

ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
КАФЕДРА



УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

**ВОПРОСЫ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

II

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра электродинамики и механики сплошных сред

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том 192

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ СРЕД

Выпуск I

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1973

1-75
92

УДК 621, УДК 537, УДК 518

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ
СРЕД
выпуск I, 1973

В сборнике рассматриваются результаты исследований, проведенных сотрудниками кафедры электродинамики и механики сплошных сред. Он включает 8 статей, в которых изложены результаты расчёта магнитного поля электрических и индукционных МГД-машин при неравномерном рабочем зазоре, экстремальные свойства МГД-устройств, вопросы построения оптимизационной модели проектирования МГД-насосов, нелинейные задачи теплопроводности для проводников тока, теория ориентирования твёрдых тел электромагнитным полем, вопросы измерения расхода и дозирования жидких металлов при помощи электромагнитного поля и один из методов численного обращения интегрального преобразования Лапласа. Ряд статей носит обзорный характер.

Сборник предназначен для научно-технических работников и студентов, интересующихся прикладными вопросами электродинамики сплошных сред, математическими методами решения прикладных задач электродинамики и нелинейных тепловых задач.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Микельсон Ю.Я. - ответственный редактор,
Циркунов В.Э.,
Сорокина Э.С.,
Полманис Я.Э.,
Паэгле Л.Б.

© Редакционно-издательский отдел ЛГУ им.П.Стучки, 1973 г.

В 0-2-3-2, 3-3-10-128у 417 73
М 812(II)-73

LVU ZINATNISKA
BIBLIOTEKA
1-4-74

200024011

Ю.Я. Микельсон, А.С. Петражицкий

РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В НЕРАВНОМЕРНОМ ЗАЗОРЕ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МГД-МАШИН

Важной областью приложения методов расчета электромагнитных полей является расчет магнитного поля в асинхронных электрических и индукционных магнетогидродинамических машинах. С точки зрения методов расчета полей эти машины представляют собой набор областей, занятых ферромагнетиками, проводниками и изоляторами. Поскольку реальная машина — весьма сложная система, расчет магнитного поля проводится по модели, отражающей лишь наиболее существенные свойства её. При этом машина или какая-либо ее часть представляется обычно в виде ряда областей простой геометрической формы с кусочно-постоянными характеристиками: электропроводностью σ и магнитной проницаемостью μ .

Наиболее развиты методы расчета для моделей, в которых зазор между ферромагнитными областями — магнитопроводами ротора и статора — равномерен [1]. Однако в реальных машинах зазор неравномерен, т.к. в магнитопроводе имеется ряд пазов для размещения проводов обмотки. Благодаря этому магнитопровод приобретает характерную зубчатую форму и расчет магнитного поля с учетом зубчатости магнитопровода становится более сложной задачей. Решение этой задачи позволяет точно определить ряд функциональных зависимостей и констант, характеризующих влияние неравномерности воздушного зазора, которые используются при расчете электрических и МГД-машин.

Впервые задача расчета магнитного поля в пустом

неравномерном зазоре решена в [2]. Рассмотрим оставшуюся классическую постановку задачи в этой работе.

При расчете магнитного поля в электрических машинах, воздушный зазор которых невелик по сравнению с шириной паза и зубца, можно ограничиться рассмотрением одного паза шириной h , отделенного воздушным зазором δ от гладкой поверхности магнитопровода и принять паз бесконечно глубоким, а зубцы — бесконечно широкими.

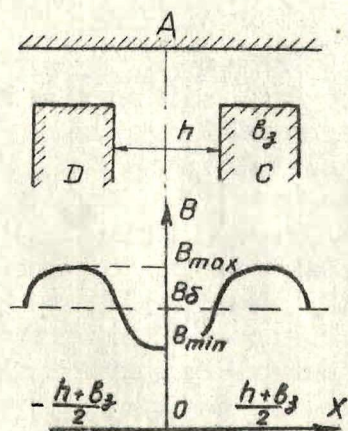


Рис. I.

Предположим, что зубцы D и C (рис. I) имеют одинаковый магнитный потенциал, а разность потенциалов между A и D такова, что при отсутствии паза магнитная индукция в зазоре равна единице. Наличие паза уменьшает индукцию на гладкой поверхности магнитопровода напротив середины паза до некоторого минимального значения B_{min} . При увеличении $|x|$ от 0 до $h+b_3/2$

индукция увеличивается, пока не достигнет максимального значения, равного единице. Если при заданной точности вычислений индукция при $|x|=h+b_3/2$ еще не достигает максимального значения, то данная модель, не учитывающая взаимное влияние пазов, неприменима. Вследствие уменьшения магнитной индукции под пазом средняя по зубцовому делению $t_3 = h \cdot b_3$ магнитная индукция B_{δ} меньше максимальной.

В работе [2] с помощью метода конформного отображения получено аналитическое выражение для магнитной индукции

на поверхности магнитопровода.

На основе этого в [3] вводится коэффициент воздушного зазора, учитывающий в первом приближении влияние зубчатости магнитопровода на магнитную индукцию: $K_{\delta} = B_{\text{пох}} / B_{\delta}$

В честь автора [3] этот коэффициент назван коэффициентом Картера. Коэффициент Картера характеризует отношение средних значений магнитной индукции при равномерном и неравномерном зазорах на гладкой поверхности магнитопровода.

$$\text{По [3]} \quad K_{\delta} = \frac{t_{\delta}}{t_{\delta} - \delta}, \quad \delta = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{h}{2\delta} \operatorname{arctg} \frac{h}{2\delta} - \ell \pi \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\delta}\right)^2} \right\}.$$

В практике расчета электрических и МГД-машин обычно пользуются упрощенными выражениями для K_{δ} [4, 5, 6, 7]. В работах [7 + II] приводятся полумпирические формулы для более полного учета влияния зубчатости, однако для получения формул, несущих больше информации о влиянии зубчатости, надо обратиться непосредственно к решению задачи о распределении магнитного поля. Ряд авторов применял метод конформного отображения для расчета магнитного поля в электрических машинах по более сложным моделям, учитывающим взаимное влияние пазов, конечность их глубины и наличие пазов на обеих сторонах магнитопровода [12 + 15]. В работе [16] с помощью численного разложения в ряд Фурье решения, полученного по методу конформного отображения в [14], найдены гармоники магнитной индукции неравномерного зазора и изучена их зависимость от геометрических параметров зубцовой зоны.

Магнитное поле в зазоре при односторонней и двусторонней зубчатости рассчитано также с помощью приближенного решения интегрального уравнения для магнитного потенциала [17, 18]. Метод конформного отображения можно применять лишь в предположении, что пазы пусты, а магнитная проницаемость магнитопровода $\mu = \infty$.

Намного более общим является метод Фурье, с помощью которого в работе [19] изучено магнитное поле в пазу с учетом проводников обмотки, а в работе [20] расчет поля проведен при конечной постоянной магнитной проницаемости зубцов.

Преимущества метода Фурье отчетливо проявляются при расчете магнитного поля с учетом зубчатости магнитопровода в индукционных МГД-машинах, отличительными чертами которых являются большая величина воздушного зазора и наличие в нем слоя движущегося металла.

В работе [21] рассмотрено магнитное поле в плоской индукционной МГД-машине с учетом проводников обмотки в пазах, присоединенных к трехфазной системе, при покоящемся слое металла (роторе), в [22] то же сделано для цилиндрической машины.

В [23] формулы расчета поля в плоской машине обобщены на случай произвольного числа фаз и движущегося ротора.

Некоторые результаты изучения влияния зубчатости магнитопровода на магнитное поле в индукционной МГД-машине упомянуты в [24] .

Рассмотрим подробнее постановку и решение задачи расчета магнитного поля в цилиндрической индукционной МГД-машине с учетом зубчатости магнитопровода при движущемся роторе.

Определим магнитное поле в части МГД-машины, состоящей из четырех различных областей между зубчатым и гладким магнитопроводом (рис.2). Область I - паз с переменным током частоты ω и амплитудой плотности j_0 , области II, IV - теплоизоляция, область III - проводящий слой с проводимостью $\sigma \neq 0$ и скоростью v . Зубчатый и гладкий магнитопроводы - ферромагнетики с $\mu = \infty$ и $\sigma = 0$. Обмотки в пазах подключены к q - фазной системе так, что сдвиг фаз между токами в соседних пазах равен π/q . Модуль имеет период вдоль оси Z , равный $2\tau = 2q\tau_3$.

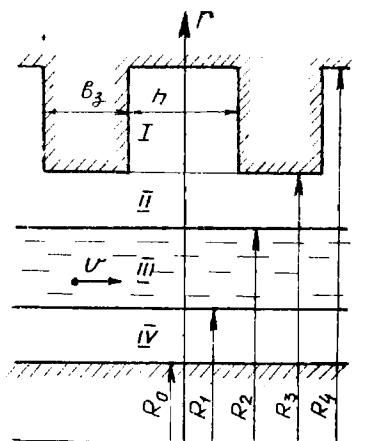


Рис. 2.

Задачу решаем с помощью векторного потенциала \vec{A} , гармонически зависящего от времени. Вследствие симметрии задачи векторный потенциал имеет только азимутальную компоненту A_φ , таким образом

$$A_\varphi(r, z, t) = A(r, z) e^{i\omega t} \quad (1)$$

Координатная часть векторного потенциала в областях I-IV удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{A}{r^2} = \begin{cases} -\mu_0 j_0, & \text{I} \\ 0, & \text{II} \\ i\sigma\mu_0 \omega A - \sigma\mu_0 v \frac{\partial A}{\partial z}, & \text{III} \\ 0, & \text{IV} \end{cases} \quad (2)$$

и следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0, \quad \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A') \right|_{r=R_4} = 0 \quad (3)$$

$$A_{|r=R_3}^{\bar{u}} = A_{|r=R_3}^{\bar{I}}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}; \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A^{\bar{u}})_{|r=R_3} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A^{\bar{I}})_{|r=R_3}, & -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ 0, & -\frac{t_3}{2} \leq z \leq -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \leq z \leq \frac{t_3}{2} \end{cases}, \quad (5)$$

$$A^{\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}}(z+t_3) = A^{\bar{u}, \bar{w}, \bar{v}}(z) \cdot e^{-\frac{i\pi}{2}}; \quad (6)$$

$$A_{|r=R_2}^{\bar{u}} = A_{|r=R_2}^{\bar{w}}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A^{\bar{u}})_{|r=R_2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A^{\bar{w}})_{|r=R_2}; \quad (7)$$

$$A_{|r=R_1}^{\bar{w}} = A_{|r=R_1}^{\bar{v}}, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A^{\bar{w}})_{|r=R_1} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A^{\bar{v}})_{|r=R_1}; \quad (8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A^{\bar{v}})_{|r=R_0} = 0 \quad (9)$$

Решения уравнений (2), удовлетворяющие граничным условиям [3, 6+ 9], имеют вид

$$A^{\bar{I}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\bar{I}} P_{1n}(\lambda_n r) \cos \lambda_n \left(z + \frac{h}{2} \right) + \frac{1}{2} \mu_n j_0 \left(R_4 r - \frac{2}{3} r^2 \right), \quad (10)$$

$$A^{\bar{u}} = \frac{q}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n P_{2n}(\alpha_n r) \cdot e^{-i \mu_n z}, \quad (11)$$

$$A^{\bar{w}} = \frac{q}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n P_{3n}(\alpha_n r) e^{-i \mu_n z}, \quad (12)$$

$$A^{\bar{v}} = \frac{q}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n P_{4n}(\alpha_n r) e^{-i \mu_n z}. \quad (13)$$

Здесь $\lambda_n = \frac{\pi n}{h}$, $\mu_n = \frac{(2nq+1)\pi}{\tau}$, $\alpha_n = |\mu_n|$,

$$\alpha_n^2 = \mu_n^2 + i \sigma \mu_n \omega \left(i - \frac{\mu_n \nu}{\omega} \right)$$

Функции $P_{1n}(x) \div P_{4n}(x)$ содержат модифицированные функции

Бесселя индекса 0 и I от аргумента X .

С помощью граничных условий (4) выражаем коэффициент C_K^I через C_n :

$$C_K^I = \frac{q}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \Psi_{nK}^* \quad , \quad (14)$$

где $\Psi_{nK} = \gamma(\epsilon_n - \frac{K}{2}) e^{-\frac{ik\pi}{2}} + \gamma(\epsilon_n + \frac{K}{2}) e^{\frac{ik\pi}{2}}$, $\gamma(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, $\epsilon_n = \frac{(2nq+1)h}{2\tau}$.

Из граничного условия (5) получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения C_K :

$$\sum_{K=-\infty}^{+\infty} C_K \theta_{Kn} = 2M_0 j_0 (R_4 - R_3) \gamma(\epsilon_n) \quad , \quad (15)$$

$$\theta_{Kn} = \frac{q}{2} \sum_{m=1}^{\infty} T_{1m} \Psi_{km}^* \Psi_{nm} + \frac{\tau}{h} T_{2n} \delta_{Kn} \quad ;$$

здесь

$$T_{1m} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r P_{1m}) \Big|_{r=R_3}, \quad T_{2m} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r P_{2m}) \Big|_{r=R_3} \quad (16)$$

Матрица θ_{Kn} становится диагональной при нулевой глубине пазов, при этом коэффициенты разложения C_K определяются просто:

$$C_K = \frac{2M_0 I_0 \gamma(\epsilon_K)}{\tau T_{2K}} \quad , \quad I_0 - \text{полный ток в пазу.}$$

Если радиус $R_0 = R_4$ устремить к ∞ , оставляя разности $R_4 - R_n$ постоянными, то получим модель плоской машины с односторонней зубчатостью. Если дополнительно $R_1 - R_0$ устремить к нулю, получим одну сторону модели плоской машины с симметричной двусторонней зубчатостью.

При переходе к плоской модели функции Бесселя, входящие в $P_{1n} = P_{4n}$, T_{1n} , T_{2n} , переходят в экспоненциальные функции, и выражения для расчета поля значительно упрощаются.

Зная распределение векторного потенциала A_φ , ком-

поненты вектора магнитной индукции можно найти по формулам

$$B_r = -\frac{dA_\varphi}{dz}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r A_\varphi) \quad (17)$$

Плотность тока в области III

$$j_\varphi = \sigma [-i\omega A_\varphi + \nu B_r] \quad (18)$$

Средний градиент давления

$$\nabla \bar{P} = \frac{1}{t_3(R_1^2 - R_2^2)} \int_{R_1}^{R_2} dr \int_0^{t_3} r j_\varphi B_r^* dz \quad (19)$$

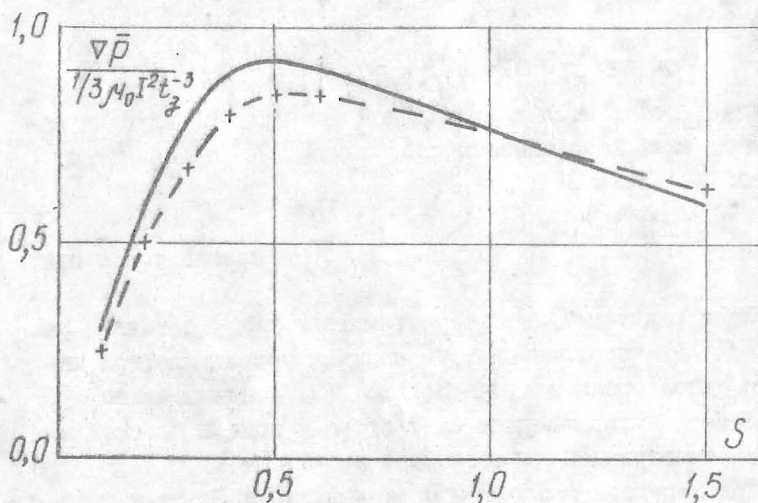


Рис. 3.

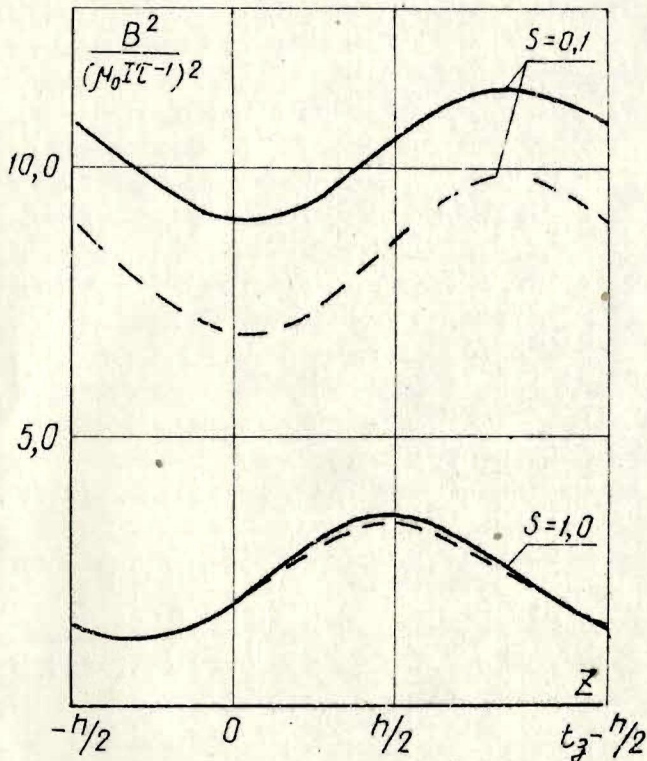


Рис. 4.

Для типичной МГД-машины были проведены численные расчеты магнитной индукции при различных скольжениях ротора $S = 1 - \frac{v d_0}{\omega}$ и различных относительных частотах $\bar{\omega} = \frac{\sigma \omega \mu_0 l^2}{\pi^2}$, а также расчеты динамической характеристики насоса $\nabla P = \nabla P(S)$ - рис. 3, рис. 4. Сплошные и прерывистые кривые относятся, соответственно, к моделям с гладким и с зубчатым магнитопроводом. Дискретность рас-

пределения проводов обмотки учитывается в обоих случаях. При этом установлено, что, в отличие от электрических машин, в индукционной МГД-машине влияние зубчатости магнитопровода зависит от скольжения ротора. При покоящемся роторе ($S = 1$) оно мало, но с уменьшением скольжения возрастает, приводя при $S = 0,2$ к снижению давления на $15 \pm 20\%$ и уменьшению магнитной индукции на $5 \pm 10\%$. Установлено также, что периодическая вдоль зазора кривая эффективной магнитной индукции с уменьшением скольжения и относительной частоты сдвигается в сторону движения основной гармоники бегущего магнитного поля.

Таким образом, подтверждается целесообразность введения модели, учитывающей наличие в зазоре движущегося слоя металла. Следует отметить, что использование метода Фурье при решении задачи обладает также тем преимуществом, что решение заранее ищется в виде суперпозиции гармоник — бегущих волн, что позволяет качественно анализировать изменение характеристик машины при изменении ее параметров.

Описанная выше модель допускает ряд обобщений с целью более полного описания процессов в МГД-машинах, не затрагиваемых в данной статье.

Л и т е р а т у р а

1. Бухгольц Г. Расчет электрических и магнитных полей. М., ИЛ, 1961.
2. Carter F.W. Air-gap & Interpolar Induction.— J. Instn Electr. Engrs, 1900, 29, 925.
3. Carter F.W. Air-gap Induction.— Electr. World, N.Y., 1901, 38, 884.
4. Петров Г.Н. Электрические машины. М.—Л., "Энергия", 1963.
5. Вольдек А.И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. Л., "Энергия",

1970.

6. Вольдек А.И. Электрические машины. М.-Л., "Энергия", 1966.
7. Геллер Б., Гамата В. Дополнительные поля, моменты и потери мощности в асинхронных машинах. М.-Л., "Энергия", 1964.
8. Weber W. Der Nutungsfaktor in el. Maschinen. - ETZ, 1928, S. 858-861.
9. Вольдек А.И. Влияние неравномерности воздушного зазора на магнитное поле асинхронной машины. - "Электричество", 1951, №12.
10. Коник Б.Х. Учет зубчатости статора и ротора в электрических машинах. - ИВУЗ, Электромеханика, 1963, №7.
11. Печерица С.П. Расчет магнитных полей в асинхронном двигателе с учетом зубчатого строения статора и ротора. - "Электричество", 1965, №3.
12. Carter F.W. The magnetic field of the dynamo-electric machine. - J. Instn Electr. Engrs, 1926, 64, 115.
13. Kucera I. Magnetische Zahnstrenungen bei elektrischen Maschine. - Elektrotech.u.Maschinenb., 1940, 58, 329.
14. Cox R.T. and Taylor H.W. Some problems in electrical machine design involving elliptic functions. - Phil. Mag., 1928, 6, 100.
15. Binns K.I. The magnetic field and centring force of displaced ventilating ducts in machine cores. - Proc. Instn Elektr. Engrs, 1961, 108, C, 64.
16. Freeman E.M. The calculation of harmonics, due to slotting in the fluxdensity wave form of a dynamo-electric machine. - Proc. Instn Electr. Engrs, 1962, 109, C, 580.
17. Зечихин Б.С. Магнитное поле в зазоре индукторной машины в режиме холостого хода. - ИВУЗ, Электромеханика, 1960, №1.
18. Зечихин Б.С., Павлова К.Н. Магнитное поле в зазоре индукторной машины с гребенчатой зубцовой зоной. -

ИВУЗ, Электромеханика, 1963, №8.

19. Бинс К., Лауренсон П. Анализ и расчет электрических и магнитных полей. М., "Энергия", 1970.
20. Иванов-Смоленский А.В., Мнацаканян М.С. Аналитический метод расчета магнитного поля в воздушном зазоре электрических машин с односторонней зубчатостью. - "Электричество", 1972, №3.
21. Микельсон Ю.Я., Сермонс Г.Я. Влияние зубчатой поверхности индуктора на распределение электромагнитного поля в проводящей полосе. - "Изв. АН Латв.ССР, Сер. физ. и техн. наук," 1966, №1.
22. Микельсон Ю.Я., Сермонс Г.Я. Влияние зубчатой поверхности цилиндрического индуктора на распределение электромагнитного поля в проводящем цилиндрическом слое. - "Изв. АН Латв. ССР, Сер. физ. и техн. наук," 1967, №1.
23. Микельсон Ю.Я., Сермонс Г.Я. Влияние зубчатой поверхности индуктора на распределение электромагнитного поля в движущейся проводящей полосе для произвольного числа пазов. - "Изв. АН Латв.ССР, Сер. физ. и техн. наук," 1968, №4.
24. Микельсон Ю.Я., Петражицкий А.С. Распределение электродинамических сил в цилиндрических МГД-машинах с учетом зубчатости статора. - В кн.: Седьмое совещание по магнитной гидродинамике, II. Рига, "Зинатне", 1972.

Ю.Я. Микельсон, Я.Р. Шмит

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА МГД-УСТРОЙСТВ

Вследствие неуклонного расширения области применения МГД-насосов всевозрастающую актуальность приобретают исследования по оптимальным решениям задач проектирования. Оптимизации электромагнитных индукционных насосов и других МГД-устройств посвящен ряд работ [1 - 4]. Различие подходов к решению проблемы в основном сводится к физике исследуемого явления, к выявлению различных существенных факторов, влияющих на выбранный критерий качества. Охременко [1] ставил задачу нахождения оптимальной высоты канала $2b$ и скольжения S , считая, что все остальные параметры насоса известны. Решение заключается в анализе на экстремум уравнений коэффициента полезного действия (к.п.д.) и веса G . Для Янкопа [2] определяющими величинами являются высота канала $2b$ и полюсное деление τ , критерий качества - магнитодвижущая сила (МДС). Валуев в своей работе [3] обосновывает необходимость при расчете МГД-насосов на максимум к.п.д. учитывать поперечный краевой эффект и влияние бегущего магнитного поля на гидравлические потери и т.д. На основе различных выражений для к.п.д. и веса G авторы проводят в основном численный анализ экстремальных свойств МГД-устройств по отношению к отдельным параметрам. Накопилась достаточно большая раздробленная информация, которая трудно поддается обобщению.

Для всех известных методик оптимального проектирования МГД-насосов [1, 2, 3, 4] характерно следующее.

I. Ставится классическая задача на безусловный экс-

тремум:

найти:
$$\min_{(то\ x)} \{ \Phi(\bar{x}) \}, \quad (I)$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - оптимизируемые величины;
 $\Phi(\bar{x})$ - целевая функция - выбранный показатель качества устройства.

2. Размерность задачи оптимизации (I) невелика, $n = I + 3$. В качестве управляемых величин обычно выбираются: высота активной зоны канала $2b$, полюсное деление τ , ширина канала $2a$. Остальные независимые величины - высота стенки канала b_z , толщина теплоизоляционного слоя b_i и др., выбираются на основании опыта проектирования.

3. Задача (I) решается классическими методами, исходя из необходимых условий существования локального экстремума

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Применяется также численный метод сканирования [4].

В настоящей статье проблема оптимизации МГД-насосов рассматривается как задача нелинейного программирования. Путем согласования физических представлений с алгоритмами поиска экстремума исследуются экстремальные свойства важнейших показателей качества МГД-насосов. Это дает возможность получить математически обоснованную методику исследования МГД-насосов, как единое целое, и получить в определенном смысле оптимальные алгоритмы поиска экстремума.

§ 1. Выбор модели

В настоящее время разработан целый ряд физико-математических моделей электромагнитных насосов. Выбор конкрет-

ной модели определяется поставленными условиями оптимизации, имеющимися факторами ограничений, а также методикой и алгоритмом поиска экстремума. В данной работе выбираются модели в приближении элементарных функций. Рассматривается конкретная идеальная модель, которая путем поправочных коэффициентов сводится к реальной. Таким образом принимается, что различные эффекты (поперечный, продольный и другие) не взаимодействуют между собой.

В качестве конкретной модели МГД-насоса рассматривается плоский электромагнитный индукционный насос "в начальном приближении" [6]. Оно заключается в следующем (рис. I): жидкий металл с проводимостью σ и плотностью ρ занимает весь немагнитный зазор толщиной 2δ между двумя гладкими, бесконечно широкими и бесконечно длинными индукторами с магнитной проницаемостью $\mu = \infty$, несущими поверхностную токовую нагрузку:

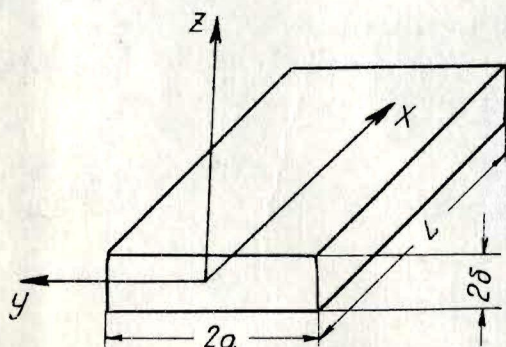
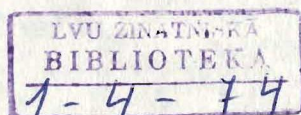


Рис. I.

$$A = \operatorname{Re} \dot{J} \exp(i(\omega t - \alpha x)), \quad (2)$$

где \dot{J} - комплексная амплитуда, ω - циклическая частота, $\tau = \pi/\alpha$ - полуволновое деление. Принимается, что жидкий металл движется как твердое тело со скоростью V в положительном направлении оси x , испытывая, однако, при этом гидравлические потери давления:



$$P_2 = \xi \frac{v^2 \rho L}{2 D_{ЭК}} \quad , \quad (3)$$

где $D_{ЭК} = 4\delta$ — гидравлический диаметр канала.

Из бесконечного в двух измерениях тела мысленно вырезается полоса длиной L и шириной $2a$. Коэффициент трения ξ вычисляется по различным формулам.

Для определенности примем расчетные формулы [7] с числом Рейнольдса

$$Re = \frac{4\delta v}{\nu} \quad , \quad (4)$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости.

$$\xi = \begin{cases} \frac{96}{Re} & \text{при } Re < 2,3 \cdot 10^3 \quad , \\ \max \left\{ \frac{96}{Re} , \frac{0,316}{Re^{0,25}} \right\} & \text{при } 2,3 \cdot 10^3 \leq Re < 5 \cdot 10^3 \\ \frac{0,316}{Re^{0,25}} & \text{при } 5 \cdot 10^3 \leq Re < 10^5 \quad , \\ \frac{1}{(1,82 \lg Re - 1,64)^2} & \text{при } 10^5 \leq Re \quad . \end{cases} \quad (5)$$

Ниже даются основные физические величины из числа функциональных соотношений начального приближения, представляющие интерес с точки зрения оптимального проектирования: нормальная составляющая магнитной индукции^{*)}

$$\dot{B}_z = \frac{id}{\beta} \mu j \frac{ch \beta z}{sh \beta z} \quad , \quad (6)$$

^{*)} Магнитная индукция \dot{B} и ток j представлены в комплексной форме.

$$\text{где } \mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [\text{гн/м}], \quad (6)$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + i\mu\sigma\omega s, \quad \text{Re } \beta \geq 0; \quad (7)$$

скольжение

$$s = 1 - \frac{\alpha V}{\omega}, \quad (8)$$

напор на единицу длины насоса:

$$\frac{P}{L} = -\frac{1}{2\delta} \left(\alpha \mu |j|^2 J_m \frac{ct h \beta \delta}{\beta} + \xi \frac{V^2}{4} \rho \right); \quad (9)$$

коэффициент полезного действия, учитывающий джоули и гидравлические потери в жидком металле:

$$\eta = \frac{\alpha V}{\omega} \left(1 + \xi \frac{\rho V^2}{4\mu\alpha\delta |j|^2 J_m \frac{ct h \beta \delta}{\beta}} \right) \quad (10)$$

Для получения полных характеристик качества плоско-линейного индукционного насоса кроме "вторичной цепи" необходимо рассматривать наличие других структурных элементов (стенок канала, теплоизоляции канала, обмоточной зоны, ярма). Отклонение идеальной модели от реальной конструкции учитывается в дальнейшем поправочными коэффициентами, рассматриваемыми в приближении элементарных функций.

Конечная ширина канала учитывается коэффициентом поперечного краевого эффекта [6]:

$$K_{oc} = \text{Re} \frac{1}{\beta a} \left(1 - \frac{th \beta a}{\beta a} \right) \quad (11)$$

Конечная длина учитывается коэффициентом продольного краевого эффекта [6]:

$$K_D = \text{const} \quad (12)$$

Зубчатая структура индуктора учитывается коэффициентом Картера [6,8] :

$$K_{\delta} = \frac{5 \cdot 2 \delta}{b_z + b_n} \quad , \quad (13)$$

где b_z - ширина зуба, b_n - ширина паза.

Конечное значение μ магнитной проницаемости индуктора учитывается коэффициентом намагничивания, который определяется экспериментальной кривой намагничивания и коэффициентом пазового рассеяния [8]. Экспериментальная кривая намагничивания стали индуктора аппроксимируется дробно-линейной функцией

$$H_c = \frac{a \cdot K_n \cdot B}{b + c \cdot K_n \cdot B} \quad , \quad (14)$$

где H_c - напряжение магнитного поля в стали, K_n - коэффициент пазового рассеяния, a , b , c - коэффициенты аппроксимации.

Коэффициент насыщения имеет вид

$$K_M = \frac{H_c + H}{H} \quad , \quad (15)$$

где H - напряжение магнитного поля во вторичной цепи.

В результате для величины напора насоса получаем следующее уточненное по сравнению с (9) выражение:

$$\frac{P}{L} = K_{0c} \cdot K_{0\sigma} \cdot K_{\delta}^2 \cdot K_M \cdot \frac{1}{2\delta} \left(\alpha \mu / j \right)^2 j_m \frac{\operatorname{cth} \beta \delta}{\beta} + \frac{\rho}{4} \frac{v^2}{g} \quad (16)$$

Проводящие стенки канала учитываются заменой проводимости жидкого металла σ на эффективную проводимость всего немагнитного зазора:

$$\sigma_{\Sigma} = \frac{b}{\delta} \sigma \left(1 + \frac{\sigma_z}{\sigma} \cdot \frac{2b_z}{2b + 2b_z} \right) \quad , \quad (17)$$

где σ_t — проводимость стенки, δ_t — толщина стенки канала, $2b$ — высота канала.

Активная мощность обмотки и ее температурное поле в линейном приближении вычисляются согласно классической теории электрических машин [8].

В итоге выражения для важнейших критериев качества — коэффициента полезного действия η , веса G , а также главные физические величины, на которые накладываются ограничения — индукция в стали B_c , температура в обмотке T_{od} — получены в виде элементарных функций, учитывающих основные структурные элементы конструкции.

§ 2. Постановка задачи оптимизации

Выдвигаемые практикой задачи оптимального проектирования МГД-насосов можно формализовать моделью математического программирования [5, 12]:

$$\text{найти } \min_{x \in D} \varphi(\bar{x}, \bar{c}), \quad (18)$$

$$\text{где } D = \{x: \varphi_i(\bar{x}, \bar{c}) \leq 0, i=1, 2, \dots, s\}, \quad (19)$$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор управляемых величин,
 $\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ — заданные параметры.

Составляющие вектора \bar{x} представляют собой совокупность ($n=5 \div 10$) искомым управляемых величин. К таким величинам относятся: главные геометрические размеры рабочей зоны канала (ширина $2a$, высота $2b$, длина l), немагнитного зазора (высота стенки канала b_t , высота теплоизоляции канала), индуктора (высота паза h_n , ширина паза b_n , высота ярма h_d , ширина зубца b_z , полюсное деление τ), основные динамические величины (скольжение s , линейная токовая

нагрузка A), а также в зависимости от условий проектирования и другие величины, например, частота тока питания f .

Значения составляющих вектора \bar{c} определяются физическими постоянными или условиями задачи. Для МГД-насосов это: напор ΔP , производительность Q , физические постоянные перекачиваемой среды (удельная электропроводность σ , кинематическая вязкость ν , плотность ρ), физические постоянные применяемых магнитных и токонесущих материалов (удельная электропроводность σ_m , кривая намагничивания стали и др.). К составляющим вектора \bar{c} следует отнести также ряд эмпирических коэффициентов в приближенных формулах расчета (см. § I.).

Самыми распространенными критериями качества насоса Φ являются величины: коэффициент полезного действия η , вес устройства G , а также их заданная компромиссная комбинация.

Функции ограничения ψ_i (19) определяются из ограничений по температуре в обмотке $T_{об}$, максимально допустимым механическим напряжениям в стенках канала F_t и др. факторам.

§ 3. Экстремальные свойства целевых функций

Накопленный опыт проектирования МГД-насосов показал, что процесс оптимизации трудоемок и связан с большими затратами времени. Поэтому важность приобретает задача оптимизации самого процесса оптимального проектирования. Известно, что эффективность поисковых алгоритмов существенно зависит от свойств целевых функций и функций ограничений. Следовательно, наряду с поисками полных решений конкретных задач оптимизации важен второй путь исследования - выявление качественных характеристик, экстремальных свойств целевых функций ограничений.

В слое активной зоны МГД-насоса управляемыми величинами являются четыре: α , v , ω , δ . В работе [II] приводится ряд однопараметрических свойств целевых функций η и $\frac{P}{L}$. Для оптимального проектирования важно знать экстремальные свойства рассматриваемых функций в целом n -мерном допустимом пространстве.

Исходя из определения выпуклых функций: функция $f(\bar{x})$, заданная на выпуклом множестве X , называется выпуклой, если для любых двух точек \bar{x}_1 и \bar{x}_2 из X , при $0 \leq \lambda \leq 1$ имеет место

$$f(\lambda \bar{x}_1 + (1-\lambda) \bar{x}_2) \leq \lambda f(\bar{x}_1) + (1-\lambda) f(\bar{x}_2),$$

легко установить (соответствующие преобразования опускаем) наличие свойства выпуклости в четырехмерном пространстве (α , v , ω , δ) величин $(-\frac{P}{L})$, $(-\eta)$, $(-|B_z(\delta)|)$ - см. (6), (9), (10), (16). Аналогично, исходя из определения, можно показать, что свойством выпуклости обладают энергетические, весовые величины, а также величины максимальных температур при рассмотрении других элементов идеального МГД-насоса.

Следовательно, оптимизация идеального МГД-насоса—задача (18)–(19)—является задачей выпуклого программирования, и имеет место теорема Куна–Таккера [5]. Пусть функции $\Phi(\bar{x})$ и $\psi_j(\bar{x})$ выпуклы и дифференцируемы в непустом допустимом множестве D . Тогда для того, чтобы вектор \bar{x} был решением задачи (18) – (19), необходимо и достаточно существование неотрицательного вектора \bar{u}^0 , такого, чтобы вектор (\bar{x}^0, \bar{u}^0) являлся седловой точкой функции Лагранжа, т.е. чтобы для всех $u_j \geq 0$ и для произвольного \bar{x} выполнялись неравенства

$$\Phi(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^5 u_j \psi_j(\bar{x}^0) \leq \Phi(\bar{x}^0) + \sum_{j=1}^5 u_j^0 \psi_j(\bar{x}^0) \leq \Phi(\bar{x}) + \sum_{j=1}^5 u_j^0 \psi_j(\bar{x}). \quad (20)$$

Таким образом, задачу оптимального проектирования простейших моделей МГД-насосов можно свести к задаче поиска седловой точки функции Лагранжа:

$$\Phi_L(\bar{x}, \bar{u}) = \Phi(\bar{x}) + \sum_{j=1}^s u_j \psi_j(\bar{x}) \quad (21)$$

§ 4. Градиентный метод

При численном решении задачи нелинейного программирования (18) - (19), как правило, вне поля исследования остается вопрос о сходимости и устойчивости применяемых алгоритмов. После сведения задачи (18) - (19) к нахождению седловой точки функции Лагранжа (21) появляется возможность более обоснованно и целеустремленно исследовать эффективность различных численных методов решения задачи оптимизации, основанных на необходимых условиях экстремума. Следовательно, в дальнейшем не рассматривается применение так называемых прямых методов, которые требуют специального исследования.

Седловая точка (\bar{x}^0, \bar{u}^0) функции Лагранжа Φ_L является особой точкой следующей системы дифференциальных уравнений Эрроу-Гурвица [5]:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = -\delta_{x_i} \frac{\partial \Phi_L}{\partial x_i} & i = 1, 2, \dots, n, \\ \dot{u}_j = \delta_{u_j} \frac{\partial \Phi_L}{\partial u_j} & j = 1, 2, \dots, m, \end{cases} \quad (22)$$

где

$$\delta_{x_i} = \begin{cases} 0 & \text{для } x_i = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi_L}{\partial x_i} > 0, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\delta_{u_j} = \begin{cases} 0 & \text{для } u_j = 0 \text{ и } \frac{\partial \Phi_L}{\partial u_j} < 0, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В рассматриваемых задачах оптимизации выполняются условия теоремы Удзави [5], и при любом начальном условии $x_0(t)$ стремится к \bar{x}_0 .

§ 5. Алгоритмы применения градиентного метода на ЭВМ

Приводимые выше результаты показывают целесообразность применения вычислительных алгоритмов, основанных на дифференциальном уравнении линии наискорейшего спуска [10]:

$$\dot{x} = - \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (23)$$

Нами был составлен и исследован ряд дискретных алгоритмов, основанных на различных разностных аппроксимациях и приближениях уравнений (23):

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \quad ; \quad (24)$$

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} - \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} (x - x_0) \quad (25)$$

Численный эксперимент на поле рассматриваемых функций оптимального проектирования МГД-насосов показал, что предпочтение следует отдать методам второго порядка.

Будем вместо (23) рассматривать дифференциальные уравнения:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \ddot{x}_j = - \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \quad (26)$$

Решение нулевой аппроксимации дает следующее уравнение

движения:

$$x(t) = vt - \frac{1}{2} A^{-1} B t^2,$$

где $A = \frac{d^2 f}{dx^2}$, $B = \frac{df}{dx}$, V - параметр.

Сравнивая механическую интерпретацию (23) и (26), видим, что первое является дифференциальным уравнением движения несвязанных материальных точек, записанным в количествах движения. Движение систем связанных точек описывает уравнение (26).

Так как методы второго порядка по сравнению с обычными градиентными методами дают возможность учитывать сильную связь между управляемыми величинами и при решении рассматриваемых классов задач являлись более эффективными, то можно выдвинуть гипотезу о наличии овражной структуры функций η , G при наличии ограничений по T_{od} и B_z в идеальных моделях МГД-насосов.

§ 6. Пример расчета

Ниже на примере плоско-линейного индукционного насоса УИН-1 Института физики АН Латв.ССР представлены результаты оптимизации коэффициента полезного действия различными методами.

Используемый метод	x_1 α	x_2 ω	x_3 v	x_4 δ	x_5 b_t	x_6 b_i	x_7 b_{od}	φ η	Число вычислений функций
Классический метод Охременко [1]	C_1 48,7	C_2 314	3,4	0,004	C_5 0,002	C_6 0,0	C_7 0,05	0,21	-
Градиентный метод первого порядка	58,9	980	6,1	0,002	0,001	0,0005	0,09	0,25	7500-8000
Градиентный метод второго порядка	61,3	1160	6,9	0,002	0,001	0,0005	0,08	0,27	350-400

Сравнительный анализ табличных данных показывает, что путем учета всех управляемых переменных удастся существенно увеличить показатель качества насоса. Оправдывается применение более сложных методов нелинейного (выпуклого) программирования по сравнению с классическими. Алгоритм второго порядка более эффективен и дает существенную экономию машинного времени ЭВМ.

Выводы

На основании проведенных исследований задач оптимального проектирования МГД-насосов можно сделать следующие основные выводы:

1. Выдвигаемые практикой задачи оптимизации МГД-насосов можно формализовать как задачи нелинейного программирования и рассматривать их с единой точки зрения.

2. Идеальные модели МГД-насосов, применяемые в настоящее время в инженерной практике, приводят к целевым функциям и функциям ограничений, обладающим свойством выпуклости.

3. Алгоритмы отыскания оптимума, основанные на дифференциальных уравнениях наискорейшего спуска, приводят к последовательности текущих приближений, которая сходится к решению исходной задачи.

4. Главные целевые функции (η и G) обладают овальной структурой, и целесообразно применять поисковые методы второго порядка.

5. Рекомендуемый метод оптимизации сложнее рассматриваемых до настоящего времени в литературе [1, 2, 3, 4]. Однако, появляется возможность непосредственно учитывать факторы ограничения и многомерность управляемых величин.

Л и т е р а т у р а

1. Охриванко Н.М. Оптимальные геометрические соотношения

- в индукционных насосах для жидких металлов. — "Электричество", 1961, №9.
2. Янкоп Э.К. Расчет оптимальных параметров и режима работы линейных индукционных насосов. — "Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки", т. 21, 1958.
 3. Валуев Ю.А. Методика выбора оптимальных параметров плоского линейного индукционного насоса с боковыми шинами. — "Магнитная гидродинамика", 1967, №1.
 4. Саввин Л.Г. Оптимальное использование конструкций индукционных насосов. — В кн.: Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы, Рига, изд-во АН Латв.ССР, 1959.
 5. Эрроу К., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследование по линейному и нелинейному программированию. М., ИЛ, 1964.
 6. Везе А.К., Улманис Л.Я. Электромагнитные процессы в идеальной МГД-машине. — В кн.: Движение проводящих тел в магнитном поле, Рига, "Зинатне", 1966.
 7. Кутателадзе С.С., Боришанский В.М. Справочник по теплопередаче. М.—Л., ГЭИ, 1959.
 8. Костенко М.П., Пиотровский Л.М. Электрические машины. М., "Энергия", 1965.
 9. Шмит Я.Р. К автоматизации поиска оптимальных параметров индукционных насосов. — В кн.: Пятое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Теория индукционных МГД-машин, I, 1966.
 10. Адаменко Г.М., Габасов Р., Единолич А.А. Минимизация функций конечного числа переменных с помощью некоторых методов второго порядка. — "Журн. вычисл. матем. и матем. физ.", 1971, №11.
 11. Вилнитис А.Я., Юбелс Э.В., Шмит Я.Р., Зване Г.Я., Ушаков Ю.П. К вопросу оптимизации плоского индукционного насоса. — "Магнитная гидродинамика", 1968, №1.
 12. См. настоящий сборник, с. 29.

Ю.Я. Микельсон, Я.Р. Шмит

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МОДЕЛИ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ МГД-НАСОСОВ§ I. Краткая характеристика расчетных
методик МГД-насосов

Теоретической основой проектирования электромагнитных индукционных насосов (ЭМИН) (рис. I) и других МГД-устройств в настоящее время является ряд расчетных методик, предложенных различными авторами в 50-60-х годах [1+15].

Для всех известных методик проектирования ЭМИН характерно следующее.

1. Аналитический подход к проблеме. На основе рассматриваемой конкретной физико-математической модели устройства путем введения ряда допущений и ограничений строятся оптимальные соотношения и последовательность расчета главных физических величин, приближенно соответствующих экстремальному значению выбранного критерия качества. Следовательно, каждой модели устройства сопоставляется своя расчетная методика. Например, Ю.А. Валуев отдельно рассматривает оптимизацию плоско-линейного индукционного насоса с боковыми шинами [11] и без них [14].

2. Соподчинение методики расчета критерию качества. Для каждого конкретного критерия качества разрабатывается своя методика. Например, Н.М. Окременко в работе "Оптимальные геометрические соотношения в индукционных на-

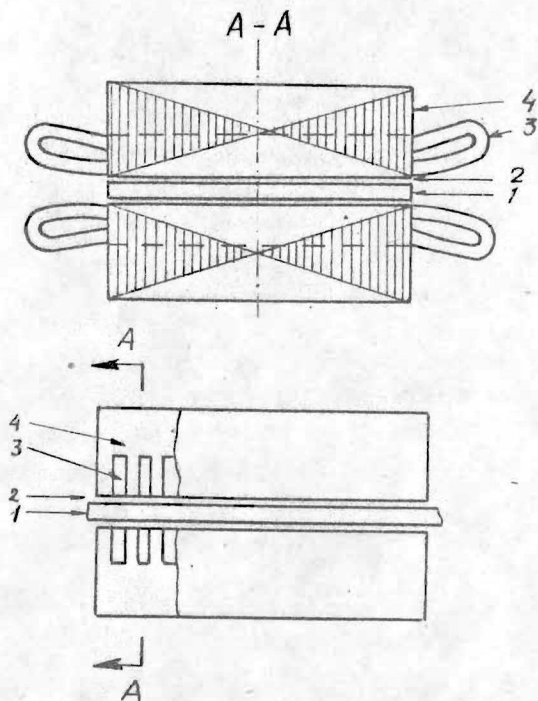


Рис. I. Схема плоского ЭМИН.

1 - канал, 2 - теплоизоляция канала, 3 - обмотка, 4 - магнитопровод.

сосах для жидких металлов" [8] отдельно рассматривает методику оптимизации по максимуму коэффициента полезного действия (к.п.д.) и по максимуму веса (G). В литературе в качестве показателей качества данного устройства рассматриваются также магнитодвижущая сила (MDC), [4], ток (J) [4] и др. величины, которые обычно выбираются из соображений сложности расчета к.п.д. Что

касается многоцелевых задач оптимизации ЭМИН, то, по нашим сведениям, они в литературе до сих пор не исследовались. Э.К. Янкоп в работе [4] с целью уменьшения размерности оптимизируемой задачи рекомендует в качестве дополнительных условий использовать требование экстремального значения разумно выбранной величины, например, линейного тока J в обмотках индуктора.

3. Безусловный характер оптимизационной задачи. Задача оптимального проектирования ЭМИН ставится и решается без явного учета функциональных ограничений в виде неравенств, накладываемых на такие величины, как максимально допустимая температура в обмотке $T_{0\delta}$, максимально допустимое механическое напряжение в стенках канала F_t и др. Как правило, эти существенные ограничения учитываются только качественно, путем фиксации количественных значений некоторых величин, например, линейной токовой нагрузки A , толщины стенки канала b_t , толщины теплоизоляции канала b_i [8, 9]. Полученные таким образом функциональные ограничения в виде равенств используются в дальнейшем для уменьшения размерности оптимизируемой задачи.

4. Постановка классической задачи на безусловный экстремум. По отношению к выбранному критерию качества ставится классическая задача на безусловный экстремум. В вычислительном аспекте с использованием необходимых условий экстремума в общем случае получается система трансцендентных уравнений [8]. С целью получения оптимальных соотношений между величинами в явном виде некоторые авторы [10, 11] прибегают к дополнительным математическим упрощениям. Исходя из качественных соображений, фиксируется ряд управляющих величин, чтобы размерность задачи n была по возможности меньшей. В итоге размерность задач рассматриваемых методик не превышает 3.

5. Применение классических методов решения. В тех случаях, когда не удается получить приближенные оптимальные соотношения, предлагается применять графоаналитический метод решения [8], или поисковый алгоритм сканирования [11, 14].

На основании проведенного краткого качественного анализа существующих методик проектирования ЭМИН можно заключить, что в них задача оптимизации ЭМИН не рассматривается как единый цельный процесс с последующей автоматизацией на ЭВМ.

§ 2. Модель математического программирования

Количественный анализ процесса принятия проектных решений ЭМИН предполагает наличие соответствующей математической модели. В настоящей работе предлагается применять модель математического программирования [16]. В отличие от вышеупомянутых методов, где оптимизационные задачи сводятся к аналитическим рассуждениям о влиянии отдельных параметров на критерий качества, физико-математическая модель ЭМИН рассматривается как система взаимодействия многочисленных физических величин. Будем считать, что состояние системы полностью определяют векторы $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ и $\vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_m)$, принимающие значения в n - и m -мерных евклидовых пространствах. Вектор \vec{X} представляет собой совокупность искомых управляемых переменных. Значения составляющих вектора \vec{C} определяются физическими соображениями или заданы условиями задачи. Требуется найти состояние системы \vec{X}^0 , которое минимизирует (максимизирует) критерий качества устройства — так называемую целевую функцию

$$\Phi(\bar{x}^0, \bar{c}) = \underset{x \in D}{\min} \Phi(\bar{x}, \bar{c}), \quad (1)$$

где D — допустимое множество решений, заданное условиями ограничений

$$\Psi_i(\bar{x}, \bar{c}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5. \quad (2)$$

Поставленная задача (1) решается поисковыми алгоритмами на ЭВМ. На основании исследования эффективности этих алгоритмов, проведенных в работе [16], для задач оптимального проектирования ЭМИН рекомендуется применять градиентный метод второго порядка [16].

§ 3. Определение критерия качества МГД-насоса

Во многих практических приложениях МГД-устройств предъявляются высокие требования к ряду физических характеристик. Как правило, требуется определить проектное решение, доставляющее экстремум не одному, а сразу нескольким, зачастую противоречивым критериям эффективности. По отношению к ЭМИН такими характерными величинами являются коэффициент полезного действия (к.п.д.) и вес (G) устройства. Если требуемым критериям качества можно дать количественную оценку, то поставленная задача может быть сформулирована как некоторая задача математического программирования со многими целевыми функциями:

$$\Phi_i(\bar{x}_i^0, \bar{c}) = \underset{x \in D}{\min} \{ \Phi_i(\bar{x}, \bar{c}) \} \quad i = 1, 2, \dots, 7. \quad (3)$$

Однако такая постановка является некорректной, так как нарушается принцип математического программирования —

одноцелевость. Под решением задачи (3) будем понимать вектор $\bar{x}^* \in D$, который может не доставлять экстремум ни одной из функций цели Φ_i , но являться в некотором смысле приемлемым для всей совокупности критериев качества. Такое решение принято называть компромиссным [17, 18]. Вместо l критериев качества $\Phi_i(\bar{x}, \bar{c})$, $i = 1, 2, \dots, l$ строится один так называемый обобщенный критерий качества. В ситуации, когда каждому критерию можно приписать "вес"-число, характеризующее его важность по сравнению с другими критериями, при построении обобщенного критерия можно применять метод взвешенных сумм [19];

$$\Phi(\bar{x}^*, \bar{c}) = \min_{\substack{(\text{max}) \\ x \in D}} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i [\Phi_i(\bar{x}^0, \bar{c}) - \Phi_i(\bar{x}, \bar{c})]^2 \right\}, \quad (4)$$

$$\text{или} \quad \Phi(\bar{x}^0, \bar{c}) = \min_{\substack{(\text{max}) \\ x \in D}} \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi_i(\bar{x}, \bar{c}) \right\}, \quad (5)$$

где \bar{x}_i^0 - решение задачи (I), λ_i - заданные "весовые" коэффициенты.

Ясно, что во втором случае решение компромиссной задачи может быть получено без решения задач математического программирования по каждому из локальных критериев оптимальности. В ситуации, когда не существует никакой возможности сравнения различных критериев, в качестве весовых коэффициентов могут быть выбраны величины, обратные или экстремальным значениям соответствующих критериев качества

$$\lambda_i = \frac{1}{\Phi_i(\bar{x}_i^0, \bar{c})} \quad \text{или значениям соответствующих критериев в некоторой допустимой точке} \quad \lambda_i = \frac{1}{\Phi_i(\bar{x}, \bar{c})} \quad \cdot \bar{x} \in D \quad \cdot$$

В итоге исходная двух- или многоцелевая задача приводится к одноцелевой.

§ 1. Учет функциональных ограничений

Для нормального функционирования каждого конкретного ЭМИН на ряд характеристик устройства налагаются определенные ограничения физического и технологического характера. С математической точки зрения эти определяются так называемое допустимое пространство проектных решений Π :

$$\Pi = \{ \bar{x} = (x_i), i = 1, 2, \dots, n \mid \Psi_j(\bar{x}, \bar{c}) \leq a_j, j = 1, 2, \dots, m \}, \quad (6)$$

где $\Psi_j(\bar{x}, \bar{c})$ — некоторые в общем случае нелинейные функции вектора \bar{x} .

Как правило, учет функциональных ограничений в поисковых алгоритмах нелинейного программирования "многократно" увеличивает его сложность. Поэтому на практике часто стремятся исходную условную экстремальную задачу свести к эквивалентной безусловной, например, методом "штрафных функций" [16] .

Характерным и существенным фактором ограничения ЭМИН является максимально допустимая температура в индукторе. Следует отметить, что на практике, как правило, указывается интервал допустимых температур, а не точная верхняя граница; например, $T_{0d} \lesssim 400 + 500^\circ \text{C}$. В ситуации, когда задается интервал значений верхней (нижней) границы, для сведения условной задачи оптимизации к безусловной, удобно ввести величину $\bar{\delta}_j$, которую будем называть "эквивалентной глубиной" проникновения критерия качества в запретную область j -ого ограничения ($j = 1, 2, \dots, m$). Исходная целевая функция преобразуется следующим образом:

$$\Phi(\bar{x}, \bar{c}) \rightarrow \Phi(\bar{x}, \bar{c}) \cdot \prod_{j=1}^m \exp\left(-\frac{\Psi_j(\bar{x}, \bar{c}) - a_j}{\bar{\delta}_j}\right), \quad (7)$$

где $\Psi_j(\bar{x}, \bar{c}), j = 1, 2, \dots, m$ - значения функциональных ограничений;

$a_j, j = 1, 2, \dots, m$ - граничные допустимые значения;

$\delta_j, j = 1, 2, \dots, m$ - "глубина" проникновения в j -тое ограничение.

$(\Psi_j(\bar{x}, \bar{c}) - a_j) \geq 0$. Если $(\Psi_j(\bar{x}, \bar{c}) - a_j) < 0$, то принимается, что $(\Psi_j(\bar{x}, \bar{c}) - a_j) = 0$.

Преобразованием (7) исходная условная задача оптимизации редуцируется к безусловной.

Следует отметить, что в практике оптимизации ЭМИН часть ограничений задается в виде равенств; например, заданными величинами считаются напор P и расход Q устройства:

$$\begin{cases} P = P_n \\ Q = Q_n \end{cases} \quad (8)$$

Равенства типа (8) можно рассматривать как отношения связи между управляемыми величинами (x_1, x_2, \dots, x_n) и использовать для уменьшения размерности задачи.

§ 5. Пример

Рассмотрим сопоставление оптимального проектирования по минимуму веса на базе насоса $УН - 7$ Института физики АН Латв.ССР, проведенного, с одной стороны, Н.М. Окременко в работе [8] и по модели математического программирования, с другой стороны.

При постановке задачи оптимизации насоса на минимум веса Н.М. Окременко рассматривает две управляемые величины: высоту канала Z_b и скольжение S . С целью уменьшения размерности задачи и качественного учёта ограничений по максимально допустимой температуре в обмотке предвари-

тельно выбираются следующие величины: высота теплоизоляции канала $b_i = 0$, скорость течения $v = 11,25$ м/сек, плотность тока $j = 7,24 \cdot 10^6$ а/м, магнитная индукция в середине зазора $B_{mj} = 0,72$ В.сек/м², магнитная индукция в стали зубца $B_{mz} = 1,21$ В.сек/м², линейная токовая нагрузка $A = 18,64 \cdot 10^4$ а/м, высота стенки канала $b_k = 1 \cdot 10^{-3}$ м. В модели математического программирования эти величины предполагаются переменными, за исключением последней, так как прочностной расчет не используется для определения минимально допустимой толщины стенки. Полученная размерность задачи - 8÷9.

В постановке задачи Н.М. Охременко [8] ничего не говорится о способе охлаждения насоса и о магнитных свойствах стали. Ограничения в виде неравенств, а также в виде равенств, не дающих возможность получать значения параметров в явном виде, в работе [3] отсутствуют. Ничего не говорится о способе охлаждения насоса и магнитных свойствах стали индуктора. Однако при постановке задачи оптимизации на минимум веса ясно, что величина максимально допустимой температуры в обмотке и минимально допустимое значение к.п.д. влияют на минимальный вес устройства. Следовательно, для однозначности оптимизационной задачи необходимо дополнительно задавать: способ охлаждения насоса, максимально допустимую температуру в обмотке, минимальное допустимое значение к.п.д., кривую намагничивания стали индуктора.

В нашей модели для определенности принимается принудительное водяное охлаждение стенки насоса и кривая намагничивания стали Э-4Г. Мы учитываем факторы ограничения по максимально допустимой температуре в обмотке и минимально допустимым значениям к.п.д.

Н.М. Охременко решает задачу классическим графо-аналитическим методом, разработанным в [8] для одной конкретной физико-математической модели с двумя управляемыми параметрами δ и S . Оптимальная высота канала $2\delta = 8,6$ мм,

скольжение $S = 0,3$, вес активных материалов 161 кг.

При этом по нашим расчетам к.п.д. = 0,12, максимальная температура в обмотке $T_{об} = 460^{\circ} \text{C}$.

В таблице I отражены результаты оптимизационных расчетов насоса ИИ-7, проведенных на модели математического программирования. Первые две строки дают возможность сопоставить результаты, полученные по упомянутым методикам. В третьей строке отражены результаты оптимизации при возможности управлять также частотой тока питания. Последующие строки таблицы отражают изменение η - мерной точки оптимизации при различных границах факторов ограничения - температуры и к.п.д. - при значениях " глубины проникновения " $\delta_{T_{об}} = 50^{\circ} \text{C}$ и $\delta_{к.п.д.} = 0,01$.

Результаты оптимизационных расчетов в таблице I существенно зависят от условий постановки задачи. Если снять ограничения Н.М. Окременко, при которых фиксированы семь величин, то удаётся уменьшить вес устройства на 7%, при условии, что можно применять частоту тока питания, отличную от 50 Гц менее чем на 12%. Четвертый и пятый варианты отражают изменение значений оптимума при применении различных обмоточных материалов. Если максимально допустимое значение температуры увеличить с 300°C до 600°C , то при прочих равных условиях вес насоса удаётся уменьшить на 23%. В шестом и седьмом вариантах изменяется минимально допустимое значение к.п.д. При уменьшении к.п.д. в 4 раза (с 24% на 6 %) вес устройства удаётся уменьшить на 15%.

Следовательно, модель математического программирования по сравнению с моделью Н.М. Окременко не только дает возможность найти лучший проектный вариант при применении тех же конструктивных материалов, но и более адекватно учитывать дополнительные факторы - температуру и к.п.д., - влияющие на оптимальное значение веса устройства. Если точное значение границ изменения температуры в обмотке и

Таблица I.

Варианты оптимиза- ции	Величина	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	φ_0	φ_1	φ_2
		b	s	v	f	$d \times 10^{-6}$	$A \times 10^{-4}$	b_i	B_{m1}	B_{m2}	G	$T_{об}$	к.п.д.
	[мм]	[мм]	[мм]	[м/сек]	[л/сек]	[а/м ²]	[а/л]	[мм]	[мл]	[мл]	[кг]	[°C]	
1. Охременко	[8]	4.3	0.30	11.25	50	7.24	18.64	0	0.72	1.21	1.61	460	0.120
2. Мат. пр.													
Тоб. \leq	460°C												
к.п.д. \geq	0.12	3.1	0.28	13.4	50	8.1	17.8	0.5	0.79	1.29	1.49	465	0.116
3. Мат. пр.													
Тоб. \leq	460°C												
к.п.д. \geq	0.12	2.1	0.36	8.1	180	7.1	19.2	0.5	0.68	1.30	1.42	470	0.114
4. Мат. пр.													
Тоб. \leq	600°C												
к.п.д. \geq	0.12	2.6	0.32	14.1	50	9.4	20.1	0	0.88	1.32	1.36	468	0.115
5. Мат. пр.													
Тоб. \leq	300°C												
к.п.д. \geq	0.12	3.9	0.31	12.6	50	7.4	18.9	1.0	0.61	1.1	1.77	466	0.116
6. Мат. пр.													
Тоб. \leq	460°C												
к.п.д. \geq	0.06	1.9	0.26	15.2	50	9.6	21.2	0.5	0.89	1.28	1.38	465	0.114
7. Мат. пр.													
Тоб. \leq	460°C												
к.п.д. \geq	0.24	2.3	0.29	12.3	50	5.8	15.6	0	0.62	0.96	1.69	465	0.116

допустимого значения к.п.д. не задано, то представляется ряд альтернативных решений.

§ 6. Исследование оптимального решения проектирования ЭМИН

При синтезе ИГД-устройств не всегда удается соблюдать оптимальные значения управляемых величин. Поэтому несомненный теоретический и практический интерес представляют исследования "устойчивости" полученных программных решений. В процессе сведения исходной многоцелевой, условной задачи оптимизации ЭМИН к одноцелевой, безусловной была введена ряд параметров. Важнейшими, по нашему мнению, являются следующие зависимости.

1. Зависимость оптимального решения от весовых коэффициентов λ_j в различных методах образования компромиссного критерия (4), (5).

2. Зависимость оптимального решения от граничных значений a_j и "глубины" проникновения $\delta_j, j = 1, 2, \dots, m$ Заключений. Сравнительные численные расчеты показывают эффективность полученных проектных решений ЭМИН по сравнению с существующими. Модель математического программирования вполне может быть рекомендована для практического инженерного применения в процессе проектирования ЭМИН, позволяя рассматривать её как единый целый процесс с формализацией на ЭВМ.

Л и т е р а т у р а

1. Лиллпетер Я.Я., Титин И.А. Методика расчета индукционных насосов для жидкого металла. — "Тр. Института физики АН Латв.ССР. Прикладная магнитогидродинамика". Вып. 8, изд-во АН Латв.ССР, 1956.

2. Watt D. A study in design of travelling field electromagnetic pumps for liquid metals. A.E.R.E. ED/R, 1955.
3. Watt D. Electromagnetic pumps for liquid metals.—*Engineering*, 1956, 181, 4703.
4. Янкоп Э.К. Расчет основных параметров и режима работы линейных индукционных насосов.—*Уч. записки ЛГУ им. П. Стучки*, т.21, 1958.
5. Янкоп Э.К. Выбор основных параметров индукционных насосов при расчете на максимальный к.п.д.—В кн.: *Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы*. Рига, изд-во АН Латв.ССР, 1959.
6. Вольдек А.И. О некоторых вопросах проектирования линейных индукционных насосов.—В кн.: *Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы*. Рига, изд-во АН Латв.ССР, 1959.
7. Саввин Л.Г. Оптимальное использование конструкций индукционных насосов.—В кн.: *Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы*. Рига, изд-во АН Латв.ССР, 1959.
8. Охременко Н.М. Оптимальные геометрические соотношения в индукционных насосах для жидких металлов. —*Электричество*, 1961, №9.
9. Охременко Н.М. Определение оптимальных размеров индукционных насосов. —*Электричество*, 1964, №11.
10. Бушманис А.К. О выборе оптимальных соотношений в индукционных насосах с максимальным коэффициентом полезного действия. —*Изв. АН Латв.ССР. Сер. физ. и техн. наук*, 1966, №1.
11. Валуев Ю.А. Методика выбора оптимальных параметров плоского линейного индукционного насоса с боковыми шинами. —*Магнитная гидродинамика*, 1967, №1.
12. Вилнитис А.Я., Юбелс Э.В., Шмит Я.Р., Зване Г.Я. Ушаков Ю.П. К вопросу оптимизации плоского индукци-

- онного насоса. Учет толщинного эффекта и гидравлических потерь. - "Магнитная гидродинамика", 1968, №1.
13. Андреев А.М., Глухих В.А. Выбор оптимальных соотношений в индукционных насосах для перекачивания жидких металлов. - "Магнитная гидродинамика", 1968, №2.
14. Валуев Ю.А. Оптимальные соотношения в плоских индукционных насосах без короткозамыкающих шин. - "Магнитная гидродинамика", 1969, №1.
15. Лиелпетер Я.Я. Жидкометаллические индукционные МГД-машины. Рига, "Зинатне", 1969.
16. См. настоящий сборник, с.15.
17. Гермайер Ю.Б. Введение в исследование операций. М., Физматгиз, 1971.
18. Fischburn P. Utility theory. - Manag. Sci., 1967, 14, 7.
19. Fischburn P. Methods of Estimating Additive Utilities. - Manag. Sci., 1967, 13, 7.

Т.Т.Цирулис, Э.П.Шилтер, В.Я. Ауза

НЕЛИНЕЙНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРОВОДНИКОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Важной задачей теплового расчета электропроводников является определение полных тепловых потерь, связанных с диссипацией энергии источника тока J в тепло. Обычно в приближении линейных токов тепловые потери рассчитываются по закону Джоуля

$$P_0 = R_0 J^2, \quad (1)$$

где $R_0 = \rho_0 \ell / S$ - омическое сопротивление проводника, ρ_0 - удельное электросопротивление при постоянной температуре, ℓ - длина, а S - сечение проводника. Закон (1) не учитывает особенности теплового режима проводника и характер теплоотдачи в окружающую среду. Поэтому, при больших средних плотностях тока j_{cp} и в условиях активного теплообмена, характер зависимости тепловых потерь P от полного тока J существенно зависит от температурного поля проводника.

В этом случае уже нельзя пренебречь зависимостью ρ от температуры u , ибо вид функции $\rho(u)$ влияет как на температурное поле, так и на распределение потенциала электрического поля, определяющего интенсивность тепловыделения в проводнике.

В общем случае определим тепловые потери P в зависимости от J при помощи обобщенного закона Джоуля

$$P = R(J) J^2, \quad (2)$$

вводя тем самым понятие нелинейного омического сопротивления $R(J)$, которое в отличие от (I) существенным образом нелинейно зависит от тока нагрузки. Тем самым вычисление P сводится к определению $R(J)$ данного проводника. Для $R(J)$, минуя непосредственное вычисление температурного поля, могут быть найдены аналитические формулы, позволяющие осуществить качественное исследование влияния особенностей теплоотдачи и параметров проводника на тепловые потери. В наиболее важных на практике случаях точные аналитические формулы могут быть аппроксимированы достаточно простыми зависимостями R от J .

§ I. Нелинейное сопротивление $R(J)$

Рассмотрим проводник, по которому течет постоянный электрический ток J , определяемый интегралом

$$J = \iint_S j_n ds \quad (3)$$

Пусть имеет место дифференциальный закон Ома в форме

$$j_n = \frac{E_n}{\rho(u)} = - \frac{\text{grad}_n \varphi}{\rho(u)}, \quad (4)$$

где j_n и E_n - нормальные составляющие плотности тока и электрического поля к сечению проводника, $\rho(u)$ - электро-сопротивление, зависящее от температуры. Тогда интенсивность тепловыделения в проводнике определяется формулой

$$\rho(u) = \frac{(\text{grad}_n \varphi)^2}{j_n^2} \quad (5)$$

и, согласно закону (2), для нелинейного сопротивления $R(J)$ имеем

$$R(J) = \frac{\int_V \frac{(\text{grad}_n \Psi)^2}{\rho(u)} dv}{\left[\iint_S \frac{q \text{grad}_n \Psi}{\rho(u)} ds \right]^2} \quad (6)$$

Интеграл в числителе формулы (6) представляет собой полные тепловые потери в объеме проводника. Можно показать, что из (6) и (3) также следует нелинейный закон Ома в форме

$$R(J) = \frac{U_0}{\iint_S \frac{q \text{grad}_n \Psi}{\rho(u)} ds}, \quad R(J) = \frac{U_0}{J}, \quad (7)$$

где U_0 — разность потенциалов электрического поля, определяемая граничными условиями для Ψ на внешней поверхности проводника, например, так, как показано на рис. 1.

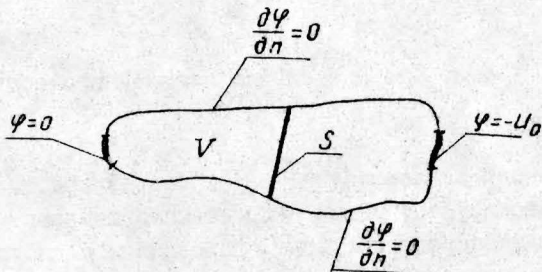


Рис. 1.

В дальнейшем более удобно определить нелинейное сопротивление $R(J)$ в единицах $R_0 = \rho_0 \frac{L}{S}$, где $\rho_0 = \rho(0)$ — удельное электросопротивление при температуре равной 0°C .

В качестве независимого критерия нагрузки проводника удобно выбрать безразмерный ток Z_0 , в общем случае определяемый по формуле

$$z_0 = \frac{L}{S} \sqrt{\frac{\alpha \rho_0}{\lambda_0}} J, \quad (8)$$

где $\frac{L}{S}$ - отношение характерного линейного размера к сечению проводника, α - температурный коэффициент сопротивления, а λ_0 - коэффициент теплопроводности металла, который в широкой области температур u можно считать постоянным (зависимость $\lambda = \lambda(u)$ по сравнению с $\rho = \rho(u)$ для большинства твердых электропроводников более слабо выражена). Тогда вместо $R(J)$ определению подлежит функция

$$\tilde{R}(z_0) = \frac{R\left(\frac{S}{L} \sqrt{\frac{\lambda_0}{\alpha \rho_0}} z_0\right)}{R_0}, \quad (9)$$

которую будем называть безразмерным нелинейным сопротивлением. Она позволяет исследовать зависимость нелинейного сопротивления от безразмерных критериев подобия проводника.

§ 2. Частные случаи нелинейного сопротивления

Характер зависимости \tilde{R} от безразмерного тока z_0 определяется существующим в проводнике температурным полем u ; температурное поле проводников с джоулевым источником тока находится решением нелинейной задачи, исследованной нами в [1]. Рассмотрим проводники цилиндрической формы с аксиальной симметрией при заданной разности потенциалов на торцах U_0 и исследуем зависимость \tilde{R} от z_0 в случаях радиального и продольного тепловых потоков. В первом случае торцы цилиндрического проводника считаются теплоизолированными, и теплоотдача осуществляется только через его боковую поверхность. Во втором - в проводнике существует продольный перепад температуры, и тепло отводится только через торцы (рис. 2). В обоих слу-

в случаях температурные поля одномерны и могут быть найдены аналитическим решением соответствующих тепловых задач.

1⁰. Случай радиального теплового потока

Распределение безразмерной температуры $\theta = 1 + du$ зависит от радиальной переменной $x = \frac{z}{z_0}$, где z_0 — радиус проводника, и может быть найдено методом степенных рядов [1]. В предположении линейной аппроксимации ρ от u , а именно

$$\rho = \rho_0 (1 + du) = \rho_0 \theta, \quad (10)$$

оно имеет вид

$$\theta(x) = \theta_{max} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{U_0^2 \alpha r_0^2}{\rho_0 \lambda_0 e^2} \right)^k \frac{a_k x^{2k}}{\theta_{max}^{2k}} \right], \quad (11)$$

где θ_{max} — максимальная температура на оси проводника, а a_k вычисляются по рекуррентным формулам, приведенным в [1].

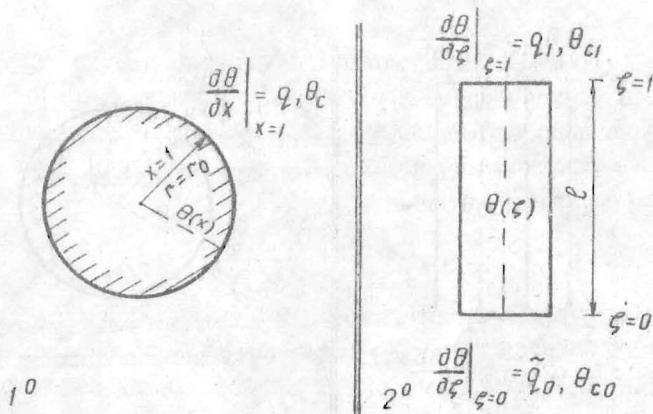


Рис. 2.

Характерный линейный размер проводника с радиальным

тепловым потоком определяется радиусом цилиндра, поэтому в формуле (8) и согласно нелинейному закону Ома (7) с учетом (9) имеем

$$U_0 = \pi r_0 \sqrt{\frac{\lambda_0}{\alpha \rho_0}} R_0 \cdot \tilde{R}(z_0) \cdot z_0 \quad (12)$$

Полные тепловые потери проводника через его боковую поверхность определяются законом

$$P = 2\pi l \frac{\lambda_0}{\alpha} \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=1} \quad (13)$$

Формулы (2), (7), (11) и (12) позволяют составить трансцендентное уравнение относительно безразмерного сопротивления $\tilde{R}(z_0)$, которое имеет вид

$$4\pi \theta_{\max} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_k}{\theta_{\max}^{2k}} \tilde{R}(z_0)^{2k-1} \cdot z_0^{2k-2} = 0 \quad (14)$$

Из (14) следует, что $\tilde{R}(z_0)$ пропорционально максимальной температуре проводника

$$\tilde{R}(z_0) = \theta_{\max} \cdot \mathcal{M}(z_0) \quad (15)$$

Множитель является функцией \mathcal{M} поправки, учитывающей влияние радиального распределения температуры на его нелинейное сопротивление и находится приближенным или численным решением уравнения

$$\mathcal{M}(z_0) = 1 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_{k+1} z_0^{2k} \mathcal{M}(z_0)^{2k+1}$$

При $z_0 < 1$ (что, как правило, для коротких электропроводников выполняется) $\mathcal{M}(z_0)$ может быть аппроксимировано формулой [2]:

$$\mathcal{M}(z_0) \approx 1 - \frac{1}{8} z_0^2 + \frac{1}{48} z_0^4 \quad (16)$$

Температура θ_{\max} определяется по опытным данным или же

вычисляется аналитически по известному закону теплоотдачи на боковой поверхности проводника [1], [2]. В предположении $z_0 < 1$ могут быть найдены также приближенные формулы для нелинейного сопротивления $\tilde{R}(z_0)$, имеющие место для разных, практически важных случаев теплоотдачи. Например, если проводник излучает в условиях вакуума, то при высоких температурах имеет место "закон двух третей"

$$\tilde{R}(z_0) \approx h z_0^{2/3}, \quad h = \left[\frac{\lambda_0 \alpha^3}{2\sigma_0 \epsilon z_0} \right]^{1/3}. \quad (17)$$

Постоянная h определяется излучательными свойствами поверхности проводника, где ϵ - степень черноты поверхности $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8}$. Если же теплоотвод осуществляется конвективным путем, то при постоянном коэффициенте теплоотдачи \mathcal{H}_0 зависимость имеет квадратичный характер

$$\tilde{R}(z_0) \approx \theta_c (1 + k z_0^2), \quad k = \frac{\lambda_0}{2r_0 \alpha_0}, \quad (18)$$

где θ_c - температура окружающей среды.

2°. Случай продольного теплового потока

В проводнике с теплоизолированной боковой поверхностью распределение потенциала электрического поля φ может быть выражено явно следующим образом:

$$\varphi(\xi) = -\frac{U_0}{l} \frac{\int_0^\xi \rho[\theta(\tau)] d\tau}{\int_0^1 \rho[\theta(\tau)] d\tau}, \quad (19)$$

где $\xi = \frac{z}{l}$ - безразмерная продольная координата. В предположении линейной зависимости ρ от температуры (10), продольное распределение температуры $\theta = \theta(\xi)$ удовлетворяет интегродифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \frac{U_0^2 \theta}{\rho_0 \int_0^1 \theta(\tau) d\tau} = 0. \quad (20)$$

Так как характерный линейный размер проводника с продольным потоком тепла определяется его длиной, то в формуле (8) следует положить $L = \ell$. Определяя нелинейное сопротивление R согласно закону Ома (7) с учетом (9) и (19), \tilde{R} безразмерное находим интегрированием

$$\tilde{R}(z_0) = \int_0^1 \theta(\tau) d\tau. \quad (21)$$

Интегродифференциальное уравнение (20) с учетом (21) может быть представлено в форме линейного уравнения

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} + z_0^2 \theta = 0. \quad (22)$$

Следовательно, распределение температуры в зависимости от безразмерного тока имеет вид:

$$\theta(\zeta) = A \sin z_0 \zeta + B \cos z_0 \zeta. \quad (23)$$

Формула (23) применима для $z_0 < \pi$. Постоянные A и B определяются условиями теплообмена на торцах цилиндрического проводника

$$A = \frac{\tilde{q}_0}{z_0}, \quad B = \frac{\tilde{q}_0 \cos z_0 - \tilde{q}_1}{z_0 \sin z_0}, \quad (24)$$

где \tilde{q}_0 и \tilde{q}_1 — безразмерные удельные тепловые потоки. Наиболее простой вид функция (21) имеет в том случае, когда температуры торцевых поверхностей проводящего стержня можно считать постоянными — $\theta(0) = \theta_{c1}$, $\theta(1) = \theta_{c2}$:

$$\tilde{R}(z_0) = \frac{\theta_{c0} + \theta_{c1}}{z_0} \operatorname{tg} \frac{z_0}{2}, \quad (25)$$

или, при $z_0 \ll 1$

$$\tilde{R}(z_0) \approx \frac{1}{2} (\theta_{c0} + \theta_{c1}) \left(1 + \frac{1}{6} z_0^2\right). \quad (26)$$

Аналогичные приближенные зависимости для $\tilde{R}(z_0)$ имеют место и при других граничных условиях.

Представляют интерес также случаи, когда проводник состоит из двух различных металлов с отношением длин $D \leq \frac{\ell_1}{\ell_2} < 1$. Ввиду сравнительной громоздкости аналитического выражения интеграла (21) более удобным является формула аппроксимации \tilde{R} в пространстве безразмерных параметров

$$\tilde{R}(z_0) \approx \tilde{R}(z_0 | \tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \theta_{c0}, \theta_{c1}, \frac{\ell_1}{\ell_2}), \quad (27)$$

где $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\alpha}_1$ - коэффициенты теплообмена, θ_{c0} и θ_{c1} - температуры окружающих сред. Выбор главных параметров аппроксимации определяется физическими условиями задачи и не является однозначным. Так при условии, что $\tilde{\alpha}_1 \gg \tilde{\alpha}_0$, распределение температуры существенно зависит от $\tilde{\alpha}_0$ и вместо (27) можно ограничиться сравнительно простой двухступенчатой аппроксимацией

$$\tilde{R}(z_0) \approx z_0 + z_1 z_0 + z_2 z_0^2, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} z_0 &\approx C_{00} + C_{01} \tilde{\alpha}_0 + C_{02} \tilde{\alpha}_0^2, \\ z_1 &\approx C_{10} + C_{11} \frac{1}{\tilde{\alpha}_0} + C_{12} \frac{1}{\tilde{\alpha}_0^2}, \\ z_2 &\approx C_{20} + C_{21} \frac{1}{\tilde{\alpha}_0} + C_{22} \frac{1}{\tilde{\alpha}_0^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Матрица параметров аппроксимации $C_{ik} (i, k = 0, 1, 2)$ вычисляется для конкретных значений ℓ_1/ℓ_2 и θ_{c0}, θ_{c1} . Вычисления на ЭВМ показывают, что, например, для $\tilde{\alpha}_0 \in [1, 0; 6, 0]$ и $z_0 \in [0, 1; 1, 0]$ погрешность аппроксимации \tilde{R} формулами (28) - (29) не превышает 3 + 5%.

Л и т е р а т у р а

1. См. настоящий сборник, с. 53.
2. Шелтер Э.П. Диссипация энергии в теплоизлучающем цилиндрическом проводнике с током. - "Изв. АН Латв. ССР". Сер. физ. и техн. наук, 1972, №2.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНИКОВ С ВНУТРЕННИМ ИС- ТОЧНИКОМ ТЕПЛА

К задачам математической физики, наиболее часто встречающимся в физических приложениях, относятся краевые и смешанные задачи для уравнения Навье-Стокса, нелинейных колебаний, теории магнетизма, теплопроводности, диффузии и др. Исследование этих задач связано с большими трудностями. Так как принцип суперпозиции для них не выполняется, до сих пор не существует общего метода построения аналитического решения. В связи с этим для решения нелинейных задач математической физики, как правило, применяются исключительно лишь приближенные методы. В настоящее время большую популярность приобрели конечно-разностные методы, позволяющие численно решать самые различные нелинейные задачи [1], [2]. Однако тот факт, что решение получается в форме числовых таблиц, приводит к известным затруднениям при качественном исследовании изучаемого процесса. Поэтому иногда более удобными являются методы, приводящие к приближенным аналитическим решениям. Из таких методов следует отметить:

- 1^o Вариационные методы в различных их модификациях [3] - [6].
- 2^o Сведение нелинейных задач к эквивалентным нелинейным интегральным уравнениям с последующим применением приближенных методов их решения [7].
- 3^o Метод степенных рядов, предложенный впервые В.Н. Челомеем [8]. Этот метод, как и разные его модификации и обобщения, в применении к нелинейным задачам в настоящее время еще недостаточно исследован. Сравни-

тельно простые алгоритмы вычисления и достаточно широкая область их применения, а также целый ряд других преимуществ делают метод функциональных рядов, на наш взгляд, весьма привлекательным [9] - [11].

В настоящей статье рассматриваются алгоритмы метода степенных рядов в применении к решению стационарных и нестационарных нелинейных задач теплопроводности, возникших в прикладной электродинамике при исследовании теплового режима электропроводящих тел. Предложенный алгоритм несколько отличается от [8]. Обобщения метода решения для аналогичных задач очевидны.

§ I. Стационарная нелинейная задача теплопроводности одного проводника с джоулевым источником тепла

В задачах теплопроводности возникновение нелинейностей связано с процессом теплообразования в проводнике и с нелинейной зависимостью удельных тепловых потерь от температуры. Особенно актуальным вопрос об учете нелинейных эффектов становится при больших плотностях тока в проводнике и в условиях теплоотдачи путем излучения при большом перепаде температур.

Распределение температуры u в однородном проводнике определяется совместным решением нелинейных уравнений теплопроводности и потенциала электрического поля

$$\operatorname{div}[\lambda(u) \operatorname{grad} u] + \frac{(\operatorname{grad} \psi)^2}{\rho(u)} = 0, \quad (I)$$

$$\Delta \psi - \frac{\operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \rho(u)}{\rho(u)} = 0,$$

при соответствующих граничных условиях, где $\rho(u)$ - удель-

ное электросопротивление и $\lambda(u)$ — коэффициент теплопроводности материала, а потенциал электрического поля зависит также от температуры $\varphi = \varphi(u)$. В дальнейшем коэффициент теплопроводности будем считать постоянным, $\lambda = \lambda_0$, а зависимость удельного электросопротивления от температуры представим в виде

$$\rho(u) = \rho_0 f(u), \quad \rho_0 = \rho(0), \quad (2)$$

где функция $f(u)$ определяется аппроксимацией экспериментальных данных. Такое приближение для многих металлов, например, Ag, Cu, Ni и W , оправдано, так как для них зависимость λ от температуры по сравнению с (2) более слабо выражена. Кроме того, как известно, преобразованием Кирхгофа зависимость $\lambda = \lambda(u)$ может быть учтена без существенного изменения вида уравнения теплопроводности.

В дальнейшем рассматриваются лишь проводники с цилиндрической симметрией, радиуса r_0 и длины l , распределение потенциала в которых определяется заданным напряжением U_0 на торцевых поверхностях. Удельные тепловые потоки на боковой и торцевых поверхностях проводящего цилиндра обозначим через q_0 и q_c , соответственно. Введем следующие безразмерные величины и параметры:

- 1) $\theta = \frac{u + t_0}{t_0}$ — безразмерная температура;
- 2) $\psi = \frac{\varphi}{U_0}$ — безразмерный потенциал;
- 3) $\chi = \frac{z}{z_0}, \xi = \frac{z}{l}$ — безразмерные цилиндрические координаты проводника;
- 4) $S = \frac{z_0}{\rho}$ — отношение линейных размеров;

- 5) $K_0 = \frac{u_0^2}{\lambda_0 \rho_0 t_0}$ - безразмерная интенсивность источника тепла;
- 6) $q_0 = \frac{z_0 q_0}{\lambda_0 t_0}$ - безразмерный поток тепла на боковой поверхности;
- 7) $q_c = \frac{\rho q_c}{\lambda_0 t_0}$ - безразмерный поток тепла на торцах.

Тогда нелинейная задача определения температурного поля в цилиндрических безразмерных координатах x и ξ имеет вид:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + S^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + K_0 \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + S^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2}{f(\theta)} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + S^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + S^2 \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \xi}}{f(\theta)} = 0, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=1} = \tilde{q}_0(1, \xi), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \tilde{q}_c(x, 0), \quad -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} = \tilde{q}_c(x, 1), \quad (6)$$

$$\psi(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 1) = -1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0. \quad (8)$$

Можно показать, что уравнение (4) с дополнительными условиями (7) - (8) эквивалентно вариационной задаче отыскания минимума функционала

$$J(\Psi) = \int_0^1 x dx \int_0^1 \frac{(\Psi'_x)^2 + S^2 (\Psi'_\xi)^2}{f[\theta(x, \xi)]} d\xi \quad (9)$$

при условиях

$$\Psi(x, 0) = 0, \Psi(x, 1) = -1, \Psi'_x(0, \xi) = 0, \Psi'_\xi(1, \xi) = 0, \quad (10)$$

где Ψ'_x и Ψ'_ξ — частные производные по соответствующим координатам и температура $\theta(x, \xi)$ при варьировании считается постоянной. Решение вариационной задачи (9) — (10) может быть получено приближенно методом наименьших квадратов, в результате применения которого имеем:

$$\Psi(x, \xi) = \Psi_0(\xi) + C g_1(x) g_2(\xi), \quad (11)$$

$$\Psi_0(\xi) = - \frac{\int_0^1 f[\theta(0, \tau)] d\tau}{f_0}, \quad f_0 = \int_0^1 f[\theta(0, \xi)] d\xi, \quad (12)$$

$$C = \frac{\int_0^1 d\xi \int_0^1 \frac{g_1(x) g_2'(\xi) f[\theta(0, \xi)]}{f[\theta(x, \xi)]} x dx}{f_0 \int_0^1 d\xi \int_0^1 \frac{\frac{1}{52} g_1'^2(x) g_2^2(\xi) + g_1^2(x) g_2'^2(\xi)}{f[\theta(x, \xi)]} x dx}, \quad (13)$$

где координатные функции g_1 и g_2 удовлетворяют условиям

$$g_1'(0) = g_1'(1) = g_2(0) = g_2(1) = 0. \quad (14)$$

Учитывая формулу (11), уравнение теплопроводности для нахождения температурного поля из (3), (5) и (6) можно записать в форме

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + S^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{\kappa_0 S^2}{f_0^2} \frac{F[\theta(0, \xi), x, \xi]}{f[\theta(x, \xi)]} = 0, \quad (15)$$

где функция F имеет вид:

$$F = f^2[\theta(\theta, \xi)] - 2Cf_0 g_1(x) g_2'(\xi) f[\theta(\theta, \xi)] + \\ + C^2 f_0^2 [g_1^2(x) g_2'^2(\xi) + \frac{1}{S^2} g_1'^2(x) g_2(\xi)], \quad (16)$$

а f определяется по формуле (2).

Безусловно, функция источника в уравнении теплопроводности (15) достаточно сложна для построения аналитического решения. Однако формулировка задачи теплопроводности в виде (15) - (16), (5) - (6) удобна для выбора приближенной модели в зависимости от условий теплообмена в каждом конкретном случае.

§ 2. Расчет стационарного распределения температуры проводника с радиальным потоком тепла методом степенных рядов

Рассмотрим модель проводника с радиальным потоком тепла. В этом случае условия теплообмена на торцевых поверхностях проводника соответствуют их теплоизоляции. Тогда задача (15) - (16), (5) - (6) сводится к одномерному уравнению теплопроводности

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d\theta}{dx} \right] + \frac{k_0 S^2}{f(\theta)} = 0 \quad (17)$$

при краевых условиях

$$-\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad -\frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=1} = \tilde{q}_0(t) \quad (18)$$

Г⁰. В качестве примера рассмотрим случай линейной аппроксимации функции

$$f(u) = 1 + \alpha u, \quad (19)$$

где α — температурный коэффициент сопротивления. Тогда согласно п. I § I безразмерную температуру θ удобно ввести так:

$$\theta \equiv 1 + \alpha u, \quad t_0 = \frac{1}{\alpha}. \quad (20)$$

Следовательно, $f(\theta) = \theta$, и вместо уравнения (17) мы имеем

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d\theta}{dx} \right] + \frac{\kappa_0 S^2}{\theta} = 0. \quad (21)$$

Для построения ограниченного на оси цилиндра решения рассмотрим вместо (17) и (21) эквивалентное нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра

$$\theta(x) = \theta(0) - \kappa_0 S^2 \int_0^x \frac{\tau}{\theta(\tau)} \ln \frac{x}{\tau} d\tau,$$

где постоянная $\theta(0) = \theta_{\max}$ имеет смысл максимальной температуры, принимаемой на оси цилиндра. В работе [9] было показано, что решение этого интегрального уравнения может быть представлено в виде степенного ряда

$$\theta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k} \quad (22)$$

с коэффициентами b_k , определяемыми по формулам

$$b_0 = \theta_{\max}, \quad b_k = - \frac{(\kappa_0 S^2)^k}{\theta_{\max}^{2k-1}} a_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где a_k не зависят от параметров задачи и определяются рекуррентно следующим образом:

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2} \sum_{m=0}^{k-1} (m+1)^2 a_{m+1} a_{k-m}, \quad k=1, 2, \dots \quad (23)$$

Коэффициенты a_k являются универсальными постоянными для цилиндрических проводников. Приводим таблицу значений первых коэффициентов

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0,250000 & , \quad a_5 = 0,000086, \\ a_2 = 0,015625 & , \quad a_6 = 0,000020, \\ a_3 = 0,002170 & , \quad a_7 = 0,000005, \\ a_4 = 0,000400 & , \quad a_8 = 0,000001. \end{array}$$

Распределение температуры $\theta(x)$ имеет вид :

$$\theta(x) = \theta_{max} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[\frac{\kappa_0 S^2 x^2}{\theta_{max}} \right]^k \right]. \quad (24)$$

Ряд в решении (24) имеет конечный, отличный от нуля, радиус сходимости R , ограниченный неравенствами

$$\frac{24}{\pi^2} \leq R \leq 4. \quad (25)$$

Неравенства (25) получаются по формуле Коши-Адымара из следующих неравенств

$$\frac{a_1^k}{k^2} \leq a_k \leq \frac{6}{\pi^2} \frac{C^k}{k^2}, \quad k=1, 2, \dots,$$

где $C = \frac{\pi^2}{6} a_1$, $a_1 = \frac{1}{4}$. Это доказывается методом математической индукции с использованием формулы (23).

Из (25) можно непосредственно получить оценку снизу для максимальной температуры проводника

$$\theta_{max} \geq \frac{\sqrt{k_0} S}{R} = \frac{U_0 S}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda_0 \rho_0}}, \quad (26)$$

не зависящую от вида граничного условия. Распределение температуры $\theta(x)$ в качестве параметра содержит максимальную температуру на оси проводника θ_{max} . Для ее определения подставим ряд (24) во второе граничное условие (18). В результате получим трансцендентное уравнение вида

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_k k_0^k S^{2k}}{\theta_{max}^{2k-1}} + \tilde{q}_0[\theta(r)] = 0, \quad (27)$$

которое для каждого конкретного случая теплообмена, характеризующегося функцией \tilde{q}_0 , должно быть решено численным методом. Наиболее часто безразмерные удельные тепловые потери \tilde{q}_0 зависят от температуры согласно законам:

$$\tilde{q}_0 = \tilde{\sigma}[(\theta(r) - \nu_0)^4 - \theta_0^4] \quad - \text{теплоизлучение}, \quad (28)$$

$$\tilde{q}_0 = \tilde{\chi}_0[\theta(r) - \theta_c] \quad - \text{конвекция} \quad (29)$$

Критерий $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_0 \epsilon \tau_0}{\lambda_0 \alpha^3}$ - безразмерная степень лучеиспускания, σ_0 - постоянная Стефана-Больцмана, ϵ - степень черноты поверхности, а параметр $\nu_0 = 1 - 273,16 \alpha$ определяет начало отсчета безразмерной шкалы температур θ . Критерий $\tilde{\chi}_0 = \frac{r_0 \chi_0}{\lambda_0}$ - безразмерный коэффициент теплоотдачи, где χ_0 - коэффициент конвекции. Температуры θ_0 и θ_c относятся к теплоприемнику и к окружающей среде, соответственно.

В случае (28) трансцендентное уравнение (27) имеет вид:

$$\theta_{max} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k (k_0 S^2)^k}{\theta_{max}^{2k-1}} + \left[\tilde{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_k (k_0 S^2)^k}{\theta_{max}^{2k-1}} + \theta_0^4 \right]^{1/4} + \nu_0, \quad (30)$$

а при наличии лишь конвективной теплоотдачи (29) -

$$\theta_{max} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{2} \frac{a_k (K_0 S^2)^k}{\theta_{max}^{2k-1}} + \theta_c \quad (31)$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены более сложные, отличающиеся от (28) и (29), случаи теплоотдачи. При этом характер нелинейности в краевом условии (18) может быть весьма произвольным.

2°. Метод степенных рядов применим и тогда, если функция $f(\theta)$, определяющая зависимость плотности источника тепла от температуры, отличается от линейной. Для этого лишь необходимо, чтобы функция $1/f(\theta)$ была аналитической и, тем самым, представимой в виде ряда по четным степеням x

$$p(\theta) = p[\theta(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^{2k} \quad (32)$$

Приводим формулы для случая, когда f аппроксимирована квадратной функцией вида

$$f(u) = 1 + \alpha u + \beta u^2 \quad (33)$$

Определяя безразмерную температуру θ аналогично (20), вместо уравнения (22) имеем

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] + \frac{K_0 S^2}{b + a\theta + b\theta^2} = 0 \quad (34)$$

где $b = \frac{\beta}{\alpha^2}$, $a = 1 - 2b = 1 - \frac{2\beta}{\alpha^2}$. Пользуясь методом, аналогичным изложенному в I⁰, получаем распределение температур

$$\theta(x) = \theta_{max} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(K_0 S^2)^k}{4} \frac{Q x^{2k}}{[b + a\theta_{max} + b\theta_{max}^2]^{2k-1}} \quad (35)$$

Величины $\theta_{k\kappa}$ представляют собой полиномы k -той степени от θ_{\max} , коэффициенты которых не зависят от характеристик проводника и определяются лишь параметрами аппроксимации a и b . Для вычисления полиномов Q существуют рекуррентные формулы

$$Q_k = \frac{1}{(k+1)^2} \left[(a+2b\theta_{\max}) \sum_{n=1}^k (k-n+1)^2 \theta_{n-1} \theta_{k-n} - (ab\theta_{\max}^2 + a^2\theta_{\max} + ab) \sum_{m=1}^{k-1} (k-m) \theta_{k-m+1} \sum_{s=1}^m \theta_{s-1} \theta_{m-s} \right], \quad (36)$$

$$Q_0 = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Первые полиномы Q_k имеют следующий явный вид:

$$Q_0 = 1,$$

$$Q_1 = \frac{1}{4} (a + 2b\theta_{\max}),$$

$$Q_2 = \frac{1}{9} \left[\left(\frac{5}{4} a^2 + ab \right) + (5ab + a^2)\theta_{\max} + (5b^2 - ab)\theta_{\max}^2 \right].$$

Максимальная температура θ_{\max} определяется из трансцендентного уравнения (27)

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} K \left(\frac{\kappa_0 s^2}{4} \right)^k \frac{Q_{k-1}}{[b + a\theta_{\max} + b\theta_{\max}^2]^{2k-1}} + \tilde{q}_0[\theta(1)] = 0. \quad (37)$$

Таким образом, для исследования температурного поля сначала необходимо вычислить коэффициенты полиномов Q_k , зависящие лишь от аппроксимационных параметров a и b ; затем вычисляются θ_{\max} по формуле (37), а само $\theta(x)$ находится по формуле (35). Распределение температуры $\theta(x)$ зависит от множества независимых безразмерных параметров

$$\theta(x) \equiv \theta(x | \kappa_0 s^2, \tilde{\sigma}, \tilde{\chi}_0, \theta_0, \theta_L), \quad (38)$$

среди которых $k_0 S^2$, $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\rho}_0$ являются основными критериями подобия стационарных температурных полей проводников.

§ 3. Метод степенных рядов в нестационарной нелинейной теории теплопроводности

Исследование процесса установления температурного поля в случае, в котором плотность источника теплообразования в проводнике зависит от времени, требует решения нестационарных, в общем случае также нелинейных задач теплопроводности. Рассмотрим нестационарную задачу:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{m}{k} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \Pi(\theta, x, \tau), \quad (38)$$

$$\theta(x, 0) = T(x, \tau_0) = F(x), \quad (39)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad -\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=1} = \tilde{q}_0(t, \tau), \quad (40)$$

соответствующей стационарной задачей для которой является (2I), (I8). Цилиндрической симметрии соответствует $m=1$; случаи $m=0, 2$ имеют место при плоской или сферической симметрии. Мы обозначили через Π функцию плотности источника, которая при условиях п. I⁰, § 3 имеет вид:

$$\Pi(\theta, x, \tau) = \frac{k_0(\tau) S^2}{\theta}, \quad k_0(\tau) = \frac{U^2(\tau) \alpha}{\lambda_0 \rho_0}, \quad (41)$$

где $\bar{t} = \frac{a^2 t}{2_0^2}$ — безразмерное время (число Фурье),
 $U(\tau)$ — разность потенциалов на торцах цилиндра, a^2 —
 коэффициент температуропроводности проводника.

Предположим, что Π — аналитическая по θ и x
 функция в области $|\theta| < \Delta$, $|x| < 1$ и, кроме того,
 четная по переменной x . Тогда для нее имеет место
 разложение

$$\Pi(\theta, x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\tau, b_0(\tau), b_1(\tau), \dots, b_k(\tau)) x^{2k}. \quad (42)$$

Предположим, что функция F в начальном условии
 (39) также удовлетворяет условиям разложения

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{2k}. \quad (43)$$

В этом случае изложенный в § 3 метод степенных рядов мо-
 жет быть обобщен для построения приближенного решения
 смешанной задачи (38) — (40). Для этой цели представим
 нестационарное распределение температуры в виде степен-
 ного ряда, аналогично (22)

$$\theta(x, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\tau) x^{2k}, \quad (44)$$

с зависящими от времени τ коэффициентами. Подстановка
 ряда (44) в уравнение (38) приводит к бесконечной систе-
 ме обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$b_k'(\tau) = 4(k+1)\left(k + \frac{m+1}{2}\right) b_{k+1}(\tau) + p_k[\tau, b_0(\tau), \dots, b_k(\tau)], \quad (45)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Чтобы учесть начальное условие (39) и граничные условия
 (40), вместо (45) рассматривается конечная система

$$b'_{k,N}(\tau) = 4(k+1)\left(k + \frac{m+1}{2}\right)b_{k+1,N}(\tau) + \rho_{k,N}, \quad (46)$$

$$b_{k,N}(0) = \alpha_k, \quad (47)$$

$$2 \sum_{j=1}^{N+1} j b_{j,N}(\tau) + \tilde{q}_0 \left[\tau, \sum_{j=1}^{N+1} b_{j,N}(\tau) \right] = 0, \quad (48)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N$$

Уравнения (46) – (48) получаются "обрыванием" системы (45) на N -том уравнении и добавлением начального и граничного условий. Эта процедура имеет следующий смысл. Решение бесконечной системы (45) с начальными условиями (47) привело бы к задаче Коши, при решении которой не учитывается влияние границы области. Рассмотрение системы (46) – (47) вместо (45) означает приближенное удовлетворение уравнению теплопроводности соответствующей конечной суммой, а условие (48) – корректирование этого приближенного решения таким образом, чтобы граничное условие удовлетворялось. Если уравнение (48) разрешить относительно последнего коэффициента $b_{N,N+1}(\tau)$ и подставить его в N -тое уравнение (46), то для определения N неизвестных функций $b_{k,N}(\tau)$ получим задачу вида

$$b'_{k,N}(\tau) = F_k \left[\tau, b_{0,N}(\tau), \dots, b_{k+1,N}(\tau) \right], \quad (49)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$b'_{N,N}(\tau) = F_N \left[\tau, b_{0,N}(\tau), \dots, b_{N,N}(\tau) \right], \quad (50)$$

$$b_{k,N}(0) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

(49) – (50) является задачей Коши для системы N обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой, как известно, существует и единственно при достаточно общих предположениях относительно F_k . Решив задачу Коши (49) – (50) при помощи стандартных методов, построим функцию

$$\theta_N(x, \tau) = \sum_{k=0}^{N+1} b_{k,N}(\tau) x^{2k} \quad (51)$$

При больших N сумма (51) должна быть достаточно близкой к решению исходной смешанной задачи (38) – (40). Следовательно, мы ожидаем, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} b_{k,N}(\tau) = b_k(\tau), \quad (52)$$

и поэтому

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \theta_N(x, \tau) = \theta(x, \tau). \quad (53)$$

Обоснование равенств (52) и (53) в общем случае остаётся открытым. Однако для линейных задач, как показано в [10], предложенный метод приводит к решению, аналогичному тому, которое получается методом разделения переменных, с тем лишь отличием, что коэффициенты Фурье получаются не в форме интеграла, а в форме ряда. При этом вовсе не используется свойство ортогональности собственных функций соответствующей спектральной задачи. Численные примеры расчета нестационарных полей цилиндрического проводника предложенным методом степенных рядов как в случае конвекции, так и в случае теплоизлучения (нелинейные и линейные граничные условия), рассмотрены в [10] и [11].

Л и т е р а т у р а

- I. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", 1971.
2. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., "Мир", 1972.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1967.
4. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М., "Наука", 1966.
5. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., "Наука", 1972.
6. Диос Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., "Мир", 1972.
7. Березовский А.А. Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. Киев, "Наукова думка", 1968.
8. Челомей В.Н., Применение рядов к исследованию устойчивости стержней. КАИ, 1937.
9. Микельсон Ю.Я., Цирулис Т.Т., Шилтер Э.П., Шмит Я.Р. - "Изв. АН Латв.ССР, Сер. физ. и техн. наук", 1971, №4.
10. Цирулис Т.Т., Шилтер Э.П. Нестационарный температурный режим проводника с нелинейным источником тепла. - "Изв. АН Латв.ССР, Сер. физ. и техн. наук", 1973, №1.
- II. Цирулис Т.Т., Шилтер Э.П. - В кн.: Нелинейные краевые задачи математической физики. Киев, изд-во ин-та математики АН УССР, 1972.

ТЕОРИЯ ОРИЕНТИРОВАНИЯ ДЕТАЛЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Большое число задач, связанных с ориентированием, сортировкой и разбраковкой деталей приборов и машин, может быть решено с использованием силового воздействия электромагнитного поля [1]. Электромагнитное ориентирование деталей обладает рядом преимуществ по сравнению с различными механическими методами, среди которых наиболее существенным является бесконтактность силового воздействия. Использование особенностей силового воздействия электромагнитного поля обуславливает возможность создания устройств для ориентирования деталей с весьма незначительными конструктивными признаками, более того, появляется возможность для достаточно эффективного ориентирования деталей с внутренними (скрытыми) признаками. Технологическое решение перечисленных проблем при помощи механических методов не приведет к удовлетворительным результатам.

В зависимости от того, является ли материал, из которого изготовлена деталь, диэлектриком, проводником или ферромагнетиком, можно выделить три основных способа силового воздействия, которые могут быть использованы для ориентирования деталей:

1) ориентирование проводящих и диэлектрических деталей электростатическим полем;

2) ориентирование ферромагнитных деталей магнитным полем;

3) ориентирование немагнитных проводящих деталей переменным магнитным полем.

Первые два случая, как будет показано ниже, поддаются общему рассмотрению; их теория достаточно проста и сравнительно хорошо изучена. Третий случай требует особого рассмотрения и его теория значительно сложнее. Использование третьего способа для ориентирования немагнитных проводящих деталей позволяет решить большое количество технологических задач, причем его реализация связана с применением сравнительно простых и надежных в эксплуатации устройств.

Для ориентирования деталей всегда необходима определенная величина электродинамического момента, создаваемого внешним электромагнитным полем. Обычно используемые электрические или магнитные поля являются однородными или обладают весьма слабой неоднородностью в рабочей зоне, где происходит требуемое поворачивание детали. Наличие же зон с неоднородностью поля при входе и выходе из рабочей зоны, как показывает опыт, на процесс ориентирования существенно не влияет. Поэтому основной задачей в теории ориентирования является исследование движения тел в однородном поле. Заметим, попутно, что на незаряженные диэлектрические и проводящие тела в однородном электростатическом и на немагнитные проводящие тела в однородном переменном магнитном поле могут действовать только моменты сил. Силы же, могущие вызвать поступательное движение тел, отсутствуют. Для успешного решения практических задач электромагнитного ориентирования деталей необходимо в первую очередь выявить следующие закономерности:

1) характер зависимости электродинамического момента от геометрической формы и материала детали, а также от амплитуды и частоты внешнего поля;

2) зависимость продолжительности ориентирования от величины электродинамического момента и моментов допол-

нительных сил (трения, тяжести и др.);

3) эффект взаимодействия в электромагнитном поле близко находящихся друг от друга деталей и влияние этого эффекта на процесс ориентирования.

Рассмотрению этих вопросов (за исключением эффекта взаимодействия, который из-за своей сложности требует отдельного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей работы), и будут посвящены последующие параграфы статьи.

§ I. Электродинамический момент, действующий на эллипсоид вращения

Наличие отдельных внешних или внутренних конструктивных признаков, малых по сравнению с общими размерами тела, оказывает весьма слабое влияние на величину электродинамического момента, действующего на проводящие и диэлектрические тела в электростатическом поле или на ферромагнитные тела в магнитном поле.

Поскольку расчет электродинамического момента для тел произвольной геометрической формы связан со значительными трудностями, для приближенной оценки момента в большинстве практических случаев в качестве аналога для сравнения может быть использовано тело, имеющее форму эллипсоида. Не ограничивая общности сформулированной задачи и одновременно значительно ее упрощая, ограничимся рассмотрением только вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения. Прежде чем перейти, однако, к исследованию конкретных зависимостей, укажем на общность математического решения электростатических и магнитостатических задач для тел конечных размеров.

В линейном приближении векторы электрической \vec{E} и магнитной \vec{H} напряженности удовлетворяют уравнениям:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0; \operatorname{div} \vec{E} = 0; \operatorname{rot} \vec{H} = 0; \operatorname{div} \vec{H} = 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями для тангенциальной (t) и нормальной (n) составляющих на поверхности тела:

$$E_t^{(i)} = E_t^{(e)}; \xi E_n^{(i)} = E_n^{(e)}; H_t^{(i)} = H_t^{(e)}; \mu H_n^{(i)} = H_n^{(e)}, \quad (1.2)$$

где индексами (i) и (e) обозначены соответственно внутренние и внешние составляющие напряженностей; ξ и μ - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости (для окружающей среды принимается $\xi = \mu = 1$). Уравнения (1.1) позволяют ввести скалярный потенциал Ψ , который в зависимости от рассматриваемого поля может быть принят за электрический или магнитный, т.е.

$$\vec{E}, \vec{H} = -\operatorname{grad} \Psi \quad (1.3)$$

Потенциал Ψ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad (1.4)$$

и граничным условиям

$$\Psi^{(i)} = \Psi^{(e)}; \kappa \frac{\partial \Psi^{(i)}}{\partial n} = \frac{\partial \Psi^{(e)}}{\partial n} \quad (1.5)$$

на поверхности тела. Коэффициент $\kappa = \xi, \mu$, т.е. в зависимости от условий задачи является либо относительной диэлектрической, либо относительной магнитной проницаемостью. Кроме того, случай $\kappa = \infty$ соответствует случаю проводника в электростатическом поле, а $\kappa = 0$ - случаю идеально проводящего тела в переменном магнитном поле

(т.е. при условии, что $\sigma\omega = \infty$), причем, вектор \vec{H} следует рассматривать как амплитуду напряженности. Задача о диэлектрическом эллипсоиде вращения в электрическом поле \vec{E}_0 подробно рассматривается, например, в [2], где приведены формулы для составляющих вектора напряженности $\vec{E}^{(i)}$ внутри эллипсоида, поляризации \vec{P} и момента, действующего на эллипсоид \vec{M} :

$$E_i = \frac{E_{0i}}{1 + (\epsilon - 1) N_i}; \quad P_i = \frac{abc \cdot \epsilon_0 (\epsilon - 1) E_{0i}}{3 \cdot [1 + (\epsilon - 1) N_i]}; \quad \vec{M} = [\vec{P} \vec{E}_0], \quad (1.6)$$

где $i = x, y, z$; a, b, c — полуоси эллипсоида соответственно по осям x, y, z ; N_i — коэффициенты деполаризации. Если ввести углы α, β, γ' между вектором \vec{E}_0 и координатными осями x, y, z соответственно, то на основе формул (1.6) находим следующие выражения для составляющих момента

$$M_x = \epsilon_0 E_0^2 V \frac{(\epsilon - 1)^2 (N_z - N_y)}{[1 + (\epsilon - 1) N_y][1 + (\epsilon - 1) N_z]} \cos \beta \cos \gamma';$$

$$M_y = \epsilon_0 E_0^2 V \frac{(\epsilon - 1)^2 (N_x - N_z)}{[1 + (\epsilon - 1) N_z][1 + (\epsilon - 1) N_x]} \cos \alpha \cos \gamma'; \quad (1.7)$$

$$M_z = \epsilon_0 E_0^2 V \frac{(\epsilon - 1)^2 (N_y - N_x)}{[1 + (\epsilon - 1) N_x][1 + (\epsilon - 1) N_y]} \cos \alpha \cos \beta,$$

где

$$N_x = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s}; \quad N_y = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)R_s}; \quad N_z = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)R_s}$$

- коэффициенты деполяризации;

$$R_S = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}; \quad V = \frac{4}{3} \pi abc - \text{объем эллипсоида.}$$

Коэффициенты деполяризации удовлетворяют условию

$$N_x + N_y + N_z = 1 \quad (1.8)$$

Основываясь на общности рассмотрения электростатических и магнитостатических задач, можно написать следующие общие формулы для составляющих момента

$$M_x = pS\ell \frac{4(k-1)^2(N_z - N_y)}{3\lambda_1[1+(k-1)N_y][1+(k-1)N_z]} \cos \beta \cos \gamma';$$

$$M_y = pS\ell \frac{4(k-1)^2(N_x - N_z)}{3\lambda_1[1+(k-1)N_x][1+(k-1)N_z]} \cos \alpha \cos \gamma'; \quad (1.9)$$

$$M_z = pS\ell \frac{4(k-1)^2(N_y - N_x)}{3\lambda_1[1+(k-1)N_x][1+(k-1)N_y]} \cos \alpha \cos \beta,$$

где

$$N_x = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} \int_0^{\infty} \frac{dS}{(s+\lambda_1^2)R_S}; \quad N_y = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} \int_0^{\infty} \frac{dS}{(s+1)R_S}; \quad N_z = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} \int_0^{\infty} \frac{dS}{(s+\lambda_2^2)R_S};$$

$$R_s = \sqrt{(s+1)(s+\lambda_1^2)(s+\lambda_2^2)} ;$$

$\lambda_1 = \frac{a}{b}$; $\lambda_2 = \frac{c}{b}$; $S = \pi a c$ - площадь поперечного сечения эллипсоида; $\ell = 2a$ - длина эллипсоида; $p = p_{эл}$; $p_{эм}$ - давление, которое в зависимости от условий задачи может быть электрическим $p_{эл} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$, или магнитным $p_{эм} = \frac{1}{2 \mu_0} B_0^2$. В случае переменного магнитного поля следует произвести замену

$$B_0 \rightarrow B_{эфф} = \frac{B_0}{\sqrt{2}} .$$

В частном случае, когда эллипсоид переходит в шар, $N_x = N_y = N_z = \frac{1}{3}$ и согласно (1.9) $\vec{M} = 0$. На основе формул (1.9) и (1.8) можно найти формулу для единственной составляющей момента M_z , действующего на вытянутый (рис. 1,а) и сплюснутый (рис. 1,б) эллипсоиды вращения при условии, что вектор внешнего поля параллелен плоскости (x, y) и образует угол α с осью Ox . Она получается следующей для обоих эллипсоидов (изображенных на рис. I):

$$M_z = p S \ell F(k, \lambda) \sin 2\alpha , \quad (1.10)$$

где

$$F(k, \lambda) = \frac{2(k-1)^2 (N - \frac{1}{3})}{\lambda [(k-1)N + 1] [(k-1)N - (k+1)]} ; \quad \lambda = \frac{a}{b} ; \quad \ell = 2a .$$

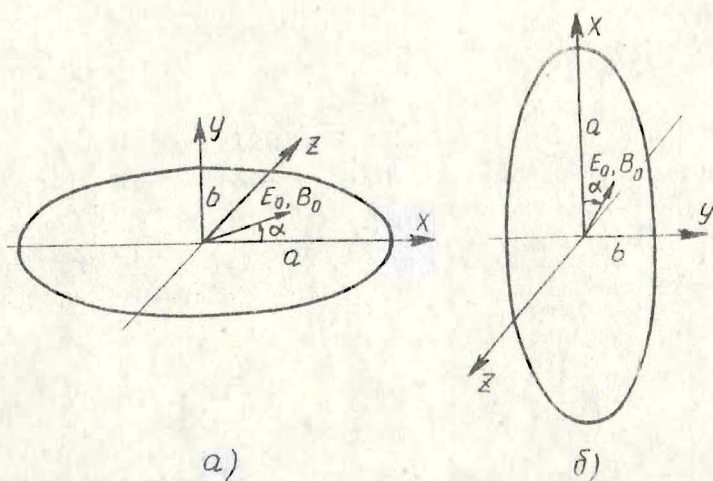


Рис. 1.

Для вытянутого эллипсоида вращения (рис. 1а) $S = \pi b^2$,

$$N = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) - 1 \right].$$

Для сплюснутого эллипсоида вращения $S = \pi a^2$,

$$N = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\lambda^2 - 1} \right].$$

На рис. 2 приведены кривые зависимости функции $F(\kappa, \lambda)$ для вытянутого (рис. 2, а) и сплюснутого (рис. 2, б) эллипсоидов вращения, подсчитанные по формуле (1.10). Они могут быть полезны при оценке электродинамического

момента, действующего на детали, геометрическая форма которых достаточно близка к рассмотренным эллипсоидам вращения.

Рассмотрим отдельно случай проводящих эллипсоидов в переменном магнитном поле с амплитудой B_0 . На рис. 2, а и б приведены кривые функции $F(\kappa, \lambda)$ при $\kappa=0$, т.е. функции

$$F(\lambda) = \frac{2(N - \frac{1}{3})}{\lambda(N^2 - 1)}, \quad (1.11)$$

соответствующей значению момента M_{zi} при $\sigma\omega = \infty$ (т.е. для идеально проводящего эллипсоида). Для расчета момента, действующего на эллипсоид при конечных значениях $\sigma\omega$ можно воспользоваться формулой

$$M_z = \rho S l^2 F(\lambda) \Lambda(\lambda, \varepsilon) \sin 2\alpha,$$

где функция $\Lambda(\lambda, \varepsilon)$ определяется как

$$\Lambda(\lambda, \varepsilon) = \frac{M_z(\lambda, \varepsilon)}{M_{zi}(\lambda)}, \quad (1.12)$$

$$\varepsilon = \sigma \mu_0 \omega d^2; \quad d = \frac{\pi}{2} b.$$

Ввиду того, что непосредственный расчет функции $M_z(\lambda, \varepsilon)$ связан со значительными математическими трудностями, для приближенной оценки момента по формуле (1.11) можно воспользоваться значением функции $\Lambda(\lambda, \varepsilon)$, вычисленной для эллиптического цилиндра [3]. На рис. 3 приводятся кривые зависимости функции $\Lambda(\lambda, \varepsilon)$ для эллиптического

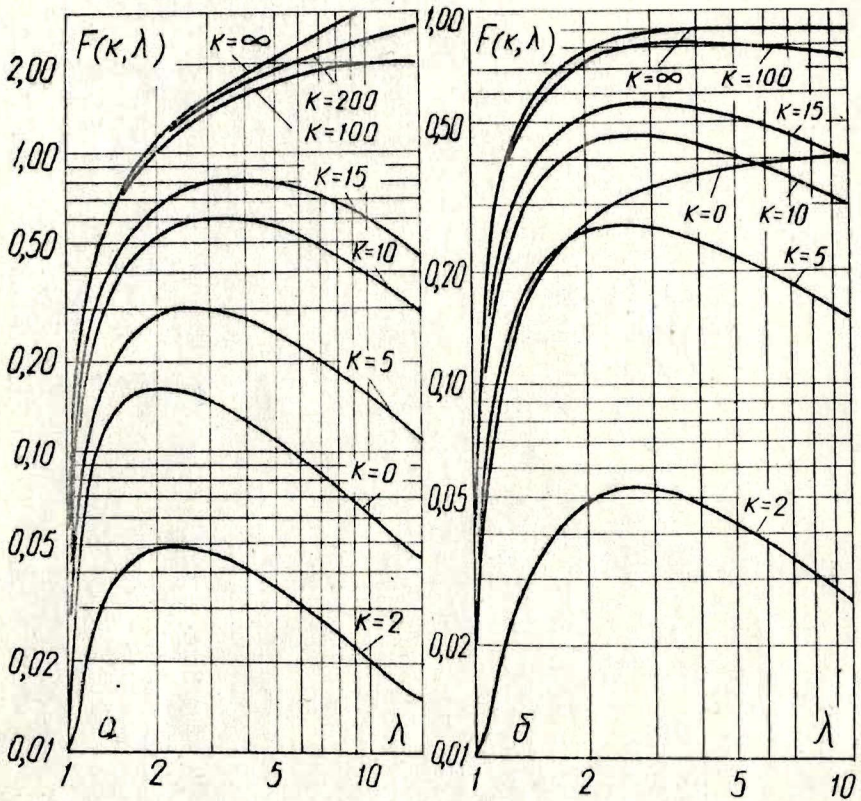


Рис. 2.

цилиндра в поперечном однородном переменном поле амплитуды B_0 . На основе формулы (1.11) и кривых для функций $F(\lambda)$ (рис. 2) и $A(\lambda, \epsilon)$ (рис. 3.) можно оценить величину электродинамического момента, действующего на проводящий эллипсоид, а также на другие монолитные тела, форма которых достаточно близка к вытянутому или сплюс-

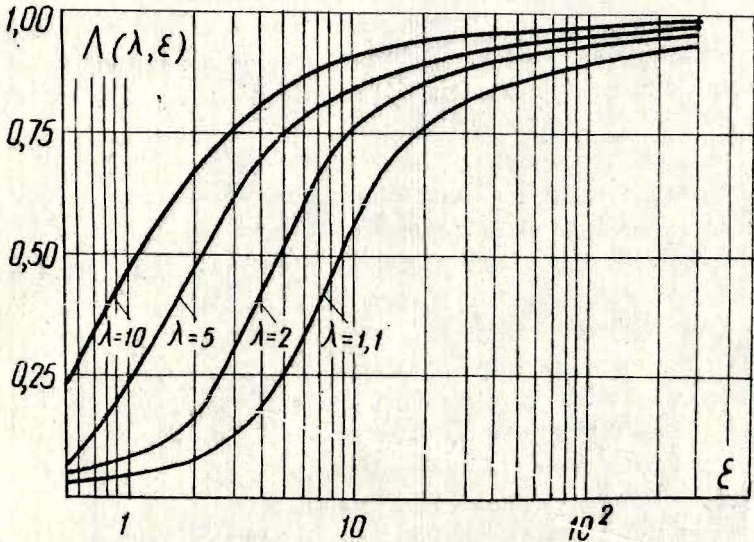


Рис. 3.

нугому эллипсоидам вращения.

§ 2. Угловые зависимости электродинамического момента, действующего на проводящее тело в однородном поле

Изложенный способ оценки электродинамического момента, действующего на проводящий эллипсоид в переменном магнитном поле, применим только для тел наипростейшей формы (прямоугольная пластина, круглый цилиндр и т.п.) с однородной проводимостью. Это связано с тем, что вели-

чина электродинамического момента зависит от распределения вихревых токов, а последнее может существенно зависеть уже и от незначительных внешних или внутренних конструктивных признаков. Так, например, если в диэлектрическом или в ферромагнитном эллипсоиде вырезать произвольно бесконечно тонкую щель, то можно показать, что независимо от площади и положения щели практически никакого изменения величины электродинамического момента наблюдаться не будет. Но в проводящем теле такая же щель будет полностью преграждать путь вихревым токам, в результате чего первоначальное распределение вихревых токов существенно изменится, а вместе с этим изменится и величина электродинамического момента. Несмотря на всю сложность проблемы распределения вихревых токов, все же можно привести некоторые, наиболее общие соображения по поводу оценки величины электродинамического момента для проводящих тел произвольной формы.

Рассмотрим прежде всего угловые зависимости электродинамического момента. Предположим, что проводящее тело произвольной формы находится в однородном магнитном поле, гармонически зависящем от времени. Введем координатную систему (x, y, z) , связанную с проводящим телом. Вводя аналогично направляющие косинусы вектора поля, для составляющих амплитуды внешнего поля можно написать следующие выражения:

$$B_x = B_0 \cos \alpha; \quad B_y = B_0 \cos \beta; \quad B_z = B_0 \cos \gamma \quad (2.1)$$

Составляющие амплитуды вихревых токов, наведенных в проводящем теле, можно, согласно принципу суперпозиции, представить в следующем виде:

$$j_x = j_{xx} \cos \alpha + j_{xy} \cos \beta + j_{xz} \cos \gamma;$$

$$j_y = j_{yx} \cos \alpha + j_{yy} \cos \beta + j_{yz} \cos \gamma; \quad (2.2)$$

$$j_z = j_{zx} \cos \alpha + j_{zy} \cos \beta + j_{zz} \cos \gamma.$$

Электродинамический момент, действующий на проводящее тело, определяется по формуле:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V [\vec{z} [\vec{j} \vec{B}^*]] dv \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V \vec{j} (\vec{z} \vec{B}^*) dv - \int_V \vec{B}^* (\vec{z} \vec{j}) dv \right\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где V — объем тела.

Для удобства дальнейших вычислений введем обозначения $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \alpha_2$, $\gamma = \alpha_3$ и введем выражения (2.1) и (2.2) в тензорном виде:

$$B_k = B_0 \cos \alpha_k; \quad j_k = \frac{B_0}{2\mu_0} q_{kl} \cos \alpha_l; \quad k, l = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

где под дважды повторяющимися индексами подразумевается суммирование.

Подставляя теперь выражения (2.4) в формулу для момента (2.3), получаем

$$M_k = P_m M_{klmn} \cos \alpha_l \cos \alpha_m,$$

где $P_m = \frac{B_0^2}{4\mu_0}$ — магнитное давление,

$$M_{k\ell mn} = \text{Re} \left\{ \int_V (x_\ell q_{kmi} \delta_{nm} - x_n q_{nmi} \delta_{k\ell}) dV \right\}; \quad (2.5)$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m=n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Предположим теперь для определенности, что вектор \vec{B} направлен параллельно плоскости XOY . Тогда $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ и $\cos \beta = \sin \alpha$, $\cos \gamma = 0$. Следовательно, на основе общей формулы (2.5) получаем

$$M_k = \rho_m \left[M_{kxxn} \cos^2 \alpha + (M_{kxyx} + M_{kyxn}) \sin \alpha \cos \alpha + M_{kyyn} \sin^2 \alpha \right], \quad (2.6)$$

или после преобразований

$$M_k = \rho_m (M_{0k} \sin 2\alpha + M_{1k} \cos 2\alpha + M_{2k}), \quad (2.7)$$

где

$$M_{0k} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \int_V (x q_{ky} - x_n q_{ny} \delta_{kx} + y q_{kx} - x_n q_{nx} \delta_{ky}) dV \right\};$$

$$M_{1k} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \int_V (x q_{kx} - x_n q_{nx} \delta_{kx} - y q_{ky} + x_n q_{ny} \delta_{ky}) dV \right\}; \quad (2.8)$$

$$M_{2k} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \int_V (x q_{kx} - x_n q_{nx} \delta_{kx} + y q_{ky} - x_n q_{ny} \delta_{ky}) dV \right\}.$$

Для дальнейшего анализа полезно выписать все составляющие
(2.8) в явном виде:

$$M_{0x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (-y q_{yy} - z q_{zy} + y q_{xx}) dv \right\};$$

$$M_{0y} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (x q_{yy} - x q_{xx} - z q_{zx}) dv \right\};$$

$$M_{0z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (x q_{zy} + y q_{zx}) dv \right\};$$

$$M_{1x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (-y q_{yx} - z q_{zx} - y q_{xy}) dv \right\};$$

$$M_{1y} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (x q_{yx} + x q_{xy} + z q_{zy}) dv \right\};$$

$$M_{1z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (x q_{zx} - y q_{zy}) dv \right\};$$

$$M_{2x} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (-y q_{yx} - z q_{zx} + y q_{xy}) dv \right\};$$

$$M_{2y} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (x q_{yx} - x q_{xy} - z q_{zy}) dv \right\};$$

$$M_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (xq_{zx} + yq_{zy}) dv \right\}.$$

Проанализируем теперь, каким образом сказываются свойства симметрии проводящего тела на общем выражении для электродинамического момента (2.7). Этот анализ удобно провести, задавая симметрию тела относительно координатных плоскостей. Из замкнутости вихревых токов для нашего конкретного случая следуют следующие свойства симметрии вихревых токов:

1) относительно плоскости (xoz)

$$j_{xx}(x, -y, z) = -j_{xx}(x, y, z); j_{xy}(x, -y, z) = j_{xy}(x, y, z);$$

$$j_{yx}(x, -y, z) = j_{yx}(x, y, z); j_{yy}(x, -y, z) = -j_{yy}(x, y, z); \quad (2.9)$$

$$j_{zx}(x, -y, z) = -j_{zx}(x, y, z); j_{zy}(x, -y, z) = j_{zy}(x, y, z);$$

2) относительно плоскости ($yo\bar{z}$)

$$j_{xx}(-x, y, z) = -j_{xx}(x, y, z); j_{xy}(-x, y, z) = j_{xy}(x, y, z);$$

$$j_{yx}(-x, y, z) = j_{yx}(x, y, z); j_{yy}(-x, y, z) = -j_{yy}(x, y, z); \quad (2.10)$$

$$j_{zx}(-x, y, z) = j_{zx}(x, y, z); j_{zy}(-x, y, z) = -j_{zy}(x, y, z);$$

3) ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОСТИ (xoy)

$$j_{xx}(x, y, -z) = -j_{xx}(x, y, z); \quad j_{xy}(x, y, -z) = -j_{xy}(x, y, z);$$

$$j_{yx}(x, y, -z) = -j_{yx}(x, y, z); \quad j_{yy}(x, y, -z) = -j_{yy}(x, y, z); \quad (2.11)$$

$$j_{zx}(x, y, -z) = j_{zx}(x, y, z); \quad j_{zy}(x, y, -z) = j_{zy}(x, y, z) ..$$

Предположим, что проводящее тело обладает симметрией относительно плоскости (xoz). Это приводит к симметричным пределам интегрирования по переменной y в формулах (2.8), в результате чего интегралы от нечетных функций по y обратятся в нуль. Таким образом, используя формулы (2.9), находим:

$$M_{ox} = \frac{1}{2} Re \left\{ \int_V (-y q_{yy} - z q_{zy} + y q_{xx}) dv \right\};$$

$$M_{oy} = 0;$$

$$M_{oz} = \frac{1}{2} Re \left\{ \int_V (x q_{zy} + y q_{zx}) dv \right\};$$

$$M_{ix} = 0;$$

$$M_{iy} = \frac{1}{2} Re \left\{ \int_V (x q_{yx} + x q_{xy} + z q_{zy}) dv \right\};$$

$$M_{iz} = 0;$$

$$M_{zx} = 0;$$

$$M_{2y} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (xq_{yx} - xq_{xy} - zq_{zy}) dv \right\};$$

$$M_{2z} = 0.$$

Следовательно, выражения для составляющих момента получаются следующие:

$$M_x = \rho_M M_{0x} \sin 2\alpha;$$

$$M_y = \rho_M (M_{1y} \cos 2\alpha + M_{2y}); \quad (2.12)$$

$$M_z = \rho_M M_{0z} \sin 2\alpha.$$

Теперь добавим еще дополнительные условия симметрии (2.10) относительно плоскости (yoz). Рассуждая аналогично, находим

$$M_{0x} = 0;$$

$$M_{0y} = 0;$$

$$M_{0z} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_V (xq_{zy} + yq_{zx}) dv \right\};$$

$$M_{1x} = M_{1y} = M_{1z} = 0;$$

$$M_{2x} = M_{2y} = M_{2z} = 0.$$

Выражения для составляющих момента

$$M_x = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = \rho_m M_{0z} \sin 2\alpha. \quad (2.13)$$

Использование условий симметрии (2.11) относительно плоскости (xoy) ничего нового не дает, по сравнению с формулами (2.13).

При изменении угла α на величину π формулы (2.7) остаются прежними. Следовательно, момент не зависит от знака поля.

Предположим теперь еще, что после поворота на угол $\alpha' < \pi$ координатной плоскости (xoz) вокруг оси Z относительно проводящего тела мы совместили ее с новой плоскостью симметрии, относительно которой геометрические свойства тела сохраняются. Тогда значения коэффициентов M_{0x} , M_{1y} , M_{2y} и M_{0z} должны сохраниться, а также и формулы (2.12), где $\alpha \rightarrow \alpha + \alpha'$. Поскольку при преобразовании $\alpha \rightarrow \alpha + \alpha'$ функции $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ всегда получают новые значения, то из формул (2.12) вытекает противоречие - момент не сохраняется. Выход из противоречия разрешается единственным образом, если положить

$$M_{0x} = M_{1y} = M_{2y} = M_{0z} = 0.$$

Следовательно, если проводящее тело обладает двумя или больше плоскостями симметрии (пересекающимися по оси Z) относительно которых геометрические свойства тела не меняются и угол α' между плоскостями меньше π , то электродинамический момент

$$\vec{M} = 0 \quad (2.14)$$

Это характерно для тел, имеющих форму поперечного сечения (параллельно плоскости x, y) в виде равнобедренного треугольника, квадрата, шестиугольника и т.п. Круглый цилиндр будет иметь бесконечное множество плоскостей симметрии.

Если проводящие тела обладают одной степенью свободы, то для асимметричных случаев можно воспользоваться формулой

$$M_z = \rho_M (M_{0z} \sin 2\alpha + M_{1z} \cos 2\alpha), \quad (2.15)$$

представляющей наибольший интерес для практических задач.

§ 3. Зависимость электродинамического момента от частоты внешнего поля

Проводящие тела со сложной геометрической конфигурацией имеют обычно и весьма сложные зависимости электродинамического момента от частоты.

Невозможность непосредственного математического расчета для трехмерных тел, а также трудность экспериментального измерения сильно препятствуют решению этой проблемы на необходимом теоретическом уровне. Однако, как показали проведенные нами в [4, 5] исследования, все же можно провести некоторую классификацию частотных зависимостей электродинамического момента на основе характерных геометрических особенностей проводящих тел. А именно, можно выделить четыре основных типа частотных зависимостей, которые наблюдаются как для трехмерных, так и для двумерных проводящих тел (т.е. тел, имеющих один бесконечный размер). Теоретический расчет динамических характеристик для таких проводников может быть проведен с необходимой

точностью, допускающей подробный анализ полученных зависимостей. Типичные примеры таких тел приведены на рис. 4, где изображены профили поперечных сечений различных бесконечных стержней. Внешнее переменное магнитное поле \vec{B} направлено перпендикулярно к оси стержней и составляет угол α с осью X -ов.

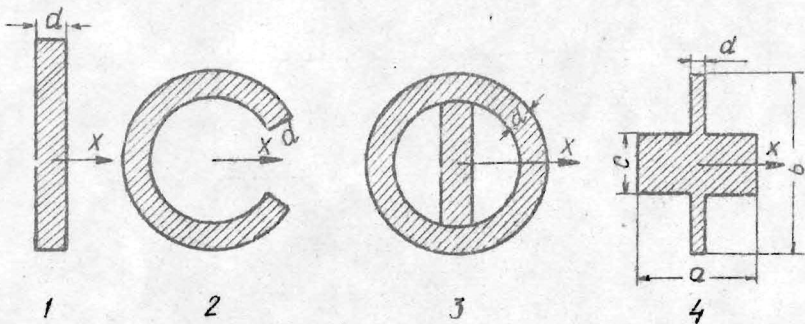


Рис. 4.

Типы тел, дающих основные виды частотных зависимостей момента:

- 1 - пластина,
- 2 - полый цилиндр с прорезью,
- 3 - круглый цилиндр с внутренними неоднородностями,
- 4 - крестообразный стержень.

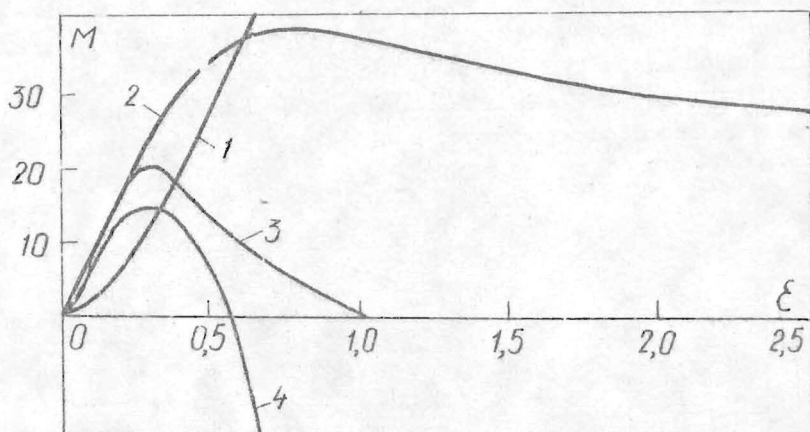


Рис. 5.

На рис. 5 приведены кривые зависимости $M_{0z}(\xi)$ (см. формулу (2.13)), соответствующие проводникам, изображенным на рис. 4, причем параметр $\xi = \sigma \mu_0 \omega d^2$ характеризует глубину проникновения поля. В качестве характерного размера d выбирается наименьший геометрический размер; он указан на рис. 4. Для первого профиля (рис. 4) функция $M(\xi)$ монотонно растет и стремится к своему предельному значению, которое соответствует моменту, действующему на идеально проводящее тело такого же сечения ($\sigma \omega \rightarrow \infty$). Типичным примером таких зависимостей электродинамического момента от частоты может служить бесконечный цилиндр эллиптического сечения [3]. Начальный участок этой кривой, где $M \sim \xi^2$, изображается кривой 1, рис. 5.

Характерным примером второго типа частотных зависимостей является полый цилиндр с прорезью (рис. 4, 2).

Соответствующая ему частотная кривая 2 (рис. 5) при малых значениях ξ монотонно растет, достигает максимума и затем постепенно уменьшается до некоторого предельного значения, которое несколько меньше максимального. Это объясняется следующим образом. Величина электродинамического момента определяется шириной прорези C . В предельном случае, когда $\xi \rightarrow \infty$, $M \sim C^2$. При значениях $\xi \sim 1$, т.е. когда распределение вихревых токов еще носит выраженный объемный характер, можно сказать, что "эффективное" значение C как бы возрастает до величины $C + \delta$, где $\delta = \frac{1}{\sqrt{6M_0\omega}}$ - глубина проникновения поля, что и приводит к увеличению величины момента. При уменьшении ξ от единицы до нуля "эффективная" ширина прорези $C - \delta$, разумеется, все время возрастает, однако сильное уменьшение плотности объемных вихревых токов на этих частотах приводит в результате к уменьшению величины действующего момента.

Третий тип частотной зависимости, изображенной на рис. 5, кривая 3, соответствует круглому цилиндру с внутренними неоднородностями (рис. 4,3). Для определенности внутри цилиндрической оболочки помещена пластина таких же размеров, как и на рис. 4,1. Другими словами, можно легко сравнить величину электродинамического момента, действующего на пластину без оболочки и с присутствием таковой и тем самым оценить экранирующее действие оболочки на величину момента. При малых значениях ξ величина момента возрастает так же, как и в предыдущих случаях, затем достигает максимума и постепенно уменьшается до нуля, по мере того как все сильнее проявляется экранирующее действие оболочки, вызванное ярко выраженным поверхностным эффектом в ней. Интересно отметить, что несмотря на экранирующее действие оболочки, значения кривой 3 (рис.5), вплоть до максимума, лежат значительно выше соответствующих значений кривой 1

(рис. 5). Это объясняется тем, что обратная реакция поля, вызываемая вихревыми токами в пластине, приводит к определенному перераспределению вихревых токов в оболочке, и тем, что характерный размер такой системы больше, чем для отдельной пластины.

Примером четвертого типа зависимостей может служить проводящий крестообразный стержень, изображенный на рис. 4,4 при условии, что площади $S_1 = a \cdot c$ горизонтальной и $S_2 = b \cdot d$ вертикальной полос и линейные размеры b и a удовлетворяют неравенствам $S_1 > S_2$ и $b > a$. Кроме того, необходимо, чтобы c было меньшим, чем a . При соблюдении указанных условий ожидается следующее изменение момента как функции частоты. Поскольку при малых ϵ значение действующего момента определяется объемным распределением вихревых токов, то величина его будет существенно зависеть от соотношения между S_1 и S_2 , в частности, при принятых выше допущениях тело будет вести себя как проводящая пластина с площадью S_1 . При возрастании частоты, однако, происходит перераспределение плотности вихревых токов от объемных к поверхностным, и тело начинает вести себя как вертикальная пластина площади S_2 , т.е. определяющим в величине момента становится соотношение $a < b$. Изложенным и объясняется характер кривой 4 (рис. 5), которая в начальном участке аналогична другим кривым, затем достигает максимума, падает, переходит через нуль и стремится к предельному отрицательному значению так же, как и кривая 1 для проводящей пластины. Очевидно, что этот подход можно с успехом применять и для объяснения аналогичных зависимостей у объемных тел. Кроме того, эти явления могут суммироваться и приводить к еще более сложным зависимостям $M(\epsilon)$. Правда, следует тут же подчеркнуть, что сложный характер эти зависимости несут только при малых значениях ϵ , т.е. $\epsilon \approx 1$, что непосредственно видно и на кривых (рис. 5).

При больших ζ эти кривые или сразу достигают своего предела, или ведут себя, как кривые 1 или 4 (рис. 5).

§ 4. Динамика ориентирования тел электромагнитным полем

Используя угловую зависимость электродинамического момента (2.5) и уравнения Эйлера, можно написать следующую систему уравнений для описания движения твердого тела в однородном поле

$$I_1 \frac{d^2 \Omega_1}{dt^2} + (I_3 - I_2) \Omega_2 \cdot \Omega_3 = p_M M_{1e mn} \cos \alpha_e \cos \alpha_m;$$

$$I_2 \frac{d^2 \Omega_2}{dt^2} + (I_1 - I_3) \Omega_3 \cdot \Omega_1 = p_M M_{2e mn} \cos \alpha_e \cos \alpha_m; \quad (4.1)$$

$$I_3 \frac{d^2 \Omega_3}{dt^2} + (I_2 - I_1) \Omega_1 \cdot \Omega_2 = p_M M_{3e mn} \cos \alpha_e \cos \alpha_m,$$

где $I_1 \Omega_1, I_2 \Omega_2, I_3 \Omega_3$, соответственно, моменты инерции и проекции вектора угловой скорости относительно главных осей инерции.

Вообще говоря, в эти уравнения еще следует добавить диссипативные члены, определяющие различного рода трения, которые, однако, ввиду их сложности и неопределенности мы опускаем. Интегрирование системы (4.1) ограничено лишь весьма упрощенными частными случаями.

Как уже было отмечено выше, одномерный случай ориентации представляет наиболее общий интерес для практичес-

ких задач. Кроме того, при решении технологических задач прежде всего необходимо знать время продолжительности ориентирования (т.е. время релаксации). Обычно в процессе ориентации детали находятся на твердом основании, в результате чего приходится учитывать влияние сухого (кулонова) трения. Принимая во внимание все эти соображения, на основе формул (4.1) и (2.15) можно написать следующее уравнение динамики :

$$I \frac{d^2\alpha}{dt^2} + M_T \operatorname{sign} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) + M_0 \sin 2\alpha + M_1 \cos 2\alpha = 0, \quad (4.2)$$

где I - момент инерции ,
 M_T - момент сухого трения ,

$$\operatorname{sign} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = \begin{cases} 1, & \frac{d\alpha}{dt} > 0 \\ -1, & \frac{d\alpha}{dt} < 0 \end{cases} ;$$

$$M_0 = \rho_M M_{0z} ; \quad M_1 = \rho_M M_{1z} ;$$

Начальные условия для практических задач полезно задавать следующим образом:

$$\alpha|_{t=0} = \alpha_0 ; \quad \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (4.3)$$

Вводя новые переменные

$$x = 2\alpha + a_0 \operatorname{ctg} \frac{M_1}{M_0} ; \quad \tau = \omega_0 t ;$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\sqrt{M_0^2 + M_1^2}}{I}} ; \quad q = \frac{M_T}{\sqrt{M_0^2 + M_1^2}} ;$$

получим уравнение

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + q \operatorname{sign}\left(\frac{dx}{d\tau}\right) + \sin x = 0 \quad (4.4)$$

и начальные условия

$$x|_{\tau=0} = 2\alpha_0 + a z c t g \frac{M_1}{M_0}; \quad \frac{dx}{d\tau}|_{\tau=0} = 0 \quad (4.5)$$

в безразмерном виде.

Таким образом, мы получили уравнение динамики (4.4) и начальные условия для асимметричного тела в форме, мало отличающейся от задачи для симметричного тела, исследованной в работе [6]. Аналогичные рассуждения дают следующее значение начального угла

$$x_0 = 2\alpha_0 + a z c t g \frac{M_1}{M_0} = \pi - 2q. \quad (4.6)$$

Величина q также будет характеризовать точность ориентации.

Согласно теории Крылова-Боголюбова, первое приближение решения уравнения (4.4) определяется формулами

$$x = a \cos \Psi;$$

$$\frac{da}{d\tau} = q A_1(a); \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = 1 + q B_1(a), \quad (4.7)$$

где

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Psi, -a \sin \Psi) \sin \Psi d\Psi;$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \Psi, -a \sin \Psi) \cos \Psi d\Psi.$$

Функция f определяется уравнением (4.4)

$$f(x, \frac{dx}{d\tau}) = \frac{1}{q} (x - \sin x) - \text{sign} \left(\frac{dx}{d\tau} \right).$$

После вычисления интегралов находим

$$x = a \cos \Psi, ,$$

$$\frac{da}{d\tau} = -\frac{2q}{\pi}, \quad \frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} J_1(a). \quad (4.8)$$

Проинтегрировав теперь второе уравнение (4.8) следующим образом :

$$\int_{x_0}^q da = -\frac{2q}{\pi} \int_0^{\tau} d\tau,$$

находим

$$\tau = \frac{\pi}{2q} [x_0 - q], \quad (4.9)$$

где пределы интегрирования по амплитуде берутся от начального значения амплитуды до возможного минимального значения, когда силы инерции становятся несущественными. Время релаксации t_n можно вычислить по формуле

$$t_n = \frac{1}{\omega_0} \tau ;$$

на основе формул (4.5), (4.9) и (4.10) можно написать следующую приближенную формулу для оценки времени

$$t_n = \frac{\pi}{2q} \frac{\pi - 3q}{\omega_0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi \sqrt{M_0^2 + M_1^2} - 3M_T}{M_T \sqrt[4]{M_0^2 + M_1^2}} \sqrt{I}, \quad (4.11)$$

которой можно пользоваться для решения практических задач.

Заключение

Подытоживая изложенные результаты по теории ориентации, отметим, что основная задача теории — это определение амплитуды и частоты поля. Форма, материал и ограничение на начальное расположение детали являются заданными величинами. В первую очередь нужно оценить необходимую величину момента. Для этой цели можно использовать результаты, изложенные в §§ 2 и 4. § 3 дает возможность оценить угловые зависимости момента асимметричных тел, причем коэффициенты M_{ik} могут быть оценены или из чисто геометрических соображений, или путем экспериментальных измерений. Продолжительность ориентации, обычно задаваемая конкретными технологическими процессами, может быть оценена по результатам § 4.

Л и т е р а т у р а

1. Иoffee Б.А., Калнинь Р.К. Ориентирование деталей электромагнитным полем. Рига, "Зинатне", 1972.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., ГИИТЛ, 1957.
3. Устинов Н.Н., Сермонс Г.Я. Силовое воздействие электромагнитного поля на проводящий цилиндр эллиптического сечения. - "Изв. АН Латв.ССР, Сер. физ. и техн. наук", 1973, №1.
4. Граубинь Я.Е., Сермонс Г.Я., Устинов Н.Н. Влияние внутренних неоднородностей на величину электродинамического момента, действующего на проводящее тело в электромагнитном поле. - "Изв. АН Латв. ССР, Сер. физ. и техн. наук," 1973, №3.
5. Граубинь Я.Е., Сермонс Г.Я., Устинов Н.Н. Влияние геометрической формы проводящего тела на величину электродинамического момента в электромагнитном поле. - "Изв. АН Латв. ССР, Сер. физ. и техн. наук", 1973, №2.
6. Сермонс Г.Я., Устинов Н.Н., Керн А.Я. К определению продолжительности ориентирования продолговатых немагнитных токопроводящих тел однородным переменным магнитным полем. - "Изв. АН Латв. ССР, Сер. физ. и техн. наук," 1973, №1.

ИЗМЕРЕНИЕ РАСХОДА И ДОЗИРОВАНИЕ ЖИДКИХ
МЕТАЛЛОВ

Создание бесконтактных систем контроля и управления потоком жидкого металла является актуальным для многих технологических процессов в металлургии и литейном производстве, автоматизация которых находится в прямой зависимости от наличия эффективных средств транспортировки и измерения расхода жидких металлов. К ним можно отнести получение редких металлов, ряда сплавов, процесс вакуумирования металла, в том числе вакуумирование стали. Измерение расхода жидкого металла позволяет управлять процессом заливки автоматов литья под давлением, литниковых форм, прессов и т.п. Точная дозировка, улучшая качество отливки, сокращает потери металла.

Расходомеры могут найти широкое применение и в автоматизации производства методом центробежного литья труб различного сортамента.

Наиболее перспективными приборами для измерения расхода жидких металлов являются индукционные расходомеры.

Бесконтактные индукционные расходомеры основаны на измерении вторичных магнитных полей, возникающих при движении электропроводящей среды во внешнем магнитном поле. Вторичное магнитное поле в первом приближении пропорционально расходу (магнитному числу Рейнольдса). Измерение индуцированного поля позволяет определить величину расхода. Достоинством индукционных расходомеров является отсутствие контактов с контролируемой средой, сравнительно малый вес, непосредственное получение электрического

сигнала, обусловленного движением электропроводящей среды в магнитном поле, возможность выбора оптимальной частоты тока питания, обеспечивающей высокую чувствительность устройства. Одним из основных преимуществ бесконтактных электромагнитных расходомеров перед кондукционными является возможность получения достоверных данных сразу с момента появления жидкого металла в трубопроводе. Последнее обстоятельство особенно существенно при дозировании жидкого металла, когда трудно получить стабильную смачиваемость канала. Перечисленные выше достоинства особенно важны для расходомеров, предназначенных для работы в условиях высоких температур, вакуума и при наличии электромагнитных помех.

В настоящее время имеется положительный опыт эксплуатации бесконтактных индукционных расходомеров на жидкометаллических контурах.

§ I. Классификация индукционных расходомеров

Высокая температура и агрессивность жидкометаллических сред предъявляют жесткие требования к расходомерным устройствам. Во-первых, необходимо получить достаточный выходной сигнал с преобразователя расхода на значительном расстоянии от контролируемой среды. Во-вторых, необходимо обеспечить однозначность показаний при изменении температуры жидкого металла. В-третьих – обеспечить высокую надежность всего устройства в целом.

Многочисленные конструктивные решения индукционных бесконтактных измерителей расхода основаны на преобразовании магнитного потока, возбужденного наведенными в движущейся электропроводящей среде токами, в электрический сигнал с помощью различных систем измерительных

катушек и магнитопроводов.

В случае переменного магнитного поля возбуждения вторичный магнитный поток может быть разделен на две составляющие: магнитный поток, обусловленный собственно движением контролируемой среды в магнитном поле (скоростная составляющая вторичного магнитного поля), и магнитный поток, обусловленный вихревыми токами, возбужденными в проводящей среде (вихревая составляющая вторичного магнитного поля).

Следует учесть, что скоростная составляющая вторичного магнитного поля обусловлена лишь поперечной составляющей магнитного поля возбуждения ($[\vec{v} \vec{B}]$).

Вихревая составляющая связана с магнитным полем возбуждения и, повторяя конфигурацию поля возбуждения, приводит к уменьшению суммарного магнитного поля. Как скоростная, так и вихревая составляющие индуцированного магнитного поля зависят от геометрии преобразователя и проводимости контролируемой среды.

В большинстве случаев измерительные катушки регистрируют изменение поперечной компоненты магнитного поля возбуждения, вызванное индуцированным магнитным полем.

С целью выявления скоростной компоненты вторичного поля чаще всего применяется встречное включение приемных катушек, либо такое их геометрическое расположение, при котором отсутствует сигнал, обусловленный полем возбуждения (трансформаторная э.д.с.). Иногда применяется электрическая компенсация трансформаторной э.д.с.

В индукционных бесконтактных расходомерах используются постоянные, синусоидальные и импульсные во времени магнитные поля возбуждения. Наиболее распространенными являются синусоидальные во времени магнитные поля возбуждения.

В таблице I представлена классификационная схема

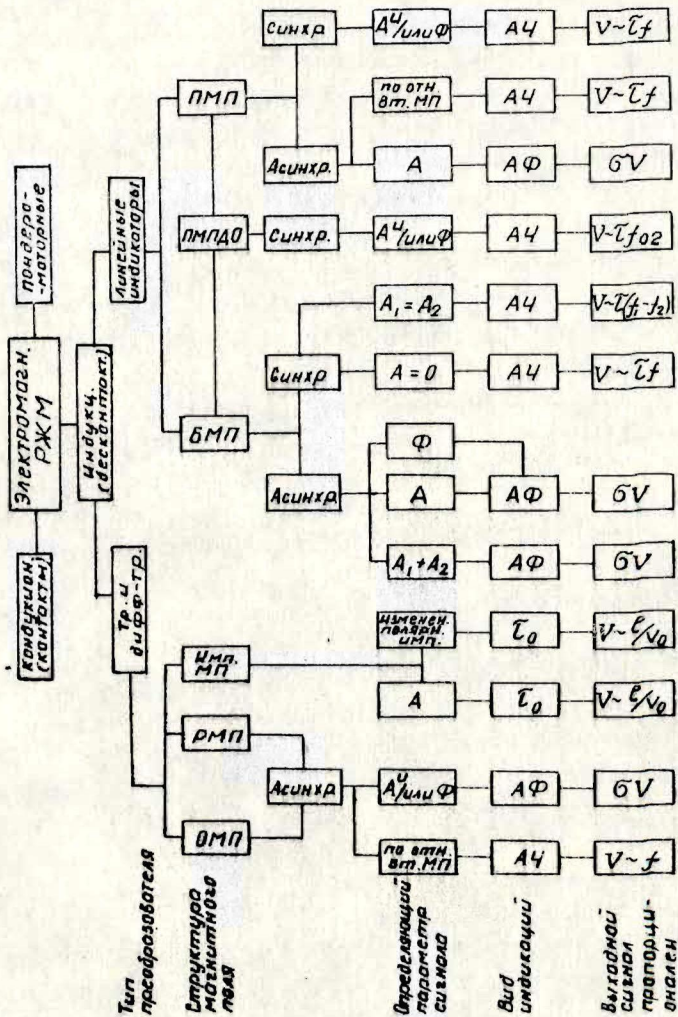


Таблица I

электромагнитных измерителей расхода жидких металлов.

По типу преобразователей известные индукционные расходомеры могут быть разделены на две группы [1]:

1. Расходомеры, использующие преобразователи трансформаторного и дифференциально-трансформаторного типа.

2. Расходомеры, использующие в качестве преобразователей линейные индукторы.

Далее индукционные расходомеры могут быть классифицированы по пространственной конфигурации магнитного поля возбуждения.

Для преобразователей первого типа — это либо осесимметричные магнитные поля возбуждения (ОМП), либо радиальные поля возбуждения (РМП).

Примерами расходомеров с осесимметричным магнитным полем возбуждения являются [1] — [3] и т.п., с радиальным полем возбуждения — [4] — [8] и другие.

Простота конструкции датчиков расходомеров, небольшое число катушек — основные достоинства расходомеров с осесимметричным магнитным полем возбуждения (цилиндрического типа). Существенным недостатком конструкции таких датчиков является сложность их установки на жидкометаллическом контуре, требующей "врезания" участка контура с датчиком. Датчики такого типа трудно защитить от теплового воздействия жидкого металла. Поэтому их применение для измерения расхода высокотемпературных жидких металлов ограничено температурными свойствами изоляционных и пропиточных материалов.

Преобразователи трансформаторного типа с радиальным магнитным полем возбуждения более сложны в изготовлении из-за наличия магнитопровода. Однако в большинстве случаев они легко устанавливаются на контуре без какого-либо существенного изменения конструкции трубопровода и нарушения его целостности.

В преобразователях второго типа — линейных индукторах

— используются две основные пространственно-временные структуры магнитного поля возбуждения:

1. Бегущие магнитные поля (БМП),
2. Пульсирующие магнитные поля (ПМП).

Примером расходомеров, использующих эффекты, возникающие при взаимодействии бегущих магнитных полей с электропроводящей средой являются [9 - 12].

Пульсирующие магнитные поля используются в расходомерах [13 - 17] и других.

Совокупностью этих двух полей является пульсирующее магнитное поле с движущейся пространственной огибающей (ПМЦО) [18], [19].

Из всех указанных расходомеров наиболее простыми, надежными и обладающими высокой чувствительностью являются приборы, в которых используются пульсирующие магнитные поля.

Бесконтактные индукционные расходомеры (БИР-и) по используемому физическим явлениям, лежащим в основе принципа измерения, могут быть разделены на асинхронные расходомеры и синхронные расходомеры.

К асинхронным расходомерам можно отнести приборы, использующие явление "деформации" или "сдвига" магнитного поля возбуждения при движении в этом поле электропроводящей среды.

Расходомеры, использующие преобразователи трансформаторного и дифференциально-трансформаторного типа, являются расходомерами асинхронного принципа действия.

К синхронным расходомерам можно отнести приборы, использующие как отсутствие вторичного магнитного поля (или связанных с этим эффектов) при равенстве скоростей магнитного поля возбуждения и контролируемой среды [9], так и эффекты, имеющие место при равенстве относительных скоростей среды и магнитных полей возбуждения [11].

Поскольку индуцированное при движении жидкого металла магнитное поле пропорционально $Re_m (\sigma v)$, то о скорости контролируемой среды можно судить по измерению одной из следующих величин:

1. Измерение величины суммарного магнитного поля;
2. Измерение величины индуцированного (вторичного) магнитного поля;
3. Измерение величины тока возбуждения.

Таким образом амплитуда, частота и фаза выходного сигнала (сигнала датчика) служат источником информации о скорости контролируемой среды.

В зависимости от конкретных требований, предъявляемых к расходомерам в целом, определяют один или несколько параметров выходного сигнала.

Основным параметром является амплитуда выходного сигнала, но во многих случаях с целью уменьшения влияния электромагнитных помех учитывается и фаза выходного сигнала [20]. Таким образом, применяется амплитудно-фазовая индикация выходного сигнала. Этот наиболее распространенный вид индикации выходного сигнала характерен для асинхронных методов измерения расхода жидкого металла. При амплитудно-фазовой индикации преобразованный выходной сигнал пропорционален магнитному числу Рейнольдса или для конкретного устройства $\sim \sigma v R_0$. Разновидностью амплитудно-фазовой индикации являются амплитудная или фазовая индикация суммарного магнитного поля, индуцированного магнитного поля, либо измерение амплитуды тока возбуждения [21]. Чаще всего указанные методы применяются в индикаторах расхода, имеющих невысокую точность измерения.

Для синхронных методов характерно использование амплитудно-частотной индикации. Суть амплитудно-частотной индикации заключается в следующем: определяют частоту тока возбуждения, при которой амплитуда вторичного маг-

Таблица 2

Т и п ы	
переменного перепада давлений /диаметры/	
Зависимость характеристики от расхода	$Q = K\sqrt{h}$
п о т е р я напора	значительная
Измерение очень больших расходов	обеспечивается
Измерение очень малых расходов	не обеспечивается
Измерение пульсирующих по- токов	не обеспечивается
Измерение скорости потока при его реверсировании	не обеспечивается
Необходимость разборки трубо- провода для установки датчика	требуется
Изменение плотности и вязкос- ти жидкости	требуется компенсация
Наличие твердых веществ в пото- ке	недопустимо
Изменение электропроводности	зависимости нет
Диапазон измерения	I : 5
Погрешность измерения, % /дли- тельная /	$1,5 + 2,5$

расходомеров			
электромагнитные			
контактные	бесконтактные		
	асинхронные	синхронные	импульсные
$Q = K U$	$Q = K U$	$Q = K f$	$Q = K U_0$
отсутствует	отсутствует		
обеспечивается	обеспечивается	ограничено	обеспечивается
обеспечивается	ограничено	не обеспечивается	не обеспечивается
обеспечивается	обеспечивается	не обеспечивается	обеспечивается, ограничено
точное измерение	точное измерение	не обеспечивается	обеспечивается, ограничено
обеспечивается	обеспечивается	обеспечивается, ограничено	обеспечивается, ограничено
требуется	не	требуется	
На показания не влияет			
Допустимо			
Практически не зависит	Ограничено		
I : 10	I : 10	I : 10	ограничен (1:3)
1,0 + 2,5	1,0 + 5,0	1,0 + 5,0	1,0 + 5,0

нитного поля равна нулю, либо амплитуды вторичных магнитных полей равны между собой [22], [23].

Разновидностью амплитудно-частотной индикации, применяемой в асинхронных расходомерах, является определение расхода по отношению амплитуды вторичных магнитных полей, индицируемых двумя группами приемных катушек. При этом, хотя частота тока питания (магнитного поля возбуждения) не меняется в процессе измерения расхода, она является одним из основных параметров при определении скорости контролируемой среды [16], [24].

При амплитудно-частотной индикации преобразованный выходной сигнал пропорционален скорости контролируемой среды, что позволяет считать такие методы беспробивными.

Следует отметить, что расходомеры, использующие импульсные во времени магнитные поля возбуждения, также можно разделить по принципу измерения на две группы. Однако, если расходомеры, определяющие скорость контролируемой среды по амплитуде, наведенной в приемной катушке, можно отнести к асинхронным, то расходомеры, где скорость среды определяется по времени перехода сигнала через ноль, строго отнести к синхронным расходомерам нельзя.

В таблице 2 приведены сравнительные характеристики наиболее распространенных типов расходомеров жидких металлов.

§ 2. Характеристики индукционных расходомеров

Магнитогидродинамические взаимодействия, используемые в индукционных расходомерах, линейно зависят от

скорости (расхода) только при малых магнитных числах Рейнольдса. При увеличении $Re_m(q)$ выходные характеристики датчиков становятся существенно нелинейными. Указанная нелинейность выходной характеристики при больших Re_m имеет место и для расходомеров, использующих эффект синхронности. Это связано с неравномерным распределением скорости по сечению канала. На величину сигнала дифференциальных измерителей расхода оказывают влияние параметры контролируемой среды и в первую очередь электропроводность. Изменение проводимости среды при постоянном расходе (скорости) приводит к изменению показаний по отношению к расходу q , а следовательно, к появлению дополнительной погрешности.

Поскольку величина выходного сигнала является функцией как параметров контролируемой среды, так и геометрических параметров датчика, а также частоты тока питания, то необходимо определить условия, при которых метрологическая характеристика должна удовлетворять требованию линейности и однозначности и, кроме того, обладать максимальной крутизной S .

Наиболее широкое применение для измерения расхода электропроводящих сред нашли асинхронные методы с пульсирующим магнитным полем возбуждения.

В качестве преобразователей используются линейные индукторы двух типов: приемные и намагничивающие катушки размещены либо на отдельных индукторах, либо на одном индукторе. Блок-схема расходомера представлена на рис. 1.

Как показали теоретические и экспериментальные исследования [1], [20], величина выходного сигнала линейно зависит от скорости при $Re_m \leq 0,5 Re_{m \text{ опт}}$ и имеет максимум, не зависящий от проводимости контролируемой среды, при частоте тока питания

$$f_{\text{опт}} = \frac{\tau \operatorname{th} \pi \tau^{-1} (\Delta - B) + \pi B}{2 \mu_0 \sigma v \tau^2}, \quad (1)$$

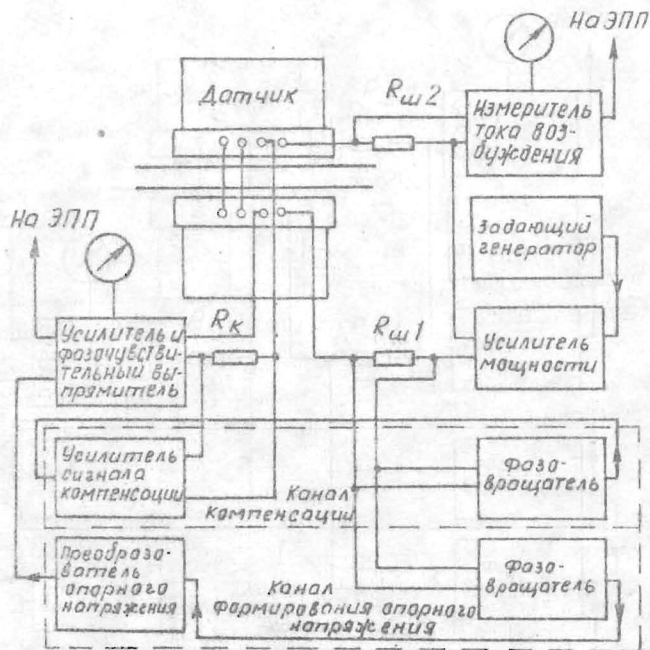


Рис. 1.

где 2Δ - величина рабочего зазора датчика; $2b$ - толщина рабочего участка канала.

$Re_{тонт}$ связано с безразмерной частотой условием

$$\frac{Re_{тонт}^2}{[\bar{\alpha} + th\bar{\alpha}(\kappa^{-1}-1)]^2} - \frac{\bar{\omega}^2}{[\bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha} th\bar{\alpha}(\kappa^{-1}-1)]^2} = 1, \quad (2)$$

где $\kappa = \delta/\Delta$, $\bar{\alpha} = \pi^5/\tau$.

Частота тока питания дифференциальных измерителей расхода не меняется, поэтому чувствительность конкретного устройства постоянна.

В ряде случаев требуется линейная выходная характеристика в широком диапазоне скоростей (Re_m). Изменение крутизны метрологической характеристики объясняется зависимостью оптимальной частоты тока питания от Re_m :

$$\bar{\omega}_{opt} = \left\{ [\bar{\alpha} \operatorname{th} \bar{\alpha} (\kappa^{-1} - 1) + \bar{\alpha}^2]^2 + \bar{\alpha}^2 Re_m^2 \right\}^{1/2}$$

Установлено, что на оптимальной частоте выходной сигнал, снимаемый с приемных катушек датчика, связан с частотой тока питания [1, 20].

Изменение частоты тока питания таким образом, чтобы разность фаз между током и выходным сигналом была равна нулю, позволит значительно расширить линейный участок метрологической характеристики. Показания прибора при таком способе индикации практически не зависят от изменения электропроводности контролируемой среды. Схема такого устройства отличается от схемы, приведенной на рис. 1, наличием блока автоматической подстройки частоты тока питания, включающего квадратную цепь, фазочувствительный выпрямитель и управляющую схему. Квадратурная составляющая сигнала, обусловленная изменением оптимальной частоты, выделяется фазочувствительным выпрямителем. Величина и полярность выходного тока выпрямителя соответствуют величине и знаку изменения оптимальной частоты.

Использование метода отношений [24] позволяет создать расходомер, который обеспечит достаточную точность измерений без предварительной тарировки на жидкометал-

лическом контуре.

Блок-схема такого расходомера приведена на рис. 2.

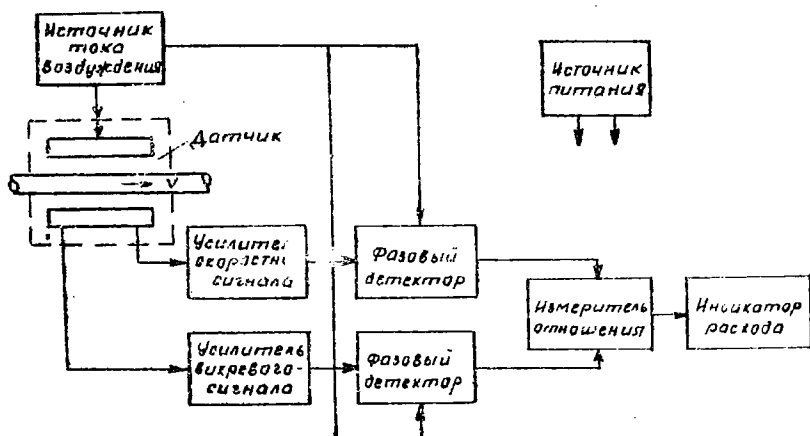


Рис. 2.

Приемный индуктор имеет две группы катушек, расположенных симметрично относительно плоскости нулевого значения магнитного поля возбуждения. Величина отношения суммы и разности вторичных э.д.с. в приемных катушках позволяет определить скорость контролируемой среды:

$$v = 2\bar{c}f \frac{\epsilon_{\text{скор.}}}{\epsilon_{\text{вихр.}}}$$

Индикатор расхода при известных величинах полусного шага и частоты тока питания градуируется непосредственно в единицах скорости (расхода).

На рис. 3 представлены результаты расчета выходных сигналов и их отношения как функции безразмерной частоты в случае прямоугольного канала конечной ширины с отношением сторон, равным 0,25 ($b/a = 0,25$).

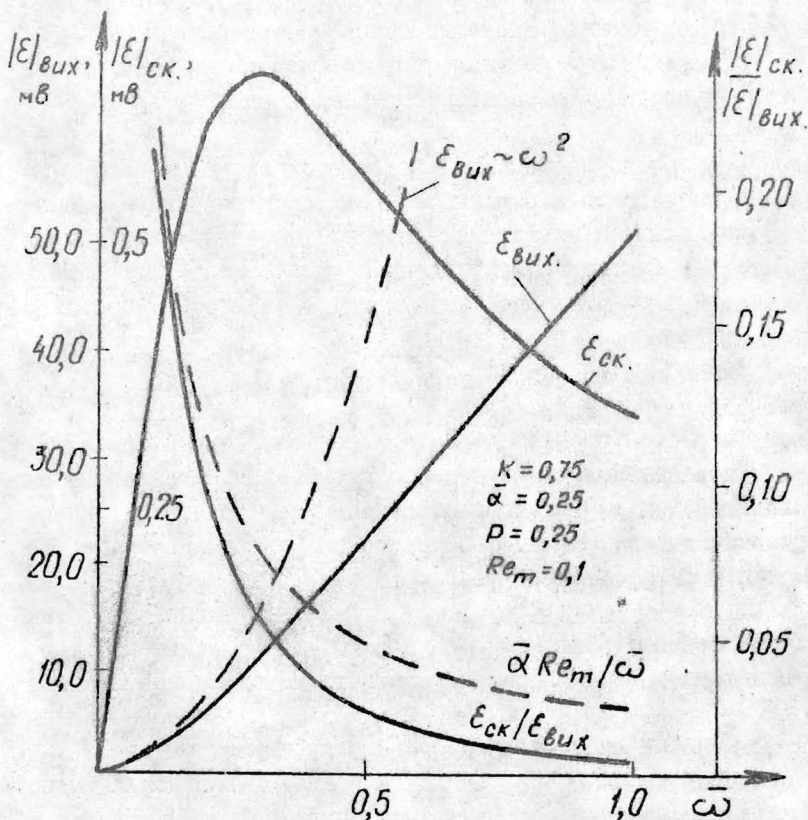


Рис. 3.

Результаты экспериментальных исследований на жидко-металлических контурах показывают, что среднеквадратичная погрешность в определении расхода не превышает 3%, причем не наблюдается зависимость показаний от изменения электропроводности контролируемой среды в широких пределах.

§ 3. Измерение расхода нестационарных потоков жидкого металла

Создание систем автоматического регулирования технологических процессов требует измерения расхода с последующей выдачей управляющих сигналов нестационарных потоков.

Быстродействие бесконтактных электромагнитных расходомеров, линейность их метрологических характеристик, постоянство проходного сечения, отсутствие силового воздействия со стороны датчика, искажающего спектр пульсаций потока, указывают на перспективность применения упомянутых устройств для определения параметров нестационарных потоков.

Измерение нестационарных потоков жидких металлов накладывает дополнительные требования на вторичную аппаратуру расходомерных устройств, и в первую очередь, требование малой инерционности и высокой динамической точности. Одним из основных требований является также линейность метрологической характеристики, поскольку при нелинейной характеристике усредненный по времени сигнал не соответствует усредненному по времени расходу, что очень существенно с практической точки зрения. Основными параметрами приборов являются их частотные характеристики, которые определяют максимальную частоту колебаний потока, измеряемую без амплитудных и фазовых искажений [1].

Скорость неустановившегося потока жидкости часто меняется от нуля до максимальной величины (например, в дозаторах жидких металлов), причем при этом может непрерывно меняться распределение профиля скорости по сечению канала.

При контроле нестационарных потоков жидких металлов возникают следующие задачи:

- 1) непрерывное определение мгновенного значения расхода (скорости) в заданном промежутке времени;
- 2) определение среднего значения расхода неустановившегося течения за некоторый промежуток времени;
- 3) прямое или косвенное определение ускорений жидкого потока.

Если поток жидкого металла движется ускоренно в переменном магнитном поле, то вторичная э.д.с. состоит из двух квадратурных членов. Отношение амплитуды сигнала ускорения к амплитуде скоростного сигнала есть отношение частоты пульсаций потока к частоте магнитного поля возбуждения

$$\varepsilon_a / \varepsilon_v = \Omega / \omega .$$

Для измерения параметров быстропеременного потока применимы в основном расходомеры с постоянной частотой тока питания. Датчик дифференциального расходомера при питании его постоянным током позволяет определить ускорение потока жидкого металла. Скорость может быть определена путем интегрирования.

Отношение $\gamma = \frac{\Omega}{\omega}$ определяет разрешающую способность расходомерного устройства при регистрации быстропеременных процессов.

Следует учесть, что выбор частоты тока питания выше оптимальной при заданной величине Ω может привести к значительному снижению амплитуды скоростного сигнала [1], [25] и увеличению сигнала декомпенсации.

Экспериментально установлено, что погрешность измере-

ния мгновенной скорости невелика, если частота тока питания дифференциального расходомера выбрана не менее $5 + 10 \text{ гц}$ на 1 м/сек^2 .

Задача измерения расхода нестационарных потоков может быть решена путём использования двухканальных электромагнитных расходомеров, содержащих два индукционных преобразователя расхода, расположенных последовательно на трубопроводе [26]. Катушки возбуждения датчиков (рис. 4) запитаны таким образом, что магнитная индукция в преобразователе расхода (2) меняется во времени по закону $B_1 = B_0 \sin \omega t$, а в преобразователе (3) — по закону $B_2 = B_0 \cos \omega t$.

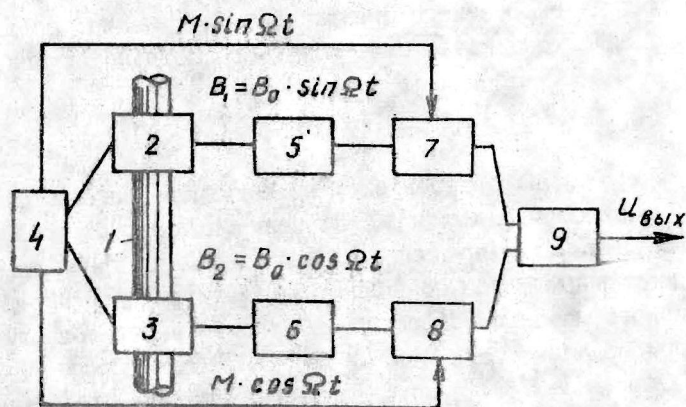


Рис. 4.

Сигналы расхода, снимаемые с каждого из преобразователей на оптимальной частоте, синфазны с индукцией со-

ответствующего преобразователя.

Сигналы с преобразователей подаются на усилители, напряжения на выходах которых соответственно равны:

$$U_1 = kq B_0 \sin \omega t \quad \text{и} \quad U_2 = kq B_0 \cos \omega t,$$

где k — коэффициент преобразования расхода,
 q — мгновенный расход.

Напряжения U_1 и U_2 умножаются на синфазные напряжения с постоянной амплитудой (устройства 7 и 8); тогда на выходе множительных устройств соответствующие напряжения будут:

$$U_3 = k'q \sin^2 \omega t \quad \text{и} \quad U_4 = k'q \cos^2 \omega t.$$

Суммирование напряжений U_3 и U_4 устройством (9) дает напряжение U на выходе преобразователя, равное мгновенному значению расхода в трубопроводе (и не содержащее составляющих с частотой изменения магнитной индукции, т.е.):

$$U_{\text{вых}} = k'q.$$

Испытания нескольких вариантов подобных расходомеров для сред с ионной проводимостью показали возможность измерения импульсных потоков с погрешностью, не превышающей 3% [26].

§ 4. Основы расчета и конструирования бесконтактных индукционных расходомеров

Благодаря наличию магнитного сердечника происходит

упорядочение магнитного потока, и в зоне жидкого металла создаются поля с необходимым распределением вдоль оси трубопровода. Для изготовления магнитопровода преобразователей так же, как и для аналогичных электромагнитных измерительных устройств, применяются магнито-мягкие материалы, главным образом листовая электротехническая сталь.

Рекомендуется практиковать искусственное старение магнитопровода путем длительной выдержки материала при определенной температуре, поскольку эффект старения наиболее выражен в области малых значений индукции [27], [1].

Преобразователь индукционного расходомера в большинстве случаев состоит из двух линейных индукторов: приемного и намагничивающего. Намагничивающий может быть двух типов: однофазный — пульсирующего магнитного поля и трехфазный — бегущего магнитного поля.

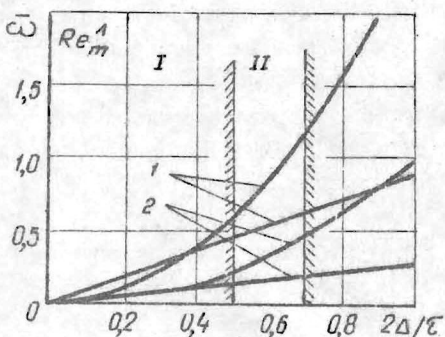
Приемный индуктор представляет собой однофазную магнитную систему. Расчет датчика включает в себя три этапа:

1. Расчет геометрии канала и полюсного деления намагничивающего индуктора при заданном диаметре трубопровода;
2. Расчет геометрии намагничивающего и приемного индукторов при выбранном полюсном шаге;
3. Выбор частоты тока питания датчика.

Известно [1], что геометрические параметры датчика должны выбираться из следующих условий :

$$0,75 \leq \bar{\alpha} \leq 1,0 ; \quad k \geq 0,75 ; \quad \alpha a \geq 2 ; \quad 2\Delta/\tau \geq 0,5 .$$

На рис. 5 представлены зависимости оптимальной частоты и линейного динамического диапазона от относительного зазора ($2\Delta/\tau$), а на рис. 6 относительной чувствительности \bar{S} от величины полюсного деления. Увеличение полюсного деления ($2\Delta/\tau < 0,5$) приводит к уменьшению оптимальной частоты тока питания, уменьшая при этом линейный динамический диапазон.



1 — $\kappa = 1,0$
2 — $\kappa = 0,75$

Рис. 5.

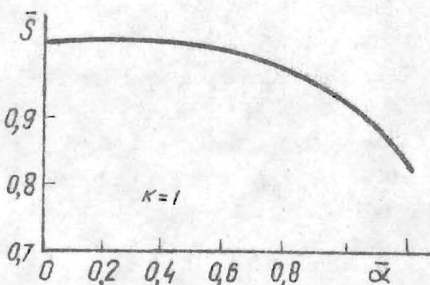


Рис. 6.

Исходным пунктом при проектировании датчиков является выбор геометрии канала. С целью уменьшения габаритов преобразователя, повышения чувствительности и помехоустойчивости необходимо стремиться к уплощению канала.

Для того, чтобы измерительный участок не вносил заметные потери давления, в основу расчёта геометрии канала легло требование равенства проходного сечения трубопровода и его прямоугольной части.

В общем случае размеры канала и полюсного деления могут быть вычислены по формулам:

$$a = 0,443 D C_1^{-0,5}$$

$$b = 0,443 D C_1^{0,5}$$

$$r = 1,391 D C_1^{0,5} C_2^{-1}$$

где

$$0,2 \leq C_1 \leq 0,4 \quad \text{и} \quad 0,75 \leq C_2 \leq 1,0.$$

Величина рабочего зазора датчика выбирается из условия необходимой теплоизоляции обмоток датчика от перегрева. Разность температур контролируемой среды и элементов датчика определяет выбор системы охлаждения: теплоотвод естественной конвекцией, принудительный теплоотвод потоком газа или жидкости, тепловое излучение с поверхностей конструктивных элементов датчика.

Величина полюсного деления определяет геометрию индуктора в целом. Она должна выбираться таким образом, чтобы при незначительном уменьшении чувствительности датчика амплитуда высших пространственных гармоник поля была минимальной и оставался минимальным вес датчика в целом.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований [1], показали, что отношение ширины паза l_n к полюсному шагу τ должно быть равно 0,5 - 0,6 при глубине паза около $0,6\tau$. Высота спинки индуктора выбирается из условия обеспечения механической прочности и удобства крепления индуктора на плате держателя, так как из-за малой величины индукции явление насыщения не достигается.

Число полюсов намагничивающего индуктора обычно выбирается равным пяти. Меньшее число полюсов искажает пространственную картину поля из-за продольного краевого эффекта. Увеличение числа полюсов приводит к существенному росту веса датчика и длины прямолинейного участка трубопровода, необходимого для установки датчика.

Индуктор бегущего магнитного поля рассчитывается по известной методике [28] с учетом выбранной величины полюсного деления.

Как показывает опыт, рациональным является выбор геометрии приемного индуктора с почти закрытыми пазами (рис. 7). Щель паза должна составлять приблизительно

$0,1\tau (\tau/2)$. Ширина и длина приемного индуктора равна ширине и длине намагничивающего.

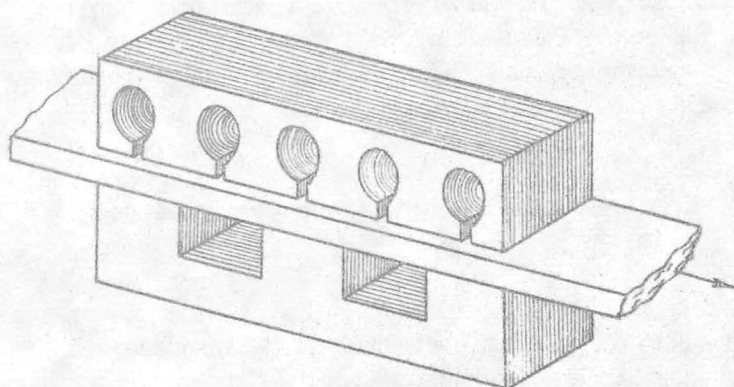


Рис. 7.

§ 5. Выбор частоты тока питания датчика

Частота тока питания для синхронных методов определяется диапазоном измеряемых скоростей ($\omega = 2\tau f$).

Для дифференциальных датчиков пульсирующего магнитного поля

$$f_{опт} = \frac{\tau t h \pi \tau^{-1} (\Delta - \beta) + \pi \beta}{2 \mu_0 \sigma v \tau^2}$$

Линейный диапазон метрологической характеристики может быть оценен из условия связи оптимальных значений $\bar{\omega}_{opt}$ и Re_m [25].

Для измерителей расхода по методу отношений рабочая частота выбирается равной $(0,3 \div 0,5) f_{opt}$. Поскольку для измерителей расхода определяющим фактором является магнитное число Рейнольдса, то с целью расширения линейного динамического диапазона в ряде случаев рациональным является уплощение канала.

§ 6. Погрешность индукционных расходомеров

Можно выделить несколько основных причин, приводящих к появлению погрешности индукционных расходомеров. В первую очередь сюда необходимо отнести собственные помехи датчика [25], [1].

Измерение э.д.с., пропорциональных величинам вторичных магнитных полей, предполагает исключение влияния магнитного поля возбуждения на величину э.д.с. в приемных катушках.

Последнее осуществляется несколькими способами.

Во-первых, соответствующим размещением или включением приемных катушек, при котором трансформаторная э.д.с. близка к нулю. Такая геометрическая компенсация имеет место в дифференциальных расходомерах.

Во-вторых, электрической компенсацией трансформаторной э.д.с., т.е. суммированием этой э.д.с. с равным ей по амплитуде, но противофазным напряжением. Это напряжение подается с двухкоординатного компенсатора, питаемого,

как правило, от тока возбуждения. Электрическая компенсация, например, имеет место в приборе, описанном в [25].

Электрическая компенсация осуществляется без доступа к датчику, поэтому в ряде случаев она применяется совместно с геометрической компенсацией.

В-третьих, магнитной компенсацией, заключающейся в том, что создаётся дополнительное магнитное поле компенсации компенсационными катушками, включенными в цепь последовательно с катушками возбуждения. Магнитное поле компенсации замыкается по магнитопроводу вне рабочей зоны датчика [1].

При наличии частичной или полной компенсации сигнала (геометрической, электрической или магнитной), погрешность измерения расхода будет зависеть от стабильности в процессе измерения [25].

Имеется несколько причин появления сигнала декомпенсации. Во-первых, геометрическая неточность изготовления индукторов датчика и неточность их установки на измерительном участке контура. Во-вторых, неидентичность электрических параметров приемных или намагничивающих катушек. В-третьих, наличие емкостной или индуктивной связи между измерительной цепью и цепью возбуждения магнитного поля и токов утечки через изоляцию.

Экспериментальные исследования стабильности сигнала декомпенсации показали, что основное влияние оказывает температура датчика, особенно в области высоких температур.

Рассмотрим основные причины температурной нестабильности остаточного сигнала декомпенсации.

Катушки индуктора могут смещаться вдоль зубцов магнитопровода вследствие пластичности компаунда. Это явление имеет место в высокоомных датчиках, изоляция которых выполнена на основе кремнийорганических лаков.

С целью уменьшения этого явления катушки фиксируются на зубцах, однако для увеличения стабильности э.д.с. декомпенсации высоту катушек датчика необходимо выбирать такой, чтобы небольшие смещения их не оказали заметного влияния на величину сигнала декомпенсации.

Другой не менее важной причиной зависимости э.д.с. декомпенсации от температуры является влияние токов утечки с возбуждающей обмотки в приемную. Величина этих токов обусловлена как разностью потенциалов между обмотками, так и температурной зависимостью электрического сопротивления и диэлектрической проницаемости компаунда и других изоляционных материалов, примененных в датчике.

Поэтому токи утечки, следовательно, э.д.с. декомпенсации изменяются как по амплитуде, так и по фазе в процессе нагрева датчика.

Качество изготовления и конструкцию датчика можно оценить по коэффициенту нестабильности э.д.с. декомпенсации, который целесообразно ввести следующим образом:

$$\zeta_H = \frac{\overline{\Delta \varepsilon_g}(\tau)}{S \Delta T} \quad ,$$

где ΔT - интервал температур, $\overline{\Delta \varepsilon_g}(\tau)$ - среднеквадратичное отклонение э.д.с. декомпенсации от начального значения.

На рис. 8 приведена частотная характеристика (1) и зависимость коэффициента нестабильности (2) в интервале температур (400 - 600)°С от частоты.

Из графика видно, что коэффициент нестабильности нелинейно зависит от частоты и резко возрастает с ее увеличением вследствие увеличения напряжения на обмотке возбуждения при неизменном токе, а также вследствие уменьшения емкостного сопротивления утечки. Такой характер зависимости накладывает определенные условия на

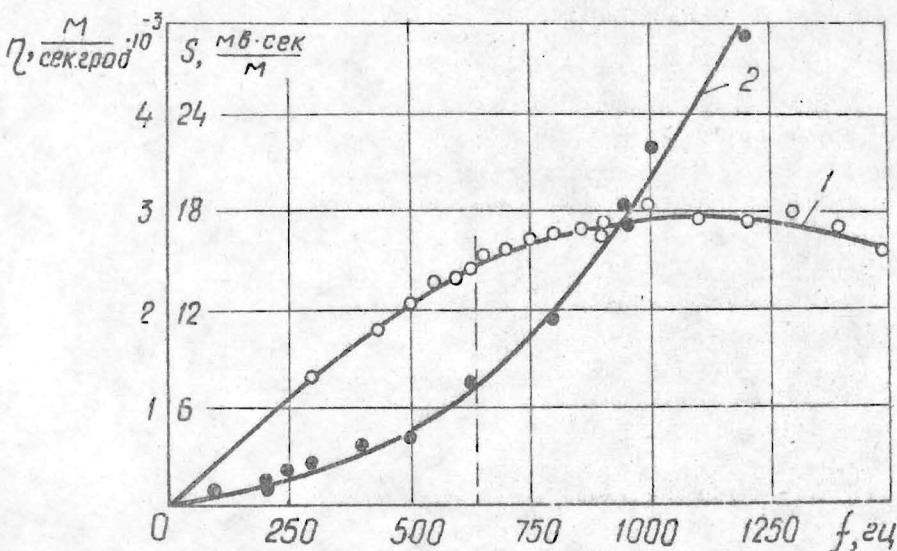


Рис. 3.

выбор рабочей частоты. Частота тока возбуждения при заданной геометрии датчика выбирается такой, чтобы обеспечить заданную точность измерения в интервале температур. С другой стороны, выбором геометрии датчика можно получить такую оптимальную частоту, при которой температурный коэффициент нестабильности не превысит допустимую величину. В данном случае рабочую частоту целесообразно выбирать ниже оптимальной, но следует иметь в виду, что нижний предел частоты ограничен условием получения линейной метрологической характеристики при максимальном расходе.

Следует отметить качественно различный характер кривых (1) и (2): если частотная характеристика (1) выражает суть физических процессов, то зависимость температурного коэффициента нестабильности γ от частоты

характеризует качество применяемых изоляционных материалов и конструкцию датчика.

Следует кратко остановиться на влиянии физических параметров и режиме течения контролируемой среды на погрешность индукционных расходомеров.

Известно [1], что распределение скорости по сечению канала приводит к некоторому изменению синхронной частоты, вызывая тем самым погрешность измерений.

Например, если канал конечной ширины полностью заполняет рабочий зазор датчика, то синхронная частота при малых значениях Re_m определится выражением [29]:

$$\omega = d v_{cp}^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\lambda_{\nu} \mathcal{K}_{\nu} \operatorname{sh} 2 \mathcal{K}_{\nu}} \left\{ \int_0^1 \operatorname{ch} \bar{\alpha}(1-\bar{y}) \operatorname{ch} \mathcal{K}_{\nu}(1+\bar{y}) \times \right. \\ \left. \times \left[\int_0^1 \bar{v}(\bar{x}, \bar{y}) \cos \lambda_{\nu} \bar{x} d\bar{y} \right] d\bar{y} \right\} : \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa_0^2 \lambda_{\nu}^4} \left(1 - \frac{\bar{\alpha} \operatorname{sh} 2 \bar{\alpha}}{\mathcal{K}_{\nu} \operatorname{sh} 2 \mathcal{K}_{\nu}} \right),$$

где $\mathcal{K}_{\nu} = (\bar{\alpha}^2 + \kappa_0 \lambda_{\nu}^2)^{1/2}$, $\kappa_0 = b/a$, $\lambda = \frac{2\nu+1}{2}\pi$.

Погрешность в общем случае зависит от проводимости среды, формы профиля скорости в канале, величины средней скорости, параметров датчика и канала.

Последнее справедливо в указанном приближении для всех бесконтактных индукционных расходомеров, использующих в качестве преобразователей линейные индукторы [30].

Исследование погрешности для канала произвольной формы, для произвольных значений Re_m является весьма сложной задачей.

Существенное влияние на точность измерения расхода может оказать изменение относительной электропро-

водности стенок канала и контролируемой среды при изменении температуры последней. Для синхронных расходомеров погрешность может достигать нескольких процентов, если не принять меры дополнительной температурной компенсации. Показания дифференциальных расходомеров практически не зависят от указанного выше фактора.

Экспериментальные исследования влияния стенок и профиля скорости на метрологическую характеристику расходомера проводились на твердой модели электропроводящей среды, состоящей из трех дисков различной толщины и электропроводности [31]. Диски могли вращаться независимо друг от друга. Исследования подтвердили основные выводы теории, изложенной в работе [30].

§ 7. Дозирование жидких металлов

Транспортирование и разливка жидкого металла — обязательные технологические операции в металлургическом и литейном производстве. Для этой цели в настоящее время в основном используются ковши, тигли или мерные черпаки.

В Советском Союзе и за рубежом проводится научно-экспериментальная работа в области электромагнитных способов транспортирования и разливки жидких металлов. Одна из основных проблем автоматизации процесса разлива жидких металлов — проблема дозирования [33], [34].

Основные принципы дозирования жидких металлов могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) контроль за уровнем заполнения мерного объема в том числе литниковой формы;
- 2) весовое дозирование;
- 3) дозирование по времени истечения жидкого металла;
- 4) интегрирование расхода жидкого металла;

5) аналоговые методы дозирования.

Контроль за уровнем заполнения формы может быть применен для любых сплавов. При заливке черных металлов и сплавов используются фотосопротивления, при литье цветных металлов — контактные датчики. Недостаток метода — необходимость высокой точности фиксации сигнализирующих элементов относительно заданных точек. Образующиеся при заливке жидкого металла искры, брызги, горячие газы вызывают сбои в работе фотодатчиков. Контактные датчики требуют постоянного контроля. Обгорание контактов приводит к увеличению погрешности дозы [34].

Радиоизотопный метод контроля за уровнем может быть применен при непрерывной разливке металла [34]. Сущность объемного метода дозирования мерными приспособлениями состоит в том, что вначале заполняется мерный объем, представляющий собой одно целое с раздаточным устройством, а затем производится заливка жидкого металла в форму.

Объемный метод дозирования с применением вакуумного всасывания основан на том, что в емкости создается разрежение, достаточное для всасывания в него определенной дозы жидкого металла.

Дозирование жидкого металла по объему выдаваемой дозы применяется при автоматизации процесса заливки сплавов на машинах литья под давлением. Точность дозы жидкого металла в основном зависит от постоянства объема мерной емкости. Сохранить первоначальный объем в процессе эксплуатации дозатора невозможно из-за активного химического и теплового взаимодействия и постоянного контакта расплавленного металла и шлака со стенками, в результате чего происходит их непрерывное разрушение и значительное изменение размеров [34].

Бесовсе дозирование предусматривает взвешивание выдаваемой дозы в момент заливки литейной формы или

определение веса раздаточной емкости (ковша и т.п.) до и после выдачи дозы. Для определения веса дозы используются главным образом торсионные валы, тензорметрические датчики и рычажные системы.

Весовое дозирование обеспечивает сравнительно высокую точность выдаваемой дозы.

Автоматическая заливка литейных форм жидким металлом на движущемся литейном конвейере осуществлена, например, на установке фирмы "Фишер" [34], в которой используется весовой метод дозирования с применением рычажной системы. Недостатком этой системы является сложность счётно-решающего устройства. Изменение в процессе работы собственного веса ковша из-за разгара футеровки или образования настывлей приводит к снижению точности дозирования.

Метод дозирования по времени истечения металла используется в очень ограниченных областях. Это связано с необходимостью иметь постоянный размер выходного отверстия раздаточного устройства, так как даже незначительное изменение его приводит к большим отклонениям от заданной дозы.

Дозирование по времени применимо лишь в тех случаях, когда обеспечивается точно заданный расход жидкого металла из раздаточного устройства. Это в первую очередь относится к различным МГД-дозаторам. Однако при решении проблемы управления дозированием жидкого металла с помощью МГД-устройств, необходимо учитывать целый ряд случайных факторов: колебание напряжения сети, изменение уровня металла в МГД-устройстве, зарастание металлопровода со временем. Один из возможных методов повышения точности дозирования — разработка аналоговых способов управления процессом дозирования электропроводящих сред [35]. Аналоговые способы управления дозированием расплава МГД-дозатором заключаются в создании устройства в виде физической модели дозирующей установки. Физическая модель представляет

собой МГД-реле, состоящее из системы сосудов со ртутью и электромагнитного насоса [35].

В сосудах размещены контакты, включенные в схему управления насосом-дозатором расплава. С помощью аналоговых систем возможно учесть колебания напряжения сети, изменение уровня металла, однако и в этом случае учет зарастания канала практически затруднен.

С совершенствованием МГД-устройств для жидких металлов предложены способы дозирования с использованием различных электромагнитных насосов [1], [36]. Однако реальная точность дозирования с помощью только одних насосов невелика. По ряду случайных причин (неустановившиеся гидравлические явления в системе, сужение канала дозатора и т.п.) происходит значительный разброс величины дозы. Все эти схемы имеют существенный недостаток: после включения насоса поток металла в трубопроводе дозатора фактически не контролируется.

Известно, что в зависимости от систем управления, все дозаторы можно разделить на две группы:

- 1) дозаторы с разомкнутой системой управления,
- 2) дозаторы с замкнутой системой управления.

Как уже отмечалось, выходной величиной при регулировании может быть вес дозы, уровень в изложнице, объем мерного ковша или промежуточного резервуара, а также расход жидкого металла. Все эти методы применимы в производстве, однако сложность конструкции гидравлической системы и невысокая точность датчиков уровня ограничивает применение дозаторов, работающих по весу, уровню, объему.

Лучшие результаты в области дозирования жидких металлов можно получить от устройств с замкнутой системой управления по расходу. Анализ режима движения жидкого металла в трубопроводе [37], [1] показал, что любой цикл дозирования с применением электромагнитных насосов (магнитодинамических насосов) имеет три характерных этапа.

После включения насоса $om t = t_0$ до $t = t_1$, происходит заполнение трубопровода дозатора. Начиная с момента $t = t_1$, металл с нарастающей скоростью выливается из канала дозатора. В момент $t = t_2$ насос выключается, скорость истечения жидкости падает до нуля, но при этом по инерции вытекает некоторая часть жидкого металла. Таким образом, количество вылитого металла определяется интегралом от скорости по времени процесса:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} S v(t) dt$$

Измерение мгновенной скорости (расхода) металла в трубопроводе позволяет создать интегральные методы дозирования. В этом случае контроль за выходной величиной (дозой) осуществляется при помощи датчика расхода и интегратора. Последний используется как для регистрации величины дозы, так и в системе автоматического управления насосом. В качестве расходомеров широкое применение могут найти дифференциальные расходомеры [1]. Кондукционные расходомеры из-за порционного заполнения трубопровода практически неприменимы. Ввиду инерционности мало пригодны также синхронные расходомеры. Блок-схема дозатора с бесконтактным индукционным расходомером показана на рис. 9.

На трубопровод, по которому из раздаточной емкости 2 транспортируется жидкий металл, устанавливается датчик индукционного расходомера 3. После включения насоса 1 жидкий металл, заполняя трубопровод, проходит через рабочий участок датчика и поступает в приёмную ёмкость (форму и т.п.). Сигнал от датчика после усиления и преобразования поступает на интегратор 5. Как только уровень выходного сигнала интегратора достигает установленного задатчиком доз 6 значения, формируется сигнал управления

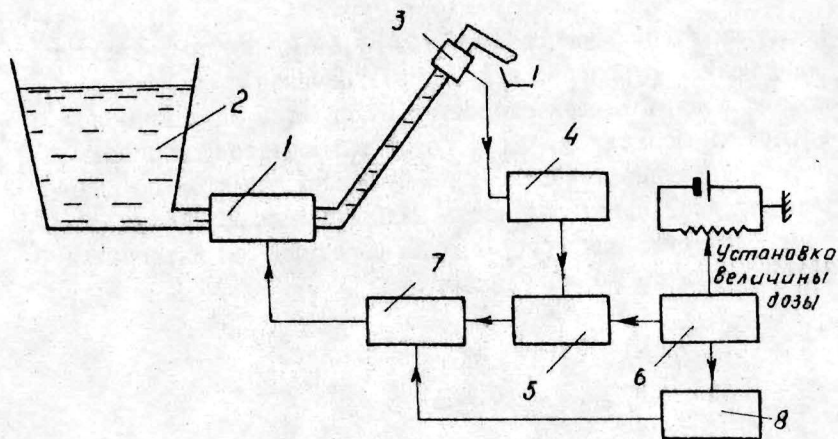


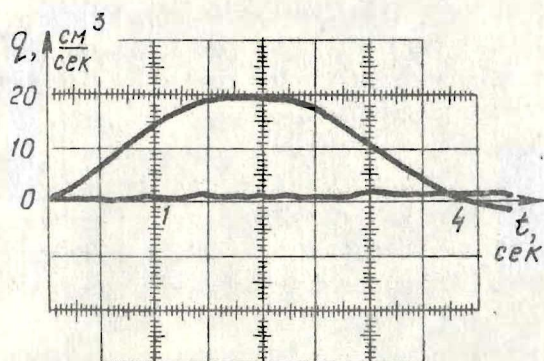
Рис. 9.

насосом и подача металла прекращается.

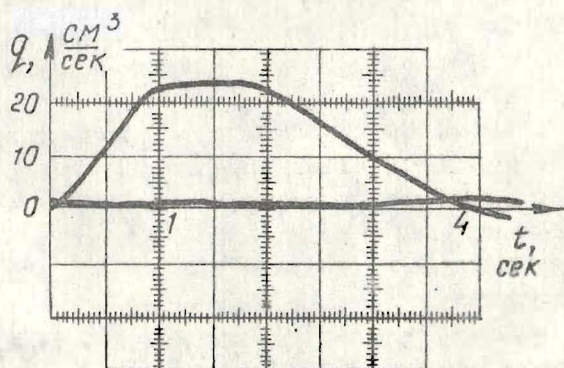
Легко видеть, что изменение скорости (расхода) жидкого металла приводит к увеличению или уменьшению времени дозирования (времени действия насоса). На точность дозирования не влияет изменение давления на входе насоса, что позволяет исключить погрешность, связанную с зарастанием трубопровода и с количеством предыдущих доз жидкого металла. Предложенная схема позволяет также учесть количество металла, поступающее из дозатора после выключения насоса.

Описанная выше схема легла в основу разработанного на кафедре электродинамики и механики сплошных сред Латвийского государственного университета им. П. Стучки устройства управления процессом дозирования — БИР-6д.

Скоростной сигнал, снимаемый с датчика, преобразуется в постоянное напряжение 0–10 в и подается на вход преобразователя «напряжение — частота». Сигнал, преобразованный в частоту, поступает на четырехразрядный деся-



$$U_{\text{пит}} = 80 \text{ В}$$



$$U_{\text{пит}} = 100 \text{ В}$$

Рис. 10.

тичный счетчик импульсов. При совпадении показаний счётчика "доза" со счётчиком "установка дозы" вырабатывается сигнал на отключение питания насоса-дозатора. Для увеличения точности дозирования малых доз предусмотрено реверсивное включение насоса-дозатора.

Если необходимо заполнять жидким металлом форму, находящуюся на движущемся конвейере, то дополнительно задаётся номинальное время работы насоса. При изменении времени выдачи дозы, связанного с изменением напора, вырабатывается сигнал, приводящий к соответственному изменению напряжения питания насоса-дозатора.

МГД-дозаторы для выдачи дискретных доз жидкого металла характеризуются сложным нестационарным режимом работы. Некоторые из процессов рассмотрены в работе [37]. Устройство управления БИР-6д позволяет одновременно исследовать характер изменения скорости жидкого металла в процессе дозирования и тем самым исследовать гидродинамику процесса. На рис. 10 показаны осциллограммы изменения скорости дозирования жидкого металла, полученные с помощью БИР-6д.

При дозировании жидкого металла до 1 кг необходимо, как видно из рис. 10, учитывать переходные процессы, поскольку время дозирования составляет 1-3 сек в зависимости от величины дозы и диаметра трубопровода.

Экспериментальные исследования БИР-6д подтвердили возможность управления процессом дозирования цветных металлов и сплавов с номинальным объемом дозы до 2000 см³ и погрешностью не более 3%.

Л и т е р а т у р а

1. Бесконтактный контроль потока жидких металлов. Под ред. Циркунова В.Э., Рига, "Зинатне", 1973.
2. Богденко А.А., Вельт И.Д. Индукционный расходомер. Авт. свид. № 104745. - "Бюлл. изобр.", 1956, №12.
3. Побережский Л.П. Способ измерения скорости и электропроводности потока ионизированных газов и устройство для его осуществления. Авт. свид. № 152747.- "Бюлл. изобр.", 1963, №2.
4. Pat. Fr. 1157500.
5. Пинчук А.Г. Устройство для бесконтактного измерения скоростей и ускорений движущихся электропроводных тел. Авт.свид. № 168947.- "Бюлл. изобр.", 1965, №5.
6. Вельт И.Д. Бесконтактный индукционный измеритель скорости электропроводных жидкостей. Авт. свид. №173441.- "Бюлл. изобр.", 1965, №15.
7. Яловега Н.В. Специфика измерений теплофизических параметров высокотемпературных энергетических установок. М., Атомиздат, 1970.
8. Прохоров А.Н., Киселев В.Г., Циркунов В.Э. Датчик бесконтактного измерителя скорости (расхода) электропроводящих сред. Авт. свид. №300765.- "Бюлл.изобр.", 1971, №13.
9. Бирзвалк Ю.А., Улманис Л.Я. Устройство для бесконтактного измерения скорости течения электропроводящих жидкостей. Авт. свид. № 140783.- "Бюлл. изобр.", 1966, №14.
10. Улманис Л.Я. Бесконтактный расходомер для жидких металлов. Авт. свид. № 150654. - "Бюлл. изобр.", 1962, №19.
11. Гинзбург А.С., Квасневский И.П. Способ измерения скорости электропроводящих сред. Авт. свид. № 219229.- "Бюлл. изобр.", 1968, №18.

12. Пивоваров Л.В. Индукционные измерители линейной скорости и длины. М., "Энергия", 1972.
13. Калнинь Р.К., Сермонс Г.Я., Жейгур Б.Д., Кисис А.Ю., Дукуре Р.К. Бесконтактный измеритель скорости электропроводящей жидкости. Авт. свид. № 195154.- Бюлл. изобр., 1967, №9.
14. Кириштейн Г.Х., Рыбаков Э.К. Устройство для бесконтактного измерения скорости течения электропроводящей жидкости. Авт. свид. №169816.-"Бюлл. изобр.," 1965, №7.
15. Mayer F. Deditmetre a induction, Pat. Fr. 1288806, 1961.
16. Рыбаков Э.К., Циркунов В.Э. Бесконтактный измеритель скорости электропроводящей жидкости. Авт. свид. № 267952.- Бюлл. изобр. 1970, №13.
17. Рыбаков Э.К., Циркунов В.Э., Калнинь Р.К. Измеритель скорости (расхода) жидкого металла. Авт. свид. № 286266. - Бюлл. изобр., 1970, №34.
18. Гинзбург А.С., Кириштейн Г.Х., Циркунов В.Э., Рыбаков Э.К. Способ бесконтактного измерения скорости потока электропроводящих сред. Авт. Свид. № 214127. - Бюлл. изобр., 1968, №11.
19. Гинзбург А.С., Кириштейн Г.Х., Циркунов В.Э., Рыбаков Э.К. Устройство для измерения скорости потока электропроводящих сред. Авт. свид. № 218464 - Бюлл. изобр., 1969, №9.
20. Рыбаков Э.К., Циркунов В.Э. Фазочувствительный способ индикации расхода. - Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ. и техн. наук, 1969, №6.
21. Электромагнитные методы измерения МГД- процессов. Рига, "Зинатне", 1968.
22. Кириштейн Г.Х. Исследование способа измерения расхода жидких металлов с помощью пульсирующего магнитного поля. Канд. диссертация. Рига, 1967.

23. Квасневский И.П. Применение индукторов с разомкнутым магнитопроводом для измерения расхода (скорости) электропроводящих сред методом встречно-бегущих магнитных полей. Канд. диссертация, Рига, 1970.
24. Циркунов В.Э., Калнинь Р.К., Рыбаков Э.К. Измерение скорости потока жидкого металла методом отношений. — "Магнитная гидродинамика", 1971, №2.
25. Рыбаков Э.К. Измерение скорости электропроводящих сред датчиками пульсирующего магнитного поля. Канд. диссертация, Рига, 1971.
26. Гинзбург А.С., Гуревич Г.Г., Кишштейн Г.Х., Якушенок В.И. Двухканальные электромагнитные расходомеры для измерения расходов нестационарных потоков.—В кн.: Седьмое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. II. Рига, "Зинатне", 1972.
27. Дружинин В.В. Магнитные свойства электротехнической стали. М., ГЭИ, 1962.
28. Лиелштер Я.Я. Жидкометаллические индукционные МГД-машины. Рига, "Зинатне", 1969.
29. Кишштейн Г.Х., Циркунов В.Э. Влияние неравномерности профиля скорости на показания индукционного расходомера. — "Магнитная гидродинамика", 1968, №2.
30. Циркунов В.Э., Рыбаков Э.К., Сорокина Э.С. Влияние профиля скорости на погрешность индукционных расходомеров. — "Магнитная гидродинамика", 1971, №3.
31. Зоммер Ю.А., Жейгур Б.Д., Калнинь Р.К., Сермонс Г.Я. Влияние стенок и профиля скорости на метрологические показатели бесконтактных измерителей расхода электропроводящих сред.— В кн.: Шестое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Рига, "Зинатне", 1968.
32. Лехтла Т.В., Тийсмус Х.А. Исследование МГД-дозатора с управлением по интегралу расхода.—В кн.: Седьмое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. II, Рига, "Зинатне", 1972.

33. Robinson T., Braun I., Linder S. Applications of Magnetohydrodynamics in the Metal Industry. "AE - Reports", 1972, N 457.
34. Панчина Т.А. Механизация и автоматизация транспорта и дозирования жидких металлов. Укр. НИИМТИ, Киев, 1971.
35. Баринберг А.Д., Олейник В.Г., Полищук В.П., Цин М.Р. К вопросу разработки аналоговых способов управления дозированием расплава МГД-насосом. — В кн.: Седьмое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. II. Рига, "Зинатне", 1972.
36. Кирко И.М., Лиелпетер Я.Я. Дозирование жидкого металла при помощи электромагнитных индукционных насосов. — "Труды Института физики АН Латв.ССР", т. 12, Рига, 1967.
37. Рябинин А.Г., Хожашнов А.И. Нестационарные течения жидких металлов в МГД-устройствах. Л., "Машиностроение", 1970.

Т.Т. Цирулис, М.А. Белов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СХЕМЫ ПА-
ПУЛИСА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВА-
НИЯ ЛАПЛАСА

В данной работе изучался метод численного обращения преобразования Лапласа, предложенный А. Папулисом [1]. В последнее время метод Папулиса (сокращенно МП), который имеет простой вычислительный алгоритм, часто применяется при численном обращении преобразования Лапласа. Было выяснено, что он не всегда дает хорошие результаты, а поэтому МП нуждается в дальнейшем изучении.

В работе выяснены причины большой погрешности МП и намечен план улучшения методики расчета. Предложенные улучшения требуют еще практической проверки и дальнейшей разработки.

§ 1. Метод А. Папулиса

Обращение преобразования Лапласа, как решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$R(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} z(t) dt \quad (1.1)$$

является некорректной задачей математической физики. Метод А. Папулиса приближенного отыскания оригинала $z(t)$ основан на двух допущениях:

- 1) Изображение $R(\rho)$ не имеет особых точек при $\operatorname{Re} \rho > 0$,
(1.2)
- 2) $\lim_{t \rightarrow +0} z(t) = 0$.
(1.3)

Оригинал формально ищется в виде обобщенного ряда Фурье

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sin[(2k+1)\sigma t \cos(\exp(-\sigma t))], \quad (1.4)$$

где $\sigma > 0$ свободный параметр. Подставляя (1.4) в (1.1) и проводя замену переменной интегрирования $\exp(-\sigma t) = \cos \vartheta$, получаем

$$\sigma R(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_0^{\pi/2} (\cos \vartheta)^{\rho + \sigma^{-1}} \sin[(2k+1)\vartheta] \sin \vartheta d\vartheta. \quad (1.5)$$

Полагая в (1.5) $\rho = (2n+1)\sigma$, $n = 0, 1, \dots$, получаем для определения коэффициентов C_k бесконечную треугольную систему алгебраических уравнений (БТСАУ)

$$4^{n+1} \sigma R[(2n+1)\sigma] = \pi \sum_{k=0}^n [\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1}] C_{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Следовательно, для отыскания оригинала (1.4) по методу Папулиса нужно решать БТСАУ (1.6).

Метод Папулиса можно перенести также на произвольные ортогональные полиномы. Пусть $\{v_k(\tau)\}$ — полная система ортогональных полиномов с весом $\rho(\tau)$ на сегменте $[0, 1]$. Оригинал $z(t)$ ищем в форме обобщенного ряда Фурье

$$z(t) = \rho(e^{-\sigma t}) \sum_{k=0}^{\infty} C_k v_k(e^{-\sigma t}), \quad (1.7)$$

где $\sigma > 0$ свободный параметр.

Если к обеим частям применить преобразование Лапласа, то получим:

$$\sigma R(\rho) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} C_{\kappa} \int_0^1 \tau^{\rho/\sigma-1} \rho(\tau) \vartheta_{\kappa}(\tau) d\tau. \quad (1.8)$$

Положим в (1.8) $\rho = \sigma(m+1)$, $m=0,1,2,\dots$; тогда в силу того, что

$$\int_0^1 \tau^m \rho(\tau) \vartheta_{\kappa}(\tau) d\tau = 0, \quad \kappa > m, \quad (1.9)$$

получаем для определения коэффициентов C_{κ} БГАУ

$$\sigma R[\sigma(m+1)] = \sum_{\kappa=0}^m C_{\kappa} d_{\kappa,m}, \quad m=0,1,2,\dots, \quad (1.10)$$

где

$$d_{\kappa,m} = \int_0^1 \tau^m \rho(\tau) \vartheta_{\kappa}(\tau) d\tau. \quad (1.11)$$

Как частные случаи, из (1.10) и (1.11) получаем следующие системы.

I. Полиномы Чебышева первого рода ,

$$\vartheta_{\kappa}(\tau) = T_{2\kappa}(\tau) = \frac{2^{2\kappa} (2\kappa)!}{(4\kappa)!} \sqrt{1-\tau^2} [(1-\tau^2)^{2\kappa-1/2}]^{(2\kappa)},$$

$$\rho(\tau) = (1-\tau^2)^{-1/2} \quad (1.12)$$

Система (I.10) принимает вид

$$GR[(2n+1)\sigma] = \sum_{k=0}^n \frac{\pi(2n)! C_k}{2^{2n+1}(n+k)!(n-k)!}, \quad n=0,1,\dots \quad (1.13)$$

2. Полиномы Лежандра

$$U_k(\tau) = P_{2k}(\tau) = \frac{1}{2^{2k}(2k)!} [(\tau^2-1)^{2k}]^{(2k)}, \quad (1.14)$$

$$\rho(\tau) = 1.$$

Система (I.10) принимает вид

$$GR[(2n+1)\sigma] = \sum_{k=0}^n \frac{(2n)! 2^{2k}(n+k)!}{(2n+2k+1)!(n-k)!} C_k, \quad n=0,1,\dots \quad (1.15)$$

3. Полиномы Гегенбауэра

$$U_k(\tau) = C_{2k}^{(\lambda)}(\tau) = \frac{(2\lambda)_{2k} (1-\tau^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}}{2^{2k}(2k)! (\lambda + \frac{1}{2})_{2k}} [(1-\tau^2)^{2k+\lambda-\frac{1}{2}}]^{(2k)},$$

$$\rho(\tau) = (1-\tau^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \quad (1.16)$$

Система (I.10) принимает вид

$$GR[(2n+1)\sigma] = \sum_{k=0}^n \frac{(2\lambda)_{2k} (2n-2k+1)_{2k} \Gamma(n-k+\frac{1}{2}) \Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{2^{2k+1} (2k)! \Gamma(n+k+\lambda+1)} C_k, \quad n=0,1,\dots \quad (1.17)$$

Отметим, что в качестве $U_k(\tau)$ можно брать также другие как классические, так и неклассические ортогональные полиномы. Условия представимости оригинала $z(t)$ в форме (I.7) соответствуют условиям разложимости функции

$z\left(-\frac{P_n \tau}{\sigma}\right) \rho(\tau)$ по полиномам $\varphi_k(\tau)$ на интервале $(0, 1)$.

§ 2. Явное решение БТСАУ § I

Для систем (I.10), (I.13), (I.15), (I.17) могут быть найдены явные аналитические решения. Действительно, пусть

$$\varphi_k(\tau) = \sum_{m=0}^k \beta_{m,k} \tau^m. \quad (2.1)$$

Искомые величины C_k как коэффициенты обобщенного ряда Фурье представимы в форме

$$C_k = \frac{\sigma}{\|\varphi_k\|^2} \int_0^{\infty} z(t) \varphi_k(e^{-\sigma t}) e^{-\sigma t} dt, \quad k=0, 1, \dots \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) в (2.2), после почленного интегрирования получаем

$$C_k = \frac{\sigma}{\|\varphi_k\|^2} \sum_{m=0}^k \beta_{m,k} R[(m+1)\sigma], \quad k=0, 1, \dots \quad (2.3)$$

В силу единственности представления (I.7) и единственности решения треугольной системы (I.10) (2.3) дает явное аналитическое решение системы (I.10). Из (2.3) как частные случаи получаем решения системы (I.13), (I.15) и (I.17). Для полиномов Чебышева решение системы (I.13) имеем в виде

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(2k\theta) z\left(-\frac{P_n(\cos\theta)}{\sigma}\right) \sin\theta d\theta = \\ &= \frac{4\sigma(k + \frac{1}{2} \delta_{k0})}{\pi} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^{k+m} 2^{2m} (k+m-1)!}{(k-m)! (2m)!} R[(2m+1)\sigma], \quad k=0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для полиномов Лежандра решение системы (I.15) имеет вид:

$$C_k = (4k+1) \int_0^{\pi/2} P_{2k}(\cos \theta) z \left(-\frac{\rho \cos \theta}{\sigma} \right) \sin \theta d\theta =$$

$$= \frac{(4k+1)\sigma}{2^{2k}} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^{k+m} (2k+2m)!}{(k-m)!(k+m)!(2m)!} R[(2m+1)\sigma], \quad k=0,1,\dots \quad (2.5)$$

Для полиномов Гегенбауэра решение системы (I.17)

$$C_k = \frac{2^{2\lambda} (2k+\lambda)(2k)! \Gamma^2(\lambda)}{\pi \Gamma(2\lambda+2k)} \int_0^{\pi/2} C_{2k}^{(\lambda)}(\cos \theta) z \left(-\frac{\rho \cos \theta}{\sigma} \right) \sin \theta d\theta =$$

$$= \frac{2^{2\lambda} \sigma (2k+\lambda)(2k)! \Gamma^2(\lambda)}{\pi \Gamma(2\lambda+2k)} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^{k+m} (\lambda)_{k+m} 2^{2m}}{(k-m)!(2m)!} R[(2m+1)\sigma], \quad k=0,1,\dots \quad (2.6)$$

Отметим, что по вышеприведенному плану отыскания коэффициентов C_k можно искать оригинал $z(t)$ в форме обобщенного ряда Фурье

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k^*(e^{-\sigma t}), \quad (2.7)$$

несколько отличающегося от ряда (I.7). Используя ортогональность системы $\{\psi_k^*(\tau)\}$, имеем

$$a_k = \frac{\sigma}{\|\psi_k^*\|^2} \int_0^{\infty} z(t) \rho(e^{-\sigma t}) e^{-\sigma t} \psi_k^*(e^{-\sigma t}) dt. \quad (2.8)$$

Разлагая в ряд функцию

$$\rho(\tau) \psi_k^*(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,k} \tau^m \quad (2.9)$$

и выполняя интегрирование в (2.8), получаем

$$a_k = \frac{\sigma}{\|U_k\|^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,k} R[\sigma(m+1)]. \quad (2.10)$$

Если интеграл (2.8) и ряд (2.10) сходятся, а степенной ряд (2.9) имеет радиус сходимости не меньше 1, то легко может быть обосновано изменение порядка суммирования и интегрирования при получении формулы (2.10).

§ 3. Численные примеры

Для определения оригинала $z(t)$ требуется знание $\{C_k\}$. Эти величины можно определить, решая БТСАУ (1.10), (1.13), (1.15), (1.17) или пользуясь формулами (2.3), (2.4), (2.5), (2.6). При решении БТСАУ счет при больших n неустойчив. Действительно, при $n \rightarrow +\infty$ определитель соответствующей конечной БТСАУ стремится к нулю, и система становится плохо обусловленной. При счете на ЭВМ неустойчивость начинает проявляться с $n \geq 16$ и мало зависит от выбора свободного параметра σ . Поэтому при практических вычислениях оригинал $z(t)$ аппроксимировался конечной суммой

$$z(t) \approx \rho(e^{-\sigma t}) \sum_{k=0}^N C_k U_k(e^{-\sigma t}), \quad (3.1)$$

где $N \leq 16$.

Если разложение (1.7) справедливо, найдены все коэффициенты $\{C_k\}$ и просуммирован ряд (1.7), то результат не зависит от величины σ . Но если пользоваться приближением (3.1), то величина σ существенно вли-

нет на результат. Для большинства конкретных примеров выяснилось, что при фиксированном N существует оптимальное $\sigma = \sigma_{оп}(N)$.

При больших σ хорошая аппроксимация $z(t)$ суммой (3.1) имела место лишь при $t \in [0, T]$, где T мало. При уменьшении σ T вообще возрастает, и при некотором $\sigma_{оп}(N)$ имеется наилучшее приближение. При дальнейшем уменьшении σ аппроксимация существенно ухудшается. Это свойство проиллюстрировано примерами, изображенными на рис. 1-3, где $\sigma_{оп}(16) \approx 0,053$. Ясно, что $\sigma_{оп}$ зависит не только от выбора N , а также от свойств оригинала (или изображения). Отмеченные выше свойства зависимости точности приближения оригинала от выбора свободного параметра σ можно объяснить следующим образом. Пусть $\tilde{R}(p)$ - изображение суммы (3.1). Тогда из построения БТСАУ (1.10) следует, что $R(p)$ и $\tilde{R}(p)$ совпадают в точках $p = (2k+1)\sigma$, $k=0, \dots, N$. Если σ велико, то $\tilde{R}(p)$ приближается к $R(p)$ при больших p , поэтому из свойств интегрального преобразования Лапласа [2] следует, что оригинал $z(t)$ и сумма (3.1) должны быть близки при малых t . Уменьшение σ приводит к тому, что $R(p)$ и $\tilde{R}(p)$ приближаются на большом интервале, что должно в принципе приводить к лучшему совпадению оригиналов. Однако значительное уменьшение σ без увеличения N приводит к ухудшению совпадения $R(p)$ и $\tilde{R}(p)$, что и приводит к ухудшению совпадения оригиналов.

Интересно отметить, что существуют примеры, когда уменьшение σ не приводит к ухудшению результатов. Такой пример показан на рис. 4. В этом случае уменьшение не приводит к ухудшению результатов и совпадение остается удовлетворительным на большом интервале изменения t .

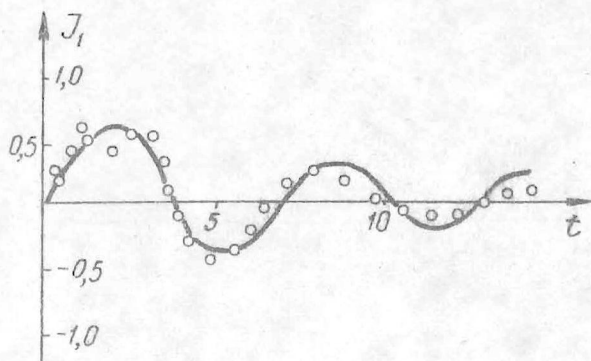


Рис. 1.

Оригинал - функция Бесселя $J_1(t)$:
 — точные значения, \circ - полученные по формуле (3.1), $n=16$, $\sigma=0,1$, $U_k(\tau) = T_{2k}(\tau)$

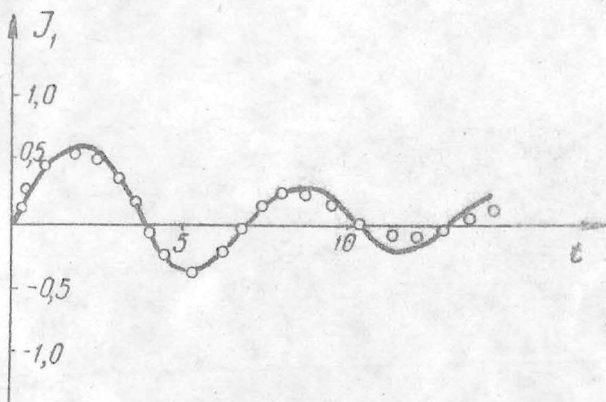


Рис. 2.

Оригинал - функция Бесселя $J_1(t)$:
 — точные значения, \circ - полученные по формуле (3.1), $n=16$, $\sigma=0,033$, $U_k(\tau) = T_{2k}(\tau)$

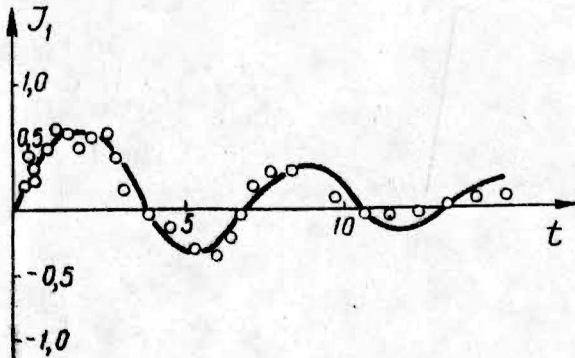


Рис. 3.

Оригинал - функция Бесселя $J_1(t)$:

— - точные значения, \circ - полученные по формуле (3.1), $n=16$, $\sigma=0,025$, $\mathcal{U}_k(\tau)=T_{2k}(\tau)$

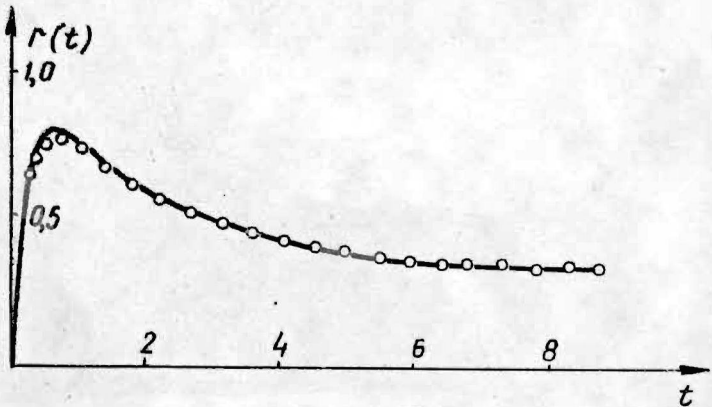


Рис. 4.

Оригинал - функция $z(t)=\exp(-\frac{1}{4t})\sqrt{t}$:

— - точные значения, \circ - полученные по формуле (3.1), $n=16$, $\sigma=0,005$, $\mathcal{U}_k(\tau)=P_{2k}(\tau)$.

При фиксированном σ увеличение N приводит к заметному улучшению аппроксимации.

Если для вычисления тех же коэффициентов C_k пользоваться формулами (2.3), (2.6), которые дают точные значения коэффициентов C_k для любого k , то для практических расчетов продвинуться дальше, чем $k=16$, опять оказывается невозможным, ибо в этом случае мы встречаемся с совершенно другой вычислительной трудностью: происходит потеря точности при вычислении сумм (2.3), (2.6), подобная тому, которая наблюдается, например, при счете бесселевой функции $J_\nu(x)$ по степенному ряду для больших x . Описанные выше вычислительные трудности, по-видимому, связаны с некорректностью самой задачи обращения преобразования Лапласа.

§ 4. Асимптотические формулы для коэффициентов C_k при $k \rightarrow +\infty$

Как известно, для функции Бесселя $J_\nu(x)$ при больших x вместо степенного ряда пользуются асимптотическими формулами, поэтому найдем и для коэффициентов C_k асимптотические формулы, если $k \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим случай полиномов Чебышева $T_{2k}(z)$. Из формулы (2.4), в случае вещественного $z(t)$, имеем

$$C_k = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\pi/2} \exp(2ik\theta) z\left(-\frac{t \cos \theta}{\sigma}\right) \sin \theta d\theta. \quad (4.1)$$

Предположим, что оригинал $z(t)$ обладает следующими свойствами:

1) $z(t)$ непрерывно дифференцируема при $t \in (0, \infty)$;

2) $z(t) = Ct^{\alpha} \exp\{-\delta t\} [1 + o(1)]$, $t \rightarrow +\infty$;

3) $z(t) = Dt^{\beta} \exp\{-st^{-\nu}\} [1 + o(1)]$, $t \rightarrow +0$;

где $C \neq 0$, $D \neq 0$, $\delta \geq 0$, $\nu > 0$, $s \geq 0$; α и β — произвольные вещественные числа, а в случае $s = 0$ $\beta > -1$, что необходимо для существования изображения.

Найдем асимптотическую формулу для интеграла

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(ix\tau) z\left(-\frac{\ln \cos \tau}{\sigma}\right) \sin \tau d\tau, \quad x \rightarrow +\infty \quad (4.2)$$

Применим обобщенную схему интегрирования по частям с нейтрализатором, рассмотренную в [3].

Пусть нейтрализатор $\nu(\tau)$ определен равенством

$$\nu(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq \varepsilon_1, \\ \nu_1(\tau), & \varepsilon_1 \leq \tau \leq \pi/2 - \varepsilon_2, \\ 1, & \pi/2 - \varepsilon_2 \leq \tau \leq \pi, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $\nu_1(\tau)$ — как угодно много раз дифференцируемая функция; причем $\nu_1^{(\kappa)}(\varepsilon_1) = 0$, $\kappa = 0, 1, \dots$; $\nu_1(\pi/2 - \varepsilon_2) = 1$, $\nu_1^{(\mu)}(\pi/2 - \varepsilon_2) = 0$, $\mu = 1, 2, \dots$

Представим интеграл (4.2) в виде

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(ix\tau) z\left(-\frac{\ln \cos \tau}{\sigma}\right) \nu(\tau) \sin \tau d\tau + \\ + \int_0^{\pi/2 - \varepsilon_2} \exp(ix\tau) z\left(-\frac{\ln \cos \tau}{\sigma}\right) [1 - \nu(\tau)] \sin \tau d\tau = I_1(x) + I_2(x),$$

и каждый из интегралов проинтегрируем по частям, выбирая интегрируемую часть для $I_1(x)$ равной

$$C \exp(ix\tau) \left[-(\ln \cos \tau) / \sigma\right]^{\alpha} (\cos \tau)^{\beta} d\tau,$$

а для $I_2(x) = D \exp(ix\tau) [-(\ln \cos \tau)/\sigma]^\beta \sin \tau d\tau$.

Первообразные для этих функций представим в форме

$$V_1(\tau, x) = -C \int_{\tau}^{e^{i\pi/2}} \exp(ix\xi) \left[-\frac{\ln \cos \xi}{\sigma}\right]^{\delta} (\cos \xi)^{\delta/\sigma} d\xi; V_2(\tau, x) = D \int_{\tau}^{e^{i\pi/2}} \exp(ix\xi) \times \\ \times \left[-\frac{\ln \cos \xi}{\sigma}\right]^{\beta} \sin \xi d\xi,$$

т.е. в форме интегралов на комплексной плоскости с переменным нижним пределом, которые сходятся при $x > \max\{1, \delta/\sigma\}$.

Учитывая, что внеинтегральные члены при $\tau = \xi_1$ и $\tau = \frac{\pi}{2} - \xi_2$ (в силу свойств нейтрализатора $\mathcal{V}(\tau)$) обращаются в нуль, а оставшийся интеграл имеет высший порядок, получаем

$$I(x) = -C [1 + \sigma(1)] \int_{\pi/2}^{i\infty} \exp(ix\tau) \left(-\frac{\ln \cos \tau}{\sigma}\right)^{\delta} (\cos \tau)^{\delta/\sigma} d\tau + \\ + D [1 + \sigma(1)] \int_0^{i\infty} \exp(ix\tau) \left(-\frac{\ln \cos \tau}{\sigma}\right)^{\beta} \sin \tau d\tau, x \rightarrow +\infty, s=0,$$

и, соответственно, только первому из этих интегралов, если $s > 0$. После замен $\tau = \pi/2 + e^{i\pi/2} u$ и $\tau = ue^{i\pi/2}$, соответственно, получаем

$$I(x) = C \sigma^{-\delta} \exp\left\{\frac{i\pi}{2}(x - \delta/\sigma - 1)\right\} [1 + \sigma(1)] \int_0^{\infty} e^{-xu} \left(\ln \frac{i}{shu}\right)^{\delta} (shu)^{\delta/\sigma} du + \\ + D \exp\{i\pi(\beta + 1)\} \sigma^{-\beta} [1 + \sigma(1)] \int_0^{\infty} e^{-xu} (\ln chu)^{\beta} sh u du, x \rightarrow +\infty.$$

(4.4)

Применяя к интегралам лемму Ватсона [4] или её обобщение, когда функция нагрузки при $u=0$ имеет логарифмическую особенность, получаем при $s=0$

$$\Gamma(x) \sim C \sigma^{-x} \exp\left\{\frac{i\pi}{2}(x-\delta/\sigma-1)\right\} \ln^x x \cdot \Gamma(\delta/\sigma+1) x^{-\delta/\sigma-1} + D \exp\{i\pi(\beta+1)\} \sigma^{-\beta} \Gamma(2\beta+2) x^{-2\beta-2}/2^\beta, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (4.5)$$

Из (4.5), (4.2), (4.1) получаем

$$C_k \cong \frac{4}{\pi} \left\{ (-1)^{k+1} C \sigma^{-\delta} \Gamma(\delta/\sigma+1) (2k)^{-\delta/\sigma-1} \cdot \ln^k 2k \cdot \sin \frac{\pi\delta}{2\sigma} - D \cos \pi\beta \cdot \sigma^{-\beta} \Gamma(2\beta+2) (2k)^{-2\beta-2} / 2^\beta \right\}, \quad k \rightarrow +\infty, S=0, \quad (4.6)$$

и

$$C_k \sim (-1)^{k+1} \frac{4C}{\pi} \sigma^{-\delta} \Gamma(\delta/\sigma+1) (2k)^{-\delta/\sigma-1} \cdot \ln^k 2k \cdot \sin \frac{\pi\delta}{2\sigma}, \quad k \rightarrow +\infty, \quad (4.7)$$

если $S > 0$.

Если $\sin \frac{\pi\delta}{2\sigma} = 0$, то следует выписать второй член асимптотического разложения (4.4). Для случая $S > 0$ имеем следующую более общую формулу

$$C_k = (-1)^{k+1} \frac{4C}{\pi} \sigma^{-\delta} \Gamma(\delta/\sigma+1) (2k)^{-\delta/\sigma-1} \cdot \ln^k (2k) [1 + o(1)] \times \\ \times \left[\sin \frac{\pi\delta}{2\sigma} + \frac{\pi^k}{2 \ln 2k} \cos \frac{\pi\delta}{2\sigma} - \frac{\delta}{\ln 2k} \Psi(\delta/\sigma+1) \sin \frac{\pi\delta}{2\sigma} + o\left(\frac{1}{\ln 2k}\right) \right], \quad (4.8)$$

$k \rightarrow +\infty$, где $\Psi(x) = (\ln \Gamma(x))^{(1)}$.

Формула (4.8) справедлива при $\delta \neq 0$ и любого $\delta \geq 0$, или $\delta = 0$ и $\sin \frac{\pi\delta}{2\sigma} \neq 0$. Если $\delta = 0$, $\sin \frac{\pi\delta}{2\sigma} = 0$, $\beta = -\frac{1}{2} + k$, $k=0, 1, \dots$, то (4.8) и (4.6) в случае $S=0$ не дают явной информации о порядке коэффициента C_k . В этом случае надо учитывать дальнейшие члены при интегрировании по частям.

Примечание I. Для конкретных оригиналов $z(t)$ можно подобным образом выписать и дальнейшие члены асимптотического разложения, что особенно важно, если асимптотические формулы применять для вычисления самих коэффициентов

C_k .

Примечание 2. Для других ортогональных полиномов можно получить асимптотические разложения коэффициентов аналогичным образом. Однако в силу того, что при этом еще нужно пользоваться асимптотическими формулами самих полиномов, результаты получаются громоздкими. По порядку коэффициенты и для других полиномов мало отличаются от формулы (4.8).

Выводы

1. Прямое использование метода Папулиса не дает точных результатов, так как нельзя получить численных значений коэффициентов при больших K из-за плохой обусловленности треугольной системы.

2. При достаточно больших σ метод Папулиса вообще дает хорошие результаты лишь при малых t .

3. Для улучшения результатов рекомендуется уменьшить σ и одновременно увеличивать N в формуле (3.1); однако практически, из-за неустойчивости решения треугольной системы, это невозможно. Уменьшение σ без увеличения N может привести к значительным погрешностям.

4. Для улучшения методики Папулиса предлагается поступать следующим образом:

- 1) Найти асимптотики оригинала $z(t)$ при $t \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$;
- 2) Используя методы § 4, получить асимптотические формулы для коэффициентов C_k , когда $k \rightarrow +\infty$;
- 3) Используя БТСАУ и точные аналитические формулы для коэффициентов C_k , вычислить их значения для всех тех индексов $k=0, 1, \dots, N$, до такого N , чтобы найденные C_N, C_{N+1}, \dots в пределах заданной точности не отличались от коэффициентов, вычисляемых из асимптотической формулы, т.е. счет из БТСАУ должен "сливаться" с асимптотикой;

4) Величину остальных C_k получить из асимптотических формул;

5) Зная все C_k , мы можем построить в форме ряда сколь угодно точные оригиналы.

Л и т е р а т у р а

1. Papoulis A. A New Method of Inversion of the Laplace Transform. - Quarterly of Applied Mathematics, 1957, 14, 4.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z преобразования. М., "Наука", 1971.
3. Цирулис Т.Т. Метод градиентных линий для асимптотического представления контурных интегралов. Рига, "Зинатне", 1972.
4. Эрцей А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	стр.
1. Микельсон Ю.Я., Петражицкий А.С. Расчет магнитного поля в неравномерном зазоре электрических и МГД-машин.	3
2. Микельсон Ю.Я., Шмит Я.Р. Экстремальные свойства МГД-устройств.	15
3. Микельсон Ю.Я., Шмит Я.Р. Построение оптимизационной модели проектирования МГД-насосов.	29
4. Цирулис Т.Т., Шилтер Э.П., Ауза В.Я. Нелинейное сопротивление проводников электрического тока.	43
5. Цирулис Т.Т., Шилтер Э.П. Нелинейные задачи теплопроводности электропроводников с внутренним источником тепла.	53
6. Сермонс Г.Я., Устинов Н.Н. Теория ориентирования деталей электромагнитным полем.	69
7. Циркунов В.Э. Измерение расхода и дозирование жидких металлов.	99
8. Цирулис Т.Т., Белов М.А. Асимптотические методы исследования схемы Папулиса для приближенного обращения преобразования Лапласа.	139

Ученые записки, том 192
ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ СРЕД
Выпуск I

Редакторы Э.Сорокина, Я.Полманис, В.Циркунов
Технический редактор Л.Паэгле
Корректор Л.Паэгле

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1973

Подписано к печати 27.11.1973 ЯТ 19843 Зак. № 931.
Ф/б 60x84/16. Бумага №1. Физ.п.л.10,0. Уч.-и.л.7,0.
Тираж 400 экз. Цена 70 к.

Отпечатано на ротационной машине, Рига-50, ул.Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

96

PT-75
1921

Цена 70 к.