Ученые записки

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ В НИХ

II

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра математического анализа

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том 257

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ В НИХ

Выпуск 2

Latvijas
Universitātes
BIBLIOTĒKA

LVU izdevumu
arhīvs

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1976

УДК 513.,519, 517.

Топологические пространства и отображения в них, вып.2. Учен.зап. ЛГУ им.П.Стучки, 1976, т.257

Сборник содержит результаты исследываний, выполненных в 1973 - 1975 гг сотрудниками кафедр математического анализа, общей математики и высшей математики, ВЦ Латвийского государственного университета имени Петра Стучки, а также преподавателями и аспирантами Московского государственного университета и Черновицкого государственного университета. Результаты относятся к общей теории топологических пространств, теории возмущений линейных непрерывных и линейных замкнутых отображений в банаховых пространствах и их применению к исследованию устойчивости тривиального решения системы стохастических уравнений.

Сборник предназначен для научных работников в области функционального анализа, топологии, теории вероятностей и алгебры, для аспирантов и студентов старших курсов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки от 25 июня 1976 года

© Латвийский государственный университет им.П.Стучки, 1976

Т $\frac{\text{20203-106у}}{\text{М 812(11)-76}}$ 214-76

УДК 513.83.

ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО ОТДЕЛИМЫХ ПРОСТРАНСТВ

2к

М.А.Гольдман

Пусть T -топологическое пространство; $\mathbb{R}$ – вещественная прямая, наделенная обычной топологией; E – подпространство в $\mathbb{R}$ $(E \neq \varnothing)$; $C(T,E)$ – семейство всех непрерывных функций, отображающих T в E. Обозначим через $\mathcal{J}_{fs}$ класс всевозможных функционально отделимых пространств (т.е. топологических пространств T, обладающих тем свойством, что для любых двух различных точек $t_o, t_1 \in T$ существует функция $y \in C(T, \mathbb{R})$, для которой $y(t_o) \neq y(t_1)$, или, что эквивалентно, существует функция $y \in C(T, E_o)$, где $E_o = [0, 1]$, для которой $y(t_o) = 0$, $y(t_1) = 1$). Условимся говорить, что подпространство $T_o \subset T$ обладает свойством $(\mathcal{U})$, если $(\forall y_o \in C(T_o, \mathbb{R}))(\exists y_1 \in C(T, \mathbb{R}))[\, y_o = y_1|_{T_o}\,]$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть $\mathcal{J}_1$ – класс топологических пространств, удовлетворяющих первой аксиоме отделимости. Если $T \in \mathcal{J}_1$, то $T \in \mathcal{J}_{fs}$ в том и только в том случае, когда каждое компактное множество $T_o \subset T$ обладает свойством $(\mathcal{U})$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $T \in \mathcal{J}_{fs}$, T_o – компактное множество в T и $y_o \in C(T_o, \mathbb{R})$. В силу компактности T_o множество $y_o(T_o)$ ограничено: $y_o(T_o) \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим тихоновский куб $B = E^{C(T,E)}$, где $E = [a, b]$, и обозначим через e отображение вычисления (см. [1], стр. 158), т.е. отображение пространства T в куб B, определяемое равенством $[e(t)](y) = y(t)$ $(\forall t \in T)(\forall y \in C(T, E))$.
Отображение e непрерывно и инъективно (последнее – ввиду функциональной отделимости T). Положим $e_o = e|_{T_o}$. Поскольку T_o – компактное множество, отображение e_o является гомеоморфизмом T_o на $e_o(T_o) = B_o \subset B$. Определим на B_o функцию φ_o равенством $\varphi_o(\beta) = y_o(e_o^{-1}(\beta))$ $(\beta \in B_o)$. Эта функция непрерывна на B_o. Так как по теореме Тихонова пространство B компактно и отделимо, следовательно, нормально, а

B_0 замкнуто (как образ компактного множества T_0 при непрерывном отображении e_0 в отделимое пространство B),то по теореме Титце (см.например, [2] ,стр.134) существует функция $\varphi \in C(B,E)$, такая, что $\varphi_0 = \varphi|_{B_0}$. Положим $\varphi_1 = \varphi|_{e(T)}$ и $y_1 = \varphi_1 \circ e$. Очевидно $y_1 \in C(T,E)$ и $y_0 = y_1|_{T_0}$. Этим доказано, что каждое компактное множество T_0 пространства $T \in \mathcal{J}_{fs}$ обладает свойством $(\mathcal{U})$.

Обратно, если каждое компактное множество T_0 пространства $T \in \mathcal{J}_1$ обладает свойством $(\mathcal{U})$, то $T \in \mathcal{J}_{fs}$. Действительно, пусть $t_0, t_1 \in T$ и $t_0 \neq t_1$. Положим $T_0 = \{t_0, t_1\}$ и зададим функцию y_0 на T_0: $y_0(t_0) = 0$, $y_0(t_1) = 1$. Так как $T \in \mathcal{J}_1$, то $y_0 \in C(T,\mathbb{R})$. По условию, существует функция $y_1 \in C(T,\mathbb{R})$, такая, что $y_0 = y_1|_{T_0}$, т.е. $y_1(t_0) = 0$ и $y_1(t_1) = 1$; следовательно, $T \in \mathcal{J}_{fs}$.

Замечание. Первая часть теоремы 1 может быть доказана иным путем, не использующим отображение вычисления и теорему Тихонова о топологическом произведении компактных пространств. Чтобы это сделать,установым сперва одну лемму, которая представляет собой некоторый аналог леммы Урысона.

Лемма. Пусть $T \in \mathcal{J}_{fs}$; T_0, T_1 —непустые компактные множества в T и $T_0 \cap T_1 = \varnothing$. Тогда

$$(\exists y \in C(T,E_0))[y(T_0) = \{0\} \wedge y(T_1) = \{1\}].$$

Доказательство. Пусть p - фиксированная точка множества T_0. Так как $T \in \mathcal{J}_{fs}$,то для каждой точки $q \in T_1$ найдется такая функция $y_q \in C(T,E_0)$, что $y_q(p) = 0$ и $y_q(q) = 1$. Положим $V_q = \{t \in T : y_q(t) > \frac{1}{2}\}$ $(q \in T_1)$. Семейство $(V_q)_{q \in T_1}$ образует открытое покрытие множества T_1. В силу компактности T_1 существует множество $\{q_1, \dots, q_n\} \subset T_1$, такое, что $T_1 \subset \subset \bigcup\{V_{q_j} : j = 1, \dots, n\}$. Легко видеть, что функция

$$y_p \overset{def}{=} 2 \cdot \min[\min(y_{q_1}, \dots, y_{q_n}), \tfrac{1}{2}]$$

обладает следующими свойствами: $y_p \in C(T,E_0)$, $y_p(p) = 0$ и $y_p(T_1) = \{1\}$.

Считая, что построение функции y_p выполнено для каждой точки $p \in T_0$, рассмотрим семейство $(\mathcal{U}_p)_{p \in T_0}$, где $\mathcal{U}_p =$

$=\{t\in T: y_p(t)<\frac{1}{2}\}$. Оно образует открытое покрытие множества T_0. Поскольку T_0 компактно, существует такое множество $\{p_1,\dots,p_m\}\subset T_0$, что $T_0\subset \bigcup\{\mathcal{U}_{p_i}: i=1,\dots,m\}$. Положим

$$y=2\max[\max(y_{p_1},\dots,y_{p_m}),\tfrac{1}{2}]-1.$$

Очевидно, $y\in C(T,E_0)$, $y(T_0)=\{0\}$ и $y(T_1)=\{1\}$.

С помощью этой леммы можно получить доказательство первой части теоремы 1, придерживаясь схемы доказательства теоремы Титце и предшествующей ей вспомогательной теоремы (см. [2], стр.133-135).

Приведем одно применение теоремы 1 к вопросу о нормальной разрешимости уравнений в топологических пространствах. Мы будем пользоваться обозначениями и некоторыми результатами статьи [3]. Там, в частности, установлено, что если f -непрерывное отображение компактного пространства S в функционально отделимое пространство T, то уравнение $f(s)=t$ нормально разрешимо ([3], стр.62, следствие 5). Оставался открытым вопрос о нормальной разрешимости при тех же условиях уравнения $A_f(y)=x$, сопряженного к уравнению $f(s)=t$. Теорема 1 позволяет решить этот вопрос.

Теорема 2. Если f -непрерывное отображение компактного пространства (S,σ) в функционально отделимое пространство (T,τ), то уравнение $A_f(y)=x$ нормально разрешимо, т.е. справедливо равенство $\mathcal{R}(A_f)=X_f$.

Доказательство. Согласно пункту а) теоремы 1 статьи [3] (стр.54), имеет место импликация $f\in RQO(S,\sigma;T,\tau)\wedge(\mathcal{R}(f)$ обладает свойством $(\mathcal{U}))\Rightarrow\mathcal{R}(A_f)=X_f$. Она и послужит для доказательства нашей теоремы. Так как f непрерывно, S компактно и T отделимо, то f —замкнутое отображение и, тем более, $f\in RQO(S,\sigma;T,\tau)$. Рассмотрим множество $\mathcal{R}(f)$. Оно расположено в функционально отделимом пространстве T и компактно, следовательно, согласно теореме 1, $\mathcal{R}(f)$ обладает свойством $(\mathcal{U})$. Остается применить указанную выше импликацию.

Литература

1. Келли Дж. Л. Общая топология. М.,"Наука," 1968, с. 384.
2. Куратовский К. Топология. Т. 1. М., "Мир", 1966, с. 594.
3 Гольдман М.А. О нормальной разрешимости уровнений. "Латвийский математический ежегодник", 13, Рига, "Зинатне", 1973, с. 52 - 63.

Поступила 12 марта 1975 года

УДК 513.881

ЗАМЕЧАНИЕ О ЗАМКНУТЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ С БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ ЯДРОМ

9и

М.А.Гольдман

Пусть T – замкнутый линейный оператор с областью определения $\mathcal{D}(T)$ в банаховом пространстве X и областью значений $\mathcal{R}(T)$ в банаховом пространстве Y. Как известно, если $\mathcal{R}(T)$ замкнуто и ядро $\mathcal{N}(T)$ оператора T конечномерно, то каким бы ни был вполне непрерывный линейный оператор ϑ с областью определения $\mathcal{D}(\vartheta)$, содержащей $\mathcal{D}(T)$, у оператора $T-\vartheta$ область значений $\mathcal{R}(T-\vartheta)$ также замкнута, а ядро $\mathcal{N}(T-\vartheta)$, как и ядро $\mathcal{N}(T)$, имеет конечную размерность (которая может оказаться меньшей, большей или равной размерности $\mathcal{N}(T)$). Отсюда следует, что в случае, когда $\mathcal{N}(T)$ бесконечномерно и $\mathcal{R}(T-\vartheta)$ замкнуто, пространство $\mathcal{N}(T-\vartheta)$ тоже бесконечномерно. Мы желаем уточнить этот результат в следующем смысле. Для нормированных векторных пространств принято рассматривать, кроме алгебраической размерности (т.е. мощности алгебраического базиса пространства), другую размерность – наименьшую из мощностей множеств, линейная оболочка которых плотна в пространстве. Алгебраическая размерность пространства E обозначается через $\dim E$; для второй размерности пространства E примем обозначение $\overline{\dim} E$. Интересующее нас уточнение того факта, что оба пространства $\mathcal{N}(T)$ и $\mathcal{N}(T-\vartheta)$ бесконечномерны, состоит в доказательстве равенства $\overline{\dim}\,\mathcal{N}(T)=\overline{\dim}\,\mathcal{N}(T-\vartheta)$ (в предположении, что $\mathcal{R}(T)$ и $\mathcal{R}(T-\vartheta)$ оба замкнуты). Заметим, что этим не решается вопрос о равенстве $\dim\mathcal{N}(T)=\dim\mathcal{N}(T-\vartheta)$ алгебраических размерностей $\mathcal{N}(T)$ и $\mathcal{N}(T-\vartheta)$.

В дальнейшем нам понадобится понятие α – решетки, введенное и примененное в работе [1]. Пусть α – положительное число; множество A нормированного пространства E называется α – решеткой, если $\|x-x'\|\geqslant\alpha$ для любых $x, x' \in A$.

<u>Лемма.</u>

Пусть X и Y - банаховы пространства; $T:(\mathcal{D}(T)\subset X)\to Y$ — замкнутый линейный оператор; $\mathcal{R}(T)=\overline{\mathcal{R}(T)}$; $\mathcal{V}:(\mathcal{D}(\mathcal{V})\subset X)\to Y$ — вполне непрерывный линейный оператор; $\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(\mathcal{V})$; A - ограниченное бесконечное множество в $\mathcal{N}(T-\mathcal{V})$, являющееся α - решеткой.

Тогда существует ограниченная β - решетка $B\subset\mathcal{N}(T)$, равномощная с A $(\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}})$.

<u>Доказательство</u>. Пусть S - каноническое отображение пространства X на факторпространство $\hat{X}=X/\mathcal{N}(T)$ и S_0 - сужение S на $\mathcal{N}(T-\mathcal{V})$. Покажем, что (линейный) оператор S_0 вполне непрерывен. Пусть $\hat{T}$ - сужение S на $\mathcal{D}(T)$, $\tilde{T}$ - инъекция, ассоциированная с T (т.е. отображение множества $\mathcal{R}(\hat{T})$ на $\mathcal{R}(T)$, удовлетворяющее равенству $T=\tilde{T}\hat{T}$). Так как T - относительно открытое отображение (ибо T - замкнутый линейный оператор с замкнутой областью значений), то оператор $\tilde{T}^{-1}:\mathcal{R}(T)\to\hat{X}$ непрерывен. Рассмотрим оператор $\tilde{T}^{-1}\mathcal{V}_0$, где $\mathcal{V}_0$ -сужение $\mathcal{V}$ на $\mathcal{N}(T-\mathcal{V})$. Поскольку $\mathcal{V}_0x=Tx$ для любого x из $\mathcal{N}(T-\mathcal{V})$, имеет место равенство $\tilde{T}^{-1}Tx=\tilde{T}^{-1}\mathcal{V}_0x$ $(x\in\mathcal{N}(T-\mathcal{V}))$. Но $\tilde{T}^{-1}Tx=S_0x$ для $x\in\mathcal{N}(T-\mathcal{V})$, следовательно, $S_0=\tilde{T}^{-1}\mathcal{V}_0$. Отсюда вытекает, что S_0 - вполне непрерывный оператор. Так как A - ограниченное множество, то множество $\hat{A}=S_0(A)$ вполне ограничено. Пусть $\hat{M}$ - некоторая конечная ε - сеть в множестве $\hat{A}$ при $\varepsilon<\frac{\alpha}{2}$. Тогда найдется точка $\hat{x}_0\in\hat{M}$ $(\hat{x}_0=Sx_0)$, такая, что множество $A_0=A\cap S_0^{-1}(\{\hat{x}\in\hat{A}:\|\hat{x}-\hat{x}_0\|<\varepsilon\})$ будет иметь ту же мощность, что и (бесконечное) множество A. Зафиксируем в классе смежности $\hat{x}_0$ некоторый элемент ξ_{x_0}, после чего выберем в каждом классе смежности $\hat{x}=Sx$ из множества $\{\hat{x}\in\hat{X}:0<\|\hat{x}-\hat{x}_0\|<\varepsilon\}$ по элементу ξ_x так, чтобы выполнялись неравенства $\|\xi_x-\xi_{x_0}\|<\varepsilon$.

Для любых двух элементов ξ_{x_1}, ξ_{x_2} будем иметь $\|\xi_{x_1}-\xi_{x_2}\|<2\varepsilon$. Положим $B=\{\eta_x=x-\xi_x: x\in A_0\}$ и покажем, что B является β -решеткой в $\mathcal{N}(T)$ при $\beta=\alpha-2\varepsilon>0$.

Во - первых, $\eta_x\in\mathcal{N}(T)$, так как x и ξ_x принадлежат одному и тому же классу смежности $\hat{x}$ пространства X по подпространству $\mathcal{N}(T)$; во-вторых, если η_{x_1} и η_{x_2} - два элемента из B, отвечающие двум разным x_1, x_2 из A_0, то $\|\eta_{x_1}-\eta_{x_2}\| = \|(x_1-\xi_{x_1})-$ $-(x_2-\xi_{x_2})\| \geq \|x_1-x_2\|-\|\xi_{x_1}-\xi_{x_2}\| > \alpha - 2\varepsilon = \beta$. Этим также показано, что $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A_0}}$. Но $\overline{\overline{A_0}} = \overline{\overline{A}}$, следовательно, $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$. Для завершения доказательства леммы остается еще учесть, что B - ограниченное множество.

Замечание. Из доказательства леммы видно, что она остается верной, если условия замкнутости оператора T и замкнутости его области значений заменить условием относительной открытости T.

Теорема.

Пусть операторы T и ϑ - те же, что и в лемме; кроме того, ядро $\mathcal{N}(T)$ бесконечномерно и $\mathcal{R}(T-\vartheta)=\overline{\mathcal{R}(T-\vartheta)}$.

Тогда $\dim \mathcal{N}(T) = \dim \mathcal{N}(T-\vartheta)$.

Доказательство. Как уже отмечалось, из условий доказываемой теоремы следует, что ядро $\mathcal{N}(T-\vartheta)$ бесконечномерно. Возьмем в единичном шаре $K(\theta, 1)$ пространства $\mathcal{N}(T-\vartheta)$ некоторую максимальную α - решетку A $(0<\alpha<1)$, т.е. такую α - решетку в $K(\theta,1)$, которая не является правильной частью никакой другой α - решетки в $K(\theta,1)$. Согласно лемме, в $\mathcal{N}(T)$ существует ограниченная β - решетка B, такая, что $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}}$ и $\beta<1$. Можно считать, что B содержится в единичном шаре пространства $\mathcal{N}(T)$. Теперь воспользуемся следующим утверждением: если E - бесконечномерное нормированное пространство, то мощность каждой максимальной α - решетки единичного шара пространства E при $0<\alpha<1$ совпадает с $\dim E$ (см. [1], стр. 98). В силу этого утверждения имеем $\overline{\overline{A}} = \dim \mathcal{N}(T-\vartheta)$ и $\overline{\overline{B}} \leq \dim \mathcal{N}(T)$. Но $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, следовательно, $\dim \mathcal{N}(T) \geq$ $\geq \dim \mathcal{N}(T-\vartheta)$. Ввиду симметричности условий относительно операторов T и $T-\vartheta$ справедливо и противоположное неравенство $\dim \mathcal{N}(T) \leq \dim \mathcal{N}(T-\vartheta)$.

Замечание. Если в доказанной теореме не требовать чтобы $\mathcal{R}(T-\vartheta)$ было замкнуто (а это возможно при как угодно малых ϑ, см. [2], доказательство теоремы 1,

стр. 202 - 203), то можно лишь утверждать, что
$\dim N(T-V) \leq \dim N(T)$.

Литература

1. Крейн. М.Г., Красносельский М.А., Мильман Д.П. О дефектных числах операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах.- Сборник трудов института математики АН УССР, 1948, № 11, с 97 - 112.

2. Гольдман М.А. Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных уравнений.- ДАН СССР, 1955, т.100, № 2, с. 201-204.

Поступила 14 января 1976 года

УДК 517.43

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Зк

Р.Е.Круг, Е.Ф.Царьков

§ I. Линеаризация отображений

В этом параграфе мы получим условия, достаточные для локальной C^n-сопряженности C^n-диффеоморфизма B, действующего в банаховом пространстве E и оставляющего неподвижной точку θ (нуль пространства E), своей производной Фреше в точке θ – линейному, ограниченному оператору A.

Напомним, что два диффеоморфизма A и B, действующие в окрестности U их общей неподвижной точки θ банахова пространства E называются C^n-сопряженными (сопряженными в классе C^n), если существует такой локальный диффеоморфизм $\Phi \in C^n$, что $\Phi\theta = \theta$ и для $x \in U$:

$$\Phi B x = A \Phi x. \qquad (I.I)$$

Везде далее E будет обозначать некоторое банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $L_i(E^i,E)$ – пространство ограниченных i-линейных отображений $E \times E \times \cdots \times E = E^i \to E$ с нормой $\|\cdot\|_{L_i(E^i,E)}$, $C^i(U)$ – пространство i-дифференцируемых на $U \subset E$ отображений $f: U \to E$ таких, что $f(x)$ и все производные $f^{(k)}(x)$ $(k=1,2,\dots,i)$ ограничены на U, $f^{(i)}(x)$ непрерывна на U, с нормой

$$\|f\|_i = \sup_{x \in U}\{\|f(x)\|, \|f^{(k)}(x)\|_{L(E^k,E)}, k=1,2,\dots,i\},$$

Пусть далее B – некоторый нелинейный оператор, определенный в окрестности U нуля θ банахова пространства E, $B\theta = \theta$, $A \in \mathrm{Hom}(E)$-есть производная Фреше оператора B в точке θ, причем спектр $\sigma(A)$ оператора A не охватывает точки 0 комплексной плоскости Λ. Тогда справедлива

<u>Теорема I.I.</u> Пусть n – натуральное число, $B \in C^n(U,E)$,

если $n \geq 2$ и $B \in C^2(U;E)$, если $n = 1$, спектр $\sigma(A)$ оператора A удовлетворяет условию

$$\alpha_1^2 \alpha_2^{-1} < 1, \quad \alpha_1 = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|, \quad \alpha_2 = \inf_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|. \qquad (S)$$

Тогда операторы A и B сопряжены в классе C^n, т.е. существует такая окрестность V точки θ и такой C^n- диффеоморфизм Φ на V, что

$$\Phi B x = A \Phi x, \quad x \in V$$

Теорема I.I дает "грубые" условия C^n-сопряженности диффеоморфизмов A и B, т.е. такие условия на оператор, при которых любой, в некотором смысле близкий к A, диффеоморфизм B оказывается сопряженным с A в классе C^n. Из самого доказательства теоремы можно получить "негрубые" условия, достаточные для C^n-сопряженности A и B. Так, например, для существования C^1 -диффеоморфизма Φ, удовлетворяющего (I.I), достаточно вместо условия (S) предположить равномерную на U сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| A^{-n} C'(B^n x) A^n \|_{L(E,E)},$$

где $Cx = Bx - Ax$.

<u>Доказательство</u> теоремы приведем для случая $n = 1$. В пространстве $C^1(U)$ рассмотрим линейный ограниченный оператор $L: Lf = A^{-1} f B$ (без ограничения общности можно считать $\|A\|_{L(E,E)} < 1$).

Докажем, что L имеет в $C^1(U)$ неподвижную точку Φ ($L\Phi = \Phi$) такую, что $\Phi'(\theta) = J$. Очевидно тогда, что Φ и будет являться искомым диффеоморфизмом, т.е. будет удовлетворять (I.I) на некоторой окрестности V.

Рассмотрим последовательность приближений

$$\Psi_0 x = x, \quad \Psi_n x = (L^n \Psi_0)(x) = A^{-n} B^n x \qquad (I.2)$$

и покажем, что она сходится в пространстве $C^1(U)$.

Методом математической индукции легко показать, что для

$$(A^{-n}B^n)'(a) = (J + A^{-n} C'(B^{n-1}a) A^{n-1})(J + A^{-n+1} C'(B^{n-2}a) A^{n-2}) \ldots (J + A^{-1} C'(x)) \qquad (I.3)$$

где C есть нелинейная часть оператора B: $C = B - A$.

Рассмотрим теперь

$$\|(A^{-n}B^{n})'(a) - (A^{-m}B^{m})'(a)\|_{L(E,E)} \leq$$
$$\leq \|(J+A^{-n}C'(B^{n-1}a)A^{n-1})\ldots(J+A^{-1}C'(a)) - (J+A^{-m}C'(B^{m-1}a)A^{m-1})\ldots(J+A^{-1}C'(x))\| \leq$$
$$\leq \|J-(J+A^{-n}C'(B^{n-1}a)A^{n-1})\ldots(J+A^{-m-1}C'(B^{m}a)A^{m})\|_{L(E,E)} \times$$
$$\times \|(J+A^{-m}C'(B^{m-1}a)A^{m-1})\ldots(J+A^{-1}C'(a))\|_{L(E,E)}. \qquad (I.4)$$

Из (3.4) следует равномерная на U сходимость последовательности производных $\Psi_n'(a) = (A^{-n}B^{n})'(a)$, если только сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A^{-n}\|_{L(E)} \cdot \|A^{n-1}\|^2_{L(E)}. \qquad (I.5)$$

Действительно,

$$\|(J+A^{-m}C'(B^{m-1}a)A^{m-1})\ldots(J+A^{-1}C'(x))\|_{L(E,E)} \leq$$
$$\leq \prod_{i=1}^{m}(1+\|A^{-i}C'(B^{i-1}a)A^{i-1}\|_{L(E,E)}) \leq M \qquad (I.6)$$

где

$$M = \prod_{i=1}^{\infty}(1+\|A^{-i}C'(B^{i-1}a)A^{i-1}\|_{L(E,E)}). \qquad (I.7)$$

Равномерная на U сходимость произведения (I.7) следует из сходимости ряда (I.5), так как, в силу условия (S), существует такая постоянная $\tilde{N}$, что $\|B^n x\| \leq \tilde{N}\|A^n\|_{L(E,E)}$ для $x \in U$, следовательно,

$$\|A^{-i}C'(B^{i-1}a)A^{i-1}\|_{L(E,E)} \leq M\|C\|_2\|A^{-i}\|_{L(E,E)}\|A^{i-1}\|^2_{L(E,E)}. \qquad (I.8)$$

Кроме того, очевидно, что если $c_i \geq 0$ и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при $N < m < n$:

$$\prod_{i=m}^{n}(1+c_i) = \sum_{i=m}^{n} c_i + \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n} c_i c_j + c_m c_{m+1}\cdots c_n < \varepsilon \qquad (I.9)$$

Считая теперь $c_i = M\|C\|_2\|A^{-i}\|_{L(E,E)}\|A^{i-1}\|^2_{L(E,E)}$ в силу (I.8), (I.9) и сходимости ряда (I.5) получим

$$\|(J+A^{-n}C'(B^{n-1}a)A^{n-1})\ldots(J+A^{-m-1}C'(B^{m}a)A^{m}) - J\|_{L(E,E)} \leq$$
$$\leq \sum_{i=m}^{n} c_i + \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=m}^{n} c_i c_j + \ldots + c_m c_{m+1}\cdots c_n < \varepsilon, \qquad (I.10)$$

как только $m,n>N$.

Оценки (I.10) и (I.6) и доказывают требуемое утверждение.

Сходимость последовательности Ψ_n в пространстве $C^1(U)$ теперь следует из того, что $\Psi_n\theta = A^{-n}B^n\theta = \theta$. Кроме того, $\Psi_n'(\theta) = (A^{-n}B^n)'(\theta) = \mathcal{I}$ и, следовательно, $\Phi'(U) = \mathcal{I}$ ($\Phi = \lim \Psi_n$), что и завершает доказательство теоремы.

Как следствие из теоремы I.1 получаем следующее утверждение:

Теорема I.2. Пусть $B(t)$ ($0\leq t<\infty$) - полугруппа нелинейных операторов, принадлежащих классу $C^1(U)$ и взаимно-однозначно отображающих U на V_t соответственно, $B(t)\theta=\theta$ для каждого t, $A(t)$ есть производная Фреше оператора $B(t)$ в точке θ, причем $A(t)\in \mathcal{I}som(E)$ и $B(1)$ удовлетворяет условиям теоремы I.1. Тогда

I) $A(t)$ есть полугруппа изоморфизмов на E,

2) существуют такие окрестности W_t, W точки θ и такой диффеоморфизм Ψ на W, что для всех t:

$$B(t)x = \Psi^{-1}A(t)\Psi x, \tag{I.11}$$

если $x\in W_t$.

Замечание. Если $B(t)(B(U))\subset V^\circ$ для некоторой окрестности V° и всех t, то существует окрестность W° точки θ такая, что

$$B(t)x = \Psi^{-1}A(t)\Psi x \tag{I.12}$$

для $x\in W^\circ$.

Доказательство теоремы I.2 приводить не будем, отметим только, что искомый диффеоморфизм Ψ представляется в виде

$$\Psi x = \int_0^1 A(-s)\Phi B(s)\,ds, \tag{I.13}$$

где Φ - диффеоморфизм, линеаризующий оператор $B(1)$, $A(-s) = (A(s))^{-1}$.

§ 2. Дробные степени нелинейного оператора

Сейчас мы покажем, как результаты § I позволяют ввести понятие дробной степени нелинейного оператора.

В этом параграфе для любого нелинейного оператора B, удовлетворяющего условиям теоремы I.I, будет построена полугруппа $B(t)$ нелинейных операторов на E такая, что на некоторой окрестности W точки θ $B(n)x = B^n x$ и

$$B(t)x = e^{Nt}x = \lim_{n\to\infty}(J - \tfrac{t}{n}N)^{-n}x, \qquad (2.I)$$

где N - производящий оператор полугруппы $B(t)$.

Итак, пусть диффеоморфизмы B, A, Φ удовлетворяют теореме I.I при $n=I$.

Для $t\in[0,\infty)$ и $x\in W\subset V$ определим операторозначную функцию $B(t)$ равенством:

$$B(t)x = \Phi^{-1}A^t\Phi x, \qquad (2.2)$$

где $A^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \lambda^t R(\lambda,A)d\lambda$ - дробные степени линейного ограниченного оператора A. (Так как при больших t $\|A^t\|<1$, то существует окрестность $W\subset V$, на которой равенство (2.2) имеет смысл.)

Легко видеть, что $B(t)$ образуют сильнонепрерывную справа полугруппу операторов на W, причем существует такая постоянная M, не зависящая от t, что

$$\|B(t)x - B(t)y\| \le M\|x-y\|. \qquad (2.3)$$

Кроме того, из теоремы I.I следует, что для $x\in W$

$$B(n)x = B^n x, \qquad \text{т.е.}$$

что при целых значениях аргумента $t=n$ значения функции $B(t)$ совпадают на окрестности W с обыкновенными целыми степенями нелинейного оператора B.

Теорема 2.I. Производящий оператор N полугруппы $B(t)$ определен в каждой точке x окрестности W.

Доказательство. Пусть $x\in W$. Тогда для достаточно малых t:

$$\frac{B(t)x - x}{t} = \frac{\Phi^{-1}A^t\Phi x - \Phi^{-1}\Phi x}{t} =$$

$$= \frac{(\Phi^{-1})'(\Phi x)(A^t\Phi x - \Phi x) + \Psi(x,t)\|A^t\Phi x - \Phi x\|}{t}, \qquad (2.4)$$

где $\|\Psi(x,t)\|\to 0$ при $t\to 0$ для каждого $x\in W$.

Из соотношения (2.4) следует, что для $x \in W$:

$$Nx \overset{\text{def}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{B(t)x - x}{t} = (\Phi^{-1})'(\Phi x)\ln A\,\Phi x. \tag{2.5}$$

Таким образом, для полугруппы $B(t)$ выполнены все условия (См.[3],[4]), которые позволяют представить ее в виде

$$B(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(J - \frac{t}{n}N\right)^{-n} x \tag{2.6}$$

для $x \in \overline{W}$.

По аналогии с линейным случаем предел (2.6) называют экспоненциальной функцией оператора N: e^{Nt}.

При $t=1$ из (2.6) получаем

$$B(1)x = e^{N}x.$$

Поэтому вполне естественно назвать оператор N логарифмом B $(\ln B)$, а вслед за этим оператор $B(t) = e^{t\ln B}$ дробной степенью t оператора B: $B(t) \overset{\text{def}}{=} B^t$.

§ 3. Некоторые применения к исследованию разностных уравнений

Рассмотрим в банаховом пространстве E уравнение

$$x_{n+1} = Bx_n \tag{3.I}$$

с неподвижной точкой θ, т.е. $B\theta = \theta$.

Пусть оператор B удовлетворяет условиям теоремы I.I. Тогда в некоторой окрестности W точки θ определен фазовый поток B^t, причем

$$B^n x = \overbrace{B\cdot B\cdots B}^{n}\,x \qquad \text{для} \quad x \in W.$$

Легко видеть, что кривые $x(t) = B^t x_0$ являются инвариантными кривыми уравнения (3.I), причем через каждую точку x_0 окрестности W проходит одна и только одна такая кривая. Изучение этих кривых и дает качественную картину поведения решений (3.I) в окрестности особой точки θ.

С другой стороны

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi^{-1}A^{t+h}\Phi x_0 - \Phi^{-1}A^{t}\Phi x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\Phi^{-1})'(A^t\Phi x_0)(A^{t+h}\Phi x_0 - A^t\Phi x_0)}{h} =$$

$$= (\Phi^{-1})'(A^t\Phi x_0)A^t \ln A\,\Phi x_0 = (\ln B)(x(t)),$$

т.е. инвариантная кривая $x(t)$ уравнения (3.I) является в то же время фазовой кривой задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = \ln B x, \quad x(0) = x_0. \tag{3.2}$$

Таким образом, исследование разностного уравнения (3.I) свелось к исследованию задачи Коши (3.2), которая уже относительно изучена.

Кроме того, из теоремы (I.I) следует, что нелинейное уравнение (3.I) с точностью до диффеоморфизма совпадает с линейным уравнением

$$y_{n+1} = A y_n, \tag{3.3}$$

которое эквивалентно в указанном ранее смысле линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \ln A y. \tag{3.4}$$

§ 4. Функции нелинейных операторов

В этом параграфе общие идеи §§ I,2 применяются для введения общего определения функции нелинейного оператора. Как и в случае введения понятия дробной степени, это определение будет страдать некоторой многозначностью (функция оператора будет определена с точностью до диффеоморфизма специального вида), однако оно позволит установить ряд довольно естественных для функции оператора свойств и не будет противоречить уже имеющимся в [3], [4] результатам. (В теории нелинейных полугрупп для аккретивного нелинейного оператора B введены понятия экспоненциальной функции: $e^{-Bt}x = \lim_{n\to\infty}(J + \frac{t}{n}B)^{-n}x$ и резольвенты $J(\lambda)x = (J+\lambda B)^{-1}x$

Пусть, как и ранее, $B \in C'(U)$, $B\theta = \theta$, A - производная Фреше оператора B в точке θ и $D(U)$ - класс гомо-

Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

морфизмов Φ на E таких, что $\Phi \in \mathcal{D}iff(U)$, $\Phi\theta=\theta$, $\Phi'(\theta)=J$. Пусть далее $\mathcal{F}$ - множество функций, аналитических в некоторой окрестности Ω спектра $\sigma(A)$ оператора A.

Определение 4.I. Пусть $f\in\mathcal{F}$. Тогда функцией f оператора B назовем класс F_f^B всех операторов вида $f^{\Phi}(B)=$ $=\Phi^{-1}f(A)\Phi$, где $\Phi\in D$.

Установим связь определения 4.I с уже имеющимися результатами.

I. Пусть $f(\lambda)\equiv\lambda$, $\lambda\in\Omega$. Пусть, далее, оператор B удовлетворяет условиям теоремы I.I при $n=I$, а окрестность $V\subset U$ и $\Phi_0\in \mathcal{D}iff(U)$ таковы, что $\Phi_0^{-1}A\Phi_0 x=Bx$ для $x\in V$.

В смысле определения 4.I это значит, что существует такой элемент $f^{\Phi_0}(B)$ класса $F^B_{f(\lambda)=\lambda}$, что для $x\in V$ $f^{\Phi_0}(B)x=Bx$. Этот факт будем записывать в виде: $B\in F^B_{\lambda,V}$.

2. Пусть $f(\lambda)=e^{-\lambda t}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{t}{n}\lambda)^{-n}$, $t\geq 0$. Тогда согласно определению 4.I, экспоненциальная функция оператора B - это класс $F^B_{e^{-\lambda t}}$ операторов вида $\Phi^{-1}e^{-At}\Phi$.

С другой стороны, если оператор B является аккретивным (т.е. если $\|x_1+\lambda Bx_1-x_2-\lambda Bx_2\|\geq\|x_1-x_2\|$ для $\lambda>0$, $x_1,x_2\in D(B)$), то в [4] для него определена функция равенством

$$e^{-Bt}x=\lim_{n\to\infty}(J+\frac{t}{n}B)^{-n}x, \qquad (4.I)$$

где $x\in\overline{D(B)}$ - замыканию области определения оператора B.

Для выяснения связи между этими двумя определениями допустим дополнительно, что оператор B сильно аккретивен, т.е. для любого $\lambda>0$ существует $\alpha(\lambda)>1$ такое, что

$$\|x_1+\lambda Bx_1-x_2-\lambda Bx_2\|\geq\alpha(\lambda)\|x_1-x_2\| \qquad (4.2)$$

для $x_1,x_2\in D(B)$. Тогда A будет линейным аккретивным оператором и его экспоненциальная функция e^{-At} сможет быть представлена в виде

$$e^{-At}=\lim_{n\to\infty}(J+\frac{t}{n}A)^{-n}. \qquad (4.3)$$

Из (4.3) следует

$$(e^{-Bt})'(\theta)=\lim_{n\to\infty}((J+\tfrac{t}{n}B)^{-n})'(\theta)=\lim_{n\to\infty}(J+\tfrac{t}{n}A)^{-n}=e^{-At}. \tag{4.4}$$

Пусть теперь спектр оператора e^{-A} удовлетворяет условию (S) теоремы I.I, т.е. $\beta_1<2\beta_2$, где $\beta_1=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$, $\beta_2=\inf_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|$.

Тогда полугруппы e^{-At} и e^{-Bt} удовлетворяют условию I.I2 и, следовательно, существует такая окрестность W^0 точки θ и такой элемент Ψ класса $D(W^0)$, что

$$e^{-Bt}x=\Psi^{-1}e^{-At}\Psi x \tag{4.5}$$

для всех t и $x\in W^0$, т.е.

$$e^{-Bt}\in F^B_{e^{-\lambda t},W^0}. \tag{4.5'}$$

В таком же смысле удовлетворяют определению (4.I) дробные степени B^t и логарифм $\ln B$ оператора B, введенные в § 2, и резольвента B $J_\lambda(B)$, введенная в [4].

Перейдем теперь к изучению свойств функции операторов.

<u>Теорема 4.I.</u> Пусть f, g, $f_n\in\mathfrak{F}$. Тогда:

I) $fg\in\mathfrak{F}$; для каждого элемента $f^{\Phi}(B)$ класса F^B_f и для каждого элемента $g^{\Psi}(B)$ класса G^B_g найдется такой элемент $(fg)^{\chi}(B)$ класса $(FG)^B_{(fg)}$, что

$$(fg)^{\chi}(B)=f^{\Phi}(B)\,g^{\Psi}(B);$$

2) $h(\xi)=f[g(\xi)]\in\mathfrak{F}$ и, аналогично I), для каждого элемента $g^{\Phi}(B)$ класса G^B_g и для каждого элемента $f^{\Psi}(g^{\Phi}(B))$ класса $F^{g(B)}_f$ существует такой элемент $h^{\chi}(B)$ класса H^B_h, что $f^{\Psi}[g^{\Phi}(B)]=h^{\chi}(B)$;

3) если последовательность функций f_n равномерно на Ω сходится к функции f, то $f\in\mathfrak{F}$ и для любых $f_n^{\Phi_n}(B)\in F^B_{f_n}$ последовательность $f_n^{\Phi_n}(B)x$ сходится равномерно в некоторой окрестности точки θ;

4) классы F^B_f и G^B_g пересекаются тогда и только тогда, когда $f(\lambda)=g(\lambda)$ в открытом множестве, содержащем весь спектр $\sigma(A)$, кроме конечного числа полюсов $\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\}$ и при всех i, $1\le i\le k$, функция $f-g$ в точке λ_i имеет полюс порядка не ниже $\nu(\lambda_i)$.

Доказательство теоремы 4.I основывается на соответствующих свойствах функций линейных операторов и достаточно элементарно. Отметим только, что из свойства (I) не следует перестановочность различных функций одного и того же оператора (как это имеет место в аналогичном случае для линейных операторов), что вполне естественно, так как даже резольвента $J_\lambda(B)$ оператора B в самом B не коммутирует. Более интересным представляется свойство об отображении точек бифуркации нелинейного оператора.

Как известно, для функций линейных операторов справедливо тождество Данфорда

$$\sigma[f(A)] = f[\sigma(A)], \qquad (4.6)$$

где $\sigma(A)$ - множество собственных чисел оператора A. Тождество (4.6) равносильно

$$\mathcal{R}[f(A)] = \{f[(\mathcal{R}(A))^{-1}]\}^{-1} \qquad (4.7)$$

где $\mathcal{R}(A)$ - множество характеристических чисел оператора A. (В 4.7 считаем $0 \bar{\in} \sigma(A)$).

Для нелинейных операторов аналогичную характеристическим числам роль играют точки бифуркации. Оказывается, что для точек бифуркации широкого класса функций нелинейных операторов справедлив аналог (4.7). Мы докажем его для функции $f(\lambda) = \lambda^\nu, (0 \leq \nu < \infty)$.

Теорема 4.2. Пусть E - вещественное, конечномерное пространство и все характеристические числа оператора A положительны. Пусть, далее, выполнено одно из следующих двух условий:

I) $j_B(\mu_0 - 0)$ и $j_B(\mu_0 + 0)$ различны для всех характеристических чисел μ_0 оператора A ;

2) если $j_B(\tilde{\mu}_0 - 0) = j_B(\tilde{\mu}_0 + 0)$ для какого-либо μ_0, то θ является изолированной неподвижной точкой поля $J - \tilde{\mu}_0^\nu B^\nu$ для каждого ν и хотя бы два из чисел $j_B(\tilde{\mu}_0 - 0)$, $j_B(\tilde{\mu}_0)$, $j_B(\tilde{\mu}_0 + 0)$ различны.

Тогда

$$\mathcal{R}(B^\nu) = \{[\mathcal{R}(B)]^\nu\}, \qquad (4.8)$$

где $\mathcal{R}(B^{\nu})$ - множество точек бифуркации оператора B^{ν} ;
$j_B(\mu_0-0)$ - общий индекс неподвижной точки θ полей $I-\mu B$ для всех μ близких к μ_0 и $\mu<\mu_0$ (по теореме II.4.7 из [2] индекс точки θ будет одинаковым для всех таких полей), аналогично, $j_B(\mu_0+0)$ - общий индекс неподвижной точки θ полей $I-\mu B$ для всех μ близких к μ_0 и $\mu>\mu_0$;
$j_{B^{\nu}}(\tilde{\mu}_0^{\nu})$ - индекс неподвижной точки θ поля $I-\tilde{\mu}_0^{\nu}B^{\nu}$, если θ - изолированная неподвижная точка этого поля.

Доказательство. Из теорем IУ.5.I и IУ.5.2 в [3] следует, что характеристические числа оператора A , удовлетворяющие (при ν =I) условиям I) или 2) теоремы 4.2, являются точками бифуркации оператора B . Поэтому, так как $\{\mu_0^{\nu}\}$ есть множество характеристических чисел оператора A^{ν}, если $\{\mu_0\}$ - множество характеристических чисел A^{*}, достаточно показать, что

$$j_B(\mu_0-0)=j_{B^{\nu}}(\mu_0^{\nu}-0),\ j_B(\mu_0+0)=j_{B^{\nu}}(\mu_0^{\nu}+0) \qquad (4.9)$$

и

$$j_B(\tilde{\mu}_0)=j_{B^{\nu}}(\tilde{\mu}_0^{\nu}), \qquad (4.10)$$

если выполнено условие 2) теоремы.

Для $0\le t\le 1$ расcмотрим функцию

$$X(t,x)=x-\mu^{t(\nu-1)+1}B^{t(\nu-1)+1}x. \qquad (4.11)$$

Очевидно,

$$X(0,x)=x-\mu Bx,\ X(1,x)=x-\mu^{\nu}B^{\nu}x. \qquad (4.12)$$

Легко видеть, что на множестве $[0,1]\times S_r$ (S_r -шар достаточно малого радиуса) функция $X(t,x)$ непрерывна по совокупности аргументов. Кроме того, для каждого фиксированного μ $X(t,x)$ в шаре S_r достаточно малого радиуса r отлична от нуля при всех $t\in[0,1]$. Действительно, в противном случае для какого-то τ точка μ^{τ} была бы точкой бифуркации оператора B^{τ}, что невозможно в силу условия 2) теоремы.

Таким образом, поля $X(0,x)=x-\mu Bx$ и $X(1,x)=x-\mu^{\nu}B^{\nu}x$ гомотопны, откуда и следуют равенства (4.9) и (4.10).

§ 5. Некоторые применения к теории полугрупп

Один из нерешенных вопросов теории полугрупп нелинейных операторов состоит в определении "генератора" $(-A)$ полугруппы $S(t)$ таким образом, чтобы любая полугруппа могла бы быть восстановлена по своему генератору, в частности, чтобы полугруппа $S(t)$ представлялась в виде

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty}(J+\tfrac{t}{n}A)^{-n}x. \qquad (5.I)$$

Известно, что все обычные генераторы полугруппы $S(t)$ могут иметь пустую область определения, даже если $S(t)$ есть полугруппа сжатий. Однако если E - гильбертово пространство и $S(t)$ - полугруппа сжатий на замкнутом выпуклом множестве в E, то существует аккретивный оператор A такой, что

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty}(J+\tfrac{t}{n}A)^{-n}x. \qquad (5.I)$$

В этом случае оператор $(-A)$ является производящим оператором (генератором) полугруппы $S(t)$. В гильбертовых пространствах оператор A однозначно определяется полугруппой $S(t)$, но это не так даже в случае конечномерных банаховых пространств.

Сейчас мы при помощи методов §§ I,2 получим положительные решения перечисленных проблем для специальных классов полугрупп.

Будем говорить, что полугруппа $S(t)$ принадлежит классу $\mathfrak{A}$, если:

I) для любого t $S(t)$ отображает некоторую замкнутую окрестность $\bar U$ точки θ в себя, причем $S(t)\theta=\theta$;

2) для каждого $x\in\bar U$ $\lim\limits_{t\downarrow 0} S(t)x = S(0)x = x$;

3) $S(t)\in C^1(U)$ и $(S(t))'(\theta)\in \mathrm{Hom}(E)$ для каждого t, $\left((S(t))'(\theta)\overset{\mathrm{def}}{=}V(t)\right)$;

4) оператор $S(1)$ удовлетворяет условиям теоремы I.I.

Пусть $S(t)\in\mathfrak{A}$. Тогда по теореме I.2 существует такая окрестность W° точки θ и такой диффеоморфизм

Φ класса $D(W^\circ)$, что для всех t и $x \in W^\circ$:

$$S(t)x = \Phi^{-1}V(t)\Phi x. \tag{5.2}$$

Далее будем считать, что окресность W° совпадает с U.

Предложение 5.I. Пусть $S(t) \in \mathfrak{A}$. Тогда $V(t)$ - сильнонепрерывная полугруппа изоморфизмов на E.

Доказательство предложения 5.I элементарно, поэтому приводить его не будем. Перейдем сейчас к формулировкам и доказательствам основных результатов этого параграфа.

Теорема 5.I. Пусть $S(t) \in \mathfrak{A}$. Тогда область определения $\mathcal{D}(B)$ производящего оператора B полугруппы $S(t)$ всюду плотна в окрестности U, а если $V(t)$ равномерно непрерывна, то совпадает с U.

Доказательство. Пусть A - производящий оператор полугруппы $V(t)$. Рассмотрим разность

$$\left\| \frac{S(t)x - x}{t} - (\Phi^{-1})'(\Phi x)A\Phi x \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\Phi^{-1}V(t)\Phi x - \Phi^{-1}\Phi x}{t} - (\Phi^{-1})'(\Phi x)A\Phi x \right\|. \tag{5.3}$$

Из (5.3) видно, что производящий оператор B полугруппы $S(t)$ определен на множестве $U \cap \Phi^{-1}(\mathcal{D}(A) \cap \Phi(U))$ и имеет вид

$$Bx = (\Phi^{-1})'(\Phi x)A\Phi x. \tag{5.4}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\overline{U \cap \Phi^{-1}(\mathcal{D}(A) \cap \Phi(U))} \supset U, \quad \text{если } \overline{\mathcal{D}(A)} = E \text{ и}$$

$$U \cap \Phi^{-1}(\mathcal{D}(A) \cap \Phi(U)) = U, \quad \text{если } \mathcal{D}(A) = E.$$

Теорема 5.2. Пусть $S(t) \in \mathfrak{A}$ и для любого t оператор $S(t)$ является сжатием на U. Пусть, далее, для достаточно малых положительных λ

$$R(J - \lambda B) \supset \overline{\mathcal{D}(B)},$$

где $R(J-\lambda B)$ - множество значений оператора $J-\lambda B$. Тогда для $x \in \overline{\mathcal{D}(B)}$

$$S(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(J + \frac{t}{n}(-B)\right)^{-n}x. \tag{5.5}$$

Доказательство. Так как полугруппа $S(t)$ есть полугруппа сжатий, ее "минус" производящий оператор, т.е. оператор $(-B)$ является аккретивным. Тогда, в силу теоремы I из [3] для любого $x \in \overline{D(B)}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty}(J-\tfrac{t}{n}B)^{-n}x, \tag{5.6}$$

причем операторозначная функция

$$T(t)x=\lim_{n\to\infty}(J-\tfrac{t}{n}B)^{-n}x \tag{5.7}$$

является полугруппой сжатий на $\overline{D(B)}$.

С другой стороны, для любого $x\in D(B)$ функция $u(t)=S(t)x$ дифференцируема по t, причем

$$\frac{du}{dt}=Bu \tag{5.8}$$

Действительно,

$$\frac{du}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{\Phi^{-1}V(t+h)\Phi x-\Phi^{-1}V(t)\Phi x}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\Phi^{-1})'(V(t)\Phi x)[V(t+h)\Phi x-V(t)\Phi x]}{h}=Bu.$$

Следовательно, в силу теоремы II из [3], для любого $x\in D(B)$ справедливо равенство

$$S(t)x=\lim_{n\to\infty}(J-\tfrac{t}{n}B)^{-n}x. \tag{5.9}$$

Таким образом, полугруппы $S(t)$ и $T(t)$ совпадают на $D(B)$, а значит и на $\overline{D(B)}$, поэтому равенство (5.9) справедливо для $x\in\overline{D(B)}$. Теорема доказана.

Заметим, что в терминах § 4 теорема 5.2 может быть оформулирована следующим образом:

Теорема 5.2'. Пусть $S(t)\in A$, $V(t)$ - есть полугруппа сжатий и $R(J-\lambda B)\supset\overline{D(B)}$ для достаточно малых положительных λ. Тогда существует такой элемент $f^{\Psi}(B)$ класса $F^{B}_{e^{\lambda t}}$, что для $x\in\overline{D(B)}$, т.е. $S(t)\in F^{B}_{e^{\lambda t},\overline{D(B)}}$.

Теорема 5.2' еще раз подчеркивает целесообразность определений § 4.

Литература

1. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., "Мир". 1970.

2. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат. 1956.

3. Grandall E., Ligget. N. Generation of Semi-Group of Nonlinear Transformation on General Banach Spases. "American J. of Math.", 1972, v. XCIII, No. 2.

4. Brazis M., Pasy S. Semi-Group of Nonlinear Cartraction on Convex Sets. "Journal of Funct. Analisis", 1970, v. 6.

Поступила 17 февраля 1975 года

УДК 513.88.

О СРАВНЕНИИ НЕКОТОРЫХ СХОДИМОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

2н

В.И.Лабеев

Хорошо известно, что понятие компактной аппроксимации является обобщением понятия сходимости по норме для линейных отображений (см. [1]). В монографии Т.Като ([2]) исследуется обобщённая сходимость линейных замкнутых отображений, которая также является обобщением сходимости по норме для линейных непрерывных отображений. В предлагаемой работе мы исследуем взаимосвязь между понятиями компактной аппроксимации и обобщённой сходимостью для линейных замкнутых отображений в нормированных векторных пространствах.

Определение 1. Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем $K (= R; = C)$. Будем говорить, что последовательность линейных отображений $f_n: X \longrightarrow Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f: X \longrightarrow Y$, если

а) для любого вектора $x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n x = fx$ в пространстве Y ;

б) для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n)_{n\in N}$ из пространства X последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)_{n\in N}$ - относительно компактна в пространстве Y .

В нормированном векторном пространстве X наряду с нормой $\| \ \|_X$ мы будем рассматривать норму $\| \ \|_f$, задаваемую с помощью линейного отображения $f: X \to Y$ следующим образом:
$$(\forall x \in X): (\|x\|_f = \sqrt{\|x\|_X^2 + \|fx\|_Y^2}).$$

Определение 2. Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем $K (= R; = C)$. Будем говорить, что последовательность линейных отображений $f_n: X \to Y$ компактно аппроксимирует линейное отображение $f: X \to Y$, если

а) для любого вектора $x \in X$ $\lim_{n\to\infty} f_n x = fx$ в пространстве Y ;

б) для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n)_{n\in N}$ из пространства $(X, \|\ \|_f)$ последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)_{n\in N}$ - относительно компактна в пространстве Y .

Нетрудно показать, что в случае линейного непрерывного отображения f понятия секвенциально компактной аппроксимации и компактной аппроксимации совпадают и что компактная аппроксимация является более общим понятием, чем секвенциально компактная аппроксимация.

Пример 1. Пусть $Z = Y = \ell_2$, $X = \{(x(n)) \in Z \,|\, \sum_{n=1}^{\infty} |n x(n)|^2 < +\infty\}$. Линейное замкнутое отображение $f : X \subset Z \longrightarrow Y$ определим равенством:

$$(\forall (x(n)) \in X) : (f(x(n)) = (n x(n)),$$

а последовательно линейных непрерывных отображений $g_n : X \to X$ определим посредством скалярного произведения:

$$(\forall n \in N)(\forall x \in X) : (g_n x = n (x|e_n) e_1),$$

где через $(e_n)_{n\in N}$ обозначена произвольная тотальная ортонормальная последовательность векторов в пространстве ℓ_2. Положим $f_n \overset{def}{=} f + g_n$. Тогда последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : X \subset Z \to Y$ компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f : X \subset Z \to Y$ и последовательность векторов $(e_n)_{n\in N}$ ограничена в пространстве X , а последовательность векторов $(f_n e_n - f e_n) = (n e_1)_{n\in N}$ не ограничена в пространстве и поэтому не является относительно компактной. Следовательно, секвенциально компактной аппроксимации в этом случае нет.

Определение 3. Пусть Z и Y - банаховы пространства. Последовательность линейных замкнутых отображений

$f_n : \mathcal{D}(f_n) \subset Z \to Y$ обобщённо сходится к линейному замкнутому отображению $f : \mathcal{D}(f) \subset Z \longrightarrow Y$, если раствор между графиками отображений f и f_n в банаховом пространстве $Z \times Y$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Свойства раствора замкнутых подпространств банахова пространства и обобщённая сходимость линейных замкнутых отображений подробно изучены в монографии Т.Като ([2] , гл.4, §2).

Предложение 1. Если $\mathcal{D}(f) = Z$, то последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : \mathcal{D}(f_n) \subset Z \to Y$ обобщённо сходится к линейному непрерывному отображению $f : Z \to Y$ тогда и только тогда, когда для всех достаточно больших $n \in N$ $\mathcal{D}(f_n) = Z$ и отображение $f_n : Z \to Y$ непрерывно, причем $\lim\limits_{n \to \infty} \| f_n - f \| = 0$.

Приведённое предложение доказано в монографии [2] (теорема 2.23 пункт а), стр. 262).

Следствие. Пусть X и Y - банаховы пространства и последовательность линейных непрерывных отображений $f_n : X \longrightarrow Y$ обобщённо сходится к линейному непрерывному отображению $f : X \longrightarrow Y$. Тогда последовательность линейных отображений $f_n : X \to Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \longrightarrow Y$.

Обратное утверждение неверно (см. [1]).

Пример 2. Пусть $Y = Z = \ell_2$, $X = \{(x(k)) \in Z \mid \sum\limits_{k=1}^{\infty} (|k x(2k-1)|^2 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(2k)|^2 < +\infty$ Линейное замкнутое отображение $f : X \subset Z \to Y$ определим равенством:

$(\forall (x(k)) \in X) : (f(x(k)) = (x(1), 0, 2x(3), 0, \ldots, kx(2k-1), 0, \ldots)$,

а последовательность линейных непрерывных возмущений $g_n : X \longrightarrow Y$ определим посредством скалярного произведения:

$(\forall n \in N)\ (\forall x \in X) : (g_n x = (x \mid e_{2n}) e_2)$

Тогда последовательность линейных замкнутых отображений $f_n = f + g_n : X \subset Z \to Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f : X \subset Z \to Y$, но последовательность отображений $(f_n)_{n \in N}$ не сходится к отображению f в обобщённом смысле.

Действительно, справедливость первой части утверждения проверяется непосредственно.

Покажем теперь, что для всех $n \in N$ раствор между графиками отображений f_n и f в банаховом пространстве $X \times Y$ равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Действительно, пусть (x, fx) и $(y, f_n y)$ - произвольно взятые векторы из пространств $G(f)$ и $G(f_n)$ соответственно. Тогда

$$\|(x, fx) - (y, f_n y)\|^2_{Z \times Y} = \|x - y\|^2_Z + \|fx - f_n y\|^2_Y$$

и

$$\|fx - f_n y\|^2_Y = \|fx - fy - g_n y\|^2_Y$$

Поэтому из определения нормы в пространстве $Z \times Y$, из определения отображения g_n и из теоремы Пифагора следует равенство:

$$\|(x, fx) - (y, f_n y)\|^2_{Z \times Y} = \|x - y\|^2_Z + \|fx - fy\|^2_Y + |(y|e_{2n})|^2.$$

Если $x = e_{2n}$, то $(x, fx) = (e_{2n}, 0)$ и $\|(x, fx)\|_{Z \times Y} = 1$. Поэтому для любого вектора $(y, f_n y) \in G(f_n)$ справедливо неравенство:

$$\|(x, fx) - (y, f_n y)\|^2_{Z \times Y} \leq \|e_{2n} - y\|^2 + |(y|e_{2n})|^2 \geq \frac{1}{2}$$

Таким образом раствор между подпространствами $G(f)$ и $G(f_n)$ банахова пространства $Z \times Y$ больше или равен $\sqrt{2} \cdot 2^{-1}$.

С другой стороны, рассмотрим произвольный вектор (x, fx) из множества $S_{G(f)}(0, 1)$ и положим

$$y = x - \frac{1}{2}(x|e_{2n})e_{2n}.$$

Тогда

$$\|(x, fx) - (y, f_n y)\|^2_{Z \times Y} = \frac{1}{4}|(x|e_{2n})|^2 + \frac{1}{4}|(x|e_{2n})|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2_Z \leq \frac{1}{2}$$

Далее, если $(y, f_n y)$ - произвольный вектор из множества $S_G(f_n)(0,1)$, то для вектора $x = \frac{1}{2}(y|e_{2n})e_{2n} + y$ справедливо неравенство

$$\|(x, fx) - (y, f_n y)\|^2 \leq \frac{1}{4}|(y|e_{2n})|^2 + \frac{|(y|e_{2n})|^2}{\|y\|^2 + |(y|e_{2n})|^2} < \frac{1}{2}$$

Таким образом мы доказали, что раствор между графиками $G(f)$ и $G(f_n)$ отображений f и f_n соответственно равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Предложение 2. Пусть Y и Z - банаховы пространства, X - векторное подпространство пространства Z, последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : X \subset Z \to Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f : X \subset Z \to Y$ и отображение f - компактно обратимо (т.е. отображение $f : X \to Y$ взаимно однозначно и обратное к нему $f^{-1} : Y \to X$ является предкомпактным), тогда последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : X \subset Z \to Y$ обобщённо сходится к линейному замкнутому отображению $f : X \subset Z \to Y$.

Действительно, в статье [3] (теорема 2.9.) доказано, что при выполнении условий предложения 2[1] отображения $f_n : X \subset Z \to Y$ компактно обратимы для всех достаточно больших $n \in N$, причем $\lim_{n\to\infty} \| f_n^{-1} - f^{-1} \| = 0$. Тогда из пункта б) теоремы 2.23 из [2] получаем, что последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : X \subset Z \to Y$ обобщённо сходится к линейному замкнутому отображению $f : X \subset Z \to Y$.

Пример 3. ([2] , замечание 2.27, стр. 263.). Пусть

---

[1] В работе [3] приводимое утверждение доказано в случае C - сходимости линейных замкнутых отображений. Там же доказано, что из секвенциально компактной аппроксимации следует C -сходимость для последовательности линейных замкнутых отображений. Отметим, что в случае компактной аппроксимации линейных замкнутых отображений в приведённой в предложении 2 ситуации последовательность отображений $(f_n)_{n \in N}$ не обязательно C -сходится к f.

$Z = Y = \ell_2$, область определения линейного замкнутого отображения f $\mathcal{D}(f) = X = \{(x(k)) \in Z \mid \sum_{k=1}^{\infty} |kx(k)|^2 < +\infty\}$ и для всех $n \in N$ область определения линейного замкнутого отображения f_n совпадает с X . Отображения f и f_n определим следующим образом:

$$(\forall (x(k)) \in X) : (f(x(k)) = (kx(k))$$

и

$$(\forall n \in N)(\forall (x(k)) \in X) : (f_n(x(k)) = \left(\frac{nk}{k+n} x(k)\right).$$

Тогда последовательность линейных замкнутых отображений $(f_n)_{n\in N}$ обобщённо сходится к линейному замкнутому отображению f , но для ограниченной последовательности векторов $(\frac{1}{n} e_n)_{n\in n}$ в пространстве $(X, \| \ \|_f)$ последовательность векторов $(f_n \frac{1}{n} e_n - f \frac{1}{n} e_n) = (-\frac{1}{2} e_n)_{n\in N}$ не является относительно компактной в пространстве Y . Следовательно, компактной аппроксимации, а поэтому и секвенциально компактной аппроксимации нет.

Литература

1. Вайникко Г.М. Принцип компактной аппроксимации в теории приближённых методов.- "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1969, т.9, №4, с.739-761.

2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., "Мир", 1972.

3. Лабеев В.И. О некоторых свойствах C -сходимости линейных отображений.-"Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки", 1975, т.222. Безразмерное евклидово и полуевклидовы пространства, вып. 4, с.78-90.

Поступила 18 февраля 1975 года

УДК 513.88.

ОБ ОЦЕНКЕ НОРМ ЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.И.Лабеев

В работах ([2], [3], [4]) автор исследовал устойчивость тех или иных свойств линейных непрерывных и линейных замкнутых отображений при секвенциально компактной аппроксимации или при компактной аппроксимации (соответствующие определения см. в статье [5]) для всех достаточно больших $n \in N$ ($n \geq n_0$, $n_0 \in N$), не связывая число n_0 с отображением f. В предлагаемой работе мы покажем, каким образом можно уточнить некоторые результаты статей [2], [3] и [4], используя норму возмущения $g_n = f_n - f$.

Кроме того, используя в основном технику доказательства теоремы I из статьи [1], мы обобщим указанную теорему на случай секвенциально компактной аппроксимации линейных замкнутых отображений.

Теорема I. Пусть X и Y – банаховы пространства, $f \in Isom(X,Y)$. Предположим, что для некоторого непрерывного отображения $g: X \mapsto Y$ существует такое число $n_0 \in N$ что а) $\|(g \circ f^{-1})^{n_0}\| < 1$; или б) $\|(f^{-1} \circ g)^{n_0}\| < 1$ Тогда $f + g \in Isom(X,Y)$.

Доказательство. Так как для любого числа $n \in N$

$$\sum_{m=0}^{n} \|(g \circ f^{-1})^m\| \leq \sum_{m=0}^{n n_0} \|(g \circ f^{-1})^m\| \leq \sum_{m=0}^{n} \|(g \circ f^{-1})^{m n_0}\| +$$

$$\sum_{m=0}^{n} \|(g \circ f^{-1})^{m n_0}\| \cdot \|g \circ f^{-1}\| + \dots + \sum_{m=0}^{n} \|(g \circ f^{-1})^{m n_0}\| \cdot \|g \circ f^{-1}\|^{n_0 - 1} \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{n} \|(g \circ f^{-1})^{n_0}\|^m \sum_{m=0}^{n_0 - 1} \|(g \circ f^{-1})\|^m < \frac{\sum_{m=0}^{n_0 - 1} \|(g \circ f^{-1})\|^m}{1 - \|(g \circ f^{-1})^{n_0}\|},$$

то ряд $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (g \circ f^{-1})^m$ абсолютно сходится в банаховом пространстве $LC(Y,Y)$. Отметим также, что для любого числа $n\in N$

$$(I_Y+g\circ f^{-1})\circ\sum_{m=0}^{n}(-1)^m(g\circ f^{-1})^m=I_Y+(-1)^{m+1}(g\circ f^{-1})^{m+1}.$$

Поэтому в силу неравенства

$$\|(g\circ f^{-1})^m\|\leq\|(g\circ f^{-1})^{n_0}\|^{\left[\frac{m}{n_0}\right]}\cdot\|(g\circ f^{-1})^{n_0-1}\|$$

из равенства

$$\lim_{m\to\infty}\|(g\circ f^{-1})^{n_0}\|^{\left[\frac{m}{n_0}\right]}=0$$

заключаем, что

$$(I_Y+g\circ f^{-1})\circ\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\cdot(g\circ f^{-1})^m=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(g\circ f^{-1})^m\circ(I_Y+g\circ f^{-1})=I_Y.$$

Таким образом, мы показали, что

$$((f+g)^{-1}=f^{-1}\circ(I_Y+g\circ f^{-1})^{-1})\,\&\,(f+g=(I_Y+g\circ f^{-1})\circ f\in Isom(X,Y)).$$

Аналогично проводится доказательство, если выпонено условие б).

Замечание. Отметим, что из условия а) следует условие б) и, обратно, из б) следует а).

Действительно, пусть число $k\in N$ выбрано так, что

$$\|(g\circ f^{-1})^{n_0}\|^k<\|g\|^{-n_0}\|f^{-1}\|^{-n_0}.$$

Тогда из следующей цепочки неравенств получаем нужное:

$$\|(f^{-1}\circ g)^{n_0(k+1)}\|=\|f^{-1}\circ(g\circ f^{-1})^{n_0k}\circ(g\circ f)^{n_0-1}\circ g\|\leq\|f^{-1}\|\times$$
$$\|(g\circ f^{-1})^{n_0k}\|\cdot\|(g\circ f)^{n_0-1}\|\cdot\|g\|\leq\|(g\circ f^{-1})^{n_0}\|^k\|g\|^{n_0}\|f^{-1}\|^{n_0}<1.$$

Следствие 1. Если при всех предположениях теоремы 1 $X=Y$ и отображения f и g коммутируют, то достаточно потребовать, чтобы для некоторого числа $n_0\in N$ было справедливо неравенство: $\|g^{n_0}\|<\|f^{-1}\|^{-n_0}$. Последнее условие выполнено, в частности, когда g - нильпотентные отображение, а $f:X\mapsto X$ - произвольный коммутирующий с отображением g изоморфизм.

Следствие 2. Пусть X и Y - банаховы пространства и последовательность линейных непрерывных отображений $f_n:X\longmapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует изоморфизм $f:X\longmapsto Y$. Тогда существует такое число $n_0\in N$, что для всех $n\geq n_0$ отображение $f_n:X\longmapsto Y$ также является изоморфизмом.

Доказательство. Так как $f_n - f \xrightarrow{c.к.a} 0 \in L(X,Y)$ и отображение $f^{-1}: Y \mapsto X$ - непрерывно, то $f^{-1} \circ (f_n - f) \xrightarrow{c.к.a} 0 \in LC(X,X)$. Поэтому в силу следствия I2 из [2] $\lim_{n\to\infty} \|(f^{-1}\circ(f_n - f))^2\| = 0$. Следовательно, существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $\|(f^{-1}\circ(f_n - f))^2\| < 1$. Таким образом,

$$(\forall n \in N): (n \geq n_0) \Rightarrow (f_n \in Isom(X,Y)).$$

Проведя доказательство, аналогичное вышеизложенному, и рассматривая в пространстве X норму Секкефальви - Надя (см. [6]) $\|\ \|_f$, которая определяется равенством $\|x\|_f = \|x\|_Z + \|fx\|_Y$, можно доказать справедливость следующего утверждения: пусть Y и Z - банаховы пространства и X - векторное подпространство пространства Z. Предположим, что последовательность линейных замкнутых отображений $f_n: X \subset Z \mapsto Y$ компактно аппроксимирует линейную замкнутую биекцию $f: X \subset Z \mapsto Y$. Тогда существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ f_n - линейная замкнутая биекция.

Воспользовавшись схемой доказательства теоремы I из статьи [1] и применяя технику доказательства теоремы I, мы можем доказать справедливость следующей теоремы:

<u>Теорема 2</u>. Пусть X - векторное подпространство банахова пространства Z, $f: X \subset Z \mapsto Z$ - линейное замкнутое отображение с замкнутой областью значений в пространстве Z, существует линейный непрерывный проектор $p: Z \mapsto Z$ пространства Z на $f^{-1}\{0\}$ и

$$f^{-1}\{0\} \subset \mathfrak{M}(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^n X.$$

Предположим, что последовательность линейных непрерывных отображений $g_n: Z \mapsto Z$ секвенциально компактно аппроксимирует нулевое отображение $0: Z \mapsto Z$ и коммутирует с отображением $f: X \mapsto Z$ (т.е. для всех $n \in N$ $g_n \circ f \subseteq f \circ g_n$).

Тогда существуют такие числа $a > 0$ и $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ для отображений $f_n = f + g_n|_X$:

I) сужение проектора p на подпространство $f_n^{-1}\{0\}$ является изоморфизмом пространства $f_n^{-1}\{0\}$ на $f^{-1}\{0\}$, причём

$$(\forall n \in N): (n \geq n_0) \Rightarrow (\|(p|_{f_n^{-1}\{0\}})^{-1}\| \leq a)$$

2) $f_n^{-1}\{0\} \subset \mathfrak{M}(f_n)$;

3) существует такой линейный непрерывный проектор P_n пространства Z на подпространство $f_n^{-1}\{0\}$, что
$$(I_z - P)Z = (I_z - P_n)Z;$$
4) область значений линейного замкнутого отображения f_n замкнута в пространстве Z;

5) существует изоморфизм подпространства fX на подпространство $f_n X$ банахова пространства Z;

6) $\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{M}(f_n)$.

Теорема 3. Пусть X - банахово пространство, $f: X \mapsto X$ - линейное непрерывное отображение и M — замкнутое подмножество резольвентного множества $\rho(f)$ отображения f. Предположим, что существует такое линейное непрерывное отображение $g: X \mapsto X$, коммутирующее с отображением f, что для некоторого числа $n_0 \in N$ $\|g^{n_0}\| < \bar{a}^{n_0}$, где
$$a = \inf_{\lambda \in M} \|R(\lambda; f)\|.$$
Тогда $M \subset \rho(f+g)$.

Доказательство этой теоремы несложно провести, используя схему доказательства теоремы 4 из [5], на основании следствия I теоремы I.

Аналогичную теорему можно доказать в случае линейных замкнутых отображений, потребовав дополнительно ограниченность множества M.

Если отображение g, вообще говоря, не коммутирует с отображением f, то можно доказать, используя результат теоремы I и схему доказательства теоремы 4 из [5], следующую теорему.

Теорема 4. Пусть X - банахово пространство, $f: X \mapsto X$ - линейное непрерывное отображение и M - замкнутое подмножество резольвентного множества $\rho(f)$ отображения f. Предположим, что существует такое линейное непрерывное отображение $g: X \mapsto X$, что для некоторого числа $n_0 \in N$ а) $\sup_{\lambda \in M} \|(g \circ R(\lambda; f))^{n_0}\| < 1$; или б) $\sup \|(R(\lambda; f) \circ g)^{n_0}\| < 1$. Тогда $M \subset \rho(f+g)$.

Используя схему доказательства теоремы 21 из [3], несложно на основании теоремы I доказать следующую теорему.

Теорема 5. Пусть X - векторное подпространство банахова пространства Z и $f: X \subset Z \mapsto Z$ - линейное замкнутое отображение, M - компактное подмножество резольвентного множества $\rho(f)$ отображения f. Предположим, что существует такое непрерывное линейное отображение $g: Z \mapsto Z$, что для некоторого числа $n_0 \in N$ выполняется одно из неравенств: а) $\sup_{\lambda \in M} \|(g \circ R(\lambda; f))^{n_0}\| < 1$; или б) $\sup_{\lambda \in M} \|(R(\lambda; f) \circ g)^{n_0}\| < 1$. Тогда $M \subset \rho(f + g|_X)$.

Литература

I. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Об одном классе возмущений линейного замкнутого оператора с замкнутой областью значений. ДАН, 1971, т.197, №6, с.1243-1247.

2. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. "Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки", 1975, т.236. Топологические пространства и отображения в них, вып.I, с.59 - 75.

3. Лабеев В.И. Устойчивость свойств спектра линейных отображений при секвенциально компактной аппроксимации в банаховых пространствах. "Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки", 1975, т.236. Топологические пространства и отображения в них, вып.I, с.59 - 75.

4. Лабеев В.И. О некоторых свойствах компактной аппроксимации замкнутых линейных отображений. "Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки", 1975, т.222. Безразмерное эвклидово и полуевклидовы пространства. вып.4, с.61 - 77.

5. Лабеев В.И. О сравнении некоторых сходимостей линейных отображений. Настоящий сборник. Топологические пространства и отображения в них, вып.2, с. 26-31.

6. Szokefalvi - Nagy B. On the stability of the index of unbounded linear transformations. "Acta Math. Acad. Hung," 1952 №3. p.49 - 51.

Поступила 16 февраля 1975 года

УДК 513.88.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

2к

В.С.Левченков

В этой статье изучаются простейшие свойства обобщённой секвенциально компактной аппроксимации линейных непрерывных отображений последовательностями линейных непрерывных отображений нормированных векторных пространств над полем действительных или комплексных чисел. Работа содержит теорему о полуустойчивости размерности ядер отображений и некоторые другие результаты, связанные с понятием углового расстояния.

Результаты данной статьи примыкают к результатам статей [1], [2] и [3].

I. Определение. Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем K действительных или комплексных чисел и $LC(X,Y)$ - пространство всех линейных непрерывных отображений X в Y. Будем говорить, что последовательность линейных непрерывных отображений (f_n) из пространства $LC(X,Y)$ обобщённо секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f \in LC(X,Y)$, если выполняются следующие два условия:

а) для каждого вектора $x \in X$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n x = f x$$

в пространстве Y;

б) для любой ограниченной последовательности векторов (x_n) из X, для которой последовательность векторов $(f_n x_n)$ относительно компактна в Y, последовательность векторов $(f x_n)$ также относительно компактна в Y.

В этом случае будем писать

$$f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f \in LC(X,Y).$$

---

2. Теорема. Если $f_n \xrightarrow{\text{ска}} f \in LC(X,Y)$ (определение 8 из [1]), то $f_n \xrightarrow{\text{оска}} f \in LC(X,Y)$

Доказательство. Так как $f_n \xrightarrow{\text{ска}} f \in LC(X,Y)$, то условие а) выполняется. Пусть (x_n) - такая ограниченная последовательность векторов из пространства X , что последовательность векторов $(f_n x_n)$ относительно компактна в пространстве Y . Так как $f_n \xrightarrow{\text{ска}} f \in LC(X,Y)$ и (x_n) - ограниченная последовательность векторов в пространстве X, то последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y. Поэтому $(f x_n)$ - относительно компактная последовательность векторов в пространстве Y ,как сумма двух относительно компактных последовательностей векторов $(f_n x_n)$ и $(-f_n x_n + f x_n)$.

3. Теорема. ([4] , стр. 115-118). Пусть X - бесконечномерное полное нормированное векторное пространство с базисом Шаудера. С переходом к другой норме можно построить пространство, изоморфное данному (мы его обозначим той же буквой X), в котором существует базис Шаудера (e_n), обладающий следующими свойствами:

а) в топологическом сопряженном пространстве X' существует последовательность (e_n'), которая биортогональна последовательности (e_n) , т.е.

$\forall n,m \in N \quad \langle e_n, e_m' \rangle = \delta_{nm}$ (символ Кронекера);

б) $\forall x \in X \quad \lim \| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j' \rangle e_j \| = 0$

в) $\forall n \in N \quad \| e_n \| = 1 , \ \| e_n' \| \leq 2$

4. Теорема. Пусть X - пространство, удовлетворяющее условиям теоремы 3. Тогда существует такая последовательность отображений (f_n) из $LC(X,X)$ и существует отображение $f \in LC(X,X)$, что $f_n \xrightarrow{\text{оска}} f \in LC(X,X)$,

но нет такого отображения $g \in LC(X,X)$, что $f_n \xrightarrow{\text{ска}} g \in LC(X,X)$

Доказательство. Определим последовательность линейных непрерывных отображений (f_n) следующим образом:

$$\forall x \in X \quad f_n x \underset{df}{=} x + \langle x, e'_n \rangle e_n \, .$$

В силу условий а) и б) из пункта 3

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \to \infty} f_n x = x \, .$$

Пусть $f = id$, где id - тождественное отображение пространства X . Тогда для любой ограниченной последовательности векторов (x_n) из пространства X , для которой последовательность векторов $(f_n x_n)$ относительно компактна в X, последовательность векторов $(f x_n)$ относительно компактна в X. Пусть $(f x_{n_k})$ - произвольная подпоследовательность последовательности $(f x_n)$. Так как $(f_n x_n)$- относительно компактная последовательность векторов в X , то для ее подпоследовательности $(f_{n_k} x_{n_k})$ существует подпоследовательность $(f_{n_{k_i}} x_{n_{k_i}})$, которая сходится к некоторому вектору $x \in X$. Из соотношений

$$f x_{n_{k_i}} - x = x_{n_{k_i}} - x = f_{n_{k_i}} x_{n_{k_i}} - \langle x_{n_{k_i}}, e'_{n_{k_i}} \rangle e_{n_{k_i}} - x =$$
$$= f_{n_{k_i}} x_{n_{k_i}} - x - \tfrac{1}{2} \langle f_{n_{k_i}} x_{n_{k_i}}, e'_{n_{k_i}} \rangle e_{n_{k_i}} = (f_{n_{k_i}} x_{n_{k_i}} - x) -$$
$$- \tfrac{1}{2} \langle f_{n_{k_i}} x_{n_{k_i}} - x, e'_{n_{k_i}} \rangle e_{n_{k_i}} - \tfrac{1}{2} \langle x, e'_{n_{k_i}} \rangle e_{n_{k_i}} ,$$
$$\lim_{i \to \infty} \| f_{n_{k_i}} x_{n_{k_i}} - x \| = 0 , \quad \lim_{i \to \infty} \| \langle x, e'_{n_{k_i}} \rangle e_{n_{k_i}} \| = 0$$

следует, что

$$\lim_{i \to \infty} \| f x_{n_{k_i}} - x \| = 0 \, .$$

Следовательно, $(f x_n)$ - относительно компактная последовательность векторов в пространстве X . Таким образом, $f_n \xrightarrow{o.c.n.n} f \in LC(X, X)$

Далее предположим, что найдется такое отображение $g \in LC(X,X)$, что $f_n \xrightarrow{c.k.a} g \in LC(X,X)$. Так как последовательность отображений (f_n) поточечно сходится к тождественному отображению f и к отображению g , то $g = f$. Но для ограниченной последовательности векторов (e_n) из пространства X последовательность векторов

$$(f_n e_n - f e_n) = (f_n e_n - e_n) = (\langle e_n, e'_n \rangle e_n) = (e_n)$$

не являются относительно компактной последовательностью векторов в X . Т.е. $f_n \xrightarrow{c.k.a}\!\!\!\!\!/\;\, g \in LC(X, X)$.

5. <u>Теорема.</u> Пусть X - пространство, удовлетворяющее условиям теоремы 3. Тогда существует такая последовательность отображений (p_n) из $LC(X,X)$, что для каждого вектора $x\in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} p_n x = id\, x$, но $p_n \xrightarrow{o.c.k.a.} id \in LC(X,X)$.

<u>Доказательство.</u> Определим для каждого натурального числа n линейное непрерывное отображение $p_n \in LC(X,X)$ следующим образом:

$$\forall x\in X \quad p_n x \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i .$$

Тогда:

$$\forall x\in X \quad \lim_{n\to\infty} p_n x = id\, x .$$

Но так как (e_{n+1}) - ограниченная не относительно компактная последовательность векторов в пространстве X, для которой последовательность векторов $(p_n e_{n+1}) = (0)$ относительно компактна в X, то $p_n \xrightarrow{o.c.k.a.} id \in LC(X,X)$.

Непосредственно из определения 1 вытекают следующие теоремы.

6. <u>Теорема.</u> Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем K. Если $f_n \xrightarrow{o.c.k.a.} f \in LC(X,Y)$ и $f_n \xrightarrow{o.c.k.a.} g \in LC(X,Y)$, то $f=g$.

7. <u>Теорема.</u> Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем K. Если $f_n \xrightarrow{o.c.k.a.} f \in LC(X,Y)$ и (n_k) - строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то $f_{n_k} \xrightarrow{o.c.k.a.} f \in LC(X,Y)$.

8. <u>Теорема.</u> Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем K, (f_n) - последовательность отображений из $LC(X,Y)$, $f: X\to Y$ - линейное компактное отображение, и для каждого вектора $x\in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n x = f x$. Тогда $f_n \xrightarrow{o.c.k.a.} f \in LC(X,Y)$.

9. <u>Теорема.</u> Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем K, $f_n \xrightarrow{o.c.k.a.} f \in LC(X,Y)$ и $g_n \xrightarrow{c.k.a.} g \in LC(X,Y)$, где g - линейное компактное отображение. Тогда

$$f_n + g_n \xrightarrow{o.c.k.a.} f+g \in LC(X,Y)$$

<u>Доказательство.</u> Условие а) определения 1 проверяется непосредственно. Для каждого натурального числа $n\in N$ и

$$\forall x\in X \quad f_n x = (f_n+g_n)x - (g_n x - g x) - g x \qquad (1)$$

Пусть (x_n) - такая ограниченная последовательность векторов в X, что последовательность $((f_n+g_n)x_n)$ относительно компактна в Y. В силу того, что $g_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} g \in LC(X,Y)$, $g: X \to Y$ - линейное компактное отображение из равенства (1), следует, что $(f_n x_n)$ является относительно компактной последовательностью векторов в Y. Так как $f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f \in LC(X,Y)$, то $(f x_n)$ - относительно компактная последовательность векторов в Y и, следовательно, $((f+g)x_n)$ - относительно компактная последовательность в Y.

10. Следствие. Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем K. Если $f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f \in LC(X,Y)$ и $g_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0 \in LC(X,Y)$, то $f_n + g_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f \in LC(X,Y)$.

11. Теорема. Пусть X, Y и Z - нормированные векторные пространства над полем K, причём X, Y - полные, $f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f \in LC(X,Y)$ и $g_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} g \in LC(Y,Z)$, где $g: Y \to Z$ линейное непрерывное относительно открытое отображение с конечномерным ядром. Тогда

$$g_n \circ f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} g \circ f \in LC(X,Z).$$

Доказательство. Так как

$$\forall x \in X \quad \|(g_n \circ f_n)x - (g \circ f)x\| =$$
$$= \|(g_n \circ f_n)x - (g_n \circ f)x + (g_n \circ f)x - (g \circ f)x\| \leq$$
$$\leq \|g_n\| \, \|f_n x - f x\| + \|(g_n - g)(f x)\|,$$

то в силу условий теоремы справедливо соотношение

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \to +\infty} (g_n \circ f_n)x = (g \circ f)x.$$

Пусть (x_n) - такая ограниченная последовательность векторов из X, что $((g_n \circ f_n)x_n)$ - относительно компактная последовательность в Y. Из теоремы Банаха - Штейнгауза следует, что $(f_n x_n)$ - ограниченная последовательность в Y. Так как $g_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} g \in LC(Y,Z)$ и $(g_n(f_n x_n))$ - относительно компактная последовательность векторов в Z, то последовательность векторов $(g(f_n x_n))$ относительно компактна в Z. Из теоремы 6 работы [1] следует, что $(f_n x_n)$ - относительно компактная последовательность векторов в Y. Ввиду того, что $f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f \in LC(X,Y)$, $(f x_n)$ последовательно, $((g\circ f)x_n)$ - относительно компактные последовательности векторов.

I2. <u>Следствие</u>. Пусть X, Y - нормированные векторные пространства над полем K, причём X полное. Если $\lambda_n \to \lambda \in K$ и $f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f \in LC(X,Y)$, то

$$\lambda_n f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} \lambda f \in LC(X,Y).$$

Замечание. Утверждение следствия справедливо без требования полноты пространства X.

I3. <u>Теорема</u>. Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем K, причём X полное. Если $f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f \in LC(X,Y)$ и f - линейная непрерывная относительно открытая инъекция, то существует такое натуральное число $n_0 \in N$, что для всех натуральных чисел $n \geq n_0$ f_n также линейная непрерывная относительно открытая инъекция.

<u>Доказательство</u> проводится по схеме доказательства теоремы I7 из работы [1].

I4. <u>Теорема</u>. Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем K, причём X полное. Если $f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f \in LC(X,Y)$ и f - линейное непрерывное относительно открытое отображение с конечномерным ядром $\ker f$, то существует такое натуральное число $n_0 \in N$, что для всех натуральных чисел $n \geq n_0$ $\dim \ker f_n \leq \dim \ker f$ и f_n - относительно открытое отображение.

<u>Доказательство</u> проводится по схеме доказательства теоремы I9 из работы [1].

I5. <u>Определение</u>. Пусть X - нормированное векторное пространство над полем K и $x, y \in X \setminus \{0\}$. Угловым расстоянием $\gamma(x,y)$ между векторами x и y называется число, равное

$$\| x\|x\|^{-1} - y\|y\|^{-1}\|.$$

Пусть X_1, X_2 - ненулевые подпространства X. Угловым расстоянием $\gamma[X_1, X_2]$ между X_1 и X_2 называется число

$$\inf\{\gamma(x_1,x_2),\ x_1\in X_1\setminus\{0\},\ x_2\in X_2\setminus\{0\}\}.$$

Если $X_1=\{0\}$ или $X_2=\{0\}$, то положим по определению

$$\gamma[X_1,X_2]=0.$$

16. Теорема. Пусть X, Y - нормированные векторные пространства над полем K, причём X полное, и $f_n \xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f\in LC(X,Y)$, где $f: X\mapsto Y$ - линейное непрерывное отображение относительно открытое с конечномерным ядром $\ker f$. Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\gamma[\ker f_n, \ker f]=0.$$

Доказательство. Предположим противное, т.е.

$$\exists \varepsilon_0>0\ \forall k\in N\ \exists n_k\geq k\ \ \gamma[\ker f_{n_k}, \ker f]\geq\varepsilon_0.$$

Если $\exists k_0\in N$ $\ker f_{n_{k_0}}=\{0\}$, то в силу определения 15

$$\gamma[\ker f_{n_{k_0}}, \ker f]=0\geq\varepsilon_0>0$$

и получено противоречивое неравенство $0>0$. Если $\forall k\in N$ $\ker f_{n_k}\neq\{0\}$, то $\forall k\in N$ $\exists x_{n_k}\in X$ $x_{n_k}\in\ker f_{n_k}$ и $\|x_{n_k}\|=1$. В силу того, что $f_{n_k}\xrightarrow{\text{о.с.к.а.}} f\in LC(X,Y)$ и (x_{n_k}) такая ограниченная последовательность векторов из X, что $(f_{n_k}x_{n_k})=(0)$ - относительно компактная последовательность в Y, то (fx_{n_k}) - относительно компактная последовательность векторов в Y. Так как f - линейное непрерывное относительно открытое отображение с конечномерным ядром и (fx_{n_k}) - относительно компактная последовательность в Y, то (x_{n_k}) - относительно компактная последовательность в X и, следовательно, существует подпоследовательность $(x_{n_{k_i}})$ последовательности векторов (x_{n_k}) и существует вектор $x\in X$ такие, что

$$\lim_{i\to+\infty}x_{n_{k_i}}=x.$$

Так как $\lim_{i\to+\infty}f_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}}=fx$, то $x\in\ker f$, причём $\|x\|=1$. Из определения 15 следует, что

$$\forall i\in N\quad \|x_{n_{k_i}}-x\|\geq\gamma[\ker f_{n_{k_i}}, \ker f]. \quad (2)$$

Но в силу предположения

$$\forall i \in N \quad \gamma\,[\ker f_{n_{k_i}}, \ker f] \geq \varepsilon_0 > 0. \qquad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) следует, что

$$\forall i \in N \quad \| x_{n_{k_i}} - x \| \geq \varepsilon_0 > 0. \qquad (4)$$

Переходя к пределу в неравенстве (3) при $i \to +\infty$ получаем, что

$$0 = \lim_{i \to +\infty} \| x_{n_{k_i}} - x \| \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N \ \forall n \geq n_0 \quad \gamma\,[\ker f_n, \ker f] < \varepsilon.$$

I7. <u>Теорема</u>. Пусть X , Y - нормированные векторные пространства над полем K , причём X полное, и $f_n \xrightarrow{a.r.k.a.} f \in LC(X,Y)$, где $f : X \to Y$ - линейное непрерывное инъективное конечномерное отображение. Тогда

$$\lim_{n \to +\infty} \gamma\,[f_n X, f X] = 0.$$

<u>Доказательство</u>. Предположим противное, т.е. предположим, что

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall k \in N \ \exists n_k \geq k \quad \gamma\,[f_{n_k} X, f X] \geq \varepsilon_0 > 0.$$

Можно считать, что $f_{n_k} X \neq \{0\}$ для всех $k \in N$, иначе сразу же получается противоречие. Пусть $y_{n_k} \in f_{n_k} X$ и $\|y_{n_k}\| = 1$. Тогда

$$\exists x_{n_k} \in X \setminus \{0\} \quad y_{n_k} = f_{n_k} x_{n_k}.$$

Введём обозначение $z_k = x_{n_k} \|x_{n_k}\|^{-1}$. Рассмотрим последовательность векторов $(f_{n_k} z_k - f z_k)$ в Y. Так как (z_k) - ограниченная последовательность в X и $f : X \to Y$ - линейное непрерывное отображение, то $(f z_k)$ - ограниченная последовательность векторов в конечномерном пространстве fX и, следовательно, относительно компактна. Ввиду того, что f - инъективное линейное непрерывное конечномерное отображение и $(f z_k)$ - относительно компактная последовательность векторов в Y, последовательность векторов (z_k) относительно компактна в X и, следовательно, существует подпоследовательность (z_{k_i}) последовательности (z_k) и существует вектор $z \in X$ такие, что

$$\lim_{i \to +\infty} z_{k_i} = z.$$

Так как
$$\lim_{i\to+\infty} \xi_{n_{k_i}} z_{k_i} = \xi z ,$$
$\|z\| = 1$ и ξ - инъекция, то $\xi z \in \xi X \setminus \{0\}$. В силу определения I5 и предположения
$$\forall i \in N \quad \| \xi_{n_{k_i}} z_{k_i} - \frac{\xi z}{\|\xi z\|} \| \geq \gamma [\xi_{n_{k_i}} X, \xi X] \geq \varepsilon_0 > 0$$
Переходя к пределу в последнем неравенстве при $i \to +\infty$ получаем, что $0 \geq \varepsilon_0 > 0$ и, следовательно,
$$\lim_{n\to+\infty} \gamma [\xi_n X, \xi X] = 0.$$

I8. Следствие. Пусть выполняются условия теоремы I7 за исключением инъективности отображения ξ и $\mathcal{D}$ - некоторое топологическое дополнение к $\ker \xi$ в X. Тогда
$$\lim_{n\to+\infty} \gamma [\xi_n \mathcal{D}, \xi X] = 0.$$
Доказательство. Так как $\xi_n|_{\mathcal{D}} \xrightarrow{a.c.k.a.} \xi|_{\mathcal{D}} \in \mathcal{L}C(\mathcal{D}, Y)$ и $\xi|_{\mathcal{D}}$ - инъекция, то применима теорема I7.

Литература

I. Левченков В.С. Примеры линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах с базисом Шаудера, секвенциально компактно аппроксимируемые линейными непрерывными отображениями.- "Уч.зап.ЛГУ им. П.Стучки". Топологические пространства и отображения в них 1975, т.236, с.97-102.

2. Левченков В.С. Сохранение индекса линейных замкнутых отображений с замкнутой областью значений в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.- "Уч.зап. ЛГУ им. П.Стучки", 1975, т.236. Топологические пространства и отображения в них, с.91-96.

3. Дей М.М. Нормированные линейные пространства. М. И.Л., 1961.

Поступила 14 сентября 1975 года

УДК 513.88

НОВЫЕ ТОПОЛОГИИ, В КОТОРЫХ ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЯВЛЯЕТСЯ КОМПАКТНЫМ ОТОБРАЖЕНИЕМ

А.Х.Лиепиньш

2

Как известно, предел последовательности линейных компактных отображений является компактным отображением в топологии σ равномерной сходимости на всех ограниченных множествах в пространстве линейных непрерывных отображений, определенных на нормированном векторном пространстве и принимающих значения из полного нормированного векторного пространства.

В.И.Лабеев показал, что это справедливо также для последовательностей компактных отображений, которые секвенциально компактно аппроксимируют непрерывное отображение [1].

В [2] была построена локально выпуклая топология σ', в которой сходится каждая последовательность линейных непрерывных отображений, секвенциально компактно аппроксимирующая некоторое линейное непрерывное отображение. В предлагаемой работе для топологии σ' (и, следовательно, для любой топологии, которая мажорирует σ') доказывается компактность предела последовательности линейных компактных отображений, если пространства нормируемые и второе пространство полное и сепарабельное (см.следствие 2 теоремы).

В дальнейшем изложении X и Y обозначают отделимые локально выпуклые топологические векторные пространства над полем действительных или комплексных чисел K, $\mathcal{L}(X,Y)$ - векторное пространство всех линейных непрерывных отображений пространства X в пространство Y, $\mathcal{L}(Y,Y)$ - векторное пространство всех линейных непрерывных отображений пространства Y в себя, $\mathcal{LC}(X,Y)$ векторное подпространство линейных компактных отображений векторного пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, S - векторное пространство последовательностей линейных непрерывных отображений, сходящихся к началу пространства $\mathcal{L}(Y,Y)$ в топологии равномерной сходимости на всех конечных множествах, $\mathcal{B}$ - множество всех ограниченных множеств пространства X, $\mathcal{V}$ - базис окрестностей начала в пространстве Y, N - множество всех натуральных чисел.

Рассмотрим при фиксированных множествах $B\in\mathcal{B}$ и $V\in\mathcal{V}$ и при фиксированной последовательности $(\varphi_n)_{n\in N}\in S$ для любого натурального числа $j\in N$ множества $W_j(B,V,(\varphi_n))$ множество $W(B,V,(\varphi_n)_{n\in N})$ и семейство множеств $\mathcal{W}$, определяемые следующим образом:

$$W_j(B,V,(\varphi_n)_{n\in N}) \underset{def}{=} \{g\in\mathcal{L}(X,Y): \bigcup_{n\geq j}(\varphi_n\circ g)(B)\subset V\},$$

$$W(B,V,(\varphi_n)_{n\in N}) \underset{def}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j(B,V,(\varphi_n)_{n\in N}),$$

$$\mathcal{W} \underset{def}{=} (W(B,V,(\varphi_n)_{n\in N})).\quad B\in\mathcal{B},\ V\in\mathcal{V}$$

Семейство $\mathcal{W}$ является базисом окрестностей начала некоторой другой, более слабой чем топология b, топологии b' ([2], 1, с.32).

Теорема. Если X и Y - отделимые локально выпуклые пространства, причем Y - сепарабельное бочечное пространство, то пересечение всех окрестностей нуля в топологии b' совпадает с замкнутым векторным пространством всех линейных отображений, которые каждое ограниченное подмножество пространства X отображает на предкомпактное подмножество пространства Y.

Доказательство. Для принадлежности линейного непрерывного отображения $g\in\mathcal{L}(X,Y)$ множеству $\cap\{W: W\in\mathcal{W}\}$ необходимо и достаточно равномерной сходимости любой последовательности $(\varphi_n)_{n\in N}\in S$ на образе любого ограниченного подмножества пространства X при отображении g, поэтому утверждения теоремы - прямое следствие леммы, рассматриваемой дальше.

Следствие 1. Если X и Y нормируемые векторные пространства, причем Y - полное сепарабельное пространство, то пересечение всех окрестностей нуля в топологии $\mathscr{b}'$ совпадает с векторным подпространством всех линейных компактных отображений, которое в топологии $\mathscr{b}'$ замкнуто.

Доказательство. Если пространство X и пространство Y удовлетворяют вышеприведенным условиям, то линейное непрерывное отображение $g \in \mathscr{L}(X,Y)$ является компактным тогда и только тогда, когда оно любое ограниченное подмножество пространства X отображает в предкомпактное подмножество пространства Y и тем самым по теореме пересечение всех окрестностей нуля в топологии $\mathscr{b}'$ совпадает с векторным подпространством всех линейных компактных отображений пространства X в пространство Y.

В топологии $\mathscr{b}'$ существует базис замкнутых окрестностей нуля ([3], 1.4, с.26), и, так как пересечение всех окрестностей нуля совпадает с пересечением окрестностей нуля, принадлежащих любому базису, то $\mathscr{L}C(X,Y)$ - замкнутое векторное подпространство.

Следствие 2. Если X и Y нормируемые векторные пространства, причем Y - полное сепарабольное пространство и последовательность (простая или обобщенная) линейных компактных отображений пространства X в пространство Y сходится в топологии $\mathscr{b}'$ (или в любой топологии, ее мажорирующей) к линейному непрерывному отображению, то это отображение компактно.

Доказательство. Утверждение следствия справедливо, так как при доказательстве следствия 1 установлена замкнутость векторного пространства всех линейных компактных отображений в топологии $\mathscr{b}'$.

Лемма. Для предкомпактности ограниченного подмножества бочечного сепарабельного пространства Y необходимо и достаточно равномерной сходимости на нем любой последовательности $(\varphi_n)_{n\in N} \in S$.

Доказательство. Необходимость общеизвестна ([4] ,3.4.7, с.111).

Для доказательства достаточности предположим противное, а именно существование такого ограниченного подмножества Y_0 пространства Y, на котором равномерно сходится любая последовательность $(\varphi_n')_{n\in N}\subset Y_0$ и которое не является предкомпактным в топологии пространства Y и поэтому содержит некоторую последовательность векторов $(y_n)_{n\in N}\subset Y_0$, любая последовательность которой не сходится в топологии пространства Y . Тем самым существует такое множество базиса окрестностей начала $V\in\mathcal{V}$ в пространстве Y , что для любого натурального $n\in N : y_n\notin V$, и векторы последовательности $(y_n)_{n\in N}$ можно считать линейно независимыми, ибо в противном случае конечномерность линейной оболочки множества векторов последовательности $(y_n)_{n\in N}$ влечет для последовательности $(y_n)_{n\in N}$ существование сходящейся подпоследовательности в топологии пространства Y, что противоречит предположению.

Для любого $n\in N$ рассмотрим векторные подпространства Y_n пространства Y , определяемые следующим образом:

$$Y_n \underset{(d)}{=} \{y\in Y : y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i,\ \lambda_i\in K,\ i\in\{1,\dots,n\}\},$$

последовательность линейных непрерывных форм $(\varphi_n')_{n\in N}$; определенных соответственно на векторных подпространствах Y_n векторного пространства Y равенствами:

$$\varphi_n'(y_i) \underset{(d)}{=} \delta_{ni},\ i\in\{1,\dots,n\},$$

существование которых обеспечено линейной независимостью векторов последовательности $(y_n)_{n\in N}$ ([4] , 2.4.2,с.67), и продолжим их на все пространство Y так, чтобы для любого вектора $y\in Y$ выполняется неравенство: $|\varphi_n'(y)|\le p(y)$, где p - функционал Минковского ранее выбранной окрестности начала $V\in\mathcal{V}$ в пространстве Y ([4] , 2.4.2,с.66), тем самым обеспечивая поточечную ограниченность последовательности линейных непрерывных форм $(\varphi_n')_{n\in N}$ ([4], 3.3.3, с.105), а также в предположении бочечности пространства Y и равностепенную непрерывность ([4], 3.4.2, с.107). По теореме Алаоглу-Бурбаки ([4], 3.4.3, с.109) для последовательности $(\varphi_n')_{n\in N}$ в топологии поточечной сходимости существует предельная точка - линейная непрерывная форма φ_0 на пространстве Y - и тем самым сходящаяся к ней последовательность $(\varphi_{n_k}')_{k\in N}\subset(\varphi_n')_{n\in N}$, так как пространство Y сепарабельное, а в этом случае топология поточечной сходимости в топологическом сопряженном пространстве Y' индуцирует в равностепенно непрерывном подмножестве метризуемую топологию ([4], 3.4.7, с.112). Тогда последовательность линейных непрерывных форм $(\varphi_k'')_{k\in N}$, определяемых равенствами:

$$\varphi_k'' \underset{def}{=} \varphi_{n_k}' - \varphi_0, \ k\in N$$

поточечно сходится к нулю.

Рассмотрим последовательность линейных непрерывных отображений $(\varphi_n)_{n\in N}$, определяемых для любого вектора $y\in Y$ следующим образом: $\varphi_k(y) \underset{def}{=} \varphi_k''(y)y_{n_k}, k\in N$, которая в силу ограниченности последовательности векторов $(y_n)_{n\in N}$ также поточечно сходится к началу пространства $\mathcal{L}(Y,Y)$ ([4], 1.5.3, с.40), т.е., $(\varphi_k)_{k\in N}\in S$.

В силу поточечной сходимости последовательности линейных непрерывных форм $(\varphi_{n_k}')_{k\in N}$ к линейной непрерывной форме φ_0 и определения рассматриваемых последовательностей линейных непрерывных форм $(\varphi_n')_{n\in N}$ и $(\varphi_k'')_{k\in N}$, а также последовательности линейных непрерывных отображений $(\varphi_k)_{k\in N}\in S$ для любого натурального $k\in N$ выполняются равенства:

$$\varphi_0(y_{n_k})=0, \quad \varphi_k''(y_{n_k})=1, \quad \varphi_k(y_{n_k})=y_{n_k}$$

и так как любой вектор последовательности $(y_{n_k})_{k\in N}$ не принадлежит ранее выбранному множеству базиса окрестностей начала $V\in\mathcal{V}$ в пространстве Y, то для последовательности линейных непрерывных отображений $(\varphi_k)_{k\in N}\in S$ равномерная сходимость на подмножестве Y_0 пространства Y не имеет место, что противоречит предположению.

Полученное противоречие завершает доказательство.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю И.В.Карклиньшу за постоянную помощь в работе.

Литература

1. Лабеев В.И. Об устойчивости секвенциальной предкомпактности отображений в топологических векторных пространствах при секвенциально предкомпактной аппроксимации. "Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки", 1975, т.236. Топологические пространства и отображения в них, вып. I, с.76-90.

2. Лиепиньш А.Х. О секвенциально компактной аппроксимации отображений. - "Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки", 1975, т.236. Топологические пространства и отображения в них, вып.I, с.28-38.

3. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М., "Мир", 1967.

4. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., "Мир", 1971.

Поступила 14 сентября 1975 года

УДК 519.45.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ В ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Р.С.Липянский

1.Пусть A - ассоциативная алгебра над полем K характеристики 0 .Рассмотрим в алгебре A подпространство L, замкнутое относительно коммутирования.Ассоциативная подалгебра $A(L)$,порождённая в ассоциативной алгебре A множеством L ,называется линеаризацией лиевой алгебры L .Алгебра Ли L называется в этом случае линейной алгеброй Ли.Элемент $a \in L$ называется алгебраическим,если он является алгебраическим в $A(L)$,т.е. существует такой полином $\varphi(X)$ с коэффициентами из K ,что $\varphi(a)=0$ Элемент $a \in L$ называется внутренним алгебраическим,если линейное преобразование $ad\, a$ алгебры L является алгебраическим.

В дальнейшем под словом "алгебра" понимается алгебра Ли произвольной (вообще говоря,бесконечной) размерности над полем характеристики 0.Через R обозначим некоторое абстрактное свойство алгебр.Алгебры,обладающие свойством R назовём R -алгебрами.Если сумма R -идеалов (R-идеал - это идеал,являющийся R -алгеброй) алгебры L снова R -идеал,то назовём её R-радикалом.Будем говорить в этом случае,что для R существует R -радикал.

Введём следующие обозначения свойств алгебр: LN-свойство быть локально нильпотентной алгеброй, LR -свойство быть локально конечной локально разрешимой алгеброй, LRA-свойство быть локально разрешимой линейной алгеброй из алгебраических элементов, LRN - свойство быть локально разрешимой линейной алгеброй из нильпотентных элементов, LNA-свойство быть локально нильпотентной линейной алгеброй из алгебраических элементов.Известно,что $LN(L)$ и $LR(L)$ существуют (1 , 2).Целью настоящей статьи является доказательство существования радикалов $LRA(L)$, $LRN(L)$ и $LNA(L)$

Из существования этих радикалов следует,что сумма всех локально разрешимых идеалов алгебры Ли из энгелевых элементов является снова локально разрешимым идеалом из энгелевых элементов. В заключение рассматриваются вопросы о характеристичности введённых радикалов, изучается их строение в локально разрешимых алгебрах Ли.

2. Пусть L - алгебра Ли и a, b - произвольные элементы из L. Введём обозначения:

$$[a,b(1)]=[a,b], \ldots, [[a,b(n-1)],b]=[a,b(n)]$$

Лемма 1. Пусть L - линейная алгебра Ли, a - алгебраический элемент из L, т.е. $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i a^i=0$. Если для элемента $c\in L$ имеем $[[c,a],a]=0$, то $[a,c]^{2^n-1}=0$.

Доказательство. Докажем предварительную формулу:

$$\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}\,a^{i-m}a_1^{2^m-1}=0, \qquad (1)$$

где $a_1=[a,c]$, $m=1,2,\ldots,n$ и $\beta_{im}=\frac{i!}{(i-m)!}\cdot\alpha_i$, индукцией по m. Пусть $m=1$, тогда покажем, что $\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}a^{i-1}a_1=0$, где $\beta_{i1}=i\alpha_i$. Действительно, из перестановочности a и a_1 и из равенства

$$[a\cdot b,c]=[a,c]b+a\cdot[b,c] \qquad (2)$$

следует, что

$$\Big[\sum_{i=0}^{n}\alpha_i a^i,c\Big]=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i[a^i,c]=\sum_{i=0}^{n}i\alpha_i a^{i-1}[a,c]=\sum_{i=1}^{n}\beta_{i1}a^{i-1}a_1$$

Предположим, что при $m=m$ справедливо равенство:

$$\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}\,a^{i-m}a_1^{2^m-1}=0$$

Покажем, что

$$\sum_{i=m+1}^{n}\beta_{i,m+1}\,a^{i-(m+1)}a_1^{2^{m+1}-1}=0, \text{ где } \beta_{i,m+1}=(i-m)\beta_{im}$$

Действительно, из равенства (2) и из перестановочности a и a_1 получаем равенство

$$\Big[\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}a^{i-m}a_1^{2^m-1},c\Big]=\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}a^{i-m}[a_1^{2^m-1},c]+\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}[a^{i-m},c]\cdot a_1^{2^m-1}=\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}a^{i-m}[a_1^{2^m-1},c]+\sum_{i=m+1}^{n}\beta_{im}(i-m)a^{i-(m+1)}a_1^{2^m}$$

Значит,

$$0=\sum_{i=m}^{n}\beta_{im}a^{i-m}[a_1^{2^m-1},c]+\sum_{i=m+1}^{n}\beta_{im}(i-m)a^{i-(m+1)}a_1^{2^m}$$

Умножим последнее равенство слева на $a_1^{2^m-1}$ и получим, что

$$\sum\beta_{im}a^{i-m}a_1^{2^m-1}[a_1^{2^m-1},c]+\sum\beta_{im}(i-m)a^{i-(m+1)}a_1^{2^{m+1}-1}=0$$

По предположению индукции первая сумма последнего равенства равна 0. Следовательно,

$$\sum\beta_{im}(i-m)\,a^{i-(m+1)}a_1^{2^{m+1}-1}=0.$$

Положив в формуле (1) $m=n$, получим $\beta_{nn}a_1^{2^n-1}=0$ т.е. $a_1^{2^n-1}=0$.

Следствие 1. В абелевом идеале линейной алгебры Ли L

совокупность L_1 всех алгебраических элементов является идеалом в L, причём $[L, L_1] \subseteq L_2$, где L_2 - совокупность всех нильпотентных элементов из L.

Лемма 2. Пусть a - алгебраический элемент алгебры Ли L, т.е. $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = 0$ и $b \in L$ такой, что $[a, b(m-1)] \neq 0$ $[a, b(m)] = 0$. Тогда $[a, b(m-1)]^n = 0$.

Доказательство. Из $[ab, c] = [a, c]b + a[b, c]$ следует, что $[a^k, b(r)]$ есть линейная комбинация элементов вида $[a, b(r_1)] \cdot \ldots \cdot [a, b(r_k)]$, где $\sum_{i=1}^{n} r_i = r$. Отсюда $[a^n, b(n(m-1))] = \alpha [a, b(m-1)]^n + u$, где u есть линейная комбинация элементов вида: $[a, b(r_1)] \cdot [a, b(r_2)] \cdot \ldots [a, b(r_k)]$ причём хотя бы одно из $r_i > m-1$. Следовательно, $u = 0$ Более того, $[a^k, b(n(m-1))] = 0$, если $k < m$. Так как $\sum \alpha_i a^i = 0$, то $0 = [\sum \alpha_i a^i, b(n(m-1))] = \sum \alpha_i [a^i, b(n(m-1))] = \alpha_n [a^n, b(n(m-1))] = \alpha_n' [a, b(m-1)]^n$ и так как $\alpha_n' \neq 0$, то $[a, b(m-1)]^n = 0$.

Лемма 3. (6). Пусть L - линейная алгебра Ли, $A(L)$ - её линеаризация. Если J - такой идеал в L, что $A(J) \subset A(L)$ есть нильпотентная алгебра, то двусторонний идеал $\overline{A(J)}$, порождённый $A(J)$, является нильпотентным идеалом в $A(L)$.

Доказательство.

Изучим теперь поведение нильпотентных и алгебраических элементов в локально разрешимых, локально конечных алгебрах Ли. Имеет место следующее

Предложение 1. Пусть L - локально разрешимая, локально конечная алгебра Ли над полем нулевой характеристики. Тогда совокупность алгебраических элементов алгебры Ли L образует идеал L_1, совокупность нильпотентных элементов алгебры L образует идеал L_2, причём $[L, L_1] \subseteq L_2 \subseteq \mathcal{L}(A)$ где $\mathcal{L}(A)$ - радикал Левицкого алгебры $A(L)$.

Доказательство основывается на следующих леммах.

Лемма 4. Совокупность всех нильпотентных элементов конечномерной разрешимой алгебры Ли L образует идеал.

Доказательство. Пусть $a \in L$ и $a^n = 0$, $n > 1$. Рассмотрим два случая. 1. $[L, L] \neq 0$. Покажем, что центр Z нильпотентного радикала $R(L)$ алгебры L содержит ненулевой нильпотентный элемент. Если $a \in Z$, то существует такой элемент $b \in R(L)$, что $[a, b(m-1)] \neq 0$, $[a, b(m)] = 0$

при $m>1$. По лемме 2 $[a, b(m-1)]^n=0$. Так как $R(L)$ - нильпотентная алгебра, то существуют элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R(L)$ такие, что элемент $0 \neq c = [a, b(m-1), b_1(n_1) \ldots b_k(n_k)]$ лежит в центре при некоторых $n_i > 0$. Из леммы 2 следует, что c - ненулевой нильпотентный элемент в Z. В силу следствия 1 ненулевые нильпотентные элементы из Z образуют идеал J в L.

Рассмотрим $A(J) \subset A(L)$. Покажем, что $A(J)$ - нильпотентная ассоциативная алгебра. Действительно, J - конечномерный абелев идеал. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_m$ - база J над полем K и $e_1^{r_1}=0, \ldots, e_m^{r_m}=0$. Без ограничения общности, положим $r_m = \max(r_1, r_2, \ldots, r_m)$. Тогда $A(J)$ - нильпотентная алгебра класса нильпотентности $r = \sum_{i=1}^{m} r_i$. Действительно, произведение r элементов из $A(J)$ является суммой элементов, каждый из которых содержит хотя бы один множитель вида $e_1^{r_1}, \ldots, e_k^{r_k}, \ldots, e_m^{r_m}$. Так как $A(J)$ - нильпотентная алгебра, то по лемме 3 $\overline{A(J)}$ - двусторонний идеал в $A(L)$, порождённый $A(J)$, является нильпотентным. Но тогда радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ ассоциативной алгебры $A(L)$ отличен от нуля (4).

Рассмотрим $\overline{A} = A(L)/\mathcal{L}(A)$. Гомоморфизм $A(L)$ на $\overline{A}$ индуцирует гомоморфизм алгебры L на $\overline{L}$, причём $\overline{A}=A(\overline{L})$. Все нильпотентные элементы $\overline{L}$ лежат в $\mathcal{L}(A)$. Действительно, в противном случае, повторяя вышеизложенные рассуждения для алгебры $\overline{L}$, приходим к соотношению $\mathcal{L}(A) \neq 0$, которое противоречит полупростоте $A(\overline{L})$. Следовательно, нильпотентные элементы из L лежат в $\mathcal{L}(A)$ и поэтому образуют идеал в L.

2. $[L, L]=0$. Тогда алгебра является коммутативной и все нильпотентные элементы из L образуют идеал в L.

<u>Следствие 2.</u> Пусть L - разрешимая конечномерная алгебра Ли, a - ненулевой нильпотентный элемент из L. Тогда радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ алгебры $A(L)$ отличен от нуля и все нильпотентные элементы L лежат в $\mathcal{L}(A)$.

<u>Лемма 5.</u> Алгебраические элементы разрешимой конечномерной алгебры Ли L образуют идеал.

<u>Доказательство.</u> Достаточно рассмотреть случай, когда L не является коммутативной алгеброй. В этом случае нильпотентный радикал $R(L)$ алгебры L отличен от 0. Рассмотрим два случая:

а) $[a, R(L)]=0$ для всякого алгебраического элемента $a\in L$. Тогда все алгебраические элементы алгебры L лежат в центре $Z(R)$ радикала $R(L)$. Действительно, так как $[L,L]\subset R(L)$, то алгебра Ли $M=\{a, R(L)\}$ является нильпотентным идеалом в L. Если $a\bar{\in} R(L)$, то $R(L)\neq M$, что противоречит максимальности радикала $R(L)$. Поэтому $a\in R(L)$ и $a\in Z(R)$, так как $[a, R(L)]=0$. Таким образом, все алгебраические элементы из L лежат в $Z(R)$. По следствию 1 алгебраические элементы образуют в $Z(R)$ идеал алгебры L.

б) пусть $[a, R(L)]\neq 0$ для некоторого алгебраического элемента $a\in L$. Тогда найдётся такой элемент $b\in R(L)$, что $[a, b(m-1)]\neq 0$ и $[a, b(m)]=0$ при $m>1$. По лемме 2 $[a, b(m-1)]^n=0$ ($n>1$). Тогда по следствию 2 $\mathcal{Y}(A)\neq 0$. Рассмотрим $\bar{A}=A(L)/\mathcal{Y}(A)$. Гомоморфизм $A(L)$ на $\bar{A}$ индуцирует гомоморфизм алгебры L на $\bar{L}$, где $\bar{A}=A(\bar{L})$. Все нильпотентные элементы алгебры $\bar{L}$ лежат в $\mathcal{Y}(A)$ (следствие 2). Следовательно, алгебраические элементы $\bar{L}$ находятся в централизаторе нильпотентного радикала $R(\bar{L})$ алгебры L. Но тогда мы оказываемся в рассмотренной выше ситуации. Следовательно, алгебраические элементы в L образуют идеал.

Доказательство предложения 1. Так как свойство множеств всех алгебраических или всех нильпотентных элементов из L быть идеалом является свойством конечного типа, то из лемм 4 и 5 вытекает справедливость предложения 1.

Следствие 3. Пусть L - локально разрешимая, локально конечная алгебра Ли без нильпотентных элементов. Если в L существует алгебраический ненулевой элемент, то $Z(L)\neq 0$.

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение.

Предложение 2. В локально конечном локально разрешимом идеале R алгебры Ли L совокупность алгебраических элементов образует идеал L_1 в L, совокупность нильпотентных элементов образует идеал L_2 в L, причём $[L, L_1]\subseteq L_2$

Доказательство. Согласно предложению 1 совокупность алгебраических элементов в локально конечной локально разрешимой алгебре Ли образуют идеал. Поэтому для доказательства предложения достаточно показать, что если элемент $a\in R$ и

$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i = 0$, c - произвольный элемент из L, то $[a,c]$ - нильпотентный элемент.

Так как R - локально конечная алгебра, то алгебра G, порождённая элементами a и $[a,c]$ из R является конечномерной. Рассмотрим $\overline{A} = A(G)/\mathcal{L}(A(G))$, где $\mathcal{L}(A(G))$ радикал Левицкого ассоциативной алгебры $A(G)$. Гомоморфизм $A(G)$ на $\overline{A}$ индуцирует гомоморфизм G на $\overline{G}$, причём $\overline{A} = A(\overline{G})$. Так как $\overline{a}$ - алгебраический элемент в $\overline{G}$, то согласно предложению 1 имеем

$$[\overline{a}, [\overline{a,c}]] = [\overline{a}, [\overline{a}, \overline{c}]] = 0$$

Следовательно, в силу леммы 1

$$[\overline{a}, \overline{c}]^{2^n-1} = \overline{0}, \text{ т.е. } [a,c]^{2^n-1} \in \mathcal{L}(A(G)).$$

Аналогично доказывается, что совокупность нильпотентных элементов из R образует в L идеал. Из вышеприведённых рассуждений видно, что

Теорема 1. Пусть L - линейная алгебра Ли над полем K ($char K = 0$). Тогда:

1) существуют радикалы $LRA(L)$, $LRN(L)$, $LNA(L)$;

2) $LRA(L)$ совпадает с совокупностью алгебраических элементов из $LR(L)$, $LRN(L)$ совпадает с совокупностью нильпотентных элементов из $LR(L)$, $LNA(L)$ совпадает с совокупностью алгебраических элементов из $LN(L)$;

3) $[LRA(L), L] \subseteq LRN(L)$

Доказательство. В работе (1) доказано существование LR - радикала. Используя этот факт, а также локальную конечность LRA - алгебр (9), получим, что сумма LRA-идеалов алгебры L является LR -идеалом. Из предложения 1 следует, что этот LR -идеал состоит из алгебраических элементов алгебры L. Тогда из предложения 2 вытекает, что он состоит из всех алгебраических элементов $LR(L)$.

Аналогично доказывается существование $LRN(L)$ и $LNA(L)$. Из предложения 2 непосредственно следует включение:

$$[LRA(L), L] \subseteq LRN(L).$$

Рассмотрение множества линейных преобразований $ad L$, где L - абстрактная алгебра Ли, даёт возможность применить полученные результаты о линейных алгебрах Ли к абстрактным алгебрам. Так как в $ad\,L$ энгелев элемент L нильпотентен и наоборот (3), то имеет место

Следствие 4. Энгелевы элементы в локально разрешимой локально конечной идеале алгебры Ли L образуют идеал.

Следствие 5. Сумма всех локально разрешимых идеалов из энгелевых (внутренних алгебраических) элементов является локально разрешимым идеалом из энгелевых (внутренних алгебраических) элементов.

Следствие 6. Сумма всех идеалов из энгелевых элементов ограниченной степени энгелевости является идеалом из энгелевых элементов.

Для доказательства достаточно учесть, что идеал из энгелевых элементов ограниченной степени энгелевости является локально нильпотентным (2) и применить следствие 5.

Следствие 7. Пусть L - алгебра Ли, B_1 - локально нильпотентный идеал L из энгелевых элементов, B_2 - идеал из энгелевых элементов. Тогда B_1+B_2 -идеал из энгелевых элементов.

Доказательство. Пусть $a\in B_1$, $c\in B_2$. Так как $[a,c]\in B_1\cap B_2$ то $[a,c]$ - энгелев элемент L. Для доказательства следствия 7 достаточно показать, что $a+c$ - энгелев элемент L. Рассмотрим подалгебру L_1, порождённую B_1 и c : $L_1=\{B_1,c\}$. По лемме 3 (8) алгебра L_1 является локально нильпотентной. Но тогда по теореме 1 сумма двух энгелевых элементов a и c локально нильпотентной алгебры L_1 является снова энгелевым элементом L.

3. Для дальнейшего нам понадобиться следующая, по-видимому, известная лемма:

Лемма 6. Пусть a - нильпотентный (алгебраический) элемент линейной алгебры Ли, тогда a - внутренний нильпотентный (внутренний алгебраический) элемент алгебры Ли.

Доказательство. Из формулы

$$y(ad\,x)^{2t}=\sum_{k=0}^{2t}(-1)^k C_{2t}^k x^k y x^{2t-k} \qquad (*)$$

следует, что в случае, когда $x^n=0$, имеем $(ad\,x)^{2n}=0$. Докажем теперь, что если $\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i=0$, то $ad\,x$ является алгебраическим линейным преобразованием. Заметим, что преобразование $ad\,x$ является локально алгебраическим. Действительно, из (*) следует, что всякий элемент $y\in L$ можно погрузить в конечномерное инвариантное относительно

$ad\,x$ пространство V_y алгебры $A(L)$ с базисом $x^{\alpha}yx^{\beta}$ где $\alpha, \beta \leq n-1$.Подпространство $V'_y = V_y \cap L$ является конечномерным инвариантным относительно $ad\,x$ подпространством алгебры L .

Так как, степень полинома от $ad\,x$,анулирующего V'_y, для любого $y \in L$ ограничена, то $ad\,x$ - алгебраическое линейное преобразование.

Рассмотрим теперь LRA - радикал и LRN -радикал в локально разрешимой линейной алгебре Ли.

Теорема 2.В локально разрешимой линейной алгебре Ли L над K ($char K = 0$) $LRA(L)$ совпадает с совокупностью алгебраических элементов из L , $LRN(L)$ совпадает с совокупностью нильпотентных элементов из L ,причём

$$[LRA(L), L] \subseteq LRN(L).$$

Доказательство.Пусть L -разрешимая алгебра Ли ступени n .Доказательство проводится индукцией по степени разрешимости.При $n=1$ теорема очевидна.Рассмотрим разрешимую алгебру Ли ступени $\leq n$ $ad\,L$:

$$ad\,L \supset ad\,L^{(1)} \supset ad\,L^{(2)} \supset \ldots \supset ad\,L^{(n)} = 0$$

Ясно,что $ad\,L^{(n-1)}$ -абелев идеал в $ad\,L$ и $ad^2 a = 0$ для любого $a \in L^{(n-1)}$.Рассмотрим $A(ad\,L^{(n-1)})$,где линеаризация $ad\,L$ берётся в ассоциативной алгебре D дифференцирований L .Тогда $A(ad\,L^{(n-1)})$ - нильпотентная алгебра.Следовательно,по лемме 3 $\overline{A(ad\,L^{(n-1)})}$ - двусторонний идеал в $A(ad\,L)$ является нильпотентным.Но тогда радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ в $A(ad\,L)$ отличен от 0.

Рассмотрим $\overline{A} = A(ad\,L)/\mathcal{L}(A)$.Гомоморфизм $A(L)$ на $\overline{A}$ индуцирует гомоморфизм алгебры Ли L на $\overline{L}$,причём $\overline{A} = A(\overline{L})$.Алгебра Ли $\overline{L}$ ступени разрешимости $\leq n-1$, так как $ad\,L^{(n-1)} \subset \mathcal{L}(A)$.Но тогда по индуктивному предположению внутренние алгебраические элементы $\overline{L}$ образуют идеал.Покажем,что внутренние алгебраические элементы L образуют идеал.Действительно,пусть a и b внутренние алгебраические элементы из L , c - произвольный элемент.

Рассмотрим три случая:

1. Пусть $ad\,a \in \mathcal{L}(A)$ и $ad\,b \in \mathcal{L}(A)$.Тогда $ad[a,b]$, $ad(a+b)$ и $ad[a,c] \in \mathcal{L}(A)$.Следовательно,существуют $k \geq 1$, $z \geq 1$, $m \geq 1$,что $ad^k(a+b)=0$,

$ad^2[a,b]=0$, $ad^m[a,c]=0$, т.е. $[a,b]$ $a+b$, $[a,c]$ - внутренние алгебраические элементы L.

2. Пусть $ad\,a \notin \mathcal{Z}(A)$ и $ad\,b \notin \mathcal{Z}(A)$. Тог $ad\,a+\mathcal{Z}(A)$ и $ad\,b+\mathcal{Z}(A)$ - ненулевые внутре ние алгебраические элементы в $\overline{L}$. Следовательно, $ad[a,b]+\mathcal{Z}(A)$ и $ad(a+b)+\mathcal{Z}(A)$ - внутренние а гебраические элементы из $\overline{L}$ (по индукционному предположению). Аналогично $ad[a,c]+\mathcal{Z}(A)$ - внутренний алге браический элемент из $\overline{L}$. Отсюда существуют полиномы $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ над K, что

$$f_1(ad(a+b))\in\mathcal{Z}(A),\ f_2(ad[a,b])\in\mathcal{Z}(A)$$

и $f_3(ad[a,c])\in\mathcal{Z}(A)$. Но тогда $\exists k\geq 1$, $r\geq 1$, $m\geq 1$ что $f_1^k(ad(a+b))=0$, $f_2^r(ad[a,b])=0$, $f_3^m(ad[a,c])=0$ Следовательно, $a+b$, $[a,b]$ и $[a,c]$ - внутренни алгебраические элементы.

3. Пусть $ad\,a \notin \mathcal{Z}(A)$ и $ad\,b\in\mathcal{Z}(A)$. Тог $ad[a,b]\in\mathcal{Z}(A)$, т.е. $ad^r[a,b]=0$ пр $r\geq 1$. Далее: $ad[a,c]$ - внутренний алгебраический элемент из L (по индуктивному предположению).

Рассмотрим элемент $ad(a+b)+\mathcal{Z}(A)$. Так ка $ad\,b\in\mathcal{Z}(A)$ и $\varphi(ada)=0$, где $\varphi(x)$ полином от X над K, то $\varphi(ad\,b+ad\,a)\in\mathcal{Z}(A)$ Значит, $\varphi(ad(a+b))\in\mathcal{Z}(A)$. Отсюда, $\exists m\geq 1$ что $\varphi^m(ad(a+b))=0$, т.е. $a+b$ - внутренний алгебраический элемент. Следовательно, внутренние алгебраические элементы разрешимой алгебры Ли L образуют идеал F В силу теоремы Кэртиса [9] эта подалгебра локально конечна. По лемме 6 алгебраические элементы алгебры L находят ся в локально конечной локально разрешимой алгебре F. И предложения 2 следует, что алгебраические элементы из алгебры F образуют идеал в L.

Аналогично доказывается, что нильпотентные элементы алгебры Ли L образуют идеал. Теорема доказана.

Следствие 8. В локально разрешимой алгебре Ли энгелевы внутренние алгебраические) элементы образуют идеал.

4. Рассмотрим произвольные дифференцирования разрешимых алгебр Ли и локально конечных алгебр Ли.

Теорема 3. Если L - разрешимая алгебра Ли, L_1 - идеал из внутренних алгебраических элементов, L_2 -идеал из энгелевых элементов, то $L_1 D \leq L_2$ для всякого дифференцирования D алгебры L.

Доказательство. Пусть $F = L \oplus KD$ - расщепляемое расширение KD посредством L над K. Здесь $L \triangleleft F$ и $[l, D] = lD$ для каждого $l \in L$. Так как факторалгебра F/L - одномерна, то алгебра F - разрешима. По теореме 2 в алгебре F внутренние алгебраические элементы образуют идеал F_1 $(L_1 \subset F_1)$, энгелевы элементы образуют идеал F_2 $(L_2 \subset F_2)$, причём $[F, F_1] \subset F_2$. Поэтому, если $a \in L_1$, то $[a, D] = aD \in F_2$. Но $aD \in L$, поэтому $aD \in L \cap F_2 = L_2$.

Теорему 3 можно рассматривать как обобщение на случай бесконечномерных алгебр теоремы о том, что дифференцирование переводит конечномерную разрешимую алгебру Ли в её нильрадикал (3 , 5).

Аналог теоремы 3 на случай локально конечных алгебр Ли устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4. Если L - локально конечная алгебра Ли, L_1 -сумма всех локально разрешимых идеалов L из внутренних алгебраических элементов, L_2 -сумма всех локально нильпотентных идеалов L из энгелевых элементов, то для всякого дифференцирования D алгебры L : $L_1 D \leq L_2$

Доказательство. Пусть как и в предыдущей теореме $F = L \oplus KD$ расщепляемое расширение KD посредством L над K. Применяя теорему 2 из(7) к алгебре L_0, получим $LR(L) \cdot D \leq LR(L)$, где $LR(L)$ - локально разрешимый радикал алгебры L. Следовательно, в алгебре F подалгебра $LR(L)$ является локально конечным локально разрешимым идеалом. Так как $L_1 \subset LR(L)$ и $L_2 \subset LR(L)$, то из предложения 1 получаем $[L_1, F] \leq L_2$, откуда $[L, D] = L_1 D \leq L_2$..

Эта теорема доказывалась ранее (5) в случае, когда L - конечномерная алгебра.

Так как локально нильпотентная алгебра Ли является локально конечной, то имеет место

Следствие 9. В локально нильпотентной алгебре Ли L множество энгелевых элементов образует характеристический идеал.

Аналогично тому, как это делается в теории групп, можно определить локальную систему подалгебр алгебры Ли.

Лемма 7. Пусть лиева алгебра L обладает локальной системой подалгебр $\{L_\alpha\}_{\alpha\in I}$ и в каждой подалгебре выбран идеал R_α, причём из $L_\alpha < L_\beta$ следует, что $R_\alpha \leq R_\beta$ (условие монотонности). Обозначим через R теоретико-множественную сумму всех R_α. Тогда R является идеалом в L с локальной системой $\{R_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Лемма 8. Пусть R - локально разрешимая подалгебра алгебры L и пусть в L имеется локальная система из подалгебр L_α, таких, что $LAN(L_\alpha) \supseteq R$. Тогда $LAN(L) \supseteq R$

Доказательство. Обозначим через R^L минимальный идеал в L содержащий R. Если $L_\alpha \supset L_\beta$, то $R^{L_\alpha} \supseteq R^{L_\beta}$ и поэтому по лемме 7 R^{L_α} образуют локальную систему в своём теоретико-множественном объединении $\bar{R}$ и $\bar{R}$ является идеалом в L. Ясно, что $\bar{R}$ содержится в любом идеале, содержащем R, поэтому $\bar{R} = R^L$ и R^{L_α} составляют локальную систему в R^L. По условию $R \leq LAN(L_\alpha)$, следовательно $R^{L_\alpha} \leq LAN(L_\alpha)$. Но тогда R^L - локально разрешимая алгебра из нильпотентных элементов, т.е. $R^L \leq LAN(L)$. Отсюда $R \leq LAN(L)$.

Дифференцирование D лиевой алгебры L назовём локально алгебраическим, если для любого $x \in L$ минимальная подалгебра, содержащая x и инвариантная относительно D является конечномерной.

Теорема 5. Если L - локально разрешимая алгебра, то для всякого локально алгебраического дифференцирования D имеем

$$LRA(L)D \leq LRN(L).$$

Доказательство. Пусть D - локально алгебраическое дифференцирование. Используя это, можно построить для любого $x \in LRA(L)$ локальную систему из инвариантных относительно D разрешимых подалгебр таких, что $x \in L_\alpha$. По теореме 2 $x \in LRA(L_\alpha)$ и $LRA(L_\alpha)D \leq LRN(L_\alpha)$. Поэтому $[x, D] = xD \in LRN(L_\alpha)$

Пусть R - минимальная подалгебра, содержащая xU и инвариантная относительно D. Тогда $R \subset LRN(L_\alpha)$ для каждого $\alpha \in I$. По лемме 7 $R \subset LRN(L_\alpha)$, т.е. $xD \subset LRN(L)$

○

Литература

1. Плоткин Б.И. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли - "Успехи матем.наук", 1958, т.12, вып.6, с.133-138.

2. Кострикин А.И. Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля. - "Известия АН СССР. Сер.матем"., 1957, т.21, №4, с.515-540.

3. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар "Софус Ли". М., И.Л., 1962.

4. Джекобсон Н. Строение колец. М., И.Л., 1961.

5. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Физматгиз, 1964.

6. Левич Е.М., Липянский Р.С. Алгебраические элементы в линейных локально нильпотентных алгебрах Ли. - "Уч.зап. ЛГУ им. П.Стучки", 1972, т.172.

7. Парфенов В.А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли. -"Сиб. матем.журнал", 1971, т.12, № 1, с.171-176.

8. Симонян Л.А. Некоторые вопросы теории представлений алгебр Ли. -"Уч.зап.ЛГУ", 1964, т.58.

Поступила 14 октября 1975 года

УДК 519.45

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ АМИЦУРА

Р.С.Липянский

Пусть A - ассоциативная алгебра над полем K характеристики 0, A_L - соответствующая коммутаторная алгебра Ли. Целью настоящей заметки является изучение строения ассоциативной алгебры A над полем K, коммутаторная алгебра которой обладает инвариантным лиевским рядом:

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = A_L \qquad (I)$$

с абелевыми факторами. Если ряд (I) имеет конечную длину, то алгебра A называется лиево разрешимой [I]. В статье Амицура [2] доказывается, что над полем характеристики $p \neq 2$ лиево разрешимая алгебра без нильидеалов является коммутативной. Оказывается, что аналогичная теорема справедлива для ассоциативных алгебр над полем K ($char K = 0$), обладающих рядом (I).

<u>Лемма I</u>. Пусть A - ассоциативная алгебра над полем K ($char K = 0$) с рядом (I) длины большей I. Тогда в A_L существует абелев идеал, содержащий ненулевой нильпотентный элемент.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим два различных случая.

I) Пусть существует такой элемент $c \in L_1$, $c \neq 0$ и такой элемент $a \in A_L$, что $[a,c] \neq 0$. Тогда $[[[a,c]^2 a^2, c], c] = 0$ так как $[[f, c], c] = 0$ для любого $f \in L$. С другой стороны, из равенства $[ab, c] = [a,c]b + a[b,c]$ и равенства $[[a,c],c] = 0$ следует, что $[[[a,c]^2 a^2, c], c] = 2[a,c]^3$. Следовательно, $2[a,c]^3 = 0$. Поэтому из равенства $char K = 0$ получаем нужное нам нильпотентный элемент $[a,c] \in L_1$.

2) Пусть для всех $c \in L_1$ и $a \in A_L$, $[a,c] = 0$. Тогда рассмотрим L_2. Пусть $b, c \in L_2$ - такие элементы, что $[b,c] \neq 0$. Тогда $[[[[b,c] \cdot c^3, b], b], b] = 0$, так как $[[[b,c]c^3, b], b] \in L_1$. С другой стороны, $8[b,c]^4 = [[[[b,c] \cdot c^3, b], b], b] = 0$. Поэтому $[b,c]^4 = 0$ и, следовательно, $[b,c]$ - ненулевой нильпотентный эле-

мент в A_L. Если для любых элементов b и c из L_2 выполнено равенство $[b,c]=0$, то L_2 - абелев идеал в A_L. Таким образом, мы получаем ситуацию, рассматриваемую в (I).

Проведём индукцию по длине ряда (I) (выше был проделан индуктивный шаг) и получим

I) либо A_L - абелева алгебра

2) либо существует ненулевой нильпотентный элемент.

Однако первый случай противоречит условию леммы. Рассмотрим второй случай. Так как алгебра A_L локально разрешима то нильпотентные элементы в A_L образуют идеал (см. теорему 2 из [3]). Отсюда вытекает, что нильпотентный элемент $a \in A_L$ можно спустить в абелев идеал L_1 алгебры A_L.

Пусть L - линейная алгебра Ли, $A(L)$ - обёртывающая алгебра для алгебры L, a - элемент из абелева идеала алгебры L. Легко доказать с помощью индукции по K следующую формулу:

$$[a^k, c] = k a^{k-1}[a,c] \qquad (2)$$

<u>Лемма 2</u>. Пусть L - линейная алгебра Ли над K и $a \in L$ - нильпотентный элемент $(a^n=0, n>1)$. Пусть $a \in B$ где B - абелев идеал в L. Тогда

$$(ac)^m a^{n-1} = (n-1)^m a^{n-1}[c,a]^m \qquad (3)$$

Доказательство проведём индукцией по m. Пусть $m=1$. Тогда из формулы (2) следует равенство

$$aca^{n-1} = a^n c + a[c,a]^{n-1} = n a^{n-1}[c,a].$$

Предположим, что формула (3) выполнена при $m=k$. Тогда

$$(ac)^{k+1}a^{n-1} = ac(ac)^k a^{n-1} = (n-1)^k a c a^{n-1}[c,a]^k =$$
$$= (n-1)^k a^n c[c,a]^k + (n-1)^k a[c,a^{n-1}][c,a]^k = (n-1)^{k+1} a^{n-1}[c,a]^{k+1}.$$

Формула (3) доказана. ○

<u>Лемма 3</u>. Пусть L - алгебра Ли, удовлетворяющая условиям леммы 2. Тогда справедлива следующая формула

$$(ac)^m a^{k-1} = \sum_i (ac)^{m_i} a^k f_i(a,c) + (k-1)^m a^{k-1}[c,a]^m \qquad (4),$$

где $f_i(a,c)$ - слова, содержащие $a, c, [a,c]$ и их степени.

Доказательство. Проведём индукцию по m. Пусть $m=1$. Тогда $aca^{k-1} = a^k c + (k-1)a^{k-1}[c,a]$.

Предположим, что формула (4) справедлива при $m=d$. Тогда $(ac)^{d+1}a^{k-1} = ac(ac)^d a^{k-1} = ac(\sum(ac)^{m_i} a^k f_i(a,c) + (k-1)^d a^{k-1}[c,a]^m) = \sum_i (ac)^{m_i+1} a^k f_i(a,c) + (k-1)^d ac a^{k-1}[c,a]^{2k} = \sum(ac)^{m_i+1} a^k f_i(a,c) + (k-1)^d \cdot a^k c[c,a]^{2k} + (k-1)^{d+1} a^{k-1}[c,a]^{2k+1}$ Формула (4) доказана.

Лемма 4. Пусть L - линейная алгебра Ли, a - ненулевой нильпотентный элемент в абелевом идеале B ($a^n=0$, $n>1$). Тогда для фиксированного $p>0$ существует такое число $m_p \geqslant 0$, что

$$(ac)^{m_p} a^p = 0 \qquad (5)$$

Доказательство. Воспользуемся возвратной индукцией по p. Пусть $p=n-1$. Тогда из формулы (3) следует, что

$$(ac)^{2n-1}a^{n-1} = (n-1)^m a^{n-1}[c,a]^{2n-1} = 0$$

(здесь мы воспользовались тем, что из равенства $a^n=0$ вытекает $[c,a]^{2n-1}=0$ (см. [3]). Предположим, что при $p=k$ равенство (5) выполнено, и докажем, что оно справедливо и для $p=k-1$. Из формулы (2) следует, что

$$(ac)^m a^{k-1} = \sum(ac)^{m_i} a^k f_i(a,c) + (k-1)^m a^{k-1}[c,a]^m \qquad (6)$$

Так как $[c,a]^{2n-1}=0$, то при $m=2k-1$ последнее слагаемое в формуле (6) равно нулю. По предположению индукции существует такое $m_k \geqslant 0$, что $(ac)^{m_k}a^k=0$; поэтому $(ac)^{m_k} \cdot \sum(ac)^{m_i}a^k f_i(a,c)=0$. Следовательно, из формулы (6) вытекает равенство:

$$(ac)^{m_k}(ac)^m a^{k-1} = (ac)^{m_k} \sum_i (ac)^{m_i} a^k f_i(a,c) = 0$$

Значит, $(ac)^{m_k+m} a^{k-1} = 0$. Тем самым лемма доказана.

Следствие. Пусть L - линейная алгебра Ли. Предположим, что $a \in B$, где B - абелев идеал в L, а a - нильпотентный элемент из L. Тогда для любого элемента $c \in L$ существует такое число $z_c \geqslant 1$, что $(ac)^{z_c} = 0$.

Доказательство. Если $p=1$, то по лемме 4 следует существование такого натурального числа $m_p \geqslant 0$, что $(ac)^{m_p} a = 0$. Тогда $(ac)^{m_p} ac = 0$ и поэтому $(ac)^{m_p+1} = 0$.

Теорема. Пусть A - ассоциативная алгебра над K, A_L - коммутаторная алгебра, обладающая рядом (I), $\mathcal{U}(A)$ - верхний нильрадикал в A. Тогда $A/\mathcal{U}(A)$ - абелева алгебра.

Доказательство. В силу леммы I существует абелев идеал B в A_L, содержащий ненулевой нильпотентный элемент. Тогда нильпотентные элементы в B образуют идеал J алгебры Ли A_L (см. [3]).

Покажем, что $\overline{A(J)}$ - двусторонний идеал в A_L, порождённый J, является нильрадикалом. Для элементов $a\in J$ и $b,c\in A$ справедливо равенство $bac=a(bc)+[b,a]c$. Из леммы 4 следует, что $a(bc)$ и $[b,a]c$ - нильпотентные элементы в A_L. В работе [3] доказано, что в локально разрешимой алгебре Ли нильпотентные элементы образуют идеал. Поэтому элемент bac, будучи суммой двух элементов в A_L, сам является нильпотентным элементом. Более того, можно утверждать, что

$$\sum b_i a_i c_i, \quad a_i\in J, \; b_i, c_i \in A_L$$

является нильпотентным элементом в A_L. Значит, $\overline{A(J)}$ - ненулевой нильидеал в A. Поэтому (см. [I]) $\mathcal{U}(A)\neq 0$.

Рассмотрим теперь факторалгебру $\bar{A}=A/\mathcal{U}(A)$. Если алгебра $\bar{A}$ - не абелева, то, проведя вышеизложенные построения, мы получим ненулевой нильидеал в $\bar{A}$, содержащий верхний нильрадикал, $\mathcal{U}(A)$, что противоречит максимальности $\mathcal{U}(A)$. Следовательно, факторалгебра $A/\mathcal{U}(A)$ - абелева.

Следствие [4]. Пусть A - ассоциативная алгебра характеристики 0, обладающая инвариантным рядом

$$0=A_0\subset A_1\subset\ldots\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=A,$$

с абелевыми факторами. Тогда алгебра A является расширением верхнего нильрадикала с помощью абелевой алгебры.

Литература

I. Джекобсон Н. Строение колец, М., 1961.

2. Amitsura R. The T-ideals of the free ring. J. Lond. Math. Soc, 30.

3. Липянский Р.С. Настоящий сборник, с. 52-63.

4. Фрейдман П.А. - "Изв. Вузов. Серия матем.", 1958, №3, с. 225-232.

Поступила 16 октября 1975 года

УДК 519.2

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ℓ_2

М.Л.Свердан, В.Н.Царькова

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \qquad /1/$$

Для решения этого уравнения на ЭВМ следует на плоскости (t,x) сделать сетку с шагом h по x и Δ по t, а затем аппроксимировать производные по t и x выражениям:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \approx \frac{\tilde{u}(t+\Delta, x) - \tilde{u}(t,x)}{\Delta},$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} \approx \frac{\tilde{u}(t, x+h) - 2\tilde{u}(t,x) + \tilde{u}(t, x-h)}{h^2}$$

Обозначив $n = \left[\frac{t}{\Delta}\right]$, $k = \left[\frac{x}{h}\right]$ для $u(n,k) = \tilde{u}(n\Delta, kh)$ получим разностное уравнение

$$u(n+1,k) = b^2 u(n,k+1) + (1-2b^2) u(n,k) + b^2 u(n,k-1),$$

где $\qquad /2/$

$$b^2 = \frac{a^2 \Delta}{h^2}$$

Если бы в уравнении /1/ присутствовали производные более высокого порядка, то указанный выше процесс привел бы нас к уравнению вида

$$\sum_{k=-M}^{M} \sum_{l=0}^{L} a_{lk} u(n+l, m+k) = 0, \quad a_{Lk} \neq 0 \qquad /3/$$

$$u(l, m) = f_m^{(l)} \quad \text{при} \quad l = 0, 1, \ldots, L-1$$

Эти уравнения будем называть разностными уравнениями на плоскости, отражая тем самым класс дифференциальных уравнений, породивший данное разностное уравнение.

Пусть $\alpha(n,\omega)$ – последовательность независимых случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Наряду с уравнением /3/ рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=-M}^{M}\sum_{l=0}^{L} a_{lk}u(n+l,m+k)=\left(\sum_{k=-M}^{M}\sum_{\nu=0}^{L-1} b_{\nu k}u(n+\nu,m+k)\right)\alpha(n,\omega) \qquad /4/$$

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые факты из теории пространств случайных последовательностей. Будем обозначать: $\mathcal{X}$ - пространство ограниченных последовательностей $\{x_k, k=0,\pm1,\dots\}$; l_1 - пространство последовательностей суммируемых по модулю; l_k - пространство последовательностей, суммируемых по модулю с k - ой степенью; l_k^+ будет означать пространство последовательностей $\{x_k, k=0,1,\dots\}$, обладающих аналогичными свойствами. Если $\{x_k(\omega)\, k=0,\pm1,\dots\}$ - последовательность случайных величин, то в дальнейшем $\mathcal{X}^{(\omega)}$ означает пространство таких последовательностей, что

$$\left\{E\,|x_k(\omega)|^2,\ k=0,\pm1,\dots\right\}\in\mathcal{X},$$

$l_2^{(\omega)}$ соответствует пространству последовательностей $\{x_k(\omega), k=0,\pm1,\dots\}$ таких, что

$$\left\{\sqrt{E\,|x_k(\omega)|^2},\ k=0,\pm1,\dots\right\}\in l_2 .$$

Пусть $x=\{x_k, k=0,\pm1,\dots\}\in l_2$, тогда отображение l_2 в $\mathcal{L}_2(|z|=1)$,задаваемое соотношением

$$X(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{-k}x_k \qquad /5/$$

с точностью до множителя сохраняет норму [1] :

$$\|x\|_{l_2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|X\|_{\mathcal{L}_2(|z|=1)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_{|z|=1}|X(z)|^2dz} .$$

Аналогичное соотношение выполняется для пространств $l_2^{(\omega)}$ и $\mathcal{L}_2^{(\omega)}(|z|=1)$, если ввести нормы

$$\|x\|_{l_2^{(\omega)}}=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}E\,|x_k(\omega)|^2\right)^{\frac12},\quad \|X\|_{\mathcal{L}_2^{(\omega)}(|z|=1)}=\left(\int_{|z|=1}E\,|X(z)|^2dz\right)^{\frac12}$$

Отображение /5/ обозначим $Z(\cdot)$.

Если $f^{(\ell)} = \{ f_m^{(\ell)}, m=0,\pm1,\dots \} \in \ell_2$,

то итерациями можно убедиться, что решение уравнения /4/ $u(n,\cdot)$ принадлежит $\ell_2^{(\omega)}$ при любом конечном n, где $u(n,\cdot)$ означает
$$\{ u(n,m);\ m=0,\pm1,\dots \}$$

Определение. Будем говорить, что тривиальное решение уравнения /4/ асимптотически устойчиво в среднем квадратичном, если

I) для каждого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta(\varepsilon)>0$ такое, что любое его решение $u(n,\cdot)$, для которого $\| f^{(\ell)} \|_{\ell_2} < \delta$, $\ell=0,1,\dots,L-1$ удовлетворяет неравенству $\| u(n,\cdot) \|_{\ell_2^{(\omega)}} < \varepsilon$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \| u(n,\cdot) \|_{\ell_2^{(\omega)}} = 0$.

Приступим теперь к исследованию асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения /4/. Для этого применим к обеим частям /4/ операцию $Z(\cdot)$. Имеем:
$$\sum_{\ell=0}^{L} A_\ell(z)\, \mathcal{U}_{n+\ell}(z) = \sum_{\nu=0}^{L-1} B_\nu(z)\, \mathcal{U}_{n+\nu}(z)\, \alpha(n,\omega),$$
$$\mathcal{U}_\ell(z) = F^{(\ell)}(z),\ \ell=0,1,\dots,L-1, \qquad /6/$$

где обозначено
$$F^{(\ell)}(z) = Z(f^{(\ell)}_{\cdot}), \qquad A_\ell(z) = \sum_{k=-M}^{M} a_{\ell k} z^k,$$
$$B_\ell(z) = \sum_{k=-M}^{M} b_{\ell k} z^k, \qquad \mathcal{U}_n(z) = Z(u(n,\cdot)).$$

При помощи
$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} \lambda^{n-1} \Big(\sum_{\ell=0}^{L-1} A_\ell(z) \lambda^\ell \Big)^{-1} d\lambda$$

от /6/ перейдем к уравнению
$$\mathcal{U}_{n+\nu}(z) = \mathcal{Y}_{n+\nu}(z) + \sum_{k=0}^{n+\nu} H_{n+\nu-k}(z) \sum_{\nu=0}^{L-1} B_\nu(z)\, \mathcal{U}_{k+\nu}(z)\, \alpha(k,\omega) \qquad /7/$$

которое умножим на $B_\nu(z)$ и просуммируем по ν от 0 до $L-1$. Получим

$$\Phi_n(z) = \Psi_n(z) + \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}(z)\, \Phi_k(z)\, \alpha(k,\omega), \qquad /8/$$

где приняты обозначения

$$\Phi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{L-1} B_\nu(z)\, U_{n+\nu}(z), \qquad \Psi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{L-1} B_\nu(z)\, Y_{n+\nu}(z),$$

$$Y_n(z) = Z(y(n,\cdot)), \qquad C_{n-k}(z) = \sum_{\nu=0}^{L-1} B_\nu(z)\, H_{n-k+\nu},$$

$y(n,m)$ - решение уравнения /3/ по начальным данным $f_m^{(l)}, l=0,\dots,L-1$. Перепишем /8/ для $\overline{\Phi_n(z)}$, и перемножим полученное выражение и /8/, применив затем операцию математического ожидания. Получим

$$E|\Phi_n(z)|^2 = |\Psi_n(z)|^2 + \sum_{k=0}^{n} |C_{n-k}(z)|^2 E|\Phi_k(z)|^2$$

или, в очевидных обозначениях

$$\mu_n(z) = \gamma_n(z) + \sum_{k=0}^{n} \beta_{n-k}(z)\, \mu_k(z). \qquad /9/$$

<u>Лемма</u>. Если корни полинома

$$W(z,\lambda) = \sum_{l=0}^{L} A_l(z)\, \lambda^l$$

расположены внутри круга радиуса меньшего единицы при всех $z \in \{z : |z|=1\}$ и

$$\sup_{|z|=1} \|B(z)\|^2_{l_1^+} \equiv \sup_{|z|=1} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z) < 1 \qquad /10/$$

то $\mu_n(z) \in l_1^+$ при всех $z \in \{z : |z|=1\}$.

<u>Доказательство</u>. В силу первого условия леммы можно утверждать, что $\{\gamma_n(z), n=0,1,\dots\} \in l_1^+$ при всех $z \in \{z : |z|=1\}$.

Далее, легко получить

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z) \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(z),$$

т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(z) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(z)}{1-\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z)} . \qquad /11/$$

Откуда, с учетом второго условия леммы, следует $\{\mu_n(z), n=0,1,\dots\} \in \ell_1^+$ при всех $z \in \{z: |z|=1\}$, что и завершает доказательство.

Теорема. Если выполнены условия леммы, то тривиальное решение уравнения /4/ асимптотически устойчиво в среднем квадратичном.

Доказательство. В силу линейности уравнения /4/ и сохранения нормы при $Z(\cdot)$ - отображении /6/, остается показать выполнение свойства 2 определения для последовательности $\|\mathcal{U}_n\|^2_{\mathcal{L}_2^{(\omega)}(|z|=1)}$, т.е. нужно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} E\int_{|z|=1} |\mathcal{U}_n(z)|^2 dz = 0 \qquad /12/$$

Прежде всего убедимся, что из

$$\lim_{n\to\infty} \|\Phi_n\|^2_{\mathcal{L}_2^{(\omega)}(|z|=1)} = 0 \qquad /13/$$

следует /12/. Для этого перепишем /7/ для $\overline{\mathcal{U}_n(z)}$, перемножим полученное равенство на /7/ при $\vartheta = 0$ и применим операцию математического ожидания. Получим

$$E|\mathcal{U}_n(z)|^2 = |Y_n(z)|^2 + \sum_{k=0}^{N} |H_{n-k}(z)|^2 E|\Phi_k(z)|^2 + \\ + \sum_{k=N+1}^{n} |H_{n-k}(z)|^2 E|\Phi_k(z)|^2$$

для любого $0 < N < n$. Легко видеть, что в силу условия леммы для всех $z \in \{z: |z|=1\}$ выполняется неравенство $\sup_n |H_n(z)|^2 < 1$, т.е.

$$E|\mathcal{U}_n(z)|^2 \le |Y_n(z)|^2 + \sum_{k=0}^{N} |H_{n-k}(z)|^2 E|\Phi_k(z)|^2 + \\ + \sum_{k=N+1}^{n} E|\Phi_k(z)|^2,$$

и, кроме того, $\lim_{n\to\infty} |Y_n(z)|^2 = 0$ равномерно по $z \in \{z: |z|=1\}$. По лемме можно выбрать $N(\varepsilon)$ такое, чтобы неравенство

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} E|\varphi_k(z)|^2 < \varepsilon$$

выполнялось при любом ε равномерно по z. Тогда при $n\to\infty$ имеем
$$\lim_{n\to\infty} E|U_n(z)|^2 \le \sum_{k=0}^{N}\left(\lim_{n\to\infty}|H_{n-k}(z)|^2\right)E|\varphi_k(z)|^2 + \varepsilon,$$
т.е.
$$\lim_{n\to\infty} E|U_n(z)|^2 \le \varepsilon .$$

В силу произвольности ε получаем необходимый факт.

Для доказательства теоремы осталось убедиться в справедливости /13/. Итак,
$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n\|^2_{\mathcal{L}_2^{(\omega)}(|z|=1)} = \lim_{n\to\infty}\int_{|z|=1} E|\varphi_n(z)|^2 dz =$$
$$= \int_{|z|=1}\lim_{n\to\infty} E|\varphi_n(z)|^2 dz = 0,$$
т.е. имеем стремление к нулю последовательности $E|\varphi_n(z)|^2$ равномерное при $z\in\{z:|z|=1\}$, причем элементы этой последовательности ограничены в совокупности при тех же z. Теорема доказана.

Выражение, стоящее в /10/, удается вычислить. Проделаем это для уравнения первого порядка по n:
$$u(n+1,m) = \sum_{k=-M}^{M} a_k u(n,m+k) +$$
$$+\left(\sum_{k=-M}^{M} b_k u(n,m+k)\right)\alpha(n,\omega). \qquad /14/$$

Имеем
$$A_1(z) \equiv A(z) = \sum_{k=-M}^{M} a_k z^k,$$
$$B_1(z) \equiv B(z) = \sum_{k=-M}^{M} b_k z^k,$$
$$w(z,\lambda) = \lambda - A(z),$$
$$H_n(z) = A^n(z),$$
$$\beta_n(z) = |A(z)|^{2n}|B(z)|^2,\ n\ge 0,$$

$$\sup_{|z|=1} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z) = \sup_{|z|=1} |B(z)|^2 \sum_{n=0}^{\infty} |A(z)|^{2n}.$$

В силу того, что условие леммы в этом случае требует выполнения неравенства $|A(z)| \le \rho < 1$, условие /I0/примет вид

$$\sup_{|z|=1} \frac{|B(z)|^2}{1-|A(z)|^2} < 1. \qquad /I5/$$

Выполнения /I5/ достаточно для асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения /I4/.

Условие /I0/ является в некотором смысле и необходимым. В самом деле, пусть на подмножестве T множества $\{z: |z|=1\}$ имеет место неравенство

$$\frac{|B(z)|^2}{1-|A(z)|^2} \ge 1,$$

причем мера Лебега подмножества T отлична от нуля. Тогда при $z \in T$ ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z) \ge 1 \quad \text{и} \quad \{E|U_n(z)|^2, n=0,1,\dots\} \overline{\in} l_1^+$$

при $z \in T$, причем $E|U_n(z)|^2$ удовлетворяет линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами типа /9/. Из результатов [2] следует, что тогда $E|U_n(z)|^2$ не ограничено, т.е. тривиальное решение уравнения /I4/ не является асимптотически устойчивым.

<u>Пример.</u> Рассмотрим аппроксимацию /2/ уравнения /I/. Обозначив $b_0^2 = \frac{a^2\Delta}{h^2}$ и положив в уравнении /2/

$$b^2 = b_0^2 + \sigma\alpha(n,\omega),$$

имеем

$$B(z) = \sigma\frac{z^2-2z+1}{z} = \sigma\frac{(z-1)^2}{z},$$

$$A(z) = \frac{b_0^2 z^2 + (1-2b_0^2)z + b_0^2}{z}.$$

При $z = e^{i\varphi}$ имеем

$|A(e^{i\varphi})|^2 < 1$

$$a(\varphi) = \frac{|A(e^{i\varphi})|^2}{1-|B(e^{i\varphi})|^2} < 1 \qquad /16/$$

или

$$\sup_{0 < \varphi \leq 2\pi} \{|A(e^{i\varphi})|^2 + |B(e^{i\varphi})|^2\} < 1 \qquad /17/$$

Условие /I6/ дает $\frac{1}{4} \leq b_0^2 < \frac{1}{2}$. /I8/

Из условия /I7/ с учетом /I8/ получаем

$$\frac{1}{4} \leq \frac{a^2\Delta}{h^2} < \frac{1+\sqrt{1-16\sigma^2}}{4}.$$

Из последней формулы видно, что при $\sigma > \frac{1}{4}$ тривиальное решение уравнения /2/ перестает быть асимптотически устойчивым, как бы мы не мельчили шаги h и Δ.

Отсюда можно сделать вывод, что ошибки округления при замене дифференциального уравнения в частных производных разностным могут привести к неправильному выводу об асимптотическом поведении решения, какую бы мелкую сетку мы не брали.

Литература

I. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М. Физматгиз, I963.
2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.,"Мир", I97I.

Поступила 15 марта 1975 года.

УДК 519.2

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е.Ф.Царьков

Рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений в R^n

$$dx = Ax\,dt + Bx\,dw(t), \tag{I}$$

$$x|_{t=s} = y, \tag{2}$$

где $w(t)$ - скалярный процесс броуновского движения, согласованный на любом $[s,t]$ с семейством σ-алгебр $\mathcal{F}_t^s$, $\mathcal{F}_{t_1}^{s_1} \subset \mathcal{F}_t^s$ при $s \le s_1 \le t_1 \le t$, y - случайный вектор, не зависящий от $\mathcal{F}_{t_2}^{t_1}$ при любых $t_2 \ge t_1 \ge s$ и имеющий матрицу ковариации Y. Везде в дальнейшем ℓ с различными индексами внизу означает элемент единичной окружности в R^n. Обозначим $T_0(t)$ семейство линейных операторов над матрицами $n \times n$, ставящих в соответствие матрице Y при каждом t матрицу $T_0(t)Y$ по закону

$$(T_0(t)Y\ell,\ell) \overset{def}{=} E\{(\ell, x(t,0,y))^2\}, \tag{3}$$

где $x(t,s,y)$ - решение (I)-(2) при $t \ge s$. Задание семейства операторов $T_0(t)$ по формуле (3) не позволяет определить действие $T_0(t)$ на всем пространстве $\mathcal{L}$ симметричных матриц с нормой $\|C\| = \sup\limits_{\|\ell\|=1} |(C\ell,\ell)|$ и поэтому ниже будет построена полугруппа $T(t)$, $\mathcal{D}(T(t)) \supset \mathcal{L}$ причем $T_0(t)$ является ее сужением на конус $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ неотрицательно определенных симметричных матриц.

Обозначим $X(t)$ фундаментальную матрицу [I] системы (I), обладающую свойством: $X(0) = J$. Пусть $X^*(t)$ - сопряженная матрице $X(t)$ в смысле скалярного произведения в R^n. Тогда $X^*(t)$ удовлетворяет уравнению

$$dx^* = x^* A^* dt + x^* B^* dw(t) \qquad (4)$$

и является фундаментальной матрицей (4). Определим семейство операторов $T(t)$ соотношением:

$$T(t)C \overset{def}{=} E\{X(t)CX^*(t)\}, \quad C \in \mathcal{L}. \qquad (5)$$

Лемма 1. Семейство операторов $T(t)$ образует непрерывную полугруппу, оставляющую инвариантным конус $\mathcal{K}$, причем $T_0(t)$ является сужением $T(t)$ на этот конус. Полугруппа $T(t)$ имеет производящий $\mathfrak{A}$, задаваемый соотношением:

$$\mathfrak{A}C = AC + CA^* + BCB^*. \qquad (6)$$

Доказательство. Поскольку

$$(T(t)C\ell, \ell) = E\{(CX^*(t)\ell, X^*(t)\ell)\}, \qquad (7)$$

то для $T(t)$ можно записать эквивалентное (5) определение:

$$(T(t)C\ell,\ell) = E\{(Cx^*(t,0,\ell), x^*(t,0,\ell))\},$$

где x^* — решение (4). Далее

$$(T(t+s)C\ell,\ell) =$$

$$= E\{E\{X(s)CX^*(s)[X^*(s)]^{-1}X^*(t+s)\ell; [X^*(s)]^{-1}X^*(t+s)\ell) | \mathcal{F}^s_{t+s}\}\} =$$

$$= E\{(E\{X(s)CX^*(s)\}x^*(t+s,s,x^*(s,0,\ell), x^*(t+s,s,x^*(s,0,\ell)))\}^{\rho} =$$

$$=(T(t)T(s)C\ell,\ell)$$

в силу марковского свойства решений (4) и поэтому $T(t+s)=$ $=T(t)T(s)$, а поскольку решения (4) почти наверное непрерывны [2] по всем аргументам, то $T(t)$ непрерывная полугруппа. Тот факт, что $\mathcal{K}$ остается инвариантным относительно $T(t)$ следует из (7). Пусть $Q\in\mathcal{K}$. При любом $y\in R^n$ всегда найдется такой случайный вектор x , что $(Qy,y)=E\{(y,x)^2\}$ и тогда

$$(T(t)Q\ell,\ell)=E\{(QX^*(t)\ell,X^*(t)\ell)\}=$$

$$=E\{E\{(X^*(t)\ell,x)^2|\mathcal{F}_t^0\}\}=E\{(\ell,x(t,0,x))^2\}=(T_0(t)Q\ell,\ell)$$

и первая часть леммы I доказана.

Для завершения доказательства леммы I воспользуемся формулой Коши [I] и запишем

$$X(t)=e^{At}+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BX(\tau)dw(\tau),$$

$$X^*(t)=e^{A^*t}+\int_0^t X^*(\tau)B^*e^{A^*(t-\tau)}dw(\tau).$$

Из (5) и свойств стохастического интеграла следует

$$T(t)C=e^{At}Ce^{A^*t}+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BT(\tau)B^*e^{A^*(t-\tau)}d\tau \quad (8)$$

и поэтому, учитывая правило дифференцирования матричных экспонент [3] легко вычислить

$$\mathcal{A}C \overset{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{T(t)C - C}{t} = AC + CA^* + BCB^* \quad (9)$$

и лемма I полностью доказана.

Замечание 1. Поскольку [2] существует $\gamma > 0$ такое, что $E\{|x^*(t,0,e)|^2\} \le e^{\gamma t}$, то

$$\|T(t)\| \overset{def}{=} \sup_{\|C\|=1} \|T(t)C\| =$$

$$= \sup_{\|C\|=1} E\{|(Cx^*(t,0,e), x^*(t,0,e))|\} \le e^{\gamma t}$$

и $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{L}$ [4]. $\circ$

Замечание 2. Из (9) следует результат [2]:

$$\frac{dT_0(t)Y}{dt} = AT_0(t)Y + T_0(t)YA^* + BT_0(t)YB^*. \quad (10)$$

Следуя [5], определим потенциал $\mathcal{R}$ равенством $\mathcal{R}C = \int_0^\infty T(t)C\,dt$, если этот интеграл существует.

Лемма 2. Если $\mathcal{D}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{K}$, то существуют константы $N > 0$ и $\lambda > 0$ такие, что

$$\|T(t)\| \le Ne^{-\lambda t}. \quad (11)$$

Доказательство. Поскольку всегда существует такое $\beta > 0$, что для любой $C \in \mathcal{L}$ найдется матрица $D \in \mathcal{K}$, удовлетворяющая соотношению $\mathcal{I}\beta + C = D$, то $\|\mathcal{R}C\| \le$ $\le \|\mathcal{R}D\| + \beta\|\mathcal{R}\mathcal{I}\|$. Следовательно, $\mathcal{D}(\mathcal{R}) \supset \mathcal{L}$, т.е. $0 \bar{\in} \sigma(\mathcal{A})$, где $\sigma(\mathcal{A})$ -спектр оператора $\mathcal{A}$. При $Re z > 0$ имеем очевидное неравенство:

$$\|\int_0^\infty e^{-zt}T(t)D\,dt\| \le \|\int_0^\infty T(t)D\,dt\|$$

и поэтому в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z \ge 0$ существует резольвента [5] полугруппы $T(t)$, т.е. $\sigma(\mathfrak{A}) \cap \{z: \mathrm{Re}\,z \ge 0\} = \emptyset$ или $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \{z: \mathrm{Re}\,z \le -\lambda\}$ при некотором $T(t)C$. Поэтому [3] при любой $C \in \mathcal{L}$ из равенства $T(t)C = e^{\mathfrak{A}t}C$ и неравенства [3] $\|e^{\mathfrak{A}t}\|^\circ \le Ne^{-\lambda t}$ следует утверждение леммы 2.

Следствие 1. Если выполнены условия леммы 2, то тривиальное решение (I) экспоненциально асимптотически устойчиво в среднем квадратичном [6].

Доказательство. Обозначим l_j орт j-той оси координат. Тогда

$$E\{|x(t,0,y)|^2\} = \sum_{j=1}^{n} E\{(l_j, x(t,0,y))^2\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (T_0(t)Yl_j, l_j) \le nNe^{-\lambda t}\|Y\| \le N_1 e^{-\lambda t}E\{|y|^2\},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 3. В условиях леммы 2 при любом $Q \in \mathcal{K}$ существует решение уравнения $AH + HA^* + BHB^* = -Q$, задаваемое соотношением [5]: $H = -\mathfrak{A}^{-1}Q$, т.к. $H = RQ \in \mathcal{K}$. Поэтому всегда существуют положительно определенные квадратичные формы (Hx,x) и (Qx,x) такие, что слабый производящий оператор $\tilde{\mathfrak{A}}$ марковского процесса, определяемого (I), позволяет записать $\tilde{\mathfrak{A}}(Hx,x) = -(Qx,x)$. Это замечание с учетом результатов [6] может служить другим доказательством следствия I. Более того, теорема [2,6] с необходимом и достаточном условии экспоненциальной асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения системы (I) может быть доказана в терминах области определения потенциала $\mathcal{R}$, аналогично следствию I. Ниже приводится доказательство этой теоремы для случая скалярного уравнения n -го порядка

$$\frac{d^n x}{dt^n}=\sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x}{dt^k}+\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{d^k x}{dt^k}\right)\frac{dw}{dt}, \tag{I2}$$

$$\left.\frac{d^k x}{dt^k}\right|_{t=0}=\alpha_k ;\quad k=0,1,2,\ldots,n-1, \tag{I3}$$

которое следует понимать в смысле системы уравнений вида

$$dx_k = x_{k+1}\,dt,\quad k=1,2,\ldots,n-1,$$

$$dx_n=(a,x)\,dt+(b,x)\,dw(t), \tag{I4}$$

$$x\Big|_{t=0}=y=\begin{Bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}\end{Bmatrix}, \tag{I5}$$

где

$$x=\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{Bmatrix},\quad a=\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{Bmatrix},\quad b=\begin{Bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{Bmatrix}.$$

$$H(t-\tau)=\begin{pmatrix} h(t-\tau) \\ \dfrac{dh(t-\tau)}{dt} \\ \vdots \\ \dfrac{d^{n-1}h(t-\tau)}{dt^{n-1}} \end{pmatrix},$$

а $x^\circ(t)$ - решение (I6) по начальным данным (I5).

Доказательство. Легко убедиться, используя общий вид решения (I6), что стохастический интеграл

$$z(t)=\int_0^t h(t-\tau)\gamma(\tau)\,dw(\tau)$$

при любом $\mathcal{F}_t^\circ$ -измеримом скалярном случайном процессе $\gamma(t)$, обладающем вторым моментом, можно дифференцировать по обычным правилам, т.е.

$$dz=h(0)\gamma(t)\,dw(t)+\left(\int_0^t \frac{dh(t-\tau)}{dt}\gamma(\tau)\,dw(\tau)\right)dt.$$

Учитывая (I8) и (I7), получим первые $(n-1)$ соотношения (I4). Последняя строчка (I4) является следствием того факта, что $h(t)$ и $x^\circ(t)$ удовлетворяют (I6). Поскольку $x^\circ(0)=y$, то лемма 3 полностью доказана.

Теорема. Тривиальное решение (I4) асимптотически экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда корни $v(z)$ расположены в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z<0$ и

Обозначим $h(t)$ решение уравнения

$$\frac{d^n h}{dt^n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k h}{dt^k}, \tag{I6}$$

$$\left.\frac{d^k h}{dt^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k=0,1,2,\dots,n-2;$$

$$\left.\frac{d^{n-1} h}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = 1. \tag{I7}$$

Это решение [7] представимо в виде контурного интеграла

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} z = c} \frac{e^{zt}}{v(z)}\, dz,$$

где $v(z) = z^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, а c выбрано так, чтобы корни $v(z)$ лежали в полуплоскости $\operatorname{Re} z < c$.

Лемма 3. Если $x(t)$ удовлетворяет (I4), то при $t \geq 0$ имеет место равенство

$$x(t) = x^0(t) + \int\limits_0^t H(t-\tau)\,(b, x(\tau))\, dv(\tau), \tag{I8}$$

где

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k (iz)^k\right|^2}{|v(iz)|^2}\,dz < 1. \tag{I9}$$

Доказательство. Достаточность. Поскольку при любом $u \in R^n$ имеет место равенство

$$E\{(u,x(t))^2\} = (u,x^0(t))^2 + \int\limits_0^t (u,H(t-\tau))^2 E\{(b,x(\tau))^2\}d\tau, \tag{20}$$

причем интегралы

$$\Delta(u) = \int\limits_0^{\infty} (u,x^0(t))^2 dt\,, \quad \delta(u) = \int\limits_0^{\infty} (u,H(t))^2 dt$$

существуют [7], то

$$\int\limits_0^t E\{(u,x(\tau))^2\}d\tau \le \Delta(u) + \delta(u)\int\limits_0^{\infty} E\{(b,x(\tau))^2\}\,d\tau.$$

Обозначим

$$\mu(t,u) = \int\limits_0^t E\{(u,x(\tau))^2\}\,d\tau.$$

Если выполнено условие теоремы, то по теореме Планшереля

$$\delta(b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k (iz)^k\right|^2}{|v(iz)|^2}\,dz < 1$$

и $\mu(t,b) \le \Delta(b) + \delta(b)\,\mu(t,b)$,т.е.

$$\mu(t,b) \le \Delta(b)[1-\delta(b)]^{-1}.$$

Тогда $\mu(t,u) \le \Delta(u)+\delta(u)\Delta(b)[1-\delta(b)]^{-1}$ и выполнены условия леммы 2, что гарантирует достаточность условий теоремы.

Необходимость. В силу определения экспоненциальной асимптотической устойчивости в среднем квадратичном [6] при любом $u \in R^n$ должен существовать интеграл $\mu(\infty,u)=\int E\{(u,x(t))^2\}dt$, а тогда существуют и $\delta(u)$. Из (20) имеем $\mu(\infty,b)=\Delta(b)+\delta(b)\mu(\infty,b)$, т.е. $\mu(\infty,b)=\Delta(b)[1-\delta(b)]^{-1}$ и в силу положительности $\mu(\infty,b)$ теорема доказана.

<u>Следствие 2.</u> Пусть $w_k(t)$, $k=1,2,\ldots,\overset{\circ}{m}$ независимые процессы броуновского движения, а $x(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^n x}{dt^n}=\sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x}{dt^k}+\sum_{q=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_{kq}\frac{d^k x}{dt^k}\right)\frac{dw_q}{dt} \qquad (21)$$

Необходимым и достаточным условием экспоненциальной асимптотической устойчивости тривиального решения (21) в среднем квадратичном является: а) корни $v(z)$ расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} z<0$;

$$б)\ \frac{1}{2\pi}\sum_{q=0}^{m}\int_0^{\infty}\frac{\left|\sum_{k=0}^{n-1} b_{kq}(i\nu)^k\right|^2}{|v(i\nu)|^2}d\nu<1.$$

<u>Доказательство.</u> (20) в этом случае перепишется в форме

$$E\{(u,x(t))^2\}=(u,x^0(t))^2+\sum_{q=1}^{m}\int_0^t (u,H(t-\tau))^2 E\{(b^q,x(\tau))^2\}d\tau, \quad (22)$$

где $b^q = \begin{Bmatrix} b_{0q} \\ b_{1q} \\ \vdots \\ b_{n-1q} \end{Bmatrix}$. Если положить в (22) $u = b^q$ и просуммировать по q от 1 до m, то дальнейшее доказательство полностью повторяет доказательство теоремы.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \left(b_1\frac{dx}{dt} + b_2 x\right)\frac{dw}{dt} \qquad (23)$$

Из теоремы заключаем, что необходимые и достаточные условия экспоненциальной асимптотической устойчивости тривиального решения (23) в среднем квадратичном имеют вид:

а) $\delta > 0$,

б) $\alpha = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{b_1^2\nu^2 + b_2^2}{(\omega^2-\nu^2)^2 + 4\delta^2\nu^2}\,d\nu < 1$.

Последний интеграл вычисляется через коэффициенты [8,Приложение I]:

$$\alpha = \left(b_1^2 + b_2^2\omega^{-2}\right)\frac{1}{4\delta},$$

т.е. условие б) имеет вид $b_1^2 + b_2^2\omega^{-2} < 4\delta$.

Интегралы типа (I9) вычислены через коэффициенты a_k и b_k в [8,Приложение I] при $n = 1, 2, \ldots, 7$ и поэтому (I9) можно считать коэффициентным критерием экспоненциальной асимптотической устойчивости тривиального решения скалярных уравнений n - го порядка в среднем квадратичном.

Результаты настоящей работы легко распространяются на случай гильбертового пространства и переносятся на разностные уравнения. Автору также известно обобщение на случай стохастических функционально-дифференциальных уравнений.

Литература

1. Садовяк А.М., Царьков Е.Ф. Аналог формулы Коши для стохастических дифференциальных уравнений. -"Теор.вер. и ее прим.", 1973, вып. 2, т.18 ,

2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, "Наукова думка", 1968.

3. Крейн М.Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Киев, АН УССР, 1964.

4. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962.

5. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963.

6. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., "Наука", 1969.

7. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М., "Мир", 1967.

8. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования, кн.2. Под ред. В.В.Солодовникова. М., "Машиностроение", 1967.

Поступила 13 февраля 1975 года

УДК 513.83

О ТЕСНОТЕ, π-ВЕСЕ И БЛИЗКИХ К НИМ ПОНЯТИЯХ. АКСИОМА МАРТИНА И ЕЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ

2N

Б.Э.Шапировский

В работе изучаются кардинальные инварианты, близкие к тесноте и плотности, в их взаимосвязи с π-характером и π-весом топологического пространства. Представление о полученных результатах дают следствия I° - $2'$.

Важную роль при доказательстве основных результатов работы играют вводимые далее понятия, примыкающие к понятию тесноты пространства (А.В.Архангельский [3]), которое оказалось исключительно полезным в ряде вопросов теоретико-множественной топологии. Что касается понятия π-базы пространства (В.И.Пономарев), то его значение определяется хотя бы тем, что существование счетной π-базы в бикомпакте является критерием его соабсолютности с компактом [4].

Назовем атомом точки $x \in X$ в $Y \subset X$ кардинальное число $a(x,Y) = \min\{|M| : M \subset Y \setminus \{x\},\ x \in [M]_X\}$ при $x \in [Y \setminus \{x\}]$, $a(x,Y) = 1$ при $x \notin [Y \setminus \{x\}]$ и $x \in Y$ и $a(x,Y) = 0$ при $x \notin Y$, [10].

(точнее было бы, конечно, писать $a(x,Y;X)$). Ясно, что

$$t(x,X) = \sup\{a(x,Y) : Y \subset X\}.$$ Положим также

$$\delta(x,X) = \sup\{a(x,Y) : [Y] = X\}.$$

Тогда $t(X) = \sup\{t(x,X) : x \in X\}$ [3], $\delta(X) = \sup \delta(x,X) : x \in X$,

$a(X) = \sup\{a(x,X) : x \in X\}$ - теснота, глубина и атом пространства X соответственно. Ясно также, что $\delta(X) = \min\{\tau : [Y]_\tau = X$ для всякого $Y \subset X$ такого, что

$[Y] = X$, где $[Y]_\tau = \cup\{[A] : A \subset Y,\ |A| \leq \tau\}$.

Все пространства далее бесконечны, все отображения - непрерывны. Через $\alpha, \beta, \sigma, \omega$ - обозначаем ординальные числа, через τ, λ, ν - кардинальные, отождествляемые с начальными ординальными. $\Omega(\alpha)$ - пространство всех ординалов меньших α. По поводу неразъясненных обозначений см., например, [9c].

Назовем возрастающее семейство $\mathcal{H} = \{H_\beta : \beta < \alpha\}$ замкнутых в X множеств α-башней в X, если $X = \cup\mathcal{H}$ и $H_\beta \neq X$ для всех $\beta < \alpha$. Нетрудно показать, что в X существует τ-башня тогда и только тогда, когда кардинал не $cf(\tau)$ не является калибром для X [3],[5]. Так, например, $\aleph_0$-башня существует в каждом хаусдорфовом пространстве.

Напомним, что регулярный кардинал τ называют калибром для X [5], если всякое семейство $\mathcal{B}$ открытых в X множеств, кратность которого меньше τ имеет и мощность меньше τ. (Кратность семейства $\mathcal{B}$ меньше τ /соответственно, $\leq \tau$/, если $|\mathcal{B}_x| < \tau$ /соответственно, $\leq \tau$ / для всех $x \in X$. Здесь и далее $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : B \ni x\}$.

Положим

/ τ_4 / $\mathrm{ш}(X) = \sup\{\tau : \tau$-регулярный кардинал и в X существует τ-башня$\}$ - число Шанина пространства X ([9d]).

Говорят, что пространство X удовлетворяет условию Шанина, если $\mathrm{ш}(X) \leq \aleph_0$ ([3]). Кроме того, $\mathrm{ш}(\Pi\{X : X \in \mathcal{M}\}) \leq \sup\{\mathrm{ш}(X) : X \in \mathcal{M}\}$ (см., например, [5], [9d]) Условию Шанина удовлетворяют, например, пространства, полученные из класса всех сепарабельных, замыканием последнего относительно операций произведения и непрерывного отображения (заметим, что полученный класс оказывается сразу же замкнутым и относительно операции перехода к открытым подмножествам). Отметим очевидное

<u>Утверждение I.</u> Если в $Y \subset X$ существует τ-башня из замкнутых в X множеств и $x \in [Y] \setminus Y$, то $a(x, Y) \geq cf(\tau)$

Пусть $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha < \tau\}$ и $Y \subset X \ni z$. Для всякого $\alpha < \tau$

положим

$Y_\alpha(z)=\{y\in Y:\pi_\beta(y)=\pi_\beta(z)$ при $\alpha\leq\beta<\tau\}$* и $Y(z)=\cup\{Y_\alpha(z):\alpha<\tau\}$.

Ясно, что для всех $\alpha<\tau$ множество $Y_\alpha(z)$ замкнуто в Y.

Определение I. Точку $z\in Y\subset X=\Pi\{X_\alpha:\alpha<\tau\}$ назовем базисной в Y (относительно семейства $\{X_\alpha:\alpha<\tau\}$), если для всех $y\in Y$ и всех $\alpha<\tau$ существует $y_\alpha\in Y_\alpha(z)$ такое, что $\pi_\beta(y_\alpha)=\pi_\beta(y)$ при $\beta<\alpha$.

Непосредственной проверкой устанавливается

Лемма I. Пусть z - базисная точка в $Y\subset X=\Pi\{X_\alpha:\alpha<\tau\}$ $e\in Y$.

Тогда $[Y(z)]\supset Y$ и, кроме того:

I) если $\{\alpha:\pi_\alpha(Y)\neq\{\pi_\alpha(z)\}\}$ - конфинально τ, то семейство $\mathcal{Y}=\{Y_\alpha(z):\alpha<\tau\}$ - башня в $Y(z)$;

2) если $e\notin Y(z)$ (т.е. $\{\alpha:\pi_\alpha(e)\neq\pi_\alpha(z)\}$) - конфинально τ, то $d(e,Y(z))=cf(\tau)$;

3) если $|\{\alpha:\pi_\alpha(e)\neq\pi_\alpha(z)\}|=\nu$, то пространство ординалов $\Omega(\nu+1)\subseteq Y$, причем вложение $i:\Omega(\nu+1)\to Y(z)\cup\{e\}\subset Y$ таково, что $i(\nu)=e$ (если же и точка e - базисная в Y, то, более того, обобщенное канторово множество $D^\nu\subseteq Y$).

Пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{F}$ - семейства открытых в X множеств. Будем говорить, что

$\mathcal{F}$ - π-база относительно семейства $\mathcal{B}$ в X, если для всякого непустого $B\in\mathcal{B}$ существует непустое $U\in\mathcal{F}$ такое, что $U\subset B$. Положим

---

* $\pi_\beta:\Pi\{X_\alpha:\alpha<\tau\}\to X_\beta$ - естественная проекция. Далее используются также следующие обозначения: $f^\#(A)=\{y\in Y:f^{-1}(y)\subset A\}$, где $A\subset X$ и $f:X\to Y$ - отображение X в Y. Через I или I_α (при любом α) обозначаем отрезок $[0,1]$ действительно прямой, $I^\alpha=\Pi\{I_\beta:\beta<\alpha\}$. Если для всякого $\beta<\alpha$ определено отображение $h_\beta:X\to Y_\beta$, то отображение $h=\Delta\{h_\beta:\beta<\alpha\}:X\to\Pi\{Y_\beta:\beta<\alpha\}$, называемое диагональным произведением семейства $\{h_\beta:\beta<\alpha\}$ отображений, определяется формулой $\pi_\beta h(x)=h_\beta(x)$ для всех $\beta<\alpha$ и $x\in X$.

$\pi(\mathcal{B}, X) = \min\{|\mathcal{J}| : \mathcal{J}$ - -база относительно семейства $\mathcal{B}$ в X.

Таким образом семейство $\mathcal{J}$ - π-база в X тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}$ - π-база относительно некоторой (или, что то же, каждой) базы в X, и, соответственно, $\mathcal{J}$ - π-база множества A в X тогда и только тогда, когда $\mathcal{J}$ - π-база относительно некоторой базы множества A в X.

Напомним, что

$\pi w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ - π- база в X ([4]),

$\pi\chi(A, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ - π-база A в X ([6a]),

$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(x, X) : x \in X\}$ ([6a]).

Утверждение 2. Пусть отображение $f : X \xrightarrow{\text{на}} Y$ - замкнуто, $\mathcal{J}$ - семейство открытых в X множеств и $f^{\#}(U) \neq \Lambda$ для всех $U \in \mathcal{J}$.

Тогда $\pi(\mathcal{J}, X) \leq \pi w(Y)$.

Доказательство. Если $\mathcal{B}$ - π-база в Y, то очевидно, что семейство $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ - π-база относительно $\mathcal{J}$ в X, откуда и следует требуемое неравенство.

Предложение I. Пусть X - бикомпакт, $\mathcal{J} = \{U_\alpha : \alpha < \nu\}$ - семейство непустых открытых в X множеств и $\pi(\mathcal{J}, X) \geq \tau$.

Тогда существует отображение $f : X \to I^\tau$ такое, что:

(a) точка $\bar{0}$ - базисная в $Y = f(X)$, где $\pi_\alpha(\bar{0}) \equiv 0$;

(в) $\pi_\alpha(Y) \neq \{0\}$ для всех $\alpha < \tau$;

(c) $f^{\#}(U_\alpha) \neq \Lambda$ для всех $\alpha < \nu$ и, следовательно, если $\mathcal{J}$ - π-база в X, а $\nu = \tau$, то отображение f_0 - неприводимо в X.

Доказательство. Очевидно, существует отображение $h : X \to I_0$, для которого $h(X) \ni 0$ и $h^{\#}(U) \ni 1$. Положим $h = f_0 = g_1$, и пусть для всех $\alpha < \alpha' < \tau$ уже определены отображения $f_\alpha : X \to I_\alpha$ и (при $\alpha \neq 0$).

$g_\alpha = \Delta\{f_\beta : \beta < \alpha\} : X \longrightarrow I^\alpha = \Pi\{I_\beta : \beta < \alpha\}$ такие, что (I) $g_\alpha f_\alpha^{-1}(0) = g_\alpha(X)$; (2) $f_\alpha^{\#}(\mathcal{U}_{b(\alpha)}) \ni 1 \in I_\alpha$,
где $b(\alpha) = \min\{b : g_\alpha^{\#}(\mathcal{U}_b) = \Lambda\}$. Положим
$$g_{\alpha'} = \Delta\{f_\alpha : \alpha < \alpha'\} : X \longrightarrow I^{\alpha'} = \Pi\{I_\alpha : \alpha < \alpha'\}.$$
Так как $w(I^{\alpha'}) < \tau$, то в силу утверждения 2 существует $\mathcal{U}_b \in \mathcal{F}$, для которого $g_{\alpha'}^{\#}(\mathcal{U}_b) = \Lambda$ и, следовательно, определен ординал $b(\alpha') <_0 \nu$. Поэтому отображение $f_{\alpha'} : X \longrightarrow I_{\alpha'}$ такое, что $f_{\alpha'}(X \setminus \mathcal{U}_{b(\alpha')}) = 0$ и $f_{\alpha'}(x) = 1$ для некоторого $x \in \mathcal{U}_{b(\alpha')}$ отвечает (вместе с $g_{\alpha'}$) условиям (I) - (2). Остается показать, что построенное таким образом отображение $f = \Delta\{f_\alpha : \alpha < \tau\} : X \longrightarrow I^\tau$ - искомое. Действительно, условие (2) влечет свойства (в) и (с) (последнее - в силу очевидного неравенства $b(\alpha) \geqslant \alpha$). Используя бикомпактность X и опираясь на условие (I) нетрудно показать также, что $\bar{O}$ - базисная точка в $Y = f(X)$.

Очевидно, что $\pi(\mathcal{F}, X) = \pi w(X)$ для всякой π-базы $\mathcal{F}$ в X. Ясно также, что прообраз τ-башни есть τ-башня. Кроме того, при факторных отображениях теснота (пространства) не возрастает [3]. Поэтому из предложения I и пунктов I), 2) леммы I следует

Лемма 2. Пусть X - бикомпакт и $\pi w(X) \geqslant \tau \geqslant cf(\tau) > t(X)$. Тогда в X существует τ-башня. Как легко видеть, уже леммы 2 вполне достаточно для того, чтобы мажорировать π-вес бикомпакта числом Шанина и теснотой. Однако к более глобальным результатам приводит очевидно вытекающая из пункта 3 леммы I и предложения I

Теорема I. Пусть X - бикомпакт, $\pi w(X) = \tau$, $t(X) = \nu$. Тогда X неприводимо отображается в Σ_ν-произведение τ экземпляров отрезка.

Следствие I. Всякий бикомпакт счетной тесноты соабсолютен некоторому бикомпакту Фреше-Урысона, являющемуся подпространством Σ-произведения отрезков.

В теореме I учтено также, что $t(\Omega(\nu)) = \nu$.

Естественно, что теперь возникает необходимость в изучении подпространств Σ-произведений (см., напр., [6а]).

Определение 2. Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств из X назовем τ-мелким в X, если для каждого $A \in \mathcal{A}$ найдется множество $M(A) \subset A$ такое, что $|M(A)| \leq \tau$ и $[\cup\{M(A) : A \in \mathcal{A}\}] = X$.

Утверждение 3. Пусть Z - Σ_ν-произведение пространств, обладающих базами кратности $\leq \nu$. Тогда каждое множество $Y \subset Z$ обладает ν-мелким семейством кратности $\leq \nu$ из открытых в Y множеств.

Доказательство. Для всякой точки x и множества A положим $\ell(x) = \{\alpha : \pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(z)\}$ (здесь α - индекс сомножителя, а z - центр множества Z), $\ell(A) = \cup\{\ell(x) : x \in A\}$ и для каждого множества $U \subset Y$ определим теперь множество $M(U) \subset U$. Пусть $M_0(U) = \{y_0\}$, где $y_0 \in Y$ и для всех $n < n' < \omega_0$ уже построены множества $M_n(U) \subset U$. Положим $\tilde{M}_{n'} = \cup\{M_n(U) : n < n'\}$ и для каждого конечного набора $k \subset \ell(\tilde{M}_{n'})$ зафиксируем точку $y = y(k, U) \in U$ такую, что $\pi_\alpha(y) = \pi_\alpha(z)$ при $\alpha \in k$ (если же такой точки не существует, то положим, например, $y(k, U) = y_0$). Положив теперь $M_{n'}(U) = \{y(k, U) : k \subset \ell(\tilde{M}_{n'}), |k| < \aleph_0\}$, получаем требуемое множество $M(U) = \cup\{M_n(U) : n < \omega_0\}$. Описанная процедура в применении к тому покрытию $\mathcal{P}$ множества $Y \setminus \{z\}$ кратности $\leq \nu$, которое естественно порождается базами кратности $\leq \nu$, доказывает его ν-мелкость.

Из утверждений 3 легко получаем

Утверждение 5. Если Y - подмножество Σ_ν-произведения пространств с базами кратности $\leq \nu_0$; и $Y \subset [\{y \in Y : y$ имеет в Y π-базу кратности $\leq \nu\}]$, то Y имеет π-базу кратности $\leq \nu$. В частности, если $Y \subset [\{y \in Y : \pi\chi(y, Y) \leq \nu\}]$, то Y имеет π-базу кратности $\leq \nu$.

Это утверждение доказано после того, как мы узнали результате Ефимова и Чертанова: любое подмножество Σ_ν-произведения отрезков имеет π-базу кратности $\leq \nu$.

Поскольку минимальная кратность π-базы - инвариант неприводимых отображений, из теоремы I, из утверждения 5 непосредственно следует

Теорема 2. Пусть X - бикомпакт.

Тогда в X существует π-база кратности $\leq t(X)$.

Следствие 2. Всякий бикомпакт со счетной теснотой обладает точечно счетной π-базой.

Очевидной модификацией теоремы 2 является

Теорема 2'. Пусть X - бикомпакт и $X = [\{x \in X : \chi(x, X) \leq t(X)\}]$. Тогда X содержит всюду плотное подмножество с базой кратности $\leq t(X)$.

Следствие 2'. Всякий бикомпакт с первой аксиомой счетности содержит всюду плотное подмножество с точечно счетной базой.

В связи с теоремой 2' отметим следующее простое

Утверждение 6. Если γ - семейство открытых в X множеств и $A = \{x \in X : |\{U \in \gamma : U \ni x\}| < \tau\}$, и $cf(\tau) > \nu$, то $[A]_\nu = A$.

Из теоремы 2 немедленно вытекает

Теорема 3°. Пусть X - бикомпакт, $t(X) < \tau$ и τ - калибр для X . Тогда $\pi w(X) < \tau$.

Следствие 3°. Если $t(X)^+$ - калибр для бикомпакта X , то $\pi w(X) \leq t(X)$.

В соответствии с /7/ имеем $\omega(X) = \min\{\tau :$ всякий регулярный кардинал $\nu > \tau$ является калибром для $X\}$. Поэтому из теоремы 3° (при $\tau = (\omega(X)\, t(X))^+$) и очевидных неравенств $\omega(X) \leq s(X) \leq \pi w(X)$ следует

Теорема 3. Пусть X - бикомпакт.

Тогда $\pi w(X)\, t(X) = s(X)\, t(X) = \omega(X)\, t(X)$.

Следствие 3. Если X -бикомпакт со счетной теснотой, то $\pi w(X) = \omega(X)$; Если X - бикомпакт с условием Шанина, то $\pi w(X) \leq t(X)$.

Все эти результаты новы уже в классе бикомпактов с первой аксиомой счетности. (Отметим однако, что Следствие 3 можно получить, комбинируя теорему 3.5 из (6) и теорему I из (9с) (или теорему 3 из (9в).

Положим /2 / $\delta s(X) = \sup\{s(Y) : [Y] = X\}$ – δ-плотность в X*
Для всякого множества M кардинальных чисел и $\tau = \sup\{\mu : \mu \in M\}$ положим $\nabla\tau = \sup\{\mu^+ : \mu \in M\} = \min\{\nu : \nu > \mu$ для всех $\mu \in M\}$ (Ясно, что $\tau \leq \nabla\tau \leq \tau^+$). Тогда в соответствии с /2 /

$$\nabla\delta s(X) = \sup\{s(Y)^+ : [Y] = X\}$$

Аналогично определяется $\delta w(X)$ и $\nabla\delta w(X)$. Как легко видеть, $\delta w(X) \leq \delta s(X)$ и, что точнее, $\nabla\delta w(X) \leq \nabla\delta s(X)$

В силу утверждения 6 заключаем, что всякий регулярный кардинал $\tau > \partial(X) w(X)$ является калибром для любого Y всюду плотного в X. Это очевидно влечет

Утверждение 7°. $\delta w(X) \leq \delta(X) w(X)$.

Утверждение 7. $\delta s(X) = \delta(X) s(X)$.

Это несложное утверждение доказывается тем же методом, что и предложение 3 из [10] (см. также [2], [12]).

Лемма 3. Пусть X – бикомпакт и $\pi w(X) = \tau$. Тогда $cf(\tau) \leq \delta w(X) \leq \delta s(X)$ и, более того, $cf(\tau) < \nabla\delta w(X)$

Доказательство. Поскольку прообраз τ-башни есть τ-башня и, кроме того, в случае неприводимого отображения прообраз всюду плотного множества всюду плотен, то в силу предложения I и пункта I) леммы I существует семейство $\mathcal{H}$ (замкнутых в X) множеств, такое, что $\mathcal{H}$ – τ-башня в $\cup\mathcal{H}$ и $[\cup\mathcal{H}] = X$. Но это и означает, что $cf(\tau) < \nabla\delta w(X)$.

Обозначим через H_ν утверждение "$|\{\tau : \nu \leq \tau \leq 2^\nu\}| < \aleph_0$" и пусть $GH \equiv$ "для всех ν справедливо H_ν ".

Теорема 4. Пусть X – бикомпакт. Тогда $\pi w(X) < 2^{\delta s(X)}$ и в предположении GH $\pi w(X) = \delta s(X)$.

Доказательство. Положим $\delta s(X) = \nu$ и $\pi w(X) = \tau$. Тогда $\tau \leq 2^{s(X)} \leq 2^\nu$, и так как по лемме 3 $cf(\tau) \leq \nu$ и в то же время $cf(2^\nu) > \nu$, то $\tau < 2^\nu$. Кроме того, в предположении H_ν регулярен всякий кардинал λ такой, что $\nu > \lambda \leq 2^\nu$, что и влечет $\tau \leq \nu$. Требуемое равенство вытекает теперь из очевидного неравенства $\delta s(X) \leq \pi w(X)$ (справедливого в любом пространстве)."

---

* Понятие δ-плотности впервые появилось в [7] (см. π-плотность). По ряду причин мы изменили обозначение.

<u>Следствие 4</u> ($H\aleph_0$). Для того, чтобы бикомпакт обладал счетной π-базой, достаточно (и необходимо), чтобы каждое его всюду плотное подмножество было сепарабельно.

Отметим, что GCH влечет GH, а CH влечет $H\aleph_0$.

<u>Теорема 4'.</u> Пусть X - бикомпакт и $\nabla\delta s(X) \le 2^\tau$. Тогда, если $Ln(2^\tau) = 2^\tau$, то $\pi w(X) < 2^\tau$.

<u>Доказательство.</u> В наших предположениях $s(X) < 2^\tau = \lambda$ и $\pi w(X) \le 2^{s(X)} \le \lambda$ ($Ln(\lambda) = \min\{\nu : 2^\nu > \nu\}$ [9в]).

Кроме того, λ - регулярен, поскольку $2^{cf(\lambda)} = \lambda^{cf(\lambda)} > \lambda$ и, следовательно, $cf(\lambda) \ge Ln(\lambda) = \lambda$. Поэтому предположив, что $\pi w(X) = \lambda$, приходим к противоречию, так как по лемме 3 $cf(\pi w(X)) < \lambda$.

<u>Следствие 4.</u> Пусть X - бикомпакт и $s(Y) < c$ для каждого Y всюду плотного в X. Тогда $\pi w(X) < c$ в предположении "$2^\nu \le c$ для всех $\nu < c$" и, следовательно, $\sup\{s(Y) : [Y] = X\} < c$.

Апеллируя к проведенным выше рассуждениям, можно утверждать, что все результаты, сформулированные для бикомпактов, справедливы в гораздо более широких (и достаточно естественных) классах пространств. Действительно, совершенно ясно, что при доказательстве предложения I была важна не бикомпактность исходного пространства, а, во-первых, возможность разделять точки и замкнутые множества отображениями и, во-вторых, совершенность диагональных отображений g_λ. Таким образом (поскольку диагональное произведение отображений, среди которых хотя бы одно совершенно, также является совершенным - см., напр., [4]) мы можем выделить в качестве достаточных следующие условия: (I) вполне регулярность пространства X

(2) существование совершенного отображения пространства X на некоторое "хорошее" пространство.

Это последнее и остается уточнить в каждом конкретном случае. Так, в силу вышесказанного, рассуждения, проведенного при доказательстве предложения I, и пункта 3) леммы I теорема I в полной общности приобретает следующий вид:

<u>Теорема 0-I.</u> Пусть $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство X отображается совершенно в пространство Y и $t(X) \le \nu$. Тогда X неприводимо

и совершенно отображается в пространство $Y \times Z$, где Z – Σ_ν-произведение отрезков.

<u>Теорема 0-2</u>. Пусть вполне регулярное пространство X отображается совершенно на пространство с базой кратности $\leq \nu$ и $t(X) \leq \nu$. Тогда в X существует π-база кратности $\leq \nu$.

<u>Доказательство</u>. По условиям $k(X) \leq \nu$ и, следовательно, $\pi\chi(X) \leq k(X)t(X) \leq \nu$ ([9в], доказательство см. в [9с]). Остается только применить теорему 0-I и утверждение 5.

Следствие 0-2. Для того, чтобы $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство со счетной теснотой имело точечно счетную π-базу, достаточно, чтобы оно было совершенным прообразом пространства с точечно счетной базой.

Для того, чтобы сформулировать обобщенные варианты теорем 3 и 4 нам потребуется

<u>Определение 3.</u> Индексом приводимости $\pi(h, X, Y)$ отображения $h: X \to Y$ назовем кардинальное число $\pi(\mathcal{B}(h)X)$, где $\mathcal{B}(h) = \{B : B$ – открыто в X и $h^{\#}(B) = \Lambda\}$.

Роль этого определения проясняет очевидное

<u>Утверждение 6</u>. Пусть X – $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство и $h: X \to Y$. Тогда $\pi(h, X, Y) = \min\{\tau :$ существует неприводимое отображение $f : X \to Y \times I^{\tau}$, для которого $f\pi_Y = h\}$.

Строя отображение f так же, как и в предложении I, в силу пункта I)-2) леммы I получаем аналог леммы 2.

<u>Лемма 0-2.</u> Пусть X – $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство, τ – регулярный кардинал и существует совершенное отображение $h: X \to Y$ такое, что $\pi(h, X, Y) \geq \tau > t(X)$. Тогда в X существует τ-башня (и, значит, τ не является калибром для X)

Из леммы 0-2 очевидно вытекает

<u>Лемма 0-2'.</u> Пусть X – $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство, $h: X \to Y$ – совершенное отображение. Тогда $\pi(h, X, Y) \leq w(X)t(X) \leq s(X)t(X)$.

Как легко видеть, всегда $\pi(h, X, Y) \leq \pi w(X)$, а, если h – отображение "на", то, кроме того $\pi w(X) \leq \pi(h, X, Y) \cdot \pi w(Y)$.

Поэтому в силу леммы 0-2' справедлива

<u>Теорема 0-3*.</u> Пусть $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство X отображается

---

* Из несколько более точной формулировки теоремы 0-I можно извлечь ряд теорем типа факторизационных.

совершенно на пространство Y такое, что $\pi w(X) > \pi w(Y)$. Тогда $\pi w(X)\, t(X) = s(X)\, t(X) = \omega(X)\, t(X)$.

Из теоремы 0-3° легко следует

Теорема 0-3. Пусть $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство X отображается совершенно на пространство Y такое, что $\pi w(Y) \leq s(Y) t(Y)$ (соответственно, $\pi w(Y) \leq \omega(Y) t(Y)$).

Тогда и $\pi w(X) \leq s(X) t(X)$ (соответственно, $\pi w(X) \leq \omega(X) t(X)$).

Следствие 0-3. Пусть X - $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство счетной тесноты. Тогда:

(а) если X - совершенный прообраз пространства с точечно-счетной π-базой, то $\pi w(X) = s(X) = \omega(X)$.

(в) если X -совершенный прообраз линейно упорядоченного пространства, то $\pi w(X) = \omega(X)$.

(с) если X - совершенный прообраз пространства, каждая точка которого имеет (в нем) точечно-счетную π-базу, то $\pi w(X) = s(X)$.

Аналогичным обобщениям поддаются и оставшиеся результаты:

Лемма 0-3. Пусть X - $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство, $h: X \to Y$ - совершенное отображение. Тогда $cf(\pi(h, X, Y)) \leq S\omega(X) \leq \delta s(X)$

Теорема 0-4. Пусть $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство X отображается совершенно на пространство Y такое, что $\pi w(X) > \pi w(Y)$. Тогда $cf(\pi w(X)) \leq S\omega(X) \leq \delta s(X)$ и в предположении GH $\pi w(X) = \delta s(X)$.

Следствие 0-4 (GH). Если $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство X является совершенным прообразом пространства со счетной π-базой, то $\pi w(X) = \delta s(X)$.

Итак, теоремы 0-I - 0-4 справедливы для совершенных прообразов пространств с точечно-счетной базой и, в частности, для перистых паракомпактов (как для совершенных прообразов метрических пространств [I]). Как видно из формулировок теорем 0-I - 0-4 достаточно, чтобы условиям (I)-(П) удовлетворяло лишь некоторое всюду плотное подпространство. Поэтому все эти результаты справедливы и для полных в смысле Чеха пространств /поскольку последние содержат в качестве всюду плотных подмножеств полные в смысле Чеха паракомпакты ([9а], лемма 2)/.

В предположении аксиомы Мартина (АМ) (см., напр., [I3]) из теоремы 4' и теоремы из [II] немедленно вытекает

Теорема 4"(АМ). Пусть X - бикомпакт с условием Суслина и $s(Y) \leq \mathfrak{c}$ для каждого Y всюду плотного в X. Тогда $s(X) \leq \aleph_0$

Очевидно, что это - усиление известного результата Хайнала-Юхаса ([II], теорема 2.3), а также теорем 4.I4 и 4.I5 из обстоятельной работы Ф.Толла [I3]. Ясно, что теорема 4"справедлива (например,в силу теоремы 0-4) и в классе G_χ-подмножеств бикомпактов при $\lambda < \mathfrak{c}$. То же можно сказать и по поводу следующего результата, вытекающего из теоремы 3°.

Теорема (АМ). Пусть X - бикомпакт с условием Суслина и $t(X)^+ < \mathfrak{c}$. Тогда $\pi w(X) < \mathfrak{c}$ и $s(X) \leq \aleph_0$.

Литература

1. Архангельский А.В. Об одном классе пространств. - "Матем. сб.", 1965, вып.67 (109), №1, с. 55 - 85.

2. Архангельский А.В. О бикомпактах, которые удовлетворяют условию Суслина наследственно. - ДАН СССР, 1971, вып.199,с.1227

3. Архангельский А.В., Пономарёв В.И. О диадических бикомпактах. - ДАН СССР, 1968, вып. 182, с. 993 - 996.

4. Пономарёв В.И. О пространствах, соабсолютных с метрическими. - УМН, 1966, вып. 21,№4, с. 101-132.

5. Шанин Н.А. О произведении топологических пространств.- "Тр.Матем.ин-та АН СССР им. В.А.Стеклова",1948, вып. 24.

6. Ефимов Б.А.(а) Диадические бикомпакты.-"Тр.Московского матем. о-ва",1965, вып.14,с.211;(в) ДАН СССР,1973, вып.178

7. Ефимов Б.А.,Чертанов Г.И. - ДАН СССР, 1973, вып.213.

8. Малыхин В.И.,Шапировский Б.Э. - ДАН СССР,1973,вып.213.

9. Шапировский Б.Э. (а) О сепарабельности и метризуемости пространств с условием Суслина.-ДАН СССР,1973, №4 (в) ДАН СССР 1974, т.218; (с) ДАН СССР,1975, т.223; (d) ДАН СССР,1972,т.206.

10.Шапировский Б.Э. Математические заметки, т.15, 1974.

11.Hajnal A.,Juhasz L."Indag.Math.",1971, v.33

12.Juhasz L.Cardinal functions in topology, Budapest,1971.

13.Tall F."General topology", v.4, 1974

УДК 513.83

О КЛАССАХ $\mathcal{E}$-ПСЕВДОКОМПАКТНОСТИ

2.

А.П.Шостак

Пусть $\mathcal{E}$ - некоторый класс хаусдорфовых пространств. Напомним, что топологическое пространство X называется $\mathcal{E}$-регулярным [1],[2], если X гомеоморфно подмножеству произведения пространств класса $\mathcal{E}$. В случае, когда соответствующее гомеоморфное вложение может быть осуществлено замкнутым образом, пространство X называется $\mathcal{E}$-компактным. Классы $\mathcal{E}$-регулярных и $\mathcal{E}$-компактных пространств обозначаем, следуя [1], [2], $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{K}(\mathcal{E})$, соответственно. В частном случае, когда класс $\mathcal{E}$ содержит только одно пространство E, говорят соответственно о E-регулярных и E-компактных пространствах.

Рассмотрим некоторое непрерывное отображение h пространства X в произведение $\prod\{E_\lambda;\lambda\in\Lambda, E_\lambda\in\mathcal{E}\}$ и положим $f_\lambda = \pi_\lambda\circ h$, где π_λ - проектирование произведения $\prod\{E_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ на E_λ. Таким образом, получаем семейство функций $\mathcal{F} = \{f_\lambda; f_\lambda: X\to E_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$. Обратно, если $\mathcal{F} = \{f_\lambda: X\to E_\lambda, \lambda\in\Lambda\}$ - семейство непрерывных функций, то существует и притом единственное отображение h пространства X в произведение $\prod\{E_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$. Будем называть это h параметрическим отображением, соответствующим семейству $\mathcal{F}$. Следующая теорема вложения, идея которой принадлежит ещё П.С.Урысону, устанавливающая связь между свойствами параметрического отображения и соответствующего ему семейства функций, играет большую роль при изучении свойств $\mathcal{E}$-регулярности, $\mathcal{E}$-компактности и связанных с ними понятий:

Теорема вложения [1]. Пусть h - параметрическое отображение, соответствующее семейству функций $\mathcal{F} = \{f_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$. Тогда а) h является гомеоморфизмом в том и только в том случае, когда семейство $\mathcal{F}$ отделяет точки и замкнутые подмножества пространства X, т.е. для произвольных $A \subseteq_{cl} X$, $p \notin A$ существует такое конечное семейство функций $f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n} \in \mathcal{F}$, что $\langle f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}\rangle(p) \notin \overline{\langle f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}\rangle(A)}$ *

б) если h – гомеоморфизм, то $h(X)$ замкнуто в соответствующем произведении тогда и только тогда, когда не существует собственного расширения εX пространства X на которое все функции из $\mathcal{F}$ имели бы непрерывное продолжение. При этом достаточно ограничиться рассмотрением $\mathcal{E}$-регулярных расширений.

Из теоремы вложения следует, что пространство X $\mathcal{E}$-регулярно тогда и только тогда, когда семейство всех функций из X в пространства класса $\mathcal{E}$ отделяет точки от замкнутых множеств в пространстве X [1], [2]; $\mathcal{E}$-регулярное пространство X является $\mathcal{E}$-компактным в том и только в том случае, когда для каждого собственного расширения найдётся функция $f: X \to E$, $E \in \mathcal{E}$, непродолжаемая на это расширение. При этом достаточно ограничиться рассмотрением $\mathcal{E}$-регулярных расширений [1], [2].

Настоящая заметка посвящена изучению т.н. $\mathcal{E}$-псевдокомпактных пространств, т.е. таких $\mathcal{E}$-регулярных пространств X, каждое непрерывное отображение которых в пространства класса $\mathcal{E}$ может быть непрерывно продолжено на любое расширение εX (определение 1). В случае, когда класс $\mathcal{E}$ состоит из одного пространства E, вместо $\mathcal{E}$-псевдокомпактности говорим о E-псевдокомпактности. Грубо говоря, $\mathcal{E}$-псевдокомпактные пространства играют при изучении свойства $\mathcal{E}$-компактности такую же роль,

---

* Через $\langle f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n}\rangle$ обозначаем параметрическое отображение X в $E_{\lambda_1} \times \ldots \times E_{\lambda_n}$, соответствующее семейству функций $\{f_{\lambda_1}, \ldots\}$. Запись $A \subseteq_{cl} X$ означает, что A является замкнутым подмножеством в X.

какую псевдокомпактность играет при изучении Q-пространств (называемых также реально компактными, или $\mathbb{R}$-компактными пространствами).

Понятие $\mathcal{E}$-псевдокомпактного пространства было определено в [3]. Предлагаемое здесь определение $\mathcal{E}$-псевдокомпактности несколько отличается от приведённого в [3], совпадая с ним в том и только в том случае, когда рассматриваемое пространство вполне регулярно (теорема I).

В качестве основных результатов работы укажем: теорему I, устанавливающую ряд условий, эквивалентных $\mathcal{E}$-псевдокомпактности для вполне регулярного пространства; следствие теоремы 3, утверждающую, что если классы $\mathcal{E}$-компактных и $\mathcal{K}$-компактных пространств совпадают, то $\mathcal{E}$-псевдокомпактность топологического пространства эквивалентна его $\mathcal{K}$-псевдокомпактности, и теорему 5, характеризующую класс так называемых псевдо-τ-компактных пространств как класс $\mathcal{E}$-псевдокомпактности. Отметим также определяемый здесь класс счётно-cb-пространств, содержащий, в частности, все счётно-компактные и связные пространства, (определение 4) и характеризующую их как класс $\mathcal{E}$-псевдокомпактности теорему 4.

Условимся все рассматриваемые пространства считать хаусдорфовыми, все отображения - непрерывными. Через $C(X,E)$ обозначаем совокупность непрерывных отображений пространства X в E; вместо объединения $\cup\{C(X,E): E\in\mathcal{E}\}$ будем писать просто $C(X,\mathcal{E})$. Для обозначения "стандартных" пространств будут использоваться общепринятые символы: $\mathbb{R}$ - вещественная прямая, наделённая обычной топологией, $\mathbb{I}$ - интервал $[0,1]$ вещественной прямой, $\mathcal{D}$ - дискретное двоеточие $\{0,1\}$, $\mathbb{N}$ - дискретное пространство натуральных чисел. βX означает Стоун-Чеховское бикомпактное расширение пространства X.

I. $\mathcal{E}$-псевдокомпактные пространства. Классы $\mathcal{E}$-псевдокомпактности.

Определение I. $\mathcal{E}$-регулярное пространство X называем $\mathcal{E}$-псевдокомпактным, если для любого расширения εX существует такое расширение $\varepsilon' X \geqslant \varepsilon X$, на которое имеет непрерывное продолжение каждая функция $f \in C(X, \mathcal{E})$.

В случае, когда класс $\mathcal{E}$ состоит из одного пространства E, вместо "$\{E\}$-псевдокомпактное пространство" пишем просто "E-псевдокомпактное пространство".

Класс всех $\mathcal{E}$-псевдокомпактных (E-псевдокомпактных) пространств обозначаем $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ (соответственно, $\mathcal{P}(E)$).

Замечание. Как уже было отмечено, $\mathcal{E}$-регулярное пространство является $\mathcal{E}$-компактным тогда и только тогда, когда для каждого собственного расширения εX найдётся функция $f \in C(X, \mathcal{E})$, не продолжаемая на всё εX. Таким образом, наше определение $\mathcal{E}$-псевдокомпактности получается при "частичном отрицании" этого критерия $\mathcal{E}$-компактности.

Предложение I. $\mathcal{E}$-регулярное пространство X $\mathcal{E}$-псевдокомпактно тогда и только тогда, когда для каждой универсальной направленности $\{x_\alpha\}$ и произвольной функции $f \in C(X, \mathcal{E})$ направленность $\{f x_\alpha\}$ сходится.

Доказательство. Допустим, что существует такая универсальная направленность $\{x_\alpha\}$, что $\{f x_\alpha\}$ расходится для некоторой функции $f \in C(X, \mathcal{E})$. Универсальность $\{x_\alpha\}$ означает, что для произвольного $A \subset X$ эта направленность, начиная с некоторого момента, лежит либо в A, либо в $X \setminus A$. Рассмотрим совокупность $\mathcal{U}_0$ всех открытых множеств, с которыми $\{x_\alpha\}$ финальна. Присоединим к пространству X точку $*$ и определим пространство $X' = X \cup \{*\}$, беря в качестве базы топологии в точке $*$ семейство множеств $\{U \cup \{*\} : U \in \mathcal{U}_0\}$. Ясно, что определённое таким образом пространство X' является (хаусдорфовым) расширением X и при этом f не может быть продолжена ни на какое $X'' \geqslant X'$

Следовательно, пространство X не $\mathcal{E}$-псевдокомпактно.

Обратно, если пространство X не $\mathcal{E}$-псевдокомпактно, то легко построить универсальную направленность, которая некоторой функцией $f \in C(X,\mathcal{E})$ переводится в расходящуюся.

<u>Определение 2</u>. Класс пространств $\mathcal{E}$ называем отделяемым, если для каждого конечного произведения $E_1 \times \ldots \times E_n$ пространств из $\mathcal{E}$, произвольного замкнутого подмножества A этого произведения и точки $x_0 \notin$ A найдётся функция $\varphi : E_1 \times \ldots \times E_n \to E$, $E_i, E \in \mathcal{E}$, переводящая A в точку $a \neq \varphi(x_0)$.

(Примером отделяемого класса может служить любой класс вполне регулярных пространств, содержащий отрезок J.)

При характеристике $\mathcal{E}$-компактности $\mathcal{E}$-регулярного пространства посредством расширений достаточно, как было отмечено, ограничиться рассмотрением $\mathcal{E}$-регулярных расширений. В случае, когда класс $\mathcal{E}$ отделяемый, при определении $\mathcal{E}$-псевдокомпактности $\mathcal{E}$-регулярного пространства также можно ограничиться $\mathcal{E}$-регулярными расширениями:

<u>Предложение 2.</u> Если класс $\mathcal{E}$ отделяемый, то $\mathcal{E}$-регулярное пространство X $\mathcal{E}$-псевдокомпактно тогда и только тогда, когда для каждого $\mathcal{E}$-регулярного расширения εX существует $\mathcal{E}$-регулярное расширение $\varepsilon' X \geqslant \varepsilon X$, на которое продолжаются все функции $f \in C(X, \mathcal{E})$.

<u>Доказательство</u>. Допустим, что пространство X не $\mathcal{E}$-псевдокомпактно. Тогда по предложению I существует такая универсальная направленность $\{x_\alpha\}$, которая переводится некоторой функцией $f \in C(X,\mathcal{E})$ в расходящуюся. Рассмотрим совокупность $\mathcal{G}$ всех тех функций из $C(X,\mathcal{E})$, которые сходятся на $\{x_\alpha\}$; предел направленности $\{g x_\alpha\}$ обозначим a_g, а окрестности точек a_g в соответствущем пространстве $E \in \mathcal{E}$ будем обозначать U_g. Рассмотрим пространство $X' = X \cup \{*\}$, где $*$ - произвольная точка, не принадлежащая X; в качестве предбазы топологии в точке $*$ возьмём семейство множеств $\{g^{-1}(U_g) \cup \{*\} : g \in \mathcal{G}\}$. Определённое таким образом пространство X' является, очевидно,

расширением X ; покажем, что X' $\mathcal{E}$-регулярно.

Заметим прежде всего, что функция $g \in C(X,\mathcal{E})$ имеет непрерывное продолжение на X' тогда и только тогда, когда $g \in \mathcal{G}$. Продолжение функции g на X' будем обозначать $\tilde{g}$; совокупность всех таких продолжений обозначим $\tilde{\mathcal{G}}$. Пусть B - произвольное замкнутое в X' множество, не содержащее точки $*$. Из определения топологии в точке $*$ следует, что существует конечное семейство функций $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots \tilde{g}_n \in \tilde{\mathcal{G}}$, $\tilde{g}_i : X' \to E_i$ такое, что соответствующее параметрическое отображение $\tilde{g} = \langle \tilde{g}_1, \ldots \tilde{g}_n \rangle : X' \to E_1 \times \ldots \times E_n$ отделяет $*$ от B (поскольку найдётся такая окрестность V точки $\tilde{g}(*)$ в этом произведении, прообраз которой содержится в $X \setminus B$ и, следовательно, $\tilde{g}(*) \notin \tilde{g}(B) \subset X \setminus V$. Далее, пусть $x \neq *$ и B - произвольное замкнутое в X' множество, не содержащее точки x. Выберем окрестность W точки x таким образом, чтобы $W \subset X \setminus B$, $* \notin W$ и чтобы направленность $\{\nu_\alpha\}$ начиная с некоторого момента лежала вне W. Поскольку пространство X $\mathcal{E}$-регулярно, можно выбрать функцию $g : X \to E_1 \times \ldots \times E_n$ такую, что $g(x) \notin \overline{g(X \setminus W)}$. При этом функция g, вообще говоря, не лежит в $\mathcal{G}$. Далее, воспользовавшись тем, что класс $\mathcal{E}$ отделяемый, можем выбрать функцию $\varphi : E_1 \times \ldots \times E_n \to E$, $E, E_n \in \mathcal{E}$, такую, что $\varphi g(x) = a$, $\varphi \overline{g(X \setminus W)} = b$ и $a \neq b$. Таким образом, функция φg отображает всё множество $X \setminus W$ ($B \subset X \setminus W$) в точку b, и, следовательно, φg сходится на направленности $\{\nu_\alpha\}$, откуда $\varphi g \in \mathcal{G}$. Продолжим φg до отображения $\widetilde{\varphi g} : X' \to E$. Ясно, что $\widetilde{\varphi g}(x) = a$, а $B \cup \{*\}$ отображается этой функцией в b. Существование такой функции и доказывает $\mathcal{E}$-регулярность пространства X'.

Итак, предположив, что X не является $\mathcal{E}$-псевдокомпактным, построили $\mathcal{E}$-регулярное расширение X', на которое не может быть продолжена непрерывным образом некоторая функция $f \in C(X,\mathcal{E}) \setminus \mathcal{G} \subset C(X,\mathcal{E})$. Существование такого расширения и доказывает предложение.

Мы не знаем, можно ли ограничиться рассмотрением $\mathcal{E}$-регулярных расширений при определении $\mathcal{E}$-псевдокомпактности без предположения отделяемости класса $\mathcal{E}$.

Псевдокомпактные пространства могут быть, очевидно, охарактеризованы как такие вполне регулярные пространства, образ которых при любом непрерывном отображении в $\mathbb{R}$ имеет бикомпактное замыкание. Следующая теорема устанавливает, в частности, аналогичную характеристику для вполне регулярных $\mathcal{E}$-псевдокомпактных пространств: из неё следует, что вполне регулярное $\mathcal{E}$-регулярное пространство X $\mathcal{E}$-псевдокомпактно тогда и только тогда, когда образ его при любом непрерывном отображении в пространства класса $\mathcal{E}$ имеет бикомпактное замыкание.

Теорема I. Вполне регулярное $\mathcal{E}$-регулярное пространство X $\mathcal{E}$-псевдокомпактно тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих трёх (эквивалентных) условий:

(I) каждое отображение $f : X \to E$, $E \in \mathcal{E}$, имеет непрерывное продолжение на Стоун-Чеховское бикомпактное расширение βX ;

(2) замыкание образа пространства X при любом отображении $f : X \to E$, $E \in \mathcal{E}$, бикомпактно;

(3) замыкание любого гомеоморфного пространству X подмножества X' произведения пространств из класса $\mathcal{E}$ является бикомпактом.

Доказательство. Пусть X вполне регулярно, тогда определено Стоун-Чеховское бикомпактное расширение βX . Если X - $\mathcal{E}$-псевдокомпактно, $f \in C(X,E)$ и $E \in \mathcal{E}$, то по определению I f может быть продолжена на βX*. Таким образом, $\mathcal{E}$-псевдокомпактность пространства X влечёт условие (I).

Покажем, что (I) $\Rightarrow$ (2). Пусть $f : X \to E$, $E \in \mathcal{E}$. По условию (I) f можем продолжить до отображения $\tilde{f} : \beta X \to E$. Легко видеть, что $\overline{f(X)} = \tilde{f}(\beta X)$ и, следовательно, $\overline{f(X)}$ - бикомпактное подмножество E .

Пусть выполнено условие (2) и X' - подмножество произведения $\Pi\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, гомеоморфное X ; соответствующий гомеоморфизм обозначим h . Рассмотрим отображения

---

*Поскольку не существует $\varepsilon X \geq \beta X$, отличного от самого βX.

$f_\lambda = \pi_\lambda \circ h$, где π_λ - проектирование произведения на λ-ый сомножетель. Ясно, что $X' \subset \Pi\{f_\lambda(X) : \lambda \in \Lambda\}$, а следовательно, $\overline{X'} \subset \Pi\{\overline{f_\lambda(X)} : \lambda \in \Lambda\}$. Но согласно условию (2) каждое множество $\overline{f_\lambda(X)}$ бикомпактно; тогда и $\overline{X}'$ - бикомпакт, т.е. имеет место условие (3).

Покажем, что (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $f : X \to E$, $E \in \mathcal{E}$ и рассмотрим какое-нибудь расчленяющее семейство функций $\mathcal{F} \subset C(X, \mathcal{E})$ *; без ограничения общности можем считать, что $f \in \mathcal{F}$. Пусть h - параметрическое вложение, соответствующее семейству $\mathcal{F}$; $h : X \to h(X) \subset \Pi\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$; согласно условию, $\overline{h(X)}$ бикомпактно. С другой стороны, ясно, что найдётся такой индекс λ, что $f = f_\lambda = \pi_\lambda \circ h$, где π_λ - соответствующая проекция. Рассмотрим замыкание $\overline{f(X)} = \overline{\pi_\lambda \circ h(X)} \subset \pi_\lambda(\overline{h(X)})$; из бикомпактности $\overline{h(X)}$ следует равенство $\overline{\pi_\lambda \circ h(X)} = \pi_\lambda(\overline{h(X)})$. Но это и означает, что $\overline{f(X)}$ - бикомпактное подмножество пространства E. Требуемая импликация доказана.

Допустим, что имеет место (2) и рассмотрим расширение βX и функцию $f : X \to E$, $E \in \mathcal{E}$. Согласно (2) $\overline{f(X)}$ - бикомпактное подмножество в E, а следовательно, отображение f может быть продолжено непрерывным образом до $\tilde{f} : \beta X \to \overline{f(X)} \subset E$, т.е. (2) $\Rightarrow$ (I).

Покажем, наконец, что (I) влечёт $\mathcal{E}$-псевдокомпактность пространства X. В самом деле, если $\{s_a\}$ - универсальная направленность в X, то в βX эта направленность сходится к некоторой точке a. Но тогда и любая функция $f \in C(X, \mathcal{E})$ должна переводить $\{s_a\}$ в сходящуюся, ибо в противном случае f не могла бы быть продолжена на βX. Воспользовавшись предложением I, получаем отсюда, что X $\mathcal{E}$-псевдокомпактно. Теорема доказана.

Пусть $\mathcal{K}$ - некоторый класс топологических пространств. Тогда можно говорить о свойстве пространства X быть

---

* Слово "семейство" употребляется здесь как синоним слова "множество". Существование такого семейства $\mathcal{E}$ гарантируется, как легко видеть, $\mathcal{E}$-регулярностью X.

$\mathcal{H}$ -псевдокомпактным. Нашей ближайшей целью является выяснение того, как связаны между собой свойства $\mathcal{E}$ - псевдокомпактности и $\mathcal{H}$-псевдокомпактности при определённых соотношениях между самими классами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$. При этом рассмотрим сначала случай, когда каждый из классов содержит по одному пространству: $\mathcal{E} = \{E\}$, $\mathcal{H} = \{H\}$.

Лемма I. Пусть $H \subsetneq_{\alpha} E$. Тогда $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{R}(H) \subset \mathcal{P}(H)$.

Доказательство. Пусть H-регулярное пространство X E-псевдокомпактно. Рассмотрим отображение $f: X \to H$, $H \subset E$. Если εX - некоторое расширение X, то из E-псевдокомпактности X следует, что существует такое $\varepsilon' X \geqslant \varepsilon X$ и продолжение $\tilde{f}: \varepsilon' X \to E$. Поскольку $H \subsetneq_{\alpha} E$, то $\tilde{f}(\varepsilon X) \subset H$. Отсюда, ввиду H-регулярности пространства X, следует, что X и H-псевдокомпактно.

Лемма 2. Для любого кардинального числа τ $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E^{\tau})$.

Доказательство. Из леммы I следует, что $\mathcal{P}(E^{\tau}) \subset \mathcal{P}(E)$. Пусть, обратно, $X \in \mathcal{P}(E)$ и εX - некоторое расширение пространства X. Для отображения $f: X \to E^{\tau}$ рассмотрим проекции $f_{\lambda} = \pi_{\lambda} \circ f : X \to E$ на каждый из сомножителей. Согласно предположению, $X \in \mathcal{P}(E)$ и, следовательно, найдётся продолжение $\tilde{f}_{\lambda}: \varepsilon X \to E$. Параметрическое отображение, соответствующее семейству $\{\tilde{f}_{\lambda}\}$, обозначим $\tilde{f}$; $\tilde{f}: \varepsilon X \to E^{\tau}$ и $\tilde{f}(x) = \{\tilde{f}_{\lambda}(x)\}$ для каждой точки $x \in \varepsilon X$. Легко видеть, что определённое таким образом отображение $\tilde{f}$ является продолжением f на εX, что и означает E-псевдокомпактность пространства X. Таким образом, $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(E^{\tau})$, и следовательно, $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E^{\tau})$

Теорема 2. Если $\mathcal{B}(H) \subset \mathcal{B}(E)$, то $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{R}(H) \subset \mathcal{P}(H)$. Другими словами, если каждое H-компактное пространство E-компактно, то E-псевдокомпактность H-регулярного пространства влечёт его H-псевдокомпактность.

Доказательство. Если $\mathcal{B}(H) \subset \mathcal{B}(E)$, то $H \subsetneq_{\alpha} E^{\tau}$ для некоторого τ. Поскольку по лемме I $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E^{\tau})$, воспользовавшись леммой 2, отсюда получаем $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{R}(H) \subset \mathcal{P}(H)$.

<u>Следствие</u>. Если $\mathfrak{B}(E) = \mathfrak{B}(H)$, то $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(H)$. Таким образом, свойство E-псевдокомпактности определяется полностью классом компактности, порождаемым пространством E и не зависит от свойств самого E.

Следствие вытекает из теоремы 2 и того факта, что равенство $\mathfrak{B}(E) = \mathfrak{B}(H)$ влечёт, очевидно, равенство $\mathcal{R}(E) = \mathcal{R}(H)$.

Имеет место и обобщение теоремы 2 на случай, когда вместо пространств E и H рассматриваются классы пространств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$:

<u>Теорема 3</u>. Если $\mathfrak{B}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ то $\mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap \cap \mathcal{R}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$.

Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 2 и основывается на леммах, представляющих собой модификацию лемм I,2 на случай класса пространств.

<u>Следствие</u>. Если $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) = \mathfrak{B}(\mathcal{E})$, то $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Другими словами, свойство $\mathcal{E}$-псевдокомпактности определяется полностью классом компактности, порождаемым классом $\mathcal{E}$, и не зависит от конкретных свойств самого $\mathcal{E}$.

Неясно, можно ли (абсолютно или при каких-то дополнительных предположениях) утверждать, что и обратно, равенство $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathcal{H})$ влечёт равенство $\mathfrak{B}(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$?

Из теоремы 3 следует, что $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \cap \mathcal{R}(E) \subset \mathcal{P}(E)$ для любого пространства $E \in \mathcal{E}$. Беря пересечение по всем $E \in \mathcal{E}$, получаем $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \cap (\bigcap_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{R}(E)) \subset \bigcap_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{P}(E)$. Обратно, если $X \in \bigcap_{E \in \mathcal{E}} \mathcal{P}(E)$, то $X \in \mathcal{R}(E) ; E \in \mathcal{E}$ и, как легко видеть, $X \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Отсюда следует

<u>Предложение 3</u>. $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \cap (\cap \{\mathcal{R}(E) : E \in \mathcal{E}\}) = \cap \{\mathcal{P}(E) : E \in \mathcal{E}\}$

В частности, если $\mathcal{R}(E) = \mathcal{R}(\mathcal{E})$ для всех $E \in \mathcal{E}$, то $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \cap \{\mathcal{P}(E) : E \in \mathcal{E}\}$.

Перейдём теперь к рассмотрению свойства $\mathcal{E}$-псевдокомпактности для случая, когда все пространства класса бикомпактны.

<u>Предложение 4</u>. Если все пространства класса $\mathcal{E}$ би-

компактны, то $\mathcal{P}(\mathcal{E}) = \mathcal{R}(\mathcal{E})$.

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{R}(\mathcal{E})$, тогда пространство X вполне регулярно. Рассмотрим некоторое вложение h пространства X в произведение $\Pi\{E_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, $E_\lambda \in \mathcal{E}$. Поскольку все пространства класса $\mathcal{E}$ бикомпактны, $\overline{h(X)}$ также является бикомпактом, и, следовательно, по теореме I X $\mathcal{E}$-псевдокомпактно. Таким образом, $\mathcal{R}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Обратное включение следует из определений.

<u>Следствие I</u>. Класс J-псевдокомпактных пространств совпадает с классом всех вполне регулярных пространств.

<u>Следствие 2</u>. Топологическое пространство $\mathcal{D}$-псевдокомпактно тогда и только тогда, когда оно нульмерно (в смысле ind).

<u>Предложение 5</u>. Если пространство E вполне регулярно, то $E \in \mathcal{P}(E)$ в том и только в том случае, когда E бикомпактно.

Действиетльно, если E - бикомпакт и $E \in \mathcal{R}(H)$, то как следует из теоремы I, $E \in \mathcal{P}(H)$; в частности, имеем всегда $E \in \mathcal{P}(E)$. Обратно, если $E \in \mathcal{P}(E)$, то по теореме I тождественное отображение $id : E \to E$ может быть продолжено на βE. Отсюда следует, что $\beta E = E$, т.е. E - бикомпакт.

II. <u>Примеры классов $\mathcal{E}$-псевдокомпактности</u>

I. Класс $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ совпадает с классом всех псевдокомпактных пространств.

Поскольку, очевидно, $\mathbb{R}$-регулярность пространства эквивалентна его полной регулярности, это утверждение следует из теоремы I и соответствующих определений.

2. Класс $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ есть класс всех нульмерных (в смысле ind) псевдокомпактных пространств.

В самом деле, пусть пространство X псевдокомпактно, тогда каждое отображение $f : X \to \mathbb{N}$ ($\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$) ограничено. Если при этом X нульмерно, то по теореме I $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Обратно, если $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, то по теореме I каждое отображение пространства X в $\mathbb{N}$ является ограниченным. Но тогда и любое отображение $f: X \to \mathbb{R}$ ограничено, ибо в противном случае, воспользовавшись нульмерностью пространства X, могли бы построить неограниченное отображение $g: X \to \mathbb{N}$.

3. $\mathcal{P}(\mathbb{J})$ есть класс всех вполне регулярных пространств. (Следствие I предложения 5.)

4. $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ есть класс нульмерных (в смысле ind) пространств. (Следствие 2 предложения 5.)

5. Пусть ω_λ - некоторое порядковое число, $T(\omega_\lambda)$ - пространство всех ординалов, меньших чем ω_λ , наделённое порядковой топологией и $T^*(\omega_\lambda) = T(\omega_\lambda) \cup \{\omega_\lambda\}$. Поскольку $\beta T(\omega_\lambda) = T^*(\omega_\lambda)$, из теоремы I следует, что если конфинальные характеры порядковых чисел ω_λ и ω_μ различны ($cf\, \omega_\lambda \neq cf\, \omega_\mu$), то $T(\omega_\lambda) \in \mathcal{P}(T(\omega_\mu))$. Отсюда и из предложения 5 вытекает, в частности, что классы $T(\omega_\lambda)$-псевдокомпактности и $T(\omega_\mu)$-псевдокомпактности, определяемые ординалами, имеющими различный конфинальный характер, не сравнимы ($\mathcal{P}(T(\omega_\lambda)) \not\subset \mathcal{P}(T(\omega_\mu))$). Если же $cf\, \omega_\lambda = cf\, \omega_\mu$, то, как легко видеть, $T(\omega_\lambda) \notin \mathcal{P}(T(\omega_\mu))$ и $\mathcal{P}(T(\omega_\lambda)) = \mathcal{P}(T(\omega_\mu))$.

6. Обозначим через $\mathcal{T}_2$ класс хаусдорфовых пространств. Тогда (хаусдорфово) пространство X $\mathcal{T}_2$-псевдокомпактно в том и только в том случае, когда X абсолютно замкнуто.

В самом деле, пусть пространство X не является абсолютно замкнутым; тогда существует хаусдорфово расширение $\varepsilon X \neq X$. Рассмотрим тождественное отображение $id: X \to X$ ($X \in \mathcal{T}_2$). Ясно, что это отображение не может быть продолжено на εX и, следовательно, пространство X не $\mathcal{T}_2$-псевдокомпактно. Обратно, если X абсолютно замкнуто, то у него нет собственного расширения и, следовательно, X тривиальным образом оказывается $\mathcal{T}_2$-псевдокомпактным. Итак, $\mathcal{T}_2$-псевдокомпактность пространства эквивалентна его абсолютной замкнутости.

7. Пусть $\mathcal{T}_3$ - класс регулярных пространств. Из теоремы 3 следует, что имеет место включение $\mathcal{P}(\mathcal{T}_2) \cap \mathcal{R}(\mathcal{T}_3) \subset \mathcal{P}(\mathcal{T}_3)$.

С другой стороны, если $X \in \mathcal{P}(\mathcal{T}_3)$, то, рассуждая как и в п.6, легко показать, что у X нет собственных хаусдорфовых расширений, а следовательно, пространство X абсолютно замкнуто. Согласно п.6 это означает $\mathcal{T}_2$ -псевдокомпактность пространства X. Итак, доказано равенство $\mathcal{P}(\mathcal{T}_2)\cap\mathcal{R}(\mathcal{T}_3) = \mathcal{P}(\mathcal{T}_3)$. Поскольку бикомпакты - это в точности регулярные абсолютно замкнутые пространства, последнее равенство означает, что класс $\mathcal{T}_3$ -псевдокомпактных пространств совпадает с классом бикомпактов. Доказано

Предложение 6. Топологическое пространство $\mathcal{T}_3$ -псевдокомпактно тогда и только тогда, когда оно бикомпактно.

8. Пусть $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$ - класс вполне регулярных пространств. Тогда $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$ -псевдокомпактность топологического пространства эквивалентна его бикомпактности.

В самом деле, если вполне регулярное пространство X не является бикомпактом, то у него существует собственное расширение εX. Поскольку тождественное отображение id : $X \to X$ не может быть продолжено на εX, пространство X не является $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}$ -псевдокомпактным. Обратное утверждение очевидно.

Примеры 7 и 8 показывают, что класс бикомпактов может быть охарактеризован как $\mathcal{P}(\mathcal{T}_3)$ либо как $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}})$. Рассмотрим теперь класс пространств $\mathcal{E}$, удовлетворяющий условию $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{T}_3$. По теореме 3 $\mathcal{P}(\mathcal{E})\cap\mathcal{R}(\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}})$ и $\mathcal{P}(\mathcal{T}_3)\cap\mathcal{R}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})$. Отсюда, учитывая, что свойство $\mathcal{T}_3$ -псевдокомпактности эквивалентно бикомпактности и, следовательно, все пространства класса $\mathcal{P}(\mathcal{T}_3)$ вполне регулярны, получаем соотношение $\mathcal{P}(\mathcal{T}_3) \subset \mathcal{P}(\mathcal{E})\cap\mathcal{R}(\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}})$ Так как согласно примерам 7,8 $\mathcal{P}(\mathcal{T}_3) = \mathcal{P}(\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}})$ - класс всех бикомпактов, отсюда следует равенство $\mathcal{P}(\mathcal{E})\cap\mathcal{R}(\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}) = \mathcal{P}(\mathcal{T}_3)$. Таким образом, доказано

Предложение 7. Для каждого класса $\mathcal{E}$, удовлетворяющего условию $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{T}_3$, $\mathcal{E}$ -псевдокомпактность вполне регулярного пространства эквивалентна его бикомпактности.

Мы не знаем, существенно ли здесь оговаривать требование полной регулярности рассматриваемых пространств.

Другими словами, можно ли из $\mathcal{E}$ -псевдокомпактности топологического пространства X (где $\mathcal{T}_{3\frac{1}{2}}\subset\mathcal{E}\subset\mathcal{T}_{5}$) сделать вывод о его полной регулярности и, следовательно, о его бикомпактности?

Рассмотрим совокупность всевозможных $\mathcal{E}$, для которых $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ есть класс всех бикомпактов. Нам известно очень мало об этих классах $\mathcal{E}$. Имеются ли среди них наибольший и наименьший? Существует ли среди них хотя бы один минимальный, т.е. такой класс $\mathcal{E}_0$, что для любого $E\in\mathcal{E}_0$ класс $\mathcal{P}(\mathcal{E}_0\setminus\{E\})$ содержит уже небикомпактные пространства? Является ли совокупность всех таких $\mathcal{E}$ упорядоченной по включению?

o

9. Определение 3. Топологическое пространство назовём cb -пространством, если из каждого его открыто-замкнутого покрытия* можно выделить конечное подпокрытие.

Определение 4. Топологическое пространство назовём счётно cb -пространством, если из каждого его счётного открыто-замкнутого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Класс cb -пространств содержит все бикомпакты и все связные пространства; класс счётно - cb -пространств содержит все счётно-компактные и все связные пространства. Оба класса обладают рядом интересных свойств, однако здесь мы ограничимся лишь характеристикой вполне регулярных счётно - cb -пространств как класса Е-псевдокомпактности для некоторого Е.

Теорема 4. Вполне регулярное пространство является счётно - cb -пространством тогда и только тогда, когда оно $\mathring{J}\cup N$ -псевдокомпактно.

Доказательство. Допустим, что вполне регулярное пространство X не является $J\cup N$ -псевдокомпактным. Это означает, что существует непрерывная функция f : $X\to J\cup N$

---

* Т.е. такого покрытия, каждый элемент которого является открыто-замкнутым множеством.

образ пространства X относительно которой содержит бесконечно много точек из $\mathbb{N}$, т.е. $|f(X)\cap\mathbb{N}| = \aleph_0$. Рассмотрим покрытие пространства X, образованное множествами $f^{-1}[0,1]$ и $f^{-1}(n), n>1$. Это покрытие счётное и состоит из открыто-замкнутых множеств; поскольку из него, очевидно, нельзя выделить конечного подпокрытия, пространство X не является счётно cb-пространством.

Обратно, пусть пространство X не является счётно-cb-пространством. Тогда существует счётное открыто-замкнутое покрытие $\{U_i\}$ пространства X, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Рассмотрим покрытие $\{V_i\}$, где $V_1 = U_1$ и $V_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$ для каждого n; ясно, что это покрытие также открыто-замкнутое и притом дизъюнктно ($V_i \cap V_j = \emptyset$, $i \neq j$). Рассмотрим функцию $f: X \to J \cup \mathbb{N}$, определяемую равенством $f(x) = n$ для всех $x \in V_n$, $n = 1,2,\ldots$. Получаемая таким образом функция, очевидно, является неограниченной, а следовательно, пространство X не $J\cup\mathbb{N}$-псевдокомпактно. Теорема доказана.

10. В п.1 было показано, что псевдокомпактность пространства эквивалентна его $\mathbb{R}$-псевдокомпактности. В этом разделе приводится характеристика псевдокомпактных пространств с помощью метрических ежей*.

---

* Метрическим ежом J_τ колючести τ (где τ - некоторая мощность) называется пространство, состоящее из τ отрезков $[0,1]$, выходящих из общего начала 0. Метрика на J_τ задаётся следующим образом: если точки x, y ежа лежат на одном отрезке, то за расстояние между ними берётся расстояние от x до y на соответствующем отрезке; если же точки x и y принадлежат различным отрезкам, то за расстояние между ними в J_τ принимается сумма расстояний от x до 0 и от y до 0 на соответствующих отрезках. Отрезки $[0,1]$, входящие в ежа J_τ, будем называть "колючками" этого ежа.

Предложение 8. Пусть J_τ - метрический ёж колючести τ, $\tau \geqslant \aleph_0$. Тогда класс $\mathcal{P}(J_\tau)$ совпадает с классом всех псевдокомпактных пространств.

Поскольку, согласно п.1, $\mathbb{R}$-псевдокомпактность пространства эквивалентна его псевдокомпактности, для доказательства этого предложения достаточно показать, что топологическое пространство J_τ-псевдокомпактно тогда и только тогда, когда оно $\mathbb{R}$-псевдокомпактно.

Заметим прежде всего, что J_τ-регулярность пространства эквивалентна его $\mathbb{R}$-регулярности (и эквивалентна свойству полной регулярности этого пространства).

Пусть теперь пространство X не является J_τ-псевдокомпактным. Тогда существует функция $f: X \to J_\tau$, замыкание образа X при которой не бикомпактно. Перенумеруем колючки ежа J_τ ординалами ξ и будем ξ-ую "колючку" обозначать $[0,1]_\xi$. Из того, что $\overline{f(X)}$ не бикомпактно, следует, что найдётся такое число l $(0 < l \leq 1)$, для которого $\overline{f(X)} \cap [l,1]_\xi \neq \emptyset$ по крайней мере для счётного числа ξ. Пусть для определённости $\overline{f(X)} \cap [l,1]_i \neq \emptyset$ при $i = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим отображение $\varphi: J_\tau \to J_{\aleph_0}$, переводящее каждую из "колючек" $[0,1]_i$, $i = 1,2,\ldots$ тождественно в соответствующую "колючку" ежа $J_{\aleph_0}$ и отображающее все остальные "колючки" $[0,1]_\xi$ в одну точку $0 \in J_{\aleph_0}$. Непрерывность этого отображения очевидна. Рассмотрим теперь отображение $\psi: J \to \mathbb{R}$, определённое на каждой "колючке" $[0,1]_n$ равенством
$$\psi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{l}{2}]_n \\ \frac{l}{2} + n(x - \frac{l}{2}), & x \in [\frac{l}{2}, 1]_n . \end{cases}$$

Легко видеть, что заданное таким образом отображение непрерывно, а следовательно, непрерывна и композиция $\psi \circ \varphi \circ f$: $X \to \mathbb{R}$. При этом функция $\psi \circ \varphi \circ f$ неограничена, а следовательно, $\overline{\psi(\varphi(f(X)))}$ не бикомпактно. Существование такой функции $\psi \circ \varphi \circ f$ и означает, что пространство X не является $\mathbb{R}$-псевдокомпактным.

Обратно, пусть пространство X не $\mathbb{R}$-псевдокомпактно. Рассмотрим функцию $f: X \to \mathbb{R}$, образ пространства X относительно которой неограничен. Тогда нетрудно построить такое отображение $\varphi : \mathbb{R} \to J_{\aleph_0}$, что образ X относительно композиции $\varphi \circ f$ пересекается с бесконечным числом отрезков $[\frac{1}{2}, 1]_n$. Но это означает, что $\overline{\varphi(f(X))}$ не является бикомпактом, а следовательно, пространство X не $J_{\aleph_0}$-псевдокомпактно. Поскольку ёж счётной колючести $J_{\aleph_0}$ может рассматриваться как замкнутое подпространство ежа любой бесконечной колючести J_τ, отсюда следует, что пространство X не является и J_τ-псевдокомпактным. Предложение 8 доказано.

<u>Следствие</u>. Топологическое пространство псевдокомпактно тогда и только тогда, когда оно $J_{\aleph_0}$-псевдокомпактно.

Пусть $\{\{J_\tau\}_\tau\}$ - класс метрических ежей всевозможных бесконечных колючестей τ. Воспользовавшись утверждением предложения 3, из предложения 8 выводим

<u>Следствие 2</u>. Топологическое пространство псевдокомпактно тогда и только тогда, когда оно $\{\{J_\tau\}_\tau\}$-псевдокомпактно.

II. Обобщая понятие псевдокомпактного пространства, Исбелл [5] определяет псевдо- τ -компактные пространства, где τ - некоторая мощность. А именно, вполне регулярное пространство X Исбелл называет псевдо- τ -компактным, если каждое дискретное семейство открытых его подмножеств имеет мощность, меньшую, чем τ.

Легко видеть, что пространство псевдокомпактно тогда и только тогда, когда оно псевдо- $\aleph_0$ -компактно. С другой стороны, из предыдущего примера следует, что псевдокомпактность пространства эквивалентна его $J_{\aleph_0}$-псевдокомпактности. Целью этого раздела является получение характеристики псевдо- τ -компактных пространств в общем случае как класса E-псевдокомпактности для некоторого E.

<u>Лемма</u>. Для того, чтобы вполне регулярное пространство X было псевдо- τ -компактным, необходимо и достаточно, чтобы для каждого отображения $f : X \to J_\tau$ множество $\{\lambda : 1_\lambda \in \overline{f(X)}\}$* имело мощность, меньшую, чем τ.

---

* 1_λ - точка 1 на λ -ом отрезке ежа.

Доказательство. Пусть вполне регулярное пространство X не является псевдо-τ-компактным, тогда в X найдётся дискретная система открытых множеств $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, мощность которой равна τ ($|\Lambda| = \tau$). Можем считать, что Λ — вполне упорядоченное по типу τ множество и $\lambda\in\Lambda$ — ординалы. "Колючки" ежа J_τ также считаем занумерованными ординалами $\lambda\in\Lambda$. Выберем в каждом множестве U_λ по точке x_λ; воспользовавшись полной регулярностью пространства X, найдём окрестность точки $x_\lambda\in V_\lambda$ такую, что $\overline{V_\lambda}\subset U_\lambda$ и рассмотрим функцию $f_\lambda : U_\lambda \to [0,1]_\lambda$, принимающую значение 0 на $U_\lambda \setminus V_\lambda$ и равную единице в точке x_λ. Определим теперь функцию $f : X \to J_\tau$ равенством

$$f(x) = \begin{cases} f_\lambda(x), & x\in U_\lambda \\ 0, & x \notin \cup\{U_\lambda : \lambda\in\Lambda\}. \end{cases}$$

Легко видеть, что определённая таким образом функция непрерывна и $|\{\lambda : 1_\lambda \in f(X)\}| = \tau$.

Обратно, допустим, что образ $f(X)$ содержит 1_λ для всех $\lambda\in\Lambda_0$, где $\Lambda_0\subset\Lambda$ и $|\Lambda_0| = \tau$. Возьмём произвольное число ℓ, удовлетворяющее неравенству $0<\ell<1$, и рассмотрим $U_\lambda = f^{-1}((\ell,1]_\lambda)$ для каждого $\lambda\in\Lambda_0$. Легко видеть, что определённое таким образом семейство открытых в X множеств дискретно и имеет мощность τ. Существование такого семейства и доказывает, что пространство X не является псевдо-τ-компактным. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что если открытое подмножество U пространства X не является псевдо-τ-компактным, то и X не псевдо-τ-компактно. Если X_0 — плотное подмножество пространства X и X_0 псевдо-τ-компактно, то и пространство X псевдо-τ-компактно.

Переходим к построению пространства B^τ, играющего такую же роль по отношению к псевдо-τ-компактным пространствам, какую ёж $J_{\aleph_0}$ ($= B_{\aleph_0}$) играет по отношению к псевдокомпактным ($=$ псевдо-$\aleph_0$-компактным) пространствам.

Мы не будем делать различия в обозначениях кардинальных чисел и соответствующих им начальных ординалов. Для каждого ординала $\xi<\tau$ определим по индукции пространства B_ξ. Положим $B_1 = J_1 = [0,1]$ Пусть построены пространства B_ξ для всех $\xi<\eta$ таким образом, что $B_{\xi_1}\subset B_{\xi_2}$ при $\xi_1<\xi_2$ и $B_\xi\supset J_\xi$ для всех ξ. Для определения B_η рассмотрим два возможных случая: 1) η – непредельный ординал, т.е. $\eta=\xi+1$. Возьмём ежа J_η; можем считать, что J_η пересекается с уже построенным пространством B_ξ по ежу колючести ξ. Определим тогда B_η равенством $B_\eta = B_\xi\cup J_\eta$ ($B_\xi\cap J_\eta = J_\xi$), считая подмножество в B_η открытым тогда и только тогда, когда открыты его пересечения с B_ξ и с J_η. 2) Пусть теперь η – предельный ординал; рассмотрим объединение $\cup\{B_\xi : \xi<\eta\}$ ($B_{\xi_1}\subset B_{\xi_2}$ при $\xi_1<\xi_2$; ёж J_η содержится в этом объединении, поскольку он может быть представлен как объединение ежей меньшей колючести). Подмножество этого объединения считаем открытым тогда и только тогда, когда открыто его пересечение с каждым из B_ξ и с J_η. Определим B_η равенством $B_\eta=\beta(\cup\{B_\xi:\xi<\eta\})$. Проведём такое построение по индукции для всех $\eta<\tau$; при этом B_ξ является подпространством B_η для $\xi<\eta$ и ёж J_ξ является подпространством B_ξ для каждого $\xi<\tau$. Определим, наконец, B^τ равенством $B^\tau = \cup\{B_\xi : \xi<\tau\}$, считая подмножество B^τ открытым тогда и только тогда, когда открыто его пересечение с каждым из B_ξ, $\xi<\tau$ и с J_τ, который мы естественным образом рассматриваем как подпространство этого объединения.

Рассмотрим теперь для каждого натурального числа подмножество $\bigcup_{\xi<\tau}[0,\frac{1}{n}]_\xi$ ежа J_τ; дополнение его замыкания $\overline{\cup\{[0,\frac{1}{n}]_\xi : \xi<\tau\}}$ в B^τ обозначим L_n. Из определения топологии в B^τ нетрудно заметить, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = B^\tau\setminus\{0\}$; пересечение $L_n\cap B_\xi$ для произвольного ξ является множеством, открыто-замкнутым в L_n.

Теперь можем сформулировать основной результат этого раздела:

Теорема 5. Пусть τ – регулярный кардинал. Тогда пространство X псевдо-τ-компактно в том и только в том случае, когда оно B^τ-псевдокомпактно.

<u>Доказательство</u>. Для случая $\tau = \aleph_0$ утверждение теоремы следует из предложения 8, поскольку, как нетрудно видеть, $J_{\aleph_0} = B_{\aleph_0}$. Поэтому сразу можем предположить, что $\tau > \omega_0$; ввиду регулярности мощности τ отсюда следует, в частности, что $cf\,\tau \neq cf\,\omega_0$.

Допустим, что пространство X не является B^τ-псевдокомпактным. Тогда существует некоторое отображение $f : X \to B^\tau$, которое невозможно продолжить на βX. Согласно свойствам Стоун-Чеховского расширения, отсюда получаем, что $f(X)$ не содержится ни в каком бикомпакте, в частности, ни в каком B_ξ. Поскольку по определению $cf\,\tau \neq cf\,\omega_0$, найдётся такое число n, что пересечение $L_n \cap (B^\tau \setminus B_\xi) \cap f(X)$ не пусто ни для одного ординала ξ. Зафиксируем этот номер n и обозначим $U^{\xi\eta} = L_n \cap (B^\tau \setminus B_\xi)$.

Из проведённых выше рассуждений следует, что $U^{\xi\eta}$ является открыто-замкнутым в L_n множеством для любых ξ, η, $\xi < \eta$. Учитывая, что L_n – открытое подмножество B^τ, отсюда получаем, что все $U^{\xi\eta}$ открыты и в пространстве B^τ. Поскольку $L_n \cap (B^\tau \setminus B_\xi) \cap f(X) \neq \emptyset$ ни для какого ξ, можем по трансфинитной индукции построить конфинальную τ-последовательность дизъюнктных открыто-замкнутых в L_n множеств $U^{\xi\eta}$, каждое из которых имеет непустое пересечение с $f(X)$. Поскольку мощность τ предполагается регулярной, отсюда следует, что число построенных таким образом $U^{\xi\eta}$ в точности равно τ; с другой стороны, все $U^{\xi\eta}$ открыты в B^τ. Беря прообразы множеств $U^{\xi\eta}$ относительно отображения f, получаем дискретную систему мощности τ непустых открытых подмножеств пространства X. Существование такого семейства подмножеств в X и означает, что пространство X не является псевдо-τ-компактным.

Обратно, пусть пространство X B^τ-псевдокомпактно. Покажем, что тогда оно псевдо-τ-компактно. Согласно лемме для этого достаточно показать, что для любого отображения $f : X \to J_\tau$ образ $f(X)$ содержит точки $\{1_\xi\}$ в числе, меньшем τ. Пусть $f : X \to J_\tau$ – произвольное отображение. Из B^τ-псевдокомпактности пространства X следует, что замыкание образа X при отображении $f : X \to J_\tau$, $J_\tau \subset B^\tau$ в B^τ - бикомпакт. Положим $G = \overline{\cup\{I_\xi : \xi<\tau\}}$ (т.е. G - замыкание в B^τ объединения концов I_ξ всех отрезков ежа J_τ). Тогда пересечение $\overline{f(X)} \cap G$, очевидно, также бикомпактно. Но любое бикомпактное подмножество $C \subset G$ должно содержаться в некотором B_ξ - в самом деле, если C не содержится ни в одном B_ξ , то множества $C \cap (B^\tau \setminus B_\xi) \cap L_\xi$ образуют открытое покрытие множества C , из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Отсюда следует, что образ $f(X)$ не может содержать концов отрезков I_ξ в числе τ ни для одной функции $f : X \to J_\tau$, а следовательно, по лемме, пространство X псевдо-τ-компактно.

Теорема доказана.

Литература

1. Mrowka S. Further results on E-compact spaces. "Acta Math.",1968,v.120,p.161 - 185.
2. Herrlich H. $\mathcal{E}$ -'kompacte Raume"Math. Zeitschrif". 1967,v.96,p.168 - 255.
3. Шостак А.П. О Е-компактных пространствах. ДАН СССР,1972,т.205,№6,с.1310 - 1312.
4. Келли Дж.Л. Общая топология.М.,1968.
5. Isbell J.R. Uniform spaces."Math. Surveys".1964, v.12.

Поступила 27 февраля 1975 года.

УДК 513.83

ТОЧЕЧНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЯ

2

Л.Я. Энгельсон

В настоящей работе строится и изучается новая, точечно-экспоненциальная топология $\wp$ на множестве 2^X всех замкнутых подмножеств топологического пространства (т.п.) (X,τ). Она оказывается сильнее, чем известная экспоненциальная топология Вьеториса η. Доказывается эквивалентность некоторых аксиом отделимости для пространств (X,τ), $(2^X,\eta)$, $(2^X,\wp)$.

В случае, когда X – T_1 – пространство, доказано, что $(2^X,\wp)$ не нормально, если X не счетно компактно и что $(2^X,\wp)$ нульмерно.

Пусть (X,τ) – произвольное т.п.,

$$2^X = \{F : F \subset X \,\&\, \overline{F} = F\}.$$

Как известно (см. [1]), семейство всех множеств вида

$$B = (A_0, A_1, \dots, A_n) = \{F \in 2^X : F \subset A_0 \,\& \\ \& F \cap A_1 \neq \emptyset \,\& \dots \&\, F \cap A_n \neq \emptyset\},$$

где $A_i \in \tau$ $(i=0,1,\dots,n)$, $A_i \subset A_0$ $(i=1,\dots,n)$, $n \in \{0,1,2,\dots\}$, вместе с пустым множеством образует базу экспоненциальной топологии η на пространстве 2^X. В случае $n=0$ под $B(A_0)$ понимается множество $\{F \in 2^X : F \subset A_0\}$. Далее, семейство всех множеств вида $B(A_0)$, где $A_0 \in \tau$, вместе с пустым множеством образует базу $\varkappa$ – топологии [1, стр. 183] на пространстве 2^X.

Рассмотрим семейство всех множеств вида

$$B'(A_0, x_1, \dots, x_n) = \{F \in 2^X : \{x_1, \dots, x_n\} \subset F \subset A_0\}, \quad (1)$$

где $A_0 \in \tau$, $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A_0$, $n \in \{0,1,2,\dots\}$

/При $n=0$ мы имеем в виду $B'(A_0) = \{F \in 2^X : F \subset A_0\}$. /

Поскольку $B'(A_0, x_1, \dots, x_n) \cap B'(B_0, y_1, \dots, y_m) =$

$$= \begin{cases} B'(A_0 \cap B_0, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), & \text{если } \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} \subset A_0 \cap B_0 \\ \emptyset & \text{если } \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} \not\subset A_0 \cap B_0, \end{cases}$$

то семейство всех множеств вида (1) вместе с пустым множеством образует базу некоторой топологии на пространстве 2^X. Эту топологию φ мы и назовем точечно-экспоненциальной.

Займемся изучением т.п. $(2^X, \eta)$, $(2^X, \varkappa)$, $(2^X, \varphi)$.

Предложение 1. $\varkappa \subset \eta \subset \varphi$

Доказательство. Из определений ясно, что $\varkappa \subset \eta$. Нам достаточно показать, что всякий элемент базы топологии η есть множество открытое относительно φ. Действительно, пусть

$$A_0 \in \tau,\ A_i \subset A_0,\ A_i \in \tau\ (i = 1, \dots, n).$$

Тогда $B(A_0, A_1, \dots, A_n) = \bigcap_{i=1}^{n} B(A_0, A_i) =$

$$= \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{x \in A_i} B'(A_0, x) \in \varphi$$

что и требовалось. ○

Введем некоторые обозначения. Следуя [3], будем называть т.п. (X, τ) T_1' - пространством, если $\forall x_1, x_2 \in X$ $[x_1 \in \overline{\{x_2\}} \Rightarrow x_2 \in \overline{\{x_1\}}]$. Эквивалентная формулировка: (X, τ) называется T_1' -пространством, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ из того, что существует окрестность точки x_1, не содержащая точку x_2, следует, что существует окрестность точки x_2, не содержащая x_1.

Т.п. (X, τ) будем называть T_0' -пространством, если всякая непустая разность двух замкнутых подмножеств X содержит некоторое непустое замкнутое подмножество X. Эквивалентная формулировка: (X, τ) - T_0' -пространство, если $\forall G_1, G_2 \in \tau : G_2 \setminus G_1 \neq \emptyset$ имеет место $\exists F : [F = \overline{F} \neq \emptyset\ \&$ $\&\ F \subset G_2 \setminus G_1]$.

/действительно, всякая разность двух замкнутых множеств есть разность двух открытых множеств, - например, их дополнений, - и наоборот/.

Обозначим через $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_0', \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_1', \mathcal{T}_2$ соответственно классы всех топологических T_0-, T_0'-, T_1-, T_1'-, T_2-пространств. Известно, что $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0$. Легко проверяются равенство $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_1' \cap \mathcal{T}_0$ и включение $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_0'$.

Предложение 2. $\mathcal{T}_1' \subset \mathcal{T}_0'$.

Доказательство. Пусть $(X, \tau) \in \mathcal{T}_1'$: $G_1, G_2 \in \tau$, $G_2 \setminus G_1 \neq \emptyset$. Положим $F = \{x_0\}$, где $x_0 \in G_2 \setminus G_1$. Достаточно показать, что $F \subset G_2$. Если $x \in X \setminus G_2$, то $x_0 \in \overline{\{x\}}$, а так как $(X, \tau) \in \mathcal{T}_1'$, то $x \in F$. Предложение 2 доказано.

Замечание. Легко построить примеры, показывающие, что $\mathcal{T}_{0'} \not\subset \mathcal{T}_{1'}$, $\mathcal{T}_{0'} \not\subset \mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_0 \not\subset \mathcal{T}_{0'}$.

Теорема 1. Следующие 4 условия эквивалентны:

/ 1 / $(X, \tau) \in \mathcal{T}_{0'}$

/ 11/ $(2^X, \eta) \in \mathcal{T}_1$

/111/ $(2^X, \xi) \in \mathcal{T}_1$

/1111/ $(2^X, \xi) \in \mathcal{T}_2$

Доказательство.

/1111/ $\Rightarrow$ /111/ - очевидно.

/11/ $\Rightarrow$ /111/ - прямое следствие Предложения 1.

/1/ $\Rightarrow$ /11/. Пусть $F_1, F_2 \in 2^X$, $F_1 \neq F_2$. Очевидно, можно считать $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$. Тогда из условия $(X, \tau) \in \mathcal{T}_{0'}$ следует, что $\exists F \in 2^X \setminus \{\emptyset\} : F \subset F_2 \setminus F_1$. Отсюда $F_1 \in B(X \setminus F) \not\ni F_2$. Кроме того $F_2 \in B(X, X \setminus F_1) \not\ni F_1$. Значит $(2^X, \eta) \in \mathcal{T}_1$.

/1/ $\Rightarrow$ /1111/. Пусть $F_1, F_2 \in 2^X$, $F_1 \neq F_2$. Снова считаем $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$ и имеем $F = \overline{F} \subset F_2 \setminus F_1$, $F \neq \emptyset$. Пусть $p \in F$. Тогда $F_1 \in B'(X \setminus F)$, $F_2 \in B'(X, p)$, причем $B'(X \setminus F) \cap B'(X, p) = \emptyset$. Таким образом, $(2^X, \xi) \in \mathcal{T}_2$.

/111/ $\Rightarrow$ /1/. Пусть $F_1 \subset X$, $F_2 \subset X$, $F_1 = \overline{F_1}$, $F_2 = \overline{F_2}$, $F_2 \setminus F_1 \neq \emptyset$. Покажем, что в случае $F_1 \subset F_2$ существует непустое замкнутое множество $F \subset F_2 \setminus F_1$. Отсюда будет следовать $(X, \tau) \in \mathcal{T}_{0'}$.

Поскольку $(2^X, \xi) \in \mathcal{T}_1$, то существует элемент базы топологии ξ $B'(A_0, x_1, \ldots, x_n)$ такой, что $F_1 \in$ $\in B'(A_0, x_1, \ldots, x_n) \not\ni F_2$. Таким образом, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset$ $\subset F_1 \subset A_0 \subset \tau$, в то время как либо $\{x_1, \ldots, x_n\} \not\subset F_2$, либо $F_2 \not\subset A_0$. Поскольку $F_1 \subset F_2$, то $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset F_2$ и следовательно остается $F_2 \not\subset A_0$. Отсюда и из включения $F_1 \subset A_0$ слэдует, что замкнутое множество $F = F_2 \setminus A_0$ непусто и является подмножеством $F_2 \setminus F_1$.

Теорема 1 доказана.

Докажем теперь одно важное свойство пространства $(2^X, \xi)$

Теорема 2. Пусть $(X, \tau) \in \mathcal{T}_1$. Тогда пространство $(2^X, \xi)$ нульмерно / $\operatorname{ind} 2^X = 0$ /, т.е. существует база топологии ξ, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Напомним, что из этого свойства следует полная регулярность пространства $(2^X, \xi)$ /см. [4], стр. 161/.

Доказательство. Множества вида $B^i(A_0)$, $B^i(X, x)$, где $A_0 \in \tau$, $x \in X$ образуют предбазу топологии ξ, т.к.

$B^i(A_0, x_1, \dots, x_n) = B^i(A_0) \cap B^i(X, x_1) \cap \dots \cap B^i(X, x_n)$.

Из равенства

$$B^i(A_0) = 2^X \setminus \bigcup_{x \in X \setminus A_0} B^i(X, x)$$

следует, что множества $B^i(A_0)$ всегда замкнуты. Пусть теперь $F \in 2^X \setminus B^i(X, x)$, где $x \in X$. Ясно, что $B^i(X, x) \cap B^i(X \setminus \{\bar{x}\}) = \emptyset$, и Теорема 2 будет доказана, если мы покажем, что $F \in B^i(X \setminus \overline{\{x\}})$, т.е. $F \cap \overline{\{x\}} = \emptyset$.

Действительно, пусть $x' \in F$. Тогда из включения $F \in 2^X \setminus B^i(X, x)$ следует $x \in \overline{\{x'\}}$. Поскольку $(X, \tau) \in \mathcal{T}_1$, то $x' \notin \overline{\{x\}}$, что требовалось доказать.

Лемма 1. Пусть (X, τ) - бесконечное дискретное т.п. Тогда пространство $(2^X, \varphi)$ не нормально.

Доказательство. Легко видеть, что при дискретном X имеет место $\varphi \subset \eta$ и значит /Предложение 1 / равенство $\varphi = \eta$. Но для экспоненциальной топологии доказано [5], что 2^X не нормально при бесконечном дискретном X.

Теорема 3. Если $\mathcal{T}_1$ - пространство (X, τ) не счетно-компактно, то $(2^X, \varphi)$ не нормально.

Доказательство. Пусть $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - открытое счетное покрытие пространства X, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Тогда можно считать $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}_{n+1}$, $\mathcal{U}_n \neq \mathcal{U}_{n+1}$ $(n = 0, 1, \dots)$, полагая $\mathcal{U}_0 = \emptyset$. Рассмотрим последова-

тельность $(y_n)_{n\in N},\ y_n \in \mathcal{U}_n \setminus \mathcal{U}_{n-1}\ (n=1,2,\dots)$
и обозначим $Y=\{y_n : n\in N\}$. Пусть τ' - сужение топологии τ на множество Y. Для всякого $n\in N$ y_n есть единственная точка множества Y, содержащаяся в открытом относительно τ множестве $w_n = \mathcal{U}_n \setminus \{y_1,\dots,y_{n-1}\}$. Поэтому пространство (Y,τ') дискретно, и по Лемме 1 $(2^Y, \varphi')$ не нормально, где φ' - точечно-экспоненциальная топология на 2^Y. Теорема 3 будет доказана, если мы покажем, что $(2^Y,\varphi')$ является замкнутым подпространством $(2^X, \varphi)$.

Для всякого $F\in 2^Y$ и любого $x\in X\setminus F$ мы имеем $x\in \mathcal{U}_m$ для некоторого номера m. Но $F\cap \mathcal{U}_m$ конечно и $(X,\tau)\in \mathcal{T}_1$. Таким образом, $x\in \mathcal{U}_m\setminus F\in\tau$. Но x - произвольная точка из $X\setminus F$, и значит $X\setminus F\in\tau$; то есть $F\in 2^X$. Итак, $2^Y\subset 2^X$.

Будем обозначать $B'_Y(Y,y)=\{K: y\in K\subset Y\}$,

$B'_Y(F)=\{K: K\subset F\}$ для $y\in Y,\ F\in\tau$. Соотношения

$$B'_Y(F)=B'\Big(\bigcup_{y_m\in F} w_m\Big)\cap 2^Y \quad \forall F\in\tau',$$
$$B'(A_0)\cap 2^Y = B'_Y(A_0\cap Y) \quad \forall A_0\in\tau,$$
$$B'(X,y)\cap 2^Y = B'_Y(Y,y) \quad \forall y\in Y,$$
$$B'(X,y)\cap 2^Y=\varnothing \quad \forall y\in X\setminus Y$$

показывают, что предбаза топологии φ' индуцирована предбазой топологии φ. Замкнутость множества 2^Y в $(2^X,\varphi)$ следует из равенства

$$2^Y = B'(Y) = 2^X\setminus \bigcup_{x\in X\setminus Y} B'(X,x).$$

Таким образом, $(2^Y,\varphi')$ есть замкнутое подпространство $(2^X,\varphi)$, что и требовалось.

Литература

1. Куратовский К. Топология, т.1. М., "Мир", 1966.
2. Keesling J. Normality and properties related to compactness. - Proc.Amer.Math.Soc., 1970, v. 24, p.760-766.

3. Гольдман М.А. Характеризация некоторых классов топологических пространств, связанная с расходящимися сетями. - "Учен.зап. ЛГУ им.П.Стучки", 1975, т.236. Топологические пространства и отображения в них, вып. 1.

4. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М., "Наука", 1973.

Поступила 12 октября 1975 года

УДК 513.83

УСТОЙЧИВОСТЬ НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧЕЧНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ

2 Л.Я. Энгельсон

Пусть S - топологическое пространство (т.п.), $\mathbb{R}$ - вещественная прямая, $S\times\mathbb{R}$ - их топологическое произведение, $2^{S\times\mathbb{R}}$ - множество всех его замкнутых подмножеств. На $2^{S\times\mathbb{R}}$ рассматриваются $\varkappa$-топология (см. [1] или [4]) и точечно-экспоненциальная топология ξ (см. [4]), а также их сужения $\varkappa_0$, ξ_0 на множество Γ_C графиков всех непрерывных отображений пространства S в $\mathbb{R}$. В пространствах $(\Gamma_C, \varkappa_0)$, (Γ_C, ξ_0) изучается вопрос об устойчивости свойств замкнутости и незамкнутости области значений функции в случае, когда S конечно-связно.

Будем обозначать $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

§ 1. Пространство $(C(S), \varkappa^*)$.

Пусть (S, δ) - т.п., $X = S\times\mathbb{R}$, τ - топология произведения на H. Далее $C(S)$ - множество всех непрерывных отображений пространства S в $\mathbb{R}$; для всякой $\varphi\in C(S)$ $\Gamma(\varphi)$ - график функции φ; $\Gamma_C = \{\Gamma(\varphi) : \varphi\in C(S)\}$. Поскольку $\mathbb{R}$ -хаусдорфово пространство, то $\Gamma_C \subset 2^X$ (см. [1, стр. 148]). Пусть на пространстве 2^X введена $\varkappa$ -топология (см. [1] или [4]), и $\varkappa_0$ - ее сужение на множество Γ_C. Мы полагаем

$$\varkappa^* = \{H : H\subset C(S) \;\&\; \{\Gamma(\varphi) : \varphi\in H\}\in\varkappa_0\}.$$

Ясно, что $\varkappa$ есть топология на $C(S)$, причем семейство всех множеств вида $B_1(A_0) = \{\varphi\in C(S) : \Gamma(\varphi)\subset A_0\}$, где A_0 - любое открытое множество в пространстве $(S\times\mathbb{R}, \tau)$, есть база топологии $\varkappa^*$.

Лемма 1. Если т.п. (S, δ) локально связно, то топология $\varkappa^*$ на пространстве $C(S)$ сильнее, чем топология равномерной сходимости на всем S.

Доказательство. Для всякой $f \in C(S)$ обозначим

$$G_f^+ = \{(s,\tau) \in S \times R : \tau > f(s)\}$$

$$G_f^- = \{(s,\tau) \in S \times R : \tau < f(s)\}$$

Тогда семейство всех множеств вида $B_1(G_g^+ \cap G_h^-)$, где

$$g(s) = \psi(s) - \varepsilon,\ h(s) = \psi(s) + \varepsilon,\ \psi \in C(S),\ \varepsilon > 0,$$

вместе с пустым множеством образует базу топологии равномерной сходимости на всем S. Поэтому достаточно показать, что $\forall f \in C(S)\ G_f^+,\ G_f^- \in \tau$.

Пусть $(s_0, \tau_0) \in G_f^+$. Поскольку $(s_0, \tau_0) \notin \Gamma(f) = \overline{\Gamma(f)}$, то существуют $u \in \delta$ и v, открытое в R , такие, что

$$(s_0, \tau_0) \in u \times v \subset S \times R \setminus \Gamma(f).$$

Воспользовавшись локальной связностью S и R , получаем, что существуют $w \in \delta,\ \tau_1 \in R,\ \tau_2 \in R$, такие, что $s_0 \in$ $\in w \subset u$, w связно, $\tau_0 \in]\tau_1, \tau_2[, [\tau_1, \tau_2] \subset v$. Поскольку $f(s) \neq \tau_1\ \forall s \in w$, $f(s_0) > \tau_1$, f непрерывно, w связно, то $f(s) > \tau_1\ \forall s \in w$, т.е. $w \times]\tau_1, \tau_2[\subset G_f^+$.
Таким образом, $G_f^+ \in \tau$.

Аналогично можно показать, что $G_f^- \in \tau$. Лемма доказана.

Пусть φ - точечно-экспоненциальная топология на $\mathcal{L}^{S \times R}$ (см. [4]), φ_0 - ее сужение на множество Γ_C, φ^* - топология на $C(S)$, определенная равенством

$$\varphi^* = \{H : H \subset C(S)\ \&\ \{\Gamma(\varphi) : \varphi \in H\} \in \varphi_0\}.$$

База топологии φ^* есть семейство всех множеств вида

$$B_1(A_0, (s_1, \tau_1), \ldots, (s_n, \tau_n)) =$$

$$\{\varphi \in C(S) : \Gamma(\varphi) \subset A_0\ \&\ \varphi(s_1) = \tau_1\ \&\ \ldots\ \&\ \varphi(s_n) = \tau_n\},$$

где $A_0 \in \tau,\ s_i \in S,\ \tau_i \in R\ (i = 1, \ldots, n),\ n \in N \cup \{0\}$

Эта топология понадобится нам в следующем параграфе.

§ 2. Устойчивость свойств $\exists$ и $\bar{\exists}$.

Понятие нормальной разрешимости произвольной функции $f: S \to T$, где $(S,\delta), (T,\tau)$ - любые топологические пространства, было впервые изучено в работе [2] . Там же дано необходимое и достаточное условие нормальной разрешимости в случае, когда пространство (T,τ) вполне регулярно: функция $f: S \to T$ нормально разрешима тогда и только тогда, если $f(S) = \overline{f(S)}$ [2, стр.62].

Пользуясь этим критерием, мы будем изучать устойчивость свойства нормальной разрешимости непрерывных отображений в случае, когда $T = \mathbb{R}$, S - конечно-связно.

Мы будем говорить, что функция $f \in C(S)$ обладает свойством $\exists$ тогда и только тогда, если $f(S) = \overline{f(S)}$. Противоположное свойство $f(S) \neq \overline{f(S)}$ мы будем обозначать $\bar{\exists}$.

Посмотрим сначала, как ведут себя свойства $\bar{\exists}$ и $\exists$ относительно различных топологий на пространстве $C(S)$ в случае $S = \mathbb{R}$.

На простом примере $f_1(x) = e^x$ видно, что свойство $\bar{\exists}$ вообще говоря не устойчиво относительно топологии равномерной сходимости на всем $\mathbb{R}$. В самом деле, $f_1(\mathbb{R}) \neq \overline{f_1(\mathbb{R})}$, но для любого $\varepsilon > 0$ мы имеем непрерывную функцию

$$g(x) = \begin{cases} e^x - \frac{\varepsilon}{2} & \text{при } x > \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \\ 0 & \text{при } x \leq \ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \end{cases}$$

для которой $|g(x) - f_1(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}$ и $g(\mathbb{R}) = \overline{g(\mathbb{R})}$. Однако относительно топологии $\varkappa^*$ свойство $\bar{\exists}$ уже обладает устойчивостью, что и утверждает

Теорема 1. Если (S,δ) - конечно-связное т.п., то множество $\Phi = \{\varphi \in C(S) : \varphi(S) \neq \overline{\varphi(S)}\}$ открыто в т.п. $(C(S), \varkappa^*)$.

/Доказательство см. в конце работы/

Обратимся теперь к вопросу об устойчивости свойства $\exists$ в случае $S = \mathbb{R}$. Рассмотрим непрерывную функцию

$$f_0(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x \leq 0 \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{при } x > 1 \end{cases}.$$

Какое бы мы ни зафиксировали открытое множество A_0 на плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, содержащее график функции f_0, удастся так изменить f_0 в окрестности точки $x = 0$, что новая /возмущенная/ функция g останется непрерывной, ее график будет лежать в A_0, но область значений функции g уже не будет замкнута. Таким образом, свойство $\mathcal{F}$ вообще говоря не является устойчивым ни относительно топологии $\varkappa^*$, ни тем более относительно топологии равномерной сходимости на всем $\mathbb{R}$. (см.Лемму 1).

Более того: введем экспоненциальную топологию η^* на пространстве $C(S)$ с базой, состоящей из всевозможных множеств вида $B_2(A_0, A_1, \dots, A_n) =$

$$= \{ \varphi \in C(S) : \Gamma(\varphi) \subset A_0 \,\&\, \Gamma(\varphi) \cap A_1 \neq \emptyset \,\&\, \dots \,\&\, \Gamma(\varphi) \cap A_n \neq \emptyset \},$$

где $A_0, A_1, \dots, A_n \in \tau$, $A_i \subset A_0 \ (i = 1, \dots, n)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ясно, что $\varkappa^* \subset \eta^*$, но тот же пример функций f_c показывает, что при $S = \mathbb{R}$ устойчивость свойства $\mathcal{F}$ относительно η^* не имеет места.

Оказывается, устойчивость свойства $\mathcal{F}$ имеет место относительно топологии ξ^* при некоторых условиях, налагаемых на S, которые выполняются, в частности, и для $S = \mathbb{R}$.

Для множества $K \subset S$ будем обозначать через $\mathring{K}$ множество всех внутренних точек K.

Т.п. S будем называть $\delta \Pi \mathring{K}$-пространством, если существует такая последовательность его псевдокомпактных подмножеств $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathring{K}_n = S$.

<u>Теорема 2.</u> Если (S, δ) - конечно-связное $\delta \Pi \mathring{K}$-пространство, то множество

$$\Psi = \{ \varphi \in C(S) : \varphi(S) = \overline{\varphi(S)} \}$$

открыто в т.п. $(C(S), \xi^*)$

/Доказательство см. в конце работы/

Приведем пример, показывающий, что условие существования счетного покрытия пространства S внутренностями псевдокомпактных множеств в формулировке Теоремы 2 существенно.

Пусть $J =]0, 1]$. Будем обозначать точки декартова произведения $J \times \mathbb{N}$ через $(a; n)$, где $0 < a \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть M - объект, не принадлежащий множеству $J \times \mathbb{N}$.

Через S обозначим тогда множество $(J\times N)\cup\{M\}$ с метрикой, определенной следующим условием:

1) если $s_1\in J\times N$ и $s_1=(a_1;n)$, то $d(s_1,M)=a_1$;

П) если $s_1,s_2\in J\times N$ и $s_1=(a;n), s_2=(b;m)$, то $d(s_1,S_2)=|a-b|$, когда $n=m$, и $d(s_1,s_2)=a+b$, когда $n\neq m$ /S - "счетный еж", см. [3, стр. 88] /.

Тогда S - связное метрическое пространство ([3]). Оно даже сигма-компактно, так как покрывается счетным семейством компактных множеств

$$\{(a;n): a\in J\}\cup\{M\} \quad (n\in N).$$

Однако устойчивость свойства $\exists$ в пространстве $(C(S),\mathcal{E}^*)$ при таком S не имеет места, например,для функции $f_0(S)\equiv 0\ (s\in S)$.

В самом деле, пусть $f_0\in B_1(A_0,(s_1,r_1),\dots,(s_p,r_p))$, где A_0 открыто в топологическом пространстве $S\times R$, $(s_i,r_i)\in A_0\ (i=1,\dots,p)$. Тогда $\Gamma(f_0)\subset A_0$ и $r_i=0\ (i=1,\dots,p)$. В частности $(M,0)\in A_0$. А поскольку A_0 открыто, то

$$\exists\alpha\in]0,1],\beta\in]0,+\infty[:$$

$$\bar K(M,\alpha)\times[-\beta,\beta]\subset A_0\ \&\ s_i\notin\bar K(M,\alpha)\setminus\{M\}\ (i=1,\dots,p),$$

где $\bar K(M,\alpha)=\{s\in S: d(M,s)\leq\alpha\}$.

Для всякого натурального n положим

$$g((a;n))=\begin{cases}0 & \text{при } a\in]0,\frac{\alpha}{3}]\cup[\alpha,1],\\ \frac{n}{n+1}\beta\left(\frac{3a}{\alpha}-1\right) & \text{при } a\in]\frac{\alpha}{3},\frac{2\alpha}{3}],\\ \frac{n}{n+1}\beta\left(3-\frac{3a}{\alpha}\right) & \text{при } a\in]\frac{2\alpha}{3},\alpha].\end{cases}$$

Положим $g(M)=0$.

Тогда $g\in B_1(A_0,(s_1,0),(s_2,0),\dots,(s_p,0))$, но $g(S)=[0,\beta[\neq\overline{g(S)}$, т.е. g не обладает свойством $\exists$.

Для доказательства Теорем 1,2 нам понадобятся три леммы.

<u>Лемма 2.</u> Пусть (S,σ) связно, $f\in C(S)$. Тогда существует множество $E_f\subset S\times R$ такое, что

1) $E_f\in\tau$,

2) $\Gamma(f)\subset E_f$;

3) если $\sup f(s) = +\infty$, то

$$[g\in C(S) \,\&\, \Gamma(g)\subset E_f] \Rightarrow \sup g(S) = +\infty,$$

4) если $\inf f(s) = -\infty$, то

$$[g\in C(S) \,\&\, \Gamma(g)\subset E_f] \Rightarrow \inf g(S) = -\infty$$

Доказательство. Положим

$$E_f = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (f^{-1}(]-\infty, k+1[)\times]k-1, +\infty[) \cap$$

$$\cap \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (f^{-1}(]k-1, +\infty[)\times]-\infty, k+1[),$$

где объединение берется по всем целым k. Свойства 1) и 2) очевидно, выполняются. Пусть теперь $g\in C(S)$, $\Gamma(g)\subset E_f$. Поскольку $f(S)$ – промежуток, то для доказательства свойств 4) и 3) достаточно показать, что

$$[r_0-3, r_0+3]\subset f(S) \Rightarrow r_0\in g(S).$$

Пусть k_0 – такое целое число, что $r_0\in[k_0, k_0+1]$. Поскольку $[r_0-3, r_0+3]\subset f(S)$, то $f^{-1}(]-\infty, k-1[)\neq\emptyset$, Пусть

$$s'\in f^{-1}(]-\infty, k-1[)$$

$$s''\in f^{-1}(]k_0+2, +\infty[).$$

Имеем $(s', g(s'))\in E_f$, $(s'', g(s''))\in E_f$ т.к. $\Gamma(g)\subset E_f$. Но для всякого целого $k > k_0-1$

$$s'\notin f^{-1}(]k-1, +\infty[),$$

а для всякого целого $k < k_0+2$

$$s''\notin f^{-1}(]-\infty, k+1[).$$

Поэтому

$$(s', g(s'))\in \bigcup_{k=-\infty}^{k_0-1} (f^{-1}(]k-1, +\infty[)\times]-\infty, k+1[) \subset$$

$$\subset S\times \bigcup_{k=-\infty}^{k_0-1}]-\infty, k+1[= S\times]-\infty, k_0[,$$

т.е. $g(s') < k_0$. (3)

Аналогично
$$(s'', g(s')) \in \bigcup_{k=k_0+2}^{+\infty} (f^{-1}(]-\infty, k+1[)\times]k-1, +\infty[) \subset$$
$$\subset S \times]k_0+1, +\infty[,$$

т.е. $$g(s'') > k_0 + 1. \qquad (4)$$

Поскольку $\tau_0 \in [k_0, k_0+1]$, то из неравенств (3), (4) непрерывности g и связности S вытекает, что $\tau_0 \in g(S)$, и свойство 3) доказано вместе со свойством 4).

<u>Лемма 3.</u> Пусть (S, δ) связно, $f \in C(S)$. Если $\inf f(S) = a \in \mathbb{R}$ и $a \notin f(S)$, то существует множество $L_f^+(a) \subset S \times \mathbb{R}$ такое, что

1) $L_f^+(a) \in \tau$,
2) $\Gamma(f) \subset L_f^+(a)$,
3) $[g \in C(S) \,\&\, \Gamma(g) \subset L_f^+(a)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [\inf g(S) = a \,\&\, a \notin g(S)]$.

Аналогично, если $\sup f(S) = b \in \mathbb{R}$ и $b \notin f(S)$, то существует множество $L_f^-(b) \subset S \times \mathbb{R}$ такое, что

1') $L_f^-(b) \in \tau$,
2') $\Gamma(f) \subset L_f^-(b)$,
3') $[g \in C(S) \,\&\, \Gamma(g) \subset L_f^-(b)] \Rightarrow$
$\Rightarrow [\sup g(S) = b \,\&\, b \notin g(S)]$.

<u>Доказательство.</u> Если $\inf f(S) = a \in \mathbb{R}$ и $a \notin f(S)$, то положим
$$L_f^+(a) = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (f^{-1}(]a+2^{k-1}, +\infty[) \times]a, a+2^{k+1}[) \cap$$
$$\cap \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (f^{-1}(]a, a+2^{k+1}[) \times]a+2^{k+1}, +\infty[).$$
Свойства 1) и 2) легко проверяются.

Пусть $g \in C(S)$, $\Gamma(g) \subset L_f^+(a)$. Поскольку $L_f^+(a) \cap (S \times \{a\}) = \emptyset$, то $a \in g(S)$.

Пусть $\tau_0 \in \mathbb{R}$ таково, что

$$[a+\frac{1}{8}(r_0-a),\ a+8(r_0-a)]\subset f(S). \qquad (5)$$

Обозначим через k_0 такое целое число, что

$$r_0\in[a+2^{k_0},\ a+2^{k+1}].$$

Поскольку (5),

то $f^{-1}(]a,a+2^{k_0-1}[)\neq\emptyset$ и $f^{-1}(]a+2^{k_0+2},+\infty[)\neq\emptyset$.

Пусть

$$s'\in f^{-1}(]a,\ a+2^{k_0-1}[),$$

$$s''\in f^{-1}(]a+2^{k_0+2},+\infty[).$$

Имеем $(s',g(s'))\in L_f^+(a)$, $(s'',g(s''))\in L_f^+(a)$,

т.к. $\Gamma(g)\subset L_f^+(a)$.

Но для всякого целого $k<k_0+2$

$$s''\notin f^{-1}(]a,a+2^{k+1}[),$$

а для всякого целого $k>k_0-1$

$$s'\notin f^{-1}(]a+2^{k-1},+\infty[).$$

Поэтому

$$(s',g(s'))\in\bigcup_{k=-\infty}^{k_0-1}(f^{-1}(]a+2^{k-1},+\infty[)\times]a,a+2^{k+1}[)\subset$$

$$\subset S\times\bigcup_{k=-\infty}^{k_0-1}]a,a+2^{k+1}[=S\times]a,a+2^{k_0}[,$$

т.е. $\quad g(s')<a+2^{k_0} \qquad (6)$

Аналогично,

$$(s'',g(s''))\in\bigcup_{k>k_0+2}(f^{-1}(]a,a+2^{k+1}[)\times]a+2^{k-1},+\infty[)\subset$$

$$\subset S\times]a+2^{k_0+1},+\infty[,$$

т.е. $\quad g(s'')>a+2^{k_0+1} \qquad (7)$

Поскольку $r_0\in[a+2^{k_0},a+2^{k_0+1}]$, то из неравенств (6), (7), непрерывности g и связности S вытекает, что $r_0\in g(S)$. Но такие числа r_0, что они удовлетворяют включению (5), найдутся в любой окрестности числа a.

Таким образом, $a=\inf g(S)$ и утверждение 3) доказано.

Если $\sup f(S) = b \in \mathbb{R}$ и $b \notin f(S)$, то утверждения 1'), 2'), 3') для множества

$$L_f^-(b) = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (f^{-1}(]-\infty, b-2^{k-1}[) \times]b-2^{k+1}, b[) \cap$$

$$\cap \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (f^{-1}(]b-2^{k+1}, b[) \times]-\infty, b-2^{k-1}[)$$

доказываются аналогично утверждениям 1), 2), 3) для $L_f^+(a)$.

Лемма 4. Пусть (S,δ) -связное $\delta \cap K^o$-пространство. Тогда для любого $a \in \mathbb{R}$ существует множество $M_S^+(a)$ такое, что

1) $M_S^+(a) \in \tau$,

2) $S \times [a, +\infty[\subset M_S^+(a)$,

3) $[g \in C(S) \,\&\, a \in g(S) \,\&\, \Gamma(g) \subset M_S^+(a)] \Rightarrow$
$\Rightarrow \inf g(S) \in g(S)$.

Аналогично, для любого $b \in \mathbb{R}$ существует множество $M_S^-(b)$ такое, что

1') $M_S^-(b) \in \tau$

2') $S \times]-\infty, b[\subset M_S^-(b)$

3') $[g \in C(S) \,\&\, b \in g(S) \,\&\, \Gamma(g) \subset M_S^-(b)] \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup g(S) \in g(S)$.

Доказательство. Пусть, согласно условию Леммы, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - последовательность псевдокомпактных множеств, $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{o}{K}_n = S$. Будем считать эту последовательность неубывающей. Для $a \in \mathbb{R}$ положим

$$M_S^+(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overset{o}{K}_n \times]a - \tfrac{1}{n}, +\infty[).$$

Утверждения 1), 2) легко проверяются. Докажем утверждение 3).

Пусть $g \in C(S)$, $\Gamma(g) \subset M_S^+(a)$, $a \in g(S)$. Обозначим $c = \inf g(S)$. Если $c = a$, то доказывать нечего.

Если же $c < a$, то рассмотрим множество $F = g^{-1}([c, \frac{c+a}{2}])$ и множество $\Gamma(g|_F) = \{(s, g(s)) \in S \times \mathbb{R} : s \in F\}$.

Имеем $\Gamma(g|_F) \subset \Gamma(f) \subset M_S^+(a)$. Следовательно,

$$\Gamma(g|_F) \subset S \times [c, \tfrac{c+a}{2}] \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathring{K}_n \times]a - \tfrac{1}{n}, +\infty[).$$

Но для всякого натурального $n \geq \frac{2}{a-c}$

$$[c, \tfrac{c+a}{2}] \cap]a - \tfrac{1}{n}, +\infty[= \emptyset.$$

Поэтому

$$(S \times [c, \tfrac{c+a}{2}]) \cap \bigcup_{n=\mu+1}^{\infty} (\mathring{K}_n \times]a - \tfrac{1}{n}, +\infty[) = \emptyset,$$

где μ - целая часть числа $\frac{2}{a-c}$.

Воспользовавшись этим равенством, получаем

$$\Gamma(g|_F) \subset (S \times [c, \tfrac{c+a}{2}]) \cap \bigcup_{n=1}^{\mu} (\mathring{K}_n \times]a - \tfrac{1}{n}, +\infty[) \subset$$
$$\subset \bigcup_{n=1}^{\mu} (K_n \times \mathbb{R}) = K_\mu \times \mathbb{R},$$

откуда $F \subset K_\mu$.

Из определения множества F ясно, что $\inf g(F) = \inf g(S) = c$. Следовательно, и $\inf g(K_\mu) = c$. Но K_μ - псевдокомпактное множество. Значит $c \in g(K_\mu) \subset g(S)$, и свойство 3) доказано.

Аналогично доказываются свойства 1'), 2'), 3') для множества

$$M_S^-(b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathring{K}_n \times]-\infty, b + \tfrac{1}{n}[).$$

<u>Доказательство Теоремы 1.</u>

Пусть $f \in \Phi$, $d \in \overline{f(S)} \setminus f(S)$, $f_i = f|_{S_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$, где $S_1, \ldots, S_m$ - компоненты пространства S. Тогда можно выбрать такое $\varepsilon > 0$ и так пронумеровать $S_1, \ldots, S_m$, чтобы выполнились условия

1°) $d = \inf f_i(S_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$

2°) $d = \sup f_i(S_i)$ $(i = k+1, \ldots, \ell)$

3°) $[d-\varepsilon, d+\varepsilon] \cap f_i(S_i) = \emptyset$ $(i = \ell+1, \ldots, m)$.

Согласно Лемме 3 существуют множества $L^{+}_{f_i}(d)$ $(i=1,\dots,k)$ со свойствами 1), 2), 3) и множества $L^{-}_{f_i}(d)$ $(i=k+1,\dots,l)$ со свойствами 1'), 2'), 3') /см.Лемму 3/.

Положим

$$U=B_1\Big(\bigcup_{i=1}^{k}L^{+}_{f_i}(d)\cup\bigcup_{i=k+1}^{l}L^{-}_{f_i}(d)\cup\bigcup_{i=l+1}^{m}\big(S_i\times(\mathbb{R}\setminus[d-\varepsilon,d+\varepsilon])\big)\Big).$$

Тогда $U\in\varkappa^{*}$ /см.свойства 1), 1')/, $f\in U$ /см.свойства 2), 2') в Лемме 3 и условие 3^{0})/, и остается показать, что $U\in\Phi$. В самом деле, пусть $g\in U$, $g_i=g|S_i$ $(i=1,\dots,m)$. Тогда $d\in\overline{g_i(S_i)}\setminus g_i(S_i)$ $(i=1,\dots,l)$ /см.свойства 3), 3') в Лемме 3/, и $[d-\varepsilon,d+\varepsilon]\cap g_i(S_i)=\emptyset$ $(i=l+1,\dots,m)$. Следовательно, $d\in\overline{g(S)}\setminus g(S)$, что и требовалось.

Доказательство Теоремы 2.

Пересечение любого псевдокомпактного множества $K\subset S$ с компонентой S_i пространства S псевдокомпактно / если вещественная функция $\Psi(x)$ непрерывна и неограничена на $K\cap S_i$, то функция $X(x)$, равная $\Psi(x)$ при $x\in K\cap S_i$ и равная нулю при $x\in K\cap S_i$, непрерывная и неограничена на K /. Следовательно, каждая компонента $S_1,\dots,S_m$ есть связное $\delta\,\Pi K^{\circ}$ -пространство.

Пусть $f\in\Psi$, $f_i=f|S_i$ $(i=1,\dots,m)$. Применяя к каждой из непрерывных функций $f_i:S_i\to\mathbb{R}$ в зависимости от ее типа, Лемму 2,3 или 4, будем строить открытые множества $T_i\subset S_i\times\mathbb{R}$ и точки $x_i^{(1)},x_i^{(2)}\in T_i$, следующим образом:

/всюду $a,b\in\mathbb{R}$ /

/А/: $f_i(S_i)=[a,b]\Rightarrow T_i=M^{+}_{S_i}(a)\cap M^{-}_{S_i}(b)$,
$x_i^{(1)}\in f^{-1}(a)\times\{a\}$,
$x_i^{(2)}\in f^{-1}(b)\times\{b\}$;

/Б/: $f_i(S_i)=[a,b[\;\Rightarrow T_i=M^{+}_{S_i}(a)\cap L^{-}_{f_i}(b)$,
$x_i^{(1)}=x_i^{(2)}\in f^{-1}(a)\times\{a\}$;

/В/: $f_i(S_i) =]a, b] \Rightarrow T_i = L^+_{f_i}(a) \cap M^-_{S_i}(b),$
$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} \in f^{-1}(b) \times \{b\};$$

/Г/: $f_i(S_i) =]a, b[\Rightarrow T_i = L^+_{f_i}(a) \cap L^-_{f_i}(b);$

/Д/: $f_i(S_i) =]a, +\infty[\Rightarrow T_i = L^+_{f_i}(a) \cap E_{f_i};$

/Е/: $f_i(S_i) =]-\infty, b[\Rightarrow T_i = L^-_{f_i}(b) \cap E_{f_i}$ и

/Ж/: $f_i(S_i) = [a, +\infty[\Rightarrow T_i = M^+_{S_i}(a) \cap E_{f_i},$
$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} \in f^{-1}(a) \times \{a\};$$

/З/: $f_i(S_i) =]-\infty, b] \Rightarrow T_i = M^-_{S_i}(b) \cap E_{f_i},$
$$x_i^{(1)} = x_i^{(2)} \in f^{-1}(b) \times \{b\};$$

/И/: $f_i(S_i) = \mathbb{R} \Rightarrow T_i = E_{f_i}.$

Положим
$$\mathcal{U} = B_1\left(\bigcup_{i=1}^{m} T_i, x_{i_1}^{(1)}, x_{i_1}^{(2)}, x_{i_2}^{(1)}, \dots, x_{i_r}^{(2)}\right),$$
где $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_r}\}$ - множество всех функций типов /А/, /Б/, /Ж/, /З/, /В/ из $\{f_1, \dots, f_m\}$. Поскольку $\Gamma(f_i) \subset T_i \in \tau$ $(i = 1, \dots, m)$ /см.Леммы 2,3,4 свойства 1), 1'), 2), 2')/ и $x_{i_j}^{(p)} \in \Gamma(f_{i_j})$ $(j = 1, \dots, r)$ $(p = 1, 2)$, то

$$\left\{x_{i_1}^{(1)}, x_{i_1}^{(2)}, x_{i_2}^{(1)}, \dots, x_{i_n}^{(2)}\right\} \subset \Gamma(f) \subset \bigcup_{i=1}^{m} T_i \in \tau,$$

и значит $\mathcal{U}$ есть окрестность точки f в т.п. $(C(S), \varsigma^*)$. Остается показать, что $\mathcal{U} \subset \Psi$. Пусть $g \in \mathcal{U}$, $g_i = g|_{S_i}$ $(i = 1, \dots, m)$. Тогда $\Gamma(g_i) \subset T_i$ $(i = 1, \dots, m)$,

$x_{i_j}^{(p)} \in \Gamma(g_{i_j})$ $(j = 1, \dots, n;\ p = 1, 2)$. Используя свойства 3), 4) из Леммы 2 и свойства 3), 3') из Леммы 3,4, мы получаем следующее:

в случае /А/: $g_i(S_i) = [\inf g_i(S_i), a] \cup f_i(S_i) \cup$
$\cup [b, \sup g_i(S_i)]$;

в случаях /Б/, /Ж/: $g_i(S_i) = [\inf g_i(S_i), a] \cup f_i(S_i)$;

в случаях /В/, /З/: $g_i(S_i) = f_i(S_i) \cup [b, \sup g_i(S_i)]$;

в случаях /Г/, /Д/, /Е/, /И/: $g_i(S_i) = f_i(S_i)$.

Следовательно,

$$g(S) = \bigcup_{i=1}^{m} g_i(S_i) = \bigcup_{i=1}^{m} f_i(S_i) \cup P = f(S) \cup P,$$

где P – объединение конечного числа замкнутых промежутков. Таким образом, $g(S) = \overline{g(S)}$, что и требовалось показать.

Автор выражает благодарность доценту М.А.Гольдману за постановку задачи и руководство и ст.преподавателю А.П.Шостаку за ценные советы.

Литература

1. Куратовский К. Топология, т.1. М., "Мир", 1966.

2. Гольдман М.А. О нормальной разрешимости уравнений. - "Латвийский математический ежегодник", 13. Рига, "Зинатне", 1973.

3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., "Наука", 1974.

4. Энгельсон Л.Я. Точечно-экспоненциальная топология. См.настоящий сборник.

Поступила 12 октября 1975 года

АННОТАЦИИ

УДК 513.83.

Об одном характеристическом свойстве функционально отделимых пространств. Гольдман М.А., с. 3 - 6.

В статье доказывается, что топологическое пространство, удовлетворяющее первой аксиоме отделимости, функционально отделимо в том и только в том случае, когда каждое его компактное подпространство обладает свойством ($\mathcal{U}$), см. статью. Этот результат применяется к вопросу о нормальной разрешимости уравнений в топологических пространствах.

Библиогр. - 3 назв.

УДК 513.881.

Замечание о замкнутых линейных операторах с бесконечномерным ядром. Гольдман М.А., с. 7 - 10.

Пусть T - замкнутый линейный оператор с областью определения $\mathcal{D}(T)$ в банаховом пространстве X и областью значений $\mathcal{R}(T)$ в банаховом пространстве Y ; $\vartheta: \mathcal{D}(\vartheta) \subset X \mapsto Y$ вполне непрерывный оператор, такой, что $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\vartheta)$. Доказывается, что если ядро $\mathcal{N}(T)$ оператора T бесконечномерно, а $\mathcal{R}(T-\vartheta)$ и $\mathcal{R}(T)$ - замкнуты, то $\dim N(T-\vartheta) = \dim \mathcal{N}(T)$ (символ $\dim$ служит для обозначения размерности нормированного пространства, понимаемой как наименьшая из мощностей множеств, линейная оболочка которых плотна в пространстве).

Библиогр. - 2 назв.

УДК 517.43.

О некотрых классах функций нелинейных операторов в банаховых пространствах. Круг Р.Е., Царьков Е.Ф., с. 11 - 25.

В работе доказывается теорема о линеаризации нелинейного оператора с неподвижной точкой (§1), на основании этой теоремы вводится функция нелинейного оператора и

изучаются её свойства (§ 4),обсуждается связь с уже имеющимися результатами.Более подробно рассматриваются дробные степени оператора (§ 3).При помощи методов, основанных на теореме о линеаризации,для специальных классов полугрупп положительно решаются вопросы о существовании производящего оператора и об экспоненциальном представлении полугрупп (§ 5).Полученные результаты применяются к исследованию разностных уравнений.
Библиогр. - 4 назв.

УДК 513.88.
О сравнении некоторых сходимостей линейных отображений.
Лабеев В.И.,с. 26 - 31.

В статье изучается связь между понятиями компактной аппроксимации и секвенциально компактной аппроксимации со сходимостью,которая определяется раствором между графиками линейных отображений,действующих в банаховых пространствах.
Библиогр. - 3 назв.

УДК 513.88.
Об оценке норм линейных возмущений при секвенциально компактной аппроксимации.Лабеев В.И.,с. 32 - 36.

В статье получены оценки норм степеней линейных непрерывных возмущений,при которых сохраняются свойства изоморфности,а также доказана устойчивость некоторых свойств спектра линейных непрерывных и линейных замкнутых отображений и устойчивость замкнутости области значений линейного замкнутого отображения при секвенциально компактной аппроксимации в случае бесконечномерного ядра возмущаемого отображения.
Библиогр. - 6 назв.

УДК 513.88.
Об одном обобщении понятия секвенциально компактной аппроксимации отображений.Левченков В.С.,с. 37 .- 45.

В статье обобщается понятие компактной аппроксимации и доказывается несколько теорем об устойчивости размер-

ности ядер и областей значений линейных отображений при вводимой сходимости.
Библиогр. - 4 назв.

УДК 513.88.
Новые топологии, в которых предел последовательности компактных отображений является компактным отображением. Лиепиньш А.Х., с. 46 - 51.

В работе доказывается компактность предела последовательности линейных компактных отображений в некоторой топологии, более слабой, чем топология равномерной сходимости на всех ограниченных множествах
Библиогр. - 4 назв.

УДК 519.45
Об алгебраических элементах в линейных алгебрах Ли. Липянский Р.С., с. 52 - 63.

В статье доказывается существование локально разрешимого радикала, состоящего из алгебраических (нильпотентных) элементов и локально нильпотентного радикала, состоящего из алгебраических элементов линейной алгебры Ли над полем характеристики нуль. Рассматриваются вопросы о характеристичности этих радикалов в некоторых классах алгебр Ли, изучается строение введённых радикалов в локально разрешимых алгебрах Ли.
Библиогр. - 9 назв.

УДК 519.45
Об одной теореме Амицура.
Липянский Р.С., с. 64 - 67.

В статье изучается строение обобщённо лиевого разрешимых алгебр (ассоциативных) над полями нулевой характеричтики. Доказывается, что такие алгебры являются расширением верхнего нильрадикала с помощью абелевой алгебры.
Библиогр. - 4 назв.

УДК 519.2.
Устойчивость решений линейных разностных схем со случайными коэффициентами в пространстве ℓ_2.
Свердан М.Л., Царькова В.Н., с. 68 - 75.

В работе получены условия асимптотической устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения линейных разностных схем со случайными коэффициентами.
Библиогр. - 2 назв.

УДК 519.2.
Об устойчивости решений линейных стохастических дифференциальных уравнений. Царьков Е.Ф., с. 76 - 87.

В работе получены необходимые и достаточные условия асимптотической экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения линейных систем стохастических дифференциальных уравнений, описывающих однородный марковский процесс в R^n. Полученные результаты позволяют в случае скалярных уравнений n -порядка сформулировать коэффициентный критерий устойчивости.
Библиогр. - 8 назв.

УДК 513.83.
О тесноте, π -весе и близких к ним понятиях. Аксиома Мартина и её топологические следствия.
Шапировский Б.Э., с. 88 - 99.

Исследуются кардинальные инварианты, близкие к тесноте в их зависимости от π-веса и π -характера топологического пространства. Ряд новых результатов получен также в предположении аксиомы Мартина.
Библиогр. - 13 назв.

УДК 513.83.
О классах $\mathcal{E}$ - псевдокомпактности.
Шостак А.П., с. 100 - 120.

Вводится понятие $\mathcal{E}$ -псевдокомпактности (где $\mathcal{E}$ обозначает некоторый класс хаусдорфовых пространств). В теории $\mathcal{E}$ -компактных пространств это понятие играет роль, подобную той, которую играет понятие псевдокомпактности при

изучении реально компактных пространств. Некоторые конкретные классы пространств характеризуются как классы $\mathcal{E}$ -псевдокомпактности.
Библиогр.- 5 назв.

УДК 513.83.
Точечно-экспоненциальная топология.
Энгельсон Л.Я.,с. 121 - 126.

В настоящей работе строится и изучается новая точечно-экспоненциальная топология,которая сильнее, чем известная экспоненциальная топология Вьеториса.
Библиогр. - 4 назв.

УДК 513.83.
Устойчивость нормальной разрешимости непрерывных отображений относительно точечно-экспоненциальной топологии.
Энгельсон Л.Я.,с. 127 - 139.

Изучается новая топология на пространстве экспоненты 2^X,доказывается устойчивость свойства нормальной разрешимости непрерывных отображений относительно этой топологии.
Библиогр. - 4 назв.

ANNOTATIONS

On a characteristic property of functionally separated spaces. Goldman M.A. p. 3-6.

It is proved, that a first countable topological space is functionally separated iff every its compact subspace has property $(\mathcal{U})$, defined in the paper. This result is used to study the problem of normal solvability of equations in topological spaces.

Bibliography - 3 names.

A note on closed linear operators with an infinite dimensional kernel. Goldman M.A., p. 7-10.

Let T denote a closed linear operator defined on $\mathcal{D}(T) \subset X$ with image $R(T) \subset Y$ (X and Y - Banach Spaces) and $\vartheta : \mathcal{D}(\vartheta) \subset X \mapsto Y$ - a completelly continuous linear operator, such that $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(\vartheta)$. It is proved that if the kernel $\mathfrak{N}(T)$ has infinite dimensiona and both $\mathcal{R}(T)$ and $\mathcal{R}(T-\vartheta)$ are closed, than $\widetilde{\dim}\, \mathfrak{N}(T) = \widetilde{\dim}\, \mathfrak{N}(T-\vartheta)$, where $\widetilde{\dim}\, E$ denotes a dimension of a normed space, defined as the least cardinal of a subset, the linear shell of which is dence in the space E .

Bibliography - 2 names.

On some classes of functions of linear operators in Banach spaces. Krug R., Carkov J.F., p. 11-25.

A theorem on linearization of a non-linear operator with a fixed point is proved. Based on this result a function of a nonlinear operator is defined and its properties are studied. Some connections with known resultes are discussed. This resultes are also used to study difference equations.

Bibliography - 3 names

Comparing of some convergences of linear mappings. Labejev V.I., p. 26-31.

The connections between the notions of compact approximation and sequentially compact approximation from one side and so called distance covergence from the other are studied in the paper.

Bibliography - 3names.

On the norm vertification of linear perturbations under sequentially compact approximation. Labejev V. 32-36

Some vertifications of linear perturbations are got. It is also proved, that some properties of spector are stabile under the sequentially compact approximation.

Bibliography - 6 names.

On a generalization of compact approximation of mappings. Levčenkov V.S., p. 37 - 46.

A generalization of the notion of compact approximation of mappings is introduced and studied. It is proved that the dimension of kernels of linear continuous mappings is semistabile under this approximation.

Bibliography - 4 names.

New topologies in which the limit of a compact mappings sequence is a compact mapping. Liepinš A.H. p. 46 - 51

It is proved, that the limit of a sequence of compact linear mappings is compact when the space is endowed with a new topology $\mathfrak{z}'$ weaker than the usual topology of uniform convergence on all bounded sets.

Bibliography - 4 names.

On algebraic elements in linear Lie algebras. Lipjansky R.S., p. 52 - 64.

The existence of 3 radicals in Lie algebras over the fields of zero characteristics is proved a locally solvable radical consisting of algebraic (or nilpotent) elements and a locally nilpotent radical, consisting of algebraic elements. The structure of this radicals in locally solvable Lie algebras is studied.

Bibliography - 9 names.

On a theorem of Amitsura. Lipjansky R.S., p.64-68.

The structure of generalized Lie solvable associative algebras over zero-characteristics fields is investigated. It is proved that such algebras are extensions of an upper nil-radical by means of Abel algebras.

Bibliography - 4 names.

The stability of solutions of linear differential systems with ℓ_2. Sverdan M., Carkova V., p.69-75.

Some conditions for an assimptotic stability of a trivial solution of linear differential systems with

Bibliography - 2 names.

On the stability of solutions of linear stohastic differential equations. Cárkov E.F., p. 76-87.

The paper contents necessary and sufficient conditions for the stability of a trivial solution of linear systems of stohastic differential eguations, which describe a homogeneous Markov's process in .

Bibliography - 8 names.

On tightness, π-weight and connected notions. Martin's Axiom and its topological consequences. Šapirovsky B.E., p.88-109

Topological cardinal invariants like tightness are studied in connection with π-weight and π-character. Some new resultes are got under the assumption of Martins Axiom.

Bibliography - 13 names.

On classes of $\mathcal{E}$-pseudocompactness. Šostak A.P., p. 100-120.

A notion of $\mathcal{E}$-pseudocompactness (where $\mathcal{E}$ denotes a class of Hausdorff spaces) is introduced. In the theory of $\mathcal{E}$-compact spaces (in Herrlich's sence) this conception plays a role similar to that of pseudocompactness in the theory of realcompact spaces. Some classes of topological spaces are characterized as classes of $\mathcal{E}$-pseudocompactness for special .

Bibliography - 5 names.

On point-exponential topology. Enngelson L.,p.121-127.

A new topology p on the hyperspace 2^X of all closed subsets of space X constructed and investigated. This topology is stronger than the usual exponential Vietoris topology.

Bibliography - 4 names.

The stability of normal solvability of continuous mappings in the point-exponential topology. Engelson L.J., p.127-139.

The stability of normal solvability of continuous mappings in the point-exponential topology (constructed in the previous paper) is proved.

Bibliography - 4 names.

СОДЕРЖАНИЕ

Ученые записки, том 257

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ В НИХ
Выпуск 2

Редакторы Е.Энгельсон, Т.Фадеева
Технический редактор В.Лабеев
Корректор А.Шостак

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1976

Подписано к печати I2.II.1976. ЯТ I2278. Зак.№ 1333.
Бумага №I. Ф/б 60x84/I6. Физ.п.л. 9,8. Уч.-и.л. 7,2
Тираж 290 экз. Цена 72 к.

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки