МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЛАТВИЙСКОЙ ССР

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет им. Петра Стучки

LVU

БЕЗРАЗМЕРНОЕ, ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

РИГА 1971

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки

Кафедра алгебры и геометрии

БЕЗРАЗМЕРНОЕ, ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Ученые записки, том 152

Рига 1971

1 108

УДК 513.015

Безразмерное, евклидово и полуевклидовы пространства

Ученые записки т. 152 1971 г.

Сборник содержит раосты по дифференциальной геометрии, выполненные сотрудниками кафедры алгебры и геометрии ЛГУ, аспирантами, студентами и выпускниками ЛГУ.

В безразмерном проективном пространстве рассматриваются плоскости произвольной конечной размерности, квадрики, их взаимное расположение и проективные свойства.

Для бинарных форм евклидовой плоскости дается методика определения полной системы инвариантов.

Остальные статьи посвящены линейчатой геометрии в различных полуевклидовых пространствах.

Ю.Д.Трупин

Некоторые простейшие свойства безразмерного проективного пространства

Согласно определению, данному в работе А.М.Лопшица /I/, линейное векторное пространство V над полем Ω называется безразмерным, если, в отличие от обычного (конечного) линейного векторного пространства, в нем не вводится аксиома о размерности.[x] Теории тензоров в линейном безразмерном пространстве посвящен ряд работ А.М.Лопшица, Б.З.Райхштейна и автора настоящей статьи /см.I-6/.

А.М.Лопшицу также принадлежит идея построения безразмерного проективного и аффинного пространств. В настоящей статье автор следует по пути, намеченному А.М.Лопшицем и ставит себе целью рассмотреть некоторые простейшие свойства безразмерного проективного пространства. Как мы увидим, многие из этих свойств аналогичны тем, которые присущи проективному пространству конечной размерности. Элементами безразмерного проективного пространства являются точки, прямые, п-плоскости. Однако, в силу того, что не введена аксиома о размерности, понятие гиперплоскости, квадрики и других многообразий требуют иных определений. По этой причине эти многообразия, кроме обычных, обладают еще и некоторыми другими свойствами, отличными от тех, которые известны для проективного пространства конечной размерности. Мы рассмотрим также простейшие проективные отображения (коллинеации) в безразмерном проективном пространстве и некоторые свойства этих отображений.

Автор вполне сознает, что в связи с вышеизложенным, может возникнуть целый ряд вопросов, на которые в статье не

---

[x] Как известно, линейное векторное пространство называется бесконечномерным, если, каково бы ни было натуральное число п, существует п линейно независимых векторов. Кроме того, следует отметить, что в настоящей статье будем считать, что Ω - поле комплексных чисел.

дается ответа. Следует также отметить, что не все утверждения, приведенные в статье, доказываются (в особенности в тех случаях, когда эти доказательства известны). Автор не сомневается в том, что результаты, полученные в настоящей статье, требуют уточнений, дополнений и дальнейшей разработки.

§I. Безразмерное проективное пространство

Пусть $a \in V$ - ненулевой вектор безразмерного линейного пространства V. Множество векторов, коллинеарных вектору a, т.е. векторов вида αa, где $\alpha \in \Omega$ - произвольное, отличное от нуля число исходного поля Ω, мы будем называть проективной точкой и обозначать через $A(a)$ или просто через A. Множество всех возможных проективных точек $A(a)$ мы будем называть безразмерным проективным пространством и обозначать через P.

В пространстве P можно следующим образом определить линейные подпространства любой конечной размерности n. Если векторы $a_i \in V$ $(i=1,2,\dots,n+1)$ - линейно независимы, что мы запишем:

$$[a_1 a_2 \cdots a_{n+1}] \neq 0, \quad x) \qquad (I.1)$$

то точки A_i, соответствующие этим векторам в пространстве P, мы также будем называть линейно независимыми. Множество точек $X(x) \in P$ таких, что для векторов $x \in V$ выполняется равенство

$$[x a_1 a_2 \cdots a_{n+1}] = 0, \qquad (I.2)$$

мы будем называть n-мерной проективной плоскостью пространства P и обозначать через P_n. Уравнение (I.2) мы будем записывать также в виде:

x) Квадратными скобками здесь обозначено "внешнее" произведение векторов . См. А.М.Лопшиц /I/.

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i. \quad (\alpha_i \in \Omega) \qquad (I.3)$$

В частности, две линейно независимые точки $A_1(a_1)$ и $A_2(a_2)$ определяют одномерную проективную плоскость P_1 :

$$[x a_1 a_2] = 0, \quad [a_1 a_2] \neq 0, \qquad (I.4)$$

которую мы будем называть проективной прямой. Три и более точек, принадлежащих одной и той же проективной прямой, мы будем называть коллинеарными.

Три линейно независимые точки $A_i(a_i)$ $(i=1,2,3)$ определяют двумерную проективную плоскость P_2, которую мы будем просто называть плоскостью. Точку $A(a)$ $(a \neq 0)$ мы будем называть нульмерной проективной плоскостью и обозначать через P_0. Нульвектору пространства V ничто не соответствует в пространстве P.

Если запишем уравнение (I.4) в виде:

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \qquad (I.5)$$

то убедимся в том, что проективная прямая $A_1 A_2$, определяемая этим уравнением, имеет бесчисленное множество точек. Кроме того, видим, что если две точки A_1 и A_2 прямой (I.5) принадлежат проективному пространству P, то и все точки этой прямой принадлежат пространству P.

Пусть в пространстве P заданы две плоскости P_l и P_m. Тогда в исходном векторном пространстве V им соответствуют линейные подпространства V_{l+1} и V_{m+1}. Как известно, между размерностями этих подпространств имеет место соотношение

$$(l+1) + (m+1) = (s+1) + (d+1),$$

где $(s+1) = \dim\left(V_{l+1} \bigcup V_{m+1}\right)$, $(d+1) = \left(V_{l+1} \bigcap V_{m+1}\right)$.

В пространстве P сумме и пересечению подпространств V_{l+1} и V_{m+1} соответствуют плоскости P_s и P_d. Поэтому имеет место равенство

$$l+m=b+d. \qquad (1.6)$$

Если $V_{l+1} \cap V_{m+1} = \emptyset$, то соответствующие им плоскости P_l и P_m не пересекаются или скрещиваются. Целесообразно в этом случае положить $d=-1$.

Используя формулу (1.6), можно сделать вывод о взаимном расположении двух плоскостей P_l и P_m (в зависимости от величин b и d). В частности, две различные проективные прямые P_1 и P_1' пересекаются (в точке) только тогда, когда они принадлежат одной 2-плоскости P_2.

Нетрудно доказать, что в проективной 2-плоскости имеет место теорема Дезарга и что диагональные точки полного четырехвершинника не могут быть коллинеарными (постулат Фано).

§2. Двойное отношение четырех плоскостей

Пусть проективная прямая определена двумя точками $A_1(a_1)$ и $A_2(a_2)$. Если $A_3(a_3)$ и $A_4(a_4)$ - две какие-либо другие точки прямой A_1A_2, т.е.

$$\begin{cases} a_3=\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2 \\ a_4=\alpha_3 a_1+\alpha_4 a_2, \end{cases} \qquad (2.1)$$

то, как обычно, двойное отношение четырех точек A_i определяется равенством:

$$\vartheta=(A_1A_2A_3A_4)=\frac{\alpha_2/\alpha_1}{\alpha_4/\alpha_3}. \qquad (2.2)$$

Нетрудно проверить, что величина ϑ не зависит от выбора векторов $a_i \in V$, определяющих точки A_i (среди всех векторов, коллинеарных каждому из них в пространстве V).

При $\vartheta=-1$ точки A_3, A_4 разделяют точки A_1, A_2 гармонически. Тремя различными точками A_1, A_2, A_3 проективной прямой четвертая гармоническая точка A_4 определяется однозначно.

В проективной 2-плоскости имеет место теорема об инвариантности двойного отношения четырех точек при центральном проектировании. В силу этой теоремы имеет смысл определение двойного отношения четырех прямых, принадлежащих одному и тому же пучку. Можно ввести также понятие пучка проективных m-плоскостей (т.е. множества m-плоскостей пространства P, имеющих общее пересечение) и доказать, что если произвольная прямая не принадлежит их пересечению, то двойное отношение четырех ее точек пересечения с этими m-плоскостями не зависит от выбора прямой, а только от выбора самих m-плоскостей.

Докажем это утверждение для случая $m=2$. Пусть заданы 2-плоскости Q_i $(i=1,2,3,4)$, проходящие через одну и ту же прямую S_1S_2, а произвольные прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекают плоскости Q_i в точках A_i и B_i (соответственно). Тогда для точек A_3 и A_4 выполняются равенства (2.I) и имеет место равенство (2.2). Аналогично, для точек B_i получим

$$\vartheta' = (B_1B_2B_3B_4) = \frac{\beta_2/\beta_1}{\beta_4/\beta_3}. \qquad (2.3)$$

Предположим, что прямые A_iB_i пересекают прямую S_1S_2 (ось пучка) в точках $S_i(s_i)$. Надо учесть, что векторы s_1 и s_2 не коллинеарны, т.к. в противном случае точки $S_1(s_1)$ и $S_2(s_2)$ совпали бы и все точки S_i, A_i и B_i принадлежали бы одной 2-плоскости, в которой, как вышеуказано, утверждение теоремы верно. Поэтому допустим, что точки S_1, S_2, A_1 и A_2 - линейно независимы. Тогда, используя соотношения

$$b_i = \sigma_i s_i + \lambda_i a_i, \quad (i=1,2,3,4)$$

можно вывести равенства

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} : \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \frac{\beta_4}{\beta_3} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3} : \frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

из которых следует, что $\vartheta' = \vartheta$.

Доказательство в общем случае (произвольного m) можно провести методом полной индукции.

§3. Гиперплоскости

Пусть в исходном линейном векторном пространстве V определена скалярная линейная функция φ векторного аргумента (ковектор), т.е. такая линейная функция, которая каждому вектору $x \in V$ относит определенное число $\alpha \in \Omega$. Назовем гиперплоскостью пространства P многообразие точек $X(x)$ таких, что для вектора x, соответствующего каждой такой точке $X(x)$ имеет место равенство:

$$\varphi x = 0. \qquad (3.1)$$

Очевидно, что если две скалярные линейные функции φ и ψ линейно зависимы (коллинеарны), т.е. если для всех векторов x имеет место тождество

$$\psi x = \lambda \cdot \varphi x, \qquad (\lambda \in \Omega, \lambda \neq 0)$$

то уравнением

$$\psi x = 0 \qquad (3.2)$$

определяется та же гиперплоскость, что и уравнением (3.1). Гиперплоскость (3.1) мы кратко будем обозначать через φ. Будем говорить, что точка $A(a)$ лежит в гиперплоскости φ, если $\varphi a = 0$, а в случае $\varphi b \neq 0$, что точка $B(b)$ лежит вне этой гиперплоскости. Мы будем также говорить, что гиперплоскости φ и ψ скрещиваются, если уравнения (3.1) и (3.2) не имеют общих решений.

Так как сумма двух скалярных линейных функций и произведение скалярной линейной функции на число также являются скалярными линейными функциями, то уравнение

$$\gamma_1 \cdot \varphi_1 x + \gamma_2 \cdot \varphi_2 x = 0, \qquad (\gamma_i \in \Omega) \qquad (3.3)$$

в котором γ_i не равны одновременно нулю, при постоянных значениях γ_i, определяет некоторую гиперплоскость. Если же параметром γ_i придавать произвольные (переменные) значения, то (при $\varphi_1 \neq \varphi_2$) будем называть многообразие точек $X(x) \in P$, для которых выполняется равенство (3.3), пучком гиперплоскостей. Пересечение $\varphi_1 \cap \varphi_2$ двух различных гиперплоскостей φ_1 и φ_2 можно назвать гиперпрямой. Очевидно, что сами гиперплоскости φ_1 и φ_2 принадлежат пучку гиперплоскостей (3.3).

Следует отметить, что равенство (3.3) выполняется не для любой точки $X \in P$. Действительно, если бы это равенство представляло собою тождество, то функции φ_1 и φ_2 должны быть коллинеарными, что невозможно, т.к. согласно условию, φ_1 и φ_2 - различные гиперплоскости.

Аналогично можно ввести понятие связки гиперплоскостей.

Докажем, что проективная прямая может иметь с гиперплоскостью либо только одну общую точку, либо она целиком принадлежит ей.

В самом деле, пусть гиперплоскость φ определена уравнением (3.I), а прямая уравнением

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2. \qquad (I.5)$$

I) Если точка $A_1(a_1)$ прямой A_1A_2 принадлежит гиперплоскости (3.I), т.е. если $\varphi a_1 = 0$, а точка $A_2(a_2)$ ей не принадлежит, то из (I.5) следует, что

$$\varphi x = \alpha_2 \cdot \varphi a_2 \neq 0.$$

Следовательно, любая точка $X(x)$ прямой (I.5), отличная от точки A_1 , не лежит в гиперплоскости φ.

2) Если же обе точки A_1 и A_2 прямой (I.5) принадлежат гиперплоскости φ , т.е. если $\varphi a_1 + \varphi a_2 = 0$, то для любой точки $X(x)$ прямой A_1A_2 мы получим $\varphi x = 0$. Следовательно, в этом случае прямая A_1A_2 целиком принадлежит гиперплоскости φ.

Нетрудно доказать, что если 2-плоскость и гиперплоскость не скрещиваются, то они могут иметь либо одну общую точку, либо общую прямую, либо эта 2-плоскость целиком принадлежит гиперплоскости.

Имеет место следующая теорема: если линейно независимые точки A_i $(i=1,\dots,n+1)$ пространства P принадлежат гиперплоскости φ, то все точки n-плоскости P_n определяемой этими точками, принадлежат гиперплоскости φ.

Можно также доказать, что n -плоскость P_n и гиперплоскость φ могут иметь общую m -плоскость такую, что $0 \leq m \leq n$. Если $m=0$, то P_n и φ имеют только одну общую точку. Если $m=n$, то P_n целиком принадлежит гиперплоскости φ. Если же ни одна из точек A_i, определяющих n-плоскость P_n, не лежит в гиперплоскости φ, то P_n и φ скрещиваются, т.е. не имеют общих точек.

Пусть φ_i $(i=1,2,3,4)$ - произвольные четыре гиперплоскости пучка (3.3) и произвольная прямая пространства P, не принадлежащая пересечению этих гиперплоскостей, пересекается с ними в точкахA_i. Тогда двойное отношение $(A_1 A_2 A_3 A_4)$ не зависит от выбора прямой и зависит только от выбора гиперплоскостей

В самом деле, если уравнения гиперплоскостей φ_3 и φ_4

$$\varphi_3 = \gamma_1\varphi_1 + \gamma_2\varphi_2$$
$$\varphi_4 = \gamma_3\varphi_1 + \gamma_4\varphi_2,$$

а для точек A_3 и A_4 прямой A_1A_2

$$a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$$
$$a_4 = \alpha_3 a_1 + \alpha_4 a_2,$$

то, с одной стороны,

$$(A_1A_2A_3A_4) = \frac{\alpha_2/\alpha_1}{\alpha_4/\alpha_3}, \qquad (3.4)$$

с другой стороны, в силу того, что $A_i \in \varphi_i$, т.е. $\varphi_i a_j \neq 0$ при $i \neq j$, $\varphi_i a_i = 0$, имеем:

Отсюда выводим, что

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\varphi_2 a_1}{\varphi_1 a_2}. \qquad (3.5)$$

Аналогично найдем, что

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{\gamma_4}{\gamma_3} \cdot \frac{\varphi_2 a_1}{\varphi_1 a_2}. \qquad (3.6)$$

Из равенств (3.4)-(3.6) следует, что

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{\gamma_2/\gamma_1}{\gamma_4/\gamma_3},$$

чем и доказано вышеупомянутое утверждение.

Это свойство дает нам возможность определить двойное отношение четырех гиперплоскостей φ_i пучка (3.3):

$$(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4) = \frac{\gamma_2/\gamma_1}{\gamma_4/\gamma_3}. \qquad (3.7)$$

§4. Квадрики

Пусть в безразмерном линейном векторном пространстве V определена симметрическая билинейная скалярная функция φ от двух векторных аргументов x и y:

$$\varphi x y = \varphi y x.$$

Тогда подчиненная ей скалярная функция σ одного векторного аргумента

$$\sigma(x) = \varphi x x$$

является квадратичной формой. Назовем квадрикой многообразие точек $X(x)$ таких, что

$$\varphi x x = 0. \qquad (4.1)$$

Квадрика (4.I) может быть задана и уравнением

$$\psi x x = 0,$$

где ψ -билинейная функция, коллинеарная функция φ, т.е. если для любого вектора $x \in V$ имеет место тождество:

$$\psi x x = \lambda \cdot \varphi x x. \quad (\lambda \in \Omega, \lambda \neq 0)$$

В случае, когда билинейная функция φ распадающаяся, т.е. когда выполняется тождество:

$$\varphi x y = \psi x \cdot \theta_y$$

где ψ и θ - некоторые скалярные линейные функции, то для подчиненной функции σ мы получим тождество:

$$\varphi x x = \psi x \cdot \theta x.$$

Если при этом функции ψ и θ не коллинеарны, то мы будем говорить, что квадрика (4.I) распадается на две различные гиперплоскости

$$\psi x = 0 \quad \text{и} \quad \theta x = 0. \tag{4.2}$$

Если же функции ψ и θ -коллинеарны, квадрика (4.I) состоит из дважды взятой гиперплоскости

$$\psi x = 0. \tag{4.3}$$

Прямая

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \tag{4.4}$$

и квадрика (4.I) имеют либо две различные общие точки, либо одну (двукратную) общую точку, либо эта прямая целиком принадлежит квадрике.[x] В первом случае дискриминант квадратного уравнения (относительно отношения $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$)

---

[x] Напоминаем, что основное поле Ω, согласно нашему условию, является полем комплексных чисел.

$$\varphi a_1 a_1 \cdot \alpha_1^2 + 2\varphi a_1 a_2 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 + \varphi a_2 a_2 \cdot \alpha_2^2 = 0 \qquad (4.5)$$

отличен от нуля, во втором равен нулю. Если же

$$\varphi a_1 a_1 = \varphi a_1 a_2 = \varphi a_2 a_2 = 0,$$

то уравнение (4.5) выполняется для любых значений α_1 и α_2 и тогда прямая (4.4) является прямолинейной образующей квадрики (4.I).

Если точка A_1 квадрики обладает таким свойством, что всякая проходящая через нее прямая, не являющаяся прямолинейной образующей, имеет точку A_1 своей двукратной точкой пересечения с квадрикой, то она не может иметь с квадрикой более ни одной общей точки. В таком случае точка A_1 двойная точка квадрики. Если квадрика (4.I) распадается и состоит из двух гиперплоскостей (4.2), то каждая точка гиперпрямой $\psi \cap \theta$ является двойной. Если же квадрика состоит из дважды взятой гиперплоскости (4.3), то каждая точка этой квадрики двойная. В дальнейшем будем полагать, что квадрика (4.I) нераспадающаяся.

Пусть точка $A_1(a_1)$ принадлежит квадрике, а точка $A_2(a_2)$ - произвольная точка пространства P. Нетрудно доказать, что условие

$$\varphi a_1 a_2 = 0 \qquad (4.6)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы точка A_1 была двойной точкой квадрики (4.I).

Касательной к квадрике в ее недвойной точке $A_1(a_1)$ называется прямая, для которой точка A_1 является двукратной. Прямолинейные образующие квадрики также причисляются к ее касательным.

Пусть точка $Y(y)$ - произвольная точка касательной, проведенной к ней в точке $A_1(a_1)$. Т.к. эта точка двукратная, то дискриминант

$$\Delta = (\varphi a_1 y)^2 - \varphi a_1 a_1 \cdot \varphi yy \qquad (4.7)$$

квадратного уравнения (4.5)[x] должен быть равен нулю и, т.к. точка $A_1(a_1)$ принадлежит квадрике, то отсюда находим, что

$$\varphi a_1 y = 0. \qquad (4.8)$$

Это условие выполняется для произвольной точки $Y(y)$, взятой на касательной к квадрике в точке $A_1(a_1)$. Если точка $Y(y)$ также принадлежит квадрике, то из (4.7) и (4.8) следует, что прямая A_1Y является прямолинейной образующей, а потому и касательной.

Обратно, если для прямой A_1Y имеет место условие (4.8), то, в силу того, что $\varphi a_1 a_1 = 0$, мы получим из (4.7), что $\Delta = 0$. Следовательно, точка A_1 -двукратная точка прямой A_1Y, а потому она касается к квадрике в точке A_1.

Таким образом, условие (4.8) необходимо и достаточно для того, чтобы прямая A_1Y была касательной к квадрике (4.I) в точке A_1. Т.к. при фиксированном значении аргумента a_1 левая часть уравнения (4.8) является линейной скалярной функцией от у, можем утверждать, что многообразие касательных, проведенных к квадрике в ее (недвойной) точке A_1, представляет собою некоторую гиперплоскость. Назовем ее касательной гиперплоскостью к квадрике в точке A_1, а саму эту точку - точкой касания гиперплоскости (4.8) и квадрики (4.I).

Подобно тому, как это делается в проективном пространстве конечной размерности, можно ввести понятие гармонической сопряженности точек пространства P относительно квадрики и доказать, что для того, чтобы точки $X(x)$ и $Y(y)$ были гармонически сопряжены относительно квадрики (4.I), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\varphi x y = 0. \qquad (4.9)$$

Т.к. φ -симметрическая билинейная функция, то отсюда следует, что сопряженность точек относительно квадрики есть свойство взаимное. Точки, принадлежащие квадрике, являются самосопряженными.

---
x) В данном случае $a_2 = y$.

Из (4.9) видим, что если $Y_0(y_0)$ -фиксированная точка, то многообразие точек $X(x)$, гармонически сопряженных с точкой Y_0 относительно квадрики (4.1), является некоторой гиперплоскостью

$$\varphi x y_0 = 0 \quad x) \tag{4.10}$$

Эта гиперплоскость называется полярной гиперплоскостью точки Y_0 относительно квадрики (4.1), а точку Y_0 - полюсом гиперплоскости (4.10) относительно этой же квадрики.

Как известно, в безразмерном линейном векторном пространстве V можно над полилинейной функцией выполнять процесс поляривации:xx)

$$D_{xy}\varphi xx = \varphi yx + \varphi xy.$$

В нашем случае φ -симметрическая билинейная функция, а потому уравнение (4.10) полярной гиперплоскости можно записать:

$$D_{xy}\varphi xx\Big|_{y=y_0} = 0. \tag{4.11}$$

Нетрудно убедиться в том, что касательная гиперплоскость, проведенная к квадрике в ее недвойной точке является полярной гиперплоскостью точки касания.

Из симметричности функции φ следует также, что если точка $X(x)$ принадлежит полярной гиперплоскости (4.10) точки $Y_0(y_0)$, то полярная гиперплоскость точки $X(x)$ проходит через точку Y_0. Отсюда видим, что если в пространстве P задана квадрика без двойных точек, то можно построить поляритет этого пространства относительно этой квадрики: каждой точке пространства P соответствует полярная гиперплоскость, а каждой гиперплоскости - ее полюс относительно заданной квадрики

x) Предполагаем, что Y_0 не является двойной точкой квадрики, в противном случае точка Y_0 гармонически сопряжена со всеми точками пространства P.

xx) См. А.М.Лопшиц /1/.

причем сохраняется инцидентность точек и гиперплоскостей.

Как известно, в проективном пространстве P_n конечной размерности n имеет место принцип двойственности, который утверждает, что если верно какое-нибудь предложение, касающееся плоскостей P_l и P_m $(0 \leq l \leq n,\ 0 \leq m \leq n)$ и соотношения инцидентности между ними, то будет верным и двойственное к нему предложение, если в первом сделать следующие замены (соответственно):

$$
\begin{array}{ll|l}
P_l, & P_m, & P_{n-l-1}, \quad P_{n-m-1}, \\
P_l \subseteq P_m, & P_l \supseteq P_m, & P_{n-l-1} \supseteq P_{n-m-1}, \quad P_{n-l-1} \subseteq P_{n-m-1}, \\
P_l \cup P_m, & P_l \cap P_m, & P_{n-l-1} \cap P_{n-m-1}, \quad P_{n-l-1} \cup P_{n-m-1}
\end{array}
$$

В нашем безразмерном проективном пространстве P такой принцип не имеет места.[x)] Мы можем отнести точке P_0 гиперплоскость φ, но, например, для прямой P_1 не можем определить двойственное ей многообразие. По этой причине в пространстве P мы не можем определить коррелятивное соответствие. Это имело бы смысл делать только тогда, если ограничиться только точками и гиперплоскостями. При таком ограничении можно было бы утверждать, что поляритет относительно заданной квадрики является инволютивным коррелятивным соответствием.

§5. Коллинеации

Для построения безразмерного проективного пространства P мы исходим из основного безразмерного линейного векторного пространства V над полем Ω и определили точку $X \in P$ как множество векторов пространства V, коллинеарных ненулевому вектору x. Поэтому при определении (точечного) пре-

---

x) См. Р.Бэр /9/, стр.124.

образования в пространстве P, необходимо учесть, что оно индуцируется некоторым преобразованием векторов в пространстве V.

Пусть точке $X(x) \in P$ соответствует некоторая точка $X'(x) \in P$. Т.к. точки X и X' определяются векторами $\lambda x, \mu x \in V$ $(\lambda \neq 0, \mu \neq 0)$, то соответствие в P, которое мы обозначим

$$X' = \Pi(X), \qquad (5.1)$$

индуцируется некоторым соответствием

$$x' = F(x) \qquad (5.2)$$

в пространстве V.

Относительно векторной функции F необходимо сделать предположение, что она должна быть однородной:

$$F(\lambda x) = \lambda \cdot F(x) = \lambda \cdot x'.$$

Тогда в пространстве P точке $X(\lambda x)$ будет соответствовать точка $X'(\lambda x')$ x). Кроме того, необходимо, чтобы в области определения $F(x) \neq 0$, т.к. в противном случае мы будем иметь $x' = 0$, а нулевому вектору пространства V мы не определили точку в пространстве P.

Естественно, что для построения проективной геометрии в пространстве P наибольший интерес представляет такое его отображение Π на себя, при котором сохраняется коллинеарность точек, т.е. коллинеарное отображение или коллинеация. Легко видеть, что если в пространстве V в качестве функции F взять линейную векторную функцию A (аффинор), то отображение

$$x' = Ax \qquad (5.3)$$

индуцирует в P такое отображение Π, которое сохраняет коллинеарность точек.

---

x) Согласно нашему определению, $\lambda x'$ и $\mu x'$, также и при $\lambda \neq \mu$, определяют одну и ту же точку $X' \in P$.

Следует отметить, что отображение (5.3) однозначно, но не взаимнооднозначно. В самом деле, пусть точки $A_1(a_1)$ и $A_2(a_2) \in P$ различны и $X(x)$ - произвольная точка прямой A_1A_2. Тогда векторы a_1 и $a_2 \in V$ не коллинеарны. Если образы A_1' и A_2' этих точек совпадают, т.е. $Aa_1 = Aa_2$, то для образа X' точки X мы будем иметь:

$$x' = Ax = A(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot Aa_1 = (\alpha_1 + \alpha_2) a_1'.$$

Следовательно, все точки X прямой A_1A_2 отображаются в одну и ту же точку $A_1'(a_1')$.

Далее, следует отметить, что если преобразование сохраняет коллинеарность точек, то оно не обязательно осуществляется линейной векторной функцией вида (5.3). А.М.Лопшицем доказана следующая теорема: если каждому вектору $x \in V$ однозначно отнесен вектор $x' = F(x) \in V$ и при этом

$$x' = F(x) \neq 0, \text{ если } x \neq 0,$$

$$[x'y'] \neq 0, \text{ если } [xy] \neq 0,$$

$$[x'y'z'] \neq 0, \text{ если } [xyz] \neq 0,$$

$$[x'y'(x'+y')] = 0,$$

то

$$x' = Ax \cdot \omega(x), \qquad (5.4)$$

где A - однозначно определяемая (с точностью до постоянного множителя) линейная векторная функция векторного аргумента, а ω - однозначно определяемая скалярная функция ($\omega(x) \neq 0$)

Нетрудно проверить, что отображение П, которое индуцируется преобразованием (5.4) в пространстве Р, сохраняет коллинеарность точек, а потому является коллинеацией. Для краткости формулировок, мы в дальнейшем будем говорить об отображении (5.4), подразумевая при этом, где это необходимо, упомянутую коллинеацию П. Прежде всего убедимся в том, что при таком отображении П двойное отношение четырех точек прямой является инвариантом.

В самом деле, пусть точки $A_i(a_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

принадлежат одной и той же прямой, причем

$$a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$$
$$a_4 = \alpha_3 a_1 + \alpha_4 a_4,$$

т.е.

$$(A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{\alpha_2/\alpha_1}{\alpha_4/\alpha_3}.$$

Преобразование (5.4) относит точке $A_3(a_3)$ такую точку $A_3'(a_3')$, что

$$a_3' = A(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)\cdot\omega(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha\cdot(\alpha_1 \cdot Aa_1 + \alpha_2 \cdot Aa_2),$$

где

$$\alpha = \omega(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2). \qquad (\alpha \neq 0)$$

Аналогично получим:

$$a_4' = \beta\cdot(\alpha_3 \cdot Aa_1 + \alpha_4 \cdot Aa_2). \qquad (\beta \neq 0)$$

Кроме того, можем писать: $a_1' = \gamma\cdot Aa_1$, $a_2' = \delta\cdot Aa_2$, $(\gamma \neq 0, \delta \neq 0)$, т.е.

$$Aa_1 = \frac{1}{\gamma}\cdot a_1', \quad Aa_2 = \frac{1}{\delta}\cdot a_2'.$$

Теперь видим, что

$$a_3' = \alpha\cdot\left(\frac{\alpha_1}{\gamma}\cdot a_1' + \frac{\alpha_2}{\delta}\cdot a_2'\right)$$
$$a_4' = \beta\cdot\left(\frac{\alpha_3}{\gamma}\cdot a_1' + \frac{\alpha_4}{\delta}\cdot a_2'\right),$$

а потому

$$(A_1' A_2' A_3' A_4') = \frac{\frac{\alpha_2}{\delta} : \frac{\alpha_1}{\gamma}}{\frac{\alpha_4}{\delta} : \frac{\alpha_3}{\gamma}} = \frac{\alpha_2/\alpha_1}{\alpha_4/\alpha_3} = (A_1 A_2 A_3 A_4).$$

В частности, можем утверждать, что отображение (5.4) преобразует гармоническую четверку точек в гармоническую четверку.

Теперь убедимся в том, что при преобразовании (5.4) образом n-плоскости является некоторая m-плоскость, причем $m \leq n$, т.е. это преобразование не может увеличить размерность п-плоскостей.

Действительно, пусть n-плоскость P_n определяется линейно назависимыми точками $A_i(a_i)$, $(i = 1, \dots, n+1)$.
Тогда их образами служат точки $A_i'(a_i')$ причем

$$a_i' = Aa_i \cdot \beta_i, \text{где } \beta_i = \omega(a_i) \neq 0.$$

Если бы существовала точка $A(a) \in P$ такая, что ее образ $A'(a')$ вместе с точками A_i', образует линейно независимую систему, то мы пришли бы к противоречию, а именно:

$$a = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i \qquad (\alpha_i \neq 0)$$

следует, что

$$a' = A\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) \cdot \omega\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right),$$

или, введя обозначение

$$\beta = \omega\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right),$$

$$a' = \beta \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot Aa_i = \beta \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \cdot a_i',$$

т.е. точка $A'(a')$ линейно зависит от точек $A_i'(a_i')$.

Таким образом, приходим к выводу, что возможны только два случая:

1) $m = n$ и тогда при коллинеации (5.4) образом n-плоскости служит n-плоскость, т.е. при этом преобразовании размерность плоскостей не изменяется (невырождающаяся коллинеация).

2) $m < n$, Размерность плоскостей при коллинеации по-

нижается. Если $n - m = k$, то эта коллинеация k-кратно вырождающаяся.

Подобно тому, как это делается в проективном пространстве конечной размерности $n > 1$, можно показать, что невырождающаяся коллинеация определяется заданием $(n+2)$ пар соответственных точек, не лежащих по $(n+1)$ в одной $(n-1)$ плоскости.

Докажем, что если линейно независимые точки $A_i(a_i)$ $(i = 1, \cdots, n+1)$ принадлежащих гиперплоскости φ, отображаются при невырождающейся коллинеации (5.4) в линейно независимые точки $A'_i(a'_i)$, принадлежащих другой гиперплоскости ψ, то образ любой точки плоскости P_n, определяемой точками A_i, принадлежит гиперплоскости ψ.

В самом деле, согласно условию,

$$a'_i = Aa_i \cdot \omega(a_i) = \gamma_i \cdot Aa_i \quad (\gamma_i = \omega(a_i) \neq 0). \qquad (5.5)$$

если точки A_i принадлежат гиперплоскости φ, а их образы A'_i - гиперплоскости ψ, то

$$\varphi a_i = 0, \quad \psi a'_i = 0, \quad (i = 1, \dots, n+1) \qquad (5.6)$$

Пусть $X(x)$ - произвольная точка плоскости P_n, т.е.

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i .$$

Тогда, как мы видели раньше[x], $X \in \varphi$. Для соответствующей ей точки $X'(x')$ имеем:

$$x' = Ax \cdot \omega(x) = A\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) \cdot \omega\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) = \delta \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \cdot Aa_i ,$$

где

$$\delta = \omega\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) \neq 0,$$

а потому, в силу (5.5),

$$x' = \delta \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \cdot a'_i .$$

---

x) См. стр

Теперь справедливость нашего утверждения вытекает из условий (5.6):

$$\psi x' = \delta \cdot \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \cdot \psi a_i' = 0.$$

Далее рассмотрим в пространстве P невырождающиеся и притом обратимые коллинеации. Убедимся в том, что такие коллинеации существуют и что все они образуют группу.

Прежде всего определим в пространстве V операцию умножения отображений вида (5,4). Пусть

$$x' = F_1(x) = A_1 x \cdot \omega_1(x), \quad x' = F_2(x) = A_2 x \cdot \omega_2(x) \qquad (5.7)$$

два таких отображения. Тогда

I°. Произведение $F_1 F_2$ этих отображений:

$$x' = F_2(F_1(x)) = A_2(A_1(x)) \cdot \omega_{12}(x), \qquad (5.8)$$

где

$$\omega_{12}(x) = \omega_1(x) \cdot \omega_2(A_1 x \cdot \omega_1(x)),$$

является отображением того же вида, что и (5.4). В пространстве P отображения F_1 и F_2 индуцирут коллинеации Π_1 и Π_2, а потому произведение $\Pi_1 \Pi_2$, соответствующее произведению $F_1 F_2$ отображений (5,7), также является коллинеацией (закон замкнутости).

2°. Легко проверить, что умножение коллинеаций, определяемое правилом (5.8), обладает ассоциативным свойством.

3°. Т.к. мы расоматриваем обратимые коллинеации, то если при коллинеации П образом точки X является точка X', то однозначное соответствие $X' \to X$, которое мы обозначим через Π^{-1}, также является коллинеацией, причем обратной П. Такая коллинеация существует, если при отображении (5.4) аффинор A обратим. С точностью до некоторого скалярного множителя, мы можем тогда писать:

$$x = F^{-1}(x') = A^{-1} x' \cdot \omega'(x'). \qquad (5.9)$$

4^0. Среди всех отображений вида (5.4) существует отображение F_0 такое, которое каждому вектору $x \in V$ относит коллинеарный с ним вектор:[x)]

$$x' = F_0(x) = A_0 x \cdot \omega_0(x) = \lambda \cdot x \cdot \omega_0(x). \qquad (5.10)$$

Это отображение индуцирует в пространстве P некоторую коллинеацию Π_0, которая оставляет неизменными все точки этого пространства (тождественная коллинеация). Из (5.4), (5.8), (5.9) и (5.10) следует, что

$$\Pi \Pi^{-1} = \Pi^{-1} \Pi = \Pi_0,$$

т.е. что Π_0 -нейтральный элемент нашего множества невырождающихся обратимых коллинеаций.

Таким образом, мы убедились в том, что множество рассматриваемых коллинеаций пространства P, действительно, представляет собою группу, вообще говоря, некоммутативную, что видно из равенства (5.8). Т.к. каждая такая коллинеация является автоморфизмом пространства P, можем утверждать, что это множество представляет собою группу автоморфизмов пространства P.

Как упомянуто во введении, многие вопросы касающиеся свойств безразмерного проективного пространства, остаются в настоящей статье без ответа. Так, например, мы не рассматривали вырождающиеся коллинеации, центральные коллинеации (гомологии), недостаточно рассмотрены свойства гиперплоскостей и квадрики. Можно было бы в пространстве P выделить "несобственную" гиперплоскость и рассмотреть полученное таким образом (точечное) безразмерное аффинное пространство как подпространство пространства P. Все это является предметом для дальнейших исследований.

Литература

I. А.М.Лопшиц. Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных

x) Очевидно, что вектор x является собственным вектором аффинора A_0.

безразмерных пространствах. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1948, вып.VI, стр.365-419.
2. А.М.Лопшиц. Алгебраическая задача теории римановых пространств первого класса. Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1952, вып.IX, стр.462-490.
3. А.М.Лопшиц. Геометрическая характеристика аффинного отображения. Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. Москва, 1958, стр.213-221.
4. Ш.Д.Трупин. К вопросу о делимости тензоров в линейных безразмерных пространствах. Ученые записки Рижского педагогического института, 1957, вып.IV, стр.59-83.
5. Ш.Д.Трупин. К вопросу о коллинеарности и компланарности аффиноров в линейном безразмерном пространстве. Известия Академии наук Латвийской ССР, 1958, №6, стр.83-92.
6. Ш.Д.Трупин. Компланарность трех аффиноров с системой линейно независимых векторов в линейном безразмерном пространстве. Труды рижского алгебраического семинара. Рига, 1969, стр.282-296.
7. Б.З.Райхштейн. Некоторые теоремы о поливекторах. Доклады Академии наук СССР, 1966. Том 167, №5, стр.992-995.
8. Б.З.Райхштейн. Некоторые вопросы теории тензоров безразмерного и n-мерного пространств. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ярославль, 1965.
9. Р.Бэр. Линейная алгебра и проективная геометрия. Москва, 1955.
10. Н.Бурбаки. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. Москва, 1962.
11. W.Burau. Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie, Berlin, 1961.

Л.Н.Березина

К теории бинарных форм

Вводятся геометрические объекты, называемые векторами порядка "к" и (p,q) - тензорами, которые связаны с формой порядка m в бинарной евклидовой области. При помощи этих объектов определяется полная система инвариантов формы. Дается применение к вопросу канонизации уравнения алгебраической кривой произвольного порядка в евклидовой плоскости.

Автор выражает свою глубокую благодарность профессору Г.Б.Гуревичу, который, читая рукопись, сделал ряд ценных замечаний.

§I. Рассмотрим величины (α_k, β_k), которые при вращении системы координат на угол t преобразуются по закону

$$\overline{\alpha}_k = \alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt; \quad \overline{\beta}_k = -\alpha_k \sin kt + \beta_k \cos kt \qquad (I)$$

и, следовательно, удовлетворяют системе

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = k\beta_k, \quad \frac{d\beta_k}{dt} = -k\alpha_k. \qquad (2)$$

Назовем (α_k, β_k) вектором порядка "к". При к=I, очевидно, имеем обычный вектор.

Из формул (I) вытекают:

I. Для каждого вектора порядка "к" выражение

$$(\alpha_k)^2 + (\beta_k)^2 \qquad (3)$$

является инвариантом. Назовем этот инвариант модулем.

2. Вектор порядка "о" (к=0) имеет постоянные координаты.

Назовем произведением (α_p, β_p) и (α_q, β_q) величины

$$\left\{ (\alpha_p\alpha_q + \beta_p\beta_q),\ \begin{vmatrix} \alpha_p & \beta_p \\ \alpha_q & \beta_q \end{vmatrix} \right\} \tag{4}$$

3. Произведение вектора порядка "p" на вектор порядка "q" есть вектор порядка $(q-p)$.

4. Модуль произведения (4) равен произведению модулей обоих множителей.

5. Два вектора одинакового порядка (α_k, β_k) и ($\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$) имеют совместные инварианты

$$\alpha_k\hat{\alpha}_k + \beta_k\hat{\beta}_k \tag{5}$$

и

$$\begin{vmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \hat{\alpha}_k & \hat{\beta}_k \end{vmatrix} \tag{6}$$

6. Полная система инвариантов двух векторов одинакового порядка состоит из модулей обоих векторов и одного из инвариантов (5) или (6).

Найдем полную систему инвариантов вектора порядка "p" и вектора порядка "q" при $p \neq q$. Для этой цели ищем интегралы системы

$$\frac{d\alpha_p}{p\beta_p} = \frac{d\beta_p}{-p\alpha_p} = \frac{d\alpha_q}{q\beta_q} = \frac{d\beta_q}{-q\alpha_q} = dt \tag{7}$$

Два интеграла системы (7) совпадают с модулями

$$(\alpha_p)^2 + (\beta_p)^2 = (C_1)^2 \tag{8}$$

и

$$(\alpha_q)^2 + (\beta_q)^2 = (C_2)^2 \tag{9}$$

Третий интеграл находим из любого уравнения, связывающего (α_p, β_p) и (α_q, β_q), например

$$q\frac{d\alpha_p}{\beta_p} + p\frac{d\beta_q}{\alpha_q} = 0 \qquad (10)$$

Подставляя в уравнение (10) выражения

$$\beta_p = \sqrt{(C_1)^2-(\alpha_p)^2}, \quad \alpha_q = \sqrt{(C_2)^2-(\beta_q)^2} \qquad (11)$$

получаем

$$q\frac{d\alpha_p}{\sqrt{(C_1)^2-(\alpha_p)^2}} + p\frac{d\beta_q}{\sqrt{(C_2)^2-(\beta_q)^2}} = 0. \qquad (12)$$

Интеграл уравнения (12) имеет вид

$$q\arcsin\frac{\alpha_p}{C_1} + p\arcsin\frac{\beta_q}{C_2} = C \qquad (13)$$

Введём углы φ и ψ, для которых

$$\sin\varphi = \frac{\alpha_p}{C_1}, \quad \cos\varphi = \frac{\beta_p}{C_1},$$
$$\sin\psi = \frac{\beta_q}{C_2}, \quad \cos\psi = \frac{\alpha_q}{C_2}, \qquad (14)$$

тогда уравнение (13) выражает

$$q\varphi + p\psi = C \qquad (15)$$

Заметим, что если p и q имеют общие множители, то уравнение (15) следует сократить. Допустим, что сокращение произведено и в дальнейшем p и q взаимно простые числа, тогда

$$\sin(q\varphi + p\psi) = \bar{C} \tag{16}$$

или

$$\sin q\varphi \cos p\psi + \sin p\psi \cos q\varphi = \bar{C} \tag{17}$$

Подставляя в (17) известные формулы для $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ и заменяя тригонометрические функции выражениями (14), получаем алгебраическую форму интеграла (13).

Заметим, что полученный инвариант является формой степени $(p+q)$ относительно (α_p, β_p) и (α_q, β_q). Так совместный инвариант вектора порядка 2 и вектора порядка 3, имеет пятую степень, а вектора порядка 2 и вектора порядка 4 только третью, ибо при $p=2$ и $q=4$ уравнение (15) допускает сокращение на два.

§2. Назовем (p, q) - тензором совокупность величин $\lambda_{ij}^{(pq)}$ $(i, j = 1, 2)$, которые при вращении системы координат на угол t преобразуются по закону

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_{11} &= \cos pt \cos qt\, \lambda_{11} + \cos pt \sin qt\, \lambda_{12} + \\
&\quad + \sin pt \cos qt\, \lambda_{21} + \sin pt \sin qt\, \lambda_{22}, \\
\bar{\lambda}_{12} &= -\cos pt \sin qt\, \lambda_{11} + \cos pt \cos qt\, \lambda_{12} - \\
&\quad - \sin pt \sin qt\, \lambda_{21} + \sin pt \cos qt\, \lambda_{22}, \\
\bar{\lambda}_{21} &= -\sin pt \cos qt\, \lambda_{11} - \sin pt \sin qt\, \lambda_{12} + \\
&\quad + \cos pt \cos qt\, \lambda_{21} + \cos pt \sin qt\, \lambda_{22}, \\
\bar{\lambda}_{22} &= \sin pt \sin qt\, \lambda_{11} - \sin pt \cos qt\, \lambda_{12} - \\
&\quad - \cos pt \sin qt\, \lambda_{21} + \cos pt \cos qt\, \lambda_{22}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Координаты $\lambda_{ij}^{(pq)}$, как нетрудно проверить, удовлетворяют системе

$$\frac{d\lambda_{11}}{dt} = q\lambda_{12} + p\lambda_{21}\ , \quad \frac{d\lambda_{12}}{dt} = -q\lambda_{11} + p\lambda_{22}\ , \tag{I9}$$

$$\frac{d\lambda_{21}}{dt} = -p\lambda_{11} + q\lambda_{22}\ , \quad \frac{d\lambda_{22}}{dt} = -q\lambda_{21} - p\lambda_{12}\ .$$

Из системы (I9) при $p = q$ следует

$$d(\lambda_{11} + \lambda_{22}) = 0, \quad d(\lambda_{21} - \lambda_{12}) = 0, \tag{20}$$

$$d(\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}) = 0.$$

Значит, $\lambda_{ij}^{(pp)}$ имеет такие те инварианты, как обычный двухвалентный тензор, который, очевидно, является частным случаем $\lambda_{ij}^{(pq)}$ при $p = q = 1$.

Чтобы определить полную систему инвариантов $\lambda_{ij}^{(pq)}$ при $p \neq q$, покажем, что с каждым (p,q) - тензором взаимно однозначно связаны два вектора порядка "к", где

$$\kappa_1 = p + q\ , \quad \kappa_2 = |p - q| \tag{2I}$$

положим для определенности $p > q$, тогда

$$\alpha_{p+q} = \lambda_{11} - \lambda_{22}\ , \quad \beta_{p+q} = \lambda_{12} + \lambda_{21} \tag{22}$$

$$\alpha_{p-q} = \lambda_{11} + \lambda_{22}\ , \quad \beta_{p-q} = \lambda_{21} - \lambda_{12} \tag{23}$$

Действительно, учитывая систему (I9), имеем

$$\frac{d\alpha_{p+q}}{dt} = \frac{d(\lambda_{11} - \lambda_{22})}{dt} = (p+q)(\lambda_{12} + \lambda_{21}) = (p+q)\beta_{p+q}$$

Аналогично проверяем остальные координаты. Поскольку уравнения (22) и (23) решаются относительно $\lambda_{ij}^{(pq)}$, то имеет место и обратное. Если заданы два вектора (α_l, β_l) и (α_m, β_m) ($l > m$), то они определяют (p, q) - тензор $\lambda_{ij}^{(p,q)}$, где

$$p = \frac{l+m}{2}, \quad q = \frac{l-m}{2} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \frac{\alpha_l + \alpha_m}{2}, & \lambda_{12} &= \frac{\beta_l - \beta_m}{2}, \\ \lambda_{21} &= \frac{\beta_l + \beta_m}{2}, & \lambda_{22} &= \frac{\alpha_m - \alpha_l}{2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Значит, каждый (p, q) - тензор эквивалентен паре векторов порядка "к" и полная система инвариантов (p, q) - тензора совпадает с полной системой инвариантов векторов (22) и (23).

Отметим, что определитель $\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix}$ есть инвариант (p, q)-тензора, который равен одной четвертой разности модулей векторов (22) и (23), и, следовательно, равен нулю, когда векторы (22) и (23) имеют равные модули.

§3. Рассмотрим бинарную форму

$$f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a_k x^{m-k} y^k \tag{26}$$

При вращении системы координат на угол t имеем

$$\frac{da_k}{dt} = (m-k) a_{k+1} - k a_{k-1} \tag{27}$$

Покажем, что с каждой формой (26) можно связать некоторую совокупность векторов порядка "к" и, что полная система инвариантов формы образуется из инвариантов этих векторов. Для этой цели полагаем

$$\alpha_k = C^q a_q \ , \quad \beta_k = D^p a_p \ , \tag{28}$$

где C^q и D^p постоянные коэффициенты. По индексам p и q предполагается суммирование, причем p принимает все нечетные значения от I до m, а q - все четные от 0 до т. Дифференцируя величины (28) и подставляя выражения (27), получаем

$$\frac{d\alpha_k}{dt} = \left\{ C^{p-1}(m+1-p) - C^{p+1}(p+1) \right\} a_p \ , \tag{29}$$

$$\frac{d\beta_k}{dt} = \left\{ D^{q-1}(m+1-q) - D^{q+1}(q+1) \right\} a_q \ .$$

Подставляя выражения (28) и (29) в систему (2) и сравнивая коэффициенты при a_p и a_q, получаем систему уравнений, которой удовлетворяют C^q и D^p.

$$\begin{aligned} \kappa D^p &= C^{p-1}(m+1-p) - C^{p+1}(p+1) \ , \\ -\kappa C^q &= D^{q-1}(m+1-q) - D^{q+1}(q+1) \ , \end{aligned} \tag{30}$$

где по индексам p и q уже не следует суммировать.

Заметим, что если индексы у C^q или D^p, вычисляемые по формулам (30), становятся больше m, либо отрицательными, то такие C^q и D^p следует положить равными нулю.

Система (30) содержит $m+1$ однородных уравнений с $m+1$ неизвестными μ, следовательно, имеет отличные от нуля решения, когда определитель системы равен нулю.

Этот определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ m & -k & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & k & -3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & (-1)^{m-1}k & -m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & (-1)^m k \end{vmatrix} \tag{31}$$

Приравнивая определитель (3I) нулю, получаем уравнение для к, которое имеет корни к=0,2,4,..., m – при четном m и корни к=I,3,5,...,m при нечетном m. Каждое из этих значений к, подставленное в систему (30), определяет отношение C^q, D^p, из которых один может быть принят за единицу.

<u>Теорема.</u> С каждой формой порядка m в бинарной евклидовой области взаимно однозначно связана совокупность (α_k, β_k), где каждый α_k является линейной комбинацией a_i с четными индексами, а β_k – с нечетными индексами и к принимает значения к=0,2,4,..., m для четного m и значения к=I,3,5,...,m для нечетного m. Полная система инвариантов a_i совпадает с полной системой инвариантов совокупности (α_k, β_k).

§4. Для канонизации уравнения алгебраической кривой любого порядка в евклидовой плоскости необходимо выбрать инвариантное направление оси абсцисс и инвариантную точку приложения начала координат.

Для выбора положения оси абсцисс можно использовать любой из (α_k, β_k), связанных с формой высшего порядка кривой

Скажем, что ось абсцисс сонаправлена (α_k, β_k), если $\beta_k = 0$. Для этой цели следует повернуть оси координат на угол t, который определяется формулой

$$tg\, kt = \frac{\beta_k}{\alpha_k} \tag{32}$$

Это является прямым обобщением классической теории, где для кривой второго порядка ось абсцисс направляется по (α_2, β_2). Квадратичной формы, полагая

$$\operatorname{tg} 2t = \frac{2a_1}{a_0 - a_2} \qquad (33)$$

Заметим, что для кривой порядка m, где m -нечетное число, по крайнеймере один из (α_k, β_k), связанных с её формой порядка m, имеет отличный от нуля модуль, ибо в противном случае, кривая не содержит членов порядка m. Значит, для кривой нечетного порядка всегда возможна по крайнеймере одна фиксация вида (32). Для четного порядка возможны кривые, являющиеся обобщением окружности, для которых все (α_k, β_k) формы порядка m $(k=2,3,\ldots,m)$ имеют нулевой модуль. Для такой кривой форма порядка m имеет вид

$$(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}} \qquad (34)$$

Для фиксации начала координат в инвариантной точке кривой особый интерес представляют точки, определямые системой линейных уравнений с отличным от нуля определителем. Начнем с примера кривой четвертого порядка, уравнение которой можно написать в следующей форме

$$\lambda_{ijkl}\, x^i x^j x^k x^l + \lambda_{ijk} x^i x^j x^k + \lambda_{ij} x^i x^j + \lambda_i x^i + \lambda = 0 \qquad (35)$$
$$(i, j, k, l = 1, 2)$$

При переносе начала координат

$$x^1 = \overline{x^1} + t^1, \quad x^2 = \overline{x^2} + t^2 \qquad (36)$$

имеем

$$\overline{\lambda_{ijkl}} = \lambda_{ijkl}, \quad \overline{\lambda_{ijk}} = \lambda_{ijk} + 4\lambda_{ijkl} t^l \qquad (37)$$

Для формы λ_{ijkl} имеем

$$\alpha_0 = \lambda_{1111} + 2\lambda_{1122} + \lambda_{2222} \quad , \quad \beta_0 = 0 \; ; \tag{38}$$

$$\alpha_2 = \lambda_{1111} - \lambda_{2222} \,, \qquad \beta_2 = 2\lambda_{1112} + 2\lambda_{1222} \,, \tag{39}$$

$$\alpha_4 = \lambda_{1111} - 6\lambda_{1122} + \lambda_{2222} \,, \quad \beta_4 = 4\lambda_{1112} - 4\lambda_{1222} \,, \tag{40}$$

а для формы λ_{ijk}

$$\alpha_1 = \lambda_{111} + \lambda_{122} \quad , \quad \beta_1 = \lambda_{112} + \lambda_{222} \tag{41}$$

$$\alpha_3 = \lambda_{111} - 3\lambda_{122} \quad , \quad \beta_3 = 3\lambda_{112} - \lambda_{222} \tag{42}$$

При переносе (36) выражения (39) и (40) не меняются и мы в общем случае имеем два инвариантных направления, определяемые формулами

$$tg\, 2t = \frac{2\lambda_{1112} + 2\lambda_{1222}}{\lambda_{1111} - \lambda_{2222}} \tag{43}$$

$$tg\, 4t = \frac{4\lambda_{1112} - 4\lambda_{1222}}{\lambda_{1111} - 6\lambda_{1122} + \lambda_{2222}} \tag{44}$$

Величины (41) и (42) при переносе (36) меняются следующим образом

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_1 &= \alpha_1 + 4(\lambda_{1111} + \lambda_{1122})t^1 + 4(\lambda_{1112} + \lambda_{1222})t^2 \,, \\ \overline{\beta}_1 &= \beta_1 + 4(\lambda_{1112} + \lambda_{1222})t^1 + 4(\lambda_{1122} + \lambda_{2222})t^2 \end{aligned} \tag{45}$$

и

$$\overline{\alpha}_3 = \alpha_3 + 4(\lambda_{1111} - 3\lambda_{1122})t^1 + 4(\lambda_{1112} - 3\lambda_{1222})t^2 ,$$
$$\overline{\beta}_3 = \beta_3 + 4(3\lambda_{1112} - \lambda_{1222})t^1 + 4(3\lambda_{1122} - \lambda_{2222})t^2 \tag{46}$$

Выберем t^1 и t^2 так, чтобы имело место

$$\overline{\alpha}_3 = 0 \quad , \quad \overline{\beta}_3 = 0 \tag{47}$$

Эти условия инвариантны при вращениях системы координат и, следовательно, определяют инвариантную точку кривой. Коэффициенты у t^1 и t^2 в системе (46) образуют линейную вектор-функцию, сопоставляющую вектору (t^1, t^2), вектор порядка -3 (α_3, β_3) и, значит, дают (3,1)-тензор сопряженный векторам (39) и (40) формы $\lambda_{ijk\ell}$. Отсюда следует, что указанная инвариантная точка существует, когда модуль (39) не равен модулю (40).

Аналогично получаем, что, если модуль (38) не равен модулю (39), кривая имеет инвариантную точку, которая определяется уравнениями

$$\overline{\alpha}_1 = 0 \quad , \quad \overline{\beta}_1 = 0 \tag{48}$$

Подобным образом поступаем в общем случае. Пусть кривая порядка m содержит форму

$$f = \lambda_{i_1 i_2 \ldots i_m} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_m} , \tag{49}$$

образованную членами степени m и форму

$$\varphi = \lambda_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_{m-1}} \tag{50}$$

из членов степени $m-1$

При переносе начала координат имеем

$$\overline{\lambda}_{i_1 i_2 \dots i_m} = \lambda_{i_1 i_2 \dots i_m}, \quad \overline{\lambda}_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}} = \lambda_{i_1 i_2 \dots i_{m-1}} + m \lambda_{i_1 \dots i_{m-1} j} t^j \quad (51)$$

Образуем для формы φ все её векторы порядка "к". Выбирая t^1 и t^2 так, чтобы обе координаты одного (α_κ, β_κ) обращались в нуль, получаем инвариантную систему двух линейных уравнений. Определитель этой системы отличен от нуля, если модули векторов порядка (к-I) и (к+I) формы f не равны.

Гоштейн В.М.

КОМПЛЕКСЫ K_1 В R_4

Данная работа содержит вопросы, относящиеся к метрической теории прямых в четырехмерном евклидовом пространстве, а именно к теории комплекса прямых K_1.

Теория комплекса прямых в трехмерном евклидовом пространстве разработана довольно подробно (см. [2], [3]). Для случая многомерного евклидового пространства имеется работа Г.И.Орленко [5], в которой рассматривается метрическая теория комплексов K_p.

В § I данной работы указываются некоторые новые инварианты и не указанные ранее инвариантные точки прямой комплекса.

В §§ 2-3 исследуются специальные классы комплексов K_1. Доказаны теоремы существования данных классов. Получен ряд геометрических свойств, сформулированных в теоремах I-7.

§ I.

Комплексом K_p прямых в n-мерном евклидовом пространстве R_n, называется семейство прямых, зависящее от n-I+p параметров.

Таким образом, в работе рассматривается семейство прямых, зависящее от 4-х параметров.

Присоединим к прямой комплекса ортонормированный репер T следующим образом:

вершина репера A находится на прямой комплекса;

ось $\vec{e}_4$ репера направлена по прямой комплекса;

ось $\vec{e}_1$ по главной нормали комплекса [5].

Если уравнения движения ортонормированного репера писать в виде:

$$\begin{cases} d\vec{A} = \omega_i \vec{e}_i \\ d\vec{e}_i = \omega_{ik} \vec{e}_k, \quad \omega_{ik} = -\omega_{ki} \end{cases} \tag{I}$$

где i, к= I,2,3,4 и по одинаковым индексам предполагается суммирование, то для репера T имеет место:

$$\begin{cases} \omega_\alpha = \lambda_{\alpha 1}\omega_{14} + \lambda_{\alpha\beta}\omega_{\beta 4} \\ \omega_{1\alpha} = \lambda_{1\alpha 1}\omega_{14} + \lambda_{1\alpha\beta}\omega_{\beta 4} + \gamma_{1\alpha 1}\omega_1 \end{cases} \tag{2}$$

где $\alpha, \beta = 2,3$. Эти значения будем приписывать α, β всюду в данной работе.

Рассматривая, как меняются коэффициенты системы (2) при допустимых преобразованиях T, можно указать ряд инвариантов относительно данных преобразований.

Так как коэффициенты $\lambda_{1\alpha\beta}$ меняются при вращении $\bar{e}_2, \bar{e}_3$ в двумерной плоскости, ортогональной образующей и главной нормали комплекса, как координаты тензора и не зависят от переноса вершины репера вдоль прямой комплекса, то из них можно составить следующие инварианты (7):

$$J_1 = \begin{vmatrix} \lambda_{122} & \lambda_{123} \\ \lambda_{132} & \lambda_{133} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \lambda_{122} & \dfrac{\lambda_{123}+\lambda_{132}}{2} \\ \dfrac{\lambda_{123}+\lambda_{132}}{2} & \lambda_{133} \end{vmatrix} \tag{4}$$

$$J_3 = \lambda_{122} + \lambda_{133} \tag{5}$$

Кроме них, инвариантами будут:

$$J_4 = \begin{vmatrix} \gamma_{121} & \gamma_{131} \\ \lambda_{121} & \lambda_{131} \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$J_5 = \begin{vmatrix} \lambda_{21} & \gamma_{121} \\ \lambda_{31} & \gamma_{131} \end{vmatrix} , \qquad (7)$$

$$J_6 = (\lambda_{21})^2 + (\lambda_{31})^2 , \qquad (8)$$

$$J_7 = (\gamma_{121})^2 + (\gamma_{131})^2 , \qquad (9)$$

$$J_8 = \lambda_{21}\gamma_{121} + \lambda_{31}\gamma_{131} , \qquad (10)$$

$$J_9 = \lambda_{1\alpha\beta}\lambda_{\alpha 1}\lambda_{\beta 1} , \qquad (11)$$

$$J_{10} = \lambda_{1\alpha\beta}\gamma_{1\alpha 1}\gamma_{1\beta 1} . \qquad (12)$$

В двумерной плоскости, ортогональной прямой комплекса и его главной нормали, инвариантными будут направлени векторов $\lambda_{\alpha 1}\vec{e}_\alpha$, $\lambda_{1\alpha 1}\vec{e}_\alpha$, $\gamma_{1\alpha 1}\vec{e}_\alpha$ и собственные направления тензоров $\lambda_{\alpha\beta}$ и $\lambda_{1\alpha\beta}$.

Как показано в (5), обозначив через t параметр переноса вершины репера A по прямой комплекса, можно записать уравнения 4-х инвариантных точек прямой комплекса в виде:

$$t = -\frac{\lambda_{22}+\lambda_{33}}{2} , \qquad (13)$$

$$t^2 - (\lambda_{22}+\lambda_{33})t + \lambda_{22}\lambda_{33} - \lambda_{23}\lambda_{32} = 0 , \qquad (14)$$

$$t^2 - (\lambda_{22}+\lambda_{33})t + \lambda_{22}\lambda_{33} - \left(\frac{\lambda_{23}+\lambda_{32}}{2}\right)^2 = 0 , \qquad (15)$$

$$(\lambda_{1\alpha 1} + \gamma_{1\alpha 1}t)\gamma_{1\alpha 1} = 0 . \qquad (16)$$

Отметим еще следующие, не указанные в работе (5) инвариантные точки.

Если инвариант (10) отличен от нуля, то инвариантной будет точка, абсцисса которой определяется уравнением

$$(\lambda_{1\alpha 1}-\gamma_{1\alpha 1}t)\lambda_{\alpha 1}=0 \tag{17}$$

В этой точке векторы $\lambda_{\alpha 1}\vec{e}_\alpha$ и $\lambda_{1\alpha 1}\vec{e}_\alpha$ будут ортогональными.

Если инвариант (7) отличен от нуля, то точка, абсцисса которой

$$t=\frac{\lambda_{21}\lambda_{131}-\lambda_{31}\lambda_{121}}{\lambda_{21}\gamma_{131}-\lambda_{31}\gamma_{121}}, \tag{18}$$

будет инвариантной точкой.

Будучи приложены в данной точке, векторы $\lambda_{\alpha 1}\vec{e}_\alpha$ и $\lambda_{1\alpha 1}\vec{e}_\alpha$ становятся сонаправленными.

Если равен нулю инвариант (6), то на прямой комплекса инвариантной будет точка с абсциссой

$$t=-\frac{\lambda_{121}}{\gamma_{121}} \tag{19}$$

В этой точке вектор $\lambda_{1\alpha 1}\vec{e}_\alpha$ будет нулевым. Кроме того, в этом случае вектор $\gamma_{1\alpha 1}\vec{e}_\alpha$ будет сонаправлен $\lambda_{1\alpha 1}\vec{e}_\alpha$

Чтобы выяснить геометрический смысл инвариантов, рассмотрим два подмногообразия, принадлежащих комплексу.

§ 2. Комплексы K_I^A

Рассмотрев совокупность линейчатых поверхностей, принадлежащих комплексу, которые характеризуются тем, что их центральные нормали находятся в двумерной плоскости, ортогональной образующей и главной нормали комплекса, а внешний параметр распределения равен нулю для каждой из этих поверхностей. Назовем эту совокупность А-подмногообразием.

Аналитически условия, выделяющие А-подмногообразие, можно записать в виде:

$$\begin{cases}\omega_1=0\\ \omega_{14}=0\end{cases}, \qquad (20)$$

Эти уравнения являются инвариантными относительно допустимых преобразований репера T и, следовательно, определяют инвариантное подмногообразие.

Выделим класс комплексов K_I^A такой, чтобы уравнения (20) были вполне интегрируемыми, то есть, чтобы

$$\begin{cases}D\omega_1=0\\ D\omega_{14}=0\end{cases} \qquad (21)$$

Из уравнений (2I) следуют соотношения:

$$\begin{cases}\lambda_{123}-\lambda_{132}=0\\ (\lambda_{22}-\lambda_{33})\lambda_{123}+\lambda_{32}\lambda_{133}-\lambda_{23}\lambda_{122}=0\end{cases} \qquad (22)$$

Продифференцировав внешним образом систему (2), получим:

$$[\omega_1\,\omega_{1\alpha}]+[\omega_\beta\,\omega_{\beta\alpha}]+[\omega_4\,\omega_{4\alpha}]=$$
$$=[d\lambda_{\alpha 1}\,\omega_{14}]+\lambda_{\alpha 1}[\omega_{1\beta}\,\omega_{\beta 4}]+[d\lambda_{\alpha\beta}\,\omega_{\beta 4}]+$$
$$+\lambda_{\alpha\beta}[\omega_{\beta\gamma}\,\omega_{\gamma 4}]+\lambda_{\alpha\beta}[\omega_{\beta 1}\,\omega_{14}];$$

$$(23)$$

$$[\omega_{1\beta}\,\omega_{\beta\alpha}]+[\omega_{14}\,\omega_{4\alpha}]=$$
$$=[d\lambda_{1\alpha 1}\,\omega_{14}]+\lambda_{1\alpha 1}[\omega_{1\beta}\,\omega_{\beta 4}]+[d\lambda_{1\alpha\beta}\,\omega_{\beta 4}]+$$
$$+\lambda_{1\alpha\beta}[\omega_{\beta 1}\,\omega_{14}]+\lambda_{1\alpha\beta}[\omega_{\beta\gamma}\,\omega_{\gamma 4}]+$$
$$+[d\gamma_{1\alpha 1}\,\omega_1]+\gamma_{1\alpha 1}[\omega_\beta\,\omega_{\beta 1}]+\gamma_{1\alpha 1}[\omega_4\,\omega_{41}].$$

Подставляя в полученную систему (23) значения главных форм из уравнений (2) и учитывая условия (22), получим систему со следующими характеристиками:

число новых независимых главных форм q равна I2;

характеры системы соответственно равны

$$S_1 = 4\,,\quad S_2 = 4\,,\quad S_3 = 4\,,\quad S_4 = 1$$

число Картана $Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 + 4S_4 = 25$

и произвол общего интегрального элемента N также равен 25.

Следовательно, класс комплексов K_I^A существует с произволом одной функции четырех аргументов.

Заметим, что А-подмногообразие можно рассматривать как частный случай двухпараметрического семейства прямых в E_4 (см. (3)).

Две линейчатые поверхности, принадлежащие А-подмногообразию, будем называть ортогональной парой, если их центральные нормали ортогональны.

Центр, псевдофокусы и граничные точки А-подмногообразия совпадают с инвариантными точками прямой комплекса, отвечающими уравнениям (I3), (I4), (I5). Инварианты комплекса (3), (4), (5) являются инвариантами А-подмногообразия.

Рассматривая координатные линейчатые поверхности геометрический смысл коэффициентов системы (2):

$\lambda_{22}\,,\ \lambda_{33}$ - абсциссы стрикционных точек;

$\lambda_{32}\,,\ \lambda_{23}$ - параметры распределения;

$\lambda_{122}\,,\ \lambda_{133}$ - внешние геодезические кривизны;

$\lambda_{132}\,,\ \lambda_{123}$ - вынужденные кривизны

координатных линейчатых поверхностей А-подмногообразия.

Все свойства, имеющие место для произвольного двухпараметрического семейства прямых в E_4, справедливы и для А-подмногообразия. Помимо этого, А-подмногообразие обладает и особыми свойствами.

Так как внешний параметр распределения любой линейчатой поверхности А-подмногообразия равен нулю, то:

Теорема I.

Обе нулевые поверхности А-подмногообразия являются развертывающимися.

У координатных линейчатых поверхностей А-подмногообразия векторы распределения соответственно равны $\lambda_{32}\vec{e}_3$ и $\lambda_{23}\vec{e}_2$. Но положение осей репера $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ не фиксировано в двухмерной плоскости, следовательно:

Теорема 2.

Для любой ортогональной пары А-подмногообразия, векторы распределения ортогональны.

Из уравнения (3) видно:

Теорема 3.

Стрикционные точки любой ортогональной пары А-подмногообразия расположены симметрично относительно центра комплекса.

Для произвольного двухпараметрического семейства прямых в E_4 второе из уравнений (I2) не имеет места. Геометрически оно означает следующее:

Теорема 4.

Для любой ортогональной пары А-подмногообразия произведение разности абсцисс стрикционных точек и вынужденной кривизны равно разности произведений параметра распределения одной линейчатой поверхности на внешнюю геодезическую кривизны другой.

Из теоремы 4 легко усмотреть:

Следствие I.

Для главных линейчатых поверхностей А-подмногообразия произведения разности абсцисс стрикционных точек на вынужденную кривизну равно произведению суммы внешних геодезических кривизн на параметр распределения второй из главных поверхностей.

Следствие 2.

Для каждой из ортогональных пар - поверхностей кривизны и распределительных поверхностей - А-подмногообразия произведение параметра распределения одной из поверхностей на внешнюю геодезическую кривизну одно и то же.

Следствие 3.

Для каждой из ортогональных пар - ассимптотических и нулевых поверхностей - А-подмногообразия произведение разности абсцисс стрикционных точек на вынужденную кривизну равно произведению параметра распределения на внешнюю геодезическую кривизну другой.

§ 3. Комплексы K_I^B

Рассмотрим совокупность линейчатых поверхностей, принадлежащих комплексу K_I, центральные нормали которых направлены по главной нормали комплекса. Назовем эту совокупность В-подмногообразием.

Для всех таких поверхностей имеют место инвариантные уравнения:

$$\begin{cases} \omega_{24} = 0 \\ \omega_{34} = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Выделим класс комплексов K_I^B такой, чтобы уравнения (24) были вполне интегрируемыми, то есть, чтобы

$$\begin{cases} D\omega_{24} = [\omega_{21}\ \omega_{14}] = 0 \\ D\omega_{34} = [\omega_{31}\ \omega_{14}] = 0 \end{cases} \tag{25}$$

Из уравнений (25) следует:

$$\begin{cases} \gamma_{121} = 0 \\ \gamma_{131} = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Подставив в (23) выражения главных форм ω_{21} и ω_{31} с учетом условий (26), получим систему с 12-ю независимыми главными формами. Характеры систем $S_1 = 4$; $S_2 = 4$; $S_3 = 4$; $S_4 = 0$. Произвол общего интегрального элемента равен числу Картана $N = Q = 24$.

Следовательно, класс K_I^B существует с произволом 4-х функций трех аргументов.

Произвольную линейчатую поверхность В-подмногообразия можно выделить уравнением:

$$\omega_1 = \kappa\,\omega_{14} \tag{27}$$

Уравнения движения репера T, крепленного к такой поверхности, имеют вид:

$$\begin{cases} d\vec{A} = \kappa\,\omega_{14}\vec{e}_1 + \lambda_{21}\omega_{14}\vec{e}_2 + \lambda_{31}\omega_{14}\vec{e}_3 + \omega_4\vec{e}_4 \\ d\vec{e}_1 = \lambda_{121}\omega_{14}\vec{e}_2 + \lambda_{131}\omega_{14}\vec{e}_3 + \omega_{14}\vec{e}_4 \\ d\vec{e}_2 = -\lambda_{121}\omega_{14}\vec{e}_1 + \omega_{23}\vec{e}_3 \\ d\vec{e}_3 = -\lambda_{131}\omega_{14}\vec{e}_1 - \omega_{23}\vec{e}_2 \\ d\vec{e}_4 = -\omega_{14}\vec{e}_1 \end{cases} \tag{28}$$

Значит,

K - абсцисса стрикционной точки,

$\lambda_{\alpha 1}\vec{e}_\alpha$ - вектор распределения, а

$\lambda_{1\alpha 1}\vec{e}_\alpha$ - вектор геодезической кривизны поверхности, отвечающей уравнению (27)

Отсюда следует:

Теорема 5.

Стрикционные точки линейчатых поверхностей, принадлежащих В-подмногообразию, полностью заполняют прямую комплекса, причем каждая точка прямой комплекса является стрикционной точкой одной и только одной линейчатой поверхности В-подмногообразия.

Теорема 6.

Для всех линейчатых поверхностей В-подмногообразия вектор распределения один и тот же.

Теорема 7.

Для всех линейчатых поверхностей В-подмногообразия вектор геодезической кривизны один и тот же.

Литература

1/ Березина Л.Я. "Классическая дифференциальная геометрия I. Элементы дифференциальной геометрии в E_4". Рига, 1970.

2/ Гейдельман Р.М. "Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах". "Итоги науки Алгебра, топология, геометрия, 1865".

3/ Кованцов Н.И. "Теория комплексов", Киев, 1963.

4/ Лумисте Ю.Г. "Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4". Математический сборник т. 50 (92) : 2, 1960.

5/ Орленко Г.И. "К метрической теории прямых и плоскостей в многомерном евклидовом пространстве" Рига, 1966.

6/ Фиников С.П. "Метод внешних форм Картана" Г Т И, 1948.

7/ Широков П.А. "Тензорное исчисление" Казань, 1961.

Столяр А.И.

ОБ ОДНОЙ ПАРЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ПРЯМЫХ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Общая теория двухпараметрических семейств прямых разработана в работах Ю.Г.Лумисте. В данной работе рассматривается в четырехмерном евклидовом пространстве одна пара двухпараметрических семейств со взаимно-ортогональными прямыми. Получены свойства, связывающие эти два семейства.

§ I.

Отнесем двухпараметрическое семейство прямых к ортонормированному реперу следующим образом: положим вершину репера на прямую семейства, ось $\vec{e}_1$ направим по прямой, оси $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ положим в двумерную касательную плоскость гиперсферического отображения нашего семейства. Этим положение оси $\vec{e}_4$ полностью определено.

Обозначим репер, крепленный таким образом, через R_1.

Если в нормальной плоскости гиперсферического отображения семейства рассмотреть прямые, перпендикулярные прямым нашего семейства, то получим другое двухпараметрическое семейство, ортогональное исходному.

Поскольку оси $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_4$ определяют нормальную плоскость гиперсферического отображения, то оказывается, что ось $\vec{e}_4$ направлена по прямой только что полученного двухпараметрического семейства.

Обозначим двухпараметрические семейства прямых, описанные осями $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_4$, через $/d_1/$ и $/d_4/$ соответственно.

Семейство $/d_4/$ зависит от точки пересечения прямых семейств $/d_1/$ и $/d_4/$, то есть зависит от точки приложения вершины репера. Выбором этой точки задается определенное семейство $/d_4/$.

Найдем некоторые свойства, связывающие эти два двухпараметрические семейства.

При рассматриваемом креплении репера R_1 формы $\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_{24}, \omega_{34}$ являются главными формами.

Предположим, что вершина репера каким-то образом фиксирована, тогда и форма ω_1 становится главной.

Для семейства $/d_1/$ основная система имеет вид:

$$\begin{cases} \omega_1 = p_2\omega_{12} + p_3\omega_{13} \\ \omega_2 = k_{22}\omega_{12} + k_{23}\omega_{13} \\ \omega_3 = k_{32}\omega_{12} + k_{33}\omega_{13} \\ \omega_4 = \ell_2\omega_{12} + \ell_3\omega_{13} \\ \omega_{24} = \tau_{22}\omega_{12} + \tau_{23}\omega_{13} \\ \omega_{34} = \tau_{32}\omega_{12} + \tau_{33}\omega_{13} \\ \tau_{23} = \tau_{32} \end{cases} \qquad (I)$$

Так как касательная плоскость гиперсферического отображения семейства $/d_1/$ описывается центральной нормалью $d\vec{e}_1$ и построена на векторах $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, то из разложения $d\vec{e}_1$ в уравнениях движения репера следует:

$$\omega_{14} = 0 \tag{2}$$

Присоединим ко двухпараметрическому семейству $/d_4/$ вспомогательный репер R_4, который получается из репера R_1 переименованием осей

$$\vec{\bar{e}}_1 = \vec{e}_4\ ,\quad \vec{\bar{e}}_2 = -\vec{e}_2\ ,\quad \vec{\bar{e}}_3 = \vec{e}_3\ ,\quad \vec{\bar{e}}_4 = \vec{e}_1 \tag{3}$$

Тогда компоненты движения репера R_4 выражаются через компоненты движения репера R_1 следующим образом:

$$\begin{array}{lll} \bar{\omega}_1 = \omega_4 & \bar{\omega}_{12} = \omega_{24} & \bar{\omega}_{24} = \omega_{12} \\ \bar{\omega}_2 = -\omega_2 & \bar{\omega}_{13} = -\omega_{34} & \bar{\omega}_{34} = -\omega_{13} \\ \bar{\omega}_3 = \omega_3 & \bar{\omega}_{14} = -\omega_{14} & \\ \bar{\omega}_4 = \omega_4 & & \end{array} \tag{4}$$

Семейство $/d_4/$ распадается, когда

$$[\omega_{24},\ \omega_{34}] = 0 \tag{5}$$

то есть

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_{22} & r_{23} \\ r_{32} & r_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

В дальнейшем будем считать, что $\Delta \neq 0$.

Из связи $\bar{\omega}_{14} = -\omega_{14}$ следует в силу равенства (2), что

$$\bar{\omega}_{14} = 0 \tag{7}$$

Равенства (2) и (7) выражают следующую теорему:

<u>Теорема I.</u> Касательные плоскости гиперсферических отображений двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ совпа

Подставляя выражения (4) в систему (I), окончательно получаем разложение форм репера R_4 по формам $\overline{\omega}_{12}$ и $\overline{\omega}_{13}$, то есть систему, соответствующую системе (I):

$$\left\{\begin{aligned}
\overline{\omega}_1 &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}\overline{\omega}_{12} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \tau_{22} & \tau_{23} \end{vmatrix}\overline{\omega}_{13} \\
\overline{\omega}_2 &= -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}\overline{\omega}_{12} - \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ \tau_{22} & \tau_{23} \end{vmatrix}\overline{\omega}_{13} \\
\overline{\omega}_3 &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_{32} & k_{33} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}\overline{\omega}_{12} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_{32} & k_{33} \\ \tau_{22} & \tau_{23} \end{vmatrix}\overline{\omega}_{13} \\
\overline{\omega}_4 &= \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}\overline{\omega}_{12} + \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ \tau_{22} & \tau_{23} \end{vmatrix}\overline{\omega}_{13} \\
\overline{\omega}_{24} &= \frac{1}{\Delta}\tau_{33}\overline{\omega}_{12} + \frac{1}{\Delta}\tau_{23}\overline{\omega}_{13} \\
\overline{\omega}_{34} &= \frac{1}{\Delta}\tau_{32}\overline{\omega}_{12} + \frac{1}{\Delta}\tau_{22}\overline{\omega}_{13}
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\overline{K}_{22} = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}; \qquad \overline{K}_{23} = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ \tau_{22} & \tau_{23} \end{vmatrix}; \\
&\overline{K}_{32} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_{32} & k_{33} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}; \qquad \overline{K}_{33} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} k_{32} & k_{33} \\ \tau_{22} & \tau_{23} \end{vmatrix}; \\
&\overline{\tau}_{22} = \frac{1}{\Delta}\tau_{33}; \qquad \overline{\tau}_{23} = \frac{1}{\Delta}\tau_{23}; \\
&\overline{\tau}_{32} = \frac{1}{\Delta}\tau_{32}; \qquad \overline{\tau}_{33} = \frac{1}{\Delta}\tau_{22}
\end{aligned} \tag{9}$$

Для семейства $/d_4/$ все коэффициенты системы (8) имеют те же геометрические значения, что и соответствующие им коэффициенты системы (I), поскольку репер R_4 приложен к прямым семейства $/d_4/$ аналогично тому, как репер R_1 приложен к прямым семейства $/d_1/$.

По той же причине связи между рассматриваемыми двухпараметрическими семействами являются взаимно-обратными.

Назовем инварианты семейства $/d_1/$, которые будем рассматривать в дальнейшем, следующим образом:

средний параметр распределения . . . . $k_{22} + k_{33}$ (I0)

произведение абсцисс псевдофокусов прямой . . . . $\begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{vmatrix}$ (II)

произведение абсцисс граничных точек прямой . . . . $\begin{vmatrix} k_{22} & \frac{k_{23}+k_{32}}{2} \\ \frac{k_{23}+k_{32}}{2} & k_{33} \end{vmatrix}$ (I2)

анормалитет . . . . $k_{23} - k_{32}$ (I3)

средняя кривизна . . . . $\tau_{22} + \tau_{33}$ (I4)

полная кривизна . . . . $\begin{vmatrix} \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}$ (I5)

§ 2.

Допустим, что вершина репера не фиксирована и найдем свойства, общие для всех двухпараметрических семейств $/d_4/$. Для этого рассмотрим различные инварианты семейства $/d_4/$.

Из системы (9) получаем:

$$\begin{vmatrix} \bar{k}_{22} & \bar{k}_{23} \\ \bar{k}_{32} & \bar{k}_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} \qquad (I6)$$

Формула (I0) выражает следующую теорему:

<u>Теорема 2</u>. Произведение абсцисс псевдофокусов прямой двухпараметрического семейства $/d_4/$ равно отношению произведения абсцисс псевдофокусов прямой к полной кривизне двухпараметрического семейства $/d_1/$.

Далее $\bar{\tau}_{22} + \bar{\tau}_{33} = \frac{1}{\Delta}(\tau_{22} + \tau_{33})$ (I7)

Формула (I7) выражает следующую теорему:

Теорема 3. Средняя кривизна двухпараметрического семейства $/d_4/$ равна отношению средней кривизны к полной кривизне семейства $/d_1/$.

Деля выражение (II) на выражение (I0), получаем:

$$\frac{\bar{K}_{22}+\bar{K}_{33}}{\begin{vmatrix}\bar{K}_{22} & \bar{K}_{23}\\ \bar{K}_{32} & \bar{K}_{33}\end{vmatrix}} = \frac{\varkappa_{22}+\varkappa_{33}}{\begin{vmatrix}\varkappa_{22} & \varkappa_{32}\\ \varkappa_{23} & \varkappa_{33}\end{vmatrix}} \qquad (I8)$$

Формула (I8) выражает следующую теорему:

Теорема 4. Отношение средней кривизны к произведению абсцисс псевдофокусов прямой одно и то же для двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$.

При рассмотрении полных кривизн получаем:

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \qquad (I9)$$

Формула (I9) выражает следующую теорему:

Теорема 5. Полные кривизны двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ являются взаимно-обратными величинами.

Теперь рассмотрим случаи полуканонического репера, у которого оси $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ креплены некоторым образом в двумерной касательной плоскости гиперсферического отображения семейства, а вершина может перемещаться вдоль прямой семейства.

Направим векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ по собственным направлениям симметрического аффинора $\varkappa_{ij}$, то есть по поверхностям кривизны семейства $/d_1/$, тогда

$$\varkappa_{23} = 0 \qquad (20)$$

Система (9) принимает вид:

$$\bar{K}_{23} = -\frac{\varkappa_{32}}{\varkappa_{33}} \quad (21) \qquad \bar{K}_{22} = \frac{\varkappa_{22}}{\varkappa_{33}} \quad (22)$$

$$\bar{K}_{32} = \frac{K_{32}}{\tau_{22}} \quad (23) \qquad \bar{K}_{33} = -\frac{K_{33}}{\tau_{33}} \quad (24)$$

$$\bar{\tau}_{22} = \frac{1}{\tau_{22}} \quad (25) \qquad \bar{\tau}_{23} = 0 \quad (26)$$

$$\bar{\tau}_{32} = 0 \quad (27) \qquad \bar{\tau}_{33} = \frac{1}{\tau_{33}} \quad (28)$$

Из формул (20) и (26) следует:

Теорема 6. Центральные нормали поверхностей кривизны двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ совпадают.

Из формул (25) и (28) следует:

Теорема 7. Внешние геодезические кривизны поверхностей кривизны двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ являются взаимно-обратными величинами.

Из формул (2I) и (24) следует:

Теорема 8. Для любого двухпараметрического семейства $/d_4/$ абсцисса стрикционной точки поверхности кривизны равна отношению абсциссы соответствующей стрикционной точки ко внешней геодезической кривизне поверхности кривизны двухпараметрического семейства $/d_1/$, взятому с противоположным знаком.

Из формул (22) и (23) следует:

Теорема 9. Для любого двухпараметрического семейства $/d_4/$ внутренний параметр распределения поверхности кривизны равен отношению соответствующего ему внутреннего параметра распределения ко внешней геодезической кривизне поверхности кривизны двухпараметрического семейства $/d_1/$.

Деля выражения (22) и (23) на выражения (24) и (2I) соответственно, получаем:

$$\frac{\bar{K}_{23}}{\bar{K}_{33}} = -\frac{K_{23}}{K_{33}} \; ; \quad \frac{\bar{K}_{32}}{\bar{K}_{22}} = -\frac{K_{32}}{K_{22}} \qquad (29)$$

Формулы (29) выражают следующую теорему:

Теорема IO. Для двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ отношения внутренних параметров распределения к абсциссам стрикционных точек поверхностей кривизны равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Если оси $\bar{e}_2$ и $\bar{e}_3$ направить по биссектрисам поверхностей кривизны, то $\tau_{33} = \tau_{23}$ и из формул (9) получаем:

$$\frac{\bar{\tau}_{22}}{\bar{\tau}_{23}} = \frac{\tau_{22}}{\tau_{23}} \qquad (30)$$

Формула (30) выражает следующую теорему:

<u>Теорема II</u>. Отношение внешней геодезической кривизны и вынужденной кривизны поверхностей, биссекторных к поверхностям кривизны, одно и то же для двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$.

§ 3.

Рассмотрим случаи специальных семейств $/d_4/$, соответствующих различным точкам пересечения прямых семейств $/d_1/$ и $/d_4/$, то есть различным положениям вершины репера на прямой семейства $/d_1/$.

Если вершина репера фиксирована в одном из псевдофокусов прямой семейства $/d_1/$, то из теоремы 2 получаем:

<u>Теорема I2</u>. Если точка пересечения прямых двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ является псевдофокусом прямой двухпараметрического семейства $/d_1/$, то эта точка является одновременно псевдофокусом прямой двухпараметрического семейства $/d_4/$.

Если вершина репера находится в одной из граничных точек прямой двухпараметрического семейства $/d_1/$, то

$$\begin{vmatrix} k_{22} & \frac{k_{23} + k_{32}}{2} \\ \frac{k_{23} + k_{32}}{2} & k_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad (31)$$

откуда $4 k_{22} k_{33} = (k_{23} + k_{32})^2$ (32)

Из формулы (I6) получаем, используя выражение (32):

$$\begin{vmatrix} \overline{K}_{22} & \overline{K}_{23} \\ \overline{K}_{32} & \overline{K}_{33} \end{vmatrix} = \frac{(K_{23} - K_{32})^2}{4\Delta} \tag{33}$$

Формула (33) выражает следующую теорему:

Теорема I3. Если прямые двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ пересекаются в граничной точке прямой семейства $/d_1/$, то произведение абсцисс псевдофокусов прямой семейства $/d_4/$ равно отношению квадрата анормалитета к учетверенной полной кривизне семейства $/d_1/$.

Если поместить вершину репера в центр прямой семейства $/d_1/$, то $K_{22} + K_{33} = 0$ и получим следующие соотношения:

$$\frac{\overline{K}_{22}}{\overline{K}_{33}} = -\frac{\tau_{33}}{\tau_{22}} \tag{34}$$

$$\frac{\tau_{33}}{\tau_{22}} = \frac{\overline{K}_{23} + \overline{K}_{32}}{\overline{K}_{23} + \overline{K}_{32}} \tag{35}$$

Формула (34) выражает следующую теорему:

Теорема I4. Если прямые двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ пересекаются в центре прямой семейства $/d_1/$, то отношение абсцисс стрикционных точек поверхностей кривизны семейства $/d_4/$ равно отношению внешних геодезических кривизн поверхностей кривизны семейства $/d_1/$, взятому с противоположным знаком.

Формула (35) выражает следующую теорему:

Теорема I5. Если прямые двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ пересекаются в центре прямой семейства $/d_1/$, то отношение вынужденной кривизны ко внешней геодезической кривизне поверхностей, биссекторных к поверхностям кривизны семейства $/d_1/$ равно отношению суммы абсцисс стрикционных точек к сумме внутренних параметров распределения поверхностей, биссекторных к поверхностям кривизны семейства $/d_4/$.

Рассматривая случай, когда точка пересечения прямых семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ является центром прямой семейства $/d_4/$, получаем на прямой семейства $/d_1/$ инвариантную точку, абсцисса которой

$$t = \frac{k_{23}\tau_{32} + k_{32}\tau_{23} - k_{22}\tau_{33} - k_{33}\tau_{22}}{\tau_{22} + \tau_{33}} \tag{36}$$

Отсюда следует:

Теорема 16. Если прямые двухпараметрических семейств $/d_1/$ и $/d_4/$ пересекаются в точке прямой семейства $/d_1/$ с абсциссой (36), то эта точка является одновременно центром прямой семейства $/d_4/$.

Литература

1/ Ю.Г.Лумисте "Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4".
Математический сборник Т. 50 /92/ : 2 1960 г. стр. 203-220.

2/ Л.Я.Березина "О конгруэнциях, описанных осями триортогонального триэдра".
Известия АН Латв.ССР № 10 1959 г., стр. 71-76.

3/ Л.Я.Березина "Классическая дифференциальная геометрия. I ч. Элементы дифференциальной геометрии в E_4".
Рига, 1970 г.

Березина М.Т.

О нормалях конгруэнции в R_4^{12}

Пространство R_4^{12} является частным случаем пространства R_n^{12}, при $n=4$. В работе /I/ рассматриваются линейчатые поверхности первого и второго порядка, конгруэнция прямых в R_n^{12}. В данной статье более подробно изучается вопрос нормализации в R_4^{12} и инвариантные линейчатые поверхности конгруэнции, связанные с каждой нормалью. В работе использованы формулы и определения из /I/, все ссылки на /I/ содержат номер формулы. Например, /I(7)/ означает: статья /I/, (7) формула.

Рассмотрим конгруэнцию в R_4^{12} /I (1), (2)/. Прежде чем изучать конкретные нормали, заметим, что каждый инвариантный выбор нормали выделяет инвариантную линейчатую поверхность второго порядка, центральная нормаль которой сонаправлена данной нормали. При фиксированной нормали тензор λ_i^k /I (16), (16')/ зависит только от преобразований /I (3), (4)/ и определяет, как для двухпараметрического семейства прямых в Евклидовом пространстве, распределительные, главные, нулевые пары /2/ поверхностей первого порядка. Назовем пары поверхностей, выявленные нормалью α_k, α_k - главными, α_k - распределительными и т.д. Относительные центры этих поверхностей первого порядка, при инвариантном выборе нормали, становятся инвариантными точками конгруэнции. Назовем точки, индуцированные нормалью α_k: α_k -центром, α_k -псевдофокусами, α_k -граничными точками и т.д.

Отметим некоторые инварианты Евклидового преобразования, которые назовем полуинвариантами

$$y_1=\lambda_1^1+\lambda_2^2\,,\quad y_2=\lambda_1^2-\lambda_2^1\,,\qquad y_3=\begin{vmatrix}\lambda_1^1 & \lambda_2^1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2\end{vmatrix} \tag{I}$$

$$y_4=\begin{vmatrix}\lambda_1^1 & \dfrac{\lambda_1^2+\lambda_2^1}{2}\\ \dfrac{\lambda_1^2+\lambda_2^1}{2} & \lambda_2^2\end{vmatrix}\,;\quad y_5=(\lambda_1^3)^2+(\lambda_2^3)^2$$

$$\mathcal{Y}_6=(\lambda_3^1)^2+(\lambda_3^2)^2,\quad \mathcal{Y}_7=\lambda_3^3$$

$$\mathcal{Y}_8=\lambda_1^3\lambda_3^1+\lambda_2^3\lambda_3^2,\quad \mathcal{Y}_9=\lambda_1^1(\lambda_1^3)^2+(\lambda_1^2+\lambda_2^1)\lambda_1^3\lambda_2^3+\lambda_2^2(\lambda_2^3)^2$$

$$\mathcal{Y}_{10}=\lambda_1^1(\lambda_3^1)^2+(\lambda_1^2+\lambda_2^1)\lambda_3^1\lambda_3^2+\lambda_2^2(\lambda_3^2)^2$$

Полуинварианты $\mathcal{Y}_2$, $\mathcal{Y}_6$, $\mathcal{Y}_8$ не зависят от перенос /I (3)/ Если

$$\mathcal{Y}_2=0 \qquad (2)$$

$$\mathcal{Y}_8=0 \qquad (3)$$

то из системы (2), (3) можно определить A_3^1, A_3^2. Система содержит одно квадратное уравнение (3), следовательно, она фиксирует две различные, совпавшие или мнимые нормали. Назовем полученные нормали - нормалями α_1. Выясним геометрический смысл аналитически найденной нормали α_1

Назовем поверхность второго порядка, вектор распределения которой ортогонален к основному вектору конгруэнции /I(6), (16')/, орто-распределительной поверхностью. Из системы (2), (3) следует, что нормаль α_1 есть центральная нормаль орто-распределительной поверхности, при которой α_1 - главная пара совпадает с α_1 - нулевой парой.

Теорема.

Конгруэнция содержит две различные, совпавшие или мнимые орто-распределительные поверхности, центральные нормали, которых индуцирует совмещение α_1 -главной пары с α_1 -нулевой парой.

Рассмотрим полуинвариант $\mathcal{Y}_6$. Пусть

$$\mathcal{Y}_6=0 \qquad (4)$$

т.е.

$$\lambda_3^1=0,\ \lambda_3^2=0 \qquad (5)$$

Нормали, заданные системой (5), назовем торсовыми нормалями. Торсовая нормаль есть центральная нормаль тора второго порядка.

Другие нормали найдем, исключая параметр переноса t из полуинвариантов (I), зависящих от переноса и выбора нормали. Получим величины, зависящие только от выбора нормали.

Исключим t из $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_7$, получим

$$B_1 = \mathcal{Y}_1 - 2\mathcal{Y}_7 \tag{6}$$

который зависит только от преобразования /I (3)/

Положим

$$B_1 = 0 \tag{7}$$

$$\mathcal{Y}_2 = 0 \tag{2}$$

или

$$\lambda_1^1 + \lambda_2^2 = 2\lambda_3^3 \tag{8}$$

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^1 = 0 \tag{9}$$

Система (8),(9) линейная относительно A_3^1, A_3^2, при отличном от нуля определителе системы $(\mathcal{Y}_5)$, определяет единственную нормаль, которую назовем нормалью α_2. Равенство нулю инварианта конгруэнции $\mathcal{Y}_5$ выделяет класс конгруэнции, у которой все поверхности второго порядка - квазиторы. Этот класс конгруэнции исследован в (I). Из условия (9), (8) следует, что нормаль α_2 является центральной нормалью поверхности второго порядка, при которой α_2 - горловая точка совпадает с α_2 - центром, а α_2 -главная пара с α_2-нулевой парой.

Теорема.

Конгруэнция содержит одну поверхность второго порядка, у которой α_2 - горловая точка совпадает с α_2 - центром, а центральная нормаль индуцирует совмещение α_2 - главной пары с α_2 - нулевой парой.

Назовем две различные, совпавшие или мнимые нормали, определенные системой (3), (7), нормалями α_3

Нормаль α_3 - центральная нормаль орто-распределительной поверхности, при которой α_3 - горловая точка совпадает с α_3 - центром.

Теорема.

Конгруэнция содержит две совпавшие, различные или мнимые орто-распределительные поверхности, центральные нормали которых индуцирует совмещение α_3 - горловой точки с α_3 - центром.

Образуем из полуинвариантов J_5, J_7, J_9

$$B_2 = J_9 - J_5 J_7 \qquad (11)$$

который зависит только от выбора нормали.

Условия

$$B_2 = 0 \qquad (12)$$

$$J_2 = 0 \qquad (2)$$

при $J_5 \neq 0$, фиксирует одну нормаль - нормаль α_4. Чтобы облегчить геометрическую интерпретацию нормали направим $\vec{e}_1$ по основному вектору конгруэнции. Тогда

$$\lambda_2^3 = 0 \qquad (13)$$

Внесем условие (13) в уравнение (12). Система (12), (2) примет вид:

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^1 = 0 \qquad (9)$$

$$\lambda_1^1 = \lambda_3^3 \qquad (14)$$

Назовем относительный центр поверхности первого порядка ортогональной к квазиторс/ II (11)/ орто-квазицентром. Значит, нормаль α_4 есть центральная нормаль поверхности второго порядка, при которой α_4 -главная пара совпадает с α_4 -нулевой парой, α_4 - горловая точка с α_4 - ортоквазицентром.

Теорема.

Конгруэнция содержит одну поверхность второго порядка, у которой α_4 -горловая точка совпадает с α_4 -орто-квазицентром, а центральная нормаль индуцирует совмещение α_4 - главной пары с α_4 - нулевой парой.

Система (I2), (3) фиксирует две различные, совпавшие или мнимые нормали, которые назовем нормалями α_5. Нормаль α_5 -центральная нормаль орто-распределительной поверхности, при которой α_5 -горловая точка совпадает с α_5 -орто-квазицентром.

Теорема.

Конгруэнция содержит две различные, совпавшие или мнимые орто-распределительные поверхности, чьи центральные нормали индуцируют совмещение α_5 -горловой точки с α_5 - -ортоквазицентром.

Составленный из полуинвариантов $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_5, \mathcal{Y}_9$

$$B_5 = \mathcal{Y}_1 \mathcal{Y}_5 - 2\mathcal{Y}_9 \qquad (I5)$$

не зависит от преобразования $/I(5)/$

Если

$$B_5 = 0 \qquad (I6)$$

$$\mathcal{Y}_2 = 0 \qquad (2)$$

то система (2),(I6) определяет при $\mathcal{Y}_5 \neq 0$ единственную нормаль - нормаль α_6. Нормаль α_6 интересна тем, что она является нормалью двухпараметрического семейства прямых, принадлежащего конгруэнции. Она используется при канонизации репера упомянутого семейства. Геометрическая интерпретация нормали облегчается, так же как и для нормалей α_4 и α_5, если $\vec{e}_3$ направить по основному вектору. Тогда выполняется условие (I3) и система (2), (I6) принимает вид:

$$\lambda_1^1 = \lambda_2^2 \qquad (I7)$$

$$\lambda_1^2=\lambda_2^1 \qquad (9)$$

Нормаль α_6 есть центральная нормаль поверхности второго порядка, при которой α_6 - нулевая пара совпадает с α_6 - главной парой и α_6 - орто-квазицентр с квазицентром.

Теорема.

Конгруэнция содержит одну поверхность второго порядка, для которой α_6 -орто-квазицентр совпадает с квазицентром, а центральная нормаль индуцирует совмещение α_6 - главной пары с α_6 -нулевой парой.

Рассмотрим систему

$$\lambda_1^2+\lambda_2^1=0\ ,\ \lambda_1^1-\lambda_2^2=0 \qquad (18)$$

не зависящую от преобразований $/I(3),(4)/$

Условия (18) выделяет (при $y_5 \neq 0$) единственную нормаль - нормаль α_7

Нормаль α_7 является центральной нормалью поверхности второго порядка, при которой α_7 -граничные точки совпадают с α_7 -центром.

Теорема.

Конгруэнция содержит одну поверхность второго порядка, центральная нормаль которой индуцирует совмещение α_7 -граничных точек с α_7 - центром.

Литература

I. Березина М.Т. "Некоторые вопросы теории конгруэнций в

2. Березина Л.Я. "Классическая дифференциальная геометрия". Из-во ЛГУ, Рига 1970 г.

Березина М.Т.

Некоторые вопросы теории конгруэнций в R_n^{12}

R_n^{12} - есть полуевклидовое пространство /I/, в котором вращение ортонормированного репера задается следующим образом:

$$\vec{e}_i{}' = C_{ik}\vec{e}_k \qquad (C_{ik}C_{jk} = \delta_{ij}) \tag{I}$$
$$\vec{e}_{n-1}{}' = a^k_{n-1}\vec{e}_k + \vec{e}_{n-1} \qquad (i,k = 1,2,\dots,n-2)$$
$$\vec{e}_n{}' = a^k_n\vec{e}_k + a^{n-1}_n\vec{e}_{n-1} + \vec{e}_n$$

Уравнения движения ортонормированного репера имеют вид:

$$d\vec{A} = \omega^i\vec{e}_i + \omega^{n-1}\vec{e}_{n-1} + \omega^n\vec{e}_n \tag{2}$$
$$d\vec{e}_i = \omega^k_i\vec{e}_k$$
$$d\vec{e}_{n-1} = \omega^k_{n-1}\vec{e}_k$$
$$d\vec{e}_n = \omega^k_n\vec{e}_k + \omega^{n-1}_n\vec{e}_{n-1}$$

§I. Назовем поверхностью первого порядка, линейчатую поверхность (однопараметрическое семейство прямых), центральная нормаль которой ($d\vec{e}_n$) лежит в ($n-2$) мерной инвариантной плоскости / $\vec{e}_k$ /, а поверхностью второго порядка, линейчатую поверхность, центральная нормаль которой в ($n-1$) мерной инвариантной плоскости / $\vec{e}_1\vec{e}_2\dots\vec{e}_{n-1}$ /

Рассмотрим поверхность второго порядка. Поместим вершину репера на образующую, а $\vec{e}_n$ направим по образующей поверхности. Назовем вектор $\vec{e}_{n-1}$, ортогональный к плоскости / $\vec{e}_i$ /, нормалью репера.

Разобьем допустимые преобразования репера на элементарные:

$$\vec{A}' = \vec{A} + t\vec{e}_n, \ \vec{e}_i{}' = \vec{e}_i, \ \vec{e}_{n-1}{}' = \vec{e}_{n-1}, \ \vec{e}_n{}' = \vec{e}_n \tag{3}$$

$$\vec{A}' = \vec{A}, \ \vec{e}_i{}' = c_{ik}\vec{e}_k, \ \vec{e}_{n-1}{}' = \vec{e}_{n-1}, \ \vec{e}_n{}' = \vec{e}_n \tag{4}$$

$$\vec{A}' = \vec{A}, \ \vec{e}_i{}' = \vec{e}_i, \ \vec{e}_{n-1}{}' = a^i_{n-1}\vec{e}_i{}' + \vec{e}_{n-1}, \ \vec{e}_n{}' = \vec{e}_n \tag{5}$$

$$(i, k = 1, 2, \dots, n-2)$$

Нетрудно проверить, что выражения

$$\omega^i \omega_n^{n-1} - \omega^{n-1}\omega_n^i \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n-2) \tag{6}$$

не зависят от преобразований (3) и (5), а при преобразовании (4) меняются как вектор. Назовем полученный вектор - вектором распределения поверхности /2/. По нему можно направить один из векторов $\vec{e}_i$, $\vec{e}_{n-1}$ можно направить по вектору центральной нормали $\{\omega^i_{n}\vec{e}_i + \omega_n^{n-1}\vec{e}_{n-1}\}$

Форма ω^{n-1} зависит только от преобразования (3) и обращается в нуль в единственной инвариантной точке поверхности - горловой точке. Абсцисса горловой точки:

$$t = -\frac{\omega^{n-1}}{\omega_n^{n-1}} \tag{7}$$

Перейдем к рассмотрению поверхности первого порядка. Для неё

$$\omega_n^{n-1} = 0 \tag{8}$$

Если направить $\vec{e}_1$ по центральной нормали, то

$$\omega_n^2 = \omega_n^3 = \dots = \omega_n^{n-2} = 0 \tag{9}$$

Тогда

$$\omega^j \vec{e}_1 + \omega^{n-1}\vec{e}_{n-1} \quad (j = 2, 3, \dots, n-2) \tag{10}$$

- вектор распределения поверхности первого порядка.

Назовем проекцию вектора распределения (10) на плоскость / $\bar{e}_i$ / внутренним вектором распределения, а проекцию на нормаль - внешним параметром распределения.

Назовем поверхность первого порядка с нулевым внешним параметром распределения квазиторсом, а поверхность с нулевым внутренним вектором распределения - псевдоторсом.

Уравнение

$$\omega^{n-1} = 0 \tag{11}$$

выделяет специальную поверхность - квазиторс. Внутренний вектор распределения квазиторса не зависит от преобразования (5).

Если выполняются условия (9), то от преобразования (3) зависит только ω^1, но ω^1 зависит и от выбора нормали (5). Следовательно, каждому инвариантному выбору нормали соответствует инвариантная точка образующей, которую назовем относительным центром поверхности первого порядка. Абсцисса этой точки определяется уравнением

$$\bar{\omega}^1 = \omega^1 + t\omega^1_n = 0 \tag{12}$$

Откуда

$$t = -\frac{\omega^1}{\omega^1_n} \tag{13}$$

Для квазиторса уравнение (13) определяет инвариантную точку, не зависящую от выбора нормали, квазицентр.

§2. Конгруэнцией называется ($n-1$) параметрическое семейство прямых. Рассмотрим конгруэнцию в R^{12}_n. Исключая случай линейной зависимости ω^k_n, ω^{n-1}_n имеем

$$\begin{aligned} \omega^i &= \lambda^i_k \omega^k_n + \lambda^i_{n-1} \omega^{n-1}_n \\ \omega^{n-1} &= \lambda^{n-1}_k \omega^k_n + \lambda^{n-1}_{n-1} \omega^{n-1}_n \end{aligned} \qquad (i,k = 1,2,\dots,n-2) \tag{14}$$

При изменении нормали (5):

$$\bar{\lambda}_i^j = \lambda_i^j + A_{n-1}^j \omega_i^{n-1}$$
$$\bar{\lambda}_i^{n-1} = \lambda_i^{n-1}$$
$$\bar{\lambda}_{n-1}^i = a_{n-1}^k (\lambda_k^i + A_{n-1}^i \lambda_k^{n-1}) + \lambda_{n-1}^i + A_{n-1}^i \lambda_{n-1}^{n-1} \qquad (15)$$
$$\bar{\lambda}_{n-1}^{n-1} = a_{n-1}^i \lambda_i^{n-1} + \lambda_{n-1}^{n-1} \qquad (i,k,j = 1,2,\ldots,n-2)$$

От переноса (3) λ_i^i, λ_{n-1}^{n-1} зависят:

$$\bar{\lambda}_i^i = \lambda_i^i + t$$
$$\bar{\lambda}_{n-1}^{n-1} = \lambda_{n-1}^{n-1} + t \qquad (16)$$

При евклидовом вращении

λ_i^j – аффинор

$\lambda_i^{n-1}, \lambda_{n-1}^i$ – векторы (16')

λ_{n-1}^{n-1} – инвариант

Назовем вектор λ_i^{n-1} – основным вектором конгруэнции.

Для геометрической интерпретации λ_i^k $(i,k = 1,2,\ldots,n-1)$ рассмотрим многообразия, принадлежащие конгруэнции. Конгруэнция содержит $(n-2)$ координатные поверхности первого порядка:

$$\omega_n^1 \neq 0 \quad \omega_n^2 = \omega_n^3 = \ldots = \omega_n^{n-1} = 0$$
$$\omega_n^1 = 0 \quad \omega_n^2 \neq 0 \quad \omega_n^3 = \ldots = \omega_n^{n-1} = 0 \qquad (17)$$
$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$
$$\omega_n^1 = \omega_n^2 = \ldots = \omega_n^{n-3} = 0 \quad \omega_n^{n-2} \neq 0$$

и одну координатную поверхность второго порядка:

$$\omega_n^1 = \omega_n^2 = \ldots = \omega_n^{n-2} = 0 \quad \omega_n^{n-1} \neq 0 \qquad (18)$$

Геометрические значения λ_i^{κ} усматривается из §I, формулы (6), (7), (I0), (I3). Совокупность поверхностей первого порядка, принадлежащих конгруэнции, выделяется следующим образом:

$$\omega_n^{n-1} = 0 \qquad (I9)$$

Т.к.

$$D\omega_n^{n-1} = 0 \qquad (20)$$

что следует из уравнения движения (2), то имеет место

Теорема.

Совокупность поверхностей первого порядка, принадлежащих конгруэнции, образует $(n-2)$ параметрическое семейство.

Если направить $\vec{e}_1$ по основному вектору, то

$$\lambda_2^{n-1} = \lambda_3^{n-1} = \ldots = \lambda_{n-2}^{n-1} = 0 \qquad (2I)$$

Отсюда следует

Теорема.

Все линейчатые поверхности первого порядка, центральные нормали которых ортогональны к основному вектору являются квазиторсами.

Назовем поверхность первого порядка, центральная нормаль которой параллельна основному вектору, поверхностью α

Величины λ_m^{κ} $\begin{pmatrix} \kappa = 1, 2, \ldots, n-2 \\ m = 2, 3, \ldots, n-2 \end{pmatrix}$ при условии (2I)

не зависят от выбора нормали (5).

При евклидовом вращении величины

$$\left\{ \lambda_2^1, \lambda_3^1, \ldots, \lambda_{n-2}^1 \right\} \qquad (22)$$

образуют вектор, а

$$\lambda_m^{\ell} \qquad (\ell, m = 2, 3, \ldots, n-2) \qquad (23)$$

тензор,

Полученный тензор может быть использован для канонизации. Направим $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_{n-2}$ по собственным направлениям λ_m^l.

$$\lambda_m^l + \lambda_l^m = 0 \quad \left(\begin{smallmatrix} l \neq m \\ l,m=2,3,\ldots,n-2 \end{smallmatrix}\right) \tag{24}$$

С тензором (23) и вектором (22) связан ряд инвариантных величин. Во-первых модуль вектора:

$$K_1 = (\lambda_2^1)^2 + (\lambda_3^1)^2 + \ldots + (\lambda_{n-1}^1)^2 \tag{25}$$

Теорема.

Сумма квадратов проекций внутренних векторов распределения квазиторсов конгруэнции на основной вектор одна и та же для любой совокупности ($n-3$) квазиторсов, со взаимно ортогональными центральными нормалями.

Во-вторых, след тензора λ_m^l

$$K_2 = \lambda_2^2 + \lambda_3^3 + \ldots + \lambda_{n-2}^{n-2} \tag{26}$$

зависит только от переноса (3):

$$\bar{K}_2 = K_2 + t(n-3) \tag{27}$$

поэтому

$$t = -\frac{K_2}{n-3} \tag{28}$$

определяет абсциссу инвариантной точки конгруэнции. Эту точку назовем β -центром. Из (26) следует

Теорема.

β - центр есть центр тяжести квазицентров любой совокупности ($n-3$) квазиторсов конгруэнции с ортогональными центральными нормалями.

Кроме β -центра, аналогично, как

для конгруэнции в E_n, с помощью остальных инвариантов тензора λ_i^m, можно получить ряд инвариантных точек конгруэнции.

Также, все евклидовые инварианты λ_i^k $(i,k=1,2,\dots,n-2)$ зависящие от выбора нормали и переноса, выявляют точки конгруэнции такие, что каждому инвариантному выбору нормали соответствуют инвариантные точки конгруэнции. Так можно найти относительные псевдофокусы, относительные граничные точки и т.д. Для полной канонизации репера конгруэнции необходима фиксация $\vec{e}_{n-1}$, нормали конгруэнции. Для этого рассмотрим вектор

$$\mu^k=(\lambda_i^k-\lambda_{n-1}^{n-1}\delta_i^k)\lambda_i^{n-1} \qquad (i,k=1,2,\dots,n-2) \tag{29}$$

Полученный вектор μ^k зависит только от выбора нормали. Если

$$\mu^k=0 \tag{30}$$

то условия (30) определяют нормаль, которую назовем нормалью γ. Когда выполняются условия (21), выражение (30) принимает вид:

$$\begin{aligned}&\lambda_1^1-\lambda_{n-1}^{n-1}=0\\&\lambda_1^m=0 \qquad (m=2,3,\dots,n-2)\end{aligned} \tag{31}$$

Следовательно, нормаль γ есть центральная нормаль поверхности второго порядка, горловая точка которой совпадает с относительным центром псевдотороа

Когда выполняются условия (31), евклидовые инварианты аффинора λ_i^k, аналогично, как в E_n, определяют ряд инвариантных образов конгруэнции.

Помимо нормали γ, $\vec{e}_{n-1}$ можно направить по центральной нормали тороа второго порядка. Тогда

$$\bar{\lambda}_{n-1}^i=a_{n-1}^k(\lambda_k^i+A_{n-1}^i\lambda_k^{n-1})+\lambda_{n-1}^i+A_{n-1}^i\lambda_{n-1}^{n-1}=0 \qquad (i,k=1,2,\dots,n-2) \tag{32}$$

Торсовая нормаль также выделяет совокупность инвариантных образов конгруэнции.

§3. Исследуем в R_n^{12} такой класс конгруэнции, у которой все поверхности второго порядка - квазиторсы. Тогда:

$$\lambda_1^{n-1}=\lambda_2^{n-1}=\dots=\lambda_{n-2}^{n-1}=0 \tag{33}$$

Внося условия (33) в систему (I4), получим:

$$\begin{aligned} \omega^i &= \lambda_k^i\omega_n^k+\lambda_{n-1}^i\omega_n^{n-1} \\ \omega^{n-1} &= \lambda_{n-1}^{n-1}\omega_n^{n-1} \end{aligned} \tag{34}$$

После дифференцирования (34):

$$\begin{aligned} &[\Delta_k^i\omega_n^k]=0 \\ &[\Delta_{n-1}^{n-1}\omega_n^{n-1}]=0 \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,n-2 \\ k=1,2,\dots,n-1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{35}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_k^i &= d\lambda_k^i+\lambda_k^j\omega_j^i-\lambda_j^i\omega_k^j \\ \Delta_{n-1}^{n-1} &= d\lambda_{n-1}^{n-1}-\omega^n \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots,n-2 \\ k,j=1,2,\dots,n-1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

По лемме Васенина, система (35) в инволюции, и класс существует с произволом $(n-2)$ функций от $(n-1)$ аргумента.

Если внести условия (33) в формулы (I5), то получим, что аффинор λ_i^k и λ_{n-1}^{n-1} не зависят от выбора нормали. Следовательно, горловая точка, граничные точки, псевдофокусы, особые точки не зависят от выбора нормали, а являются инвариантными точками конгруэнции. Поскольку нельзя $\vec{e}_1$ направить по основному вектору, то для крепления $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_{n-2}$ следует воспользоваться собственными направлениями аффинора λ_i^k, аналогично, как в E_n

Литература

1) Б.А.Розенфельд. "Неевклидовые пространства", "Наука", Москва, 1969г.
2) Л.Н.Берёзина."Классическая дифференциальная геометрия" I, Изд-во ЛГУ, Рига, 1970 г.

Р.К.Власова

Двухпараметрические семейства прямых L_2 в F_4

В данной работе получен ряд теорем, связывающих скалярные величины, определяемые линейчатыми поверхностями первого порядка, принадлежащими семейству L_2 ; найдена полная система инвариантов двухпараметрического семейства прямых L_2 и указаны возможные канонизации репера, в том числе, аналог репера С.П.Финикова.

§I. Линейчатые поверхности в F_4

Будем рассматривать линейчатые поверхности, образующие которых суть прямые первого порядка /I/.

Отнесем линейчатую поверхность первого порядка к ортонормированному реперу (A, e_i) $(i = 1,2,3,4)$ следующим образом: вершину А поместим на образующей, вектор e_1 направим по образующей.

Уравнения движения репера (A, e_i) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
dA &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 + \omega^4 e_4 \\
de_1 &= \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3 + \omega_1^4 e_4 \\
de_2 &= \omega_2^3 e_3 + \omega_2^4 e_4 \\
de_3 &= \omega_3^4 e_4 \\
de_4 &= 0
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Репер (I) можно частично канонизировать: вектор e_2 направить по центральной нормали de_1 линейчатой поверхности первого порядка. Тогда из коллинеарности векторов de_1 и e_2 следует:

$$\omega_1^3 = \omega_1^4 = 0 \qquad (2)$$

Допустимыми преобразованиями репера первого порядка (2) будут:

I. Перенос вершины репера вдоль образующей на отрезок t.

$$\mathcal{A}' = \mathcal{A} + te_1 \qquad , \qquad e_i' = e_i \; . \tag{3}$$

При этом преобразовании форма ω^1 - вторична, форма ω^2 меняется по закону

$$\bar{\omega}^2 = \omega^2 + t\omega_1^2 \; , \tag{4}$$

остальные формы неизменны.

2. Вращение вектора e_3 в плоскости $/ e_3, e_4 /$

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}' = \mathcal{A} && e_3' = e_3 + \varphi e_4 \\ &e_1' = e_1 && e_4' = e_4 \\ &e_2' = e_2 && \end{aligned} \tag{5}$$

В этом случае проекции инвариантных векторов $d\mathcal{A}$ и de_1 на инвариантную плоскость $/ e_3, e_4 /$ дают два контрвариантных вектора $\{\omega^3, \omega^4\}$ и $\{\omega_1^3, \omega_1^4\}$. Заметим, что в пространстве E_4 эти векторы тоже имеют место /2/. Аналогично тому, как это сделано в E_4 назовем $\left\{\frac{\omega^3}{\omega_1^2}, \frac{\omega^4}{\omega_1^2}\right\}$ - вектором распределения, а $\left\{\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2}, \frac{\omega_1^4}{\omega_1^2}\right\}$ - вектором кривизны. Соответственно модули этих векторов $\frac{\omega^3}{\omega_1^2}$ -параметром распределения, $\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2}$ - кривизной линейчатой поверхности первого порядка. Если же вернуться к реперу нулевого порядка (I), то параметр распределения примет вид

$$\frac{\begin{vmatrix} \omega^2 & \omega_1^2 \\ \omega^3 & \omega_1^3 \end{vmatrix}}{\omega_1^2} \tag{6}$$

Так как форма ω_1^2 инвариантная при преобразованиях репера (3) и (5), а форма ω^2 зависит только от переноса вершины репера, уравнение

$$\bar{\omega}^2 = 0 \tag{7}$$

определяет инвариантную точку с абсциссой

$$t = -\frac{\omega^2}{\omega_1^2} \tag{8}$$

Эту точку естественно назвать стрикционной точкой линейчатой поверхности первого порядка.

§2. Двухпараметрические семейства прямых L_2 в F_4. Основные соотношения.

Рассматриваются семейства прямых только первого порядка. В дальнейшем двухпараметрическое семейство прямых первого порядка обозначим L_2

Отнесем L_2 к ортонормированному реперу нулевого порядка таким же образом, как это сделано для линейчатой поверхности первого порядка в §I. К реперу первого порядка перейдем, расположив векторы e_2, e_3 в касательной плоскости гетеросферического отображения L_2. Поскольку эта плоскость описывается вектором de_1, то разложение de_1 в данном случае не должно содержать вектор e_4, т.е.

$$\omega_1^4 = 0 \tag{9}$$

Дифференцируя уравнение (9) внешним образом, по лемме Картана получим

$$\omega_2^4 = z_{22}\,\omega_1^2 + z_{23}\,\omega_1^3 \tag{10}$$

$$\omega_3^4 = z_{32}\,\omega_1^2 + z_{33}\,\omega_1^3 \tag{11}$$

$$z_{23} = z_{32} \tag{11}$$

Допустимыми преобразованиями репера первого порядка будут: перенос вершины репера вдоль прямой семейства L_2 на отрезок t и поворот вектора e_2 в касательной плоскости гиперсферического отображения $[e_2, e_3]$ на флаговый угол φ [1].

$$A' = A + te_1 \qquad e_2' = e_2 + \varphi e_3 \qquad (12)$$

$$e_1' = e_1 \qquad e_3' = e_3$$

$$e_4' = e_4$$

При вращении вектора e_2 в плоскости $[e_2, e_3]$ получаем инвариантные линейные формы

$$\omega^2 \qquad (13)$$

$$\omega^4 \qquad (14)$$

$$\omega_1^2 \qquad (15)$$

$$\omega_1^3 \qquad (16)$$

и инвариантные квадратичные формы

$$\omega^2\omega_2^4 + \omega^3\omega_3^4 \qquad (17)$$

$$\omega_1^2\omega_2^4 + \omega_1^3\omega_3^4 \qquad (18)$$

$$\begin{vmatrix} \omega^2 & \omega^3 \\ \omega_1^2 & \omega_1^3 \end{vmatrix} \qquad (19)$$

Формы (13) и (17) являются точечными, они зависят от переноса вершины репера. Остальные формы - инвариантные формы семейства L_2

Рассматривая случай, когда формы ω_1^2 и ω_1^3 линейно независимы, имеем

$$\omega^2 = \lambda_2^2\omega_1^2 + \lambda_3^2\omega_1^3.$$

$$\omega^3 = \lambda_2^3\omega_1^2 + \lambda_3^3\omega_1^3$$

$$\omega^4 = \ell_2\omega_1^2 + \ell_3\omega_1^3 \qquad (20)$$

$$\omega_1^4 = z_{12}\,\omega_1^2 + z_{23}\,\omega_1^3$$
$$\omega_3^4 = z_{32}\,\omega_1^2 + z_{33}\,\omega_1^3$$

где $\quad z_{13} = z_{32}$

При переносе вершины репера вдоль прямой семейства меняются только коэффициенты $\Lambda_i^k \ (ik = 2,3)$ по закону

$$\bar{\Lambda}_i^k = \Lambda_i^k + \delta_i^k t, \tag{21}$$

они сопоставляют каждому контрвектору $\{\omega_1^2, \omega_1^3\}$ определенный контрвектор $\{\omega^4, \omega^3\}$ и следовательно, являются линейной вектор-функцией. Λ_i^k -точечный аффинор [3].

След аффинора $\Lambda_2^2 + \Lambda_3^3$ величина инвариантная при вращении вектора e_2. Полагая

$$\bar{\Lambda}_2^2 + \bar{\Lambda}_3^3 = 0 \tag{22}$$

определим инвариантную точку прямой с абсциссой

$$t = -\frac{\Lambda_2^2 + \Lambda_3^3}{2}. \tag{23}$$

Назовем эту точку центром прямой. Определитель аффинора $|\Lambda_i^k|$ тоже не зависит от вращения вектора e_2. Из уравнения

$$\left|\Lambda_i^k\right| = 0 \tag{24}$$

или развернуто

$$\rho^2 + (\Lambda_2^2 + \Lambda_3^3)\rho + \Lambda_2^2\Lambda_3^3 - \Lambda_2^3\Lambda_3^2 = 0 \tag{25}$$

определим еще пару инвариантных точек. Эти точки назовем псевдофокусами прямой семейства L_2

Точечный аффинор дает два инварианта семейства L_2

$$J_1 = \Lambda_3^2 \tag{26}$$

$$J_2 = (\lambda_2^2 - \lambda_3^3)^2 + 4\lambda_2^3\lambda_3^2 . \qquad (27)$$

Величины z_{ik} образуют дважды ковариантный симметрический тензор, не зависящий от переноса вершины репера. Его инварианты являются инвариантами семейства L_2. Определитель тензора

$$J_3 = \begin{vmatrix} z_{22} & z_{23} \\ z_{32} & z_{33} \end{vmatrix} \qquad (28)$$

и нижний правый элемент тензора

$$J_4 = z_{33} \qquad (29)$$

Коэффициенты l_i меняются при вращении вектора e_2 как координаты ковектора, от переноса вершины репера они не зависят. Модуль ковектора $\{l_2, l_3\}$ является инвариантом семейства L_2

$$J_5 = l_3 \qquad (30)$$

Имеются еще совместные инварианты ковектора $\{l_2, l_3\}$ и тензоров $\|\lambda_i^k\|$ и $\|z_{ik}\|$

$$J_6 = \lambda_2^3(l_3)^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_3^3)l_2 l_3 - \lambda_3^2(l_2)^2 \qquad (31)$$

$$J_7 = z_{33}(l_2)^2 - 2z_{23}l_2 l_3 + z_{22}(l_3)^2 \qquad (32)$$

Инварианты (26)-(32) образуют полную систему инвариантов L_2.

§3. Линейчатые поверхности первого порядка, принадлежащие L_2.

Чтобы выяснить геометрический смысл величин λ_i^k, z_{ik}, l_i привлечем линейчатые поверхности, принадлежащие L_2, которые могут быть заданы отношением

$$\omega_1^3 : \omega_1^2 = \alpha \quad , \quad (\omega_1^2 \neq 0) \qquad (33)$$

где α -флаговый угол между центральной нормалью de_1 линейчатой поверхности первого порядка и вектором репера e_2, Назовем эти поверхности линейчатыми поверхностями первого порядка.

Далее рассмотрим линейные и квадратичные формы (I3)-(I9), связанные с L_2. Форма (I5) определяет элемент дуги гиперсферического отображения образующих. Рассмотрим отношения линейных форм (I3), (I4), (I6) к форме (I5), отношения квадратичных форм (I8) и (I9) к квадрату формы (I5), а также отношение квадратичных форм (I7) и (I8). При составлении всех этих отношений будем использовать систему (20) и отношение $\omega_2^3 : \omega_1^2$ заменять по формуле (33). Тогда линейчатая поверхность первого порядка, принадлежащая L_2 определяет следующие скалярные величины:

I)абсциссу стрикционной точки

$$K = -(\lambda_2^0 + \alpha\lambda_3^0), \tag{34}$$

2) внутренний параметр распределения

$$P = \lambda_3^2\alpha^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_3^3)\alpha - \lambda_2^3, \tag{35}$$

3) внешний параметр распределения

$$\Pi = l_2 + \alpha l_3, \tag{36}$$

4) первую кривизну

$$\mathcal{R}_1 = z_{32} + \alpha z_{33}, \tag{37}$$

5) вторую кривизну

$$\mathcal{R}_2 = z_{33}\alpha^2 + 2z_{23}\alpha + z_{22}, \tag{38}$$

6) центр кривизны

$$m = -\frac{(\lambda_3^2 z_{32} + \lambda_3^3 z_{33})\alpha^2 + (\lambda_2^2 z_{32} + \lambda_3^2 z_{22} + \lambda_2^3 z_{33} + \lambda_3^3 z_{23})\alpha}{z_{33}\alpha^2 + 2z_{32}\alpha + z_{22}} + \tag{39}$$

$$+ \frac{(\lambda_2^2 z_{22} + \lambda_2^3 z_{23})}{z_{33}\alpha^2 + 2z_{32}\alpha + z_{22}}$$

Линейчатую поверхность первого порядка, принадлежащую L_2 , по центральной нормали которой будет направлен вектор e_1 , назовем координатной. Для нее флаговый угол α равен 0 и из формул (34)-(38) вытекает геометрический смысл некоторых коэффициентов системы (20).

$\Lambda_2^2 = -K_k$ - абсцисса стрикционной точки с обратным знаком;

$\Lambda_2^3 = -P_k$ - внутренний параметр распределения с обратным знаком,

$\ell_2 = \Pi_k$ - внешний параметр распределения,

$z_{32} = \mathcal{R}_{1k}$ - первая кривизна,

$z_{22} = \mathcal{R}_{2k}$ - вторая кривизна координатной линейчатой поверхности первого порядка.

Нетрудно усмотреть, что центр кривизны линейчатой поверхности первого порядка, принадлежащей L_1 , можно выразить через другие скалярные величины

$$m = k + p\,\frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2}\,; \tag{40}$$

§4. Инвариантные линейчатые поверхности первого порядка, принадлежащие L_2

Из формулы (35) можно получить значение флагового угла

$$\beta = \frac{\Lambda_2^3 - \Lambda_2^2}{2\Lambda_2^3}\,, \tag{41}$$

при котором внутренний параметр распределения достигает экстремального значения. Линейчатую поверхность первого порядка, принадлежащую L_2 и имеющую направление (41), назовем распределительной. Абсцисса стрикционной точки этой поверхности будет

$$K_p = -\frac{\Lambda_2^2 + \Lambda_2^3}{2} \tag{42}$$

Стрикционная точка распределительной поверхности совпадает с центром прямой семейства L_2 (23).

Канонизируем репер. Вектор e_2 направим по центральной нормали распределительной поверхности, вершину репера поместим в центр прямой. Тогда имеет место

$$\begin{cases} \lambda_2^2 + \lambda_3^3 = 0 \\ \lambda_2^2 - \lambda_3^3 = 0 \end{cases} \qquad (43)$$

и, следовательно,

$$\lambda_2^2 = \lambda_3^3 = 0 . \qquad (44)$$

Такая канонизация репера дает аналог репера С.П.Финикова.

Инвариантные линейчатые поверхности первого порядка, принадлежащие L_2, для которых внутренний параметр распределения равен нулю, определяются уравнением

$$\lambda_3^2 \gamma^2 + (\lambda_2^2 - \lambda_3^3)\gamma - \lambda_2^3 = 0 . \qquad (45)$$

Эту пару поверхностей назовем нулевыми. Их стрикционные точки совпадают с псевдофокусами прямой семейства (25).

Внешний параметр распределения определяется линейным уравнением (36). При условии $\ell_3 \neq 0$ имеет место следующая теорема.

Теорема I.

Существует единственная линейчатая поверхность первого порядка, принадлежащая L_2, внешний параметр распределения которой равен нулю.

Центральная нормаль этой поверхности с осью репера e_2 образует флаговый угол

$$\gamma = -\frac{\ell_2}{\ell_3} . \qquad (46)$$

При условии $\ell_{33} \neq 0$ имеет место

Теорема 2.

Существует единственная линейчатая поверхность первого порядка

порядка, принадлежащая L_2 , первая кривизна которой равна нулю.

Эту поверхность назовем поверхностью кривизны, ее центральная нормаль образует с осью репера e_2 флаговый угол

$$\varepsilon = -\frac{r_{32}}{r_{33}} . \qquad (47)$$

Из соотношения (36) видно, что экстремальное значение второй кривизны имеет поверхность, центральная нормаль которой образует с осью репера e_2 флаговый угол

$$\zeta = -\frac{r_{32}}{r_{33}} . \qquad (48)$$

Сравнивая (47) и (48), делаем вывод:

Теорема 3.

Вторая кривизна достигает экстремального значения вдоль поверхности кривизны.

Семейству прямых L_2 принадлежит пара линейчатых поверхностей первого порядка, вторая кривизна которых равна нулю. Они определяются уравнением

$$r_{33}\varrho^2 + 2r_{32}\varrho + r_{22} = 0 \qquad (49)$$

Все перечисленные инвариантные линейчатые поверхности первого порядка, принадлежащие L_2 , можно использовать для канонизации репера, направляя вектор e_2 по их центральным нормалям.

Для всех этих поверхностей можно вычислить скалярные инварианты (34)-(39), подставив соответствующее значение флагового угла между их центральной нормалью и осью репера e_2.

§5. Геометрические значения инвариантов L_2.

Соотношения (34)-(39) дают возможность установить связи между скалярными инвариантами, определяющими линейчатые поверхности первого порядка, принадлежащие L_2.

Так, исключив α из (34) и (36) получим

$$\frac{\Pi_1 - \Pi_2}{K_1 - K_2} = -\frac{b_3}{\lambda_3^2} = -\frac{J_5}{J_1} \quad \text{при } J_1 \neq 0. \qquad (50)$$

Теорема 4.

Отношение разности внешних параметров распределения к разности абсцисс стрикционных точек двух любых линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_2 одно и то же для данного семейства.

Из (34) и (35) следует

$$\frac{K_1^2 - K_2^2}{P_1 - P_2} = \lambda_3^2 = J_1. \qquad (51)$$

Теорема 5.

Для двух любых линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_2, отношение разности квадратов абсцисс их стрикционных точек к разности внутренних параметров распределения одно и то же для данного семейства.

Из (34) и (37) вытекает

$$\frac{\mathcal{R}_{11} - \mathcal{R}_{12}}{K_1 - K_2} = -\frac{z_{33}}{\lambda_3^2} = -\frac{J_4}{J_1} \quad \text{при } J_1 \neq 0. \qquad (52)$$

Теорема 6.

Для двух любых линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_2, отношение разности их первых кривизн к разности абсцисс стрикционных точек одно и то же для данного семейства.

Из (36) и (37) получаем

$$\frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\mathcal{R}_{11} - \mathcal{R}_{12}} = \frac{b_3}{z_{33}} = \frac{J_5}{J_4} \quad \text{при } J_4 \neq 0. \qquad (53)$$

Теорема 7.

Для двух любых линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_1, отношение разности внешних параметров распределения и разности первых кривизн одно и то же для данного семейства.

Из (50) и (51) получаем

$$\frac{\Pi_1-\Pi_2}{P_1-P_2}(K_1+K_2)=-b_3=-J_5. \quad (54)$$

Теорема 8.

Произведение отношения разности внешних к разности внутренних параметров распределения на сумму абсцисс стрикционных точек двух любых линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_2 одно и то же для данного семейства.

Из (51) и (52) имеем

$$\frac{\mathcal{R}_{11}-\mathcal{R}_{12}}{P_1-P_2}(K_1+K_2)=-2_{33}=-J_4. \quad (55)$$

Теорема 9.

Произведение отношения разности первых кривизн к разности внутренних параметров распределения на сумму абсцисс стрикционных точек двух линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_2, одно и то же для данного семейства.

Из (34), (38), и (52) вытекает

$$\frac{\mathcal{R}_{11}+\mathcal{R}_{12}}{\mathcal{R}_{21}-\mathcal{R}_{22}}(K_1-K_2)=-\Lambda_3^1=-J_1. \quad (56)$$

Теорема 10.

Произведение отношения суммы первых к разности вторых кривизн на разность абсцисс стрикционных точек пары линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_2 одно и то же для данного семейства.

Из (52) и (56) следует

$$\frac{R_{11}^2 - R_{12}^2}{R_{21} - R_{22}} = z_{33} = J_4. \qquad (57)$$

Теорема II.

Отношение разности квадратов первых кривизн к разности вторых любой пары линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_2, одно и то же для данного семейства.

Из (53) и (57) получаем

$$\frac{R_{11} + R_{12}}{R_{21} - R_{22}} (\Pi_1 - \Pi_2) = l_3 = J_5 \qquad (58)$$

Теорема I2.

Произведение отношения суммы первых кривизн к разности вторых на разность внешних параметров распределения пары линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_2 одно и то же для данного семейства.

Из (5I) и (56) следует

$$\frac{R_{11} + R_{12}}{R_{21} - R_{22}} = - \frac{K_1 + K_2}{P_1 - P_2} \qquad (59)$$

Теорема I3.

Для пары линейчатых поверхностей первого порядка, принадлежащих L_2, отношение суммы первых кривизны к разности вторых равно отношению суммы абсцисс стрикционных точек к разности внутренних параметров распределения, взятому с обратным знаком.

Литература

1. Б.А.Розенфельд. "Неевклидовы пространства".М., 1969г.
2. Ю.Г.Лумисте. "Дифференциальная геометрия линейчатых поверхностей $V3$ в R_4". Мат.сборник, т.50(92): 2, 1960, 203-220.
3. Л.Я.Березина."Классическая дифференциальная геометрия", I, ЛГУ, Рига, 1970.

Гоштейн В.М.

Комплексы в R_4^{12}

В данной работе рассматриваются вопросы, относящиеся к теории четырехпараметрического семейства прямых - комплекса - в R_4^{12} /5/. Выясняется геометрический смысл инвариантов комплекса при помощи принадлежащих ему подмногообразий. Рассмотрены некоторые специальные классы комплексов, доказаны их теоремы существования.

§1

Мы будем рассматривать четырехмерное метрическое пространство R_4^{12}, отвечающее группе движений, заданной действительной матрицей

$$A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ a_1^3 & a_2^3 & \cos\beta & -\sin\beta \\ a_1^4 & a_2^4 & \sin\beta & \cos\beta \end{Vmatrix} \qquad (1.1)$$

В R_4^{12} уравнения движения ортонормированного репера $T(\vec{A}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ две оси которого расположены в двумерной плоскости абсолюта σ, имеют вид

$$\begin{cases} d\vec{A} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3 + \omega^4\vec{e}_4 \\ d\vec{e}_1 = \omega_1^2\vec{e}_2 \\ d\vec{e}_2 = -\omega_1^2\vec{e}_1 \\ d\vec{e}_3 = \omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2 - \omega_4^3\vec{e}_4 \\ d\vec{e}_4 = \omega_4^1\vec{e}_1 + \omega_4^2\vec{e}_2 + \omega_4^3\vec{e}_3 \end{cases} \qquad (1.2)$$

Теперь введем некоторые обозначения для двумерной и трехмерной линейчатых поверхностей, которые будем в дальнейшем называть соответственно линейчатой поверхностью и двухпараметрическим семейством прямых. Для всех семейств прямых мы исключим из рассмотрения случай, когда образующая семейства находится в двумерной плоскости абсолюта $\mathfrak{S}$.

§2. Линейчатая поверхность в R_4^{4a}

Присоединим репер T к линейчатой поверхности следующим образом: вершину репера поместим на образующую, а ось $\bar{e}_4$ направим по образующей. При оставшихся допустимых преобразованиях репера T линейная форма ω_4^3 из (I.2) является инвариантной.

I. Пусть $\omega_4^3 \neq 0$

В этом случае центральная нормаль линейчатой поверхности $(d\bar{e}_4)$ не лежит в $\mathfrak{S}$, можно направить по ней ось $\bar{e}_3$. Так как $\omega_4^3 \neq 0$, то

$$\begin{cases} \omega^1 = \lambda_3^1 \omega_4^3 \\ \omega^2 = \lambda_3^2 \omega_4^3 \\ \omega^3 = \lambda_3^3 \omega_4^3 \\ \omega_3^1 = \lambda_{33}^1 \omega_4^3 \\ \omega_3^2 = \lambda_{33}^2 \omega_4^3 \\ \omega_4^1 = 0 \\ \omega_4^2 = 0 \end{cases} \qquad (2.I)$$

Инвариантный вектор $\lambda_3^2 \bar{e}_1 - \lambda_3^1 \bar{e}_2$ есть вектор распределения линейчатой поверхности (2.I); вектор $\frac{d\bar{e}_4}{\omega_4^3}$ характеризует скорость изменения её центральной нормали, его проекцию на $\mathfrak{S}$ - инвариантный вектор $\lambda_{33}^1 \bar{e}_1 + \lambda_{33}^2 \bar{e}_2$ назовём вектором геодезической кривизны линейчатой поверхности (2.I). Здесь и в дальнейшем все названия будут даваться по аналогии с евклидовым пространством R_4 /3/.

λ_3^3 -абсцисса отрикционной точки линейчатой поверхности (2.1). Касательная отрикционной линии так же, как в R_4, в каждой точке ортогональна $d\vec{e}_4$.

2. Пусть $\omega_4^3 = 0$.

Тогда (если исключить из рассмотрения цилиндр) центральная нормаль линейчатой поверхности лежит в σ, поэтому ось $\vec{e}_1$ (или $\vec{e}_2$) мы можем направить по центральной нормали. При этом форма ω_4^1 становится инвариантной, а так как она отличная от нуля во всех случаях, кроме цилиндра, то её можно выбрать базисной:

$$\begin{cases} \omega^1 = \lambda_1^1 \omega_4^1 \\ \omega^2 = \lambda_1^2 \omega_4^1 \\ \omega^3 = \lambda_1^3 \omega_4^1 \\ \omega_1^2 = \varkappa\, \omega_4^1 \\ \omega_4^2 = 0 \end{cases} \qquad (2.2)$$

Вектор $\varkappa \vec{e}_2$ -инвариантный при допустимых преобразованиях репера Т - является вектором геодезической кривизны линейчатой поверхности (2.2); вектор $\lambda_1^3 \vec{e}_2 - \lambda_1^2 \vec{e}_3$ есть её вектор распределения. Однако в данном случае инвариантной будет лишь проекция вектора распределения на σ, которую назовем внутренним параметром распределения, а внешний параметр распределения - проекция вектора распределения на $\vec{e}_3$ - зависит от положения оси $\vec{e}_3$. Так, если перейти к новому положению $\vec{e}_3'$:

$$\vec{e}_3' = a_3^1 \vec{e}_1 + a_3^2 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 , \qquad (2.3)$$

то внешний параметр распределения λ_1^2 примет вид $\overline{\lambda}_1^2$, где

$$\overline{\lambda}_1^2 = \lambda_1^2 - a_3^2 \lambda_1^3 .$$

Коэффициент системы (2.2) λ_1^1 также зависит от преобразования (2.3):

$$\overline{\lambda}_1^1 = \lambda_1^1 - a_3^1 \lambda_1^3$$

поэтому в данной окрестности мы не можем указать инвариантным образом точку на образующей, в которой касательная к направляющей была бы ортогональна центральной нормали. Однако каждому положению $\vec{e}_3$ мы можем сопоставить такую точку - относительный центр линейчатой поверхности; λ^1_1 - абсцисса относительного центра. Если направление вектора $\vec{e}_3$ фиксировано по некоторому направлению α, то ω^1_3 и ω^2_3 становятся главными формами:

$$\begin{cases} \omega^1_3 = \lambda^1_{31}\,\omega^1_4 \\ \omega^2_3 = \lambda^2_{31}\,\omega^1_4 \end{cases} \qquad (2.4)$$

Инвариантный вектор $\dfrac{d\vec{e}_3}{\omega^1_4} = \lambda^1_{31}\vec{e}_1 + \lambda^2_{31}\vec{e}_2$ назовем вектором вынужденной кривизны α-направления; его проекцию на центральную нормаль назовем внешней вынужденной кривизной, а проекцию на $\vec{e}_2$ - внутренней вынужденной кривизной.

§3. Двупараметрическое семейство прямых в $R^{1^2}_4$

Мы будем рассматривать лишь случай, когда касательная плоскость гиперсферического отображения образующих семейства совпадает с плоскостью абсолюта $Б$. Поместим вершину репера на образующую семейства, а ось $\vec{e}_4$ направим по образующей. Тогда:

$$\begin{cases} \omega^1 = \lambda^1_1\,\omega^1_4 + \lambda^1_2\,\omega^2_4 \\ \omega^2 = \lambda^2_1\,\omega^1_4 + \lambda^2_2\,\omega^2_4 \\ \omega^3 = \lambda^3_1\,\omega^1_4 + \lambda^3_2\,\omega^2_4 \\ \omega^3_4 = 0 \end{cases} \qquad (3.1)$$

Рассматривая координатные линейчатые поверхности семейства, т.е. поверхности, центральные нормали которых совпадают с осями координат, получим

λ^1_1, λ^2_2 - абсциссы относительных центров

$-\lambda_1^2$, λ_2^1 -внешние параметры распределения;

λ_1^3, $-\lambda_2^3$ -внутренние параметры распределения координатных линейчатых поверхностей семейства.

Чтобы выделить произвольную линейчатую поверхность семейства, необходимо задать отношение базисных форм ω_4^1 и ω_4^2. Этим мы указываем направление центральной нормали поверхности в плоскости $\mathfrak{S}$. Так как в $\mathfrak{S}$ евклидова метрика, то можно задать отношение базисных форм в виде

$$\omega_4^1 : \omega_4^2 = \cos\varphi : \sin\varphi \,, \tag{3.2}$$

где φ - угол между центральной нормалью данной поверхности и осью $\vec{e}_1$. Для такой линейчатой поверхности абсцисса относительного центра t будет равна:

$$t = \lambda_1^1 \cos^2\varphi + (\lambda_1^2 + \lambda_2^1)\cos\varphi\sin\varphi + \lambda_2^2 \sin^2\varphi \tag{3.3}$$

Исследуя выражение (3.3), мы найдем, что каждая точка на образующей является относительным центром двух различных (или совпавших) поверхностей семейства, если величина

$$\mathcal{J} = (\lambda_1^2 + \lambda_2^1)^2 - 4\lambda_1^1\lambda_2^2$$

будет больше или равна нулю. Однако $\mathcal{J}$ зависит не только от переноса вершины вдаль образующей, но и от положения оси $\vec{e}_3$ - нормали семейства. Если положение нормали не фиксировано, мы не можем указать на образующей семейства инвариантных точек, аналогичных граничным в R_4. От положения $\vec{e}_3$ зависит и внешний параметр распределения поверхности p

$$p = -\lambda_1^2 \cos^2\varphi + (\lambda_1^1 - \lambda_2^2)\cos\varphi\sin\varphi + \lambda_2^1 \sin^2\varphi \tag{3.4}$$

Пусть нормаль семейства креплена по некоторому направлению α. Тогда появятся новые главные формы:

$$\begin{cases} \omega_3^1 = \lambda_{31}^1 \omega_4^1 + \lambda_{32}^1 \omega_4^2 \\ \omega_3^2 = \lambda_{31}^2 \omega_4^1 + \lambda_{32}^2 \omega_4^2 \end{cases} \tag{3.5}$$

$\lambda_{31}^{1}, \lambda_{32}^{2}$ есть внешние вынужденные кривизны, а

$\lambda_{31}^{2}, \lambda_{32}^{1}$ – внутренние вынужденные кривизны координатных поверхностей семейства.

При оставшихся допустимых преобразованиях репера величины

$$j_1 = (\lambda_1^3)^2 + (\lambda_2^3)^2 , \tag{3.6}$$

$$j_2 = \lambda_2^1 - \lambda_1^2 , \tag{3.7}$$

$$j_3 = (\lambda_1^1 - \lambda_2^2)^2 + 4\lambda_1^2 \lambda_2^1 , \tag{3.8}$$

$$j_4 = \lambda_{31}^1 + \lambda_{32}^2 , \tag{3.9}$$

$$j_5 = \lambda_{31}^1 \lambda_{32}^2 - \lambda_{31}^2 \lambda_{32}^1 , \tag{3.10}$$

$$j_6 = \lambda_{31}^2 - \lambda_{32}^1 . \tag{3.11}$$

являются инвариантными.

Такое двухпараметрическое семейство имеет много общего с двухпараметрическим семейством прямых в R_4 , свойства которого подробно рассмотрены в /I/. Это объясняется тем, что в плоскости абсолюта $\mathfrak{S}$ эвклидова метрика. Так, у семейства имеется единственная ортогональная пара (то есть две линейчатые поверхности с ортогональными центральными нормалями), для которой равны внешние параметры распределения. Назовем их, по аналогии с R_4 , главными линейчатыми поверхностями. Относительные центры главных поверхностей являются инвариантными точками образующей семейства, их абсциссы t удовлетворяют уравнению

$$(\lambda_1^1 + t)(\lambda_2^2 + t) - \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^1)^2}{4} = 0 \tag{3.12}$$

Точки (3.12) назовем граничными точками семейства, между ним расположены стрикционные точки всех линейчатых поверхностей семейства.

Существует единственная ортогональная пара семейства, относительные центры которой совпадают. Эти поверхности назовем распределительными, так как внешний параметр распределения принимает для них экстремальные значения. Относительные центры распределительных поверхностей совпадают с инвариантной точкой образующей семейства, центром, абсцисса которого удовлетворяет уравнению

$$t = -\frac{\lambda_1^1 + \lambda_2^2}{2} \qquad (3.13)$$

Относительные центры любой ортогональной пары семейства расположены симметрично относительно центра. В каждой точке между граничными точками расположены относительные центры двух линейчатых поверхностей семейства, симметричных относительно главных.

В зависимости от знака инварианта J_3 существуют две линейчатые поверхности семейства (действительные разные, совпавшие или мнимые), для которых внешний параметр распределения равен нулю. Назовем эти поверхности нулевыми, а их относительные центры - псевдофокусами. Псевдофокусы являются инвариантными точками образующей, их абсциссы отвечают уравнению

$$(\lambda_1^1 + t)(\lambda_2^2 + t) - \lambda_1^2 \lambda_2^1 = 0 \qquad (3.14)$$

Нулевые поверхности расположены симматрично относительно распределительных поверхностей.

Существует единственная ортогональная пара семейства, для которой сумма внутренних вынужденных кривизн равна нулю. Назовем эту пару поверхностями кривизны. Внешние вынужденные кривизны достигают экстремальных значений вдоль поверхностей кривизны.

В зависимости от знака инварианта J_5 получим, что имеется пара действительных, совпавших или мнимых асимптотических поверхностей семейства - для них внешняя вынужденная кривизна равна нулю. Асимптотические поверхности расположены симметрично относительно поверхностей кривизны. Наконец, существует единственная ортогональная пара, у которой равны внешние вынужденные кривизны, она делит пополам углы между центральными нормалями поверхностей кривизны - поверхности, биссекторные к поверхностям кривизны. Внутренняя вынужденная кривизна достигает для этих поверхностей экстремального значения.

Существует единственная линейчатая поверхность семейства, для которой внутренний параметр распределения будет нулевым и т.д.

Так как векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не фиксированы в нашем полуканоническом репере, то любая ортогональная пара может быть координатной. Учитывая это, мы можем выяснить геометрический смысл инвариантов семейства, совершенно аналогичный семействам в R_4.

Для любой ортогональной пары семейства имеют одинаковое значение следующие величины:

сумма квадратов внутренних параметров распределения;

сумма внешних параметров распределения;

разность квадрата разности абсцисс относительных центров и учетверенного произведения внешних параметров распределения

сумма внешних вынужденных кривизны;

разность произведений внешних вынужденных кривизн и внутренних вынужденных кривизн;

разность внутренних вынужденных кривизн.

§4. Основные уравнения комплекса прямых в R_4^{12}

Присоединим к прямой комплекса репер T: вершину репера поместим на прямую и направим ось $\vec{e}_4$ по образующей. Тогда при условии $[\omega^3\ \omega_4^1\ \omega_4^2\ \omega_4^3] \neq 0$

$$\omega^\alpha = \lambda^\alpha_\beta \omega_4^\beta + \lambda^\alpha_3 \omega_4^3 + \gamma^\alpha_3 \omega^3 , \qquad (4.1)$$

где α и β принимают значения 1 и 2, а по одинаковым индексам сверху и снизу предполагается суммирование. Значения I и 2 мы будем приписывать греческим индексам всюду в данной работе.

Рассматривая изменение коэффициентов системы (4.I) при допустимых преобразованиях репера, мы получим, что существует единственное инвариантное направление вне σ и не совпадающее с образующей комплекса. Если направить $\vec{e}_3$ по нему, то будет иметь место

$$\gamma_3^\alpha = 0 \qquad (4.2)$$

Это направление назовем, по аналогии с R_4 /4/, <u>главной нормалью</u> комплекса. Направим вектор $\vec{e}_3$ по главной нормали, тогда

$$\begin{cases} \omega^\alpha = \lambda^\alpha_\beta \, \omega_4^\beta + \lambda^\alpha_3 \, \omega_4^3 \\ \omega_3^\alpha = \lambda^\alpha_{3\beta} \, \omega_4^\beta + \lambda^\alpha_{33} \, \omega_4^3 + \gamma^\alpha_{33} \, \omega^3 \end{cases} \qquad (4.3)$$

Из коэффициентов системы (4.3) можно образовать ряд скалярных инвариантов

$$J_1 = \lambda^1_2 - \lambda^2_1 ,$$

$$J_2 = (\lambda^1_1 - \lambda^2_2)^2 + 4\lambda^2_1 \lambda^1_2$$

$$J_3 = (\lambda^1_3)^2 + (\lambda^2_3)^2 ,$$

$$J_4 = (\gamma^1_{33})^2 + (\gamma^2_{33})^2 .$$

$$J_5 = \lambda^1_3 \gamma^1_{33} + \lambda^2_3 \gamma^2_{33}$$

$$J_6 = \lambda^1_{33} \gamma^2_{33} - \lambda^2_{33} \gamma^1_{33}$$

$$J_7 = \lambda^1_{31} + \lambda^2_{32} .$$

$$J_8 = \lambda^1_{31} \lambda^2_{32} - \lambda^2_{31} \lambda^1_{32}$$

$$J_9 = \lambda_{31}^{2} - \lambda_{32}^{1}$$

$$J_{10} = (\lambda_1^1 - \lambda_2^2)\lambda_3^1\lambda_3^2 + \lambda_2^1(\lambda_3^2)^2 - \lambda_1^2(\lambda_3^1)^2$$

$$J_{11} = (\lambda_1^1 - \lambda_2^2)\gamma_{33}^1\gamma_{33}^2 + \lambda_2^1(\gamma_{33}^2)^2 - \lambda_1^2(\gamma_{33}^1)^2$$

$$J_{12} = (\lambda_{31}^1\gamma_{33}^1 + \lambda_{32}^1\gamma_{33}^2)^2 + (\lambda_{31}^2\gamma_{33}^1 + \lambda_{32}^2\gamma_{33}^2)^2$$

Приравнивая нулю инварианты вращения векторов в σ , зависящие от переноса вершины вдоль образующей, мы получим уравнения инвариантных точек образующей комплекса. Кроме того, в плоскости абсолюта σ мы можем указать инвариантные направления - инвариантные векторы $\lambda_3^\alpha \vec{e}_\alpha$, $\gamma_{33}^\alpha \vec{e}_\alpha$, $\lambda_{33}^\alpha \vec{e}_\alpha$ и направления, полученные при помощи двухвалентных тензоров λ_α^β и $\lambda_{3\alpha}^\beta$

Чтобы выяснить геометрический смысл инвариантов, рассмотрим линейчатые подмногообразия, принадлежащие комплексу.

§5. А - подмногообразие

Рассмотрим совокупность линейчатых поверхностей, принадлежащих комплексу, центральные нормали которых находятся в плоскости абсолюта σ , а внутренние параметры распределения равны нулю. Назовем эту совокупность А-подмногообразием. Аналитически условия, выделяющие А-подмногообразие, можно записать в виде:

$$\begin{cases} \omega^3 = 0 \\ \omega_4^3 = 0 \end{cases} \qquad (5.1)$$

Внешние производные уравнений (5.1) обращаются в нуль в силу системы, следовательно, А-подмногообразие является двухпараметрическим подмногообразием.

Легко видеть, что А-подмногообразие есть частный случай двухпараметрического семейства прямых, рассмотренного в §3, поэтому все свойства двухпараметрического семейства будут иметь место для А-подмногообразия, необходимо лишь учесть, что внутренний параметр распределения равен нулю для всех линейчатых поверхностей А-подмногообразия, а не только для одной. Отсюда следует, что внешний параметр распределения для любой линейчатой поверхности А-подмногообразия совпадает с параметром распределения, значит, имеет место:

Теорема I. Обе нулевые поверхности А-подмногообразия являются развертывающимися.

Теорема 2. Для всех линейчатых поверхностей А-подмногообразия вектор распределения сонаправлен главной нормали комплекса.

Инвариантные точки образующей комплекса, отвечающие уравнениям

$$\lambda_1^1 + \lambda_2^2 + 2t = 0 \,, \tag{5.2}$$

$$(\lambda_1^1 + t)(\lambda_2^2 + t) - \lambda_1^2 \lambda_2^1 = 0 \,, \tag{5.3}$$

$$(\lambda_1^1 + t)(\lambda_2^2 + t) - \left(\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^1}{2}\right)^2 = 0 \tag{5.4}$$

являются соответственно центром, фокусами и граничными точками А-подмногообразия.

Инварианты комплекса $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_3, \mathcal{J}_7, \mathcal{J}_8, \mathcal{J}_9$ являются скалярными инвариантами. А-подмногообразия и их геометрический смысл совершенно аналогичен геометрическому смыслу инвариантов j_2, j_3, j_4, j_5, j_6 двухпараметрического семейства прямых в R_4, указанному в №3.

Таким образом, при помощи А-подмногообразия, мы находим инвариантные линейчатые поверхности комплекса, определенные тензорами λ_α^β и $\lambda_{3\alpha}^\beta$ – главные, распределительные, нулевые, асимптотические, поверхности кривизны и биссекторные к ним поверхности А-подмногообразия – и три типа инвариантных точек – центр, фокусы и граничные точки А-подмногообразия.

§6. К - поверхности

Поместим вершину репера в некоторую точку К на образующей комплекса. Если теперь мы наложим на базисные формы следующие связи:

$$\begin{cases} \omega_4^1 = 0 \\ \omega_4^2 = 0 \\ \omega^3 = 0 \end{cases} \qquad (6.1)$$

то мы выделим линейчатую поверхность, центральная нормаль которой будет сонаправлена главной нормали комплекса, а стрикционная точка совпадает с точкой К. Назовем данную поверхность К-поверхностью. Рассматривая уравнения движения репера, крепленного к К-поверхности, мы получаем, что для неё

$\lambda_3^2\vec{e}_1 - \lambda_3^1\vec{e}_2$ - вектор распределения, а

$\lambda_{33}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ - вектор геодезической кривизны.

Так как вершина репера креплена произвольными образом, то имеет место

<u>Теорема 3.</u> Стрикционные точки К-поверхностей заполняют всю образующую комплекса, причем каждой точке образующей отвечает одна и только одна линейчатая поверхность комплекса, стрикционная точка которой совпадает с данной, а центральная нормаль сонаправлена главной нормали комплекса.

Прежде чем рассматривать свойства К-поверхностей, введем несколько обозначений. Назовем направление инвариантного вектора $\gamma_{33}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$, ортогональное образующей и главной нормали комплекса; направлением бинормали комплекса.

Свертывая тензоры λ_{α}^{β} и $\lambda_{3\alpha}^{\beta}$ с векторами $\lambda_3^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$, $\gamma_{33}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$ и $\lambda_{33}^{\alpha}\vec{e}_{\alpha}$, мы получим векторы:

$$\vec{M} = \lambda_{\beta}^{\alpha}\lambda_3^{\beta}\vec{e}_{\alpha} = (\lambda_1^1\lambda_3^1 + \lambda_2^1\lambda_3^2)\vec{e}_1 + (\lambda_1^2\lambda_3^1 + \lambda_2^2\lambda_3^2)\vec{e}_2\,;$$

$$\vec{N} = \lambda_{\beta}^{\alpha}\gamma_{33}^{\beta}\vec{e}_{\alpha} = (\lambda_1^1\gamma_{33}^1 + \lambda_2^1\gamma_{33}^2)\vec{e}_1 + (\lambda_1^2\gamma_{33}^1 + \lambda_2^2\gamma_{33}^2)\vec{e}_2\,;$$

$$\vec{L} = \lambda^{\alpha}_{\beta} \lambda^{\beta}_{33} \vec{e}_{\alpha} = (\lambda^1_1 \lambda^1_{33} + \lambda^1_2 \lambda^2_{33})\vec{e}_1 + (\lambda^2_1 \lambda^1_{33} + \lambda^2_2 \lambda^2_{33})\vec{e}_2 ;$$

$$\vec{S} = \lambda^{\alpha}_{3\beta} \lambda^{\beta}_{3} \vec{e}_{\alpha} = (\lambda^1_{31} \lambda^1_{3} + \lambda^1_{32} \lambda^2_{3})\vec{e}_1 + (\lambda^2_{31} \lambda^1_{3} + \lambda^2_{32} \lambda^2_{3})\vec{e}_2 ;$$

$$\vec{R} = \lambda^{\alpha}_{3\beta} \gamma^{\beta}_{33} \vec{e}_{\alpha} = (\lambda^1_{31} \gamma^1_{33} + \lambda^1_{32} \gamma^2_{33})\vec{e}_1 + (\lambda^2_{31} \gamma^1_{33} + \lambda^2_{32} \gamma^2_{33})\vec{e}_2 ;$$

$$\vec{P} = \lambda^{\alpha}_{3\beta} \lambda^{\beta}_{33} \vec{e}_{\alpha} = (\lambda^1_{31} \lambda^1_{33} + \lambda^1_{32} \lambda^2_{33})\vec{e}_1 + (\lambda^2_{31} \lambda^1_{33} + \lambda^2_{32} \lambda^2_{33})\vec{e}_2 ,$$

Они не меняются при вращении координатных векторов в $\mathfrak{S}$, но векторы $\vec{M}$, $\vec{N}$, $\vec{L}$, $\vec{P}$ зависят от переноса вершины репера. Мы можем в каждой точке образующей сопоставить векторы $\vec{M}$, $\vec{N}$, $\vec{L}$, $\vec{P}$ той К-поверхности, чья стрикционная точка совпадает с данной. Назовем полученные векторы соответственно распределительным, нормальным, геодезическим, распределительной кривизны, бинормальной кривизны и вынужденным вектором.

Из инвариантов J_{10}, J_{11} и J_6 J_8 следует:

<u>Теорема 4</u>. Площадь параллелограмма, построенного на распределительном векторе и векторе распределения одна и та же для любой К-поверхности.

<u>Теорема 5</u>. Площадь параллелограмма, построенного на нормальном векторе и векторе бинормали одна и та же для любой К-поверхности.

<u>Теорема 6</u>. Площадь параллелограмма, построенного на вынужденном векторе и векторе бинормальной кривизны одна и та же для любой К-поверхности.

Т.к. вектор $\lambda^{\alpha}_{3}\vec{e}_{\alpha}$ инвариантен при допустимых преобразованиях репера T, то

<u>Теорема 7</u>. Все К-поверхности имеют общий вектор распределения.

Скалярный инвариант J_3 есть квадрат параметра распределения произвольной К-поверхности.

Скалярный инвариант J_6 означает, что

<u>Теорема 8.</u> Площадь параллелограмма, построенного на бинормали и векторе геодезической кривизны К-поверхности одна и та же для произвольной К-поверхности.

Рассматривая изменение вектора геодезической кривизны, распределительного, нормального и вынужденного векторов К-поверхности, находим:

<u>Теорема 9.</u> Если $J_4 \neq 0$, то существует единственная К-поверхность, вектор геодезической кривизны которой ортогонален бинормали. Абсцисса стрикционной точки этой поверхности удовлетворяет уравнению

$$t = -\frac{1}{J_4}\left(\lambda^1_{33}\gamma^1_{33} + \lambda^2_{33}\gamma^2_{33}\right) \tag{6.2}$$

Модуль вектора геодезической кривизны этой поверхности является минимальным для всех К-поверхностей.

<u>Теорема 10.</u> Если $J_4 \neq 0$, то существует единственная К-поверхность, нормальный вектор которой ортогонален бинормали. Модуль нормального вектора при этом минимален, а абсцисса стрикционной точки удовлетворяет уравнению:

$$t = -\frac{1}{J_4}\left[\lambda^1_1(\gamma^1_{33})^2 + (\lambda^2_1 + \lambda^1_2)\gamma^1_{33}\gamma^2_{33} + \lambda^2_2(\gamma^2_{33})^2\right] \tag{6.3}$$

<u>Теорема 11.</u> Если $J_3 \neq 0$, то существует единственная К-поверхность, распределительный вектор которой сонаправлен ковектору распределения. Модуль распределительного вектора принимает для данной поверхности минимальное значение, а абсцисса стрикционной точки отвечает уравнению

$$t = -\frac{1}{J_3}\left[\lambda^1_1(\lambda^1_3)^2 + (\lambda^2_1 + \lambda^1_2)\lambda^1_3\lambda^2_3 + \lambda^2_2(\lambda^2_3)^2\right] \tag{6.4}$$

<u>Теорема 12.</u> Если $J_{12} \neq 0$, то существует единственная К-поверхность, у которой вынужденный вектор ортогонален вектору бинормальной кривизны и модуль вынужденного вектора минимален. Абсцисса стрикционной точки данной поверхности удовлетворяет уравнению:

$$t = -\frac{1}{J_{12}}\left\{\left[(\lambda^1_{31})^2 + \lambda^1_{32}\lambda^2_{33}\right]\cdot\lambda^1_{3\beta}\gamma^\beta_{33} + \lambda^2_{3\beta}\gamma^\beta_{33}\left[\lambda^2_{31}\lambda^1_{33} + (\lambda^2_{32})^2\right]\right\} \quad (6.5)$$

<u>Теорема I3.</u> Если $J_3J_4 - (J_5)^2 \neq 0$ то существует единственная К-поверхность, вектор геодезической кривизны которой ортогонален ковектору распределения. Абсцисса стрикционной точки этой поверхности отвечает уравнению

$$t = \frac{\lambda^1_3\lambda^2_{33} - \lambda^2_3\lambda^1_{33}}{\lambda^2_3\gamma^1_{33} - \lambda^1_3\gamma^2_{33}} \quad (6.6)$$

Для этой линейчатой поверхности векторы распределительный и геодезический и распределительной кривизны и вынужденной попарно сонаправлены.

<u>Теорема I4.</u> Если $J_5 \neq 0$, то существует единственная К-поверхность, векторы геодезической кривизны и распределения которой сонаправлены. Абсцисса стрикционной точки данной К-поверхности удовлетворяет уравнению

$$t = -\frac{1}{J_5}\left(\lambda^1_3\lambda^1_{33} + \lambda^2_3\lambda^2_{33}\right) \quad (6.7)$$

Стрикционные точки этих К-поверхностей являются инвариантными точками образующей комплекса. Совершенно аналогично мы можем указать инвариантные К-поверхности, для которых:

вектор распределения ортогонален или сонаправлен какому-либо из следующих векторов нормальному, геодезическому, вынужденному;

вектор геодезической кривизны ортогонален или сонаправлен распределительному, нормальному, вынужденному, геодезическому, векторам бинормальной и распределительной кривизны, ортогонален бинормали и так далее.

Поместим вершину репера в один из фокусов А-подмногообразия, тогда имеет место равенство

$$\lambda^1_1\lambda^2_2 - \lambda^2_1\lambda^1_2 = 0 \quad (6.8)$$

Учитывая (6.8), получим

Теорема I5. Для К-поверхностей, стрикционные точки которых совпадают с фокусами А-подмногообразия, распределительный, нормальный и геодезический векторы сонаправлены.

Таким образом, мы получаем геометрическое истолкование инвариантных точек образующей комплекса при помощи линейчатых поверхностей комплекса, центральные нормали которых сонаправлены главной нормали комплекса.

До сих пор мы рассматривали комплексы при помощи полуканонического репера. Для полной канонизации необходимо направить оси $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ по инвариантным направлениям и поместить вершину репера в одну из инвариантных точек. Так, например, если мы поместим вершину репера в центр, а оси $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ направим по центральным нормалям распределительных поверхностей А-подмногообразия, то получим аналог репера С.П.Финикова для конгруэнций в R_4.

§7. В-подмногообразие

Назовем совокупность всех К-поверхностей комплекса и инвариантной линейчатой поверхности комплекса-цилиндра-В-подмногообразием. Уравнения

$$\begin{cases} \omega_4^1 = 0 \\ \omega_4^2 = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

выделяют все линейчатые поверхности В-подмногообразия.

Чтобы система (7.I) была вполне интегрируемой, необходимо наложить на коэффициенты основной системы (4.3) условия

$$\gamma_{33}^{\alpha} = 0 \tag{7.2}$$

Исследуя полученную основную систему дифференциальных уравнений, характеризующих комплекс,

$$\begin{cases} \omega^{\alpha} = \lambda_{\beta}^{\alpha}\, \omega_4^{\beta} + \lambda_3^{\alpha}\, \omega_4^3 \\ \omega_3^{\alpha} = \lambda_{3\beta}^{\alpha}\, \omega_4^{\beta} + \lambda_{33}^{\alpha}\, \omega_4^3 \end{cases} \tag{7.3}$$

на инволюцию, находим что класс комплексов с голономным В-подмногообразием существует с произволом 4-х функций трех переменных.

Для данного класса комплексов положение бинормали, векторов бинормальной кривизны и нормального становится неопределенным. Из условий (7.2) следует также

Теорема 16. Все К-поверхности В-подмногообразия имеют один и тот же вектор геодезической кривизны.

Теорема 17. Для всех К-поверхностей В-подмногообразия вектор распределительной кривизны один и тот же.

Теорема 18. Площадь параллелограмма, построенного на векторах геодезической кривизны и геодезическом одна и та же для всех К-поверхностей комплекса с голономным В-подмногообразием.

§8. Комплексы с развертывающимися К-поверхностями

Рассмотрим такой класс комплексов, чтобы все К-поверхности, принадлежащие комплексу из данного класса, были развертывающимися. При этом должно иметь место

$$J_3 = (\lambda^1_3)^2 + (\lambda^2_3)^2 = 0 \tag{8.1}$$

Исследуя систему

$$\begin{cases} \omega^\alpha = \lambda^\alpha_\beta \omega^\beta_4 \\ \omega^\alpha_3 = \lambda^\alpha_{3\beta} \omega^\beta_4 + \lambda^\alpha_{33} \omega^3_4 + \gamma^\alpha_{33} \omega^3 \end{cases} \tag{8.2}$$

на инволюцию, получаем, что данный класс комплексов существует с произволом 2-х функций 4-х параметров. Соотношение

$$\lambda^\alpha_{33} = -\lambda^\alpha_\beta \gamma^\beta_{33} \tag{8.3}$$

получаем при внешнем дифференцировании уравнений

$$\omega^\alpha = \lambda^\alpha_\beta \omega^\beta_4$$

Для К-поверхностей такого класса распределительный и геодезический векторы не определены, а из равенства (8.3) следует

Теорема I9. Вектор геодезической кривизны любой К-поверхности данного класса комплексов совпадает с соответствующим ей нормальным вектором.

Исследовав на инволюцию систему

$$\begin{cases}\omega^\alpha = \lambda^\alpha_\beta \omega^\beta_4 \\ \omega^\alpha_3 = \lambda^\alpha_{3\beta} \omega^\beta_4\end{cases} \tag{8.4}$$

мы получим, что с произволом 4-х функций двух переменных существует класс комплексов, для которого В-подмногообразие голономно, а все К-поверхности-развертывающиеся, т.е. имеет место одновременно (7.2) и (8.I). Из (7.2) и (8.9)мы получаем

Теорема 20. Для любой К-поверхности данного класса вектор геодезической кривизны является нулевым.

Векторы же $\vec{M}$, $\vec{N}$, $\vec{L}$, $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{S}$ в данном случае не определены.

§9. Комплексы с параболическим А-подмногообразием

Рассмотрим класс комплексов, для которых А-подмногообразие является параболическим, т.е. фокусы А-подмногообразия совпадают. Система дифференциальных уравнений, характеризующих комплекс, может быть записана в виде

$$\begin{cases}\omega^\alpha = \lambda^\alpha_\beta \omega^\beta_4 + \lambda^\alpha_3 \omega^3_4 \\ \omega^\alpha_3 = \lambda^\alpha_{3\beta} \omega^\beta_4 + \lambda^\alpha_{33} \omega^3_4 + \mu^\alpha_{33} \omega^3\end{cases} \tag{9.I}$$

где

$$\begin{cases}(\lambda^1_1 - \lambda^2_2)^2 + 4\lambda^2_1 \lambda^1_2 = 0 \\ (\lambda^1_{31} - \lambda^2_{32})(\lambda^1_1 - \lambda^2_2) + 2(\lambda^2_1 \lambda^1_{32} + \lambda^1_2 \lambda^2_{31}) = 0\end{cases} \tag{9.2}$$

Исследуя на инволюцию систему, получаем, что данный класс комплексов существует с произволом 3-х функций 4-х переменных.

Уравнения (9.2) можно интерпретировать следующим образом:

Теорема 21. Для любой ортогональной пары параболического А-подмногообразия квадрат разности абсцисс относительных центров равен учетверенному произведению параметров распределения.

Теорема 22. Для любой ортогональной пары параболического А-подмногообразия произведение разностей абсцисс относительных центров и внешних вынужденных кривизны равно удвоенной разности произведений параметра распределения одной линейчатой поверхности на внутреннюю вынужденную кривизну другой.

Кроме того, из первого из уравнений (9.2) следует, что нулевые поверхности параболического А-подмногообразия совпадают. А так как нулевые поверхности расположены симметрично относительно распределительных, то

Теорема 23. Нулевые и распределительные поверхности параболического А-подмногообразия совпадают.

Из второго уравнения (9.2) следует:

Теорема 24. Расстояние между граничными точками параболического А-подмногообразия равно удвоенному отношению произведения параметра распределения главных линейчатых поверхностей и рахности внутренних вынужденных крифизны на разность внешних вынужденных кривизны главных поверхностей.

Теорема 25. Для поверхностей, биссекторных к поверхностям кривизны параболического А-подмногообразия, произведения параметра распределения одной линейчатой поверхности на внутреннюю вынужденную кривизну другой равны.

Литература

I. Березина Л.Я. "Классическая дифференциальная геометрия I. Элементы дифференциальной геометрии в E_4 .Рига, 1970.

2. Кованцов Н.И. "Теория комплексов". Киев, 1963.

3. Лумисте Ю.Г. "Дифференциальная геометрия линейчатых гиперповерхностей V_3 в R_4" Математический сборник т.50(92):2, 1960.
4. Орленко Г.И. "К метрической теории прямых и плоскостей в многомерном эвклидовом пространстве", Рига, 1966.
5. Розенфельд Б.А. "Неевклидовы пространства". Изд.Наука, 1969.
6. Фиников С.П. "Метод внешних форм Картана", ГТИ, 1948.

Клейнштейн Е.Г

ИНВАРИАНТНЫЕ ОБРАЗЫ КОНГРУЭНЦИИ В R_4^{13}

I. Рассматривается полуевклидовое 4-мерное пространство R_4^{13}, в котором базисные векторы ортонормированного репера изменяются по следующему закону

$$\begin{aligned} e_1 &= e_1' \\ e_2 &= a_2^1 e_1' + \cos\varphi\, e_2' - \sin\varphi\, e_3' \\ e_3 &= a_3^1 e_1' + \sin\varphi\, e_2' + \cos\varphi\, e_3' \\ e_4 &= a_4^1 e_1' + a_4^2 e_2' + a_4^3 e_3' + e_4' \end{aligned} \qquad (I)$$

Уравнения движения ортонормированного репера имеют вид

$$\begin{aligned} dA &= \omega^1 e_1 + \omega^2 e_2 + \omega^3 e_3 + \omega^4 e_4 \\ de_1 &= 0 \\ de_2 &= \omega_2^1 e_1 + \omega_2^3 e_3 \\ de_3 &= \omega_3^1 e_1 - \omega_2^3 e_2 \\ de_4 &= \omega_4^1 e_1 + \omega_4^2 e_2 + \omega_4^3 e_3, \quad \omega_3^2 = -\omega_2^3. \end{aligned} \qquad (2)$$

Пусть семейство прямых отнесено к реперу нулевого порядка, т.е. вершина A расположена на прямой семейства, e_4 -по прямой семейства.

Допустимыми элементарными преобразованиями, переводящими этот репер в репер такого же порядка, являются:

I. Перенос вершины A вдоль прямой семейства на отрезок t :

$$A' = A + t e_4 \qquad (3)$$

$$e_i' = e_i \qquad (i = 1,2,3,4)$$

2. Поворот векторов e_2, e_3 в плоскости $[e_2 e_3]$

$$
\begin{aligned}
A' &= A \\
e_1' &= e_1 \\
e_2' &= \cos\varphi\, e_2 + \sin\varphi\, e_3 \\
e_3' &= -\sin\varphi\, e_2 + \cos\varphi\, e_3 \\
e_4' &= e_4
\end{aligned}
\tag{4}
$$

3. Изменение плоскости $[e_2 e_3]$

$$
\begin{aligned}
A' &= A \\
e_1' &= e_1 \\
e_2' &= -a_2^1 e_1 + e_2 \\
e_3' &= -a_3^1 e_1 + e_3 \\
e_4' &= e_4
\end{aligned}
\tag{5}
$$

При преобразованиях (3) компоненты движения ортонормированного репера (2) меняются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\bar{\omega}^1 &= \omega^1 + t\,\omega_4^1 \\
\bar{\omega}^2 &= \omega^2 + t\,\omega_4^2 \\
\bar{\omega}^3 &= \omega^3 + t\,\omega_4^3 \\
\bar{\omega}^4 &= \omega^4 + dt \qquad \text{и } \bar{\omega}_i^k = \omega_i^k \quad (i,k = 1,2,3,4)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

При преобразованиях (4), (5) имеем следующее изменение компонент движения ортонормированного репера (2):

$$\overline{\omega}^1 = \omega^1 + a_2^1\omega^2 + a_3^1\omega^3 \qquad \overline{\omega}_4^1 = \omega_4^1 + a_2^1\omega_4^2 + a_3^1\omega_4^3$$
$$\overline{\omega}^2 = \cos\varphi\,\omega^2 + \sin\varphi\,\omega^3 \quad , \qquad \overline{\omega}_4^2 = \omega_4^2\cos\varphi + \omega_4^3\sin\varphi$$
$$\overline{\omega}^3 = -\sin\varphi\,\omega^2 + \cos\varphi\,\omega^3 \quad , \qquad \overline{\omega}_4^3 = -\omega_4^2\sin\varphi + \omega_4^3\cos\varphi$$
$$\overline{\omega}^4 = {}^{\circ}\omega^4$$

$$\overline{\omega}_2^1 = -da_2^1\cos\varphi - da_3^1\sin\varphi + \omega_2^1\cos\varphi + \omega_2^3 a_3^1\cos\varphi + \omega_3^1\sin\varphi - \omega_2^3 a_2^1\sin\varphi \tag{7}$$
$$\overline{\omega}_3^1 = da_2^1\sin\varphi - da_3^1\cos\varphi - \omega_2^1\sin\varphi - \omega_2^3 a_3^1\sin\varphi + \omega_3^1\cos\varphi - \omega_2^3 a_2^1\cos\varphi$$
$$\overline{\omega}_2^3 = \omega_2^3 + d\varphi$$

Испрльзуя изменения (7) дифференциальных форм ω^i, ω_i^k (i,k = I,2,3,4) образуем квадратичные формы инвариантные при преобразованиях (4), (5):

$$\mathrm{I} = (\omega_4^2)^2 + (\omega_4^3)^2 \tag{8}$$
$$\mathrm{II} = \omega^2\omega_4^2 + \omega^3\omega_4^3 \tag{9}$$
$$\mathrm{III} = \omega^2\omega_4^3 - \omega^3\omega_4^2 \tag{I0}$$
$$\mathrm{IV} = (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \tag{II}$$

2. Отнесем линейчатую поверхность к ортонормированому реперу нулевого порядка.

Принимая форму ω_4^3 за базисную, имеем

$$\begin{aligned} \omega^1 &= a\,\omega_4^3 \\ \omega^2 &= b\,\omega_4^3 \\ \omega^3 &= c\,\omega_4^3 \end{aligned} \tag{I2}$$

Направляя e_3 по центральной нормали линейчатой поверхности ($\omega_4^1=0, \omega_4^2=0$) получаем для (I2), что

a - проекция вектора распределения на e_2 (внешний параметр распределения);

b - проекция вектора распределения на e_1 (внутренний параметр распределения);

с - абсцисса стрикционной точки.

В репере нулевого порядка отношение квадратичных форм (8), (9) определяет стрикционную точку линейчатой поверхности

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{\omega^2\omega_4^2 + \omega^3\omega_4^3}{(\omega_4^2)^2 + (\omega_4^3)^2} \tag{13}$$

Отношение квадратичных форм (8), (10) определяет внутренний параметр распределения линейчатой поверхности

$$\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \frac{\omega^2\omega_4^3 - \omega^3\omega_4^2}{(\omega_4^2)^2 + (\omega_4^3)^2} \tag{14}$$

Рассмотрим изотропную линейчатую поверхность, центральная нормаль которой направлена по e_1 репера $(\omega_4^2=0,\ \omega_4^3=0)$. Принимая ω_4^1 за базисную форму, получим

$$\begin{aligned} \omega^1 &= a\,\omega_4^1 \\ \omega^2 &= b_1\,\omega_4^1 \\ \omega^3 &= b_2\,\omega_4^1 \end{aligned} \tag{15}$$

где $\{b_1, b_2\}$ - координаты вектора распределения,

а - абсцисса относительного центра, зависящего от направления векторов e_2, e_3 репера, т.е. при изменении положения векторов e_2, e_3 меняется и относительный центр изотропной линейчатой поверхности.

3. Присоединим к прямой конгруэнции ортонормированный репер нулевого порядка.

Исключая случай $[\omega_4^1\,\omega_4^2\,\omega_4^3]=0$, получаем

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda_1^1\omega_4^1 + \lambda_2^1\omega_4^2 + \lambda_3^1\omega_4^3 \\ \omega^2 &= \lambda_1^2\omega_4^1 + \lambda_2^2\omega_4^2 + \lambda_3^2\omega_4^3 \\ \omega^3 &= \lambda_1^3\omega_4^1 + \lambda_2^3\omega_4^2 + \lambda_3^3\omega_4^3 \end{aligned} \tag{16}$$

Коэффициенты λ_i^κ (i,κ = 1,2,3) при преобразованиях (3) изменяются следующим образом

$$\bar\lambda_i^\kappa = \lambda_i^\kappa + \delta_i^\kappa t \tag{17}$$

где $\delta_i^\kappa = \begin{cases} 1, & i=\kappa \\ 0, & i\neq\kappa. \end{cases}$

При преобразованиях (4), коэффициенты $\{\lambda_1^2, \lambda_1^3\}$ и $\{\lambda_2^1, \lambda_3^1\}$ образуют пару векторов, а $\lambda_2^2, \lambda_2^3, \lambda_3^2, \lambda_3^3$ - изменяются как координаты 2-валентного тензора.

При преобразованиях (5):

$$\begin{aligned}
\bar\lambda_1^1 &= \lambda_1^1 + a_2^1\lambda_1^2 + a_3^1\lambda_1^3 \\
\bar\lambda_2^1 &= \lambda_2^1 + a_2^1\lambda_2^2 + a_3^1\lambda_2^3 - a_2^1(\lambda_1^1 + a_2^1\lambda_1^2 + a_3^1\lambda_1^3) \\
\bar\lambda_3^1 &= \lambda_3^1 + a_2^1\lambda_3^2 + a_3^1\lambda_3^3 - a_2^1(\lambda_1^1 + a_2^1\lambda_1^2 + a_3^1\lambda_1^3) \\
\bar\lambda_1^2 &= \lambda_1^2 \\
\bar\lambda_2^2 &= \lambda_2^2 - a_2^1\lambda_1^2 \\
\bar\lambda_3^2 &= \lambda_3^2 - a_3^1\lambda_1^2 \\
\bar\lambda_1^3 &= \lambda_1^3 \\
\bar\lambda_2^3 &= \lambda_2^3 - a_2^1\lambda_1^3 \\
\bar\lambda_3^3 &= \lambda_3^3 - a_3^1\lambda_1^3
\end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим координатные линейчатые поверхности принадлежащие конгруэнции.

Для координатной линейчатой поверхности $\omega_4^1 = 0$, $\omega_4^2 = 0$ из (16) следует

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= \lambda_3^1\,\omega_4^3 \\
\omega^2 &= \lambda_3^2\,\omega_4^3 \\
\omega^3 &= \lambda_3^3\,\omega_4^3
\end{aligned} \tag{19}$$

где e_4 - направлен по образующей, e_3 - по центральной нормали de_4, т.к. $\omega_4^1 = 0$, $\omega_4^2 = 0$. Значит репер приложен аналогично (12)

Сравнивая системы (I9) и (I2), находим

λ_3^1 - внешний параметр распределения;

λ_3^2 - внутренний параметр распределения;

λ_3^3 - абсцисса стрикционной точки.

Аналогично для координатной линейчатой поверхности $\omega_4^1 = 0$, $\omega_4^3 = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda_2^1 \omega_4^2 \\ \omega^2 &= \lambda_2^2 \omega_4^2 \\ \omega^3 &= \lambda_2^3 \omega_4^2 \end{aligned} \qquad (20)$$

где λ_2^1 - внешний параметр распределения,

λ_2^2 - абсцисса стрикционной точки,

$-\lambda_2^3$ - внутренний параметр распределения.

Рассмотрим координатную линейчатую поверхность $\omega_4^2 = 0$, $\omega_4^3 = 0$. Для нее из (I6) следует

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \lambda_1^1 \omega_4^1 \\ \omega^2 &= \lambda_1^2 \omega_4^1 \\ \omega^3 &= \lambda_1^3 \omega_4^1 \end{aligned} \qquad (21)$$

где e_1 - направлен по центральной нормали ($\omega_4^2 = 0$, $\omega_4^3 = 0$), e_4 - по образующей. Значит репер приложен аналогично (15)

Сравнивая системы (2I) и (I5), находим

λ_1^1 - абсцисса относительного центра,

$\{\lambda_1^2, \lambda_1^3\}$ - координаты вектора распределения.

Назовем линейчатую поверхность (2I) - изотропной, а (I9), (20) - парой неизотропных линейчатых поверхностей.

<u>Теорема I</u>. Модуль вектора распределения изотропной линейчатой поверхности есть инвариант конгруэнции.

4. Двумерные плоскости, принадлежащие $[e_1, e_2, e_3]$ - делятся на два вида. Плоскости, содержащие e_1, несут на себе флаговую метрику, а остальные - евклидову метрику. Вводим

евклидовый угол между флаговыми плоскостями, как угол между двумя векторами этих плоскостей в пересекающей их евклидовой плоскости.

Вектор распределения изотропной поверхности $\lambda_1^2 e_2 + \lambda_1^3 e_3$ не зависит от преобразования (5) и, следовательно, лежит в инвариантной флаговой плоскости, которую в дальнейшем назовем плоскостью α. Ортогональную к α флаговую плоскость обозначим через β. Если плоскости α и β совпадают с плоскостями $[e_1 e_2]$ и $[e_1 e_3]$ репера, то

$$\lambda_1^3 = 0 \tag{22}$$

тогда из формул (18) следует, что λ_2^3 и λ_3^3 не зависят от преобразования (5). Отсюда следует:

<u>Теорема 2</u>. Линейчатые поверхности, центральные нормали которых лежат в плоскости β, имеют общую стрикционную точку.

Абсцисса этой инвариантной точки конгруэнции в репере нулевого порядка определяется формулой

$$r = \frac{\lambda_1^2 \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3 \end{vmatrix} - \lambda_1^3 \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 \end{vmatrix}}{(\lambda_1^2)^2 + (\lambda_1^3)^2} \tag{23}$$

<u>Теорема 3</u>. Внутренние параметры распределения линейчатых поверхностей, центральные нормали которых лежат в плоскости α, равны между собой.

Этот инвариант конгруэнции в репере нулевого порядка определяется формулой

$$p = -\frac{\lambda_1^2 \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 \end{vmatrix} + \lambda_1^3 \begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_3^3 \end{vmatrix}}{(\lambda_1^2)^2 + (\lambda_1^3)^2} \tag{24}$$

5. Для получения инвариантных евклидовых плоскостей $[e_2 e_3]$ необходимо привести к нулю величины инвариантные при преобразованиях (3) и (4).

Отметим ряд таких величин

$$K_1 = \lambda_2^2 + \lambda_3^3 - 2\lambda_1^1 \qquad K_2 = \lambda_2^3 - \lambda_3^2$$

$$K_3 = \lambda_1^2\lambda_3^1 - \lambda_1^3\lambda_2^1 \qquad K_4 = \lambda_1^2\lambda_2^1 + \lambda_1^3\lambda_3^1 \tag{25}$$

$$K_5 = \begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{vmatrix} - \left(\frac{\lambda_2^2 + \lambda_3^3}{2}\right)^2$$

Приведением к нулю различных пар величин из (25), выделяются различные инвариантные евклидовые двухплоскости,

Линейчатые поверхности, центральные нормали которых лежат в этих плоскостях, выделяются своими геометрическими свойствами.

Мадревиц Л.И.

КОНГРУЕНЦИЯ ПРЯМЫХ В F_4.

Рассмотрим в четырехмерном флаговом пространстве F_4 семейства прямых первого порядка [1], отнесенные к ортонормированному реперу $R_0(\vec{A}, \vec{e}_i)$ нулевого порядка, где $i = 1,2,3,4$. Для этого вершину репера A поместим на прямой семейства, а вектор $\vec{e}_1$ направлен по этой прямой.

Уравнения движения репера в F_4 имеют вид:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3 + \omega^4\vec{e}_4 \\ d\vec{e}_1 &= \omega_1^2\vec{e}_2 + \omega_1^3\vec{e}_3 + \omega_1^4\vec{e}_4 \\ d\vec{e}_2 &= \omega_2^3\vec{e}_3 + \omega_2^4\vec{e}_4 \\ d\vec{e}_3 &= \omega_3^4\vec{e}_4 \\ d\vec{e}_4 &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Допустимыми преобразованиями репера R_0 являются: перенос вершины A по прямой

$$\vec{A}' = \vec{A} + t\vec{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_i' = \vec{e}_i \tag{2}$$

и вращение репера вокруг прямой семейства

$$\begin{aligned} &\vec{A}' = \vec{A} & \vec{e}_2' &= \vec{e}_2 + a_2^3\vec{e}_3 + a_2^4\vec{e}_4 \\ &\vec{e}_i' = \vec{e}_i & \vec{e}_3' &= \vec{e}_3 + a_3^4\vec{e}_4 \\ & & \vec{e}_4' &= \vec{e}_4 \end{aligned} \tag{3}$$

При переносе (2), очевидно, двухиндексные формы ω_j^i не изменяются, а одноиндексные преобразуются по закону:

$$\begin{aligned} \overline{\omega}^1 &= \omega^1 + dt & \overline{\omega}^3 &= \omega^3 + t\omega_1^3 \\ \overline{\omega}^2 &= \omega^2 + t\omega_1^2 & \overline{\omega}^4 &= \omega^4 + t\omega_1^4 \end{aligned} \tag{4}$$

При вращении (3) закон изменения компонент уравнений движения (I) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\bar\omega^1 = \omega^1 && \bar\omega_1^2 = \omega_1^2 \\
&\bar\omega^2 = \omega^2 && \bar\omega_1^3 = -a_2^3\omega_1^2 + \omega_1^3 \\
&\bar\omega^3 = -a_2^3\omega^2 + \omega^3 && \bar\omega_1^4 = (a_2^3 a_3^4 - a_2^4)\omega_1^2 - a_3^4\omega_1^3 + \omega_1^4 \\
&\bar\omega^4 = (a_2^3 a_3^4 - a_2^4)\omega^2 - a_3^4\omega^3 + \omega^4 &&
\end{aligned} \qquad (5)$$

I. Однопараметрическое семейство, описанное прямыми первого порядка, назовем в дальнейшем линейчатой поверхностью.

Из уравнений движения репера (I) видно, что вектор центральной нормали $d\vec{e}_1$ расположен в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$ в которую вложена инвариантная плоскость $[\vec{e}_3, \vec{e}_4]$, а в последнюю вложен инвариантный вектор $\vec{e}_4$. В зависимости от того, в какой из вложенных друг в друга плоскостей будет расположен вектор $d\vec{e}_1$, будем иметь три вида линейчатых поверхностей, каждый из которых соответственно обозначим: L_1, если $d\vec{e}_1$ расположен в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4]$, но не лежит в плоскости $[\vec{e}_3, \vec{e}_4]$; L_2, если $d\vec{e}_1$ лежит в плоскости $[\vec{e}_3, \vec{e}_4]$, но не совпадает с направлением вектора $\vec{e}_4$; L_3, если $d\vec{e}_1$ сонаправлен вектору $\vec{e}_4$. Рассмотрим каждый из этих трех случаев.

Для линейчатой поверхности L_1 положим, что центральная нормаль $d\vec{e}_1$ сонаправлена вектору $\vec{e}_2$, т.е.

$$d\vec{e}_1 = \omega_1^2\vec{e}_2, \quad \omega_1^3 = 0, \quad \omega_1^4 = 0 \qquad (6)$$

Принимая форму ω_1^2 за базисную, запишем:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \lambda_2^2\,\omega_1^2 \\
\omega^3 &= \lambda_2^3\,\omega_1^2 \\
\omega^4 &= \lambda_2^4\,\omega_1^2
\end{aligned} \qquad (7)$$

Точка прямой линейчатой поверхности с абсциссой $t = -\lambda_2^2$ (8) является стрикционной точкой поверхности L_1. Уравнение (8) в репере R_0 представляется отношением инвариатных линейных форм:

$$t = -\frac{\omega^2}{\omega_1^2} \qquad (9)$$

Коэффициенты λ^3_2, λ^4_2 являются координатами контравариантного вектора в плоскости $[\vec{e}_3, \vec{e}_4]$. Вектор $\{\lambda^3_2, \lambda^4_2\}$ назовем вектором распределения, а его модуль λ^3_2 являющийся инвариантом вращения в плоскости $[\vec{e}_3, \vec{e}_4]$, - параметром распределения. В репере R_0 параметр распределения λ^3_2 представляется отношением инвариатных квадратичных форм:

$$\lambda^3_2 = \frac{\begin{vmatrix} \omega^3 & \omega^2 \\ \omega_1^3 & \omega_1^2 \end{vmatrix}}{(\omega_1^2)^2} \qquad (10)$$

Рассмотрим линейчатую поверхность L_2. В силу того, что центральная нормаль данной поверхности лежит в плоскости $[\vec{e}_3, \vec{e}_4]$,

$$\omega_1^2 = 0 \qquad (11)$$

Сонаправим вектор $\vec{e}_3$ вектору $d\vec{e}_1$, вследствие чего получим:

$$d\vec{e}_1 = \omega_1^3 \vec{e}_3 \quad , \quad \omega_1^4 = 0 \qquad (12)$$

Принимая форму ω_1^3 за базисную, запишем:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \lambda^2_3 \omega_1^3 \\ \omega^3 &= \lambda^3_3 \omega_1^3 \\ \omega^4 &= \lambda^4_3 \omega_1^3 \end{aligned} \qquad (13)$$

Проверяя изменение коэффициентов λ^α_3 системы (13) при допустимых преобразованиях репера, находим, что от переноса вершины репера зависит лишь коэффициент λ^3_3. Точку прямой линейчатой поверхности с абсциссой $t = -\lambda^3_3$ (14) назовем относительным центром поверхности L_2. Абсцисса относительного центра

$$t = -\frac{\omega^3}{\omega_1^3} \qquad (15)$$

поверхности L_2 зависит от вращения в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3]$

Контравариантный вектор $\{\lambda_3^4, \lambda_3^v\}$ - вектор распределения, зависит также от вращения репера в плоскости $[\vec{e}$

Наконец, рассмотрим поверхность L_3, для ко

$$d\vec{e}_1 = \omega_1^v \vec{e}_v \quad , \; \omega_1^2 = 0 \; , \; \omega_1^3 = 0$$

Главными формами в первой окрестности репера пове будут $\omega^2, \omega^3, \omega^v, \omega_1^v$. Принимая форму ω_1^v за запишем:

$$\omega^2 = \lambda_v^2 \omega_1^v$$

$$\omega^3 = \lambda_v^3 \omega_1^v$$

$$\omega^v = \lambda_v^v \omega_1^v$$

Точку прямой линейчатой поверхности с абсциссой

$$t = -\lambda_v^v \tag{19}$$

назовем, аналогично поверхности L_2, относите ьным центром поверхности L_3.

Уравнение (19) на основании системы (18) при вид:

$$t = -\frac{\omega^v}{\omega_1^v} \tag{20}$$

Абсцисса относительного центра поверхн L_3, как и параметр распределения,

$$\lambda_v^2 = \frac{\omega^2}{\omega_1^v} \tag{21}$$

зависит от вращения векторов $\vec{e}_2, \vec{e}_3$ в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_v]$.

2. Рассмотрим трехпараметрическое семейство прямых первого порядка, которое назовем конгруенцией. Исключая случай $[\omega_1^2 \omega_1^3 \omega_1^v] = 0$, имеем:

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \lambda^2_2\, \omega_1^2 + \lambda^2_3\, \omega_1^3 + \lambda^2_4\, \omega_1^4 \\
\omega^3 &= \lambda^3_2\, \omega_1^2 + \lambda^3_3\, \omega_1^3 + \lambda^3_4\, \omega_1^4 \\
\omega^4 &= \lambda^4_2\, \omega_1^2 + \lambda^4_3\, \omega_1^3 + \lambda^4_4\, \omega_1^4
\end{aligned} \tag{22}$$

От переноса вершины репера будут зависеть лишь диагональные коэффициенты:

$$\bar\lambda^2_2 = \lambda^2_2 + t\,, \quad \bar\lambda^3_3 = \lambda^3_3 + t\,, \quad \bar\lambda^4_4 = \lambda^4_4 + t \tag{23}$$

При вращении репера вокруг прямой конгруэнции λ^α_β ($\alpha, \beta = 2,3,4$) является линейной вектор-функцией, сопоставляющей контравариантному вектору $\{\omega_1^2, \omega_1^3, \omega_1^4\}$ контравариантный вектор $\{\omega^2, \omega^3, \omega^4\}$.

При вращении репера координаты аффинора λ^α_β изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\bar\lambda^2_2 &= \lambda^2_2 + a^3_2 \lambda^2_3 + a^4_2 \lambda^2_4 \\
\bar\lambda^2_3 &= \lambda^2_3 + a^4_3 \lambda^2_4 \\
\bar\lambda^2_4 &= \lambda^2_4 \\
\bar\lambda^3_2 &= \lambda^3_2 + a^3_2 \lambda^3_3 + a^4_2 \lambda^3_4 - a^3_2 (\lambda^2_2 + a^3_2 \lambda^2_3 + a^4_2 \lambda^2_4) \\
\bar\lambda^3_3 &= \lambda^3_3 + a^4_3 \lambda^3_4 - a^3_2 (\lambda^2_3 + a^4_3 \lambda^2_4) \\
\bar\lambda^3_4 &= \lambda^3_4 - a^3_2 \lambda^2_4 \\
\bar\lambda^4_2 &= \lambda^4_2 + a^3_2 \lambda^4_3 + a^4_2 \lambda^4_4 - a^4_3 (\lambda^3_2 + a^3_2 \lambda^3_3 + a^4_2 \lambda^3_4) + (a^3_2 a^4_3 - a^4_2)(\lambda^2_2 + a^3_2 \lambda^2_3 + a^4_2 \lambda^2_4) \\
\bar\lambda^4_3 &= \lambda^4_3 + a^4_3 \lambda^4_4 - a^4_3 (\lambda^3_3 + a^4_3 \lambda^3_4) + (a^3_2 a^4_3 - a^4_2)(\lambda^2_3 + a^4_3 \lambda^2_4) \\
\bar\lambda^4_4 &= \lambda^4_4 - a^4_3 \lambda^3_4 + (a^3_2 a^4_3 - a^4_2) \lambda^2_4
\end{aligned} \tag{24}$$

Из формул (24) видим, что λ^{1}_{4}, λ^{3}_{4}, λ^{4}_{4} являются координатами контравариантного вектора. Полагая вектор $\{\lambda^{1}_{4},\lambda^{3}_{4},\lambda^{4}_{4}\}$ за базисный вектор $\vec{e}_{1}$, будем иметь:

$$\bar{\lambda}^{3}_{4}=0\quad,\quad\bar{\lambda}^{4}_{4}=0 \tag{25}$$

На основании условий (25) из соответствующих уравнений (24) найдем:

$$a^{3}_{1}=\frac{\lambda^{3}_{4}}{\lambda^{1}_{4}}\quad,\quad a^{4}_{1}=\frac{\lambda^{4}_{4}}{\lambda^{1}_{4}} \tag{26}$$

После такого выбора положения вектора $\vec{e}_{1}$ получим, что $\{\lambda^{3}_{3},\lambda^{4}_{3}\}$ есть контравариантный вектор в плоскости $[\vec{e}_{3},\vec{e}_{4}]$. Полагая вектор $\{\lambda^{3}_{3},\lambda^{4}_{3}\}$ за базисный вектор $\vec{e}_{3}$, будем иметь: $\bar{\lambda}^{4}_{3}=0$, откуда аналогично при условиях (25) получим:

$$a^{4}_{3}=\frac{\begin{vmatrix}\lambda^{1}_{3} & \lambda^{1}_{4}\\ \lambda^{4}_{3} & \lambda^{4}_{4}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\lambda^{1}_{3} & \lambda^{1}_{4}\\ \lambda^{3}_{3} & \lambda^{3}_{4}\end{vmatrix}} \tag{27}$$

Подставляя в оставшиеся формулы (24) вместо a^{3}_{1}, a^{4}_{1}, a^{4}_{3} их выражения (26) и (27), найдем полную систему инвариантов аффинора λ^{α}_{β}:

$$J^{1}_{1}=\lambda^{1}_{\alpha}\lambda^{\alpha}_{4}\quad,\quad \alpha=1,3,4 \tag{28}$$

$$J^{1}_{3}=\lambda^{1}_{\gamma}\cdot\begin{vmatrix}\lambda^{1}_{3} & \lambda^{1}_{4}\\ \lambda^{\gamma}_{3} & \lambda^{\gamma}_{4}\end{vmatrix}\quad,\quad \gamma=3,4 \tag{29}$$

$$J^{1}_{4}=\lambda^{1}_{4} \tag{30}$$

$$J^{3}_{1}=\lambda^{\kappa}_{4}\begin{vmatrix}\lambda^{1}_{\kappa} & \lambda^{1}_{4}\\ \lambda^{3}_{\kappa} & \lambda^{3}_{4}\end{vmatrix}\quad,\quad \kappa=1,3 \tag{31}$$

$$\mathcal{J}_3^3 = \begin{vmatrix} \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix} \tag{32}$$

$$\mathcal{J}_2^4 = \begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ \lambda_2^4 & \lambda_3^4 & \lambda_4^4 \end{vmatrix} \tag{33}$$

Аффинные инварианты аффинора   являются функциями найденных флаговых инвариантов (28) - (33). Действительно:

$$\mathcal{J}_1 = \lambda_2^2 + \lambda_3^3 + \lambda_4^4 = \frac{\mathcal{J}_2^2 - \mathcal{J}_3^3}{\mathcal{J}_4^2} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \\ \lambda_2^3 & \lambda_3^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_2^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_2^4 & \lambda_4^4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \\ \lambda_3^4 & \lambda_4^4 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\mathcal{J}_3^2 \mathcal{J}_2^3}{(\mathcal{J}_4^2)^2 \mathcal{J}_3^3} - \frac{\mathcal{J}_2^2 \mathcal{J}_3^3}{(\mathcal{J}_4^2)^2} - \frac{\mathcal{J}_4^2 \mathcal{J}_2^4}{\mathcal{J}_3^3} \end{aligned} \tag{35}$$

$$\mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_2^4 \tag{36}$$

Инвариантам (34) - (36) в F_4 будут соответствовать также естественные аффинные образы, как центр, критические точки первого рода и фокусы конгруенции.

Инварианты $\mathcal{J}_2^2$ и $\mathcal{J}_3^3$ индуцируют образы, свойственные конгруенции прямых в F_4. Действительно, добиваясь, посредством переноса вершины репера, обращения в нуль инварианта вращения $\mathcal{J}_2^2$, найдем:

$$t_1 = -\frac{\lambda_2^2 + \lambda_4^4}{2} - \frac{\lambda_3^2 \lambda_4^3}{2\lambda_4^2} \tag{37}$$

Точку прямой конгруенции, абсцисса которой вычисляется по формуле (37), назовем флаговым центром конгруенции.

Аналогично найдем точку, для которой инвариант $\mathcal{J}_3^3 = 0$.

Абсцисса точки вычисляется по формуле

$$t_2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^2_3 & \lambda^2_4 \\ \lambda^3_3 & \lambda^3_4 \end{vmatrix}}{\lambda^2_4} \qquad (38)$$

Назовем ее точкой стабилизации.

Если вершину репера поместить в аффинный центр конгруенции, то $\lambda^2_2 + \lambda^3_3 + \lambda^4_4 = 0$. На основании последнего услови будем иметь:

$$t_2 = -2t_1 \qquad (39)$$

<u>Теорема I.</u> Аффинный центр прямой конгруенции делит расстояние между флаговым центром и точкой стабилизации в отношении I:2.

3. Параметр распределения линейчатой поверхности L_1 принадлежащей конгруенции, согласно формулы (I0) будет:

$$P = \frac{\begin{vmatrix} \omega_1^2 & \omega_1^4 \\ \omega^2 & \omega^3 \end{vmatrix}}{(\omega_1^2)^2} \qquad (40)$$

Внося в (40) вместо ω^2 и ω^3 их уравнения из основной системы репера конгруенции (22), получим:

$$P = -\lambda^2_3\left(\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2}\right)^2 - \lambda^2_4\left(\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_1^2}\right) + (\lambda^3_3 - \lambda^2_2)\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2} + \lambda^3_4\frac{\omega_1^4}{\omega_1^2} + \lambda^3_2 \qquad (4I)$$

Отношения $\omega_1^2 : \omega_1^3 : \omega_1^4$ задают линейчатую поверхность, принадлежащую конгруенции.

Находя экспериментальное значение параметра распределения (4I), будем иметь:

$$\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2} = \frac{\lambda^3_4}{\lambda^2_4} \quad ; \quad \frac{\omega_1^4}{\omega_1^2} = \frac{\lambda^3_3 - \lambda^2_2}{2} - 2\,\frac{\lambda^2_3\,\lambda^3_4}{(\lambda^2_4)^2} \qquad (42)$$

Найденные отношения $\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2}$ и $\frac{\omega_1^4}{\omega_1^2}$ определяют линейчатую поверхность, принадлежащую конгруэнции, с экспериментальным параметром распределения. Такую поверхность назовем распределительной.

В силу формулы (9) абсцисса стракционной точки линейчатой поверхности

$$t = -\frac{\omega^2}{\omega_1^2}$$

Внося в последнее вместо ω^2 первое уравнение системы (22) и учитывая найденные отношения (42), получим:

$$t = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{vmatrix}}{\lambda_4^2}$$

Сравнивая последнее с формулой (38), имеем: точка стабилизации конгруэнции является стрикционной точкой распределительной поверхности.

Подставляя в (41) отношения (42) найдем, что инвариант конгруэнции $\mathcal{Y}_3^2$ есть параметр распределения распределительной поверхности.

Предположим, что распределительная поверхность является координатной поверхностью L_1, для которой выполняются условия $\omega_1^3 = 0$, $\omega_1^4 = 0$. На основании последних условий из (42) получим:

$$\lambda_4^3 = 0 \quad ; \quad \lambda_3^3 - \lambda_2^2 = 0. \tag{43}$$

4. Инвариантная линейчатая поверхность, принадлежащая конгруэнции, для которой параметр распределения (41) обращается в нуль, определяются условием

$$\lambda_3^2\left(\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2}\right)^2 + \lambda_4^2\left(\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2}\right)\left(\frac{\omega_1^4}{\omega_1^2}\right) + \left(\lambda_2^2 - \lambda_3^3\right)\frac{\omega_1^3}{\omega_1^2} - \lambda_4^3\,\frac{\omega_1^4}{\omega_1^2} - \lambda_2^3 = 0. \tag{44}$$

Такую поверхность назовем нулевой.

Поместим вершину репера в стрикционную точку нулевой линейчатой поверхности, следовательно:

$$\lambda^4_a + \lambda^4_b \frac{\omega_1^b}{\omega_1^a} + \lambda^4_v \frac{\omega_1^v}{\omega_1^a} = 0 \qquad (45)$$

Решая совместно уравнения (44) и (45), найдем:

$$\frac{\omega_1^b}{\omega_1^a} = - \frac{\begin{vmatrix} \lambda^4_a & \lambda^4_v \\ \lambda^3_a & \lambda^3_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda^4_b & \lambda^4_v \\ \lambda^3_b & \lambda^3_v \end{vmatrix}} ; \quad \frac{\omega_1^v}{\omega_1^a} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda^4_a & \lambda^4_b \\ \lambda^3_a & \lambda^3_b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda^4_b & \lambda^4_v \\ \lambda^3_b & \lambda^3_v \end{vmatrix}} \qquad (46)$$

Отношения (46) определяют нулевую поверхность, стрикционная точка которой находится в точке приложения репера. Помещая вершину в инвариантные точки, выделяем инвариантные нулевые поверхности.

5. Рассмотрим подмногообразие конгруэнции, выделяемое условием

$$\omega_1^a = 0 \qquad (47)$$

Нетрудно проверить, что

$$D\omega_1^a = 0$$

и, следовательно, уравнение (47) вполне интегрируемо.

Теорема. Линейчатые поверхности конгруэнции, центральные нормали которых лежат в инвариантной плоскости $[e_a, e_v]$ образуют двухпараметрическое семейство прямых.

Литература

[1] Б.А. Розенфельд. "Неевклидовы пространства", "Наука", 1969 г.

[2] Л.Я. Берзина. "Классическая дифференциальная геометрия", I изд. ЛГУ им. П.Стучки, Рига, 1970 г.

Мадревиц Л.И.

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ИНВАРИАНТОВ АФФИНОРА В F_n.

В n-мерном флаговом пространстве F_n роль фундаментальной группы играет "группа движений" [I]:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= \vec{e}_1 + a_1^2\vec{e}_2 + a_1^3\vec{e}_3 + \ldots + a_1^{n-1}\vec{e}_{n-1} + a_1^n\vec{e}_n \\
\vec{e}_2' &= \vec{e}_2 + a_2^3\vec{e}_3 + \ldots + a_2^{n-1}\vec{e}_{n-1} + a_2^n\vec{e}_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (I)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{e}_{n-1}' &= \vec{e}_{n-1} + a_{n-1}^n\vec{e}_n \\
\vec{e}_n' &= \vec{e}_n
\end{aligned}
$$

Рассмотрим аффинор $\lambda_j^i\ (i,j = 1,2,\ldots,n)$ в F_n. Число независимых инвариантов его при преобразовании (I) равно $\frac{n(n+1)}{2}$. Для нахождения этих инвариантов поступаем следующим образом: координаты аффинора $\lambda_n^1, \lambda_n^2, \ldots, \lambda_n^n$ образуют контравариантный вектор, который полагаем за координатный вектор $\vec{e}_1$. Следовательно:

$$\bar{\lambda}_n^2 = 0\ ,\ \bar{\lambda}_n^3 = 0\ ,\ \ldots\ldots,\ \bar{\lambda}_n^n = 0 \qquad (2)$$

На основании условий (2) будем иметь, что $\lambda_{n-1}^2, \lambda_{n-1}^3, \ldots, \lambda_{n-1}^n$ образуют координаты контравариантного вектора в плоскости $[\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n]$. Полагая $\{\lambda_{n-1}^2, \lambda_{n-1}^3, \ldots, \lambda_{n-1}^n\}$ за координатный вектор $\vec{e}_2$, будем иметь:

$$\bar{\lambda}_{n-1}^3 = 0\ ,\ \bar{\lambda}_{n-1}^4 = 0\ ,\ \ldots,\ \bar{\lambda}_{n-1}^n = 0 \qquad (3)$$

Продолжая аналогичным образом выбор координатных векторов $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4, \ldots, \vec{e}_{n-1}$ получим полную систему уравнений (2), (3), ... , содержащих $\frac{n(n-1)}{2}$ параметров a_α^β ($\alpha = 1,2,\ldots,n-1$; $\beta = \alpha+1, \alpha+2, \ldots, n$).

Найденные из этой системы параметры a_α^β подставим в оставшиеся формулы λ^i_j и получим полную систему инвариантов аффинора при преобразовании (I):

$$y^1_1 = \lambda^1_k \lambda^k_n \qquad (4_I)$$

$$y^1_2 = \lambda^1_k \begin{vmatrix} \lambda^1_{n-1} & \lambda^1_n \\ \lambda^k_{n-1} & \lambda^k_n \end{vmatrix} \qquad (4_2)$$

$$y^1_3 = \lambda^1_k \begin{vmatrix} \lambda^1_{n-2} & \lambda^1_{n-1} & \lambda^1_n \\ \lambda^2_{n-2} & \lambda^2_{n-1} & \lambda^2_n \\ \lambda^k_{n-2} & \lambda^k_{n-1} & \lambda^k_n \end{vmatrix} \qquad (4_3)$$

. . . .

. . . .

$$y^1_{n-1} = \begin{vmatrix} \lambda^1_2 & \lambda^1_3 & \ldots & \lambda^1_n \\ \lambda^2_2 & \lambda^2_3 & \ldots & \lambda^2_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda^{n-2}_2 & \lambda^{n-2}_3 & \ldots & \lambda^{n-2}_n \\ \lambda^k_2 & \lambda^k_3 & \ldots & \lambda^k_n \end{vmatrix} \cdot \lambda^1_k \qquad (4_{n-1})$$

$$y^1_n = \lambda^1_n \qquad (4_n)$$

$$y^2_1 = \begin{vmatrix} \lambda^1_k & \lambda^1_n \\ \lambda^2_k & \lambda^2_n \end{vmatrix} \cdot \lambda^k_n \qquad (5_I)$$

$$y^2_2 = \begin{vmatrix} \lambda^1_k & \lambda^1_n \\ \lambda^2_k & \lambda^2_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda^1_{n-1} & \lambda^1_n \\ \lambda^k_{n-1} & \lambda^k_n \end{vmatrix} \qquad (5_2)$$

$$y^2_3 = \begin{vmatrix} \lambda^1_k & \lambda^1_n \\ \lambda^2_k & \lambda^2_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda^1_{n-2} & \lambda^1_{n-1} & \lambda^1_n \\ \lambda^2_{n-2} & \lambda^2_{n-1} & \lambda^2_n \\ \lambda^k_{n-2} & \lambda^k_{n-1} & \lambda^k_n \end{vmatrix} \qquad (5_3)$$

$$y^2_{n-2} = \begin{vmatrix} \lambda^1_k & \lambda^1_n \\ \lambda^2_k & \lambda^2_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda^1_3 & \lambda^1_4 & \dots & \lambda^1_n \\ \lambda^2_3 & \lambda^2_4 & \dots & \lambda^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{n-3}_3 & \lambda^{n-3}_4 & \dots & \lambda^{n-3}_n \\ \lambda^n_3 & \lambda^n_4 & \dots & \lambda^n_n \end{vmatrix} \qquad (5_{n-2})$$

$$y^2_{n-1} = \begin{vmatrix} \lambda^1_{n-1} & \lambda^1_n \\ \lambda^2_{n-1} & \lambda^2_n \end{vmatrix} \qquad (5_{n-1})$$

и т.д.

наконец:

$$y^{n-1}_1 = \begin{vmatrix} \lambda^1_k & \lambda^1_3 & \dots & \lambda^1_n \\ \lambda^2_k & \lambda^2_3 & \dots & \lambda^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{n-1}_k & \lambda^{n-1}_3 & \dots & \lambda^{n-1}_n \end{vmatrix} \cdot \lambda^n_n \qquad (6_1)$$

$$y^{n-1}_2 = \begin{vmatrix} \lambda^1_2 & \lambda^1_3 & \dots & \lambda^1_n \\ \lambda^2_2 & \lambda^2_3 & \dots & \lambda^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^{n-1}_2 & \lambda^{n-1}_3 & \dots & \lambda^{n-1}_n \end{vmatrix} \qquad (6_2)$$

$$y^n_1 = \begin{vmatrix} \lambda^1_1 & \lambda^1_2 & \dots & \lambda^1_n \\ \lambda^2_1 & \lambda^2_2 & \dots & \lambda^2_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda^n_1 & \lambda^n_2 & \dots & \lambda^n_n \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Для всех инвариантов y^l_m $(l = 1, 2, \dots, n;\ m = 1, 2, \dots, n-l+1)$ суммирование производится по индексу $k = m, m+1, \dots, n-l+1$

Литература

[I] Б.А.Розенфельд, "Неевклидовы пространства", изд-во "Наука", Москва, 1969.

Табаровская Ф.Я.

Двумерная поверхность в E_4

§I. Полуканонический репер.

Рассмотрим двумерную поверхность, касательная плоскость которой содержит векторы I-го и II-го порядков /2/ . Приложим к этой поверхности ортонормированный репер так, чтобы вершина репера A находилась в точке поверхности, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ - в касательной плоскости, причём вектор $\vec{e}_2$ направлен по прямой II-го порядка.

Уравнения движения репера таковы:

$$\begin{aligned} d\vec{A} &= \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2 \\ d\vec{e}_1 &= \omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3 + \omega_1^4 \vec{e}_4 \\ d\vec{e}_2 &= \omega_2^3 \vec{e}_3 + \omega_2^4 \vec{e}_4 \\ d\vec{e}_3 &= \omega_3^4 \vec{e}_4 \\ d\vec{e}_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (1.1)$$

из внешних производных уравнений

$$\omega^3 = 0 , \quad \omega^4 = 0 \qquad (1.2)$$

получаем

$$\begin{aligned} \omega_1^3 &= a_{11}\omega^1 + a_{12}\omega^2 \\ \omega_2^3 &= a_{21}\omega^1 + a_{22}\omega^2 \\ \omega_1^4 &= b_{11}\omega^1 + b_{12}\omega^2 \\ \omega_2^4 &= b_{21}\omega^1 + b_{22}\omega^2 \end{aligned} \qquad (1.3)$$

где по лемме Картана

$$a_{12} = a_{21} \; ; \; b_{12} = b_{21} \qquad (1.4)$$

Допустимые преобразования репера - вращение вектора $\vec{e}_1$ в касательной, а вектора $\vec{e}_3$ в нормальной плоскости поверхности. Посмотрим как меняются компоненты движения репера при наших допустимых преобразованиях.

При повороте вектора $\vec{e}_1$ в касательной плоскости на флаговый угол φ компоненты уравнений движения репера образуют вектор

$$\{\omega^1, \omega^2\}$$

и два ковектора

$$\{\omega_1^3, \omega_2^3\}, \quad \{\omega_1^4, \omega_2^4\}$$

Коэффициенты основной системы, сопоставляя контрвариантному вектору ковекторы, меняются как квадратичные формы

$$\bar{a}_{11} = a_{11} + 2\varphi a_{12} + \varphi^2 a_{22} \qquad \bar{b}_{11} = b_{11} + 2\varphi b_{12} + \varphi^2 b_{22}$$

$$\bar{a}_{12} = a_{12} + \varphi a_{22} \qquad \bar{b}_{12} = b_{12} + \varphi b_{22}$$

$$\bar{a}_{22} = a_{22} \qquad \bar{b}_{22} = b_{22}$$

Инвариантами этого преобразования будут

$$a_{22}, \; b_{22}, \; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Можно указать также совместные инварианты форм

$$a_{ik}, b_{ik} \quad (i, k = 1, 2).$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{12} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ b_{11} & b_{22} \end{vmatrix}^2 + 4\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix}$$

При вращении вектора $\vec{e}_3$ в нормальной плоскости формы ω^1, ω^2 не меняются

$$\tilde{\omega}^1 = \omega^1$$
$$\tilde{\omega}^2 = \omega^2$$

а формы $\omega_1^3, \omega_2^3, \omega_1^4, \omega_2^4$ образуют два вектора

$$\{\omega_1^3, \omega_1^4\}$$
$$\{\omega_2^3, \omega_2^4\}$$

Коэффициенты основной системы также образуют векторы, которые по аналогии с пространством E_4, будем называть

$\vec{A}_1^1 = \{a_{11}, b_{11}\}$ - вектором нормальной кривизны координатной линии $\omega^2 = 0$

$\vec{A}_2^1 = \{a_{21}, b_{21}\}$ - вектором геодезического кручения линии $\omega^2 = 0$

$\vec{A}_2^2 = \{a_{22}, b_{22}\}$ - вектором нормальной кривизны координатной линии $\omega^1 = 0$

$\vec{A}_1^2 = \{a_{12}, b_{12}\}$ - вектором геодезического кручения линии $\omega^1 = 0$

Модули векторов $\vec{A}_i^k$ будем называть нормальной кривизной и геодезическим кручением.

Полная система инвариантов при этом преобразовании такова:

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{vmatrix}$$

Можно также указать дополнительно ещё один инвариант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{12} & b_{12} \end{vmatrix}$$

Введем критерий порядка для линий на поверхности.

Будем называть произвольную линию на поверхности линией I-го порядка, если касательная к ней сонаправлена прямой I-го порядка касательной плоскости поверхности.

Аналогично, линию у которой касательная сонаправлена прямой II-го порядка, будем называть линией II-го порядка.

Таким образом координатная линия $\omega^1 = 0$ является линией I-го порядка; и $\omega^2 = 0$ является линией II-го порядка.

Пара, составленная из линий I-го и II-го порядков, будет ортогональной парой.

В силу симметричности матриц a_{ik}, b_{ik}

$$\vec{A}_1^{\,2} = \vec{A}_2^{\,1}$$

Теорема I.I. Ортогональная пара имеет общий вектор геодезического кручения.

Следствие. Все линии на поверхности имеют общий вектор геодезического кручения.

§2. Инвариантные формы и инварианты поверхности

Из рассмотренного выше вытекает, что двумерная поверхность в F_4 имеет две линейные инвариантные формы

$$\omega^1, \ \omega^3 \tag{I.5}$$

и две квадратичные инвариантные формы

$$\omega^1 \omega_1^3 + \omega^2 \omega_2^3, \tag{I.6}$$

$$\omega_1^3 \omega_2^4 - \omega_1^4 \omega_2^3 \tag{I.7}$$

Полная система инвариантов имеет вид:

$$J_1 = a_{22} \tag{I.8}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{I.9}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} \tag{I.10}$$

$$J_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ b_{11} & b_{22} \end{vmatrix}^2 + 4 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix} \tag{I.11}$$

Теорема I.2. Разность произведения нормальных кривизн

I-го и III-го порядков и квадрата геодезического кручения есть величина инвариантная для любой ортогональной пары линий на поверхности.

Теорема I.3. Площадь параллелограмма, построенного на векторе нормальной кривизны и II-го порядка и векторе геодезического кручения есть величина инвариантная для любой пары линий на поверхности.

Будем называть параллелограмм построенный на векторах нормальной кривизны I-го и II-го порядков - параллелограммом пары, а параллелограмм, построенный на векторах геодезического кручения и нормальной кривизны i -го порядка, параллелограммом i -го порядка.

Теорема I.4. Разность квадрата площади параллелограмма пары и учетверенного произведения площадей параллелограммов I-го и II-го порядков есть величина инвариантная для любой ортогональной пары линий на поверхности.

§3. Инвариантные направления

Поворачивая вектор $\vec{e}_1$ в касательной плоскости, можно придавать углу φ определенные значения. Так вектор $\vec{e}_1$, можно повернуть на угол

$$\varphi = -\frac{a_{12}}{a_{22}}$$

(при этом случай когда инвариант $a_{22} = 0$ из рассмотрения в этой главе исключается. Здесь и во всей I главе будем считать, что ни один инвариант не равен нулю, случаи равенства нулю инвариантов будут рассмотрены в главе II).

Тем самым фиксируется определенное направление в касательной плоскости для которого

$$\bar{a}_{12} = 0 \qquad (I.12)$$

Теорема I.6. На поверхности имеется единственная ортогональная пара линий с нулевым геодезическим кручением.

Назовём эти линии линиями кривизны I-го и II-го порядков, а направление (I.12) главным направлением касательной плоскости.

Аналогично, вектор $\vec{e}_1$ можно повернуть, на угол

$$\varphi = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-J_2}}{J_1}$$

тем самым фиксируется пара направлений, для которых

$$\bar{a}_{11} = 0 \qquad (I.13)$$

Теорема I.7. На поверхности имеется единственная ассимптотическая пара линий I-го порядка, причем при $J_2 < 0$ будем иметь пару действительных линий, расположенную симметрично относительно линии кривизны I-го порядка, $J_2 > 0$ линии мнимы.

Исследуя выражение (I.13), как функцию одного переменного φ, на экстремум, получаем

Теорема I.8. Линия кривизны I-го порядка является линией экстремальной нормальной кривизны.

Можно повернуть вектор $\vec{e}_1$ так, чтобы фиксировать пару направлений, для которых

$$\bar{a}_{11} b_{22} - a_{22} \bar{b}_{11} = 0 \qquad (I.14)$$

Теорема I.9. На поверхности существует единственная ортогональная пара линий, векторы нормальной кривизны которой параллельны.

Можно фиксировать в касательной плоскости пару направлений, для которых

$$\bar{a}_{11} \bar{b}_{12} - \bar{a}_{12} \bar{b}_{11} = 0 \qquad (I.15)$$

Теорема I.10. На поверхности существует единственная пара линий I-го порядка, у которых вектор нормальной кривизны сонаправлен вектору геодезического кручения, причем при $J_4 > 0$ эти линии действительны различны и расположены симметрично относительно линии I-го порядка теоремы I.9.
$J_4 < 0$ эти линии мнимы.

Любое из указанных инвариантных направлений можно использовать для канонизации репера, направив по нему вектор

Аналогично ищутся инвариантные направления нормальной плоскости.

Вектор $\vec{e}_3$ можно повернуть в нормальной плоскости на угол

$$\psi = -\frac{b_{22}}{a_{22}}$$

тем самым фиксируется инвариантное направление, для которого

$$\overline{b}_{22} = 0 \tag{I.16}$$

Поворачивая вектор $\vec{e}_3$ на угол

$$\psi = \frac{b_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} - 2b_{12}a_{12} \pm \sqrt{J_4}}{2J_2}$$

фиксируем инвариантное направление нормальной плоскости, для которого

$$\overline{b}_{11}\overline{b}_{22} - (\overline{b}_{12})^2 = 0 \tag{I.17}$$

Любое из этих направлений, а также векторы нормальной кривизны и геодезического кручения инвариантных линий можно использовать для канонизации репера, направив по одному из этих направлений вектор

§3. Теорема Менье

Рассмотрим отношение инвариантной квадратичной формы (I.6) к квадрату линейной формы ω^1:

$$\frac{\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3}{(\omega^1)^2} = a_{11} + 2a_{12}\frac{\omega^2}{\omega^1} + a_{22}\left(\frac{\omega^2}{\omega^1}\right)^2 \tag{I.18}$$

Для координатной линии

$$\omega^2 = 0$$

имеем

$$\frac{\omega^1\omega_1^3 + \omega^2\omega_2^3}{(\omega^1)^2} = a_{11} \qquad (I.19)$$

Выражение (I.19) зависит только от точки на поверхности и отношения $\omega^2 : \omega^1$, определяющего направление касательной к кривой. Таким образом можно сформулировать аналог теоремы Менье.

<u>Теорема I.II.</u> Нормальная кривизна одна и та же для двух касающихся линий I-го порядка.

Аналогично рассмотрим отношение квадратичной формы (I.7)

$$\frac{\omega_1^3\omega_2^4 - \omega_2^3\omega_1^4}{(\omega^1)^2} = a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11} + (a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})\frac{\omega^2}{\omega^1} + (a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12})\left(\frac{\omega^2}{\omega^1}\right)^2 \qquad (I.20)$$

Для координатной линии

$$\omega^2 = 0$$

имеем

$$\frac{\omega_1^3\omega_2^4 - \omega_2^3\omega_1^4}{(\omega^1)^2} = a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11} \qquad (I.21)$$

Это выражение также зависит только от точки на поверхности и от направления касательной к кривой.

<u>Теорема I.I2.</u> Площадь параллелограмма I-го порядка одна и та же для двух кассающихся линий I-го порядка.

Рассмотрим, наконец, отношение инвариантных линейных форм

$$\frac{\omega_2^3}{\omega^1} = a_{12} + a_{22}\frac{\omega^2}{\omega^1} \qquad (I.22)$$

Для координатной линии

$$\omega^2=0$$

имеем

$$\frac{\omega_2^{\,1}}{\omega^1}=a_{12} \qquad (I.23)$$

Теорема I.13. Геодезическое кручение одно и то же для двух касающихся линий.

Если вектор $\overrightarrow{e_1}$ направить по главному инвариантному направлению, то выражение (I.18) примет вид

$$a_{11}+a_{22}\left(\frac{\omega^2}{\omega^1}\right)^2$$

Это аналог формулы Эйлера. Исследуя на экстремум, получим.

Теорема I.14. Нормальная кривизна I-го порядка принимает экстремальные значения на линиях с нулевым геодезическим кручением.

Глава II

Некоторые классы двумерных плоскостей

§I. Класс поверхностей с нулевой нормальной кривизной II-го порядка

Аналитическое условие $J_1=0$. Проведя исследование, получим, что решение существует с произволом одной функции 2-х переменных.

Выясним геометрические свойства этого класса.

В касательной плоскости поверхности такого класса уже нет ассимптотических направлений, найденных в общем случае. Здесь появляются направления в касательной и нормальной плоскости, связанные одно с другим

$$\tilde{b}_{12}=0$$

Направления такого типа в дальнейшем будем называть соответственными.

Теорема 2.1. В касательной и нормальной плоскостях поверхности имеется единственная пара инвариантных соответственных направления, для которых

$$\tilde{b}_{12} = 0$$

Эти направления можно использовать для композиции репера в этом классе поверхностей.

Инвариантом становится a_{12}

Теорема 2.2. Геодезическое кручение одно и то же для любой линии на поверхности.

§2. Класс поверхностей с нулевым вектором нормальной кривизны II-го порядка

Аналитическое условие

$$a_{22} = 0, b_{22} = 0$$

Класс существует с произволом 4-х функций одного переменного. Соответственные направления в этом классе выделяются условием

$$\tilde{\tilde{b}}_{11} = 0$$

Инвариантом в этом классе становится

$$a_{11} b_{12} - a_{12} b_{11}$$

Теорема 2.3. Площадь параллелограмма I-го порядка одна и та же для любой линии на поверхности.

§3. Класс поверхностей с нулевыми нормальными кривизнами и нулевым геодезическим кручением

Условие

$$a_{22} = 0, a_{12} = 0, a_{11} = 0$$

Решение существует с произволом одной функции двух переменных. Векторы нормальной кривизны и геодезического кручения параллельны и сонаправлены прямой IУ-го порядка.

Литература

I. Березина Л.Я. "К теории поверхностей многомерного пространства", РИИГА, Рига 1965.

2. Розенфельд Б.А. "Неевклидовы пространства"."Наука", 1969

Содержание

Коллектив авторов

БЕЗРАЗМЕРНОЕ, ЕВКЛИДОВО И ПОЛУЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Ученые записки, том I52

Редактор А.Токаренко

Корректор В.Гоштейн

Подписано к печати 23/IX 71 ЯТ 0I436 Зак. № 784
Ф/б 60x84/I6. Писчая №I. Физ.п.л. 8,8. Уч.-и.л. 6,5
Тираж 300 экз. Цена 67 коп.

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

ЦЕНА 67 коп.