41

PETERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

ZINĀTNISKIE RAKSTI
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

MATEMĀTIKA — МАТЕМАТИКА

SĒJUMS
41

ТОМ
41

RĪGĀ 1961 РИГА

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

ZINĀTNISKIE RAKSTI
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

MATEMĀTIKA — МАТЕМАТИКА

SĒJUMS
41

ТОМ
41

Latvijas
Universitātes
BIBLIOTĒKA

RĪGĀ 1961 РИГА

44/5764

REDAKCIJAS KOLĒĢIJA:

fiz.-mat. zinātņu kand. doc. V. K. DETLOVS;
fiz.-mat. zinātņu kand. doc. v. i. J. L. ENGELSONS;
fiz.-mat. zinātņu kand. doc. E. J. RIEKSTIŅŠ.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

доцент кандидат физ.-мат. наук В. К. ДЕТЛОВС;
доцент кандидат физ. мат. наук Я. Л. ЭНГЕЛЬСОН;
доцент кандидат физ. мат. наук Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ.

FIZIKAS — MATEMĀTIKAS ZINĀTNES

ФИЗИКО — МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

5. IZLAIDUMS

ВЫПУСК 5

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ БОЛЬШОГО ПАРАМЕТРА

Э. Риекстыньш

Много работ посвящено изучению асимптотического поведения интегралов

$$\Omega(x) = \int_0^\infty \Phi(xh(t))\varphi(t)\,dt \tag{0.1}$$

при больших значениях x в случае конкретных функций $\Phi(t)$; случай $\Phi(t) \equiv e^{-t}$ рассмотрен уже Лапласом. Рассмотрен также конечный промежуток интегрирования $[0, a]$, что является частным случаем для (0.1), так как тогда $\varphi(t) \equiv 0$ при $t \overline{\in} [0, a]$.

В последнее время изучаются также более общие интегралы

$$\Lambda(x) = \int_0^\infty \Psi(h(x,t))\varphi(t)\,dt, \tag{0.2}$$

тоже при некоторых конкретных функциях $\Psi(t)$. В настоящей работе будут рассмотрены некоторые теоремы о поведении интеграла (0.1) в случае функции общего вида $\Phi(t)$. Во всех этих теоремах x будет считаться вещественным, если не оговорено противное.

§ 1.

1°. Начнем с рассмотрения интеграла (0.1) в случае $h(t) \equiv t$, т. е.

$$\Omega(x) = \int_0^\infty \Phi(xt)\varphi(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Все рассмотренные до сих пор интегралы такого вида разбываются на 2 типа:

а) Для любого $\alpha \geqslant 0$ абсолютно сходится интеграл

$$\int_0^\infty t^\alpha \Phi(t)\,dt = \nu(\alpha). \tag{1.2}$$

б) Начиная с некоторого α, интеграл (1.2) расходится.

В настоящем параграфе рассмотрим случай а), а в следующем — случай б). По существу такие исследования означают изучение асимптотического поведения изображения при интегральном преобразовании, и поэтому полученные в работе результаты можно применить к конкретным преобразованиям.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$ обладают следующими свойствами:

А. $\varphi(t)$ в окрестности начала координат имеет следующее асимптотическое представление:

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{\lambda_k}, \quad \lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_{k+1} > \lambda_k \to \infty. \tag{1.3}$$

Ряд может быть и сходящимся рядом или рядом Тейлора.

Б. В каждом конечном промежутке функция $\varphi(t)$ интегрируема и ограничена; при $t \to \infty$ она имеет оценку $\varphi(t) = O(t^{\omega})$, $\omega \geqslant 0$.

В. Для каждого $\alpha \geqslant 0$ абсолютно сходится интеграл (1.2). $\Phi(t)$ может быть при $t = 0$ неограниченной.

Тогда функция $\Omega(x)$ при $x \to \infty$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\Omega(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \nu(\lambda_k)}{x^{\lambda_k+1}}. \tag{1.4}$$

При этом не требуется монотонность функции $\Phi(t)$, а также того, чтобы $\max \Phi(t) = \Phi(0)$. Например, можно брать $\Phi(t) = e^{-t} \sin t$.

Доказательство. Представим функцию $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^{\lambda_k} + r_n(t). \tag{1.5}$$

Из свойств A и $Б$ для $\varphi(t)$ следует, что при малых t, т. е. $t \leqslant t_0$ имеет место оценка

$$|r_n(t)| < M_0 t^{\lambda_{n+1}},$$

а при $t \geqslant t_0$

$$|r_n(t)| \leqslant |\varphi(t)| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} |a_k| t^{\lambda_k} < M_1 t^{\omega} + M_2 t^{\lambda_n} < M_1 t^{\omega} + M_3 t^{\lambda_{n+1}} < M t^{\varkappa},$$

где $\varkappa = \max(\omega, \lambda_{n+1})$; при достаточно большом n будет $\varkappa = \lambda_{n+1}$. Из постоянных M и M_0 можно выбрать наибольшую и обозначить ее опять через M. Учитывая это, впредь при подобных оценках всегда будем использовать только одну постоянную M. Объединяя оценки, получаем

$$|r_n(t)| < \begin{cases} M t^{\lambda_{n+1}} & \text{при } t \leqslant t_0, \\ M t^{\varkappa} & \text{при } t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) в интеграл (1.1) и учитывая (1.2), после подстановки $xt = \tau$ имеем

$$\Omega(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{\infty} \Phi(xt) t^{\lambda_k} dt + \int_0^{\infty} \Phi(xt) r_n(t) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k \nu(\lambda_k)}{x^{\lambda_k+1}} + \int_0^\infty \Phi(xt) r_n(t) dt.$$

Учитывая (1.6) и абсолютную сходимость интеграла (1.2), получаем оценку для остаточного члена:

$$\left| \int_0^\infty \Phi(xt) r_n(t)\, dt \right| < M \int_0^{t_0} |\Phi(xt)|\, t^{\lambda_{n+1}}\, dt + M \int_{t_0}^\infty |\Phi(xt)|\, t^{\varkappa} dt <$$

$$< \frac{M}{x^{\lambda_{n+1}+1}} \int_0^\infty |\Phi(\tau)|\, \tau^{\lambda_{n+1}} d\tau + \frac{M}{x^{\varkappa+1}} \int_0^\infty |\Phi(\tau)|\, \tau^{\varkappa} d\tau,$$

т. е.

$$\int_0^\infty \Phi(tx) r_n(t) dt = O\left(\frac{1}{x^{\lambda_{n+1}+1}}\right) = o\left(\frac{1}{x^{\lambda_n+1}}\right).$$

Следовательно, для любого целого неотрицательного n имеем

$$\Omega(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\nu(\lambda_k)}{x^{\lambda_k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{\lambda_n+1}}\right),$$

что эквивалентно с (1.4).

Примечания. 1. В доказательстве ничего не меняется, если

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases} \tag{1.7}$$

Но в этом случае можно в оценке (1.6) брать $t_0 = T$ и этим немного упростить оценку остаточного члена.

2. Теорема 1 сохраняет силу и тогда, если интеграл (1.1) имеет верхний предел $a(x)$ вместо ∞, причем начиная с некоторого x имеет место $a(x) \geqslant T > 0$.

3. Если x — комплексно, причем $\alpha_1 \leqslant \arg x \leqslant \alpha_2$, то подстановка $xt = \tau$ переводит путь интегрирования в луч $\arg \tau = \arg x$. Если функция $\Phi(\tau)$, рассмотренная теперь в секторе $\alpha_1 \leqslant \arg \tau \leqslant \alpha_2$ комплексной плоскости τ, кроме прежних свойств в этом секторе обладает еще таким дополнительным свойством, что луч интегрирования в интеграле (1.2) можно повернуть обратно на вещественную ось, то, очевидно, асимптотическое разложение остается справедливым в указанном секторе комплексной плоскости. От функции $\varphi(t)$ дополнительно ничего не требуется.

Луч можно повернуть, если функция $\Phi(\tau)$ является аналитической в этом секторе, за исключением, быть может, начала координат, и имеет в этом секторе оценки $\Phi(\tau) = O(\tau^{-\lambda_0-1+\varepsilon})$ при $\tau \to 0$, $\varepsilon > 0$, $\Phi(\tau) = o(\tau^{-\omega})$ при $\tau \to \infty$ для любого $\omega > 0$. Последние требования обеспечивают и сходимость интеграла (1.2).

2°. Переходим к общему случаю интеграла (0.1). Ради удобства полагаем функцию $h(t)$ в окрестности начала аналитической, во всем промежутке непрерывной и сначала также монотонной. Будем различать следующие случаи:

1) $h(t)$ монотонно возрастает;

2) $h(t)$ монотонно убывает;

3) $h(t) = t^{\beta}$, $\beta > 0$;

4) $h(t) = t^{\beta} h_1(t)$, $\beta > 0$, $h_1(t)$ — монотонно возрастающая, аналитическая.

Рассмотрим первый случай. Тогда в окрестности начала имеем

$$h(t) = a + \sum_{k=m}^{\infty} \alpha_k t^k, \ m \geqslant 1, \ \alpha_m > 0. \tag{1.8}$$

В силу монотонности и непрерывности $h(t)$ имеет обратную функцию. Поэтому из (1.8) и подстановки

$$h(t) = a + u^m \tag{1.9}$$

следует, что в окрестности $u = 0$ имеем

$$t = g(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u^k, \ \beta_1 \neq 0. \tag{1.10}$$

Подстановка (1.9) дает

$$\Omega(x) = \int_0^{\infty} \Phi(ax + xu^m) f(u)\, du, \tag{1.11}$$

где

$$f(u) = \varphi(g(u)) g'(u). \tag{1.12}$$

Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям А и Б теоремы 1, то $f(u)$ имеет разложение вида (1.3):

$$f(u) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^{\mu_k}, \ \mu_0 = \lambda_0. \tag{1.13}$$

Если еще функции $g(u)$ и $g'(u)$ удовлетворяют условию Б, то $f(u)$ тоже удовлетворяет условиям А и Б.

Поэтому интеграл (1.11) мы можем преобразовать точно так же, как в случае теоремы 1. После разбиения интеграла на две части и оценки $r_n(u)$ степеной функцией, подстановка $xu^m = v$ приводит нас к выражению

$$\Omega(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{x^{\frac{\mu_k+1}{m}}} \int_0^{\infty} \Phi(ax + v) v^{\frac{\mu_k+1}{m} - 1} dv + R_n. \tag{1.14}$$

Если $a = 0$, то мы приходим к результату, сходному с (1.4), поэтому дальше будем считать $a > 0$. Тогда определяем функцию

$$\nu(x, \alpha) = \int_0^{\infty} \Phi(ax + v) v^{\alpha} dv. \tag{1.15}$$

Будем впредь функцию $\Phi(t)$ считать знакопостоянной, начиная с некоторого t. Тогда и функция $\nu(x, \alpha)$ при достаточно больших x знакопостоянна.

Пусть для всех $\alpha > -1$ существует $\nu(x, \alpha)$, и для любых α_2 и $\alpha_1 < \alpha_2$ имеет место

$$\nu(x, \alpha_2) = O(\nu(x, \alpha_1)\, x^{(\alpha_2-\alpha_1)(1-\varepsilon)}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.16}$$

Тогда

$$\Omega(x) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k \nu\left(x, \frac{\mu_k+1}{m} - 1\right)}{x^{\frac{\mu_k+1}{m}}} + o\left(\frac{\nu\left(x, \frac{\mu_n+1}{m} - 1\right)}{x^{\frac{\mu_n+1}{m}}}\right). \tag{1.17}$$

Таким образом доказана

Теорема 2. Пусть

1) функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям А и Б теоремы 1;

2) функция $h(t)$ непрерывна, монотонна и в окрестности начала имеет разложение (1.8), причем $a > 0$;

3) $\Phi(t)$ знакопостоянна при $t \geqslant T > 0$;

4) функции $g(u)$ и $g'(u)$ удовлетворяют условию Б;

5) при $\alpha > -1$ существует интеграл (1.15) и для него справедливо (1.16).

Тогда имеет место (1.17). При этом безразлично, чему равно $h(\infty)$.

Теорему можно обобщить для комплексного x и конечного промежутка интегрирования подобным образом, как теорему 1. Условие 4) будет удовлетворено, если при $t \to \infty$ $h(t) = O(t^{\beta})$, $\beta > 0$, так как в таком случае $g(u) = O\left(u^{\frac{m}{\beta}}\right)$. Если $h(\infty) \neq \infty$, то $g(u) = O(1)$. Поэтому в теореме исключаются только весьма частные случаи функции $h(t)$, например $h(t) = \ln(1+t)$, $g(u) = e^u - 1$.

Теорему можно обобщить и в том направлении, что $h(t)$ имеет вместо (1.8) асимптотическое разложение в начале.

Возьмем в качестве примера

$$\Phi(t) = e^{-\rho t^{\gamma}} t^{\beta}, \quad \gamma > 0, \quad \rho > 0. \tag{1.18}$$

Тогда

$$\nu(x, \alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\rho(ax+v)^{\gamma}} (ax+v)^{\beta} v^{\alpha}\, dv =$$

$$= \frac{1}{\gamma} \int_{(ax)^{\gamma}}^{\infty} e^{-\rho z} z^{\frac{\beta+1}{\gamma}-1} \left(z^{\frac{1}{\gamma}} - ax\right)^{\alpha} dz =$$

$$= \frac{1}{\gamma} e^{-\rho(ax)^{\gamma}} \int_0^{\infty} e^{-\rho\tau} [\tau + (ax)^{\gamma}]^{\frac{\beta+1}{\gamma}-1} \left[(\tau + (ax)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}} - ax\right]^{\alpha} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\gamma} e^{-\rho(ax)^{\gamma}} (ax)^{\beta-\gamma+1+\alpha} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-\rho\tau} \left[1 + \frac{\tau}{(ax)^{\gamma}}\right]^{\frac{\beta+1}{\gamma}-1} \left[\left(1 + \frac{\tau}{(ax)^{\gamma}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1\right]^{\alpha} d\tau. \tag{1.19}$$

Функция

$$\psi(t) = (1+t)^{\frac{\beta+1}{\gamma}-1}\left[(1+t)^{\frac{1}{\gamma}}-1\right]^{\alpha}$$

при $\alpha \geqslant 0$ имеет в окрестности $t=0$ разложение

$$\psi(t) = \left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k, \tag{1.20}$$

но при $-1<\alpha<0$ подинтегральное выражение в (1.19) надо умножить и разделить на $\left(\frac{\tau}{(ax)^{\gamma}}\right)^{\alpha}$ и обозначить $\Phi_1(\tau)=e^{-\rho\tau}\tau^{\alpha}$.

Тогда при $\alpha>-1$ (1.19) соответствует условиям теоремы 1, и имеет следующее асимптотическое разложение

$$\nu(x,\alpha) \sim \frac{1}{(\rho\gamma)^{1+\alpha}} e^{-\rho(ax)^{\gamma}} (ax)^{\beta-\gamma+1+\alpha(1-\gamma)} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{(\rho a x)^k}. \tag{1.21}$$

Отсюда следует, что $\nu(x,\alpha)$ для функции (1.18) удовлетворяет условию (1.16). Этим доказана также следующая теорема.

Теорема 3. Если функция $\Phi(t)$ при достаточно больших t имеет оценку

$$me^{-\rho t^{\gamma}} t^{\beta} < \Phi(t) < Me^{-\rho t^{\gamma}} t^{\beta}, \quad \gamma>0, \ \rho>0, \ m>0, \tag{1.22}$$

то $\Phi(t)$ удовлетворяет условию 5 теоремы 2.

3°. Рассмотрим случай, когда $h(t)$ монотонно убывает. Пусть

$$h(0)=a>0, \quad \lim_{t\to\infty} h(t) = b \geqslant 0 \tag{1.23}$$

и в окрестности $t=\infty$ имеем

$$h(t) = b + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c_k}{t^k}. \tag{1.24}$$

Тогда из подстановки

$$h(t) = b + u^m \tag{1.25}$$

при малых u следует:

$$t = g(u) = \frac{1}{u} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u^k. \tag{1.26}$$

$$\Omega(x) = -\int_0^{b_1} \Phi(xb + xu^m) f(u)\,du, \tag{1.27}$$

где $b_1 = \sqrt[m]{a-b}$.

Пусть далее при $t \to \infty$ имеем

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{t^{\lambda_k+1}}, \quad \lambda_0 > 0. \tag{1.28}$$

Такое требование обеспечивает сходимость интеграла (0.1). Тогда легко убедиться в том, что при $u \to 0$

$$f(u) = \varphi(g(u))g'(u) \sim u^{\lambda_0 - 1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^{\mu_k}, \quad \mu_0 = 0, \tag{1.29}$$

и задача об асимптотическом разложении $\Omega(x)$ приводится к теореме 2.

Далее рассмотрим случай $h(t) = t^\beta$. При помощи подстановки $t^\beta = u$ имеем

$$\Omega(x) = \frac{1}{\beta x^{\frac{1}{\beta} - 1}} \int_0^\infty \Phi(xu)(xu)^{\frac{1}{\beta} - 1} \varphi\left(u^{\frac{1}{\beta}}\right) du =$$

$$= \frac{1}{\beta x^{\frac{1}{\beta} - 1}} \int_0^\infty \Phi_1(xu) f_1(u)\, du, \tag{1.30}$$

и задача приводится к теореме 1.

Возьмем, наконец, $h(t) = t^\beta h_1(t)$, где $\beta > 0$, $h_1(t)$ — непрерывная, монотонно возрастающая и в окрестности начала аналитическая функция. Присоединяя к x численный множитель, можем добиться, что $h_1(0) \geqslant 1$. Введем обозначение $h_1(t) = [\psi(t)]^\beta$. Тогда

$$\psi(t) = [h(t)]^{\frac{1}{\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k, \tag{1.31}$$

причем $\psi(t)$ тоже является монотонно возрастающей. После этого в интеграле (0.1) возьмем подстановку

$$t\psi(t) = u \tag{1.32}$$

Отсюда имеем

$$t = g(u) = u \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k u^k, \tag{1.33}$$

и после подстановки (1.32) интеграл (0.1) имеет вид

$$\Omega(x) = \int_0^\infty \Phi(xu^\beta) f(u)\, du, \tag{1.34}$$

т. е. задача приводится к предыдущей.

Ничего нового не дают и те случаи, когда $h(t)$ не является монотонной, но имеет конечное число экстремумов. В этом случае надо промежуток интегрирования разбыть на такие части, в которых функция $h(t)$ является монотонной, и при помощи соответствующих преобразований задачу привести либо к теореме 1, либо к теореме 2. Может случиться, что главным является только одно разложение, а остальные содержатся в его остаточном члене.

Теоремы 1 и 2 содержат в качестве частных случаев общеизвестные разложения, которые получаются при $\Phi(t) = e^{-t} t^\beta$.

§ 2.

1°. Рассмотрим случай, когда $\Phi(t)$ имеет колебательный характер, и начиная с некоторого α интеграл (1.2) расходится. Тогда ясно, что предыдущий метод неприменим. Немного изменяя этот метод, в случае $\Phi(t)=e^{-t}$ можно одновременно рассмотреть и случаи $\Phi(t)=\sin t$ и $\Phi(t)=\cos t$ [1, 2, 3].

В 1948 году Х. Ф. Виллис [4] предложил формальную схему для получения асимптотических разложений в этом случае, но без всякого обоснования. Нижеследующие соображения дают основание сомневаться в возможности прямого обоснования этой схемы в общем случае.

Рассмотрим интеграл

$$\Omega(x, y)=\int_0^\infty \Phi(xt) f(t) e^{-ty} dt \tag{2.1}$$

и положим

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + r_n(t).$$

Тогда

$$\Omega(x, y)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \int_0^\infty \Phi(xt) t^k e^{-yt} dt +$$

$$+\int_0^\infty \Phi(xt) r_n(t) e^{-yt} dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^\infty \Phi(\tau) \tau^k e^{-\frac{y}{x}\tau} d\tau + R_n.$$

Рассмотрим преобразование Лапласа функции $\Phi(t)$:

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} \Phi(\tau) d\tau=\overline{\Phi}(p). \tag{2.2}$$

Тогда

$$\int_0^\infty \Phi(\tau) \tau^k e^{-\frac{y}{x}\tau} d\tau=(-1)^k \overline{\Phi}^{(k)}\left(\frac{y}{x}\right),$$

и, поэтому,

$$\Omega(x, y)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{1}{x^{k+1}} \overline{\Phi}^{(k)}\left(\frac{y}{x}\right)+R_n. \tag{2.3}$$

Чтобы мы могли в (2.3) перейти к пределу когда $y \to 0$, в первую очередь требуется, чтобы интеграл (2.2) сходился при $\operatorname{Re} p>0$, и $\overline{\Phi}(p)$ была аналитической в начале. Учитывая колебательный характер и ограниченность функции $\Phi(t)$ при $t>T$, можно ожидать, что так и будет. При таком допущении можно в первом члене (2.3) выполнить предельный переход. Далее, при оценке R_n надо использовать оценку для r_n. Так как эта оценка дается по модулю, то и функцию Φ надо будет оценить по модулю, но тем самым теряется колебание знака у функции Φ. Поэтому можно ожидать, что в общем случае будет трудно оправдать предельный переход $y \to 0$.

Это будет легко выполнимо только тогда, когда интеграл (2.2) сходится при $\operatorname{Re} p > -\beta$, $\beta > 0$. Но тогда это будет ничто иное, как малое видоизменение доказательства теоремы 1, причем введение множителя e^{-yt} в этом случае является излишним.

Поэтому целесообразно к обоснованию предельного перехода $y \to 0$ в формуле (2.3) выбрать косвенный путь, предложенный в случае $\Phi(t) = J_0(t)$ А. Н. Тихоновым [5].

2°. В первую очередь надо выяснить достаточные условия для функций $\Phi(t)$ и $f(t)$, чтобы интеграл

$$\Omega(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) f(t)\, dt \tag{2.4}$$

сходился. Это можно делать по разному, используя известные признаки сходимости несобственных интегралов [6]. Особенно надо обратить внимание на то, что иногда опасно допускать, что и функция $f(t)$ имеет колебательный характер. Например, при $\Phi(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, $f(t) = \frac{\sin \alpha t}{\sqrt{t}}$ интеграл (2.4) расходится, если $x = \alpha$, хотя отдельные функции $\Phi(t)$ и $f(t)$ интегрируемы в $[0, \infty)$. Поэтому целесообразно рассмотреть в качестве $f(t)$ функции ограниченной вариации в $[0, \infty)$.

Лемма А. Пусть для всех $t \geqslant 0$

$$F(t) = \int_0^t \Phi(\tau)\, d\tau \tag{2.5}$$

и 1) существует такое $M > 0$, что $|F(t)| < M$ для всех $t \geqslant 0$;

2)
$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) \tag{2.6}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — монотонные невозрастающие функции, причем $f_1 \to 0$, $f_2 \to 0$ при $t \to \infty$.

Тогда

1) $\int_0^\infty \Phi(xt) f(t)\, dt$ сходится для любого $x \geqslant x_0 > 0$ и

2) $$\int_0^\infty \Phi(xt) f(t)\, dt = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{при } x \to \infty. \tag{2.7}$$

По необходимому и достаточному условию сходимости несобственного интеграла при помощи второй теоремы о среднем имеем

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} \Phi(xt) f(t)\, dt \right| \leqslant f_1(\omega_1) \left| \int_{\omega_1}^{\omega_3} \Phi(xt)\, dt \right| +$$

$$+f_2(\omega_1)\left|\int\limits_{\omega_1}^{\omega_4}\Phi(xt)\,dt\right| =$$

$$=\frac{1}{x}\left[f_1(\omega_1)\left|\int\limits_{\omega_1 x}^{\omega_3 x}\Phi(\tau)\,d\tau\right| + f_2(\omega_1)\left|\int\limits_{\omega_1 x}^{\omega_4 x}\Phi(\tau)\,d\tau\right|\right] <$$

$$<\frac{2M}{x}[f_1(\omega_1)+f_2(\omega_1)] < \varepsilon \tag{2.8}$$

при $\omega_2 > \omega_1 > \omega_0$.

Если вместо промежутка $[\omega_1, \omega_2]$ брать $[0, T]$, то получим

$$\left|\int\limits_0^T \Phi(xt) f(t)\,dt\right| < \frac{M}{x}[f_1(0)+f_2(0)].$$

Поскольку существует предел интеграла при $T \to \infty$, то в неравенстве мы можем перейти к пределу $T \to \infty$ и тем самым получим второе утверждение.

Следует отметить, что из первого условия леммы вовсе не следует ограниченность функции $\Phi(t)$ при $t \to \infty$, как это показывает пример $\Phi(t) = e^t \sin e^{kt}$ при $k > 1$.

Если функция $f(t)$ тоже имеет колебательный характер, то можно использовать следующий признак функций ограниченной вариации.

Пусть $\varphi(t)$ — функция ограниченной вариации в форме (2.6), причем $f_i(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon_i}}\right)$, $\varepsilon_i > 0$; $\psi(t)$ — непрерывная ограниченная в $[0, \infty)$ функция, имеющая чередующиеся максимумы и минимумы в точках $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots \to \infty$, причем $\inf(t_{n+1} - t_n) \geqslant c > 0$. Тогда $f(t) = \varphi(t)\psi(t)$ — функция ограниченной вариации в $[0, \infty)$. Этот признак непосредственно следует из выражения для полной вариации и оценки полной вариации для произведения.

Примеры функций $\frac{\cos t}{1+t}$ и $\frac{\cos t^2}{1+t^2}$, которые не являются функциями ограниченной вариации, показывают, что нельзя брать $\varepsilon_i = 0$, а также то, что функция с оценкой $O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)$ не всегда является функцией ограниченной вариации. Однако оценка $f(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)$ обеспечивает сходимость интеграла (2.4), если функция $\Phi(t)$ ограничена. Справедлива

Л е м м а Б. Пусть

1) $\Phi(t)$ ограничена в $[T, \infty)$ и абсолютно интегрируема в каждом конечном промежутке $[0, \omega]$;

2) $\Phi_2(t) = \int \Phi(t)\,dt$ обладает тем же свойством;

3) $f(t)$ и $f'(t)$ ограничены и интегрируемы в каждом конечном промежутке $[0, \omega]$ и при $t \to \infty$ имеют оценки $f(t) = o(1)$, $f'(t) = O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right)$, $0 < \varepsilon < 1$.

Тогда

1) интеграл (2.4) сходится;

2) имеет место оценка

$$\int_0^\infty \Phi(xt) f(t)\, dt = O\left(\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right). \tag{2.9}$$

Имеем

$$\int_0^\omega \Phi(xt) f(t)\, dt = \frac{1}{x}\int_0^T \Phi(\tau) f\left(\frac{\tau}{x}\right) d\tau +$$

$$+\frac{1}{x}\Phi_2(xt) f(t)\Big|_{\frac{T}{x}}^{\omega} - \frac{1}{x}\int_{\frac{T}{x}}^{\omega} \Phi_2(xt) f'(t)\, dt.$$

В правой части существует предел $\omega \to \infty$, поэтому интеграл (2.4) сходится. Отсюда и легко видна оценка (2.9).

Можно ослабить требования на функцию $f(t)$ и усилить их на функцию $\Phi(t)$. В первую очередь эту же лемму можно видоизменить, требуя вместо $f'(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^{1+\varepsilon}}\right)$ оценку $\Phi_2(\tau) f'(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^{1+\varepsilon}}\right)$. В этом случае можно было улучшить оценку (2.9), но это для нас не существенно. В такой формулировке лемму обозначим через Б′. Надо отметить, что из оценки $O\left(\frac{1}{\tau^{1+\varepsilon}}\cdot\frac{1}{\tau^{\gamma}}\right)$, $\gamma > 0$ следует оценка $O\left(\frac{1}{\tau^{1+\varepsilon}}\right)$, поэтому требование $\varepsilon < 1$ практически несущественно.

Еще имеет место

Лемма В. Пусть

1) существует интеграл $\int_0^\infty \Phi(\tau)\, d\tau$ и $\Phi(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$;

2) $f(t)$ имеет вид (2.6), причем $f_1(t)$ и $f_2(t)$ при $t \to \infty$ могут стремиться к конечным пределам, отличным от нуля.

Тогда справедливы утверждения леммы А.

Доказательство следует из (2.8). В нем не требуется $\Phi(\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$, но при использовании этой леммы в следующей теореме мы обязаны рассмотреть функции с таким свойством; поэтому это условие удобно включить уже в лемму.

3°. Теорема 4. Пусть

1) функции $\Phi(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условиям одной из лемм А, Б, В;

2) можно найти в $[0, \infty)$ ограниченные функции $\Phi_2, \ldots, \Phi_{n+1}$, $\Phi_k = \int \Phi_{k-1}(\tau)\, d\tau$, $\Phi_1 \equiv \Phi$, что последовательность этих функций и последовательность $f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ удовлетворяют тем же условиям;

3) $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$.

Тогда

$$\int_0^\infty \Phi(xt) f(t)\, dt = o\left(\frac{1}{x^n}\right). \tag{2.10}$$

Доказательство непосредственно получается интегрированием по частям:

$$\int_0^\infty \Phi(xt)f(t)\,dt = \frac{1}{x}\Phi_2(xt)f(t)\Big|_0^\infty -$$

$$-\frac{1}{x}\int_0^\infty \Phi_2(xt)f'(t)\,dt = \ldots = (-1)^n\frac{1}{x^n}\int_0^\infty \Phi_{n+1}(xt)f^{(n)}(t)\,dt = o\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Теорема 5. Требование 2) предыдущей теоремы относительно $\Phi(t)$ выполняется, если

1) $\int_0^\infty \Phi(\tau)\,d\tau$ сходится;

2) при $\tau \to \infty$ $\Phi(\tau) = \sin\omega\tau \sum_{j=0}^{m_{11}} \frac{a_{1j}}{\tau^{\alpha_{1j}}} + \cos\omega\tau \sum_{j=0}^{m_{21}} \frac{b_{1j}}{\tau^{\beta_{1j}}} + O\left(\frac{1}{\tau^{n+3}}\right).$ (2.11)

Тогда

$$\Phi_k(t) = -\int_t^\infty \Phi_{k-1}(\tau)\,d\tau. \tag{2.12}$$

В (2.11) α_{1j} и β_{1j} образуют монотонно возрастающие последовательности, причем $\alpha_{10} > 0$, $\beta_{10} \geq 0$, $\alpha_{1m_{11}} < n+3$, $\beta_{1m_{21}} < n+3$, $\omega > 0$.

Рассмотрим функцию $\Phi_2(t)$. Имеем при $t \to 0$

$$-\Phi_2(t) = \int_t^\infty \Phi(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty \Phi(\tau)\,d\tau - \int_0^t \Phi(\tau)\,d\tau = C_2 + o(1).$$

При $t \to \infty$

$$-\Phi_2(t) = \int_t^\infty \Phi(\tau)\,d\tau = \sum_{j=0}^{m_{11}} a_{1j}\int_t^\infty \frac{\sin\omega\tau}{\tau^{\alpha_{1j}}}\,d\tau +$$

$$+\sum_{j=0}^{m_{21}} b_{1j}\int_t^\infty \frac{\cos\omega\tau}{\tau^{\beta_{1j}}}\,d\tau + \int_t^\infty O\left(\frac{1}{\tau^{n+3}}\right)d\tau =$$

$$= \sum_{j=0}^{m_{11}} a_{1j}\left[\frac{\cos\omega t}{\omega t^{\alpha_{1j}}} + \frac{\alpha_{1j}}{\omega^2}\frac{\sin\omega t}{t^{\alpha_{1j}+1}} + \ldots + o\left(\frac{1}{t^{n+2}}\right)\right] +$$

$$+\sum_{j=0}^{m_{21}} b_{1j}\left[-\frac{\sin\omega t}{\omega t^{\beta_{1j}}} + \frac{\beta_{1j}}{\omega^2}\frac{\cos\omega t}{t^{\beta_{1j}+1}} + \ldots + o\left(\frac{1}{t^{n+2}}\right)\right] + O\left(\frac{1}{t^{n+2}}\right) =$$

$$+\sin\omega t\sum_{j=0}^{m_{12}} \frac{a_{2j}}{t^{\alpha_{2j}}} + \cos\omega t\sum_{j=0}^{m_{22}} \frac{b_{2j}}{t^{\beta_{2j}}} + O\left(\frac{1}{t^{n+2}}\right).$$

Полученные оценки обеспечивают сходимость интеграла $\int_0^\infty \Phi_2(\tau)\,d\tau$, и поэтому можно определить $\Phi_3(t) = -\int_t^\infty \Phi_2(\tau)\,d\tau$. Методом индукции можно получить оценки

$$\Phi_k(t) = C_k + o(1) \qquad \text{при } t \to 0,$$

$$\Phi_k(t) = \sin \omega t \sum_{j=0}^{m_{1k}} \frac{a_{kj}}{t^{\alpha_{kj}}} + \cos \omega t \sum_{j=0}^{m_{2k}} \frac{b_{kj}}{t^{\beta_{kj}}} + O\left(\frac{1}{t^{n+3-k}}\right), \qquad (2.13)$$

что доказывает теорему.

Поскольку лемма В предъявляет более слабые требования относительно $f(t)$ чем лемма А, то в случае таких $\Phi(\tau)$ можно брать либо лемму Б′, либо лемму В. Если же $\alpha_{10} = 0$, $\beta_{10} = 0$, то $\Phi(t)$ можно представить в форме

$$\Phi(t) = a_{10} \sin \omega t + b_{10} \cos \omega t + \Phi^*(t), \qquad (2.14)$$

где $\Phi^*(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 5. Относительно первых двух членов можно применить леммы А и Б.

Условиям теоремы 5 удовлетворяют функции $\frac{\sin t}{t^{\mu}}$ $(0 < \mu < 2)$, $\frac{\cos t}{t^{\mu}}$ $(0 < \mu < 1)$, $J_\nu(t)\, t^{\mu-1}$ $\left(\nu > -1, -\nu < \mu < \frac{3}{2}\right)$.

Весьма узок класс тех функций, которые удовлетворяют третьему требованию теоремы 4. Пусть это требование не выполняется. Ищем тогда функцию $F(t)$ которая удовлетворяет первым двум условиям теоремы 4 и, кроме того, $F^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Тогда функция

$$\bar{f} = f - F$$

удовлетворяет всем требованиям теоремы 4, и

$$\int_0^\infty \Phi(xt)\bar{f}(t)\,dt = o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

$$\Omega(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) F(t)\,dt + o\left(\frac{1}{x^n}\right). \qquad (2.15)$$

Остается выбрать такую функцию $F(t)$, чтобы можно было легко получить асимптотическое представление интеграла $\int_0^\infty \Phi(xt)F(t)\,dt$. В целях обоснования формальной схемы Виллиса, целесообразно выбрать

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{-\mu_k t}, \qquad (2.16)$$

где μ_k — произвольно выбранные положительные числа, а a_k следует выбрать так, что $F^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$. Это всегда возможно, так как система

$$F^{(j)}(0) = f^{(j)}(0) = (-1)^j \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mu_k^j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

относительно неизвестных a_k имеет в качестве определителя системы определитель Вандермонда.

Далее

Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

$$\int_0^\infty \Phi(xt) \sum_{k=0}^{n-1} a_k e^{-\mu_k t}\, dt = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \int_0^\infty e^{-\frac{\mu_k}{x}\tau} \Phi(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \overline{\Phi}\left(\frac{\mu_k}{x}\right).$$

Если в окрестности $p = 0$ на положительной вещественной оси имеет место

$$\overline{\Phi}(p) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j p^j + O(p^n), \tag{2.17}$$

то при достаточно больших x имеем

$$\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \overline{\Phi}\left(\frac{\mu_k}{x}\right) = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left[\sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{\mu_k^j}{x^j} + O\left(\frac{1}{x^n}\right)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{x^{j+1}} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \mu_k^j + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j b_j}{x^{j+1}} f^{(j)}(0) + O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right).$$

Таким образом доказана

Т е о р е м а 6. Пусть

1) функции $f(t)$ и $\Phi(t)$ удовлетворяют первым двум условиям теоремы 4;

2) для изображения $\overline{\Phi}(p)$ имеет место (2.17).

Тогда

$$\Omega(x) = \int_0^\infty \Phi(xt) f(t)\, dt = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j b_j}{x^{j+1}} f^{(j)}(0) + o\left(\frac{1}{x^n}\right). \tag{2.18}$$

Теорема 6 немного обобщает результат Виллиса, так как соотношение (2.17) может быть асимтотическим, но в (2.3) требуется аналитичность функции $\overline{\Phi}(p)$ в $p = 0$, что иногда не имеет место.

Если условия теоремы выполняются для любого n, то (2.18) дает асимптотическое разложение функции $\Omega(x)$. Если в теореме 1 функция $\varphi(t)$ в окрестности начала является аналитической, то (1.4) по существу не отличается от (2.18), и $\nu(j) = (-1)^j b_j$.

Следует отметить, что соотношение (2.18) может быть лишь асимптотическим и в том случае, если ряд в (2.18) имеет только конечное число членов. Например, по (2.18) для любого натурального n имеем

$$\int_0^\infty J_0(xt)\, erfct\, dt = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

но из этого не следует, что интеграл равен $\frac{1}{x}$. Действительно, методом операционного исчисления можно установить формулу

$$\int_0^\infty J_0(xt)\, erfct\, dt = \frac{1}{x}\, erf\, \frac{x}{2} \sim \frac{1}{x}\left[1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2x^2)^k}\right].$$

В случае комплексных x надо учесть, что вне вещественной оси поведение функции $\Phi(\tau)$ обычно резко меняется и может теряться сходимость интеграла.

Можно также рассматривать конечный промежуток интегрирования $[0, T]$. Считая функцию $f(t)$ равной нулю вне $[0, T]$, задачу можно привести к прежнему случаю, надо только учесть, что функция $\bar{f}(t) = f(t) - F(t)$ и ее производные в точке $t = T$ имеют разрывы первого рода. Поэтому при доказательстве теоремы 4 надо интеграл разбыть на 2 части, и после интегрирования по частям появляются добавочные члены

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \Phi_{k+2}(xT) \frac{1}{x^{k+1}} f^k(T), \tag{2.19}$$

которые в этом случае надо добавить к (2.18). Еще надо заметить, что отпадают требования о поведении функции $f(t)$ на бесконечности.

4°. Если рассмотреть общий случай интеграла (0.1), то в случаях 1) и 2) (§ 1, 2°) можно выполнить подстановку (1.9) или же (1.25), как в § 1. Но ввиду более сильных требований относительно функции $f(t)$, разложение приводится к теореме 6 без каких либо существенных изменений только тогда, когда $m = 1$, $a = 0$ или же $b = 0$. При этом требование теоремы 6 надо предъявить к функции $f_1(u) = f(g(u))g'(u)$.

В случае $a \neq 0$, или же $b \neq 0$ после подстановки можно выполнить непосредственное интегрирование по частям и получить асимптотическое выражение типа (2.19). А если $\Phi_k(t)$ имеют разложения (2.13), то можно это выражение представить и в другой форме.

При $m > 1$, а также в случаях 3) и 4) (§ 1, 2°), имеем дополнительное затруднение. Так как оно характерно для случая $h(t) = t^\beta$, $\beta > 1$, то рассмотрим только этот случай.

Имеем $t = g(\tau) = \tau^{\frac{1}{\beta}}$, $g'(\tau) = \frac{1}{\beta} \tau^{\frac{1}{\beta} - 1}$. Если $f(0) \neq 0$, то $f_1(0)$ не существует, и наш метод не применим. Но часто множитель $\tau^{\frac{1}{\beta} - 1}$ можно присоединить к функции $\Phi(x\tau)$, т. е. $\frac{\Phi(x\tau)}{(x\tau)^{1 - \frac{1}{\beta}}} x^{1 - \frac{1}{\beta}} = x^{1 - \frac{1}{\beta}} \Phi^*(x\tau)$.

То же самое можно делать с производными, например из $\frac{d}{d\tau} f(\tau^{\frac{1}{\beta}}) = f'(\tau^{\frac{1}{\beta}}) \frac{1}{\beta} \tau^{\frac{1}{\beta} - 1}$ можно опять выделить множитель $\tau^{\frac{1}{\beta} - 1}$ и присоединить к $\Phi_2(x\tau)$ если, конечно, это законно. В таком случае имеем формулу

$$\Phi_k = \int \tau^{\frac{1}{\beta} - 1} \Phi_{k-1}(\tau) d\tau, \tag{2.20}$$

и теоремы 4 и 6 изменяются. Теорема 4 меняется следующим образом: вместо (2.10) имеем

$$\int_0^\infty \Phi(xt^\beta) f(t) dt = o\left(\frac{1}{x^{\frac{n}{\beta}}}\right). \tag{2.10}$$

Поскольку после присоединения $\tau^{\frac{1}{\beta} - 1}$ при условиях всех лемм

$\int\limits_0^\infty \Phi(\tau)\,\tau^{\frac{1}{\beta}-1}\,d\tau$ сходится, то можно пользоваться только леммами Б′ и В, причем требования предъявляются к функции $f(\tau^{\frac{1}{\beta}})$.

В теореме 6 вместо $\overline{\Phi}(p)$ надо рассмотреть функцию

$$\widetilde{\Phi}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-p\tau}\,\Phi(\tau^\beta)\,d\tau. \tag{2.21}$$

Если она представима в виде (2.17), и коэффициенты обозначим через $\widetilde{b}_j$, то вместо (2.18) имеем

$$\int\limits_0^\infty \Phi(xt^\beta) f(t)\,dt = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{\widetilde{b}_j}{x^{\frac{j+1}{\beta}}} f^{(j)}(0) + o\left(\frac{1}{x^{\frac{n}{\beta}}}\right). \tag{2.22}$$

Такое отщепление множителя можно применить и в других случаях, когда производные функции $f(t)$ содержит нежелательные множители.

5°. Рассмотрим подробнее в качестве примера случай

$$\Phi(t) = J_\nu(t)\,t^{\mu-1}, \quad \nu > -1,\ -\nu < \mu < \frac{3}{2}.$$

Как уже отмечено, эта функция удовлетворяет условиям теоремы 5. Далее имеем [7, 8]

$$\int\limits_0^\infty e^{-pt} J_\nu(t)\,t^{\mu-1}\,dt = \frac{\Gamma(\mu+\nu)\left(\frac{1}{2}\right)^\nu}{p^{\nu+\mu}\,\Gamma(\nu+1)}\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu+1}{2}, \nu+1, -\frac{1}{p^2}\right) =$$

$$= \Gamma(\mu+\nu)\left(\frac{1}{2}\right)^\nu \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu-\nu}{2}, \frac{1}{2}, -p^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}\,p\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu-\nu+1}{2}, \frac{3}{2}, -p^2\right)\right].$$

Поэтому, если $f(t)$ при любом n удовлетворяет требуемым условиям, имеем разложение

$$\int\limits_0^\infty J_\nu(xt)\,t^{\mu-1} f(t)\,dt \sim$$

$$\sim \frac{2^\mu}{x^\mu}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{2\Gamma\left(1+\frac{\nu-\mu}{2}\right)} \sum_{k=0}^\infty \frac{(\nu^2-\mu^2)\ldots[\nu^2-(\mu+2k-2)^2]}{(2k)!}\,\frac{f^{(2k)}(0)}{x^{2k}} + \right.$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\nu^2-(\mu+1)^2]\ldots[\nu^2-(\mu+2k-1)^2]}{(2k+1)!}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{x^{2k+1}}\Bigg]. \quad (2.23)$$

В качестве частных случаев в этой формуле содержатся формулы Виллиса, а также результат А. Н. Тихонова. Но можно получить и более общее разложение. Рассмотрим интеграл

$$\Omega(x, \beta)=\int_0^{\infty} J_\nu(xt^\beta)\, t^{\mu-1} f(t)\, dt, \quad \beta \geqslant 1. \quad (2.24)$$

Имеем

$$J_\nu(xt^\beta)\, t^{\mu-1}=J_\nu(xt^\beta)(xt^\beta)^{\frac{\mu-1}{\beta}}\frac{1}{x^{\frac{\mu-1}{\beta}}},$$

$$\Phi(t)=J_\nu(t)\, t^{\frac{\mu-1}{\beta}}, \quad \Phi^*(t)=J_\nu(t)\, t^{\frac{\mu-1}{\beta}}\, t^{\frac{1}{\beta}-1},$$

Если

$$-\beta\nu<\mu<\frac{3}{2}\beta, \quad (2.25)$$

то $\int\limits_0^{\infty} J_\nu(t)\, t^{\frac{\mu-1}{\beta}}\, t^{\frac{1}{\beta}-1}\, dt$ сходится, и можем брать

$$\Phi_k(t)=\int_t^{\infty}\Phi_{k-1}(\tau)\,\tau^{\frac{1}{\beta}-1}\, d\tau, \quad \Phi_1\equiv\Phi^*,$$

причем функция $\Phi^*(t)$ удовлетворяет требованиям теоремы 6.

Разлагая $J_\nu(t^\beta)$ в степенной ряд и интегрируя почленно, что легко оправдать, получаем

$$\tilde{\Phi}(p)=\int_0^{\infty} J_\nu(t^\beta)\, t^{\mu-1} e^{-pt}\, dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{\nu+2k}{\beta}\right)}{p^{\mu+\frac{\nu+2k}{\beta}}}. \quad (2.26)$$

При $\beta>1$ ряд сходится для всех $p\neq 0$, при $\beta=1$ имеем прежнюю гипергеометрическую функцию.

Чтобы найти другое представление этой функции при малых значениях p, используем интеграл типа Барнса. Обозначим

$$G(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(\mu+\frac{\nu}{\beta}-\frac{2}{\beta}s\right)}{\Gamma(\nu+1-s)}\, x^{-s}\, ds, \quad (2.27)$$

где $0<\sigma<\min\left(\frac{\beta\mu+\nu}{2}, 1\right)$. Согласно общему признаку сходимости интегралов типа Барнса [8], интеграл (2.27) сходится, если $|\arg x|<\frac{\pi}{2}$, но у нас будет $x\geqslant 0$. Передвинув путь интегрирования влево, имеем

$$G(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-n-1-i\infty}^{\sigma-n-1+i\infty}\frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(\mu+\frac{\nu}{\beta}-\frac{2}{\beta}s\right)}{\Gamma(\nu+1-s)}\, x^{-s}\, ds+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{\nu+2k}{\beta}\right)}{\Gamma(\nu+1+k)}\, x^k.$$

Легко установить, что при $\beta \geqslant 1$ интеграл имеет предел 0, если $n \to \infty$, причем при $\beta = 1$ надо брать $|x| < 1$. Таким образом

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{\nu + 2k}{\beta}\right)}{\Gamma(\nu + k + 1)} x^k . \qquad (2.28)$$

Передвинув путь интегрирования вправо, получаем

$$G(x) = \frac{\beta}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{\beta\mu + \nu + \beta k}{2}\right)}{k! \Gamma\left(\nu + 1 - \frac{\beta\mu + \nu + \beta k}{2}\right)} x^{-\frac{\beta\mu+\nu+\beta k}{2}} +$$

$$+ \int\limits_{\sigma + \frac{1}{2}[\nu + \beta(\mu + n + 1)] + i\infty}^{\sigma + \frac{1}{2}[\nu + \beta(\mu + n + 1)] + i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\mu + \frac{\nu}{\beta} - \frac{2}{\beta} s\right)}{\Gamma(\nu + 1 - s)} x^{-s} ds . \qquad (2.29)$$

При помощи подстановки $s = \frac{1}{2}[\nu + \beta(\mu + n + 1)] + z$ легко убедиться в том, что интеграл имеет оценку $O(x^{-\frac{1}{2}[\nu + \beta(\mu + n + 1)]})$.
Поэтому, учитывая (2.26), (2.28) и (2.29), имеем

$$\widetilde{\Phi}(p) = 2^{\beta\mu - 1} \beta \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \Gamma\left(\frac{\beta\mu + \nu + \beta k}{2}\right)}{k! \Gamma\left(\nu + 1 - \frac{\beta\mu + \nu + \beta k}{2}\right)} (2^\beta p)^k + O(p^{n+1}). \qquad (2.30)$$

Если $\beta > 1$, то при $n \to \infty$ получается расходящиеся ряд, и соотношение (2.30) является асимтотическим.

Пусть $f(t)$ и ее все производные при $t = \tau^{\frac{1}{\beta}}$ удовлетворяют условиям одной из лемм Б′ или Б. Тогда при $\beta \geqslant 1$ имеет место

$$\int\limits_0^\infty J_\nu(xt^\beta)\, t^{\mu - 1} f(t)\, dt \sim \frac{2^{\beta\mu - 1}}{x^{\frac{\mu}{\beta}}} \beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\beta\mu + \nu + \beta k}{2}\right) 2^{\beta k}}{k! \Gamma\left(\nu + 1 - \frac{\beta\mu + \nu + \beta k}{2}\right)} \frac{f^{(k)}(0)}{x^{\frac{k}{\beta}}} . \qquad (2.31)$$

Этот результат уже нельзя получить методом Виллиса. При $\beta = 1$ получаем опять (2.23).

10. 11. 60.

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *G. Doetsch*. Handbuch der Laplace Transformation, II. Basel, 1955.
[2]. *J. Focke*. Asymptotische Entwicklungen mittels der Methode der stationären Phase. Berlin, 1957.
[3]. *L. Berg*. Asymptotische Darstellungen für verallgemeinerte Fourierintegrale. Math. Nachrichten, 1959, 20, 166—170.
[4]. *H. F. Willis*. A formula for expanding an integral as a series. Phil. Mag., 1948, 39, 455—460.
Результаты этой статьи изложены в книге *К. Дж. Трантер*. Интегральные преобразования в математической физике. Москва, 1956.

[5]. *А. Н. Тихонов*. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. ДАН, 1959, 125, 982—985.

[6]. *Г. М. Фихтенгольц*. Курс дифференциального и интегрального исчисления, II. Москва, 1948.

[7]. *Г. Н. Ватсон*. Теория бесселевых функций. Москва, 1949.

[8]. *A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. Tricomi*. Higher transcendental functions, I. New York, 1953.

PAR DAŽU INTEGRĀĻU ASIMPTOTISKĀM IZTEIKSMĒM PIE LIELĀM PARAMETRA VĒRTĪBĀM

E. Riekstiņš

(Kopsavilkums)

Darbā dota vispārīga teorija par integrāļu (0.1) asimptotiskiem attīstījumiem. Atkarīgā no kodola funkcijas $\Phi(t)$ īpašībām, jālieto dažādas attīstīšanas metodes, kā arī jāizvirza dažādas prasības funkcijai $\varphi(t)$. Pirmajā paragrafā apskatīts gadījums, kad funkcija $\Phi(t)$ strauji dilst. Noskaidrots, ka visi dažādie gadījumi ir reducējami uz 1. vai 2. teorēmu. Otrajā paragrāfā apskatīts gadījums, kad funkcijai $\Phi(t)$ ir oscilējošs raksturs. Šajā gadījumā izrādās izdevīgi izlietot $\Phi(t)$ Laplasa transformāciju. Iegūtos rezultātus izsaka 6. teorēma, kamēr 5. teorēma dod pietiekamus nosacījumus par funkciju $\Phi(t)$, lai metode būtu lietojama. Darba nobeigumā iegūts vispārīgs attīstījums integrālim, kas satur Beseļa funkciju, un kas vispārina līdz šim iegūtos rezultātus.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ${}_1F_2$

Т. Цирулис

Целью настоящей статьи является построение общего решения уравнения (2). В статье для удобства используются гипергеометрические функции типа ${}_1f_2$, от которых в случае необходимости всегда можно перейти к ${}_1F_2$.

Гипергеометрическая функция ${}_1F_2$ определяется формулой

$$ {}_1F_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{(\beta)_k (\gamma)_k k!}, \tag{1} $$

где

$$ (\nu)_k = \nu(\nu+1)\ldots(\nu+k-1) = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)},\quad (\nu)_0 = 1, $$

α, β, γ, z — комплексные переменные, при чем первые три называют параметрами.

Ряд (1) сходится для всех значений z и параметров α, β, γ, за исключением $\beta = -m$, $\gamma = -n$, $(m,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, которые являются для ${}_1F_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z)$ полюсами.

Если решение дифференциального уравнения

$$ z^2u''' + (\gamma + \beta + 1)zu'' + (\gamma\beta - z)u' - \alpha u = 0 \tag{2} $$

искать в виде ряда

$$ u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+\mu}, \tag{3} $$

то после подстановки в уравнение (2) и приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых степенях z, получаем три частных решения уравнения (2):

$$ u_1 = C_1\,{}_1F_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z); \tag{5 a} $$

$$ u_2 = C_2 z^{1-\beta}\,{}_1F_2(1+\alpha-\beta;\ 1+\gamma-\beta,\ 2-\beta;\ z); \tag{5 в} $$

$$ u_3 = C_3 z^{1-\gamma}\,{}_1F_2(1+\alpha-\gamma;\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma;\ z). \tag{5 c} $$

Если u_1, u_2, u_3 — линейно независимы, то общее решение для уравнения (2) имеет вид

$$ u = C_1\,{}_1F_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z) + C_2 z^{1-\beta}\,{}_1F_2(1+\alpha-\beta;\ 1+\gamma-\beta,\ 2-\beta;\ z) + \\ + C_3 z^{1-\gamma}\,{}_1F_2(1+\alpha-\gamma;\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma;\ z). \tag{6} $$

Очевидно формуля (6) не даст общего решения, если

$$
\begin{aligned}
&\text{I. } \beta = n, \ (\gamma = n), \ (n = 0, \pm 1, \dots); \\
&\text{II. } \beta - \gamma = n, \ \gamma \neq l, \ (n, l = 0, \pm 1, \dots); \\
&\text{III. } \beta = n, \ \gamma = m, \ (m, n = 0, \pm 1, \dots).
\end{aligned} \tag{7}
$$

В этих случаях либо хотя бы одно из u_1, u_2, u_3 не определено, либо между ними существует линейная зависимость.

Наша дальнейшая задача — построить общее решение во всех этих особых случаях. Для удобства построения общего решения введем функцию

$$
{}_1f_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}\, {}_1F_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k) z^k}{\Gamma(\beta+k)\Gamma(\gamma+k)\, k!}, \tag{8}
$$

которая также удовлетворяет уравнению (2) при

$$
\alpha,\ \beta,\ \gamma \neq -s, \ (s = 0, 1, 2 \dots).
$$

Определим

$$
\begin{aligned}
{}_1f_2(\alpha;\ -n,\ \gamma;\ z) &= \lim_{\beta \to -n} {}_1f_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z) = \\
&= z^{n+1}\, {}_1f_2(\alpha + n + 1;\ \gamma + n + 1,\ n + 2;\ z).
\end{aligned} \tag{9}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_1f_2(\alpha;\ \beta,\ -m;\ z) &= \lim_{\gamma \to -m} {}_1f_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z) = \\
&= z^{m+1}\, {}_1f_2(\alpha + m + 1;\ \beta + m + 1,\ m + 2;\ z).
\end{aligned} \tag{10}
$$

Легко проверить, что подстановка $u = z^{n+1} y$ уравнение (2) при $\beta = -n$ переводит в уравнение такого же типа с параметрами $\alpha + n + 1$, $n + 2$, $\gamma + n + 1$. Отсюда следует, что ${}_1f_2$ определена для всех β и γ и также удовлетворяет уравнению (2).

Однако ${}_1f_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z)$ не определена, если $\alpha = -n$, ибо

$$
{}_1f_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z) \to \pm\infty \quad \text{при } \alpha \to -n, \ (n = 0, 1, 2, \dots).
$$

В случае, когда 2 решения однородного линейного уравнения линейно зависимы при некотором значении параметра, метод получения нового решения дает следующая теорема:

1. Теорема. Если частные производные по параметру p от коэффициентов $f_i\ (x, p)$ однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка

$$
L(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} f_k(x, p)\, y^{(n-k)} = 0 \tag{11}
$$

непрерывны по совокупности аргументов в области $D = \{(x_1, x_2) \times (p_1, p_2)\}$, а функция $\Gamma(x, p)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $L[\Gamma(x, p)] \equiv 0$ в области D;

2) $\Gamma(x, p_0) = 0$ для всех $x \in (x_1, x_2)$ и некоторого фиксированного $p_0 \in (p_1, p_2)$;

3) $\dfrac{\partial}{\partial p} \dfrac{\partial^s \Gamma(x, p)}{\partial x^s} = \dfrac{\partial^s}{\partial x^s} \dfrac{\partial \Gamma(x, p)}{\partial p}$, $(s = 0, 1, \dots, n)$, — тогда $\dfrac{\partial}{\partial p} \Gamma(x, p)\big|_{p = p_0}$ удовлетворяет уравнению (11) при $p = p_0$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\frac{\partial}{\partial p}[L(y)] \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial p}[f_k(x,p)]\, y^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} f_k(x,p)\frac{\partial}{\partial p} y^{(n-k)}.$$

Если $y = \Gamma(x,p)$, то, имея в виду условия теоремы 1) и 3), получаем

$$L\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial f_k(x,p)}{\partial p} y^{(n-k)}. \qquad \text{(А)}$$

Легко убедиться в том, что

$$y^{(s)}\Big|_{p=p_0} = \frac{\partial^s \Gamma(x,p)}{\partial x^s}\Big|_{p=p_0} = 0, \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, n). \qquad \text{(Б)}$$

При $s = 0$ это прямо следует из условия 2).
Если $s = 1$, то

$$\frac{\partial \Gamma(x,p)}{\partial x}\Big|_{p=p_0} = \lim_{p\to p_0}\lim_{h\to 0} \frac{\Gamma(x+h,p)-\Gamma(x,p)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{p\to p_0} \frac{\Gamma(x+h,p)-\Gamma(x,p)}{h} = 0.$$

Изменение порядка предельного перехода законно, так как существуют простые пределы при $p \to p_0$ и $h \to 0$ и двойной предел. Существование двойного предела становится очевидным, если использовать формулу конечного приращения. Для других s формула (Б) доказывается методом индукции. Подставляя эти значения в формулу (А), получаем $L\left[\frac{\partial}{\partial p}\Gamma(x,p_0)\right] = 0$, что и требовалось доказать.

Далее рассмотрим отдельные случаи (7).

I. $\beta = n$, $(n = 0, \pm 1, \ldots)$. Если $\alpha \neq -m_1$ и $1+\alpha-\gamma = -m_2$, $(m_1, m_2 = 0, 1, \ldots)$, то при помощи формулы (9) легко проверить, что в этом случае $_1f_2(\alpha; \beta, \gamma; z) = z^{1-\beta}\, {}_1f_2(1+\alpha-\beta; 1+\gamma-\beta, 2-\beta; z)$, поэтому 2 частных решения в (6) совпадают.

Введем новую функцию

$$_1X_2^*(\alpha; \beta, \gamma; z) = \frac{z^{1-\beta}\, {}_1f_2(1+\alpha-\beta;\ 1+\gamma-\beta,\ 2-\beta;\ z) - {}_1f_2(\alpha; \beta, \gamma; z)}{\sin \pi\beta}, \qquad (12)$$

которая является решением уравнения (2) при $\beta \neq n$, $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, а при $\beta \to n$ дает неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Покажем, что

а) существует предел от $_1X_2^*(\alpha; \beta, \gamma; z)$ при $\beta \to n$;

б) этот предел удовлетворяет уравнению (2);

в) $_1X_2^*(\alpha; \beta, \gamma; z)$ и $_1f_2(\alpha; \beta, \gamma; z)$ линейно независимы.

Раскрывая неопределенность в формуле (12) по правилу Лопиталя, получаем

$$_1X_2^*(\alpha; n, \gamma; z) = \frac{(-1)^n}{\pi}\Bigg\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\, z^k}{\Gamma(n+k)\,\Gamma(\gamma+k)\, k!}[\Psi(\gamma+k) + \Psi(k+n) +$$

$$+ \Psi(k+1) - \Psi(\alpha+k)] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k (k-1)!\,\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\gamma-k)\,\Gamma(n-k)\, z^k} -$$

$$- \ln z\, {}_1f_2(\alpha; n, \gamma; z)\Bigg\}. \qquad (13)$$

Здесь и в дальнейшем функции $\frac{1}{\Gamma(\nu)}$, $\frac{\Psi(\nu)}{\Gamma(\nu)}$ для целых неположительных значений аргументов, а ${}_1f_2$ — для целых неположительных значений параметров нужно понимать в смысле предела.

Формула (13) показывает, что предел существует и что ${}_1X_2^*(\alpha; \beta, \gamma; z)$ и ${}_1f_2(\alpha; \beta, \gamma; z)$ линейно независимы, ибо обе эти функции обладают различными свойствами в окрестности точки $z = 0$.

Так как по правилу Лопиталя

$$ {}_1X_2^*(\alpha; n, \gamma; z) = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{\partial}{\partial\beta} \Big[z^{1-\beta} {}_1f_2(1+\alpha-\beta; 1+\gamma-\beta, 2-\beta; z) - {}_1f_2(\alpha; \beta, \gamma; z) \Big] \Big|_{\beta=n}, $$

функция в квадратных скобках, а так же и коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условиям теоремы 1 при $\beta = n$, то ${}_1X_2^*(\alpha; n, \gamma; z)$ — решение уравнения (2) при $\beta = n$, $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Рассмотрим теперь случаи $\alpha = -s$ при $\beta = \pm n$, $\gamma \neq \pm l$. В этом случае $\beta - \gamma \neq \pm n_1$, $1 + \alpha - \gamma \neq -s_1$, $(l, n, n_1, s, s_1 = 0, 1, 2, \ldots)$.

а) $\beta = -n$ при $n \geqslant s$.

Если брать решение уравнения (2) в виде

$$ u_4 = {}_1\bar{f}_2(\alpha; \beta, \gamma; z) = \frac{{}_1f_2(\alpha; \beta, \gamma; z)}{\Gamma(\alpha)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{\Gamma(\beta+k)\,\Gamma(\gamma+k)\,k!}, \tag{14} $$

то, как легко проверить, в этом случае ${}_1\bar{f}_2(-s; -n, \gamma; z) \equiv 0$. Методом дифференцирования по параметру согласно теореме 1, можно показать, что решением уравнения (2) будет функция

$$ u_5 = \frac{\partial}{\partial\beta} \Big[{}_1\bar{f}_2(-s; \beta, \gamma; z) \Big]_{\beta=-n} = (-1)^n \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k (-s)_k (n-k)!\, z^k}{\Gamma(\gamma+k)\, k!}, \tag{15} $$

которая является линейно независимой с функциями

$$ z^{1-\beta} {}_1f_2(1+\alpha-\beta; 1+\gamma-\beta, 2-\beta; z) \quad \text{и} $$

$$ z^{1-\gamma} {}_1f_2(1+\alpha-\gamma; 1+\beta-\gamma, 2-\gamma; z). $$

б) $\beta = n_1 + 1 - s$, $\alpha = -s$, $(n_1, s = 0, 1, 2, \ldots)$.

В этом случае очевидно $1 + \alpha - \beta = -n_1$, поэтому рассмотрим функции ${}_1\bar{f}_2(\alpha; \beta, \gamma; z)$ и $z^{1-\beta} {}_1\bar{f}_2(1+\alpha-\beta; 1+\gamma-\beta, 2-\beta; z)$. Согласно формулам (9) и (14)

$$ \lim_{\substack{\beta \to n_1+1-s \\ \alpha \to -s}} {}_1\bar{f}_2(\alpha; \beta, \gamma; z) = $$

$$ = \begin{cases} (-1)^{s-n_1} \dfrac{s!}{n_1!} z^{s-n_1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n_1} \frac{(-n_1)_k z^k}{\Gamma(\gamma-s-n_1+k)\,\Gamma(s-n_1+k+1)\,k!}, & \text{если } s \geqslant n_1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{s} \frac{(-s)_k z^k}{\Gamma(\gamma+k)\,\Gamma(n_1-s+k+1)\,k!}, & \text{если } n_1 \geqslant s \end{cases} \tag{16} $$

$$\lim_{\substack{\beta\to n_1+1-s\\ \alpha\to -s}} z^{1-\beta}\,{}_1\bar f_2(1+\alpha-\beta;\ 1+\gamma-\beta,\ 2-\beta;z)=$$

$$=\begin{cases} z^{s-n_1}\sum\limits_{k=0}^{n_1}\dfrac{(-n_1)_k z^k}{\Gamma(s-n_1+k+1)\Gamma(\gamma+s-n_1+k)k!}, & \text{если } s\geqslant n_1\\ (-1)^{n_1-s}\dfrac{n_1!}{s!}\sum\limits_{k=0}^{s}\dfrac{(-s)_k z^k}{\Gamma(n_1-s+k+1)\Gamma(\gamma+k)k!}, & \text{если } n_1\geqslant s. \end{cases} \tag{17}$$

Из формул (16) и (17) видно, что независимо от n_1 и s, согласно принципу дифференцирования по параметру, решением будет функция

$$u_6=\frac{\partial}{\partial\beta}\Big[z^{1-\beta}\,{}_1\bar f_2(1-s-\beta;\ 1+\gamma-\beta,\ 2-\beta;\ z)-$$
$$-(-1)^{s-n_1}\frac{n_1!}{s!}\,{}_1\bar f_2(-s;\beta,\gamma;z)\Big]\Big|_{\beta=n_1-s+1}. \tag{18}$$

Формула (18) в развернутом виде для $s\geqslant n_1$ имеет вид

$$u_6=-z^{s-n_1}\ln z\sum_{k=0}^{n_1}\frac{(-n_1)_k z^k}{\Gamma(s-n_1+k+1)\Gamma(\gamma+s-n_1+k)k!}+$$
$$+z^{s-n_1}\sum_{k=0}^{n_1}\frac{(-n_1)_k z^k}{\Gamma(s-n_1+k+1)\Gamma(\gamma+s-n_1+k)k!}\Big[\Psi(\gamma+s-n_1+k)+$$
$$+\Psi(1+s-n_1+k)+\Psi(k+1)+\Psi(n_1+1)-$$
$$-\Psi(n_1-k+1)\Big]+\frac{s!}{n_1!}\sum_{k=0}^{s-n_1-1}\frac{(-n_1)_k(s-n_1-1-k)!(-1)^k z^k}{\Gamma(\gamma+k)k!}+$$
$$+(-1)^{n_1+1}n_1!\,z^{s+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k k!}{\Gamma(1+\gamma+s+k)(k+s+1)!(k+n_1+1)!}. \tag{18a}$$

Если $n_1\geqslant s$, то в формуле (18a) нужно лишь менять местами n_1 и s_1. Это легко проверить непосредственно.

в) $\alpha=s_1+1$, но $1+\alpha-\beta=-n_1$. Так как $\beta=\pm n$, $\gamma\neq\pm l$, то в этом случае $1+\alpha-\gamma\neq-n_2$, $(s_1,\ n_1,\ n_2,\ n,\ l=0,1,2,\dots)$. Рассмотрим

$$z^{1-\beta}\,{}_1\bar f_2(1+\alpha-\beta;\ 1+\gamma-\beta,\ 2-\beta;z)=$$
$$=z^{-1-s_1-n_1}\,{}_1\bar f_2(-n_1;\ \gamma-s_1-n_1,\ -s_1-n_1;\ z)\equiv 0,$$

Так как первый и третий параметры целые неположительные, при чем третий по модулю не меньше первого.

Согласно принципу дифференцирования по параметру, решением будет функция

$$u_7=\frac{\partial}{\partial\beta}\Big[z^{1-\beta}\,{}_1\bar f_2(2+s_1-\beta;\ 1+\gamma-\beta,\ 2-\beta;\ z)\Big]\Big|_{\beta=2+s_1+n_1}. \tag{19}$$

г) $\alpha\neq\pm s$, $\beta=\pm n$, $1+\alpha-\gamma=-n_1$.

В этом случае решением будет

$$u_8=z^{1-\gamma}\,{}_1\bar f_2(1+\alpha-\gamma;\ 1+\beta-\gamma,\ 2-\gamma;\ z)=$$
$$=z^{-\alpha-n_1}\sum_{k=0}^{n_1}\frac{(-n_1)_k z^k}{\Gamma(\beta-n_1+k)\Gamma(1-\alpha-n_1+k)k!}, \tag{20}$$

которая является линейно независимой с функциями

$$ {}_1f_2(\alpha;\ \beta, \gamma;\ z) \text{ и } {}_1X_2^*(\alpha;\ \beta, \gamma;\ z). $$

Очевидно теперь рассмотрены все особые случаи, когда $\beta = \pm n$, $\gamma \neq \pm l$, $(n, l = 0, 1, 2, \ldots)$.

Если $\gamma = \pm n$ и $\beta \neq \pm l$, то, поменяв β и γ местами, прийдем к только что рассмотренному случаю.

$$ \text{II.}\quad \beta - \gamma = \pm n, \quad \gamma \neq \pm l, \quad (n, l = 0, 1, 2, \ldots). $$

В этом случае, если

$$ 1 + \alpha - \beta \neq -n_1 \text{ и } 1 + \alpha - \gamma \neq -n_2, \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2 \ldots), $$
$$ z^{1-\beta}\, {}_1f_2(1 + \alpha - \beta;\ 1 + \gamma - \beta,\ 2 - \beta;\ z) = $$
$$ = z^{1-\gamma}\, {}_1f_2(1 + \alpha - \gamma;\ 1 + \beta - \gamma,\ 2 - \gamma;\ z). $$

Введем по аналогии с ${}_1X_2^*$ новую функцию

$$ {}_1X_2(\alpha;\ \beta, \gamma;\ z) = $$
$$ = \frac{z^{1-\beta}\, {}_1f_2(1 + \alpha - \beta;\ 1 + \gamma - \beta,\ 2 - \beta;\ z) - z^{1-\gamma}\, {}_1f_2(1 + \alpha - \gamma;\ 1 + \beta - \gamma,\ 2 - \gamma;\ z)}{\sin \pi (\beta - \gamma)}, \tag{21} $$

где

$$ {}_1X_2(\alpha;\ \gamma + n, \gamma;\ z) = \lim_{\beta \to \gamma + n} {}_1X_2(\alpha;\ \beta, \gamma;\ z) = $$
$$ = \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{\partial}{\partial \beta} \Big[z^{1-\beta}\, {}_1f_2(1 + \alpha - \beta;\ 1 + \gamma - \beta,\ 2 - \beta;\ z) - $$
$$ - z^{1-\gamma}\, {}_1f_2(1 + \alpha - \gamma;\ 1 + \beta - \gamma,\ 2 - \gamma;\ z) \Big] \Big|_{\beta = \gamma + n} = $$
$$ = \frac{(-1)^n}{\pi} z^{1-\gamma} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \alpha - \gamma + k)\, z^k}{\Gamma(2 - \gamma + k)\,(n + k)!\, k!} \Big[\Psi(2 - \gamma + k) + $$
$$ + \Psi(n + k + 1) + \Psi(k + 1) - \Psi(1 + \alpha - \gamma + k) \Big] + $$
$$ + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (k-1)!\, \Gamma(1 + \alpha - \gamma - k)}{\Gamma(2 - \gamma - k)\,(n - k)!\, k!\, z^k} - $$
$$ - \ln z\, {}_1f_2(1 + \alpha - \gamma;\ n + 1,\ 2 - \gamma;\ z) \Bigg\}. \tag{21a} $$

Функция, ${}_1X_2$ по своей структуре сходна с ${}_1X_2^*$ и согласно теореме 1 также является решением уравнения (2) при $\beta = \gamma + n$.

а) $\alpha \neq -s$, $\beta - \gamma = \pm n$, $\gamma \neq \pm l$, $1 + \alpha - \beta \neq -n_1$, $1 + \alpha - \gamma \neq -n_2$

$$ (l, n, n_1, n_2, s = 0, 1, 2, \ldots). $$

В этом случае линейно независимыми решениями являются

$$ {}_1f_2(\alpha;\ \beta, \gamma;\ z), \quad z^{1-\beta}\, {}_1f_2(1 + \alpha - \beta;\ 1 + \gamma - \beta,\ 2 - \beta;\ z), \quad {}_1X_2(\alpha;\ \beta, \gamma;\ z) $$

б) $\alpha = -s$, $\beta - \gamma = \pm n$, $\gamma \neq \pm l$. В этом случае выполняются $1 + \alpha - \beta \neq -n_1$, и $1 + \alpha - \gamma \neq -n_2$, и линейно независимыми решениями являются:

$$ {}_1\bar{f}_2(\alpha;\ \beta,\ \gamma;\ z), \quad z^{1-\beta}\, {}_1f_2(1 + \alpha - \beta;\ 1 + \gamma - \beta,\ 2 - \beta;\ z), \quad {}_1X_2(\alpha;\ \beta, \gamma;\ z). $$

в) $\alpha \neq -s,\ \beta-\gamma=\pm n,\ \gamma\neq\pm l$, но $1+\alpha-\beta=-n_1,\ 1+\alpha-\gamma=$
$= n_2+1, \quad (l, n, n_1, n_2, s = 0, 1, 2, \ldots)$.

В этом случае

$$z^{1-\beta}\,{}_1\bar{f}_2(1+\alpha-\beta; 1+\gamma-\beta, 2-\beta; z)\equiv 0,$$

и одним из решений будет функция

$$u_9=\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[z^{-\alpha-n_1}\,{}_1\bar{f}_2(-n_1; \gamma-\alpha-n_1, 1-\alpha-n_1; z)\right]\Bigg|_{\gamma=\alpha-n_2}=$$

$$=(-1)^{n_1+n_2}z^{-\alpha-n_1}\sum_{k=0}^{n_1}\frac{(-1)^k(-n_1)_k(n_1+n_2-k)!\,z^k}{\Gamma(1+\alpha-n_1+k)\,k!},$$

которая является линейно независимой с ${}_1f_2(\alpha; \beta, \gamma; z)$ и
$z^{1-\gamma}{}_1f_2(1+\alpha-\gamma;\ 1+\beta-\gamma, 2-\gamma; z)$.

Случай, когда $1+\alpha-\beta=n_1+1$, но $1+\alpha-\gamma=-n_2$, сводится к предыдущему, если поменять β и γ местами.

г) $\alpha\neq-s,\ \beta-\gamma=\pm n,\ \gamma\neq\pm l$, но $1+\alpha-\beta=-n_1$ и $1+\alpha-\gamma=$
$=-n_2, \quad (l, n, n_1, n_2, s=0, 1, 2, \ldots)$.

Аналогично формуле (8) в этом случае решениями будут

$$u_{10}=\frac{\partial}{\partial\beta}\Big[z^{1-\beta}\,{}_1\bar{f}_2(1+\alpha-\beta; 2+\alpha+n_2-\beta, 2-\beta; z)-$$
$$-(-1)^{n_2-n_1}\frac{n_1!}{n_2!}z^{-\alpha-n_2}\,{}_1\bar{f}_2(-n_2; \beta-\alpha-n_2, 1-\alpha-n_2; z)\Big]\Bigg|_{\beta=1+\alpha+n_1}; \tag{23}$$

$$u_{11}=\frac{\partial}{\partial\gamma}\Big[z^{1-\gamma}\,{}_1\bar{f}_2(1+\alpha-\gamma; 2+\alpha+n_1-\gamma, 2-\gamma; z)-$$
$$-(-1)^{n_2-n_1}\frac{n_2!}{n_1!}z^{-\alpha-n_1}\,{}_1\bar{f}_2(-n_1; \gamma-\alpha-n_1, 1+\alpha-n_1; z)\Big]\Bigg|_{\gamma=1+\alpha+n_2}, \tag{24}$$

которые сходны с u_6.

III. $\beta=\pm n,\ \gamma=\pm m$. Если $\alpha\neq\pm s$, то, как легко проверить,

$${}_1f_2(\alpha; \beta, \gamma; z)=z^{1-\beta}\,{}_1f_2(1+\alpha-\beta; 1+\gamma-\beta, 2-\beta; z)=$$
$$=z^{1-\gamma}\,{}_1f_2(1+\alpha-\gamma; 1+\beta-\gamma, 2-\gamma; z).$$

В этом случае введем новую функцию

$${}_1Y_2(\alpha; \beta, \gamma; z)=\frac{\cos\pi\beta\,{}_1X_2^*(\alpha; \beta, \gamma; z)-\cos\pi\gamma\,{}_1X_2^*(\alpha; \gamma, \beta; z)}{\sin\pi(\beta-\gamma)}, \tag{25}$$

которая при $\beta=\pm n$ и $\gamma=\pm m$ дает неопределенность вида $\frac{0}{0}$. В специальных случаях могут быть $\cos\pi\beta=0$, $\cos\pi\gamma=0$.
Тогда

$${}_1Y_2\left(\alpha; l_1+\frac{1}{2}, \gamma; z\right)=(-1)^{l_1+1}\,{}_1X_2^*\left(\alpha; \gamma, l_1+\frac{1}{2}; z\right); \tag{26}$$

$${}_1Y_2\left(\alpha; \beta, l_1+\frac{1}{2}; z\right)=(-1)^{l_1+1}\,{}_1X_2^*\left(\alpha; \beta, l_1+\frac{1}{2}; z\right). \tag{26a}$$

Чтобы легче раскрыть в формуле (25) неопределенность, рассмотрим

$$ {}_1Y_2(\alpha;\gamma+n_1,\gamma;z)=\lim_{\beta\to\gamma+n_1}{}_1Y_2(\alpha;\beta,\gamma;z)= $$

$$ =\frac{(-1)^n}{\pi}\lim_{\beta\to\gamma+n_1}\Big\{-\frac{\pi}{\sin^2\pi\beta}\Big[z^{1-\beta}{}_1f_2(1+\alpha-\beta;1+\gamma-\beta,2-\beta;z)- $$

$$ -{}_1f_2(\alpha;\beta,\gamma;z)\Big]+\operatorname{ctg}\pi\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\Big[z^{1-\beta}{}_1f_2(1+\alpha-\beta;1+\gamma-\beta,2-\beta;z)- $$

$$ -{}_1f_2(\alpha;\beta,\gamma;z)\Big]-\operatorname{ctg}\pi\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}\Big[z^{1-\gamma}{}_1f_2(1+\alpha-\gamma;1+\beta-\gamma,2-\gamma;z)- $$

$$ -{}_1f_2(\alpha;\beta,\gamma;z)\Big]=\frac{\cos\pi\gamma\,{}_1X_2(\alpha;\gamma+n_1,\gamma;z)-{}_1X_2^*(\alpha;\gamma+n_1,\gamma;z)}{\sin\pi\gamma},\text{ где} \tag{27} $$

${}_1X_2$ в явной форме можно выразить из (21a), а ${}_1X_2^*$ — из (13). Если $\gamma\to\pm m$, а $n_1\pm m=\pm n$, то в формуле (27) получаем опять неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которую можно раскрыть по правилу Лопиталя. По теореме I, ${}_1Y_2$ удовлетворяет также уравнению (2).

Используя формулы (13), (21a) и (27), легко показать, что

$$ \lim_{\beta\to n}\lim_{\gamma\to m}{}_1Y_2(\alpha;\beta,\gamma;z)=\lim_{\gamma\to m}\lim_{\beta\to n}{}_1Y_2(\alpha;\beta,\gamma;z)= $$

$$ =\lim_{\gamma\to m}\lim_{\beta\to\gamma-m+n}{}_1Y_2(\alpha;\beta,\gamma;z), \tag{28} $$

т. е. порядок предельного перехода несуществен.

Теперь покажем, что функции

$$ {}_1f_2(\alpha;\beta,\gamma;z),\quad {}_1X_2(\alpha;\beta,\gamma;z)\quad\text{и}\quad {}_1Y_2(\alpha;\beta,\gamma;z) \tag{29} $$

при $\alpha\neq-s_1,\ 1+\alpha-\beta\neq-s_2,\ 1+\alpha-\gamma\neq-s_3,\ (s_1,s_2,s_3=0,1,2,\ldots)$

линейно независимы при любых значениях параметров.

Если параметры нецелочисленны, то из построения этих функций следует их линейная независимость, поэтому специально нужно лишь проверить

1) $\sin\pi\beta=0$, $(\sin\pi\gamma=0)$; 2) $\sin\pi(\beta-\gamma)=0$;

3) $\cos\pi\beta=0$, $(\cos\pi\gamma=0)$; 4) $\cos\pi\beta=0$, $\cos\pi\gamma=0$.

Случай 1) сводится к линейной независимости функций ${}_1f_2(\alpha;n,\gamma;z)$, ${}_1X_2^*(\alpha;n,\gamma;z)$ и ${}_1X_2^*(\alpha;\gamma,\beta;z)$, которая очевидна из формул (12) и (13). В случае 2), если β и γ целочисленны, то линейная независимость следует из того, что ${}_1Y_2(\alpha;n,m;z)$ содержит $\ln^2 z$, ${}_1X_2(\alpha;n,m;z)$ — $\ln z$, а ${}_1f_2(\alpha;n,m;z)$ не содержит вообще $\ln z$. Если $\beta-\gamma=n_1$, но $\gamma\neq l$. $(n_1,l=0,\pm1,\ldots)$, то линейная независимость следует из формулы (27), так как при данных значениях параметров ${}_1f_2(\alpha;\beta,\gamma;z)$, ${}_1X_2^*(\alpha;\beta,\gamma;z)$ и ${}_1X_2(\alpha;\beta,\gamma;z)$ линейно независимы.

Случаи 3) и 4) аналогично сводятся к линейной независимости уже рассмотренных функций.

Теперь осталось лишь рассмотреть те случаи, когда $\alpha=-s_1$, $1+\alpha-\beta=-s_2$, $1+\alpha-\gamma=-s_3$ при $\beta=\pm n$, $\gamma=\pm m$.

a) $\alpha=-s_1$, $1+\alpha-\beta=s_2+1$, $1+\alpha-\gamma=s_3+1$, $(s_1,s_2,s_3=0,1,2,\ldots)$. В этом случае очевидно $\beta=-n$ и $\gamma=-m$, где $m\geqslant s_1$ и $n\geqslant s_1$, поэтому ${}_1\bar f_2(-s_1;-n,-m;z)\equiv0$. Решение, линейно независимое с $z^{1-\beta}{}_1f_2(1+\alpha-\beta;1+\gamma-\beta,2-\beta;z)$ и ${}_1X_2(\alpha;\beta,\gamma;z)$, можно получить из формулы (15) умножением на $\Gamma(\gamma)$ и предельным переходом.[1]

$$u_{12}=\lim_{\gamma\to -m}\Gamma(\gamma)\sum_{k=0}^{s_1}\frac{(-1)^k(-s_1)_k(n-k)!\,z^k}{\Gamma(\gamma+k)\,k!}=$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{s_1}\frac{(-s_1)_k(m-k)!\,(n-k)!\,z^k}{k!}. \qquad (30)$$

б) $\alpha=s_1+1$, $1+\alpha-\beta=-s_2$, $1+\alpha-\gamma=s_3+1$, $(s_1, s_2, s_3=0, 1, 2, \ldots)$. В этом случае аналогично предыдущему необходимое решение может быть получено из формулы (22) (с соответствующей заменой обозначений) умножением на $\Gamma(1-s_2-\alpha)$ и предельным переходом, когда $\alpha\to s_1+1$.

$$u_{13}=\frac{1}{(s_1+s_2)!}z^{-(s_1+s_2+1)}\sum_{k=0}^{s_2}\frac{(-s_2)_k(s_2+s_3-k)!\,(s_2+s_1-k)!\,z^k}{k!}. \qquad (31)$$

Случай, когда $\alpha=s_1+1$, $1+\alpha-\beta=s_2+1$, $1+\alpha-\gamma=-s_3$, $(s_1, s_2, s_3=0, 1, 2, \ldots)$ сводится к случаю б), если поменять β и γ местами.

в) $\alpha=-s_1$, $1+\alpha-\beta=-s_2$, $1+\alpha-\gamma=s_3+1$, $(s_1, s_2, s_3=0, 1, 2, \ldots)$. В этом случае решение может быть получено из (18а) как предел при $\gamma\to-(s_1+s_3)$. Для $s_1\geqslant s_2$ имеем

$$u_{14}=(-1)^{s_3+s_2+1}z^{s_1-s_2}\sum_{k=0}^{s_2}\frac{(-s_2)_k(-1)^k(s_2+s_3-k)!\,z^k}{\Gamma(s_1-s_2+k+1)\,k!}+$$

$$+(-1)^{s_2+1}s_2!\,z^{s_1+s_3+1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k(s_3+k)!}{(s_1+s_3+1+k)!\,(s_2+s_3+1+k)!\,k!}. \qquad (32)$$

Если $s_2\geqslant s_1$, то опять нужно менять s_1 и s_2 местами.

г) $\alpha=s_1+1$, $1+\alpha-\beta=-s_2$, $1+\alpha-\gamma=-s_3$, $(s_1, s_2, s_3=0, 1, 2, \ldots)$.

В этом случае необходимое решение может быть найдено из (23) или (24) как предел при $\alpha\to s_1+1$.

$$u_{15}=\lim_{\alpha\to s_1+1}\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}\left[z^{1-\beta}\,{}_1\bar{f}_2(1+\alpha-\beta; 2+\alpha+s_3-\beta, 2-\beta; z)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(-1)^{s_2-s_3}\frac{s_2!}{s_3!}z^{-\alpha-s_3}\,{}_1\bar{f}_2(-s_3; \beta-\alpha-s_3, 1-\alpha-s_3; z)\right]\right|_{\beta=1+\alpha+s_2}\Bigg\}. \qquad (33)$$

Случай $\alpha=-s_1$, $1+\alpha-\beta=s_2+1$, $1+\alpha-\gamma=-s_3$ сводится к случаю в), если поменять β и γ местами.

д) $\alpha=-s_1$, $1+\alpha-\beta=-s_2$, $1+\alpha-\gamma=-s_3$, $(s_1, s_2, s_3=0, 1, 2, \ldots)$.

В этом случае, очевидно, решениями являются функции u_6, u_{10}, u_{11}, однако легко убедиться, что эти функции линейно зависимы. Применяя

[1] Здесь непосредственное применение метода дифференцирования по параметру не дает нужного результата, так как получаемое решение тождественно равно нулю.

опять метод дифференцирования по параметру, можно показать, что решением, линейно независящим от u_6, u_{10} и u_{11}, будет функция

$$u_{16}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{(-1)^{s_2}}{s_2!}z^{1-\beta}\,{}_1\bar{f}_2(1+\alpha-\beta;2+\alpha+s_3-\beta,2-\beta;z)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(-1)^{s_3}}{s_3!}z^{-\alpha-s_3}\,{}_1\bar{f}_2(-s_3;\beta-\alpha-s_3,1-\alpha-s_3;z)\right]\Bigg|_{\beta=1+\alpha+s_2}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{(-1)^{s_3}}{s_3!}z^{1-\gamma}\,{}_1\bar{f}_2(1+\alpha-\gamma;2+\alpha+s_2-\gamma,2-\gamma;z)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(-1)^{s_2}}{s_2!}z^{-\alpha-s_2}\,{}_1\bar{f}_2(-s_2;\gamma-\alpha-s_2,1-\alpha-s_2;z)\right]\Bigg|_{\gamma=1+\alpha+s_3}\right\}\Bigg|_{\alpha=-s_1},\quad(34)$$

так как выражение в фигурных скобках обращается в нуль для всех z при $\alpha=-s_1$.

Классифицируя введенные функции подобно цилиндрическим, назовем гипергеометрическими функциями I рода:

$$ {}_1f_2(\alpha;\beta,\gamma;z); \tag{35a}$$

$$ z^{1-\beta}\,{}_1f_2(1+\alpha-\beta;1+\gamma-\beta,2-\beta;z); \tag{35b}$$

$$ z^{1-\gamma}\,{}_1f_2(1+\alpha-\gamma;1+\beta-\gamma,2-\gamma;z). \tag{35c}$$

Гипергеометрическими функциями II рода —

$$ {}_1X_2^*(\alpha;\beta,\gamma;z); \tag{36a}$$

$$ {}_1X_2^*(\alpha;\gamma,\beta;z): \tag{36b}$$

$$ {}_1X_2(\alpha;\beta,\gamma;z). \tag{36c}$$

Гипергеометрической функцией III рода —

$$ {}_1Y_2(\alpha;\beta,\gamma;z). \tag{37}$$

Очевидно можно построить еще 2 гипергеометрические функции третьего рода, комбинируя соответствующим образом функции II рода. Эти функции, в отличие от уже построенной функции ${}_1Y_2$, будет несимметричными относительно параметров β и γ. Легко убедиться, что в каждый класс входит одна симметричная относительно β и γ функция и две несимметричные.

Следует отметить, что большинство из функций $u_4, u_5, \ldots, u_{16}$, которые являются решениями в некоторых особых случаях, может быть получено из гипергеометрических функций I, II и III рода соответствующим умножением на некоторую функцию, зависящую от параметров, и некоторым предельным переходом. Так, например, u_5 можно получить из ${}_1f_2(\alpha;\beta,\gamma;z)$ умножением на $\frac{(-1)^n n!\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}$, а затем предельным переходом:

$$u_5=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[{}_1\bar{f}_2(-s;\beta,\gamma;z)\right]_{\beta=-n}=\lim_{\beta\to-n}\lim_{\alpha\to-s}\left[\frac{(-1)^n n!\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\,{}_1\bar{f}_2(\alpha;\beta,\gamma;z)\right].\quad(38)$$

u_6 можно получить умножением ${}_1X_2^*(\alpha;\beta,\gamma;z)$ на $\frac{(-1)^{n-s+1}\pi}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}$, а затем выполнить предельный переход следующим образом:

$$u_6=(-1)^{s-n}\pi\lim_{\beta\to n-s+1}\lim_{\alpha\to-s}\to$$

$$\to\frac{\lim\limits_{\alpha\to-s}\lim\limits_{\beta\to n-s+1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-\beta)}\right\}{}_1\bar{f}_2(\alpha;\beta,\gamma;z)-z^{1-\beta}\,{}_1\bar{f}_2(1+\alpha-\beta;1+\gamma-\beta,2-\beta;z)}{\sin\pi\beta}.$$

$$(39)$$

Все случаи построения общего решения можно объединить в таблицу, считая $l, m, n, n_1, n_2, s, s_1, s_2, s_3 = 0, 1, 2, \ldots$.

№	Условия, налагаемые на параметры α, β, γ	№ формулы независимого решения		
		I реш.	II реш.	III реш.
1.	$\gamma \neq \pm m, \quad \beta \neq \pm n, \quad \gamma - \beta \neq \pm l$	5a	5в	5c
2.	$\alpha \neq -s, \quad 1+\alpha-\gamma \neq -n_1, \quad 1+\alpha-\beta \neq -n_2,$ $\beta = \pm n, \quad \gamma = \pm m$	35a, 8	35c	12 и 13
3.	$\alpha = -s, \quad \beta = -n, \quad n \geqslant s, \quad 1+\alpha-\gamma \neq -n_2$	15	35*b*	35c
4.	$\alpha = -s, \quad 1+\alpha-\beta = -n_1, \quad 1+\alpha-\gamma \neq -n_2$	14	18 и 18a	35c
5.	$\alpha = s+1, \quad 1+\alpha-\beta = -n_1, \quad 1+\alpha-\gamma \neq -n_2$	35a, 8	19	35c
6.	$\alpha \neq \pm s, \quad \beta = \pm n, \quad 1+\alpha-\gamma = -n_2$	35a, 8	20	35*b*
7.	$\alpha \neq -s, \quad 1+\alpha-\beta \neq -n_1, \quad 1+\alpha-\gamma \neq -n_2,$ $\beta-\gamma = \pm n, \quad \gamma \neq \pm l$	35a, 8	35*b*	21 и 21a
8.	$\alpha = -s, \quad \beta-\gamma = \pm n, \quad \gamma \neq \pm l$	14	35*b*	21 и 21a
9.	$\alpha \neq -s, \quad \beta-\gamma = \pm n, \quad \gamma \neq \pm l,$ $1+\alpha-\beta = -n_1, \quad 1+\alpha-\gamma = n_2+1$	22	35a, 8	35*c*
10.	$\alpha \neq -s, \quad \beta-\gamma = \pm n, \quad \gamma \neq \pm l,$ $1+\alpha-\beta = -n_1, \quad 1+\alpha-\gamma = -n_2$	35a, 8	20	23 или 24
11.	$\alpha \neq \pm s, \quad \beta = \pm n, \quad \gamma = \pm m$	35a, 8	21 и 21a	27
12.	$\alpha = -s_1, \quad 1+\alpha-\beta = s_2+1, \quad 1+\alpha-\gamma = s_3+1$	30	35*b*	21 и 21a
13.	$\alpha = s_1+1, \quad 1+\alpha-\beta = -s_2, \quad 1+\alpha-\gamma = s_3+1$	31	35a, 8	35c
14.	$\alpha = -s_1, \quad 1+\alpha-\beta = -s_2, \quad 1+\alpha-\gamma = s_3+1$	32	14	35c
15.	$\alpha = s_1+1, \quad 1+\alpha-\beta = -s_2, \quad 1+\alpha-\gamma = -s_3$	33	20	35a, 8
16.	$\alpha = -s_1, \quad 1+\alpha-\beta = -s_2, \quad 1+\alpha-\gamma = -s_3$	34	14	23 или 24

Кроме того, в таблице не указаны те случаи, которые можно привести к этим, если поменять β и γ местами.

В некоторых частных случаях с помощью гипергеометрических функций выражаются известные функции. Так функции I рода связаны с модифицированными функциями Бесселя и Ломмеля:

$$I_{\gamma-1}(2\sqrt{z}) = z^{\frac{\gamma-1}{2}}\, {}_1f_2(\beta; \beta, \gamma; z); \tag{39}$$

$$\bar{t}_{\gamma-2\beta,\, 1-\gamma}(2\sqrt{z}) = \frac{\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(1-\beta)\, z^{\frac{\gamma-2\beta+1}{2}}}{2^{2\beta-\gamma+1}}\, {}_1f_2(1; 1+\gamma-\beta, 2-\beta; z), \tag{40}$$

где $\bar{t}_{\mu,\nu}(x)$ — модифицированная функция Ломмеля:

$$\bar{t}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{4} x^{\mu+1} \sum_{k=0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{\left(\frac{\mu}{2} - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)_{k+1} \left(\frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)_{k+1}}. \tag{40a}$$

Гипергеометрическая функция II рода —

$$K_{\gamma-1}(2\sqrt{z}) = z^{\frac{\gamma-1}{2}} {}_1X_2^*(\beta; \gamma, \beta; z). \tag{41}$$

Остальные гипергеометрические функции II рода являются обобщениями функции Макдональда. Функции III рода уже непосредственно не выражаются через цилиндрические.

К этим формулам могут быть добавлены следующие:

$$I_\alpha^2(\sqrt{z}) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)} \left(\frac{z}{4}\right)^\alpha {}_1F_2\left(\alpha + \frac{1}{2}; 2\alpha + 1, \alpha + 1; z\right); \tag{42}$$

$$I_\alpha(\sqrt{z})\, I_{-\alpha}(\sqrt{z}) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 1 + \alpha, 1 - \alpha; z\right). \tag{43}$$

Некоторые интегралы, содержащие бесселевы функции, также могут быть выражены с помощью ${}_1F_2$.

$$\int z^\varkappa I_\nu(z)\, dz = \frac{z^{\varkappa+\nu+1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)(\nu+\varkappa+1)} {}_1F_2\left(\frac{\varkappa+\nu+1}{2}; \frac{\varkappa+\nu+3}{2}, \nu+1; \frac{z^2}{4}\right) + C. \tag{44}$$

Если $\varkappa + \nu > -1$, то из (40) следует:

$$\int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} dz_2 \ldots \int_0^{z_{n-1}} z_n^\varkappa I_\nu(z_n)\, dz_n =$$

$$= \frac{z^{\varkappa+\nu+n}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)(\nu+\varkappa+1)_n} {}_1F_2\left(\frac{\varkappa+\nu+1}{2}; \frac{\varkappa+\nu+2n+1}{2}, \nu+1; \frac{z^2}{4}\right); \tag{44a}$$

$$\int z^{2\varkappa+1} I_\varkappa(z)\, I_{-\varkappa}(z)\, dz =$$

$$= \frac{\sin \pi\varkappa}{2\pi\varkappa(\varkappa+1)} z^{2(\varkappa+1)} {}_1F_2\left(\frac{1}{2}; 2+\varkappa, 1-\varkappa; z^2\right) + C; \tag{45}$$

$$\int \frac{1}{z^2} I_\varkappa(z)\, I_{-\varkappa}(z)\, dz = -\frac{\sin \pi\varkappa}{\pi\varkappa} \cdot \frac{1}{z} {}_1F_2\left(-\frac{1}{2}; 1+\varkappa, 1-\varkappa; z^2\right) + C; \tag{46}$$

$$\int z I_\varkappa^2(z)\, dz = \frac{z^{2(\varkappa+1)}}{2^{2\varkappa+1}(\varkappa+1)\Gamma^2(\varkappa+1)} {}_1F_2\left(\varkappa + \frac{1}{2}; 2\varkappa+1, \varkappa+1; z^2\right) + C; \tag{47}$$

$$\int z^{2\varkappa} I^2_{\varkappa-\frac{1}{2}}(z)\, dz = \frac{z^{4\varkappa}}{2^{2\varkappa+1}\varkappa\Gamma^2\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)} {}_1F_2\left(\varkappa; \varkappa+\frac{1}{2}, 2\varkappa+1; z^2\right) + C; \tag{48}$$

$$\int \frac{1}{z^2} I_\varkappa^2(z)\, dz = \frac{z^{2\varkappa-1}}{2^{2\varkappa+1}\left(\varkappa-\frac{1}{2}\right)\Gamma^2\left(\varkappa+\frac{1}{2}\right)} {}_1F_2\left(\varkappa - \frac{1}{2}; 2\varkappa+1, \varkappa+1; z^2\right) + C. \tag{49}$$

Если положить $z = -x$ в формулах (39—43), а $z = ix$ в формулах (44—49), то модифицированные функции Бесселя перейдут в функций Бесселя. Все формулы полностью сохранятся, только аргумент гипергеометрической функции будет соответственно $-x$ или $-x^2$. Выбирая соответствующим образом параметры $\varkappa$ и ν, можно показать, что тригонометрические функции, гиперболические функции, а также интегралы от произведений этих функций с любой степенью z выражаются с помощью гипергеометрических функций $_1F_2$.

Через $_1F_2$ могут быть также выражены остатки рядов для бесселевых функций:

$$I_\nu(x,n)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)\,k!}=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)\,n!}\,{}_1F_2\left(1;\nu+n+1,n+1;\frac{x^2}{4}\right); \qquad (50)$$

$$J_\nu(x,n)=\sum^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)\,k!}=$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}\frac{1}{\Gamma(\nu+n+1)\,n!}\,{}_1F_2\left(1;\nu+n+1,n+1;-\frac{x^2}{4}\right). \qquad (51)$$

Кафедра общей математики

5. 12. 60.

HIPERĢEOMETRISKĀS FUNKCIJAS $_1F_2$ DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMA VISPĀRĪGAIS ATRISINĀJUMS

T. Cīrulis

(Kopsavilkums)

Darbā pierādīta teorēma par lineāra diferenciālvienādojuma partikulārā atrisinājuma atrašanu ar atvasināšanu pēc parametra. Balstoties uz šo teorēmu, ir atrasts $_1F_2$ diferenciālvienādojuma (2) vispārīgais atrisinājums visos speciālos gadījumos. Tiek ievestas I, II un III veida hiperģeometriskās funkcijas, analogi cilindriskām funkcijām. Nobeigumā tiek dota tabula, kurā norādītas kādas funkcijas katrā konkrētā gadījumā veido vispārīgo atrisinājumu, kā arī dažas formulas, kas saista jau pazīstamas funkcijas ar minētām hiperģeometriskām funkcijām.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

У. Гринфельд

В работе [1] предложен новый способ численного интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с начальным условием

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Используя представление решения в точке $x_0 + h$ в виде

$$y(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\,dx, \tag{2}$$

авторы работы [1] предлагают заменить интеграл квадратурной формулой, а значения y в промежуточных точках между x_0 и $x_0 + h$ вычислять каким нибудь приближенным методом, например, методом Рунге-Кутта или методом касательных. В статье [1] получено несколько конкретных формул, которые показывают, что погрешность значения y в точке $x_0 + h$ при использовании этого метода, меньше погрешности, получаемой при вычислении этого значения тем же методом, которым вычисляется промежуточные значения y.

Оказывается, что можно легко построить общую схему этого метода и получить оценку для погрешности в точках $x_0 + h$, $x_0 + 2h, \ldots$. При этом предположим, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет всем условиям, которые обеспечивают нужные нам оценки, в частности, предположим, что в рассматриваемой области $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant M$.

Пусть для приближенного вычисления интеграла $\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\,dx$ построена квадратурная формула с погрешностью порядка $O(h^r)$:

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i, y(x_i)) + O(h^r), \tag{3}$$

где c_i числовые коэффициенты, а x_i абсциссы квадратурной формулы, которые можно представить в виде $x_i = x_0 + \mu_i h$, $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1$, $= 1, 2, \ldots, n$. Предположим также, что имеется метод приближенного решения задачи (1), который в одном шаге $\bar{h}$ дает погрешность порядка $O(\bar{h}^{r-1})$. С помощью этого метода вычислим приближенные значения y в точках $x_i = x_0 + \mu_i h$. Вычисления будем проводить следующим образом: по начальным данным $y(x_0) = y_0$ вычислим приближенное значение y в точке x_1, затем, снова используя начальные данные $y(x_0) = y_0$, вычислим приближенное значение y в точке x_2 и т. д. Другими словами, при вычислении приближенного значения y в точке x_i, мы будем исходить не из значения y в точке x_{i-1}, а из начальных данных. При такой схеме, вычисления всегда будут производится с шагом, который меньше h.

Обозначая приближенные значения y, полученные выше описанным методом, через $\tilde{y}$, можно писать

$$y(x_i) = \tilde{y}(x_i) + \delta_i, \tag{4}$$

где δ_i погрешность, которая в силу наших предположений для любого i имеет порядок $O(h^{r-1})$.

Используем теперь эти приближенные значения y для получения решения в точке x_0+h. Для этого подставим значения $y(x_i)$ из формулы (4) в (3) и (2), тогда будем иметь

$$y(x_0+h) = y_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i, \tilde{y}(x_i) + \delta_i) + O(h^r) =$$

$$= y_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i, \tilde{y}(x_i)) + \varepsilon, \tag{5}$$

где ε суммарная погрешность. Очевидно ε состоит из погрешности порядка $O(h^r)$ самой квадратурной формулы и из погрешности ε_1, которая получается от замены в выражении $f(x, y)$ точных значений $y(x_i)$ приближенными. Поэтому, чтобы оценить величину суммарной погрешности ε, мы должны сначала найти оценку для ε_1.

Используем формулу конечных приращений, тогда будем иметь

$$\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i [f(x_i, \tilde{y}(x_i) + \delta_i) - f(x_i, \tilde{y}(x_i))] = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_i k_i,$$

где k_i равно значению производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(x_i, y(x_i) + \Theta\delta_i)$, $0 < \Theta < 1$. Очевидно, произведения $\delta_i k_i$ имеют при всех $i = 1, 2, \ldots, n$ порядок $O(h^{r-1})$.

Обозначим через $\delta(x)$ непрерывную функцию, которая определена на отрезке $[x_0, x_0+h]$ и обладает свойствами:

1) $\delta(x_i) = \delta_i k_i$, в частности $\delta(x_0) = \delta_0 k_0 = 0$,

2) $|\delta(x)| \leqslant K < K' h^{r-1}$, где K наибольшее из чисел $|\delta_i k_i|$, $= 1, 2, \ldots, n$.

Тогда

$$\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_i k_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta(x_i) = \int_{x_0}^{x_0+h} \delta(x)\,dx + O(h^r).$$

Но так как $\int_{x_0}^{x_0+h} \delta(x)\,dx$ имеет, очевидно, порядок малости $O(h$, то ε_1 имеет порядок $O(h^r)$. Следовательно, ε также имеет порядок $O(h^r)$ т. е., суммарная погрешность имеет порядок малости на единицу выше чем погрешность метода приближенного решения задачи (1).

Используя только что полученное приближенное значение решения y в точке x_0+h (формула (5)), аналогичным методом можно вычислить приближенное значение решения в точке x_0+2h, затем в точке x_0+3h, и т. д. Оценка погрешности в этих точках уже зависит от выбранного приближенного метода решения задачи (1). Однако, оказывается, что в случае, когда промежуточные значения y вычисляются методом Рунге-Кутта, погрешность во всех точках x_0+2h, x_0+3h, ... имеет один и тот же порядок $O(h^r)$. Чтобы это доказать, предположим, что приближенное значение y в точке x_0+h уже получено по формуле (5), обозначим это значение через $\tilde{y}(x_0+h)$, тогда

$$y(x_0+h)=\tilde{y}(x_0+h)+O(h^r).$$

Используем это значение для вычисления приближенных значений y в точках $x_0+h+\mu_i h$. Так как эти значения вычисляются методом Рунге-Кутта, то имеет место следующая формула роста ошибки η при одном шаге [2]

$$\eta=\eta_0 e^{\bar{h}\bar{M}},$$

где $\bar{h}$ шаг, η_0 погрешность в первом шаге, а величина $\bar{M}$ не превосходит по абсолютной величине M. В нашем случае η_0 очевидно имеет порядок $O(h^r)$, а шаг $\bar{h}$ меньше h, следовательно

$$y(x_0+h+\mu_i h)=\tilde{y}(x_0+h+\mu_i h)+O(h^{r-1}).$$

Подставляя эти значения в формулу (5) вместо значений $y(x_i)$ и заменяя в этой формуле y_0 значением $y(x_0+h)$, получим приближенное значение y в точке x_0+2h, причем, суммарная погрешность снова будет иметь порядок $O(h^r)$. Совершенно аналогично получаем, что в точках x_0+3h, x_0+4h, ... погрешность тоже имеет порядок $O(h^r)$.

Кафедра общей математики

15. 11. 60.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *L. Stoller, D. Morison.* A method for the numerical integration of ordinary differential equations. Math. Tables and other comput., 1958, 12, Nr. 64, 269—272.
[2]. *F. Ceschino.* Critère d'utilisation du procédé de Runge-Kutta. C. r. Acad. sci., 1954, 238, Nr. 9, 986—988.

PIEZĪME PAR KĀDU PARASTO DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU SKAITLISKAS ATRISINĀŠANAS METODI

U. Grinfelds

(Kopsavilkums)

Darbā apskatīta problēmas (1) tuvinātas atrisināšanas metode, kas dažiem atsevišķiem gadījumiem izstrādāta rakstā [1]. Aplūkots jautājums par šīs metodes kļūdu un pierādīts, ka, salīdzinot ar parastajām metodēm piemēram, (Runges-Kutta metodi vai pieskaru metodi), jaunā metode dod precizākus rezultātus.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41. ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

О КВАЗИГЛАДКИХ ФУНКЦИЯХ

И. П. Карклиня

В работах А. Зигмунда [1] и А. Ф. Тимана [2] рассмотрены функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющие неравенству

$$\left| f(x_1) - 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_2) \right| \leqslant M|x_1 - x_2| \tag{1}$$

для любых x_1, $x_2 \in [a, b]$. А. Ф. Тиман назвал их квазигладкими. Указанный класс функций можно расширить, заменяя в неравенстве (1) вторую разность функции $f(x)$ n-ой разностью.

Определение 1. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, называется квазигладкой n-ого порядка с показателем α, если существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех $x \in (a, b)$ и $h > 0$, удовлетворяющих условиям $x - nh$, $x + nh \in [a, b]$, выполняется неравенство

$$|\Delta_{2h}^n(f, x)| \leqslant Mh^\alpha, \tag{2}$$

где

$$\Delta_{2h}^n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f[x + (n - 2k)h].$$

Обозначим через $\Lambda_\alpha^{(n)}[a, b]M$ (или $\Lambda_\alpha^{(n)}[a, b]$) класс квазигладких функций n-ого порядка с показателем α на отрезке $[a, b]$. Близкий класс функций рассмотрен в дипломной работе В. Г. Горебеца [3]. В частности, $\Lambda_\alpha^{(1)}[a, b]$ совпадает с классом функций, удовлетворяющих условию Липшица с показателем α, а $\Lambda_\alpha^{(2)}[a, b]$, где $\alpha \in [0, 1]$ — с классом функций, рассмотренных в [1] и [2].

Из $f(x) \in \Lambda_\alpha^{(1)}[a, b]$ при $\alpha > 1$ следует, что $f(x)$ есть постоянная на отрезке $[a, b]$. Если $f(x)$ содержится в $\Lambda_\alpha^{(2)}[a, b]$, то, используя теорему Шварца [4], получаем, что функция $f(x)$ линейна на отрезке $[a, b]$ при $\alpha > 2$. Исходя из этих частных случаев, естественно было бы ожидать, что $f(x)$ есть многочлен степени не выше $n - 1$, если $f(x) \in \Lambda_\alpha^{(n)}[a, b]$ при $\alpha > n$, однако, как показывает простой пример, непосредственное обобщение метода доказательства в этом случае невозможно. При $n = 2$ мы существенно использовали теорему Шварца, но при $n > 2$ без дополнительных условий на функцию $f(x)$ теорема Шварца не имеет место. Действительно, для функции $f(x) \equiv |x|$ на $(-a, a)$ обобщенная производная третьего порядка $D^3 f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta_{2h}^3(f, x)}{8h^3}$ равна нулю, однако $|x|$ на $[-a, a]$ не является многочленом. Ц. Кассиматис дал обобщение теоремы Шварца [5]. Для формулировки этого предложения рассмотрим.

Определение 2. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принадлежит классу $K_n[a, b]$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют числа $h', h'' > 0$ такие, что

$$\inf_{a<x<b} \underline{D}^n f(x) - \varepsilon \leqslant (2h')^{-n} \Delta^n_{2h'}(f, Q_{h'}) \leqslant \sup_{a<x<b} \overline{D}^n f(x) + \varepsilon,$$

$$\inf_{a<x<b} \underline{D}^n f(x) - \varepsilon \leqslant (2h'')^{-n} \Delta^n_{2h''}(f, R_{h''}) \leqslant \sup_{a<x<b} \overline{D}^n f(x) + \varepsilon$$

для всех $x_1, \ldots, x_{n+1}, a < x_1 < \ldots < x_{n+1} < b$.
Здесь

$$\underline{D}^n f(x) = \varliminf_{h\to 0} \frac{\Delta^n_{2h}(f, x)}{(2h)^n}, \quad \overline{D}^n f(x) = \varlimsup_{h\to 0} \frac{\Delta^n_{2h}(f, x)}{(2h)^n},$$

$$g(x) = f(x) + \prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(x_k)}{(x_k - x)\prod\limits_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n+1}(x_k - x_l)},$$

$Q_{h'}$ — значение x, при котором $\Delta_{2h'}(g, x)$ достигает наибольшего значения, $R_{h''}$ — значение x, при котором $\Delta^{n-2}_{2h''}(g, x)$ достигает наименьшего значения.

Тогда из [5] следует

Теорема 1. Если функция $f(x) \in K_n[a, b]$ и обобщенная производная n-ого порядка $D^n f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta^n_{2h}(f, x)}{(2h)^n}$ равна нулю для всех $x \in (a, b)$, то $f(x)$ на этом отрезке есть многочлен степени не выше $n - 1$.

Используя полученные результаты для случаев $n = 1, 2$ и теорему 1, получаем

Теорема 2. Если $f(x) \in \Lambda^{(n)}_\alpha[a, b]$ и при $n > 2$ $f(x) \in K_n[a, b]$, то при $\alpha > n$ $f(x)$ является многочленом степени не выше $n - 1$.

Вопрос о том, нельзя ли результат теоремы 2 получить без дополнительного условия $f(x) \in K_n[a, b]$, остается открытым. В дальнейшем будем рассматривать $0 < \alpha \leqslant n$.

Непосредственно из определения класса квазигладких функции следует

Теорема 3. Если $\alpha < \beta$, то $\Lambda^{(n)}_\beta[a, b] < \Lambda^{(n)}_\alpha[a, b]$.

Теорема 4. Если $f(x) \in \Lambda^{(n)}_\alpha[a, b]$, то $f(x) \in \Lambda^{n+1}_\alpha[a, b]$. Как показывает пример $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a^k \cos(b^k x)$ с $0 < a < 1$, $b > 1$, $ab = 1$ [6], обратная георема не имеет место.

Теорема 5. Если модуль гладкости n-ого порядка $\omega_n(f, h)$ функции $f(x)$ определить

$$\omega_n(f, h) = \sup_{x\in(a,b),\ x\pm nh\in[a,b]\ h'<h} |\Delta^n_{2h'}(f, x)|,$$

то для непрерывной функции требования

$$\omega_n(f, h) \leqslant Mh^\alpha \quad \text{и} \quad f(x) \in \Lambda^{(n)}_\alpha[a, b]\, M \text{ равносильны.}$$

Заметим, что если неравенство $\omega_n(f, h) \leqslant Mh^\alpha$ выполняется для всех достаточно малых h, то $f(x) \in \Lambda^{(n)}_\alpha[a, b]\, M$, хотя, может быть, и с другим коэффициентом M.

Теорема 5 дает возможность для исследования свойств квазигладких функций использовать следующее предложение А. Ф. Тимана [7].

Теорема 6. Из $\omega_n(f, h) = O(h^\alpha)$ при $h \to 0$, $0 < \alpha \leqslant n$ следует, что при $h \to 0$, $k < n$

$$\omega_k(f, h) = \begin{cases} O(h^k) & \text{, если } \alpha > k, \\ O(h^k |\ln h|), & \text{если } \alpha = k, \\ O(h^\alpha) & \text{, если } \alpha < k. \end{cases}$$

Тогда из теорем 4, 5, 6 вытекает

Теорема 7. 1) Если $f(x) \in \Lambda_\alpha^{(n)}[a, b]$ при $1 < \alpha \leqslant n$, то $f(x) \in Lip\ 1$ на отрезке $[a, b]$

2) Требования $f(x) \in \Lambda_\alpha^{(n)}[a, b]$ при $\alpha < 1$ и $f(x) \in Lip\ \alpha$ на отрезке $[a, b]$ равносильны.

3) Из $f(x) \in \Lambda_1^{(n)}[a, b]$ следует, что

$$\omega_1(f, h) = O(h|\ln h|) \text{ при } h \to 0.$$

Значит, класс $\Lambda_\alpha^{(n)}[a, b]$ при $\alpha \neq 1$ образуют хорошо изученные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ условию Липшица. Расширение класса функций, удовлетворяющих условию Липшица, получается только в случае $\alpha = 1$.

Соответствующий класс функций можно рассматривать и для функций нескольких переменных.

Определение 3. Функция $f(x, y)$, непрерывная в прямоугольнике $D[a, b; c, d]$ называется квазигладкой n-ого порядка с показателем $\alpha > 0$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что для всех $(x, y) \in D$ и $h_1, h_2 > 0$, удовлетворяющих условиями $(x + nh_1,\ y + nh_2)$, $(x - nh_1,\ y - nh_2) \in D$, выполняется неравенство

$$|\Delta^n_{2h_1, 2h_2}(f, x, y)| \leqslant M(h_1^\alpha + h_2^\alpha), \tag{3}$$

где

$$\Delta^n_{2h_1, 2h_2}(f, x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+k} C_n^k C_n^l f[x + (n-2k)h_1,\ y + (n-2l)h_2].$$

Класс таких функций обозначим через $\Lambda_\alpha^{(n)}[a, b;\ c, d]$. Этот класс можно расширить, рассматривая функции, заданные в ограниченной односвязной области. Так же, как в случае одной переменной, из определения 3 следуют теоремы, аналогичные теоремам 3, 4, 5.

Можно исследовать связь между квазигладкостью функции $f(x, y)$ в смысле определения 3 и квазигладкостью по каждому аргументу, фиксируя значение другого аргумента. Для этого необходимо потребовать определенного вида равномерности относительно фиксированного аргумента. Назовем функцию $f(x, y)$ квазигладкой n-ого порядка с показателем α относительно аргумента x, если, независимо от $y \in [c, d]$, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f[x + (n-2k)h_1, y] \right| \leqslant M h_1^\alpha$$

для всех x, h_1 удовлетворяющих условиями x, $x \pm nh_1 \in [a, b]$. Для таких функций, как легко видеть, имеет место следующая теорема.

Теорема 8. Если функция $f(x, y)$, непрерывная в прямоугольнике $[a, b; c, d]$, является квазигладкой n-ого порядка с показателем α относительно одного аргумента на отрезке $[a, b]$ или $[c, d]$, то $f(x, y) \in \Lambda_\alpha^n [a, b; c, d]$.

Как показывает простой пример, обратная теорема не имеет места. Действительно, если рассматривать $f(x, y) = \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}$ в прямоугольнике $[-a, a; -b, b]$, то $f(x, y) \in \Lambda_1^{(2)} [-a, a; -b, b]$, но $f(x, y)$ не является квазигладкой второго порядка с показателем 1 на отрезке $[a, b]$ или $[c, d]$ при фиксированном y или x.

15. 11. 60.

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *A. Zygmund.* Smooth functions. Duke Math. Journal, 1945, 12 47—76.
[2]. *А. Ф. Тиман.* О квазигладких функциях. ИАН СССР, сер. математ., 1951, 15, № 3, стр. 243—254.
[3]. *В. Г. Горобец.* Квазигладкие функции. Дипломная работа, Латвийский Гос. Ун., 1959 г.
[4]. *Г. М. Фихтенгольц.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Физматгиз, М. Л., 1960, том III, стр. 613—616.
[5]. *C. Kassimatis.* Functions which have generalized Rieman derivatives. Canad. J. Math., 1958, 10, Nr. 3, 413—420.
[6]. *Н. И. Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации. ОГИЗ, 1947, стр. 180—183.
[7]. *А. Ф. Тиман.* Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, М., 1960, стр. 119.

PAR KVAZIGLUDĀM FUNKCIJĀM

I. P. Kārkliņa

(Kopsavilkums)

Darbā apskatīta tādu segmentā $[a, b]$ nepārtrauktu funkciju klase, kurām fiksētam n visiem $x \in (a, b)$ un visiem $h > 0$ $(x \pm nh \in [a, b])$, ir spēkā nevienādība

$$\left| \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f[x + (n - 2k)h] \right| \leqslant M h^\alpha, \ M, \alpha > 0.$$

Noskaidrots, ka ja $\alpha > n$ un ir apmierināti daži papildus nosacījumi, šīs klases funkcijas ir polinomi, ja $1 < \alpha \leqslant n$ šī funkciju klase sakrīt ar klasi $Lip\ 1$, ja $0 < \alpha < 1$ — ar klasi $Lip\ \alpha$. Norādīts, kā līdzīgu funkciju klasi varētu apskatīt vairāku mainīgo funkcijām.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

ОДНА ТЕОРЕМА В ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛОВ, СУММИРУЕМЫХ МЕТОДОМ ЧЕЗАРО

И. В. Карклиньш, Р. А. Кац

В этой статье рассмотрим один класс функций вещественной переменной, интеграл от которых суммируем методом Чезаро. Переходим к определениям (см. [2]).

Пусть функция $f(t)$ задана для $t \in [0, +\infty]$ и интеграл Лебега $\int\limits_0^x f(t)\,dt$ конечен для любого $x > 0$. Тогда интеграл $\int\limits_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\alpha f(t)\,dt$ конечен для любого $x > 0$ и любого $\alpha \geqslant 0$, следовательно, он определяет функцию двух переменных

$$I(x, \alpha) \equiv \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\alpha f(t)\,dt, \quad x \in (0, +\infty), \quad \alpha \in [0, +\infty).$$

Если при фиксированном $\alpha \geqslant 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} I(x, \alpha)$, то говорят, что интеграл $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt$ суммируем методом Чезаро с показателем α, и этот предел обозначают символом $(C, \alpha) - \int\limits_0^\infty f(t)\,dt$.

В частности, $(C, 0) - \int\limits_0^\infty f(t)\,dt = \int\limits_0^\infty f(t)\,dt$, где интеграл Лебега $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt$ конечен.

Множество всех функций $f(t)$, для которых существует $(C, \alpha) - \int\limits_0^\infty f(t)\,dt$, обозначим через (C, α).

Как известно (см. [2]), имеет место следующая фундаментальная теорема:

Если $f \in (C, \alpha_1)$, то $f \in (C, \alpha_2)$ для любого показателя $\alpha_2 > \alpha_1$ и $(C, \alpha_1) - \int\limits_0^\infty f(t)\,dt = (C, \alpha_2) - \int\limits_0^\infty f(t)\,dt$.

Обратное, вообще, неверно, однако из теоремы Харди ([3], стр. 173) получаем следующее предложение.

Если функция $f(t)$ для всех достаточно больших t не меняет знака, т. е., $f(t) \geqslant 0$ (соотв. $f(t) \leqslant 0$) для $t \in [a, +\infty)$, где $a \geqslant 0$ и $f \in (C, 1)$, то $f \in (C, 0)$.

Этот результат указывает на направление в поисках класса функций, которые не содержатся в множестве $(C, 0)$, но принадлежат множеству $(C, 1)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если функция $f(t)$ периодическая с периодом T и $\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0$ (интеграл в смысле Лебега), то $f \in (C, \alpha)$ для любого $\alpha > 0$ и $(C, \alpha) - \int\limits_0^\infty f(t)\,dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T dy \int\limits_0^y f(t)\,dt$.*

Доказательство. В основе доказательства лежит следующая теорема, доказанная Лебегом ([4], стр. 300).

Пусть $(\varphi_n(t))$ — последовательность вещественных функций, заданных на сегменте $[a, b]$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1° все функции $\varphi_n(t)$ измеримы на $[a, b]$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

2° существует постоянная $K > 0$ такая, что $|\varphi_n(t)| < K$ для $t \in [a, b]$ и $n = 1, 2, \ldots$, где K не зависит от n,

3° для любого $l \in [a, b]$ $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^l \varphi_n(t)\,dt = 0$.

Тогда для любой функции $g(t)$, которая имеет конечный интеграл Лебега $\int\limits_a^b g(t)\,dt$,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b g(t)\,\varphi_n(t)\,dt = 0.$$

Чтобы упростить дальнейшие преобразования, введем вспомогательные функции $f_k(x)$ и $F_k(x)$ $(k = 1, 2)$, определяемые на всей прямой следующим образом:

$$f_1(x) \equiv \int\limits_0^x f(t)\,dt; \qquad f_2(x) \equiv \int\limits_0^x F_1(t)\,dt;$$

$$F_k(x) \equiv f_k(x) - M_k, \quad \text{где } M_k = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f_k(t)\,dt; \quad k = 1,\ 2.$$

Из определения следует, что функции $f_k(x)$, $F_k(x)$ $(k = 1, 2)$ абсолютно непрерывны на каждом сегменте. Легко также показать, что $F_k(x + T) = F_k(x)$ для любого $x \in (-\infty, +\infty)$ и $\int\limits_0^T F_k(t)\,dt = 0$ $(k = 1, 2)$.

Преобразуем интеграл $I(x, \alpha)$ $\alpha > 0$. Применяя замену переменной $t = xz$, получим:

$$I(x, \alpha) = \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^\alpha f(t)\,dt = x\int\limits_0^1 (1 - z)^\alpha f(xz)\,dz.$$

Интегрирование по частям последнего интеграла дает следующее выражение:

$$I(x, \alpha) = x\left[(1-y)^{\alpha}\int_0^y f(xz)\,dz\right]_{y=0}^{y=1} + \alpha x\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}dy\int_0^y f(xz)\,dz =$$

$$= \alpha x\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}dy\int_0^y f(xz)\,dz.$$

Применяя еще раз замену переменной к внутреннему интегралу и используя функции $f_1(x)$ и $F_1(x)$, интеграл $I(x, \alpha)$ получит следующий вид:

$$I(x, \alpha) = \alpha\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} f_1(xy)\,dy = \alpha\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}[M_1 + F_1(xy)]\,dy =$$

$$= M_1 + \alpha\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} F_1(xy)\,dy.$$

Так как $M_1 = \frac{1}{T}\int_0^T dy\int_0^y f(t)\,dt$, то для завершения доказательства достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}F_1(xy)\,dy = 0$. Используем определение предела по Гейне и покажем, что для любой последовательности положительных чисел (x_n) такой, что $x_n \to +\infty$, предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}\times$ $\times F_1(x_n y)\,dy$ равен нулю. Для этого применим указанную теорему Лебега. Пусть $F_1(x_n y)\,dy \equiv \varphi_n(y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, тогда функции $\varphi_n(y)$ и $g(y) \equiv$ $\equiv (1-y)^{\alpha-1}$ $(\alpha > 0)$ удовлетворяют условиям теоремы на сегменте $[0, 1]$. Действительно, функции $\varphi_n(y)$ измеримы на сегменте $[0, 1]$, так как $\varphi_n(y)$ непрерывны на этом сегменте. Дальше, так как функция $F_1(t)$ непрерывна на числовой прямой и периодическая, то $F_1(t)$ ограничена на числовой прямой. Следовательно, существует постоянная $K > 0$ такая, что $|\varphi_n(y)| = |F_1(x_n y)| < K$ для всех $n = 1, 2$ и $y \in [0, 1]$. Чтобы показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^l \varphi_n(y)\,dy = 0$ для любого $\in (0, 1)$, преобразуем этот интеграл:

$$\int_0^l \varphi_n(y)\,dy = \int_0^l F_1(x_n y)\,dy = \frac{1}{x_n}\int_0^{lx_n} F_1(t)\,dt = \frac{1}{x_n} f_2(lx_n) =$$

$$= \frac{1}{x_n}[F_2(lx_n) + M_2].$$

Как и функция $F_1(t)$, функция $F_2(t)$ ограничена на числовой прямой, поэтому при $x_n \to \infty$ последнее выражение стремится к нулю. Наконец, отметим, что интеграл Лебега $\int_0^1 g(y)\,dy = \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}dy$ $(\alpha > 0)$ конечен. Таким образом, условия применимости теоремы Лебега проверены

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СИНТЕЗА АБСТРАКТНЫХ АВТОМАТОВ

Я. М. Барздыньш

В теории автоматов, также как и в других областях науки, существуют две соответствующие друг другу проблемы — аналитическая и синтетическая. Если вопросы, касающиеся анализа автоматов, достадочно полно разработаны в работах [1], [2] и в некоторых других работах, то вопросы синтеза автоматов ввиду разнообразных возможностей задания исходной информации и разнообразия самой элементной структуры реальных автоматов разработаны неполно. Некоторые исследования в этом направлении провели С. К. Клини в работе [1], Ю. Т. Медведев в работе [2] и Б. А. Трахтенброт в работе [5]. Более полное исследование синтеза так называемых абстрактных автоматов проведено В. М. Глушковым в работе [4]. В этой работе предполагается, что события заданы так, что для них известны так называемые регулярные выражения, а потом строится алгоритм синтеза абстрактного автомата, представляющего эти события. Однако, не всегда события задаются с помощью их регулярных выражений (например в работе [2]), и, если события заданы как-нибудь по другому, то не всегда легко найти их регулярные выражения.

В настоящей статье сначала мы остановимся на одном новом способе характеризования событий, представимых в конечных автоматах — посредством их характеристических подсобытий, а потом изложим алгоритм синтеза абстрактного автомата по характеристическим подсобытиям. В конце статьи укажем на некоторые преимущества такого характеризования событий, а также на некоторые применения соответствующего алгоритма.

Событием E над n символами $x_1, x_2, \dots, x_n$ будем называть любое множество конечных упорядоченных последовательностей этих символов. Будем говорить, что два события E и E' одинаковы, если они содержат одни и те же последовательности символов. *Длиной* последовательности символов будем называть число символов в этой последовательности.

Абстрактным (конечным) *автоматом* A, следуя Ю. Т. Медведеву [2], будем называть объект с конечным числом $m \geqslant 1$ состояний $a_1, a_2, \dots, a_m$ и с конечным числом $n \geqslant 1$ входов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Каждый из входов x_k определяет некоторое однозначное отображение $x_k a$ множества M состояний в себя. Под действием входа x_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ автомат A переходит из состояния a_i $(i = 1, 2, \dots, m)$ в состояние $a_j = x_k a_i$.

Субстантом B будем называть объект с конечным числом $m \geqslant 1$ состояний $b_1, b_2, \dots, b_m$ и с конечным числом $n \geqslant 1$ входов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Некоторые пары (x_k, b_i) обладают свойством: под действием входа x_k субстант B переходит из состояния b_i в состояние $b_j = x_k b_i$. В последнем случае будем говорить, что в субстанте B *существует переход* $x_k b_i$.

Субстант является некоторым обобщением понятия абстрактного автомата. Легко видеть, что любой абстрактный автомат одновременно является и субстантом.

Выделим одно из состояний и назовем его *начальным* состоянием. Пусть теперь $E_1, E_2, \ldots, E_k$ — события над входами автомата A. Тогда будем говорить, что автомат A *представляет* события $E_1, E_2, \ldots, E_k$ свойствами состояний $S_1, S_2, \ldots, S_k$ при начальном состоянии a_1, если любая последовательность входов $\sigma = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$ принадлежит к событию E_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ тогда и только тогда, когда состояние $x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} a_1$ обладает свойством S_j. Если для любой последовательности входов $\sigma = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$, принадлежащей к событию E_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, состояние $x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} a_1$ обладает свойством S_j, то будем говорить, что автомат A *реагирует* на события $E_1, E_2, \ldots, E_k$ свойствами состояний $S_1, S_2, \ldots, S_k$ при начальном состоянии a_1. Ясно, что, если автомат A представляет события $E_1, E_2, \ldots, E_k$, то он и реагирует на них. Но если автомат A только реагирует на события $E_1, E_2, \ldots, E_k$, то из этого не следует, что он представляет эти события.

В дальнейшем мы будем пользоваться только такими автоматами и субстантами, каждому состоянию которых сопоставлено какое-то подмножество некоторого множества. Эти подмножества будем называть *выходами*. Поэтому под *суммой* двух выходов будем понимать теоретико-множественную сумму. Два выходных символа будем считать *одинаковыми*, если они равны как множества.

Пусть m — число состояний автомата A, и m' — число состояний автомата A'.

Теорема I. Если автомат A при начальном состоянии a_1 свойством состояний S и автомат A' при начальном состоянии a_1' свойством состояний S' реагируют на одни и теже последовательности входов длины $l \leqslant m + m' - 1$, то автомат A при начальном состоянии a_1 свойством состояний S и автомат B при начальном состоянии a_1' свойством состояний S' представляют одинаковые события.

При доказательстве данной теоремы будем пользоваться терминами и результатами работы [3]. Припишем всем состояниям автомата A, обладающим свойством S, и всем состояниям автомата A', обладающим свойством S', выходной символ 1, а остальным состояниям автоматов A и A' выходной символ O. В таком случае автоматы A и A' превращаются в машины Мура. Теперь легко доказать, что состояния a_1 и a_1' будут неотличимы как состояния машин Мура тогда и только тогда, когда автомат A свойством состояний S при начальном состоянии a_1 и автомат A' свойством состояний S' при начальном состоянии a_1' будут представлять одинаковые события. Из доказательств Т6 и Т7 работы [3] следует, что отличимость двух машин Мура с числом состояний m и m' может быть установлена экспериментом длины $l \leqslant m + m' - 1$. Отсюда, в свою очередь следует, что состояния a_1 и a_1' будут неотличимы, если все эксперименты длины $l \leqslant m + m' - 1$, начатые с этих состояний, будут давать одинаковые последовательности выходных символов. Но, имея в виду то, что дано в теореме, а также закон приписания выходных символов, легко видеть, что для состояний a_1 и a_1' это действительно так и будет, т. е. все эксперименты длины $l \leqslant m + m' - 1$, начатые с этих состояний, будут давать одинаковые последовательности выходных символов. Отсюда следует, что состояния a_1 и a_1' неотличимы и, следовательно, автомат A при начальном состоянии a_1 свойством состояний S и автомат A' при начальном состоянии a_1' свойством состояний S' представляют одинаковые события, что и требовалось доказать.

Пусть событие E представимо в конечном автомате A с числом состояний m и пусть M — любое фиксированное число, которое больше или равно $2m-1$. Множество всех последовательностей, имеющих длину $l \leqslant M$ и принадлежащих к событию E, обозначим через E^M и назовем *характеристическим подсобытием* длины M события E, а сами последовательности — *характеристическими последовательностями.* Из приведенного выше определения следует, что одно и то же событие при разных M может иметь разные характеристические подсобытия.

Теперь отметим одно следствие, которое вытекает из T1.

Следствие. Два события E и E', представимые в конечных автоматах, одинаковы тогда и только тогда, когда у них одинаковы какие-нибудь характеристические подсобытия.

Отсюда следует, что любое событие, представимое в конечном автомате, можно однозначно характеризовать его характеристическим подсобытием.

Перед тем, как приступить к алгоритму синтеза, дадим еще одно определение.

Состояния b_α и b'_β, принадлежащие соответственно субстантам B и B' (в частности субстант B' — тот же самой субстант B), будем называть *λ-эквивалентными* и писать $b_\alpha \equiv b'_\beta\,(\lambda)$, если:

1) они имеют одинаковые выходы;

2) для любой последовательности входов $\sigma = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \lambda)$ существуют переходы $x_{i_s} \ldots x_{i_2} x_{i_1} b_\alpha$ и $x_{i_s} \ldots x_{i_2} x_{i_1} b'_\beta$ $(s = 1, 2, \ldots, p)$ и состояния $x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} b_\alpha$ и $x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} b'_\beta$ имеют одинаковые выходы.

Приведенное выше определение λ — эквивалентности будем распространять и на автоматы, как на частный вид субстантов.

Теперь займемся построением алгоритма синтеза абстрактного автомата. Мы будем строить такой алгоритм синтеза, с помощью которого можно будет синтезировать абстрактный автомат, представляющий не одно событие, а несколько событий сразу.

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА СИНТЕЗА

Пусть события $E_1, E_2, \ldots, E_k$ представимы в каком-нибудь конечном автомате A с числом состояний m и $E_1^M, E_2^M, \ldots, E_k^M$ — характеристические подсобытия длины M $(M \geqslant 2m-1)$ этих событий. Предположим, что $S_1, S_2, \ldots, S_k$ попарно различимые символы. Сопоставим каждой характеристической последовательности, принадлежащей E_j^M $(j = 1, 2, \ldots, k)$, символ S_j. Пусть v — общее число характеристических последовательностей, принадлежащих к характеристическим подсобытиям $E_1^M, E_2^M, \ldots, E_k^M$. Пронумеруем все эти характеристические последовательности числами от 1 до v.

Дадим идуктивное определение субстантов $B_0, B_1, \ldots, B_v$.

B_0 — субстант содержащий одно состояние, которое мы обозначим через b_0, при чем это состояние в качестве выхода имеет пустое множество Λ;

B_i $(i = 1, 2, \ldots, v)$ — субстант, получающийся из субстанта B_{i-1} в результате пополнения его некоторыми состояниями и переходами следующим образом: берется i-тая характеристическая последовательность $\sigma = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_s}$ по предыдущей нумерации и, если в субстанте B_{i-1} не существует переход $x_{i_l} \ldots x_{i_2} x_{i_1} b_0$ $(l = 1, 2, \ldots, s)$, то к множеству состояний субстанта B_{i-1} прибавляется новое состояние b_i^l с пустым множеством Λ в качестве выхода и определяется следующий переход: $x_{i_l}\dots x_{i_2}x_{i_1}b_0=b_i^l$; потом к выходу состояния $x_{i_s}\dots x_{i_2}x_{i_1}b_0$ прибавляется множество (S_α), состоящее из одного элемента S_α, сопоставленного последовательности $\sigma=x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s}$.

Те состояния b_i^r субстанта B_v, для которых можно указать такой вход x_j, что переход $x_jb_i^r$ не существует, будем называть *крайними состояниями*. *Расстоянием* состояния b_i^r до состояния b_0 будем называть длину такой последовательности входов $\sigma=x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\dots x_{\alpha_p}$, для которой $x_{\alpha_p}\dots x_{\alpha_2}x_{\alpha_1}b_0=b_i^r$. Легко видеть, что для любого b_i^r эта последовательность определяется однозначно.

Теперь построим еще один субстант следующим образом. Пусть b_i^r — некоторое крайнее состояние субстанта B_v и p — его расстояние до b_0. Тогда прибавляем к множеству состояний субстанта B_v состояния $b_{i_1}^r, b_{i_2}^r, \dots, b_{i_{M-p}}^r$ с пустым множеством Λ в качестве выхода. Прибавляем также переходы $x_jb_i^r=b_{i_1}^r$ для тех x_j, для которых не существуют переходы $x_jb_i^r$ в субстанте B_v, и переходы $x_\alpha b_{i_1}^r=b_{i_2}^r$, $x_\alpha b_{i_2}^r=b_{i_3}^r,\dots,x_\alpha b_{i_{M-p-1}}=b_{i_{M-p}}$ $(\alpha=1,2,\dots,n)$. Полученный таким образом субстант после перебора всех крайних состояний b_i^r обозначим через B'_v.

Для упрощения записи все состояния субстанта B'_v, кроме состояния b_0, пронумеруем числами от 1 до w ($w+1$ — число состояний субстанта B'_v) и i-тое состояние $(i=1,2,\dots,w)$ обозначим через b_i. Еще условимся обозначать через μ число, равное $\left[\frac{M-1}{2}\right]$, и через $D_{\mu+1}$ — множество тех состояний субстанта B'_v, которые находятся на расстоянии $d\leqslant\mu+1$ от состояния b_0.

Разобъем множество $D_{\mu+1}$ на такие классы $R_1, R_2, \dots, R_s$, что состояния b_i и b_j принадлежат к одному и тому же классу R_α тогда и только тогда, когда $b_i\equiv b_j\ (\mu)$.

Построим автомат A_0 со состояниями $R_1, R_2, \dots, R_s$, входами $x_1, x_2, \dots, x_s$ и следующим отображением множества состояний в себя: $x_\eta R_\alpha=R_\beta$ тогда и только тогда, когда в субстанте B'_v существуют такие состояния $b_i\in R_\alpha$ и $b_j\in R_\beta$, что $x_\eta b_i=b_j$. В дальнейшем будут доказаны возможность и однозначность такого построения. Потом сопоставим каждому состоянию R_α $(\alpha=1,2,\dots,s)$ такой выход, какой имеют состояния субстанта B'_v, принадлежащие классу R_α.

Будем считать, что состояние R_α $(\alpha=1,2,\dots,s)$ автомата A_0 обладает свойством S_i $(i=1,2,\dots,s)$, если S_i является элементом его выхода. Потом, не ограничивая общности, допустим, что состояние b_0 субстанта B'_v принадлежит к подмножеству R_1. Тогда автомат A_0 при начальном состоянии R_1 свойствами состояний $S_1, S_2, \dots, S_k$ представляет события $E_1, E_2, \dots, E_k$.

ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА СИНТЕЗА

Обоснование алгоритма синтеза будет состоять из двух частей: сперва мы покажем, что автомат A_0 существует, а потом покажем, что он представляет события $E_1, E_2, \dots, E_k$.

Прежде всего отметим, что μ — эквивалентность обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Поэтому разбиение множества состояний субстанта B'_v на классы R_1, R_2, ..., R всегда возможно.

Докажем несколько лемм.

Пусть автомат A с состояниями a_1, a_2, ..., a_m представляет события E_1, E_2, ..., E_k некоторыми свойствами состояний при начальном состоянии a_1. Сопоставим его состояниям выходы по следующему закону: элемент S_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$ принадлежит выходу состояния a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность входов $\delta = x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_p}$, принадлежащая событию $E\alpha$, что $x_{j_p} \ldots x_{j_2} x_{j_1}$ $a_1 = a_i$

Обозначим через $D\mu$ множество тех состояний субстанта B'_v, расстояние которых до состояния b_0 меньше или равно μ.

Лемма 1. Если состояние b_i субстанта B'_v принадлежит к множеству $D_{\mu+1}$, то:

1) можно указать такое состояние a_j автомата A, что $b_i \equiv a_j(\mu)$;
2) для любого входа x_{γ_i} $x_{\gamma_i} b_i \equiv x_{\gamma_i} a_j(\mu)$, если только $b_i \in D_\mu$.

Доказательство. Так как состояние $b_i \in D_{\mu+1}$, то существует такая последовательность входов $\sigma = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p}$, где $p \leqslant \mu + 1$, что $x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} b_0 = b_i$.
Теперь берем в автомате A состояние $a_j = x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} a_1$ и покажем, что $b_i \equiv a_j(\mu)$. Для этого исследуем выходы состояний $b_{i'} = x_{i_{p+r}} \ldots x_{i_{p+2}} x_{i_{p+1}} b_i$ и $a_{j'} = x_{i_{p+r}} \ldots x_{i_{p+2}} x_{i_{p+1}} a_j$, где $\sigma = x_{i_{p+1}} x_{i_{p+2}} \ldots x_{i_{p+r}}$ — произвольная последовательность входов, имеющая длину $r \leqslant \mu$, поскольку мы исследуем μ — эквивалентность. (Отметим, что существование перехода $x_{i_{p+r}} \ldots x_{i_{p+2}} x_{i_{p+1}} b_i$ для $r \leqslant \mu$ следует из определения субстанта B'_v). Так как $a_j = x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} a_1$ и $b_i = x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} b_0$, то мы можем писать, что $a_{j'} = x_{i_{p+r}} \ldots x_{i_{p+1}} x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} a_1$ и $b_{i'} = x_{i_{p+r}} \ldots x_{i_{p+1}} x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} b_0$. Из $p \leqslant \mu + 1$ и $r \leqslant \mu$ следует, что длина последовательности $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} x_{i_{p+1}} \ldots x_{i_{p+r}}$ не превосходит M. Но в таком случае из построения автомата B'_v и закона сопоставления выходов состояниям автомата A сразу следует, что состояния $a_{j'}$ и $b_{i'}$ имеют одинаковые выходы. Отсюда в свою очередь следует μ — эквивалентность состояний b_i и a_j. Тем самым первая часть леммы доказана.

Доказательство второй части леммы аналогично доказательству первой части, только теперь вместо состояния b_i будем иметь состояние $x_{\gamma_i} b_i = x_{\gamma_i} x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} b_0$ и вместо состояния a_j — состояние $x_{\gamma_i} a_j = x_{\gamma_i} x_{i_p} \ldots x_{i_2} x_{i_1} a_1$.

Лемма 2. Если состояния b_i и b_j, принадлежащие к множеству D_μ, принадлежат к одному и тому же классу R_α, то для любого входа x_{γ_i} состояния $x_{\gamma_i} b_i$ и $x_{\gamma_i} b_j$ принадлежат к одному и тому же классу R_β.

Доказательство. По Л1 для состояния b_i можно указать такое $a_{i'}$ и для состояния b_j такое $a_{j'}$, где $a_{i'}$ и $a_{j'}$ — состояния автомата A, что $b_i \equiv a_{i'}(\mu)$ и $b_j \equiv a_{j'}(\mu)$. Так как состояния b_i и b_j

принадлежат к одному и тому же классу R_α, то $b_i \equiv b_j(\mu)$, и по транзитовности μ — эквивалентности — $a_{i'} \equiv a_{j'}(\mu)$. Поскольку число состояний m автомата A меньше или равно $\mu+1$ (это следует из определения μ), то $\mu \geqslant m-1$, и по Т 6 [3] из μ — эквивалентности состояний $a_{i'}$ и $a_{j'}$, если $\mu \geqslant m-1$, следует их λ — эквивалентность для любого λ. Поэтому $x_\eta a_{i'} \equiv x_\eta a_{j'}(\mu)$. По Л1 $x_\eta b_i \equiv x_\eta a_{i'}(\mu)$ и $x_\eta b_j \equiv$ $\equiv x_\eta a_{j'}(\mu)$. Отсюда следует, что $x_\eta b_i \equiv x_\eta b_j(\mu)$, и, следовательно, состояния b_i и b_j принадлежат одному и тому же классу R_β, что и требовалось доказать.

Лемма 3. Для любого класса R_α можно указать такое состояние $b_i \in D_\mu$, что $b_i \in R_\alpha$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Допустим, что существует такой класс R_α, который содержит только состояния b_j, принадлежащие множеству $D_{\mu+1}$ и не принадлежащие множеству $D\mu$. Тогда по Л1 можно найти такое состояние $a_{j'}$ автомата A, что $b_j \equiv a_{j'}(\mu)$. Так как число состояний автомата A меньше или равно $\mu+1$, то легко убедиться в том, что обязательно будет существовать такая последовательность входов $\sigma = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_d}$, имеющая длину $d \leqslant \mu$, что $x_{i_d}\ldots x_{i_2}x_{i_1}a_1 = a_{j'}$. Рассмотрим состояние $b_i = x_{i_d}\ldots x_{i_2}x_{i_1}b_0$ субстанта B'_v. Из доказательства Л1 следует, что $b_i \equiv a_{j'}(\mu)$. Но в таком случае из транзитивности μ — эквивалентности вытекает, что $b_i \equiv b_j(\mu)$, и, следовательно, $b_i \in R_\alpha$. Так как $d \leqslant \mu$, то $b_i \in D\mu$, что влечет за собой противоречие. Это доказывает лемму.

Теперь легко видеть, что из Л2 и Л3 вытекает возможность и однозначность построения автомата A_0.

Лемма 4. Если R_α — состояние автомата A_0 и a_j — состояние автомата A, то $R_\alpha \equiv a_j(\mu)$ тогда и только тогда, когда состояния субстанта B'_v, принадлежащие подмножеству R_α, и состояние a_j μ — эквивалентны.

Доказательство. Сперва докажем следующее свойство (*): если состояние $b_i \in R_\alpha$, то для любого состояния $x_{\eta_l}\ldots x_{\eta_2}x_{\eta_1}b_1$ $(1 \leqslant l \leqslant$ $\leqslant \mu)$, где $x_{\eta_1}, x_{\eta_2}, \ldots, x_{\eta_l}$ произвольные входы, можно указать такое состояние $b_{i_l} \in D\mu$, что $b_{i_l} \equiv x_{\eta_l}\ldots x_{\eta_2}x_{\eta_1}b_i\,(\mu - l)$ и, кроме того, $b_{i_l} \in x_{\eta_l}$ $\ldots x_{\eta_2}x_{\eta_1}R_\alpha$. Дополнительно договоримся, что $b_{i_0} = b_i$, если $b_i \in D_\mu$ если же $b_i \bar{\in} D_\mu$, то b_{i_0} — любое состояние, принадлежащее классу R_α (т. е. μ — эквивалентное со состоянием b_i) и множеству D_μ. Существование такого состояния b_{i_0} в последнем случае гарантирует Л3. Доказательство свойства (*) проведем с помощью математической индукции.

Пусть $l=1$. Тогда определим b_{i_1} следующим образом: если $x_{\eta_1}b_{i_0} \in D$ то $b_{i_1} = x_{\eta_1}b_{i_0}$, но если $x_{\eta_1}b_{i_0} \bar{\in} D_\mu$, то в качестве b_{i_1} возьмем любое состояние, μ — эквивалентное со состоянием $x_{\eta_1}b_{i_0}$ и принадлежащее множеству D_μ. Существование такого состояния b_{i_1} опять гарантирует Л 3. Так как $b_{i_1} \equiv x_{\eta_1}b_{i_0}(\mu)$, то отсюда $b_{i_1} \equiv x_{\eta_1}b_i\,(\mu-1)$. То, что $b_{i_1} \in x_{\eta_1}R_\alpha$, вытекает из того, что $x_{\eta_1}b_{i_0} \in x_{\eta_1}R_\alpha$.

Допустим теперь, что свойство (*) имеет место для $l = k$, и докажем, что тогда оно имеет место и для $l = k+1$. Для этого определим состояние $b_{i_{k+1}}$ следующим образом: если $x_{\eta_{k+1}} b_{i_k} \in D_\mu$, то $b_{i_{k+1}} = x_{\eta_{k+1}} b_{i_k}$, но если $x_{\eta_{k+1}} b_{i_k} \bar{\in} D_\mu$, то $b_{i_{k+1}}$ — любое состояние, μ — эквивалентное со состоянием $x_{\eta_{k+1}} b_{i_k}$ и принадлежащее множеству D_μ. Существование состояния $b_{i_{k+1}}$ в последнем случае опять гарантирует Л 3. Так как $b_{i_{k+1}} \equiv x_{\eta_{k+1}} b_{i_k} (\mu)$ и по предположению для $l = k$ $b_{i_k} \equiv b_i (\mu - k)$, то $b_{i_{k+1}} \equiv b_i(\mu - k - 1)$. Так же по предположению для $l = k$ $b_{i_k} \in x_{\eta_k} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} R_\alpha$. Но отсюда, имея в виду определение автомата A_0, следует, что $b_{i_{k+1}} \in x_{\eta_{k+1}} x_{\eta_k} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} R_\alpha$. Этим завершается индукция, доказывающая справедливость свойства (*).

Теперь допустим, что $R_\alpha \equiv a_j(\mu)$ и состояние $b_i \in R_\alpha$. Покажем, что тогда $b_i \equiv a_j (\mu)$. Из закона сопоставления выходов состояниям автомата A_0 и из $R_\alpha \equiv a_j (\mu)$ сразу следует, что состояния b_i и a_j имеют одинаковые выходы. Покажем, что одинаковые выходы будут иметь и состояния $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} b_i$ и $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} a_j$, где $l = 1, 2, \ldots, \mu$, а x_{η_k} $(k = 1, 2, \ldots, l)$ — произвольный вход. По свойству (*) можно найти состояние $b_{i_l} \equiv x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} b_i (\mu - l)$. В таком случае состояния b_{i_l} и $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} b_i$ имеют одинаковые выходы. Но с другой стороны $b_{i_l} \in x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} R_\alpha$. Тогда, имея в виду μ — эквивалентность состояний R_α и a_j и закон сопоставления выходов состояниям автомата A_0, легко видеть, что состояние b_{i_l} имеет такой же выход, как состояние $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} a_j$ и, следовательно, такой же выход имеет состояние $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} b_i$. Тем самым доказана необходимость условия леммы.

Для доказательства достаточности допустим, что любое состояние b_i, принадлежащее классу R_α, μ — эквивалентно со состоянием a_j и докажем, что тогда $b_i \equiv a_j (\mu)$. Так как $b_i \equiv a_j (\mu)$, то легко видеть, что состояния R_α и a_j имеют одинаковые выходы. Для доказательства μ — эквивалентности еще надо показать, что состояния $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} R_\alpha$ и $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} a_j (l = 1, 2, \ldots, \mu$ и x_{η_k} $(k = 1, 2, \ldots, l)$ — произвольный вход) тоже будут иметь одинаковые выходы. По свойству (*) можно указать такое состояние b_{i_l}, которое $(\mu - l)$ — эквивалентно со состоянием $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} b_i$ и принадлежит классу $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} R_\alpha$. Отсюда следует, что состояние $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} R_\alpha$ имеет такой же выход, как и состояние $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} b_i$. Но так как $b_i \equiv a_j$ (μ), то состояния $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} R_\alpha$ и $x_{\eta_l} \ldots x_{\eta_2} x_{\eta_1} a_j$ имеют одинаковые выходы. Тем самым завершено доказательство леммы.

Пусть R_α — состояние автомата A_0, a_j — состояние автомата A и x_η — произвольной вход этих автоматов. Тогда имеет место

Лемма 5. Если $R_\alpha \equiv a_j (\mu)$, то $x_\eta R_\alpha \equiv x_\eta a_j (\mu)$.

Доказательство. По Л3 можно указать такое состояние $b_i \in R_\alpha$, которое принадлежит к множеству D_μ. Имея в виду то, что $R_\alpha \equiv a_j$ (μ), состояние b_i по Л4 должно удовлетворять условию: $b_i \equiv a_j$ (μ). В таком случае по Л1 $x_{\gamma_l} b_i \equiv x_{\gamma_l} a_j$ (μ). Из построения автомата A_0 следует, что $x_{\gamma_l} b_i \in x_{\gamma_l} R_\alpha$. Так как $x_{\gamma_l} b_i \equiv x_{\gamma_l} a_j$ (μ) и $x_{\gamma_l} b_i \in x_{\gamma_l} R_\alpha$, то отсюда по Л4 в свою очередь следует μ — эквивалентность состояний $x_{\gamma_l} a_j$ и $x_{\gamma_l} R_\alpha$, что и требовалось доказать.

Напомним, что состояние R_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$) автомата A_0 и состояние a_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) автомата A обладают свойством S_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) если S_i является элементом их выходов. Потом, не ограничивая общности, допустим, что состояние b_0 субстанта B'_v принадлежит к классу R_1. Докажем, что тогда автомат A_0 при начальном состоянии R_1 свойствами состояний $S_1, S_2, \ldots, S_k$ представляет события $E_1, E_2, \ldots, E_k$. Для этого покажем, что произвольная последовательность входов $\sigma = x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \ldots x_{\gamma_l}$ принадлежит событию E_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) тогда и только тогда, когда состояние $x_{\gamma_l} \ldots x_{\gamma_2} x_{\gamma_1} R_1$ автомата A_0 обладает свойством S_i.

По предположению автомат A при начальном состоянии a_1 представляет события E_1, E_2, $\ldots$, E_k свойствами состояний S_1, S_2, $\ldots$, S_k. Из определения субстанта B'_v следует, что $b_0 \equiv a_1$ (μ). В таком случае по Л4 $R_1 \equiv a_1 (\mu)$. Отсюда в свою очередь по Л5 следует, что состояния $x_{\gamma_l} \ldots x_{\gamma_2} x_{\gamma_1} R_1$ и $x_{\gamma_l} \ldots x_{\gamma_2} x_{\gamma_1} a_1$ будут μ — эквивалентны. Но в таком случае они будут иметь одинаковые выходы. Так как состояние $x_{\gamma_l} \ldots x_{\gamma_2} x_{\gamma_1} a_1$ по определению выходов состояний автомата A, обладает свойством S_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) тогда и только тогда, когда $x_{\gamma_1} x_{\gamma_2} \ldots x_{\gamma_l} \in E_i$, то таким же свойством будет обладать и состояние $x_{\gamma_l} \ldots x_{\gamma_2} x_{\gamma_1} R_1$ автомата A_0.

Этим завершено обоснование нашего алгоритма.

Теперь приведем несколько примеров, иллюстрирующих описанный выше алгоритм.

Пусть дан какой-нибудь автомат, который относится к типу так называемых «черных ящиков» («beack boxes»). Мы можем с ним проводить эксперименты (т. е. воздействовать на его входы и наблюдать, как на это реагирует автомат) при одном фиксированном его внутрением состоянии в начале каждого эксперимента. Пусть по внутренней конструкции данного автомата мы можем узнать только границу m числа его состояний. Предположим, что требуется построить автомат, представляющий в точности такие же события, как данный автомат. В таком случае мы сперва можем найти характеристические подсобытия событий, представленных в данном автомате, а потом по описанному выше алгоритму построить соответствующий абстрактный автомат, который, очевидно, является первым шагом при построении реального автомата.

Пусть в алфавите входов $\{0,1\}$ $E_1^9 = (1, 11, 110, 1100, 11000, 110000, 1100000, 11000000, 110000000)$ и $E_2^9 = (1, 10, 111, 1101, 11001, 110001, 1100001, 11000001, 110000001)$ — характеристические подсобытия каких-нибудь событий и E_1 и E_2. Припишем характеристическим последовательностям, принадлежащим E_1^9, символ S_1, а характеристическим последовательностям, принадлежащим E_2^9 — символ S_2. Потом пронумеруем характеристические последовательности в порядке их записывания. Построим субстанты B_v и B'_v. На рис. 1 дана диаграмма переходов субстанта B'_v, причем жирными линиями отмечены состояния и переходы субстанта B_v. Находим элементы класс R_α: $R_1 = (b_0)$, $R_2 = (b_1^1)$, $R_3 = (b_2^2,\ b_3^3,\ b_4^4,\ b_5^5)$, $R_4 = (b_{11}^2,\ b_{12}^3,\ b_{13}^4,\ b_{14}^5)$, $R_5 = (b_{0_2},\ b_{0_3},\ b_{0_4},\ b_{0_5},\ b_{11_1}^2,\ b_{11_2}^2,\ b_{12_1}^3,\ b_{11_3}^2,\ b_{12_2}^3,\ b_{13_2}^4)$. Построим автомат A_0. Диаграмма переходов автомата A_0 дана на рис. 2.

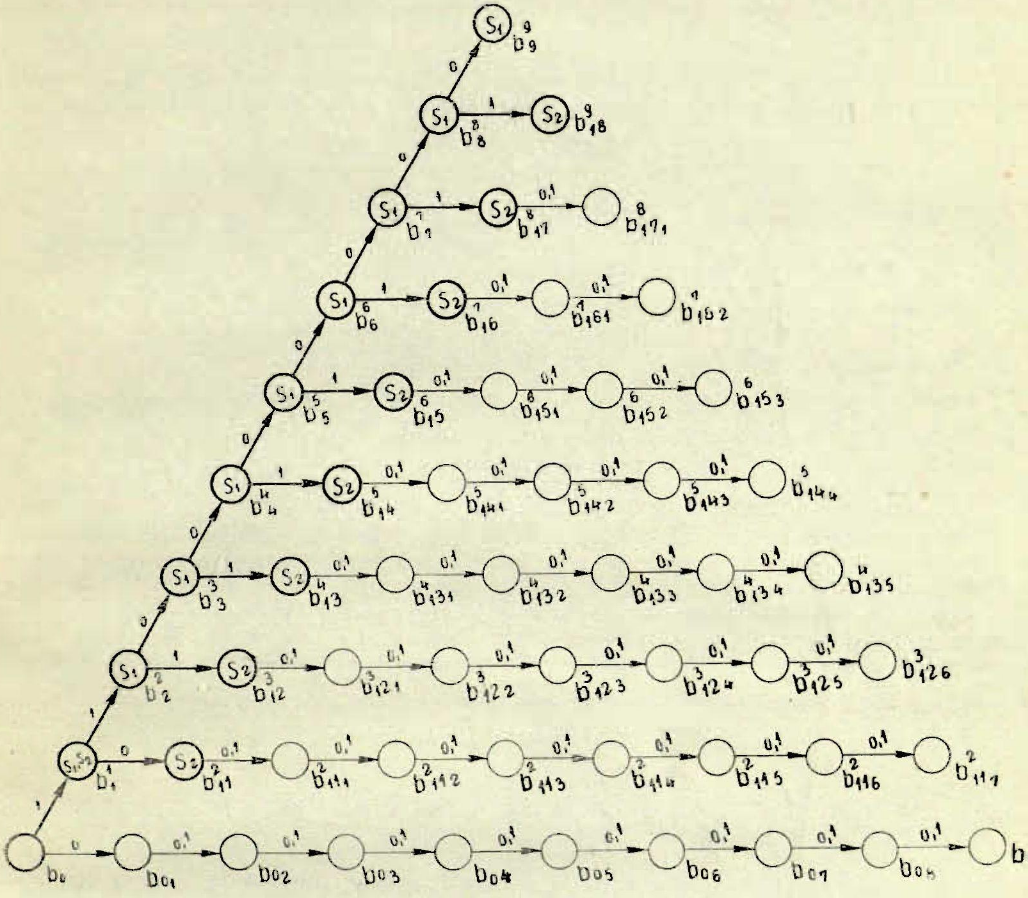

рис. 1

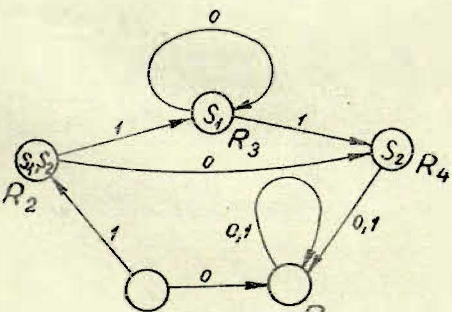

рис 2.

Автомат A_0, по вышедоказанному, при начальном состоянии R_1 свойством состояний S_1 представляет событие E_1, соответствующее характеристическому подсобытию E_1^9, и свойством состояний S_2 — событие E_2, соответствующее характеристическому подсобытию E_2^9.

Приведенным выше алгоритмом мы можем пользоваться и тогда, когда ничего не знаем о числе состояний автомата, представляющего данные события. Тогда можно выбрать произвольным образом число M

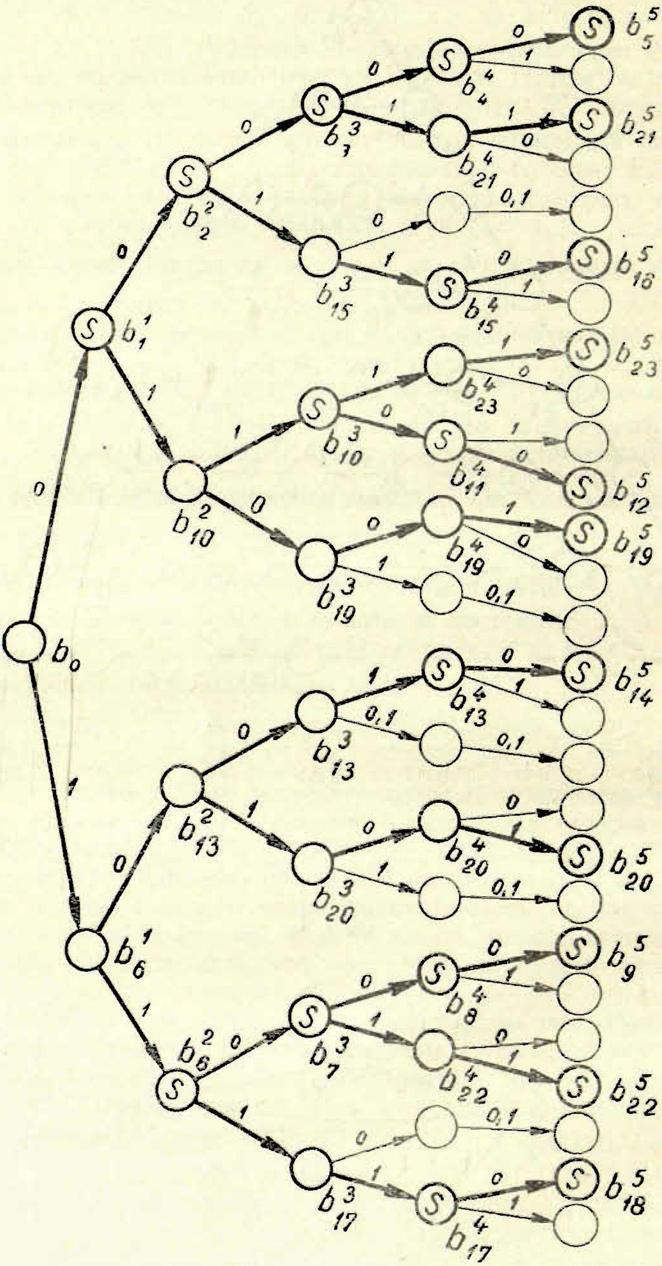

рис. 3

и по событиям E_1^M, E_2^M, ..., E_k^M, как по характеристическим подсобытиям, построить автомат согласно нашему алгоритму. Потом можно проверить, представляет ли построенный автомат данные события.

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим пример. Будем искать автомат с входами из алфавита $\{0, 1\}$, который при фиксированном начальном состоянии свойством состояний S представляет те последовательности цифр 0 и 1, которые как числа в двоичной системе делятся на 3 без остатка, т. е. «разпознает» делимость на 3 без остатка.

Выберем произвольным образом число $M=5$ и построим множество E^5 всех чисел, делящиеся на 3 без остака и содержащих не больше 5 цифр: $E^5=(0, 00, 000, 0000, 00000, 00000, 11, 011, 0011, 00011, 110, 0110, 00110, 1001, 01001, 1100, 01100, 1111, 01111, 10010, 10101, 11000, 11011, 11110)$. Если здесь дано число $\varepsilon_k \varepsilon_{k-1} \ldots \varepsilon_2 \varepsilon_1$, то ε_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ будем считать i-тым членом соответствующей последовательности входов. Пронумеруем все элементы множества E^5 в порядке их записывания и построим субстанты B_v и B'_v. На рис. 3 дана диаграмма переходов субстанта B'_v, при чем жирными линиями также как на рис. 1 отмечены состояния и переходы субстанта B_v. Легко видеть, что классы R_α будут иметь следующий вид: $R_1=(b_0)$, $R_2=(b_1^1, b_2^2, b_6^2, b_3^3, b_{10}^3, b_7^3)$, $R_3=(b_6^1, b_{10}^2, b_{15}^3, b_{13}^3, b_{17}^3)$, $R_4=(b_{13}^2, b_{19}^3, b_{20}^3)$. Построим автомат A_0. Диаграмма переходов автомата A_0 дана на рис. 4.

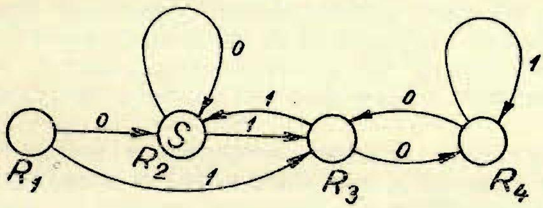

рис. 4

Теперь легко можно убедиться, что построенный выше автомат A_0 есть искомый автомат, т. е. он при начальном состоянии R_1 свойством состояний S представляет те последовательности цифр 0 и 1, которые как числа в двоичной системе делятся на три без остатка.

В заключении отметим, что при выборе числа $M=4$, оказывается, что автомат A_0 даже не существует. Это указывает на то, что число M обязательно должно быть больше 4.

1. 12. 60.

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *С. К. Клини.* Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах. Автоматы, под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, М., И Л, 1956.

[2]. *Ю. Т. Медведев.* О классе событий, допускающих представление в конечном автомате. Автоматы, под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, М., И Л, 1956.

[3]. *Э. Ф. Мур.* Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. Автоматы, под редакцией К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти, М., И Л, 1956.

[4]. *В. М. Глушков.* Об одном алгоритме синтеза абстрактных автоматов. Украинский математический журнал, 1960, XII, № 2, 147—156.

[5]. *Б. А. Трахтенброт.* Об операторах, реализуемых в логических сетях. ДАН, 1957, 112, № 6, 1005—1007.

DAŽI ABSTRAKTU AUTOMĀTU SINTĒZES JAUTĀJUMI

J. Bārzdiņš

(Kopsavilkums)

Dotajā darbā vispirms pierādīts, ka notikumus, kurus reprezentē automāti ar galīgu skaitu stāvokļu, var izsmeļoši raksturot ar harakteristisko apakšnotikumu palīdzību. Šo harakteristisko apakšnotikumu īpatnība un reizē priekšrocība ir tā, ka tajos ietilpst tikai ierobežota garuma ieeju virknes. Darba otrā daļā sniegts abstrakta automāta sintēzes algoritms, izejot no reprezentējamo notikumu harakteristiskajiem apakšnotikumiem. Pēc tam seko algoritma pamatojums. Darba nobeigumā sniegti divi piemēri.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

ОПЕРАТОРЫ ПЕРЕИМЕНОВАНИЯ

Я. Седолс

ВВЕДЕНИЕ

В булевой алгебре и в теории контактных схем большое значение имеет понятие однотипности булевых функций. Две булевые функции называются однотипными [1], если их можно получить одну из другой путем перестановки аргументов и замены некоторых аргументов их дополнениями. Контактные схемы, отвечающие булевым функциям одного типа тоже легко получить одну из другой путем перестановки реле, управляющих контактами, и замены некоторых включающих контактов на выключающие и обратно.

Символ, указывающий, какие именно действия нужно произвести с аргументами одной булевой функции, чтобы получить другую, называется оператором переименования. Если применяя оператор переименования к булевой функции получается та же функция, то говорят об инвариантности булевой функции по отношению к оператору переименования.

В настоящей работе исследуются свойства операторов переименования и решается вопрос о нахождении числа булевых функций, инвариантных к данному оператору переименования. После написания настоящей работы автор обнаружил, что часть результатов содержится в статье [2].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Булевым вектором длины n называется последовательность

$$\alpha = (\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n),$$

где $\alpha_i = 0$ или 1.

Булевый вектор $\alpha_0 = (00\ldots0)$ называется нулевым вектором.

В дальнейшем слово вектор будет означать булевый вектор.

Перестановкой длины n называется последовательность

$$a = (a_1a_2 \ldots a_n),$$

где $a_1a_2\ldots a_n$ — числа $1\,2\ldots n$, расположенные в каком либо порядке.

Перестановка $a_0 = (1\,2\ldots n)$ называется единичной перестановкой.

Вводятся следующие действия над векторами и перестановками:

1. Сложение векторов $\alpha \oplus \beta$ — векторы складываются по компонентам по модулю 2.

2. Умножение перестановок $a \cdot b$ — члены второй перестановки перемещаются соответственно порядку, указанному первой перестановкой.

3 Умножение перестановки на вектор $a \cdot \alpha$ — компоненты вектора перемещаются соответственно порядку, указанному перестановкой.

Примеры:

$$(0101) \oplus (1101) = (1000),$$
$$(1342) \cdot (2134) = (2341),$$
$$(132) \cdot (001) = (010).$$

Легко доказать, что для каждой перестановки a можно найти обратную перестановку a^{-1} такую, что

$$a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = a_0.$$

В дальнейшем до § 4 предполагается, что все векторы и перестановки имеют одинаковую длину n.

Оператором переименования называется символ

$$h = \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix},$$

состоящий из вектора α и перестановки a.

Оператор переименования

$$h_0 = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

называется единичным оператором.

В дальнейшем слово оператор будет означать оператор переименования.

Умножение операторов определяется равенством

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \oplus a \cdot \beta \\ a \cdot b \end{pmatrix}.$$

Оператор

$$\begin{pmatrix} a^{-1} \cdot \alpha \\ a^{-1} \end{pmatrix}$$

называется обратным оператором для оператора

$$h = \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix}$$

и обозначается через h^{-1}.

Легко проверить, что

$$h^{-1} \cdot h = h \cdot h^{-1} = h_0.$$

Все $2^n n!$ операторов длины n составляют группу относительно умножения операторов. Эта группа в дальнейшем обозначается через H_n.

Смысл операторов состоит в возможности применения их к булевым функциям.

Булевой функцией n аргументов $F(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n) = F(x)$ называется функция от переменного вектора x, принимающая значения 0 или 1.

В дальнейшем слово функция будет означать булевая функция.

Применение оператора к функции или умножение функции на оператор определяется равенством

$$F(x) \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} = F(a \cdot x \oplus \alpha).$$

Пример.

$$f(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)\cdot\begin{pmatrix}0110\\3412\end{pmatrix}=f(\xi_3\xi_4{}'\xi_1{}'\xi_2).$$

Функция $F(x)$ называется **инвариантной** к оператору h, если

$$F(x)\cdot h=F(x).$$

Вопрос о том, как найти все функции, инвариантные к данному оператору, будет решен в следующем параграфе.

§ 2. СОПОСТАВЛЕННЫЕ ПОДСТАНОВКИ И ИНВАРИАНТНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Исследуем вопрос об инвариантности функций к данному оператору. Назовем **характерными векторами** данной функции те векторы, на которых функция принимает значение 1. Каждый вектор можно рассматривать как двоичную запись некоторого натурального числа. Числа соответствующие характерным векторам будем называть **характерными числами** данной функции.

Известно, что функция однозначно определяется набором ее характерных чисел. Функцию n аргументов, характерными числами которой являются $m_1m_2\ldots m_r$ и только они, будем обозначать через $F^n_{m_1m_2\ldots m_r}$.

Пример. F^3_{035} обозначает функцию, которая значение 1 принимает на векторах (000), (011) и (101).

Посмотрим, что происходит с характерными числами, если применить к данной функции $F(x)$ оператор $h=\begin{pmatrix}\alpha\\a\end{pmatrix}$. Если γ является характерным вектором для функции $F(x)\cdot h$, то из определения умножения функции на вектор видно, что вектор $\overline{\gamma}=a\cdot\gamma\oplus\alpha$ будет характерным вектором для $F(x)$. Обратно, если $\overline{\gamma}$ — характерный вектор для $F(x)$, то $\gamma=a^{-1}(\overline{\gamma}\oplus\alpha)$ — характерный вектор для функции $F(x)\cdot h$.

Определим **умножение вектора γ на оператор** $h=\begin{pmatrix}\alpha\\a\end{pmatrix}$ равенством

$$\gamma\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\a\end{pmatrix}=a^{-1}\cdot(\gamma\oplus\alpha).$$

Так же определим **умножение на вектор натурального числа**, меньшего чем 2^n и записанного в виде вектора длины n (по основанию 2) Тогда может быть доказана

Теорема 1. Характерные числа функции $F(x)\cdot h$ получаются из характерных чисел функции $F(x)$ умножением их на оператор h:

$$F^n_{m_1m_2\ldots m_r}\cdot h=F^n_{m_1\cdot h\quad m_2\cdot h\ldots m_n\cdot h}\,.$$

Если сопоставить каждому натуральному числу $m(0\leqslant m<2^n)$ число $m\cdot h$, то получается взаимно однозначное отображение множества чисел $0,1\ldots 2^n-1$ на себя, т. е. подстановка 2^n-го порядка. Подстановка

$$s(h)=\begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & 2^n-1\\ m_0 & m_1 & \ldots & m_{2^n-1}\end{pmatrix}$$

называется **сопоставленной подстановкой оператора** h, если $m_i=i\cdot h$ $(i=0,1,\ldots,2^n-1)$.

Можно показать, что сопоставленные подстановки всех операторов длины n образуют группу относительно умножения подстановок. Эта группа изоморфна группе H_n. Таким образом получается представление группы H_n при помощи некоторой подгруппы симметрической группы S_{2^n} подстановок 2^n-го порядка.

Отметим без доказательства некоторые свойства сопоставленных подстановок.

Теорема 2. Если

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 2^n-1 \\ m_0 & m_1 & \dots & m_{2^n-1} \end{pmatrix}$$

ξ — сопоставленная подстановка некоторого оператора

$$h = \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \\ a_1 a_2 \dots a_n \end{pmatrix},$$

то

1. двоичная запись числа m_0 совпадает с верхней строкой оператора h^{-1},

2. имеет место равенство

$$m_{2^k} - m_0 = (-1)^{\alpha_{n-k}} \cdot 2^{n-a_{n-k}} \quad (k = 0, 1, \dots n-1).$$

Теорема 3. Небходимым и достаточным условием для того, чтобы подстановка

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 2^n-1 \\ m_0 & m_1 & \dots & m_{2^n-1} \end{pmatrix}$$

была сопоставленной подстановкой некоторого оператора, является выполнение равенств

$$m_i + m_{2^k-i-1} = m_0 + m_{2^k-1}$$

для всех $k = 1, 2, \dots, n$ и $i = 0, 1, \dots, 2^{k-1} - 1$.

Из этих теорем вытекают правила для нахождения сопоставленной подстановки данного оператора.

Для этого нужно:

1. Найти обратный оператор

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} \cdot \alpha \\ a^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. Найти m_0, как число, двоичная запись которого $a^{-1} \cdot \alpha$.

3. Найти числа m_{2^k}, двоичная запись которых получается из вектора $a^{-1} \cdot \alpha$ путем замены на противоположный того элемента, под которым в записи оператора h^{-1} стоит число $n-k$.

4. Найти остальные m_i, пользуясь равенствами из теоремы 3.

Пример.

$$h = \begin{pmatrix} 011 \\ 312 \end{pmatrix}, \quad h^{-1} = \begin{pmatrix} 110 \\ 231 \end{pmatrix},$$

$$s(h) = \begin{pmatrix} 0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 6\,4\,2\,0\,7\,5\,3\,1 \end{pmatrix}.$$

Выясним теперь, какое отношение имеют сопоставленные подстановки к вопросу об инвариантности функций к данному оператору. Каждую подстановку можно записать в циклической форме, например, подстановка из предыдущего примера записывается так:

$$s(h) = (063)\,(147)\,(2)\,(5).$$

С другой стороны, для того, чтобы функция была инвариантна к данному оператору, необходимо и достаточно, чтобы оператор преобразовал множество характерных чисел этой функции в это же самое множество. Отсюда следует

Теорема 4. Для того, чтобы функция была инвариантна к оператору h, необходимо и достаточно, чтобы множество характерных чисел этой функции заполнило целые циклы в циклической записи $s(h)$.

Примеры. Функции F^3_{063}, F^3_{1247} и F^3_{25} инварианты к оператору

$$h=\begin{pmatrix}011\\312\end{pmatrix}$$

из предыдущего примера, а функции F^3_{03}, F^3_{125} и F^3_{1347} — не инварианты.

Из теоремы 4 следует правило для нахождения всех функций, инвариантных к данному оператору h. Для этого нужно:

1. Найти сопоставленную подстановку $s(h)$ и записать ее в циклической форме.
2. Выписать всевозможные подмножества множества циклов $s(h)$ и написать функции, характерные числа которых составляют эти подмножества.

Пример. Находим все функции, инвариантные к оператору

$$h=\begin{pmatrix}101\\132\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$h^{-1}=\begin{pmatrix}110\\132\end{pmatrix},\quad s(h)=\begin{pmatrix}0\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\\6\,4\,7\,5\,2\,0\,3\,1\end{pmatrix}=(0635)(1427),$$

инвариантные функции — $F^3\equiv 0$, F^3_{0356}, F^3_{1247} и $F^3_{01234567}\equiv 1$.

Отметим, что число функций, инвариантных к оператору h, равно 2^p, где p — число циклов в циклической записи подстановки $s(h)$.

§ 3. ПОДОБИЕ ОПЕРАТОРОВ

Выведенное выше правило для нахождения функций, инвариантных к данному оператору, неудобно для применения при больших n потому, что требуется написать сопоставленную подстановку порядка 2^p. Если нужно найти не самих функций, инвариантных к данному оператору, а только их число, то процесс решения можно значительно упростить. В дальнейшем будем заниматься выводом более простого правила для определения числа функций, инвариантных к данному оператору. Для этого потребуется ввести несколько новых понятий.

Если циклическая запись подстановки s содержит

m_1 циклов длины l_1,
m_2 — „ — l_2,
. . . .
m_k циклов длины l_k,

то символ

$$c[s]=m_1(l_1)+m_2(l_2)+\ldots+m_k(l_k)=\sum_{i=1}^{k}m_i(l_i)$$

называется *структурой циклов* подстановки s.

Структуры циклов двух подстановок считаются равными, если они отличаются только порядком слагаемых.

Пример. Если

$$s=\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\1\,4\,3\,5\,2\end{pmatrix}=(1)\,(245)\,(3),$$

то $c[s]=2(1)+1(3)$.

Введем действия сложения и умножения структур циклов следующим образом

а) $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i(l_i)+\sum\limits_{i=1}^{k}\overline{m}_i(l_i)=\sum\limits_{i=1}^{k}(m_i+\overline{m}_i)(l_i)$,

б) $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i(l_i)\cdot\sum\limits_{j=1}^{\overline{k}}\overline{m}_j(\overline{l}_j)=\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{\overline{k}}\frac{m_i l_i \overline{m}_j \overline{l}_j}{[l_i \overline{l}_j]}([l_i\overline{l}_j])$,

причем через $[l_i\ \overline{l}_j]$ обозначается наименьшее общее кратное чисел l_i и $\overline{l}_j$.

Пример. Если $s_1=(1)\,(2)\,(34)$ и $s_2=(23)\,(145)$, то

$$c[s_1]=2(1)+1(2),\ c[s_2]=1(2)+1(3),$$

$$c[s_1]+c[s_2]=2(1)+2(2)+1(3),$$

$$c[s_1]\cdot c[s_2]=\frac{2\cdot1\cdot1\cdot2}{2}(2)+\frac{1\cdot2\cdot1\cdot2}{2}(2)+\frac{2\cdot1\cdot1\cdot3}{3}(3)+\frac{1\cdot2\cdot1\cdot3}{6}(6)=$$
$$=2(2)+2(2)+2(3)+1(6)=4(2)+2(3)+1(6).$$

Смысл этих, пока что формально введенных действий выяснится в последующем.

Теперь нам понадобятся некоторые сведения из теории групп. Обозначим через G какую-нибудь группу (с мультипликативно записываемой операцией), а через $g_1, g_2 \ldots$ элементы этой группы.

Элементы g_1 и g_2 называются подобными, если существует элемент g_3 такой, что $g_3^{-1}\cdot g_1\cdot g_3=g_2$. Подобие обозначается: $g_1\sim g_2$.

Отметим без доказательства следующие факты из теории групп.

Теорема 5. Каждая группа распадается на классы подобных элементов.

Теорема 6. Если G — конечная группа порядка N, а $k(g)$ и $l(g)$ — числа элементов соответственно коммутативных с g и подобных g, то

$$k(g)\,l(g)=N.$$

Относительно симметрической группы S_n имеет место следующая

Теорема 7. Необходимым и достаточным условием подобия двух подстановок S_n является равенство их структур циклов.

Теорему легко доказать исходя из определений.

Чтобы сформулировать и доказать аналогичное условие для подобия операторов в группе H_n, введем еще некоторые понятия.

Если заменить перестановку в нижней строке записи оператора на соответствующую подстановку, то получается запись оператора в трех строках. Символ $\begin{pmatrix}\alpha\\b\\a\end{pmatrix}$, где α — вектор и a, b — перестановки, называется трехрядной записью оператора $\begin{pmatrix}b^{-1}\cdot\alpha\\b^{-1}\cdot a\end{pmatrix}$.

Легко доказать следующие свойства трехрядной записи.

Теорема 8.

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ b\\ a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\cdot\alpha\\ c\cdot b\\ c\cdot a\end{pmatrix}.$$

Следствие. Для каждого оператора можно найти трехрядную запись с наперед заданной второй (или третьей) строкой.

Теорема 9.

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ b\\ a\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha\\ a\\ b\end{pmatrix}.$$

Теорема 10.

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ a\\ b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\oplus\beta\\ a\\ c\end{pmatrix}.$$

Если в трехрядной записи оператора подстановку, которую образуют две нижние строки, написать в циклической форме, то получается еще одна запись оператора. Символ

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}\,\alpha_{12}\ldots\alpha_{1j_1}\ldots\alpha_{k1}\alpha_{k2}\ldots\alpha_{kj_k}\\ (a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1j_1})\ldots(a_{k1}a_{k2}\ldots a_{kj_k})\end{bmatrix}$$

называется циклической записью оператора $\begin{pmatrix}\alpha\\ a\end{pmatrix}$, если нижняя строка этого символа — циклическая запись подстановки $\begin{pmatrix}a_0\\ a\end{pmatrix}$, а в верхней строке над каждым числом нижней строки стоит то же число, что в обычной записи.

Пример.

$$\begin{pmatrix}1\,1\,0\,0\,1\\ 3\,4\,1\,5\,2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}01 & 110\\ (13) & (245)\end{bmatrix}.$$

Большое значение для дальнейшего имеют следующие две теоремы.

Теорема 11. В циклической записи операторов структуры циклов нижних строк подобных операторов равны.

Теорема 12. Структуры циклов сопоставленных подстановок подобных операторов равны.

Обе теоремы дают необходимые условия для подобия операторов, однако ни одно из этих условий не является достаточным. Чтобы формулировать условие, которое явится необходимым и достаточным, нужно ввести еще несколько понятий.

Цикл в нижней строке циклической записи оператора называется четным или нечетным в зависимости от четности числа единиц в верхней строке над этим циклом.

Если нижняя строка циклической записи оператора h содержит

m_1 четных и k_1 нечетных циклов длины l_1,
m_2 „ „ k_2 „ „ „ l_2,
. . . .
m_r четных и k_r нечетных циклов длины l_r,

то символ

$$p[h]=m_1(l_1)+k_1[l_1]+m_2(l_2)+k_2[l_2]+\ldots+m_r(l_r)+k_r[l_r]=$$
$$=\sum_{i=1}^{r}m_i(l_i)+k_i[l_i].$$

называется структурой четности оператора h.

Две структуры четности считаются одинаковыми, если они отличаются только порядком слагаемых.

Пример. Операторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,3\,2\,5\,4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 01 & 00 \\ (1) & (23) & (45) \end{bmatrix}$$

и

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,1 \\ 5\,4\,3\,2\,1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 01 & 1 \\ (15) & (24) & (3) \end{bmatrix}$$

имеют одинаковые структуры четности

$$p[h_1] = p[h_2] = 1[1] + 1\,(2) + 1[2].$$

Так же, как для структур циклов можно определить сложение структур четности равенством

$$\sum_{i=1}^{r} m_i(l_i) + k_i[l_i] + \sum_{i=1}^{r} \overline{m}_i(l_i) + \overline{k}_i[l_i] = \sum_{i=1}^{r} (m_i + \overline{m}_i)(l_i) + (k_i + \overline{k}_i)[l_i].$$

Умножение структур четности не вводится.

Теперь можно доказать основную теорему о подобии операторов.

Теорема 13. Необходимым и достаточным условием подобия операторов является равенство их структур четности.

Доказательство. а) Необходимость. Пусть $h_2 = h_3^{-1} \cdot h_1 \cdot h_3$. Обозначим циклическую запись h_1 следующим образом:

$$h_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \\ (a_1) & (a_2) & \ldots & (a_k) \end{bmatrix}.$$

Здесь a_i обозначает целый цикл нижней строки, а α_i — соответствующий отрезок верхней строки. Тогда одна из трехрядных записей h_1 имеет следующий вид:

$$h_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_k \\ \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \ldots & \overline{a}_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix},$$

где $\overline{a}_i$ получается из a_i путем циклического сдвига на один элемент вправо. Найдем для h_3 такую трехрядную запись, средняя строка которой равна $a_1 a_2 \ldots a_k$. Пусть это будет

$$h_3 = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно теоремам 9 и 8,

$$h_3^{-1} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 & \overline{\beta}_2 & \ldots & \overline{\beta}_k \\ \overline{b}_1 & \overline{b}_2 & \ldots & \overline{b}_k \\ \overline{a}_1 & \overline{a}_2 & \ldots & \overline{a}_k \end{pmatrix}$$

(черта по-прежнему обозначает циклический сдвиг вправо). Выполняя умножение операторов по правилу теоремы 10, получаем

$$h_2 = h_3^{-1} \cdot h_1 \cdot h_3 = \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 \oplus \alpha_1 \oplus \beta_1 & \overline{\beta}_2 \oplus \alpha_2 \oplus \beta_2 & \ldots & \overline{\beta}_k \oplus \alpha_k \oplus \beta_k \\ \overline{b}_1 & \overline{b}_2 & \ldots & \overline{b}_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k \end{pmatrix},$$

или, возвращаясь к циклической записи,

$$h_2 = \begin{bmatrix} \overline{\beta}_1 \oplus \alpha_1 \oplus \beta_1 & \overline{\beta}_2 \oplus \alpha_2 \oplus \beta_2 & \ldots & \overline{\beta}_k \oplus \alpha_k \oplus \beta_k \\ (b_1) & (b_2) & \ldots & (b_k) \end{bmatrix}.$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 (1-y)^{\alpha-1}F_1(x_ny)dy=0$, чем и завершается докаательство.

Примечания.

1° При $\alpha=1$ теорема следует из теории равномерных почти-периодических функций [1]. Однако, рассмотренный там метод доказательства не применим при $\alpha \in (0, 1)$.

2° Рассмотренный в теореме класс функций содержит функции, которые не принадлежат множеству $(C, 0)$, напр., $f(t) \equiv \sin t$.

15. 11. 60.

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Б. М. Левитан.* Почти-периодические функции. М. 1953.
[2]. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л. 1948.
[3]. *Г. Харди.* Расходящиеся ряды. М. 1951.
[4]. *И. П. Натансон.* Теория функций вещественной переменной. М. 1957.

TEORĒMA INTEGRĀĻA SUMMĀCIJAI PĒC ČEZARO METODES

I. V. Kārkliņš, R. A. Kacs

(Kopsavilkums)

Rakstā aplūkota teorēma, kas dod pietiekamos nosacījumus integrāļa summācijai pēc Čezaro metodes.

Сравнивая полученную запись h_2 с циклической записью h_1 видно, что h_1 и h_2 имеют одинаковые структуры четности, что и требовалось доказать.

б) Достаточность. Пусть h_1 и h_2 имеют одинаковые структуры четности и

$$h_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_k \\ (a_1) & \ldots & (a_k) \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 & \ldots & \beta_k \\ (b_1) & \ldots & (b_k) \end{bmatrix}.$$

Составим оператор

$$h_3 = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \ldots & \gamma_k \\ a_1 & \ldots & a_k \\ b_1 & \ldots & b_k \end{pmatrix},$$

где γ_i находятся из условий

$$\bar{\gamma}_i \oplus \alpha_i \oplus \gamma_i = \beta_i \qquad (1)$$

Легко проверить, что

1) Равенство (1) всегда имеет два решения относительно γ_i (если только α_i и β_i имеют одинаковую четность, а это следует из условий теоремы).

2) $h_3^{-1} \cdot h_1 \cdot h_3 = h_2$.

Это и доказывает теорему.

Пример. Операторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 0111 \\ 1342 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 111 \\ (1) & (234) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 4213 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 010 \\ (2) & (143) \end{bmatrix}$$

подобны в H_4, так как $p[h_1] = p[h_2] = 1(1) + 1[3]$. Соответствующий h_3 равен

$$h_3 = \begin{pmatrix} 0110 \\ 1234 \\ 2143 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0110 \\ 2143 \end{pmatrix}.$$

Отметим без доказательства еще одну теорему, которая дает возможность найти число операторов, коммутативных с данным оператором в группе H_n (а вместе с теоремой 6 и число операторов, подобных данному).

Теорема 14. Если структура четности оператора h равна

$$p[h] = \sum_{i=1}^{r} m_i(l_i) + k_i[l_i],$$

то число операторов, коммутативных с h, равно

$$k(h) = \prod_{i=1}^{r} m_i! k_i! (2l_i)^{m_i + k_i}.$$

Пример. Подсчитаем число операторов группы H_{10}, подобных оператору

$$h = \begin{pmatrix} 1000\ 110\ 1\ 0\ 0 \\ 5634\ 128\ 710\ 9 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$h = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 10 & 00 & 0 & 0 \\ (1\,5) & (2\,6) & (7\,8) & (9\,10) & (3) & (4) \end{bmatrix},$$

$$c[h] = 2(1) + 2(2) + 2[2], \quad k(h) = 2! \cdot 2^2 \cdot 2! \cdot 2! \cdot 4^4 = 512,$$

$$l(h) = \frac{2^{10} \cdot 10!}{512} = 7\,257\,600.$$

§ 4. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ

До сих пор мы имели дело с операторами фиксированной длины n. Введем теперь новое действие над операторами, в общем случае, разных длин.

Прямым произведением операторов

$$h_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \\ a_1 a_2 \dots a_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad h_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \\ b_1 b_2 \dots b_m \end{pmatrix}$$

называется оператор длины $n+m$

$$h_1 \times h_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n & \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \\ a_1 a_2 \dots a_n & b_1+n & b_2+n & \dots & b_m+n \end{pmatrix}.$$

Пример.

$$\begin{pmatrix} 01 \\ 21 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 101 \\ 312 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 01101 \\ 21534 \end{pmatrix}.$$

Приведем ряд теорем, которые легко доказываются исходя из определений.

Теорема 15. (Ассоциативность прямого произведения)

$$(h_1 \times h_2) \times h_3 = h_1 \times (h_2 \times h_3).$$

Теорема 16. Структура циклов нижней строки и структура четности оператора $h_1 \times h_2$ равны суммам соответствующих структур множителей.

Теорема 17. Операторы $h_1 \times h_2$ и $h_2 \times h_1$ имеют одинаковые структуры четности.

Следствие. Класс подобных операторов, которому принадлежит прямое произведение $h_1 \times h_2$, однозначно определяется классами, которым принадлежат сомножители. Иными словами, можно говорить о прямом произведении классов подобных операторов.

Теорема 18. Структура циклов сопоставленной подстановки прямого произведения операторов равна произведению структур циклов сопоставленных подстановок сомножителей:

$$c[s(h_1 \times h_2)] = c[s(h_1)] \cdot c[s(h_2)].$$

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму:

Лемма. Пусть $t \cdot h_1 = \bar{t}$ и $u \cdot h_2 = \bar{u}$, где

$$h_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \\ a_1 a_2 \dots a_n \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \\ b_1 b_2 \dots b_m \end{pmatrix},$$

а t, u — натуральные числа, $t < 2^n$, $u < 2^m$. Тогда $(2^m \cdot t + u) \cdot (h_1 \times h_2) = 2^m \bar{t} + \bar{u}$.

Доказательство. Пусть $(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = (c_1 c_2 \dots c_n)$ и $(b_1 b_2 \dots b_m)^{-1} = (d_1 d_2 \dots d_m)$. Тогда, очевидно, $(a_1 \dots a_n b_1 + n \dots b_m + n)^{-1} = (c_1 \dots c_n d_1 + n \dots d_m + n)$. Если двоичными записями чисел t и u являются, соответственно, $(t_1 t_2 \dots t_n)$ и $(u_1 u_2 \dots u_m)$, то умножение на $h_1 \times h_2$ дает

$$(t_1 \dots t_n u_1 \dots u_m) \cdot (h_1 \times h_2) = (t_{c_1} \oplus \alpha_{c_1} \dots t_{c_n} \oplus \alpha_{c_n} u_{d_1} \oplus \beta_{d_1} \dots u_{d_m} \oplus \beta_{d_m}).$$

Но это является двоичной записью числа

$$2^m (t \cdot h_1) + u \cdot h_2 = 2^m \bar{t} + \bar{u},$$

что и требовалось доказать.

Переходим к доказательству теоремы. Допустим, что $s(h_1)$ содержит цикл $(c_1 c_2 \ldots c_{l_i})$ и $s(h_2)$ содержит цикл $(\bar{c}_1 \bar{c}_2 \ldots \bar{c}_{\bar{l}_j})$. Это значит, что

$$c_k \cdot h_1 = c_{l_i(k,\,1)}$$

и

$$\bar{c}_{\bar{k}} \cdot h_2 = \bar{c}_{\bar{l}_j(\bar{k},\,1)},$$

где $l(k,\,u)$ означает сумму k и u по модулю l. Тогда по лемме

$$(c_k \cdot 2^n + \bar{c}_{\bar{k}}) \cdot (h_1 \times h_2) = c_{l_i(k,\,1)} \cdot 2^n + \bar{c}_{\bar{l}_j(\bar{k},\,1)}.$$

Многократное умножение на $h_1 \times h_2$ дает

$$(c_k \cdot 2^n + \bar{c}_{\bar{k}}) \cdot (h_1 \times h_2)^t = c_{l_i(k,t)} \cdot 2^n + \bar{c}_{\bar{l}_j(\bar{k},\,t)}.$$

Если длину цикла подстановки $s(h_1 \times h_2)$, содержащего $c_k 2^n + \bar{c}_{\bar{k}}$ обозначить через u, то очевидно u является наименьшим натуральным числом, для которого

$$l_i(k,\,u) = k \text{ и } \bar{l}_j(\bar{k},\,u) = \bar{k},$$

т. е. $u = [l_i,\,\bar{l}_j]$. Так как чисел вида $c_k 2^n + \bar{c}_{\bar{k}}$ всего $l_i\,\bar{l}_j$, то они входят в $\frac{l_i\,\bar{l}_j}{[l_i\,\bar{l}_j]}$ циклов длины $[l_i\,\bar{l}_j]$. Комбинируя таким образом каждый цикл подстановки $s(h_1)$ с каждым циклом $s(h_2)$, получаем следующую структуру циклов

$$c[s(h_1 \times h_2)] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\bar{k}} \frac{m_i\, l_i\, \bar{m}_j\, \bar{l}_j}{[l_i\, \bar{l}_j]}\,([l_i\;\; l_j])$$

при предположении, что

$$c[s(h_1)] = \sum_{i=1}^{k} m_i(l_i) \text{ и } c[s(h_2)] = \sum_{j=1}^{\bar{k}} \bar{m}_j(\bar{l}_j).$$

Согласно определению произведения структур циклов это и доказывает теорему.

П р и м е р. Найдем структуру циклов сопоставленной подстановки оператора

$$h = \begin{pmatrix} 100\,110 \\ 311\,465 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$h = h_1 \times h_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 312 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 110 \\ 132 \end{pmatrix},$$

$$s(h_1) = \begin{pmatrix} 01234567 \\ 13570246 \end{pmatrix} = (013764)(25), \quad s(h_2) = \begin{pmatrix} 01234567 \\ 57461302 \end{pmatrix} =$$

$$= (0536)(1724), \quad c[s(h_1)] = 1(2) + 1(6), \quad c[s(h_2)] = 2(4),$$

$$c[s(h)] = c[s(h_1)] \cdot c[s(h_2)] = \frac{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4}{4}(4) + \frac{1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4}{12}(12) = 4(4) + 4(12).$$

§ 5. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Предыдущий пример показал, как упрощается нахождение структуры циклов сопоставленной подстановки оператора, если этот оператор разложить на множители в смысле прямого произведения. Однако такое разложение возможно далеко не для всех операторов.

Дело улучшается, если вместо отдельного оператора рассматривать целый класс подобных операторов. Из теоремы 12 следует, что все операторы одного класса имеют одинаковые структуры циклов сопоставленных подстановок.

С другой стороны мы знаем, (следствие из теорем 15—17), что можно говорить о прямом произведении классов подобных операторов. Так как класс подобных операторов полностью определяется структурой четности любого своего представителя (теорема 13), то согласно теореме 16 задача разложения на множители класса подобных операторов сводится к разложению на слагаемые соответствующей структуры четности. В конце этого процесса разложения очевидно получаются такие классы операторов, структура четности которых содержит только один цикл.

Классы подобных операторов, которым соответствуют структуры четности

$$1(m) \text{ или } 1[m],$$

называются соответственно классами *четных* или *нечетных основных операторов* длины m. Эти классы обозначим, соответственно, через P_m и Q_m.

Имеет место, таким образом,

Теорема 19. Каждый класс подобных операторов можно представить единственным образом (с точностью до расположения сомножителей) в виде прямого произведения классов основных операторов.

Пример. Класс операторов, подобных оператору

$$h = \begin{pmatrix} 011000111 \\ 142359876 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 101 & 0 & 10 & 11 \\ (1) & (234) & (5) & (69) & (78) \end{bmatrix},$$

имеет вид $P_1 \times P_1 \times P_2 \times Q_2 \times P_3$, так как структура четности h равна

$$p[h] = 2(1) + 1(2) + 1[2] + 1(3).$$

В дальнейшем мы главным образом будем заниматься вопросом о нахождении структур циклов сопоставленных подстановок для классов основных операторов. Так как эти структуры равны для всех операторов данного класса, то достаточно рассматривать по одному представителю из каждого класса.

Операторы

$$p_m = \begin{pmatrix} 00\ldots 00 \\ 23\ldots m1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad q_m = \begin{pmatrix} 00\ldots 01 \\ 23\ldots m1 \end{pmatrix}$$

называются соответственно *четным* и *нечетным основными операторами* длины m.

Очевидно $p_m \in P_m$ и $q_m \in Q_m$ т. е. каждый класс основных операторов содержит ровно один основной оператор.

Утверждение теоремы 19 теперь можно выразить так:

Теорема 19^a. Для каждого оператора существует одно и только одно (с точностью до расположения сомножителей) с ним подобное прямое произведение основных операторов.

Отметим некоторые свойства основных операторов.

Теорема 20. Порядок оператора p_m в группе H_m равен m (т. е. $p_m^m = h_0$ и $p_m^k \neq h_0$, если $0 < k < m$).

Теорема 20[a]. Порядок оператора q_m в группе H_m равен $2m$.

Теорема 21. Длины всех циклов сопоставленных подстановок нечетных основных операторов q_m — числа четные.

Теорема 22. Подстановка $s(p_m)$ содержит по крайней мере один цикл длины m (например, цикл, содержащий число 1).

Теорема 22[a]. Подстановка $s(q_m)$ содержит по крайней мере один цикл длины $2m$ (например, цикл, содержащий число 0).

Справедливость этих утверждений можно установить прямой проверкой.

Следствие 1. Длина наибольшего цикла $s(p_m)$ равна m, длины остальных циклов — делители числа m.

Следствие 1[a]. Длина наибольшего цикла $s(q_m)$ равна $2m$, длины остальных циклов — четные числа, делители числа $2m$.

Обозначим через $\varrho(m)$ число циклов длины m подстановки $s(p_m)$, а через $\mu(m)$ — число циклов длины $2m$ подстановки $s(q_m)$. Из теорем 22 и 22[a] следует, что $\varrho(m) > 0$ и $\mu(m) > 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 23. Если k — делитель числа m, то подстановка $s(p_m)$ содержит ровно $\varrho(k)$ циклов длины k.

Доказательство. Допустим, что $s(p_m)$ содержит цикл длины k и в этом цикле входит число c с двоичной записью $(c_1c_2 \ldots c_m)$. Тогда k — наименьшее натуральное число, для которого

$$(c_1c_2 \ldots c_m) \cdot p_m^k = (c_1c_2 \ldots c_m),$$

а, так как

$$(c_1c_2 \ldots c_m) \cdot p_m^k = (c_{m-k+1} \ldots c_m c_1 \ldots c_{m-k}),$$

то k — наименьшее натуральное число, для которого

$$\begin{gathered} c_1 = c_{m-k+1}, \\ c_2 = c_{m-k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_k = c_m, \\ c_{k+1} = c_1, \\ c_{k+2} = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ c_m = c_{m-k}, \end{gathered}$$

или, так как k — делитель m, то

$$\begin{gathered} c_1 = c_{k+1} = c_{2k+1} = \ldots = c_{m-k+1}, \\ c_2 = c_{k+2} = c_{2k+2} = \ldots = c_{m-k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_k = c_{2k} = c_{3k} = \ldots = c_m. \end{gathered}$$

Мы видим, что цифры в двоичной записи числа c периодически повторяются с периодом k, причем k — наименьший возможный период (в противном случае длина цикла была бы меньше k).

Рассмотрим теперь тот цикл подстановки $s(p_k)$, который содержит число $\bar{c}$ с двоичной записью $(c_1c_2 \ldots c_k)$. Длина этого цикла равна k.

так как в противном случае в записи $(c_1c_2\ldots c_k)$ можно было бы найти период меньше k.

Таким образом каждому числу c, которое содержится в цикле длины k подстановки $s(p_m)$, можно сопоставить число $\bar{c}$, которое содержится в цикле длины k подстановки $s(p_k)$, причем легко видеть, что это соответствие — взаимно однозначное.

Из этого следует, что $s(p_m)$ и $s(p_k)$ содержат одинаковое число циклов длины k, что и требовалось доказать.

Аналогично, хотя и немного сложнее, доказывается

Теорема 23[a]. Подстановка $s(q_m)$ содержит циклы длины $2k$ тогда и только тогда, когда частное $\frac{m}{k}$ — целое нечетное число. В этом случае число циклов длины $2k$ подстановки $s(q_m)$ равно $\mu(k)$.

Из теорем 23 и 23[a] легко вывести рекуррентные соотношения для определения чисел $\rho(m)$ и $\mu(m)$, если считать известными числа $\rho(k)$ и $\mu(k)$ для всех $k<m$. Действительно, пусть $k_1=1$, k_2, ... k_r — все натуральные делители числа m (кроме самого m). Так как порядок подстановки $s(q_m)$ равен 2^m, то из теоремы 23 следует

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\,\rho(k_i)+m\rho(m)=2^m,$$

или

$$\rho(m)=\frac{2^m-\sum_{i=1}^{r}k_i\,\rho(k_i)}{2m}. \tag{1}$$

Точно так же получается аналогичное соотношение для $\mu(m)$

$$\mu(m)=\frac{2^m-\sum_{i=1}^{r}2k_i\,\mu(k_i)}{2m}, \tag{2}$$

где $k_i=\frac{m}{l_i}$ $(i=1,2\ldots r)$, а $l_1, l_2,\ldots l_r$ — все отличное от 1 нечетные натуральные делители числа m.

Пользуясь формулами (1) и (2) можно составить следующие таблицы для количества циклов подстановок $s(p_m)$ и $s(q_m)$ в зависимости от длины циклов:

а) Для $s(p_m)$

длины циклов

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ..
1	2									
2	2	1								
3	2		2							
4	2	1		3						
5	2				6					
6	2	1	2			9				
7	2						18			
8	2	1		3				30		
9	2		2						56	
10	2	1			6					99
...										

в) Для $s(q_m)$

m	длины циклов 2	4	6	8	10	12	14	16	18	20 ...
1	1									
2		1								
3	1		1							
4				2						
5	1				3					
6		1				5				
7	1						9			
8								16		
9	1		1						28	
10		1								51
...										

Примеры.

$$c[s(p_6)] = 2(1) + 1(2) + 2(3) + 9(6),$$
$$c[s(q_9)] = 1(2) + 1(6) + 28(18).$$

§ 6. ПРАВИЛО ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЧИСЛА ИНВАРИАНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Посмотрим, как применить вышеизложенную теорию для решения задачи, поставленной в начале § 3 — как найти число функций $I(h)$, инвариантных к данному оператору h без нахождения сопоставленной подстановки $s(h)$. Из всего предыдущего можно извлечь следующий алгорифм:

1. Найти циклическую запись оператора h.
2. Найти структуру четности $p[h]$.
3. Написать прямое произведение основных операторов, подобное h (теорема 19[a]).
4. Найти структуры циклов сопоставленных подстановок основных операторов, входящих в это произведение (таблицы в конце § 5).
5. Найти структуру циклов сопоставленной подстановки прямого произведения основных операторов (теорема 18). Согласно теореме 12 это будет и структура циклов $c[s(h)]$ сопоставленной подстановки данного оператора.
6. Из $c[s(h)]$ найти число циклов p подстановки $s(h)$. Тогда искомое число функций, инвариантных к оператору h, равно $I(h) = 2^p$.

Пример. Найти число функций, инвариантных к оператору

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 10 & 12 & 7 & 1 & 11 & 3 & 4 & 2 & 5 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. $h = \left[\begin{matrix} 1\;0\;0\;1\;0\;0 & 0\;0\;1 & 1\;1\;1 \\ (1\;10\;6\;3\;7\;4) & (2\;12\;8) & (5\;11\;9) \end{matrix}\right].$

2. $p[h] = 1(6) + 2[3].$

3. $h \sim p_6 \times q_3 \times q_3.$

4. $c[s(p_6)] = 2(1) + 1(2) + 2(3) + 9(6),$
   $c[s(q_3)] = 1(2) + 1(6).$

5. $c[s(q_3 \times q_3)] = \frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{2}(2) + \frac{1\cdot 2\cdot 1\cdot 6}{6}(6) + \frac{1\cdot 6\cdot 1\cdot 2}{6}(6) +$

$+ \frac{1\cdot 6\cdot 1\cdot 6}{6}(6) = 2(2) + 10(6),$

$c[s(h) = c[s(p_6 \times q_3 \times q_3)] = \frac{2\cdot 1\cdot 2\cdot 2}{2}(2) + \frac{1\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2}(2) +$

$+ \frac{2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}{6}(6) + \frac{9\cdot 6\cdot 2\cdot 2}{6}(6) + \frac{2\cdot 1\cdot 10\cdot 6}{6}(6) + \frac{1\cdot 2\cdot 10\cdot 6}{6}(6) +$

$+ \frac{2\cdot 3\cdot 10\cdot 6}{6}(6) + \frac{9\cdot 6\cdot 10\cdot 6}{6}(6) = 8(2) + 680(6).$

6. $p = 8 + 680 = 688,\ I(h) = 2^{688}.$

5. 12. 60.

Кафедра математического анализа

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *С. В. Яблонский.* Функциональные построения в к-значной логике. Труды мат инст. им. В. А. Стеклова, 1958, т. 51, стр. 5—142.

[2]. *R. L. Ashenhurst.* The application of counting techniques, Proc. Assoc. Computing Machinery, Pittsburgh Pa., 1952, 293—305.

PĀRSAUKŠANAS OPERĀTORI

J. Sedols

(Kopsavilkums)

Darbā ir apskatīti pārsaukšanas operātori, kas dotajai Bula funkcijai piekārto citu Bula funkciju, kura ir viena tipa ar doto [1]. Izmantojot pārsaukšanas operātoru grupas H_n reprezentāciju ar 2^n — tās kārtas simetriskās grupas S_{2^n} apakšgrupu, ir atrisināts jautājums par dotajam pārsaukšanas operātoram invarianto Bula funkciju skaita atrašanu.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

О СХЕМНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Л. Н. Толкачева

Всякая булева функция имеет соответствующую двухполюсную контактную схему [1], при чем одну и ту же функцию можно реализовать различными схемами. Наиболее интересными являются минимальные схемы. Минимальная схема для данной функции — это схема, которая содержит наименьшее число контактов по сравнению со всеми другими схемами, реализующими ту же функцию. По техническим соображениям удобнее реализовать булевы функции схемами, состоящими только из замыкающих реле (то есть содержание только замыкающие, положительные контакты).

Как известно [1], всякую монотонную булеву функцию можно реализовать в классе схем из замыкающих контактов. Но такая реализация не всегда является наилучшей с точки зрения числа контактов в схеме

Обозначим через A класс схем из всех — замыкающих и размыкающих контактов, а через B — класс схем из одних замыкающих контактов. Пусть дана некоторая функция f. Величина

$$\lambda(f) = \frac{L^{+}(f)}{L(f)}$$

характеризует относительную сложность схемы, где $L^{+}(f)$ — число контактов в минимальной схеме из класса B, реализующей данную функцию f, а $L(f)$ — число контактов в минимальной схеме из класса A. Ниже будут приведены последовательности булевых функций, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(f_n) \geqslant 1$$

(f_n зависит от n переменных).

Последовательность монотонных булевых функций f_{2n+2}, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(f_{2n+2}) \geqslant {}^3/_2,$$

построена Н. А. Карповой [2]. Эта последовательность не единственная. Как будет показано, существуют такие последовательности монотонных булевых функций, для реализации которых в классе схем A требуется во сколько угодно раз меньше контактов, чем в классе схем B.

Докажем существование последовательности монотонных булевых функций, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(f_{3n+3}) \geqslant {}^5/_3.$$

Лемма 1. Минимальная схема из класса B для монотонной функции $f(a, b, c, x, y, z) = axy + bcz + abc + abx + acy$ содержит 8 контактов, причем или контакт a содержится в схеме трижды, или каждый из контактов b и c — дважды.

1. Предположим, что реле b и c содержат только по одному контакту. Докажем, что в этом случае контакт a встречается в схеме по крайней мере трижды. Допустим обратное, то есть что контакт a встречается не более, чем два раза.

При реализации функции в схеме необходимо должна содержаться цепь abc (рис. 1_1). Кроме того, должны быть реализованы цепи acy abx, axy и bcz. Так как по предположению контакты b и c встречаются в схеме только один раз, то цепь bcz может быть реализована единственным способом (рис. 1_2). Если предеположить, что контакт a входит только один раз, то цепь abx реализуется только способом, указанным на рис. 1_3.

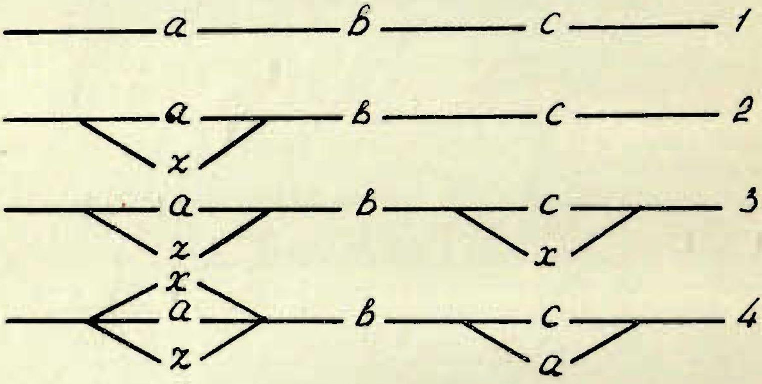

Рис. $1_{1,2,3,4}$

Если же контакт a входит дважды в схему, то цепь abx реализуется способом, указанным на рис. 1_4. Но оба способа непригодны, ибо в первом случае (рис. 1_3) одновременно реализуется конъюнкция bxz, во втором (рис. 1_4) — конъюнкция ab которые не входят в данную функцию. Действительно, если бы конъюнкция bxz входила в функцию

$$f = axy + bcz + abc + abx + acy,$$

то при $x = 1$, $z = 1$, $b = 1$, $a = 0$, $c = 0$, $y = 0$ эта функция должна была бы равняться единице. Но очевидно, что в этом случае она равна нулю. Аналогично можно показать, что конъюнкция ab не входит в данную функцию. Следовательно, при наших предположениях не может быть реализована цепь abx, которая необходимо должна содержаться в схеме. Поэтому не может быть реализована и сама функция. Остается предположить, что если контакты b и c встречаются в схеме только один раз, то контакт a содержится трижды.

2. Пусть контакт a встречается в схеме только один раз. Докажем, что каждый из контактов b и c встречается по крайней мере дважды

Предположим обратное, то есть что один из контактов b и c содержится в схеме только один раз. В схеме необходимо должна содержаться цепь abc (рис. 2_1). Кроме того должны быть реализованы цепи *bcz*, *abx*, *acy* и *axy*. Если предположить, что контакт *b* встречается только один раз, то цепь *abx* реализуется единственным способом (рис. 2_2).

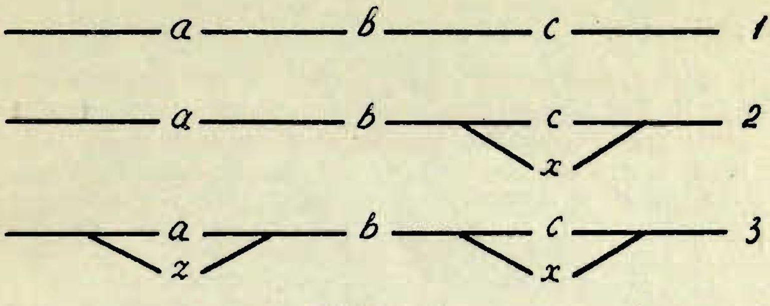

Рис. $2_{1,2,3}$

Очевидно, что тогда реализовать *bcz* можно только так, как указано на рис. 2_3. Но в этом случае реализуется конъюнкция *bzx*, которая не входит в данную функцию.

Если же предположить, что контакт *c* встречается в схеме только один раз, то цепь *acy* можно реализовать единственным способом (рис. 3_1.)

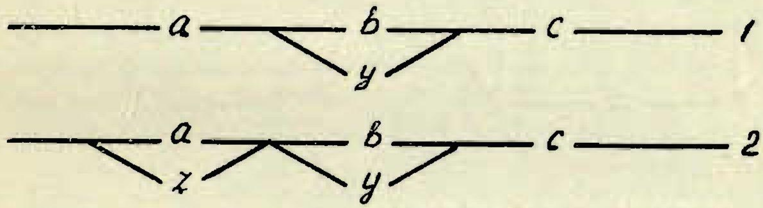

Рис. $3_{1,2}$

Затем реализуем цепь *bcz*, что, очевидно, можно сделать только так, как показано на рис. 3_2. Но в этом случае реализуется конъюнкция *cyz*, которая не входит в функцию. Следовательно, при этих предположениях нельзя реализовать цепь *bcz*, то есть и саму функцию. Остается предположить, что в схему более чем один раз входит каждый из контактов *b* и *c*.

Отсюда следует, что минимальная схема содержит по крайней мере 8 контактов. Такая схема может быть построена, как указано на рис. 4 и 5.

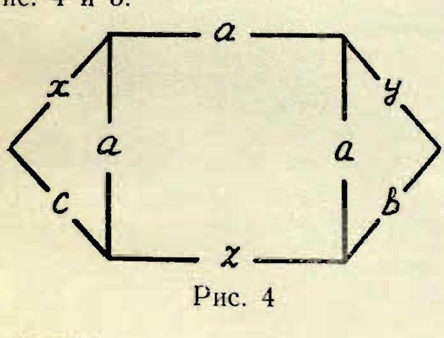

Рис. 4

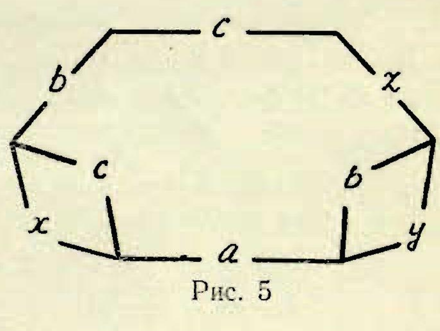

Рис. 5

Следовательно, минимальная схема содержит точно 8 контактов, чем лемма и доказана.

Лемма II. Пусть $X=\sum_{i=1}^{n} x_i$, $Y=\sum_{i=1}^{n} y_i$, $Z=\sum_{i=1}^{n} z_i$. Тогда минимальная схема из класса B для

$$f_{3n+3}(X, Y, Z, x, y, z) = Xxy + YZz + XYZ + XYx + XZy$$

содержит $5n+3$ контакта.

Сравним f_{3n+3} с функцией, указанной в лемме I. Здесь в роли переменных a, b и c выступают X, Y, Z. Для минимальной реализации каждого из X, Y и Z требуется n контактов. Применим результат леммы I к функции f_{3n+3} и получим, что в минимальной схеме:

а) или X встречается трижды, а Y и Z — по одному разу. Тогда минимальная схема содержит $3+n+n+3n=5n+3$ контакта (рис. 6).

б) или содержится только один X, а Y и Z встречаются по два раза. Но и в этом случае минимальная схема состоит из $3+n+2n\cdot 2=5n+$ $+3$ контактов (рис. 7).

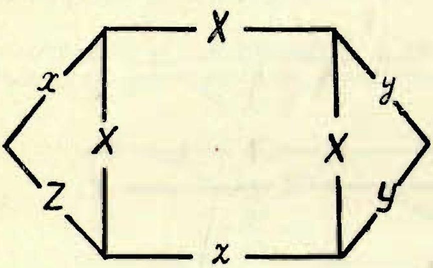

Рис. 6

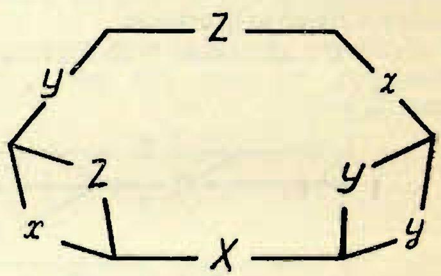

Рис. 7

Теорема 1. Существует последовательность монотонных булевых функций f_{3n+3}, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(f_{3n+3}) \geqslant {}^5/_3 .$$

Такую последовательность представляют собой функции f_{3n+3}, построенные в предыдущей лемме. Как было установлено в лемме 2, для реализации таких функций в классе B требуется не менее $5n+3$ контактов, то есть $L^{+}(f_{3n+3})=5n+3$. В классе схем A можно построить схемы, реализующие те же функции с помощью $3n+5$ контактов (рис. 8), то есть $L(f_{3n+3}) \leqslant 3n+5$.

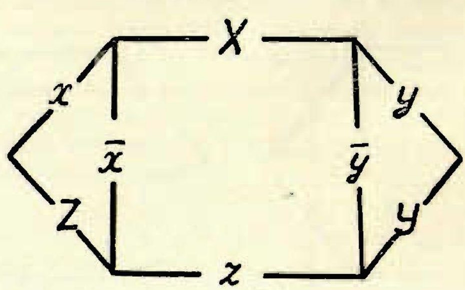

рис. 8

Таким образом

$$\lambda(f_{3n+3}) = \frac{L^+(f_{3n+3})}{L\ \ (f_{3n+3})} \geqslant \frac{5n+3}{3n+5},$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(f_{3n+3}) \geqslant {}^5/_3.$$

Теорема 2. Для любого натурального m существует последовательность монотонных булевых функций F_k (F_k зависит от $k = 3^m\ (n + 1) + 3^{m-1} + 3^{m-2} + \cdots + 3$ аргументов), для которой

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(F_k) \geqslant ({}^5/_3)^m.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого натурального m можно построить последовательность монотонных функций F_k, где $\kappa = 3^m\ (n + 1) + 3^{m-1} + 3^{m-2} + \ldots + 3$, для которой

$$L^+(F_k) = 5^m n + 3\cdot 5^{m-1} + 3\cdot 5^{m-2} + \ldots + 3\cdot 5 + 3,$$

и указать реализации этих функций в классе A с помощью

$$l(F_k) = 3^m n + 5\cdot 3^{m-1} + 5\cdot 3^{m-2} + \ldots + 5\cdot 3 + 5 \text{ контактов.}$$

Действительно, тогда

$$L(F_k) \leqslant l(F_k),$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(F_k) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{5^m n + 3\cdot 5^{m-1} + \ldots + 3\cdot 5 + 3}{3^m n + 5\cdot 3^{m-1} + \ldots + 5\cdot 3 + 5} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^m + \frac{1}{n}\cdot 3\cdot 5^{m-1} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot 3\cdot 5 + \frac{1}{n}\cdot 3}{3^m + \frac{1}{n}\cdot 5\cdot 3^{m-1} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot 5\cdot 3 + \frac{1}{n}\cdot 3} = \left(\frac{5}{3}\right)^m.$$

Последовательность функций F_k будем строить при помощи индукции по m.

Если $m = 1$, то такая последовательность существует по теореме 1. Предположим, что для $m = m_0$ существует такая последовательность монотонных функций G_{k_0}, что

$$k_0 = 3^{m_0}\ (n + 1) + 3^{m_0-1} + \ldots + 3^2 + 3,$$

$$L^+(G_{k_0}) = 5^{m_0} n + 3\cdot 5^{m_0-1} + \ldots + 3\cdot 5 + 5,$$

и имеются реализации этих функций в классе A с помощью $l(G_{k_0}) = 3^{m_0} n + 5\cdot 3^{m_0-1} + \ldots + 5\cdot 3 + 5$ контактов.

Покажем, что тогда для $m = m_0 + 1$ можно построить такую последовательность монотонных функций F_k, для которой

$$k = 3^{m_0+1}\ (n + 1) + 3^{m_0} + 3^{m_0-1} + \ldots + 3,$$

$$L^+(F_k) = 5^{m_0+1} n + 3\cdot 5^{m_0} + 3\cdot 5^{m_0-1} + \ldots + 3\cdot 5 + 5,$$

и имеются реализации этих функций в классе A с помощью

$$l(F_k) = 3^{m_0+1}\cdot n + 5\cdot 3^{m_0} + 5\cdot 3^{m_0-1} + \ldots + 5\cdot 3 + 5$$

контактов.

Введем обозначения:

$$G_{k_0}^1 = G_{k_0}(u_1, u_2, \ldots, u_{k_0}),$$
$$G_{k_0}^2 = G_{k_0}(v_1, v_2, \ldots, v_{k_0}),$$
$$G_{k_0}^3 = G_{k_0}(w_1, w_2, \ldots, w_{k_0}),$$

и строим последовательность F_k следующим образом:

$$F_k = G_{k_0}^1 uv + G_{k_0}^2 G_{k_0}^3 w + G_{k_0}^1 G_{k_0}^2 G_{k_0}^3 + G_{k_0}^1 G_{k_0}^2 u + G_{k_0}^1 G_{k_0}^3 v.$$

Число аргументов, от которых зависит F_k, подсчитывается непосредственно:

$$3[3^{m_0}(n+1) + 3^{m_0-1} + \ldots + 3] + 3 = 3^{m_0+1}(n+1) + 3^{m_0} + \\ + \ldots + 3^2 + 3 = k.$$

Затем, как следует из лемм II, $L^+(F_k) = 5t + 3$, где $t = L^+(G_{k_0})$. Наконец, каждая функция F_k может быть реализована в классе $\dot{A}$ с помощью $l(F_k) = 3\tau + 5$ контактов, где $\tau = l(G_{k_0})$.

Способ построения схемы ясен из рис. 8.

Итак,

$$L^+(F_k) = 5^{m_0+1} \cdot n + 3 \cdot 5^{m_0} + \ldots + 3 \cdot 5 + 3,$$
$$l(F_k) = 3^{m_0+1} \cdot n + 5 \cdot 3^{m_0} + \ldots + 5 \cdot 3 + 5.$$

Этим завершается доказательство теоремы, если учесть, что функции F_k монотонны, как суперпозиции монотонных функций [1].

В заключение хочу выразить благодарность доценту В. К. Детловсу за помощь, оказанную при написании работы.

Кафедра математического анализа

5. 12. 60.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *С. В. Яблонский.* Функциональные построения в k-значной логике. Труды математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 1958, т. 51, стр. 5—142.

[2]. *Н. А. Карпова.* О контактных схемах для монотонных функций. ДАН СССР, 1958, т. 123, № 1, стр. 25—27.

PAR MONOTONU BULA FUNKCIJU REALIZĀCIJU AR SHĒMU

L. Tolkačova

(Kopsavilkums)

Patvaļīgam naturālam m konstruēta monotonu Bula funkciju virkne, kuras funkciju minimālā realizācija ar shēmu, kas nesatur atvienojošus kontaktus, robežgadījumā prasa m reizes vairāk kontaktu nekā minimālā realizācija ar savienojošiem un atvienojošiem kontaktiem.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

О ДЕЛИМОСТИ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ НА ЛИНЕЙНУЮ В ЛИНЕЙНОМ БЕЗРАЗМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ш. Д. Трупин

В книге *Г. Б. Гуревича* [1] приводится теорема о делимости симметрической билинейной функции на линейную. Эту теорему предлагается обобщить на случай симметрической полилинейной функции любой валентности. Для доказательства же предлагается использовать координатный метод.

В настоящей статье доказывается, что в общем случае для симметрической полилинейной функции от произвольного числа аргументов теорема остается справедливой при переходе к безразмерному линейному пространству. Для этой цели используются методы, которые даны в работах А. М. Лопщица [2] и автора данной статьи [3, 4]. При доказательстве теоремы о делимости симметрической полилинейной функции на линейную мы, конечно, не будем пользоваться координатным методом.

Мы докажем, что в линейном безразмерном пространстве справедлива следующая

Теорема 1. 1) *Если для n-линейной симметрической функции* $\varphi x_1 x_2 \ldots x_n$ *справедливо тождество*

$$\varphi \overset{n}{x \ldots x} = 0 \tag{1}$$

для всех векторов x, для которых

$$\alpha x = 0, \tag{2}$$

где αx *— линейная функция, не равная тождественно нулю, то функция* $\varphi x_1 x_2 \ldots x_n$ *имеет следующий вид:*

$$\varphi x_1 x_2 \ldots x_n = \sigma \cdot (\alpha x_1 \cdot \beta x_2 \ldots x_n + \alpha x_2 \cdot \beta x_3 \ldots x_n x_1 + \ldots + \alpha x_n \cdot \beta x_1 x_2 \ldots x_{n-1}), \tag{3}$$

где $\beta x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ — *некоторая (n — 1)-линейная симметрическая функция*, а σ — *определенное число*

2) *Если же для любого вектора* x_1, *для которого удовлетворяется* (2) *и для произвольных значений векторов* $x_2, x_3, \ldots, x_n$ *имеет место равенство*

$$\varphi x_1 x_2 \ldots x_n = 0, \tag{4}$$

то

$$\varphi x_1 x_2 \ldots x_n = \sigma' \cdot \alpha x_1 \cdot \alpha x_2 \ldots \alpha x_n, \tag{5}$$

где σ' некоторое число. *

1. Докажем сначала теорему для случая $n=2$, т. е. для билинейной симметрической функции, а затем, методом индукции, можно будет ее доказать и для симметрической функции от любого числа аргументов n, если только предположить, что она справедлива для симметрической функции от $n-1$ аргументов.

1) Для случая $n=2$ введем обозначения:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y,$$

и допустим, что справедливо тождество

$$\varphi xx = 0 \tag{1'}$$

для всех векторов x, для которых выполняется условие (2). Тогда, на основании теоремы о делимости полилинейной функции на линейную (см. [2]), мы можем написать тождество:

$$\varphi xx = \alpha x \cdot \beta x, \tag{6}$$

где βx — некоторая другая линейная функция. Произведя над этим тождеством поляризацию $x \to y$, мы получим

$$\varphi xy + \varphi yx = 2 \cdot \varphi xy = \alpha x \cdot \beta y + \alpha y \cdot \beta x, \text{ **}$$

откуда

$$\varphi xy = \frac{1}{2!} (\alpha x \cdot \beta y + \alpha y \cdot \beta x), \tag{7}$$

что и требовалось доказать.

2) Если же для любого вектора x, для которого имеет место условие (2) и при любых значениях вектора y, выполняется тождество

$$\varphi xy = 0, \tag{4'}$$

то, положив в (4') $y = x$, мы увидим, что удовлетворяется также условие (1'), а потому, по доказанному, функция φxy выражается равенством (7).

В силу условий (4') и (2), мы получим тогда из (7) тождество:

$$\alpha y \cdot \beta x = 0.$$

Так как, по условию, функция αy не равна тождественно нулю, то отсюда следует, что

$$\beta x = 0. \tag{8}$$

Таким образом, видим, что условие (2) влечет за собою условие (8), а потому функции αx и βx должны быть связаны зависимостью:

$$\beta x = \sigma' \cdot \alpha x, \tag{9}$$

где σ' — некоторое число. Подставив в (7) вместо βx и βy их выражения из равенства (9), получим:

---

* В настоящей статье приняты те же обозначения, что и в работах [3, 4].

** При поляризации мы использовали то обстоятельство, что φxy — симметрическая функция.

$$\varphi xy = \sigma' \cdot \alpha x \cdot \alpha y,$$

что и требовалось доказать.

2. Теперь теорему можно доказать методом индукции для общего случая любого числа аргументов. Это приводит, однако, к очень громоздким выкладкам. Поэтому, для упрощения записей, ограничимся доказательством того, что теорема будет справедлива при $n = 5$, если только сделать предположение, что она верна для $n = 4$. При этом введем следующие обозначения:

$$x_1 = x, \; x_2 = y, \; x_3 = z, \; x_4 = u, \; x_5 = v.$$

Итак, предположим сначала, что если для симметрической квадрилинейной функции $\varphi xyzu$ имеет место тождество

$$\varphi xxxx = 0 \tag{1''}$$

для всех векторов x, удовлетворяющих условию (2), то эта функция имеет вид:

$$\varphi xyzu = \sigma \cdot (\alpha x \cdot \beta yzu + \alpha y \cdot \beta zux + \alpha z \cdot \beta uxy + \alpha u \cdot \beta xyz), \tag{10}$$

где βxyz — некоторая трилинейная симметрическая функция. Докажем тогда, что если для какой-либо 5-линейной симметрической функции $\varphi xyzuv$ * выполняется тождество

$$\varphi xxxxx = 0 \tag{1'''}$$

для всех векторов x, для которых имеет место (2), то

$$\varphi xyzuv = \sigma_1 \cdot (\alpha x \cdot \beta yzuv + \alpha y \cdot \beta zuvx + \alpha z \cdot \beta uvxy + \alpha u \cdot \beta vxyz + \alpha v \cdot \beta xyzu), \tag{11}$$

где $\beta xyzu$ — какая-то квадрилинейная и притом **симметрическая** функция, а σ_1 — определенное число.

В самом деле, если тождество (1''') выполняется для всех векторов x, для которых $\alpha x = 0$, то мы можем написать тождество:

$$\varphi xxxxx = \alpha x \cdot \gamma xxxx \tag{12}$$

где $\gamma xyzu$ — некоторая квадрилинейная функция.

Выполним над этим тождеством, последовательно, четыре поляризации $x \to y$, $x \to z$, $x \to u$, $x \to v$, в результате чего получим дальнейшие тождества, которые нас и приведут к доказательству справедливости нашего утверждения. При этом будем учитывать, что функция $\varphi xyzuv$ — симметрическая.

При первой поляризации $x \to y$ получим:

$$5 \cdot \varphi xxxxy = \alpha y \cdot \gamma xxxx + \alpha x \cdot (\gamma xxxy + \gamma xxyx + \gamma xyxx + \gamma yxxx). \tag{13}$$

Введем обозначение:

$$\delta xxxy = \gamma xxxy + \gamma xxyx + \gamma xyxx + \gamma yxxx. \tag{14}$$

Над этим тождеством также выполним две последовательные поляризации $x \to z$, $x \to u$, в результате чего нами будет построена симметрическая функция $\beta xyzu$.

Действительно, из (14), путем поляризации $x \to z$, получим:

* Мы позволим себе эту 5-линейную функцию также обозначить символом φ

$$\delta xxzy + \delta xzxy + \delta zxxy = \gamma xxzy + \gamma xzxy + \gamma zxxy + \gamma xxyz +$$
$$+ \gamma xzyx + \gamma zxyx + \gamma xyxz + \gamma xyzx + \gamma zyxx + \gamma yxxz + \gamma yxzx + \gamma yzxx. \quad (15)$$

Отсюда, путем поляризации $x \to u$, получается:

$$\beta xyzu = \delta xuzy + \delta uxzy + \delta xzuy + \delta uzxy + \delta zxuy + \delta zuxy = \gamma xuzy +$$
$$+ \gamma uxzy + \gamma xzuy + \gamma uzxy + \gamma zxuy + \gamma zuxy + \gamma xuyz + \gamma uxyz + \gamma xzyu +$$
$$+ \gamma uzyx + \gamma zxyu + \gamma zuyx + \gamma xyuz + \gamma uyxz + \gamma xyzu + \gamma uyzx + \gamma zyxu +$$
$$+ \gamma zyux + \gamma yxuz + \gamma yuxz + \gamma yxzu + \gamma yuzx + \gamma yzxu + \gamma yzux, \quad (16)$$

откуда следует, что функция $\beta xyzu$, в самом деле, симметрическая. Эту функцию мы и используем в дальнейших преобразованиях.

При второй поляризации тождества (13), т. е. при поляризации $x \to z$, мы получим из (13):

$$5 \cdot 4 \cdot \varphi xxxyz = \alpha y \cdot (\gamma xxxz + \gamma xxzx + \gamma xzxx + \gamma zxxx) + \alpha z (\gamma xxxy + \gamma xxyx +$$
$$+ \gamma xyxx + \gamma yxxx) + \alpha x \cdot (\gamma xxzy + \gamma xzxy + \gamma zxxy + \gamma xxyz + \gamma xzyx +$$
$$+ \gamma zxyx + \gamma xyxz + \gamma xyzx + \gamma zyxx + \gamma yxxz + \gamma yxzx + \gamma yzxx). \quad (17)$$

В силу (14) и (15), мы можем писать:

$$5 \cdot 4 \cdot \varphi xxxyz = \alpha y \cdot \delta xxxz + \alpha z \cdot \delta xxxy + \alpha x \cdot (\delta xxzy + \delta xzxy + \delta zxxy). \quad (18)$$

Путем поляризации $x \to u$, мы получим отсюда:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \varphi xxyzu = \alpha y \cdot (\delta xxuz + \delta xuxz + \delta uxxz) +$$
$$+ \alpha z \cdot (\delta xxuy + \delta xuxy + \delta uxxy) + \alpha u \cdot (\delta xxzy + \delta xzxy + \delta zxxy) +$$
$$+ \alpha x \cdot (\delta xuzy + \delta uxzy + \delta xzuy + \delta uzxy + \delta zxuy + \delta zuxy).$$

Согласно (16), этому тождеству можно придать вид:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \varphi xxyzu = \alpha y \cdot (\delta xxuz + \delta xuxz + \delta uxxz) +$$
$$+ \alpha z \cdot (\delta xxuy + \delta xuxy + \delta uxxy) + \alpha u \cdot (\delta xxzy + \delta xzxy + \delta zxxy) +$$
$$+ \alpha x \cdot \beta xyzu. \quad (19)$$

Произведя, наконец, последнюю поляризацию $x \to v$, мы получим из (19):

$$5! \cdot \varphi xyzuv = \alpha y \cdot (\delta xvuz + \delta vxuz + \delta xuvz + \delta vuxz + \delta uxvz + \delta uvxz) +$$
$$\alpha z \cdot (\delta xvuy + \delta vxuy + \delta xuvy + \delta vuxy + \delta uxvy + \delta uvxy) +$$
$$+ \alpha u \cdot (\delta xvzy + \delta vxzy + \delta xzvy + \delta vzxy + \delta zxvy + \delta zvxy) +$$
$$+ \alpha v \cdot \beta xyzu + \alpha x \cdot \beta vyzu.$$

Отсюда, в силу (16), имеем

$$5! \cdot \varphi xyzuv = \alpha y \cdot \beta zuvx + \alpha z \cdot \beta uvxy + \alpha u \cdot \beta vxyz + \alpha v \cdot \beta xyzu + \alpha x \cdot \beta vyzu,$$

т. е.

$$\varphi xyzuv = \frac{1}{5!} (\alpha x \cdot \beta yzuv + \alpha y \cdot \beta zuvx + \alpha z \cdot \beta uvxy + \alpha u \cdot \beta vxyz + \alpha v \cdot \beta xyzu),$$

что и требовалось доказать. Обратим еще раз внимание на то, что квадрилинейная функция $\beta xyzu$ симметрична согласно условию (16) и что трилинейная функция βxyz симметрична по предложению.

Таким образом, нами доказано, что тождество (3) справедливо при $n=5$, если только сделать предположение, что оно имеет место при $n=4$.

Теперь докажем справедливость второй части нашей теоремы. Предположим, следовательно, что для каждой симметрической квадрилинейной функции $\varphi xyzu$, для которой выполняется тождество

$$\varphi xyzu = 0 \tag{20}$$

при любых значениях векторов y, z, u и для всех тех векторов x, для которых выполняется условие (2), имеет место равенство

$$\varphi xyzu = \sigma' \cdot \alpha x \cdot \alpha y \cdot \alpha z \cdot \alpha u, \tag{21}$$

где σ' — некоторое число. Докажем тогда, что если для симметрической 5-линейной функции $\varphi xyzuv$ выполняется тождество

$$\varphi xyzuv = 0, \tag{22}$$

если только вектор x удовлетворяет условию (2) при любых значениях векторов y, z, u, v, то выполняется также и тождество:

$$\varphi xyzuv = \sigma'' \cdot \alpha x \cdot \alpha y \cdot \alpha z \cdot \alpha u \cdot \alpha v, \tag{23}$$

где σ'' — определенное число.

Действительно, если тождество (22) имеет место для любых значений векторов y, z, u, v, то мы можем их выбрать так, чтобы

$$y = z = u = v = x,$$

где x удовлетворяет условию (2) и тогда тождество

$$\varphi xxxxx = 0$$

выполняется для всех векторов x, для которых $\alpha x = 0$. Тогда, как нами уже доказано, функция $\varphi xyzuv$ должна выражаться равенством (11).

Выберем теперь векторы x, y, z, u, v так, чтобы

$$\alpha x = \alpha y = \alpha z = \alpha u = 0, \quad \alpha v \neq 0, \tag{24}$$

что возможно, т. к., согласно условию, функция αx не исчезает тождественно. Подставив эти значения в равенство (11), получим, в силу (22) и (24):

$$\beta xyzu = 0$$

для всех векторов x, y, z, u, для которых выполняется условие (24). Так как $\beta xyzu$ — симметрическая функция, то, по предположению индукции (21),

$$\beta xyzu = \sigma' \cdot \alpha x \cdot \alpha y \cdot \alpha z \cdot \alpha u.$$

Подставив это значение в (11), получим:

$$\varphi xyzuv = \sigma'' \cdot \alpha x \cdot \alpha y \cdot \alpha z \cdot \alpha u \cdot \alpha v,$$

где

$$\sigma'' = \sigma_1 \cdot \sigma'.$$

Тем самым полностью доказана справедливость нашей теоремы для $n=5$, если предположить, что она верна для $n=4$.

В общем случае, при произвольной величине числа аргументов n, доказательство проводится аналогично.

3. Теперь мы можем утверждать, что в безразмерном линейном пространстве справедлива следующая

Теорема 2. *Для того, чтобы симметрическая n-линейная функция $\varphi x_1 x_2 \ldots x_n$ делилась на линейную функцию αx_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varphi x_1 x_2 \ldots x_n = 0 \tag{4}$$

для всех тех векторов x_i, для которых выполняется условие

$$\alpha x_i = 0. \tag{25}$$

Действительно, если функция $\varphi x_1 x_2 \ldots x_n$ делится на αx_i, то

$$\varphi x_1 x_2 \ldots x_n = \alpha x_i \gamma x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_n,$$

где γ — некоторая $(n-1)$-линейная функция, и из условия (25) вытекает условие (4).

Обратно, если одновременно выполняется условия (4) и (25), то по теореме 1, имеет место тождество (5), следовательно, функция $\varphi x_1 x_2 \ldots x_n$ делится на линейную функцию αx_i.

10. 11. 60.

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Г. Б. Гуревич.* Основы теории алгебраических инвариантов. Гостехиздат, 1948.

[2]. *А. М. Лопшиц.* Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных безразмерных пространствах. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1948, вып. VI, 365—419.

[3]. *Ш. Д. Трупин.* К вопросу о делимости тензоров в линейных безразмерных пространствах. Ученые записки Рижского педагогического института, 1957, вып. IV, 59—83.

[4]. *Ш. Д. Трупин.* Об одном обобщении теорем о делимости полилинейных функций в линейном безразмерном пространстве. Ученые записки Латвийского государственного университета имени П. Стучки, 1959, т. XXVIII, вып. 4, 13—28.

PAR SIMETRISKAS POLILINEĀRAS FUNKCIJAS DALĀMĪBU AR LINEĀRU FUNKCIJU BEZDIMENSIJU LINEĀRĀ TELPĀ

Š. Trupins

(Kopsavilkums)

B. G. Gureviča grāmatā [1] formulēta teorēma par simetriskas bilineāras funkcijas dalamību ar lineāru funkciju un izteikts ierosinājums vispārināt šo teorēmu gadījumā, ja dota jebkura simetriska polilineāra funkcija.

Šajā rakstā noskaidrots, ka minētā vispārīgā teorēma par simetriskas polilineāras funkcijas dalāmību ar lineāru funkciju ir pareiza arī bezdimensiju lineārā telpā, un ka pierādījumam nav jāizmanto koordinātu metode. Pierādīta teorēma: ja n — lineāra simetriska funkcija $\varphi x_1 x_2 \ldots x_n$ un lineāra funkcija αx apmierina nosacījumus (1) un (2), tad pastāv sakarība (3). Ja bez tam, patvaļīgiem vektoriem $x_2, x_3, \ldots, x_n$ pastāv nosacījums (4), tad funkcijai $\varphi x_1 x_2 \ldots x_n$ ir veids (5).

Noslēgumā doti nepieciešami un pietiekami nosacījumi (4) un (25), lai simetriska polilineāra funkcija $\varphi x_1 x_2 \ldots x_n$ dalītos ar lineāru funkciju αx $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМ О ДЕЛИМОСТИ ПОЛИЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ В ЛИНЕЙНЫХ БЕЗРАЗМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ш. Д. Трупин

Задача о делимости полилинейной функции на линейную в линейном безразмерном пространстве была поставлена и решена в работе *А. М. Лопшица* [1]. В работе [2] автора настоящей статьи доказаны теоремы о делимости полилинейной функции на билинейную и линейную. Далее, в работе [3] даны некоторые обобщения этих теорем. Из них обратим внимание на следующую теорему:

Т е о р е м а 1.* *Для того, чтобы имело место тождество*

$$\sum_{i=1}^{n} \overset{m}{\omega}_i x \ldots x \cdot \alpha_i x = 0, \tag{1}$$

где $\overset{m}{\omega}_i x \ldots x$ *— функции от одного аргумента* x *соответственно подчиненные* m *— линейным функциям* $\omega_i x_1 x_2 \ldots x_m$, а $\alpha_i x$ *— линейно независимые линейные функции* $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *необходимо, чтобы каждая из функций* $\overset{m}{\omega}_j x \ldots x$ *была линейной комбинацией от функций* $\alpha_i x$, *т. е. чтобы выполнялись равенства:*

$$\overset{m}{\omega}_j x \ldots x = \sum_{i=1}^{n} \overset{m-1}{\sigma}_{ji} x \ldots x \cdot \alpha_i x.^{**} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

Естественно возникает вопрос о возможности дальнейшего обобщения этой теоремы. Целью настоящей статьи и является рассмотрение некоторых таких обобщений. Мы выясним, какие должны выполняться условия, чтобы имело место тождество более общего вида, чем то, которое упоминается в теореме 1, а именно, исследуем условия, при которых может выполняться тождество:

$$\sum_{i_1 \ldots i_r}^{n} \overset{m}{\omega}_{i_1 i_2 \ldots i_r} x \ldots x \cdot \alpha_{i_1} x \cdot \alpha_{i_2} x \ldots \alpha_{i_r} x = 0. \tag{3}$$

Мы докажем, что, также как и в предыдущей теореме, функции

* В настоящей статье используются обозначения, принятые в вышеупомянутых работах.

** Коэффициенты этой линейной комбинации вычисляются по формулам:

$$\overset{m-1}{\sigma}_{ji} x \ldots x = D_{xy_j} \overset{m}{\omega}_i x \ldots x = \overset{m}{\omega}_i y_j x \ldots + \overset{m}{\omega}_i x y_j x \ldots x + \ldots + \overset{m}{\omega}_i x \ldots x y_j, \tag{2'}$$

причем векторы y_j удовлетворяют условиям $\alpha_i y_j = -\delta_i^j$. [см. 3]).

$\overset{m}{\omega_{i_1 i_2 \ldots i_r}x \ldots x}$ должны представлять собой некоторые линейные комбинации от данных линейно независимых функций $\alpha_i x$.

1. Прежде чем приступить к исследованию наиболее общего случая, когда в тождестве (3) индексы r и m могут принимать произвольные значения, рассмотрим несколько частных случаев, которые и используем для доказательства общей теоремы. Положим сначала, что $m=1$, $r=2$ и докажем справедливость следующей теоремы:

Теорема 2. *Если линейные функции* $\omega_{ij}x$ *удовлетворяют тождеству*

$$\sum_{i,j}^{n} \omega_{ij}x \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j x = 0, \tag{4}$$

где $\alpha_i x$ — *линейно независимые линейные функции, то функции* $\omega_{(ij)} x$ *должны представлять собой линейные комбинации от функции* $\alpha_i x$:

$$\omega_{(ij)} x = \sum_{k=1}^{n} \pi_{ijk} \cdot \alpha_k x, \ (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

причем числа π_{ijk} *удовлетворяют условию*

$$\pi_{(ijk)} = 0. \tag{6}$$

Обратно, если для функций $\omega_{ij} x$ *и чисел* π_{ijk} *выполняются равенства* (5) *и* (6), *то выполняется также и тождество* (4).

Доказательство. Допустим, что имеет место тождество (4). Выполнив над ним поляризацию $x \to y$, получим:

$$\sum_{i,j}^{n} \omega_{ij}y \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j x + \sum_{i,j}^{n} \omega_{ij}x \cdot \alpha_i y \cdot \alpha_j x + \sum_{i,j}^{n} \omega_{ij} x \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j y = 0.$$

Подставив в это тождество вектор $y = y_k$, для которого

$$\alpha_i y_k = -\delta_i^k, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

будем иметь:

$$\sum_{i,j}^{n} \omega_{ij}y_k \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j x - \sum_{j}^{n} \omega_{kj}x \cdot \alpha_j x - \sum_{i}^{n} \omega_{ik}x \cdot \alpha_i x = 0,$$

или, изменив во второй сумме индекс суммирования,

$$\sum_{i,j}^{n} \omega_{ij}y_k \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j x - \sum_{i}^{n} (\omega_{ik}x + \omega_{ki}x) \cdot \alpha_i x = 0.$$

Введя обозначение

$$\omega_{ij}y_k = -2!\tau_{ijk}, \tag{7}$$

мы, далее, получим:

$$\sum_{i}^{n} \left\{ \sum_{j}^{n} \tau_{ijk} \cdot \alpha_j x + \omega_{(ik)} x \right\} \alpha_i x = 0. \tag{8}$$

Обозначив

$$\beta_{ik}x = \sum_j^n \tau_{ijk}\cdot\alpha_j x + \omega_{(ik)}x, \tag{9}$$

тождество (8) принимает вид:

$$\sum_i^n \beta_{ik}x\cdot\alpha_i x = 0. \tag{10}$$

Согласно теореме 1, функции $\beta_{ik}x$ должны быть линейно связаны с функциями $\alpha_i x$:

$$\beta_{ik}x = \sum_j^n \gamma_{ikj}\cdot\alpha_j x, \tag{11}$$

при этом, как доказано в работе [3], числа γ_{ikj} должны быть кососимметричны относительно индексов i и j т. е. относительно индексов суммирования в равенствах (9) и (10).

Сравнивая тождества (9) и (11), получим, в силу линейной независимости функций $\alpha_i x$,

$$\omega_{(ik)}x = \sum_j^n (\gamma_{ikj} - \tau_{ijk})\cdot\alpha_j x,$$

или

$$\omega_{(ik)}x = \sum_j^n \pi_{ijk}\cdot\alpha_j x,$$

где введено обозначение:

$$\pi_{ijk} = \gamma_{ijk} - \tau_{ijk}. \tag{12}$$

Таким образом, доказана первая часть теоремы. Остается только доказать, что числа π_{ijk} удовлетворяют условию (6). Для этой цели подставим в (11) вектор $x = y_l$, для которого $\alpha_j y_l = -\delta_j^l$. Тогда получим:

$$\beta_{ik}y_l = -\gamma_{ikl}.$$

С другой стороны, в силу (7), из (9) получается

$$\beta_{ik}y_l = -\tau_{ilk} - \tau_{ikl} - \tau_{kil}.$$

Следовательно, имеем

$$\gamma_{ikl} = \tau_{ilk} + \tau_{ikl} + \tau_{kil}, \tag{13}$$

или

$$\gamma_{(ikl)} = 3\cdot\tau_{(ikl)}. \tag{14}$$

Как указано выше, числа γ_{ikj} кососимметричны относительно первого и третьего индексов, т. е.

$$\gamma_{ikl} + \gamma_{lki} = 0.$$

Отсюда, в силу (13), имеем

$$\gamma_{ikl}+\gamma_{lki}=3!\,\tau_{(ikl)}.$$

Поэтому из (14) и (12) следует, что и

$$\pi_{(ijk)}=0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь нетрудно проверить, что если функции $\omega_{ij}x$ линейно связаны с данными функциями $\alpha_i x$ при помощи зависимостей (5), причем выполняется также условие (6), то имеет место тождество (4).

В самом деле, в силу (5) и (6), имеем:

$$\sum_{i,j}^{n}\omega_{ij}x\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x=\sum_{i,j}^{n}\omega_{(ij)}x\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x=\sum_{i,j,k}^{n}\pi_{ijk}\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x\cdot\alpha_k x=$$

$$=\sum_{i,j,k}^{n}\pi_{(ijk)}\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x\cdot\alpha_k x=0.$$

Теорема доказана полностью.

2. Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда в тождестве (3), попрежнему $m=1$, но индекс r может принимать произвольные значения. Докажем, что имеет место следующая

Теорема 3: *Если линейные функции $\omega_{i_1 i_2\ldots i_r}x$, где индексы $i_1, i_2\ldots i_r$ могут принимать независимо друг от друга любые из значений $1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют тождеству*

$$\sum_{i_1\ldots i_r}^{n}\omega_{i_1 i_2\ldots i_r}x\cdot\alpha_{i_1}x\cdot\alpha_{i_2}x\cdots\alpha_{i_r}x=0, \tag{15}$$

в котором $\alpha_s x$ — линейно независимые линейные функции ($s=1, 2, \ldots, n$), то функции $\omega_{(i_1 i_2\ldots i_r)}x$ должны быть линейно связаны с данными функциями $\alpha_s x$:

$$\omega_{(i_1 i_2\ldots i_r)}x=\sum_{s=1}^{n}\pi_{i_1 i_2\ldots i_r s}\cdot\alpha_s x, \tag{16}$$

причем числа $\pi_{i_1 i_2\ldots i_r s}$ удовлетворяют условию

$$\pi_{(i_1 i_2\ldots i_r s)}=0. \tag{17}$$

Доказательство. Чтобы показать возможность применения метода индукции, для сокращения выкладок, докажем, что если наше утверждение справедливо при $r=2$, то оно должно быть справедливо и при $r=3$. Аналогично можно доказать, что теорема верна для $r=k+1$, если доказано, что она верна при $r=k$.

При $r=2$ теорема верна, т. к. получается уже доказанная теорема 2. Поэтому проверим справедливость нашей теоремы при $r=3$.

Итак, пусть имеет место тождество

$$\sum_{i,j,k}^{n}\omega_{ijk}x\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x\cdot\alpha_k x=0. \tag{18}$$

Как и в предыдущей теореме, произведем над этим тождеством поляризацию $x\to y$ и подставим в полученное тождество вектор $y=y_s$ такой, что $\alpha_i y_s=-\delta_i^s$. Это приведет нас к тождеству:

$$\sum_{i,j,k}^{n} \beta_{ijks} \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_j x \cdot \alpha_k x - \sum_{i,k}^{n} (\omega_{sik} x + \omega_{isk} x + \omega_{iks} x) \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_k x = 0, \quad (18')$$

где

$$\beta_{ijks} = \omega_{ijk} y_s. \quad (19)$$

Тождество (18′) можно записать:

$$\sum_{i,k}^{n} \sigma_{iks} x \cdot \alpha_i x \cdot \alpha_k x = 0, \quad (20)$$

если положить

$$\sigma_{iks} x = \sum_{j}^{n} \beta_{ijks} \cdot \alpha_j x - (\omega_{sik} x + \omega_{isk} x + \omega_{iks} x). \quad (21)$$

В силу теоремы 2, мы из (20) заключаем, что

$$\sigma_{(ik)s} x = \sum_{j}^{n} \gamma_{ikjs} \cdot \alpha_j x, \quad (22)$$

причем для чисел γ_{ikjs} должно выполняться условие

$$\gamma_{(ikj)s} = 0.\,^{*} \quad (23)$$

Просимметрировав равенство (21) по индексам i, k, получим

$$\sigma_{(ik)s} x = \sum^{n} \beta_{(i|j|k)s} \cdot \alpha_j x - 3 \cdot \omega_{(iks)} x, \quad (24)$$

откуда, в силу (22), можем писать:

$$\omega_{(iks)} x = \sum_{j}^{n} \pi_{ikjs} \cdot \alpha_j x, \quad (25)$$

где

$$\pi_{ikjs} = \frac{1}{3} \left[\beta_{(i|j|k)s} - \gamma_{ikjs} \right]. \quad (26)$$

Тем самым доказано, что функции $\omega_{(iks)}\ x$ линейно связаны с данными функциями $\alpha_j x$.

Теперь докажем, что числа π_{ijks} удовлетворяют условию

$$\pi_{(ikjs)} = 0. \quad (27)$$

Для этой цели подставим в (24) вектор $x = y_p$, для которого $\alpha_i y_p = -\delta_i^p$. Тогда, в силу (19), получим

$$\sigma_{(ik)s} y_p = -\beta_{(i|p|k)s} - 3 \cdot \beta_{(iks)p}. \quad (28)$$

Кроме того, из (22) имеем:

$$\sigma_{(ik)s} y_p = -\gamma_{ikps}. \quad (29)$$

* Ср. с (6) и (4).

Сравнивая (28) и (29), можем писать:

$$\gamma_{ikps}=\beta_{(i|p|k)s}+3\cdot\beta_{(iks)p}, \tag{30}$$

откуда, путем симметрирования по индексам i, k, p, получим, в силу (23):

$$\gamma_{(ikp)s}=\beta_{(ikp)s}+\frac{1}{2!}\cdot 2\,[\beta_{(iks)p}+\beta_{(ips)k}+\beta_{(pks)i}]=$$
$$=4!\,\beta_{(ikps)}=0.$$

Теперь из (30) видим, что

$$\gamma_{(ikps)}=4\cdot\beta_{(ikps)}=0,$$

а потому из (26) следует справедливость равенства (27).

3. Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда в равенстве (3) оба индекса m и r имеют произвольные значения. Теперь сформулируем теорему в наиболее общем виде:

Теорема 4. *Если m — линейные функции $\omega_{i_1,i_2\ldots i_r}x_1x_2\ldots x_m$, где индексы $i_1, i_2, \ldots, i_r$ могут принимать независимо друг от друга любые из значений $1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют тождеству*

$$\sum_{i_1\ldots i_r}^{n}\overset{m}{\omega}_{i_1i_2\ldots i_r}x\ldots x\cdot\alpha_{i_1}x\cdot\alpha_{i_2}x\ldots\alpha_{i_r}x=0, \tag{3}$$

в котором $\alpha_s x$ — линейно независимые функции ($s=1, 2, \ldots, n$), то функции $\overset{m}{\omega}_{(i_1i_2\ldots i_r)}x\ldots x$ должны быть линейными комбинациями от данных функций $\alpha_s x$:

$$\overset{m}{\omega}_{(i_1i_2\ldots i_r)}x\ldots x=\sum_{s}^{n}\overset{m-1}{\varphi}_{i_1i_2\ldots i_rs}\cdot\alpha_s x, \tag{31}$$

где $\varphi_{i_1i_2\ldots i_rs}x_1x_2\ldots x_{m-1}$ — $(m-1)$ — линейные функции определенного вида.

Доказательство. Для краткости выкладок, ограничимся доказательством того, что теорема будет верна для $r=3$, если доказано, что она справедлива при $r=2$. Доказательство же теоремы, в наиболее общем виде, методом индукции, можно провести аналогично.

а) Положим сначала в (3) $r=2$ и рассмотрим тождество:

$$\sum_{i,j}^{n}\overset{m}{\omega}_{ij}x\ldots x\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x=0. \tag{32}$$

Выполнив над этим тождеством поляризацию $x\to y$ и подставив в полученное равенство вектор $y=y_k$, для которого $\alpha_i y_k=-\delta_i^k$, а также введя обозначение:

$$\overset{m-1}{\sigma}_{ijk}x\ldots x=D_{xy_k}\overset{m}{\omega}_{ij}x\ldots x=\overset{m}{\omega}_{ij}y_kx\ldots x+\overset{m}{\omega}_{ij}xy_kx\ldots x+\ldots+\overset{m}{\omega}_{ij}x\ldots xy_k,$$

мы придем к тождеству:

$$\sum_{i}^{n}\left\{\overset{m}{\omega}_{(ik)}x\ldots x-\frac{1}{2!}\sum_{j}^{n}\overset{m-1}{\sigma}_{ijk}x\ldots x\cdot\alpha_j x\right\}\cdot\alpha_i x=0.$$

Обозначив

$$\overset{m}{\beta}_{ik}x\ldots x=\overset{m}{\omega}_{(ik)}x\ldots x-\frac{1}{2!}\sum_{j}^{n}\overset{m-1}{\sigma}_{ijk}x\ldots x\cdot\alpha_j x, \tag{33}$$

предыдущее тождество принимает вид:

$$\sum_{i}^{n}\overset{m}{\beta}_{ik}x\ldots x\cdot\alpha_i x=0.$$

Б силу теоремы 1, мы должны иметь:

$$\overset{m}{\beta}_{ik}x\ldots x=\sum_{j}^{n}\overset{m-1}{\gamma}_{ijk}x\ldots x\cdot\alpha_j x. \tag{34}$$

Сравнивая (33) и (34), а также обозначив

$$\overset{m-1}{\varphi}_{ijk}x\ldots x=\frac{1}{2!}\cdot\overset{m-1}{\sigma}_{ijk}x\ldots x+\overset{m-1}{\gamma}_{ijk}x\ldots x,$$

мы убедимся в том, что

$$\overset{m}{\omega}_{(ik)}x\ldots x=\sum_{j}^{n}\overset{m-1}{\varphi}_{ijk}x\ldots x\cdot\alpha_j x, \tag{35}$$

что и требовалось доказать.

б) Теперь докажем, что тождество (3) справедливо и для $r=3$, т. е. когда имеем равенство:

$$\sum_{i,j,k}^{n}\overset{m}{\omega}_{ijk}x\ldots x\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x\cdot\alpha_k x=0. \tag{36}$$

Повторяя здесь тот же путь доказательства, что и в предыдущих случаях, а именно, выполнив над тождеством (36) поляризацию $x\to y$ и подставив в полученное равенство вектор $y=y_s$, для которого $\alpha_i y_s = -\delta_i^s$, получим:

$$\sum_{i,j}^{n}\left\{\overset{m}{\omega}_{sij}x\ldots x+\overset{m}{\omega}_{isj}x\ldots x+\overset{m}{\omega}_{ijs}x\ldots x-\sum_{k}^{n}\overset{m-1}{\sigma}_{ijks}x\ldots x\cdot\alpha_k x\right\}\alpha_i x\cdot\alpha_j\cdot x=0, \tag{37}$$

где

$$\overset{m-1}{\sigma}_{ijks}x\ldots x=D_{xy_s}\overset{m}{\omega}_{ijk}x\ldots x=\overset{m}{\omega}_{ijk}y_s x\ldots x+\overset{m}{\omega}_{ijk}xy_s x\ldots x+$$
$$+\ldots+\overset{m}{\omega}_{ijk}x\ldots xy_s.$$

Введя обозначение

$$\overset{m}{\beta}_{ijs}x\ldots x=\overset{m}{\omega}_{sij}x\ldots x+\overset{m}{\omega}_{isj}x\cdots x+\overset{m}{\omega}_{ijs}x\ldots x-\sum_{k}^{n}\overset{m-1}{\sigma}_{ijks}x\ldots x\cdot\alpha_k x, \tag{38}$$

тождество (37) принимает вид:

$$\sum_{i,j}^{n}\overset{m}{\beta}_{ijs}x\ldots x\cdot\alpha_i x\cdot\alpha_j x=0. \tag{39}$$

Так как для $r=2$ теорема доказана, то отсюда следует, что

$$\overset{m}{\beta}_{(ij)s}x\ldots x=\sum_{k}^{n}\overset{m-1}{\gamma}_{ijsk}x\ldots x\cdot\alpha_k x. \tag{40}$$

Просимметрировав (38) по индексам i, j, получим:

$$\overset{m}{\beta}_{(ij)s}x\ldots x=3\cdot\overset{m}{\omega}_{(ijs)}x\ldots x-\sum_{k}^{n}\overset{m-1}{\sigma}_{(ij)ks}x\ldots x\cdot\alpha_k x. \tag{41}$$

Теперь из (40) и (41) найдем, что

$$\overset{m}{\omega}_{(ijs)}x\ldots x=\sum_{k}^{n}\overset{m-1}{\varphi}_{ijks}x\ldots x\cdot\alpha_k x, \tag{42}$$

где

$$\overset{m-1}{\varphi}_{ijks}x\ldots x=\frac{1}{3}\left[\overset{m-1}{\sigma}_{(ij)ks}x\ldots x-\gamma_{ijsk}x\ldots x\right].$$

Тем самым мы убедились в том, что теорема верна при $r=3$, учитывая, что доказана ее справедливость при $r=2$. Аналогично, методом индукции, доказывается справедливость теоремы при произвольном значении индекса r.

4. Интересно отметить, что если просимметрировать по всем индексам коэффициенты линейной комбинации, входящие в правую часть равенства (31), то полученная функция, в свою очередь, также является линейной комбинацией от данных функций $\alpha_s x$:

$$\overset{m-1}{\varphi}_{(i_1i_2\ldots i_rs)}x\ldots x=\sum_{t}^{n}\overset{m-1}{\Theta}_{i_1i_2\ldots i_rst}x\ldots x\cdot\alpha_t x. \tag{43}$$

В самом деле, из тождеств (3) и (31) имеем:

$$\sum_{i_1\ldots i_r}^{n}\overset{m}{\omega}_{i_1i_2\ldots i_r}x\ldots x\cdot\alpha_{i_1}x\ldots\alpha_{i_r}x=\sum_{i_1\ldots i_r}^{n}\overset{m}{\omega}_{(i_1i_2\ldots i_r)}x\ldots x\cdot\alpha_{i_1}x\ldots\alpha_{i_r}x=$$

$$=\sum_{i_1\ldots i_rs}^{n}\overset{m-1}{\varphi}_{i_1\ldots i_rs}x\ldots x\cdot\alpha_{i_1}x\ldots\alpha_{i_2}x\cdot\alpha_s x=0.$$

Применяя к этому тождеству теорему 4, получим равенство (43).

Если же к тождеству (3) применить теорему 4, повторно, m раз, то мы придем, наконец, к такой системе чисел

$$\beta_{i_1i_2\ldots i_ri_r+1\ldots i_r+m},$$

для которых будет выполняться тождество

$$\sum_{i\ldots i_r+m}^{n}\beta_{i_1i_2\ldots i_r+m}\cdot\alpha_{i_1}x\cdot\alpha_{i_2}x\ldots\alpha_{i_r+m}x=0. \tag{44}$$

и очевидное условие

$$\beta_{(i_1 i_2 \ldots i_r+m)} = 0. \tag{45}$$

Таким образом, как частным случай, из нашей теоремы получается известное свойство ковариантного тензора в конечномерном линейном пространстве [Ср. 4].

10. 11. 60.

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *А. М. Лопшиц.* Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных безразмерных пространствах. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1948, вып. VI, 365—419.

[2]. *Ш. Д. Трупин.* К вопросу о делимости тензоров в линейных безразмерных пространствах. Ученые записки Рижского педагогического института, 1957, вып. IV, 59—83.

[3]. *Ш. Д. Трупин.* Об одном обобщении теорем о делимости полилинейной функции в линейном безразмерном пространстве. Ученые записки Латвийского государственного университета имени П. Стучки, 1959, том XXVIII, вып. 4, 13—28.

[4]. *Г. Б. Гуревич.* Основы теории алгебраических инвариантов. Гостехиздат, 1948.

DAŽI TEORĒMU VISPĀRINĀJUMI PAR POLILINĀRAS FUNKCIJAS DALĀMĪBU LINEĀRĀS BEZDIMENSIJU TELPĀS

Š. Trupins

(Kopsavilkums)

Raksta mērķis ir parādīt, ka teorēmas par polilineāras funkcijas dalāmību lineārās bezdimensiju telpās, kas ir apskatītas darbos [1, 2, 3], pielaiž tālākus vispārinājumus.

Rakstā pierādītā 4. teorēma noskaidro, ka nosacījums (31) ir nepieciešams, lai pastāvētu identitāte (3); teorēmas pierādīšanai izlietoti speciālgadījumi, kuri minēti 2. un 3. teorēmās. 4. teorēma ir to teorēmu vispārinājums, kas apskatītas autora darbā [3]. Noslēgumā noskaidrots, ka šī teorēma satur arī vispārinājumu par kovarianta tensora pazīstamo īpašību (44) un (45) lineārā telpā ar galīgu dimensiju skaitu.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ СРЕДНЕГО ИЗМЕНЕНИЯ ОБРАТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ БОЛЬШОЙ ПОЛУОСИ ОРБИТЫ КОМЕТЫ ВСЛЕДСТВИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ ПЛАНЕТ

К. А. Штейнс и М. П. Пудане

В теории диффузии почти параболических комет следует знать значение величины

$$D=\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\delta)\,\delta^2 d\delta\right]^{-1}=\left[\frac{1}{2}\overline{\delta^2}\right]^{-1}, \tag{1}$$

где $\varphi(\delta)d\delta$ есть вероятность того, что обратная величина большой полуоси a_1^{-1} в абсолютном движении при прохождении кометы через Солнечную систему изменяется на величину в пределах от δ до $\delta+d\delta$.

Оорт [1] предположил, что

$$\varphi(\delta)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\delta^2}. \tag{2}$$

В таком случае средние значения

$$\overline{|\delta|}=2\int_0^{\infty}\varphi(\delta)\,\delta d\delta=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \tag{3}$$

$$\overline{\delta^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\delta)\,\delta^2 d\delta=\frac{1}{2h^2}, \tag{4}$$

следовательно

$$\overline{\delta^2}=\frac{\pi}{2}\left(\overline{|\delta|}\right)^2. \tag{5}$$

Для определения $\overline{|\delta|}$ Оорт использовал вычисленные Фэйем [2] значения $\Delta\frac{1}{a_o}$ для 146 почти параболических комет. Возмущения обратных величин больших полуосей в относительном движении Фэйе вычислил для движения комет в интервале $v[-180°,0]$. Для определения $\overline{|\delta|}$ следует знать δ при движении комет в интервале $v[-180°, +180°]$. Оорт предположил, что значения δ соответствующие интервалам $v[-180°,0]$ и $v[0, +180°]$ независимы, следовательно

$$\overline{|\delta[v(-180°, +180°)]|}=\sqrt{2}\,\overline{|\delta[v(-180°,0)]|}, \tag{6}$$

причем

$$\Delta \frac{1}{a_o} = \delta + \overline{\Delta \frac{1}{a_o}}. \tag{7}$$

Он также считал, что

$$\Delta \frac{1}{a_o} [v(-180^\circ, 0)] - \Delta \frac{1}{a_o} [v(0, +180^\circ)] =$$

$$= \delta[v(-180^\circ, 0)] - \delta[v(0, +180^\circ)], \tag{8}$$

т. е.

$$\overline{\Delta \frac{1}{a_o} [v(-180^\circ, 0)]} = \overline{\Delta \frac{1}{a_o} [v(0, +180^\circ)]}. \tag{9}$$

Оорт проверил, что данные Фэйе подчиняются нормальному закону (2) при $|\overline{\delta}| = 0{,}000344$.

В настоящее время известно несколько комет, у которых $\Delta \frac{1}{a_1}$ вычислено при изменении истинной аномалии от $v = -180^\circ$ до $v = +180^\circ$. Соответствующие данные сопоставлены в табл. 1. Здесь изменения $\Delta \frac{1}{a} [v(-180^\circ, 0)]$ взяты из работы М. Дирикиса [3] и Г. Фэйе, а $\Delta \frac{1}{a_1} [v(0, +180^\circ)]$ по вычислениям Галибиной [4].

Таблица 1

Комета	$\Delta \frac{1}{a}$ $v(0, +180^\circ)$	δ $v(0, +180^\circ)$	$\Delta \frac{1}{a}$ $v(-180^\circ, 0)$	δ $v(-180^\circ, 0)$	δ $v(-180^\circ, +180)$
1864 III	$+612.10^{-6}$	$+182.10^{-6}$	-392.10^{-6}	$+217.10^{-6}$	$+220.10^{-6}$
1889 I	$+97.10^{-6}$	-333.10^{-6}	-734.10^{-6}	-125.10^{-6}	-637.10^{-6}
1889 II	$+1176.10^{-6}$	$+746.10^{-6}$	-979.10^{-6}	-370.10^{-6}	$+197.10^{-6}$
1892 II	$+550.10^{-6}$	$+120.10^{-6}$	$+171.10^{-6}$	$+780.10^{-6}$	$+721.10^{-6}$
1892 II	$+718.10^{-6}$	$+288.10^{-6}$	-998.10^{-6}	-389.10^{-6}	-280.10^{-6}
1897 I	$+511.10^{-6}$	$+81.10^{-6}$	-912.10^{-6}	-303.10^{-6}	-401.10^{-6}
1898 VII	-160.10^{-6}	-590.10^{-6}	-592.10^{-6}	$+17.10^{-6}$	-752.10^{-6}
1899 I	$+948.10^{-6}$	$+518.10^{-6}$	-1046.10^{-6}	-437.10^{-6}	-98.10^{-6}
1904 I	$+1024.10^{-6}$	$+594.10^{-6}$	-720.10^{-6}	-111.10^{-6}	$+304.10^{-6}$
1907 I	$+222.10^{-6}$	-208.10^{-6}	-524.10^{-6}	$+85.10^{-6}$	-302.10^{-6}
1908 III	$+310.10^{-6}$	-120.10^{-6}	-890.10^{-6}	-281.10^{-6}	-580.10^{-6}
1914 III	-90.10^{-6}	-520.10^{-6}	$+54.10^{-6}$	$+663.10^{-6}$	-36.10^{-6}
1914 V	$+197.10^{-6}$	-233.10^{-6}	-158.10^{-6}	$+451.10^{-6}$	$+39.10^{-6}$
1930 IV	$+185.10^{-6}$	-245.10^{-6}	-697.10^{-6}	-88.10^{-6}	-512.10^{-6}
1932 VI	$+377.10^{-6}$	-53.10^{-6}	-639.10^{-5}	-30.10^{-6}	-262.10^{-6}
1936 I	$+201.10^{-6}$	-229.10^{-6}	-692.10^{-6}	-83.10^{-6}	-491.10^{-6}
$\overline{\Delta \frac{1}{a}}, \overline{\delta}$	$+430.10^{-6}$	000.10^{-6}	-609.10^{-6}	000.10^{-6}	-179.10^{-6}
$\lvert\overline{\delta(-180^\circ, +180^\circ)}\rvert$		447.10^{-6}		392.10^{-6}	365.10^{-6}

Из таблицы непосредственно видно, что предположения Оорта примерно имеют место. То обстоятельство, что $\overline{\delta} \neq 0$, очевидно можно объяснить тем, что при выяснении вопроса о первоначальном характере орбит главным образом обращается внимание на те кометы, у которых $\frac{1}{a_0} < 0$. Что же касается предположения (6), то очевидно, что оно чересчур строгое, и множитель $\sqrt{2}$ несколько преувеличен.

По данным Г. Фэйе можно определить зависимости $D = D(i)$ и $D = D(q)$. Результаты вычислений представлены в таблице 2.

Таблица 2

i	$\overline{\vert\delta\vert}$
0° — 30°	548.10^{-6}
30° — 60°	608.10^{-6}
60° — 90°	$714.10^{-6}(492.10^{-6})$
90° — 120°	342.10^{-6}
120° — 150°	453.10^{-6}
150° — 180°	510.10^{-6}

В интервал [60°, 90°] входит комета 1840 III которая имела со стороны Юпитера весьма большие возмущения, так как она близко приблизилась к Юпитеру. Если этот исключительный случай не учитывать, то получается величина, которая дана в скобках. Если составить средние из значений для интервалов [0°, 90°] и [90°, 180°] и подсчитать отношение значений для D для этих интервалов, то имеем

$$\frac{D\,(\text{для прямого движения})}{D\,(\text{для обратного движения})} \approx 0{,}4.$$

А. Вурком теоретически получил

$$\frac{D\,(\text{для прямого движения})}{D\,(\text{для обратного движения})} \approx 0{,}5.$$

Данные δ для аргумента q представлены в таблице 3.

Таблица 3

Перигельное расстояние q	$\overline{\vert\delta\vert}$
0.0 *а. е.* — 0.5 *а. е.*	384.10^{-6}
0.5 *а. е.* — 1.0 *а. е.*	$688.10^{-6}(555.10^{-6})$
1.0 *а. е.* — 1.5 *а. е.*	455.10^{-6}
1.5 *а. е.* — 2.0 *а. е.*	311.10^{-6}

Данные таблицы 3 явно не соответствуют теории. По-видимому, это объясняется тем, что они искажены селекцией наблюдений. Так, например, в интервале 1.5 *а. е.* — 2.0 *а. е.* имеются почти исключительно кометы, у которых $i \approx 90°$, $\omega \approx 90°$. По-видимому точные значения $\overline{\delta^2} = \overline{\delta^2}\ (i,\ q)$ можно найти только при помощи вычислений. Нам кажется, что метод, который мы применили в [5], является для этих целей наилучшим.

Астрономическая обсерватория

4.5.61.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *J. H. Oort*. BAN, 1950, 408, 91.
[2]. *G. Fayet*. Bull. Astr., 1911, 28, 145.
[3]. *М. А. Дирикис*. Труды Астр. Сек. АН Латв. ССР, 1956, **6**, 5.
[4]. *И. В. Галибина*. Бюллетень И Т А, 1958, **6**, 630.
[5]. *К. А. Штейнс*. Астр. журн., 1953, **30**, 184.

PAR ZVAIGŽŅU PERTURBĀCIJU IZSAUKTO KOMĒTU ORBITU LIELO PUSASU APGRIEZTO LIELUMU IZMAIŅU VIDĒJĀS VĒRTĪBAS APRĒĶINĀŠANU

Ķ. Šteins un M. Pudāne

(Kopsavilkums)

Vidējā vērtība lielo pusašu apgriezto lielumu izmaiņās ir pamatlielums komētu difuzijas teorijā. Vidējo nozīmi $\Delta \frac{1}{a}$ empīriski aprēķinājis Oorts. Rakstā, balstoties uz jaunākiem komētu orbitu elementu aprēķiniem, tiek pārbaudīti Oorta aprēķinos izdarīto pieņēmumu pareizība. Pielietojot Oorta metodi tiek atrasta vidējās vērtības empīriska atkarība no komētu orbitu slīpumu un periheliju attālumiem. Pirmā no tām labi saskan ar Vurkoma atrasto teorētisko sakarību, otrā radikāli atšķiras. Šī atšķirība tiek izskaidrota ar novērojumu selekciju.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

О ПОВЫШЕНИИ ТОЧНОСТИ В РАСЧЕТАХ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РЯДАМИ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЯДОВ

Э. Риекстыньш

Известно, что при практическом использовании асимптотических рядов не всегда результат получается с желаемой точностью. Имеются несколько методов для повышения точности. Большинство из них имеют следующую общую идею: остаток ряда разлагается в асимптотический ряд другого типа, который при заданном значении аргумента дает возможность вычислить остаток с требуемой точностью. Отличаются эти методы тем, что используются различные аналитические выражения для остатка — ряд, интеграл или функциональное уравнение.

В данной работе мы подробнее исследуем первый случай. Очевидно, это приводит к преобразованию рядов. Метод преобразования асимтотических рядов встречался уже в работах Эйлера и Стирлинга. Первый из них неоднократно применял преобразование, получившее его имя, но к асимтотическим рядам он его применил неудачно, причем он сам не понял, в чем кроется причина неудачи [1]. Впоследствии это преобразование применили более успешно, например [2, 3]. Стирлинг преобразовал асимптотический ряд в ряд факультетов [4].

Остроумный метод для некоторых классов разложений предложил Эйри [5], но его метод лишен всякого обоснования, и полученные ряды не являются асимтотическими в общепринятом смысле. Несмотря на это, полученные им разложения дали удивительно хорошие результаты. Имеются некоторые попытки обосновать этот метод в одном частном случае [3, 6].

В настоящей статье рассматриваются некоторые общие преобразования, из которых в качестве частных случаев следуют преобразования Эйлера и Стирлинга, а также обоснование для преобразования Эйри. Выясняются некоторые связи между этими преобразованиями. Далее эти преобразования применяются к некоторым разложениям, часто встречающимся на практике.

§ 1.

1. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть функции $f(z)$ и $g_i(z)$, $i=0,1,\ldots$ в секторе σ: $\varphi_1 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_2$, $|z| \geqslant x_0 > 0$ имеют асимптотические разложения

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \tag{1.1}$$

$$g_i(z) \sim \sum_{k=i}^{\infty} \frac{b_{ik}}{z^k}. \tag{1.2}$$

Если

$$a_k = \sum_{i=0}^{k} b_{ik}, \quad k=0, 1, \ldots, \tag{1.3}$$

то для любого натурального n в секторе σ имеет место соотношение

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} g_i(z) + o\left(\frac{1}{z^n}\right),$$

или же

$$f(z) \sim \sum_{i=0}^{\infty} g_i(z). \tag{1.4}$$

Доказательство теоремы почти очевидно. Имеем

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{z^k} \sum_{i=0}^{k} b_{ik} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{b_{ik}}{z^k} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) = \sum_{i=0}^{n} \left[g_i(z) + o\left(\frac{1}{z^n}\right)\right] + o\left(\frac{1}{z^n}\right) = \sum_{i=0}^{n} g_i(z) + o\left(\frac{1}{z^n}\right).$$

Иногда может случиться, что после подходящего выбора (1.3) при заданном z разложение (1.4) дает возможность вычислить значение $f(z)$ точнее, чем разложение (1.1), в чем и заключается применение этого преобразования. Формально преобразование (1.4) получается, если члены ряда (1.1) с учетом (1.3) расположить в треугольную матрицу вида ◺ и суммировать по столбцам. Можно их расположить и так, что суммирование происходит по длинным диагоналям.

Может случиться, что ряды (1.2) сходятся в окрестности $z = \infty$, и функции $g_i(z)$ являются аналитическими продолжениями этих рядов во всем секторе σ. Может также случиться, что ряд (1.4) сходится в σ, и в таком случае значение $f(z)$ можно найти с любой степенью точности.

Далее рассмотрим некоторые частные случаи (1.4). Из доказанного непосредственно следует

Теорема 2. Если

$$a_k = P_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k} c_{ik} \alpha^{k-i}, \quad k=0, 1, \ldots; \tag{1.5}$$

то

$$f(z) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{z^i} G_i\left(\frac{\alpha}{z}\right), \tag{1.6}$$

где α — положительный параметр, а

$$G_i(x) \sim \sum_{k=i}^{\infty} c_{ik} x^{k-i} \text{ при } x \to 0. \tag{1.7}$$

В дальнейшем мы покажем, что частные случаи этой теоремы служат обоснованием для преобразования Эйри. Обозначим преобразование (1.6) символом GT.

В частном случае функции $G_i(x)$ могут быть многочленами. Если выполнить преобразования в этом случае в обратном порядке, то получается

Теорема 3. Если

$$G_i(x) = \sum_{k=0}^{i} c_{ik} x^k, \quad f(z) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{z^i} G_i\left(\frac{1}{z}\right),$$

то

$$f(z) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{z^j} \sum_{k=0}^{[j/2]} c_{j-k,k}.$$

Далее выберем

$$\beta_{ik} = \binom{k}{i} c_k, \quad c_k \neq 0, \quad i, k = 0, 1, \ldots \tag{1.8}$$

и введем обозначения

$$d_k = \frac{a_k}{c_k}, \quad \delta_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} d_j = (-1)^k \Delta^k d_0. \tag{1.9}$$

Поскольку [7]

$$d_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \delta_i, \tag{1.10}$$

то

$$a_k = c_k d_k = c_k \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \delta_i = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \delta_i \beta_{ik}.$$

Таким образом доказана

Теорема 4. Если в секторе σ

$$G_i(z) \sim \sum_{k=i}^{\infty} \frac{\binom{k}{i} c_k}{z^k}, \tag{1.11}$$

и δ_k определяется по формуле (1.9), то

$$f(z) \sim \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \delta_i G_i(z). \tag{1.12}$$

В работе [8] исследованы некоторые достаточные условия, при которых ряд (1.12) сходится.

В частном случае теорема 4 дает преобразование Эйлера, поэтому преобразование (1.12) можно называть обобщенным преобразованием Эйлера. Возьмем $c_k = (-1)^k$. Тогда

$$G_i(z) \sim \sum_{k=i}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{k}{i}}{z^k} = \frac{(-1)^i}{z^i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \binom{k+i}{i}}{z^k} = \frac{(-1)^i}{z^i} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{i+1}} = \frac{(-1)^i}{(1+z)^{i+1}},$$

$$f(z) \sim z \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta_i}{(1+z)^{i+1}}. \tag{1.13}$$

Это и является преобразованием Эйлера. Если положим

$$a_k = (-1)^k \bar{a}_k,$$

то преобразование имеет вид

$$f(z) \sim z \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \Delta^i \bar{a}_0}{(1+z)^{i+1}}. \tag{1.13'}$$

Обозначим его через ЕТ. Очевидно, соотношение

$$f(z) = z \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \Delta^i \bar{a}_0}{(1+z)^{i+1}} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) \tag{1.13''}$$

остается справедливым и в том случае, когда $\bar{a}_k$ являются функциями от z, ограниченными в секторе σ.

Если функции $G_i(z)$ в секторе σ являются аналитическими и их асимптоматические разложения можно сколь угодно раз почленно дифференцировать, то из (1.11) следует

$$G_n = -\frac{1}{nz^{n-2}}(z^{n-1}G_{n-1})' = -\frac{1}{n}[(n-1)G_{n-1} + zG'_{n-1}]. \tag{1.14}$$

Применяя эту формулу повторно, получаем

$$G_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{i=1}^{n} \varkappa_{in} z^i G_0^{(i)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Очевидно, все системы функций G_n имеют одинаковые рекуррентные формулы, поэтому коэффициенты $\varkappa_{in}$ можно определить, рассматривая некоторую систему. В случае ЕТ имеем

$$G_0 = 1 - \frac{1}{1+z}, \quad G_0^{(m)} = \frac{(-1)^m m!}{(1+z)^{m+1}}.$$

Отсюда можно найти, что $\varkappa_{in} = \binom{n}{i}\frac{1}{(i-1)!}$, поэтому

$$G_n(z) = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{(i-1)!} z^i G_0^{(i)}(z). \tag{1.15}$$

3. Рассмотрим далее преобразование, в котором преобразуется не коэффициент, а функция $\frac{1}{z^n}$. Имеет место

Теорема 5. Если выбрана система функций $h_n(z) = O\left(\frac{1}{z^n}\right)$, $h_0(z) \equiv 1$, и в секторе σ имеет место

$$\frac{1}{z^k} \sim \sum_{i=k}^{\infty} b_{ik} h_i(z), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1.16}$$

то для функции (1.1) имеет место

$$f(z) \sim \sum_{i=0}^{\infty} c_i h_i(z), \tag{1.17}$$

где

$$c_0 = a_0, \quad c_i = \sum_{k=1}^{i} a_k b_{ik}, \quad i = 1, 2, \ldots \quad . \tag{1.18}$$

Доказательство тоже очевидно:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{z^k} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \left[\sum_{i=k}^{n} b_{ik} h_i(z) + o\left(\frac{1}{z^n}\right)\right] =$$

$$= a_0 + \sum_{i=1}^{n} h_i(z) \sum_{k=1}^{i} a_k b_{ik} + o\left(\frac{1}{z^n}\right) = \sum_{i=0}^{n} c_i h_i(z) + o\left(\frac{1}{z^n}\right).$$

Формально это преобразование получается, если члены ряда (1.1) с учетом (1.16) расположить в треугольную матрицу вида ◸ и суммировать по столбцам. И здесь может случиться, что ряд (1.17) сходится. В качестве такого примера возьмем преобразование Стирлинга [9]:

$$h_i(z) = \frac{1}{z(z+1)\ldots(z+i-1)} \tag{1.19}$$

и используем формулу [9]

$$\frac{1}{z^k} = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{S_{i-k,\, i-1}}{z(z+1)\ldots(z+i-1)}, \quad k = 2, 3, \ldots, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{1.20}$$

Коэффициенты S_{ik} называются числами Стирлинга 1-го рода. Они определяются при помощи формулы

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) = \alpha^n + S_{1n}\alpha^{n-1} + \ldots + S_{n-1,\,n}\alpha. \tag{1.21}$$

Для последовательного вычисления S_{ik} при помощи соотношения $(\alpha)_n = (\alpha)_{n-1}(\alpha+n-1)$ можно найти рекуррентную формулу

$$S_{in} = S_{i,\,n-1} + (n-1) S_{i-1,\,n-1}, \quad 1 \leqslant i < n,$$

$$S_{on} = 1, \quad S_{n-1,\,n} = (n-1)!, \quad S_{nn} = 0. \tag{1.22}$$

При $a_k = (-1)^k \bar{a}_k$ имеем

$$f(z) \sim \bar{a}_0 - \frac{\bar{a}_1}{z} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{c_i}{z(z+1)\ldots(z+i-1)}, \tag{1.23}$$

где

$$c_i = \sum_{k=2}^{i} (-1)^k \bar{a}_k S_{i-k,\, i-1}. \tag{1.24}$$

Ряд (1.23) называется рядом факультетов. В работе [9] даны необходимые и достаточные условия того, чтобы этот ряд сходился при $\operatorname{Re} z > x_0$. Так как разложение единственно, то в случае сходимости в (1.23) имеем знак равенства.

Далее представим (1.1) в виде

$$f(z) \sim z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \bar{a}_k}{z^{k+1}}$$

и выберем

$$h_i(z)=\frac{1}{(1+z)^i}.$$

Тогда в силу формулы

$$\frac{1}{z^k}=\frac{1}{(1+z)^k\left(1-\frac{1}{1+z}\right)^k}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\binom{k+i-1}{i}}{(1+z)^{k+i}}$$

имеем

$$f(z)\sim z\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{(1+z)^i},$$

где

$$c_i=\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k-1}\bar{a}_{k-1}\binom{i-1}{k-1}=(-1)^{i-1}\Delta^{i-1}\bar{a}_0,$$

и опять получаем ЕТ.

Ряд, полученный преобразованием ЕТ, обычно расходится. При небольшом $|z|$ он часто дает результат только немного точнее чем ряд (1.1). Поэтому это преобразование часто применяется так, как это на частном примере предложил уже Эйлер [1]: в асимптотическом ряде (1.1) берутся члены до наименьшего, а к остатку применяется ЕТ. Если этим требуемая точность не достигается, то к остатку преобразованного ряда, который тоже является асимптотическим рядом с аргументом $1+z$, снова применяется это преобразование. Процесс можно продолжить и дальше, и после m шагов получаем

$$\begin{aligned} f(z)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^k a_k}{z^k}+\frac{(-1)^N}{z^{N-1}}\sum_{k=0}^{N_1-1}\frac{(-1)^k\Delta^k a_0^{(1)}}{(1+z)^{k+1}}+\frac{(-1)^{N+N_1}}{z^{N-1}(1+z)^{N_1}}\sum_{k=0}^{N_2-1}\frac{(-1)^k\Delta^k a_0^{(2)}}{(2+z)^{k+1}}+\\ +\ldots+\frac{(-1)^{N+N_1+\ldots+N_m}}{z^{N-1}(1+z)^{N_1}\ldots(m+z)^{N_m}}\sum_{k=0}^{N_{m+1}-1}\frac{(-1)^k\Delta^k a_0^{(m+1)}}{(m+1+z)^{k+1}}+\\ +o(z^{-N-N_1-\ldots-N_{m+1}}), \end{aligned} \tag{1.25}$$

где

$$a_k^{(1)}=a_{N+k},\quad a_k^{(i+1)}=\Delta^{N_i+k}a_0^{(i)},\quad i=1,2,\ldots .$$

Так как соотношение (1.25) справедливо для любого натурального m, то продолжая процесс неограниченно, получаем опять асимптотический ряд для $f(z)$. Если в частном случае брать $N=2$, $N_i=1$ $(i\geqslant 1)$ то получаем

$$f(z)\sim a_0-\frac{a_1}{z}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{(-1)^i a_0^{(i-1)}}{z(z+1)\ldots(z+i-1)}, \tag{1.26}$$

т. е. опять преобразование Стирлинга. В силу единственности разложение (1.26) должно совпасть с (1.23), и поэтому согласно (1.24) имеем

$$(-1)^i a_0^{(i-1)}=\sum_{k=2}^{i}(-1)^k a_k S_{i-k,\,i-1}. \tag{1.27}$$

4. Применим ЕТ в случае, когда $a_k = (-1)^k P_k(\alpha) = (-1)^k \sum\limits_{i=0}^{k} c_{ik}\alpha^{k-i}$.

Имеем

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k P_k(\alpha)}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \bar{P}_k\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\left(\frac{z}{\alpha}\right)^k} \sim \frac{z}{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \bar{A}_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\left(1+\frac{z}{\alpha}\right)^{i+1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \alpha^i \bar{A}_i\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{z^i\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^{i+1}} = z \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_i(\alpha)}{(\alpha+z)^{i+1}}, \qquad (1.28)$$

где

$$A_i(\alpha) = \alpha^i \bar{A}_i\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^i \Delta^i \bar{P}_0\left(\frac{1}{\alpha}\right). \qquad (1.29)$$

В некоторых случаях для вычисления коэффициентов $A_i(\alpha)$ удобнее составить рекуррентную формулу. Пусть

$$\bar{P}_k\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(1+\frac{\rho_1}{\alpha}\right)\ldots\left(1+\frac{\rho_k}{\alpha}\right), \quad \bar{P}_0 = 1. \qquad (1.30)$$

Тогда имеем

$$\bar{P}_{k+1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \left(1+\frac{\rho_{k+1}}{\alpha}\right)\bar{P}_k(\alpha), \quad \Delta\bar{P}_k\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\rho_{k+1}\bar{P}_k(\alpha). \qquad (1.31)$$

Если ρ_k является многочленом m-й степени от k, то взяв с обеих сторон (1.31) разности i-го порядка, положив потом $k=0$ и помножив обе части на α^{i+1}, получаем выражение для A_{i+1} через A_i, $A_{i-1}, \ldots, A_{i-m}$. При этом используется известная формула для составления разностей от произведения [7]. Если ρ_k является рациональной функцией, то сначала обе части надо помножить на знаменатель от ρ_k.

$A_i(\alpha)$ является многочленом степени не выше i, но может быть и ниже, например $\left[\frac{i}{2}\right]$. В последнем случае к ряду (1.28) можно дальше применить GT относительно $\alpha+z$, и функции $G_i(x)$ являются многочленами. Имеем

$$f(z) \sim \frac{z}{\alpha+z} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_i(\alpha)}{(\alpha+z)^i} \sim \frac{z}{\alpha+z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+z)^k} G_k\left(\frac{\alpha}{\alpha+z}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_k\left(1-\frac{1}{1+\frac{\alpha}{z}}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^{k+1} z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{G}_k\left(\frac{\alpha}{z}\right)}{z^k\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^{k+1}}. \qquad (1.32)$$

Поскольку многочлен G_k зависит только от $\frac{\alpha}{z}$, то очевидно (1.32) можно получить из (1.28) следующим путем: в (1.28) выделяются степени от $\frac{\alpha}{z}$ и после этого объединяются члены, содержащие одинаковые оставшиеся степени z. Мы увидим в дальнейшем, что в некоторых случаях, но не всегда, (1.32) совпадает с (1.6), полученным прямо из (1.1). В случае совпадения ясно, что (1.28) получается непосредственным перегруппированием из (1.6).

§ 2.

1. Далее рассмотрим некоторые применения GT и ET. В этом параграфе подробно иллюстрируются эти методы в случае, когда

$$P_k(\alpha)=(-1)^k(\alpha)_k,\quad (\alpha)_0=1,\quad f(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha)_k}{z^k}. \tag{2.1}$$

Такое асимптотическое разложение при $|\arg z|<\frac{\pi}{2}$ получается для функции

$$\Omega(z,\alpha)=z\Psi(1,2-\alpha,z)=z\int_0^{\infty}\frac{e^{-tz}}{(1+t)^{\alpha}}dt=e^z z^{\alpha}\Gamma(1-\alpha,z)=$$

$$=e^z z^{\alpha}\int_z^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^{\alpha}}dt=z^{\alpha}\Psi(\alpha,\alpha,z)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{\alpha-1}}{1+\frac{t}{z}}dt, \tag{2.2}$$

где $\Psi(\alpha,\gamma,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция второго рода [10], а $\Gamma(\alpha,z)$ — неполная Γ — функция. Отсюда легко получается соотношение

$$\Omega(z,\alpha)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(\alpha)_k}{z^k}+\frac{(-1)^n(\alpha)_n}{z^n}\Omega(z,\alpha+n), \tag{2.3}$$

которое показывает, что остаток ряда имеет подобное асимптотическое разложение. Преобразования этого ряда встречаются в работах [3, 5, 6].

Используя (1.21) и (1.22), имеем

$$c_{ik}=(-1)^k S_{ik}=(-1)^k[S_{i,k-1}+(k-1)S_{i-1,k-1}]=-[c_{i,k-1}+$$
$$+(k-1)c_{i-1,k-1}],\quad c_{ok}=(-1)^k,\quad c_{kk}=0.$$

Отсюда получаем

$$G_i(x)=\sum_{k=i+1}^{\infty}c_{ik}x^{k-i}=-\sum_{k=i+1}^{\infty}c_{i,k-1}x^{k-i}-\sum_{k=i+1}^{\infty}c_{i-1,k-1}(k-1)x^{k-i}=$$

$$=-x\sum_{j=i}^{\infty}c_{ij}x^{j-i}-x\sum_{j=i}^{\infty}c_{i-1,j}jx^{j-i}=-xG_i(x)-x^{2-i}(x^{i-1}G_{i-1}(x))';$$

$$G_i=-\frac{1}{1+x}[(i-1)G_{i-1}+xG'_{i-1}],\quad i=1,2,\ldots,\quad G_0=\frac{1}{1+x}. \tag{2.4}$$

При помощи этой рекуррентной формулы можно последовательно найти функции $G_i(x)$. Методом математической индукции можно убедиться в том, что

$$G_i(x)=(-1)^{i+1}x\sum_{j=0}^{i=1}\frac{(-1)^j\lambda_{ji}}{(1+x)^{2i+1-j}}=x\bar{G}_i(x)=\frac{(-1)^{i+1}x}{(1+x)^{i+2}}\tilde{G}_{i-1}\left(\frac{1}{1+x}\right), \tag{2.5}$$

где λ_{ji} связаны соотношениями

$$\lambda_{0,\,i+1}=(2i+1)!!,\ \lambda_{i-1,\,i}=1,$$
$$\lambda_{j,\,i+1}=(i+2-j)\lambda_{j-1,\,i}+(2i+2-j)\lambda_{ji}. \tag{2.6}$$

По этим формулам можно составить таблицу для λ_{ji}, причем для контроля можно использовать соотношение

$$\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\lambda_{jk}=k!\,.$$

Практически, как уже сказано в § 1, преобразование применяется к остатку ряда, поэтому по формуле (2.3) имеем

$$\Omega(z,\alpha)\sim\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(\alpha)_k}{z^k}+\frac{(-1)^n(\alpha)_n}{z^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k}G_k\left(\frac{\alpha+n}{z}\right). \tag{2.7}$$

2. Если во второй сумме положим

$$\nu=\alpha+n+h,\ z=\nu e^{i\varphi}=\frac{\nu}{\beta},\quad \frac{\alpha+n}{z}=\beta-\frac{h\beta}{\nu},$$

разложим функции $G_k\left(\frac{\alpha+n}{z}\right)$ в ряды по степеням $\frac{1}{\nu}$ и объединим подобные члены, то получим формальное разложение Эйри [5]:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k}G_k\left(\frac{\alpha+n}{z}\right)=\frac{1}{1+\beta}+\frac{1}{\nu}\left[\frac{\beta^2}{(1+\beta)^3}+\frac{\beta}{(1+\beta)^2}h\right]+$$
$$+\frac{1}{\nu^2}\left[\frac{\beta^2(\beta^2-2\beta)}{(1+\beta)^5}+\frac{2\beta^3-\beta^2}{(1+\beta)^4}h+\frac{\beta^2}{(1+\beta)^3}h^2\right]+\frac{1}{\nu^3}\left[\frac{\beta^3(6\beta-8\beta^2+\beta^3)}{(1+\beta)^7}+\right.$$
$$\left.+\frac{3\beta^5-10\beta^4+2\beta^3}{(1+\beta)^6}h+\frac{3\beta^4-3\beta^3}{(1+\beta)^5}h^2+\frac{\beta^3}{(1+\beta)^4}h^3\right]+\dots \tag{2.8}$$

При $\nu\to\infty$ и фиксированном n имеем $h\to\infty$, поэтому ряд (2.8) не является асимптотическим, но получен из асимптотического ряда при конкретном z. Если брать остаток ряда при наименьшем члене, когда $|h|<1$, то оценка остаточного члена с помощью этого ряда дает значительное уточнение общего результата, о чем свидетельствуют примеры в указанной работе Эйри. Но чем больше $|h|$, тем хуже результат, так как при объединении подобных членов отбрасываются остатки плохо сходящихся или даже расходящихся рядов. Поэтому Эйри утверждал, что наибольшую точность можно получить, если брать остаток при наименьшем члене. Но на самом деле это не так, если вместо (2.8) прямо использовать формулу (2.7), которая и практически более удобна.

Следующая таблица показывает результаты вычислений по формуле (2.7) для функции

$$\Omega(1,2)\sim 1!-2!+3!-+\dots \tag{2.9}$$

В ней n означает число членов, взятых в первой сумме формулы (2.7), m — число членов во второй сумме, ρ_m — сумму первых отброшенных членов, имеющих один и тот же знак, причем эта сумма наименьшая в этом ряде. Численные расчеты выполнила ст. лаборант Т. Умбрашко.

n	m	$\Omega(1, 2)$	ρ_m
0	8	0,4027	0,0019
1	9	0,40376	0,00018
2	13	0,403637	0,000030
3	14	0,4036559	0,0000051
4	15	0,4036518	0,0000014
8	27	0,4036526357	0,0000000026

Поскольку $\Omega(1,2)=1+eEi(-1)$, точное значение функции можно получить с помощью степенного ряда. Имеем $\Omega(1,2)=0{,}4036526377\ldots$, и мы получили 8 верных знаков. Ввиду сложности вычислений, расчеты не продолжались. Весьма вероятно, что с возрастанием n точность возрастает.

Отметим, что методом GT данный ряд можно преобразовать по разному, так как многочлен $P_n(\alpha)$ можно перегруппировать по степеням $\overline{\alpha}=\alpha-\alpha_0$ с любым α_0, т. е. $P_n(\alpha)=\overline{P}_n(\alpha-\alpha_0)=\overline{P}_n(\overline{\alpha})$. Этот многочлен имеет другие коэффициенты, поэтому получим другие функции $G_i\left(\frac{\overline{\alpha}}{z}\right)$. В случае $\alpha_0=1$ разложение можно получить следующим образом:

$$\Omega(z,\alpha)\sim\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k(\alpha)_k}{z^k}+\frac{(-1)^{n-1}(\alpha)_{n-1}}{z^{n-1}}\left[G_0\left(\frac{\alpha-1+n}{z}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}\frac{\alpha-1+n}{z}\overline{G}_k\left(\frac{\alpha-1+n}{z}\right)\right]=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(-1)^k(\alpha)_k}{z^k}+$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}(\alpha)_{n-1}}{z^{n-1}}\left[\frac{1+\frac{\alpha+n-1}{z}-\frac{\alpha-1+n}{z}}{1+\frac{\alpha-1+n}{z}}+\frac{\alpha-1+n}{z}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}\overline{G}_k\left(\frac{\alpha-1+n}{z}\right)\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(\alpha)_k}{z^k}+\frac{(-1)^n(\alpha)_n}{z^n}\left[G_0\left(\frac{\alpha-1+n}{z}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}\overline{G}_k\left(\frac{\alpha-1+n}{z}\right)\right].\qquad(2.10)$$

В такой форме это разложение, найденное другим путем, встречается в работе [6].

3. Далее применим к разложению функции $\Omega(z,\alpha)$ преобразование Эйлера согласно формуле (1.28). Тогда имеем

$$\Omega(z,\alpha)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kA_k(\alpha)}{z^k\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^{k+1}}=\frac{1}{1+\frac{\alpha}{z}}+$$

$$+\frac{\alpha}{z^2\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^3}-\frac{2\alpha}{z^3\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^4}+\frac{3\alpha(\alpha+2)}{z^4\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^5}-+\ldots.\qquad(2.11)$$

Формула (1.31) в этом случае имеет вид

$$\Delta\overline{P}_k\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}k\overline{P}_k\left(\frac{1}{\alpha}\right),$$

откуда получаем

$$\Delta^{i+1}\overline{P}_k\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}\left[(k+i)\Delta^i\overline{P}_k\left(\frac{1}{\alpha}\right)+i\Delta^{i-1}\overline{P}_{k-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right],$$

$$\overline{A}_{k+1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\Delta^{i+1}\overline{P}_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{i}{\alpha}\left[\overline{A}_i+\overline{A}_{i-1}\right],$$

$$A_{i+1}(\alpha)=i(A_i+\alpha A_{i-1}),\ i=1,2,\ldots,\ A_0=1,\ A_1=0. \qquad (2.12)$$

Разложение (2.11) можно получить и другим путем, используя (2.2).

$$\Omega(z,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\frac{1}{1+\frac{t}{z}}\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{1+\frac{\alpha}{z}}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}\left(1+\frac{\frac{t-\alpha}{z}}{1+\frac{\alpha}{z}}\right)^{-1}dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^kA_k(\alpha)}{z^k\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^{k+1}}+\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)z^n\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^{n+1}}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}(t-\alpha)^n\left(1+\frac{\frac{t-\alpha}{z}}{1+\frac{\alpha}{z}}\right)^{-1}dt,$$

причем

$$A_k(\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}(t-\alpha)^k\,dt=(-1)^k\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(\alpha)_j\alpha^{k-j}=$$

$$=\alpha^k\Delta^k\overline{P}_0\left(\frac{1}{\alpha}\right). \qquad (2.13)$$

Преобразуя либо интеграл, либо сумму, получаем опять рекуррентную формулу (2.12). Она показывает, что ряд (2.11) расходится. Функции $A_k(\alpha)$ являются многочленами степени $\left[\frac{k}{2}\right]$. Они исследовались в работе [11].

Разложение (2.11) можно получить из (2.7) следующим образом: положим $n=0$ и применим к многочлену $\widetilde{G}_{i-1}\left(\frac{1}{1+\frac{\alpha}{z}}\right)=\widetilde{G}_{i-1}\left(1-\frac{\frac{\alpha}{z}}{1+\frac{\alpha}{z}}\right)$ формулу Тейлора; после этого в ряде (2.7) заменим $G_i\left(\frac{\alpha}{z}\right)$ согласно (2.5) на $\dfrac{(-1)^{i+1}\frac{\alpha}{z}}{\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^{i+2}}\widetilde{G}_{i-1}\left(1-\frac{\frac{\alpha}{z}}{1+\frac{\alpha}{z}}\right)$ и по теореме 3 объединим члены с одинаковыми степенями $\dfrac{1}{1+\frac{\alpha}{z}}$. Получаем

$$\Omega(z,\alpha)\sim G_0\left(\frac{\alpha}{z}\right)+\frac{1}{z^2\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z^k\left(1+\frac{\alpha}{z}\right)^k}\sum_{j=0}^{k}\frac{\alpha^{j+1}}{j!}\widetilde{G}^{(j)}_{k-j}(1),$$

откуда следует

$$A_{k+2}=\sum_{j=0}^{k}\frac{\alpha^{j+1}}{j!}\widetilde{G}^{(j)}_{k-j}(1). \qquad (2.14)$$

Разложение (2.7) из (2.11) получается по формуле (1.32):

$$\Omega(z,\alpha)\sim\frac{1}{1+\frac{\alpha}{z}}+\frac{\alpha z}{(\alpha+z)^3}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+z)^i}g_i\left(\frac{\alpha}{\alpha+z}\right). \tag{2.15}$$

Используя (2.14) и (1.7), можно убедиться, что

$$g_i(x)=(-1)^i\widetilde{G}_i(1-x),$$

и поэтому (2.15) в силу (2.5) совпадает с (2.7).

В практических расчетах при небольшом $|z|$ преобразование Эйлера приходится применить несколько раз. Продолжая процесс согласно (1.23)—(1.24), можно найти разложение в ряд факультетов:

$$\Omega(z,\alpha)=1-\frac{\alpha}{z}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{c_i(\alpha)}{z(z+1)\dots(z+i-1)}, \tag{2.16}$$

где

$$c_i(\alpha)=\sum_{j=2}^{i}(-1)^j S_{i-j,\,i-1}(\alpha)_j.$$

Можно получить также разложение

$$\Omega(z,\alpha)=1-\frac{1}{\alpha-1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_{i+1}(\alpha-1)}{(z+1)(z+2)\dots(z+i)}, \tag{2.17}$$

впервые найденное Шлемильхом [12]. Ряды (2.16) и (2.17) сходятся при $\mathrm{Re}\, z>0$.

4. Некоторые авторы, в том числе и Эйлер, применили к этому и подобным рядам преобразование Эйлера в той форме, как оно применяется для сходящихся числовых рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b_k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\Delta^k b_0, \tag{2.18}$$

что получается из (1.13″) при $z=1$.

Покажем, что такое преобразование не дает асимптотического ряда. Имеем [3]

$$\Omega(z,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{\alpha-1}}{1+\frac{t}{z}}\,dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{\alpha-1}}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{z}-1\right)}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{\alpha-1}\left(\frac{t}{z}-1\right)^k dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}t^{\alpha-1}\left(\frac{t}{z}-1\right)^n}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{t}{z}-1\right)}\,dt. \tag{2.19}$$

Легко непосредственно убедиться в том, что

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} \left(\frac{t}{z} - 1\right)^k dt = \Delta^k b_0, \quad b_k = \frac{(\alpha)_k}{z^k}.$$

При фиксированном n и $z \to \infty$ остаток ряда стремится к $\frac{1}{2^n}$, а при фиксированном z и $n \to \infty$ остаток стремится к ∞, поэтому ряд расходится, и не является также асимптотическим.

Преобразование (2.19) формально получается из (2.1) следующим образом: общий член ряда (2.1) представим в виде $\frac{(-1)^n \bar{a}_n}{\left(\frac{z}{x}\right)^n} \frac{1}{x^n} = \frac{(-1)^n b_n(z,x)}{x^n}$, применим преобразование Эйлера по формуле (1.13″) относительно x и потом положим $x = 1$. Но применение (1.13″) незаконно, так как $b_n(z, x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Можно брать в этом формальном преобразовании значение x отличное от 1. Такое более общее преобразование получится в (2.19), если представим $1 + \frac{t}{z} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left[1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}\left(\frac{t}{z} - \frac{1}{x}\right)\right]$.

При $z \to \infty$ остаточный член тогда стремится к $\frac{1}{(1+x)^n}$. Таким же путем можно снова преобразовать остаток ряда, или же ряд (2.11).

Несмотря на формальный характер этих преобразований, часто полученный ряд можно успешно применить к повышению точности вычислений. Об этом свидетельствуют примеры в работах [2, 3]. Причина этого заключается в следующем.

Для приближенного вычисления значений функции $f(z)$ в области D можно использовать любой соответствующий ей ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z) = S_n(z) + R_n(z)$, если для каждого $z \in D$ можно найти такое $n = n(z)$, что

$$|f(z) - S_n(z)| = |R_n(z)| < \varepsilon, \tag{2.20}$$

где ε — наперед заданное число, соответствующее требуемой точности. При этом остальные свойства ряда не важны. Такой ряд можно назвать аппроксимирующим для данной функции $f(z)$.

Если ряд в области D сходится, то ясно, что требуемое $n(z)$ существует. Если D является сектором σ и ряд является асимптотическим, то такое $n(z)$ существует при достаточно больших $|z|$. Поэтому сходящиеся и асимптотические ряди являются аппроксимирующими. Но (2.19) показывает, что этим аппроксимирующие ряды не исчерпываются. К рядам такого типа можно причислить также ряды, полученные преобразованием Эйри.

Однако применение этих рядов вызывает неуверенность большую, чем применение асимптотических рядов, так как труднее проверить, выполняется ли для остатка неравенство (2.20) или нет.

Если z вещественно и знак остатка $R_n(z)$ чередуется, то для любого ряда $|R_n| < |a_{n+1}|$, и это может служить признаком того, что имеет место (2.20). В противном случае требуется анализ остатка ряда, что обычно является сложной задачей.

Примеры в работах [2, 3] показывают, что кратным преобразованием (2.18) иногда можно добиться выполнения (2.20). Однако, не всегда для ряда (2.19) это будет так. В этом и кроется причина неудачи Эйлера, который преобразованием (2.18) вычислил $\Omega(1,2)$ и после 4-х кратного преобразования получил результат с ошибкой, на много превышающей первый отброшенный член полученного знако-чередующегося ряда.

§ 3.

Рассмотрим еще коротко преобразования для некоторых других рядов, встречающихся на практике.

1. Если в асимптотическом разложении функции $\Omega(iy, \alpha)$ отделим вещественную и мнимую часть, то получаем разложение $\Omega_1(y, \alpha) \sim \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\alpha)_{2k}}{y^{2k}}$. Этот ряд получается по теореме Лапласа для функции

$$\Omega_1(y, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} t^{\alpha-1}}{1 + \frac{t^2}{y}} dt, \quad \alpha > 0, \tag{3.1}$$

или же интегрируя по частям $S(y, 1-\alpha) = \int_y^{\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt.$

В этом случае имеем

$$P_{2k}(\alpha) = (-1)^k(\alpha)_{2k}, \quad P_{2k+1}(\alpha) = 0.$$

Применяя преобразование (1.6) точно так же, как в предыдущем параграфе, получаем

$$\Omega_1(y, \alpha) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{y^i} G_i\left(\frac{\alpha}{y}\right), \tag{3.2}$$

$$G_i(x) = -\frac{1}{1+x^2}[(i-1)(i-2)G_{i-2} + 2(i-1)xG'_{i-2} + x^2G''_{i-2} + \\ + (2i-1)xG_{i-1} + 2x^2G'_{i-1}], \quad i = 2, 3, \ldots,$$

$$G_0(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad G_1(x) = \frac{3x^3 - x}{(1+x^2)^3}. \tag{3.3}$$

Положив $y = \nu e^{i\Theta} = (\alpha - h)e^{i\Theta} = \frac{\alpha - h}{\beta}$ и перегруппировав ряд по степеням $\frac{1}{\nu}$, получаем формальное разложение Эйри [5]. Применяя преобразование Эйлера, удобно обозначить $\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2 = \eta$. Тогда получаем

$$\Omega_1(y, \alpha) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A_k(\alpha)}{y^{2k}\left(1 + \frac{\alpha^2}{y^2}\right)^{k+1}}, \tag{3.4}$$

где коэффициенты $A_k(\alpha) = \alpha^{2k} \Delta^k a_0$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$A_{k+1} = [4k^2 + 2k(4k+1)\alpha]A_k + k\alpha^2(4k - 2 + 4\alpha)A_{k-1} + 4k(k-1)\alpha^4 A_{k-2},$$

$$k = 2, 3, \ldots, \quad A_0 = 1, \quad A_1 = \alpha, \quad A_2 = \alpha(4\alpha^2 + 11\alpha + 6). \tag{3.5}$$

Точно так же, как в предыдущем параграфе, можно от преобразования (3.2) перейти к (3.4) и наоборот.

2. Ряд для функции $\Omega_1(y, \alpha)$ при помощи тех же преобразований можно преобразовать также по другому, если этот ряд рассматривать как частный случай ряда

$$\Omega_2(z, \beta, \gamma) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta)_k (\gamma)_k}{z^k}, \tag{3.6}$$

который получается по теореме Лапласа для функции

$$\Omega_2(z, \beta, \gamma) = \frac{z}{\Gamma(\gamma)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\gamma-1} \Omega\left(\frac{1}{t}, \beta\right) dt, \ \gamma, \beta > 0. \tag{3.7}$$

Легко установить, что

$$\Omega_1(y, \alpha) = \Omega_2\left(\frac{y^2}{4}, \ \frac{\alpha}{2}, \ \frac{\alpha+1}{2}\right). \tag{3.8}$$

Чтобы привести ряд к одному основному параметру, выполним следующее преобразование

$$(\alpha + k)(\beta + k) = \alpha\beta + k(\alpha + \beta) + k^2 = \lambda + k\mu + k^2, \ \lambda = \alpha\beta, \ \mu = \alpha + \beta,$$

$$(\alpha)_k(\beta)_k = \lambda(\lambda + \mu + 1)\ldots[\lambda + (k-1)\mu + (k-1)^2] = P_k(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} T_{jk}\lambda^{k-j}.$$

Отсюда легко получить рекуррентное соотношение

$$T_{jk} = T_{j,\,k-1} + T_{j-1,\,k-1}[(k-1)(\mu-1) + k(k-1)].$$

Подобным образом, как в § 2, это дает разложение

$$\Omega_2(z, \beta, \gamma) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{z^i} G_i\left(\frac{\lambda}{z}\right), \tag{3.9}$$

$$G_i(x) = -\frac{1}{1+x}[(i-1)(\mu+i-1)G_{i-1} + (\mu+2i-1)xG'_{i-1} +$$
$$+ x^2 G''_{i-1}], \ i = 1, 2\ldots, \ G_0(x) = \frac{1}{1+x}, \ G_1(x) = \frac{(1+\mu)x + (\mu-1)x^2}{(1+x)^4}. \tag{3.10}$$

Можно было в качестве основного параметра брать и $\lambda' = \frac{\lambda}{\mu}$.

Преобразование Эйлера дает разложение

$$\Omega_2(z, \beta, \gamma) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_i(\lambda, \mu)}{z^i\left(1 + \frac{\lambda}{z}\right)^{i+1}}, \tag{3.11}$$

где

$$\begin{aligned} A_{i+1} &= i(\mu + i)A_i + i\lambda(\mu + 2i - 1)A_{i-1} + \\ &+ i(i-1)\lambda^2 A_{i-2}, \ i = 2, 3, \ldots, \\ A_0 &= 1, \ A_1 = 0, \ A_2 = \lambda(1+\mu). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Обычным путем можно перейти с разложения (3.9) к (3.11) и наоборот.

3. Далее рассмотрим разложение

$$\Omega_3(z, \alpha, \beta, \gamma) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k z^k}, \tag{3.13}$$

которое получается по теореме Лапласа для функции

$$\Omega_3(z, \alpha, \beta, \gamma) = z \int_0^\infty e^{-zt} F(\alpha, \beta, \gamma; -t)\, dt. \tag{3.14}$$

Такой ряд с натуральном γ встречается и в асимптотическом разложении вырожденных гипергеометрических функций. Выполним следующее преобразование:

$$\frac{(\alpha+k)(\beta+k)}{\gamma+k} = \frac{(\alpha-\gamma+k+\gamma)(\beta-\gamma+k+\gamma)}{k+\gamma} = \delta + k + \frac{\alpha'\beta'}{k+\gamma}, \tag{3.15}$$

$$\delta = \alpha+\beta-\gamma,\ \alpha' = \alpha-\gamma,\ \beta' = \beta-\gamma.$$

Если применить преобразование (1.6) с основным параметром δ, то функции $G_i(x)$, $i \geqslant 1$, выражаются через сложные интегралы, за исключением случаев $\alpha'=0$ или $\beta'=0$. Это объясняется тем, что в (3.15) имеем $k+\gamma$ в знаменателе. Но преобразование (1.32) и в этом случае дает функции $\widetilde{G}_k\left(\frac{\delta}{z}\right)$ как многочлены от $\frac{\delta}{\delta+z}$, поэтому (1.6) и (1.32) в этом случае не совпадают. Кроме того, разложения типа (1.32) для функции Ω_3 можно получить другим путем [13].

Применяя к (3.13) ET, с учетом (3.15) получаем

$$\Omega_3(z, \alpha, \beta, \gamma) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i A_i(\alpha, \beta, \gamma)}{z^i\left(1+\frac{\delta}{z}\right)^{i+1}}, \tag{3.16}$$

$$A_{i+1} = \frac{1}{\gamma+i}\left[(\alpha'-i)(\beta'-i)A_i + i(\gamma+2i-1)\delta A_{i-1} + \right.$$
$$\left. + i(i-1)\delta^2 A_{i-2}\right], \tag{3.17}$$

$$A_0 = 1,\ A_1 = \frac{\alpha'\beta'}{\gamma},\ A_2 = \delta + \frac{\alpha'(\alpha'-1)\beta'(\beta'-1)}{\gamma(\gamma+1)}.$$

При $\beta=\gamma$, $\delta=\alpha$ имеем

$$A_{i+1} - i(A_i + \alpha A_{i-1}) = -\frac{i\alpha}{\gamma+i}\left[A_i - (i-1)(A_{i-1} + \alpha A_{i-2})\right]. \tag{3.18}$$

Это соотношение вместе со значениями для A_0, A_1 и A_2 дает (2.12). Применяя к (3.16) GT, получаем

$$\Omega_3(z, \alpha, \beta, \gamma) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} \widetilde{G}_k\left(\frac{\delta}{z}\right), \tag{3.19}$$

$$\widetilde{G}_0(x) = \frac{1}{1+x},\ \widetilde{G}_1(x) = -\frac{1}{(1+x)^4}\left[x^2\left(\frac{\alpha'\beta'}{\gamma} - \frac{\gamma}{2+\gamma}\right) + x\left(\frac{2\alpha'\beta'}{\gamma} - 1\right) + \frac{\alpha'\beta'}{\gamma}\right], \ldots$$

Функция Макдональда $K_\nu(z)$ имеет разложение

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}\left\{1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(4\nu^2-1)\ldots[4\nu^2-(2k-1)^2]}{k!\,(8z)^k} + \right.$$

$$\left. + \frac{(4\nu^2-1)\ldots[4\nu^2-(4n-1)^2]}{(2n)!\,(8z)^n}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[4\nu^2-(4n+1)^2]\ldots[4\nu^2-(4n+2k-1)^2]}{(2n+1)\ldots(2n+k)(8z)^k}\right]\right\}.$$

Обозначив

$$\frac{4n+1-2\nu}{2}=\alpha,\quad \frac{4n+1+2\nu'}{2}=\beta,\ 2n+1=\gamma,$$

имеем

$$\delta=2n,\quad x=\frac{\delta}{2z}=\frac{n}{z},\quad \alpha'\beta'=\frac{1}{4}(1-4\nu^2)=\gamma'.$$

Подставив $z=n+h$, применив (3.19) и объединив члены с одинаковыми степенями $\frac{1}{n}$, получаем формальное разложение Эйри [5].

Преобразование Эйлера можно выполнить и по другому, выбирая $\delta_1=\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, $\sigma=\gamma-\frac{\alpha'\beta'}{\gamma}$. Тогда для коэффициентов имеем рекуррентную формулу

$$A_{i+1}=\frac{i}{\gamma+i}[(\sigma-\delta_1+i)A_i+(\sigma+2i-1)\delta_1A_{i-1}+(i-1)\delta_1^2A_{i-2}], \tag{3.20}$$

$$A_0=1,\ A_1=0,\ A_2=\frac{\sigma+1}{\gamma+1}\delta_1.$$

При $\beta'=0$ имеем $\delta_1=\alpha$, $\sigma=\gamma$, и (3.20) превращается в (3.18).

Кафедра общей математики

0. 7. 61.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Л. Эйлер.* Дифференциальное исчисление. Гостехиздат, М.—Л., 1949.

[2]. *E. T. Goodwin, J. Staton.* Tables of $\int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u+x}du$. Quart Journ. Mech. and Appl. Math., 1948, 1, 319—326.

[3]. *J. B. Rosser.* Transformations to speed the convergence of series. Journ. Res. Nat. Bur. Standards, 1951, 46, 56—64.

[4]. *J. Stirling.* Methodus differentialis. London, 1730.

[5]. *J. R. Airey.* The converging factor in asymptotic series and the calculation of Bessel, Laguerre and other functions. Phil. Mag., 1937, 24 (7), 521—552.

[6]. *J. B. Rosser.* Explicit remainder terms for some asymtotic series. J. Rat. Mech. and Anal., 1955, 4, 595—626.

[7]. *А. О. Гельфонд.* Исчисление конечных разностей. Гостехиздат, М.—Л., 1952.

[8]. *Van Vijngaarden.* A transformation of formal series. Proc. Koninkl. ned. akad. wet., ser. A, 1953, 56, 522—543.

[9]. *N. Nielsen.* Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig, 1906.

[10]. *F. Tricomi.* Funzioni ipergeometriche confluenti. Roma, 1954.

[11]. *L. Berg.* Über eine spezielle Folge von Polynomen. Math. Nachrichten, 1959, 20, 152—158.

[12]. *O. Schlömilch.* Über Fakultätenreihen. Zeitschr. Math. und Phys., 1859, 4, 390—415.

[13]. *Э. Риекстыньш и Э. Икауниекс.* Преобразование асимптотических рядов методом дифференциальных уравнений. Ученые записки ЛГУ, 1961, 41, вып. 5, 125—137.

REZULTĀTA PRECIZITĀTES PALIELINĀŠANA AR ASIMPTOTISKO RINDU TRANSFORMĀCIJAS METODI

E. Riekstiņš

(Kopsavilkums)

Ievērojot to, ka mazām argumenta moduļa vērtībām funkciju asimptotiskie attīstījumi dod funkciju skaitliskās vērtības ar nepietiekamu precizitāti, ir izveidotas metodes, kā precizitāti palielināt, novērtējot rindas atlikuma locekli. Viena no šādām metodēm izlieto atlikuma locekļa attīstījumu cita tipa asimptotiskā rindā. Līdz šim literatūrā šī metode izlietota atsevišķos gadījumos, vai arī tikai konkrētām rindām.

Šajā darbā vispirms apskatītas vairākas vispārīgas asimptotisko rindu transformācijas, kuras dotas teorēmās 1—5. No vispārīgajām transformācijām kā speciāli gadījumi dabūtas pazīstamās Eilera un Stirlinga transformācijas. Darba 2. un 3. §. apskatīti šo transformāciju izlietojumi vairākām praktiski svarīgām asimptotiskām rindām, pie kam dots arī pamatojums formālajai Eiri transformācijai. Izvirzīts vispārīgs funkciju rindu tips — aproksimējošās rindas, kas ietver sevī konverģentās un asimptotiskās rindas.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Риекстыньш и Э. Икауниекс

Имеется несколько способов для повышения точности в численных расчетах с асимптотическими рядами. В 1952 году Дж. Миллер [1] в одном частном примере предложил разложить остаток асимптотического ряда на 2 множителя и для одного из них составить дифференциальное уравнение, с помощью которого он получил формальное разложение этого множителя в ряд другого вида. Хотя этот ряд не является асимптотическим, точность вычислений с помощью его можно значительно повысить. В последствии этот метод применялся в работе [2], а в несколько иной постановке в работе [3].

В настоящей работе используется идея дифференциального уравнения, но далее применяются другие идеи чем в указанных работах. Таким образом удается получить асимптотическое разложение для упомянутого множителя, который можно называть множителем точности, и строго обосновать выполненные действия. В частности, из полученных разложений можно получить некоторые из вышеуказанных формальных разложений. Некоторые частные случаи полученных разложений имеются также в работе [4], где они найдены прямым преобразованием асимптотических рядов.

§ 1.

1. В этом параграфе рассмотрим формальную сторону вопроса, а в следующем дадим обоснование. Рассмотрим в секторе σ: $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$, $\eta > 0$, $|z| \geqslant R_0 > 0$ дифференциальное уравнение

$$L(y) \equiv y'' - p(z)y' + q(z)y = f(z). \tag{1.1}$$

В нем функции $p(z)$, $q(z)$ и $f(z)$ являются аналитическими в σ и имеют асимптотические разложения

$$p(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k},\ q(z) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k},\ f(z) \sim \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}, \tag{1.2}$$

причем $a_0 \neq 0$, $c_{m+1} \neq 0$. Условия для b_1 будут даны впоследствии.

Если a_0 вещественно, то заменой аргумента уравнение (1.1) в секторе σ можно привести к случаю, когда $a_0 = \pm 1$. Оба случая разбираются одинаково, поэтому в работе будем больше рассматривать случай $a_0 = 1$. В случае $a_0 = -1$ вместо (1.1) будем брать уравнение

$$y'' + p(z)y' + q(z)y = f(z), \tag{1.1'}$$

чтобы разложение для $p(z)$ в обоих случаях неизменилось.

Для уравнения (1.1) еще дополнительно требуем $b_1 \neq 0, -1, -2, \ldots$, а для (1.1′) — $b_1 \neq 0, 1, 2, \ldots$.

Сначала допустим, что $m=0$. Подставляя формально в уравнение (1.1)

$$y \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{z^k} \tag{1.3}$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, можно формально определить коэффициенты d_k. Имеем

$$d_k = \frac{1}{b_1 \pm k}\left[c_{k-1} - k(k-1)d_{k-1} \mp \sum_{i=1}^{k-1} i d_i a_{k-i} - \sum_{i=0}^{k-1} d_i b_{k+1-i}\right],$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad d_0 = \frac{c_1}{b_1}, \tag{1.4}$$

причем нижний знак в (1.4) берется для уравнения (1.1′).

Во втором параграфе будет показано, что (1.3) действительно является асимптотическим разложением для решения со свойством

$$\lim_{z\to\infty} y = \frac{c_1}{b_1}, \tag{1.5}$$

и что такое решение в случае (1.1) является единственным. Метод доказательства во многих деталях отличается от тех, которые встречаются в литературе.

Если $m \neq 0$, то $d_0 = \ldots = d_{m-1} = 0$, $d_m = \frac{c_{m+1}}{b_1 \pm m}$, а для остальных коэффициентов справедлива формула (1.4). Вместо (1.5) тогда имеем условие

$$\lim_{z\to\infty} z^m y(z) = \frac{c_{m+1}}{b_1 \pm m}. \tag{1.5}$$

Впредь ради определенности будем брать $m=0$.

Если $f(z) \equiv 0$, то разложение вида (1.3) существует только в случае $b_1 = 0$. Тогда d_0 можно выбрать произвольным, например $d_0 = 1$, а остальные коэффициенты определяются опять по формуле (1.4). При $b_2 = \ldots = b_m = 0$, $b_{m+1} \neq 0$ имеем $d_1 = \ldots = d_{m-1} = 0$, $d_m = \mp \frac{b_{m+1}}{m}$.

2. В дальнейшем для определенности будем рассматривать только уравнение (1.1). При небольших $|z|$ ряд (1.3) не дает практически требуемой точности, поэтому подставим в уравнение (1.1)

$$y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d_k}{z^k} + \frac{d_n}{z^n} H_n(z), \quad d_n \neq 0, \tag{1.6}$$

причем d_k определяются по формуле (1.4). Получаем

$$H_n'' - P_n(z)H_n' + Q_n(z)H_n = F_n(z), \tag{1.7}$$

где функции $P_n(z)$, $Q_n(z)$ и $F_n(z)$ имеют такие же свойства как функции $p(z)$, $q(z)$, $f(z)$. Коэффициенты их асимптотических разложений обозначим через A_{kn}, B_{kn}, C_{kn}, причем

$$A_{0n} = 1, \; A_{1n} = a_1 + 2n, \; A_{kn} = a_k \; (k \geqslant 2);$$

$$B_{1n} = b_1 + n, \; B_{2n} = b_2 + na_1 + n(n+1), \; B_{kn} = b_k + na_{k-1} \; (k > 2).$$

При $m \neq 0$, а также в случае однородного уравнения разложение для $F_n(z)$ все же начинается с члена $\frac{c_{1n}}{z}$, $c_{1n} \neq 0$.

В уравнение (1.7) в одном или нескольких местах можно ввести функцию $x = x(z)$ и искать формально разложение функции $H_n(z)$ в виде

$$H_n(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(x)}{z^k}. \tag{1.8}$$

При этом открываются различные возможности как для введения функции $x(z)$, так и для определения функций $g_k(x)$. В целях практического применения и обоснования метода, надо функцию $x(z)$ выбирать так, чтобы

$$\lim_{z \to \infty} x(z) = 0. \tag{1.9}$$

Положим

$$x(z) = \frac{\delta}{z} \tag{1.10}$$

и выберем $\delta = \frac{B_{2n}}{B_{1n}}$. При достаточно большем n имеем $\operatorname{Re}\delta > 0$. Тогда имеем

$$Q(z) \sim B_{1n} \frac{1+x}{z} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{B_{kn}}{z^k}.$$

Подставляя (1.8) в (1.7), причем производные функций H_n представляются в виде

$$H_n' = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k g_k + \delta g_{k-1}'}{z^{k+1}},$$

$$H_n'' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1) g_k + \delta(k+1) g_{k-1}' + \delta g_{k-1}'' x}{z^{k+2}} + \delta \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1) g_{k-1}'}{z^{k+2}},$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, имеем

$$g_k(x) = -\frac{1}{B_{1n}(1+x)+k} \Big\{ \delta g_{k-1}' + \sum_{i=1}^{k-1} A_{in} [(k-i) g_{k-i} + \delta g_{k-1-i}'] +$$

$$+ \sum_{i=3}^{k+1} B_{in} g_{k+1-i} + k(k-1) g_{k-1} + 2\delta(k-1) g_{k-2}' + \delta x g_{k-2}'' - C_{k+1,n} \Big\}, \quad k \geqslant 2,$$

$$g_0(x) = \frac{C_1}{B_{1n}(1+x)}, \quad g_1(x) = -\frac{\delta g_0' - C_{2n}}{B_{1n}(1+x)+1}. \tag{1.11}$$

Может случится, что ряд (1.8) при заданном z и определенном n дает возможность определить численное значение функции $H_n(z)$ с требуемой точностью. В этом и заключается практическое значение этого метода.

Можно построить и такое разложение (1.8), в котором функции $g_k(x)$ содержат в знаменателе только степени $(1+x)$. Тогда в разложении для функции $P_n(z)$ надо представить $\frac{A_{1n}}{z}$ *b* виде $\frac{A_{1n}}{z} = \frac{\delta}{z} + \frac{\mu}{z} = x + \frac{\mu}{z}$. В формуле (1.11) тогда имеем множитель $[(1+x) \times$

$\times(B_{1n}+k)]^{-1}$, а в фигурных скобках первый член будет $(1+x)\delta g'_{k-1}$ и вместо A_{1n} надо писать μ.

Если в формуле (1.10) брать значение для δ отличное от $\frac{B_{2n}}{B_{1n}}$, то в разложении для $Q(z)$ надо еще преобразовать член $\frac{B_{2n}}{z^2}=\frac{B_{1n}\delta+\varkappa}{z^2}$. От этого в скобках формулы (1.11) добавляется еще член $\varkappa g_{k-1}$. Параметр δ выбирается исходя из практических соображений.

3. Разнообразие в определении функций $g_k(x)$ проявляется и в том, что по разному можно представить функции H'_n и H''_n, исключая или вводя $\delta=xz$. При этом надо иметь ввиду, что для $g_k(x)$ мы должны получить рекуррентную формулу, а не дифференциальное уравнение, что получилось бы, например, если бы мы исключили δ из выражения для H'_n.

Рассмотрим сказанное на примере частного случая уравнения (1.1):

$$y''-\left(1+\frac{\alpha+\beta-1}{z}\right)y'+\left(\frac{\gamma-1}{z}+\frac{\alpha\beta}{z^2}\right)y=\frac{\gamma-1}{z}, \tag{1.12}$$

$$\gamma\neq 0,\ -1,\ \ldots,$$

имеющего решение с асимптотическим разложением

$$y\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k z^k}, \tag{1.13}$$

$$(\alpha)_k=\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1),\ (\alpha)_0=1.$$

Подстановка (1.6) дает

$$H''_n-\left(1+\frac{\alpha_1+\beta_1-1}{z}\right)H'_n+\left(\frac{\gamma'}{z}+\frac{\alpha_1\beta_1}{z^2}\right)H_n=\frac{\gamma'}{z}, \tag{1.14}$$

где

$$\alpha_1=\alpha+n,\quad \beta_1=\beta+n,\quad \gamma'=\gamma+n-1=\gamma_1-1.$$

По формуле (1.11) при $\delta=\frac{\alpha_1\beta_1}{\gamma'}$ имеем рекуррентную формулу

$$g_k(x)=-\frac{1}{\gamma'(1+x)+k}[(\alpha_1+\beta_1+k-1)(k-1)g_{k-1}+\delta g'_{k-1}+$$
$$+\delta(\alpha_1+\beta_1+2k-3)g'_{k-2}+\delta x g''_{k-2}],\quad k\geqslant 2,$$
$$g_0(x)=\frac{1}{1+x},\ g_1(x)=\frac{\delta}{(1+x)^2[\gamma'(1+x)+1]}. \tag{1.15}$$

Если брать другое δ, то уравнение (1.14) можно представить в виде

$$H''_n-\left(1+x+\frac{\mu}{z}\right)H'_n+\left(\gamma'\frac{1+x}{z}+\frac{\varkappa}{z^2}\right)H_n=\frac{\gamma'}{z}, \tag{1.16}$$

где

$$\mu=\alpha_1+\beta_1-1-\delta,\ \varkappa=\alpha_1\beta_1-\gamma'\delta,$$

и вместо (1.15) согласно примечанию предыдущего пункта имеем

$$g_k(x)=-\frac{1}{(1+x)(\gamma'+1)}\Big\{[(\mu+k)(k-1)+\varkappa]g_{k-1}+(1+x)\delta g'_{k-1}+$$
$$+\delta(\mu+2k-2)g'_{k-2}+\delta x g''_{k-2}\Big\},\quad k\geqslant 2, \tag{1.17}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *J. C. Miller*. A method for the determination of converging factors, applied to the asymptotic expansions for the parabolic cylinder functions. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1952, 48, 243—254.

[2]. *L. J. Slater*. On the evaluation of the confluent hypergeometric function. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1953, 49, 612—622.

[3]. *J. B. Rosser*. Explicit remainder terms for some asymptotic series. J. Rat. Mech. and Anal., 1955, 4, 595—626.

[4]. *Э. Риекстыньш*. О повышении точности в расчетах с асимптотическими рядами методом преобразования рядов. Ученые записки ЛГУ, 1961, 41, вып. 5, 107—124.

ASIMPTOTISKO RINDU TRANSFORMĒŠANA AR DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU METODI

E. Riekstiņš un E. Ikaunieks

(Kopsavilkums)

Darbā apskatīta asimptotisko attīstījumu transformēšanas metode, kurā rindas atlikuma locekli sadala divos reizinātājos, un vienam no tiem meklē attīstījumu cita veida asimptotiskā rindā. Jaunā attīstījuma formālai iegūšanai izlieto diferenciālvienādojumu, kuru apmierina šis reizinātājs. Vienai un tai pašai funkcijai iespējams iegūt dažādus attīstījumus. Attīstīšanas formālā puse apskatīta darba pirmajā paragrāfā, bet otrā paragrāfā dots metodes pamatojums, kurā izlietotas vairākas jaunas idejas. No iegūtajiem asimptotiskajiem attīstījumiem var iegūt dažus formālus attīstījumus, kas sastopami darbos [1], [2], [3].

$$g_0(x)=\frac{1}{1+x},\quad g_1(x)=\frac{\delta-x}{(1+x)^2(\gamma'+1)}.$$

Можно получить и другие функции $g_k(x)$. При подстановке (1.8) в уравнение (1.16) произведем следующие изменения, по сравнению с предыдущим случаем:

1) Представим $\mu=\mu-\gamma'+\gamma'$ и в члене $\frac{\gamma'}{z}H_n'$ используем замену $\frac{\delta g'_{k-1}}{z^{k+1}}=\frac{xg'_{k-1}}{z^k}$;

2) в выражении для H_n'' используем замену

$$\frac{\delta(k+1)g'_{k-1}}{z^{k+2}}=\frac{kxg'_{k-1}}{z^{k+1}}+\frac{\delta g'_{k-1}}{z^{k+2}}.$$

Тогда получаем рекуррентную формулу

$$(\gamma'+k)[(1+x)g_k+(\mu-\gamma'+k-1)g_{k-1}+xg'_{k-1}]+\delta[(1+x)g_{k-1}+$$
$$+(\mu-\gamma'+k-2)g_{k-2}+xg'_{k-2}]'+\alpha'\beta'g_{k-1}=0,$$
$$\alpha'=\alpha_1-\gamma_1=\alpha-\gamma,\quad \beta'=\beta_1-\gamma_1=\beta-\gamma. \tag{1.18}$$

Из этой формулы можно выразить $g_k(x)$ подобно тому, как это делается в формуле (1.17), но можно поступить и следующим образом. Обозначив

$$(1+x)g_k+(\mu-\gamma'+k-1)g_{k-1}+xg'_{k-1}=G_k,$$

имеем

$$G_k=-\frac{1}{\gamma'+k}[\delta G'_{k-1}+\alpha'\beta'g_{k-1}],$$

откуда можно выразить G_k через $g_{k-1},\ldots,g_0$. Окончательно получаем

$$g_k(x)=-\frac{1}{1+x}\Bigg[(\mu-\gamma'+k-1)g_{k-1}+xg'_{k-1}+$$
$$+\alpha'\beta'\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(-\delta)^i g_{k-1-i}^{(i)}}{(\gamma'+k)\ldots(\gamma'+k-i)}\Bigg]. \tag{1.19}$$

В частном случае $\beta=\gamma$ имеем $\mu-\gamma'=\alpha_1-\delta$, $\beta'=0$, и сумма в формуле (1.19) отпадает. Если положим

$$\delta=\alpha_1+\beta_1-\gamma_1, \tag{1.20}$$

то $\mu-\gamma'=0$. При $\beta=\gamma$ и $\delta=\alpha_1$ имеем разложение, полученное в работе [4].

Рассмотрим частный случай (1.20) при $\gamma=1$ и положим

$$n=z-h-(\alpha-1)-(\beta-1). \tag{1.21}$$

Отсюда имеем $\delta=z+1-h$. Если из разложения (1.8), где $g_k(x)$ определяется по (1.19), исключим n и δ, разложим отдельные члены в ряды по степеням $\frac{1}{z}$ и потом объединим подобные члены, то получим формальное разложение, имеющиеся в работе [2]:

$$H_n\sim\frac{1}{2}+\frac{1}{z}\left(\frac{h}{4}-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{z^2}\left[\frac{h^2}{8}-\frac{3h}{16}+\frac{1}{32}-\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{4}\right]+\ldots \tag{1.22}$$

Так как при $z \to \infty$ имеем $h \to \infty$, то этот ряд очевидно не является асимптотическим.

4. Большое практическое значение имеет также уравнение

$$y'' + \left(1 - \frac{\alpha+\beta-1}{z}\right) y' + \left(\frac{1-\gamma}{z} + \frac{\alpha\beta}{z^2}\right) y = \frac{1-\gamma}{z}, \tag{1.23}$$

которое в секторе σ имеет решение с разложением

$$y \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k z^k}. \tag{1.24}$$

После подстановки (1.6) получаем уравнение, подобное (1.23), в котором α заменяется на α_1, β на β_1 и $1-\gamma$ на γ'. С этим уравнением можно поступить точно также, как с уравнением (1.14): преобразовать его по образцу (1.16) и получить рекуррентные соотношения, подобные формулам (1.17) и (1.18), причем $\mu = \alpha_1 + \beta_1 - 1 + \delta$, $\varkappa = \alpha_1\beta_1 + \gamma'\delta$. Эти формулы отличаются только тем, что $1+x$ заменяется на $-(1+x)$, а в формуле (1.19) еще надо $\alpha'\beta'$ заменить на $-\alpha'\beta'$.

В частном случае $\gamma = 1$ при (1.20) и (1.21) можно получить формальное разложение, подобное (1.22). Это разложение уже не совпадает с формальным разложением работы [2], и является более простым.

§ 2.

1. Переходим к обоснованию выполненных действий, причем сначала рассмотрим несколько лемм.

Лемма 1. Если в секторе σ функция $F(z)$ является аналитической и имеет оценку

$$|F(z)| < \frac{M}{|z|^{\nu}}, \quad \nu > 1, \tag{2.1}$$

то функция

$$w(z) = -\int_{z}^{\infty} (e^{z-t} - 1) F(t)\, dt \tag{2.2}$$

в этой области также является аналитической, имеет оценки

$$|w(z)| < \frac{M_0}{|z|^{\nu-1}}, \quad |w'(z)| < \frac{M_0}{|z|^{\nu}}, \quad M_0 = M\left(\frac{2}{\nu-1} + \frac{1}{\sin\eta}\right) \tag{2.3}$$

и удовлетворяет уравнению

$$w'' - w' = F(z). \tag{2.4}$$

Путем интегрирования является луч, проходящий через начало координат и точку z. Доказательство леммы очевидно.

Лемма 2. Если в секторе σ функция $F(z)$ обладает прежними свойствами, то функция

$$\omega(z) = -\int_{z_0}^{\infty} e^{t-z} F(t)\, dt - \int_{z}^{\infty} F(t)\, dt \tag{2.5}$$

при любом фиксированном $z_0 \in \sigma$ в секторе σ является аналитической, имеет оценки (2.3) и удовлетворяет уравнению

$$\omega'' + \omega' = F(z). \tag{2.6}$$

Покажем справедливость оценок (2.3). При этом, очевидно, можно брать $|z|$ достаточно большим. Обозначим

$$z = re^{i\varphi}, \quad z_0 = r_0 e^{i\psi}$$

и выберем z так, чтобы $r_0 < \frac{r}{2}$, $\operatorname{Re} z_0 < \operatorname{Re}\frac{z}{2}$. Имеем

$$\omega(z) = -\int_{z_0}^{\frac{z}{2}} e^{t-z} F(t)\,dt - \int_{\frac{z}{2}}^{z} e^{t-z} F(t)\,dt - \int_{z}^{\infty} F(t)\,dt = I_1 + I_2 + I_3;$$

$$|I_1| < e^{-\operatorname{Re}\frac{z}{2}} \int_{r_0}^{\frac{r}{2}} \frac{M}{\rho^\nu}\,d\rho < \frac{M}{(\nu-1)\,r_0^{\nu-1}}\, e^{\frac{r}{2}\sin\eta}.$$

Можно найти такое $\rho_0(\nu)$, что при $r \geqslant \rho_0(\nu) > 2r_0$ имеет место

$$e^{-\frac{r}{2}\sin\eta} \leqslant \frac{1}{r^\nu}.$$

Далее имеем

$$|I_2| < Me^{-r\cos\varphi} \int_{\frac{r}{2}}^{r} e^{\rho\cos\varphi} \frac{d\rho}{\rho^\nu} < \frac{2^\nu M}{r^\nu \cos\varphi}\left[1 - e^{-\frac{r}{2}\cos\varphi}\right] < \frac{2^\nu M}{\sin\eta}\,\frac{1}{r^\nu},$$

$$|I_3| < \frac{M}{(\nu-1)\,r^{\nu-1}}.$$

Отсюда следуют оценки (2.3), причем при $r \geqslant \rho_0(\nu) \geqslant 1$ имеем

$$M_0(\nu) = M\left[\frac{1}{\nu-1}\left(\frac{1}{r_0^{\nu-1}} + 1\right) + \frac{2^\nu}{\sin\eta}\right]. \tag{2.7}$$

Лемма 3. Если функции $p(z)$, $g(z)$ и $f(z)$ в секторе σ являются аналитическими и имеют асимптотические разложения

$$p(z) \sim 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}, \quad q(z) \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, \quad f(z) \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+\nu}}, \tag{2.8}$$

$$n + \operatorname{Re}\nu > 0, \quad c_{n+1} \neq 0,$$

то уравнение

$$L(v) \equiv v'' - p(z)v' + q(z)v = f(z) \tag{2.9}$$

в этом секторе имеет аналитическое решение с оценкой

$$|v| < \frac{\overline{M}}{|z|^{n+\operatorname{Re}\nu}}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$v = -\lambda \int_z^\infty [(p-1)v' - qv](e^{z-t}-1)\,dt - \int_z^\infty (e^{z-t}-1)f(t)\,dt \qquad (2.11)$$

и будем искать его решение в виде

$$v(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i w_i(z). \qquad (2.12)$$

Этот ряд формально удовлетворяет уравнению (2.11), если

$$w_0(z) = -\int_z^\infty (e^{z-t}-1)f(t)\,dt,$$

$$w_{i+1}(z) = -\int_z^\infty (e^{z-t}-1)[(p-1)w_i' - qw_i]\,dt, \quad i = 0, 1, \ldots . \qquad (2.13)$$

Докажем равномерную сходимость этого ряда в секторе σ и при $|\lambda| \leqslant 1$. Из (2.8) следует

$$|p-1| < \frac{M}{|z|}, \quad |q| < \frac{M}{|z|^2}, \quad |f| < \frac{M}{|z|^{n+1+\operatorname{Re}\nu}}. \qquad (2.14)$$

Заметим, что вместо разложений (2.8) от функций $p(z)$, $q(z)$ и $f(z)$ достаточно требовать только выполнение неравенств (2.14). Это примечание относится и к леммам 4 и 5. Оценки (2.14) остаются в силе и тогда, если $a_1 = 0$ или же $b_2 = 0$.

Применяя лемму 1, методом математической индукции можно показать справедливость оценок

$$|w_i| < \frac{M_0(2M_0)^i}{|z|^{n+\operatorname{Re}\nu+i}}, \quad |w_i'| < \frac{M_0(2M_0)^i}{|z|^{n+\operatorname{Re}\nu+i+1}}, \quad i = 0, 1, \ldots .$$

Вспоминая, что в секторе σ имеем $|z| \geqslant R_0$, выберем такое N, что

$$\operatorname{Re}\nu + N > 2M\left(1 + \frac{1}{R_0}\right),$$

и при $i > N$ оценим $|w_i|$ и $|w_i'|$ по другому. В итоге имеем для (2.12) сходящийся мажорантный ряд

$$\frac{M_0}{|z|^{n+\operatorname{Re}\nu}}\left[\sum_{i=0}^{N}\frac{(2M_0)^i}{R_0^i} + \frac{4M(2M_0)^N}{R_0^N}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left[2M\left(1+\frac{1}{R_0}\right)\right]^i}{(n+\operatorname{Re}\nu+N+1)^{i+1}}\right],$$

доказывающий равномерную сходимость ряда (2.12) и справедливость оценки (2.10).

Учитывая то, что функции $w_i(z)$ являются аналитическими в σ, ряд (2.12) можно сколь угодно раз дифференцировать почленно. Поэтому при $\lambda = 1$ по лемме 1 имеем

$$v''(z) - v'(z) = f(z) + [p(z)-1]\sum_{i=0}^{\infty} w_i'(z) - q(z)\sum_{i=0}^{\infty} w_i(z) =$$

$$= f(z) + [p(z)-1]\,v'(z) - q(z)\,v(z)$$

или же

$$L[v(z)]=f(z).$$

Этим лемма доказана.

Лемма 4. Лемма 3 остается справедливой и для уравнения

$$v''+p(z)v'+q(z)v=f(z). \tag{2.15}$$

В этом случае вместо уравнения (2.11) надо брать

$$v=\lambda\int_{z_0}^{z} e^{t-z}[(p-1)v'+qv]\,dt+\lambda\int_{z}^{\infty}[(p-1)v'+qv]\,dt-$$

$$-\int_{z_0}^{z} e^{t-z}f(t)\,dt-\int_{z}^{\infty} f(t)\,dt. \tag{2.16}$$

Если искать его решение в виде

$$v(z)=\sum_{=0}^{\infty}\lambda^i\omega_i(z), \tag{2.17}$$

то ряд формально удовлетворяет (2.16), если

$$\omega_0(z)=-\int_{z_0}^{z} e^{t-z}f(t)\,dt-\int_{z}^{\infty} f(t)\,dt,$$

$$\omega_{i+1}(z)=\int_{z_0}^{z} e^{t-z}f_i(t)\,dt+\int_{z}^{\infty} f_i(t)\,dt,$$

$$f_i(t)=[p(t)-1]\omega_i'(t)+q(t)\omega_i(t),\quad i=0,1,\ldots\,. \tag{2.18}$$

Используя лемму 2 и оценки (2.14), при $|z|=r>\max[\rho_0(\nu_1),2r_0,1]$, $\nu_1=n+1+\operatorname{Re}\nu$, $|\lambda|\leqslant 1$ для ряда (2.17) можно построить мажорантный ряд

$$\frac{1}{|z|^{\nu_1-1}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{M_0(2M_0)^i}{r_0^i},\quad M_0(\nu_1)=M\left[\frac{1}{\nu_1-1}\left(\frac{1}{R_0^{\nu_1-1}}+1\right)+\frac{2^{\nu_1}}{\sin\eta}\right],$$

который сходится, если $r_0>2M_0$. Поэтому фиксируем z_0 так, чтобы $r_0>2M_0$. Тогда при указанных z ряд (2.17) равномерно сходится и функция (2.17) имеет оценку (2.10). Дифференцируя этот ряд почленно, при $\lambda=1$ по лемме 2 с учетом (2.18) получим уравнение (2.15).

Функция (2.17) определена при указанных z, но при помощи дифференциального уравнения ее можно аналитически продолжить на весь сектор σ. Таким образом лемма доказана.

Лемма 5. Леммы 3 и 4 остаются справедливыми, если в секторе σ

$$q(z)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{z^k},\quad b_1\neq 0,\quad n+\operatorname{Re}\nu\pm\operatorname{Re}b_1>0,$$

а остальные функции сохраняют прежние свойства.

Подстановка

$$v=z^{\pm b_1}u, \tag{2.19}$$

в которой «+» берется для уравнения (2.9), а «—» для (2.15), переводит эти уравнения в уравнение

$$u'' \mp u'\left(p - \frac{2b_1}{z}\right) + u\left[q - \frac{b_1 p}{z} + \frac{b_1(b_1 \mp 1)}{z^2}\right] = fz^{\pm b_1}, \tag{2.20}$$

причем

$$q - \frac{b_1 p}{z} + \frac{b_1(b_1 \mp 1)}{z^2} \sim \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b'_k}{z^k}.$$

Поэтому уравнение (2.20) имеет решение с оценкой

$$|u| < \frac{\overline{M}}{|z|^{n + \operatorname{Re}\nu \pm \operatorname{Re} b_1}}.$$

Учитывая (2.19), получаем доказательство леммы.

2. Теперь можно перейти к доказательству асимптотичности рядов (1.3) и (1.8).

Теорема 1. Если функции $p(z)$, $q(z)$ и $f(z)$ в секторе σ являются аналитическими и имеют разложения (1.2), причем $a_0 = 1$, то уравнение (1.1) в секторе σ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$\lim_{z\to\infty} z^m y(z) = \frac{c_{m+1}}{m + b_1}, \quad c_{m+1} \neq 0 \tag{2.21}$$

и имеющее асимптотическое разложение (1.3), в котором $d_0 = \ldots = d_{m-1} = 0$, а остальные коэффициенты определяются по формуле (1.4).

Положим

$$y(z) = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{d_k}{z^k} + v_n(z) = S_{n-1}(z) + v_n(z), \quad n \geqslant m + 1 \tag{2.22}$$

и выберем n столь большим, чтобы выполнялось неравенство $n + \operatorname{Re} b_1 > 0$. Тогда получим уравнение

$$v''_n - pv'_n + qv_n = F_n, \tag{2.23}$$

в котором $F_n(z)$ — функция, аналитическая в секторе σ, и имеющая оценку

$$|F_n(z)| < \frac{M_n}{|z|^{n+1}}.$$

По лемме 5 уравнение (2.23) имеет решение с оценкой

$$|v_n(z)| < \frac{\overline{M}_n}{|z|^n}. \tag{2.24}$$

Обозначим это решение через $v_{n_0}(z)$. Подставляя эту функцию в (2.22), имеем

$$y(z) = S_{n-1}(z) + O\left(\frac{1}{z^n}\right).$$

Это соотношение справедливо не только при $n + \operatorname{Re} b_1 > 0$, но и при всех целых $n \geqslant m + 1$, так как второй член можно включить в остаток первого члена. Этим асимптотический характер ряда (1.3) установлен.

Если $f(z) \equiv 0$ и $b_1 = 0$, то, очевидно, наше доказательство сохраняется, но вместо (2.21) имеем условие

$$\lim_{z\to\infty} y(z) = 1 \tag{2.25}$$

Доказательство сохраняется и в случае $a_0=-1$, так как лемма 5 относится и к этому случаю.

Еще остается доказать единственность решения. Для этого докажем единственность решения v_{n0}. Общее решение уравнения (2.23) имеет вид

$$v_n(z)=D_{1n}v_{n1}(z)+D_{2n}v_{n2}(z)+v_{n0}(z), \tag{2.26}$$

где $v_{n1}(z)$ и $v_{n2}(z)$ — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения, которое обозначим через (2.23'). Подстановка (2.19) переводит (2.23') в однородное уравнение, соответствующее (2.20). Согласно доказанному, это уравнение имеет решение со свойством (2.25), поэтому (2.23) имеет частное решение $v_{n1}(z)$ со свойством

$$|v_{n1}(z)|=O(|z|^{\operatorname{Re} b_1}).$$

Поскольку $n>-\operatorname{Re} b_1$, то это частное решение не удовлетворяет неравенству (2.24) и поэтому $D_{1n}=0$.

Подстановка $v=e^z u$ переводит уравнение (2.23') в уравнение

$$u''+(2-p)u'+(1-p+q)u=0,$$

которое согласно лемме 5 и уже доказанному имеет частное решение со свойством

$$|u(z)|=O(|z|^{\operatorname{Re}(a_1-b_1)}).$$

Поэтому уравнение (2.23') имеет частное решение $v_{n2}(z)$ с оценкой

$$|v_{n2}(z)|=O(e^{\operatorname{Re} z}|z|^{\operatorname{Re}(a_1-b_1)}),$$

которое тоже не удовлетворяет (2.24). Таким образом $v_n(z)\equiv v_{n0}(z)$, а из единственности $v_n(z)$ следует единственность решения $y(z)$, так как функция $v_n(z)$ по формуле (2.22) определяет функцию $y(z)$.

Надо отметить, что единственность решения не имеет места для уравнения (1.1'), так как в этом случае $v_{n2}(z)$ имеет оценку

$$|v_{n2}(z)|=O(e^{-\operatorname{Re} z}|z|^{\operatorname{Re}(b_1-a_1)}),$$

и поэтому можно брать

$$v_n(z)=D_{2n}v_{n2}(z)+v_{n0}(z)$$

с любым D_{2n}.

3. Покажем еще асимптотический характер разложения (1.8). Если $y(z)$ фиксирована согласно теореме 1, то соотношение (1.6) определяет функцию $H_n(z)$ со свойствами

$$\lim_{z\to\infty} H_n(z)=1,\ H_n(z)\sim\frac{1}{d_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d_{n+k}}{z^k}. \tag{2.27}$$

Кроме того $H_n(z)$ удовлетворяет уравнению (1.7). Согласно теореме 1 это единственное решение (1.7), имеющее разложение (2.27). Имеет место следующая

Теорема 2. Пусть функции $g_k(x)$, $k=0,1,\ldots$ в секторе σ являются аналитическими функциями, имеют разложения

$$g_k(x)\sim\sum_{j=0}^{\infty}\frac{l_{kj}}{z^j} \tag{2.28}$$

и выбраны так, что ряд (1.8) формально удовлетворяет уравнению (1.7). Тогда для каждого натурального m имеет место

$$H_n(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{g_k(x)}{z^k}+O\left(\frac{1}{z^m}\right), \tag{2.29}$$

т. е. ряд (1.8) является асимптотическим разложением для $H_n(z)$, определяемой соотношением (1.6).

Подставляя в уравнение (1.7)

$$H_n(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{g_k(x)}{z^k}+u_{mn}(z), \tag{2.30}$$

получаем

$$u''_{mn}-P_n(z)u'_{mn}+Q_n(z)u_{mn}=\Phi_{mn}(z), \tag{2.31}$$

где $\Phi_{mn}(z)$ — функция, аналитическая в секторе σ, и имеющая разложение

$$\Phi_{mn}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k^{(m,n)}}{z^{m+k+1}}.$$

Согласно теореме 1, уравнение (2.31) в секторе σ имеет единственное аналитическое решение, имеющее для каждого $m\geqslant 1$ оценку

$$|u_{mn}(z)|<\frac{\overline{M}_{mn}}{|z|^m}$$

и асимптотическое разложение

$$u_{mn}(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_k^{(m,n)}}{z^{m+k}}, \tag{2.32}$$

так как B_1 не может быть целым неположительным. Подставив (2.32) в (2.30), разложив функции $g_k(x)$ в асимптотические ряды согласно (2.28) и объединив подобные члены, получаем, что функция $H_n(z)$, определяемая формулой (2.29) и являющаяся решением (1.7), имеет асимптотическое разложение вида (2.27). Поэтому, согласно сказанному о единственности функции $u_{mn}(z)$ и разложении (2.27), эта функция совпадает с той, которая определяется формулой (1.6). Этим теорема доказана.

В случае формулы (1.11) функции $g_k(x)$ имеют полюсы в точках $z_j=-\dfrac{\delta}{\dfrac{j}{B_{1n}}+1}$, $j=0,\ldots,k$, которые, начиная с некоторого j, безусловно лежат вне σ. В остальных случаях выбора функций $g_k(x)$ имеем только один полюс z_0. Эти функции, очевидно, разлагаются в ряды по степеням $\dfrac{1}{z}$. Поэтому, в случае необходимости сузив сектор σ подходящим выбором R_0, можем сказать, что функции $g_k(x)$, используемые в § 1, удовлетворяют условиям теоремы 2.

Отметим еще, что теорема 2 справедлива и для уравнения (1.1′). Только в этом случае мы опять не можем гарантировать единственность разложения (2.29) для функции $H_n(z)$, так как член $O\left(\dfrac{1}{z^m}\right)$ в этой формуле кроме остатка ряда может включать в себя также дополнительное разложение с множителем $e^{-z}z^{B_{1n}-A_{1n}}$.

25. 8. 61. *Кафедра общей математики*

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

О МЕТОДЕ СМЕШАННОЙ ИТЕРАЦИИ

С. Гайлите

1. Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$y(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\,y(t)\,dt+f(s). \tag{1}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ собственные значения ядра $K(s, t)$, расположенные в порядке возрастания их модулей:

$$0<|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots$$

Обозначим

$$\lambda_k^{-1}=\varkappa_k\ (k=1,2,\ldots),$$

считая

$$\varkappa_k=0\ \ (k=m+1,\, m+2,\ldots)$$

в случае конечного числа m собственных значений ядра $K(s, t)$.

Одним из обычных методов решения интегрального уравнения (1) является классический итерационный метод. Однако этот метод не применим в случае, когда параметр

$$|\lambda|\geqslant|\lambda_1| \tag{2}$$

Г. Бюкнер [1] и [2] (в частном случае также Г. Виарда [3]), развил метод смешанной итерации, пригодный для всех значений параметра λ, за исключением собственных значений ядра. По методу смешанной итерации последовательные приближения $y_n(s)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ строят по общей формуле

$$y_{n+1}(s)=\Theta y_n(s)+\lambda(1-\Theta)\int_a^b K(s,t)\,y_n(t)\,dt+(1-\Theta)f(s), \tag{3}$$

где Θ действительный или комплексный параметр $(\Theta\neq 1)$. Необходимым условием того, чтобы последовательность (3) при данном λ стремилась к решению уравнения (1) независимо от выбора начальной функции $y_0(s)$, является требование относительно параметра Θ:

$$|\Theta+\lambda(1-\Theta)\varkappa_k|<1\ \ (k=1,2,\ldots) \tag{4}$$

Г. Бюкнер [3] установил также достаточные условия для сходимости последовательности (3), требуя, кроме выполнения условия (4), дополнительно

$$|\Theta|<1. \tag{4}$$

Г. Н. Положий [4] предложил другой метод последовательных приближений, пригодный для решения интегральных уравнений при произвольных значениях параметра λ, как и в случае применения метода смешанной итерации. Он рассматривает интегральное уравнение вида

$$y(s)=\frac{1}{\mu}\int_a^b K(s,t)\,y(t)dt-\frac{1}{\mu}F(s), \tag{1'}$$

где параметр $\mu\neq 0$ и $\frac{1}{\mu}$ не является собственным значением ядра. По методу, данному Г. Н. Положим, уравнение (1') приводится к эквивалентному интегральному уравнению с положительно определенным симметричным ядром. Введением параметра полученное уравнение преобразуется в уравнение, содержащее оператор с нормой меньшей единицы. Как доказал М. А. Красносельский [5], такого рода операторные уравнения всегда могут быть решены методом последовательных приближений, если решение существует. Из результатов его работы следует в частности, что интегральные уравнения можно решить методом последовательных приближений также в случае, когда параметр λ совпадает с собственным значением ядра и решение существует. Поскольку единственность решения не имеет место, получается одно из возможных решений.

2. Покажем, что метод смешанной итерации приводит к тому же способу построения последовательных приближений, как и метод, данный Г. Н. Положим.

Пусть ядро $K(s,t)$ симметрично и параметр μ действительное число, — хотя можно обойтись и без этих ограничений. Составим уравнение, эквивалентное уравнению (1'). Подстановкой

$$y(t)=\frac{1}{\mu}\int_a^b K(t,\xi)\,y(\xi)d\xi-\frac{1}{\mu}F(t)$$

первый член правой части уравнения (1') представляется в виде

$$\frac{1}{\mu}\int_a^b K(s,t)y(t)dt=\frac{1}{\mu^2}\int_a^b K(s,t)dt\int_a^b K(t,\xi)y(\xi)d\xi-\frac{1}{\mu^2}\int_a^b K(s,t)F(t)dt$$

или

$$\frac{1}{\mu}\int_a^b K(s,t)y(t)dt=\frac{1}{\mu^2}\int_a^b K^{(2)}(s,t)y(t)dt-\frac{1}{\mu^2}\int_a^b K(s,t)F(t)dt,$$

где

$$K^{(2)}(s,t)=\int_a^b K(s,\xi)K(\xi,t)d\xi=K^{(2)}(t,s)$$

первое повторное ядро. Вычитая почленно полученное уравнение и уравнение (1'), имеем

$$y(s)-\frac{1}{\mu}\int_a^b K(s,t)y(t)dt=\frac{1}{\mu}\int_a^b K(s,t)y(t)dt-\frac{1}{\mu^2}\int_a^b K^{(2)}(s,t)y(t)dt-$$

$$-\frac{1}{\mu^2}\int_a^b K(s,t)F(t)dt-\frac{1}{\mu}F(s)$$

или

$$y(s) = -\frac{1}{\mu^2}\int\limits_a^b [K^{(2)}(s, t) - 2\mu K(s, t)]\, y(t)dt + \frac{1}{\mu^2}\int\limits_a^b K(s, t)F(t)dt - \frac{1}{\mu} F(s).$$

При помощи подстановки

$$z(s) = y(s) + \frac{1}{\mu} F(s)$$

получаем уравнение

$$z(s) = -\frac{1}{\mu^2}\int\limits_a^b N(s, t)z(t)dt + \frac{1}{\mu^2} F^*(s), \tag{5}$$

где

$$\left.\begin{aligned} N(s, t) &= K^{(2)}(s, t) - 2\mu K(s, t) \\ F^*(s) &= \int\limits_a^b \left[\frac{1}{\mu} K^{(2)}(s, t) - K(s, t)\right] F(t)dt \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Обратно, при помощи предыдущей подстановки уравнение (5) переходит в

$$y(s) + \frac{1}{\mu} F(s) = -\frac{1}{\mu^2}\int\limits_a^b K^{(2)}(s, t)y(t)dt + \frac{2}{\mu}\int\limits_a^b K(s, t)y(t)dt + \frac{1}{\mu^2}\int\limits_a^b K(s, t)F(t)dt$$

или

$$\mu y(s) + F(s) - \int\limits_a^b K(s, t)\nu(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\mu}\int\limits_a^b K(s, t)[\mu y(t) + F(t) - \int\limits_a^b K(t, \xi)y(\xi)d\xi]dt \tag{7}$$

Обозначая

$$\mu y(s) + F(s) - \int\limits_a^b K(s, t)y(t)dt = \psi(s),$$

получаем

$$\psi(s) = \frac{1}{\mu}\int\limits_a^b K(s, t)\psi(t)\, dt \tag{7'}$$

Так как $\frac{1}{\mu}$ не является собственным значением ядра $K(s, t)$, то однородное уравнение (7′) имеет только тривиальное решение

$$\psi(s) = \mu y(s) + F(s) - \int\limits_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt \equiv 0$$

или

$$y(s) \equiv \frac{1}{\mu}\int\limits_a^b K(s, t)\, y(t)\, dt - \frac{1}{\mu} F(s).$$

Таким образом, если функция $z(s)$ удовлетворяет уравнению (5), то $y(s) = z(s) - \frac{1}{\mu} F(s)$ является решением уравнения (1′), и обратно.

Решая уравнение (5) методом смешанной итерации, строим последовательность функций по общей формуле

$$z_{n+1}(s) = \Theta z_n(s) - \frac{1}{\mu^2}(1-\Theta)\int_a^b N(s,t)z_n(t)dt + \frac{1}{\mu^2}(1-\Theta)F^*(s)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Покажем, что можно выбрать параметр Θ, удовлетворяющий условиям (4) и (4′). Полагая

$$\Theta = 1 - \frac{2}{\sigma}\mu^2,\ 1-\Theta = \frac{2}{\sigma}\mu^2\ (\sigma \neq 0),$$

имеем

$$z_{n+1}(s) = \left(1 - \frac{2}{\sigma}\mu^2\right)z_n(s) - \frac{2}{\sigma}\int_a^b N(s,t)z_n(t)dt + \frac{2}{\sigma}F^*(s) \tag{8}$$

В статье Г. Н. Положего [4] доказана теорема: если ядро $K(s, t)$ симметричное, $\mu \neq 0$ и $\frac{1}{\mu}$ не является собственным значением ядра $K(s, t)$, то последовательность функций

$$\tilde{y}_{n+1}(s) = -\frac{1}{\mu}F(s) + y_{n+1}(s) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где функции $y_n(s)$ построены по рекурентной формуле

$$y_{n+1}(s) = Py_n + \frac{2}{\sigma}F^*(s),\ y_0(s) = \frac{2}{\sigma}F^*(s) \tag{8′}$$

содержащей оператор

$$Py \equiv y(s) - \frac{2}{\sigma}\left\{\int_a^b N(s,t)y(t)dt + \mu^2 y(s)\right\} \tag{8″}$$

и числовой параметр σ, удовлетворяющий неравенству

$$\sigma > \max_k (\mu - \varkappa_k)^2,$$

равномерно на $[a, b]$ стремится к решению интегрального уравнения (1′) при $n \to \infty$.

Если подставить в правую часть формулы (8′) выражение для Py_n согласно (8″), то можно убедиться, что

$$y_{n+1}(s) \equiv z_{n+1}(s) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, способ решения уравнения (5) по методу смешанной итерации формально совпадает со способом решения уравнения (1′), данным Г. Н. Положим.

Пусть ν_k собственные значения ядра $N(s, t)$. Согласно определению ядра $N(s, t)$, значения $\varkappa_k$ и ν_k связаны соотношением

$$\nu_k^{-1} = \varkappa_k^2 - 2\mu\varkappa_k$$

Необходимым условием для сходимости метода смешанной итерации является удовлетворение неравенства

$$|\Theta + (1-\Theta)\lambda\nu_k^{-1}| < 1 \tag{9}$$

для всех ν_k. В данном случае

$$\lambda = -\frac{1}{\mu^2},\ \Theta = 1 - \frac{2}{\sigma}\mu^2,$$

и после подстановки этих значений неравенство (9) переходит в

$$\left|1-\frac{2}{\sigma}\mu^2-\frac{2}{\sigma}\nu_k^{-1}\right|<1$$

или

$$\left|1-\frac{2}{\sigma}(\mu-\varkappa_k)^2\right|<1, \tag{9'}$$

так как

$$\mu^2+\nu_k^{-1}=\mu^2-2\mu\varkappa_k+\varkappa_k^2=(\mu-\varkappa_k)^2.$$

Решая неравенство (9′), получим

$$\sigma>(\mu-\varkappa_k)^2.$$

Так как полученное неравенство имеет место для всех $\varkappa_k$, то можно потребовать

$$\sigma>\max_k(\mu-\varkappa_k)^2 \tag{9''}$$

Достаточными условиями для сходимости последовательности итераций являются (9) и

$$|\Theta|<1$$

или

$$\left|1-\frac{2}{\sigma}\mu^2\right|<1$$

Решая это неравенство, получим $\sigma>\mu^2$. Следовательно, достаточные условия выражаются неравенствами

$$\left.\begin{aligned}&\sigma>\max_k(\mu-\varkappa_k)^2\\&\sigma>\mu^2\end{aligned}\right\} \tag{9'''}$$

Г. Н. Положий [4] доказывает, что условие (9″) является достаточным для равномерной сходимости последовательности итераций (8′). Покажем, что это условие достаточное также для равномерной сходимости последовательности (8), построенной по методу смешанной итерации. Действительно, если ядро $K(s, t)$ имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение $\lambda_j<0$, то

$$\max_k(\mu-\varkappa_k)^2\geqslant(\mu-\varkappa_j)^2>\mu^2,$$

и достаточность условия (9″) доказана. Далее рассмотрим случай, когда все собственные значения ядра $K(s, t)$ положительны. Тогда обратные значения $\varkappa_k$ образуют монотонно убывающую последовательность

$$\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\ldots\geqslant0$$

Если собственных значений λ_k бесконечно много, то

$$\lambda_k\to\infty \text{ и } \varkappa_k=\lambda_k^{-1}\to0 \text{ при } k\to\infty.$$

В этом случае

$$\max_k(\mu-\varkappa_k)^2=\mu^2$$

В случае конечного числа m собственных значений все $\varkappa_\nu = 0$ ($\nu \geqslant m+1$), и также получаем

$$\max_k (\mu - \varkappa_k)^2 = \mu^2$$

Следовательно, доказано, что условие (9″) является необходимым и достаточным для равномерной сходимости последовательности (8).

З а м е ч а н и е. Г. Н. Положий [4] доказывает сходимость последовательности (8′) при определенном выборе начальной функции

$$y_0(s) = \frac{2}{\sigma} F^*(s).$$

Возможно, что эта функция является в некотором смысле наилучшим начальным приближением. Однако, последовательность (8′) сходится независимо от выбора начальной функции.

3. Метод последовательных приближений, предложенный Г. Н. Положим [4] и В. М. Фридманом [6] для решения интегральных уравнений 1-го рода

$$\int_a^b K(s, t) y(t) dt = f(s)$$

можно рассматривать как частный случай метода смешанной итерации. В данном случае итерации строят не для интегрального оператора

$$Ky \equiv \int_a^b K(s, t) y(t) dt,$$

а для орератора

$$K_1 y \equiv Ey - Ky,$$

где E — единичный оператор, т. е. $Ey = y$. По методу смешанной итерации для оператора $K_1 y$ представляют

$$y_n(s) = \Theta y_{n-1}(s) + (1-\Theta) K_1 y_{n-1} + (1-\Theta) f(s) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

или

$$y_n(s) = y_{n-1}(s) - (1-\Theta) K y_{n-1} + (1-\Theta) f(s) \ (n = 1, 2, \ldots)$$

Обозначая

$$1 - \Theta = k,$$

получаем обычный метод последовательных приближений

$$y_n(s) = y_{n-1}(s) - kKy_{n-1} + kf \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

для решения интегральных уравнений 1-го рода

$$Ky = f(s)$$

Для симметричных и положительно определенных ядер $K(s, t)$ можно установить (аналогично как в разделе 2) известное условие сходимости метода:

$$0 < k < 2\lambda_1.$$

4. Метод смешанной итерации применим не только для решения интегральных уравнений, но и для решения определенного вида интегро-дифференциальных уравнений.

Пусть дано линейное интегро-дифферанциальное уравнение вместе с краевыми условиями

$$\begin{cases} M[y] = \lambda \int\limits_a^b K(s, t) y(t) dt + f(s) \\ U_\mu[y] = \gamma_\mu \ (\mu = 1, 2, \ldots, n), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$M[y] = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(s) y^{(\nu)}(s)$$

$f_\nu(s)$ — непрерывные функции и $f_n(s) \neq 0$),

$$U_\mu[y] = \sum_{\nu=0}^{n-1} [\alpha_{\nu\mu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\nu\mu} y^{(\nu)}(b)]$$

($\alpha_{\nu\mu}$, $\beta_{\nu\mu}$ — постоянные, обеспечивающие линейную независимость форм $U_\mu[y]$),

γ_μ — постоянные, λ— параметр, $f(s)$ и $K(s, t)$ — данные непрерывные функции.

В случае однородных краевых условий (все $\gamma_\mu = 0$) при помощи функции Грина $G(s, t)$ для соответствующей дифференциальной системы можно привести систему (10) к эквивалентному интегральному уравнению второго рода

$$y(s) = \lambda \int\limits_a^b G(s, t) dt \int\limits_a^b K(t, \xi) y(\xi) d\xi + \int\limits_a^b G(s, t) f(t) dt.$$

Изменяя порядок интегрирования в повторном интеграле и обозначая

$$\int\limits_a^b G(s, t) K(t, \xi) dt = R(s, \xi)$$

и

$$\int\limits_a^b G(s, t) f(t) dt = F(s),$$

получаем интегральное уравнение

$$y(s) = \lambda \int\limits_a^b R(s, t) y(t) dt + F(s), \tag{11}$$

которое можно решать методом смешанной итерации. Можно доказать, что способ построения последовательных приближений $y_m(s)$ для уравнения (11) по методу смешанной итерации сводится к представлению

$$\begin{cases} M[y_{m+1}] = \Theta M[y_m] + \lambda(1 - \Theta) \int\limits_a^b K(s, t) y_m(t) dt + (1 - \Theta) f(s) \\ U_\mu[y_{m+1}] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

относящемуся непосредственно к системе (10).

Если краевые условия неоднородны, то вводят функции

$$z_m(s) = y(s) - y_m(s) \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

где $y(s)$ — решение системы (10), а $y_m(s)$ строят по схеме

$$\begin{cases} M[y_m] = \Theta M[y_{m-1}] + \lambda(1-\Theta)\int\limits_a^b K(s,t)y_{m-1}(t)dt + (1-\Theta)f(s) \\ U_\mu[y_m] = \gamma_m \quad (\mu = 1, 2, \dots n) \end{cases}$$

Можно доказать, что последовательность функций $z_m(s)$ равномерно на $[a, b]$ стремится к нулю при $m \to \infty$. Следовательно, и в этом случае можно получить решение $y(s)$ методом смешанной итерации.

Однако, решение интегро-дифференциальных уравнений методом смешанной итерации не является практически удобным.

Замечание. Данная статья составлена по материалам дипломной работы, разработанной под руководством проф. А. Я. Лусиса.

23.9.61

Кафедра математического анализа

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *H. Bückner*. Die praktische Behandlung von Integralgleichungen. Berlin, 1952.
[2]. *H. Bückner*. A special method of successive approximations for Fredholm integral equations. Duke Math. Journal, 1948, 15; 1: 2, 197—206.
[3]. *G. Wiarda*. Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtung der Anwendungen. Leipzig, 1930.
[4]. *Г. Н. Положий*. Об одном методе решения интегральных уравнений. ИАН сер. мат., 1959, 23, 2, 295—312.
[5]. *М. А. Красносельский*. О решении методом последовательных приближений уравнений с самосопряженными операторами. УМН, 1960, XV, 3 (93), 161—165.
[6]. *В. М. Фридман*. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. УМН, 1956, XI, 1 (67), 233—234.

PAR JAUKTO ITERACIJU METODI

S. Gailīte

(Kopsavilkums)

Darbā parādīts, ka ar jaukto iteraciju metodi lineārā otrā veida integralvienādojuma (1′) atrisināšanā iegūst tādus pat pakāpeniskos tuvinājumus, kā ar G. M. Položija rakstā [4] doto metodi. Jaukto iteraciju metodi var pielietot arī pirmā veida Fredholma integralvienādojuma un lineārā integro-diferenciālvienādojuma robežproblēmas (10) atrisināšanai.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ. ТОМ 41, ВЫПУСК 5, 1961 ГОДА

О ПРОБЛЕМЕ АВТОМАТНОСТИ АЛГОРИТМОВ

Я. М. Барздыньш

Пусть C — какой-нибудь автомат и C' — какой-нибудь частичный автомат.* Пусть A — алфавит входов автомата C и частичного автомата C', A' — алфавит выходов состояний C и C', c_0 — начальное состояние автомата C и c'_0 — начальное состояние частичного автомата C'.

Будем говорить, что частичный автомат C' *применим* к слову $P = x_{\eta_k} \ldots x_{\eta_1}$ ($x_{\eta_i} \in A$, $i = 1, 2, \ldots, k$), если существуют все переходы $x_{\eta_i} \ldots x_{\eta_1} c'_0$, где $i = 1, 2, \ldots, k$. Если хоть один из переходов $x_{\eta_i} \ldots x_{\eta_1} c'_0$ не существует, то будем говорить, что частичный автомат C' *не применим* к слову P. Будем говорить, что частичный автомат C' *перерабатывает* слово $P = x_{\eta_k} \ldots x_{\eta_1}$, в слово $Q = y_{\eta_k} \ldots y_{\eta_1}$, если:

1. C' применим к слову P,

2. Состояние $x_{\eta_i} \ldots x_{\eta_1} c'_0$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) имеет выход y_{η_i}.

Приведенные выше определения будем распространять и на автоматы, на частный вид частичных автоматов.

Теперь отметим некоторые очевидные свойства.

Свойство 1. Если частичный автомат C' перерабатывает слово $P = x_{\eta_k} \ldots x_{\eta_1}$ в слово $Q = y_{\eta_k} \ldots y_{\eta_1}$ и слово $R = x_{\nu_m} \ldots x_{\nu_1}$ в слово $S = y_{\nu_m} \ldots y_{\nu_1}$ и если слова $P_i = x_{\eta_i} \ldots x_{\eta_1}$ и $R_i = x_{\nu_i} \ldots x_{\nu_1}$ равны между собой, то равны между собой и слова $Q_i = y_{\eta_i} \ldots y_{\eta_1}$ и $S_i = y_{\nu_i} \ldots y_{\nu_1}$.

Свойство 2. Если частичный автомат C' не применим к слову $P = x_{\eta_k} \ldots x_{\eta_1}$, то он не применим и к слову $S = x_{\eta_m} \ldots x_{\eta_{k+1}} x_{\eta_k} \ldots x_{\eta_1}$, где $x_{\eta_m} \ldots x_{\eta_{k+1}}$ произвольное слово R.

Из Свойства 2 вытекает следующее

Свойство 3. Если P — слово в алфавите A и если частичный автомат C' не применим к слову P, то в этом же алфавите найдется бесконечно много слов, к которым тоже не будет применим этот частичный автомат.

Частичный автомат C' назовем *эквивалентным* алгоритму** $\mathfrak{A}$ над алфавитом A, если C' перерабатывает произвольное непустое слово P в алфавите A в слово Q тогда и только тогда, когда алгоритм $\mathfrak{A}$ перерабатывает слово P в слово Q.

---

* В статье [2] даны определения автомата и субстанта. В настоящей статье вместо термина *«субстант»* будем употреблять термин *«частичный автомат.»*

** Здесь и в дальнейшем под *алгоритмом* мы будем понимать *нормальный алгоритм* [1].

Если в предыдущем определении слова «тогда и только тогда» заменены словом «тогда», то такой частичный автомат назовем *квазиэквивалентным* алгоритму $\mathfrak{A}$ над алфавитом A.

Определения эквивалентности и квазиэквивалентности будем распространять и на автоматы, как на частный вид частичных автоматов.

Пусть M — множество слов, к которым применим частичный автомат C', и N — множество слов, к которым применим алгоритм $\mathfrak{A}$. Если частичный автомат C' эквивалентен алгоритму $\mathfrak{A}$, то множества M *и* N совпадают, а если частичный автомат C' квазиэквивалентен алгоритму $\mathfrak{A}$, то $N \subset M$.

Алгоритм $\mathfrak{A}$ над алфавитом A будем называть *частичноавтоматным*, если можно указать такой частичный автомат C', который эквивалентен данному алгоритму. Алгоритм $\mathfrak{A}$ над алфавитом A будем называть *квазичастичноавтоматным*, если можно указать такой частичный автомат C', который квазиэквивалентен данному алгоритму.

Аналогично можно определить *автоматные* и *квазиавтоматные* алгоритмы.

Легко видеть, что если алгоритм $\mathfrak{A}$ квазичастичноавтоматный, то он и квазиавтоматный. Но из того, что алгоритм частичноавтоматный, не следует, что он автоматный.

Некоторый интерес представляет вопрос выявления связей алгоритмов с автоматами. С одной стороны ясно, что для любого частичного автомата C' можно построить такой алгоритм $\mathfrak{A}$, что данный частичный автомат C' эквивалентен алгоритму $\mathfrak{A}$. Но с другой стороны легко указать такие алгоритмы (напр. алгоритм умножения из гл. II, § 5 18 [1]), для которых никак нельзя построить эквивалентные или квазиэквивалентные автоматы или частичные автоматы.

Поэтому естественно интересоваться, когда данный алгоритм обладает соответствующим дополнительным свойством (например, является автоматным). Мы будем сформулировать этот вопрос как алгоритмическую массовую проблему, т. е. будем исследовать существование такого распознающего алгоритма $\mathfrak{D}$, который применим к изображению $\mathfrak{A}^{\text{и}}$ любого алгоритма в алфавите B и перерабатывает $\mathfrak{A}^{\text{и}}$ в пустое слово Λ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ обладает соответствующим свойством. Итак, возникают следующие проблемы.

1. Существует ли алгоритм $\mathfrak{D}_1$, распознающий автоматность произвольного алгоритма $\mathfrak{A}$?

2. Существует ли алгоритм $\mathfrak{D}_2$, распознающий частичную автоматность произвольного алгоритма $\mathfrak{A}$?

3. Существует ли алгоритм $\mathfrak{D}_3$, распознающий квазиавтоматность произвольного алгоритма $\mathfrak{A}$?

4. Существует ли алгоритм $\mathfrak{D}_4$, распознающий квазичастичную автоматность произвольного алгоритма $\mathfrak{A}$?

Имея в виду замечание о том, что квазичастичноавтоматный алгоритм является квазиавтоматным, легко видеть, что последние две проблемы эквивалентны. Поэтому в дальнейшем будем исследовать только первые три проблемы.

Перед тем, как приступить к изложению нашего основного результата, отметим, что мы будем пользоваться следующими обозначениями, заимствованными из работы [1].

Алфавит $A_0 = \{a, b\}$ (I, § 2, 6 [1]).

Алгоритм $\mathfrak{B}_0$ в алфавите A_0 — это алгоритм, удовлетворяющий следующему условию: невозможен нормальный алгоритм $\mathfrak{G}$ над A_0, перерабатывающий в Λ те и только те слова в A_0, к которым $\mathfrak{B}_0$ не применим (V, § 2, 2.2 [1]).

При изображении алгоритмов стрелки будем заменять буквой α, точки буквой β и каждому слову, полученному из формул подстановок, присоединим справа букву γ.

Пусть A — какой-нибудь алфавит. Тогда двойники произвольных букв ξ этого алфавита будем обозначать через $\bar{\xi}$ (III, § 3, 2. 1 [1]), а двойники двойников ξ, т. е. двойники букв $\bar{\xi}$, будем обозначать через $\bar{\bar{\xi}}$. Аналогично можно ввести и двойники букв $\bar{\bar{\xi}}$. Их мы будем обозначать через $\bar{\bar{\bar{\xi}}}$.

Отметим, что если $\bar{A}$ — алфавит букв $\bar{\xi}$, $\bar{\bar{A}}$— алфавит букв $\bar{\bar{\xi}}$ и $\bar{\bar{\bar{A}}}$ — алфавит букв $\bar{\bar{\bar{\xi}}}$, то алфавиты A, $\bar{A}$, $\bar{\bar{A}}$ и $\bar{\bar{\bar{A}}}$ не имеют общих букв.

Через $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}{}_0^{\varepsilon}$ будем обозначать алгоритм, схему которого можно получить путем замены в схеме алгоритма $\mathfrak{B}_0$ букв a и b буквами $\bar{\bar{a}}$ и $\bar{\bar{b}}$ и всех точек буквой ε. Через $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}{}_0^{\varepsilon\text{и}}$ обозначим изображение алгоритма $\bar{\bar{\mathfrak{B}}}{}_0^{\varepsilon}$.

Теперь зададим алгоритм $\mathfrak{T}_1$ над алфавитом A_0 следующей сокращенно записанной схемой:

$$\left\{\begin{array}{l}
\xi \to \xi\bar{\xi} \qquad (\xi \in A_0,\ \bar{\xi} \in \bar{A}_0)\\
\bar{\xi}\eta \to \eta\bar{\xi} \qquad (\eta \in A_0,\ \bar{\xi} \in \bar{A}_0)\\
* \ \to \Delta a\alpha a\Delta\gamma\Delta b\alpha b\Delta\gamma * \Delta\alpha\gamma 0\Delta\alpha 0\gamma * a\alpha 0\gamma\\
\qquad\qquad * b\alpha 0\gamma 0 a\alpha 00\gamma 0 b\alpha 00\gamma\bar{a}\alpha 0\bar{\bar{a}}\gamma\bar{b}\alpha 0\bar{\bar{b}}\gamma\\
\qquad\quad \bar{\bar{a}}0\alpha 0\bar{\bar{a}}\gamma\bar{\bar{b}}0\alpha 0\bar{\bar{b}}\gamma\bar{\bar{a}}\varepsilon\alpha\varepsilon\bar{\bar{a}}\gamma\bar{\bar{b}}\varepsilon\alpha\varepsilon\bar{\bar{b}}\gamma\varepsilon\bar{\bar{a}}\alpha\varepsilon\bar{\bar{\bar{a}}}\gamma\\
\qquad\qquad \varepsilon\bar{\bar{b}}\alpha\varepsilon\bar{\bar{\bar{b}}}\gamma\bar{\bar{\bar{a}}}\alpha\bar{\bar{a}}\bar{\bar{\bar{a}}}\gamma\bar{\bar{\bar{a}}}\bar{\bar{\bar{b}}}\alpha\bar{\bar{a}}\bar{\bar{\bar{b}}}\gamma\bar{\bar{\bar{b}}}\bar{\bar{\bar{a}}}\alpha\bar{\bar{b}}\bar{\bar{\bar{a}}}\gamma\bar{\bar{\bar{b}}}\bar{\bar{\bar{b}}}\alpha\bar{\bar{b}}\bar{\bar{\bar{b}}}\gamma\\
\qquad\quad \bar{\bar{\mathfrak{B}}}{}_0^{\varepsilon\text{и}}\bar{\bar{\bar{a}}}\alpha\gamma\bar{\bar{\bar{b}}}\alpha\gamma\varepsilon\alpha\beta\gamma\bar{\bar{a}}\alpha\varepsilon\bar{\bar{a}}\gamma\bar{\bar{b}}\alpha\varepsilon\bar{\bar{b}}\gamma 0\alpha\beta 0\gamma \quad \alpha * \Delta\gamma\\
\bar{\xi}\Delta a\alpha a\Delta\gamma\Delta b\alpha b\Delta\gamma * \Delta\alpha \to \Delta a\alpha a\Delta\gamma\Delta b\alpha b\Delta\gamma * \Delta\dot{\alpha}\bar{\xi} \quad (\bar{\xi} \in \bar{A}_0)\\
\xi\Delta a\alpha a\Delta\gamma\Delta b\alpha b\Delta\gamma * \ \to \Delta a\alpha a\Delta\gamma\Delta b\alpha b\Delta\gamma * \xi \quad (\xi \in A_0)\\
\Delta \to \cdot\Delta\\
\ \ \to *
\end{array}\right.$$

Легко видеть, что алгоритм $\mathfrak{T}_1$ перерабатывает слово P в алфавите A_0 в некоторое слово Q, которое является изображением следующего алгоритма $\mathfrak{F}_1$:

$$\left\{\begin{array}{l}
\Delta\xi \to \xi\Delta \quad (\xi \in A_0)\\
*P\Delta \to \bar{P}\\
0\Delta \to 0\\
*\xi \to 0 \qquad (\xi \in A_0)\\
0\xi \to 00 \quad (\xi \in A_0)
\end{array}\right.$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\overline{\xi} \to 0\overline{\overline{\xi}} \quad (\overline{\xi} \in \overline{A}_0,\ \overline{\overline{\xi}} \in \overline{\overline{A}}_0) \\
\overline{\overline{\xi}}0 \to 0\overline{\overline{\xi}} \quad (\overline{\overline{\xi}} \in \overline{\overline{A}}_0) \\
\overline{\overline{\xi}}\varepsilon \to \varepsilon\overline{\overline{\xi}} \quad (\overline{\overline{\xi}} \in \overline{\overline{A}}_0) \\
\varepsilon\overline{\overline{\xi}} \to \varepsilon\overline{\overline{\overline{\xi}}} \quad (\overline{\overline{\xi}} \in \overline{\overline{A}}_0\ \overline{\overline{\overline{\xi}}} \in \overline{\overline{\overline{A}}}_0) \\
\overline{\overline{\overline{\xi}}}\overline{\overline{\eta}} \to \overline{\overline{\overline{\xi}}}\overline{\overline{\overline{\eta}}} \quad (\overline{\overline{\overline{\xi}}}, \overline{\overline{\overline{\eta}}} \in \overline{\overline{\overline{A}}}_0,\ \overline{\overline{\eta}} \in \overline{\overline{A}}_0) \\
\quad \overline{\overline{\mathfrak{B}}}{}_0^{\varepsilon} \\
\overline{\overline{\overline{\xi}}} \to \quad (\overline{\overline{\overline{\xi}}} \in \overline{\overline{\overline{A}}}_0) \\
\varepsilon \to \cdot \\
\overline{\overline{\xi}} \to \varepsilon\overline{\overline{\xi}} \quad (\overline{\overline{\xi}} \in \overline{\overline{A}}_0) \\
0 \to \cdot 0 \\
\to * \Delta
\end{array}
\right.
$$

Отметим, что алгоритм $\mathfrak{F}_1$ зависит от слова P.

Пусть R — слово в алфавите A_0. Обозначим через O_R слово в алфавите $\{0\}$, которое имеет столько 0, сколько букв содержит слово R.

Допустим сначала, что алгоритм $\mathfrak{B}_0$ применим к слову P. Тогда легко видеть, что $\mathfrak{F}_1(R) = O_R$ для любого слова R в алфавите A_0. Но в таком случае алгоритм $\mathfrak{F}_1$ автоматный (в том числе и частичноавтоматный). Допустим, что алгоритмы $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ существуют. Применим эти алгоритмы к изображению $F_1^{И}$ алгоритма $\mathfrak{F}_1$. Тогда $\mathfrak{D}_1(F_1^{И}) = \Lambda$ и $\mathfrak{D}_2(\mathfrak{F}_1^{И}) = \Lambda$. Так как $\mathfrak{F}_1^{И} = \mathfrak{T}_1(P)$, то $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{T}_1(P)) = \Lambda$ и $\mathfrak{D}_2(\mathfrak{T}_1(P)) = \Lambda$.

Теперь допустим, что алгоритм $\mathfrak{B}_0$ не применим к слову P. Тогда легко видеть, что $\mathfrak{F}_1(R) = O_R$, если $R \neq P$, и не применим к слову R, если $R = P$. Из Свойства 3 вытекает, что в таком случае алгоритм $\mathfrak{F}_1$ не является частичноавтоматным (в том числе и автоматным). Это значит, что $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_1^{И}) \neq \Lambda$ и $\mathfrak{D}_2(\mathfrak{F}_1^{И}) \neq \Lambda$ и, следовательно, $\mathfrak{D}_1(\mathfrak{T}_1(P)) \neq \Lambda$ и $\mathfrak{D}_2(\mathfrak{T}_1(P)) \neq \Lambda$.

Из сказанного выше вытекает, что алгоритмы $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{D}_1 \circ \mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{D}_2 \circ \mathfrak{T}_1$ перерабатывают в Λ те и только те слова в алфавите A_0, к которым $\mathfrak{B}_0$ применим. Но это противоречит результату гл. V. § 2, 2.4 [1]. Отсюда следует, что алгоритмы $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ не существуют и, следовательно, 1-ая и 2-ая проблемы алгоритмически неразрешимы.

Для доказательства алгоритмической неразрешимости 3-ей проблемы можно построить вполне аналогично тому, как мы это делали выше, алгоритм $\mathfrak{T}_2$, который перерабатывает слово P в алфавите A_0 в некоторое слово Q, которое является изображением следующего алгоритма $\mathfrak{F}_2$:

$$
\left|
\begin{array}{l}
\Delta\xi \to \xi\Delta \quad (\xi \in A_0) \\
* P\Delta \to \overline{P} \\
0\Delta \to 0 \\
*\xi \to 0 \quad (\xi \in A_0) \\
0\xi \to 00 \quad (\xi \in A_0) \\
\overline{\xi} \to 1\overline{\overline{\xi}} \quad (\overline{\xi} \in \overline{A}_0,\ \overline{\overline{\xi}} \in \overline{\overline{A}}_0)
\end{array}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\bar{\bar{\xi}}1 \to 1\bar{\bar{\xi}} \quad (\bar{\bar{\xi}} \in \bar{\bar{A}}_0) \\
\bar{\bar{\xi}}\varepsilon \to \varepsilon\bar{\bar{\xi}} \quad (\bar{\bar{\xi}} \in \bar{\bar{A}}_0) \\
\varepsilon\bar{\bar{\xi}} \to \varepsilon\bar{\bar{\bar{\xi}}} \quad (\bar{\bar{\xi}} \in \bar{\bar{A}}_0,\ \bar{\bar{\bar{\xi}}} \in \bar{\bar{\bar{A}}}_0) \\
\bar{\bar{\xi}}\bar{\bar{\eta}} \to \bar{\bar{\bar{\xi}}}\bar{\bar{\eta}} \quad (\bar{\bar{\bar{\xi}}}_1\bar{\bar{\eta}} \in \bar{\bar{\bar{A}}}_0,\ \bar{\eta} \in \bar{A}_0) \\
\qquad \bar{\bar{\bar{\mathfrak{B}}}}{}_0^{\varepsilon} \\
\bar{\bar{\bar{\xi}}} \to \quad (\bar{\bar{\xi}} \in \bar{\bar{A}}_0) \\
\varepsilon \to \cdot \\
\bar{\bar{\xi}} \to \varepsilon\bar{\bar{\xi}} \quad (\bar{\xi} \in \bar{A}_0) \\
0 \to \cdot 0 \\
\to * \Delta
\end{array}
\right.
$$

Обозначим через I_P слово в алфавите $\{1\}$, которое имеет столько 1, сколько букв содержит слово P. Тогда легко видеть, что с точки зрения результатов применения алгоритм $\mathfrak{F}_2$ отличается от алгоритма $\mathfrak{F}_1$ только тем, что последний при условии, что алгоритм $\mathfrak{B}_0$ применим к слову P, перерабатывает это слово в слово O_P, а алгоритм $\mathfrak{F}_2$ при том же условии перерабатывает слово P в слово I_P. Если алгоритм $\mathfrak{B}_0$ не применим к слову P, то к слову P не применим и алгоритм $\mathfrak{F}_2$, а для слов $R \neq P$, где R — слово в алфавите A_0, $\mathfrak{F}_2(R) = O_R$. Отсюда следует, что алгоритму $\mathfrak{F}_2$ квазиэквивалентен, например, такой автомат C, который имеет только одно состояние c_0 с выходом 0, входы a и b и следующие переходы: $ac_0 = c_0$ и $bc_0 = c_0$. Но в таком случае алгоритм $\mathfrak{F}_2$ квазиавтоматный (в том числе и квазичастичноавтоматный). Допустим, что алгоритм $\mathfrak{D}_3$ существует. Тогда $\mathfrak{D}_3(\mathfrak{F}_2^{\text{И}}) = \Lambda$ и, следовательно, $\mathfrak{D}_3(\mathfrak{T}_2(P)) = \Lambda$.

Если алгоритм $\mathfrak{B}_0$ применим к слову P, то $\mathfrak{F}_2(P) = I_P$, а для слов $R \neq P$, где R — слово в алфавите A_0, $\mathfrak{F}_2(R) = O_R$. Так как $I_P \neq O_P$, то, имея в виду Свойство 1, легко видеть, что в данном случае алгоритм $\mathfrak{F}_2$ не является квазичастичноавтоматным. Поэтому $\mathfrak{D}_3(\mathfrak{F}_2^{\text{И}}) \neq \Lambda$ и, следовательно, $\mathfrak{D}_3(\mathfrak{T}_2(P)) \neq \Lambda$.

Из выше сказанного вытекает, что алгоритм $\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{D}_3 \circ \mathfrak{T}_2$ перерабатывает в Λ те и только те слова в алфавите A_0, к которым $\mathfrak{B}_0$ не применим. Но это противоречит результату гл. V, § 2, 2.2 [1]. Отсюда вытекает алгоритмическая неразрешимость 3-ей проблемы.

25.10.61.

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *А. А. Марков,* Теория алгорифмов. Труды математического института имени В. А. Стеклова, XLII, 1954.

[2]. *Я. М. Барздыньш,* Некоторые вопросы синтеза абстрактных автоматов. Ученые записки ЛГУ, 1961, 41, вып. 5, 51—62.

ALGORITMU AUTOMĀTISKUMA PROBLĒMA

J. Bārzdiņš

(Kopsavilkums)

Kā normālie algoritmi, tā arī automāti, vai daļējie automāti, kuru stāvokļiem piekārtotas izejas, var pārveidot vienus vārdus no zināma alfabeta citos vārdos. No vienas puses ir skaidrs, ka jebkuram automātam vai daļējam automātam var uzrādīt tādu normālo algoritmu, kurš tieši tāpat pārveido vārdus. No otras puses ir zināms, ka ne jebkuram normālam algoritmam var uzrādīt tādu automātu vai daļēju automātu, kurš tāpat pārveido vārdus, kā dotais algoritms. Ja algoritmam var uzrādīt kādu automātu vai daļēju automātu ar iepriekš minēto īpašību, tad tādu algoritmu sauc attiecīgi par automātisku vai daļēji automātisku. Dotā darbā tiek pētīta sekojoša problēma: vai eksistē tāds normālais algoritms, kurš «pazītu», kad dotais algoritms ir automātisks vai daļēji automātisks. Tiek pierādīts, ka šāds algoritms neeksistē.

СОДЕРЖАНИЕ

Подписано к печати 12 декабря 1961 г. Формат бумаги 70 × 108 1/16; 9,75 печ. листов; 11 уч.-изд. листов. Тираж 550 экз. ЯТ 04188.

Отпечатано в типографии № 3 Управления полиграфической промышленности Министерства культуры Латвийской ССР, г. Рига, ул. Ленина 137/139. Заказ № 373.

Цена 77 коп.

ПОПРАВКИ

Стр.	строка (формула)	напечатано	должно быть
16	8 снизу	$\tau\xi^{\alpha}{}_{1j}$	$\tau^{\alpha}{}_{1j}$
20	(2.21)	$e^{-p}\tau$	$e^{-p\tau}$
37	3 снизу	norāditas	norādīts,
41	2 снизу	piemēram, (	(piemēram,
65	9 снизу	$\ldots m_n \cdot h$	$\ldots m_r \cdot h$
66	9 сверху	φ —	—
106	1 сверху	zvaigžņu	planētu
106	3 снизу	slīpumu	slīpuma
150	14 сверху	$\{o\}$	$\{0\}$

427818

77 коп.

44/5764

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA
0509052561