ЛАТВИЙСКИЙ
ОРДЕНА
ТРУДОВОГО
КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
им. П. СТУЧКИ

РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

«ЗИНАТНЕ»
РИГА
1968

ЛАТВИЙСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
им. П. СТУЧКИ

РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, том 91

Труды вычислительного центра, вып. 3

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗИНАТНЕ»
РИГА
1968

В сборнике „РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ" публикуются

а) работы по теории асимптотического представления функций,

б) работы по математической теории процессов распространения тепла и диффузии в бинарных системах с изменяющимся фазовым состоянием.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов физических и механико-математических факультетов.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Академии наук Латвийской ССР от 2 января 1967 года

2-2-3
1968-57

ОБЗОР ВЫПОЛНЕННЫХ В РИГЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ПО АСИМПТОТИЧЕСКОМУ ПРЕДСТАВЛЕНИЮ ФУНКЦИЙ

Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ

Кафедра общей математики ЛГУ им. П. Стучки

Исследования по асимптотическим разложениям в Риге начали проводиться с середины 50-х годов. С 1964 года при кафедре общей математики Латвийского государственного университета им. П. Стучки работает семинар по асимптотическим разложениям. Поскольку тематика исследований разнообразна и материалы опубликованы в различных журналах, то целесообразно дать обзор основных результатов, затрагивая также некоторые работы других авторов, связанные с рассматриваемыми направлениями. Однако работа не претендует на полноту обзора исследований по темам, затронутым в этой статье.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В литературе по асимптотическим разложениям не приведены полные сведения о развитии определения асимптотических разложений. Поэтому дадим краткий исторический обзор.

1) Общеизвестное определение асимптотического степенного ряда

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, \qquad (1.1)$$

данное в 1886 году одновременно Стильтесом [65] и Пуанкаре [38], уже в то время не было применимо ко всем известным асимптотическим разложениям, например к асимптотическому разложению для функций Бесселя. В 1922 году в работе Карлемана [23] дается существенное обобщение упомянутого определения, в котором допускается, что в ряде (1.1) a_k являются периодическими функциями от x с одним и тем же периодом. Разложение (1.1) понимается в следующем смысле: для каждого целого $n \geqslant 0$

$$\left[F(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(x)}{x^k}\right] x^n \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$

В том же году в работе Меллина [33] приводится разложение $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\alpha_k}} P_k(\ln x)$, где α_k — комплексные числа; $\operatorname{Re}\alpha_k \to \infty$ и $P_k(y)$ — полином степени k относительно y.

Свое определение Карлеман в 1926 году обобщает в работе [24]. Он вводит общую асимптотическую последовательность функций (шкалу) $\{\varphi_n(x)\}$, обладающих следующими свойствами: 1) $\varphi_n(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $x = \infty$; 2) $\varphi_{n+1}(x) : \varphi_n(x) \to 0$ при $x \to \infty$ для всех целых $n \geqslant 0$. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \qquad (1.2)$$

называется асимптотическим разложением для функции $F(x)$ при $x \to \infty$, если для всех целых $n \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$\left[F(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)\right] : \varphi_n(x) \to 0 \text{ при } x \to \infty.$$

Несмотря на общность шкалы, определение не допускает разложений, в которых члены ряда в каждой окрестности точки $x = \infty$ имеют нули, например разложение

$$\int_x^{\infty} \frac{J_\nu(t)}{t} dt \sim - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + k + 1\right) 2^k}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)} \frac{J_{\nu+k+1}(x)}{x^{k+1}} \qquad (1.3)$$

при $x \to \infty$, которое получается кратным интегрированием по частям и применением формулы $(t^\nu J_\nu)' = - t^\nu J_{\nu-1}$.

В 1953 году Деч несколько обобщает определение Карлемана, допуская для данной функции разложение в конечную сумму рядов типа (1.2), причем каждый ряд может иметь колеблющийся множитель [12]. Однако и это расширение не помогает при определении смысла разложения (1.3).

2) В 1934 году Шмидт [62] рассматривает разложение

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\,\varphi_k(x) \text{ при } x \to x_0, \tag{1.4}$$

где от функций $a_k(x)$ следует требовать определенных свойств. Эти требования указаны в работе [63]. Коэффициенты $a_k(x)$, согласно Шмидту, принадлежат следующему классу A:

а. класс A содержит поле чисел K;

б. если $k_1 \in K$, $k_2 \in K$, $a_1(x) \in A$, $a_2(x) \in A$, то $k_1 a_1(x) + k_2 a_2(x) \in A$;

в. если $a(x) \in A$, то $a(x) = O(1)$ при $x \to x_0$;

г. единственная функция класса A, обладающая свойством $a(x) = o(1)$ при $x \to x_0$, $x \in X$, тождественна нулю.

Разложение (1.4) называется асимптотическим разложением для функции $F(x)$ при $x \to x_0$, $x \in X$, если для каждого целого $n \geqslant 0$ верно соотношение

$$F(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,\varphi_k(x) = o(\varphi_n(x)). \tag{1.5}$$

Сначала на это определение не было обращено достаточного внимания. Однако разложение (1.3) не подходит также и к этому определению, так как в нем $\varphi_k(x) = x^{-k-\frac{3}{2}} \dfrac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+k+1\right)2^k}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}$,

$a_k(x) = x^{\frac{1}{2}} J_{\nu+k+1}(x)$, а $x^{\frac{1}{2}}(J_{\nu+k+2} + J_{\nu+k}) = 2\dfrac{\nu+k+1}{x} x^{\frac{1}{2}} J_{\nu+k+1} \to 0$ при $x \to \infty$ и $x^{\frac{1}{2}}(J_{\nu+k+2} + J_{\nu+k}) \in A$ согласно свойству «б». Хотя не удовлетворено требование «г», однако оно существенно для практической применимости разложения. В противном случае коэффициенты $a_k(x)$ могут стремиться к нулю при $x \to x_0$ с различной скоростью, и члены ряда (1.4) либо могут стать при $x \to x_0$ возрастающими, либо все одновременно при всех $n \leqslant n_0$ подчиниться оценке $o(\varphi_{n_0}(x))$, где n_0 сколь угодно большое.

Например, можно было написать разложение

$$\frac{1}{x} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{x^{\frac{1}{k}}(\ln x)^k} \quad \text{при } x \to \infty,$$

где

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{(\ln x)^k},\quad a_k(x)=\frac{k!}{x^{\frac{1}{k}}},$$

или же

$$\frac{\sin x}{x}\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!\ e^{-\frac{k+1}{2k}x}}{(\ln x)^k}\ \text{при}\ x\to\infty,\tag{1.6}$$

где

$$\varphi_k(x)=\frac{1}{(\ln x)^k},\quad a_k(x)=k!\ e^{-\frac{k+1}{2k}x}.$$

Ясно, что приведенные разложения не дают никакой полезной информации о поведении разлагаемой функции в окрестности точки x_0, и поэтому они с практической точки зрения бессмысленны.

Такой отказ от требования «г» имеется в определении, данном недавно Эрдейи [15]. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),\tag{1.7}$$

согласно Эрдейи, называется асимптотическим разложением для функции $F(x)$ относительно шкалы $\{\varphi_k(x)\}$, если для каждого целого $n\geqslant 0$ имеет место соотношение

$$F(x)-\sum_{k=0}^{n} f_k(x)=o(\varphi_n(x))\ \text{при}\ x\to x_0.\tag{1.8}$$

Формальное отличие ряда (1.7) от разложения (1.4) исчезает, если положим

$$f_k(x)=\frac{f_k(x)}{\varphi_k(x)}\varphi_k(x)=a_k(x)\,\varphi_k(x).$$

Подобное определение встречается также в работе Ван дер Корпута [9, стр. 385] и обобщается Эрдейи и Вайменом [16] в случае нескольких переменных.

Учитывая указанный недостаток, разложение (1.7) целесообразно называть *слабоасимптотическим разложением*. В работе [53] показано, что для любой функции и почти для каждого формального разложения можно найти такую шкалу, относительно которой ряд (1.7) является слабоасимптотическим разложением данной функции. Поэтому, пользуясь слабоасимптотическими разложениями, трудно о каком-то формальном разложении утверждать, что оно не является асимптотическим разложением для данной функции. Тем самым теряется смысл понятия «асимптотическое».

Недостаток слабоасимптотического разложения виден также в работе [16], где некоторые разложения по существу похожи на разложение (1.6). Об этом подробнее сказано в работе Т. Т. Цирулиса [7], где показаны еще и другие примеры разложений, обладающих указанными недостатками.

3) В середине 50-х годов В. Ж. Риекстыней было дано определение [39], более общее, чем определение Шмидта. Для удобства целесообразно ввести символ $\widetilde{O}(\varphi(x))$, означающий следующее:

$$f(x) = \widetilde{O}(\varphi(x)),$$

если

а) $f(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, $x \in X$, где X — множество комплексных чисел, x_0 — его предельная точка;

б) существует постоянная $m > 0$ такая, что на каждом луче или отрезке, исходящем из x_0, для каждого $\delta > 0$ можно найти такую точку $x_\delta \in X$, $|x_\delta - x_0| < \delta$, для которой справедливо неравенство

$$|f(x_\delta)| \geqslant m |\varphi(x_\delta)|. \tag{1.9}$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x) \tag{1.10}$$

называется асимптотическим разложением для функции $F(x)$ при $x \to x_0$, если $f_k(x) \not\equiv 0$ в X и для каждого целого $n \geqslant 0$ можно найти такую шкалу $\{\varphi_k(x)\}$, что

$$f_k(x) = \widetilde{O}(\varphi_k(x)); \;\; F(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k f_k(x) = o(\varphi_k(x)). \tag{1.11}$$

Так как и здесь $c_k f_k(x) = a_k(x)\varphi_k(x)$, то $a_k(x)$ удовлетворяет требованиям «в» и «г» определения Шмидта, но отличие в обоих определениях состоит в том, что не требуются свойства «а» и «б» функций $a_k(x)$. Эти свойства гарантируют единственность разложения относительно данной шкалы. Однако единственность разложения не так существенна в практических расчетах.

Эквивалентное определение в случае вещественного x было дано в книге М. А. Евграфова [18], где вместо (1.9) дано соотношение

$$\overline{\lim_{x \to x_0,\; x \in X}} \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| = c; \;\; 0 < c < \infty. \tag{1.12}$$

Последнее перенесено на комплексную плоскость при $x_0=\infty$ и немного изменено М. А. Лаврентьевым и Б. В. Шабатом [31]. Оно требует, чтобы

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_{k+1}(x)}{\varphi_k(x)}=0 \text{ и } \overline{\lim_{x\to\infty}}\left|\frac{f_k(x)}{\varphi_k(x)}\right|=c>0, \qquad (1.13)$$

причем здесь не требуется, чтобы последнее из соотношений (1.13) имело место на каждом луче. Это допускает случай, когда все точки x_δ в неравенстве (1.9) помещены на одном луче, а на других лучах возможно $\dfrac{f_k(x)}{\varphi_k(x)}\to 0$ при $x\to\infty$. Это эквивалентно тому, что может быть $a_k(x)\to 0$ при $x\to x_0$ в некоторой подобласти области X. Такой дефект допускается также в определении Шмидта, поэтому и в этом отношении оно отличается от определения В. Ж. Риекстыни. Например, коэффициенты $a_k(x)=$ $=k!\,e^{\frac{k+1}{2k}x}$ при $x\to\infty$ в секторе $\dfrac{\pi}{2}\leqslant \arg x\leqslant\pi$ удовлетворяют условию «г» определения Шмидта и не удовлетворяют в секторе $\dfrac{\pi}{2}+\delta\leqslant\arg x\leqslant\pi$, $\delta>0$.

4) Учитывая то, что в последнее время встречаются разложения, содержащие несколько переменных, а также параметры, в работе [53] дано общее определение асимптотического разложения. В нем рассматривается функция $F(x, z)$ на множестве Ω $n+m$-мерного нормированного комплексного пространства, где x — точка n-мерного множества X, имеющего x_0 в качестве граничной точки; z — точка m-мерного множества, характеризующая параметры. Стремление $x\to x_0$ понимается по норме, т. е. $\|x-x_0\|\to 0$; в случае, когда $\|x\|\to\infty$, считается, что $x_0=\infty$. При фиксированном x величина z может измениться в множестве Z_x. Пересечение этих множеств при $x\in X_n$ обозначим через $Z(X_n)$.

Класс A_0 функций $a(x, z)$, $(x, z)\in\Omega$, определяется следующим образом:

а) функции $a(x, z)$ ограничены на Ω;

б) при каждом фиксированном $z\in Z(X)$ для каждого $a\in A_0$, кроме $a\equiv 0$, имеем

$$a(x, z)\neq o(1) \text{ при } x\to x_0,\ x\in X. \qquad (1.14)$$

Рассмотрим случай, когда X — несчетное множество. Обозначим класс коэффициентов через A_0^*, если условие б) заменяется на следующее:

б′) при каждом фиксированном $z \in Z(X^*)$ для каждого $a \in A_0^*$, $a \not\equiv 0$, имеем

$$a(x, z) \neq o(1) \text{ при } x \to x_0,\ x \in X^*, \tag{1.14′}$$

где X^* — любое несчетное подмножество множества X, имеющее x_0 в качестве предельной точки.

Асимптотическая последовательность Φ функций $\varphi_k(x)$, $x \in X$ называется асимптотической шкалой, если функции $\varphi_k(x)$ при всех целых $k \geqslant 0$ обладают следующими свойствами:

а) функции $\varphi_k(x)$ в области X не обращаются в нуль, но могут стремиться к нулю при $x \to x_0$;

б) $\varphi_{k+1}(x) = o(\varphi_k(x))$ при $x \to x_0$, $k \geqslant 0$.

Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x, z)\, \varphi_k(x), \tag{1.15}$$

где $a_k(x, z) \in A_0$, $\varphi_k(x) \in \Phi$, или же в случае надобности видоизмененный ряд, полученный из (1.15) группированием членов, называется обобщенным асимптотическим разложением для функции $F(x, z)$ при $x \to x_0$ относительно шкалы $\{\varphi_k(x)\}$, если для каждого $n \geqslant 0$ можно найти такую область $X_n \in X$, имеющую x_0 в качестве граничной точки, и такую последовательность m_n, $m_{n+1} \geqslant m_n$, $m_n \to \infty$, что в области X_n равномерно относительно $z \in Z(X_n)$ справедливо соотношение

$$F(x, z) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x, z)\, \varphi_k(x) = O(\varphi_{m_n}(x)), \tag{1.16}$$

или же соответствующее видоизменение после группировки. Если $F(x, z)$ является конечной суммой функций, то для каждой из них можно дать разложение вида (1.11) со своей шкалой. Если коэффициенты $a_k(x, z)$ принадлежат классу A_0^*, то разложение (1.11) называется *сильноасимптотическим разложением* для функции $F(x, z)$.

Сильноасимптотическое разложение является непосредственным расширением определения В. Ж. Риекстыни. В работах рижских математиков почти без исключения встречаются только сильноасимптотические разложения.

5) Во многих работах Ван дер Корпута рассматриваются асимптотические разложения со шкалой $\{x^{-q_k}\}$ в видоизмененной форме. Согласно [9], ряд (1.7) асимптотически сходится к функции $F(x)$, если существует такое $n_0 \geqslant 0$, что при всех $n \geqslant n_0$ можно

найти такое вещественное число q_n, $q_n \to \infty$, что справедливо соотношение

$$F(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = O(x^{-q_n}) \text{ при } x \to \infty. \qquad (1.17)$$

При таком определении все функции порядка $O(e^{-\alpha x})$, $\alpha > 0$ считаются асимптотически равными нулю, поэтому определение (1.17) не охватывает часть практически встречающихся рядов. В той же работе [9] дается более подробное сравнение определения (1.17) с определением Шмидта, если в нем возможно следующее изменение шкалы: $\varphi_k(x) : \varphi_0(x) = O(|\varphi_1 : \varphi_0|^{q_k}) = O(\xi^{-q_k})$.

В определении Ван дер Корпута не требуется, чтобы $q_n \leqslant q_{n+1}$. Это придает ряду (1.7) коммутативное свойство, что в работе [9] считается достоинством. Однако частичная сумма после перестановки членов может не дать практически достаточно хорошую информацию о разложимой функции, так как коэффициенты некоторых передвинутых назад дальнейших членов могут быть уже слишком велики. Кроме этого недостатка, в той же работе показано, что в некоторых случаях ряд (1.7) может сходиться, но неиметь ту же асимптотическую сумму.

6) Иногда в численных расчетах встречаются расходящиеся ряды, не являющиеся асимптотическими. Такие ряды приведены в работе [51] и они названы аппроксимирующими. Ряд (1.7) называется аппроксимирующим для функции $F(x)$ в области Ω, если при некотором малом фиксированном $\varepsilon > 0$ для каждого $x \in \Omega$ можно найти такое $n = n(x)$, что имеет место неравенство

$$|F(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| < \varepsilon. \qquad (1.18)$$

Сходящиеся и сильноасимптотические ряды в некоторой окрестности точки x_0 являются аппроксимирующими.

В обзоре материал распределен в зависимости от вида, каким задана исследуемая функция. Ради удобства в дальнейшем будем считать, что x означает действительное переменное, z — комплексное переменное.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

2.1. Интегралы, зависящие от параметра

В Риге исследовались асимптотические разложения различных типов интегралов, характеризующих соответствующие интегральные преобразования. При этом обобщались уже известные методы и даны также новые.

1) В работах [39, 40] В. Ж. Риекстыней рассмотрены разложения функции

$$F(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L e^{xt} f(t)\,dt \tag{2.1}$$

при $x\to\infty$, где L — некоторый бесконечный контур в комплексной плоскости t. Используется разложение функции $f(t)$ в окрестности 1) существенно особой точки, 2) логарифмической точки ветвления или 3) алгебраических точек ветвления.

В первом случае разложение для $F(x)$ получается по обобщенным функциям Бесселя $J_\lambda^\mu(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^m}{m!\,\Gamma(\mu m+\lambda+1)}$, во втором случае — по функциям $\frac{\partial^k}{\partial z^k}\left[\frac{x^{-z-1}}{\Gamma(-z)}\right]$ при фиксированных z. Полученные разложения являются более общими, чем разложения, имеющиеся в работах [12, 21].

В третьем случае применяемый прием отличается от общеизвестного тем, что $f(t)$ разлагается одновременно в один и тот же ряд в окрестностях двух точек ветвления, что дает разложение функции $F(x)$ по функциям Бесселя. Эта идея является новой, и ее можно было бы использовать также в некоторых других случаях. Обычный метод разложения в случае алгебраической точки ветвления применяется в работе [47] для асимптотического разложения функций Ломмеля $u_\nu(t,y)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{t}{y}}\right)^{\nu+2k} J_{\nu+2k}(2\sqrt{ty})$, где $t=\alpha x$, $y=\beta x$, $x\to\infty$, $\nu=0,\ 1$.

2) В работе [41] В. Ж. Риекстыня рассматривает разложение интеграла Лапласа

$$F(z)=\int\limits_0^{\infty} e^{-zt} f(t)\,dt \tag{2.2}$$

($z\to\infty$, $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta$, $\delta>0$), причем используются разложения функции $f(t)$ в окрестности $t=0$ не по степеням t, а по некоторым другим функциям: $\left[t\left(1+\frac{t}{a}\right)\right]^{\lambda_k}$ или же $t^{\lambda_k}(\ln t)^{n_k}$, что является продолжением предыдущей идеи.

Эта же идея применена в работе [55] для асимптотического представления интеграла $\int\limits_0^{v} T(xt)\,f(t)\,dt$, где $T(xt)$ — осциллирующая функция. В работе обобщается идея Сеге, примененная к интегралу Дирихле—Мэлера [67]. Интересно отметить, что во многих случаях полученный ряд не является сильноасимптотическим, хотя может быть сходящимся.

3) Асимптотическое разложение интеграла Лапласа изучено во многих работах. В работе [50] рассматривается асимптотическое представление более общего интеграла

$$F(x) = \int_0^\infty \Phi(xh(t))\,\varphi(t)\,dt \text{ при } x \to \infty. \tag{2.3}$$

Различаются случаи, когда $\int_0^\infty t^\alpha \Phi(t)\,dt$ сходится при всех $\alpha \geqslant 0$, и случаи, когда этот интеграл расходится, начиная с некоторого α. В первом случае без больших изменений можно применить общеизвестный метод Лапласа, а во втором случае, обобщая идею А. Н. Тихонова [68], имеем обоснование формального метода Виллиса [70], в котором для определения коэффициентов разложения к функции $\Phi(t)$ применяется преобразование Лапласа. Согласно идее работы [50], функция $\varphi(t)$ аппроксимируется при помощи функции $g(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-\mu_k t}$, где μ_k — произвольно выбранные положительные числа, а коэффициенты a_k подбираются так, чтобы $\varphi^{(m)}(0) = g^{(m)}(0)$, $m = 0, 1, \ldots, n$. Можно было в этой работе вместо $\varphi(t)$ брать также более общую функцию $\psi(x, t)$ и считать коэффициенты a_k функциями от x.

После работы [50] некоторые результаты относительно интеграла (2.3) были получены в работах Хсу [19, 20]. Обобщение результатов работы [50] с использованием теории нейтрис для более общего интеграла

$$F(x) = \int_0^\infty K(x, t)\,H(x, t)\,dt \tag{2.4}$$

дано Бергом [3]; результаты Берга несколько расширены в работе [53].

Результаты работ [50, 53] все же не полностью перекрываются, так как по второму методу требуется аналитичность изображения по t функции $K(x, t)$ в окрестности точки $p = 0$, где p — параметр преобразования, а по первому методу требуется лишь существование асимптотического разложения изображения функции $\Phi(t)$

в этой окрестности. В работе [50] приведен пример для такого случая: рассмотрено асимптотическое разложение интеграла

$$\int_0^\infty J_\nu(xt^\beta)\, t^{\mu-1}\varphi(t)\,dt;\ \ \beta \geqslant 1, -\beta\nu < \mu < \frac{3}{2}\beta. \qquad (2.5)$$

Изображение функции $J_\nu(t^\beta)\, t^{\mu-1}$ в окрестности точки $p = 0$ имеет расходящееся асимптотическое разложение, если $\beta > 1$, поэтому разложение для интеграла (2.5) нельзя получить методом Виллиса.

4) Подобное расширение, которое получаем при рассматривании интеграла (2.3) вместо интеграла (2.2), можно получить и в том случае, если вместо интеграла

$$\int_L e^{zh(t)}\varphi(t)\,dt,$$

асимптотическое представление которого получается методом перевала, рассматривать интеграл

$$F(z) = \int_c^d \Phi(zh(t))\,\varphi(t)\,dt. \qquad (2.6)$$

Асимптотическое представление этого интеграла при $z \to \infty$, $z \in Z$, где Z задано неравенствами $|z| > x_0$, $|\arg z| < \delta$, в некоторых частных случаях рассмотрено в работах Т. Т. Цирулиса [6, 7]. При этом подынтегральные функции предполагаются аналитическими в некоторой области плоскости t, содержащей точки c и d, а функция $\Phi(z)$ обладает оценкой $\Phi(z) = e^{\beta z^\varkappa}\psi(z)[1 + o(1)]$, $z \in Z$, и $\psi(z)$ подчиняется некоторым дополнительным условиям.

Сначала рассматривается случай вещественных c и d и показывается, что главный вклад в значение интеграла дает интеграл по отрезку $[b - \varepsilon, b]$, если $h(b) > h(a)$, или же по отрезку $[a, a + \varepsilon]$, если $h(a) > h(b)$. В случае комплексных c и d путь интегрирования деформируется так, чтобы он шел по векторным линиям для grad $|h(t)|$ и приводится к прежнему случаю. Таким путем удается весьма просто получить асимптотическое представление для функции ${}_pF_{p+1}(z)$.

В работе [7] более подробно анализируются возможности применения градиентных линий в качестве пути интегрирования и метод обобщается на случай, когда положение критических точек зависит от параметра. Приводится также подробный анализ других методов выбора пути, в том числе и метода линий Лапласа, предложенного Ваименом [73]. На примерах показано, что эти методы иногда могут дать только слабоасимптотические разложения.

В работе Т. Т. Цирулиса [8] рассмотрены случаи, когда подынтегральная функция $\varphi(t)$ в (2.6) в точке перевала имеет особенность — алгебраическую или же существенно особую, и даются соответствующие видоизменения метода перевала.

В работе Л. И. Рубинштейна [61] применяется двойной метод перевала для асимптотического представления при $n \to \infty$ интеграла

$$\int\limits_0^\infty e^{-n(1-t+\ln t)} \frac{dt}{R} \int\limits_L e^{n[R-\omega-1-\ln(R-\omega)]} \operatorname{Erfc} \frac{\omega}{2\sqrt{z}} \frac{d\omega}{\omega - R},$$

где $R^2 = (t+x)^2 + y^2$; x, y, z — параметры; L — замкнутый контур, охватывающий точку $\omega = R$.

5) Совершенно иной метод для асимптотического разложения интеграла

$$F(z) = \int\limits_a^b \Phi(z, t)\, \varphi(z, t)\, dt \tag{2.7}$$

предлагается в работе [54]. Пусть функция Φ относительно t в области Ω, в которой лежит путь интегрирования, удовлетворяет функциональному уравнению

$$\mathrm{L}\Phi(z, t) = 0, \tag{2.8}$$

где L — некоторый оператор, и для него существует сопряженный оператор такой, что справедлива формула

$$\int\limits_a^b (v\mathrm{L}u - uL^*v)\, dt = \mathrm{G}(u, v)\Big|_a^b, \tag{2.9}$$

где G — оператор, действующий на u и v.

Если уравнение

$$\mathrm{L}^*v = \varphi(z, t) \tag{2.10}$$

в области Ω имеет такое решение $v(z, t)$, которое при $z \to \infty$ имеет асимптотическое разложение, с которым можно почленно выполнить действия, содержащиеся в G, то формула

$$\int\limits_a^b \Phi(z, t)\, \varphi(z, t)\, dt = -\mathrm{G}(\Phi, v)\Big|_a^b \tag{2.11}$$

дает формальное асимптотическое представление для функции $F(z)$ при $z \to \infty$. Метод назван методом сопряженных операторов, и его можно применить в случаях, когда подынтегральные функции зависят от параметра z весьма сложным образом. Например, в работе [54] найдено асимптотическое представление при $n \to \infty$ для функции

$$S_n(u) = \frac{n!\,(\nu + n)}{n^n u^n} \int\limits_0^1 t^{-\frac{n}{2}} (1 - t)^{\nu + n - 1} I_n (2nu \sqrt{t})\, dt,$$

где u — некоторый комплексный параметр; $u \in U$.

Указан путь для оправдания полученных разложений.

6) Интегралы, зависящие от параметра, встречаются также в работах В. Ж. Риекстыня [42—46].

В работах [42—45] рассмотрено асимптотическое представление некоторых классов целых функций $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) z^n$, о чем подробнее будет сказано в разделе 4. Здесь отметим только, что в этих работах встречаются интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \mu(t) z^t \frac{1}{\sin \pi t} dt \text{ и } \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \mu(t) z^t \operatorname{ctg} \pi t\, dt, \qquad (2.12)$$

асимптотическое представление (или разложение) которых получается методом перевала, если вместо $\mu(t)$ подставить его асимптотическое выражение и пользоваться также особыми точками функции $\mu(t)$.

В работах [45, 46] эта теория применяется к асимптотическому представлению интеграла (2.6) при $z \to \infty$, $|\arg z| < \pi$, если $\Phi(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n g(n) t^n$, где $g(z)$ является произведением рациональной функции, показательной функции и отношения продуктов гамма-функций. Используя ряд для функции $\Phi(t)$, интеграл (2.6) разлагаем в степенной ряд по степеням z и применяем теорию целых функций. Используются также асимптотические разложения функции $\Phi(t)$ в окрестностях концов пути интегрирования. В зависимости от вида функции $g(n)$ надо различать несколько отдельных случаев. Этим методом можно получить много новых асимптотических представлений и обобщить уже известные при более слабых условиях. Например, для интеграла Фурье вместо аналитичности в концах пути можно требовать только существование асимптотических разложений в окрестностях этих точек [45]. В некоторых случаях можно пытаться перенести этот метод на двойные интегралы.

2.2. Интегралы с переменным пределом

1) Для асимптотического разложения интегралов с переменным пределом иногда можно применять весьма элементарные методы: интегрирование по частям или подставление под знак интеграла асимптотического разложения и последующее почленное интегрирование, а в случае надобности — дополнительное интегрирование по частям. Но если нижний предел интеграла равен нулю, то эти действия обычно выполнить нельзя, так как получаются расходящиеся интегралы. Однако, если не учитывать этот нижний предел, то часто получается правильный результат. В работе [53] при помощи теории нейтрис оправдан этот формальный метод и показано, что иногда к разложению надо еще добавить некоторую постоянную. Указывается путь определения этой постоянной. В качестве примера получается асимптотическое представление функций Ломмеля $u_\nu(t, y)$, $\nu \geqslant 0$. Это проще указанного в п. 2.1.1 пути.

2) Асимптотическое представление при $x \to \infty$ для одного интеграла типа свертки

$$\int\limits_0^x \exp\left[-\mu\left(e^{\frac{x-t}{\lambda}}-1\right)^{-1}\right]\left(e^{\frac{x-t}{2\lambda}}-e^{-\frac{x-t}{2\lambda}}\right)\left(\lambda^2-\frac{t^2}{8}\right)dt,$$

где $\mu > 0$, $\lambda > 0$ — заданные параметры, появляющиеся при исследовании происхождения комет, получено в работе [59]. В работе Л. К. Лауцениека [30] рассмотрено асимптотическое представление немного обобщенного интеграла.

Этим же методом легко можно получить асимптотическое представление более общего интеграла типа свертки

$$\int\limits_0^x \Phi(t)\,\varphi(x-t)\,dt, \tag{2.13}$$

если функции Φ и φ обладают следующими свойствами:

а. $\Phi(t)$ абсолютно интегрируема в каждом конечном промежутке $[0, T]$ и $\Phi(x) = o(x^{-N})$ при $x \to \infty$ и любом натуральном N;

б. $\varphi(t)$ определена при $t \in (-\infty, \infty)$ и имеет представление

$$\varphi(t) = A\,t^n + t^{n-1}\,r(t),$$

где $n \geqslant 1$, $|r(t)| \leqslant M$ при $t \in (-\infty, \infty)$.

Тогда при $x \to \infty$

$$\int\limits_0^x \Phi(t)\,\varphi(x-t)\,dt = Ax^n \int\limits_0^\infty \Phi(t)\,dt + O(x^{n-1}). \tag{2.14}$$

Действительно, легко установить, что $\int\limits_x^\infty \Phi(t)\varphi(x-t)\,dt$ существует и что $\int\limits_x^\infty \Phi(t)\varphi(x-t)\,dt = o(x^{-N})$. Поэтому

$$\int\limits_0^x \Phi(t)\varphi(x-t)\,dt = \int\limits_0^\infty \Phi(t)\left[A(x-t)^n + (x-t)^{n-1} r(x-t)\right] dt + $$
$$+ o(x^{-N}) = Ax^n \int\limits_0^\infty \Phi(t)\,dt + O(x^{n-1}).$$

3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Решения дифференциальных уравнений при больших значениях аргумента

Асимптотическому разложению решений обыкновенных дифференциальных уравнений посвящено много работ, и получены далеко идущие результаты. В работе [56] видоизмененным методом попутно получены известные асимптотические разложения для решений дифференциального уравнения

$$y'' + p(z)\,y' + q(z)\,y = f(z), \tag{3.1}$$

где функции $p(z)$, $q(z)$ и $f(z)$ являются аналитическими в области σ: $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$, $\eta > 0$, $|z| \geqslant R > 0$, и заданы в этой области своими асимптотическими разложениями при $z \to \infty$ по степеням z. Главная цель упомянутой работы — получить асимптотическое разложение для решения уравнения (3.1) в ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(w)}{z^k}, \tag{3.2}$$

где $w(z)$ — некоторая аналитическая в σ функция, обладающая свойством $w(z) \to 0$ при $z \to \infty$, а функции $g_k(w)$ в области σ являются аналитическими и ограниченными. Показано, что формально полученный ряд (3.2) действительно является асимптотическим разложением решения.

В ряд типа (3.2) остаточный член асимптотического разложения по степеням z разлагается для того, чтобы можно было для него получить некоторую оценку. В качестве $w(z)$ практически взят $w(z) = \frac{\delta}{z}$, и анализируется прием введения w в данное уравнение. Подробнее об этом будет сказано в разделе 5.

3.2. Дифференциальные уравнения с большим параметром

1) Много работ посвящено также асимптотическому представлению решений однородных линейных дифференциальных уравнений при больших значениях параметра λ. За последние 40 лет усиленно изучались случаи, когда коэффициент при большом параметре в некоторой точке (точка поворота) обращается в нуль или же имеет полюс. В этих случаях решение в различных секторах окрестности такой точки может иметь различные свойства. Требуется найти равномерное асимптотическое представление решения в этой окрестности при $\lambda \to \infty$.

Метод для асимптотического представления решения в этом случае был разработан в ряде работ Лангера, где получено асимптотическое представление решения при помощи цилиндрических функций, которые можно называть эталонными функциями для решения. Наиболее общее уравнение было рассмотрено в работе [26]. В 1949 году в работе [27] Лангер в одном частном случае дал асимптотическое разложение решения по отрицательным степеням параметра λ, содержащее в качестве множителя эталонную функцию и ее производную. В том же году Черри [5] дает своеобразное асимптотическое представление для решения того же уравнения в иной форме, где аргумент эталонной функции — бесконечный ряд.

В работе [48] рассматривается уравнение

$$\mathrm{L}y = y'' + [\lambda^2 R(x) + Q(x)]\, y = 0, \qquad (3.3)$$

где $x \in [0, l]$, $\lambda \geqslant \lambda_1 > 0$, $R(x) = x^{\alpha} r^2(x)$, $\alpha > -2$, $r(x) > 0$, $Q(x) = x^{-2} q(x)$, $q(x) = a_0 + b_0 x + g_0(x)\, x^2$, $a_0 \neq 0$, $|g_0(x)| < M$, или же $q(x) = x^{\beta}[b_0 + x g_0(x)]$, $b_0 \neq 0$, $0 < \beta \leqslant 2$. Рассмотренный случай является более общим, чем случай в упомянутой работе Лангера [26]. В работе [48] анализируются различные подходы к выбору эталонных функций и получено асимптотическое представление решений уравнения (3.3). При этом в различных промежутках остаточный член имеет разные оценки. Если $a_0 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, то для остаточного члена получается единообразная оценка, и в этом случае одновременно можно рассмотреть более общее интегро-дифференциальное уравнение

$$Lv = \int_0^t G(t, s)\, v(s)\, ds. \tag{3.4}$$

Полученные представления уточняются двумя разными путями: а) следуя методу Лангера, добавляется еще один член, содержащий производную от эталонной функции; б) следуя идее Черри, аргумент эталонной функции берется в виде суммы. Показывается, что в пределах погрешности оценок полученные результаты по обоим методам совпадают. Подобным образом исследуются возможности асимптотического представления для решения более общего уравнения

$$u'' + [\lambda^2 R(x) + \lambda P(x) + Q(x)]\, u = 0. \tag{3.5}$$

В работе [49] исследуются возможности получения асимптотических разложений для решения уравнения (3.3) методом Лангера в более общем случае, чем в упомянутой работе [27]. Оказывается, что, применяя в качестве эталонных функций цилиндрические функции, за исключением некоторых частных случаев, когда a_0 принимает специальные значения, это возможно только тогда, когда $\alpha = -1, 0, 1$ и $\beta = 0$ или же $\beta = -1$, если $\alpha = -1$, но этот последний случай приводится к случаю, когда $\alpha = -1$, $\beta = 0$. В упомянутых случаях таким же путем получены асимптотические разложения для решения по отрицательным степеням λ; в них включен упомянутый результат Лангера. При других целых значениях α следует выбрать другие эталонные функции, что делается в работах других авторов.

В 50-х годах почти одновременно с работой [48] появилось много работ, посвященных различным обобщениям рассмотренной задачи как для уравнения 2-го порядка, так и для уравнений высших порядков и систем уравнений. Обзор этих исследований можно найти в работах Эрдейи [13, 14].

2) Асимптотические разложения решений неоднородных дифференциальных уравнений по большому параметру встречаются в работах [54, 58], причем все коэффициенты уравнения содержат большой параметр. Формальное асимптотическое разложение получено методом неопределенных коэффициентов по степеням некоторого выделенного главного множителя $\omega(x)$, где x — большой параметр; $\omega(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

3.3. Интегро-дифференциальные уравнения с большим параметром

1) В упомянутой работе [48] рассмотрено асимптотическое представление решений уравнения (3.4). При столь общих предположениях асимптотическое разложение решения применяемым методом получить невозможно. Поэтому в работе [60] рассматривается более простое уравнение

$$u'' + [\lambda^2 - \omega(x)]\, u = \int_0^x K(x, t)\, u(t)\, dt \qquad (3.5^*)$$

и построено асимптотическое разложение при $\lambda \to \infty$ решения задачи Коши для этого уравнения. Разложение состоит из трех рядов по отрицательным степеням параметра λ, причем два ряда содержат множители $\cos \lambda t$ и $\sin \lambda t$. Полученное разложение используется для асимптотического разложения собственных значений и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля для уравнения (3.5) при условиях $u(0) = u(l) = 0$. Подобным образом задача решается при более общих граничных условиях.

2) Интегральные уравнения используются также как вспомогательное средство в работах, упомянутых в пп. 3.1 — 3.3. Идея этого метода состоит в том, что для остаточного члена в формально полученном асимптотическом разложении или же представлении составляется интегральное или интегро-дифференциальное уравнение, которое можно решить методом последовательных приближений и получить таким образом требуемую оценку для остаточного члена. Этот метод в работах автора настоящей статьи получил некоторые видоизменения и упрощения.

3.4. Асимптотическое представление неявных функций

1) В работе [57] рассмотрено асимптотическое разложение при $x \to \infty$ неявной функции, заданной уравнением

$$F(y, x) = 0, \qquad (3.6)$$

где

$$F(y, x) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k(y) \frac{1}{x^{\lambda_k}} + \frac{1}{x^{\lambda_N}} f_N(y, x); \; f_n(y) \sim c_{n0} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\, y^{\mu_{nk}}$$

при различных предположениях относительно коэффициентов c_{nk} и показателей степени μ_{nk}.

Асимптотическое разложение функции $y(x)$ находим в виде

$$y(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{x^{\nu_k}} \qquad (3.7)$$

либо методом неопределенных коэффициентов, где одновременно последовательно определяются как неизвестные коэффициенты, так и неизвестные показатели степени, либо методом асимптотических итераций. Для этого уравнение (3.6) перепишем в виде

$$y = cF(y, x) + y, \tag{3.6'}$$

где c — подходяще выбранный коэффициент, а итерации вычисляем по формуле

$$y_{k+1} = cF(y_k, x) + y_k - R_k,$$

в которой R_k означает сумму отброшенных членов в выражении $cF(y_k, x) + y_k$, имеющих оценку определенного порядка. При этом наиболее рациональным оказывается отбрасывание членов так, чтобы k-я итерация совпала с k-й частичной суммой, полученной методом неопределенных коэффициентов.

Для обоснования формально полученных разложений для оценки остаточного члена применяется либо метод математической индукции, либо метод, который назван методом верхних и нижних функций и развит для решения численного уравнения в работе [49]. Согласно этому методу, к функции $F(y, x)$ после подстановки вместо y выражения $\sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{x^{\nu_j}} \pm \frac{1}{x^{\nu_k - \varkappa}}$, где $\varkappa$ — некоторое фиксированное число, применяется формула конечного приращения. Из полученного выражения можно заключить, что $F(y, x)$ при фиксированном достаточно большом x в рассматриваемом малом промежутке

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{x^j} - \frac{1}{x^{\nu_k - \varkappa}} \leqslant y \leqslant \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{x^j} + \frac{1}{x^{\nu_k - \varkappa}}$$

меняет знак. Отсюда следует, что существует функция $y^*(x)$, имеющая представление

$$y^*(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{a_j}{x^{\nu_j}} + O\left(\frac{1}{x^{\nu_k - \varkappa}}\right)$$

и удовлетворяющая уравнению (3.6). Этим методом удается одновременно доказать и существование неявной функции, причем и в тех случаях, когда классические условия не выполнены.

В качестве примеров в работе [57] рассмотрены уравнения

$$\int_0^\infty \Phi(x\tau)\, h(y(x)\,\tau)\, d\tau = \varphi(x) \text{ и } G(x)\,\Phi(y(x)) - \rho G(y(x))\,\Phi(x) = 0,$$

определяющие при некоторых предположениях неявную функцию $y(x)$.

2) В упомянутой работе [58] рассмотрена неявная функция, асимптотическое представление которой нельзя получить в виде степенного ряда. Эта функция задана уравнением

$$y = x + \beta \ln y + f(y), \tag{3.8}$$

где $f(y) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{y^k}$ при $y \to \infty$. К асимптотическому разложению функции $y(x)$ применяется метод асимптотических итераций; получено разложение

$$y \sim x + \beta \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{\ln x}\right) \left(\frac{\ln x}{x}\right)^k, \tag{3.9}$$

где $A_k(t)$ — полином степени k. Справедливость разложения (3.9) авторы доказывают, оценивая методом индукции разность $y - y_n$ как в обычном методе итераций. Для того, чтобы при применении формулы конечного приращения не надо было требовать от функции $f(y)$ дифференцируемости, она представляется в виде

$$f(y) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\alpha_k}{y^k} + O\left(\frac{1}{y^{N+1}}\right)$$

с достаточно большим N, и формула конечного приращения применяется только к частичной сумме. Это видоизменение можно применить и для метода верхних и нижних функций.

К уравнению (3.8) можно привести задачу об асимптотическом представлении обратной функции к такой функции, асимптотическое разложение которой в качестве множителя содержит показательную функцию. Например, для интеграла вероятностей имеем

$$u(t) \equiv \Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau \sim 1 - \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}\, t} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k t^{2k}}\right].$$

Логарифмируя это соотношение и введя обозначения

$$t^2 = y, \ \ln \frac{1}{\sqrt{\pi}} - \ln(1-u) = x,$$

получаем уравнение

$$y = x + \frac{1}{2} \ln y + \varphi(y),$$

для решения которого можно применить прежние результаты.

3.5. Асимптотика корней трансцендентных уравнений

1) В работе [49] рассматривается уравнение

$$F(x) \equiv \sin(x+\omega) f_1(x) + \cos(x+\omega) f_2(x) - f_3(x) = 0, \quad (3.10)$$

где функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ при $x \to \infty$ заданы своими асимптотическими разложениями по дробным степеням x. Ищем асимптотическое представление последовательности вещественных корней этого уравнения при больших значениях индекса. Для этого $F(x)$ представляется в виде $F(x) = \Phi(x) + o(1)$ и рассматривается сокращенное уравнение $\Phi(y) = 0$. Если это уравнение имеет вещественные корни, то данное уравнение — бесконечно много вещественных корней, и можно получить асимптотическое разложение корней

$$x_n \sim y_n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{y_n^{\lambda_k}}, \quad (3.11)$$

где $y_n = n\pi s + \varkappa$; $s = 1$ или же $s = 2$; $\varkappa$ — заданное число.

Коэффициенты l_k и показатели степени λ_k одновременно определяются методом неопределенных коэффициентов, и к обоснованию полученного разложения применяется метод верхних и нижних функций. В каждом из случаев, когда $s = 1$ или же $s = 2$, надо различать 6 подслучаев, причем некоторые из них в свою очередь еще подразделяются на подслучаи.

Развитая теория применяется к решению некоторых уравнений, содержащих цилиндрические функции, а также в работе [60] к асимптотическому разложению собственных значений задачи Штурма—Лиувилля для ранее рассмотренного интегро-дифференциального уравнения (3.5).

2) В работе [52] попутно рассматривается уравнение

$$2n \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2nx,$$

которое на сегменте $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеет n корней. Асимптотические разложения для первых и последних из этих корней при большом n получены по вышеизложенному методу.

3.6. Общая теорема об асимптотике решений функциональных уравнений

В последнее время появилось несколько работ, рассматривающих асимптотику решений функциональных уравнений с общей точки зрения [4, 10].

Общая теорема относительно оценки решения некоторых дифференциальных уравнений имеется в работе [58]; в более общей формулировке она дана в работе [54].

Если аналитическая относительно t в области Ω функция $y(x, t)$ при всех $x \geqslant x_0$ удовлетворяет в этой области уравнению

$$y(x, t) = \frac{1}{\omega^{\mu}} l_0(x, t) + \frac{1}{\omega^{\beta}} L_0[u(x, t)], \ \beta > 0,$$

где $l_0(x, t)$ — в области Ω равномерно ограниченная относительно $x \geqslant x_0$ функция и L_0 — линейный дифференциальный оператор с коэффициентами, обладающими такими же свойствами, как функция l_0, или же интеграл с конечными пределами от такого дифференциального оператора, и, кроме того, в области Ω при $x \geqslant x_0$ известна оценка

$$|y(x, t)| < M_0 \frac{1}{\omega^{\lambda}}, \ \lambda < \mu,$$

то в области Ω_{ε} для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ имеет место также оценка

$$|y(x, t)| < M(\varepsilon) \ \frac{1}{\omega^{\mu}}.$$

$\Omega_{\varepsilon} \subset \Omega$ означает область, точки контура которой находятся на расстоянии ε от точек контура области Ω.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РЯДАМИ

4.1. Асимптотика некоторых классов целых функций

1) В уже упомянутых работах В. Ж. Риекстыни [42—45] рассматривается асимптотическое представление целой функции

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) z^n \tag{4.1}$$

при $z \to \infty$, если функция $\mu(t)$ аналитична на плоскости t, кроме некоторой последовательности особых точек, и при $t \to \infty$, $|\arg t| \leqslant \pi - \eta$, $\eta > 0$ имеет представление

$$\mu(t) = A t^{\alpha} e^{bt - \gamma t \ln t} \ln^{\varkappa} t \, [1 + r(t)], \tag{4.2}$$

где $r(t) \to 0$ при $t \to \infty$; α, $\varkappa$ — действительные числа; A, b — комплексные числа. Функция $F(z)$ связывается с интегралом

$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \mu(t)\, z^t \frac{dt}{\sin \pi t}$, где контур C охватывает бесконечную часть вещественной оси в некоторой правой полуплоскости и деформируется так, чтобы на нем находилась точка перевала функции $e^{-\gamma t \ln t + bt}\, z^t$. Потом методом перевала получается асимптотическое представление интеграла и вместе с тем также функции $F(z)$ в секторе $0 < \eta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$. В остальной части плоскости z асимптотическое представление функции $F(z)$ получено в работе [42], при рассмотрении ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mu(n)\, z^n$ и связывании его с интегралом $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \mu(t)\, t^z \operatorname{ctg} \pi t\, dt$.

В работах [43, 44] используются также полюсы и точки ветвления функции $\mu(t)$. Учитывая возможные расположения точки перевала, различаем случаи, когда $\gamma > 2$, $1 < \gamma \leqslant 2$, $\gamma = 1$, $0 < \gamma < 1$. Некоторые обобщения упомянутых результатов и упрощения метода даны в работе [45].

2) Подобные исследования и результаты встречаются в работах Райта [71, 72], но он применяет иной метод. Следуя идее Ватсона и рассматривая интеграл по некоторому замкнутому контуру от некоторой вспомогательной функции, Райт исследование ряда типа (4.1), в котором условия для функции $\mu(t)$ несколько отличаются от (4.2), приводит к исследованию более простого ряда, в котором $\gamma = 1$. Это получается так, что интеграл как сумма вычетов в пределе дает сумму сбоих рядов, а сам интеграл оценивается и входит в остаточный член. Асимптотическое представление нового ряда получено весьма сложным путем и другим методом, чем в работах В. Ж. Риекстыни.

Результаты Райта и В. Ж. Риекстыни не полностью перекрываются, так как у Райта взят $\varkappa = 0$, и некоторые оценки, когда $\mu(t)$ не имеет полюсов, у него слишком грубые. С другой стороны, в работе [72] рассмотрен случай, когда $\mu(t)$ в представлении (4.2) содержит полином в показателе степени показательной функции.

Как уже упоминалось в п. 2.1, полученные асимптотические представления в работах [45, 46] применяются для асимптотического представления интеграла (2.6). Все упомянутые результаты составляют основную часть кандидатской диссертации В. Ж. Риекстыни*, в которой получены также некоторые более общие результаты.

---

* В. Ж. Риекстыня. Асимптотические разложения некоторых типов интегралов. Канд. дисс. Рига, 1967.

4.2. Остаток и частичная сумма степенного ряда для целой функции

В работе [58] рассмотрено асимптотическое разложение при большом индексе для частичной суммы и остатка степенного ряда целой функции, для которой известно дифференциальное уравнение. При использовании этого уравнения получается соответствующее уравнение для остатка или частичной суммы, от которых отделен некоторый множитель. Из этого уравнения методом неопределенных коэффициентов получается искомое разложение по отрицательным степеням индекса. В обосновании полученного разложения используется теорема, приведенная в п. 3.6. Решается также вопрос о том, каким должен быть индекс, чтобы остаток ряда имел заданную оценку малости; для этого надо решить уравнение (3.8).

5. ОЦЕНКИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЯДА

5.1. Преобразование асимптотических рядов

1) Известно, что при практическом использовании асимптотических рядов результат не всегда получается с желаемой точностью. Оценка остаточного члена, которая получается при доказательстве, что полученный ряд удовлетворяет определению, обычно указывает только на порядок этого члена и для практических целей неприменима. Поэтому большое практическое значение имеет точная оценка остаточного члена.

Одним из методов для такой оценки является преобразование асимптотического ряда, при помощи которого остаточный член разлагается в асимптотический ряд другого вида, который удобнее применять для численных расчетов.

Преобразование асимптотических рядов можно выполнить различными способами. В работе [51] рассмотрены некоторые общие приемы преобразования асимптотического степенного ряда

$$F(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}. \tag{5.1}$$

Один из методов состоит в том, что коэффициент a_k представляется в виде $a_k = \sum\limits_{i=0}^{k} b_{ik}$, причем известно, что $g_i(z) \sim \sum\limits_{k=i}^{\infty} \frac{b_{ik}}{z^k}$. Если, в частности, $a_k = \sum\limits_{i=0}^{k} c_{ik}\alpha^{k-i}$, где α — некоторый параметр, то этим преобразованием можно получить формальные ряды, примененные Эйри [1] в различных численных расчетах. Если ввести числа $d_k = \frac{a_k}{c_k}$, $\delta_k = (-1)^k \Delta^k d_0$, то $a_k = c_k \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \delta_i$ и получается преобразование, из которого при $c_k = (-1)^k$ имеем хорошо известное преобразование Эйлера. Поэтому последнее преобразование названо обобщенным преобразованием Эйлера, которое с иной точки зрения рассмотрено в работе Ван Вийнгардена [69].

Второй метод преобразования заключается в том, что преобразуется множитель $\frac{1}{z^k}$, т. е. $\frac{1}{z^k} \sim \sum_{i=k}^{\infty} b_{ik} h_i(z)$. Если взять $h_i(z) = \frac{1}{z(z+1) \ldots (z+i-1)}$, то получается преобразование Стирлинга, но при $h_i(z) = \frac{1}{(1+z)^i}$ снова получается преобразование Эйлера. Показывается, что, применяя к данному ряду бесконечно много раз преобразование Эйлера и оставляя при этом на каждом шагу один член без преобразования, можем получить преобразование Стирлинга.

Рассмотренные преобразования применяются к некоторым конкретным типам рядов, наиболее часто встречаемым на практике. Для ряда $1! - 2! + 3! - + \ldots$ этим путем получено значение функции с 8 верными знаками.

Непосредственные преобразования асимптотических рядов, более или менее связанные с упомянутыми в этом пункте методами или же основанные на других идеях, встречаются во многих работах других авторов. Наиболее сильным часто является ε-алгорифм, связанный с преобразованием ряда в непрерывную дробь и развитый в большем цикле работ Винна. Понятие об этом методе можно получить из работ [74, 75].

2) Преобразование асимптотического ряда (5.1) можно выполнить также, используя дифференциальное уравнение для разлагаемой функции $F(z)$. При помощи этого уравнения можно получить дифференциальное уравнение для фактора $H_n(z)$, определяемого соотношением

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{z^k} + \frac{a_n}{z^n} H_n(z). \tag{5.2}$$

Этот фактор другими авторами неправильно назван «фактором сходимости» (converging factor), так как никакой сходимости ряда здесь нет; кроме того, такой термин в другом смысле употребляется в теории суммируемых рядов. В работе [51] он назван «фактором точности».

В работе [56] указанный метод рассмотрен в случае, когда функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению (3.1), о чем кратко было сказано в п. 3.1. Функция $H_n(z)$ разлагается в ряд вида

$$H_n(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k\left(\frac{\delta}{z}\right)}{z^k}, \tag{5.3}$$

где функции g_k определяются рекуррентным соотношением. В зависимости от того, в каких местах в дифференциальном уравнении и выражениях для производных H_n' и H_n'' ввести величину $w = \frac{\delta}{z}$, для одной и той же функции $H_n(z)$ можно получить разные разложения.

Этим методом в некоторых частных случаях получены такие же разложения, как и преобразованием рядов, однако здесь открывается больше возможностей, если только для разлагаемой функции известно дифференциальное уравнение. В частности, получено формальное разложение Слейтера [64] для вырожденной гипергеометрической функции, и можно было бы также получить результаты Миллера [34] для функций параболического цилиндра. В последней работе впервые высказана мысль об использовании дифференциального уравнения.

3) Остаточный член ряда иногда можно представить в виде интеграла и, применяя некоторые формальные приемы, интеграл разлагать в ряд другого вида. В работе [51] в одном частном случае этим методом получен такой же результат, как методом преобразования Эйлера. Однако такой прием можно обобщить и видоизменить для более общих случаев. Кроме того, этим методом можно получить также разложения, которые являются не сильноасимптотическими, а аппроксимирующими.

5.2. Некоторые другие приемы оценки

1) Ради полноты приводим некоторые сведения о приемах для оценки остаточного члена, примененных другими авторами. Стильтес [65] предложил разложить остаточный член $r_n(x)$ для некоторых простейших рядов по отрицательным степеням индекса n исходя из его интегральной формы. Этот метод позднее был обобщен несколькими авторами. Наиболее сильные результаты по этому методу

имеются в малоизвестной работе [66], в которой по степеням индекса разлагается остаточный член асимптотического разложения для функции Уиттекера $W_{k,\,m}(z)$.

В работе Джефриса [22] имеется попытка оценить остаточный член $r_n(x)$ в более общем случае для интеграла Лапласа (2.2), представляя $r_n(x)$ обычным приемом в виде интеграла и используя асимптотическое представление для $f^{(n)}(t)$ в окрестности особой точки, ближайшей к началу. Однако это представление применяется на всем интервале интегрирования, поэтому неизвестно, в какой мере точна полученная оценка.

В. И. Левин [32] и Л. С. Ларичева [28, 29] рассматривают разложение

$$F(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{-\gamma-kr};\; r>0, \tag{5.4}$$

которое получено общеизвестным методом при помощи преобразования Лапласа, используя представление изображения функции $F(x)$ в окрестности точки ветвления. Остаточный член $r_n(x)$ выражается в виде интеграла обращения и его можно методом перевала оценить при больших x и n.

Во всех указанных, а также в некоторых других работах, посвященных этой тематике, содержится мысль о том, что остаточный член берется примерно при наименьшем по модулю члене, что будет верно при определенном соотношении между индексом n и аргументом x. Это соотношение фиксируем, вводя в него дополнительный параметр η. Если этот параметр фиксировать, то при $n\to\infty$ также $x\to\infty$ и наоборот; поэтому надо иметь в виду, что в ряде имеются 2 переменные — x и n, которые встречаются и в прежних членах, и следует пояснить, в каком смысле понимать полученное разложение или представление. В упомянутых работах это не делается.

Если, напротив, фиксировать в остаточном члене x, то при $n\to\infty$ также $\eta\to\infty$. Поскольку η входит в коэффициенты полученного разложения, то обычно это разложение не является сильно-асимптотическим. Такие формальные разложения, полученные преобразованием рядов, также встречаются в упомянутых работах [1, 34, 64].

Следует отметить, что общепринятое утверждение, что наибольшая точность оценки остаточного члена получается при наименьшем члене, в общем неверно. В п. 5.1 отмеченный пример для ряда $1!-2!+3!-+\dots$ показывает противное: чем дальше брать частичную сумму этого расходящегося ряда, тем точнее можно оценить после преобразования остаточный член.

2) Другая идея для оценки остаточного члена в интегральной форме применяется в работах Ван Вийнгардена [69] и Дингля [11]; в них для специальных типов рядов интеграл в остаточном члене выражается при помощи некоторых стандартных специальных функций, которые можно табулировать. Таким образом, остаточный член для этих типов рядов удается вычислить с большой точностью. К сожалению, стандартные функции зависят от параметра, который может принимать различные значения, поэтому требуется составлять много таблиц.

3) В работах Ольвера [35 — 37] рассматривается оценка остаточного члена в асимптотическом представлении для решения однородного линейного дифференциального уравнения, где асимптотическое представление получается методом WKB. Оценка справедлива для всех рассматриваемых значений параметра и аргумента, и в частных случаях ее можно получить достаточно точно, как это получено в [37] для цилиндрических функций.

В работе Эванса [17] рассматриваются решения однородного линейного дифференциального уравнения в случае, когда решение разлагается непосредственно по отрицательным степеням аргумента. Используя рекуррентную формулу для коэффициентов, для остаточного члена можем получить неоднородное дифференциальное уравнение, степень которого на единицу ниже, чем степень данного уравнения. Если данное уравнение второго порядка, то остаточный член можно выразить при помощи квадратур и получить требуемую оценку. Оценка иногда получается недостаточно точной, но этот метод применим также для того, чтобы доказать соответствие полученного формального разложения определению.

4) В заключение следует отметить, что некоторые небольшие оригинальные результаты, которые в Риге получены в студенческих курсовых и дипломных работах, пока не опубликованы, так как они по некоторым причинам остались незаконченными. Среди них можно отметить следующие работы: П. Зелча об асимптотическом представлении решения уравнения (3.3) в случае двух точек поворота; В. Баркана об асимптотическом представлении решений некоторых трансцендентных уравнений; Я. Янсона о некоторых интегралах типа Барнса; Х. Калиса о некоторых типах интегралов, содержащих большой параметр; Б. Силини об асимптотическом представлении некоторых типов конечных сумм и работу М. Мурини об асимптотическом представлении решений некоторых разностно-дифференциальных уравнений.

Результаты П. Зелча перекрыты более сильными результатами, имеющимися в работе [25].

Из перечисленных работ приведем интересный результат Я. Янсона, в котором рассматривается интеграл типа Барнса:

$$I(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\cos\pi t\,\Gamma(t)\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(a_j-t)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j-t)}\,z^{-t^4}\,dt,\ p>q+1,$$

где $a_1,\ldots,a_p,\ b_1,\ \ldots,\ b_q$ — различные положительные числа, разность которых не равна целому числу, и $0<\sigma<\min\limits_{1\leqslant j\leqslant p} a_j$. Интеграл сходится, если $|z|>1$. Передвинув контур вправо, получаем формальное разложение

$$I(z)\sim\sum_{r=1}^{p}\cos\pi a_r\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_r+k)\prod\limits_{j=1,\ j\neq r}^{p}\Gamma(a_j-a_r-k)}{k!\ \prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j-a_r-k)}\,z^{-(a_r+k)^4},$$

а передвинув контур влево, получаем разложение

$$I(z)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod\limits_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+k)}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+k)}\cdot\frac{z^{-k^4}}{k!}.$$

Но ни одно, ни другое из них не являются сильноасимптотическим разложением, так как остаток ряда при всех индексах имеет оценку одного и того же порядка. Правильное асимптотическое разложение функции $I(z)$ получено в работе Т. Т. Цирулиса [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. J. R. Airey. The converging factor in asymptotic series and the calculation of Bessel, Laguerre and other functions. — Phil. Mag., 24 (7), 1937, 526—552.

2. L. Berg. Asymptotische Auflösung von Differential-Funktionalgleichungen. — Math. Nachr., **17**, 1959, 198—210.

3. L. Berg. Asymptotische Entwicklungen mit Hilfe von Neutrizen. — Archiv der Math., **14**, 1963, 162—171.

4. L. Berg. Asymptotische Lösungen für Operatorgleichungen. — ZAMM, 45, 1965, 333—352.

5. T. M. Cherry. Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. — Trans. Am. M. S., **68**, 1950, 224—257.

6. Т. Т. Цирулис. О некоторых свойствах градиентных линий и их применении в асимптотических разложениях. — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [1.] Рига, «Зинатне», 1966, стр. 71—87.

7. Т. Т. Цирулис. О выборе контура интегрирования для асимптотического разложения интегралов. — Латвийский математический ежегодник, III. [В печати.]

8. Т. Т. Цирулис. О применении метода перевала в некоторых особых случаях. I. — В настоящем сборнике, стр. 75—87.

9. J. van der Corput. Asymptotic Developments. I. Fundamental theorems of asymptotics. — J. Anal. Math., 4, 1955/56, 341—418.

10. J. van der Corput. Introduction to the method of asymptotic functional relations. — J. Anal. Math., 14, 1965, 67—78.

11. R. B. Dingle. Asymptotic expansions and converging factors. — Proc. Roy. Soc., A 244, 1958, 456—490.

12. G. Doetsch. Handbuch der Laplace Transformation. Bd. 2. Basel, 1955.

13. A. Erdelyi. Asymptotic solutions of differential equations with transition points or singularities. — J. Math. Phys., 1, 1960, 16—26.

14. A. Erdelyi. Asymptotic solutions of ordinary linear differential equations. Californ. Inst. of Technology. Pasadena, 1961.

15. A. Erdelyi. General asymptotic expansions of Laplace integrals. — Arch. for Rat. Mech. and Anal., 7, 1961, 1—20.

16. A. Erdelyi, M. Wyman. The asymptotic evaluation of certain integrals. — Arch. for Rat. Mech. and Anal., 14, 1963, 217—260.

17. R. L. Evans. Errors in asymptotic solutions of linear ordinary differential equations. — Quart. of Appl. Math., 12, 1954, 295—300.

18. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции. М., Физматгиз, 1957.

19. L. C. Hsu. Concerning an expansion formula for a type of integrals. — Ann. polonici math., 11, 1961, 7—12.

20. L. C. Hsu. Concerning an expansion formula for a type of parameter integrals. — Scientia Sinica, 12, 1963, 1237—1238.

21. T. E. Hull, C. Froese. Asymptotic behaviour of the inverse of a Laplase transform. — Canad. J. Math., 7, 1955, 116—125.

22. H. Jeffreys. The remainder in Watson's lemma. — Proc. Roy. Soc., A 248, 1958, 88—92.

23. T. Carleman. Developpements asymptotiques des solutions d'une classe d'equations differentielles linéaires. — Act. Math., 43, 1922, 319—336.

24. T. Carleman. Les fonctions quasi analitiques. Paris, 1926.

25. N. D. Kazarinoff. Asymptotic theory of second order differential equations with two simple turning points. — Arch. for Rat. Mech. and Anal, 2, 1958, 129—150.

26. R. E. Langer. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes phenomenon about a singular point. — Trans. Am. M. S., 37, 1935, 397—416.

27. R. E. Langer. The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. — Trans. Am. M. S., 67, 1949, 461—490.

28. Л. С. Ларичева. Предельная оценка точности асимптотических разложений некоторого класса функций. I.—Известия вузов, 1963, № 6 (37), 109—115.

29. Л. С. Ларичева. Предельная оценка точности асимптотических разложений некоторого класса функций. II. — Известия вузов, 1965, № 3 (46), 111—116.

30. Л. К. Лауценикс. К решению уравнения диффузии комет. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1964, т. 68, стр. 91—95.

31. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.

32. В. И. Левин. Предельная оценка точности асимптотических разложений некоторого класса функций. — Труды Московского математического общества, 1953, т. 2, стр. 383—395.
33. H. Mellin. Abriss einer allgemeinen und einheitlichen Theorie der asymptotischen Reihen. V. Skand. Math. Kongress, Helsingfors, 1922, 1—17.
34. J. C. Miller. A method for the determination of converging factors, applied to the asymptotic expansions for the parabolic cylinder functions. — Proc. Cambr. Phil. Soc., 48, 1952, 243—254.
35. F. W. J. Olver. Error bounds for the Liouville—Green (WKB) approximation. — Proc. Cambr. Phil. Soc., 57, 1961, 790—810.
36. F. W. J. Olver. Error bounds for first approximations in turning point problems. — J. Soc. Industr. and Appl. Math., 11, 1963, 748—772.
37. F. W. J. Olver. Error bounds for asymptotic expansions, with an application to cylinder functions of large argument. — Asympt. Solut. Diff. Equat. and their Appl. New York—London—Sydney 1964, pp. 163—183.
38. H. Poincaré. Sur les integrales irregulieres des equations lineaires. — Acta Math., 8, 1886, 295—344.
39. В. Ж. Риекстыня. Об одном обобщении асимптотических разложений. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1958, т. 20, стр. 145—152
40. В. Ж. Риекстыня. Обобщенные асимптотические разложения для одного контурного интеграла. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1959, т. 28, стр. 111—126.
41. В. Ж. Риекстыня. О применении преобразования Лапласа к разложению в обобщенные асимптотические ряды. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1959, т. 28, стр. 127—130.
42. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. I. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1964, т. 58, стр. 49—71.
43. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. II — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [I.] Рига, «Зинатне», стр. 37—70.
44. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. III. — Латвийский математический ежегодник. 2. Рига, „Зинатне", 1966, стр. 265—281.
45. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические разложения некоторых целых функций и интегралов Фурье. — В настоящем сборнике, стр. 49—76.
46. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки некоторых интегралов, зависящих от большого параметра. — В печати.
47. Э. Я. Риекстыньш. О некоторых специальных функциях, применимых к решению телеграфных уравнений. — Прикладная математика и механика, 15, 1951, стр. 485—494.
48. Э. Я. Риекстыньш. О методе эталонных функций. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1958, т. 20, стр. 65—86.
49. Э. Я. Риекстыньш. Асимптотические разложения для вещественных корней некоторых трансцендентных уравнений. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1959, т. 28, стр. 67—86.
50. Э. Я. Риекстыньш. Об асимптотическом представлении некоторых интегралов, зависящих от большого параметра. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1961, т. 41, стр. 5—20.
51. Э. Я. Риекстыньш. О повышении точности в расчетах с асимптотическими рядами методом преобразования рядов. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1961, т. 41, стр. 107—124.
52. Э. Я. Риекстыньш. Об узловых линиях квадратной мембраны. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1964, т. 58, стр. 103—110.
53. Э. Я. Риекстыньш. О применении теории нейтрис к асимптотическому представлению некоторых интегралов. — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [I.] Рига, «Зинатне», 1966, стр. 5—21.

54. Э. Я. Риекстыньш. Об одном методе для асимптотического разложения интегралов, зависящих от большого параметра. — Латвийский математический ежегодник. II. Рига, „Зинатне", 1966 стр. 227—240.

55. Э. Я. Риекстыньш. Асимптотическое разложение некоторых быстро осциллирующих интегралов по цилиндрическим функциям. — В настоящем сборнике, стр. 37—47.

56. Э. Я. Риекстыньш, Э. А. Икауниек. Преобразование асимптотических рядов методом дифференциальных уравнений. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1961, т. 41, стр. 125—138.

57. Э. Я. Риекстыньш, М. Я. Муриня. Об асимптотическом представлении неявных функций. — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [I.] Рига, «Зинатне», 1966, стр. 23—36.

58. Э. Я. Риекстыньш, Б. Силиня. Асимптотические разложения для частичных сумм и остатков некоторых степенных рядов. — Латвийский математический ежегодник. II. Рига, „Зинатне", 1966, стр. 241—260.

59. Э. Я. Риекстыньш, К. А. Штейн. К вопросу о диффузии комет. I. — Астрофизический журнал, **37**, 1960, 1061—1067.

60. Э. Я. Риекстыньш, Р. Золберга. Асимптотические разложения собственных значений и собственных функций задачи Штурма—Лиувилля для одного интегро-дифференциального уравнения при больших значениях параметра. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1959, т. 28, стр. 87—95.

61. Л. И. Рубинштейн. Об асимптотике решения одной контактной осесимметрической термоконвективной задачи при больших значениях конвективного параметра. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1963, т. 47, стр. 219—251.

62. H. Schmidt. Über asymptotische Entwicklungen mit allgemeinen Skala. — Jahresber. DMV, **44**, 1934, 49—51.

63. H. Schmidt. Beiträge zu einer Theorie der allgemeinen asymptotischen Darstellungen. — Math. Ann., **113**, 1937, 629—656.

64. L. J. Slater. On the evaluation of the confluent hypergeometric function. — Proc. Cambr. Phil. Soc., **49**, 1953, 612—622.

65. T. J. Stieltjes. Recherches sur quelques series semi convergentes. — Ann. Sci. Ec. Norm. Paris, **3** (3), 1886, 201—258.

66. A. Svetlov. On the asymptotic expansions of the confluent hypergeometric functions. — Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. 9, 1935, стр. 201—221.

67. G. Szegö. Über einige asymptotische Entwicklungen der Legendreschen Funktionen. — Proc. Lond. M. S., **36**, 1934, 427—450.

68. А. Н. Тихонов. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. — ДАН СССР, **125**, 1959, стр. 982—985.

69. A. van Vijngaarden. A transformation of formal series. — Proc. Koninkl. Ned. Akad. Wet., ser. A, **56**, 1953, 522—543.

70. H. F. Willis. A formula for expanding an integral as a series. — Phil. Mag., **39**, 1948, 455—460.

71. E. M. Wright. The asymptotic expansion of integral functions, defined by Taylor series. — Phil. Trans. Roy. Soc. London, A238, 1940, 423—451.

72. E. M. Wright. The asymptotic expansion of integral funktions and of the coefficients in their Taylor series. — Trans. Am. M. S., **64**, 1948, 409—438.

73. M. Wyman. The method of Laplace. — Trans. Roy. Soc. Canada, **2**, 1964, Sec. 1—3, 227—256.

74. P. Wynn. Acceleration techniques in numerical analysis, with particular reference to problems in one independent variable. Proceedings of IFIP Congress, Amsterdam, 1962, 149—156.

75. P. Wynn. On the convergence and stability of the epsilon algorithm. — J. SIAM Numer. Anal., **3**, 1966, No. 1, 91—122.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ

Кафедра общей математики ЛГУ им. П. Стучки

Обобщается метод, данный Сеге, для полиномов Лежандра [5], для интеграла (0.1). Выясняется, что во многих случаях полученный ряд не имеет асимптотического характера, хотя он может сходиться в данном интервале.

Часты случаи, когда надо получить асимптотическое представление при большом x интеграла

$$\Omega(x, y) = \int_0^y T(xt) F(t)\, dt, \quad y > 0, \tag{0.1}$$

где $T(t)$ — осциллирующая функция.

В настоящей работе рассмотрены некоторые приемы для решения этой задачи в некоторых частных случаях.

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Простейшим способом для асимптотического разложения интеграла (0.1) является интегрирование по частям. Если функция $F(t)$ на сегменте $[0, y]$ имеет непрерывные производные до $N+1$ порядка включительно, то, интегрируя (0.1) $N+1$ раз по частям, получаем

$$\Omega(x, y) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} T_{-k-1}(xy) F^{(k)}(y) -$$

$$-\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} T_{-k-1}(0) F^{(k)}(0) + (-1)^{N+1} \frac{1}{x^{N+1}} \int_0^y T_{-N-1}(xt) F^{(N+1)}(t)\, dt, \tag{1.1}$$

где
$$T_0 \equiv T,\ \frac{d}{dt} T_{-k-1} = T_{-k},\ k = 0, 1, \ldots \tag{1.2}$$

Если функции $T_{-k}(x)$ ограничены при всех $x > 0$, то остаточный член в формуле (1.1) имеет оценку $O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right)$. Если, кроме того, можно найти функции $\psi_k(x)$, для которых при $x \to \infty$

$$\frac{T_{-k}(xy)}{\psi_k(x)} = O(1);\ \frac{T_{-k}(xy)}{\psi_k(x)} \neq o(1), \quad k = 1, 2, \cdots, N, \tag{1.3}$$

и функции $\frac{\psi_k(x)}{x^{k+1}}$ образуют асимптотическую шкалу, то суммы в этой формуле дают асимптотическое представление для функции $\Omega(x, y)$ согласно определению в работе [1]. Если указанные свойства существуют при любом N, то получим асимптотическое разложение.

Точнее характеризуя поведение функций T^{-n-1} и $F^{(N+1)}$, полученную оценку остаточного члена можно уточнить, но это для нас не имеет существенного значения, так как формула (1.1) имеет в этой работе вспомогательный характер. В работе [2] даны достаточные условия, при которых функции $T_{-k}(t)$ обладают требуемыми свойствами. Достаточно, что функция $T(t)$ имеет вид

$$T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + T^*(t),$$

где $T^*(t)$ интегрируема в $[0, \infty)$ и при $t \to \infty$ имеет асимптотическое представление

$$T^*(t) \sim \sin \omega t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{t^{\alpha_k}} + \cos \omega t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{t^{\beta_k}},$$

где α_k и β_k образуют монотонно возрастающие последовательности и $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$. Тогда можно брать

$$T^*_{-k-1}(t) = -\int_t^{\infty} T^*_{-k}(\tau)\, d\tau.$$

Впрочем, этим условиям удовлетворяют функции $\frac{\sin t}{t^{\mu}}$, $0 < \mu < 2$, $\frac{\cos t}{t^{\mu}}$, $0 < \mu < 1$, $J_{\nu}(t)\, t^{\mu-1} \left(\nu > -1,\ -\nu < \mu < \frac{3}{2}\right)$. В этих случаях в формуле (1.1) функции $T_{-k}(x\,y)$ можно разлагать в асимптотические ряды и перегруппировывать члены по убывающим степеням x.

2. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $F(t)$

Все же могут быть случаи, когда, начиная с некоторого порядка, функция $F(t)$ в концах сегмента $[0, y]$ имеет бесконечные производные. Здесь типичен случай, когда

$$F(t) = \Phi^{\alpha}(t), \tag{2.1}$$

где $\Phi(t)$ — аналитическая в $[0, y]$ функция; α — нецелое число; Φ может зависеть также от y. В точках, в которых $\Phi(t) = 0$, производные порядка $[\alpha] + k$, $k = 1, 2, \ldots$ не существуют, и интегрированием по частям получаются расходящиеся интегралы.

Простейший прием в этом случае — разбиение функции $\Phi^{\alpha}(t)$ на два множителя, один из которых является аналитической функцией, а второй имеет упомянутую негладкость. Однако найти явные выражения для функции $T_{-k}(t)$ в таких случаях, кроме интеграла Фурье, весьма затруднительно. Поэтому вместо интегрирования по частям можно пытаться применить другой прием: разложить функцию $F(t)$ в ряд по подходящим образом выбранным функциям, интегрировать ряд почленно и выразить каждый из полученных интегралов при помощи некоторой знакомой специальной функции. Эта идея не нова. Например, для интеграла типа Лапласа и его обращения такой метод применяется в работах [3, 4].

В настоящей работе будет обобщаться идея Сеге [5], примененная к асимптотическому разложению функций Лежандра по функциям Бесселя, исходя из интеграла Дирихле—Мэлера. Для более общих функций Лежандра метод Сеге применен в работах Н. К. Чухрукидзе [6, 7].

Рассмотрим отдельно три случая.

1) $\Phi(t)$ — четная, аналитическая в $[0, y\sqrt{2}]$ функция. Мы имеем разложение в ряд Тейлора

$$\Phi(y\sqrt{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(y)\,(z-1)^k, \tag{2.2}$$

где

$$c_k(y) = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dz^k}[\Phi(y\sqrt{z})]_{z=1};\quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

Ряд сходится для $z \in [0, 2]$. Взяв $z = \frac{t^2}{y^2}$, получаем

$$\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k c_k}{y^{2k}}(y^2 - t^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k(y)\,(y^2 - t^2)^k. \tag{2.4}$$

Этот ряд сходится при $t \in [0, y\sqrt{2}]$.

Рассмотрим далее разложение для $F(t)$. Если $\Phi(t)$ в некоторых точках сегмента $[0, y]$ обращается в нуль, то значения α надо ограничить так, чтобы интеграл (0.1) сходился, в противном случае α может быть любым вещественным числом. Если $\gamma_0 \neq 0$, т. е. $\Phi(y) \neq 0$, то имеем разложение

$$\Phi^{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(y, \alpha)\,(y^2 - t^2)^k; \;\; \delta_0 \neq 0. \tag{2.5}$$

В работе [8] доказана рекуррентная формула

$$\sum_{j=0}^{k} [(\alpha+1)\,j - k]\,\gamma_j\,\delta_{k-j} = 0, \; k \geqslant 1, \; \delta_0 = \gamma_0^{\alpha} \tag{2.6}$$

в случае, когда α — рациональное число. Так как каждое иррациональное число α можно выразить как предел последовательности рациональных чисел $\{\alpha_k\}$, то, записывая последовательность разложений (2.5) для α_k и переходя к пределу, легко доказать, что соотношение (2.6) справедливо для любого α.

Еще следует отметить, что в работе [8] некорректно доказана справедливость формулы (2.6) для целых α, на чем основывается дальнейшее доказательство. В работе применяется математическая индукция исходя из значений $\alpha = 0$, поэтому следует дополнительно доказать, что формула (2.6) справедлива для целых отрицательных α, что легко можно сделать, применяя в работе [8] использованный метод. При помощи формулы (2.6) коэффициенты δ_k легко вычислить на ЭЦМ.

Если же $\gamma_0 = 0$ и первый коэффициент в (2.4), отличный от нуля, имеет индекс m, то вместо (2.5) имеем разложение

$$\Phi^{\alpha}(t) = (y^2 - t^2)^{\alpha m} \sum_{k=0}^{\infty} \delta'_k(y, \alpha)\,(y^2 - t^2)^k, \; \alpha > -\frac{1}{m}, \tag{2.5$'$}$$

где δ'_k определяется подобным образом как δ_k. В частности, в работах [5—7] рассматривается случай, когда $m = 1$, т. е. $\Phi(t) = \pm[\Phi_0(t) - \Phi_0(y)]$, где $\Phi_0(t)$ — четная функция ($\cos t$ или же $\operatorname{ch} t$).

Выясним вопрос об области сходимости D ряда (2.5).

А. Пусть α — натуральное число, или же функция $\Phi(y\sqrt{z})$ как однозначная функция от комплексного z не имеет нулей в круге $|z - 1| \leqslant 1$, за исключением точки $z = 1$, т. е. функция $\Phi(t)$ не имеет нулей в области комплексной плоскости t, определяемой неравенством $|t^2 - y^2| \leqslant y^2$, за исключением точки $t = y$. Тогда функция $\Phi^{\alpha}(y\sqrt{z})$ или же та ее ветвь, которая принимает вещественные значения при $z > 0$, аналитична в упомянутом круге и $D = [0, y\sqrt{2}]$. Точка $z = 1$ может быть нулем функции $\Phi(y\sqrt{z})$, так как тогда функция $\left[\frac{\Phi(y\sqrt{z})}{(z-1)^m}\right]^\alpha$ в точке $z = 1$ имеет устранимую особенность, а в остальных точках круга $|z - 1| \leqslant 1$ аналитичность не нарушается.

Б. В остальных случаях функция $\Phi^\alpha(y\sqrt{z})$ в круге $|z-1| \leqslant 1$ имеет либо полюс (α — целое отрицательное), либо точку ветвления (α — дробное число), и область сходимости ряда для функции $\Phi^\alpha(y\sqrt{z})$ определяется неравенством

$$|z - 1| < |1 - \xi(y)| = r(y), \tag{2.6}$$

где $\xi(y)$ — ближайший к точке $z = 1$ нуль функции $\Phi(y\sqrt{z})$. Поэтому ряд (2.5) сходится в области, где

$$|t^2 - y^2| < r(y)\, y^2. \tag{2.7}$$

Так как $r(y) \leqslant 1$, то эта область, ограниченная овалом Кассини, не содержит весь сегмент $[0, y]$, и ряд (2.5) или же (2.5′) в части промежутка интегрирования расходится.

В. Однако надо иметь в виду, что положение ближайшего к точке $z = 1$ нуля $\xi(y)$ функции $\Phi(y\sqrt{z})$ зависит от y, и, может быть, что при некотором y эта точка находится вне круга $|z - 1| \leqslant 1$, и тогда имеем случай «А». Поэтому независимо от значения α ряд (2.5) сходится в сегменте $[0, y]$ при тех y, которые удовлетворяют неравенству

$$|1 - \xi(y)| > 1. \tag{2.8}$$

Подставляя формально ряд (2.5) или же (2.5′) под знак интеграла (0.1) и интегрируя почленно, получаем ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \int_0^y T(xt)\,(y^2 - t^2)^{k+\lambda}\,dt, \tag{2.9}$$

который сходится, если α — натуральное число или же y удовлетворяет (2.8). Асимптотический характер этого ряда исследуем позже.

Иногда члены ряда можно выразить при помощи известных специальных функций, причем функция $T(xt)$ не обязательно должна быть осциллирующей.

2) Если же функция $\Phi(t)$ нечетная и остальные свойства ее сохраняются, то $\Phi(t) = t\,\psi(t)$, где функция $\Psi(t)$ четная, и можно

ее разлагать в ряд типа (2.4). Функция $\psi^{\alpha}(t)$ имеет разложение вида (2.5′) или же (2.5), поэтому получаем формальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k \int_0^y T(xt)\; t^{\alpha}(y^2 - t^2)^{k+\lambda}\, dt. \tag{2.10}$$

3) Может быть случай, когда $\Phi(t) = \Phi_0(t - y/2)$, где $\Phi_0(\tau)$ — четная функция от τ. Тогда $\Phi_0(\tau)$ можно разлагать в ряд по степеням $\tau^2 - y^2$, а $\Phi(t)$ разлагается по степеням $t(y-t)$ и для интеграла (0.1) получаем формальный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k \int_0^y T(xt)\, t^{k+\lambda}(y-t)^{k+\lambda}\, dt. \tag{2.11}$$

Если же функция $\Phi_0(\tau)$ нечетная, то $\Phi(t)$ в точке $t = y/2$ меняет знак, и поэтому вещественные значения подынтегральной функции получаются лишь при специальных значениях α, в частности, в случае, когда α — целое число. В случае нечетной $\Phi_0(\tau)$ получаем разложение

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k' \int_0^y T(xt)\;(2t-y)^{\alpha}\; t^{k+\lambda}(y-t)^{k+\lambda}\, dt. \tag{2.12}$$

Разложение для функции $\Phi(t)$ по степеням $t(y-t)$ можно получить, пользуясь разложением этой функции по степеням t и методом неопределенных коэффициентов. Этот метод можно применить и тогда, когда $\Phi(t)$ не обладает свойством симметрии относительно точки $t = y/2$, но полученный ряд не может сходиться к функции $\Phi(t)$, так как сумма его должна обладать указанной симметрией.

3. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

1) Рассмотрим случай, когда функция $\Phi(t)$ четная и не имеет нулей на отрезке $[0, y]$. Так как функция $\Phi^{\alpha}(t)$ четная, то четной будет и функция $R_{N+1}(t)$, определяемая формулой

$$\Phi^{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{N} \delta_k (y^2 - t^2)^k + (y^2 - t^2)^{N+1} R_{N+1}(t). \tag{3.1}$$

Легко видеть, что функция $R_{N+1}(t)$ на отрезке $[0, y]$ имеет все производные, причем существование производных в точке $t = y$ следует из того, что, согласно (2.5), $R_{N+1}(t)$ в некоторой окрестности этой точки разлагается в сходящийся ряд по степеням $y^2 - t^2$.

Представим ряд (2.9) при $\lambda = 0$ в виде

$$\sum_{k=0}^{N} \delta_k \int_0^y T(xt)\,(y^2 - t^2)^k\,dt + \int_0^y T(xt)\,(y^2 - t^2)^{N+1} R_{N+1}(t)\,dt \quad (3.2)$$

и воспользуемся для последнего интеграла формулой (1.1), где $F(t) = (y^2 - t^2)^{N+1} R_{N+1}(t)$. Если функция $T(t)$ четная, то функции T_{-k} можно выбрать так, чтобы функции T_{-2k} были четными, а T_{-2k-1} — нечетными. Учитывая то, что $F^{(2k)}(t)$ четные, а $F^{(2k+1)}(t)$ — нечетные функции и $F^{(k)}(y) = 0$, $k \leqslant N$, видим, что суммы в формуле (1.1) обращаются в нуль и

$$\rho_N = \int_0^y T(xt)\,(y^2 - t^2)^{N+1} R_{N+1}(t)\,dt = O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right).$$

Если же функция $T(t)$ не является четной, то остаточный член в (3.2), согласно (1.1), при всех N в общем случае имеет оценку $O\left(\frac{1}{x}\right)$, и ряд (2.9) не дает асимптотического разложения, хотя он может быть сходящимся.

Если $\Phi(y) = 0$, то в разложении $\lambda \neq 0$, но это мало изменяет прежние рассуждения. При $\lambda > 0$ имеем оценку $\rho_N = O\left(\frac{1}{x^{N+1+[\lambda]}}\right)$, а при $\lambda < 0$ получаем $\rho_N = O\left(\frac{1}{x^N}\right)$, так как ради сходимости необходимо, чтобы $\lambda > -1$. Но если $\Phi(\tau) = 0$ при $\tau \in (0, y)$, то $\Phi^\alpha(t)$, а также $R_{N+1}(t)$ в точке τ является аналитической лишь в случае, когда α — натуральное число. В противном случае при оценке ρ_N можно интегрировать по частям только определенное число раз (при $\alpha < 0$ это вообще невозможно), и начиная с некоторого N оценка для ρ_N больше не изменится. Поэтому и в этом случае ряд (2.9) не дает асимптотического разложения. Более подробное доказательство такого утверждения требовало бы больших выкладок, поэтому вопрос об асимптотическом представлении функции (0.1) в случае, когда функция $F(t)$ на концах промежутка интегрирования имеет особенности, будет рассматриваться в другой статье.

2) Подобным образом анализируется случай, когда функция $\Phi(t)$ нечетная. Однако результаты получаются другими, так как

$$\rho_N = \int_0^y T(xt)\,(y^2 - t^2)^{N+1}\,t^\alpha R_{N+1}(t)\,dt, \quad (3.3)$$

где R_{N+1} относится к функции $\psi^\alpha(t)$. Если α не является натуральным числом, то функция $F(t) = (y^2 - t^2)^{N+1} t^\alpha R_{N+1}(t)$

имеет в точке $t = 0$ только конечное число производных, поэтому начиная с некоторого N оценка для ρ_N не изменяется и ряд (2.10) не является асимптотическим, хотя он может сходиться.

Если $\alpha = 2n$, то $\Phi^{\alpha}(t)$, а также $t^{\alpha} R_{N+1}(t)$ — четная функция и для получения оценки $\rho_N = O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right)$ функция $T(t)$ должна быть четной. При $\alpha = 2n + 1$ $t^{\alpha} R_{N+1}$ — нечетная функция, и оценку $\rho_N = O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right)$ получим при нечетной функции $T(t)$. Если эти условия относительно $T(t)$ не удовлетворены, то ряд (2.10) при $\alpha = n$ тоже не дает асимптотического разложения, но всегда сходится, так как, согласно случаю «А», надо почленно интегрировать равномерно сходящийся ряд.

3) Если $\Phi(t)$ разлагается в ряд по степеням $t(y - t)$, то функцию $R_{N+1}(t)$ можно определить формулой

$$\Phi^{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{N} D_k t^k (y - t)^k + t^{N+1} (y - t)^{N+1} R_{N+1}(t). \quad (3.4)$$

Эта функция будет иметь на сегменте $[0, y]$ все производные лишь тогда, когда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} D_k t^k (y - t)^k$ на этом сегменте сходится, а это означает, что функция $\Phi_0(\tau)$ и α должны обладать свойством, указанным в случае «А». Тогда оценка $\rho_N = O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right)$ для остатка ряда (2.11) при $\lambda = 0$ получается без каких-либо дополнительных требований о четности или нечетности относительно функции $T(t)$. В случае $\lambda \neq 0$ получаем в оценке ρ_N соответствующие изменения.

4. КОНКРЕТНЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ФУНКЦИИ $T(t)$

Подстановкой $t = \tau y$ приводим интегралы в формулах (2.9), (2.10) и (2.11) к виду

$$y^{k+\lambda+1} \int_0^1 T(xy\tau)\,(1 - \tau^2)^{k+\lambda}\,d\tau; \quad (4.1)$$

$$y^{k+\lambda+\alpha+1} \int_0^1 T(xy\tau)\,\tau^{\alpha}(1 - \tau^2)^{k+\lambda}\,d\tau; \quad (4.2)$$

$$y^{2k+2\lambda+1} \int_0^1 T(xy\tau)\,\tau^{k+\lambda}(1 - \tau)^{k+\lambda}\,d\tau. \quad (4.3)$$

В некоторых частных случаях функции $T(t)$ эти интегралы можно выразить при помощи цилиндрических функций.

1) $T(t) \equiv \cos t$. Пользуясь формулой [9]

$$\int_0^1 \cos zt\,(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) J_\nu(z)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu},\quad \nu > -\frac{1}{2}, \tag{4.4}$$

получаем

$$\Omega(x, y) \sim \frac{1}{2}\sqrt{\pi y}\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k\,\Gamma(k+\lambda+1)\,J_{k+\lambda+\frac{1}{2}}(xy)\left(\frac{x}{2}\right)^{-k-\lambda-\frac{1}{2}}. \tag{4.5}$$

Этот случай при $\Phi_0 = \cos t$ рассмотрен в работах [5—7]. Асимптотический характер ряд (4.5) имеет в случае, если $\Phi(t)$ — четная функция. Формулой (4.4) можно воспользоваться для представления интеграла (4.2) в случае, когда функция $\Phi(t)$ — нечетная и α — четное число; тогда t^α в интеграле (4.2) надо представить как конечную сумму степеней $y^2 - t^2$.

2) В случае, когда в интеграле (4.2) α — нечетное число и $T(t) \equiv \cos t$, можно отделить множитель τ и интегрировать по частям, а после того пользоваться формулой [9]

$$\int_0^1 \sin zt\,(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right) H_\nu(z)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu},\quad \nu > -\frac{1}{2}, \tag{4.6}$$

где $H_\nu(z)$ — функция Струве.

3) Для интеграла (4.2) можно воспользоваться формулой [9]:

$$\int_0^1 J_\mu(zt)\,t^{\mu+1}\,(1-t^2)^\lambda\,dt = 2^\lambda\,\Gamma(\lambda+1)\,J_{\mu+\lambda+1}(z)\,z^{-\lambda-1},$$

$$\lambda > -1,\ \mu > -1, \tag{4.7}$$

если $T(t) \equiv J_\mu(t)$ и $\alpha = \mu + 1$; μ — целое число. Если μ — не целое число, то можно воспользоваться тем, что функция $J_\mu(zt)\,t^{[\mu]-\mu}$ четная или нечетная.

4) В некоторых других случаях, когда $T(t) \equiv J_\mu(t)$, можем воспользоваться формулой [10]

$$\int_0^1 J_\mu(z\tau)\,\tau^{2\beta-\mu-1}\,(1-\tau^2)^{\gamma-\beta-1}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(\gamma)}\left(\frac{z}{2}\right)^\mu {}_1F_2\left(\beta, \mu+1, \gamma, -\frac{z^2}{4}\right);\ \gamma > \beta > 0. \tag{4.7'}$$

Асимптотическое разложение для функции ${}_1F_2\left(a, b, c, -\frac{z^2}{4}\right)$ при $z \to +\infty$ можно получить из более общего разложения для гипергеометрических функций, имеющихся в работе [11]. Однако там не указаны все выражения для коэффициентов. Пользуясь результатами, полученными в работе [12], легко установить справедливость разложения:

$$
{}_1F_2\left(a, b, c, -\frac{z^2}{4}\right) \sim \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,\Gamma(a+m)\left(\frac{z}{2}\right)^{-2(a+m)}}{m!\,\Gamma(-a-m+b)\,\Gamma(-a-m+c)} +
$$

$$
+ \frac{\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a)} \sum_{m=0}^{\infty} d_m\, z^{a-b-c+\frac{1}{2}-m} \cos\left[z + \frac{\pi}{2}\left(a - b - c + \frac{1}{2} - m\right)\right], \tag{4.8}
$$

где

$$
d_m = \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi}}\, 2^{b+c-a-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(m-k)!}\,(c-a)_k \left(b-m+k-\frac{1}{2}\right)_{2m-2k} \times
$$

$$
\times \sum_{l=0}^{k} \binom{2a-b-m+k-\frac{1}{2}}{k-l} \binom{c-a-1}{l} 2^{k-l}.
$$

Для интеграла (4.2) при $T(t) = J_\mu(t)$ можно брать $\beta = \frac{\alpha+\mu+1}{2}$, $\gamma = k + \lambda + \beta + 1$, а для интеграла (4.3) $\gamma = 2\beta - \frac{\mu}{2}$, $\beta = k + \lambda + \frac{\mu}{2} + 1$ при $T(xt) = J_\mu(x\sqrt{t})$, μ — четное число.

В заключение отметим, что рассмотренный метод применим также к асимптотическому представлению при $x \to \infty$ интегралов вида $\int\limits_y^\infty E(xt)\,F(t)\,dt$, если функция $E(t)$ экспоненциально убывает. Один частный случай этого метода, когда разложение содержит функции Макдональда, рассмотрен в работах [5—7], а его обобщение дано в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Я. Риекстыньш. О применении теории нейтрис к асимптотическому представлению интегралов. — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [I.] Рига, «Зинатне», 1966, стр. 5—21.

2. Э. Я. Риекстыньш. Об асимптотическом представлении некоторых интегралов, зависящих от большого параметра. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1961, т. 41, стр. 5—23.

3. В. Ж. Риекстыня. Обобщенные асимптотические разложения для одного контурного интеграла. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1959, т. 28, стр. 111—126.

4. В. Ж. Риекстыня. О применении преобразования Лапласа к разложению в обобщенные асимптотические ряды. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1959, т. 28, стр. 127—130.

5. G. Szegö. Über einige asymptotische Entwicklungen der Legendreschen Funktionen. — Proc. London M. S., **36** (7), 1934, 427—450.

6. Н. К. Чухрукидзе. Асимптотические формулы для функции Лежандра. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1965, т. 5, № 4, стр. 742—744.

7. Н. К. Чухрукидзе. Об асимптотических формулах для функций Лежандра. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1966, т. 6, № 1, стр. 61—70.

8. R. E. von Holdt. Rational powers of power series. — Am. Math. Monthly, 1965, No. 7, pp. 740—743.

9. Г. Бейтман, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, 2. М., «Наука», 1966.

10. A. Erdelyi. Integraldarstellungen hypergeometrischer Funktionen. — Quart. J. Math., 8, 1937, 265—277.

11. E. M. Wright. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. — Proc. London M. S., 46(2), 1940, 389—408.

12. Т. Т. Цирулис. О некоторых свойствах градиентных линий и их применении в асимптотических разложениях. — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [I.] Рига, «Зинатне», 1966, стр. 71—87.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF CERTAIN RAPIDLY OSCILLATING INTEGRALS IN SERIES OF CYLINDER FUNCTIONS

E. RIEKSTIŅŠ

Annotation

The method given by G. Szegö for Legendre polynomials [5] is generalised for the integral (0 1). It is shown that in much cases the obtained series has not asymptotic character although it may be convergent in the given interval.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF CERTAIN RAPIDLY OSCILLATING INTEGRALS IN SERIES OF [illegible] FUNCTIONS

Abstract

The method given by G. Szegő for Legendre polynomials [1] is [illegible] for the integral [illegible] [illegible] the [illegible] [illegible] [illegible] the asymptotic [illegible], although it may be convergent in the given interval.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

В. Ж. РИЕКСТЫНЯ

Вычислительный центр ЛГУ им. П. Стучки

Получена асимптотическая оценка целой функции $F(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$ $\times\mu(n)\,t^n$ во всей плоскости, когда $|t|\to\infty$, при условии, что функция $\mu(z)$ является регулярной функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} z>\delta$, за исключением конечного числа полюсов и точек ветвления, и имеет асимптотическую оценку (1). Если для функции $\mu(z)$ дано асимптотическое разложение по функциям, для которых справедлива оценка (1), то в некоторых случаях получено и обобщенное асимптотическое разложение $F(t)$.

Получено асимптотическое разложение интеграла

$$F(\tau)=\int\limits_a^b e^{-ip\tau} f(p)\,dp \quad (-\infty<a<b<\infty,\ 0<\tau\to\infty).$$

Концы промежутка (a, b) для функции $f(p)$ могут быть точками ветвления алгебраического или логарифмического характера, в окрестностях которых дано асимптотическое разложение функции $f(p)$.

Многие авторы исследуют асимптотическое разложение целой функции

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(n)\,t^n$$

при больших значениях аргумента. Главным образом рассматриваются конкретные функции, например, в работах [1—4] и в некоторых других. Наиболее значительными являются работы Барнса [5] и Ватсона [6], где рассматриваются уже более общие функции и по поведению коэффициентов $\mu(n)$ ряда можно судить об асимптотическом разложении суммы ряда $f(t)$. Метод, рассмотренный в [5], получает дальнейшее развитие в работах [7—9], метод, рассмотренный в [6], — в [10—12].

Большие трудности для получения асимптотического разложения целых функций представляют секторы, где целая функция имеет бесконечно много нулей. Эти трудности для функций определенного класса преодолевает Райт и получает асимптотическое разложение во всей плоскости. Мы наложим на функцию $\mu(z)$ условия, сходные с теми, которые даны в работах [10, 13—15], и обобщим их с целью расширить класс функцией $\mu(z)$. Асимптотическую оценку суммы ряда получим так, как в [13—15].

1.

Для наглядности введем некоторые классы функций.

I. Функция $\mu(z) \in Б$, если

1) функция $\mu(z)$ регулярна в области $D_Б$, где $D_Б$ есть общая часть сектора $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$ и полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma > 0$;

2) в области $D_Б$ функция $\mu(z)$ имеет асимптотическую оценку

$$\mu(z) = A \exp[-\gamma z \ln z + \beta z]\, z^{\alpha} \ln^{\varkappa} z\,(1 + r(z)) \tag{1}$$

$$\text{при } |z| \to \infty,\ \gamma > \gamma_0 > 0,$$

где $r(z) = o(1)$; A, β, α — комплексные числа; $\varkappa$ — действительное число (под $\ln z$ понимается его главное значение)[1].

II. Функция $\mu(z) \in B_0$, если для каждого достаточно большого целого $N > 0$ можно найти такое число $\delta_N > 0$, что

1) $\frac{\mu(z)}{\sin \pi z}$ — регулярная функция в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$, кроме конечного числа полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_N$ ($\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_N$) и полюсов в точках $0, 1, 2, 3, \ldots$;

2) в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$ справедлива оценка

$$\mu(z) = \exp[-\gamma z \ln z + \beta z]\, z^{\alpha} O(1) \text{ при } |z| \to \infty; \tag{2}$$

3) в общей части областей $\operatorname{Re} z < -\delta_N$, $\frac{\pi}{2} + \eta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$ функция $\frac{\mu(z)}{\sin \pi z}$ имеет бесконечно много изолированных полюсов в точках

$$\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \lambda_{N+3}, \ldots, (\operatorname{Re}\lambda_{N+1} \geqslant \operatorname{Re}\lambda_{N+2} \geqslant \ldots \to -\infty \text{ при } N \to \infty).$$

III. Функция $\mu(z) \in B$, если для каждого достаточно большого целого $N > 0$ можно найти такое число $\delta_N > 0$, что

---

[1] Эти обозначения используются и ниже.

1) $\dfrac{\mu(z)}{\sin \pi z}$ — регулярна в области D_B, где D_B есть сумма сектора $|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \eta$, и полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$, кроме конечного числа полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ ($\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_N$) и полюсов в точках $0, 1, 2, \ldots$;

2) в области D_B справедлива оценка (1);

3) в общей части областей $\operatorname{Re} z < -\delta_N$, $\dfrac{\pi}{2} + \eta < |\arg z| < \pi$ функция $\dfrac{\mu(z)}{\sin \pi z}$ имеет бесконечно много изолированных полюсов в точках

$$\lambda_{N+1}, \lambda_{N+2}, \ldots \ (\operatorname{Re}\lambda_{N+1} \geqslant \operatorname{Re}\lambda_{N+2} \geqslant \ldots \to -\infty \text{ при } N \to \infty).$$

IV. Функция $\mu(z) \in T$, если

1) $\dfrac{\mu(z)}{\sin \pi z}$ — регулярна, кроме, может быть, конечного числа полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и полюсов в точках $0, 1, 2, \ldots$;

2) в секторе $|\arg z| \leqslant \pi - \eta$ существует асимптотическая оценка (1);

3) в секторе $\pi - \eta \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$ справедлива оценка (2).

V. Будем говорить, что функция $\mu(z)$ удовлетворяет условию П, если

1) $\dfrac{\mu(z)}{\sin \pi z}$ — регулярна в окрестности $|z - s| \leqslant \rho$ некоторой точки $z = s$, за исключением точки $z = s$;

2) в этой окрестности

$$\frac{\mu(z)}{\sin \pi z} \sim -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - s)^{\nu n}$$

($\nu_0 < \nu_1 < \ldots \to \infty$, c_k — комплексные числа; $(z - s)^{\nu n} = \exp[\nu_n \ln(z - s)]$, а для функции $\ln(z - s)$ выбрано главное значение с разрезом из точки $z = s$ до $-\infty$ вдоль прямой $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} s$).

VI. Функция $\mu(z) \in \Pi_1$, если

1) $\mu(z)$ удовлетворяет условию П;

2) на интервале $(\operatorname{Re} s - \rho;\ \operatorname{Re} s)$ существует число $\delta_N > 0$ такое, что функция $\dfrac{\mu(z)}{\sin \pi z}$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$, за исключением точки $z = s$, полюсов в точках $0, 1, 2, 3, \ldots$, и кроме, может быть, конечного числа полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$;

3) $\mu(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$ удовлетворяет условию (2).

VII. Функция $\mu(z) \in \Pi_2$, если

1) $\mu(z)$ удовлетворяет условию П;

2) на интервале ($\operatorname{Re} s - \rho$; $\operatorname{Re} s$) существует число $-\delta_N$ такое, что функция $\frac{\mu(z)}{\sin \pi z}$ регулярна в области D_{Π_2}, где D_Π есть сумма сектора $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} + \eta$ и полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$, кроме точки $z = s$, полюсов в точках $0, 1, 2, 3, \ldots$, и, кроме того, может иметь конечное число полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ ($\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_N$);

3) $\mu(z)$ в области D_{Π_2} удовлетворяет условию (1).

В настоящей работе будем изучать оценку суммы степенного ряда

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) t^n \quad \text{при } |t| \to \infty, \tag{3}$$

если $\mu(z)$ принадлежит к одному из классов Б, В_0, В, T, Π_1, Π_2. По сравнению с работами [13—15] уменьшим область регулярности функции $\mu(z)$ и освободимся от требования, что последовательность полюсов функции $\mu(z)$ и точка ветвления должны находиться на отрицательной части действительной оси. Так как получение асимптотической оценки ряда (3) совершенно аналогично работам [13—15], то результаты сформулируем в виде теорем без доказательств.

Введем обозначения:

$$I(z, \gamma, \alpha, \varkappa) = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\, e^{\gamma z}\, z^{\alpha+\frac{1}{2}} \ln^{\varkappa} z\, (1 + o(1)); \tag{4}$$

$$z_+ = e^{\zeta + i\frac{\pi}{\gamma}};\; z_- = e^{\zeta - \frac{i\pi}{\gamma}};$$

$$e^{\zeta} = e^{\frac{\beta-\gamma}{\gamma}}\, t^{\frac{1}{\gamma}};\; \zeta = x + iy;$$

$$Y(t, \lambda_1, \lambda_k) = \sum_{n=1}^{k} \operatorname*{res}_{z=\lambda_k} \frac{\mu(z)}{\sin \pi z} t^z.$$

Асимптотическое разложение понимается, как в работе [16].

Теорема 1. Пусть $\mu(z) \in Б$, $\gamma > 2$.

Тогда в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im}\beta| \leqslant \pi$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) t^n = AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa).$$

Теорема 2. Пусть $\mu(z) \in Б$, $0 < \gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant 2$.

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi \leqslant \arg t + \operatorname{Im} \beta \leqslant -\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - \eta$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) t^n = AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa); \tag{5}$$

в секторе

$$\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + \eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im} \beta \leqslant \pi$$

$$F(t) = AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa). \tag{6}$$

Теорема 3. Пусть $\mu(z) \in T$, $1 \leqslant \gamma < 2$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - \eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im} \beta \leqslant -\eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_k) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa); \tag{7}$$

в секторе

$$\eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im} \beta \leqslant \pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + \eta$$

$$F(t) = \pi Y(t, \lambda_1, \lambda_k) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa). \tag{8}$$

Теорема 4. Пусть $\mu(z) \in T$, $1 < \gamma \leqslant 2$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im} \beta| \leqslant \eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_k) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa).$$

Теорема 5. Пусть $\mu(z) \in T$, $0 < \gamma \leqslant 1$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - \eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im} \beta \leqslant -\pi(1 - \gamma) - \eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_k) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa); \tag{9}$$

в секторе

$$\pi(1 - \gamma) + \eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im} \beta \leqslant \pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + \eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_k) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa); \tag{10}$$

в секторе

$$-\pi(1-\gamma)-\eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant -\pi(1-\gamma)$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_k) + I(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa)\, O(1); \qquad (11)$$

в секторе

$$\pi(1-\gamma) \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant \pi(1-\gamma)+\eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_k) + I(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa)\, O(1).$$

Теорема 6. Пусть $\mu(z) \in T$, $0 < \gamma < 1$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im}\beta| < \pi(1-\gamma)$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_k) + \exp\left[-\gamma e^x + x\left(\operatorname{Re}\alpha + \frac{1}{2}\right)\right] x^{\varkappa}\, o(1),$$

где

$$e^x = |t|^{\frac{1}{\gamma}} \exp\left[(\operatorname{Re}\beta - \gamma)\gamma^{-1}\right].$$

Теорема 7. Пусть $\mu(z) \in B_0$, $0 < \gamma < 2$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im}\beta| \leqslant \pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)-\eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + o(|t|^{\lambda_N}).$$

Теорема 8. Пусть $\mu(z) \in B$, $\gamma = 2$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im}\beta| \leqslant \eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + o(|t|^{\lambda_N}) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa). \qquad (12)$$

Теорема 9. Пусть $\mu(z) \in B$, $0 < \gamma < 2$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)-\eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant -\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)+\eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + o(|t|^{\lambda_N}) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa); \qquad (13)$$

в секторе

$$\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)-\eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant \pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)+\eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + o(|t|^{\lambda_N}) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa). \qquad (14)$$

Теорема 10. Пусть $\mu(z) \in \Pi_1$, $0 < \gamma < 2$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im}\beta| \leqslant \pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - \eta$$

$$F(t) \sim -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k - 1}.$$

Теорема 11. Пусть $\mu(z) \in \Pi_2$, $\gamma = 2$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im}\beta| \leqslant \eta$$

$$F(t) \sim -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa) + \\ + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa) + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k - 1}.$$

Теорема 12. Пусть $\mu(z) \in \Pi_2$, $0 < \gamma < 2$, то при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - \eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant -\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + \eta$$

$$F(t) \sim -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa) + \\ + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k - 1}; \quad (15а)$$

в секторе

$$\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - \eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant \pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + \eta$$

$$F(t) \sim -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa) + \\ + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k - 1}. \quad (15б)$$

Теорема 13. Пусть $\mu(z) \in B_0$, $\gamma = 2$; в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$ справедливо разложение (1).

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im}\beta| \leqslant \eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t; \lambda_1, \lambda_N) + o(|t|^{-\lambda_N}) + O(e^{(\operatorname{Re}\alpha + 1)x}) + \\ + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa).$$

Теорема 14. Пусть $\mu(z) \in B_0$, $0 < \gamma < 2$; в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$ справедливо разложение (1).

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)-\eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant -\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)+\eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + o(|t|^{-\lambda_N}) +$$
$$+ O(e^{(\operatorname{Re}\alpha+1)x}) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa);$$

в секторе

$$\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)-\eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant \pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)+\eta$$

$$F(t) = -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + o(|t|^{-\lambda_N}) +$$
$$+ O(e^{(\operatorname{Re}\alpha+1)x}) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa).$$

Теорема 15. Пусть $\mu(z) \in \Pi_1$, $\gamma = 2$; в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$ справедливо разложение (1).

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t + \operatorname{Im}\beta| \leqslant \eta$$

$$F(t) \sim -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + O(e^{(\operatorname{Re}\alpha+1)x}) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa) +$$
$$+ AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa) + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k-1}.$$

Теорема 16. Пусть $\mu(z) \in \Pi_1$, $0 < \gamma < 2$; в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$ справедливо разложение (1).

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)-\eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant -\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)+\eta$$

$$F(t) \sim -\pi Y(t; \lambda_1, \lambda_N) + AI(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa) +$$
$$+ O(e^{(\operatorname{Re}\alpha+1)x}) + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k-1};$$

в секторе

$$\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)-\eta \leqslant \arg t + \operatorname{Im}\beta \leqslant \pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)+\eta$$

$$F(t) \sim -\pi Y(t; \lambda_1, \lambda_N) + AI(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa) +$$
$$+ O(e^{(\operatorname{Re}\alpha+1)x}) + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k-1}.$$

Чтобы получить асимптотическое разложение суммы ряда (3), должен быть задан асимптотический ряд функции $\mu(z)$. Рассмотрим несколько примеров, которые покажут, какие обобщенные асимптотические разложения $\mu(z)$ могут дать асимптотические разложения суммы ряда (3). Для оценки остаточного члена воспользуемся теоремами 1—16. Очевидно, члены асимптотического ряда функции $\mu(z)$ должны быть функциями, оценка которых задана формулой (1).

1. В работе [10] рассматривается ряд

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(n)\, t^n, \tag{16}$$

где

а) $\mu(z) = \dfrac{\psi(z)}{\Gamma(\gamma z + \beta_0)}$;

β_0, ν — комплексные числа; $\operatorname{Re}\gamma > 0$;

б) существуют такое целое фиксированное число $M > 0$ и такие комплексные числа $D_1, D_2, \ldots, D_M, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M, \alpha_{M+1}$, что $\operatorname{Re}\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}\alpha_M < \operatorname{Re}\alpha_{M+1}$ и

$$\mu(z) = \frac{\psi(z)}{\Gamma(\gamma z + \beta_0)} = \sum_{m=1}^{M} \frac{\gamma D_m}{\Gamma(\gamma z + \alpha_m)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\gamma z + \alpha_{M+1})}\right) \tag{17}$$

при $|z| \to \infty$.

Положим, что представление (17) справедливо для каждого целого $M > 0$, и покажем, как оно применимо в нашем случае. В дальнейшем через d_m и α_m ($m = 0, 1, 2, \ldots$) обозначим комплексные числа.

Теорема 17. Пусть

1) $\mu(z) \in Б$, $\gamma > 2$;

2) в области $D_Б$ для каждого целого $M > 0$ функция $\mu(z)$ имеет разложение

$$\mu(z) = \sum_{m=0}^{M} \frac{d_m}{\Gamma(\gamma z + \alpha_m)} + \frac{r_M(z)}{\Gamma(\gamma z + \alpha_{M+1})}, \tag{18}$$

где $r_M(z) = O(1)$ при $|z| \to \infty$, $\operatorname{Re}\alpha_0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\alpha_2 \leqslant \ldots \to \infty$.

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t| \leqslant \pi$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n)\, t^n \sim \frac{1}{\gamma} e^{(te^{i\pi})^{\frac{1}{\gamma}}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m (te^{i\pi})^{\frac{1-\alpha m}{\gamma}} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} e^{(te^{-i\pi})^{\frac{1}{\gamma}}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m (te^{-i\pi})^{\frac{1-\alpha m}{\gamma}}. \qquad (19)$$

Доказательство. Разложение (18) подставим в ряд (3). Имеем

$$F(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m S(\gamma, \alpha_m; -t) + R_M(t), \qquad (20)$$

где

$$S(\gamma, \alpha_m; -t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{\Gamma(\gamma n + \alpha_m)}; \qquad (21)$$

$$R_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi_M(n)\, t^n; \qquad (22)$$

$$\psi_M(z) = \mu(z) - \sum_{m=0}^{M} d_m \frac{1}{\Gamma(\gamma z + \alpha_m)} = \frac{r_M(z)}{\Gamma(\gamma z + \alpha_{M+1})} =$$

$$= \frac{d_{M+1}}{\Gamma(\gamma z + \alpha_{M+1})} + \frac{r_{M+1}(z)}{\Gamma(\gamma z + \alpha_{M+2})}; \qquad (23)$$

$r_{M+1}(z) = O(1)$ при $|z| \to \infty$.

Так как $\mu(z) \in Б$ и

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma z + \alpha_{M+1})} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-\lambda_{M+1} + \frac{1}{2}} z^{-\gamma z - \alpha_{M+1} + \frac{1}{2}} e^{(\gamma - \gamma \ln \gamma) z} (1 + o(1))$$

при $|z| \to \infty$ в секторе $|\arg z| \leqslant \pi - \eta$, то $\psi_M(z) \in Б$, где

$$A = d_{M+1} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \gamma^{-\lambda_{M+1} + \frac{1}{2}}; \quad \beta = \gamma - \gamma \ln \gamma;$$
$$\alpha = -\alpha_{M+1} + \frac{1}{2}; \quad \varkappa = 0. \qquad (24)$$

Из теоремы 1 следует, что в секторе $|\arg t| \leqslant \pi$

$$R_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi_M(n)\, t^n = AI\left(z_+, \gamma, -\alpha_{M+1} + \frac{1}{2}, 0\right) +$$
$$+ AI\left(z_-, \gamma, -\alpha_{M+1} + \frac{1}{2}, 0\right), \quad (25)$$

где $I(z, \gamma, \alpha, \varkappa)$ определяется формулой (4) и

$$z_+ = \frac{1}{\gamma}(te^{i\pi})^{\frac{1}{\gamma}}; \; z_- = \frac{1}{\gamma}(te^{-i\pi})^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Асимптотическое разложение функции

$$S(\gamma, \alpha_m, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(\gamma_n + \alpha_m)}$$

при $|t| \to \infty$ получено в работе [10]. В нашем случае для каждого целого $L > 0$ и для всех $t \neq 0$

$$S(\gamma, \alpha_m, -t) = \frac{1}{\gamma} \sum_{\left|\frac{1}{\gamma}[\arg t + \pi(2k+1)]\right| < \pi} \exp\,[te^{i\pi(2k+1)}]^{\frac{1}{\gamma}} \times$$
$$\times (te^{i\pi(2k+1)})^{\frac{1-\alpha m}{\gamma}} - \sum_{l=1}^{L} \frac{(-1)^l t^{-l}}{\Gamma(-\gamma l + \alpha_m)} + \rho(t)\,|t|^{-L-1}, \quad (26)$$

где

$$\rho(t) = O(1) \text{ при } |t| \to \infty. \quad (27)$$

Первая сумма распространена на те значения k, для которых

$$\left|\frac{1}{\gamma}[\arg t + \pi(2k+1)]\right| < \pi.$$

В частном случае, когда $\alpha_m = 1$, получаем функцию Митаг — Лефлера $E_\gamma(t) = S(\gamma, 1, t)$.

Разложение (26) и оценку остаточного члена (25) представим в (20). Так как мы рассматриваем сектор $|\arg t| \leqslant \pi$, то

$$\frac{\arg t + \pi}{\gamma} = y + \frac{\pi}{\gamma} \geqslant 0 \text{ и } \frac{\arg t - \pi}{\gamma} = y - \frac{\pi}{\gamma} \leqslant 0.$$

Легко заметить, что главную часть разложения $F(t)$ дают члены, для которых $k = 0$ и $k = -1$. Все остальные члены (26) можно присоединить к остаточному члену. Теорема доказана.

Теорема 18. Пусть

1) $\mu(z) \in Б$, $0 < \gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant 2$;

2) в области $D_Б$ для каждого целого $M > 0$ функция $\mu(z)$ имеет разложение (18).

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi \leqslant \arg t \leqslant -\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - \eta$$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n)\, t^n \sim \frac{1}{\gamma}\, e^{(te^{i\pi})^{\frac{1}{\gamma}}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m\, (te^{i\pi})^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}}; \qquad (28)$$

в секторе

$$\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + \eta \leqslant \arg t \leqslant \pi$$

$$F(t) \sim \frac{1}{\gamma}\, e^{(te^{-i\pi})^{\frac{1}{\gamma}}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m\, (te^{-i\pi})^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}}.$$

Доказательство совершено аналогично доказательству теоремы 17.

Теорема 19. Пусть

1) $\mu(z) \in B$, $\gamma = 2$;

2) в области D_B для каждого целого $M > 0$ функция $\mu(z)$ имеет разложение (18).

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t| \leqslant \eta$$

$$F(t) \sim -\pi \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{z=\lambda_k} \left(\frac{\mu(z)}{\sin \pi z}\, t^z\right) + \frac{1}{\gamma} \exp\,[te^{i\pi}]^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \times$$

$$\times (te^{i\pi})^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}} + \frac{1}{\gamma} \exp\,[te^{-i\pi}]^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m\, (te^{-i\pi})^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}}.$$

Доказательство. Разложение (18) подставим в ряд (3). Получаем формулу (20). Очевидно, что $\psi_M(z) \in B$. A, α, β, $\varkappa$ заданы формулами (24). Из (23) следует, что функция $\dfrac{\psi_M(z)}{\sin \pi z}$ имеет полюсы при $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, -1, -2, -3, \ldots$

Оценка для (22) следует из теоремы 8:

$$R_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Psi_M(n)\, t^n = -\pi \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{z=\lambda_k} \frac{\mu(z)}{\sin \pi z} t^z +$$

$$+ \pi \sum_{k=1}^{[\delta_N]} \operatorname*{res}_{z=-k} \left[\frac{t^z}{\sin \pi z} \sum_{m=0}^{M} \frac{d_m}{\Gamma(\gamma z + \alpha_m)} \right] + o(|t|)^{\lambda_N} +$$

$$+ AI\left(z_+, \gamma, -\alpha_{M+1} + \frac{1}{2}, 0\right) + AI\left(z_-, \gamma, -\alpha_{M+1} + \frac{1}{2}, 0\right) =$$

$$= -\pi \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{z=\lambda_k} \frac{\mu(z)}{\sin \pi z} t^z + \sum_{m=0}^{M} d_m \sum_{k=1}^{[\delta_N]} (-1)^k \frac{t^{-k}}{\Gamma(-\gamma k + \alpha_m)} +$$

$$+ AI\left(z_+, \gamma, -\alpha_{M+1} + \frac{1}{2}, 0\right) + AI\left(z_-, \gamma, -\alpha_{M+1} + \frac{1}{2}, 0\right) +$$

$$+ o(|t|^{\lambda_N}). \qquad (29)$$

Согласно формуле (26),

$$F(t) = \sum_{m=0}^{M} d_m \frac{1}{\gamma} \sum_{\left|\frac{1}{\gamma}[\arg t + \pi(2k+1)]\right| < \pi} \exp\left[t e^{i\pi(2k+1)}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \left(t e^{i\pi(2k+1)}\right)^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}} -$$

$$- \sum_{m=0}^{M} dm \sum_{l=1}^{L} \frac{(-1)^l t^{-l}}{\Gamma(-\gamma l + \alpha_m)} + |t|^{-L-1} O(1) + R_M(t). \qquad (30)$$

Главную часть разложения $F(t)$ дают члены, для которых $k = 0$ и $k = -1$. Так как формула (26) справедлива для каждого $L > 0$, возьмем $L = [\delta_N]$, и приходим к утверждению теоремы.

Теорема 20. Пусть

1) $\mu(z) \in B$, $0 < \gamma < 2$;

2) в области D_B для каждого целого $M > 0$ функция $\mu(z)$ имеет разложение (18).

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)-\eta \leqslant \arg t \leqslant -\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)+\eta$$

$$F(t) \sim -\pi \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{z=\lambda_k}\left(\frac{\mu(z)}{\sin \pi z}\, t^z\right)+ \\ +\frac{1}{\gamma}\exp\,[te^{i\pi}]^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m (te^{i\pi})^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}}; \qquad (31)$$

в секторе

$$\pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)-\eta \leqslant \arg t \leqslant \pi\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)+\eta$$

$$F(t) \sim -\pi \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname*{res}_{z=\lambda_k}\left(\frac{\mu(z)}{\sin \pi z}\, t^z\right)+ \\ +\frac{1}{\gamma}\exp\,[te^{-i\pi}]^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m (te^{-i\pi})^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}}. \qquad (32)$$

Доказательство совершено аналогично доказательству теоремы 19.

Примечание. Теоремы 19 и 20 справедливы и тогда, когда вместо условия $\mu(z) \in B$ имеем условие $\mu(z) \in B_0$ и требуем, чтобы разложение (18) было дано на полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$.

В этом случае для оценки остаточного члена можно использовать теоремы 13 и 14.

Так как разложение (18) совпадает с разложением (17), то результаты теорем 17, 18, 19 и 20 полностью совпадают с результатами работы [10] с той только разницей, что у Райта γ — комплексное число.

Метод Райта отличается от метода, использованного в настоящей работе, следующим:

1) оценкой остаточного члена;

2) чтобы получить асимптотическую оценку в секторах $y + \frac{\pi}{\gamma} \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$ и $y - \frac{\pi}{\gamma} \geqslant -\frac{\pi}{2} + \eta$, Райт пользуется методом Ватсона, т. е. ряд (16) сводится к такому ряду, в котором $\gamma = 1$.

Надо отметить, что в работе [12] для секторов $y + \frac{\pi}{\gamma} \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$ и $y - \frac{\pi}{\gamma} \geqslant -\frac{\pi}{2} + \eta$ получено асимптотическое разложение функции (16), если

$$\mu(z) \sim z^{\alpha} e^{\Psi(z)} \left(\frac{e}{\gamma z}\right)^{\gamma z}$$

при $|z| \to \infty$, где $\Psi(z) = \sum_{j=1}^{J} a_j z^{b_j}$, $J \geqslant 0$, $0 \leqslant \operatorname{Re} b_j < 1$.

Теорема 21. Пусть

1) $\mu(z) \in \Pi_1$, $0 < \gamma < 2$;

2) в области $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$ для каждого $M > 0$ функция $\mu(z)$ имеет разложение (18).

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$-\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - \eta \leqslant \arg t \leqslant -\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + \eta$$

$$F(t) \sim -\pi \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{res}_{z=\lambda_k} \left(\frac{\mu(z)}{\sin \pi z} t^z\right) + \frac{1}{\gamma} \exp\left[te^{i\pi}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} d_m \left(te^{i\pi}\right)^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}} + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k - 1}; \quad (33)$$

в секторе

$$\pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) - \eta \leqslant \arg t \leqslant \pi\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) + \eta$$

$$F(t) \sim -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + \frac{1}{\gamma} \exp\left[te^{-i\pi}\right]^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m \times$$

$$\times \left(te^{-i\pi}\right)^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}} + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k - 1}. \quad (34)$$

Доказательство теоремы 21, также как и доказательство всех последующих теорем, совершено аналогично доказательству теоремы 19.

Теорема 22. Пусть

1) $\mu(z) \in \Pi_1$, $\gamma = 2$;

2) в области $\operatorname{Re} z \geqslant -\delta_N$ для каждого $M > 0$ функция $\mu(z)$ имеет разложение (18).

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе

$$|\arg t| \leqslant \eta$$

$$F(t) \sim -\pi Y(t, \lambda_1, \lambda_N) + t^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(-\nu_k)} (\ln t)^{-\nu_k - 1} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \exp [te^{i\pi}]^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m [te^{i\pi}]^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}} +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} \exp [te^{-i\pi}]^{\frac{1}{\gamma}} \sum_{m=0}^{\infty} d_m [te^{-i\pi}]^{\frac{1-\alpha_m}{\gamma}}.$$

Аналогично можно получить асимптотические разложения в тех случаях, когда $\mu(z) \in T$, только тогда необходимо сделать дополнительную оценку остаточного члена (27) относительно L.

2. Дальше вместо разложения (18) рассмотрим другие асимптотические разложения $\mu(z)$. Следует отметить, что для каждого типа разложений $\mu(z)$ так же, как и для разложения (18), можно было бы образовать целые группы теорем, но мы этого делать не будем. Получение асимптотического представления $F(t)$ покажем, главным образом, для случая $\mu(z) \in Б$ и $\gamma > 2$.

Теорема 23. Пусть

1) $\mu(z) \in B$, $\gamma > 2$;

2) в области $D_Б$ для каждого целого $M > 0$ функция $\mu(z)$ имеет разложение

$$\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \sum_{m=0}^{M} \frac{d_m}{\Gamma[(\gamma-1)z+\alpha_m]} + \frac{r_M(z)}{\Gamma(z+1)\Gamma[(\gamma-1)z+\alpha_{M+1}]}, \tag{35}$$

где $r_M(z) = O(1)$ при $|z| \to \infty$, $\operatorname{Re}\alpha_0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\alpha_2 \leqslant \ldots \to \infty$.

Тогда в секторе

$$|\arg t| \leqslant \pi$$

$$F(t) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) t^n \sim \sum_{m=0}^{\infty} d_m J_{\alpha_m - 1}^{\gamma-1}(t), \tag{36}$$

где

$$J_{\alpha_m-1}^{\gamma-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!\,\Gamma[(\gamma-1)n+\alpha_m]}.$$

Доказательство теоремы 23 аналогично доказательству теоремы 17, только дополнительно надо показать, что разложение (36) асимптотическое по определению [16]. Так же, как и в доказательстве теоремы 17, получаем

$$F(t) = \sum_{m=0}^{M-1} d_m J_{\alpha_m-1}^{\gamma-1}(t) +$$

$$+ d_M \frac{(\gamma-1)^{-\alpha_M+\frac{1}{2}}}{2\pi} [I(z_+, \gamma, -\alpha_M, 0) + I(z_-, \gamma, -\alpha_M, 0)],$$

где

$$z_+ = st^{\frac{1}{\gamma}} e^{\frac{i\pi}{\gamma}};\ z_- = st^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{i\pi}{\gamma}},\ s = (\gamma-1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

Из (4) следует, что

$$I(z_+, \gamma, -\alpha_M, 0) = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\, e^{\gamma z_+} z_+^{-\alpha_M+\frac{1}{2}} (1 + o(1)) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} \{\exp(\gamma s t^{\frac{1}{\gamma}} e^{\frac{i\pi}{\gamma}}) (st^{\frac{1}{\gamma}} e^{\frac{i\pi}{\gamma}})^{-\alpha_M+\frac{1}{2}} +$$

$$+ \exp\left[s|t|^{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(y + \frac{\pi}{\gamma}\right)\right] |t|^{\frac{-\mathrm{Re}\,\alpha_M+\frac{1}{2}}{\gamma}} o(1)\};$$

$$I(z_-, \gamma, -\alpha_M, 0) = \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\, e^{\gamma z_-} z_-^{-\alpha_M+\frac{1}{2}} (1 + o(1)) =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}} \{\exp[\gamma st^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{i\pi}{\gamma}}] (st^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{i\pi}{\gamma}})^{-\alpha_M+\frac{1}{2}} +$$

$$+ \exp\left[\gamma s|t|^{\frac{1}{\gamma}} \cos\left(y - \frac{\pi}{\gamma}\right)\right] |t|^{\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,\alpha_M\right)} 0(1)\}$$

при $|t| \to \infty$, где $y = \frac{1}{\gamma}\arg t$, $s = (\gamma - 1)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$.

Так как, согласно теореме 1,

$$J_{\alpha_M-1}^{\gamma-1}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{\Gamma(n+1)\Gamma[(\gamma-1)n+\alpha_M]} =$$

$$= \frac{(\gamma-1)^{-\alpha_M+\frac{1}{2}}}{2\pi} [I(z_+, \gamma, -\alpha_M, 0) + I(z_-, \gamma, -\alpha_M, 0)]$$

при $|t| \to \infty$ в секторе $|\arg t| \leqslant \pi$, то условия определения [16] выполнены. Теорема доказана.

Теорема 24. Пусть

1) $\mu(z) \in Б$, $\gamma > 2$;

2) $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) t^n$;

3) $\Omega(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) g(n) t^n$;

4) $g(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-\lambda_k z}$ (37)

при $|z| \to \infty$ в секторе $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$, $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to \infty$;

5) $g(z)$ — регулярная функция в области $D_Б$.

Тогда при $|t| \to \infty$ в секторе $|\arg t + \operatorname{Im} \beta| \leqslant \pi$

$$\Omega(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} d_k F(e^{-\lambda_k} t). \tag{38}$$

Доказательство. Из (37) следует, что для каждого целого $K > 0$

$$g(z) = \sum_{k=0}^{K-1} d_k e^{-\lambda_k z} + e^{-\lambda_K z} r_K(z),$$

где $r_K(z) = O(1) = d_K + o(1)$ при $|z| \to \infty$. Имеем

$$\Omega(t) = \sum_{k=0}^{K-1} d_k \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) e^{-\lambda_k n} t^n +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) t^n e^{-\lambda_K n} r_K(n).$$

Из теоремы 1 получаем

$$\Omega(t) = \sum_{k=0}^{K-1} d_k F(e^{-\lambda_k} t) + A I(z_+, \gamma, \alpha, \varkappa) + A I(z_-, \gamma, \alpha, \varkappa)$$

в секторе $(\arg t + \operatorname{Im} \beta)) \leqslant \pi$. То, что разложение (38) является асимптотическим по определению [16], можно показать совершенно так же, как в доказательстве теоремы 23. Теорема доказана.

3.

1. Найдем асимптотическое поведение при $\tau \to \infty$ функции

$$F(\tau) = \int_a^b e^{-i\tau p} f(p)\, dp, \tag{39}$$

$(-\infty < a < b < \infty,\ \tau > 0)$, если для каждого целого $K > 0$

$$f(p) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k (p-a)^{\lambda_k} + (p-a)^{\lambda_K} r_a(p-a, K); \tag{40}$$

$$f(p) = \sum_{k=0}^{K-1} b_k (b-p)^{\omega_k} + (b-p)^{\omega_K} r_b(b-p, K), \tag{41}$$

где

$$r_a(p-a, K) = O(1) \text{ при } |p-a| \to 0,$$

$$r_b(b-p, K) = O(1) \text{ при } |b-p| \to 0,$$

a_k, b_k, ω_k, λ_k — комплексные числа, такие, что $-1 < \operatorname{Re}\omega_0 < \operatorname{Re}\omega_1 < \ldots \to \infty$, $-1 < \operatorname{Re}\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \ldots \to \infty$ при $k \to \infty$.

Пусть функция $f[(b-a)e^{-u} + a] = g(u)$ регулярна в секторе $|\arg u| \leqslant \eta$, за исключением, может быть, точек $u = 0$ и $u = \infty$.

Нетрудно убедиться, что

$$F(\tau) = (b-a)\, e^{-i\tau a} \int_0^1 e^{-i\tau(b-a)v} f[(b-a)v + a]\, dv.$$

Поэтому

$$F(\tau) = (b-a)\, e^{-i\tau a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n)\, t^n, \tag{42}$$

где

$$\mu(z) = \frac{\varphi(z)}{\Gamma(z+1)};\quad t = (b-a)\,\tau e^{\frac{i\pi}{2}};$$

$$\varphi(z) = \int_0^1 f[(b-a)v + a]\, v^z\, dv. \tag{43}$$

Чтобы получить асимптотическое разложение функции (43), используем разложение (41). Получаем

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{K-1} b_k (b-a)^{\omega_k} \int_0^1 v^z (1-v)^{\omega_k} dv +$$

$$+ (b-a)^{\omega_K} \int_0^1 v^z (1-v)^{\omega_K} r_b [(b-a)(1-v), K]\, dv =$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} b_k (b-a)^{\omega_k} \frac{\Gamma(z+1)\,\Gamma(\omega_k+1)}{\Gamma(z+\omega_k+2)} + R_b(K, z),$$

где

$$R_b(K, z) = (b-a)^{\omega_K} \int_0^\infty e^{-(z+1)u} (1-e^{-u})^{\omega_K} r_b [(b-a) \times \times (1-e^{-u}), K]\, du$$

или

$$R_b(K, z) = \int_0^\infty e^{-(z+1)u}\, u^{\omega_K}\, \rho(u)\, du,$$

где $\rho(u) = O(1)$ при $u \to 0$. Согласно [17] (стр. 45, теорема 1), получаем

$$R_b(K, z) = z^{-\omega_K-1} O(1) \text{ при } |z| \to \infty \tag{44}$$

в секторе $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$.

Если функция $f[(b-a)e^{-u} + a] = g(u)$ аналитична в секторе $|\arg u| \leqslant \eta$, за исключением, быть может, точек $u=0$ и $u=\infty$, и функция $f(p)$ имеет разложения (40) и (41), то, согласно работе [17] (стр. 48, теорема 6), можно показать, что формула (44) справедлива в секторе $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} + \eta$ и функция $\varphi(z)$ регулярна в секторе $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} + \eta$. Легко видеть, что интеграл

$$\varphi(z) = \int_0^1 f[(b-a)v + a]\, v^z\, dv = \int_0^\infty e^{-(z+1)u} f[(b-a)e^{-u} + a]\, du$$

определяет аналитическую функцию $\varphi(z)$ в секторе $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$.

Сделав поворот пути интегрирования, можем доказать, что интеграл

$$\varphi(z) = \int_0^{e^{i\eta}\infty} e^{-(z+1)u} f[(b-a)e^{-u} + a]\, du \tag{45}$$

определяет аналитическую функцию $\varphi(z)$ в секторе $-\frac{\pi}{2} - \eta \leqslant \arg z \leqslant -\eta$ и является аналитическим продолжением интеграла (43). В секторе $\eta \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2} + \eta$ интеграл

$$\varphi(z) = \int_0^{e^{-i\eta}\infty} e^{-(z+1)u} f[(b-a)e^{-u} + a]\, du \tag{46}$$

определяет аналитическую функцию и является аналитическим продолжением интеграла (43).

Полученный результат сформулируем как лемму.

Лемма 1. Пусть функция $f(p)$ абсолютно интегрируема в интервале (a, b) и пусть для каждого $K > 0$ имеем разложение (41).

Тогда в секторе $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} - \eta$ при $|z| \to \infty$ для каждого $K > 0$

$$\varphi(z) = \int_0^1 v^z f[(b-a)v + a]\, dv =$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} b_k (b-a)^{\omega_k} \frac{\Gamma(z+1)\,\Gamma(\omega_k+1)}{\Gamma(z+\omega_k+2)} + O(|z|^{-\omega_K - 1}). \tag{47}$$

Если же, кроме того, функция $g(u) = f[(b-a)e^{-u} + a)]$ регулярна в секторе $|\arg u| \leqslant \eta$, за исключением, быть может, точек $u = 0$ и $u = \infty$, и $f(p) = O(|p-a|^{\lambda_0})$ при $|p-a| \to 0$, $\lambda_0 > -1$, то разложение (47) справедливо в секторе $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2} + \eta$ и $\varphi(z)$ — регулярная функция в этом секторе, определяемая интегралами (43), (45), (46).

Для написания асимптотической формулы $F(\tau)$ нам остается определить полюсы для функции $\mu(z) = \frac{\varphi(z)}{\Gamma(z+1)}$. Из разложения (40) следует, что для каждого натурального $K > 0$ при $|u| \geqslant T$ в секторе $|\arg u| \leqslant \eta$ $(T > 0)$

$$f(p) = f[(b-a)e^{-u} + a] = \sum_{k=0}^{K-1} a_k [(b-a)\, e^{-u}]^{\lambda_k} + e^{-u\lambda_K}\, \rho_K(u),$$

где $|\rho_K(u)| \leqslant M$ $(M > 0)$. Так как $f(p) = f[(b-a)e^{-u} + a]$ регулярна в секторе $|\arg u| \leqslant \eta$, за исключением точки $u = 0$, то $\rho_K(u)$ непрерывна при $\operatorname{Re} u \geqslant T$ и $\operatorname{Im} u = 0$. Легко видеть, что функция

$$\int_0^T e^{-(z+1)u} f[(b-a)e^{-u} + a]\,du = \Omega(z)$$

является регулярной для всех конечных значений z.

Таким образом,

$$\varphi(z) = \Omega(z) + \int_T^\infty e^{-(z+1)u} f[(b-a)e^{-u} + a]\,du =$$

$$= \Omega(z) + \sum_{k=0}^{K-1} a_k (b-a)^{\lambda_k} \frac{e^{-(\lambda_k + z + 1)T}}{\lambda_k + z + 1} +$$

$$+ \int_T^\infty e^{-(z+1+\lambda_K)u} \rho_K(u)\,du.$$

Отсюда, на основании известной теоремы теории функций комплексного переменного об аналитических функциях, представляемых интегралами, следует, что $\varphi(z)$ регулярна на полуплоскости $\operatorname{Re} z > -1 - \operatorname{Re}\lambda_K$, за исключением точек $z = -1 - \lambda_k$ $(k = 0, 1, \ldots, K-1)$, которые являются ее простыми полюсами. Принимая во внимание, что $K > 0$ может быть любым целым числом, мы можем утверждать, что $\varphi(z)$ регулярна в каждой полуплоскости $\operatorname{Re} z > -1 - \operatorname{Re}\lambda_K$ $(K = 0, 1, 2, \ldots)$, за исключением $z = -1 - \lambda_k$ $(k = 0, 1, \ldots, K-1)$ и $\operatorname*{res}\limits_{z=-1-\lambda_k} \varphi(z) = a_k(b-a)^{\lambda_k}$.

Полученный результат сформулируем как лемму.

Лемма 2. Пусть

1) функция $f(p)$ интегрируема в интервале (a, b);

2) $f(p) = f[(b-a)e^{-u} + a]$ непрерывна в интервале $u \geqslant T > 0$ и при $u \to \infty$ имеет разложение (40).

Тогда у функции

$$\varphi(z) = \int_0^1 v^z f[(b-a)v + a]\,dv$$

существует аналитическое продолжение в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -1 - \lambda_K$, за исключением точек $z = -\lambda_k - 1$ $(k = 0, 1, \ldots, K-1)$, которые являются простыми полюсами, и

$$\operatorname*{res}_{z=-\lambda_k-1} \varphi(z) = a_k(b-a)^{\lambda_k}. \tag{48}$$

Из лемм 1 и 2 следует, что $\mu(z) = \frac{\varphi(z)}{\Gamma(z+1)} \in B$, $\gamma = 1$. Так как $\arg t = \frac{\pi}{2}$ и функция $\mu(z)$ удовлетворяет требованиям теоремы 20, то

$$F(\tau) = \int_a^b e^{-i\tau p} f(p)\,dp \sim (b-a)\, e^{-i\tau a} \times$$

$$\times \left\{-\pi \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{res}_{z=-\lambda_k-1} \left(\frac{\mu(z)}{\sin \pi z}\, t^z\right) + \right.$$

$$\left. + \exp[te^{-i\pi}[\sum_{m=0}^{\infty} b_k (b-a)^{\omega_k}\, \Gamma(\omega_k + 1)\, (te^{-i\pi})^{-\omega_k - 1}\right\}$$

или

$$F(t) = \int_a^b e^{-ip\tau} f(p)\,dp \sim e^{-i\tau a} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(\lambda_k + 1) \times$$

$$\times a_k (\tau e^{i\frac{\pi}{2}})^{-\lambda_k - 1} + e^{-ib\tau} \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, \Gamma(\omega_k + 1)\, (\tau e^{-i\frac{\pi}{2}})^{-\omega k - 1}. \quad (49)$$

Аналогично получаем

$$\int_a^b e^{i\tau p} f(p)\,dp \sim e^{i\tau a} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \Gamma(\lambda_k + 1)\, (\tau e^{-i\frac{\pi}{2}})^{-\lambda_k - 1} +$$

$$+ e^{ib\tau} \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, \Gamma(\omega_k + 1)\, (\tau e^{i\frac{\pi}{2}})^{-\omega_k - 1}. \quad (50)$$

Разложение (50) при целых λ_k полностью совпадает с разложением интеграла Фурье, полученным методом повторного интегрирования по частям (см., например, работы § 2.8 [18]).

2. Найдем асимптотическое поведение при $\tau \to \infty$ функции

$$F(\tau) = \int_a^b e^{-i\tau p} f(p)\,dp \quad (-\infty < a < b < \infty,\ \tau > 0),$$

если функция

1) $g(u) = f[(b-a)e^{-u} + a]$ регулярна в секторе $|\arg u| \leqslant \eta$, за исключением, может быть, точек $u = 0$ и $u = \infty$;

$$2)\ f(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k (p-a)^{\lambda_k} \ln^{\varkappa_k} \frac{1}{p-a} \text{ при } |p-a| \to 0; \tag{51}$$

$$f(p) \sim \sum_{k=0}^{\infty} b_k (b-p)^{\omega_k} \text{ при } |b-p| \to 0, \tag{52}$$

где

$$-1 < \operatorname{Re}\lambda_0 < \operatorname{Re}\lambda_1 < \ldots \to \infty;$$

$$-1 < \operatorname{Re}\omega_0 < \operatorname{Re}\omega_1 < \ldots \to \infty;$$

$$\varkappa_k > 0 \ (k = 0, 1, 2, \ldots),\ \varkappa_k \neq n \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так же, как в предыдущем примере, найдем разложение $F(\tau)$ по степенному ряду. Получаем формулы (42) и (43). Функция $\varphi(z)$ имеет асимптотическое разложение (47). Определим полюсы для функции

$$\mu(z) = \frac{\varphi(z)}{\Gamma(z+1)}.$$

Используя разложение (51), получаем

$$f(p) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k (p-a)^{\lambda_k} \ln^{\varkappa_k} \frac{1}{p-a} + (p-a)^{\lambda_K} \ln^{\varkappa_K} \frac{1}{p-a} \times \\ \times r_a(K, p-a),$$

где $r_a(K, p-a) = O(1)$ при $|p-a| \to 0$ для каждого целого $K > 0$. Поэтому

$$\varphi(z) = \int_0^1 v^z f[(b-a)v + a]\, dv =$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} a_k (b-a)^{\lambda_k} \int_0^1 v^{z+\lambda_k} \ln^{\varkappa_k} \frac{1}{v(b-a)}\, dv + R_K(z), \tag{53}$$

где

$$R_K(z) = (b-a)^{\lambda_K} \int_0^1 v^{z+\lambda_K} \left[\ln \frac{1}{v(b-a)}\right]^{\varkappa_K} r_a[K, (b-a)v]\, dv.$$

Очевидно, что $R_K(z)$ является регулярной функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -\lambda_K$. Преобразуем формулу (53):

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k (b-a)^{-z-1} \int_0^{b-a} \tau^{z+\lambda_k} \ln^{\varkappa_k} \frac{1}{\tau} d\tau +$$

$$+ R_K(z) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k (b-a)^{-z-1} \int_0^1 \tau^{z+\lambda_k} \ln^{\varkappa_k} \frac{1}{\tau} d\tau + \tilde{R}_K(z);$$

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k (b-a)^{-z-1} \frac{\Gamma(\varkappa_k+1)}{(z+\lambda_k+1)^{\varkappa_k+1}} + \tilde{R}_K(z), \qquad (54)$$

где

$$\tilde{R}_K(z) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k (b-a)^{-z-1} \int_1^{b-a} \tau^{z+\lambda_k} \ln^{\varkappa_k} \frac{1}{\tau} d\tau + R_K(z)$$

— есть регулярная функция в полуплоскости $\operatorname{Re} z > -\lambda_K$.

Из формулы (54) следует, что точки $z = -\lambda_k - 1$ $(k = 0, 1, \ldots, K-1)$ являются точками ветвления функции $\varphi(z)$, в окрестности которых

$$\frac{\mu(z)}{\sin \pi z} = \frac{\varphi(z)}{\sin \pi z \, \Gamma(z+1)} = -\frac{1}{\pi} \Gamma(-z) \varphi(z) \sim$$

$$\sim -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma^{(m)}(\lambda_k+1)}{m!} (z+\lambda_k+1)^{\varkappa_k+m-1} a_k \Gamma(\varkappa_k+1) \times$$
$$\times (b-a)^{-z-1} + \rho_k(z),$$

где $\rho_k(z)$ регулярна в точке $z = -\lambda_k - 1$ функция и в ее окружности

$$\rho_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho_k^{(m)}(-\lambda_k-1)}{m!} (z+\lambda_k+1)^m.$$

Из всего сказанного следует, что функция $\mu(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 21.

Теорема 21 доказана для случая, когда у функции $\mu(z)$ имеется одна точка ветвления, но в нашем случае функция $\mu(z)$ имеет $K-1$ точки ветвления, где $K > 0$ — любое целое фиксированное число. Легко видеть, что доказательство теоремы 21 не меняется, только для каждой точки ветвления в формулах (33) и (34) добавляется соответствующий асимптотический ряд. Регулярные функции $\rho_k(z)$

на результат не влияют. Так как в формулах (33) и (34) функции $\rho_k(z)$ будет соответствовать ряд

$$t^{-\lambda_k-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\rho_k^{(m)}(-\lambda_k-1)}{m!\,\Gamma(-m)}(\ln t)^{-m-1}$$

и $\dfrac{1}{\Gamma(-m)}=0$ $(m=0,1,2,\ldots)$, то все члены разложения анулируются. Теперь можем написать окончательный результат. Так как $\arg t=\dfrac{\pi}{2}$, $\gamma=1$, то берем формулу (34):

$$F(\tau)=\int_a^b e^{-i\tau p}f(p)\,dp=(b-a)\,e^{-i\tau a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mu(n)\,t^n\sim$$

$$\sim(b-a)\,e^{-i\tau a}\{\exp[te^{i\pi}]\sum_{k=0}^{\infty}b_k(b-a)^{\omega_k}\,\Gamma(\omega_k+1)(te^{-i\pi})^{-\lambda_k-1}+$$

$$+\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{K-1}a_k\left(\frac{t}{b-a}\right)^{-\lambda_k-1}\Gamma(\varkappa_k+1)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,\Gamma^{(m)}(\lambda_k+1)}{m!\,\Gamma(\varkappa_k-m+1}\left[\ln\frac{t}{b-a}\right]^{\varkappa_k-m}.$$

Учитывая обозначение $t=(b-a)\,\tau\,e^{i\frac{\pi}{2}}$, получаем при $\tau\to\infty$

$$F(\tau)\sim e^{-ib\tau}\sum_{k=0}^{\infty}b_k\,\Gamma(\omega_k+1)\,(\tau\,e^{-i\frac{\pi}{2}})^{-\omega_k-1}+$$

$$+e^{-ia\tau}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\tau\,e^{i\frac{\pi}{2}})^{-\lambda_k-1}\,\Gamma(\varkappa_k+1)\,\Theta_k(\tau),\qquad(55)$$

где функция $\Theta_k(\tau)$ дана в виде асимптотического ряда

$$\Theta_k(\tau)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,\Gamma^{(m)}(\lambda_k+1)}{m!\,\Gamma(\varkappa_k-m+1)}\,[\ln(\tau\,e^{i\frac{\pi}{2}})]^{\varkappa_k-m}\qquad(56)$$

при $\tau\to\infty$.

Если $\varkappa_k$ — целое положительное число, то вместо асимптотического ряда (56) получаем конечную сумму.

Частный случай, когда $f(p)=\ln(p-a)\,g(p)$, рассмотрен в работе [19], где использован метод повторного интегрирования по частям. Результаты совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy. On the series of certain classes of integral Taylor series. — Proc. Lond. M. S., (2), 2, 1905, 401—431.
2. C. Fox. The asymptotic expansion of the generalised hypergeometric function. — Proc. Lond. M. S., (2), 27, 1928, 389—400.
3. E. M. Wright. The asymptotic expansion of the generalised hypergeometric function. — J. Lond. M. S., **10**, 1935, 286—293.
4. E. M. Wright. The asymptotic expansion of the generalised Bessel function. — Proc. Lond. M. S., 1935, 38.
5. E. W. Barnes. The asymptotic expansion of integral functions defined by generalised hypergeometric series. — Proc. Lond. M. S., (2), 5, 1907, 59—116.
6. G. N. Watson. A class of integral functions defined by Taylor's series. — Trans. Combr. Philos. Soc., **22**, 1913, 15—37.
7. W. B. Ford. The asymptotic developments of functions defined by Maclaurin series. — University of Michigan Studies, Ann Arbor, 1936.
8. H. K. Hughes. On the asymptotic expansions of entire functions defined by Maclaurin series. — Bull A. M. S., **50**, 1944, 425—430.
9. C. V. Newsom. The asymptotic behaviour of a class of entire functions. — Amer. J. Math., 65, 1943, 450—454.
10. E. M. Wright. The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series. — Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **238**, 1940, 423—451.
11. E. M. Wright. The asymptotic expansion of integral functions defined by Taylor series (second paper). — Philos. Trans. Roy. Soc., Ser. A., **239**, 1941, 217—232.
12. E. M. Wright. The asymptotic expansion of integral functions and of the coefficients in their Taylor series. — Trans. A. M. S., 64, 3, 1948, 409—438.
13. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки. 1964, т. 58, вып. 2, стр. 49—71.
14. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. II. — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [1.] Рига, «Зинатне», 1966, стр. 37—70.
15. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. III. — Латвийский математический ежегодник. II. Рига, «Зинатне», 1966, стр. 265—282.
16. В. Ж. Риекстыня. Об одном обобщении асимптотических разложений. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1958, т. 20, стр. 145—152.
17. G. Doetsch. Handbuch der Laplase Transformation. Bd. 1. Basel, 1950.
18. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
19. A. Erdelyi. Asymptotic expansions of Fourier integrals involving logarithmic singularities. — J. Soc. Industr. Appl. Math., vol. 4, 1956, No. 1.

ASYMPTOTIC EXPANSIONS OF SOME INTEGER FUNCTIONS AND FOURIES INTEGRAL

V. RIEKSTIŅA

Annotation

An asymptotic estimate of the function $F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mu(n) t^n$ is obtained for $|t| \to \infty$ throughout the whole plane, provided that $\mu(z)$ is a regular function in semi-plane $\text{Re } z > \sigma$, except for

a finite number of poles and branch points, and the asymptotic estimate (1) holds for it. If the function $\mu(z)$ is expanded in terms of functions for which the estimate (1) is valid, a generalised asymptotic expansion of $F(t)$ is obtained for some occasions.

The asymptotic expansion of the integral

$$F(\tau)=\int_a^b \exp(-ip\tau)\, f(p)\, dp \; (-\infty < a < b < \infty,\ 0 < \tau \to \infty)$$

is obtained. The terminals of the interval (a, b) may be algebraic or logarithmic branch points of the function $f(p)$, an asymptotic expansion of $f(p)$ begin given the vicinity of these points.

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА В НЕКОТОРЫХ ОСОБЫХ СЛУЧАЯХ, I

Т. Т. ЦИРУЛИС

Кафедра общей математики ЛГУ им. П. Стучки

Рассматривается применение метода перевала в случаях, когда подынтегральная функция в седловой точке имеет алгебраическую или простейшую существенную особенность.

При нахождении асимптотического разложения интегралов вида

$$\int_L f(t) \exp\{-xh(t)\}\, dt, \tag{1}$$

где $h(t)$, $f(t)$ — аналитические функции в области, содержащей путь интегрирования L, кроме, быть может, отдельных изолированных особых точек, наиболее удобным оказывается метод перевала. Для этого деформируют путь интегрирования L так, чтобы он по возможности состоял из линий наибыстрейшего спуска для $\exp\{-xh(t)\}$, т. е. градиентных линий для $|\exp\{-xh(t)\}|$, а асимптотическое разложение для (1) в этом случае равно сумме вкладов критических точек, которыми могут быть концы пути интегрирования L и седловые точки. Седловые точки в простейших случаях могут быть найдены из уравнения $h'(t) = 0$ [1, 2].

Однако может оказаться, что в некоторой критической точке $t = t_k$ функция $f(t)$ имеет такую особенность, что контур интегрирования через нее проводить нельзя.

Цель статьи — вычисление вклада в асимптотическое разложение интеграла (1) окрестности подобного вида критической точки в случаях простейших особенностей функции $f(t)$.

В дальнейшем будем считать, что вне круга $|t| = R$ путь интегрирования L по некоторым линиям наибыстрейшего спуска для $\exp\{-x\,h(t)\}$ уходит в ∞. Это не умаляет общности задачи, так как вклады концов пути интегрирования в случае конечного контура могут быть найдены обычными для метода перевала приемами. Исследуемую точку будем считать $t = 0$, и, кроме того, предположим, что

$$h(t) = t^p h_1(t);\ p = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

$$h_1(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,\ |t| < R \tag{3}$$

и в круге $|t| < R$, кроме $t=0$, нет других седловых точек функции $h(t)$ и особых точек функции $f(t)$.

СЛУЧАЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТИ

Предположим, что

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{t^{\beta}}, \tag{4}$$

где $\beta \geqslant 1$ и

$$\varphi(t) = b_0 + b_1 t + \ldots,\ |t| < R,\ b_0 \neq 0. \tag{5}$$

В этом случае путь интегрирования L в (1) деформируем согласно методу перевала, с той лишь разницей, что через $t = 0$ путь не проводим, а обходим точку $t = 0$ по некоторой дуге окружности $|t| = r$ при $r < R$. Если (1) интегрировать по частям, то в силу выбора концов пути интегрирования на линиях наибыстрейшего спуска в ∞ получаем

$$I(x) = \frac{1}{\beta - 1}\int\limits_L \varphi'(t)\, t^{1-\beta} \exp\{-xh(t)\}\, dt - \frac{x}{\beta - 1} \times$$

$$\times \int\limits_L t^{1-\beta}\, \varphi(t)\, h'(t) \exp\{-xh(t)\}\, dt, \tag{6}$$

если $\beta \neq 1$. (В случае $\beta = 1$ получаем, соответственно, вместо $\frac{t^{1-\beta}}{\beta - 1}$ множитель $\ln t$.)

Так как при интегрировании по частям положение седловых точек полученных интегралов такое же, как у исходного интеграла, то, применяя интегрирование по частям k раз, при подходящем выборе k можем добиться того, что в каждом из полученных интегралов контур интегрирования уже можно проводить через $t = 0$ и для дальнейших вычислений применить метод Лапласа.

Покажем это на примерах.

1)

$$G(x) = \int\limits_L \frac{1 + t}{t^2} \exp\{-xt^2(3 - t)\}\, dt \tag{7}$$

при $x \to \infty$, $|\arg x| < \frac{\pi}{2} - \Delta$, $0 < \Delta < \frac{\pi}{2}$, где контур L конечен, расположен в полуплоскости $\operatorname{Im} t > 0$ и соединяет $t = -1$ с $t = 1$. Непосредственно применить метод перевала нельзя, так как вдоль линии наибыстрейшего спуска $\operatorname{Im} t = 0$ интеграл расходится.

В силу того, что вклады концов $t = \pm 1$ и другой седловой точки $t = 2$ имеют порядок $o(\exp\{-\varepsilon |x|\})$ при $0 < \varepsilon < 2$, то после интегрирования по частям и простых преобразований

$$G(x) = -i\pi - 2 \int_0^1 \frac{d}{dt} [e^{-3xt^2} \operatorname{sh} xt^3] \ln t \, dt -$$

$$-3x \int_{-1}^{1} (1 + t)(2 - t) e^{xt^3} e^{-3xt^2} dt + o(e^{-\varepsilon |x|}).$$

Первый из интегралов проинтегрируем еще раз по частям, а затем применим к обоим интегралам метод Лапласа. Выписывая только первые члены разложения, получаем

$$G(x) = -i\pi + \sqrt{3\pi x}\left(2 - \frac{1}{36x}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \; x \to \infty, \; |\arg x| < \frac{\pi}{2} - \Delta. \tag{8}$$

Подобным образом может быть получен весь асимптотический ряд.

2)

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{f(t)}{t} z^{-t^4} dt; \tag{9}$$

$$f(t) = \frac{\cos \pi t \, \Gamma(t + 1) \prod\limits_{j=1}^{p} \Gamma(a_j - t)}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(b_j - t)}, \tag{10}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — различные положительные числа, разность которых не равна целому числу, и $0 < \sigma < \min\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} a_j$. Нетрудно установить, что функция $f(t)$ является аналитической в $t = 0$. Интеграл (9) сходится для $|z| > 1$.

Найдем асимптотическое разложение (9) при $z \to +\infty$ и тем самым покажем, что ни одно из двух формальных разложений, получаемых по образцу метода Барнса передвижением контура интегрирования вправо или влево, не является асимптотическим рядом для (9). Этот пример приведен также в [4].

Обозначим $z = e^x$, проинтегрируем один раз по частям, а затем передвинем контур интегрирования на ось $\mathrm{Re}\, t = 0$. Тогда

$$J(e^x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{d}{dt}[f(t)\exp\{-xt^4\}]\ln t\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{d\tau}[f(i\tau)\exp\{-x\tau^4\}]\left(\ln\tau + i\frac{\pi}{2}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{d}{d\tau}\{[f(i\tau) - f(-i\tau)]\,e^{-x\tau^4}\}\ln\tau\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{8\pi i}\int_0^\infty\frac{d}{du}\left\{\left[f\left(\frac{i\sqrt[4]{u}}{\sqrt[4]{x}}\right) - f\left(-\frac{i\sqrt[4]{u}}{\sqrt[4]{x}}\right)\right]e^{-u}\right\}\ln u\,du.$$

Очевидно, члены, содержащие $\ln x$, исчезают.

Если предположить, что

$$f(it) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k, \quad |t| < r, \tag{10a}$$

то после замены $x = \ln z$ получаем разложение

$$J(z) \sim \frac{1}{2}f(0) - \frac{1}{4\pi i}\sum_{k=0}^{\infty} B_k (\ln z)^{-\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)}, \quad z \to +\infty, \tag{11}$$

где

$$B_k = \Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{5}{4}\right)\Psi\left(\frac{k}{2}+\frac{5}{4}\right)a_{2k+1}; \quad \Psi(u) = \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}.$$

Асимптотичность (11) следует из известной леммы Ватсона [2]. Как видно из формулы (11), для интегралов типа Барнса наличие седловой точки $t = 0$ у ядра z^{-t^m} $(m \geqslant 2)$ существенно меняет характер асимптотического поведения в отличие от случая $m = 1$, когда нет седловых точек у ядра.

СЛУЧАЙ ПРОСТЕЙШЕЙ СУЩЕСТВЕННОЙ ОСОБЕННОСТИ

Предположим, что

$$f(t) = t^{\mu} \varphi(t) \exp\{-c\, t^{-\alpha}\}, \tag{12}$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (5); μ и c — некоторые комплексные постоянные; $c \neq 0$; α — натуральное число.

Для получения асимптотического разложения интеграла (1) вклады от критических точек, лежащих в области $|t| > R$, могут быть получены обычными для метода перевала приемами, поэтому следует вычислить лишь вклад в интеграл (1) окрестности $t = 0$. Присоединим множитель $\exp\{-c\, t^{-\alpha}\}$ к ядру $\exp\{-x\, h(t)\}$, тогда критические точки будут определяться функцией $\exp\{-xh(t) - c\, t^{-\alpha}\}$. Фиксируем $\arg x = \Theta$, где $\Theta_0 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_1$, и вводим замену переменной

$$t = x^{-\frac{1}{\alpha+p}} u, \tag{13}$$

где

$$x^{\frac{1}{\alpha+p}} = |x|^{\frac{1}{\alpha+p}} e^{\frac{i\Theta}{\alpha+p}}.$$

Тогда

$$I(x) = x^{-\frac{1+\mu}{\alpha+p}} \int\limits_{L'} \exp\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}} (u^p + c\, u^{-\alpha})\} \times$$

$$\times \exp\{-x^{\frac{\alpha-1}{\alpha+p}} u^{p+1} h_2(ux^{-\frac{1}{\alpha+p}})\}\, u^{\mu}\, \varphi(ux^{-\frac{1}{\alpha+p}})\, du, \tag{14}$$

где

$$h_2(t) = \frac{h_1(t) - 1}{t}; \tag{15}$$

$h_1(t)$ определяется формулой (3).

В силу того, что точные расположения седловых точек находятся из уравнения

$$pu^{p-1} - c\alpha u^{-\alpha-1} - x^{-\frac{1}{\alpha+p}} (p+1)\, u^p\, h_2(ux^{-\frac{1}{\alpha+p}}) +$$

$$+ x^{-\frac{2}{\alpha+p}} u^{p+1} h_2'(ux^{-\frac{1}{\alpha+p}}) = 0, \tag{16}$$

для больших значений $|x|$ интересующие нас седловые точки в первом приближении могут быть найдены по формуле

$$u_k = \left|\frac{c\alpha}{p}\right|^{\frac{1}{\alpha+p}} \exp\left\{\frac{i(\vartheta + 2k\pi)}{\alpha+p}\right\};\ \vartheta = \arg c,\ k = 0, 1, \ldots, \alpha+p-1. \tag{17}$$

(Точные координаты седловых точек равны $u_k + r_k(x)$, где $r_k(x) \to 0$ при $x \to \infty$.) Будем считать точки $u = u_k$ критическими и определим вклад для каждой из них соответствующим интегралом по контуру L_k, где L_k представляет отрезок прямой длины 2ε, своей серединой касающийся линии наибыстрейшего спуска для $\exp\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}(u^p + cu^{-\alpha})\}$ в точке $u = u_k$. Уравнение этого отрезка — $u = u_k + ze^{i\varphi_k}$, $-\varepsilon \leqslant z \leqslant \varepsilon$, где

$$\varphi_k = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha+2)(\vartheta + 2k\pi)}{\alpha+p} - \frac{\alpha\Theta}{\alpha+p} - \vartheta\right\} + \pi n; \qquad (18)$$

$$\Theta = \arg x,\ \vartheta = \arg c,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Введем обозначения:

$$v_k^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{du^n}\left[u^{p+1} h_2\left(ux^{-\frac{1}{\alpha+p}}\right)\right]_{u=u_k}; \qquad (19)$$

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{du^n}\left[u^p + cu^{-\alpha}\right]_{u=u_k}; \qquad (20)$$

$$w_k^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{du^n}\left[\varphi(u)\right]_{u=u_k x^{-\frac{1}{\alpha+p}}};\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (21)$$

Очевидно, что $v_k^{(n)}(x) = o(1)$ и $w_k^{(n)}(x) = o(1)$. Если вклад точки u_k обозначить через $I_k(x)$, то после замены $u = u_k + ze^{i\varphi_k}$ получаем

$$I_k(x) = x^{-\frac{1+\mu}{\alpha+p}} \exp\left\{-A_k^{(0)} x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}} - v_k^{(0)}(x)\, x^{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}\right\} e^{i\varphi_k} \times$$

$$\times \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left\{-|x|^{\frac{\alpha}{\alpha+p}} |A_k^{(2)}| z^2\right\} \exp\left\{-x^{\frac{\alpha-1}{\alpha+p}} v_k^{(1)}(x)\, ze^{i\varphi_k}\right\} \times$$

$$\times \Phi(x, ze^{i\varphi_k})\, dz, \qquad (22)$$

где

$$\Phi(x, t) = \exp\left\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}} t^3 \sum_{n=0}^{\infty} A_k^{(n+3)} t^n\right\} \exp\left\{-x^{\frac{\alpha-1}{\alpha+p}} t^2 \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{n=0}^{\infty} v_k^{(n+2)}(x)\, t^n\right\} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{-\frac{n}{\alpha+p}} w_k^{(n)}(x)\, t^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\mu}{n} u_k^{\mu-n} t^n\right). \qquad (23)$$

Ряды в (23) сходятся, если $|t| \leqslant \varepsilon < \left|\frac{\alpha c}{p}\right|^{\frac{1}{\alpha+p}}$. Обозначим для краткости

$$\alpha_k(x) = x^{\frac{\alpha}{2(\alpha+p)}} \left(A_k^{(2)}\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{24}$$

$$z_k(x) = \frac{1}{2} \left(A_k^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha-2}{2(\alpha+p)}} v_k^{(1)}(x). \tag{25}$$

Очевидно, $z_k = o(\alpha_k(x))$. После замены $z = |\alpha_k(x)|\, t$ с учетом того, что $\arg \alpha_k(x) = -\varphi_k$, получаем

$$I_k(x) = x^{-\frac{\alpha+2\mu+2}{2(\alpha+p)}} \left(A_k^{(2)}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{- x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}} A_k^{(0)} - x^{\frac{\alpha-1}{\alpha+p}} v_k^{(0)}(x)\right\} \times$$

$$\times \int\limits_{-\varepsilon|\alpha_k(x)|}^{\varepsilon|\alpha_k(x)|} \exp\{-t^2 - 2tz_k(x)\}\, \Phi(x,\, t\alpha_k^{-1}(x))\, dt. \tag{26}$$

Разлагая $\Phi(x,\, t\alpha_k^{-1}(x))$ в ряд по степеням t согласно (23) и интегрируя почленно с заменой пределов соответственно на $-\infty$ и $+\infty$, получаем разложение

$$I_k(x) \sim F(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} H_n(iz_k(x))\, B_k^{(n)}(x)\, x^{-\frac{\alpha n}{2(\alpha+p)}}, \tag{26a}$$

$$x \to \infty,\ \arg x = \Theta,$$

где

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{A_k^{(2)}}}\, x^{-\frac{\alpha+2\mu+2}{2(\alpha+p)}} \exp\left\{z_k^2(x) - A_k^{(0)} x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}} - v_k^{(0)}(x)\, x^{\frac{\alpha-1}{\alpha+p}}\right\}. \tag{27}$$

$B_k^{(n)}(x)$ являются коэффициентами разложения

$$\Phi(x,\, t\alpha_k^{-1}(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} B_k^{(n)}(x)\, x^{-\frac{\alpha n}{2(\alpha+p)}} t^n, \tag{28}$$

так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^n \exp\{-t^2 + 2izt\}\, dt = \sqrt{\pi}\cdot 2^{-n} i^n e^{-z^2} H_n(z). \tag{29}$$

Из (23), учитывая (24), нетрудно проверить, что $B_k^{(n)}(x) = O(1)$, но вообще $B_k^{(n)}(x) \neq o(1)$. Покажем, что (26а) является асимптотическим разложением, согласно определению [3], относительно шкалы $\{F(x)\, x^{-\frac{n}{\alpha+p}}\}$, если $z_k(x) \neq o(1)$, и относительно шкалы $\{F(x)\, x^{-\frac{\alpha n}{\alpha+p}}\}$, если $z_k(x) = o(1)$, так как в этом случае формула (26а) может быть представлена в виде

$$I_k(x) \sim F(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} x^{-\frac{\alpha n}{\alpha+p}} [H_{2n}(iz_k(x))\, B_k^{(2n)}(x) +$$

$$+ \frac{i}{2} x^{-\frac{\alpha}{2(\alpha+p)}} H_{2n+1}(iz_k(x))\, B_k^{(2n+1)}(x)].$$

Действительно, для случая $z_k(x) \neq o(1)$ имеем

$$R_N(x) = I_k(x) - F(x) \sum_{n=0}^{N} \frac{i^n}{2^n} H_n(iz_k(x))\, B_k^{(n)}(x)\, x^{-\frac{\alpha n}{2(n+p)}} =$$

$$= I_k(x) - F(x) \exp\{-z_k^2(x)\} \sum_{n=0}^{N} B_k^{(n)}(x)\, x^{-\frac{\alpha n}{2(\alpha+p)}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \times$$

$$\times \exp\{-t^2 - 2tz_k(x)\}\, dt.$$

Если заменить пределы на $-\varepsilon\,|\alpha_k(x)|$ и $\varepsilon\,|\alpha_k(x)|$, то можно найти такое $\delta > 0$, что

$$\int_{\varepsilon|\alpha_k(x)|}^{+\infty} t^n \exp\{-t^2 - 2tz_k(x)\}\, dt = o(\exp\{-\delta\,|\alpha_k(x)|^2\}). \quad (30)$$

Из (24) и (25) видно, что

$$\exp\{-z_k^2(x)\} \int_{\varepsilon|\alpha_k(x)|}^{+\infty} t^n \exp\{-t^2 - 2tz_k(x)\}\, dt = o(x^{-M}), \quad (31)$$

так как $z_k(x) = o(\alpha_k(x))$. Аналогично можно оценить $\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon|\alpha_k(x)|}$.

Подставляя $I_k(x)$ из (26а) и учитывая (28), получаем

$$R_N(x) = F(x) \exp\{-z_k^2(x)\} x^{-\frac{\alpha(N+1)}{2(\alpha+p)}} \int_{-\varepsilon|\alpha_k(x)|}^{\varepsilon|\alpha_k(x)|} t^{N+1} \exp\{-t^2 - -2z_k(x)t\} Q_N(x, t)\, dt + F(x)\, o(x^{-M}), \quad (32)$$

где $Q_N(x, t) = O(1)$ равномерно по t во всей области интегрирования. Так как $z_k(x) = o(\alpha_k(x))$, то после замены $t = u - z_k(x)$ из (32) получаем

$$R_N(x) = F(x)\, x^{-\frac{\alpha(N+1)}{2(\alpha+p)}} \int_{-\varepsilon|\alpha_k(x)|(1+o(1))}^{\varepsilon|\alpha_k(x)|(1+o(1))} [u - z_k(x)]^{N+1} e^{-u^2} Q_N(x, u - - z_k(x))\, du + F(x)\, o(x^{-M}).$$

Оценивая последний интеграл методом перевала, находим нужную оценку

$$R_N(x) = F(x)\, x^{-\frac{\alpha(N+1)}{2(\alpha+p)}} [z_k(x)]^{N+1} O(1) = F(x)\, x^{-\frac{N+1}{\alpha+p}} O(1). \quad (33)$$

Аналогично доказывается асимптотичность в случае $z_k(x) = o(1)$.

Чтобы найти, какие из критических точек u_k нужно брать для получения всего вклада окрестности $u = 0$ в искомый интеграл (14) или (1), если $f(t)$ определяется по (12), необходимо исследовать положение градиентных линий модуля функции $\exp\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}(u^p + + cu^{-\alpha})\}$. Для этого чертим в плоскости u $2p$ лучей $\arg u = s_\varkappa$, 2α лучей $\arg u = l_\varkappa$, где

$$s_\varkappa = \frac{\varkappa\pi}{p} - \frac{\Theta\alpha}{p(\alpha+p)}; \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, 2p-1; \quad (34)$$

$$l_\varkappa = \frac{\varkappa\pi}{\alpha} + \frac{\vartheta}{\alpha} - \frac{\Theta\alpha}{p(\alpha+p)}, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots, 2\alpha - 1 \quad (35)$$

и седловые точки $u = u_k$, где u_k определяются из (17). Точка $u = 0$ для градиентных линий $|\exp\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}(u^p + cu^{-\alpha})\}|$ является мультиполем порядка 2α, поэтому эти градиентные линии касаются лучей $\arg u = l_\varkappa$ в точке $u = 0$, причем направления, вдоль которых $|\exp\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}(u^p + cu^{-\alpha})\}|$ возрастает, чередуются с направлениями, вдоль которых модуль этой же функции убывает. Для больших $|u|$ поведение градиентных линий близко к градиентным линиям функции $|\exp\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}u^p\}|$, т. е. они асимптотически приближаются к лучам $\arg u = s_\varkappa$. Так как порядок каждой из седловых точек $u = u_k$ равен 1, то легко построить линии наибыстрейшего спуска, по которым возможно деформирование пути интегрирования L' в (14). После этого, учитывая, по каким направлениям в круг $|t| < R$ входит путь интегрирования L для (1), из (13) можем легко установить, по каким направлениям в круг $|u| < R|x|^{\frac{1}{\alpha+p}}$ входит путь интегрирования L', а затем и сами точки u_k. Например, на рис. 1 дано положение линий наибыстрейшего спуска при $p = 2$, $\alpha = 3$, $\Theta = 0$, $-\pi < \vartheta \leqslant 0$, где сплошные линии являются линиями наибыстрейшего спуска, по которым нужно деформировать контур интегрирования, а стрелки указывают направление возрастания $|\exp\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}(u^p + cu^{-\alpha})\}|$. Если в плоскости u контур интегрирования L' начинается в $u = -B$, проходит по верхней полуплоскости в $u = B$, где B достаточно боль-

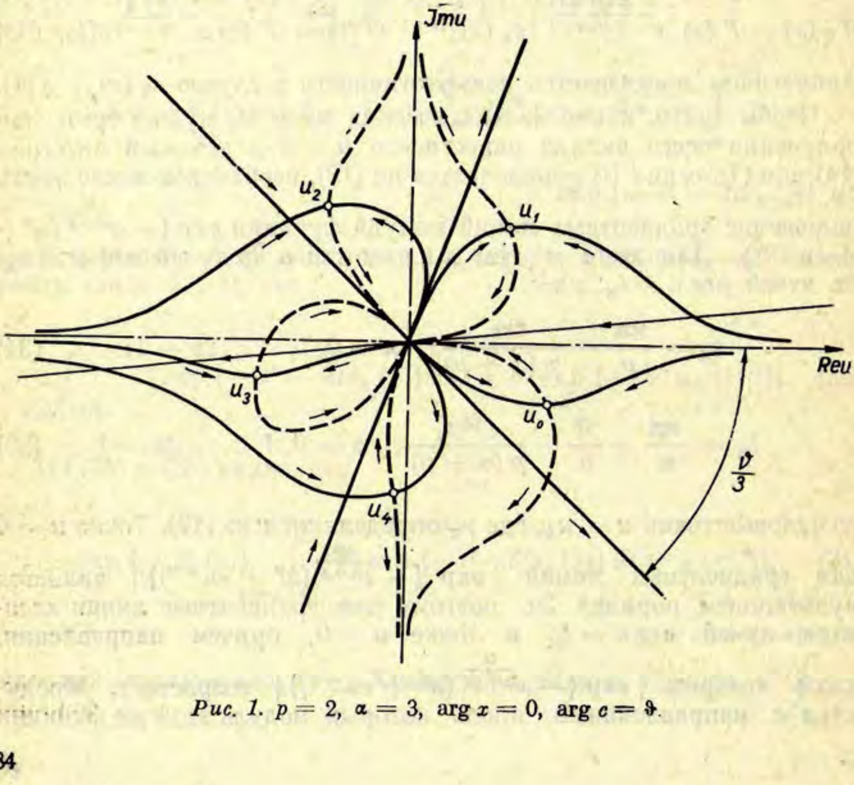

Рис. 1. $p = 2$, $\alpha = 3$, $\arg x = 0$, $\arg c = \vartheta$.

шое положительное число, то нужно считать вклады в точках $u = u_1$ и $u = u_2$. Если же контур проходит по нижней полуплоскости, то в точках u_4 и u_0 (точка $u = u_3$ занимает исключительное положение) ее вклад может быть нужным лишь для несобственного интеграла, контур которого проходит в $u = 0$ по соответствующему сектору. В случае $p = 2$, $\alpha = 5$ подобное положение занимают точки u_0 и u_3 (рис. 2). В случае $p = 4$, $\alpha = 1$ подобных точек вообще нет (рис. 3).

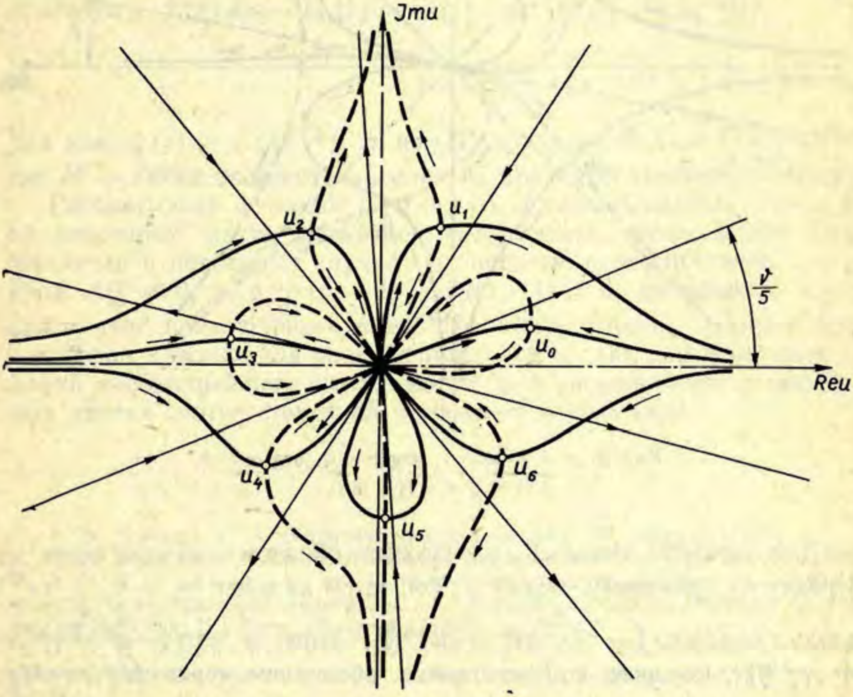

Рис. 2. $p = 2$, $\alpha = 5$, $\arg x = 0$, $\arg c = \vartheta$.

Для завершения доказательства вышеприведенного метода осталось лишь показать, что интеграл вдоль каждой из линий наибыстрейшего спуска T_k для $\exp\left\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}(u^p + cu^{-\alpha})\right\}$, которая проходит через u_k и лежит в круге $|u| < R\,|x|^{\frac{1}{\alpha+p}}$, асимптотически равен $I_k(x)$, т. е. вкладу точки $u = u_k$, определенному на стр. 80, асимптотическое разложение которого дается формулой (26а).

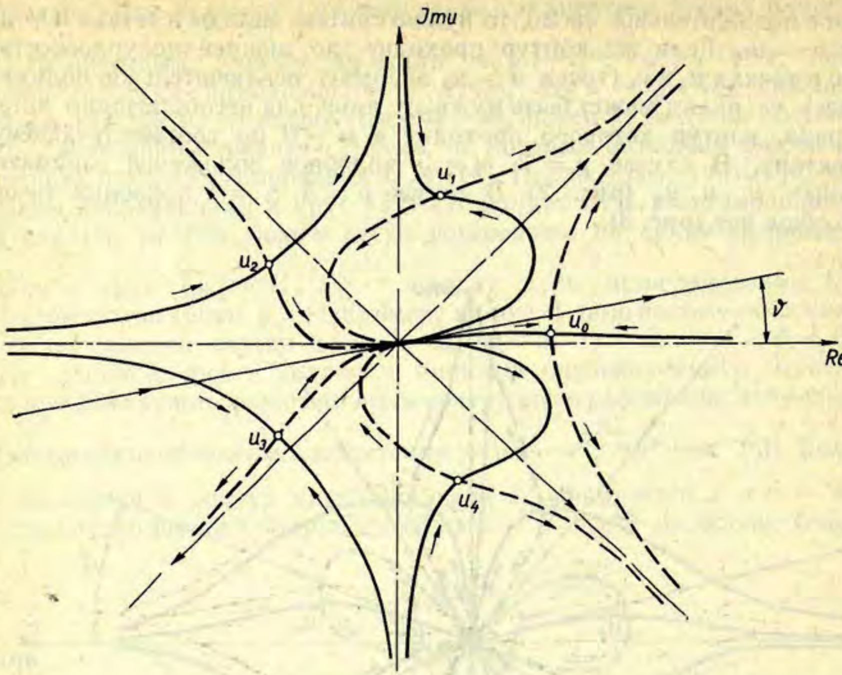

Рис. 3. $p = 4,\ \alpha = 1,\ \arg x = 0,\ \arg c = \vartheta$.

Деформируем линию T_k следующим образом: сначала идем по отрезку L_k, дающему вклад $I_k(x)$, затем из точек $\gamma_k = u_k \pm \varepsilon e^{i\varphi_k}$ вдоль линий $|\exp\{-x^{\overline{\frac{\alpha}{\alpha+p}}}(u^p + cu^{-\alpha})\}| = \text{const} = |\exp\{-x^{\overline{\frac{\alpha}{\alpha+p}}}(\gamma_k^p + c\gamma_k^{-\alpha})\}|$, которые соответственно обозначим через M_k^+ и M_k^- и которые ортогональны к градиентным линиям $|\exp\{-x^{\overline{\frac{\alpha}{\alpha+p}}}(u^p + cu^{-\alpha})\}|$, опускаемся на T_k, а дальше — по самой T_k.

В силу выбора отрезков L_k для фиксированного достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_0 > 0$, не зависящее от $|x|$, что

$$\operatorname{Re}\{-x^{\overline{\frac{\alpha}{\alpha+p}}}(u_k^p + cu_k^{-\alpha})\} - \operatorname{Re}\{-x^{\overline{\frac{\alpha}{\alpha+p}}}(\gamma_k^p + c\gamma_k^{-\alpha})\} \geqslant \delta_0 |x|^{\overline{\frac{\alpha}{\alpha+p}}}. \tag{36}$$

Так как на линиях M_k^- и M_k^+ $|\exp\{-x^{\overline{\frac{\alpha}{\alpha+p}}}(u^p + cu^{-\alpha})| = \text{const}$, а на линии T_k — монотонно убывает по обе стороны от $u = u_k$, то, учитывая, что $z_k(x) = o\left(x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}\right)$, из (36) имеем

$$R(x) = x^{-\frac{1+\mu}{\alpha+p}} \int\limits_{T_k} \exp\left\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}(u^p + \right.$$

$$\left. + cu^{-\alpha})\right\} \exp\left\{-x^{\frac{\alpha-1}{\alpha+p}} u^{p+1}\, h_2\left(ux^{-\frac{1}{\alpha+p}}\right)\right\} \times$$

$$\times u^{\mu} \varphi\left(u x^{-\frac{1}{\alpha+p}}\right) du - I_k(x) = \exp\left\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}(u_k^p + c\,u_k^{-\alpha})\right\} \times$$

$$\times\, o\left(\exp\left\{-\delta\,|x|^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}\right\}\right);\quad 0 < \delta < \delta_0.$$

Так как $z_k^2(x) = o\left(x^{\frac{\alpha}{\alpha+p}}\right)$, то из (27) получаем $R(x) = F(x)\, o(x^{-M})$, где M — любое положительное число, что и дает требуемую оценку.

Рассматривая функции $h(t)$ и $f(t)$, а также седловые точки u_k на некотором листе римановой поверхности, метод может быть перенесен в некоторых случаях на нецелые положительные α и p. Если $A_k^{(2)} \neq 0$, т. е. $p(p-1) + \alpha(\alpha+1) \neq 0$, вычисление $I_k(x)$ аналогично приведенному выше. Несколько сложнее обстоит дело с выбором нужных для разложений точек u_k, так как некоторые из линий наибыстрейшего спуска могут быть расположены на различных листах соответствующей римановой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. Копсон. Асимптотические разложения. М., «Мир», 1966.
2. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.
3. Э. Я. Риекстыньш. О применении теории нейтрис к асимптотическому представлению интегралов. — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [1.] Рига, «Зинатне», 1966.
4. Э. Я. Риекстыньш. Обзор исследований, выполненных в Риге по асимптотическому представлению функций. — В настоящем сборнике, стр. 3—34.

ON THE USE OF THE METHOD OF STEEPEST DESCENTS IN SOME SINGULAR CASES

T. CĪRULIS

Annotation

The method of steepest descents is generalised in cases, when the saddle-point is a point of algebraical or a simple essential singularity for the factor $f(t)$ in (1).

ОБ АНАЛИТИЧНОСТИ ПО ПАРАМЕТРУ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ В ЗАДАЧЕ О КРИСТАЛЛИЗАЦИИ РАСПЛАВА ПРИ ПОГРУЖЕНИИ В НЕГО ПЛАСТИНКИ

Х. М. ГЕЙМАН

Вычислительный центр ЛГУ им. П. Стучки

Доказывается аналитичность решения краевой задачи

$$b^2(x)\,U_{xx} = U_t;\ -1 < x < s(t),\ x \neq 0,\ t > t_0;$$

$$u\,|_{t=}\ = \psi(x);\ -1 < x < l,\ l = s(t_0),\ \psi(l) = 0,\ \dot{\psi}(-1) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-1} = 0;\ u\,|_{x=-0} = u\,|_{x=+0};\ \ k_1 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-0} = k_2 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=+0};$$

$$u\,|_{x=s(t)-0} = 0;\ \frac{ds}{dt} = -\alpha + \varepsilon \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=s(t)};$$

$$b^2(x) = \begin{cases} a^2 = \text{const} \ \dots\ -1 < x < 0; \ \alpha = \text{const} > 0;\ k_i = \text{const} > 0; \\ 1 \qquad\qquad \dots\ 0 < x < s(t);\ \varepsilon = \text{const} < 0;\ (i \quad 1, 2) \end{cases}$$

по параметру ε.

Рассматривается задача о кристаллизации расплава при погружении в него пластинки из более тугоплавкого материала с начальной температурой $T_0 < T_k$, где T_k — температура кристаллизации расплава [1—3].

Предполагается, что ядро расплава поддерживается при постоянной температуре интенсивным перемешиванием, что задан постоянный поток тепла из ядра расплава к твердой фазе и что в пограничном слое, отделяющем ядро расплава от твердой фазы, температура изменяется линейно в направлении нормали к границе кристаллизации.

Предполагается также, что имеем дело с такими веществами, которые изменяют фазу при единственной температуре.

Пренебрегаем диффузией, изменением термических свойств и плотности с температурой и химическим взаимодействием между веществом расплава и пластинкой.

При сделанных предположениях процесс будет немонотонен. В некоторый момент времени толщина корки, выкристаллизовавшейся из расплава, достигнет максимума, после чего начнется обратный процесс ее расплавления.

Будем считать процесс одномерным.

Индекс $i = 1$ отнесем к погруженному телу, $i = 2$ — к закристаллизовавшемуся слою.

Пусть T_i, k_i, c_i, ρ_i и $a_i^2 = \dfrac{k_i}{c_i \rho_i}$ — соответственно температура, коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, плотность и коэффициент температуропроводности i-й фазы ($i = 1, 2$).

Будем пользоваться декартовой системой координат с осью r, нормальной к границе пластинки, и началом в ее срединной плоскости.

Обозначим через $q = \text{const}$ поток тепла от ядра расплава к твердой фазе, а через λ — удельную скрытую теплоту кристаллизации.

За начало отсчета времени $\tau = 0$ примем момент погружения пластинки в расплав.

Пусть в момент $\tau_0 > 0$ известно распределение температур в пластинке и выкристаллизовавшейся корке и толщина корки. Дальнейшее течение процесса будет описываться системой уравнений:

$$a_1^2 \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} = \frac{\partial T_1}{\partial \tau}; \; 0 < r < R_0; \tag{1.1а}$$

$$a_2^2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} = \frac{\partial T_2}{\partial \tau}; \; R_0 < r < R(\tau); \tag{1.1б}$$

$$T_1(r, t_0) = \psi(r); \; 0 < r < R(\tau_0), \; R(\tau_0) > R_0; \tag{1.1в}$$

$$\lambda \rho_2 \frac{dR}{d\tau} = -q + k_2 \frac{\partial}{\partial r} T_2 \big|_{r=R(\tau)}, \tag{1.1г}$$

где $2R_0$ — толщина стержня.

В безразмерных переменных

$$\left.\begin{aligned} &u_i = \frac{T_i - T_0}{T_0 - T_k} \quad (i = 1, 2); \quad x = \frac{r - R_0}{R_0}; \; t = \frac{a_2^2}{R_0^2}\tau; \\ &\alpha = \frac{qR_0}{\lambda \rho_2 a_2^2}; \quad \varepsilon = \frac{k_2(T_0 - T_k)}{\lambda \rho_2 a_2^2}; \; a^2 = \frac{a_1^2}{a_2^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Задача определения u_i сводится к краевой задаче:

$$b^2(x)\, u_{xx} = u_t \text{ при } -1 < x < s(t),\ x \neq 0,\ t > t_0; \tag{2.1}$$

$$u\,|_{t=t_0} = \psi(x) \text{ при } -1 < x < l, \text{ где } l = s(t_0); \tag{2.2}$$

$$u_x\,|_{x=-1} = 0; \tag{2.3}$$

$$u\,|_{x=-0} = u\,|_{x=+0}; \tag{2.4}$$

$$k_1 u_x\,|_{x=-0} = k_2 u_x\,|_{x=+0}; \tag{2.5}$$

$$u\,|_{x=s(t)} = 0; \tag{2.6}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\alpha + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=s(t)}, \tag{2.7}$$

где

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t) \ \ldots \ -1 < x < 0; \\ u_2(x, t) \ \ldots \ 0 < x < s(t); \end{cases} \tag{3.1}$$

$$b^2(x) = \begin{cases} a^2 \ \ldots \ -1 < x < 0; \\ 1 \ \ldots \ \ 0 < x < s(t). \end{cases} \tag{3.2}$$

В прикладной литературе [4—6] для задач подобного рода были предложены приближенные методы, основанные на разложении в ряд по некоторому малому параметру в предположении, что решение есть аналитическая функция этого параметра.

Доказательства аналитичности в работах [5, 6] не давалось. В работе Фридмана [4] об испарении сферической капли, содержащей строгий математический анализ проблемы, была доказана аналитичность решения по малому параметру.

Ниже мы переносим с некоторыми изменениями метод [4] для доказательства аналитичности решения задачи (2.1) — (2.7) по параметру ε.

Вместе с тем доказывается существование и единственность решения задачи (2.1) — (2.7). Заметим, что в [3] это доказательство не дано.

Следуя Фридману, разобьем доказательство на следующие этапы.

1. Редуцируем задачу (2.1) — (2.7) к задаче решения некоторой системы интегральных уравнений, служащих для определения величин $s(t)$, $\frac{ds}{dt}$, $\frac{\partial u(s(t), t)}{\partial x}$ и $\sqrt{t - t_0}\ \frac{\partial^2 u(s(t), t)}{\partial x\, \partial t}$.

2. Докажем существование решения этой системы на некотором интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \sigma'$ изменения времени при комплексном значении параметра ε ($|\varepsilon| < E$).

3. Докажем, наконец, что эти решения являются аналитическими функциями от ε.

При этом используется восходящая к Жевре [7] идея аналитического продолжения решения параболических уравнений в комплексную область.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Обозначим область $-1 < x < 0$ через D_1^t, а $0 < x < s(t)$ — через D_2^t, где $s(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть $u(x, t)$ определена и непрерывна в замыкании $D_1^t \cup D_2^t$, причем $\frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывна в замыкании каждой из областей D_i^t ($i = 1, 2$) всюду, кроме, быть может, точки $(s(t_0), t_0)$, и внутри области $D_1^t \cup D_2^t$ выполняется уравнение (2.1).

Будем предполагать, что $\psi(x)$ — непрерывная функция, имеющая ограниченные непрерывные производные до третьего порядка включительно в каждой из D_i^t ($i = 1, 2$), удовлетворяющая условию сопряжения (2.4) и (2.5) и условиям согласования

$$\varphi(l) = 0,\ \dot{\Psi}(-1) = 0. \tag{4}$$

Пусть $G(x, t; \xi, \tau)$ — фундаментальное решение или какая-либо функция Грина уравнения $b^2(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, определенная для областей D_1^t и D_2^t или для любых областей, их покрывающих.

Тогда справедлива фундаментальная формула

$$\int\limits_{\Gamma_i^t} \left[b^2\left(G\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial G}{\partial \xi}\right) + uG\frac{d\xi}{d\tau}\right] d\tau + {} $$

$$+ G\,u\,d\xi = \begin{cases} u(x, t) \text{ при } x \in D_i^t; \\ 0, \text{ если } x \text{ не принадлежит } D_i^t; \end{cases} \tag{5}$$

Γ_i^t — граница области D_i^t.

Применим теперь (5) к каждой из наших областей D_1^t и D_2^t:

$$u_1(x, t) = \int_{t_0}^{t} a^2 \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) \Bigg|_{\xi=-1}^{\xi=0} d\tau + \int_{-1}^{0} uG \Big|_{t=t_0} d\xi; \tag{6а}$$

$$u_2(x, t) = \int_{t_0}^{t} \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) \Bigg|_{\xi=+0}^{\xi=s(\tau)} d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} uG \,|_{\xi=s(\tau)}\, s'(\tau)\, d\tau + \int_{0}^{l} uG \,|_{t=t_0}\, d\xi. \tag{6б}$$

Сложив (6а) и (6б), получим следующее интегральное представление решения:

$$u(x, t) = \int_{t_0}^{t} \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) \Bigg|_{\xi=s(\tau)} d\tau -$$

$$- \int_{t_0}^{t} a^2 \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) \Bigg|_{\xi=-1} d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left(a^2\, G \frac{\partial u}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=-0} - G \frac{\partial u}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=+0} \right) d\tau -$$

$$- \int_{t_0} \left(a^2\, u \frac{\partial G}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=-0} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=+0} \right) d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^{l} uG \Big|_{t=t_0} d\xi - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=s(\tau)} s'(\tau)\, d\tau.$$

Возьмем в качестве $G(x, t;\ \xi, \tau)$ решение следующей краевой задачи:

$$b^2(\xi) \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = \frac{\partial G}{\partial t} \text{ при } -1 < \xi < \infty,\ t > t_0,\ \xi \neq 0; \tag{7_1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=-1} = 0; \tag{7_2}$$

$$G \,|_{t=t_0+0} = \delta(x - \xi); \tag{7_3}$$

$$k_2\, a^2\, G \,|_{\xi=-0} = k_1\, G \,|_{\xi=+0}; \tag{7_4}$$

$$a^2 \frac{\partial G}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=-0} = \frac{\partial G}{\partial \xi} \Bigg|_{\xi=+0}. \tag{7_5}$$

Такая функция Грина построена в [8]. При этом

$$G(x, t;\ \xi, t_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-t_0)}} \cdot \dfrac{1}{2a}\left\{\delta \exp\left[-\dfrac{(x-\xi-2)^2}{4a^2(t-t_0)}\right] + \right. \\ + \exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}\right] + \delta\exp\left[-\dfrac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}\right] + \\ \left. + \exp\left[-\dfrac{(x+\xi+2)^2}{4a^2(t-t_0)}\right] + o\left(\exp\left[-\dfrac{\varkappa}{t-t_0}\right]\right)\right\} \\ \qquad \text{при } -1 < x;\ \xi < 0; \\ \dfrac{1}{a(1+\lambda)\sqrt{\pi(t-t_0)}}\left\{\exp\left[-\dfrac{\left(x-\dfrac{\xi}{a}\right)^2}{4(t-t_0)}\right] + \right. \\ \left. + o\left(\exp\left[-\dfrac{\varkappa}{t-t_0}\right]\right)\right\} \text{ при } -1 < \xi < 0 < x; \\ \dfrac{\lambda}{(1+\lambda)\sqrt{\pi(t-t_0)}}\left\{\exp\left[-\dfrac{\left(\xi-\dfrac{x}{a}\right)^2}{4(t-t_0)}\right] + \right. \\ \left. + o\left(\exp\left[-\dfrac{\varkappa}{t-t_0}\right]\right)\right\} \text{ при } -1 < x < 0 < \xi; \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi(t-t_0)}}\left\{\exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4(t-t_0)}\right] - \right. \\ \left. \delta\exp\left[-\dfrac{(x+\xi)^2}{4(t-t_0)}\right] + o\left(\exp\left[-\dfrac{\varkappa}{t-t_0}\right]\right)\right\} \\ \qquad \text{при } 0 < x;\ \xi < \infty. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $\lambda = \dfrac{k_2\, a}{k_1}$; $\delta = \dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

Используя условия (2.2), (2.3) и (2.6), окончательно получим

$$u(x, t) = \int_{t_0}^{t} G(x, t;\ s(\tau),\ \tau)\ u_\xi(s(\tau),\ \tau)\, d\tau + \\ + \int_{-1}^{l} \psi(\xi)\ G(x, t;\ \xi,\ t_0)\, d\xi. \quad (9)$$

Пусть $g(x, t;\ \xi, t_0)$ определена условиями

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = -\frac{\partial G}{\partial x};$$

$$g\,|_{\xi=-1} = 0. \tag{10}$$

Дифференцируя (9) по x, совершая интеграцию по частям с учетом (4) и (10), получим

$$u_x(x, t) = \int_{t_0}^{t} G_x(x, t;\ s(\tau),\ \tau)\ u_x(s(\tau), \tau)\, d\tau + \\ + \int_{-1}^{l} g(x, t;\ \xi,\ t_0)\ \dot{\psi}_0(\xi)\, d\xi. \tag{11}$$

Положим

$$v(t) = u_x(s(\tau), \tau). \tag{12}$$

Перейдем в (11) к пределу при $x \to s(t) - 0$, пользуясь теоремой о разрывах потенциала двойного слоя, согласно которой

$$\lim_{x \to s(t) - 0} \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, G_x(x, t;\ s(\tau),\ \tau)\, d\tau = \\ = \frac{1}{2}\, v(t) + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, G_x(s(t), t;\ s(\tau),\ \tau)\, d\tau.$$

Получим

$$v(t) = 2\int_{t_0}^{t} G_x(s(t),\ t;\ s(\tau),\ \tau)\ v(\tau)\, d\tau + \\ + 2\int_{-1}^{l} \dot{\psi}(\xi)\, g(s(t), t;\ \xi, t_0)\, d\xi. \tag{13}$$

К (13) следует присоединить условие (2.7) в интегральной форме, т. е.

$$s(t) = l - \alpha(t - t_0) + \varepsilon \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Ниже нас будут интересовать величины

$$s(t),\ \frac{ds}{dt},\ v(t),\ \sqrt{t - t_0}\ \dot{v}(t).$$

Поэтому построим систему для их определения.
Пусть

$$w(t) = \sqrt{t - t_0}\,\dot{v}(t);$$
$$z(t) = \dot{s}(t). \tag{15}$$

Из (13) видим, что

$$v(t_0) = \dot{\psi}(l). \tag{16}$$

Заметим, что

$$\frac{dG}{d\tau} = \frac{\partial G}{\partial \tau} + \frac{\partial G}{\partial \xi}\,\dot{s}(\tau). \tag{17}$$

Дифференцируя (13) по t, пользуясь (17) и (7.1), совершая в нужных местах интеграцию по частям с учетом (16), получим

$$\frac{dv}{dt} = -\,2\dot{\psi}(l)\,g(s(t), t;\ l;\ t_0)\,\dot{s}(t_0) - 2\ddot{\psi}(l)\,g(s(t), t;\ l, t_0) +$$
$$+\,2\int_{-l}^{l} \ddot{\psi}(\xi)\,\dot{s}(t)\,G(s(t), t;\ \xi, t_0)\,d\xi + 2\int_{-l}^{l} \dddot{\psi}(\xi)\,g(s(t), t;\ \xi, t_0)\,d\xi -$$
$$-\,2\int_{t_0}^{t} [g_x(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\,\dot{s}(t) - G_x(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\,\dot{s}(\tau)]\,\dot{s}(\tau)\,v(\tau)\,d\tau -$$
$$-\,2\int_{t_0}^{t} g(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\,v(\tau)\,\ddot{s}(\tau)\,d\tau + 2\int_{t_0}^{t} G_x(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\,\dot{v}(\tau)\,d\tau +$$
$$+\,2\int_{t_0}^{t} [G(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\,\dot{s}(t) - g(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\,\dot{s}(\tau)]\,\dot{v}(\tau)\,d\tau.$$

Учитывая, далее, (15) и следующее из (2.7) равенство

$$\ddot{s}(\tau) = \frac{\varepsilon w(\tau)}{\sqrt{\tau - t_0}}, \tag{18}$$

получаем окончательно

$$w(t) = -2\,[\dot\psi(l)\,z(t_0) + \ddot\psi(l)]\sqrt{t-t_0}\,g(s(t), t; l, t_0) +$$

$$+ 2\int_{-1}^{l}[\dddot\psi(\xi)\,g(s(t), t; \xi, t_0) + \ddot\psi(\xi)\,z(t)\,G(s(t), t;\ \xi, t_0)]\sqrt{t-t_0}\,d\xi -$$

$$-2\int_{t_0}^{t}[g_x(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\,z(t) - G_x(s(t), t; s(\tau), \tau)\ z(\tau)]\sqrt{t-t_0}\,\times$$

$$\times\, z(\tau)\,v(\tau)\,d\tau + 2\int_{t_0}^{t}\{G(s(t), t;\ s(\tau)\ \tau)\,z(t) - [\varepsilon v(\tau) + z(\tau)]\times \tag{19}$$

$$\times\, g(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\}\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w(\tau)\,d\tau +$$

$$+2\int_{t_0}^{t} G_x(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w(\tau)\,d\tau \equiv$$

$$\equiv W\ (t/\dot\psi, \ddot\psi, \dddot\psi, s, z, v, w) = \sum_{i=1}^{5} W_i.$$

Таким образом, получим систему

$$\begin{cases} s(t) = l + \int_{t_0}^{t} z(\tau)\,d\tau; \\ z(t) = -\alpha + \varepsilon v(t); \\ v(t) = \dot\psi(l) + \int_{t_0}^{t}\dfrac{w(\tau)}{\sqrt{\tau-t_0}}\,d\tau \equiv V(t/\dot\psi, w); \\ w(t) = W(t/\dot\psi, \ddot\psi, \dddot\psi, s, z, v, w), \end{cases} \tag{20}$$

где $W(t/\dot\psi, \ddot\psi, \dddot\psi, s, z, v, w)$ определено в (19).

Аналогично тому, как это сделано в [9], можно доказать следующую теорему эквивалентности.

Если $s(t)$, $z(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ — решение системы (19), (20), причем $z(t)$ и $w(t)$ ограничены при $t \geqslant t_0$, а $u(x, t)$ определено из (9), то $u(x, t)$ и $s(t)$ — решение задачи (2.1) — (2.7).

И обратно: если $u(x, t)$ и $s(t)$ — решение исходной задачи, а $z(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ определены равенствами (12), (15), то $s(t)$, $z(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ являются решением системы (19), (20).

Для доказательства аналитичности $u(x, t, \varepsilon)$, $s(t, \varepsilon)$ по параметру ε будем доказывать более сильное утверждение, а именно докажем, что $\sqrt{t-t_0}\,\dfrac{\partial u(x, t, \varepsilon)}{\partial t}$ есть аналитическая функция параметра ε.

Отсюда будет следовать необходимая для нас аналитичность $u(x, t, \varepsilon)$ для $t > t_0$ в предположении, что $u(x, t_0, \varepsilon) = \psi(x, \varepsilon)$ есть аналитическая функция параметра ε.

Для нахождения $\dfrac{\partial u(x, t, \varepsilon)}{\partial t}$ воспользуемся выражением (9) для $u(x, t, \varepsilon)$ и продифференцируем его по t, считая $-1 < x < s(t)$.

Воспользовавшись (17), совершая в нужных местах интеграцию по частям, учитывая (7.2), условия (4), (16), формально получим в обозначениях (15)

$$\sqrt{t-t_0}\,\frac{\partial u(x, t, \varepsilon)}{\partial t} = \int\limits_{t_0}^{t} G(x, t; s(\tau, \varepsilon), \tau)\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\, w(\tau, \varepsilon)\, d\tau -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t} \sqrt{t-t_0}\, g_x(x, t;\ s(\tau, \varepsilon), \tau)\, z(\tau, \varepsilon)\, v(\tau, \varepsilon)\, d\tau + \tag{21}$$

$$+ \int\limits_{-1}^{l} \ddot{\psi}(\xi)\, \sqrt{t-t_0}\, G(x, t;\ \xi, t_0)\, d\xi.$$

Пусть ε принимает комплексные значения, причем $|\varepsilon| < E$.

Правая часть (21) есть совокупность тепловых потенциалов простого и двойного слоев и интеграла Пуассона, являющихся, как показано Жевре [7], аналитическими функциями от x при $x \neq s(t)$.

Очевидно, что если $s(t, \varepsilon)$ аналитично по ε и одновременно аналитичны по ε и $z(t, \varepsilon)$, $v(t, \varepsilon)$ и $w(t, \varepsilon)$, то все интегралы в (21), а вместе с ними и $\sqrt{t-t_0}\,\dfrac{\partial u(x, t, \varepsilon)}{\partial t}$ будут аналитическими функциями от ε при $-1 + \delta \leqslant x \leqslant s(t) - \delta < s(t)$, где $\delta > 0$ произвольно мало.

Для доказательства аналитичности $s(t, \varepsilon)$, $z(t, \varepsilon)$, $v(t, \varepsilon)$ и $w(t, \varepsilon)$:

1) формально продифференцируем (19), (20) по ε и докажем существование решения системы, продифференцированной по параметру в интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \sigma''$;

2) докажем, что в некотором интервале $t_0 \leqslant t \leqslant \sigma_0 \leqslant \sigma''$

$$\frac{s(t, \varepsilon) - s(t, \varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'}; \qquad \frac{z(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'};$$

$$\frac{v(t, \varepsilon) - v(t, \varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'}; \qquad \frac{w(t, \varepsilon) - w(t, \varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'}$$

сходятся при $\varepsilon \to \varepsilon'$ к решению системы, продифференцированной по параметру, т. е. к $s_\varepsilon(t)$, $z_\varepsilon(t)$, $v_\varepsilon(t)$, $w_\varepsilon(t)$.

Для сокращения записи в дальнейшем не будем указывать зависимость от ε, если в этом не будет особой необходимости.

Существование решения в малом системы (*19*), (*20*) *при комплексном* ε.

Пусть C_{σ', N_i} — пространство непрерывных при $t_0 \leqslant t \leqslant -\sigma'$ функций $v(t)$ с нормой $\| v \| = \max\limits_t | v(t) |$, причем $\| v \| < N_i$. Пусть, далее, $v \in C_{\sigma', N_1}$, $w \in C_{\sigma', N_2}$ и $C_{\sigma'}$ является топологическим произведением пространств C_{σ', N_1} и C_{σ', N_2} с нормой $\| x \| = \max \{\| v \|, \| w \|\}$.

Покажем, что операторы V и W осуществляют преобразование пространства $C_{\sigma'}$ в себя и являются преобразованиями сжатия.

В таком случае $C_{\sigma'}$ имеет одну неподвижную точку $x = \{v, w\}$, что доказывает существование единственного решения системы (19), (20) в промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant \sigma'$.

Итак, пусть

$$\begin{gathered} |\psi|, |\dot{\psi}|, |\ddot{\psi}|, |\dddot{\psi}| < M; \\ |v| < N_1; \ |w| < N_2 \end{gathered} \tag{22}$$

для $t \in [t_0, T]$. Считаем $T < 1$.

Покажем тогда, что

$$|V| < N_1; \ |W| < N_2.$$

Из (20) имеем

$$|z(t)| < 2 |\varepsilon| N_1, \tag{23}$$

если $N_1 > \frac{|\alpha|}{|\varepsilon|}$, а также

$$|s(t) - s(\tau)| < 2 |\varepsilon| N_1 (t - \tau). \tag{24}$$

Пусть $s(t) = s_1(t) + i\, s_2(t)$.

Тогда из (20) следует:

$$\begin{aligned} &| s_1(t) | > l - 2 | \varepsilon | N_1 (t - t_0); \\ &| s_2(t) | < 2 | \varepsilon | N_1 (t - t_0). \end{aligned} \tag{25}$$

Поэтому в промежутке времени $t_0 \leqslant t \leqslant T_0'$, где $T_0' < t_0 + \frac{l}{4|\varepsilon|N_1}$, имеют место неравенства

$$| s_2(t) | \leqslant s_1(t) | - \delta, \text{ где } \delta > 0; \tag{26}$$

$$| s_1(t) | \geqslant \rho > 0, \text{ где } \rho = \rho(|\varepsilon|, N_1), \text{ т. е.}$$

$$| \mathrm{Re}\,(s(t) + s(\tau)) | \geqslant 2\rho > 0. \tag{27}$$

Вследствие этого имеем

$$\left| \exp\left\{-\frac{[s(t) + s(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right| < \\ < \exp\left\{-\frac{[s_1(t) + s_1(\tau)]^2 - [s_2(t) + s_2(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\} < 1. \tag{28}$$

Далее,

$$\exp\left\{-\frac{s(t) - s(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\}\right| < \exp\left\{-\mathrm{Re}\frac{[s(t) - s(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\} < \\ < \exp\left\{\left|\frac{s(t) - s(\tau)}{4(t-\tau)}\right| \cdot | s(t) - s(\tau) |\right\} K(N_1). \tag{29}$$

Ниже воспользуемся обозначениями:

$$G = \begin{cases} G_1 \ldots -1 < x;\ \xi < 0; \\ G_2 \ldots -1 < \xi < 0 < x; \\ G_3 \ldots -1 < x < 0 < \xi; \\ G_4 \ldots 0 < x;\ \xi < \infty; \end{cases} \qquad g = \begin{cases} g_1 \ldots -1 < x;\ \xi < 0; \\ g_2 \ldots -1 < \xi < 0 < x; \\ g_3 \ldots -1 < x < 0 < \xi; \\ g_4 \ldots 0 < x;\ \xi < \infty. \end{cases} \tag{30}$$

Учитывая полученные неравенства, оценим величины $| W_i |$, $(i = 1, \ldots, 5)$. Все они оцениваются аналогично. В качестве образца приведем оценку $| W_5 |$:

$$| W_5 | < 2 \int_{t_0}^{t} | w(\tau) | \sqrt{\frac{t - t_0}{\tau - t_0}} \left| \frac{\partial}{\partial x} G_4(s(t), t; s(\tau), \tau) \right| d\tau < \\ < \frac{N_2 \sqrt{t - t_0}}{\sqrt{\pi}} (| J_1 | + | J_2 |).$$

Здесь

$$|J_1| < \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{\sqrt{\tau - t_0}} \frac{|s(t) - s(\tau)|}{2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \left| \exp\left\{-\frac{[s(t)-s(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\}\right| d\tau <$$

$$< |\varepsilon| N_1 \pi K(N_1),$$

$$|J_2| < \delta \int\limits_{t_0}^{t} \frac{2}{\sqrt{\tau - t_0}} \frac{|s(t) + s(\tau)| \cdot |s(t) + s(\tau)|}{|s(t) + s(\tau)| . 4(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \left| \exp\left\{-\frac{[s(t)+s(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\}\right| d\tau.$$

Обозначая $\alpha_1 = \max\limits_{0 \leqslant \alpha < \infty} \alpha \exp(-\alpha)$ и учитывая (27), (28), получим

$$|J_2| < \frac{\delta \alpha_1 \pi}{\rho}.$$

Итак,

$$|W_5| < a_5\left(|\varepsilon|, N_1, N_2, \frac{1}{\rho}\right) \sqrt{t - t_0}.$$

Произведя оценку остальных членов в (19), используя (22) — (29), получим

$$|W| < A(|\varepsilon|, M_1, N_1) + B\left(|\varepsilon|, M, N_1, N_2, \frac{1}{\rho}\right) \sqrt{t - t_0}.$$

Имеем также

$$|V| < M + 2N_2 \sqrt{t - t_0}.$$

Выберем $N_1 > \max\left\{2M, \frac{|\alpha|}{|\varepsilon|}\right\}$ и зафиксируем N_1. Выберем теперь N_2 так, чтобы было $N_2 > 2A(|\varepsilon|, M, N_1)$ при $|\varepsilon| < E$ и зафиксируем его.

При фиксированных N_1 и N_2 можно выбрать T_0'' так, что при $t \in [t_0, T_0]$, где $T_0 = \min(1, T_0', T_0'')$, будут выполняться одновременно неравенства $|V| < N_1$ и $|W| < N_2$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что операторы V и W осуществляют сжатое отображение.

Пусть

$$| v - v_0 | = \Delta_1, \ | w - w_0 | = \Delta_2. \tag{31}$$

Тогда из (20) следует

$$\begin{gathered} | z - z_0 | < | \varepsilon | \Delta_1; \\ | s - s_0 | < | \varepsilon | \Delta_1 (t - t_0). \end{gathered} \tag{32}$$

Имеем

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{5} \delta W_i = \sum_{i=1}^{5} W_i - W_{i0},$$

где W_i определены согласно (19), а W_{i0} получены из них подстановкой s_0, z_0, v_0, w_0 вместо s, z, v, w.

Оценивая $| \delta W_1 |$, легко получим

$$| \delta W_1 | < b_1 (| \varepsilon |, M) \Delta_1 \sqrt{t - t_0}.$$

Далее, $\delta W_2 = \delta W_2' = + \delta W_2''$, где

$$W_2' = 2 \int_{-1}^{0} [\dddot{\psi} (\xi) g_2 (s (t), t; \ \xi, t_0) + \ddot{\psi} (\xi) \times \\ \times z (t) \ G_2 (s (t), t; \ \xi, t_0)] \sqrt{t - t_0} \, d\xi;$$

$$W_2'' = 2 \int_{0}^{l} [\dddot{\psi} (\xi) g_4 (s (t), t; \ \xi, t_0) + \ddot{\psi} (\xi) \times \\ \times z (t) \ G_4 (s (t), t; \ \xi, t_0)] \sqrt{t - t_0} \, d\xi.$$

Покажем оценку

$$| I | = 2 \left| \int_{-1}^{0} \dddot{\psi} (\xi) [z (t) G_2 (s (t), t; \ \xi, t_0) - \right. \\ \left. - z_0 (t) G_2 (s (t), t; \xi, t_0)] \sqrt{t - t_0} \, d\xi \right|;$$

$$| I | < \frac{2M}{a (1 + \lambda) \sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-1}^{0} | z (t) - z_0 (t) | \cdot \left| \exp \left\{ \frac{- \left[s (t) - \frac{\xi}{a} \right]^2}{4 (t - t_0)} \right\} \right| d\xi + \right. \\ + \int_{-1}^{0} | z_0 (t) | \cdot \left| \exp \left\{ - \frac{\left[s (t) - \frac{\xi}{a} \right]^2}{4 (t - t_0)} \right\} - \exp \left\{ - \frac{\left[s_0 (t) - \frac{\xi}{a} \right]^2}{4 (t - t_0)} \right\} \right| d\xi = \\ = \frac{2 M}{a (1 + \lambda) \sqrt{\pi}} (|I_1| + | I_2|).$$

Здесь $|I_1| < |\varepsilon| \Delta_1$;

$$|I_2| < 2|\varepsilon| N_1 \int\limits_{-1}^{0} d\xi \left| \int\limits_{s_0(t)-\frac{\xi}{a}}^{s(t)-\frac{\xi}{a}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \exp\left\{-\frac{\zeta^2}{4(t-t_0)}\right\} d\zeta \right|.$$

Делая замену $\zeta = z + s_0 - \frac{\xi}{a}$, получим

$$|I_2| < 2a|\varepsilon| N_1 \int\limits_{-1}^{0} d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left| \int\limits_{0}^{s-s_0} \exp\left\{-\frac{\left[z+s_0-\frac{\xi}{a}\right]^2}{4(t-t_0)}\right\} dz \right| =$$

$$= 2a|\varepsilon| N_1 \left| \int\limits_{0}^{s-s_0} \exp\left\{-\frac{\left[z+s_0-\frac{\xi}{a}\right]^2}{4(t-t_0)}\right\}\Bigg|_{\xi=-1}^{\xi=0} dz \right| <$$

$$< 2a|\varepsilon| N_1 \cdot |\varepsilon| \Delta_1 \sqrt{t-t_0}.$$

Итак, имеем

$$|I| < c_1(|\varepsilon|, M)\Delta_1 + c_2(|\varepsilon|, M, N_1)\Delta_1 \sqrt{t-t_0}.$$

Проведя аналогичным образом оценки остальных членов в $|\delta W_2|$, получим

$$|\delta W_2| < b_2'(|\varepsilon|, M)\Delta_1 + b_2''(|\varepsilon|, M, N_1)\Delta_1 \sqrt{t-t_0}.$$

Для $|\delta W_3|$ имеем

$$|\delta W_3| < 2\left\{ \int\limits_{t_0}^{t} \left[\left| \frac{\partial}{\partial x} g_4(s(t), t; s(\tau), \tau) \right| \cdot |z(t) - z_0(t)| + \right.\right.$$

$$+ \left| \frac{\partial}{\partial x} G_4(s(t), t; s(\tau), \tau) \right| \cdot |z(\tau) - z_0(\tau)| \Big] \sqrt{t-t_0}\ |z(\tau)| \times$$

$$\times |v(\tau)|\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} \left[\left| \frac{\partial}{\partial x} g_4(s(t), t; s(\tau), \tau) \right| \cdot |z_0(t)| + \right.$$

$$+ \left| \frac{\partial}{\partial x} G_4(s(t); s(\tau), \tau) \right| \cdot |z_0(\tau)| \Big] \cdot |z(\tau) - z_0(\tau)|\, |v(\tau)| \sqrt{t-t_0}\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \left[\left| \frac{\partial}{\partial x} g_4(s(t), t; s(\tau), \tau) \right| \cdot |z_0(t)| + \left| \frac{\partial}{\partial x} G_4(s(t), t; s(\tau), \tau) \right| \times \right.$$

$$\times |z_0(\tau)| \Big] \cdot |v(\tau) - v_0(\tau)| \cdot |z_0(\tau)| \sqrt{t-t_0}\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Big[\Big| \frac{\partial}{\partial x} g_4(s(t), t;\ s(\tau), \tau) - \frac{\partial}{\partial x} g_4(s_0(t), t;\ s_0(\tau), \tau) \Big| \cdot |z_0(t)| +$$

$$+ \Big| \frac{\partial}{\partial x} G_4(s(t), t;\ s(\tau), \tau) - \frac{\partial}{\partial x} G_4(s_0(t), t;\ s_0(\tau), \tau) \Big| \cdot |z_0(\tau)| \Big] \times$$

$$\times |v_0(\tau)| \cdot |z_0(\tau)| \cdot \sqrt{t-t_0}\, d\tau \Big\} = |\delta W_3'| + |\delta W_3''| + |\delta W_3'''| + |\delta W_3^*|.$$

Можно показать, что

$$|\delta W_3'| + |\delta W_3''| + |\delta W_3'''| < b_3'\left(|\varepsilon|, N_1, \frac{1}{\rho}\right)\Delta_1 \sqrt{t-t_0}.$$

Оценим $|\delta W_3^*|$:

$$|I| = 2 \int_{t_0}^{t} \Big| \frac{\partial}{\partial x} g_4(s(t), t; s(\tau), \tau) - \frac{\partial}{\partial x} g_4(s_0(t), t;\ s_0(\tau), \tau) \Big| \times$$

$$\times |z_0(t)| \cdot |v_0(\tau)| \cdot |z_0(\tau)| \sqrt{t-t_0}\, d\tau = (|I_1| + |I_2|).$$

Здесь

$$|I_1| < \frac{4|\varepsilon|^2 N_1^3}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \Big| \frac{s(t)-s(\tau)}{2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{[s(t)-s(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\} -$$

$$- \frac{s_0(t)-s_0(\tau)}{2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{[s_0(t)-s_0(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\} \Big| d\tau <$$

$$< b_3^{\mathrm{II}}(|\varepsilon|, N_1)\Delta_1 \sqrt{t-t_0};$$

$$|I_2| < \frac{4\delta|\varepsilon|^2 N_1^3}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \Big| \frac{s(t)+s(\tau)}{2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{[s(t)+s(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\} -$$

$$- \frac{s_0(t)+s_0(\tau)}{2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{[s_0(t)+s_0(\tau)]^2}{4(t-\tau)}\right\} \Big| d\tau =$$

$$= \frac{4\delta|\varepsilon|^2 N_1^3}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{t-\tau} \Big| \int_{\frac{s_0(t)+s_0(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\frac{s(t)+s(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}} \frac{\partial}{\partial z}(z\exp\{-z^2\})\, dz \Big| d\tau.$$

Делая подстановку $z = \frac{\zeta}{2\sqrt{t-\tau}}$, получим

$$|I_2| < \frac{4\delta\,|\varepsilon|^2 N_1^3}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{t-\tau} \left| \int_{s_0(t)+s_0(\tau)}^{s(t)+s(\tau)} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{ -\frac{\zeta^2}{4(t-\tau)} \right\} \right) d\zeta \right| d\tau.$$

Но

$$\left| \frac{1}{t-\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{ -\frac{\zeta^2}{4(t-\tau)} \right\} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{ -\frac{\zeta^2}{4(t-\tau)} \right\} \left[1 - \frac{\zeta^2}{2(t-\tau)} \right] \right| <$$

$$< \frac{1}{2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{ -\frac{\rho^2}{4(t-\tau)} \right\} \left[1 - \frac{\rho^2}{2(t-\tau)} \right] = A(\rho),$$

где $A(\rho) \to \infty$ при $\rho \to \infty$, т. е.

$$|I_2| < b_3^{'''}(|\varepsilon|, N_1, A(\rho))\,\Delta_1 \sqrt{t-t_0}.$$

Итак, $|\delta W_3^*| < b_3^*(|\varepsilon|, N_1, A(\rho))\,\Delta_1 \sqrt{t-t_0}$, следовательно,

$$|\delta W_3| < b_3(|\varepsilon|, N_1, A(\rho))\,\Delta_1 \sqrt{t-t_0}.$$

Далее,

$$|\delta W_4| < 2 \int_{t_0}^{t} \{ |z(t) - z_0(t)|\, |G_4(s(t), t;\ s(\tau), \tau)| +$$

$$+ [|\varepsilon|\, |v(\tau) - v_0(\tau)| + |z(\tau) - z_0(t)|] \cdot |g_4(s(t), t;\ s(\tau), \tau)| \} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{t-t}{\tau - t_0}}\, |w(\tau)|\, d\tau + 2 \int_{t_0}^{t} \{ |z_0(t)| \cdot |G_4(s(t), t;\ s(\tau), \tau)| +$$

$$+ [|\varepsilon|\, |v_0(\tau)| + |z_0(\tau)|]\, |g_4(s(t), t;\ s(\tau), \tau)\} \sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\, |w(\tau) -$$

$$- w_0(\tau)|\, d\tau + 2 \int_{t_0}^{t} \{ |z_0(t)|\, |G_4(s(t), t; s(\tau)\ \tau) - G_4(s_0(t), t; s_0(\tau), \tau)| +$$

$$+ [|\varepsilon|\, |v_0(\tau)| + |z_0(\tau)|]\, |g_4(s(t), t; s(\tau), \tau) - g_4(s_0(t), t; s_0(\tau), \tau)| \} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\, |w_0(\tau)|\, d\tau = |\delta W_4'| + |\delta W_4''| + |\delta_4'''|.$$

Легко получить, что

$$|\delta W_4'| < c_4'(|\varepsilon|, N_2)\Delta_1 \sqrt{t-t_0};$$

$$|\delta W_4''| < c_4''(|\varepsilon|, N_1)\Delta_2 \sqrt{t-t_0}.$$

$$|\delta W_4'''| = (|I_1| + |I_2|),$$

где

$$|I_1| < \frac{2|\varepsilon| N_1}{\sqrt{\pi}} N_2 \sqrt{t-t_0}\,(j_1| + |j_2|).$$

Здесь

$$|j_1| < \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t_0}\,\sqrt{t-\tau}} \left| \int_{\frac{s_0(t)-s_0(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\frac{s(t)-s(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}} \frac{\partial}{\partial\zeta} \exp\{-\zeta^2\}\, d\zeta \right| <$$

$$< \alpha_2 \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\sqrt{\tau-t_0}} \left| \frac{s(t)-s(\tau)}{t-\tau} - \frac{s_0(t)-s_0(\tau)}{t-\tau} \right| d\tau <$$

$$< 2\alpha_2 |\varepsilon| \Delta_1 \sqrt{t-t_0},$$

где $\alpha_2 = \max\limits_{0 \leqslant \alpha < \infty} \alpha \exp\{-\alpha^2\}$;

$$|j_2| < 2\delta \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t_0}\,\sqrt{t-\tau}} \left| \int_{\frac{s_0(t)+s_0(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}}^{\frac{s(t)+s(\tau)}{2\sqrt{t-\tau}}} \zeta \exp\{-\zeta^2\}\, d\zeta \right| =$$

$$= 2\delta \int_{t_0}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau-t_0}\,\sqrt{t-\tau}} \left| \int_{s_0(t)+s_0(\tau)}^{s(t)+s(\tau)} \frac{zz}{4\sqrt{t-\tau\, z}} \right.$$

$$\left. \exp\left\{-\frac{z^2}{4(t-\tau)}\right\} \frac{dz}{\sqrt{t-\tau}} \right| < \frac{2\delta\alpha_1\pi}{\rho} |\varepsilon| \Delta_1 \sqrt{t-t_0}.$$

Таким образом,

$$|I_1| < c_4'''\left(|\varepsilon|, N_1, N_2, \frac{1}{\rho}\right) \Delta_1 \sqrt{t-t_0},$$

а следовательно, оценивая $|I_2|$ так же, как $|I_1|$, получим

$$|\delta W_4| < b_4'\left(|\varepsilon|, N_1, N_2, \frac{1}{\rho}\right)\Delta_1 \sqrt{t-t_0} + b_4''(|\varepsilon| N_1)\Delta_2 \sqrt{t-t_0}.$$

Аналогично предыдущему можно показать, что

$$|\delta W_5| < b_5^{\mathrm{I}}(|\varepsilon|, N_1, N_2, A(\rho))\Delta_1 \sqrt{t-t_0} + b_5^{\mathrm{II}}\left(|\varepsilon|, N_1, \frac{1}{\rho}\right)\Delta_2 \sqrt{t-t_0}.$$

Собирая все оценки, окончательно получим

$$\Delta_2 < B(|\varepsilon|, M)\Delta_1 + C(|\varepsilon|, M, N_1, N_2, A(\rho))\Delta_1 \sqrt{t-t_0} +$$

$$+ D\left(|\varepsilon|, N_1, \frac{1}{\rho}\right)\Delta_2 \sqrt{t-t_0}.$$

Но из (20) следует, что $\Delta_1 < 2\Delta_2 \sqrt{t-t_0}$. Таким образом,

$$\Delta_2 < A(|\varepsilon|, M, N_1, N_2, A(\rho))\Delta_2 \sqrt{t-t_0},$$

т. е. если $t \in [t_0, T_0^{\mathrm{III}}]$, где T_0^{III} достаточно мало, то операторы V и W осуществляют сжатое отображение $C_{\sigma'}$ в себя, где $\sigma' = \min(T_0, T_0^{\mathrm{III}})$.

Это означает существование единственного решения системы (19), (20) в круге $|\varepsilon| < E$ для $t \in [t_0, \sigma']$.

Здесь $E > 0$ — некоторая, произвольным образом выбранная константа, σ' зависит от E и стремится к нулю с $E \to \infty$, $\rho \to 0$.

1. Дифференцируя (19), (20) формально по ε, получим следующую систему для $r(t) = s_\varepsilon(t)$, $p(t) = z_\varepsilon(t)$, $q(t) = v_\varepsilon(t)$, $\Theta(t) = w_\varepsilon(t)$:

$$\left\{\begin{aligned} & r(t) = \int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau; \\ & p(t) = v(t) + \varepsilon q(t); \\ & q(t) = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\dot{\psi}(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\Theta(\tau)}{\sqrt{\tau - t_0}}\,d\tau \equiv Q\left(t \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\dot{\psi}, \Theta\right); \\ & \Theta(t) = R\left(t \mid \dot{\psi}, \ddot{\psi}, \dddot{\psi}, \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\dot{\psi}, \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ddot{\psi}, \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\dddot{\psi}, s, z, v, w, r, p, q, \Theta\right), \end{aligned}\right. \tag{33}$$

где

$$R \equiv -2\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\dot{\psi}(l)\,z(t_0)+\dot{\psi}(l)\,p(t_0)+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ddot{\psi}(l)\right]\sqrt{t-t_0}\,g(s(t),t;l,t_0)-$$

$$-2\left[\dot{\psi}(l)\,z(t_0)+\ddot{\psi}(l)\right]\sqrt{t-t_0}\,g_x(s(t),t;\;l,t_0)\,r(t)+$$

$$+2\int_{-1}^{l}\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ddot{\psi}(\xi)\,g(s(t),t;\;\xi,t_0)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ddot{\psi}(\xi)+\ddot{\psi}(\xi)\,p(t)\right)\,G(s(t),t;\;\xi,t_0)\right]\sqrt{t-t_0}\,d\xi+$$

$$+2\int_{-1}^{l}[\dddot{\psi}(\xi)\,g_x(s(t),t;\xi,t_0)+\ddot{\psi}(\xi)\,z(t)\,G_x(s(t),t;\xi,t_0)]\,r(t)\sqrt{t-t_0}\,d\xi-$$

$$-2\int_{t_0}^{t}[g_x(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\,p(t)-$$

$$-G_x(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\,p(\tau)]\sqrt{t-t_0}\,z(\tau)\,v(\tau)\,d\tau-$$

$$-2\int_{t_0}^{t}\{[g_t(s(t),t;s(\tau),\tau)\,r(t)-G_t(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\,r(\tau)]\,z(t)-$$

$$-[G_t(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\;r(t)- \tag{34}$$

$$-g_t(s(t),t;\;s(\tau)\;\tau)\,r(\tau)]\,z(\tau)\}\sqrt{t-t_0}\,z(\tau)\,v(\tau)\,d\tau-$$

$$-2\int_{t_0}^{t}[g_x(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\,z(t)-$$

$$-G_x(s(t),t;\;s(\tau),\;\tau)\,z(\tau)]\cdot[p(\tau)\,v(\tau)+z(\tau)\,q(\tau)]\sqrt{t-t_0}\,d\tau+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\{G(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\,p(t)-$$

$$-[v(\tau)+\varepsilon q(\tau)+p(\tau)]\,g(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\}\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w(\tau)\,d\tau+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\{[G_x(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\,r(t)-g_x(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\,r(\tau)]\,z(t)-$$

$$-[\varepsilon\,v(\tau)+z(\tau)]\;[g_x(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\,r(t)-$$

$$-G_x(s(t),t;\;s(\tau),\tau)\;r(\tau)]\}\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w(\tau)\,d\tau+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}\{G(s(t),t;\ s(\tau),\tau)\,z(t)-$$

$$-[\varepsilon v(\tau)+z(\tau)]\,g(s(t),t;\ s(\tau),\tau)\}\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,\Theta(\tau)\,d\tau+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}[G_t(s(t),t;\ s(\tau),\tau)\,r(t)-$$

$$-g_t(s(t),t;\ s(\tau),\tau)\,r(\tau)]\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w(\tau)\,d\tau+$$

$$+2\int_{t_0}^{t}G_x(s(t),t;\ s(\tau),\tau)\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,\Theta(\tau)\,d\tau=\sum_{i=1}^{12}R_i.$$

Пусть $C_{\sigma''}=C_{\sigma'',M_1}C_{\sigma'',M_2}$ — пространство, определенное выше. Пусть, далее, $q(t)\in C_{\sigma'',M_1}$, $\Theta(t)\in C_{\sigma'',M_2}$.

Докажем, что операторы Q и R преобразуют $C_{\sigma''}$ в себя и осуществляют преобразование сжатия.

Итак, предположим, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\dot{\psi}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\ddot{\psi}\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\dddot{\psi}\right|<M_0;$$

$$|q(t)|<M_1;\ |\Theta(t)|<M_2$$

при $t\in[t_0,\sigma']$ и докажем, что $|Q|<M_1$ и $|R|<M_2$.

Для доказательства нам потребуются неравенства, которые следуют из (33):

$$|p(t)|<N_1+|\varepsilon|M_1;$$

$$|r(t)|<(N_1+|\varepsilon|M_1)\ (t-t_0);$$

$$|r(t)-r(\tau)|<(N_1+|\varepsilon|M_1)\ (t-\tau). \tag{35}$$

Используя (35), а также (22) — (29), получим

$$|R|<B_1(|\varepsilon|,M_0,M,N_1,M_1)+$$

$$+B_2\left(|\varepsilon|,M,N_1,N_2,M_1,M_2,\frac{1}{\rho}\right)\sqrt{t-t_0}.$$

Но из (33) имеем $|Q|<M_0+2M_2\sqrt{t-t_0}$. Выберем $M_1>2M_0$ и зафиксируем его. Выберем теперь M_2 так, чтобы выполнялось $M_2>2B_1(|\varepsilon|,M_0,M,N_1,M_1)$ при $|\varepsilon|<E$.

При фиксированных M_1 и M_2 можно найти такое T_0^*, что для $t \in [t_0, T_0^*]$ будут одновременно выполняться: $|Q| < M_1$; $|R| < M_2$.

Для доказательства того, что операторы Q и R осуществляют преобразование сжатия, обозначим

$$|q - q_0| = \nabla_1;$$
$$|\Theta - \Theta_0| = \nabla_2. \tag{36}$$

Из (33) следуют неравенства:

$$|p - p_0| < |\varepsilon| \nabla_1;$$
$$|r - r_0| < |\varepsilon| \nabla_1 (t - t_0). \tag{37}$$

Имеем $\nabla_2 = \sum_{i=1}^{12} \delta R_i = \sum_{i=1}^{12} R_i - R_{i0}$, где R_i определены согласно (34), а R_{i0} получены из них подстановкой r_0, p_0, q_0, Θ_0 вместо r, p, q, Θ.

Используя (37) и предыдущие оценки, можем получить

$$\nabla_2 < C_1(|\varepsilon|, M) + C_2\left(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, \frac{1}{\rho}\right) \nabla_1 \sqrt{t - t_0} +$$
$$+ C_3\left(|\varepsilon|, N_1, \frac{1}{\rho}\right) \nabla_2 \sqrt{t - t_0}.$$

Но из (38) следует, что $\nabla_1 < 2 \nabla_2 \sqrt{t - t_0}$, откуда

$$\nabla_2 < C\left(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, \frac{1}{\rho}\right) \nabla_2 \sqrt{t - t_0},$$

т. е. для достаточно малых $t \in [t_0, T_0^{**}]$ операторы Q и R осуществляют сжатое отображение $C_{\sigma''}$ в себя, где

$$\sigma'' = \min(\sigma', T_0^*, T_0^{**}).$$

Таким образом, мы доказали существование единственного решения $r(t)$, $p(t)$, $q(t)$, $\Theta(t)$ систем (33), (34) при комплексном ε, $|\varepsilon| < E$ в промежутке времени $t \leqslant t \leqslant \sigma''$.

2. Пусть параметр принимает значения ε и ε'.

Рассмотрим промежуток времени $t_0 \leqslant t \leqslant \sigma''$, т. е. когда одновременно существуют решения систем (19), (20) и (33), (34). Введем обозначения:

$$s_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{s(t, \varepsilon) - v(t, \varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon}; \quad z_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{z(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'};$$
$$v_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{v(t, \varepsilon) - v(t, \varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'}; \quad w_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{w(t, \varepsilon) - w(t, \varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'}. \tag{38}$$

Пусть

$$\| v_{\varepsilon\varepsilon'} - v_\varepsilon \| = \eta_1;$$
$$\| w_{\varepsilon\varepsilon'} - w_\varepsilon \| = \eta_2, \tag{39}$$

где под нормой f понимается $\max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant \sigma''} | f |$.

Необходимо доказать, что $\eta_1 \to 0$, $\eta_2 \to 0$,

$$\| s_{\varepsilon\varepsilon'} - s_\varepsilon \| \to 0, \ \| z_{\varepsilon\varepsilon'} - z_\varepsilon \| \to 0, \text{ когда } \varepsilon' \to \varepsilon.$$

Для доказательства получим некоторые неравенства. Имеем

$$z_\varepsilon (t) = v(t) + \varepsilon v_\varepsilon (t);$$
$$z_{\varepsilon\varepsilon'} (t) = v(t, \varepsilon) + \varepsilon' v_{\varepsilon\varepsilon'} (t),$$

откуда

$$|z_{\varepsilon\varepsilon'} - z_\varepsilon| \leqslant |\varepsilon'| \, |v_{\varepsilon\varepsilon'} - v_\varepsilon| + |v_\varepsilon| \cdot |\varepsilon - \varepsilon'| < |\overline{\varepsilon}| \eta_1 + M_1 |\varepsilon - \varepsilon'|, \tag{40}$$

где $|\overline{\varepsilon}| = \max (|\varepsilon|, |\varepsilon'|)$;

$$| s_{\varepsilon\varepsilon'} - s_\varepsilon | < (|\overline{\varepsilon}| \eta_1 + M_1 |\varepsilon - \varepsilon'|) (t - t_0). \tag{41}$$

Далее,

$$| z(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon') | < |\varepsilon - \varepsilon'| \, | v(t, \varepsilon) | + |\overline{\varepsilon}| \, | v(t, \varepsilon) - v(t, \varepsilon') | .$$

Получим оценку для $| v(t, \varepsilon) - v(t, \varepsilon')|$. Положим,

$$| z(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon') | = \delta;$$
$$| v(t, \varepsilon) - v(t, \varepsilon') | = \delta_1; \tag{42}$$
$$| w(t, \varepsilon) - w(t, \varepsilon') | = \delta_2.$$

Проведя оценки таким же путем, как в разделе «Существование решения в малом системы (19), (20) при комплексном ε», при доказательстве того, что операторы V и W осуществляют сжатие, получим

$$\delta_2 < D_1 (|\varepsilon|, M_0, N_1) \, |\varepsilon - \varepsilon'| + D_2 (M) \delta +$$
$$+ D_3 (|\varepsilon|, M, N_1, N_2, A(\rho)) \delta \sqrt{t - t_0} +$$
$$+ D_4 \left(|\varepsilon|, N_1, N_2, \frac{1}{\rho} \right) \delta_1 \sqrt{t - t_0} + D_5 \left(|\varepsilon|, N_1, \frac{1}{\rho} \right) \delta_2 \sqrt{t - t_0} .$$

Но из (20) имеем $\delta_1 < M_0 | \varepsilon - \varepsilon' | + 2\,\delta_2 \sqrt{t - t_0}$.

В наших обозначениях $\delta < | \varepsilon | \delta_1 + N_1 | \varepsilon - \varepsilon' |$.

Тогда для δ_2 получим

$$\delta_2 < D_1' (| \varepsilon |, M_0, M, N_1, N_2, A(\rho)) | \varepsilon - \varepsilon' | + \\ + D_2^{\mathrm{I}} (| \varepsilon |, M, N_1, N_2, A(\rho))\, \delta_2 \sqrt{t - t_0}\,.$$

Следовательно, можно найти такое σ_0', что при $t \in [t_0, \sigma_0']$ $\delta_2 < D(| \varepsilon |, M_0, M, N_1, N_2, A(\rho)) | \varepsilon - \varepsilon' |$, а отсюда

$$\begin{aligned} | z(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon')| &< D_0 (| \varepsilon |, M_0, M, N_1, N_2, A(\rho)) | \varepsilon - \varepsilon'|; \\ | s(t, \varepsilon) - s(t, \varepsilon')| &< D_0 (| \varepsilon |, M_0, M, N_1, N_2, A(\rho)) |\varepsilon - \varepsilon'| (t - t_0). \end{aligned} \tag{43}$$

Нам потребуются также неравенства (23) — (29), (35) и неравенство

$$| s_{\varepsilon\varepsilon'}(t) - s_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau) | < [N_1 + | \varepsilon | M_1 + | \bar{\varepsilon} | \eta_1 + M_1 | \varepsilon - \varepsilon' |] (t - \tau). \tag{44}$$

Будем в дальнейшем проводить доказательство для $t \in [t_0, \sigma_0^*]$, где $\sigma_0^* = \min(\sigma'', \sigma_0')$.

Из обозначений (38) и выражения (19) для $w(t, \varepsilon)$ имеем

$$w_{\varepsilon\varepsilon'}(t) = -2 \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dot{\psi}(l)\, z(t_0, \varepsilon) + \dot{\psi}(l, \varepsilon')\, z_{\varepsilon\varepsilon'}(t_0) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ddot{\psi}(l) \right] \sqrt{t - t_0}\, g(s(t, \varepsilon), t;\ l, t_0) - 2\, [\dot{\psi}(l, \varepsilon')\, z(t_0, \varepsilon') + \\ + \ddot{\psi}(l, \varepsilon')] \sqrt{t - t_0}\, \frac{g(s(t, \varepsilon), t; l, t_0) - g(s(t, \varepsilon'), t;\ l, t_0)}{\varepsilon - \varepsilon} + \\ + 2 \int\limits_{-l}^{l} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \dddot{\psi}(\xi)\, g(s(t, \varepsilon)\, t;\ \xi, t_0) + \left[\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ddot{\psi}(\xi) + \ddot{\psi}(\xi, \varepsilon')\, z_{\varepsilon\varepsilon'}(t) \right] \times \right. \\ \left. \times\, G(s(t, \varepsilon), t;\ \xi, t_0) \right\} \sqrt{t - t_0}\, d\xi + \\ + 2 \int\limits_{-l}^{l} \left[\dddot{\psi}(\xi, \varepsilon')\, \frac{g(s(t, \varepsilon), t;\ \xi, t_0) - g(s(t, \varepsilon'), t;\ \xi, t_0)}{\varepsilon - \varepsilon'} + \right. \\ \left. + \ddot{\psi}(\xi, \varepsilon')\, z(t, \varepsilon')\, \frac{G(s(t, \varepsilon), t;\ \xi, t_0) - G(s(t, \varepsilon'), t;\ \xi, t_0)}{\varepsilon - \varepsilon'} \right] \sqrt{t - t_0}\, d\xi -$$

$$
-2\int_{t_0}^{t}[g_x(s(t,\varepsilon),t;\ s(\tau,\varepsilon),\tau)\,z_{\varepsilon\varepsilon'}(t)-
$$

$$
-G_x(s(t,\varepsilon),t;s(\tau,\varepsilon),\ \tau)\ z_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau)]\ \sqrt{t-t_0}\,z(\tau,\varepsilon)\,v(\tau,\varepsilon)\,d\tau-
$$

$$
-2\int_{t_0}^{t}\Big[z(t,\varepsilon')\frac{g_x(s(t,\varepsilon),t;\ s(\tau,\varepsilon),\tau)-g_x(s(t,\varepsilon'),t;\ s(\tau,\varepsilon'),\tau)}{\varepsilon-\varepsilon'}-
$$

$$
-z(\tau,\varepsilon')\ \frac{G_x(s(t,\varepsilon),t;\ s(\tau,\varepsilon),\tau)-G_x(s(t,\varepsilon'),t;\ s(\tau,\varepsilon'),\tau)}{\varepsilon-\varepsilon'}\Big]\ \times
$$

$$
\times\sqrt{t-t_0}\,z(\tau,\varepsilon)\,v(\tau,\varepsilon)\,d\tau-2\int_{t_0}^{t}[z(t,\varepsilon')\,g_x(s(t,\varepsilon'),t;s(\tau,\varepsilon'),\tau)-
$$

$$
-z(\tau,\varepsilon')\,G_x(s(t,\varepsilon'),\ t;\ \ s(\tau,\varepsilon'),\tau)]\,[z_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau)\,v(\tau,\varepsilon)+
$$

$$
+z(\tau,\varepsilon')\,v_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau)]\ \sqrt{t-t_0}\,d\tau+2\int_{t_0}^{t}\{G(s(t,\varepsilon),t;s(\tau,\varepsilon),\tau)\,z_{\varepsilon\varepsilon'}(t)-
$$

$$
-[v(\tau,\varepsilon)+\varepsilon' v_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau)+ \tag{45}
$$

$$
+z_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau)]\,g(s(t,\varepsilon),t;s(\tau,\varepsilon),\tau)\}\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w(\tau,\varepsilon)\,d\tau+
$$

$$
+2\int_{t_0}^{t}\Big\{z(t,\varepsilon')\ \ \frac{G(s(t,\varepsilon),t;\ s(\tau,\varepsilon),\tau)-G(s(t,\varepsilon'),t;\ s(\tau,\varepsilon'),\tau)}{\varepsilon-\varepsilon'}-
$$

$$
-[\varepsilon'\,v(t,\varepsilon')+z(t,\varepsilon')]\frac{g(s(t,\varepsilon),t;s(\tau,\varepsilon),\tau)-g(s(t,\varepsilon'),t;s(\tau,\varepsilon'),\tau)}{\varepsilon-\varepsilon'}\Big\}\times
$$

$$
\times\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w(\tau,\varepsilon)\,d\tau+2\int_{t_0}^{t}\{z(t,\varepsilon')\,G(s(t,\varepsilon'),t;s(\tau,\varepsilon'),\tau)-
$$

$$
-[\varepsilon' v(\tau,\varepsilon')+z(\tau,\varepsilon')]\,g(s(t,\varepsilon'),t;s(\tau,\varepsilon'),\tau)\}\ \sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau)\,d\tau+
$$

$$
+2\int_{t_0}^{t}\frac{G_x(s(t,\varepsilon),t;s(\tau,\varepsilon),\tau)-G_x(s(t,\varepsilon'),t;s(\tau,\varepsilon'),\tau)}{\varepsilon-\varepsilon'}\sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w(\tau,\varepsilon)\,d\tau+
$$

$$
+2\int_{t_0}^{t}G_x(s(t,\varepsilon'),t;\ s(\tau,\varepsilon),\tau)\ \sqrt{\frac{t-t_0}{\tau-t_0}}\,w_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau)\,d\tau\ \sum_{i=1}^{12}=K_i.
$$

Вычтем (34) из (45) и будем оценивать

$$\sum_{i=1}^{12} | K_i - R_i | = \sum_{i=1}^{12} | P_i |.$$

Приведем оценки $| P_2 |$ и $| P_{11} |$. Остальные $| P_i |$ оцениваются аналогичным образом. Поэтому оценки их мы опускаем

$$| P_2 | = 2 |\dot{\psi} (l, \varepsilon') z (t_0, \varepsilon') + \ddot{\psi} (l, \varepsilon) | \sqrt{t - t_0}.$$

$$\left| \frac{g_4 (s (t, \varepsilon), t; l, t_0) - g_4 (s (t, \varepsilon'), t; l, t_0)}{s (t, \varepsilon) - s (t, \varepsilon')} \cdot \frac{s (t, \varepsilon) - s (t, \varepsilon')}{\varepsilon - \varepsilon'} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial x} g_4 (s (t), t; l, t_0) \; s_\varepsilon (t) \right| <$$

$$< a_1 (| \varepsilon |, M) \sqrt{t - t_0} \left| \frac{\partial}{\partial x} g_4 (s_1 (t), t; l, t_0) [s_{\varepsilon\varepsilon'} (t) - s_\varepsilon (t)] + \right.$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x} g_4 (s_1 (t), t; l, t_0) - \frac{\partial}{\partial x} g_4 (s (t), t; l, t_0) \right] s_\varepsilon (t) +$$

$$\left. + \left[\frac{\partial}{\partial x} g_4 (s_1 (t), t; l, t_0) - \frac{\partial}{\partial x} g_4 (s_2 (t), t; l, t_0) \right] s_{\varepsilon\varepsilon'} (t) \right| <$$

$$< a_1 (| \varepsilon |, M) \sqrt{t - t_0} (| j_1 | + | j_2 | + | j_3 |),$$

где

$$s_1 (t), \; s_2 (t) \in (s (t, \varepsilon), \; s (t, \varepsilon')).$$

Здесь

$$| j_1 | < b'_1 (| \varepsilon |) \eta_1 + b''_1 (M_1) | \varepsilon - \varepsilon' |;$$

$$| j_2 | < \max_{t_0 \leqslant t \leqslant \sigma_0^*} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} g_4 (s_3 (t), t; l, t_0) \right| | s_1 (t) - s (t, \varepsilon) | \cdot | s_\varepsilon (t) |,$$

где

$$s_3 (t) \in (s (t, \varepsilon), \; s (t, \varepsilon')).$$

Из (43) и (35) следует, что

$$| j_2 | < b_2 (| \varepsilon |, N_1, M_1, D_0) | \varepsilon - \varepsilon' | \sqrt{t - t_0}.$$

Оценивая $|j_3|$, получаем

$$|j_3| < \left|\frac{\partial}{\partial x} g_4(s_1(t), t; l, t_0) - \frac{\partial}{\partial x} g_4(s_2(t), t; l, t_0)\right| |s_{\varepsilon\varepsilon'} - s_\varepsilon| + $$

$$+ \left|\frac{\partial}{\partial x} g_4(s_1(t), t; l, t_0) - \frac{\partial}{\partial x} g_4(s_2(t), t; l, t_0)\right| |s_\varepsilon(t)| <$$

$$< \max_{t_0 \leqslant t \leqslant \sigma_0^*} \left|\frac{\partial^2 g_4}{\partial x^2}\right| \cdot \{|s_1(t) - s_2(t)| [|s_{\varepsilon\varepsilon'} - s_\varepsilon| + |s_\varepsilon(t)|]\} <$$

$$< b_3'(|\varepsilon|, D_0)\eta_1\sqrt{t-t_0} + b_3''(|\varepsilon|, N_1, M_1, D_0, \sigma_0^*)|\varepsilon - \varepsilon'|.$$

Таким образом,

$$|P_2| < a_1'(|\varepsilon|, M)\eta_1 + a_1''(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, A(\rho))\eta_1\sqrt{t-t_0} +$$

$$+ a_1'''(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, M_1, A(\rho), \sigma_0^*)|\varepsilon - \varepsilon'|.$$

Далее,

$$|P_{11}| < \frac{N_2\sqrt{t-t_0}}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{t_0}^{t}\left|\frac{\partial}{\partial t} G_4(s_1(t), t; s(\tau, \varepsilon), \tau)[s_{\varepsilon\varepsilon'}(t) - s_\varepsilon(t)] -\right.\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t} g_4(s(t, \varepsilon'), t; s_1(\tau), \tau)[s_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau) - s_\varepsilon(\tau)]\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\left|\left[\frac{\partial}{\partial t} G_4(s_1(t), t; s(\tau, \varepsilon), \tau) - \frac{\partial}{\partial t} G_4(s(t, \varepsilon), t; s(\tau, \varepsilon), \tau)\right] s_\varepsilon(t) -\right.$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial t} g_4(s(t, \varepsilon'), t; s_1(\tau), \tau) -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial t} g_4(s(t, \varepsilon), t; s(\tau, \varepsilon), \tau\right] s_\varepsilon(\tau)\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\left|\left[\frac{\partial}{\partial t} G_4(s_1(t), t; s(\tau, \varepsilon), \tau) - \frac{\partial}{\partial t} G_4(s_2(t), t; s(\tau, \varepsilon), \tau)\right] s_{\varepsilon\varepsilon'}(t) -\right.$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial t} g_4(s(t, \varepsilon'), t; s_1(\tau), \tau) -\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial}{\partial t} g_4(s(t, \varepsilon'), t; s_2(\tau), \tau)\right] s_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau)\right|\frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}} =$$

$$= \frac{N_2\sqrt{t-t_0}}{\sqrt{\pi}}(|I_1| + |I_2| + |I_3|).$$

Имеем $G_4 = G_4' + G_4''$, $g_4 = g_4' + g_4''$, причем $G_4' = g_4'$, $G_4'' = -g_4''$.

Разобъем оценку $|I_1|$ на три части, а именно:

$$|I_1| < \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial}{\partial t} G_4' (s_1(t), t; s(\tau, \varepsilon), \tau) [s_{\varepsilon\varepsilon'}(t) - s_\varepsilon(t)] - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t} g_4' (s(t, \varepsilon'), t; s_1(\tau), \tau) [s_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau) - s_\varepsilon(\tau)] \right| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial}{\partial t} G_4'' (s_1(t), t; s(\tau, \varepsilon), \tau) \right| |s_{\varepsilon\varepsilon'}(t) - s_\varepsilon(t)| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial}{\partial t} g_4'' (s(t, \varepsilon'), t; s_1(\tau), \tau) \right| |s_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau) - s_\varepsilon(\tau)| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}} =$$

$$= |j_1'| + |j_2'| + |j_3'|.$$

Здесь

$$|j_1'| < \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial}{\partial t} G_4^{\mathrm{I}} (s_1(t), t; s_1(\tau), \tau) \right| | s_{\varepsilon\varepsilon'}(t) - s_\varepsilon(t) -$$

$$- s_{\varepsilon\varepsilon'}(\tau) + s_\varepsilon(\tau) | \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}},$$

где

$$s_1(t) - s_1(\tau) \in (s(t, \varepsilon) - s(\tau, \varepsilon),\ s(t, \varepsilon') - s(\tau, \varepsilon')).$$

Учитывая (40), получим

$$|j_1'| < \int_{t_0}^{t} \frac{(1 + 2\alpha_1)}{2\sqrt{t - \tau}\sqrt{\tau - t_0}} (|\bar{\varepsilon}| \eta_1 + M_1 |\varepsilon - \varepsilon'|) d\tau =$$

$$= b_1' (|\bar{\varepsilon}|) \eta_1 + b_2' (M_1) |\varepsilon - \varepsilon'|.$$

Для $|j_2'|$ и $|j_3'|$ нетрудно получить следующую оценку:

$$|j_2'| + |j_3'| < b_1'' \left(|\bar{\varepsilon}|, \frac{1}{\rho} \right) \eta_1 \sqrt{t - t_0} + b_2'' \left(M_1, \frac{1}{\rho}, \sigma_0^*\right) |\varepsilon - \varepsilon'|,$$

т. е.

$$|I_1| < b_1 (|\bar{\varepsilon}|) \eta_1 + b_2 \left(|\bar{\varepsilon}|, \frac{1}{\rho} \right) \eta_1 \sqrt{t - t_0} + b_3 \left(M_1, \frac{1}{\rho}, \sigma_0^*\right) |\varepsilon - \varepsilon'|.$$

Разобъем $|I_2|$ так же, как при оценке $|I_1|$, на части:

$$|I_2| < \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial}{\partial t} G'_4(s_1(t), t;\ s_1(\tau), \tau) - \frac{\partial}{\partial t} G'_4(s(t, \varepsilon), t; s(\tau, \varepsilon), \tau \right| \times$$

$$\times |s_\varepsilon(t) - s_\varepsilon(\tau)| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}} + \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial}{\partial t} G''_4(s_1(t), t;\ s(\tau, \varepsilon), \tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t} G''_4(s(t, \varepsilon), t; s(\tau, \varepsilon), \tau) \right| |s_\varepsilon(t)| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left| \frac{\partial}{\partial t} g''_4(s(t, \varepsilon')\ t;\ s_1(\tau), \tau) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial t} g''_4(s(t, \varepsilon),\ t; s(\tau, \varepsilon), \tau) \right| |s_\varepsilon(\tau)| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}} = |j''_1| + |j''_2| + |j''_3|.$$

Оценим первый из интегралов:

$$|j''_1| < \int_{t_0}^{t} \max_{t_0 \leqslant t \leqslant \sigma_0^*} \left| \frac{\partial^2 G'_4}{\partial t\, \partial x} \right| [|s_1(t) - s(t, \varepsilon)| + |s_1(\tau) - s(\tau, \varepsilon)|] \times$$

$$\times |s_\varepsilon(t) - s_\varepsilon(\tau)| \frac{d\tau}{\sqrt{\tau - t_0}}.$$

Используя (24), (43) и (35), получим

$$|j''_1| < c'_1(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, M_1, A(\rho), \sigma_0^*)\,|\varepsilon - \varepsilon'|.$$

Проведя аналогичные оценки для $|j''_2|$ и $|j''_3|$, получим

$$|I_2| < c_1(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, M_1, A(\rho), \sigma_0^*)\,|\varepsilon - \varepsilon'|.$$

Используя (44) и оценивая $|I_3|$ подобно предыдущему, нетрудно получить

$$I_3| < d_1(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, A(\rho))\,\eta_1 \sqrt{t - t_0} +$$

$$+ d_2(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, M_1, A(\rho), \sigma_0^*)\,|\varepsilon - \varepsilon'|.$$

Таким образом,

$$|P_{11}| < a'_{11}(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, A(\rho))\eta_1\sqrt{t-t_0} + $$
$$+ a''_{11}(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, M_1, A(\rho), \sigma_0^*)|\varepsilon-\varepsilon'|.$$

Оценивая все остальные $|P_i|$ и учитывая, что $\eta_1 < 2\eta_2\sqrt{t-t_0}$, окончательно получим

$$\eta_2[1 - p_1(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, A(\rho))\sqrt{t-t_0}] <$$
$$< p_2(|\varepsilon|, M_0, M, N_1, N_2, M_1, A(\rho), \sigma_0^*)|\varepsilon-\varepsilon'|.$$

Теперь можно выбрать такое $\sigma_0 \leqslant \sigma_0^*$, что $\eta_2 \to 0$ при $t \in [t_0, \sigma_0]$ и тем более $\eta_1 \to 0$ при $|\varepsilon - \varepsilon'| \to 0$.

Из (40) и (41) следует также, что $||s_{\varepsilon\varepsilon'} - s_\varepsilon|| \to 0$, $||z_{\varepsilon\varepsilon'} - z_\varepsilon|| \to 0$ при $|\varepsilon - \varepsilon'| \to 0$, что и требовалось доказать.

Итак, нами доказана аналитичность по ε при $|\varepsilon| < E$ $u(x, t, \varepsilon)$, $\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u(x,t,\varepsilon)}{\partial t}$ на интервале $t_0 < t \leqslant \sigma_0$.

Внося их разложения в ряды по ε и сравнивая коэффициенты при равных степенях ε, получим систему уравнений, которая может быть использована для построения приближенного решения рассматриваемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Рубинштейн. — ДАН СССР, 1965, т. 160, № 5.

2. А. А. Буйкис, Л. И. Рубинштейн, А. Б. Скроман. Кристаллизация расплава при погружении в него пластинки и шара. — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [I.] Рига, «Зинатне», 1966.

3. Л. И. Рубинштейн. — ДАН СССР, 1966, т. 168, № 4, 5 и 6.

4. A. Friedman. Free boundary problems for parabolic equations, III: Condensation of evaporation of a liquid drop. — J. Math. and Mech., 1960, 9, 19—66.

5. J. Tadjbaksh, W. Liniger. Free boundary problems with regions of growth and decay. — Quart. J. Mech. and Appl. Math., 17, (2), 1964, 141—155.

6. J. R. Bowen. — Chem. Engng. Sci., 1964, 19.

7. M. Gevrey. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. — Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6 serie, IX tome, 1913.

8. Л. И. Рубинштейн. Об единственности решения одной двуслойной однофазной задачи стефановского типа. — Латвийский математический ежегодник за 1965 год. [I.] Рига, «Зинатне», 1966, стр. 131—152.

9. Л. И. Рубинштейн. О некоторых нелинейных задачах, порождаемых уравнением Фурье. Докторская диссертация. МГУ, 1957.

ON THE PHASE BOUND ANALYTICITY WITH RESPECT TO A PARAMETER IN THE PROBLEM OF THE MELT CRYSTALIZATION CAUSED BY THE IMMERSION OF A PLATE

H. GEIMAN

Annotation

The problem

$$b^2(x)\, u_{xx} = u_t; \; -1 < x < s(t), \; x \neq 0, \; t > t_0$$

$$u\,|_{t=t_0} = \psi(x); \; -1 < x < l, \; l = s(t_0), \; \psi(l) = 0, \; \dot{\psi}(-1) = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-1} = 0; \; u\,|_{x=-0} = u\,|_{x=+0}; \; k_1 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-0} = k_2 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=+0}$$

$$u\,|_{x=s(t)-0} = 0; \frac{ds}{dt} = -\alpha + \varepsilon \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=s(t)}$$

$$b^2(x) = \begin{cases} a^2 = \text{const} & -1 < x < 0; \; \alpha = \text{const} > 0; \; k_i = \text{const} > 0 \\ 1 & 0 < x < s(t); \; \varepsilon = \text{const} < 0; \; (i = 1, 2) \end{cases}$$

s considered. There is given the proof of the analyticity of the solution with respect to the parameter ε.

ОБ ИСПАРЕНИИ ИЛИ КОНДЕНСАЦИИ ПАРА ЖИДКОСТИ ИЗ БИНАРНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА

Л. И. РУБИНШТЕЙН, Э. Х. ЕНИКЕЕВА

Вычислительный центр ЛГУ им. П. Стучки

Доказывается существование в малом и единственность решения задачи об испарении или конденсации сферического пузырька в бинарной системе, рассмотренной в работе [1].

Рассмотрение проведено в предположении, что в начальный момент времени распределение концентраций и температур удовлетворяет некоторым условиям согласования, обеспечивающим непрерывную дифференцируемость рассматриваемого решения в замыкании области их определения.

Доказательство проводится путем редукции задачи к системе интегральных уравнений посредством тепловых потенциалов.

В недавней работе [1] было дано приближенное решение задачи о динамике неизотермического испарения монокомпонентной жидкости A внутрь бинарного сферического пузырька.

Авторы предполагали, что

а) пузырек образован паром компонента A и инертным, нерастворимым в A газом B;

б) перераспределение концентраций в газовой фазе происходит посредством молекулярной диффузии;

в) перераспределение температур в жидкой фазе происходит посредством молекулярной теплопроводности с конвекцией, вынужденной движением границы раздела фаз;

г) вязкостью и термическим расширением жидкой фазы можно пренебречь;

д) газовая фаза не поглощает тепловую радиацию.

Коэффициент теплопроводности газовой фазы равен нулю. Таким образом, газовая фаза считается термически изолированной от жидкой фазы, и поглощение скрытой теплоты испарения (выделение скрытой теплоты конденсации) влияет только на перераспределение температур в жидкой фазе;

е) размер пузырька достаточно велик для того, чтобы можно было пренебречь влиянием кривизны поверхности раздела фаз на величину упругости пара;

ж) процесс испарения (или конденсации) достаточно медленный для того, чтобы можно было считать, что на поверхности испарения (или конденсации) температура жидкой фазы и концентрация пара компонента A связаны кривой фазового равновесия. Зависимость равновесной концентрации от температуры считается линейной[1];

з) имеется радиальная симметрия.

В цитируемой работе [1] начальная температура в жидкой фазе и концентрация в газовой фазе считаются постоянными, не связанными диаграммой фазового равновесия. Эти два обстоятельства и вызывают процесс испарения (или конденсации), развивающийся асимптотически до равновесия при $t \to \infty$.

Как отмечено выше, в [1] было дано лишь приближенное решение задачи[2]. В точной трактовке эта задача принадлежит к классу задач Стефана «с усиленной нелинейностью» [2], но в варианте, не подвергавшемся до сих пор строгому математическому анализу. На пути ее решения встречаются два затруднения принципиального характера:

1) начальные условия не согласованы с условиями равновесия на границе раздела фаз. Это приводит к неограниченности градиентов температуры и концентрации и, как всегда в подобной ситуации, весьма сильно затрудняет анализ [3];

2) на границе раздела фаз задается три условия: два — типа условия Стефана для концентрации и температуры, связывающие их градиенты со скоростью перемещения границы раздела фаз, и одно — условие связи между концентрацией и температурой, определяемое диаграммой фазового равновесия. Это последнее условие придает задаче характер, сближающий ее с подвергавшейся детальному анализу задачей Веригина [5, 6] — двуслойной задаче с классическими условиями непрерывности «температур» и «потоков тепла» на неизвестной границе раздела фаз. Однако граница раздела фаз в рассматриваемой задаче является линией разрыва этих величин, что сближает ее с классической двухфазной задачей Стефана.

Это промежуточное положение рассматриваемой задачи придает ей особенности, требующие развития специальной методики решения и делающие ее нестандартной. В то же время рассматриваемая задача может считаться одной из простейших в широком классе

---

[1] См. уравнение (1.8).

[2] Решение найдено методом интегральных соотношений в квазистационарном приближении.

задач о динамике неизотермических фазовых переходов в поликомпонентных диффузионных системах.

Как и в рассматриваемых ранее задачах Стефана с условиями на границе раздела фаз, несогласованными с начальными условиями, преодоление затруднений, связанных с неограниченностью градиентов, может быть, по-видимому, осуществлено с помощью приема, восходящего к Жевре [7]. Именно, рассматривают монотонно сходящуюся к нулю убывающую последовательность $\{t_n\}$. Каждый из моментов t_n принимается за начальный, и для него в качестве начального состояния берется состояние, удовлетворяющее условию согласования на границе раздела фаз. Если при этом последовательность начальных состояний системы сходится при $n \to \infty$ к начальному состоянию в исходной системе, то обычно удается доказать сходимость последовательности решений поставленных таким образом вспомогательных задач к решению исходной задачи [3]. При проведении подобного анализа предполагается доказанной теорема существования решения в случае согласования краевых и начальных условий на границе раздела фаз. Цель настоящей работы и состоит в доказательстве этого факта для задачи В. С. Арпачи, И. А. Кларка и П. С. Ларсена [1].

К результатам, сообщаемым ниже, надлежит относиться только как к доказательству теоремы существования, не претендующему на одновременное указание эффективного вычислительного алгоритма.

Нас интересует здесь одна лишь математическая сторона вопроса. Никаких выводов физического характера мы не делаем. В связи с этим мы не воспроизводим деталей постановки задачи, отсылая к оригинальной статье [1].

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введем обозначения:

$C(r, \tau)$ — концентрация пара в пузырьке;
$T(r, \tau)$ — температура жидкости;
$V(r, \tau)$ — радиальная скорость жидкости;
k — теплоемкость жидкости;
λ — скрытая теплота парообразования;
μ — коэффициент температуропроводности;
D — коэффициент диффузии;
$R(\tau)$ — радиус пузырька;
R_0 — начальный радиус пузырька;
$C_0(r)$ — начальное распределение концентрации в пузырьке;
$T_0(r)$ — начальное распределение температуры в жидкости;

ρ' — плотность жидкости;
ρ'' — плотность газа;
r — пространственная координата;
τ — время.

В этих обозначениях задача из [1] запишется следующим образом[1]:

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial C}{\partial r}\right); \quad 0 \leqslant r \leqslant R(\tau),\ \tau \geqslant 0; \tag{1.1}$$

$$C(r, 0) = C_0(r); \quad 0 \leqslant r \leqslant R_0; \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=0} = 0; \quad \tau \geqslant 0; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + V\frac{\partial T}{\partial r} = \mu\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right); \quad R(\tau) \leqslant r < \infty,\ \tau \geqslant 0; \tag{1.4}$$

$$T(r, 0) = T_0(r); \quad R_0 \leqslant r < \infty; \tag{1.5}$$

$$\dot R(\tau) = \frac{D}{1 - C(R(\tau), \tau)}\left.\frac{\partial C}{\partial r}\right|_{r=R(\tau)}; \quad \tau \geqslant 0; \tag{1.6}$$

$$\dot R(\tau) = \mu\frac{\rho''}{\rho'}\frac{k}{\lambda}\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R(\tau)}; \quad \tau \geqslant 0,\ R(0) = R_0; \tag{1.7}$$

$$T(R(\tau), \tau) = \alpha + \beta C(R(\tau), \tau); \quad \tau \geqslant 0,\ \alpha = \mathrm{const},\ \beta = \mathrm{const}. \tag{1.8}$$

Условие (1.6) выводится из уравнения материального баланса на границе раздела фаз, условие (1.7) — из уравнения теплового баланса на этой границе. V легко находится из уравнения неразрывности и условия материального баланса на границе раздела фаз

$$V = \left(1 - \frac{\rho''}{\rho'}\right)\dot R(\tau)\frac{R^2(\tau)}{r^2}. \tag{1.9}$$

Вывод условий (1.6) — (1.8) и выражения (1.9) для радиальной скорости имеется в [1].

---

[1] В [1] в условиях (1.2) и (1.5) принято $C_0 = \mathrm{const}$, $T_0 = \mathrm{const}$. Мы предполагаем, в соответствии со сказанным во введении, что $C_0(r)$ и $T_0(r)$ удовлетворяют введенным ниже условиям согласования.

В системе (1.1) — (1.8) перейдем к безразмерным координатам

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r}{R_0} = x;\ t = \frac{D\tau}{R_0^2};\ y(t) = \frac{R(t)}{R_0};\\ &\Theta(x, t) = \frac{T(x, t)}{\beta} \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

и после этого выполним замену переменных

$$u_1(x, t) = xC(x, t);\ u_2(x, t) = x\Theta(x, t). \tag{1.11}$$

Если в полученной системе мы введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1'(x) = xC_0(x);\ \varphi_2'(x) = x\frac{T_0(x)}{\beta};\\ &1 - \frac{\rho''}{\rho'} = \varepsilon;\ \ \frac{\mu}{D} = a_2^2;\ \ \frac{\alpha}{\beta} = b;\\ &a_2^2\frac{k}{\lambda}\frac{\rho'}{\rho''}\beta = d_2 = \text{const} > 0, \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

то система (1.1) — (1.8) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x, t) = a^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) + F'(x, y, z, u, q);$$

$$0 \leqslant x < y(t),\ y(t) < x < \infty,\ t \geqslant 0; \tag{1.13}$$

$$u(x, 0) = \varphi'(x);\ \ 0 \leqslant x < 1,\ 1 < x < \infty; \tag{1.14}$$

$$u(0, t) = 0;\quad t \geqslant 0; \tag{1.15}$$

$$v_1(t) = w_1(t)\left[\frac{1}{y(t)} - z(t)\right] + y(t)z(t);\ t \geqslant 0; \tag{1.16}$$

$$z(t) = \frac{d_2}{y(t)}\left[v_2(t) - \frac{w_2(t)}{y(t)}\right];\ t \geqslant 0,\ \ y(0) = 1; \tag{1.17}$$

$$w_2(t) - w_1(t) = by(t),\ t \geqslant 0, \tag{1.18}$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
&u(x,t) = \begin{cases} u_1(x,t); \ 0 \leqslant x < y(t); \\ u_2(x,t); \ y(t) < x < \infty; \end{cases} \\
&\frac{\partial}{\partial x} u_i(x,t) = q_i(x,t); \ i = 1, 2; \\
&q(x,t) = \begin{cases} q_1(x,t); \ 0 \leqslant x < y(t); \\ q_2(x,t); \ y(t) < x < \infty; \end{cases} \\
&w_i(t) = u_i(y(t),t); \ v_i(t) = q_i(y(t),t); \ \dot{y}(t) = z(t); \\
&a^2(x) = \begin{cases} 1; \ 0 \leqslant x < y(t); \\ a_2^2; \ y(t) < x < \infty; \end{cases} \\
&\varphi'(x) = \begin{cases} \varphi_1'(x); \ 0 \leqslant x < y(t); \\ \varphi_2'(x); \ y(t) < x < \infty; \end{cases} \\
&F'(x,y,z,u,q) = \begin{cases} F_1'(x,y,z,u_1,q_1) = 0; \ 0 \leqslant x < y(t); \\ F_2'(x,y,z,u_2,q_2) = \left[\dfrac{u_2(x,t)}{x} - \right. \\ \left. - q_2(x,t)\right] \dfrac{\varepsilon z(t) y^2(t)}{x^2}; \ y(t) < x < \infty. \end{cases}
\end{aligned}
\right\} \quad (1.19)
$$

Обозначим через D_1 область

$$D_1 = \{0 < x < y(t), \ 0 < t < T\},$$

а через D_2 — область

$$D_2 = \{y(t) < x < \infty, \ 0 < t < T\}^1.$$

$\overline{D}_i$ — замыкание D_i.

Решение задачи (1.13) — (1.19) будем искать в следующем классе A функций:

1) $y(t)$ дважды непрерывно дифференцируемая в $[0, T]$ функция;

2) $u_1(x,t)$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial x}$ непрерывны в $\overline{D}_1$;

3) $u_2(x,t)$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u_2}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x}$ непрерывны в $\overline{D}_2$ и равномерно ограничены в ней.

---

[1] Интервал времени T будет определен в разделе 3.

2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ. ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Задача (1.13) — (1.19) решается с использованием метода интегральных уравнений, развитого в [2, 3], и приема преобразования неизвестной границы в прямую, примененного для решения задачи Веригина [5]. При этом условия сопряжения (1.16) — (1.18) должны выполняться на прямой $x = \text{const}$.

Прямое применение метода из [5] потребовало бы использования дифференцируемости по t $w_i(t)$, что связано с серьезными техническими затруднениями. Для избежания их ниже используется функция Грина двуслойной задачи уравнения теплопроводности для границы $x = 0$, введенная в [4]. В результате получаются интегральные уравнения, не содержащие тепловых потенциалов, имеющих плотность $w_i(t)$ и $\dot{w}_i(t)$.

Переходим к редукции задачи (1.13) — (1.19) к системе интегральных уравнений. Выполним замену переменных

$$x = \xi + y(t). \tag{2.1}$$

Вследствие этой замены переменных неизвестная граница $x = y(t)$ с неизвестными на ней значениями $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ перейдет в границу $\xi = 0$. Граница $x = 0$ перейдет в неизвестную границу $\xi = -y(t)$, на которой задано значение $u(\xi, t)$: $u(-y(t), t) = 0$.

После применения замены (2.1) к задаче (1.13) — (1.19) в полученной системе переобозначим $\xi = x$. Тогда задача (1.13) — (1.19) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + F(x, y, z, u, q);$$

$$-y(t) \leqslant x < 0,\ 0 < x < \infty,\ t \geqslant 0; \tag{2.2}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x);\ -1 \leqslant x < 0,\ 0 < x < \infty; \tag{2.3}$$

$$u(-y(t), t) = 0;\ t \geqslant 0; \tag{2.4}$$

$$v_1(t) = w_1(t)\left[\frac{1}{y(t)} - z(t)\right] + y(t) z(t);\ t \geqslant 0; \tag{2.5}$$

$$z(t) = \frac{d_2}{y(t)}\left[v_2(t) - \frac{w_2(t)}{y(t)}\right];\ t \geqslant 0,\ y(0) = 1; \tag{2.6}$$

$$w_1(t) - w_2(t) = by(t),\ t \geqslant 0, \tag{2.7}$$

где (после перехода к новой системе координат индекс у φ_i' опущен)

$$\left.\begin{aligned}
&u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t); & -y(t) \leqslant x < 0; \\ u_2(x, t); & 0 < x < \infty; \end{cases} \\
&w_i(t) = u_i(0, t);\ v_i(t) = q_i(0, t);\ i = 1, 2; \\
&a^2(x) = \begin{cases} 1; & -y(t) \leqslant x < 0; \\ a_2^2; & 0 < x < \infty; \end{cases} \\
&\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x); & -y(t) \leqslant x < 0; \\ \varphi_2(x); & 0 < x < \infty; \end{cases} \\
&F(x, y, z, u, q) = \begin{cases} F_1(z, q_1) = z(t)\, q_1(x, t); \ -y(t) \leqslant x < 0; \\ F_2(x, y, z, u_2, q_2) = z(t)\, q_2(x, t) + \\ + \left[\dfrac{u_2(x, t)}{x + y(t)} - q_2(x, t)\right] \dfrac{\varepsilon z(t)\, y^2(t)}{x + y(t)}; \\ 0 < x < \infty. \end{cases}
\end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

Положим

$$q_1(-y(t), t) = p(t). \quad (2.9)$$

Введем функцию Грина $G(x, \xi, a^2(t - \tau))$ для двуслойной задачи с границей $x = 0$, построенную в [4]:

$$G(x, \xi, a^2(t-\tau)) = \begin{cases} E(x - \xi, t - \tau) + \delta E(x + \xi, t - \tau); \\ \qquad -\infty < x, \xi < 0; \\ (1 + \delta) E\left(\dfrac{x}{a_2} - \xi, t - \tau\right); \\ \qquad -\infty < \xi < 0 < x < \infty; \\ \dfrac{1 - \delta}{a_2} E\left(x - \dfrac{\xi}{a_2},\ t - \tau\right); \\ \qquad -\infty < x < 0 < \xi < \infty; \\ E(x - \xi, a_2^2(t - \tau)) - \delta E(x + \\ \qquad + \xi, a_2^2(t - \tau));\ 0 < x, \xi < \infty. \end{cases} \quad (2.10)$$

и функцию

$$G^*(x, \xi, a^2(t-\tau)) = \begin{cases} E(x-\xi, t-\tau) - \delta E(x+\xi, t-\tau); \\ \qquad -\infty < x, \xi < 0; \\ \dfrac{1+\delta}{a_2} E\left(\dfrac{x}{a_2} - \xi, \quad t-\tau\right); \\ \qquad -\infty < \xi < 0 < x < \infty; \\ (1-\delta) E\left(x - \dfrac{\xi}{a_2}, t-\tau\right); \\ \qquad -\infty < x < 0 < \xi < \infty; \\ E(x-\xi, a_2^2(t-\tau)) + \delta E(x + \\ + \xi, a_2^2(t-\tau)); \; 0 < x, \xi < \infty, \end{cases} \tag{2.11}$$

где

$$\delta = \frac{a_2 - d_2}{a_2 + d_2}. \tag{2.12}$$

$G(x, \xi, a^2(t-\tau))$ сопряжена с $G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))$ в смысле

$$\frac{\partial G^*}{\partial \xi} = -\frac{\partial G}{\partial x}, \tag{2.13}$$

причем $G^* \to 0$ при $\xi \to \infty$ или $x \to \infty$; $\dfrac{\partial G^*}{\partial \xi} \to 0$ при $\xi \to \infty$ или $x \to \infty$.

Легко проверить, что по переменным x, t $G(x, \xi, a^2(t-\tau))$ удовлетворяет уравнению

$$a^2(x)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial G}{\partial t}; \; x \neq 0, \; t > 0 \tag{2.14}$$

с условиями:

$$\left.\begin{aligned} & G|_{x=-0} = G|_{x=+0}; \\ & \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=-0} = d_2 \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=+0} \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

По переменным ξ, τ $G(x, \xi, a^2(t-\tau))$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$a^2(\xi)\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial G}{\partial \tau} = 0; \; \xi \neq 0, \; 0 < \tau < t \tag{2.16}$$

и условиям:

$$\left.\begin{aligned} d_2 G \mid_{\xi=-0} &= a_2^2 G \mid_{\xi=+0};\\ \frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=-0} &= a_2^2 \frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=+0}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.17)$$

причем

$$\left.\begin{aligned} &G \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty \quad \text{или} \quad x \to \infty;\\ &\frac{\partial G}{\partial \xi} \to 0 \ \text{при} \ \xi \to \infty \quad \text{или} \quad x \to \infty. \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Пусть u_1, u_2, y — решение задачи (2.2) — (2.8). Если мы воспользуемся функциями Грина (2.10), (2.11) и условием согласования $\varphi_1(0) - \varphi_2(0) = b$, то, поступая так же, как в [2], сведем задачу к следующей системе интегральных уравнений:

$$u_i(x, t) = \int_0^t G \mid_{\xi=-0} (v_1(\tau) - d_2 v_2(\tau))\, d\tau - b \int_0^t \frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=-0} y(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t G \mid_{\xi=-y(\tau)} p(\tau)\, d\tau + \int_{-1}^{\infty} \varphi(\xi)\, G(x, \xi, a^2 t)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{-y(\tau)}^{\infty} F(\xi, y, z, u, q)\ G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi \equiv$$

$$\equiv U_i(x, t \,/\, u_2, q_1, q_2, v_1, v_2, p, z, y), \ i = 1, 2; \quad (2.19)$$

$$q_i(x, t) = -\int_0^t \frac{\partial G^*}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=-0} (v_1(\tau) - d_2 v_2(\tau))\, d\tau + b \int_0^t G^* \mid_{\xi=-0} z(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial G^*}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=-y(\tau)} p(\tau)\, d\tau + \int_{-1}^{\infty} \dot{\varphi}(\xi)\, G^*(x, \xi, a^2 t)\, d\xi -$$

$$- \int_0^t d\tau \int_{-y(\tau)}^{\infty} F(\xi, y, z, u, q) \frac{\partial}{\partial \xi} G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi \equiv$$

$$\equiv Q_i(x, t \,/\, u_2, q_1, q_2, v_1, v_2, p, y, z), \ i = 1, 2; \quad (2.20)$$

$$w_i(t) = \frac{(-1)^{i+1} - \delta}{2}\, b y(t) + U_i(0, t \,/\, u_2, q_1, q_2, v_1, v_2, p, z, y) \equiv$$

$$\equiv W_i(t \,/\, u_2, q_1, q_2, v_1, v_2, p, y, z), \ i = 1, 2; \quad (2.21)$$

$$v_1(t) = \frac{1}{y(t)\left[1 - \frac{1-\delta}{2}\frac{w_1(t)}{y(t)}\right]}\left\{\frac{1+\delta}{2} w_1(t) + d_2 \frac{1+\delta}{2}\frac{w_2(t)}{y(t)} [w_1(t) - \right.$$

$$\left. - y(t)] - d_2 [w_1(t) - y(t)]\; Q_2(0, t / u_2, q_1, q_2, p, z, y) \right\} \equiv$$

$$\equiv V_1(t / u_2, q_1, q_2, w_1, w_2, p, z, y); \quad (2.22$$

$$v_2(t) = \frac{1}{1 - \frac{1-\delta}{2}\frac{w_i(t)}{y(t)}}\left\{- \frac{1+\delta}{2a_2}\frac{w_1(t)}{y(t)} - \frac{1-\delta}{2}\frac{w_2(t)}{y^2(t)}[w_1(t) - y(t)] + \right.$$

$$\left. + Q_2(0, t / u_2, q_1, q_2, p, z, y)\right\} \equiv V_2(t / u_2, q_1, q_2, w_1, w_2, p, z, y); \quad (2.23)$$

$$p(t) = 2Q_1(-y(t), t / u_2, q_1, q_2, v_1, v_2, p, z, y) \equiv$$

$$\equiv P(t / u_2, q_1, q_2, v_1, v_2, p, y, z); \quad (2.24)$$

$$z(t) = \frac{1}{y(t)\left[1 - \frac{1-\delta}{2}\frac{w_1(t)}{y(t)}\right]}\left\{- \frac{1-\delta}{2}\frac{w_1(t)}{y(t)} - \frac{1+\delta}{2} d_2 \frac{w_2(t)}{y(t)} + \right.$$

$$\left. + d_2 Q_2(0, t / u_2, q_1, q_2, p, z, y)\right\} \equiv Z(t / u_2, q_1, q_2, w_1, w_2, p, z, y^1 \quad .25$$

$$y(t) = 1 + \int_0^t z(\tau)\, d\tau = Y(t / z). \quad (2.26)$$

Справедлива следующая теорема эквивалентности.

Теорема. Если существует решение задачи (2.2)—(2.8), принадлежащее к классу A, то существует дифференцируемое решение системы интегральных уравнений (2.19)—(2.26). Обратно, если существует дифференцируемое решение системы (2.19)—(2.26) то $u_i(x, t)$, $i = 1, 2$, $y(t)$, определенные формулами (2.19)—(2.26), являются принадлежащими к классу A решениями задачи (2.2)—(2.8).

Доказательство теоремы эквивалентности проводится так же, как в [2, 3]. Поэтому мы его опускаем.

---

[1] Из (2.20), $i = 2$, при $x \to 0$ получаем уравнение

$$v_2(t) = -\frac{1+\delta}{2a_2}[v_1(t) - d_2 v_2(t)] + Q_2(0, t/u_2, q_1, q_2, p, z, y).$$

Отсюда и из (1.16), (1.17) следуют уравнения (2.22), (2.2?), (2.2

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ В МАЛОМ

Докажем теперь существование такого T, что для $0 \leqslant t \leqslant T$, $-y(t) \leqslant x < 0$, $0 < x < \infty$ задача (2.2)—(2.8) имеет принадлежащее к классу А решение, или, что, в силу теоремы эквивалентности, то же самое, — система интегральных уравнений (2.19)—(2.26) имеет в замкнутых областях определения дифференцируемое решение.

Наложим на начальные условия задачи следующие ограничения:

1. $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, пять раз непрерывно дифференцируемы в замыкании областей их определения.

2. Имеет место неравенство

$$\frac{1-\delta}{4}\,[b + \varphi_1(0) + \varphi_2(0)] \neq 1. \tag{3.1}$$

3. $\varphi_i^{(k)}(-1)$, $\varphi_i^{(k)}(0)$, $k = 0, \ldots, 5$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям согласования, обеспечивающим непрерывность первых и вторых производных решений системы (2.19)—(2.26) в точках $(-1,0)$, $(0,0)$[1].

Рассмотрим следующий итерационный процесс. Пусть

$$\left.\begin{aligned}
&u_{2,0}(x, t),\ q_{1,0}(x, t),\ q_{2,0}(x, t),\ w_{1,0}(t),\\
&w_{2,0}(t),\ v_{1,0}(t),\ v_{2,0}(t),\ p_0(t),\\
&z_0(t),\ y_0(t)
\end{aligned}\right\}^{2} \tag{3.2}$$

произвольные дважды дифференцируемые функции, удовлетворяющие при $0 \leqslant t \leqslant T_1$ неравенствам

$$\left.\begin{aligned}
&|u_{2,0}(x,t)|_{0\leqslant x<\infty} \leqslant N_1; \quad |q_{1,0}(x,t)|_{-\rho_2\leqslant x\leqslant 0} \leqslant N_2; \quad |q_{2,0}(x,t)|_{0\leqslant x<\infty} \leqslant N_3;\\
&|w_{1,0}(t)| \leqslant N_4; \quad |w_{2,0}(t)| \leqslant N_5; \quad |v_{1,0}(t)| \leqslant N_6;\\
&|v_{2,0}(t)| \leqslant N_7; \quad |p_0(t)| \leqslant N_8; \quad |z_0(t)| \leqslant N_9;\\
&|\varphi_i^{(k)}(x)| \leqslant K;\ i = 1, 2;\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5,
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

---

[1] Эти условия, а также значения $v_i(0)$, $\dot{v}_i(0)$ и $\ddot{v}_i(0)$ будут выписаны в процессе доказательства.

Решение строится как предел последовательности функций, дважды непрерывно дифференцируемых в замыкании областей их определения. Относительно этих пределов известно, однако, лишь то, что они непрерывны вместе со своими первыми производными, удовлетворяющими условию Липшица. Сам факт существования и непрерывности вторых производных оставлен с целью упрощения рассмотрения недоказанным, хотя и не вызывает никаких сомнений.

[2] Мы не рассматриваем $u_{1,0}(x, t)$, так как она не входит ни в одно из уравнений системы (2.19) — (2.26).

$$\left.\begin{array}{l}
\left|\frac{\partial}{\partial x} q_{1,0}(x,t)\right|_{-\rho_2\leqslant x\leqslant 0} \leqslant L_1;\ \left|\frac{\partial}{\partial x} q_{2,0}(x,t)\right|_{0\leqslant x<\infty} \leqslant L_2;\ \left|\frac{\partial}{\partial t} u_{2,0}(x,t)\right|_{0\leqslant x<\infty} \leqslant L_3;\\
\left|\frac{\partial}{\partial t} q_{1,0}(x,t)\right|_{-\rho_2\leqslant x\leqslant 0} \leqslant L_4;\ \left|\frac{\partial}{\partial t} q_{2,0}(x,t)\right|_{0\leqslant x<\infty} \leqslant L_5;\ |\dot w_{1,0}(t)| \leqslant L_6;\\
|\dot w_{2,0}(t) \leqslant L_7;\qquad |\dot v_{1,0}(t)| \leqslant L_8;\qquad |\dot v_{2,0}(t)| \leqslant L_9;\\
|\dot p_0(t)| \leqslant L_{10};\qquad |\dot z_0(t) \leqslant L_{11};
\end{array}\right\} \quad (3.4)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} q_{1,0}(x,t)\right|_{-\rho_2\leqslant x\leqslant 0} < R_1;\ \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2} q_{2,0}(x,t)\right|_{0\leqslant x<\infty} < R_2;\ \left|\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x} q_{1,0}(x,t)\right|_{-\rho_2\leqslant x\leqslant 0} < R_3;\\
\left|\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} q_{2,0}(x,t)\right|_{0\leqslant x<\infty} < R_4;\ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_{2,0}(x,t)\right|_{0\leqslant x\leqslant\infty} < R_5;\ \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{1,0}(x,t)\right|_{\rho_2\leqslant x\leqslant 0} < R_6;\\
\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} q_{2,0}(x,t)\right|_{0\leqslant x<\infty} < R_7;\ |\ddot w_{1,0}(t)| < R_8;\qquad |\ddot w_{2,0}(t)| < R_9;\\
|\ddot v_{1,0}(t)| < R_{10};\ |\ddot v_{2,0}(t)| < R_{11};\ |\ddot p_0(t)| < R_{12};\ |\ddot z_0(t)| < R_{13},
\end{array}\right\}$$
$$(3.5)$$

где $1 < \rho_2 < 2$; $N_i\,(i = 1, \ldots, 9)$; $L_i\,(i = 1, \ldots, 11)$; $R_i\,(i = 1, \ldots, 13)$ — некоторым образом фиксированные постоянные, и условиям

$$\left.\begin{array}{l}
q_{i,0}(0,t) = v_{i,0}(t);\ i = 1, 2;\ u_{2,0}(0,t) = w_2(t);\\
q_{1,0}(-y(t), t) = p_0(t);
\end{array}\right\} \quad (3.6)$$

$$\left.\begin{array}{l}
p_0(0) = \dot\varphi_1(-1);\ v_{i,0}(0) = \dot\varphi_i(0);\ i = 1, 2;\ w_{2,0}(0) = \varphi_2(0);\\
w_{1,0}(0) - w_{2,0}(0) = b;\ y_0(0) = 1;
\end{array}\right\} \quad (3.7)$$

$$\ddot\varphi_1(0) + F_1(z_0(0),\ v_{1,0}(0)) - a_2^2\,\ddot\varphi_2(0) -$$
$$- F_2(0, y_0(0), z_0(0), w_{2,0}(0),\ v_{2,0}(0)) = bz_0(0); \quad (3.8)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dddot\varphi_i(0) + a_i^2 \frac{\partial}{\partial x} F_i(x, y_0(t), z_0(t), u_{i,0}(x,t), q_{i,0}(x,t))_{\substack{t=0\\ x=0}} =\\
\qquad\qquad = \dot v_{i,0}(0);\ i = 1, 2;\\
\dddot\varphi_1(-1) + \frac{\partial}{\partial x} F_1(z_0(t), q_{1,0}(x,t))_{\substack{t=0\\ x=-1}} = \dot p_0(0);
\end{array}\right\} \quad (3.9)$$

$$\ddddot{\varphi}_1(0) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_1(z_0(t),\ q_{1,0}(x, t))_{\substack{t=0\\x=0}} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} F_1(z_0(t),\ q_{1,0}(x, t))_{\substack{t=0\\x=0}} - a_2^4 \ddddot{\varphi}_2(0) -$$

$$- a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_2(x, y_0(t), z_0(t), u_{2,0}(x, t), q_{2,0}(x, t))_{\substack{t=0\\x=0}} -$$

$$- \frac{\partial}{\partial t} F_2(x, y_0(t), z_0(t), u_{2,0}(x, t), q_{2,0}(x, t))_{\substack{t=0\\x=0}} = b\, \dot{z}_0(0). \quad (3.9^*)$$

Условия (3.6)—(3.9*) обеспечивают непрерывность операторов $U_2, Q_1, \ldots, Z, Y$ и их первых и вторых производных в своих замкнутых областях определения.

Определим далее $u_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}, \ldots, z_n, y_n$ равенствами

$$\left.\begin{aligned} &u_{2,n} = U_{2,n};\ q_{1,n} = Q_{1,n};\ q_{2,n} = Q_{2,n};\\ &w_{1,n} = W_{1,n};\ w_{2,n} = W_{2,n},\ v_{1,n} = V_{1,n};\\ &v_{2,n} = V_{2,n};\ p_n = P_n;\ z_n = Z_n;\\ &y_n = Y_n, \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &W_{i,n} = W_i(t \,/\, u_{2,n-1},\ q_{1,n-1},\ q_{2,n-1},\ v_{1,n-1},\ v_{2,n-1},\\ &\qquad\qquad p_{n-1},\ z_{n-1},\ y_{n-1}),\ i = 1, 2;\\ &U_{2,n} = U_2(x, t \,/\, u_{2,n-1}\ q_{1,n-1},\ q_{2,n-1},\ v_{1,n-1},\ v_{2,n-1},\\ &\qquad\qquad p_{n-1},\ z_{n-1},\ y_{n-1});\\ &P_n = P(t \,/\, u_{2n},\ q_{1,n-1},\ q_{2,n-1},\ v_{1,n-1},\ v_{2\,n-1},,\ p_{n-1},\\ &\qquad\qquad z_{n-1},\ y_{n-1});\\ &V_{i,n} = V_i(t \,/\, u_{2,n},\ q_{1,n-1},\ q_{2,n-1},\ w_{1,n},\ w_{2,n},\ p_n,\\ &\qquad\qquad z_{n-1}, y_{n-1}),\ i = 1, 2;\\ &Z_n = Z(t \,/\, u_{2,n},\ q_{1,n-1},\ q_{2,n-1},\ w_{1,n},\ w_{2,n},\ p_n, z_{n-1},\\ &\qquad\qquad y_{n-1});\\ &Y_n = Y(t \,/\, z_n);\\ &Q_{i,n} = Q_i(x, t \,/\, u_{2,n},\ q_{1,n-1},\ q_{2,n-1},\ v_{1,n},\ v_{2,n},\ p_n,\\ &\qquad\qquad z_n, y_n),\ i = 1, 2. \end{aligned}\right\} \quad (3.11)$$

Для доказательства существования дифференцируемого решения системы (2.19)—(2.26) нам нужно показать равномерную сходимость подпоследовательностей производных от (3.10). Продифференцируем уравнения (2.19)—(2.26). В результате получим

$$\frac{\partial q_i}{\partial x} \equiv q_{ix} = \frac{1}{a_i^2}\left\{ \int_0^t [\dot v_1(\tau) - d_2 \dot v_2(\tau)]\, G\,|_{\xi=-0}\, d\tau - \right.$$

$$- \int_0^t \dot p(\tau)\, G\,|_{\xi=-y(\tau)}\, d\tau - \int_0^t [bz(\tau) - F_1(z(\tau), v_1(\tau))]\, \frac{\partial}{\partial \xi} G\,|_{\xi=-0}\, d\tau -$$

$$- \int_0^t a_2^2 F_2(0, y(\tau), z(\tau), w_2(\tau), v_2(\tau))\, \frac{\partial}{\partial \xi} G_2\,|_{\xi=+0}\, d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^{\infty} a^2 \ddot\varphi(\xi)\, G(x, \xi, a^2 t)\, d\xi -$$

$$- \int_0^t d\tau \int_{-y(\tau)}^{\infty} a^2 \frac{\partial}{\partial \xi} F(\xi, y(\tau), z(\tau), u(\xi, \tau)\ q(\xi, \tau))\, \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi \equiv$$

$$\equiv Q_{ix}(x, t/u_2, q_1, q_2, w_2, v_1, v_2, z, y, q_{1x}, q_{2x}, \dot v_1, \dot v_2, \dot p),\ i = 1, 2; \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} \equiv u_{it} = \int_0^t [\dot v_1(\tau) - d_2 \dot v_2(\tau)]\, G\,|_{\xi=-0}\, d\tau +$$

$$+ b \int_0^t z(\tau)\, \dot x(t)\, G^*\,|_{\xi=-0}\, d\tau - b \int_0^t z(\tau)\, \frac{\partial}{\partial \xi} G\,|_{\xi=-0}\, d\tau -$$

$$- \int_0^t [p(\tau) - z(\tau) F_1(z(\tau), p(\tau))\, G\,|_{\xi=-y(\tau)}\, d\tau -$$

$$- \int_0^t \dot x(t)\, [v_1(\tau) - d_2 v_2(\tau)]\, \frac{\partial}{\partial \xi} G^*\,|_{\xi=-0}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t z(\tau)\, p(\tau)\, \frac{\partial}{\partial \xi} G\,|_{\xi=-y(\tau)}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \dot{x}(t)\, p(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G^* \mid_{\xi=-y(\tau)} d\tau + \int_{-1}^{\infty} \dot{x}(t)\, \dot{\varphi}(\xi)\, G^*(x, \xi, a^2 t)\, d\xi +$$

$$+ \int_{-1}^{\infty} [a^2 \ddot{\varphi}(\xi) + F(\xi, y(\tau), z(\tau)\, u(\xi, \tau), q(\xi, \tau))]_{\tau=0}\, G(x, \xi, a^2, t)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{-y(\tau)}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} F(\xi, y(\tau), z(\tau), u(\xi, \tau), q(\xi, \tau))\, G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi -$$

$$- \int_0^t d\tau \int_{-y(\tau)}^{\infty} \dot{x}(t)\, F(\xi, y(\tau), z(\tau), u(\xi, \tau), q(\xi, \tau)) \frac{\partial}{\partial \xi} G^*(x, \xi, a^2(t -$$

$$- \tau))\, d\xi \equiv U_{it}(x, t \mid u_2, q_1, q_2, v_1, v_2, p, z, y, u_{2t}, q_{1t}, q_{2t}, \dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{p}, \dot{z}),$$

$$i = 1, 2; \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} \equiv q_{it} = b \int_0^t \dot{z}(\tau)\, G^* \mid_{\xi=-0} d\tau +$$

$$+ \int_0^t \dot{x}(t)\, [\dot{v}_1(\tau) - d_2 \dot{v}_2(\tau)]\, G \mid_{\xi=-0} d\tau -$$

$$- \int_0^t [\dot{p}(\tau)\, z(\tau) + p(\tau)\, \dot{z}(\tau)]\, G^* \mid_{\xi=-y(\tau)} d\tau -$$

$$- \int_0^t \dot{x}(t)\, \dot{p}(\tau)\, G \mid_{\xi=-y(\tau)} d\tau -$$

$$- \int_0^t [\dot{v}_1(\tau) - d_2 \dot{v}_2(\tau)] \frac{\partial}{\partial \xi} G^* \mid_{\xi=-0} d\tau -$$

$$- \int_0^t \dot{x}(t)\, [b - F_1(z(\tau), v_1(\tau))] \frac{\partial}{\partial \xi} G \mid_{\xi=-0} d\tau -$$

$$- \int_0^t a_2^2\, \dot{x}(\tau)\, F_2(0, y(\tau), z(\tau), w_2(\tau), v_2(\tau)) \frac{\partial}{\partial \xi} G \mid_{\xi=+0} d\tau +$$

$$+\int_0^t \dot p(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G^*\mid_{\xi=-y(\tau)}d\tau+\int_{-1}^{\infty}[a^2\dddot\varphi(\xi)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\xi}F(\xi,y(\tau),z(\tau),u(\xi,\tau),q(\xi,\tau))]_{\tau=0}G^*(x,\xi,a^2t)\,d\xi+$$

$$+\int_{-1}^{\infty}a^2\dot x(t)\ddot\varphi(\xi)G(x,\xi,a^2t)\,d\xi-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{-y(\tau)}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\tau}F(\xi,y(\tau),z(\tau),u(\xi,\tau),q(\xi,\tau))G^*(x,\xi,a^2(t-\tau))\,d\xi-$$

$$-\int_0^t d\tau\int_{-y(\tau)}^{\infty}a^2\dot x(t)\frac{\partial}{\partial\xi}F(\xi,y(\tau),z(\tau),u(\xi,\tau),q(\xi,\tau))\frac{\partial}{\partial\xi}G(x,\xi,a^2(t-$$

$$-\tau))\,d\xi\equiv Q_{it}\,(x,t\,/\,u_2,q_1,q_2,w_2,v_1,v_2,p,z,y,q_{1x},q_{2x},u_{2t},q_{1t},q_{2t},$$

$$\dot v_1,\dot v_2,\dot p,\dot z),\quad i=1,2.\qquad(3.14)$$

В уравнениях (3.13), (3.14) считаем $x=-y(t)$ либо $x=$ $=\mathrm{const}\in(-y(t),\infty)$.

$$\dot w_i(t)=\frac{(-1)^{i+1}-\delta}{2}bz(t)+$$

$$+U_{it}(0,t\,/\,u_2,q_1,q_2,v_1,v_2,p,z,y,u_{2t},q_{1t},q_{2t},\dot v_1,\dot v_2,\dot p,\dot z)\equiv$$

$$\equiv\dot W_i(t\,/\,u_2,q_1,q_2,v_1,v_2,p,z,y,u_{2t},q_{1t},q_{2t},\dot v_1,\dot v_2,\dot p,\dot z),\quad i=1,2;\qquad(3.15)$$

$$\dot v_1(t)=\frac{1}{y^2(t)\left[1-\frac{1-\delta}{2}\frac{w_1(t)}{y(t)}\right]^2}\left\{\left[\frac{1+\delta}{2}\dot w_1(t)+\right.\right.$$

$$+d_2\frac{1+\delta}{2}\frac{\dot w_2(t)}{y(t)}(w_1(t)-y(t))-d_2\frac{1+\delta}{2}(w_1(t)-$$

$$-y(t))\,z(t)\frac{w_2(t)}{y^2(t)}+d_2\frac{1+\delta}{2}\frac{w_2(t)}{y(t)}(\dot w_1(t)-z(t))-$$

$$-Q_2(0,t\,/\,u_2,q_1,q_2,p,z,y)\,d_2(\dot w_1(t)-z(t))-$$

$$-d_2(w_1(t)-y(t))\,Q_{2t}(0,t\,/\,u_2,q_1,q_2,p,z,y,u_{2t},q_{1t},q_{2t},\dot p,\dot z)\,[y(t)-$$

$$-\frac{1-\delta}{2}w_1(t)] - [z(t) - \frac{1-\delta}{2}\dot{w}_1(t)]\left[\frac{1+\delta}{2}w_1(t) + \right.$$

$$+ d_2\frac{1+\delta}{2}\frac{w_2(t)}{y(t)}(w_1(t) - y(t)) - d_2Q_2(0, t \mid u_2, q_1, q_2, p, z, y)(w_1(t) -$$

$$\left.\left. - y(t)\right)\right]\Big\} \equiv \dot{V}_1(t \mid u_2, q_1, q_2, w_1, w_2, p, z, y, u_{2t}, q_{1t}, q_{2t}, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{p}, \dot{z}); \quad (3.16)$$

$$\dot{v}_2(t) = \frac{1}{\left[1 - \frac{1-\delta}{2}\frac{w_1(t)}{y(t)}\right]^2}\left\{\left[-\frac{1+\delta}{2a_2}\frac{\dot{w}_1(t)}{y(t)} + \frac{1+\delta}{2a_2}\frac{w_1(t)}{y^2(t)}z(t) - \right.\right.$$

$$-\frac{1-\delta}{2}\frac{\dot{w}_2(t)}{y^2(t)}(w_1(t) - y(t)) + \frac{1-\delta}{2}\frac{w_2(t)}{y^3(t)}z(t)(w_1(t) - y(t)) -$$

$$\left. -\frac{1-\delta}{2}\frac{w_2(t)}{y^2(t)}(\dot{w}_1(t) - z(t)) + Q_{2t}(0, t \mid u_2, q_1, q_2, p, z, y, u_{2t}, q_{1t}, q_{2t}, \dot{p}, \dot{z})\right] \times$$

$$\times\left[1 - \frac{1-\delta}{2}\frac{w_1(t)}{y(t)}\right] + \frac{1-\delta}{2}\left[\frac{\dot{w}_1(t)}{y(t)} - \frac{w_1(t)\,z(t)}{y^2(t)}\right]\left[-\frac{1+\delta}{2a_2}\frac{w_1(t)}{y(t)} - \right.$$

$$\left.\left. -\frac{1-\delta}{2}\frac{w_2(t)}{y^2(t)}(w_1(t) - y(t)) + Q_2(0, t \mid u_2, q_1, q_2, p, z, y)\right]\right\} \equiv$$

$$\equiv \dot{V}_2(t \mid u_2, q_1, q_2, p, w_1, w_2\ z, y, u_{2t}, q_{1t}\ q_{2t}, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{p}, \dot{z}); \quad (3.17)$$

$$\dot{p}(t) = 2Q_{1t}(-y(t), t \mid u_2, q_1, q_2, w_2, v_1, v_2, p, z, y, q_{1x}, q_{2x}, u_{2t}, q_{1t}, q_{2t},$$

$$\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{p}, \dot{z}) \equiv \dot{P}(t \mid u_2, q_1, q_2, w_2, v_1, v_2, p, z, y, q_{1x}, q_{2x}, u_{2t}, q_{1t}, q_{2t},$$

$$\dot{v}_1, \dot{v}_2, \dot{p}, \dot{z}); \quad (3.18)$$

$$\dot{z}(t) = \frac{1}{y^2(t)\left[1 - \frac{1-\delta}{2}\frac{w_1(t)}{y(t)}\right]^2}\left\{\left[-\frac{1-\delta}{2}\frac{\dot{w}_1(t)}{y(t)} + \right.\right.$$

$$+\frac{1-\delta}{2}\frac{w_1(t)}{y^2(t)}z(t) - \frac{1+\delta}{2}d_2\frac{\dot{w}_2(t)}{y(t)} + \frac{1+\delta}{2}d_2\frac{w_2(t)}{y^2(t)}z(t) +$$

$$\left. + d_2Q_{2t}(0, t \mid u_2, q_1, q_2, p, z, y, u_{2t}, q_{1t}, q_{2t}, \dot{p}, \dot{z})\right]\left[y(t) - \frac{1-\delta}{2}w_1(t)\right] -$$

$$-\left[z(t)-\frac{1-\delta}{2}\dot{w}_1(t)\right]\left[-\frac{1-\delta}{2}\frac{w_1(t)}{y(t)}-\frac{1+\delta}{2}d_2\frac{w_2(t)}{y(t)}+\right.$$

$$\left.\left.+\ d_2Q_2(0,t\,/\,u_2,q_1,q_2,p,z,y)\right]\right\}\equiv$$

$$\equiv\dot{Z}(t\,/\,u_2,\ q_1,\ q_2,\ w_1,\ w_2,\ p,\ z,\ y,\ u_{2t},\ q_{1t},\ q_{2t},\ \dot{w}_1,\ \dot{w}_2,\ \dot{p},\ \dot{z}).\quad(3.19)$$

Заметим, что в уравнениях (3.12)—(3.14) $a^2, \varphi(\xi), F(\xi, y, z, u, q)$ определены следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l}a^2=\begin{cases}1, & -y(\tau)\leqslant\xi<0;\\ a_2^2, & 0<\xi<\infty;\end{cases}\qquad \varphi(\xi)=\begin{cases}\varphi_1(\xi), & -1\leqslant\xi<0;\\ \varphi_2(\xi), & 0<\xi<\infty;\end{cases}\\[2ex] F(\xi,y,z,u,q)=\begin{cases}F_1(z(\tau),q_1(\xi,\tau))=z(\tau)\,q_1(\xi,\tau), & -y(\tau)\leqslant\xi<0;\\ F_2(\xi,\ y,\ z,(\tau),\ u_2(\xi,\tau)),\ q_2(\xi,\tau)= & \\ \quad =z(\tau)\,q_2(\xi,\tau)+\left[\dfrac{u_2(\xi,\tau)}{\xi+y(\tau)}-\right. & \\ \quad \left.-\ q_2(\xi,\tau)\right]\dfrac{\varepsilon\, z(\tau)\,y^2(\tau)}{\xi+y(\tau)}, & 0<\xi<\infty.\end{cases}\end{array}\right\}\quad(3.20)$$

Уравнения (3.12)—(3.14) выведены в предположении, что $u_2(x,t)$, $q_i(x,t), w_i(t), v_i(t)$ $(i=1,2)$, $p(t), z(t), y(t)$ удовлетворяют условиям (3.6), (3.7), а $q_{ix}(x,t), q_{it}(x,t)$ $(i=1,2)$, $u_{2t}(x,t), \dot{w}_i(t), \dot{v}_i(t)$ $(i=1,2)$, $\dot{p}(t), \dot{z}(t)$ — условиям (3.8).

Пусть теперь

$$\left.\begin{array}{lll}q_{1x,0}(x,t); & q_{2x,0}(x,t); & u_{2t,0}(x,t);\\ q_{1t,0}(x,t); & q_{2t,0}(x,t); & \dot{w}_{1,0}(t);\\ \dot{w}_{2,0}(t); & \dot{v}_{1,0}(t); & \dot{v}_{2,0}(t);\\ \dot{p}_0(t); & \dot{z}_0(t) & \end{array}\right\}\quad(3.21)$$

производные функций (3.2) и

$$\left.\begin{array}{l}q_{ix,n}=Q_{ix,n};\ \ q_{it,n}=Q_{it,n};\quad i=1,2;\\ u_{2t,n}=U_{2t,n};\ \ \dot{w}_{i,n}=\dot{W}_{i,n};\ \ \dot{v}_{i,n}=\dot{V}_{i,n};\ \ i=1,2;\\ \dot{p}_n=\dot{P}_n;\qquad \dot{z}_n=\dot{Z}_n,\end{array}\right\}\quad(3.22)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
Q_{ix,n} &= Q_{ix}(x, t \mid u_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}, w_{2,n}, v_{1,n}, v_{2,n}, z_n, y_n,\\
&\qquad q_{1x,n-1}, q_{2x,n-1}, \dot v_{1,n-1}, \dot v_{2,n-1}, \dot p_{n-1});\ i = 1, 2;\\
\dot W_{i,n} &= \dot W_i(t \mid u_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}, v_{1,n}, v_{2,n}, p_n, z_n, y_n, u_{2t,n-1},\\
&\qquad q_{1t,n-1}, q_{2t,n-1}, \dot v_{1,n-1}, \dot v_{2,n-1}, \dot p_{n-1}, \dot z_{n-1});\ i = 1,2;\\
U_{2t,n} &= U_{2t}(x, t \mid u_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}, v_{1,n}, v_{2,n}, p_n, z_n, y_n,\\
&\qquad u_{2t,n-1}, q_{1t,n-1}, q_{2t,n-1}, \dot v_{1,n-1}, \dot v_{2,n-1}, \dot p_{n-1}, \dot z_{n-1});\\
\dot P_n &= \dot P(t \mid u_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}, w_{2,n}, v_{1,n}, v_{2,n}, p_n, z_n, y_n, q_{1x,n},\\
&\qquad q_{2x,n}, u_{2t,n}, q_{1t,n-1}, q_{2t,n-1}, \dot v_{1,n-1}, \dot v_{2,n-1}, \dot p_{n-1}, \dot z_{n-1});\\
\dot V_{i,n} &= V_i(t \mid u_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}, w_{1,n}, w_{2,n}, p_n, y_n, z_n, u_{2t,n},\\
&\qquad q_{1t,n-1}, q_{2t,n-1}, \dot w_{1,n}, \dot w_{2,n}, \dot p_n, z_{n-1});\ i = 1, 2;\\
\dot Z_n &= Z(t \mid u_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}, w_{1,n}, w_{2,n}, p_n, y_n, z_n, u_{2t,n},\\
&\qquad q_{1t,n-1}, q_{2t,n-1}, \dot w_{1,n}, \dot w_{2,n}, \dot p_n, z_{n-1});\\
Q_{it,n} &= Q_{it}(x, t \mid u_{2,n}, q_{1,n}, q_{2,n}, w_{2,n}, v_{1,n}, v_{2,n}, p_n, z_n, y_n,\\
&\qquad q_{1x,n}, q_{2x,n}, u_{2t,n}, q_{1t,n-1}, q_{2t,n-1}, q_{1,n}, \dot v_{1,n}, \dot v_{2,n}, \dot p_n, \dot z_n).
\end{aligned}\right\}\quad (3.23)$$

Нашей ближайшей целью является доказательство существования $T > 0$ такого, что семейства функций

$$\{q_{1x,n}\}, \{q_{1t,n}\} \text{ в области } -\rho_2 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

$$\{q_{2x,n}\}, \{q_{2t,n}\}, \{u_{2t,n}\} \text{ в области } 0 \leqslant x < \infty.$$

$$0 \leqslant t \leqslant T \text{ и } \{\dot w_{i,n}\}, \{\dot v_{i,n}\}, (i = 1, 2), \{\dot p_n\}, \{\dot z_n\}$$

на $[0, T]$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Отсюда, из теоремы Арцела и из непрерывности операторов Q_{1x}, Q_{2x}, u_{2t}, ..., $\dot z$ будет, очевидно, следовать существование в малом дифференцируемого решения системы (2.19)—(2.26).

а) Итак, докажем существование $T_0 > 0$ такого, что если u_2, q_1, q_2, w_1, w_2, v_1, v_2, p, z удовлетворяют условиям (3.3), а q_{1x}, q_{2x}, ..., $\dot z$ — условиям (3.4), то этим же условиям удовлетворяют операторы U_2, Q_1, ..., Z и Q_{1x}, Q_{2x}, ..., $\dot Z$ соответственно.

Докажем сначала, что $U_2, Q_1, \ldots, Z$ удовлетворяют условиям (3.3), если u_2, q_1, ..., z удовлетворяют этим же условиям.

Возьмем $T_2 \leqslant T_1$ столь малое, что

$$0 < \rho_1 \leqslant 1 - N_9 T_2 < 1 + N_9 T_2 \leqslant \rho_2, \tag{3.24}$$

где

$$\rho_1 = \text{const}; \ 0 < \rho_1 < 1.$$

Тогда заведомо

$$0 < \rho_1 \leqslant y = 1 + \int_0^t z(\tau)\, d\tau \leqslant \rho_2. \tag{3.25}$$

Пусть $x(t)$ и $\xi(\tau)$ — дифференцируемые функции такие, что при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_2$

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 \leqslant |\xi(\tau)| \leqslant \rho_2; \ \rho_1 \leqslant |x(t)| \leqslant \rho_2; \\ &|\dot{\xi}(\tau)| \leqslant N_9; \ |\dot{x}(t)| \leqslant N_9. \end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

Если $x = \text{const}$, то $-y(t) < x < \infty$; если $\xi = \text{const}$, то $-y(\tau) < \xi < \infty$.

Если $x \neq \text{const}$, то $x = -y(t)$; если $\xi \neq \text{const}$, то $\xi = -y(\tau)$. В выражения операторов U_2, W_i, Q_i, V_i $(i = 1, 2)$, $Z, P, U_{2t}, Q_{ix}, Q_{it}$, $\dot{V}_i$, $\dot{W}_i$, $(i = 1, 2)$, $\dot{Z}, \dot{P}$ (2.19)—(2.25), (3.12)—(3.19) входят интегралы следующих типов:

$$\int_0^t f(x, t, \xi, \tau)\, G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau;$$

$$\int_0^t f(x, t, \xi, \tau)\, G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau; \tag{3.27}$$

$$\int_0^t f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau;$$

$$\int_0^t f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau; \tag{3.28}$$

$$\int_l^r f(x, t, \xi, \tau)\, G(x, \xi, a^2 t)\, d\xi; \ \int_l^r f(x, t, \xi)\, G^*(x, y, a^2 t)\, d\xi; \tag{3.29}$$

$$\int_0^t d\tau \int_{l(\tau)}^{r} f(x, t, \xi, \tau)\, G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{l(\tau)}^{\infty} f(x, t, \xi, \tau)\, G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi; \quad (3.30)$$

$$\int_0^t d\tau \int_{l(\tau)}^{r} f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{l(\tau)}^{\infty} f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi, \quad (3.31)$$

где $G(x, \xi, a^2(t-\tau))$ и $G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))$ определяются по формулам (2.10), (2.11) и $f(x, t, \xi, \tau)$ — функциональный аргумент, удовлетворяющий неравенству

$$|f(x, t, \xi, \tau)| < M \quad (3.32)$$

при $-\rho_2 \leqslant x < \infty$, $-\rho_2 \leqslant \xi < \infty$, $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_2$.

Интегралы (3.27)—(3.31) оцениваются так же, как в [2, 3], поэтому их оценки выпишем без вывода:

$$\left| \int_0^t f(x, t, \xi, \tau)\, G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau \right| < \gamma \frac{M}{\sqrt{\pi}} (1 - |\delta|) \sqrt{t}; \quad (3.33)$$

$$\left| \int_0^t f(x, t, \xi, \tau)\, G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau \right| < \gamma \frac{M}{\sqrt{\pi}} (1 + |\delta|) \sqrt{t}. \quad (3.33^*)$$

Оценки интегралов (3.28) приведем только при $\xi = \pm 0$ и $\xi = -y(\tau)$, т. е. при тех значениях ξ, при которых они входят в уравнения.

а) $\xi = \pm 0$; $-y(t) \leqslant x < \infty$

$$\left| \int_0^t f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau \right| <$$

$$< \varepsilon_1 \gamma \frac{M(1 + |\delta|)}{2} \operatorname{erf} c \frac{\beta x}{2\sqrt{t}}; \quad (3.34)$$

$$\left| \int_0^t f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau \right| <$$

$$< \varepsilon_1 \gamma \frac{M(1 + |\delta|)}{2} \operatorname{erf} c \frac{\beta x}{2\sqrt{t}}; \quad (3.34^*)$$

б) $\xi = -y(\tau)$: $-y(t) \leqslant x \leqslant 0$

$$\left| \int_0^t f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau \right| < M \left[\frac{1+|\delta|}{2\sqrt{\pi}} N_9 \sqrt{t} + \right.$$

$$\left. + A\ \varepsilon_2 \operatorname{erfc} \frac{|x(t)+y(t)|}{2\sqrt{t}} + |\delta| A \operatorname{erfc} \frac{|x(t)-y(t)|}{2\sqrt{t}} \right]; \quad (3.35)$$

$$\left| \int_0^t f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau \right| < M \left[\frac{1+|\delta|}{2\sqrt{\pi}} N_9 \sqrt{t} + \right.$$

$$\left. + A\ \varepsilon_2 \operatorname{erfc} \frac{|x(t)+y(t)|}{2\sqrt{t}} + |\delta| A \operatorname{erfc} \frac{|x(t)-y(t)|}{2\sqrt{t}} \right]; \quad (3.35^*)$$

в) $\xi = -y(\tau)$; $0 \leqslant x < \infty$

$$\left| \int_0^t f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau \right| < M \frac{1+|\delta|}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma}{\rho_1} \sqrt{t}; \quad (3.36)$$

$$\left| \int_0^t f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau \right| < M \frac{1+|\delta|}{\sqrt{\pi}} \frac{\gamma}{\rho_1} \sqrt{t}; \quad (3.36^*)$$

$$\left| \int_l^r f(x, t, \xi)\, G(x, \xi, a^2 t)\, d\xi \right| < M(1+|\delta|); \quad (3.37)$$

$$\left| \int_l^r f(x, t, \xi)\, G^*(x, \xi, a^2 t)\, d\xi \right| < M\gamma(1+|\delta|); \quad (3.37^*)$$

$$\left| \int_0^t d\tau \int_{l(\tau)}^r f(x, t, \xi, \tau)\ G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi \right| < M(1+|\delta|) t; \quad (3.38)$$

$$\left| \int_0^t d\tau \int_{l(\tau)}^r f(x, t, y, \tau)\, G^*(x, y, a^2(t-\tau))\, d\xi \right| < M\gamma(1+|\delta|)\, t; \quad (3.38^*)$$

$$\left| \int_0^t d\tau \int_{l(\tau)}^r f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi < 2\gamma \frac{M}{\sqrt{\pi}} (1+|\delta|) \sqrt{t}; \right. \quad (3.39)$$

$$\left| \int_0^t d\tau \int_{l(\tau)}^r f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G^*(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi < 2\gamma \frac{M}{\sqrt{\pi}} (1+|\delta|) \sqrt{t}. \right. \quad (3.39^*)$$

В оценках (3.33)—(3.39), (3.33*)—(3.39*) введены следующие обозначения:

$$\gamma = \max\left\{a_2,\ \frac{1}{a_2^2}\right\};\ \beta = \min\left\{1,\ \frac{1}{a_2}\right\}; \tag{3.40}$$

$$\varepsilon_1 = \begin{cases} 1 \text{ при } x \neq 0 \\ 0 \text{ при } x = 0 \end{cases};\quad \varepsilon_2 = \begin{cases} 1 \text{ при } x(t) + y(t) \neq 0 \\ 0 \text{ при } x(t) + y(t) = 0 \end{cases}; \tag{3.41}$$

$$A = \frac{1}{2} \exp \frac{\rho_2 N_9}{2}. \tag{3.42}$$

Сопоставляя оценки (3.25), (3.26), (3.33)—(3.39), (3.33*)—(3.39*), а также (3.3) с уравнениями (2.19)—(2.26), получим следующие оценки операторов:

$$|U_2| \leqslant \frac{1+|\delta|}{2}(b\rho_2 + 4K) + B_1\sqrt{t}; \tag{3.43}$$

$$|Q_i| \leqslant \frac{1+|\delta|}{2}(\gamma N_6 + \gamma d_2 N_7 + AN_8 + 4\gamma K) + B_2\sqrt{t};\ i = 1, 2; \tag{3.44}$$

$$|W_i| \leqslant \frac{1+|\delta|}{2}(b\,\rho_2 + 4K) + B_3\sqrt{t};\ i = 1, 2; \tag{3.45}$$

$$|V_1| \leqslant \frac{1+|\delta|}{\rho_1\left|\left|1 - \frac{1-\delta}{4}(b + \varphi_1(0) + \varphi_2(0))\right| - B_4\sqrt{t}\right|}\left[\frac{N_4}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{d_2 N_5}{2\rho_1}(N_4 + \rho_2) + d_2(N_4 + \rho_2)K\gamma + B_5\sqrt{t}\right]; \tag{3.46}$$

$$|V_2| \leqslant \frac{1+|\delta|}{\left|\left|1 - \frac{1-\delta}{4}(b + \varphi_1(0) + \varphi_2(0))\right| - B_4\sqrt{t}\right|}\left[\frac{N_4}{2a_2\rho_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{N_5}{\rho_1^2}(N_4 + \rho_2) + K\gamma + B_6\sqrt{t}\right]; \tag{3.47}$$

$$|P| \leqslant 4(1 + |\delta|)\gamma K + B_7\sqrt{t}; \tag{3.48}$$

$$|Z| \leqslant \frac{1+|\delta|}{\rho_1\left|\left|1 - \frac{1-\delta}{4}(b + \varphi_1(0) + \varphi_2(0))\right| - B_4\sqrt{t}\right|}\left[\frac{N_4}{2\rho_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{N_5}{2\rho_1} d_2 + d_2 K\gamma + B_8\sqrt{t}\right]. \tag{3.49}$$

Здесь B_i $(i = 1, \ldots, 8)$ — положительные непрерывные ограниченные функции от $x, t, u_2, q_1, q_2, w_1, w_2, v_1, v_2, p, z, y$ в замыкании областей их определения.

При выводе оценок (3.46), (3.47), (3.49) мы использовали представление $w_1(t)$ в виде

$$w_1(t) = \frac{1}{2}[b + \varphi_1(0) + \varphi_2(0)] - \frac{1+\delta}{2}\varphi_1(0) \operatorname{erfc} \frac{1}{2\sqrt{t}} +$$

$$+ \int_0^t G\Big|_{\substack{\xi=-0\\ x=0}} (v_1(\tau) - d_2 v_2(\tau))\, d\tau - \int_0^t G\Big|_{\substack{\xi=-y(\tau)\\ x=0}} p(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{-1}^{\infty} [\varphi(\xi) - \varphi(0)]\, G(0, \xi, a^2 t)\, d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{-y(\tau)}^{\infty} F(\xi, y, z, u, q)\, G(x, \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi \qquad (3.50)$$

и оценки

$$0 < \int_l^r \xi E(0, \xi, a^2 t)\, d\xi \leqslant C\sqrt{t},\ 0 < C = \text{const};\ |y(t) - y(0)| \leqslant N_9 t. \qquad (3.51)$$

Далее, при выводе (3.43)—(3.49) использовано неравенство

$$\operatorname{erfc} \frac{y(t)}{\alpha\sqrt{t}} \leqslant \operatorname{erfc} \frac{\rho_1}{\alpha\sqrt{t}} < \frac{\alpha\sqrt{t}}{\rho_1},\ 0 < \alpha = \text{const}. \qquad (3.52)$$

Потребуем теперь выполнения неравенств

$$\frac{1 + |\delta|}{2}(b\rho_2 + 4K) \leqslant \frac{N_4}{2} \leqslant \frac{N_5}{2} \leqslant \frac{N_1}{2} \qquad (3.53)$$

и зафиксируем N_1, N_4, N_5. Зафиксируем далее N_8, удовлетворяющее неравенству

$$4(1 + |\delta|)\gamma K \leqslant \frac{N_8}{2}, \qquad (3.54)$$

и выберем N_6, N_7 и N_9 так, чтобы выполнялись неравенства

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1+|\delta|}{\rho_1\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|}\left[\frac{N_4}{2}+\frac{d_2N_5}{2\rho_1}(N_4+\rho_2)+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+d_2(N_4+\rho_2)K\gamma\right]\leqslant\frac{N_6}{2};\\
&\frac{1+|\delta|}{\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|}\left[\frac{N_4}{2a_2\rho_1}+\frac{N_5}{\rho_1^2}(N_4+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\rho_2)+K\gamma\right]\leqslant\frac{N_7}{2};\\
&\frac{1+|\delta|}{\rho_1\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|}\left[\frac{N_4}{2\rho_1}+\frac{N_5}{2\rho_1}d_2+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+d_2K\gamma\right]\leqslant\frac{N_9}{2}.
\end{aligned}\right\}\quad(3.55)$$

Наконец, фиксируем N_2 и N_3 такие, что

$$\frac{1+|\delta|}{2}(\gamma N_6+\gamma d_2N_7+AN_8+4\gamma K)\leqslant\frac{N_2}{2}\leqslant\frac{N_3}{2}.\quad(3.56)$$

После того как зафиксированы все N_i $(i=1,\ldots,9)$, можем, очевидно, выбрать $T_0'\leqslant T_2$ такое, что при $0\leqslant t\leqslant T_0'$ одновременно выполняются неравенства

$$\left.\begin{aligned}
&B_1\sqrt{t}\leqslant\frac{N_1}{2};\ B_2\sqrt{t}\leqslant\frac{N_2}{2};\ B_3\sqrt{t}\leqslant\frac{N_4}{2};\\
&0<B_4\sqrt{t}<\rho_3<\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|,\\
&\qquad\qquad 0<\rho_3=\mathrm{const};\\
&\frac{(1+|\delta|)\sqrt{t}}{\rho_1\left\{\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|-\rho_3\right\}}\left\{B_5+\right.\\
&\left.+\frac{\left[\frac{N_4}{2}+\frac{d_2N_5}{2\rho_1}(N_4+\rho_2)d_2(N_4+\rho_2)K\gamma\right]B_4}{\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|}\right\}\leqslant\frac{N_6}{2};
\end{aligned}\right\}\quad(3.57)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{(1+|\delta|)\sqrt{t}}{\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|-\rho_3}\left\{B_6+\right.\\
&\left.+\frac{\left[\frac{N_4}{2a_2\,\rho_1}+\frac{N_5}{\rho_1}(N_4+\rho_2)+K\gamma\right]B_4}{\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|}\right\}\leqslant\frac{N_7}{2};\ B_7\sqrt{t}\leqslant\frac{N_8}{2};\\
&\frac{(1+|\delta|)\sqrt{t}}{\rho_1\left\{\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|-\rho_3\right\}}\left\{B_8+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\left[\frac{N_4}{2\rho_1}+\frac{N_5}{2\rho_1}d_2+d_2K\gamma\right]B_4}{\left|1-\frac{1-\delta}{4}(b+\varphi_1(0)+\varphi_2(0))\right|}\right\}\leqslant\frac{N_9}{2};\\
&\rho_1\leqslant 1-N_9t\leqslant 1+N_9t\leqslant\rho_2,
\end{aligned}\right\}\quad(3.57)$$

что приводит к выполнению для операторов U_2, Q_i, W_i, V_1 $(i = 1, 2)$, P, Z оценок (3.3):

$$|U_2|\leqslant N_1,\ |Q_1|\leqslant N_2,\ |Q_2|\leqslant N_3,$$
$$|W_1|\leqslant N_4,\ |W_2|\leqslant N_5,\ |V_1|\leqslant N_6,$$
$$|V_2|\leqslant N_7,\ |P|\leqslant N_8,\ |Z|\leqslant N_9.$$

Доказательство равномерной ограниченности последовательностей $\{u_{2t,n}\}$, $\{q_{it,n}\}$, $\{q_{ix,n}\}$; $\{\dot{w}_{i,n}\}$, $\{\dot{v}_{i,n}\}$ $(i = 1, 2)$, $\{\dot{p}_n\}$, $\{\dot{z}_n\}$ проводим аналогично. Таким образом, существуют $T_0 \leqslant T_0'$ и L_i $(i = 1, \ldots, 11)$ такие, что при $0 \leqslant t \leqslant T_0$ неравенства (3.4) влекут за собой аналогичные неравенства для значений соответствующих операторов.

б) Легко убедиться в том, что операторы U_2, Q_i, W_i, V_i $(i=1, 2)$, P, Z удовлетворяют условиям согласования (3.6)—(3.9). Дифференцируя (3.12)—(3.19), используя (3.6)—(3.9) и проводя оценки, подобные предыдущим, убедимся в равномерной ограниченности последовательностей всех вторых производных от $u_{2,n}$, $q_{i,n}$, $w_{i,n}$, $v_{i,n}$ $(i = 1, 2)$, p_n, z_n, а значит и в равностепенной непрерывности последовательностей $\{u_{2t,n}\}$, $\{q_{ix,n}\}$, ..., $\{\dot{z}_n\}$. Из доказанной равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности этих последовательностей следует, как отмечено выше, существование в малом дифференцируемого решения рассматриваемой системы.

Замечание. Выше условия согласования не были выписаны подробно. Эти условия означают, что на начальные данные задачи накладываются весьма жесткие ограничения. Именно $\varphi(x)$ должна быть задана так, чтобы выполнялись условия (3.7)—(3.9*). Кроме того, должно быть гарантировано выполнение при $t \to 0$ равенств (1.16), (1.17) и равенств, получаемых из них двукратным дифференцированием.

Из $u_1(-y(t), t) = 0$ следует, что

$$\varphi_1(-1) = 0; \ \ddot{\varphi}_1(-1) = 0; \ \ddddot{\varphi}_1(-1) = 0. \tag{3.58}$$

Для выполнения условий (3.7) необходимо, чтобы

$$\varphi_1(0) - \varphi_2(0) = b. \tag{3.59}$$

Для выполнения условий (3.8) необходимо также, чтобы

$$z(0) = \frac{\ddot{\varphi}_1(0) - a_2^2\, \ddot{\varphi}_2(0)}{\varepsilon\varphi_2(0) + (1-\varepsilon)\,\dot{\varphi}_2(0) + b - \dot{\varphi}_1(0)}. \tag{3.60}$$

С другой стороны, из уравнений (1.16) и (1.17) при $t = 0$ имеем

$$\dot{\varphi}_1(0) - \varphi_1(0) + \varphi_1(0)\, z(0) - z(0) = 0; \tag{3.61}$$

$$z(0) = d_2\,[\dot{\varphi}_2(0) - \varphi_2(0)]. \tag{3.62}$$

Исключая из уравнений (3.61), (3.62) $z(0)$ и используя (3.60), получим

$$\frac{\ddot{\varphi}_1(0) - a_2^2\, \ddot{\varphi}_2(0)}{\varepsilon\varphi_2(0) + (1-\varepsilon)\,\dot{\varphi}_2(0) + b - \dot{\varphi}_1(0)} = d_2\,[\dot{\varphi}_2(0) - \varphi_2(0)] = \frac{\varphi_1(0) - \dot{\varphi}_1(0)}{1 - \varphi_1(0)}. \tag{3.63}$$

Мы полагаем, что

$$\left.\begin{aligned} &1 - \varphi_1(0) \neq 0; \\ &\varepsilon\varphi_2(0) + (1-\varepsilon)\,\dot{\varphi}_2(0) + b - \dot{\varphi}_1(0) \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

Дифференцируя, далее, уравнения (1.16) и (1.17) в точке $t = 0$, получим вместе с (3.9*) три представления $\dot{z}(0)$, приравнивая которые, придем к выражению вида

$$\Omega_3(\ddddot{\varphi}_1(0), \ddddot{\varphi}_2(0), \dddot{\varphi}_1(0), \dddot{\varphi}_2(0), \ddot{\varphi}_1(0), \ddot{\varphi}_2(0), \dot{\varphi}_1(0), \dot{\varphi}_2(0), \varphi_1(0), \varphi_2(0)) =$$
$$= \Omega_4(\dddot{\varphi}_1, (0), \ddot{\varphi}_1(0), \dot{\varphi}_1(0), \varphi_1(0)) = \Omega_5(\dddot{\varphi}_2, (0), \ddot{\varphi}_2(0), \dot{\varphi}_2(0), \varphi_2(0)). \tag{3.65}$$

И, наконец, дифференцируя (1.16) и (1.17) дважды по t в точке $t=0$ и исключая $z(0)$, $\dot{z}(0)$, $\ddot{z}(0)$, придем еще к одному условию для $\varphi(x)$:

$$\Omega_6(\overset{.....}{\varphi}_1(0), \overset{...}{\varphi}_1(0), \overset{...}{\varphi}_1(0), \ddot{\varphi}_1(0), \dot{\varphi}_1(0), \varphi_1(0)) =$$

$$= \Omega_7(\overset{.....}{\varphi}_2(0), \overset{....}{\varphi}_2(0), \overset{...}{\varphi}_2(0), \ddot{\varphi}_2(0), \dot{\varphi}_2(0), \varphi_2(0))$$[1]. (3.66)

Таким образом, $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям (3.1), (3.58), (3.59), (3.63)—(3.66).

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Доказано существование в малом принадлежащего классу A решения задачи (1.13)—(1.19) или, что то же самое, существование дифференцируемого решения системы (2.19)—(2.26). Докажем единственность дифференцируемого решения этой системы. Пусть

$$u_2, q_1, q_2, w_1, w_2, v_1, v_2, p, z, y;$$
$$u_2^*, q_1^*, q_2^*, w_1^*, w_2^*, v_1^*, v_2^*, p^*, z^*, y^*$$

два таких решения.

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} &\Delta f(x(t), t, \xi(\tau), \tau) = f^*(x^*(t), t, \xi^*(\tau), \tau) - f(x(t), t, \xi(\tau), \tau); \\ &\Delta^* f = \max \Delta f;\ 0 \leqslant \tau \leqslant T;\ \min(-y^*(t), y(t)) \leqslant x < \infty. \end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

Рассуждая так же, как в [2], получим следующие оценки вариаций операторов:

$$\Delta^* U_2 < K_1 \sqrt{t}\,(\Delta^* u_2 + \Delta^* q_1 + \Delta^* q_2 + \Delta^* v_1 + \Delta^* v_2 + \Delta^* p + \Delta^* z); \quad (4.2)$$

$$\Delta^* W_i < K_2 \sqrt{t}\,(\Delta^* u_2 + \Delta^* q_1 + \Delta^* q_2 + \Delta^* v_1 + \Delta^* v_2 + \Delta^* p + \Delta^* z);$$
$$i = 1, 2; \quad (4.3)$$

$$\Delta^* P < K_3 \sqrt{t}\,(\Delta^* u_2 + \Delta^* q_1 + \Delta^* q_2 + \Delta^* v_1 + \Delta^* v_2 + \Delta^* p + \Delta^* z); \quad (4.4)$$

$$\Delta^* V_i < K_4 \sqrt{t}\,(\Delta^* u_2 + \Delta^* q_1 + \Delta^* q_2 + \Delta^* p + \Delta^* z) + \bar{K}_4(\Delta^* w_1 + \Delta^* w_2),$$
$$i = 1, 2; \quad (4.5)$$

$$\Delta^* Z < K_5 \sqrt{t}\,(\Delta^* u_2 + \Delta^* q_1 + \Delta^* q_2 + \Delta^* p + \Delta^* z) + \bar{K}_5(\Delta^* w_1 + \Delta^* w_2); \quad (4.6)$$

$$\Delta^* Y < t \Delta^* z; \quad (4.7)$$

---

[1] Выражения Ω_i, $i = 3, 4, 5, 6, 7$ мы не выписываем ввиду их громоздкости.

$$\Delta^* Q_1 < K_6 \sqrt{t}\,(\Delta^* u_2 + \Delta^* q_1 + \Delta^* q_2 + \Delta^* z) + \overline{K}_6\,(\Delta^* v_1 + \Delta^* v_2 + \Delta^* p); \tag{4.8}$$

$$\Delta^* Q_2 < K_7 \sqrt{t}\,(\Delta^* u_2 + \Delta^* q_1 + \Delta^* q_2 + \Delta^* z) + \overline{K}_7\,(\Delta^* v_1 + \Delta^* v_2). \tag{4.9}$$

Здесь K_i, $i = 1, 2, 3, 5, 6, 7$; $\overline{K}_i$, $i = 4, 5, 6, 7$ — константы, не зависящие от вариаций.

Так как

$$\Delta^* U_2 = \Delta^* u_2,\ \Delta^* Q_i = \Delta^* q_1, \Delta^* W_i = \Delta^* w_i;$$

$$\Delta^* V_i = \Delta^* v_i\ \ (i = 1, 2)\ \ \Delta^* P = \Delta^* p, \Delta^* Z = \Delta^* z, \Delta^* Y = \Delta^* y,$$

то, обозначая

$$\overline{\Delta} = \min(\Delta^* u_2, \Delta^* q_1, \Delta^* q_2, \Delta^* w_1, \Delta^* w_2, \Delta^* v_1, \Delta^* v_2, \Delta^* p, \Delta^* z);$$

$$\overline{\overline{\Delta}} = \max(\Delta^* u_2, \Delta^* q_1, \Delta^* q_2, \Delta^* w_1, \Delta^* w_2, \Delta^* v_1, \Delta^* v_2, \Delta^* p, \Delta^* z);$$

$$\widetilde{K} = \max(K_1, K_2, K_3),$$

видим, что для

$$t \leqslant T^* = \frac{\overline{\Delta}^2}{49\,\widetilde{K}\,\overline{\overline{\Delta}}^2} \tag{4.10}$$

оценки (4.2)—(4.4) невозможны. Полученное противоречие показывает, что

$$\left.\begin{aligned} & u_2 = u_2^*,\ 0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T \\ & w_i = w_i^*,\ i = 1, 2,\ p = p^*,\ 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Рассуждая совершенно аналогично, из (4.11), (4.5) и (4.6) получим

$$v_i(t) = v_i^*(t),\ i = 1, 2,\ z(t) = z^*(t), \tag{4.12}$$

а отсюда и из (4.7)—(4.9) следует, что

$$y(t) = y^*(t),\ q_i(x, t) = q_i^*(x, t),\ i = 1, 2. \tag{4.13}$$

На этом завершается доказательство единственности дифференцируемого решения системы (2.19)—(2.26).

ЛИТЕРАТУРА

1. V. S. Arpaci, I. A. Klark, P. S. Larsen. The dynamics of gas-vapour bubbles in binary systems. — Proc. Roy. Soc., Ser. A, Jan., 1965.

2. Л. И. Рубинштейн. Об одном варианте одномерной задачи Стефана с усиленной нелинейностью. — Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки, 1963, т. 47.

3. Л. И. Рубинштейн. О некоторых нелинейных задачах, порождаемых уравнением Фурье. Докторская диссертация. МГУ, 1957.

4. Л. И. Рубинштейн. О нагревании и плавлении твердого тела от трения. — ДАН СССР, 1952, т. 142, № 5.

5. Л. И. Рубинштейн. О решении задачи М. Н. Веригина. — ДАН СССР, 1957, т. 113, № 1.

6. Л. И. Камынин. О существовании решения задачи Веригина. — Журнал вычислительной математики и математической физики, 1965, т. 2, № 5.

7. M. Gevrey. Sur les èquations aux dèrivèes partielles du type parabolique. — Journal de Mathèmatiques pures et appliquèes, 6 serie, 11 tome, 1913.

8. Э. Гурса. Курс математического анализа. Т. 3, ч. 1. М.—Л., ГТТИ, 1933.

EVAPORATION OR CONDENSATION OF VAPOUR OF LIQUID FROM A BINARY SPHERICAL BUBBLE

L. RUBINŠTEIN, E. JENIKEYEVA

Annotation

In the recent publication [1] have obtained an approximate solution of the problem on the dynamics of gas-vapour bubbles in binary systems.

The existence in the small and the uniqueness of the differentiable solution of the problem are proved on condition that the initial distribution of concentration and temperature satisfies the conditions of agreement ensuring the continuous differentiability of the solution in the closure of the region of its definition.

The proof is based on the reduction of the problem to the system of integral equations by means of heat potentials.

СОДЕРЖАНИЕ

Коллектив

РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ

Редактор *Э. Старпин.* Художественный редактор *Г. Крутой.*
Технический редактор *З. Брузгуль.* Корректор *Н. Лебедева.*

Сдано в набор 17 января 1967 г. Подписано к печати 31 января 1968 г. Формат бумаги $60\times90^{1}/_{16}$. 9,5 физ. печ. л.; 9,5 усл. печ. л.; 8,00 уч.-изд. л. Тип. бум. № 2. Тираж 520 экз. ЯТ 00705. Цена 80 коп.

Издательство «Зинатне», г. Рига, ул. Тургенева, 19.
Отпечатано в типографии № 6 Управления полиграфической промышленности Комитета по печати при Совете Министров Латвийской ССР, г. Рига, ул. Горького, 6. Заказ № 1183.

422970

0.80

80 коп.