PSRS AUGSTĀKĀS IZGLITĪBAS MINISTRIJA
PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

ZINĀTNISKIE RAKSTI
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS
XXVIII
ТОМ

RĪGĀ 1959 РИГА

PSRS AUGSTĀKĀS IZGLĪTĪBAS MINISTRIJA
PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

ZINĀTNISKIE RAKSTI
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS
XXVIII
ТОМ

RĪGĀ 1959 РИГА

FIZIĶAS-MATEMĀTIKAS ZINĀTNES
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

4. IZLAIDUMS
ВЫПУСК 4

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ К ВОПРОСУ ОБ ИЗГОТОВЛЕНИИ И ИСПОЛЬЗОВАНИИ НАГЛЯДНЫХ ПОСОБИЙ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

О. ТРЕЙЛИБ

Постановка преподавания математики в нашей средней школе требует, чтобы формально-логическая сторона обучения была разумно объединена с наглядностью. Поэтому понятна роль наглядности как источника знаний, развивающей и закрепляющей пространственное воображение, её вспомогательная роль при проведении практических занятий. Такая постановка вопроса достаточно представлена в семилетней школе, в которой к наглядности принуждает детская натура. Здесь имеется, сравнительно, богатая литература по наглядным пособиям, их использованию и психологическому обоснованию.

Напротив, в процессе преподавания стереометрии на эти вопросы не обращают достаточного внимания. Можно перечислить следующие характерные недостатки:

1) часто единственным наглядным пособием служит чертеж (меловая геометрия), причем культура чертежа не находится на достаточно высоком уровне;

2) наглядные пособия применяются эпизодически, в застывшей форме и только на одном определенном моменте урока (учитель демонстрирует перед классом);

3) не обращается достаточного внимания на роль наглядности в развитии пространственного воображения;

4) в процессе преподавания недостаточно связываются естественные и косвенные наглядные пособия;

5) искажаются требования политехнического обучения и часто изготовление наглядных пособий сводится к внеклассным занятиям, а не к творческой работе непосредственно на уроке.

Частично причина недостатков заключается в недостаточном понимании отношения между предметной и изобразительной наглядностью. Часть учителей рассматривают чертеж как единственное наглядное пособие, которое находится всегда под руками и которое само по себе уже обеспечивает пространственное восприятие. Нет основания в преподавании стереометрии доходить до крайностей, ибо преподавание также и здесь обуславливается принципом: от простого к сложному, от конкретного к абстрактному. В предметном наглядном пособии, в частном его случае в модели непосредственно усматриваются все нужные элементы фигур или тел и конкретно проверяются их взаимные расположения.

Гораздо сложнее их видеть и при помощи умозаключения проверить их на изображении — чертеже. Здесь необходима способность понимания чертежа, которую в психологии называют воспроизводительным воображением. Этот последний этап требует, чтобы основываясь на представлении при помощи мышления заключить, какими должны быть пространственные соотношения. Это часто связано с высшей формой воображения-творческим воображением ... (конечно, по отношению к ученику в процессе обучения).

Наиболее простым и полезным является то наглядное пособие, которое в процессе преподавания быстрее всего приводит к пониманию, дает устойчивые представления и большую ясность в понятиях и определениях — и таким часто является предметное наглядное пособие.

Вторая крайность заключающаяся в том, что предметная наглядность начинает задерживать развитие логически — абстрактного мышления (также и пространственного воображения) менее возможна.

Как в первом, так и во втором случае следует говорить о недостаточно разработанных методических приемах в изготовлении наглядных пособий и в последовательности их использования. Разработку методики затрудняет: 1) неоднородный состав учащихся; 2) неправильная оценка трудности материала и психологических особенностей детей и подростков; 3) недостаточно конструктивные наглядные пособия. Хочу поделиться своим опытом в уменьшении и устранении последних двух затруднений.

I. МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КАРТОНА, БУМАГИ И СПИЦ В НАЧАЛЕ КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ

При ознакомлении с первыми понятиями и представлениями стереометрии и приобретении навыков необходимо разнообразить использование наглядных пособий. Целесообразно различать следующие этапы:

1) учитель демонстрирует перед классом наглядное пособие в законченном виде;

2) учитель или ученик изготовляет перед классом необходимые фигуры в той последовательности, в которой этого требует теорема или задача;

3) то же самое выполняет ученик (или пара учеников за каждой партой, иногда совместно с учителем или под его руководством).

В начале курса в более трудных ситуациях иногда полезно действовать в пределах второго или третьего этапа, что требует подходящего материала, чтобы с его помощью можно было моделировать. В литературе имеются указания использовать для этой цели фанеру, картон, бумагу, деревянные планки, проволоку, нитки и пр.

Так как при этом иногда необходимо сверлить, клеить и т. д., то работа часто проводится во внеурочное время. Я старался работу выполнять только в классе и оказалось, что наиболее конструктивным материалом является толстый картон, цветная настольная, чертежная бумага и спицы. В самом деле, при помощи перегибания бумаги, разрезов и вставок в разрез можно в течение нескольких минут продемонстрировать различные положения взаимного пересечения плоскостей. В свою очередь превосходной моделью прямой может служить обыкновенная большая штопальная иголка, которая, будучи воткнута в толстый картон или положена на него, фиксирует определенное взаимное расположение прямой и плоскости. Положив на стол или придерживая пальцами, можно устойчиво фиксировать в образовавшихся конфигурациях различные положения плоскостей и прямых без каких либо штативов и дополнительных укреплений. Необходимыми инструментами при этом являются нож и ножницы. Различно окрашенные плоскости создают хорошее представление о видимости или невидимости отдельных частей прямых или плоскостей. Изменяя направление разреза, или перегиба, направление спицы или всей изготовленной конфигурации относительно зрителя, можно добиться большого разнообразия в восприятии образов. Параллельно с моделированием обязательно необходимо также и чертить (полезно также делать наоборот).

II. МОДЕЛИ МНОГОГРАННИКОВ

При изучении многогранников также нужны модели. Прежде всего укажем на недостатки тех наглядных пособий, которые в настоящее время имеются в продаже.

1. Изготовленные из картона модели имеют все одинаковые соотношения измерений и дают только представление о внешней форме (нельзя показать внутренние линии). Они могут служить только для иллюстрации понятия, но не для его выяснения.

2. Тела, изготовленные из стекла, показывают в готовом виде только один какой нибудь определенный случай задачи или теории; кроме того, комплект таких тел дорог.

3. Каркасные модели с шарнирными вершинами и выдвигаемыми ребрами довольно разнообразны, однако они неустойчивы и для них необходимы различные опоры, которые для задачи и теоремы являются несущественными лишними линиями. Неточно и неудобно приходится с их помощью демонстрировать различные линии и сечения. Установка наглядного пособия требует сравнительно большого времени.

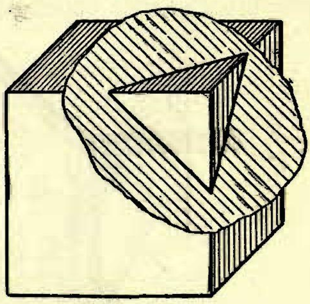

Рис. 1. Картон с вырезкой в форме правильного треугольника, надетого на вершину куба, показывает сечение.

Поиски наиболее подходящей модели многогранника поясним на примере модели куба.

1. Куб из дерева или картона. Видны грани и ребра. Можно показать диагонали граней, ее углы и т. д. Также можно показать сечения и решения некоторых задач (см. черт. 1 и 2).

2. Стеклянная модель куба без верхней грани. Кроме вышеуказанного, на такой модели можно показать также и внутренние линии в виде стержней,

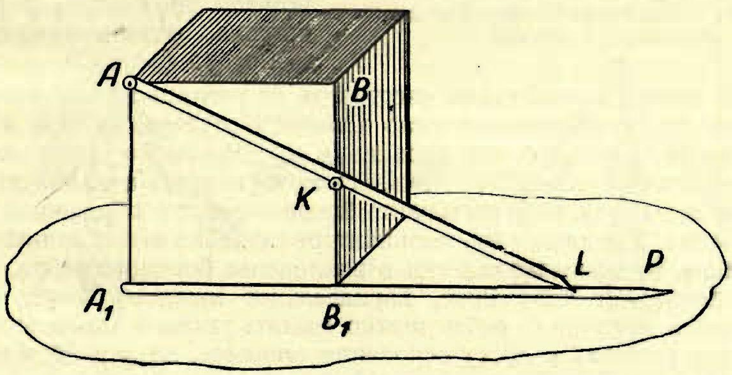

Рис. 2. В точках A и K кнопки. В точке L прямая AK пересекается с продолжением основания куба A_1B_1.

можно вложить в нее также и разные сечения из картона или цветного стекла. Кажущаяся мелочь — удаление одной грани открывает существенные возможности и расширяет область применения наглядного пособия (к сожалению, все еще имеются в продаже и изготовливаются в школах только закрытые стеклянные модели куба).

3. Каркас ребер куба, изготовленный из проволоки. Достигнута дальнейшая ступень абстракции: видимы только ребра, а грани должны быть вооб-

ражаемы по их граничным контурам. Прямые и контуры сечений можно провести при помощи резиновых шнурков. Это гораздо удобнее чем использование стержней, картона или стеклянных пластинок.

В общем следует сказать, что проволочный каркас является наиболее удобным видом модели. Я старался изготовить отдельные детали так, чтобы припомощи проволочных каркасов было возможно демонстрировать необходимые в школьной практике виды призм и пирамид. Чтобы избежать неустойчивости, я в своей практике нашел наиболее удобной известную в литературе универсальную основную доску, в которую вставлял стержни, служащие в качестве боковых ребер.

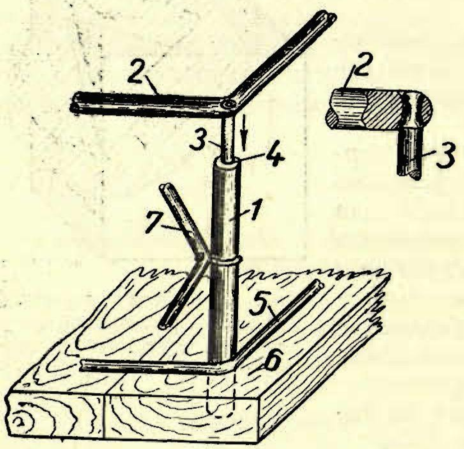

Рис. 3. Заклепывание контурной втулки. *1* — стержень бокового ребра; *2* — верхний контур; *3* — втулка верхнего контура; *4* — гнездо втулки; *5* — резиновый шнурок нижнего контура; *6* — основная доска с просверленным отверстием; *7* — передвижной крючок с прикрепленным резиновым шнурком для образования сечения.

В литературе нет указаний на наиболее рациональный метод изготовления верхнего контура призм и вписанных в нее линии или контуров сечений, а также для фиксирования их расположения.

Необходимые для фигуры верхнего контура линии (в соответствии с контуром плоскости основания) изготовляют из той же проволоки, что и для боковых ребер. В вершинах контура закрепляются подвижные втулочки, которые можно вложить в отверстия, просверленные в концах боковых ребер. Контур нижнего основания образуют при помощи замкнутого резинового шнурка, охватывающего боковые ребра (черт. 3).

Верхний контур можно также изготовить из резинового шнурка, на который надевается определенное число колечек с втулочками, как в вершинах контура. (Конец кусочка проволоки — втулочку сплющивают, и в нем просверливается отверстие). Чтобы сконструировать наклонную призму и усеченную пирамиду, надо изготовить боковое ребро с подвижной заклепкой у основания. Так как на верхнем контуре заклепка может занять наклонное положение, то после вставления в наклонение бокового ребра, верхнее основание сохраняет положение, параллельное нижнему (черт. 4). При помощи деталей наклонных ребер можно сделать также и каркасы пирамид (сначала надо вставить в доску основания стержень, служащий в качестве высоты пирамиды). Скрепление деталей в вершинах пирамиды видно на черт. 4б.

При помощи втулочно-гнездового скрепления можно разделить стержень, служащий в качестве бокового ребра, на несколько составных частей и получить боковое ребро различной длины. Так с помощью одного контура основания можно осуществить многогранник с различной величиной его измерений. Так как боковое ребро вставлено в отверстие, которое просверлено в основании, а на верхнем контуре оно запаяно в определенном положении, то вся модель устойчива. Наглядное пособие конструктивно, так как при помощи одной доски, служащей основанием, небольшого количества стержней для боковых ребер и разных контуров верхних оснований можно составить модели различных многогранников и реализовать их изменение в движении (при помощи движения преобразовать прямую призму в наклонную) без лишних деталей. Дополнительные линии и контуры сечений показываем при помощи замкнутых резиновых шнурков. В определённых точках на рёбрах шнурок закрепляется при помощи крючков. На все ребра несколько раз наматываются кусочки проволоки, и их концы загибаются в виде скользящих крючков. В вершины контуров впаиваются устойчивые крючки. При помощи замкнутых резиновых шнурков и крючков, скользящих вдоль ребра, можно добиться очень быстрого проведения прямых и изменения положения, а также образования сечений непосредственно в движении, что с точки зрения наглядности очень полезно.

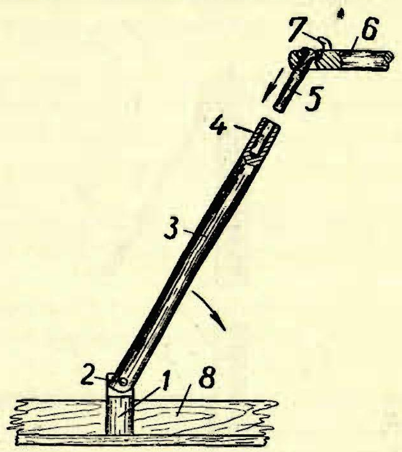

Рис. 4-а. *1* — основание бокового ребра в отверстии; *2* — шарнирная заклепка; *3* — наклонная часть бокового ребра; *4* — гнездо бокового ребра; *5*—втулка верхнего контура; *6* — верхний контур; *7* — неподвижно впаянный крючок; *8* — основная доска.

Для демонстрирования различных пирамид очень полезной оказалась еще следующая модель. Основанием пирамиды служит доска с вертикально просверленным отверстием в центре, в которое вставляется цилиндрическое основание стержня, являющегося высотою пирамиды (высота цилиндрика равна толщине доски). Стержень изготовлен из стальной проволоки, и один его конец впаян в основание цилиндрика, а второй заострен. В качестве точки основании высот всех моделируемых пирамид берется отверстие в доске, служащей основанием. Чертятся контуры оснований пирамид, и в вершины этих оснований вбиваются гвоздики, загибаемые затем в виде крючков. Боковые ребра пирамид и апофемы (высоты боковых граней) изготовляются

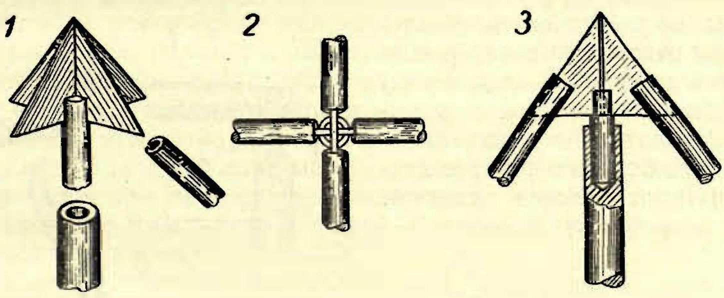

Рис. 4-б. В пазах вершины высотного стержня укрепляется небольшая пирамида с диагональными сечениями, на которые надеваются пазы стержней боковых ребер.

из шести резиновых шнурков, которые охватывают стержень. Верхние концы шнурков завязываются нитью и надеваются на острие стержня, а нижние их концы вдеваются в шесть отверстий, просверленных в основании стержня и также крепко завязываются нитью.

При конструировании пирамиды стержень вставляется в отверстие доски, и резиновые шнурки поочередно зацепляются за крючки, расположенные в вершинах, предполагаемого основания (черт. 5).

Образуются боковые ребра пирамиды и их проекции; кроме того, можно образовать апофемы и высоты боковых граней.

Эффективность наглядного пособия заключается в его разнообразии (его можно использовать уже в первом периоде преподавания стереометрии, в особенности, когда речь идет о наклонной и ее проекции), и в возможности быстро его построить и разобрать. Такой же „универсальный стержень“, только меньшего размера и с соответственно меньшей доской основания можно дать в распоряжение учеников на парты для фронтальной работы.

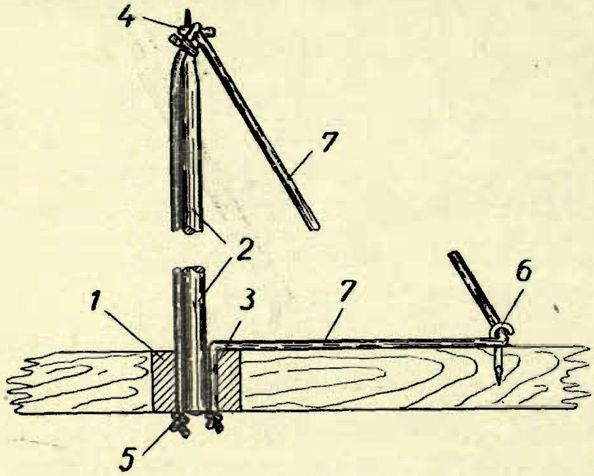

Рис. 5. *1* — основание стержня; *2* — стержень; *3* — отерстия для вдевания резинового шнура; *4* — верхний узел; *5* — нижний узел; *6* — крючок; *7* — резиновый шнур.

Для конструирования призм и усеченных пирамид можно также заготовить подобный комплект деталей для фронтальной работы в классе. Только детали здесь можно упростить. В концах стержней, служащих боковыми ребрами, нет отверстий, а они заменяются спиленными муфточками. Верхнее и нижнее основание можно образовать, охватывая боковые рёбра замкнутым резиновым шнурком. Если необходимы сечения, то контур верхнего основания изготовляется из отдельных стержней, в концах которых просверливаются отверстия, в которые вставляются муфточки боковых ребер (концы следует сплюснуть при помощи молотка). Стержни поочередно надеваются отверстиями на муфточки боковых ребер (отверстия в доске основания должны соответствовать расстояниям между отверстиями в стержнях верхнего основания). В случае наклонной призмы и усеченной пирамиды надо изготовить еще дополнительные детали для боковых ребер с наклонно загнутыми обоими концами (черт. 6).

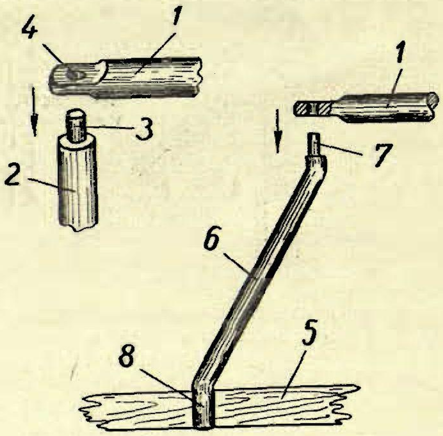

Рис. 6. *1* — стержень верхнего контура; *2* — стержень бокового ребра; *3* — втулка; *4* — отверстие в контурном стержне; *5* — основная доска; *6*—наклонное боковое ребро; *7*, *8*—загибы на концах стержня бокового ребра.

III. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НАГЛЯДНЫХ ПОСОБИЙ

Для наблюдения такие наглядные пособия являются очень динамичными. Их конструктивность дает возможность разнообразить методы использования и при фронтальной работе позволяет ученикам воспринимать необходимые пространственные образы большей группой чувств. Наблюдению не мешают никакие лишние детали. С точки зрения формирования понятий, изменение формы и положения пособия дает возможность усвоения понятия учениками во всей его общности. Таким образом, каждое представление об этом понятии не связано только с каким либо одним образом, который впоследствии порождает затруднения в различных ситуациях при решении задач. При этом не только активно выясняется само понятие, но усваивается и его определение. В активной работе (а не только при помощи повторения слов) ученики могут провести столько повторений, сколько необходимо, что является гарантией устойчивости усвоенного понятия. Эту работу можно выполнить в двух направлениях, например, при усвоении понятия о двугранном угле:

а) оставаясь в рамках конкретности — от работы над вышеупомянутыми наглядными пособиями к ближайшей окрестности (класс и его предметы, вид через окно и т. д.);

б) переходя от конкретного к абстрактному — от моделированных наглядных пособий к чертежу и далее к косвенному наглядному пособию в виде рассказа.

Интересной может быть работа с наглядным пособием и в практическом направлении, например, конструирование сечения многогранника и расчеты, которые с ним связаны. Порядок действий при этом рассмотрим на следующей задаче: плоскость пересекает все боковые ребра правильной четырехугольной призмы. Какие фигуры могут образоваться в сечении? Каким образом следует пересечь призму, чтобы получить определенную фигуру? Прежде всего ученики стараются представить себе решение (интуиция, гипотезы). Следующим шагом является работа с наглядным пособием. Способные ученики таким образом себя проверяют, а более слабая часть класса выясняет вопрос конкретно. Работая с нашей моделью, с замкнутым резиновым шнурком и передвижными крючками, ученики наглядно и быстро дают ответ на вопрос задачи. Работа с наглядным пособием более быстрая, чем с чертежом. На чертеже часто допускаются ошибки, не соблюдая параллельности прямых сечения, произвольно выбирая четвертую точку пересечения плоскости сечения с боковым ребром, представив себе, что каждые четыре точки расположены в одной и той же плоскости. Следует еще достаточно оценить и полезные второстепенные психические явления, которые связаны с работой наглядных пособий,, как, например, повышение активности, внимания, интереса и т. п. Нельзя не упомянуть также и то, что такие занятия, связанные с переходом к чертежу, дают ученикам очень много в развитии пространственного воображения. В этом смысле следует отметить, что решение первых стереометрических задач на построение можно произвести вполне реально, выполняя все построения при помощи вышеупомянутых пособий.

В заключение перечислим условия, которым в полной мере удовлетворяют описанные наглядные пособия.

1. Наглядные пособия достаточно точно изображают данные понятия и пространственные соотношения.

2. Наглядные пособия не содержат лишних несущественных деталей и устанавливаются стабильно.

3. Наглядные пособия динамичны, так как последовательно и в движении можно показать само тело и необходимые дополнительные линии.

4. Наглядные пособия можно изготовить соответствующих размеров, как для демонстрации перед классом, так и для работы учеников за партами, и поместить их перед зрителем в нужном положении.

5. Наглядные пособия технически несложны и возможно в короткое время собрать необходимую конфигурацию и разобрать ее непосредственно на уроке, как при демонстрировании перед классом, так и при фронтальной работе учеников за партами.

6. Наглядные пособия конструктивны — с небольшим количеством деталей можно образовать много фигур и тел в различных положениях и разных размеров.

7. В пределах возможности наглядные пособия могут быть изготовляемы в школьных мастерских и их можно заготовить в достаточном количестве, чтобы ученики смогли использовать их во время фронтальных работ.

20 I 1959 *Кафедра общей математики*

DAŽI APSVĒRUMI PAR STEREOMETRIJAS UZSKATES LĪDZEKĻU IZGATAVOŠANU UN IZLIETOŠANU

O. Treilībs

(Kopsavilkums)

Stereometrijas mācīšanā uzskatei dažkārt nepiegriež vajadzīgo vērību. Nav vēl arī pietiekami izstrādāti paņēmieni uzskates līdzekļu izveidē un lietošanas pakāpenībā.

Jau stereometrijas mācīšanas sākumā lielu labumu dod modelēšana ar kartonu, papīru un adatām. Arī stiepļu karkasa daudzskaldņu modeļu izlietošana tālākā stereometrijas mācīšanas gaitā ir lietderīga. Par pamatu ņemot ,,universālo dēli", sānšķautni ar nolieci—šarnīru pie pamata un kustīgām tapiņām augšējā pamata kontūras virsotnēs, izdodas izveidot lielu skaitu taisnas un slīpas prizmas un nošķeltas piramīdas. Lielu daudzumu dažādas regulāras un neregulāras piramīdas var izveidot ar ,,universālo stienīti". Nedaudz vienkāršoti var izveidot arī komplektus frontālam darbam klasē skolēniem solos. Ar šiem uzskates līdzekļiem ievērojami atvieglota novērošana, jēdzienu izveidošana, telpiskās iztēles attīstīšana, kā arī reāli izpildāmi dažādi praktiski uzdevumi.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМ О ДЕЛИМОСТИ ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ В ЛИНЕЙНОМ БЕЗРАЗМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ш. Д. ТРУПИН

В работе А. М. Лопшица [1], а также в работе автора настоящей статьи [2] рассматриваются некоторые теоремы о делимости полилинейной функции в линейном безразмерном пространстве. Для примера, рассмотрим тождество:

$$\overset{m}{\omega_1 x \ldots x} \cdot \alpha_1 x = \overset{m}{\omega_2 x \ldots x} \cdot \alpha_2 x, \tag{1}$$

где $\omega_1 x_1 \ldots x_m$ и $\omega_2 y_1 \ldots y_m$ — некоторые m — линейные функции, а $\alpha_1 z$ и $\alpha_2 u$ — линейно независимые и не равные тождественно нулю линейные скалярные функции*. Тогда, согласно теореме о делимости полилинейной функции на линейную, необходимо, чтобы функции $\overset{m}{\omega_1 x \ldots x}$ и $\overset{m}{\omega_2 x \ldots x}$ делились, соответственно, на $\alpha_2 x$ и $\alpha_1 x$, т. е. чтобы выполнялись тождества

$$\overset{m}{\omega_1 x \ldots x} = \overset{m-1}{\omega x \ldots x} \cdot \alpha_2 x,$$
$$\overset{m}{\omega_2 x \ldots x} = \overset{m-1}{\omega x \ldots x} \cdot \alpha_1 x,$$

где $\omega x_1 \ldots x_{m-1}$ — некоторая $(m-1)$ — линейная функция. [Ср. 1].

Тождеству (1) можно придать несколько иной вид:

$$\overset{m}{\omega_1 x \ldots x} \cdot \alpha_1 x + \overset{m}{\omega_2 x \ldots x} \cdot \alpha_2 x = 0 \tag{2}$$

и тогда естественно возникает вопрос об условиях, при которых оно выполняется, если в левой его части имеются больше чем два слагаемых такого же вида:

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{m}{\omega_i x \ldots x} \cdot \alpha_i x = 0. \tag{3}$$

Можно сформулировать и более общую задачу. Пусть в линейном безразмерном пространстве заданы n l — линейных нераспадающихся и линейно независимых скалярных функций $\alpha_i x_1 \ldots x_l$, не равных тождественно нулю, и столько же m — линейных функций $\omega_i y_1 \ldots y_m$. Определить условия, при которых выполняется тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{m}{\omega_i x \ldots x} \cdot \overset{l}{\alpha_i x \ldots x} = 0. \tag{4}$$

Однако, в настоящей статье мы ограничимся только исследованием вопроса об условиях, при которых имеет место тождество (3). Для этой цели мы докажем в первом параграфе лемму, с помощью которой найдем один

* Мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в работе [2].

(достаточный) признак делимости. Затем, во втором параграфе, мы найдем необходимые и достаточные условия, при которых выполняется тождество (3), а в третьем параграфе рассмотрим несколько примеров, представляющих некоторый интерес для частного случая, когда $m = 2$.

§ 1.
ДОСТАТОЧНЫЙ ПРИЗНАК

Пусть, следовательно, в линейном безразмерном пространстве заданы n m — линейных функций $\omega_i\, x_1 \ldots x_m$ и столько же линейно независимых, не равных тождественно нулю, линейных скалярных функций $\alpha_i\, y$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Исследуем, как должны быть выбраны функции $\omega_i\, x_1 \ldots x_m$, чтобы выполнялось тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{m}{\omega_i\, x \ldots x} \cdot \alpha_i\, x = 0. \tag{1.1}$$

1. Прежде всего, сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма I. *Если значения* $\overset{m}{\mathrm{A}\, x \ldots x}$ m — *линейной скалярной или векторной функции* $\mathrm{A}\, x_1 \ldots x_m$ *равны нулю для всех тех векторов* x, *для которых равны нулю линейно независимые и не равные тождественно нулю линейные скалярные функции* $\alpha_i\, x$ ($i = 1, 2, \ldots, n < m$), *то функция* $\overset{m}{\mathrm{A}\, x \ldots x}$ *делится на каждую из функций* $\alpha_i\, x$ *и имеет место тождество*

$$\overset{m}{\mathrm{A}\, x \ldots x} = \alpha_1\, x \cdot \alpha_2\, x \ldots \alpha_n\, x \cdot \overset{m-n}{\mathrm{B}\, x \ldots x}, \tag{1.2}$$

где $\mathrm{B}\, x_1 \ldots x_{m-n}$ — *некоторая* $(m - n)$ — *линейная функция. Если* $m = n$, *то тождество (1.2) принимает вид*:

$$\overset{n}{\mathrm{A}\, x \ldots x} = p \cdot \alpha_1\, x \cdot \alpha_2\, x \ldots \alpha_n\, x, \tag{1.2'}$$

где p — *вектор или скаляр.*

Доказательство. Так как, согласно условию, функция $\overset{m}{\mathrm{A}\, x \ldots x}$ равна нулю для всех векторов x, для которых равна нулю функция $\alpha_1\, x$, то согласно теореме о делимости полилинейной функции на линейную, можем писать

$$\overset{m}{\mathrm{A}\, x \ldots x} = \alpha_1\, x \cdot \overset{m-1}{\mathrm{B}\, x \ldots x}, \tag{1.3}$$

где $B\, x_1 \ldots x_{m-1}$ — некоторая $(m - 1)$ — линейная функция. Следовательно, тождество (1.2) справедливо для $n = 1$. Допустим, что оно выполняется при $n = k$, т. е. что имеет место тождество

$$\overset{m}{\mathrm{A}\, x \ldots x} = \alpha_1\, x \cdot \alpha_2\, x \ldots \alpha_k\, x \cdot \overset{m-k}{\mathrm{B}\, x \ldots x}. \tag{1.4}$$

Докажем, что тождество (1.2) выполняется также и при $n = k + 1$.*

В самом деле, согласно условию, функция $\overset{k}{\mathrm{A}x \ldots x}$ равна нулю также

* При условии, что $k + 1 \leqslant m$.

и для всех тех векторов x, для которых равна нулю функция $\alpha_{k+1}x$, а потому можем писать

$$\overset{m}{\mathrm{A}}x\ldots x=\alpha_{k+1}\cdot\overset{m-1}{\mathrm{B}_1}x\ldots x,\tag{1.5}$$

где $\mathrm{B}_1 x_1\ldots x_{m-1}$ — некоторая $(m-1)$ — линейная функция. Введем обозначение

$$\overset{k}{\Phi}x\ldots x=\alpha_1 x\cdot\alpha_2 x\ldots\alpha_k x\tag{1.6}$$

и перепишем тождество (1.4) следующим образом:

$$\overset{m}{\mathrm{A}}x\ldots x=\overset{k}{\Phi}x\ldots x\cdot\overset{m-k}{\mathrm{B}}x\ldots x.\tag{1.7}$$

Из (1.7) и (1.5) следует, что

$$\overset{k}{\Phi}x\ldots x\cdot\overset{m-k}{\mathrm{B}}x\ldots x=\alpha_{k+1}x\cdot\overset{m-1}{\mathrm{B}_1}x\ldots x.$$

Отсюда, согласно той же вышеупомянутой теореме о делимости, либо функция $\overset{k}{\Phi}x\ldots x$, либо функция $\overset{m-k}{\mathrm{B}}x\ldots x$ должны делиться на $\alpha_{k+1}x$. Однако, в силу того, что данные функции $\alpha_i x$, попарно взятые, не коллинеарны, то из (1.6) следует, что $\overset{k}{\Phi}x\ldots x$ не может делиться на $\alpha_{k+1}x$. Поэтому должно выполняться тождество

$$\overset{m-k}{\mathrm{B}}x\ldots x=\overset{m-k-1}{\mathrm{C}}x\ldots x\cdot\alpha_{k+1}x,$$

где $C x_1\ldots x_{m-k-1}$ — некоторая $(m-k-1)$ — линейная функция. Подставив это значение для $\overset{m-k}{\mathrm{B}}x\ldots x$ в правую часть тождества (1.4), мы получим

$$\overset{m}{\mathrm{A}}x\ldots x=\alpha_1 x\cdot\alpha_2 x\ldots\alpha_k x\cdot\alpha_{k+1}x\cdot\overset{m-k-1}{\mathrm{C}}x\ldots x.$$

Таким образом, мы убедились в том, что если тождество (1.2) выполняется при $n=k$, то оно выполняется и при $n=k+1$. Так как оно справедливо для $n=1$, то оно справедливо и для всех n, не больших, чем m.

При $n=m$ условимся обозначать символом $\overset{o}{\mathrm{B}}x\ldots x$ скаляр или вектор p, в зависимости от того является ли данная линейная функция $\mathrm{A}x_1\ldots x_n$ скалярной или векторной и положим

$$p=\overset{o}{\mathrm{B}}x\ldots x.$$

Тогда тождество (1.2) переходит в тождество (1.2′).

Следует заметить, что в зависимости от вида функции $\mathrm{A}x_1\ldots x_m$ и величины m функция $\overset{m-n}{\mathrm{B}}x\ldots x$, помещенная в правой части тождества (1.2), может, в свою очередь, делиться на одну или несколько из данных функций $\alpha_i x$. В общем случае тождество (1.2) может принять следующий вид:

$$\overset{m}{\mathrm{A}}x\ldots x=(\alpha_i x)^{i_1}\cdot(\alpha_2 x)^{i_2}\ldots(\alpha_n x)^{i_n}\cdot\overset{m-k}{\mathrm{B}}x\ldots x,$$

где показатели степеней $i_1, i_2, \ldots, i_n$ удовлетворяют условию

$$i_1+i_2+\ldots+i_n=k\leqslant m,$$

а $\mathrm{B}x_1\ldots x_{m-k}$ — $(m-k)$ — линейная функция, вектор или скаляр.

Сформулируем без доказательства следующую, более общую лемму:

Лемма II. *Если значения* $\overset{m}{A}x\ldots x$ m — *линейной скалярной или векторной функции* $Ax_1\ldots x_m$ *равны нулю для всех тех векторов* x, *для которых равны нулю значения* $\overset{l}{\alpha_i}x\ldots x$ *линейно независимых и не равных тождественно нулю* l — *линейных нераспадающихся скалярных функций* $\alpha_i x_1\ldots x_l$ $(i=1,2,\ldots,n<m)$, *то функция* $\overset{m}{A}x\ldots x$ *делится на каждую из функций* $\overset{l}{\alpha_i}x\ldots x$ *и имеет место тождество*

$$\overset{m}{A}x\ldots x=(\overset{l}{\alpha_1}x\ldots x)^{i_1}\cdot(\overset{l}{\alpha_2}x\ldots x)^{i_2}\ldots(\overset{l}{\alpha_n}x\ldots x)^{i_n}\cdot\overset{m-lk}{B}x\ldots x,$$

где

$$i_1+i_2+\ldots+i_n=k \quad \text{и} \quad lk<m.$$

При $m=lk$ *имеет место тождество*

$$\overset{m}{A}x\ldots x=p\cdot(\overset{l}{\alpha_1}x\ldots x)^{i_1}\cdot(\overset{l}{\alpha_1}x\ldots x)^{i_2}\ldots(\overset{l}{\alpha_n}x\ldots x^{i_n}),$$

где p — *вектор или скаляр.*

2. Пусть в линейном пространстве заданы n m — линейных функций $\omega_j x_1\ldots x_m$ и столько же линейных скалярных функций $\alpha_i x$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$, причем известно, что каждая из функций $\overset{m}{\omega_j}x\ldots x$ обращается в нуль для всех тех значений вектора x, для которого равны нулю все функции $\alpha_i x$, за исключением той из этих функций, для которой $j=i$. Если при этом функции $\alpha_i x$ не равны тождественно нулю и линейно независимы, то, согласно доказанной выше лемме I, функции $\overset{m}{\omega_j}x\ldots x$ и $\alpha_i x$ связаны друг с другом следующими зависимостями:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{m}{\omega_1}x\ldots x=\alpha_2 x\cdot\alpha_3 x\ldots\alpha_{j-1}x\cdot\alpha_j x\cdot\alpha_{j+1}x\ldots\alpha_n x\cdot\overset{m-n+1}{\omega_1}x\ldots x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overset{m}{\omega_j}x\ldots x=\alpha_1 x\cdot\alpha_2 x\ldots\alpha_{j-1}x\cdot\alpha_{j+1}x\ldots\alpha_n x\cdot\overset{m-n+1}{\omega_j}x\ldots x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\overset{m}{\omega_n}x\ldots x=\alpha_1 x\cdot\alpha_2 x\ldots\alpha_{j-1}x\cdot\alpha_j x\cdot\alpha_{j+1}x\ldots\alpha_{n-1}x\cdot\overset{m-n+1}{\omega_n}x\ldots x.
\end{aligned}\right\}\qquad(1.8)$$

При этих условиях легко проверяется справедливость следующей теоремы:

Теорема I. *Если функции* $\overset{m}{\omega_j}x\ldots x$ *связаны с функциями* $\alpha_i x$ $(i,\ j=1,2,\ldots,n)$ *зависимостями* (1.8), *причем* $m\geqslant n-1$ *и выполняется тождество*

$$\sum_{j=1}^{n}\overset{m-n+1}{\omega_j}x\ldots x=0, \qquad (1.9)$$

то выполняется также и тождество

$$\sum_{j=1}^{n}\overset{m}{\omega_j}x\ldots x\cdot\alpha_j x=0. \qquad (1.10)$$

Обратно: если для функций (1.8) *выполняется тождество* (1.10), *то для всех значений вектора* x *выполняется условие* (1.9).

Доказательство. Умножив обе части равенств (1.8), соответственно, на $\alpha_1 x, \ldots, \alpha_j x, \ldots, \alpha_n x$ и сложив, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \overset{m}{\omega_j} x \ldots x \cdot \alpha_j x = \alpha_1 x \ldots \alpha_j x \ldots \alpha_n x \cdot \sum_{j=1}^{n} \overset{m-n+1}{\omega_j} x \ldots x. \qquad (1.11)$$

Отсюда видим, что если выполняется тождество (1.9), то выполняется также и тождество (1.10).

Обратно: если имеет место тождество (1.10), то приняв во внимание, что ни одна из функций $\alpha_j x$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ не равна тождественно нулю, мы из (1.11) убедимся в том, что выполняется условие (1.9).

Равенства (1.8) показывают, что значение индекса m не может быть бо́льшим, чем $n - 1$, так как в противном случае (при $m < n - 1$), функция $\overset{m}{\omega_j} x \ldots x$ должна была бы делиться на каждую из $n - 1$ функций $\alpha_1 x, \ldots, \alpha_{j-1} x, \alpha_{j+1} x, \ldots, \alpha_n x$, что невозможно.

Рассмотрим отдельно случай, когда $m = n + 1$. Условимся в этом случае считать символы $\overset{o}{\omega_j} x \ldots x$ некоторыми скалярами, которые мы обозначим через τ_j. Тогда формулы (1.8) принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \overset{m}{\omega_1} x \ldots x &= \tau_1 \cdot \alpha_2 x \cdot \alpha_3 x \ldots \alpha_n x, \\ \overset{m}{\omega_2} x \ldots x &= \tau_2 \cdot \alpha_1 x \cdot \alpha_3 x \ldots \alpha_n x, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{m}{\omega_n} x \ldots x &= \tau_n \cdot \alpha_1 x \cdot \alpha_2 x \ldots \alpha_{n-1} x, \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

а условие (1.9) переписывается:

$$\sum_{j=1}^{n} \tau_j = 0. \qquad (1.13)$$

3. Тождество (1.10) может выполняться также и при $m < n - 1$. Однако, в этом случае для функций $\overset{m}{\omega_j} x \ldots x$ должны иметь место другие условия, которые мы более подробно рассмотрим в следующем параграфе. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим один пример. Положим $m = 2$, $n = 4$ и допустим, что функции $\omega_j xx$ связаны с функциями $\alpha_i x$ зависимостями:

$$\left.\begin{array}{lllll} \omega_1 xx = & * & -\alpha_3 x \cdot \alpha_4 x - & \alpha_2 x \cdot \alpha_4 x + & 2 \cdot \alpha_2 x \cdot \alpha_3 x, \\ \omega_2 xx = & -\alpha_3 x \cdot \alpha_4 x + & * & +2 \cdot \alpha_1 x \cdot \alpha_4 x - & \alpha_1 x \cdot \alpha_3 x, \\ \omega_3 xx = & -\alpha_2 x \cdot \alpha_4 x + & 2 \cdot \alpha_1 x \cdot \alpha_4 x - & * \quad - & \alpha_1 x \cdot \alpha_2 x, \\ \omega_4 xx = & 2 \cdot \alpha_2 x \cdot \alpha_3 x - & \alpha_1 x \cdot \alpha_3 x - & \alpha_1 x \cdot \alpha_2 x + & * \quad , \end{array}\right\} (1.14)$$

отличными от зависимостей (1.8).

Нетрудно проверить, что для этих значений $\omega_j xx$ выполняется тождество

$$\sum_{j=1}^{4} \omega_j xx. \alpha_j x = 0. \qquad (1.15)$$

Отсюда следует сделать вывод, что условия (1.8) и (1.9) не являются необходимыми для того, чтобы выполнялось тождество (1.10).

В третьем параграфе мы увидим, что формулы (1.14) являются частными видами более общих зависимостей, которые необходимы для того, чтобы выполнялось тождество вида (1.15).

§ 2

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В настоящем параграфе мы выведем более общий признак, необходимый и достаточный для того, чтобы выполнялось тождество (1.10). Необходимые для доказательства выкладки оказываются довольно громоздкими и, чтобы их несколько сократить, рассмотрим сначала вспомогательную теорему. Кроме того, при доказательстве этой леммы, а также и основной теоремы мы, для краткости записей, положим $m = 4$. Однако, мы проведем доказательство и необходимый при этом подсчет так, чтобы видно было, каким образом доказательство распространяется на общий случай, когда индекс m имеет произвольное значение.

Лемма III. *Если имеют место тождества*

$$\overset{m}{\omega_j} x \dots x = \sum_{i=1}^{n} (\overset{m}{\omega_i} y_j x \dots x + \overset{m}{\omega_i} x y_j x \dots x + \dots + \overset{m}{\omega_i} x \dots x y_j) \cdot \alpha_i x, \quad (2.1)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

где

$$\overset{m}{\omega_i} y x \dots x + \overset{m}{\omega_i} x y x \dots x + \dots + \overset{m}{\omega_i} x \dots x y = D_{xy} \overset{m}{\omega_i} x \dots x^*, \quad (2.2)$$

причем векторы y_j *удовлетворяют условиям*

$$\alpha_i y_j = -\delta_i^j, \ (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

а δ_i^j — *символ Кронекера, то выполняются также и равенства*

$$\overset{m}{\omega}_{(j} y_1 y_2 \dots y_{m-1} y_{m)} = 0, \quad (2.4)$$

где векторы y_{j_r} $(r = 1, 2, \dots, m)$, *также удовлетворяют условиям* (2.3).

Доказательство. Как, вышеупомянуто, для упрощения записей, возьмем случай, когда $m = 4$ и положим

$$j_1 = k, \ j_2 = l, \ j_3 = p, \ j_4 = q.$$

Итак, пусть имеют место тождества

$$\omega_j xxxx = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i y_j xxx + \omega_i x y_j xx + \omega_i xx y_j x + \omega_i xxx y_j) \cdot \alpha_i x, \quad (2.5)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

а векторы y_j удовлетворяют условиям (2.3). Докажем, что выполняются равенства

$$\omega_{(j} y_k y_e y_p y_{q)} = 0. \quad (2.6)$$

Чтобы иметь в виду общий случай (произвольного m), заметим, что в правой части тождества (2.5), в скобках, имеются $m = 4$ слагаемых, содержа-

---

* Здесь через $D_{xy} \overset{m}{\omega_i} x \dots x$ обозначен поляризованный полином $\overset{m}{\omega_i} x \dots x$. См. [2].

щих $m-1=3$ раза аргумент x*. Произведя над этим тождеством поляризацию $x \to y$, мы получим новое тождество

$$\omega_j yxxx + \omega_j xyxx + \omega_j xxyx + \omega_j xxxy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\omega_i y_j y xx + \omega_i y_j xyx + \omega_i y_j xxy + \omega_i yy_j xx + \omega_i xy_j yx +$$

$$+ \omega_i xy_j xy + \omega_i yxy_j x + \omega_i xyy_j x + \omega_i xxyy_j + \omega_i yxxy_j +$$

$$+ \omega_i xyxy_j + \omega_i xxyy_j) \alpha_i x + \sum_{i=1}^{n} (\omega_i y_j xxx + \omega_i xy_j xx + \omega_i xxy_j x +$$

$$+ \omega_i xxxy_j) \cdot \alpha_i y. \tag{2.7}$$

Выражение, стоящее в первых скобках содержит $m(m-1)=12$ слагаемых, содержащих $m-2=2$ раза аргумент x, а выражение во вторых скобках отличается от левой части только тем, что вместо аргумента y взят вектор y_j.

Подставим в это тождество вектор $y = y_k$, удовлетворяющий условию (2.3), т. е. условию

$$\alpha_i y_k = -\delta_i^k.$$

Тогда вместо второй суммы, находящиеся в правой части (2.7), мы будем иметь выражение

$$-(\omega_k y_j xxx + \omega_k xy_j xx + \omega_k xxy_j x + \omega_k xxxy_j).$$

Перенесем это выражение в левую часть и просимметрируем обе части полученного равенства по индексам j и k. Тогда получим тождество

$$\omega_{(j} y_{k)} xxx + \omega_{(j} xy_{k)} xx + \omega_{(j} xxy_{k)} x + \omega_{(j} xxy_{k)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \{\omega_i y_{(j} y_{k)} xx + \omega_i y_{(j} xy_{k)} x + \omega_i y_{(j} xxy_{k)} + \omega_i xy_{(j} y_{k)} x +$$

$$+ \omega_i xy_{(j} xy_{k)} + \omega_i xxy_{(j} y_{k)}\} \cdot \alpha_i x, \tag{2.8}$$

левая часть которого содержит $\frac{2m}{2!} = m = 4$ слагаемых, в каждом из которых аргумент x повторяется $m-1=3$ раза, а правая часть содержит $\frac{m(m-1)}{2!} = C_m^2 = 6$ слагаемых, в каждом из которых аргумент x повторяется $m-2=2$ раза.

Этот процесс поляризации и последовательной подстановки в полученные тождества векторов y_{j_r}, удовлетворяющих условию (2.3), можно повторить всего m раз, а в нашем частном случае 4 раза. Произведем, далее, над тождеством (2.8) поляризацию $x \to y$ и подставим в полученное тождество вектор $y = y_l$. Перенеся затем выражение, стоящее под знаком второй суммы из правой части в левую и просимметрировав полученное равенство по индексам j, k и l, мы получим тождество*

* При этом мы используем правило, что при симметрировании выражения, уже содержащего знак симметрирования, внутренние скобки можно опустить. См. [3, 4].

$$\omega_{(j}y_k y_{l)}xx+\omega_{(j}y_k xy_{l)}x+\omega_{(j}y_k xxy_{l)}+\omega_{(j}xy_k xy_{l)}+$$
$$+\omega_{(j}xy_k y_{l)}x+\omega_{(j}xxy_k y_{l)}=\sum_{i=1}^{n}\{\omega_i y_{(j}y_k y_{l)}x+ \tag{2.9}$$
$$+\omega_i y_{(j}y_k xy_{l)}+\omega_i y_{(j}xy_k y_{l)}+\omega_i xy_{(j}y_k y_{l)}\}\cdot\alpha_i x.$$

Подсчет показывает, что слева мы получили $\frac{3\cdot C_m^2}{3}=C_m^2=6$ слагаемых, содержащих $m-2=2$ раза аргумент x, а справа под знаком суммы $\frac{(m-2)C_m^2}{3}=C_m^3=4$ слагаемых, содержащих $m-3=1$ раз аргумент x.

Продолжая аналогично, а именно, произведя над тождеством (2.9) поляризацию $x\to y$ и подставив в полученном равенстве вектор $y=y_p$ такой, что $\alpha_i y_p=-\delta_i^p$ и просимметрировав полученное выражение по индексам j, k, l и p, мы будем иметь тождество

$$\omega_{(j}y_k y_l y_{p)}x+\omega_{(j}y_k y_e xy_{p)}+\omega_{(j}y_k xy_l y_{p)}+$$
$$+\omega_{(j}xy_k y_l y_{p)}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i y_{(j}y_k y_l y_{p)}\cdot\alpha_i x. \tag{2.10}$$

левая часть которого содержит $\frac{4\cdot C_m^3}{4}=C_m^3=4$ слагаемых, в каждом из которых x повторяется $m-3=1$ раз, а в правой части, в скобках под знаком суммы, $\frac{(m-3)C_m^3}{4}=C_m^4=1$ слагаемое, содержащих x $m-4=0$ раз.

Поступив аналогично с тождеством (2.10) и, использовав при этом вектор $y=y_q$, для которого $\alpha_i y_q=-\delta_i^q$, мы получим, наконец, равенство

$$\omega_{(j}y_k y_l y_p y_{q)}=0, \tag{2.11}$$

ч. т. д.

В общем случае доказательство проводится аналогично. В результате мы придем к искомому тождеству (2.4).

Теперь мы можем доказать следующую основную теорему:

Теорема 2. *Для того, чтобы имело место тождество*

$$\sum_{i=1}^{n}\overset{m}{\omega}_i x\ldots x\cdot\alpha_i x=0, \tag{2.12}$$

необходимо и достаточно, чтобы функции $\overset{m}{\omega}_j x\ldots x$ *были связаны с функциями* $\alpha_i x$ *при помощи зависимостей*

$$\overset{m}{\omega}_j x\ldots x=\sum_{i=1}^{n}(\overset{m}{\omega}_i y_j x\ldots x+\overset{m}{\omega}_i xy_j x\ldots x+\ldots+\overset{m}{\omega}_i x\ldots xy_j)\cdot\alpha_i x, \tag{2.13}$$

где выражение в скобках получается из $\overset{m}{\omega}_i x\ldots x$ *посредством поляризации* $x\to y$ *и подстановки в полученном полиноме вектора* $y=y_j$, *удовлетворяющего условию*

$$\alpha_i y_j=-\delta_i^j. \tag{2.14}$$

Доказательство необходимости. Пусть имеет место тождество (2.12). Произведя над ним поляризацию $x \to y$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} (\overset{m}{\omega}_i yx\ldots x + \overset{m}{\omega}_i xyx\ldots x + \ldots + \overset{m}{\omega}_i x\ldots xy)\cdot \alpha_i x +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \overset{m}{\omega}_i x \ldots x \cdot \alpha_i y = 0. \tag{2.15}$$

Подставив в тождество (2.15) вектор $y = y_j$ удовлетворяющий условию (2.14), мы получим

$$\sum_{i=1}^{n} (\overset{m}{\omega}_i y_j x \ldots x + \overset{m}{\omega}_i xy_j x \ldots x + \ldots + \overset{m}{\omega}_i x \ldots xy_j)\cdot \alpha_i x - \overset{m}{\omega}_j x \ldots x = 0,$$

т. е. условие (2.13).

Доказательство достаточности. Так же, как и при доказательстве леммы III, положим, для краткости записей, $m = 4$. Пусть следовательно, выполняются тождества

$$\omega_j xxxx = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i y_j xxx + \omega_i xy_j xx + \omega_i xxy_j x + \omega_i xxxy_j)\, \alpha_i x, \tag{2.5}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

причем $\alpha_i y_j = -\delta_i^j$. Докажем, что выполняется также и тождество

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j xxxx \cdot \alpha_j x = 0. \tag{2.16}$$

Из хода доказательства упомянутой леммы видно, что если выполняются тождества (2.5), то выполняются также и тождества (2.8), (2.9), (2.10) и (2.11).

В силу условия (2.5), будем иметь:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j xxxx\cdot\alpha_j x = \sum_{i,j}^{n} (\omega_i y_j xxx + \omega_i xy_j xx + \omega_i xxy_j x +$$
$$+ \omega_i xxxy_j)\, \alpha_i x \cdot \alpha_j x. \tag{2.17}$$

Так как имеют место тождества

$$\sum_{i,j}^{n} \omega_i y_j xxx\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x = \sum_{i,j}^{n} \omega_{(i} y_{j)} xxx\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x,$$

$$\sum_{i,j}^{n} \omega_i xy_j xx\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x = \sum_{i,j}^{n} \omega_{(i} xy_{j)} xx\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x,$$

$$\sum_{i,j}^{n} \omega_i xxy_j x\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x = \sum_{i,j}^{n} \omega_{(i} xxy_{j)} x\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x,$$

$$\sum_{i,j}^{n} \omega_i xxxy_j \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j x = \sum_{i,j}^{n} \omega_{(i} xxxy_{j)} \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j x,$$

[Ср. 3], то из (2.17) получим

$$\sum_{j=i}^{n} \omega_j xxxx \cdot \alpha_j x = \sum_{i,j}^{n} \left\{ \omega_{(i} y_{j)} xxx + \omega_{(i} xy_{j)} xx + \omega_{(i} xxy_{j)} x + \omega_{(i} xxxy_{j)} \right\} \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j x. \tag{2.18}$$

Поступая далее аналогично и используя тождество (2.8) — (2.10), мы будем иметь

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j xxxx \cdot \alpha_j x = \sum_{i,j,k,l,p}^{n} \omega_{(i} y_j y_k y_l y_{p)} \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j x \cdot \alpha_k x \cdot \alpha_l x \cdot \alpha_p x. \tag{2.19}$$

Однако, правая часть этого равенства тождественно равно нулю в силу условия (2.11). Тем самым доказано, что выполняется тождество (2.16).

В общем случае (для произвольного значения m) доказательство теоремы проводится аналогично.

§ 3

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров для частных случаев, когда $m = 1$ и $m = 2$, представляющих, по нашему мнению, самостоятельный интерес.

1. Прежде всего рассмотрим простейший случай, когда $m = 1$. Следовательно, нам заданы n линейно независимых и не равных тождественно нулю линейных скалярных функций $\alpha_i x$. Зададимся вопросом, какими должны быть выбраны n линейных функций $\omega_j x$, чтобы выполнялось тождество

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i x \cdot \alpha_i x = 0, \tag{3.1}$$

В силу следствия из теоремы 2, мы должны иметь:

$$\omega_j x = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ji} \cdot \alpha_i x, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.2}$$

где σ_{ji} — некоторые постоянные числа.

В силу теоремы 2, должно выполняться также условие (2.13), которое в нашем примере переписывается следующим образом:

$$\omega_j x = \sum_{i=1}^{n} \omega_i y_j \cdot \alpha_i x. \tag{3.3}$$

Из равенств (3.2) и (3.3) получается тождество:

$$\sum_{i=1}^{n} (\sigma_{ji} - \omega_i y_j) \cdot \alpha_i x = 0.$$

Так как функции $\alpha_i x$ линейно независимы, то мы должны иметь

$$\sigma_{ji} = \omega_i y_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.4}$$

Кроме того, согласно лемме III, должны иметь место условия (2.4), которые в нашем случае принимают вид:

$$\sigma_{(ji)} = \omega_{(i} y_{j)} = 0. \tag{3.5}$$

Следовательно, выполняются условия

$$\sigma_{ij} = - \sigma_{ji}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.6}$$

а также вытекающие из них равенства

$$\sigma_{jj} = 0.$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Если имеет место тождество*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i x \cdot \alpha_i x = 0, \tag{3.1}$$

то функции $\omega_j x$ связаны с данными функциями $\alpha_i x$ линейными зависимостями вида

$$\omega_j x = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ji} \cdot \alpha_i x, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.2}$$

причем коэффициенты σ_{ji} должны быть к ососимметрическими относительно индексов j и i:

$$\sigma_{ij} = - \sigma_{ji}. \tag{3.6}$$

Легко проверяется справедливость обратной теоремы:

Теорема 4. *Если функции $\omega_j x$ связаны с линейно независимыми и не равными тождественно нулю линейными скалярными функциями $\alpha_i x$ при помощи зависимостей* (3.2), *причем коэффициенты σ_{ji} кососимметричны относительно индексов j и i, то выполняется тождество* (3.1).

2. Рассмотрим теперь случай, когда $m = 2$.

Согласно основной теореме, тогда из тождества

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j xx \cdot \alpha_j x = 0 \tag{3.7}$$

вытекает тождество

$$\omega_j xx = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i y_j x + \omega_i x y_j) \cdot \alpha_i x, \ (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.8}$$

где $\alpha_i y_j = - \delta_i^j$.

После введения обозначений

$$\sigma_{ji} x = \omega_i y_j x + \omega_i x y_j, \qquad (j,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.9}$$

тождества (3.8) принимают следующий вид:

$$\omega_j xx = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{ji} x \cdot \alpha_i x. \tag{3.10}$$

Подставив в тождества (3.9) вектор $y = y_k$, удовлетворяющий условию $\alpha_i y_k = -\delta_i^k$, получим

$$\sigma_{ji} y_k = \omega_i y_j y_k + \omega_i y_k y_j. \tag{3.11}$$

Просимметрировав эти равенства по индексам j, i и k, и учтя, что должно выполняться условие

$$\omega_{(i} y_j y_{k)} = 0, \ * \tag{3.12}$$

мы получим

$$\sigma_{(ji} y_{k)} = 0. \tag{3.13}$$

1) Предположим сначала, что функции (3.9) кососимметричны относительно индексов j, i, т. е. что выполняются тождества:

$$\sigma_{ij} x = -\sigma_{ji} x. \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.14}$$

Тогда будут тождественно исчезать и функции

$$\sigma_{jj} x = 0. \tag{3.15}$$

Теперь из (3.10) мы получим для функций $\omega_j xx$ следующие выражения:

$$\left.\begin{array}{l}
\omega_1 xx = \quad * \quad + \sigma_{12} x \cdot \alpha_2 x + \sigma_{13} x \cdot \alpha_3 x + \ldots + \sigma_{1n} x \cdot \alpha_n x \\
\omega_2 xx = \sigma_{21} x \cdot \alpha_1 x + \quad * \quad + \sigma_{23} x \cdot \alpha_3 x + \ldots + \sigma_{2n} x \cdot \alpha_n x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\omega_n xx = \sigma_{n1} x \cdot \alpha_1 x + \sigma_{n2} x \cdot \alpha_2 x + \sigma_{n3} x \cdot \alpha_3 x + \ldots \quad *
\end{array}\right\} \tag{3.16}$$

Легко проверить, что для этих значений функций $\omega_j xx$ выполняется тождество (3.7), при условии, что выполняются также и тождества (3.14).

Таким образом, доказана справедливость следующей теоремы:

Теорема 5. *Если функции $\omega_j xx$ связаны с данными функциями $\alpha_i x$ при помощи зависимостей* (3.16), *причем выполняются тождества* 3.14), *то выполняется также и тождество* (3.7).

2) Потребуем теперь, чтобы функции $\sigma_{ji} x$ линейно зависели от данных функций $\alpha_i x$, т. е. чтобы выполнялись тождества

$$\sigma_{ji} x = \sum_{p=1}^{n} \tau_{jip} \cdot \alpha_p x, \qquad (j,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.17}$$

где τ_{jip} — некоторые постоянные числа. Подставив эти выражения для $\sigma_{ji} x$ в равенства (3.10), получим

* Условие (3.12) аналогично (2.11) для случая $m=4$ или условию (2.4) в общем случае.

$$\omega_j\, xx = \sum_{i,\,k}^{n} \tau_{jik} \cdot \alpha_i\, x \cdot \alpha_k x. \qquad (j = 1,\, 2,\, \ldots,\, n) \tag{3.18}$$

Докажем, что имеет место следующая теорема:

Теорема 6. *Если функции $\omega_j xx$ связаны с функциями $\alpha_i x$ зависимостями вида* (3.18) *и при этом числа τ_{jk} удовлетворяют условию*

$$\tau_{(jik)} = 0, \qquad (j,\ i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3.19}$$

то выполняется также и тождество (3.7).

Доказательство. Подставив в (3.17) вектор $y = y_k$, удовлетворяющий условию $\alpha_i y_k = -\,\delta_i^k$, получим

$$\sigma_{ji}\, y_k = -\sum_{p=1}^{n} \tau_{jip} \cdot \delta_p^k = -\,\tau_{jik}. \tag{3.20}$$

Просимметрировав это равенство по индексам j, i и k и приняв во внимание условие (3.13), мы увидим, что выполняется также и условие (3.19). Теперь, в силу (3.18) и (3.19), мы будем иметь:

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j\, xx \cdot \alpha_j\, x = \sum_{j,\,i,\,k}^{n} \tau_{jik} \cdot \alpha_j\, x \cdot \alpha_i\, x \cdot \alpha_k\, x = \sum_{j,\,i,\,k}^{n} \tau_{(jik)}\, \alpha_j\, x \cdot \alpha_i\, x \cdot \alpha_k\, x = 0\,,$$

что и требовалось доказать.

Следует заметить, что, в силу (3.11) числа $\sigma_{ji}\, y_k$ не изменяются от перестановки индексов j и k, а потому из (3.20) вытекает, что также и числа τ_{jik} симметричны относительно этих же (крайних) индексов:

$$\tau_{jik} = \tau_{kij} \tag{3.21}$$

Поэтому условию (3.19) можно придать также и следующий вид:

$$\tau_{jik} + \tau_{ikj} + \tau_{kji} = 0. \quad [\text{Ср. } 3,\ 4]. \tag{3.22}$$

3) Естественно возникает вопрос, нельзя ли подобрать такие неравные тождественно нулю функции $\sigma_{ji}\, x$, чтобы они линейно зависели от данных функций $\alpha_i\, x$ и, кроме того, удовлетворяли условиям (3.14). На этот вопрос нам придется ответить отрицательно.

В самом деле, допустим, что для функций $\sigma_{ji}\, x$ одновременно выполняются тождества (3.14) и (3.17). Тогда, в силу (3.20), числа τ_{jik} должны быть кососимметрическими относительно первых двух индексов, а в силу (3.21), они должны быть симметрическими относительно крайних индексов. Поэтому числа τ_{jik} должны быть равными нулю для всех допустимых значений индексов j, i и k [см. 3], что невозможно, т. к. мы потребовали, чтобы функции $\sigma_{ji}\, x$ не были равны тождественно нулю.

4) Допустим теперь, что одновременно выполняются тождества

$$\sigma_{ji}\, x = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jik} \cdot \alpha_k\, x \tag{3.17}$$

и

$$\sigma_{jj}\, x = 0\,. \tag{3.15}$$

Полагая в (3.17) $i = j$, будем иметь тождества

$$\sigma_{jj}\, x = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jjk} \cdot \alpha_k\, x = 0. \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Вследствие линейной независимости функций $\alpha_k\, x$, мы отсюда заключаем, что

$$\tau_{jjk} = 0.$$

В силу (3.21), мы, далее, получим

$$\tau_{kjj} = 0.$$

Полагая же $k = j$, мы увидим, что также

$$\tau_{jjj} = 0.$$

Таким образом, если одновременно выполняются тождества (3.17) и (3.15), то числа τ_{jik} должны быть равными нулю, если равны либо два каких-либо индекса, либо все три. Это означает, что правая часть тождества (3.18) будет содержать только те слагаемые, у которых коэффициенты τ_{jik} имеют три различных индекса. Мы можем поэтому это тождество написать следующим образом:

$$\omega_j\, xx = \sum_{i,\,k}^{n} (\tau_{jik} + \tau_{jki}) \cdot \alpha_i\, x \cdot \alpha_k\, x,$$

или используя соотношения (3.21) и (3.22),

$$\omega_j\, xx = -\sum_{i,\,k}^{n} \tau_{kji} \cdot \alpha_i\, x \cdot \alpha_k\, x = -\sum_{i,\,k}^{n} \tau_{ijk}\, \alpha_i\, x \cdot \alpha_k\, x$$

или

$$\omega_j\, xx = \sum_{i,\,k}^{n} \lambda_{ijk} \cdot \alpha_i\, x \cdot \alpha_k\, x, \tag{3.23}$$

где введено обозначение

$$\lambda_{ijk} = -\tau_{ijk}, \tag{3.24}$$

причем, в отличие от (3.18), коэффициенты λ_{ijk} не содержат повторяющихся индексов.

В качестве примера, положим $n = 4$. Тогда из (3.23) получим:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1\, xx &= \lambda_{213} \cdot \alpha_2\, x \cdot \alpha_3\, x + \lambda_{214} \cdot \alpha_2\, x \cdot \alpha_4\, x + \lambda_{314} \cdot \alpha_3\, x \cdot \alpha_4\, x \\
\omega_2\, xx &= \lambda_{123} \cdot \alpha_1\, x \cdot \alpha_3\, x + \lambda_{124} \cdot \alpha_1\, x \cdot \alpha_4\, x + \lambda_{324} \cdot \alpha_3\, x \cdot \alpha_4\, x \\
\omega_3\, xx &= \lambda_{132} \cdot \alpha_1\, x \cdot \alpha_2\, x + \lambda_{134} \cdot \alpha_1\, x \cdot \alpha_4\, x + \lambda_{234} \cdot \alpha_2\, x \cdot \alpha_4\, x \\
\omega_4\, xx &= \lambda_{142} \cdot \alpha_1\, x \cdot \alpha_2\, x + \lambda_{143} \cdot \alpha_1\, x \cdot \alpha_3\, x + \lambda_{243} \cdot \alpha_2\, x \cdot \alpha_3\, x
\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Так как, в силу (3.22) и (3.24), выполняется условие

$$\lambda_{jik} + \lambda_{ikj} + \lambda_{kji} = 0,$$

то нетрудно проверить, что для функций (3.25) выполняется тождество

$$\sum_{n=1}^{4} \omega_j\, xx \cdot \alpha_j\, x = 0.$$

Легко видеть, что рассмотренный в конце первого параграфа пример (1.14) является частным случаем формул (3.25).

5) При доказательстве теоремы 1 мы отдельно рассмотрели случай $m = n - 1$ и пришли к формулам (1.12) и условию (1.13). Положив в этих формулах $n = 3$ и $m = 2$, мы получим зависимости

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 xx &= \tau_1 \cdot \alpha_2 x \cdot \alpha_3 x, \\ \omega_2 xx &= \tau_2 \cdot \alpha_1 x \cdot \alpha_3 x, \\ \omega_3 xx &= \tau_3 \cdot \alpha_1 x \cdot \alpha_2 x \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

и условие

$$\sum_{j=1}^{3} \tau_j = 0. \tag{3.27}$$

Эти формулы легко получаются как следствия из формул (3.23) и (3.22).

Действительно, полагая в (3.18) $n = 3$, мы получим формулы (3.26), если положить

$$\tau_1 = \lambda_{213}, \quad \tau_2 = \lambda_{123} \quad \text{и} \quad \tau_3 = \lambda_{132}.$$

При этом, в силу (3.24) и (3.22), должно выполняться условие (3.27).

6) Пример (3.26), рассмотренный в предыдущем пункте, можно обобщить следующим образом. Рассмотрим случай, когда $m = 2$ и $n = 3k$, где k — натуральное число. Назовем p—ым п е р и о д о м тройку билинейных функций $\omega_{3p-2} xx$, $\omega_{3p-1} xx$, $\omega_{3p} xx$ ($p=1, 2, \ldots, k$). Таким образом, для данных n функций $\omega_j xx$ мы имеем k периодов. Если для каждого из этих периодов выполняются тождества

$$\left.\begin{aligned} \omega_{3p-2} xx &= \tau_{3p-2} \cdot \alpha_{3p-1} x \cdot \alpha_{3p} x \\ \omega_{3p-1} xx &= \tau_{3p-1} \cdot \alpha_{3p} x \cdot \alpha_{3p-2} x \\ \omega_{3p} xx &= \tau_{3p} \cdot \alpha_{3p-2} x \cdot \alpha_{3p-1} x \end{aligned}\right\}, \quad (p = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.28}$$

а числа τ_{3p-2}, τ_{3p-1} и τ_{3p} удовлетворяют условиям

$$\tau_{3p-2} + \tau_{3p-1} + \tau_{3p} = 0, \qquad (p = 1, 2, \ldots, k) \tag{3.29}$$

то для рассматриваемых n билинейных функций $\omega_j xx$ выполняется тождество

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j xx \cdot \alpha_j x = 0 \tag{3.7}$$

и условие

$$\sum_{j=1}^{n} \tau_j = 0 \tag{1.13}$$

Заметим еще, что понятие периодичности можно распространить на более общий случай (1.12) и условие (1.13), когда $n = m \cdot k$ и $m > 2$.

20 I 1959 *Кафедра общей математики*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *А. М. Лопшиц.* Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных безразмерных пространствах. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1948, вып. VI, 365—419.

[2]. *Ш. Д. Трупин.* К вопросу о делимости тензоров в линейных безразмерных пространствах. Ученые записки Рижского педагогического иститута, 1957, вып. IV, 59—83.

[3]. *Г. Б. Гуревич.* Основы теории алгебраических инвариантов. Гостехиздат, 1948.

[4]. *П. А. Широков.* Тензорное исчисление. Часть первая. Алгебра тензоров. Гостехиздат, 1934.

PAR KĀDU TEORĒMU VISPĀRINĀJUMU PAR POLILINEĀRAS FUNKCIJAS DALĀMĪBU BEZDIMENSIJU TELPĀ

Š. Trupins

(Kopsavilkums)

Darbā dots teorēmu vispārinājums par polilineāras funkcijas dalāmību, kas ir apskatītas darbos [1, 2].

Pirmā paragrafā pierādīts, ka nosacījumi

$$\sum_{j=1}^{n} \overset{m-n+1}{\omega_j} x \ldots x = 0 \qquad (1.9)$$

ir pietiekami, lai funkcijas (1.8) apmierinātu identitāti

$$\sum_{j=1}^{n} \overset{m}{\omega_j} x \ldots x \cdot \underset{j}{\alpha} x = 0 . \qquad (1.10)$$

Otrā paragrafā pierādīta teorēma 2, kas ir Lopšica teorēmas vispārinājums par polilineāras funkcijas dalāmību. Doti nosacījumi (2.13), kas ir nepieciešami un pietiekami, lai būtu spēkā identitāte (2.12).

Trešā paragrafā apskatīti šīs teorēmas dažādi specialgādījumi, ja $m = 1$ un $m = 2$.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

ТРИВИАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ КОНГРУЭНТНОСТИ НА СТРУКТУРЕ

А. ЛОРЕНЦ

На каждой структуре, как известно [1], можно определить, во-первых, отношение конгруэнтности P_1, которое выполняется для любых двух элементов данной структуры; во-вторых, отношение конгруэнтности P_0, которое выполняется тогда и только тогда, когда оба данных элемента совпадают между собой.

Как правило, структура имеет кроме этих, так называемых тривиальных, еще и другие отношения конгруэнтности. Но имеются примеры весьма сложных структур, обладающих только тривиальными отношениями конгруэнтности. В связи с этим, автор поставил перед собой задачу выяснить, какими должны быть структуры, чтобы на них не существовало нетривиальных отношений конгруэнтности. Приводятся также некоторые результаты, связанные с проблемой 72 Г. Биркгофа [1].

По первому вопросу доказаны теоремы 1 и 2.

Теорема 1. На структуре L нельзя определить нетривиальных отношений конгруэнтности тогда и только тогда, если из того, что отношение конгруэнтности P выполняется для элементов $x, y \in L$ $(x > y)$, следует, что P выполняется и для любых двух элементов $x', y' \in L$, где $x' \geqslant x$, $y \geqslant y'$.

Теорема 2. На структуре L всегда можно определить нетривиальное отношение конгруэнтности, если существуют элементы $x, y \in L$ ($x \neq 1$ или $y \neq 0$; $x > y$) такие, что нельзя указать элемент $z \in L$, который был бы сравним с одним и только с одним из элементов x, y.

Для формулировки дальнейших теорем нам понадобятся некоторые дополнительные понятия.

Определение 1. *Простым интервалом с концами* x, y назовем цепь, имеющую x и y своими крайними элементами, а мощность этой цепи назовём *длиной интервала*.

Определение 2. Структура L называется α — *структурой* тогда и только тогда, если

1) L содержит элемент 0 или элемент 1;
2) любая пара элементов $x, y \in L$ $(x > y)$ соединяется только конечными цепями;
3) L содержит по крайней мере один простой интервал длины 4.

Определение 3. Обозначим через L_n структуру L тогда и только тогда, если

1) структура L имеет наибольший и наименьший элементы;
2) максимальная длина простого интервала с концами 0, 1 равна n.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. На α-структуре L можно определить лишь тривиальные отношения конгруэнтности тогда и только тогда, если из того, что отношение конгруэнтности P выполняется для $x, y \in L$ ($x > y$, $x \neq 1$ и $y \neq 0$) следует, что P выполняется по крайней мере для одной пары элементов $x', y' \in L$, где

$$x' > x, \quad y > y'.$$

Теорема 4. Если на структуре L_n $(n > 2)$ можно определить только тривиальные отношения конгруэнтности, то число элементов этой структуры не меньше $n + \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Здесь и дальше $[m]$ означает целую часть числа m.

Теорема 5. При любом $n > 2$ существует структура L_n с числом элементов равным $n + \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ такая, что в ней можно определить лишь тривиальные отношения конгруэнтности.

Заметим, далее, что теорема 1 выражает решение проблемы 72 Г. Биркгофа [1], если соответствующим образом определены операции с отношениями конгруэнтности.

Определим теперь эти операции:

а) *суммой* $P \oplus Q$ отношений конгруэнтности P, Q структуры L назовём отношение конгруэнтности R структуры L, которое выполняется для тех и только для тех $x, y \in L$, для которых выполняется или P или Q.

б) *произведением* $P \odot Q$ отношений конгруэнтности P, Q структуры L назовём отношение конгруэнтности S структуры L, которое выполняется для тех и только для тех элементов $x, y \in L$, для которых выполняется и P, и Q.

в) назовём отношение конгруэнтности P' структуры L *дополнением* отношения конгруэнтности P той же структуры, если

$$P \oplus P' = P_1 \quad \text{и} \quad P \odot P' = P_0 .$$

Оказывается, что совокупность отношений конгруэнтности данной структуры является булевой алгеброй с операциями определенными выше, тогда и только тогда, если оно исчерпается отношениями конгруэнтности P_0 и P_1.

Остальные теоремы дают ответ на вопрос: при каких условиях отношения конгруэнтности данной структуры образуют структуру с операциями, определенными в пунктах а) — в)?

Теорема 6. Система отношений конгруэнтности структуры L не является структурой тогда и только тогда, если существует тройка элементов $x_1, x_2, x_3 \in L$ $(x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3)$ такая, что для некоторых отношений конгруэнтности P, Q структуры L справедливы утверждения:

$$P(x_1, x_2) \,\&\, \urcorner P(x_2, x_3)$$

и

$$Q(x_3, x_2) \,\&\, \urcorner Q(x_2, x_1) .$$

Теорема 7. Совокупность отношений конгруэнтности структуры L не является структурой, если существует тройка элементов $x_1, x_2, x_3 \in L$ $(x_1 > x_2 > x_3)$ такая, что нельзя указать ни элемента $u \in L$, сравнимого с одним и только с одним из элементов x_1, x_2, ни элемента $v \in L$, сравнимого с одним и только с одним из элементов x_2, x_3.

Теорема 8. Если совокупность отношений конгруэнтности структуры L_n $(n > 2)$ является структурой, то число элементов структуры L_n не меньше $n + \left[\frac{n+1}{4}\right] + 1$.

Имеет место, повидимому, и такой результат:

Теорема 9. При любом $n > 2$ существует структура L_n с числом элементов равным $n+\left[\frac{n+1}{4}\right]+1$ такая, что совокупность отношений конгруэнтности этой структуры является структурой.

Доказательство последнего утверждения автором полностью не проведено из-за большого количества частных случаев, подлежащих рассмотрению.

20 I 1959 *Кафедра математического анализа*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Г. Биркгоф.* Теория структур. ИЛ, Москва, 1952.

TRIVIĀLĀS KONGRUENCES ATTIECĪBAS STRUKTŪRĀ

A. Lorencs

(Kopsavilkums)

Doti dažāda veida nosacījumi, kas izpildās strukturai, kurā var definēt tikai triviālās kongruences attiecības.

Atbilstoši definējot kongruences attiecību summu, reizinājumu un papildinājumu, iegūtie rezultāti sniedz Birkhofa [1] 72. problēmas atrisinājumu.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

ПРОБЛЕМЫ БАЗИСА НАПРАВЛЕННЫХ ГРАФОВ

Я. М. БАРЗДЫНЬ

В этой статье рассматриваются проблемы базиса направленных графов и доказываются условия единственности базиса точек и ребер, а также дается решение проблемы Герца (P. Hertz).

Интерпретируя направленный граф как чисто вентильную схему, тем самым дается способ для перехода к наиболее простой эквивалентной схеме путем отбрасывания некоторых вентилей (т. е. заменяя схему ее базисом) или введением новых узлов (соответствующих идеальным точкам в проблеме Герца).

Автор выражает глубокую благодарность доценту В. К. Детловсу за ценные советы и руководство работой.

§ 1
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть дано множество π, элементы которого назовем *точками* и обозначим малыми буквами латинского алфавита. Упорядоченную пару точек p и q назовем *направленным ребром*, обозначим через pq и скажем, что из точки p в точку q проходит направленное ребро, которое выходит из точки p и входит в точку q. Множество G направленных ребер назовем *направленным графом* G, а любое подмножество H этого множества ребер назовем *подграфом* H графа G. Предполагается, что граф G не содержит двух одинаковых направленных ребер и никогда вместе с ребром pq не содержит ребро qp. *Точками направленного ребра* pq назовем точки p и q. Точки направленных ребер направленного графа образуют некоторое множество точек. Это множество назовем *множеством точек* соответствующего *направленного графа*, а элементы этого множества, т. е. точки — *точками направленного графа*. Если существуют направленные ребра pa_1, a_1a_2, $\ldots$, $a_s q$, то скажем, что из точки p в точку q *проходит путь через точки* $a_1, \ldots, a_s$. Направленный граф назовем *циклом*, если для любых двух его точек справедливы утверждения: из первой точки проходит путь во вторую и из второй точки проходит путь в первую.

Для определенного выше понятия абстрактного направленного графа существуют много интерпретаций, в том числе и технических (напр. электрические схемы). Очень удобна геометрическая интерпретация, в которой понятие точки имеет обычный смысл, а ребро означает вектор, соединяющий две точки. Эта интерпретация будет использоваться в дальнейшем для рисунков.

§ 2
БАЗИС ТОЧЕК

В этом и в следующих §§ будут рассматриваться только направленные и конечные графы (граф назовем *конечным*, если его множество точек конечное). Поэтому впредь в целях простоты направленный и конечный граф будем называть просто графом, а его направленные ребра — ребрами.

Пусть π — множество точек графа G. Следуя Кенигу (D. König) [1], назовем подмножество B множества π *базисом точек* графа G, если выполняются следующие условия:

1) если точка $p \in G$ и $p \bar{\in} B$, то существует путь, который проходит из какой-нибудь точки множества B в точку p;

2) не существует пути, соединяющего две точки из множества B.

В книге [1] доказано, что каждый граф имеет по крайней мере один базис точек. Следующая теорема решает проблему единственности базиса точек.

Т е о р е м а 1. Граф G имеет по крайней мере два различных базиса точек тогда и только тогда, когда граф содержит цикл и не содержит ни одной точки, от которой проходит ребро в точку этого цикла.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что можно указать цикл со свойствами, упомянутыми в теореме. Тогда, выбирая произвольно точку p этого цикла, можно убедиться в существовании такого базиса точек, которому принадлежит p. Потом, выбирая какую-нибудь другую точку q этого цикла, снова можно удедиться в существовании такого базиса точек, которому принадлежит q, а точка p не принадлежит. Отсюда следует, что условия теоремы достаточны.

Допустим, что существуют две разные базы точек $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$. Пусть точка a_i не совпадает ни с одной точкой из множества B (такая точка a_i должна существовать). Поскольку B является базисом, то можно указать такую точку b_j, что из b_j проходит путь в a_i. Таким же образом можно убедиться в существовании пути от a_i к b_j. Отсюда следует существование подграфа, являющегося циклом. Существование такой точки p, из которой проходит ребро в какую-нибудь точку цикла, означало бы, что ни одна точка цикла не может принадлежать базису, что противоречило бы построению цикла. Поэтому условия теоремы являются и необходимыми.

§ 3
БАЗИС РЕБЕР

Подграф B графа G назовем *базисом ребер*, если для него выполняются следующие свойства:

1) если произвольное ребро $pq \bar{\in} B$, то можно указать такие ребра из этого подграфа, по которым проходит путь из p в q;

2) если $pq \in B$, то невозможно указать такие ребра этого подграфа, отличные от pq, по которым тоже проходил бы путь из p в q.

В книге [1] доказано, что каждый граф имеет по крайней мере один базис ребер. Проблема единственности базиса ребер решается следующей теоремой.

Т е о р е м а 2. Граф G имеет по крайней мере два различных базиса ребер тогда и только тогда, если он обладает по крайней мере одним из свойств 1 и 2:

1. Можно указать такие два ребра pp' и qq', что точки p и q принадлежат одному циклу, а точки p' и q' принадлежат второму циклу (т. е. циклу, не имеющему общих точек с первым циклом), при чем любой путь, проходящий из какой-нибудь точки первого цикла в какую-нибудь точку второго цикла, проходит только через точки этих циклов.

2. Можно указать такие два ребра pr (rp) и qr (rq) что точки p и q принадлежат одному циклу, при чем любой путь, проходящий из какой-нибудь

точки этого цикла в точку r (из точки r в какую-нибудь точку этого цикла), проходит только через точки этого цикла.

Доказательство. Допустим, что графу G присуще свойство 1 (рис. 1). Так как из точек первого цикла H проходит путь в точки второго цикла H' и причем любой такой путь проходит только через точки этих циклов, то отсюда следует существование среди ребер некоторого базиса B такого ребра pp', которое соединяет какие-нибудь точки первого и второго цикла. Легко проверить, что другое ребро qq' ($q \in H$, $q' \in H'$) тогда не будет принадлежать базису B. Рассмотрим множество ребер B_1, которое получается из базиса B заменой ребра pp' ребром qq'. Если из $r_1 \in G$ имеется путь в $r_2 \in G$ через ребра базиса B, то по определению цикла, будет существовать путь из r_1 в r_2 и по ребрам множества B_1. Подобным образом, если из r_1 в r_2 проходит путь через ребра множества B_1, тогда существует путь и по ребрам базиса B. Поэтому множество ребер B_1 является базисом. При допущении, что графу присуще свойство 2, можно подобным образом убедиться в существовании также и в этом случае по крайней мере двух различных базисов ребер. Итак, условия теоремы достаточны.

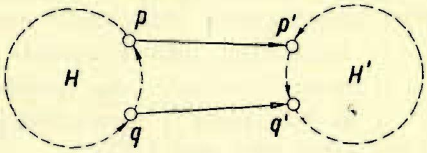

Рис. 1.

Чтобы доказать необходимость, допустим, что граф G имеет два различных базиса ребер B_1 и B_2. Тогда можно указать по крайней мере одно ребро pq, которое принадлежит базису B_1, но не принадлежит базису B_2. По определению базиса ребер, мы сможем указать ребра pr_1, $r_1 r_2$, $\ldots$, $r_i r_{i+1}$, $\ldots$, $r_s q$ из безиса B_2, по которым проходит путь из p в q. По аналогичной причине можно будет указать ребра из базиса B_1, по которым проходит путь из p в r_1, из r_1 в r_2, $\ldots$, из r_i в r_{i+1}, из r_s в q. По крайней мере один из этих путей должен содержать ребро pq, так как в противном случае ребро pq не было бы ребром базиса B_1. Пусть ребро pq содержится в пути, который проходит из точки r_i в точку r_{i+1} (рис. 2). Во-первых допустим, что r_i и r_{i+1} не совпадают ни с одной из точек p и q. В таком случае существует путь из точки r_i в точку p и из точки q в точку r_i, а также из точки p в точку r_i и из точки r_{i+1} в точку q. Отсюда следует, что данный граф содержит два цикла, причем точки p и r_i принадлежат одному циклу, а точки q и r_{i+1} принадлежат второму циклу. Можно убедиться, что эти циклы не имеют общих точек, потому что в противном случае по крайней мере одно из ребер pq и $r_i r_{i+1}$ не могло бы быть ребром ни одного базиса. Можно убедиться, что любой путь, соединяющий какую-нибудь точку первого цикла с какой-нибудь точкой второго цикла, проходит только через точки этих циклов, так как в противном случае ни ребро pq, ни ребро $r_i r_{i+1}$ не могли бы быть ребрами базиса.

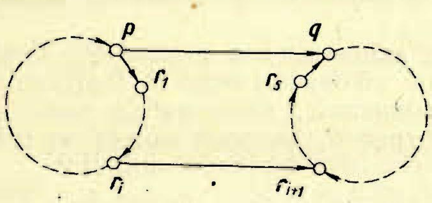

Рис. 2.

Во-вторых, если точка r_{i+1} совпадает с точкой q (или r_i совпадает с p), то будет выполняться свойство 2. Итак, условия теоремы необходимы.

В следующих §§ будут рассматриваться только такие графи, для которых выполняются условия единственности базиса ребер.

§ 4
ПРИВЕДЕННЫЙ ГРАФ

Граф G назовем *транзитивным*, если всегда, когда существуют ребра pq и qr, существует и ребро pr. Ребро pr в этом случае назовем *транзитором. Порядком транзитора* pr назовем число ребер базиса, по которым идет путь от p к r.

Транзитивный граф $\bar{G}$ назовем *транзитивным замыканием* графа G, если выполняются следующие условия:

1) множества точек графов G и $\bar{G}$ совпадают;

2) граф G является подграфом графа $\bar{G}$;

3) если в графе $\bar{G}$ существует ребро pq, то в графе G от точки p в точку q проходит путь или ребро.

О базах ребер графа G и его транзитивного замыкания можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. Базис ребер B графа G является базисом ребер и его транзитивного замыкания.

Теорема 4. Если граф не содержит циклов, то он имеет один и только один базис ребер, и базис ребер его транзитивного замыкания совпадает с базисом ребер данного графа.

Теорема 5. Если граф не имеет ни одного транзитора, то он сам является своим базисом ребер.

Подграф H_1 графа G назовем *максимальным циклом*, если выполняются следующие свойства:

1) H_1 является циклом;

2) не существует ни одного другого подграфа H_1', графа G, который тоже был бы циклом и собственным подграфом которого был бы данный подграф H_1.

Граф G может содержать несколько максимальных циклов H_α. Граф, равный сумме этих максимальных циклов, обозначим через H. Выберем из множества точек каждого максимального цикла H_α какую-нибудь точку r_α. *Приведенным графом** графа G назовем граф G_r, который состоит из всех ребер следующего вида:

1) ребро $p_i p_j$, если в графе G существует ребро $p_i p_j$, при чем $p_i \bar{\in} H$ и $p_j \bar{\in} H$;

2) ребро $p_i r_\alpha$ $(r_\alpha p_i)$, если в графе G существует такое ребро $p_i p_j$, что $p_i \bar{\in} H$, а $p_j \in H_\alpha$ для некоторого α;

3) ребро $r_\alpha r_\beta$, если в графе G существует такое ребро $p_i p_j$, что $p_i \in H_\alpha$, а $p_j \in H_\beta$, при чем $H_\alpha \neq H_\beta$.

Если из существования ребра $p_i p_j$ в графе G следует существование какого-нибудь ребра $p_i' p_j'$ в графе G_r, то будем говорить, что ребру $p_i p_j$ из графа G сопоставлено ребро $p_i' p_j'$ из графа G_r.

Пусть базис ребер графа G_r будет B_r, базис ребер максимального цикла H_α будет B_α и $\bar{B}$ пусть будет сумма B_α. Через B' обозначим множество всех тех ребер графа G, каждому из которых сопоставлено некоторое ребро из B_r.

Теорема 6. Сумма множеств ребер B' и $\bar{B}$ образует базис ребер графа G.

Доказательство теоремы аналогично доказательству, упомянутому в [1].**

---

* Это определение приведенного графа не совпадает с определением, данным в [1]. По Кенигу приведенный граф G_r графа G определяется только тогда, когда граф G — транзитивный. Легко видеть, что упомянутое в этой статье определение приведенного графа совпадает с определением приведенного графа по Кенигу, если граф G транзитивный

** VII Kapitel, Satz 13.

Теорема 7. Если в графе G_r существует путь из точки p в q, то путь из точки p в q существует также в графе G.

Теорема 8. В приведенном графе не существуют циклов.

Пример 1. На рис. 3 изображен граф G. На рис. 4 изображен, соответствующий графу G приведенный граф G_r.

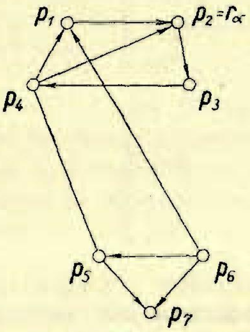

Рис. 3.

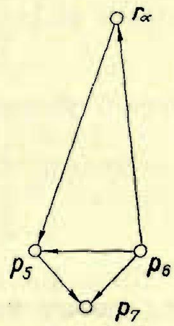

Рис. 4.

§ 5
МАТРИЦЫ ГРАФОВ

Пронумеруем все точки графа G. Впредь, для обозначения точек графа будем употреблять их номера 1, 2, ..., n.

Матрицей графа G назовем матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \cdot & \cdot & \cdot\,\alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot\,\alpha_{nn} \end{Vmatrix},$$

где

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в графе } G \text{ существует ребро } ij \text{ или } i = j; \\ 0, & \text{если в графе } G \text{ не существует ребра } ij. \end{cases}$$

Пример 2. Граф, изображенный на рис. 5, имеет следующую матрицу:

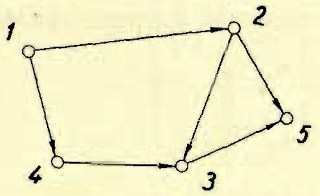

Рис. 5.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Элемент матрицы A $\alpha_{ij} = 1$ назовём транзитором, если ребро ij — транзитор.

Сложение, вычитание и умножение матриц в дальнейшем следует понимать в обычном смысле, а операции над элементами определяются равенствами:

$$\begin{array}{lll} 0 + 0 = 0 & 0 \cdot 0 = 0 & 0 - 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 & 0 \cdot 1 = 0 & 1 - 0 = 1 \\ 1 + 0 = 1 & 1 \cdot 0 = 0 & 1 - 1 = 0 \\ 1 + 1 = 1 & 1 \cdot 1 = 1 & 0 - 1 \text{ не встречается.} \end{array}$$

Элементы квадрата матрицы будем обозначать добавлением левого верхнего индекса, так что, например, ${}^2\gamma_{ij} = \sum_k \gamma_{ik}\gamma_{kj}$.

Матрицу транзитивного замыкания графа G обозначим через $\bar{A}$, где

$$\bar{A} = \begin{Vmatrix} \bar{\alpha}_{11} & \ldots & \bar{\alpha}_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{\alpha}_{n1} & \ldots & \bar{\alpha}_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Матрицу базиса графа G обозначим через B, где

$$B = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n1} & \ldots & \beta_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Теорема 9. Пусть k — максимальный порядок транзиторов замыкания G. Тогда для любого натурального $m \geqslant k$ выполняется равенство

$$B^m = \bar{A}.$$

Теорема доказывается при помощи математической индукции.

Следствие 1. Пусть k — максимальный порядок транзиторов графа G. Тогда для любого натурального $m \geqslant k$ выполняется равенство

$$A^m = \bar{A}.$$

Следствие 2. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы данный граф был транзитивный, является следующее: квадрат матрицы этого графа совпадает с самой матрицей

Иррефлексивной матрицей графа G назовём матрицу

$$C = \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1} & \ldots & \gamma_{nn} \end{Vmatrix},$$

в которой

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & \text{если } i \neq j; \\ 0, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Теорема 10. Для квадрата иррефлексивной матрицы транзитивного графа G

$$C^2 = \begin{Vmatrix} {}^2\gamma_{11} & \ldots & {}^2\gamma_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ {}^2\gamma_{n1} & \ldots & {}^2\gamma_{nn} \end{Vmatrix}$$

имеет место следующее свойство: ${}^2\gamma_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда ребро ij является транзитором.

Доказательство. Допустим, что ij — транзитор. Тогда в множестве точек графа G можно указать такую точку l, чтобы существовали ребра il и lj. С другой стороны это значит, что $\alpha_{il} = 1$ и $\alpha_{lj} = 1$, при чем $l \neq i, j$. Из определения иррефлексивной матрицы и транзитивности графа G следует, что $\gamma_{il} = \bar{\beta}_{il} = \beta_{il} = 1$ и $\gamma_{lj} = \bar{\beta}_{lj} = \beta_{lj} = 1$. Имея ввиду, что ${}^2\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik}\gamma_{kj}$, мы можем утверждать, что ${}^2\gamma_{ij} = 1$. Поэтому условия теоремы достаточны.

Для доказательства необходимости допустим, что ${}^2\gamma_{ij} = 1$. Тогда можно указать такое l, что $\gamma_{il} = 1$ и $\gamma_{lj} = 1$. Так как для всех k $\gamma_{kk} = 0$, то $l \neq i$, j. Отсюда и от транзитивности графа G следует, что $\alpha_{il} = 1$ и $\alpha_{lj} = 1$. Но в таком случае в графе G существуют ребра il и lj отличные от ij, т. е. ребро ij является транзитором, что и следовало доказать.

Т е о р е м а 11. Если граф транзитивный и не содержит циклов, то матрица его базиса получается вычитанием квадрата иррефлексивной матрицы из матрицы этого графа:

$$B = A - C^2.$$

Доказательство теоремы опирается на Т 5 и Т 10.

С л е д с т в и е 3. Если граф не содержит циклов, то матрицу его базиса мы получим, вычитая из матрицы транзитивного замыкания квадрат иррефлексивной матрицы:

$$B = \bar{A} - C^2.$$

Эти теоремы и следствия дают практический метод для отыскания базиса ребер.

П р и м е р 3. Графу G, изображенному на рис. 6, соответствует матрица

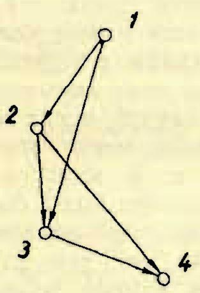

Рис. 6.

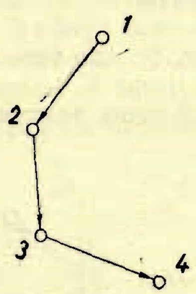

Рис. 7.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Чтобы найти матрицу базиса, будем действовать следующим образом.

1. Возведём матрицу A в такую степень t, чтобы $A^t = A^{t-1}$. Тогда по С2 $\bar{A} = A^t$.

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^3 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

поэтому

$$\bar{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

2. Построим иррефлексивную матрицу C и возведём ее в квадрат.

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad C^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

3. Из матрицы A^2 вычитаем квадрат иррефлексивной матрицы и в результате, согласно $C3$, получим матрицу B базиса графа G.

$$B = \bar{A} - C^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

По матрице B легко построить базис ребер (рис. 7).

§ 6
ИДЕАЛЬНЫЕ ТОЧКИ

Расширением графа G точкой s назовем граф G^s, если:

1) множество точек π' графа G^s получается из множества точек π графа G добавлением точки s;

2) граф G является подграфом графа G^s;

3) в графе G^s между точками множества π существуют только такие пути, какие существуют в графе G.

Точку s назовем *идеальной точкой* графа G (рис. 8), если можно указать такой расширенный граф G^s (рис. 9), что базис ребер графа G^s (рис. 10) имеет меньше ребер, чем базис графа G.

Данное определение идеальной точки включает и тот случай, когда точка s принадлежит множеству π. В этом случае правильнее было бы говорить об идеальных ребрах, но для сохранения единой терминологии, мы этого делать не будем.

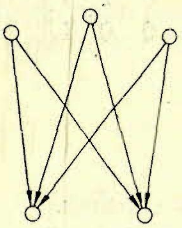

Рис. 8.

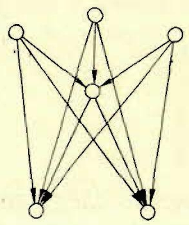

Рис. 9.

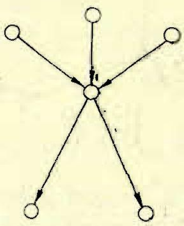

Рис. 10.

Имея ввиду Т4, и при помощи транзитивных замыканий графов G и G^s, легко доказать следующую теорему.

Теорема 12. Если граф G не содержит циклов, то идеальной не может быть никакая точка s, принадлежащая множеству точек π данного графа G.

С помощью аналогичного определения можно ввести *расширение графа несколькими точками* $s_1, \ldots, s_k$. Расширенный граф в этом случае обозначим через $G^{s_1, \ldots, s_k}$. Точки $s_1, \ldots, s_k$ назовем *идеальными точками*, если можно указать такой расширенный граф $G^{s_1, \ldots, s_k}$, что базис ребер графа $G^{s_1, \ldots, s_k}$ имеет меньше ребер, чем базис графа G. Если идеальных точек больше одной, то они опять могут принадлежать множеству π (рис. 11 — граф, рис. 12 — расширение, рис. 13 — базис расширения) или не принадлежать (рис. 14, 15, 16). Но и в случае нескольких идеальных точек можно доказать, что идеальные точки графа, не содержащего циклов, не могут принадлежать множеству точек этого графа.

Из определения цикла следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 13. Количество ребер базиса цикла неменьше количества точек цикла.

Теорема 14. Каждый цикл, у которого количество ребер базиса больше количества точек, можно так расширить идеальными точками, принадлежащими данному циклу, что количество ребер базиса расширенного графа становится равной количеству точек этого цикла.

Доказательство. Рассмотрим последовательность всех точек данного цикла $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots, p_n$. Допустим, что в этом цикле существуют ребра $p_1 p_2, \ldots, p_{r-1} p_r$, но не существуют ребер $p_r p_{r+1}, \ldots, p_{n-1} p_n, p_n p_1$ (рис. 11). Расширим цикл точками $p_r, \ldots, p_n$ так, чтобы образовались ребра $p_r p_{r+1}, \ldots, p_{n-1} p_n, p_n p_1$ (так расширить всегда возможно). Ребра $p_1 p_2, \ldots, p_{n-1} p_n, p_n p_1$ будут составлять базис ребер, при чем количества ребер базиса и точек цикла совпадут.

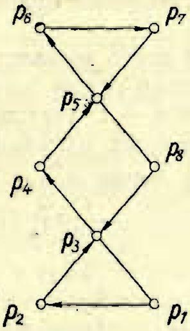

Рис. 11.

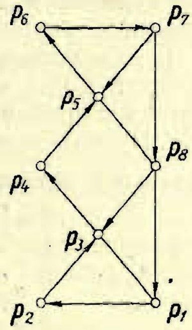

Рис. 12.

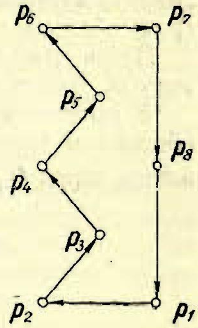

Рис. 13.

Для дальнейшего исследования проблемы идеальных точек целесообразно доказать следующие теоремы.

Теорема 15. *Любая идеальная точка приведенного графа G_r является также идеальной точкой данного графа G.*

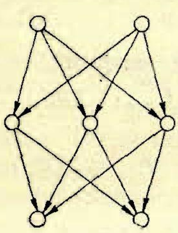

Рис. 14.

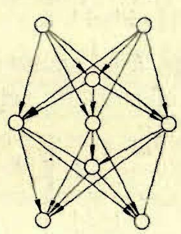

Рис. 15.

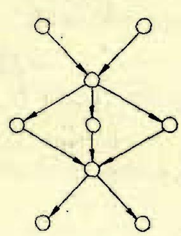

Рис. 15.

Доказательство. Допустим, что s — идеальная точка графа G_r. В таком случае количество ребер базиса N_r^s графа G_r^s меньше количества ребер базиса N_r графа G_r, т. е. $N_r^s < N_r$. Расширение G^s графа G тогда можно строить следующим образом: если в графе G_r^s существует ребро ps или sp, то присоединим соответственно к графу G^s ребро ps или sp. Если выполняются условия единственности базиса ребер, то легко убедиться, что любому ребру данного графа, не принадлежащему циклу, соответствует точно одно ребро в приведенном графе. Если буквой M обозначим количество ребер базиса множества $\overline{B}$ (обозначения см. § 4), то по T8 и только что установленному взаимооднозначному соответствию следует, что мощности базисов графов G и G^s равны соответственно $N_r + M$ и $N_r^s + M$. Так как $N_r^s < N_r$, то $N_r^s + M < N_r + M$. Итак, точка s является идеальной точкой графа G, что и требовалось доказать.

Теорема 16. *Любая идеальная точка данного графа G, если она не точка цикла, является также идеальной точкой приведенного графа G_r.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предыдущей теоремы.

§ 7
ПРОБЛЕМА ГЕРЦА

Некоторые графи обладают идеальными точками (рис. 8, 11, 14), а некоторые — нет (рис. 3, 6). Немецкий математик Герц в статье [2] выдвинул задачу: найти необходимый и достаточный признак для того, чтобы данный граф обладал идеальной точкой.

Пусть граф G транизитивный и пусть множество его точек π имеет n элементов. Для соответствующих матриц графа сохраним обозначения § 5.

К множеству точек π прибавим $n+1$ -ую точку и полученное множество обозначим через π'. Произвольный граф, имеющий множество точек π' обозначим через G_{n+1}, а его матрицу через A'_{n+1}, где

$$A'_{n+1} = \begin{Vmatrix} \alpha'_{11} & \ldots & \alpha'_{1n} & \alpha'_{1n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha'_{n1} & \ldots & \alpha'_{nn} & \alpha'_{nn+1} \\ \alpha'_{n+11} & \ldots & \alpha'_{n+1n} & \alpha'_{n+1n+1} \end{Vmatrix}.$$

Матрицу транзитивного замыкания графа G_{n+1} обозначим через $\bar{A}'_{n+1}$, где

$$\bar{A}'_{n+1} = \begin{Vmatrix} \bar{\alpha}'_{11} & \ldots & \bar{\alpha}'_{1n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{\alpha}'_{n+11} & \ldots & \bar{\alpha}'_{n+1n+1} \end{Vmatrix}.$$

Через

$$C'_{n+1} = \begin{Vmatrix} \gamma'_{11} & \ldots & \gamma'_{1n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma'_{n+11} & \ldots & \gamma'_{n+1n+1} \end{Vmatrix}$$

обозначим матрицу $C'_{n+1} = \bar{A}'_{n+1} - E$, где E — единичная матрица.

Иррефлексивную матрицу графа G_{n+1} обозначим через C''_{n+1}, где

$$C''_{n+1} = \begin{Vmatrix} \gamma''_{11} & \ldots & \gamma''_{1n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma''_{n+11} & \ldots & \gamma''_{n+1n+1} \end{Vmatrix}.$$

Лемма. Пусть граф G — транзитивный и для графа G_{n+1} имеют место равенства:
$\alpha'_{\xi_1 n+1} = 1, \ldots, \alpha'_{\xi_r n+1} = 1$ и $\alpha'_{n+1\eta_1} = 1, \ldots, \alpha'_{n+1\eta_s} = 1$, но $\alpha'_{i\,n+0} = 0$, если $i \neq \xi_1, \ldots, \xi_r$ и $\alpha'_{n+1j} = 0$, если $j \neq \eta_1, \ldots, \eta_s$.
Тогда из

1) $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij}$; $i, j = 1, \ldots, n$;

2) $\alpha_{ij} = 1$, если $i = \xi_1, \ldots, \xi_r$ и $j = \eta_1, \ldots, \eta_s$

следуют:

1) граф G_{n+1} является расширением графа G;

2) $\alpha_{ij} = {}^2\alpha'_{ij}$; $i, j = 1, \ldots, n$;

3) $C''^2_{n+1} = C'^2_{n+1}$.

Теорема 17. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы транзитивный граф G, не содержащий циклов, обладал идеальной точкой, является следующее: в множестве точек этого графа можно указать такие точки $\xi_1, \ldots, \xi_r$ и $\eta_1 \ldots, \eta_s$, чтобы выполнялись условия:

1) из каждой точки множества $\xi_1, \ldots, \xi_r$ в каждую точку множества $\eta_1, \ldots, \eta_s$ проходит путь;

2) $Z > r + s$,

где Z — количество ребер базиса, соединяющих точки множества $\xi_1, \ldots, \xi_r$ с точками множества $\eta_1, \ldots, \eta_s$.

Доказательство. Допустим, что в множестве точек графа G можно указать точки $\xi_1, \ldots, \xi_r$ и $\eta_1, \ldots, \eta_s$ со свойствами, упомянутыми в теореме. *Построим граф* G_{n+1} *следующим образом.* К множеству точек π графа G добавим точку $n + 1$. Для первых n точек сохраним в точности такие же ребра, какие существуют в G. Добавим, далее, все ребра $i(n+1)$ и $(n+1)j$, для которых i—одна из точек $\xi_1, \ldots, \xi_r$, а j—одна из точек $\eta_1, \ldots, \eta_s$. Теперь легко убедиться, что для элементов соответствующих матриц выполняются условия леммы. Поэтому граф G_{n+1} является расширением графа G с точкой $n + 1$. Убедимся, что $N_{n+1} < N$, где N и N_{n+1} — количество ребер базиса графов G и G_{n+1} соответственно. Из определения расширения следует, что если ребро ij существует в графе G, но не является ребром базиса, то оно не является ребром базиса и в расширени G_{n+1}. Тогда такими ребрами базиса в графе G_{n+1}, которые не являются одновременно ребрами базиса в графе G, могут быть только ребра, принадлежащие множеству $\xi_1(n+1), \ldots, \xi_r(n+1)$, $(n+1)\eta_1, \ldots, (n+1)\eta_s$. Количество базисных ребер графа G_{n+1}, принадлежащих этому множеству, обозначим через m. Тогда, очевидно, $m \leqslant r + s$. Далее рассмотрим число l ребер, которые являются ребрами базиса в графе G, но не являются ребрами базиса в графе G_{n+1}. Из леммы следует, что ${}^2\gamma'_{ij} = {}^2\gamma''_{ij}$. Но ${}^2\gamma'_{ij} = {}^2\gamma_{ij} + \alpha'_{in+1}\alpha'_{n+1j}$ и $\alpha'_{in+1} = 1$, если $i = \xi_1, \ldots, \xi_r$, $\alpha'_{n+1j} = 1$, если $j = \eta_1, \ldots, \eta_s$. *Поэтому* ${}^2\gamma''_{ij} = {}^2\gamma'_{ij} = 1$, если $i = \xi_1, \ldots, \xi_r$ и $j = \eta_1, \ldots, \eta_s$. Но это в свою очередь по T10 означает, что в графе G_{n+1} среди ребер ij не будет ни одного ребра базиса, если $i = \xi_1, \ldots, \xi_r$ и $j = \eta_1, \ldots, \eta_s$. Итак $l \geqslant Z$. В графе G_{n+1} число ребер базиса $N_{n+1} = N + (m - l)$. Так как $l \geqslant Z > r + s \geqslant m$, то $m - l < 0$. Поэтому $N_{n+1} < N$, *что следовало доказать. Итак условия теоремы достаточны.*

Чтобы доказать необходимость, допустим, что существует идеальная точка. Тогда можно указать такое расширение G^{n+1} графа G с точкой $n + 1$, что $N_{n+1} < N$, где N и N_{n+1} — количество ребер базиса графов G и G^{n+1} соотве.ственно. Обозначим через $\xi_1, \ldots, \xi_r$ точки, из которых ребро базиса идут в точку $n + 1$, и через $\eta_1, \ldots, \eta_s$ — в которые идут ребра базиса из точки $n + 1$. Не ограничивая общности допустим, что другие ребра типа $i(n+1)$ и $(n+1)j$ не существуют. Легко убедиться, что для элементов соответствующих матриц графов G и G^{n+1} выполняются условия леммы. В таком случае $\alpha_{ij} = {}^2\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha'_{in+1}\alpha'_{n+1j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Если $i = \xi_1, \ldots, \xi_r$ и $j = \eta_1, \ldots, \eta_s$, то $\alpha'_{in+1} = 1$ и $\alpha'_{n+1j} = 1$, что влечет за собой $\alpha_{ij} = 1$. Отсюда следует выполнение условия 1 *данной теоремы.* Так как граф G^{n+1} является расширением графа G, то только ребра $i(n+1)$ и $(n+1)j$, где $i = \xi_1, \ldots, \xi_r$ и $j = \eta_1, \ldots, \eta_s$ (их количество $r + s$) являются ребрами базиса графа G^{n+1}, в то же время не являясь ребрами базиса графа G. Та‹ как ${}^2\gamma''_{ij} = {}^2\gamma'_{ij} = \gamma_{ij} + \alpha'_{in+1}\alpha'_{n+1j}$ и $\alpha'_{in+1} = 1$, $\alpha'_{n+1j} = 1$, то ${}^2\gamma''_{ij} = \gamma_{ij} + 1 = 1$ $(i = \xi_1, \ldots, \xi_r, j = \eta_1, \ldots, \eta_s)$. Отсутствие не ба‹исных ребер тип‹ $i(n+1)$ и $(n+1)j$ означает, что для $i \neq \xi_1, \ldots, \xi_r$ или $j \neq \eta_1, \ldots, \eta_s$ имеет место ${}^2\gamma''_{ij} = \gamma_{ij} + 0 = \gamma_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$. Отсюда по T10 следует, что ребра базиса гра‹а G, которые соединяют точки множества $\xi_1, \ldots, \xi_r$ с точками м‹ожества $\eta_1, \ldots, \eta_s$, и только эти ребра базиса графа G, не являются ребрами базиса графа G^{n+1}. Число этих ребер базиса обозначим через Z. Для выполнения условия $N_{n+1} < N$ необходимо, чтобы число Z было больше $r + s$, что влечет за ‹обой выполнение условия 2 данной теоремы. Итак условия теоремы являются и необходимыми.

С л е д с т в и е 4. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы у приведенного графа G_r существовала идеальная точка, является следующее условие: в множестве точек этого графа можно указать такие точки $\xi_1, \ldots, \xi_r$ и $\eta_1, \ldots, \eta_s$, для которых выполняются условия 1 и 2 из Т17.

Т е о р е м а 18. Цикл обладает идеальной точкой тогда и только тогда, когда количество ребер его базиса больше количества точек.

Теорема является прямым следствием Т13 и Т14.

Из теорем Т6, Т15, С4 и Т18 вытекает следующее решение проблемы Герца.

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы у данного графа существовала идеальная точка, является существование идеальной точки у некоторого максимального цикла или у приведенного графа.

Условия же существования идеальной точки у максимального цикла даются теоремой 18, а условия существования идеальной точки у приведенного графа — следствием 4.

20 I 1959

20 I 1959 *Кафедра математического анализа*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Denes König*. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936.

[2]. *Paul Hertz*. Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. Mathematische Annalen. 1922. 87, 246—269.

ORIENTĒTU GRAFU BĀZES PROBLĒMAS

J. Bārzdiņš

(Kopsavilkums)

Darbā iztirzāta orientētu grafu bāzes problēma, formulēti un pierādīti punktu un šķautņu bāzes unitātes nosacījumi. 5. § tiek pierādītas vairākas svarīgas orientēta grafa matricas īpašības, kā arī tiek dota praktiska metode grafa šķautņu bāzes atrašanai. 7 §. tiek sniegts Herca problēmas atrisinājums [1].

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Я. Л. ЭНГЕЛЬСОН

В работе М. М. Вайнберга [1] дано изложение вариационной теории нелинейных операторных уравнений типа Гаммерштейна в пространствах L^p. При этом существенно используются некоторые свойства квадратного корня из линейного оператора A, действующего из пространства L^q в пространство L^p ($p > 2$; $p^{-1} + q^{-1} = 1$) и различные факты теории потенциальных операторов (см. также [2] и [3]).

В настоящей работе вариационным методом устанавливаются предложения о существовании решений уравнения $u = \Gamma u$ и собственных векторов нелинейного оператора Γ, действующего в локально выпуклом пространстве определенного вида. При этом используются свойства потенциальных операторов, установленные в работе автора [4], и предложения о квадратном корне из линейного оператора, полученные в работе автора [5] и в совместной с М. М. Вайнбергом работе [6] для локально выпуклых пространств.

Общие предложения, устанавливаемые в настоящей работе, применяются к изучению конкретного нелинейного уравнения.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В дальнейшем мы используем следующие предложения.

Лемма 1. *Пусть оператор* $\mathrm{F}(x) = \mathrm{grad}\, f(x)$ действует *из произвольного локально выпуклого пространства E в пространство E', сильно сопряженное к E. Тогда из непрерывности оператора* F *в точке x_0 следует, что функционал f непрерывен в точке x_0 относительно каждого выпуклого ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset E$, содержащего точку x_0.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — множество, указанное в формулировке леммы. По формуле Лагранжа [1, 4] имеем:

$$f(x) - f(x_0) = \langle \mathrm{F}(x_0 + \tau(x - x_0)), x - x_0 \rangle =$$
$$= \langle \mathrm{F}(x_0 + \tau(x - x_0)) - \mathrm{F}(x_0), x - x_0 \rangle + \langle \mathrm{F}(x_0), x - x_0 \rangle,$$
$$(0 < \tau < 1),$$

где $\langle h, g \rangle$ — значение линейного функционала $h \in E'$ в точке $x \in E$:

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим окрестность нуля $\frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{M} - \mathfrak{M})^0 \subset E'$, где $(\mathfrak{M} - \mathfrak{M})^0$ — поляра ограниченного множества $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}$. В силу непрерывности оператора F в точке x_0, найдется окрестность нуля $U_1 \subset E$ такая, что для $x - x_0 \in U_1$ имеет место включение $\mathrm{F}(x_0 + \tau(x - x_0)) -$

$-F(x_0) \in \frac{\varepsilon}{2} (\mathfrak{M} - \mathfrak{M})^\circ$. Следовательно для всех $x \in (x_0 + U_1) \cap \mathfrak{M}$ имеет место неравенство

$$| \langle \mathrm{F}(x_0 + \tau(x - x_0)) - \mathrm{F}(x_0), x - x_0 \rangle | \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, в силу непрерывности линейного функционала $\langle \mathrm{F}(x_0), x - x_0 \rangle$ относительно $x - x_0$, найдется окрестность нуля $U_2 \subset E$ такая, что для $x - x_0 \in U_2$ имеет место неравенство

$$| \langle F(x_0), x - x_0 \rangle | < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этого и предыдущего неравенства следует, что для $x \in (x_0 + U) \cap \mathfrak{M}$, где $U = U_1 \cap U_2$, имеет место неравенство

$$| f(x) - f(x_0) | \leqslant | \langle \mathrm{F}(x_0 + \tau(x - x_0)) - \mathrm{F}(x_0), x - x_0 \rangle | + | \langle \mathrm{F}(x_0), x - x_0 \rangle | < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\mathrm{F} = \operatorname{grad} f$ *непрерывен из* E *в* E', *то функционал* f *непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из* E.

Определение 1. Оператор Φ называется *квази ограниченным* из локально выпуклого пространства E_1 в локально выпуклое пространство E_2, если он отображает всякое ограниченное множество из E_1 в ограниченное множество из E_2.

Определение 2. Локально выпуклое пространство E называется *квази бочечным*, если всякая бочка [7] из E, поглощающая все ограниченные множества, является окрестностью нуля в E.

Из определения 2 следует, что квази бочечность пространства E есть необходимое и достаточное условие того, чтобы топология пространства E совпадала с топологией, индуцируемой в E пространством E'', где E'' есть сильно сопряженное пространство к E'. Это значит, что поляры в E ограниченных множеств из E' являются окрестностями нуля в E.

Лемма 2. *Если* E *— квази бочечное пространство и* $\mathrm{F} = \operatorname{grad} f$ *есть квази ограниченный оператор из* E *в* E', *то* f *равномерно непрерывен относительно каждого выпуклого ограниченного множества из* E.

Доказательство. Пусть x', x'' — произвольные элементы из ограниченного выпуклого множества $\mathfrak{M} \subset E$. По формуле Лагранжа имеем

$$f(x'') - f(x') = \langle F(x' + \tau(x'' - x')), x'' - x' \rangle, \quad \text{где } 0 < \tau < 1$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. В силу квази ограниченности оператора F множество $\mathrm{F}(\mathfrak{M})$ ограничено в E', а потому из квази бочечности пространства E следует, что множество $U = (\mathrm{F}(\mathfrak{M}))^0 \cap E$ есть окрестность нуля в E. Тогда для любых $x', x'' \in \mathfrak{M}$ таких, что $x'' - x' \in \varepsilon U$ имеет место неравенство

$$| f(x'') - f(x') | = | \langle F(x' + \tau(x'' - x')), x'' - x' \rangle | < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что выполнено следующее

Условие (χ): *Существует гильбертово пространство* H *такое, что* $E \subset H$, *причем топологии пространств* E *и* H *согласованы, т. е. топология пространства* E *мажорирует топологию, индуцированную в* E *из* H, E *плотно в* H *и* H *плотно в пространстве* E', *наделенном сильной топологией* $\beta(E', E)$ [7].

Замечание 1. Вложение $E \subset H$ понимается в том смысле, что существует линейное взаимно однозначное отображение L пространства E

на некоторое линейное подпространство $E_1 \subset H$, причем пространства E и E_1, а также их соответствующие элементы $x \in E$ и $\mathrm{L}(x) \subset E_1$ отождествляются. Топология пространства H индуцирует топологию в E, являющуюся прообразом относительно L топологии, индуцированной в E_1 из H. Так как E и E_1 отождествляются, то в дальнейших рассуждениях мы будем считать E подпространством пространства H (имея, однако, в виду вышеуказанный точный смысл включения $E \subset H$). В подобном смысле мы понимаем и другие вложения, встречающиеся в дальнейшем, а также согласованность топологий.

Рассмотрим некоторые свойства пространств E, удовлетворяющих условию (X).

Лемма 3. *Пусть пространство E удовлетворяет условию* (X). *Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) $H \subset E'$ и $E'' \subset H$.

2) *Топологии пространств H и E' согласованы.*

Доказательство. Пусть y — фиксированный элемент из H. Тогда скалярное произведение (x, y), где $x \in H$, есть линейный непрерывный функционал на H. Поэтому он будет линейным и на подпространстве $E \subset H$ (точнее, из линейности функционала (x, y) на E_1 и оператора L на E следует линейность функционала $(\mathrm{L}(x), y)$ на E). Кроме того, функционал (x, y) непрерывен в первоначальной топологии E, ибо он непрерывен на E в топологии, индуцированной из H, которая, в силу условия (X) мажорируется первоначальной топологией пространства E (точнее, функционал (x, y) непрерывен относительно $x \in E$ в топологии, индуцированной в E_1 из H, а поэтому и относительно $x \in E$ в топологии, являющейся прообразом этой топологии относительно L). Таким образом, (x, y) является линейным непрерывным функционалом на E и, следовательно, может быть записан в виде $\langle x, z\rangle$, где $z \in E'$. Отсюда следует, что если каждый элемент $y \in H$ отождествить с соответствующим ему (согласно равенству $\langle x, z\rangle = (x, y)$, $x \in E$) элементом $z \in E'$, то это отождествление является линейным отображением пространства H на линейное подпространство пространства E'. Обратное соответствие также однозначно, ибо, если $z = \Theta \in E'$, то $(x, y) = \langle x, z\rangle = 0$ для всех x из плотного в H множества E, откуда следует, что $y = \Theta \in H$. Значит $H \subset E'$.

Покажем, что нормированная топология пространства H и сильная топология пространства E' согласованы. Пусть V — окрестность нуля в E'. Тогда V содержит поляру $\mathfrak{M}^\circ$ некоторого ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset E$.

В силу согласованности топологий E и H, пересечение единичного шара $S \subset H$ с пространством E содержит некоторую окрестность нуля $U \subset E$. Согласно определению ограниченного множества, существует $\alpha > 0$ такое, что $\lambda \mathfrak{M} \subset U \subset S \cap E$, $|\lambda| \leqslant \alpha$. Отсюда, в силу свойства поляр, получаем $\lambda\,(S \cap E)^\circ \subset \mathfrak{M}^\circ$. Заметим теперь, что поляра S° в пространстве H единичного шара $S \subset H$ есть сам шар S. Поэтому из $S \cap E \subset S \subset H$ следует $S = S^0 \subset (S \cap E)^0 \subset H$ и $\lambda S \subset \lambda\,(S \cap E)^0 \cap H \subset \mathfrak{M}^0 \cap H$ т. е. пересечение $\mathfrak{M}^0 \cap H$, а значит и $V \cap H$, содержит окрестность нуля $\alpha S \subset H$.

Для доказательства вложения $E'' \subset H$ рассмотрим произвольно выбранный элемент $x \in E''$. Тогда выражение $\langle y, x\rangle$, где $y \in E'$, есть линейный функционал на E', а значит и на его линейном подпространстве H. Так как, по только что доказанному, топология пространства H мажорирует топологию, индуцированную в H из E', то функционал $\langle y, x\rangle$, непрерывный на E', непрерывен также на H. Таким образом, $\langle y, x\rangle$ является линейным непрерывным функционалом на H и может быть записан в виде (y, z'), где $z' \in H$. Отсюда следует, что если каждый элемент $x \in E''$ отождествить с соответствующим ему (согласно равенству $\langle y, x\rangle = (y, z')$, $y \in H$) элементом $z' \in H$, то это отождествление является линейным отображением пространства E'' на линейное подпространство пространства H. Однозначность обратного соответствия между x и z' следует из того, что если $z' = \Theta \in H$, то $\langle y, x\rangle = (y, z') = 0$ для всех $y \in H$, т. е. функционал $\langle y, x\rangle$, непрерывный на E', равен нулю на множестве H, плотном в E', а значит $\langle y, x\rangle = 0$ для всех $y \in E'$, откуда $x = \Theta \in E''$. Следовательно $E'' \subset H$. Лемма доказана.

Замечание 2. Указанное при доказательстве леммы 3 вложение $H \subset E'$ (соответственно $E'' \subset H$) означает, что

$$\langle y, x\rangle = (y, x),$$

если $x \in E$ (соответственно $x \in E''$), а $y \in E' \cap H$.

Очевидными примерами банаховых пространств, удовлетворяющих условию (χ) являются пространства $L^p\,[a, b]$, где $p > 2$. Для этих пространств $H = L^2\,[a, b]$.

Покажем, что пространство D всех финитных бесконечно дифференцируемых функций, заданных в n — мерном эвклидовом пространстве R^n удовлетворяет условию (χ), если в качестве H выбрать пространство $L^2\,(R^n)$.

Действительно, каждая бесконечно дифференцируемая финитная функция $\varphi(x) \in D$ является квадратично суммируемой, а всякая функция $\psi(x) \in L^2\,(R^n)$ определяет линейный функционал $\int\limits_{R^n} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx$ относительно $\varphi \in D$, т. е. может быть отождествлена с некоторой обобщенно функцией $T \in D'$. Далее, D плотно в D' [8], а поэтому и $L^2\,(R^n)$ плотно в D'. Кроме того, если $\psi \in L^2\,(R^n)$ и $\int\limits_{R^n} \psi(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$ для всех $\varphi \in D$ то, $\psi(x) = 0$ почти всюду [11], откуда следует, что D плотно в H. Докажем, наконец, согласованность топологий пространств D и H.

Рассмотрим произвольный шар $S = \{\psi \in L^2\,(R^n), \|\psi\| \leqslant \varepsilon\}$. Покажем, что его пересечение с D, т. е. множество элементов $\varphi \in D$, для которых, $\int\limits_{R^n} \varphi^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon$, содержит некоторую окрестность нуля $U \subset D$. Такой окрестностью является множество $U = U\left(\{\nu\}, \left\{\dfrac{\varepsilon}{2^{\frac{\nu+1}{2}}\sqrt{\operatorname{mes} R_{\nu,\nu+1}}}\right\}\right)$, ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$)

т. е. множество всех $\varphi \in D$ таких, что $|D^p\,\varphi(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^{\frac{\nu+1}{2}}\sqrt{\operatorname{mes} R_{\nu,\nu+1}}}$ для всех $p \leqslant \nu$, $\|x\| \geqslant \nu$, где $R_{\nu,\nu+1}$ есть часть пространства R^n заключенная между сферами радиусов ν и $\nu + 1$. Действительно, для всех $\varphi \in U$ имеет место неравенство

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{\frac{\nu+1}{2}}\sqrt{\operatorname{mes} R_{\nu,\nu+1}}}, \qquad \|x\| \geqslant \nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots .$$

Так как для любой функции $\varphi \in D$ будет $\int\limits_{R^n} \varphi^2(x)\,dx < \infty$, то для всех $\varphi \in U$ имеем:

$$\int_{R^n} \varphi^2(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{R_{\nu,\nu+1}} \varphi^2(x)\,dx \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_{R_{\nu,\nu+1}} \frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+1}\operatorname{mes} R_{\nu,\nu+1}}\,dx =$$

$$= \varepsilon^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1}} = \varepsilon^2,$$

т. е. $U \subset S \cap D$. Значит топология пространства D мажорирует топологию, индуцированную в D топологией пространства $L^2(R^n)$.

Ясно, что условие (χ) выполняется также, если $E = D_\omega$ и $H = L^2(\omega)$, где D_ω — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций с носителями, содержащимися в некотором компакте ω.

2. О ФУНКЦИОНАЛАХ, ЗАДАННЫХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть локально выпуклое пространство E удовлетворяет условию (χ) и линейный оператор A действует из пространства E' в пространство E. Обозначим A^H — сужение оператора H на пространство H, A_+^H и A_-^H — положительную и отрицательную части оператора A^H, $(\mathrm{A}^H)^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{A}_+^H)^{\frac{1}{2}} - |\mathrm{A}_-^H|^{\frac{1}{2}}$ главный корень квадратный из A^H и, наконец, $|\mathrm{A}^H|^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{A}_+^H)^{\frac{1}{2}} + |\mathrm{A}_-^H|^{\frac{1}{2}}$ — положительный квадратный корень из абсолютного значения оператора A^H.

Тогда из результатов [5] и [6] следует, что имеют место следующие предложения:

1°. *Если E — полуполное бочечное* [7] *пространство и оператор* A *вполне непрерывен из E' в E, причем A^H есть самосопряженный квазиположительный оператор в H, то оператор A представим в виде произведений*

$$\mathrm{A} = (\mathrm{A}^H)^{\frac{1}{2}} |\mathrm{A}|^{\frac{1}{2}} = (\mathrm{A}^H)^{\frac{1}{2}} (|\mathrm{A}^H|^{\frac{1}{2}})' = |\mathrm{A}^H|^{\frac{1}{2}} \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} = |\mathrm{A}^H|^{\frac{1}{2}} ((\mathrm{A}^H)^{\frac{1}{2}})' \tag{1}$$

где операторы $(\mathrm{A}^H)^{\frac{1}{2}}$ и $|\mathrm{A}^H|^{\frac{1}{2}}$ вполне непрерывны из H в E, а сопряженные к ним операторы $((\mathrm{A}^H)^{\frac{1}{2}})' = \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$ и $(|\mathrm{A}^H|^{\frac{1}{2}})' = |\mathrm{A}|^{\frac{1}{2}}$, являющиеся, соответственно, их продолжениями, действуют квази вполне непрерывна из E' в H.

Здесь, согласно общепринятой терминологии, линейный оператор называется в п о л н е н е п р е р ы в н ы м, если он отображает некоторую окрестность нуля в относительно бикомпактное множество и к в а з и в п о л н е н е п р е р ы в н ы м, если он непрерывен и отображает всякое ограниченное множество в относительно бикомпактное множество.

2°. *Если оператор* A *непрерывен из E' в E и A^H есть самосопряженный оператор в H, причем операторы A_+^H и A_-^H имеют продолжения, ограниченные из E' в E, то оператор $(\mathrm{A}^H)^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E'' и имеет продолжение $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$, непрерывное из E' в H, причем имеет место равенство*

$$\langle (\mathrm{A}^H)^{\frac{1}{2}} x, y \rangle = (x, \mathrm{A}^{\frac{1}{2}} y), \text{ где } x \in H,\ y \in E'. \tag{2}$$

Если, кроме того, пространство E квази бочечно, то оператор $\mathbf{A}$ *представим в виде произведений*

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}^H|_c^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{A}^H)_c^{\frac{1}{2}} |\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

где $|\mathbf{A}^H|_c^{\frac{1}{2}}$ *и* $(\mathbf{A}^H)_c^{\frac{1}{2}}$ *— сужения, соответственно, операторов* $|\mathbf{A}^H|^{\frac{1}{2}}$ *и* $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}$ *на множества* $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}(E')$ *и* $|\mathbf{A}|^{\frac{1}{2}}(E')$, *являющиеся ограниченными операторами из этих множеств в* E.

Здесь мы линейный оператор называем ограниченным, если он отображает некоторую окрестность нуля в ограниченное множество.

Очевидно, ограниченный оператор непрерывен.

Используя эти предложения, установим следующие леммы:

Лемма 4. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *Бочечное полуполное пространство удовлетворяет условию* (χ).

2) $\mathbf{A}$ *— линейный вполне непрерывный оператор из* E' *в* E, *сужение которого* $\mathbf{A}^H$ *есть самосопряженный квази положительный оператор в* H.

3) f *— функционал, определенный на* E *и непрерывный по отношению к каждому ограниченному множеству из* E.

Тогда функционал $f((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x)$, *где* $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}$ *— главный корень квадратный из оператора* $\mathbf{A}^H$, *слабо непрерывен по отношению к каждому шару пространства* H.

Доказательство. Пусть S_R — шар из H. В силу 1° оператор $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}$ отображает его в относительно бикомпактное, а значит и ограниченное множество $\mathfrak{M} \subset E$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и точка $x_0 \in S_R$. Тогда $y_0 = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0 \in \mathfrak{M}$. В силу условия 3) данной леммы, существует окрестность нуля $U \subset E$ такая что для всех $y \in (y_0 + U) \cap \mathfrak{M}$ будет $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Далее, в силу теоремы 1 из [5] (см. доказательство) существует окрестность нуля V пространства H, наделенного слабой топологией, такая, что из $x \in (x_0 + V) \cap S_R$ следует $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x \in ((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0 + U) \cap \mathfrak{M}$, а поэтому $|f((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x - f((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0)| < \varepsilon$. Лемма доказана.

Замечание 3. В силу следствия 1 и леммы 2, условие 3) леммы 4 выполняется, в частности, если функционал f является потенциалом непрерывного или квази ограниченного потенциального оператора из E в E'.

Лемма 5. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *Пространство* E *удовлетворяет условию* (χ).

2) $\mathbf{A}$ *— линейный непрерывный оператор из* E' *в* E, *сужение которого* $\mathbf{A}^H$ *есть самосопряженный оператор в* H, *причем операторы* $\mathbf{A}_+^H$ *и* $|A_-^H|$ *имеют продолжения, ограниченные из* E' *в* E.

3) *Функционал* f, *определенный на* E'', *слабо непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из* E''.

Тогда функционал $f((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x)$, *где* $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}$ *— главный квадратный корень из* $\mathbf{A}^H$, *слабо непрерывен по отношению к каждому шару пространства* H.

Доказательство. Пусть S_R — шар из H. В силу 2° оператор $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}$ отображает его в ограниченное множество $\mathfrak{M} \subset E''$.

Пусть даны $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in S_R$. Тогда $y_0 = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0 \in \mathfrak{M}$. В силу условия 3) данной леммы существует окрестность нуля U пространства E'', наделенного слабой топологией $\sigma(E'', E')$ такая, что для всех $y \in (y_0 + U) \cap \mathfrak{M}$ имеет место неравенство $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Из ограниченности оператора $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}$ следует его непрерывность, а значит [12] и слабая непрерывность по отношению к шару S_R. Поэтому найдется окрестность нуля V пространства H, наделенного слабой топологией, такая, что из $x \in (x_0 + V) \cap S_R$ следует $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x \in ((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0 + U) \cap \mathfrak{M}$, а потому $|f((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x) - f((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0)| < \varepsilon$. Лемма доказана.

Замечание 4. В силу теоремы 5.1 из [4], условие 3) леммы 5 выполняется, в частности, если функционал f является потенциалом квази бикомпактного оператора из E'' в E' и пространство E' квази бочечно.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия 1) и 2) леммы 4 (или леммы 5). Пусть, далее, оператор* $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ *действует из* E *в* E' (*соответственно, из* E'' *в* E'). *Тогда*

$$\operatorname{grad} f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right) = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right), \ x \in H. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $x, y, \in H$. Положим $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x = u$, $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} y = h$. Тогда, в силу 1° (соответственно, 2°) $u, h \in E$, (соответственно, $u, h \in E''$).

Рассмотрим дифференциал Гато функционала $f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right)$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} (x + ty)) - f((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(u + th) - f(u)}{t} =$$

$$= \langle \mathbf{F}(u), h \rangle = \langle \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right), (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} y \rangle.$$

Воспользуемся равенством 2, которое в силу 1° и 2° имеет место при выполнении условий 1) и 2) леммы 4 и леммы 5. Тогда

$$\langle \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right), (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} y \rangle = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right), y\right),$$

откуда, согласно определению градиента, получаем равенство (4). Лемма доказана.

3. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Бочечное полуполное пространство* E *удовлетворяет условию* (χ).

2) *Линейный оператор* $\mathbf{A}$ *вполне непрерывен из* E' *в* E, *причем его сужение* $\mathbf{A}^H$ *есть самосопряженный и положительный оператор в* H.

3) *Оператор* $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ *действует из* E *в* E', *причем его потенциал* f *непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из* E *и удовлетворяет неравенству*

$$2 f(y) \leqslant a(y, y) + b(y, y)^{\frac{\alpha}{2}} + c, \qquad y \in E, \tag{5}$$

где $a < \lambda_1$ (λ_1 — *наименьшее характеристическое число оператора* $\mathbf{A}^H$ b *и* c — *произвольные вещественные числа и* $0 < \alpha < 2$.

Тогда существует по меньшей мере одно решение уравнения

$$y = \mathbf{AF}(y), \tag{6}$$

принадлежащее E.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = (x, x) - 2f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right), \qquad x \in H \tag{7}$$

В силу леммы 4 функционал $f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right)$ слабо непрерывен по отношению к каждому шару $S_R \subset H$. Кроме того, как известно ([1], стр. 101), функционал $(x, x) = \| x \|^2$ слабо полунепрерывен снизу в шаре S_R. Следовательно, функционал φ слабо полунепрерывен снизу в каждом шаре S_R пространства H.

Далее, полагая $y = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x$, где $x \in H$ $(y \in E)$, в силу (5), получаем

$$2f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right) \leqslant a\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x, (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right) + b\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x, (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right)^{\frac{\alpha}{2}} + c$$

Так как $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}$ есть самосопряженный оператор в H и $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x \in E \subset H$, то

$$\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x, (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right) = (\mathbf{A}^H x, x) \leqslant \frac{1}{\lambda_1}(x, x),$$

откуда

$$2f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right) \leqslant \frac{a}{\lambda_1}(x, x) + \frac{b}{\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}}(x, x)^{\frac{\alpha}{2}} + c,$$

а поэтому

$$\varphi(x) \geqslant \| x \|^2 - \frac{a}{\lambda_1}\| x \|^2 - \frac{b}{\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}}\| x \|^\alpha - c =$$

$$= \| x \|^\alpha \left(\left(1 - \frac{a}{\lambda_1}\right)\| x \|^{2-\alpha} - \frac{b}{\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right) - c$$

Из полученного неравенства видно, что на границе достаточно большого шара из H значения функционала φ будут больше сколь угодно большого заданного числа, т. е. функционал φ обладает m — свойством [1].

Отсюда и из слабой полунепрерывности снизу функционала φ, согласно теореме 9.3 из [1], следует существование точки $x_0 \in H$ такой, что

$$\operatorname{grad} \varphi(x_0) = \operatorname{grad}(x_0, x_0) - 2 \operatorname{grad} f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0\right) = \Theta.$$

Так как $\operatorname{grad}(x, x) = 2x$, то, в силу равенства (4), имеем

$$x_0 = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0\right).$$

Применяя к обоим частям этого равенства оператор $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}$, получим

$$(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0 = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0\right).$$

Так как $\mathbf{A}^H$ — положительный оператор, то $|\mathbf{A}^H|^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}$. Поэтому, в силу 1°, имеем $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{A}$ и, следовательно,

$$y_0 = \mathbf{A}\,\mathbf{F}(y_0),$$

где $y_0 = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}\, x_0 \in E$. Теорема доказана.

Замечание 5. Если выполнены условия теоремы 1, то уравнение

$$y = \lambda\, \mathbf{AF}(y), \qquad \lambda > 0,$$

имеет решение, если $0 \leqslant \lambda a \leqslant \lambda_1$, а если $a = 0$, то при любом $\lambda > 0$.

Замечание 6. Используя 2° и леммы 5, 6 и учитывая, что $E'' \subset H$ (лемма 3), теми же рассуждениями, как при доказательстве теоремы 1, получаем следующее предложение:

Теорема 1[1]. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *Квази бочечное пространство E удовлетворяет условию* (χ).

2) *Линейный оператор $\mathbf{A}$ ограничен из E' в E, причем его сужение $\mathbf{A}^H$ есть самосопряженный положительный оператор в H.*

3) *Оператор $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ действует из E'' в E', причем его потенциал f слабо непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из E'' и удовлетворяет неравенству*

$$2\, f(y) \leqslant a\,(y, y) + b\,(y, y)^{\frac{\alpha}{2}} + c, \qquad y \in E'' \tag{5^1}$$

где $a\,\|\mathbf{A}^H\| < 1$, a b, c и α имеют тот же смысл, что в теореме 1.

Тогда существует по меньшей мере одно решение уравнения $y = \mathbf{AF}(y)$, принадлежащее E.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы 1. Пусть, далее, потенциальный оператор $\mathbf{F}\,(E \to E')$ имеет линейный дифференциал Гато $D\,\mathbf{F}(y, s)$, удовлетворяющий неравенству*:

$$\langle D\,\mathbf{F}(y, s), s\rangle \leqslant a\,(s, s), \qquad y, s \in E \tag{8}$$

где a имеет тот же смысл, что в теореме 1.

Тогда уравнение

$$y = \mathbf{AF}(y)$$

имеет единственное решение, принадлежащее E.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$. Рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = (x, x) - 2\, f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}\, x\right), \qquad x \in H. \tag{7}$$

Для произвольного $h \in H$ имеем $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}\, h \in E$, Поэтому

$$D\,\varphi(x, h) = 2\,(x, h) - 2\,\langle \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}\, x\right),\ (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}\, h\rangle\,.$$

Далее, для произвольного $k \in H$ имеем $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} k \in E$, так что

$$D^2\,\varphi(x, h, k) = 2\,(k, h) - 2\,\langle D\,\mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}\, x,\ (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}},\ k\right),\ (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}\, h\rangle\,,$$

где

$$(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}}\, k,\ (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} h \in E\,.$$

Отсюда и из неравенства (8), где достаточно рассматривать лишь неотрицательные a, при $k = h$ получаем

$$D^2\varphi(x, h, h) \geqslant 2(h, h) - 2a\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} h, (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} h\right) =$$

$$= 2(h, h) - 2a(\mathbf{A}^H h, h) \geqslant 2\|h\|^2 - \frac{2a}{\lambda_1}\|h\|^2 = \|h\| \cdot 2\left(1 - \frac{a}{\lambda_1}\right)\|h\|.$$

Таким образом, функционал φ удовлетворяет условиям теоремы 9.4 из [1]. Следовательно, существует единственное $x_0 \in H$ такое, что

$$\operatorname{grad}\varphi(x_0) = \Theta.$$

Отсюда так же, как при доказательстве теоремы 1 получаем, что вектор $y_0 = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0 \subset E$ удовлетворяет данному уравнению. Теорема доказана.

Отметим, что в отношении доказанной теоремы справедливо замечание, аналогичное замечанию 5.

З а м е ч а н и е 7. Используя 2° и лемму 6 и учитывая, что $E'' \subset H$, теми же рассуждениями, как при доказательстве теоремы 2, устанавливается

Т е о р е м а 2^1. *Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1^1. Пусть, далее, потенциальный оператор $\mathbf{F}(E'' \to E')$ имеет линейный дифференциал Гато $D\mathbf{F}(y, s) \in E'$, удовлетворяющий неравенству*

$$\langle D\mathbf{F}(y, s), s\rangle \leqslant a(s, s), \; y, s \in E'', \; (a\|\mathbf{A}^H\| < 1).$$

Тогда уравнение $y = \mathbf{AF}(y)$ имеет единственное решение, принадлежащее E.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *Бочечное полуполное пространство E удовлетворяет условию* (X).

2) *Линейный оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен из E в E', причем его сужение $\mathbf{A}^H$ есть самосопряженный и квази отрицательный оператор в H.*

3) *Оператор $\mathbf{F}(y) = \operatorname{grad} f(y)$ действует из E в E', причем его потенциал f непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из E и удовлетворяет неравенству*

$$f(y) \geqslant a(y, y) + b(y, y)^{\frac{\alpha}{2}} + c, \qquad y \in E, \tag{9}$$

где $a \geqslant \lambda_1$ (λ_1 — наибольшее положительное характеристическое число оператора $\mathbf{A}^H$), b и c — произвольные отрицательные числа и $0 < \alpha < 2$. Тогда существует по меньшей мере одно решение уравнения

$$y = \mathbf{AF}(y),$$

принадлежащее E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H_1 — собственное подпространство оператора $\mathbf{A}^H$, соответствующее его положительным собственным числам. По условию теоремы пространство H_1, конечномерно.

Пусть $\mathbf{P}_1$ — оператор проектирования из H на подпространство H_1, а $\mathbf{P}_2$ — оператор проектирования из H на подпространство $H_2 = H \ominus H_1$. Тогда для любого $x \in H$ имеем: $x = \mathbf{P}_1 x + \mathbf{P}_2 x$. В силу леммы 4, функционал $f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right)$ слабо непрерывен по отношению к любому шару из H. Кроме того, функционал $\|\mathbf{P}_2 x\|^2 - \|\mathbf{P}_1 x\|^2$ слабо полунепрерывен снизу в любом шаре из H (см. [1], стр. 116). Следовательно, функционал

$$\varphi(x) = 2f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right) + \|\mathbf{P}_2 x\|^2 - \|\mathbf{P}_1 x\|^2, \qquad x \in H \tag{10}$$

слабо полунепрерывен снизу в каждом шаре из H.

Далее, из неравенства (9) следует, что

$$\varphi(x) \geqslant 2a \|(A^H)^{\frac{1}{2}} x\|^2 + 2b \|(A^H)^{\frac{1}{2}} x\|^\alpha + 2c + \|P_2 x\|^2 - \|P_1 x\|^2, \quad (11)$$

но

$$\|(A^H)^{\frac{1}{2}} x\|^2 \geqslant \left((A^H)^{\frac{1}{2}} P_1 x, (A^H)^{\frac{1}{2}} P_1 x\right) = (A^H P_1 x, P_1 x) \geqslant \frac{1}{\lambda_1} \|P_1 x\|^2$$

поэтому

$$2a \|(A^H)^{\frac{1}{2}} x\|^2 + \|P_2 x\|^2 - \|P_1 x\|^2 \geqslant \frac{2a}{\lambda_1} \|P_1 x\|^2 + \|P_2 x\|^2 - \|P_1 x\|^2 \geqslant$$
$$\geqslant \|P_1 x\|^2 + \|P_2 x\|^2 = \|x\|^2. \quad (12)$$

Пусть μ_1 — наименьшее по абсолютной величине характеристическое число оператора A^H. Тогда $\left((A^H)^{\frac{1}{2}} x, (A^H)^{\frac{1}{2}} x\right) = (A^H x, x) \leqslant \frac{1}{\mu_1} \|x\|^2$. Отсюда и из неравенств (11) и (12) получаем:

$$\varphi(x) \geqslant \|x\|^2 - 2|b| \|(A^H)^{\frac{1}{2}} x\|^\alpha - 2|c| \geqslant \|x\|^2 - \frac{2|b|}{\mu_1^{\frac{\alpha}{2}}} \|x\|^\alpha - 2|c| =$$
$$= \|x\|^\alpha \left(\|x\|^{2-\alpha} - \frac{2|b|}{\mu_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right) - 2|c|,$$

откуда видно, что функционал φ обладает m — свойством. Следовательно, в силу теоремы 9,3 из [1], существует по меньшей мере одна точка $x_0 \in H$, такая, что

$$\operatorname{grad} \varphi(x_0) = 2 \operatorname{grad} f\left((A^H)^{\frac{1}{2}} x_0\right) - \operatorname{grad}\left(\|P_1 x_0\|^2 - \|P_2 x_0\|^2\right) =$$
$$= 2 A^{\frac{1}{2}} F\left((A^H)^{\frac{1}{2}} x_0\right) - 2(P_1 x_0 - P_2 x_0) = \Theta$$

или

$$A^{\frac{1}{2}} F\left((A^H)^{\frac{1}{2}} x_0\right) = P_1 x_0 - P_2 x_0.$$

Применяя к обеим частям полученного равенства оператор $|A^H|^{\frac{1}{2}}$ $(H \to E)$, имеем

$$|A^H|^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} F\left((A^H)^{\frac{1}{2}} x_0\right) = |A^H|^{\frac{1}{2}} (P_1 - P_2) x_0. \quad (13)$$

В силу 1° имеем $|A^H|^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$. Кроме того

$$|A^H|^{\frac{1}{2}} (P_1 - P_2) = \left((A^H_+)^{\frac{1}{2}} + |A^H_-|^{\frac{1}{2}}\right)(P_1 - P_2),$$

а так как $(A^H_+)^{\frac{1}{2}} P_1 = (A^H_+)^{\frac{1}{2}}$, $|A^H_-| P_2 = |A^H_-|^{\frac{1}{2}}$, $|A^H_-|^{\frac{1}{2}} P_1 = (A^H_+)^{\frac{1}{2}} P_2 = 0$, то

$$|A^H|^{\frac{1}{2}} (P_1 - P_2) = (A^H_+)^{\frac{1}{2}} - |A^H_-| = (A^H)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно из (13) получаем

$$AF(y_0) = y_0,$$

где $y_0 = (A^H)^{\frac{1}{2}} x_0 \in E$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 3. *Пусть, далее, потенциальный оператор* $\mathbf{F}(E \to E')$ *имеет линейный дифференциал Гато* $D\,\mathbf{F}(x, s)$, *удовлетворяющий неравенству*

$$\langle D\,\mathbf{F}(y, s), s\rangle \geqslant 2\lambda_1 (s, s), \qquad y, s \in E, \tag{14}$$

где λ_1 *имеет тот же смысл, что и в теореме* 3.

Тогда уравнение

$$y = \mathbf{AF}(y)$$

имеет единственное решение, принадлежащее E.

Доказательство. Пусть $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$. Рассмотрим снова функционал φ, определенный равенством (10). Для него имеем:

$$D\varphi(x, h) = 2\,\langle \mathbf{F}\big((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\big),\ (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\rangle - 2\,(\mathbf{P}_1 x - \mathbf{P}_2 x, h),\ \ x, h \in H,$$

$$D^2\varphi(x, h, k) = 2\,\langle D\,\mathbf{F}\big((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x, (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} k\big), (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} h\rangle - 2\,(\mathbf{P}_1 k - \mathbf{P}_2 k, h),$$
$$k \in H$$

Отсюда, полагая $k = h$, в силу неравенства (14), имеем

$$D^2\varphi(x, h, h) \geqslant 4\lambda_1\big((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} h, (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} h\big) - 2\,(\mathbf{P}_1 h, h) + 2\,(\mathbf{P}_2 h, h) =$$
$$= 4\lambda_1 \|(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} h\|^2 - 2\,(\|\mathbf{P}_1 h\|^2 - \|\mathbf{P}_2 h\|^2).$$

Так как $\lambda_1 \|(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} h\|^2 \geqslant \|\mathbf{P}_1 h\|^2$, то отсюда

$$D^2\varphi(x, h, h) \geqslant 4\,\|\mathbf{P}_1 h\|^2 - 2\,\|\mathbf{P}_1 h\|^2 + 2\,\|\mathbf{P}_2 h\|^2 = \|h\| \cdot 2\,\|h\|.$$

Следовательно, в силу теоремы 9.4 из [1] существует единственное $x_0 \in H$ такое, что

$$\operatorname{grad}\varphi(x_0) = \Theta.$$

Отсюда так же, как при доказательстве теоремы 3, получаем

$$y_0 = \mathbf{AF}(y_0),$$

где $y_0 = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_0 \in E$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) *Бочечное полуполное пространство* E *удовлетворяет условию* (χ).

2) *Линейный оператор* $\mathbf{A}$ *вполне непрерывен из* E' *в* E, *причем его сужение* $\mathbf{A}^H$ *есть самосопряженный и положительный оператор в* H.

3) *Оператор* $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$ *действует из* E *в* E' *и позитивен, т. е.* $\langle \mathbf{F}(y), y\rangle > 0$ *при* $y \neq \Theta$.*

4) *Функционал* f *непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из* E.

Тогда, какова бы ни была сфера $\|x\| = R$ *пространства* H, *на ней найдется по меньшей мере один вектор* x_R *такой, что* $y_R = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_R \in E$ *является собственным вектором оператора* $\mathbf{AF}$, *соответствующим положительному собственному значению* $\mu_R = R^{-2}\,\langle \mathbf{F}(y_R), y_R\rangle$.

---

* Отсюда следует, что $\mathbf{F}(\Theta) = \Theta$. Действительно, для произвольного $y \in E$

$$\frac{df(ty)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(ty + \Delta ty) - f(ty)}{\Delta t} = Df(ty, y) = \frac{\langle \mathbf{F}(ty), ty\rangle}{t} > 0$$

при $t > 0$. Следовательно, f растет вдоль любого луча, выходящегося из нуля, т. е. функционал f имеет минимум в точке Θ. Поэтому $\frac{df(\Theta)}{dt} = 0$ и для любого $h \in E$

$$\langle \mathbf{F}(\Theta), h\rangle = Df(\Theta, h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(th) - f(\Theta)}{t} = 0.$$

Доказательство. В силу леммы 4, функционал $f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right)$ слабо непрерывен по отношению к каждому шару пространства H.

Пусть H_0 — подпространство нулей оператора $\mathbf{A}^H$, $H_1 = H \ominus H_0$. Для $x \in H_1$ при $x \neq \Theta$ будет $(\mathbf{A}^H x, x) = \left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x, (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right) > 0$, значит, $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x \neq \Theta$. Следовательно, для $x \in H$ в силу (4) имеем:

$$\left(\operatorname{grad} f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right), x\right) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right), x\right) = \left\langle \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right), (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right\rangle > 0,$$
$$x \neq \Theta$$

т. е. $\Phi(x) = \operatorname{grad} f\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x\right)$ есть позитивный градиент слабо непрерывного функционала. Согласно теореме 15.1 из [1] оператор $\Phi(x)$ имеет в H_1 собственные векторы с любой нормой, отвечающие положительным собственным значениям, т. е. при любом $R > 0$ будет

$$\mu_R x_R = \Phi(x_R)$$

или

$$\mu_R x_R = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_R\right), \text{ где } x_R \in H_1, \ \| x_R \| = R, \tag{15}$$

откуда

$$\mu_R (x_R, x_R) = \left(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_R\right), x_R\right) = \left\langle \mathbf{F}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_R\right), (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_R\right\rangle > 0 \tag{16}$$

Применяя к обоим частям равенства (15) оператор $(\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} = |\mathbf{A}^H|^{\frac{1}{2}}$ и учитывая, что, в силу 1° $|\mathbf{A}^H|^{\frac{1}{2}}\, \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{A}$, получаем

$$\mu_R (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_R = \mathbf{AF}\left((\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_R\right).$$

Отсюда и из (16), имеем

$$\mu_R y_R = \mathbf{AF}(y_R) \quad \text{и} \quad \mu_R = R^{-2} \langle \mathbf{F}(y_R), y_R \rangle,$$

где $y_R = (\mathbf{A}^H)^{\frac{1}{2}} x_R \in E$. Теорема доказана.

4. ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

В качестве примера применения вариационного метода, рассмотрим вопрос о существовании бесконечно дифференцируемого решения уравнения

$$u(x) = \int_{Y^m} \sum_i D_y^i K(x, y) \cdot g_i\left(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots, D^N u(y), y\right) dy \tag{17}$$

Здесь суммирование по i производится от 0 до N, причем сумма содержит $n+1$ член, где $n+1$ — число всех частных производных функции $u(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ до порядка N включительно.

Будем предполагать, что $K(x, y)$ есть симметричная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в топологическом произведении $\omega_x \times \omega_y$, где ω_x и ω_y — компакты, принадлежащие соответственно m — мерным эвклидовым пространствам X^m и Y^m. Отсюда следует, что если существует решение $u(x)$ уравнения (17), то оно также будет финитной функцией с носителем, содержащимся в компакте ω_x, а подинтегральное выражение будет равно нулю вне компакта ω_y. Поэтому (17) принимает вид:

$$u(x) = \int\limits_{\omega_y} \sum_i D_y^i K(x, y) \cdot g_i(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots, D^N u(y), y)\, dy = \Gamma u \tag{18}$$

Далее предположим, что функции $g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$ непрерывны по совокупности переменных $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ почти при каждом y и измеримы по y при любых фиксированных $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$, а функции от y: $\sup\limits_{|u_j| \leqslant \alpha} |g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)|$ суммируемы по y на ω_y при любом α.

Как показал И. В. Шрагин [10], последнее условие необходимо и достаточно, чтобы оператор Немыцкого $h_i(u) = g_i(u_0(y), u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y), y)$ действовал из пространства непрерывных вектор-функций $C_{n+1}(\omega_y)$ в $L(\omega_y)$.

Для доказательства существования решения уравнения (18), принадлежащего D_{ω_x}, представим рассматриваемое уравнение в следующем виде

$$u(x) = \langle K(x, y), \mathbf{F}(u(y))\rangle$$

где $\mathbf{F}$ — оператор, действующей из пространства D_{ω_y} в пространство D'_{ω_y}, и определяемый равенством:

$$\langle \mathbf{F}(u), w\rangle = \sum_i \langle g_i(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots, D^N u(y), y), D^i w(y)\rangle =$$

$$= \sum_i (-1)^i \langle D^i g_i(u(y), Du(y), D^2 u(y), \ldots, D^N u(y), y), w\rangle$$

для всех $w \in D_{\omega_y}$, а линейный оператор $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}T = \langle K(x, y), T\rangle$ действует из пространства D'_{ω_y} в пространство D_{ω_x}. Заметим, что из симметрии функции $K(x, y)$ витекает совпадение пространств D_{ω_x} и D_{ω_y}.

Лемма 7. *Оператор* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}T = \langle K(x, y), T\rangle$ *вполне непрерывен из* D'_{ω_y} *в* D_{ω_x}.

Доказательство. Заметим сначала, что оператор $\mathbf{A}$ непрерывен из D'_{ω_y} в D_{ω_x}. Действительно, выберем окрестность нуля $U(l, \varepsilon) \subset D_{\omega_x}$, т. е. множество функций $\varphi \in D_{\omega_x}$ таких, что $|D^p \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ для $p \leqslant l$ (l — произвольное натуральное, ε — произвольное положительное число). Далее рассмотрим ограниченное множество $B_K \subset D_{\omega_y}$, состоящее из функции $\Psi_{p,x}(y) = D_x^p K(x, y)$, $p \leqslant l$, $x \in \omega_x$, где p и x являются параметрами. Произведение поляры B_K° множества B_K на ε обозначим через V_K. Тогда для $T \in V_K$ имеем: $|\langle D_x^p K(x, y), T\rangle| \leqslant \varepsilon$ для $p \leqslant l$, т. е. $\mathbf{A}T \in U(l, \varepsilon)$.

Рассмотрим, теперь, билинейный функционал $\langle \mathbf{A}T, S\rangle$ где $T \in D'_{\omega_y}$, $S \in D'_{\omega_x}$. Пусть S пробегает произвольное ограниченное множество $B \subset D'_{\omega_x}$. Тогда поляра B° есть окрестность нуля в D_{ω_x} и, в силу непрерывности $\mathbf{A}$, найдется окрестность нуля $V \subset D'_{\omega_y}$, такая, что для всех $T \in V$ будет $\mathbf{A}T \subset B^{\circ}$. Значит, для всех $T \in V$, $S \in B$ имеет место неравенство $|\langle \mathbf{A}T, S\rangle| \leqslant 1$, т. е.

когда S пробегает B, отображения $T \to \langle \mathbf{A} T, S\rangle$ образуют равностепенно непрерывное множество. Так как, кроме того, для каждого $T \in D'_{\omega_y}$ билинейный функционал непрерывен относительно S, а D_{ω_y} и D_{ω_x} являются правильными пространствами Фреше, то согласно теореме 9 из [9], билинейный функционал $\langle AT, S\rangle$ непрерывен на $D'_{\omega_y} \times D'_{\omega_x}$. Поэтому найдутся окрестности нуля $V_0 \subset D'_{\omega_y}$ и $W_0 \subset D'_{\omega_x}$ такие, что для $T \in V_0$, $S \subset W_0$ имеет место $|\langle \mathbf{A}T, S\rangle| \leqslant 1$. Но тогда для всех $T \in V_0$ имеет место включение $\mathbf{A}T \in (W_0)^\circ$, т. е. оператор $\mathbf{A}$ отображает окрестность нуля V_0 из D'_{ω_y} в ограниченное множество из D_{ω_x}, являющееся, как известно, относительно бикомпактным. Лемма доказана.

Лемма 8. *Оператор* $\mathbf{F}(u) = \sum\limits_i (-1)^i D^i g_i\,(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots$ $\ldots, D^N u(y), y)$, *определенный выше, непрерывен из* D_{ω_y} *в* D'_{ω_y}.

Доказательство. Пусть задана окрестность нуля $V = B^\circ \subset D'_{\omega_y}$, где B — заданное ограниченное в D_{ω_y} множество функций φ таких, что

$$|D^p \varphi(y)| \leqslant M_\nu \quad \text{для } p \leqslant \nu,\ y \in \omega_y \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

Пусть $u^{(0)} \in D_{\omega_y}$. Рассмотрим окрестность нуля $U_1(N, \varepsilon_1) \subset D_{\omega_y}$, т. е. множество функций $\Psi \in D_{\omega_y}$ таких, что

$$|D^p \Psi(y)| \leqslant \varepsilon_1 \quad \text{для } p \leqslant N,\ y \in \omega_y.$$

Так как функции $u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), D^2u^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y)$ непрерывны на ω_y, то существует $\alpha_0 > 0$ такое, что для всех $y \in \omega_y$ будет $|D^j u^{(0)}(y)| \leqslant \alpha_0$, $j \leqslant N$. Но тогда для всех $u \in D_{\omega_y}$ таких, что $u - u_0 \in U_1(N, \varepsilon_1)$ имеем:

$$|D^p u(y) - D^p u^{(0)}(y)| \leqslant \varepsilon_1,\ p \leqslant N,\ y \in \omega_y,$$

откуда

$$|D^p u(y)| \leqslant \alpha_0 + \varepsilon_1.$$

Поэтому

$$|g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y), y)| \leqslant \sup_{|u_\nu| \leqslant \alpha_0} |g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots$$
$$\ldots, u_n, y)| = \Phi_{i, \alpha_0}(y),$$

и для $u \in u^{(0)} + U_1(N, \varepsilon_1)$

$$|g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y)| \leqslant \sup_{|u_\nu| \leqslant \alpha_0 + \varepsilon_1} |g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots$$
$$\ldots, u_n, y)| = \Phi_{i, \alpha_0 + \varepsilon_1}(y),$$

где в силу условий, указанных в начале п. 4, функции $\Phi_{i, \alpha_0}(y)$; $\Phi_{i, \alpha_0 + \varepsilon_1}(y)$ суммируемы на ω_y.

Рассмотрим выражение

$$I_{\mathfrak{M}} = \sum_i \int_{\mathfrak{M}} [g_i(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots, D^N u(y), y) -$$
$$- g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), D^2u^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y), y)]\, D^i w(y)\, dy \qquad (19)$$

где $\mathfrak{M}$ — измеримое подмножество множества ω_y, $u - u_0 \in U_1(N, \varepsilon_1)$ и $w \in B$, а поэтому $|D^i w(y)| \leqslant M_N$ для $i \leqslant N$.

Оценим $I_{\mathfrak{M}}$:

$$|I_{\mathfrak{M}}| \leqslant M_N \sum_i \int_{\mathfrak{M}} (|g_i(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots, D^N u(y), y)| +$$

$$+ |g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), D^2u^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y), y)|)\, dy \leqslant$$

$$\leqslant M_N \int_{\mathfrak{M}} \sum_i (\Phi_{i,\alpha_0}(y) + \Phi_{i,\alpha_0+\varepsilon_1}(y))\, dy.$$

В силу суммируемости на ω_y функции $\sum_i (\Phi_{i,\alpha_0}(y) + \Phi_{i,\alpha_0+\varepsilon_1}(y))$, для заданного M_N найдется $\eta > 0$, что для любого $\mathfrak{M} \subset \omega_y$ такого, что $\operatorname{mes} \mathfrak{M} < \eta$ будет $\int_{\mathfrak{M}} \sum_i (\Phi_{i,\alpha_0}(y) + \Phi_{i,\alpha_0+\varepsilon_1}(y))\, dy < \frac{1}{2M_N}$, а поэтому

$$|I_{\mathfrak{M}}| < \frac{1}{2} \text{ для всех } u \in u_0 + U_1(N, \varepsilon_1).$$

Так как $g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$ являются (H) — функциями [1], то, согласно теореме 18.2 из [1], найденному $\eta > 0$ соответствует замкнутое подмножество $F \subset \omega_y$ такое, что $\operatorname{mes} F > \operatorname{mes} \omega_y - \eta$ и на топологическом произведении множества F и $(n+1)$ — мерного эвклидова пространства переменных $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ функции $g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$ непрерывны по совокупности всех аргументов. Для непрерывных на ω_y функций $u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y)$ положим $\beta_i = \max_{y \in \omega_y} |D^i u^{(0)}(y)|$, $\beta = \max_i \beta_i$, $\alpha = \beta + 1$.

Топологическое произведение множества F и $(n+1)$ — мерного куба: $|u_\mu| \leqslant \alpha$ есть бикомпактное множество $K \subset R^{n+1}$, поэтому функции $g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$ равномерно непрерывны на K. Следовательно, найдется положительное $\delta < 1$ такое, что для любых пар точек $(u_0', u_1', u_2', \ldots, u_n', y)$, $(u_0'', u_1'', u_2'', \ldots, u_n'', y) \subset K$, для которых $|u_\mu' - u_\mu''| < \delta$, имеют место неравенства

$$|g_i(u_0', u_1', u_2', \ldots, u_n', y) - g_i(u_0'', u_1'', u_2'', \ldots, u_n'', y)| < \frac{1}{2M_N n \operatorname{mes} \omega_y}$$

Пусть $U_2(N, \delta)$ — окрестность нуля в D_{ω_y} такая, что для $\Psi \in U_2$ будет $\|D^p \Psi(y)\| \leqslant \delta$ при $p \leqslant N$. Тогда для всех $u \in u^{(0)} + U_2(N, \delta)$ имеет место неравенство $|D^p u(y) - D^p u^{(0)}(y)| \leqslant \delta$ для всех $p \leqslant N$ и $y \in \omega_y$, а поэтому для $y \in F$ получаем

$$|g_i(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots, D^N u(y), y) - g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), D^2u^{(0)}(y), \ldots$$

$$\ldots, D^N u^{(0)}(y), y)| < \frac{1}{2M_N n \operatorname{mes} \omega_y}.$$

Положим $U = U_1(N, \varepsilon_1) \cap U_2(N, \delta)$. Тогда для $u \in u_0 + U$ и $w \in B$ имеем:

$$|\langle \mathbf{F}(u) - \mathbf{F}(u^{(0)}), w \rangle| =$$

$$= \Big| \sum_i (-1)^i \langle D^i g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y) - D^i g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots$$

$$\ldots, D^N u^{(0)}(y), y), w(y)\rangle \Big| =$$

$$= \Big| \sum_i \int_{\omega_y} [g_i(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots, D^N u(y), y) - g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots$$

$$\ldots, D^N u^{(0)}(y), y)] D^i w(y)\, dy \Big| \leqslant$$

$$\leqslant |I_F| + |I_{\omega_y - F}| \leqslant n \int_F \frac{1}{2 M_N n \operatorname{mes} \omega_y} M_N\, dy + |I_{\omega_y - F}| <$$

$$< \frac{1}{2} \frac{\operatorname{mes} F}{\operatorname{mes} \omega_y} + \frac{1}{2} < 1,$$

ибо $\operatorname{mes}(\omega_y - F) < \eta$. Значит для всех $u \in u^{(0)} + U$ имеет место включение $\mathbf{F}(u) - \mathbf{F}(u^{(0)}) \in B^\circ = V$. Лемма доказана.

5. ПОТЕНЦИАЛЬНОСТЬ ОПЕРАТОРА F (u)

При некоторых дополнительных предположениях относительно функций $g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$, подобно тому, как в [1] можно притти к достаточному условию потенциальности оператора $\mathbf{F}(u)$ из D_{ω_y} в D'_{ω_y}. Таким условием является существование функции $g(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$ такой, что

$$g_\nu(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n\, y) = \frac{\partial}{\partial u_\nu} g(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y),\ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{20}$$

Покажем, что условия, сформулированные в начале п. 4, и равенства (20) обеспечивают потенциальность оператора $\mathbf{F}(u)$.

Лемма 9. *Если функции $g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$ удовлетворяют условиям, указанным в начале п. 4 и равенствам* (20), *то оператор* $\mathbf{F}(u)$ *является градиентом функционала*

$$f(u) = \int_{\omega_y} g(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots, D^N u(y), y)\, dy,$$

непрерывного по отношению к каждому ограниченному множеству из D_{ω_y}.

Доказательство. Из теоремы 4.1 работы [4] вытекает предложение: для того, чтобы непрерывный оператор $\mathbf{F}(u)$ был потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int_{[u_1, u_2]} \langle \mathbf{F}(u), du\rangle$ по любому отрезку $[u_1, u_2] \subset D_{\omega_y}$ зависел лишь от концов этого отрезка.

Рассмотрим теперь криволинейный интеграл по отрезку $[u^{(0)}, u^{(0)} + v^{(0)}]$, представление которого есть $u^{(0)} + tv^{(0)}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, где $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ — произвольно выбранные элементы из D_{ω_y}. Тогда

$$J = \int_{[u^{(0)}, u^{(0)} + v^{(0)}]} \langle \mathbf{F}(u), du\rangle = \int_0^1 \langle \mathbf{F}(u^{(0)} + tv^{(0)}), d(u^{(0)} + tv^{(0)})\rangle =$$

$$= \int_0^1 \langle \mathbf{F}(u^{(0)} + tv^{(0)}, v^{(0)}) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 dt \int_{\omega_y} \sum_i g_i \left(u^{(0)}(y) + tv^{(0)}(y), D\left(u^{(0)}(y) + tv^{(0)}(y)\right), \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, D^N\left(u^{(0)}(y) + tv^{(0)}(y)\right), y\right) D^i v^{(0)}(y)\, dy.$$

Изменяя порядок интегрирования, согласно теореме Фубини, и учитывая (20), получим:

$$J = \int_{\omega_y} dy \int_0^1 \frac{d}{dt} g\left(u^{(0)}(y) + tv^{(0)}(y), D\left(u^{(0)}(y) + tv^{(0)}(y)\right), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, D^N\left(u^{(0)}(y) + tv^{(0)}(y)\right), y\right) dt =$$
$$= \int_{\omega_y} g\left(u^{(0)}(y) + v^{(0)}(y), D\left(u^{(0)}(y) + v^{(0)}(y)\right), \ldots, D^N\left(u^{(0)}(y) + v^{(0)}(y)\right), y\right) dy -$$
$$- \int_{\omega_y} g\left(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y), y\right) dy = \Phi(u^{(0)} + v^{(0)}) - \Phi(u^{(0)}).$$

Значит, согласно вышеуказанному предложению, оператор $\mathbf{F}$, $\mathbf{F}(u) = \sum_i (-1)^i D^i g_i\left(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y\right)$, где $g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$ удовлетворяют равенствам (20), является потенциальным. Его потенциал тогда находится по формуле

$$f(u) = f_0 + \int_0^1 \langle \mathbf{F}(0 + tu), u \rangle \, dt = f_0 + \int_{\omega_y} g\left(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y\right) dy -$$
$$- \int_{\omega_y} g(0, 0, \ldots, 0, y)\, dy,$$

где f_0 — произвольная постоянная, которую можно положить равной $\int_{\omega_y} g(0, 0, 0, \ldots, 0, y)\, dy$. Значит $\mathbf{F} = \operatorname{grad} f$, где

$$f(u) = \int_{\omega_y} g\left(u(y), Du(y), D^2 u(y), \ldots, D^N u(y), y\right) dy.$$

В силу следствия из леммы 1, функционал f непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из D_{ω_y}. Лемма доказана.

6. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Применяя полученные выше результаты, мы приходим к следующему предложению.

Теорема 6. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $K(x, y)$ — *симметричная бесконечно дифференцируемая функция с носителем, содержащимся в множестве* $\omega \times \omega$, *где* ω — *компакт* m —

мерного эвклидова пространства, определяющая в $L^2(\omega)$ *положительный оператор*

$$\mathbf{A}^H u = \int_\omega K(x, y)\, u(y)\, dy.$$

2) *Функции* $g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y)$ *вещественны, непрерывны по совокупности* $u_\nu \in (-\infty, \infty)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$, *почти при каждом* $y \in \omega$ *и измеримы на* ω *по* y *при любых фиксированных* $(u_0, u_1, u_2, \ldots u_n)$, *причем функции* $\Phi_{i,\alpha}(y) = \sup\limits_{|u_\nu| \leqslant \alpha} |g_i(u_0, u_1, \ldots, u_n, y)|$ *суммируемы на* ω *при любом* α.

3) *Функции* $g_i(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n\, y)$ *удовлетворяют условию* (20), *причем*

$$2\, g(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, y) \leqslant a u_0^2 + b(y)\, |u_0|^\alpha + c(y), \tag{21}$$

где $a \leqslant \lambda_1$ (λ_1 *— наименьшее характеристическое число оператора* $\mathbf{A}^H$). $0 < \alpha < 2$; $0 \leqslant b(y) \in L^\gamma(\omega)$, $\gamma = \frac{2}{2-\alpha}$; $0 \leqslant c(y) \in L(\omega)$

Тогда уравнение

$$u(x) = \int_\omega \sum_i D_y^i K(x, y) \cdot g_i\big(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y\big)\, dy$$

имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству D_ω.

Доказательство. Рассматриваемое уравнение можно переписать в виде

$$u = \mathbf{AF}(u),$$

где оператор $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}T = \langle K(x, y), T\rangle$, в силу леммы 7, вполне непрерывен из D'_ω в D_ω, а $\mathbf{F}(u)$, в силу лемм 8 и 9, есть непрерывный потенциальный оператор из D_ω в D'_ω, причем его потенциал f непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из D_ω. Для доказательства данной теоремы, согласно теореме 1 остается проверить выполнение неравенства (5). Для этого воспользуемся неравенством (21):

$$2 f(u) = 2 \int_\omega g\big(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y\big)\, dy \leqslant a \int_\omega u^2(y)\, dy + \int_\omega b(y)\, |u(y)|^\alpha\, dy + \int_\omega c(y)\, dy.$$

Согласно неравенству Гельдера, имеем

$$\int_\omega b(y)\, |u(y)|^\alpha\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_\omega (b(y))^{\frac{2}{2-\alpha}}\, dy\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \left(\int_\omega |u(y)|^{\alpha \cdot \frac{2}{\alpha}}\, dy\right)^{\frac{\alpha}{2}} = b\,(u, u)^{\frac{\alpha}{2}},$$

где $b = \left(\int\limits_{\omega}(b(y))^{\gamma}dy\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, $\int\limits_{\omega} u^2(y)\,dy = (u, u)$. Обозначив, далее $\int\limits_{\omega} c(y)\,dy = c$, получаем неравенство (5). Теорема доказана.

Подобным образом из теорем 2—5 можно получить соответствующие теоремы для уравнения вида (18) и оператора Г.

Пользуясь случаем, выражаю глубокую благодарность Д. А. Райкову за ценные указания по некоторым вопросам общей теории, связанным с настоящей работой.

20 I 1959 *Кафедра общей математики*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *М. М. Вайнберг.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостехиздат, 1956.
[2]. *М. М. Вайнберг.* О некоторых свойствах квадратичных форм в пространствах L^q ($q \leqslant 2$). ДАН СССР, 1955, 100, № 5, 845—848.
[3]. *М. М. Вайнберг.* К вопросу о вариационной теории собственных значений для нелинейных интегральных уравнений. УМН, 1952, т. 7, в. 1 (47), 144—146.
[4]. *Я. Л. Энгельсон.* О потенциальных операторах в линейных топологических пространствах. Уч. зап. Латв. Гос. Унив., 1958, т. XX, в. 3, 27—45.
[5]. *Я. Л. Энгельсон.* О квадратном корне из линейных операторов в линейных топологических пространствах. Уч. Зап. Латв. Гос. Унив., 1956, т. VIII, в. 2., 73—79.
[6]. *М. М. Вайнберг* и *Я. Л. Энгельсон.* О квадратном корне из линейного оператора в локально выпуклых пространствах., ДАН СССР, 1958, т. 122, № 5, 755—758.
[7]. *N. Bourbaki.* Espaces vectoriels topologiques, chap. III-V, 1955.
[8].*L. Schwartz.* Theorie des distributions, t. I. Paris, 1950.
[9]. *I. Dieudonne, L. Schwartz.* La dualite dans les espaces (F) et (LF), Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1950, 1, 61—101. Есть русский перевод в сборнике Математика, 1958, в 2:2, 77—107.
[10]. *И. В. Шрагин.* Об одном нелинейном операторе. Научные доклады высшей школы, физико-математические науки, 1958, № 2., 103—105.
[11]. *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов.* Обобщенные функции, в. 2: Пространства основных и обобщенных функций. Гос. изд. физ.-мат. литературы, Москва, 1958.
[12]. *J. Dieudonne.* La dualite dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. ecole norm. (3), 1942, vol. 59, 107—139.

DAŽI NELINEĀRU VIENĀDOJUMU VARIĀCIJU TEORIJAS JAUTĀJUMI LOKĀLI IZLIEKTĀS TELPĀS

J. Engelsons

(Kopsavilkums)

Pamatojoties uz rakstu [4], [5] un [6] rezultātiem, darbā pierādīta virkne teorēmu par atrisinājuma eksistenci vienādojumam

$$y = \mathbf{AF}(y),$$

kur **F** — potenciāls operators, kas darbojas no lokāli izliektas telpas E uz tās saistīto telpu E', un **A** — lineārs operators, kas darbojas no E' uz E. Bez tam pierādīta teorēma par operatora $\Gamma = \mathbf{AF}$ īpašvektoriem.

Kā piemērs apskatīts integro-diferenciālvienādojums

$$u(x) = \int_{\omega_y} \sum_i D_y^i K(x, y) \cdot g_i\big(u(y), Du(y), D^2u(y), \ldots, D^N u(y), y\big)\, dy,$$

kuram pie zināmiem nosacījumiem pierādīta bezgalīgi diferencējama atrisinājuma eksistence.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОРНЕЙ НЕКОТОРЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. РИЕКСТЫНЬШ

Многие задачи приводят к решению уравнения

$$\sin(x+\omega) f_1(x) + \cos(x+\omega) f_2(x) = f_3(x). \tag{0.1}$$

Если в уравнении такого типа аргументы тригонометрических функций отличались бы друг от друга сдвигом фазы, то при помощи элементарных преобразований мы могли бы такое уравнение тоже привести к виду (0.1).

Частные случаи этого уравнения при $f_3(x) \equiv 0$ часто рассматривались. Тогда уравнение имеет бесконечно много вещественных корней, и большие корни ищутся при помощи асимптотических разложений, при чем обычно это делается формально, без всякого обоснования. Одним из первых такой метод применил Стокс [1] для асимптотического представления корней функций Бесселя, поэтому этот метод иногда называют методом Стокса. После него тем же методом асимптотические разложения для корней более общих уравнений с цилиндрическими функциями получил Мак-Магон [2]. Вероятно, первым, давшим строгое обоснование этого метода на частном примере, был Горн [3]. Он таким же путем получил асимптотическое представление собственных значений задачи Штурма-Лиувилля.

Во всех указанных работах $f_3(x) \equiv 0$. Ввиду этого, уравнение приводится к виду

$$\operatorname{tg}(x+\omega) = g(x), \tag{0.2}$$

что невозможно для общего случая (0.1). Оказывается, что можно видоизменить метод Стокса и найти асимптотическое разложение корней и для (0.1), причем такое видоизменение желательно и для случая $f_3 \equiv 0$. Рассмотрению и обоснованию этого метода для общего уравнения (0.1) посвящена настоящая работа. Во втором параграфе будут приведены некоторые конкретные уравнения. Еще один случай уравнения (0.1) рассмотрен в другой статье автора [4].

§ 1.

1. Сначала напомним некоторые факты из теории асимптотических рядов.

Определение. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}} \quad (a_0 \neq 0,\ \alpha_k < \alpha_{k+1},\ \alpha_k \to \infty) \tag{1.1}$$

называется асимптотическим для функции $f(x)$ при больших x, если для любого целого $n \geqslant 0$ имеет место соотношение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha_n}}\right). \tag{1.2}$$

Часто пишут

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}}. \tag{1.3}$$

Подобным образом определяется асимптотическое разложение при малых x:

$$g(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{\beta_k} \quad (b_0 \neq 0, \ \beta_k < \beta_{k+1}, \ \beta_k \to \infty). \tag{1.4}$$

Может случиться, что в разложении (1.3) x принимает только дискретные значения x_m ($x_m \to \infty$), и функция $f(x)$ в общем разложения типа (1.1) не имеет. Так и будет всюду в нашей работе. Легко видеть, что определение и свойства разложения (1.1) от этого не меняется.

Надо подчеркнуть, что во избежании дальнейших оговорок, функция, у которой все $a_k = 0$, по определению считается не разложимой в ряд типа (1.1). Класс функций, которые допускают разложение типа (1.1) (хотя бы для дискретных значений x), не весьма широк. Даже рассмотрение уравнения (0.1) в комплексной плоскости требует более общих асимптотических разложений. Случай комплексных корней будет рассмотрен в другой работе автора.

Напомним свойства рядов (1.1), которые используются в дальнейшем. Обычно доказательство этих свойств дается в случае целых α_k (например, [5, 6, 7]), но перенесение их на общий случай не представляет труда.

(C1). Если функция $f(x)$ допускает разложение в ряд типа (1.1), то такое разложение единственно. Это следует из того, что при всех n

$$a_{n+1} = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}} \right] x^{\alpha_{n+1}}. \tag{1.5}$$

(C2). Если $f_1(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}}$; $f_2(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{x^{\beta_k}}$, то функции $A_1 f_1 + A_2 f_2$, $f_1 \cdot f_2$ разлагаются в ряды типа (1.1), причем соответствующие разложения получаются при помощи соответствующих формальных действий и перегруппировки членов в порядке убывания.

(C3). Если $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}}$, то функция $[f(x)]^{\mu}$ тоже имеет асимптотическое разложение для любого вещественного μ, причем разложение можно получить по следующей формальной схеме:

$$[f(x)]^{\mu} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}} \right)^{\mu} = \frac{a_0^{\mu}}{x^{\mu\alpha_0}} \left(1 + \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k - \alpha_0}} \right)^{\mu} =$$

$$= \frac{a_0^{\mu}}{x^{\mu\alpha_0}} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\mu}{j} \left(\frac{1}{a_0} \right)^j \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k - \alpha_0}} \right)^j \right] =$$

$$= \frac{a_0^{\mu}}{x^{\mu\alpha_0}} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\mu}{j} \left(\frac{1}{a_0} \right)^j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_{kj}}{x^{\beta_{kj}}} \right] = \frac{a_0^{\mu}}{x^{\mu\alpha_0}} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{x^{\gamma_j}} \right]. \tag{1.6}$$

Возведение ряда в целую положительную степень происходит согласно (C2), а окончательный ряд получается после перегруппировки членов.

(C4). Если $f_1(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}}$, $f_2(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{x^{\beta_k}}$, причем $\beta_0 < 0$, то $f_1(f_2(x))$ также имеет асимптотическое разложение, которое получается формальной подстановкой ряда в ряд, использованием (1.6) и перегруппированием членов по следующей схеме:

$$f_1(f_2(x)) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b_j}{x^{\beta_j}} \right)^{-\alpha_k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b_0^{-\alpha_k}}{x^{-\beta_0 \alpha_k}} \left[1 + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{jk}}{x^{\gamma_{jk}}} \right] =$$

$$= \frac{a_0 b_0^{-\alpha_0}}{x^{-\beta_0 \alpha_0}} \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{x^{\delta_k}} \right]. \tag{1.7}$$

(C5). Если $f_1(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha_k}$ при $x \to 0$, $f_2(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{x^{\beta_k}}$ при $x \to \infty$, причем $\beta_0 > 0$, то $f_1(f_2(x))$ тоже имеет асимптотическое разложение при $x \to \infty$, которое получается формальной подстановкой ряда в ряд, использованием (1.6) и перегруппированием членов по схеме, подобной (1.7), если только α_k заменить на $-\alpha_k$.

(C6). Если $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}}$, $f'(x)$ непрерывная функция при $x \geqslant x_0 > 0$ и $f'(x)$ допускает разложение в ряд типа (1.1), то ряд для $f(x)$ можно почленно дифференцировать, т. е.

$$f'(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-a_k \alpha_k}{x^{\alpha_k + 1}}. \tag{1.8}$$

(C7). Если $f(x)$ допускает разложение в ряд типа (1.1), то функция $f(x)$ при достаточно больших x сохраняет знак. Однако $f(x)$ не обязательно непрерывна или монотонна, как это показывают следующие примеры:

$$f_1(x) = 1 + (-1)^{[x]} [x] \, e^{-x} \sim 1,$$

$$f_2(x) = 1 + e^{-x} \sin x \sim 1.$$

2. Переходим теперь к уравнению (0.1), которое перепишем в форме

$$F(x) \equiv \sin(x + \omega) f_1(x) + \cos(x + \omega) f_2(x) - f_3(x) = 0. \tag{1.9}$$

Предположим, что

а) при $x \to \infty$

$$f_1(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}}, \quad f_2(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{x^{\beta_k}},$$

$$f_3(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{x^{\gamma_k}}. \tag{1.10}$$

Без ограничений мы можем считать, что по крайней мере один из α_0, β_0, γ_0 равен нулю, а остальные из этих трех показателей степени неотрицательны, ибо в противном случае мы могли бы умножить уравнение (1.9) на соответствующую степень x и привести к такому виду.

Предположение а) исключает возможность, что одна из рассматриваемых функций тождественно равна нулю. Но легко видеть, что все дальнейшее в этом параграфе относится и к таким частным случаям, если в асимптотическом разложении для такой функции первый показатель степени считать бесконечно большим.

б) При достаточно больших x функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ непрерывно дифференцируемы и их производные допускают разложения типа (1.1).

В уравнение (1.9) формально поставим разложения (1.10) и выделим главную часть — члены, не содержащие степеней x. Согласно сказанному о α_0, β_0, γ_0, по крайней мере один такой член в уравнении имеется. Обозначая главную часть через $\Phi(x)$, имеем

$$F(x) = \Phi(x) + o(1). \tag{1.11}$$

Ниже мы убедимся, что во всех случаях, когда сокращенное уравнение

$$\Phi(y) = 0 \tag{1.12}$$

имеет вещественные корни, их бесконечно много и они имеют вид

$$y_n = n\pi s + \varkappa, \tag{1.13}$$

причем либо $s = 1$, либо $s = 2$.

3. Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 1. Уравнение (1.9) при предположениях а) и б) имеет сколь угодно большие вещественные корни, если сокращенное уравнение (1.12) имеет вещественные корни вида (1.13), где $s = 1$. Если уравнение (1.12) не имеет вещественных корней, то корни (1.9) ограничены в совокупности. Корни имеют асимптотическое разложение

$$x \sim y_n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{y_n^{\lambda_k}} \quad (\lambda_0 > 0), \tag{1.14}$$

причем l_k и λ_k определяются формальной подстановкой (1.14) в (1.9) и использованием (C1) — (C5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ниже мы будем анализировать отдельные случаи, когда (1.12) имеет вещественные корни и более подробно покажем, как формально определить λ_k и l_k в (1.14). Построение этих коэффициентов покажет справедливость соотношения

$$F\left(y_n + \sum_{j=0}^{k} \frac{l_j}{y_n^{\lambda_j}}\right) = O\left(\frac{1}{y_n^{\lambda_{k+1}}}\right), \tag{1.15}$$

а также соотношения

$$F'\left(y_n + \sum_{j=0}^{k+1} \frac{l_j}{y_n^{\lambda_j}} + \frac{\Theta}{y_n^{\lambda_{k+1}}}\right) = (-1)^n A + o(1) = O(1) \tag{1.16}$$

для любых целых $k \geqslant 0$ и вещественных Θ.

Далее, применяя формулу конечного приращения, в силу (1.15) и (1.16) имеем:

$$F\left(y_n+\sum_{j=0}^{k+1}\frac{l_j}{y_n^{\lambda j}}\pm\frac{1}{y_n^{\lambda k+1}}\right)=F\left(y_n+\sum_{j=0}^{k+1}\frac{l_j}{y_n^{\lambda j}}\right)\pm$$

$$\pm\frac{1}{y_n^{\lambda k+1}}F'\left(y_n+\sum_{j=0}^{k+1}\frac{l_j}{y_n^{\lambda j}}\pm\frac{\theta}{y_n^{\lambda k+1}}\right)=O\left(\frac{1}{y_n^{\lambda k+2}}\right)\pm \tag{1.17}$$

$$\pm\frac{1}{y_n^{\lambda k+1}}\,O(1)=o\left(\frac{1}{y_n^{\lambda k+1}}\right)\pm O\left(\frac{1}{y_n^{\lambda k+1}}\right).$$

$$(o<\theta<1)$$

Отсюда мы видим, что при достаточно большом n уравнение (1.9) имеет по крайней мере один корень в промежутке

$$y_n+\sum_{j=0}^{k+1}\frac{l_j}{y_n^{\lambda j}}-\frac{1}{y_n^{\lambda k+1}}<x<y_n+\sum_{j=0}^{k+1}\frac{l_j}{y_n^{\lambda j}}+\frac{1}{y_n^{\lambda k+1}}. \tag{1.18}$$

Так как в (1.17) можно брать любое k, то для этого корня имеем

$$x=y_n+\sum_{j=0}^{k+1}\frac{l_j}{y_n^{\lambda j}}+O\left(\frac{1}{y_n^{\lambda k+1}}\right)=y_n+\sum_{j=0}^{k}\frac{l_j}{y_n^{\lambda j}}+o\left(\frac{1}{y_n^{\lambda k}}\right),$$

что доказывает справедливость разложения (1.14).

Согласно формуле (1.16), $F'(x)$ в промежутке (1.18) сохраняет знак, поэтому $F(x)$ в этом промежутке строго монотонна и мы имеем в этом промежутке ровно один простой корень. Вообще, номер этого корня не совпадает с n, но начиная с некоторого n разность между n и номером корня станет величиной постоянной.

Если уравнение (1.12) не имеет вещественных корней, то $\Phi(x)$ сохраняет знак. В силу (1.11) при достаточно больших x знак будет сохранить и $F(x)$, и поэтому уравнение (1.9) в этом случае не может иметь больших вещественных корней. По той же причине ясно, что уравнение (1.9) при больших x не может иметь других корней, кроме указанных в (1.14).

4. Переходим к рассмотрению отдельных случаев уравнения (1.12). Не ограничивая общности, мы можем считать, что $a_0=1$, так как в противном случае мы можем уравнение разделить на a_0.

I. $\alpha_0=0,\ \beta_0,\gamma_0>0.$ $\Phi(x)=\sin(x+\omega)$.

$$y_n=n\pi-\omega. \tag{1.19}$$

Подставляя в уравнение (1.9) формально

$$x\sim y_n+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_k}{y_n^{\lambda k}}=y_n+s_n,$$

получаем согласно (C5) и (C3):

$$\sin(x+\omega)=\sin(n\pi+s_n)=(-1)^n\sin s_n=(-1)^n\sum_{i=o}^{\infty}(-1)^i\frac{s_n^{2i+1}}{(2i+1)!}=$$

$$=(-1)^n\sum_{i=o}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{(2i+1)!}\left(\sum_{k=o}^{\infty}\frac{l_k}{y_n^{\lambda_k}}\right)^{2i+1}=$$

$$=(-1)^n\sum_{i=o}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{(2i+1)!}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{r_{k\,2i+1}}{y_n^{\rho_{k,\,2i+1}}},$$

$$\cos(x+\omega)=\cos(n\pi+s_n)=(-1)^n\cos s_n=$$

$$=(-1)^n\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{s_n^{2i}}{(2i)!}\right]=(-1)^n\left[1+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{(2i)!}\left(\sum_{k=o}^{\infty}\frac{l_k}{y_n^{\lambda_k}}\right)^{2i}\right]=(-1)^n\left[1+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{(2i)!}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{r_{k,2i}}{y_n^{\rho_{k,\,2i}}}\right],$$

$$\frac{1}{x^{\alpha}}=\frac{1}{(y_n+s_n)^{\alpha}}=\frac{1}{y_n^{\alpha}}\left(1+\frac{s_n}{y_n}\right)^{-\alpha}=$$

$$=\frac{1}{y_n^{\alpha}}\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{-\alpha}{i}\left(\frac{s_n}{y_n}\right)^{i}\right]=$$

$$=\frac{1}{y_n^{\alpha}}\left[1+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{-\alpha}{i}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{r_{k,i}}{y_n^{\rho_{k,i}+i}}\right],$$

$$F(x)\equiv(-1)^n\left[\sum_{i=o}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{(2i+1)!}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{r_{k,2i+1}}{y_n^{\rho_{k,\,2i+1}}}\right]\sum_{j=o}^{\infty}a_j\frac{1}{y_n^{\alpha_j}}\left[1+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{-\alpha_j}{i}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{r_{k,i}}{y_n^{\rho_{k,i}+i}}\right]+(-1)^n\left[1+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{1}{(2i)!}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{r_{k,2i}}{y_n^{\rho_{k,2i}}}\right]\sum_{j=o}^{\infty}b_j\frac{1}{y_n^{\beta_j}}\left[1+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{-\beta_j}{i}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{r_{k,i}}{y_n^{\rho_{k,i}+i}}\right]-\sum_{j=o}^{\infty}c_j\frac{1}{y_n^{\gamma_j}}\left[1+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty}\binom{-\gamma_j}{i}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{r_{k,i}}{y_n^{\rho_{k,i}+i}}\right]=0. \tag{1.20}$$

После перемножения рядов, соберем члены с наивысшей степенью y_n и приравняем λ_0 этому показателю степени. Приравнивая нулю общий коэффициент при этой степени, получим l_0. Продолжая процесс таким же образом дальше и учитывая при этом также уже определенные λ_k, определяем следующие коэффициенты и показатели степени. Отсюда видна и справедливость формулы (1.15).

В общем случае можно найти только несколько первых коэффициентов, ибо надо считаться с разнообразием возможностей при сравнении показателей степени. Укажем для примера первые два значения λ:

а) $\beta_0 < \gamma_0$; $\lambda_0 = \beta_0$, $l_0 = -b_0$, $\lambda_1 = \min[\beta_0 + \alpha_1, 3\beta_0, 2\beta_0 + 1, \beta_1, \gamma_0]$.

б) $\gamma_0 < \beta_0$; $\lambda_0 = \gamma_0$, $l_0 = (-1)^n c_0$, $\lambda_1 = \min[\gamma_0 + \alpha_1, 3\gamma_0, 2\gamma_0 + 1, \gamma_1, \beta_0]$.

в) $\gamma_0 = \beta_0$; $\lambda_0 = \gamma_0 = \beta_0$, $l_0 = (-1)^n c_0 - b_0$, $\lambda_0 = \min[\beta_0 +$
$+ \alpha_1, 3\beta_0, 2\beta_0 + 1, \beta_1, \gamma_1]$.

Но в каждом конкретном случае эта работа не трудна. Если некоторое из разложений (1.10) имеет только один член, то следующий показатель степени в этом ряду надо считать бесконечно большим.

В случае в) может случиться, что $c_0 = \pm b_0$. Тогда корни надо разбить на 2 подпоследовательности по четным и нечетным n. Для одной из этих подпоследовательностей $(-1)^n c_0 - b_0 = 0$ и $\lambda_0 = \min(\beta_1, \gamma_1)$, если только не имеют место $\beta_1 = \gamma_1$ и $(-1)^n c_1 - b_1 = 0$. В последнем случае процесс для определения λ_0 в этой подпоследовательности корней продолжается таким же путем, за исключением случая, когда $f_2 \equiv \pm f_3$. Тогда эта подпоследовательность корней состоит из y_n (причем берутся только четные или нечетные значки).

В силу соотношения

$$F'(x) = \cos(x + \omega)(f_1 + f_2') + \sin(x + \omega)(f_1' - f_2) - f_3' \qquad (1.21)$$

подобным образом, как в (1.20), легко убедиться в том, что

$$F'\left(y_n + \sum_{j=0}^{k+1} \frac{l_j}{y_n^{\lambda_j}} + \frac{\theta}{y_n^{\lambda_{k+1}}}\right) = (-1)^n + o(1)$$

имеет место для всех целых $k \geqslant 0$ и любого фиксированного Θ. Тем самым показана справедливость формулы (1.16).

II. $\beta_0 = 0,\ \alpha_0, \gamma_0 > 0.$

Если сделать подстановку $\omega = \frac{\pi}{2} + \omega_1$, то уравнение приводится к предыдущему случаю. Имеем

$$y_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \omega. \qquad (1.22)$$

III. $\alpha_0 = \beta_0 = 0,\ \gamma_0 > 0.$ $\Phi(x) = \sin(x + \omega) + b_0 \cos(x + \omega)$.

Положим $b_0 = tg\,\varphi$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$y_n = n\pi - \omega - \varphi. \qquad (1.23)$$

Уравнение приводится к случаю I следующим образом:

$$F(x) = \sin(x + \omega + \varphi - \varphi) f_1 + \cos(x + \omega + \varphi - \varphi) f_2 - f_3 =$$
$$= \sin(x + \omega + \varphi)[\cos\varphi \cdot f_1 + \sin\varphi \cdot f_2] + \cos(x + \omega + \varphi)[-\sin\varphi \cdot f_1 +$$
$$+ \cos\varphi \cdot f_2] - f_3 = \sin(x + \omega + \varphi) g_1 + \cos(x + \omega + \varphi) g_2 - f_3.$$

Если уравнение (1.9) умножим на $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+b_0^2}}$, то

$$g_1 \sim \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{x^{\rho_k}}, \quad g_2 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{b}_k}{x^{\rho_k}},$$

причем $\bar{a}_0 = 1$, $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = \min[\alpha_1, \beta_1] > 0$.

IV. $\underline{\alpha_0 = \gamma_0 = 0,\ \beta_0 > 0.}$ $\Phi(x) = \sin(x+\omega) - c_0$.

Очевидно уравнение (1.12) имеет вещественные корни только тогда, когда $|c_0| \leqslant 1$. В случае $|c_0| = 1$ в (1.13) имеем $s = 2$, поэтому здесь предположим, что $|c_0| < 1$. Пусть $c_0 = \sin\psi$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$y_n = n\pi - \omega + (-1)^n \psi. \tag{1.24}$$

Дальше поступаем следующим образом:

$$\sin(y_n + s_n) = \sin\psi\cos s_n + (-1)^n \cos\psi \sin s_n,$$

$$\cos(y_n + s_n) = (-1)^n \cos\psi\cos s_n - \sin\psi\sin s_n,$$

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{\cos\psi} F(y_n+s_n) &= \sin s_n\,[f_1(y_n+s_n) - (-1)^n tg\,\psi\, f_2(y_n+s_n)] + \\ &+ \cos s_n\,[f_2(y_n+s_n) + (-1)^n tg\,\psi\, f_1(y_n+s_n)] - (-1)^n tg\,\psi - \\ &- (-1)^n \frac{1}{\cos\psi}[f_3(y_n+s_n) - c_0] = \sin s_n\, g_1(y_n+s_n) + \\ &+ [\cos s_n - 1]\, g_2(y_n+s_n) - g_3(y_n+s_n),\end{aligned}$$

где

$$g_1(x) \sim \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{x^{\rho_k}}, \quad g_2(x) \sim \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\bar{b}_k}{x^{\rho_k}}, \quad g_3(x) \sim \sum_{k=o}^{\infty} \frac{\bar{c}_k}{x^{\tau_k}},$$

причем

$$\bar{a}_0 = 1, \quad \rho_0 = 0, \quad \tau_0 = \min[\alpha_1, \beta_0, \gamma_1] > 0.$$

Дальнейшее нахождение λ_k и l_k происходит как в случае I, и с малым изменениями можно использовать уравнение (1.20). Таким же путем показывается справедливость формулы (1.16), где $A = \cos\psi \neq 0$.

V. $\underline{\beta_0 = \gamma_0 = 0,\ \alpha_0 > 0.}$

Если ввести подстановку $\omega = \frac{\pi}{2} + \omega_1$ и уравнение (1.9) разделить на $-b_0$, то уравнение приводится к случаю IV. Имеем условие разрешимости $|c_0| < |b_0|$. Полагая $\sin\psi_1 = -\frac{c_0}{b_0}$,

$$y_n = n\pi - \omega_1 + (-1)^n \psi_1. \tag{1.25}$$

VI. $\underline{\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0.}$

Полагая $b_0 = tg\,\varphi$ и выполняя преобразования, указанные в случае III, после умножения на $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+b_0^2}}$ получим случай IV. Условием разрешимости будет $|c_0| < \sqrt{1+b_0^2}$. Полагая $\sin\psi_2 = \frac{c_0}{\sqrt{1+b_0^2}}$,

$$y_n = n\pi - \omega - \varphi + (-1)^n \psi_2. \tag{1.26}$$

Этим исчерпываются все случаи, когда уравнение (1.12) имеет вещественные корни и $s = 1$. Тем самым теорема 1 доказана.

5. Далее рассмотрим случаи, когда $s = 2$. Имеет место

Теорема 2. Уравнение (1.9) при предположениях а) и б) и в случае, когда сокращенное уравнение (1.12) имеет корни вида (1.13), причем $s = 2$, имеет сколь угодно большие вещественные корни, имеющие асимптотическое представление (1.14), если формальной подстановкой (1.14) в (1.9) можно определить вещественные коэффициенты l_k. Каждому n в (1.13) соответствует 2 корня уравнения (1.9), т. е. имеем 2 подпоследовательности коэффициентов l_k.

Можно заметить, что кроме некоторых исключительных случаев, вещественность или невещественность коэффициентов выясняется уже при определении l_0 — если l_0 вещественное, то вещественны и дальнейшие l_k.

Доказательство. Значение $s = 2$ может появиться в случаях IV, V и VI, если $|c_0| = 1$ (IV), $|c_0| = |b_0|$ (V) или $|c_0| = \sqrt{1 + b_0^2}$ (VI). Во всех этих случаях справедливость формулы (1.15) уже установлена. Ниже мы покажем, что кроме некоторых исключительных случаев, существуют такие постоянные A и σ $(0 < \sigma < \lambda_1)$, независящие от k, m и Θ, что соотношение

$$F'\left(y_n + \sum_{j=0}^{k+m+1} \frac{l_j}{y_n^{\lambda_j}} + \frac{\Theta}{y_n^{\lambda_{k+1}}}\right) = \frac{A}{y_n^{\sigma}} + o\left(\frac{1}{y_n^{\sigma}}\right) = O\left(\frac{1}{y_n^{\sigma}}\right) \quad (1.27)$$

имеет место для любых целых $k, m \geqslant 0$ и вещественных Θ.

Если выбрать определенное k, то для него всегда можно найти такое m, что $\lambda_{k+m+1} - \lambda_{k+1} > \sigma$. Фиксируя такое m, мы точно так же как в (1.17) получаем

$$F\left(y_n + \sum_{j=0}^{k+m+1} \frac{l_j}{y_n^{\lambda_j}} \pm \frac{1}{y_n^{\lambda_{k+1}}}\right) = o\left(\frac{1}{y_n^{\lambda_{k+1}+\sigma}}\right) \pm O\left(\frac{1}{y_n^{\lambda_{k+1}+\sigma}}\right).$$

Дальнейшие рассуждения проводятся точно так же, как в теореме 1. Формула (1.27) показывает, что корни будут простыми.

В указанных исключительных случаях в формуле (1.27) либо для некоторых начальных значений, либо для всех значений k надо заменить $\dfrac{A}{y_n^{\sigma}}$ на $\dfrac{A\Theta}{y_n^{\lambda_{k+1}}}$. В первом случае для следующих значений k $\sigma < \lambda_{k+1}$. Но так как для каждого фиксированного k можно найти такое m, что $\lambda_{k+m+1} > 2\lambda_{k+1}$, то прежние заключения остаются в силе, кроме свойства кратности корней.

По поводу кратности корней будем судить следующим образом: Если формулу (1.27) надо видоизменить только для некоторых начальных значений k, то начиная с некоторого k мы можем фиксировать $\sigma \geqslant \lambda_1$ и A, и поэтому F' сохраняет знак в достаточно малой окрестности корня и тем самым F в этой окрестности монотонна. Значит, в первом случае опять имеем простой корень. Во втором случае мы не можем гарантировать, что F' сохраняет знак в окрестности корня, поэтому уравнение (1.9) может иметь кратные большие корни. Что такие случаи могут быть, показывает простое уравнение

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2},$$

для которого корни $x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ являются кратными.

Можно легко показать, что в общем случае уравнение (1.9) имеет кратные корни, если имеет место соотношение

$$f_1^2 + f_2^2 = f_3^2.$$

Нахождение этих корней в таком случае можно привести к решению уравнения типа (0.2):

$$tg\,(x + \omega) = -\frac{f_1}{f_2},$$

но практически ничем не хуже воспользоваться нашим приемом. Для коэффициентов l_k тогда имеем только одну подпоследовательность.

6. Как уже показано в п. 4, случаи V и VI приводятся к случаю IV. Поэтому будем более подробно анализировать случай IV, и в остальных случаях указывать только значения для y_n. Имеем $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$, $\beta > 0$, $|c_0| = 1$. Положим $c_0 = \operatorname{sign} c_0 = \varepsilon$. Тогда

$$y_n = 2\,n\pi - \omega + \varepsilon\frac{\pi}{2}. \tag{1.28}$$

Имея ввиду формулу (1.14), получаем

$$\sin(x + \omega) = \varepsilon\cos s_n\,; \quad \cos(x + \omega) = -\varepsilon\sin s_n\,;$$

$$F(y_n + s_n) = \varepsilon(\cos s_n - 1)\,f_1(y_n + s_n) - \varepsilon\sin s_n\,f_2(y_n + s_n) +$$
$$+ \varepsilon f_1(y_n + s_n) - f_3(y_n + s_n). \tag{1.29}$$

Подставляя в (1.29) соответствующие разложения, получаем выражение, похожие на выражения для F в (1.20). Введя обозначение $\varkappa_1 = \min(\alpha_1, \gamma_1)$, мы видим, что при определении λ_0 надо различать 3 подслучая: (а) $\beta_0 < \frac{\varkappa_1}{2}$; (б) $\beta_0 > \frac{\varkappa_1}{2}$; (в) $\beta_0 = \frac{\varkappa_1}{2}$. Рассмотрим эти случаи подробнее в отдельности.

(*а*) $\beta_0 < \frac{\varkappa_1}{2}$. Приравнивая показатели степени $\lambda_0 + \beta_0$ и $2\,\lambda_0$, имеем $\lambda_0 = \beta_0$, и для определения l_0 уравнение $l_0^2 + 2\,l_0\,b_0 = 0$, которое дает $l_0^{(1)} = -2b_0$, $l_0^{(2)} = 0$. Дальнейшие показатели степени и коэффициенты определяются уже известным путем. При определении λ_k надо приравнивать наибольший показатель степени y_n, который остается после определения λ_{k-1} и не содержит λ_k, соответствующему показателю степени ряда $-\varepsilon(l_0 + b_0)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{l_k}{y_n^{\lambda_0+\lambda_k}}$. Для первой подпоследовательности корней $l_0^{(1)} = -2b_0$, для второй $l_0^{(2)} = 0$, и в обоих случаях коэффициент в скобке при этой сумме не обращается в нуль. Так как в этом ряде l_k встречается только в первой степени, то все коэффициенты l_k вещественны. Следовательно, в случае (а) имеем сколь угодно большие вещественные корни.

Рассмотрим подробнее определение дальнейших коэффициентов для второй подпоследовательности корней. Имеем $l_0^{(2)} = 0$. Впрочем, это не противоречит нашему определению асимптотического ряда, ибо наше асимптотическое разложение имеет уже один член — y_n. Легко видеть, что $\lambda_1 = \varkappa_1 - \beta_0 > \beta_0$. Если в частном случае $a_1 = c_1 = 0$ (т. е. $f_1 \equiv 1$, $f_3 \equiv \varepsilon$), то имеем $l_k^{(2)} = 0\ (k \geqslant 1)$. Тогда уравнение (1.9) имеет в качестве одной подпоследовательности корней последовательность y_n, в чем легко убедиться также непосредственно.

Положим, что $a_1^2 + c_1^2 \neq 0$. Тогда $l_1^{(2)} \neq 0$, кроме случая, когда $\varkappa_1 = \alpha_1 = \gamma_1$, и $a_1 = \varepsilon c_1$. Но в этом частном случае вместо $\varkappa_1$ следует брать $\varkappa_2 = \min(\alpha_2, \gamma_2)$ и продолжать рассуждения подобным образом. В исключительном случае может быть, что при всех k имеем $a_k = \varepsilon c_k$, т. е. $f_1 \equiv \varepsilon f_3$. Тогда одна подпоследовательность корней опять будет y_n. Заметим, что при соотношении $f_1 = \varepsilon f_3$ всегда будем иметь случай (а).

Определение дальнейших показателей степени и коэффициентов происходит по обычной схеме. Так как $l_0^{(2)} = 0$, то мы могли бы заменить в этом асимптотическом разложении индекс суммирования k на $k - 1$. Любопытно, что разложения для обеих последовательностей корней начинаются с различных показателей степени.

Легко убедиться в том, что составляя $F'(x)$, в формуле (1.27) получим $\sigma = \lambda_0 < \lambda_1$.

(б) $\beta_0 > \frac{\varkappa_1}{2}$. λ_0 определяется из соотношения $2\lambda_0 = \varkappa_1$; $\lambda_0 = \frac{\varkappa_1}{2} < \beta_0$. Для l_0 получаем следующие формулы: если $\varkappa_1 = \alpha_1 < \gamma_1$, то $l_0 = \pm\sqrt{2a_1}$; если $\varkappa_1 = \gamma_1 < \alpha_1$, то $l_0 = \pm\sqrt{-2\varepsilon c_1}$; если $\varkappa_1 = \alpha_1 = \gamma_1$, то $l_0 = \pm\sqrt{-2(a_1 - \varepsilon c_1)}$. Очевидно, l_0 будет вещественным, если соответствующее подкоренное выражение будет положительным. Это и является добавочным и достаточным требованием для того, чтобы уравнение (1.9) имело большие вещественные корни. Это утверждение следует из того, что при определении дальнейших показателей степени используется ряд $-\varepsilon l_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_k}{y^{\lambda_0 + \lambda_k}}$, и поэтому коэффициенты l_k $(k > 0)$ будут вещественными.

Подкоренное выражение может равняться нулю только при $\varkappa_1 = \alpha_1 = \gamma_1$, и $a_1 = \varepsilon c_1$. Тогда надо сравнить величины $\rho = \min(\beta_0, \alpha_1 + 1, \gamma_1 + 1)$ и $\frac{1}{2}\varkappa_2 = \frac{1}{2}\min(\alpha_2, \gamma_2)$ точно так же, как мы в начале сравнивали β_0 и $\frac{\varkappa_1}{2}$. Здесь снова может получиться либо случай (а), либо (б), либо (в), и в каждом из этих случаев тогда дальше надо поступать согласно нашему анализу для этого случая. Частный случай $f_1 \equiv \varepsilon f_3$ относится, как уже сказано, к случаю (а).

Составляя $F'(x)$, в формуле (1.27) имеем $\sigma = \lambda_0$.

(в) $\beta = \frac{\varkappa_1}{2}$. Имеем $\lambda_0 = \beta_0 = \frac{\varkappa_1}{2}$. Для l_0 получаем следующие формулы: если $\varkappa_1 = \alpha_1 < \gamma_1$, то $l_0 = -b_0 \pm \sqrt{b_0^2 + 2a_1}$; если же $\varkappa_1 = \gamma_1 < \alpha_1$, то $l_0 = -b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 2\varepsilon c_1}$; а если $\varkappa_1 = \alpha_1 = \gamma_1$, то $l_0 = -b_0 \pm \sqrt{b_0^2 + 2(a_1 - \varepsilon c_1)}$. Положительные подкоренные выражения и здесь обеспечивают существование сколь угодно больших вещественных корней, ибо также как в случае (а), здесь при определении дальнейших показателей степени решающую роль играет ряд $-\varepsilon(l_0 + b_0)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_k}{y_n^{\lambda_0 + \lambda_k}}$.

Определение дальнейших коэффициентов усложняется, если подкоренное выражение равно нулю. Тогда $l_0 = -b_0$, и исчезнут те члены, которые до сих пор определяли дальнейшие λ_k. Если $\varkappa_1 = \alpha_1$, то для определения λ_1 надо сравнить $\rho = \min(2\beta_0 + 1, \beta_1)$ и $\frac{1}{2}\varkappa_2 = \frac{1}{2}\min(3\beta_0 + 1, \beta_0 + \beta_1, \alpha_2, \gamma_1)$ точно так же, как мы раньше сравнили β_0 и $\frac{1}{2}\varkappa_1$, и, следовательно, при определении дальнейших коэффициентов мы можем опять иметь один из случаев (а), (б) или (в). В каждом из этих случаев обычно l_1 будет иметь 2 значения (назовём это нормальным случаем). Тогда каждому n будет соответствовать 2 корня. Для вещественности полученных l_1 будем иметь соответствующее условие, которое будет и достаточным для вещественности корней уравнения (1.9).

Могут быть еще дальнейшие усложнения. Это тогда, когда имеем либо случай (б), либо (в), и подкоренное выражение опять обращается в нуль. Тогда либо λ_1 еще не определено (случай (б)), либо имеем только одно λ_1 (случай (в)). Но как в первом, так и во втором случае приходится выполнить дальнейшие сравнения, и вопрос о вещественности всех коэффициентов еще не решен. В общем тогда дальше имеются 2 возможности — *либо на некотором шаге получаем нормальный случай, и тем самым* решается вопрос о существовании больших корней, либо исключительный случай продолжается неограниченно. Тогда имеем вещественные кратные корни.

Если $\varkappa_1 = \gamma_1$, то в выражении для $\varkappa_2$ надо поменять местами буквы α и γ, а в случае $\varkappa_1 = \gamma_1 = \alpha_1$ надо заменить γ_1 на γ_2; ρ во всех случаях остается таким же. Можно заметить, что при $\varkappa_1 = \alpha_1 = \gamma_1$ и $a_1 = \varepsilon c_1$ мы фактически имеем случай (а), ибо β_0 надо сравнить с $\varkappa_2 = \min(\alpha_2, \beta_2)$, но $\beta_0 = \frac{\varkappa_1}{2} < \frac{\varkappa_2}{2}$.

Составляя $F'(x)$, в формуле (1.27) в нормальном случае имеем $\sigma = \lambda_1$. Из уже сказанного об исключительном случае видно, что тогда для $F'(x)$ могут получиться разные оценки. Если после конечного числа шагов установится нормальный случай и все коэффициенты вещественны, то мы можем фиксировать $\sigma \geqslant \lambda_1$, в противном случае для $F'(x)$ при всех значений k надо довольствоваться оценкой $O\left(\frac{1}{y_n^{\lambda_k+1}}\right)$.

Уже сказано, что случаи V и VI приводятся к случаю IV. Тем самым теорема 2 доказана.

В случае V, полагая $b_0 = \varepsilon c_0$ $(\varepsilon = \pm 1)$, имеем

$$y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon) - \omega,$$

а в случае VI, полагая $c_0 = \varepsilon\sqrt{1 + b_0^2}$ и $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + b_0^2}}$,

$$y_n = 2n\pi - \omega - \varphi + \varepsilon\frac{\pi}{2}.$$

В заключение этого параграфа отметим, что подобным образом можно исследовать различные другие уравнения. Например, можно рассмотреть более общее уравнение

$$\sin(x + \omega) f_1(x) + \cos(\alpha x + \omega) f_2(x) = f_3(x),$$

а также уравнение, в котором функции $f_i(x)$ разлагаются в асимптотические ряди вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{e^{\lambda_k x}}$. Эти уравнения подробно исследованы в дипломной работе В. Баркана.

§ 2.

1. Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для уравнения

$$L(v) \equiv v'' + [\lambda^2 x^\alpha + x^\beta g(x)]\, v = 0 \tag{2.1}$$

при условиях

$$v(o) = v(r) = 0, \tag{2.2}$$

где $\alpha > -2$, $\beta \geqslant -1$, $g(x)$ — в $[0, r]$ аналитическая функция. Можно заметить, что к такому уравнению при помощи подстановки приводится более общее уравнение

$$y'' + [\lambda^2 t^\alpha \varphi^2(t) + \psi(t)]\, y = 0. \qquad (\varphi > 0)$$

При $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задачи впервые были получены Горном [3]. Их можно получить в качестве частного случая также из более общих разложений для интегродифференциального уравнения [4]. При $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ асимптотическое разложение для решений уравнения (2.1) получили Лейнджер [8] и Черри [9], а в случае $\alpha = 2$ — Мак Кельви [10].

Сначала выясним, как далеко можно распространить метод Лейнджера на уравнению (2.1), и влияет ли каким-либо образом на исследование показатель степени β. Потом выберем соответствующие значения для α и β.

Для этого возьмем функции

$$\eta_i(x, \lambda) = U_i(x, \lambda) \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{2k}(x)}{\lambda^{2k}} + U_i'(x, \lambda) \sum_{k=0}^{n} \frac{B_{2k}(x)}{\lambda^{2k+2}} \quad (i = 1,2), \tag{2.3}$$

где обозначено $\mu = \dfrac{2}{\alpha + 2}$, $U_1 = \dfrac{\mu}{2} \sqrt{x}\, J_{\frac{\mu}{2}}\left(\lambda \mu x^{\frac{1}{\mu}}\right)$, $U_2 = \pi \sqrt{x}\, Y_{\frac{\mu}{2}}\left(\lambda \mu x^{\frac{1}{\mu}}\right)$,

составим $L(\eta_i)$ и выберем функции A_{2k} и B_{2k} так, чтобы имело место

$$L(\eta_i) = o\left(\frac{1}{\lambda^{2n}}\right). \tag{2.4}$$

Используя эту оценку, мы потом покажем, что в соотношении

$$v_i(x, \lambda) = \eta_i(x, \lambda) + z_i(x, \lambda) \tag{2.5}$$

имеет место

$$z_i(x, \lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^{2n}}\right) \tag{2.6}$$

и тем самым, заменяя в (2.3) n на ∞, мы получим асимптотические разложения для $v_i(x, \lambda)$. Потом уже весьма просто получить асимптотическое разложение для собственных значений.

При составлении $L(\eta_i)$ надо учесть, что $U_i(x, \lambda)$ являются линейно независимыми частными решениями уравнения [11]

$$U'' + \lambda^2 x^\alpha U = 0. \tag{2.7}$$

Тогда получим

$$L(\eta_i) = U_i \sum_{k=0}^{n} [-2 B_{2k}' x^\alpha + A_{2k}'' - \alpha x^{\alpha-1} B_{2k} + A_{2k} x^\beta g(x)] \frac{1}{\lambda^{2k}} +$$

$$+ U_i' \sum_{k=0}^{n} \left[2 A_{2k}' + \frac{1}{\lambda^2} (B_{2k}'' + B_{2k} x^\beta g(x))\right] \frac{1}{\lambda^{2k}}. \tag{2.8}$$

Отсюда следует:

$$A_0 \equiv 1,\ B_0(x) = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^x g(t)\, t^{\beta - \frac{\alpha}{2}}\, dt,$$

$$A_{2k}(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x [B''_{2k-2}(t) + t^{\beta} g(t)\, B_{2k-2}(t)]\, dt, \tag{2.9}$$

$$B_{2k}(x) = \frac{1}{2}\, x^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^x [A''_{2k}(t) + A_{2k}(t)\, g(t)\, t^{\beta}]\, t^{-\frac{\alpha}{2}}\, dt.$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Если ввести обозначение

$$\delta = \beta + 1 - \alpha,$$

то $B_0 = O(x^{\delta})$, причем для сходимости интеграла в B_0 необходимо $\delta + \frac{\alpha}{2} > 0$. Далее при $x \to 0$ имеем $A_{2k} = O(x^{\delta-(2k-1)-(k-1)\alpha})$, $B_{2k} = O(x^{\delta-k(2+\alpha)})$, если показатели степени не являются целыми. Отсюда видно, что при достаточно большом k показатели степени станут отрицательными, следовательно B_{2k} станут неограниченными в окрестности $x = 0$. Поэтому показатели степени в оценках для A_{2k} и B_{2k} необходимо должны быть целыми. Но легко видеть, что при всех k это будет иметь место только тогда, когда δ и α целые (причем $\delta \geqslant 0$), следовательно целым должно быть и β.

Далее легко видеть, что при $\beta = -1$ можем брать только $\alpha = -1$, так как в противном случае получаются расходящиеся интегралы. Если $\beta \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant 2$, то при некотором k имеем $B_{2k} = O(1)$ или же $B_{2k} = O(x)$. Тогда $A_{2k+2} = O(x)$, а для B_{2k+2} получается расходящийся интеграл. Отсюда видно, что мы можем брать только значения $\alpha = -1,\ 0,\ 1$, причем в последних двух случаях надо брать $\beta \geqslant 0$. Очевидно, достаточно брать $\beta = 0$, так что $\beta = -1{,}0$. Этим и исчерпываются все возможности построения асимптотического разложения вида (2.3) для решений уравнения (2.1).

В случае $\alpha = -1$, $\beta = -1$ уравнение (2.1) можно переписать в форме

$$v'' + [\lambda_1^2 x^{-1} + g_1(x)]\, v = 0,$$

где

$$\lambda_1^2 = \lambda^2 + g(o),\quad g_1(x) = x^{-1}[g(x) - g(o)],$$

так что этот случай приводится к случаю $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Поэтому окончательно следует брать только $\beta = 0$, как мы и будем впредь делать. Это надо учесть и при использовании формул (2.9). Как видно, введение множителя x^{β} не расширило круга исследуемых задач.

По сравнению с уже известными разложениями новые результаты у нас получатся только при $\alpha = -1$, но кроме того у нас все три разложения получатся совместно и более просто, чем в цитированных работах. Следует отметить, что при $\alpha = 2$ Мак-Кельви применил другие эталонные функции, поэтому в этом случае нет противоречия с нашими исследованиями.

Еще некоторые новые возможности появляются для уравнения

$$L_1(u) \equiv u'' + [\lambda^2 t^{\alpha_0} + at^{-2} + bt^{-1} + h(t)]\, u = 0 \tag{2.10}$$

при весьма частных значениях a и α_0:

$$a = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{и} \quad \alpha_0 = \frac{i}{n} - 2 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ n \text{ — натуральное}).$$

Тогда при помощи подстановки

$$t = x^n,\ u(t) = v(x)\, x^{\frac{n-1}{2}}$$

получим уравнение (2.1), в котором λ надо заменить на $n\lambda$ и $\alpha = (2 + \alpha_0)\, n - 2$.

2. Если в (2.8) подставим выражения (2.9), то легко убедиться, что при указанных значениях

$$\alpha = -1,\ 0,\ 1; \qquad \beta = 0 \tag{2.11}$$

$$L(\eta_i) = \frac{U_i'}{\lambda^{2n+2}}\,[B_{2k}'' + B_{2k}\, g] = \frac{U_i'}{\lambda^{2n+2}}\,\rho(x) = O\left(\frac{1}{\lambda^{2n+2}}\right) U_i'. \tag{2.12}$$

Отсюда видно, что η_i удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$\eta_i(x, \lambda) = U_i(x, \lambda) - \frac{1}{\lambda^{2n+2}} \int\limits_0^x K(x, \tau, \lambda)\, \rho(\tau)\, U_i'(\tau, \lambda)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^x K(x, \tau, \lambda)\, g(\tau)\, \eta_i(\tau, \lambda)\, d\tau, \quad (i = 1,2) \tag{2.13}$$

где

$$K(x, \tau, \lambda) = U_1(\tau, \lambda)\, U_2(x, \lambda) - U_1(x, \lambda)\, U_2(\tau, \lambda). \tag{2.14}$$

В силу (2.1) функции $v_i(x, \lambda)$ удовлетворяют уравнениям

$$v_i(x, \lambda) = U_i(x, \lambda) + \int\limits_0^x K(x, \tau, \lambda)\, v_i(\tau, \lambda)\, g(\tau)\, d\tau. \quad (i = 1,\ 2) \tag{2.15}$$

Но тогда согласно формулам (2.5), (2.13) и (2.15) легко видеть, что функции $z_i(x, \lambda)$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$z_i(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^{2n+2}} \int\limits_0^x K(x, \tau, \lambda)\, \rho(\tau)\, U_i'(\tau, \lambda)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^x K(x, \tau, \lambda)\, g(\tau)\, z_i(\tau, \lambda)\, d\tau. \qquad (i = 1,\ 2) \tag{2.16}$$

Легко убедиться в том, эчто эталонные функции U_i для всех $\lambda \geqslant Л > o$ и $x \in [0,\ r]$ имеют оценки

$$|U_1| < \sqrt{t},\ |U_2| < M,\ |U_i'| < \lambda^{\varkappa} M \quad (i = 1,\ 2),$$

где $\varkappa = \max\left(\frac{\mu}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а M означает фиксированную постоянную.

Поэтому, если будем искать решение уравнения (2.16) в виде ряда

$$z_i(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_{ik}(x, \lambda), \tag{2.17}$$

где

$$\zeta_{io}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^{2n+2}} \int_0^x K(x, \tau, \lambda)\, \rho(\tau)\, U_i'(\tau, \lambda)\, d\tau,$$

$$\zeta_{ik}(x, \lambda) = \int_0^x K(x, \tau, \lambda)\, g(\tau)\, \zeta_{i,k-1}(\tau, \lambda)\, d\tau,$$

$$(i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots)$$

то ряды имеют мажоранту

$$\frac{x^{3/2} M_1}{\lambda^{2n+2-\varkappa}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2 M_2 x^{3/2})^k}{\left(\frac{5}{2}\right)^k k!}, \tag{2.18}$$

что доказывает возможность разложения (2.17).

Так как при наших значениях α $\mu \leqslant 2$, то очевидно

$$z_i(x, \lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^{2k}}\right). \qquad (i = 1, 2)$$

Тем самым показана справедливость соотношения

$$v_i(x, \lambda) = U_i(x, \lambda) \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{2k}(x)}{\lambda^{2k}} + U_i'(x, \lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{2k}(x)}{\lambda^{2k+2}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{2n}}\right) \tag{2.19}$$

для всех $n \geqslant 0$ (при $n = 0$ вторая сумма отпадает).

3. Уравнение (2.15) показывает, что

$$v_i(0, \lambda) = U_i(0, \lambda). \quad (i = 1, 2)$$

Поэтому первому граничному условию удовлетворяет только функция $v_1(x, \lambda)$. Второе граничное условие дает уравнение для определения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля. Если $v_1(x, \lambda)$ переписать в форме

$$v_1(x, \lambda) = U_1(x, \lambda)\, A(x, \lambda) + U_1'(x, \lambda)\, B(x, \lambda), \tag{2.20}$$

то второе условие дает

$$U_1(r, \lambda)\, A(r, \lambda) + U_1'(r, \lambda)\, B(r, \lambda) = 0. \tag{2.21}$$

Но функции $U_1(r, \lambda)$ и $U_1'(r, \lambda)$ при больших λ имеют следующие асимптотические разложения:

$$U_1(r, \lambda) = \frac{\mu}{2} \sqrt{r}\, J_{\frac{\mu}{2}}\left(\lambda \mu\, r^{\frac{1}{\mu}}\right) \sim \mu \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[\cos\left(\lambda a - \right.\right.$$

$$- \frac{(\mu+1)}{4}\pi\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\mu}{2}, 2k\right)}{2^{2k}(a\lambda)^{2k+\frac{1}{2}}} - \sin(\lambda a -$$

$$- \frac{(\mu+1)\pi}{4}\Big)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\mu}{2}, 2k+1\right)}{2^{2k+1}(a\lambda)^{2k+\frac{3}{2}}}\Bigg],$$

$$U_1'(r, \lambda) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\Bigg\{\sin\left(\lambda a - \frac{\mu+1}{4}\pi\right)\Bigg(\sqrt{\lambda a} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(\lambda a)^{2k+\frac{3}{2}}}\frac{1}{2^{2k+2}}\Bigg[\left(\frac{\mu}{2}, 2k+2\right) +$$

$$+ \left(\frac{\mu}{2}, 2k+1\right)(4k+3-\mu)\Bigg]\Bigg) + \cos\Bigg(\lambda a -$$

$$- \frac{\mu+1}{4}\pi\Bigg)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(\lambda a)^{2k+\frac{1}{2}}}\frac{1}{2^{2k+1}}\left[\left(\frac{\mu}{2}, 2k+1\right) + \left(\frac{\mu}{2}, 2k\right)(4k+1-\mu)\right]\Bigg\},$$

где

$$a = \mu r^{\frac{1}{\mu}},\ (\nu, k) = \frac{(4\nu^2-1)\ldots[4\nu^2-(2k-1)^2]}{4^k k!},\ (\nu, 0) = 1.$$

Поэтому уравнение (2.21) после умножения на $\frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2\pi a\lambda}{r}}$ приводится к виду

$$\sin\left(\lambda a - \frac{\mu-1}{4}\pi\right) f_1(\lambda a) + \cos\left(\lambda a - \frac{\mu-1}{4}\pi\right) f_2(\lambda a) = 0, \quad (2.22)$$

где

$$f_1(\lambda a) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}}{(\lambda a)^{2k}},\quad f_2(\lambda a) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\frac{D_{2k+1}}{(\lambda a)^{2k+1}},\quad (C_0 = 1)$$

но это наше уравнение (1.9) в случае I, если положить $\gamma_0 = \infty$.

Отсюда

$$y_n = \frac{\pi}{a}\left[\frac{\mu-1}{4} + n\right] = \frac{\pi}{\mu r^{\frac{1}{\mu}}}\left[\frac{\mu-1}{4} + n\right] \quad (2.23)$$

и

$$\lambda_n \sim y_n + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{l_k}{y_n^{2k+1}}, \quad (2.24)$$

причем

$$l_0 = -\left[\frac{1}{8}(\mu^2-1) + \frac{a^2}{\mu r}B_0(r)\right],$$

$$l_1 = -\Bigg\{\frac{1}{3}l_0^3 + l_0^2 + l_0\Bigg[A_2(r)a^2 - \frac{1}{128}(\mu^2-1)(\mu^2-9) -$$

$$- \frac{a^2}{4\mu r}\left(\frac{1}{4}\mu^2 - \mu + \frac{3}{4}\right)B_0(r)\Bigg] + \frac{a^4}{\mu r}B_2(r) + \frac{a^2}{8}(\mu^2-1)A_2(r) -$$

$$- \frac{1}{3072}(\mu^2-1)(\mu^2-9)(\mu^2-25) - \frac{a^2}{16\mu r}(\mu^2-1)\left[\frac{1}{8}(\mu^2-9) + 3 - \mu\right]B_0(r)\Bigg\}. \quad (2.25)$$

Практически в конкретных случаях более удобно сначала определить численные значения некоторых первых коэффициентов C_{2k} и D_{2k+1} и только потом определять значения чисел l_k.

Из наших прежних рассуждений видно, что при $\alpha \neq 0, \pm 1$ асимптотическое разложение вида (2.19) для решений уравнения (2.1) получить невозможно. Но зато для решений этого уравнения при всех $\alpha > -2$, как это показано в работе А. А. Дородницына [12], при граничных условиях (2.2) имеем

$$\lambda_n = y_n + o(1). \tag{2.26}$$

Используя асимптотические оценки, полученные в другой работе автора [11], можно показать, что асимптотическая оценка (2.26) сохраняется и для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля в случае более общего уравнения

$$v'' + [(\lambda^2 x^\alpha + ax^{-2} + x^{2\beta-2} g(x)] v = 0, \tag{2.27}$$

где $\alpha > -2$, $a \leqslant \frac{1}{4}$, $\nu = \frac{\mu}{2} \sqrt{1-4a}$, $\beta > 0, g(x)$ — непрерывная функция, если условие $v(o)=0$ заменить на условие $v(x) = O\left(x^{\frac{\nu}{\mu}+\frac{1}{2}}\right)$ при $x \to 0$ и в формуле (2.23) заменить $\frac{\mu-1}{4}$ на $\frac{2\nu-1}{4}$. При дополнительных ограничениях относительно параметров и функции $g(x)$ можно получить и более точную оценку остаточного члена.

Очевидно, подобным образом можно найти асимптотическое представление собственных значений и в случае других граничных условий.

4. Рассмотрим еще в качестве примера асимптотические разложения для корней некоторых трансцендентных уравнений, встречающиеся в математической физике. Вычисления для этих уравнений частично выполнили В. Барканс и А. Станкевича.

При исследовании колебаний пластинок встречаются частные случаи уравнений

$$J'_{\nu+2m}(x) - \nu J_\nu(x) = 0, \tag{2.28}$$

$$J_\nu(x) I_\mu(x) + J_{\nu+2m+1}(x) I_\varkappa(x) = 0, \tag{2.29}$$

$$J_\nu(x) I'_\mu(x) - J'_\nu(x) I_\mu(x) = 0. \tag{2.30}$$

Если в этих уравнениях вместо бесселевых функций поставить их асимптотические разложения, то получим уравнение типа (1.9), причем во всех случаях $f_3 \equiv 0$. Поэтому для асимптотического представления корней этих уравнений можно было применить и метод Стокса, но практически выгоднее для этих уравнений применить наш метод.

Во всех этих уравнениях

$$\lambda_k = k + 1.$$

Для (2.28), вводя обозначение $\nu = tg\,\varphi$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, имеем

$$y_n = \pi\left(n + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}\right) - (-1)^m \varphi,$$

$$l_0 = -\frac{1}{2} \frac{1 + (\nu + 2m, 1) + \nu^2 (\nu, 1)}{1 + \nu^2},$$

$$l_1 = \frac{(-1)^m \nu}{2(1+\nu^2)} \Big\{ l_0 [(\nu, 1) + (\nu + 2m, 1) + 1] + \frac{1}{2} [(\nu, 2) - (\nu + 2m, 2) -$$

$$- 3(\nu + 2m, 1)] \Big\}.$$

В случае $\nu = 0$ получаем разложение Мак-Магона [2], и $l_{2k+1} = 0$.

Для (2.29) имеем

$$y_n = \pi \left(n + \frac{m+\nu}{2} + 1 \right),$$

$$l_0 = \frac{1}{4} \{ (-1)^m [(\mu, 1) - (\varkappa, 1)] - [(\nu, 1) + (\nu + 2m + 1, 1)] \},$$

$$l_1 = \frac{1}{4} l_0 \{ (\mu, 1) + (\varkappa, 1) - (-1)^m [(\nu + 2m + 1, 1) - (\nu, 1)] \} +$$

$$+ \frac{1}{8} \{ (\nu + 2m + 1, 1) (\varkappa, 1) + (\mu, 1) (\nu, 1) + (-1)^m [(\varkappa, 2) + (\nu, 2) -$$

$$- (\mu, 2) - (\nu + 2m + 1, 2)] \}.$$

Если в частном случае при $\nu = 0$, $\mu = \varkappa = 1$, $m = 0$ по полученным формулам, используя также значение для l_2, вычислить численные значения некоторых первых корней уравнения (2.29) и сравнить их со значениями, полученными интерполированием из таблиц функций Бесселя [13], то имеем следующую таблицу:

n	Асимпт.	Табл.
0	3,19605	3,1961
1	6,30645	6,3064
2	9,43950	9,4395
3	12,57651	12,577
4	15,71601	15,716

Это сравнение показывает, что для данного уравнения (и, очевидно, иногда и для других уравнений) полученные асимптотические формулы с достаточной точностью можно успешно применить для нахождения первых корней.

Для уравнения (2.30) имеем

$$y_n = \pi \left(n + \frac{\nu}{2} + 1 \right),$$

$$l_0 = -\frac{1}{2} (\nu, 1), \quad l_1 = -\frac{1}{4} [(\nu, 1) + (\mu, 1)].$$

В частном случае $\nu = \mu = 0$ мы, очевидно, получаем предыдущий численный пример.

20 I 1959 *Кафедра общей математики*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *G. G. Stokes.* On the numerical calculation of a class of definite integrals and infinite series. Cambr. Phil. Trans. 1856, 9, 166—187.

[2]. *J. Mac-Mahon.* On the roots of the Bessel and certain related functions. Ann. of Math. 1894/5, 9, 23—30.

[3]. *J. Horn.* Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter. Math. Annalen, 1899, 52, 271—292.

[4]. *Э. Риекстыньш* и *Р. Золберга.* Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля для одного интегро-дифференциального уравнения при больших значениях параметра. Ученые записки ЛГУ, 1959, 28, вып. 4, 87—94.

[5]. *E. Borel.* Leçons sur les séries divergentes. Paris. 1928, 24—32.

[6]. *K. Knopp.* Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin. 1931, 554—561.

[7]. *Г. М. Фихтенгольц.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. Гостехиздат, Москва, 1948, 820—826.

[8]. *R. E. Langer.* The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. Trans. Am. Math. Soc., 1949, 67, 461—490.

[9]. *T. M. Cherry.* Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. Trans. Am. Math. Soc., 1950, 68, 224—257.

[10]. *R. W. Mac Kelvey.* The solutions of second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two. Trans. Am. Math. Soc., 1955, 79, 103—123.

[11]. *Э. Я. Риекстыньш.* О методе эталонных функций. Ученые записки ЛГУ, 1958, 20, вып. 3, 65—86.

[12]. *А. А. Дородницын.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. УМН, 1952, 7, вып. 6, 3—96.

[13]. *H. Carrington.* The frequencies of vibration of flat circulare plates fixed at the circumference. Phil. Mag., 1925, 50 (6), 1261—1264.

DAŽU TRANSCENDENTU VIENĀDOJUMU REĀLO SAKŅU ASIMPTOTISKIE ATTĪSTĪJUMI

E. Riekstiņš

(Kopsavilkums)

Darbā pētīti gadījumi, kad vienādojumam (0.1) ir bezgalīgi daudz reālu sakņu. Pētījumu rezultātus izsaka 1. un 2. teorēmas. Reizē ar to dota formāla metode vienādojuma sakņu asimptotisko attīstījumu atrašanai. Šī metode atšķirās no līdz šim pazīstamās Stoksa metodes un ir vienkāršāka par to. Stoksa metode bez tam ir derīga tikai gadījumā, kad $f_3 \equiv 0$.

Darbs otrā paragrafā noskaidrots, kādos gadījumos vienādojuma (2.1) atrisinājumam var atrast asimptotisku attīstījumu, lietojot cilindriskās funkcijas. Tālākā gaitā atrasts attiecīgais asimptotiskais attīstījums (2.19), un to izlietojot parādīts, kā konstruēt Šturma — Liuvila problēmas īpašvērtību asimptotisko attīstījumu. Apskatīti arī dažu citu transcendentu vienādojumu sakņu asimptotiskie attīstījumi.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПАРАМЕТРА

Э. РИЕКСТЫНЬШ и Р. ЗОЛБЕРГА

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$(py')' + (\lambda^2 r - q)\, y = \int_a^x G(x, \xi)\, y(\xi, \lambda)\, d\xi \tag{0.1}$$

при условиях

$$y(a, \lambda) = 0, \quad y(b, \lambda) = 0, \tag{0.2}$$

причем $p(x)$, $r(x)$, $q(x)$ — В $[a, b]$ сколь угодно раз дифференцируемые функции, $p(x) > 0$, $r(x) > 0$, а $G(x, \xi)$ — в квадрате $x \in [a, b]$, $\xi \in [a, b]$ сколь угодно раз дифференцируема по x и ξ.

При помощи подстановки

$$t = \int_a^x \sqrt{\frac{r(\tau)}{p(\tau)}}\, d\tau, \quad u = \sqrt[4]{p(x)\, r(x)}\, y \tag{0.3}$$

задача приводится к решению уравнения

$$L(u) \equiv u'' + [\lambda^2 - \omega(t)]\, u - \int_0^t K(t, \tau)\, u(\tau, \lambda)\, d\tau = 0 \tag{0.4}$$

при условиях

$$u(0, \lambda) = 0, \; u(l, \lambda) = 0, \tag{0.5}$$

где $l = \int_a^b \sqrt{\frac{r}{p}}\, d\tau$, а функции $\omega(t)$ и $K(t, \tau)$ при $t \in [0, l]$, $\tau \in [0, l]$ также имеют вышеуказанное свойство дифференцируемости.

В настоящей статье исследуются асимптотические разложения собственных функций и собственных значений уравнения (0.4) при условиях (0.5) для больших значений параметра λ. Можно отметить, что условия типа (0.2) взяты ради простоты изложения. Подобным образом можно было исследовать случай общих граничных условий Штурма-Лиувилля.

1. Уравнение (0.4) с учетом условия $u(0, \lambda) = 0$ приводим к эквивалентному интегральному уравнению

$$u(t, \lambda) = A \sin \lambda t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sin \lambda (t - \tau)\, \omega(\tau)\, u(\tau, \lambda)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sin \lambda (t - \tau)\, d\tau \int_0^\tau K(\tau, z)\, u(z, \lambda)\, dz. \tag{1.1}$$

В дальнейшем удобно выбрать $A = \frac{\alpha}{\lambda}$ $(\alpha \neq 0)$. Если уравнение разделить на α, и вместо $\frac{u}{\alpha}$ ввести новую функцию, которую опять обозначим через u, то получаем уравнение

$$u(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{t} \sin \lambda (t-\tau)\, \omega(\tau)\, u(\tau, \lambda)\, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \int_{0} \sin \lambda (t-\tau)\, d\tau \int_{0}^{\tau} K(\tau, z)\, u(z, \lambda)\, dz. \tag{1.2}$$

Очевидно, функция $u(t, \lambda)$ удовлетворяет условию

$$u'(0, \lambda) = 1. \tag{1.3}$$

Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле и вводя обозначение

$$K^*(t, \tau, \lambda) = \sin \lambda (t-\tau)\, \omega(\tau) + \int_{\tau}^{t} K(z, \tau) \sin \lambda (t-z)\, dz, \tag{1.4}$$

приводим уравнение (1.2) к стандартному уравнению типа Вольтерра:

$$u(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{t} K^*(t, \tau, \lambda)\, u(\tau, \lambda)\, d\tau. \tag{1.5}$$

Из общей теории интегральных уравнений следует, что уравнение (1.5) для каждого λ имеет единственное решение, которое разлагается в ряд

$$u(t, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}}\, u_n(t, \lambda), \tag{1.6}$$

причем функции $u_n(t, \lambda)$ можно задавать либо при помощи рекуррентных соотношений, либо при помощи повторных ядер.

2. Ряд (1.6) в то же время дает уже асимптотическое представление решения $u(t, \lambda)$ при больших λ. Но ввиду сложной зависимости функций $u_n(t, \lambda)$ от λ, для исследования собственных значений этот ряд не весьма удобен. Интегрируя по частям выражения для $u_n(t, \lambda)$, можно было получить асимптотические представления для функций u_n, но это приводит к весьма громоздким выражениям. Впрочем, так поступил Горн [1] в случае дифференциального уравнения, когда $K \equiv 0$. Проще всего пользоваться методом эталонных функций, как это делает Лейнджер [2] в случае $K \equiv 0$. Надо отметить, что этот метод имеется уже у Горна, но для доказательства асимптотического характера полученного разложения Горн его сопоставляет с первым методом, что потребует громоздкого математического аппарата.

Возьмем функцию

$$v(t, \lambda) = \sin \lambda t \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2k-1}(t)}{\lambda^{2k+1}} + \cos t \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_{2k}(t)}{\lambda^{2k}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_{2k}(t)}{\lambda^{2k}} \tag{2.1}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

и выберем функции $\varphi_k(t)$ и $\psi_{2k}(t)$ так, чтобы $L(v)$ при больших λ по возможности меньше отличался от нуля. Кроме того потребуем

$$v(0, \lambda) = 0, \quad v'(0, \lambda) = 1. \tag{2.2}$$

Подставим (2.1) в (0.4) и применим следующие формулы

$$\int_0^t \cos\lambda\tau f(\tau)\,d\tau = \sin\lambda t \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{\lambda^{2i+1}} f^{(2i)}(t) + \cos\lambda t \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda^{2i}} f^{(2i-1)}(t) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{\lambda^{2i}} f^{(2i-1)}(0) + \frac{(-1)^n}{\lambda^{2n}} \int_0^t \cos\lambda\tau f^{(2n)}(\tau)\,d\tau,$$

$$\int_0^t \sin\lambda\tau f(\tau)\,d\tau = \sin\lambda t \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{\lambda^{2i+2}} f^{(2i+1)}(t) + \cos\lambda t \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{\lambda^{2i+1}} f^{(2i)}(t) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i f^{(2i)}(0)}{\lambda^{2i+1}} + \frac{(-1)^n}{\lambda^{2n+1}} \int_0^t \cos\lambda\tau f^{(2n+1)}(\tau)\,d\tau,$$

полученные интегрированием по частям.

Тогда, вводя обозначение

$$H_{j,\,2k}(t,\tau) = \frac{\partial^j}{\partial\tau^j}\left[K(t,\tau)\varphi_{2k}(\tau) + \frac{\partial}{\partial\tau}K(t,\tau)\,\varphi_{2k-1}(\tau)\right], \tag{2.3}$$

имеем

$$L(v) = \sin\lambda t\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{2k-1}}(\varphi''_{2k-1} - 2\varphi'_{2k} - \omega\varphi_{2k-1}) -\right.$$
$$\left. - \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^i}{\lambda^{2i+2k+1}} H_{2i,\,2k}(t,t)\right] + \cos\lambda t\left[2\varphi'_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{2k}}(\varphi''_{2k} +\right.$$
$$+ 2\varphi'_{2k+1} - \omega\varphi_{2k}) + \frac{1}{\lambda^{2n}}(\varphi''_{2n} - \omega\varphi_{2n}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda^{2k}}\varphi_{2k-1}K(t,t) -$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{\lambda^{2i+2k}} H_{2i-1,\,2k}(t,t)\right] + \left[\psi_2(t) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda^{2k}}(\psi''_{2k} + \psi_{2k+2} -\right.$$
$$- \omega\psi_{2k}) + \frac{1}{\lambda^{2n}}(\psi''_{2n} - \omega\psi_{2n}) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda^{2k}}\int_0^t K(t,\tau)\psi_{2k}(\tau)\,d\tau -$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{k}\frac{1}{\lambda^{2k}}\varphi_{2k-1}(0)K(t,0) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^i}{\lambda^{2i+2k}} H_{2i-1,\,2k}(t,0)\right] -$$
$$- (-1)^m \int_0^t \cos\lambda\tau \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda^{2k+2n}} H_{2n,\,2k}(t,\tau)\,d\tau. \tag{2.4}$$

Преобразуем еще двойные суммы. Если ввести обозначения

$$\Phi_{2k+1}(t,\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{k-1}(-1)^i H_{2i,\,2k-2i}(t,\tau) & 1\leqslant k\leqslant n,\\ \sum\limits_{i=k-n}^{n-1}(-1)^i H_{2i,\,2k-2i}(t,\tau) & n+1\leqslant k\leqslant 2n-1,\end{cases}$$

$$\Phi_{2k}(t,\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1} H_{2i-1,\,2k-2i}(t,\tau) & 2\leqslant k\leqslant n+1,\\ \sum\limits_{i=k-n}^{n}(-1)^{i+1} H_{2i-1,\,2k-2i}(t,\tau) & n+2\leqslant k\leqslant 2n,\end{cases} \tag{2.5}$$

то имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^i}{\lambda^{2i+2k+1}}H_{2i,\,2k}(t,t)=\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{\lambda^{2k+1}}\Phi_{2k+1}(t,t),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^i}{\lambda^{2i+2k}}H_{2i-1,\,2k}(t,t)=\sum_{k=2}^{2n}\frac{1}{\lambda^{2k}}\Phi_{2k}(t,t),$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^i}{\lambda^{2i+2k}}H_{2i-1,\,2k}(t,0)=-\sum_{k=2}^{2n}\frac{1}{\lambda^{2k}}\Phi_{2k}(t,0).$$

Определим теперь $\varphi_k(t)$ и $\psi_{2k}(t)$ из соотношений

$$\varphi_1'=0,\ 2\varphi_2'+\omega\varphi_1=0,$$

$$\varphi_2''+2\varphi_3'-\omega\varphi_2-\varphi_1K(t,t)=0,$$

$$\varphi_{2k-1}''-2\varphi_{2k}'-\omega\varphi_{2k-1}-\Phi_{2k-1}(t,t)=0,\quad (k=2,\ldots,n-1)$$

$$\varphi_{2k}''+2\varphi_{2k+1}'-\omega\varphi_{2k}+\varphi_{2k-1}K(t,t)-\Phi_{2k}(t,t)=0,\ (k=2,\ldots,n-1)$$

$$\psi_2\equiv 0,\quad \psi_4=\varphi_1(0)K(t,0), \tag{2.6}$$

$$\psi_{2k}''+\psi_{2k+2}-\omega\psi_{2k}-\int_0^t K(t,\tau)\psi_{2k}(\tau)\,d\tau-$$

$$-\varphi_{2k-1}(0)K(t,0)+\Phi_{2k}(t,0)=0.\quad (k=2,\ \ldots,\ n-1)$$

Тогда

$$L(v)=\sin\lambda t\,O\left(\frac{1}{\lambda^{2n+1}}\right)+\cos\lambda t\,O\left(\frac{1}{\lambda^{2n}}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda^{2n}}\right)=$$

$$=\rho(t,\lambda)=O\left(\frac{1}{\lambda^{2n}}\right). \tag{2.7}$$

Из формул (2.6) функции φ_k получаются интегрированием, а ψ_{2k} непосредственно. Постоянные интегрирования определяются из требований (2.2). Они дадут:

$$\varphi_1(0) = 1; \quad \varphi_2(0) = 0; \quad \varphi_3(0) = -\varphi_2'(0);$$
$$\varphi_{2k}(0) = -\psi_{2k}(0), \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1) \tag{2.8}$$
$$\varphi_{2k+1}(0) = -\varphi_{2k}'(0) - \psi_{2k}'(0). \quad (k = 2, 3, \ldots, n-1)$$

3. Покажем теперь, что $v(t, \lambda)$ с точностью до $O\left(\frac{1}{\lambda^{2n+1}}\right)$ аппроксимирует функцию $u(t, \lambda)$. Для этой цели сначала заметим, что в силу (2.7) функция $v(t, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$v(t, \lambda) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda t + \frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-\tau)\,\rho(\tau, \lambda)\,d\tau +$$
$$+ \frac{1}{\lambda}\int_0^t K^*(t, \tau, \lambda)\,v(\tau, \lambda)\,d\tau. \tag{3.1}$$

Далее положим

$$u = v + w. \tag{3.2}$$

Подставляя это выражение в (1.5) и учитывая (3.1), имеем

$$w(t, \lambda) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^t \sin\lambda(t-\tau)\,\rho(\tau, \lambda)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\int_0^t K^*(t, \tau, \lambda)\,w(\tau, \lambda)\,d\tau. \tag{3.3}$$

Если уравнение (3.3) решить подобным образом, как уравнение (1.5), то в силу оценки (2.7) для $\rho(t, \lambda)$ легко убедиться в том, что

$$w(t, \lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^{2n+1}}\right). \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

Это показывает, что функция $v(t, \lambda)$ является асимптотической функцией для $u(t, \lambda)$, или же $u(t, \lambda)$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$u(t, \lambda) \sim \sin\lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2k-1}(t)}{\lambda^{2k-1}} + \cos\lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2k}(t)}{\lambda^{2k}} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\psi_{2k}(t)}{\lambda^{2k}}. \tag{3.5}$$

4. Чтобы найти собственные значения, надо учесть условие

$$u(l, \lambda) = 0.$$

Умножая это уравнение на λ, получим уравнение

$$\sin\lambda l\, f_1(\lambda) + \cos\lambda l\, f_2(\lambda) = f_3(\lambda), \tag{4.1}$$

где $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ и $f_3(\lambda)$ имеют следующие асимптотические разложения:

$$f_1(\lambda) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2k+1}(l)}{\lambda^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}}{\lambda^{2k}}; \quad f_2(\lambda) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{2k}(l)}{\lambda^{2k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_{2k-1}}{\lambda^{2k-1}};$$

$$f_3(\lambda) \sim -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\psi_{2k}(l)}{\lambda^{2k-1}} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\gamma_{2k-1}}{\lambda^{2k-1}}.$$

Согласно общей теории уравнений типа (4.1) [3], большие собственные значения имеют следующее асимптотическое разложение:

$$\lambda_n \sim \frac{n\pi}{l} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{2k+1}}{\left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2k+1}}, \tag{4.2}$$

причем коэффициенты c_{2k+1} получатся формальной подстановкой (4.2) в (4.1) и последующим приравниванием коеэффициентов при одинаковых степенях $\frac{n\pi}{l}$. Таким путем получаются

$$c_1 = -\frac{\beta_1}{l}; \quad c_3 = \frac{1}{l}\left[(-1)^n \gamma_3 - \beta_3 + \beta_1\left(\frac{\beta_1^2}{3} - \frac{\beta_1}{l} + \alpha_2\right)\right];$$

$$c_5 = \frac{1}{l}\left[(-1)^n \gamma_5 + (-1)^n \gamma_3\left(-\frac{1}{2}\beta_1^2 + \frac{4\beta_1}{l} - \alpha_2\right) - \beta_5 + \beta_3\left(-\beta_1^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{4\beta_1}{l} + \alpha_2\right) + \beta_1\left(-\frac{1}{6}\beta_1^4 + \frac{1}{3}\frac{\beta_1^3}{l} - \beta_1^2\alpha_2 + \frac{2\beta_1\alpha_2}{l} + \alpha_4 - \alpha_2^2\right)\right]$$

и т. д.

Асимптотическое разложение соответствующих собственных функций можно получить, подставляя λ_n в (3.5).

Очевидно, при больших n собственные значения уравнения (0.4) мало отличаются от собственных значений уравнения

$$u'' + \lambda^2 u = 0,$$

что можно было уже ожидать заранее. Но разложение (4.2) хорошо показывает влияние функции $\omega(t)$ и ядра $K(t, \tau)$.

Заметим еще, что разложение (4.2) доказывает существования бесконечно многих вещественных собственных значений. Но этого недостаточно, чтобы утверждать, что все собственные значения уравнения (0.4) вещественны.

5. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$y'' + \lambda^2 y = a\int_0^t (t-\tau)\, y(\tau, \lambda)\, d\tau, \qquad (a \neq 0) \tag{5.1}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

решение которого легко получить методом операционного исчисления. Имеем

$$y(t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{p}}{p+q}\,\mathrm{sh}\sqrt{p}\,t + \frac{\sqrt{q}}{p+q}\sin\sqrt{q}\,t & \text{при } a > 0, \\ -\frac{\sqrt{-p}}{p+q}\sin\sqrt{-p}\,t + \frac{\sqrt{q}}{p+q}\sin\sqrt{q}\,t & \text{при } a < 0, \end{cases} \tag{5.2}$$

где

$$p = -\frac{\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{2} + a}, \quad q = \frac{\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{2} + a}.$$

Если еще брать граничное условие

$$y(1) = 0, \tag{5.3}$$

то в обоих случаях (5.2) собственные значения получаются по формуле

$$\lambda_n = \sqrt{a z_n^2 - \frac{1}{z_n^2}}, \tag{5.4}$$

где z_n — корень уравнения

$$\operatorname{sh} \frac{1}{z} = -\sqrt{a}\, z^2 \sin \sqrt{a}\, z. \tag{5.5}$$

Уравнение (5.5) тоже является частным случаем уравнения типа (4.1), поэтому для его корней существует асимптотическое разложение в виде

$$z_n \sim \frac{1}{\sqrt{a}} \left(n\pi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_{2k+1}}{(n\pi)^{2k+1}} \right). \tag{5.6}$$

Легко найти, что

$$l_1 = 0, \quad l_3 = (-1)^{n+1} a, \quad l_5 = \frac{(-1)^{n+1} a^2}{6}, \text{ и т. д.}$$

Подставляя формально разложение (5.6) в (5.4), мы получаем асимптотическое разложение для λ_n:

$$\lambda_n \sim n\pi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{2k+1}}{(n\pi)^{2k+1}}, \tag{5.7}$$

причем $c_1 = 0, \quad c_3 = a\left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{2}\right], \quad c_5 = (-1)^{n+1} \frac{a^2}{6}$, и т. д. (5.8)

Используя формулы (2.3), (2.5), (2.6), (2.8), для решения уравнения (5.1) найдем следующее асимптотическое разложение:

$$y(t, \lambda) \sim \sin \lambda t \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{3a}{2\lambda^5} - \frac{(at)^2}{8\lambda^7} + \ldots \right] + \cos \lambda t \left[\frac{at}{2\lambda^4} - \right.$$
$$\left. - \frac{11 a^2 t}{8\lambda^8} + \ldots \right] + \frac{at}{\lambda^4} + \frac{a^2 t^3}{6\lambda^6} + \frac{1}{\lambda^8} \left(\frac{a^3 t^5}{120} - 3a^2 t \right) + \ldots \tag{5.9}$$

Легко убедиться в том, что используя (5.9), в разложении (5.7) получаем прежние коэффициенты (5.8).

Еще отметим, что в случае $a < 0$ уравнение (5.5) имеет один вещественный положительный корен, и поэтому задача Штурма-Лиувилля для уравнения (5.1) имеет также чисто мнимое собственное значение. Остальные корни уравнения (5.5) в этом случае чисто мнимые, а λ_n — вещественные, причем опять справедлива асимптотическая формула (5.7).

20 I 1959

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *J. Horn.* Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter. Math. Annalen, 1899, 52, 271—292.
[2]. *R. E. Langer.* The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. Trans. Am. Math. Soc., 1949, 67, 461—490.
[3]. *Э. Риекстыньш.* Асимптотические разложения для вещественных корней некоторых трансцендентных уравнений. Ученые записки ЛГУ, 1959, 28, вып. 4,67 — 86.

ŠTURMA-LIUVILA PROBLĒMAS ĪPAŠFUNKCIJU UN ĪPAŠVĒRTĪBU ASIMPTOTISKIE ATTĪSTĪJUMI PIE LIELĀM PARAMETRA VĒRTĪBĀM DAŽIEM INTEGRO — DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMIEM

E. Riekstiņš un *R. Zolberga*

(Kopsavilkums)

Darbā iegūts vienādojuma (0.4) atrisinājuma asimptotisks attīstījums, kuru dod formula (3.5). Izlietojot šo formulu, parādīts, ka eksistē Šturma-Liuvila problēmas īpašvērtību asimptotisks attīstījums, un atrasti attīstījuma pirmie koeficienti. Darbā izlietotas Horna un Lēndžera idejas, kuras autori lieto atbilstošam diferenciālvienādojumam. Salīdzinot ar minēto autoru darbiem, ievērojami vienkāršots attīstījuma asimptotiskā rakstura pierādījums.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

О ЦЕЛОЙ ЧАСТИ РАЦИОНАЛЬНОГО ЧИСЛА

Ю. И. ВОЛОШИН

1. Пусть n — натуральное, m — целое число. Рассмотрим $\left[\frac{m}{n}\right]$ как функцию от m.

Лемма 1. Пусть $f(m) = \left[\frac{m}{n}\right]$; тогда имеет место соотношение:

$$f(m) + f(m+1) + \ldots + f(m+n-1) = m. \tag{1}$$

Соотношение (1) является следствием известного тождества:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx],$$

из которого (1) получается, если $x = \frac{m}{n}$.

Лемма 2. Линейная система уравнений

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = a_0; \\ \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon^{n-1} = a_1; \\ \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2 + \alpha_2 \varepsilon^4 + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon^{2(n-1)} = a_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^k + \alpha_2 \varepsilon^{2k} + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon^{k(n-1)} = a_k; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^{n-1} + \alpha_2 \varepsilon^{2(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon^{(n-1)^2} = a_{n-1} \end{cases}$$

относительно α_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ — произвольные числа, имеет решение:

$$\alpha_i = \frac{1}{n}\left(a_0 + a_1 \varepsilon^{n-i} + a_2 \varepsilon^{2(n-i)} + \ldots + a_{n-1} \varepsilon^{(n-1)(n-i)}\right), \tag{2}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

В справедливости этого утверждения можно убедиться непосредственной подстановкой.

2. Соотношение (1) показывает, что функция $f(m) = \left[\frac{m}{n}\right]$ удовлетворяет следующему уравнению в конечных разностях:

$$f(m) + f(m+1) + \ldots + f(m+n-1) = m.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} + \ldots + \lambda + 1 = 0$$

имеет корни:

$$\lambda_j = \varepsilon^j, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Следовательно, решение уравнения (1) ищем в виде:

$$f(m) = \left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n} + \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^m + \alpha_2 \varepsilon^{2m} + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon^{m(n-1)}. \qquad (3)$$

Для определения коэффициентов α_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ получаем из начальных условий

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f(n-1) = 0 \end{cases}$$

алгебраическую систему:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} = 0; \\ \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon^{n-1} = -\frac{1}{n}; \\ \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^2 + \alpha_2 \varepsilon^4 + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon^{2(n-1)} = -\frac{2}{n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_0 + \alpha_2 \varepsilon^k + \alpha_2 \varepsilon^{2k} + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon^{k(n-1)} = -\frac{k}{n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon^{n-1} + \alpha_2 \varepsilon^{2(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon^{(n-1)^2} = -\frac{n-1}{n}. \end{cases}$$

Обратимся теперь к лемме 2. Числа a_k в нашем случае таковы:

$$a_k = -\frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Следовательно, решение системы по формуле (2) имеет вид:

$$\alpha_k = -\frac{1}{n^2}\left(\varepsilon^{n-k} + 2\varepsilon^{2(n-k)} + 3\varepsilon^{3(n-k)} + \ldots + (n-1)\,\varepsilon^{(n-1)(n-k)}\right);$$
$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда

$$\alpha_0 = -\frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1) = -\frac{n-1}{2n};$$

$$\alpha_k = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\varepsilon^k}{1-\varepsilon^k}; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Подставляя эти значения в формулу (3), получим

$$\left[\frac{m}{n}\right] = \frac{m}{n} - \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon^{mk} \cdot \frac{\varepsilon^k}{1-\varepsilon^k}, \quad \text{где } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}. \qquad (4)$$

Переходя к тригонометрическим величинам в формуле (4), получим:

$$\left[\frac{m}{n}\right]=\frac{m}{n}-\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi km}{n}+$$

$$+\frac{1}{2n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2\pi km}{n}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{n}. \qquad (5)$$

Примеры:

$$\left[\frac{m}{2}\right]=\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot(-1)^m=\frac{m}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos\pi m;$$

$$\left[\frac{m}{3}\right]=\frac{m}{3}-\frac{1}{3}+\frac{3-\sqrt{3}i}{18}\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^m+\frac{3+\sqrt{3}i}{18}\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^m=$$

$$=\frac{m}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cos\frac{2\pi m}{3}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{2\pi m}{3};$$

$$\left[\frac{m}{4}\right]=\frac{m}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cdot(-1)^m+\frac{1-i}{8}\cdot i^m+\frac{1+i}{8}\cdot(-i)^m=$$

$$=\frac{m}{4}-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cos\pi m+\frac{1}{4}\cos\frac{\pi m}{2}+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi m}{2}.$$

3. Используя выражения для $\left[\frac{m}{2}\right]$ и $\left[\frac{m}{4}\right]$, можно связать их алгебраической зависимостью. Действительно, исключая из вышеприведенных соотношений для $\left[\frac{m}{2}\right]$ и $\left[\frac{m}{4}\right]$ и соотношения $\cos^2\frac{\pi m}{2}+\sin^2\frac{\pi m}{2}=1$ величины $\cos\frac{\pi m}{2}$ и $\sin\frac{\pi m}{2}$ получим:

$$4\left[\frac{m}{4}\right]^2+5\left[\frac{m}{2}\right]^2+m^2-4\left[\frac{m}{4}\right]\cdot\left[\frac{m}{2}\right]-4m\left[\frac{m}{2}\right]+$$

$$+2\left[\frac{m}{4}\right]+\left[\frac{m}{2}\right]-m=0. \qquad (6)$$

Выражение (4) может быть использовано в теории сумм Дедекинда. Сумма Дедекинда $S(a, b)$ определяется следующим образом: $S(a,b)=\sum_{k=1}^{b-1}\frac{k}{b}\cdot\left(\left(\frac{ka}{b}\right)\right)$, где $(a, b)=1$; а символ $\left(\left(\frac{m}{n}\right)\right)$ определен таким образом:

$$\left(\left(\frac{m}{n}\right)\right)=\frac{m}{n}-\left[\frac{m}{n}\right]-\frac{n-1}{2n}.$$

Используя (4), $S(a, b)$ можно преобразовать к виду

$$S(a,b)=\frac{1}{b}\cdot\sum_{k=1}^{b-1}\frac{\varepsilon^k}{1-\varepsilon^k}\cdot\frac{1}{\varepsilon^{ak}-1},\quad \text{где } \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{b}}.$$

Это выражение удобно для различных приложений.

С помощью формулы (4) можно дать представление эйлеровой постоянной C в виде некоторого предела. Используя результат Дирихле

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]=\sum_{k=1}^{n}\tau(k)=n(\ln n+2C-1)+O(\sqrt{n}),$$

где $\tau(k)$ — число делителей числа k, при помощи (4) получаем

$$C = \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=2}^{n} \frac{1}{2l} \left(\sum_{k=1}^{l-1} \cos \frac{2\pi\, kn}{l} + \sum_{k=1}^{l-1} \sin \frac{2\pi\, kn}{l} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi\, k}{l} \right).$$

30 I 1959

Кафедра математического анализа

PAR RACIONĀLA SKAITĻA VESELO DAĻU

J. M. Vološins

(Kopsavilkums)

Darbā izvesta formula (5) racionāla skaitļa veselai daļai. Ar šīs formulas palīdzību iegūta algebriska tāpatība (6), kas saista $\left[\frac{m}{2}\right]$ un $\left[\frac{m}{4}\right]$. Norādīts uz iespēju pielietot iegūto rezultātu Dedekinda summu teorijā. Iegūta izteiksme Eilera konstantei C.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

НЕКОТОРЫЕ СЕМЕЙСТВА ПОЛИНОМОВ, РОДСТВЕННЫХ ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА

Г. К. ЭНГЕЛИС

В настоящей статье рассматриваются некоторые из многочисленных встречаемых в литературе обобщений последовательности полиномов Лагерра. Общим источником этих обобщений является простота изображения полиномов Лагерра при преобразовании Лапласа, которая наводит на мысль при рассмотрении оригиналов более сложных функций пытаться применить методы так или иначе обобщающие те приемы, которыми решаются аналогичные задачи для полиномов Лагерра.

В первом параграфе изучается некоторое семейство полиномов, содержащее в качестве частных случаев кроме полиномов Лагерра еще другие последовательности полиномов, применяющиеся при изучении систем телеграфных уравнений и так называемых канатных функций. Автору кажется, что свойства упомянутых полиномов и их взаимные связи становятся более прозрачными, если их рассматривать в рамках более общего семейства функций, характеризуемого соотношением (1). В частности, так можно показать, что большинство рекуррентных формул, выведенных для упомянутых последовательностей полиномов, весьма просто вытекают уже из основных соотношений (4) и (8).

Во втором параграфе рассматривается другой класс функций, имеющих простое изображение по Лапласу, и устанавливается связь этих функций с полиномами Бесселя и одним классом полиномов, изученным в первом параграфе.

§ 1.

1. Рассмотрим последовательность полиномов $y_n = y_n(a, b, c_k; x)$ характеризуемую тем, что последовательность соответствующих изображений по Лапласу $z_n(p)$ $\left(z_n(p) = \mathfrak{L}(y_n) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} y_n(a, b, c_k; t)\, dt\right)$ определяется рекуррентным соотношением

$$z_n(p) = z_{n-1}(p)(a + bp^{-1}) + c_n p^{-1}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

При этом всегда будем считать $z_{-1} = 0$, $c_0 \neq 0$, $b \neq 0$, в остальном a, b, c_k— произвольные комплексные числа. Легко видеть, что в явном виде $z_n(p)$ выражается так:

$$z_n(p) = (ap + b)^n p^{-n-1} h_n[p(ap + b)^{-1}], \tag{2}$$

где

$$h_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k. \tag{3}$$

По общеизвестным свойствам преобразования Лапласа из (1) следует, что y_n удовлетворяет уравнению

$$y_n' = a\, y_{n-1}' + b y_{n-1} \tag{4}$$

с граничными условиями

$$y_0(x) = c_0,\; y_n(0) = C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k a^{n-k}. \tag{5}$$

Нетрудно убедиться, что для всех комплексных α, β

$$y_n(a, b, \alpha c_k' + \beta c_k''; x) = \alpha y_n(a, b, c_k'; x) + \beta y_n(a, b, c_k''; x) \tag{6}$$

и также, что при $m \leqslant n$

$$y_n(a,\; b,\; c_k';\; x) + y_m(a,\; b,\; c_k'';\; x) = y_n(a,\; b,\; c_k;\; x), \tag{7}$$

где $c_k = c_k'$ при $k \leqslant n - m$ и $c_k = c_k' + c_{k-n+m}''$ при $k \geqslant n - m$.

Из (6) и (7) следует важное для дальнейшего соотношение

$$y_n(a,\; b,\; c_k;\; x) - y_{n-1}(a,\; b,\; c_k;\; x) = y_n(a,\; b,\; \Delta c_k;\; x). \tag{8}$$

Здесь $\Delta c_k = c_k - c_{k-1}$, $c_{-1} = 0$. Применяя (8) n раз, получим

$$y_n(a,\; b,\; c_k;\; x) = \sum_{j=0}^{n} y_{n-j}(a,\; b,\; \Delta c_k;\; x). \tag{9}$$

Введем обозначения

$$y_n(0,\; 1,\; c_k;\; x) = a_n(c_k;\; x), \tag{10}$$

$$y_n(1,\; -1,\; c_k;\; x) = L_n(c_k;\; x). \tag{11}$$

Полиномы y_n, соответствующие другим парам значений a, b имеют вид $\gamma_n a_n(c_k;\, \delta x)$ или $\gamma_n L_n(c_k;\, \delta x)$, где γ_n, δ просто выражаются через a, b. Последовательность c_k в дальнейшем почти всегда будет следующего вида

$$c_k = f(k)\, q^k = \sum_{j=0}^{s} \alpha_j\, k^j\, q^k \tag{12}$$

где α_j, q — произвольные комплексные числа, при этом под 0^k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ будем понимать общий член последовательности 1, 0, 0, ... На основании (6) можно ограничиваться случаем, когда $f(k)$ принадлежит некоторому базису множества полиномов. Удобнее всего оказывается взять

$$f(k) = \binom{k+\alpha}{\alpha} = (k+\alpha)\;(k+\alpha-1)\;\ldots\;(k+1)\;|\;\alpha!, \tag{13}$$

считая

$$\binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k-1}{-1} = 0^k.$$

Из (10), (11), (2) и (3) следует

$$\mathfrak{L}\left(a_n\left(f(k)\, q^k;\; x\right)\right) = g_n(qp)\, p^{-n-1}, \tag{14}$$

$$\mathfrak{L}\left(L_n\left(f(k)\, q^k;\; x\right)\right) = (p-1)^n p^{-n-1} g_n\left[qp\,(p-1)^{-1}\right], \tag{15}$$

где

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f(k)\, t^k. \tag{16}$$

(14) показывает, что при изучении полиномов a_n параметр q существенной роли не играет, поэтому можно вместо $a_n\left(f(k)\, q^k;\, x\right)$ рассматривать $a_n\left(f(k),\, xq^{-1}\right)$, что несколько удобноее.

Введем еще обозначения

$$a_n\left(\binom{k+\alpha}{\alpha};\, x\right) = a_n(\alpha,\, x),\quad \alpha = -1,\, 0,\, 1,\, \ldots \tag{17}$$

$$L_n\left(\binom{k+\alpha}{\alpha} q^k;\, x\right) = L_n(\alpha,\, q,\, x),\quad \alpha = -1,\, 0,\, 1,\, \ldots \tag{18}$$

Некоторые частные случаи полиномов L_n хорошо исследованы. Так, $L_n(\alpha, 1, x) = L_n^{\alpha+1}(x)$ (обобщенные полиномы Лагерра, см. [2]), полиномы $La_n(x, \lambda)$, применяемые при решении систем телеграфных уравнений (см. [7]), совпадают с $\lambda L_n(0,\, 1-\lambda,\, \lambda x)$, а полиномы $M_n(x)$ и $\mathfrak{M}_n(x)$, связанные с канатными функциями (см. [4], [5], [6]), имеют вид:

$$M_n(x) = L_n\left(2\,(-1)^k - 0^k;\, x\right),\ \mathfrak{M}_n(x) = L_n\left(4k\,(-1)^k + 0^k;\, x\right).$$

2. Рассмотрим подробнее функции $a_n(c_k;\, x)$. Уравнения (4) и (5) дают

$$a'_n(c_k;\, x) = a_{n-1}(c_k;\, x), \tag{19}$$

$$a_n(c_k,\, 0) = c_n.$$

Из (19), (10) и (8) следует

$$a_n(c_k;\, x) - a'_n(c_k;\, x) = a_n(\Delta\ c_k;\, x). \tag{20}$$

В связи с очевидным равенством

$$\frac{d}{dx}\, a_n(c_k;\, rx) = ra'_n(c_k;\, x) \tag{21}$$

из (20) вытекает

$$\frac{d}{dx}\, a_n(c_k;\, rx) = r\,[a_n(c_k;\, rx) - a_n(\Delta c_k;\, rx)]. \tag{22}$$

Комбинируя (20) и (21) можно получить также соотношение

$$\frac{d}{dx}\,[e^{-rx} a_n(c_k;\, rx)] = -re^{-rx} a_n(\Delta\, c_k;\, rx)$$

или

$$a_n(c_k;\, rx) = re^{rx} \int_x^{\infty} e^{-rt} a_n(\Delta\, c_k;\, rt)\, dt. \tag{23}$$

Перейдем к частному случаю, когда имеют место (12) и (13). Так как $\Delta\binom{k+\alpha}{\alpha} = \binom{k+\alpha-1}{\alpha-1}$, то (20), (22), (23) дают

$$a_n(\alpha,\, x) - a'_n(\alpha,\, x) = a_n(\alpha,\, x) - a_{n-1}(\alpha,\, x) = a_{n-1}(\alpha - 1,\, x), \tag{20a}$$

$$\frac{d}{dx} a_n(\alpha, rx) = r\,[a_n(\alpha, rx) - a_n(\alpha - 1,\ rx)], \tag{22a}$$

$$a_n(\alpha, rx) = re^{rx} \int\limits_x^\infty e^{-rt} a_n(\alpha - 1,\ rt)\, dt. \tag{23a}$$

Если в (8) преобразовать дальше правую часть равенства, то получим (учитывая (10) и (17))

$$a_n(\alpha, x) = \sum_{j=0}^{\alpha} a_{n-1}(\alpha - j, x) + a_n(-1, x). \tag{24}$$

Отметим некоторые частные случаи:

$$a_n(-1,\ x) = x^n/n!,$$

$$a_n(0, x) = \sum_{k=0}^{n} x^k/k! = e^x \int\limits_x^\infty e^{-t}\, t^n/n!\, dt = \Gamma(n+1, x)\, e^x/n!, \tag{25}$$

$$a_n(1, x) = \sum_{k=0}^{n} (n + 1 - k)\, x^k/k! = e^x \int\limits_x^\infty e^{-t} a_n(0, t)\, dt.$$

Найдем изображения полиномов $a_n(\alpha,\ x)$, $\alpha \geqslant 0$. (13) и (16) показывают, что

$$g_n(t) = \frac{1}{\alpha!}\left(\sum_{k=0}^{n} t^{k+\alpha}\right)^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha!}\left(\sum_{k=0}^{n+\alpha} t^k\right)^{(\alpha)} = \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{t^{n+\alpha+1} - 1}{t-1}\right)^{(\alpha)}. \tag{26}$$

Индукцией по α легко доказать равенство

$$\left(\frac{t^m - 1}{t-1}\right)^{(\alpha)} = \frac{m! \sum\limits_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} t^{m-j}/(m - \alpha - 1)!\,(m-j) + (-1)^{\alpha+1}\,\alpha!}{(t-1)^{\alpha+1}}. \tag{27}$$

Учитывая еще (14), после небольших преобразований получим

$$\mathfrak{L}\left(a_n(\alpha, x)\right) =$$

$$= \frac{(n+1)\binom{n+1+\alpha}{\alpha} \sum\limits_{j=0}^{\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j} p^{n+1+\alpha-j}/(n+1+\alpha-j) + (-1)^{\alpha+1}}{p^{n+1}\,(p-1)^{\alpha+1}}. \tag{28}$$

Простейшие частные случаи дают

$$\mathfrak{L}\left(a_n(0, x)\right) = \frac{p^{n+1} - 1}{p^{n+1}(p-1)}; \tag{28a}$$

$$\mathfrak{L}\left(a_n(1, x)\right) = \frac{(n+1)\,p^{n+2} - (n+2)\,p^{n+1} + 1}{p^{n+1}\,(p-1)^2}.$$

Числитель правой части равенства (28) громоздок, но в принципе просто построен: к $(-1)^{\alpha+1}$ добавляется выражение $A_{n+1}\,p^{n+1} + A_{n+2}\,p^{n+2} + \ldots + A_{n+\alpha+1}\,p^{n+\alpha+1}$, где коэффициенты A_i подобраны так, чтобы сумма делилась на $(p-1)^{\alpha+1}$.

Отметим ещё, что полиномы $a_n(\alpha, x)$ удовлетворяют некоторому простому линейному дифференциальному уравнению. Именно, исходя из того, что $a_n(-1, rx)$ является решением уравнения

$$xy' = ny$$

и учитывая (22a), индукцией по α легко убеждаемся, что $a_n(\alpha, rx)$ удовлетворяет уравнению

$$x\sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j}r^{-j}y^{(j+1)}=n\sum_{j=0}^{\alpha+1}(-1)^j\binom{\alpha+1}{j}r^{-j}y^{(j)}. \tag{29}$$

3. Перейдем к многочленам $L_n(c_k; x)$. Уравнения (4) и (5) теперь дают

$$L'_n(c_k; x) = L'_{n-1}(c_k; x) - L_{n-1}(c_k; x), \tag{30}$$

$$L_n(c_k; 0) = C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k. \tag{31}$$

Из (30) следует

$$L'_n(c_k; x) = -\sum_{j=1}^{n} L_{n-j}(c_k; x). \tag{32}$$

Кроме того (8), (9), (11) позволяют написать тождества

$$L_n(c_k; x) - L_{n-1}(c_k; x) = L_n(\Delta c_k; x) \tag{33}$$

и

$$L_n(c_k; x) = \sum_{j=0}^{n} L_{n-j}(\Delta c_k; x) = -L'_{n+1}(\Delta c_k; x). \tag{34}$$

Пусть теперь $c_k = \binom{k+\alpha}{\alpha} q^k$, $q \neq 0$. Тогда $\Delta c_k = \left(1-\frac{1}{q}\right)\binom{k+\alpha}{\alpha} q^k + \frac{1}{q}\binom{k+\alpha-1}{\alpha-1} q^k$ и из (33) получим

$$L_n(\alpha, q, x) - L_{n-1}(\alpha, q, x) = \left(1-\frac{1}{q}\right) L_n(\alpha, q, x) + \frac{1}{q} L_n(\alpha-1, q, x)$$

или

$$L_n(\alpha, q, x) - q L_{n-1}(\alpha, q, x) = L_n(\alpha-1, q, x). \tag{33a}$$

Аналогичным образом из (34) выводится

$$L_n(\alpha, q, x) = (q-1)\sum_{j=0}^{n-1} L_j(\alpha, q, x) + \sum_{j=0}^{n} L_j(\alpha-1, q, x), \tag{34a}$$

что, в связи с (32), дает

$$L_n(\alpha, q, x) = (1-q) L'_n(\alpha, q, x) - L'_{n+1}(\alpha-1, q, x). \tag{35}$$

Применяя (33a) n раз, получим другой аналог равенства (34)

$$L_n(\alpha, q, x) = \sum_{j=0}^{n} q^j L_{n-j}(\alpha-1, q, x). \tag{34б}$$

Формулы (33а), (34а), (34б), (35) обобщают известные свойства полиномов Лагерра (см. напр. [2]).

Изображения полиномов $L_n(\alpha, q, x)$ с учетом (15), (26) и (27) получаются в виде

$$\mathfrak{L}\left(L_n(\alpha, q, x)\right) = \tag{36}$$
$$= \frac{(n+1)\binom{n+1+\alpha}{\alpha}\sum_{j=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{j}(1-p)^j (qp)^{n+1+\alpha-j}/(n+1+\alpha-j)+(-1)^{\alpha+1}(p-1)^{n+\alpha+1}}{p^{n+1}\left[(q-1)p+1\right]^{\alpha+1}}.$$

Принцип построения числителя таков же, как у полиномов $a_n(\alpha, x)$: к $(-1)^{\alpha+1}(p-1)^{n+\alpha+1}$ добавляется такая линейная комбинация величин p^l $(n+1 \leqslant l \leqslant n+\alpha+1)$, чтобы результат делился на $[(q-1)p+1]^{\alpha+1}$.

Отметим частные случаи

$$\mathfrak{L}\left(L_n(\alpha-1, 1, x)\right) = \mathfrak{L}\left(L_n^{\alpha}(x)\right) =$$
$$= \frac{(n+1)\binom{n+\alpha}{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\alpha-1}\binom{\alpha-1}{j}(1-p)^j p^{n+\alpha-j}/(n+\alpha-j)+(-1)^{\alpha}(p-1)^{n+\alpha}}{p^{n+1}};$$

$$\mathfrak{L}\left(L_n(0, q, x)\right) = \frac{q^{n+1}p^{n+1}-(p-1)^{n+1}}{p^{n+1}\left[(q-1)p+1\right]}. \tag{37}$$

Нашей дальнейшей целью будет вывод некоторого соотношения между $L_n(\alpha, q, x)$ и $a_n(\alpha, x)$, в частном случае приводящего к известной формуле Родрига для полиномов Лагерра. Используя (28а), общеизвестные свойства преобразования Лапласа и равенство

$$\frac{d^j}{dx^j}\left[e^{-x}a_n(0, rx)\right]\Big|_{x=0} = (r-1)^j$$

(которое следует из (25)), можно вывести что

$$\mathfrak{L}\left[e^x\left(e^{-x}a_n(0, rx)\right)^{(m)}\right] = \frac{(r-1)^m p^{n+1} - r^{n+1}(p-1)^m}{p^{n+1}(p-r)}. \tag{38}$$

(Производная берется по x). Если здесь положить $m = n+1$, $q \neq 1$ и

$$r = (1-q)^{-1}, \tag{39}$$

то правая часть равенства (38) с точностью до постоянного множителя совпадает с правой частью равенства (37), и мы получили

$$L_n(0, q, x) = -r^{-n}e^x\left[e^{-x}a_n(0, rx)\right]^{(n+1)}. \tag{40}$$

(Здесь и в дальнейшем, если q и r встретятся в одном равенстве, будем считать, что выполнено (39)).

Используя (40), можно доказать более общее соотношение

$$L_n(\alpha, q, x) = (-1)^{\alpha+1}r^{-n}e^x\left[e^{-x}a_n(\alpha, rx)\right]^{(n+1+\alpha)}. \tag{41}$$

Для этого отметим, что, согласно (21), (19), (20а) и (39)

$$\left[e^{-x}a_n(\alpha, rx)\right]' = e^{-x}\left[-a_n(\alpha, rx) + a_{n-1}(\alpha, rx) + (r-1)a_{n-1}(\alpha, rx)\right] =$$
$$= -e^{-x}a_n(\alpha-1, rx) + q\,re^{-x}a_{n-1}(\alpha, rx).$$

Поэтому правую часть равенства (41) можно преобразовать следующим образом

$$(-1)^{\alpha+1} r^{-n} e^x [e^{-x} a_n(\alpha, rx)]^{(n+\alpha+1)} =$$
$$= (-1)^{\alpha} r^{-n} e^x [e^{-x} a_n(\alpha-1, \ rx)]^{(n+\alpha)} +$$
$$+ (-1)^{\alpha+1} qr^{-n+1} e^x [e^{-x} a_{n-1}(\alpha, rx)]^{(n-1+\alpha+1)} = \ldots =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{\alpha} q^j r^{-n+j} e^x [e^{-x} a_{n-j} (\alpha-1, \ rx)]^{(n-j+\alpha)} =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} q^j L_{n-j}(\alpha-1, q, x).$$

(Последнее преобразование законно в силу допущения индукции.) Остается применить равенство (34б).

Уравнение (41) верно также при $\alpha = -1$, $r = 1$; тогда оно обращается в формулу Родрига для $L_n(x)$:

$$L_n(-1, \ q, \ x) = L_n(x) = e^x [e^{-x} a_n(-1, \ x)]^{(n)} = e^x [e^{-x} x^n/n!]^{(n)}.$$

Последнее равенство нарушается при других значениях r, так как левая часть фактически от q не зависит.

Уравнение (41) не имеет смысла при $q = 1$. Но можно формулу Родрига для обобщенных полиномов Лагерра написать в виде

$$L_n(\alpha, 1, x) = \frac{(n+\alpha+1)!}{n!} x^{-\alpha-1} e^x [e^{-x} a_{n+\alpha+1}(\alpha, x)]^{(n+\alpha+1)}.$$

В этом можно убедиться, применяя к правой части $\alpha + 1$ раз формулу (20а).

Используя (41) и (29) легко найти линейное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $L_n(\alpha, q, x)$. Проделаем выкладки для $\alpha = 0$. Формула (29) показывает, что $a_n(0, rx)$ обладает свойством

$$x \frac{d^2}{dx^2} a_n(0, rx) - (rx + n) \frac{d}{dx} a_n(0, rx) + nr\, a_n(0, rx) = 0.$$

Пусть $a_n(0, rx) = u(x) e^x$. Тогда можно убедиться, что

$$xu'' + [(2-r)x + n] u' + (1-r)(x-n) u = 0. \tag{42}$$

Продифференцируем последнее равенство $n + 2$ раз и введем обозначение $u^{(n+1)} = v(x)$. Это дает

$$xv''' + [(2-r)x + 2] v'' + [(1-r)x + n - 2r + 4] v' +$$
$$+ (n+2)(1-r) v = 0.$$

Наконец подставляем $v = e^{-x} y$. Тогда y удовлетворяет уравнению

$$xy''' + [-(1+r)x + 2] y'' + [rx + n - 2r) y' - nry = 0; \tag{43}$$

но, с другой стороны, $L_n(0, q, x)$ отличается от y только постоянным множителем.

4. До сих пор мы рассматривали многочлены $L_n(c_k; x)$, обладающие простыми последовательностями c_k. Но из (30) и (31) ясно, что многочлены определяются также последовательностью C_k и естественно рассматривать случаи, когда эта последовательность проста. Обозначим через $M_n(\alpha, q, x)$ те $L_n(c_k; x)$, для которых $C_k = \binom{k+\alpha}{\alpha} q^k, \alpha \geqslant 0$.

Так как $c_k = \Delta C_k$, то

$$M_n(\alpha, q, x) = L_n\left(\Delta \binom{k+\alpha}{\alpha} q^k; x\right) \tag{44}$$

и из (33) и (34) следует

$$L_n(\alpha, q, x) - L_{n-1}(\alpha, q, x) = M_n(\alpha, q, x), \tag{45}$$

$$L_n(\alpha, q, x) = \sum_{j=0}^{n} M_{n-j}(\alpha, q, x) = -M'_{n+1}(\alpha, q, x), \tag{46}$$

и преобразования, следующие после формулы (34), показывают, что

$$M_n(\alpha, q, x) = (1 - q^{-1}) L_n(\alpha, q, x) + q^{-1} L_n(\alpha - 1, q, x). \tag{47}$$

Из (45) или (47), используя (41), легко доказать, что

$$M_n(\alpha, q, x) = (-1)^\alpha r^{-n} e^x [e^{-x} a_n(\alpha, rx)]^{(n+\alpha)}. \tag{48}$$

Комбинируя (47) и (34) мы видим, что в числителе изображения полинома $M_n(\alpha, q, x)$ будут, кроме других, слагаемые

$$(-1)^{\alpha+1} q^{-1} r^{-1} (p-1)^{n+\alpha+1} + (-1)^\alpha q^{-1} (-r^{-1} p + 1)(p-1)^{n+\alpha} =$$
$$= (-1)^\alpha q^{-1} (-r^{-1} + 1)(p-1)^\alpha.$$

Итак, числитель изображения $\mathfrak{L}(M_n(\alpha, q, x))$ содержит $(p-1)^{n+\alpha}$ и линейную комбинацию величин p^l, $n+1 \leqslant l \leqslant n+\alpha+1$, подобранную так, чтобы сумма делилась на $[(q-1)p-1]^{\alpha+1}$. Например,

$$\mathfrak{L}(M_n(0, q, x)) = \frac{q^n(q-1)p^{n+1} + (p-1)^n}{p^{n+1}[(1-q)p-1]}. \tag{49}$$

Дифференциальное уравнение для $M_n(\alpha, q, x)$ можно вывести по образу уравнения (43). Так, для $M_n(0, q, x)$ получим (теперь (42) надо дифференцировать $n+1$ раз):

$$xy''' + [-(1+r)x + 1]y'' + (rx + n - r)y' - nry = 0. \tag{50}$$

Комбинируя соотношения (44) — (48) и (41) можно получить ряд соотношений, связывающих $M_n(\alpha, q, x)$ с другими изученными в этой статье полиномами. Приведем лишь один пример. Так как по (20а)

$$[e^{-x} a_n(\alpha, rx)]' = e^{-x}[(r-1) a_n(\alpha, rx) - r a_n(\alpha - 1, x)],$$

то из (48) нетрудно получить

$$M'_n(\alpha, q, x) = r M_n(\alpha, q, x) + r L_n(\alpha - 1, q, x). \tag{51}$$

Отметим, что $M_n(0, -1, x) = M_n(x)$ (полиномы Н. И. Денисюка, см. [4], [5]), $L_n(-1, q, x) = L_n(x)$ (многочлен Лагерра) и (51) в этом случае сводится к уравнению

$$2M'_n(x) - M_n(x) = L_n(x)$$

которое позволяет изучение $M_n(x)$ полностью свести к теории полиномов Лагерра.

5. Метод, примененный в предыдущем пункте для изучения функций $M_n(\alpha, q, x)$, применим также для изучения других подобных систем полиномов. Так, если ввести обозначение

$$N_n(\alpha, q, x) = L_n\left(\Delta^2 \binom{k+\alpha}{\alpha} q^k; x\right), \ \alpha \geqslant 1,$$

то из (44), (33), (34) следует

$$M_n(\alpha, q, x) - M_{n-1}(\alpha, q, x) = N_n(\alpha, q, x),$$

$$M_n(\alpha, q, x) = \sum_{j=0}^{n} N_{n-j}(\alpha, q, x) = -N'_{n+1}(\alpha, q, x)$$

и подобные соотношения. Аналогично (48) имеем

$$N_n(\alpha, q, x) = (-1)^{\alpha-1} r^{-n} e^x [e^{-x} a_n(\alpha, rx)]^{(n+\alpha-1)}.$$

Изображение $\mathfrak{L}(N_n(\alpha, q, x))$ в числителе содержит $(p-1)^{n+\alpha-1}$ и линейную комбинацию величин p^l, $n+1 \leqslant l \leqslant n+\alpha+1$, подобранную так, чтобы сумма делилась на $[(q-1)p+1]^{\alpha+1}$ и т. д. Полиномы $2N_n(1, -1, x)$ совпадают с $\mathfrak{M}_n(x)$, изученными И. Н. Денисюком [6].

§ 2.

1. В этом параграфе рассмотрим некоторые функции $H_k(x)$, $k = 1, 2, 3$, изображения которых имеют вид

$$\frac{P(p)}{(p+a)^{m+1}(p+b)^{n+1}},$$

где $P(p)$ — полином степени не выше $m+n+1$. По известным свойствам преобразования Лапласа

$$H_k(x) = A_k(x) e^{-ax} + B_k(x) e^{-bx},$$

где A_k, B_k — полиномы степеней не выше m и n соответственно, так что всё сводится к изучению этих полиномов.

Начнём со случая $P(p) = 1$. Итак, пусть

$$\mathfrak{L}(H_1(x)) = \frac{1}{(p+a)^{m+1}(p+b)^{n+1}}. \tag{52}$$

В этом случае, используя известные формулы (например [1], стр. 158, формула 116), получим

$$\begin{aligned} H_1(x) = {} & \frac{(-1)^{m+1}}{n!\,(-a+b)^{m+n+1}} F_m(n, (-a+b)x) e^{-ax} + \\ & + \frac{(-1)^{n+1}}{m!\,(a-b)^{m+n+1}} F_n(m, (a-b)x) e^{-bx}, \end{aligned} \tag{53}$$

где

$$F_m(n, x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(m+n-k)!\,(-x)^k}{k!\,(m-k)!}. \tag{54}$$

Для дальнейшего важно отметить, что

$$H_1^{(j)}(0) = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant m+n. \tag{55}$$

Это следует из того, что разложение по степеням величины p^{-1} правой части (52) начинается с члена p^{-m-n-2}, откуда следует, что разложение по степеням величины x функции $H_1(x)$ начинается с члена Cx^{m+n+1}.

Пусть теперь

$$\mathfrak{L}\left(H_2(x)\right)=\frac{(p+c)^k}{(p+a)^{m+1}(p+b)^{n+1}},\quad 0\leqslant k\leqslant m+n+1.$$

Тогда

$$\mathfrak{L}\left(H_2(x)\,e^{cx}\right)=\frac{p^k}{(p+a-c)^{m+1}(p+b-c)^{n+1}}=$$

$$=\mathfrak{L}\left[\frac{d^k}{dx^k}\,\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+a-c)^{m+1}(p+b-c)^{n+1}}\right)\right].$$

(Последнее преобразование законно в силу (55)). А из этого следует

$$H_2(x)=e^{-cx}\left[e^{cx}H_1(x)\right]^{(k)},\tag{56}$$

откуда, в свою очередь, вытекает

$$A_2(x)=\frac{(-1)^n\,e^{(a-c)x}}{n!\,(a-b)^{m+n+1}}\left[F_m\big(n,\ (-a+b)\,x\big)\,e^{(c-a)x}\right]^{(k)}$$

и аналогичное выражение для $B_2(x)$. При $a=0$, $b=c=-1$, $k=m+1$, $n=0$ полином $A_2(x)$ совпадает с полиномом Лагерра $L_m(x)$.

Аналогичные рассуждения применимы для изучении функции $H_3(x)$, заданной соотношением

$$\mathfrak{L}\left(H_3(x)\right)=\frac{(p+c)^k\,(p+d)^l}{(p+a)^{m+1}(p+b)^{n+1}},\quad k+l\leqslant m+n+1.$$

Из (55) и (56) следует, что

$$H_2^{(j)}(0)=0,\ 0\leqslant j\leqslant m+n-k.$$

Поэтому:

$$\mathfrak{L}\left(H_3(x)\,e^{dx}\right)=\mathfrak{L}\left[\frac{d^l}{dx^l}\,\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{(p+c-d)^k}{(p+a-d)^{m+1}(p+b-d)^{n+1}}\right)\right];$$

отсюда:

$$H_3(x)=e^{-dx}\left\{e^{(d-c)x}\left[e^{cx}H_1(x)\right]^{(k)}\right\}^{(l)}$$

и наконец

$$A_3(x)=\frac{(-1)^n\,e^{(a-d)x}}{n!\,(a-b)^{m+n+1}}\left\{e^{(d-c)x}\left[e^{(c-a)x}F_m\big(n,(-a+b)\,x\big)\right]^{(k)}\right\}^{(l)}.\tag{58}$$

Очевидно аналогичные рассуждения применимы и в случае, когда число различных множителей в числителе изображения больше двух.

Применим (58) к частному случаю, который рассматривали И. Н. Денисюк [3] и Э. Я. Риекстыньш [8], именно $k=l=m=n$, $a=-c=\lambda$, $b=-d=1$. Полином $A_3(x)$ при этом был обозначен через $\Lambda_n(2x,\lambda)$. Тогда получим

$$A_3(x)=\frac{(-1)^n\,e^{(\lambda+1)x}}{n!\,(\lambda-1)^{2n+1}}\left\{e^{(\lambda-1)x}\left[e^{-2\lambda x}F_n\left(n,\ (1-\lambda)\,x\right)\right]^{(n)}\right\}^{(n)},\tag{59}$$

или, так как в (58) пары чисел c, k и d, l всегда можно менять местами:

$$A_3(x)=\frac{(-1)^n\,e^{2\lambda x}}{n!\,(\lambda-1)^{2n+1}}\left\{e^{(1-\lambda)x}\left[e^{-(\lambda+1)x}\,F_n\left(n,\ (1-\lambda)\,x\right)\right]^{(n)}\right\}^{(n)}.$$

Отсюда можно подсчитать коэффициенты полинома $A_3(x)$, но так как полученные выражения не проще тех, которые в [8] были найдены другим путем, они здесь приведены не будут.

2. Отсановимся на полиномах $F_n(m, x)$, играющих существенную роль в (53), (57), (58). Учитывая перестановку букв m и n, получим из (54)

$$x^n F_n(m, x^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(m+k)!\,(-x)^k}{(n-k)!\,k!}.$$

Но с другой стороны можно убедиться (см. [9]), что и

$$\frac{m!}{n!}\, e^{-\frac{1}{x}}\, x^{n-m} \left(e^{\frac{1}{x}}\, x^{2n+(m-n)}\right)^{(n)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(m+k)!\,(-x)^k}{(n-k)!\,k!}.$$

Левая часть предыдушего равенства представляет так называемый обобщенный полином Бесселя, который обозначим через $B_n^{(m-n)}(x)$. Итак

$$x^n F_n(m, x^{-1}) = (-1)^n B_n^{(m-n)}(x)$$

или

$$F_n(m, x) = (-1)^n x^n B_n^{(m-n)}(x^{-1}). \tag{60}$$

Другое выражение для $F_n(m, x)$ получается при помощи полиномов $a_n(0, x)$ из первого параграфа этой статьи. Именно

$$F_n(m, x^{-1}) = x^n\, [x^{m+n}\, a_n(0, -x^{-1})]^{(m)}. \tag{61}$$

(60) и (61) вместе дают новое выражение для полиномов Бесселя:

$$B_n^{(k)}(x) = (-1)^n [x^{2n+k}\, a_n(0, -x^{-1})]^{(n+k)}.$$

Так как для изучении полиномов Бесселя можно применить почти все методы теории классических ортогональных полиномов (кроме ортогональности на части вещественной оси), то вполне аналогично можно исследовать также полиномы $F_n(m, x)$. Например, известно, что $B_n^{(m-n)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x^2 y'' + [(m-n+2)x - 1]\, y' - m(n+1)\, y = 0.$$

Используя (60) отсюда получим, что $F_n(m, x)$ является решением уравнения

$$x^2 y'' + [x^2 - (m+n)x]\, y' + [-nx + (n-m)]\, y = 0.$$

20 I 1959 *Кафедра математического анализа*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Г. Дёч.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Москва, 1958.

[2]. *Н. Н. Лебедев.* Специальные функции и их приложения. Москва, 1953.

[3]. *И. Н. Денисюк.* Об одном обобщении полиномов Лягерра и связанной с ним задаче Коши для уравнения в частных конечных разностях. Украинский Математический журнал, 1954, т. 6, № 2, 245—256.

[4]. *И. Н. Денисюк.* О полиномах задачи о растягивающем ударе. Украинский математический журнал, 1954, т. 6, № 4, 423—429.

[5]. *И. Н. Денисюк.* Некоторые соотношения, содержащие нормированные полиномы Лягерра и им аналогичные. Доклады АН Украинской ССР, 1954, № 5, 324—326.

[6]. *И. Н. Денисюк.* Новые полиномы, аналогичные полиномам Лягерра. Доклады АН Украинской ССР, 1954, № 5, 327—330.

[7]. *Э. Я. Риекстыньш.* Об одном многочлене, применимом к решению телеграфных уравнений. Прикладная математика и механика, 1954, т. 18, вып. 6, 738—744.

[8]. *Э. Я. Риекстыньш.* О канатных функциях. Ученые записки Латвийского государственного университета, 1956, т. 8, вып. 2, 93—98.

[9]. *R. P. Agarwal.* On Bessel Polynomials. Canadian Journal of Mathematics, 1954, vol. 6, N 3, 410—415.

DAŽAS POLINOMU SAIMES, RADNIECĪGAS LAGERRA POLINOMIEM

G. Eņģelis

(Kopsavilkums)

Darba pirmajā paragrāfā aplūkotas polinomu saimes, kuras raksturo vienkāršā sakarība (1) starp divu sekojošu polinomu attēliem Laplasa transformācijā. Atrasta virkne šo polinomu īpašību, kas speciālā gadījumā pāriet pazīstamās Lagerra polinomu īpašībās. Otrajā paragrāfā parādīts, ka funkcija, kuras attēls ir racionāla funkcija ar diviem poliem, izsakāma ar Beseļa polinomiem.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

ОБОБЩЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КОНТУРНОГО ИНТЕГРАЛА

В. РИЕКСТЫНЯ

В различных математических дисциплинах большую роль играют асимптотические оценки, причем иногда приходится рассматривать обобщенные асимптотические разложения, т. е. асимптотические функциональные ряды. В настоящей работе обобщенные асимптотические разложения будем понимать в смысле статьи [1]. В работе будут исследоваться асимптотические формулы для контурного интеграла $F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{pt} f(p)\, dp$ при больших значениях действительного аргумента t, при помощи асимптотических свойств функции $f(p)$ в окрестности конечной особой точки. Рассмотрим три случая, когда упомянутая особая точка является, соответственно

1) существенно особой точкой, которая может быть также и точкой разветвления (теоремы 1 и 2);

2) алгебраической точкой разветвления (теорема 3);

3) логарифмической точкой разветвления (теорема 4).

Теоремы 1, 3, и 4 опубликованы без доказательства в статье автора [1].

Для облегчения доказательств дальнейших теорем докажем следующую л е м м у.

Пусть

1) функция $f(p)$ абсолютно интегрируема вдоль каждой конечной дуги контура Γ, состоящего из лучей γ_j $(j = 1, 2)$ $\left[|\arg(p - p_0)| = \psi, \frac{\pi}{2} < < \psi \leqslant \pi\right]$ и дуги окружности γ_3 $[|p - p_0| = \delta > 0]$ с обходом точки в положительном направлении (см. рис. 1);

2) существует число $K > 0$ такое, что на лучах γ_j имеет место оценка $|f(p)| \leqslant e^{K|p|}$.

Тогда интеграл

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{pt} f(p)\, dp \qquad (1)$$

сходится для всех действительных, достаточно больших $t \geqslant T > 0$ и на лучах γ_j имеет место оценка

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} e^{pt} f(p)\, dp = $$

$$= o_{(t > T)_\infty}\left[e^{\delta t \cos\psi + p_0 t}\right] \qquad (2)$$

$$(j = 1, 2).$$

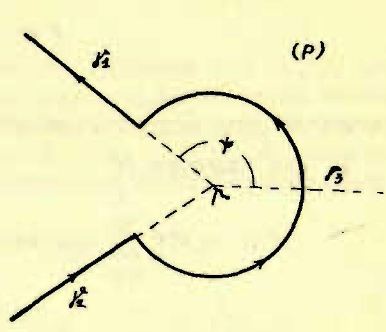

Рис. 1.

Имеем

$$\left| \frac{e^{-p_0 t}}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_1} e^{pt} f(p)\, dp \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} e^{|p_0| K} \int\limits_{\delta}^{\infty} e^{xt \cos\psi + Kx} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left[|p_0| K + \delta(t\cos\psi + K) \right] \cdot \frac{1}{-t\cos\psi - K},$$

если только $t > -\frac{K}{\cos\psi} = T$. Точно такую же оценку получаем для интеграла по контуру γ_2. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} e^{pt} f(p)\, dp = o_{(t>T)_\infty} \left(e^{p_0 t + \delta t \cos\psi} \right),$$

где $j = 1, 2$. Принимая во внимание полученную оценку, соотношение

$$\int\limits_{\Gamma} e^{pt} f(p)\, dp = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{\gamma_j} e^{pt} f(p)\, dp + \int\limits_{\gamma_3} e^{pt} f(p)\, dp$$

и то, что $f(p)$ абсолютно интегрируема вдоль каждой конечной дуги контура Γ, можно утверждать, что интеграл (2) сходится для всех $t > T$.

Теорема 1. Пусть

1) функция $f(p)$ регулярна в области $|p - p_0| \leqslant \delta$ за исключением точки p_0, которая является существенно особой точкой для $f(p)$;

2) в окрестности точки p_0 для каждого N ($N = 0, 1, 2, \ldots$) имеет место соотношение

$$f(p) = \exp\left[-c(p - p_0)^{-\mu} \right] \sum_{k=0}^{N} a_k (p - p_0)^{\lambda_k} +$$

$$+ o_{(|p-p_0| \leqslant \delta)_{p_0}} \left\{ \exp\left[-c(p - p_0)^{-\mu} \right] (p - p_0)^{\lambda_N} \right\},$$

где $c > 0$, $\mu > 0$, $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ действительные числа, a_k комплексные числа, $(p - p_0)^{\lambda_k} = \exp\left[\lambda_k \ln(p - p_0) \right]$, а для функции $\ln(p - p_0)$ выбрано главное значение с разрезом из точки $p = p_0$ до бесконечности вдоль прямой расположенной вне сектора $|\arg(p - p_0)| \leqslant \psi$ $\left(\frac{\pi}{2} < \psi < \pi \right)$;

3) функция $f(p)$ удовлетворяет условиям леммы;

4) контур Γ выбран согласно рис. 1. Тогда

1) интеграл

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{pt} f(p)\, dp \tag{4}$$

сходится для каждого действительного достаточно большого $t > T > 0$;

2) для каждого N

$$F(t) = e^{p_0 t} \sum_{k=0}^{N} a_k t^{-\lambda_k - 1} J^{\mu}_{-\lambda_k - 1}(t^{\mu} c) + o_{(t)_\infty} \left[\exp\left(p_0 t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha t^{\frac{\mu}{\mu+1}} \cos\frac{\pi}{\mu + 1} \right) t^{-\gamma_N} \right], \tag{5}$$

$$t^{-\lambda_N-1} J^{\mu}_{-\lambda_N-1}(ct^{\mu}) = \bar{O}_{(t)_\infty}\left[\exp\left(p_0 t + \alpha t^{\frac{\mu}{\mu+1}} \cos\frac{\pi}{\mu+1}\right) t^{-\gamma_N}\right] \quad (6)$$

где

$$J^{\mu}_{\lambda_N}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m}{m!\,\Gamma(\mu m + \lambda_N + 1)}; \quad \alpha = (c\mu)^{\frac{1}{\mu+1}}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right);$$

$$\gamma_N = \frac{\lambda_N + 1 + \frac{\mu}{2}}{\mu + 1}.$$

Доказательство. Соотношение (6) следует из асимптотического разложения функции $J^{\mu}_{\lambda_N}(t)$ [2]. Сходимость интеграла (4) следует из леммы. Выведем формулу (5). Из формулы (3) следует

$$f(p) = \exp[-c(p-p_0)^{-\mu}]\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k (p-p_0)^{\lambda_k} + (p-p_0)^{\lambda_N} \rho(p-p_0)\right\},$$

где $\rho(p-p_0)$ регулярная функция в окрестности $|p-p_0| \leqslant \delta$ за исключением точки p_0 и $\rho(p-p_0) \to 0$, когда $|p-p_0| \to 0$. В силу этого имеем

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{pt} f(p)\,dp = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{N} a_k \int_\Gamma e^{pt}\exp[-c(p-p_0)^{-\mu}](p-p_0)^{\lambda_k}\,dp +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{pt}\exp[-c(p-p_0)^{-\mu}](p-p_0)^{\lambda_N}\rho(p-p_0)\,dp.$$

Легко проверить, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{pt}\exp[-c(p-p_0)^{-\mu}](p-p_0)^{\lambda_k}\,dp = t^{-\lambda_k-1} e^{p_0 t} J^{\mu}_{-\lambda_k-1}(t^{\mu} c).$$

Отсюда

$$F(t) = e^{p_0 t}\sum_{k=0}^{N} a_k t^{-\lambda_k-1} J^{\mu}_{-\lambda_k-1}(t^{\mu} c) + R(t), \quad (7)$$

где

$$R(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{pt}\exp[-c(p-p_0)^{-\mu}](p-p_0)^{\lambda_N}\rho(p-p_0)\,dp.$$

Оценим остаточный член $R(t)$. В силу свойств функции $\rho(p-p_0)$, для любого $\varepsilon > 0$ найдем число $\sigma > 0$ такое, что $|\rho(p-p_0)| < \varepsilon$, если только $|p-p_0| < \sigma < \delta$. Контур интегрирования Γ согласно теореме Коши можем изменить так, что дуга окружности γ_3 имеет радиус $r < \sigma$. Из третьего условия теоремы при фиксированном N легко следует существование такого $K_1 > 0$, что на лучах γ_1 и γ_2

$$|\exp[-c(p-p_0)^{-\mu}](p-p_0)^{\lambda_N}\rho(p-p_0)| =$$

$$= \left|f(p) - \exp[-c(p-p_0)^{-\mu}]\sum_{k=0}^{N} a_k (p-p_0)^{\lambda_k}\right| \leqslant e^{K_1|p|}.$$

Используя лемму, получаем

$$R(t) = \mathrm{o}_{(t)_\infty}\left(e^{p_0 t + rt\cos\psi}\right) + R_1(t), \tag{8}$$

где

$$R_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_3} e^{pt - \frac{c}{(p-p_0)^{\mu}}} (p-p_0)^{\gamma_N}\varphi(p-p_0)\,dp.$$

Возьмем t настолько большим, чтобы $\left(\frac{\mu c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}} < \sigma$. Выбирая $r = \left(\frac{\mu c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}$, на γ_3 имеем $p - p_0 = \left(\frac{\mu c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}} e^{i\varphi}$. Далее

$$\left|R_1(t)\,e^{-p_0 t}\right| \leqslant 2\,\frac{\varepsilon}{2\pi}\left(\frac{\mu c}{t}\right)^{\frac{\lambda_N+1}{\mu+1}} \int\limits_0^{\psi} e^{\tau\left(\cos\varphi - \frac{1}{\mu}\cos\mu\varphi\right)}\,d\varphi, \tag{9}$$

где

$$\tau = (\mu c\, t^{\mu})^{\frac{1}{\mu+1}}. \tag{10}$$

Можно показать, что функция

$$g(\varphi) = \cos\varphi - \frac{1}{\mu}\cos\mu\varphi \tag{11}$$

при $\mu > 1$ в точке $\varphi = \frac{\pi}{\mu+1}$ принимает наибольшее на $[0, \pi]$ значение, т. е.

$$g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right) = \cos\frac{\pi}{\mu+1}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right) \geqslant g(\varphi). \tag{12}$$

Для того, чтобы неравенство (12) можно было использовать для оценки интеграла (11), необходимо рассмотреть случаи, $\mu > 1$ и $\mu \leqslant 1$.

I. $\mu > 1$. Представим интеграл (9) в следующей форме:

$$I = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{\mu+1}-\beta} e^{\tau g(\varphi)}\,d\varphi + 2\int\limits_{\frac{\pi}{\mu+1}-\beta}^{\frac{\pi}{\mu+1}+\beta} e^{\tau g(\varphi)}\,d\varphi + 2\int\limits_{\frac{\pi}{\mu+1}+\beta}^{\psi} e^{\tau g(\varphi)}\,d\varphi.$$

Для упрощения дальнейших оценок целесообразно выбрать

$$\beta = \tau^{-\frac{1}{3}}. \tag{13}$$

Преобразуем подинтегральную функцию при помощи формулы Тейлора:

$$e^{\tau g(\varphi)} = \exp\left\{\tau\left[g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right) - \frac{1}{2}g''\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)\left(\varphi - \frac{\pi}{\mu+1}\right)^2 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\varphi - \frac{\pi}{\mu+1}\right)^3 \mathrm{O}_{(\varphi)_{\frac{\pi}{\mu+1}}}(1)\right]\right\} \leqslant \exp\left\{\tau\left[g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}g''\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)\left(\varphi - \frac{\pi}{\mu+1}\right)^2\right]\right\}\mathrm{O}_{(t)_\infty}(1)$$

так как

$$\left|\varphi - \frac{\pi}{\mu+1}\right| \leqslant \tau^{-\frac{1}{3}}.$$

Принимая во внимание последнюю оценку, получаем:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\mu+1}-\beta}^{\frac{\pi}{\mu+1}+\beta} e^{\tau g(\varphi)}\,d\varphi \leqslant e^{\tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)} O_{(t)_\infty}(1) \int\limits_{\frac{\pi}{\mu+1}-\beta}^{\frac{\pi}{\mu+1}+\beta} e^{-\tau\frac{1}{2}g''\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)\left(\varphi-\frac{\pi}{\mu+1}\right)^2} d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant e^{\tau g\left(\frac{\tau}{\mu+1}\right)}\,\tau^{-\frac{1}{2}}\,O_{(t)_\infty}(1). \tag{14}$$

Оценивая оставшиеся интегралы, мы используем непрерывность подинтегральной функции, а также то, что t можно выбрать сколь угодно большим. Поэтому

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\mu+1}-\beta} e^{\tau g(\varphi)}\,d\varphi \leqslant \frac{\pi}{\mu+1}\,e^{\tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}-\beta\right)} = e^{\tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)}\,e^{-\tau A}\,\frac{\pi}{\mu+1}, \tag{15}$$

где

$$A = g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right) - g\left(\frac{\pi}{\mu+1}-\beta\right) > 0.$$

Подобную оценку получаем для последнего интеграла. Полученные оценки (14) и (15) дают

$$I = e^{\tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)}\,\tau^{-\frac{1}{2}}\,O_{(t)_\infty}(1).$$

Согласно оценке (9) имеем

$$R_1(t) = o_{(t)_\infty}\left(e^{p_0 t + \tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)}\,\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda_N+1}{\mu}}\right),$$

а

$$R(t) = O_{(t)_\infty}\left(e^{p_0 t + rt\cos\psi}\right) + o_{(t)_\infty}\left(e^{p_0 t + \tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)}\,\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda_N+1}{\mu}}\right).$$

Так как

$$r = \left(\frac{\mu c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}},$$

$$\mu > 1,$$

$$\tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right) = \left(c\,\mu\,t^{\mu}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cos\frac{\pi}{\mu+1}$$

и

$$\cos\psi - g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right) < 0,$$

то

$$rt\cos\psi = \left(\frac{\mu c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}} t\cos\psi = \tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right) +$$

$$+\tau\left[\cos\psi - g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)\right] > \tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)$$

и

$$R(t) = o_{(t)\infty}\left(\exp\left[p_0 t + (c\,\mu\, t^{\mu})^{\frac{1}{\mu+1}}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cos\frac{\pi}{\mu+1}\right] t^{-\frac{\lambda_N+1+\frac{\mu}{2}}{\mu+1}}\right).$$

Оценка для $R(t)$ и формула (7) показывают, что в случае $\mu > 1$ теорема доказана.

II. $\mu \leqslant 1$. В этом случае, преобразуем формулу (8) для $R_1(t)$:

$$R_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{\lambda_N+1}{\mu+1}} e^{p_0 t}\left\{\int_{L_1}\exp\left[(t^{\mu} c)^{\frac{1}{\mu+1}}(e^z - e^{-\mu z}) + \right.\right.$$

$$\left. + (\lambda_N+1)\,z\right]\rho\left[e^z\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\right]dz -$$

$$\left. - \int_{L_2}\exp\left[(t^{\mu} c)^{\frac{1}{\mu+1}}(e^z - e^{-\mu z}) + (\lambda_N+1)\,z\right]\rho\left[e^z\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\right]dz\right\}. \quad (16)$$

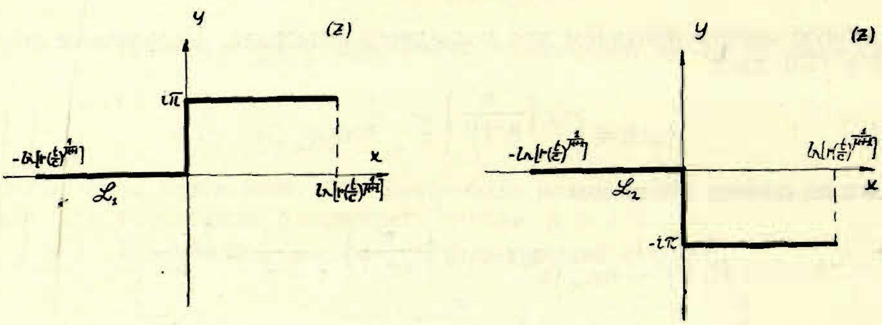

Рис. 2.

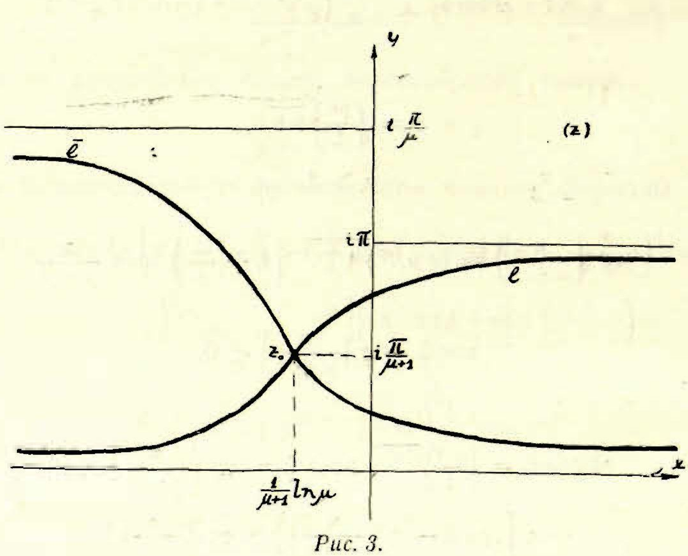

Рис. 3.

Для оценки интеграла используем метод перевала. Рассмотрим две точки перевала $z_0 = \frac{1}{\mu+1}\ln\mu + i\frac{\pi}{\mu+1}$; $z_{-1} = \frac{1}{\mu+1}\ln\mu - i\frac{\pi}{\mu+1}$ функции

$$S(z) = e^z - e^{-\mu z}. \tag{17}$$

Уравнение $Im\, S(z) = Im\, S(z_0)$ дает две линии, l и $\overline{l}$ проходящие через точку z_0 (рис. 3). На кривой l (см. рис. 3) функция $Re\, S(z)$ достигает своего наибольшего значения в точке z_0. По теореме Коши кривую L_1 можно заменить контуром, состоящем из выше упомянутой линии и прямолинейных вертикальных отрезков, проходящих через точки $-\ln\left[r\left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\right]$, $\ln\left[r\left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\right] + i\pi$ (см. рис. 4). Разделим этот новый контур на отдельные части, как показано на рис. 4. Положение концов кривой l_1 мы определим ниже.

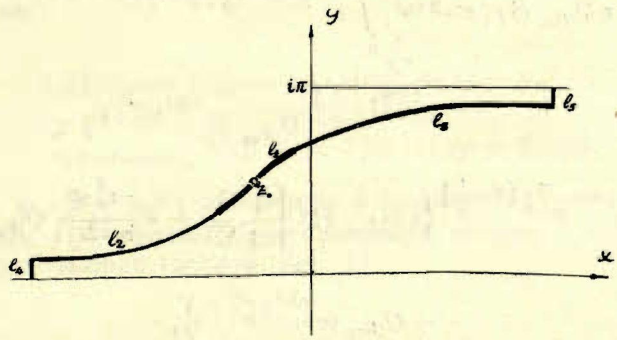

Рис. 4.

Интеграл по дуге l_k обозначим соответственно символом $I_k (k = 1, 2, 3, 4, 5)$ и введем еще обозначение $(t^\mu c)^{\frac{1}{\mu+1}} = \tau_1$. Тогда

$$\int_{L_1} e^{\tau_1 S(z) + (\lambda_N + 1) z} \rho\left[e^z\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\right] dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

Очевидно, главную часть оценки даст интеграл I_1. Чтобы оценить интеграл I_1, проведем окружность

$$|z - z_0| = v_0 = t^{-\frac{2\mu}{5(\mu+1)}}. \tag{18}$$

Эта окружность пересекает l_1 в двух точках, которые будем считать концами дуги l_1. В точке z_0 проведем касательную к l_1 и контур l_1 заменим отрезком касательной, содержащимся в этом круге и дугами окружности, соединяющими концы l_1 с концами отрезка касательной. Этот новый контур обозначим $\overline{l}_1$. Преобразуем функцию $e^{\tau_1 S(z)}$ подинтегрального выражения при помощи формулы Тейлора. Согласно допущению (18) получаем:

$$e^{\tau_1 S(z)} = e^{\tau_1\left[S(z_0) + \frac{1}{2} S''(z_0)(z - z_0)^2\right]} O_{(1)\infty}(1).$$

Принимая во внимание, что:

1) на рассматриваемом контуре $\overline{l_1}\left|\rho\left[e^z\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\right]\right|<\varepsilon$;

2) на касательной $z-z_0=ve^{i\chi}$, где χ — угол между касательной и действительной осью;

3) на дугах кривой $z-z_0=v_0\,e^{i\varphi}$;

4) $S''(z_0)=\mu^{\frac{1}{\mu+1}}\,e^{i\frac{\pi}{\mu+1}}(1+\mu)$, используя обозначение (10) и асимптотическую формулу для интеграла вероятностей [3], мы получаем оценку

$$|I_1|\leqslant\varepsilon\,O_{(t)_\infty}(1)\,|e^{\tau_1 S(z_0)}|\int\limits_{l_1}\left|e^{\frac{\tau_1}{2}S''(z_0)(z-z_0)^2+(\lambda_N+1)z}\right||dz|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\,O_{(t)_\infty}(1)\,|e^{\tau_1 S(z_0)}|\int\limits_0^{v_0}e^{\tau\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{\mu+1}+2\chi\right)(1+\mu)v^2}\,dv+$$

$$+e^{\tau\cos\frac{\pi}{\mu+1}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}\,O_{(t)_\infty}\left(e^{-Bt\frac{\mu}{5(\mu+1)}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant e^{\tau\cos\frac{\pi}{\mu+1}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}\left\{\varepsilon\,O_{(t)_\infty}(1)\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\tau D}}+\frac{e^{-v_0^2\tau D}}{v_0\tau D}\,O_{(t)_\infty}(1)\right]+\right.$$

$$\left.+O_{(t)_\infty}\left(e^{-Bt\frac{\mu}{5(\mu+1)}}\right)\right\},$$

где $B>0$ не зависит от t, $D=-\frac{\mu+1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{\mu+1}+2\chi\right)>0$. Принимая во внимание формулу (18), получаем:

$$I_1=o_{(t)_\infty}\left(e^{\tau\cos\frac{\pi}{\mu+1}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}\tau^{-\frac{1}{2}}\right).\tag{19}$$

Оценки для интегралов I_2 и I_3 получаются таким же путем, каким мы получили формулу (15). Интегралы I_2 и I_3, а также I_4 и I_5 по сравнению с I_1 являются

$$o_{(t)_\infty}\left(e^{\tau\cos\frac{\pi}{\mu+1}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}\tau^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Следовательно

$$\int\limits_{L_1}e^{\tau_1 S(z)+(\lambda_N+1)z}\,\rho\left[e^z\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\right]dz=o_{(t)_\infty}\left(e^{\tau\cos\frac{\pi}{\mu+1}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}\tau^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Точно такую же оценку получаем для интеграла по контуру L_2, используя точку перевала z_{-1}. Согласно вышесказанному, в силу формулы (16) имеем

$$R_1(t)=o_{(t)_\infty}\left(e^{p_0t+\tau\cos\frac{\pi}{\mu+1}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)}\,t^{-\frac{\lambda_N+1+\frac{\mu}{2}}{\mu+1}}\right).$$

Так как $\cos\psi < 0$, то оба члена в формуле (8) можно объединить. Получаем

$$R(t) = o_{(t)_\infty}\left(e^{p_0 t + \tau \cos\frac{\pi}{\mu+1}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)} t^{-\gamma_N}\right),$$

где

$$\gamma_N = \frac{\lambda_N + 1 + \frac{\mu}{2}}{\mu+1},$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Замечание: этот метод можно было употреблять также при $1 < \mu \leqslant 3$. Если $\mu > 3$, то этот метод уже не применим.

Теорема 2. Пусть

1) функция $f(p)$ регулярна в области $|p - p_0| \leqslant \delta$ за исключением точки p_0, которая является существенно особой точкой для $f(p)$;

2) в окрестности этой точки для каждого N ($N = 0, 1, 2, \ldots$) имеет место соотношение

$$f(p) = \exp\left[c(p-p_0)^{-\mu}\right] \sum_{k=0}^{N} a_k (p-p_0)^{\lambda_k} + \\ + o_{(|p-p_0| \leqslant \delta)_{p_0}} \{\exp\left[c(p-p_0)^{-\mu}\right] (p-p_0)^{\lambda_N}\}, \tag{20}$$

где c, μ, λ_k, a_k, $(p-p_0)^{\lambda_k}$ определены в теореме 1;

3) функция $f(p)$ удовлетворяет условиям леммы;

4) контур Γ выбран согласно рис. 1.

Тогда

1) интеграл $F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{pt} f(p)\, dp$ сходится для каждого действительного достаточно большего $t > T > 0$;

2) для каждого N

$$F(t) = e^{p_0 t} \sum_{k=0}^{N} t^{-\lambda_k - 1} I^{\mu}_{-\lambda_k - 1}(t^{\mu} c) + o_{(t)_\infty}\left(e^{p_0 t + t^{\frac{\mu}{\mu+1}}\alpha}\, t^{-\gamma_N}\right) \tag{21}$$

и

$$t^{-\lambda_N - 1} I^{\mu}_{-\lambda_N - 1}(t^{\mu} c) = \bar{O}_{(t)_\infty}\left(e^{p_0 t + t^{\frac{\mu}{\mu+1}}\alpha}\, t^{-\gamma_N}\right), \tag{22}$$

где

$$I^{\mu}_{n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!\,\Gamma(\mu k + n + 1)}; \quad \alpha = (c\mu)^{\frac{1}{\mu+1}}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right);$$

$$\gamma_N = -\frac{\lambda_N + 1 + \frac{\mu}{2}}{\mu + 1}.$$

При доказательстве этой теоремы нет необходимости отдельно рассматривать случаи $\mu > 1$, и $0 < \mu \leqslant 1$. Доказательство теоремы почти полностью аналогично заказательству предыдущей теоремы для случая $\mu > 1$, поэтому рассматривать его не будем.

Следует отметить, что частный случай этой теоремы при $\mu = 1$ рассмотрен в работе [4], где теорема доказана другим методом и получена более грубая оценка остаточного члена.

Теорема 3. Пусть

1) функция $f(p)$ регулярна в области $|p-i| \leqslant \delta$, $|p+i| \leqslant \delta$ за исключением точек $+i$, $-i$, которые являются алгебраическими точками разветвления;

2) в окрестности этих точек для каждого N ($N=0, 1, 2, 3, \ldots$) имеют место соотношения

$$f(p) = \sum_{k=0}^{N} a_k (p^2+1)^{\lambda_k} + o_{(|p-i| \leqslant \delta)_i} [(p^2+1)^{\lambda_N}]$$

$$f(p) = \sum_{k=0}^{N} a_k (p^2+1)^{\lambda_k} + o_{(|p+1| \leqslant \delta)_{-i}} [(p^2+1)^{\lambda_N}], \tag{23}$$

где $a_k, \lambda_k, (p^2+1)^{\lambda_k}$ определены в теореме 1 и разрезы из точек $+i$ и $-i$ до бесконечно удаленной точки взяты вдоль прямых лежащих вне секторов $|\arg(p-i)| \leqslant \psi$, $|\arg(p+i)| \leqslant \psi$, $\left(\frac{\pi}{2} < \psi < \pi\right)$;

3) на каждом конечном отрезке лучей $|\arg(p+i)| = \psi$, $|\arg(p-i)| = \psi$ функция $f(p)$ абсолютно интегрируема и существует такое число $K > 0$, что на этих лучах

$$|f(p)| \leqslant e^{K|p|}; \tag{24}$$

4) контур C выбран согласно рис. 5.

Тогда

1) интеграл

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{pt} f(p)\, dp \tag{25}$$

сходится для каждого действительного достаточно большого $t > T > 0$;

2) для каждого N

$$F(t) = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{2}{t}\right)^{\lambda_k + \frac{1}{2}} \frac{J_{-\lambda_k - \frac{1}{2}}(t)}{\Gamma(-\lambda_k)} + o_{(t)_\infty} (t^{-\lambda_N - 1}) \tag{26}$$

и

$$\left(\frac{2}{t}\right)^{\lambda_N + \frac{1}{2}} \frac{J_{-\lambda_N - \frac{1}{2}}(t)}{\Gamma(-\lambda_N)} = \bar{O}_{(t > T)_\infty} (t^{-\lambda_N - 1}). \tag{27}$$

Если некоторые из λ_k являются целыми числами, то полагаем $\frac{1}{\Gamma(-\lambda_k)} = 0$.

Замечание. Теорема сохраняет силу, если вместо точек $\pm i$ берем соответственно точки ± 1, и в соотношениях (23) вместо выражения p^2+1 берем p^2-1. Тогда в формулах (26) и (27) вместо функций $J_{-\lambda_k - \frac{1}{2}}$ должны стоять функции $I_{-\lambda_k - \frac{1}{2}}$; остаточные члены в этих формулах надо умножить на e^t.

Доказательство. Обозначим ту часть контура C, которая находится над действительной осью, через C_1, а часть, которая находится под действительной осью — через C_2. Так как функция $f(p)$ удовлетворяет условиям леммы, оба интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} e^{pt} f(p)\,dp + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2} e^{pt} f(p)\,dp = F(t)$$

сходятся для достаточно больших t.

Из условий (23) следует, что

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} e^{pt} f(p)\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{N} a_k \int\limits_{C} e^{pt}(p^2+1)^{\lambda_k}\,dp +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} e^{pt}(p^2+1)^{\lambda_N}\rho_1(p-i)\,dp +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} e^{pt}(p^2+1)^{\lambda_N}\rho_2(p+i)\,dp,$$

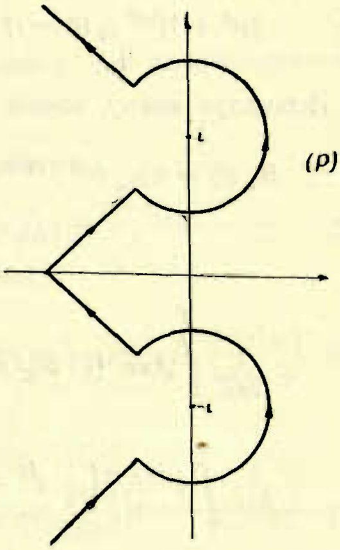

Рис. 5

где $\rho_1(p-i)$ и $\rho_2(p+i)$ регулярные функции в областях $|p-i|\leqslant\delta$, $|p+i|\leqslant\delta$, за исключением точек $\pm i$, кроме того $\rho_1(p-i)\to 0$, если $|p-i|\to 0$ и $\rho_2(p+i)\to 0$ если $|p+i|\to 0$. Используя теорию бесселевых функций [5], можно вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} e^{pt}(p^2+1)^{\lambda_k}\,dp =$$

$$=\begin{cases}\sqrt{\pi}\left(\dfrac{2}{t}\right)^{\lambda_k+\frac{1}{2}}\dfrac{J_{-\lambda_k-\frac{1}{2}}(t)}{\Gamma(-\lambda_k)}, & \text{если } \lambda_k\neq 0,\ 1,\ 2,\dots\\ 0 & \text{, если } \lambda_k = 0,\ 1,\ 2,\dots\end{cases}$$

Оба эти случая можно объединить в одной формуле, если считать, что $\dfrac{1}{\Gamma(-\lambda_k)} = 0$ если $\lambda_k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots$

Следовательно

$$F(t) = \sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{N} a_k\left(\frac{2}{t}\right)^{\lambda_k+\frac{1}{2}} J_{-\lambda_k-\frac{1}{2}}(t)\,\frac{1}{\Gamma(-\lambda_k)} + R_1(t) + R_2(t), \quad (28)$$

где

$$R_1(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} e^{pt}(p^2+1)^{\lambda_N}\rho_1(p-i)\,dp$$

$$R_2(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_2} e^{pt}(p^2+1)^{\lambda_N}\rho_2(p+i)\,dp.$$

Остается оценить $R_1(t)$ и $R_2(t)$. Рассмотрим интеграл $R_1(t)$. Согласно свойствам функции $\rho_1(p-i)$, для каждого $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\delta>0$, что $|\rho_1(p-i)|<\varepsilon$ как только $|p-i|<\delta$. Выбираем число $0<r<\delta$

и возьмём t настолько большим, чтобы $\frac{1}{t} < r$. По теореме Коши контур интегрирования C_1 можно изменить так, чтобы радиус круга был $\frac{1}{t}$. Легко доказать, что существует такая постоянная $K_1 > 0$, что на лучах

$$|(p^2+1)^{\lambda N} \rho_1(p-i)| = \left| f(p) - \sum_{k=0}^{N} a_k (p^2+1)^{\lambda k} \right| \leqslant e^{K_1|p|}.$$

Используя лемму, имеем:

$$R_1(t) = o_{(t)_\infty}(e^{it+rt\cos\psi}) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{t}}^{r} e^{t(xe^{i\psi}+i)}\, x^{\lambda N} e^{i(\lambda N+1)\psi} \times$$

$$\times (xe^{i\psi}+2i)^{\lambda N} \rho_1(xe^{i\psi})\,dx +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{r}^{\frac{1}{t}} e^{t(xe^{-i\psi}+i)}\, x^{\lambda N} e^{-i(\lambda N+1)\psi} (xe^{-i\psi}+2i)^{\lambda N} \rho_1(xe^{-i\psi})\,dx +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\psi}^{\psi} e^{e^{i\varphi}+it}\left(\frac{1}{t}e^{i\varphi}+2i\right)^{\lambda N} e^{(\lambda N+1)i\varphi}\, t^{-(\lambda N+1)}\, \rho_1\left(\frac{1}{t}e^{i\varphi}\right) i\,d\varphi$$

или

$$|R_1(t) - o_{(t)_\infty}(e^{rt\cos\psi})| \leqslant \frac{1}{\pi}(r+2)^{\lambda N}\varepsilon \int_{\frac{1}{t}}^{r} e^{tx\cos\psi} x^{\lambda N}\,dx +$$

$$+\left(\frac{1}{t}+2\right)^{\lambda N} t^{-(\lambda N+1)}\,\varepsilon e \leqslant \frac{1}{\pi}(r+2)^{\lambda N}\frac{\varepsilon}{(-t\cos\psi)^{\lambda N+1}}\int_{-\cos\psi}^{\infty} e^{-y} y^{\lambda N}\,dy +$$

$$+\left(\frac{1}{t}+2\right)^{\lambda N}\varepsilon e t^{-\lambda N-1}.$$

Учитывая, что $\cos\psi < 0$, из последней оценки получаем

$$R_1(t) = o_{(t)_\infty}(t^{-\lambda N-1}). \tag{29}$$

Совершенно аналогично получаем оценку для интеграла $R_2(t)$. Формула (27) следует из асимптотического разложения функции Бесселя [5]. Тем самым теорема доказана.

Теорема 4. Пусть

1) функция $f(p)$ регулярна в области $|p-p_0| \leqslant \delta$ за исключением точки p_0, которая является логарифмической точкой разветвления для $f(p)$;

2) в окрестности этой точки для каждого N ($N = 0, 1, 2, \ldots$) имеет место соотношение

$$f(p) = \sum_{k=1}^{N} a_k \ln^k(p-p_0)(p-p_0)^{\lambda k} +$$

$$+ O_{(|p-p_0|\leqslant\delta)_{p_0}}[\ln^{N+1}(p-p_0)(p-p_0)^{\lambda N+1}], \tag{30}$$

где λ_k, a_k, $(p-p_0)^{\lambda_k}$ имеют прежние значения и разрез из точки $p=p_0$ до бесконечности взят вдоль прямой, лежащей вне сектора $|arg\,(p-p_0)|\leqslant\psi$ $\left(\frac{\pi}{2}<\psi\leqslant\pi\right)$;

3) функция $f(p)$ удовлетворяет условиям леммы;

4) контур Γ выбран согласно рис. 1.

Тогда

1) интеграл $F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{pt} f(p)\,dp$ сходится для каждого действительного достаточно большого $t>T>0$;

2) для каждого N справедливо соотношение:

$$F(t)=e^{p_0 t}\sum_{k=1}^{N} a_k\Phi_k(\lambda_k,t)+O_{(t)_\infty}\left[e^{p_0 t}(\ln t)^{N+1}\,t^{-\lambda_{N+1}-1}\right], \tag{31}$$

где

$$\Phi_k(x,t)=\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\frac{t^{-x-1}}{\Gamma(-x)}\right]=\frac{(-1)^k}{t^{x+1}}\,(\ln t)^k\,\frac{1}{\Gamma(-x)}+o_{(t)_\infty}\left(\frac{\ln^k t}{t^{x+1}}\right) \tag{32}$$

если $x\neq 0,1,2,\ldots$, и

$$\Phi_k(m,t)=(-t)^{-m-1}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^l\binom{k}{l}(\ln t)^l\sum_{j=0}^{\frac{k-l-1}{2}}(-1)^j\pi^{2j}\binom{k-l}{2j+1}\Gamma^{(k-l-2j-1)}(m+1)=$$

$$=(-1)^{m+k}\,t^{-m-1}\,k\,\Gamma(m+1)(\ln t)^{k-1}+o_{(t)_\infty}\left(\ln^{k-1}t\;t^{-m-1}\right) \tag{33}$$

если $x=m=0,1,2,\ldots$

Доказательство. Сходимость интеграла $F(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{pt} f(p)\,dp$ следует из леммы. Согласно формуле (33)

$$F(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}a_k\int\limits_{\Gamma}e^{pt}\ln^k(p-p_0)(p-p_0)^{\lambda_k}\,dp+R(t), \tag{34}$$

где

$$R(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{pt}(p-p_0)^{\lambda_{N+1}}\ln^{N+1}(p-p_0)\,h(p-p_0)\,dp,$$

$h(p-p_0)$ — регулярная функция в окрестности $|p-p_0|\leqslant\delta$ за исключением точки p_0. Кроме того существует число $M>0$ такое, что в этой окрестности $|h(p-p_0)|<M$. Остается оценить остаточный член $R(t)$ и вычислить интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}e^{pt}\ln^k(p-p_0)(p-p^0)^{\lambda_k}\,dp=\frac{e^{p_0 t}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}e^{zt}z^{\lambda_k}\ln^k z\,dz, \tag{35}$$

где Γ_0 образ контура Γ при подстановке $p-p_0=z$. Если λ_k не является целым числом, то очевидно

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}e^{zt}z^{\lambda_k}\ln^k z\,dz=\left[\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(\frac{t^{-x-1}}{\Gamma(-x)}\right)\right]_{x=\lambda_k}=\Phi_k(\lambda_k,t).$$

Далее

$$\Phi_k(\lambda_k, t) = \frac{1}{2\pi i}\, t^{-\lambda_k - 1} \int\limits_{\Gamma_1} e^q q^{\lambda_k} (\ln q - \ln t)^k \, dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\, t^{-\lambda_k - 1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \ln^j t \int\limits_{\Gamma_1} e^q q^{\lambda_k} \ln^{k-j} q \, dq =$$

$$= t^{-\lambda_k - 1} (-1)^k \ln^k t \, \frac{1}{\Gamma(-\lambda_k)} + o_{(t)_\infty}\left(\frac{\ln^k t}{t^{-\lambda_k - 1}}\right).$$

Здесь Γ_1 контур подобный контуру Γ_0. Если же λ_k целое число, то

$$\Phi_k(\lambda_k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} e^{zt} z^{\lambda_k} \ln^k z \, dz = \frac{1}{2\pi i}\, t^{-\lambda_k - 1} \int\limits_{\Gamma_1} e^q q^{\lambda_k} (\ln q - \ln t)^k \, dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\, t^{-\lambda_k - 1} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l \binom{k}{l} \ln^l t \int\limits_{\Gamma_1} e^q q^{\lambda_k} \ln^{k-l} q \, dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} (-t)^{-\lambda_k - 1} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l \binom{k}{l} \ln^l (t) \Big\{ \int\limits_0^\infty e^{-x} (\ln x + i\pi)^{k-l} x^{\lambda_k} \, dx -$$

$$- \int\limits_0^\infty e^{-x} (\ln x - i\pi)^{k-l} x^{\lambda_k} \, dx \Big\} =$$

$$= (-t)^{-\lambda_k - 1} \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^l \binom{k}{l} \ln^l t \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-l-1}{2}\right]} (-1)^j \pi^{2j} \binom{k-l}{2j+1} \Gamma^{(k-l-2j-1)}(\lambda_k + 1) =$$

$$= (-1)^{k+\lambda_k} t^{-\lambda_k - 1} k \ln^{k-1} t \, \Gamma(\lambda_k + 1) + o_{(t)_\infty}(\ln^{k-1} t \; t^{-\lambda_k - 1}).$$

Оценку для $R(t)$ получаем аналогично тому, как при доказательстве предыдущей теоремы мы получили формулу (29):

$$R(t) = O_{(t)_\infty}(e^{p_0 t} \ln^{N+1} t \; t^{-\lambda_{N+1} - 1}).$$

Из оценки $R(t)$, выражения $\Phi_k(\lambda_k, t)$, формул (34), (35) следует утверждение теоремы.

Теорема 4 доказана Г. Дёчем [6] для случая, когда $N = 1$. В работе [4] другим методом получены асимптотические разложения для двух конкретных функций, для которых

$$f(p) = \frac{\log p}{1 + p^2} \quad \text{и} \quad f(p) = \frac{1}{(1-p)\log p}.$$

З а м е ч а н и е. Все предыдущие теоремы верны, если $f(p)$ является изображением $F(t)$ по Лапласу, $f(p)$ удовлетворяет требованиям соответствующих теорем и можно применить формулу обращения, в которой прямую интегрирования можно преобразовать в контур интеграла (1). При этом при преобразовании пути интегрирования могут появляться некоторые дополнительные члены за счет вычетов в особых точках $f(p)$.

Пример. Найдем асимптотическое разложение функции

$$\int_0^t e^{a\tau} J_0(\tau)\,d\tau$$

где $t > 0$ и $a \neq 0$ действительное число. Сначала рассмотрим вспомогательные интегралы $\int_0^t \operatorname{sh} a(t-\tau) J_0(\tau)\,d\tau$ и $t\int_0^t \operatorname{ch} a(t-\tau) J_0(\tau)\,d\tau$, для которых существуют изображения

$$\int_0^t \operatorname{sh} a(t-\tau) J_0(\tau)\,d\tau \supset \frac{a}{(p^2-a^2)\sqrt{p^2+1}} = f_1(p),$$

$$t\int_0^t \operatorname{ch} a(t-\tau) J_0(\tau)\,d\tau \supset \frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2\sqrt{p^2+1}} + \frac{p^2}{(p^2-a^2)\,(\sqrt{p^2+1})^3} = f_2(p).$$

Функции $f_1(p)$ и $f_2(p)$ удовлетворяют условиям теоремы 4, имеет место

$$\int_0^t \operatorname{sh} a(t-\tau) J_0(\tau)\,d\tau - \frac{\operatorname{sh} at}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a}{2\pi i}\int_C e^{pt} f_1(p)\,dp,$$

$$t\int_0^t \operatorname{ch} a(t-\tau) J_0(\tau)\,d\tau - \frac{t\operatorname{ch} at}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{pt} f_2(p)\,dp,$$

и кроме того

$$f_1(p) = -\frac{a}{a^2+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(a^2+1)^k}(p^2+1)^{k-\frac{1}{2}},$$

$$f_2(p) = \frac{1}{(a^2+1)(p^2+1)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2ka^2-1}{(a^2+1)^k}(p^2+1)^{k-\frac{1}{2}}.$$

Получаем

$$\int_0^t \operatorname{sh} a(t-\tau) J_0(\tau)\,d\tau = \frac{sh\,\mathrm{at}}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{a\sqrt{\pi}}{a^2+1}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(a^2+1)^k}\left(\frac{2}{t}\right)^k\frac{J_{-k}(t)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)} + o_{(t)_\infty}\left(t^{-N-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\int_0^t \operatorname{ch} a(t-\tau) J_0(\tau)\,d\tau = \frac{ch\,\mathrm{at}}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{J_1(t)}{a^2+1} + \frac{\sqrt{\pi}}{(a^2+1)^2\,t}\sum_{k=0}^{N}\frac{2ka^2-1}{(a^2+1)^k}\left(\frac{2}{t}\right)^k\frac{J_{-k}(t)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)} + o_{(t)_\infty}\left(t^{-N+\frac{3}{2}}\right).$$

Вычитая первое выражение из второго и замечая, что $J_{-k}(t) = (-1)^k \times$ $\times J_k(t)$ получаем искомое разложение:

$$\int_0^t e^{a\tau} J_0(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{J_1(t)\, e^{at}}{a^2+1} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}\, e^{at}}{(a^2+1)^2\, t} \sum_{k=0}^{N} \frac{2\,ka^2 + at\,(a^2+1) - 1}{(a^2+1)^k} \left(\frac{2}{t}\right)^k (-1)^k \frac{J_k(t)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)} +$$

$$+ o_{(t)_\infty}\left(e^{at}\, t^{-N-\frac{1}{2}}\right)$$

Кафедра общей математики

20 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *В. Ж. Риекстыня.* Об одном обобщении асимптотических разложений. Ученые записки ЛГУ, 1958, т. XX, 1958, 145—152.

[2]. *E. M. Wright.* The asymptotic expansion of the generalized Bessel funkction.Proc. Lond. Math. Soc., 1935, 38.

[3]. *Н. Н. Лебедев.* Специальные функции и их приложения. Москва, 1953.

[4]. *T. E. Hull,* C Froese. Asymptotic behaviour of the inverse of a Laplace transform. Canad J. Malh., 1955, 7, № 1, 116—125.

[5]. *Г. Н. Ватсон.* Теория бесселевых функций. ИЛ, Москва, 1949.

[6]. *G.* Doetsch. Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. 1. Basel, 1950.

KĀDA KONTURINTEGRAĻA VISPĀRINĀTIE ASIMPTOTISKIE ATTĪSTĪJUMI

V. Riekstiņa

(Kopsavilkums)

Darbā iegūti vispārināti asimptotiski attīstījumi kontūrintegralim $F(t) = \int_\Gamma e^{pt} f(p)\, dp$ lielām reālā argumenta t vērtībām, balstoties uz funkcijas $f(p)$ asimptotiskajām īpašībām galīga singulara punkta apkārtnē. Aplūkoti gadījumi, kad minētais singularais punkts ir 1) būtisks singulars punkts, kas var būt arī sazarošanās punkts (1. un 2. teorema); 2) algebrisks sazarošanās punkts (3. teorema); 3) logaritmisks sazarošanās punkts (4. teorema).

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

О ПРИМЕНЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА К РАЗЛОЖЕНИЮ В ОБОБЩЕННЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

В. Ж. РИЕКСТЫНЯ

В настоящей работе изучается вопрос об обобщенных асимптотических рядах изображения $f(p)$ для больших $|p|$ в секторе $|\arg p| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$. Для получения этих рядов мы используем асимптотические свойства оригинала $F(t)$ при малых значениях t. Определение обобщенных асимптотических рядов дано в работе [1]. Метод, который применяется в настоящей работе аналогичен методу, который описывается в работе [2].

Теорема 1. Пусть интеграл Лапласа $f(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} F(t)\, dt$ сходится при всех p, для которых $\operatorname{Re} p > q \geqslant 0$, и пусть для всех N ($N=0, 1, 2, \ldots$)

$$F(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k \left[t\left(1 + \frac{t}{2b}\right)\right]^{\lambda_k} + o_{(t>0)_0}(t^{\lambda_N}), \tag{1}$$

где $b > 0$, $t > 0$, λ_k действительные числа ($\lambda_0 > -1$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\lambda_k \to \infty$), а a_k комплексные числа, тогда

$$f(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{bp} \sum_{k=0}^{N} a_k\, \Gamma(\lambda_k + 1)\, p^{-\lambda_k - \frac{1}{2}} K_{\lambda_k + \frac{1}{2}}(bp) + o_{\left(|\arg p| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta\right)_\infty}(p^{-\lambda_N - 1}) \tag{2}$$

и

$$e^{bp} p^{-\lambda_N - \frac{1}{2}} K_{\lambda_N + \frac{1}{2}}(bp) = \overline{O}_{\left(|\arg p| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta\right)_\infty}(p^{-\lambda_N - 1}), \tag{3}$$

где

$$0 < \delta < \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Из формулы (1) следует, что

$$F(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k \left[t\left(1 + \frac{t}{2b}\right)\right]^{\lambda_k} + t^{\lambda_N} \rho(t)$$

где $\rho(t) \to 0$, когда $t \to 0$. Поэтому

$$f(p) = \sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^\infty e^{-pt}\left[t\left(1+\frac{t}{2b}\right)\right]^{\lambda_k} dt + R(p),$$

$$R(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, t^{\lambda_N}\, \rho(t)\, dt.$$

Используя свойства функции $K_{\lambda_N}(t)$ [3], получаем соотношение

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left[t\left(1+\frac{t}{2b}\right)\right]^{\lambda_k} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(\lambda_k+1)\, e^{bp} p^{-\lambda_k-\frac{1}{2}} K_{\lambda_k+\frac{1}{2}}(bp),$$

поэтому

$$f(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{bp} \sum_{k=0}^{N} a_k \Gamma(\lambda_k+1)\, p^{-\lambda_k-\frac{1}{2}} K_{\lambda_k+\frac{1}{2}}(bp) + R(p). \qquad (4)$$

Оценим остаточный член $R(p)$. Из определения функции $\rho(t)$ следует, что для выбранного $\varepsilon > 0$ можно подобрать число T_0 так, что $|\rho(t)| < \varepsilon$, если $t < T_0$. Пусть $T < T_0$, тогда

$$R(p) = \int_0^T e^{-pt}\, t^{\lambda_N}\, \rho(t)\, dt + \int_T^\infty e^{-pt}\, t^{\lambda_N}\, \rho(t)\, dt =$$

$$= \int_0^T e^{-pt}\, t^{\lambda_N}\, \rho(t)\, dt + e^{-pT}\int_0^\infty e^{-p\tau}(\tau+T)^{\lambda_N}\, \rho(\tau+T)\, d\tau.$$

Из свойств преобразования Лапласа [4] следует, что

$$\int_0^\infty e^{-pt}(\tau+T)^{\lambda_N}\, \rho(\tau+T)\, d\tau = o_{(\mathrm{Re}\, p > q)_\infty}(1).$$

Осталось оценить первый интеграл в выражении для $R(p)$:

$$\left|\int_0^T e^{-pt}\, t^{\lambda_N}\, \rho(t)\, dt\right| < \varepsilon \int_0^T e^{-\mathrm{Re}\, pt}\, t^{\lambda_N}\, dt <$$

$$< \varepsilon \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}\, pt}\, t^{\lambda_N}\, dt = \varepsilon\, \frac{\Gamma(\lambda_N+1)}{(Re p)^{\lambda_N+1}}.$$

Сделанные преобразования и оценки имеют место, если $|\arg p| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$. Тогда

$$Re p = |p| \cos(\arg p) \geqslant |p| \sin\delta,$$

$$e^{-pT} = o_{\left(|\arg p| \leqslant \frac{\pi}{2}-\delta\right)_\infty}(|p|)^{-\lambda_N-1}$$

и

$$R(p) = o_{\left(|\arg p| \leqslant \frac{\pi}{2}-\delta\right)_\infty}(|p|)^{-\lambda_N-1}. \qquad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) вытекает (2). Используя асимптотическое разложение функции Макдональда [3], можно получить (3).

В теореме 2 λ_k и a_k означают то же самое, что и в теореме 1.

Теорема 2. Пусть интеграл Лапласа $f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t)\, dt$ сходится для $Re\, p > q \geqslant 0$ и пусть для любого N $(N = 0, 1, 2, \ldots)$

$$F(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k t^{\lambda_k} \ln^{n_k} t + o_{(t > 0)_0} [t^{\lambda_N} (\ln t)^{n_N}] \tag{6}$$

($n_k \geqslant 0$ целые числа, $n_k \leqslant n_{k+1}$), тогда

$$f(p) = \sum_{k=0}^{N} a_k p^{-\lambda_k - 1} \varphi_{n_k}(p, \lambda_k) + o_{\left(|\arg p| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta\right)_\infty} [\ln^{n_N} |p|\, p^{-\lambda_N - 1}] \tag{7}$$

и

$$p^{-\lambda_N - 1} \varphi_{n_k}(p, \lambda_N) = \widetilde{O}_{\left(|\arg p| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta\right)_\infty} [\ln^{n_N} |p|\, p^{-\lambda_N - 1}], \tag{8}$$

где

$$\varphi_{n_k}(p, \lambda_N) = \sum_{k=0}^{n_N} \binom{n_k}{k} (-1)^k \ln^k p\, \Gamma^{(n_N - k)} (\lambda_N + 1). \tag{9}$$

Доказательство теоремы 2 подобно доказательству теоремы 1, поэтому подробно рассматривать его не будем. Подставим выражение функции $F(t)$ в интеграл Лапласа, тогда будем иметь

$$f(p) = \sum_{k=0}^{N} a_k \int_0^\infty e^{-pt} t^{\lambda_k} \ln^{n_k} t\, dt + R(p),$$

где

$$R(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^{\lambda_N} \ln^{n_N} t\, \rho(t)\, dt$$

($\rho(t) \to 0$ при $t \to 0$).

Так как

$$\int_0^\infty e^{-pt} t^{\lambda_k} \ln^{n_k} t\, dt = p^{\lambda_k - 1} \int_0^\infty e^{-z} z^{\lambda_k} (\ln z - \ln p)^{n_k} dz =$$

$$= p^{-\lambda_k - 1} \sum_{m=0}^{n_k} \binom{n_k}{m} (-1)^m \ln^m p\, \Gamma^{(n_k - m)} (\lambda_k + 1) =$$

$$= p^{-\lambda_k - 1} \varphi_{n_k}(p, \lambda_k),$$

то имеем

$$f(p) = \sum_{k=0}^{N} a_k p^{-\lambda_k - 1} \varphi_{n_k}(p, \lambda_k) + R(p). \tag{9}$$

Остаточный член $R(p)$ оцениваем так же как в теореме 1.

Случай когда $n_k = 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ рассмотрен Г. Дечем в работе [2].

З а м е ч а н и е. Требование аналитичности функции $F(t)$ в секторе $-\alpha \leqslant \arg t \leqslant \beta$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta \leqslant \pi)$ за исключением начала координат, в окрестности которого имеет место соответствующее асимптотическое разложение $F(t)$, дает возможность расширить область, в которой имеет место асимптотическое разложение функции $f(p)$. Это расширение можно реализовать поворотом пути интегрирования в секторе $-\alpha \leqslant \arg t \leqslant \beta$.

20 I 1959 *Кафедра общей математики*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *В. Ж. Риекстыня.* Об одном обобщении асимптотических разложений. Ученые записки ЛГУ, 1958, т. XX, 145—152.

[2]. *G. Doetsch.* Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. 2. Basel, 1955.

[3]. *Н. Н. Лебедев.* Специальные функции и их приложения. Москва, 1953.

[4.] *G. Doetsch.* Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin, 1937.

PAR LAPLASA TRANSFORMACIJAS IZLIETOŠANU VISPĀRINĀTIEM ASIMPTOTISKIEM ATTĪSTĪJUMIEM

V. Riekstiņa

(Kopsavilkums)

Darbā aplūkota dažu attēla funkciju $f(p)$ vispārināto asimptotisko attīstījumu iegūšana lieliem $|p|$ sektorā $|\arg p| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta$ $\left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$, balstoties uz oriģināla $F(t)$ asimptotiskajām īpašībām mazām argumenta t vērtībām.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

БЕСКВАДРАТУРНОЕ НОМОГРАФИРОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ К. Я. ЗАЛТА

Посвящается памяти латвийского номографа Карла Яковлевича Залтс

И. А. ВИЛЬНЕР

§ I

К. Я. Залтс первый рассмотрел функцию [1]

$$\Phi \equiv F_1 K_{23} + F_2 L_{31} + F_3 M_{12}. \tag{1.1}$$

Предполагая, что функция (1.1) не вырождающаяся, отметим, что она допускает следующие преобразования:

1) умножение на $\varphi_1(z_1)\ \varphi_2(z_2)\ \varphi_3(z_3)$;

2) замену, полагая $\lambda = \lambda(z_3)$, $\mu = \mu(z_2)$, $\nu = \nu(z_1)$:

$$K^*_{23}=K_{23}+\lambda F_2+\mu F_3,\ L^*_{31}=L_{31}-\lambda F_1+\nu F_3,\ M^*_{12}=M_{12}-\mu F_1-\nu F_2. \tag{1.2}$$

Функция (1.1) почти так же важна, как и функция с распределенными переменными

$$F \equiv F_{12} f_3 + G_{12}\varphi_3 + H_{12} h_3, \tag{1.3}$$

неоднократно рассматривавшаяся многими авторами (Келлог, Булад, Серро, Молдавер, Залтс [4] и другие).

Действительно, если функция (1.3) может быть результатом разложения некоторого определителя Массо по элементам 3-й строки, (вообще любой строки), то функция (1.1) может быть разложением определителя Массо по элементам первого (вообще, любого) столбца.

Мы условимся дальше указывать нижними индексами номера переменных z_1, z_2, z_3, от которых зависят рассматриваемые функции, а условные производные* будем указывать штрихами при соответствующих индексах, например:

$$\frac{\partial^2 K_{23}}{\partial z_2\, \partial z_3} = K_{2'3'}, \quad \frac{\partial K_{23}}{\partial z_3} = K_{23'} \quad \text{и т. д.}$$

Мы дадим инвариантное бесквадратурное решение методом условных производных задачи эффективной анаморфозы функций Залта, выделив его из наших общих рассмотрений бесквадратурной номографии [3], заодно уточнив результаты К. Я. Залта. Решение задачи, конечно, как это и отмечает К. Я. Залтс в своей статье [1], заключено в наших общих формулах (например в работе [2]), не налагающих ограничений на структуру функций в (1.1). Кроме обобщения, мы даем и сами представления в эквивалентных видах (1.5)—(1.9).

Сначала рассматривается случай анаморфозируемости уравнения (1.1) при $\lambda = \mu = \nu = 0$, когда непосредственно можно положить

$$K_{23} = (\varphi_2 - \varphi_3)\,\psi_2\, l_3,\ L_{31} = (\varphi_3 - \varphi_1)\, l_3\, h_1,\ M_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)\, h_1\, \psi_2,$$
$$F_1 = f_1\, h_1,\ F_2 = f_2\, \psi_2,\ F_3 = f_3\, l_3, \tag{1.4}$$

где φ_i, $f_i\,(i = 1, 2, 3)$, h_1, ψ_2, l_3 — пока неизвестные функции, определяющие

* По поводу условных производных см. [6].

представление Массо. Решение системы функциональных уравнений (1.4) методом условных производных автором [6] приводит в результате выкладок к одному из шести коллинеарно-эквивалентных представлений Массо (1.5)—(1.9) для уравнения $\Phi = 0$:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{L_{3'1}}{K_{2'3'}} & \dfrac{M_{12'}}{K_{2'3'}} \\[2ex] F_2 & -\dfrac{K_{23'}}{K_{2'3'}} & \dfrac{M_{1'2}}{L_{3'1'}} - \dfrac{K_{23'}\, M_{1'2'}}{K_{2'3'}\, L_{3'1'}} \\[2ex] F_3 & \dfrac{L_{31'}}{M_{1'2'}} - \dfrac{K_{2'3}\, L_{3'1'}}{K_{2'3'}\, M_{1'2'}} & -\dfrac{K_{2'3}}{K_{3'2'}} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.5)$$

$$\begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{L_{3'1}}{K_{2'3'}} & \dfrac{M_{12'}}{K_{2'3'}} \\[2ex] F_2 & -\dfrac{K_{23'}}{K_{2'3'}} & \dfrac{M_{12}\, K_{2'3} - K_{23}\, M_{12'}}{K_{2'3'}\, L_{31}} \\[2ex] F_3 & -\dfrac{L_{31}\, K_{23'} - K_{23}\, L_{3'1}}{M_{12}\, K_{2'3'}} & -\dfrac{K_{2'3}}{K_{2'3'}} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.6)$$

$$\begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{L_{3'1}}{K_{2'3'}} & M_{12'} \\[2ex] F_2 & -\dfrac{K_{23'}}{K_{2'3'}} & \dfrac{M_{12}\, K_{2'3} - K_{23}\, M_{12'}}{L_{31}} \\[2ex] F_3 & \dfrac{L_{31}\, K_{23'} - K_{23}\, L_{3'1}}{M_{12}\, K_{2'3'}} & -K_{2'3} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.7)$$

$$\begin{vmatrix} F_1 & -\dfrac{L_{3'1}}{L_{3'1'}} & -\dfrac{M_{12}\, L_{31'} - L_{31}\, M_{1'2}}{K_{23}} \\[2ex] F_2 & \dfrac{K_{23'}}{L_{3'1'}} & -M_{1'2} \\[2ex] F_3 & -\dfrac{L_{31}\, K_{23'} - K_{23}\, L_{3'1}}{M_{12}\, L_{3'1'}} & L_{31'} \end{vmatrix} = 0, \quad (1.8)$$

$$\begin{vmatrix} F_1 & \dfrac{M_{12}\, L_{31'} - L_{31}\, M_{1'2}}{K_{23}\, M_{1'2'}} & -M_{12'} \\[2ex] F_2 & \dfrac{M_{1'2}}{M_{1'2'}} & \dfrac{K_{23}\, M_{12'} - M_{12}\, K_{2'3}}{L_{31}} \\[2ex] F_3 & -\dfrac{L_{31'}}{M_{1'2'}} & K_{2'3} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.9)$$

Для того чтобы функция (1.1) была непосредственно анаморфозируема, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись любые два из трех равенств в инвариантной форме (условные дифференциалы):

$$d_{z_1 z_2} \frac{L_{31} K_{23'} - K_{23} L_{3'1}}{M_{12}} = 0, \quad d_{z_3 z_1} \frac{K_{23} M_{12'} - M_{12} K_{2'3}}{L_{31}} = 0,$$

$$d_{z_2 z_3} \frac{L_{31} M_{1'2} - M_{12} L_{31'}}{K_{23}} = 0. \qquad (1.10)$$

Наше обобщение результата Залта заключается в абстрактности переменных и в отсутствии требования о дифференцируемости функции. Преимущества эти, даваемые методом бесквадратурной анаморфозы, указаны в нашей работе [9].

Наше уточнение результата К. Я. Залта заключается в том, что если условия (1.10) не выполнены, то функции λ, μ, ν, если задача разрешима, эффективно получаются из этой системы уравнений, по замене в них K_{23}, L_{31}, M_{12}, на K^*_{23}, L^*_{31}, M^*_{12} согласно формулам (1.2). Это рассмотрение будет дано в более обширном изложении статьи.

Наши функции K_{23}, L_{31}, M_{12}, F_1, F_2, F_3 и переменные z_1, z_2, z_3 — абстрактные. Значит охвачены в частности и номограммы уравнения (1.1) с любыми шкалами и полями.

Доказательство необходимости условий (1.10) получается так.

Из первых трех уравнений (1.4) легко получаем

$$K_{23} h_1 + L_{31} \psi_2 + M_{12} l_3 = 0. \qquad (1.11)$$

„Дифференцируя“ по z_1, найдем

$$K_{23} h_{1'} + L_{31'} \psi_2 + M_{1'2} l_3 = 0. \qquad (1.12)$$

Система уравнений (1.11) и (1.12) относительно K_{23}, ψ_2, l_3 даёт

$$\begin{vmatrix} L_{31} & M_{12} \\ L_{31'} & M_{1'2} \end{vmatrix} : K_{23} = \begin{vmatrix} M_{12} & h_1 \\ M_{1'2} & h_{1'} \end{vmatrix} : \psi_2 = \begin{vmatrix} h_1 & L_{31} \\ h_{1'} & L_{31'} \end{vmatrix} : l_3. \qquad (1.13)$$

„Дифференцируя“ (1.13) сначала по z_2, а потом по z_3, получаем

$$\begin{vmatrix} L_{31} & M_{12'} \\ L_{31'} & M_{1'2'} \end{vmatrix} : K_{2'3} = \begin{vmatrix} M_{12'} & h_1 \\ M_{1'2'} & h_{1'} \end{vmatrix} : \psi_2' = \begin{vmatrix} h_1 & L_{31} \\ h_{1'} & L_{31'} \end{vmatrix} : l_3, \qquad (1.14)$$

$$\begin{vmatrix} L_{3'1} & M_{12} \\ L_{3'1'} & M_{1'2} \end{vmatrix} : K_{23'} = \begin{vmatrix} M_{12} & h_1 \\ M_{1'2} & h_{1'} \end{vmatrix} : \psi_2 = \begin{vmatrix} h_1 & L_{3'1} \\ h_{1'} & L_{31'} \end{vmatrix} : l_{3'}. \qquad (1.15)$$

Из равенства (1.14), с одной стороны, и из равенства (1.15), с другой стороны, вытекает, что

$$\begin{vmatrix} L_{31} & M_{12'} \\ L_{31'} & M_{1'2'} \end{vmatrix} : K_{2'3} = \begin{vmatrix} M_{12'} & h_1 \\ M_{1'2'} & h_{1'} \end{vmatrix} : \psi_{2'}, \qquad (1.14')$$

$$\begin{vmatrix} L_{3'1} & M_{12} \\ L_{3'1'} & M_{1'2} \end{vmatrix} : K_{23'} = \begin{vmatrix} h_1 & L_{3'1} \\ h_{1'} & L_{31'} \end{vmatrix} : l_{3'}. \qquad (1.15')$$

„Дифференцируя“ (1.14′) по z_3 или (1.15′) по z_2, получим

$$\begin{vmatrix} L_{3'1} & M_{12'} \\ L_{3'1'} & M_{1'2'} \end{vmatrix} : K_{2'3'} = \begin{vmatrix} M_{12'} & h_1 \\ M_{1'2'} & h_{1'} \end{vmatrix} : \psi_{2'}, \qquad (1.14'')$$

$$\begin{vmatrix} L_{3'1} & M_{12'} \\ L_{3'1'} & M_{1'2'} \end{vmatrix} : K_{2'3'} = \begin{vmatrix} h_1 & L_{3'1} \\ h_{1'} & L_{31'} \end{vmatrix} : l_{3'}. \qquad (1.15'')$$

Равенства отношений (1.13), (1.14), (1.15), (1.14′),(1.15′), (1.14″), (1.15″) образуют одну цепь равенств, т. к. в них имеется по равному отношению.

Отсюда следуют равенства

$$\begin{vmatrix} L_{31} M_{12} \\ L_{31'} M_{1'2} \end{vmatrix} : K_{23} = \begin{vmatrix} L_{31} M_{12'} \\ L_{31'} M_{1'2'} \end{vmatrix} : K_{2'3} = \begin{vmatrix} L_{3'1} M_{12} \\ L_{3'1'} M_{1'2} \end{vmatrix} : K_{23'} =$$

$$= \begin{vmatrix} L_{3'1} M_{12'} \\ L_{3'1'} M_{1'2'} \end{vmatrix} : K_{2'3'}, \qquad (1.16)$$

которые выражают одно и то же свойство независимости первого из отношений (1.16) от переменных z_1 и z_2. Это выражается проще условием

$$\begin{vmatrix} L_{31} M_{12} \\ L_{31'} M_{1'2} \end{vmatrix} : K_{23} = \begin{vmatrix} L_{3'1} M_{12'} \\ L_{3'1'} M_{1'2'} \end{vmatrix} : K_{2'3'}, \qquad (1.16')$$

где справа — совокупное „дифференцирование" левой части по второму и третьему аргументам, которое в силу принципа произвольного толкования условных производных может пониматься и как дифференцирование по одному (любому) из этих аргументов.

Поэтому условие (1.16′) может быть выражено в инвариантной форме первым из равенств (1.10). В силу полного равноправия переменных вполне аналогично доказываем необходимость и двух остальных уравнений (1.10).

Перепишем подробно условия (1.10).

$$\frac{L_{31} K_{23'} - K_{23} L_{3'1}}{M_{12}} = \frac{L_{31'} K_{2'3'} - K_{2'3} L_{3'1'}}{M_{1'2'}}, \qquad (1.17)$$

$$\frac{K_{23} M_{12'} - M_{12} K_{2'3}}{L_{31}} = \frac{K_{23'} M_{1'2'} - M_{1'2} K_{2'3'}}{L_{3'1'}}, \qquad (1.18)$$

$$\frac{L_{31} M_{1'2} - M_{12} L_{31'}}{K_{23}} = \frac{L_{3'1} M_{1'2'} - M_{12'} L_{3'1'}}{K_{2'3'}}. \qquad (1.19)$$

При помощи простых алгебраических преобразований нетрудно убедиться в том, что каждое из этих условий является следствием двух других.

Чтобы доказать законность основного представления для (1.1), нам понадобятся простые следствия из условий (1.17), (1.18), (1.19).

Разрешая эти уравнения относительно K_{23}, находим из (1.17) и (1.18)

$$K_{23} = \frac{L_{31} K_{23'}}{L_{3'1}} - \frac{L_{31'} M_{12} K_{2'3'}}{L_{3'1} M_{1'2'}} + \frac{L_{3'1'} M_{12}}{L_{3'1} M_{1'2'}} K_{2'3'}, \qquad (1.17')$$

$$K_{23} = \frac{M_{12}}{M_{12'}} K_{2'3} + \frac{K_{23'} M_{1'2'} L_{31}}{L_{3'1'} M_{12'}} - \frac{L_{31} M_{1'2}}{L_{3'1'} M_{12'}} K_{2'3'}. \qquad (1.18')$$

Подчеркиваем, что правые части равенств (1.17′) и (1.18′) должны быть равны в силу условий (1.17), (1.18), (1.19), но не тождественны по K, L, M.

„Продифференцируем" еще раз обе части равенств (1.17′) и (1.18′) по z_1, рассматривая уже ранее введенные дифференцирования по z_1, как постоянные. Эта операция вызывает значительные формальные усложнения при обычном дифференцировании, но естественно и незаметно укладывается в выкладки при условном дифферецировании.

После разделения обеих частей равенств на $K_{2'3'} \neq 0$, получим

$$\frac{K_{23}}{K_{2'3'}} = \frac{L_{31'}\,K_{23'}}{L_{3'1'}\,K_{2'3'}} - \frac{L_{31'}\,M_{1'2}}{L_{3'1'}\,M_{1'2'}} + \frac{M_{1'2}\,K_{2'3}}{M_{1'2'}\,K_{2'3'}}, \tag{1.17''}$$

$$\frac{K_{23}}{K_{2'3'}} = \frac{M_{1'2}\,K_{2'3}}{M_{1'2'}\,K_{2'3'}} + \frac{L_{31'}\,K_{23'}}{L_{3'1'}\,K_{2'3'}} - \frac{L_{31'}\,M_{1'2}}{L_{3'1'}\,M_{1'2'}}. \tag{1.18''}$$

Из (1.17) и (1.19′), разрешая эти уравнения относительно $\frac{L_{31}}{K_{2'3'}}$ и затем полагая в получившихся уравнениях $z_2 = z_{2'}$ (т. е. „дифференцируя" обе части по z_2, не изменяя ранее введенных „производных" по z_2), получим

$$\frac{L_{31}}{K_{2'3'}} = \frac{K_{2'3}\,L_{3'1}}{K_{2'3'}\,K_{2'3'}} + \frac{L_{31'}\,M_{12'}}{M_{1'2'}\,K_{2'3'}} - \frac{K_{2'3}\,L_{3'1'}\,M_{12'}}{M_{1'2'}\,K_{2'3'}\,K_{2'3'}}, \tag{1.20}$$

$$\frac{L_{31}}{K_{2'3'}} = \frac{M_{12'}\,L_{31'}}{M_{1'2'}\,K_{2'3'}} + \frac{L_{3'1}\,K_{2'3}}{K_{2'3'}\,K_{2'3'}} - \frac{M_{12'}\,K_{2'3}\,L_{3'1'}}{M_{1'2'}\,K_{2'3'}\,K_{2'3'}}. \tag{1.21}$$

Теперь разрешим уравнения (1.18) и (1.19) относительно $\frac{M_{12}}{K_{2'3'}}$, полагая затем $z_3 = z_{3'}$, т. е. произведя „дифференцирования" по z_3, не изменяя ранее введенных „дифференцирований" по z_3. Получим

$$\frac{M_{12}}{K_{2'3'}} = \frac{L_{3'1}\,M_{1'2}}{L_{3'1'}\,K_{2'3'}} - \frac{L_{3'1}\,M_{1'2'}\,K_{23'}}{K_{2'3'}\,K_{2'3'}\,L_{3'1'}} + \frac{M_{12'}\,K_{23'}}{K_{2'3'}\,K_{2'3'}}, \tag{1.22}$$

$$\frac{M_{12}}{K_{2'3'}} = \frac{K_{23'}\,M_{12'}}{K_{2'3'}\,K_{2'3'}} - \frac{K_{23'}\,M_{1'2'}\,L_{3'1}}{K_{2'3'}\,L_{3'1'}\,K_{2'3'}} + \frac{M_{1'2}\,L_{3'1}}{L_{3'1'}\,K_{2'3'}}. \tag{1.23}$$

Заметим, что в парах (1.17″), (1.18″); (1.20), (1.21) и (1.22), (1.23) результаты совпадают, но как легко проверить, это является следствием последних „дифференцирований", до выполнения которых мы имеем разные по форме выражения.

Рассмотрим вопрос об эквивалентности условий (1.17″), (1.20), (1.22) условиям (1.10). Эти условия можно переписать соответственно в одно из двух равносильных видов каждое

$$\left(\frac{K_{23}\,L_{3'1} - L_{31}\,K_{23'}}{M_{12}}\right)_{1'} = \left(\frac{K_{23}\,L_{3'1} - L_{31}\,K_{23'}}{M_{12}}\right)_{1'2'}, \tag{1.24}$$

$$\left(\frac{K_{23}\,M_{12'} - K_{2'3}\,M_{12}}{L_{31}}\right)_{1'} = \left(\frac{K_{23}\,M_{12'} - K_{2'3}\,M_{12}}{L_{31}}\right)_{3'1'}, \tag{1.25}$$

$$\left(\frac{L_{31}\,M_{1'2} - M_{12}\,L_{31'}}{K_{23}}\right)_{2'} = \left(\frac{L_{31}\,M_{1'2} - M_{12}\,L_{31'}}{K_{23}}\right)_{2'3'}, \tag{1.26}$$

$$\left(\frac{K_{23}\,L_{3'1} - K_{23'}\,L_{31}}{M_{12}}\right)_{2'} = \left(\frac{K_{23}\,L_{3'1} - K_{23'}\,L_{31}}{M_{12}}\right)_{1'2'}, \tag{1.27}$$

$$\left(\frac{L_{31}\,M_{1'2} - M_{12}\,L_{31'}}{K_{23}}\right)_{3'} = \left(\frac{L_{31}\,M_{1'2} - M_{12}\,L_{31'}}{K_{23}}\right)_{2'3'}, \tag{1.28}$$

$$\left(\frac{K_{23}\,M_{12'} - K_{2'3}\,M_{12}}{L_{31}}\right)_{3'} = \left(\frac{K_{23}\,M_{12'} - K_{2'3}\,M_{12}}{L_{31}}\right)_{3'1'}. \tag{1.29}$$

Условия (1.26) и (1.28) показывают, что из них следует условие (1.10_3). Аналогично можно вывести и (1.10_1) и (1.10_2). Таким образом, совокупность условий (1.17″), (1.20) и (1.22) равносильна совокупности условий (1.10).

§ 2.

Перейдем теперь к доказательству представлений (1.5) — (1.9). А именно, обозначая в каждом из пяти случаев (1.5)—(1.9) определитель, стоящий в левой части соответствующего равенства через Δ, покажем, что из условий (1.10) вытекает, что

$$\Delta \equiv \sigma \Phi, \tag{2.1}$$

где Φ — функция, определенная равенством (1.1), а σ — анаморфозирующий множитель, выражение которого мы найдем в каждом из этих случаев.

Мы увидим, что между каноническим представлением (1.5) и представлениями (1.6)—(1.9) имеется принципиальная разница. Интересно сразу же отметить, как это будет вытекать из дальнейшего, важное принципиальное свойство определителей Δ, определенных левыми частями равенств (1.6)—(1.9). Оно заключается в том, что они соответствуют принципу автора игнорирования критериев. Это значит, что тождество (2.1) в случаях (1.6)—(1.9) имеет место независимо от выполнения или невыполнения условий (1.10). Равенства (1.6)—(1.9) все равно определяют номограмму из выравненных точек уравнения $\Phi = 0$. Но только при невыполнении условий (1.10) номограмма будет содержать две шкалы, зависящие от всех трех параметров z_1, z_2, z_3, что без труда усматривается из любого из определителей (1.6)—(1.9), одна строка которого в общем случае зависит от одного аргумента, а по одному элементу из каждой из двух строк зависят от, вообще говоря, всех трех переменных z_1, z_2, z_3.

Заметим, что представление (1.5) в отличие от (1.6)—(1.9) определяет номограмму из трех однопараметрических шкал — шкалы z_1, шкалы z_2, шкалы z_3. Однако, зато зависимость (2.1) в этом случае гарантируется только выполнением условий (1.10).

После этих замечаний перейдем к доказательству соотношения (2.1). С этой целью разложим по элементам первого столбца каждый из определителей Δ в каждом из пяти случаев (1.5)—(1.9).

Получим после вычислений для определителя, стоящего в левой части равенства (1.5), разложение

$$\begin{aligned}\Delta \equiv F_1 &\left(-\frac{L_{31'}\, M_{1'2}}{M_{1'2'}\, L_{3'1'}} + \frac{K_{2'3}\, M_{1'2}}{K_{2'3'}\, M_{1'2'}} + \frac{K_{23'}\, L_{31'}}{K_{2'3'}\, L_{3'1'}}\right) + \\ + F_2 &\left(\frac{L_{31'}\, M_{12'}}{K_{2'3'}\, M_{1'2'}} - \frac{K_{2'3}\, M_{12'}\, L_{3'1'}}{K^2_{2'3'}\, M_{1'2'}} + \frac{K_{2'3}\, L_{3'1}}{K^2_{2'3'}}\right) + \\ + F_3 &\left(\frac{L_{3'1}\, M_{1'2}}{K_{2'3'}\, L_{3'1'}} - \frac{K_{23'}\, L_{3'1}\, M_{1'2'}}{K^2_{2'3'}\, L_{3'1'}} + \frac{K_{23'}\, M_{12'}}{K^2_{2'3}}\right).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Но согласно равенствам (1.17″), (1.20), (1.22) тождество (2.2) примет вид

$$\Delta \equiv \frac{F_1 K_{23} + F_2 L_{31} + F_3 M_{12}}{K_{2'3'}}, \tag{2.3}$$

т. е. вид (2.1), где анаморфизирующий множитель

$$\sigma = \frac{1}{K_{2'3'}}. \tag{2.4}$$

Из (2.2) видно, что без равенств (1.17″), (1.20), (1.22), являющихся эквивалентными условиям (1.10), тождество (2.3) не имело бы места обязательно. Но эти три условия в совокупности достаточны для существования представления (1.5).

Если образовать возможные подстановки из цифр 1, 2 и 3 с одновременной соответственной перестановкой букв K, L, M $\left(\text{например } \begin{pmatrix} 123\ KLM \\ 231\ LMK \end{pmatrix}\right)$, то из представления (1.5) получим еще пять представлений, т. е. всего шесть, но они попарно совпадают. Поэтому вместо (2.4) можно брать $\sigma = \frac{1}{L_{3'1'}}$ или же $\sigma = \frac{1}{M_{1'2'}}$.

§ 3.

Перейдем теперь к доказательству соотношения (2.1) для каждого из определителей (1.6), (1.7), (1.8), (1.9).

Разложим по элементам первого столбца определитель Δ, равный левой части равенства (1.6), (1.7), (1.8), (1.9) соответственно.

После некоторых выкладок найдем, не опираясь на условия анаморфозы:

$$\Delta\,(1.6) \equiv \frac{1}{K^2_{2'3'}}\left(\frac{L_{3'1}K_{2'3}}{L_{31}} - \frac{K_{23}\,L_{3'1}\,M_{12'}}{L_{31}\,M_{12}} + \frac{K_{23'}\,M_{12'}}{M_{12}}\right)(F_1K_{23} + F_2L_{31} + F_3M_{12}), \tag{3.1}$$

$$\Delta\,(1.7) \equiv \frac{1}{K_{2'3'}}\left(\frac{K_{2'3}\,L_{3'1}}{L_{31}} - \frac{K_{23}\,L_{3'1}\,M_{12'}}{L_{31}\,M_{12}} + \frac{K_{23'}\,M_{12'}}{M_{12}}\right)(F_1K_{23} + F_2L_{31} + F_3M_{12}), \tag{3.2}$$

$$\Delta\,(1.8) \equiv \frac{1}{L_{3'1'}}\left(\frac{M_{1'2}\,L_{3'1}}{M_{12}} + \frac{K_{23'}\,L_{31'}}{K_{23}} - \frac{L_{31}\,K_{23'}\,M_{1'2}}{M_{12}\,K_{23}}\right)(F_1K_{23} + F_2L_{31} + F_3M_{12}), \tag{3.3}$$

$$\Delta\,(1.9) \equiv \frac{1}{M_{1'2'}}\left(\frac{L_{31'}\,M_{12'}}{L_{31}} + \frac{M_{1'2}\,K_{2'3}}{K_{23}} - \frac{M_{12}\,L_{31'}\,K_{2'3}}{K_{23}\,L_{31}}\right)(F_1K_{23} + F_2L_{31} + F_3M_{12}). \tag{3.4}$$

Таким образом соотношение (2.1) доказано без использования (1.10). Представления (1.7), (1.8), (1.9) переходят одно в другое при применении круговой подстановки к подстановке (1 2 3). Таким путем можно найти родственные (1.6) еще 2 представления, т. е. для (1.1) мы нашли девять представлений. Легко видеть, что представления (3.1)—(3.4) с учетом (1.10) различны лишь по форме. Например, множитель в (3.4) при помощи (1.19) и (1.26) приводится к единице; аналогично будет в остальных представлениях. Оставим эту выкладку читателю.

§ 4.

Замечательно, что найденные в § 3 множители σ превращают функцию Φ в определитель третьего порядка в самом общем случае. Однако, этот определитель типа Массо будет определителем Массо, каждая строка которого зависит лишь от одной из трех абстрактных переменных, только при условии выполнения равенств (1.10).

В связи с последним заметим, что в форме (1.1) или (1.2) можно представить любое уравнение

$$F(z_1;\, z_2;\, z_3) = 0. \tag{4.1}$$

Действительно, выбирая неравные тождественно нулю функции F_1, F_2, F_3, K_{23}, L_{31}, M такие, что уравнение

$$F_1 K_{23} + F_2 L_{31} + F_3 M = 0 \tag{4.2}$$

есть следствие (4.1), найдем из (4.2)

$$M = -\frac{F_1 K_{23} + F_2 L_{31}}{F_3}. \tag{4.3}$$

Заменяя в правой части этого равенства z_3 через явную функцию от z_1 и z_2, определяемую уравнением (4.1), мы найдем

$$M = M_{12}. \tag{4.4}$$

Затем, согласно § 3, можно построить всего девять определителей Массо.

Номограмма будет идеальной, если строки взятого нами определителя не будут содержать повторений переменных. А это будет при выполнении условий (1.10).

Уравнения (1.10) превращаются тогда в функциональные уравнения несколько суженной проблемы общей анаморфозы, в основу которой можно положить и более естественные уравнения (1.2). Но это не входит в цели нашей элементарной работы.

Из предыдущего вытекает простое построение определителя Массо для (1.1). Для этого зададим тождественно равный нулю определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{M_{12} L_{31'} - L_{31} M_{1'2}}{K_{23}} & -M_{12'} & L_{3'1} \\ M_{1'2} & \frac{K_{23} M_{12'} - M_{12} K_{2'3}}{L_{31}} & -K_{23'} \\ -L_{31'} & K_{2'3} & \frac{L_{31} K_{23'} - K_{23} L_{3'1}}{M_{12}} \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{4.5}$$

Адъюнкты элементов любого столбца пропорциональны, как легко проверить, K_{23}, L_{31} и M_{12}. Следовательно, замена элементов любого столбца сверху вниз на F_1, F_2 и F_3 приводит к (2.1), что видно из равенств (1.5)—(1.9). При этом, выполнение условий (1.10) гарантирует, что имеем шкальную номограмму.

Мы указали, что разбираем в этой работе случай непосредственной анаморфозы функции Залта и что наше уточнение результата Залта заключается в том, что общая анаморфоза функции Залта заключается в определении функций λ, μ и ν в преобразованиях (1.2), при которых для новых функций K^*_{23}, L^*_{31}, M^*_{12} выполняются условия (1.10), которые можно записать в виде системы уравнений относительно неизвестных функций λ, μ, ν, входящих в формулы (1.2).

Однако, решение этих уравнений относительно λ, μ, ν вряд ли является методологически удачным подходом к проблеме общей анаморфозы функции Залта, т. к. уравнения эти сложны, между тем как имеется общее эффективное решение автора проблемы анаморфозы любых невырожденных функций (4.1), изложенное в разных формах в многочисленных работах автора [2, 3, 7, 8, 9].

Используя критерий автора общей проблемы анаморфозы функций, изложенный в работах [3, 10], и полагая

$$\Phi_{123} \equiv F_1 K_{23} + F_2 L_{31} + F_3 M_{13},$$

читатель без труда получит общее решение проблемы анаморфозы функции Залта с точностью до анаморфозирующего множителя, зависящего от двух переменных z_1 и z_2 (либо z_2 и z_3, либо z_1 и z_3).

20 I 1959 *г. Москва, Всесоюзный заочный политехнический институт*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *К. Я. Залтс.* О бесквадратурном номографировании функции $F_1K_{23}+F_2L_{31}+F_3M_{12}$. Мат. Сборник, 1953, т. 33 (75):2, 383—388.

[2]. *И. А. Вильнер.* Об одной номографической задаче. Номографический сборник МГУ, 1951, 253—258.

[3]. *И. А. Вильнер.* Алгебраическое решение проблемы анаморфозы в инвариантной форме. ДАН, 1953, т. 90, № 1.

[4]. *К. Я. Залтс.* Об анаморфозирующем множителе. Ученые записки ЛГУ, 1956, т. VIII, вып. 2, 11—20.

[5]. *И. А. Вильнер.* Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебризация и стереоскопическая номография. Сборник статей ВЗПИ, 1958, вып. 21, 110—112.

[6]. *И. А. Вильнер.* О линейной зависимости функций и методе условных производных в бесквадратурной номографии. Сборник статей ВЗПИ, 1954, вып. 7.

[7]. *И. А. Вильнер.* Бесквадратурное представление в виде определителя Массо в многомерном пространстве недифференцируемых функций многих переменных в инвариантной форме. Сборник статей ВЗПИ, 1955, вып. 9.

[8]. *И. А. Вильнер.* Решение проблемы анаморфозы векторно-алгебраическими методами. УМН, 1953, т. VIII, 3 (55), 153—156.

[9]. *И. А. Вильнер.* О соотношениях между определителями одной или двух матриц. УМН, 1953, т. VIII, вып. 5 (57), 144—145.

[10]. *И. А. Вильнер.* Алгебраическая номография и проблема анаморфозы в двухмерной плоскости при $n=6$ переменных. Сборник статей ВЗПИ, 1958.

[11]. *И. А. Вильнер.* Номографирование систем уравнений и аналитических функций. Номографический сборник МГУ, 1957, 125—242.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ПРИМЕНЕНИЯ МАТРИЦ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

К. ШТЕЙНС и С. СТУРЕ

Впервые матрицы „краковианы" в астрономию были введены Банахевичем. В настоящее время в астрономии как матрицы, так и некоторая их модификация „краковианы" получили всеобщее признание [1]. В настоящей заметке рассматривается вывод уравнений для перехода от углов Эйлера, относительно оси симметрии Земли, к углам Эйлера относительно мгновенной оси вращения. Вывод соответствующих уравнений дал Оппольцер [2] в сложном виде. При помощи этих уравнений Оппольцеру удалось показать, что упрощения допускаемые при переходе от уравнений Эйлера к уравнениям Пуассона вносят незначительные ошибки. Ввиду сложности вывода этих уравнений, в дальнейшем в литературе анализ уравнений Оппольцера не был повторен. В последнее время в связи с работами по Международному Геофизическому Году (1957—1958) теория прецессии неоднократно дискутировалась, однако уравнения Оппольцера были выпущены из вида. Поэтому мы считаем не лишним обратить внимание на уравнения Оппольцера и дать краткий их вывод в матричном виде.

Пусть p, q, r суть проекции угловой скорости $\vec{\omega}$ на оси системы координат, которая связана неподвижно с Землей и ось z которой направлена по оси симметрии Земли. Θ — угол нутации, ψ — угол прецессии, φ — угол собственного вращения в смысле Оппольцера. Если мы переходим на мгновенную ось вращения, то соответствующие углы обозначаем через Θ_1 и ψ_1. Связь между этими величинами получим, если рассмотрим тождество

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}, \tag{1}$$

при чем в левой части $\vec{\omega}$ выражается через ω, Θ_1 и ψ_1, а в правой через проекции угловой скорости на подвижные оси, т. е.

$$\mathbf{r}(-\psi_1)\,\mathbf{p}(\Theta_1)\begin{Vmatrix}0\\0\\\omega\end{Vmatrix} = \mathbf{r}(-\psi)\,\mathbf{p}(\Theta)\,\mathbf{r}(-\varphi)\begin{Vmatrix}p\\q\\r\end{Vmatrix}, \tag{2}$$

где $\mathbf{r}(-\psi_1)$ и $\mathbf{p}(\Theta_1)$ суть матрицы вращения [1]

$$\mathbf{r}(-\psi_1) = \begin{Vmatrix}\cos\psi_1 & -\sin\psi_1 & 0\\ \sin\psi_1 & \cos\psi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}, \quad \mathbf{p}(\Theta_1) = \begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\Theta_1 & \sin\Theta_1\\ 0 & -\sin\Theta_1 & \cos\Theta_1\end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Дифференцируя это тождество получаем

$$\frac{d\mathbf{r}(-\psi_1)}{d\psi_1}\,\mathbf{p}(\Theta_1)\begin{Vmatrix}0\\0\\\omega\end{Vmatrix}\frac{d\psi_1}{dt} + \mathbf{r}(-\psi_1)\frac{d\mathbf{p}(\Theta_1)}{d\Theta_1}\begin{Vmatrix}0\\0\\\omega\end{Vmatrix}\frac{d\Theta_1}{dt} + \mathbf{r}(-\psi_1)\,\mathbf{p}(\Theta_1)\begin{Vmatrix}0\\0\\1\end{Vmatrix}\frac{d\omega}{dt} =$$

$$= \mathbf{r}(-\psi)\,\mathbf{p}(\Theta)\,\mathbf{r}(-\varphi)\begin{Vmatrix}\frac{dp}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\\ \frac{dr}{dt}\end{Vmatrix}, \tag{4}$$

так как

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\tilde{\vec{\omega}}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\omega} = \frac{d\tilde{\vec{\omega}}}{dt}. \tag{5}$$

Чтобы решить уравнения (4) относительно $\frac{d\psi_1}{dt}$, $\frac{d\Theta_1}{dt}$ и $\frac{d\,\omega}{dt}$ следует эту систему умножить на $\mathbf{r}^{-1}(-\psi_1)$ и $\mathbf{p}^{-1}(\Theta_1)$. Для матриц вращения $\mathbf{r}^{-1}(\psi_1) = \mathbf{r}'(\psi)$, где „ ′ " обозначает транспонированную матрицу. Так как

$$\mathbf{r}^{-1}(-\psi_1)\frac{d\,\mathbf{r}(-\psi_1)}{d\,\psi_1} = \begin{Vmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathbf{p}^{-1}(\Theta_1)\frac{d\,\mathbf{p}(\Theta_1)}{d\,\Theta_1} = \begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{Vmatrix}, \tag{7}$$

то получаем

$$\begin{Vmatrix}-\omega\sin\Theta_1\frac{d\psi_1}{dt}\\ \omega\frac{d\Theta_1}{dt}\\ \frac{d\,\omega}{dt}\end{Vmatrix} = \mathbf{p}^{-1}(\Theta_1)\,\mathbf{r}^{-1}(-\psi_1)\,\mathbf{r}(-\psi)\,\mathbf{p}(\Theta)\,\mathbf{r}(-\varphi)\begin{Vmatrix}\frac{dp}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\\ \frac{dr}{dt}\end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Оппольцер рассматривает случай, когда в правых частях уравнений предполагается $\psi_1 = \psi$, $\Theta_1 = \Theta$ и $\frac{dr}{dt} = 0$. В этом случае $\mathbf{r}^{-1}(-\psi_1)\,\mathbf{r}(-\psi) = \mathbf{E}$, $\mathbf{p}^{-1}(\Theta_1)\,\mathbf{p}(\Theta) = \mathbf{E}$ следовательно,

$$\begin{Vmatrix}-\omega\sin\Theta_1\frac{d\psi_1}{dt}\\ \omega\frac{d\Theta_1}{dt}\\ \frac{d\,\omega}{dt}\end{Vmatrix} = \mathbf{r}(-\varphi)\begin{Vmatrix}\frac{dp}{dt}\\ \frac{dq}{dt}\\ 0\end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Соотношение (9) дает основные уравнения Оппольцера. Аналогичную задачу следует решить при составлении дифференциальных уравнений определяющих оскулирующие элементы при помощи основной операции [3].

20 I 1959 *Астрономическая Обсерватория*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Г. М. Баженов.* Бюлл. Инст. Теор. Астр. 1949, т. IV, стр. 143.
[2]. T. R. *Oppolzer.* Bahnbestimmung. Leipzig, 1882.
[3]. *М. Ф. Субботин.* Курс небесной механики. Москва, 1937, стр. 31.

MATRICU PIELIETOŠANAS PIEMĒRS DEBESS MEHANIKĀ

K. Šteins un S. Stūre

(Kopsavilkums)

Tiek dots īss pierādījums Opolcera sakarībai zemes rotacijas teorijā un tiek vērsta uzmanība uz to, ka Starptautiskā Ģeofizisko gada pētījumos Opolcera izdarītā analīze, kas balstās uz šo sakarību netiek ņemta vērā.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XXVIII, ВЫПУСК 4, 1959 ГОДА

К ВОПРОСУ О РАСШИРЕНИИ АССОЦИАЦИИ

К. ШТЕЙНС и М. АБЕЛЕ

В нашей предыдущей статье [1] мы дали формулу для определения концентрации звезд в ассоциациях в случае радиальноизотропного расширения и показали как возможно по концентрации звезд определиь возраст ассоциаций. Известно, что имеются ассоциации, которые имеют форму отличную от круга. В настоящей заметке мы обобщаем наш метод на эллиптические по виду ассоциации. Вполне возможно, что наши предположения носят формальный характер. Мы старались применить построенную теорию к ассоциации Ориона, однако не получили положительных результатов. По нашему мнению это объясняется тем, что в ассоциации Ориона звезды продолжают рождаться также в настоящее время, притом в очень большом объеме пространства.

Предположим, что проекции скоростей на две взаимно перпендикулярные оси проходящие через центр ассоциации распределяются по закону Гаусса, т. е.

$$f_x(\mu_x) \sim \exp\left(-\frac{\mu_x^2}{2\Sigma_x^2}\right), \quad f_y(\mu_y) \sim \exp\left(-\frac{\mu_y^2}{2\Sigma_y^2}\right). \tag{1}$$

В статье [1] мы рассмотрели случай, если дисперсии $\Sigma_x = \Sigma_y$.

Если возраст ассоциации обозначить через T, то в настоящее время звезда имеет координаты

$$x = \mu_x T, \; y = \mu_y T. \tag{2}$$

Пусть средняя квадратичная ошибка измерения собственных движений есть σ, т. е. соответствующие функции распределений имеют следующий вид

$$\varphi_x(\Delta\mu_x) \sim \exp\left(-\frac{\Delta\mu_x^2}{2\sigma^2}\right), \quad \varphi_y(\Delta\mu_y) \sim \exp\left(-\frac{\Delta\mu_y^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3}$$

Согласно разработанному нами методу, звезды ассоциаций должны быть перемещены в обратном направлении со скоростью $\vec{\mu} + \Delta\vec{\mu}$, следовательно

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{R}} + (\vec{\mu} + \Delta\vec{\mu})\, t = \vec{\mu}\,(T + t) + \Delta\vec{\mu}\, t. \tag{4}$$

Вероятность того, что звезда в момент времени t имеет координату в промежутке x, $x + dx$, есть

$$C_1 \exp\left(-\frac{x^2}{2\,[\Sigma_x^2 (T + t)^2 + \sigma^2 t^2]}\right), \tag{5}$$

где C_1 — некоторая постоянная. Для y имеем аналогичное выражение. Чтобы определить плотность звезд, учтем следующие соотношения

$$C_1 C_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\,a^2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\,b^2}\right) dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \rho\,(x, y, t)\,dx\,dy = n, \tag{6}$$

где n общее число звезд и $a = \sqrt{\Sigma_x^2\,(T+t)^2 + \sigma^2\,t^2}$, $b = \sqrt{\Sigma_y^2\,(T+t)^2 + \sigma^2\,t^2}$. Легко получить, что

$$\rho\,(x, y, t) = \frac{n}{2\pi\,ab} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2\,b^2}\right). \tag{7}$$

Из формулы (7) следует, что кривые одинаковых плотностей $\rho = c$ являются эллипсами. Направление главных осей и соотношение между ними возможно следовательно определить из наблюдений и таким образом определить направление осей x и y. Если в предыдущих формулах сделаем подстановку $x = ax'$, $y = by'$, то наша задача станет тождественной с задачей рассмотренной в [1]. Поэтому, если определить концентрацию согласно формуле

$$K\,(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho\,(x, y, t)}{\sqrt{ab}\,\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy, \tag{8}$$

то

$$K\,(t) = \frac{n\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}{\sqrt[4]{[\Sigma_x^2\,(T+t)^2 + \sigma^2\,t^2]\;[\Sigma_y^2\,(T+t)^2 + \sigma^2 t^2]}}. \tag{9}$$

Формула (9) при $\Sigma_x = \Sigma_y$ совпадает с формулой (8) в нашей работе [1]. Формуле (9) можно дать другой вид, если ввести в формулу (8) другие множители.

20 I 1959

Астрономическая Обсерватория

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *К. А. Штейнс и М. К. Абеле.* Астрон. Журнал АН СССР, 1958, т. XXXV, I, 82.

PAR ASOCIACIJU IZPLEŠANOS

K. Šteins un M. Ābele

(Kopsavilkums)

Tiek vispārināta autoru izstrādātā metode [1] asociaciju izplešanās pētīšanai uz eliptiskas formas asociacijām. Parādīts, ka izmešanas ātrumu sadalījuma (1) gadījumā veidosies eliptiski homogenas asociacijas, kuru koncentracijas atkarību no laika dod formula (9).

СОДЕРЖАНИЕ

Подписано к печати 18 сентября 1959 г. Формат бумаги 70×108 1/16. 9,25 печ. листов. 9,6 уч.-изд. листов. Тираж 500 экз. ЯТ 10436. Отпечатано в типографии № 6 Управления полиграфической промышленности Министерства культуры Латвийской ССР, г. Рига, ул. Горького, 6. Заказ № 454.

Цена 6 руб. 75 коп.

Поправки

На стр.	Строка или № формулы	Напечатано	Следует читать
76	11 сверху	$\beta > 0$	$\beta_0 > 0$
76	19 сверху	В	в
80	11 сверху	отричательными	отрицательными
81	2 снизу	$\sqrt{t}$	$\sqrt{x}$
87	5 сверху	В	в
113	3 сверху	$\Gamma(\mu_m + \lambda_N + 1$	$\Gamma(\mu_m + \lambda_N + 1)$
114	4 сверху	$(p - p_0)^{\gamma_N}$	$(p - p_0)^{\lambda_N}$
114	3 снизу	$-\frac{1}{2} g''\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)\left(\varphi - \frac{\pi}{\mu+1}\right)^2\Bigg\}$	$-\frac{1}{2} g''\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)\left(\varphi - \frac{\pi}{\mu+1}\right)^2\Bigg]\Bigg\}$
115	12 снизу	$O_{(t)\infty}\left(e^{p_0 t + \tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda_N+1}{\mu}}\right.$	$O_{(t)\infty}\left(e^{p_0 t + \tau g\left(\frac{\pi}{\mu+1}\right)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{\lambda_N+1}{\mu}}\right)$
117	4 сверху	... линии, l и $\overline{l}$ ...	... линии l и $\overline{l}$, ..
118	2 сверху	$\left\lvert \rho\left[e^z\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\right\rvert\right.$	$\left\lvert \rho\left[e^z\left(\frac{c}{t}\right)^{\frac{1}{\mu+1}}\right]\right\rvert$
119	5 снизу	заказательству	доказательству
123	4 снизу	$(p - p^0)^{\lambda_k}$	$(p - p_0)^{\lambda_k}$
128	1 и 3 снизу	$(\lvert p\rvert)^{-\lambda_N - 1}$	$(\lvert p\rvert^{-\lambda_N - 1})$
129	10 и 12 сверху	φ_{n_k}	φ_{n_N}
135	4 сверху	(1.19′)	(1.19)

Цена 6 руб. 75 коп.