



УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

**ВОПРОСЫ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД**

II

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра электродинамики и механики сплошных сред

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том 252

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ СРЕД

Выпуск II



Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 1976

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
выпуск II, 1976

В сборнике рассматриваются результаты исследований, проведенных сотрудниками кафедры электродинамики и механики сплошных сред. Он включает 10 статей, в которых изложены результаты расчета электромагнитного поля и движения жидкого металла в индукционных печах и расходомерах, критерии качества биологического калориметра на основе его нестационарного температурного поля, асимптотические методы в приближенном обращении интегрального преобразования Лапласа и их применение к задачам механики, исследования по напряженному состоянию многослойных конструкций и оболочек.

Сборник предназначен для научно-технических работников и студентов, интересующихся прикладными вопросами электродинамики и механики сплошных сред, математическими методами решения прикладных задач электродинамики и механики сплошных сред, а также решением тепловых задач.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Микельсон Ю.Я. — ответственный редактор
Полманис Я.Э., Паэгле Л.Б., Адамсоне А.А.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
ЛГУ им. П.Стучки от 28 мая 1976 года

© Латвийский государственный университет им. П.Стучки, 1976

В 20203-56v 209-76
М 812(II)-76

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В ИНДУКЦИОННЫХ ПЕЧАХ

Часть I

Принятое в августе 1972 г. Постановление ЦК КПСС "О ходе работ по автоматизации технологических процессов в черной металлургии" дает широкую программу развития черной и цветной металлургии. В связи с этим встают задачи создания новых высокопроизводительных, мощных, механизированных и автоматизированных плавильных печей. Наряду с резким увеличением количества выплаваемого металла растут требования, предъявляемые к качеству металла - необходимо получить металлы высокой степени чистоты, свободные от вредных неметаллических включений и примесей.

Для успешного решения этих задач необходимо управлять физико-химическими процессами в жидком металле с помощью разнообразных методов воздействия. Весьма перспективными являются электромагнитные методы воздействия на расплав, с целью улучшения качества выплаваемого металла и сокращения технологического цикла. Электромагнитные методы воздействия удобны возможностью бесконтактного создания силовых и скоростных полей в жидком металле с заданным пространственным и временным распределением. Эти методы широко применяются во многих магнитогазродинамических (МГД) установках - электропечах, насосах, лотках, кристаллизаторах, сепараторах и др., в том числе в индукционных тигельных печах (ИТП) [1, 2, 3], являющихся одной из разновидностей плавильных печей.

В предлагаемой обзорной статье анализируются состояние научно-исследовательских работ по электромагнитным методам воздействия на расплавленный металл в индукционных печах. Однако большинство из рассмотренных в статье методов исследования и результатов имеют неоспоримое значение для более широкого класса устройств и процессов.

1. Индукционная печь и основные технологические проблемы

Индукционные тигельные печи (ИТП) в классе других МГД устройств выделяются:

- 1) цилиндрической симметрией;
- 2) небольшой относительной высотой $\hat{h} = \frac{h_p}{r_0}$ рабочего тела (1.1)
 $0,5 < \hat{h} < 4$

где r_0 - радиальный размер металла;

- 3) свободной поверхностью расплава.

На рис.1.1. схематически изображена ИТП, состоящая из индуктора, тигля, расплава со свободной поверхностью (мениском) и магнитного экрана. Здесь нанесены также линии магнитной индукции и характерные линии тока циркуляции жидкого металла в том случае, когда однофазный индуктор расположен симметрично средней плоскости расплава.

ИТП применяются для плавки, горячей выдержки и обработки чугуна [4,5,6], стали [7], алюминия [8], а также цветных металлов и их сплавов [9]. В практике Советского Союза [10] и в зарубежной практике [11] для этих целей применяются индукционные печи со следующими характеристиками [2,12]:

- емкость до 100 тонн;
- полная мощность до 50 Мв;
- частота питания от 25 Гц до 100 кГц;
- температура расплава от 250°C до 1800°C;
- электропроводность расплава от $8 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{Ом} \cdot \text{м}}$.

Полная мощность (100 %) подведенная к ИТП в среднем распределяется следующим образом:

- потери в приводах, шинах, конденсаторах и т.д. - 4 %;
- тепловые потери в индукторе - 19 %;
- тепловые потери через стенки тигля и поверхность расплава - 7 %;
- мощность для нагрева рабочего тела и создания движения - 70 %.

Основной составной частью индукционной плавильной печи является индуктор, питаемый однофазным или многофазным переменным током и создающий в расплаве, а также в окружающем пространстве переменное электромагнитное поле. Поле в металле

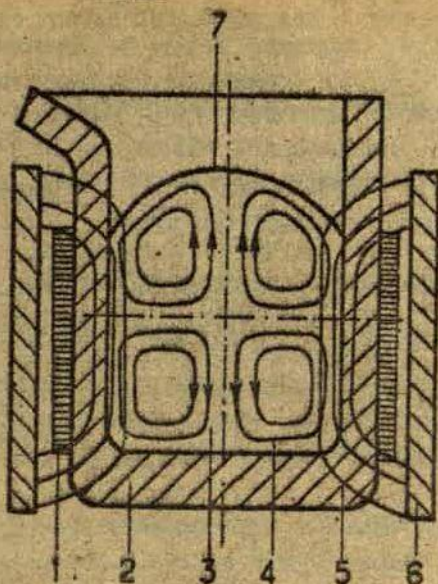


Рис. I. I. Схематическое изображение однофазной индукционной тигельной печи

1 - индуктор, 2- тигель, 3- расплав, 4- линии тока, 5- линии магнитного поля, 6- магнитный экран, 7- мениск

определяет два основных явления:

1) электромагнитное поле наводит в проводящих частях устройства и в рабочем теле вихревые токи (токи Фуко), что обуславливает выделение там джоулева тепла.

Плотность диссипируемой проводником мощности

$$n = j^2 / 2\sigma, \quad (1.2)$$

где $j \left[\frac{A}{M^2} \right]$ - вектор плотности индуцированного тока,

$\sigma \left[\frac{1}{OMM} \right]$ - электропроводность материала.

Соответственно, интегральная мощность джоулевых потерь в проводнике с объемом V равна:

$$N = \frac{1}{2} \int_V \frac{j^2}{\sigma} dV \quad (1.3)$$

Выделение тепла обуславливает нагревание и плавление металла в ИТП.

2) Взаимодействие поля с наведенными токами в металле

определяет существование в нем электромагнитной силы с объемной плотностью

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} + \frac{\mu_1 - 1}{2\mu_1} \text{grad } B^2 - \frac{1}{2} H^2 \mu_0 \text{grad } \mu_1, \quad (1.4)$$

где $\vec{H} \left[\frac{\text{АМ}}{\text{М}} \right]$ - напряженность магнитного поля;
 $\vec{B} [\text{ТЛ}]$ - индукция магнитного поля;
 $\mu_0 \left[\frac{\text{ГН}}{\text{М}} \right]$ - магнитная проницаемость вакуума;
 μ_1 - относительная магнитная проницаемость среды.

Во всех практически встречающихся в ИТП случаях формула (1.4) существенно упрощается. Так как металлы в расплавленном состоянии являются немагнитными телами, то $\mu_1 \approx 1$ по всему объему.

Сумма сил (1.4) сводится к одному члену:

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.5)$$

Для реально существующих устройств время релаксации жидкости в рассматриваемом объеме $\tau > 1$ секунды [13], поэтому частота колебаний электромагнитного поля $f_0 \gg 1/\tau$, т.е., расплав не успевает реагировать на пульсации силы (сила пульсирует с удвоенной частотой поля), и движение определяется усредненной по периоду колебаний величиной силы \vec{f} .

Формула (1.5) выражает мгновенное значение силы. Усредняя по периоду колебаний произведение двух синусоидально меняющихся во времени величины представленных в комплексной форме:

$$A = A^0(\vec{r}) e^{i\omega t}, \quad (1.6)$$

где $A^0(\vec{r})$ - комплексная амплитуда величины;

i - мнимая единица;

$\omega \left[\frac{1}{\text{с}} \right]$ - циклическая частота переменного электромагнитного поля,

получаем выражение плотности средней силы:

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{j}_0 \times \vec{B}_0^*]. \quad (1.7)$$

Действие электромагнитной силы вызывает движение жидкого металла, характер которого в целом (одноконтурная или двухконтурная циркуляция), интенсивность и распределение скоростей \vec{v} обозначена комплексно сопряженная величина.

вание печи зависят от многих факторов [2, 3]. Наиболее важными из них являются следующие:

- 1) геометрические характеристики устройства - особенно взаимное расположение металла и индуктора;
- 2) электромагнитные характеристики индуктора (фазность, плотность тока);
- 3) электромагнитные и вязкие свойства ореда;
- 4) расположение и свойства магнитного экрана.

Многими из этих параметров можно управлять целенаправленно, т.е. воздействовать на распределения температуры и скорости для достижения определенных технологических целей. Укажем на некоторые аспекты этой проблемы, связанные с двойственным характером (тепловым и силовым) воздействия индуктора на металл.

1) В результате скин-эффекта основное количество джоулей тепла выделяется в тонком поверхностном слое проводника

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\omega \sigma \mu_0 \mu_r}} \quad (1.8.)$$

Тепловая конвекция, скорость которой в плавленной печи не превышает 5 см/с., недостаточно эффективна для выравнивания температуры в объеме тигля. Это может привести к перегреву металла в зоне выделения тепла - вблизи боковой поверхности расплава. Однако скорость движения расплава, создаваемая целенаправленным расположением нагревательного индуктора или дополнительного индуктора, специально предназначенного для перемешивания, может достигнуть значительных величин (несколько метров в секунду в промышленных установках) и существенно влияет на выравнивание температуры в расплаве. С другой стороны, интенсивное движение вблизи боковой поверхности тигля имеет и отрицательные стороны:

- а) сильно изнашивается тигель, что сокращает срок работы устройства [2];
- б) ухудшается качество металла.

По данной причине очень важно управлять не только максимальным значением скорости, а также распределением скорости в объеме тигля.

2) В процессе выплавки металла осуществляются различные физико-химические процессы, направленные на повышение качества

(выделяются примеси, вводятся добавки). В зависимости от вида протекающего процесса и расположения активной зоны, меняются также условия, необходимые для оптимального протекания этих процессов [14]. Скорость протекания физико-химических реакций можно регулировать изменением движения расплава. Например, если свободная поверхность металла покрыта шлаком, то для быстрого протекания химических реакций необходимо с определенной скоростью менять слои металла соприкасающиеся со шлаком, с другой стороны движение расплава не должно нарушить шлаковый покров - нарушение шлакового покрова ведет к ухудшению качества выплавляемого металла.

Кроме других рассмотренных проблем существует много других, связанных с воздействием электромагнитного поля на расплав (регулирование мениска, обжиг металла и др.). Существующие проблемы определяют необходимость исследования электромагнитного поля, вихревых токов, электромагнитной силы и особенно - движения расплава в печи. Теоретические и экспериментальные исследования влияния электромагнитного поля на процессы в расплавленном металле, позволяют решать задачи конструирования и оптимизации ИТП.

II. Основные положения МГД жидких металлов

Магнитогидродинамические процессы в жидких металлах описывает система уравнений магнитной гидродинамики [15, 16], состоящая из уравнения магнитной индукции, уравнения движения (уравнения Навье-Стокса в случае ламинарного течения), уравнения неразрывности, дифференциального закона Ома и некоторых дополнительных связей.

Для получения удобной для использования безразмерной формы этих уравнений необходимо ввести характерные параметры:

$l_0 [M]$ - характерный размер, в качестве которого обычно используют один из основных размеров исследуемой области или толщину скин-слоя δ (см. I.8), при ярко выраженном скин-эффекте;

$v_0 \left[\frac{M}{C} \right]$ - характерная скорость; можно выбрать максимальное значение скорости движения расплава или определить с помощью характерного значения магнитной индукции;

$$V_0 = \frac{B_0}{\sqrt{\rho_0 \mu_0}} \quad (2.1)$$

$B_0 [A]$ - характерная магнитная индукция, например - максимальное значение на поверхности расплава;

$\rho_0 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$ - характерная плотность - вводится в рассмотрение, если плотность нельзя считать постоянной $\rho \neq const$;

$\tau_0 [c]$ - характерное время, которое удобно связать с характерными длиной и скорости :

$$\tau_0 = \frac{l_0}{V_0} ; \quad (2.2)$$

$\rho_0 \left[\frac{H}{M^2} \right]$ - характерное давление, один из возможных способов определения которого следующий:

$$\rho_0 = \rho_0 V_0^2 ; \quad (2.3)$$

$j_0 \left[\frac{Am}{M} \right]$ - характерная плотность тока, задается как плотность тока в индукторе или связывается с характерным значением магнитной индукции:

$$j_0 = \frac{B_0}{l_0 \mu_0} \quad (2.4)$$

Определив на основе этих величин безразмерные переменные в виде:

$$\hat{A} = \frac{A}{A_0} \quad (2.5)$$

получаем безразмерную форму системы уравнения МГД.

1) уравнение магнитной индукции для однородной среды:

$$\frac{\partial \hat{B}}{\partial \tau} = \frac{1}{Re_m} \Delta \hat{B} + rot [\hat{V} \times \hat{B}] \quad (2.6)$$

где

$$Re_m = \rho_0 V_0 l_0 \sigma \quad (2.7)$$

Магнитное число Рейнольдса, характеризующее отношение индукции поля токов, наведенных движением среды (вторичного поля) и индукции приложенного внешнего поля.

2) Уравнение движения (Навье-Стокса) для несжимаемой жидкости ($\rho = const$) [17] :

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial \tau} + (\hat{v} \nabla) \hat{v} = -\nabla \hat{p} + \frac{1}{Re} \Delta \hat{v} + Al \hat{f} + \frac{\hat{e}_z}{Fr} \quad (2.8)$$

где

$$Re = \frac{V_0 l_0}{\nu} \quad (2.9)$$

- число Рейнольдса, характеризующее соотношение кинетической энергии к энергии, диссипируемой тре-

нием;

$$Al = \frac{B_0^2}{\rho_0 \rho v_0^2} \quad (2.10)$$

- число Альфена, характеризующее отношение магнитной энергии к кинетической;

$$Fr = \frac{v_0^2}{L_0 g} \quad (2.11)$$

число Фруда, выражающее соотношение сил инерции к силам тяжести;

$\hat{f} \left[\frac{H}{M^2} \right]$ - плотность посторонней объемной силы, в том числе и электромагнитной (см. I.5 или I.7);

$\nu \left[\frac{M^2}{C} \right]$ - коэффициент кинематической вязкости.

3) Уравнения неразрывности для магнитного поля и течения:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\hat{\rho} \hat{v}) = 0 \quad (2.12 - 2.13)$$

При $\rho = \text{const}$ из (2.13) следует: $\operatorname{div} \hat{v} = 0$ (условие (2.14) несжимаемости).

4) Дифференциальный закон Ома:

$$\hat{j} = \operatorname{Re}_m (\hat{E} + \hat{v} \times \hat{B}), \quad (2.15)$$

где $\hat{E} \left[\frac{B}{M} \right]$ - напряженность электрического поля.

Эта форма записи безразмерных уравнений одна из возможных, другой вариант введения безразмерных критериев см. в разделе III.

Так как интервалы изменения характеристик величин металлургических печей широки [2,9], то и критерии подобия для разных устройств меняются в широких пределах. Однако величину магнитного числа Рейнольдса (2.7) для ИТП можно оценить [13,16]. Если размеры устройства порядка одного метра, проводимость металла $\sigma \approx 10^6 \frac{1}{\text{Ом}\cdot\text{м}}$, то при $v_0 < 1 \text{ м/с}$ (такие скорости наблюдаются в эксперименте), выполняется условие

$$\operatorname{Re}_m < 1$$

Расчеты показывают, что при скоростях до $1^m/c$ и частотах не ниже 50 Гц, влияние движения расплава на индукцию не превышает 6 и 13 % соответственно для стального и алюминиевого расплавов [19]. Отсюда следует вывод, что безиндукционное приближение:

$$Re_m \ll 1 \quad (2.16)$$

применимо для лабораторных устройств, но условие (2.16) может не соблюдаться в производственных ИТН из-за больших размеров и скорости движения в них.

Допущение о малости магнитного числа Рейнольдса (безиндукционное приближение существенно упрощает задачу, поэтому оно используется во всех теоретических работах, кроме [20]. Если пренебречь влиянием движения среды на магнитное поле, то уравнение (2.6) упрощается:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{Re_m} \Delta \vec{B}, \quad (2.17)$$

т.е., величина магнитной индукции находится независимо от гидродинамических характеристик.

В случаях, когда трехмерная задача сводится к плоской задаче (при цилиндрической симметрии модели), целесообразно ввести векторный потенциал:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad (2.18)$$

уравнение для которого с учетом периодической временной зависимости (1.6) принимает вид:

$$\Delta \vec{A} = i \sigma \mu_0 \omega \vec{A} \quad (2.19)$$

Удобно пользоваться безразмерной формой уравнения (2.19);

$$\Delta \vec{A} = i \hat{\omega} \vec{A}, \quad (2.20)$$

$$\text{где } \hat{\omega} = \mu_0 \sigma \omega L_0^2 \quad (2.21)$$

безразмерная частота, тесно связанная с прониканием поля вовнутрь проводника:

$$\hat{\delta} = \sqrt{\frac{2}{\hat{\omega}}} \quad (2.22)$$

Если в выражении магнитного числа Рейнольдса

$$Re_m = \sigma \mu_0 v_0 L_0 \quad (2.7)$$

в качестве скорости V рассматривать относительную скорость движения бегущего магнитного поля и проводящей среды: $v = \frac{\omega s}{\alpha}$
где

s - окольжение,

$$\alpha = \frac{\pi}{\tau}$$

τ - полюсный шаг индуктора, то обоим критериям Re_m и ω можно придать один и тот же физический смысл.

Таким образом задачу об определении движения расплавленного металла в безиндукционном приближении можно разделить на два этапа:

1) Нахождение распределения средней электромагнитной силы (1.7) в жидком металле. Эта задача сводится к решению уравнения (2.17) или (2.19) с соответствующими граничными условиями.

2) Решение уравнения движения (2.8) с учетом найденной плотности силы.

В общем виде для произвольной формы проводящей области и произвольного распределения плотности тока индуктора, эти задачи не решены. Поэтому в каждом конкретном случае делаются те или иные допущения относительно формы и физических характеристик модели. Основные модели и методы для решения поставленной задачи характеризуются во II части настоящего обзора.

III. Моделирование, экспериментальное исследование и оценка интенсивности движения в ИТП

Экспериментальные измерения скорости движения в действующих печах являются задачей крайне сложной (температура расплава достигает 1600°C , емкость - десятков тонн). Путем наблюдений можно получить только предварительные сведения об интенсивности и характере движения (одноконтурная или двухконтурная циркуляция) [2, 3, 21]. Таким образом, нельзя получить информацию о структуре циркуляции.

Экспериментальным фактом является то, что для ИТП число Рейнольдса (2.9)

$$Re > 10^4$$

и движение металла имеет турбулентный характер [22, 23].

Турбулентные пульсации скорости малы около боковой поверхности

тиглия и в окрестности оси симметрии, а в остальной области действует сильно развитая турбулентность. Степень турбулеризации потока характеризуется отношением среднеквадратичной величины пульсации скорости $\sqrt{v_i'^2}$ к среднему значению скорости

$$\frac{\sqrt{v_i'^2}}{\bar{v}_i} = v_i - v_i' \quad (3.1)$$

Даже для модельных установок степень турбулеризации $\sqrt{v_i'^2}/\bar{v}_i$ достигает 1, а в больших установках может значительно превышать эту величину. Это создает дополнительные трудности для эксперимента, цель которого не только исследование осредненных характеристик движения, а также измерение турбулентных пульсаций скорости, которые играют важную роль в протекании физико-химических процессов в расплаве.

По указанным причинам экспериментальные исследования в настоящее время ограничиваются моделями ИТП и печами малой емкости. Суть моделирования заключается в изучении МГД процессов на модели, связанной с реальным объектом соотношениями подобия и геометрически подобной оригиналу. Необходимо установить систему критериев подобия, которая достаточно полно отразит все существенные связи и вместе с тем будет ограничена настолько, что позволит практически выполнить модель для экспериментального исследования или даст возможность описать процесс теоретически [24].

Особенностью моделирования ИТП является возможность раздельного исследования магнитогидродинамических, тепловых и массообменных процессов. Основой для такого разделения служит значительная интенсивность движения расплава под действием электромагнитных сил (скорость может достигать в модели 1/2 м/с), обычно во много раз превышающая интенсивность тепловой и концентрационной конвекции в ванне [25]. В результате этого можно при моделировании МГД-процессов пренебречь обратным влиянием теплового и концентрационного состояния расплава на движение.

В безиндукционном приближении ($Re_m \ll 1$) получена система критериев подобия движений [26, 27]:

$$\Pi_1 = \frac{\rho_0 v_0^2 M_0}{B_0^2}; \quad \Pi_2 = \frac{\rho_0 M_0}{B_0^2}; \quad \Pi_3 = \frac{\eta v_0 (M_0)}{l_0 B_0^2};$$

$$\Pi_4 = \frac{g \rho_0 l_0 M_0}{B_0^2}; \quad \hat{\omega} = b M_0 \omega l_0^2. \quad (3.2-3.6)$$

Критерии подобия (3.2)-(3.6) выражаются через ранее введенные числа Рейнольдса (2.9), Альфенга (2.10) и Фруда (2.11):

$$\Pi_1 = \frac{1}{Al} ; \Pi_2 = \frac{\rho_0}{\rho_0 v_0^2} ; \Pi_3 = \frac{1}{Al Re} ; \Pi_4 = \frac{1}{Al Fr}$$

Если ρ_0 определено по формуле (2.3) $\rho_0 = \rho_c v_0^2$, то $\Pi_2 \equiv \Pi_1$ и исключается из рассмотрения.

Для построения системы критериев подобия вместо характерной индукции B_0 часто используется характерный настил тока

$$J_0 \left(\frac{Am}{M} \right) [19] ; \quad J_0 = \frac{B_0}{M_0} \quad (3.7)$$

Системы критериев подобия для МГД течений можно также построить прямым применением π -теоремы размерностей [28]. С помощью этой теоремы можно свести зависимость между π физическими величинами к зависимости между π -к безразмерными комплексами, где k - ранг матрицы размерностей этих физических величин. Для движения жидкого металла в бегущем магнитном поле определяющими параметрами (при исключении из рассмотрения МГД-насосов, а также процессов, где существенную роль играет сила тяжести) являются семь величин:

$$H, \rho_0, b, \rho, \eta, l, \omega$$

На основе этих величин можно построить 29 независимых систем π -комплексов, каждая из которых содержит π -к определяющих критериев. Но применение комплексов, полученных непосредственно из π -теоремы, не всегда целесообразно [28].

Моделирование движения металла с соблюдением полной системы критериев подобия (3.2)-(3.6) невозможно. Однако не все критерии являются одинаково важными. Гравитационные силы имеют безвихревой характер, поэтому в явном виде на движение не влияют, однако существенные при исследовании формы свободной поверхности металла (мениска) (рис.1.1). Результаты экспериментов [25] показывают, что при исследовании характера движения критерием Π_4 (3.5) можно пренебречь. Так как течение в ИТП турбулентно, то во многих случаях можно пренебречь критерием Π_3 (3.4), который характеризует влияние сил вязкости.

Пренебрегая критерием Π_3 , можно свободно менять материал расплава, однако выбор последнего определяет остальные параметры

модели : ω, l_0 . Пренебрегая одновременно критериями Π_3 и Π_4 , можно свободно менять материал расплава и один из параметров ω и l_0 . Тогда остается один определяющий критерий $\hat{\omega}$, обеспечивающий подобие объектов, и два не определяющих критерия - Π_1 и Π_2 , которые используются для приведения полученных на модели значений скорости и давления к условиям оригинала [19] . Для описания установившегося движения при больших числах Рейнольдса (2.9), а также усредненных характеристик турбулентного течения в бегущем магнитном поле достаточным условием подобия является:

$$\hat{\omega} = i n \nu \quad (3.8.)$$

что хорошо подтверждается экспериментом (рис.3.1). Изменение $\hat{\omega}$ оказывает существенное влияние на движение расплава [25 ; 29] - при моделировании печей, работающих на частоте 50 Гц, модельную установку в целях соблюдения условия (3.8) необходимо питать током повышенной частоты.

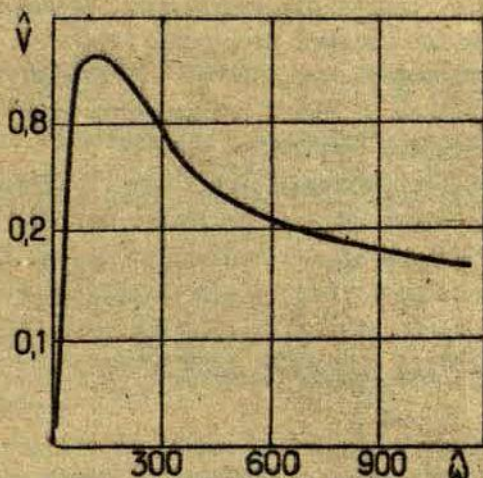


Рис.3.1.

Экспериментальная зависимость относительной скорости на оси расплава от относительной частоты.

$$\hat{v} = \frac{v_{\max}}{J_0} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$

При исследовании высоты мениска пренебрегаем критерием Π_3 , а Π_4 становится не определяющим критерием и применяется для пересчета параметров модели на параметры реальной конструкции.

Таким образом, представляется возможным заменить экспериментальное и теоретическое исследование производственных установок исследованием моделей, однако при апробации методики необходимо определить пределы изменения критериев, при которых введенные допущения не приводят к значительным погрешностям.

В большинстве экспериментальных работ исследуется только распределение аксиальной остающейся скорости v_z по высоте расплава на оси симметрии, так как там v_z обычно принимает максимальное значение [30-37] (численные расчеты [20] показали, то не всегда). Полученные экспериментальные результаты характеризуют зависимость циркуляции расплава от параметров устройства:

I) Зависимость от геометрии индуктора и характера тока в нем [30, 33, 36, 38].

Для устройства с однофазным индуктором, расположенным симметрично относительно средней плоскости расплава, характерна картина двухконтурной циркуляции. При этом распределение составляющей скорости v_z по оси z почти антисимметрично относительно средней плоскости расплава (рис. 3.2а).

Для устройства с многофазным индуктором характерна одноконтурная циркуляция - при этом направление скорости на оси тигля не меняется. Течение на оси для устройства с двухфазным индуктором показано на рис. 3.2б. На оси тигля многофазного устройства, при $h_p = 2+3$ скорость $v_{z, \max} = 0.5 - 1.0$. Безразмерная величина определяется с помощью характерной скорости:

$$v_0 = J_0 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.9)$$

Движение более интенсивно в многофазных печах, причем более эффективными для перемешивания (критерием эффективности является удельный коэффициент массообмена) являются двухфазные устройства. Отклонение угла фаз токов в секциях УЭМП от номинального значения φ_n по эксплуатационным причинам не приводит к существенному изменению характера движения в широком ин-

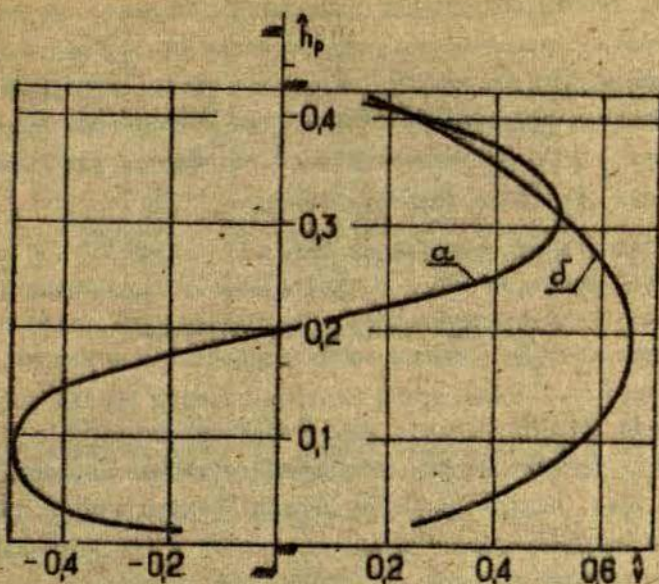


Рис. 3.2.

- а) Распределение безразмерной аксиальной составляющей скорости $\hat{v}_z = \frac{v_z}{N_{z, \max}} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$ по высоте тигля на оси симметрии для однофазного устройства;
- б) Распределение безразмерной вертикальной составляющей скорости движения расплава при двухфазном индукторе со сдвигом фаз в сечениях $\varphi = 110^\circ$.

тервале фаз ($\varphi_n = 90^\circ, 25^\circ < \varphi < 135^\circ$). При этом сохраняется также максимальное значение скорости $\hat{v}_{z, \max} \approx 0,6$. Однако при больших отклонениях ($\varphi < 20^\circ; \varphi > 140^\circ$ при $\varphi_n = 90^\circ$) структура течения существенно меняется, постепенно приобретая двухконтурный характер.

2) Зависимость от расположения и высоты индуктора [32, 34-36]. Изменением расположения индуцирующей системы можно достигнуть существенного преобразования характера циркуляции. Сдвигая однофазный индуктор в низ или вверх относительно средней плоскости расплава, можно добиться перехода двухконтурного движения в одноконтурное. При этом несколько уменьшается абсолютная интенсивность движения.

Различие высоты индукторов примерно в два раза обуславливает двухкратное различие джоулевого тепла (1.3), выделяющегося в расплаве. Однако течения металла в ванне, при равных значениях максимальной индукции $B_{z, \max}$ на поверхности проводящего цилиндра, в обоих вариантах мало отличаются как по абсолютной величине, так и по распределению.

3) Зависимость от заполнения тигля [31, 35, 36]. С увеличением высоты расплава h_p в устройстве с однофазным индуктором (характерна двухконтурная циркуляция (рис. I.1)) движение в верхнем контуре становится интенсивней, а в нижнем контуре подавляется. Это объясняется главным образом уменьшением гидравлического сопротивления в зоне, верхнего контура [35]. При дальнейшем увеличении относительной высоты расплава h_p/h_u , где h_u - высота индуктора, можно нижний контур циркуляции подавить - движение окажется преобразованным в одноконтурное. В печи с постоянной высотой индуктора, при изменении отношения h_p/h_u от 0,6 до 1,3, интенсивность циркуляции в верхнем контуре возрастает в 2 раза, а высота этого контура - в 4 раза (положение индуктора фиксировано).

Максимальная скорость движения, при постоянной емкости печи, достигается в интервале значений: $2 < h_p < 3$, где $h_p = h_p/r$, - отношение высоты металла к его наружному радиусу. Этот результат понятен, так как с увеличением относительной высоты расплава изменяются траектории движения частиц металла. Увеличивается протяженность прямолинейных участков движения, но одновременно облегчаются условия движения металла на поворотах траектории. При малых значениях h_p решающий вклад в гидродинамическое сопротивление вносят сопротивления поворотов в концевых зонах расплава, что определяет возрастающий характер левой части кривой $\hat{v}_{z, \max} = f(\hat{h}_p)$. На рис. 3.3. показаны результаты экспериментального определения скоростей движения на оси ванны ($r = 15,5$ см, $\hat{\omega} = 20$) при изменении высоты расплава от 21 до 62 см. Высота индуктора в каждом замере равнялась высоте расплава.

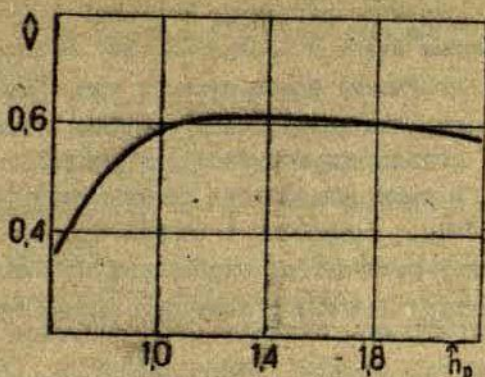


Рис. 3.3.

Максимальное значение относительной скорости $\hat{V}_{2,max}$ в зависимости от безразмерной высоты расплава

4) Зависимость от конусности тигля [36]. Изменения конусности тигля

$$K = \frac{r_{max} - r_{min}}{h_p} \quad (3.10)$$

где r_{max} и r_{min} — соответственно максимальный и минимальный радиусы конического тигля, в пределах $0 \leq K \leq 0,115$ существенно не меняет характер движения. При увеличении конусности происходит некоторое перераспределение потоков металла, при этом высота нижнего контура в однофазном устройстве увеличивается и, скорость в нем возрастает.

5) Зависимость от расположения магнитного экрана и распределения настила по высоте индуктора [37]. Изменением расположения магнитного экрана можно добиться такого же эффекта, как неравномерным распределением настила тока по высоте индуктора. Например, размещение магнитного экрана в нижней части устройства приводит к переходу двухконтурной циркуляции в одноконтурную циркуляцию с одновременным увеличением максимальной скорости движения на 20–40%. Такого же эффекта можно добиться, увеличивая настил тока в нижней части индуктора или закругляя нижнюю часть тигля.

Измерения скорости V_2 на оси цилиндрической ванны дают представление о характере движения и о максимальном значении

скорости, но они не отражают структуру течения: скорость течения в пристеночных слоях и полную картину течения на разных глубинах. Для получения более полного представления необходимо провести замеры по всему объему металла - необходимо мерить аксиальную составляющую скорости в разных сечениях $z = \text{const}$ [23, 38], а также радиальную составляющую [23]. Из-за большого объема работы, связанной с такими замерами, влияние геометрических и электромагнитных параметров системы "индуктор-металл" на структуру течения в настоящее время еще не выявлено.

Экспериментальные исследования мениска [39] показали, что высота мениска h_m и h_c - высота центра мениска над первоначальным уровнем в определенном интервале настилов индуктора пропорциональны квадрату максимального значения индукции на боковой поверхности расплава. При $\hat{\omega} > 65$ h_c и h_m практически не зависят от частоты.

Экспериментальные исследования дают также рекомендации для усовершенствования УЭМП путем изменения геометрических параметров системы (высоты индуктора и расплава, их взаимного расположения) путем изменения частоты $\hat{\omega}$ (рис. 3.1), а также длины полюсного деления многофазного индуктора [38] и сдвигов фаз токов в его секциях.

На имеющихся экспериментальных данных базируются работы по оценке интенсивности движения в ИТП. Интенсивность движения характеризуется максимальным значением скорости (скоростью движения в характерной точке).

Энергетический подход к оценке интенсивности движения дает формулу для максимального значения скорости в однофазной печи [32, 34] :

$$v_0 = \sqrt{\frac{W}{\lambda} \frac{1}{\rho K}} \quad (3.11)$$

где

$$W = \frac{1}{Q} \int_V \bar{f} \bar{v} dv \quad (3.12)$$

мощность передаваемая расплаву электромагнитным полем при единичном расходе металла в однонаправленном потоке,

Λ - безразмерный коэффициент гидравлического сопротивления движению потока,

K - безразмерный геометрический параметр,

$$Q = \pi \int_0^R r |v_z| dr.$$

Для однофазных устройств, когда можно пренебречь аксиальной составляющей силы, получены приближенные выражения для расхода W , использование которых дает значения скорости, близкие к экспериментальным. При принятых допущениях интегральный циркуляционный эффект зависит от максимальной величины радиальной составляющей силы, а не от разности значений этой силы в середине и на концах боковой поверхности садки [32]. При заданной мощности джоулевого тепла, пренебрегая кривизной поверхности расплава, получена формула [34] для оценки максимального значения скорости в зависимости от мощности и размеров печи, частоты и профиля скоростей, формы сосуда и физических параметров материала. Характерная скорость v_0 пропорциональна корню четвертой степени от частоты ($v_0 \sim \omega^{1/4}$) и коэффициенту сопротивления Λ в степени $1/2$ ($v_0 \sim \Lambda^{1/2}$). Интенсивность циркуляции, при заданных значениях емкости печи и мощности, снижается при увеличении отношения l_m/r_0 , где l_m - высота обогреваемого участка поверхности расплава.

На основе изложенной в работе [19] методики анализа комплекса магнитогидродинамических, тепловых и массообменных процессов в печи, составлено в обобщенной форме интегральное уравнение, выражающее значение скорости движения расплава, как функцию обобщенных независимых переменных:

$$\frac{v}{j_0 \sqrt{\frac{\rho}{M}}} = \Phi' \left(\frac{r}{L_0}; \frac{z}{L_0}; \varphi, \frac{l}{\tau_0}, \Pi_3, \Pi_4, \hat{\omega}, sh, c_1, \dots, c_n \right), \quad (3.13)$$

где $sh = \frac{v_0 \tau_0}{L_0}$; (3.14)

$j_0 \left[\frac{A}{M} \right]$ - характерный настил тока;

C_i - параметрические критерии, характеризующие геометрические данные и подобие распределения полей - форму тигля, относительную толщину футеровки, смещение индуктора, распределение тока в индукторе и др.

Если рассматривать установившееся движение в турбулентном режиме, при отсутствии высокого мениска и существенного влияния вязкости, а также фиксировать конструкцию печи, то

$$\frac{v}{J_0} \sqrt{\frac{\rho}{M}} = \Phi \left(\frac{r}{l_0}, \frac{z}{l_0}, \hat{\omega} \right), \quad (3.15)$$

или в характерной точке

$$v_0 = \Phi(\hat{\omega}). \quad (3.16)$$

В результате анализа внутренних и внешних связей получены выражения характерной скорости через активную мощность, P_p или полную мощность системы индуктор-металл S :

$$v_0 = \bar{\Phi}_0(\hat{\omega}) \Gamma_{эс} \frac{1}{\sqrt{l_0}} \sqrt{\frac{5 \bar{\sigma}}{\rho}}, \quad (3.17)$$

где $\frac{\bar{a}}{a}$ - отношение значения физической величины к его значению в базисном режиме,

$\Gamma_{эс}$ - функция электрических и геометрических параметров (задается графически).

Упрощенная формула для больших значений частот $\hat{\omega} > 100$ имеет вид:

$$v_0 = \bar{\omega}_0^{-(6_1 + \frac{1}{2})} l_0^{-2(6_1 + \frac{3}{2})} \left(\frac{5}{\rho} \right)^{1/2} \bar{\sigma}^{-6_1}, \quad (3.18)$$

где 6_1 - параметр аппроксимации зависимости (3.16)

$$v_0 = \bar{J}_0^{-1} \omega_0^{-6_1} \quad (3.19)$$

Показано, что исходная кривая (3.16) с учетом реальных внешних связей значительно деформируется и максимум скорости смещается в область меньших частот.

Методика определения максимального значения движения металла далее разработана в работе [40]. При допущении, что функции, описывающие влияние различных факторов Φ_i , взаимно

независимы. Получено выражение

$$V_0 = \hat{V}_0^* B_0 \sqrt{\frac{1}{2} \rho M_0} \Phi_B \Phi_\omega \Phi_k \Phi_d$$

где B_0 [Тл] — характерное значение индукции. Звездочкой, также как и ранее, обозначены значения в базисном режиме. Функции Φ_i соответственно описывают отклонения индукции, относительной частоты, конфигурации системы и концов индуктора от имеющих место в базисном режиме. Значения \hat{V}_0^* и функции Φ_i определяют в эксперименте на моделях с легко плавкими металлами [40]. Функции Φ_i , полученные в виде графиков или формул, используются для определения V_0 в ИТП при заданных параметрах (активная мощность, масса расплава и др.).

Из сказанного понятно, что оценки скорости движения имеют важные значения для практических целей — характеризуют общую интенсивность циркуляции, но вне поля зрения остаются все те эффекты, которые определяются структурой течения. Об этом более полное представление могут давать, наряду с экспериментами, теоретические исследования — с точки зрения МГД жидких металлов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайсберг А.И. Индукционные плавильные печи. М., "Энергия", 1967. 254 с.
2. Брокмайер К. Индукционные плавильные печи. М., "Энергия", 1972. 272 с.
3. Тир Л.Д., Столов М.А. Электромаргитные устройства для управления циркуляцией расплава в электропечах. М., "Металлургия", 1975. 224 с.
4. Молисов Л.З., Керан Л.Б., Жельнис М.В. Применение индукционных печей в чугуно-литейных цехах. — "Литейное производство", 1967, №5, с.1.
5. Шевцов М.А., Ежова Л.И. Техничко-экономические предпосылки плавки чугуна в индукционных электропечах. — "Литейное производство", 1968, №9, с.1.
6. Гендзахадзе Г.Л. и др. Тигельный миксер промышленной частоты в дуплекс-процессе производства ковкого чугуна. — "Литейное производство", 1969, №12, с.5.

7. Волчок И.П., Шульте Ю.А. Плавка стали для отливок в индукционных печах. - "Литейное производство", 1965, №6, с.6.
8. Пигор В.А., Спасский А.Е. Применение индукционных печей для приготовления алюминиевых сплавов. - "Литейное производство", 1969, №7, с.4.
9. Форбман С.А., Колобков И.Ф. Индукционные печи для плавки металлов и сплавов. М., "Металлургия", 1968. 220 с.
10. Altgauzen A.P. Einige Fragen der Elektrowormentwicklung in der UdSSR. "Elektroworm: International", 1975, Nr.2, с.77.
11. Промышленные печи и установки индукционного нагрева на выставке в Ганновере (1970). "Klerzig Fachberichte", 1970, №7, с.369.
12. Nagewald F. Induktions - Schmelz und Warmhalteofen. - "Elektroworm International", 1968, Nr.10, с.343.
13. Бирих Р.В., Брисман В.А., Рудаков В.К., Осесимметричные замкнутые течения, вызванные бегущим полем, при малых магнитных числах Рейнольдса. - "Учен. зап. Пермского гос-го ун-та", 1970, т.216, с.241.
14. Добня В.Д., Дубоделов В.И., Полищук В.П., Юдкин С.А. К вопросу о комплексном использовании температурного и гидродинамического факторов для интенсификации литейных процессов в магнитогидродинамических установках. - В кн.: "VII Рижское совещание по МГД", 1972, с.15, Рига.
15. Повх И.Л., Капуста А.Б., Чекин Б.В. Магнитная гидродинамика в металлургии. М., "Металлургия", 1972. 240 с.
16. Вулис Л.А., Генкин А.Л., Фоменко Б.А. Теория и расчет магнитогидродинамических течений. М., Атомиздат, 1971. 384 с.
17. Брановер Г.Г., Цинобер А.Б., Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М., "Наука", 1970. 380 с.
18. Muhlbauer A. Krafte und Stromungen in der Schmelze eines Induktions - Trigelofens. - "Acta Technica", 1969, Nr.6, с.686.
19. Тир Л.Л. Методика исследования магнитогидродинамических и массообменных характеристик индукционных тигельных электропечей. - В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева. М., 1972, вып.5, с.81.

20. Микельсон Ю.Я., Якович А.Т., Тир Л.Л. Методика расчета МГД-течения в цилиндрической электропечи. - В кн.: VIII Рижское совещание по МГД. 1975, с.34, Рига.
21. Аралова Н.Р., Полищук В.П., Цин М.Р. Электромагнитное перемешивание жидкого металла пульсирующим полем. - "Магнитная гидродинамика", 1965, №2, с.139.
22. Тир Л.Л., Сви́до А.В. Структура и характеристика движения металла в ИТП. - В кн.: Уральская конференция по применению МГД в металлургии. 1974, с.21, Пермь.
23. Микельсон А.Э., Панасюк Л.С., Слюсарев Н.М., Явич В.Е. Исследование перемешивания в модели гарнисажного тигля в переменном магнитном поле. "Магнитная гидродинамика", 1973, №3, с.71.
24. Hakeschmidt M, Einführung in die Grundloggen der Anlichkeitstheorie. - "Neue Hutte", 1972, Nr.3, с.174.
25. Драгункина Н.И., Тир Л.Л. Экспериментальное исследование условий подобия движения расплава в индукционной плавильной печи. - "Магнитная гидродинамика", 1966, №1, с.137.
26. Тир Л.Л. О моделировании движения жидкого металла в индукционной плавильной печи. - "Магнитная гидродинамика", 1965, №4, с.120.
27. Muhlbauer A, Zur Modelltechnischen Nachbildung der Badebewegungen im Induktions - Trigelofen. - "Elektrowerke International", 1969, Nr.10, с.398.
28. Брискман В.А., Кривонищенко И.А., Кропачев Г.П. Условия подобия и моделирование перемешивания жидких металлов бегущим магнитным полем. - "Магнитная гидродинамика", 1973, №3, с.119.
29. Тир Л.Л., Шевцов М.С., Ченцова Л.К. Исследование влияния частоты на МГД-эффекты в индукционной тигельной электропечи. - "Электротермия", 1965, с.48.
30. Столов М.Я., Тир Л.Л., Чайкин П.М. Исследование эффективности двухфазных и трехфазных устройств электромагнитного перемешивания расплава. - "Исследования в области промышленного электронагрева", 1969, вып.3, с.105.

31. Свидо А.В., Тир Л.Л. Влияние геометрических данных электромагнитной системы на движение расплава в индукционной электропечи.-В кн.: VII Рижское совещание по МГД.1972, с.37, Рига.
32. Тир Л.Л. Исследование закономерностей движения расплава в индукционной печи.-В кн.: VII Рижское совещание по МГД.1972, с.25, Рига.
33. Столов М.Я. Исследование движения жидкого металла в цилиндрической ванне при изменении угла сдвига фаз магнитных потоков в двухфазном УЭМП.-В кн.: VII Рижское совещание по МГД.1972, с.31, Рига.
34. Тир Л.Л. Основные закономерности движения расплава в электромагнитном поле индукционной электропечи.-"Исследования в области промышленного электронагрева", 1973, т.6, с.115.
35. Свидо А.В., Тир Л.Л. Влияние геометрических параметров магнитной системы на движение расплава в индукционной печи.-"Магнитная гидродинамика", 1973, №3, с.144.
36. Простяков А.А., Тир Л.Л. Состояние работ по управлению движением расплава в индукционных электропечах.-"Уральская конференция по применению МГД в металлургии", 1974, с.20, Пермь.
37. Френкель П.Г., Фомин Н.И., Простяков А.А. К вопросу о создании однонаправленной циркуляции расплава в однофазных ИТП.- В кн.: VIII Рижское совещание по МГД.1975, с.37, Рига.
38. Тир Л.Л. Движение расплава в индукционной тигельной печи под действием бегущего магнитного поля.-"Исследования в области промышленного электронагрева", 1973, вып.6, с.122.
39. Тир Л.Л. Обжиг расплава электромагнитным полем в плавильных электропечах.-"Магнитная гидродинамика", 1971, №1, с.138.
40. Тир Л.Л. Метод оценки скоростей движения металла в индукционных тигельных печах.- В кн.: VIII Рижское совещание по МГД.1975, с.31, Рига.

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ИНДУКЦИОННОГО РАСХОДОМЕРА

Возможности повышения точности индукционных расходомеров за счет совершенствования измерительных схем в значительной степени ограничены. Точность измерения расхода в первую очередь ограничена уровнем собственных помех преобразователя (э.д.с. дебаланса) [1]. Таким образом ставится задача повышения чувствительности S преобразователя расхода без существенного увеличения помех, а также уменьшения температурной зависимости его метрологической характеристики.

Одногранные модели преобразователей расхода, используемые в большинстве работ, позволяют изучить лишь отдельные вопросы, например, выбор полюсного деления, влияние зубчатости и т.п.

Эффекты, связанные с интегральной оценкой влияния профиля скорости и формой канала, могут быть решены только при изучении двумерной модели преобразователя расхода.

Ясно, что собственные помехи преобразователя растут с увеличением индукции магнитного поля возбуждения. Следовательно, необходимо провести оценку зависимости чувствительности от параметра преобразователя расхода (в том числе геометрии канала) и рассмотреть возможности увеличения чувствительности без соответствующего увеличения энергии магнитного поля.

В качестве параметра, характеризующего чувствительность преобразователя расхода, выберем следующий:

$$\bar{S} = \frac{1}{\bar{\omega} Re_m} \bar{E},$$

где $\bar{\omega} = \mu_0 b \omega b^2$, $Re_m = \mu_0 v b$,

E - э.д.с. индукционного поля в приемных катушках.

Для оценки чувствительности рассмотрим двумерную модель индукционного преобразователя расхода, представленную на рис. I. Для расходомера с бегущим магнитным полем и канала произвольного сечения решение задачи в безиндукционном приближении дано в работе [2]. Если на профиль скорости по сечению канала никаких ограничений не накладывать, то соответствующее решение может быть получено методом осреднения функциональных поправок [3].

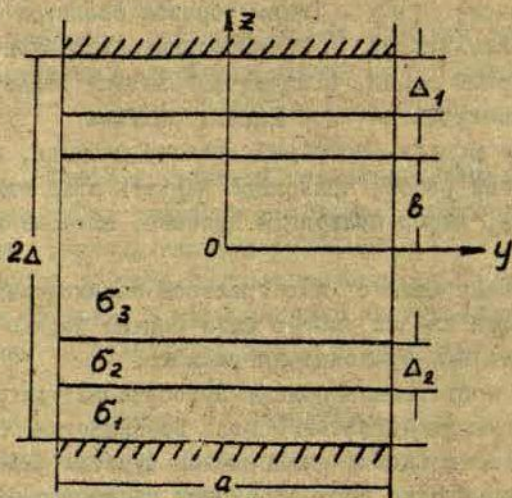


Рис. I

Ток обмотки индукторов представим поверхностными токами

$$j_y = A[\theta(y+a/2) - \theta(y-a/2)] \exp\{i(\omega t - \alpha x)\},$$

$$j_x = -\frac{A}{i\alpha}[\delta(y+a/2) - \delta(y-a/2)] \exp\{i(\omega t - \alpha x)\}.$$

$\theta(y \pm a/2)$ - единичная обобщенная функция,

$\delta(y \pm a/2)$ - δ - функция, A - линейная токовая на-

грузка.

В предложении, что при $y = \pm a/2$

$$B_{x,z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

с помощью интегральных преобразований для каждой области $n = 1, 2, 3$ - теплоизоляции, стенок канала и жидкого металла соответственно, получим уравнение для z - составляющей индукции

$$\frac{\partial^2 B_n^0}{\partial z^2} - \alpha_n^2 B_n^0 = \varphi_n^0 \quad (1)$$

Для области теплоизоляции $\alpha_1^2 = \alpha^2 + \psi_1^2$ в стенках канала

$$\alpha_2^2 = \alpha^2 + i\mu_0 \sigma_1 \omega + \psi_1^2$$

в жидкости $\alpha_3^2 = \alpha^2 + \psi_2^2 + i\mu_0 \sigma_3 (\omega - \alpha v_0)$ и $v_0 = q/2ab$,

$$\psi_1 = (2j+1)\pi/a$$

Обратные преобразования даются следующими рядами:

$$B^1 = \sum_{j=0}^{\infty} B^0 \cos \psi_j y, \quad (2)$$

где

$$B^0 = B^1 \cos(\omega t - \alpha x) \quad (3)$$

На поверхности индукторов для z - компоненты поля должны выполняться условия

$$\frac{\partial B_{b,n}^0}{\partial z} = \frac{4\mu A_{b,n}}{i\alpha} \frac{\alpha^2 + \psi^2}{\psi a} (-1)^j, \quad (4)$$

где индексы "в" и "н" - относятся соответственно к верхнему и нижнему индуктору.

Решение краевой задачи (1), (4) без учета профиля скорости и конечной проводимости стенок канала может быть представлено в виде функции th , удобной для машинного расчета.

На поверхности приемного индуктора z -компонента поля равна (при $I_s = 0$):

$$B_z = \frac{2\mu_0 A}{i\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\alpha^2 + \psi_\nu^2}{\psi_\nu a} T_\nu^- \cos \psi_\nu y, \quad (5)$$

где

$$T_\nu^- = \frac{X_\nu (\operatorname{th}^2 \bar{\alpha} X_\nu - 1) [\operatorname{th}^2 \bar{\alpha} (\kappa^{-1} - 1) - 1]}{[X_\nu + \operatorname{th} \bar{\alpha} (\kappa^{-1} - 1) \operatorname{th} \bar{\alpha} X_\nu][X_\nu \operatorname{th} \bar{\alpha} X_\nu + \operatorname{th} \bar{\alpha} (\kappa^{-1} - 1)]} \quad (6)$$

$$\kappa = b/\delta, \quad X_\nu = 1 + \frac{\psi_\nu^2 \kappa_0^2}{\alpha^2} + i \left(\frac{\bar{\omega}}{\alpha^2} - \frac{\operatorname{Re} m}{\alpha} \right); \quad \psi_\nu = (2\nu + 1)\pi,$$

Считая, что весь поток проходит через зубец приемного индуктора толщиной t_3 , для индуцированной э.д.с., можем записать:

$$E_{\delta m} = - \frac{8\mu_0 m I W}{\pi \kappa_0} W_{np} \sin \alpha \frac{t_3}{2} \omega \bar{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\psi_\nu^2} + \frac{\kappa_0^2}{\alpha^2} \right) \times \\ \times T_\nu^- e^{i(\omega t - \alpha x_0)}. \quad (7)$$

W_{np} - число витков приемного индуктора,

x_0 - положение центра приемного витка.

Для расходомеров, в которых используется явление синхронности, необходимо исследовать выражение для $E_{\delta m}$ вблизи точки $S = 0 (\omega = \alpha v_0)$. Разлагая (7) в ряд Маклорена по S и ограничиваясь линейным членом разложения, получим

$$E_{\delta m} = - \frac{8\mu_0 \operatorname{Im} W W_{np}}{\pi \kappa_0} \bar{\omega} \bar{\alpha} \sin \alpha \frac{t_3}{2} (\omega - \alpha v_0) \times \\ \times \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{0\nu} \sin(\omega t - \alpha x_0) \left(\frac{1}{\psi_\nu^2} + \frac{\kappa_0^2}{\alpha^2} \right). \quad (8)$$

где $F_{0\nu}$ - линейный член разложения (6).

Как следует из выражения (8), при синхронной скорости ($\omega = \alpha v_0$) вторичная э.д.с. обращается в нуль.

Результаты расчета чувствительности по данной модели согласуются с результатами работы [2].

Для преобразователей с пульсирующим магнитным полем воз-

буждения величина индуцированной э.д.с. определится следующим выражением:

$$E_{\theta m} = \omega \bar{\alpha} \frac{8 \mu_0 I W W_{np} m}{\rho \pi k_0} \sin \frac{t_3 \alpha}{2} \sum \left(\frac{1}{\psi_j^2} + \frac{k_0^2}{\bar{\alpha}^2} \right) \times \\ \times [T_j^- e^{-i \alpha x_0} - T_j^+ e^{i \alpha x_0}] e^{i \omega t}$$

где T_j^+ определяется выражением (6), в котором χ_j^2 заменяется на:

$$\chi_j^2 = 1 + \frac{k_0 \psi_j^2}{\bar{\alpha}^2} + i \frac{(\omega + \bar{\alpha} Re_m)}{\bar{\alpha}^2}$$

Результаты расчета чувствительности преобразователя дифференциального расходомера представлены на рис. 2 и рис. 3.

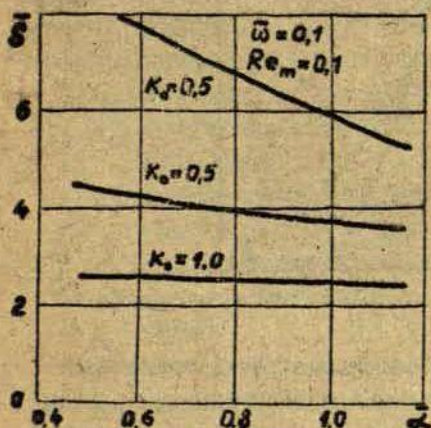


Рис. 2

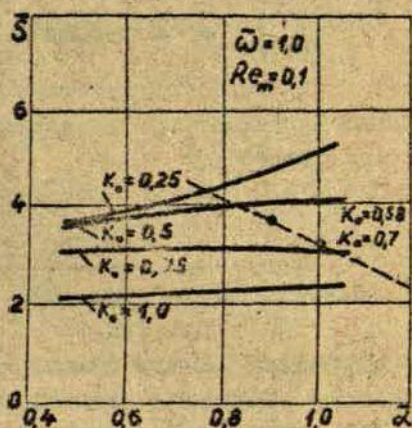


Рис. 3

При постоянном расходе уплощение канала позволяет без увеличения энергии магнитного поля возбуждения существенно увеличить чувствительность преобразователя расхода.

Учет конечной ширины магнитопровода, режима течения и формы канала необходим при конструировании преобразователей, имеющих унифицированный сигнал, Э.д.с. индукции и чувствительность преобразователя расхода с учетом этих факторов может быть найдена путем численного решения уравнения для нормальной компоненты индуцированного магнитного поля, приведенного, например, в работе [4].

Таким путем были выполнены расчеты Э.д.с. и чувствительности для преобразователей с пульсирующим полем возбуждения в случае каналов круглого и эллиптических сечений с соотношением полуосей $b/a = \kappa_2 = 0,86; 0,7; 0,577$. Для тех же значений b/a получены ^{расчет} снятые на ртутном контуре ДУ-40 при постоянном расходе.

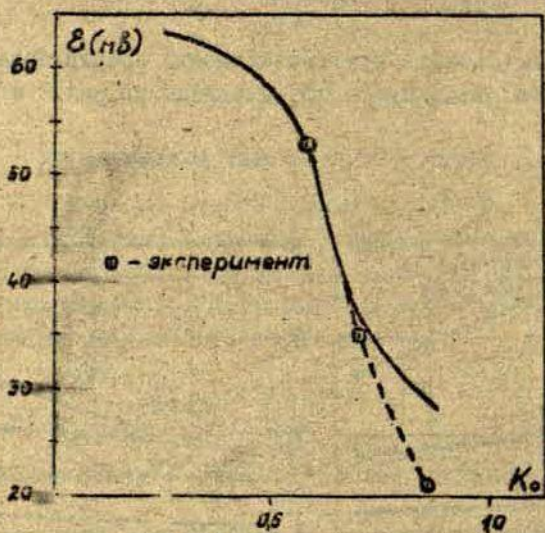


Рис. 4

Результаты расчета и экспериментальные точки представлены на рис. 4. Сравнения расчетных данных и эксперимента показывает, что переход от круглого канала к эллиптическому с отношением полуосей $\kappa_2 = 0,577$ при том же расходе и энергии поля возбуждения повышает чувствительность преобразователя

почти в 1,5 раза. Можно отметить, что расчетные значения чувствительности превышают экспериментальные при тех же значениях k_2 , что объясняется отсутствием учета полей рассеяния, связанных с конечностью ширины индуктора и продольным эффектом. С ростом относительной ширины канала различие между обеими кривыми уменьшается.

Была исследована также зависимость чувствительности от других параметров, характеризующих геометрию канала и индуктора.

Так как по определению чувствительность $S = \frac{dE}{dV}$, можно получить функциональную зависимость чувствительности от параметров среды, преобразователя и частоты тока питания. В общем случае для всех методов измерения расхода, использующих линейные индукторы, чувствительность в линейном диапазоне частотной и выходной характеристик определяется выражением:

$$S = K \omega B_0 F(\bar{\alpha}, k_0, k)$$

где K - коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств приемных обмоток преобразователя. B_0 - амплитудное значение индукции магнитного поля возбуждения на поверхности намагничивающего индуктора. $F(\bar{\alpha}, k_0, k)$ - функция геометрии, общая для всех известных методов измерения:

- а) следящих, использующих явление синхронности;
- б) выделения бегущей составляющей пульсирующего магнитного поля;
- в) дифференциального метода, работающего на оптимальной частоте;
- г) метода отношений;
- д) пульсирующего поля с движущейся пространственной обмоткой.

Исследование зависимости чувствительности от геометрических параметров преобразователя и канала сводится к рассмотрению функции $F(\bar{\alpha}, k_0, k)$.

На ЭВМ была рассчитана функция геометрии, выражение которой

в общем случае имеет вид:

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\Psi_{\nu}^2} + \frac{\kappa_0^2}{\bar{\alpha}^2} \right) F_{0\nu}(\bar{\alpha}, \kappa_0, \kappa),$$

$$F_{0\nu} = \left\{ \chi_{0\nu}^{-1} - 2\bar{\alpha} \operatorname{th} \bar{\alpha} \chi_{0\nu} - \frac{1 + \bar{\alpha} \operatorname{th} \bar{\alpha} (\kappa^{-1} - 1) \operatorname{ch}^{-2} \bar{\alpha} \chi_{0\nu}}{\chi_{0\nu} + \operatorname{th} \bar{\alpha} (\kappa^{-1} - 1) \operatorname{th} \bar{\alpha} \chi_{0\nu}} - \frac{\operatorname{th} \bar{\alpha} \chi_{0\nu} + \bar{\alpha} \chi_{0\nu} \operatorname{ch}^{-2} \bar{\alpha} \chi_{0\nu}}{\chi_{0\nu} \operatorname{th} \bar{\alpha} \chi_{0\nu} + \operatorname{th} \bar{\alpha} (\kappa^{-1} - 1)} \right\} \chi_{0\nu}^{-1/2} T_{\nu}^{-1} \Big|_{\sigma=0}$$

Выражения $\chi_{0\nu}$, Ψ_{ν} и T_{ν}^{-1} приведены в формуле (6).

На рис. 5 представлена зависимость $F(\bar{\alpha}, \kappa_0, \kappa)$ от $\bar{\alpha}$ для коэффициентов заполнения $\kappa = 1,0; 0,9; 0,8$ и $\kappa_0 = 0,5; 0,3; 0,2$.

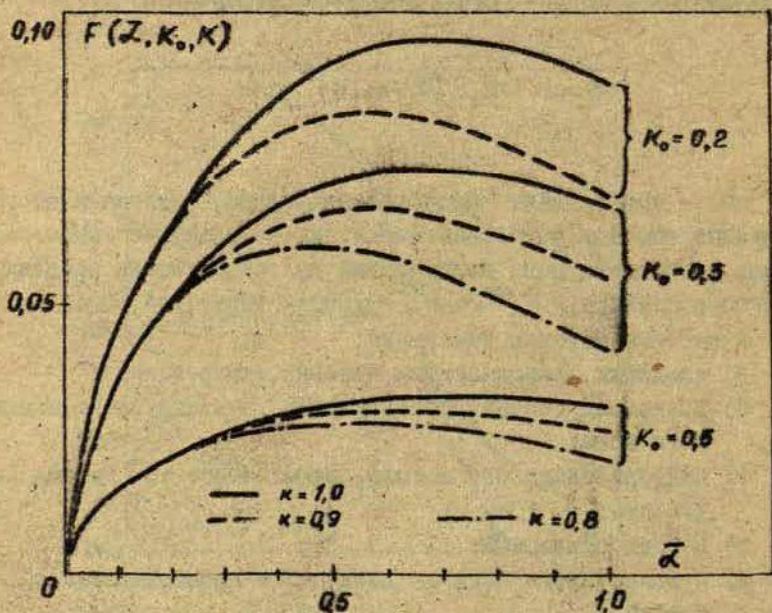


Рис. 5

Интересно отметить, что необходимое число членов в сумме для достижения заданной точности (10^{-4}) зависит только от коэффициента κ_0 , связанного с геометрией канала. При $\kappa_0 = 0,5$ заданная точность достигается уже при ($\nu = 1$) учете двух членов

суммы (10), в то время как для $k_0 = 0.2$ требуется учитывать не менее пяти слагаемых.

Таким образом, уплощение канала, приводя к росту функции геометрии $F(\bar{\alpha}, k_0, k)$, и вместе с тем чувствительности устройства, требует и более строгого рассмотрения самой функции геометрии. Наибольшая чувствительность, как и следовало ожидать, достигается при полном заполнении зазора проводящей средой, т.е. при $k = 1.0$.

При этом зависимость функции геометрии от $\bar{\alpha}$ носит экстремальный характер, она убывает как для $\bar{\alpha} > 1$, так и для малых $\bar{\alpha} \rightarrow 0$, в отличие от аналогичной зависимости β [1], где выражение для функции геометрии получено в приближении почти плоскопараллельного поля, т.е. при $\bar{\alpha}/k \ll 1$.

Следует отметить, что уплощение канала приводит к уменьшению оптимальной частоты, которая для случая $k_0 \leq 0.25$ может быть рассчитана по формулам, рекомендованным в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесконтактный контроль потока жидких металлов. Под ред. В.Э.Циркунова. Рига, "Зинатне", 1973, 3-243.
2. Кишштейн Г.Х. Бесконтактный расходомер с бегущим полем и каналом произвольного поперечного сечения. "Магнитная гидродинамика", 1972, №4, 148-150 с.
3. Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. Киев, 1967. 288 с.
4. Лиелпетер Я.Я., Сорокина Э.С., Циркунов В.Э. Оценка профиля скорости в канале МГД-машины по индукции вторичного поля. "Магнитная гидродинамика", 1975, №3, с. 153-155.

ИНДУЦИРОВАННОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ПРОФИЛЬ СКОРОСТИ В КАНАЛЕ ЛИНЕЙНОЙ МГД-МАШИНЫ

Рост мощностей МГД-машины и скоростей потока жидкого металла, а также расширение области их применения приводят к необходимости учета реального распределения скорости в канале МГД-машины и вместе с тем влияние индуцированных полей на основные ее характеристики. При этом необходимо учитывать сложную скоростную структуру потока в канале МГД-машины: образование несимметричных, М-образных течений, и зон с обратным затеканием.

Знание структуры потока позволило бы разрабатывать рациональные конструкции МГД-машин.

Несомненно важным является разработка методики оценки профиля скорости в канале МГД-машины по структуре индуцированного магнитного поля, что существенно упростило бы экспериментальные исследования.

Известно, что величина индуцированного магнитного поля в МГД-устройстве пропорциональна $[\vec{v} \times \vec{B}]$, где поле \vec{B} удовлетворяет уравнению:

$$\Delta \vec{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

а скорость \vec{v} является решением уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} - \frac{1}{\rho} [\vec{B} \operatorname{rot} \vec{B}] \quad (2)$$

Не касаясь причин, вызывающих ту или иную структуру потока жидкого металла в канале, в электродинамическом приближении индуцированное магнитное поле определяется решением уравнения вида (1) для заданного профиля скорости, конечных размеров индуктора и канала произвольного сечения.

Без учета продольного краевого эффекта, не вносящего существенные искажения в зависимость индуцированного магнитного

поля от скоростной структуры потока, эта зависимость может быть определена в рамках двумерной модели индукционной машины. В особых случаях, например, целевидных каналов, эта зависимость может быть описана достаточно точно одномерной моделью.

Была исследована взаимозависимость компонент индукции вторичного магнитного поля и различных типов профилей скорости в одномерном и двумерном случаях (1), исходя из уравнений:

$$\frac{\partial^2 b_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_x}{\partial y^2} - [\alpha^2 + i\mu_0 \delta (\omega - \alpha v)] b_x = i\mu_0 \delta (\omega - \alpha v) B_{xcm}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_y}{\partial y^2} - [\alpha^2 + i\mu_0 \delta (\omega - \alpha v)] b_y = i\mu_0 \delta (\omega - \alpha v) B_{ycm}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b_z}{\partial y^2} - [\alpha^2 + i\mu_0 \delta (\omega - \alpha v)] b_z = i\mu_0 \delta (\omega - \alpha v) B_{zcm} - \mu_0 \delta \left[B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (4)$$

Т.к. поперечная компонента индукции отлична от нуля лишь при учете конечной ширины индуктора (2) и имеет величину порядка $b_x \sim B_{xcm} Re_m$, то ее можно не рассматривать.

Нахождение профиля скорости в канале по заданному распределению индукции вторичного магнитного поля на границе канала в общем случае является обратной задачей и сводится к решению интегрального уравнения типа Фредгольма I рода со сложным ядром. Такая задача является некорректной и ее решение требует серьезного математического исследования [3, 4].

Для качественной оценки характера профиля скорости в канале уравнения (3,4) решались численно методом верхней релаксации на ЭВМ GE-415 для следующих профилей скорости:

- а) равномерный, б) турбулентный, в) ламинарный, г) M-образный, д) несимметричный.

Расчет нормальной компоненты индукции вторичного поля для целевидного канала ($b \ll a$), когда профиль скорости и распределение нормальной компоненты по высоте канала можно не учитывать, показал, что существует однозначное соответствие между распределением индукции и профилем скорости по ширине канала.

А именно, симметричное распределение индукции получается для симметричного профиля скорости, для каждого типа профиля имеет место характерное распределение модуля индукции и ее фазы. В случае несимметричного распределения индукции профиль скорости тоже несимметричный и имеет максимум в окрестности точки, где одновременно наблюдается максимум амплитуды индукции и минимум ее фазы.

Примеры такой зависимости представлены на рис.1, рис.2.

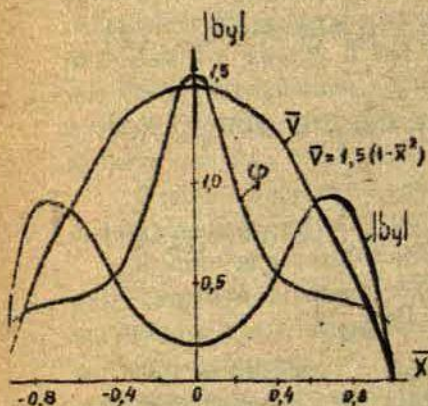


Рис.1

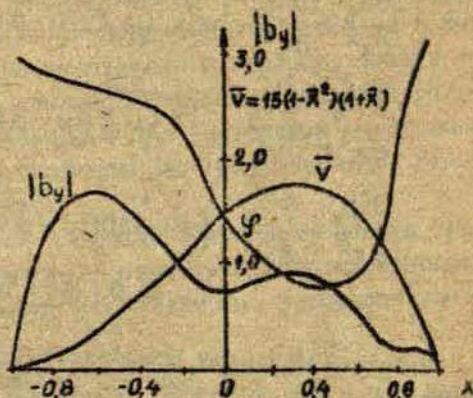


Рис.2

Расчет зависимости индукции вторичного поля и профиля скорости по двумерной модели показывает, что в этом случае соизмеримость высоты и ширины канала и учет распределения компонент индукции по высоте канала приводит к сглаживанию зависимости компонент индукции от профиля скорости.

При этом нормальная компонента индукции слабо зависит от профиля скорости по высоте канала и более чувствительна к распределению скорости по ширине канала.

Результаты расчетов по двумерной модели можно найти в (I).

Пример зависимости тангенциальной компоненты индукции для несимметричного профиля скорости по высоте и ширине канала представлен на рис.3. Видно, что тангенциальная компонента наиболее чувствительна к распределению скорости по высоте канала.

При этом в случае симметричного профиля скорости по высоте

канала тангенциальная компонента индукции полностью антисимметрична, а суммарный ее поток в сечении канала равен нулю.

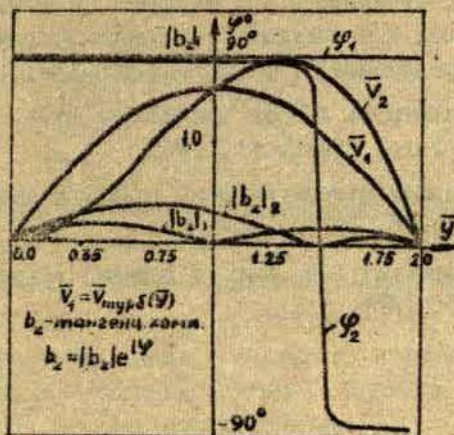


Рис. 3

Нарушение симметрии распределения скорости по высоте канала вызывает асимметрию в распределении тангенциальной составляющей по сечению канала, о чем можно судить по ее интегральной характеристике.

Полученные зависимости показывают, что по заданному распределению амплитуды и фазы нормальной и тангенциальной компонент индукции можно оценить в ряде случаев характер течения в канале и в первую очередь вылить асимметрию профиля скорости как по высоте, так и по ширине канала, а также в железных каналах выделить область наибольшего значения скорости.

Таким образом, индуцированные магнитные поля, приводя к искажению структуры магнитного поля и скоростного потока МГД-машины, характеризуют не только среднюю скорость потока, но и дают оценочную информацию о характере профиля скорости по сечению канала.

Однозначное определение профиля скорости по заданному распределению индуцированного поля в общем случае требует дальнейшего исследования, и связано в первую очередь с проблемой устойчивости решений обратных задач математической физики и выбором метода их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лиелпетер Я.Я., Сорокина Э.С., Циркунов В.Э. Оценка профиля скорости в канале МГД-машины по индукции вторичного поля.- "Магнитная гидродинамика", 1975, №3, 153-155.
2. Бесконтактный контроль потока жидких металлов. Под ред. Циркунова В.Э. Рига, "Зинатне", 1973. 243 с.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М., "Наука", 1974, 258-269.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., "Наука", 1974. 224 с.

КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА БИОЛОГИЧЕСКОГО МИКРОКАЛОРИМЕТРА В ПРИБЛИЖЕНИИ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ

Качество биологических микрокалориметров определяется рядом критериев качества [1]. В настоящей работе они рассмотрены по отношению к калориметрическим системам, разработанным в Институте Биоорганической химии им. И. М. Шемякина АН СССР [2]. Упрощенная схема калориметра показана на рис. 1. Здесь: 1 — ячейки; 2 — термоэлементы; 3 — цилиндр детектора; 4 — слой изоляции; 5 — выравнивающий цилиндр.

Ряд теплофизических исследований вышеуказанных калориметров был проведен ранее [2]. Теоретически были получены температурные поля калориметра при воздействии внешнего теплового импульса в зависимости от времени для трехслойной цилиндрической модели без учета влияния на это температурное поле термоэлементов и ячеек детектора. Однако комплексного исследования теплофизики калориметра с точки зрения его критериев качества до сих пор не было проведено. Ниже проводится это исследование на основе плоской модели калориметра (рис. 2). Рассмотрим соответствие этой модели реальной конструкции калориметра. I-й слой модели соответствует выравнивающему цилиндру, II-й — слою изоляции, III-й — цилиндру детектора, IV-й — термоэлементам, V-й — ячейкам т.е. плоская модель представляет разрез калориметра по плоскости, проходящей через оси ячеек. Расстояние l_1 соответствует радиусу калориметра r_0 ($l_1 = r_0$). Теплофизические постоянные материалов (теплопроводность, удельная теплоемкость, удельный вес) калориметра совпадают с характеристиками соответствующих слоев плоской модели.

В плоской модели учитывается распространение тепла только в одном направлении, температурное поле в этой модели является функцией только координаты x и времени t , в то время как в реальной конструкции оно является трехмерным, зависящим от

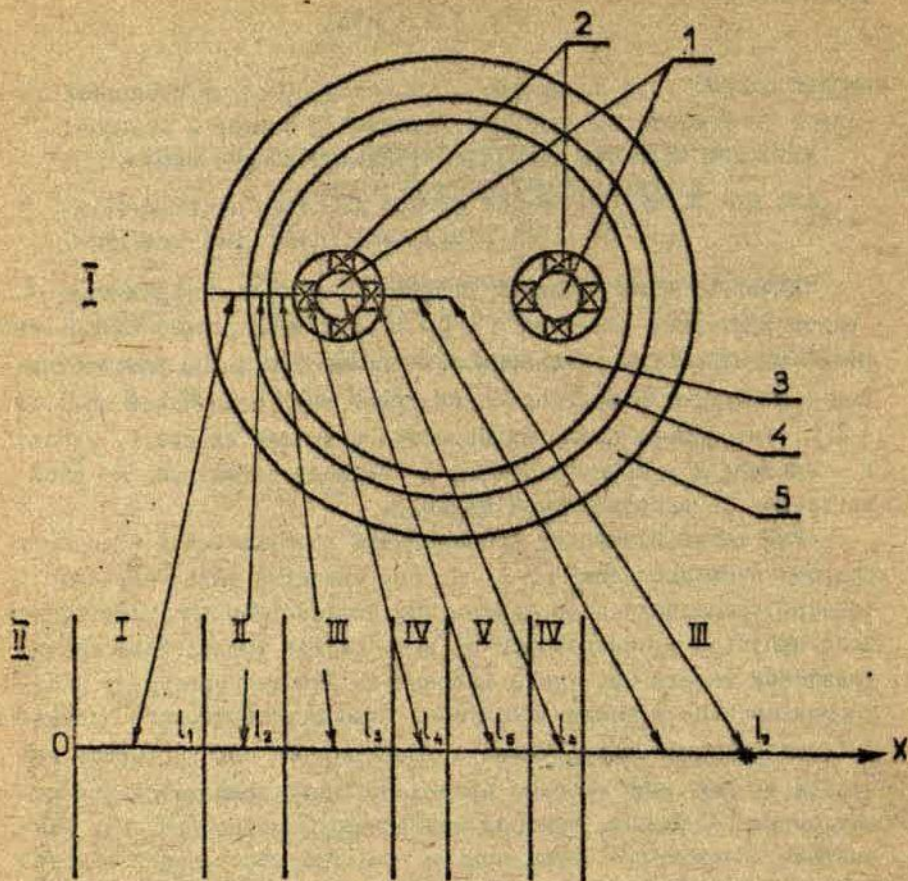


Рис. I
Упрощенная схема дифф. калориметра

Рис. 2
Плоская модель калориметра

времени. Плоская модель не дает возможности судить об абсолютных значениях температур в определенных точках калориметра. Так как в задачах оптимизации (а конечной нашей целью является оптимизация конструкции калориметра) целевую функцию необходимо вычислять много раз, то расчет методом сеток температурных полей в цилиндрической модели с учетом конкретных конструктивных особенностей калориметра является практически невозможным. Плоская модель позволяет получить выражения для критерия качества в аналитическом виде, что позволяет провести исследова-

ние зависимости критериев качества от параметров калориметра. Так как в данной задаче оптимизации (как и во всех задачах оптимизации), важно знать зависимость критериев качества от физических и геометрических параметров калориметра только относительно, а не абсолютные значения этих критериев, то плоская модель калориметра может служить основой для оптимизации в первом приближении.

Чтобы получить выражения для критериев качества: взаимного влияния ячеек, защищенности, повторяемости [1], рассмотрим тепловые процессы в одномерной модели. Температура во всех слоях плоской модели удовлетворяет нестационарному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha_i^2} \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где

α_i - температуропроводность i -го слоя $\left[\frac{\text{м}}{\text{с}^{1/2}} \right]$;

$$\alpha_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}}$$

λ - теплопроводность i -го слоя $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{град}} \right]$;

c_i - удельная теплоемкость i -го слоя

ρ_i - плотность i -го слоя $\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right]$

Приведем уравнение (1) к безразмерному виду. Введем безразмерные параметры *):

а) относительная длина

за основу берем радиус калориметра r_0 (в плоской модели это соответствует величине l_7)

$$l_{*i} = \frac{l_i}{l_7} = \frac{l_i}{r_0}; \quad l_{*7} = 1; \quad x_* = \frac{x}{l_7};$$

*) все безразмерные величины обозначены звездочкой внизу у соответствующей величины.

б) при определении относительных теплофизических параметров за основу берем теплофизические параметры цилиндра детектора, что в плоской модели соответствует теплофизическим параметрам третьего слоя.

$$a_{*i} = \frac{a_i}{a_{III}}; \quad \lambda_{*i} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{III}}$$

в) относительное время за основу берем характерное время, определенное на основе коэффициента температуропроводности третьего слоя и радиуса калориметра r_0 , т.е. характерного времени диффузии тепла на расстояние r_0 при коэффициенте температуропроводности третьего слоя.

$$t_* = t \frac{a_{III}^2}{r_0^2}$$

С введением этих параметров уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a_{*i}^2} \frac{\partial u_{*i}}{\partial t_*} = 0 \quad (2)$$

Кроме этих безразмерных параметров, в дальнейшем будут использованы следующие безразмерные комплексы:

$$K_{ij} = \frac{\lambda_i a_j}{\lambda_j a_i}; \quad \dot{c}_{ij} = \frac{1 - K_{ij}}{1 + K_{ij}}; \quad (3)$$

$$h_1 = \frac{l_{*1}}{a_{*I}}; \quad h_2 = \frac{l_{*2} - l_{*1}}{a_{*II}}; \quad h_3 = \frac{l_{*3} - l_{*2} + l_{*7} - l_{*6}}{a_{*III}}$$

$$h_4 = \frac{l_{*4} - l_{*3}}{a_{*IV}} = \frac{l_{*8} - l_{*5}}{a_{*V}}; \quad h_5 = \frac{l_{*7} - l_{*6}}{a_{*5}}$$

Ниже рассматриваются решения уравнений теплопроводности при определенных граничных и начальных условиях в трех случаях:

1) для трехслойной модели, изображенной на рис.3. Данная

модель в частности используется при решении задачи о взаимном влиянии ячеек детектора, где существенно в модели, показанной на рис.2 учесть только средние слои калориметра, т.е. слои III и IV.

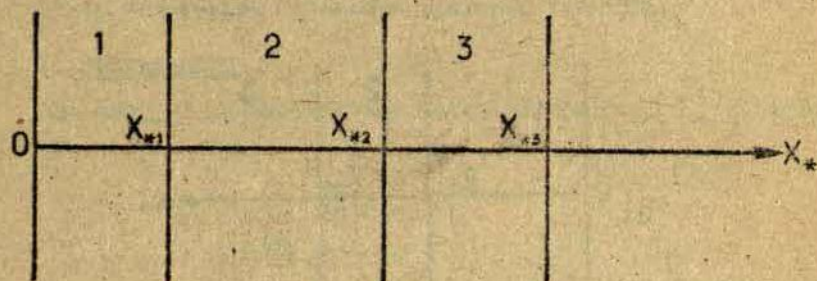


Рис.3 Модель для задачи №1

Граничные условия для модели, изображенной на рис.3, следующие:

$$u_* \Big|_{X_* = 0} = F(t_*); \quad u_* \Big|_{X_* = X_{*3}} = 0 \quad (4)$$

Начальное условие

$$u_* \Big|_{t_* = 0} = 0 \quad (5)$$

Условия теплового контакта (равенства температур и тепловых потоков на границах раздела между слоями):

$$u_{*i} \Big|_{X_* = X_{*i}} = u_{*(i+1)} \Big|_{X_* = X_{*i}} \\ \lambda_{*i} \frac{\partial u_{*i}}{\partial X_*} \Big|_{X_* = X_{*i}} = \lambda_{*(i+1)} \frac{\partial u_{*(i+1)}}{\partial X_*} \Big|_{X_* = X_{*i}} \quad i = 1, 2 \quad (6)$$

Решения уравнения (2) для модели, изображенной на рис.3, при условиях (4), (5), (6) приведено в приложении I.

2) для трехслойной модели, изображенной на рис.4.

По сравнению с предыдущей моделью, изображенной на рис.3, третий слой имеет бесконечную толщину

$$x_{*3} \rightarrow \infty \quad (7)$$

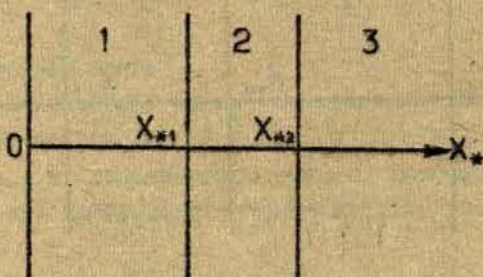


Рис.4
Модель для задач №2 и №3

Данная модель, в частности, используется при решении задачи о повторяемости, где существенно в модели, показанной на рис.2, учесть только средние слои калориметра III и IV, а также при решении задачи о защищенности от внешних тепловых импульсов, где существенно учесть первые три слоя I, II и III.

Решение уравнения (2) для модели, изображенной на рис.3, при помощи предельного перехода $x_{*3} \rightarrow \infty$.

3) для модели, изображенной на рис.4.

По сравнению с предыдущей моделью изменено граничное условие при $x_* = 0$. Вместо температуры в граничной точке задается тепловой поток через нее:

$$\left. \frac{\partial u_*}{\partial x_*} \right|_{x_* = 0} = \Phi(t_*) \quad (8)$$

Данная модель в частности используется при решении задачи о защищенности от внешних тепловых импульсов, существенно учесть первые три слоя I, II и III модели, изображенной на рис.2.

Решение уравнения (2) для этой модели нельзя получить из решения для модели, изображенной на рис.3, так как граничное условие (3) существенно влияет на ход решения. Решение уравнения (2) с учетом граничных условий (5), (7) и (8) приведено в приложении 2.

Далее рассмотрим отдельные критерии качества.

1. Защищенность

Как следует из определения защищенности (см. [1] формула (3))

$$A_1 = \frac{\Delta Q_b}{\Delta Q_p} \frac{\Delta U_{p, \text{MAX}}}{\Delta U_{b, \text{MAX}}} \quad (9)$$

где

ΔQ_b - внешний тепловой импульс;

$\Delta U_{b, \text{MAX}}$ - вызванная этим импульсом максимальная разность температур в ячейках;

ΔQ_p - тепло выделившееся за время реакции в одной из ячеек;

$\Delta U_{p, \text{MAX}}$ - максимальная разность температур в ячейках вызванная реакцией.

Исследуя защищенность, существенно учесть первые три слоя калориметра. Слои IV и V здесь не учитываются, так как они имеют более низкую теплопроводность, чем третий слой, и в реальном калориметре тепловой импульс обходит первую ячейку почти не изменяясь. Поэтому здесь используется часть модели (рис.2), изображенная на рис.5 с учетом того, что

$$t_0 - t_3 = 0$$

Чтобы получить зависимости для разности температур, вызванной реакцией в одной из ячеек, начало координат переносится в точку $t_{+0} = 0$. Эта модель изображена на рис.6. Здесь учитывается только один - третий слой.

Внешний тепловой импульс задается в виде

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} = \Phi(t_*) = -Q_2 \delta(t_*), \quad (10)$$

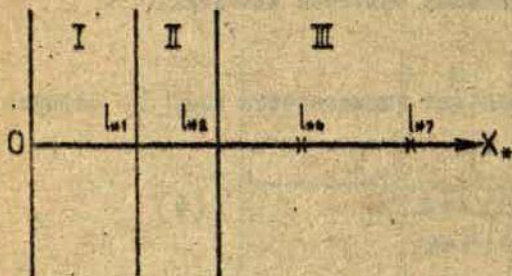


Рис. 5

Модель калориметра для исследований защищенности (внешний тепловой импульс)

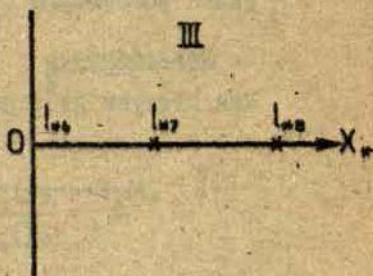


Рис. 6

Модель калориметра для исследований защищенности (химическая реакция)

где

δ - дельта функция Дирака

а толщину третьего слоя берем $x_{*} \rightarrow \infty$.

Решение такой задачи приведено в приложении 2. Из рис. 5 и определения (9) следует, что для нахождения защищенности необходимо знать значения температур третьего слоя в точках $l_{x_7} - (l_{x_7} - l_{x_6})$ и $l_{x_7} + (l_{x_7} - l_{x_6})$. Из формул (п.2) и (п.2.3) получаем

$$\Delta u_0 = \frac{4K_{12}K_{23}Q_2Q_1}{(1+K_{12})(1+K_{23})\sqrt{\pi t_*}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{m=0}^j \frac{(-1)^k c_{12}^{k-j+m} c_{23}^{j-m} k!}{(k-j)! m! (j-m)!} \times$$

$$\times \left[e^{-\frac{z_1^2}{4t_*}} - e^{-\frac{z_2^2}{4t_*}} \right] = u_{x_6}(l_{x_6}, t_*) - u_{x_6}(2l_{x_7} - l_{x_6}, t_*).$$

$$z_1 = 2[h_1(j+1/2) + h_2(k-m+1/2)] + h_3 - h_4;$$

$$z_2 = z_1 + 2h_5$$

в обозначения $K_{12}, K_{23}, c_{12}, c_{23}, h_1, h_2, h_3, h_4$

объяснены в формуле (3).

Для нахождения влияния реакции на разность температур в ячейках используется модель, изображенная на рис.6. Изменение температуры в первой ячейке задается зависимостью (граничное условие):

$$F(t_x) = \frac{u_{x01}}{\sqrt{t_x}} e^{-\frac{q_{r1}}{4t_x}} \quad (12)$$

где

q_{r1} - постоянная характеризующая скорость реакции;

u_{x01} - постоянная, характеризующая максимальное значение температуры.

Так как третий слой является неограниченным, то второе граничное условие имеет вид $u_x|_{x=\infty} = 0$.

Такая задача является частным случаем задачи, решение, которое приведено в приложении I. Для третьего слоя из формул (п. 1) и (п. 1, 3) с учетом (12) получаем:

$$u'_{x,3}(t_x, x_x) = \frac{u_{x01}}{\sqrt{t_x}} e^{-(\sqrt{q_{r1}} + \frac{x_x}{2t_x})^2/4t_x}$$

Здесь учтено, что $K_{12} = K_{23} = 1$, вследствие чего $c_{12} = c_{23} = 0$ (см. формулу (3)).

Разность температур в ячейках вследствие химической реакции:

$$\begin{aligned} \Delta u_p &= u'_{x,3}(0, t_x) - u'_{x,3}(2l_{x,1} - l_{x,2}, t_x) = \\ &= \frac{u_{x01}}{\sqrt{t_x}} \left(e^{-\frac{q_{r1}}{4t_x}} - e^{-\frac{(\sqrt{q_{r1}} + \frac{2l_{x,1}}{2t_x})^2}{4t_x}} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где h_0 объяснено в формулах (3).

Чтобы найти количество тепла, выделившееся при внешнем тепловом импульсе и в реакции, используем формулу

$$\Delta Q = \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \lambda \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_s ds dt$$

ds - элемент поверхности,

$t_2 - t_1$ - время, в течении которого выделялось тепло.

Так как модель является плоской, то необходимо брать количество тепла на единицу площади. Тогда получаем

$$\Delta Q_{*s} = \int_0^{\infty} \lambda_{*s} \left. \frac{\partial u_{*s}}{\partial x_{*s}} \right|_{x_{*s}=0} dt = \lambda_{*s} Q_{*s}, \quad (14)$$

$$\Delta Q_{*v} = \int_0^{\infty} \lambda_{*v} \left. \frac{\partial u_{*v}}{\partial x_{*v}} \right|_{x_{*v}=0} dt = \lambda_{*v} \frac{u_{*v1} \sqrt{\pi}}{a_{*v}} \quad (15)$$

Если потребовать

$$\Delta Q_{*s} = \Delta Q_{*v},$$

то для u_{*v1} получаем

$$u_{*v1} = \frac{\lambda_{*s}}{\lambda_{*v}} \frac{Q_{*s} a_{*v}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\lambda_{*s} Q_{*s}}{\sqrt{\pi}} \quad (16)$$

Тогда для зависимости получаем

$$A_1 = \frac{(1+K_{22})(1+K_{23})}{4} \left[e^{-\frac{z_{11}^2}{4t_1}} - e^{-\frac{(\sqrt{z_{11}^2 + 2h_0})^2}{4t_1}} \right] \sqrt{\pi} \Big|_{\text{max}} /$$

$$\sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{m=0}^j \frac{(-1)^k C_{12}^{k-j+m} C_{23}^{k-m} k!}{(k-j)!(m!)(j-m)!} \left[e^{-\frac{z_{11}^2}{4t_1}} - e^{-\frac{z_{11}^2}{4t_1}} \right] \Big|_{\text{max}}, \quad (17)$$

где использованы

$$\frac{\lambda_{n1}}{a_{n1}} = \frac{\lambda_{n2} a_{n2}}{\lambda_{n2} a_{n1}} = K_{12} = K_{12} K_{23}$$

и

$$z_1 = 2[h_1(j+1/2) + h_2(k-m+1/2)] + h_3 - h_4$$

$$z_2 = z_1 + 2h_3$$

Обозначения $K_{12}, K_{23}, C_{12}, C_{23}, h_1, h_2, h_3, h_4$ даны в формулах (3), а q_{n1} - в формуле (12).

На рис. 7 штрихованной частью показана область, в которой отличие результата, полученного по (17), от результата, полученного по (17) с учетом только первого члена ряда в знаменателе, не превышает одного процента. Как следует из рисунка, то использовать только первый член ряда можно почти при всех значениях параметров, и вместо формулы (17) можно пользоваться следующей формулой:

$$A_1 = \frac{(1+K_{12})(1+K_{23})}{4} \frac{\left[e^{-\frac{q_{n1}}{4t_0}} - e^{-\frac{(\sqrt{z_1} + 2h_3)^2}{4t_0}} \right] / \sqrt{t_1}}{\left[e^{-\frac{(h_1+h_2+h_3-h_4)^2}{4t_0}} - e^{-\frac{(h_1+h_2+h_3+h_4)^2}{4t_0}} \right] / \sqrt{t_1}} \quad (18)$$

Зависимость от K_{12} и K_{23} для A_1 выражается очень просто.

$$A_1(K_{12}, K_{23}) = \frac{(1+K_{12})(1+K_{23})}{4} A_1(1,1) \quad (19)$$

Следует отметить, что для формулы (17) нет такой простой зависимости.

II. Взаимное влияние ячеек

Как следует из определения взаимного влияния ячеек (см формулу (5))

$$A_3 = \frac{\Delta U_3}{\Delta U_1} (t) \tau + \frac{\Delta U_{2 \max}}{\Delta U_{1 \max}} \eta (t - \tau), \quad (20)$$

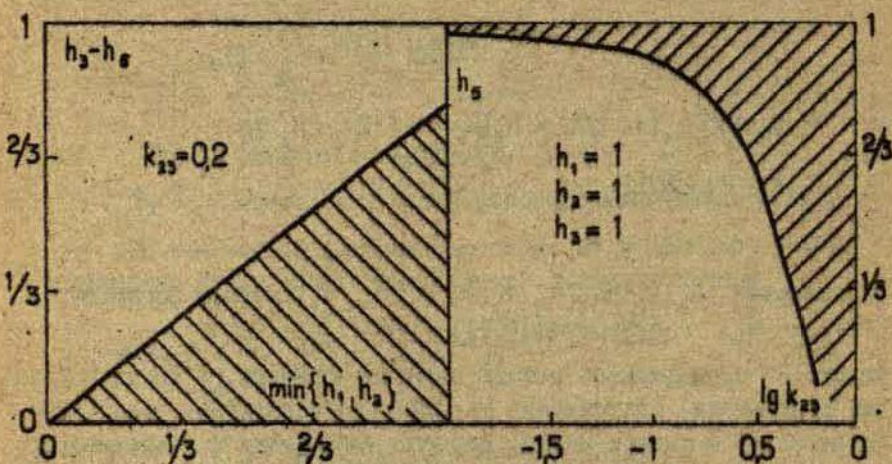


Рис.7 Область применения формул (16)

где

ΔU_1 - разность температур на концах, термоэлементов около ячейки, в которой происходит реакция;

ΔU_2 - разность температур на концах термоэлементов около второй ячейки;

η - функция Хевисайда;

τ - время, соответствующее тому, что

$$\frac{d}{dt} \Delta U_1(t) = 0 \quad (21)$$

Исследуя взаимное влияние ячеек, важно учитывать только средние слои III и IV в калориметре (см. рис.2) т.к. тепло, конечно, будет распространяться и в другую сторону от ячейки, но это тепло не будет влиять на вторую ячейку. Вследствие этого, для изучения взаимного влияния ячеек избрана часть модели (рис.8), изображенной на рис.2. Здесь точка $l_{1,2}$ расположена симметрично точке $l_{2,1}$, $l_{2,2}$ - симметрично точке $l_{1,1}$ относительно точки $l_{1,1}$. Принимаем, что реакция в первой ячейке проходит (темпера-

тура изменяется) по закону

$$u_* \Big|_{x_*} = l_{*n} = F(t_*) = u_{*n} e^{-\frac{q_*}{Rt_*}} / \sqrt{t_*} \quad (22)$$

где
 q_* - постоянная, характеризующая скорость реакции,
 u_{*n} - постоянное характеризующее максимальное значение температуры в реакции

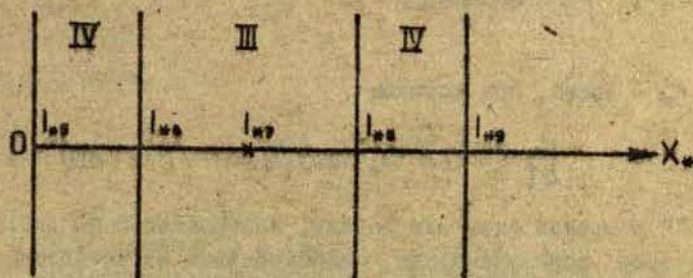


Рис.8 Модель для исследования взаимного влияния ячеек

Это является граничным условием при $x_* = l_{*n} = 0$
 Второе граничное условие выбрано следующим

$$u_* \Big|_{x_* = l_{*n}} = 0 \quad (23)$$

Решение задачи с такими граничными условиями приведено в предложении I. Используя данные (рис.8), определение (20) можно привести к виду

$$A_3 = \frac{u_*(l_{*3}, t_*) - u_*(l_{*2}, t_*)}{u_*(l_{*3}, t_*) - u_*(l_{*0}, t_*)} \eta (\tau_* - t_*) +$$

$$+ \frac{[u_*(l_{*3}, t_*) - u_*(l_{*2}, t_*)]_{\max}}{[u_*(l_{*3}, t_*) - u_*(l_{*0}, t_*)]_{\max}} \eta (t_* - \tau_*)$$

или используя (22) и (23)

$$A_3 = \frac{u_*(l_{*3}, t_*)}{F(t_*) - u_*(l_{*0}, t_*)} \eta (\tau_* - t_*) +$$

$$+ \frac{u_*(l_{*3}, t_*)_{\max}}{[F(t_*) - u_*(l_{*0}, t_*)]_{\max}} \eta (t_* - \tau_*) \quad (24)$$

где

τ_* - время, при котором

$$\frac{\partial}{\partial t} [F(t_*) - u_*(l_{*3}, t_*)] = 0 \quad (25)$$

Первый и третий слои для модели, изображенной на рис. 8, соответствуют термoeлементам, расположенным около ячеек. Так как термoeлементы обеих ячеек изготавливаются из одних и тех же материалов, то первый и третий слои имеют одни и те же теплофизические характеристики. Учитывая что, для формул приложения I, получаем

$$c_2 = c_1; \quad c_1 = c_{43} = \frac{1 - K_{43}}{1 + K_{43}} \quad (26)$$

а объяснения для c_{ij} , K_{ij} даны в формулах (3). Для $u_*(l_{*3}, t_*)$ учитывая (22) и (26) из формул (п. 1) и (п. 1.3) получаем

$$u_*(l_{*3}, t_*) = \frac{2u_{*0}K_{43}}{(1+K_{43})^2 \sqrt{t_*}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{m=0}^{k-j} \sum_{n=0}^j \sum_{l=0}^m \sum_{r=0}^n \sum_{r=0}^{j-n} k! \cdot$$

$$\times \frac{(-1)^{n+l+j+m} c_{43}^{2k-j-l+m+r}}{(k-j-m)!! (m-l)!! (n-i)!! r! (j-n-r)!} \left[e^{-\frac{z_1^2}{4t_*}} - e^{-\frac{z_2^2}{4t_*}} \right] \quad (27)$$

где $z_1 = 2[h_4(2k-j+i-m-r+3/2) + 2h_5(m+n-i+r+1/2)] \sqrt{q_*}$,

$$z_6 = z_5 - 2h_4$$

а K_{43}, C_{43}, h_4, h_5 объяснены в (3)

Для $u_*(l_{30}, t_*)$ учитывая (22) и (26) из формул (п. 1) и (п. 1, 1) получаем

$$u_*(l_{30}, t_*) = \frac{K_{43}}{(1+K_{43})\sqrt{t_*}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{n=0}^{k-j} \sum_{r=0}^n \sum_{l=0}^m \sum_{i=0}^n \sum_{r=0}^{l-n} K! \times \quad (28)$$

$$\times \frac{(-1)^{m(k+j)+n} C_{43}^{2m(j-l)+r}}{(k-j-m)!! (m-l)!! (n-l)! r! (j-n-r)!} \left[c_{43} \left(e^{-\frac{z_1^2}{4t_*}} - e^{-\frac{z_2^2}{4t_*}} \right) + e^{-\frac{z_3^2}{4t_*}} - e^{-\frac{z_4^2}{4t_*}} \right],$$

где $z_1 = 2[h_4(2k-j+1-m-r+3/2) + 2h_5(m+n-l+r)] + \sqrt{q_*}$,

$$z_2 = z_1 - 2h_4,$$

$$z_3 = z_1 + 4h_5,$$

$$z_4 = z_2 + 4h_5$$

а K_{43}, C_{43}, h_4, h_5 объяснены в (3).

Взаимное влияние ячеек вычисляется по формуле (24) с использованием (25), (27) и (28).

На рис. 9 показана область, в которой результаты, полученные с использованием только первого члена ряда в выражении для температуры, дают погрешность не большую чем один процент, по сравнению с использованием точной формулы.

Если использовать только первый член ряда, то формула для A_3 имеет вид (для молекулярных реакций):

$$A_3 = \frac{2K_{43}}{(1+K_{43})^2} \left\{ \left[e^{-\frac{(h_4+2h_5\sqrt{q_*})^2}{4t_*}} - e^{-\frac{(2h_4+2h_5\sqrt{q_*})^2}{4t_*}} \right] / \sqrt{t_*} \right\}_{\max} / \left\{ \left[e^{-\frac{q_*}{4t_*}} - \frac{K_{43}}{1+K_{43}} \left[e^{-\frac{(h_4+\sqrt{q_*})^2}{4t_*}} - e^{-\frac{(3h_4+4h_5\sqrt{q_*})^2}{4t_*}} \right] - c_{43} \left(e^{-\frac{(3h_4+\sqrt{q_*})^2}{4t_*}} - e^{-\frac{(h_4+4h_5\sqrt{q_*})^2}{4t_*}} \right) \right] / \sqrt{t_*} \right\}_{\max} \quad (29)$$

Для быстрых реакций следует брать не максимальные значения числителя и знаменателя, а числитель и знаменатель в зависимости от времени.

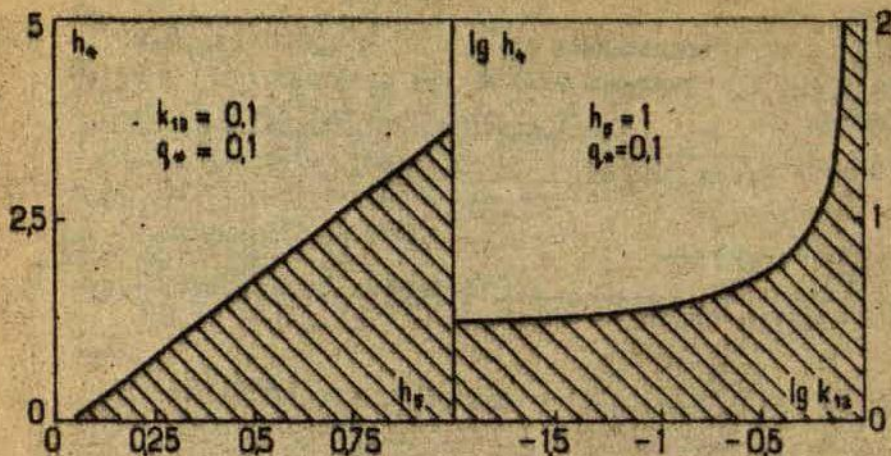


Рис.9 Допустимая область использования первого члена ряда

III. Повторяемость

Определение повторяемости дано в [4] формула (6)

$$A_n = \frac{1}{t_n} [\text{с}^{-1}], \quad (30)$$

где

t_n - время, соответствующее тому, что разность температур на концах термоэлемента уменьшилась на определенную наперед заданную величину по сравнению с максимальной разностью температур.

При исследовании повторяемости учитывается слой IV, соответствующий термоэлементу и следующий за ним слой детектора, при том слой детектора принят за бесконечный, так как в реальном калориметре цилиндр детектора по отношению к термоэлементу является большим.

Для исследования повторяемости **используется** модель, изображенная на рис.10. Допустим, что в ячейке проходит реакция (температура изменяется) по закону

$$u_x \Big|_{x_n=0} = u_{n0} e^{-\frac{x^2}{4t_n}} \quad (31)$$

что является граничным условием при $x_n=0$. Так как второй слой бесконечен, то модель, изображенная на рис.10, соответствует модели, изображенной на рис.4, с решением в приложении I.

Так как модель на рис.10 является двухслойной, то следует брать

$$c_2 = \frac{1 - K_{23}}{1 + K_{23}} = \left(1 - \frac{\lambda_{23} \alpha_{23}}{\lambda_{23} \alpha_{23}}\right) (1 + K_{23})$$

а так как $\lambda_{23} = \lambda_{23}$ и $\alpha_{23} = \alpha_{23}$, то

$$c_2 = 0$$

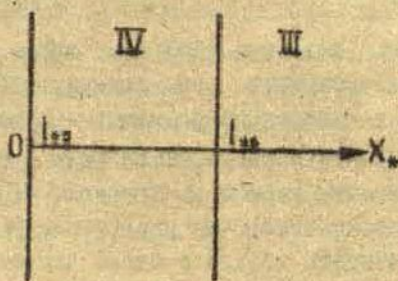


Рис.10 Модель для исследования повторяемости

Для температуры получаем (из формул (п.1) и (п.1.1) учитывая (31)):

$$u_x(l_{23}, t_n) = \frac{2u_{n0} K_{23}}{(1 + K_{23}) \sqrt{4t_n}} \sum_{k=0}^{\infty} c_{k3} e^{-\frac{x^2}{4t_n}} \quad (32)$$

где

$$z_1 = h_4(2k+1) + \sqrt{q_4}$$

c_{43} , h_4 объяснены в формулах (3).

Как следует из (30), для нахождения повторяемости необходимо найти время, удовлетворяющее трансцендентному уравнению

$$\frac{u_*(l_{43}, t_*) - u_*(l_{46}, t_*)}{[u_*(l_{46}, t_*) - u_*(l_{46}, t_*)]_{\max}} = K, \quad (33)$$

где K - определенное наперед заданное число,

или используя (31) и (32)

$$e^{-\frac{q_4}{4t_*}} - \frac{2K_{43}}{1+K_{43}} \sum_{k=0}^{\infty} c_{43}^k e^{-\frac{z_1^2}{4t_*}} = K \quad (34)$$

$$\sqrt{t_*} \left[\left[e^{-\frac{q_4}{4t_*}} - \frac{2K_{43}}{1+K_{43}} \sum_{k=0}^{\infty} c_{43}^k e^{-\frac{z_1^2}{4t_*}} \right] / \sqrt{t_*} \right]_{\max}$$

Первый корень уравнения (34) дает время, используемое в выражении для повторяемости (см. формулу (30)). На рис. II показана область, в которой погрешность при вычислении повторяемости с использованием первого члена ряда в уравнении (34) не больше одного процента (при этом принято, что использование ряда дает точный результат). Из рис. II следует, что область, в которой можно читать только с одним членом, очень ограничена по сравнению с соответствующими областями для защищенности и взаимного влияния ячеек.

Уравнение для повторяемости с учетом только одного члена ряда имеет вид:

$$e^{-\frac{q_4}{4t_*}} - \frac{2K_{43}}{1+K_{43}} e^{-\frac{(h_4 + \sqrt{q_4})^2}{4t_*}} = K \quad (35)$$

$$\sqrt{t_*} \left[\left[e^{-\frac{q_4}{4t_*}} - \frac{2K_{43}}{1+K_{43}} e^{-\frac{(h_4 + \sqrt{q_4})^2}{4t_*}} \right] / \sqrt{t_*} \right]_{\max}$$

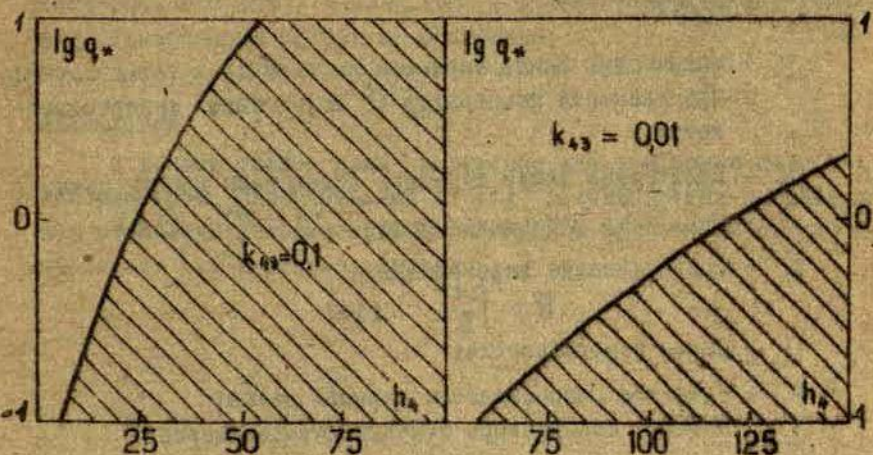


Рис. II Область применения уравнений (35)

IV. Интегральная чувствительность термоэлемента

Рассмотрение чувствительности качественно отличается от рассмотрения других критериев качества, так как здесь учитываются не только теплофизические характеристики материала термоэлемента, но и термоэлектрические свойства этого материала. Интегральная чувствительность будет найдена в стационарном случае. Определение интегральной чувствительности

$$A_2 = \frac{\Delta V}{\Delta W} [A^{-1}], \quad (36)$$

где

ΔV - разность потенциалов на концах термоэлемента;

ΔW - мощность теплового потока проходящего через термоэлемент.

Тепловая мощность потока в термоэлементе равна

где $\Delta W = \pi_T J + \rho_c \Delta \psi$
 $\rho = \rho_0 + \rho_c$

ρ_c - количество тепла термоемкое за секунду в термоэлементе при разности температур I^0 вследствие теплопроводности;

ρ_0 - количество тепла термоемкое вследствие других причин;

J - сила тока в термоэлементе; $J = \frac{\Delta V}{R}$ (38)

R - сопротивление термоэлемента

$$R = \frac{\rho_T l_T}{S} \quad (39)$$

l_T - длина термоэлемента;

ρ_T - удельное сопротивление термоэлемента;

- площадь поперечного сечения термоэлемента;

π - коэффициент Пельтье.

Если разность температур на концах термоэлемента равна $\Delta \psi$, то разность потенциалов будет

$$\Delta V = \epsilon_T \Delta \psi \quad (40)$$

где

ϵ_T - термосила термоэлемента $\epsilon_T = \epsilon_T(\psi)$

В стационарном случае потери вследствие теплопроводности термоэлемента равны

$$\rho_c = \frac{\lambda_a S}{\rho_T} \quad (41)$$

где

λ_a - теплопроводность термоэлемента

Подставляя (31), (38), (39), (40) и (41) в (36), получаем выражение для интегральной чувствительности в стационарном режиме

$$A_A = \frac{\epsilon_T}{\rho_0 + \frac{\pi_T \epsilon_T S}{\rho_T l_T} + \frac{\lambda_a S}{l_T}} \quad (42)$$

В нестационарном случае интегральная чувствительность будет меняться, так как $\varepsilon_T = \varepsilon_T(u)$, а температура в термоземле в нестационарном случае не постоянна.

Выводы.

В данной работе даны выражения для критериев качества калориметров, разработанных в [1] в приближении плоской одномерной модели калориметра. Даны области применения различных выражений для критериев качества.

Приложение I.

Уравнение теплопроводности (2) с условиями (4), (5) и (6) решается методом преобразования Лапласа (3) по времени. Решение для i -го слоя ($i=1, 2, 3$) имеет вид:

$$u_{n,i}(x_n, t_n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-j} \sum_{n=0}^m \sum_{l=0}^n \sum_{r=0}^{i-n} \frac{(k-j-m)! k! c_{12} c_{23}}{(k-j-m)!(m-l)!(l-m-i)! r!} \frac{1}{(i-n-r)!} \int_0^{t_n} F(t_n - \tau) \frac{1}{\sqrt{\tau}} f_i(x_n, \tau) d\tau, \quad (n.1)$$

$$f_i(x_n, \tau_n) = z_{11} e^{-\frac{z_{11}^2 \tau_n}{a_{n1}}} - z_{12} e^{-\frac{z_{12}^2 \tau_n}{a_{n2}}} + c_{12} c_{23} (z_{17} e^{-\frac{z_{17}^2 \tau_n}{a_{n7}}} - z_{14} e^{-\frac{z_{14}^2 \tau_n}{a_{n4}}}) + (n.1.1) \\ + c_{12} (z_{13} e^{-\frac{z_{13}^2 \tau_n}{a_{n3}}} - z_{11} e^{-\frac{z_{11}^2 \tau_n}{a_{n1}}}) + c_{23} (z_{15} e^{-\frac{z_{15}^2 \tau_n}{a_{n5}}} - z_{10} e^{-\frac{z_{10}^2 \tau_n}{a_{n10}}}).$$

$$z_{11} = 2 \left[\frac{x_{n1}}{a_{n1}} (1+k-m-i-r) + \frac{x_{n2}-x_{n1}}{a_{n2}} (m+n-i+r) + \frac{x_{n3}-x_{n2}}{a_{n3}} (k-j+i) \right] + \frac{x_n}{a_{n1}}$$

$$z_{12} = z_{11} + 2 \left(\frac{x_{n1}-x_n}{a_{n1}} + \frac{x_{n2}-x_{n1}}{a_{n2}} + \frac{x_{n3}-x_{n2}}{a_{n3}} \right),$$

$$z_{13} = z_{11} + 2 \left(\frac{x_{n2}-x_{n1}}{a_{n2}} + \frac{x_{n3}-x_{n2}}{a_{n3}} \right),$$

$$z_{14} = z_{11} + 2 \left(\frac{x_{n1}-x_n}{a_{n1}} + \frac{x_{n2}-x_{n1}}{a_{n2}} \right), \quad z_{15} = z_{11} + 2 \frac{x_{n3}-x_{n2}}{a_{n3}};$$

$$z_{16} = z_{11} + 2 \left(\frac{x_{n1}-x_n}{a_{n1}} + \frac{x_{n2}-x_{n1}}{a_{n2}} \right), \quad z_{17} = z_{11} + 2 \frac{x_{n3}-x_{n2}}{a_{n3}}, \quad z_{18} = z_{11} + 2 \frac{x_{n1}-x_n}{a_{n1}};$$

$$f_2(x_n, \tau_n) = (1-k_{23}) (z_{21} e^{-\frac{z_{21}^2 \tau_n}{a_{n1}}} - z_{24} e^{-\frac{z_{24}^2 \tau_n}{a_{n4}}}) + (1+k_{23}) (z_{23} e^{-\frac{z_{23}^2 \tau_n}{a_{n3}}} - z_{25} e^{-\frac{z_{25}^2 \tau_n}{a_{n5}}}) \quad (n.1.2)$$

$$z_{21} = 2 \left[\frac{x_{n1}}{a_{n1}} (1+k-m-i-r+1/2) + \frac{x_{n2}-x_{n1}}{a_{n2}} (m+n-l+r+1/2) + \frac{x_{n3}-x_{n2}}{a_{n3}} \right.$$

$$\left. + (k-j+i+1) + \frac{x_{n4}-x_{n3}}{a_{n4}} \right]; \quad z_{22} = z_{21} - 2 \frac{x_{n3}-x_{n2}}{a_{n3}}; \quad z_{23} = z_{21} + 2 \frac{x_{n2}-x_{n1}}{a_{n2}};$$

$$z_{24} = z_{21} + 2 \frac{x_{n4}-x_{n3}}{a_{n4}}; \quad f_3(x_n, \tau_n) = z_{31} e^{-\frac{z_{31}^2 \tau_n}{a_{n1}}} - z_{32} e^{-\frac{z_{32}^2 \tau_n}{a_{n2}}} \quad (n.1.3)$$

$$z_{31} = 2 \left[\frac{x_{n1}}{a_{n1}} (1+k-m-i-r+1/2) + \frac{x_{n2}-x_{n1}}{a_{n2}} (m+n-r+1/2) + \frac{x_{n3}-x_{n2}}{a_{n3}} \right.$$

$$\left. + (k-j+i) - \frac{x_{n3}-x_{n2}}{a_{n3}} \right]; \quad z_{32} = z_{31} + \frac{3x_{n3} - 2x_{n2} - x_{n1}}{a_{n2}}$$

Приложение 2.

Уравнение теплопроводности (2) с условиями (5), (7) и (8) решается методом преобразования Лапласа [3] по времени. Решение для i -го слоя имеет вид ($i = 1, 2, 3$):

$$U_{x_i} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \sum_{m=0}^j \frac{(-1)^k k! c_{11}^{k-j+m} c_{23}^{k-m}}{(k-j)! m! (j-m)!} x$$

$$\times \int_0^{t_n} \Phi(t_n - \tau_n) \frac{1}{\sqrt{t_n}} f_i(x_n, \tau_n) d\tau_n \quad (n, 2)$$

$$f_1(x_n, \tau_n) = c_{23} e^{-\frac{z_{71}^2}{4t_n}} + c_{12} e^{-\frac{z_{72}^2}{4t_n}} + e^{-\frac{z_{71}^2}{4t_n}} - c_{11} c_{23} e^{-\frac{z_{71}^2}{4t_n}}, \quad (n, 2, 1)$$

$$z_{71} = 2 \left[\frac{x_{n1}}{a_{n1}} (j+1) + \frac{x_{n2} - x_{n1}}{a_{n2}} (k-m+1) \right] = \frac{x_n}{a_{n1}}; \quad z_{72} = z_{71} - 2 \frac{x_{n2} - x_{n1}}{a_{n2}}$$

$$z_{73} = z_{71} - 2 \left(\frac{x_{n1} - x_{n1}}{a_{n1}} + \frac{x_{n2} - x_{n1}}{a_{n2}} \right); \quad z_{74} = z_{71} - 2 \frac{x_{n1} - x_n}{a_{n1}}$$

$$f_2(x_n, \tau_n) = \frac{2K_{12}}{(1+K_{12})(1+K_{23})} \left[(1-K_{23}) e^{-\frac{z_{71}^2}{4t_n}} - (1+K_{23}) e^{-\frac{z_{71}^2}{4t_n}} \right]; \quad (n, 2, 2)$$

$$z_{81} = 2 \left[\frac{x_{n1}}{a_{n1}} (j+1/2) + \frac{x_{n2} - x_{n1}}{a_{n2}} (k-m+1/2) \right] + \frac{x_{n2} - x_n}{a_{n2}}$$

$$z_{82} = z_{81} - 2 \frac{x_{n2} - x_n}{a_{n2}}$$

$$f_3(x_n, \tau_n) = - \frac{4K_{12}K_{23}}{(1+K_{12})(1+K_{23})} e^{-\frac{z_{71}^2}{4t_n}} \quad (n, 2, 3)$$

$$z_{91} = 2 \left[\frac{x_{n1}}{a_{n1}} (j+1/2) + \frac{x_{n2} - x_{n1}}{a_{n2}} (k-m+1/2) \right] + \frac{x_n - x_{n2}}{a_{n2}}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вичутинский А.А., Дрейманис Ю.А., Микельсон Ю.Я. Критерии качества микрокалориметра для исследования биохимических реакций. - "Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки", 1976, т.262, Рига.
2. Великов А.А., Вичутинский А.А., Лиедицис А.К., Микельсон Ю.Я., Радзиньш Г.А. Высокочувствительный дифференциальный переворачиваемый реакционный микрокалориметр для биохимических исследований. - "Шестая Всесоюзная конференция по калориметрии (Расширенные тезисы докладов)", Тбилиси, 1973, с.529-533.
3. Диткин В.А., Прудников А.М. Операционное исчисление. М., 1975. 564 с.

КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА МИКРОКАЛОРИМЕТРА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ
БИОХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

Одним из экспериментальных методов определения характера биохимических реакций является микрокалориметрия. Из всех типов калориметров (сжигания, сканирующие, для исследования химических реакций) и биологии используются калориметры одноразового смешения типа Кальве или проточные самых различных конструкций.

Эти конструкции трудно сравнивать, так как нет системы критериев, по которым можно определить их качество. В настоящей работе дан один из вариантов такой системы. Для этого сначала рассмотрим теплофизические процессы на примере наиболее распространенных дифференциальных калориметров. Схема одного из таких калориметров разработанного в Институте Биоорганической Химии АН СССР показана на рис. 1, [1].

Упрощенная схема этого калориметра показана на рис. 1. Здесь: 1- ячейки, в одной из которых происходит исследуемая реакция; 2- термоэлементы; 3- цилиндр детектора; 4- слой изоляции; 5- выравнивающий цилиндр. В действительности в калориметре чередуются еще несколько слоев изоляции и выравнивающих цилиндров, но их влияние на теплофизические процессы, происходящие в калориметре видно на примере одного слоя изоляции и одного выравнивающего цилиндра.

Рассмотрим качественно работу калориметра. Допустим, что в одной из ячеек происходит реакция с выделением тепла ΔQ . Обычно скорость выделения тепла имеет характер показанный на рис. 3.

Тепловыделение, показанное на рис. 3 (а) является характерным, когда в реакции участвует определенное количество реагирующих веществ, что осуществляется в калориметре смешения, а на рис. 3 (б) тепловыделение при непрерывном подводе реагиру-

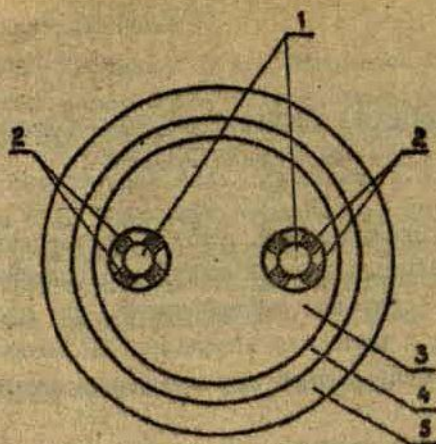


Рис.1. Упрощенная схема дифференциального калориметра.

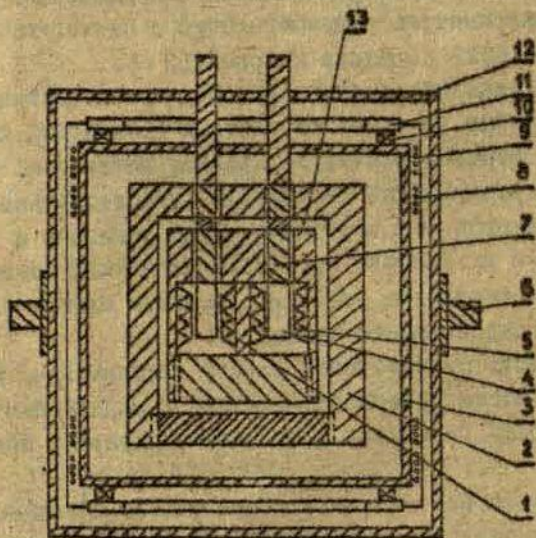


Рис.2. Схема калориметра. 1-детектор; 2- выравнивающий цилиндр; 3- оболочка термостата; 4-ячейки; 5- термоэлементы; 6- полуоси для перемещения калориметра; 7- кюветы держатели; 8, 9- нагреватели; 10- термоэлементы; 11- теплообменники; 12- кожух; 13- теплоизоляция детектора.

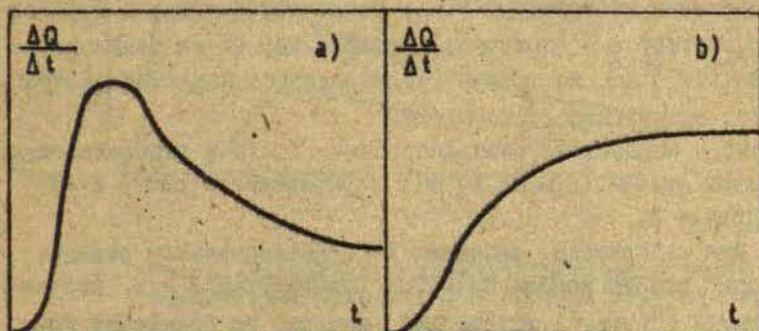


Рис. 3. Скорость выделения тепла в химических реакциях

ющих веществ, что осуществляется в проточных калориметрах. Основной задачей калориметра является регистрация кинетики процесса $\frac{dQ}{dt}(t)$ или полного количества тепла $\Delta Q = \int_0^t \frac{dQ}{dt} dt$ выделившегося во время реакции.

Следует отметить, что кинетику процесса можно исследовать только на обычных дифференциальных калориметрах, и выделение полного количества на обычных и на проточных калориметрах. Тепло, выделяющееся в реакции, через стенки ячейки проходит к термозлементу. На конце термозлемента, прилегающему к ячейке, повысится температура, в результате чего появляется разность температур между концами термозлемента. Эта разность температур вызывает термо э.д.с. (эффект ЗЕЕБЕКА). Минимальное количество тепла, поддающееся регистрации, зависит от интегральной чувствительности.*

* Определение интегральной чувствительности дано ниже (см. формулу (4)).

Большая часть выделившегося тепла (90-95%) компенсируется эффектом Пельтье для экзотермических реакций или эффектом Джоуля для эндотермических реакций [2], часть проходит через термоэлемент, распространяется в цилиндре детектора. Вид температурного поля $T(r, \varphi, t)$ в калориметре определяется геометрическими размерами частей калориметра и их теплофизическими постоянными (λ - теплопроводность; c - удельная теплоемкость; ρ - плотность) материалов. Из-за температурного поля $T(r, \varphi, t)$ на концах термоэлемента является разность температур, вызывающая термо э.д.с.

На рис. 4 изображено распространение тепла в термоэлементе около первой ячейки (кривая 1) и в термоэлементе около 2-ой ячейки (кривая 2).

Так как калориметр работает в дифференциальном режиме, при котором вторая ячейка является "свидетелем", т.е. отсчетным пунктом ("нулем") для первой ячейки, то повышение температуры во второй ячейке является нежелательным, так как искажает показания калориметра о процессе тепловыделения в первой ячейке. По скорости реакции делятся на быстрые и медленные. Если реакция закончится раньше чем изменится температура во второй ячейке, то последующее повышение температуры не влияет на показания калориметра (здесь не учитывается, что калориметр будет выведен из термического равновесия и измерить тепловыделение следующей реакции до установления термического равновесия провести невозможно).

Процесс повышения температуры во второй ячейке назовем взаимным влиянием ячеек. После окончания реакции калориметр выведен из состояния термического равновесия и должно пройти определенное время, зависящее от теплофизических свойств материалов частей калориметра и их размеров, пока в калориметре выравняется температура. Это время определяет повторяемость измерений калориметра.

Рассмотрим воздействие внешнего теплового импульса (рис. 5) на выравнивающий цилиндр во время прохождения реакции. Импульс распространяется по выравнивающему цилиндру, проходит через слой изоляции в цилиндр детектора. Температурное поле $T(r, \varphi, t)$ в калориметре изменится и станет $T_1(r, \varphi, t)$. Изме-

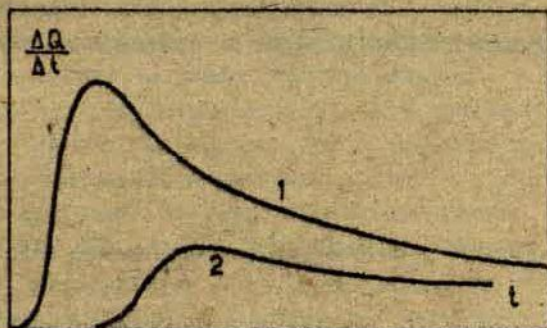


Рис. 4. Регистрация химической реакции около ячеек калориметра. 1-1-я ячейка; 2-2-я ячейка

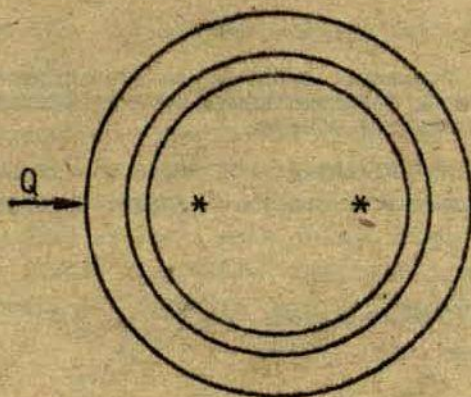


Рис. 5. Воздействие внешнего теплового импульса на калориметр

нение температур в ячейках, вызванное внешним тепловым импульсом, показано на рис.6. Так как тепловой импульс несимметричен относительно обеих ячеек, то температура в них изменится не одинаково, что вызовет смещение нуля в дифференциальной схеме.

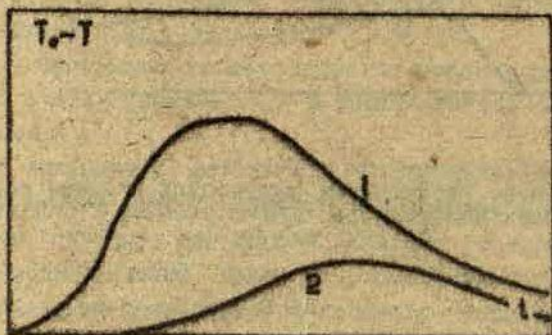


Рис.6. Повышение температуры в ячейках, вызванное внешним тепловым импульсом. 1- ближайшая ячейка; 2- отдаленная ячейка

Величина смещения, определяет защищенность калориметра. Итак, имеется возможность ввести следующие критерии качества калориметра:

- 1) защищенность A_1 ;
- 2) интегральная чувствительность A_2 ;
- 3) взаимное влияние ячеек A_3 ;
- 4) повторяемость A_4 .

К этим критериям можно добавить еще следующие два:

- 5) вес A_5 ;
- 6) стоимость калориметра A_6 .

Задача оптимального конструирования калориметра заключается в подборе конструкции, геометрических размерах отдельных

частей, в подборе материалов конструкции с определенными теплофизическими свойствами для достижения наилучших возможных показателей критериев качества A_i . Влияние геометрии калориметра, теплофизических свойств материалов на критерии качества является "противоречивым", т.е. изменением отдельных параметров калориметра одни критерии качества улучшаются, другие ухудшаются. Это и является типичным случаем поиска оптимальных вариантов.

В качестве примера рассмотрим влияние изменения расстояния между ячейками на некоторые критерии качества. При их сближении, защищенность A_1 улучшается (при совмещенных ячейках температурное поле в калориметре не влияет на смещение нуля), а взаимное влияние A_2 усиливается. При увеличении расстояния между ячейками защищенность ухудшается, а взаимное влияние уменьшается (при бесконечном расстоянии между ячейками реакция в одной ячейке не будет влиять на вторую ячейку). При определенных требованиях на защищенность и взаимное влияние ячейки надо располагать на вполне определенном (оптимальном) расстоянии друг от друга.

Сформулируем задачу оптимального проектирования калориметра.

Пусть A_i - критерии качества калориметра. В данной работе $i_{\max} = 6$.

Нахождение функциональных зависимостей критериев качества от геометрических и физических констант материалов калориметра является самостоятельной задачей и зависит от конкретной конструкции калориметра и соответствующей ему математической модели. Эти задачи в этой работе не рассматриваются, ниже приводятся только определения критериев качества.

Определим два варианта целевых функций калориметра [6]:

$$F_1 = \prod_{i=1}^6 A_i^{\alpha_i} \quad (1)$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^6 c_i A_i^{\alpha_i} \quad (2)$$

где

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 0$$

$$c_1 \geq 0$$

и на A_i могут быть наложены ограничения $b_i \leq A_i \leq d_i$. Первый вариант целевой функции удобен, когда отдельные критерии качества сильно отличаются по порядку. При выборе функции типа (1) одинаковое изменение каких-либо критериев приведет к более или менее (в зависимости от α_i) одинаковому изменению целевой функции. Целевую функцию типа (2) можно использовать при критериях качества приблизительно одинакового порядка, тогда удельный вклад каждого критерия качества в целевую функцию можно регулировать уже двумя параметрами α_i и c_i . Какой-либо критерий качества (1-тый) можно исключить выбрав $\alpha_i = 0$ или $c_i = 0$.

Далее определены критерии качества и дано более подробное их описание.

1) Защищенность.

Допустим, что в одной из ячеек происходит реакции с выделением количества тепла ΔQ_p , которое вызывает разность температур в ячейках, при этом максимальная разность температур равна ΔT_{pmax} . Затем воздействуем на калориметр по оси ячеек внешним тепловым импульсом с количеством тепла ΔQ_B , который вызовет разность температур в ячейках с максимальной разностью ΔT_{Bmax} . Защищенность калориметра от внешних тепловых импульсов будем называть выражение

$$A_1 = \frac{\Delta Q_B}{\Delta T_{Bmax}} \frac{\Delta T_{pmax}}{\Delta Q_p} \quad (3)$$

Защищенность зависит от всех размеров калориметра и от теплофизических свойств (теплопроводности, удельной теплоемкости, удельного веса) материалов, из которых изготовлен калориметр. Защищенность зависит также от процесса тепловыделения в реакции и характера внешнего теплового импульса.

2) Интегральная чувствительность термоэлемента.

Интегральной чувствительностью термоэлемента назовем отношение

$$A_2 = \frac{\Delta U}{\Delta W} [A^{-1}] \quad (4)$$

где ΔW - прирост мощности реакции, происходящей в ячейке (или мощность - в стационарном случае);
 ΔU - прирост разности потенциалов (или разность потенциалов) в термоэлементе около этой ячейки.

Интегральную чувствительность определяют теплофизические свойства и размеры термоэлементов, а также их термосила, коэффициент Пельтье.

Следует отметить, что иногда используются и другие чувствительности для характеристики работы калориметра: пороговая чувствительность, нормированная пороговая чувствительность, чувствительность [4, 5], но эти величины больше характеризуют электронную часть аппаратуры и здесь не рассматриваются. Кальве дает следующее определение чувствительности калориметра

$$\sigma = \frac{J}{W} [V^{-1}] \quad ;$$

где W - мощность тепловыделения;
 J - ток проходящий через термоэлемент.

Очевидно, нет надобности добиваться интегральной чувствительности выше той, которая дает возможность регистрировать тепловые импульсы на уровне "шумов" термоэлемента.

3) Взаимное влияние ячеек.

Допустим, что в одной ячейке происходит реакция с тепловыделением, вызывающим разность температур ΔU_1 в термоэлементах вокруг этой ячейки. Тогда в термоэлементах вокруг второй ячейки появится разность температур ΔU_2 . Взаимным влиянием ячеек назовем величину

$$A_3 = \frac{\Delta U_2}{\Delta U_1} (t) \eta(\tau - t) + \frac{\Delta U_{2 \max}}{\Delta U_{1 \max}} \eta(t - \tau), \quad (5)$$

где η - функция Хевисайда;

τ - время, которое соответствует тому, что

$$\frac{d}{dt} \Delta U_1(t) = 0$$

Первая часть выражения (5) соответствует быстрым реакциям, вторая - медленным (почти все биологические реакции медленны).

Взаимное влияние ячеек зависит от размеров термоэлементов и их теплофизических свойств, а также от расстояния между ячейками и теплофизических свойств материала цилиндра детектора.

4) Повторяемость.

Допустим, что в ячейке в виде импульса выделилось тепло, максимальная разность температур на термоэлементе была $\Delta U_{3 \max}$ (см. рис.7). Через некоторое время τ , разность температур упала до величины $\Delta U_3(\tau_1)$ такой, что

$$\frac{\Delta U_3(\tau_1)}{\Delta U_{3 \max}} = K \quad (6)$$

τ будет показывать, через какое время калориметр можно использовать для нового эксперимента.

Повторяемость определим обратной величиной времени, через которое разность температур в термоэлементе, вызванная тепловым импульсом в ячейке уменьшится в K раз, где K - определенное, наперед заданное число

$$A_4 = \frac{1}{\tau_1} [s^{-1}] \quad (7)$$

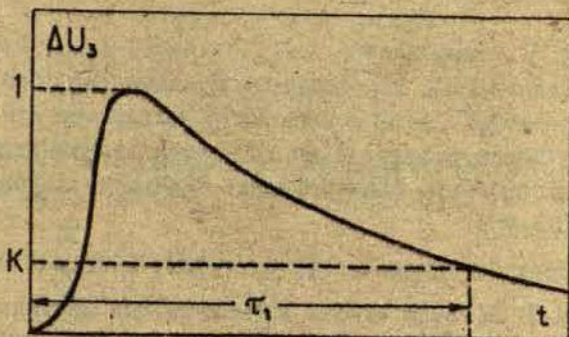


Рис.7. Разность температур в термоэлементе

Повторяемость будет зависеть от теплофизических свойств и размеров термоэлементов.

Из определения видно, что не учитывается вывод калориметра из термического равновесия сменой или промыванием ячеек, необходимостью изменить начальную температуру реакции и т. п.

5,6) Вес и стоимость.

Определения этих критериев качества ясны. Пока они не будут рассматриваться.

Итак, в данной работе определен ряд критериев качества калориметрических систем и поставлена задача оптимального проектирования калориметров. Нахождение конкретных математических выражений критериев качества для различных моделей позволит решить задачу оптимизации разноцелевых калориметров.

Эта задача может быть решена в различных приближениях и результаты могут послужить рекомендациями для изготовления оптимальных калориметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Великов А.А., Вичутинский А.А., Лиепиньш А.К., Микельсон Ю.Я., Редзиньш Г.А. Высокочувствительный дифференциальный перемещаемый реакционный микрокалориметр для биохимических исследований. - В кн.: Шестая всеоюзная конференция по калориметрии (Расширенные тезисы докладов), Тбилиси, 1973, с.529-533.
2. Кальве, Прат П. Микрокалориметрия. М., 1969. 323 с.
3. Ромберг М.Л. Способы оценки эффективности первичных измерительных преобразователей. - "Измерительная техника", 1974, 6, с.58-59.
4. Jones R.C., "Proc. Inst. Radio. Engrs", 1959, 47, p.1481-1495.
5. Росс М. Лазерные приемники. М., 1969. 365 с.
6. Зангвиль У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. М., "Сов. радио", 1973. 398 с.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРИБЛИЖЕННОМ ОБРАЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Часть I

Обращение интегрального преобразования Лапласа - это задача отыскания решения $f(t)$ уравнения

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} p > \gamma, \quad (0.1.)$$

где $F(p)$ - известная функция комплексного переменного p , аналитическая в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$. (Заметим, что $f(t)$ обычно называют оригиналом, а $F(p)$ - изображением по Лапласу функции $f(t)$ или просто изображением). Данная статья посвящена построению алгоритмов приближенного обращения преобразования Лапласа, в которых существенно используются асимптотические разложения. Подчеркнем, что полученные алгоритмы дают возможность находить приближенные значения оригинала при любом $t \in [0, +\infty)$ в отличие от известных асимптотических представлений $f(t)$ при $t \rightarrow +0$ и $t \rightarrow +\infty$ [2], позволяющих изучить поведение $f(t)$ лишь при малых или достаточно больших t . Приведем некоторые соображения, поясняющие необходимость использования асимптотических разложений для обращения интегрального преобразования Лапласа.

В работах [3, 4] при приближенном обращении оригинал стараются определить по значениям $F(p)$ на некотором счетном множестве точек. (Теоретически аналитическую функцию всегда можно восстановить по ее точным значениям на счетном множестве точек). Однако на практике мы используем не точные, а лишь приближенные значения изображения на конечном множестве точек, что приводит к большой потере точности при счете. Это связано с тем, что всегда можно указать изображения, сколь угодно близкие в соответствующих точках комплексной плоскости, но которым

соответствуют существенно различные оригиналы.

Для преодоления данного затруднения предлагается при численном обращении кроме приближенных значений изображения использовать информацию о характере и расположении особых точек $F(p)$, которую наиболее естественно вводить в алгоритм обращения с помощью асимптотических разложений. Коротче говоря, усложняя алгоритм обращения, по сравнению с методами, использующими лишь приближенные значения изображения, мы устраняем существенный недостаток последних - большую потерю точности при счете.

Разработанные алгоритмы фактически являются примером построения регуляризирующих операторов А.Н.Тихонова [6] для некорректной задачи обращения интегрального преобразования Лапласа. Параметр, по которому в наших методах проводится асимптотическое разложение, можно считать регуляризирующим параметром.

Переходим к построению соответствующих алгоритмов.

I. F-A метод численного обращения интегрального преобразования Лапласа

F-A (Фурье -асимптотический) метод, тесно связан с алгоритмами, в которых оригинал ищется в форме ряда по некоторым специальным функциям [3, 4]. Для выявления сути дела рассмотрим разложение по так называемым сдвинутым e - полиномам Лежандра:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n P_n(1 - 2e^{-\sigma t}), \quad t \in [0, +\infty). \quad (1.1)$$

где $\{P_n(\tau)\}$ - полиномы Лежандра, а $\sigma > 0$ - свободный параметр. В этом случае [3] имеются точные формулы

$$c_n = (2n+1)\sigma \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m (n+m)!}{(n-m)! (m!)^2} F[\sigma(m+1)] \quad n=0,1,2, \dots \quad (1.2)$$

по которым теоретически, используя только значения изображения в равноотстоящих точках действительной оси, можно определить все коэффициенты C_n , а затем суммируя ряд (1.1), найти оригинал с любой точностью. Однако практически по (1.2) без большой потери точности удается вычислить лишь несколько первых коэффициентов C_n . Это связано с тем, что с ростом n $C_n \rightarrow 0$, тогда как из (1.2) C_n получаются последовательным суммированием и вычитанием величин, быстро стремящихся к бесконечности при возрастании n , а это приводит к большой потере точности при счете. Найденных коэффициентов, как правило недостаточно для отыскания $f(t)$ с требуемой точностью по ряду (1.1). Подчеркнем, что аналогичным недостатком обладают все известные нам методы обращения, в которых оригинал ищется в форме ряда Фурье по некоторым специальным функциям.

Для преодоления данного затруднения мы предлагаем поступать следующим образом:

- 1) построить асимптотические представления коэффициентов (1.2) при $n \rightarrow +\infty$;
- 2) те C_n , которые не удается найти из (1.2), вычислять по асимптотическим формулам.

Как увидим в дальнейшем, асимптотика C_n при $n \rightarrow +\infty$ прежде всего зависит от характера и расположения особых точек изображения $F(p)$, а это значит, что, вычисляя C_n по асимптотике, мы тем самым учитываем особенности $F(p)$ при обращении.

Теперь можно привести общее определение $F-A$ (Фурье-асимптотического) метода обращения интегрального преобразования Лапласа.

Под $F-A$ методом понимается всякий алгоритм обращения, в котором:

- 1) оригинал ищется в форме обобщенного ряда Фурье по некоторым специальным функциям;
- 2) для определения коэффициентов Фурье существенно используются асимптотические формулы.

Так как теория построения асимптотических разложений наиболее развита для интегралов, то естественно $F-A$ метод реализовать с помощью интегральных представлений коэффициентов Фурье, в которых под знаком интеграла находится изображение

$F(p)$. Заметим, что анализ соответствующих представлений позволил не только улучшить известные методики обращения, как, например, отмеченное выше разложение по одвинутым e -полиномам Лежандра, но и указал путь к построению новых алгоритмов, в которых $f(t)$ ищется на промежутках больших или меньших, чем естественная область определения оригинала $[0, +\infty)$. Перейдем к построению интегральных представлений для C_n .

2. Представление коэффициентов Фурье посредством интегралов Меллина-Барнса

В дальнейшем условимся под термином "интеграл типа Меллина-Барнса" понимать интеграл вида

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \Phi(p) dp, \quad (2.1)$$

где функция $\Phi(p)$ - аналитична в некоторой полосе $s-\varepsilon < \operatorname{Re} p < s+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$

Основной здесь является [10].

Теореме I. Пусть $\chi_n(t)$, $n=0,1,2,\dots$ полная система функций, ортогональных с весом $\rho(t)^n$ на промежутке $[a, b]$. Тогда, если оригинал $f(t)$ удовлетворяет формуле обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty} \exp(pt) F(p) dp, \quad (2.2)$$

и при $t \in [a, b]$ разложим в ряд

$$f(t) = \Theta(t) \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \chi_n(t), \quad (2.3)$$

то для c_n имеет место представление

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) \Psi_n(p) dp, \quad s \geq s_0, \quad (2.4)$$

где

$$\varphi_n(p) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_a^b \exp(pt) v_n(t) \frac{p(t)}{\theta(t)} dt \quad (2.5)$$

При этом предполагается, что интеграл (2.5) сходится при $\delta_0 \leq \operatorname{Re} p \leq \delta$, а интеграл (2.4) абсолютно сходится.

Свободная функция $\theta(t)$ выбирается так, чтобы с одной стороны имело место разложение (2.3), а с другой стороны - достаточно просто вычислялся бы интеграл (2.5).

Доказательство. Из (2.3), пользуясь ортогональностью системы $v_n(t)$, имеем

$$c_n = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_a^b f(t) v_n(t) \frac{p(t)}{\theta(t)} dt. \quad (2.6)$$

Подставляя $f(t)$ по формуле (2.2) и меняя порядок интегрирования, получаем (2.4) и (2.5), причем законность изменения порядка интегрирования следует из абсолютной сходимости интеграла (2.4). Теорема доказана.

Опираясь на теорему I, можно найти искомые интегральные представления коэффициентов c_n для различных систем $\{v_n(t)\}$, свободных функций $\theta(t)$ и промежутков разложения $[a, b]$. Соответствующие результаты приведены в таблице I.

Во избежание недоразумений отметим, что обозначения специальных функций с нормированными коэффициентами приняты такими же, как и в книге [11], а также то, что при $t < 0$ оригинал $f(t) = 0$. В шестом столбце таблицы I указаны возможные значения параметра δ для контура интегрирования (2.4), эти же соотношения определяют свободный параметр $\delta > 0$ (если он присутствует). Исключения составляют разложения по e - синусам и e - косинусам (12-я и 13-я строки), где оказались выродившиеся контуры $(s - i\infty, s + i\infty)$. деформировать в контура L_s и L_c , определяемые следующими соотношениями

$$L_s: x = \delta |y|^m + \Delta_s, \quad (2.7)$$

$$L_c: x = \delta |y|^m + \Delta_c, \quad (2.8)$$

$$p = x + iy, \delta > 0, m > 0, s_0 \leq \Delta_s < \beta, s_0 \leq \Delta_c < \beta/2, -\infty < y < +\infty.$$

Для доказательства теоремы I была необходима абсолютная сходимость интеграла (2.4). Если она не следует из существования интеграла (2.2), то на изображение $F(p)$ приходится налагать дополнительные условия вида

$$F(p) = O(p^{\nu-1}) \text{ при } p \rightarrow \infty, \operatorname{Re} p \geq \beta, \varepsilon > 0. \quad (2.9)$$

Там, где это необходимо, соответствующее значение ν приведено в седьмом столбце таблицы I. Кроме того в таблице I и в последующих используются обозначения: α - произвольное комплексное число, δ_{nk} - символ Кронекера, $[\beta]$ - целая часть от β .

Итак, мы получили требуемые интегральные представления коэффициентов c_n и можем перейти к практическому построению F-A алгоритмов.

3. Первая практическая реализация F-A метода

Для ряда разложений (Таблица I строки с №1 по №13) из (2.4) единообразно (передвижением контура интегрирования вправо) находятся точные представления c_n через значения $F(p)$ в точках действительной оси. На этих разложениях основана первая практическая реализация F-A метода. Идейная сторона данной методики изложена в п. I на примере сдвинутых e -полиномов Лежандра и сводится к следующему:

Таблица I.

| n | $v_n(t)$ [a,b] | $\theta(t)$ | $\varphi_n(p)$ | s | ν | Дополнительные свойства |
|-----|---|-------------------------------------|--|--|---|---|
| 1. | $P_n^{\alpha, \beta} (1-2e^{-st})$ [0, ∞) | 1 | $\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+1-p/\delta)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+2-p/\delta)} (p/\delta)_n$ | $s_0 < s < \delta(1+\alpha)$ | при $\beta < 0$ $\nu = \beta$ | — |
| 2. | $P_n^{\alpha, \beta} (1-2e^{-st})$ [0, ∞) | $(1-e^{-st})^\beta$ | $\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\beta+p/\delta)}{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(p/\delta)(1+\alpha-p/\delta)_{n+1}}$ | $\Delta < s < \delta(1+\alpha)$ $\Delta = \begin{cases} \max[s_0, -\delta(n+\beta)] \\ s_0, \beta = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$ | при $\beta > 0$ $\nu = -\beta$ | При $n=0$ $\alpha+\beta > -1$ Однако при $\alpha > -1$ $\beta > -1$: $C_0 = \frac{\delta\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+1)} F[\delta(\alpha+1)]$ |
| 3. | $C_n^\lambda (1-2e^{-st})$ [0, ∞) | 1 | $\frac{2^{2\lambda}(\lambda+n)\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+1/2-p/\delta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+2\lambda+1-p/\delta)} (p/\delta)_n$ | $s_0 < s < \delta(\lambda + \frac{1}{2})$ | при $\lambda < \frac{1}{2}$ $\nu = \lambda - \frac{1}{2}$ | — |
| 4. | $C_n^\lambda (1-2e^{-st})$ [0, ∞) | $(1-e^{-st})^{\lambda-\frac{1}{2}}$ | $\frac{2^{2\lambda}(\lambda+n)\Gamma(\lambda)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\lambda-1/2+p/\delta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n-2\lambda)\Gamma(p/\delta)(\lambda+1/2-p/\delta)_{n+1}}$ | $\Delta < s < \delta(\lambda + \frac{1}{2})$ $\Delta = \begin{cases} \max[s_0, -\delta(n+\lambda-\frac{1}{2})] \\ s_0, \lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \end{cases}$ | при $\lambda > \frac{1}{2}$ $\nu = -\lambda + \frac{1}{2}$ | При $n=0$ $\lambda > 0$ Однако при $\lambda > \frac{1}{2}$ $C_0 = \frac{\delta\Gamma(2\lambda+1)}{\Gamma^2(\lambda+1/2)} F[\delta(\lambda-\frac{1}{2})]$ |
| 5. | $U_n (1-2e^{-st})$ [0, ∞) | 1 | $\frac{4(n+1)\Gamma(3/2-p/\delta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+3-p/\delta)} (p/\delta)_n$ | $s_0 < s < \frac{3}{2}\delta$ | — | — |

Таблица I. (Продолжение)

| | | | | | | | |
|-----|--------------------------------------|---------------|------------------------------|--|--|-------------------------------------|--|
| 6. | $U_n(1-2e^{-st})$ | $[0; \infty)$ | $(1-e^{-st})^{\frac{1}{2}}$ | $\frac{4\Gamma(n+1/2+P/6)}{\sqrt{\pi}\Gamma(P/6)(3/2-P/6)_{n+1}}$ | $\Delta < S < \frac{3}{2}6 \dots$ $\Delta = \max[S_0, -6(n+\frac{1}{2})]$ | $\nu = -\frac{1}{2}$ | — |
| 7. | $T_n(1-2e^{-st})$ | $[0; \infty)$ | 1 | $\frac{2\Gamma(1/2-P/6)}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1-P/6)}(P/6)_n$ | $S_0 \leq S < 6/2$ | $\nu = -\frac{1}{2}$ | — |
| 8. | $T_n(1-2e^{-st})$ | $[0; \infty)$ | $(1-e^{-st})^{-\frac{1}{2}}$ | $\frac{2n\Gamma(n-1/2+P/6)}{\sqrt{\pi}\Gamma(P/6)(1/2-P/6)_{n+1}}$ | $\Delta < S < 6/2$ $\Delta = \max[S_0, -6(n-\frac{1}{2})]$ | — | $n \neq 0$ Однако $c_0 = \frac{6}{\pi} \Gamma(\frac{6}{2})$ |
| 9. | $P_n(1-2e^{-st})$ | $[0; \infty)$ | 1 | $(2n+1) \frac{(P/6)_n}{(1-P/6)_{n+1}}$ | $S_0 \leq S < 6$ | $\nu = 0$ | — |
| 10. | $P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2e^{-st})$ | $[0; \infty)$ | e^{st} | $\frac{(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\Gamma(\alpha+\frac{P-9}{6})}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2-\frac{P-9}{6})} (\frac{P-9}{6})_n$ | $S_0 \leq S < 6(1+\alpha) + \text{Re} q$ | при $\beta < 0$ $\nu = \beta$ | — |
| 11. | $P_{2n}^{(\alpha, \alpha)}(e^{-st})$ | $[0; \infty)$ | $(1-e^{-st})^\alpha$ | $\frac{(-1)^n \Gamma(2n+1)(4n+2\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+P/26)}{2\Gamma(2n+\alpha+1)\Gamma(P/26)(1/2-P/26)_{n+1}}$ | $\Delta < S < 6$ $\Delta = \begin{cases} \max[S_0, -26(\alpha+n)], & \alpha < 0, \\ S_0, & \alpha = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$ | при $\alpha > 0$ $\nu = -\alpha$ | При $n=0$ $\alpha > -\frac{1}{2}$ Однако при $\alpha > -1$ $c_0 = \frac{6(2\alpha+1)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1)} \Gamma(6)$ |

Таблица I. (Продолжение)

| | | | | | | | |
|-----|------------------------------------|----------------|-----------|--|---|------------------------------------|--|
| 12. | $\sin(n\pi e^{-\frac{t}{\delta}})$ | $[0, \infty)$ | 1 | $\frac{2}{n\pi} \Gamma(1 - \frac{2p}{\delta}) \exp(\frac{2p}{\delta} \ln n\pi) \cos(\frac{\pi p}{\delta})$ | L_2 | — | $n \neq 0$ |
| 13. | $\cos(n\pi e^{-\frac{t}{\delta}})$ | $[0, +\infty)$ | 1 | $\frac{2}{n\pi} \Gamma(1 - \frac{2p}{\delta}) \exp(\frac{2p}{\delta} \ln n\pi) \sin(\frac{\pi p}{\delta})$ | L_2 | — | $n \neq 0$ $c_0 = \frac{\delta}{2} F(\frac{\delta}{2})$ |
| 14. | $L_n^\alpha(\delta t)$ | $[0, +\infty)$ | e^{-qt} | $\frac{\delta^{n+\alpha} (q-p)^n}{(\delta+q-p)^{n+\alpha}}$ | $s_0 \leq s < \delta + \operatorname{Re} q$ | при $\alpha > 0$ $\nu = \alpha$ | при $\delta+q-p > 0$ $(\delta+q-p)^{n+\alpha} > 0$ |
| 15. | $\cos \frac{n\pi}{T} (t-a)$ | $[a, b]$ | 1 | $\frac{2p}{T(1+\delta_{no})} \frac{(-1)^n e^{bp} e^{ap}}{p^2 + (\frac{n\pi}{T})^2}$ | $s \geq s_0$ | $\nu = 0$ | $T = b-a$ |
| 16. | $\cos \frac{n\pi}{T} t$ | $[0, T]$ | 1 | $\frac{2(-1)^n p e^{Tp}}{T(1+\delta_{no}) [p^2 + (\frac{n\pi}{T})^2]}$ | $s \geq \Delta$ $\Delta = \max(\mu, s_0), \mu > 0$ | $\nu = 0$ | — |
| 17. | $\sin \frac{n\pi}{T} t$ | $(0, T)$ | 1 | $\frac{2n\pi (-1)^{n+1} e^{Tp}}{T [p^2 + (\frac{n\pi}{T})^2]}$ | $s \geq \Delta$ $\Delta = \max(\mu, s_0), \mu > 0$ | — | — |

Таблица I. (Продолжение)

| | | | | | | | |
|-----|--|----------------------|----------------------|--|-----------|--|-------------|
| 18. | $P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - 2 \frac{t-a}{T}\right)$ | $[a, b]$ | t | $\frac{(-T)^n (\alpha + \beta + 2n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) p^n e^{\alpha p}}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)} x$ ${}_1F_1(\alpha + n + 1, \alpha + \beta + 2n + 2; 2Tp)$ | $s > s_0$ | Если α или $\beta < 0$, то $\nu = \min(\alpha, \beta)$ | $T = b - a$ |
| 19. | $P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{t}{T}\right)$ | $[-T, T]$ | t | $\frac{(2T)^n (\alpha + \beta + 2n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) p^n e^{-Tp}}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 2)} x$ ${}_1F_1(\beta + n + 1, \alpha + \beta + 2n + 2; 2Tp)$ | $s > s_0$ | Если α или $\beta < 0$, то $\nu = \min(\alpha, \beta)$ | |
| 20. | $H_n(\beta t)$ | $(-\infty, +\infty)$ | e^{qt} | $\left(\frac{p-q}{2\beta}\right)^n \frac{\exp\left[\left(\frac{p-q}{2\beta}\right)^2\right]}{n!}$ | $s > s_0$ | — | |
| 21. | $H_n(t)$ | $(-\infty, +\infty)$ | $e^{-\frac{t^2}{2}}$ | $\frac{(-1)^n \exp\left\{i\frac{\pi}{2}n + p^2/2\right\}}{2^{n-1/2} n!} H_n(ip)$ | $s > s_0$ | — | |

1) первые коэффициенты разложения (2.3) вычисляются из точных формул таблицы 2 ;

2) остальные коэффициенты c_n , которые ввиду большой потери точности не удается вычислить по формулам таблицы 2, находятся из асимптотических разложений, получаемых из интегральных представлений (2.4) и таблицы I при $n \rightarrow +\infty$.

Эти асимптотические разложения могут быть получены применением общеизвестных классических и неклассических методов асимптотического представления интегралов - метода перевала или его обобщений.

Так в работе [8] получена асимптотика c_n при $n \rightarrow +\infty$ для разложения (I.I). В этом случае

$$c_n = \frac{2n+1}{2\pi L} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) \frac{(p/\sigma)_n}{(1-p/\sigma)_{n+1}} dp, \quad 0 < s < \sigma \quad (3.1)$$

(для простоты предполагается, что $F(p)$ - аналитична при $\text{Re } p > 0$). Основными являются следующие две теоремы, которые приведем здесь без доказательства.

Теорема 2. Пусть в полуплоскости $\text{Re } p \leq 0$ $F(p)$ имеет конечное число изолированных особых точек p_1, p_2, \dots, p_m алгебраического характера (полюса или алгебраические точки ветвления) в окрестности которых имеет место представление

$$F(p) = (p-p_k)^{-\alpha_k} g_k(p), \quad k=1, 2, \dots, m, \quad (3.2)$$

где $g_k(p)$ - аналитична в точке $p=p_k$. Тогда, при $n \rightarrow +\infty$ каждая такая точка p_k порождает следующий асимптотический вклад в интеграл (3.1)

$$I_{p_k}(n) \sim \frac{2n+1}{n^2} \left(\frac{2}{\sigma} \ln n\right)^{\alpha_k-1} \exp\left\{\frac{2p_k}{\sigma} \ln n\right\} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{j! n^j} D_{j,k}(n), \quad (3.3)$$

Таблица 2.

№ из
таблицы IВыражение C_n через значения $F(p)$ на действительной оси

1.

1.

$$\frac{\beta(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n+[\beta]} \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+\alpha+1) F[\beta(k+\alpha+1)]}{\Gamma(n-k+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+1)} +$$

$$+ \frac{(-1)^{n+1} \beta \sin(\pi\beta) (\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\pi \Gamma(n+\alpha+1)} \sum_{k=n+1+[\beta]}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+k+\alpha+1)\Gamma(k-\beta-n)}{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+1)} F[\beta(k+\alpha+1)]$$

2.

2.

$$\frac{\beta(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\beta+1)} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)\Gamma(k+\alpha+1)} F[\beta(k+\alpha+1)]$$

3.

3.

$$\frac{2^{2\lambda} \beta(n+\lambda)\Gamma(\lambda)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{n+[\lambda-\frac{1}{2}]} \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+\lambda+\frac{1}{2}) F[\beta(k+\lambda+\frac{1}{2})]}{\Gamma(n-k+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(k+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(k+1)} +$$

$$+ \frac{(-1)^n 2^{2\lambda} \beta(n+\lambda)\Gamma(\lambda) \sin \pi\lambda}{\pi^{3/2}} \sum_{k=n+1+[\lambda-\frac{1}{2}]}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+k+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(k-n-\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(k+1)} F[\beta(k+\lambda+\frac{1}{2})]$$

Таблица 2. (Продолжение)

$$4. \quad 4. \quad \frac{2^{2\lambda} \delta(n+\lambda) \Gamma(\lambda) \Gamma(n+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+2\lambda)} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+2\lambda)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n-k+1) \Gamma(k+\lambda+1/2)} F[\delta(k+\lambda+\frac{1}{2})]$$

$$5. \quad 5. \quad \frac{4\delta(n+1)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+\frac{3}{2}) F[\delta(k+\frac{3}{2})]}{\Gamma(n-k+\frac{3}{2}) \Gamma(k+\frac{3}{2}) \Gamma(k+1)}$$

$$6. \quad 6. \quad \frac{4\delta}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+2)}{\Gamma(k+1) \Gamma(n-k+1) \Gamma(k+\frac{3}{2})} F[\delta(k+\frac{3}{2})]$$

$$7. \quad 7. \quad \frac{2\delta}{\sqrt{\pi} (1+\delta_{n0})} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+\frac{1}{2}) F[\delta(k+\frac{1}{2})]}{\Gamma(n-k+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\frac{1}{2}) \Gamma(k+1)} + \frac{(-1)^n \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+\frac{1}{2}) \Gamma(k-n+\frac{1}{2})}{\Gamma(k+\frac{1}{2}) \Gamma(k+1)} F[\delta(k+\frac{1}{2})]}{\pi} \right\}$$

$$8. \quad 8. \quad \frac{2\delta n}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n+k) F[\delta(k+\frac{1}{2})]}{\Gamma(k+1) \Gamma(n-k+1) \Gamma(k+\frac{1}{2})} \quad (e_0 = \frac{\delta}{\pi} F(\frac{\delta}{2}))$$

Таблица 2. (Продолжение)

| | | |
|-----|-----|--|
| 9. | 9. | $(2n+1) \delta \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+1)}{\Gamma^2(k+1) \Gamma(n-k+1)} F[\delta(k+1)]$ |
| 10. | 10. | $\frac{\delta(\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n+[\beta]} \frac{(-1)^k \Gamma(n+k+\alpha+1) F[\delta(k+\alpha+1)+q]}{\Gamma(n-k+\beta+1) \Gamma(k+\alpha+1) \Gamma(k+1)} +$ $+ \frac{(-1)^{n+\alpha} \delta \sin(\pi\beta) (\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\pi \Gamma(2n+\alpha+1)} \sum_{k=\alpha+\beta+[\beta]}^{\infty} \frac{\Gamma(n+k+\alpha+1) \Gamma(k-\beta-n)}{\Gamma(k+\alpha+1) \Gamma(k+1)} F[\delta(k+\alpha+1)+q]$ |
| 11. | 11. | $\frac{\delta(4n+2\alpha+1) \Gamma(2n+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(2n+\alpha+1)} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n+k} 2^{2k} \Gamma(n+k+\alpha+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-k+1) \Gamma(2k+1)} F[(2k+1)\delta]$ |
| 12. | 12. | $\delta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n\pi)^{2k+1}}{(2k+1)!} F[\delta(k+\frac{1}{2})]$ |
| 13. | 13. | $\frac{\delta}{1+\delta_{no}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (n\pi)^{2k}}{(2k)!} F[\delta(k+\frac{1}{2})]$ |

где функции $D_{j,k}(n)$ при $n \rightarrow +\infty$ имеют асимптотические представления

$$D_{j,k}(n) \sim \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{A_{j,k,l}}{\Gamma(x_k - l)} \left(\frac{2}{\sigma} \ln n\right)^{-l} \quad (3.4)$$

Коэффициенты $A_{j,k,l}$ определяются из разложения

$$Q_{2j}(p/\sigma) g_k(p) \frac{\Gamma(1-p/\sigma)}{\Gamma(p/\sigma)} = \sum_{j=0}^{+\infty} A_{j,k,l} (p-p_k)^j, \quad (3.5)$$

где $Q_{2j}(p/\sigma)$ полином степени $2j$ от p/σ

$$Q_{2j}(p/\sigma) = (2 - \frac{2p}{\sigma})_j B_j^{(-1 - \frac{2p}{\sigma})}(p/\sigma), \quad (3.6)$$

$B_j^{(\lambda)}(z)$ — обобщенные полиномы Бернулли [5]

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2 и при $p \rightarrow \infty$, $\text{Re } p > 0$ имеет место

$$F(p) \sim e^{-\pi p} V(p) \sim e^{-\pi p} O(p^{-\delta}), \quad \delta > 0, \quad (3.7)$$

то для $\mu = 0$

$$c_n \sim \sum_{k=1}^m I_{p_k}(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (3.8)$$

а для $\mu > 0$

$$C_n \sim \sum_{k=1}^m I_{p_k}(n) + I_{\infty}(n), \quad n \rightarrow +\infty, \quad (3.9)$$

где вклады конечных особых точек $I_{p_k}(n)$ определяются по формуле (3.3), а вклад бесконечно удаленной точки $I_{\infty}(n)$ имеет асимптотическое представление

$$I_{\infty}(n) \sim \frac{(2n+1)}{\sqrt{\pi n}} \exp\left(-\frac{\mu\delta}{2}\right) [\exp(\mu\delta) - 1]^{-\frac{1}{4}}$$

$$\cdot \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{i\delta n}{\exp(\mu\delta) - 1}} \exp \left[(2n+1) i \arg \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{\exp(\mu\delta) - 1}} - i \frac{\pi}{4} \right] \right\} \quad (3.10)$$

Примечания I. Если особых точек алгебраического характера в области $\pi/2 + \varepsilon < |\arg p| < \pi$, $\varepsilon > 0$ счетное множество, то теорема остается верной, если суммы (3.8) и (3.9) заменить асимптотическими рядами, а особые точки занумеровать в порядке убывания их вещественных частей

2. Если p_k — полюса, то при $\mu=0$ и конечном m формула (3.8) является точной, так как тогда асимптотические ряды (3.4) обрываются и превращаются в точные суммы. В этом случае можно пользоваться более простой формулой

$$c_n = (2n+1) \sum_{k=1}^m \operatorname{res} \left\{ F(p) \frac{(p/\delta)_n}{(1-p/\delta)_{n+1}}, p_k \right\} \quad (3.11)$$

3. Для конкретных изображений методом перевала можно найти также и дальнейшие члены вклада точки $I_{\infty}(n)$.

4. Если у изображения имеются особые точки более сложного вида, например, существенно особые точки, то для получения соответствующего асимптотического вклада в интеграл (3.1) следует применить метод расщепления критической точки [7].

Аналогичные теоремы можно получить и для других разложений (Таблица I строки с №I по №I3). При этом во всех случаях доминирующими критическими точками в асимптотике интеграла (2.4) будут, вообще говоря, особые точки изображения $F(p)$, имеющие наибольшую вещественную часть, или точка $p = \infty$. Этого в принципе и следовало ожидать, так как асимптотика коэффициентов Фурье ряда (2.3) вообще говоря, зависит от поведения функции $f(t)$ вблизи концов интервала разложения, а также от ее гладкости. Общеизвестно [2], что наиболее правые особые точки $F(p)$ определяют асимптотику $f(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, а поведение изображения вблизи точки $p = \infty$ характеризует,

во-первых, поведение $f(t)$ в окрестности точки $t=0$, во-вторых, - отражает наличие разрывов у оригинала или его производных при $t \in (0, +\infty)$.

Асимптотические представления c_n при $n \rightarrow +\infty$ можно найти и для остальных разложений, приведенных в таблице I (таблица I строки с $\#14$ по $\#21$), однако, так как точные формулы, аналогичные соотношению (1.2), в этих случаях получить затруднительно, то встает открытый вопрос о вычислении первых коэффициентов c_n соответствующего ряда (2.3). (Можно предложить для нахождения первых коэффициентов c_n применять подходящую квадратную формулу и интегралу (2.4)).

Иногда отсутствие удобных формул для вычисления первых коэффициентов c_n можно компенсировать применением асимптотических формул, полученных из (2.4) при стремлении к бесконечности не индекса n , а некоторого другого параметра.

Такую практическую реализацию F-A метода рассмотрим в следующем пункте.

4. Вторая практическая реализация F-A метода

Для выявления основной идеи метода рассмотрим разложение оригинала по косинусам (Таблица I с.16)

Тогда при $t \in [0, T]$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cos \frac{n\pi}{T} t, \quad (4.1)$$

$$c_n \equiv c_n(T) = \frac{(-1)^n}{\pi T^{1/2} (1 + \delta_{n0})} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{p e^{pt} F(p)}{p^2 + \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2} dp, \quad s > 0. \quad (4.2)$$

(Для простоты предполагаем, что $F(p)$ аналитична при $\text{Re } p > 0$). Используя (4.2), получим асимптотическое представление $c_n(T)$ при $T \rightarrow +\infty$, и это асимптотическое выражение примем за приближенное значение искомого коэффициента $c_n(T)$, $n = 1, 2, \dots$

Таким образом по найденным асимптотическим формулам можно будет вычислить все коэффициенты разложения (4.1), и отпадает

потребность в точных формулах для первых C_n , которые были необходимы при первой практической реализации F-A метода (Роль большого параметра теперь играет не ρ а T)

Для получения необходимых асимптотических формул воспользуемся следующей теоремой [1], которую здесь приведем без доказательства.

Теорема 4. Пусть выполнены условия:

- 1) $F(p)$ аналитична при $\operatorname{Re} p > 0$;
- 2) в подполосности $\operatorname{Re} p < 0$ $F(p)$ имеет конечное число изолированных особых точек p_1, p_2, \dots, p_m алгебраического характера (полюса или алгебраические точки ветвления), в окрестности которых имеет место представление

$$F(p) = (p - p_*)^{-\gamma_*} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{j,k} (p - p_k)^j, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (4.3)$$

причем особые точки занумерованы в порядке убывания $\operatorname{Re} p_k$

- 3) $F(p) = O(p^\beta)$ при $p \rightarrow \infty$ $|\arg p| \leq \pi/2 + \delta$, $\delta > 0, \epsilon > 0$;
- 4) $F(p) = O(p^\beta \exp \epsilon |p|^\eta)$ при $p \rightarrow \infty$, $\pi/2 + \delta < |\arg p| < \pi$, $\delta > 0$,

где $\beta < 1, a, \mu, \eta$ - произвольные комплексные числа. Тогда для C_n , определенных интегралом (4.2), имеет место представление

$$c_0 = F(0)/T + \sum_{k=1}^m A_0(p_k, T), \quad (4.4)$$

$$c_n = \left[F\left(i \frac{\pi n}{T}\right) + F\left(-i \frac{\pi n}{T}\right) \right] / T + \sum_{k=1}^m A_n(p_k, T), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.5)$$

где для $A_n(p_k, T)$ при $T \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические разложения

$$A_0(p_n, T) \sim -\frac{1}{T} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_{j,n} (-p_n)^{j-\gamma_n} \frac{\Gamma(\gamma_n-j, -Tp_n)}{\Gamma(\gamma_n-j)}, \quad (4.6)$$

$$A_n(p_n, T) \sim -T^{\gamma_n-1} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{j,n}}{\Gamma(\gamma_n-j)T^j} \left\{ (-Tp_n + i\pi n)^{j-\gamma_n} \Gamma(\gamma_n-j, -Tp_n + i\pi n) + \right. \\ \left. + (-Tp_n - i\pi n)^{j-\gamma_n} \Gamma(\gamma_n-j, -Tp_n - i\pi n) \right\}, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad (4.7)$$

$\Gamma(\alpha, x)$ - неполная гамма-функция, а при $n=0, 1, 2, \dots$;

$k=1, 2, 3, \dots, m$ $|\arg(\pm i\pi n - Tp_n)| \leq \pi/2$.

Примечания I. Если точка $p=0$ является особой, например, $\rho_{\text{ст}}=0$, то в (4.4) $F(0)/T + A_0(p_n, T)$ следует заменить на $B_0(p_n, T)$, причем при $T \rightarrow +\infty$

$$B_0(p_n, T) \sim T^{\gamma_n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,n}}{\Gamma(1+\gamma_n-k)T^k}. \quad (4.8)$$

Если изображение $F(p)$ имеет особые точки на мнимой оси и при некотором фиксированном T $p_n \neq \pm i\pi n/T$, $n=1, 2, \dots$, то асимптотика вклада особой точки p_n в (4.2) определяется формулой (4.7), если же некоторая особая точка $p_n = \pm i\pi n/T$, то в (4.5) $F(\pm i\pi n)/T + A_n(p_n, T)$ следует заменить на $B_n(p_n, T)$, причем при $T \rightarrow +\infty$

$$B_n(p_n, T) \sim 2T^{\gamma_n-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{k,n}}{\Gamma(1+\gamma_n-k)T^k} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (2\pi n\omega)^{k-\gamma_n} \Gamma(1+\gamma_n-k, 2\pi n\omega) \right\}, \quad (4.9)$$

где $\omega = \exp(\mp i \frac{\pi}{2})$.

2. Если p_k - полюса, то асимптотические ряды (4.6), (4.7), (4.8) и (4.9) обрываются и превращаются в точные суммы.

3. Чрезвычайно ценным для практических приложений является тот факт, что полученные асимптотические разложения являются равномерными относительно n .

4. Если изображение $F(p)$ имеет особые точки в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$, то используя теорему затухания [2], их всегда можно перенести в полуплоскость $\operatorname{Re} p < 0$.

5. Остаются в силе примечания 1 и 4 теоремы 3.

6. Из данной теоремы видно, что и в этом случае наиболее правые особые точки изображения оказывают доминирующее влияние на асимптотику c_n , а значит, вычисляя коэффициенты разложения (4.1) по асимптотическим формулам, мы тем самым при обращении учитываем информацию об особенностях $F(p)$.

7. Аналогичные построения можно провести и для других разложений (Таблица 1 строки № 17, №18, №19).

8. Сравнивая результаты §1 и §2, видим, что при практической реализации F-A метода в обоих случаях качественно одинаково используется информация об особых точках изображения $F(p)$ и учитываются значения $F(p)$ на некотором конечном множестве точек - при первой реализации это точки вещественной полуоси $\operatorname{Im} p = 0$, $\operatorname{Re} p > 0$, а при второй - точки мнимой оси $\operatorname{Re} p = 0$.

9. Идея F-A метода без существенных изменений можно применять также и для обращения других интегральных преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов М.А. О F-A методе численного обращения преобразования Лапласа. - "Докл. мат. ежегодник", 1976, т.20, Рига, "Зинатне", с.12-27.
2. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z - преобразования. М., "Наука", 1971. 288 с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М., "Высшая школа", 1966. 406 с.
4. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М., "Наука", 1974. 223 с.

5. Риекстиньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов. Рига, "Зинатне", 1974. 390 с.
6. Тихонов А.Н., Аровин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., "Наука", 1974. 223 с.
7. Цирулис Т.Т. Метод градиентных линий для асимптотического представления контурных интегралов. Рига, "Зинатне", 1972. 128 с.
8. Цирулис Т.Т. О F-A методе обращения преобразования Лапласа с помощью полиномов Лежандра. - "Латв. мат. ежегодник", 1976, т. 20, Рига, "Зинатне", с. 49-61.
9. Цирулис Т.Т., Белов М.А. Асимптотические методы исследования схемы Папулиса для приближенного преобразования Лапласа. - "Учен. зап. ЛГУ им. П. Стучки", 1973, т. 192, Рига, с. 139-154.
10. Цирулис Т.Т., Белов М.А. Интегральные представления типа Меллина-Барнса для коэффициентов Фурье разложения оригиналов в ряды по ортогональным системам функций. - "Латв. мат. ежегодник", 1976, т. 20, Рига, "Зинатне", с. 28-48.
11. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Т. I, 2. М., "Наука", 1973. 294 с., 1974. 295 с.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ УДАРЕ ЖЕСТКОЙ МАССОЙ ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ СТЕРЖНЮ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Большое внимание в последние годы уделяется проведению динамических испытаний полимерных материалов. Наряду с получившим широкое распространение методами, например методом "стержень Гопкинсона", значительную информацию о свойствах полимерного материала позволяет получить простой классический эксперимент-удар жесткой массой по длинному стержню [1,2]. При проведении таких испытаний имеется возможность в широких пределах варьировать как массу ударника, так и его скорость. Для решения соответствующей математической задачи необходимо выбрать модель поведения данного полимерного материала. Сопоставление же полученных экспериментальных результатов с теоретическими расчетами на основе выбранной механической модели позволит составить некоторое представление о применимости ее к данному полимеру.

Приведенные ниже расчеты являются обобщением на случай вязкоупругого материала классической задачи об ударе жесткой массой по упругому стержню конечной длины, рассмотренной рядом авторов, в том числе Буссинеском, Сен-Венаном, Фламаном и др. (соответствующая библиография имеется, например, в [3]).

I. Решение задачи в изображениях

Рассмотрим одномерный вязкоупругий стержень, один конец которого жестко заделан, а второй — свободный торец — в момент времени $t=0$ испытывает удар абсолютно жесткой массой, движущейся со скоростью V_0 вдоль оси x (Рис.1), причем предполагается, что при $t > 0$ масса не отрывается от стержня (приклеивается).

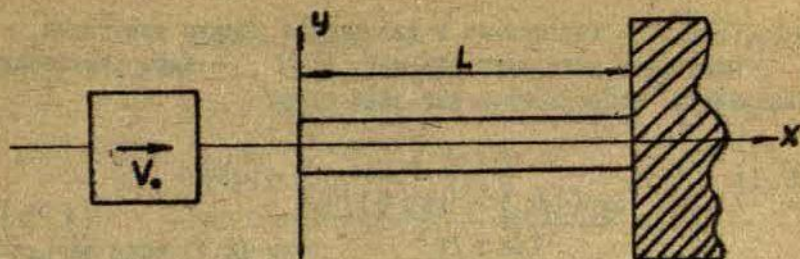


Рис. I.

Уравнения движения, начальные и граничные условия для поставленной задачи имеют вид

$$\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} ; \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 ; \quad (1.2)$$

$$u|_{x=L} = 0; \quad \left\{ P(t) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} \Big|_{x=0} = 0, \quad (1.3)$$

где $P(t) = \sigma(0,t)F$ - действующая на стержень сила, F - площадь сечения, m - масса ударника. Физическое соотношение, связывающее напряжения и деформацию, следуя принципу Больцмана-Вольтера, установим в интегральной форме

$$\sigma(x,t) = E_0 \varepsilon(x,t) - (E_0 - E_\infty) \int_0^t R(t-\tau) \varepsilon(x,\tau) d\tau, \quad (1.4)$$

где E_0 и E_∞ - мгновенный и длительный модули упругости,
 ρ - плотность материала стержня, $R(t)$ - ядро релаксации.
 В дальнейшем используются два вида ядер:

$$R(t) = \frac{\exp(-t/\tau_1) - \exp(-t/\tau_2)}{t \ln \tau_2/\tau_1} \quad (1.5)$$

которое соответствует прямоугольному спектру времен релаксации [4] высотой $H_0 = (E_0 - E_\infty) / \ln(\tau_2/\tau_1)$ в интервале τ_1, τ_2 , и слабосингулярное ядро Ржаницина

$$R(t) = \frac{a^\rho \exp(-at)}{\Gamma(\rho) t^{1-\rho}} \quad (1.6)$$

$a > 0$; $0 < \rho < 1$; $\Gamma(\rho)$ - гамма функция.

Используя интегральное преобразование Лапласа по времени, имеем следующее изображение искомого перемещения

$$\bar{u}(x, p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(x, t) dt = \frac{V_0 L \left[\exp\left[-\frac{px}{c(p)}\right] - \exp\left[-\frac{p(2L-x)}{c(p)}\right] \right]}{Mp c(p) \left\{ \omega_+(p) + \omega_-(p) \exp\left[\frac{2Lp}{c(p)}\right] \right\}} \quad (1.7)$$

где $M = \mu/m$, μ - масса стержня

$$\omega_\pm(p) = 1 \pm \frac{L \cdot p}{Mc(p)} \quad (1.8)$$

$$C(p) = \sqrt{\Phi(p)/\rho} \quad (1.9)$$

$$\Psi(p) = E_{\infty} + H_0 \ln \frac{1+\tau_0 p}{1+\tau_1 p} \quad (1.10)$$

в случае ядра (1.5) или

$$\Psi(p) = E_0 - \frac{a^2(E_0 - E_{\infty})}{(p+a)^2} \quad (1.11)$$

для (1.6).

2. Алгоритм обращения

Численное обращение интегрального преобразования Лапласа проводилось методом асимптотического расширения интервала [6]

Так как до момента времени $t_n = x/c_0$, где $c_0 = \sqrt{E_0/\rho}$, $u(x,t) = 0$, то задача сводится к обращению функции

$$\bar{u}^*(x,p) = \exp(pt_n) \bar{u}(x,p), \quad (2.1)$$

причем $u^*(x,t) = u(x,t+t_n)$, $t > 0$

Согласно работе [6] при $t \in [0, 2T]$ имеем следующее выражение для $u^*(x,t)$:

$$u^*(x,t) = S(t,T) - R(t,T), \quad (2.2)$$

$$S(t, T) = \frac{\exp(\frac{t}{2T})}{T} \left\{ \frac{1}{2} \bar{u}^*(x, \frac{1}{2T}) + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{+\infty} \exp(\frac{in\pi t}{T}) \bar{u}^*(x, \frac{1+2n\pi i}{2T}) \right\}, \quad (2.3)$$

$$R(t, T) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} u^*(x, t+2nT) \quad (2.4)$$

Учитывая, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} u^*(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u^*(x, t) = 0 \quad (2.5)$$

при достаточно большом T из (2.2) имеем

$$u^*(x, t) \approx S(t, T), \quad t \in [0, 2T] \quad (2.6)$$

При практических вычислениях применялся следующий алгоритм:

1) фиксируем некоторую погрешность $\Delta > 0$;

2) выбираем такое $T_0 > 0$, что

$$|S(0, T_0)| < \Delta \quad (2.7)$$

$$3) u^*(x, t) \approx S(t, T), \quad t \in [0, 2T] \quad (2.8)$$

$$u^*(x, t) \approx 0, \quad t > 2T_0 \quad (2.9)$$

Контрольные вычисления показали:

1) если $T > T_0$, то

$$|S(t, T_0) - S(t, T)| < \Delta, \quad t \in [0, 2T_0]; \quad (2.10)$$

2) погрешность счета $S(t, T)$ по (2.3) значительно меньше

Δ .

3. Результаты расчета перемещений

Вычисления проводились при следующих значениях параметров стержня:

$$L = 1,5 \text{ м}, \quad \rho = 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$H_0 = 3,5 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2, \quad \tau_1 = 10^{-2} \text{ сек}, \quad \tau_2 = 1 \text{ сек},$$

$$\alpha = 10^3 \text{ сек}^{-1}, \quad \beta = 0,5, \quad E_0 = 6 \cdot 10^8 \text{ н/м}^2$$

Скорость ударника при расчетах принималась прямопропорциональной отношению массы стержня к массе ударника: $V_0 = \frac{20}{3} M \cdot S_0$, где $S_0 = 1 \text{ м/сек}$. Погрешность обращения $\Delta = 10^{-3} L/368$.

Проанализируем результаты, полученные с ядром релаксации (I.5). Для достаточно малых M (масса ударника m гораздо больше массы стержня μ) распространение возмущения в стержне можно интерпретировать как суперпозицию двух процессов. Первый процесс по своему физическому содержанию эквивалентен собственным колебаниям массы m на пружине при наличии диссипации. Второй процесс представляет распространение волны возмущения при ударе по стержню (Рис. 2). Между этими двумя процессами имеется существенное различие. В то время как скорость распространения волны определяется лишь физическими характеристиками материала стержня E_0 , ρ , период колебаний ω зависит и от соотношения масс ударника и стержня. Имеется отличие и в скорости затухания этих процессов: волновой затухает гораздо быстрее, чем колебательный. По истечении двух-трех периодов остаются лишь затухающие колебания массы на пружине.

При возрастании M волновой процесс становится все более заметным на фоне колебательного, одновременно уменьшается пе-

риод колебаний (Рис. 3). Когда $M \rightarrow +\infty$, второе граничное условие (1.3) переходит в условие

$$\sigma(x, t)|_{x=0} = \frac{20}{3} \rho L S_0 \delta(t), \quad (3.1)$$

где $S_0 = 1 \text{ м/сек}$, $\delta(t)$ - функция Дирака. При этом получаем задачу о загрузке стержня δ - нагрузкой.

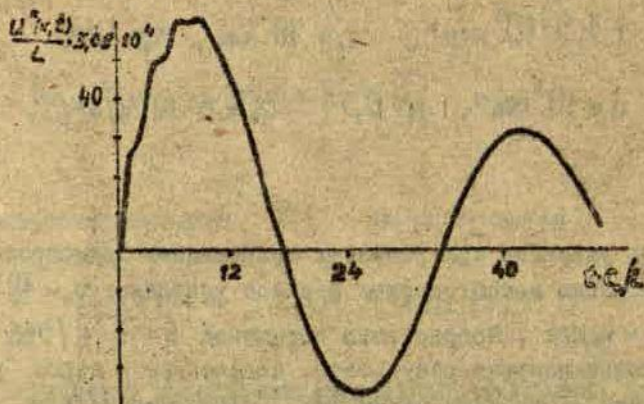


Рис. 2. Зависимость перемещения от времени в точке $x = 0,5L$ при $M = 0,075$, $\epsilon_{\infty} = 0,2\epsilon$.

Решение этой задачи также получено методом асимптотического расширения интервала.

Из Рис. 4. видно, что при $M \rightarrow +\infty$ решение задачи об ударе жесткой массой переходит в решение задачи о нагружении стержня δ - нагрузкой. Из сравнения Рис. 2 - Рис. 4 отчетливо видно, что время затухания волнового процесса не зависит от массы ударника, а определяется только физическими свойствами стержня.

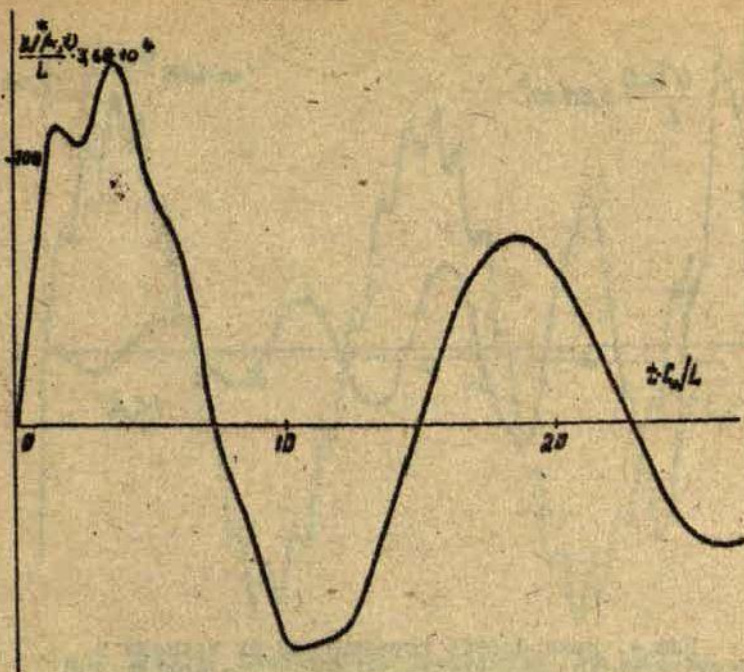


Рис. 3. Зависимость перемещения от времени в точке $x = 0,5L$ при $M = 0,375, \epsilon_{\infty} = 0,2E_0$.

4. Удар жесткой массой по упругому стержню

Интересно сравнить полученные результаты с решением соответствующей задачи для упругого стержня с модулем E_0 . Используя интегральное преобразование Лапласа, без труда находим, что перемещение в упругом стержне имеет вид:

$$u^*(x,t) = \frac{2V_0 L}{c_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(1 - \frac{x}{L}\right) \lambda_k \sin(c_0 t + x) \frac{\lambda_k}{L}}{\lambda_k \{(M+1)\sin\lambda_k + \lambda_k \cos\lambda_k\}}, \quad (4, 1)$$

где $[\lambda_k]$ — положительные корни уравнения

$$y = M \operatorname{ctg} y \quad (4, 2)$$

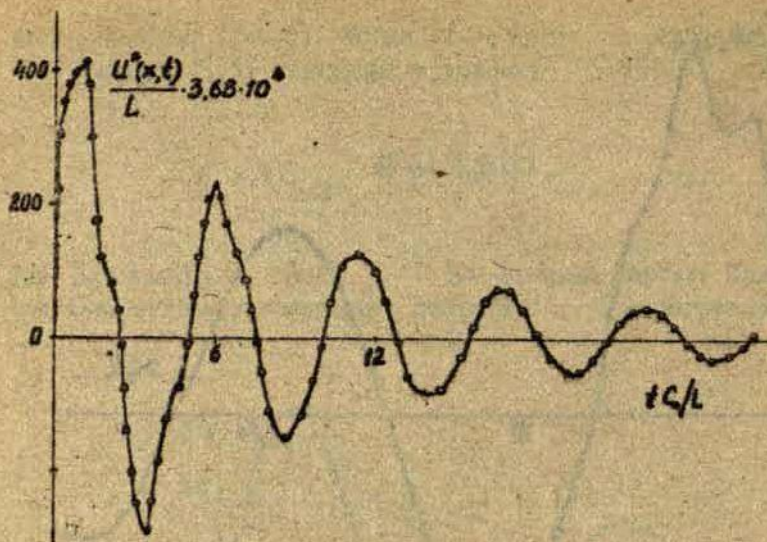


Рис. 4. Зависимость перемещения от времени в точке $x = 0,5L$ для $\epsilon_{\infty} = 0,2\epsilon_0$... при нагружении δ - функцией.

Результаты приведены на Рис. 5 - 7.

Из них видно, что в этом случае распространение возмущения можно интерпретировать как суперпозицию колебательного и волнового процесса. Однако теперь как волновой так и колебательный процессы не затухают, вследствие чего их суперпозиция дает весьма своеобразную картину зависимости перемещения от времени. Кроме того, при $M \rightarrow +\infty$ лишь для малых t перемещения приближаются к решению соответствующей предельной задачи о

δ - нагружении упругого стержня:

$$u^*(x, t) = \frac{20L}{3c_0} S_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\eta(c_0 t/L - 2n) - \eta(c_0 t/L - 2n - 2(1-x/L)) \right] \quad (4, 3)$$

где $\eta(t)$ - единичная функция Хевисайда. Заметим, что при δ - нагружении упругого стержня имеется чисто волновой

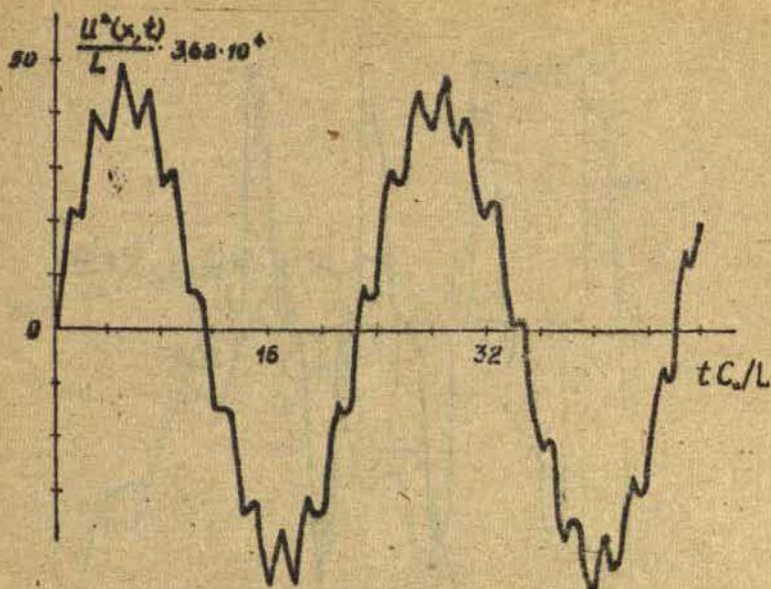


Рис. 5. Зависимость перемещения от времени в точке $x=0,5L$ при $M=0,075$

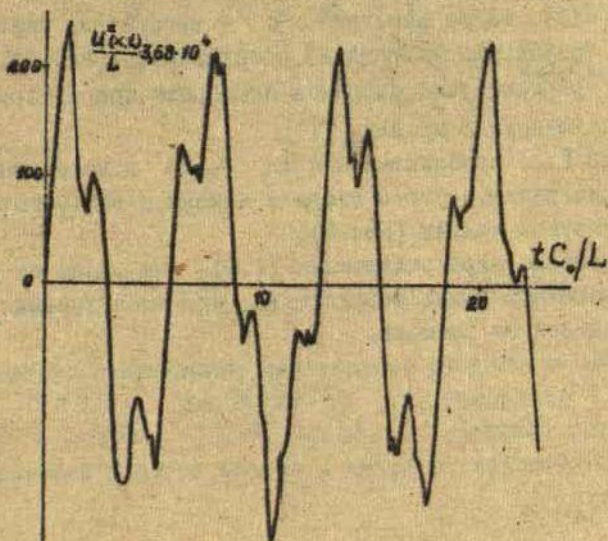


Рис. 6. Зависимость перемещения от времени в точке $x=0,5L$ при $M=1,5$

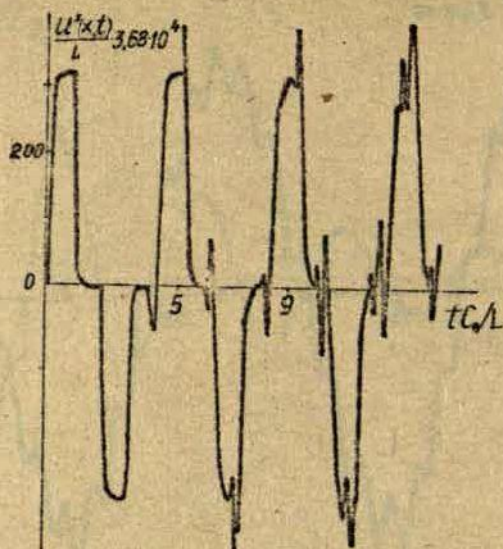


Рис.7. Зависимость перемещения от времени в точке $x=0,5L$ при $M=15$

процесс (4.3), тогда как при δ - нагружении вязкоупругого стержня "ступеньки Хевисайда" расплываются (Рис.4). Повидимому это объясняется наличием дисперсии при распространении волн в вязкоупругих средах [7].

Когда E_{∞} приближается к E_0 , то в начальный момент перемещения вязкоупругого стержня близки к соответствующему решению упругой задачи (Рис.8).

Применение ядра релаксации (1.6), как видно из рис.9, не дает качественно новых результатов, при исследовании зависимости перемещения от времени.

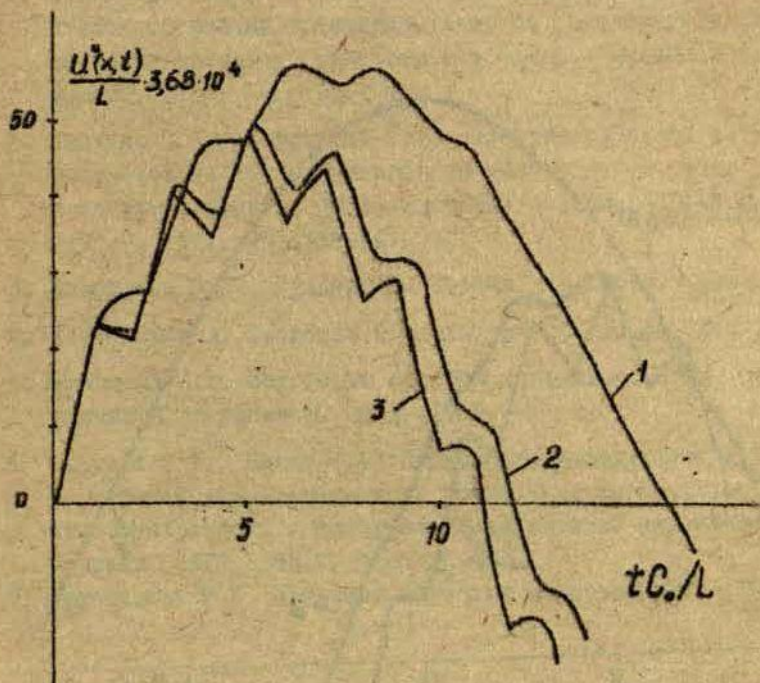


рис. 6. Зависимость перемещения от времени в точке $x = 0,5L$ при $M = 0,075$ для различных E_∞ :
1- $E_\infty = 0,3E_0$, 2- $E_\infty = 0,8E_0$. 3- решение соответствующей упругой задачи с модулем упругости E_0 .

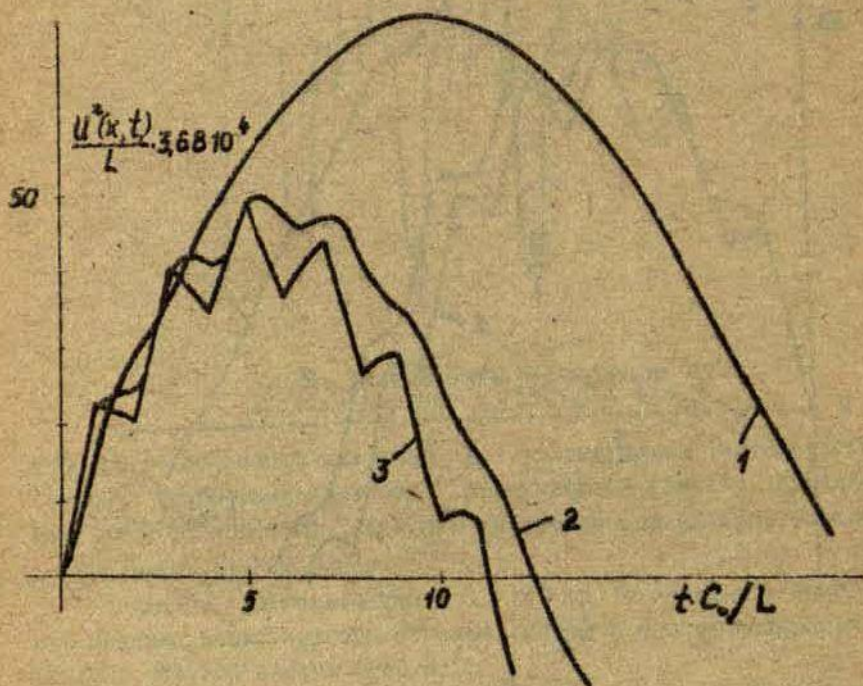


Рис. 9. Зависимость перемещения от времени в точке $x=0,5L$ при $M=0,075$ с ядром релаксации (1.6) для различных E_{∞} : 1- $E_{\infty}=0,3E_0$, 2- $E_{\infty}=0,8E_0$, 3- решение соответствующей упругой задачи с модулем упругости E_0

ЛИТЕРАТУРА

1. Кокошвили С.М., Калнинь П.П. Построение зависимости напряжение-деформация стеклопластиков по экспериментальному изучению волновых процессов при ударе. - "Механика полимеров", 1974, №4, с.704-709.
2. Калнинь П.П., Кокошвили С.М. Экспериментальное исследование соответствия квазистатического растяжения и распространения продольных волн в полиэтиленовом стержне. - "Механика полимеров", 1971, №3, с.564-567.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., 1975. 366 с.
4. Тобольский А. Свойства и структура полимеров. М., 1964. 223с.
5. Ржаницин А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.-Л., 1949. 274 с.
6. Цирулис Т.Т., Белов М.А. Обращение преобразования Лапласа методом асимптотического расширения интервала. - В кн.: Теплопроводность и диффузия. Межвузовский научно-техн. сборник. 1976, вып.7, Рига, с.43-61.
7. Кристенсен Р.М. Введение в теорию вязкоупругости. М., 1974. 300с.

ОДИН МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИОНАЛОВ

Важным этапом теоретической интерпретации результатов физических или машинных экспериментов является поиск аналитических выражений характеристик зависимостей исследуемой проблемы.

В данной работе рассматривается следующая задача. Пусть, с одной стороны, имеются конечные числа функций одного аргумента $T = T(z)$, $a < z < b$. Предполагается, что эта зависимость представлена либо в аналитическом виде, либо известен ее дискретный аналог. С другой стороны каждой функции соответствует определенное число Θ . Объем выборки m . Требуется найти приближенное аналитическое выражение $\Theta = F\{T(z)\}$.

Аналогичная проблема аппроксимации связи "функция-число" встречается в [1], связанной с обработкой конкретного статистического материала. В работе предполагается, что в рассматриваемом случае достаточная точность аппроксимации может быть получена с использованием линейного функционала

$$\Theta \approx \int_a^b c(z) T(z) dz \quad (1)$$

после подстановки

$$c(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 \quad (2)$$

задача преобразуется к виду, в котором определение осуществляется стандартной процедурой регрессионного анализа.

В данной работе, в отличие от [1], искомая связь выражается функционалом в более общей форме

$$\Theta = F(T) = \int_a^b c(z) T^*(z) dz \quad (3)$$

Здесь подинтегральное выражение представлено в виде произведения двух функций от z . Функция $s(z)$ не известна и подлежит определению в процессе аппроксимации. Функция $T^*(z)$ выражается линейной комбинацией эвристически выбираемых сложных функций $f_k [T(z)]$ с неизвестными коэффициентами

$$T^*(z) = \sum_{k=1}^P \alpha_k f_k [T(z)] \quad (4)$$

На основе (3), (4) формулируется следующая задача чебышевской аппроксимации

$$\min_{c(z), \alpha_k} \left\{ I = \max \left| \frac{\Theta - F}{\Theta} \right| \right\} \quad (5)$$

Выбором значения P и вида функций f_k можно изменить точность аппроксимации - в этом отношении излагаемая методика оставляет простор для численных экспериментов и использования интуитивных соображений.

В настоящей работе задача (5) решается численно путем дискретизации аргумента $z \rightarrow z_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Дискретный аналог выражения (3) получается в следующей форме

$$\Theta = F(T) = \sum_{j=1}^n c_j T^*(z_j) \quad (6)$$

В результате получается задача математического программирования:

$$\min_{\alpha_k, c_j} \{ I \}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq p, \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \quad (7)$$

Для ее решения используется модифицированный комплексметод нелинейного программирования.

Следует отметить, что дискретная задача (4), (6), (7) может быть интерпретирована как задача аппроксимации функциями многих переменных $T(z_1), \dots, T(z_p)$ со следующей спецификой: а) в аппроксимирующем выражении не учитываются взаимо-

действия переменных; б) коэффициенты a_k в выражении (4) равны для всех j .

Ниже приводятся два примера опробования методики, показывающие пригодность данного подхода к задачам аппроксимации. Первый относится непосредственно к аппроксимации функции многих переменных.

Пример 1. При численном решении одномерной обратной задачи Стефана были получены следующие исходные данные (рис.1): а) кривые $T(z)$, выражающие закон роста толщины твердой фазы (на рис.1 некоторые кривые не показываются); б) величины Θ , соответствующие температуре на поверхности теплоотвода в некоторый заданный момент времени.

Задача аппроксимации решалась при $n=10$, $p=5$ и при объеме выборки $m=13$. Использовались функции в форме

$$f_k(T) = T^{k-1} \quad (8)$$

В итоге было получено следующее приближенное аналитическое выражение зависимости Θ от $T(z)$

$$\Theta = \sum_{j=1}^n c_j (0,489 + 0,7475 T_j + 3,3 T_j^2 + 2,276 T_j^3 + 1,301 T_j^4)$$

Здесь $T_j = T(z_j)$, а коэффициенты c_j определяются по рис.2. Характеристика точности аппроксимации $I = 0,19$; для 8 исходных кривых из 13 данная характеристика не превышала 0,10.

Пример 2. По результатам технологического эксперимента исследовалась связь между различными параметрами непрерывного литья металла T_1, T_2, \dots, T_5 (расход воды в системе охлаждения, скорость вытягивания слитки и др.) и значениями некоторого показателя качества слитка Θ . Исходные данные задачи аппроксимации приведены в таблице 1 ($m=10$). Она решалась при $p=5$ с использованием функций f_k в виде (8). Было получено следующее аппроксимирующее выражение

$$\Theta = \sum_{j=1}^5 c_j (1,043 + 1,328 T_j + 5,69 T_j^2 + 1,885 T_j^3 + 0,1452 T_j^4)$$

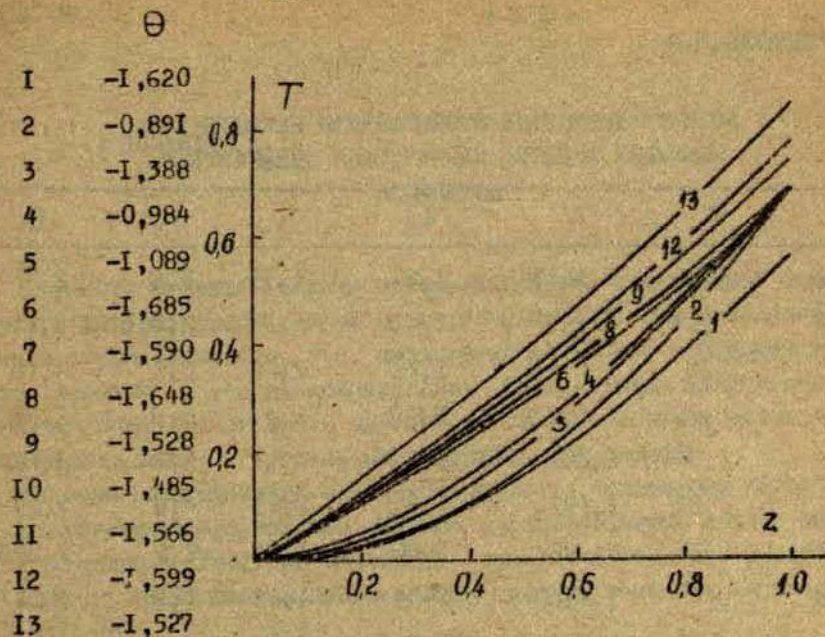


Рис. I.

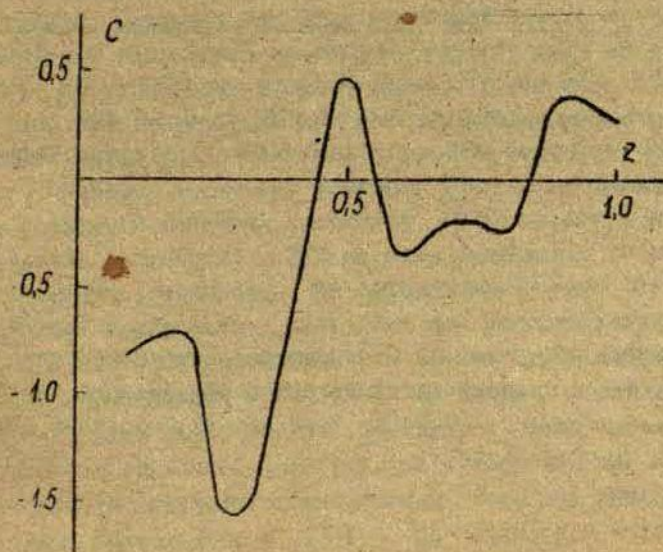


Рис. 2.

Таблица 1.

| | T_1 | T_2 | T_3 | T_4 | T_5 | θ |
|----|-------|--------|-------|-------|-------|----------|
| 1 | 0,7 | 1,1193 | 1,27 | 1,43 | 8,0 | 2,97 |
| 2 | 0,5 | 1,188 | 2,10 | 1,37 | 2,0 | 3,64 |
| 3 | 1,0 | 1,199 | 1,70 | 2,26 | 5,7 | 4,18 |
| 4 | 0,65 | 1,198 | 1,40 | 2,31 | 5,0 | 2,38 |
| 5 | 1,0 | 1,205 | 1,7 | 1,45 | 5,2 | 3,76 |
| 6 | 1,03 | 1,195 | 1,5 | 3,65 | 4,8 | 2,24 |
| 7 | 1,24 | 1,227 | 1,95 | 1,60 | 7,9 | 1,960 |
| 8 | 0,7 | 1,222 | 1,35 | 1,13 | 1,0 | 3,11 |
| 9 | 0,75 | 1,176 | 1,0 | 3,7 | 4,0 | 2,63 |
| 10 | 1,3 | 1,190 | 1,8 | 3,63 | 1,8 | 2,09 |

Значения коэффициентов: $C_1 = 1,215$, $C_2 = 1,482$,
 $C_3 = 4,513$, $C_4 = 3,355$, $C_5 = 0,8777$. Характеристика точности аппроксимации $I = 0,44$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петерсен И.Ф., Каролин М. Два примера применения регрессионного анализа в случае, когда аргумент или функция являются функциями факторов. - В кн.: Проблемы планирования эксперимента. М., 1969, с.62.

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГИХ МНОГОСЛОЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В работе ставится задача проанализировать напряженное состояние в упругих многослойных конструкциях (УМК) при изменении температуры. Известно, что неоднородность слоев порождает крайние эффекты у торцов конструкции. Концентрация напряжений в крайних зонах может стать опасной для УМК, и поэтому необходимо определить место и уровень максимальных напряжений.

Решение поставленной задачи реализуется численными методами с привлечением получившего широкое распространение метода конечных элементов (МКЭ). До настоящего времени большинство работ [1-9] по исследованию многослойных сред выполнено аналитическими методами.

Часто исследования УМК и родственных им анизотропных и армированных изделий проводятся с помощью, так называемых, уточненных теорий, которыми задается некоторый закон, изменения перемещений или напряжений по толщине конструкции. Хотя литература [1-5] по уточненным теориям обширна и имеются работы, подводящие итог систематическим многолетним исследованиям [1-3], подробный анализ распределения напряжений недостаточен или отсутствует совсем, поскольку основное внимание в большинстве случаев уделяется вопросам жесткости, устойчивости и колебаний. Нахождение напряжений в УМК на базе уточненных теорий сопряжено с некоторыми трудностями. Во-первых, необходимо отказаться от простейших предположений, пригодных для решения вышеназванных задач, устойчивости и колебаний, и ввести в рассмотрение более сложные аппроксимации и гипотезы. Во-вторых, в тех случаях, когда крайний эффект резко выражен, приходится решать плохо обусловленные системы уравнений, что связано с неустойчивым счетом и потерей точности результатов вычислений. Подобное явление для крайних задач обсуждается в [6], где предложен метод ортогонали-

зации, улучшающий вычислительные возможности.

Перечислим другую группу работ [7-9], выполненных различными методами, но не использующим уточненные теории. В этом случае имеются конкретные результаты, касающиеся напряженного состояния конструкции, но каждый из примененных методов имеет свои недостатки. В [7] в результате замены армированного слоистого пластика однородной средой исследование сводится к изучению анизотропного слабо сопротивляющегося сдвигу материала, в котором взаимодействие арматуры и матрицы уже не может быть обнаружено. Это взаимодействие детально разобрано в [8]. Однако здесь, как и в [9] в силу применяемых упрощений, касательные напряжения в более податливых связующих слоях постоянны по толщине. Поэтому в разнородной среде не будут возникать напряжения, если одинаково нагревать или охлаждать всю конструкцию. Предварительные расчеты на основе формального использования уточненных теорий показывают, что температурные изменения не приводящие к искривлению нейтральной оси вызывают в несколько раз большие напряжения по сравнению с теми, которые ведут к изгибу.

Рассмотрение симметричных трехслойных конструкций позволяет заключить, что отношение толщин среднего и наружного слоев больше всего влияет на распределение напряжений у торца. В большинстве случаев решаются задачи для трехслойных силовых панелей с весьма объемным заполнителем и тонкими несущими слоями. В армированном пластике жесткие включения также незначительны. Другая противоположность, когда почти отсутствует более слабая из компонент среды, что встречается в клеевых соединениях, исследуется реже.

Численные методы, насколько нам это известно, в расчетах УМК ранее не применялись. МКЭ позволяет единообразно решать различные задачи прочности УМК независимо от соотношения толщин слоев или условий температурного или механического воздействия на изделие. Уточненные теории могут привести к погрешностям при недостаточно обоснованном или формальном выборе априорного закона. МКЭ не использует никакие гипотезы или модельные представления о поведении среды, и поэтому можно ожидать, что результаты вычислений будут больше соответствовать реально действующим в УМК напряжениям. Одно из преимуществ МКЭ в том, что нет никаких

ограничений на форму области занимаемой УМК и возможны расчеты напряжений нелинейно зависящих от деформаций.

1. Постановка задачи

На приводимом рис. I дана расчетная схема, на примере которой исследуется распределение напряжений в УМК. Здесь изображено сечение изделия конструкционной оптики (ИКО), выполненного в виде прямоугольной пластины. Относительно толстые слои их силикатного или органического стекла склеены полимерным связующим веществом. Напряжения в данной конструкции возникают под воздействием изменения температуры из-за разнородности физико-механических характеристик материалов слоев. Температура считается заданной, и тепловая задача здесь не рассматривается. Закрепления изделия в опорах шарнирные.

Принимаем, что ИКО находится в плоском напряженном состоянии, запишем уравнения равновесия термоупругости в перемещениях для каждого отдельного слоя; (знак k) указывает на необходимость индексации всех величин формулы: $k=1, 2, \dots, n$ см. рис. I :

$$\textcircled{k} \rightarrow \mathcal{G} u_{,ij} + \left(\frac{E\mu}{1-\mu^2} + \mathcal{G} \right) u_{,ji} = \frac{E\alpha}{1-\mu} \theta, i \quad (1)$$

где u_i - вектор перемещений; $i, j = x, y$

Поскольку к ИКО не приложены механические воздействия, то должны удовлетворяться однородные граничные условия на всех свободных поверхностях:

$$\sigma_{iy}^l = 0 \text{ на } |S_y; \quad \sigma_{ix}^k = 0 \text{ на } |S_x \quad (2)$$

где $i = x, y$; $l = 0, n$;

σ_{ij}

тензор напряжений;

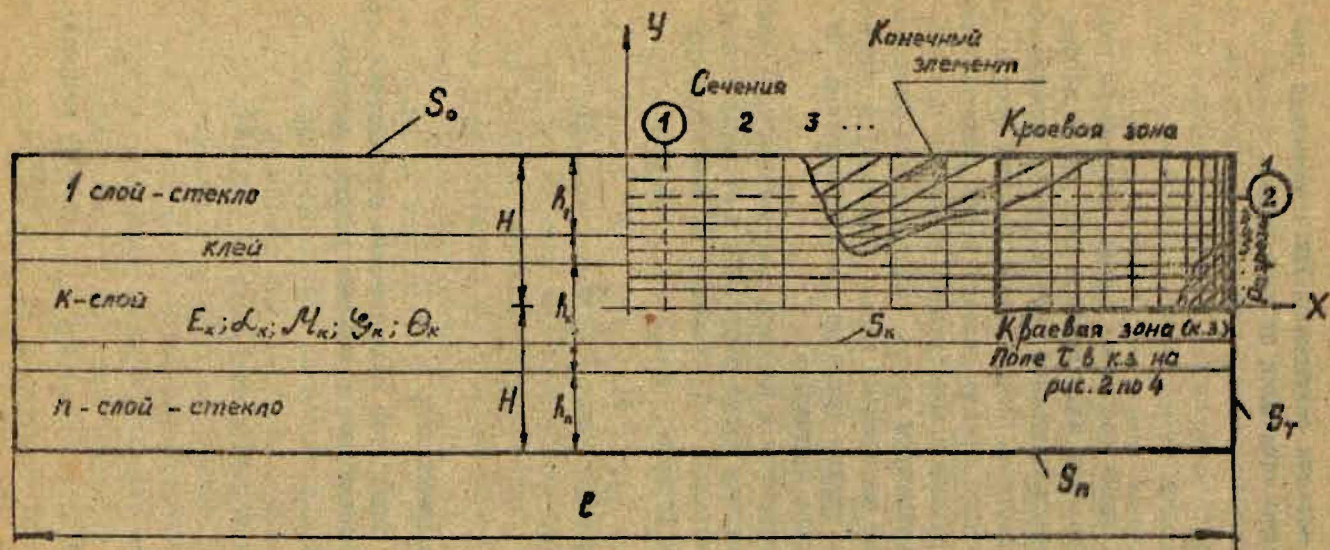


Рис. I. Расчетная схема ИКО.

n - количество слоев; $k = 1, 2, \dots, n$; E - модуль упругости; α - коэффициент линейного температурного расширения; μ - коэффициент Пуассона; θ - температура; $\sigma_y = \frac{E}{2(1+\mu)}$; для симметричных 3-х слойных ИКО $h_1 = h_3 = t$; $h_2 = c$

K, S_0, S_n, S_T - см. рис. I.

Кроме того, в данной задаче должны выполняться условия сопряжения слоев на швах (S_K (шов под K слоем):

$$u_i^k = u_i^{k+1} \text{ на } |S_K; \sigma_{ij}^k = \sigma_{ij}^{k+1} \text{ на } |S_K \quad (3)$$

2. Метод решения

Матричное уравнение равновесия, являющееся системой алгебраических уравнений, составляется следуя общепринятому пути в МКЭ [10, 11]. Условия сформулированные соотношениями (1) по (3) заменяются эквивалентным требованием минимума потенциальной энергии системы π , записанного с учетом отсутствия внешних механических воздействий:

$$\delta\pi = \delta \left(\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* dS \right) = 0 \quad (4)$$

где $\epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \alpha \theta \delta_{ij}; i, j = x, y \quad (4a)$

Условия сшивания отдельных слоев (3) в МКЭ по перемещениям удовлетворяются естественным образом, ибо конечные элементы (КЭ) стыкуются в некоторых узловых точках, в которых перемещения (v) одинаковы для всех КЭ, примыкающих к данному узлу. Матричная аппроксимация перемещений в пределах отдельного КЭ (Δ - указывает на конкретно выбранный КЭ)

$$\{u\}_\Delta = [A] \{v\}_\Delta \quad (5)$$

не допускает появление щелей на стыках КЭ. Второе требование сшивания слоев, накладываемое на напряжения формулой (3), по МКЭ выполняется в пределах точности приближенного решения.

Дифференцируя (5) и учитывая температуру, находим упругие деформации:

$$\{\varepsilon^*\}_\Delta = [B]\{v\}_\Delta - \{\varepsilon^0\}_\Delta \quad (6)$$

Закон Гука в матричной записи имеет вид:

$$\{\sigma\}_\Delta = [D]\{\varepsilon^*\}_\Delta \quad (7)$$

Предыдущие соотношения (5 - 7) позволяют записать потенциал конечного элемента:

$$\begin{aligned} \pi_\Delta &= \frac{1}{2} \int_{S_\Delta} \{\sigma\}_\Delta^T \{\varepsilon^*\}_\Delta dS = \\ &= \frac{1}{2} \{v\}_\Delta^T [K] \{v\}_\Delta - \{R^0\}_\Delta^T \{v\}_\Delta \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \{R^0\}_\Delta &= \int_{S_\Delta} [B]^T [D] \{\varepsilon^0\}_\Delta dS \\ [K] &= \int_{S_\Delta} [B]^T [D] [B] dS \end{aligned}$$

Матричное уравнение приближенного потенциала $\tilde{\pi}$ всего тела, очевидно, получается суммированием потенциалов всех элементов (N - общее число КЭ):

$$\tilde{\pi} = \sum_{k=1}^N \pi_\Delta^k = \frac{1}{2} \{v\}^T [K_\Sigma] \{v\} - \{R_\Sigma\} \{v\} \quad (9)$$

Минимум (9) обеспечивает матричное уравнение

$$[K_\Sigma] \{v\} = \{R_\Sigma\} \quad (10)$$

Решая систему уравнений (10) получают узловые перемещения $\{V\}$ и далее по (6) и (7) напряжения в пределах любого КЭ.

3. Численные примеры и обсуждение результатов

Ниже представлены напряжения в различных сечениях ИКО и дано поле касательных напряжений для плоского напряженного состояния. Во всех вариантах среда охлаждалась на 60 градусов. Принимались следующие физико-механические параметры материалов:

Стекло - $E = 0,6 \cdot 10^6$ кг/см²; $\alpha = 0,8 \cdot 10^{-5}$ 1/°C; $\mu = 0,25$

Полимерный клей - $E = 0,2 \cdot 10^5$ кг/см²; $\alpha = 0,12 \cdot 10^{-3}$ 1/°C
 $\mu = 0,25$

Ввиду продольной симметрии обсчитывалась только правая сторона изделия, а в случае симметричного набора склеиваемого пакета на КЭ разбивалась четверть всей площади. Использовались регулярные формы КЭ: треугольники и прямоугольники, которые могут формироваться с помощью сетки, образованной вертикальными и горизонтальными прямыми, параллельными координатным осям. Сгущается эта сетка у торцов и при переходе из одного слоя в другой, где предполагался наибольший уровень и градиент напряжения. Представление о расчетной сетке дают рисунки со 2^{го} по 4^й, где она нанесена и видны ее геометрические размеры. Между двумя горизонталями или вертикалями сетки проставлены номера, которыми привязываются разрезы в слоях или поперечные сечения.

Графические результаты во всех случаях указывают на достаточно быстрое убывание напряжений, двигаясь от торца УМК. Например, на рис.2 толщина пакета 22 мм, а крайняя зона примерно такая же. На рис.4 соответственно 30 мм и 35 мм. Визуально закономерность убывания протяженности краевой зоны вместе с толщиной клеевой прослойки видна на рисунке семислойного изделия с двумя неодинаковыми слоями клея.

Удаляясь от торца, напряжения выравниваются или становятся ничтожно малыми. В охлаждаемых здесь УМК продольные нормальные напряжения σ_x в поперечных сечениях номер 7 на рис.2 и номер 4 на рис.4, которыми фактически ограничивается крайняя зона,

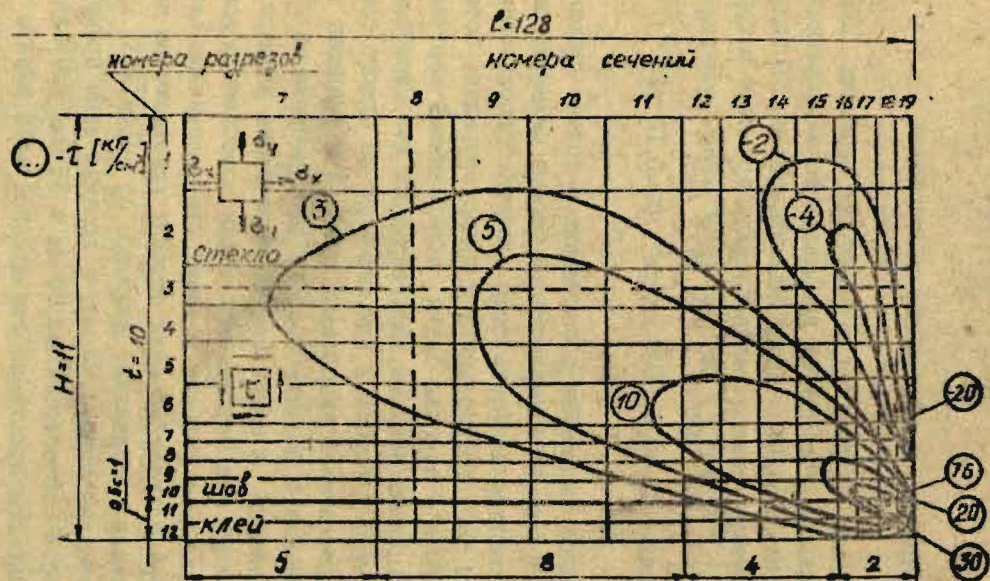


Рис. 2. Поле касательных напряжений 3-х слойного ИКО с тонким слоем клея.
 $C/t = 0,2$ или вариант А.

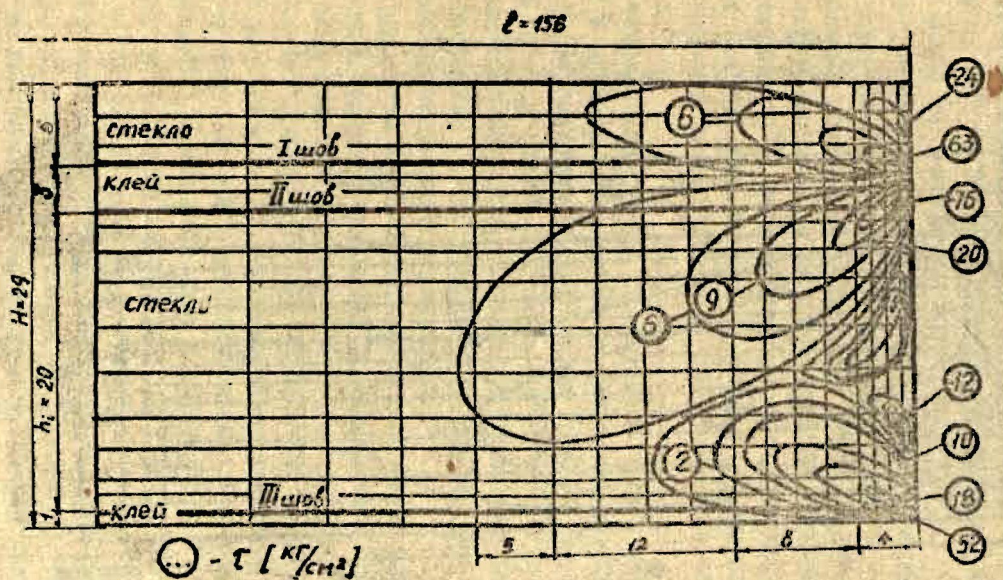


Рис.3. Поле касательных напряжений 7-ми слойного ИКО.

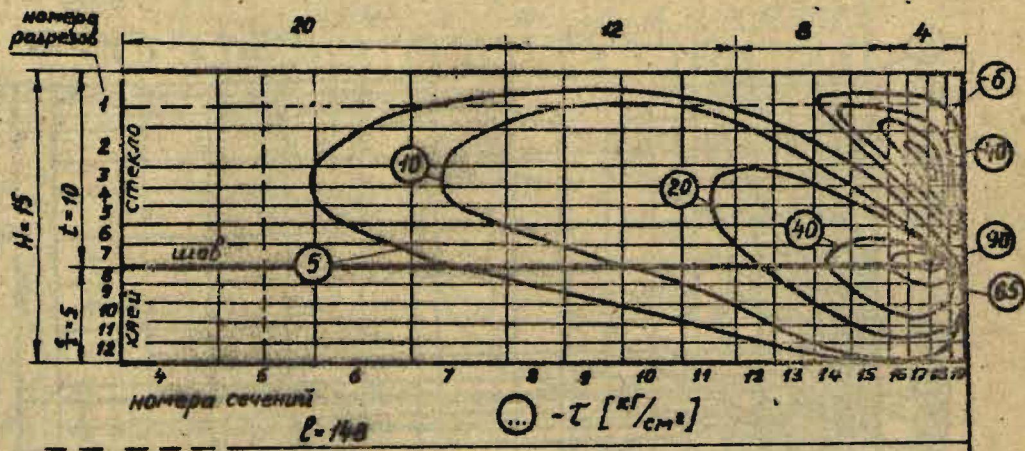


Рис. 4. Поле касательных напряжений 3-х слойного ИКО с толстым слоем клея. $C/t = 1$ или вариант С.

незначительно отличается от величин, получаемых на основе гипотезы прямых нормалей и представленных на рис. 7 прямой штриховой линией. Вне краевой зоны с касательными напряжениями (рисунки со 2^{го} по 5^й) и с поперечными нормальными напряжениями (рис. 6) можно не считаться.

Далее кратко охарактеризуем поведение напряжений у торцов конструкции, давая их графическую иллюстрацию.

Продольные нормальные напряжения σ_x возрастают у торцов из-за неравномерного их распределения по поперечному сечению. Такое поведение σ_x согласуется с очевидными представлениями о работе конструкции, поскольку тепловая деформация клея не сразу одинаково воздействует на все поперечное сечение стекла (рис. 5 и 7).

Касательные напряжения τ быстро растут и еще более резко убывают в краевой зоне, создавая усилие воопрпятствующее относительному смещению стекла и клея (рис. 5). В уточненных теориях, в силу обычно принимаемых гипотез τ на торце получает физически неверное значение, которое получается монотонным возрастанием τ до максимума на торце, что невозможно для свободной незагруженной поверхности.

На приводимых полях касательных напряжений (рис. 2 по 4) прослеживается характер изменения τ для разных продольных сечений. Если построить соответствующие кривые, то изменение τ вдоль изделия получится более пологим при возрастании расстояния от шва. Отмеченное изменение сопровождается появлением в краевой зоне смежных участков с касательными напряжениями, действующими в противоположных направлениях. В поперечных сечениях касательные напряжения также будут иметь различные знаки, и поэтому в краевой зоне недостаточно считать τ постоянным или следующим другому достаточно простому (часто параболическому) закону распределения напряжений по толщине. Это конкретно подтверждает замечание в (1,2), что разработанные уточненные теории корректируют напряженно-деформированные состояние только вне зон локализации краевых эффектов.

Интересно поведение нормального поперечного напряжения (рис. 6). Имеется максимум σ_y на торце, который оказывается не единственным. Другой максимум σ_y , но уже с противоположным знаком и меньший количественно, располагается внутри

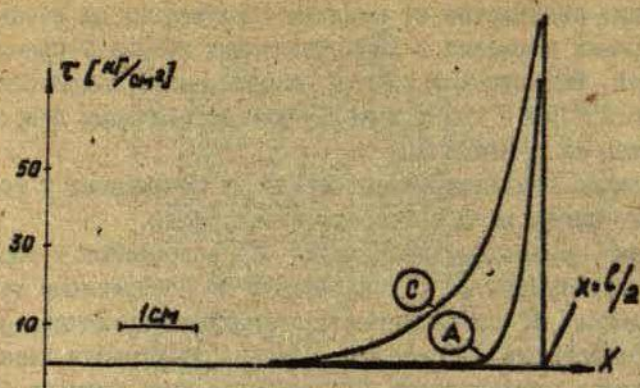
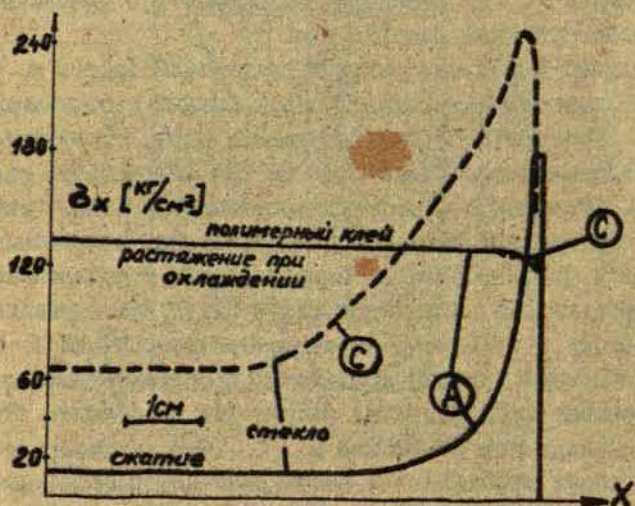
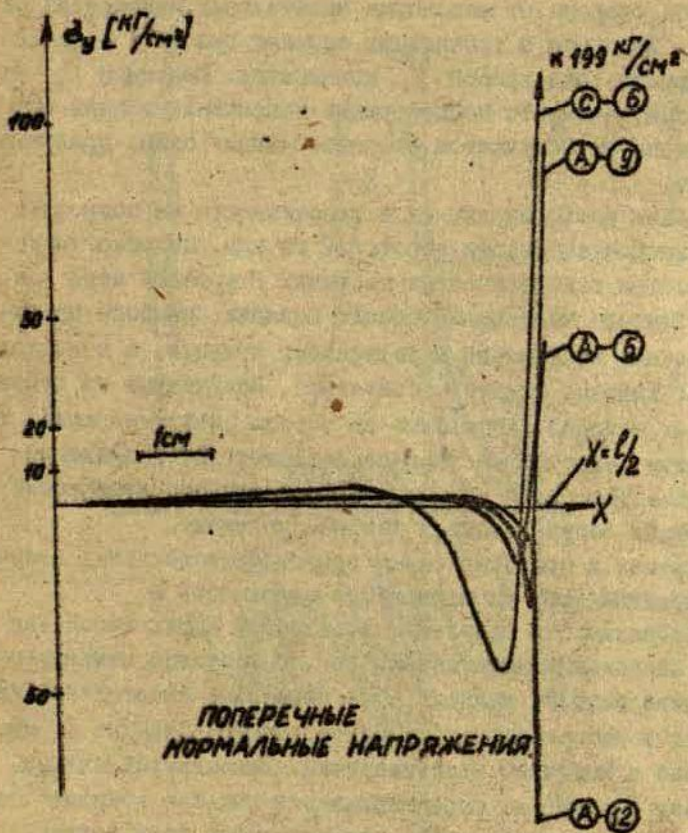


Рис. 5. Напряжения по шву 3-х слойного ИКД.
а/ касательные напряжения τ .



б/ продольные нормальные напряжения σ_x .
А, С - расчеты при разных параметрах C/t , см. рис. 2, 4.



ПОПЕРЕЧНЫЕ
НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Рис. 6. Поперечное нормальное напряжение в 3-х слойных изделиях. (A) - вариант расчета; (5) - номер продольного разреза на рис. 2, 4.

краевой зоны. Определяет такое распределение нормальных поперечных напряжений, по всей видимости, различие в градиентах убывания σ по обе стороны от максимума касательных напряжений на шве изделия. Принимая в уточненных теориях гипотезу о несжимаемости нормали, вид кривой σ_y искажается. Максимум σ_y на торце теряется, а вместо концентрации напряжений вблизи внутреннего максимума получается сосредоточенная сила, приложенная на торце.

Рассмотрение всех напряжений в совокупности не позволяет говорить о второстепенности некоторых из них, подобно тому как это делается в классических теориях. В краевой зоне все компоненты тензора напряжений одного порядка, намного превышающие значения напряжений в внутренней области, и с каждой из компонент тензора следует считаться. Полученные на основе аналитических методов результаты не всегда исчерпывающие, так как встречаются отмеченные выше несоответствия, результаты нередко даются для одной из составляющих тензора напряжений и краевые эффекты могут остаться без рассмотрения.

При обращении к представленным графикам касательных напряжений для краевых зон усматривается склонность к взаимной независимости отдельных возмущений вдоль торца как по уровню наибольших напряжений, так по величине локализации. На рис. 3 можно было бы ожидать, что ненулевые касательные напряжения будут распространяться на расстояния порядка 60 мм, что соизмерно с толщиной всего изделия. Оказывается однако, что суммарная толщина не определяющая, а большее внимание оказывают толщины двух прилегающих непосредственно друг к другу слоев. Поэтому увеличение толщины самого толстого двенадцатимиллиметрового слоя стекла вряд ли много изменит в общей картине возмущений у II и III швов.

При длине УМК, превышающей некоторый минимум, очевидна независимость концентраторов напряжений расположенных у противоположных торцов. Этим устанавливается независимость максимальных напряжений от длины УМК, что может быть полезным при проведении расчетов. Сперва простыми средствами находятся напряжения вдали от торцов, а затем проводится расчет концентратора напряжений. Протяженность рассчитываемой краевой зоны будет достаточной, если напряжения в ней примут значения, рав-

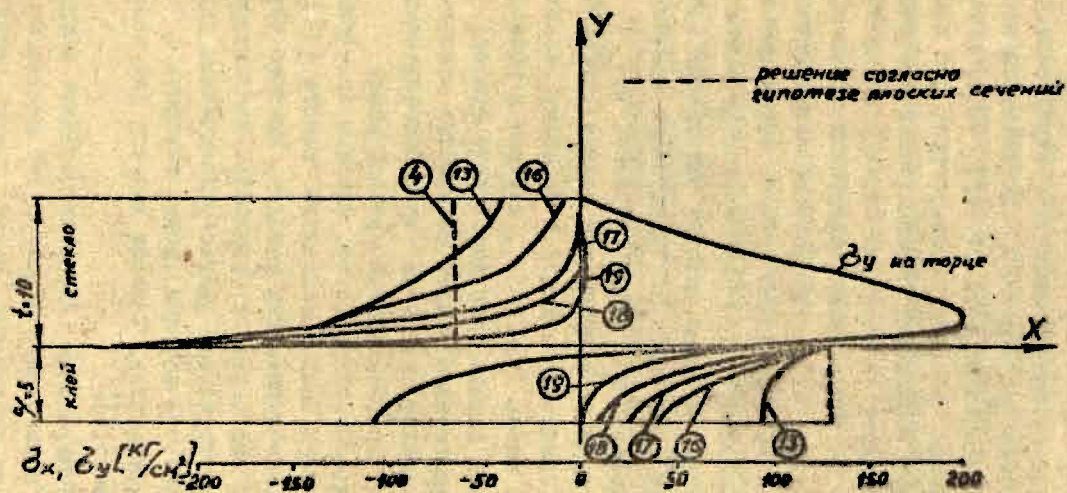


Рис. 7. - Нормальное напряжение σ_x в поперечных сечениях и σ_y на торце для ИКО с голстым слоем клея. ③ - номер сечения на рис. 4.

ные получаемы на основе аналитических решений в срединных сечениях изделия. На рисунках со 2-го по 4-й представлены именно те области, которые целесообразно рассчитывать отдельно и левые крайние сечения которых примыкают к внутренним.

Касаясь вычислений прочности УМК остановимся на равнине напряженного состояния тонких (рис.2; $c/t = 0,2$) и толстых (рис.4; $c/t=1$) клеевых прослоек. Оказывается, что изменение максимума касательных напряжений незначительно при разных соотношениях толщин среднего и наружных слоев у трехслойных изделий (рис.5). В то же самое время градиенты касательных напряжений заметно другие, и, как следствие, неодинакова локализация краевого эффекта. Достаточно быстрое изменение касательных напряжений показывает, что малополезно перенесение распространенных в теории пластин методов нахождения напряжений в виде тригонометрических рядов на аналогичные задачи многослойных конструкций, особенно для малых отношений c/t .

В МКЭ особых трудностей отношение толщин трехслойного изделия не вызывает. Различие сводится к большему измельчению расчетной сетки при малых c/t , которая в области концентрации напряжений должна быть достаточно густой. Однако для любых толщин склеиваемого слоя количество неизвестных в МКЭ варьируется незначительно из-за пропорциональности между параметром c/t и протяженностью краевой зоны.

Заканчивая обсуждение результатов, сравним полученные решения с результатами экспериментальной работы [42] выполненной поляризационно-оптическим методом. Быстрое чередование полос интерференции подтверждает сложность напряженного состояния у торца. Ввиду отсутствия физико-механических параметров материалов обследованного образца, можно говорить о качественном совпадении результатов. Таковое имеется для напряжений по шву изделия (рис.5,6).

Наблюдаемые в эксплуатации ИКО разнообразные разрушения в краевой зоне также качественно подтверждает правильность найденного распределения напряжений, однако точный расчет долговечности изделий при изменяющейся температуре оставляет предмет дальнейших исследований.

4. Выводы

1. Численное решение прочностной задачи согласуется с хорошо известным механическим поведением УМК, обнаруживая резкую локализацию напряжений у торцов.

2. Получены конкретные численные значения напряжений в концентраторах, объясняющие встречающиеся в эксплуатации дефекты УМК.

3. Устанавливается независимость максимальных напряжений от длины УМК, что позволяет расчленить расчет на этапы с раздельным нахождением напряжений вне кривых зон и самостоятельным расчетом концентратора.

4. Краевой эффект более резко выражен и градиенты напряжений выше для трехслойных конструкций с малым отношением толщин склеивающего и наружных слоев.

5. Отмечается качественное совпадение численных результатов по МКС с экспериментальными, полученными поляризационно-оптическим методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М., 1974. 446 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М., 1967. 266 с.
3. Григольк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М., 1973. 170 с.
4. Болотин В.В. К теории слоистых плит. "Известия АН СССР. Механика и машиностроение", 1963, №3, с.20-53.
5. Крайчинович Д. Расчет трехслойной балки. - "Прикладная механика. Сер.Е.", №3, 1972, с.137-143.
6. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев, 1973. 228 с.
7. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига, 1969. 274 с.
8. Рабинович А.Л. Введение в механику армированных полимеров. М., 1970. 482 с.
9. Рязицын А.Р. Теория составных стержней строительных конструкций. М., 1948. 192 с.
10. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. 1974. 342 с.
11. Zienkiewicz O.C. The finite element method in engineering sciences. London, 1971. 541 p.
12. Дюрелли А., Райли У. Введение в фотоэластику. М., 1970. 484 с.

Л.А.Столярова

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПУСТОТЫМ УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

В последние годы большое внимание уделяется расчету конструктивных элементов - цилиндрических оболочек, содержащих во внутренней полости заполнитель. Достаточно полно изучены статическая устойчивость [1] и колебания оболочек [2,3] со сплошным заполнителем. Хотя в реальных конструктивных элементах заполнитель является пустотелым, работ, посвященных исследованию статической устойчивости [4-6] и собственных колебаний [7-9] таких конструктивных элементов значительно меньше. Параметрические колебания цилиндрических оболочек с пустотелым заполнителем, по-видимому, не исследовались.

В настоящей работе приводится методика определения областей динамической неустойчивости пологой ортотропной цилиндрической оболочки с упругим пустотелым заполнителем при параметрических колебаниях. Оболочка загружена осевой гармонической силой $P = P_0 + P_1 \cos \theta t$, на торцах оболочки ставятся условия шарнирного опирания. Если деформацию оболочки описывать классическими уравнениями движения, не учитывая тангенциальные силы инерции и приведенные нагрузки, то задача о параметрических колебаниях оболочки как со сплошным, так и с пустотелым заполнителем может быть сведена [2] к исследованию устойчивости решений уравнения:

$$\frac{d^2 W_{lm}}{dt^2} + \Omega_{lm}^2 (1 - 2\delta_{lm} \cos \theta t) W_{lm} + \frac{1}{M} \sum_{\substack{n=0,2 \\ (n=1,3)}} Q_{lmn} \omega_{lmn} \cos\left(\frac{\theta n}{2} t + \psi_n\right) = 0, \quad (1)$$

где Ω_{lm} - частота колебаний пустой оболочки, нагруженной продольной постоянной силой P_0 ; $\delta_{lm} = \frac{P_0}{2(P_{lm}^* - P_0)}$, P_{lm}^* - критическая статическая сила при осевом сжатии пустой оболочки (M - масса единицы ее поверхности, R - радиус срединной поверхности, который в силу малости толщины оболочки $h \ll R$ отождествляем с радиусом внутренней поверхности). В уравнении (I) Q_{lmn} - коэффициент реакции заполнителя для фиксированных l (число полуволн вдоль образующей) и m (число волн в окружном направлении). Следует отметить, что в случае расчета по уточненным теориям изменятся лишь выражения для Ω_{lm} и δ_{lm} [10].

Подставляя в (I) временную часть функции прогиба W_{lm} в виде:

$$W_{lm}(t) = \sum_n \omega_{lmn} \cos\left(\frac{\Theta n}{2} t + \psi_n\right),$$

приходим к уравнениям границ областей динамической неустойчивости. Для главной области ($n=1$) имеем уравнение:

$$1 - \left(\frac{\Theta}{2\Omega_{lm}}\right)^2 \pm \delta_{lm} + \frac{Q_{lm1}}{M\Omega_{lm}^2} = 0 \quad (2)$$

Таким образом, задача сводится к решению данного трансцендентного уравнения для фиксированного δ_{lm} , причем коэффициент реакции заполнителя Q_{lmn} является функцией Θ . Выражение для Q_{lm} при осесимметричных колебаниях цилиндрической оболочки со сплошным заполнителем приведено в [2]. Поскольку в случае пустотелого заполнителя границы главной области неустойчивости также определяются из уравнения (2), задача заключается в нахождении Q_{lmn} при наличии пустотелого заполнителя во внутренней полости оболочки.

I. Решение уравнения Ламе для пустотелого
заполнителя

Заполнитель представляет собой упругий изотропный цилиндр с центральным каналом радиуса R_1 . Взаимодействие оболочки и заполнителя считаем радиальным, следовательно, при деформации всей системы в целом на внешнюю поверхность заполнителя со стороны оболочки действует периодическая распределенная нагрузка $-q_r = \sigma_{rr}|_{r=R_1}$. Внутреннюю поверхность заполнителя принимаем свободной от напряжений. Решение уравнения Ламе при отсутствии массовых сил, удовлетворяющее заданным граничным условиям на торцах заполнителя^{*} ($\sigma_{zz}|_{z=0,L} = u_r|_{z=0,L} = u_\varphi|_{z=0,L} = 0$; где L - длина оболочки и заполнителя) имеет вид:

$$u_r = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=0,2 \\ (n-4)3}}^{\infty} \left\{ A_{lmn} [\alpha_{ln} J_{m-1}(\alpha_{ln} r) - \frac{m}{r} J_m(\alpha_{ln} r)] + \right. \\ \left. + a_{lmn} [\alpha_{ln} Y_{m-1}(\alpha_{ln} r) - \frac{m}{r} Y_m(\alpha_{ln} r)] - B_{lmn} \alpha_{ln} J_{m-1}(\beta_{ln} r) - \right. \\ \left. - b_{lmn} \alpha_{ln} Y_{m-1}(\beta_{ln} r) + C_{lmn} \frac{m}{r} J_m(\beta_{ln} r) + c_{lmn} \frac{m}{r} Y_m(\beta_{ln} r) \right\} \times \\ \times \sin \alpha_l z \cos m \varphi \cos \left(\frac{\theta n}{2} t + \psi_n \right); \quad (3)$$

$$u_z = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ A_{lmn} \alpha_l J_m(\alpha_{ln} r) + a_{lmn} \alpha_l Y_m(\alpha_{ln} r) + \right. \\ \left. + B_{lmn} \beta_{ln} J_m(\beta_{ln} r) + b_{lmn} \beta_{ln} Y_m(\beta_{ln} r) \right\} \times \\ \times \cos \alpha_l z \cos m \varphi \cos \left(\frac{\theta n}{2} t + \psi_n \right); \quad (4)$$

* Постановка задачи о деформации полого цилиндра под действием поверхностной нагрузки вида $q_r = q(z)f(t)$ с произвольными граничными условиями на торцах имеется в работе [11].

$$\begin{aligned}
 u_y = & \sum_l \sum_m \sum_n \left\{ -A_{lmn} \frac{m}{r} J_m(\alpha_{ln} r) - a_{lmn} \frac{m}{r} Y_m(\alpha_{ln} r) + \right. \\
 & + B_{lmn} \alpha_l J_{m-1}(\beta_{ln} r) + b_{lmn} \alpha_l Y_{m-1}(\beta_{ln} r) - \\
 & - C_{lmn} \left[\beta_{ln} J_{m-1}(\beta_{ln} r) - \frac{m}{r} J_m(\beta_{ln} r) \right] - \\
 & - C_{lmn} \left[\beta_{ln} Y_{m-1}(\beta_{ln} r) - \frac{m}{r} Y_m(\beta_{ln} r) \right] \times \\
 & \times \sin \alpha_l z \sin m \varphi \cos \left(\frac{\Theta n}{2} t + \Psi_n \right), \quad (5)
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha_l = \frac{\pi l}{L}, \quad \alpha_{ln} = \sqrt{\left(\frac{\Theta n}{2C_1}\right)^2 - \alpha_l^2}, \quad \beta_{ln} = \sqrt{\left(\frac{\Theta n}{2C_1}\right)^2 - \alpha_l^2},$$

$$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

λ и μ - константы Ламе, ρ - плотность материала заполнителя, $J_m(z)$ и $Y_m(z)$ - функции Бесселя I-го и II-го рода.

Напряжения в заполнителе можно определить по (3)-(5) через формулы Коши и закон Гука для изотропного упругого тела. Шесть неизвестных постоянных в выражениях для перемещений определяются из граничных условий на боковых поверхностях заполнителя:

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R_i} = \sigma_{rz} \Big|_{r=R_i} = \sigma_{r\varphi} \Big|_{r=R_i} = 0; \quad (6)$$

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R} = \sum_l \sum_m \sum_n Q_{lmn} u_{lmn} \sin \alpha_l z \cos m \varphi \cos \left(\frac{\Theta n}{2} t + \Psi_n \right);$$

$$\sigma_{rz} \Big|_{r=R} = \sigma_{r\varphi} \Big|_{r=R} = 0; \quad (7)$$

$$u_r \Big|_{r=R} = \sum_l \sum_m \sum_n u_{lmn} \sin \alpha_l z \cos m \varphi \cos \left(\frac{\Theta n}{2} t + \Psi_n \right)$$

Следует отметить, что в случае сплошного заполнителя вместо (6) накладывается требование сграниценности решения при $r \rightarrow 0$ и в выражениях (3)–(5) необходимо отбросить все члены, содержащие функции Неймана, т.е. $a_{lmn} = b_{lmn} = c_{lmn} = 0$. Решение задачи в этом случае подробно рассматривалось ранее [2].

Из выражений для коэффициентов в аргументах функций Бесселя и Неймана α_{ln} и β_{ln} видно, что в зависимости от параметров заполнителя, формы волнообразования l и значения частоты вынуждающей силы Θ они могут быть как действительными, так и мнимыми. Очевидно, что те члены рядов в (3)–(5), для которых выполняются условия $\Theta > \Theta_1^{(n)} = \frac{2\pi l \sqrt{\mu}}{nL \sqrt{\rho}}$ (если аргументы функций Бесселя и Неймана содержат β_{ln}) и $\Theta > \Theta_1^{(m)} = \frac{2\pi l \sqrt{\lambda + 2\mu}}{nL \sqrt{\rho}}$ (если функции Бесселя и Неймана зависят от α_{ln}), являются действительными. В противном случае, используя известные соотношения между функциями Бесселя и Неймана от мнимого аргумента и модифицированными функциями Бесселя $I_m(z)$ и функциями Макдональда $K_m(z)$ и учитывая, что функции Бесселя и Неймана входят в выражения (3)–(5) всегда симметрично, можно показать, что все члены рядов при любых Θ являются действительными.

После подстановки выражений для напряжений и перемещения u , в заполнителе в граничные условия (6)–(7) получаем систему семи алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных A_{lmn} , a_{lmn} , B_{lmn} , b_{lmn} , C_{lmn} , c_{lmn} и искомого коэффициента реакции заполнителя Q_{lmn} . Для определения границ главной области неустойчивости решений уравнения (2) достаточно рассмотреть только $n=1$. Кроме того, исследование динамической устойчивости системы "оболочка-пустотелый заполнитель" можно проводить отдельно для каждой фиксированной пары значений (l, m) . Из приведенных формул (3)–(5) видно, что решение задачи в случае неосесимметричной деформации оболочки и заполнителя весьма громоздко. Поэтому для наглядности ограничимся рассмотрением осесимметричных параметрических колебаний системы "оболочка-пустотелый заполнитель".

2. Определение реакции заполнителя для осесимметричных колебаний

Решение уравнения Ламе при осесимметричной деформации пустотелого заполнителя можно получить из (3-5), положив

$$u_r = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{\substack{n=0,2 \\ (n=1,3)}}^{\infty} \left\{ A_{ln} \alpha_{ln} J_l(\alpha_{ln} r) - a_{ln} \alpha_{ln} Y_l(\alpha_{ln} r) + B_{ln} \alpha_{ln} J_l(\beta_{ln} r) + b_{ln} \alpha_{ln} Y_l(\beta_{ln} r) \right\} \sin \alpha_l z \cos \left(\frac{\theta n}{2} t + \psi_n \right), \quad (3')$$

$$u_z = \sum_l \sum_n \left\{ A_{ln} \alpha_l J_0(\alpha_{ln} r) + a_{ln} \alpha_{ln} Y_0(\alpha_{ln} r) + B_{ln} \beta_{ln} J_0(\beta_{ln} r) + b_{ln} \beta_{ln} Y_0(\beta_{ln} r) \right\} \cos \alpha_l z \cos \left(\frac{\theta n}{2} t + \psi_n \right). \quad (4')$$

Неизвестные постоянные A_{ln} , a_{ln} , B_{ln} , b_{ln} и искомый коэффициент реакции заполнителя Q_{ln} определим из граничных условий, которые в случае осесимметричной деформации системы "оболочка-заполнитель" примут вид:

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R} = \sigma_{rz} \Big|_{r=R} = 0; \quad (6')$$

$$\sigma_{rz} \Big|_{r=R} = 0;$$

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=R} = \sum_l \sum_n Q_{ln} u_{ln} \sin \alpha_l z \cos \left(\frac{\theta n}{2} t + \psi_n \right), \quad (7')$$

$$u_r \Big|_{r=R} = \sum_l \sum_n u_{ln} \sin \alpha_l z \cos \left(\frac{\theta n}{2} t + \psi_n \right).$$

После подстановки выражений (3'), (4') в закон Гука, а затем в граничные условия (6')-(7') получим систему пяти алгебраических уравнений:

$$D_{11} A_{1n} + D_{12} a_{1n} + D_{13} B_{1n} + D_{14} b_{1n} = 0;$$

$$D_{21} A_{1n} + D_{22} a_{1n} + D_{23} B_{1n} + D_{24} b_{1n} = 0;$$

$$D_{31} A_{1n} + D_{32} a_{1n} + D_{33} B_{1n} + D_{34} b_{1n} = 0;$$

(8)

$$D_{41} A_{1n} + D_{42} a_{1n} + D_{43} B_{1n} + D_{44} b_{1n} = Q_{1n} u_{1n};$$

$$D_{51} A_{1n} + D_{52} a_{1n} + D_{53} B_{1n} + D_{54} b_{1n} = u_{1n};$$

где коэффициенты D_{jk} системы (8) зависят от геометрических параметров и упругих характеристик заполнителя и формы волнообразования l .

Путем подстановки пятого уравнения системы (8) в правую часть четвертого, данная неоднородная система может быть сведена к однородной алгебраической системе четырех уравнений. Из условия существования нетривиального решения получаем уравнение для нахождения коэффициента реакции заполнителя Q_{1n} :

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} - D_{51} Q_{1n} & D_{42} - D_{52} Q_{1n} & D_{43} - D_{53} Q_{1n} & D_{44} - D_{54} Q_{1n} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Следует отметить, что для тонкого слоя заполнителя ($\Delta \ll R$, где $\Delta = R - R_1$), используя разложение функций Бесселя и Неймана в ряд по малому параметру Δ :

$$\begin{aligned} Y_0(\alpha R) - Y_0(\alpha R_1) &= \alpha \Delta J_0(\alpha R); \\ J_0(\alpha R) - J_0(\alpha R_1) &= -\alpha \Delta Y_0(\alpha R); \\ J_1(\alpha R) - J_1(\alpha R_1) &= -\alpha \Delta Y_1(\alpha R); \\ Y_1(\alpha R) - Y_1(\alpha R_1) &= \alpha \Delta J_1(\alpha R); \end{aligned}$$

можно показать, что $Q_{in} \sim \Delta$ и, следовательно, при $R_1 \rightarrow R$, уравнение границ областей неустойчивости (2) переходит в уравнение границ главной области неустойчивости пустой оболочки [10].

Определив из (9) Q_{in} , можем вычислить радиальную компоненту $Q_{rY} = -\epsilon_{rr}|_{r=R}$ реакции заполнителя, играющую роль нагрузки, действующей на внутреннюю поверхность оболочки.

Как уже говорилось выше, для каждого фиксированного θ весь диапазон изменения частоты вынуждающей силы Θ разбивается на три области. Коэффициент реакции заполнителя Q_{in} , имеет различный вид в каждой из этих областей, что и определяет характер спектра областей динамической неустойчивости системы.

Так, при $\theta < \theta_1^{(1)}$ коэффициенты D_{jk} системы (9) содержат комбинации модифицированных функций Бесселя и функций Макдональда. Поэтому в этом диапазоне частот Q_{in} изменяется монотонно. Дополнительные исследования показали, что до значения $\theta = \theta_1^{(1)}$ областей динамической неустойчивости нет. При $\theta_1^{(1)} < \theta < \theta_1^{(2)}$ осциллирующий характер поведения Q_{in} обуславливается наличием в D_{jk} функций Бесселя и Неймана, зависящих только от β_{in} . В этом диапазоне частот появляется спектр областей динамической неустойчивости (первый спектр). Причем густота корней трансцендентного уравнения (2) (а следовательно, и число областей динамической неустойчивости и расстояние между ними) полностью определяется значением аргумента функций Бесселя и Неймана β_{in} . Аналогично, при частотах $\theta > \theta_1^{(2)}$ осциллирующими будут также $J_m(\alpha_{in} r)$ и $Y_m(\alpha_{in} r)$,

с чем связано появление при этих частотах второго спектра областей динамической неустойчивости. Естественно, что характер этого спектра будет определяться значением α_{1n} .

3. Численные расчеты и обсуждение полученных результатов

Расчеты были проведены при следующих значениях параметров оболочки и заполнителя:

$$E_2/E_1 = 2, G_{12}/E_1 = 0,4, \nu_1 = 0,1, \nu_2 = 0,2$$

E_1 и E_2 - модули растяжения материала оболочки в направлениях z и φ , G_{12} - модуль сдвига в плоскости $z\varphi$, $M = 8,1 \frac{\text{кг}^2}{\text{м}^2}$, $R/h = 144$, $L/R = 2,4$,

$P_0 = 0,7P^*$, $E_1/E = 210^3$, где E - модуль упругости материала заполнителя. Коэффициент Пуассона заполнителя принят $\nu = 0,45$.

В таблицах 1 и 2 приведены первый и второй спектры областей динамической неустойчивости системы "оболочка-пустотелый упругий заполнитель" при различных отношениях внутреннего радиуса заполнителя к внешнему для формы волнообразования $l = 10$. Из сопоставления спектров видно, что наличие узкого центрального канала в заполнителе ($R_1/R \leq 0,1$) незначительно смещает нижние точки областей неустойчивости первого спектра, практически не изменяя их максимальной ширины $\Delta\Theta(2\Omega)$. В то же время второй спектр даже при малых R_1 сильно искажается. Этот результат представляется физически оправданным. Как уже говорилось выше, характер первого спектра определяется значением β_{1n} , который при фиксированных l, Θ, ρ, L зависит только от модуля сдвига $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ материала заполнителя. Поэтому возникновение первого спектра можно связать с образованием в заполнителе сдвиговых стоячих волн. Аналогично коэффициент α_{1n} зависит от коэффициента объемной деформации заполнителя $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$. Поэтому появление второго спектра естественно объяснить возникновением в заполнителе стоячих волн растяжения-сжатия.

Таблица I.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------------|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\frac{R_1}{R} = 0$ | θ_0 | 2241 | 2423 | 2698 | 3035 | 3420 | 3833 | 4263 | 4697 | 5100 | 5434 | 5802 | 6245 | 6717 |
| | $\Delta\theta$ | 5 | 9 | 14 | 16 | 18 | 22 | 31 | 52 | 101 | 108 | 38 | 6 | 1 |
| $\frac{R_1}{R} = 0,001$ | θ_0 | 2238 | 2423 | 2697 | 3036 | 3420 | 3833 | 4263 | 4696 | 5100 | 5434 | 5802 | 6245 | 6717 |
| | $\Delta\theta$ | 7 | 8 | 14 | 15 | 16 | 19 | 30 | 52 | 98 | 107 | 33 | 8 | 1 |
| $\frac{R_1}{R} = 0,1$ | θ_0 | 2215 | 2364 | 2634 | 2996 | 3413 | 3855 | 4298 | 4718 | 5099 | 5423 | 5788 | 6242 | 6746 |
| | $\Delta\theta$ | 4 | 7 | 11 | 17 | 20 | 22 | 32 | 53 | 93 | 108 | 37 | 6 | 1 |
| $\frac{R_1}{R} = 0,2$ | θ_0 | 2156 | 2345 | 2685 | 3121 | 3601 | 4086 | 4556 | 5002 | 5378 | 5775 | 6294 | 6853 | |
| | $\Delta\theta$ | 3 | 10 | 19 | 19 | 25 | 28 | 42 | 95 | 126 | 40 | 8 | 1 | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,3$ | θ_0 | 2125 | 2384 | 2812 | 3334 | 3882 | 4414 | 4924 | 5348 | 5786 | 6372 | 7034 | | |
| | $\Delta\theta$ | 2 | 16 | 20 | 26 | 32 | 46 | 91 | 142 | 44 | 7 | 1 | | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,4$ | θ_0 | 2104 | 2459 | 3006 | 3632 | 4247 | 4831 | 5325 | 5797 | 6491 | | | | |
| | $\Delta\theta$ | 2 | 17 | 24 | 28 | 39 | 89 | 158 | 48 | 5 | | | | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,5$ | θ_0 | 2091 | 2588 | 3298 | 4030 | 4720 | 5283 | 5834 | 6634 | | | | | |
| | $\Delta\theta$ | 1 | 26 | 32 | 42 | 85 | 174 | 57 | 3 | | | | | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,6$ | θ_0 | 2096 | 2816 | 3727 | 4382 | 4553 | 5273 | 5837 | 6902 | | | | | |
| | $\Delta\theta$ | 8 | 38 | 42 | 2 | 80 | 197 | 50 | 4 | | | | | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,7$ | θ_0 | 2125 | 3236 | 4349 | 5155 | 5976 | | | | | | | | |
| | $\Delta\theta$ | 20 | 52 | 72 | 213 | 73 | | | | | | | | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,8$ | θ_0 | 2253 | 3929 | 5309 | 5876 | | | | | | | | | |
| | $\Delta\theta$ | 50 | 78 | 264 | 46 | | | | | | | | | |

Таблица 2.

| | | | | | | | | | | |
|-------------------------|-------------------------------|-------------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| $\frac{R_1}{R} = 0$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 7293 4 | 7813 15 | 8604 21 | 9638 21 | 10900 27 | 12177 31 | 13610 34 | 15080 33 | 16588 31 |
| $\frac{R_1}{R} = 0,001$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 7293 4 | 7813 15 | 8604 21 | 9637 21 | 10888 28 | 12176 32 | 13610 35 | 15079 34 | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,01$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 7287 4 | 7800 12 | 8569 26 | 9547 28 | 10723 20 | 10757 12 | 12017 37 | 13224 17 | 13405 18 |
| $\frac{R_1}{R} = 0,1$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 7243 0,4 | 7440 9 | 7783 1 | 8173 23 | 9185 33 | 9519 4 | 10523 44 | 11995 36 | 13572 28 |
| $\frac{R_1}{R} = 0,2$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 7488 13 | 8366 29 | 8742 3 | 9285 4 | 9720 38 | 11096 25 | 11348 22 | 12865 46 | 13186 6 |
| $\frac{R_1}{R} = 0,3$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 7541 13 | 7782 5 | 8376 6 | 8793 36 | 9138 0,3 | 10270 43 | 12160 50 | | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,4$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 7779 26 | 9212 49 | 9795 4 | 11250 60 | 13540 54 | | | | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,5$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 7978 38 | 8623 3 | 9491 11 | 10080 50 | 12402 45 | 12784 30 | 15340 58 | 15769 11 | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,6$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 7965 10 | 8569 54 | 9298 1 | 11180 83 | | | | | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,7$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 9288 100 | 13510 110 | | | | | | | |
| $\frac{R_1}{R} = 0,8$ | Θ_0 $\Delta \Theta$ | 8173 4 | 10320 40 | 11540 140 | | | | | | |

При больших значениях внутреннего радиуса заполнителя спектр областей динамической неустойчивости, значительно реже, чем при сплошном заполнителе, а максимальная ширина их возрастает. При $R_1/R = 0,9$ в диапазоне частот до 20 Кгц остается, всего четыре широких области (таблица 3). Из таблицы видно, что при уменьшении толщины заполнителя Δ ширина одной из этих областей резко увеличивается, а остальные три постепенно сужаются и исчезают.

Выше отмечалось, что при $R_1 \rightarrow R$ решение задачи переходит в решение для пустой оболочки. На рисунке I показан процесс перехода одной из областей динамической неустойчивости системы "оболочка-пустотелый заполнитель" в главную область динамической неустойчивости пустой оболочки для форм волнообразования $l=10$, $m=0$.

Таблица 3.

| R_1/R | θ_0 | $\Delta\theta$ | θ_0 | $\Delta\theta$ | θ_0 | $\Delta\theta$ | θ_0 | $\Delta\theta$ |
|---------|------------|----------------|------------|----------------|------------|----------------|------------|----------------|
| 0,9 | 2964 | 157 | 4634 | 256 | 6953 | 182 | 18653 | 253 |
| 0,92 | 3306 | 162 | 4806 | 370 | 7929 | 137 | 13007 | 6 |
| 0,95 | 3855 | 64 | 5464 | 739 | 11242 | 61 | | |
| 0,96 | 3962 | 18 | 5945 | 900 | 13627 | 38 | | |
| 0,97 | 4049 | 9 | 6648 | 1093 | 17740 | 19 | | |
| 0,98 | 4069 | 9 | 7689 | 1283 | | | | |

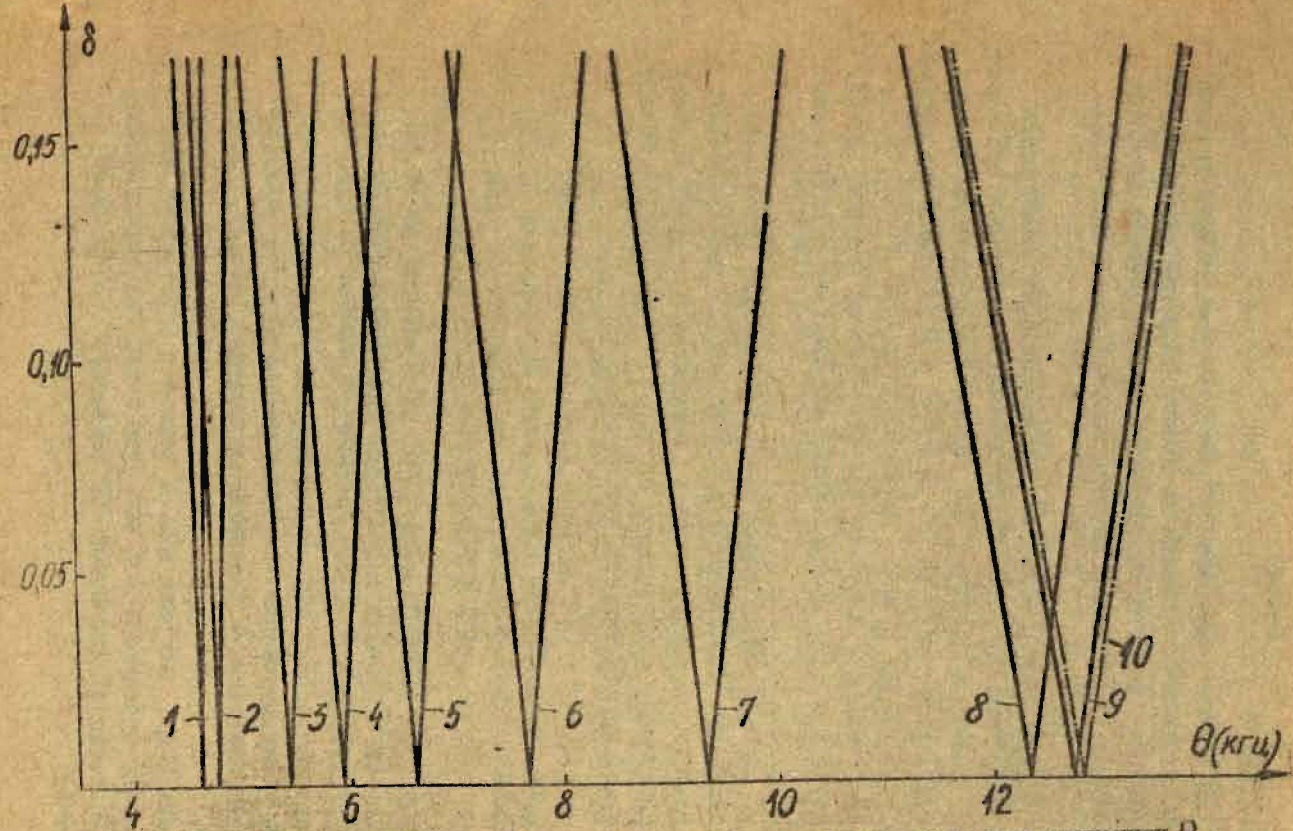


Рис. 1. Расположение самой широкой области неустойчивости при различных значениях R_1
 1 - $R_1 = 0,9R$, 2 - $R_1 = 0,92R$, 3 - $R_1 = 0,95R$, 4 - $R_1 = 0,96R$, 5 - $R_1 = 0,97R$;
 6 - $R_1 = 0,98R$, 7 - $R_1 = 0,99R$, 8 - $R_1 = 0,999R$, 9 - $R_1 = 0,9999R$, 10 - главная
 область неустойчивости пустой оболочки. ($L=10, m=0$)

Выводы

1. На основе разработанной методики исследовано влияние величины центрального канала на спектр областей динамической неустойчивости пологой ортотропной цилиндрической оболочки, содержащей во внутренней полости упругий пустотелый заполнитель.

2. Первый спектр областей динамической неустойчивости системы "оболочка-пустотелый заполнитель" практически совпадает с первым спектром оболочки со сплошным заполнителем до значений внутреннего радиуса $R_1 \leq 0,1 R$, в то время как вторые спектры этих систем сильно отличаются уже при $R_1 = 0,01 R$.

3. Минимальное значение частоты первой области динамической неустойчивости соответствует заполнителю с внутренним радиусом $R_1 = 0,5 R$.

4. С уменьшением толщины слоя заполнителя расстояние между областями динамической неустойчивости увеличивается, а сами области становятся шире и смещаются в сторону больших частот, переходя в предельном случае $R_1 \rightarrow R$ в главную область динамической неустойчивости пустой оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В.А. Обзор литературы по устойчивости оболочек с упругим заполнителем. - "Труды семинара по теории оболочек", 1971, вып. 2, Казань, с. 5-25.
2. Богданович А.Е., Тамуж В.П. Влияние упругого заполнителя на динамическую устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки. - "Механика полимеров", 1974, №2, с. 299-308.
3. Корбут Б.А., Нагорный Д.Г. К задаче о собственных колебаниях цилиндрической оболочки с упругим заполнителем. - "Известия АН Армянской ССР, Механика", 1970, 23, №3, с. 50-58.

4. Власов В.В. Исследование устойчивости цилиндрических оболочек с пустотелым наполнителем при осевом сжатии. - "Прикладная механика", 1971, т.7, вып.8, с.117-121.
5. Микишева В.И. О влиянии жесткости упругого наполнителя на форму потери устойчивости и величину критической нагрузки цилиндрических оболочек из стеклопластика при осевом сжатии. - "Механика полимеров", 1971, №5, с.931-939.
6. Куршин Л.М., Темников А.И. Исследование задачи устойчивости оболочки с пустотелым наполнителем. - "Строительная механика и расчет сооружений", 1975, №2, с.27-30.
7. Ильина А.М., Корбут Б.А. Собственные колебания цилиндрической оболочки с пустотелым наполнителем. - "Известия АН СССР. Механика твердого тела", 1969, №6, с.123-127.
8. Мигранов М.М., Рахимов И.С. К оценке влияния упругого полого наполнителя на колебания цилиндрической оболочки. - "Исследования по теории пластин и оболочек, Вып.6-7", 1970, Казань, с.627-639.
9. Фалеева С.А. Спектр частот собственных колебаний системы цилиндрическая оболочка-упругий наполнитель - газ. - "Исследования по теории пластин и оболочек, Вып.10", 1973, Казань, с.281-286.
10. Богданович А.Е. Динамическая устойчивость упруговязкой ортотропной цилиндрической оболочки. - "Механика полимеров", 1973, №4, с.714-721.
- II. Брусилловская Г.А., Ершов Л.В. Динамика полого симметрично нагруженного упругого кругового цилиндра. - "Прикладная математика и механика", 1974, т.38, вып.3, с.561-564.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

| | |
|--|-----|
| 1. Микельсон Ю.Я., Якович А.Т. Движение жидкого металла в индукционных печах | 3 |
| 2. Циркунов В.Э., Сорокина Э.С. Двумерная модель индукционного расходомера,..... | 27 |
| 3. Сорокина Э.С. Индуцированное магнитное поле и профиль скорости в канале линейной МГД-машины | 36 |
| 4. Дрейманис В.А. Критерии качества биологического микрокалориметра в приближении плоской модели... | 41 |
| 5. Вичутинский А.А., Дрейманис Ю.А., Микельсон Ю.Я. Критерии качества микрокалориметра для исследования биохимических реакций | 65 |
| 6. Белов М.А., Цирулис Т.Т. Асимптотические методы в приближенном обращении интегрального преобразования Лапласа | 77 |
| 7. Белов М.А., Богданович А.Е. Численный анализ распространения возмущений при ударе жесткой массой по вязко-упругому стержню конечной длины | 98 |
| 8. Брока М.Э., Клявинь Я.Я., Шмит Я.Р. Один метод аппроксимации функционалов | 112 |
| 9. Блумберг Н.Н. Исследование напряженного состояния упругих многослойных конструкций методом конечных элементов | 117 |
| 10. Стоярова Л.А. Параметрические колебания цилиндрической оболочки с пустотелым упругим заполнителем | 135 |

Ученые записки, том 252

ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ
СПЛОШНЫХ СРЕД

Выпуск II

Редакторы: Я.Полманис, Р.Довгополова
Технический редактор Л.Паэгле
Корректор Л.Паэгле

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1976

Подписано к печати 15.06.1976. ЯТ 05288. Зак. № 988.
Бумага №1. Ф/о 60x84/16. Физ.п.л. 9,8. Уч.-и.л. 7,2
Тираж 500 экз. Цена 72 к.

Отпечатано на ротаприте, Рига-50, ул.Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки