Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки

Кафедра алгебры и геометрии

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ГРУПП

(труды алгебраического семинара)
Ученые записки, том I5I

Рига I97I

УДК 590.4.

Некоторые вопросы теории групп
(Труды алгебраического семинара)
Ученые записки т. 151

Настоящий сборник состоит из 10 статей, выполненных участниками алгебраического семинара при кафедре алгебры и геометрии ЛГУ им. П. Стучки. Статьи посвящены абстрактным группам и их представлениям и содержат оригинальные результаты, относящиеся к теории радикальных и предрадикальных классов групп, многообразиям, связанным с представлением групп и др. вопросам.

Сборник рассчитан на специалистов-математиков, а также на студентов старших курсов университета

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящии сборник является вторым сборником работ рижского алгебраического семинара (первый сборник "Труды рижского алгебраического семинара" вышел в 1969 году). В предлагаемом сборнике ученых записок включены работы, выполненные в 1969 - 70 годах и доложенные на заседаниях семинара. Некоторые работы анонсировались ранее.

Исследования посвящены абстрактным группам и их представлениям. Чаще речъ идет о классах групп и классах представлений. Работы С.М.Вовси посвящены радикальным классам и предмногообразиям групп. Эти классы рассматриваются с точки зрения операции умножения классов, в том числе и бесконечного умножения. Несколько работ посвящено многообразиям, связанным с представлениями групп. Реч здесь идет о классах представлений, точнее о классах пар, задаваемых тождествами. При этом групповые алгебры играют здесь ту же роль, что свободные группы в теории групповых многообразий. Основные определения собраны в первом параграфе статьи Б.И.Плоткина, где рассматриваются также и радикальные классы представлений. Многообразиям пар посвящены работы Л.Е.Кропа, А.С.Гринберга и Л.Я.Гринглаза.

В работах Е.М.Левича изучаются группы с точки зрения возможных для них неприводимых представлений.

Локально нильпотентным группам посвящена также работа Е. М. Кублановой. Здесь изучается одна новая конструкция типа сплетений, применимая, в частности, в теории локально нильпотентных групп без кручения.

Авторы благодарят редакционно-издательский отдел ЛГУ за издание настоящего сборника, а также Э. Бормане, Г.Д. Вольнову и Н.Каган за большую помощь в подготовке рукописей к печати.

О ПРЕДМНОГООБРАЗИЯХ ГРУПП

С.М.Вовси

I. Введение

I. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется предмногообразием [5], или реплично полным классом [1], если он замкнут относительно взятия подгрупп и полных прямых произведений. Мы будем в дальнейшем придерживаться термина "предмногообразие".

Если $\mathfrak{X}$ - предмногообразие, а G - произвольная группа, то в G имеется единственный минимальный нормальный делитель $\mathfrak{X}^*(G)$, факторгруппа по которому лежит в $\mathfrak{X}$. Легко понять, что если H - подгруппа в G, то $\mathfrak{X}^*(H) \subset \mathfrak{X}^*(G)$.

Произведением двух классов групп $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ называется, как обычно, класс всех таких групп, которые являются расширением $\mathfrak{X}_1$-группы с помощью $\mathfrak{X}_2$-группы. Легко проверяется, что система всех предмногообразий замкнута и ассоциативна относительно этого умножения. Мы имеем, таким образом, полугруппу предмногообразий, в которой содержится полугруппа всех многообразий групп.

2. Предмногообразие $\mathfrak{X}$ называется неразложимым, если его нельзя представить в виде произведения двух неединичных предмногообразий. Система Σ неразложимых предмногообразий называется свободной, если порождённая этой системой подполугруппа свободна, а Σ является в ней системой свободных образующих.

Хорошо известно, что полугруппа всех многообразий свободно порождается своими неразложимыми элементами. В то же время полугруппа всех предмногообразий не является свободной. Поэтому представляет интерес выделение различных свободных систем предмногообразий, в частности, содержащих все неразложимые многообразия. Одна из таких свободных систем приведена в п.2 настоящей заметки:

Теорема I. Система Σ, состоящая из всех неразложимых многообразий и всех абелевых предмногообразий, свободна.

Отметим еще, что класс всех абелевых предмногообразий достаточно велик.

3. Предмногообразие называется <u>малым</u>, если оно порождается некоторым множеством групп. Ясно, что предмногообразие является малым тогда и только тогда, когда оно порождается одной группой. Аналогично определяется и малый (наследственный) радикальный класс. В [4] доказано, что каждый малый радикал неразложим. В связи с тем, что полугруппа предмногообразий и полугруппа наследственных радикалов обладают рядом общих свойств (см., например, [6]), естественно возникает следующая задача: <u>будет ли каждое малое предмногообразие неразложимым?</u> Легко доказать, что, вообще говоря, это не так, однако в целом ряде случаев ответ оказывается положительным. Получено несколько частных результатов, среди которых основным является

Теорема 2. Предположим, что малое предмногообразие $\mathfrak{X}$ разложимо: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$, где $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ неединичны. Тогда необходимо $\mathfrak{X}_1$ абелево, а $\exp \mathfrak{X}_2 \neq 0$.

Из этой теоремы вытекает ряд очевидных следствий.

Следствие I. Каждое малое предмногообразие раскладывается в произведение конечного числа неразложимых.

Следствие 2. Предмногообразие, порожденное группой без кручения, неразложимо.

Следствие 3. Предмногообразие, порожденное полной группой, неразложимо.

К этим утверждениям непосредственно примыкает следующее

Предложение I. Предмногообразие, порожденное 2-группой, неразложимо.

4. В последней части заметки мы даем отрицательный ответ на следующий вопрос Л.Н.Шеврина: будет ли система всех идемпотентов в полугруппе предмногообразий групп множеством? На этот вопрос наше внимание обратил Л.М.Мартынов.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Б.И.Плоткину за ряд ценных советов.

2. Свободная система предмногообразий

Пусть $\mathfrak{X}$ -класс групп, тогда $Q\mathfrak{X}$ есть класс всех гомоморфных образов $\mathfrak{X}$-групп, $S\mathfrak{X}$ есть класс всех подгрупп $\mathfrak{X}$-групп, $C\mathfrak{X}$ есть класс всех декартовых произведений $\mathfrak{X}$-групп, $CoR\,\mathfrak{X}$- класс всех групп, аппроксимирующихся $\mathfrak{X}$-группами.

Если $\mathfrak{K}$ -произвольный класс групп, $\mathfrak{X}$ - порожденное им предмногообразие, то

$$\mathfrak{X} = SC\mathfrak{K} = CoR\cdot S\mathfrak{K}$$

Если $\mathfrak{X}$ - предмногообразие, то порожденное им многообразие равно $Q\mathfrak{X}$.

Легко проверяется справедливость следующих двух предложений (см., например, [6]):

Л е м м а I. Если $\mathfrak{X}$ - предмногообразие, то все свободные группы многообразия $Q\mathfrak{X}$ лежат в $\mathfrak{X}$.

Л е м м а 2. Отображение $\mathfrak{X} \to Q\mathfrak{X}$ есть гомоморфизм полугруппы всех предмногообразий на полугруппу всех многообразий.

Нам понадобится еще одна лемма о сплетениях групп.

Л е м м а 3. Пусть A - абелева группа, B - свободная группа бесконечного ранга некоторого нетривиального многообразия $\mathfrak{X}$ и $W = A \,wr\, B$. Тогда $\mathfrak{X}^*(W)$ содержит подгруппу, изоморфную A .

Д о к а з а т е л ь с т в о . а) Покажем сначала, что если X - произвольная группа, то $H = \mathfrak{X}^*(X \,wr\, B)$ есть подпрямая B-степень группы X . Ясно, во-первых, что H лежит в базисной подгруппе $X^{(B)}$. Предположим теперь, что проекция H на какую-нибудь координатную подгруппу группы $X^{(B)}$ равна $X_1 < X$. Так как $H \lhd X \operatorname{wr} B$, то легко видеть, что $H \subset X_1^{(B)}$. Поэтому $X \operatorname{wr} B/H$ гомоморфно отображается на группу

$$X \operatorname{wr} B / X_1^{(B)} \cong (X/X_1) \operatorname{wr} B.$$

Последняя же группа в силу 22.32 из [3] порождает многообразие $\operatorname{var}(X/X_1)\cdot\mathfrak{X}$. Это противоречит тому, что $X \operatorname{wr} B/H \in \mathfrak{X}$.

б) Пусть теперь $X = \{x\}$ - бесконечная циклическая группа, $W_x = X \operatorname{wr} B$. По предыдущему, $\mathfrak{X}^*(W_x)$ есть подпрямая B- степень группы $\{x\}$. Поэтому в $\mathfrak{X}^*(W_x)$ существует элемент f - функция из $X^{(B)}$ - следующего вида:

$$f = x(1)\,x^{n_1}(b_1)\ldots x^{n_k}(b_k),$$

где $x^{n_i}(b_i)$ есть функция с одним неединичным значением x^{n_i}, принимаемым на элементе b_i, n_i - целые числа. Подчеркнем, что на единице группы B функция f принимает значение x.

Вернемся теперь к группе $W = A \operatorname{wr} B$. Пусть a - произвольный элемент из A, $W_a = \{a\} \operatorname{wr} B$ - подгруппа в W. Отображение W_x в W_a, которое переводит x в a и тождественно на B, индуцирует эпиморфизм $\varphi: W_x \to W_a$. По известному свойству вербальных подгрупп (см., например, [5])

$$\mathfrak{X}^*(W_a) = \mathfrak{X}^*(W_x^{\varphi}) = \mathfrak{X}^*(W_x)^{\varphi}.$$

Поэтому в $\mathfrak{X}^*(W_a)$ лежит элемент $f_a = f\varphi = a(1)\,a^{n_1}(b_1)\ldots a^{n_k}(b_k)$. Так как вербал $\mathfrak{X}^*$ согласован со взятием подгрупп, то $\mathfrak{X}^*(W_a) \subset \mathfrak{X}^*(W)$, а следовательно, $f_a \in \mathfrak{X}^*(W)$. Это справедливо для любого $a \in A$. Так как A - абелева группа, то легко видеть, что отображение $\mu : a \to f_a$ есть мономорфизм A в $\mathfrak{X}^*(W)$, что заканчивает доказательство леммы.

Т е о р е м а I. Система Σ, состоящая из всех неразложимых многообразий и всех абелевых предмногообразий, свободна.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Легко видеть, что все элементы системы Σ являются неразложимыми предмногообразиями. Требуется доказать, что если

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\ldots\mathfrak{X}_n = \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_m$$

где все $\mathfrak{X}_i, \mathfrak{Y}_j \in \Sigma$, то $m = n$ и $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{Y}_i$ для каждого $i = 1,2,\ldots, n$.

Применив к обоим частям нашего равенства оператор Q и использовав лемму 2, получим

$$Q\mathfrak{X}_1\cdot Q\mathfrak{X}_2\ldots Q\mathfrak{X}_n = Q\mathfrak{Y}_1\cdot Q\mathfrak{Y}_2\ldots Q\mathfrak{Y}_m.$$

Ясно, что все $Q\mathfrak{X}_i$, $Q\mathfrak{Y}_j$ – неразложимые многообразия. Так как полугруппа всех многообразий свободна, то отсюда следует, что $m = n$ и $Q\mathfrak{X}_i = Q\mathfrak{Y}_i$ для $i = 1,2,\ldots, n$.

Обозначим теперь $\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}_2\ldots\mathfrak{X}_n$, $\overline{\mathfrak{Y}} = \mathfrak{Y}_2\ldots\mathfrak{Y}_n$ и докажем, что $\overline{\mathfrak{X}} = \overline{\mathfrak{Y}}$. Предположим, например, что $\overline{\mathfrak{X}} \not\subset \overline{\mathfrak{Y}}$. Пусть $1 \neq B \in \overline{\mathfrak{X}} \setminus \overline{\mathfrak{Y}}$, A – свободная группа бесконечного ранга многообразия $Q\mathfrak{X}_1$. По лемме 1 она лежит в $\mathfrak{X}_1$, поэтому

$$W = A \operatorname{wr} B^{(I)} \in \mathfrak{X}_1\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Y}_1\overline{\mathfrak{Y}},$$

где $B^{(I)}$ – дискретная прямая I – степень группы B, I – – счетное множество. Следовательно, $\overline{\mathfrak{Y}}^*(W) \in \mathfrak{Y}_1$.

Так как $B \notin \overline{\mathfrak{Y}}$, то $C = \overline{\mathfrak{Y}}^*(B) > 1$. По лемме 23.13 из [3] подгруппа $\overline{\mathfrak{Y}}^*(W)$ порождает многообразие

$$Q\mathfrak{X}_1 \cdot \operatorname{var} C = Q\mathfrak{Y}_1 \cdot \operatorname{var} C.$$

Но это противоречит тому, что $\overline{\mathfrak{Y}}^*(W) \in \mathfrak{Y}_1$. Таким образом, $\overline{\mathfrak{X}} \subset \overline{\mathfrak{Y}}$. Аналогично доказывается и обратное включение.

Докажем теперь, что $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$. Предположим, что это не так, тогда $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{Y}_1$ необходимо являются абелевыми предмногообразиями. Пусть, например, существует $1 \neq A \in \mathfrak{X}_1 \setminus \mathfrak{Y}_1$. И пусть $B = F_\infty(Q\overline{\mathfrak{X}}) = F_\infty(Q\overline{\mathfrak{Y}})$. Тогда

$$W = A \operatorname{wr} B \in \mathfrak{X}_1\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Y}_1\overline{\mathfrak{Y}},$$

откуда $\overline{\mathfrak{Y}}^*(W) \in \mathfrak{Y}_1$. Так как группа A абелева, то по лемме 3 $\bar{\mathfrak{Y}}^*(W)$ содержит подгруппу, изоморфную A, откуда $A \in \mathfrak{Y}_1$, что невозможно. Таким образом, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{Y}_1$. Доказательство теоремы заканчивается по индукции.

З а м е ч а н и е . Систему Σ можно расширить с сохранением свободы. Приведем одно из таких расширений.

Пусть $\mathfrak{X}$ - многообразие, тогда через $\mathfrak{X}_0$ будем обозначать класс всех группы без кручения из $\mathfrak{X}$. Ясно, что $\mathfrak{X}_0$ - предмногообразие. Если к системе Σ прибавить все такие предмногообразия типа $\mathfrak{X}_0$, для которых $Q\mathfrak{X}_0$ - неразложимое многообразие, то получившаяся система будет свободной. Доказательство почти полностью повторяет доказательство теоремы I; мы не будем приводить его.

3. Малые предмногообразия

Как уже отмечалось выше, предмногообразие называется малым, если оно порождается некоторым <u>множеством</u> групп.

Т е о р е м а 2. Предположим, что малое предмногообразие $\mathfrak{X}$ разложимо: $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, где $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \neq 1$. Тогда $\mathfrak{X}_1$ абелево, а $\exp \mathfrak{X}_2 \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . $\mathfrak{X}$ порождается некоторой группой G, мощность которой обозначим через m.

а) Докажем, что $\exp \mathfrak{X}_2 \neq 0$. Пусть $\exp \mathfrak{X}_2 = 0$, тогда в $\mathfrak{X}_2$ существует группа B без кручения, мощность которой больше, чем m. Если $1 \neq A$ - произвольная $\mathfrak{X}_1$-группа, то

$$W = A\,Wr\,B \in \mathfrak{X}.$$

Так как $\mathfrak{X} = CoR \cdot S\,[G]$, то W аппроксимируется группами, мощность которых не превосходит m. Поэтому в W существует набор нормальных делителей N_α, $\alpha \in I$, таких, что $\bigcap_{\alpha \in I} N_\alpha = 1$ и $|W/N_\alpha| \leq m$.

Возьмем произвольный $N_\alpha = N$. Ясно, что $N \cap B \neq 1$, т.к. в противном случае $|W/N| > m$. Но группа B без кручения, поэтому согласно следствию 5.3 из [2] N

содержит базисную подгруппу A^B. Значит, все N_α содержат A^B, студа $\cap N_\alpha \neq 1$. Противоречие.

б) Докажем, что $\mathfrak{X}_1$ - абелево предмногообразие. Предположим, что в $\mathfrak{X}_1$ существует неабелева группа A и пусть B - произвольная группа из $\mathfrak{X}_2$, мощность которой больше m. Так же, как и в а), группа $W = A \,wr\, B$ должна обладать набором нормальных делителей N_α, таких, что $\cap N_\alpha = 1$ и $|W/N_\alpha| \leq m$; причем $N_\alpha \cap B \neq 1$ для каждого α.

Хорошо известно (см., например, 8.2 в [2]), что нормальное замыкание каждого $1 \neq b \in B$ в группе W содержит коммутант $A'^{(B)}$ базисной подгруппы. Так как A - неабелева группа, то $A'^{(B)} \neq 1$ и в то же время $A'^{(B)} \subset \cap N_\alpha = 1$. Противоречие.

П р е д л о ж е н и е I. Предмногообразие, порожденное 2-группой, неразложимо.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2. Пусть предмногообразие $\mathfrak{X}$ порождается 2-группой G, $|G| = m$ и допустим, что $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, где $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ нетривиальны. Легко видеть, что порядок любого элемента произвольной $\mathfrak{X}$-группы равен либо ∞, либо степени числа 2. Если $\mathfrak{X}_2$ содержит группу без кручения, то доказательство продолжается дословно, как в теореме 2, а). Поэтому будем считать, что $\mathfrak{X}_2$ есть предмногообразие некоторой экспоненты 2^n, и пусть B - $\mathfrak{X}_2$-группа мощности $> m$. Далее, $\mathfrak{X}_1$ не может состоять только из групп без кручения, т.к. в противном случае $G \in \mathfrak{X}_2$, следовательно, G имеет экспоненту 2^n, а поэтому в $\mathfrak{X}$ вообще не может быть групп без кручения. Таким образом, в $\mathfrak{X}_1$ есть некоторая 2-группа $A \neq 1$.

Как и выше, группа $W = A \,Wr\, B$ должна обладать семейством нормальных делителей N_α, таких, что $\cap N_\alpha = 1$, $|W/N_\alpha| \leq m$ и $N_\alpha \cap B \neq 1$ для любого α.

Пусть $a \neq 1$ - некоторый элемент порядка 2 группы A. Через $\bar{a}$ обозначим элемент из диагонали группы A^B, отвечающий этому a: $\bar{a}(\beta) = a$ для каждого $\beta \in B$. Покажем, что $\bar{a}$ лежит в каждом N_α.

Действительно, пусть $N_\alpha = N$ - произвольный из этих нормальных делителей и b - элемент второго порядка из $N \cap B$. Возьмем T - полную систему представителей левых смежных классов группы B по подгруппе $\{b\}$. Смежный класс, отвечающий элементу $t \in T$ состоит из двух элементов: t и tb. Определим функцию $f \in A^B$ правилом:

$$f(\beta) = a, \text{ если } \beta \in T,$$
$$f(\beta) = 1, \text{ если } \beta = tb \text{ для некоторого } t \in T.$$

Так как $b \in N$, то и $[f, b] \in N$. Легко видеть, что $g = [f, b]$ есть следующая функция:

$$g(\beta) = a^{-1}, \text{ если } \beta \in T,$$
$$g(\beta) = a, \text{ если } \beta = tb.$$

Так как a - элемент порядка 2, то $a = a^{-1}$, поэтому $g = \bar{a}$. Итак, $\bar{a}$ лежит в каждом N_α, откуда $\cap N_\alpha \neq 1$, что противоречит выбору N_α.

4. Идемпотенты

Мы покажем в этом пункте, что <u>система всех идемпотентов в полугруппе предмногообразий групп не является множеством</u>. Обозначим через $\mathfrak{D}$ класс всех групп.

Л е м м а 4. Пусть $\mathfrak{X}_\alpha$, $\alpha \in I$ - множество предмногообразий, отличных от $\mathfrak{D}$. Тогда их объединение также отлично от $\mathfrak{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathfrak{X}_\alpha \neq \mathfrak{D}$, то для каждого $\alpha \in I$ существует группа $G_\alpha \notin \mathfrak{X}_\alpha$. Если $\bigcup_{\alpha \in I} \mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{D}$, то прямое произведение $G = \prod_\alpha G_\alpha$ лежит в каком-то $\mathfrak{X}_{\alpha_0}$, но тогда и подгруппа G_{α_0} группы G лежит в $\mathfrak{X}_{\alpha_0}$; противоречие.

Если мы теперь покажем, что каждая группа лежит в некотором предмногообразии - идемпотенте, не равном $\mathfrak{D}$, то будет ясно, что система всех предмногообразий - идемпотентов не может быть множеством. Пусть G - произвольная группа, $\mathfrak{X}$ - порожденное группой G предмногообразие, $\mathfrak{X}$-

порожденный предмногообразием $\mathfrak{X}$ идемпотент. Известно, что $\widetilde{\mathfrak{X}} = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{X}^{\alpha}$, где объединение берется по всем трансфинитным α [5].

Пусть теперь P - простая группа, мощность которой больше мощности группы G. Так как $\mathfrak{X} = \mathcal{C}o\mathcal{R}\cdot S[G]$, то каждая $\mathfrak{X}$-группа аппроксимируется подгруппами группы G. Поэтому легко видеть, что $\mathfrak{X}^*(P) = P$. Но тогда и $(\mathfrak{X}^2)^*(P) = \mathfrak{X}^*(\mathfrak{X}^*(P)) = P$ и вообще $(\mathfrak{X}^{\alpha})^*(P) = P$ для любого трансфинитного α. Поэтому $P \notin \widetilde{\mathfrak{X}}$, откуда $\widetilde{\mathfrak{X}} \neq \mathfrak{D}$. Таким образом, каждая группа G лежит в некотором идемпотенте, не равном $\mathfrak{D}$, что и требовалось доказать.

Из этого доказательства видно, что уже система всех таких идемпотентов, которые порождаются некоторой простой группой, не является множеством.

Литература

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы, Изд-во "Наука", М., 1970.
2. Neuman P.M. On structure of standard wreath products of groups, Math.Z., 84, Nr.4(1964),343-373.
3. Нейман Х. Многообразия групп, Изд-во "Мир", М., 1969.
4. Плоткин Б.И. О полугруппе радикальных классов групп, Сиб.матем.ж.,10, № 5 (1969), 1091-1108.
5. Плоткин Б.И. Операторы на классах групп и радикальные классы, Труды Х-го Всесоюзного алгебраического коллоквиума, Новосибирск, 1971.
6. Вовси С.М. О бесконечных произведениях классов групп, Сиб.матем.ж. (в печати).

АБСОЛЮТНАЯ СВОБОДА НЕСТРОГИХ РАДИКАЛОВ

С.М.Вовси

I. Введение

Следуя работам [I] и [2], приведем несколько определений.

Класс групп $\mathfrak{X}$ называется радикальным, если: а) в каждой группе G существует нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа $\mathfrak{X}(G)$, которая содержит все другие нормальные $\mathfrak{X}$-подгруппы группы G; б) класс $\mathfrak{X}$ замкнут по гомоморфизмам. Подгруппа $\mathfrak{X}(G)$ называется $\mathfrak{X}$-радикалом группы G.

Если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ - два класса групп, то их произведение $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, как обычно, есть класс всех групп, являющихся расширениями групп класса $\mathfrak{X}_1$ с помощью групп класса $\mathfrak{X}_2$. Легко проверяется, что система всех радикальных классов замкнута и ассоциативна относительно этого умножения. Эта система называется полугруппой радикальных классов. Естественны обозначения $\mathfrak{X}\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^2$, $\mathfrak{X}\mathfrak{X}\mathfrak{X}=\mathfrak{X}^3$ и т. д.

Пусть $\mathfrak{X}$ - радикальный класс, G - произвольная группа. Верхним $\mathfrak{X}$ - радикальным рядом группы G называется ряд
$$E=R_0\subset R_1\subset\ldots\subset R_\alpha\subset R_{\alpha+1}\subset\ldots,$$
где $R_1=\mathfrak{X}(G)$, $R_{\alpha+1}/R_\alpha=\mathfrak{X}(G/R_\alpha)$ и на предельных местах стоят объединения предыдущих членов. Легко видеть, что если n - натуральное число, то $\mathfrak{X}^n$ есть класс всех групп, которые совпадают с n-м членом своего верхнего $\mathfrak{X}$ - радикального ряда. Если теперь α - порядковое число, то через $\mathfrak{X}^\alpha$ обозначим класс всех тех групп, которые совпадают с α-м членом своего верхнего $\mathfrak{X}$ - радикального ряда. Тогда $\mathfrak{X}^\alpha$ также является радикальным классом и $\mathfrak{X}^\alpha(G)$ совпадает с α-м членом верхнего $\mathfrak{X}$ - радикального ряда группы G.

Радикальный класс называется <u>наследственным</u>, если он замкнут относительно взятия нормальных делителей. Система всех наследственных радикальных классов образует подполугруппу в полугруппе всех радикальных классов.

Радикальный класс $\mathfrak{X}$ называется <u>идемпотентом</u>, если $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$. Такой радикальный класс называют еще <u>строгим</u>, или радикалом в смысле А.Г.Куроша.

Радикальный класс $\mathfrak{X}$ называется <u>свободным</u>, если он порождает свободную подполугруппу, т.е. для любых натуральных m и n, $m \neq n$, $\mathfrak{X}^m \neq \mathfrak{X}^n$.

Радикальный класс $\mathfrak{X}$ называется <u>абсолютно свободным</u>, если для любых трансфинитных α и β, $\alpha \neq \beta$, $\mathfrak{X}^\alpha \neq \mathfrak{X}^\beta$.

Б.И.Плоткин поставил следующую задачу: существует ли нестрогий наследственный радикальный класс, который не является свободным, или хотя бы не является абсолютно свободным? Оказывается, что даже на второй из этих вопросов ответ отрицателен. Доказательство опирается на одну лемму о радикале сплетения двух групп, имеющую также и самостоятельный интерес.

2. Основная теорема

Символом $<$ будем обозначать строгое включение. Если A и B - две группы, и задано представление группы B подстановками множества I, то через $A \,\mathrm{wr}^I\, B = A^I \leftthreetimes B$ обозначается (дискретное) сплетение группы A с группой B по множеству I. Если B действует на I точно, то и соответствующее сплетение называется точным. В частности, точным является стандартное сплетение $A \,\mathrm{wr}\, B$.

Л е м м а. Пусть $\mathfrak{X}$ - наследственный радикальный класс, $W = A \,\mathrm{wr}^I\, B$ - точное сплетение и $\mathfrak{X}(A) < A$. Тогда $\mathfrak{X}(W) = \mathfrak{X}(A)^I$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что $\mathfrak{X}(W) \subset A^I$, где A^I - базисная подгруппа группы W. Обозначим $\mathfrak{X}(W) = H$ и допустим, что H не лежит в A^I. Пусть $h = fb \in H \setminus A^I$, $f \in A^I$, $1 \neq b \in B$

Так как B действует на множество I точно и $b \neq 1$, то найдется $x_0 \in I$, такой, что $x_0 \circ b \neq x_0$. Возьмем произвольный элемент $a \in A \setminus \mathfrak{X}(A)$ и определим элемент $g \in A^I$ правилом: $g(x_0) = a$, $g(x) = 1$ при $x \neq x_0$. Тогда $[g, h^{-1}] \in H \cap A^I = \mathfrak{X}(W) \cap A^I = \mathfrak{X}(A^I) = \mathfrak{X}(A)^I$.

(мы использовали замкнутость $\mathfrak{X}$ по гомоморфизмам и нормальным делителям). С другой стороны, $[g, h^{-1}] = g^{-1} h g h^{-1} = g^{-1} f g^{b} f^{-1}$ и, далее,

$$g^{-1} f g^{b} f^{-1}(x_0) = g^{-1}(x_0) f(x_0) g(x_0 \circ b) f^{-1}(x_0) = a^{-1} \notin \mathfrak{X}(A),$$

откуда $[g, h^{-1}] \notin \mathfrak{X}(A)^I$. Противоречие.

Т е о р е м а . Пусть $\mathfrak{X}$ - наследственный радикальный класс. Тогда он либо идемпотент, либо абсолютно свободен.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{X}^2$; докажем, что тогда $\mathfrak{X}$ абсолютно свободен. Достаточно показать, что для любого порядкового β в $\mathfrak{X}^\beta$ есть группа G_β, которая не лежит ни в одном $\mathfrak{X}^\alpha$, $\alpha < \beta$. Для $\beta = 2$ это следует из нашего предположения. Пусть теперь это утверждение доказано для всех $\beta < \gamma$, где $\gamma > 2$. Докажем, что и в $\mathfrak{X}^\gamma$ есть группа G_γ, не принадлежащая ни одному $\mathfrak{X}^\beta$, $\beta < \gamma$.

а) γ - предельное. Для каждого порядкого β, $\beta < \gamma$, выберем в $\mathfrak{X}^\beta$ группу G^β, которая не лежит ни в одном $\mathfrak{X}^\alpha$, $\alpha < \beta$. Тогда прямое произведение $G_\gamma = \prod_{\beta < \gamma} G_\beta$ этих групп лежит в классе $\mathfrak{X}^\gamma$, но $G_\gamma \notin \mathfrak{X}^\beta$ при $\beta < \gamma$.

б) γ - непредельное и $\gamma - 1$ - непредельное. Возьмем группу $A \in \mathfrak{X}^{\gamma-1} \setminus \mathfrak{X}^{\gamma-2}$ и группу $B \in \mathfrak{X}^2 \setminus \mathfrak{X}$. Пусть $W = A \,\mathrm{wr}\, B = A^B \lambda B$. Тогда по вышедоказанной леме $\mathfrak{X}^{\gamma-2}(W) = \mathfrak{X}^{\gamma-2}(A)^B < A^B$. Так как $B \notin \mathfrak{X}$, то очевидно, что $W \notin \mathfrak{X}^{\gamma-1}$. В то же время $W \in \mathfrak{X}^{\gamma+1}$, поэтому $\mathfrak{X}^{\gamma-1} < \mathfrak{X}^{\gamma+1}$, значит $\mathfrak{X}^{\gamma-1} < \mathfrak{X}^\gamma$, то есть в $\mathfrak{X}^\gamma$ существует группа G_γ, не лежащая ни в одном $\mathfrak{X}^\beta$, $\beta < \gamma$.

в) Наконец, пусть γ - непредельное, но $\gamma - 1$ - предельное порядковое число. Возьмем в $\mathfrak{X}^{\gamma-1}$ группу A, не лежащую ни в одном $\mathfrak{X}^{\beta}$, $\beta < \gamma - 1$, а в классе $\mathfrak{X}$ - произвольную неединичную группу B. Рассмотрим группу $G_\gamma = A \operatorname{wr} B$. Достаточно показать, что $G_\gamma \in \mathfrak{X}^{\gamma} \setminus \mathfrak{X}^{\gamma-1}$. То, что $G_\gamma \in \mathfrak{X}^{\gamma}$, очевидно. Найдем теперь $\mathfrak{X}^{\gamma-1}(G_\gamma)$. Так как $\gamma - 1$ предельное, то

$$\mathfrak{X}^{\gamma-1}(G_\gamma) = \bigcup_{\beta < \gamma - 1} \mathfrak{X}^{\beta}(G_\gamma)$$

Но по выбору группы A $\mathfrak{X}^{\beta}(A) < A$ для любого $\beta < \gamma - 1$, поэтому из леммы следует, что $\mathfrak{X}^{\beta}(G_\gamma) = \mathfrak{X}^{\beta}(A)^B < A^B$, если $\beta < \gamma - 1$. Следовательно, $\mathfrak{X}^{\gamma-1}(G_\gamma) \subseteq A^B$ (в данном случае $\mathfrak{X}^{\gamma-1}(G_\gamma) = A^B$), и теорема доказана.

Отметим, что для ненаследственных радикальных классов эта теорема, вообще говоря, неверна: Д.Уайголд [3] построил пример свободного радикала, не являющегося абсолютно свободным.

3. Замечание

Класс групп $\mathfrak{X}$ называется предмногообразием, если он замкнут относительно взятия подгрупп и декартовых произведений. Двойственным по отношению к радикальным классам образом (на основе нижнего вербального ряда) для каждого порядкового α определяется α-я степень произвольного предмногообразия. Естественно вводятся понятия идемпотента, свободного и абсолютно свободного предмногообразия, причем здесь также имеет место теорема, аналогичная теореме о наследственных радикалах: каждое предмногообразие $\mathfrak{X}$ либо является идемпотентом, либо абсолютно свободно. Этот результат был получен независимо автором [4] и Л.М.Мартыновым. Взяв в качестве $\mathfrak{X}$, например, класс всех абелевых групп, получим известную теорему А.И.Мальцева о том, что для каждого порядкового γ существует RK-группа, у которой длина убывающего ряда коммутантов в точности равна γ.

Автор глубоко благодарен профессору Б.И.Плоткину, под руководством которого была написана эта заметка.

Литература

I. Плоткин Б.И. О полугруппе радикальных классов групп, Сиб.матем.ж., IO, № (I969), I09I-II08.

2. Плоткин Б.И. О функториалах, радикалах и корадикалах в группах, Матем.зап.Уральского ун-та, 7, № 3 (I970), I50-I82.

3. Wiegold J. Periodic series, Matem. časop., 18, Nr. 2 (1968), 81-82.

4. Вовси С. М. О бесконечных произведениях классов групп, Сиб. матем. ж. (в печати).

О ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ПАР

Л.Я.Гринглаз

1. В работе рассматриваются представления групп относительно векторных пространств над произвольным фиксированным полем. Пусть $\mathfrak{X}$ - некоторый класс таких пар. Определим следующие операторы, действующие на классах пар. $S: (G,\Gamma)\in S\mathfrak{X}$, если (G,Γ) есть подпара некоторой пары из $\mathfrak{X}$; $Q: (G,\Gamma)\in Q\mathfrak{X}$, если (G,Γ) есть эпиморфный образ некоторой пары из $\mathfrak{X}$; $C: (G,\Gamma)\in C\mathfrak{X}$, если (G,Γ) есть полное прямое произведение пар из $\mathfrak{X}$; при этом пара (G,Γ) называется полным прямым произведением пар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha), \alpha\in I$, если $G=\sum_{\alpha\in I} G_\alpha$ есть полная прямая сумма G_α, $\Gamma=\prod_{\alpha\in I}\Gamma_\alpha$ есть полное прямое произведение групп Γ_α и действие Γ в G определяется покомпонентно. $V: (G,\Gamma)\in V\mathfrak{X}$, если $(G,\Gamma/\mathfrak{z})\in\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{z}$ - ядро пары (G,Γ).

Класс пар $\mathfrak{X}$ называется многообразием пар, если он замкнут относительно этих операторов, т.е. если $\{S,Q,C,V\}\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$. Через $Var\,\mathfrak{X}$ обозначается многообразие пар, порожденное классом $\mathfrak{X}$. Непосредственно проверяется, что $Var\,\mathfrak{X}=VQSC\mathfrak{X}$ (см. [2]).

Пара (G,Γ) называется конечно порожденной, если существуют такие конечные множества $X\subset G$ и $Y\subset\Gamma$, что Γ порождается множеством Y, а G есть минимальное Γ-допустимое пространство, содержащее X. Пара (G,Γ) называется локально ограниченной, если для каждой конечно порожденной подпары (H,Σ) из (G,Γ) H имеет конечную размерность.

Многообразие пар называется локально ограниченным (локально стабильным), если каждая пара этого многообразия локально ограничена (локально стабильна). Многообразие групп называется локально конечным, если каждая группа из него локально конечна.

Задача данной работы охарактеризовать локально ограниченные многообразия пар. Основное утверждение сводит изучение локально ограниченных многообразий пар к рассмотрению локально стабильных многообразий пар и локально конечных многообразий групп.

Пусть $\mathfrak{X}$ - многообразие пар, а Θ - многообразие групп. Согласно Б.И.Плоткину класс пар $\mathfrak{X}\times\Theta$, определяется по правилу: $(G,\Gamma)\in\mathfrak{X}\times\Theta$, если $(G,\Theta^*(\Gamma))\in\mathfrak{X}$. ($\Theta^*(\Gamma)$ - вербальная подгруппа группы Γ по многообразию Θ). Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{X}\times\Theta$ есть многообразие пар.

<u>Основное утверждение</u>. Многообразие пар $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда локально ограничено, если оно принадлежит многообразию $\mathfrak{X}_0\times\Theta$, где $\mathfrak{X}_0$ - некоторое локально стабильное многообразие пар, а Θ - некоторое локально конечное многообразие групп.

Если $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_n$ - многообразия пар, то их произведение $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\cdot\mathfrak{X}_2\cdot\ldots\cdot\mathfrak{X}_n$ определяется так: $(G,\Gamma)\in\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\cdot\mathfrak{X}_2\cdot\ldots\cdot\mathfrak{X}_n$, если в G существует такой Γ-допустимый ряд

$$0=G_0\subset G_1\subset\ldots\subset G_{i-1}\subset G_i\subset\ldots G_n=G,$$

что для каждого i, $i = 1,2,\ldots,n$, $(G_i/G_{i-1},\Gamma)\in\mathfrak{X}_i$. Несложно увидеть, что $\mathfrak{X}$ также есть многообразие пар (см.[2]).

2. Л е м м а I. Если $\mathfrak{X}$ - локально ограниченное многообразие пар, то для всякой пары (G,Γ) из $\mathfrak{X}$ собственные значения всех элементов δ из Γ есть корни из единицы, удовлетворяющие некоторому (одному для всего многообразия) полиному.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (H_0,Δ_0) - свободная циклическая пара данного многообразия $\mathfrak{X}$; $\delta_0\in\Delta_0$, $a\in H_0$ - элементы, порождающие эту пару. Т.к. $\mathfrak{X}$ - локально ограниченное многообразие, то пространство H_0 конечномерно. Обозначим через $\varphi(x)$ минимальный полином для элемента δ_0 и возьмем произвольную конечно порожденную пару (H,Δ) из (G,Γ). Вследствие локальной ограниченности многообразия $\mathfrak{X}$ она конечномерна. Возьмем элемент

$\delta\in\Delta$ и обозначим через $f_\delta(x)$ минимальный полином для этого δ. Покажем, что $f_\delta(x)$ делит $\varphi(x)$. Для этого достаточно показать, что для всякого элемента $h\in H$ $h\circ\varphi(\delta)=0$.

Рассмотрим отображение: $a\to h, \delta_0\to\delta$. Так как (H_0,Δ_0) - свободная пара многообразия $\mathfrak{X}$, данное отображение можно продолжить до гомоморфизма $\mu:(H_0,\Delta_0)\to(H,\Delta)$. Пусть $\varphi(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i x^i$. Тогда $(a\circ\varphi(\delta_0))^\mu=(\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i a\cdot\delta_0^i)^\mu=$
$$=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i a^\mu\circ(\delta_0^i)^\mu=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i h\delta^i=h\circ\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\delta^i=h\circ\varphi(\delta)$$

Так как $a\circ\varphi(\delta_0)=0$, то и $h\circ\varphi(\delta)=0$. Таким образом, $f_\delta(x)$ делит $\varphi(x)$. Следовательно, для любого элемента δ произвольной действующей группы Γ его собственные значения есть корни полинома $\varphi(x)$. Это означает в частности, что если λ - собственное значение элемента δ, а n - степень полинома $\varphi(x)$, то $\lambda^m=1$ при $m\leq n$. Лемма доказана. Из неё следует, в частности такое

П р е д л о ж е н и е . Многообразие, порожденное одной конечномерной парой (G,Γ) тогда и только тогда локально ограничено, если группа Γ есть конечное расширение финитно стабильной.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть многообразие $\mathfrak{X}=\mathrm{Var}(G,\Gamma)$ локально ограничено. Возьмем Γ-композиционный ряд в G
$$0=G_0\subset G_1\subset\ldots\subset G_{i-1}\subset G_i\subset\cdots\subset G_n=G$$

Пара $(G_i/G_{i-1},\Gamma/\mathfrak{Z}_i)\in\mathfrak{X}$ (здесь $\mathfrak{Z}_i$ - ядро представления Γ относительно G_i/G_{i-1}). Тогда по лемме I собственные значения всех элементов из $\Gamma/\mathfrak{Z}_i$ есть корни из единицы, удовлетворяющие некоторому фиксированному полиному. По теореме Берксайда (см.[4]) неприводимая линейная группа, обладающая указанным свойством, конечна. Из конечности групп $\Gamma/\mathfrak{Z}_i$ следует конечность группы $\Gamma/\mathfrak{Z}=\Gamma/\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{Z}_i$, и группа $\mathfrak{Z}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{Z}_i$ действует тождественно в каждом факторе взятого Γ-композиционного ряда.

В обратную сторону можно показать несколько больше, чем сказано в условии предложения, а именно: если группа Γ

есть конечное расширение финитно стабильной, то (не обязательно конечномерная) пара (G, Γ) порождает ограниченное многообразие. Пусть группа Γ есть конечное расширение финитно стабильной. Это равносильно тому, что в G существует такой конечный ряд $0 = G_0 \subset G_1 \subset \dots G_{i-1} \subset G_i \subset \dots \subset G_n = G$, что для каждой пары $(G_i/G_{i-1}, \Gamma)$, $i = 1, 2, \dots, n$, группа Γ/Z_i конечна (Z_i - ядро этой пары). Возьмем $\prod_{i=1} \Gamma/Z_i$ - прямое произведение групп Γ/Z_i. Эта группа конечна, и поэтому (см. [3]) групповое многообразие Θ, ею порожденное, локально конечно. Локально конечному групповому многообразию Θ соответствует локально ограниченное многообразие $\omega\Theta$, определяемое по правилу: $(A, B) \in \omega\Theta$, если $B/C \in \Theta$, где C - ядро пары (A, B). Имеет место (см. [1]) следующее утверждение: если в области действия пары (A, B) имеется такой конечный B-допустимый ряд $\{A_i\}$, что для каждого i пара $(A_i/A_{i-1}, B)$ - локально ограничена, то и вся пара (A, B) локально ограничена. Из него следует, что произведение локально ограниченных многообразий пар также локально ограничено, в частности, многообразие $(\omega\Theta)^n$ локально ограничено. Для каждого i $(G_i/G_{i-1}, \Gamma) \in \omega\Theta$. Следовательно, по определению произведение многообразий пар (G, Γ) лежит в многообразии $(\omega\Theta)^n$, которое локально ограничено.

Л е м м а 2. Класс $\mathfrak{X}_0$ всех локально стабильных пар из произвольного локально ограниченного многообразия пар $\mathfrak{X}$ есть многообразие пар.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Замкнутость класса $\mathfrak{X}_0$ относительно операторов S, Q, V очевидна. Проверим замкнутость $\mathfrak{X}_0$ относительно оператора C. Пусть $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$, $\alpha \in I$, - множество локально стабильных пар из многообразия $\mathfrak{X}$ и пусть (G, Γ) есть полное прямое произведение пар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$. Надо показать, что пара (G, Γ) также локально стабильна. Возьмем конечно порожденные подгруппу Σ из Γ и подпару (H, Σ) из (G, Γ). Достаточно показать, что пара (H, Σ) стабильна. Рассмотрим гомоморфизм, проектирующий (G, Γ) на $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$. Он индуцирует гомоморфизм (H, Σ) в $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$. Пусть $(\hat{H}_\alpha, \Sigma_\alpha)$ - ядро этого гомоморфизма.

Напомним (см. [I]), что H_α есть ядро гомоморфизма H в G_α, Σ_α - ядро гомоморфизма Σ в Γ_α, что H_α инвариантно относительно Σ, Σ_α действует тождественно в H/H_α и образ пары (H,Σ) при этом гомоморфизме изоморфен паре $(H/H_\alpha, \Sigma/\Sigma_\alpha)$. Следовательно, пара $(H/H_\alpha, \Sigma/\Sigma_\alpha)$, а вместе с ней и пара $(H/H_\alpha, \Sigma)$ стабильны. Ясно, что $\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha = 0$. Кроме того, так как (H,Σ) есть конечно порожденная пара из локально ограниченного многообразия $\mathfrak{X}$, то векторное пространство H конечномерно. Значит, существует такое конечное подмножество I_0 из I, что $\bigcap_{\alpha\in I_0} H_\alpha = 0$. Отсюда следует требуемая стабильность пары (H,Σ). Действительно, для каждого α из I_0 пара $(H/H_\alpha, \Sigma)$ финитно стабильна, пусть длина стабильного ряда в H/H_α равна n_α. Обозначим через n максимум этих n_α. Тогда $[H,\Sigma,n]\subset H_\alpha$ для каждого $\alpha\in I_0$, и значит $[H,\Sigma,n]\subset \bigcap_{\alpha\in I_0} H_\alpha = 0$, то есть пара (H,Σ) даже финитно стабильна.

Л е м м а 3. Если $\mathfrak{X}$ - локально ограниченное многообразие пар, то групповое многообразие Θ, порожденное всеми конечными группами Γ, допускающими точное представление в классе $\mathfrak{X}$, локально конечно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Θ_0 множество групп с указанным в условии свойством. Тогда $\Theta = Var\,\Theta_0 = QSC\Theta_0$, где C - оператор взятия полного прямого произведения групп, S - оператор взятия подгрупп, Q - оператор взятия гомоморфных образов. Поскольку подгруппы и гомоморфные образы локально конечных групп снова локально конечны, для доказательства леммы достаточно проверить, что $C\Theta_0$ есть класс локально конечных групп.

Пусть Γ_α, $\alpha\in I$ - множество групп из Θ_0, (G_α,Γ_α) - соответствующие точные пары из $\mathfrak{X}$, $\Gamma = \prod_{\alpha\in I}\Gamma_\alpha$ - полное прямое произведение групп Γ_α, Σ - конечно порожденная подгруппа из Γ. Надо показать, что группа Σ конечна.

Рассмотрим для каждого $\alpha\in I$ пару $(A_\alpha,\Gamma_\alpha)=(G_\alpha^{\Gamma_\alpha}, \Gamma^\alpha)$, здесь A_α - прямая сумма n экземпляров пространства G_α, n - число элементов конечной группы Γ_α, элементы из Γ_α действуют в A_α компонентно. Возьмем в A_α элемент $a_\alpha = (g_1^{(\alpha)}, \ldots, g_n^{(\alpha)})$ такой, что $g_i^{(\alpha)} \gamma_i^{(\alpha)} \neq g_i^{(\alpha)}$, $\gamma_i^{(\alpha)}\in\Gamma_\alpha$, $i=1,2$ a, Тогда $a_\alpha \circ \gamma^{(\alpha)} \neq a_\alpha$ для каждого элемента $\gamma^{(\alpha)} \in \Gamma_\alpha$. Обозначим через (A,Γ) полное прямое произведение пар $(A_\alpha, \Gamma_\alpha)$, $(A,\Gamma) = (\sum_{\alpha\in I} A_\alpha, \prod_{\alpha\in I} \Gamma_\alpha)$, и пусть a - элемент из A, компонентами которого являются выделенные раннее элементы a_α. Для всех $\gamma \in \Gamma$, $a \circ \gamma \neq a$ $(\gamma \neq 1)$. Поэтому конечно порожденная подпара (H,Σ) из (A,Γ), у которой H есть минимальное Σ-допустимое подпространство из A, содержащее элемент a, - точная.

Как и в доказательстве леммы 2, рассмотрим гомоморфизм, проектирующий пару (A,Γ) на $(A_\alpha, \Gamma_\alpha)$. Он индуцирует гомоморфизм (H,Σ) в $(A_\alpha, \Gamma_\alpha)$; обозначим через $(H_\alpha, \Sigma_\alpha)$ ядро этого гомоморфизма. Образ пары (H,Σ) при этом гомоморфизме изоморфен паре $(H/H_\alpha, \Sigma/\Sigma_\alpha)$, значит группа Σ/Σ_α конечная. Ясно, что $\bigcap_{\alpha\in I} H_\alpha = 0$. Пространство H конечномерно, так как (H,Σ) есть конечно порожденная пара из локально ограниченного многообразия $\mathfrak{X}$. Поэтому существует такое конечное подмножество $I_0 \subset I$, что $\bigcap_{\alpha\in I_0} H_\alpha = 0$. Каждое Σ_α действует тождественно в H/H_α, поэтому группа $Z = \bigcap_{\alpha\in I_0} \Sigma_\alpha$ действует тождественно в каждом H/H_α, $\alpha \in I_0$, а значит и в $H = H/\bigcap_{\alpha\in I_0} H_\alpha$. В силу точности пары (H,Σ) это означает, что $\bigcap_{\alpha\in I_0} \Sigma_\alpha = 1$. Учитывая конечность каждой группы Σ/Σ_α и конечность множества I_0: получаем отсюда с помощью теоремы Ремака конечность самой группы Σ.

О с н о в н а я   т е о р е м а . Многообразие пар $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда локально ограничено, если оно принадлежит многообразию $\mathfrak{X}_0 \times \Theta$, где $\mathfrak{X}_0$ - локально стабильное многообразие пар, а Θ - локально конечное многообразие групп.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\mathfrak{X}$ - локально ограниченное многообразие пар, $\mathfrak{X}_0$ - класс всех локально стабильных пар из многообразия $\mathfrak{X}$, по лемме 2 являющийся многообразием, Θ - локально конечное многообразие групп, определенное в лемме 3. Покажем, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_0 \times \Theta$. Возьмем сначала конечно порожденную пару (G,Γ) из $\mathfrak{X}$. В силу локальной ограниченности многообразия $\mathfrak{X}$ эта пара конечномерна. Затем в G возьмем Γ - композиционный ряд

$0=G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{i-1} \subset G_i \subset \dots G_n = G$. Обозначим через $\mathfrak{Z}_i$ ядро пары $(G_i/G_{i-1}, \Gamma)$, $i=1,2,\dots n$. Тогда $(G_i/G_{i-1}, \Gamma/\mathfrak{Z}_i)$ есть точная неприводимая пара из $\mathfrak{X}$. По лемме I собственные значения всех элементов из $\Gamma/\mathfrak{Z}_i$ есть корни из единицы, удовлетворяющие фиксированному полиному $\varphi(x)$. По теореме Бернсайда (см. [4]) неприводимая конечномерная линейная группа, обладающая таким свойством, конечна. Из конечности групп $\Gamma/\mathfrak{Z}_i$ следует, что вербальная подгруппа $\theta^*(\Gamma)$ группы Γ по многообразию θ принадлежит группе $\mathfrak{Z}_i$, $i=1,2,\dots n$, а значит и группе $\mathfrak{Z}=\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{Z}_i$. $\mathfrak{Z}$ действует тождественно в каждом факторе взятого Γ-композиционного ряда, значит пара $(G, \theta^*(\Gamma))$ - финитно стабильна, то есть принадлежит $\mathfrak{X}_o$. По определению это означает, что $(G, \Gamma) \in \mathfrak{X}_o \times \theta$. Так как $\mathfrak{X}_o \times \theta$ есть многообразие и так как произвольная конечно порожденная пара из $\mathfrak{X}$ принадлежит $\mathfrak{X}_o \times \theta$, то и все многообразие $\mathfrak{X}$ принадлежит $\mathfrak{X}_o \times \theta$.

Обратно, если $\mathfrak{X}_o$ - локально стабильное многообразие пар, θ - локально конечное многообразие групп и (G, Γ) принадлежит $\mathfrak{X}_o \times \theta$, то в группе Γ существует такая подгруппа Σ, что пара (G, Σ) - локально стабильна, а группа Γ/Σ - локально конечна. Из результатов работы [1] следует, что тогда и пара (G, Γ) локально ограничена, значит многообразие $\mathfrak{X}_o \times \theta$ локально ограничено.

В случае поля простой характеристики из основной теоремы следует такое

П р е д л о ж е н и е . Многообразие $\mathfrak{X}$ линейных пар над полем характеристики p тогда и только тогда локально ограничено, если оно принадлежит многообразию $S \times \bar{\theta}$, где S - многообразие пар с тривиальным действием, а $\bar{\theta}$ - некоторое многообразие локально конечных групп.

Д о к а з а т е л ь с т в о . По основной теореме $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_o \times \theta$, где $\mathfrak{X}_o$ - многообразие всех локально стабильных пар из $\mathfrak{X}$. Пусть (A, B) такая свободная пара из $\mathfrak{X}_o$, что B имеет n образующих, а $A = \langle a \circ B \rangle$ порождается B-траекторией элемента a. Конечно порожденная пара

(A,B) принадлежит $\mathfrak{X}_0$ и потому финитно стабильна. Обозначим через ℓ_n длину B-стабильного ряда в A. Если теперь (H,Σ) - произвольная пара из $\mathfrak{X}_0$, действующая группа Σ которой имеет n образующих, то все её подпары вида $(<h\circ\Sigma>, \Sigma)$ ℓ_n-стабильны как гомоморфные образы свободной пары (A,B). Следовательно, пара (H,Σ) ℓ_n-стабильна, а многообразие $\mathfrak{X}_0$ на самом деле является многообразием локально финитно стабильных пар. Поэтому, если (G,Γ) - точная пара из $\mathfrak{X}_0$, то группа Γ является локально нильпотентной (а значит и локально конечной) p-группой. Это означает, что многообразие пар $\mathfrak{X}_0$ принадлежит многообразию $S\times\Theta_1$, где S есть многообразие пар с тривиальным действием, а Θ_1 есть некоторое локально конечное многообразие p-групп. Тогда $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{X}_0\times\Theta\subset(S\times\Theta_1)\times\Theta=S\times\Theta_1\Theta=S\times\bar{\Theta}$, где $\bar{\Theta}$ - локально конечное многообразие групп, равное $\Theta_1\Theta$.

В обратную сторону предложение очевидно.

Таким образом, локально ограниченные многообразия линейных пар над полем простой характеристики полностью сводятся к локально конечным групповым многообразиям. Вопрос, не сводятся ли к групповым многообразиям локально ограниченные многообразия линейных пар над полем характеристики 0, требует дополнительных рассмотрений.

В заключение автор выражает благодарность проф. Б.И. Плоткину за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

I. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем, Изд-во "Наука", 1966.

2. Плоткин Б.И. Треугольные произведения пар (в данном сборнике).

3. Нейман Х. Многообразия групп, Изд-во "Мир", 1960.

4. Бернсайд В. On criteria for the finiteness of the order of a group of linear substitutions, Proc. London Math. Soc. (2) 3 (1905), 435-440.

О НЕРАЗЛОЖИМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ПАР

А.С.Гринберг

В [I] доказано, что полугруппа многообразий линейных (над полем произвольной характеристики) пар свободно порождается неразложимыми многообразиями. Там же даны некоторые примеры неразложимых многообразий. Возникает задача более полного описания таких многообразий. Здесь мы дадим один признак неразложимости и с его помощью докажем, что многообразия пар, задаваемые тождествами от одной переменной, неразложимы.

Обозначения и замечания. Мы повторим несколько определений из [3]. K - поле, F - свободная группа счетного ранга с множеством свободных образующих $Y=\{y_1,y_2,\dots\}$. KF - ее групповая алгебра над полем K. Δ - фундаментальный идеал в KF, который можно рассматривать (см., например, [2]) как идеал, порожденный всеми элементами вида $y_i^{\pm 1}-1$, $i=1,2,\dots$, 1 - единица группы F.

Каждому многообразию пар соответствует специальный (т.е. выдерживающий эндоморфизмы группы F (идеал в алгебре в KF, всегда лежащий в идеале Δ. Полугруппа многообразий пар и полугруппа таких идеалов изоморфны. Пусть $V\subset\Delta^{\alpha}\setminus\Delta^{\alpha+1}$. Тогда α назовем весом специального идеала V. Это определение корректно, т.к. $\bigcap_{\alpha}\Delta^{\alpha}=0$ (см. [2]). Говорят, что специальный идеал V порождается (как специальный) набором элементов v_α, если V порождается как обычный идеал множеством M. Здесь M - множество всех элементов v_α^{φ}, являющихся образами элементов v_α относительно всевозможных эндоморфизмов φ алгебры KF, индуцированных эндоморфизмами группы F.

Если $V=U\cdot W$, $U W$ - специальны, то назовем V разложимым. Напомним несколько фактов, связанных с дифференцированиями в алгебре KF (см. [3]).

Дифференцированием в KF называется любое отображение $\mathcal{D}: KF \longrightarrow KF$, обладающее свойством

$$\mathcal{D}(f\cdot g)=\mathcal{D}f\cdot g(1)+f\cdot \mathcal{D}g\ ,\quad f,g\in KF \tag{I}$$

Здесь $g(1)=g^{\mu}$, где μ - эндоморфизм алгебры KF, индуцированный групповым эндоморфизмом вида $\mu: F\to 1$, т.е. $g(1)\in K$. Ясно, что, если $g\in\Delta$, то $g(1)=0$, и в этом случае равенство (I) выглядит так:

$$\mathcal{D}(f\cdot g)=f\cdot\mathcal{D}g \tag{2}$$

Нам понадобятся лишь дифференцирования $\mathcal{D}_i$ и их производные $\mathcal{D}_{i_1,\dots,i_n}$. Они определяются так:

$$\mathcal{D}_i y_k=\begin{cases}1 \text{ при } & i=k\\ 0 \text{ при } & i\neq k\end{cases},\quad y_k\in Y\quad i,k=1,2\dots \tag{3}$$

На всю алгебру отображение $\mathcal{D}_i$ корректно продолжается по линейности и с помощью (I). Теперь индуктивно

$$\mathcal{D}_{i_1 i_2\dots i_n}f=\mathcal{D}_{i_n}(\mathcal{D}_{i_1\dots i_{n-1}}f) \tag{4}$$

Легко проверяются равенства

$$\mathcal{D}(1)=0,\quad \mathcal{D}(y-1)=\mathcal{D}y,\quad \mathcal{D}(y^{-1})=-y^{-1}\mathcal{D}y,\quad y\in Y \tag{5}$$

В частности, $\mathcal{D}_i(y_i-1)=1$, $\mathcal{D}_i(y_i^{-1}-1)=-y_i^{-1}$. В алгебре KF для произвольного элемента $f=f(y)$ и для каждого n имеет место следующее разложение

$$f(y)=f(1)+\sum_{j_1}(\mathcal{D}_{j_1}f(1))(y_{j_1}-1)+\sum_{j_1 j_2}(\mathcal{D}_{j_2 j_1}f(1))(y_{j_2}-1)(y_{j_1}-1)+\dots$$

$$\dots+\sum_{j_1\dots j_{n-1}}(\mathcal{D}_{j_{n-1}\dots j_1}f(1))(y_{j_{n-1}}-1)+\sum_{j_1\dots j_n}(\mathcal{D}_{j_n\dots j_1}f(y))(y_{j_n}-1)\dots$$

$$\dots(y_{j_1}-1)=f_0+f_1+\dots+f_{n-1}+f_n. \tag{6$_n$}$$

Элементы вида, такого же, как $f_i, i=1,2,\dots,n-1$, будем далее называть однородными веса i. Ясно, что $f_i \in \Delta^i \setminus \Delta^{i+1}$, $i=0,1,2,\dots$. Отметим, что $f \in \Delta^K \setminus \Delta^{K+1}$ тогда и только тогда, когда $f_0=f_1=\dots=f_{K-1}=0, f_K \neq 0$. Для такого элемента f будем называть K весом элемента f. При этом в равенстве $(6n)$ можно так выбрать n, что если $f=f_K+f_{K+1}+\dots$, то $f_K=\sum\limits_{j_K\dots j_1} \alpha_j (y_{j_K}-1)\dots(y_{j_1}-1)$

не содержит y^{-1} ни для какого $y \in Y$. Тогда

$$\mathcal{D}_{j_e \dots j_1} f_K \in \Delta^{K-e} \subset \Delta, \quad 1 \le e \le K-1, \quad (7)$$

Под кортежем будем понимать упрядоченный набор натуральных чисел. Кортеж $(i_1,\dots,i_\alpha)$ назовем неразделимым, если для любого $z<\alpha$ множества $M'_z=(i_1,\dots,i_z)$ и $M''_z=(i_{z+1},\dots,i_\alpha)$ имеют общие элементы. Например, кортеж (I,2,I,4) разделим, а кортеж (I,2,I,2) неразделим.

III. Теорема. Пусть V - специальный идеал в KF, порождаемый (как специальный) элементом v. $v=v_\alpha+v_{\alpha+1}+\dots$, v_i - однородные элементы веса i, $v_\alpha=\alpha(y_{j_1}-1)\dots(y_{j_\alpha}-1), \alpha \in K$. Если кортеж $(j_1,\dots j_\alpha)$ неразделим, то идеал V неразложим.

Доказательство. Пусть $V=UW$, где U, W - специальные идеалы. Из условия видно, что α - вес идеала V. Если α_1, α_2 - веса идеалов U, W, соответственно, то $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$. Рассмотрим $V'=V+\Delta^{\alpha+1}=U\cdot W+\Delta^{\alpha+1}$. Ясно, что V' порождается (как специальный) элементами v_α и $(y_1-1)(y_2-1)\dots(y_{\alpha+1}-1)$.

Получим теперь противоречие.

Пусть U_λ, W_β - наборы элементов из KF, порождающих (как специальные) идеалы U, W, соответственно.

Элементарные рассуждения показывают, что идеал $U \cdot W$ порождается (как специальный) произведениями

$$U_\alpha \cdot W_\beta = U_\alpha(y_1, y_3, \dots y_{2k+1}, \dots) \cdot W_\beta(y_2, \dots y_{2k} \dots)$$

Среди них найдется элемент $U_\alpha \cdot W_\beta$ веса равно d. При этом

$$U = U_\alpha(y_1, \dots, y_{2k+1}, \dots) = U_{d_1} + U_{d_1+1} + \dots, \quad W = W_\beta(y_2, \dots y_{2k}, \dots) = W_{d_2} + W_{d_2+1} + \dots$$

где $U_i\, W_i$ - однородные элементы веса i, $U \cdot W = U_{d_1} W_{d_2} + \dots$ Здесь сумма, стоящая на месте многоточия, лежит в Δ^{d+1}, поэтому $U \cdot W \equiv U_{d_1} \cdot W_{d_2} \pmod{\Delta^{d+1}}$,

т. е. и $U_{d_1} \cdot W_{d_2} \in V' = V + \Delta^{d+1} = UW + \Delta^{d+1}$. В силу сделанного выше замечания можно считать, что в записи элементов V_d, U_{d_1}, W_{d_2} отсутствуют y^{-1}, $y \in Y$. Опишем теперь свойство однородных элементов веса d, которые можно получить из V_α при замыкании до специального идеала. Так как кортеж $(j_1, \dots j_d)$ неразделим, то найдутся индексы и g, t $g \le d_1 < t$, такие, что $j_g = j_t$. Фиксируем их до конца доказательства.

Пусть φ - произвольный эндоморфизм группы F.

$$y_{j_t}^{\varphi} = y_{j_g}^{\varphi} = \prod_k y_k^{\alpha_k} \pmod{F'}, \quad \alpha_k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где F' - коммутант группы F. Тогда

$$V_d^{\varphi} \equiv f_1 \cdot [\Sigma_{\alpha_k}(y_k - 1)] \cdot f_2 [\Sigma_{\alpha_k}(y_k - 1)] \cdot f_3 \pmod{\Delta^{d+1}} \tag{8}$$

где f_1, f_2, f_3 - однородные элементы веса $g-1$, $t-1-g$, $d-t$, соответственно. Здесь мы воспользовались тем, что абелева группа F/F' изоморфно вкладывается в Δ/Δ^2. Так как V содержит Δ^{d+1} и V специален, то

$$Z_\varphi = f_1 \cdot [\Sigma \alpha_k (y_k - 1)] \cdot f_2 [\Sigma_{\alpha_k}(y_k - 1)] \cdot f_3 \in V \tag{9}$$

z_ψ - однородный элемент веса d , и все однородные элементы веса d из идеала V лежат в линейном пространстве $\mathfrak{M}$, натянутом на всевозможные элементы вида z_ψ . Сформулируем теперь искомое свойство.

Л е м м а . Пусть $\varphi \in \mathfrak{M}, (i_1, \ldots, i_q, \ldots i_{d}, \ldots, i_t, \ldots i_d)$ - произвольный кортеж длины d . Тогда

$$\mathcal{D}_{i_d} \ldots i_t \ldots i_q \ldots i_1 \; \varphi = \mathcal{D}_{i_d} \ldots i_q \ldots i_t \ldots i_1 \varphi \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Свойство (10) сохраняется при линейных операциях. Поэтому достаточно доказать его для произвольных z_ψ. Из (2) и (5) следует, что, если $g = \sum \beta_s (y_s - 1)$, то

$$\mathcal{D}_i (f \cdot g) = \begin{cases} \beta_i f, & \text{если найдется } s = i \\ 0, & \text{если такого } s \text{ нет.} \end{cases} \tag{11}$$

Пусть a_r - произведение r элементов вида $\sum \beta_s (y_s - 1)$. Тогда согласно (11) на каждом шаге дифференцирования $\mathcal{D}_{j_1 \ldots j_r} a_r$ мы либо будем получать 0 , либо вычеркивать правый линейный сомножитель (быть может, оставляя константу $\beta_k \neq 0$, $\beta_k \in K$). Поэтому элемент $\mathcal{D}_{j_1 \ldots j_r} a_r$ лежит в поле K .

Но любой однородный элемент представим (по определению) как линейная комбинация элементов вида a_r . Поэтому

$$\begin{gathered} \sigma_1 = \mathcal{D}_{i_{q-1}, \ldots, i} f_1 \in K, \; \sigma_2 = \mathcal{D}_{i_{t-1}, \ldots, i_{q+1}} f_2 \in K, \\ \sigma_3 = \mathcal{D}_{i_{t+1}, \ldots, i_d} f_3 \in K, \\ \mathcal{D}_{i_t} [\textstyle\sum d_k (y_k - 1)] \in K, \; \mathcal{D}_{i_g} [\sum_k d_k (y_k - 1)] \in K \end{gathered} \tag{12}$$

Используя (2), (11), легко теперь получить

$$\mathcal{D}_{i_d} \ldots i_t \ldots i_g \ldots i_1 \; z_\psi = \sigma_1 \cdot \mathcal{D}_{i_g} [\textstyle\sum d_k (y_k - 1)] \cdot \sigma_2 \mathcal{D}_{i_t} [\sum d_k (y_k - 1)] \sigma_3 \tag{13}$$

$$\mathcal{D}_{i_d} \ldots i_g \ldots i_t \ldots i_1 \, z_\psi = \sigma_1 \cdot \mathcal{D}_{i_t} [\textstyle\sum_k d_k (y_k - 1)] \cdot \sigma_2 \mathcal{D}_{i_g} [\sum d_k (y_k - 1)] \sigma_3 \tag{14}$$

Но все сомножители в равенствах (I3), (I4) согласно (I2) лежат в K. Следовательно, они перестановочны. Отсюда правые части в (I3) и (I4) совпадают.

Равенство (IO) доказано.

Для доказательства теоремы остается заметить, что элемент $\varphi = U_{d_1}(y_1, \dots, y_{2k+1}, \dots) \cdot W_{d_2}(y_2, \dots, y_{2k}, \dots)$

свойством (IO) не обладает. Действительно, пусть R и L – множества индексов переменных y, встречающихся в записи элементов U_{d_1}, W_{d_2}, соответственно. В U_{d_1} эти индексы нечетны, в W_{d_2} – четны. Поэтому $L \cap R = \varnothing$. Теперь, т.к. $U_{d_1} \neq 0$, $W_{d_2} \neq 0$, то найдется кортеж такой, что

$$D_{i_d \dots i_t \dots i_{d_1} \dots i_q \dots i_1} \varphi \neq 0, \quad i_1 \dots i_{d_1} \in L, \; i_{d_1+1} \dots i_d \in R$$

Но из-за (2), (3) $D_{i_d \dots i_q \dots i_{d_1+1}} W_{d_2} = 0$, т.к. в записи элемента W_{d_2} переменная y_{i_q} отсутствует. Тогда тем более $D_{i_d \dots i_q \dots i_t \dots i_1}(W_{d_1} W_{d_2}) = 0$. Согласно лемме однородный элемент веса $\varphi = W_{d_1} W_{d_2}$ не лежит в пространстве $\mathfrak{M}$. Противоречие.

Следствие. Пусть идеал V порождается (как специальный) элементами вида $v = v(y_1) = \sum \alpha_k y_1^k$. Тогда идеал V неразложим.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что в записи $\sum d_k y_1^k$ все показатели k положительны. Но тогда уже в кольце полиномов $K[y_1]$ элементы v порождают главный идеал. Значит и идеал в алгебре KF будет порождаться (как специальный) одним элементом

$$v = v(y_1) = \sum d_k y_1^k = \sum \beta_s (y_1 - 1)^s = \sum v_s$$

Условия леммы для элемента v выполнены, т.к. для любого s кортеж (I,I,...,I) длины s неразделим. Теперь доказываемое следствие вытекает из леммы очевидным образом.

Хочу выразить благодарность Б.И.Плоткину за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

I. Плоткин Б.И., Гринберг А.С. О полугруппах многообразий, связанных с представлениями групп (в печати).

2. Плоткин Б.И. О треугольных произведениях пар (см. настоящий сборник).

3. Fox R. Free differential calculus. Ann. Math. v.57 (1953), Nr. 3.

ВЕРБАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ СВОБОДНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП НАД ПОЛЕМ K ХАРАКТЕРИСТИКИ 0

Л.Е.Кроп

Введение

В работах [1,2] были введены понятия многообразия пар и строгого многообразия представлений фиксированной группы. Приведем основные определения из этих работ, используемые дальше.

Пусть Γ - некоторая группа, K - поле, $K\Gamma$ - их групповая алгебра. Условимся под эндоморфизмом алгебры $K\Gamma$ понимать эндоморфизм, индуцируемый эндоморфизмом группы Γ, если не оговорно противное. Обозначим свободную группу ранга μ через F_μ. Идеал $V \subset KF_\mu$ называется вербальным, если он выдерживает все эндоморфизмы алгебры KF_μ. Про идеал $V \subset K\Gamma$ будем говорить, что он вербальный, если является образом некоторого вербального идеала из KF_μ при эпиморфизме F_μ на Γ. Если же идеал $\mathcal{U} \subset K\Gamma$ выдерживает все эндоморфизмы $K\Gamma$, то такой идеал назовем специальным. Оба, определенных выше, множества идеалов образуют полугруппы $S(\Gamma)$ и $G(\Gamma)$ соответственно, которые совпадают в случае Γ - свободная группа (см. также ниже А.4). Пусть $\mathfrak{X}$ - многообразие всех абелевых групп, K - поле, хар.$K = 0$, $F_{\mathfrak{X}}$ - свободная абелева группа счетного ранга. Изучение вербальных идеалов в $KF_{\mathfrak{X}}$ удается свести к изучению вербальных идеалов в KF_α, где F_α - свободная абелева группа ранга α. Групповая алгебра такой группы будет нетеровой областью целостности используя примарные разложения, в работе найдено описание вербальных идеалов в KF_α. С помощью этого описания получен основной результат:каждый вербальный идеал в $KF_{\mathfrak{X}}$ порождается (как вербальный) элементами, зависящими от одной групповой переменной.

В последнем пункте постоящей работы описываются вербальные идеалы полных абелевых групп. Вместе с одной теоремой из [3] наше описание можно резюмировать в

Т е о р е м е. Пусть A - вербально простая абелева группа. Тогда полугруппа её вербальных идеалов состоит из степеней фундаментального идеала.

II. Обозначения и замечания.

Γ - символ группы;
K - алгебраически замкнутое поле;
хар. K - характеристика поля K;
$\mathbb{Z}(x)$ - свободная циклическая группа с образующей x;
$\mathbb{Z}_n(x)$ - циклическая группа порядка n с образующей x;
$\mathbb{Z}$ - кольцо целых чисел;
$\mathbb{Z}_n$ - кольцо классов вычетов по модулю n;
$a|b\ (a\nmid b)$: a делит b (a не делит b), где a, b - элементы коммутативного кольца;
Н.О.Д. - наибольший общий делитель;
Н.О.К. - наименьшее общее кратное;
$R=K\Gamma$ - групповая алгебра группы Γ над полем K;
$G_1\times G_2$ - прямое произведение групп G_1 и G_2;
$\mathfrak{S}(\Gamma)$ - полугруппа специальных идеалов в $K\Gamma$;
$S(\Gamma)$ - полугруппа вербальных идеалов в $K\Gamma$.

Вспомогательные утверждения начнем со следующего, часто используемого предложения.

А.I. С каждой подгруппой H группы Γ ассоциируем правый идеал ωH алгебры $K\Gamma$, порожденный всеми $h-1$, $h\in H$. Отображение ω структуры подгрупп группы Γ в структуру правых идеалов кольца $K\Gamma$ является взаимно-однозначным и сохраняет включения. Более того, если H - нормальный делитель в Γ, то ωH - идеал, в действительности, ядро канонического эпиморфизма $K\Gamma\to K(\Gamma/H)$, т.е. эпиморфизма, индуцированного отображением $\Gamma\to\Gamma/H$. Если множество $\{g_i\}$ порождает подгруппу H, то правый идеал, порожденный всеми $\{g_i-1\}$, есть ωH.

Доказательство см. в [4].

А.2. Пусть H - эпиморфный образ группы Γ, такой, что каждому эндоморфизму $\hat{\eta} : \Gamma \to \Gamma$ сопоставим эндоморфизм $\eta : H \to H$ и обратно, причем справедлива коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\varepsilon} & H \\ \hat{\eta}\downarrow & & \downarrow\eta \\ \Gamma & \xrightarrow{\varepsilon} & H \end{array}$$

Тогда образом и прообразом специального идеала служит специальный идеал.

Доказательство очевидно.

А.3. Пусть $H \subset \Gamma$ и допустим, что каждый эндоморфизм $H \xrightarrow{\eta} H$ "поднимается" до эндоморфизма $\hat{\eta} : \Gamma \to \Gamma$, т.е. $\eta = \hat{\eta}|_H$.

Тогда $\mathcal{U} \cap KH \in \mathfrak{S}(H)$ всегда, когда $\mathcal{U} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть $\eta : H \to H$ и $\mathcal{U} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. По предположению найдется $\hat{\eta} \in End(\Gamma)$ такой, что $\eta = \hat{\eta}|_H$. Получаем $(\mathcal{U} \cap KH)^{\eta} =$

$$= (\mathcal{U} \cap KH)^{\hat{\eta}} \subset \mathcal{U}^{\hat{\eta}} \cap KH^{\hat{\eta}} \subset \mathcal{U} \cap KH,$$

что и требовалось.

Из предложения А.2 вытекает часто полезное свойство, которое сформулируем в виде

А.4. Пусть Θ - некоторое групповое многообразие и Γ_μ - свободная группа этого многообразия ранга μ.

Тогда $S(\Gamma_\mu) = \mathfrak{S}(\Gamma_\mu)$

Доказательство. Пусть в качестве $\varepsilon : F_\mu \to \Gamma_\mu$ выбран эпиморфизм, переводящий свободные образующие x_i, $i \in \mathcal{J}$ группы F_μ в Θ - свободные образующие $\bar{x}_i$, $i \in \mathcal{J}$ группы Γ_μ. Предположим, что $\hat{\eta} : F_\mu \to F_\mu$ - эндоморфизм F_μ и $v_i(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) = \hat{\eta}(x_i)$ - значения $\hat{\eta}$ на образующих. Ввиду свободы Γ_μ существует эндоморфизм η : $\Gamma_\mu \to \Gamma_\mu$ отображающий $\bar{x}_i$ в $v_i(\bar{x}_{i_1}, \dots \bar{x}_{i_n})$. Аналогично устанавливаем обратную часть условий А.2. В силу предложения А.2 заключаем, что всякий элемент из $\mathfrak{S}(\Gamma_\mu)$ есть образ элемента $\mathfrak{S}(\Gamma_\mu)$. Однако, по определению, $\mathfrak{S}(F_\mu) = S(F_\mu)$, что вместе с определением вербального идеала в $K\Gamma_\mu$ дает включение $\mathfrak{S}(\Gamma_\mu) \subset S(\Gamma_\mu)$. Обратное включение очевидно. Таким образом, А.4 доказано.

Работая с групповыми алгебрами, удобно иметь достаточно большое основное поле. Поведение вербальных идеалов при расширении поля скаляров легко проследить. В самом деле, вложение полей $K \subset P$ индуцирует вложение групповых алгебр $K\Gamma \subset P\Gamma$. При этом, вследствие линейной свободы Γ в $P\Gamma$, каждый идеал $J \subset K\Gamma$ является сокращенным, т.е. $PJ \cap K\Gamma = J$. Нетрудно проверить, что расширение PV вербального идеала $V \subset K\Gamma$ будет вербальным идеалом в $P\Gamma$. Основываясь на этом замечании, для изучения полугруппы $S_K(\Gamma)$ можно произвольно расширить основное поле K, например, считать его алгебраически замкнутым, что и будет предположено всюду дальше.

III. Вербальные идеалы свободной циклической группы

Пусть $T = K[x']$ - алгебра полиномов от некоторого трансцендентного над K элемента x'. Алгебра $R = K\mathbb{Z}(x)$ тесно связана с алгеброй T. Именно, если образовать мультипликативно замкнутую систему S, порожденную x': $S = \{1, x', \ldots x'^n\}$ и перейти к кольцу частных T_S, то отображение $\varepsilon : R \to T_S$, при котором $x \xrightarrow{\varepsilon} x'/1$ будет продолжимо до изоморфизма алгебр R и T_S. Отсюда непосредственно следует, что каждый элемент $z \in R$ может быть записан в виде $f(x)/x^k$, где $f(x) \in K[x]$. Из отмеченного изоморфизма также вытекает, что R - область главных идеалов. Главный идеал (z), $z \in R$, $z = \frac{f(x)}{x^k}$ равен $(f(x))$. Это замечание позволяет считать образующие идеалов из R элементами из $K[x]$.

Опред.I. Многочлен $f(x) \in K[x]$ назовем специальным, если выполняется условие:

$$\forall_{k \geq 0} \left[f(x) = f(x) \cdot \chi_k(x) \right] \qquad (*)$$

Легко проверяется, что специальные многочлены порождают специальные идеалы и, обратно, у всякого специального идеала имеется специальная образующая.

Обозначим через X_f множество корней многочлена $f(x)$. Символом $\ell(x)$ $(\alpha \in X_f)$ будем обозначать кратность корня α многочлена $f(x)$.

Опред.2. Множество элементов, лежащих в группе Γ, назовем вполне характеристическим, если оно выдерживает все эндоморфизмы группы Γ.

Опред.3. Конечное множество X ненулевых элементов поля K назовем специальным, если выполняется условие:

$$\forall \alpha \in X \quad \forall k \geq 0 \quad (\alpha^k \in X)$$

П р е д л о ж е н и е I.

I) Соответствие $f(x) \longleftrightarrow X_f$ является взаимно-однозначным соответствием между специальными многочленами без кратных корней и специальными множествами;

2) Каждое специальное множество является объединением циклических групп;

3) Существует натуральное n, не кратное характеристике поля K, и изоморфизм X_f с некоторым вполне характеристическим подмножеством в $\mathbb{Z}_n$, задаваемый логарифмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $k > 0$. Из условия (✱) следует, что $f(x^k) = f(x) \cdot \chi_k(x)$ Подставляя $x = \alpha$, получаем $f(\alpha^k) = f(\alpha) \cdot \chi_k(\alpha) = 0$ откуда следует, что $\alpha^k \in X_f$. При $x = 0$ можно рассуждать двумя способами. Из условия (✱) вытекает, что $f(x) \mid f(1)$, что возможно лишь при $f(1) = 0$ и поэтому $1 = \alpha^0 \in X_f$. С другой стороны из конечности X_f следует, что для всякого $\alpha \in X_f$ полугруппа степеней α конечна, а значит найдется $n(\alpha)$ такое, что $\alpha^{n(\alpha)} = 1$. Опять получаем $1 \in X_f$. Обратно, пусть выбрано специальное множество X в K. Образуем многочлен $f_X(x) = \prod\limits_{\alpha \in X} (x - \alpha)$

При эндоморфизме $x \to x^k f_X(x)$ перейдет в многочлен $\varphi(x) = f_X(x^k)$. Предположим, что $\alpha \in X$. В силу специальности X $\varphi(\alpha) = f_X(\alpha^k) = 0$. Поэтому $\varphi(x)$ делится на $f(x)$, что и требовалось.

2) Пусть X - специальное множество в G. Выберем в X минимальное подмножество элементов G таких, степени которых заполняют все X. Тогда $X = \bigcup\limits_{\alpha \in G} \{\alpha\}$,

где символ $\{\alpha\}$ обозначает циклическую группу, порождаемую элементом α.

3) Пусть X является специальным множеством. Тогда для всякого $\alpha \in X$ имеется наименьшее натуральное $n(\alpha)$ такое, что $\alpha^{n(\alpha)} = 1$. Заметим, что так выбранное $n(\alpha)$ не делится на характеристику поля. Поэтому $n = \text{Н.О.К.}(n(\alpha) | \alpha \in K)$ также не делится на характеристику поля K. Пусть ξ - элемент в K, являющийся первообразным корнем степени n. Каждое α будет ξ^j, для подходящего $j \in \mathbb{Z}_n$. Отображение $\xi^j \to j$ будет, очевидно, отображать X на вполне характеристическое подмножество в $\mathbb{Z}_n$.

Следствие. Если $A = (f(x))$ - специальный идеал в $K\mathbb{Z}(x)$, то найдется такие натуральные t, $n (p \nmid n)$, что $((x^n-1)^t) \subset A$.

Действительно, положим $n = \text{Н.О.К.}(n(\alpha) | \alpha \in X_f)$, $t - \max\ (b(\alpha) | \alpha \in X_f)$

Каждый корень α многочлена $f(x)$ является корнем $(x^n-1)^t$ и притом кратности не меньшей $b(\alpha)$. Значит $f(x) | (x^n-1)^t$ и, следовательно, $A \supset ((x^n-1)^t)$, что и требовалось.

IУ. Радикальные вербальные идеалы

Напомним, что ниль-радикалом идеала J коммутативного кольца A называется идеал, обозначаемый $\sqrt{J}$, и состоящий из всех элементов $f \in A$, некоторые степени которых содержатся в A. Идеал J назовем радикальным, если $\sqrt{J} = J$.

Предложение 2. Если $\mathcal{U} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$, где Γ - коммутативная группа, то и $\sqrt{\mathcal{U}} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть $f \in \sqrt{\mathcal{U}}$ и $\eta : \Gamma \to \Gamma$ - эндоморфизм группы Γ. Тогда $\exists_{n>0}(f^n \in \mathcal{U})$ и поэтому $(f^n)^\eta = (f^\eta)^n \in \mathcal{U}$

Из определения $\sqrt{\mathcal{U}}$, $f^\eta \in \sqrt{\mathcal{U}}$ и следовательно $\sqrt{\mathcal{U}}$ - специальный идеал.

Обозначим через $\mathbb{Z}(x_1, \ldots, x_d) = \mathbb{Z}(x_1) x \ldots x\, \mathbb{Z}(x_d)$ свободную абелеву группу с d образующими и возьмем $\Gamma = \mathbb{Z}(x_1, \ldots x_d)$.

Лемма I. Если $0 \neq \mathcal{U} \in S(\Gamma)$ то $\mathcal{U} \cap K\mathbb{Z}(x_1) \neq (0)$.

Доказательство. Выберем некоторый ненулевой элемент $f(x_1 \cdots x_d) \in \mathcal{U}$, который можно считать целой функцией от $x_1, \ldots, x_d$. Пусть

$$f(x_1 \ldots, x_d) = \sum_{\alpha_{(i)} \neq 0} \alpha_{(i)} \; x_1^{i_1} \ldots x_d^{i_d} ,$$

где $(i) = (i_1, \ldots i_d)$, $i_j \geq 0$. Выберем число t большим всех i_j и построим эндоморфизм, который отображает x_k в $x_1^{t^{k-1}}$. Легко проверить, что при выбранном t различные мономы $x_1^{i_1} \ldots x_d^{i_d}$, входящие в запись $f(x_1, \ldots x_d)$, дадут различные степени x_1 в f^η. Поэтому

$$(f(x_1, \ldots x_d))^\eta = \sum_{\alpha_{(i)} \neq 0} \alpha_{(i)} x_1^{i_1 + i_2 t + \cdots + i_d t^{d-1}} \neq 0$$

и $f^\eta \in \mathcal{U} \cap K\mathbb{Z}(x_1)$, что и требовалось.

Следствие I. Если $\mathcal{U} \subset S(\Gamma)$, то найдутся такие натуральные t, $n\,(p \nmid n)$., что $(x_k^n - 1)^t \in \mathcal{U}$, $k = 1, 2, \ldots, d$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\mathcal{U} \cap K\,\mathbb{Z}(x_1) \in S(\mathbb{Z}(x_1))$. Поэтому применяя лемму I и следствие из пред. I, получаем $(x_1^n - 1)^t \in \mathcal{U}$, где t, n - натуральные числа и $p \nmid n$. Используя эндоморфизмы

$$\eta_k : x_1 \to x_k, \; x_i \to x_i, \; i \neq 1, \; k = 1, 2, \ldots, d,$$

получаем утверждение следствия I.

Следствие 2. Идеал $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$ радикален т. и т.т., когда t можно выбрать равным I.

Доказательство. Необходимость очевидна. Обратно, пусть $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$ и $(x_k^n - 1) \in \mathcal{U}$, $k = 1, 2, \dots, d$. Обозначая полгруппу $\{x_1^n\} \times \dots \times \{x_d^n\}$ через H, из условия Следствия следует: $\mathcal{U} \supset \omega H$. Поэтому о радикальности идеала $\mathcal{U}$ можно заключить по его образу при эпиморфизме $K\Gamma \to K\Gamma/\omega H \cong K(\Gamma/H)$, причем сквозное отображение индуцировано групповым эпиморфизмом $\Gamma \to \Gamma/H$.

Группа Γ/H — свободная абелева группа в многообразии абелевых групп экспоненты n (т.е. $x^n = 1$) с d образующими. Так как n не кратно p ($хар. K = p$), то приходим к так называемому немодулярному случаю: K -поле, характеристика $K = p$, Γ/H - конечная группа, порядок которой не кратен p. Алгебра $K(\Gamma/H)$ - вполне приводима, и каждый идеал порождается идемпотентом. Следовательно, каждый идеал в $K(\Gamma/H)$ - радикальный, что завершает доказательство. Свойство радикальных вербальных идеалов содержать идеалы вида ωH, где H - вербальная подгруппа в $\Gamma (= \mathbb{Z}(x_1, \dots, x_d))$ наводит на мысль об изучении вербальных идеалов свободной абелевой группы экспоненты n над полем K, $хар. K = p$, $p \nmid n$.

У. Полугруппа вербальных идеалов свободной абелевой группы экспоненты n в немодулярном случае

Обозначим через $\mathbb{Z}_n(x_1, \dots x_d)$ - свободную абелеву группу экспоненты n. Предположим, что K - поле, алгебраически замкнутое, $хар. K = p$ и $p \nmid n$, $\Gamma = \mathbb{Z}_n(x_1, \dots x_d)$

Хорошо известно [5], что алгебра $K\Gamma$ - вполне приводима и обладает полной системой $\mathcal{E}$ минимальных идемпотентов e_α, $\alpha \in A$, $e_\alpha K\Gamma \cong K$. Пусть P - простой идеал в $K\Gamma$. Ввиду полной приводимости $K\Gamma$ найдется P' такой, что $P \oplus P' = K\Gamma$. Идеал P' содержит не более одного идемпотента из $\mathcal{E}$, т.к. в противном случае в P' имеются делители 0, что противоречит целостности кольца

$K\Gamma/p \cong p'$. Поэтому $p' = e_\alpha K\Gamma \cong K$ и $K\Gamma/p \cong K$, а следовательно, p - максимальный идеал. Так как алгебра $K\Gamma$, очевидно, нетерова, всякий идеал $J \subset K\Gamma$ имеет примарное разложение: $J = \bigcap_{i \in J} \mathfrak{D}_i$. Радикал $U_i = \sqrt{\mathfrak{D}_i}$ будет простым, и значит, максимальным идеалом в $K\Gamma$. Поскольку $M_i^n = M_i$ и $\mathfrak{D}_i \supseteq M_i^n$, то $\mathfrak{D}_i = M_i$. Таким образом установлено, что всякий идеал в $K\Gamma$ есть пересечение максимальных.

Пусть $K[x_1', \ldots, x_d']$ - кольцо полиномов от d трансцендетных образующих $x_1', \ldots, x_d'$. Рассмотрим эпиморфизм $\varepsilon : K[x_1', \ldots, x_d'] \to K\Gamma$, при котором x_i' переходит в x_i. Нетрудно вычислить, что ядро $\mathfrak{R}$ этого эпиморфизма порождается многочленами $x_k'^{\,n} - 1$, $k = 1, 2, \ldots, d$

Теперь можно описать максимальные идеалы группового кольца $K\,\mathbb{Z}_n(x_1, \ldots, x_d)$ Каждый такой идеал соответствует некоторому максимальному идеалу M в $K[x_1', \ldots, x_d']$, содержащему $\mathfrak{R}$. По теории Гильберта [6] $M = (x_1' - \alpha_1, \ldots, x_d' - \alpha_d)$ где $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in K$. Из условия $M \supset \mathfrak{R}$ непосредственно следует, что $\alpha_k^n = 1$, $k = 1, \ldots, d$. Пусть ξ - первообразный корень из I степени n. Тогда каждое α_k, указанное выше, есть ξ^{j_k} $k = 1, \ldots, d$, где j_k можно считать некоторым классом вычетов по модулю n; $j_k \in \mathbb{Z}_n$. Вводя $V_d = \underbrace{\mathbb{Z}_n \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_n}_{d\text{-раз}}$ - d-мерный свободный $\mathbb{Z}_n$-модуль, получаем взаимнооднозначное соответствие между максимальными идеалами из $K\Gamma$ и векторами $(j) = (j_1, \ldots, j_d) \in V_d$ Это соответствие можно расширить до взаимно-однозначного соответствия между идеалами $J \subset K\Gamma$ и подмножествами в V_d. Именно, каждому J отнесем такое множество $\mathfrak{Z}_J \subset V_d$, что $J = \bigcap_{(j) \in \mathfrak{Z}_J} M(j)$, и, обратно, всякому $\mathfrak{Z} \subset V_d$ сопоставим идеал $J_\mathfrak{Z} \subset K\Gamma$ по формуле: $J_\mathfrak{Z} = \bigcap M(j)$,

Т е о р е м а I. Идеал $U \in S(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда соответствующее множество $\mathfrak{Z}$ вполне характеристично в V_d.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше отмечалось, что каждый идеал U в $K\Gamma$ является главным, т.е. $U = f K\Gamma$, где $f = f(x_1, \ldots, x_d)$ может быть выбран даже идемпонентом.

Наряду с этим имеется примарное представление: $\mathcal{U}=\bigcap_{(j)\in\mathfrak{Z}} M(j)$. Условие включения $\mathcal{U}\subset M(j)$ выполняется тогда и только тогда, когда $f\in(j)$, а последнее справедливо тогда и только когда, когда $f(\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_d})=0$, где $(j)=(j_1,\ldots,j_d)$. Поэтому функция f однозначно определяет множество $\mathfrak{Z}$ формулой:

$$\mathfrak{Z}=\{(j)\in V_d \mid f(\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_d})=0\}$$

Эндоморфизм $\eta:\Gamma\to\Gamma$ определяется образами $m_1,\ldots,m_d$ образующих $x_1,\ldots,x_d$ группы Γ. Каждый m_i является групповым элементом $x_1^{a_{i1}}\ldots x_d^{a_{id}}$, который будем также называть мономом. Эндоморфизму η сопоставим матрицу.

$$A_\eta=\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{d1} & \ldots & a_{dd} \end{bmatrix}$$

и примем естественное соглашение, что η действует на V_d по формуле:

$$(j)^\eta=(j)A_\eta$$

Предположим, что $\mathcal{U}$ - вербальный идеал в $K\Gamma$. Тогда для любых мономов $m_1(x_1,\ldots,x_d),\ldots,m_d(x_1,\ldots,x_d)$
$f(m_1,\ldots,m_d)\in\mathcal{U}$.
Последнее включение эквивалентно системе включений
$f(m_1,\ldots,m_d)\in(j)$
для всякого $(j)\in\mathfrak{Z}$. Так как отображение $x_i\to\xi^{j_i}$,
$(j)=(j_1,\ldots,j_d)$ $i=1,2,\ldots,d$
является эндоморфизмом алгебры $K\Gamma$, то значение
$f(m_1(\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_d}),\ldots,m_d(\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_d}))$
не зависит от записи $f(m_1,\ldots,m_d)$ через образующие $x_1,\ldots,x_d$. Поэтому критерием справедливости включения $f(m_1,\ldots,m_d)\in M_{(j)}$ будет равенство:

$$f(m_1(\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_d}),\ldots,m_d(\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_d}))=0$$

Значение $m_i(\xi^{j_1},\ldots,\xi^{j_d})$ равно $\xi^{j_i'}$, где

$$(j_1', \ldots, j_d') = (j)^\eta, \quad i = 1, 2, \ldots, d$$

Следовательно, из условия вербальности $\mathcal{U}$ вытекает $f(\xi^{j_1'}, \ldots, \xi^{j_d'}) = 0$, а значит $(j)^\eta \in \mathfrak{Z}$, что доказывает необходимость. Обратно, пусть $\mathfrak{Z}$ -вполне характеристическое подмножество V_d . Согласно А.2 для вербальности $\mathcal{U}_\mathfrak{Z}$ достаточно установить его специальность. $\mathcal{U}_\mathfrak{Z}$ порождается некоторым элементом $f \in K\Gamma$. Специальность $\mathcal{U}_\mathfrak{Z}$ наступает тогда и только тогда, когда для всякого набора $m_1, \ldots, m_d$ -мономов из Γ. $f(m_1, \ldots, m_d) \in \mathcal{U}_\mathfrak{Z}$ Проверка последнего включения повторяет последнюю часть доказательства "необходимости". Это завершает доказательство теоремы.

Предложение 3. Множество $\mathfrak{Z} \subset V_d$ вполне характеристично тогда и только тогда, когда оно является объединением некоторых вербальных подгрупп в V_d .

Доказательство. Достаточность очевидна, поэтому займемся необходимой частью предложения.

Через $\mathfrak{Z}_d$ обозначим проекцию $\mathfrak{Z}$ на первое слагаемое V_d , т.е.

$$\mathfrak{Z}_1 = \{ j_1 \in \mathbb{Z}_n \mid \exists_{(j) \in \mathfrak{Z}} [(j) = (j_1, j_2, \ldots, j_d)] \}$$

Множество $\mathfrak{Z}_1 \subset \mathbb{Z}_n$ замкнуто относительно эндоморфизмов $\mathbb{Z}_n$ и поэтому по предложению I является объединением своих максимальных циклических подгрупп H_λ , $\lambda = 1, 2, \ldots, t$

$$\mathfrak{Z}_1 = \bigcup_{\lambda=1}^{t} H_\lambda$$

Пользуясь перестановками $x_1 \longleftrightarrow x_i$, $i \geq 2$, убеждаемся, что все $j_i \in \bigcup_{\lambda=1}^{t} H_\lambda$, $i = 1, \ldots, d$. Пусть $(j) = (j_1, \ldots, j_d)$ - элемент максимальный в том смысле, что из равенства $(j) = (j)'^\eta$, $(j)' \in \mathfrak{Z}$ следует, что либо η - автоморфизм либо $(j)' = (j)$. Допустим, что нашлась пара координат вектора (j) , скажем j_1, j_2 , лежащая в разных группах H_μ , H_ν, $\mu \neq \nu$, $1 \leq \mu$, $\nu \leq t$. Тогда в силу максимальнос ти вектора (j) , j_1 , j_2 являются образующими циклических групп H_μ , H_ν . Подгруппа $H_\mu + H_\nu$ в $\mathbb{Z}_n$ - циклическая и поэтому найдутся такие $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_n$, что $j_1 a_1 + j_2 a_2$ - образующая $H_\mu + H_\nu$. Легко видеть, что найдется такой Γ -эндоморфизм η , что $(j)^\eta = (j_1 a_1 + j_2 a_2, *, \dots, *)$, где „$*$" - обозначает невыписанныи координаты $(j)^\eta$. Элемент $j_1 a_1 + j_2 a_2 \in \bigcup\limits_{\lambda=1}^{t} H_\lambda$, а значит некоторому H_τ, $1 \le \tau \le t$ что приводит к противоречию с максимальностью подгрупп H_λ , H_μ .

Таким образом, для всякого максимального вектора $(j) = (j_1, \dots, j_d) \in \mathfrak{Z}$ все j_i, $i = 1, \dots, d$, лежат в одном и том же H_λ и, следовательно, $(j) \in H_\lambda^{(1)} \oplus \dots \oplus H_\lambda^{(d)}$, где $H_\lambda^{(i)}$ - подгруппа изоморфная $H_\lambda \equiv H_\lambda^{(1)}$, взятая в i-ом слагаемом V_d . Так как множества $H_\lambda^{(1)} \oplus \dots \oplus H_\lambda^{(d)}$ вполне характеристичны и все максимальные векторы из $\mathfrak{Z}$ лежат в $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{t} (H_\lambda^{(1)} \oplus \dots \oplus H_\lambda^{(d)})$, то $\mathfrak{Z} \subset \bigcup\limits_{\lambda=1}^{t} (H_\lambda^{(1)} \oplus \dots \oplus H_\lambda^{(d)})$

Обратное включение, т.е. $\bigcup\limits_{\lambda=1}^{t} (H_\lambda^{(1)} \oplus \dots \oplus H_\lambda^{(d)}) \subset \mathfrak{Z}$ - очевидно.

Поэтому $\mathfrak{Z} = \bigcup\limits_{\lambda=1}^{t} (H_\lambda^{(1)} \oplus \dots \oplus H_\lambda^{(d)})$, что и требовалось.

С л е д с т в и е I. Всякое вполне характеристическое множество в V_d однозначно определяется своей проекцией на $\mathbb{Z}_n$.

Доказательство очевидно.

С л е д с т в и е 2. Полугруппа $S(\Gamma)$, $\Gamma = \mathbb{Z}_n(x_1, \dots x_d)$ порождается всеми идеалами ωG , где G - вербальная подгруппа в Γ .

Д о к а з а т е л ь с т в о . Доказательство распадается на три пункта а), б), в), которые легко проверяются.

а) Объединению множеств в V_d соответствует произведение (= пересечение) идеалов в $K\Gamma$.

б) Идеал $\omega G (G \subset \Gamma)$ вербален тогда и только тогда, когда G - вербальная подгруппа в Γ .

в) Только у вербальных идеалов $\mathcal{U} = \omega G$, $\mathfrak{Z}_n$ является вербальной подгруппой в V_d .

Представление идеала $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$ в виде произведения $\mathcal{U} = \omega G_1 \dots \omega G_t$ будем называть несократимым, если для

$\forall i, j \ (1 \leq i, j \leq t) \quad G_i \not\subset G_j$

Соответственно этому, представление множества $\mathfrak{Z} \subset V_d$ в виде объединения групп $H_\lambda \subset V_d \ \lambda = 1, \dots, t$ будем называть несократимым, когда $H_i \not\subset H_j$ для $\forall i, j (1 \leq i, j \leq t)$. Легко видеть, что произведение $\mathcal{U} = \prod\limits_{\lambda=1}^{t} \omega G_\lambda$ несократимо тогда и только тогда, когда $\mathfrak{Z}_u = \bigcup\limits_{\lambda=1}^{t} \mathfrak{Z}_{\omega G_\lambda}$ несократимо.

Л е м м а . Пусть $\mathcal{U} = \omega G_1 \dots \omega G_t \subset \omega G'$,

где $G' \neq G_1, \dots G_t$

Тогда $\exists_1 \leq j \leq k \ (\omega G_j \subseteq \omega G')$

Д о к а з а т е л ь с т в о . В силу инверсности соответствия между $\mathcal{U}$ и $\mathfrak{Z}_u$, получаем $\mathfrak{Z}_u \supset \mathfrak{Z}_{\omega G}$. Далее, $\mathfrak{Z}_u = \mathfrak{Z}_{\omega G_1} \cup \dots \cup \mathfrak{Z}_{\omega G_k}$. Проекция $\mathfrak{Z}_u$ на $\mathbb{Z}_n$, $\mathfrak{Z}_n^{(1)}$ - объединение проекций $\mathfrak{Z}_{\omega G_1}^{(1)}$. Так как $\mathfrak{Z}_{\omega G'}^{(1)}$ - циклическая подгруппа в $\mathbb{Z}_n$ и $\mathfrak{Z}_{\omega G'}^{(1)} \subset \bigcup\limits_{i=1} \mathfrak{Z}'_{\omega G_i}$, то одна из $\mathfrak{Z}_{\omega G_\lambda}^{(1)}$, скажем $\mathfrak{Z}_{\omega G_1}^{(1)}$, содержит $\mathfrak{Z}_{\omega G'}^{(1)}$. По следствию I из предложения 3 отсюда следует, что $\mathfrak{Z}_{\omega G_1} \supset \mathfrak{Z}_{\omega G}$ и лемма доказана.

Т е о р е м а I . Система образующих ωG, G - вербальная подгруппа в Γ, является минимальной неприводимой системой образующих в $S(\Gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Указанная в условии теоремы I . система идеалов, по следствию 2 предложения 3 будет системой образующих. Двумя другими свойствами эта система обладает, если будет показано, что идеалы ωG - неразложимы в произведение в полугруппе $S(\Gamma)$. Последнее утверждение сводится к доказательству единственности несократимого представления идеала $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$.

Допустим, что $\mathcal{U} = \omega G_1 \dots \omega G_k = \omega G'_1 \dots \omega G'_e$, два несократимых представления идеала $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$. Если ωG_1 не встречается слева, то для некоторого $1 \leq i \leq k$ $\omega G_i \subset \omega G'_1$, как следует из леммы. В силу несократимости правого произведения ωG_i не может быть одним из $\omega G'_j$, $2 \le j \le \ell$. Поэтому, опять используя лемму, приходим к противоречию с несократимостью произведения $\omega G'_2 \ldots \omega G'_e$. Значит $\ell = k$ и, после перенумерации, $\omega G_i = \omega G'_i$, что и требовалось.

Вернемся к описанию радикальных вербальных идеалов в $K\Gamma$, $\Gamma = \mathbb{Z}(x_1, \ldots, x_d)$. Пусть $\mathcal{U}$ - такой идеал, $H = \{x_1^n\} \times \ldots \times \{x_d^n\}$, $p+n$ та вербальная подгруппа в Γ, для которой $\omega H \subset \mathcal{U}$. Вводя обозначения $\bar{x}_i = x_i \cdot H$, $i = 1, 2, \ldots, d$, запишем группу Γ/H как $\mathbb{Z}_n(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d)$. Эпиморфизм $K\Gamma \to K(\Gamma/H) \cong K\Gamma/\omega H$, индуцированный отображением $x_i \to \bar{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, d$, отображает $\mathcal{U}$ на вербальный идеал $\bar{\mathcal{U}}$, $\bar{\mathcal{U}} \subset S(\Gamma/H)$ (см. А.2).

По теореме I, $\bar{\mathcal{U}} = \bigcap\limits_{(j) \in \mathfrak{z} \subset V_d} \bar{M}(j)$, где $\mathfrak{z}$ - вполне

характеристическое множество в V_d, $\bar{M}(j) = (\bar{x}_1 - \rho^{j_1}, \ldots, \bar{x}_d - \rho^{j_d})$

Полным образом $M(j)$ будет максимальный идеал

$M(j) = (x_1 - \rho^{j_1}, \ldots x_d - \rho^{j_d})$. Идеал $\bigcap\limits_{(j) \in \mathfrak{z} \subset V_n} M(j) \subset K\Gamma$ отображается, как легко видеть, на $\bar{\mathcal{U}}$. Поэтому $\mathcal{U} = \bigcap\limits_{(j) \in \mathfrak{z} \subset V_n} M(j)$,

и, таким образом, получена первая часть предложения 4.

П р е д л о ж е н и е 4.

I) Среди вербальных идеалов только радикальные имеют примарное разложение, являющееся пересечением максимальных идеалов $M(j)$, причем множество $\mathfrak{z}$ векторов $(j)_{V_d}$ - вполне характеристично в подходящем $\mathbb{Z}_n$- порядке V_d.

2) Всякий вербальный идеал $\mathcal{U} \subset S(\Gamma)$ имеет примарное разложение $\mathcal{U} = \bigcap\limits_{(j) \in \mathfrak{z}} \mathfrak{Q}(j)$,

причем множество $\mathfrak{z}$ - вполне характеристично в подходящем $\mathbb{Z}_n$- модуле V_d, а примарные компоненты $\mathfrak{Q}(j)$ - однозначно определены.

Доказательство. Предположим $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$ и $\mathcal{U} = \bigcap_{\alpha \in H} \mathfrak{Q}_\alpha$ - это примарное разложение. Согласно предположению 2, $\sqrt{\mathcal{U}} \in S(\Gamma)$. Пусть $n\ (p+n)$, V_d и $\mathfrak{Z}$ такие, как описано в пункте I) этого предположения. Так как $\sqrt{\mathcal{U}} = \bigcap_{\alpha \in A} \sqrt{\mathfrak{Q}_\alpha}$, то простые идеалы $\sqrt{\mathfrak{Q}_\alpha}$ - максимальны, а отсюда следует [7], что все $\mathfrak{Q}_\alpha$, $\alpha \in A$ однозначно определяются идеалом $\mathcal{U}$. Отнесем $\mathfrak{Q}_\alpha$ индексом вектор (j), $(j) \in \mathfrak{Z}$ в том случае, когда $\sqrt{\mathfrak{Q}_\alpha} = M_{(j)}$. При такой перенумерации

$$\mathcal{U} = \bigcap_{(j) \in \mathfrak{Z} \subset V_d} \mathfrak{Q}(j),$$

что и требовалось.

VI. Строение вербальных идеалов в $S(\Gamma)$, $\Gamma = \mathbb{Z}(x_1, \dots x_d)$

Лемма 2. Пусть $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$, $\Gamma = \mathbb{Z}(x_1, \dots, x_d)$ и $\mathcal{U} = \bigcap_{(j) \in \mathfrak{Z}} \mathfrak{Q}(j)$ - его примарное представление, $M_{(j)} = \sqrt{\mathfrak{Q}_{(j)}}$ - соответствующий максимальный идеал. Возьмем эндоморфизм $\eta: \Gamma \to \Gamma$. Тогда $\mathfrak{Q}^\eta_{(j)} \subset \mathfrak{Q}_{(j)'}$ в том и только том случае, когда $M^\eta_{(j)} \subset M_{(j)'}$

Доказательство. Необходимость. Из $\mathfrak{Q}^\eta_{(j)} \subset \mathfrak{Q}_{(j)'}$ следует, что $\sqrt{\mathfrak{Q}^\eta_{(j)}} = M^\eta_{(j)} \subset \sqrt{\mathfrak{Q}_{(j)'}} = M_{(j)'}$, причем первый $\sqrt{\ }$ вычисляется в $K\Gamma^\eta$. Достаточность. Пусть $M_{(j)}^\eta \subset M_{(j)'}$. Эндоморфизм η определяется образами $x_1, \dots x_d$: $x_i^\eta = m_i(x_1, \dots, x_d)$, $i = 1, 2, \dots, d$. По условию,

$$(x_i - \rho^{j_i})^\eta = (m_i(x_1, \dots, x_d) - \rho^{j_i}) \in M_{(j)'}, \quad i = 1, 2, \dots d.$$

и поэтому $m_i(\rho^{j'_1}, \dots \rho^{j'_d}) = \rho^{j_i}$, $i = 1, 2 \dots d$.

Положим $C = R \mid M_{(j)}$, $C' = R \mid M_{(j)'}$ - мультиплитивно замкнутые системы к идеалам $M_{(j)}$ и $M_{(j)'}$, $R = K\Gamma$. Тогда, по известной теореме [7],

$$\mathfrak{D}(j) = \mathcal{U}_c = \{ f \in R \mid \exists_{c \in C} (cf \in \mathcal{U}) \}$$

и аналогично $\mathfrak{D}(j)' = \mathcal{U}_{c'}$.

Выберем некоторое $g \in \mathfrak{D}(j)$. Тогда найдется такое $c_0 \in C$, что $c_0 g \in \mathcal{U}$. Переходя к образам с учетом вербальности $\mathcal{U}$, получим $c_0^{\eta} g^{\eta} \in \mathcal{U} \subset \mathfrak{D}(j)'$.

Доказательство будет закончено, если покажем, что $c_0^{\eta} \in C'$. c_0 можно считать целой функцией от $x_1, \dots, x_d$, а так как $c_0 \notin M(j)$, то

$$c_0 = \alpha_{(0)} + \sum_{(i) \neq (0)} \alpha_{(i)} (x_1 - \varphi^{j_1})^{i_1} \dots (x_d - \varphi^{j_d})^{i_d}$$

и $\alpha(0) \neq 0$. Тогда $c_0^{\eta} = \alpha(0) + \sum_{(i) \neq 0} \alpha_{(i)} (m_1 - \varphi^{j_1})^{i_1} \cdot \dots \cdot (m_d - \varphi^{j_d})^{i_d}$.

Нетрудно проверить, что $c_0^{\eta}(\varphi^{j_1}, \dots \varphi^{j_d}) = \alpha(0) \neq 0$, что доказывает включение $c_0^{\eta} \in C'$, а с ним и лемму.

Начиная с этого места, положим $\text{хар.}\, K = 0$. Пусть $M = (x_1 - \alpha_1, \dots, x_d - \alpha_d)$, $(\alpha_1, \dots \alpha_d) \neq (0)$ некоторый максимальный идеал в $K\Gamma$, $g(x_1, \dots x_d)$- целая функция от $x_1, \dots x_d$. Представление g в виде суммы одночленов $(x_1 - \alpha_1)^{i_1} \dots (x_d - \alpha_d)^{i_d}$,

$$g = \sum_{\alpha(i) \neq (0)} \alpha(i) (x_1 - \alpha_1)^{i_1} \dots (x_d - \alpha_d)^{i_d}, \quad (i) = (i_1, \dots, i_d)$$

$i_x \geq 0$ будем называть разложением g по степеням идеала M .

Л е м м а 3. (о выделении одночленов). Пусть $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$, $\mathfrak{D}(j)$ - примарный идеал, принадлежащий $\mathcal{U}$. Предположим, что $g \in \mathfrak{D}(j)$ и $g = \sum_{\alpha(i) \neq 0} \alpha_{(i)} \cdot (x_1 - \varphi_1)^{i_1} \dots (x_d - \varphi^{j_d})^{i_d}$

Тогда все одночлены $(x_1-\rho^{j_1})^{i_1}\dots(x_d-\rho^{j_d})^{i_d}$ лежат в $\mathfrak{Q}_{(j)}$.

Доказательство. В силу примарности $\mathfrak{Q}_{(j)}$ найдется такое σ, что $(x_1-\rho^{j_1})^{\sigma}\in\mathfrak{Q}_{(j)}$

Все одночлены в g, имеющие по $(x_1-\rho^{j_1})$ степень i, соберем в одно слагаемое g_i,

$$g_i=(x_1-\rho^{j_1})^i g_i'(x_2,\dots,x_d), \text{ тогда}$$
$$g\equiv\sum_{i=0}^{\sigma-1}(x_i-\rho^{j_1})^i g_i'(x_2,\dots,x_d) \pmod{\mathfrak{Q}_{(j)}}$$
и получаем I-ое сравнение:

$$g_0+g_1+\dots+g_{\sigma-1}\equiv 0 \pmod{\mathfrak{Q}_{(j)}} \qquad (1)$$

По вербальному идеалу $\mathfrak{U}$ найдем число n, определенное в предложении 4. С этим n построим σ эндоморфизм η_k, $0\le k\le\sigma-1$, определяя так k-ое отображение:

$$x_1^{\eta_k}=x_1^{nk+1}, \quad x_2^{\eta_k}=x_i, \quad i>1$$

Легко проверить, что $M_{(j)}^{\eta_k}\subset M_{(j)}$ и поэтому по лемме 2 $\mathfrak{Q}_{(j)}^{\eta_k}\subset\mathfrak{Q}_{(j)}$.

В работе [3] указан метод, идею которого применим в нашей ситуации. Найдем образы $(x_1-\rho^{j_1})^i$, $1\le i\le\sigma-1$ по $\bmod\,\mathfrak{Q}_{(j)}$ при отображениях η_k, $0\le k\le\sigma-1$.

$$(x_1-\rho^{j_1})^{\eta_k}=x_1^{nk+1}-\rho^{j_1}\equiv(nk+1)(x_1-\rho^{j_1})+O_1((x_1-\rho^{j_1}))$$

$$[(x_1-\rho^{j_1})^i]^{\eta_k}=(x_1^{nk+1}-\rho^{j_1})^i\equiv(nk+1)^i(x_1-\rho^{j_1})+ \qquad (\mathrm{I})$$

$$+O_i((x_1-\rho^{j_1}))$$
$$[(x_1-\rho^{j_1})^{\sigma-1}]^{\eta_k}\equiv(nk+1)^{\sigma-1}(x_1-\rho^{j_1})^{\sigma-1},$$

где $O_i((x_1-\rho^{j_1}))$ $1\le i\le\sigma-1$ обозначают суммы слагаемых, степени которых относительно $x_1-\rho^{j_1}$ больше i, но меньше $\sigma-1$.

Применим формулы (I) для отыскания образа $g_i^{\eta_k}$ и $g^{\eta_k}=\sum_{i=1}^{\sigma-1}g_i^{\eta_k}$ по $\bmod\,\mathfrak{Q}_{(j)}$.

Отметим тривиальные случаи:

$g_0^{\eta_k} = g_0, \quad 0 \le k \le \sigma - 1$

$g_i^{\eta_0} = g_i, \quad 0 \le i \le \sigma - 1$

Для $i, k \ne 0$, $g_i^{\eta_k} = (x_1^{nk+1} - \rho^{d_1})^i g_i'(x_2, \dots, x_d) \equiv$

$\equiv (nk+1)^i (x_1 - \rho^{d_1})^i g_i'(x_2, \dots, x_d) +$

$+ \sum\limits_{i \le \lambda' \le \sigma-1} \delta_{\lambda', i, k} (x_1 - \rho^{d_1})^{\lambda'} g_i'(x_2, \dots, x_d), \quad 1 \le i, \; k \le \sigma - 1$

Отцепляя от множителя $(x_1 - \rho^{d_1})^{\lambda'}$ i-ую степень $(x_1 - \rho^{d_1})$ (т.к. $\lambda' > i$), получаем

$g_i^{\eta_k} \equiv (nk+1)^i g_i + \sum\limits_{1 \le \lambda \le \sigma-1-i} \delta_{\lambda, i, k} (x_1 - \rho^{d_1})^{\lambda} g_i$,

где положено $\lambda = \lambda' - i$, $1 \le i, \; k \le \sigma - 1$

Складывая $g_i^{\eta_k}$ для всех $0 \le i \le \sigma - 1$, получаем

$$g^{\eta_k} \equiv \sum_{i=0}^{\sigma-1} (nk+1)^i g_i + \sum_{\substack{1 \le \lambda \le \sigma-i-1 \\ 1 \le i \le \sigma-1}} \delta_{\lambda, i, k} (x_1 - \rho^{d_1})^{\lambda} g_i$$

Правая часть этого сравнения станет k-ым членом системы (2):

$$\begin{aligned}
&g_0 + g_1 + \dots + g_{\sigma-1} \equiv 0 \\
&g_0 + (nk+1) g_1 + \dots + (nk+1)^{\sigma-1} g_{\sigma-1} + \sum_{\substack{1 \le \lambda \le \sigma-i-1 \\ 1 \le i \le \sigma-1}} \delta_{\lambda, i, k} (x_1 - \rho^{d_1})^{\lambda} g_i \equiv 0 \\
&g_0 + (n(\sigma-1)+1) g_1 + \dots + (n(\sigma-1)+1)^{\sigma-1} g_{\sigma-1} + \sum_{\substack{1 \le i \le \sigma-1 \\ 1 \le \lambda \le \sigma-i-1}} \delta_{\lambda, i, \sigma-1} \cdot \\
&\cdot (x_1 - \rho^{d_1})^{\lambda} g_i \equiv 0
\end{aligned} \qquad (2)$$

Л е м м а 3'. Система сравнений (2) имеет решениями сравнения $g_i \equiv 0 \; (\mathfrak{Q}_{(j)})$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Покажем, что для всех $\lambda, i \ge 0$

$$(x_1 - \rho^{d_1})^{\lambda} g_i \in \mathfrak{Q}_{(j)} \qquad (3)$$

Применим индукцию по λ и i . При $\lambda = \sigma - 1$ и произвольном $i \ge 1$ утверждение тривиально. Умножая I-ое сравнение системы (2) на $(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-1}$, очевидно, получаем

$(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-1} g_0 \in \mathfrak{D}(j)$

Допустим, что для $\lambda = \sigma - \eta$ и всех i включение (3) доказано. Умножим I-ые r сравнений системы (2) на $(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)}$. Получим систему

$$(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} g_0 + \cdots + (x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} g_r \equiv 0$$

$$(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} g_0 + (nk+1)(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} g_1 + \cdots + (nk+1)^r \cdot (x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} g_r + O_k \equiv 0$$

$$(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} g_0 + (nr+1)(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} g_1 + \cdots + (nr+1)^r (x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} g_r + O_r \equiv 0$$

где O_k, $1 \leq k \leq r$, обозначают невыписанные члены, которые, как нетрудно проверить, лежат в $\mathfrak{D}(j)$ по индуктивному предположению. Определитель системы, остающейся после отбрасывания всех O_t, является определителем Вандермонда и, в силу характеристики $K = 0$, обратим в $K\Gamma$. Следовательно, укороченная система (т.е. без O_t) разрешима относительно $(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} \cdot g_i$, $0 \leq i \leq r$, а для $i > r$ по индуктивному предположению $(x_i - \rho^{d_1})^{\sigma-(r+1)} g_i \in \mathfrak{D}(j)$, . Этим индуктивный шаг завершен. При $\lambda = 0$ получаем, $g_i \in \mathfrak{D}(j)$ $i = 0, \cdots, \sigma - 1$.

Лемма 3′ доказана.

Возвращаясь к лемме 3, в качестве g возьмем g_i, $i = 0, 1, \ldots \sigma - 1$, . Применяя к ним описанный процесс, после конечного число шагов получим все одночлены, входившие в g с ненулевыми коэффициентами. Это завершает лемму.

Строение примарных компонент вербального идеала описывается в следующей

Л е м м е 4. Каждая примарная компонента $\mathfrak{D}(j)$ вербального идеала $\mathcal{U}$ - степень $M(j)$, т.е. найдется такое $e(j)$, что $\mathfrak{D}(j) = M(j)^{e(j)}$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть σ - такое натуральное число, что $(x_1 - \rho^{d_1})^{\sigma} \in \mathfrak{D}(j)$. Построим эндоморфизм η : $x_1 \to x_1 x_2^n \ldots x_d^n$, $x_i \to x_i$, $i > 1$. Эндоморфизм η отображает $M(j)$ в $M(j)$ и поэтому, ввиду леммы 2,

$[(x_1-\rho^{d_1})^{\sigma}]^{?}\in \mathfrak{D}(j)$, так, что

$(x_1 x_2^n \dots x_d^n - \rho^{d_1})^{\sigma}\in \mathfrak{D}(j)$. Пусть

$f(x_1,\dots,x_d)=x_1 x_2^n\cdots x_d^n-\rho^{d_1}$

Разложим f по степеням идеала $M(j)$ и выпишем только часть лежащую в $M(j)$.

$$f(x_1,\dots,x_d)=\sum_{k=1}^{d}\alpha_k(x-\rho^{d_k})+O((x_1-\rho^{d_1}),\dots,(x_d-\rho^{d_d}))$$

Для вычисления α_k, $k=1,2,\dots,d$ можно использовать обычные формулы анализа. Следовательно,

$$\alpha_k=\frac{\partial f}{\partial x_k}\Bigg|_{\substack{x_i=\rho^{d_i}\\ i=1,2,\dots,d}}=n\,\rho^{d_1-d_k}\neq 0,\quad k=1,2,\dots,d$$

Сделаем замечание, относящееся к сумме $(a_1+\dots+a_n)^{\sigma}$, в которой $a_1,\dots a_n$ - однородные элементы некоторой градуированной алгебры.

Допустим, что $a_1,\dots a_d$ имеют степени, равные I, а $a_{d+1},\dots,a_n$ - степени $\ell_1,\dots \ell_{n-d}$, большие I. Тогда утверждается, что $(a_1+\dots a_n)^{\sigma}$ можно разделить на две суммы, между которыми нет подобных.

Действительно, понятно, что $(a_1+\dots+a_n)^{\sigma}=\sum\alpha(i)a_1^{i_1}\dots a_n^{i_n}$ Отнесем к первой сумме все члены $\alpha(i)a_1^{i_1}\dots a_d^{i_d}$ - они имеют степень σ, а ко второй - остальные. Тогда каждый член второй суммы имеет вид: $\alpha(i)a_1^{i_1}\dots a_{d+p}^{i_{d+p}}\dots a_n^{i_n}$, где некоторый $i_{d+p}\neq 0$, $p\neq 0$. Степень такого члена равна

$$i_1+\dots+i_d+\ell_1 i_{d+1}+\dots+\ell_p i_{d+p}+\dots+\ell_{n-d}\,i_n\neq$$
$$\neq i_1+\dots+i_d+\dots+i_{d+p}+\dots+i_n=\sigma$$

откуда замечание непосредственно вытекает.

Возвращаясь к лемме, положим $a_i=x_i-\rho^{d_i}$ $i=1,2,\dots,d$, и a_{d+p} - не выписанные члены разложения $f(x_1,\dots,x_d)$. Согласно замечанию, член $\alpha(x_1-\rho^{d_1})^{i_1}\dots(x_d-\rho^{d_d})^{i_d}$ действительно встречается в f^{σ} после приведения подобных. Коэффициент α является произведением степеней α_k и биномиальных коэффициентов. Поэтому $\alpha\neq 0$ и из леммы 3 следует:

$(x_1-\rho^{d_1})^{i_1}\dots(x_d-\rho^{d_d})^{i_d}\in\mathfrak{D}(j)$

Пусть b - наибольшее натуральное число такое, что $\mathfrak{D}_{(j)} \subset M_{(j)}^{b}$. Тогда в $\mathfrak{D}_{(j)}$ есть целый элемент степени b и нет таких элементов низшей степени (т.к. их нет в $M_{(j)}^{b}$). В силу леммы 3 найдется одночлен

$$(x_1 - \varphi^{j_1})^{i_1} \dots (x_d - \varphi^{jd})^{id}, \quad i_1 + \dots + i_d = b,$$

лежащий в $\mathfrak{D}_{(j)}$. Построим эндоморфизм:

$$x_1^{\eta} = x_1, \quad x_i^{\eta} = x_i \cdot x_1^{n}, \quad i > 1$$

Нетрудно проверить, что $M_{(j)}^{\eta} \subset M_{(j)}$ и поэтому ($\Lambda.2$) $\mathfrak{D}_{(j)}^{\eta} \subset \mathfrak{D}_{(j)}$. Это позволяет утверждать, что

$$[(x_1 - \varphi^{j_1})^{i_1} \dots (x_d - \varphi^{jd})^{id}]^{\eta} = (x_1 - \varphi^{j_1})^{i_1} \dots (x_d x_1^{n} - \varphi^{jd})^{id} \in \mathfrak{D}_{(j)}$$

Разложим d функций $f_e = x_e \cdot x_1^{n} - \varphi^{je}$, $e = 1, 2, \dots d$,

по степеням идеала $M(j)$, выписывая только часть, лежащую в $M(j)$.

$$f_e = \alpha_e (x_1 - \varphi^{j_1}) + \beta_e (x_e - \varphi^{je}) + O_e((x_1 - \varphi^{j_1}), (x_e - \varphi^{je})),$$

причем α_e, β_e, как легко видеть, ненулевые числа, а в O_e объединены все члены степени выше I. Обозначая для удобства $x_e - \varphi^{je}$ через U_e, находим:

$$f_e^{i_e} = \alpha_e^{i_e} U_1^{i_e} + \sum_{\mu + \nu = i_e} \delta_{\mu,\nu} U_1^{\mu} U_e^{\nu} + O_{i_e},$$

где через O_{i_e} обозначены все члены степени выше i_e. Ввиду замечания и алгебраической независимости U_1, U_e, слагаемое $\alpha_e^{i_e} U_1^{i_e}$, не сократится Поэтому произведение $\prod_1 f_e^{i_e}$ содержит единственный член $\alpha_1^{i_1} \dots \alpha_d^{i_d} U_1^{i_1 + \dots + i_d} = \mathcal{Z} U_1^{b}$, $\mathcal{Z} \neq 0$, который, ввиду леммы 3, лежит в $\mathfrak{D}(j)$. Тогда из первой части леммы вытекает: $\mathfrak{D}_{(j)} \supset M_{(j)}^{b}$, и это завершает доказательство леммы.

Теперь имеется возможность установить критерий вербальности.

Будем рассматривать различные числа и семейство $V_{n,d}$ - свободных d-мерных $\mathbb{Z}_n$ - модулей.

Т е о р е м а 2. Выберем некоторый $V_{n,d}$ и пусть $\mathfrak{z}$ его подмножество, $\mathcal{U}$ - идеал в $K\Gamma$ равный $\prod\limits_{(j)\in \mathfrak{z}} M_{(j)}^{e(j)}$.

$\mathcal{U}$ - вербальный идеал тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\forall (j) \in \mathfrak{z}\ \forall_{\eta \in End\,\Gamma} ((j)A_\eta \in \mathfrak{z}\ \&\ e(j)A_\eta \geq e(j)) \quad (**)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Необходимость. Предположим, что $\mathcal{U} = \prod\limits_{(j)\in \mathfrak{z}} M_{(j)}^{e(j)} \in S(\Gamma)$ Тогда по предложению 2

$\sqrt{\mathcal{U}} = \prod\limits_{(j)\in \mathfrak{z}} M_{(j)} \in S(\Gamma)$,

а отсюда в силу теоремы I заключаем, что $\mathfrak{z}$ - вполне харакtристическое множество в $V_{n,d}$, чем первая часть критерия доказана.

Пусть η - эндоморфизм группы Γ : $x_i^\eta = m_i(x_1 \dots x_d) = x_1^{a_{1i}} \dots x_d^{a_{id}}$, $A_\eta = \begin{bmatrix} \cdots\cdots \\ a_{i1} \dots a_{id} \end{bmatrix}$

соответствующая η матрица. Положим $(j)' = (j)A_\eta$ (1)

Матрицу A_η можно предполагать ненулевой, т.к. в противном случае любой ее столбец можно заменить числами кратными $\mathcal{U}$ без нарушения равенства (1). Пусть первый столбец A_η ненулевой. Обозначим до конца теоремы $e(j)' = e'$, $e(j) = e$. Тогда ввиду того, что $M^\eta_{(j)'} \subset M_{(j)}$ и вербальности $\mathcal{U}$ получаем: $(M_{(j)'}^{e'})^\eta \subset M_{(j)}^e$. Следовательно, $(x_1^{a_{11}} \dots x_d^{a_{1d}} - \rho^{j_1'})^{e'} \in M^e_{(j)}$

Разложим $f = (x_1^{a_{11}} \dots x_d^{a_{1d}} - \rho^{j_1'})$ в ряд по степеням $M(j)$

$f = \alpha_1(x_1 - \rho^{j_1}) + \dots + \alpha_d(x - \rho^{j_d}) + o((x_1 - \rho^{j_1})$

Обычным образом устанавливаем, что $\alpha_k = a_{k1}\rho^{j_1' - j_k}$

По предположению некоторое $\alpha_k \neq 0$. Тогда в разложении $f^{e'}$ по степеням $M(j)$ слагаемое $\alpha_k^{e'}(x_k - \rho^{j_k})^{e'}$ действительно встретится. В силу леммы 3 $(x_k - \rho^{j_k})^{e'} \in M(j)^e$

Поэтому $e' \geq e$, что и требовалось.

Достаточность. Пусть выполнены условия (**) $\mathcal{U}, \eta, A_\eta$ - те же, что и выше, $f(x_1, \dots, x_d)$ - целый элемент, лежащий в $\mathcal{U}$.

Пусть $M(j)$ один из максимальных идеалов, принадлежащих $\mathfrak{U}$ $(j)'=(j)A_\eta$. Разложим f по степеням максимального идеала $M(j)'$. Обозначая через f_t однородную форму степени t, получаем:

$$f=\sum_{t\geq e'} f_t((x_1-\varrho^{j'}_1),\ldots,(x_d-\varrho^{j'}_d))$$

Пользуясь первой частью критерия, заключаем, что $M(j)'$ так же принадлежит идеалу $\mathfrak{U}$. Вторая часть критерия приводит к неравенству $t\geq e'\geq e$. При отображении η каждой f_t переходит в элемент, принадлежащий $M(j)^t$, что вместе с неравенством $t\geq e$ дает: $f_t\in M(j)^e$

Следовательно, $f^\eta\in M(j)^e$ и,т.к. последнее выполняется для всех $(j)\in\mathfrak{Z}$, то $f^\eta\in\mathfrak{U}$.

Следовательно, $\mathfrak{U}^\eta\subset\mathfrak{U}$. Теорема доказана.

Л е м м а 5. Если $\mathfrak{U}\in S(\Gamma)$, то и $(\mathfrak{U}:\sqrt{\mathfrak{U}})\in S(\Gamma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Сначала вычислим $B=\mathfrak{U}:\sqrt{\mathfrak{U}}$. Очевидно, что $B\supset\prod_{(j)\in\mathfrak{Z}} M(j)^{e(j)-1}$, причем $\overset{\circ}{M}(j)$ означает R. Идеал $\sqrt{\mathfrak{U}}$ можно представить в виде:

$$\sqrt{\mathfrak{U}}=M(j)\Big(\prod_{(j)'\neq(j)} M(j)'\Big)$$

Второй множитель не лежит в $M(j)$, поэтому [5,7] из равенства $B\sqrt{\mathfrak{U}}\subset M(j)^{e(j)}$ следует, что $BM(j)\subset M(j)^{e(j)}$. Следовательно, $B\subset(M(j)^{e(j)}:M(j))$. Так как идеал $M(j)$ имеет алгебраически независимую систему образующих, то $M(j)^{e(j)}:M(j)=M(j)^{e(j)-1}$. Значит, обратно, $B\subset\bigcap_{(j)\in\mathfrak{Z}} M(j)^{e(j)-1}=\prod_{(j)\in\mathfrak{Z}} M(j)^{e(j)-1}$ и равенство $B=\prod_{(j)\in\mathfrak{Z}} M(j)^{e(j)-1}$ - доказано.

Положим $\mathfrak{Z}_1=\{(j)\in\mathfrak{Z}\mid e(j)\geq 2\}$. Проверим выполнение критерия (теорема 2) для $\mathfrak{Z}_1$. Действительно, для всякого η в силу критерия, примененного к $\mathfrak{Z}$, $e_{(j)A_\eta}\geq e(j)\geq 2$, если $(j)\in\mathfrak{Z}_1$, а следовательно, $(j)A_\eta\in\mathfrak{Z}_1$. Вычитая из неравенств единицу, убеждаемся в справедливости второго условия. Тем самым включение $B\in S(\Gamma)$ - доказано.

Предложение 5. Радикальный вербальный идеал неразложим в произведение в полугруппе $S(\Gamma)$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда $U = B \cdot C$, где $U, B, C \in S(\Gamma)$, а следовательно, лежат в Δ_Γ, где $\Delta_\Gamma \equiv M(0)$ - фундаментальный идеал в $K\Gamma$ (т.е. идеал таких $f \in K\Gamma$, $f = \Sigma \alpha_i \gamma_i$, $\Sigma \alpha_i = 0$) По лемме [4], найдутся такие s, t, что $B = \Delta^s B'$; $C = \Delta^t C'$, $U = \Delta U'$, причем C', B', $U' \not\subset \Delta$. Тогда $\Delta U' \subset \Delta^{s+t}$, откуда вытекает $\Delta \subset \Delta^{s+t}$. Так как $s+t \geqslant 2$, то это следствие противоречит теореме Крулля о пересечении. Предложение доказано.

Теорема 3.

I) Каждый вербальный идеал является произведением конечного числа радикальных идеалов.

2) Система радикальных вербальных идеалов - минимальная, неприводимая система образующих полугруппы $S(\Gamma)$.

Доказательство.

I) Положим $U_1 = U : \sqrt{U}$ и определим

$$U_i = U_{i-1} : \sqrt{U_{i-1}}$$

Тогда по известной теореме [7] $U_i \supset U_{i-1}$ и в силу леммы 5. $U_i \in S(\Gamma)$ и $U_i \cdot \sqrt{U_{i-1}} = U_{i-1}$

Возрастающая цепочка $U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_{i-1} \subset U_i$ в силу нетеровости R должна стабилизироваться. Найдется k такое, что $U_k = \sqrt{U_k}$. Для такого k, очевидно, справедливо: $U = \sqrt{U} \cdot \sqrt{U_1} \cdots \sqrt{U_k}$

2) Из I) и предложения 5 следует, что система радикальных вербальных идеалов есть в точности $S(\Gamma) \setminus S(\Gamma)^2$. Это соображение доказывает 2).

Суммируем полученный результат. В силу теоремы 3 каждому идеалу из $S(\Gamma)$ соответствует убывающая последовательность вполне характеристических множеств , в $V_{n,d}$ которую будем ~~называть~~ кортежем вербального идеала U.

Пусть, обратно, взята такая последовательность. Сопоставим ей идеал $\mathcal{U}$ равный:

$$\mathcal{U} = (\prod_{(j)\in \mathfrak{Z}} M_{(j)})(\prod_{(j)\in \mathfrak{Z}_2} M_{(j)})^{(1)} \dots (\prod_{(j)^k \in \mathfrak{Z}_k} M_{(j)})^{(k)} \qquad (')$$

С л е д с т в и е . Между $S(\Gamma)$ и множеством всех кортежей в $V_{n,d}$ существует взаимнооднозначное соответствие, построенное в теореме [3] и формуле (').

Доказательство очевидно.

УII. Вербальные идеалы счетной свободной абелевой группы над полем, $\text{хар}\, K = 0$

Напомним [2], что вербальные идеалы группы Γ являются образами специальных идеалов групповой алгебры свободной группы счетного ранга F_o. Если ограничиться классом абелевых групп, то роль F_o будет выполнять свободная абелева группа счетного ранга $\mathbb{Z}(x_1, \dots, x_d)$.

Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}(x_1, \dots, d,)$, $\Gamma_d = \mathbb{Z}(x_1, \dots, x_d)$

Кольцо $K\Gamma$ является прямым спектром подколец $K\Gamma_d$, $d=1,2..$ Пересечение Γ_d идеала $\Gamma \subset K\Gamma$ с подкольцом $K\Gamma_d$ назовем d-ой проекцией идеала Γ. Каждый идеал $I \subset K\Gamma$ определяется последовательностью $\{I_d\}$ $d = 1,2\dots$ своих проекций, $I = \bigcup_{d=1}^{\infty} I_d$, причем идеалы I_d связаны соотношением $I_{(d-1)} = I_d \cap K\Gamma_{d-1}$

О п р е д е л е н и е . Про последовательность идеалов I_d, взятых каждый в подкольце $K\Gamma_d$, будем говорить, что она связанная, если $I_{d-1} = I_d \cap K'\Gamma_{d-1}$ для всех $d = 2,3\dots$. Нетрудно проверить, что между идеалами в $K\Gamma$ и связанными последовательностями существует взаимно-однозначное соответствие, задаваемое так:

$$K\Gamma \supset I \longrightarrow \{ I_d \mid I_d = I \cap K\Gamma_d \} \quad d = 1,2\dots$$

$$\{I_d\} \longrightarrow I = \bigcup_{d=1}^{\infty} I_d$$

Пусть ε - эпиморфизм Γ на Γ_d , задаваемый так:

$$x_i \xrightarrow{\varepsilon} x_i \quad , \quad i \leq d$$

$$x_{d+p} \to 1 \quad ; \quad p \geq 1$$

Следующая лемма позволяет легко вычислить проекции специальных идеалов в $K\Gamma$.

Л е м м а 6. Пусть $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$, ε - эпиморфизм, построенный выше. Тогда $\mathcal{U}_d = \mathcal{U} \cap K\Gamma_d = \mathcal{U}^{\varepsilon}$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Вследствие специальности $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}_d \supset \mathcal{U}^{\varepsilon}$. Обратно, если $f \in \mathcal{U}_d$, то $f = f^{\varepsilon} \in \mathcal{U}^{\varepsilon}$, откуда следует лемма.

С л е д с т в и е . Отображение $\mathcal{U} \to \mathcal{U}_d = \mathcal{U} \cap K\Gamma_d$ является эпиморфизмом полугруппы $S(\Gamma)$ на $S(\Gamma_d)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Прежде всего отмечаем, что $\mathcal{U}_d \in S(\Gamma_d)$ (см. А.4). Для $\mathcal{U}$, $B \in S(\Gamma)$

$$(\mathcal{U}B) \cap K\Gamma_d = (\mathcal{U}B)^{\varepsilon} = \mathcal{U}^{\varepsilon} B^{\varepsilon} = (\mathcal{U} \cap K\Gamma_d)(B \cap K\Gamma_d)$$

Следовательно, наше отображение - гомоморфизм в $S(\Gamma_d)$. Оно будет "на", из общих соображений теории развитой в [2]. Действительно, фундаментальное свойство вербальных идеалов - равенство их значений при эпиморфизмах с одинаковым образом. Так как каждый идеал $\bar{\mathcal{U}} \in S(\Gamma_d)$ есть образ некоторого $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$ при некотором эпиморфизме $\eta : \Gamma \to \Gamma_d$, то $\bar{\mathcal{U}} = \mathcal{U}^{\varepsilon} = \mathcal{U}_d$, что и требовалось.

.Связанную последовательность $\{\mathcal{U}_d\}$, состоящую из специальных ($\in K\Gamma_d$) идеалов будем называть специальной.

Л е м м а 7. Специальным идеалам в $K\Gamma$, и только им, соответствуют специальные связанные последовательности.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Доказательство требует лишь достаточность. Предположим, что $\{\mathcal{U}_d | \mathcal{U}_d \in S(\Gamma_d)\}_{\infty}$ - специальная связанная последовательность. Положим $\mathcal{U} = \bigcup_{d \geq 1} \mathcal{U}_d$, η - эндоморфизм Γ . Каждый $f \in \mathcal{U}$ лежит также в некотором $\mathcal{U}_d$. Найдется столь большой номер $d = m$, что $f^{\eta} \in K\Gamma_m$. Построим отображение $\hat{\eta}$, которое на $x_1, \ldots, x_d$ действует как η, а $x_{d+1}, \ldots, x_m$ отображает в I.

Эндоморфизм $\hat{\eta}$ действует на $K\Gamma_m$ и т.к. U_m - специальный идеал и $f \in K\Gamma_m$, то $f^{\hat{\eta}} = f^{\eta} \in U_m$. Вследствие включения $U_m \in U$, $f^{\eta} \in U$, что заканчивает доказательство леммы.

Основной результат опирается на

Л е м м у 8. Пусть $U \in S(\Gamma_d)$, $A = U \cap K\Gamma_{d-1}$. Тогда $(U : \sqrt{U}) \cap K\Gamma_{d-1} = A : \sqrt{A}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим: $U' = U : \sqrt{U}$, $A' = A : \sqrt{A}$. Ранее было установлено (Л.4), что

$$U = \prod_{(j) \in \mathfrak{Z} \subset V_{n,d}} M(j)^{b(j)} \qquad A = \prod_{(j) \in \tilde{\mathfrak{Z}} \subset V_{m,d-1}} M(j)^{a(j)}$$

Пусть ε - проектирование $\Gamma_d \to \Gamma_{d-1}$, определенное так: $x_i^{\varepsilon} = x_i$; $i \leq d-1$, $x_d^{\varepsilon} = 1$. Тогда по лемме 6 $U^{\varepsilon} = A$. Максимальный идеал $M(j) = M(j_1, \ldots, j_d)$ переводится ε в $M(j_1, \ldots, j_{d-1})$ при $j_d = 0$, либо в $K\Gamma_{d-1}$ при $j_d \neq 0$. Поэтому, отмечая множество $\mathfrak{Z} \subset V_{n,d}$ индексом (d) вверху, а его проекции в $V_{n,d-1}$ - индексом $(d-1)$, получаем:

$$A = \prod_{(j) \in \mathfrak{Z}^{(d-1)} \subset V_{n,d-1}} M_{(j)}^{b(j)}$$

Из последнего равенства вытекает, что $\sqrt{A} = \prod_{(j) \in \mathfrak{Z}^{(d-1)} \subset V_{n,d}} M(j)$

Так как радикал вербального идеала определяет модуль $V_{m,d-1}$, то в качестве $V_{m,d-1}$ может быть выбран $V_{n,d-1}$, а тогда множество $\tilde{\mathfrak{Z}}$ необходимо совпадает с $\mathfrak{Z}^{(d-1)}$.

Следовательно, $A = \prod_{(j) \in \mathfrak{Z}^{(d-1)}} M_{(j)}^{b(j)} = \prod_{(j) \in \mathfrak{Z}^{(d-1)}} M_{(j)}^{a(j)}$

Пользуясь тем, что примарные компоненты $M_{(j)}^{b(j)}$ однозначно определены идеалом A, заключаем, что функции $b(j)$ и $a(j)$ равны. Идеалы U', A' определяются (Л.5) подмножествами $\mathfrak{Z}_1^{(d)} \subset \mathfrak{Z}^{(d)}$, $\tilde{\mathfrak{Z}}_1^{(d-1)} \subset \mathfrak{Z}^{(d-1)}$ соответственно, которые описываются формулами:

$$\mathfrak{Z}_1^{(d)} = \{(j) \in \mathfrak{Z}^{(d)} \mid b(j) \geq 2\},$$

$$\tilde{\mathfrak{Z}}_1^{(d-1)} = \{(j) \in \mathfrak{Z}^{(d-1)} \mid b(j) \geq 2\} \qquad (1)$$

Далее, тривиально проверяется, что

$$\mathfrak{Z}_1^{(d-1)} = \mathfrak{Z}_1^{(d)} \cap \mathfrak{Z}_0^{(d-1)} = \{(j) \in \mathfrak{Z}^{(d-1)} \mid \ell(j) \geq 2\}$$

Из этих равенств, ввиду второй из формул ($'$), вытекает:

$$\mathfrak{Z}^{(d-1)} = \tilde{\mathfrak{Z}}_1^{(d-1)}$$

Это, однако, то, что нам требуется, т.к. $A' = \prod\limits_{(j)\in\tilde{\mathfrak{Z}}_1^{(d-1)}} M_{(j)}^{\ell(j)-1}$,

а $\mathcal{U}' \cap K\Gamma_{d-1} = (\mathcal{U}')^{\varepsilon} = \prod\limits_{(j)\in\mathfrak{Z}_1^{(d-1)}} M_{(j)}^{\ell(j)-1}$,

что, очевидно, совпадает с A.

Лемма 9. Пусть T - подкольцо в R, I - идеал в R, $\sqrt{I}$ - его радикал, $\sqrt{I\cap T}$ - радикал $I\cap T$, вычисленный в колце T. Тогда $\sqrt{I\cap T} = \sqrt{I} \cap T$.

Доказательство. Предположим, что $x \in \sqrt{I\cap T}$. Тогда $\exists m\ (x^m \in I\cap T$, откуда следует $x \in \sqrt{I} \cap T$. Следовательно, $\sqrt{I\cap T} \subset \sqrt{I} \cap T$. Аналогично устанавливается обратное включение. Теперь можно доказать основную

Теорему 4.

1) Каждый вербальный идеал в $K\Gamma$ определяется своей первой проекцией.

2) Полугруппа $S(\Gamma) \cong S(\Gamma_1)$ при отображении, индуцированном проектированием Γ на Γ_1.

3) Всякий вербальный идеал в $K\Gamma$ порождается (как вербальный) своими элементами зависящими от одной групповой переменной.

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{U} \in S(\Gamma)$ и $\{\mathcal{U}_d \mid \mathcal{U}_d = \mathcal{U} \cap K\Gamma_d\}$ соответствующая специальная связанная последовательность. Выберем d-ую проекцию $\mathcal{U}_d$ и пусть $\mathfrak{Z}^{(d)} \supset \mathfrak{Z}_1^{(d)} \supset \ldots \supset \mathfrak{Z}_k^{(d)}$ - кортеж, построенный в теореме [3]

Докажем индукций по k, что кортеж для $\mathcal{U}_{d-1}$ состоит из проекций $\mathfrak{Z}_i^{(d)}$, $i=1,2,\ldots k$, т.е. равен:

$$\mathfrak{Z}^{(d-1)} \supset \mathfrak{Z}_1^{(d-1)} \supset \ldots \supset \mathfrak{Z}_k^{(d-1)}$$

При $k=0$ первая часть лемма 8 показывает, что $\mathcal{U}_{d-1}$ соответствует $\mathfrak{Z}^{(d-1)}$. Допуст..., что для вербальных идеалов с длиной кортежа $k \leq n-1$ предположение индукции выполнено. Пусть $\mathcal{U}_d$ соответствует кортеж $\mathfrak{Z}^{(d)} \supset \mathfrak{Z}_1^{(d)} \supset \ldots \supset \mathfrak{Z}_{n-1}^{(d)}$ длины n. Положим $\mathcal{U}'_d = \mathcal{U}_d : \sqrt{\mathcal{U}_d}$. Согласно теореме [3] $\mathcal{U}'_d$ соответствует кортеж $\mathfrak{Z}_1^{(d)} \supset \mathfrak{Z}_2^{(d)} \supset \ldots \supset \mathfrak{Z}_{k-1}^{(d)}$, длины $n-1$. Аналогично, кортеж для $\mathcal{U}_{d-1}$ состоит из вполне характеристического множества, отвечающего $\sqrt{\mathcal{U}_{d-1}}$, и кортежа для $\mathcal{U}'_{d-1} = \mathcal{U}_{d-1} : \sqrt{\mathcal{U}_{d-1}}$. По лемме 8 и индуктивному предположению, кортеж для $\mathcal{U}'_{d-1}$ есть $\mathfrak{Z}_1^{(d-1)} \supset \ldots \supset \mathfrak{Z}_{n-1}^{(d-1)}$. С помощью леммы 9 получаем, что $\sqrt{\mathcal{U}_{d-1}}$ - проекция $\sqrt{\mathcal{U}_d}$, а следовательно, наступает случай $k=0$. Значит кортеж $\sqrt{\mathcal{U}_{d-1}}$ есть $\mathfrak{Z}^{(d-1)}$, что вместе с предыдущим заканчивает индуктивный шаг. Проектируя теперь последовательно $\mathcal{U}_{d-1}$ в $K\Gamma_{d-2}, \ldots, \mathcal{U}_{d-\ell}$ в $K\Gamma_{d-\ell-1}$, $\ell=1,2,\ldots,d-2$ придем к идеалу $\mathcal{U}_1 (= \mathcal{U}_d \cap K\Gamma_1)$. Соответствующий ему кортеж будет состоять из проекций множеств $\mathfrak{Z}_i^{(d)}$, $i=1,2,\ldots,k$ на $V_{n,1} = \mathbb{Z}_n$.

Согласно следствию I из предложения 3, множества $\mathfrak{Z}_i^{(d)}$ однозначно определяются своими проекциями на $\mathbb{Z}_n$. С другой стороны, кортеж $\mathfrak{Z}^{(d)} \supset \mathfrak{Z}_1^{(d)} \supset \ldots \supset \mathfrak{Z}_k^{(d)}$ полностью определяет идеал $\mathcal{U}_d$. Следовательно, выбор $\mathcal{U}_1$ определяет всю связанную последовательность $\{\mathcal{U}_d\}$, а вместе с ней идеал $\mathcal{U}$, что и требовалось.

2) Обозначим, как в лемме 6, ε - эпиморфизм Γ на Γ_1, определяемый так:

$$x_1^{\varepsilon} = x_1, \quad x_i^{\varepsilon} = 1, \quad i > 1$$

Рассуждение, использованное в лемме 6, показывает, что отображение $\mathcal{U} \to \mathcal{U}^{\varepsilon} = \mathcal{U} \cap K\Gamma_1 = \mathcal{U}_1$ - эпиморфизм $S(\Gamma)$ на $S(\Gamma_1)$. Используя пункт I) этой теоремы, убеждаемся, что ε - изоморфизм $S(\Gamma)$ и $S(\Gamma_1)$;

3) Легко видеть, что $S(\Gamma)$ замкнуто относительно образования пересечений. Поэтому можно говорить о наименьшем специальном идеале, порожденном данным множеством из $K\Gamma$.

Предположим, что U - вербальный идеал в $K\Gamma$ и U_1 - его I-ая проекция. Обозначим через U_1^s - наименьший вербальный идеал, порожденный множеством U_1. Ввиду вербальности U, $U_1^s \subset U$. Из этого включения, вытекает, что

$$U_1^s \cap K\Gamma_1 \subset U \cap K\Gamma_1 = U_1$$

Так как обратное включение тривиально выполняется, то $U_1^s \cap K\Gamma_1 = U_1$. Поэтому $U_1^s = U$, что доказывает 3). Это завершает доказательство теоремы.

VIII. Строгие многообразия полных абелевых групп

Структура полугруппы $S(\Gamma)$ полной абелевой группы Γ может быть полностью описана. Это достигается благодаря имеющемуся описанию вербальных идеалов свободных абелевых групп ранга d и тому факту, что такие группы образуют локальную систему в полных абелевых группах без кручения. В действительности, это единственный случай, который необходимо рассмотреть, т.к. каждая полная группа есть эпиморфный образ полной без кручения.

Группу рациональных чисел будем обозначать через $Q(x)$, записывая её элементы мультипликативно, т.е. в виде $x^{m/n}$, где m/n - обыкновенная дробь $(m, n \in \mathbb{Z})$. В случае, если будет рассматриваться некоторое семейство групп рациональных чисел, то элементы x будут индексироваться. Подгруппа группы $Q(x)$, порожденная элементом $x^{m/n}$ будет обозначаться $\mathbb{Z}(x^{m/n})$. Если Γ - некоторая группа, то через Δ_Γ обозначим фундаментальный идеал в $K\Gamma$ т.е. множество элементов:

$$\Delta_\Gamma = \{ f \in K\Gamma \mid f = \sum \alpha_i \gamma_i \ , \ \sum \alpha_i = 0 \}$$

Напомним, что если $\Gamma = Q(x_1) \times \dots \times Q(x_d)$, то $End\,\Gamma \cong Q_d$ - полному кольцу м трип над полем Q. Пусть H - подгруппа в $\Gamma = Q(x_1) \times \dots \times Q(x_d)$ Тогда нетрудно проверить (инъективность Γ), что каждый эндоморфизм $\eta : H \to H$ поднимается до эндоморфизма $\hat{\eta} : \Gamma \to \Gamma$. Поэтому с помощью А.3 убеждаемся, что из $\mathcal{U} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ следует $\mathcal{U} \cap KH \in \mathfrak{S}(H)$.

Обозначим через L локальную систему подгрупп группы H, состоящую из групп вида:

$$H = \mathbb{Z}(x_1^{z_1}) \times \dots \times \mathbb{Z}(x_d^{z_d}), \ z_i \neq 0 \ , \ 1 \le i \le d$$

Л е м м а IO. Если $0 \neq \mathcal{U} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$, то

$$\mathcal{U} \cap KH = \Delta_H^{S(H)}$$

для всякой $H \in L$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 \neq \mathcal{U} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. Очевидно, что найдется подгруппа $H \in L$ такая, что $A = \mathcal{U} \cap KH \neq 0$. Тогда, как отмечалось выше, $A \in \mathfrak{S}(H)$. Поэтому согласно следствию из Пр. I найдутся n, t такие, что $(x_i^{nz_i} - 1)^t \in A$, $i = 1, 2, \dots, d$. Построим эндоморфизм $\eta : x_i \to x_i^{(nz_i)^{-1} q_i}$, $i = 1, \dots d$, и где q_i - некоторые рациональные числа. Специальность идеала $\mathcal{U}$ позволяет утверждать, что

$$((x_i^{nz_i} - 1)^t)^\eta = (x_i^{q_i} - 1) \in \mathcal{U}, \ i = 1, 2, \dots, d \qquad (')$$

Поэтому ясно, что $\mathcal{U} \cap KH \neq 0$ для всякого $H \in L$

Разделим теперь доказательство на два случая:

а) $хар.\ K = p \neq 0$

б) $хар.\ K = 0$

В случае а), очевидно, найдется такое q, что уже $x_i^q - 1 \in \mathcal{U}$, $i = 1, 2, \dots, d$. Вследствие специальности отсюда вытекает, что для всяких $q_1, \dots, q_d$ $(x_i^{q_i} - 1) \in \mathcal{U}$.

Поскольку такие элементы порождают Δ_Γ, получаем: $\Delta_\Gamma \subset U$, а обратное включение всегда тривиально выполняется. Поэтому $U = \Delta_\Gamma$, и тем самым показано, что над полем хар. $K = p \neq 0$ $S(\Gamma)$ состоит только из нулевого идеала и Δ_Γ. б) хар. $K=0$

б) Воспользуемся опять формулой ($'$). Обозначим $y_i = x_i^{q_i}\ldots$, $i=1,\ldots d$. Тогда $A \cap K\mathbb{Z}(y_1) \ni (y_1-1)^t$, и следовательно, равно $\Delta^s_{\mathbb{Z}(y_1)}$. Группа H является свободной абелевой группой ранга d с образующими $y_1,\cdots,y_d$. Специальные идеалы такой группы при хар. $K=0$, согласно теоремам пункта УII, определяются своими пересечениями с прямыми слагаемыми ранга I, например, с $K\mathbb{Z}(y_1)$. В нашем случае это пересечение - $\Delta^s_{\mathbb{Z}(y_1)}$, а единственным идеалом в $S(H)$ сокращающимся до $\Delta^s_{\mathbb{Z}(y_1)}$ будет Δ^s_H. Поэтому $A = \Delta^s_H$, что и требовалось.

Л е м м а II. Если для некоторой $H \in L$ и $U \in S(\Gamma)$ $U \cap KH = \Delta^s_H$, то $U \supset \Delta^s_\Gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что Δ^s_Γ порождается элементами

$$(x_1^{q_1}-1)^{i_1}\ldots(x_d^{q_d}-1)^{i_d}, \text{ где } \sum_{j=1}^{d} i_j = s, \text{ а } q_1,\cdots q_d$$

всевозможные наборы рациональных чисел.

Предположим, что для $H = \mathbb{Z}(x_1^{z_1})\times\cdots\times\mathbb{Z}(x_d^{z_d})$ идеала U выполнены условия леммы. Тогда для всякого набора натуральных чисел i_j, $1 \le j \le d$, таких, что $\sum_{j=1} i_j = s$

$$(x_1^{z_1}-1)^{i_1}\cdots(x_d^{z_d}-1)^{i_d} \in U$$

Пользуясь автоморфизмами $x_i \to x_i^{z_i^{-1}q_i}$, $1 \le i \le d$, получаем

$$(x_1^{q_1}-1)^{i_1}\cdots(x_d^{q_d}-1)^{i_d} \in U,$$

что доказывает лемму.

Т е о р е м а 5. Пусть $\Gamma = Q(x_1)\times\cdots\times Q(x_d)$, хар. $K=0$

Тогда $S(\Gamma)$ состоит из степеней фундаментального идеала, которые все различны.

Доказательство. Начнем с последнего утверждения теоремы. Легко проверяется следующий факт: для группы $Q(x)$ все степени фундаментального идеала $\Delta_{Q(x)}$ - различны. Отсюда уже следует, что все степени Δ_Γ - различны, т.к. $Q(x)$ - эпиморфный образ Γ, а при этом ясно, что Δ_Γ переходит в $\Delta_{Q(x)}$.

Отметим две формулы:

$$U = \bigcup_{H \in L} (U \cap KH) \quad \text{и} \quad \Delta_\Gamma^m \cap KH \supseteq \Delta_H^m .$$

Первая формула верна по определению локальной системы, а вторая - очевидна.

Предположим теперь, что $U \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ и m - наименьшее натуральное число такое, что $U \supset \Delta_\Gamma^m$ (см.Л.), но $U \not\supset \Delta_\Gamma^{m-1}$. Если $U \neq \Delta_\Gamma^m$, то, в силу приведенных выше формул, найдется $H \in L$ такое, что

$$U \cap KH = \Delta_H^s , \quad s < m$$

Тогда по лемме [11] отсюда вытекает, что $U \supset \Delta_\Gamma^s \supsetneq \Delta_\Gamma^{m-1}$. Полученное включение, однако, противоречит минимальности m. Значит $s \geq m$, что завершает доказательство теоремы.

Общий случай. В общем случае пусть Λ - некоторое множество и $\Gamma = \prod_{\lambda \in \Lambda} Q(x_\lambda)$ - полная абелева группа без кручения. Обозначим конечное подмножество $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \subset \Lambda$ через (λ)

и пусть

$$L = \{\Gamma(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \Gamma_{(\lambda)} = \prod_{j=1}^{n} Q(x_{\lambda_j})\}$$

- локальная система подгрупп группы Γ. Пусть $U \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. Легко видеть, что все члены локальной системы L удовлетворяют условиям А.3 и поэтому $U \cap K\Gamma_{(\lambda)} \in \mathfrak{S}(\Gamma_{(\lambda)})$. Теперь предыдущие рассмотрения этого пункта показывают, что $U \cap K\Gamma_{(\lambda)} = \Delta_{\Gamma_{(\lambda)}}^{s(\lambda)}$, причем, если хар. $K = p \neq 0$,

то $s_{(\lambda)} = 1$ для всех (λ). Отсюда очевидно следует, что в случае хар $K = p$ $U = \Delta_\Gamma$ для всякого $U \in \mathfrak{S}(\Gamma)$.

Над полем характеристики 0 $S(\lambda)$ не обязана быть единицей, но всегда будет константой, как функция (λ). Действительно, если вопреки нашему утверждению для двух наборов $(\lambda)_1 \neq (\lambda)_2$ окажется, что $S_1 = S_{(\lambda)_1} \neq S_{(\lambda)_2} = S_2$ то объединим эти наборы в третий набор $(\lambda)_3$ и возьмем соответствующее ему значение S_3. Тогда

$$\Delta^{S_1}_{\Gamma_{(\lambda)_1}} = \mathcal{U} \cap K\Gamma_{(\lambda)_1} = (\mathcal{U} \cap K\Gamma_{(\lambda)_3}) \cap K\Gamma_{(\lambda)_1} = \Delta^{S_3}_{\Gamma_{(\lambda)_3}} \cap K\Gamma_{(\lambda)_1} = \Delta^{S_3}_{\Gamma_{(\lambda)_1}}$$

Отсюда по теореме 5 следует, что $S_1 = S_3$. Аналогично доказывается равенство $S_2 = S_3$. Значит $S(\lambda) = S$ при всех (λ), и легко видеть, что при этом S $\mathcal{U} = \Delta^S_\Gamma$. Таким образом для групп без кручения получена

Т е о р е м а 6. Пусть A - полная абелева группа. Тогда $S(A)$ состоит лишь из степеней фундаментального идеала.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A - полная абелева группа. Тогда A - эпиморфный образ полной абелевой группы $\hat{A}$, без кручения. При этом (см. [2]) эпиморфизм групп индуцирует эпиморфизм полугрупп $S(\hat{A})$ на $S(A)$. Так как при эпиморфизмах фундаментальный идеал переходит в фундаментальный, то утверждение теоремы теперь очевидно.

Последняя теорема может быть несколько усилена. А именно, заметим, что среди абелевых групп кроме полных вербально простыми являются еще лишь абелевы группы простой экспоненты. Для таких групп как доказано в [3] полугруппа вербальных идеалов состоит только из степеней Δ. Следовательно установлена

Т е о р е м а 6′. Пусть A - вербально простая абелева группа. Тогда полугруппа ее вербальных идеалов состоит из степеней фундаментального идеала.

Я выражаю глубокую благодарность проф. Б.И. Плоткину, под руководством которого написана настоящая работа.

Литература

1. Б.И.Плоткин. Тр.Рижского алгебраического семинара, т.I, 241-252 (1969).
2. Б.И.Плоткин. Радикалы и многообразия в представлениях групп. Латв.матем. ежегодник, 1971 (в печати).
3. Л.Е.Кроп, А.С.Гринберг. Вербальные идеалы абелевых групп экспоненты p (см. настоящий сборник).
4. J.Lambek. Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publishing Company, 1966.
5. Б.Л.Ван дер Варден. Современная алгебра, т.2. Гостехиздат, 1947.
6. I.Kaplansky. Kommutative Ring, Лекции.
7. Зарисский О., Самюэль. Коммутативная алгебра, т.I, М., 1963.

ВЕРБАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП ЭКСПОНЕНТЫ p

Л.Е.Крон, А.С.Гринберг

I. В работах [1,2] Б.И.Плоткиным рассматриваются понятия многообразия линейных пар и строгого многообразия представлений фиксированной группы Г. Обнаружилось взаимооднозначное соотвествие между многообразиями пар и некоторыми (т.н. специальными) идеалами в KF_0 (групповой алгебре свободной группы счетного ранга над полем К), а также соответствие между строгими многообразиями представлений группы Г и некоторыми (т.н. вербальными) идеалами групповой алгебры КГ. При этом возникающие полугруппы многообразий изоморфны полугруппами соответствующих идеалов.

Для произвольной неединичной группы Г существуют три тривиальных вербальных идеала в КГ: нулевой, вся алгебра и фундаментальный идеал Δ . Пусть Г - абелева группа экспоненты p. Мы опишем все вербальные идеалы в КГ в двух случаях:

I) К - поле характеристики q ($q \neq p$, $q = 0$);

2) К - поле характеристики p.

В первом случае нетривиальных вербальных идеалов нет. Во втором они исчерпываются степенями фундаментального идеала Δ . Случай I) описан Л.Е.Кропом, случай 2) - А.С.Гринбергом.

II. Обозначения и замечания.

$\Gamma(x_i)$ - циклическая группа порядка p с образующим x_i.
$\Gamma_n = \Gamma_n(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n}\Gamma(x_i)$ - элементарная p-группа. К - поле, $char$ К - характеристика поля К. R = $K\Gamma_n$ - групповая алгебра группы Γ_n над К, т.е. алгебра формальных сумм

$\sum \beta_j \gamma_j$, $\beta_j \in K, \gamma_j \in \Gamma_n$. Δ - идеал в R, все элементы которого $\sum \beta_j \gamma_j$ таковы, что $\sum \beta_j = 0$. $Specm\, R$ - пространство максимальных идеалов из R. Z_p - поле вычетов по модулю р.

Идеал V из R назовем вербальным, если он инвариантен относительно всех эндоморфизмов группы Γ_n. Так как Γ_n является свободной группой ранга n в многообразии всех абелевых групп экспоненты р, то каждое отображение в Γ_n образующих x_i продолжается до эндоморфизма группы Γ_n. Легко видеть, что для рассматриваемой группы $\Gamma_n = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ такое определение вербальности не отличается от данного в [1,2]. Отметим, что все вербальные идеалы из R лежат в Δ.

III. Т е о р е м а . Пусть Г - абелева группа экспоненты р, $q = char\, K \neq p$. Тогда в КГ нет нетривиальных вербальных идеалов.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Сначала докажем теорему для конечно-порожденных и, следовательно, конечных подгрупп $\Gamma_n = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ группы Г. Достаточно рассмотреть случай, когда К алгебраически замкнуто. Действительно, пусть U - алгебраическое замыкание поля К. Каждому идеалу I из КГ может быть сопоставлен идеал UI в $U\Gamma$. Так как пересечение $UI \cap K\Gamma$ равно I, то такое соответствие взаимооднозначно. Легко видеть, что при этом соответствии вербальные идеалы переходят в вербальные.

Итак, пусть К - алгебраически замкнуто. В этом случае, как хорошо известно (см., например, [3]), R распадается на прямую сумму конечного числа полей, изоморфных К. Число m этих полей совпадает с размерностью R как векторного пространства над К, т.е. $m = p^n$.

Единицы этих полей, т.е. минимальные идемпотенты кольца, определяются однозначно.

Пусть $K\Gamma(x_i)$ - групповая алгебра группы $\Gamma(x_i)$, рассматриваемая как подкольцо в R. Ее идемпотенты обозначим $e^{(i)}_{k_i}$, $k_i = 0, 1, \ldots, p-1$. Пусть ζ - первообразный корень из единицы степени р. Нетрудно видеть, что $e^{(i)}_{k_i}$ могут быть записаны в виде

$$e^{(i)}_{k_i} = \frac{\zeta^{k_i}}{p}(x_i-\zeta^0)\ldots(\widehat{x_i-\zeta^{k_i}})\ldots(x_i-\zeta^{p-1}), \qquad (I)$$

где знак $(\widehat{\;\;})$ означает пропуск соответствующего сомножителя. С другой стороны (см., например [3]), хорошо известно, что идемпотенты алгебры R исчерпываются всевозможными произведениями $e^{(1)}_{k_1} e^{(2)}_{k_2} \ldots e^{(n)}_{k_n}$, причем k_i независимо меняются от 0 до p-I.

Элементы кольца R удобно рассматривать как функции на $Specm\, R$. При этом, так как R классически полупросто, две такие функции совпадают тогда и только тогда, когда элементы равны.

Пусть $K[x'_1,\ldots,x'_n]$ - кольцо многочленов от n переменных над К. Тогда существует эпиморфизм $\nu: K[x'_1,\ldots,x'_n] \to R$ отображающий x'_i в x_i. Ядром ν служит идеал $Ker\,\nu = (x_1'^{p}-1,\ldots,x_n'^{p}-1)$. Хорошо известно, что максимальные идеалы в $K[x'_1,\ldots,x'_n]$ имеют вид $(x'_1-\alpha_1, x'_2-\alpha_2,\ldots,x'_n-\alpha_n)$, где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K$. Максимальный идеал содержит $Ker\,\nu$ тогда и только тогда, когда многочлены $x_i'^{p}-1$ обращаются в нуль в точке $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, т.е. $\alpha_i^{p}=1$.

Следовательно, все α_i являются корнями из единицы и, значит, степенями элемента ζ. В силу взаимнооднозначного соответствия между максимальными идеалами в R и указанными максимальными идеалами в $K[x'_1,\ldots,x'_n]$ $Specm\, R$ состоит из всех максимальных идеалов вида: $(x'_1-\zeta^{k_1},\ldots,x'_n-\zeta^{k_n})$ $0 \le k_i \le p-1$. Эти максимальные идеалы обозначим через $M_{k_1,\ldots,k_n}$, или просто точками $(\zeta^{k_1},\ldots,\zeta^{k_n})$. Значение элемента f из R в точке $(\zeta^{k_1},\ldots,\zeta^{k_n})$ есть не что иное, как вычет по модулю $M_{k_1,\ldots,k_n}$ или значение соответствующей f функции на $M_{k_1,\ldots,k_n}$.

Отметим, что каждый идемпотент $\varepsilon = e^{(1)}_{k_1}\ldots e^{(n)}_{k_n}$ лежит во всех максимальных идеалах, кроме $M_{k_1,\ldots,k_n}$, причем значение ε на $M_{k_1,\ldots,k_n}$ равно единице. Этим свойством минимальные идемпотенты определяются однозначно. Чтобы закончить доказательство теоремы, остается показать, что для любых двух идемпотентов $\varepsilon_1 = e^{(1)}_{k_1}\ldots e^{(n)}_{k_n}$ и $\varepsilon_2 = e^{(1)}_{t_1}\ldots e^{(n)}_{t_n}$ найдется эндоморфизм η алгебры R, индуцируемый групповым эндоморфизмом, при котором $\varepsilon_1^{\eta} = \varepsilon_2$

Пусть η - некоторый эндоморфизм группы Γ_n. При этом $x_i^\eta = x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\alpha_{ji} \in Z_p$. Ясно, что Γ_n можно рассматривать как векторное пространство над Z_p, и в базе $x_1, \dots, x$ гомоморфизм η имеет матрицу

$$A_\eta = \begin{bmatrix} \cdots & \alpha_{1i} & \cdots \\ \vdots & \alpha_{2i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ \cdots & \alpha_{ni} & \cdots \end{bmatrix}$$

Пусть $\varepsilon_1 = e_{k_1}^{(1)} \dots e_{k_n}^{(n)}$ - некоторый минимальный идемпонент в Δ. Найдем его образ при действии η. Из (I) имеем (2)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{p^n}\Big[\prod_{i=1}^{n} \zeta^{k_i}(x_i - \zeta^0) \dots (x_i \widehat{-} \zeta^{k_i}) \dots (x_i - \zeta^{p-1})\Big] \qquad (2)$$

Теперь

$$\varepsilon_1^\eta = \frac{1}{p^n}\Big[\prod_{i=1}^{n} \zeta^{k_i}(x_1^{\alpha_{1i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}} - \zeta^0) \dots (x_1^{\alpha_{1i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}} - \zeta^{k_i}) \dots (x_1^{\alpha_{1i}} \dots x_n^{\alpha_{ni}} - \zeta^{p-1})\Big] \qquad (3)$$

При этом, если η - автоморфизм, то ε_1^η тоже минимальный идемпотент. Если $(\zeta^{s_1}, \dots, \zeta^{s_n})$ - одна из точек в $Spec\, R_1$ то значение идемпотента ε_1^η в этой точке равно

$$\frac{1}{p^n}\Big[\prod_{i=1}^{n} \zeta^{k_1}(\zeta^{s_1\alpha_1 + \dots + s_n\alpha_{ni}} - \zeta^0) \dots (\zeta^{s_1\alpha_{1i} + \dots + s_n\alpha_{ni}} - \zeta^{k_i}) \dots (\zeta^{s_1\alpha_{1i} + \dots + s_n\alpha_{ni}} - \zeta^{p-1})\Big]$$

Становится ясно, что значение ε_1^η в точке $(\zeta^{s_1}, \zeta^{s_n})$ отлично от нуля, если $s_1\alpha_{1i} + \dots + s_n\alpha_{ni} = k_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. На матричном языке получаем условие:

$$(s_1, \dots, s_n) A_\eta = (k_1, \dots, k_n) \qquad (4)$$

Пусть $(t_1, \dots, t_n)$ удовлетворяет равенству (4) при подстановке в левую часть. Тогда $\varepsilon_1^\eta = e_{t_1}^{(1)} \dots e_{t_n}^{(n)}$. Множество векторов $(s_1, \dots, s_n)$ образует векторное пространство над полем Z_p с операциями по модулю р. Идемпотент ε_2 по условию лежит в Δ, и поэтому вектор $(t_1, \dots, t_n)$ отличен от нуля. Остается использовать лемму.

Лемма. Пусть К-поле, V - n-мерное векторное пространство над К, $u, v \in V$, $u, v \neq 0$. Тогда существует обратимая матрица А, такая, что $vA = u$.

Доказательство очевидно.

Тем самым для конечно-порожденных групп теорема доказана. Переходя к общему случаю абелевой группы Г экспоненты р, возьмем вербальный идеал $\mathfrak{A}$, $0<\mathfrak{A}<K\Gamma$. Пусть $w\in\Delta_{K\Gamma}$. Найдется конечная подгруппа Γ_w в Г, такая, что $w\in K\Gamma_w$. Пусть u ненулевой элемент в $\mathfrak{A}$. Выберем конечную подгруппу $\Gamma_u\subset\Gamma$, для которой $u\in K\Gamma_u$. Образуем $\tilde{\Gamma}=\Gamma_w\times\Gamma_u$ – конечную подгруппу в Г, содержащую Γ_w и Γ_u. Идеал $\mathfrak{A}\cap K\tilde{\Gamma}$ является, очевидно, вербальным в $K\tilde{\Gamma}$ и отличным от нуля. Поэтому он может быть только $\Delta_{K\tilde{\Gamma}}$. Следовательно, $w\in\mathfrak{A}\cap K\tilde{\Gamma}\subset\mathfrak{A}$.

Теорема доказана.

IУ. Пусть теперь $\operatorname{char}K=p$. Г – абелева группа экспоненты р с порождающими x_α, $\alpha\in J$, где J – множество индексов (быть может, бесконечное). Опишем все вербальные идеалы в КГ.

Заметим, что любой элемент v из Δ представим в виде

$$v=\sum a_s(x_{\alpha_1}-1)^{s_1}\cdots(x_{\alpha_n}-1)^{s_n},\ \alpha_i\in J,\ s=(s_1,\dots,s_n),\ s_i=0,1,\dots,p-1. \tag{5}$$

Ограничение для s_i следует из соотношения в КГ:

$$(\gamma-1)^p=\gamma^p-1=0,\quad \gamma\in\Gamma \tag{6}$$

Нам потребуются следующие равенства в КГ: если $\gamma\in\Gamma$, $1\le m\le p-1$, то

$$\gamma^m-1=m(\gamma-1)+C_m^2(\gamma-1)^2+\cdots$$
$$(\gamma^m-1)^2=m^2(\gamma-1)^2+2mC_m^2(\gamma-1)^3+\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\gamma^m-1)^{p-1}=m^{p-1}(\gamma-1)^{p-1} \tag{7}$$

Пусть $v=v(x_{\alpha_1},\dots x_{\alpha_n})$ элемент КГ, записанный в виде (5). Выделим переменную x_{α_1}. Тогда v можно записать в виде суммы $v_0+v_1+\dots+v_{p-1}$, где $(\forall z)v_z$ – сумма всех слагаемых в сумме (5), у которых есть множитель $(x_{\alpha_1}-1)^z$.

Л е м м а I. Пусть V – вербальный идеал в КГ, $v=v(x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_n})\in V$ и по переменной x_{α_1} $v=v_0+\dots+v_{p-1}$. Тогда для $(\forall r)(v_r \in V)$ ..

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $v = v(x_1, \dots, x_n)$, т.е. $\alpha_i = i$. В процессе доказательства будем писать $x_1 = x$. По условию $v_r = (x-1)^r v_r'$, где $v_r' = v_r'(x_2, \dots x_n)$. Построим серию эндоморфизмов ψ_m группы Г (а значит, и алгебры КГ), действующих на образующие следующим образом:

$$\psi_m(x) = x^m, \ \psi_m(x_i) = x_i^0, \ i \neq 1, \ 1 \leq m \leq p-1$$

Найдем образ $\psi_m(v_r)$. В силу (7)

$$\psi_m(v_r) = (x^m - 1)^r v_r' = m^r (x-1)^r v_r' + \sum_{t=1}^{p-1-r} \beta_t^{(m)} (x-1)^{r+t} v_r' =$$
$$= m^r v_r + \sum_{t=1}^{p-1-r} \beta_t^{(m)} (x-1)^t v_r$$

Тогда

$$\psi_m(v) = \sum_{r=0}^{p-1} \psi(v_r) = \sum_{r=0}^{p-1} m^r v_r + \sum_{\substack{1 \leq r \leq p-1 \\ 1 \leq t \leq p-1-r}} \delta_{t,r} (x-1)^t v_r \equiv 0 \pmod V \quad (8)$$

Последнее сравнение в (8) оправдано, так как идеал V вербален.

Итак, мы получили набор (8) сравнений по модулю V Отметим, что в силу выбора v_r и соотношения (6)

$$(x-1)^\ell v_r = 0 \quad \text{при} \quad r + \ell \geq p \quad (9)$$

Рассмотрим теперь определитель, составленный из коэффициентов при v_r в сравнениях (8) при $m = 1, 2, \dots p-1$

$$\xi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 2^{p-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & p-1 & \dots & (p-1)^{p-1} \end{vmatrix}$$

Отметим, что ξ (и все его главные миноры) являются определителями Вандермонда. Отсюда

$$\xi = \prod_{1 \leq k < \ell \leq p-1} (\ell - k) \neq 0 \pmod p$$

Покажем сначала, что

$$(\forall r)(\forall t)[(x-1)^t v_r \equiv 0 (mod\, V)] \qquad (10)$$

Применим индукцию по r и t. При $t=p$ и произвольном r утверждение (10) тривиально.

Пусть для $t=p-k$ и всех r (10) уже доказано. Умножим каждое из сравнение (8) на $(x-1)^{p-(k+1)}$. Получим систему

$$(x-1)^{p-(k+1)} v_0 + (x-1)^{p-(k+1)} v_1 + \ldots + (x-1)^{p-(k+1)} v_k \equiv 0 (mod\, V)$$

$$(x-1)^{p-(k+1)} v_0 + 2(x-1)^{p-(k+1)} v_1 + \ldots + 2^k (x-1)^{p-(k+1)} v_k + \Sigma_2 \equiv 0 (mod\, V)$$

$$\vdots$$

$$(x-1)^{p-(k+1)} v_0 + k(x-1)^{p-(k+1)} v_1 + \ldots + k^k (x-1)^{p-(k+1)} v_k + \Sigma_k \equiv 0 (mod\, V)$$

где ввиду (9) на месте Σ_r стоят линейные комбинации одночленов (относительно $(x-1)$) вида:

$$(x-1)^t v_r, \ t=p-2, p-3, \ldots, p-k, \ r \geq 1.$$

По предположению индукции все $\Sigma_r \equiv 0 (mod\, V)$
Значит имеют место сравнения:

$$(x-1)^{p-(k+1)} v_0 + \ldots + (x-1)^{p-(k+1)} v_k \equiv 0 (mod\, V)$$

$$\vdots$$

$$(x-1)^{p-(k+1)} v_0 + k(x-1)^{p-(k+1)} v_1 + \ldots + k^k (x-1)^{p-(k+1)} \cdot v_k \equiv 0 (mod\, V)$$

Определитель этой системы, являющийся одним из главных миноров определителя ξ, как доказано выше, не равен нулю. Тогда эта система разрешима и $(x-1)^{p-(k+1)} v_r \equiv 0 (mod\, V)$, $r=0,1,\ldots k$. Итак, (10) полностью доказано. Поэтому система сравнений (8) переходит в систему:

$$\sum_{r=0}^{p-1} m^r v_r \equiv 0 (mod\, V), \ 1 \leq m \leq p-1.$$

Её определитель есть $\xi \neq 0$. Отсюда следует, что $(\forall r)$ $v_r \in V$

Лемма доказана.

С л е д с т в и е . Каждый вербальный идеал V порождается набором одночленов.

Доказательство. Пусть $v=\sum a_s(x_1-1)^{s_1}\cdots(x_n-1)^{s_n}\in V$.

Пусть $v_{s_1}^{(1)}$ – сумма всех слагаемых элемента v, имеющих по (x_1-1) степень s_1. По лемме I $v_{s_1}^{(1)}\in V$. Очевидно, что в разложении $v_{s_1}^{(1)}$ в сумму одночленов по степеням $(x_1-1),\dots,(x_n-1)$ одночлен $a_s(x_1-1)^{s_1},\dots,(x_n-1)^{s_n}$ будет входить. Применяя лемму I к элементу $v_{s_1}^{(1)}$, получаем: в V лежит элемент $v_{s_1,s_2}^{(2)}$ – сумма всех слагаемых элемента v, имеющих по $(x_1-1),(x_2-1)$ степени s_1, s_2. Через не более чем n шагов процесс закончится выделением $a_s(x_1-1)^{s_1}\dots(x_n-1)^{s_n}\in V$. Для полного описания остается установить соответствие между наборами одночленов и вербальными идеалами. Покажем теперь, что одночлены общей одинаковой степени относительно $(x_\alpha-1)$, $\alpha\in J$ порождают один и тот же специальный идеал.

Лемма 2. Пусть $u_1=(x_{i_1}-1)^{k_1}\dots(x_{i_t}-1)^{k_t}$,

$$u_2=(x_{j_1}-1)^{\ell_1}\dots(x_{j_m}-1)^{\ell_m},\ 0\le k_i,\ \ell_j<p,\ \sum_i k_i=\sum_j \ell_j. \quad \text{(II)}$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ вербальный идеал, порожденный элементом u_i, $i=1,2$. Тогда $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_2$.

Доказательство. Покажем, что $u_2\in\mathfrak{A}_1$. Так как $\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2$ – вербальные идеалы и Г свободна в многообразии, то, не нарушая общности, можно считать, что $u_1=(x_1-1)^{k_1}\dots(x_t-1)^{k_t}$, $u_2=(x_1-1)^{\ell_1}\dots(x_m-1)^{\ell_m}$, $0\le k_i$, $\ell_j<p$

Пусть z – число одинаковых показателей в u_1, u_2, т.е. (быть может, после перенумерации образующих, которая является автоморфизмом) $k_1=\ell_1$, $k_2=\ell_2$, $k_z=\ell_z$

Доказательство будем вести индукцией по z в обратном порядке от t до 0.

I) $z=t$. Тогда, так как $\sum_i k_i=\sum_j \ell_j$, то $z=t=m$, $u_2=u_1$, и доказывать нечего.

2) Пусть для всех пар элементов u_1, u_2 вида (II), для которых $z=t,t-1,\dots,q>0$, лемма доказана. Рассмотрим пару элементов u_1, u_2, у которых $z=q-1$, т. е. $k_1=\ell_1,\ k_{q-1}=\ell_{q-1},\ k_q\ne\ell_q$. Учитывая равенство $\sum_i k_i=\sum_j \ell_j$

(и, быть может, перенумеровывая образующие), можно считать, что для некоторого $d \geq 0$ $k_q > \ell_q$, $k_{q+1} < \ell_{q+1}, \ldots, k_{q+d} < \ell_{q+d}$ и k_q представим в виде

$$k_q = \ell_q + \varepsilon_{q+1} + \ldots + \varepsilon_{q+d-1} + \varepsilon_{q+d} \qquad (12),$$

где $\varepsilon_{q+1} = \ell_{q+1} - k_{q+1}, \ldots, \varepsilon_{q+d-1} = \ell_{q+d-1} - k_{q+d-1}$,

$$\varepsilon_{q+d} = k_q - (\ell_q + \varepsilon_{q+1} + \ldots + \varepsilon_{q+d-1})$$

Строим теперь отображение образующих x_i (продолжаемое до эндоморфизма φ), которое оставляет все x_i, кроме x_q, на месте, а $\varphi(x_q) = x_q x_{q+1} \cdots x_{q+d}$. Представим u_1, u_2 в виде $u_1 = u(x-1)^{k_q} v_1$, $u_2 = u(x_q-1)^{\ell_q} \ldots (x_{q+d}-1)^{\ell_{q+d}} v_2$,

где $u = (x_1-1)^{k_1} \ldots (x_{q-1}-1)^{k_{q-1}}$, $v_1 = v_1(x_{q+1}, \ldots x_t)$

$$v_2 = v_2(x_{q+d+1}, \ldots, x_m)$$

Будем далее для удобства обозначать разности $x-1$, $x \in \Gamma$ через $\bar{x}$. Тогда $\varphi(u_1) = u(x_q x_{q+1} \ldots x_{q+d} - 1)^{k_q} v_1 = u_1[(\bar{x}_q + \bar{x}_{q+1} + \ldots + \bar{x}_{q+d}) + (\bar{x}_q \bar{x}_{q+1} + \ldots + \bar{x}_{q+d-1} \bar{x}_{q+d}) + \ldots + \bar{x}_q \bar{x}_{q+1} \ldots \bar{x}_{q+d}]^{k_q} v_1 = u[(\bar{x}_q + \ldots + \bar{x}_{q+d})^{k_q} + \sum] v_1$, где слагаемые в сумме $\sum$ имеют относительно $\bar{x}_q, \ldots, \bar{x}_{q+d}$ степень большую, чем k_q. Далее,

$$\varphi(u_1) = \ldots + \alpha u \bar{x}_q^{\ell_q} \bar{x}_{q+1}^{\varepsilon_{q+1}} \ldots \bar{x}_{q+d}^{\varepsilon_{q+d}} v_1 + \ldots,$$

где $\alpha \neq 0$ - произведение подходящих биномальных коэффициентов. Отметим, что в силу только что сделанного замечания относительно $\sum$, выделенное слагаемое не исчезнет после приведения подобных членов. Итак, вследствие вербальности идеала $\varphi(u_1) = \ldots + \alpha u \bar{x}_q^{\ell_q} \ldots \bar{x}_{q+d}^{\varepsilon_{q+d}} v_1 + \ldots \in \mathfrak{A}_1$. Теперь, применяя лемму 1, получаем, используя (12),

$$u_1' = u \cdot \bar{x}_q^{\ell_q} \bar{x}_{q+1}^{\ell_{q+1}} \ldots \bar{x}_{q+d-1}^{\ell_{q+d-2}} \bar{x}_{q+d-1}^{\ell_{q+d-1}} v_1' \in \mathfrak{A}$$

где $V_1' = V_1'(x_{q+d}, \ldots x_t)$. Для элементов u_1', u_2 число совпадающих показателей $r \geq q$. По предположению индукции имеем $u_2 \in \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}'$ - вербальный идеал, порожденный элементом u_1'. Аналогично доказывается включение $u_1 \in \mathfrak{A}_2$. Отсюда $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$.

Лемма доказана.

Следствие. Если u_1, u_2, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ - те же, что и в лемме 2, $\sum\limits_i k_i = \sum\limits_j l_j = s$, то $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2 = \Delta^s$.

Доказательство очевидно.

Выражаем глубокую благодарность проф. Б.И.Плоткину, под руководством которого написана настоящая работа.

Литература

1. Б.И.Плоткин. Тр. Рижского алгебраического семинара, т.I, 241-252 (1969).
2. Б.И.Плоткин. Радикалы и многообразия в представлениях групп. Латв.матем.ежегодник, 1971 (в печати).
3. Б.Л.Ван дер Варден. Современная алгебра, т.2, Гостехиздат, 1947.

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ГРУППЫ

Е.М.Кубланова

Хорошо известно, что сплетения локально нильпотентных групп без кручения не являются локально нильпотентными группами. Это обстоятельство ограничивает возможности применения сплетений в теории локально нильпотентных групп.

В настоящей работе рассматривается конструкция, близкая к сплетениям, которая, по-видимому, может быть использована при изучении локально нильпотентных групп. Некоторые примеры такого рода будут приведены ниже.

Основная идея этой статьи восходит к работе Л.А. Калужнина [I].

§I. Исходные понятия

I. Полная полиномиальная группа и некоторые её подгруппы. Пусть K - коммутативное кольцо с единицей, без делителей нуля (область), X - некоторое множество независимых переменных и $K[X]$ - алгебра полиномов над K - свободная коммутативная и ассоциативная алгебра с единицей, свободно порожденная множеством X .

Группу всех автоморфизмов алгебры $K[X]$ будем называть полной полиномиальной группой, а любую её подгруппу - полиномиальной группой.

Будем говорить также, что задано полиномиальное представление группы Γ, если задано представление этой группы в качестве группы автоморфизмов алгебры $K[X]$, другими словами, если задан гомоморфизм Γ в полную полиномиальную группу.

Автоморфизм σ алгебры $K[X]$ называется ограниченным автоморфизмом, если имеется конечное подмножество X_0 множества X такое, что σ оставляет неподвижным каждый элемент из дополнения в X множества X_0. Легко видеть, что если σ - ограниченный автоморфизм, то можно указать конечное множество $X_1 \subset X$ такое, что σ действует тождественно на все элементы из дополнения в X множества X_1 и подкольцо $K[X_1]$ инвариантно относительно автоморфизма σ. Действительно, для любого элемента x_i из X_0 имеем $x_i \circ \sigma = f_i$, $x_i \circ \sigma^{-1} = g_i$; $f_i, g_i \in K[X]$. Присоединяя к множеству X_0 все переменные из X, входящие в полиномы f_i и g_i, получим конечное множество X_1, которое удовлетворяет названным условиям. Очевидно, что ограниченные автоморфизмы составляют подгруппу в группе всех автоморфизмов алгебры $K[X]$. Группа всех ограниченных автоморфизмов алгебры $K[X]$ называется ограниченной полиномиальной группой.

Допустим, что исходное множество X линейно упорядочено. Будем рассматривать автоморфизмы γ алгебры $K[X]$ такие, что для любого элемента x из X, $x \circ \gamma = x + g$, $g \in K[X]$, где полином g выражается через переменные, меньшие, чем x. Такие автоморфизмы будем называть треугольными автоморфизмами (относительно заданного порядка, который будем в дальнейшем считать фиксированным).

Покажем, что множество всех треугольных автоморфизмов есть подгруппа в группе всех автоморфизмов алгебры $K[X]$. Замкнутость этого множества относительно умножения очевидна. Для заданного элемента x из X через Σ_x обозначим множество треугольных автоморфизмов, оставляющих неподвижными все элементы множества X, за исключением x. Если $\sigma \in \Sigma_x$ и $x \circ \sigma = x + g$, то этот g из $K[X]$ мы обозначим через σ^*. Пусть X_0 - подмножество множества X, состоящее из всех элементов множества X, меньших заданного x. Легко видеть, что отображение $\sigma \to \sigma^*$ есть изоморфизм полугруппы Σ_x и аддитивной группы подкольца $K[X_0]$. Следовательно, Σ_x - группа.

Пусть теперь γ - произвольный треугольный автоморфизм алгебры $K[X]$ и X_0 - некоторое конечное подмножество в X, состоящее из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расположенных в соответствии с заданным порядком. Рассмотрим отображения π_i, $i = 1, \ldots, n$, определенные сле-

следующим образом: $x_i \circ \pi_i = x_i \circ \gamma$, а для произвольного $x \in X$, $x \neq x_i$, $x \circ \pi_i = x$. По определению $\pi_i \in \Sigma_{x_i}$, следовательно, и $\pi_i^{-1} \in \Sigma_{x_i}$. Пусть $\pi = \pi_1 \cdot \ldots \cdot \pi_n$. Легко видеть, что для всякого x из X_0 имеет место равенство

$$x \circ \gamma = x \circ \pi \tag{I}$$

Легко показать теперь, что если γ - треугольный автоморфизм, то и γ^{-1} - треугольный автоморфизм. Действительно, пусть x - произвольный элемент множества X . Положим $x \circ \gamma^{-1} = x + f$, $f \in K[X]$. Нужно показать, что этот полином f выражается через переменные, меньшие x . Обозначим через X_0 подмножество в X , состоящее из всех переменных, входящих в f , и заданного x . По этому множеству X_0 и γ подберем, как и выше, $\pi = \pi_1 \cdot \ldots \cdot \pi_n$. Мы имеем $x = x \circ \gamma + f \circ \gamma$, применяя соотношение (I), получим $x = x \circ \pi + f \pi$ и $x \circ \pi^{-1} = x + f$. Так как все π_i^{-1} - треугольные автоморфизмы, то и π^{-1} - треугольный автоморфизм. Следовательно, в полином f входят переменные, меньшие x . Таким образом, мы можем говорить о подгруппе всех треугольных автоморфизмов в группе всех автоморфизмов алгебры $K[X]$.

Отметим еще, что можно рассматривать более общий случай треугольных автоморфизмов - автоморфизмы, удовлетворяющие условию $x \circ \gamma = \lambda x + f$, где $\alpha \in K$, а полином $f \in K[X]$ такой же, как и раньше. Тогда рассматриваемые нами треугольные автоморфизмы можно было бы назвать, как это делается в случае линейных групп, специальными треугольными автоморфизмами. Поскольку мы будем рассматривать только случай специальной треугольности, слово "специальный" будет опускаться.

Обозначим теперь через Γ пересечение группы всех треугольных автоморфизмов и группы всех ограниченных автоморфизмов алгебры $K[X]$. В этой группе, очевидно, лежат всевозможные подгруппы Σ_x по всем $x \in X$. В действительности группа Γ порождается всевозможными такими Σ_x . В самом деле, пусть γ - произвольный элемент из Γ и X_0 -

конечное подмножество, вне которого элемент γ действует тождественно. Подберем для этого X_0 и γ отображение π Тогда γ и π действуют одинаково на всем множестве X Следовательно, $\gamma = \pi$. Такую группу Γ будем называть ограниченной треугольной группой.

Обозначим далее через $\Gamma_{(x)}$ подгруппу в Γ, состоящую из всех тех автоморфизмов, которые действуют тождественно на все элементы множества X, большие или равные x и через $\Gamma_{[x]}$ подгруппу всех автоморфизмов, действующих тождественно на все элементы большие x. Тогда, очевидно, что $\Gamma_{[x]}$ порождается группами $\Gamma_{(x)}$ и Σ_x. Кроме того, Σ_x инвариантна относительно $\Gamma_{(x)}$ и $\Gamma_{(x)} \cap \Sigma_x = E$. Таким образом, группа $\Gamma_{[x]}$ распадается в полупрямое произведение: $\Gamma_{[x]} = \Sigma_x \leftthreetimes \Gamma_{(x)}$. Очевидны также следующие замечания.

1. Группа $\Gamma_{[x]}$ порождается всевозможными подгруппами $\Sigma_{x'}$ по всем $x' \leq x$. Аналогично $\Gamma_{(x)}$ порождается всевозможными $\Sigma_{x'}$ по всем $x' < x$.

2. Если $x_1 < x_2$, то $\Gamma_{[x_1]} \subset \Gamma_{[x_2]}$ и $\Gamma_{(x_1)} \subset \Gamma_{(x_2)}$

2. Присоединение переменной. Пусть снова X - произвольное множество, F - некоторая группа и задано представление группы F автоморфизмами алгебры $K[X]$. Обозначим через H аддитивную группу кольца $K[X]$ и рассмотрим пару (H, F). Обозначим через $\Gamma = H \leftthreetimes F$ отвечающее этой паре полупрямое произведение.

Возьмем независимую переменную y , не принадлежащую множеству X и пусть $K[X, y]$ - алгебра полиномов, свободно порожденная множеством $\{X, y\}$. Определим теперь действие группы Γ в $K[X, y]$. Если $f = \sum_i a_i y^i \in K[X, y], a_i \in K[X]$, то $f \circ h = \sum_i a_i (y + h)^i$; $f \circ \varphi = \sum_i (a_i \circ \varphi) y^i$

при любых $h \in H$, $\varphi \in F$. Для произвольного $\gamma = h\varphi \in \Gamma$ полагаем

$$f \circ \gamma = (f \circ h) \circ \varphi$$

Легко проверить, что таким образом действительно задается представление группы Γ относительно $K[X, y]$.

Предположим теперь, что F - подгруппа в группе всех автоморфизмов алгебры $K[X]$. Тогда F естественно вкладываются в группу всех автоморфизмов алгебры $K[X,y]$ (на элемент y F действует тождественно).

Пусть Σ - подгруппа в группе всех автоморфизмов алгебры $K[X,y]$, состоящая из всех автоморфизмов σ, оставляющих неподвижными элементы из $H = K[X]$, и таких, что $y\circ\sigma - y \in H$. Очевидно, $\Sigma \cap F = E$ и группа Σ инвариантна относительно F. Поэтому можно в группе всех автоморфизмов алгебры $K[X,y]$ рассматривать полупрямое произведение $\Sigma \lambda F$.

Пусть $\sigma \in \Sigma$, $h = y\circ\sigma - y \in H$. Положим $\sigma^{*} = h$. Легко видеть, что $*$ - изоморфизм групп Σ и H. Этот изоморфизм перестановочен с действием группы F. Таким образом, имеется изоморфизм пар (H, F) и (Σ, F), а следовательно, и изоморфизм полупрямых произведений $\Gamma = H \lambda F \approx \Sigma \lambda F$. Из определения следует, что сопоставляемые этим изоморфизмом элементы действуют одинаково в $K[X,y]$.

Легко видеть при этом, что если группа F состоит из ограниченных автоморфизмов алгебры $K[X]$, то Γ состоит из ограниченных автоморфизмов алгебры $K[X,y]$.

3. Группы Γ_μ. Пусть μ - некоторое порядковое число и допустим, что каждому непредельному α, $0<\alpha\leq\mu$ сопоставляется независимая переменная x_α. Обозначим множество всех этих x_α через $X_\mu = X$. Отношение порядка в этом множестве индуцируется соответствующими индексами независимых переменных. При этом группу Γ - подгруппу всех ограниченных треугольных автоморфизмов алгебры $K[X_\mu]$ мы будем обозначать через Γ_μ.

Подобным же образом определяются группы Γ_α для любого α, $0<\alpha\leq\mu$. Мы можем считать, что $\Gamma_\alpha \subset \Gamma_\mu$ и в группе Γ_μ мы имеем возрастающую последовательность подгрупп Γ_α, $\alpha\leq\mu$, причем для предельных $\beta\leq\mu$, $\Gamma_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta}\Gamma_\alpha$. Кроме того, $\Gamma_{\alpha+1} = \Sigma_{x_{\alpha+1}} \lambda \Gamma_\alpha = \Sigma_{\alpha+1} \lambda \Gamma_\alpha$; $\Gamma_0 = E$

§2. Строение групп Γ_μ

I. Предварительные замечания. Пусть снова K - кольцо, G - модуль над этим кольцом, Γ - группа, для которой задано линейное представление относительно модуля G. Тогда мы имеем линейную пару (G,Γ). Пусть дальше задан отрезок порядковых чисел от 0 до ν включительно и допустим, что каждому из этих чисел сопоставлен некоторый подмодуль Γ - модуля G. При этом $G^{(0)}=0$, $G^{(\nu)}=G$ и если $\alpha<\beta$, то $G^{(\alpha)}\subset G^{(\beta)}$. Кроме того, предполагаем, что если $\alpha\leq\nu$ - предельное число, то $G^{(\alpha)}=\bigcup_{\beta<\alpha} G^{(\beta)}$. Тогда система всех подмодулей $G^{(\alpha)}$, $0\leq\alpha\leq\nu$ называется возрастающим нормальным рядом подмодулей в G (доходящим до G в ν шагов).

Линейная пара (G,Γ) называется стабильной, если в G имеется возрастающий нормальный ряд подмодулей, во всех факторах которого группа Γ действует тождественно.

Верхний стабильный ряд для пары (G,Γ) можно определить как возрастающий нормальный ряд подмодулей Γ - модуля G (доходящий до G) такой, что для любых двух соседних членов этого ряда - $G^{(\alpha)}$ и $G^{(\alpha+1)}$ - $G^{(\alpha+1)}$ есть множество всех элементов g модуля G, для которых $[g,\gamma]=-g+g\circ\gamma\in G^{(\alpha)}$ при любом $\gamma\in\Gamma$.

Подмодуль H модуля G называется изолированным, если из того, что $\alpha g\in H(\alpha\in K,\alpha\neq 0, g\in G)$, следует, что $g\in H$. Модуль G называется модулем без кручения, если из того, что $\alpha g=0(\alpha\in K, g\in G$ следует, что либо $\alpha=0$, либо $g=0$. Изолированность подмодуля H модуля G эквивалентна, очевидно, тому, что фактор-модуль G/H - модуль без кручения.

Нетрудно показать также, что если G - модуль без кручения и Γ - его группа автоморфизмов, то все члены верхнего Γ -стабильного ряда в G - изолированные подмодули.

В самом деле, пусть $\{G^{(\beta)}\}$ - верхний Γ - стабильный ряд в G. Предположим сначала, что $\beta=1$ и пусть $\alpha g\in G^{(1)}$ $(\alpha\in K,\alpha\neq 0, g\in G)$. Возьмем произвольный элемент γ из Γ. Тогда $\alpha(g\circ\gamma)=\alpha g\circ\gamma=\alpha g$, то есть

$\alpha(-g+g\circ\gamma)=0$. Отсюда следует, что $g\circ\gamma - g = [g,\gamma] = 0$ и $g \in G^{(1)}$.

Предположим теперь, что для всех $\beta < \delta$ $G^{(\beta)}$ - изолированные подмодули. Объединение изолированных подмодулей, очевидно, изолированный подмодуль. Предположим теперь, что δ - непредельное число и пусть $Z_{\Gamma}(G/G^{(\delta-1)})$ - множество всех неподвижных относительно Γ элементов в $G/G^{(\delta-1)}$. Пусть дальше $\gamma \in \Gamma$ и $\alpha\bar{g} \in Z_{\Gamma}(G/G^{(\delta-1)})$, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$, $\bar{g} \in G/G^{(\delta-1)}$.
Так как $G/G^{(\delta-1)}$ - модуль без кручения, то $\bar{g} \in Z_{\Gamma}(G/G^{(\delta-1)})$, то есть $Z_{\Gamma}(G/G^{(\delta-1)})$ - изолированный подмодуль в $G/G^{(\delta-1)}$. Так как полный прообраз изолированного подмодуля изолирован, то и $G^{(\delta)}$ - изолированный подмодуль модуля G.

Нам дальше еще понадобится следующее

Замечание. Пусть (G,Γ) - стабильная пара и в G имеется возрастающий нормальный ряд подмодулей G_{α}, $0 \leq \alpha \leq \mu$, $G_0 = 0$, $G_{\mu} = G$. Допустим дальше, что верхний Γ-стабильный ряд в G_{α} при любом $\alpha < \mu$ есть отрезок верхнего стабильного ряда в $G_{\alpha+1}$. Обозначим через $H_{\alpha+1}^{(\nu)}$ полные прообразы в $G_{\alpha+1}$ членов верхнего Γ-стабильного ряда для пары $(G_{\alpha+1}/G_{\alpha}, \Gamma)$. Тогда система всех таких $H_{\alpha+1}^{(\nu)}$ по всем $0 \leq \alpha \leq \mu$ составляет верхний Γ-стабильный ряд в G.

Указанное здесь свойство достаточно очевидно.

2. Верхний стабильный ряд для пары (G_{μ}, Γ_{μ}). Пусть μ — некоторое порядковое число, $X = X_{\mu}$ - соответствующее множество независимых переменных и $\Gamma = \Gamma_{\mu}$ - группа ограниченных треугольных автоморфизмов алгебры $K[X]$. Пусть дальше G_{μ} - алгебра $K[X_{\mu}]$, рассматриваемая только относительно сложения и умножения на элементы из K - свободный модуль над K. При этом Γ_{μ}, очевидно, является группой автоморфизмов этого модуля и мы имеем линейную пару (G_{μ}, Γ_{μ}).

Мы покажем здесь, что Γ_{μ} действует стабильно в G_{μ} и вычислим соответствующий верхний стабильный ряд для случая, когда K - кольцо нулевой характеристики.

Прежде всего рассмотрим простейший случай, когда множество X состоит из одной переменной x. Треугольность группы Γ в этом случае означает, что при любом γ из Γ, $x\circ\gamma - x$ есть константа - полином нулевой степени.

Обозначим через G_K подмодуль модуля G, состоящий из всех полиномов $f=\Sigma_i a_i x^i$, степень которых не превосходит K. Получим возрастающий ряд подмодулей

$$0\subset G_0\subset G_1\subset\ldots\subset \bigcup_K G_K = G \qquad (2)$$

Если $f=f(x)\in K[X]$, то $f\circ\gamma = f(x+c), c\in K$ и $f\circ\gamma - f = f(x+c)-f(x)$. Полином $f(x+c)-f(x)$ имеет степень меньшую, чем f. Отсюда следует, что ряд (2) является стабильным относительно Γ рядом в G.

Если кольцо K имеет нулевую характеристику, то степень полинома $f(x+c)-f(x)$ в точности на единицу меньше степени . В этом случае, как легко видеть, ряд (2) - верхний стабильный ряд в G.

Пусть теперь X - некоторое множество независимых переменных, H - аддитивная группа кольца $K[X]$ и F - группа автоморфизмов этого кольца. Пусть дальше пара $(K[X,y],\Gamma)$ есть продолжение пары $(K[X],F)$, построенное в соответствии с п. 2 §I и G - модуль $K[X,y]$. При этом подмодуль $K[X]$ будем обозначать также через H.

Для любого натурального числа n через G_n обозначим подмодуль модуля G, состоящий из всех полиномов $f=\sum_{i=0}^{n} a_i y^i$, где $a_i\in H$. При этом $G_0=H$ и $\bigcup_n G_n = G$. Определим дальше отображение t_n модуля G_n на модуль H: если $f=\sum_{i=0}^{n} a_i y^i\in G_n$, то $t_n(f)=a_n\in H$. Для любого натурального числа n отображение t_n есть, очевидно, гомоморфизм модуля G_n на H, перестановочный с действием группы F. Ядро этого гомоморфизма совпадает с G_{n-1}. Следовательно, имеется изоморфизм пар $(G_n/G_{n-1}, F)$ и (H,F).

Если исходная пара (H, F) стабильна, то, применяя отображение f_n^{-1} к верхнему стабильному ряду для этой пары, мы получим верхний стабильный ряд для пары $(G_n/G_{n-1}, F)$. Легко понять, что этот ряд является также верхним стабильным рядом для G_n/G_{n-1} относительно действия группы Γ. Мы видим теперь, что если пара (H, F) стабильна, то такова же и пара (G, Γ).

Применяя индукцию, из этого замечания немедленно получаем, что все пары (G_μ, Γ_μ) стабильны.

Всюду дальше в этом параграфе мы ограничимся случаем, когда K - кольцо нулевой характеристики.

Пусть пара (H, F) стабильна и

$$0 = H^{(0)} \subset H^{(1)} \subset \ldots \subset H^{(\alpha)} \subset \ldots \subset H^{(\nu)} = H \qquad (3)$$

ее верхний стабильный ряд. Допустим еще, что $H^{(1)}$ - множество всех неподвижных относительно F элементов в H - состоит из констант. Рассмотрим снова пару (G, Γ) и соответствующий ряд

$$H = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots \subset \bigcup_n G_n = G \qquad (2)$$

Обозначим через $E_{(\alpha,n)} = (H^{(\alpha)}) f_n^{-1}$ полные прообразы в G_n членов верхнего стабильного ряда для пары (H, F). Мы будем также рассматривать и $E_{(\alpha,n)}$ с $n = 0$, имея в виду, что $E_{(\alpha,0)} = H^{(\alpha)}$. При любом натуральном n все эти $E_{(\alpha,n)}, 0 \leq \alpha \leq \nu$, образуют возрастающий нормальный ряд подмодулей, идущий от G_{n-1} до G_n.

Л е м м а I. Совокупность всех $E_{(\alpha,n)}$ по всем $0 \leq \alpha \leq \nu$ и натуральным n образует верхний стабильный ряд для пары (G, Γ).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечалось выше, пара (G, Γ) стабильна и, в силу замечания из п.I настоящего параграфа, достаточно показать, что при любом n верхний Γ-стабильный ряд в G_n есть отрезок верхнего Γ-стабильного ряда в G_{n+1}.

Докажем это утверждение индукцией по n.

$n = 0$. Пусть $\{G_1^{(\beta)}\}$ - верхний стабильный ряд для пары (G_1, Γ) и $\{H^{(\alpha)}\}$, $0 \leq \alpha \leq \nu$, как и раньше, верхний стабильный ряд для пары (H, F). Очевидно, что $H^{(1)} \subset G_1^{(1)}$

Пусть $f=ay+b\in G_1$ $(a,b\in H)$ и $f\circ\gamma-f=0$ при любом $\gamma\in\Gamma=$ $=\Sigma\lambda F$. В частности, для любого σ из Σ, $f\circ\sigma-f=a[y+h-y]=0, h\in H$. Отсюда следует, что степень полинома f относительно y равна нулю, т.е. $f=b\in H$.

Для любого $\varphi\in F$, $f\circ\varphi-f=b\circ\varphi-b=0$, следовательно, $f\in H^{(1)}$ и $H^{(1)}=G_1^{(1)}$.

Предположим теперь, что уже доказано равенство $H^{(\beta)}=G_1^{(\beta)}$ для всех порядковых чисел $\beta<\delta$. Если δ - предельное число, то равенство $G_1^{(\delta)}=H^{(\delta)}$ очевидно. Если δ – непределельное число, то поступаем так же, как раньше. Из того, что при любом φ из F

$$f\circ\varphi-f=(a\circ\varphi-a)y+(b\circ\varphi-b)\in H^{(\delta-1)}$$

следует, что $b\in H^{(\delta)}$ и $a\circ\varphi-a=0$, то есть a - константа.

Пусть теперь $\gamma=\varphi\sigma$ - произвольн* элемент в Γ. Тогда

$$f\circ\gamma-f=(f\circ\varphi)\circ\sigma-f=(a\circ\varphi)h+b\circ\varphi-b\in H^{(\delta-1)}(\sigma^*=h)$$

и $ah\in H^{(\delta-1)}$.

Предположим, что $a\neq 0$. Из изолированности подмодуля $H^{(\delta-1)}$ в H тогда следует, что $h\in H^{(\delta-1)}$, что противоречит произвольному выбору элемента γ из Γ. Следовательно, $a=0$ и $f=b\in H^{(\delta)}$, т.е. $H^{(\alpha)}=G_1^{(\alpha)}, 0\leq\alpha\leq\tilde\nu$ и при $n=0$ утверждение леммы справедливо. Предположим теперь, что для всех $n<m$ верхний Γ - стабильный ряд в G_n есть отрезок верхнего стабильного ряда в G_{n+1} и этот ряд в G_n построен в соответствии с утверждением леммы. Покажем, что верхний стабильный ряд в G_m есть отрезок верхнего стабильного ряда в G_{m+1}.

Пусть $\{Z_\nu\}$ - верхний Γ -стабильный ряд в G_m. Возьмем два последовательных члена $Z_\nu\subset Z_{\nu+1}$ этого ряда. Пусть $f=a_{m+1}y^{m+1}+\ldots+a_1y+a_0$, где $a_i\in H$, $i=0,1,\ldots,m+1$, - некоторый элемент из G_{m+1}, такой, что $f\circ\gamma-f\in Z_\nu$ при любом $\gamma\in\Gamma$. Покажем, что $f\in Z_{\nu+1}$

Для произвольного элемента φ из F имеем

$$f\circ\varphi - f = (a_{m+1}\circ\varphi - a_{m+1})y^{m+1} + \dots + (a_0\circ\varphi - a_0) \in Z_\nu \subset G_m$$

Отсюда следует, что $a_{m+1}\circ\varphi - a_{m+1} = 0$, и по условию $a_{m+1} = \alpha$ - константа.

Возьмем теперь произвольный элемент σ из Σ. Тогда

$$f\circ\sigma - f = f(y+h) - f = \alpha h y^m + b_{m-1}y^{m-1} + \dots + b_0 \in Z_\nu$$

($\sigma^* : h \in H,\ b_i \in H,\ \alpha \in K$). Здесь возможны два случая.

I. $Z_\nu \subset G_{m-1}$. Тогда $f\circ\sigma - f \in G_{m-1}$ и, следовательно, $\alpha h = 0$. Из того, что G - модуль без кручения, тогда следует, что $\alpha = 0$ и $f = a_m y^m + \dots + a_0 \in G_m$. Таким образом, $f \in G_m$ и $f\circ\gamma - f \in Z_\nu$. Значит, $f \in Z_{\nu+1}$.

2. Предположим теперь, что $Z_\nu \not\subset G_{m-1}$. Тогда по предположению индукции и в силу предыдущих замечаний, полином y из G_m принадлежит Z_ν тогда и только тогда, когда $y = ay^m + \dots + b_0$, где a принимает значения из $H^{(\delta)}$ - некоторого члена верхнего F -стабильного ряда в H . При этом $H^{(\delta)} \neq H$. Из того, что $f\circ\sigma - f = \alpha h \cdot y^m + \dots + b_0 \in Z_\nu$ для любого σ из Σ , тогда следует, что $\alpha h \in H^{(\delta)}$ при любом $h \in H$ $(\alpha \in K)$. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Так как $H^{(\delta)}$ - изолированный подмодуль модуля H , получаем, что $h \in H^{(\delta)}$, что противоречит произвольному выбору элемента σ из Σ . Следовательно, $\alpha = 0$ и $f \in G_m$. Тогда $f \in Z_{\nu+1}$ и лемма доказана.

Пусть теперь μ - некоторое порядковое число и пара (G_μ, Γ_μ) определена, как раньше. Будем также рассматривать соответствующие пары $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ для всех $\alpha < \mu$. Все эти G_α инварианты относительно действия группы Γ_μ, и верхний стабильный ряд для пары $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$ будет также верхним стабильным рядом в G_α относительно группы Γ_μ .

Пусть еще G_0 - множество всех констант. Легко видеть, что G_0 есть множество всех неподвижных точек для любых пар $(G_\alpha, \Gamma_\alpha)$. Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а I. Пара (G_μ, Γ_μ) - стабильная пара. Если $\{G^{(\beta)}_{\alpha+1}\}$ - полные прообразы в $G_{\alpha+1}$ членов верхнего $\Gamma_{\alpha+1}$ - стабильного ряда в $G_{\alpha+1}/G_\alpha$, то G_0 и все эти $G_{\alpha+1}$ по всем $\alpha<\mu$ составляют верхний стабильный ряд для пары (G_μ, Γ_μ).

Утверждение теоремы вытекает из предыдущих замечаний и леммы I.

З а м е ч а н и е . Очевидно, что если аддитивная группа кольца K - группа без кручения, то таковы же аддитивные группы во всех $K[X_\mu]$. Следовательно, при любом μ Γ_μ - стабильная группа автоморфизмов некоторой абелевой группы без кручения. Такая группа сама не имеет кручения (см. [2]).

3. <u>Центральные ряды в группах Γ_μ.</u> Пусть задана пара (A, B) с абелевой областью действия A и пусть $G=A\lambda B$ - отвечающее этой паре полупрямое произведение. Легко видеть, что для того, чтобы группа G обладала возрастающим центральным рядом (доходящим до всей группы), необходимо и достаточно, чтобы в A имелся возрастающий B - стабильный ряд, а B была группой с возрастающим центральным рядом.

Пусть $\{A_\alpha\}$ - верхний B - стабильный ряд в A. Определим в B ряд подгрупп $\{B_\alpha\}$ следующим образом. $B_0=E$. B_1 - пересечение центра группы B с ядром пары (A, B). Пусть уже определены подгруппы B_α для всех $\alpha<\beta$. Если β - предельное число, то полагаем $B_\beta=\bigcup_{\alpha<\beta} B_\alpha$. Если же существует $\beta-1$, то B_β есть пересечение ядра пары $(A/A_{\beta-1}, B)$ с полным прообразом в B центра группы $B/B_{\beta-1}$.

П р е д л о ж е н и е I. Пусть $\{Z_\alpha\}$ - члены верхнего центрального ряда в $G=A\lambda B$. Тогда имеет место соотношение $Z_\alpha=A_\alpha\lambda B_\alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $a\gamma$ и $b\sigma$ $(a\in A, b\in A, \gamma\in B, \sigma\in B)$ - произвольные элементы из G. Как нетрудно убедиться, справедлива следующая формула:

$$[a\gamma, b\sigma] = ([a,\sigma]\circ\gamma)([b^{-1},\gamma]\circ\gamma^{-1}\sigma\gamma)[\gamma,\sigma] \tag{4}$$

Очевидно также, что $A_\alpha \cap B_\alpha = E$ и A_α - нормальный делитель в $A_\alpha\, B_\alpha$ при любом α.

Обозначим через $\Sigma_{\alpha+1}$ ядро пары $(A/A_\alpha, B)$, индуцированной парой (A, B), и пусть $B^{(\alpha+1)}$ - полный прообраз в B центра группы B/B_α. Доказательство проведем индукцией по α.

При $\alpha = 0$ утверждение тривиально. Предположим, что уже доказано равенство $Z_\alpha = A_\alpha\, B_\alpha$ для всех $\alpha < \beta$. Если β - предельное число, то равенство $Z_\beta = A_\beta \lambda B_\beta$ очевидно.

Пусть β-непредельное число. Возьмем произвольные элементы $a\gamma$ из Z_β и $b\sigma$ из G. Тогда $[a\gamma, b\sigma] \in Z_{\beta-1}$. По предположению индукции $Z_{\beta-1} = A_{\beta-1} \lambda B_{\beta-1}$. Из формулы (4) следует, что $[\gamma,\sigma] \in B_{\beta-1}$ для произвольного σ из G. Значит $\gamma \in B^{(\beta)}$. Полагая далее в формуле (4) $\sigma = 1$, мы получим $[b^{-1},\gamma] \in A_{\beta-1}$ для любого b из A. Это означает, что $\gamma \in \Sigma_\beta$ и, следовательно, $\gamma \in \Sigma_\beta \cap B^{(\beta)} = B_\beta$. Из того, что $[b^{-1},\gamma] \in A_{\beta-1}$ и $A_{\beta-1}$ - B - допустимая подгруппа в A, следует, что $[a,\sigma]\circ\gamma \in A_{\beta-1}$ и $[a,\sigma] \in A_{\beta-1}$ для произвольного σ из B. Следовательно, $a \in A_\beta$ и $Z_\beta < A_\beta \cdot B_\beta$. Нетрудно убедиться в том, что имеет место и обратное включение, и $Z_\beta = A_\beta \lambda B_\beta$.

З а м е ч а н и е. Предположим теперь, что верхний B - стабильный ряд в A стабилизируется на β-м шаге - $A_\beta = A_{\beta+1} = \dots$. Тогда для всех $\alpha > \beta$, $\Sigma_\alpha = \Sigma_\beta$ и $B_\alpha = \Sigma_\beta \cap B^{(\alpha)}$. Подгруппы $B^{(\alpha)}$ в этом случае являются членами возрастающего центрального ряда в B, идущего от $B^{(\beta)}$. В частности, последний член верхнего центрального ряда в G содержится в $A_\beta \Sigma_\beta$.

Отметим еще, что, используя стабильность групп Γ_μ, по индукции легко получить, что если $X = X_\mu$ - конечное множество, то соответствующая группа Γ_μ обладает возрастающим центральным рядом, доходящим до всей группы, и определить длину верхнего центрального ряда в Γ_μ. Как будет видно из дальнейших рассмотрений, группы Γ_μ с бесконечными номерами будут уже группами без центра.

4. <u>Локальная нильпотентность групп Γ_μ</u>. Пусть X - некоторое линейно упорядоченное множество независимых переменных, $K[X]$ - алгебра полиномов над K, свободно порожденная множеством X. Пусть еще σ - некоторый автоморфизм этой алгебры. Подмножество X_0 множества X будем называть инвариантным относительно автоморфизма σ, если инвариантна соответствующая подалгебра $K[X_0]$ алгебры $K[X]$.

Пусть дальше Γ - треугольная группа ограниченных автоморфизмов алгебры $K[X]$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Γ - локально нильпотентная группа.

Доказательство. Возьмем некоторое конечное множество Φ элементов группы Γ. Для каждого из этих элементов мы, как отмечалось в п. I §I, можем подобрать конечное инвариантное подмножество множества X, вне которого этот элемент действует тождественно. Пусть X_0 - объединение всех таких подмножеств по всем элементам из Φ. X_0 - конечное подмножество множества X, следовательно, оно вполне упорядочено.

Пусть $K[X_0]$ - порожденная этим подмножеством подалгебра алгебры $K[X]$ и Γ_0 - подгруппа группы Γ, порожденная множеством Φ. Тогда Γ_0 - треугольная группа ограниченных автоморфизмов алгебры $K[X_0]$ и, как следует из предыдущего пункта, Γ_0 обладает возрастающим центральным рядом. Следовательно, Γ_0 - нильпотентная группа и Γ - локально нильпотентная группа. Лемма доказана.

Пусть μ - некоторое порядковое число, и группа Γ_μ построена в соответствии с п.3 §I. Легко видеть, что для любого μ Γ_μ субинвариантна в $\Gamma_{\mu+1}$. В самом деле, Γ_μ действует стабильно в G_μ. Пусть $0 < G_\mu^{(1)} \subset \ldots \subset G_\mu$ -

соответствующий стабильный ряд в G_μ. Тогда умножая члены этого ряда на Γ_μ, мы получим возрастающий нормальный ряд, начинающийся с Γ_μ и доходящий до $\Gamma_{\mu+1}$.

Теорема 2. Все Γ_μ - локально нильпотентные RN^* - группы.

Доказательство. Локальная нильпотентность групп Γ_μ следует из леммы 2. Покажем теперь, что все Γ_μ - RN^*- группы. Доказательство проведем индукцией по μ. При $\mu=0$ утверждение тривиально. Пусть сначала μ - непредельное число и предположим, что уже доказано, что $\Gamma_{\mu-1}$ - RN^*- группа. Γ_μ субинвариантна в Γ_μ и, следовательно, $\Gamma_{\mu-1}$ - принадлежит RN^* - радикалу группы Γ_μ (см. [2]). Σ_μ - абелев нормальный делитель в Γ_μ значит Σ_μ тоже лежит в RN^* - радикале группы Γ_μ. Следовательно, $\Gamma_\mu = \Sigma_\mu \land \Gamma_{\mu-1}$ - RN^* - группа.

Пусть теперь μ - предельное число. Тогда имеется возрастающая последовательность подгрупп

$$E \subset \Gamma_1 \subset \ldots \subset \Gamma_\gamma \subset \Gamma_{\gamma+1} \subset \ldots \subset \Gamma_\mu$$

и $\Gamma_\mu = \bigcup_{\nu<\mu} \Gamma_\nu$. Каждый член этой последовательности субинвариантен в следующем, значит эту последовательность можно уплотнить до возрастающего нормального ряда в Γ_μ. Таким образом, каждая из групп Γ_ν субинвариантна в Γ_μ.

По индукционному предположению все Γ_γ при $\nu<\mu$ - RN - группы и лежат в RN^* - радикале группы Γ_μ. Тогда и их объединение - RN^*- группа. Следовательно, Γ_μ - RN^*- группа и теорема доказана.

5. γ-радикал группы Γ_μ. Пусть G - модуль над кольцом K, Γ - группа и задана линейная пара (G,Γ). Группа Γ называется финитно стабильной, если в G имеется конечный возрастающий нормальный ряд подмодулей, во всех факторах которого группа Γ действует тождественно.

Группа Γ называется локально финитно стабильной, если каждая её подгруппа с конечным числом образующих финитно стабильна. Известно, что для произвольной пары (G,Γ) в Γ есть максимальный локально финитно стабильный нормальный делитель. Он называется γ - радикалом группы Γ.

Элемент $\sigma \in \Gamma$ называется финитно стабильным элементом, если в G имеется конечный нормальный σ - допустимый ряд, во всех факторах которого этот элемент действует тождественно.

Мы найдем здесь локально финитно стабильный радикал группы Γ_μ (при любом μ). Так как при любом μ Γ_μ - локально нильпотентная группа, то её γ - радикал совпадает с множеством всех финитно стабильных элементов в Γ_μ (см. [2]).

Т е о р е м а 3. При любом μ локально финитно стабильный радикал группы Γ_μ равен единице.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если задано множество X_μ, где индексы элементов пробегают непредельные числа отрезка от I до μ, то такому множеству X_μ и заданному кольцу K однозначно отвечает треугольная пара $(K[X_\mu], \Gamma)$.

Пусть X' - некоторое конечное подмножество множества X_μ, состоящее из n элементов. Элементы этого подмножества упорядочены в соответствии с порядком в X_μ. Таким образом, подмножеству X' с заданным в нем порядком отвечает треугольная пара указанного выше типа. Эту пару можно рассматривать как подпару пары $(K[X_\mu], \Gamma_\mu)$. С другой стороны, она изоморфна паре $(K[X_n], \Gamma_n)$. Дальше индукцией по n будем показывать, что во всех парах (G_n, Γ_n), где G_n - модуль $K[X_n]$, γ - радикал групп Γ_n равен единице.

При $n=0$ утверждение тривиально. Предположим, что для всех $m<n$ уже показано, что в Γ_m нет неединичных финитно стабильных элементов и рассмотрим пару (G_n, Γ_n). $\Gamma_n = \Sigma_n \lambda \Gamma_{n-1}$. Пусть $\gamma \in \Gamma_n$ - финитно стабильный элемент относительно G_n, $\gamma = \sigma\varphi$, где $\sigma \in \Sigma_n$, $\varphi \in \Gamma_{n-1}$. Тогда γ является также финитно стабильным элементом относительно G_{n-1}. Так как для любого элемента h из G_{n-1}, $h\circ\gamma = h\circ\varphi$, то и φ - финитно стабильный элемент для пары (G_{n-1}, Γ_{n-1}). По предположению индукции тогда $\varphi = 1$ и $\gamma = \sigma \in \Sigma_n$.

Покажем теперь, что в Σ_n нет финитно стабильных элементов, отличных от единицы. Пусть σ - произвольный элемент из Σ_n. Нетрудно показать, как это уже делалось раньше, что k-ый член верхнего σ-стабильного ряда в G_n совпадает с множеством всех полиномов вида $f=\sum_i a_i x^i$, $a_i \in G_{n-1}$, $x = x_n$, степень которых относительно x не превосходит $k-1$, и длина верхнего σ-стабильного ряда в G_n в точности равна ω. Так как длина любого возрастающего σ-стабильного ряда в G_m не меньше длины верхнего σ-стабильного ряда и, следовательно, не может быть конечной, отсюда вытекает, что в Σ_n нет финитно стабильных элементов, отличных от единицы.

Пусть теперь γ - произвольный элемент из Γ_μ и X' - конечное γ-инвариантное подмножество множества X_μ, такое, что вне этого множества элемент γ действует тождественно. Пусть $(G[X'], F)$ - отвечающая этому множеству треугольная подпара пары (G_μ, Γ_μ). Тогда понятно, что $\gamma \in F$, и если γ действует финитно стабильно в $G[X_\mu]=G_\mu$, то он действует финитно стабильно и в $G[X']$. В силу предыдущего, такой элемент в группе F равен единице. Тогда он совпадает с единицей и в Γ_μ. Теорема доказана.

6. <u>Радикал Бера группы Γ_μ</u>. Элемент γ группы Γ называется достижимым, если порожденная им циклическая подгруппа является членом конечного нормального ряда, доходящего до всей группы Γ. Множество всех достижимых элементов группы Γ образует характеристическую подгруппу, которая называется радикалом Бера.

Т е о р е м а 4. I. Если $\mu > 0$ - непредельное число, то радикал Бера группы $\Gamma_\mu = \Sigma_\mu \lambda \Gamma_{\mu-1}$ совпадает с Σ_μ.

2. Если μ - предельное число, то радикал Бера группы Γ_μ равен единице.

Д о к а з а т е л ь с т в о . I. Пусть $\mu > 0$ - непредельное число и γ - достижимый элемент группы Γ_μ. Такой элемент индуцирует внутренний финитно стабильный автоморфизм группы Γ_μ. Тогда γ действует финитно стабильно и в Σ_μ и пусть $\{\Sigma_\mu^{(k)}\}$ -соответствующий γ- стабильный ряд, $\gamma = \sigma\varphi$, где $\sigma \in \Sigma_{\mu_i}$ $\varphi \in \Gamma_{\mu-1}$.

Во всех факторах γ - стабильного ряда σ действует тождественно, тогда и φ действует тождественно в факторах этого ряда. Но так как пара (Σ_μ , $\Gamma_{\mu-1}$) изоморфна паре ($G_{\mu-1}, \Gamma_{\mu-1}$), то φ действует финитно стабильно и в $G_{\mu-1}$. Из теоремы 3 тогда следует, что $\varphi = 1$ и $\gamma = \sigma \in \Sigma_\mu$. Очевидно также, что все элементы из Σ_μ являются достижимыми в Γ_μ , и радикал Бера в этом случае совпадает с Σ_μ.

2. Пусть теперь μ - предельное число. Тогда $\Gamma_\mu = \bigcup_{\nu<\mu} \Gamma_\nu$. Пусть дальше γ - достижимый элемент в Γ_μ и $\nu_0 < \mu$ - первое (непредельное) число такое, что $\gamma \in \Gamma_{\nu_0}$. Тогда элемент γ достижим и в Γ_{ν_0} , и, следовательно, $\gamma \in \Sigma_{\nu_0}$. Кроме того, γ достижим в Γ_{ν_0+1} , следовательно, $\gamma \in \Sigma_{\nu_0+1}$. Но $\Sigma_{\nu_0} \cap \Sigma_{\nu_0+1} = E$ и, значит, $\gamma = 1$. Теорема доказана.

§3. Полиномиальные представления в модулях и связи их со сплетениями

I. Полиномиальные представления в модулях. Пусть снова K - область, X - некоторое множество независимых переменных, $K[X]$ - алгебра полиномов над K. Обозначим через $\Phi = \Phi(X)$ свободный (левый) модуль над K с базисом $\{e_x\}$, $x \in X$. Каждому полиному f из $K[X]$ соответствует полиномиальная функция $\bar{f}$, заданная на Φ со значениями в K : если $f(x_1, \ldots, x_n) = f \in K[X]$; $a = \sum_i \alpha_i e_{x_i} \in \Phi, \alpha \in K$,

то для вычисления $\bar{f}(a)$ в полином f вместо $x_1, \ldots, x_n$ подставляются соответственно $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и проводятся вычисления в K. Соответствие $f \to \bar{f}$ есть гомоморфизм алгебры $K[X]$ в алгебру всех отображений множества Φ в K. Ядро этого гомоморфизма совпадает с полиномами, которые как функции тождественно равны нулю. Обозначим это ядро через U. Если K - бесконечное кольцо, то U совпадает с нулем. Возникающую здесь алгебру всех полиномиальных функций, определенных на Φ со значениями в K, будем обозначать $\bar{K}[X]$.

Каждому элементу x из X отвечает функция $\bar{x}$ и по определению, при любом $a \in \Phi(X)$ $\bar{x}(a)$ есть коэффициент при соответствующем e_x в разложении a по базису. Таким образом, имеем $a = \sum\limits_{x \in X} \bar{x}(a) \cdot e_x$.

Если $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ - произвольный элемент из $K[X]$, то $\bar{f}(a) = \bar{f}(\bar{x}_1(a), \ldots, \bar{x}_n(a))$.

Пусть далее задано представление некоторой группы Γ подстановками множества $\Phi(X)$ и (Φ, Γ) - соответствующая чистая пара. Обозначим через Ψ K - алгебру K^{Φ} - алгебру всех функций, определенных на Φ со значениями в K. Группа Γ действует тогда и в K по известному правилу: если $\varphi \in \Psi$ и $\gamma \in \Gamma$, то

$$(\varphi \circ \gamma)(a) = \varphi(a \circ \gamma^{-1})$$

При этом Γ действует в Ψ как группа автоморфизмов этой алгебры. Очевидно, что функции-константы являются здесь неподвижными точками.

Алнебра $K[X]$ является подалгеброй в Ψ. Если $x \in X$, то $\bar{x} \in \Psi$ и по определению $\bar{x} \circ \gamma$ есть функция, которая задается правилом $(\bar{x} \circ \gamma)(a) = \bar{x}(a \circ \gamma^{-1})$

Теперь имеем

$$a \circ \gamma^{-1} = \sum_{x \in X} \bar{x}(a \circ \gamma^{-1}) e_x = \sum_{x \in X} (\bar{x} \circ \gamma)(a) e_x$$

или

$$a \circ \gamma = \sum_{x \in X} (\bar{x} \circ \gamma^{-1})(a) e_x. \tag{5}$$

Формула (5) показывает, что действие группы Γ в $\Phi(X)$ можно восстановить по действию этой группы в Ψ. Заметим здесь, что так как каждый элемент a из Φ имеет лишь конечное число отличных от нуля компонент в разложении по базису, то функции $\bar{x} \circ \gamma$ обладают следующим свойством: при любом $a \in \Phi$ имеется лишь конечное число элементов $x \in X$ таких, что $(\bar{x} \circ \gamma)(a) \neq 0$.

О п р е д е л е н и е . Представление группы Γ относительно модуля $\Phi(X)$ назовем п о л и н о м и а л ь н ы м, если для любых $x \in X$ и $\gamma \in \Gamma$ найдется полином $f \in K[X]$

такой, что $\bar{x} \circ \gamma = \bar{f}$. (см. [3]).

Нетрудно понять, что условие полиномиальности представления равносильно тому, что в паре (Ψ, Γ) подалгебра $K[X]$ алгебры Ψ инвариантна относительно действия группы Γ.

Возвращаясь к формуле (5), мы видим, что полиномиальность действия Γ в $\Phi(X)$ означает, что координаты вектора $a \circ \gamma$ получаются как значения полиномиальных функций в точке a (причем сами эти функции, конечно, от a не зависят).

Пусть теперь задано представление группы Γ в качестве группы автоморфизмов алгебры $K[X]$. Тогда Γ действует и в $\overline{K[X]}$ по правилу $\bar{f} \circ \gamma = \overline{f \circ \gamma}$. По формуле (5) можно было бы тогда определить действие группы Γ в $\Phi(X)$ в том случае, если бы при любых $a \in \Phi$ и $\gamma \in \Gamma$ все суммы

$\sum_{x \in X} (\bar{x} \circ \gamma^{-1})(a) e_x$ были конечными. Для этого требуется, чтобы исходное действие группы Γ в $K[X]$ удовлетворяло дополнительным условиям. Введем следующее

Определение. Автоморфизм σ алгебры $K[X]$ называется специальным, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Все $x \circ \sigma$ за исключением конечного числа - полиномы без свободных членов.

2. Для каждого элемента x_0 из X имеется лишь конечное число различных $x \in X$ таких, что x_0 входит в $x \circ \sigma$.

3. Вместе с σ указанными свойствами обладает и автоморфизм σ^{-1}.

Легко заметить, что система всех специальных автоморфизмов алгебры $K[X]$ есть подгруппа в полной полиномиальной группе этой алгебры. Эта подгруппа содержит ограниченную полиномиальную группу.

Можно говорить соответственно о специальном полиномиальном представлении группы Γ относительно $K[X]$ и $\overline{K[X]}$. Легко видеть при этом, что формула (5) определяет также полиномиальное действие такой группы Γ в $\Phi(X)$. В самом деле, как нетрудно убедиться, имеет место формула

$$(\bar{f}\circ\gamma)(a)=\overline{f\circ\gamma}(a)=\bar{f}(a\circ\gamma^{-1}),\ a\in\Phi(X),\gamma\in\Gamma \tag{6}$$

Действительно, если $f=f(x_1,\dots,x_n)\in K[X]$,

то $(\bar{f}\circ\gamma)(a)=(\overline{f\circ\gamma})(a)=\bar{f}((\overline{x_1\circ\gamma})(a),\dots,(\overline{x_n\circ\gamma})(a))=\bar{f}(a\circ\gamma^{-1})$.

Тогда для любых $a\in\Phi$ и $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$

$$(a\circ\gamma_1)\circ\gamma_2=\sum_{x\in X}\overline{(x\circ\gamma_2^{-1})}(a\circ\gamma_1)e_x=\sum_{x\in X}\overline{((x\circ\gamma_2^{-1})\circ\gamma_1^{-1})}(a)e_x=$$

$$=\sum_{x\in X}\overline{(x\circ(\gamma_1\gamma_2)^{-1})}(a)e_x=a\circ\gamma_1\gamma_2$$

и, следовательно, выполняется соотношение

$$(a\circ\gamma_1)\circ\gamma_2=a\circ\gamma_1\gamma_2 \tag{7}$$

Очевидно, что единица группы Γ действует тождественно в Φ и формулой (5) действительно задается представление Γ в $\Phi(X)$. Легко понять также, что если, исходя из этого представления, как это делалось выше, определить действие Γ в $K[X]$, то мы вернемся к исходному представлению группы Γ относительно $\overline{K[X]}$ (индуцированному представлением Γ относительно $K[X]$).

Очевидно, что если исходить сразу из специального представления группы Γ относительно $\overline{K[X]}$ (а не $K[X]$), то приведенные выше рассуждения останутся верными.

Ядро представления группы Γ относительно $\Phi(X)$ совпадает с ядром исходного представления Γ относительно $\overline{K[X]}$.

В самом деле, пусть Σ - ядро представления группы Γ относительно $\overline{K[X]}$. Легко видеть, что ядро представления группы относительно множества Φ также равно Σ. Действительно, пусть элемент γ принадлежит ядру этого представления. Тогда, используя формулу (6), для любого $a\in\Phi$ получим $(\bar{f}\circ\gamma)(a)=\bar{f}(a\circ\gamma^{-1})=\bar{f}(a)$.

Следовательно, $\bar{f}\circ\gamma=\bar{f}$. Обратно, пусть $\gamma\in\Sigma$. Тогда
$$a\circ\gamma=\sum_{x\in X}\overline{x\circ\gamma^{-1}}(a)e_x=\sum_{x\in X}(\bar{x}\circ\gamma^{-1})(a)e_x=a$$
при любом $a\in\Phi(X)$.

О п р е д е л е н и е . Представление группы Γ относительно $K[X]$ будем называть специальным линейным, если оно специально в определенном выше смысле и все полиномы $x\circ\sigma$, $x\in X$, $\sigma\in\Gamma$ являются однородными линейными полиномами.

Очевидно, что при этом условие 2) в определении специального представления означает конечность всех столбцов соответствующих матриц.

Если исходное представление группы Γ относительно $K[X]$ было специальным линейным, то индуцированное им представление Γ относительно множества $\Phi(X)$ будет линейным.

Отметим здесь один частный случай. Пусть группа Γ действует специально линейно в $K[X]$. Рассмотрим, как и раньше, полиномиальную пару $(\Phi(X), \Gamma)$, которая сейчас оказывается линейной. Обозначим через $L[X]$ подмодуль модуля $K[X]$, <u>состоящий</u> из всех линейных однородных полиномов, и через $\overline{L[X]}$ - соответствующий модуль линейных функций.

Мы можем здесь отождествить модули $L[X]$ и $\overline{L[X]}$. При этом модуль $L[X]$ можно трактовать как дискретный сопряженный модулю $\Phi(X)$.

Пусть дальше $(L[X],\Gamma)$ - подпара пары $(K[X], \Gamma)$. По формуле (6) имеем $(\bar{e}\circ\gamma)(a)=\bar{e}(a\circ\gamma^{-1})$

при любых $a\in\Phi$, $\gamma\in\Gamma$, $\bar{e}\in\overline{L[X]}$. Отсюда следует, что пары $(L[X],\Gamma)$ и $(\Phi(x),\Gamma)$ соответствуют сопряженным представлениям группы Γ .

2. <u>Связь со сплетениями</u>. Пусть снова $\Phi=\Phi(X)$ - свободный K-модуль, F - группа и задана чистая пара (Φ, F). Рассмотрим еще регулярную пару (K,K), где K обозначает лишь аддитивную группу соответствующего кольца. Этим парам отвечает их сплетение, определенное следующим образом. Действие группы F в Φ естественно продолжается

до действия F в группе K^Φ всех функций, заданных на Φ со значениями в K : если $\varphi \in K^\Phi$ и $\gamma \in \Gamma$, то

$$(\varphi \circ \gamma)(a) = \varphi(a \circ \gamma^{-1}), \; a \in \Phi$$

Таким образом, мы имеем пару (K^Φ, F). Этой паре отвечает полупрямое произведение $\Gamma = K^\Phi \lambda F$. При этом по известному правилу (см., например, [2]) задается действие группы Γ в декартовом произведении $K \times \Phi$ и мы приходим к паре $(K \times \Phi, \Gamma)$.

Чтобы охарактеризовать соответствующее действие, добавим к множеству X независимую переменную y, не принадлежащую этому множеству, и пусть $\Phi(X,y)$ - свободный K - модуль, порожденный множеством (X, y). Этот модуль можно отождествить с декартовым произведением $K \times \Phi$: паре $(\alpha, b) \in K \times \Phi, \alpha \in K, b \in \Phi$ отвечает элемент $\alpha e_y + b \in \Phi(X,y)$. При этом действие Γ в $\Phi(X, y)$ определяется правилом

$$(\alpha e_y + b) \circ \bar{f}\gamma = (\alpha + \bar{f}(b)) e_y + b \circ \gamma, \; \bar{f} \in K^\Phi, \gamma \in \Gamma \quad (8)$$

Пусть дальше (Φ, F) - полиномиальная пара, и возьмем в группе K^Φ подгруппу - аддитивную группу кольца полиномиальных функций $\overline{K[X]}$. Эта подгруппа инвариантна относительно действия группы F. Пусть теперь $\Gamma = \overline{K[X]} \lambda F$, и формулой (8) определяется действие такой группы Γ в $\Phi(X, y)$. Это действие будет также полиномиальным, так как по определению для любого x из X

$$\bar{x} \circ f\gamma = \bar{x} \circ \gamma \qquad \text{и} \qquad \bar{y} \circ \bar{f}\gamma = \overline{y + f}.$$

В этом полиномиальном случае группа F действует в $\overline{K[X]}$ и $\Gamma = \overline{K[X]} \lambda F$ действует в $\overline{K[X,y]}$. В силу сказанного, мы могли бы назвать группу $\Gamma = \overline{K[X]} \lambda F$ полиномиальным сплетением аддитивной группы кольца K и группы F (по множеству $\Phi(X)$).

Допустим далее, что исходным было специальное представление F в $K[X]$. При этом F действует и в $\overline{K[X]}$, и в $\Phi(X)$, причем действие F в $K[X]$ определяет действие в $\Phi(X)$ и наоборот.

Группа $K[X]\lambda F=\Gamma'$ действует (и тоже специально) в $K[X,y]$. Эта группа действует также и в $K[X,y]$, и в $\Phi(X,y)$.

Пусть $f\in K[X], \sigma\in F$ и $\gamma=f\sigma$ - элемент группы Γ'. Этому γ сопоставим $\bar\gamma=\bar f\sigma$, $\bar f\in\overline{K[X]}$. Очевидно, что отображение $\gamma\to\bar\gamma$ есть гомоморфизм Γ' на Γ. Ядро этого гомоморфизма содержится в ядре представления группы Γ' относительно $K[X,y]$, которое в свою очередь совпадает с ядром представления Γ' относительно $\Phi(X,y)$. Поэтому вместе с Γ' в $K[X,y]$ и в $\Phi(X,y)$ действует и $\Gamma=\overline{K[X]}\lambda F$. Легко проверить, что действие Γ в $\Phi(X,y)$, которое сейчас определено действием F в $K[X]$, на самом деле совпадает с действием Γ в $\Phi(X,y)$, основанным на сплетениях (см. формулу (8)).

Рассмотрим далее тот случай, когда область K является бесконечным кольцом. При этом можно отождествлять $K[X]$ и $\overline{K[X]}$. Пусть далее $X=X_\mu$ (см. п.3 §I). Обозначим через $\Gamma_1=K$ аддитивную группу кольца K. Эта группа автоматически действует в $\Phi(X_1)$. Обозначим через Γ_2 полиномиальное сплетение групп K с Γ_1 по множеству $\Phi(X_1)$.

Группа Γ_2 в силу определения полиномиального сплетения пар действует в $\Phi(X_2)$ по формуле (8). Пусть Γ_3 - полиномиальное сплетение K с Γ_2 по множеству $\Phi(X_2)$. Итерируя этот процесс (на предельных местах берутся объединения предыдущих групп), мы определим группы Γ_μ. Каждая такая группа Γ_μ действует в $\Phi(X_\mu)$ (исходя из сплетений). Эта группа действует также в $K[X_\mu]$, причем специально.

С другой стороны, исходя из $K[X_\mu]$, в §I мы определили соответствующие группы Γ_μ. Так как эти группы Γ_μ являются группами ограниченных автоморфизмов, то они действуют в $K[X_\mu]$ специально. Из приведенных рассмотрений непосредственно следует, что группы Γ_μ, введенные в §I, - это те же самые Γ_μ, которые определены сейчас на основе итерации полиномиальных сплетений.

Литература

I. Калужнин Л.А. La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis. Ann. Sci. École norm. Sup., (3), 65 (1948), 239-276.

2. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966.

3. Шевалле К. Теория групп Ли, т.2, М., 1958.

О НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПОЛИЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ НАД АБСОЛЮТНО АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛЕМ ПРОСТОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Е.М.Левич

Одной из интересных и важных задач теории представлений групп является задача изучения свойств групп в зависимости от свойств её представлений. В частности, возникает следующий вопрос: какими свойствами должна обладать группа, чтобы её неприводимые представления над любым полем были конечномерными? Известно [1-4], что для того чтобы все неприводимые представления группы Γ были конечномерными, достаточно, чтобы Γ обладала конечнопорожденной абелевой нормальной подгруппой конечного индекса. Ф.Холл в [4] доказал, что каждое неприводимое представление конечнопорожденной нильпотентной группы над абсолютно алгебраическим полем простой характеристики p является конечномерным (см. также [8]). С другой стороны, в этой же работе показано, что если полициклическая группа Γ не обладает конечнопорожденным абелевым нормальным делителем конечного индекса, а поле P отлично от абсолютно алгебраического поля простой характеристики p, то Γ обладает бесконечномерным представлением над полем P.

Настоящая статья посвящена доказательству теоремы [13], утверждающей, что каждое неприводимое представление полициклической группы над абсолютно алгебраическим полем простой характеристики p конечномерно[x)]. Эта теорема является ответом на вопрос, поставленный Ф.Холлом в [4]. В основу доказательства упомянутой теоремы положена идея, которая

---

x) Другое доказательство этого утверждения получено недавно А.Е.Залесским (Докл. АН БССР, т.14,977-980).

была применена в [8] при доказательстве теоремы о конечномерности всех неприводимых представлений над абсолютно алгебраическим полем простой характеристики p конечнопорожденной нильпотентной группы. В рассматриваемой ситуации она состоит в следующем: показывается, что в каждом неприводимом представлении над любым полем полициклической группы существует максимальное, инвариантное относительно центра радикала группы подпространство (теорема 10); наличие такого подпространства позволяет показать, что если неприводимое представление группы над абсолютно алгебраическим полем простой характеристики p точно, то центр радикала конечен (теорема 11), а отсюда сразу следует, что рассматриваемая группа конечна, т.е. представление конечномерно.

Статья состоит из четырех параграфов. В первом и во втором параграфах приводятся основные определения и обозначения из теории групп, групповых алгебр полициклических групп и теории модулей над кольцами главных идеалов. Здесь приводится также ряд вспомогательных утверждений, необходимых нам в дальнейшем. Кроме того, в первом параграфе дается иное доказательство, чем у автора, теоремы Холла о нетеровости групповой алгебры полициклической группы над произвольным полем. Третий параграф посвящен изучению групповой алгебры полициклической группы как модуля над кольцом полиномов от одного переменного или нескольких переменных. В последнем, четвертом, параграфе доказывается основной результат.

§1. Основные определения, обозначения и некоторые вспомогательные утверждения

Пусть Γ - полициклическая группа, т.е. группа, обладающая конечным нормальным рядом с циклическими факторами:

$$\{e\}=\Gamma_0\subset\Gamma_1\subset\ldots\subset\Gamma_n=\Gamma \tag{1}$$

Отметим, что группа Γ тогда и только тогда является полициклической, когда Γ есть разрешимая группа с условием максимальности для подгрупп [6]. Отсюда вытекает, что для полициклической группы Γ локально нильпотентный радикал $R(\Gamma)$ является нильпотентной группой с конечным числом образующих, причем центр радикала $Z(R)$ отличен от единицы.

Обозначим через γ_i некоторый прообраз в Γ образующего элемента фактора Γ_i / Γ_{i-1}. Легко видеть, что каждый элемент однозначно представим в виде

$$g = \prod_{i=1}^{n} \gamma_i^{\alpha_i} \qquad (\alpha_i \text{ - целые числа}) \qquad (2)$$

Будем считать, что ряд (I) выбран так, чтобы $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ были образующими $Z(R)$.

Л е м м а I. Если $Z(R)$ - конечная группа, то полициклическая группа Γ также является конечной группой.

Утверждение леммы вытекает из [10,11], если заметить, что локально нильпотентный радикал $R(\Gamma)$ ограничивает группу Γ, т.е. группа Γ/H, где H - централизатор радикала $R(\Gamma)$ в Γ, изоморфна некоторой группе автоморфизмов группы $R(\Gamma)$. Но группа $R(\Gamma)$ по условию конечна, следовательно, Γ/H также является конечной группой. Так как H - подгруппа $R(\Gamma)$, то H является конечной группой и, следовательно, группа Γ - конечная группа.

Пусть $P\Gamma$ - групповая алгебра полициклической группы над произвольным полем P. Каждый элемент $h \in P\Gamma$ можно представить в виде:

$$h = \sum_{i=s}^{m} \gamma_n^{i} h_i \qquad (3)$$

где $h_m \neq 0;\ h_s \neq 0,\ h_i \in P\Gamma_{n-1} \quad (s \leq i \leq n)$

Представление элемента h в виде (3) мы назовем разложением элемента h по степеням элемента γ_n; назовем также m - верхней γ_n-степенью элемента h (обозначение: $\overline{l}(h) = m$).

s - нижней γ_n-степенью элемента h,
(обозначение: $\underline{\ell}(h)=s$),

$m-s$ - γ_n-длиной элемента h (обозначение: $\ell(h)=m-s$),

h_i - i-тая координата элемента h в разложении (3) (обозначение: $w_i(h)=h_i/_1$),

h_m - верхняя γ_n-проекция h на $P\Gamma_{n-1}$
(обозначение: $\overline{w}(h)=h_m/_1$),

h_s - нижняя γ_n-проекция h на $P\Gamma_{n-1}$
(обозначение: $\underline{w}(h)=h_s$).

Пусть K - некоторое множество элементов на $P\Gamma$. Множество $K^m=\{\overline{w}(h): h\in K, \overline{\ell}(h)=m\}$ назовем m-верхней γ_n-проекцией множества K в $P\Gamma_{n-1}$, а множество $K_s=\{\underline{w}(h): h\in K, \underline{\ell}(h)=s\}$ - s-нижней γ_n-проекцией множества K. Если K является правым идеалом (левым, двусторонним) в $P\Gamma$, то K^m, K_s являются правыми (левыми, двусторонними) идеалами в $P\Gamma_{n-1}$ для любых целых m, s.

Имеет место следующее утверждение:

Л е м м а 2. Если K - правый идеал в $P\Gamma$, то
$K^{m+1}=\gamma_n^{-1}K^m\gamma_n$, $K_s=\gamma_n K_{s+1}\gamma_n^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как оба равенства доказываются одинаково, то мы докажем только первое равенство. Пусть $h_m\in K^m$, h - такой элемент из K, что $\overline{w}(h)=h_m$ и $\sum_{i=s}^{m}\gamma_n^i h_i$. Тогда $h\gamma_n$ имеет верхнюю γ_n-степень равную $m+1$. Действительно,

$$h\gamma_n=\Big(\sum_{i=s}^{m}\gamma_n^i h_i\Big)\gamma_n=\sum_{i=s}^{m}\gamma_n^i h_i\gamma_n=\sum_{i=s}^{m}\gamma_n^{i+1}(\gamma_n^{-1}h_i\gamma_n) \qquad (4)$$

Из (4) вытекает, что $\gamma_n^{-1}h_m\gamma_n\in K^{m+1}$, т.е. $K^{m+1}\subset\gamma_n^{-1}K^m\gamma_n$. Обратное включение доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть K - правый идеал в $P\Gamma$ и $P\Gamma_{n-1}$ выполняется условие обрыва возрастающих цепей правых идеалов. Тогда существует такое натуральное C, что для любого $v\in P\Gamma$ со свойством $\bar{w}(v)\in K^m$ и $\ell(v)=m$ найдется такой элемент v', что $v-v'\in K$ и $(v')\leqslant max\{\ell(v)-1, C\}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторое число m' и рассмотрим $K^{m'}$. Так как $K^{m'}$ является правым идеалом в $P\Gamma_{n-1}$, то в $K^{m'}$ имеется конечное число образующих $g_1, g_2, \ldots, g_s$. Выбираем в идеале K S элементов со свойствами:

$$\ell(h_j)=m', \quad \bar{w}(h_j)=g_j \qquad (j=1,2,\ldots,S)$$

Пусть наибольшая γ_n-длина элементов h_j $(1\leqslant j\leqslant S)$ равна C, т.е. $C=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant s}\{\ell(h_j)\}$. Из леммы 2 вытекает, что элементы

$$\gamma_n^{-(m-m')}(\bar{w}(h_j))\gamma_n^{m-m'} \quad (j=1,2,\ldots,S)$$

являются образующими идеала K^m в $P\Gamma_{n-1}$. Так как верхняя γ_n-проекция на $P\Gamma_{n-1}$ элемента v лежит в K^m, то найдутся такие элементы $q_j\in P\Gamma_{n-1}$, что

$$\bar{w}(v)=\sum_{j=1}^{S}\gamma_n^{-(m'-m)}g_j\gamma_n^{m'-m}q_j$$

Тогда элемент

$$v'=v-\sum_{j=1}^{S}\gamma_n^{-(m'-m)}h_j\gamma_n^{m'-m}q_j$$

имеет верхнюю γ_n-степень, меньшую m. Очевидно, что элемент v' удовлетворяет поставленным требованиям.

Лемма доказана.

Т е о р е м а I. (Ф.Холл[4]). Групповая алгебра $P\Gamma$ полициклической группы Γ над произвольным полем P удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что каждый правый идеал $K\subset P\Gamma$ обладает конечным числом образующих. Доказательство будем проводить с помощью индукции по длине ряда (I). Если $n=1$, то теорема очевидна. Пусть $P\Gamma_{n-1}$ удовлетворяет условию максимальности для правых идеалов, т.е. каждый правый идеал из $P\Gamma_{n-1}$

обладает конечным числом образующих. Предположим, что некоторый правый идеал K в $P\Gamma$ не имеет конечного числа образующих и пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m \ldots$ - бесконечная система образующих идеала K.

Рассмотрим K^m (m - некоторое натуральное число). Так как K^m есть правый идеал в $P\Gamma_{n-1}$ и $P\Gamma_{n-1}$, согласно предположению индукции, удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых идеалов, то в K^m имеется конечная система образующих $\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_{s_1}$. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_{s_1} \in K$, таковы, что $\overline{w}(h_i) = \bar{h}_i$ и $\bar{\ell}(\bar{h}_i) = m$. Согласно лемме 3 существует такое число C и такие элементы $v_{01}, v_{02}, \ldots, v_{0m}, \ldots$, что $v_i - v_{0i} \in K$, $\ell(v_{0i}) \leq \max(\ell(v_i) - 1, C)$ ($i = 1, 2, \ldots$). Применив неоднократно, если это необходимо, лемму 3, мы придем к существованию элементов $v_1', v_2', \ldots, v_n'$, таких, что $v_i - v_i' \in K$, $\ell(v') \leq C$. Из доказательства леммы 3 следует, что система

$$h_1, h_2, \ldots, h_{s_1}, v_1', v_2', \ldots, v_n',$$

является системой образующих идеала K. Пусть

$$\mathcal{L}_C = \{\overline{w}(h); h \in K, \bar{\ell}(h) \leq C\}.$$

Очевидно, что $\mathcal{L}_C$ есть правый идеал в $P\Gamma_{n-1}$ и, следовательно, обладает конечным числом образующих $\bar{h}_{s_1+1}, \ldots, \bar{h}_{s_2}$. Если $h_{s_1+1}, \ldots, h_{s_2} \in K$, таковы, что $\overline{w}(h_j) = \bar{h}_j$, $\bar{\ell}(h_j) = C$, $\ell(h) \leq C$, то мы можем построить последовательность $v_1'', v_2'', \ldots, v_n''$, со свойствами: $v_i'' - v_i' \in K$, $\ell(v_i'') \leq C - 1$, при этом система

$$h_1, h_2, \ldots, h_{s_2}, v_1'', v_2'', \ldots, v_n'', \ldots$$

будет системой образующих идеала K. Продолжая описанный выше процесс, мы построим такую систему образующих идеала K

$$h_1, h_2, \ldots, h_{s_k}, \ldots$$

что $\ell(h_j) = 0$ и $h_j \in P\Gamma_{n-1}$ при $j \geq S_k + 1$. Если мы обозначим через K' правый идеал в $P\Gamma_{n-1}$, порожденный элементами h_j ($j \geq S_k + 1$), то мы можем найти конечное число образующих идеала K' : $h_{s_k+1}, \ldots, h_{s_{k+1}}$. Тогда, очевидно, система

$$h_1, h_2, \ldots, h_{s_{k+1}}$$

будет системой образующих идеала K. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

§2. Модули над областями главных идеалов

Пусть J - коммутативная область главных идеалов, не являющаяся полем, $\omega_0 = \{p_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ - множество простых элементов из J. Каждый элемент $x \in J$ $(x \neq 0)$ однозначно с точностью до делителей единицы представим в виде произведения простых:

$$x = \varepsilon \prod_{\lambda \in \Lambda} p_\lambda^{n_\lambda}$$

где ε - делитель единицы и лишь конечное число n_λ отлично от нуля.

Обозначим через $\mathfrak{A}(J)$ класс всех J-модулей и пусть $V \in \mathfrak{A}(J)$ и $v \in V$. Порядковым идеалом $\mathcal{J}(v)$ элемента v называется совокупность всех элементов из J, аннулирующих v:

$$\mathcal{J}(v) = \{x \in J, vx = 0\}.$$

Так как J - область главных идеалов, то $\mathcal{J}(x)$ есть главный идеал, т.е. представим в виде $\mathcal{J}(v) = x_0 J$. Элемент $x_0 \in J$ в этом случае называется порядком элемента v. Очевидно, что

$$vJ \cong J/\mathcal{J}(v)$$

J-модуль V называется модулем без кручения, если $\mathcal{J}(v) = 0$ для любого $v \in V$, и периодическим модулем, если $\mathcal{J}(v) \neq 0$ для любого $v \in V$. J-модуль тогда и только тогда можно представить в виде прямой суммы:

$$V = \oplus \sum_{\mu \in M} v_\mu J,$$

где $v_\mu J \cong J$, т.е. $\mathcal{J}(v_\mu) = \{0\}$. Это эквивалентно тому, что J-модуль V порождается множеством $\{v_\mu, \mu \in M\}$

состоящим из элементов, линейно-независимых над $\mathfrak{J}$. Если V - произвольный $\mathfrak{J}$-модуль и в V имеется свободный $\mathfrak{J}$-подмодуль V_0, порожденный максимальным множеством линейно-независимых над $\mathfrak{J}$ элементов, то V/V_0 есть периодический модуль.

Пусть ω' есть подмножество множества ω_0 всех простых элементов из $\mathfrak{J}$. Мы будем говорить, что $\mathfrak{J}$-модуль V принадлежит классу модулей $\mathfrak{A}(\mathfrak{J}, \omega')$, если в V найдется такой свободный подмодуль V_0, что V/V_0 есть ω'-периодический $\mathfrak{J}$-модуль, т.е. V/V_0 есть периодический $\mathfrak{J}$-модуль и порядок любого элемента $v+V_0$ имеет простыми делителями только элементы из ω'. Если $\omega'=\omega_0$, то класс $\mathfrak{A}(\mathfrak{J}, \omega')$ совпадает с классом $\mathfrak{A}(\mathfrak{J})$, т.е. $\mathfrak{A}(\mathfrak{J})=\mathfrak{A}(\mathfrak{J},\omega')$; если же ω' - пустое множество, то $\mathfrak{A}(\mathfrak{J},\omega')$ есть класс всех свободных $\mathfrak{J}$-модулей. С другой стороны, если $V_0=\{0\}$, то $\mathfrak{J}$-модуль V называется ω'-периодическим.

В работе [4] приведены следующие утверждения, доказательства которых мы здесь опустим.

Л е м м а 4. Поле рациональных дробей R от $\mathfrak{J}$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(\mathfrak{J},\omega')$ тогда и только тогда, когда $\omega'=\omega_0$.

Л е м м а 5. Если $V\in\mathfrak{A}(\mathfrak{J},\omega')$, то каждый $\mathfrak{J}$-подмодуль $V_0\subset V$ также принадлежит классу $\mathfrak{A}(\mathfrak{J},\omega')$.

Л е м м а 6. Пусть $\mathfrak{J}$-модуль V обладает возрастающим рядом из подмодулей $\{H_\alpha:\alpha\in M\}$ и $V=H_\beta$. Если $H_{\alpha+1}/H_\alpha\in\mathfrak{A}(\mathfrak{J},\omega')$ для всех $\alpha<\beta$, то $V\in\mathfrak{A}(\mathfrak{J},\omega')$.

Введем еще один класс $\mathfrak{J}$-модулей, который мы обозначим через $\mathfrak{A}(\mathfrak{J},\omega', k)$. $\mathfrak{J}$-модуль V тогда и только тогда принадлежит классу $\mathfrak{A}(\mathfrak{J},\omega', k)$, когда в V имеется свободный подмодуль V_0, что V/V_0 есть ω'-периодический модуль, причем порядок x произвольного элемента $v+v_0\in V/V_0$ представим в виде

$$x=\prod_{\lambda\in\Lambda} p_\lambda^{n_\lambda}$$

где лишь конечное число n_λ отлично от нуля и все $n_\lambda\leqslant k$.

Учитывая доказательство и формулировку лемм 4, 5, 6, легко получить следующие утверждения:

Л е м м а 4. Поле рациональных дробей R от $\mathfrak{I}$ не принадлежит ни одному классу $\mathfrak{A}(\mathfrak{I}, \omega', k)$ для всех конечных k.

Л е м м а 5. Если $V \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I}, \omega', k)$, то каждый подмодуль $V_0 \subset V$ также принадлежит классу $\mathfrak{A}(\mathfrak{I}, \omega', k)$.

Л е м м а 6. Если $\mathfrak{I}$-модуль V обладает конечным возрастающим рядом из подмодулей:

$$\{0\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = V,$$

причем $H_{i+1}/H_i \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I}, \omega', k)$, то $V \in \mathfrak{A}(\mathfrak{I}, \omega', k)$, где $k = \sum_{i=0}^{n-1} k_i$.

Л е м м а 7. $\mathfrak{I}$-модуль V только тогда принадлежит классу $\mathfrak{A}(\mathfrak{I}, \omega', k)$, когда каждый его собственный подмодуль принадлежит классу $\mathfrak{A}(\mathfrak{I}, \omega', k')$, $k' < k$.

Пусть G - векторное пространство над полем P и σ - некоторый его эндоморфизм. Тогда G мы можем рассматривать как $\mathfrak{I}$-модуль, где $\mathfrak{I} = P[x]$ - кольцо полиномов от одного переменного x с коэффициентами из поля P, если задать представление $\mathfrak{I}$ относительно G с помощью отображения $x \to \sigma$. В этом случае для удобства мы будем говорить, что G есть $\mathfrak{I}_\sigma$-модуль.

Элемент $y \in G$ называется σ-алгебраическим, если порядковый идеал $\vartheta(y)$ отличен от нуля. Легко видеть, что элемент $y \in G$ тогда и только тогда является алгебраическим, когда минимальное инвариантное относительно σ подпространство, содержащее y, конечномерно. В случае, когда $\vartheta(y) = 0$, элемент y называется σ-трансцендентным. Это означает, что минимальное σ-инвариантное подпространство, содержащее $y \in G$, является бесконечномерным.

Если $\mathfrak{I}_\sigma$-модуль G является периодическим, то σ называется локально алгебраическим эндоморфизмом; в случае, когда $\mathfrak{I}_\sigma$-модуль G не имеет кручения, эндоморфизм σ называется трансцендентным.

J_σ -модуль G называется делимым, если уравнение вида $x\lambda = y$ разрешимо в G при любом $y \in G$ и для произвольного $\lambda \in J$. Легко видеть, что J_σ -модуль G тогда и только тогда является делимым, если для любого

$$\lambda \in J, G\lambda = G$$

Л е м м а 8. Эндоморфизм σ тогда и только тогда обладает собственным максимальным подпространством в G инвариантным относительно эндоморфизма σ, когда G не является делимым J_σ -модулем.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G_0 является собственным максимальным σ -инвариантное подпространство в G. Тогда в факторе G/G_0 эндоморфизм σ индуцирует эндоморфизм $\bar\sigma$, причем минимальный полином $\lambda \in J$, которому $\bar\sigma$ удовлетворяет, является неприводимым. Тогда, очевидно, что $G\lambda \subset G_0 \neq G$. Это означает, что G не является делимым J_σ -модулем. Тогда по определению найдется такой неприводимый элемент $\lambda \in J$, что $G\lambda \neq G$. Отсюда вытекает, что для любого $\bar x \in G/G\lambda$, $\bar x \lambda = 0$. Так как λ - неприводимый элемент из J, то из теоремы 7.4.I. [9] следует, что в $G/G\lambda$ существует собственное максимальное $\bar\sigma$ -инвариантное подпространство,. Но тогда и в G имеется собственное максимальное σ -инвариантное подпространство.

Лемма доказана.

Л е м м а 9. Если $G \in \mathfrak{A}(J_\sigma, \omega', k)$ для некоторого подмножества $\omega' \subset \omega_0$, то эндоморфизм σ обладает собственным максимальным σ -инвариантным подпространством.

Согласно теореме 7.4.I из [9] J_σ-модуль G при условиях, указанных в лемме, можно представить в виде прямой суммы конечномерных J_σ -подмодулей. Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы.

Пусть G - J -модуль (J - области главных идеалов). J -подмодуль $H \subset G$ называется сервантным, если из разрешимости уравнения $x\lambda = g$ $(\lambda \in J, g \in H)$ в G следует его разрешимость в H.

Приведем несколько примеров сервантных J-подмодулей.

1. Совокупность всех алгебраических элементов J-модуля G, т.е. максимальный периодический J-подмодуль, является сервантным подмодулем в G.

2. Любой делимый J-подмодуль является сервантным J-подмодулем в произвольном J-модуле.

Легко проверяются следующие простые утверждения:

Л Е М М А 10. Каждый сервантный J-подмодуль ω'-делимого J-модуля ($\omega' \subset \omega_0$) является ω'-делимым J-подмодулем.

Л Е М М А 11. Минимальный сервантный J-подмодуль в H, содержащий алгебраический элемент $x \in G$, тогда и только тогда является бесконечномерным векторным пространством, когда H является делимым J-подмодулем в G ([9], теорема 6.5.).

Л Е М М А 12. Пусть H - сервантный J-подмодуль в G, а F - сервантный J-подмодуль H, то F является сервантным J-подмодулем в G.

Пусть G, G_1 - $P\Gamma$-модули, где $P\Gamma$ - групповая алгебра группы Γ над полем P, φ - некоторый автоморфизм алгебры $P\Gamma$. $P\Gamma$-модули G и G_1 называются слабо изоморфными, если существуют такой изоморфизм φ_1 между аддитивными группами G и G_1, автоморфизм φ алгебры $P\Gamma$, что имеет место равенство: $(x\lambda)^{\varphi_1} = x^{\varphi_1}\lambda^{\varphi}$ для любых $x \in G_1$, $\lambda \in P\Gamma$.

Лемма 13. Пусть φ - автоморфизм групповой алгебры $P\Gamma$ и K - некоторый правый идеал в $P\Gamma$. Тогда $P\Gamma$-модули $P\Gamma/K$ и $P\Gamma/K^{\varphi}$ слабо изоморфны.

Все приведённые выше утверждения справедливы для случая, когда вместо $P[x]$ рассматривается групповая алгебра $J = P\{x\}$ циклической группы без кручения над полем P.

Если σ - произвольный элемент из $P\Gamma$, то каждый $P\Gamma$-модуль можно естественным образом рассматривать как J_σ-модуль, если задать представление $P\{x\}$ с помощью отображения $x \to \sigma$.

Имеем место следующее легко проверяемое утверждение:

Л е м м а 14. Пусть даны: $P\Gamma/K$ - $P\Gamma$ -модуль, φ - автоморфизм алгебры $P\Gamma$, σ - некоторый элемент из $P\Gamma$. Если каждый периодический $\mathcal{J}_\sigma$-подмодуль $P\Gamma$ - модуля $P\Gamma/K$ принадлежит классу $\mathcal{O}(\mathcal{J}_\sigma, w; k)$, то и каждый периодический $\mathcal{J}_\sigma^\varphi$ - подмодуль $P\Gamma$ -модуля $P\Gamma/K^\varphi$ принадлежит классу $\mathcal{O}(\mathcal{J}_{\sigma,\varphi}\, w; k)$.

§3. О некоторых подмодулях групповой алгебры полициклической группы

Пусть дана групповая алгебра $P\Gamma$ группы Γ над произвольным полем P и некоторый её правый идеал K. Некоторое свойство Θ элементов этой алгебры $P\Gamma$ мы назовем K - свойством, если из того, что элемент $h \in P\Gamma$ обладает свойством Θ следует, что этим свойством обладает также элемент $h-g$ при любом $g \in K$. K -свойство Θ элементов алгебры $P\Gamma$ называется аддитивным, если из того, что элементы h и g обладают свойством Θ, то и все элементы вида $\alpha h + \beta g$, где α и β - элементы из P, обладают этим свойством. Некоторое подмножество элементов алгебры $P\Gamma$ называется Θ -множеством, если каждый элемент из этого подмножества обладает свойством Θ. Θ -множество M называется K - замкнутым, если выполняются следующие два условия:

а) $\bar{w}(h) \in K^m$, где $m = \dot{\bar{l}}(h)$ для любого $h \in M$,

б) $\bar{w}(h-g) \in K^m$, где $m = \bar{l}(h-g)$ для любых $h \in M, g \in K$.

Θ -множество M называется почти K -замкнутым, если за исключением некоторого конечного числа элементов является K -замкнутым множеством.

Очевидно, что любое K -замкнутое подмножество из K, каждый элемент которого обладает K -свойством Θ, совпадает с K.

Пусть $P\Gamma$ - групповая алгебра полициклической группы Γ, K - некоторый правый идеал в $P\Gamma$. Тогда в K мы можем ввести γ_n -фильтрацию, обозначив через

$$\mathcal{L}_s(K)=\{h\in K: l(h)\leqslant s\}.$$

Легко видеть, что в K имеется конечный ряд из $P\Gamma_{n-1}$ - модулей: $K\supset\mathcal{L}_s(K)\supset\mathcal{L}_{s-1}(K)\supset\ldots\supset\mathcal{L}_0(K)$

Мы будем говорить, что K-замкнутое Θ -множество M, где Θ - некоторое K -свойство, тесно связано с идеалом K, если из включения $\bar{w}(h)\in K^m$ для любого $h\in M$ следует, что

$$\bar{w}(h)\in\mathcal{L}^m_{ms}(K),\text{ где } m=\bar{l}(h),\ s=l(h)$$

Лемма 15. Пусть даны: $P\Gamma$ - групповая алгебра полициклической группы Γ, K - правый идеал в $P\Gamma$, Θ - некоторое K-свойство, M - K-замкнутое Θ -множество, тесно связанное с K. Тогда для любого элемента $h\in M$ найдется такой элемент $f\in K$, что $h-f\in P\Gamma_{n-1}$.

Доказательство. С помощью леммы 3 и применив индукцию, мы можем для каждого $h\in M$ найти такой элемент $f\in K$, что

$$l(h-f')\leq C,$$

причем C не зависит от выбора $h\in M$. Если $h-f'\in P\Gamma_{n-1}$ для любого $h\in M$, то утверждение леммы доказано. Предположим, что $h-f'\bar{\in} P\Gamma_{n-1}$, хотя бы для одного $h\in M$.

Обозначим через L $P\Gamma_{n-1}$-подмодуль в K, порожденный всеми элементами $g\in K$ со свойствами $\bar{l}(g)\leqslant C$, $l(g)\leqslant C$. $P\Gamma_{n-1}$ -модуль L непуст, ибо множество M тесно связано с K. L имеет конечный базис как $P\Gamma_{n-1}$ -модуль, который мы обозначим через $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_s$. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_s$ - элементы из L со свойствами $\bar{w}(g_i)=\bar{g}_i$. Тогда для любого $h-f'$ найдутся такие элементы $u_i\in P\Gamma_{n-1}$, что $\bar{w}(h-f')=\sum\bar{g}_i u_i$. Поэтому

$$l(h-f'-\sum g_i u_i)\leqslant C-1,\ f'+\sum g_i u_i\in K$$

Применив индукцию, мы получим нужное нам утверждение. Лемма доказана.

С л е д с т в и е . Пусть даны: $P\Gamma$ - групповая алгебра полициклической группы Γ, K - правый идеал в $P\Gamma$, θ - некоторое K-свойство, M - почти K-замкнутое θ-множество, тесно связанное с K. Тогда для любого элемента $h \in M$, за исключением конечного множества элементов из M, найдется такой элемент $f \in K$, что $h-f \in P\Gamma_{n-1}$.

Представление (G, Γ) группы Γ автоморфизмами векторного пространства G называется циклическим, если в G найдется такой элемент x, что минимальное Γ-допустимое подпространство, содержащее x, совпадает с G. Другими словами, представление (G, Γ) называется циклическим, если в G найдется такой элемент x, что $x P\Gamma = G$. Если $K = \{g \in P\Gamma : xg = 0\}$, то два $P\Gamma$-модуля G и $P\Gamma/K$ изоморфны ([12], стр. 17).

Л е м м а 16. Пусть (G, Γ) - циклическое представление полициклической группы Γ, причем G - векторное пространство над произвольным полем P. Тогда для любого $\sigma \in Z(R)$ найдется такое конечное множество $\omega_\sigma \subset \omega_0$, что каждый периодический $\mathcal{J}_\sigma$-подмодуль $G_0 \subset G$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(\mathcal{J}_\sigma, \omega_\sigma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Применим индукцию по длине ряда (I). Если ряд (I) имеет длину, равную единице, то требуемое утверждение очевидно. Предположим, что для Γ_{n-1} утверждение леммы справедливо, но для группы Γ оно не имеет место. Это означает, что найдется такое циклическое представление (G, Γ) группы Γ и элемент $\sigma \in Z(R)$, что в G имеется периодический $\mathcal{J}_\sigma$-подмодуль G_0 со свойством:

не существует такого конечного подмножество $\omega_\sigma \in \omega_0$, что $G_0 \in \mathfrak{A}(\mathcal{J}_\sigma, \omega_\sigma)$.

Согласно определению циклического представления, мы можем, не уменьшая общности, предположить, что $G = P\Gamma/K$, где K - некоторый правый идеал в $P\Gamma$. Тогда, в силу предположения, в $P\Gamma$ найдется такая последовательность M элементов $\{X_i\}$, что

1) $x_i \in K$, $i=1,2,\dots,n,\dots$

2) $x_i\lambda_i \in K$, $\lambda_i \in \omega_\sigma$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \neq j$.

Рассмотрим $P\Gamma_{n-1}/K$. Учитывая индуктивное предположение, найдется такое конечное подмножество $\omega'_\sigma \subset \omega_0$, что каждый периодический J_σ -подмодуль H из $P\Gamma'_{n-1}/K$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, \omega'_\sigma)$ для $\sigma \in Z(R)$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $\lambda_i \bar{\in} \omega'_\sigma$. Тогда $\bar{w}(x_i) \in K^{m_i}$, $m_i = \bar{\ell}(x_i)$. Действительно, пусть $\bar{w}(x_i)$. Но $\bar{w}(x_i)\lambda_i \in K^{m_i}$, т.е. $\lambda_i \in \omega'_\sigma$. Мы пришли к противоречию, из которого вытекает включение $\bar{w}(x_i) \in K^{m_i}$. Легко проверяется, что M - почти K-замкнутое Θ -множество, где Θ - свойство 1. и 2. Применив лемму 14, мы найдем бесконечное множество M' элементов из $P\Gamma'_{n-1}$, обладающих свойством Θ. Но тогда мы приходим к противоречию с индуктивным предположением.

Лемма доказана.

Л е м м а 17. Пусть (G, Γ) - циклическое представление полициклической группы Γ, причем G - векторное пространство над абсолютно алгебраическим полем простой характеристики P. Тогда найдется такое конечное множество $\omega \subset \omega_0$, что для любого $\sigma \in Z(R)$ каждый периодический J_σ -подмодуль $G_0 \subset G$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, \omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения полностью аналогично доказательству леммы 16.

Т е о р е м а 2. Пусть (G, Γ) - циклическое представление полициклической группы, причем G - векторное пространство над произвольным полем P. Тогда для любого $\sigma \in Z(R)$ найдется такое конечное множество $\omega_\sigma \subset \omega_0$, что каждый минимальный сервантный J_σ -подмодуль $G_0 \subset G$, содержащий $x_0 \in G$, принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, \omega_\sigma)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Применим индукцию по длине ряда (1). Если ряд (1) имеет длину, равную единице, то требуемое утверждение очевидно. Предположим, что для

Γ_{n-1} теорема имеет место, а для группы Γ это утверждение несправедливо. Это означает, что существует такое циклическое представление (G, Γ), в котором для некоторого $\sigma \in Z(R)$ в G имеется такой элемент x_0, что минимальный сервантный J_σ-подмодуль $G_0 \subset G$, содержащий x_0, не принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, w')$ ни при каком конечном подмножестве $w' \subset w_0$. Учитывая лемму 16, мы можем рассмотреть случай, когда J_σ-модуль G_0 не имеет кручения.

Без ограничения общности, мы можем считать, что $G = P\Gamma/K$, где K - правый идеал в $P\Gamma$. Тогда в силу предположения в $P\Gamma$ найдется такая последовательность элементов $\{x_i\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $x_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots$

2) $x_i - \lambda_i - x_i \in K$, $\lambda_i \in w_0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ если $i \neq j$.

Рассматривая $P\Gamma_{n-1}/K^m$ и учитывая индуктивное предположение, мы найдем такое конечное подмножество $w'_\sigma \subset w_0$, что каждый минимальный сервантный модуль, содержащий произвольный элемент из $P\Gamma_{n-1}/K^m$, принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, w'_\sigma)$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $\lambda_i \bar{\in} w'_\sigma$. Отсюда и из леммы 16 сразу вытекает, что почти для всех x_i (т.е. кроме конечного числа их):

$$\bar{\ell}(x_i) \leq \bar{\ell}(x_0)$$

Если $\bar{\ell}(x_i) = \bar{\ell}(x_0)$ для бесконечного числа x_i, то рассмотрев $P\Gamma_{n-1}/K^m$ $(m = \bar{\ell}(x_0))$ и применив индуктивное предположение, мы сразу приходим к противоречию. Это означает, что для почти всех x_i имеет место

$$\bar{\ell}(x_0) > \ell(x_i)$$

Но тогда $\overline{w}(x_0) \in K^m$ и, следовательно, учитывая лемму 3, мы можем найти такой элемент $x' \in K$, что $\bar{\ell}(x_0 - x_1) < m$. Применив индукцию по величине числа m и повторяя предыдущие рассуждения, мы легко придем к противоречию с индуктивным предположением.

Теорема доказана.

Полностью аналогично доказательству теоремы 2 показывается справедливость следующего утверждения:

Т е о р е м а 3. Пусть (G, Γ) - циклическое представление полициклической группы Γ, причем G - векторное пространство над абсолютно алгебраическим полем простой характеристики p. Тогда найдется такое конечное подмножество $\omega_1 \subset \omega_0$, что для любого $\sigma \in Z(R)$ каждый минимальный сервантный J_σ-подмодуль $G_0 \subset G$, содержащий $x_0 \in G$, принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, \omega_1)$.

Т е о р е м а 4. Пусть (G, Γ) - циклическое представление полициклической группы Γ над произвольным полем P. Тогда для любого $\sigma \in Z(R)$ каждый периодический J_σ-подмодуль G_0 принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, \omega, k)$, где $\omega \subset \omega_0$, k - натуральное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по длине ряда (I). Для случая $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Пусть для группы Γ_{n-1} теорема имеет место, а для Γ_n это утверждение не справедливо. Это означает, что существует такое циклическое представление (G, Γ), в котором для некоторого $\sigma \in Z(R)$, $\omega \subset \omega_0$, найдется такое периодический J_σ-подмодуль $G_0 \subset G$, что $G_0 \bar{\in} \mathfrak{A}(J_\sigma, \omega, k)$ ни при одном натуральном k. Без ограничения общности мы можем считать, что $G = P\Gamma / K$, где K - правый идеал в $P\Gamma$. Тогда в силу предположения, в $P\Gamma$ найдется такая последовательность M элементов $\{x_i\}$, которые обладают следующим свойством Θ:

$$x_i \lambda^i \in K, \; x_i \lambda^{i-1} \bar{\in} K, \; \lambda_i \in \omega.$$

Легко проверяется, что M есть почти K-замкнутое Θ-множество, тесно связанное с K. Тогда, согласно лемме I4, найдутся такие элементы $y_i \in K$, что для почти всех $x_i \in M$ имеет место

$$x_i - y_i \in P\Gamma_{n-1}, \; (x_i - y_i)\lambda^i \in K, \; (x_i - y_i)\lambda^{i-1} \bar{\in} K, \; \lambda_i \in \omega$$

Мы пришли в противоречие с индуктивным предположением.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Пусть (G, Γ) - циклическое представление полициклической группы Γ над произвольным полем P. Тогда для любого $\sigma \in Z(R)$ каждый минимальный сервантный J_σ - подмодуль G_0, содержащий x_0, принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, w, k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения полностью аналогично доказательству теорем 2 и 4.

Все нижеследующие утверждения этого параграфа доказываются по единой схеме, которую мы применяли выше, поэтому доказательства этих утверждений мы приводить здесь не будем.

Т е о р е м а 6. Пусть (G, Γ) - циклическое представление полициклической группы Γ над произвольным полем P. Тогда найдется такое натуральное k, что для любого $\sigma \in Z(R)$ каждый J_σ -подмодуль $G_0 \subset G$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, w, k)$.

Т е о р е м а 7. Пусть (G, Γ) - циклическое представление полициклической группы Γ над произвольным полем P. Тогда для любого элемента $\sigma \in Z(R)$ найдутся такое конечное множество $w_\sigma \subset w_0$ и такое натуральное k, что J_σ - подмодуль $G_0 \subset G$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, w_\sigma, k)$.

Из теорем 3 и 5 вытекает

Т е о р е м а 8. Пусть (G, Γ) - циклическое представление полициклической группы Γ над абсолютно алгебраическим полем P простой характеристики p. Тогда найдутся такое конечное множество $w_1 \subset w_0$ и такое натуральное k, что для любого $\sigma \in Z(R)$ каждый J_σ -подмодуль $G_0 \subset G$ принадлежит классу $\mathfrak{A}(J_\sigma, w_1, k)$.

Пусть (G, Γ) - некоторое представление полициклической группы Γ. Обозначим через

$$G(\sigma_0, \lambda_0) = \{x : x \in G, x = y(\sigma_0 - \lambda_0 e), y \in G\} (\sigma_0 \in Z(R), \lambda_0 \in P)$$

а через $G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – линейную оболочку подпространств

$$G(\sigma_1\lambda_1), G(\sigma_2\lambda_2), \dots, G(\sigma_m, \lambda_m).$$

Очевидно, что каждое $G(\sigma_i \lambda_i)$ является $PZ(R)$– подмодулем в G.

Т е о р е м а 9. Пусть (G, Γ) – циклическое представление полициклической группы Γ, $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m \in Z(R), \lambda_i \in P$. Тогда каждый минимальный сервантный -подмодуль из $P^{L}_{Z}(R)$–модуля $G/G(\sigma_1, \dots \sigma_m, \lambda_1 \dots \lambda_m)$, содержащий элемент x_0, принадлежит классу $\mathfrak{A}(\mathcal{K}, \omega_1, k)$, где $\omega_1 < \omega_0$ и k не зависит от выбора $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_m$, а зависит лишь от числа m и $\sigma \in Z(R)$.

Т е о р е м а 10. Пусть (G, Γ) – циклическое представление полициклической группы Γ. Тогда в G существует собственный максимальный $PZ(k)$ –подмодуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ – образующие группы $Z(R)$. Согласно теореме 7 найдется такой элемент $\lambda_1 \in P$, что $G(\sigma_1 - \lambda_1) \neq G$. Предположим, что для G мы нашли такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}$, что

$$G \neq G(\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_{m-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1})$$

Тогда по теореме 9 найдется такое число λ_m, что

$$\left[G/G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}\right](\sigma_m - \lambda_m \bar{e}) \neq G/G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{m-1}, \lambda_1)$$

Но тогда $G \neq G(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Так как в факторе

$$G/G(\sigma_1, \dots, \sigma_m, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

каждый $\sigma \in Z(R)$ индуцирует алгебраический автоморфизм, то в G существует собственный максимальный $PZ(R)$–подмодуль (лемма 9).

Теорема доказана.

§4. Доказательство основной теоремы (положительное решение проблемы Ф.Холла [4])

В этом параграфе мы будем рассматривать представления групп только над абсолютно алгебраическим полем P простой характеристики p.

Т е о р е м а II. Каждое неприводимое представление полициклической группы Γ автоморфизмами векторного пространства G над абсолютно алгебраическим полем простой характеристики p является конечномерным.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть (G,Γ) - точное неприводимое представление группы Γ. Тогда для любого $x \in G$ имеет место равенство $xP\Gamma = G$. Пусть $Q = \{g \in P\Gamma : xg = 0\}$. Тогда Q есть правый идеал в $P\Gamma$ и $P\Gamma$-модули G и $P\Gamma/Q$ изоморфны. Согласно теореме 10 в G имеется максимальное $Z(R)$-инвариантное подпространство H. Так как $Z(R)$ - абелева группа с конечным числом образующих, то факторпространство G/H является конечномерным, а это означает, что каждый элемент $\sigma \in Z(R)$ индуцирует в факторе G/H алгебраический эндоморфизм. Из того, что P - абсолютно алгебраическое поле простой характеристики p, вытекает, что для любого σ найдется такое натуральное n, что σ^n индуцирует тождественный автоморфиз в векторном пространстве G/H. Так как $Z(R)$ есть абелева группа с конечным числом образующих, то найдется такое натуральное k, что σ^k лежит в ядре представления $(G/H, Z(R))$ для любого $\sigma \in Z(R)$. Обозначим через $Z^k(R)$ подгруппу в $Z(R)$, порожденную элементами вида σ^k, где $\sigma \in Z(R)$. Легко видеть, что $Z^k(R)$ является характеристической подгруппой в $Z(R)$ и, следовательно, нормальным делителем группы Γ. Учитывая, что (G,Γ) есть неприводимое представление группы Γ, получаем, что G в силу теоремы Ремака есть подпрямая сумма подпространства H_γ, где γ пробегает множество представителей всех смежных классов группы Γ по подгруппе $Z(R)$. Так как $Z^k(R)$ лежит в ядре представления $(G/H_\gamma, Z(R))$ для любого представителя γ, то она лежит в ядре представления (G, Γ). Поэтому $Z(R)$ является конечной группой, но тогда и группа Γ является конечной. Следовательно, векторное пространство G является конечномерным.

Теорема доказана.

Литература

1. J.Kaplansky, Groups with representations of bounded degree. Canad.J.Math. 1 (1949), 105-112.
2. А.И. Мальцев, Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами, Матем.сб. т.8, 3 (1940), 405-422.
3. S.Amitsur, Groups with representations of bounded degree. Illinois Math. J. 5,2 (1961), 198-205.
4. P.Hall, On the finiteness of certain soluble groups. Proc.London Math.Soc. (3), 9 (1959), 595-622.
5. P.Hall, Finiteness conditions for soluble groups. Proc.London Math.Soc.(3), 4 (1954), 419-436.
6. K.Hirsch, On infinite soluble groups. III. Proc.London Math.Soc. 49 (1946), 184-194.
7. Б.И.Плоткин, Группы автоморфизмов алгебраических систем. М., 1966.
8. Е.М.Левич, Об одной теореме Ф.Холла. Межвузовский научный симпозиум по общей алгебре. Доклады, сообщения, резюме. Тарту, 1966, 63-65.
9. Е.М.Левич, Модули над кольцом полиномов от одного эндоморфизма. Латвийский математ.ежегодник, 2 (1966), 127-174.
10. Б.И.Плоткин, Радикальные группы. Математ. сб. 37 (1965), 507-526.
11. Б.И.Плоткин, Радикальные и полупростые группы. Труды Московского математ.об-ва 6 (1957), 299-336.
12. Н.Джекобсон, Строение колец, М., ИЛ, 1961.
13. Е.М.Левич, О проблеме Ф.Холла. ДАН СССР, т.189 № 6 (1969), 1241-1243.

О ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ, ВСЕ НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОТОРЫХ НАД НЕКОТОРЫМ ПОЛЕМ КОНЕЧНОМЕРНЫ

Е.М.Левич

Одной из интересных задач теории представлений групп является задача изучения свойств группы в зависимости от свойств её представлений. В частности, возникает вопрос: какими свойствами должна обладать группа, чтобы все её неприводимые представления над некоторым полем были бы конечномерными? Известно [1-4], что для того, чтобы все неприводимые представления группы Γ были над любым полем конечномерными, достаточно, чтобы Γ обладала конечнопорожденным абелевым нормальным делителем конечного индекса. Естественно возникает следующая гипотеза: для того, чтобы группа Γ без кручения обладала только конечномерными неприводимыми представлениями над любым полем, необходимо и достаточно, чтобы Γ содержала конечнопорожденный абелевый нормальный делитель конечного индекса.

В случае, когда группа имеет кручение, высказанная нами гипотеза в общем случае не имеет места, ибо бесконечная абелева группа экспоненты p обладает только конечномерными неприводимыми представлениями [5]. В пользу гипотезы говорит теорема, доказанная Ф.Холлом в [4] и утверждающая, что полициклическая группа Γ, которая не обладает конечнопорожденным абелевым нормальным делителем конечного индекса, имеет бесконечномерное неприводимое представление над любым полем, отличным от абсолютно алгебраического поля простой характеристики p.

Целью настоящей заметки является доказательство справедливости высказанной выше гипотезы для случая локально нильпотентных групп без кручения. Кроме того, в ней изучаются вопросы, касающиеся строения групп, у которых все неприводимые представления над некоторым полем конечномерны.

Мы будем говорить, что группа Γ обладает свойством $(A)_P$, если все её неприводимые представления над полем P конечномерны; обладает свойством (A), если все её неприводимые представления над любым полем конечномерны; и обладает свойством (B), если Γ есть конечное расширение конечнопорожденной абелевой группы

Предложение I. Пусть Γ - группа, H - подгруппа группы Γ, которая обладает бесконечным неприводимым представлением над полем P. Тогда группа Γ обладает бесконечномерным неприводимым представлением над полем P.

Доказательство. Пусть (G, H) - бесконечномерное неприводимое представление группы H над полем P. Тогда в групповой алгебре PH группы H над полем P найдется такой максимальный правый идеал J_H, что представления (G, H) и $(PH/J_H, H)$ эквивалентны. Обозначим через $\bar{J}_H$ правый идеал в групповой алгебре $P\Gamma$ группы Γ над полем P, порожденный идеалом J_H. Покажем, что $\bar{J}_H \neq P\Gamma$. Групповую алгебру $P\Gamma$ над полем P мы можем представить в виде прямой суммы векторных подпространств над полем P:

$$P\Gamma = \sum_{\nu \in M} PHg_\nu ,$$

где g_ν - представитель правого смежного класса Hg_ν. группы Γ по подгруппе H, g_α и g_β при $\alpha \neq \beta$ не лежат в одном смежном классе, $\{g_\nu, \nu \in M\}$ - полная система представителей. Тогда

$$\bar{J}_H = \sum_{\nu \in M} J_H g_\nu$$

Но единица группы Γ не принадлежит идеалу $\bar{J}_H$, следовательно, $\bar{J}_H \neq P\Gamma$. Если J - максимальный правый идеал в $P\Gamma$, содержащий $\bar{J}_H$, то $J \cap PH = J_H$ в силу неприводимости представления $(PH/J_H, H)$. Но тогда представление $(P\Gamma/J, \Gamma)$ является бесконечномерным над P, ибо $P\Gamma/J$ содержит подпространство, изоморфное бесконечномерному пространству PH/J_H.

С л е д с т в и е I. Если группа Γ обладает свойством $(A)_P$, то любая её подгруппа и факторгруппа обладает свойством $(A)_P$.

Это следствие непосредственно вытекает из формулировки теоремы I и из совершенно очевидного утверждения, гласящего, что, если факторгруппа некоторой группы обладает бесконечномерным неприводимым представлением над некоторым полем, то и сама группа обладает неприводимым бесконечномерным представлением над тем же полем.

Обозначим через $\mathfrak{A}_P$ класс всех групп, обладающих свойством $(A)_P$, а через $\mathfrak{A}$ - класс всех групп, обладающих свойством (A).

Имеет место следующее утверждение (ср. с теоремой 5 из [6]).

Т е о р е м а I. Если конечнопорожденная группа $\Gamma \in \mathfrak{A}_P$, где P - произвольное поле, характеристика которого отлична от 2, то она аппроксимируется конечными группами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любого элемента $g \in \Gamma$ найдется такой нормальный делитель H_g, что $g \bar{\in} H_g$ и Γ/H_g - конечная группа. Заметим, что в групповой алгебре циклической группы $\{g\}$ над полем P по любому элементу $h \in \{g\}$ всегда найдется максимальный правый идеал $\mathfrak{I}_h$, не содержащий элемента $h-e$. Обозначим через $\bar{\mathfrak{I}}_g$ максимальный правый идеал в $P\Gamma$, содержащий $\mathfrak{I}_g$. Аналогично тому, как мы это делали при доказательстве предложения I, можно показать, что $\bar{\mathfrak{I}}_g \neq P\Gamma$. Так как $(P\Gamma/\bar{\mathfrak{I}}_g, \Gamma)$ - неприводимое представление, то $P\Gamma/\bar{\mathfrak{I}}_g$ является бесконечномерным векторным пространством над P, ибо $\Gamma \in \mathfrak{A}_P$. Обозначим через H_g ядро этого представления. Тогда группу Γ/H_g можно рассматривать как конечнопорожденную матричную группу над полем P, причем образ элемента g в этой фактор-группе отличен от единицы. Согласно [7], группа $\Gamma/\bar{H}_g$ аппроксимируется конечными группами. Следовательно, найдется такой нормальный делитель H_g группы Γ, что $g \in H_g$ и Γ/H_g - конечная группа.

Теорема доказана.

Применив теорему Ремака, мы непосредственно из формулировки теоремы I получаем следующее утверждение:

Следствие 2. Если конечнопорожденная группа $\Gamma \in \mathfrak{A}_P$, где P - произвольное поле, характеристика которого отлична от 2, то Γ есть подпрямое произведение конечных групп.

Если P - конечное поле характеристики $p \neq 2$, то утверждение теоремы I можно усилить, отбросив условие конечной порожденности группы Γ, ибо любая матричная группа над конечным полем является конечной группой. Таким образом, мы имеем следующее утверждение:

Следствие 3. Если $\Gamma \in \mathfrak{A}_P$, где P - конечное поле характеристики $p \neq 2$, то Γ аппроксимируется конечными группами.

Обозначим через $f\,Rad\,P\Gamma$ пересечение всех ядер конечномерных представлений групповой алгебры $P\Gamma$ группы над полем P.

Имеет место следующее утверждение (ср. с теоремой 3 [6]):

Предложение 2. Если $\Gamma \in \mathfrak{A}_P$, где P - произвольное поле, характеристика которого отлична от 2, то $f\,Rad\,P\Gamma = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $h \in f\,Rad\,P\Gamma$. Тогда

$$h = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i ,$$

где $g_i \in \Gamma$. Из теоремы I следует, что группа Γ аппроксимируется конечными группами. Обозначим через H_g нормальный делитель группы Γ конечного индекса, который не содержит g_i, а через $H = \bigcap_{i=1}^{n} H_{g_i}$. Очевидно, что H - нормальный делитель конечного индекса, причем $g_i \bar{\in} H$, $i=1,2,\dots,n$. Если $\Delta(H)$ - двусторонний идеал в $P\Gamma$, порожденный всеми элементами вида $g-e$, где $g \in H$, то факторалгебра $P\Gamma/\Delta(H)$ изоморфна групповой алгебре $P(\Gamma/H)$ группы Γ/H над полем P. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\bar{h} = \sum_{i=1}^{n} d_i \bar{g}_i \neq 0,$$

где $\bar{g}_i$ - образ элемента g_i при естественном гомоморфизме $P\Gamma$ на $P\Gamma/\Delta(H)$, ибо $g_i \bar{\in} H$. Но представление $(P\Gamma/\Delta(H); \Gamma)$ является конечномерным, ибо Γ/H - конечная группа. Мы пришли к противоречию. Предложение доказано.

Предложение 3. Если все неприводимые представления группы Γ конечномерны над полем рациональных чисел и их размерности ограничены в совокупности, то Γ является периодической группой конечной экспоненты.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что циклическая группа без кручения имеет над полем рациональных чисел неприводимое представление любой достаточно большой размерности. Отсюда и из следствия I вытекает, что Γ - периодическая группа. Из сформулированной ниже леммы I и теоремы Жордана /[8], стр.244/ следует, что в Γ имеется абелев нормальный делитель H, такой, что группа Γ/H имеет конечную экспоненту. Применив лемму 2 /см. ниже/, мы получим, что H имеет конечную экспоненту, а следовательно, и Γ имеет конечную экспоненту.

Предложение доказано.

Лемма I. Если все неприводимые представления группы Γ над полем рациональных чисел Q конечномерны и их размерности ограничены в совокупности, то группа Γ есть подпрямое произведение матричных групп ограниченной в совокупности размерности.

Доказательство леммы полностью вытекает из доказательства теоремы I. Из этого доказательства непосредственно следует, что группа Γ аппроксимируется неприводимыми матричными группами. Но по условию леммы все неприводимые представления группы Γ имеют ограниченную в совокупности размерность. Следовательно, группа Γ есть подпрямое произведение матричных групп ограниченной в совокупности размерности.

Лемма 2. Если абелева группа $\Gamma \in \mathfrak{A}_Q$, то периодическая часть этой группы $\Pi(\Gamma)$ имееет конечную экспоненту, а $\Gamma/\Pi(\Gamma)$ есть конечнопорожденная абелева группа без кручения.

Доказательство. Пусть $\Pi(\Gamma)$ не обладает конечной экспонентой. Тогда она разлагается в прямую сумму примарных групп, относящихся к различным простым числам p /[9], стр.115/. Это означает, что $\Pi(\Gamma)$ содержит нормальный делитель A одного из следующих видов:

а) A - группа типа p^{∞};

б) A - прямое произведение бесконечного числа циклических групп по различным простым p;

в) A - прямое произведение бесконечного числа циклических групп порядка p^n, где $n=1,2,\dots$.

Рассмотрим эти случаи.

а) A - группа типа p^{∞}. Существует изоморфное вложение μ группы A в мультипликативную группу поля комплексных чисел таким образом, что каждому элементу из A сопоставляется корень из единицы, степень которого является степенью числа p. Пусть G_c - одномерное векторное пространство над полем комплексных чисел C. Зададим представление A относительно G_c: для $\forall g\in G_c$, $\forall a\in A$, $g\cdot a=a^{\mu}g$, где a^{μ} - образ a при изоморфизме μ. Векторное пространство G_c можно рассматривать как бесконечномерное векторное пространство G_Q над полем Q рациональных чисел. Представление группы A относительно G_c индуцирует представление A относительно G_Q. Возьмем в G_Q A - композиционный фактор $F\supset H$, т.е. F, H - A -инвариантные подпространства, $(F/H, A)$ - неприводимое представление. Предположим, что представление $(F/H, A/\Sigma)$ конечномерно, где Σ - ядро представления $(F/H, A)$. Тогда по теореме Шура /[10], стр.534/ A/Σ - конечная группа. Но A есть группа типа p^{∞}, поэтому $A=\Sigma$. Это означает, что F/H - одномерный фактор, т.е. $F=H\oplus\{g_0\}$, где $g_0\in F\setminus H$. Так как $g_0 a-g_0\in H$, то $g_0\cdot(a-1)\in H$ для любого $a\in A$ и, если a - элемент порядка p^n, то

$$-\sum_{i=1}^{p^n} g_0\cdot(a^i-1)=p^n g_0\in H,$$

т.е. $g_0 \in H$ и $F = H$. Мы пришли к противоречию, из которого вытекает, что $(F/H, A)$ - бесконечномерное представление, а это значит, что $A \in \mathfrak{A}_Q$. Но тогда и $\Gamma \in \mathfrak{A}_Q$ /следствие I/.

б) Пусть A - прямое произведение бесконечного числа циклических групп по различным простым p. Проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получим представление $(F/H, A/\Sigma)$, где A/Σ - конечная группа. Это означает, что Σ целиком содержит циклическую группу A_1 порядка p_1. Для каждого $\alpha \in \Sigma$ и для любого $g \in F \setminus H$ выполняется включение $g \cdot (\alpha - 1) \in H$, откуда

$$-\sum_{i=1}^{p_1} g \cdot (\alpha^i - 1) = p_1 g \in H$$

т.е. $g \in H$, если α - образующий подгруппы A_1. Но в качестве g мы можем взять произвольный элемент из F. Следовательно, $(F/H, A/\Sigma)$ - бесконечномерное неприводимое представление, а это значит, что $A \in \mathfrak{A}_Q$, т.е. $\Gamma \in \mathfrak{A}_Q$ /следствие I/.

в) Пусть A - прямое произведение бесконечного числа циклических групп A_n порядка p^n, где $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через μ_n изоморфное вложение группы A_n в мультипликативную группу поля C комплексных чисел, при котором каждому элементу $a \in A_n$ порядка p^m ставится в соответствие некоторый неединичный корень из единицы степени p^m. Повторяя полностью предыдущие рассуждения, мы легко убедимся, что группа A обладает бесконечномерным неприводимым представлением над полем рациональных чисел.

Таким образом, из рассмотренных случаев вытекает, что если $\Pi(\Gamma)$ содержит нормальный делитель одного из видов а) - в), то группа $\Pi(\Gamma)$ обладает бесконечномерным неприводимым представлением над Q, т.е. $\Gamma \in \mathfrak{A}_Q$, что противоречит условию леммы 2. Следовательно, $\Pi(\Gamma)$ обладает конечной экспонентой.

Лемма будет полностью доказана, если мы покажем, что $\Gamma/\Pi(\Gamma)$ есть конечнопорожденная абелева группа. Действительно, если $\Gamma/\Pi(\Gamma)$ - абелева группа без кручения, не обладающая конечным числом образующих, то она содержит нормальный делитель A одного из следующих видов:

г) A - свободная абелева группа со счетным числом образующих (этот случай легко сводится к случаю а));

д) A содержит свободную абелеву подгруппу H с конечным числом образующих, причем A/H - периодическая группа, не обладающая конечной экспонентой.

Так как в обоих случаях в $\Gamma/\pi(\Gamma)$ существует нормальный делитель или факторгруппа H, такая, что $H \in \mathfrak{A}_Q$, то и $\Gamma \in \mathfrak{A}_Q$.

Мы пришли к противоречию, которое и доказывает лемму.

С л е д с т в и е 3. Абелева группа Γ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathfrak{A}$, когда она есть прямое произведение конечнопорожденной абелевой группы без кручения и периодической абелевой группы ограниченной экспоненты.

П р е д л о ж е н и е 4. Периодическая абелева группа Γ принадлежит классу $\mathfrak{A}_P$, где поле P содержит все корни из единицы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (G, Γ) - неприводимое представление группы Γ. Тогда каждый элемент $\sigma \in \Gamma$ индуцирует на G локально алгебраический автоморфизм. Применив лемму 4 из [12], мы получим требуемое утверждение.

П р е д л о ж е н и е 5. Абелева группа Γ, содержащая в качестве нормального делителя свободную абелеву группу H, не принадлежит классу $\mathfrak{A}_P$, где поле P имеет ту же мощность, что и группа H.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $H \bar{\in} \mathfrak{A}_P$. Обозначим через R поле рациональных функций от одного переменного над полем P и рассмотрим R как векторное пространство R_P над полем P. Очевидно, что R_P является бесконечномерным векторным пространством над P. Если Σ - мультипликативная группа поля R, то представление (R_P, Σ), очевидно, является неприводимым. Так как мощности H и Σ равны, то существует гомоморфизм H на Σ. Таким образом, H обладает бесконечномерным неприводимым представлением над полем P, т.е. $H \bar{\in} \mathfrak{A}_P$. Но тогда и $\Gamma \bar{\in} \mathfrak{A}_P$.

Предложение доказано.

С л е д с т в и е 5. Локально нильпотентная группа Γ без кручения тогда и только тогда принадлежит классу $\mathfrak{A}$, когда она является конечнопорожденной абелевой группой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В одну сторону утверждение очевидно. Вторая часть утверждения вытекает из следствия 4 и леммы 2.

П р е д л о ж е н и е 8. Существуют периодические нильпотентные группы ограниченной экспоненты и класса нильпотентности 2, которые не принадлежит классу $\mathfrak{A}_P$ при любом поле P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С.Н.Черников построил пример бесконечной периодической метанильпотентной группы с циклическим центром порядка p. Каждое нетривиальное неприводимое представление центра группы индуцирует, как легко видеть, бесконечное представление группы С.Н.Черникова.

Предложение доказано.

С л е д с т в и е 6. Если периодическая нильпотентная группа $\Gamma \in \mathfrak{A}_Q$, то она обладает конечной экспонентой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Групп Γ обладает конечным центральным рядом

$$\Gamma = \Gamma_0 \supset \Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots \supset \Gamma_n = \{e\}.$$

Из леммы 2 вытекает, что каждый фактор этого ряда имеет конечную экспоненту. Следовательно, и вся группа Γ имеет конечную экспоненту.

С л е д с т в и е 7. Если периодическая разрешимая группа $\Gamma \in \mathfrak{A}_Q$, то она обладает конечной экспонентой.

П р е д л о ж е н и е 9. Пусть разрешимая группа Γ без кручения и с конечным числом образующих принадлежит классу $\mathfrak{A}_Q$. Тогда Γ обладает свойством (B).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $R(\Gamma)$ локально нильпотентный радикал группы Γ. По следствию 5 $R(\Gamma)$ является конечнопорожденной абелевой группой без кручения. По теореме Плоткина /[10], стр.374/, $R(\Gamma)$ ограничивает группу Γ, т.е. централизатор радикала $\mathfrak{z}(R)$

П р е д л о ж е н и е 6. Абелева группа Γ, содержащая свободную абелеву группу H, причем Γ/H - периодическая группа, принадлежит классу $\mathfrak{A}_P$, где P - произвольное поле, мощность которого превышает мощность группы H и которое является алгебраически замкнутым полем.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть (G, Γ) - неприводимое представление группы Γ. Тогда по лемме Шура /[13], стр.45/ в $P\Gamma$ найдется максимальный идеал J, такой, что $P\Gamma/J$ - поле. Так как PH как векторное пространство над P имеет размерность, меньшую мощности поля P, то $P\Gamma/J$ есть алгебраическое расширение поля P. Отсюда вытекает, что каждый $\sigma \in \Gamma$ индуцирует на G алгебраический автоморфизм. Применив лемму 4 из [12], получим требуемое утверждение.

П р е д л о ж е н и е 7. Нильпотентная группа Γ без кручения тогда и только тогда принадлежит классу $\mathfrak{A}_P$, где P - любое поле, отличное от абсолютно алгебраического поля простой характеристики p, когда она является абелевой группой мощности, меньшей мощности поля P.

Д о к а з а т е л ь с т в о . В одну сторону утверждение теоремы очевидно. Если Γ не является абелевой группой, то в ней имеется подгруппа, которая не содержит абелев нормальный делитель конечного индекса. Но тогда по теореме Ф.Холла [4] эта группа обладает бесконечномерным неприводимым представлением над P. Но следовательно, она является абелевой группой без кручения. Применив предложения 5 и 6, мы получим окончательное утверждение предложения.

С л е д с т в и е 4. Пусть локально нильпотентная группа без кручения $\Gamma \in \mathfrak{A}_P$, где P - любое поле, отличное от абсолютно алгебраического поля простой характеристики p. Тогда Γ - абелева группа, которая имеет мощность меньшую мощности поля P.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Из предложения 7 вытекает, что каждая конечнопорожденная подгруппа группы Γ в силу следствия I является абелевой группой. Но тогда и вся группа Γ является абелевой. Применив предложение 5 и 6, мы получим требуемое утверждение.

в группе Γ содержится в $R(\Gamma)$. Но тогда фоктор-группа $\Gamma/\mathfrak{Z}(R)$ может быть рассмотрена как группа автоморфизмов группы $R(\Gamma)$. По теореме Мальцева /[14], см. также [10], стр.539/, $\Gamma/\mathfrak{Z}(R)$ является полициклической группой. Так как $\mathfrak{Z}(R)$ - конечнопорожденная абелева группа, то Γ - полициклическая группа. Применив уже упоминавшуюся теорему Ф.Холла [4], мы получим, что Γ обладает свойством (B).

П р е д л о ж е н и е 10. Дискретное сплетение абелевой группы Γ экспоненты p и бесконечной абелевой группы H экспоненты p над алгебраически замкнутым полем обладает бесконечномерным неприводимым представлением.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Достаточно показать, что дискретное сплетение циклической группы $\{q\}$ порядка p и бесконечной абелевой группы H экспоненты p обладает бесконечномерным неприводимым представлением над алгебраически замкнутым полем P. Пусть $\mathcal{G}=\{q\}\,wr\,H$, $P\mathcal{G}$ - групповая алгебра группы $\mathcal{G}$ над полем P, $P\{q\}$ - групповая алгебра группы $\{q\}$ над P. Обозначим через $\mathfrak{I}_0$ идеал в $P\{q\}$, порожденный элементом $g-\lambda$, где g - образующий группы $\{q\}$, а λ - корень p-й степени из единицы, а через $\mathfrak{I}$ - максимальный правый идеал в $P\mathcal{G}$. Тогда $(P\mathcal{G}/\mathfrak{I}, \mathcal{G})$ является неприводимым представлением группы $\mathcal{G}$ над полем P. Покажем, что это представление является бесконечномерным. Предположим противное, т.е. $(P\mathcal{G}/\mathfrak{I}, \mathcal{G})$ - конечномерное представление. Ядро F этого представления имеет, очевидно, нетривиальное пересечение с H. Но тогда из [15] следует, что F содержит и базисную группу $\{q\}^H$, т.е. содержит $\{q\}$. Мы пришли к противоречию.

Предложение доказано.

Обозначим через $\mathcal{L}$ класс всех групп, каждая из которых порождается абелевыми циклическими нормальными делителями.

Л е м м а 3. Если группа Γ не имеет кручения и не является конечнопорожденной группой и, кроме того, $\Gamma\in\mathcal{L}$, то в Γ имеется абелев нормальный делитель, не обладающий конечным числом образующих.

Доказательство. Пусть $\{g_0\}$ - произвольный циклический нормальный делитель группы Γ с образующим g_0. Тогда каждый элемент $h \in \Gamma$ индуцирует на $\{g_0\}$ автоморфизм второго порядка, ибо $\{g_0\}$ - группа без кручения. Следовательно, подгруппа H группы Γ, порожденная квадратами всех элементов из Γ, лежит в централизаторе подгруппы $\{g_0\}$ в Γ. Так как группа Γ порождается циклическими нормальными делителями и $\{g_0\}$ - произвольный циклический нормальный делитель, то H лежит в центре группы Γ и поэтому является абелевой группой. Обозначим через $R(\Gamma)$ локально нильпотентный радикал группы Γ. Очевидно, что $H \subset R(\Gamma)$. Легко видеть, что Γ/H - абелева группа, ибо она порождается циклическими нормальными делителями порядка 2. Отсюда следует, что Γ - разрешимая группа. Поэтому $R(\Gamma)$ ограничивает группу Γ. Если $R(\Gamma)$ - конечнопорожденная абелева группа, то Γ является полициклической группой (см. доказательство предложения 9). Но Γ не имеет конечного числа образующих и, следовательно, $R(\Gamma)$ не является конечнопорожденной абелевой группой.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть локально разрешимая группа Γ не имеет кручения и каждая её конечнопорожденная подгруппа обладает свойством (B). Тогда, если Γ не обладает конечным числом образующих, то в ней имеется абелев нормальный делитель без кручения, не обладающий конечным числом образующих.

Доказательство. Пусть Γ_0 - конечнопорожденная подгруппа из Γ. Согласно условию леммы в Γ_0 имеется конечнопорожденный абелев нормальный делитель $\bar{\Gamma}_0$ конечного индекса в Γ_0. Обозначим через F_0 подгруппу, порожденную $\bar{\Gamma}$ и $g_0 \in \Gamma$. Группа F_0 также обладает конечнопорожденным абелевым нормальным делителем $\bar{F}_0$ конечного индекса. Существует такое n, что $g_0^n \in \bar{F}_0$. Рассмотрим подгруппу $\tilde{\bar{F}}_0$, порожденную g_0^n и $\bar{\Gamma}_0$. Пусть $h \in \bar{\Gamma}_0$. Так как $g_0^n \in \bar{F}_0$, то $h^{-1} g_0^n h = g_0^{\alpha} f$, где $f \in \bar{\Gamma}_0 \cap \bar{F}_0$ и α - целое число. Если $\alpha = 0$, то $h^{-1} g_0^n h \in \bar{\Gamma}_0$ и $h^{-k} g_0^n h^k \in \bar{\Gamma}_0$ для любого k. Учитывая, что сужение внутреннего автоморфизма, порожденного элементом h, на $\bar{F}_0$ имеет конечный порядок, мы приходим к противоречию. Это значит, что $\alpha \neq 0$. Так как $f \in \bar{\Gamma}_0$, то $h^{-1} f h = f$. Если $|\alpha| > 1$, то, используя, что Γ - группа без кручения и сужение внутреннего автоморфизма, порожденного h, на F_0 имеет конечный порядок, мы получаем противоречие. Следовательно, $|\alpha| = 1$. Аналогично исключается случай, когда $\alpha = 1$ и $f \neq e$. Остаются две возможности: или $\alpha = -1$, или $f^2 = e$ и $\alpha = 1$. Отсюда вытекает, что в любом случае $h^{-2} g_0^n h^2 = g_0^n$. Следовательно, группа H_0, порожденная g_0^α и квадратом группы $\bar{\Gamma}_0$, является абелевой. Обозначим через $\tilde{F}_0^2$ квадрат группы $\tilde{F}_0$. Очевидно, что $\tilde{F}_0^2 \in H_0$.

Но элемент g_0 мы выбирали произвольно из группы Γ, поэтому для любого элемента $g \in \Gamma$ группа, построенная по тому же принципу, что и группа H_0, является абелевой.

Обозначим через F_1 подгруппу, порожденную H_0 и $g_1 \in \Gamma$. Группа F_1 обладает конечнопорожденной абелевой нормальной подгруппой $\bar{F}_1$ конечного индекса. Существует такое n_1, что $g_1^n \in \bar{F}_0$. Рассмотрим подгруппу $\tilde{F}_1$, порожденную H_0 и $g_1^{n_1}$. Учитывая замечание, сделанное выше, мы можем утверждать, что подгруппа $\bar{\Gamma}_0^2$, являющаяся квадратом группы $\bar{\Gamma}_0$, перестановочна с элементом $g_1^{n_1}$. Рассуждениями, аналогичными проведенным выше, мы можем показать, что элемент g_0^{2n} перестановочен с $g_1^{n_1}$. Следовательно, группа $\tilde{F}_0^2$ перестановочна с $g_1^{n_1}$. Это означает, что подгруппа, порожденная $\bar{F}_0^2$ и элементом $g_1^{n_1}$, является абелевой. Абелевой группой является также и группа $\tilde{F}_1^2$, порожденная $\tilde{F}_0^2$ и $g_1^{2n_1}$.

Повторяя этот процесс, мы получим последовательность вложенных друг в друга абелевых групп:

$$\tilde{F}_0^2 \subset \tilde{F}_1^2 \subset \ldots \subset \tilde{F}_n^2 \subset \ldots$$

Обозначим через F объединение этой последовательности. Покажем, что F не имеет конечного числа образующих. Предположим противное, т.е. F имеет не более n образующих. Тогда найдется такая подгруппа $B \subset \Gamma$, которая имеет не менее m образующих (m - достаточно большое число, величину которого мы укажем ниже), что в ней имеется нормальный делитель конечного индекса B_0, содержащийся в F. Так как F и B_0 являются абелевыми группами без кручения, то группа B_0 имеет не более n образующих. Обозначим через $R(B)$ локально нильпотентный радикал группы B. Подгруппа B_0 содержится в $R(B)$. Учитывая, что подгруппа B_0 имеет конечный индекс в B, мы получим, что $R(B)$ - абелева группа, которая имеет не более n образующих. По уже цитированной выше теореме Плоткина, $R(B)$ ограничивает группу B, т.е. централизатор $R(B)$ лежит в $R(B)$, ибо Γ - локально разрешимая группа без кручения. Так как $B/R(B)$ - периодическая группа, то её можно рассматривать как периодическую группу матриц порядка не выше n над кольцом целых чисел. Но хорошо известно, что целочисленная периодическая группа матриц имеет порядок, ограниченный сверху числом, зависящим только от порядка матриц. Выбирая m больше этого числа, мы приходим к противоречию. Следовательно, F не обладает конечным числом образующих.

Лемма доказана.

Л е м м а 5. Если разрешимая группа Γ без кручения не обладает абелевым нормальным делителем H, таким, что Γ/H - периодическая группа, то она обладает бесконечномерным неприводимым представлением над любым полем P, отличным от абсолютно алгебраического поля простой характеристики p.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения полностью аналогично доказательству теоремы 3.3, из работы Ф.Холла [4].

Т е о р е м а 2. Если локально разрешимая группа без кручения $\Gamma \in \mathfrak{A}_P$, где P - поле, отличное от абсолютно алгебраического поля простой характеристики p, то она есть периодическое расширение абелевой группы.

С л е д с т в и е 8. Если локально разрешимая группа без кручения $\Gamma \in \mathfrak{A}_Q$, то она обладает свойством (B)

Утверждение теоремы вытекает из леммы 5 и доказательства леммы 4, а следствие 8 - из утверждения теоремы 2 и предложения 9.

Литература

I. S.Amitsur, Groups with representations of bounded degree. Illinois Y.Math.5:2(1961),198-205.

2. А.И.Мальцев, Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами. Матем.сб. 8(1940), 405-432.

3. Y.Karlansky, Groups with representations of bounded degree, Canad.Y.Math. 1(1949), 105-112.

4. P.Hall, On the finiteness of certain soluble groups, Proc.London Math.Soc.(3),9(1959),595-622.

5. С.Д.Берман, Групповые алгебры счетных абелевых Р-групп. Publ.Math.t.14 Fasc.1-4(1967), 365-405.

6. D.Passman, On groups with enough finite representations. Proc.Amer.Math.Soc.v.14,Nr.3,1963, 782-787.

7. А.И.Токаренко, Замечание о конечнопорожденных линейных группах. Труды Рижского алгебраич.семинара, т.I (1969, 280-28I.

8. У.Кэртис и И.Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М., 1969.

9. А.Г.Курош, Теория групп, М., 1967.

IO. Б.И.Плоткин, Группы автоморфизмов алгебраических систем, М., 1966.

II. Б.И.Плоткин, Нормальные делители, ограничивающие группу. Матем.сб. 53(95) № 3 (1961), 344-352.

I2. Е.М.Левич, О триангулируемости групп. Изв.высших уч.зав. Математика (1967) 7 (62), 70-77.

I3. Н.Джекобсон, Строение колец. М., ИЛ, 1961.

I4. А.И.Мальцев, О некоторых классах бесконечных разрешимых групп. Матем.сб.28(1951),567-588.

I5. P.Neumann, On the structure of standard wreath products of groups. Math.Z. 84(1964),343-373.

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПАР

Б.И.Плоткин

Основным объектом изучения здесь являются пары (G, Γ), в которых G есть модуль над некоторым фиксированным коммутативным кольцом с единицей K и Γ - группа, для которой задано представление в качестве группы автоморфизмов модуля G. Для таких пар определяется операция треугольного умножения, во многом аналогичная операции сплетения групп. Треугольные произведения пар применяются в задачах, связанных с умножением классов пар точно также, как сплетения применяются при изучении полугруппы многообразий групп или полугруппы радикальных классов групп. В частности, в третьем параграфе этой статьи доказывается теорема о свободе системы малых радикальных классов пар, примыкающая к соответствующей теоретико-групповой теореме из [3]. С помощью треугольных произведений можно также доказать, что при любом поле K полугруппа многообразий пар свободна. Доказательство этой теоремы будет приведено в другом месте.

Систематическому рассмотрению радикалов и многообразий в представлениях групп посвящена работа [1]. В первом параграфе данной статьи мы приводим необходимые сведения из этой работы. Эти сведения собраны также с учетом интересов некоторых других статей данного сборника, посвященных многообразиям пар.

§1. Радикальные классы и многообразия пар (сводка определений и простейших фактов)

1. Напомним некоторые определения. Пара (H, Σ) есть подпара пары (G, Γ), если H - подмодуль в G, Σ - подгруппа в Γ, H инвариантен относительно Σ, и представ-

ление Σ относительно H. индуцируется исходным представлением группы Γ. Гомоморфизм пар $\mu:(G,\Gamma)\to(G',\Gamma')$ это два гомоморфизма: $\mu: G\to G'$. и $\mu:\Gamma\to\Gamma$, связанные условием: $(g\circ\gamma)^\mu = g^\mu\circ\gamma^\mu$. Наряду с такими общими гомоморфизмами мы выделяем еще левые и правые гомоморфизмы. При левом гомоморфизме действующая группа в парах одна и та же, и соответствующий гомоморфизм на этой группе совпадает с тождественным. Другими словами, левый гомоморфизм пар - это гомоморфизм отвечающих им Γ -модулей. В правом гомоморфизме одна и та же область действия G, и на этой области действия гомоморфизм является тождественным.

Пусть, далее, задан набор пар (G_i,Γ_i), $i\in I$. Пусть G - декартово произведение всех G_i и Γ - декартово произведение всех групп Γ_i. Если g и γ - элементы, соответственно, в G и Γ, рассматриваемые как функции на I, то, полагая $(g\circ\gamma)(i)=g(i)\circ\gamma(i), i\in I$, мы зададим действие группы Γ в G. Возникающая здесь пара (G,Γ) называется декартовым произведением пар (G_i,Γ_i). Соответственно определяются прямые (дискретные) произведения пар и поддекартовы произведения пар. Нас будут интересовать еще ограниченные поддекартовы произведения пар, которые мы определим здесь следующим образом.

Пусть мы имеем набор пар (G_i,Γ_i), $i\in I$. Пусть $G=\sum G_i$ - дискретная прямая сумма модулей G_i и Γ - группа, для которой задано представление относительно модуля G, в котором все G_i инвариантны относительно Γ. Допустим еще, что в Γ имеется система нормальных делителей Σ_i, $i\in I$, такая, что Σ_i действует тождественно в G_i, пара $(G_i,\Gamma/\Sigma_i)$ изоморфна паре (G_i,Γ_i), и пересечение всех Σ совпадает с единицей в Γ. В таком случае будем говорить, что пара (G,Γ) есть ограниченное поддекартово (или подпрямое) произведение пар (G_i,Γ_i).

2. Будем рассматривать операторы, применяемые к классам пар (ср.[4]). При этом, речь идет только об абстрактных классах - классах, инвариантных относительно изоморфизмов пар. Кроме того, мы считаем, что в каждом классе $\mathfrak{X}$

лежит нулевая пара - пара, в которой модуль G есть нулевой модуль и группа Γ - единичная группа. К таким классам применяются операторы: если $\mathfrak{X}$ - класс пар и $\mathcal{U}$ - оператор, то $\mathcal{U}\mathfrak{X}$ - новый класс, причем $\mathfrak{X}\subset\mathcal{U}\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_1\subset\mathfrak{X}_2$ влечет $\mathcal{U}\mathfrak{X}_1\subset\mathcal{U}\mathfrak{X}_2$. Класс $\mathfrak{X}$ называется $\mathcal{U}$ -замкнутым, если $\mathcal{U}\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$. Оператор $\mathcal{U}$ называется оператором замыкания, если при любом $\mathfrak{X}$ класс $\mathcal{U}\mathfrak{X}$ является $\mathcal{U}$ -замкнутым классом. Если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ - два оператора, то их произведение $\mathcal{U}\mathcal{V}$ определяется обычным правилом: $(\mathcal{U}\mathcal{V})\mathfrak{X}=\mathcal{U}(\mathcal{V}\mathfrak{X})$.

Назовем сейчас некоторые специальные операторы, с которыми будем иметь дело.

В первую очередь отметим операторы S, Q и C, определяемые следующими правилами.

$(G,\Gamma)\in S\mathfrak{X}$, если данная пара является подпарой некоторой пары из $\mathfrak{X}$.

$(G,\Gamma)\in Q\mathfrak{X}$, если эта пара является эпиморфным образом некоторой пары из класса $\mathfrak{X}$. Наконец,

$(G,\Gamma)\in C\mathfrak{X}$, если пара (G,Γ) изоморфна декартовому произведению некоторого набора пар из $\mathfrak{X}$.

С названными операторами связаны также операторы S_e, Q_e и C_e. Здесь $(G,\Gamma)\in S_e\mathfrak{X}$, если Γ -модуль G является подмодулем некоторого Γ -модуля H с $(H,\Gamma)\in\mathfrak{X}$. Оператор Q_e определяется так же, как и оператор Q, но только через левые гомоморфизмы. Соответственно, $(G,\Gamma)\in C_e\mathfrak{X}$, если Γ -модуль G есть декартово произведение Γ -модулей G_i с $(G_i,\Gamma)\in\mathfrak{X}$. С другой стороны, отметим операторы S_r и Q_r: $(G,\Gamma)\in S_r\mathfrak{X}$, если эта пара может быть вложена в пару (G,Φ) с той же G и принадлежащую $\mathfrak{X}$. Оператор Q_r подобен оператору Q_e и связан с правыми эпиморфизмами. Здесь очевидны соотношения: $S=S_eS_r$ и $Q=Q_rQ_e$.

Отметим, далее, оператор P, определяемый правилом: $(G,\Gamma)\in P\mathfrak{X}$, если указанная пара аппроксимируется парами из класса $\mathfrak{X}$. Понятен также смысл оператора P_e. Соответственно, оператор P_r определим через ограниченные поддекартовы произведения: $(G,\Gamma)\in P_r\mathfrak{X}$, если пара (G,Γ) есть ограниченное поддекартово произведение пар из $\mathfrak{X}$.

Определим, наконец, оператор V : $(G,\Gamma)\in V\mathfrak{X}$, если некоторый правый эпиморфный образ этой пары принадлежит классу $\mathfrak{X}$. Этот оператор близок оператору Q_r.

Все перечисленные здесь операторы являются операторами замыкания. Некоторые другие операторы мы определим позднее.

3. Класс пар $\mathfrak{X}$ назовем биркгофовским классом, если этот класс замкнут относительно операторов Q, S и C. Соответствующий оператор замыкания есть оператор QSC, причем имеет место равенство: $QSC = QP$. Класс $\mathfrak{X}$ будем называть насыщенным классом, если он замкнут относительно операторов V и Q_r. Насыщенный биркгофовский класс назовем многообразием пар. Нетрудно проверить, что оператор замыкания до многообразия есть оператор $VQSC$. Как доказано в [2] биркгофовский класс пар - это класс пар, определяемый некоторым набором битождеств и некоторым набором групповых тождеств. Нетрудно понять, что многообразия - этом классы, задаваемые только битождествами.

Условимся дальше в следующем обозначении: если $\mathfrak{X}$ - класс пар и Γ - группа, то через $\mathfrak{X}_\Gamma$ обозначается класс всех Γ-модулей (точнее - K, Γ-модулей) G, для которых $(G,\Gamma)\in\mathfrak{X}$.

Легко проверяется, что класс $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда является многообразием, когда он насыщен, и для любой группы Γ класс $\mathfrak{X}_\Gamma$ есть многообразие Γ-модулей. Доказательство этого предложения сводится к простой проверке того, что класс пар замкнут относительно операторов V, Q, S и C тогда и только тогда, когда он замкнут относительно операторов V, Q_r, Q_e, S_e и C_e.

Класс $\mathfrak{X}$ назовем радикальным классом, если этот класс насыщен и для любой группы Γ класс Γ-модулей $\mathfrak{X}_\Gamma$ есть наследственный радикальный класс Γ-модулей.

Другими словами, радикальный класс - это класс, замкнутый относительно операторов V, Q_r, Q_e, S_e и D_e, где D_e есть оператор, определенный так же, как и C_e, но через дискретные прямые суммы Γ-модулей.

Из этого определения следует, что каждое многообразие пар является одновременно и радикальным классом. Оператор замыкания до многообразия будем обозначать через Var, а оператор радикального замыкания обозначим через Rad. Нетрудно проверить, что выполняется равенство:

$$Rad = VQ\,S_e\,P_r$$

Введем еще два оператора, J и $P_{r,0}$: $(G,\Gamma)\in J\mathfrak{X}$, если для каждого циклического Γ-подмодуля A из G соответствующая пара (A,Γ) принадлежит $S_e\mathfrak{X}$, а оператор $P_{r,0}$ определяется так же, как и оператор P_r, но только через конечные произведения.

Нетрудно проверить, что имеет место также следующая формула: $Rad = JVQ\,S_e\,P_{r,0}$.

Радикальный класс $\mathfrak{X}$ называется наследственным радикальным классом, если он замкнут также относительно оператора S. Понятно, что здесь достаточно требовать замкнутости оператор S_r. Для характеристики соответствующего оператора замыкания определим еще операторы D и D_0. Будем говорить, что пара (G,Γ) есть ограниченное (слева) декартово произведение пар (G_i,Γ_i), $i\in I$, если G есть дискретная прямая сумма модулей G_i, Γ -декартово произведение всех Γ_i и действие Γ в G задается, как и для декартовых произведений, покомпонентно. Положим: $(G,\Gamma)\in D\mathfrak{X}$, если данная пара есть ограниченное декартово произведение некоторых пар из $\mathfrak{X}$. Аналогично через конечное число сомножителей определяется оператор D_0. Нетрудно проверить, что оператор наследственного радикального замыкания есть оператор $VQSD$ и имеет место формула

$$VQSD = JVQSD_0$$

4. Радикальным классам и многообразиям отвечают определенные функции - радикалы и вербалы. Пусть $\mathfrak{X}$ - некоторый насыщенный класс пар. Через $\mathfrak{X}' = \mathcal{F}$ обозначим функцию, сопоставляющую каждой паре (G,Γ) подмодуль в G - $\mathcal{F}(G,\Gamma)$, совпадающий с суммой всех Γ-инвариантных подмодулей H

из G, для которых $(H,\Gamma)\in\mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{X}^*=\mathcal{F}$ будем обозначать функцию, определяемую правилом: $\mathcal{F}(G,\Gamma)$ есть пересечение всех Γ -инвариантных подмодулей H из G, для которых $(G/H,\Gamma)\in\mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{X}$ - радикальный класс, то для $\mathcal{F}=\mathfrak{X}'$ всегда имеем: $(\mathcal{F}(G,\Gamma),\Gamma)\in\mathfrak{X}$. При этом $\mathfrak{X}$ совпадает с классом всех пар (G,Γ), для которых $\mathcal{F}(G,\Gamma)=G$.

Если $\mathfrak{X}$ - многообразие и $\mathcal{F}=\mathfrak{X}^*$, то при любой (G,Γ) имеем: $(G/\mathcal{F}(G,\Gamma),\Gamma)\in\mathfrak{X}$. Здесь $\mathfrak{X}$ совпадает с классом пар (G,Γ), для которых $\mathcal{F}(G,\Gamma)=0$.

Функция $\mathcal{F}$ называется радикалом, если $\mathcal{F}=\mathfrak{X}'$ для некоторого радикального класса $\mathfrak{X}$. $\mathcal{F}$ есть вербал, если $\mathcal{F}=\mathfrak{X}^*$ при некотором многообразии $\mathfrak{X}$. Радикалы и вербалы можно непосредственно охарактеризовать на языке свойств функций. Сделаем это.

Пусть Γ - группа. Будем рассматривать сейчас функции $\mathcal{F}$, сопоставляющие каждому Γ-модулю ($K\Gamma$-модулю) G некоторый Γ-подмодуль $\mathcal{F}(G)$ в G. Такая функция называется радикалом в классе Γ - модулей, если для нее выполняются следующие условия:

1. Если H - Γ -подмодуль в G, то $\mathcal{F}(H)=\mathcal{F}(G)\cap H$.

2. Для любого эпиморфизма $\varphi: G\to G^\varphi$ Γ -модулей должно быть: $\mathcal{F}(G)^\varphi\subset\mathcal{F}(G^\varphi)$

Функция $\mathcal{F}$, перестановочная с эпиморфизмами - $\mathcal{F}(G)^\varphi=\mathcal{F}(G^\varphi)$, называется вербалом.

Примем далее следующеее обозначение. Пусть $\mathcal{F}$ - функция, определенная в классе всех пар (G,Γ), и такая, что $\mathcal{F}(G,\Gamma)$ - некоторый Γ-подмодуль в G. Если Γ - произвольная группа, то через $\mathcal{F}_\Gamma$ - мы обозначим функцию, определенную в классе всех Γ -модулей и индуцированную здесь функцией $\mathcal{F}$. Другими словами, для любой пары (G,Γ), если G здесь рассматривать как Γ-модуль, имеем:
$\mathcal{F}_\Gamma(G)=\mathcal{F}(G,\Gamma)$.

Теперь непосредственной проверкой можно доказать следующие предложения.

Функция $\mathcal{F}$ в классе пар тогда и только тогда является радикалом, когда при любой Γ функция $\mathcal{F}_\Gamma$ является радикалом в классе Γ -модулей, и для каждого правого эпиморфизма $\mu : (G, \Gamma) \to (G, \Sigma)$ выполняется: $\mathcal{F}(G, \Gamma) = \mathcal{F}(G, \Sigma)$.

Функция $\mathcal{F}$ тогда и только тогда является вербалом, когда каждая $\mathcal{F}_\Gamma$ есть вербал в соответствующем классе Γ -модулей и $\mathcal{F}(G, \Gamma) = \mathcal{F}(G, \Sigma)$, если имеется правый эпиморфизм $\mu : (G, \Gamma) \to (G, \Sigma)$.

Кроме того, можно заметить, что функция $\mathcal{F}$ тогда и только тогда вербал, когда она перестановочна с эпиморфизмами пар.

Отметим теперь следующее предложение.

Пусть пара (G, Γ) является ограниченным поддекартовым произведением пар (G_i, Γ_i), $i \in I$. Тогда, если $\mathcal{F}$ - радикал или вербал, то:

$$\mathcal{F}(G, \Gamma) = \sum_i \mathcal{F}(G_i, \Gamma_i)$$

Докажем это свойство. Γ -модуль G здесь является прямой суммой Γ -модулей G_i. Кроме того, имеются правые эпиморфизмы пар $\mu : (G_i, \Gamma) \to (G_i, \Gamma_i)$. Если теперь $\mathcal{F}$ - радикал или вербал, то $\mathcal{F}(G_i, \Gamma) = \mathcal{F}(G_i \Gamma_i)$. С другой стороны, хорошо известно, что для Γ -модулей имеет место перестановочность с прямыми суммами:

$$\mathcal{F}_\Gamma(G) = \sum_i \mathcal{F}_\Gamma(G_i)$$

Сопоставляя теперь отмеченные равенства получим нужное соотношение.

5. Пусть F - свободная группа, порожденная счетным множеством свободных образующих Y, и пусть KF - соответствующая групповая алгебра. Идеал $\mathcal{U}$ в KF назовем специальным, если он выдерживает все эндоморфизмы данной алгебры, индуцируемые эндоморфизмами группы F. Пусть (G, Γ) - некоторая пара и u - элемент в KF. Будем

говорить, что в (G, Γ) выполняется битождество $x \circ u \equiv 0$, если при любой замене входящих в u переменных y-ов элементами из Γ соответствующий элемент в групповой алгебре $K\Gamma$ аннулирует модуль G. Если $\mathfrak{X}$ - класс пар, то сопоставим ему множество $\mathcal{U}$ всех u из KF, для которых в парах из $\mathfrak{X}$ выполняются битождества $x \circ u \equiv 0$. Легко видеть, что $\mathcal{U}$ всегда специальный идеал в KF.

Пусть, с другой стороны, $\mathcal{U}$ - некоторое подмножество в KF. Сопоставим ему класс пар $\mathfrak{X}$, состоящий из всех пар, в которых выполняются битождества $x \circ u \equiv 0$ по всем $u \in \mathcal{U}$. Достаточно очевидно, что здесь $\mathfrak{X}$ - многообразие пар. По схеме близкой к доказательству теоремы Биркгофа о многообразиях нетрудно проверить, что мы приходим здесь к взаимно-однозначному соответствию между многообразиями пар и специальными идеалами в KF.

Будем рассматривать дальше функции f, сопоставляющие каждой группе Γ некоторый идеал в групповой алгебре $K\Gamma$. Если $\mathfrak{X}$ - многообразие пар, то отнесем такому $\mathfrak{X}$ функцию $f = f_{\mathfrak{X}}$, определяемую следующим образом: $f(\Gamma)$ есть пересечение ядер представлений алгебры $K\Gamma$, индуцированных всевозможными парами (G, Γ) с данной Γ, принадлежащими $\mathfrak{X}$. Функция f тогда и только тогда возникает указанным образом из многообразия, когда эта функция перестановочна с групповыми эпиморфизмами. При этом, пара (G, Γ) тогда и только тогда принадлежит соответствующему $\mathfrak{X}$, когда $f(\Gamma)$ аннулирует G.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ - многообразие, $\mathfrak{F}$ - отвечающий ему вербал, и $f = f_{\mathfrak{X}}$. Легко проверяется, что в любой паре имеет место соотношение: $\mathfrak{F}(G, \Gamma) = G f(\Gamma)$

Пусть еще $\mathcal{U}$ - специальный идеал в KF, отвечающий многообразию $\mathfrak{X}$. Легко понять, что $\mathcal{U} = f(F)$, и для любой группы Γ выполняется $f(\Gamma) = \mathcal{U}_\Gamma$. Здесь через $\mathcal{U}_\Gamma$ мы обозначили множество всевозможных значений элементов из $\mathcal{U}$ в групповой алгебре $K\Gamma$.

Каждое многообразие обладает свободными парами. Если $\mathfrak{X}$ - многообразие и $\mathcal{U}$ - соответствующий специальный идеал в KF, то пара $(KF/\mathfrak{U}, F)$ есть свободная циклическая пара в $\mathfrak{X}$. Эта пара порождает все многообразия $\mathfrak{X}$. Если F - произвольная свободная группа (не обязательно счетного ранга), то соответствующая свободная циклическая пара в $\mathfrak{X}$ есть пара $(KF/\mathfrak{U}_F, F)$. Не циклические свободные пары получаются из прямых сумм представлений, отвечающих свободным циклическим парам.

6. Пусть теперь $\mathfrak{X}$ - радикальный класс пар. Сопоставим такому $\mathfrak{X}$ функцию $f = f_{\mathfrak{X}}$ определяемую следующим образом: если Γ - группа, то $f(\Gamma)$ есть множество правых идеалов $\mathfrak{U}$ в $K\Gamma$, для которых выполняется $(K\Gamma/\mathfrak{U}, \Gamma) \in \mathfrak{X}$. Здесь $f(\Gamma)$ - радикальный фильтр в $K\Gamma$. Функцию f также назовем радикальным фильтром класса $\mathfrak{X}$. Если f - радикальный фильтр класса $\mathfrak{X}$, то $(G, \Gamma) \in \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда для каждого $g \in G$ имеет место: $Ann_{K\Gamma}(g) \in f(\Gamma)$. Если, далее, $\mathfrak{F}$ - радикал, отвечающий классу $\mathfrak{X}$, и (G, Γ) - произвольная пара, то $\mathfrak{F}(G, \Gamma)$ есть множество всех $g \in G$, для которых $Ann_{K\Gamma}(g) \in f(\Gamma)$.

Нетрудно проверить, что радикальный класс $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда является многообразием, когда соответствующий фильтр f является главным: в каждом $f(\Gamma)$ имеется минимальный элемент, который автоматически сказывается двусторонним идеалом. Этот идеал совпадает с $\mathfrak{U}_\Gamma$, где $\mathfrak{U}$ - специальный идеал соответствующего многообразия в KF.

В работе [I] приводятся различные общие схемы построения радикальных классов. Кроме того, для выделения различных конкретных радикалов и многообразий важную роль играет умножение классов.

7. Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ - два класса пар. Их произведение $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ определяется правилом: $(G, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$, если в G имеется такой Γ-подмодуль H, что $(H, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1$ и $(G/H, \Gamma) \in \mathfrak{X}_2$. Легко проверяется, что относительно такого умножения система радикальных классов составляет полугруппу, которая, впрочем, необычна тем, что определена

не на множестве, а на классе. Множество всех многообразий составляет в этой полугруппе подполугруппу.

Если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ - радикальные классы и $\mathcal{F}$ - радикал, отвечающий $\mathfrak{X}_1$, то включение $(G, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ равносильно следующему включению $(G/\mathcal{F}(G, \Gamma), \Gamma) \in \mathfrak{X}_2$. Если $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ - многообразия и $\mathcal{F}$ - вербал класса $\mathfrak{X}_2$, то включение $(G, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ равносильно включению $(\mathcal{F}(G, \Gamma), \Gamma) \in \mathfrak{X}_1$.

Непосредственной проверкой доказывается также следующее предложение.

Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ - многообразия пар, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}$ - специальные идеалы в KF, соответственно, для $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$. Тогда многообразию $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ отвечает идеал $\mathcal{U}\mathcal{V}$.

Таким образом, полугруппа многообразий антиизоморфна полугруппе специальных идеалов групповой алгебры KF. Это и другие соображения подсказывают, что для многообразий следовало бы брать другой порядок умножения.

В теории многообразий и радикальных классов пар имеется богатая проблематика. При этом, направляющую роль играют идеи, идущие из общей теории классов алгебраических систем, а применение этих идей связано, естественно, с классической проблематикой теории представлений.

Всюду дальше основное кольцо K является полем.

§2. Треугольные произведения пар

1. Пусть дана пара (G, Γ) и пусть $(A_1, \Sigma_1), \dots (A_n, \Sigma_n)$ - некоторая последовательность ее подпар. Будем говорить, что (G, Γ) есть треугольное произведение данной последовательности своих подпар, если выполнены следующие условия.

1) Обозначим через Σ подгруппу в Γ, порожденную всеми Σ_i, $i = 1, \dots, n$. Требуется, чтобы подпара (G, Σ) распадалась в прямое произведение своих подпар (A_i, Σ_i).

2) Обозначим $G_i = A_1 + \dots + A_i$, $i = 1, \dots, n$, и пусть

$$0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$$

соответствующий ряд подпространств. Обозначим через $\mathfrak{z}$ централизатор этого ряда в $\mathrm{Aut}\, G$: $\mathfrak{z}$ есть множество всех автоморфизмов, действующих тождественно в каждом факторе данного ряда.

Второе условие требует, чтобы в группе Γ существовал нормальный делитель Φ, такой, что пара (G, Φ) точная и образ Φ в $\mathrm{Aut}\, G$ совпадает с $\mathfrak{z}$.

3. Группа Γ представима в виде полупрямого произведения: $\Gamma = \Phi \lambda \Sigma$, где Σ и Φ - подгруппы, удовлетворяющие, соответственно, условиям I и 2.

Обозначим, далее, через Γ° ядро данной пары (G, Γ), пусть Σ_i° - ядро пары (A_i, Σ_i) и пусть $\Sigma^\circ = \Sigma_1^\circ \times \dots \times \Sigma_n^\circ$. Проверим сейчас, что $\Gamma^\circ = \Sigma^\circ$. Понятно, что все Σ_i° принадлежат Γ°, и, поэтому, $\Sigma^\circ \subset \Gamma^\circ$. Пусть теперь $\gamma \in \Gamma^\circ$, $\gamma = \varphi\sigma$, $\varphi \in \Phi$ и $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n \in \Sigma$. Из условий следует, что φ действует тождественно во всех факторах ряда подпространств G_i. Возьмем произвольный $a_i \in A_i$. Тогда $a_i \circ \varphi = a_i + b$, $b \in G_{i-1}$, и

$$a_i \circ \gamma = a_i = (a_i + b) \circ \sigma = a_i \circ \sigma_i + b \circ \sigma$$

Отсюда, $a_i = a_i \circ \sigma$ и $\sigma_i \in \Sigma_i^\circ$. Одновременно видим, что $\sigma \in \Sigma^\circ$. Далее,

$$a_i = a_i \circ \varphi = a_i + b, \quad b = 0,$$

и, поэтому, $\varphi = \varepsilon$.

Мы видим, что если все пары (A_i, Σ_i) являются точными, то такова же и пара (G, Γ). Покажем теперь, что в этом точном случае подгруппа Φ определяется однозначно названными выше условиями. С этой целью проверим, что Φ совпадает с централизатором в Γ ряда $[G_i]$. Пусть этот централизатор есть Φ'. По условию, $\Phi \subset \Phi'$. Пусть теперь $\gamma \in \Phi'$, $\gamma = \varphi\sigma$, $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$, $\sigma_i \in \Sigma_i$. Возьмем $a_i \in A_i$. $a_i \circ \gamma = a_i + b_1$, $a_i \circ \varphi = a_i + b_2$, $b_1, b_2 \in G_{i-1}$

Имеем:

$$a_i \circ \gamma = (a_i \circ \varphi) \circ \sigma = a_i + b_1 = (a_i + b_2) \circ \sigma = a_i \circ \sigma + b_2 \circ \sigma$$

и отсюда $a_i \circ \sigma_i = a_i$, $\sigma_i = \varepsilon$. Следовательно, $\sigma = \varepsilon$ и $\gamma = \varphi \in \Phi$. Эти же выкладки показывают, что в общем выполняется: $\Phi' = \Phi\Sigma^\circ$.

Предложение I. Пусть пара (G, Γ) есть треугольное произведение своих подпар $(A_i, \Sigma_i), i=1,2,\dots,n$, расположенных в данном порядке, и пусть другая пара – (G', Γ') – соответственно распадается в треугольное произведение подпар $(A_i', \Sigma_i'), i=1,2,\dots,n$. Если при этом имеются изоморфизмы $\mu_i : (A_i, \Sigma_i) \to (A_i' \Sigma_i')$, то изоморфны и пары (G, Γ) и (G', Γ').

Доказательство. Приведем вначале одно вспомогательное замечание.

Пусть даны две пары (G_1, Γ_1) и (G_2, Γ_2) . Пусть $\Gamma_1 = \Phi_2 \lambda \mathfrak{Z}_1$ и $\Gamma_2 = \Phi_2 \lambda \mathfrak{Z}_2$, и пусть Φ_2 действует точно в G_2 . Допустим, далее, что заданы эпиморфизмы $\mu: G_1 \to G_2$, $\mu_1: \Phi_1 \to \Phi_2$ и $\mu_3 : \mathfrak{Z}_1 \to \mathfrak{Z}_2$, причем μ и μ_1 определяют эпиморфизм $(G_1, \Phi_1) \to (G_2 \Phi_2)$, а μ вместе с μ_2 дают эпиморфизм $(G_1 \mathfrak{Z}_1) \to (G_2 \mathfrak{Z}_2)$. Покажем, что заданные эпиморфизмы определяют эпиморфизм пар $(G, \Gamma_1) \to (G, \Gamma_2)$.

Проверим вначале соотношение:

$$(\sigma_1^{-1} \varphi_1 \sigma_1)^{\mu_1} = (\sigma_1^{\mu_2})^{-1} \varphi_1^{\mu_1} \sigma_1^{\mu_2}; \quad \sigma_1 \in \mathfrak{Z}_1, \; \varphi_1 \in \Phi_1$$

Левая и правая части здесь лежат в Φ_2 , и учитывая точность Φ_2 достаточно проверить, что при любом $g_2 \in G_2$ выполняется

$$g_2 \circ (\sigma_1^{-1} \varphi_1 \sigma_1)^{\mu_1} = g_1 \circ (\sigma_1^{\mu_2})^{-1} \varphi_1^{\mu_1} \sigma_1^{\mu_2}$$

Пусть $g_2 = g_1^{\mu}$, $g_1 \in G_1$.

Имеем:

$$g_2 \circ (\sigma_1^{-1} \varphi_1 \sigma_1)^{\mu_1} = g_1^{\mu} \circ (\sigma_1^{-1} \cdot \varphi_1 \sigma_1)^{\mu_1} = (g_1 \circ \sigma_1^{-1} \varphi_1 \sigma_1)^{\mu};$$

$$g_2 \circ (\sigma_1^{-1})^{\mu_2} \varphi_1^{\mu_1} \sigma_1^{\mu_2} = ((g_1^{\mu} (\sigma_1^{-1})^{\mu_2}) \circ \varphi_1^{\mu_1}) \circ \sigma_1^{\mu_2} =$$

$$= ((g_1 \circ \sigma_1^{-1})^{\mu} \circ \varphi_1^{\mu_1}) \circ \sigma_1^{\mu_2} = (g_1 \circ \sigma_1^{-1} \varphi_1)^{\mu} \circ \sigma_1^{\mu_2} = (g_1 \circ \sigma_1^{-1} \varphi_1 \sigma_1)^{\mu}$$

Из отмеченного свойства следует, что μ_1 вместе с μ_2 определяют эпиморфизм $\Gamma_1 = \Phi_1 \lambda \mathfrak{Z}_1 \to \Gamma_2 = \Phi_2 \lambda \mathfrak{Z}_2$, который сейчас обозначим через μ. Остается заметить, что этот μ вместе с $\mu : G_1 \to G_2$ определяют эпиморфизм $\mu : (G_1, \Gamma_1) \to (G_2, \Gamma_2)$. В самом деле, пусть $g \in G_1$ и $\gamma = \varphi\sigma \in \Gamma_1$. Тогда:

$$(g \circ \gamma)^{\mu} = ((g \circ \varphi) \circ \sigma)^{\mu} = (g \circ \varphi)^{\mu} \circ \sigma^{\mu_2} = g^{\mu} \circ \varphi^{\mu_1} \sigma^{\mu_2} = g^{\mu} \circ \gamma^{\mu}$$

Применим это замечание к парам (G, Γ) и (G', Γ'). Для групп Γ и Γ' имеем представления: $\Gamma = \Phi \lambda \Sigma$ и $\Gamma' = \Phi' \lambda \Sigma'$, определяемые условиями. В условиях предложения имеется также изоморфизм $\mu : (G, \Sigma) \to (G', \Sigma')$.

Возьмем, далее, ряд $[G_i]$, участвующий в определении треугольного произведения для (G, Γ), пусть $\mathfrak{Z}$ - централизатор этого ряда в $\operatorname{Aut} G$, и $\mathfrak{Z}'$ - централизатор соответствующего ряда в $\operatorname{Aut} G'$. По условию имеются правые изоморфизмы:

$$\nu_1 : (G, \Phi) \to (G, \mathfrak{Z}) \quad \text{и} \quad \nu_2 : (G', \Phi') \to (G', \mathfrak{Z}')$$

Понятно также, что изоморфизм $\mu : G \to G'$ индуцирует изоморфизм пар:

$$\bar{\mu} : (G, \mathfrak{Z}) \to (G', \mathfrak{Z}')$$

Если теперь $\varphi \in \Phi$, то положим $\varphi^{\nu} = \varphi^{\nu_1 \bar{\mu} \nu_2^{-1}}$. Здесь ν определяет изоморфизм групп Φ и Φ'. Кроме того, $\mu : G \to G'$ и $\nu : \Phi \to \Phi'$ определяют изоморфизм пар (G, Φ) и (G', Φ'), совпадающий с композицией изоморфизмов пар $\nu_1 \bar{\mu} \nu_2^{-1}$. Применяя теперь к этому изоморфизму и изоморфизму $\mu : (G, \Sigma) \to (G', \Sigma')$ приводившееся замечание, мы построим нужный изоморфизм пар (G, Γ) и (G', Γ').

Таким образом, установлено, что сомножители (A_i, Σ_i) однозначно определяют соответствующее треугольное произведение. В дальнейшем мы укажем реализацию треугольных произведений, а пока рассмотрим еще некоторые простейшие свойства.

Пусть пара (G, Γ) является треугольным произведением своих подпар $(A_1, \Sigma_1), \ldots, (A_n, \Sigma_n)$. Здесь группа Γ обладает разложением $\Gamma = \Phi \lambda (\Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n)$. Исходя из этого разложения возьмем эпиморфизмы $\mu_i : \Gamma \to \Sigma_i$. Если обозначить $\Sigma^i = \prod_{k \neq i} \Sigma_k$, то $Ker \mu_i = \Phi \Sigma^i$.

Из определения треугольного произведения непосредственно видно, что рассматриваемый в определении ряд $[G_i]$ является Γ -инвариантным рядом, и, следовательно, можно говорить о факторах $(G_i / G_{i-1}, \Gamma)$. Пусть еще $\mu_i : G_i / G_{i-1} \to A_i$ - естественный здесь изоморфизм. Учитывая, что подгруппа $\Phi \Sigma$ действует тождественно в G_i / G_{i-1}, мы можем отметить, что этот изоморфизм вместе с $\mu_i : \Gamma \to \Sigma_i$ определяет эпиморфизм $\mu_i : (G_i / G_{i-1}, \Gamma) \to (A_i, \Sigma_i)$, которому, далее, отвечает изоморфизм $(A_i, \Sigma_i) \approx (G_i / G_{i-1}, \Gamma / \Phi \Sigma^i)$.

Из этих замечаний следует, что если $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_n$ - некоторые насыщенные классы пар, и $(A_i, \Sigma_i) \in \mathfrak{X}_i$, то пара (G, Γ) принадлежит произведению $\mathfrak{X}_1 \cdot \mathfrak{X}_2 \cdots \mathfrak{X}_n$.

Л е м м а I. Пусть (G, Γ) - такая же, как и раньше, и пусть H - Γ -подмодуль в G. Тогда при некотором i выполняется:

$$G_{i-1} \subset H \subset G_i .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для некоторого i возьмем $a \in G_i \setminus G_{i-1}$ и $b \in G_{i-1}$. Покажем, что найдется $\varphi \in \Phi$, такой, что $a \circ \varphi = a + b$. Возьмем в G некоторый базис, проходящий через все подпространства G_i и содержащий также элементы a и b. Пусть σ - автоморфизм пространства G, оставляющий каждый базисный элемент, кроме a на месте, и переводящий a в $a+b$. Такой σ принадлежит $\mathfrak{Z}$. В качестве φ мы можем теперь взять элемент в Φ, действующий в G так же, как σ.

Пусть, далее, G_i первый член ряда $[G_i]$, содержащий заданное Γ -допустимое подпространство H, и пусть $a \in H \setminus G_{i-1}$. Согласно предыдущему, для каждого $b \in G_{i-1}$ найдется $\varphi \in \Gamma$, что $a\circ\varphi = a+b$. При этом, $b = a\circ\varphi - a \in H$ и $G_{i-1} \subset H$

Понятие треугольного умножения очевидным образом можно перенести и на бесконечные последовательности пар. Мы здесь ,однако, интересуемся лишь конечными произведениями, которые, как мы увидим, можно свести к бинарным треугольным произведениям. Бинарное треугольное умножение будем обозначать знаком $\triangledown$: $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\triangledown(B,\Sigma_2)$, если пара (G,Γ) распадается в треугольное произведение своих подпар (A,Σ_1) и (B,Σ_2).

Следующая лемма опирается на предыдущую, и для нас она особенно важна.

Л е м м а 2. Пусть $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\triangledown(B,\Sigma_2)$. Если $\mathfrak{F}$ - радикал, и $\mathfrak{F}(A,\Sigma_1)<A$, то $\mathfrak{F}(G,\Gamma)=\mathfrak{F}(A,\Sigma_1)$. Если $\mathfrak{F}$ - вербал, и $\mathfrak{F}(B,\Sigma_2)>0$, то $\mathfrak{F}(G,\Gamma)=A+\mathfrak{F}(B,\Sigma_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F}$ - радикал. Возможны два случая: $A\subseteq\mathfrak{F}(G,\Gamma)$ или $\mathfrak{F}(G,\Gamma)<A$. Так как имеется правый эпиморфизм $(A,\Gamma)\to(A,\Sigma_1)$, то $\mathfrak{F}(A,\Gamma)=\mathfrak{F}(A,\Sigma_1)$. Если теперь имеет место первый случай, то должно быть:

$$A=\mathfrak{F}(A,\Gamma)=\mathfrak{F}(A,\Sigma_1)$$

Теперь ясно, что если $\mathfrak{F}(A,\Sigma_1)<A$, то первый случай невозможен, и $\mathfrak{F}(G,\Gamma)<A$. При этом, имеем:

$$\mathfrak{F}(G,\Gamma)=\mathfrak{F}(A,\Gamma)=\mathfrak{F}(A,\Sigma_1)$$

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ - вербал, и пусть $\mathfrak{F}(B,\Sigma_2)\neq 0$. Пусть μ обозначает проектирование пространства G на B и этим же μ обозначим проектирование группы Γ на Σ_2. Оба эти проектирования дают эпиморфизм:

$$\mu : (G,\Gamma)\to(B,\Sigma_2)$$

Так как вербал перестановочен с эпиморфизмами, то имеем

$$\mathfrak{F}(G,\Gamma)^{\mu}=\mathfrak{F}((G,\Gamma)^{\mu})=\mathfrak{F}(B,\Sigma_2)$$

Учитывая, далее, что $\mathcal{F}(B,\Sigma_2)\neq 0$, мы можем заключить, что $\mathcal{F}(G,\Gamma)$ не может содержаться в A. Следовательно, $\mathcal{F}(G,\Gamma)$ строго содержит A, и это означает также, что $\mathcal{F}(G,\Gamma)$ есть полный прообраз подпространства $\mathcal{F}(B,\Sigma_2)$ относительно данного μ. Этот полный прообраз совпадает с $A+\mathcal{F}(B,\Sigma_2)$.

Нам понадобятся дальше некоторые свойства централизаторов рядов. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ - векторные пространства над полем K. Обозначим $G_i = A_1+A_2+ \dots A_i$, $i=1,2,\dots,n$, $G_0=0$ и $G_n=G$. Группу $Aut\, G_i$ мы можем отождествить с подгруппой в $Aut\, G_{i+1}$, состоящей из элементов этой группы, действующих тождественно в A_{i+1} и оставляющих инвариантным подпространство G_i. Пусть, далее, $\mathfrak{Z}$ - централизатор в $Aut\, G$ ряда

$$G_0=0\subset G_1\subset\dots\subset G_{n-1}\subset G_n=G$$

и $\mathfrak{Z}_1$ - централизатор в $Aut\, G_{n-1}$ ряда

$$G_0=0\subset G_1\subset\dots\subset G_{n-1}$$

рассматриваемый как подгруппа в $Aut\, G$. Обозначим еще через $\mathfrak{Z}_2$ централизатор в $Aut\, G$ ряда $0\subset G_{n-1}\subset G$. Очевидно, что $\mathfrak{Z}_2$ - нормальный делитель в $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Z}_1\cap\mathfrak{Z}_2=E$.

Легко также проверить, что $\mathfrak{Z}=\mathfrak{Z}_2\leftthreetimes\mathfrak{Z}_1$. В самом деле, пусть $\gamma\in\mathfrak{Z}$. Этот γ индуцирует автоморфизм в G_{n-1}, принадлежащий, очевидно, $\mathfrak{Z}_1$. Пусть σ - такой автоморфизм, рассматриваемый как элемент в $\mathfrak{Z}$. Понятно, что $\gamma\sigma^{-1}$ действует тождественно в G_{n-1} и в G/G_{n-1}. Следовательно, $\gamma\sigma^{-1}\in\mathfrak{Z}_2$.

Для централизатора $\mathfrak{Z}$ имеется еще и другое разложение. Пусть $H=A_2+\dots+A_n$. Разложение $G=A_1+H$ определяет вложение группы $Aut\, H$ в $Aut\, G$. Пусть еще $H_i=A_2+\dots+A_i$, $i=1,2,\dots,n$. Обозначим через $\mathfrak{Z}_1'$ централизатор в $Aut\, H$ ряда $0\subset H_2\subset\dots\subset H_n=H$, рассматриваемый как подгруппа в $\mathfrak{Z}$, и $\mathfrak{Z}'_2$ - централизатор в $Aut\,G$ ряда $0 \subset A_1 \subset G$. Как и выше, проверяется, что $\mathfrak{Z}$ распадается в полупрямое произведение: $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}'_2 \lambda \mathfrak{Z}'_1$.

С помощью этих замечаний будем проверять сейчас ассоциативность треугольных разложений.

Пусть $(G,\Gamma) = (A,\Sigma_1) \triangledown (H,\Sigma)$ и пусть $(H,\Sigma) = (B,\Sigma_2) \triangledown (C,\Sigma_3)$. Покажем, что пара (G,Γ) есть треугольное произведение своих подпар (A,Σ_1), (B,Σ_2) и (C,Σ_3).

Имеем

$$G = A + H; \quad \Gamma = \Phi_2 \lambda (\Sigma_1 \times \Sigma),$$

где Φ_2 - нормальный делитель, образ которого в $Aut\,G$ совпадает с централизатором $\mathfrak{Z}_2$ ряда $H \subset A \subset G$. Далее: $H = B + C$ и $\Sigma = \Phi_1 \lambda (\Sigma_2 \times \Sigma_3)$, причем образ Φ_1 в $Aut\,H$ есть централизатор $\mathfrak{Z}_1$ ряда $0 \subset B \subset H$. Φ_1 и Φ_2 действуют в G точно. Далее имеем:

$$\Gamma = \Phi_2 \lambda (\Sigma_1 \times (\Phi_1 \lambda (\Sigma_2 \times \Sigma_3))) = (\Phi_2 \lambda \Phi_1) \lambda (\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_3)$$

Если теперь взять $\Phi = \Phi_2 \lambda \Phi_1$, то Φ действует в G точно, и образ Φ в $Aut\,G$ есть централизатор $\mathfrak{Z}$ ряда $0 \subset A \subset A+B \subset G$. Таким образом, разложение $\Gamma = \Phi \lambda (\Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \Sigma_3)$ определяет треугольное разложение пары (G,Γ) на три заданные пары.

Пусть теперь $(G,\Gamma) = (H,\Sigma) \triangledown (C,\Sigma_3)$ и пусть $(H,\Sigma) = (A,\Sigma_1) \triangledown (B,\Sigma_2)$. Применяя аналогичные рассуждения и учитывая второе разложение централизатора ряда $0 \subset A \subset A+B \subset G$, мы проверим, что и здесь имеется разложение пары (G,Γ) на свои подпары (A,Σ_1), (B,Σ_2) и (C,Σ_3). Точно также проверяется и следующее свойство: если $(G,\Gamma) = (H,\Sigma) \triangledown (A_n,\Sigma_n)$ и (H,Σ) есть треугольное произведение своих подпар $(A_1,\Sigma_1), \dots, (A_{n-1},\Sigma_{n-1})$, то (G,Γ) распадается в треугольное произведение подпар $(A_1,\Sigma_1), \dots, (A_n,\Sigma_n)$.

Допустим дальше, что пара (G,Γ) есть треугольное произведение своих подпар (A,Σ_1), (B,Σ_2) и (C,Σ_3). Покажем, что в (G,Γ) имеется подпара (H,Σ), содержащая (B,Σ_2) и (C,Σ_3), и такая, что $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\triangledown(H,\Sigma)$ и $(H,\Sigma)=(B,\Sigma_2)\triangledown(C,\Sigma_3)$

Пусть

$$\Gamma=\Phi\lambda(\Sigma_1\times\Sigma_2\times\Sigma_3)$$

есть разложение группы Γ, отвечающее треугольному разложению пары (G,Γ) на заданные три пары. Пусть $\mathfrak{z}$ есть централизатор в $Aut\, G$ ряда $0<A<A+B<G$. Представим этот $\mathfrak{z}$ в виде: $\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_2\lambda\mathfrak{z}_1$, где $\mathfrak{z}_2$ - централизатор в $Aut\, G$ ряда $0<A<G$, и $\mathfrak{z}_1$ - централизатор в $Aut\,(B+C)$ ряда $0<B<B+C$. Возьмем, далее, отвечающее этому разложению разложение группы Φ : $\Phi=\Phi_2\lambda\Phi_1$ Здесь Φ_2 - централизатор в Φ ряда $0<A<G$ и поэтому Φ_2 - нормальный делитель в Γ. Теперь имеем:

$$\Gamma=(\Phi_2\lambda\Phi_1)\lambda(\Sigma_1\times\Sigma_2\times\Sigma_3)=\Phi_2\lambda(\Sigma_1\times(\Phi_1\lambda(\Sigma_2\times\Sigma_3))),$$

и легко понять, что подпара $(B+C,\Phi_1\lambda(\Sigma_2\times\Sigma_3))$ удовлетворяет нужным условиям.

Аналогично отмечаем, что имеется подпара (H',Σ'), для которой

$$(G,\Gamma)=(H',\Sigma')\triangledown(C,\Sigma_3) \quad \text{и} \quad (H',\Sigma')=(A,\Sigma_1)\triangledown(B,\Sigma_2)$$

Последнее свойство допускает следующее естественное обобщение. Пусть пара (G,Γ) распадается в треугольное произведение своих подпар $(A_1,\Sigma_1),\dots,(A_{n-1},\Sigma_{n-1}),(A_n\Sigma_n)$ Тогда в (G,Γ) имеется подпара (H,Σ), содержащая все $(A_1,\Sigma_1)\dots$ $\dots,(A_{n-1},\Sigma_{n-1})$, распадающаяся в треугольное произведение этих подпар, и такая, что $(G,\Gamma)=(H,\Sigma)\triangledown(A_n,\Sigma_n)$.

Далее, по индукции получаем следующее свойство. Пусть пара (G,Γ) есть треугольное произведение своих подпар $(A_1,\Sigma_1),$ $\dots,(A_n,\Sigma_n)$ и пусть $m<n$. Тогда в (G,Γ) имеются такие подпары (H_1,Γ_1) и (H_2,Γ_2), что

$(G, \Gamma)=(H_1,\Gamma_1)\triangledown(H_2,\Gamma_2)$, (H_1,Γ_1) есть треугольное произведение своих подпар $(A_1,\Sigma_1), \dots, (A_m,\Sigma_m)$ и (H_2,Γ_2) есть треугольное произведение подпар $(A_{m+1},\Sigma_{m+1}), \dots, (A_n,\Sigma_n)$. Все это и означает ассоциативность треугольного умножения и одновременно показано, что произвольные конечные треугольные произведения могут быть построены из бинарных произведений.

3. Укажем теперь реализацию бинарных треугольных произведений. Пусть даны две пары (A,Σ_1) и (B,Σ_2), $(A+B,\Sigma_1\times\Sigma_2)$ - прямое произведение этих пар, и $\Phi = \mathrm{Hom}(B, A)$ - аддитивная группа линейных отображений из B в A. Известным правилом определяется действие группы $\Sigma=\Sigma_1\times\Sigma_2$ в Φ. Если $\varphi\in\Phi$, $\sigma=\sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1\in\Sigma_1$ и $\sigma_2\in\Sigma_2$, то $\varphi\circ\sigma_1\sigma_2$ есть элемент в Φ, такой, что если $b\in B$, то $b(\varphi\circ\sigma_1\sigma_2)=((b\circ\sigma_2^{-1})\varphi)\circ\sigma_1$. Таким образом, мы имеем групповую пару (Φ,Σ). Через Γ обозначим полупрямое произведение групп Φ и Σ, отвечающее данной паре: $\Gamma=\Phi\land(\Sigma_1\times\Sigma_2)$.

Определим дальше действие группы Γ в пространстве $A+B=G$.

Сначала определим действие здесь группы Φ. Условимся еще элементы из Φ, рассматриваемые как элементы в Γ, обозначать через $\bar\varphi$. Соответственно, перейдем к мультипликативной записи: $\overline{\varphi_1+\varphi_2}=\bar\varphi_1\bar\varphi_2$. Пусть теперь $a\in A$ и $b\in B$. Положим: $a\circ\bar\varphi=a$ и $b\circ\bar\varphi=b+b\varphi$. Понятно, что при этом $\bar\varphi$ действует в G как автоморфизм. Если, далее, $\bar\varphi_1$ и $\bar\varphi_2$ - два элемента в Φ, то

$$(a\circ\bar\varphi_1)\circ\bar\varphi_2=a=a\circ\bar\varphi_1\bar\varphi_2$$

$$(b\circ\bar\varphi_1)\circ\bar\varphi_2=b+b(\varphi_1+\varphi_2)=b\circ\bar\varphi_1\bar\varphi_2$$

Таким образом, мы приходим к паре (G,Φ). Легко видеть, что эта пара точная, и нетрудно также понять, что образ Φ в $\mathrm{Aut}\,G$ совпадает с централизатором ряда $0<A<G$.

Кроме того, мы имеем пару (G,Σ). Если теперь $\gamma=\bar\varphi\sigma$, $\bar\varphi\in\Phi$ и $\sigma\in\Sigma$, - произвольный элемент в Γ и

$g \in G$, то положим: $g \circ \gamma = (g \circ \bar{\varphi}) \circ \sigma$. Несложная проверка показывает, что этим правилом действительно задается представление группы Γ автоморфизмами пространства G, и мы приходим к паре (G, Γ). Очевидно, что эта пара распадается в треугольное произведение своих подпар (A, Σ_1) и (B, Σ_2).

Рассмотрим еще отдельно случай, когда перемножаемые пары являются точными. Пусть дано n точных пар $(A_1, \Sigma_1), \ldots, (A_n, \Sigma_n)$, и пусть (G, Σ) - прямое произведение всех этих пар. Подгруппу Σ мы отождествим с соответствующей подгруппой в $\mathrm{Aut}\, G$. Возьмем еще в $\mathrm{Aut}\, G$ централизатор $\mathfrak{z}$ ряда

$$0 \subset A_1 \subset A_1 + A_2 \subset \cdots \subset A_1 + \cdots + A_{n-1} \subset G$$

Подгруппа $\mathfrak{z}$ инвариантна относительно Σ, и мы имеем теперь пару $(G, \mathfrak{z}\Sigma)$. Легко понять, что эта пара распадается в треугольное произведение заданной последовательности пар.

4. Предложение 2. Пусть даны пары (A, Σ_1) и (B, Σ_2), и пусть $(G, \Gamma) = (A, \Sigma_1) \triangledown (B, \Sigma_2)$. Допустим еще, что имеется некоторый эпиморфизм $\nu: (A, \Sigma_1) \to (\bar{A}, \bar{\Sigma}_1)$. Такой ν может быть продолжен до эпиморфизма

$$\mu: (G, \Gamma) \to (\bar{A}, \bar{\Sigma}_1) \triangledown (B, \Sigma_2)$$

Доказательство. Будем исходить из указанной только что реализации бинарных треугольных произведений.

Обозначим $(\bar{A}, \Sigma_1) \triangledown (B, \Sigma_2) = (\bar{G}, \bar{\Gamma})$. Пусть $g \in G$, $g = a + b$, $a \in A$ и $b \in B$. Полагая $g^{\mu} = a^{\nu} + b$, определим эпиморфизм пространств $\mu: G \to \bar{G}$. Нужно еще определить $\mu: \Gamma \to \bar{\Gamma}$. Пусть $\Phi = \mathrm{Hom}(B, A)$ и $\bar{\Phi} = \mathrm{Hom}(B, \bar{A})$. Имеем: $\Gamma = \Phi \leftthreetimes (\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ и $\bar{\Gamma} = \bar{\Phi} \leftthreetimes (\bar{\Sigma}_1 \times \Sigma_2)$

Если $\varphi \in \bar{\Phi}$, то определим φ^{μ} правилом: при любом $b \in B$ должно быть $b\varphi^{\mu} = (b\varphi)^{\nu}$.

Легко понять, что этим определяется эпиморфизм $\mu: \bar{\Phi} \to \Phi$.

Обозначим: $\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2$ и $\bar{\Sigma} = \bar{\Sigma}_1 \times \bar{\Sigma}_2$. Если $\sigma \in \Sigma$, $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1 \in \Sigma_1$ и $\sigma_2 \in \Sigma_2$, то полагая $(\sigma_1\sigma_2)^{\mu} = \sigma_1^{\nu}\sigma_2$, зададим эпиморфизм $\mu: \Sigma \to \bar{\Sigma}$. Итак, мы построили два эпиморфизма: $\mu: \varphi \to \Phi$ и $\mu: \Sigma \to \bar{\Sigma}$.

Оба эти эпиморфизма можно соединить в эпиморфизм $\mu: \Gamma \to \bar{\Gamma}$, если мы убедимся, что при любых $\sigma \in \Sigma$ и $\varphi \in \Phi$ выполняется: $(\varphi \circ \sigma)^{\mu} = \varphi^{\mu} \circ \sigma^{\mu}$.

Проверим эту формулу. Пусть $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, $\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\sigma_2 \in \Sigma_2$, $\varphi \in \bar{\Phi}$ и пусть $b \in \Phi$. Имеем:

$$b(\varphi \circ \sigma)^{\mu} = (b(\varphi \circ \sigma))^{\nu} = (((b \circ \sigma_2^{-1})\varphi) \circ \sigma_1)^{\nu} = (b \circ \sigma_2^{-1})\varphi)^{\nu} \circ \sigma_1^{\nu} =$$

$$= (b \circ \sigma_2^{-1})\varphi^{\mu} \circ \sigma_1^{\nu} = b(\varphi^{\mu} \circ \sigma_1^{\nu}\sigma_2) = b(\varphi^{\mu} \circ \sigma^{\mu})$$

Теперь можно говорить об эпиморфизмах

$$\mu: G \to \bar{G} \qquad \text{и} \qquad \mu: \Gamma \to \bar{\Gamma}$$

Проверим, что это эпиморфизм пар. Пусть $g = a + b \in G$, $\sigma_1 \in \Sigma_1$, $\sigma_2 \in \Sigma_2$ и $\bar{\varphi} \in \Phi$. Имеем:

$$((a+b) \circ \bar{\varphi}\sigma_1\sigma_2)^{\mu} = ((a + b\varphi + b) \circ \sigma_1\sigma_2)^{\mu} =$$

$$= (a \circ \sigma_1 + b\varphi \circ \sigma_1 + b \circ \sigma_2)^{\mu} = (a \circ \sigma_1)^{\nu} + (b\varphi \circ \sigma_1)^{\nu} + b \circ \sigma_2 =$$

$$= a^{\nu} \circ \sigma_1^{\nu} + b\varphi^{\mu} \circ \sigma_1 + b \circ \sigma_2 ;$$

$$(a+b)^{\mu} \circ (\bar{\varphi}\sigma_1\sigma_2)^{\mu} = (a^{\nu} + b) \circ \varphi^{\mu}\sigma_1\sigma_2 =$$

$$(a^{\nu} + b\varphi^{\mu} + b) \circ \sigma_1^{\nu}\sigma_2 = a^{\nu} \circ \sigma_1^{\nu} + b\varphi^{\mu} \circ \sigma_1^{\nu} + b \circ \sigma_2 ,$$

и $((a+b)\circ\bar{\varphi}\sigma_1\sigma_2)^{\mu}=(a+b)^{\mu}\circ(\varphi\sigma_1\sigma_2)^{\mu}$. Итак, исходный эпиморфизм $\nu:(A,\Sigma_1)\to(\bar{A},\bar{\Sigma}_1)$ продолжен до эпиморфизма $\mu:(G,\Gamma)\to(\bar{G},\bar{\Gamma})$.

Параллельно доказанному сейчас предложению можно доказать еще следующее свойство.

Пусть $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\triangledown(B,\Sigma_2)$ и пусть имеется эпиморфизм: $(B,\Sigma_2)\to(\bar{B},\bar{\Sigma}_2)$. Обозначим через Φ_0 множество элементов из $\Phi=\mathrm{Hom}(B,A)$, аннулирующих ядро эпиморфизма $\nu: B\to\bar{B}$. Φ_0 - нормальный делитель в Γ , и нетрудно проверить что имеется эпиморфизм

$$\mu:(G,\Phi_0\land(\Sigma_1\times\Sigma_2))\to(A,\Sigma_1)\triangledown(\bar{B},\Sigma_2),$$

продолжающий исходный ν .

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\triangledown(B,\Sigma_2)$, H - Γ -подмодуль в G, содержащий A , и $B_0=B\cap H$ При этом, имеется правый эпиморфизм

$$\mu:(H,\Gamma)\longrightarrow(A,\Sigma_1)\triangledown(B_0,\Sigma_2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть $\Phi=\mathrm{Hom}(B,A)$ и $\Phi_0=\mathrm{Hom}(B_0,A)$. Если $\varphi\in\Phi$, то этот φ действует также из B_0 в A . Соответствующий элемент в Φ_0 обозначим через φ^{μ} . Легко видеть, что здесь мы имеем эпиморфизм $\mu:\Phi\to\Phi_0$.

Пусть $\Sigma=\Sigma_1\times\Sigma_2$. Имеем две групповые пары (Φ,Σ) и (Φ_0,Σ) . При этом, отображение $\mu:\Phi\to\Phi_0$ перестановочно с действием группы Σ . Поэтому имеем также эпиморфизм $\mu:\Gamma=\Phi\land\Sigma\to\Gamma'=\Phi_0\land\Sigma$, тождественный на Σ .

Так как $A<H$ и $A+B=G$, то $H=A+(B\cap H)=A+B_0$.

По определению: $(A,\Sigma_1)\triangledown(B_0,\Sigma_2)=(A+B_0,\Phi_0\land\Sigma)$

Теперь понятно, что эпиморфизм $\mu:\Gamma\to\Gamma'$ индуцирует правый эпиморфизм:

$$\mu:(H,\Gamma)\to(H,\Gamma')=(A,\Sigma_1)\triangledown(B_0,\Sigma_2)$$

Заметим еще, что ядро эпиморфизма $\mu: \Gamma \to \Gamma'$ совпадает с ядром эпиморфизма $\mu: \Phi \to \Phi_0$.

Рассмотрим еще случай, когда Γ -подмодуль H принадлежит A : $H = A_0$. Здесь имеет смысл пара $(A_0, \Sigma_1) \triangledown \triangledown (B, \Sigma_2) = (A_0 + B, \bar{\Phi} \lambda \Sigma)$, где $\bar{\Phi} = Hom\,(B, A_0)$.

Пусть Φ_0 - множество всех элементов из Φ , отображающих каждый элемент из B в A_0. Понятно, что имеется естественный изоморфизм $\mu: \Phi_0 \longrightarrow \bar{\Phi}$. Кроме того Φ - нормальный делитель в Γ , и имеется изоморфизм пар $(\Phi_0, \Sigma) \to (\bar{\Phi}, \Sigma)$. Этот изоморфизм индуцирует изоморфизм $\mu: \Phi_0 \lambda \Sigma \to \bar{\Phi} \lambda \Sigma$, а отсюда приходим к правому изоморфизму:

$$\mu: (A_0 + B, \Phi_0 \lambda \Sigma) \to (A_0, \Sigma_1) \triangledown (B, \Sigma_2)$$

Таким образом, пара $(A_0, \Sigma_1) \triangledown (B, \Sigma_2)$ естественно лежит в паре (G, Γ).

Пусть, далее, $(G, \Gamma) = (A, \Sigma_1) \triangledown (B, \Sigma_2)$ и пусть $\Sigma_1' \subset \Sigma_1$ и $\Sigma_2' \subset \Sigma_1$.

Это вложение подгрупп индуцирует вложение в (G, Γ) пары $(A, \Sigma_1') \triangledown (B, \Sigma_2')$.

Если, наконец, (A_0, Σ_1') - подпара в (A, Σ_1) и (B_0, Σ_2') - подпара в (B, Σ_2) , то, применяя предложение 3 и другие приводившиеся только что замечания, мы можем связать треугольное произведение $(A_0, \Sigma_1') \triangledown (B_0, \Sigma_2')$ с исходной парой (G, Γ) .

5. П р е д л о ж е н и е 4. Пусть дана некоторая точная пара (G, Γ) , A - Γ -подмодуль в G , и пусть Σ_1 и Σ_2 - группы автоморфизмов, индуцируемые группой Γ , соответственно, в A и G/A . Тогда исходная пара (G, Γ) может быть вложена в качестве подпары в треугольное произведение $(A, \Sigma_1) \triangledown (G/A, \Sigma_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Если заменить группу Γ отвечающей ей подгруппой в $Aut\,(G)$, то мы придем к паре, изоморфной (справа) исходной паре. Поэтому, мы можем далее считать, что Γ уже содержится в $Aut(G)$. Для произвольного $\gamma \in \Gamma$ через γ^{μ_1} обозначим автоморфизм пространства A, индуцируемый γ, а γ^{μ_2} обозначает соответствующий автоморфизм для G/A. При этом, $\Sigma_1 = \Gamma^{\mu_1}$ и $\Sigma_2 = \Gamma^{\mu_2}$. Представим $G = A + B$ и пусть $\nu_1 : G \to G/A$ - естественный гомоморфизм. Пусть еще ν_2 - проектирование G на B. ν_1 рассмотрим также как изоморфизм $B \to G/A$, и в этом смысле будем понимать ν_1^{-1}. При любом $g \in G$ имеем: $(g^{\nu_1})^{\nu_1^{-1}} = g^{\nu_2}$. ν_1 и пара $(G/A, \Sigma_2)$ индуцируют пару (B, Σ_2). Здесь для $b \in B$ и $\sigma_2 \in \Sigma_2$ имеем: $b \circ \sigma_2 = (b^{\nu_1} \circ \sigma_2)^{\nu_1^{-1}}$. Если, далее, $\sigma_2 = \gamma^{\mu_2}$, то: $b \circ \sigma_2 = (b^{\nu_1} \circ \sigma_2)^{\nu_1^{-1}} = ((b\circ\gamma)^{\nu_1})^{\nu_1^{-1}} = (b\circ\gamma)^{\nu_2}$

Исходя из представления $G = A + B$, мы вложим Σ_1 в $Aut\ (G)$. Пусть $* : \Sigma_1 \to \Sigma_1^*$ - соответствующее вложение. Группе Σ_2, действующей в B по только что заданному правилу, отвечает подгруппа в $Aut\ (B)$, которую дальше вложим в $Aut\ (G)$. Соответствующую подгруппу в $Aut(G)$ обозначим через Σ_2^*. Здесь $*$ также изоморфизм между Σ_2 и Σ_2^*. Имеем $b \circ \sigma_2 = b\sigma_2^* = (b\gamma)^{\nu_2}$. Пусть, далее, $\mathfrak{Z}$ - централизатор в $Aut\ (G)$ ряда $0 \subset A \subset G$ и $\Gamma' = \mathfrak{Z}\Sigma_1^*\Sigma_2^*$. Понятно, что пара (G, Γ') распадается в треугольное произведение своих подпар (A, Σ_1^*) и (B, Σ_2^*). Покажем, что имеет место включение: $\Gamma \subset \Gamma'$. Пусть $\gamma \in \Gamma$, $\sigma_1 = (\gamma^{\mu_1})^*$ и $\sigma_2 = (\gamma^{\mu_2})^*$, $\sigma_1 \in \Sigma_1^*$, $\sigma_2 \in \Sigma_2^*$. Мы докажем нужное включение, если покажем, что $\gamma\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} \in \mathfrak{Z}$. Пусть $b \in B$. Тогда $b\sigma_2 = (b\gamma)^{\nu_2}$ и, поэтому, $b\gamma - b\sigma_2 \in A$. Отсюда, $b\gamma\sigma_2^{-1} - b \in A$ и, следовательно, $\gamma\sigma_2^{-1}$ действует тождественно в G/A. Элемент $\gamma\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}$ также действует тождественно в G/A. Пусть теперь $a \in A$. Тогда $a\gamma = a\sigma_1$ и $a\gamma\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = a\gamma\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = a$. Следовательно, $\gamma\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} \in \mathfrak{Z}$.

Мы установили, что пара (G, Γ) вкладывается в $(A, \Sigma_1^*) \triangledown (B, \Sigma_2^*)$. Из построений также видно, что имеются изоморфизмы $(A, \Sigma_1) \approx (A, \Sigma_1^*)$ и $(G/A, \Sigma_2) \approx (B, \Sigma_2^*)$ Поэтому,

$(A, \Sigma_1^*) \triangledown (B, \Sigma_2^*) \approx (A, \Sigma_1) \triangledown (G/A, \Sigma_2)$, и этим завершается доказательство предложения. Это предложение может быть также обобщено и на неточные пары, однако такое обобщение нам не понадобится.

§3. О полугруппе радикалов

1. В дальнейшем мы иногда отождествляем радикалы и радикальные классы.

П р е д л о ж е н и е 5. Если радикал $\mathfrak{X}$ не является идемпотентом, то все его степени различны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{F}$ - радикальная функция, отвечающая классу $\mathfrak{X}$. Так как $\mathfrak{X}^2 \neq \mathfrak{X}$, то имеется пара (B, Σ_2), принадлежащая разности $\mathfrak{X}^2 \setminus \mathfrak{X}$. Допустим теперь, что уже установлено, что все классы $\mathfrak{X}^m$ с $m < n$ различны. Пусть $(A, \Sigma_1) \in \mathfrak{X}^{n-1} \setminus \mathfrak{X}^{n-2}$ и возьмем $(G, \Gamma) = (A, \Sigma_1) \triangledown (B, \Sigma_2)$. Покажем, что эта пара не лежит в $\mathfrak{X}^{n-1}$. По условию пара (A, Σ_1) не принадлежит классу $\mathfrak{X}^{n-2}$, и, поэтому, если $\mathcal{F}^{n-2}$ - радикальная функция, отвечающая этому классу, то $\mathcal{F}^{n-2}(A, \Sigma_1) < A$. Используя теперь лемму 2, получаем: $\mathcal{F}^{n-2}(G, \Gamma) = \mathcal{F}^{n-2}(A, \Sigma_1)$ Обозначим $\mathcal{F}^{n-2}(G, \Gamma) = A_1$. Если бы пара (G, Γ) принадлежала классу $\mathfrak{X}^{n-1}$, то пара $(G/A_1, \Gamma)$ принадлежала бы $\mathfrak{X}$. Так как $A_1 \subset A$, то отсюда следовало бы, что $(G/A, \Gamma) \in \mathfrak{X}$. Но тогда и $(B, \Sigma_2) \in \mathfrak{X}$, что неверно. Следовательно, (G, Γ) не содержится в $\mathfrak{X}^n$. Но эта пара принадлежит, очевидно, классу $\mathfrak{X}^{n+1}$. Пусть теперь $\mathcal{F}^n$ - радикал, отвечающий классу $\mathfrak{X}^n$. Тогда пара $(\mathcal{F}^n(G, \Gamma), \Gamma)$ принадлежит классу $\mathfrak{X}^n$ и не принадлежит классу $\mathfrak{X}^{n-1}$.

Следовательно, все $\mathfrak{X}^n$ различны.

Другими словами, доказано, что каждый радикал, не являющийся идемпотентом, является свободным радикалом - свободным элементом в полугруппе всех радикалов. В действительности, можно показать, что каждый такой радикал абсолютно свободен - все его бесконечные степени также различны. Доказательство этого свойства, как и только что приводившееся доказательство, копирует соответствующие рассуждения из теории радикалов в группах [5].

Можно показать также, что произведение свободных радикалов снова свободный радикал, и поэтому можно говорить о полугруппе свободных радикалов. В этой полугруппе нет идемпотентов, однако она не свободна. Различные соотношения здесь возникают за счет бесконечных произведений. Естественно ставить вопрос о выделении различных свободных систем радикалов. Одной из таких систем является система всех малых радикалов, которой мы посвятим этот параграф.

2. Напомним, что если $\mathfrak{X}$ - некоторый класс пар, то порожденный этим классом радикальный класс есть класс $JVQS_eP_{z,o}\mathfrak{X}$. Условимся еще класс $\mathfrak{X}$ называть предрадикальным классом, если он замкнут относительно операторов V, Q, S_e и $P_{z,o}$. Предрадикальное замыкание произвольного класса $\mathfrak{X}$ есть класс $VQS_eP_{z,o}\mathfrak{X}$, и если $\mathfrak{X}$ - предрадикальный класс, то его радикальное замыкание есть класс $J\mathfrak{X}$.

Если класс пар $\mathfrak{X}$ является абстрактным замыканием некоторого множества пар, то такой класс также будем называть множеством пар. Аналогичным образом будем понимать множество групп и множество векторных пространств. Радикальный класс пар будем называть малым, если этот класс порождается некоторым множеством пар. Понятно, что малый радикал порождается также некоторой одной своей парой. Легко еще заметить, что радикальный класс $\mathfrak{X}$ мал, если он порождается некоторым своим подклассом $\mathfrak{X}_o$, таким, что во всех парах (G,Γ) из $\mathfrak{X}_o$ все G пробегают некоторое множество пространств или все Γ пробегают некоторое множество групп.

Отметим, далее, что если $\mathfrak{X}_o$ - некоторое множество пар и $\mathfrak{X}_1$ - предрадикальное замыкание класса $\mathfrak{X}_o$, то в парах (G,Γ) из $\mathfrak{X}_1$ пространства G пробегают лишь множеств. В самом деле, пусть μ - некоторая бесконечная мощность, и пусть $\mathfrak{X}_\mu$ обозначает класс всех пар (G,Γ), у которых мощность пространства G меньше μ. Понятно, что каждый такой $\mathfrak{X}_\mu$ - предрадикальный класс. Каждое множество пар $\mathfrak{X}_o$ принадлежит некоторому $\mathfrak{X}_\mu$. В этом же $\mathfrak{X}_\mu$ содержится и предрадикальное замыкание класса $\mathfrak{X}_o$, и отсюда следует отмеченное свойство.

Опираясь на эти замечания, легко показать, что подрадикал малого радикала всегда мал. Кроме того, нетрудно доказать, что многообразие тогда и только тогда является малым радикалом, когда это многообразие есть многообразие тривиальных пар - пар, в которых группа действует тождественно.

П р е д л о ж е н и е 6. Каждый малый радикал является неразложимым элементом в полугруппе всех радикалов.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть малый радикал $\mathfrak{X}$ порождается множеством пар $\mathfrak{X}_0$ и пусть $\mathfrak{X}^1$ - предрадикал, порожденный этим же $\mathfrak{X}_0$. Возьмем еще некоторый $\mathfrak{X}_\mu$ с $\mathfrak{X}^1 \subset \mathfrak{X}_\mu$.

Допустим теперь, что имеется нетривиальное разложение $\mathfrak{X}=\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$. Возьмем в $\mathfrak{X}_1$ некоторую пару (A,Σ_1), в которой мощность A больше μ. Пусть еще (B,Σ_2) - пара в $\mathfrak{X}$ с $B\neq O$. Обозначим: $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\triangledown(B,\Sigma_2)$ При этом, $(G,\Gamma)\in \in \mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2=\mathfrak{X}$. Возьмем, далее, $g\in G\setminus A$, и пусть A_1 - циклический Γ - подмодуль в G, порожденный элементом g. Так как g не принадлежит A, то $A\subset A_1$, и, поэтому, пара (A,Γ) не принадлежит $\mathfrak{X}_\mu$, а следовательно она не лежит и в $\mathfrak{X}'$. Вспоминая теперь определение оператора J, мы видим, что (G,Γ) не принадлежит классу $J\mathfrak{X}'=\mathfrak{X}$. Противоречие.

Те же рассуждения показывают, что в действительности имеет место следующее свойство. Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{X}'$ и $\mathfrak{X}_\mu$ - те же, что и раньше, и пусть $\mathcal{F}$ - радикальная функция, отвечающая классу $\mathfrak{X}$. Пусть, далее, (A,Σ_1) - некоторая пара в $\mathfrak{X}$ с мощностью A большей μ, и пусть (B,Σ_2) - произвольная пара с $B\neq O$. Если теперь $(G,\Gamma)=(A,\Sigma_1)\triangledown(B,\Sigma_2)$ то $\mathcal{F}(G,\Gamma)=A$.

Понятно, что $A\subset\mathcal{F}(G,\Gamma)$. Допустим теперь, что имеется g с $g\in\mathcal{F}(G,\Gamma)\setminus A$. Пусть A_1 - циклический Γ - подмодуль в G, порожденный этим g. Тогда $A\subset A_1$ и мощность A_1 больше μ. Поэтому, пара (A_1,Γ) не принадлежит $\mathfrak{X}^1$, и отсюда $(\mathcal{F}(G,\Gamma),\Gamma)$ не лежит в $\mathfrak{X}$. Из этого противоречия следует, что $\mathcal{F}(G, \Gamma)$ не может быть больше A

Этим замечанием мы в дальнейшем воспользуемся.

3. Теорема. Система всех малых радикалов является свободной системой радикалов.

Доказательство. Только что мы видели, что все малые радикалы неразложимы, и, следовательно, свободны. Теперь нужно показать, что если имеется соотношение

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_n = \mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 \ldots \mathfrak{Y}_m, \qquad (*)$$

где все сомножители слева и справа - малые радикалы, отличные от нулевого, то $n = m$ и $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{Y}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Возьмем класс $\mathfrak{X}_\mu$ таким образом, чтобы все $\mathfrak{X}_i$ и $\mathfrak{Y}$ порождались предрадикалами, содержащимися в $\mathfrak{X}_\mu$. Фиксируем еще некоторое множество I, мощность которого больше μ.

Пусть, далее, (A_i, Σ_i), $i = 1, 2, \ldots, k$, некоторая последовательность пар с ненулевыми A_i. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ и каждого $\alpha \in I$ возьмем еще пару $(A_i^\alpha, \Sigma_i^\alpha)$, изоморфную паре (A_i, Σ_i), и пусть (B_i, Γ_i) есть ограниченное декартово произведение всех $(A_i^\alpha, \Sigma_i^\alpha)$, $\alpha \in I$. Обозначим через (G, Γ) треугольное произведение пар (B_i, Γ_i), расположенных в порядке номеров.

Докажем следующее вспомогательное свойство.

Если имеет место включение.

$$(G, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_n$$

то $n \geqslant k$. Другими словами, включение невозможно, если $k > n$. Доказательство проведем индукцией по n. Пару (G, Γ) представим в виде $(G, \Gamma) = (B_1, \Gamma_1) \triangleleft (H, \Sigma)$, где (H, Σ) треугольное произведение пар (B_i, Γ_i) с $i = 2, \ldots, k$.

Если, далее, $\mathcal{F}$ - некоторый радикал, порождаемый предрадикалом, содержащимся в $\mathfrak{X}_\mu$, то, как это видно из замечаний, приводившихся в конце предыдущего пункта, должно быть $\mathcal{F}(G, \Gamma) \subset B_1$. Это означает, что включение $(G, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1$ невозможно, если $k > 1$

Допустим теперь, что для всех чисел, меньших заданного, соответствующее свойство имеет место, и допустим, что выполняется указанное выше включение. Если $\mathcal{F}$ - радикал, отвечающий классу $\mathfrak{X}_1$, то $\mathcal{F}(G,\Gamma)\subset B_1$, и отсюда, очевидно, следует, что должно выполняться включение:

$$(H,\Sigma)\in\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\dots\mathfrak{X}_n$$

Поэтому $k-1\le n-1$ и $k\le n$.

Покажем теперь, что $n=m$. Возьмем исходные пары, через которые определялась пара (G,Γ), так, чтобы выполнялись включения $(A_i,\Sigma_i)\in\mathcal{Y}_i$. При этом, $k=m$. Так как радикальный класс всегда замкнут относительно ограниченных декартовых произведений, то одновременно имеем включения: $(B_i,\Gamma_i)\in\mathcal{Y}_i$, $i=1,2,\dots m$. Отсюда $(G,\Gamma)\in\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2\dots\mathcal{Y}_m$. Но тогда, $(G,\Gamma)\in\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\dots\mathfrak{X}_n$, и поэтому $m\le n$. По тем же соображениям получаем обратное неравенство.

Дальше будем проверять равенство классов: $\mathfrak{X}_1=\mathcal{Y}_1$.

Допустим, что имеется пара $(A_1\Sigma_1)$, принадлежащая $\mathcal{Y}_1$ и не принадлежащая $\mathfrak{X}_1$. Возьмем еще ненулевые пары $(A_i\Sigma_i)$, $i=2,\dots n$, принадлежащие соответствующим классам $\mathcal{Y}_i$, и пусть (G,Γ) определена, как и раньше для указанных пар. Здесь

$$(G,\Gamma)\in\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_2\dots\mathcal{Y}_n=\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\dots\mathfrak{X}_n$$

Пусть $\mathcal{F}=\mathfrak{X}_1^{!}$ - радикал, отвечающий классу $\mathfrak{X}$. Тогда $\mathcal{F}(A_1,\Sigma_1)<A_1$ и аналогично при любом α имеем: $\mathcal{F}(A_1^{\alpha},\Sigma_1^{\alpha})<A_1^{\alpha}$. Обозначим: $B_0=\mathcal{F}(B_1,\Gamma_1)$. Так как, $B_0=\Sigma\mathcal{F}(A_1^{\alpha},\Sigma_1^{\alpha})$, то фактор-пространство $\bar{B}_1=B_1/B_0$ имеет мощность, большую μ. Представим, как и выше, пару (G,Γ) в виде $(G,\Gamma)=(B_1\Gamma_1)\triangledown(H,\Sigma)$, и напомним еще, что $\mathcal{F}(G,\Gamma)=\mathcal{F}(B_1,\Gamma_1)=B_0$. С помощью предложения 2 продолжим естественный эпиморфизм

$$(B_1,\Gamma_1)\to(\bar{B}_1,\Gamma_1)$$

до эпиморфизма

$$(G,\Gamma)\to(\bar{B}_1,\Gamma_1)\triangledown(H,\Sigma)$$

Так как ядро последнего в G есть B_0, то имеем также эпиморфизм

$$(G/\mathfrak{F}(G,\Gamma),\Gamma) \to (\bar{B}_1,\Gamma_1)\triangledown(B_2,\Gamma_2)\triangledown\dots\triangledown(B_n,\Gamma_n)$$

Слева здесь стоит пара, принадлежащая классу $\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\dots\mathfrak{X}_n$. Поэтому приходим к включению:

$$(\bar{B}_1,\Gamma_1)\triangledown(B_2,\Gamma_2)\triangledown\dots\triangledown(B_n,\Gamma_n)\in\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\dots\mathfrak{X}_n$$

Число сомножителей здесь больше возможного, и мы получили противоречие с существованием пары $(A_1,\Sigma_1)\in\mathfrak{Y}_1\setminus\mathfrak{X}_1$. Поэтому $\mathfrak{X}_1\subseteq\mathfrak{Y}_1$, и точно так же получаем обратное включение.

Дальше проверим возможность сокращения:

$$\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\dots\mathfrak{X}_n=\mathfrak{Y}_2\mathfrak{Y}_3\dots\mathfrak{Y}_n$$

Пусть $(H,\Sigma)\in\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3\dots\mathfrak{X}_n$. Возьмем пару (A_1,Σ_1) в $\mathfrak{X}_1$ и соответствующую пару (B_1,Γ_1). Пусть $(G,\Gamma)=(B_1,\Gamma_1)\triangledown(H,\Sigma)$. Имеем:

$$(G,\Gamma)\in\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2\dots\mathfrak{X}_n=\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2\dots\mathfrak{Y}_n$$

Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{Y}_1'=\mathfrak{X}_1'$. Так как $(A_1,\Sigma_1)\in\mathfrak{Y}_1$, то $\mathfrak{F}(G,\Gamma)=B_1$. Но тогда $(G/B_1,\Gamma)\in\mathfrak{Y}_2\dots\mathfrak{Y}_n$, и отсюда $(H,\Sigma)\in\mathfrak{Y}_2\dots\mathfrak{Y}_n$. Таким образом, мы установили включение $\mathfrak{X}_2\dots\mathfrak{X}_n\subseteq\mathfrak{Y}_2\dots\mathfrak{Y}_n$ и аналогично получаем обратное включение.

Этим завершается доказательство теоремы.

Приведенная теорема - это лишь простейший пример теоремы о свободе систем радикалов. Можно указать и другие примеры подобного рода. Сюда же относится и уже упоминавшаяся во введении теорема о свободе полугруппы многообразий - напомним, что многообразия здесь являются частным случаем радикалов.

Литература

1. Плоткин Б.И., Радикалы и многообразия в представлениях групп, Латв.матем.ежегодник (в печати).
2. Плоткин Б.И., Группы автоморфизмов алгебраических систем, Изд. "Наука", М., 1966.
3. Плоткин Б.И., О полугруппе радикальных классов групп, Сиб.матем.журнал, т.10, № 5, 1969, 1092-1108.
4. Hall Ph., On non-strictly simple groups, Proc.Cambr.Phil.Soc., 59, Nr.3, 1963, 531-553.
5. Вовси С. М., Об абсолютной свободе радикалов в группах (в настоящем сборнике).

Оглавление

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ГРУПП

(труды алгебраического семинара.

Ученые записки, том 151

Редактор А.Токаренко

Корректор Л.Флейшман

Подписано к печати 29/IX 1971 ЯТ 01442 Зак. № 745
Ф/б 60x84/16. Писчая №1. Физ.п.л.10,9. Уч.-и.л. 8,2
Тираж 400 экз. Цена 85 коп

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, бульв. Райня, 19
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ГРУПП

(труды алгебраического семинара.

Ученые записки, том I5I

Редактор А.Токаренко

Корректор Л.Флейшман

Подписано к печати 29/IX I97I ЯТ 0I442 Зак. № 745
Ф/б 60x84/I6. Писчая №I. Физ.п.л.I0,9. Уч.-и.л. 8,2
Тираж 400 экз. Цена 85 коп

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, бульв. Райня, I9
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

ЦЕНА 85 коп.