172.

Ученые записки

БЕЗРАЗМЕРНОЕ ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

II

14

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра общей математики

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том I72

БЕЗРАЗМЕРНОЕ, ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

II

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига I972

УДК 513.015

Безразмерное, евклидово и полуевклидовы пространства в. 2.

Ученые записки т. 172 1972 г.

Сборник содержит работы по дифференциальной геометрии, выполненные сотрудниками физико-математического факультета ЛГУ, аспирантами, студентами и выпускниками ЛГУ.

В безразмерном проективном пространстве исследуются свойства гомологий.

В n - мерном евклидовом пространстве рассматривается характеристическая поверхность уравнения Пфаффа.

Некоторые статьи посвящены линейчатой геометрии в различных полуевклидовых пространствах.

Первый выпуск вышел в свет в 1971 году.

2К –

Ш.Д.Трупин

Гомологии в безразмерном проективном пространстве

Безразмерное линейное векторное пространство V над полем комплексных чисел введено А.М.Лопшицем в работе /I/. Ему также принадлежит идея построения безразмерного проективного и аффинного пространств. Некоторые простейшие свойства безразмерного проективного пространства P рассмотрены в работе автора настоящей статьи /2/. Подобно тому, как это делается в проективном пространстве P_n конечной размерности n (см., например, /3/, /4/, /6/), автор ставит себе целью рассмотреть некоторые простейшие свойства гомологий и m-гомологий в безразмерном проективном пространстве P.

Эта статья написана на основе бесед с А.М.Лопшицем, которому принадлежат основные идеи работы. За руководство и помощь, оказанную мне, считаю своим долгом выразить ему свою глубокую благодарность.

§I. Гомологии

Пусть в безразмерном проективном пространстве P задана коллинеация Г, при которой прямая, соединяющая произвольную точку $X(x)$ с ее образом $X'(x')$ проходит через некоторую определенную точку $X_0(x_0)$. Тогда коллинеацию Г будем называть г о м о л о г и е й, а точку X_0 – ц е н т р о м этой гомологии. Саму эту гомологию запишем следующим равенством:

$$X' = \Gamma(X). \qquad (I.I)$$

Гомология Г, как и всякая коллинеация П безразмерного проективного пространства P, индуцируется некоторым аффинором G в исходном безразмерном линейном векторном пространстве

V , а потому равенство

$$x' = Gx \tag{I.2}$$

будет нам служить аналитическим заданием гомологии Г. Для краткости формулировок, мы в дальнейшем будем говорить, что аффинор G осуществляет гомологию Г.

Прежде всего, нам необходимо выяснить структуру аффинора G . Для этой цели докажем следующую теорему.

Теорема I.I. Аффинор G , осуществляющий гомологию Г, определяется равенством

$$Gx = x_0 \cdot \varphi x + x, \tag{I.3}$$

в котором вектор x_0 определяет центр X_0 гомологии, а φ - некоторая л и н е й н а я скалярная функция, не равная тождественно нулю.

Действительно, согласно определению, точки X' , X и X_0 должны быть коллинеарными, т.е.

$$x' = Gx = \lambda(x) \cdot x_0 + \mu \cdot x, \tag{I.4}$$

где $\lambda(x)$ - некоторая скалярная функция от x , а $\mu \neq 0$ - некоторый скаляр. Следовательно, для любой точки $X(x)$ прямой XX_0 должно выполняться равенство

$$[Gx \times x_0] = 0.$$

Используя теперь теорему о компланарности двух аффиноров с системой линейно независимых векторов (см./I/)[x], мы получим:

$$x' = Gx = x_0 \cdot \varphi x + \mu \cdot x, \tag{I.5}$$

где φ - некоторая л и н е й н а я скалярная функция, не равная тождественно нулю, μ - произвольный скаляр, отличный от нуля.

---

x) В нашем случае $A=G$, $B=x$.

Сравнивая (I.4) с (I.5), видим, что $\lambda(x) = \varphi x$ и что справедливо равенство (I.3), т.к. аффинор G определяется с точностью до скалярного множителя.

Следствие I. Гомология Г переводит точки гиперплоскости φ в самих себя. Эту гиперплоскость мы будем называть неподвижной гиперплоскостью гомологии Г.

В самом деле, для произвольной точки $Y(y)$ этой гиперплоскости имеем: $\varphi y = 0$, а потому из (I.3) получим

$$y' = Gy = y,$$

т.е. точки Y' и Y совпадают.

Следствие 2. Центр X_0 также является неподвижной точкой гомологии Г.

Действительно, для точки $X_0'(x_0')$, соответствующей точке X_0, мы имеем:

$$x_0' = Gx_0 = x_0 \cdot \varphi x_0 + x_0 = \lambda_0 \cdot x_0, \tag{I.6}$$

где

$$\lambda_0 = \varphi x_0 + 1. \tag{I.7}$$

Постоянное λ_0 мы будем называть инвариантом гомологии Г. Из (I.6) видим, что точки X_0' и X_0 совпадают.

На основании вышеизложенного приходим к выводу, что следует различать два случая:

I) Центр X_0 гомологии Г не принадлежит ее неподвижной гиперплоскости, т.е.

$$\varphi x_0 \neq 0. \tag{I.8}$$

В этом случае гомология Г называется невырожденной.

2) Центр X_0 лежит в гиперплоскости φ:

$$\varphi x_0 = 0. \tag{I.9}$$

Гомология с центром, лежащем в ее неподвижной гиперплоскости, называется вырожденной или элацией.

Для невырожденной гомологии докажем несколько теорем, выясняющих ее свойства.

Теорема I.2. Если точка $X(x)$ не принадлежит неподвижной гиперплоскости φ, то и ее образ $X'(x')$ в невырожденной гомологии Г также не принадлежит этой гиперплоскости.

В самом деле, если

$$\varphi x \neq 0, \qquad \varphi x_0 \neq 0, \tag{I.10}$$

то из (I.3) выводим, что

$$\varphi x' = \varphi G x = \varphi x_0 \cdot \varphi x + \varphi x \neq 0.$$

Теорема I.3. Любая прямая, проходящая через центр X_0 невырожденной гомологии Г, пересекает ее неподвижную гиперплоскость φ.

Пусть $X(x)$ – произвольная точка пространства Р, не принадлежащая гиперплоскости φ, т.е. выполняются неравенства (I.10). Для любой точки $Y(y)$ прямой XX_0 имеем:

$$y = x + \mu \cdot x_0. \tag{I.11}$$

Так как уравнение

$$\varphi y = \varphi x + \mu \cdot \varphi x_0 = 0, \tag{I.12}$$

в силу условий (I.10), всегда имеет решение

$$\mu = -\frac{\varphi x}{\varphi x_0},$$

видим, что точка Y, для которой

$$y = x - \frac{\varphi x}{\varphi x_0} \cdot x_0, \tag{I.13}$$

принадлежит прямой XX_0 и гиперплоскости φ.

Теорема I.4. Прямая, соединяющая две соответственные точки X и X' невырожденной гомологии, является и н в а р и а н т н о й (неизменной) прямой этого преобразования (т.е. всякая точка Y этой прямой переходит в точку Y', принадлежащей этой же прямой).

Действительно, согласно условию, точки Y, X и X_0 – коллинеарны, а потому

$$y = \lambda \cdot x + \mu \cdot x_0.$$

Следовательно,

$$y' = Gy = \lambda \cdot Gx + \mu \cdot Gx_0 = \lambda x' + \mu \cdot \varrho \cdot x_0 .$$

Теперь из коллинеарности точек Y', X' и X_0 выводим, что точка Y' принадлежит прямой XX'.

Обобщением теоремы I.4 является следующая

<u>теорема I.5.</u> Любая к-плоскость $P_к$, проходящая через центр невырожденной гомологии Г, является инвариантной.

Пусть к-плоскость $P_к$ определяется линейно независимыми точками $X_0(x_0)$, $X_i(x_i)$ $(i = 1, 2, \dots, к)$.
Тогда для любой точки $Y(y)$ этой к-плоскости имеем:

$$y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \alpha_0 x_0 , \tag{I.14}$$

а для соответствующей ей точки $Y'(y')$:

$$y' = x_0 \cdot \varphi y + y = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_0 \cdot x_0 , \tag{I.15}$$

где

$$\beta_0 = \alpha_1 \cdot \varphi x_1 + \dots + \alpha_k \cdot \varphi x_k + \alpha_0 (\varphi x_0 + 1).$$

Из равенства (I.15) убеждаемся в справедливости теоремы.

Таким образом, приходим к выводу, что через центр X_0 невырожденной гомологии Г можно провести бесчисленное множество инвариантных к-плоскостей произвольной конечной размерности к.

Нетрудно убедиться в том, что теорема I.5 верна также и для вырожденной гомологии.

<u>Теорема I.6.</u> Если прямая, соединяющая две соответственные точки $X(x)$ и $X'(x')$ невырожденной гомологии Г, пересекает ее неподвижную гиперплоскость φ в точке $Y(y)$, то двойное отношение $\vartheta = (XX'X_0Y)$ равно инварианту λ, этой гомологии (см. (I.7)), т.е. не зависит от выбора точки X.

В самом деле, точки X_0, X и Y коллинеарны, а потому имеет место равенство (I.II). Кроме того, выполняется равенство (I.I2), т.к. точка Y принадлежит гиперплоскости φ

Следовательно, для этой точ..и

$$y = x - \frac{\varphi x}{\varphi x_0} \cdot x_0 . \qquad (I.13)$$

С другой стороны, для соответственных точек X и X' имеем:

$$x' = x + \varphi x \cdot x_0 . \qquad (I.3)$$

Из (I.13) и (I.3) находим, что

$$(XX_0YX') = -\frac{1}{\varphi x_0}$$

и, следовательно, в силу (I.7),

$$\vartheta = (XX'X_0Y) = 1 + \varphi x_0 = \lambda_0 . \qquad (I.16)$$

Таким образом, мы получили геометрическое истолкование инварианта λ_0 .

<u>Теорема I.7.</u> Аффинор G , осуществляющий невырожденную гомологию Г, удовлетворяет соотношению

$$(G - E)(G - \lambda_0 E) = 0, \qquad (I.17)$$

в котором E-"единичный" аффинор (т.е. аффинор, который каждому вектору $x \in V$ относит коллинеарный с ним вектор: $Ex = \lambda \cdot x$, а скаляр λ_0 - инвариант гомологии.

Действительно, из формулы

$$x' = Gx = x_0 \cdot \varphi x + x \qquad (I.3)$$

находим, что

$$G^2 x = Gx' = x_0 \cdot \varphi x' + x' = x_0 \cdot \varphi(x_0 \cdot \varphi x + x) + x_0 \cdot \varphi x + x_0 ,$$

откуда, в силу (I.7),

$$G^2 x = x_0 \cdot (\lambda_0 - 1) \cdot \varphi x + 2 x_0 \cdot \varphi x + x . \qquad (I.18)$$

Умножив равенство (I.3) на $\lambda_0+1\neq 0$ и вычтя полученный результат из равенства (I.18), мы получим соотношение

$$G^2x-(\lambda_0+1)\cdot Gx+\lambda_0\cdot x=0, \tag{I.19}$$

которое равносильно соотношению (I.17).

Подобно тому, как это имеет место в проективном пространстве конечной размерности, можно говорить о циклических коллинеациях также и в безразмерном проективном пространстве. В частности, можно говорить и об инволюционных коллинеациях.

Легко убедиться в том, что справедлива

<u>теорема I.8.</u> Невырожденная гомология Г тогда и только тогда является инволюционной, когда ее инвариант $\lambda_0=-1$.

В самом деле, если Г-инволюционная гомология, т.е.

$$G^2x=Ex=\mu\cdot x, \tag{I.20}$$

то, в силу (I.18) и (I.20), мы выводим, что

$$x_0\cdot(\lambda_0+1)\cdot\varphi x=(\mu-1)x. \tag{I.21}$$

Так как точки X_0 и X не совпадают и, кроме того, $\varphi x\neq 0$ (тождественно), то из (I.21) найдем, что

$$\lambda_0+1=\mu-1=0,$$

т.е. $\lambda_0=-1$.

Обратно, если $\lambda_0=-1$, то из (I.19) следует, что

$$G^2x=Ex=\lambda_0 x.$$

Из приведенных теорем, характеризующих важнейшие свойства невырожденных гомологий, можно прийти к выводу, что имеет место их большое сходство с аналогичными свойствами конечномерного проективного пространства. Однако, как упомянуто в работе /2/, в безразмерном проективном пространстве не имеет места принцип двойственности, а потому для приведенных теорем нельзя вывести им двойственные. Следует также обратить внимание на то обстоятельство, что важная формула (I.3) для аффинора G выведена при помощи средств безразмерного линейного векторного пространства V.

§2. m -гомологии

Как известно, в проективном пространстве конечной размерности n невырожденная m -гомология определяется как такая коллинеация, при которой имеются неподвижные m -плоскость и $(n-m-1)$-плоскость (см./3/). Проективное пространство P безразмерно и в нем не имеет места принцип двойственности. По этой причине нам придется пойти по несколько иному пути. Тем не менее, мы убедимся в том, что многие свойства m -гомологий в пространстве P аналогичны тем, которые известны для проективного пространства конечной размерности.

Пусть в безразмерном проективном пространстве P задана коллинеация

$$X' = \Gamma(X), \tag{2.1}$$

при которой прямая, соединяющая точку $X(x)$ с ее образом $X'(x')$, пересекает некоторую заданную (m -I)-плоскость P_{m-1}. Тогда коллинеацию Г мы будем называть m-г о м о л о г и е й, а заданную $(m-1)$-плоскость P_{m-1} -ц е н т р а л ь н о й п л о с к о с т ь ю этой m-гомологии.

Допустим, что m -гомология Г индуцируется некоторым аффинором G в исходном линейном безразмерном пространстве V :

$$x' = Gx. \tag{2.2}$$

Требуется определить структуру этого аффинора и найти простейшие свойства определенных таким образом m -гомологий. Для этой цели докажем, прежде всего, следующую теорему, которая аналогична теореме I.I и является ее обобщением.

Теорема 2.I. Аффинор G , осуществляющий m -гомологию (2.I), определяется равенством

$$Gx = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \varphi_i x + x, \tag{2.3}$$

в котором линейно независимые векторы x_i определяют центральную плоскость P_{m-1} m-гомологии, а φ_i -некоторые скалярные линейные функции от x, не равные тождественно нулю.

В самом деле, согласно определению, прямая XX' пересекает центральную плоскость P_{m-1} в некоторой точке $Z(z)$, а потому

$$z = x' + \lambda \cdot x = Gx + \lambda \cdot x \tag{2.4}$$

и, кроме того,

$$z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i , \tag{2.5}$$

причем

$$[x_1 \ x_2 \cdots x_m] \neq 0. \tag{2.6}$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$[Gx \quad x \quad x_1 \ x_2 \ldots x_m] = 0.$$

Используя теперь упомянутую выше теорему о компланарности двух аффиноров с системой линейно независимых векторов, мы найдем, что

$$Gx = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \varphi_i x + \mu \cdot x . \qquad (\mu \neq 0)$$

Тем самым доказана справедливость равенства (2.3), так как аффинор G определяется с точностью до скалярного множителя.

При m =I формула (2.3) совпадает с формулой (I.3), а потому I-гомология в пространстве P является просто гомологией с центром $X_1(x_1)$ и неподвижной гиперплоскостью φ_1.

<u>Следствие I.</u> m-гомология (2.I) переводит каждую точку некоторой (m-I)-плоскости в самое себя. Эту (m -I)-плоскость, которую обозначим через Q_{m-1}, мы будем называть неподвижной плоскостью m-гомологии.

Действительно, если в пространстве P выбрать в качестве "базисных" m таких линейно независимых точек $Y_j(y_j)$, для которых

$$\varphi_i y_j = 0, \quad (i, j = 1, 2, \dots m) \tag{2.7}$$

то для каждой точки $Y(y)$ (m-I)-плоскости Q_{m-1} , определяемой уравнением

$$y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot y_j, \qquad (\mu_j \neq 0) \tag{2.8}$$

мы будем иметь:

$$\varphi_i y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot \varphi_i y_j = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{2.9}$$

а потому для соответствующей ей точки $Y'(y')$, получим

$$y' = Gy = \sum_{i=1}^{m} y_i \cdot \varphi_i y + y = y.$$

Следовательно, каждая точка плоскости Q_{m-1} (2.8) является неподвижной.

Следствие 2. Центральная плоскость P_{m-1} m-гомологии Г является ее и н в а р и а н т н о й п л о с к о с т ь ю .

Плоскость P_{m-1} определяется базисными точками $X_i(x_i)$, для которых выполняется условие (2.6). Докажем сначала, что точки $X'_i(x'_i)$, соответствующие базисным точкам, принадлежат плоскости P_{m-1}.

Действительно,

$$x'_i = Gx_i = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \varphi_j x_i + x_i = \sum_{j=1}^{m} \rho_{ji} \cdot x_j; \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{2.10}$$

где

$$\rho_{ji} = \varphi_j x_i, \text{ если } j \neq i, \quad \rho_{ii} = \varphi_i x_i + 1.$$

Пусть теперь $Z(z)$ - произвольная точка плоскости P_{m-1}, т.е.

$$z = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i. \tag{2.11}$$

Тогда по формулам (2.3) и (2.10) получим:

$$z' = Gz = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \varphi_i z + z = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \cdot x_k ,$$

где

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \varphi_{kj} \cdot \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

Следовательно, точка $Z'(z')$ принадлежит центральной плоскости P_{m-1}

Теорема 2.2. Прямая XX', соединяющая две соответственные точки X и X' m-гомологии, тогда и только тогда пересекает ее неподвижную плоскость Q_{m-1}, когда и центральная плоскость P_{m-1} является неподвижной.

Докажем сначала, что если прямая XX' пересекает неподвижную плоскость Q_{m-1}, то и центральная плоскость P_{m-1} неподвижна. Для этой цели допустим, что прямая XX' пересекает центральную плоскость P_{m-1} в некоторой точке $Z(z)$. Это пересечение должно иметь место согласно определению m-гомологии. Тогда

$$x' = Gx = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \varphi_j x + x. \qquad (2.3)$$

Можем полагать, что

$$z = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \varphi_j x,$$

а потому для любой точки $Y(y)$ прямой XX' будем иметь:

$$y = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \varphi_j x + \sigma \cdot x. \qquad (\sigma \neq 0,\ \sigma \neq 1) \qquad (2,12)$$

Если, кроме того, точка Y должна принадлежать неподвижной плоскости Q_{m-1}, то должны выполняться условия

$$\varphi_i y = 0. \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \qquad (2.9)$$

Следовательно, искомый скаляр σ должен удовлетворять системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_i x_j \cdot \varphi_j x + \sigma \cdot \varphi_i x = 0. \qquad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (2.13)$$

Если подставим в эти равенства вместо вектора x такой вектор u, для которого $\varphi_j u = \delta_{ji}$, где δ_{ji} - символ Кронекера, то получим:

$$\varphi_i x_j = 0, \text{ если } j \neq i, \qquad (2.14)$$

$$\varphi_i x_i + \sigma = 0. \qquad (2.15)$$

Учитывая (2.14) и (2.15), система уравнений (2.13) переписывается следующим образом:

$$\varphi_i x \cdot (\varphi_i x_i + \sigma) = 0. \qquad (i=1,2,\cdots,m) \qquad (2.16)$$

Для произвольного вектора $x \in V$ эта система имеет решение только в том случае, когда

$$\varphi_i x_i = -\sigma. \qquad (2.17)$$

o

Рассмотрим аффинор H, определяемый равенством

$$Hx = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \varphi_i x. \qquad (2.18)$$

Тогда, приняв во внимание условия (2.14) и (2.17), мы убедимся в том, что аффинор H переводит базисные точки X_j центральной плоскости P_{m-1} в себя:

$$Hx_j = -\sigma \cdot x_j, \qquad (j=1,2,\cdots,m)$$

а потому, в силу (2.11), этот аффинор переводит также и любую точку $Z(z)$ центральной плоскости в себя:

$$Hz = H\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot Hx_i = -\sigma \cdot \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot x_i = -\sigma \cdot z.$$

Теперь формула (2.3), определяющая нашу m -гомологию Г, принимает вид:

$$x' = Gx = Hx + x \tag{2.19}$$

и для произвольной точки $Z(z)$ центральной плоскости мы получим:

$$z' = Gz = Hz + z = (1-\sigma)z. \qquad (\sigma \neq 1) \tag{2.20}$$

Следовательно, если прямая XX' пересекает неподвижную плоскость $\overset{\circ}{Q}_{m-1}$, то и центральная плоскость $\overset{\circ}{P}_{m-1}$ является неподвижной.

Далее докажем, что если X -произвольная точка пространства P, а Z -произвольная точка центральной плоскости P_{m-1}, то прямая ZX пересекает неподвижную плоскость Q_{m-1}.

Для произвольной точки $Y(y)$ прямой ZX мы имеем:

$$y = x + \mu z. \qquad (\mu \neq 0)$$

Так как точка Z принадлежит плоскости P_{m-1}, то

$$y = x + \mu \cdot \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot x_j. \tag{2.21}$$

Если точка Y принадлежит также и плоскости Q_{m-1}, то должны выполняться условия (2.9), (2.14) и (2.15), а потому должны иметь место равенства

$$\varphi_i y = \varphi_i x + \mu \cdot \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \varphi_i x_j = \varphi_i x - \mu \cdot \lambda_i \cdot \sigma = 0. \tag{2.22}$$

Для произвольного вектора $x \in V$ можем считать, что $\varphi_i x \neq 0$ (случай, когда $X \in Q$ тривиален), а потому искомое μ должно удовлетворять равенствам

$$\mu = \frac{\varphi_i x}{\lambda_i \cdot \sigma}. \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

Подставив это значение μ в (2.21), мы определим на прямой ZX такую точку $Y(y)$, для которой

$$y = x + \frac{1}{\sigma}\cdot\sum_{j=1}^{m} x_j\cdot\varphi_j x,$$

причем выполняются условия (2.22), а потому эта точка принадлежит плоскости Q_{m-1}.

Будем называть m-гомологию Г с п е ц и а л ь н о й, если ее центральная плоскость P_{m-1} также является неподвижной.

Если, например, $m=2$, то для специальной 2-гомологии центральная плоскость P_1 и неподвижная плоскость Q_1 являются прямыми и мы имеем б и а к с и а л ь н у ю гомологию (см. /5/).

<u>Теорема 2.3.</u> Если прямая XX', соединяющая две соответственные точки специальной m-гомологии, пересекает ее центральную плоскость P_{m-1} в точке Z, неподвижную плоскость Q_{m-1} в точке Y, то двойное отношение $\vartheta=(XX'ZY)$ не зависит от выбора точки X.

Действительно, используя равенство

$$x' = Gx = Hx + x, \tag{2.19}$$

можем предполагать, что прямая XX' пересекает плоскость P_{m-1} в такой точке $Z(z)$, для которой

$$z = Hx, \tag{2.23}$$

а плоскость Q_{m-1} - в точке $Y(y)$, для которой

$$y = Gy. \tag{2.24}$$

Так как точки X, Z и Y -коллинеарны, то

$$y = x + \mu\cdot z \tag{2.25}$$

и, следовательно,

$$\vartheta y = G(x + \mu\cdot z).$$

Таким образом, в силу (2.24), имеем:

$$\sigma\cdot(x+\mu z) = x+\mu\cdot z.$$

Так как $z \in P_{m-1}$, то имеет место равенство (2.20), а потому из последнего равенства выводим, что

$$x' + \mu\cdot(1-\sigma)\cdot z = x+\mu\cdot z$$

или, в силу (2.19) и (2.23),

$$z + x + \mu\cdot(1-\sigma)\cdot z = x+\mu\cdot z,$$

т.е.

$$z - \mu\cdot\sigma\cdot z = 0.$$

Так как $z \neq 0$, то отсюда следует, что

$$\mu = \frac{1}{\sigma}. \qquad (2.26)$$

Из (2.19) и (2.23) следует, что

$$z = -x + x', \qquad (2.27)$$

а используя (2.26) и (2.27), мы выведем из (2.25), что

$$y = \frac{\sigma-1}{\sigma}\cdot x + \frac{1}{\sigma} x',$$

причем $\sigma \neq 0$ и также $\sigma \neq 1$ (см.(2.20)).

Теперь видим, что двойное отношение

$$\vartheta = (X X' Z Y) = 1-\sigma$$

не зависит от выбора точки X.

Без доказательства сформулируем следующие теоремы.

Теорема 2.4. Прямая, соединяющая две соответственные точки m-гомологии, является инвариантной прямой.

Теорема 2.5. Специальная m-гомология однозначно определяется, если заданы: 1) ее центральная плоскость P_{m-1}; 2) ее неподвижная плоскость Q_{m-1} и 3) ее инвариант ϑ.

Условие 3)можно заменить заданием одной пары соответственных точек X и X', обязательно лежащих на прямой, пересекающей плоскости P_{m-1} и Q_{m-1}.

Теорема 2.6. Если при m-гомологии Г к а ж д а я прямая, соединяющая две соответственные точки, является инвариантной, то Г- специальная m-гомология.

Следующие две теоремы аналогичны теоремам I.7 и I.8, доказанным в предыдущем параграфе.

Теорема 2.7. Аффинор G, осуществляющий специальную m-гомологию, удовлетворяет соотношению

$$(G-E)(G-\nu E)=0.$$

Теорема 2.8. Специальная m-гомология тогда и только тогда является инволюционной, когда ее инвариант $\nu=-1$.

Л и т е р а т у р а

/I/ А.М.Лопшиц. Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных безразмерных пространствах. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1948, вып.УI, стр.365-419.

/2/ Ш.Д.Трупин. Некоторые простейшие свойства безразмерного проективного пространства. Ученые записки Латвийского государственного университета им.П.Стучки, 1971, т.152, стр.3-24.

/3/ Б.А.Розенфельд. Многомерные пространства. Москва, 1966.

/4/ В.Ходж и Д.Пидо. Методы алгебраической геометрии, т.I, Москва, 1954.

/5/ Г.Буземан и П.Келли. Проективная геометрия и проективные метрики. Москва, 195..

/6/ W.Burau. Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie. Berlin, 1961.

2к

Л.Я.Березина

Метрическая теория характеристической поверхности уравнения Пфаффа

В n-мерном евклидовом пространстве E_n рассматривается уравнение Пфаффа класса $2q+1$, где $n-(2q+1)=p\geq 1$. Такое уравнение, как известно, допускает ($n-q-1$)-мерные интегральные поверхности, которые проходят через р-мерную характеристическую поверхность. В работе изучается дифференциальная геометрия характеристической поверхности.

§I. Рассмотрим в E_n уравнение

$$a_i(x_k)\cdot dx_i = 0, \quad (i,k=1,2,\cdots,n) \qquad (I)$$

Коэффициенты уравнения (I) a_i, определяют в E_n поле вектора $\vec{a}\{a_i\}$. Приложим в рассматриваемой точке пространства ортонормированный репер (A, e_i) так, чтобы вектор $\vec{e}_n$ имел направление вектора $\vec{a}$. Тогда формы ω_i, ω_n, ω_{ni} $(i=1,2,\cdots,n-1)$ являются главными. Имеем

$$\omega_{ni} = \lambda_{ik}\omega_k + \lambda_i\omega_n, \quad (i,k=1,2,\cdots,n-1), \qquad (2)$$

где независимые формы ω_i, ω_n приняты за базис.

При таком выборе репера уравнение (I) принимает вид

$$\omega_n = 0, \qquad (3)$$

а внешнюю производную уравнения (3) можно записать в следующей форме

$$\mu_{ik}[\omega_i\omega_k] = 0, \quad (i,k=1,2,\cdots,n-1) \qquad (4)$$

где $$\mu_{ik} = \lambda_{ik} - \lambda_{ki}. \tag{5}$$

Допустим, что уравнение (I) является класса $2q+1$, где $n-(2q+1)=p>1$, тогда тензор (5) имеет ранг $2q$ и p-мерную нулевую область. Такой тензор определяет в $2q$-плоскости, ортогональной к $\vec{e}_n$ и нулевой области, q взаимно ортогональные 2-плоскости.

Продолжим фиксацию векторов репера следующим образом. Расположим векторы $\vec{e}_{p+1}$ и $\vec{e}_{p+2}$ в одной из указанных двухплоскостей, векторы $\vec{e}_{p+3}$ и $\vec{e}_{p+4}$ в следующей и так далее. Векторы $\vec{e}_{n-2}$ и $\vec{e}_{n-1}$ расположатся в последней двухплоскости. Первые p векторов репера при этом поместятся в нулевой области тензора μ_{ik}.

Такая фиксация приводит μ_{ik} к канонической форме. Отличным от нуля будут только

$$\mu_{\alpha\hat{\alpha}} \qquad \begin{array}{l} \alpha = p+1,\ p+3, \dots, n-2, \\ \hat{\alpha} = p+2,\ p+4, \dots, n-1, \\ \hat{\alpha} = \alpha+1, \end{array} \tag{6}$$

и внешняя форма (4) принимает вид

$$\mu_{p+1,p+2}[\omega_{p+1}\omega_{p+2}] + \mu_{p+3,p+4}[\omega_{p+3}\omega_{p+4}] + \dots + \mu_{n-2,n-1}[\omega_{n-2}\omega_{n-1}] = 0. \tag{7}$$

Кроме того, появляются новые главные формы

$$\omega_{i\alpha}, \quad \omega_{i\hat{\alpha}}, \quad (i=1,2,\dots,p) \tag{8}$$

разложение которых по базису $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ частично симметрично, а именно, симметричные матрицы образуют коэффициенты разложения по ω_k $(k=1,2,\dots,p)$.

Характеристическая поверхность уравнения (I) теперь определяется вполне интегрируемой системой

$$\omega_\alpha = 0, \quad \omega_{\hat\alpha} = 0, \quad \omega_n = 0. \tag{9}$$

Из внешних производных системы (9) следует

$$\omega_{\alpha i} = \lambda_{\alpha ik}\omega_k, \quad \omega_{\hat\alpha i} = \lambda_{\hat\alpha ik}\omega_k, \quad \omega_{ni} = \lambda_{ik}\omega_k,$$
$$\lambda_{\alpha ik} = \lambda_{\alpha ki}, \quad \lambda_{\hat\alpha ik} = \lambda_{\hat\alpha ki}, \quad \lambda_{ik} = \lambda_{ki}, \tag{10}$$

$$i,k = 1,2,\dots,p; \quad \alpha = p+1, p+3, \dots, n-2;$$
$$\hat\alpha = p+2, p+4, \dots, n-1;$$

Заметим, что характеристическая поверхность отличается от обычной p-мерной поверхности в E_n наличием инвариантного вектора $\vec{a}$ и q взаимно ортогональных и ортогональных к $\vec{a}$ двухплоскостей в нормальной плоскости поверхности. Такое дополнительное оснащение индуцирует инвариантные образы свойственные характеристической поверхности.

Каждая кривая на поверхности имеет нормальную кривизну

$$k = \frac{\omega_{ni}\,\omega_i}{\omega_i\,\omega_i}, \tag{11}$$

которая определяется отношением двух инвариантных квадратичных форм. С нормальной кривизной связаны инварианты и инвариантные сети на поверхности, обычные для гиперповерхности. Каждая из q пар тензоров $\lambda_{\alpha ik}$ и $\lambda_{\hat\alpha ik}$ индуцирует образы, свойственные p-мерной поверхности в (p+2)-мерном пространстве. В частности, всегда имеем q инвариантных квадратичных форм вида

$$(\omega_{\alpha 1})^2 + (\omega_{\alpha 2})^2 + \dots + (\omega_{\alpha p})^2 +$$
$$+ (\omega_{\hat\alpha 1})^2 + (\omega_{\hat\alpha 2})^2 + \dots + (\omega_{\hat\alpha p})^2. \tag{12}$$

Отношение каждой из этих форм к форме $\omega_i\,\omega_i$ определяет скалярный инвариант кривой на поверхности.

§2. Рассмотрим более подробно пример

$$n=7, \quad q=2, \quad p=2. \tag{13}$$

В этом случае векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ репера расположены в каса тельной плоскости двумерной характеристической поверхности. В пятимерной нормальной плоскости поверхности имеем инвариа ные плоскости $[\vec{e}_3\,\vec{e}_4]$, $[\vec{e}_5\,\vec{e}_6]$ и инвариантный вектор $\vec{e}_7$

Системы (9) и (10) имеют вид

$$\omega_3=0, \quad \omega_4=0, \quad \omega_5=0, \quad \omega_6=0, \quad \omega_7=0$$

$$\omega_{31}=\lambda_{311}\omega_1+\lambda_{312}\omega_2, \qquad \omega_{41}=\lambda_{411}\omega_1+\lambda_{412}\omega_2,$$

$$\omega_{32}=\lambda_{321}\omega_1+\lambda_{322}\omega_2, \qquad \omega_{42}=\lambda_{421}\omega_1+\lambda_{422}\omega_2,$$

$$\lambda_{312}=\lambda_{321}, \qquad \lambda_{412}=\lambda_{421}.$$

$$\omega_{51}=\lambda_{511}\omega_1+\lambda_{512}\omega_2, \qquad \omega_{61}=\lambda_{611}\omega_1+\lambda_{612}\omega_2,$$

$$\omega_{52}=\lambda_{521}\omega_1+\lambda_{522}\omega_2, \qquad \omega_{62}=\lambda_{621}\omega_1+\lambda_{622}\omega_2$$

$$\lambda_{512}=\lambda_{521} \qquad \lambda_{612}=\lambda_{621}$$

$$\omega_{71}=\lambda_{11}\omega_1+\lambda_{12}\omega_2, \qquad \lambda_{12}=\lambda_{21}.$$

$$\omega_{72}=\lambda_{21}\omega_1+\lambda_{22}\omega_2$$

Имеем следующие инвариантные квадратичные формы

$$\mathrm{I}=(\omega_1)^2+(\omega_2)^2 \tag{15}$$

$$\mathrm{II}=\omega_{71}\omega_1+\omega_{72}\omega_2 \tag{16}$$

$$\mathrm{III}=(\omega_{31})^2+(\omega_{32})^2+(\omega_{41})^2+(\omega_{42})^2 \tag{17}$$

$$\mathrm{IV} = \omega_{31}\omega_{42} - \omega_{41}\omega_{32} \qquad (18)$$

$$\mathrm{V} = (\omega_{51})^2 + (\omega_{52})^2 + (\omega_{61})^2 + (\omega_{62})^2 \qquad (19)$$

$$\mathrm{VI} = \omega_{51}\omega_{62} - \omega_{61}\omega_{52} \qquad (20)$$

ектор кривизны линии на поверхности имеет инвариантную проекцию на вектор $\vec{e}_7$ - нормальную кривизну, которая определяется отношением квадратичных форм (I6) и (I5)

$$K = \frac{\lambda_{11}(\omega_1)^2 + 2\lambda_{12}\omega_1\omega_2 + \lambda_{22}(\omega_2)^2}{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2}. \qquad (21)$$

Из выражения (2I), совершенно также, как для двумерной поверхности в E_3, следует наличие средней и полной кривизны

$$\mathcal{H} = \frac{\lambda_{11} + \lambda_{22}}{2}, \qquad \mathcal{K} = \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} \end{vmatrix}, \qquad (22)$$

нвариантной ортогональной сети линий кривизны и асимптотических линий.

Пара скалярных инвариантов кривой на поверхности

$$l_1 = \frac{(\omega_{31})^2 + (\omega_{32})^2 + (\omega_{41})^2 + (\omega_{42})^2}{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2}, \qquad (23)$$

$$l_2 = \frac{\omega_{31}\omega_{42} - \omega_{32}\omega_{41}}{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2}, \qquad (24)$$

ндуцируют все образы, свойственные двухмерной поверхности E_4.

Сохранив для всех инвариантных образов названия, введенные в /1/, присвоим плоскости /$\vec{e}_3\ \vec{e}_4$/ название "первой". Все величины индуцированные наличием этой плоскости назовем первыми. Так в плоскости $[\vec{e}_3\ \vec{e}_4]$ имеем „первый" вектор средней кривизны

$$(\lambda_{311}+\lambda_{322})\vec{e}_3+(\lambda_{411}+\lambda_{422})\vec{e}_4, \qquad (25)$$

а на поверхности следующие ортогональные сети: единственную ортогональную сеть, для которой первый вектор геодезического кручения перпендикулярен к первому вектору средней кривизны, единственная ортогональная сеть, для которой первые векторы нормальной кривизны параллельны, единственная ортогональная сеть, для которой модули первых векторов нормальной кривизны равны и единственная ортогональная сеть, для которой первый вектор геодезического кручения параллелен первому вектору средней кривизны.

Переносятся сюда и все инварианты и теоремы о них, указанные в /I/.

Аналогично, пара

$$m_1=\frac{(\omega_{51})^2+(\omega_{52})^2+(\omega_{61})^2+(\omega_{62})^2}{(\omega_1)^2+(\omega_2)^2}, \qquad (26)$$

$$m_2=\frac{\omega_{51}\omega_{62}-\omega_{52}\omega_{61}}{(\omega_1)^2+(\omega_2)^2}, \qquad (27)$$

связаная с инвариантной плоскостью $/\vec{e}_5, \vec{e}_6/$, которую назовем „второй", индуцирует вторую совокупность инвариантных образов. Так в плоскости $/\vec{e}_5, \vec{e}_6/$ имеем „второй" вектор средней кривизны

$$(\lambda_{511}+\lambda_{522})\vec{e}_5+(\lambda_{611}+\lambda_{622})\vec{e}_6, \qquad (28)$$

ортогональную сеть, для которой второй вектор геодезического кручения перпендикулярен к второму вектору средней кривизны и т.д.

Таким образом, через точку характеристической поверхности в нашем случае проходят девять инвариантных ортогональных пар линий.

§3. В заключение, заметим, что инвариантные образы характеристической поверхности являются общими для всех интегральных поверхностей максимального измерения уравнения (I) и составляют часть инвариантных образов, связанных с полем вектора $\vec{a}$.

Литература

I. Л.Я.Березина. Классическая дифференциальная геометрия I. Изд. ЛГУ, Рига, 1970.г.

2н

Березина М.Т.

К теории линейчатых поверхностей и конгруэнции в $R_n^{12\ldots(n-p)}$

I. В полуевклидовом пространстве $R_n^{12\ldots(n-p)}$ [1] вращение ортонормированного репера задается следующим образом:

$$
\begin{cases}
\vec{e}_i{}' = c_{ik}\vec{e}_k & (c_{ik}c_{jk}=\delta_{ij}) \\
\vec{e}_\alpha{}' = a_\alpha^k\vec{e}_k + a_\alpha^{\tilde{\alpha}}\vec{e}_{\tilde{\alpha}} + \vec{e}_\alpha & \qquad (I) \\
\vec{e}_n{}' = a_n^k\vec{e}_k + a_n^\alpha\vec{e}_\alpha + \vec{e}_n & \left(\begin{matrix} i,k=1,2,\ldots,p \\ \alpha=p+1,\ldots,n-1 \\ \tilde{\alpha}=p+1,\ldots,\alpha-1 \\ \tilde{\alpha}<\alpha \end{matrix}\right)
\end{cases}
$$

Уравнения движения ортонормированного репера имеют вид:

$$
\begin{cases}
d\vec{A} = \omega^i\vec{e}_i + \omega^\alpha\vec{e}_\alpha & (\omega_i^k=-\omega_k^i) \\
d\vec{e}_i = \omega_i^k\vec{e}_k \\
d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i\vec{e}_i + \omega_\alpha^{\tilde{\alpha}}\vec{e}_{\tilde{\alpha}} \\
d\vec{e}_n = \omega_n^i\vec{e}_i + \omega_n^\alpha\vec{e}_\alpha & \left(\begin{matrix} i,k=1,2,\ldots,p \\ \alpha=p+1,\ldots,n-1 \\ \tilde{\alpha}=p+1,\ldots,\alpha-1 \\ \tilde{\alpha}<\alpha \end{matrix}\right) (2)
\end{cases}
$$

Будем рассматривать только такие семейства прямых, у которых образующие не лежат ни в одной из инвариантных плоскостей пространства.

Под репером нулевого порядка семейства будем понимать такой ортонормированный репер, когда вершина репера на прямой семейства, а $\vec{e}_n$ направлен по прямой семейства.

Вращение ортонормированного репера нулевого порядка:

$$\begin{cases} \vec{e}_i{}' = C_{ik}\vec{e}_k & (C_{ik}C_{jk}=\delta_{ij}) \\ \vec{e}_\alpha{}' = a_\alpha^k \vec{e}_k + a_\alpha^{\hat\alpha}\vec{e}_{\hat\alpha} + \vec{e}_\alpha; \\ \vec{e}_n{}' = \vec{e}_n \\ & \begin{pmatrix} i,k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \\ \hat\alpha=p+1,\dots,\alpha-1 \\ \hat\alpha<\alpha \end{pmatrix} \end{cases} \tag{3}$$

Нетрудно подсчитать закон изменения вектора $\vec{X}$ при вращении (3):

$$\begin{cases} \bar X^k = C_{ki}X^i + A_\alpha^k X^\alpha \\ \bar X^{\hat\alpha} = A_\alpha^{\hat\alpha} X^\alpha + X^{\hat\alpha} \\ \bar X^{n-1} = X^{n-1} & \begin{pmatrix} i,k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \\ \hat\alpha=p+1,\dots,\alpha-1 \\ \hat\alpha<\alpha \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4}$$

Перейдем к рассмотрению линейчатых поверхностей, однопараметрических семейств прямых.

Назовем поверхностью q -порядка (q =I,2,...,$n-p$) линейчатую поверхность, центральная нормаль которой принадлежит $[p+(q-1)]$ -мерной инвариантной плоскости.

2. Рассмотрим поверхность $(n-p)$ порядка. Отнесем поверхность к реперу нулевого порядка, кроме того направим вектор $\vec{e}_{n-1}$ по центральной нормали поверхности ($d\vec{e}_n$), тогда

$$\omega_n^1 = \omega_n^2 = \dots = \omega_n^{n-2} = 0 \tag{5}$$

Поверхность обладает единственной инвариантной точкой, которую назовем горловой точкой поверхности. Абсцисса горловой точки:

$$t = -\frac{\omega^{n-1}}{\omega_n^{n-1}} \tag{6}$$

Также следует отметить наличие инвариантного вектора

$$\vec{R} = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2 + \dots + \omega^{n-2} \vec{e}_{n-2} \tag{7}$$

который назовем вектором распределения поверхности ($n-p$) порядка.

5. Рассмотрим поверхность r -порядка ($r=1,2,\dots,n-p-1$) Из определения поверхности r -порядка следует:

$$\omega_n^{n-1} = \omega_n^{n-2} = \dots = \omega_n^{p+r} = 0 \quad (r=1,2,\dots,n-p-1) \tag{8}$$

Отнесем поверхность к реперу нулевого порядка, и вектор $\vec{e}_{p+r-1}$ направим по центральной нормали поверхности:

$$\omega_n^1 = \omega_n^2 = \dots = \omega_n^{p+r-2} = 0 \quad (r=1,2,\dots,n-p-1) \tag{9}$$

назовем вектор

$$\vec{F} = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2 + \dots + \omega^{p+r-2} \vec{e}_{p+r-2} \tag{10}$$

внутренним относительным вектором распределения поверхности. Внутренний относительный вектор распределения зависит от выбора $\vec{e}_{p+1}, \vec{e}_{p+2}, \dots, \vec{e}_{n-1}$

Назовем ω^s — $\begin{pmatrix} s=n-1, n-2, \dots, p+r \\ r=1,2,\dots,n-p-1 \end{pmatrix}$ — $(n-s)$ внешним параметром распределения, а поверхность r -порядка с нулевым $(n-s)$ внешним параметром распределения - квазиторсом порядка $(n-s)$

Внутренний вектор распределения квазиторса порядка $(n-p-r)$ - есть инвариантный вектор поверхности. Точка, в которой

$$\omega^{p+r-1} = 0 \quad (r=1,2,\dots,n-p-1) \tag{11}$$

назовем относительным центром поверхности. Относительный центр поверхности зависит от выбора $\vec{e}_{p+1}, \vec{e}_{p+2}, \dots, \vec{e}_{n-1}$.

Каждому инвариантному выбору $\vec{e}_{p+1}, \vec{e}_{p+2}, \dots, \vec{e}_{n-1}$ соответствует инвариантная точка образующей.

Относительный центр квазиторса порядка $(n-p-z)$ — инвариантная точка поверхности. Назовем эту точку квазицентром.

4. Конгруэнцией в пространстве $R_n^{12\ldots(n-p)}$ будем называть $(n-1)$ параметрическое семейство прямых.

Присоединим к конгруэнции ортонормированный репер нулевого порядка. Разложение главных форм $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ по базису $\omega_n^1, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$ [2]

$$[\omega_n^1 \ldots \omega_n^p \ldots \omega_n^{n-1}] \neq 0$$

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda_k^i \omega_n^k + \lambda_\alpha^i \omega_n^\alpha \\ \omega^\alpha = \lambda_k^\alpha \omega_n^k + \lambda_\beta^\alpha \omega_n^\beta \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i,k=1,2,\ldots,p \\ \alpha,\beta=p+1,\ldots,n-1 \end{pmatrix} \tag{I2}$$

При вращении ортонормированного репера (3) имеем следующий закон изменения афинора λ_t^s $(s,t=1,2,\ldots,n-1)$

$$\bar{\lambda}_i^k = C_{ij} C_{kd} \lambda_j^d + C_{ij} A_\gamma^k \lambda_j^\gamma$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^k = C_{ki}(a_\alpha^j \lambda_j^i + a_\alpha^{\hat{\alpha}} \lambda_{\hat{\alpha}}^i + \lambda_\alpha^i) + A_\gamma^k (a_\alpha^j \lambda_j^\gamma + a_\alpha^{\hat{\alpha}} \lambda_{\hat{\alpha}}^\gamma + \lambda_\alpha^\gamma)$$

$$\bar{\lambda}_j^{\hat{\alpha}} = C_{jk} \lambda_k^{\hat{\alpha}} + C_{jk} A_\alpha^{\hat{\alpha}} \lambda_k^\alpha$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^{\hat{\gamma}} = A_\gamma^{\hat{\gamma}} (a_\alpha^k \lambda_k^\gamma + a_\alpha^{\hat{\alpha}} \lambda_{\hat{\alpha}}^\gamma + \lambda_\alpha^\gamma) + a_\alpha^k \lambda_k^{\hat{\gamma}} + a_\alpha^{\hat{\alpha}} \lambda_{\hat{\alpha}}^{\hat{\gamma}} + \lambda_\alpha^{\hat{\gamma}} \tag{I3}$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^{n-1} = a_\alpha^k \lambda_k^{n-1} + a_\alpha^{\hat{\alpha}} \lambda_{\hat{\alpha}}^{n-1} + \lambda_\alpha^{n-1}$$

$$\bar{\lambda}_j^{n-1} = C_{jk} \lambda_k^{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} i,k=1,2,\ldots,p & \\ \alpha,\gamma=p+1,\ldots,n-1 & \\ \hat{\alpha}=p+1,\ldots,\alpha-1 & \hat{\alpha}<\alpha \\ \hat{\gamma}=p+1,\ldots,\gamma-1 & \hat{\gamma}<\gamma \end{pmatrix}$$

Назовем инвариантный вектор

$$\vec{a} = \lambda_j^{n-1} \vec{e}_j \qquad (j=1,2,\ldots,p) \tag{I4}$$

основным вектором конгруэнции.

Случай, когда основной вектор конгруэнции является нулевым вектором, выделяет специальный класс конгруэнции.

Будем называть координатной поверхностью линейчатую поверхность, центральная нормаль которой совпадает с одним из векторов репера $\vec{e}_t \ (t=1,2,\dots,n-1)$

Нетрудно заметить, что конгруэнции принадлежат р-координатных поверхностей первого порядка, одна координатная поверхность второго порядка, одна третьего порядка и т.д.

Рассмотрим уравнение

$$\omega_n^{n-1}=0 \tag{15}$$

т.к.

$$D\omega_n^{n-1}\equiv 0 \tag{16}$$

то уравнение (15) выделяет $(n-2)$ параметрическое семейство прямых, принадлежащее конгруэнции.

Теорема. Конгруэнция содержит $(n-2)$ параметрическое семейство прямых, состоящее из поверхностей первого, второго, ... , $(n-p-1)$ порядков.

Аналогично, доказывается существование ($n-3$) параметрического,... $(p+1)$ параметрического, p -параметрического семейств прямых, принадлежащих конгруэнции.

Теорема.

Конгруэнция содержит совокупность вложенных друг в друга семейств прямых, причем ε-параметрическое семейство прямых $(\varepsilon=p,p+1,\dots,n-3)$ содержится в $(\varepsilon+1)$ параметрическом семействе, образованными поверхностями $(\varepsilon-p+1)$ порядка.

5. Рассмотрим возможность фиксации векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_p$. Вектор $\vec{e}_1$ можно направить по основному вектору конгруэнции (14). Тогда

$$\lambda_2^{n-1}=\lambda_3^{n-1}=\dots=\lambda_p^{n-1}=0 \tag{17}$$

При оставшихся допустимых преобразованиях в $(p-1)$ мерной инвариантной плоскости, ортогональной к основному вектору, выявляется вектор

$$\vec{Q}_1=\lambda_2^{n-2}\vec{e}_2+\lambda_3^{n-2}\vec{e}_3+\dots+\lambda_p^{n-2}\vec{e}_p \tag{18}$$

По вектору $\vec{Q}_1$ можно направить $\vec{e}_2$. Тогда

$$\lambda_3^{n-2}=\lambda_4^{n-2}=\dots=\lambda_p^{n-2}=0 \tag{19}$$

и т.д. Следовательно, если фиксирован вектор $\vec{e}_m \ (m=1,2,\dots,p-2)$ то в инвариантной ($p-m$)мерной плоскости, ортогональной к $\vec{e}_m$, выделяется вектор

$$\vec{Q}_m=\lambda_{m+1}^{n-m-1}\vec{e}_{m+1}+\lambda_{m+2}^{n-m-1}\vec{e}_{m+2}+\dots+\lambda_p^{n-m-1}\vec{e}_p \tag{20}$$

по которому направляем вектор $\vec{e}_{m+1}$. И

$$\lambda_{m+2}^{n-m-1}=\lambda_{m+3}^{n-m-1}=\dots=\lambda_p^{n-m-1}=0 \tag{21}$$

Предложенная фиксация означает, что векторы $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_p$ направлены по, ортогональным к основному вектору, центральным нормалям поверхностей первого порядка, являющимися квазиторсами порядка один, порядка два, ..., порядка $(p-1)$

Теорема.

Конгруэнция содержит поверхности первого порядка - квазиторсы порядка $t \ (t=1,2,\dots,p-1)$, чьи центральные нормали взаимно ортогональны и ортогональны к основному вектору.

С векторами $\vec{Q}_m$ связан ряд инвариантов - модули этих векторов.

6. Исследуем некоторые классы конгруэнции прямых в $R_n^{12\dots(n-p)}$. Рассмотрим класс конгруэнции прямых, все поверхности первого порядка которой - квазиторсы порядка один. Т.е.

$$\lambda_1^{n-1}=\lambda_2^{n-1}=\dots=\lambda_p^{n-1}=0 \tag{22}$$

Тогда система (I2) принимает вид:

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda^i_k \omega^k_n + \lambda^i_\alpha \omega^\alpha_n & [\omega^1_n \omega^2_n \dots \omega^{n-1}_n] \neq 0 \\ \omega^\eta = \lambda^\eta_k \omega^k_n + \lambda^\eta_\alpha \omega^\alpha_n & \\ \omega^{n-1} = \lambda^{n-1}_\alpha \omega^\alpha_n & \begin{pmatrix} i,k = 1,2,\dots,p \\ \alpha = p+1,\dots,n-1 \\ \eta = p+1,\dots,n-2 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{23}$$

Класс существует с произволом $(n-2)$ функций от $(n-1)$ аргумента.

Следующий класс: конгруэнция прямых, все поьерхности первого порядка которой - квазиторсы порядка два, т.е.

$$\begin{aligned} &\lambda^{n-1}_1 = \lambda^{n-1}_2 = \dots = \lambda^{n-1}_p = 0 \\ &\lambda^{n-2}_1 = \lambda^{n-2}_2 = \dots = \lambda^{n-2}_p = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Система (I2) принимает вид:

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda^i_k \omega^k_n + \lambda^i_\alpha \omega^\alpha_n & [\omega^1_n \omega^2_n \dots \omega^{n-1}_n] \neq 0 \\ \omega^\mu = \lambda^\mu_k \omega^k_n + \lambda^\mu_\alpha \omega^\alpha_n & \\ \omega^{n-2} = \lambda^{n-2}_\alpha \omega^\alpha_n & \\ \omega^{n-1} = \lambda^{n-1}_\alpha \omega^\alpha_n & \begin{pmatrix} i,k = 1,2,\dots,p \\ \alpha = p+1,\dots,n-1 \\ \mu = p+1,\dots,n-3 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{25}$$

Класс существует с произволом $(n-3)$ функций от $(n-1)$ аргумента.

Аналогично, исследуется существование классов конгруэнции, у которой все поверхности первого порядка - квазиторсы порядка три, порядка четыре,..., порядка $(n-p-2)$.

Последний класс конгруэнции прямых: у которой все поверхности первого порядка - квазиторсы порядка $(n-p-1)$ т.е.

$$\lambda_k^\alpha = 0 \qquad \begin{pmatrix} k=1,2,\dots,p \\ \alpha=p+1,\dots,n-1 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Система (I2) принимает вид:

$$\begin{cases} \omega^i = \lambda_k^i \omega_n^k + \lambda_\alpha^i \omega_n^\alpha & [\omega_n^1 \omega_n^2 \dots \omega_n^{n-1}] \neq 0 \\ \omega^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \omega_n^\beta \cdot & \begin{pmatrix} i,k=1,2,\dots,p \\ \alpha,\beta=p+1,\dots,n-1 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{27}$$

класс существует с произволом р-функций от $(n-1)$ аргумента. Для класса конгруэнции, все поверхности первого порядка которой являются квазиторсами порядка $(n-p-1)$, характерно, что величины λ_k^i $(i,k=1,2,\dots,p)$ при вращении (3) меняются, как тензор Евклидового пространства. Тензор λ_k^i можно использовать для крепления векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p$. Тензор λ_k^i индуцирует инвариантные точки и направления, аналогично, как в E_n [3].

Литература

I. Б.А.Розенфельд. "Неевклидовы пространства", "Наука", Москва, I969

2. Л.Я.Березина. "Классическая дифференциальная геометрия" II, Из-во ЛГУ, Рига, I97I.

3. Л.Я.Березина. "Классическая дифференциальная геометрия", I, Из-во ЛГУ, Рига, I970.

2к/

Березина М.Т.

О некоторой канонизации репера конгруэнции в A_4

Под конгруэнцией прямых как в R_4^{12}, так и в A_4 будем понимать трёхпараметрическое семейство прямых.

Отнесем конгруэнцию в A_4 к реперу R_0 следующим образом: поместим вершину репера на прямую семейства, а вектор $\vec{e}_4$ направим по прямой семейства. Уравнения движения репера R_0 /I/:

$$\begin{cases} d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i + \omega^4 \vec{e}_4 \\ d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k + \omega_i^4 \vec{e}_4 \\ d\vec{e}_4 = \omega_4^k \vec{e}_k + \omega_4^4 \vec{e}_4 \qquad (i,k = 1,2,3) \end{cases} \tag{I}$$

Допустимые преобразования репера R_0 :

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} + t\vec{e}_4 \\ \vec{e}_i{}' = a_i^k \vec{e}_k + a_i^4 \vec{e}_4 \\ \vec{e}_4{}' = a_4^4 \vec{e}_4 \qquad (i,k = 1,2,3) \end{cases} \tag{2}$$

Основная задача работы будет заключаться в том, чтобы построить в A_4 такой полуканонический репер R_6, допустимые преобразования которого совпадают с допустимыми преобразованиями репера R_1 пространства R_4^{12}. Тогда для конгруэнции в A_4 можно будет определить все найденные инвариантные образы конгруэнции в R_4^{12}. В репере R_0 для конгруэнции имеем /I/:

$$\omega^i = \lambda_k^i \omega_4^k \qquad (i,k = 1,2,3) \tag{3}$$

Поместим вершину репера в центр конгруэнции, тогда

$$\lambda_1^1 + \lambda_2^2 + \lambda_3^3 = 0 \qquad (4)$$

Получим репер R_1, допустимые преобразования которого:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} \\ \vec{e}_i{}' = a_i^k \vec{e}_k + a_i^4 \vec{e}_4 \\ \vec{e}_4{}' = a_4^4 \vec{e}_4 \qquad (i,k = 1,2,3) \end{cases} \qquad (5)$$

Вторая частичная канонизация репера: за оснащающую плоскость выбираем касательную плоскость центральной поверхности $(d\vec{A})$. Аналитическое условие /I/:

$$\omega^4 = 0 \qquad (6)$$

Получен репер R_2, с допустимыми преобразованиями:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} \\ \vec{e}_i{}' = a_i^k \vec{e}_k \\ \vec{e}_4{}' = a_4^4 \vec{e}_4 \qquad (i,k = 1,2,3) \end{cases} \qquad (7)$$

Далее необходимо отыскать инвариантную двухмерную плоскость, принадлежащую оснащающей плоскости. Эту плоскость будем искать, как пересечение оснащающей плоскости с некоторой инвариантной трёхмерной плоскостью (Σ). Для построения инвариантной трёхмерной плоскости (Σ) воспользуемся инвариантами тензора λ_k^i (3):

$$J_1 = \lambda_i^k \lambda_k^i \qquad (i,k = 1,2,3) \qquad (8)$$

и

$$J_2 = \lambda_k^i \lambda_j^k \lambda_i^j \qquad (i,k,j = 1,2,3) \qquad (9)$$

Для фиксации (Σ) требуется следующая частичная канонизация: нормирование вектора $\vec{e}_4$

Вычисляем /I/

$$d\mathcal{Y}_2 = 3\lambda^i_k \lambda^k_j \Delta^j_i - 3\lambda^i_k \lambda^k_j \lambda^j_i \omega^4_4 \tag{I0}$$

$$(i,k,j=1,2,3)$$

Положим

$$\mathcal{Y}_2 = 1 \tag{II}$$

Тогда $\vec{e}_4$ нормирован и

$$\omega^4_4 = \lambda^d_m \lambda^m_j \mu^j_{dl} \omega^l_4 \tag{I2}$$

$$(m,d,j,l=1,2,3)$$

- главная форма.

Допустимые преобразования полученного репера R_3 :

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} \\ \vec{e}_i{}' = a^k_i \vec{e}_k \\ \vec{e}_4{}' = \vec{e}_4 \qquad (i,k=1,2,3) \end{cases} \tag{I3}$$

Нетрудно вычислить

$$d\mathcal{Y}_1 = 2\mu^j_{kl}(\lambda^k_j - \lambda^d_i \lambda^i_d \lambda^k_m \lambda^m_j)\omega^l_4 \tag{I4}$$

$$(i,k,j,d,l,m=1,2,3)$$

или

$$d\mathcal{Y}_1 = M_1\omega^1_4 + M_2\omega^2_4 + M_3\omega^3_4 \tag{I5}$$

где

$$M_l = 2\mu^j_{kl}(\lambda^k_j - \lambda^d_i \lambda^i_d \lambda^k_m \lambda^m_j) \tag{I6}$$

$$(i,k,j,d,m,l=1,2,3)$$

Уравнение (I5) представляет инвариант dY_1, как свертку контравариантного вектора ω_4^l с ковектором M_l. Ковектор M_l определяет искомую плоскость (Σ). Построенная плоскость (Σ) является касательной плоскостью поверхности, на которой сохраняется постоянное значение Y_1.

Назовем эту поверхность - поверхностью уровня, а плоскость (Σ) - плоскостью уровня.

Теперь возможна следующая частичная канонизация: положить векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ в двухмерную инвариантную плоскость (Σ^*) - пересечение плоскости уровня со средней плоскостью (оснащающей плоскостью).

Тогда

$$M_1 = 0 \qquad M_2 = 0 \tag{I7}$$

и уравнение (I5) принимает вид:

$$dY_1 = M_3\, \omega_4^3 \tag{I5'}$$

Из уравнения (I5') следует, что, если

$$\omega_4^3 = 0 \tag{I8}$$

то и

$$D\omega_4^3 = 0 \tag{I9}$$

Т.е. вполне интегрируемое уравнение (I8) выделяет двухпараметрическое семейство прямых, принадлежащее конгруэнции.

Допустимые преобразования репера R_4:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} \\ \vec{e}_1{}' = a_1^1 \vec{e}_1 + a_1^2 \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' = a_2^1 \vec{e}_1 + a_2^2 \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3{}' = a_3^1 \vec{e}_1 + a_3^2 \vec{e}_2 + a_3^3 \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4{}' = \vec{e}_4 \end{cases} \tag{20}$$

Следующий шаг построения полуканонического репера R_6 - ввести Евклидову метрику на плоскость $[\vec{e}_1 \vec{e}_2]$

В репере R_4 формы ω_1^3, ω_2^3 - главные, их разложение по базису:

$$\begin{cases} \omega_1^3 = \tau_{1k}\,\omega_4^k \\ \omega_2^3 = \tau_{2k}\,\omega_4^k \end{cases} \qquad \tau_k = \varepsilon_k \tag{21}$$

Рассмотрим квадратичную форму τ_{ij} $(i,j=1,2)$
Классификация формы проводится по знаку инварианта

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{vmatrix} \tag{22}$$

Когда форма τ_{ij} положительно определена, т.е. $\Delta > 0$ возможно:

$$\tau_{12} = 0; \quad \tau_{11} = \tau_{22} = 1 \tag{23}$$

Требования (23) эквивалентны системе

$$\begin{cases} (a_1^1)^2 + (a_1^2)^2 = 1 \\ (a_2^1)^2 + (a_2^2)^2 = 1 \end{cases} \qquad a_1^1 a_2^1 + a_1^2 a_2^2 = 0 \tag{24}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \tag{25}$$

- ортогональна.

Оставшиеся допустимые преобразования репера R_5 :

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} \\ \vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi \\ \vec{e}_2{}' = -\vec{e}_1 \sin\varphi + \vec{e}_2 \cos\varphi \\ \vec{e}_3{}' = a_3^1 \vec{e}_1 + a_3^2 \vec{e}_2 + a_3^3 \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4{}' = \vec{e}_4 \end{cases} \tag{26}$$

Последняя необходимая частичная канонизация: нормирование вектора $\vec{e}_3$.

Для нормирования $\vec{e}_3$ положим /I/

$$g_{33}^3 = 1 \tag{27}$$

Получен полуканонический репер R_6. Его допустимые преобразования:

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} \\ \vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi \\ \vec{e}_2{}' = -\vec{e}_1 \sin\varphi + \vec{e}_2 \cos\varphi \\ \vec{e}_3{}' = a_3^1 \vec{e}_1 + a_3^2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}_4{}' = \vec{e}_4 \end{cases} \tag{28}$$

Допустимые преобразования построенного полуканонического репера R_6 конгруэнции в A_4 совпадают с допустимыми преобразованиями полуканонического репера R_1 конгруэнции в R_4^{12} [2] где репер R_1: $\vec{e}_4$ направлен по прямой конгруэнции, вершина репера на прямой конгруэнции, причем фиксирован перенос вершины репера вдоль прямой конгруэнции.

Полуканонический репер R_6 может быть построен и другим путем. Вместо средней плоскости может быть использована другая оснащающая плоскость, а плоскость (Σ) построена с помощью других инвариантов конгруэнции.

Теперь для конгруэнции в A_4 можно отметить все найденные инвариантные образы конгруэнции в R_4^{12}.

Так, например, возникает классификация линейчатых поверхностей, принадлежащих конгруэнции, потому лежат ли их центральные нормали в инвариантной плоскости (Σ^*) или (Σ), т.е. деление линейчатых поверхностей на поверхности первого и второго порядков.

Как отмечалось выше, уравнение (18) выделяет двухпараметрическое семейство прямых, принадлежащее конгруэнции. Все линейчатые поверхности этого семейства являются поверхностями первого порядка.

<u>Теорема.</u> Совокупность поверхностей первого порядка, принадлежащих конгруэнции, образует двухпараметрическое семейство прямых.

В работе /3/ для конгруэнции в R_4^{12} был определен ряд нормалей - инвариантных векторов плоскости (Σ). Эти нормали и индуцируемые ими инвариантные точки можно указать и для конгруэнции в A_4. Рассмотрим, например, нормаль α_1.

Система

$$\bar{J}_2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^1 = 0$$

$$\bar{J}_8 = \lambda_1^3 \lambda_3^1 + \lambda_2^3 \lambda_3^2 = 0 \qquad (29)$$

определяет нормаль α_1. Нормаль α_1 - центральная нормаль орто-распределительной поверхности /3/, вызывающая совпадение α_1- главной пары с α_1 - нулевой парой.

<u>Теорема.</u> Конгруэнция содержит две различные, совпавшие или мнимые орто-распределительные поверхности, центральные нормали которых индуцируют совмещение α_1- главной пары с α_1 -нулевой парой.

Аналогично, как нормаль α_1, для конгруэнции в A_4 могут быть определены все инвариантные образы, отмеченные в /2/, /3/.

Литература

1. Л.Я.Березина "Классическая дифференциальная геометрия", II ЛГУ, Рига, 1971 г.
2. М.Т.Березина. "Некоторые вопросы теории конгруэнции в R_n^{12}", ученые записки ЛГУ, Рига, 1971 г.
3. М.Т.Березина. "О нормалях конгруэнции в R_4^{12}", ученые записки ЛГУ, Рига, 1971 г.

21

Власова Р.К.

Некоторые классы двухпараметрических семейств прямых L_2 в F_4

В статье /I/ рассмотрено семейство L_2 двухпараметрических прямых первого порядка и принадлежащие им линейчатые поверхности первого порядка. В предлагаемой работе исследованы два класса прямых семейства L_2 , получены теоремы, связывающие скалярные величины, определяемые линейчатыми поверхностями первого порядка, принадлежащими этим классам.

§I. Класс А

Рассмотрим прямые, образующие линейчатые поверхности первого порядка, стрикционные точки которых совпадают. Из семейства L_2 класс А таких прямых можно выделить условием (/I/,(26)):

$$\mathcal{J}_1 = \lambda_3^2 = 0 \qquad (I)$$

Дифференцируя основную систему (/I/,(20)) внешним образом и учитывая условие (I), получим:

$$\begin{aligned}
&[\omega^1 - d\lambda_2^3,\ \omega_1^2] = 0 \\
&[\lambda_3^3\omega_2^3 - \lambda_2^2\omega_2^3 - d\lambda_2^3,\ \omega_1^2] + [\omega^1 - d\lambda_3^3,\ \omega_1^3] = 0 \\
&[dl_2 - l_3\omega_2^3 - \lambda_2^2\omega_2^4 - \lambda_2^3\omega_3^4,\ \omega_1^2] + [dl_3 - \lambda_3^3\omega_3^4,\ \omega_1^3] = 0 \\
&[2z_{23}\omega_2^3 - dz_{22},\ \omega_1^2] + [z_{33}\omega_2^3 - dz_{23},\ \omega_1^3] = 0 \\
&[dz_{23} - z_{33}\omega_2^3,\ \omega_1^2] + [dz_{33},\ \omega_1^3] = 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

Для системы (2) $S_1=5$, $q=8$, $S_2=3$. Число Картана $Q=S_1+2S_2=11$. Нетрудно подсчитать, что произвол общего интегрального элемента $N=11$. Так как $Q=N$ система (2) в инволюции. Решение системы дифференциальных уравнений класса А существует с произволом трех функций двух переменных.

Предположим, что остальные инварианты семейства L_2 J_2-J_7 не равны нулю, причем

$$J_2=(\lambda_2^2-\lambda_3^3)^2 \tag{3}$$

Тогда для прямых класса А справедливы теоремы I-3, 6-8, I0-I3 семейства L_2 /I/, но имеется и ряд отличительных свойств.

Абсциссы псевдофокусов прямых класса А определяются уравнением (/I/,(25))

$$\rho^2+(\lambda_2^2+\lambda_3^3)\rho+\lambda_2^2\lambda_3^3=0 \tag{4}$$

т.е. псевдофокусы класса А будут лежать в точках с абсциссами

$$\rho_1=-\lambda_2^2\ , \quad \rho_2=-\lambda_3^3 \tag{5}$$

Теорема I.

Прямые класса А имеют псевдофокусы в различных действительных точках.

Рассмотрим линейчатые поверхности первого порядка, принадлежащие прямым класса А. Известно, что стрикционные точки этих поверхностей совпадают и имеют абсциссу (/I/,(34))

$$\kappa=-\lambda_2^2 \tag{6}$$

Теорема 2.

Стрикционная точка линейчатой поверхности первого порядка, принадлежащей классу А, совпадает с одним из псевдофокусов прямой этого класса.

Внутренний параметр распределения линейчатой поверхности первого порядка, принадлежащей классу А, вычисляется по формуле (/I/,(35))

$$P = (\lambda_2^2 - \lambda_3^3)\varphi - \lambda_2^3 . \qquad (7)$$

Теорема 3.

Классу А принадлежит одна линейчатая поверхность первого порядка, внутренний параметр которой равен нулю.

Центральная нормаль этой поверхности образует с осью репере e_2 флаговый угол

$$\alpha = \frac{\lambda_2^3}{\lambda_2^2 - \lambda_3^3} \qquad (8)$$

Исключая флаговый угол из формул внутреннего и внешнего параметров распределения линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих классу I (/I/,(35) и (36)), получим соотношение

$$\frac{P_1 - P_2}{\Pi_1 - \Pi_2} = \frac{\sqrt{J_2}}{J_5} \qquad (9)$$

Теорема 4.

Для любой пары линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих классу А, отношение разностей внутренних и внешних параметров распределения одно и то же.

Аналогично получим соотношение

$$\frac{P_1 - P_2}{R_{11} - R_{12}} = \frac{\sqrt{J_2}}{J_4} \qquad (10)$$

Теорема 5.

Для любой пары линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих классу А, отношение разностей внутренних параметров распределения и первых кривизн одно и то же.

§ 2. Класс В

Рассмотрим прямые, которым принадлежат линейчатые поверхности первого порядка с равными первыми кривизнами. Эти прямые образуют класс В и выделяются из семейства L_2 условием

$$\mathcal{J}_4 = r_{33} = 0 \qquad (11)$$

Дифференцируя внешним образом систему (/1/,(20)) и учитывая (11), имеем:

$$[\omega^1 - d\lambda_2^2 + \lambda_3^2\omega_2^3, \omega_1^2] - [d\lambda_3^2\, \omega_1^3] = 0$$

$$[\lambda_3^3\omega_2^3 - \lambda_2^2\omega_2^3 - d\lambda_2^3, \omega_1^2] + [\omega^1 - \lambda_3^2\omega_2^3 - d\lambda_3^3, \omega_1^3] = 0$$

$$[dl_2 - \lambda_2^2\omega_2^4 - \lambda_2^3\omega_3^4 - l_3\omega_2^3, \omega_1^2] + [dl_3 - \lambda_3^2\omega_2^4 - \lambda_3^3\omega_3^4, \omega_1^3] = 0 \qquad (12)$$

$$[2r_{23}\omega_2^3 - dr_{22}, \omega_1^2] - [dr_{23}\, \omega_1^3] = 0$$

$$[dr_{23}\, \omega_1^2] = 0$$

Для системы (12) имеем S_1 =5, q =8, S_2 =3. Число Картана Q =11, произвол общего интегрального элемента N =11. Решение системы существует с произволом трех функций двух переменных.

Для прямых класса В имеют место теоремы 1,4,5,8,10,12,13 семейства прямых L_2 [1] при условии, что остальные инварианты семейства не равны нулю. Инвариант $\mathcal{J}_3$ для прямых класса В принимает вид (/1/,(28))

$$\mathcal{J}_3' = r_{23} \qquad (13)$$

Первая кривизна линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих классу В, будет (/1/, (37))

$$K_1 = r_{23} \qquad (14)$$

Вторую кривизну этих поверхностей будем вычислять по формуле (/I/, (38))

$$R_2 = 2r_{23}\psi + r_{22} \tag{I5}$$

Теорема 6.

Существует единственная линейчатая поверхность первого порядка, принадлежащая классу B, вторая кривизна которой равна нулю.

Центральная нормаль этой поверхности с осью репера образует флаговый угол

$$\beta = -\frac{r_{22}}{2r_{23}} \tag{I6}$$

Для линейчатых поверхностей первого класса, принадлежащих классу B, справедливы соотношения

$$\frac{\Pi_1 - \Pi_2}{R_{21} - R_{22}} = \frac{J_5}{2J_3'} \tag{I7}$$

$$\frac{K_1 - K_2}{R_{21} - R_{22}} = \frac{J_1}{2J_3'} \tag{I8}$$

Теорема 7.

Для любой пары линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих классу B, отношение разностей внешних параметров распределения и вторых кривизн одно и то же.

Теорема 8.

Для любой пары линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих классу B, отношение разностей абсцисс стрикционных точек и вторых кривизн одно и то же.

Литература

I. Р.К.Власова. "Двухпараметрические семейства прямых L_2 в F_4
Ученые записки ЛГУ, т.152, 1971 г.

Эх-

Герман М.И.

Элементы теории нестационарного поля

Нестационарными называются поля, изменяющиеся во времени. Эти поля играют большую роль в механике. Для классической механики удобно рассматривать их в Галилеевом 4-х-мерном пространстве(G_4) /I/.

I. Если в каждой точке пространства G_4 задан единичный вектор $\vec{e}\{e_x, e_y, e_z, 1\}$ как функция от x,y, z и t, то мы говорим, что задано поле единичного вектора.

Уравнения движения ортонормированного репера $A\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_4$ в G_4 имеют вид:

$$d\vec{A} = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3 + \omega_4\vec{e}_4.$$
$$d\vec{e}_1 = \omega_{12}\vec{e}_2 + \omega_{13}\vec{e}_3$$
$$d\vec{e}_2 = \omega_{21}\vec{e}_1 + \omega_{23}\vec{e}_3$$
$$d\vec{e}_3 = \omega_{31}\vec{e}_1 + \omega_{32}\vec{e}_2$$
$$d\vec{e}_4 = \omega_{41}\vec{e}_1 + \omega_{42}\vec{e}_2 + \omega_{43}\vec{e}_3$$
$$\omega_{ik} = -\omega_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

Относим поле к реперу нулевого порядка следующим образом: вершину закрепим в точке А, а вектор $\vec{e}_4$ направим по вектору поля $\vec{e}$.

Формы $\omega_i\ (i=1,2,3,4)$ возьмём за базис. Тогда основная система примет вид:

$$\begin{cases} \omega_{41} = \lambda_{411}\omega_1 + \lambda_{412}\omega_2 + \lambda_{413}\omega_3 + \lambda_{414}\omega_4 \\ \omega_{42} = \lambda_{421}\omega_1 + \lambda_{422}\omega_2 + \lambda_{423}\omega_3 + \lambda_{424}\omega_4 \\ \omega_{43} = \lambda_{431}\omega_1 + \lambda_{432}\omega_2 + \lambda_{433}\omega_3 + \lambda_{434}\omega_4 \end{cases}$$

Наше поле определяет в пространстве некоторую конгруэнцию кривых. Мении, принадлежащие этой конгруенции, или линии тока, определяются уравнением $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ I-й канонический репер поля тесно связан с этой конгруэнцией кривых.

Вектор $\vec{N_1} = \lambda_{414}\vec{e_1} + \lambda_{424}\vec{e_2} + \lambda_{434}\vec{e_3}$ - вектор I-й кривизны линии тока.

Направляя вектор $\vec{e_3}$ по $\vec{N_1}$, получим репер I-го порядка нашего поля. При этом $\lambda_{424} = \lambda_{414} = 0$, и, следовательно, основная система имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_{41} = \lambda_{411}\omega_1 + \lambda_{412}\omega_2 + \lambda_{413}\omega_3 \\ \omega_{42} = \lambda_{421}\omega_1 + \lambda_{422}\omega_2 + \lambda_{423}\omega_3 \\ \omega_{43} = \lambda_{431}\omega_1 + \lambda_{432}\omega_2 + \lambda_{433}\omega_3 + \lambda_{434}\omega_4 \\ \omega_{31} = \lambda_{311}\omega_1 + \lambda_{312}\omega_2 + \lambda_{313}\omega_3 + \lambda_{314}\omega_4 \\ \omega_{32} = \lambda_{321}\omega_1 + \lambda_{322}\omega_2 + \lambda_{323}\omega_3 + \lambda_{324}\omega_4 \end{cases}$$

Вектор $\vec{N_2} = \lambda_{314}\vec{e_1} + \lambda_{324}\vec{e_2}$ - вектор второй кривизны линии тока.

Канонический репер поля теперь получим, направив $\vec{e_2}$ по $\vec{N_2}$, то есть $\lambda_{314} = 0$

2. Каждый вектор канонического репера определяет свою конгруэнцию кривых. Можно рассматривать поэтому и поле вектора $\vec{N_1}$ и поле вектора $\vec{N_2}$, и другие поля, связанные с исходным полем. Приведем пример канонизации, оставив без изменения репер I-го порядка поля.

Рассмотрим в репере I-го порядка кривые, касающиеся вектора $\vec{N_1}$. Для них $\lambda_{313}\vec{e_1} + \lambda_{323}\vec{e_2}$ - вектор кривизны, и направляя по нему $\vec{e_2}$, получаем 2-й канонический репер. Он определится условием $\lambda_{313} = 0$.

Используя другие векторы нашего репера, можно получить ряд других канонизаций.

Литература

I. Розенфельд Б.А. "Неевклидовы пространства". "Наука", 1969.

Гоштейн В.М.

К вопросу о комплексах K_p в полуевклидовом пространстве R_n^{p+1} $/0<p<n-1/$

§I.

В метрическом подпространстве афинного п-мерного пространства R_n^{p+1} /2/ базисные векторы ортонормированного репера Т (A, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ... $\vec{e}_n$) меняются по формулам

$$\vec{e}_M{}' = a_M^L \vec{e}_L ,$$

где матрица коэффициентов a_M^L $/L, M = 1, 2, \dots, n/$ имеет вид

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-p-1} & 0 & \dots & 0 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-p-1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-p-1}^1 & a_{n-p-1}^2 & \dots & a_{n-p-1}^{n-p-1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-p}^1 & a_{n-p}^2 & \dots & a_{n-p}^{n-p-1} & a_{n-p}^{n-p} & \dots & a_{n-p}^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^{n-p-1} & a_n^{n-p} & \dots & a_n^n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_\alpha^\beta & 0 \\ a_\kappa^\beta & a_\kappa^i \end{matrix} \right\| ,$$

причем a_α^β и a_κ^i $/\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-p-1; \ i, \kappa = n-p, \dots, n/$ ортогональные матрицы.

Обозначим инвариантную плоскость $[\ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots \vec{e}_{n-p-1}\ ]$ через σ. Если прямая целиком лежит в σ, будем называть её прямой I-го порядка, в противном случае - прямой 2-го порядка.

Уравнения движения репера Т имеют вид:

$$\begin{cases} d\vec{A} = \omega^\alpha \vec{e}_\alpha + \omega^\kappa \vec{e}_\kappa \\ d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta \\ d\vec{e}_\kappa = \omega_\kappa^\beta \vec{e}_\beta + \omega_\kappa^i \vec{e}_i \end{cases} ,$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-p-1; \quad i, k = n-p, n-p+1, \dots, n;$

$$\begin{cases} \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0 \\ \omega_k^i + \omega_i^k = 0 \end{cases}$$

Мы будем рассматривать лишь такие семейства прямых, образующие которых являются прямыми 2-го порядка. Поэтому мы можем направить ось $\bar{e}_n$ репера по образующей семейства, а вершину репера А поместить на образующей. В этом случае формы Пфаффа $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}, \omega_n^1, \omega_n^2, \dots, \omega_n^{n-1}$ будут главными.

Введем некоторые обозначения для однопараметрического семейства прямых - линейчатой поверхности в R_n^{p+1}.

Линейчатая поверхность, если она не является цилиндрической, уже в первой окрестности индуцирует инвариантное направление - касательную гиперсферического отображения образующих, иначе центральную нормаль поверхности. Будем различать линейчатые поверхности I-го и II-го родов в зависимости от того, является ли центральная нормаль поверхности прямой первого или второго порядков.

Для поверхности первого рода в репере нулевого порядка мы не можем в общем случае указать на образующей инвариантных точек, имеется лишь относительный центр /I/, положение которого зависит от выбора плоскости

Поверхность же второго рода уже в репере нулевого порядка индуцирует на образующей инвариантную точку, которую назовем по аналогии с евклидовым пространством, горловой, или стрикционной точкой поверхности. Касательная к горловой линии линейчатой поверхности ортогональна центральной нормали поверхности.

Назовем проекцию вектора распределения линейчатой поверхности на плоскость $\mathfrak{S}$ внутренним вектором распределения, а вторую составляющую вектора распределения - внешним вектором распределения.

Если поверхность I-го рода является квазиторсом, т.е. её вектор распределения целиком расположен в σ , то в данном случае уже в первой окрестности на образующей имеется инвариантная горловая точка.

§2.

Комплекс прямых K_p - $/n+p-1/$ - мерное семейство прямых - мы начнем рассматривать при помощи репера нулевого порядка, вершина которого расположена на образующей семейства, а ось $\vec{e}_n$ направлена по образующей.

Исключим из рассмотрения случай, когда

$$[\omega_n^1 \omega_n^2 \ldots \omega_n^{n-1} \omega^{n-p} \omega^{n-p+1} \ldots \omega^{n-1}] = 0$$

Теперь мы можем основную систему дифференциальных уравнений, характеризующих комплекс в репере нулевого порядка, представить в виде:

$$\omega^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \omega_n^\beta + \lambda_\kappa^\alpha \omega_n^\kappa + \gamma_\kappa^\alpha \omega^\kappa \qquad (2.I)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n-p-1; \qquad \kappa = n-p, n-p+1, \ldots, n-1$

Рассматривая изменение коэффициентов системы (2.I) при допустимых преобразованиях репера T_0 , мы найдем ряд инвариантов комплекса:

I) инвариантную плоскость $[\vec{e}_{n-p}, \vec{e}_{n-p+1}, \ldots, \vec{e}_{n-1}]$, определенную инвариантным выбором параметров оснащения a_κ^α :

$$\gamma_\kappa^\alpha = a_\kappa^\alpha \qquad \text{для каждого } \kappa \text{ и } \alpha$$

Эту плоскость назовем главной нормальной плоскостью комплекса K_p. В случае p=I мы имеем инвариантное направление прямой - главную нормаль комплекса.

2) на образующей комплекса имеются инвариантные точки, которые мы можем указать при помощи евклидового тензора λ_β^α , координаты которого не зависят от параметров оснащения a_κ^α :

$$(\lambda_1^1 + t) + (\lambda_2^2 + t) + \ldots + (\lambda_{n-p-1}^{n-p-1} + t) = 0 \qquad (2.2)$$

. . . .

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1+t & \dots & \dfrac{\lambda_1^{n-p-1}+\lambda_{n-p-1}^1}{2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\lambda_1^{n-p-1}+\lambda_{n-p-1}^1}{2} & \dots & \lambda_{n-p-1}^{n-p-1}+t \end{vmatrix} = 0 \qquad /2.2n-2p$$

Кроме инвариантных точек на образующей комплекса, тензор λ_β^α дает инвариантные направления (собственные, асимптотические) и скалярные инварианты.

Если мы поместим оси репера $\vec{e}_\kappa$ $/\kappa = n-p, \dots, n-1/$ в главную нормальную плоскость комплекса, то появятся новые главные формы ω_κ^α, а основная система дифференциальных уравнений, характеризующих комплекс, примет вид:

$$\begin{cases} \omega^\alpha = \lambda_\beta^\alpha \omega_n^\beta + \lambda_\kappa^\alpha \omega_n^\kappa \\ \omega_\kappa^\alpha = \lambda_{\kappa\beta}^\alpha \omega_n^\beta + \lambda_{\kappa i}^\alpha \omega_n^i + \gamma_{\kappa i}^\alpha \omega^i \end{cases} \qquad /2.2n-2p$$

причем

$$\gamma_{\kappa i}^\alpha = \gamma_{i\kappa}^\alpha .$$

Появятся новые инвариантные направления:

$$\lambda_{\kappa\beta}^\alpha \lambda_\kappa^\beta \vec{e}_\alpha , \quad \lambda_{\kappa\beta}^\alpha \lambda_\kappa^\alpha \vec{e}_\beta , \quad \lambda_\kappa^\alpha \lambda_{\kappa i}^\alpha \vec{e}_i , \quad \gamma_{\kappa i}^\alpha \lambda_\kappa^\alpha \vec{e}_i , \quad \lambda_\beta^\alpha \lambda_{\kappa\alpha}^\beta \vec{e}_\kappa ,$$

собственные и асимптотические направления евклидового тензора $\lambda_{\kappa i}^\alpha \gamma_{ij}^\alpha$ и так далее; скалярные инварианты; новые инвариантные точки на образующей комплекса, например,

$$/\lambda_{\kappa\kappa}^\alpha - \gamma_{\kappa\kappa}^\alpha / \gamma_{ii}^\alpha = 0 \qquad /2.2n-2p$$

Чтобы выяснить геометрический смысл инвариантов, рассмотрим подмногообразия, принадлежащие комплексу.

§3.

Рассмотрим совокупность линейчатых поверхностей комплекса I-го рода. Аналитически эта совокупность выделяется уравнениями

$$\omega_n^\kappa = 0 \qquad /\kappa = n-p, \dots, n-1/ \qquad (3.I)$$

Внешние производные системы (3.I) удовлетворяются тождественно в силу системы:

$$D\omega_n^\kappa = [\omega_n^\alpha \; \omega_\alpha^\kappa] + [\omega_n^\iota \; \omega_\iota^\kappa] + [\omega_n^n \; \omega_n^\kappa] = 0,$$

так как формы ω_α^κ тождественно равны нулю.

Отсюда

Теорема I.

Совокупность всех принадлежащих комплексу линейчатых поверхностей I-го рода является $(n-1)$-мерным семейством прямых.

Зададим произвольную линейчатую поверхность нашей совокупности, наложив $(n-2)$ связи на базисные формы

$$\begin{cases} \omega_n^1 : \omega_n^2 : \dots : \omega_n^{n-p-1} = \cos\varphi_1 : \cos\varphi_2 : \dots : \cos\varphi_{n-p-1} \\ \omega^\kappa = m_\alpha^\kappa \omega_n^\alpha \end{cases}$$

Таким образом мы задаем направление центральной нормали поверхности ($\cos\varphi_\alpha$ есть косинус угла между центральной нормалью поверхности и осью $\vec{e}_\alpha$) и вектор внешнего распределения поверхности. Так как положение осей репера $\vec{e}_\alpha$ не является фиксированным, то м. без ограничения общности можем считать выбранную нами поверхность координатной. Пусть её центральная нормаль сонаправлена $\vec{e}_{\alpha_0}$, тогда

$-/\lambda_{\alpha_0}^{\alpha_0} + \gamma_\kappa^{\alpha_0} m_{\alpha_0}^\kappa/$ - абсцисса относительного центра;

$(1-\delta_{\alpha_0}^\alpha)/\lambda_{\alpha_0}^\alpha + \gamma_\kappa^\alpha m_{\alpha_0}^\kappa/\vec{e}_\alpha$ - вектор внутреннего распределения;

$m_{\alpha_0}^\kappa \vec{e}_\kappa$ - вектор внешнего распределения данной линейчатой поверхности.

Если мы поместим оси $\bar{e}_\kappa$ в главную нормальную плоскость комплекса, то положение относительного центра и вектора внутреннего распределения данной поверхности не будет зависеть от выбора вектора внешнего распределения.

Таким образом:

Теорема 2.

Для линейчатых поверхностей комплекса I-го рода, центральные нормали которых сонаправлены, относительные центры, отвечающие главной нормальной плоскости, будут совпадать и вектор внутреннего распределения, отвечающий главной нормальной плоскости, будет одним и тем же.

Рассмотрим теперь более узкую совокупность линейчатых поверхностей I-го рода, принадлежащих комплексу, а именно совокупность всех квазиторсов I-го рода. Назовем её А-подмногообразием комплекса. А-подмногообразие выделяется системой уравнений

$$\begin{cases} \omega^\kappa = 0 \\ \omega_n^\kappa = 0 \end{cases} \qquad /\kappa = n-p, \ldots, n-1/ \qquad (3.2)$$

Внешние производные системы (3.2) удовлетворяются тождественно в силу системы:

$$D\omega^\kappa = [\omega^\alpha \omega_\alpha^\kappa] + [\omega^i \omega_i^\kappa] + [\omega^n \omega_n^\kappa] = 0$$

$$D\omega_n^\kappa = [\omega_n^\alpha \omega_\alpha^\kappa] + [\omega_n^i \omega_i^\kappa] + [\omega_n^n \omega_n^\kappa] = 0$$

Теорема 3.

Совокупность всех принадлежащих комплексу K_p квазиторсов I-го рода является $(n-p-1)$ параметрическим семейством прямых.

Произвольную поверхность А-подмногообразия мы задаем выбором центральной нормали и, так как эта поверхность является квазиторсом, то этим однозначно определяется положение её горловой точки и вектора внутреннего распределения.

Инвариантные точки образующей комплекса (2.2)- (2.2n-2p-2) являются инвариантными точками А-подмногообразия.

Инвариантная точка, абсцисса которой отвечает уравнению (2.2), является центром А-подмногообразия.

Будем называть линейчатые поверхности с ортогональными центральными нормалями ортогональными поверхностями.

$(n-p-1)$ ортогональных линейчатых поверхностей А-подмногообразия, центральные нормали которых сонаправлены собственным направлениям тензора $\lambda^{(\alpha)}_{(\beta)}$, назовем, по аналогии с евклидовым пространством, главными поверхностями А-подмногообразия. Горловые точки главных линейчатых поверхностей являются инвариантными точками образующей комплекса и отвечают уравнению $(2.2n-2p-2)$. Две наиболее удаленные друг от друга горловые точки главных линейчатых поверхностей назовем граничными точками. Абсцисса горловой точки любой поверхности А-подмногообразия достигает экстремального значения в граничных точках, в одной из них достигается минимальное значение, во второй - максимальное.

Теорема 4..

Все горловые точки линейчатых поверхностей А-подмногообразия расположены в закрытом интервале на образующей, ограниченном граничными точками А-подмногообразия.

Учитывая теорему 2, получим

Следствие I

Для всех линейчатых поверхностей I-го рода, принадлежащих комплексу K_p, относительные центры, отвечающие главной нормальной плоскости, не могут находиться вне закрытого интервала, ограниченного граничными точками А-подмногообразия.

Линейчатые поверхности А-подмногообразия, центральные нормали которых сонаправлены собственным направлениям тензора λ^{α}_{β}, являются торсовыми поверхностями. Их горловые точки отвечают уравнению

$$\begin{vmatrix} \lambda^1_1+t & \lambda^2_1 & \dots & \lambda^{n-p-1}_1 \\ \lambda^1_2 & \lambda^2_2+t & \dots & \lambda^{n-p-1}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^1_{n-p-1} & \lambda^2_{n-p-1} & \dots & \lambda^{n-p-1}_{n-p-1}+t \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2)$$

Это фокусы А-подмногообразия.

Других торсовых поверхностей I-го рода у комплекса в общем случае быть не может.

Если линейчатые поверхности I-го рода не принадлежат А-подмногообразию, но их центральные нормали сонаправлены собственным направлениям тензора λ^{α}_{β} , то внутренние векторы распределения данных поверхностей, отвечающие главной нормальной плоскости, будут нулевыми, в то время как внешние векторы распределения отличны от нуля, т.е. поверхности будут псевдоторсами.

§4.

Рассмотрим теперь линейчатые поверхности 2-го рода, принадлежащие комплексу, центральные нормали которых расположены в главной нормальной плоскости. Чтобы выделить некоторую линейчатую поверхность с центральной нормалью в главной нормальной плоскости, наложим на базисные формы следующие связи:

$$\begin{cases} \omega^{\alpha}_{n} = 0 \\ \omega^{n-p}_{n} : \ldots : \omega^{n-1}_{n} = \cos\varphi_{n-p} : \ldots : \cos\varphi_{n-1} \\ \omega^{K} = m^{K}_{i}\,\omega^{i}_{n} \end{cases} \qquad (4.I)$$

Этим мы задаем направление центральной нормали поверхности $\cos\varphi_i\,\vec{e}_i$, её горловую точку и внешний вектор распределения.

Внутренний вектор распределения поверхности (4.I) не зависит от выбора скалярных функций m^{K}_{i} . Отсюда

Теорема 5.

Для всех линейчатых поверхностей комплекса, имеющих сонаправленные центральные нормали в главной нормальной плоскости комплекса, внутренний вектор распределения будет одним и тем же.

Скалярный инвариант комплекса $\sum\limits_{\alpha,K}(\lambda^{\alpha}_{K})^{2}$ есть сумма квадратов модулей внутренних векторов распределения ортогональных линейчатых поверхностей с центральными нормалями в главной нормальной плоскости комплекса.

Значит:

Теорема 6.

Сумма квадратов модулей векторов внутреннего распределения для любых p ортогональных поверхностей с центральными нормалями в главной нормальной плоскости, будет одной и той же.

Выберем на образующей комплекса некоторую точку К и зададим линейчатую поверхность таким образом, чтобы эта точка была горловой точкой поверхности, а внешний вектор распределения был бы нулевым. Назовем такую поверхность К-поверхностью. Очевидно, что каждой точке $К_0$ будет отвечать бесчисленное множество $К_0$-поверхностей, отличающихся направлением центральной нормали; в это же время существует бесчисленное множество К-поверхностей с сонаправленными центральными нормалями, но отвечающих различным точкам К.

Вектором геодезической кривизны К-поверхности с центральной нормалью $\cos\varphi_i \vec{e}_i$ будет вектор

$$\lambda^{\alpha}_{ik} \cos\varphi_i \cos\varphi_k \vec{e}_{\alpha}$$

его модуль будем называть геодезической кривизной К-поверхности.

Рассматривая изменение геодезической кривизны при меняющейся точке К, получим

Теорема 7.

Среди всех К-поверхностей, имеющих одинаково направленную центральную нормаль, но отвечающих различным точкам К, минимальную геодезическую кривизну имеет К-поверхность, горловой точкой которой служит точка с абсциссой

$$t = -\frac{(\lambda^{\alpha}_{ik} \cos\varphi_i \cos\varphi_k)(\gamma^{\alpha}_{\ell j} \cos\varphi_\ell \cos\varphi_j)}{\sum\limits_{\beta} (\gamma^{\beta}_{zs} \cos\varphi_z \cos\varphi_s)} \qquad (4.2)$$

Любым p ортогональным К-поверхностям, отвечающим некоторой определенной точке К, мы можем сопоставить вектор

$$\vec{\Gamma} = (\lambda^{\alpha}_{n-p,n-p} + \dots + \lambda^{\alpha}_{n-1\,n-1})\,\vec{e}_{\alpha} \quad ,$$

сумму векторов геодезических кривизн данных p ортогональных К-поверхностей. Модуль вектора $\vec{\Gamma}$ назовем геодезической кривизной совокупности p ортогональных К-поверхностей, отвечающих одной и той же точке К.

Теорема 8.

Геодезическая кривизна совокупности p ортогональных К-поверхностей, отвечающих одной и той же точке К, достигает минимального значения, если совокупность отвечает инвариантной точке комплекса $(2.2n-2p)$

В случае $p=1$ точки (4.2) и $(2.2n-2p)$ совпадают. Но в этом случае можно указать другие инвариантные точки образующей комплекса, связанные с К-поверхностями, например, горловую точку поверхности, для которой векторы распределения и геодезической кривизны ортогональны.

Рассмотрим совокупность всех поверхностей комплекса, центральные нормали которых лежат в главной нормальной плоскости. Её можно выделить уравнениями

$$\omega_n^\alpha = 0 \tag{4.3}$$

Для того, чтобы эта совокупность была подмногообразием комплекса, необходимо, чтобы внешние производные системы (4.3) тождественно удовлетворялись в силу системы.

$$D\omega_n^\alpha = [\omega_n^\beta \omega_\beta^\alpha] + [\omega_n^\kappa \omega_\kappa^\alpha] + [\omega_n^n \omega_n^\alpha] = [\omega_n^\kappa, \omega_n^i \lambda_{\kappa i}^\alpha + \omega^i \gamma_{\kappa i}^\alpha] \equiv 0$$

Следовательно, нам необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} \lambda_{\kappa i}^\alpha - \lambda_{i\kappa}^\alpha = 0 \\ \gamma_{i\kappa}^\alpha = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

при любых α, i, κ.

Исследуя на инволюцию систему дифференциальных уравнений $(2.2n-2p-1)$ с учетом условий (4.4), получим

Теорема 9.

С произволом $(n-p-1)$ функций $(n-1)$-го переменного существует класс комплексов K_p, для которого совокупность линейчатых поверхностей с центральными нормалями в главной нормальной плоскости комплекса является 2р-параметрическим семейством прямых.

Литература

/I/ Березина Л.Я. "Классическая дифференциальная геометрия" II Рига, 1971.

/2/ Розенфельд Б.А. "Неевклидовы пространства" М., 1969г.

Дж

Гоштейн В.М.

Некоторые вопросы комплексов K_I в $R_n^{m_1 m_2 \dots m_s}$

Данная работа содержит обобщение некоторых результатов, полученных для комплексов прямых K_I в R_4^2 /3/ на случай более общего полуевклидового пространства $R_n^{m_1 m_2 \cdots m_s}$ /2/, где $m_1 = n - n_s$, $m_2 = n - n_{s-1}, \dots, m_s = n - n_1$; $1 \le n_1 < n_2 < \dots < n_s = n-2$.

§I. В пространстве $R_n^{m_1 m_2 \dots m_s}$ вращение векторов орто нормированного репера T $/A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n/$ задается следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{e}_{p_1}{}' = a_{p_1}^{R_1} \vec{e}_{R_1} \\ \vec{e}_{p_2}{}' = a_{p_2}^{p_1} \vec{e}_{p_1} + a_{p_2}^{R_2} \vec{e}_{R_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{e}_{p_s}{}' = a_{p_s}^{p_1} \vec{e}_{p_1} + a_{p_s}^{p_2} \vec{e}_{p_2} + \dots + a_{p_s}^{R_s} \vec{e}_{R_s} \\ \vec{e}_{n-1}{}' = a_{n-1}^{p_1} \vec{e}_{p_1} + a_{n-1}^{p_2} \vec{e}_{p_2} + \dots + a_{n-1}^{p_s} \vec{e}_{p_s} + \cos\varphi\, \vec{e}_{n-1} + \sin\varphi\, \vec{e}_n \\ \vec{e}_n{}' = a_n^{p_1} \vec{e}_{p_1} + a_n^{p_2} \vec{e}_{p_2} + \dots + a_n^{p_s} \vec{e}_{p_s} - \sin\varphi\, \vec{e}_{n-1} + \cos\varphi\, \vec{e}_n \end{cases} \qquad (I.I)$$

где для любого i $(i = 1, 2, \dots S)$ двойные индексы со вторым индексом i принимают значения от $n_{i-1}+1$ до n_i, причем n_0 считаем равным нулю; матрицы $a_{p_i}^{R_i}$ являются ортогональными. В дальнейшем мы всюду будем приписывать двойным индексам такие же значения.

Уравнения движения репера T имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{dA} = \omega^{p_i} \vec{e}_{p_i} + \omega^{n-1} \vec{e}_{n-1} + \omega^n \vec{e}_n \\ d\vec{e}_{p_i} = \omega_{p_i}^{p_k} \vec{e}_{p_k} \\ d\vec{e}_{n-1} = \omega_{n-1}^{p_k} \vec{e}_{p_k} + \omega_{n-1}^{n} \vec{e}_n, \\ d\vec{e}_n = \omega_n^{p_k} \vec{e}_{p_k} + \omega_n^{n-1} \vec{e}_{n-1} \end{cases} \qquad (I.2)$$

где

$i, k = 1, 2, \dots, S$;

$\omega_{p_i}^{p_k} = 0$ при $k > i$; $\omega_n^{n-1} + \omega_{n-1}^{n} = 0$.

В пространстве $R_n^{m_1 m_2 \dots m_s}$ имеется S вложенных друг в друга инвариантных плоскостей α_i : $\alpha_1 \subset \alpha_2 \subset \dots \subset \alpha_S$, размерности которых соответственно равны $n_1, n_2, \dots n_S$.

Назовем прямую, целиком принадлежащую плоскости α_i прямой порядка i_c, где i_c - минимальное значение среди всех возможных i. Прямую же, лежащую вне α_S, назовем прямой $(S+1)$ -го порядка.

Мы будем рассматривать только такие семейства прямых, образующие которых являются прямыми наибольшего, $(S+1)$-го порядка. Поэтому мы имеем возможность крепить репер T к семейству прямых, помещая вершину репера A на образующую и направляя по образующей ось $\vec{e}_n$.

Прежде чем перейти к комплексам прямых, введем некоторые обозначения для однопараметрического семейства прямых - линейчатой поверхности. Линейчатая поверхность в $R_n^{m_1 m_2 \dots m_s}$ уже в первой окрестности индуцирует инвариантное направление - центральную нормаль, являющуюся пересечением соприкасающейся плоскости линейчатой поверхности и гиперплоскости, ортогональной образующей.

Будем называть линейчатую поверхность поверхностью J-го порядка, если её центральная нормаль есть прямая J-го порядка $(J = 1, 2, \dots, S+1)$

Разложим вектор распределения линейчатой поверхности i-го порядка ($i = 1, 2, \dots, S$) на 2 составляющих, одну из которых - проекцию на α_i -назовем внутренним вектором распределения поверхности, а вторую - внешним вектором распределения.

Поверхности $(S+1)$-го порядка в первой окрестности индуцируют и инвариантную горловую точку на образующей. Для поверхностей i -го порядка ($i = 1, 2, \dots, S$) инвариантная точка на образующей в репере нулевого порядка появится лишь у квазиторсов, т.е. у поверхностей с нулевым внешним вектором распределения.

§2. Рассмотрим n -параметрическое семейство прямых - комплекс K_1 . В репере нулевого порядка T_0, где ось $\vec{e}_n$ направлена по образующей комплекса, а вершина репера лежит на образующей, формы $\omega_n^{p_k}$, ω_n^{n-1} , ω^{p_k} , ω^{n-1} $(k=1, 2, \ldots s)$ будут главными.

Исключим из рассмотрения случай, когда

$$[\omega_n^1 \, \omega_n^2 \ldots \omega_n^{n-1} \, \omega^{n-1}] = 0$$

Теперь мы можем записать основную систему дифференциальных уравнений, характеризующих комплекс K_1 в репере T_0 , в виде

$$\omega^{p_k} = \lambda_{p_i}^{p_k} \omega_n^{p_i} + \lambda_{n-1}^{p_k} \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1}^{p_k} \omega^{n-1} \qquad (2.I)$$
$$/ i, k = 1, 2, \ldots, s /$$

Рассматривая, как меняются коэффициенты системы (2.I) при допустимых преобразованиях репера T_0, находим, что в первой окрестности имеется инвариантное направление $(s+1)$-го порядка $\gamma_{n-1}^{p_k} \vec{e}_{p_k} + \vec{e}_{n-1}$ — направление главной нормали комплекса.

Вектор s -го порядка $\lambda_{n-1}^{p_k} \vec{e}_{p_k}$ зависит лишь от переноса вершины репера вдоль образующей.

На образующей комплекса имеются инвариантные точки, индуцированные аффинором $\lambda_{p_i}^{p_k}$, не зависящим от изменения положения вектора $\vec{e}_{n-1}$. Тензор $\lambda_{p_k}^{p_i}$ дает и скалярные инварианты, например,

$$J_1 = \sum_{p_1, p_s} (\lambda_{p_1}^{p_s})^2$$

Если направить вектор $\vec{e}_{n-1}$ по главной нормали комплекса, формы $\omega_{n-1}^{p_k}$ будут главными

$$\omega_{n-1}^{p_k} = \lambda_{n-1 p_i}^{p_k} \omega_n^{p_i} + \lambda_{n-1 n-1}^{p_k} \omega_n^{n-1} + \gamma_{n-1}^{p_k} \omega^{n-1}$$

Соответственно, кроме инвариантных направлений, связанных с тензором $\lambda_{p_i}^{p_k}$ и вектором $\lambda_{n-1}^{p_k} \vec{e}_{p_k}$, появятся инвариантные направления тензора $\lambda_{n-1 p_i}^{p_k}$, векторы S -го порядка

$\gamma^{p_k}_{n-1\,n-1}\vec{e}_{p_k}$ (бинормаль комплекса) и $\lambda^{p_k}_{n-1\,n-1}\vec{e}_{p_k}$

Появятся и новые инвариантные точки, например, точки, абсциссы которых удовлетворяют уравнениям

$$\lambda^{p_k}_{n-1\,n-1}\,\gamma^{p_k}_{n-1\,n-1}=0\,, \tag{2.2}$$

$$\lambda^{p_k}_{n-1\,n-1}\,\lambda^{p_k}_{n-1}=0 \tag{2.3}$$

Мы можем продолжать аналогичным образом фиксацию векторов $\vec{e}_{p_k}$ до полной канонизации репера, положив вершину репера в одну из инвариантных точек образующей комплекса.

Чтобы выяснить геометрический смысл инвариантных образов комплекса, рассмотрим ряд принадлежащих комплексу подмногообразий.

§3. Рассмотрим совокупность линейчатых поверхностей комплекса, центральные нормали которых принадлежат инвариантной плоскости α_{i_c} ($i_c=1,2,\dots,s$), а векторы распределения – плоскости α_s. Назовем эту совокупность A_{i_c}-подмногообразием. A_{i_c}- подмногообразие выделяется уравнениями

$$\begin{cases}\omega^{p_k}_n=0 & /k>i_c/\\ \omega^{n-1}_n=0 \\ \omega^{n-1}=0\end{cases} \tag{3.I}$$

Внешние производные системы (3.I) тождественно удовлетворяются в силу системы. Следовательно,

<u>Теорема.</u> A_{i_c}- подмногообразие ($i_c=1,2,\dots,s$) комплекса является Ω_{i_c} - параметрическим семейством прямых.

Рассмотрим наиболее широкое из вложенных друг в друга A_{i_c}- подмногообразий - A_s - подмногообразие.

Все поверхности s-го порядка, принадлежащие A_s-подмногообразию, являются квазиторсами.

Инвариантные точки образующей комплекса, индуцированные тензором $\lambda^{p_k}_{p_c}$, являются инвариантными точками образующей

A_s- подмногообразия. Так инвариантная точка, абсцисса которой отвечает уравнению

$$\lambda_1^1+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_{n_s}^{n_s}+n_s t=0 \qquad (3.2)$$

является центром A_S - подмногообразия, а инвариантные точки, абсциссы которых удовлетворяют уравнению

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1+t & \ldots & \lambda_1^{n_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n_s}^1 & \ldots & \lambda_{n_s}^{n_s}+t \end{vmatrix}=0 \quad , \qquad (3.3)$$

являются фокусами A_S - подмногообразия. Линейчатые поверхности A_S- подмногообразия, центральные нормали которых сонаправлены собственным направлениям тензора $\lambda_{p_i}^{p_k}$, являются торсовыми поверхностями, их горловые точки удовлетворяют уравнению (3.3).

В репере I-го порядка, когда по главной нормали направлен вектор $\bar{e}_{n-1}$, в A_S-подмногообразии, появятся новые инвариантные линейчатые поверхности, центральные нормали которых сонаправлены собственным направлениям тензора $\lambda_{n-1\,p_k}^{p_i}$. Для этих поверхностей внутренняя вынужденная кривизна равна нулю.

Скалярный инвариант комплекса J_1 есть инвариант и A_S-подмногообразия, это сумма квадратов модулей векторов распределения n_1 ортогональных поверхностей I-го порядка, принадлежащих A_S-подмногообразию.

<u>Теорема.</u> Сумма квадратов модулей векторов распределения одна и та же для любых n_1 ортогональных поверхностей I-го порядка, принадлежащих A_S-подмногообразию.

§4. Рассмотрим линейчатые поверхности комплекса, центральные нормали которых сонаправлены главной нормали комплекса. Чтобы выделить одну из таких линейчатых поверхностей, надо наложить на базисные формы следующие связи

$$\begin{cases} \omega_n^{p_k}=0 & /k=1,2,\ldots,s/ \\ \omega^{n-1}=K\,\omega_n^{n-1} \end{cases} \qquad (4.1)$$

Таким образом, выделяя линейчатую поверхность, мы указываем точку на образующей, которая является горловой точкой поверхности. Для любой линейчатой поверхности (4.I) вектор $\lambda^{p_k}_{n-1}\vec{e}_{p_k}$ является вектором распределения. Следовательно,

Теорема. Для всех линейчатых поверхностей комплекса, центральные нормали которых сонаправлены главной нормали комплекса, вектор распределения один и тот же.

Для линейчатой поверхности (4.I), отвечающей инвариантной точке (2.3), векторы распределения и геодезической кривизны поверхности ортогональны.

Для линейчатой поверхности, чья центральная нормаль сонаправлена главной нормали комплекса, а горловая точка есть инвариантная точка (2.2), вектор геодезической кривизны поверхности ортогонален вектору бинормали.

Рассмотрим класс комплексов K_1, для которого имеет место следующее свойство: совокупность всех линейчатых поверхностей комплекса, чьи центральные нормали сонаправлены главной нормали комплекса, и инвариантной поверхности комплекса - цилиндра - является голономным подмногообразием, которое будем называть B -подмногообразием.

Основная система дифференциальных уравнений, характеризующих комплекс с голономным B -подмногообразием имеет вид:

$$\begin{cases} \omega^{p_k} = \lambda^{p_k}_{p_i}\omega^{p_i}_n + \lambda^{p_k}_{n-1}\omega^{n-1}_n \\ \omega^{p_k}_{n-1} = \lambda^{p_k}_{n-1 p_i}\omega^{p_i}_r + \lambda^{p_k}_{n-1 n-1}\omega^{n-1}_n \end{cases} \qquad (4.2)$$

Исследуя на инволюцию систему (4.2), получаем

Теорема. С произволом $2(n-2)$ функций $(n-1)$ -го аргумента существует класс комплексов K_1, для которого B - подмногообразие является двухпараметрическим семейством прямых.

Для любой из поверхностей $(s+1)$ -го порядка B-подмногообразия вектор геодезической кривизны один и тот же.

Вектор бинормали для комплекса данного класса не определен.

§5. Рассмотрим класс комплексов K_1, для которого имеет место следующее свойство: все линейчатые поверхности, принадлежащие A_S -подмногообразию комплекса из данного класса, являются квазиторсами.

Основная система дифференциальных уравнений, характеризующих комплекс данного класса в репере нулевого порядка T_0, имеет вид:

$$\omega^{P_K} = \lambda^{P_K}_{P_i}\,\omega^{P_i}_{n} + \lambda^{P_K}_{n-1}\,\omega^{n-1}_{n} + \gamma^{P_K}_{n-1}\,\omega^{n-1}, \tag{5.I}$$

где

$$\lambda^{P_K}_{P_i} = 0 \quad \text{при} \quad i < K \quad (i, K = 1, 2, \dots, s)$$

По лемме Васенина, система (5.I) находится в инволюции с произволом n_1 функций n переменных.

Теперь каждый из евклидовых тензоров $\lambda^{P_i}_{P_i}$, являющихся составными частями аффинора $\lambda^{P_K}_{P_j}$, зависит лишь от евклидового вращения векторов $\vec{e}_{P_i}$ и от переноса вершины репера вдоль образующей.

Рассмотрим A_1-подмногообразие комплекса. В репере нулевого порядка оно будет аналогично n_1 -параметрическому семейству прямых в R_n. Все инвариантные образы комплекса, связанные с тензором $\lambda^{P_1}_{P_1}$, являются инвариантными образами A_1 -подмногообразия. Так, все торсовые поверхности I-го порядка, принадлежащие комплексу, являются инвариантными поверхностями A_1 - подмногообразия. Их центральные нормали сонаправлены собственным направлениям тензора $\lambda^{P_1}_{P_1}$, горловые точки отвечают уравнению

$$\begin{vmatrix} \lambda^1_1 + t & \dots & \lambda^{n_1}_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda^1_{n_1} & \dots & \lambda^{n_1}_{n_1} + t \end{vmatrix} = 0 .$$

Инвариантные точки образующей комплекса, отвечающие уравнению

$$\begin{vmatrix} \lambda^1_1 + t & \dots & \dfrac{\lambda^{n_1}_1 + \lambda^1_{n_1}}{2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\lambda^{n_1}_1 + \lambda^1_{n_1}}{2} & \dots & \lambda^{n_1}_{n_1} + t \end{vmatrix} = 0$$

являются граничными точками A_1 -подмногообразия, горловыми точками главных линейчатых поверхностей A_1 -подмногообразия, чьи центральные нормали сонаправлены собственным направлениям симметрированного тензора $\lambda^{(R_1)}_{(P_1)}$.

Инвариантная точка образующей комплекса, отвечающая уравнению

$$(\lambda^1_1+t)+(\lambda^2_2+t)+\ldots+(\lambda^{n_1}_{n_1}+t)=0 ,$$

является центром A_1 -подмногообразия, назовем ёё I-центром комплекса.

Для A_i -подмногообразий комплекса, где $i > 1$, не будет такой строгой аналогии с евклидовом пространством.

Направляя векторы $\vec{e}_{p_i}$ по собственным направлениям тензора $\lambda^{R_i}_{P_i}$, мы лишь фиксируем положение $\vec{e}_{p_i}$ в плоскости $[\vec{e}_{p_i}]$ но положение плоскости $[\vec{e}_{p_i}]$ остается произвольным. Линейчатые поверхности i -го порядка A_i -подмногообразия, центральные нормали которых лежат в ($n_{i-1}+1$)-мерной плоскости, построенной на одном из собственных направлений тензора $\lambda^{R_i}_{P_i}$ и плоскости α_{i-1}, являются псевдоторсами $(i-1)$ -го рода, т.е. их векторы распределения являются прямыми $(i-1)$ -го порядка. Горловые точки этих поверхностей являются инвариантными точками образующей комплекса

$$\begin{vmatrix} \lambda^{n_{i-1}+1}_{n_{i-1}+1}+t & \ldots & \lambda^{n_i}_{n_{i-1}+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^{n_{i-1}+1}_{n_i} & \ldots & \lambda^{n_i}_{n_i}+t \end{vmatrix} = 0$$

$/n_i-n_{i-1}/$ из псевдоторсов $(i-1)$ -го рода являются торсовыми поверхностями.

Две наиболее удаленные друг от друга точки, отвечающие уравнению

$$\begin{vmatrix} \lambda^{n_{i-1}+1}_{n_{i-1}+1}+t & \ldots & \dfrac{\lambda^{n_i}_{n_{i-1}+1}+\lambda^{n_{i-1}+1}_{n_i}}{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\lambda^{n_i}_{n_{i-1}+1}+\lambda^{n_{i-1}+1}_{n_i}}{2} & \ldots & \lambda^{n_i}_{n_i}+t \end{vmatrix} = 0$$

являются граничными точками A_i -подмногообразия, горловые точки всех поверхностей i -го порядка. A_i -подмногообразия находятся между ними.

Инвариантная точка образующей комплекса

$$(\lambda^{n_{i-1}+1}_{n_{i-1}+1}+t)+\ldots+(\lambda^{n_i}_{n_i}+t)=0$$

есть i -центр комплекса, горловые точки $/n_i-n_{i-1}/$ ортогональных линейчатых поверхностей i -го порядка A_i-подмногообразия расположены симметрично относительно i -центра.

Таким образом, центр A_S-подмногообразия является своеобразным центром тяжести i -центров комплекса. Пусть t_i -абсцисса i -центра $(i=1,2,\ldots,S)$, тогда абсцисса центра A_S -подмногообразия t есть

$$t=t_1\frac{n-2}{n_1}+t_2\frac{n-2}{n_2-n_1}+\ldots+t_S\frac{n-2}{n_S-n_{S-1}}$$

Можно указать граничные точки, между которыми находятся горловые точки всех квазиторсов комплекса i -го порядка $/i=1,2,\ldots,S/$ Это будут две наиболее удаленные друг от друга точки из совокупности граничных точек всех A_i -подмногообразий.

Литература

1. Березина Л.Я. "Классическая дифференциальная геометрия"I. Из-во ЛГУ. Рига, 1970.
2. Розенфельд Б.А. "Неевклидовы пространства". Изд. Наука, 1969.
3. Гонтейн Б.М. "Комплексы в R_4^2 " Безразмерное, эвклидово и полуевклидовы пространства", Из-во ЛГУ, Рига, 1971.

Клейнштейн Е.П.

Инвариантные плоскости конгруэнции прямых в R_4^{13}

Настоящая работа является продолжением статьи /I/, в которой рассмотрено деление двумерных плоскостей пространства R_4^{13} на два вида. Плоскости, содержащие e_1 несут на себе флаговую метрику, а остальные евклидовую метрику. Для получения евклидовых двумерных плоскостей $[\, e_2 \; e_3 \,]$, в которых лежат центральные нормали линейчатых поверхностей, принадлежащих конгруэнции, необходимо привести к нулю различные пары величин инвариантных при преобразованиях (3),(4) /I/.

Отметим ряд таких величин

$$J_1 = \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^3}{2} - \lambda_1^1 \,, \qquad J_2 = \lambda_2^3 - \lambda_3^2$$

$$J_3 = \lambda_1^2 \lambda_3^1 - \lambda_1^3 \lambda_2^1 \,, \qquad J_4 = \lambda_1^2 \lambda_2^1 + \lambda_1^3 \lambda_3^1 \qquad \text{(I)}$$

$$J_5 = \begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \end{vmatrix} - \left(\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^3}{2} \right)^2$$

Совокупность линейчатых поверхностей, центральные нормали которых лежат в одной двумерной евклидовой плоскости, назовём совокупностью Р.

Центр симметрии стрикционных точек неизотропных линейчатых поверхностей $\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^3}{2}$ - назовем центром симметрии совокупности Р, а сумму внутренних параметров распределения пары неизотропных линейчатых поверхностей - анормалитетом совокупности Р.

Величину $\begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3^3 \end{vmatrix} - \left(\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^3}{2} \right)^2$ - назовём ассимметрией совокупности Р.

Вектор $\{\lambda_2^1, \lambda_3^1\}$ - координатами которого являются внешние параметры распределения пары неизотропных линейчатых поверхностей, назовем вектором внешнего распределения, в отличие от вектора распределения $\{\lambda_1^2, \lambda_1^3\}$ изотропной линейчатой поверхности.

Линейчатые поверхности, центральные нормали которых лежат в плоскостях α или β (22)/I/, назовем поверхностями P_α или P_β.

Пару линейчатых поверхностей с перпендикулярными центральными нормалями назовем ортогональной парой.

<u>Теорема I.</u> Пара линейчатых поверхностей P_α и P_β - ортогональная.

Приведением к нулю различных пар величин из (I) выделяются евклидовые инвариантные двумерные плоскости конгруэнции, в которых лежат центральные нормали совокупностей P.

Рассмотрим пару

$$\frac{\bar\lambda_2^2 + \bar\lambda_3^3}{2} = \bar\lambda_1^1, \quad \bar\lambda_2^3 - \bar\lambda_3^2 = 0 \tag{2}$$

Подставляя в (2) значения λ_i^k $(i,k = 1,2,3)$ из (I8)/I/ получаем систему линейных уравнений

$$\lambda_1^2 a_2^1 + \lambda_1^3 a_3^1 = \frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^3 - 2\lambda_1^1}{3} \tag{3}$$

$$\lambda_1^3 a_2^1 - \lambda_1^2 a_3^1 = \lambda_2^3 - \lambda_3^2$$

Эта система имеет единственное решение

$$a_2^1 = \frac{1}{3}\,\frac{\lambda_1^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^3 - 2\lambda_1^1) + 3\lambda_1^3(\lambda_2^3 - \lambda_3^2)}{(\lambda_1^2)^2 + (\lambda_1^3)^2} \tag{4}$$

$$a_3^1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda_1^3(\lambda_2^2 + \lambda_3^3 - 2\lambda_1^1) + 3\lambda_1^2(\lambda_3^2 - \lambda_2^3)}{(\lambda_1^2)^2 + (\lambda_1^3)^2}$$

если выражение $(\lambda_1^2)^2 + (\lambda_1^3)^2$ отлично от нуля. Отсюда получаем

<u>Теорема 2.</u> Если вектор распределения отличен от нуля, то конгруэнция содержит одну и только одну совокупность P, анор-

малитет которой равен нулю, а центр симметрии совпадает с относительным центром изотропной линейчатой поверхности.

Рассмотрим пару

$$\frac{\bar\lambda_2^2+\bar\lambda_3^3}{2}=\bar\lambda_1^1, \quad \bar\lambda_1^2\bar\lambda_3^1-\bar\lambda_1^3\bar\lambda_2^1=0 \tag{5}$$

Подставляя в (5) значения λ_i^k $(i,k=1,2,3)$ из (18) /I/, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1^2 a_2^1+\lambda_1^3 a_3^1=\dfrac{\lambda_2^2+\lambda_3^3-2\lambda_1^1}{3} \\ \lambda_1^2\lambda_1^3(a_2^1)^2-[(\lambda_1^2)^2-(\lambda_1^3)^2]a_2^1a_3^1-\lambda_1^2\lambda_1^3(a_3^1)^2+(\lambda_1^2\lambda_3^2-\lambda_1^3\lambda_2^2+\lambda_1^1\lambda_1^3)a_2^1+ \\ (\lambda_1^2\lambda_3^3-\lambda_1^1\lambda_1^2-\lambda_1^3\lambda_2^3)a_3^1+\lambda_1^2\lambda_3^1-\lambda_1^3\lambda_2^1=0 \end{cases} \tag{6}$$

выражая a_2^1 или a_3^1 из первого уравнения системы (6) и подставляя во второе уравнение, получаем систему линейных уравнений, которое имеет единственное решение

$$\begin{aligned} a_2^1&=\frac{1}{3}\,\frac{(2\lambda_1^2\lambda_3^3-\lambda_1^2\lambda_2^2-\lambda_1^1\lambda_1^2-3\lambda_1^3\lambda_2^3)(\lambda_2^2+\lambda_3^3-2\lambda_1^1)+9\lambda_1^3(\lambda_1^2\lambda_3^1-\lambda_1^3\lambda_2^1)}{3\left(\lambda_1^2\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}-\lambda_1^3\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3\end{vmatrix}\right)-[(\lambda_1^2)^2+(\lambda_1^3)^2](\lambda_1^1+\lambda_2^2+\lambda_3^3)} \\ a_3^1&=\frac{1}{3}\,\frac{(2\lambda_1^3\lambda_2^2-\lambda_1^1\lambda_1^3-\lambda_1^3\lambda_3^3-3\lambda_1^2\lambda_3^2)(\lambda_2^2+\lambda_3^3-2\lambda_1^1)-9\lambda_1^2(\lambda_1^2\lambda_3^1-\lambda_1^3\lambda_2^1)}{3\left(\lambda_1^2\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}-\lambda_1^3\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3\end{vmatrix}\right)-[(\lambda_1^2)^2+(\lambda_1^3)^2](\lambda_1^1+\lambda_2^2+\lambda_3^3)} \end{aligned} \tag{7}$$

если

$$3\left(\lambda_1^2\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}-\lambda_1^3\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3\end{vmatrix}\right)-[(\lambda_1^2)^2+(\lambda_1^3)^2](\lambda_1^1+\lambda_2^2+\lambda_3^3)$$

отлично от нуля. Сравнивая это выражение с (23) /I/, можем сказать

<u>Теорема 3.</u> Если стрикционная точка поверхности P_β не совпадает с центром прямой конгруэнции, то конгруэнция содержит одну и только одну совокупность P, центр симметрии которой сов-

падает с относительным центром изотропной линейчатой поверхности и вектор распределения коллинеарен вектору внешнего распределения.

Подставляя значения λ^k_i $(i, k = 1, 2, 3)$ из (I8) /I/ в

$$\frac{\bar\lambda^2_2 + \bar\lambda^3_3}{2} = \bar\lambda^1_1 \quad , \quad \bar\lambda^2_1 \bar\lambda^1_2 + \bar\lambda^3_1 \bar\lambda^1_3 = 0 \tag{8}$$

получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} \lambda^2_1 a^1_2 + \lambda^3_1 a^1_3 = \frac{\lambda^2_2 + \lambda^3_3 - 2\lambda^1_1}{3} \\ (\lambda^2_1 a^1_2 + \lambda^3_1 a^1_3)^2 + (\lambda^1_1 \lambda^2_1 - \lambda^2_1 \lambda^2_2 - \lambda^3_1 \lambda^2_3) a^1_2 + (\lambda^1_1 \lambda^3_1 - \lambda^2_1 \lambda^3_2 - \lambda^3_1 \lambda^3_3) a^1_3 - \lambda^2_1 \lambda^1_2 - \lambda^3_1 \lambda^1_3 = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

Подставляя первое уравнение системы (9) во второе уравнение, получаем систему линейных уравнений относительно a^1_2 ; a^1_3 , которая имеет единственное решение

$$\begin{gathered} a^1_2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{(3\lambda^2_1 \lambda^3_2 - \lambda^3_1 \lambda^2_2 - \lambda^1_1 \lambda^3_1 + 2\lambda^3_1 \lambda^3_3)\, \lambda^2_2 + \lambda^3_3 - 2\lambda^1_1) + 9\lambda^3_1 (\lambda^2_1 \lambda^1_2 + \lambda^3_1 \lambda^1_3)}{\lambda^2_1 \begin{vmatrix} \lambda^2_1 & \lambda^2_2 \\ \lambda^3_1 & \lambda^3_2 \end{vmatrix} + \lambda^3_1 \begin{vmatrix} \lambda^2_1 & \lambda^2_3 \\ \lambda^3_1 & \lambda^3_3 \end{vmatrix}} \\ a^1_3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{(\lambda^1_1 \lambda^2_1 + \lambda^2_1 \lambda^3_3 - 2\lambda^2_1 \lambda^2_2 - 3\lambda^3_1 \lambda^2_3)(\lambda^2_2 + \lambda^3_3 - 2\lambda^1_1) - 9\lambda^2_1 (\lambda^2_1 \lambda^1_2 + \lambda^3_1 \lambda^1_3)}{\lambda^2_1 \begin{vmatrix} \lambda^2_1 & \lambda^2_2 \\ \lambda^3_1 & \lambda^3_2 \end{vmatrix} + \lambda^3_1 \begin{vmatrix} \lambda^2_1 & \lambda^2_3 \\ \lambda^3_1 & \lambda^3_3 \end{vmatrix}} \end{gathered} \tag{10}$$

если знаменатель $\lambda^2_1 \begin{vmatrix} \lambda^2_1 & \lambda^2_2 \\ \lambda^3_1 & \lambda^3_2 \end{vmatrix} + \lambda^3_1 \begin{vmatrix} \lambda^2_1 & \lambda^2_3 \\ \lambda^3_1 & \lambda^3_3 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Сравнивая его с (24)/I/, можем сказать

Теорема 4. Если внутренний параметр распределения поверхностей P_α отличен от нуля, то конгруэнция содержит одну и только одну совокупность P, центр симметрии которой совпадает с относительным центром изотропной линейчатой поверхности и вектор распределения ортогонален вектору внешнего распределения.

Рассмотрим пару

$$\frac{\bar\lambda_2^2+\bar\lambda_3^3}{2}=\lambda_1^1\,, \quad \begin{vmatrix}\bar\lambda_2^2 & \bar\lambda_2^3\\ \bar\lambda_3^2 & \bar\lambda_3^3\end{vmatrix}-\left(\frac{\bar\lambda_2^2+\bar\lambda_3^3}{2}\right)^2=0 \qquad \text{(II)}$$

Подставляя в (II) значения $\lambda_i^k \quad (i,k=1,2,3)$ из (I8) /I/, получаем систему уравнений

$$\lambda_1^2 a_2^1+\lambda_1^3 a_3^1=\frac{\lambda_2^2+\lambda_3^3-2\lambda_1^1}{3}$$

$$\left(\frac{\lambda_2^2+\lambda_3^3-\lambda_1^2 a_2^1-\lambda_1^3 a_3^1}{2}\right)^2+(\lambda_1^2\lambda_3^3-\lambda_1^3\lambda_3^2)a_2^1-(\lambda_1^2\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^2)a_3^1-\lambda_2^2\lambda_3^3+\lambda_2^3\lambda_3^2=0 \qquad \text{(I2)}$$

Подставляя значение a_2^1 или a_3^1, найденное из первого уравнения, во второе, получаем систему линейных уравнений, которая имеет единственное решение

$$a_2^1=\frac{1}{9}\cdot\frac{3\lambda_1^2\lambda_2^3(\lambda_2^2+\lambda_3^3-2\lambda_1^1)-\lambda_1^3(\lambda_1^1-2\lambda_2^2+\lambda_3^3)^2-9\lambda_1^3\lambda_2^3\lambda_3^2}{\lambda_1^2\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3\end{vmatrix}+\lambda_1^3\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}}$$

$$a_3^1=\frac{1}{9}\,\frac{3\lambda_1^3\lambda_3^2(2\lambda_1^1-\lambda_2^2-\lambda_3^3)+\lambda_1^2(\lambda_1^1+\lambda_2^2-2\lambda_3^3)+9\lambda_1^2\lambda_2^3\lambda_3^2}{\lambda_1^2\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3\end{vmatrix}+\lambda_1^3\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}} \qquad \text{(I3)}$$

если $\lambda_1^2\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3\end{vmatrix}+\lambda_1^3\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}$ отлично от нуля. Сравнивая это выражение с (24)/I/, можем сказать

Теорема 5. Если внутренний параметр распределения поверхностей P_α отличен от нуля, то конгруэнция содержит одну и только одну совокупность P, центр симметрии которой совпадает с относительным центром изотропной линейчатой поверхности и ассимметрия равна нулю.

Подставляя значения $\lambda_i^k \quad (i,k=1,2,3)$ из (I8)/I/ в

$$\bar{\lambda}^{3}_{2} - \bar{\lambda}^{2}_{3} = 0 \;, \quad \bar{\lambda}^{2}_{1}\bar{\lambda}^{1}_{3} - \bar{\lambda}^{3}_{1}\bar{\lambda}^{1}_{2} = 0 \tag{I4}$$

получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} \lambda^{3}_{1} a^{1}_{2} - \lambda^{2}_{1} a^{1}_{3} = \lambda^{3}_{2} - \lambda^{2}_{3} \\ \lambda^{2}_{1}\lambda^{3}_{1}(a^{1}_{2})^{2} - [(\lambda^{2}_{1})^{2} - (\lambda^{3}_{1})^{2}]\, a^{1}_{2} a^{1}_{3} - \lambda^{2}_{1}\lambda^{3}_{1}(a^{1}_{3})^{2} + (\lambda^{2}_{1}\lambda^{2}_{3} - \lambda^{3}_{1}\lambda^{2}_{2} + \lambda^{1}_{1}\lambda^{3}_{1})\, a^{1}_{2} + \\ + (\lambda^{2}_{1}\lambda^{3}_{3} - \lambda^{1}_{1}\lambda^{2}_{1} - \lambda^{3}_{1}\lambda^{3}_{2})\, a^{1}_{3} + \lambda^{2}_{1}\lambda^{1}_{3} - \lambda^{3}_{1}\lambda^{1}_{2} = 0 \end{gathered} \tag{I5}$$

Подставляя значение a^{1}_{2} или a^{1}_{3}, найденное из первого уравнения системы (I5), во второе, получаем систему линейных уравнений, которая имеет единственное решение

$$\begin{gathered} a^{1}_{2} = \frac{\lambda^{2}_{1}\lambda^{3}_{2}\lambda^{3}_{3} - \lambda^{3}_{1}\lambda^{3}_{2}\lambda^{2}_{3} - \lambda^{2}_{1}\lambda^{2}_{3}\lambda^{3}_{3} + \lambda^{3}_{1}(\lambda^{2}_{3})^{2} - (\lambda^{2}_{1})^{2}\lambda^{1}_{3} + \lambda^{2}_{1}\lambda^{3}_{1}\lambda^{1}_{2} - \lambda^{1}_{1}\lambda^{2}_{1}\lambda^{3}_{2} + \lambda^{1}_{1}\lambda^{2}_{1}\lambda^{2}_{3}}{\lambda^{2}_{1}\begin{vmatrix} \lambda^{2}_{1} & \lambda^{2}_{2} \\ \lambda^{3}_{1} & \lambda^{3}_{2} \end{vmatrix} + \lambda^{3}_{1}\begin{vmatrix} \lambda^{2}_{1} & \lambda^{2}_{3} \\ \lambda^{3}_{1} & \lambda^{3}_{3} \end{vmatrix}} \\ a^{1}_{3} = \frac{\lambda^{2}_{1}\lambda^{3}_{2}\lambda^{2}_{3} - \lambda^{2}_{1}\lambda^{3}_{1}\lambda^{1}_{3} + (\lambda^{3}_{1})^{2}\lambda^{1}_{2} + \lambda^{3}_{1}\lambda^{2}_{2}\lambda^{3}_{2} - \lambda^{3}_{1}\lambda^{2}_{2}\lambda^{2}_{3} - \lambda^{1}_{1}\lambda^{3}_{1}\lambda^{3}_{2} + \lambda^{1}_{1}\lambda^{3}_{1}\lambda^{2}_{3} - \lambda^{2}_{1}(\lambda^{3}_{2})^{2}}{\lambda^{2}_{1}\begin{vmatrix} \lambda^{2}_{1} & \lambda^{2}_{2} \\ \lambda^{3}_{1} & \lambda^{3}_{2} \end{vmatrix} + \lambda^{3}_{1}\begin{vmatrix} \lambda^{2}_{1} & \lambda^{2}_{3} \\ \lambda^{3}_{1} & \lambda^{3}_{3} \end{vmatrix}} \end{gathered} \tag{I6}$$

если знаменатель $\lambda^{2}_{1}\begin{vmatrix} \lambda^{2}_{1} & \lambda^{2}_{2} \\ \lambda^{3}_{1} & \lambda^{3}_{2} \end{vmatrix} + \lambda^{3}_{1}\begin{vmatrix} \lambda^{2}_{1} & \lambda^{2}_{3} \\ \lambda^{3}_{1} & \lambda^{3}_{3} \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Можем сказать

Теорема 6. Если внутренний параметр распределения поверхностей P_{α} отличен от нуля, то конгруэнция содержит одну и только одну совокупность P, для которой анормалитет равен нулю и вектор распределения коллинеарен вектору внешнего распределения.

Подставляя значения λ^{k}_{i} $(i, k = 1, 2, 3)$ из (I8)/I/ в

$$\bar{\lambda}^{3}_{2} - \bar{\lambda}^{2}_{3} = 0 \;, \quad \bar{\lambda}^{2}_{1}\bar{\lambda}^{1}_{2} + \bar{\lambda}^{3}_{1}\bar{\lambda}^{1}_{3} = 0 \tag{I7}$$

получаем систему уравнений

$$\lambda_1^3 a_2^1 - \lambda_1^2 a_3^1 = \lambda_2^3 - \lambda_3^2$$

$$(\lambda_1^2 a_2^1 + \lambda_1^3 a_3^1)^2 + (\lambda_1^1\lambda_1^2 - \lambda_1^2\lambda_2^2 - \lambda_1^3\lambda_3^2)\, a_2^1 + (\lambda_1^1\lambda_1^3 - \lambda_1^2\lambda_2^3 - \lambda_1^3\lambda_3^3)\, a_3^1 - \lambda_1^2\lambda_2^1 - \lambda_1^3\lambda_3^1 = 0 \tag{I8}$$

для которой a_2^1, a_3^1 являются корнями квадратных уравнений и $(\lambda_1^2)^2 + (\lambda_1^3)^2$ – коэффициентом при $(a_2^1)^2, (a_3^1)^2$. Имеем

<u>Теорема 7.</u> Если вектор распределения отличен от нуля, то конгруэнция содержит две действительные, две совпавшие или две мнимые совокупности P, для которых анормалитет равен нулю и вектор распределения ортогонален вектору внешнего распределения.

Подставляя значения λ_i^k $(i,k = 1,2,3)$ из (I8)/I/ в

$$\bar\lambda_2^3 - \bar\lambda_3^2 = 0 \;, \quad \begin{vmatrix} \bar\lambda_2^2 & \bar\lambda_2^3 \\ \bar\lambda_3^2 & \bar\lambda_3^3 \end{vmatrix} - \left(\frac{\bar\lambda_2^2 + \bar\lambda_3^3}{2}\right)^2 = 0 \tag{I9}$$

получаем систему уравнений

$$\lambda_1^3 a_2^1 - \lambda_1^2 a_3^1 = \lambda_2^3 - \lambda_3^2$$

$$\left(\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^3 - \lambda_1^2 a_2^1 - \lambda_1^3 a_3^1}{2}\right)^2 + (\lambda_1^2\lambda_3^3 - \lambda_1^3\lambda_3^2)\, a_2^1 - (\lambda_1^2\lambda_2^3 - \lambda_1^3\lambda_2^2)\, a_3^1 - \lambda_2^2\lambda_3^3 + \lambda_2^3\lambda_3^2 = 0 \tag{20}$$

где a_j^1 $(j = 2,3)$ – корни квадратных уравнений, а выражение $(\lambda_1^2)^2 + (\lambda_1^3)^2$ – коэффициент при $(a_j^1)^2$. Можем сказать

<u>Теорема 8.</u> Если вектор распределения отличен от нуля, то конгруэнция содержит две действительные, две совпавшие или две мнимые совокупности P, для которых анормалитет и ассиметрия равны нулю.

Рассмотрим в (I) пару

$$\bar\lambda_1^2 \bar\lambda_3^1 - \bar\lambda_1^3 \bar\lambda_2^1 = 0 \;, \quad \bar\lambda_1^2 \bar\lambda_2^1 + \bar\lambda_1^3 \bar\lambda_3^1 = 0 \tag{21}$$

которая равносильна системе

$$\bar\lambda_2^1 = 0\,, \quad \bar\lambda_3^1 = 0 \tag{22}$$

Подставляя в (22) значения λ_i^k $(i,k = 1,2,3)$ из (I8)/I/ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}&(\lambda_1^1+\lambda_1^2 a_2^1+\lambda_1^3 a_3^1)a_2^1-\lambda_2^3 a_3^1-\lambda_2^2 a_2^1-\lambda_2^1=0\\&(\lambda_1^1+\lambda_1^2 a_2^1+\lambda_1^3 a_3^1)a_3^1-\lambda_3^3 a_3^1-\lambda_3^2 a_2^1-\lambda_3^1=0\end{aligned} \tag{23}$$

где a_j^1 $(j=2,3)$ – корень кубического уравнения и

$\lambda_1^2\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_2^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3\end{vmatrix}+\lambda_1^3\begin{vmatrix}\lambda_1^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}$ – коэффициент при $(a_j^1)^3$. Сравнивая это выражение с (24)/I/, можем сказать

<u>Теорема 9.</u> Если внутренний параметр распределения поверхностей P_α отличен от нуля, то конгруэнция содержит одну действительную и две мнимых, три действительных различных или три действительных, из которых две совпали, совокупности P, для которых вектор внешнего распределения равен нулю.

Подставляя значения λ_i^k $(i,k=1,2,3)$ из (I8)/I/ в

$$\bar\lambda_1^2\bar\lambda_3^1-\bar\lambda_1^3\bar\lambda_2^1=0\,, \quad \begin{vmatrix}\bar\lambda_2^2 & \bar\lambda_2^3\\ \bar\lambda_3^2 & \bar\lambda_3^3\end{vmatrix}-\left(\frac{\bar\lambda_2^2+\bar\lambda_3^3}{2}\right)^2=0 \tag{24}$$

получаем систему квадратных уравнений

$$\begin{aligned}&\lambda_1^2\lambda_1^3(a_2^1)^2-[(\lambda_1^2)^2-(\lambda_1^3)^2]a_2^1a_3^1-\lambda_1^2\lambda_1^3(a_3^1)^2+(\lambda_1^2\lambda_3^2-\lambda_1^3\lambda_2^2+\lambda_1^1\lambda_1^3)a_2^1+\\&+(\lambda_1^2\lambda_3^3-\lambda_1^1\lambda_1^2-\lambda_1^3\lambda_2^3)a_3^1+\lambda_1^2\lambda_3^1-\lambda_1^3\lambda_2^1=0\\&\left(\frac{\lambda_2^2+\lambda_3^3-\lambda_1^2a_2^1-\lambda_1^3a_3^1}{2}\right)^2+(\lambda_1^2\lambda_3^3-\lambda_1^3\lambda_3^2)a_2^1-(\lambda_1^2\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^2)a_3^1-\lambda_2^2\lambda_3^3+\lambda_2^3\lambda_3^2=0\end{aligned} \tag{25}$$

откуда можем сказать:

<u>Теорема IO.</u> Конгруэнция содержит совокупность P, для кото-

рой вектор распределения коллинеарен вектору внешнего распределения и ассимметрия равна нулю.

Подставляя значения λ_i^k $(i,k=1,2,3)$ из (I8)/I/ в

$$\bar\lambda_1^2\bar\lambda_2^1+\bar\lambda_1^3\bar\lambda_3^1=0\,,\quad \begin{vmatrix}\bar\lambda_2^2 & \bar\lambda_2^3\\ \bar\lambda_3^2 & \bar\lambda_3^3\end{vmatrix}-\left(\frac{\bar\lambda_2^2+\bar\lambda_3^3}{2}\right)^2=0 \qquad (26)$$

получаем систему квадратных уравнений

$$(\lambda_1^2a_2^1+\lambda_1^3a_3^1)^2+(\lambda_1^1\lambda_1^2-\lambda_1^2\lambda_2^2-\lambda_1^3\lambda_3^2)a_2^1+(\lambda_1^1\lambda_1^3-\lambda_1^2\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_3^3)a_3^1-\lambda_1^2\lambda_2^1-\lambda_1^3\lambda_3^1=0$$

$$\left(\frac{\lambda_2^2+\lambda_3^3-\lambda_1^2a_2^1-\lambda_1^3a_3^1}{2}\right)^2+(\lambda_1^2\lambda_3^3-\lambda_1^3\lambda_3^2)a_2^1-(\lambda_1^2\lambda_2^3-\lambda_1^3\lambda_2^2)a_3^1-\lambda_2^2\lambda_3^3+\lambda_2^3\lambda_3^2=0 \qquad (27)$$

откуда можем сказать:

Теорема II. Конгруэнция содержит совокупность P, для которой вектор распределения ортогонален вектору внешнего распределения и ассимметрия равна нулю.

Литература

1. Клейнштейн Е.П. Инвариантные образы конгруэнции в R_4^{13}. Уч.записки ЛГУ, т.152, 1971 г.

Клейнштейн Е.П.

Конгруэнция плоскостей в R_4^{13}

I. Однопараметрическое семейство двумерных плоскостей.

Рассмотрим семейство двумерных плоскостей (Σ), не лежащих в инвариантной гиперплоскости [$e_1 e_2 e_3$] пространства R_4^{13}, в котором базисные векторы ортонормированного репера изменяются по следующему закону:

$$\begin{aligned}
e_1 &= e_1' \\
e_2 &= a_2^1 e_1' + \cos\varphi\, e_2' - \sin\varphi\, e_3' \\
e_3 &= a_3^1 e_1' + \sin\varphi\, e_2' + \cos\varphi\, e_3' \\
e_4 &= a_4^1 e_1' + a_4^2 e_2' + a_4^3 e_3' + e_4'
\end{aligned} \tag{I}$$

и уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}
dA &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 + \omega^4 e_4 \\
de_1 &= 0 \\
de_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 \\
de_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \\
de_4 &= \omega_4^1 e_1 + \omega_4^2 e_2 + \omega_4^3 e_3, \quad \omega_2^3 = -\omega_3^2
\end{aligned} \tag{2}$$

Каждая двумерная плоскость Σ, принадлежащая семейству (Σ), пересекается с инвариантной гиперплоскостью [$e_1 e_2 e_3$] по определенному вектору. Направим по нему вектор e_3 ортонормированного репера. При этом в (I.I) фиксируется часть параметров.

$$a_3^1 = 0, \quad \varphi = 0 \tag{3}$$

Далее поместим вектор e_4 в плоскость Σ. В этом случае должно выполняться условие

$$[e_3 e_4] = [e_3' e_4'] \tag{4}$$

С другой стороны, используя (I), получаем

$$[e_3 e_4] = a_4^1 [e_3' e_1'] + a_4^2 [e_3' e_2'] + [e_3' e_4'] \tag{5}$$

Сравнивая (4) и (5), получаем фиксацию

$$a_4^1 = 0, \quad a_4^2 = 0 \tag{6}$$

Подставляя условия (3), (6) в (I), получаем закон изменения базисных векторов ортокориированного репера в виде

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1' \\ e_2 &= a_2^1 e_1' + e_2' \\ e_3 &= e_3' \\ e_4 &= a_4^3 e_3' + e_4' \end{aligned} \tag{7}$$

Можем сказать, что семейство (Σ) отнесено к ортонормированному реперу следующим образом. Векторы e_1, e_2 расположены в двумерной плоскости Σ_1, а e_3, e_4 - в плоскости Σ. Из характера изменения базисных векторов (7) следует, что плоскости Σ, Σ_1 - флаговые. Помещая вершину A репера в плоскость Σ определим его допустимые преобразования. Ими являются:

I. Перенос вершины A репера в плоскости Σ

$$\begin{aligned} A' &= A' + t^3 e_3 + t^4 e_4 \\ e_i' &= e_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned} \tag{8}$$

2. Вращение e_2 в плоскости Σ_1.

$$\begin{aligned} A' &= A \\ e_1' &= e_1, \qquad e_3' = e_3 \\ e_2' &= -a_2^1 e_1 + e_2, \quad e_4' = e_4 \end{aligned} \tag{9}$$

3. Вращение e_4 в плоскости Σ

$$\begin{aligned} &A' = A \\ &e_1' = e_1 \ , \quad e_3' = e_3 \\ &e_2' = e_2 \ , \quad e_4' = -a_4^3 e_3 + e_4 \end{aligned} \tag{10}$$

При преобразованиях (8) компоненты движения ортонормированного репера изменяются следующим образом

$$\begin{aligned} &\bar\omega^1 = \omega^1 + t^3\omega_3^1 + t^4\omega_4^1 \\ &\bar\omega^2 = \omega^2 + t^3\omega_3^2 + t^4\omega_4^2 \\ &\bar\omega^3 = \omega^3 + dt^3 + t^4\omega_4^3 \\ &\bar\omega^4 = \omega^4 + dt^4 \end{aligned} \tag{11}$$

Двухиндексные формы $\omega_i^j \ (i,j = 1,2,3,4)$ остаются без изменения.

При преобразованиях (9) компоненты движения изменяются так

$$\begin{aligned} &\bar\omega^1 = \omega^1 + a_2^1\omega^2 \ , \quad \bar\omega_2^1 = \omega_2^1 - da_2^1 \ , \quad \bar\omega_4^1 = \omega_4^1 + a_2^1\omega_4^2 \\ &\bar\omega^2 = \omega^2 \ , \quad \bar\omega_3^1 = \omega_3^1 + a_2^1\omega_3^2 \ , \quad \bar\omega_4^2 = \omega_4^2 \\ &\bar\omega^3 = \omega^3 \ , \quad \bar\omega_3^2 = \omega_3^2 \ , \quad \bar\omega_4^3 = \omega_4^3 \\ &\bar\omega^4 = \omega^4 \end{aligned} \tag{12}$$

При преобразованиях (10) компоненты движения изменяются следующим образом

$$\begin{aligned} &\bar\omega^1 = \omega^1 \ , \quad \bar\omega_2^1 = \omega_2^1 \ , \quad \bar\omega_4^1 = \omega_4^1 - a_4^3\omega_3^1 \\ &\bar\omega^2 = \omega^2 \ , \quad \bar\omega_3^1 = \omega_3^1 \ , \quad \bar\omega_4^2 = \omega_4^2 - a_4^3\omega_3^2 \\ &\bar\omega^3 = \omega^3 + a_4^3\omega^4 \ , \quad \bar\omega_3^2 = \omega_3^2 \ , \quad \bar\omega_4^3 = \bar\omega_4^3 - da_4^3 \\ &\bar\omega^4 = \omega^4 \end{aligned} \tag{13}$$

Сравнивая (11), (12), (13) замечаем, что

$$\omega^1, \omega^2; \omega_3^1, \omega_3^2; \omega_4^1, \omega_4^2 \tag{14}$$

главные формы. Положим

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda^1 du, & \omega_3^1 &= \lambda_3^1 du, & \omega_4^1 &= \lambda_4^1 du \\ \omega^2 &= \lambda^2 du, & \omega_3^2 &= \lambda_3^2 du, & \omega_4^2 &= \lambda_4^2 du \end{aligned} \tag{15}$$

Коэффициенты системы (15) меняются также, как и стоящие слева формы.

Для семейства (Σ) выражение

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \omega_3^1 & \omega_4^1 \\ \omega_3^2 & \omega_4^2 \end{vmatrix}}{(\omega_3^2)^2} \tag{16}$$

является единственным инвариантом. При переходе к другому параметру $u = u(u_1)$ числитель и знаменатель выражения (16) получают множитель $(du/du_1)^2$ который сокращается. Назовем К кривизной семейства (Σ).

Выясним геометрический смысл коэффициентов системы (15). Для этого рассмотрим новые геометрические образы.

Каждая прямая α , лежащая в плоскости Σ семейства (Σ), образует семейство прямых (α). Назовем многообразие, состоящее из однопараметрического семейства прямых (α), через каждую образующую α которого проходит некоторая плоскость Σ , совокупностью (α, Σ) /1/.

Каждый вектор e_3 , e_4 плоскости Σ семейства (Σ) описывает линейчатую поверхность.

Двумерная линейчатая поверхность (α_0), где прямые α_0 проходят через вершину репера параллельно инвариантному вектору e_3 , имеет центральную нормаль сонаправленную вектору de_3. Поэтому для (α_0, Σ) вектор центральной нормали сонаправлен вектору

$$\omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 \tag{17}$$

являющимся инвариантным направлением в плоскости Σ_1, причем ω_3^2 - его модуль.

Каждому выбору вектора e_4 соответствует совокупность (e_4, Σ). Двумерная линейчатая поверхность (α), где прямые α проходят через вершину репера параллельно вектору e_4, имеет центральную нормаль сонаправленную вектору de_4. Для совокупности (α, Σ) этот вектор проецируется на плоскости Σ и Σ_1. Проекцию центральной нормали совокупности (α, Σ) на плоскость Σ_1

$$\omega_4^1 e_1 + \omega_4^2 e_2 \qquad (18)$$

назовем внешней центральной нормалью совокупности (α, Σ).

Инвариант (16) выражает отношение площади параллелограмма, построенного на векторах центральной нормали совокупности (α_0, Σ) и внешней центральной нормали (α, Σ), как на сторонах, к квадрату модуля вектора центральной нормали (α_0, Σ).

<u>Теорема I.</u> Отношение площади параллелограмма, построенного на векторах центральной нормали (α_0, Σ) и внешней центральной нормали (α, Σ), к квадрату модуля вектора центральной нормали (α_0, Σ), величина одна и та же для всех (α, Σ). Рассмотрим возможные канонизации репера семейства (Σ).

Если вектор внешней центральной нормали (α, Σ) сонаправлен изотропному вектору e_1, то

$$\omega_4^2 = 0 \qquad (19)$$

Пусть после преобразования (10) выполняется (19), получаем

$$\omega_4^2 - a_4^3 \omega_3^2 = 0 \qquad (20)$$

или

$$a_4^3 = \frac{\omega_4^2}{\omega_3^2} \qquad (21)$$

на основании чего можем сказать.

Теорема 2. Если модуль вектора центральной нормали (α_0, Σ), отличен от нуля, то через каждую точку плоскости Σ проходит одна и только одна совокупность (α, Σ), для которой вектор внешней центральной нормали сонаправлен изотропному вектору.

Если неизотропный вектор e_2 плоскости Σ_1, сонаправлен центральной нормали (α_0, Σ), то это выразится условием

$$\omega_3^1 = 0 \tag{22}$$

Рассмотрим наличие инвариантных точек семейства (Σ). От переноса репера зависят только формы ω^1, ω^2 уравнений движения (2). Система

$$\omega^1 = 0\ ,\ \omega^2 = 0 \tag{23}$$

не зависит от поворота репера. Пусть после преобразования (8) выполняется система (23)

$$\begin{aligned} t^3\omega_3^1 + t^4\omega_4^1 + \omega^1 = 0 \\ t^3\omega_3^2 + t^4\omega_4^2 + \omega^2 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

откуда получаем координаты инвариантной точки семейства (Σ), которые вычисляются по формулам

$$t^3 = -\frac{\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega_4^1 \\ \omega^2 & \omega_4^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_3^1 & \omega_4^1 \\ \omega_3^2 & \omega_4^2 \end{vmatrix}}\ ,\quad t^4 = \frac{\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega_3^1 \\ \omega^2 & \omega_3^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \omega_3^1 & \omega_4^1 \\ \omega_3^2 & \omega_4^2 \end{vmatrix}} \tag{25}$$

Отметим, что при выполнении условий (19), (22) и (23), репер наш канонизирован полностью.

Если вершина репера фиксирована, то формы ω^3 и ω^4 становятся главными и значит одним, вполне определённым, выбором e_4 можем обратить форму ω^3 в нуль, т.е.

$$\omega^3 = 0 \tag{26}$$

Из условий (23) и (26) следует

$$dA = \omega^4 e_4 \qquad (27)$$

откуда имеем, что e_4 описывает торсовую поверхность. В этом случае вершина репера, приложенная в инвариантной точке семейства (Σ)-фокусе, координаты которого определяются из (25), при своём смещении описывает фокальную кривую.

В дальнейшем нам потребуется система уравнений однопараметрического семейства (Σ), где за базис взята форма ω_3^1 или ω_3^2. Система (I5), в этом случае, примет вид

$$\begin{aligned} &\omega^1 = m^1 \omega_3^1, \quad \omega_3^2 = m_3^2 \omega_3^1, \quad \omega_4^2 = m_4^2 \omega_3^1 \\ &\omega^2 = m^2 \omega_3^1, \quad \omega_4^1 = m_4^1 \omega_3^1 \end{aligned} \qquad (28)$$

где

$$m_4^1 e_1 + m_4^2 e_2 \qquad (29)$$

вектор внешней центральной нормали (α, Σ),

$$e_1 + m_3^2 e_2 \qquad (30)$$

вектор центральной нормали (α_0, Σ), причем m_3^2 - его модуль. Соответственно для системы

$$\begin{aligned} &\omega^1 = n^1 \omega_3^2, \quad \omega_3^1 = n_3^1 \omega_3^2, \quad \omega_4^2 = n_4^2 \omega_3^2 \\ &\omega^2 = n^2 \omega_3^2, \quad \omega_4^1 = n_4^1 \omega_3^2 \end{aligned} \qquad (31)$$

вектор

$$n_4^1 e_1 + n_4^2 e_2 \qquad (32)$$

является вектором внешней центральной нормали (α, Σ).

и

$$n_3^1 e_1 + e_2 \qquad (33)$$

центральной нормалью (α_0, Σ).

2. Конгруэнция плоскостей.

Конгруэнцией плоскостей (Σ) в четырехмерном пространстве называется двухпараметрическое семейство двумерных плоскостей.

Отнесём конгруэнцию (Σ) к ортонормированному реперу аналогично первой части для семейства (Σ). Принимая формы ω_3^1, ω_3^2 за базисные, получаем основную систему в виде

$$
\begin{aligned}
\omega^1 &= \lambda_1^1 \omega_3^1 + \lambda_2^1 \omega_3^2 \\
\omega^2 &= \lambda_1^2 \omega_3^1 + \lambda_2^2 \omega_3^2 \\
\omega_4^1 &= \kappa_1^1 \omega_3^1 + \kappa_2^1 \omega_3^2 \\
\omega_4^2 &= \kappa_1^2 \omega_3^1 + \kappa_2^2 \omega_3^2
\end{aligned}
\tag{34}
$$

При преобразованиях (8) коэффициенты системы (34) изменяются следующим образом

$$
\begin{aligned}
\bar\lambda_1^1 &= \lambda_1^1 + t^3 + \kappa_1^1 t^4, & \bar\lambda_1^2 &= \lambda_1^2 + \kappa_1^2 t^4 \\
\bar\lambda_2^1 &= \lambda_2^1 + \kappa_2^1 t^4, & \bar\lambda_2^2 &= \lambda_2^2 + t^3 + \kappa_2^2 t^4
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Коэффициенты κ_i^j ($i,j = 1,2$) остаются без изменения. При преобразованиях (9) коэффициенты системы (34) изменяются так

$$
\begin{aligned}
\bar\lambda_1^1 &= \lambda_1^1 + a_2^1 \lambda_1^2, & \bar\kappa_1^1 &= \kappa_1^1 + a_2^1 \kappa_1^2 \\
\bar\lambda_2^1 &= \lambda_2^1 + a_2^1(\lambda_2^2 - \lambda_1^1) - (a_2^1)^2 \lambda_1^2, & \bar\kappa_2^1 &= \kappa_2^1 + a_2^1(\kappa_2^2 - \kappa_1^1) - (a_2^1)^2 \kappa_1^2 \\
\bar\lambda_1^2 &= \lambda_1^2, & \bar\kappa_1^2 &= \kappa_1^2 \\
\bar\lambda_2^2 &= \lambda_2^2 - a_2^1 \lambda_1^2, & \bar\kappa_2^2 &= \kappa_2^2 - a_2^1 \kappa_1^2
\end{aligned}
\tag{36}
$$

При преобразованиях (10) коэффициенты λ_i^j ($i,j = 1,2$) системы (34) остаются без изменения, а κ_i^j изменяются следующим образом

$$
\begin{aligned}
\bar\kappa_1^1 &= \kappa_1^1 - a_4^3, & \bar\kappa_1^2 &= \kappa_1^2 \\
\bar\kappa_2^1 &= \kappa_2^1, & \bar\kappa_2^2 &= \kappa_2^2 - a_4^3
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Для определения геометрического смысла коэффициентов системы (34) рассмотрим однопараметрические семейства (Σ) принадлежащие конгруэнции (Σ).

Базисные формы ω_3^1 и ω_3^2 системы (34) являются координатами вектора центральной нормали совокупности (α_0, Σ). Для однопараметрического подмногообразия конгруэнции (Σ), которое определится условием $\omega_3^2=0$, вектор центральной нормали (α_0, Σ) сонаправлен изотропному вектору. Поэтому назовем однопараметрическое подмногообразие $\omega_3^2=0$ изотропным, а подмногообразие $\omega_3^1=0$ - неизотропным.

Для изотропного однопараметрического подмногообразия $\omega_3^2=0$ получаем из (34) систему

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda_1^1 \omega_3^1 , & \omega_4^1 &= \kappa_1^1 \omega_3^1 \\ \omega^2 &= \lambda_1^2 \omega_3^1 , & \omega_4^2 &= \kappa_1^2 \omega_3^1 \end{aligned} \qquad (38)$$

Сравнивая системы (38) и (28) получаем, что $\{\kappa_1^1, \kappa_1^2\}$ - координаты внешней центральной нормали (α, Σ), где α проходят через вершину репера параллельно изменяющемуся вектору e_4.

Для неизотропного однопараметрического подмногообразия $\omega_3^1=0$ получаем из (34) систему

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda_2^1 \omega_3^2 , & \omega_4^1 &= \kappa_2^1 \omega_3^2 \\ \omega^2 &= \lambda_2^2 \omega_3^2 , & \omega_4^2 &= \kappa_2^2 \omega_3^2 \end{aligned} \qquad (39)$$

Сравнивая системы (39) и (31) получаем, что $\{\kappa_2^1, \kappa_2^2\}$ координаты внешней центральной нормали (β, Σ), где β - прямые, проходящие через вершину репера параллельно вектору e_4.

Модуль внешней центральной нормали (α , Σ) изотропного однопараметрического подмногообразия κ_1^2 не изменяется при допустимых преобразованиях репера (8), (9) и (10). Можем сказать

Теорема 3. Модуль вектора внешней центральной нормали (α, Σ) изотропного подмногообразия конгруэнции (Σ)

является её инвариантом.

Рассмотрим возможные канонизации репера конгруэнции (Σ).

Если внешние центральные нормали подмногообразий конгруэнции (Σ) коллинеарны, то выполняется условие

$$\begin{vmatrix} k_1^1 & k_1^2 \\ k_2^1 & k_2^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (40)$$

инвариантное при преобразованиях (8), (9). После выполнения преобразования (10), имеем

$$\begin{vmatrix} k_1^1 - a_4^3 & k_1^2 \\ k_2^1 & k_2^2 - a_4^3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (41)$$

или

$$(a_4^3)^2 - (k_1^1 + k_2^2)a_4^3 + k_1^1 k_2^2 - k_1^2 k_2^1 = 0 \qquad (42)$$

Дискриминант этого квадратного уравнения

$$(k_1^1 - k_2^2)^2 + 4k_1^2 k_2^1 \qquad (43)$$

является инвариантом конгруэнции (Σ). Он может служить для классификации плоскостей конгруэнции в зависимости от своего знака. Можем сказать

Теорема 4. Конгруэнция плоскостей (Σ) содержит две действительные, две совпавшие или две мнимые совокупности (α , Σ), (β , Σ), для которых внешние центральные нормали коллинеарны.

Условие

$$k_1^1 + k_2^2 = 0 \qquad (44)$$

инвариантное при преобразованиях (8), (9), фиксирует вектор e_4 в плоскости Σ

Если выполняется

$$k_1^1 - k_2^2 = 0 \qquad (45)$$

инвариантное при преобразованиях (8), (10), то фиксируется вектор e_2 в плоскости Σ_1.

При выполнении условий (44) и (45) получаем

$$k_1^1=0\ ,\ k_2^2=0 \tag{46}$$

и положение всех векторов репера креплено.

Условие

$$k_2^1=0 \tag{47}$$

инвариантное при преобразованиях (8),(10), также фиксирует вектор e_2 в плоскости Σ_1.

Для определения инвариантных точек конгруэнции (Σ), рассмотрим инварианты поворота репера.

$$\lambda_1^1+\lambda_2^2 \tag{48}$$

$$\lambda_1^2 \tag{49}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} \tag{50}$$

Перенесём вершину A репера так, чтобы после переноса имело место

$$\bar{\lambda}_1^1+\bar{\lambda}_2^2=0\ ,\ \bar{\lambda}_1^2=0 \tag{51}$$

Подставляя в (51) выражения (35), получаем координаты инвариантной точки конгруэнции (Σ), которые вычисляются по формулам

$$t^3=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_1^2(k_1^1+k_2^2)-k_1^2(\lambda_1^1+\lambda_2^2)}{k_1^2}\ ,\quad t^4=-\frac{\lambda_1^2}{k_1^2} \tag{52}$$

Группируя условия (40), (44); (45), (47) и (51), получаем различные канонизации репера конгруэнции (Σ).

Точки, в которых имеет место условие

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 \end{vmatrix}=0 \tag{53}$$

инвариантное при преобразованиях (9), (10), называются фокусами плоскости Σ, а сама кривая – фокальной кривой.

Подставляя в (53) выражения (35) найдем уравнение фокальной линии

$$(t^3)^2+(\kappa_1^1+\kappa_2^2)t^3t^4+\begin{vmatrix}\kappa_1^1 & \kappa_1^2\\ \kappa_2^1 & \kappa_2^2\end{vmatrix}(t^4)^2+(\lambda_1^1+\lambda_2^2)t^3+ \qquad (54)$$

$$+\left(\begin{vmatrix}\lambda_1^1 & \kappa_1^2\\ \lambda_2^1 & \kappa_2^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\kappa_1^1 & \lambda_1^2\\ \kappa_2^1 & \lambda_2^2\end{vmatrix}\right)t^4+\begin{vmatrix}\lambda_1^1 & \lambda_1^2\\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2\end{vmatrix}=0$$

Инвариант однопараметрических подмногообразий конгруэнции (Σ) – кривизна, определяется отношением (16). Подставляя в (16) выражения (34), получаем

$$K=\frac{\kappa_1^2(\omega_3^1)^2-(\kappa_1^1-\kappa_2^2)\omega_3^1\omega_3^2-\kappa_2^1(\omega_3^2)^2}{(\omega_3^2)^2} \qquad (55)$$

Для неизотропного подмногообразия $\omega_3^1=0$ конгруэнции (Σ) кривизна

$$K=-\kappa_2^1 \qquad (56)$$

Каждое однопараметрическое подмногообразие имеет определенный фокус, определяющийся из системы

$$\begin{aligned}(\lambda_1^1+t^3+\kappa_1^1t^4)\,\omega_3^1+(\lambda_1^2+\kappa_1^2t^4)\,\omega_3^2=0\\ (\lambda_2^1+\kappa_2^1t^4)\,\omega_3^1+(\lambda_2^2+t^3+\kappa_2^2t^4)\,\omega_3^2=0\end{aligned} \qquad (57)$$

Исключая отношение $\omega_3^1:\omega_3^2$ из системы (57), получим уравнение фокальной кривой (54).

Для изотропного подмногообразия $\omega_3^2=0$ из системы (57) получаем координаты фокуса

$$t^3=\frac{\lambda_2^1\kappa_1^1-\lambda_1^1\kappa_2^1}{\kappa_2^1},\quad t^4=-\frac{\lambda_2^1}{\kappa_2^1} \qquad (58)$$

Для неизотропного подмногообразия $\omega^1_\Delta = 0$ координаты фокуса вычисляются по формулам

$$t^3 = \frac{\lambda_1^2 k_2^2 - \lambda_2^2 k_1^2}{k_1^2}, \quad t^4 = -\frac{\lambda_1^2}{k_1^2} \qquad (59)$$

Координаты фокусов (58) и (59) удовлетворяют уравнению (54). Можем сказать:

<u>Теорема 5.</u> Фокусы однопараметрических подмногообразий конгруэнции (Σ) лежат на ее фокальной кривой.

Литература

I. Березина Л.Я. Многообразия прямая - плоскость в Изв. вузов, матем., 1971, № 8.

2к

Мадревиц Л.И.

Инвариантные подмногообразия конгруэнции прямых в F_n.

§1. Линейчатая поверхность L_2.
§2. Линейчатая поверхность L_k $(k=3,4,\dots,n-1)$.
§3. Инвариантная линейчатая поверхность L_n.
§4. Конгруенция прямых.
§5. Инвариантное двухпараметрическое семейство M_2.
§6. Инвариантное трёхпараметрическое семейство M_3.
§7. P – параметрическое семейство M_p.

Отнесём семейство прямых первого порядка /I/ в F_n к ортонормированному реперу R $(\vec{A}, \vec{e}_i)$, $i=1,2,\dots,n$, следующим образом: вершину A репера R поместим на прямой семейства, а вектор $\vec{e}_1$ направим по этой прямой. Уравнения движения репера в F_n имеют вид:

$$\begin{aligned}
d\vec{A} &= \omega^i \vec{e}_i \\
d\vec{e}_1 &= \omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3 + \dots + \omega_1^n \vec{e}_n \\
d\vec{e}_2 &= \qquad\quad \omega_2^3 \vec{e}_3 + \dots + \omega_2^n \vec{e}_n \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
d\vec{e}_{n-1} &= \qquad\qquad\qquad\quad \omega_{n-1}^n \vec{e}_n \\
d\vec{e}_n &= 0
\end{aligned} \tag{I}$$

Допустимыми преобразованиями репера являются; перенос вершины A по прямой

$$\vec{A}' = \vec{A} + t\vec{e}_1, \quad \vec{e}_i' = \vec{e}_i \qquad (2)$$ и

вращение репера вокруг прямой семейства

$$
\begin{aligned}
&\vec{A}' = \vec{A} \qquad && \vec{e}_2{}' = \vec{e}_2 + a_2^3\vec{e}_3 + a_2^4\vec{e}_4 + \dots + a_2^n\vec{e}_n \\
&\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 \qquad && \vec{e}_3{}' = \vec{e}_3 + a_3^4\vec{e}_4 + \dots + a_3^n\vec{e}_n \\
& && \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& && \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& && \vec{e}_{n-1}{}' = \vec{e}_{n-1} + a_{n-1}^n\vec{e}_n \\
& && \vec{e}_n{}' = \vec{e}_n
\end{aligned}
\tag{3}
$$

При переносе (2), очевидно, двухиндексные формы ω_j^i не изменяются, а одноиндексные преобразуются по закону:

$$
\bar{\omega}^1 = \omega^1 + dt \,, \quad \bar{\omega}^\alpha = \omega^\alpha + t\,\omega_1^\alpha \,, \qquad \alpha = 2, 3, \dots, n
\tag{4}
$$

При вращении (3) закон изменения компонент уравнений движения (I) имеет вид: $\bar{\omega}^1 = \omega^1$

$$
\begin{aligned}
&\bar{\omega}^2 = \omega^2 && \bar{\omega}_1^2 = \omega_1^2 \\
&\bar{\omega}^3 = A_2^3\omega^2 + \omega^3 && \bar{\omega}_1^3 = A_2^3\omega_1^2 + \omega_1^3 \\
&\bar{\omega}^4 = A_2^4\omega^2 + A_3^4\omega^3 + \omega^4 && \bar{\omega}_1^4 = A_2^4\omega_1^2 + A_3^4\omega_1^3 + \omega_1^4 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots && \dots\dots\dots\dots\dots \\
&\bar{\omega}^n = A_2^n\omega^2 + A_3^n\omega^3 + \dots + A_{n-1}^n\omega_1^{n-1} + \omega_1^n && \bar{\omega}_1^n = A_2^n\omega_1^2 + A_3^n\omega_1^3 + \dots + A_{n-1}^n\omega_1^{n-1} + \omega_1^n
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где матрица $\|A_\alpha^\beta\|$ является обратной матрице $\|a_\beta^\alpha\|$ преобразования (3).

Компоненты ω^α и ω_1^α при вращении репера образуют координаты контравариантных векторов, модулем каждого из которых соответственно являются инвариантные линейные формы ω^2 и ω_1^2.

Однопараметрическое семейство прямых назовем в дальнейшем линейчатой поверхностью. Выделим такие линейчатые поверхности, центральная нормаль каждой из которых расположена в инвариантной ($n-\alpha+1$)-мерной плоскости $[\vec{e}_\alpha, \vec{e}_{\alpha+1}, \dots, \vec{e}_n]$, но не лежит в инвариантной $(n-\alpha)$ -мерной плоскости $[\vec{e}_{\alpha+1}, \vec{e}_{\alpha+2}, \dots, \vec{e}_n]$, вложенной в первую и обозначим их L_α.

§I. Линейчатая поверхность L_2.

Рассмотрим линейчатую поверхность L_2 , центральная нормаль $d\vec{e}_1$ которой расположена в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n]$, но не лежит в плоскости $[\vec{e}_3, \vec{e}_4, \dots, \vec{e}_n]$. Направим вектор $\vec{e}_2$ по $d\vec{e}_1$, вследствие чего будем иметь: $\omega_1^3=0$, $\omega_1^4=0$, ... , $\omega_1^n=0$ (1_1) и

$$d\vec{e}_1 = \omega_1^2 \vec{e}_2$$

Принимая форму ω_1^2 за базисную, запишем:

$$\omega^\alpha = \lambda_2^\alpha \omega_1^2, \qquad \alpha = 2, 3, \dots, n \qquad (1_2)$$

Точка прямой линейчатой поверхности L_2 с абсциссой

$$t = -\lambda_2^2 \qquad (1_3)$$

является её стрикционной точкой. На основании первого уравнения системы (1_2) уравнение (1_3) представляется отношением инвариантных линейных форм:

$$t = -\frac{\omega^2}{\omega_1^2} \qquad (1_4)$$

Коэффициенты $\lambda_2^3, \lambda_2^4, \dots, \lambda_2^n$ системы (1_2) являются координатами контравариантного вектора, который назовем вектором распределения поверхности L_2 . Модуль λ_2^s этого вектора, являющийся инвариантом допустимых преобразований репера, соответственно назовем параметром распределения. Из системы (1_2) следует, что параметр распределения поверхности L_2

$$P=\lambda_2^3=\frac{\omega^3}{\omega_1^2} \qquad (1_5)$$

является отношением инвариантных линейных форм ω^3 и ω_1^2. В репере нулевого порядка формула (1_5) принимает вид:

$$P=-\frac{\begin{vmatrix}\omega^2 & \omega^3\\ \omega_1^2 & \omega_1^3\end{vmatrix}}{(\omega_1^2)^2} \qquad (1_6)$$

§2. Линейчатые поверхности L_K $(K=3,4,\dots,n-1)$.

Для линейчатой поверхности L_K прежде всего имеем:

$$d\vec{e}_1=\omega_1^K\vec{e}_K+\omega_1^{K+1}\vec{e}_{K+1}+\dots\dots+\omega_1^n\vec{e}_n$$
$$\omega_1^2=0,\quad \omega_1^3=0,\ \dots\dots,\ \omega_1^{K-1}=0 \qquad (2_1)$$

Сонаправим вектор $\vec{e}_K$ репера вектору центральной нормали $d\vec{e}_1$, вследствие чего, получим:

$$d\vec{e}_1=\omega_1^K\vec{e}_K$$
$$\omega_1^{K+1}=0,\quad \omega_1^{K+2}=0,\ \dots\dots,\ \omega_1^n=0 \qquad (2_2)$$

Принимая форму ω_1^K за базисную, можем записать:

$$\omega^\alpha=\lambda_K^\alpha\,\omega_1^K\quad,\ \alpha=2,3,\dots,n \qquad (2_3)$$

(по индексу К не суммируется).

При переносе вершины репера, очевидно, изменяется лишь коэффицкент λ_K^K по формуле:

$$\bar{\lambda}_K^K=\lambda_K^K+t \qquad (2_4)$$

Вращение репера вокруг образующей для поверхности L_K носит более сложный характер, чем для поверхности L_2. Проверяя изменение коэффициентов λ_K^α системы (2_3) при допустимсм преобразовании (3) с учетом условий (2_1) и (2_2), найдем: коэффициенты $\lambda_k^2, \lambda_k^3, \ldots, \lambda_k^{k-1}$ образуют координаты контравариантного вектора в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{k-1}]$.

Вектор $\{\lambda_k^2, \lambda_k^3, \ldots, \lambda_k^{k-1}\}$ не зависит от вращения осей $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ репера в плоскости $[\vec{e}_{k+1}, \vec{e}_{k+2}, \ldots, \vec{e}_n]$. Назовем его внутренним вектором распределения. Модуль λ_k^2 этого вектора, являющийся инвариантом переноса и вращения репера - назовём параметром распределения поверхности L_k. Очевидно из системы (2_3)

$$P = \lambda_k^2 = \frac{\omega^2}{\omega_1^k} \qquad (2_5)$$

т.е. параметр распределения равен отношению инвариантных линейных форм ω^2 и ω_1^k.

Точку прямой линейчатой поверхности L_k с абсциссой

$$t = -\lambda_k^k = -\frac{\omega^k}{\omega_1^k} \qquad (2_6)$$

назовем её относительным центром. Абсцисса относительного центра зависит от вращения осей $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{k-1}$ в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_k]$.

Остальные коэффициенты $\lambda_k^{k+1}, \lambda_k^{k+2}, \ldots, \lambda_k^n$ системы (2_3) образуют вектор, зависящей от всего преобразования (3) и назовем его внешним вектором распределения.

§3. Инвариантная линейчатая поверхность L_n.

Наконец, рассмотрим линейчатую поверхность L_n, центральная нормаль которой сонаправлена инвариантному вектору $\vec{e}_n$, т.е.

$$d\vec{e}_1 = \omega_1^n \vec{e}_n, \quad \omega_1^2 = 0, \ \omega_1^3 = 0, \ldots, \omega_1^{n-1} = 0 \qquad (3_1)$$

Основная система репера данной поверхности имеет вид:

$$\omega^\alpha = \lambda_n^\alpha \omega_1^n, \quad \alpha = 2, 3, \ldots, n \qquad (3_2)$$

Аналогично рассмотренным выше линейчатым поверхностям, найдем, что данная поверхность L_n обладает вектором распределения $\{\lambda^2_n, \lambda^3_n, \ldots, \lambda^{n-1}_n\}$ и параметром распределения

$$P = \lambda^2_n = \frac{\omega^2}{\omega^n_1} \qquad (3_3)$$

Параметр распределения (3_3) является инвариантом переноса и вращения репера.

Точку прямой поверхности L_n с абсциссой

$t = -\lambda^n_n = -\frac{\omega^n}{\omega^n_1}$ (3_4) назовем её относительным центром и отметим, что положение его зависит от вращения осей $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ репера в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n]$.

§4. Конгруэнция прямых в F_n.

Конгруенцией прямых назовем семейство прямых первого порядка, зависящее от ($n-1$) параметров.

Основная система репера конгруенции имеет вид:

$$\omega^\alpha = \lambda^\alpha_\beta \, \omega^\beta_1 \; ; \quad \alpha, \beta = 2,3,\ldots, n \quad (4_1),$$ где

формы ω^β_1 линейно независимые.

Проверяя изменение коэффициентов λ^α_β системы (4_1) при переносе вершины репера, найдем:

$$\bar{\lambda}^\alpha_\beta = \lambda^\alpha_\beta + t\,\delta^\alpha_\beta \qquad (4_2)$$

При вращении (3) вектор - функция λ^α_β сопоставляет контравариантному вектору $\{\omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^n\}$ контравариантный вектор $\{\omega^2_1, \omega^3_1, \ldots, \omega^n_1\}$.

Инварианты J^α_m $(\alpha = 2,3,\ldots, n \; ; \; m = 2,3,\ldots, n-\alpha+2)$ аффинора λ^α_β были рассмотрены в /2/. Среди них имеется ровно ($n-1$) точечный инвариант. Точки прямой конгруэнции, в которых эти инварианты обращаются в нуль, являются инвариантными образами, свойственными конгруэнции прямых в F_n. Кроме них, конгруенция обладает аффинными образами такими, как центр, критические точки и фокусы.

Для конгруенции прямых в F_n имеем две инвариантные линейные формы ω^2 и ω_1^2, а также одну инвариантиую квадратичную форму $\omega^2\omega_1^3 - \omega^3\omega_1^2$.

При любом выборе положения репера мы можем выделить $(n-1)$ линейчатую поверхность, принадлежащую конгруэнции, центральная нормаль каждой из которых сонаправлена одному из векторов репера. Назовем такие поверхности координатными. Среди этих координатных поверхностей имеются поверхности $L_2, L_3, \ldots, L_n$, для которых справедливы все выше изложенные свойства. Таким образом, инвариант конгруэнции $J_n^2 = \lambda_n^2$ есть параметр распределения поверхности L_n, принадлежащей конгруэнции.

С целью определения геометрического смысла инвариантов J_m^2 рассмотрим подмногообразия конгруэнции.

§5. Инвариантное двухпараметрическое семейство прямых M_2

Рассмотрим подмногообразие конгруэнции прямых, выделяемое системой уравнений:

$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^3 = 0, \ldots, \quad \omega_1^{n-2} = 0 \qquad (5_1)$$

нетрудно проверить, что $D\omega_1^2 = 0$, $D\omega_1^3 = 0, \ldots, D\omega_1^{n-2} = 0$.

а, следовательно, система (5_1) вполне интегрируема.

Теорема. Линейчатые поверхности конгруэнции, центральные нормали которых лежат в инвариантной плоскости $[\vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n]$ образуют двухпараметрическое семейство прямых.

Обозначим это семейство M_2.

На основании условий (5_1) будем иметь то, что от переноса вершины репера будут зависеть лишь формы ω^n и ω^{n-1}.

При вращении (3) компоненты ω_1^{n-1} и ω_1^n образуют координаты контравариантного вектора в абсолютной плоскости $[\vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n]$. Исключая линейную зависимость форм ω_1^{n-1} и

ω_1^n, запишем основную систему репера семейства M_2:

$$\omega^\alpha = \lambda^\alpha_{n-1}\omega_1^{n-1} + \lambda^\alpha_n \omega_1^n, \quad \alpha = 2,3,\dots,n \qquad (5_2)$$

Инвариантами семейства M_2 являются инварианты конгруэнции:

$$\mathcal{Y}^2_n = \lambda^2_n, \quad \mathcal{Y}^3_{n-1} = \begin{vmatrix} \lambda^2_{n-1} & \lambda^2_n \\ \lambda^3_{n-1} & \lambda^3_n \end{vmatrix} \qquad (5_3)$$

В силу того, что центральные нормали поверхностей L_{n-1} и L_n лежат в плоскости $[\vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n]$, следовательно, они принадлежит семейству M_2. Геометрический смысл инварианта $\mathcal{Y}^2_n$ был определён выше. Для определения геометрического смысла инварианта $\mathcal{Y}^3_{n-1}$ положим, что параметр распределения координатной линейчатой поверхности L_{n-1} равен нулю и назовем такую поверхность нулевой. Очевидно, для неё имеет место:

$$\bar{\lambda}^2_{n-1} = 0 \qquad \text{или} \qquad a^n_{n-1}\lambda^2_n + \lambda^2_{n-1} = 0$$

Из последнего соотношения найдем:

$$a^n_{n-1} = -\frac{\lambda^2_{n-1}}{\lambda^2_n} \qquad (5_4)$$

<u>Теорема.</u> Семейство прямых M_2 содержит ровно одну нулевую координатную поверхность L_{n-1}.

Подставляя (5_4) в следующую координату $\bar{\lambda}^3_{n-1}$ внутреннего вектора распределения поверхности L_{n-1}, получим:

$$\bar{\lambda}^3_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^2_{n-1} & \lambda^2_n \\ \lambda^3_{n-1} & \lambda^3_n \end{vmatrix}}{\lambda^2_n} \quad \text{или} \quad \bar{\lambda}^3_{n-1} = \frac{\mathcal{Y}^3_{n-1}}{\mathcal{Y}^2_n}. \qquad (5_5)$$

Сравнивая (5_5) и (5_3), запишем:

<u>Теорема.</u> Произведение параметров распределения поверхности L_n и нулевой координатной поверхности L_{n-1} является инвариантом семейства M_2 и конгруэнции.

Таким образом, направляя вектор $\vec{e}_{n-1}$ репера по центральной нормали нулевой поверхности L_{n-1}, получаем то, что абсцисса относительного центра поверхности L_n зависит теперь лишь от вращения осей $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-2}$ в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n]$.

Точку прямой семейства M_2 с абсциссой $t = -\frac{\lambda_{n-1}^{n-1} + \lambda_n^n}{2}$ (5_6) назовем его относительным центром. Очевидно он также зависит от вращения $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-2}$ в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n]$.

§ 6. Инвариантное трёхпараметрическое семейство прямых M_3

Рассмотрим семейство прямых, выделяемое системой уравнений $\omega_1^2 = 0,\ \omega_1^3 = 0,\ \ldots,\ \omega_1^{n-3} = 0$ (6_1). Эта система вполне интегрируема, т.к. $D\omega_1^\nu = 0$, $\nu = 2,3,\ldots,n-3$. Следовательно, здесь имеет место аналогичная теорема, как для семейства M_2: линейчатые поверхности, центральные нормали которых лежат в абсолютной плоскости $[\vec{e}_{n-2}, \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n]$, образуют трёхпараметрическое семейство прямых, которое обозначим M_3.

Аналогично семейству M_2 найдем, что от переноса вершины репера зависят лишь формы $\omega^{n-2}, \omega^{n-1}, \omega^n$.

При вращении репера компоненты $\omega_1^{n-2}, \omega_1^{n-1}, \omega_1^n$ образуют координаты контравариантного вектора в плоскости $[\vec{e}_{n-2}, \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n]$. Полагая формы $\omega_1^{n-2}, \omega_1^{n-1}, \omega_1^n$ линейно независимыми, запишем основную систему репера данного семейства:

$$\omega^\alpha = \lambda_{n-2}^\alpha \omega_1^{n-2} + \lambda_{n-1}^\alpha \omega_1^{n-1} + \lambda_n^\alpha \omega_1^n \qquad (6_2)$$
$$\alpha = 2,3,\ldots,n$$

Инвариантами семейства M_3 являются инварианты семейства M_2 и конгруэнции $\mathcal{J}_n^2$ и $\mathcal{J}_{n-1}^3$. Кроме того семейству M_3 принадлежит дополнительно инвариант конгруэнции $\mathcal{J}_{n-2}^4$:

$$\mathcal{J}^4_{n-2} = \begin{vmatrix} \lambda^2_{n-2} & \lambda^2_{n-1} & \lambda^2_n \\ \lambda^3_{n-2} & \lambda^3_{n-1} & \lambda^3_n \\ \lambda^4_{n-2} & \lambda^4_{n-1} & \lambda^4_n \end{vmatrix} \qquad (6_3)$$

Геометрический смысл инвариантов $\mathcal{J}^2_n$ и $\mathcal{J}^3_{n-1}$ был найден в §5. Соответственно линейчатая поверхность L_n и нулевая поверхность L_{n-1} принадлежит семейству M_3. Найдем третье инвариантное направление L_{n-2} семейства M_3, для чего полагаем, что вектор $\vec{e}_{n-1}$ направлен по центральной нормали нулевой поверхности L_{n-1}, а для поверхности L_{n-2} предполагаем, что внутренний вектор распределения её $\{\lambda^2_{n-2}, \lambda^3_{n-2}, \ldots, \lambda^{n-3}_{n-2}\}$ лежит в плоскости $[\vec{e}_4, \vec{e}_5, \ldots, \vec{e}_{n-3}]$. Вследствие такого предположения будем иметь:

$$\bar{\lambda}^2_{n-2} = 0, \quad \bar{\lambda}^3_{n-2} = 0 \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} \lambda^2_{n-2} + a^{n-1}_{n-2}\lambda^2_{n-1} + a^n_{n-2}\lambda^2_n = 0 \\ \lambda^3_{n-2} + a^{n-1}_{n-2}\lambda^3_{n-1} + a^n_{n-2}\lambda^3_n = 0 \end{cases} \qquad (6_4)$$

Решая последнюю систему, откуда найдем a^{n-1}_{n-2}, a^n_{n-2}, которые затем подставим в формулу $\bar{\lambda}^4_{n-2}$. Учитывая соотношение (5_4), получим:

$$\bar{\lambda}^4_{n-2} = \frac{\mathcal{J}^4_{n-2}}{\mathcal{J}^3_{n-1}} . \qquad (6_5)$$

<u>Теорема</u>. Существует ровно одна тройка координатных линейчатых поверхностей L_n, L_{n-1}, L_{n-2} параметры распределения которых являются инвариантами семейства M_3.

Координатную линейчатую поверхность L_{n-2}, для которой выполняются условия (6_4) назовем дважды нулевой. После такого выбора координатных поверхностей L_{n-1}, L_{n-2} получим, что абсциссы относительных центров этих поверхностей зависят лишь от вращения осей $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-3}$ в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n]$.

Точку прямой семейства M_3 с абсциссой $t = -\dfrac{\lambda^{n-2}_{n-2} + \lambda^{n-1}_{n-1} + \lambda^{n}_{n}}{3}$ назовем его относительным центром.

Очевидно, абсцисса относительного центра семейства M_3 также зависит от вращения $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-3}$ в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n]$.

Из формулы (6_5) следует:

Теорема. Инвариант $\mathcal{J}^4_{n-2}$ конгруэнции прямых есть произведение параметров распределения координатной поверхности L_n, нулевой поверхности L_{n-1} и дважды нулевой поверхности L_{n-2}.

§7. P - параметрическое семейство прямых M_p

При рассмотрении семейств M_2 и M_3 были найдены инвариантные линейчатые поверхности каждого из семейств, причем было показано, что число инвариантов и инвариантных поверхностей равно числу параметров p.

Теперь рассмотрим P-параметрическое семейство M_p

$$d\vec{e}_1 = \omega_1^m \vec{e}_m, \quad \omega_1^2 = 0, \ \omega_1^3 = 0, \ldots, \ \omega_1^{n-p} = 0 \qquad (7_1)$$

Здесь и в дальнейшем $m = n-p+1, n-p+2, \ldots, n.$

В силу условий (7_1) найдем, что от переноса вершины репера зависят лишь формы ω^m по закону:

$$\bar{\omega}^m = \omega^m + t\,\omega_1^m \qquad (7_2)$$

При вращении репера получаем то, что компоненты ω^α и ω_1^m образуют координаты контравариантных векторов соответственно в плоскостях $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n]$ и $[\vec{e}_{n-p+1}, \vec{e}_{n-p+2}, \ldots, \vec{e}_n]$.

Основная система репера семейства M_p запишется:

$$\omega^\alpha = \lambda^\alpha_m \, \omega_1^m \qquad (7_3)$$

Проверяя изменение коэффициентов λ^α_m при переносе вершины репера, очевидно будем иметь:

$$\bar{\lambda}^\alpha_m = \lambda^\alpha_m + t\,\delta^\alpha_m \qquad (7_4)$$

При вращении (3) λ^α_m является линейной вектор-функцией. Наличие двухиндексного тензора λ^α_m приводит к рассмотрению трёх случаем:

I. $p < \frac{n}{2}$. В этом случае инвариантами семейства M_p будут лишь окаймляющие λ^2_n определители порядков $1, 2, \ldots, p$, т.е. инварианты $\mathcal{J}^\ell_{n-\ell+2}$, $\ell = 2, 3, \ldots, p+1$.

Семейство M_p имеет ровно P инвариантных линейчатых поверхностей L_m, внутренний вектор распределения каждой из которых будет лежать в плоскости $[\vec{e}_{n-m+2}, \vec{e}_{n-m+3}, \ldots, \vec{e}_{m-1}]$.

Ни один из инвариантов $\mathcal{J}^\ell_{n-\ell+2}$ этого семейства не зависит от переноса вершины репера. Геометрически каждый из инвариантов $\mathcal{J}^\ell_{n-\ell+2}$ есть произведение параметров распределения инвариантных линейчатых поверхностей $L_{n-\ell+2}, L_{n-\ell+3}, \ldots, L_n$.

Абсцисса относительного центра каждой из инвариантных поверхностей, образующих семейство M_p, зависит от вращения осей репера $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-p}$ в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n]$.

2. Пусть $p = \frac{n}{2}$, что естественно имеет место при n четном. В этом случае, наряду с выше изложенными инвариантными линейчатыми поверхностями, появляется ещё инвариантная координатная линейчатая поверхность L_{n-p+1}, весь внутренний вектор распределения которой равен нулю, т.е.

$$\bar{\lambda}^2_{n-p+1} = 0, \; \bar{\lambda}^3_{n-p+1} = 0, \ldots, \bar{\lambda}^p_{n-p+1} = 0.$$

Рассматриваемое семейство M_p кроме диагональных инвариантов $\mathcal{J}^{\ell}_{n-\ell+2}$ имеет ещё инварианты $\mathcal{J}^{K}_{n-p+1}$, $K = p+2, p+3, \dots, n$. Среди инвариантов $\mathcal{J}^{\ell}_{n-\ell+2}$ имеется один инвариант

$$\mathcal{J}^{p+1}_{p+1} = \begin{vmatrix} \lambda^2_{p+1} & \lambda^2_{p+2} & \dots & \lambda^2_n \\ \lambda^3_{p+1} & \lambda^3_{p+2} & \dots & \lambda^3_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{p+1}_{p+1} & \lambda^{p+1}_{p+2} & \dots & \lambda^{p+1}_n \end{vmatrix} \qquad (7_5)$$

зависящий от переноса вершины репера. Точку прямой семейства M_p, в которой $\mathcal{J}^{p+1}_{p+1}$ назовем точкой стабилизации (аналогичная точка была рассмотрена в F_4).

Наличие инвариантов $\mathcal{J}^{K}_{n-p+1}$ означает, что внешний вектор распределения $\{\lambda^{p+2}_{p+1}, \lambda^{p+3}_{p+1}, \dots, \lambda^{n}_{p+1}\}$ поверхности L_{n-p+1} не зависит ни от переноса, ни от вращения репера.

3. Наконец, рассмотрим случай, когда $p > \frac{n}{2}$. Семейство M_p содержит p инвариантных линейчатых поверхностей L_{n-p+1}, $L_{n-p+2}, \dots, L_n$, среди которых имеется ровно $(2p-n+1)$ поверхностей, внутренний вектор распределения которых равен нулю.

o

Литература

/1/ Б.А.Розенфельд, "Неевклидовы пространства", Наука, 1969.

/2/ Л.И.Мадревиц, "Полная система инвариантов аффинора в F_n", Ученые записки ЛГУ, им.П.Стучки, том. 152, Рига, 1971.

/3/ Л.Я.Березина, "Классическая дифференциальная геометрия", I, изд. ЛГУ им.П.Стучки, Рига, 1970.

3х/

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Е.М.Левич, Р.С.Липянский

I. В настоящей заметке доказывается, что в линейной локально нильпотентной алгебре Ли над полем характеристики нуль совокупность всех алгебраических элементов является идеалом.

Приведем необходимые определения. Пусть A - ассоциативная алгебра над полем K характеристики нуль. Рассмотрим в алгебре A пространство L, замкнутое относительно операции коммутирования. Ассоциативная подалгебра $A(L)$, порожденная в ассоциативной алгебре A множеством L, называется о б е р т ы в а ю щ е й лиевой алгебры L. Алгебра Ли L в этом случае называется л и н е й н о й алгеброй Ли. Элемент $a \in L$ называется а л г е б р а и ч е с к и м, если он является алгебраическим элементом в $A(L)$ т.е. существует такой полином $\varphi(X)$ с коэффициентами из K, что $\varphi(a)=0$.

Авторы благодарны Л.А.Симоняну за обсуждение настоящей работы.

2. Пусть L - алгебра Ли, $a, b \in L$. Обозначим через

$$[a,b(0)]=a,\ [a,b(1)]=[a,b],\ldots,\ [a,b(n)]=[[a,b(n-1)],b].$$

Л е м м а I. Пусть a - алгебраический элемент алгебры Ли, т.е. $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i a^i=0\ (n>1)$ и $b\in L$, такой, что

$$[a,b(m-1)]\neq 0,\ [a,b(m)]=0 \text{ при } m>1 .$$

Тогда $[a,b(m-1)]^n=0$

Доказательство. Из

$$[ab,c]=[a,c]b+a[b,c]$$

следует, что $[a^k,b(r)]$ есть линейная комбинация элементов вида

$$[a,b(r_1)]\dots[a,b(r_k)],$$

где $\sum_{i=1}^{k} r_i = r$. Отсюда

$$[a^k,b(n(m-1))]=\alpha[a,b(m-1)]^k+u,$$

где u есть линейная комбинация элементов вида

$$[a,b(r_1)][a,b(r_2)]\dots[a,b(r_k)],$$

причем хотя бы один из $r_i>m-1$

Следовательно, $u=0$. Более того,

$$[a^k,b(n(m-1))]=0$$

если $k<n$.

Так как $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i a^i=0$, то

$$0=[\sum_{i=0}^{n}\alpha_i a^i, b(n(m-1))]=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i[a^i,b(n(m-1))]=$$

$$=\alpha_n[a^n,b(n(m-1))]=\alpha'_n[a,b(m-1)]^n.$$

Так как $\alpha'_n\neq 0$, то

$$[a,b(m-1)]^n=0.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть L - линейная нильпотентная алгебра класса нильпотентности $n>1$, а a - алгебраический элемент из L, не лежащий в ее центре. Тогда в центре L существует ненулевой нильпотентный элемент.

Доказательство. Из того что L - нильпотентная алгебра, следует существование для любого элемента $a\in L$, не лежащего в ее центре, таких элементов $b_1, b_2, \dots, b_k$, что элемент $[a,b_1(r_1),\dots,b_k(r_k)]\neq 0$ лежит в центре L, причем $n_i>0$. Применив (если необходимо и несколько раз) лемму I, мы получим утверждение леммы.

Л е м м а 3. Пусть L - линейная алгебра Ли, $A(L)$ - ее линеаризация. Если J - такой идеал в L, что $A(J) \subset A(L)$ есть нильпотентная алгебра, то двусторонний идеал $\overline{A(J)}$, порожденный $A(J)$, является нильпотентным идеалом в $A(L)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Всякий элемент z_j из $\overline{A(J)}$ можно представить в виде

$$z_j = \sum_i \alpha_{ij} a_{ij} \prod_{k=1}^{n_i} b_{ijk}$$

где $a_{ij} \in J$, $b_{iju} \in L$. Пусть n - класс нильпотентности алгебры $A(J)$. Покажем, что $\overline{A(J)}$ является нильпотентной алгеброй класса нильпотентности n. Для этого достаточно показать, что произведение любых n элементов из $\overline{A(J)}$ равно нулю, т.е. $\prod_j z_j = 0$. Используя индукцию и учитывая, что J есть идеал L, можно легко показать, что

$$\prod_{j=1}^{n} z_j = \prod_{j=1}^{n} \Big(\sum_i \alpha_{ij} a_{ij} \prod_{k=1}^{n_i} b_{iju} \Big) = \sum_{i'} \alpha'_{i'} \prod_{j=1}^{n} a'_{i'j} \prod_{u=1}^{n'} b_{i'u},$$

где $a'_{i'j} \in J$, $b_{i'n} \in L$. Но по условию леммы $\prod_{j=1}^{n} a'_{i'j} = 0$, следовательно

$$\prod_j z_j = 0.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 4. Пусть L - линейная нильпотентная алгебра Ли класса нильпотентности $n > 1$, a - алгебраический элемент в L, не принадлежащий ее центру. Тогда радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ алгебры $A(L)$ отличен от нуля.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно леммы 2 в L найдется нильпотентный элемент b, принадлежащий центру алгебры Ли L. Пусть $B = \{\lambda b, \lambda \in K\}$. Тогда, очевидно, $A(B)$ является нильпотентной ассоциативной алгеброй и B есть идеал в L. По лемме 3 идеал $\overline{A(B)}$ в ассоциативной алгебре $A(L)$, порожденный $A(B)$, является нильпотентным. Тогда радикал $\mathcal{L}(A)$ отличен от нуля [1].

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть L - линейная нильпотентная алгебра Ли класса нильпотентности $n > 1$. Пусть a - алгебраический элемент из L, не принадлежащий ее центру. Тогда $[a,b] \in \mathcal{L}(A)$ / $\mathcal{L}(A)$ - радикал Левицкого алгебры $A(L)$ / для любого $b \in L$.

Доказательство. По лемме 4 $\mathcal{L}(A) \neq 0$. Рассмотрим $\bar{A} = A(L)/\mathcal{L}(A)$. Гомоморфизм $A(L)$ на $\bar{A}$ индуцирует гомоморфизм алгебры Ли L на алгебру Ли $\bar{L}$, причем $\bar{A} = A(\bar{L})$. Заметим, что все алгебраические элементы $\bar{L}$ лежат в ее центре, ибо в противном случае в $\bar{A}$ имелся бы нетривиальный радикал Левицкого (лемма 4), что противоречит построению $\bar{A}$. Из этого замечания следует, что $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$ для $\bar{b} \in \bar{L}$, т. е. $[a,b] \in \mathcal{L}(A)$, где a, b - прообразы в L элементов $\bar{a}$, $\bar{b}$.

Лемма доказана.

Следствие 1. Если линейная нильпотентная алгебра Ли L порождается конечным числом алгебраических элементов, то $A(L)$ является конечномерной ассоциативной алгеброй.

Доказательство. Если все порождающие элементы лежат в центре алгебры L, т.е. L - коммутативная алгебра Ли, то утверждение очевидно. В противном случае, радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ алгебры $A(L)$ отличен от нуля и является конечномерной ассоциативной алгеброй. Фактор алгебр $\bar{A} = A(L)/\mathcal{L}(A)$ является коммутативной полупростой алгеброй (лемма 5) с конечным числом образующих. Отсюда следует, что $\bar{A}$ - конечномерная ассоциативная алгебра, а поэтому и $A(L)$ - конечномерная ассоциативная алгебра.

Т е о р е м а . В линейной локально нильпотентной алгебре Ли L множество M всех алгебраических элементов образует идеал.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из следствия 1 вытекает, что M является подалгеброй, а из леммы 5 - что M есть идеал в L.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е . В линейной локально нильпотентной алгебре Ли множество всех нильпотентных элементов образует идеал.

Цитированная литература

[I] Н.Джекобсон, Строение колец. ИЛ, М., 1961.

Содержание

Ученые записки, том I72

БЕЗРАЗМЕРНОЕ, ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДОВЫ
ПРОСТРАНСТВА
Выпуск II

Редактор Я.Томсон
Технический редактор Е.Клейнштейн
Корректор Е.Клейнштейн

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига I972

Подписано к печати I2.09.I972. ЯТ I9338. Зак. № 577.
Ф/б 60x84/I6. Бумага №I. Физ.п.л. 7,3. Уч.-и.л. 5,2
Тираж 350 экз. Цена 52 коп.

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

32738

0,52

ЦЕНА 62 коп.

Учен. зап. (ЛГУ им. П.Стучки), 1972, т. 172, 1-109.