Emanuels Grinbergs

Motives for reflections

Addendum to part one

Facsimile of manuscript
(in Russian)

The archive of Emanuels Grinbergs manuscripts

University of Latvia

Riga, December 2013

Annotation

The article (in three pieces of manuscripts), written in Russian, contains some reflections on graph theory. It may be written in 1973.

D. Zeps

dainize@mii.lu.lv

II Ā

Liecinu, ka turpinājums копии для размнож. I daļai, kura bez cit. saraksta satur

grp. № 00,917

38 un 3 § J.D.

4. Системы инвариантов и ковариантов.

4.1. В дальнейшем для краткости одно-индексные величины, напр. список степеней вершин, будем называть ковариантами.

Если задан некоторый набор S_0 значений определенных инвариантов и (или) ковариантов, то можно искать граф G, соответствующий этому набору. В качестве основных вопросов, связанных с таким построением, можно отметить:

1) Условие реализуемости: необходимые и (или) достаточные условия существования хотя бы одного G рассматриваемого класса.

2) Алгоритм построения G (его матрица смежности, данные для плоской реализации, если G – плоский и т.д.)

3) Однозначность решения: изоморфны ли все полученные G друг другу или нет?

Мы будем говорить, что система S инвариантов образует <u>базис</u> для данного класса графов, если набор S_0 их значений, вычисленных для <u>любого</u> графа G_0

4. Системы инвариантов и ковариантов.

4.1. В дальнейшем для краткости однозначные величины, напр. список степеней вершин, будем называть ковариантами.

Если задан некоторый набор S_0 значений определенных инвариантов и (или) ковариантов, то можно искать граф G, соответствующий этому набору. В качестве основных вопросов, связанных с таким построением, можно отметить:

1) Условия реализуемости: необходимые и (или) достаточные условия существования хотя бы одного G рассматриваемого класса.

2) Алгоритм построения G (его матрица смежности, данных для плоской реализации, если G – плоский и т.д.)

3) Однозначность решения: изоморфны ли все полученные G друг другу или нет?

Мы будем говорить, что система S инвариантов образует базис для данного класса графов, если набор S_0 их значений, вычисленных для любого графа G_0

рассматриваемого класса (следовательно, автоматически удовлетворяющий условиям реализуемости) имеет свойство **3**.

Другими словами: если S базис, то два графа рассматриваемого класса изоморфны друг другу тогда и только тогда, когда для них совпадают значения каждого из инвариантов, составляющих S.

Условие наличия свойства 3 для данного класса существенно. любого исходного графа G_0 значения $n = n_0$ (любое положительное целое) и $m = 0$, напр., однозначно (с точностью до изоморфизма) определяют пустой граф в любом классе - ориентированных или нет, униграфов или мультиграфов. Однако в общем случае значения n и m не образуют базиса в этих классах. Если же класс достаточно узкий, напр. ограничение небольшим значением одной из этих величин, то другая может быть базисом. Примеры:

α) Класс: униграфы, без петель неориентированные, $n \le 3$. Базис: m.

β) Класс: графы с петлями, $n = 1$. Базис: m

γ) Класс: без петель, либо ориентированный граф, либо нет, $m = 1$. Базис: n.

В дальнейшем в общем предполагается, что рассматриваются графы без петель.

001919

Как отмечает Харари (и другие авторы) пока не известен ни один нетривиальный базис. Нас, в первую очередь, интересуют базисы, состоящие из величин ν_α. С алгебраической точки зрения они характеризуются следующими свойствами.

Пусть записана система уравнений, выражающая, что рассматриваемые значения ν_α равны соответствующим полиномам от неизвестных a_{ij}, а также, что эти a_{ij} имеют свойства, определяющие рассматриваемый класс графов, напр.

$$a_{ij} = a_{ji} = a_{ij}^2 \qquad i \neq j;\ i,j = 1,2,\dots n \qquad (4.1)$$

для неориентированного униграфа. Тогда, если система имеет хотя бы одно решение R_0 (это значит, что условия реализуемы), то она имеет также все решения R, получаемые из R_0 произвольными перенумерациями индексов (это следует из свойств выражений для ν_α и уравнений (4.1)), но не имеет других решений.

4.2. В принципе не исключено, что общая построенная система инвариантов, определяющая граф с точностью до изоморфизма, может быть получена следующим результатом (Вейль, стр. 58-61).

Рассматривается система из k векторов размерности n:

$$\left.\begin{array}{l} x(x_1x_2\ldots x_n),\\ y(y_1y_2\ldots y_n),\\ -\ -\ -\ -\ -\\ u(u_1u_2\ldots u_n). \end{array}\right\}k$$

Допустимые преобразования — одновременные перестановки координат всех векторов. Тогда любой полиномиальный инвариант этих векторов выражается как полином от элементов следующей таблицы, записанной в символическом виде (более подробная запись у Вейля):

$$n \text{ строк} \left\{\begin{array}{lllll} x & y & \ldots & & u \\ xx & xy & xz \ldots & xu\ yy\ yz \ldots & uu \\ xxx & xxy & xxz \ldots & xyy\ xyz \ldots & uuu \\ - & - & - & - & \end{array}\right. \qquad (5)$$

Первые выражения всех строк таблицы — это обычные симметрические функции величин x_i, т.е.

$$x = \sum_i x_i,$$

$$xx = \sum_{i<j} x_i x_j,$$

$$xxx = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k,$$

$$-\ -\ -\ -\ -,$$

а остальные выражения каждой строки полу-
чаются из первых в результате применения
всех возможных поляризаций. 001021

Система (S) позволяет также определить
координаты всех векторов с точностью до рассмат-
риваемого изоморфизма, и именно — одновре-
менной перенумерации координат всех векторов.
Для этого определения во многих случаях (S)
содержит избыточную информацию. Если,
напр., все x_i различные, то достаточно знать
симметрические функции самих этих x_i и еще
все результаты однократных поляризаций,
т. е. все данные таблицы, содержащие в
слагаемых только один множитель — коор-
динату вектора, отличного от x. Однако
если задается ~~задана~~ только часть S' значений таблицы
(S) и нет ограничений на значения координат,
то, как кажется (проверить и доказать!) для
любого такого S' можно указать случаи,
когда ему соответствуют хотя бы две
не изоморфные системы векторов.

Если же имеется подходящая дополнительная ин-
формация о значениях координат ~~векторов~~, то
достаточно задание и меньшего числа ин-
вариантов. Пусть, напр., известно, что коор-
динаты векторов могут иметь только значения
0 и 1. Тогда уже значение $\sum x_i$ определяет
число ненулевых координат вектора x, следо-
вательно ненулевых координат

Pierādījuma ideja.

Ja doti koord-tu daž. vērtības $a_1, a_2 \dots a_\lambda$

Tad polinoms: $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\lambda)=0$

$$x^\lambda - \underbrace{(a_1+a_2+\dots+a_\lambda)}_{S_1}x^{\lambda-1} + \dots + \underbrace{a_1a_2\dots a_\lambda}_{S_\lambda} = 0$$

t.i. $x^\lambda = \sum_{i=1}^{\lambda-1} (-1)^{i+1} x^i$

Tas ir jebkuru $\underbrace{x \cdots x}_{\lambda}$ un arī augstākas pakāpes var noteikt ar izteikumiem $\underbrace{x \cdots x}_{\lambda-1}$, kas ne augstākām:

001022

вательно и все другие из симметрические функции.

Как заметил (доказать!): если значение любой координаты – одно из λ известных чисел $a_1, a_2, \dots a_\lambda$, то для определения системы векторов достаточно знать те из величин таблицы (S), в записи которых каждая буква фигурирует не более $\lambda - 1$ раз.

Пример: если $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\lambda = 2$ и 3 вектора x, y, z, то необходимые и достаточные инварианты:

$$\begin{gathered} x,\ y,\ z \\ xy,\ xz,\ yz \\ xyz. \end{gathered} \qquad (S_1)$$

001023

Число величин таблицы S: в j-той строке – число сочетаний с повторениями j элементов из k, т.е.

$$\binom{k+j-1}{j} = \binom{k+j-1}{k-1}.$$

Число всех величин в S мы получим суммированием, или же к каждому символу, содержащему менее n букв (одинаковых или различных) мы приписываем дополнительные буквы 1 до получения слов из n букв. Получаем таблицу всех слов из n букв из сочетаний с повторениями n букв из данных $k+1$, за исключением слова $\underbrace{11\ldots1}_{n \text{ раз}}$.

Число таких сочетаний

$$N = \binom{k+n}{n} - 1 = \binom{k+n}{k} - 1. \qquad (4.2)$$

Пример: 3 вектора ($k=3$), $n=5$. Тогда

$$N = \binom{8}{3} - 1 = 55.$$

Таблица (S) содержит 5 строк, число величин в j-той строке $\binom{j+2}{2}$, т.е. соответственно

3; 6; 10; 15; 21.

Гипотеза начала стр. $4\beta^{4}$ во всяком случае правильна при $l = 2$. Тогда при любом n число вершин в Таблице типа S_1 равно (4.3)

$$2^{k} - 1,$$

001024

что, понятно, на много меньше чем (4.1) при сколько нибудь больших n.

4.3. Для краткости в дальнейшем „однозначно" означает: „однозначно, с точностью до изоморфизма".

Изложенное в предыдущем пункте имеет непосредственное применение для построения системы инвариантов, однозначно определяющей граф G, или из вектора система ковариантов — однопараметрических величин с этим же свойством.

Простой пример такого типа: двудольный граф $G(X_1, X_2, V)$ с $|X_1| = k$, $|X_2| = n$, в котором задана фиксированная нумерация вершин одного из множеств X_i, а вершины другого множества X_j, $j \neq i$, могут нумероваться произвольным образом. Тогда числа рёбер, связывающих каждую вершину x_i с вершинами из X_j, образуют такую систему ковариантов или векторов.

Можно отметить, что в силу (4.2),

если нет ограничений на число параллельных рёбер, то общее число N рассматриваемых инвариантов не зависит от того, которое из множеств X_1 или X_2 взято в качестве X_i. Если же дано максимальное число p параллельных рёбер, то число необходимых инвариантов считается и может при $n \neq k$, зависеть от выбора X_i. Для униграфа $p = 1$ и при $X_i = X_1$ это число дает (4.3).

Не исключено, что проблема построения системы ковариантов, однозначно определяющей G, несколько проще, чем та же проблема для инвариантов.

Естественно для начала ограничить рассматриваемый класс графов G, напр. исследовать двудольные униграфы, ориентированные или нет, может быть даже однородные.

Часто рассматриваемый ковариант – набор $\{d_i\}$ степеней вершин. В обзоре Козырева [16], ср. 33–36 напр. отмечен ряд результатов относительно условий реализуемости.

В нашем случае, конечно, $\{d_i\}$ еще в общем случае не дает однозначности. Можно пытаться использовать еще и добавочные и легко определяемые коварианты, в том или ином смысле родственные с $\{d_i\}$.

Для неорграфа $\{d_i\}$ — это суммы строк матрицы смежности A. В качестве дополнительных инвариантов можно было суммы (S_i) строк $A^2, A^3 \ldots A^{n-1}$ и учитывать, что A удовлетворяет характеристическому уравнению (если потребовались более высокие степени A). Кажется, что информация не меняется, если в этих расчетах заменить в каждой новой $A^{(f)}$ все диагональные элементы на нули. Одним или другим способом мы получим $n-1$ инвариант (+ коэффициенты характеристического полинома) — достаточно ли это для однозначности и каков алгоритм построения G?

Другой смысл d_i — это число вершин G на расстоянии 1 от вершины i. Петренко [17] предлагает рассматривать также числа $d_{\alpha i}$ вершин на расстоянии α от i. Ясно, что $\alpha \leq n-1$ и что

$$\sum_{\alpha} d_{\alpha i} = n-1,$$

Так что мы имеем не более (сколько именно?) $n-2$ независимых (?) инвариантов $\{d_{\alpha i}\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots n-2$. Расчёт всех $d_{\alpha i}$

можно произвести довольно просто, путем логического сложения строк A и подсчета единиц в получаемых строках.

Те же вопросы, как выше: достаточны-ли эти ковариаты для однозначности и как по ним строить G?

Как связаны (d_{ai}) и (δ_{ai})? Понятно, $d_i = \delta_{ii} = d_{ii}$, но есть ли другие связи и какие? Если информация, даваемая этими двумя системами, не идентична, может быть их совокупность дает однозначное определение?

Вероятно есть также и какие-то связи между инвариантами, которые строятся как симметричные функции координат этих ковариант. Если да, то какая часть инвариант определяет все остальные?

001927

4.4. Одноиндексные величины, которые можно использовать для характеризации свойств графа и его вершин, это не обязательно совокупности значений координат. Если, напр., рассматривать все подграфы G_i данного $G(X,V)$, порожденные множествами вершин $X \setminus x_i$ для всех $i=1,2,..n$, то их естественная нумерация совпадает с нумерацией вершин x_i и меняется одновременно с последней. Эти G_i можно рассматривать как координаты некоторого ковариантa.

В проблеме Улама (или „гипотезе Улама" по Харари и некоторым другим авторам) ставится вопрос о достаточности набора G_i для однозначности определения G. В некоторых случаях (см., напр., Харари, стр. 58 и 244) ответ утвердителен.

Сами G_i подвержены перенумерации, но если ввести подходящие операции сложения и умножения, то из них можно строить инварианты, напр. ΣG_i, $\Sigma G_i \cdot G_j$ и т.д., которые ~~гр.~~ графы зависят от данного G, но не от нумерации вершин G. Однако такой подход кажется скорее формальным. Один тип сложения, применяемый для графов, состоит в рассмотрении всех слагаемых как компонент одного; если все G_i связные, то их сумма — это просто их совокупность в целом. Мы не имеем основного свойства суммы чисел: замены нескольких величин на одну величину того же вида.

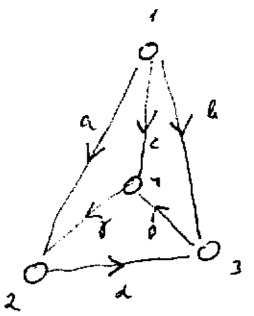
001029

Более интересным кажется изучение связей между инвариантами G и всех G_i. С одной стороны, это могло бы дать новые классы G восстанавливаемых по их G_i или же новые примеры невосстанавливаемых G. С другой стороны — может дать некоторую полезную информацию об этих инвариантах.

Одна простая связь ясна: если мы рассмотрим некоторую часть $G' \subset G$ с ρ вершинами $y_1, y_2, .. y_\rho$, то G' будет также частью всех тех и только тех G_i, у которых $x_i \neq y_j$, $j = 1, 2, .. \rho$. Следовательно, число тех G_i, которые содержат G', равно $n-\rho$; сумма всех ν_α соответствующих G' во всех G_i, делённая на число $n-\rho$ и частное — это ν_α для G и т.д.

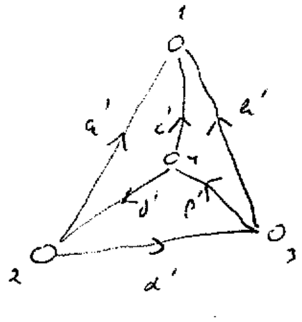
Каковы связи между характеристическими полиномами и другими инвариантами, построенными для G и для всех G_i? У пары невосстанавливаемых G и $\tilde{G}$ с тождественно до изоморфизма же набором G_i (конечно, с точностью до изоморфизма) будут те же ν_α для всех частей, посредством которых $\leq n-1$ — вершины, число вершин что обычные характеристические полиномы G и $\tilde{G}$ могут отличаться лишь только свободными членами (а полиномы типа Трейта — линейными членами).

В качестве примера рассмотрим два турнира с 4 вершинами, имеющие изоморфные наборы частей G_i



A

001000



B

Для антисимметрических орграфов матрицы смежности можно писать различными способами. Используем два из них и вычислим соответствующие характеристические полиномы:

1) дуге (ij) соответствуют $a_{ij} = 1,\ a_{ji} = 0$

$$\begin{vmatrix} s & 1 & 1 & 1 \\ 0 & s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s & 1 \\ 0 & 1 & 0 & s \end{vmatrix} = s^4 + s \qquad \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 1 & s & 1 & 0 \\ 1 & 0 & s & 1 \\ 1 & 1 & 0 & s \end{vmatrix} = s^4 + s$$

2) дуге (ij) соответствуют $a_{ij} = 1,\ a_{ji} = -1$

$$\begin{vmatrix} s & 1 & 1 & 1 \\ -1 & s & 1 & -1 \\ -1 & -1 & s & 1 \\ -1 & 1 & -1 & s \end{vmatrix} = s^4 + 6s^2 + 9 \qquad \begin{vmatrix} s & -1 & -1 & -1 \\ 1 & s & 1 & -1 \\ 1 & s & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & s \end{vmatrix} = s^4 + 6s^2 + 9$$

3) для случая 1) вычислим еще определители Трента

$$\begin{vmatrix} s+3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & s+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & s+1 \end{vmatrix} = s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 9s \qquad \begin{vmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ -1 & s+2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & s+2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & s+2 \end{vmatrix} = s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 7s$$

В данном случае A переходит в B (с точностью перенумерацией $3 \leftrightarrow 4$) при перенумерации вершин, напр. перенумерацией изменении ориентации всех дуг; этому соответствует транспозиция матриц смежности вида 1) и 2), следовательно получаются те же характеристические полиномы. В случае 3) последние — линейные — члены различны.

Их коэффициенты подсчитывают корневые деревья, т.е. графы с n (= 4 здесь) вершинами. Выражая последние через обозначения дуг, мы имеем:

для A: все члены произведения

$$(a+b+c)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$$

после раскрытия скобок, т.е. 9 корневых деревьев;

для B: abc $\quad a\alpha\gamma \quad a\beta\gamma$

$\qquad\qquad a c\beta \quad b\alpha\gamma$

$\qquad\qquad b c\alpha \quad c\alpha\beta$

т.е. 7 корневых деревьев.

4.5.