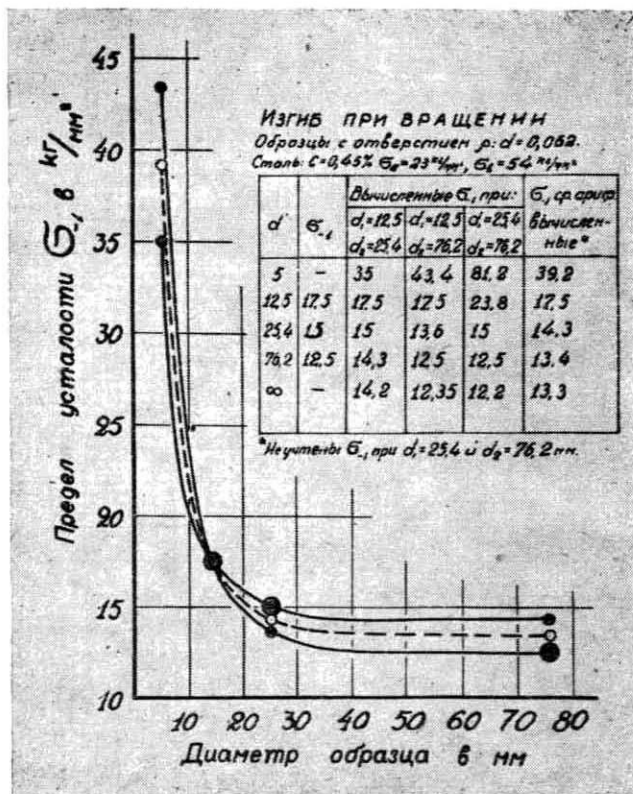
Соответствующие результаты для образцов из стали 2345 приведены в таблице фиг. 7.

Подсчеты по  $d_1=25,4$  и  $d_2=43,5$  мм не производились, так как  $\sigma_{-1(43,5)} > \sigma_{-1(25,4)}$ .



## 2. ИСПЫТАНИЕ НА ЦИКЛИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ОБРАЗЦОВ С ОТВЕРСТИЕМ (ПЕТЕРСОН [15])

Испытаны образцы с поперечным отверстием с отношением  $\rho : d = 0,062$ . Сталь углеродистая, содержащая 0,45% С, имевшая  $\sigma_s = 23$  и  $\sigma_b = 54$  кг/мм<sup>2</sup>.



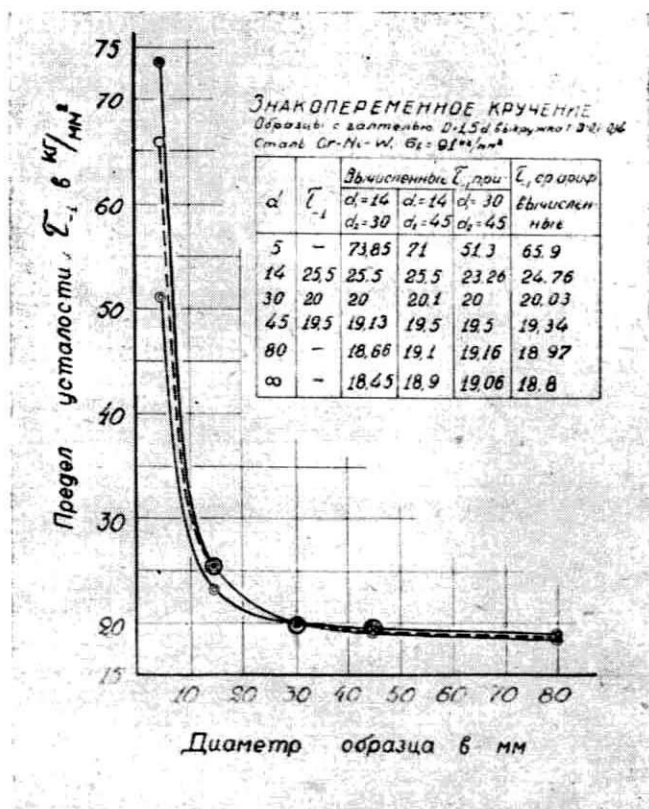
Фиг. 8. Зависимость предела усталости от диаметра образца. Образцы с отверстием  $\rho : d = 0,062$ , по опытам Петерсона.

Результаты испытания и расчетов даны в таблице фиг. 8.

В выводах средних арифметических значений  $\sigma_{-1}$  расчетные результаты по  $d_1 = 25,4$  и  $d_2 = 76,2$  мм не учтены, так как  $\sigma_{-1(5)}$  превысило  $\sigma_b$ .

### 3. ИСПЫТАНИЕ НА ЗНАКОПЕРЕМЕННОЕ КРУЧЕНИЕ ОБРАЗЦОВ С ГАЛТЕЛЮЮ (МАЙЛЕНДЕР И БАУЕРСФЕЛЬД [16])

Испытывалась хром-никель-вольфрамовая сталь, имевшая  $\sigma_b = 91 \text{ кг/мм}^2$ .



Фиг. 9. Зависимость предела усталости от диаметра образца. Образцы с галтелью  $D=1,5d$ , с выкружкой  $r:D=0,1$  до  $0,14$  по опытам Майлендера.

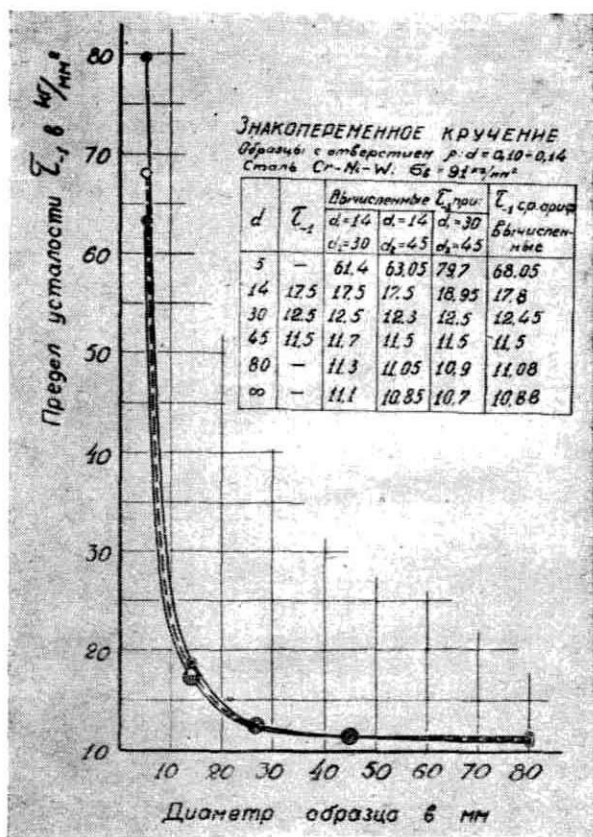
Образцы имели галтель:  $D=1,5d$ , с выкружкой  $\frac{r}{D}=0,1$  до  $0,14$ .

Результаты испытания и расчетов даются в таблице фиг. 9.

#### 4. ИСПЫТАНИЕ НА ЗНАКОПЕРЕМЕННОЕ ВРУЧЕНИЕ ОБРАЗЦОВ С ОТВЕРСТИЕМ (МАЙЛЕНДЕР И БАУЕРСФЕЛЬД [16])

Сталь та же хром-никель-вольфрамовая. Образцы имели отверстие  $\rho : d = 0,1$  до  $0,14$ .

Результаты испытания и расчетов даны в таблице фиг. 10.



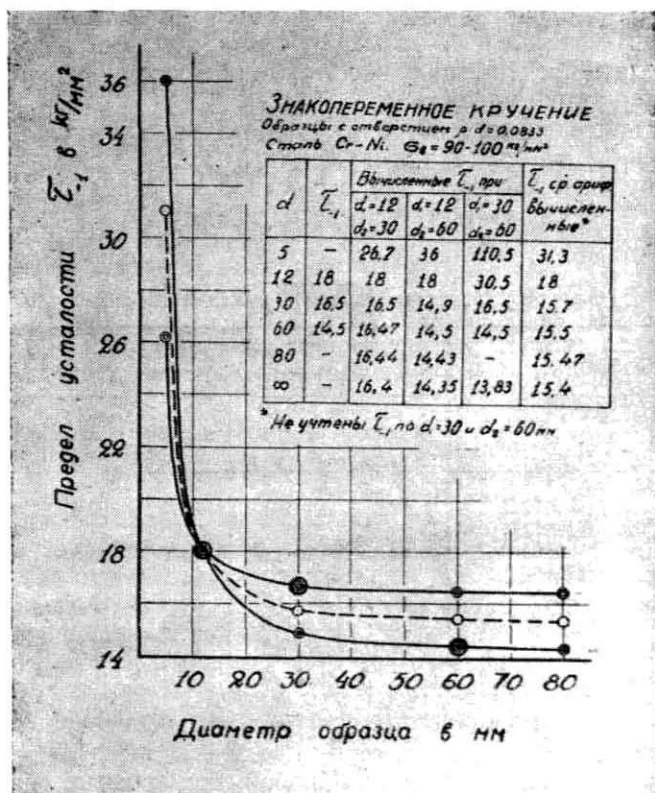
Фиг. 10. Зависимость предела усталости от диаметра образца. Образцы с отверстием  $\rho : d = 0,10$  до  $0,14$ , по опытам Майлендера.

#### 5. ТАКИЕ ЖЕ ИСПЫТАНИЯ ОБРАЗЦОВ С ПОПЕРЕЧНЫМ ОТВЕРСТИЕМ (БАУТЦ И ЛЕР [17])

Испытывалась хром-никелевая сталь, имевшая  $\sigma_b = 90 - 100 \text{ кг/мм}^2$ . Образцы имели отверстие  $\rho : d = 0,083$ .

Результаты испытания и расчетов сведены в таблицу фиг. 11.

Исключены результаты подсчета по  $d_1=30$  и  $d_2=60$ , так как  $\tau_{-1(5)}$  получается равным 110 кг/мм<sup>2</sup>, что превышает  $\sigma_b$ .



Фиг. 11. Зависимость предела усталости от диаметра образца. Образцы с отверстием  $\rho: d=0,0833$ , по опытам Баутца и Лера.

### § 3. Нормальный размер образца для испытания на усталость

Испытания на усталость до настоящего времени не стандартизованы; в большинстве случаев испытываются образцы малого сечения. В справочной литературе чаще всего не указываются размеры образцов. Такое положение нельзя считать нормальным, тем более, что со времени опубликования рабо-

ты Лера и Майлендера [2] прошло уже более двадцати лет. Анкета, проведенная журналом «Заводская Лаборатория» [18] в 1946 году, к сожалению, не привела к разрешению вопроса об испытании на усталость.

Анализируя численные характеристики усталости, полученные при испытаниях образцов различных размеров с соблюдением условий опытов, приходится констатировать, что имеется оптимальный размер образца, дающий возможность определять предел выносливости как объективную техническую характеристику металла.

Из приведенных в настоящей работе численных величин как полученных из опыта, так и расчетным путем, можно составить таблицу величин пределов выносливости образцов 30, 40 и 80 мм и  $\infty$  диаметром (смотреть таблицу 2).

Таблица 2.

*Пределы усталости образцов различного диаметра.*

Источник	Пределы усталости $\sigma_{-1}$ (или $\tau_{-1}$ ) образцов:				Рассеивание результатов в кг/мм <sup>2</sup>
	$d = 30$	$d = 40$	$d = 80$	$d = \infty$	
Мур и Джорден [21]	12,5	12,4	12,3	12,3	$\pm 0,1$
Мур и Джорден [21]	27,3	27,1	27	27	$\pm 0,3$
Петерсон [15]	14,0	13,6	13,4	13,3	$\pm 0,6-1$
Майлендер [16]	12,5	11,7	11	11	$\pm 0,1$
Майлендер [16]	20	19,6	19	18,8	$\pm 0,4$
Баути и Лер [17]	15,8	15,6	15,5	15,4	$\pm 1$
Пантелеев [13]	17,9	17,8	17,7	17,6	$\pm 0,4$

Из таблицы видно, что предел выносливости образцов диаметром 40 мм является пределом выносливости образца или детали практически любой, применяемой в машиностроении детали, большей 40 мм в поперечнике; при этом совершенно безразлично, является ли испытуемый образец гладким телом или телом с любым концентратом напряжений. Предел выносливости образца диаметром в 40 мм будет отличаться от предела выносливости образца диаметром в 80—100—200 мм не больше, чем на величину округления численного результата испытания, принятого нашими ГОСТами (т. е. не более 0,5 кг/мм<sup>2</sup>).

Испытания образцов высотой или диаметром меньше или больше сорока миллиметров должны являться специальным видом испытания. Малого сечения или малой толщины плоские образцы должны испытываться в случае применения на прак-

тике тонких материалов (авиастроение, различные пружины и т. д.). Большие же образцы пригодны для изучения влияния других факторов, где объем имеет специфическое влияние, например, при изучении влияния термической обработки.

Испытание образцов диаметром в 40 мм не создает никаких особых трудностей. Самой простой из всех машин, по опыту автора, построившего целый ряд машин, является машина консольного типа (Велеровская). Двухшпиндельная машина такого типа требует небольшой мощности двигатель, всего до 3—4 квт и позволяет планшайбой на 6—8 болтах легко достичь центрировки образца на биение до 0,03 мм. Машины Муровского типа для таких размеров образца являются уже сложными по системе закрепления образца и требуют обкатки закрепляемых концов образца для предотвращения их поломки. Результаты же испытания на первой или второй машинах практически одинаковы.

Облегчение процесса испытания достигается определением предела усталости по малому числу образцов, разработанному автором [19] или по формуле Гольцева [20]. Этот метод позволяет определить предел выносливости по 3—4 образцам.

#### § 4. Выводы

1. Для нормализации испытания на усталость необходимо ввести испытание образцов диаметром (или высотой) в 40 мм, так как увеличение размеров сверх 40 мм вызывает снижение предела выносливости на величину, меньшую возможной точности определения.

2. Масштабный фактор при циклическом нагружении, несмотря на сложность самого явления усталости, в своей основе имеет, главным образом, простую статистическую закономерность, совершенно одинаковую для всех случаев испытания.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. R. E. Peterson, Trans. Amer. Soc. Steel Treat. Vol. 18 (1930) p. 1041—50.
2. E. Lehr und Mailänder, Stahl und Eisen, Nr. 43, Oct. 1933, s. 1106.
3. R. Michelsen, «Festigkeitskolloquium» des Verb. Mat.-Prüf.-Anst., Stuttgart, 9. Juni 1949.
4. J. O. Horgen and H. R. Neifert, St. u. Eisen, Nr. 51, 1939. Русский текст (более полный «Американская техника и промышленность» № 7, июль 1940, стр. 333).
5. С. Г. Хейфец, Вестник металлопромышленности, № 9, 1948 г., стр. 15—18.

6. R. Faulhaber, Mitt. Forsch.-Inst. Verein. Stahlwerk A. G. Dortmund. 3(1932/33) s. 153/72.
7. R. Faulhaber, H. Buchholz und E. H. Schulz, Stahl und Eisen 53(1933) s. 1106/08.
8. H. F. Moore, Proc. ASTM, vol. 45, 1945, p. 507/31.
9. Н. Н. Афанасьев, Сборник докладов по динамической прочности деталей машин, АН СССР, 1946 г.
10. И. А. Одинг, Сборник докладов по динамической прочности деталей машин, АН СССР, 1946 г.
11. В. Н. Пантелеев, Свойства и термическая обработка трансформного металла. Metallurgizdat 1947, стр. 220—308.
12. Н. Н. Афанасьев, Статистическая теория усталостной прочности металлов, Киев 1953 г., стр. 50.
13. В. Н. Пантелеев, Известия АН Латвийской ССР № 6(35) 1950, стр. 69—80.
14. Г. Нейбер, Концентрация напряжений, Гостехиздат 1947 г.
15. R. Peterson, Trans. ASME, APM, 1935, p. 55.
16. R. Mailänder und W. Bauersfeld, Technische Mitteilungen Kupp, H. 5, s. 143, Dec. 1937.
17. W. Bautz, E. Lehr, Aussprache zu den Vorträgen F. Röscher, W. Kuntze und E. Lehr. Bericht über die Tagung des Fachausschusses für Maschinenelemente in Aachen, 1935—1936, s. 29.
18. Анкета по машинам и приборам для механических испытаний. «Зав. Лабор.» № 3, 1946 г., стр. 328.
19. В. Н. Пантелеев, Известия АН Латвийской ССР, № 6(47), 1951 г.
20. Д. И. Гольцев, Вопросы динамики и динамической прочности. Выпуск 3. АН Латвийской ССР, 1955 г.
21. H. Moore and R. Jordan, Stress concentration in Steel shafts with semicircular notches. Proc. of Fifth International Congress for Applied Mechanics.

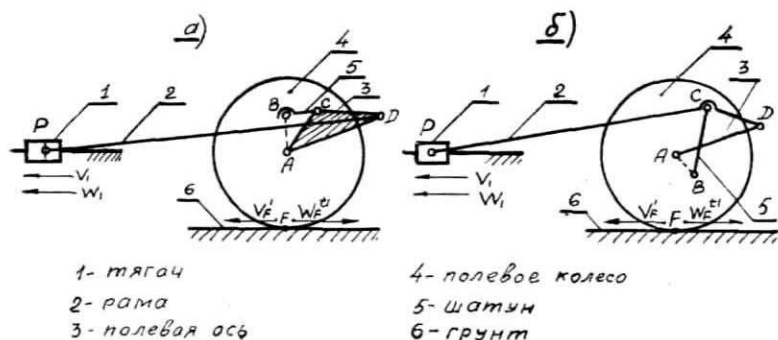
И. И. КАТАЕВ, кандидат технических наук

## К РАСЧЕТУ МЕХАНИЗМОВ ПОДЪЕМА СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАШИН

### § 1. Введение

Во многих сельскохозяйственных машинах, в частности; в плугах, культиваторах и других, перевод рабочих органов из рабочего положения в транспортное осуществляется механизмами подъема, подключающимися в нужный момент к полевому колесу машины.

М. В. Сабликков [1] подразделяет механизмы подъема, в частности культиваторов, на два типа: первый (фиг. 1а) и второй (фиг. 1б).



Фиг. 1. Кинематические схемы механизмов подъема.

При подъеме рамы 2 с помощью механизма первого типа колесо 4 жестко связывается с полевой осью 3 и таким образом ось и колесо вращаются с одинаковой угловой скоростью. При подъеме рамы с помощью механизма второго типа полевая ось вращается вместе с колесом 4 и относительно этого колеса.

Большой интерес представляет механизм подъема второго типа, так как при соответствующем подборе размеров звеньев



механизма и их взаимного расположения этот механизм позволяет осуществить такую кинематику, а следовательно и динамику процесса подъема, что проскальзывание колес машины после включения автомата подъема будет значительно меньше, чем при применении механизма первого типа.

Кроме того, основная часть механизма второго типа, так называемый внешний механизм автомата (четырёхзвенник *ABCD*) является также основной составной частью многих механизмов подъема плугов.

Однако и в учебной и в специальной литературе по сельскохозяйственным машинам не дается практически удобных для инженера методов кинематического расчета механизмов второго типа. Так, например, М. В. Сабликов ([1], стр. 321) ограничивается указанием, что: «при построении планов скоростей и ускорений (имеются в виду механизмы второго типа... И. К.) приходится пользоваться методом ложных положений», но не приводит ни способов построения таких планов, ни структурных схем, по которым можно было бы судить о необходимости применения метода ложных положений.

В действительности кинематическое исследование механизмов как первого, так и второго типов может быть полностью проведено без применения трудоемкого метода ложных положений.

## § 2. Структурный анализ

Рассмотрим механизм второго типа (фиг. 1б).

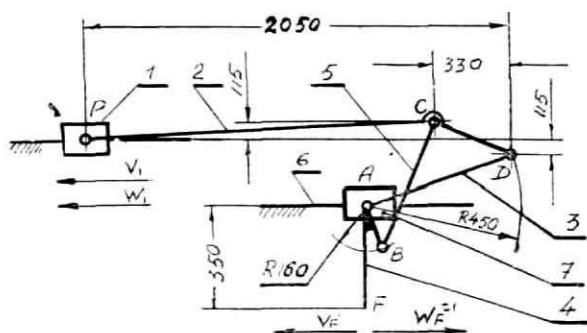
В кинематическую схему механизма входит высшая кинематическая пара «колесо—грунт», по своим геометрическим связям являющаяся парой 4-го класса (по классификации И. И. Артоболевского [2]). Для проведения кинематического анализа механизма методом планов скоростей и ускорений, удобнее построить кинематическую схему так называемого заменяющего механизма, то-есть механизма, у которого высшие пары заменены кинематически эквивалентными цепями, состоящими из звеньев, входящих только в низшие пары 5-го класса [2].

Кинематическая схема заменяющего механизма для нашего случая имеет вид, изображенный на фиг. 2 (в схеме добавилось фиктивное звено 7 и поступательная пара 7—6). Особенностью механизма является то, что звено 4 в каждом положении меняет свою форму таким образом, что точка *F* всегда находится на перпендикуляре к направляющей звена 7, проведенном из соответствующей точки *A*.

Нетрудно подсчитать, что степень подвижности полученного механизма равна двум. Это, как известно, означает, что могут быть заданы независимые законы движения (допускаемые связями) двум звеньям механизма. В нашем случае можно считать заданными движение тягача 1 и движение (скольжение) точки  $F$  колеса 4.

Для упрощения дальнейшего расчета удобно перейти к расчету механизма с одной степенью подвижности. Это можно достичь, если рассматривать движение всех звеньев как сложное, состоящее из переносного движения вместе с тягачем 1 и относительного, по отношению к тягачу.

Пусть задан закон движения тягача в общем случае, то есть значения скорости  $V_1$  и ускорения  $W_1$  тягача для любого



Фиг. 2. Структурная схема механизма второго типа.

положения механизма, а также закон движения точки  $F$  колеса 4, то есть скорость  $V_F^1$  и касательная составляющая ускорения точки  $F$ ,  $W_F^{tl}$ .

Сообщим всей системе звеньев скорость и ускорение равные по величине и обратные по знаку скорости и ускорению тягача 1.

Тогда звено 1 (тягач) остановится и будет иметь место только относительное движение звеньев по отношению к звену 1. Заданными в этом случае будут: скорость точки  $F$ , равная по величине:

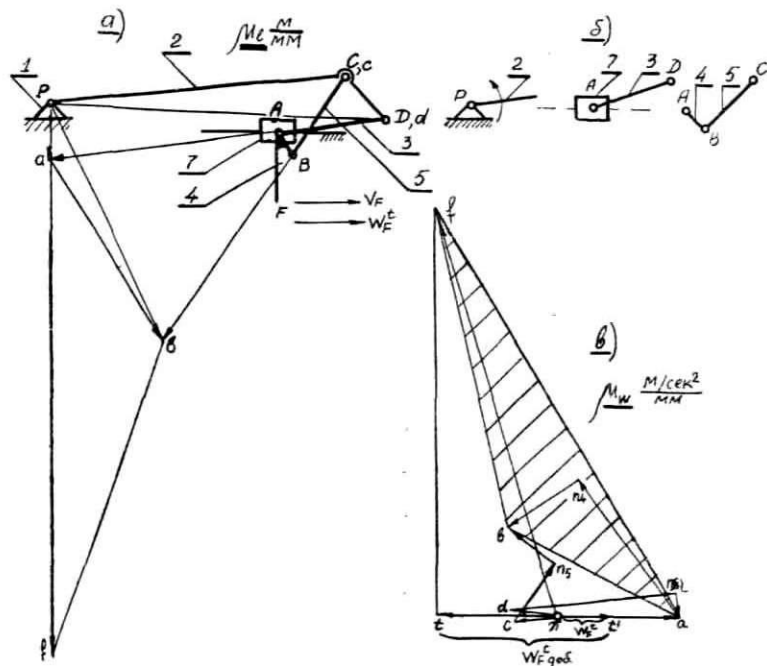
$$V_F = V_F^1 - V_1 \quad (1)$$

и касательное ускорение точки  $F$ , равное по величине

$$W_F^t = W_F^{tl} - W_1 \quad (2)$$

Кинематическая схема механизма в движении относительно звена 1 имеет вид, изображенный жирными линиями на фиг. 3а. Степень подвижности полученного механизма равна единице.

Выбрав звено 2 за ведущее, получим, что данный механизм образован механизмом 1-го класса (стойка 1 и ведущее звено 2) и двумя группами Ассура 2-го класса (фиг. 3б), то есть является механизмом 2-го класса [2]. Следовательно, если задаваться положениями звена 2, положения всех остальных



Фиг. 3. Планы скоростей и ускорений.

звеньев могут быть найдены по способу «засечек», а планы скоростей и ускорений могут быть построены без применения метода ложных положений.

### § 3. План скоростей в относительном движении

Построим план скоростей для произвольного положения механизма.

Выберем за полюс плана скоростей точку  $P$  и построим обычными методами повернутый на  $90^\circ$  план скоростей на схе-

ме самого механизма. Начнем с построения вектора скорости точки  $D$  звена 2. На повернутом плане скоростей этот вектор выйдет из полюса  $P$  и пойдет по направлению линии  $PD$ . Величину этого вектора выберем таким образом, чтобы он был равен отрезку  $PD$ .

Таким образом, вектор скорости точки  $D$  на повернутом плане скоростей изобразится отрезком  $Pd$ , равным  $PD$ .

Затем последовательно строим скорости точек  $A$ ,  $C$ ,  $B$  и  $F$  механизма. На фиг. 3а повернутый план скоростей построен тонкими линиями. Строчные буквы ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $f$ ) поставлены в точках, соответствующих концам векторов скоростей одноименных точек механизма.

Определим масштаб  $\mu_v$  построенного плана скоростей исходя из того, что известна скорость точки  $F$ :

$$V_F = \mu_v \cdot Pf = \mu_v (Pa + af) \quad (3)$$

По параллельности сторон:

$$\Delta abf \sim \Delta ABF,$$

следовательно:

$$\frac{af}{ab} = \frac{AF}{AB} = K_0. \quad (4)$$

Здесь:  $K_0$  — для данного механизма величина постоянная. Из (4) имеем:

$$af = K_0 \cdot ab \quad (5)$$

Имея в виду (5), из (3) получим:

$$\mu_v = \frac{V_F}{Pa + K_0 ab} \frac{\text{м/сек}}{\text{мм}} \quad (6)$$

Здесь:  $V_F$  — скорость точки  $F$  в  $\frac{\text{м}}{\text{сек}}$

$Pa$ ;  $ab$  — отрезки на плане скоростей в мм.

Определим угловые скорости звеньев:

$$\omega_2 = \frac{V_D}{l_{PD}} = \frac{\mu_v \cdot Pd}{\mu_e PD} = \frac{\mu_v}{\mu_1};$$

$$\text{Итак: } \omega_2 = \frac{\mu_v}{\mu_1} \frac{l}{\text{сек}} \quad (7)$$

Здесь:  $\mu_1$  — масштаб плана механизма в  $\frac{\text{м}}{\text{мм}}$ .

Аналогичным образом найдем:

$$\left. \begin{aligned} \omega_3 &= \omega_2 \frac{ad}{AD}; \\ \omega_4 &= \omega_2 \frac{ab}{AB}; \\ \omega_5 &= \omega_2 \frac{bc}{BC}; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Здесь:

$ad, ab, bc$  — отрезки на плане скоростей в мм;  
 $AD, AB, BC$  — отрезки на плане механизма в мм.

Из выражений (5)—(8) видно, что построение плана скоростей может быть ограничено построением точки  $b$ , определяющей конец вектора скорости точки  $B$  механизма. Это уменьшает объем графической работы и упрощает ее, так как точка « $f$ » плана скоростей, как правило, далеко «уходит» за пределы листа чертежа.

#### § 4. План ускорений в относительном движении

Построим план ускорений для выбранного положения механизма.

Особенностью в задании движения механизма является то, что известны скорость и касательное ускорение точки звена (точки  $F$ ), не входящего в кинематические пары ни со стойкой, ни с выбранным ведущим звеном. Эта особенность несколько усложняет определение ускорений механизма.

Ведущее звено 2 в общем случае вращается вокруг точки  $P$  с переменной угловой скоростью, которая для каждого положения механизма может быть найдена только что описанным способом. Угловые ускорения звена 2 остаются пока неизвестными.

Н. Е. Жуковский показал [4], что неравномерное вращение какого-либо звена можно представить себе как результат сложения двух вращений: *основного* (перманентного по Н. Е. Жуковскому), происходящего с постоянной угловой скоростью, равной действительной угловой скорости звена в данном положении и *добавочного* (или начального) вращения, происходящего только с угловым ускорением, равным действительному угловому ускорению звена в данном положении (следовательно, угловая скорость звена в этом движении равна нулю).

Рассматривая с такой точки зрения вращение ведущего звена 2, можно построить для всего механизма два плана ускорений: один для основного движения звена 2 (когда считается, что звено 2 вращается с угловой скоростью  $\omega_2$ , равной мгновенной угловой скорости звена 2 в данном положении и угловым ускорением  $\epsilon_2$ , равным нулю), другой — для добавочного движения звена 2 (когда считается, что звено 2 движется с угловым ускорением  $\epsilon_2$ , равным мгновенному угловому ускорению звена 2 в данном положении и с угловой скоростью  $\omega_2$  равной нулю). Последний план ускорений назовем планом добавочных касательных ускорений.

План ускорений для основного движения звена 2 может быть построен обычным методом. Такой план в выбранном масштабе ускорений  $\mu_w$  для выбранного положения механизма построен на фиг. 3в (вначале строятся векторы ускорений точек  $D$  и  $C$ , затем точек  $A$  и  $B$ . Конец вектора ускорения точки  $F$ , точка  $f$ , в данном случае построена по «способу подобия»).

Полученная точка  $f$  определяет конец вектора ускорения точки  $F$ , а точка  $t$  определяет конец вектора касательной составляющей ускорения точки  $F$  при основном вращении звена 2.

Известным же (заданным) для каждого положения механизма является касательная составляющая ускорения точки  $F$ ,  $W_F^t$  при действительном вращении звена 2 с мгновенной угловой скоростью  $\omega_2$  и мгновенным угловым ускорением  $\epsilon_2$ . Построим этот вектор  $W_F^t$  на фиг. 3в. Пусть точка  $t^1$  отмечает конец этого вектора, начало которого в полюсе  $\pi$ . Вектор  $\overline{\pi t^1}$  можно рассматривать как геометрическую сумму векторов  $\overline{\pi t}$  и  $\overline{t t^1}$ . Так как вектор  $\overline{\pi t}$  представляет собой касательное ускорение точки  $F$  при основном движении звена 2, то вектор  $\overline{t t^1}$ , начало которого в точке  $t$  и конец в точке  $t^1$ , представляет собой добавочное касательное ускорение точки  $F$ , которое является следствием только добавочного движения звена 2.

Следовательно, величина добавочного касательного ускорения точки  $F$ , появляющегося в результате только добавочного движения звена 2, будет равна

$$W_{F \text{ доб.}}^t = \mu_w \cdot t t^1 \quad (9)$$

Здесь:  $\mu_w$  — масштаб плана ускорений (фиг. 3в).

Из теории механизмов и машин известно, что план добавочных касательных ускорений подобен плану скоростей меха-

низма. Следовательно, построенный на фиг. 3а повернутый план скоростей можно рассматривать так же и как повернутый план добавочных касательных ускорений. Отрезок  $Pf$  этого плана в данном случае будет изображать добавочное касательное ускорение точки  $F$ ,  $W_F^t$  доб. Так как величина этого ускорения найдена, то можно найти и масштаб  $\mu_w^1$  добавочного плана касательных ускорений.

Так же, как и для выражения (6), получим:

$$\mu_w^1 = \frac{W_F^t \text{ доб.}}{Pf} = \frac{\mu_w \cdot tt^1}{Pa + K_0 \cdot ab} \quad (10)$$

В таком случае угловое ускорение звена 2 определится из выражения (так же, как и для выражения (6)).

$$\varepsilon_2 = \frac{W_D^t}{l_{PD}} = \frac{\mu_w^1 \cdot Pd}{\mu_1 \cdot PD} = \frac{\mu_w \cdot tt^1}{\mu_1 (Pa + K_0 \cdot ab)};$$

Итак:

$$\varepsilon_2 = \frac{\mu_w}{\mu_e} \cdot \frac{tt^1}{Pa + K_0 \cdot ab} \frac{l}{cek^2} \quad (11)$$

Здесь  $\mu_w$  — масштаб плана ускорений (фиг. 3в) в  $\frac{м/сек.^2}{мм}$

$\mu_1$  — масштаб плана механизма (фиг. 3а) в  $\frac{м}{мм}$

$tt^1$  — отрезок на плане ускорений (фиг. 3в) в мм

$Pa; K_0; ab$  — имеют те же значения, что и в (6).

Итак, найдены угловые скорости всех звеньев и угловое ускорение выбранного ведущим звена 2.

Угловые ускорения остальных звеньев можно найти или из нового плана ускорений, который должен быть построен по найденным значениям  $\omega_2$  и  $\varepsilon_2$ , или из уже построенных планов (фиг. 3а и 3в). В последнем случае следует иметь в виду, что действительные величина и направление каждого из угловых ускорений звеньев 3, 4 и 5 будут определяться двумя слагаемыми:  $\varepsilon'$  — угловым ускорением данного звена в основном движении механизма (при  $\varepsilon_2 = 0$ ) и  $\varepsilon''$  — угловым ускорением данного звена в добавочном движении механизма (при  $\omega_2 = 0$  и  $\varepsilon_2 \neq 0$ ).

Слагаемые  $\varepsilon'$  могут быть найдены обычным путем из плана ускорений (фиг. 3в). Слагаемые  $\varepsilon''$  могут быть найдены из плана добавочных касательных ускорений (то есть из повер-

нутого плана ускорений — фиг. 3а). Из фиг. 3а, по аналогии с выражениями (8), получим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_3'' &= \varepsilon_2 \cdot \frac{ad}{AD}; \\ \varepsilon_4'' &= \varepsilon_2 \cdot \frac{ab}{AB}; \\ \varepsilon_5'' &= \varepsilon_2 \cdot \frac{bc}{BC}; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Полное угловое ускорение каждого из звеньев 3; 4 или 5 найдется как алгебраическая сумма обоих слагаемых:

$$\varepsilon = \varepsilon' \pm \varepsilon'' \quad (13)$$

### § 5. Скорости и ускорения в абсолютном движении

Вернемся теперь к истинному движению всего агрегата вместе с тягачем 1. Для этого сообщим всем звеньям механизма, двигавшимся только что рассмотренным образом, общее переносное поступательное движение, характеризующееся в каждый момент времени соответствующими значениями скорости  $V_1 = V_P$  и ускорения  $W_1 = W_P$  тягача (фиг. 2).

Истинная скорость любой точки какого-либо звена, например, центра тяжести  $S$  рамы 2,  $V_s$ , определится из векторного равенства

$$\overline{V}_s = \overline{V}_P + \overline{V}_{SP} \quad (14)$$

Здесь:  $V_{SP}$  — относительная скорость точки  $S$  относительно точки  $P$ . Эта скорость по величине и направлению найдется из плана скоростей (фиг. 3а).

Истинное ускорение точки  $S$  звена 2,  $W_s$ , определится из векторного равенства:

$$\overline{W}_s = \overline{W}_P + \overline{W}_{SP} \quad (15)$$

Здесь:  $W_{SP}$  — относительное ускорение при движении точки  $S$  относительно точки  $P$ .

Ускорение  $W_{SP}$  по абсолютной величине найдется из выражения:

$$W_{SP} = \sqrt{(W_{SP}^n)^2 + (W_{SP}^t)^2} = l_{SP} \sqrt{\omega_2^4 + \varepsilon_2^2} \frac{m}{ceh^2} \quad (16)$$



Здесь:  $W_{SP}^n$ ;  $W'_{SP}$  — абсолютные величины нормальной и касательной составляющих ускорения точки  $S$  при ее движении относительно точки  $P$  в  $\frac{м}{сек.^2}$ ;

$l_{SP}$  — истинное расстояние от точки  $S$  до точки  $P$  в м;

$\omega_2$ ;  $\epsilon_2$  — угловые скорость и ускорение звена 2.

Направление вектора  $\overline{W}_{SP}$ , как геометрической суммы векторов  $\overline{W}_{SP}^n$  и  $\overline{W}_{SP}^t$  определится из условий:

а) Вектор  $\overline{W}_{SP}^n$  всегда направлен от точки  $S$  к точке  $P$ .

б) Вектор  $\overline{W}_{SP}^t$  в каждом случае определится по угловому ускорению  $\epsilon_2$ .

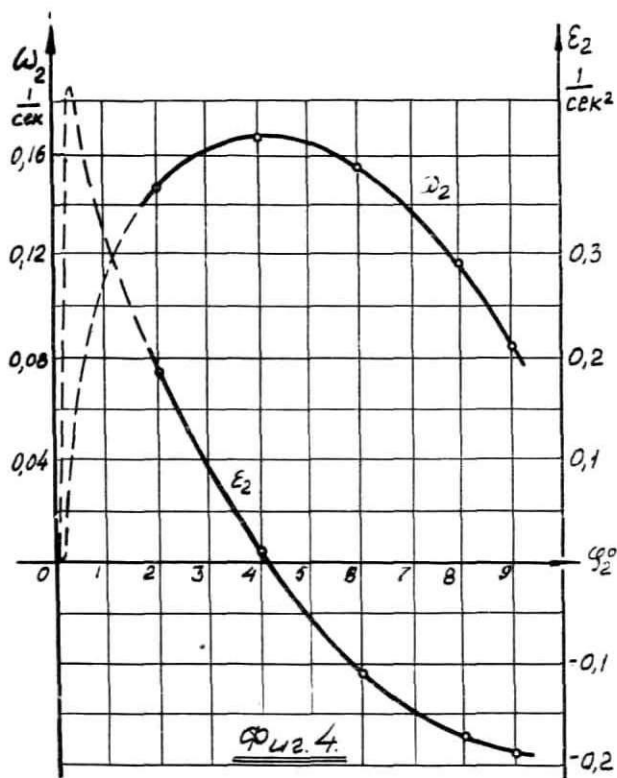
Если потребуется определение линейных ускорений точек звеньев, не принадлежащих звену 2, удобнее строить новый план ускорений в относительном движении с учетом мгновенных значений как  $\omega_2$ , так и  $\epsilon_2$  и величины и направления касательных ускорений любых точек или звеньев механизма определять по этому плану ускорений.

В качестве примера просчитан механизм подъема садового культиватора СК, основные размеры которого показаны на фиг. 2 [3]. При расчете принято, что тягач 1 движется равномерно со скоростью  $V_1 = 1 \frac{м}{сек.}$  а колесо 4 перекачивается без скольжения.

Расчет проведен для случая поворота рамы 2 на угол  $\varphi_2$ , изменяющийся от нуля до  $9^\circ$ . За начальное положение рамы 2 принято положение механизма, когда угол между звеньями  $AB$  и  $BC$  равен нулю и точка  $B$  находится ниже точки  $A$ . План скоростей в этом положении механизма обладает той особенностью, что линии « $ab$ » и « $bc$ » на плане скоростей (фиг. 3а) параллельны и не совпадают, что говорит о том, что точка « $b$ » пересечения этих линий и, следовательно, точка « $f$ » плана скоростей «уходят» в бесконечность. Следовательно и отрезок  $Pf$  равен бесконечности. Но скорость точки  $F$  звена 4  $V_F$  имеет конечное значение и в этом положении механизма, следовательно, масштаб плана скоростей  $\mu_v$  (выражение 6) в этом положении равен нулю. Следовательно, угловая скорость рамы 2, а также и всех остальных звеньев в этом положении равна нулю (то-есть относительное движение звеньев невозможно).

Угловые ускорения в начальном положении, в силу той же особенности плана дополнительных касательных ускорений, следует также считать равными нулю.

При построении плана ускорений в основном движении звена 2, вследствие заданных условий,  $W_F^t$  равно нулю, следо-



Фиг. 4. Кинематические графики.

вательно, отрезок  $\pi t'$  (фиг. 3в) равен нулю и величина углового ускорения  $\epsilon_2$  определяется по выражению (11) с заменой величины  $tt'$  на величину  $\pi t$ .

Результаты расчета приведены на фиг. 4.

### Заключение

В статье приведена методика составления структурной схемы и кинематического расчета одного из механизмов подъема с. х. машин.

Структурная схема механизма отличается тем, что одно из основных звеньев механизма (движение которого задается) меняет свою форму при изменении положения механизма.

Особенностью задания движения является то, что заданным является движение точки звена, не входящего в кинематические пары ни со стойкой, ни с ведущим звеном.

По литературным данным, кинематический расчет таких механизмов должен производиться с использованием метода ложных положений.

В предлагаемой статье расчет производится на основе простых и широко известных методов кинематического расчета механизмов, образованных группами Ассура 2-го класса, без применения трудоемкого метода ложных положений.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. М. В. С а б л и к о в, Сельскохозяйственные машины, «Комплексная механизация хлопководства», сборник статей, ГИЗ УзССР, 1950 г.
2. И. И. А р т о б о л ь с к и й, Теория механизмов и машин, ГИЗ ТТЛ, 1951 г.
3. Н. П. К р у т и к о в и д р., Теория, конструкция и расчет сельскохозяйственных машин, Машгиз, 1951.
4. Н. Е. Ж у к о в с к и й, Сведение динамической задачи о кинематической цепи к задаче о рычаге. Собрание сочинений, т. III, ГИЗ ТТЛ, 1949.

*A. K. Dumpis, techn. zin. kandidāts*

## METODE ŠĶIDRĀS DEGVIELAS UN GENERATORGĀZES DZINĒJA SALĪDZINĀŠANAI

Parādību pētīšanā, gāzģeneratoram strādājot kopā ar dzinēju, ir tik maz darīts, ka novēroto trūkumu un darbību traucējumu novēršanai vēl nav izstrādāti droši līdzekļi. Lielais dzinēja jaudas zudums, salīdzinot to darbībā ar šķidro degvielu, dzinēja mainīgā slodze, kas bieži rada traucējumus gāzģeneratora darbībā, grūtības dzinēja iedarbīnāšanā, apkalpošanā, dzinēja darbības traucējumi un pat detaļu lūzumi, ko rada dzinējā darba process ar gāzģeneratorgāzi u. d. c. apstākļi, prasa pievērst sevišķu uzmanību gāzģeneratora automobiļu un traktoru ekspluatācijas apstākļu pētīšanai. Nepieciešami teoretiski pamatot minētos trūkumus, lai varētu tos novērst vai vismaz iespējami samazināt.

Lai gūtu pārskatu par dzinēja darbību, ja to darbina ar šķidro degvielu, un pēc pārbūves ar ģeneratorģāzi, tad ir divi ceļi — pirmais: praktiski izmēģināt dzinēju ar šķidro degvielu un pēc pārbūves rūpīgi izdarīt mēģinājumu atkārtojumus tādos pašos apstākļos un ar tiem pašiem noteikumiem un tad šos rezultātus salīdzināt. Tas ir eksperimentālais ceļš, kas prasa noteiktus precizijas aparātus un pārbaudes iekārtas, tādēļ parastos apstākļos nav realizējams. Otrs ceļš — teoretiski pieiet šiem jautājumiem un atrisināt šo uzdevumu analītiski. Te nu mēs varam precīzi ieturēt dzinējam abos gadījumos vienu un to pašu režīmu, pietiekami precīzi un droši secināt, kā arī rast pareizas atbildes izvīrtajiem jautājumiem.

Šis analītiskais ceļš ir t. s. termiskais jeb siltuma tehniskais aprēķins, ko arī turpmāk apskatīšu.

Tā kā kompresijas pakāpes  $\epsilon$  ietekme uz dzinēja saimniecisko lietderību ir ļoti ievērojama un pat ir domas, ka ar  $\epsilon$  palielināšanu iespējams sasniegt pārbūvētam gāzes dzinējam tādu pašu jaudu, kādu dzinējs attīstījis ar šķidro degvielu pirms pārbūves, tad, lai arī šo jautājumu atrisinātu, izdarīšu termiskos aprēķinus vairākiem gadījumiem, pieņemot kompresijas pakāpes lielumus, izejot no praksē sastopamiem, gāzu dzinējiem:  $\epsilon = 5,25$ ;  $\epsilon = 7,0$ ;  $\epsilon = 8,0$  un  $\epsilon = 9,5$ . Līdz ar to arī noskaidrošu jautājumu par bīstamā spiediena ietekmi uz gultņiem eksplozijas momentā.

## 1. Termiskais aprēķins

### Pieņemtie apzīmējumi

- $\beta$  — degvielas raksturotājs (pēc Kirša),  
 $\alpha$  — gaisa pārpilnības koeficients,  
 $\omega$  — gaisa izmantošanas koeficients (gaisa faktors),  
 $L_0$  — teoretiskais gaisa daudzums,  
 $L$  — faktiskais gaisa daudzums,  
 $M$  — sadegšanas produktu daudzums,  
 $M_r$  — atlikušo gāzu daudzums,  
 $\mu_0$  — molekularās izmaiņas ķīmiskais koeficients,  
 $\mu$  — molekularās izmaiņas faktiskais koeficients,  
 $\gamma$  — atlikuma gāzes koeficients,  
 $c_p^0, c_v^0$  — vidējā molekularā siltumietilpība sadegšanas produktiem pie  $\alpha = 1,0$ ;  $\omega = 1,0$ ,  
 $c_p^L, c_v^L$  — vidējā molekularā siltumietilpība gaisam ( $a = \infty$ ;  $\omega = 0$ ),  
 $Q_z$  — degvielas zemākā siltumspēja,  
 $\xi_z$  — siltuma izmantošanas koeficients punktā «z»,  
 $\eta_v$  — pildījuma koeficients (pēc tilpuma),  
 $T_0$  — apkārtnes temperatūra,  
 $T_0'$  — svaigā pildījuma temperatūra,  
 $T_r$  — atlikuma gāzu temperatūra,  
 $T_a$  — temperatūra kompresijas sākumā,  
 $T_c, T_z$  — kompresijas beigu — sadegšanas beigu temperatūra,  
 $p_z$  — sadegšanas beigu spiediens punktā «z»,  
 $T_b$  — temperatūra ekspansijas beigās,  
 $p_b$  — spiediens ekspansijas beigās  $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ,  
 $p_0$  — apkārtnes spiediens  $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ,  
 $p_r$  — atlikuma gāzu spiediens  $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ,  
 $p_a$  un  $p_c$  — kompresijas sākuma un kompresijas beigu spiediens,  
 $\varepsilon$  — kompresijas pakāpe,  
 $\lambda$  — spiediena pieauguma koeficients pēc sadegšanas,

- $p_i$  — vidējais indicētais spiediens  $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ,  
 $p_e$  — vidējais efektīvais spiediens  $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ,  
 $p_T$  — berzes spiediens  $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ,  
 $\eta_m$  — mechaniskais lietderības koeficients,  
 $N_i$  — dzinēja indicētā jauda,  
 $N_e$  — dzinēja efektīvā jauda,  
 $B_i$  — degvielas patēriņš vienai indicētai ZS stundai,  
 $B_e$  — degvielas patēriņš vienai efektīvai ZS stundai,  
 $\eta_i$  un  $\eta_e$  — indicētais un efektīvais lietderības koeficients,  
 $n_1$  — politropas pakāpes rādītājs uz kompresijas līnijas,  
 $n_2$  — politropas pakāpes rādītājs uz ekspansijas līnijas,  
 $c'_p$  un  $c'_v$  — vidējā molekularā siltumietilpība uz ekspansijas līnijas,  
 $\eta_w$  — saimnieciskais lietderības koeficients visai iekārtai,  
 $\eta_u$  — gāzģenerators lietderības koeficients,  
 $Q_w$  — siltuma patēriņš 1 ZS stundai visai iekārtai,  
 $Q_i$  — siltuma patēriņš 1 indicētai ZS stundai un  
 $Q_e$  — siltuma patēriņš 1 efektīvai ZS stundai.

Lietojot mākslīgi žāvētu malku ( $W^d \approx 12 \dots 16 \%$ ), transport-tipa gāzģenerators ražotais gāzes sastāvs ir šāds (tilpuma %):

Oglekļa dioksīds . . . . .	$CO_2 = 10,0\%$
Oglekļa monoksīds (tvaņa gāze) . . . . .	$CO = 23,0\%$
Ūdeņradis . . . . .	$H_2 = 18,0\%$
Metāns (purva gāze) . . . . .	$CH_4 = 2,0\%$
Slāpeklis . . . . .	$N_2 = 47,0\%$
	Kopā 100%

Ģeneratorgāzes zemākā siltumspēja  $Q_z = 30,5 \cdot CO + 25,7 \cdot H_2 + 85,2 \cdot CH_4 = 30,5 \cdot 23 + 25,7 \cdot 18 + 85,2 \cdot 2 = 1335 \frac{\text{kcal}}{3}$ .

Tilpuma samazināšanās pilnīgā sadegšanā 1  $\text{nm}^0$  gāzes ir:  
 $M = \left( \frac{CO}{2} + \frac{H_2}{2} \right) = 0,5 \cdot (0,23 + 0,18) = 0,205 \frac{\text{nm}^3}{1 \text{ nm}^3 \text{ gāzes}}$ .

Teoretiski nepieciešamais gaisa daudzums  $1 \text{ nm}^3$  gāzes sadegšanai ir:

$$L_0 = \frac{1}{0,209} \cdot (\Delta M + 2 \cdot CH_4 - O_2) = \frac{1}{0,209} \cdot (0,205 + 2 \cdot 0,02 - 0) = 1,167 \frac{\text{nm}^3 \text{ gaisa}}{1 \text{ nm}^3 \text{ gāzes}}$$

Svaiga degmaisījuma daudzums pie  $\alpha = 1,2$ :

$$M' = 1 + L = 1 + \alpha \cdot L_0 = 1 + 1,2 \cdot 1,167 = 2,4 \frac{\text{nm}^3}{1 \text{ nm}^3 \text{ gāzes}}$$

Degmaisījuma zemākā siltumspēja

$$Q_z^{\text{degm}} = \frac{Q_z}{M'} = \frac{1335}{2,4} = 557 \frac{\text{kcal}}{\text{nm}^3}$$

Pilnīgas sadegšanas produktu daudzums ir:

$$M = 1 + L - \Delta M = 2,4 - 0,205 = 2,195 \frac{\text{nm}^3}{1 \text{ nm}^3 \text{ gāzes}}$$

Molekularās izmaiņas ķīmiskais koeficients

$$\mu_0 = 1 - \frac{\Delta M}{1 + L} = 1 - \frac{0,205}{2,4} = 0,9145 \text{ (šķ. degv. } \mu_0 > 1).$$

Sadegšanas produktu sastāvs pie pilnīgas sadegšanas, ja sadedzina  $1 \text{ nm}^3$  ģeneratorgāzes ir:

$$V_{H_2O} = H_2 + 2 \cdot CH_4 = 0,18 + 2 \cdot 0,02 = 0,22 \text{ nm}^3 \text{ (ūdens tvaiks)}$$

$$V_{CO_2} = CO_2 + CO + CH_4 = 0,10 + 0,23 + 0,02 = 0,35 \text{ nm}^3$$

$$V_{N_2} = N_2 + 0,791 \cdot \alpha \cdot L_0 = 0,47 + 0,791 \cdot 1,2 \cdot 1,167 = 1,577 \text{ nm}^3$$

$$V_{O_2} = 0,209 \cdot (\alpha - 1) \cdot L_0 = 0,209 \cdot (1,2 - 1) \cdot 1,167 = 0,049 \text{ nm}^3$$

} sausie sadegšanas produkti

Sausās dūmgāzes % sastāvs:

$$V_{CO_2} = 0,350 \text{ nm}^3 \quad \frac{0,350}{1,976} \cdot 100 = 17,72 \%$$

$$V_{N_2} = 1,577 \text{ nm}^3 \quad \frac{1,577}{1,976} \cdot 100 = 79,8 \%$$

$$V_{O_2} = 0,049 \text{ nm}^3 \quad \frac{0,049}{1,976} \cdot 100 = 2,48 \%$$

---


$$1,976 \text{ nm}^3 \quad \text{Kopā } 100 \%$$

Sadegšanas produktu daudzums pie pilnīgas sadegšanas, ja  $\alpha = 1$  (tad  $O_2 = 0$ ), ir:

$V_{H_2O} + V_{CO_2} + V_{N_2} = 0,22 + 0,35 + 1,577 = 2,147 \text{ nm}^3$  un sadegšanas produktu sastāvs, ja  $\alpha = 1$  ir:

$$V_{H_2O} = \frac{0,22}{2,147} \cdot 100 = 10,2\%; \quad V_{CO_2} = \frac{0,35}{2,147} \cdot 100 = 16,3\% \text{ un}$$

$$V_{N_2} = \frac{1,577}{2,147} \cdot 100 = 73,5\%.$$

### Sadegšanas produktu vidējās molekularās siltumietilpības.

Ievērojot, ka aprēķinā jāoperē tikai ar vidējām molekularām siltumietilpībām, tad, lai saīsinātu rakstīšanu, apzīmēsim  $m c_p$  un  $m c_v$  ar  $C_p$  un  $C_v$ .

Divatomu gāzēm vidējās molekularās siltumietilpības no  $0^\circ$  līdz  $t^\circ\text{C}$  ir:

$$C_v = m c_v = 4,90 + 0,00053 \cdot t$$

$$C_p = m c_p = 6,885 + 0,00053 \cdot t.$$

Trīsatomu gāzēm vidējās molekularās siltumietilpības nav izsakāmas pēc lineara likuma, un tās atkarībā no temperatūras sakopotas 1. tabulā.

1. tabula

Vidējās molekularās siltumietilpības atkarībā no temperatūras pie  $p$ -const.

$$C_p = m c_p \frac{\text{kcal}}{\text{moli grads}}.$$

$t^\circ\text{C}$	$H_2O$	$CO_2$	$t^\circ\text{C}$	$H_2O$	$CO_2$
0	7,98	8,61	1400	9,71	12,44
100	8,03	9,14	1600	10,02	12,67
200	8,12	9,61	1800	10,31	12,89
300	8,22	10,00	2000	10,63	13,05
400	8,34	10,33	2200	10,93	13,20
600	8,60	10,93	2400	11,25	13,34
800	8,88	11,44	2600	11,56	13,46
1000	9,17	11,84	2800	11,88	13,57
1200	9,45	12,17	3000	12,16	13,67

Pamatojoties uz dotām vērtībām par vidējām molekularām siltumietilpībām trīsatomu gāzēm un lineāro sakarību divatomu gāzēm, aprēķina sadegšanas produktu vidējo molekularo siltum-



ietilpību pie dažādām temperatūrām (no  $0^\circ \dots t^\circ\text{C}$ ) un pie  $\alpha = 1$  pēc formulas:

$$C_{pt}^0 = r_{\text{H}_2\text{O}} \cdot C_{pt\text{H}_2\text{O}} + r_{\text{CO}_2} \cdot C_{pt\text{CO}_2} + r_{\text{N}_2} \cdot C_{pt\text{N}_2}$$

piemēram, pie  $0^\circ\text{C}$ :

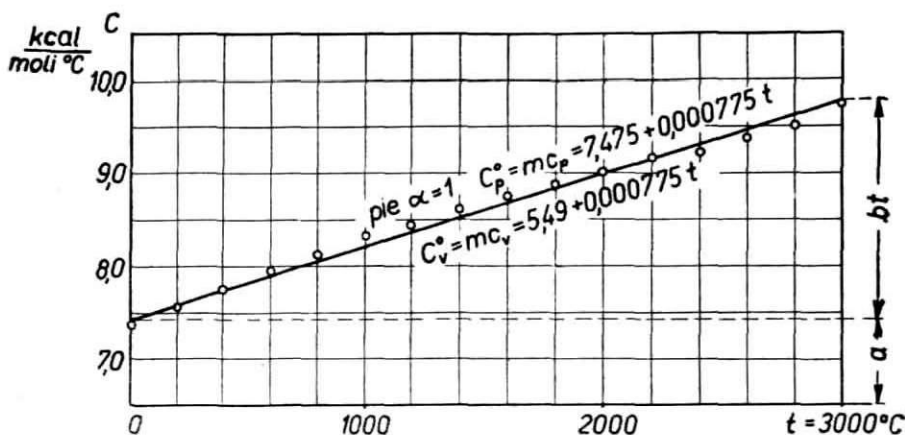
$$C_{p_0} = 0,102 \cdot 7,98 + 0,163 \cdot 8,61 + 0,735 \cdot (6,885 + 0,00053 \cdot 0) = 7,278 \frac{\text{kcal}}{\text{moli grads}}$$

pie  $1000^\circ\text{C}$

$$C_{p_{1000}} = 0,102 \cdot 9,17 + 0,163 \cdot 11,84 + 0,735 \cdot (6,885 + 0,00053 \cdot 1000) = 8,315 \frac{\text{kcal}}{\text{moli grads}}$$

Analoģiski nosaka  $C_{pt}^0$  pie citām temperatūrām, intervālā  $0^\circ \dots 3000^\circ\text{C}$ .

Aprēķinātās  $C_{pt}^0$  vērtības atliek C-t diagramā (sk. 1. zīm.), gar iegūtiem punktiem novelk taisni. Pēc taisnes nosaka molekulu-



1. zīm. Vidējā molekularā siltumietilpība atkarībā no temperatūra generatorgāzes pilnīgas sadegšanas produktiem pie  $\alpha = 1$ .

lāro siltumietilpību: pie  $t = 0^\circ\text{C}$   $a_p^0 = 7,475 \frac{\text{kcal}}{\text{moli grads}}$  un pie  $t = 3000^\circ\text{C}$   $a_p^{3000} = 9,800 \frac{\text{kcal}}{\text{moli grads}}$ , kā arī aprēķina temperatūras koeficientu:

$$b^0 = \frac{b \cdot t}{t} = \frac{a_p^{3000} - a_p^0}{t - t_0} = \frac{9,800 - 7,475}{3000 - 0} = 0,000775 \cdot t \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{moli (grads)}^2}$$

Kas attiecas uz  $C_v$  vērtību, tad, kā zināms, tā ir mazāka par  $1,985 \left( \frac{\text{kcal}}{\text{moli grads}} \right)$ .

Tādā veidā pie  $\alpha = 1$ , mēs iegūstam

$$C_v^0 = 5,49 + 0,000775 \cdot t$$

$$C_p^0 = 7,475 + 0,000775 \cdot t$$

Kautkurai citai  $\alpha > 1$  vērtībai ir jāsakombinē šo taisno līniju ar līniju, kas arī ir taisne, pēc formulas:

$$\left. \begin{aligned} C_v^L &= 4,90 + 0,00053 \cdot t \\ C_p^V &= 6,885 + 0,00053 \cdot t \end{aligned} \right\} \text{pie } \alpha = \infty,$$

tad kautkurai citai  $\alpha = > 1$  vērtībai iegūstam:

$$C = \frac{C^0 + C^L (\alpha - 1)}{\alpha}, \text{ kas savukārt dod jaunas molekularo siltumietilpību un temperatūras koeficientu vērtības}$$

$$a = \frac{a^0 + a^L \cdot (\alpha - 1)}{\alpha}$$

$$b = \frac{b^0 + b^L \cdot (\alpha - 1)}{\alpha}.$$

Tā kā aprēķinā pieņemts  $\alpha = 1,2$ , tad dabūjam:

$$a_p'' = \frac{7,475 + 6,885 \cdot (1,2 - 1)}{1,2} = 7,385 \frac{\text{kcal}}{\text{moli grads}}$$

$$b'' = \frac{0,000775 + 0,00053 \cdot (1,2 - 1)}{1,2} = 0,000734 \frac{\text{kcal}}{\text{moli (grads)}^2},$$

t. i. vidējā molekularā siltumietilpība ģeneratorgāzes sadegšanas produktiem ir:

$$\left. \begin{aligned} C_v'' &= mc_v'' = 5,40 + 0,000734 \cdot t \\ C_p'' &= mc_p'' = 7,385 + 0,000734 \cdot t \end{aligned} \right\} \text{pie } \alpha = 1,2.$$

Tā kā  $C_p$  un  $C_v$  pie  $t^\circ\text{C}$  skalas izteicas pēc lineara likuma ( $a + b \cdot t$ ), tad, pārejot uz absolūto  $T^\circ\text{K}$  skalu,  $C_p$  un  $C_v$  arī izteiksies pēc lineara likuma ( $a + b \cdot T$ ), jo varam pieļaut, ka īstenā molekularā siltumietilpība pa visu skalu no  $0^\circ \dots T^\circ\text{K}$  seko taisnas līnijas likumam.

Ievērojot, ka īstenām  $C_p$  un  $C_v$  vērtībām pie šī noteikuma temperatūras koeficients ir 2 reizes lielāks kā vidējām molekularām siltumietilpībām, tad, apzīmējot to ar  $2b$ , redzam, ka pie

pārejas uz jaunām koordinatām koeficients  $b$  neizmainās, bet izmainās tikai molekularās siltumietilpība  $a$  par lielumu:

$$\Delta a = 2 \cdot b \cdot (T - t) = 2 \cdot 273 \cdot b = 546 \cdot b.$$

Tādēļ, pārejot uz  $T^\circ K$  skalā, dabūjam: sadegšanas produktiem pie  $a=1$

$$\Delta a = 546 \cdot b = 546 \cdot 0,000775 = 0,42 \text{ un}$$

gaisam

$$\Delta a = 546 \cdot b = 546 \cdot 0,00053 = 0,29.$$

Tātad pie absolūtās ( $T^\circ K$ ) skalas iegūstam: sadegšanas produktiem

$$\left. \begin{aligned} C_v^o &= 5,07 + 0,000775 \cdot T \\ C_p^o &= 7,055 + 0,000775 \cdot T \end{aligned} \right\} \text{ pie } a=1.$$

gaisam

$$\left. \begin{aligned} C_v^L &= 4,61 + 0,00053 \cdot T \\ C_p^L &= 6,595 + 0,00053 \cdot T \end{aligned} \right\} \text{ pie } a = \infty.$$

Termiskā aprēķinā pieņemtu šādus lielumus:

kompresijas pakāpi:  $\epsilon = 5,25; 7,0; 8,0$  un  $9,5$ , gaisa pārpilnības koeficientu uz ekspansijas līnijas  $a_2 = 1,2$ , apkārtnes spiedienu

$$p_0 = 1,02 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \text{ (sk. 2. zīm.)},$$

spiedienu kompresijas sākumā  $p_a = 0,80 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$  (izrēķināts) <sup>1)</sup>

$$\text{atlikumu gāzu spiedienu } p_r = \frac{3 \cdot p_0 - p_a}{2} = 1,1 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$$

apkārtnes temperatūru  $T_0 = 290^\circ K$ ,

atlikuma gāzes temperatūru  $T_r = 800^\circ K$ ,

pildījuma temperatūru  $T_0' = 310^\circ K$ .

1) Te jāpiezīmē, ka spiediena lielums punktā  $a$  atkarīgs:

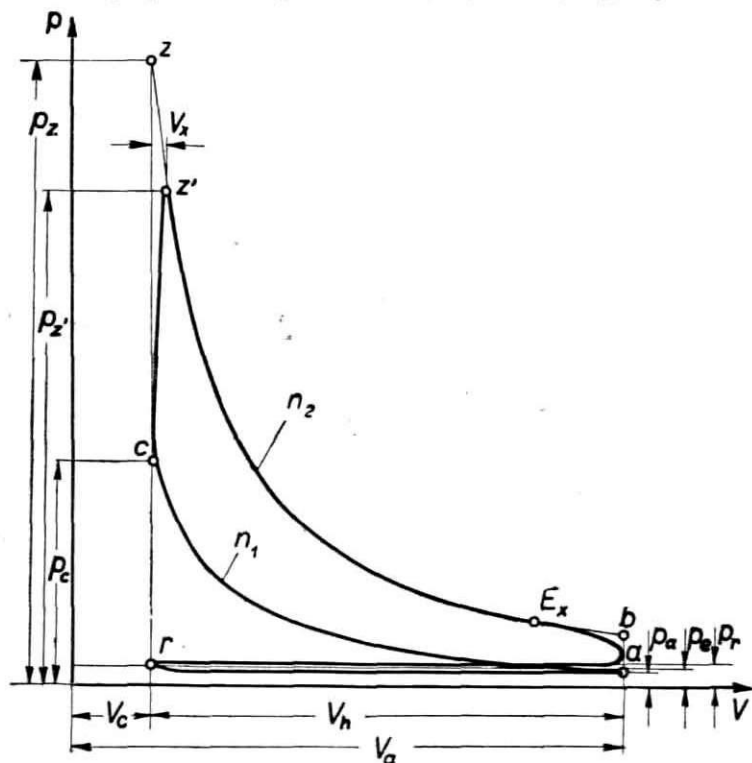
a) no gaisa filtra, kurā atkarībā no tā tipa un tehniskā stāvokļa,  $p_a$  var samazināties par  $0,04 \dots 0,05 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ,

b) no gāzes pievadcauruļu garuma palielinot iesūcāmo cauruļu garumu līdz zināmai robežai, lielums  $p_a$  pieaug, kas izskaidrojams ar svaigā pildījuma staba inerces iespaidu), šķērssgriezuma, likumu asuma, skaita, sienu gluduma un no pildījuma pretestības, kas rodas, sūcot cauri to visai sistēmai,

c) palielinot apgriezību,  $p_a$  kritas, tas pats notiek pie dzinēja zmaudzes.

So faktoru daudzums un dažādība norāda uz grūtībām, kādas rodas  $p_a$  novērtējot, un vispārīgi  $p_a$  svārstas no  $0,7 \dots 0,95 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ . Se minētās  $p_a$  vērtības atbilst darbam pie atvērta zmaudzes vārsta un pie apgriezību skaita, kas atbilst dzinēja maksimālajai jaudai (auto dzinējs) vai arī pie apgriezību skaita, uz kādiem nostādīts regulators (traktora dzinējs).

Dizeļiem ar kompresijas aizdedzi, pie tiem pašiem apgriezieniem  $p_a$  ir nedaudz augstāks nekā karburācijas dzinējiem. Tas izskaidrojams ar iesūcāmās sistēmas vienkāršību. Lielums  $p_a$  dzinējiem, kas strādā ar ģeneratorgāzi, ir atkarīgs no gāzģeneratora filtru, gāzjauča utt. pretestībām, tāpat no pārgāzējamā kuri-



2. zīm. Indikatora diagrama.  $V_a$  — kompresijas sākuma tilpums;  $V_c$  — kompresijas telpas tilpums;  $V_h$  — cilindra darba tilpums;  $V_x$  — tilpums, kādu virzulis atbrīvo sadegšanas procesā ( $V_h$  ir atkarīgs no degmašijuma īpašībām un no dzinēja apgriezienu skaita);  $n_1$  un  $n_2$  — politropas pakāpes rādītāji uz kompresijas un ekspansijas līnijām.

nāmā gabalu izmēriem un kurināmā daudzuma bunkurā, no gāzes cauruļu un filtru aizsērēšanas pakāpes. Gāzģeneratoru ietaišu pretestības atkarībā no to konstrukcijas (normalos apstākļos) un dzinēja apgriezienu skaita, svārstās robežās no  $0,06 \dots 0,10 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$  un kādreiz sasniedz arī lielākas vērtības.

Tātad — pie karburācijas dzinēja pārbūves uz ģeneratorgāzi lielums  $p_a$  var būt lielāks vai mazāks par vērtību  $p_a$  šķidrāi

degvielai (atkarībā no pretestības attiecības starp karburatoru un generatora ierīci).

Atlikuma gāzes koeficients

$$\gamma = \frac{T_0'}{T_r} \cdot \frac{p_r}{\varepsilon p_a - p_r} = \frac{310}{800} \cdot \frac{1,1}{7 \cdot 0,8 - 1,1} = 0,095.$$

Pildījuma koeficients

Pildījuma koeficients  $\eta_v$  izsaka attiecību starp īstenībā iesūkto gāzu daudzumu cilindrā, pret to daudzumu, kāds varētu novietoties tilpumā  $V_h$  ko atbrīvo virzulis, pie temperatūras  $T_0$  un spiediena  $p_0$  dzinēja apkārtnē.

$$\eta_v = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{p_a}{p_0} \cdot \frac{T_0}{T_0' + \gamma \cdot T_r} = \frac{7}{7 - 1} \cdot \frac{0,8}{1,02} \cdot \frac{290}{310 + 0,095 \cdot 800} = 0,687.$$

Temperatūra kompresijas sākumā:

$$T_a = \frac{T_0' + \gamma \cdot T_r}{1 + \gamma} = \frac{310 + 0,095 \cdot 800}{1 + 0,095} = 353^\circ K.$$

Temperatūra kompresijas beigās:

$$T_c = T_a \cdot \varepsilon^{n_1 - 1}$$

$n_1$  — politropas pakāpes rādītājs, kompresijas procesā nav zināms, bet ir jānosaka.

Lai noteiktu  $n_1$ , izmantosim formulu

$$\frac{1,985}{n_1 - 1} = a'_v + b' \cdot T_a \cdot (1 + \varepsilon^{n_1 - 1}),$$

bet te jāatrod  $a'_v$  un  $b'$  — vidējā molekularā siltumietilpība un temperatūras koeficients. Bet lai  $a'_v$  un  $b'$  noteiktu, ir jāzina gaisa pārpilnības koeficients uz kompresijas līnijas  $\alpha_1$ , ko izsaka formula  $\alpha_1 = \alpha_2 \cdot \frac{\mu_0 + \gamma}{\gamma}$ , kur  $\mu_0$  — molekularās izmaiņas ķīmiskais koeficients jau agrāk noteikts  $\mu_0 = 0,9145$  un  $\alpha_2 = 1,2 \cdot \frac{0,9155 + 0,095}{0,095} = 12,72$ .

Tālāk  $a'_v$  un  $b'$  varam atrast, konstruējot šim gadījumam diagramu un no diagramas meklētos koeficientus nolasīt, vai arī analitiski pēc formulas:

$$C = \frac{C^o + C^L \cdot (\alpha - 1)}{\alpha}, \text{ kur } \alpha \text{ vietā } \alpha_1$$

$$a'_v = \frac{a_v^o + a_v^L \cdot (\alpha_1 - 1)}{\alpha_1}$$

$$b' = \frac{b^o + b^L \cdot (\alpha_1 - 1)}{\alpha_1}$$

Ievietojot šīs formulās agrāk atrastās vērtības —  $a_v^o = 5,07$ ;  $b^o = 0,000775$ ;  $a_v^L = 4,61$  un  $b^L = 0,00053$ , dabūjam:

$$a'_v = \frac{5,07 + 4,61 \cdot (12,72 - 1)}{12,72} = 4,65$$

$$b' = \frac{0,000775 + 0,00053 \cdot (12,72 - 1)}{12,72} = 0,000546.$$

Ieliekot dabūtās koeficientu vērtības vienādojumā:

$$\frac{1,985}{n_1 - 1} = 4,65 + 0,000546 \cdot 353 \cdot (1 + 7^{n_1 - 1})$$

ievietošanas ceļā atrodam, ka vērtība  $n_1 = 1,378$  apmierina vienādojumu.

Tā tad kompresijas procesā politropas pakāpes rādītājs ir

$$n_1 = 1,378$$

$$\text{un } T_c = T a_a \epsilon^{n_1 - 1} = 353 \cdot 7^{1,378 - 1} =$$

$$= 353 \cdot 2,085 = 736^\circ K \text{ (vai } t_c = 463^\circ C).$$

Spiediens kompresijas beigās ir:

$$p_c = p_a \cdot \epsilon^{n_1} = p_a \cdot \epsilon \cdot \epsilon^{n_1 - 1} = 0,8 \cdot 7 \cdot 2,085 = 11,7 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Molekularās izmaiņas faktiskais koeficients ir:

$$\mu = \frac{\mu_0 + \gamma}{1 + \gamma} = \frac{0,9145 + 0,095}{1 + 0,095} = 0,922.$$

Tas apstāklis, ka gāzes dzinējā  $\mu < 1$ , bet pie šķidrām degvielām  $\mu > 1$ , ir viens no vidējā indicētā spiediena  $p_i$  pazemināšanas iemesliem, ar ko saistās dzinēja jaudas un arī saimnieciskuma pazemināšanās.

Pildījuma vidējās molekulārās siltumietilpības uz kompresijas līnijas pie simtgrādu skalas

$$C'_v = \frac{C_v^L + \gamma \cdot C_v''}{1 + \gamma} = \frac{(4,90 + 0,095 \cdot 5,4) + (0,00053 + 0,095 \cdot 0,000734 \cdot t)}{1 + 0,095} =$$

$$= 4,943 + 0,000547 \cdot t$$

un  $C'_v$  pie atbilstošās temperatūras  $t_c = 463^\circ\text{C}$ , kompresijas beigās būs:

$$C'_v = 4,943 + 0,000547 \cdot t_c = \\ = 4,943 + 0,000547 \cdot 463 = 5,196 \frac{\text{kcal}}{\text{moli grads}}.$$

### Sadeģšanas procesa aprēķins

Sadeģšanas procesa aprēķins dod iespēju noteikt sadeģšanas produktu temperatūru procesa beigās (punkts z), ievērojot siltuma zudumus, kas tiek izdalīti caur cilindra sienām, kā arī ievērojot siltuma pieaugumu kompresijas procesā.

Sadeģšanas procesu vienādojums ātrās sadeģšanas ciklam, ja dzinēju darbina gāze ir:

$$\frac{\xi_z \cdot Q_z}{\mu \cdot (1 + \gamma) \cdot (1 + L)} + \frac{C'_v \cdot t_c}{\mu} = C''_v \cdot t_z.$$

$\xi_z$  — siltuma izmantošanas koeficients punktā z (izvēlēts  $\xi_z = 0,85$ ). Īpatnējās siltumietilpības attiecinot 1 molam, sadeģšanas procesa vienādojumā zemākā siltumspēja jāreizina ar 22,4 (mola tilpums pie  $0^\circ\text{C}$  un 760 mm Hg staba):

$$\frac{0,85 \cdot 1335 \cdot 22,4}{0,922 \cdot (1 + 0,095) \cdot (2,4)} + \frac{5,196 \cdot 463}{0,922} = (5,40 + 0,000734 \cdot t_z) \cdot t_z.$$

Atrisinot šo kvadratvienādojumu, atrodam, ka sadeģšanas procesa beigās dūmu gāzes temperatūra ir:  $t_z = 1950^\circ\text{C}$  vai  $T_z = 2223^\circ\text{K}$ .

Teoretiskais sadeģšanas spiediens punktā z ir:

$$\lambda \cdot \rho = \frac{p_z \cdot V_z}{p_c \cdot V_c} = \mu \cdot \frac{T_z}{T_c}; \text{ ja } \rho = \frac{V_z}{V_c} = 1, \text{ tad}$$

$$p_z = \mu \cdot p_c \cdot \frac{T_z}{T_c} = 0,922 \cdot 11,7 \cdot \frac{2223}{736} = 32,6 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Spiediena pieauguma koeficients.

$$\lambda = \frac{p_z}{p_c} = \frac{32,6}{11,7} = 2,79.$$

Vidējais politropas pakāpes rādītājs uz ekspansijas līnijas  $n_2$  ir (ja  $\epsilon = \delta$ )

$$\frac{1,985}{n_2 - 1} = a''_v + b'' \cdot T_z \cdot \left(1 + \frac{1}{\epsilon^{n_2 + 1}}\right).$$

$a_v''$  — vērtību pēc absolūtās temperatūras skalas dabūsim, ja no molekularās siltumietilpības pēc simtgrādu skalas ( $a_v'' = 5,40$ ) atņemsim  $\Delta a$ :

$$a_v'' = 5,40 - \Delta a = 5,40 - 546 \cdot 0,000734 = 5,01 \frac{\text{kcal}}{\text{moli grads}}$$

$$b'' = 0,000734 \frac{\text{kcal}}{\text{moli (grads)}^2}$$

Ieliekot šīs vērtības vienādojumā, dabū  $n_2 = 1,264$ .  
Temperatura ekspansijas beigās, ja  $\varepsilon = \delta$ ,

$$T_b = \frac{T_z}{\delta^{n_2-1}} \frac{T_z}{\varepsilon^{n_2-1}} = \frac{2223}{7^{1,264-1}} = 1334^\circ K.$$

Spiediens ekspansijas beigās

$$P_b = \frac{p_z}{\delta^{n_2}} \frac{p_z}{\varepsilon \cdot \delta^{n_2-1}} = \frac{32,6}{7 \cdot 7^{1,264-1}} = \frac{32,6}{7 \cdot 1,67} = 2,75 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$$

Teoretiski iespējamais vidējais indicētais spiediens ir:

$$p_i' = \frac{p_c}{\varepsilon - 1} \cdot \left[ \frac{\lambda}{n_2 - 1} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^{n_2-1}} \right) - \frac{1}{n_1 - 1} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon^{n_1-1}} \right) \right] \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$$

$$p_i' = \frac{11,7}{7-1} \cdot \left[ \frac{2,79}{0,264} \cdot \left( 1 - \frac{1}{7^{0,378}} \right) - \frac{1}{0,378} \cdot \left( 1 - \frac{1}{17^{0,264}} \right) \right] = 5,57 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$$

Novērtējot indikatora diagramas koeficientu  $\alpha = 0,94$  un paredzot uz izgrūšanu  $\Delta p = p_r - p_a = 1,1 - 0,8 = 0,3 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$  iegūstam praktiski sasniedzamo vidējo indicēto spiedienu:

$$p_i = \varphi \cdot p_i' - \Delta p = 0,94 \cdot 5,57 - 0,3 = 4,94 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$$

Generatorgāzes patēriņš 1 indicētai ZS stundai

$$B_i = 7130 \cdot \frac{\eta_v \cdot p_0}{(1+L) \cdot T_0 \cdot p_i} = 7130 \cdot \frac{0,687 \cdot 1,02}{(2,4) \cdot 290 \cdot 4,94} = 1,46 \frac{\text{nm}^2}{\text{ZS}_1 \text{ st}}$$

Siltuma patēriņš 1 indicētai ZS stundai

$$Q_i = B_i \cdot Q_z = 1,46 \cdot 1335 = 1948 \frac{\text{kcal}}{\text{ZS}_1 \text{ st}}$$

Indicētais lietderības koeficients

$$\eta_i = \frac{632,3}{Q_i} = \frac{632,3}{1948} = 0,325.$$

Mechaniskais lietderības koeficients aptver sevī visus jaudas zudumus, kas rodas, dzinējam darbojoties (piem., jaudu, kas zūd uz berzi, tāpat jaudu uz papildu mehānismiem utt.). Bet jaudas



zudumus uz berzi un papildu mehānismiem varam uzskatīt kā darbu, kas zūd no vidējā indicētā spiediena, nosaucot to par berzes spiedienu  $p_T$  varam rakstīt

$$\eta_m = \frac{N_e}{N_i} = \frac{p_e}{p_i} = \frac{p_i - p_T}{p_i}.$$

Eksperimentālā ceļā karburācijas dzinējiem ir atrasts, ka berzes spiediens izsakas:

$$p_T = 0,35 + 0,0005 \cdot n \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2},$$

dzinējiem ar sevišķi augstu kompresijas pakāpi spiediena noteikšanai ir uzstādīta šāda formula:

$$p_T = 0,4 + 0,0013 \cdot n \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Pamatojoties uz šīm formulām varam noteikt mehānisko lietderības koeficientu, pieņemot gāzes dzinējam optimālo apgriezību skaitu  $n = 2000 \frac{\text{apg.}}{\text{min.}}$ .

Berzes spiediens ir:

$$p_T = 0,35 + 0,0005 \cdot 2000 = 1,35 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}.$$

Vidējais efektīvais spiediens ir:

$$p_e = p_i - p_T = 4,94 - 1,35 = 3,59 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$$

un mehāniskais lietderības koeficients

$$\eta_m = \frac{p_i - p_T}{p_i} = \frac{3,59}{4,94} = 0,728.$$

Ģeneratorgāzes patēriņš 1 efektīvai ZS stundai

$$B_e = \frac{B_i}{\eta_m} = \frac{1,46}{0,728} = 2,0 \frac{\text{nm}^2}{\text{ZS}_e \text{ st.}}$$

Siltuma patēriņš 1 efektīvai ZS stundai

$$Q_e = 2,0 \cdot 1335 = 2670 \frac{\text{kcal}}{\text{ZS}_e \text{ st.}}$$

Dzinēja efektīvais lietderības koeficients

$$\eta_e = \frac{632,3}{Q_e} = \frac{632,3}{2670} = 0,237.$$

Vēl var noteikt lietderības koeficientu  $\mu_w$  visai iekārtai (gāzes dzinējam, ieskaitot gāzģeneratoru), t. i. attiecinot uz kurināmo — malku. Ja gāzģeneratora lietderības koeficients  $\eta_u = 0,77$ , tad iekārtas kopējais lietderības koeficients

$$\eta_w = \eta_e \cdot \eta_u = 0,237 \cdot 0,77 = 0,183.$$

Siltuma patēriņš 1 ZS stundai visai iekārtai ir

$$Q_w = \frac{Q_e}{\eta_u} = \frac{2670}{0,77} = 3470 \frac{\text{kcal}}{\text{ZS st.}}$$

Sis saimnieciskums ir pie normala sloģojuma. Pie slodzes samazināšanās notiek strauja gāzģeneratora lietderības koeficienta pazemināšanās.

Lai rastu salīdzinājumu par iekšdedzes dzinēju darbību, ja tos darbina ar šķidro degvielu — benzīnu un pēc pārbūves ar ģeneratorgāzi, tad šim nolūkam analogiskā ceļā ir izdarīts termiskais aprēķins dzinējam ar abu veidu degvielām pie kompresijas pakāpēm  $\varepsilon = 5,25$ ;  $\varepsilon = 7,0$ ;  $\varepsilon = 8,0$  un  $\varepsilon = 9,5$ .

Termiskā aprēķina rezultāti benzīna un gāzu dzinējam sakopti 2. tabulā.

## 2. Pārbūvētā dzinēja jauda

Kāds ir jaudas zudums iekšdedzes dzinējā, ja to pārbūvē no šķidrās degvielas dzinēja, piem., benzīna, uz ģeneratorgāzi?

Kā jau sākumā norādīts, viens no iemesliem jaudas zudumam, pārejot no šķidrām degvielām uz ģeneratorgāzi, ir molekularās izmaiņas koeficienta vērtības samazināšanās ( $\mu < 1,0$ ). Tad jaudas zuduma lielumu ietekmē pildījuma koeficients, bet, izdarot gāzģeneratora piebūvi tik lietderīgi, ka degmaisījuma iesūkšanās pretestības pēc pārbūves paliek tādas pašas kā karburācijas dzinējā, pildījuma koeficients  $\eta_v$  jūtami neizmainās. Tad cilindra pildījumam ar gāzģeneratorgāzi siltuma vienību skaits ir arī par 15...18% mazāks nekā tajos pašos apstākļos pildījumam ar benzīna degmaisījumu.

Te nu radās jautājums, kā šo zudumu novērst, un kas būtu darāms? Vai ar kompresijas pakāpes pacelšanu pie pārbūves varam atgūt zaudēto jaudu un cik tālu šinī virzienā vēlams iet. Šo jautājumu noskaidrošana bija viens no iemesliem, kādēļ šāds aprēķins vispārīgi tika izdarīts.

Termiskā aprēķina rezultāti Šķidrās degvielas un gāzes dzinējam.

Nosaukumi	Apzīmējumi	Benzīna dzinējam				Gāzes dzinējam			
		$\epsilon=5,25$	$\epsilon=7,0$	$\epsilon=8,0$	$\epsilon=9,5$	$\epsilon=5,25$	$\epsilon=7,0$	$\epsilon=8,0$	$\epsilon=9,5$
Apkārtines temperatūra	$T_{0K}$	290	290	290	290	290	290	290	290
Apkārtines spiediens	$P_0$ kG/cm <sup>2</sup>	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02
Spiediens kompresijas sākumā	$P_1$ kG/cm <sup>2</sup>	0,79	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80	0,80
Temperatūra kompresijas sākumā	$T_1$ °K	370	353	345	339	369	353	346	341
Aitkuma gāzes spiediens	$P_f$ kG/cm <sup>2</sup>	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1
Aitkuma gāzes temperatūra	$T_f$ °K	900	900	900	900	900	900	900	900
Pildījuma koeficients	$\eta_v$	0,680	0,689	0,707	0,715	0,669	0,687	0,695	0,701
Aitkuma gāzes koeficients	$\gamma$	0,123	0,084	0,070	0,067	0,1375	0,096	0,085	0,0655
Gaisa pārplūdes koeficients	$\alpha_2$	1,1	1,1	1,1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,2
Teorētiskais gaisa daudzums	$L_0$ mol/l kg $L_0$ mm <sup>3</sup> /s, cm <sup>3</sup>	0,595	0,595	0,595	0,595	—	—	—	—
Faktiskais (mol/l kg degviel.) gaisa daudzums (mm <sup>3</sup> /s, cm <sup>3</sup> gāzes)	$\alpha_2 \cdot L_0$ $1 + \alpha_2 \cdot L_0$	0,655	0,656	0,655	0,655	—	—	—	—
Slāpjo sadegšanas produktu daudzums	$M$ mol/l kg $M$ mol/l, mm <sup>3</sup>	0,7175	0,7175	0,7175	0,7175	—	—	—	—
Tilpuma samazināšanās	$\Delta M$	0,0625	0,0625	0,0625	0,0625	0,205	0,205	0,206	0,205
Molekulārās izmaiņas ķīmiskais koeficients	$\mu_0$	1,0955	1,0955	1,0955	1,0955	0,9145	0,9145	0,9145	0,9145
Molekulārās izmaiņas faktiskais koeficients	$\mu$	1,0946	1,068	1,0893	1,0904	0,904	0,9248	0,9210	0,91975

Gāsa sūrpumpas koeficients uz kompresijas līnijas	$\alpha_1$	10,9	15,4	18,3	22,2	3,2	12,72	14,83	17,95
Vidēja molekularā siltumietilpība sadegšanas produktiem pie $\alpha_2=1$		$C_p^m = 7,36 + 0,000747 \cdot t$ $C_v^m = 5,376 + 0,000747 \cdot t$				$C_p^m = 7,476 + 0,000775 \cdot t$ $C_v^m = 5,49 + 0,000775 \cdot t$			
Vidēja molekularā siltumietilpība sadegšanas produktiem ( $\alpha_2=1,1$ un $\alpha_2=1,2$ )		$C_p^m = 7,317 + 0,00073 \cdot t$ $C_v^m = 5,332 + 0,00073 \cdot t$				$C_p^m = 7,475 + 0,000734 \cdot t$ $C_v^m = 5,40 + 0,000734 \cdot t$			
Vidējais politropas pakāpes rādītājs uz kompresijas līnijas	$n_c$	1,38	1,38	1,38	1,38	1,378	1,378	1,378	1,378
Temperatūra kompresijas beigās	$T_c^0 \text{ K}$	696	740	762	798	894	736	780	800
Spiediens kompresijas beigās	$p_c \text{ kg/cm}^2$	7,9	11,7	14,1	17,85	7,9	11,7	14,05	17,85
Vidēja molekularā siltumietilpība un temperatūras koeficients uz kompresijas līnijas	$\mu_v^m \text{ kcal/mol} \cdot ^\circ\text{C}$ $\beta^*$	4,94 0,000532	4,935 0,000545	4,925 0,000543	4,92 0,000542	4,92 0,000550	4,943 0,000547	4,9378 0,000543	4,931 0,000541
Pildījuma molekularā siltumietilpība kompresijas beigās	$C_v^m$	5,184	5,189	5,191	5,204	5,189	5,193	5,200	5,214
Sadedzināšanas heļu temperatūra	$T_2^0 \text{ K}$	2288	2358	2411	2426	2148	2229	2262	2311
Sadedzināšanas heļu spiediens	$p_2 \text{ kg/cm}^2$	28,2	40,6	48,6	59,3	22,5	32,6	38,4	47,5
Faktiskais sadegšanas heļu spiediens jūnāktā $x$	$p_2^x \text{ kg/cm}^2$	22,9	32,4	37,2	45,0	18,5	26,95	29,4	36,0
Spiediena pieauguma koeficients	$\lambda$	3,7	3,48	3,44	3,30	2,85	3,79	2,74	2,66
Politropas pakāpes rādītājs uz ekspansijas līnijas	$n_e$	1,268	1,268	1,267	1,257	1,264	1,264	1,263	1,263
Temperatūra ekspansijas beigās	$T_b^0 \text{ K}$	1490	1423	1415	1361	1374	1334	1297	1263
Spiediens ekspansijas beigās	$p_b \text{ kg/cm}^2$	3,50	3,50	3,53	3,53	2,76	2,78	2,76	2,74

Nosaukumi	Apzīmējumi	Benzīna dzinējam				Gāzes dzinējam			
		$\varepsilon = 5,25$	$\varepsilon = 7,0$	$\varepsilon = 8,0$	$\varepsilon = 9,5$	$\varepsilon = 5,25$	$\varepsilon = 7,0$	$\varepsilon = 8,0$	$\varepsilon = 9,5$
Teoretiskais vidējais indicētais spiediens	$p_p$ kG/cm <sup>2</sup>	6,92	7,73	8,24	8,70	4,84	5,57	5,87	6,19
Praktiski sasniedzamais vidējais indicētais spiediens	$p_i$ kG/cm <sup>2</sup>	6,20	6,95	7,44	7,72	4,25	4,95	5,22	5,52
Vidējais efektīvais spiediens	$p_e$ kG/cm <sup>2</sup>	4,85	5,60	6,09	6,37	2,70	3,60	3,87	4,17
Mechaniskais lietderības koeficients	$\eta_m$	0,782	0,805	0,820	0,827	0,683	0,728	0,742	0,756
Degvielas patēriņš vienai indicētai ZS stundai	$B_i$	0,188	0,170	0,163	0,159	1,65	1,46	1,39	1,34
Siltuma patēriņš vienai indicētai ZS stundai	$Q_i$ kcal	3070	1870	1795	1750	2200	1948	1854	1790
Indicētais lietderības koeficients	$\eta_i$	0,305	0,338	0,352	0,362	0,288	0,325	0,341	0,353
Degvielas patēriņš vienai efektīvai ZS stundai	$B_e$	0,240	0,212	0,199	0,192	2,42	2,00	1,88	1,77
Siltuma patēriņš vienai efektīvai ZS stundai	$Q_e$ kcal	2650	2330	2220	2130	3230	2670	2610	2360
Dzinēja saiņnieciskais lietderības koeficients	$\eta_e$	0,239	0,272	0,288	0,299	0,196	0,237	0,243	0,267
Saiņnieciskais lietderības koeficients visai iekārtai	$\eta_w$	—	—	—	—	0,151	0,181	0,189	0,205
Siltuma patēriņš vienai ZS stundai visai iekārtai	$Q_w$ kcal	—	—	—	—	4190	3495	3345	2070

Kā zināms, viencilindra četraktu dzinēja efektīvās jaudas formula ir:

$$N_e = \frac{\eta_m \cdot p_i \cdot 0,785 \cdot D_{cm}^2 \cdot 2 \cdot S_m \cdot n}{4 \cdot 60 \cdot 75} = \frac{\eta_m \cdot p_i \cdot 0,785 \cdot D^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{S}{D}\right) \cdot D_{cm} \cdot n}{4 \cdot 60 \cdot 75 \cdot 100} =$$

$$= \frac{m \cdot p_i \cdot D^3 \cdot \left(\frac{S}{D}\right) \cdot n}{1\,147\,000} ZS_e.$$

$D$  — cilindra diametrs,  $S$  — virzuļa gājiens,  $n$  — dzinēja apgriezienu skaits minūtē.

Apzīmējot

$$\frac{D^3 \cdot \frac{S}{D} \cdot n}{1\,147\,000} K \text{ un } p_i \cdot \eta_m = p_e,$$

dabūjam, ka dzinēja jauda izsakās

$$N_e = p_e \cdot K ZS_e.$$

Kā redzams, vienīgais mainīgais lielums jaudas formulā, ja dzinējam pēc pārbūves atstāj to pašu darba režīmu, ir lielums  $p_i$ , resp.  $p_e$ . Izdarot korekti termisko aprēķinu pie dažādām kompresijas pakāpēm (pavisam 8 gadījumiem, sk. aprēķināto datu sakoļojumu 2. tabulā), redzam, ka atkarībā no kompresijas pakāpes dzinēja jaudas zudums, ja dzinējs pirms pārbūves ar šķidro degvielu darbojas ar  $\varepsilon=5,25$  un pēc pārbūves atstāj to pašu kompresijas pakāpi, ir:

$$N_{zud} = \frac{p_e^{benz} - p_e^{gāz}}{p_e^{benz}} \cdot 100 = \frac{4,85 - 2,90}{4,85} \cdot 100 = 40,2\%,$$

Ja pie pārbūves kompresijas pakāpi paceļ no  $\varepsilon=5,25$  uz  $\varepsilon=7,0$ , tad:

$$N_{zud} = \frac{4,85 - 3,60}{4,85} \cdot 100 = 25,8\%,$$

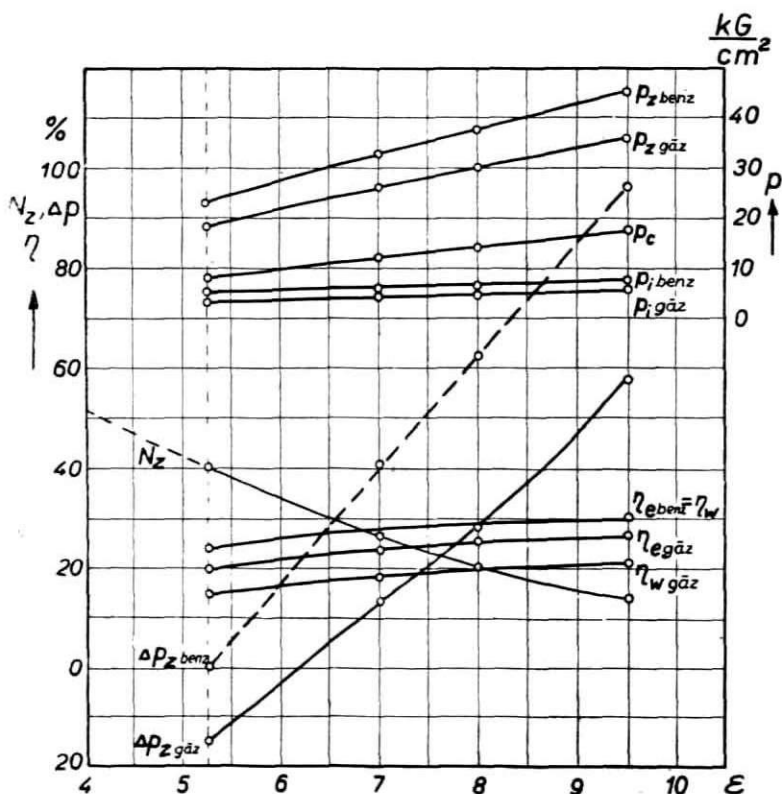
ja pie pārbūves kompresijas pakāpi paceļ no  $\varepsilon=5,25$  uz  $\varepsilon=8,0$ , tad

$$N_{zud} = \frac{4,85 - 3,87}{4,85} \cdot 100 = 20,2\%,$$

ja pie pārbūves kompresijas pakāpi paceļ no  $\varepsilon=5,25$  uz  $\varepsilon=9,5$ , tad:

$$N_{zud} = \frac{4,85 - 4,17}{4,85} \cdot 100 = 14,0\%.$$

Kā redzams, tad, paceļot kompresijas pakāpi praktiski iespējamās robežās, mēs nevaram no pārbūvētā gāzu dzinēja dabūt to jaudu, kādu tas attīstīja ar šķidro degvielu pirms pārbūves. Te vēl jāpiezīmē, ka ne katrreiz dzinēja konstrukcija atļaus  $\epsilon$  pacelt līdz 9,5, bet lielākai daļai būs jāapmierinās ar  $\epsilon=7,0$ .



3. zīm. No benzīna uz gāzi pārbūvētam dzinējam lielumu  $\eta_e$ ,  $\eta_w$ ,  $\Delta p_z$ ,  $N_z$ ,  $p_c$ ,  $p_i$  un  $p_z$  raksturs atkarībā no izvēlētas kompresijas pakāpes.

Šis darbs galvenokārt skar karburācijas dzinējus, bet interesi var radīt jautājums, kāds jaudas zudums sagaidāms, ja dizeldzinēju pārbūvē uz ģeneratorgāzi?

Ja dizeldzinējam ar kompresijas pakāpi no 13...17, pie pārbūves  $\epsilon$  samazina, teiksim līdz 8,5, tad pēc iepriekšējā termiskā aprēķina šis dzinējs nevarēs attīstīt lielāku vidējo  $p_e$ , kā tas ir gāzes dzinējā pie  $\epsilon=8,5$ , pēc līknes (sk. 3. zīm.) atrodam, ka  $d_e = 4,0 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ . Tad te vēl jāreķinās ar pildījuma koeficienta  $\eta_v$  pa-

sliktināšanos un līdz ar to ar iesūkšanas beigu spiediena  $p_a$  pazemināšanos, jo te nāk klāt ģeneratorgāzes iekārtas pretestības, ko pie karburācijas dzinējiem kompensēja karburatora pretestība. Izejot no šiem apsvērumiem un pieņemot vidējo efektīvo spiedienu dizeldzinējā  $6,9 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$  (svārstās no  $5,1 \dots 7,5 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ), jaudas zudums šādam pārbūvētam dizelim būs aptuveni

$$N_{\text{zud}}^{\text{diz}} = \frac{p_e^{\text{gaz}} - p_e^{\text{gaz}}}{p_e^{\text{diz}}} \cdot 100 = \frac{6,9 - 4,9}{6,9} \cdot 100 = 42 \%$$

### 3. Gultņu un kloķa mehānisma detaļu pārslogošana pārbūvētos gāzģeneratora dzinējos

Prakse rāda, ka pārbūvētos gāzes dzinējos tiek novēroti dažādi dzinēja darbības traucējumi un pat atsevišķu detaļu — kloķvārpstas, klaņu lūšanas, gultņu sagraušana u. tml.

Kas attiecas uz gultņu apdraudēšanu no kompresijas pakāpes pacelšanas, pie dzinēja pārbūves, tad te varam secināt sekojošo: sadegšanas beigu spiediena pieaugums, ievērojot virzuļa noieto ceļu sadegšanas laikā ir:

ja dzinējs strādāja ar šķidro degvielu pie  $\varepsilon = 5,25$  un pēc pārbūves paliek tāpat  $\varepsilon = 5,25$ , tad

$$\Delta p_z = \frac{p_z^{\text{gāz}} - p_z^{\text{benz}}}{p_z^{\text{benz}}} \cdot 100 = \frac{19,5 - 22,9}{22,9} \cdot 100 = -14,7 \%$$

ja pie pārbūves paceļam kompresijas pakāpi no  $\varepsilon = 5,25$  uz  $\varepsilon = 7,0$ , tad

$$\Delta p_z = \frac{p_z^{\text{gāz}} - p_z^{\text{benz}}}{p_z^{\text{benz}}} \cdot 100 = \frac{22,95 - 22,9}{22,9} \cdot 100 = 13,3 \%$$

ja pie pārbūves paceļam kompresijas pakāpi no  $\varepsilon = 5,25$  uz  $\varepsilon = 8,0$ , tad

$$\Delta p_z = \frac{p_z^{\text{gaz}} - p_e^{\text{benz}}}{p_z^{\text{benz}}} \cdot 100 = \frac{29,4 - 22,9}{22,9} \cdot 100 = 28,4 \%$$

un ja pie pārbūves paceļam kompresijas pakāpi no  $\varepsilon = 5,25$  uz  $\varepsilon = 9,5$ , tad

$$\Delta p_z = \frac{p_z^{\text{gaz}} - p_z^{\text{benz}}}{p_z^{\text{benz}}} \cdot 100 = \frac{36,0 - 22,9}{22,9} \cdot 100 = 57,3 \%$$

Tā tad, ja, pārbūvējot benzina dzinēju par gāzu dzinēju ar kompresijas pakāpes pacelšanu neejam pāri par 8, tad, uzmanīgi



strādājot un lietojot atbilstošas eļļas, gultņu drošība nebūtu uzskatāma par apdraudētu. Bet ja šādu benzina dzinēju, kas pārbūvēts uz ģeneratorgāzi, pēc iedarbināšanas ar benzīnu tūlīt sāk slogot vai arī, ja dzinēja vadītājs sevišķi smagos dzinēja darba apstākļos, nevarēdams pārvarēt dzinējam uzlikto slogojumu, dod klāt benzīnu, vai pat pārslēdz dzinēju pilnīgi uz to, tad spiediena pieaugums sadegšanas beigās  $\Delta p_z$  var būt tiešām ievērojams.

Pieņemot, ka šāds dzinējs būvēts ar  $\varepsilon=5,25$  un pie pārbūves uz ģeneratora gāzi kompresijas pakāpe pacelta uz 7, spiediena pieaugums, strādājot ar benzīnu, sadegšanas beigās būs:

$$\Delta p_z = \frac{32,4 - 22,9}{22,9} \cdot 100 = 41,5\%$$

un ja pie pārbūves kompresijas pakāpi pacels no  $\varepsilon=5,25$  uz  $\varepsilon=8,0$ , tad

$$\Delta p_z = \frac{37,2 - 22,9}{22,9} \cdot 100 = 62,3\%$$

un ja pie pārbūves kompresijas pakāpi pacels no  $\varepsilon=5,25$  uz  $\varepsilon=9,5$ , tad

$$\Delta p_z = \frac{45 - 22,9}{22,9} \cdot 100 = 96,5\%.$$

Lai gan kļūdu un pamatgultņu virsmas spiede ir pieņemta ar lielu drošību, tad tomēr arī pie īslaicīgas sloģošanas gultņi būs apdraudēti. Šāda īslaicīga sloģošana vēl būtu pieļaujama, ja lietotu specialas eļļas, bet tā kā tas tehniski nav izdarāms, tad, saprotams, ka dzinējam, strādājot šādos apstākļos, īsā laikā gultņu temperatūra pacelsies nepieļaujamās robežās, kas savukārt pacels arī eļļas temperatūru. Kaut arī, smagajam sloģojumam izbeidzoties, dzinējs tiks pārslēgts uz ģeneratora gāzi, tomēr gultņi būs apdraudēti, jo eļļošanas apstākļi būs pasliktinājušies.

Te gan jāpiezīmē, ka, paceļot kompresijas pakāpi pāri par 7,5...8,0, mēs praktiski jau atsakāmies no dzinēja darbināšanas ar benzīnu, jo dzinēja kompresijas pakāpi noteic degvielas īpašības un tā ierobežota ar degvielas pašuzliesmošanas un detonēšanas parādībām, kas rada t. s. dzinēja «kļauvēšanu». Sevišķi šī «kļauvēšana» parādīsies, ja šādu pārbūvētu dzinēju pēc pārslēģšanas uz benzīnu sāks slogot. Un ir taču pilnīgi skaidrs, ka dzinējs ar paaugstinātu kompresijas pakāpi varēs normāli ar benzīnu darboties tikai gandrīz pie pievērtā zmaudzes vārstuļa, un tas nozīmē tā darbināšanu tukšgaitā.

Beidzot būs lietderīgi aizrādīt, ka dzinēja sloģošana pēc pārslēģšanas uz benzīna arī pie samērā zemas kompresijas pakāpes var radīt diezgan nepatīkamas sekas. Tikko apskatīto iemeslu dēļ (dzinēja pārkaršana, kļauvēšana) parādās kļoķa mehānismu

detaļu bojājumi, kloķvārpstas, klaņu lūšana, virzuļu un gultņu sagraušana. Pēc izdarītām ekspertizēm gandrīz visos gadījumos izdevies konstatēt, ka dzinējs smagos darba apstākļos, kad gāzes ražotā jauda nav bijusi pietiekama, piem., traktoram kuļmašīnas uzvilkšanai kalnā u. c., katrreiz panākta izlīdzēšanās, pārslēdzot to pa daļai vai pilnīgi uz šķidro degvielu.

Ir skaidrs, ka šais gadījumos pārbūvētais dzinējs, ja tam pēc pārbūves kompresijas pakāpe ir piem.,  $\varepsilon = 6,5 \dots 7$ , vēl ir spējīgs strādāt ar benzīnu, bet, slodzei pieaugot un dzinējam pārkarstot sāk parādīties «klauvēšana», un tad aprēķinā uzrādītie spiediena pieaugumi  $\Delta p$  vairs nav spēkā. Šāda avarija, sevišķi, ja lūst klaņi, rada smagus dzinēja bojājumus — cilindra bloka plīsumus, cilindra stobrā izsistus caurumus uz ūdens telpu krietnas dūres lielumā, sadalīšanas vārpstas lūšanu, kartera sadauzīšanu utt. Saprotams, ka šāda dzinēja bojājumu izlabošana ir saistīta ar lielām grūtībām, un dažreiz pat nav vairs rentabla.

#### 4. Jaudas zuduma novēršanas iespēja

No apskatītā aprēķina redzams, ka ar kompresijas pakāpes pacelšanu pie dzinēja pārbūves neizdodas pilnīgi novērst jaudas zudumu. No jaudas formulas analīzes izriet, ka dzinēja jauda ir tieši proporcionāla vidējam indicētam spiedienam  $p_1$ .

Ja absolūtais darbs, izteikts siltuma vienībās, uz kompresijas līnijas (sk. 2. zīm.) ir

$Q_1 = A \cdot V_h \cdot p_1$  (kcal), un uz ekspansijas līnijas, ieskaitot sadegšanu

$Q_2 = A \cdot V_h \cdot p_2$  (kcal), tad cikla darbs, siltuma vienībās, ir

$$Q = Q_2 - Q_1 = A \cdot V_h \cdot (p_2 - p_1) = A \cdot V_h \cdot p_i \text{ (kcal) (a)}$$

$A = \frac{1}{427} \frac{\text{kcal}}{\text{kGm}}$  — darba termiskais ekvivalents,  $V_h$  — cilindra darba tilpums,  $p_1$  — vidējais absolūtais spiediens uz kompresijas līnijas,  $p_2$  — vidējais absolūtais spiediens uz ekspansijas līnijas ieskaitot sadegšanu,  $p_i$  — vidējais indicētais spiediens.

No stāvokļa vienādojuma termodinamikā, tilpums kompresijas sākumā  $V_a$  ir:

$$V_a = \frac{G \cdot R \cdot T_a}{p_a} = \frac{m \cdot L \cdot (1 + \gamma) \cdot R \cdot T_a}{p_a} \text{ (m}^3\text{)},$$

tā kā  $m \cdot R = 848 = \text{const}$ , un dzinēja kompresijas pakāpe

$$\varepsilon = \frac{V_a}{V_c} = \frac{V_c + V_h}{V_c},$$

tad cilindra darba tilpums, izteikts ar  $\varepsilon$  un  $V_a$  ir:

$$\begin{aligned} V_h &= \varepsilon \cdot V_c - V_c = (\varepsilon - 1) \cdot V_c = \frac{V_a}{\varepsilon} \cdot (\varepsilon - 1) = \\ &= \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{848 \cdot L \cdot (1 + \gamma) \cdot T_a}{p_a} \text{ m}^3 \dots \end{aligned} \quad (b)$$

No izteiksmes (a) un (b) cikla darbs ir:

$$Q = A \cdot V_h \cdot p_i = \frac{848}{427} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{L \cdot (1 + \gamma) \cdot T_a}{p_a} \cdot p_i \text{ (kcal)} \quad (c)$$

Bet cikla darbs ir arī  $Q = \eta_i \cdot Q_z$  (d)

$\eta_i$  indicētais lietderības koeficients,  $Q_z$  ( $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$ ) — vai ( $\frac{\text{kcal}}{\text{nm}^2}$ ) — kurināmā zemākā siltumspēja.

No izteiksmēm (c) un (d) vidējais indicētais spiediens  $p_i$  ir:

$$p_i = \frac{Q \cdot \varepsilon \cdot p_a}{1,985 \cdot (\varepsilon - 1) \cdot L \cdot (1 + \gamma) \cdot T_a} = \frac{\varepsilon \cdot p_a}{(\varepsilon - 1) \cdot T_a} \cdot \frac{\eta_i \cdot Q_z}{1,985 \cdot L \cdot (1 + \gamma)} \left( \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \right).$$

Pēdējā izteiksme rāda, ka vidējais indicētais spiediens  $p_i$  ir tieši proporcionāls spiedienam kompresijas sākumā  $p_a$ . Šo īpašību var izmantot pārbūvētā gāzes dzinēja zaudētās jaudas atpakaļ atgūšanai, t. i., palielinot attiecīgi kompresijas sākuma spiedienu, dabūjam, ka pārbūvētais gāzes dzinējs ar ģeneratorgāzi attīstīs to pašu jaudu kā pirms pārbūves ar šķidro degvielu.

Konkrētā gadījumā, ja pie pārbūves uz ģeneratorgāzi, dzinējam atstāj to pašu kompresijas pakāpi ( $\varepsilon = 5,25$ ), tad spiedienam kompresijas sākumā ir jābūt:

$$p_a^{ie} = p_a^{gāz} \cdot \frac{p_i^{benz}}{p_i^{gāz}} = 0,8 \cdot \frac{6,20}{4,25} = 1,17 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Ja pie pārbūves kompresijas pakāpi paceļ no  $\varepsilon = 5,25$  uz  $\varepsilon = 7,0$ , tad

$$p_a^{ie} = 0,8 \cdot \frac{6,20}{4,95} = 1,01 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Ja pie pārbūves kompresijas pakāpi paceļ no  $\varepsilon = 5,25$  uz  $\varepsilon = 8,0$ , tad

$$p_a^{ie} = 0,8 \cdot \frac{6,20}{5,22} = 0,95 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \text{ un}$$

ja pie pārbūves kompresijas pakāpi paceļ no  $\varepsilon = 5,25$  uz  $\varepsilon = 9,5$ , tad

$$p_a^{ie} = 0,8 \cdot \frac{6,20}{5,52} = 0,90 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}.$$

Kā redzams, tad spiediens kompresijas sākumā ir atkarīgs no pārbūvētā dzinēja kompresijas pakāpes, un ar  $\varepsilon$  palielināšanos tas samazinās.

Spiedienu kompresijas sākumā palielina iepūtes procesā. To izdara ar iepūtes sūkni, ko piedzen ar gāzes turbinu, kas darbojas ar nostrādātām gāzēm vai arī mehāniski no dzinēja kloķvārpstas.

Iepūtes procesā mēs palielinām cilindra pildījumu.

Tā kā temperatūra kompresijas sākumā  $T_a$  ir:

$$T_a = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{p_a}{p_0} \cdot \frac{T_0}{\eta_v \cdot (1 + \gamma)},$$

tad vidējā indicētā spiediena formula pārveidojas šādā sakarībā

$$p_i = \frac{Q \cdot p_0 \eta_v}{1,985 \cdot L \cdot T_0} = \frac{\eta_i \cdot Q_z p_0}{1,985 \cdot \alpha \cdot L_0 \cdot T_0} \cdot \eta_v \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2},$$

t. i. vidējais indicētais spiediens pie pārējiem līdzīgiem parametriem ir proporcionāls pildījuma koeficientam  $\eta_v$ .

### Secinājumi

1. Ģeneratorgāzes un šķidro degvielu iekšdedzes dzinēju salīdzināšanai un novērtēšanai vislabāk pielietojama siltumtehniskā aprēķina metode.

2. Pamatojoties uz šo metodi konstatēts sekojošais:

a) vienādos apstākļos iekšdedzes dzinējā šķidrās degvielas vietā lietojot ģeneratorgāzi dzinēja jaudas samazinās par  $\approx 40\%$ .

b) šo jaudas zudumu var samazināt no 40 līdz 20%, paceļot ģeneratorgāzes dzinēja kompresijas pakāpi līdz 8; pie šādas kompresijas pakāpes, ģeneratorgāzes gadījumā, dzinēja darbīgo daļu kā kloķvārpstas, klaņu un gultņu stiprība tāda pati, kā tam pašam dzinējam darbojoties ar šķidro degvielu pie kompresijas pakāpes  $\varepsilon = 5,25$ ;

c) pārejot no šķidrās uz gāzveida kurināmo un paceļot kompresijas pakāpi virs  $\varepsilon = 6,5 \dots 7,0$ , šos dzinējus nedrīkst darbināt zem slodzes ar šķidro degvielu, jo tādā gadījumā dzinēja atbildīgās daļas — kā kloķvārpsta, gultņi, klaņi u. c. var ātri nolietoties un pat salūzt.

d) jaudas zudumus, kādi rodas pārejot no šķidrā uz gāzveida kurināmo, var novērst pilnīgi ar iepūti. Šis paņēmieni ir viens no vienkāršākiem un praktiski izdevīgākiem.

3. Punktā 2 analītiskie aprēķini apstiprinājušies praksē.

4. Pārbūvētā šķidrās degvielas dzinēja darbināšanai ar ģeneratorgāzi kompresijas pakāpi  $\epsilon$  var palielināt arī virs 8, bet tādā gadījumā jāpastiprina esošā dzinēja kloķvārpsta, klaņi un gultņi, kas praktiski grūti realizējams.

*А. К. ДУМПС*

## МЕТОД СРАВНЕНИЯ ДВИГАТЕЛЯ, РАБОТАЮЩЕГО НА ЖИДКОМ И ГАЗООБРАЗНОМ ТОПЛИВАХ

### ВЫВОДЫ

1. Аналитический метод является самым точным для сопоставления двигателей, работающих на жидком и газообразном топливах.

2. На основании этого метода установлено:

а) Применяя газообразное топливо вместо жидкого в одинаковых условиях, мощность двигателя уменьшается  $\approx 40\%$ .

б) При повышении степени сжатия (до  $\epsilon=8$ ) перестроенного двигателя на генераторный газ, потерю мощности можно уменьшить до  $20\%$ . При работе на генераторном газе с повышенной степенью сжатия в пределах до 8, устойчивость деталей двигателя, как коленчатого вала, шатунов, подшипников и др., будет такая же как при работе двигателя на жидком топливе при степени сжатия  $\epsilon=5,25$ .

в) После перевода двигателя с жидкого топлива на газообразное и повышения степени сжатия выше  $\epsilon=6,5 \dots 7,0$ , ни в коем случае не рекомендуется применять жидкое топливо, так как ответственные детали, как коленчатый вал, подшипники и шатуны могут быстро изнашиваться и ломаться.

г) Потери мощности, которые появляются при переходе с жидкого на газообразное топливо, можно полностью устранить при помощи наддува. Этот способ является одним из самых простых и практически выгодных.

3. Аналитические расчеты, рассмотренные в § 2, подтвердились произведенными автором экспериментами.

4. При эксплуатации перестроенного двигателя жидкого топлива на генераторный газ, степень сжатия можно повысить выше 8, но в этом случае в двигателе надо усилить коленчатый вал, шатуны и подшипники, что практически трудно осуществить.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. В. А. Ваншейдт, Судовые двигатели внутреннего горения, ч. I. 1941.
2. А. В. Квасников, Тепловой расчет двигателей внутреннего сгорания, 1938.
3. Б. Г. Либрович, Рабочие процессы двигателей внутреннего сгорания и их агрегатов, 1946.
4. Е. К. Мазинг, Тепловой процесс двигателей внутреннего сгорания, 1937.
5. А. С. Орлин, Двигатели боевых машин, 1946.
6. В. В. Синеуцкий, Конструирование двигателей внутреннего сгорания, 1927.
7. F. Schmidt, Die thermische Berechnung der Verbrennungskraftmaschinen, Forschungsarbeiten, Heft 314.

*В. Ю. ЮРАН*

## **ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОЕКЦИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ МЕХАНИЗАЦИИ ПОСТРОЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОБЪЕКТОВ**

Директивы XX съезда КПСС предусматривают всемерную механизацию трудоемких процессов. Это относится также и к внедрению механизации графических построений в конструкторские бюро, проектные организации и т. д. Проф. Н. Ф. Четверухин [12] замечает, что в области механизации графических построений пока еще предпринимаются лишь первые шаги и очень немногие предложения нашли применение на практике. Однако актуальность этой проблемы несомненна.

В машиностроении, в инженерно-строительном деле, архитектуре, при иллюстрации технической книги применяют наглядные изображения, которые значительно облегчают и ускоряют чтение ортогональных чертежей объектов. Но в связи с трудоемкостью их построения, применение наглядных изображений ограничено. Аксонометрические изображения применяются более широко, чем перспективные, ибо построение аксонометрических изображений значительно проще построения перспективы. Но зато перспективные изображения имеют большую наглядность, чем аксонометрические.

В целях более широкого внедрения в технику и в область иллюстрирования технических книг перспективных изображений взамен аксонометрических изображений, необходимо идти двумя путями: либо по пути механизации построения перспективных изображений, либо по пути изыскания более простых приемов графического построения перспектив, которые не сложнее построения аксонометрических изображений.

В специальной литературе (Л. Н. Лихачев 8, 10) изложены так называемые сопряженные проекции, в которых для изображения объекта используют его перспективную и ортогональную проекции на картинную плоскость. Сопряженные проекции за-

служивают более внимательного изучения как системы проекций, так как в них:

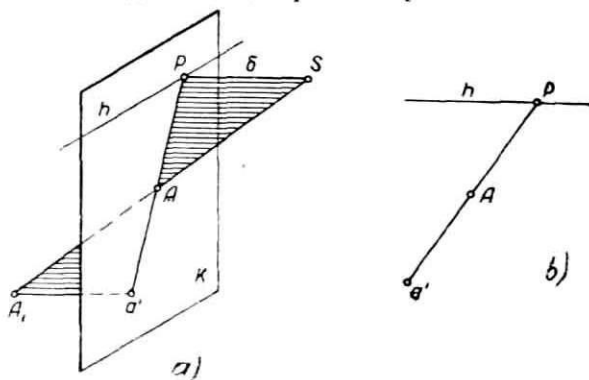
- 1) сохраняется наглядность перспективного изображения при значительном упрощении его метрики;
- 2) наиболее удачно проявляются перспективные соответствия;
- 3) имеется возможность использования приемов решения задач и методов преобразования проекций, широко известных в теории прямоугольных проекций.

Эти проекции впервые теоретически обосновал и развил Л. Н. Лихачев. Ясно также и то, что сделано еще не все.

В данной работе рассматриваются способы преобразования сопряженных проекций и механизация построения аксонометрических и перспективных изображений объектов на базе сопряженных проекций.

### ПОНЯТИЕ О СОПРЯЖЕННЫХ ПРОЕКЦИЯХ ТОЧКИ

Дана картинная плоскость  $K$ , центр проекций  $S$  и точка  $A_1$  предметного пространства (фиг. 1, а). Спроектировав точку  $A_1$  перспективно из заданного центра  $S$  и ортогонально на картин-



Фиг. 1.

ную плоскость  $K$ , получаем ее перспективную проекцию  $A$  и ортогональную проекцию  $a'$ , которую в дальнейшем будем называть фронтальной проекцией, ибо вертикальная картинная плоскость  $K$  находится во фронтальном положении по отношению к наблюдателю в точке  $S$ . Ортогонально проектирующая плоскость  $SA_1P$  пересекает картинную плоскость по прямой  $a'P$ , а последняя пересекается с проектирующим лучом  $SA_1$  в точке  $A$ , являющейся перспективой данной точки. Проекции точки  $a'$  и  $A$  находятся на общей прямой проходящей через главную



точку  $P$  и между ними имеется проективное соответствие (фиг. 1,  $b$ ). Отрезок  $a'A$  является перспективой глубины  $A_1a'$  точки  $A_1$ .

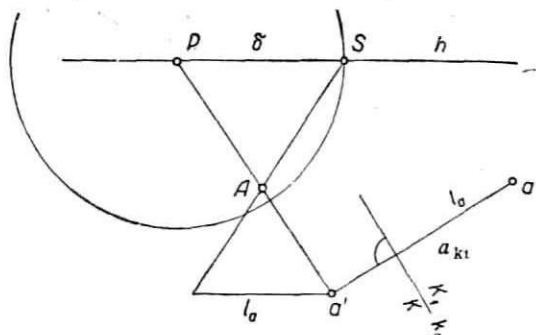
Такое сочетание перспективной и фронтальной проекций данной точки называется перспективно-прямоугольными сопряженными проекциями или сопряженными проекциями [8, 10].

## СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОЕКЦИИ

Рассмотрим только те способы преобразования сопряженных проекций, которые до сих пор не применялись в этих проекциях.

### Способ дополнительных проекций

В сопряженных проекциях при решении некоторых задач в качестве вспомогательного приема можно с успехом пользоваться дополнительными проекциями на плоскости перпендикулярной к картинной плоскости, которые могут быть построены по перспективной и ортогональной проекциям. Наличие двух ортогональных проекций позволяет шире использовать в со-



Фиг. 2.

пряженных проекциях способы преобразования проекций, известных в теории прямоугольных проекций.

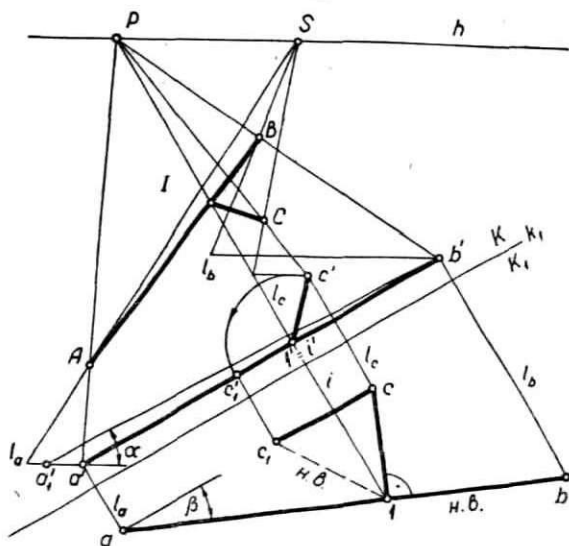
Применение дополнительных проекций упрощает в некоторых случаях решение как позиционных, так и метрических задач.

Способ дополнительных проекций аналогичен способу перемены плоскостей проекций в ортогональных проекциях.

На фиг. 2 показан способ построения дополнительной проекции точки  $A_1$  на плоскость  $K_1$ , перпендикулярную к картинной плоскости  $K$ . Плоскости  $K$  и  $K_1$  пересекаются по оси  $k_1$ .

Для получения новой ортогональной проекции точки  $A_1$  на плоскости  $K_1$ , надо опустить из точки  $A_1$  перпендикуляр на плоскость  $K_1$ , основание которого и определит искомую проекцию  $a$ . Так как плоскость  $K_1$  параллельна глубине точки  $A_1$ , которая не изменилась, следует, что  $a_{k_1} a = A_1 a' = la$ , т. е. *расстояние дополнительной проекции данной точки от оси  $k_1$  равно глубине данной точки.*

Чтобы получить эпюр, поворачиваем плоскость  $K_1$  вокруг оси  $k_1$  и совмещаем с картинной плоскостью  $K$  так, чтобы обе ортогональные проекции находились бы по обе стороны от оси  $k_1$ . Проведем из проекции  $a'$  перпендикуляр к оси  $k_1$  и отложим на нем глубину данной точки  $l_a = a_{k_1} a$  и получим дополнительную



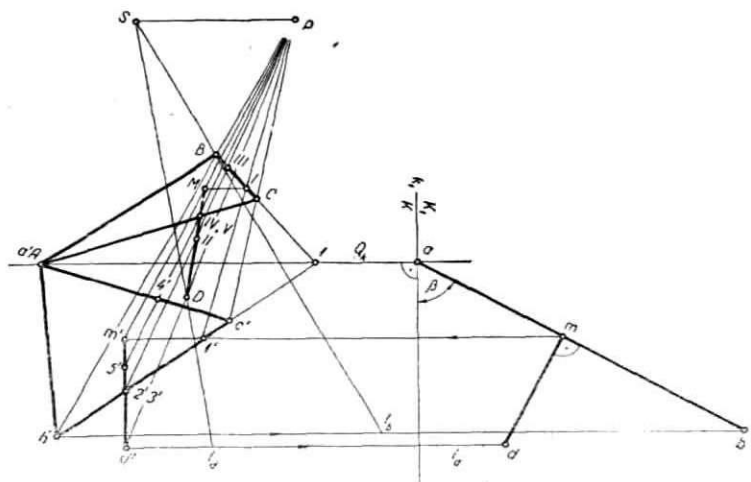
Фиг. 3.

проекцию  $a$ . По аналогии с ортогональными проекциями назовем ее горизонтальной проекцией. Глубину точки  $l_a$  находим, если через точку  $P$  и проекцию  $a'$  проводим параллельные прямые в противоположных направлениях, а на прямой, проходящей через точку  $P$ , откладываем отрезок  $PS = \delta$ . Тогда луч  $SA$  на прямой, проходящей через проекцию  $a'$ , отсечет глубину данной точки  $l_a$ .

Рассмотрим на примере применение этого способа. Дан отрезок  $A_1B_1$  (сопряженными проекциями  $AB$  и  $a'b'$ ) и точка  $C_1$  (проекциями  $C$  и  $c'$ ) (фиг. 3). Определить расстояние от точки  $C_1$  до отрезка прямой  $A_1B_1$ .

Если данный отрезок прямой был бы параллелен картинной плоскости, тогда, основываясь на ортогональные проекции двух перпендикулярных прямых, проекция искомого перпендикуляра (расстояния) была бы перпендикулярна фронтальной проекции отрезка  $a'b'$ . Так как отрезок находится в общем положении, введем плоскость проекций  $K_1$  параллельно отрезку  $A_1B_1$ . Новая ось будет  $\kappa_1 || a'b'$ . Построим дополнительные проекции отрезка и точки  $ab$  и  $c$  на плоскости  $K_1$ , для чего найдем, как было описано ранее, дополнительные проекции точек  $A_1, B_1$  и  $C_1$ . Так как отрезок  $A_1B_1$  параллелен плоскости  $K_1$ , то проекция искомого перпендикуляра  $cI$  перпендикулярна к  $ab$ . Затем определяем проекции перпендикуляра  $c'I'$  и  $CI$ . Примем ось вращения  $l_1 (i', I)$ , перпендикулярную к плоскости  $K$  и проходящую через точку  $I_1$ , и повернем вокруг этой оси перпендикуляр  $C_1I_1$  до положения, параллельного плоскости  $K_1$ . После поворота ортогональные проекции перпендикуляра будут  $c'I^1$  и  $c_1I_1$ . Так как в повернутом положении перпендикуляр параллелен к плоскости  $K_1$ , то его проекция  $c_1I_1$  даст действительную длину перпендикуляра. Проекция  $ab$  является истинной длиной отрезка  $A_1B_1$ , а угол  $\beta$  между истинной отрезка  $ab$  и фронтальной проекцией  $a'b'$  является углом наклона отрезка  $A_1B_1$  к плоскости  $K$ . Угол  $\alpha$  между истинной длиной отрезка  $a'b' = ab$  и горизонтальной прямой, проведенной через проекцию  $a'$ , является углом наклона этого отрезка к горизонтальной плоскости.

На фиг. 4 выполнено определение действительного расстояния от точки  $D_1$  до плоскости треугольника  $A_1B_1C_1$ . Новая плос-



Фиг. 4.

кость проекций  $K_1$  проведена перпендикулярно к данной плоскости, а ось  $\kappa_1$  будет перпендикулярна к картинному следу  $Q_\kappa$  данной плоскости, который проходит через точки пересечения  $A$  и  $I$  обеих проекций сторон плоскости треугольника. Определим новую проекцию плоскости  $A_1B_1C_1$  на плоскости  $K_1$  в виде прямой  $abc$ , а также новую проекцию  $d$  точки  $D_1$ . Так как данная плоскость  $A_1B_1C_1$  перпендикулярна к  $K_1$ , то проведенный к плоскости перпендикуляр (расстояние)  $D_1M_1$  будет параллелен к плоскости  $K_1$ , а его проекция  $dm$  перпендикулярна к проекции плоскости  $abc$  и  $dm = D_1M_1$  (т. е. равняется искомому расстоянию). Фронтальная проекция перпендикуляра  $d'm'$  параллельна к оси  $\kappa_1$ . Точка  $m$  является новой проекцией точки пересечения перпендикуляра и плоскости, по которой определяется ее фронтальная проекция  $m'$ . Последняя совместно с проекцией  $m$  находится на общем перпендикуляре к оси  $\kappa_1$ . Перспектива точки пересечения  $M$  находится в точке пересечения перспективы фронтали  $I_1M_1$  данной плоскости и линии связи  $m'P$ .

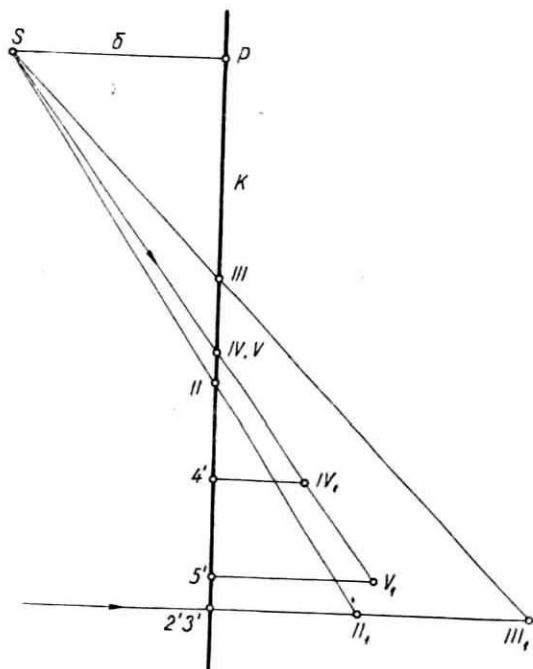
Видимость определяется при помощи конкурирующих точек, перспективные или ортогональные проекции которых совпадают. Такими точками на фиг. 4 являются  $II_1$ ,  $III_1$ , а также  $IV_1$ ,  $V_1$ . Чтобы судить об их видимости, рассмотрим фиг. 5, на которой картинная плоскость  $K$  изображена в виде прямой (в профиле) и точки  $II_1$ ,  $III_1$  и  $IV_1$ ,  $V_1$  в предметном пространстве.

Фронтальные проекции  $2'$  и  $3'$  точек  $II_1$  и  $III_1$  совпадают, ибо находятся на общем фронтально проектирующем луче. Наблюдатель, глаз которого расположен в бесконечности впереди картинной плоскости  $K$ , видит во фронтальной проекции ближайшую к нему точку  $II_1$ , перспектива которой дальше от главной точки  $P$ , чем перспектива  $III$  невидимой точки  $III_1$ , так как точка  $II_1$  находится на перпендикуляре  $D_1M_1$ , то он во фронтальной проекции будет виден от точки  $2'$  до точки  $m'$ , а точка  $III_1$  лежащая на стороне треугольника  $B_1C_1$  не будет видима.

Перспективы точек  $IV_1$  и  $V_1$  совпадают, ибо они находятся на одном перспективно проектирующем луче, а наблюдатель, глаз которого расположен в центре проекции  $S$ , видит в перспективе ближайшую к нему точку  $IV_1$  на стороне треугольника  $A_1C_1$ , а точка  $V_1$ , лежащая на перпендикуляре, не будет видима и следовательно перпендикуляр в перспективе не виден от точки  $V$  до точки  $M$ . Фронтальная проекция  $4'$  видимой точки  $IV_1$  находится ближе к главной точке  $P$ , чем фронтальная проекция  $5'$  невидимой точки  $V_1$ .

Вышеуказанное относится также и к точкам в промежуточном пространстве.

Из этого следует, что видимость в сопряженных проекциях определяется по следующему правилу: *Если совпадают фронтальные проекции двух точек предметного или промежуточного пространства, то видимой из них на фронтальной проекции является та, перспектива которой дальше от главной точки Р.*



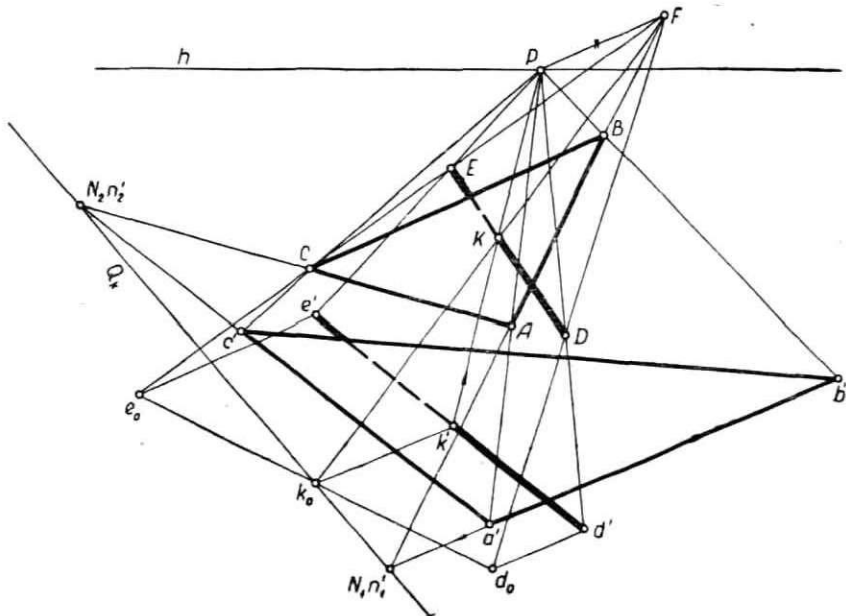
Фиг. 5.

*Если совпадают перспективы двух точек, то видимой из них в перспективе является та, фронтальная проекция которой ближе к главной точке Р.*

### Способ вспомогательного проектирования

Этот способ удобно применять для решения задач на пересечения в сопряженных проекциях. Сущность способа состоит в том, что данные объекты проектируем параллельно на картинную плоскость в таком направлении, чтобы получить параллельную проекцию искомой точки пересечения или линию пересечения, по которой определяются сопряженные проекции точки пересечения или линии пересечения.

Рассмотрим, как определяется точка пересечения  $K_1$  (фиг. 6) отрезка прямой  $E_1D_1$  с плоскостью треугольника  $A_1B_1C_1$ . Для решения этой задачи, примем направление проектирования параллельно плоскости  $A_1B_1C_1$ , т. е. параллельно какой-нибудь прямой этой плоскости, напр., стороне треугольника  $A_1B_1$ . Фронтальные проекции проектирующих лучей будут параллельны фронтальной проекции  $a'b'$  этой стороны, а перспективы будут проходить через точку схода  $F$  стороны  $A_1B_1$ , которая находится в точке пересечения  $F$  перспективы  $AB$  стороны

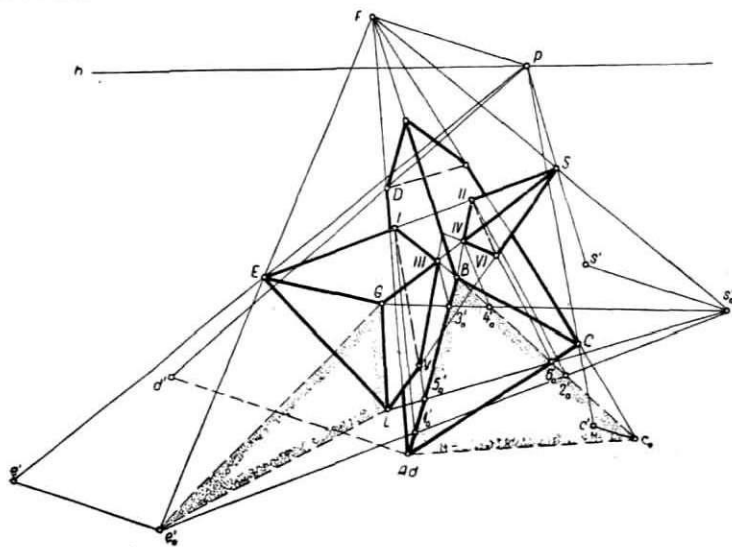


Фиг. 6.

$A_1B_1$  и фронтальной проекции  $PF$  проектирующего луча параллельного этой стороне. Косоугольная проекция плоскости  $A_1B_1C_1$  на картинной плоскости  $K$  изобразится в виде прямой и совпадает с фронтальным следом  $Q_K$  плоскости треугольника. Определяя следы  $e_0$  и  $d_0$  проектирующих лучей, проходящих через концы отрезка  $E_1D_1$ , получим проекцию отрезка  $e_0d_0$ . Проекция плоскости и прямой  $Q_K$  и  $e_0d_0$  можно рассматривать как их тени на картинной плоскости  $K$  при параллельном освещении. Точка пересечения  $k_0$  проекций  $Q_K$  и  $e_0d_0$  является проекцией искомой точки пересечения  $K_1$ . Перспектива точки пересечения находится в точке пересечения  $K$  обратно проектирующего луча  $k_0F$ , проведенного через точку  $k_0$ , и перспективы  $ED$

отрезка, а фронтальная проекция  $k'$  окажется в точке пересечения фронтальной проекции  $k_0k'$  этого луча и фронтальной проекции  $e'd'$  отрезка. Видимость прямой определяется так, как описано на стр. 197.

Проектирующие лучи можно также принять параллельными отрезку  $E_1D_1$ . Тогда проекция отрезка представится в виде точки, с которой совпадает проекция  $k_0$  точки пересечения; проекция плоскости треугольника представится в виде треугольника.



Фиг. 7.

Этот способ успешно применим для определения контура сечения многогранника плоскостью, для определения точки пересечения прямой многогранником, а также для построения линий пересечения многогранников, цилиндров и конусов.

На фиг. 7 показано изображение призмы и пирамиды и определение линии пересечения в сопряженных проекциях. Основания многогранников не расположены на картинной плоскости. В сопряженных проекциях призма с параллельными основаниями является однозначной, если даны ее перспектива и фронтальные проекции всех вершин одного основания и одной вершины второго основания. Если основание призмы находится на картинной плоскости, то достаточно, если даны перспектива призмы и фронтальная проекция одной вершины второго основания. Пирамида вполне определена, если даны ее перспектива и фронтальные проекции всех ее вершин (фиг. 7).

Если основание пирамиды находится на картинной плоскости, то тогда вполне достаточно, если даны ее перспектива и фронтальная проекция  $s'$  вершины  $S_1$ .

Будем обозначать вершины оснований многогранников, лежащие на картинной плоскости, для которых фронтальные проекции совпадают с перспективными, одной буквой, принятой для обозначения перспективной проекции.

Для определения линии пересечения призмы и пирамиды примем направление вспомогательного проектирования параллельно боковым ребрам призмы, точкой схода которых является  $F$ . Параллельной проекцией боковой поверхности призмы на картинной плоскости является треугольник  $ABC'_0$ , а проекция пирамиды  $e'_0Gs'_0$ . Как видно, параллельные проекции  $e'_0s'_0$ ,  $Gs'_0$  и  $Ls'_0$  боковых ребр пирамиды пересекаются с параллельной проекцией призмы  $ABC'_0$  в точках  $1'_0$  и  $2'_0$ ,  $3'_0$  и  $4'_0$ ,  $5'_0$  и  $6'_0$ . Параллельные проекции боковых ребер призмы, представлены в виде точек  $A$ ,  $B$  и  $c'_0$ , находящихся вне параллельной проекции пирамиды, а поэтому ребра призмы не пересекаются с пирамидой. Проведя через точки  $1'_0$ ,  $2'_0$ ,  $3'_0$ ,  $4'_0$ ,  $5'_0$  и  $6'_0$  обратно проектирующие лучи до соответствующих перспективных проекций ребер пирамиды, получим перспективы  $I$ — $VI$  точек пересечения, а соединив точки  $I$ ,  $III$ ,  $V$  и  $II$ ,  $IV$ ,  $VI$ , получим перспективу линии пересечения.

В работе, по которой составлена данная статья, автором кроме того рассмотрены еще следующие вопросы сопряженных проекций:

- 1) Новая интерпретация способа перемены центра сопряженных проекций.
- 2) Сравнение способов преобразования сопряженных проекций.
- 3) Построение теней точки, прямых, плоскостей, многогранников и цилиндрических ниш в сопряженных проекциях. Показано, что построение теней в этих проекциях не сложнее построения их в ортогональных или в перспективных проекциях.
- 4) Показано гомологическое соответствие между сопряженными проекциями плоской фигуры и ее тенями.

#### **МЕХАНИЗАЦИЯ ПОСТРОЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ И ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОБЪЕКТОВ НА БАЗЕ СОПРЯЖЕННЫХ ПРОЕКЦИЙ**

Существующие приборы для механического построения наглядных изображений объектов, вследствие сложности их конструкции и некоторых других причин распространения не по-

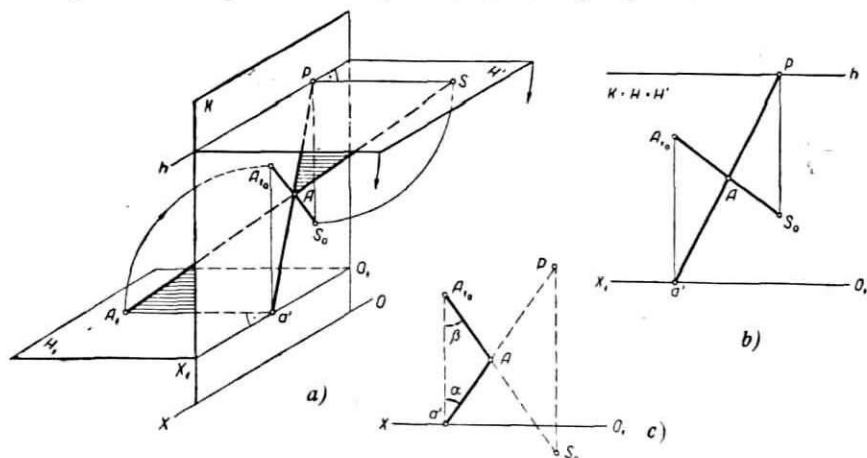


лучили. Главными требованиями, предъявляемыми к подобного типа приборам, являются простота конструкции и удобства в применении.

В данной работе показано, как с помощью простого прибора, так называемого аксо-перспектографа, осуществляется механическим путем построение перспективных и аксиометрических изображений пространственных объектов по их ортогональным проекциям и проекциям с числовыми отметками. Конструкция прибора базируется на простой схеме построения наглядных изображений, полученной на базе сопряженных проекций.

### Геометрическое обоснование прибора

Дана точка  $A_1$  в пространстве, вертикальная картинная плоскость  $K$  с основанием картины  $OX$  на предметной плоскости  $H$ , которая не изображена на фиг. 8, а, центр. проекций  $S$  и его



Фиг. 8.

ортогональная проекция  $P$  (главная точка) в плоскости изображений на линии горизонта  $h$ . Проведенная через точку  $A_1$  горизонтальная вспомогательная плоскость  $H_1$  пересекается с картинной плоскостью  $K$  по основанию картины  $O_1X_1$ . Точку  $A_1$  ортогонально спроектируем на плоскость  $K$  и получим ее ортогональную проекцию  $a^1$  на основании картины  $O_1X_1$ . Вторично точку  $A_1$  центрально спроектируем из центра проекций  $S$  и получим ее перспективу  $A$  на плоскости  $K$ . Повернув плоскость  $H_1$  вместе с точкой  $S$  вокруг линии горизонта  $h$ , а плоскость  $H$  вместе с точкой  $A_1$  вокруг линии основания  $O_1X_1$  в указанном

на чертеже направлении, совместим их с картинной плоскостью  $K$ . На совмещенном чертеже (фиг. 8, *b*) прямая  $a^1P$  является ортогональной проекцией проектирующего луча, а  $A_{10}S_0$  является прямой, соединяющей совмещения центра проекции  $S$  и точки  $A_1$ . Точка  $A$  пересечения этих прямых является перспективой данной точки.

Как видно, для определения перспективы  $A$  точки  $A_1$  достаточно провести только две пересекающиеся прямые  $a^1P$  и  $A_{10}S_0$ . Последние можно рассматривать как схему построения перспективы данной точки по ее ортогональной проекции  $a'$  и совмещенному положению  $A_{10}$  (фиг. 8, *c*). На данной схеме отрезок  $a'A_{10}$  является совмещением глубины точки, а  $a'A$  — изображением глубины точки (перспектива или аксонометрия). Прямая  $a'A$  схемы всегда проходит через неподвижную точку  $P$ , а прямая  $A_{10}A$  проходит через неподвижную точку  $S_0$ . Величины углов  $\alpha$  и  $\beta$  меняются в зависимости от направления проектирующих лучей.

Вообще между плоской фигурой и наглядными изображениями ее — перспективой и аксонометрией существует геометрическое соответствие — гомология. Если ось и центр гомологии собственные, она дает перспективные изображения, а специальные виды гомологии (аффинное соответствие) дают аксонометрические изображения.

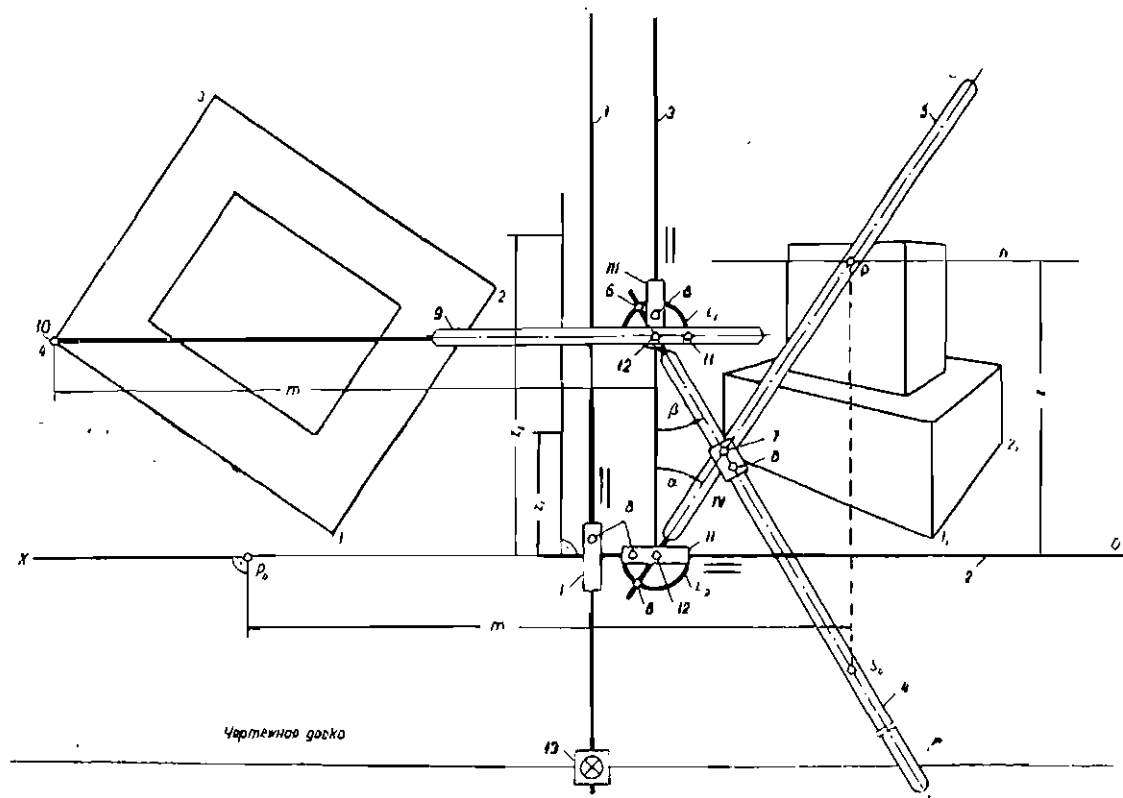
Между сопряженными проекциями существует гомология с центром в точке  $P$ . На фиг. 8, *b* видим, что между совмещением  $A_{10}$  точки  $A_1$  горизонтальной плоскости  $H_1$  и перспективой  $A$  также существует гомология с центром в точке  $S_0$ . Обе гомологии имеют общую ось  $O_1X_1$ .

Если центр проекций  $S$  находится в бесконечности, то тогда проектирующие лучи взаимно параллельны. Поэтому ортогональные проекции их, а равно и их совмещения также взаимно параллельны, а точки  $P$  и  $S_0$  (центры гомологии) находятся в бесконечности.

Из указанного следует, что схемы построения аксонометрических и перспективных изображений аналогичны; только в случае построения аксонометрических изображений углы схемы  $\alpha$  и  $\beta$  постоянны. Эта общая простая схема построения наглядных изображений плоской фигуры и является основой кинематической схемы аксо-перспектографа.

### Кинематическая схема аксо-перспектографа

Конструктивные элементы прибора соответствуют элементам схемы построения наглядных изображений (фиг. 8, *c*). Весь прибор состоит из системы подвижных линеек (фиг. 9).



Линии основания  $O_1X_1$  соответствует стержень 2, жестко скрепленный с кареткой I, а последняя свободно перемещается по базе 1, которая при помощи скоб 13 неподвижно устанавливается на чертежной доске. Оси базы 1 и стержня 2 взаимно перпендикулярны. Прямой  $a^1A_{10}$  соответствует стержень 3, жестко скрепленный с кареткой II, которая свободно перемещается по стержню 2. Оси стержней 2 и 3 перпендикулярны. Прямой  $A_{10}S_0$  соответствует линейка 4 с прорезью, шарнирно скрепленная с кареткой III, которая свободно перемещается по стержню 3. Элементу  $a^1P$  соответствует линейка 5 с прорезью, шарнирно скрепленная с кареткой II и проходящая через точку P. Линейки 4 и 5 с помощью лимбов  $L_1$  и  $L_2$  устанавливаются под углами  $\alpha$  и  $\beta$  к оси линейки 3 и закрепляются фиксирующими винтами 6. Пишущий штифт 7, установленный в точке пересечения линеек 4 и 5, закреплен на каретке IV, которая свободно перемещается по линейке 4. Каретки I, II, III и IV могут закрепляться при помощи фиксирующих винтов 8. Чтобы изображение объекта не закрыло его план (совмещение), последний можно сдвинуть влево с помощью стержня 9, соединенного с кареткой III, на конце которого закреплен обводной штифт 10 — для обводки линий плана. Стержень 9 при помощи фиксирующего винта 11 закрепляется неподвижно к каретке III. Точкам P и  $S_0$  соответствуют забиваемые в чертежную доску иголки. Стрелками указано возможное направление перемещения кареток и линеек прибора. Весь прибор опирается на базу 1 и опоры.

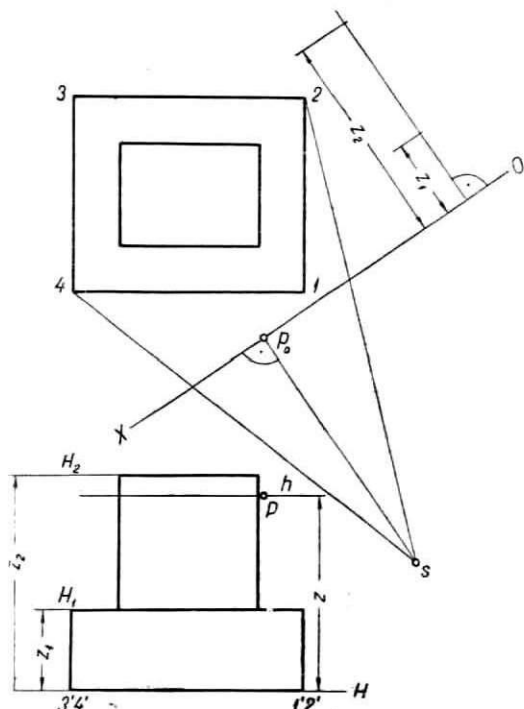
Существующие аксонографы и перспектографы снабжены двумя обводными штифтами для одновременного обвода двух проекций, что создает неудобства при пользовании прибором. Описываемый здесь прибор имеет только один обводной штифт, который перемещается по плану, и поэтому обслуживание прибора удобно.

## ПОСТРОЕНИЕ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Даны ортогональные проекции объекта (фиг. 10). В целях экономии места, горизонтальная проекция объекта расположена над фронтальной проекцией. Чтобы конструировать перспективу объекта, прежде всего необходимо принять основание центра проекций  $s$  и линию горизонта  $h$  согласно условиям построения перспективы. Картинную плоскость  $K$  располагают между объектом и точкой  $S$  (она не должна пересекать объект) и определяют основание главной точки  $p_0$  на основании  $OX$  картинной плоскости. Затем объект пересекают горизонтальными плоскостями  $H_1$  и  $H_2$  через его характерные места и вы-

черчивают планы этих сечений. Вправо от плана проводим перпендикуляр к линии основания  $OX$  и откладываем на нем высоты сечений  $z_1$  и  $z_2$ .

После того на листе изображений проводят линию основания  $OX$  и горизонт  $h$  на расстоянии  $z$  и отмечают точки  $P$  и  $S_0$ . Затем лист с планом помещают на чертежную доску влево от базы  $I$ , а лист изображений вправо так, чтобы проведенные на них линии основания  $OX$  лежали на линии параллельной стержню  $2$



Фиг. 10.

(фиг. 9). Стержень  $2$  устанавливают на линии основания  $OX$ , а каретку  $I$  жестко прикрепляют к базе  $I$ . Прорезные линейки  $4$  и  $5$  накладывают на забитые в точках  $P$  и  $S_0$  иголки. Длину стержня  $9$  принимают равной отрезку  $m$  и устанавливают его в горизонтальном положении. Таким образом прибор подготовлен к работе. Перемещая обводной штифт  $10$  по контуру плана основания объекта  $1-2-3-4$ , пишущий штифт  $7$  прочерчивает его перспективу  $1_1-2_1-3_1-4_1$  в виде непрерывной линии. Чтобы прочертить перспективу вертикального ребра в точке  $4$ , обводной штифт  $10$  следует установить на плане

ребра 4. Каретки *II* и *III* неподвижно закрепляют, а каретку *I* освобождают. Затем перемещают стержень 2 вверх на величину  $z_1$  и пишущий штифт 7 вычерчивает перспективу ребра. Таким образом производится и построение перспектив остальных вертикальных ребер.

Для построения перспективы линии сечения плоскости  $H_1$ , стержень 2 прибора необходимо установить на расстоянии  $z_1$  от линии основания  $OX$ , а затем неподвижно закрепить каретки *I*, *II* и *III*. Для того, чтобы не было необходимости передвигать план вверх, обводной штифт передвигаем вниз. Меняя направление и длину стержня 9, следует передвинуть обводной штифт вниз параллельно базе 1 на расстояние  $z_1$ , а затем жестко закрепить стержень 9 на каретке *III*. После освобождения кареток *II* и *III* проводят обводным штифтом 10 по плану линии сечения плоскости  $H_1$ , а пишущий штифт 7 вычерчивает его перспективу. Перспективы наклонных ребер объекта находят, соединяя перспективы соответствующих точек двух расположенных рядом горизонтальных плоскостей.

Перспективное изображение какой-либо поверхности вращения получим, если около изображений — эллипсов ее параллелей описываем плавную обвертывающую кривую линию, которая представляет контур изображения поверхности вращения.

С помощью прибора можно механически построить наглядные изображения фигур различных горизонтальных плоскостей и вертикальных прямых в виде непрерывных линий, а изображения других линий по отдельным их точкам.

Перемещая план ниже линии основания  $OX$  и соответственно меняя взаимное расположение стержней прибора, можно получить также и увеличенные перспективные изображения объектов.

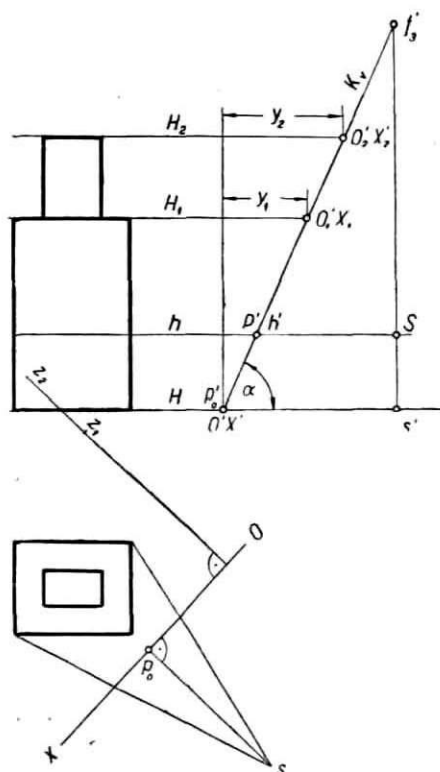
### **Перспектива на наклонной картинной плоскости**

С помощью аксо-перспектографа возможно построение также и перспективных изображений объектов на наклонной картинной плоскости.

Построение изображений объектов на наклонной плоскости осуществляется с небольшими дополнениями так же, как на вертикальной картинной плоскости. На фиг. 11 показано отображение данного объекта на наклонной плоскости. Примем на плане основание центра проекций  $s$ , линию основания наклонной плоскости  $OX$ , основание главной точки  $p_0$  и горизонт  $h$ . Вообразим наклонную плоскость установленной во фронтально

проектирующем положении, в котором таковая изобразится в виде прямой  $K_v$ , а  $\alpha$  — угол наклона ее к предметной плоскости  $H$ . Линия основания  $OX$  и горизонт  $h$  изображается в виде точек  $O^1X^1$  и  $h^1$ .

Оставив понятия о линии основания и об основании центра проекций без изменения, введем следующие условные обозна-



Фиг. 11.

чения, чтобы достичь аналогии с построением перспективы на вертикальной плоскости.  $P'$  является главной точкой,  $P'S'$  — главным расстоянием, которое не измеряется по перпендикуляру к наклонной плоскости.

Горизонтальные вспомогательные плоскости  $H_1$  и  $H_2$  отсекают наклонную плоскость по линиям основания  $O_1X_1$  и  $O_2X_2$ . Как видно, горизонтальные расстояния точек предметной плоскости  $H$  одинаковы, как до наклонной, так и до вертикальной плоскости, так как они проходят через линию основания  $OX$ ,

расстояния точек плоскостей  $H_1$  и  $H_2$  до наклонной плоскости увеличились соответственно на величину  $y_1$  и  $y_2$  по сравнению с их расстоянием до вертикальной плоскости.

Принимая во внимание вышесказанное, можно построить и изображения объектов на наклонной плоскости с помощью аксо-перспектографа. На линии, перпендикулярной к линии основания  $OX$  откладываем  $z_1 = p'_0 O'_0 X'_1$  и  $z_2 = p'_0 O'_2 X'_2$ . На листе изображений проводим линии горизонта и основания на расстоянии  $p'_0 h'$  и отмечаем точки  $P$  и  $S_0$ , где  $PS_0 = P'S'$ . Располагаем листы плана и изображений, подготавливаем прибор к работе и строим перспективу линии сечения плоскости  $H$ , как это описано на стр. 204. Для того, чтобы построить перспективу линий сечения плоскости  $H_1$ , необходимо неподвижно закрепить каретки  $II$  и  $III$ , освободить каретку  $I$  и передвинуть стержень 2 вверх на величину  $z_1$ . После закрепления каретки  $I$  обводной штифт передвигаем вниз на величину  $z_1 + y_1$ , параллельно базе  $I$ . Затем неподвижно закрепляем стержень 9 к каретке  $III$ , закрепляем неподвижно каретку  $I$ , а каретки  $II$  и  $III$  освобождаем и приступаем к построению изображения линий сечения плоскости  $H_1$ .

Вертикальные ребра объекта отображаются в виде прямых с точкой схода  $F_3$  над главной точкой  $P$ . Перспективы этих ребер получаем, соединяя перспективы соответствующих точек двух смежных горизонтальных плоскостей. Как видно, для построения таких изображений с помощью прибора не требуется специальных знаний теории линейной перспективы.

## ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

АксонOMETРИЧЕСКИМ изображением объекта называется наглядное изображение, полученное в результате параллельного проектирования на картинную плоскость как самого объекта, так и прямоугольных координатных осей, с которыми он определенным образом связан.

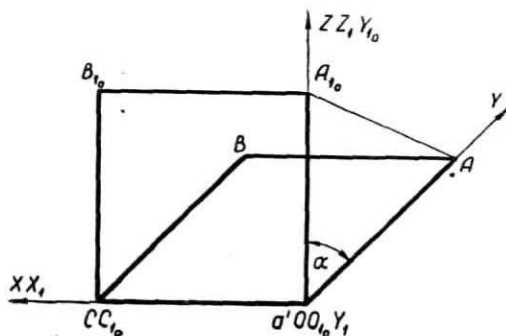
Рассмотрим теперь построение частного вида проекций косоугольной и ортогональной аксонометрии с помощью аксо-перспектографа.

### Косоугольная аксонометрия

*Фронтальная изометрия* (кавалерная проекция). Координатную плоскость  $X_1 O_1 Y_1$  (фиг. 12) всегда проводим в горизонтальном положении через изображаемую точку. Одну из вертикальных плоскостей координат (напр.  $X_1 O_1 Z_1$ ) располагают



параллельно картинной плоскости, или совмещают с ней, а горизонтальная плоскость координат  $X_1O_1Y_1$  вместе с точкой  $A_1$  входят в предметной плоскости  $H$  и пересекаются с картинной плоскостью  $K$  по линии основания  $OX$ . Направление проектирующего луча принимают таким, чтобы ось  $Y_1$  изобразилась под углом  $\alpha$  к вертикальной прямой на картинной плоскости, а коэффициенты искажения равнялись бы  $k=m=n=1$ .



Фиг. 12.

Угол  $\alpha$  обычно принимают равным  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  или  $60^\circ$ . В данном случае элемент схемы (фиг. 8, с)  $a'A = A_{10}a'$ .

Угол  $\beta$  находим по формуле:

$$\beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}.$$

*Фронтальная диметрия* (кабинетная проекция).

Расположение координатных плоскостей по отношению к картинной плоскости такое же, как при фронтальной изометрии, но коэффициенты искажения равны:  $k=n=1$  и  $m=0,5$ . Во фронтальной диметрии элемент схемы (фиг. 8, с)  $a'A = \frac{A_{10}a'}{2}$ . Угол  $\beta$  находим по формуле:

$$\sin \beta = \frac{Aa'}{A_{10}A} \cdot \sin \alpha$$

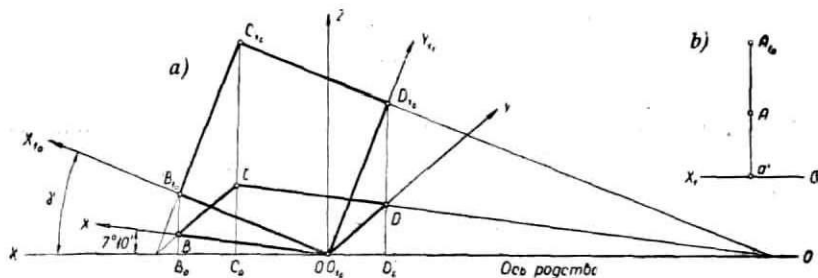
Во фронтальной диметрии и изометрии осью гомологии является линия основания  $OX$ , а центр находится в бесконечности. Такая гомология называется перспективно-аффинным (родственным) соответствием.

*Военная перспектива* (плановая аксонометрия). Коэффициенты искажения равны:  $k=m=n=1$  ( $k=m=1$  и  $n=0,7$ ). Так как горизонтальная координатная плоскость  $X_1O_1Y_1$  расположена параллельно картинной плоскости или совмещена с ней,

то поэтому ось гомологии, также как и ее центр, находится в бесконечности. Такая гомология есть преобразование параллельного переноса. Так как направление параллельного переноса можно принять произвольно, то поэтому угол  $\beta = 0^\circ - 360^\circ$ , но удобнее принять  $\beta = 90^\circ$ . В линейке 5 прибора нет надобности, а каретку IV с пишущим штифтом можно неподвижно закрепить на линейке 4 в произвольном месте.

### Прямоугольная аксонометрия

*Прямоугольная диметрия.* Оси координат  $X_1Y_1Z_1$  располагают по отношению к картинной плоскости так, что их изображения — аксонометрические оси  $X, Y$  и  $Z$  находились бы в таком положении, как это показано на фиг. 13, а. В этом случае угол наклона оси  $X$   $\omega \approx 7^\circ 11'$ . Коэффициенты искажения  $k = n = 0,94$  и  $m = 0,47$ . Повернув координатную плоскость



Фиг. 13.

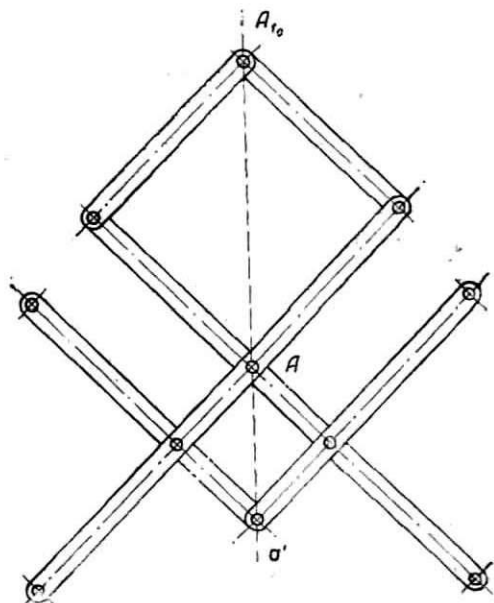
$X_1O_1Y_1$  вместе с точкой  $B_1$  вокруг линии пересечения (оси гомологии) ее с картинной плоскостью, совмещают ее с картинной плоскостью  $K$ . Совмещение  $X_{10}O_{10}Y_{10}$  находят с помощью частного вида гомологии — перспективного аффинитета. Совмещенная ось  $X_{10}$  образует с осью гомологии (с линией основания картинной плоскости) угол  $\gamma$ . Если координатную плоскость  $X_1O_1Y_1$  с точкой  $B_1$  повернуть в горизонтальное положение, тогда точка  $B_0$  будет прямоугольной проекцией точки  $B_1$  и отрезок  $B_0B_{10}$  является совмещенной глубиной точки  $B_1$ , а  $B_0B$  — аксонометрическим изображением глубины. Так как точки  $B_0$  и  $B$  являются парой аффиннородственных точек на направлении аффинитета, которое перпендикулярно оси аффинитета, для определения точки  $B$  использовано характерное число аффинитета

$$k = \frac{B_{10}B_0}{B B_0} = 3,005.$$

В таблице 1 даны углы  $\gamma$  и характерные числа аффинитета  $k$  для построения прямоугольной диметрии с углами наклона  $\omega$  оси  $X$ , равными 10, 15, 20 и 25 градусов.

*Прямоугольная изометрия.* Коэффициенты искажения равны:  $k=t=n=0,82$ . Число характеризующее аффинитет  $k=1,732$  находят, аналогично, как в случае ортогональной диметрии.

В случае ортогональной аксометрии схема (фиг. 8, с) превращается в прямую  $A_{10} - a^1 - A$  (фиг. 13), а линейки 4 и



Фиг. 14.

5 прибора заменяются пантографом в виде двух параллелограммов (фиг. 14), все вершины которого осуществлены в виде шарниров. Шарниры пантографа  $a^1$  и  $A_{10}$  прикрепляют к кареткам II и III, а в шарнире  $A$  укреплен пишущий штифт.

Для построения аксонометрических изображений объектов по их ортогональным проекциям с помощью прибора, объект пересекают горизонтальными плоскостями так же, как в случае построения перспективы, и на плане проводят координатные оси  $X_1O_1Y_1$ . Линию основания  $OX$  картинной плоскости проводят под углом  $\gamma$  к координатной оси  $X_1$ . Углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  берут из таблицы 1. Например, для построения фронтальной диметрии при  $\angle\alpha=45^\circ$ , находим по таблице  $\angle\gamma=0$  и  $\angle\beta=28^\circ 40'$ . Для

построения прямоугольной диметрии при  $\angle \omega = 7^\circ 11'$ , находим по таблице  $\angle \gamma = 20^\circ 40'$ ,  $\angle \alpha = 0$  и  $k = 3,00$ , т. е. заменяем стержни 4 и 5 пантографом, который соответствует характерному числу аффинитета  $k = 3,00$ .

После подготовки прибора для работы, его используют так же как в случае построения перспективы, только с тем различием, что для построения аксонометрии линий сечения плоскости  $H_1$ , стержень 2 прибора необходимо установить на расстоянии  $nz_1$  от линии основания  $OX$  и передвинуть обводной штифт вниз на расстояние  $nz_1$  ( $n$  — коэффициент искажения координат по оси  $OZ$ ).

Если аксонометрическое изображение объекта необходимо построить по данным его проекций с числовыми отметками, то прибор используется так же, как ранее указано в случае построения перспективы поверхности вращения.

Таблица 1.

		№№ п. п.	$\omega$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$k$
Косоугольная аксонометрия	Фронтальная изометрия	1	0	30°	75°00'	0°	
		2	0	45°	67°30'	0°	
		3	0	60°	60°00°	0°	
	Фронтальная диаметрия	4	0	30°	23°45'	0°	
		5	0	45°	28°40'	0°	
		6	0	60°	30°00'	0°	
	Военная перспек- тива (плановая аксонометрия)	7		—	0°—360°	30°	
		8				60°	
Прямоугольная аксонометрия	Диаметрия	9	7°11'	0°	0°	20°40'	3,00
		10	10°	0°	0°	24°35'	2,60
		11	15°	0°	0°	30°35'	2,20
		12	20°	0°	0°	35°45'	1,98
		13	25°	0°	0°	40°35'	1,83
	Изометрия	14	30°	0°	0°	45°00'	1,73

### ВЫВОДЫ

Способ дополнительных проекций может иметь широкое применение для решения как позиционных, так и метрических задач в сопряженных проекциях.

Способ вспомогательного проектирования можно с успехом применять для решения задач на пересечение в сопряженных проекциях.

На базе сопряженных проекций получена общая, по сравнению с существующими, более простая схема построения аксонометрических и перспективных изображений, которая и является основой кинематической схемы аксо-перспектографа.

Аксо-перспектограф отличается от существующих приборов данного типа тем, что является более универсальным, ибо механически осуществляет построение как аксонометрических, так и перспективных изображений на вертикальной и наклонной картинной плоскостях. Это значит, что с помощью аксо-перспектографа можно осуществлять на чертеже преобразования параллельного переноса, перспективного аффинитета и гомотонии, в чем и заключается преимущество аксо-перспектографа.

Конструкция аксо-перспектографа более простая, чем у ряда существующих приборов, ибо в его основу положена более простая схема.

Обслуживание аксо-перспектографа более удобно, так как он имеет всего лишь один обводной штифт, предназначенный для обвода только плана объекта, в то время как существующие приборы имеют два обводных штифта для одновременного обвода двух проекций, что создает неудобства при пользовании ими.

Применение аксо-перспектографа многократно сокращает затраты рабочего времени на построение аксонометрии и перспективы по сравнению с обычно применяемыми графическими способами.

Вследствие простоты конструкции, удобства выполнения работы и до некоторой степени автоматичности построения наглядных изображений, работа на аксо-перспектографе может выполняться лицом, только умеющим читать ортогональные проекции и проекции с числовыми отметками.

Аксо-перспектограф может найти широкое применение в проектных, конструкторских бюро, а наиболее рациональное применение может найти в области иллюстрирования технических книг для выполнения графических иллюстраций — аксонометрических и перспективных изображений объемных деталей, аппаратов, машин, конструкций и т. д.

Наглядные изображения объектов можно построить по их ортогональным проекциям и проекциям с числовыми отметками.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую признательность доц. канд. техн. наук Л. Н. Лихачеву за помощь и указания в работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Г. Барышев, Приборы для построения перспективных изображений по ортогональным проекциям (канд. диссертация). Ленинград, 1948 г.
  2. А. А. Виксель, Построение наглядных изображений при прямоугольном параллельном проектировании. (Управление военно-морских учебных заведений ВМС, сборник научно-исследовательских работ № 16), 1951 г.
  3. А. А. Виксель, Афинные соответствия в аксонометрических проекциях (канд. диссертация), Ленинград, 1947 г.
  4. Н. А. Глаголев, Начертательная геометрия. Гостехиздат, 1953 г.
  5. Е. А. Глазунов и Н. Ф. Четверухин, Аксонометрия. Москва, 1953 г.
  6. А. И. Добряков, Курс начертательной геометрии, Москва, 1952 г.
  7. А. В. Дмитриевский, Теория и конструкция электрического аксонографа (канд. диссертация). Баку, 1955 г.
  8. Л. Н. Лихачев, Перспективно-прямоугольные сопряженные проекции. НТ Сборник, вып. 19, 1955. РКВИАВУ им. К. Е. Ворошилова.
  9. Л. Н. Лихачев, Перспектива малых форм и ее применение. НТ Сборник, вып. 19, 1955. РКВИАВУ им. К. Е. Ворошилова.
  10. Л. Н. Лихачев, Перспективно-ортогональные сопряженные проекции (Новые методы начертательной геометрии) (канд. диссертация), Ленинград, 1947 г.
  11. А. В. Ланюк, Аксонометрические проекции. Москва, 1956 г.
  12. Методы начертательной геометрии и ее приложения. Сборник статей под редакцией Н. Ф. Четверухина, Москва, 1955 г.
  13. Н. А. Рынин, Перспектива, 1918 г.
  14. Н. Л. Русскевич, Новые методы вычерчивания наглядных изображений в аксонометрических и центральных проекциях. МАШГИЗ, 1953 г.
  15. Н. Ф. Четверухин, Проективная геометрия. УЧПЕДГИЗ, 1953 г.
  16. М. М. Юдицкий, Прибор для вычерчивания аксонометрических изображений тел по двум прямоугольным проекциям. Литейное производство № 10. МАШГИЗ, 1952 г.
-

## SATURA RĀDĪTĀJS — СОДЕРЖАНИЕ

От редакционной коллегии . . . . .	5
<i>К. К. Табакс.</i> Моделирование электротепловых полей . . . . .	7
<i>Э. К. Янкоп.</i> Распределение скорости потока и магнитогидродинамические потери давления в горловине коаксиального индукционного насоса . . . . .	15
<i>R. Jukna.</i> Eļektromagnētiskās ekranēšanas pakāpes noteikšana īso un ultrairā viļņu diapazonos, izmantojot savstarpējo pretestību starp iekšējo un ārējo sistēmu. Определение степени электромагнитного экранирования в диапазонах коротких и ультракоротких волн взаимным сопротивлением между внутренней и внешней системами . . . . .	21
<i>Л. Э. Домбур.</i> Использование свойств уравнильного тока в параллельно работающих трансформаторах для определения их параметров короткого замыкания . . . . .	33
<i>В. В. Ницецкий.</i> Измерительные трансформаторы постоянного тока с одним Ш-образным магнитопроводом . . . . .	43
<i>П. А. Бразма.</i> О применении обобщенных функций к исследованию переходных процессов в электрических цепях . . . . .	59
<i>И. К. Мелдер.</i> Свободные поперечные колебания выпучившегося стержня . . . . .	71
<i>Е. Б. Васерман.</i> Влияние поведения нагрузки на частоту свободных плоских колебаний круговой арки . . . . .	81
<i>А. Vācietis.</i> Jaunas konstrukcijas štances tehniskais raksturojums. Техническая характеристика штампа новой конструкции . . . . .	113
<i>В. Н. Пантелеев.</i> Масштабный фактор при циклическом нагружении образцов с концентратором напряжения . . . . .	131
<i>И. И. Катаев.</i> К расчету механизмов подъема сельскохозяйственных машин . . . . .	151
<i>А. Dumpis.</i> Metode šķidrās degvielas un ģeneratorgāzes dzinēja salīdzināšanai. Метод сравнения двигателя, работающего на жидком и газообразном топливах . . . . .	163
<i>В. Ю. Юран.</i> Преобразование сопряженных проекций и их применение для механизации построения аксонометрических и перспективных изображений объектов . . . . .	191