ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

[Сборник научных работ аспирантов и молодых сотрудников]

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сборник научных работ аспирантов и молодых сотрудников

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1974

где $U_{n+N} \underset{n}{\equiv} U_n$, является решением однородной системы (2). В выборе x_0 имеется некоторый произвол, а именно, если x_0 - характеристический показатель системы (2), то $x_0' = x_0 \exp(2\pi i \omega / N)$, где $\omega = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, тоже является характеристическим показателем системы (2). Действительно, пусть $y_n = x_0^n U_n$ - решение системы (2), причем $U_{n+N} \underset{n}{\equiv} U_n$. Тогда $y_n = [x_0']^n W_n$ - тоже решение системы (2), если $W_n = \exp(-2\pi i \omega n / N) U_n$. Определим постоянную матрицу L выражением

$$L = U^{\frac{1}{N}}.$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Л е м м а I. Каждому собственному значению матрицы L отвечают решения вида (3). Все эти собственные значения являются характеристическими показателями однородной системы (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем матрицу K_n, определив ее формулой

$$K_n = Y_n L^{-n}, \tag{4}$$

где $Y_n = A_{n-1} A_{n-2} \ldots A_0$. Матрица K_n является периодической с периодом N, т.е. $K_{n+N} \underset{n}{\equiv} K_n$. Действительно, $K_{n+N} = Y_{n+N} L^{-(n+N)}$. Поскольку $Y_{n+N} = Y_n Y_N$, то имеем

$$K_{n+N} = Y_n Y_N L^{-n} L^{-N} = Y_n Y_N Y_N^{-1} L^{-n} = K_n.$$

Таким образом, для фундаментальной матрицы решений однородной системы (2) имеем

$$Y_n = K_n L^n, \tag{5}$$

где $K_{n+N} \underset{n}{\equiv} K_n$. Пусть ϑ - собственное значение матрицы L, a - собственный вектор, т.е. $(L-\vartheta)a=0$. Тогда решение системы (2) с начальными условиями $y_0=a$ удовлетворяет соотношению

$$y_n = Y_n y_0 = K_n L^n a = K_n \vartheta^n a = \vartheta^n u_n,$$

где $u_n = K_n a$ и $u_{n+N} \underset{n}{\equiv} u_n$. Значит ϑ - характеристический показатель однородной системы (2). Обратно, пусть найдено решение системы (2) вида (3), т.е. $\varkappa_0$ - характеристический показатель. Тогда из выражения (3) имеем $y_N = \varkappa_0^n y_0$, значит число $\rho = \varkappa_0^N$ - мультипликатор однородной системы (2). По предположению матрица L имеет по крайней мере одно собственное значение $\varkappa_0 = \rho^{1/N}$. Лемма доказана.

В работе [2] показано, что неоднородная система (I) имеет единственное периодическое решение тогда и только тогда, когда однородная система (2) не имеет других периодических решений с периодом N, кроме нулевого, что эквивалентно условию $\det(E-V) \neq 0$, где $V = X_N$. Единственное периодическое с периодом N решение системы (I) тогда может быть записано в виде

$$x_n = \sum_{j=1}^{N} G_{n,j} f_j, \tag{6}$$

где

$$G_{n,j} = X_{n,0}(E-X_{N,0})^{-1} X_{N,j} + X_{n,j}, \quad j \leq n,$$

$$G_{n,j} = X_{n,0}(E-X_{N,0})^{-1} X_{N,j}, \quad n < j \leq N.$$

Если однородная система (2) допускает k линейно независимых периодических с периодом N решения, то [2] и сопряженная система

$$Z_{n-1} = Z_n A_{n-1} \tag{7}$$

имеет κ линейно независимых периодических решений. В этих условиях неоднородная система (I) имеет периодические решения тогда и только тогда, когда для каждого периодического решения сопряженной системы (7) выполнено условие

$$\sum_{h=1}^{N} Z_{hj} f_h = 0, \; j = 1, 2, \ldots, \kappa. \tag{8}$$

Введем векторы $\{V_{nj}\}$, $\{W_{nj}\}$, $j = 1, 2, \ldots, \kappa$, определенные условиями

$$\det\left[\sum_{h=1}^{N} V_{h\ell} y_{hj}\right]_1^{\kappa} \neq 0, \; \det\left[\sum_{h=1}^{N} Z_{h\ell} W_{hj}\right]_1^{\kappa} \neq 0, \tag{9}$$

где $V_{n+Nj} \underset{n}{\equiv} V_{nj}$, $W_{n+Nj} \underset{n}{\equiv} W_{nj}$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, \kappa$.

Л е м м а 2. Если выполнены условия (8) и условия

$$\sum_{h=1}^{N} V_{hj} x_h = 0, \; j = 1, 2, \ldots, \kappa, \tag{10}$$

то неоднородная система (I) имеет единственное периодическое с периодом N решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\overset{\circ}{x}_n$ - некоторое частное периодическое с периодом решение системы (I). Тогда

$$y_n = x_n - \overset{\circ}{x}_n,$$

где x_n - произвольное периодическое решение системы (I), является периодическим с периодом N решением однородной системы (2). Поскольку любое периодическое решение однородной системы (2) представляется в виде

$$y_n = \sum_{j=1}^{K} \alpha_j y_{nj},$$

где $\{y_{nj}\}$ - линейно независимые решения системы (2), α_j - произвольные числа, то имеем

$$x_n = x_n^{\circ} + \sum_{j=1}^{K} \alpha_j y_{nj}. \qquad (II)$$

Умножим обе части равенства (II) слева на каждое V_{hl} и просуммируем по h от I до N, тогда получим

$$\sum_{j=1}^{K} \Big(\sum_{h=1}^{N} V_{hl} y_{hj} \Big) \alpha_j + \sum_{h=1}^{N} V_{hl} x_h^{\circ} = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, K.$$

Если выполнены условия (9), то числа α_j можно найти однозначно из соотношения

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_K \end{pmatrix} = - \left(\Big[\sum_{h=1}^{N} V_{hl} y_{hj} \Big]_1^K \right)^{-1} \Big[\sum_{h=1}^{N} V_{hl} x_h^{\circ} \Big]_1^K. \qquad (I2)$$

Таким образом, периодическое решение x_n неоднородной системы в случае, когда

$$\det (E - V) = 0,$$

определяется единственным образом из уловий (I0). Лемма доказана.

Следуя соотношению (6), обозначим это единственное периодическое решение неоднородной системы (I) через

$$x_n = G_n f_n. \qquad (I3)$$

Определим оператор R_n выражением

$$R_n f_n = f_n - \sum_{j=1}^{k} \beta_j w_{nj}, \tag{I4}$$

где β_j - произвольные постоянные.

Пусть дана неоднородная система

$$x_{n+1} = A_n x_n + R_{n+1} f_{n+1}, \tag{I5}$$

где $x_n \in C^m$, $A_{n+N} \underset{n}{\equiv} A_n$, $f_{n+N} \underset{n}{\equiv} f_n$.

Л е м м а 3. Если выполнены условия

$$\sum_{h=1}^{N} z_{hj} R_h f_h = 0, \tag{I6}$$

для каждого периодического решения z_{nj}, $j = 1, 2, \dots, k$ сопряженной системы (7), то для любого периодического вектора f_n существует периодическое с периодом N решение системы (I5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если периодический вектор f_n удовлетворяет условию (8), то [2] периодическое решение системы (I5) существует. Предположим, что f_n не удовлетворяет условию (8). Умножим обе части равенства (I4) слева на каждое периодическое решение сопряженной системы (7) и просуммируем по h от I до N, тогда, если выполняется условие (I6), будем иметь

$$\sum_{h=1}^{N} z_{hl} f_h - \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{h=1}^{N} z_{hl} w_{hj} \Big) \beta_j = 0, \quad l = 1, 2, \dots, k.$$

Если выполнены условия (9), то числа β_j определяются единственным образом из соотношения

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \Big(\Big[\sum_{h=1}^{N} z_{hl} w_{hj} \Big]_1^k \Big)^{-1} \Big[\sum_{h=1}^{N} z_{hl} f_h \Big]_1^k . \tag{I7}$$

Таким образом, $R_n f_n$ определяется единственным образом. Положив $R_{n+1} f_{n+1} = \varphi_{n+1}$, где $\varphi_{n+N} \equiv \varphi_n$ и применяя теорему о существовании периодического решения [2] к неоднородной системе

$$x_{n+1} = A_n x_n + \varphi_{n+1}, \tag{I8}$$

получим утверждение леммы.

Из определения оператора R_n следует, что соотношение (8) и выражение

$$R_n f_n = f_n \tag{I9}$$

равносильны.

Если же в дополнение к условиям (I6) для периодического решения с периодом N системы (I5) x_n выполнены условия (I0), то, применяя лемму 2, получим, что это периодическое решение x_n системы (I5) определяется единственным образом условиями (I0). Обозначим это единственное решение следующим образом (см.(6)):

$$x_n = G_n R_n f_n. \tag{2I}$$

Рассмотрим теперь систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = (A + \varepsilon B_n) x_n, \tag{22}$$

где $x_n \in C^m$, $B_{n+N} \equiv B_n$, $\varepsilon > 0$, A - постоянная матрица $m \times m$. Для этой системы $X_n(\varepsilon)$ - фундаментальная матрица решений, $U(\varepsilon)$ - матрица монодромии.

Пусть система (22) при $\varepsilon = 0$

$$x_{n+1} = A x_n \tag{23}$$

имеет k -кратный характеристический показатель $\varkappa_0$. Как показано выше, характеристический показатель $\varkappa_0$ является собственным значением матрицы $L = [U(0)]^{\frac{1}{N}}$. Поскольку $U(0) = A^N$, то для каждого характеристического показателя $\varkappa_0$ системы (23) всегда найдется собственное значение λ_0 матрицы A такое, что $\lambda_0 = \varkappa_0 \exp(2\pi i \omega/N)$, где $\omega = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. По предположению, $\varkappa_0$ - k - кратный характеристический показатель, значит ему соответствует класс собственных значений матрицы A вида

$$\lambda_j = \varkappa_0 \exp(2\pi i \omega_j/N), \tag{24}$$

где $\omega_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots, k$.

Назовем $\varkappa_0$ - k - к р а т н ы м х а р а к т е р и с т и ч е с к и м п о к а з а т е л е м п р о с т о г о т и п а, если каждому собственному значению λ_j вида (24) отвечают простые элементарные делители. Будем в дальнейшем изучать только такие характеристические показатели.

Произведем в системе (23) замену переменной

$$x_n = \varkappa_0^n y_n. \tag{25}$$

В итоге получим систему

$$y_{n+1} = \varkappa_0^{-1} A y_n, \tag{26}$$

которая, как легко видеть, имеет k линейно независимых периодических с периодом N решения

$$y_{nj} = \exp(2\pi i \omega_j n/N) a_j, \; j = 1, 2, \ldots, k, \tag{27}$$

где a_j - собственные векторы матрицы A. Соответственно сопряженная система

$$z_{n-1} = z_n x_0^{-1} A \tag{28}$$

тоже имеет [2] k линейно независимых периодических с периодом N решения

$$z_{nj} = \exp(2\pi i \omega_j n/N)\, b_j \,, \; j = 1,2,\dots k, \tag{29}$$

где b_j - собственные вектор-строки матрицы А.

Рассмотрим неоднородную систему

$$x_{n+1} = x_0^{-1} A x_n = f_{n+1}, \tag{30}$$

где $f_{n+N} \underset{n}{\equiv} f_n$.

Выберем собственные векторы a_j матрицы А, соответствующие собственным значениям вида (24) так, чтобы были выполнены условия нормировки $b_\ell a_j = \delta_{j\ell}$, где $j, \ell = 1,2,\dots,k$. Учитывая выражения (27) и (29), получим

$$\sum_{h=1}^{N} z_{h\ell}\, y_{hj} = \delta_{j\ell}\,, \quad j,\ell = 1,2,\dots,k. \tag{31}$$

Пусть также выполнены соотношения

$$v_{nj} = z_{nj}\,,\; w_{nj} = y_{nj}\,, \quad j = 1,2,\dots,k.$$

Тогда, если выполнены условия

$$\sum_{h=1}^{N} z_{hj} f_h = 0\,, \quad j = 1,2,\dots,k, \tag{32}$$

где z_{nj} определены выражением (29), то неоднородная система (30) имеет периодические с периодом N решения. Если, к тому же, для периодического решения x_n системы (30) выполнены условия

$$\sum_{h=1}^{N} z_{hj} x_h = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \kappa, \tag{33}$$

то это x_n - единственное периодическое решение системы (30) причем числа α_j можно найти из соотношения

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\kappa \end{pmatrix} = -\left(\left[\sum_{h=1}^{N} z_{h\ell} y_{hj}\right]_1^\kappa\right)^{-1} \left[\sum_{h=1}^{N} z_{h\ell} x_h^0\right]_1^\kappa .$$

Оператор R_n определяется тогда выражением

$$R_n f_n = f_n - \sum_{j=1}^{\kappa} \left(\sum_{h=1}^{N} z_{h\ell} f_h\right) y_{nj}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, \kappa, \tag{34}$$

причем

$$R_n y_{nj} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \kappa. \tag{35}$$

В выражении (21), которое справедливо и для единственного периодического решения неоднородной системы

$$x_{n+1} = x_0^{-1} A x_n + R_{n+1} f_{n+1}, \tag{36}$$

оператор G_n можно определить следующим образом. Пусть x_n' - произвольное решение системы (36). Тогда оператор G_n определяется выражением

$$G_n R_n f_n = x_n' - \sum_{j=1}^{\kappa} \left(\sum_{h=1}^{N} z_{h\ell} x_h'\right) y_{nj}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, \kappa. \tag{37}$$

Положив x_n равным правой части выражения (37) и подставив в (36), получим, что x_n является решением системы (36), $x_{n+N} \underset{n}{\equiv} x_n$ и выполнено условие (31).

Т е о р е м а. Пусть система разностных уравнений (22) при $\varepsilon = 0$ имеет κ -кратный характеристический показатель простого типа. Тогда система (22) имеет ровно характеристических показателей

$$\varkappa_j = \varkappa_j(\varepsilon), \ j = 1, 2, \dots, \kappa,$$

где $\varkappa(0) = \varkappa_0$. Причем каждый из них можно представить выражением

$$\varkappa_j(\varepsilon) = \varkappa_0(1 + \varepsilon \nu_j) + o(\varepsilon), \tag{38}$$

где ν_j - корни уравнения

$$\det\left(\left[\sum_{h=1}^{N} z_{h\ell} B_{h-1} y_{h-1\,j}\right]_1^{\kappa} - \nu E\right) = 0. \tag{39}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Произведем в системе (22) замену переменной

$$x_n = \varkappa^n(\varepsilon)\, \tilde{x}_n, \tag{40}$$

где $\tilde{x}_{n+N} \underset{n}{\equiv} \tilde{x}_n$. Тогда получим систему

$$\tilde{x}_{n+1} = \varkappa_0^{-1} A \tilde{x}_n + \left[(\varkappa^{-1} - \varkappa_0^{-1})A + \varepsilon \varkappa^{-1} B_n\right]\tilde{x}_n, \tag{41}$$

где $\varkappa_0 = \varkappa(0)$. Поскольку эта система имеет периодическое с периодом N решение, то [2] для каждого периодического решения (29) сопряженной системы (28) выполняется условие

$$\sum_{h=1}^{N} z_{h\ell}\left[(\varkappa^{-1} - \varkappa_0^{-1})A + \varepsilon \varkappa^{-1} B_{h-1}\right]\tilde{x}_{h-1} = 0, \ \ell = 1, 2, \dots, \kappa. \tag{42}$$

Пусть выполнено (31) и оператор R_n определен выражением (34), тогда условие (42) равносильно выражению

$$R_n[(x^{-1}-x_0^{-1})A+\varepsilon x^{-1}B_n]\tilde{x}_n=$$
$$=[(x^{-1}-x_0^{-1})A+\varepsilon x^{-1}B_n]\tilde{x}_n.$$

Отсюда следует, что система

$$\tilde{x}_{n+1}-x_0^{-1}A\tilde{x}_n=R_n[(x^{-1}-x_0^{-1})A+\varepsilon x^{-1}B_n]\tilde{x}_n \quad (43)$$

равносильна системе (41).

Если $\tilde{x}_n^0$ - некоторое частное периодическое решение системы (43), то (см.лемму 2) любое периодическое решение этой системы можно представить в виде выражения

$$\tilde{x}_n=\tilde{x}_n^0+\sum_{j=1}^{K}\gamma(\varepsilon)\,y_{nj}, \quad (44)$$

где $\{y_{nj}\}$ - периодические решения однородной системы (26), определенные выражением (27). Следует отметить, что частное периодическое решение $\tilde{x}_n^0$ можно определить, следуя лемме 2, единственным образом из условия

$$\sum_{h=1}^{N}z_{hj}\tilde{x}_h^0=0,\ j=1,2,\dots,K. \quad (45)$$

Подставим в левую часть системы (43) выражение (44), в итоге имеем

$$\tilde{x}_{n+1}^0-x_0^{-1}A\tilde{x}_n^0=R_n[(x^{-1}-x_0^{-1})A+\varepsilon x^{-1}B_n]\tilde{x}_n. \quad (46)$$

Если условие (45) выполнено, то система (46) имеет единственное периодическое с периодом N решение, которое, следуя (21), можно представить в виде.

$$\tilde{x}_n^{\circ} = G_n R_n [(x^{-1} - x_0^{-1})A + \varepsilon x^{-1} B_n] \tilde{x}_n . \qquad (47)$$

Подставив выражение (47) в соотношение (44), получим в итоге

$$(E - G_n R_n [(x^{-1} - x_0^{-1})A + \varepsilon x^{-1} B_n]) \tilde{x}_n = \sum_{j=1}^{K} \gamma_j(\varepsilon) y_{nj} . \qquad (48)$$

Запишем это выражение в виде

$$\tilde{x}_n = (E - G_n R_n [(x^{-1} - x_0^{-1})A + \varepsilon x^{-1} B_n])^{-1} \sum_{j=1}^{K} \gamma_j(\varepsilon) y_{nj} , \qquad (49)$$

т.к. при достаточно малом ε разность $x^{-1} - x_0^{-1}$ может быть сделана сколь угодно малой. Подставив выражение (49) в условие (42), получим

$$\sum_{j=1}^{K} \left(\sum_{h=1}^{N} z_{hl} [(x^{-1} - x_0^{-1})A + \varepsilon x^{-1} B_{h-1}] (E - G_{h-1} R_{h-1} [(x^{-1} - x_0^{-1})A + \varepsilon x^{-1} B_{h-1}])^{-1} y_{h-1,j} \right) \gamma_j = 0 \qquad (50)$$

Система (50) допускает ненулевое решение

$$\begin{pmatrix} \gamma_1(\varepsilon) \\ \vdots \\ \gamma_K(\varepsilon) \end{pmatrix} \neq 0$$

тогда и только тогда, когда

$$\det \left[\sum_{h=1}^{N} z_{hl} [(x^{-1} - x_0^{-1})A + \varepsilon x^{-1} B_{h-1}] (E - G_{h-1} R_{h-1} [(x^{-1} - x_0^{-1})A + \varepsilon x^{-1} B_{h-1}])^{-1} y_{h-1,j} \right]_1^K = 0 \qquad (51)$$

Выделим лишь члены первого порядка по ε. Для этого вначале представим соотношение (51) в виде

$$\det\Big[(x^{-1}-x_0^{-1})\sum_{h=1}^{N} z_{he} A\, y_{h-1j} + \varepsilon x^{-1}\sum_{h=1}^{N} z_{he} B_{h-1} y_{h-1j} +$$

$$+ (x^{-1}-x_0^{-1})^2 \sum_{h=1}^{N} z_{he} A G_{h-1} R_{h-1} A\, y_{h-1j} + (\varepsilon x^{-1})^2 \sum_{h=1}^{N} z_{he} B_{h-1} G_{h-1} R_{h-1} B_{h-1} y_{h-1j} +$$

$$+ \varepsilon x^{-1}(x^{-1}-x_0^{-1})\sum_{h=1}^{N} z_{he}\left(A G_{h-1} R_{h-1} B_{h-1} + B_{h-1} G_{h-1} R_{h-1} A\right) y_{h-1j} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{N} z_{he}\left[(x^{-1}-x_0^{-1})A + \varepsilon x^{-1} B_{h-1}\right]\times$$

$$\times \sum_{\sigma=2}^{\infty}\left(G_{h-1} R_{h-1}\left[(x^{-1}-x_0^{-1})A + \varepsilon x^{-1} B_{h-1}\right]\right)^{\sigma} y_{h-1j}\Big]_1^{K} = 0.$$

Произведем замену переменной

$$\varepsilon \nu = x_0^{-1} - x^{-1}. \tag{52}$$

Тогда, учитывая (31), получим

$$\det\left(x_0^{-1} M - \nu E + \varepsilon S(\varepsilon, \nu)\right) = 0, \tag{53}$$

где $M = \left[\sum_{h=1}^{N} z_{he} B_{h-1} y_{h-1j}\right]_1^{K}$,

$$S(\varepsilon,\nu) = -\nu\left[\sum_{h=1}^{\tilde{n}} Z_{he} B_{h-1} y_{h-1j}\right]_1^k + \varepsilon\,\Psi(\varepsilon,\nu),$$

$\Psi(\varepsilon,\nu)$ - матрица-функция $k \times k$.

Пусть уравнение

$$\det\left(M - \nu E\right) = 0 \tag{54}$$

имеет корни ν_j с кратностями q_j. Тогда из (53) следует, что

$$\nu(\varepsilon) = \nu_j x_0^{-1} + o\left(\varepsilon^{\frac{1}{q_j}}\right),\ j = 1, 2, \ldots, k. \tag{55}$$

Подставляя выражение (55) в соотношение (52), получим

$$x_j(\varepsilon) = x_0\left(1 + \varepsilon\nu_j\right) + o(\varepsilon).$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть у матрицы А все собственные значения не выходят из круга $|z| \leq 1$, причем на единичной окружности имеются лишь собственные значения, которым соответствуют простые элементарные делители. Если собственные значения матрицы M расположены в левой полуплоскости, то тривиальное решение системы (22) асимптотически устойчиво.

В качестве примера рассмотрим систему

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon B_n x_n, \tag{56}$$

где $x_n \in C^m$, $B_{n+N} \underset{n}{\equiv} B_n$, $\varepsilon > 0$. Определим постоянную матрицу Γ выражением

$$\Gamma = \sum_{k=0}^{N-1} B_k .$$

Легко видеть, что при $\varepsilon = 0$ система (56) имеет характеристический показатель $\varkappa_0 = 1$ простого типа, которому соответствуют два линейно независимых постоянных решения однородной системы

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, сопряженная система имеет два линейно независимых постоянных решения

$$z_1 = (1, 0), \quad z_2 = (0, 1).$$

Матрица M, определяющаяся выражением (53), в этом случае равна Γ^c. В соответствии со следствием, имеем условие устойчивости типа теоремы об осреднении, приведенной в монографии [2] : если собственные значения матрицы $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} B_k$ расположены в левой полуплоскости, то тривиальное решение системы (56) асимптотически устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

I. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., 1972, 718с.

2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971, 309с.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Б.М.Живихин, А.С.Мастерков

Рассмотрим систему

$$x_{n+1} = (A + \varepsilon B_n) x_n, \tag{I}$$

где $x_n \in C^m$, $B_{n+N} \underset{n}{\equiv} B_n$, $\varepsilon > 0$. В [I] изложен критерий экспоненциальной устойчивости тривиального решения системы (I) в случае, когда A – единичная матрица, B_n – почти периодические матрицы, В настоящей работе предлагается критерий устойчивости тривиального решения системы (I), где A – постоянная матрица с вещественными или комплексными элементами, спектр которой не выходит из круга $|z| \leqslant 1$, аналогичный критерию работы [2] для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть отличные друг от друга собственные значения матрицы A системы (I) таковы, что некоторые из них удовлетворяют соотношению

$$\lambda_p / \lambda_q = \exp(2\pi i \omega / N);\ p \neq q,\ \omega = \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{2}$$

Легко видеть, что всегда найдется преобразование $x_n = U_n y_n$, переводящее систему (I) в систему

$$y_{n+1} = (\mathcal{D} + \varepsilon P_n) y_n, \tag{3}$$

где $P_{n+N} \underset{n}{\equiv} P_n$, а отличные друг от друга собственные значения матрицы $\mathcal{D}$ удовлетворяют соотношению

$$\sigma_p / \sigma_q \neq \exp(2\pi i \omega / N),\ p \neq q,\ \omega = \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{4}$$

Будем считать в дальнейшем, что отличные друг от друга собственные значения матрицы A удовлетворяют соотношению (4).

Теорема I. Существует периодическое преобразование, которое приводит систему (I) к виду

$$y_{n+1} = (A + \varepsilon S)\, y_n, \tag{5}$$

где S - постоянная матрица, причем система (5) имеет с точки зрения асимптотической устойчивости тривиального решения те же свойства, что и система (I) при достаточно малом ε.

Доказательство. Произведем в (I) замену

$$y_n = (E - \varepsilon C_n)\, x_n, \tag{6}$$

где $C_{n+N} \underset{n}{\equiv} C_n$. Если найдется постоянная матрица S такая, что система (I) будет иметь вид

$$y_{n+1} = [A + \varepsilon S + Q_n(\varepsilon)]\, y_n, \tag{7}$$

причем $\| Q_n(\varepsilon)\| = o(\varepsilon)$, то характер асимптотической устойчивости решений $x_n \equiv 0$ и $y_n \equiv 0$ систем (I) и (7) будет одинаковым при достаточно малом ε, так как при этом условии заведомо ограниченная матрица $E - \varepsilon C_n$ обратима.

Сделав подстановку, получим

$$y_{n+1} = [A + \varepsilon(AC_n + B_n - C_{n+1}A) + Q_n(\varepsilon)]\, y_n .$$

Осталось показать, что уравнение

$$AC_n + B_n - C_{n+1}A = S \tag{8}$$

имеет периодическое решение. Сделав замену $C_n = A^n \mathcal{D}_n A^{-n}$ в уравнении (8), получим

$$\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_n + A^{-(n+1)}(B_n - S)A^n . \tag{9}$$

Решим уравнение (9) положив $\mathcal{D}_0 = U$, где U – произвольная матрица. Тогда получим

$$\mathcal{D}_n = U + \sum_{i=1}^{n} A^{-(i+1)}(B_i - S)A^i,$$

$$C_n = A^n U A^{-n} + \sum_{i=1}^{n} A^{n-(i+1)}(B_i - S)A^{i-n}.$$

Так как $C_{n+N} \equiv C_n$, то $C_0 = C_N$ и

$$U = A^N U A^{-N} + \sum_{i=1}^{N} A^{N-(i+1)}(B_i - S)A^{i-N},$$

$$\sum_{i=1}^{N} A^{-i}(S + AV - VA)A^i - \sum_{i=1}^{N} A^{-i} B_i A^i = 0,$$

где $V = AUA^{-1}$. Полагая $\tilde{S} = S + AV - VA$, найдем $\tilde{S}$ из уравнения

$$\sum_{i=1}^{N} A^{-i} \tilde{S} A^i = \sum_{i=1}^{N} A^{-i} B_i A^i. \qquad (10)$$

Докажем, что решение уравнения (10) существует и единственно. Для этого нужно показать, что спектр линейного оператора над кольцом матриц

$$LB = \sum_{i=1}^{N} A^{-i} B A^i$$

не содержит нуля.

Легко видеть, что

$$\sigma(L) = \left\{ \sum_{i=1}^{N} (\lambda/\mu)^i,\ \mu \in \sigma(A),\ \lambda \in \sigma(A) \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{1-(\lambda/\mu)^N}{1-(\lambda/\mu)},\ \mu \in \sigma(A),\ \lambda \in \sigma(A),\ \lambda \neq \mu \right\} \cup N.$$

Так как по предложению $\lambda/\mu \neq \exp(2\pi i \omega/N)$, $\omega = \pm 1, \pm 2, \ldots$, при $\lambda \neq \mu$, то $0 \notin \sigma(L)$. Значит оператор L обратим и решение системы (10) существует и единственно. Для завершения доказательства остается применить теорему о первом приближении [I].

В качестве примера исследуем на устойчивость тривиальное решение системы

$$x_{n+2} + x_n = \varepsilon \left(1 + \sin \frac{2\pi n}{N} \right) x_n. \qquad \text{(11)}$$

Положим $x_{n+1} = y_n$, тогда получим систему

$$x_{n+1} = y_n,$$
$$y_{n+1} = -x_n + \varepsilon \left(1 + \sin \frac{2\pi n}{N} \right) x_n$$

или

$$z_{n+1} = (A + \varepsilon B_n) z_n, \qquad \text{(12)}$$

где

$$z_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 + \sin \frac{2\pi n}{N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы A удовлетворяют соотношению $\lambda_1 / \lambda_2 = \exp(\pi i)$. Сделаем замену $z_n = \exp(\pi i E_1 n) u_n$, где

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} i \\ \frac{1}{2} i & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Положив $C_n = \pi i E_1 n$, получим $z_n = e^{C_n} u_n$, где

$$e^{C_n} = \begin{pmatrix} \frac{e^{\pi i n} + 1}{2} & \frac{e^{\pi i n} - 1}{2i} \\ \frac{1 - e^{\pi i n}}{2i} & \frac{e^{\pi i n} + 1}{2} \end{pmatrix}.$$

Система (12) примет вид

$$u_{n+1} = (R + \varepsilon P_n) u_n, \qquad \text{(13)}$$

где $R = A \exp(-\pi i E_1)$ с собственными значениями $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = -i$, а матрицы

$$P_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} i(1+\sin\frac{2\pi k}{N}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{при } k \text{ - четном} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i(1+\sin\frac{2\pi k}{N}) \end{pmatrix}, & \text{при } k \text{ - нечетном} \end{cases}$$

Подстановкой $U_n = (E - \varepsilon C_n) v_n$, где $C_{n+N} \equiv C_n, \varepsilon > 0$, приводим систему (I3) к виду

$$v_{n+1} = (R + \varepsilon S) v_n, \tag{I4}$$

где S находится из соотношения

$$\sum_{j=1}^{N} R^{-j} S R^{j} = \sum_{j=1}^{N} R^{-j} P_j R^{j},$$

$$NS = \sum_{j=1}^{N} P_j,$$

$$S = \frac{1}{N} i \left[\sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1+\sin\frac{2\pi(2k-1)}{N} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} \begin{pmatrix} 1+\sin\frac{4\pi k}{N} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Следовательно имеем, что $R + \varepsilon S = \begin{pmatrix} i(\frac{\varepsilon}{2}-1) & 0 \\ 0 & i(\frac{\varepsilon}{2}-1) \end{pmatrix}.$

При $0 < \varepsilon < 2$ тривиальное решение исходной системы (II) равномерно асимптотически устойчиво.

Предложенный метод исследования устойчивости тривиального решения системы (I)) является несколько неудобным при исследовании систем большой размерности. Ниже предлагается метод исследования устойчивости тривиального решения основанный на анализе систем меньшей размерности с сохранением свойств асимптотической устойчивости тривиального решения.

Пусть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ матрицы A таковы, что $\lambda_1 = \exp(i\varphi)$, $\lambda_2 = \exp(-i\varphi)$, $\lambda_j = \alpha_j$, $|\alpha_j| < 1$, $j = 3, 4, \ldots, m$. Будем считать, что индексы собственных значений матрицы A равны I.

Существует такая обратимая матрица M, что A приводится к диагональному виду

$$\mathcal{A} = M^{-1} A M = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & & & & \\ & e^{-i\varphi} & & 0 & \\ & & \alpha_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \alpha_m \end{pmatrix}.$$

Сделаем в (I) замену переменной $x_n = M y_n$. Тогда получим из (I)

$$y_{n+1} = (\mathcal{A} + \varepsilon \mathcal{B}_n) y_n, \qquad (I5)$$

где $\mathcal{B}_n = M^{-1} B_n M$. Произведем в (I5) замену

$$y_n^{(1)} = \exp(n i \varphi) z_n^{(1)},$$
$$y_n^{(2)} = \exp(-n i \varphi) z_n^{(2)},$$
$$y_n^{(j)} = z_n^{(j)}, \; j = 3, 4, \ldots, m.$$

Имеем $z_{n+1} = (\tilde{\mathcal{A}} + \varepsilon C_n) z_n$, (I6) где $\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \alpha_3 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \alpha_m \end{pmatrix}$,

а C_n - почти-периодическая матрица.

Рассмотрим систему

$$u_{n+1} = (E + \varepsilon \mathcal{D}_n) u_n, \qquad (I7)$$

где

$$u_n = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \end{pmatrix}, \; \mathcal{D}_n = \begin{pmatrix} C_{n1}^{(1)} & C_{n2}^{(1)} \\ C_{n1}^{(2)} & C_{n2}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

В [I] показано, что существует преобразование K_n, приводящее систему (I7) с почти-периодической матрицей $\mathcal{D}_n$ системе

$$v_{n+1} = (E + \varepsilon \mathcal{D}) v_n , \tag{I8}$$

где $\mathcal{D}$ – постоянная матрица, причем характер устойчивости тривиального решения систем (I7) и (I8) одинаков при достаточно малом ε . Сделаем в (I6) замену переменной $z_n = F_n w_n$, где $F_n = K_n + E$.
Приходим к системе

$$w_{n+1} = L_n w_n . \tag{I9}$$

<u>Теорема 2.</u> Если тривиальное решение системы (I8) равномерно асимптотически устойчиво, то тривиальное решение системы (I9) также равномерно асимптотически устойчиво.
<u>Доказательство.</u> Для доказательства возьмем функции Ляпунова $V(x)=|x|^2$. Так как тривиальное решение системы (I8) равномерно асимптотически устойчиво, то оно и экспоненциально устойчиво [I] . Тогда существует такая постоянная $c>0$, что

$$V_{n+1}(v_{n+1}) - V_n(v_n)\Big|_{(18)} \leqslant -\varepsilon c V_n(v_n).$$

С точностью до $o(\varepsilon)$.

$$2\varepsilon \operatorname{Re}(d_{11})|v_n^{(1)}|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}(d_{12})|v_n^{(1)}||v_n^{(2)}| +$$
$$+ 2\varepsilon \operatorname{Re}(d_{22})|v_n^{(2)}|^2 + 2\varepsilon \operatorname{Re}(d_{21})|v_n^{(1)}||v_n^{(2)}| +$$
$$+ \varepsilon c|v_n^{(1)}|^2 + \varepsilon c|v_n^{(2)}|^2 \leqslant 0,$$

т.е. диагональные миноры

$$M_1 = 2\operatorname{Re}(d_{11}) + c < 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2\operatorname{Re}(d_{11})+c & \operatorname{Re}(d_{12}) \\ \operatorname{Re}(d_{21}) & 2\operatorname{Re}(d_{22})+c \end{vmatrix} > 0.$$

Остается показать, что

$$V_{n+1}(w_{n+1}) - V_n(w_n)\Big|_{(19)} \leq -\varepsilon c V_n(w_n).$$

С точность до $o(\varepsilon)$ получим

$$V_{n+1}(w_{n+1}) - V_n(w_n) + \varepsilon c V_n(w_n) =$$

$$= \varepsilon[2Re(d_{11}) + c]|w_n^{(1)}|^2 + 2\varepsilon Re(d_{12})|w_n^{(1)}||w_n^{(2)}| +$$

$$+ \varepsilon[2Re(d_{22}) + c]|w_n^{(2)}|^2 + 2\varepsilon Re(d_{21})|w_n^{(1)}||w_n^{(2)}| +$$

$$+ \ldots + \left\{|\alpha_3| - 1 + \varepsilon[2Re(\alpha_3 C_{n3}^{(3)}) + c]\right\}|w_n^{(3)}|^2 +$$

$$+ \ldots + \left\{|\alpha_m| - 1 + \varepsilon[2Re(\alpha_m C_{nm}^{(m)}) + c]\right\}|w_n^{(m)}|^2.$$

При $\varepsilon = 0$, $|\alpha_j| - 1 < 0$ для $j = 3, 4, \ldots, m$. Тогда, учитывая, что диагональные миноры написанной выше квадратичной формы $M_1 < 0$, $M_2 > 0$, получаем цепочку неравенств для диагональных миноров большей размерности: $M_3 < 0$, $M_4 > 0$ и т.д. Эти неравенства сохраняются при достаточно малом ε Этим замечанием и завершается доказательство теоремы.

Приведем еще один частный случай систем с малым параметром, которые достаточно легко исследовать на устойчивость.

<u>Теорема 3.</u> Пусть дана каноническая система разностных уравнений

$$x_{n+1} = (A + \varepsilon B_n) x_n, \tag{20}$$

где $x_n \in C^m$, $B_{n+N} \underset{n}{\equiv} B_n$, $\varepsilon > 0$.

Если собственные значения матрицы A таковы, что

$$\lambda_\sigma = \exp(\pm i\varphi_\sigma),\ \sigma = 1,2,\dots,m, \qquad (21)$$
$$\varphi_p \pm \varphi_q \neq \frac{2\pi k}{N},\ p \neq q,\ k = 0,1,\dots,$$

то при достаточно малом ε тривиальное решение системы (20) устойчиво.

<u>Доказательство.</u> В силу конечности системы (20), матрица монодромии удовлетворяет соотношению

$$X_N = \mathcal{J}^{-1}(X_N^*)^{-1}\mathcal{J} \qquad \text{, где}$$

$\mathcal{J}$ - неособая вещественная кососимметрическая матрица. Следовательно, наборы мультипликаторов $\{\rho_j\}$ и $\{\bar\rho_j^{-1}\}$ матриц X_N и $(X_N^*)^{-1}$ совпадают. При $|\rho| \neq 1$ мультипликаторы ρ и $\bar\rho^{-1}$ симметричны (в смысле инверсии) относительно единичной окружности. Рассмотрим систему

$$y_{n+1} = A y_n. \qquad (22)$$

Мультипликаторами этой системы являются собственные значения

$$\rho_\sigma = e^{\pm i\varphi_\sigma N},\ \sigma = 1,2,\dots,m$$

матрицы монодромии $Y_N = A^N$. В силу условия (21) они различны и лежат на единичной окружности. Окружим каждый из мультипликаторов системы (22) непересекающимися окружностями S_σ. При достаточно малом ε коэффициенты систем (20) и (22) "близки" в смысле" матричной нормы. В силу непрерывной зависимости решений линейных систем от коэффициентов, мультипликаторы систем (20) и (22) "близки" в смысле расстояния. Тогда при достаточно малом ε в каждой из окружностей S_6 будет находиться только один мультипликатор системы (20). В силу симметрии они будут находиться на единичной окружности. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсивных систем. М., 1971, 309с.
2. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., 1971, 287с.
3. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений. К., 1972, 246с.
4. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., 1972, 718с.

3к-

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ионин Л.Л., Царьков Е.Ф., Ясинский В.К.

Исследование устойчивости решений дифференциально-функциональных уравнений чаще всего основано на применении метода вспомогательных функций, которые позволяют получать достаточные критерии устойчивости в терминах "правых частей" уравнений.

Этот метод хорошо известен как в теории устойчивости детерминированных дифференциальных уравнений, так и в теории уравнений, описывающих марковские процессы. В последнем случае можно использовать формулу замены переменной в стохастических уравнениях, как это сделано в работе [I] для исследования уравнений без последействия. Этот метод оказался возможным применить и в случае уравнений с последействием (§ 2 настоящей работы), используя некоторые результаты и идеи работы [2].

Однако для исследования устойчивости стохастических систем уравнений более точные результаты можно получить, используя производящий оператор полугруппы переходных вероятностей и формулу Дынкина [3], как это сделано в работах [I], [4], [5], [6] для уравнений без последействия и в работе [7] для уравнений Ито с последействием.

Методику работы [7] оказалось возможным применить для вычисления производящего оператора для уравнений с последействием и с интегралами по случайным мерам [I], [8] (§ 3 настоящей работы). Для этого вначале в § I получены необходимые оценки при помощи метода работы [9]. К сожалению, при помощи вспомогательных функций трудно получить необходимые и достаточные условия устойчивости уравнений с последействием даже в линейном случае. В этом случае удобно пользоваться методом, основанным на анализе систем интегральных уравнений для вторых моментов решения и тогда удается получить условия, необходимые и достаточные для устойчивости тривиального решения линейных систем в среднем квадратичном [I0], [II], [I2].

Авторы придерживаются терминологии работы [I].

В статье принята нумерация формул и теорем с указанием номера параграфа, в котором впервые встречаются эти формулы.

§ I. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Рассмотрим случайный процесс $x(t,\omega)\in R^m$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$. Пусть задано неубывающее семейство σ-алгебр F_t, относительно которых измерим винеровский процесс $w(t)$, причем $w(t_2)-w(t_1)$ не зависит от F_t при $t_2\geq t_1\geq t$.

Предположим, что на $[0,T]\times R^m$ определены случайные меры $p(A)$ и $q(A)$ [8], не зависящие от $w(t)$ и обладающие следующими свойствами:

I) если $[0,T]\times R^m$ - пространство пар точек (t,u), $t\in[0,T]$, $u\in R^m$, B - кольцо всех борелевских множеств $A\subset[0,T]\times R^m$, для которых

$$\int_A \frac{du\,dt}{|u|^{m+1}}<\infty, \qquad (I.I)$$

то $p(A)$ - случайная мера с независимыми значениями, определенная на B, которая при каждом $A\in B$ имеет распределение Пуассона с параметром (I.I).

2) $q(A)$ определяется соотношением

$$q(A)=p(A)-Ep(A)$$

(E - операция математического ожидания).

Пусть каково бы ни было $t_1\in[0,T]$, случайная величина $p(A)$ ($A\subset[0,t_1]\times R^m$) измерима относительно F_{t_1}, а при $t_1 < t_2 < \cdots < t_z$ величины $W(t_2)-W(t_1)$, $\ldots, W(t_z)-W(t_{z-1}), p([t_1,t_2]\times\Delta_k), \ldots, p([t_{z-1},t_z]\times\Delta_k)$, $k=1,2,\ldots,l$ ($\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_l$ - произвольные борелевские множества из R^m) в совокупности не зависят от каждого из событий σ -алгебры F_{t_1}. При таких предположениях интегралы Винера Ито и интегралы по случайным мерам определены [8].

Пусть $a(t,x,y)$, $f(t,x,y,u)$ - непрерывные по всем аргументам векторные функции со значениями в R^m, $t\in[0,T]$, $x\in R^m$, $y\in R^m$, $b(t,x,y)$ - операторная функция, линейно отображающая R^m в R^m.

Пространство функций $\{x(t,\omega), t\in[0,T]\}$, измеримых относительно F_t и таких, что

$$\int_0^T E|x(t,\omega)|^2 dt < \infty,$$

обозначим через $\mathfrak{M}$ с нормой

$$\|x(t,\omega)\|^2 = \int_0^T E|x(t,\omega)|^2 dt.$$

Определим отображение S

$$x(t) = y(0) + \int_0^t a(\tau,x(\tau),y(\tau))d\tau + \int_0^t b(\tau,x(\tau),y(\tau))dw(\tau) +$$

$$+\int_0^t\int_{R^m} f(\tau,x(\tau),y(\tau),u)\,q(d\tau\times du) = S(x,y). \tag{I.2}$$

Пусть существует такое $L>0$, что для всех x_1, $x_2, y_1, y_2 \in R^m$ и $t\in[0,T]$

$$T|a(t,x_1,y_1)-a(t,x_2,y_2)|^2 + |b(t,x_1,y_1)-b(t,x_2,y_2)|^2 +$$

$$+\int_{R^m} |f(t,x_1,y_1,u)-f(t,x_2,y_2,u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \le \tag{I.3}$$

$$\le L^2\{|x_1-x_2|^2 + |y_1-y_2|^2\}$$

и существует такое $K>0$, при котором

$$T|a(t,x,y)|^2+|b(t,x,y)|^2+\int_{R^m}|f(t,x,y,u)|^2\frac{du}{|u|^{m+1}}\leq$$
$$\leq K(|x|^2+|y|^2+1). \tag{I.4}$$

<u>Свойства оператора S</u>.

<u>Теорема I.I</u>. Пусть выполняется условие (I.3) для (I.2), тогда для каждого $y\in\mathfrak{M}$ существует неподвижная точка оператора $S(x,y)$ (по x) в пространстве $\mathfrak{M}$, единственная почти наверное.

<u>Доказательство</u>. Введем понятие степени оператора S по переменной x [9].

$$S_x^2(x,y)=S(S(x,y),y).$$

Докажем, что при достаточно большом n оператор S_x^n будет сжимающимся и его неподвижная точка является решением уравнения (I.2). Используя (I.3) и свойства стохастических интегралов [8]

$$E\left|\int_0^T z(t)\,dw(t)\right|^2=\int_0^T E|z(t)|^2dt,$$
$$E\left|\int_0^T\int_{R^m}z(t,u)q(dt\times du)\right|^2=\int_0^T\int_{R^m}E|z(t,u)|^2\frac{dt\,du}{|u|^{m+1}} \tag{I.5}$$

можно показать, что

$$E|S(x_1,y)-S(x_2,y)|^2\leq R\int_0^t E|x_1(\tau)-x_2(\tau)|^2d\tau.$$

Откуда легко получить неравенство

$$\|S^n(x_1(t),y(t))-S^n(x_2(t),y(t))\|\leq\frac{R^nT^n}{n!}\|x_1(t)-x_2(t)\|.$$

Поэтому при достаточно большом n_0 оператор S^{n_0} будет сжимающимся. Пусть $\bar{x}(t)$ - неподвижная точка S^{n_0}.

Покажем, что $\bar{x}(t)$ будет также неподвижной точкой оператора S. Из последнего неравенства и соотношения

$$S^{kn_0}(\bar{x}(t), y(t)) = \bar{x}(t)$$

вытекает, что для всех k справедливо неравенство

$$\|\bar{x}(t) - S(\bar{x}(t), y(t))\| = \|S^{kn_0}(\bar{x}(t), y(t)) - S^{kn_0+1}(\bar{x}(t), y(t))\| \le$$

$$\le \frac{R^{kn_0} T^{kn_0}}{(kn_0)!} \|\bar{x}(t) - S(\bar{x}(t), y(t))\|.$$

Сделав предельный переход при $k \to \infty$ в этом неравенстве, получим, что

$$\|\bar{x}(t) - S(\bar{x}(t), y(t))\| = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание I.I. Если $y(t)$ с вероятностью I не имеет разрывов 2-го рода, то и $x(t)$ не имеет разрывов 2-го рода, так как интегралы в правой части (I.2) не имеют разрывов 2-го рода [8].

Теорема I.2. Пусть для уравнения (I.2) выполняется условие (I.4) и

I) для всякого C существует L_C такое, что

$$T|a(t,x_1,y_1) - a(t,x_2,y_2)|^2 + |b(t,x_1,y_1) - b(t,x_2,y_2)|^2 +$$

$$+ \int_{R^m} |f(t,x_1,y_1,u) - f(t,x_2,y_2,u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \le L_C^2 \{|x_1-x_2|^2 + |y_1-y_2|^2\} \qquad (I.6)$$

при $|x_1| \le C$, $|x_2| \le C$, $|y_1| \le C$, $|y_2| \le C$.

2) $y(t)$ с вероятностью I не имеет разрывов второго рода и

$$E \sup_{0 \le t \le T} |y(t)|^2 < \infty.$$

Тогда уравнение (I.2) имеет с вероятностью I ограниченное решение, единственное с точностью до стохастической эквивалентности, причем

$$E \sup_{0 \le t \le T} |x(t)|^2 \le H\left(1 + E \sup_{0 \le t \le T} |y(t)|^2\right) ; \qquad (I.7)$$

где H зависит от К и Т.

Доказательство единственности. Пусть (I.2) имеет две ограниченные неподвижные точки $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Введем функцию $\Psi(t)$ следующим образом

$$\Psi^N(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sup_{0 \le s \le t} |x_1(s)| \le N \text{ и } \sup_{0 \le s \le t} |x_2(s)| \le N, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда, используя (I.6), получим

$$E \Psi^N(t) |x_1(t) - x_2(t)|^2 \le R \int_0^t E \Psi^N(\tau) |x_1(\tau) - x_2(\tau)|^2 d\tau .$$

Подставляя левую часть полученного неравенства в правую часть и повторяя такую операцию n раз, получаем

$$E \Psi^N(t) |x_1(t) - x_2(t)|^2 \le \frac{R^n}{n!} \int_0^T E \Psi^N(\tau) |x_1(\tau) - x_2(\tau)|^2 d\tau .$$

Откуда при $n \to \infty$

$$E \Psi^N(t) |x_1(t) - x_2(t)|^2 = 0 ,$$

а это значит, что

$$P\{\Psi^N(t) |x_1(t) - x_2(t)| = 0\} = 1 .$$

Так как $x_1(t)$ и $x_2(t)$ ограничены, то $\Psi^N(t) \to 1$ при $N \to \infty$, доказательство единственности получили.

Доказательство существования. Обозначим через $x_N(t)$ неподвижную точку оператора $S(x, y)$ с коэффициентами

$$a_N(t, x, y) = g_N(x) a(t, x, y) ,$$

$$b_N(t,x,y) = g_N(x)\, b(t,x,y),$$

$$f_N(t,x,y,u) = g_N(x)\, f(t,x,y,u), \tag{I.8}$$

где

$$g_N(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } & |x| \le N, \\ N+1-|x| & \text{при } N < |x| \le N+1 \\ 0 \text{ при } & |x| > N+1 \end{cases}$$

Докажем, что $P\{\sup\limits_{0\le t\le T}|x_N(t)| > C\} \to 0$ равномерно относительно N при $C \to \infty$.

Легко получить

$$P\{\sup_{0\le t\le T}|x_N(t)| > C\} \le P\{\sup_{0\le t\le T}|\bar{x}_N(t)| > C\} + \\ + P\{\sup_{0\le t\le T}|y(t)| > N_0\}, \tag{I.9}$$

где N_0 - любое фиксированное натуральное число, $\bar{x}_N(t)$ является неподвижной точкой оператора (I.2) с коэффициентами (I.8), если в (I.2) вместо $y_N(t)$ подставить $y_{N_0}(t)$.

Оценим I-е слагаемое (I.9). Ясно, что

$$\sup_{0\le t\le T}|\bar{x}_N(t)|^2 \le |y(0)|^2 + T\int_0^T |a_N(\tau,\bar{x}_N(\tau),y_{N_0}(\tau))|^2 d\tau +$$

$$+ \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t b_N(\tau,\bar{x}_N(\tau),y_{N_0}(\tau))\,dw(\tau)\right|^2 +$$

$$+ \sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t\int_{R^m} f(\tau,\bar{x}_N(\tau),y_{N_0}(\tau),u)\,q(d\tau\times du)\right|^2.$$

Применяя математическое ожидание к обеим частям полученного неравенства и учитывая мартингальные свойства (I.5), получим

$$E \sup_{0\le t\le T} |\bar{x}_N(t)|^2 \le 16(KT+1)\left[E \sup_{0\le t\le T} |y_{N_0}(t)|^2 + 1\right] + 16K\int_0^T E \sup_{0\le \tau\le t} |\bar{x}_N(\tau)|^2 \, d\tau .$$

Откуда по лемме Гронуола

$$E \sup_{0\le t\le T} |x_N(t)|^2 \le H\left[E \sup_{0\le t\le T} |y_{N_0}(t)|^2 + 1\right], \quad (I.10)$$

где H зависит от K и T.

Из (I.9) получим

$$P\left\{ \sup_{0\le t\le T} |x_N(t)| > C \right\} \le \frac{H}{C^2}\left[E \sup_{0\le t\le T} |y_{N_0}(t)| + 1\right] + P\left\{ \sup_{0\le t\le T} |y(t)|^2 > N_0 \right\}.$$

Взяв от обеих частей $\sup_N$, а затем переходя к пределу при $C \to \infty$ и $N_0 \to \infty$, получим

$$\lim_{C\to\infty} \sup_N P\left\{ \sup_{0\le t\le T} |x_N(t)| > C \right\} = 0.$$

Аналогично [8] можно доказать, что существует подпоследовательность $x_{N_k}(t)$, которая с вероятностью I сходится равномерно к $x(t)$. Значит, $x(t)$ - ограничена и не имеет разрывов 2-го рода с вероятностью I.

Подставляя в (I.8) N_k вместо N и переходя к пределу при $N_k \to \infty$ [8] в уравнении

$$x_{N_k}(t) = y(0) + \int_0^t a(\tau, x_{N_k}(\tau), y_{N_k}(\tau))\, d\tau +$$

$$+\int_0^t b(\tau, x_{n_k}(\tau), y_{n_k}(\tau))\,dW(\tau) + \int_0^t \int_{R^m} f(\tau, x_{n_k}(\tau), y_{n_k}(\tau), u)\,q(d\tau \times du)$$

получим, что $x(t)$ является решением уравнения (I.2). Существование решения доказано.

Сделав предельный переход при $N_0 \to \infty$ и $N \to \infty$ в (I.10), получим (I.7).

<u>Лемма I.I</u>. Пусть выполняются условия теоремы I.2 и $y_n(t) \in \mathfrak{M}$, $n \in \Lambda$ равномерно ограничены с квадратом

$$\sup_{n \in \Lambda} E\{ \sup_{t \in [0,T]} |y_n(t)|^2 \} < \infty,$$

тогда решение уравнения

$$x_n = S(x_n, y_n)$$

равномерно ограничены с квадратом

$$\sup_{n \in \Lambda} E\{ \sup_{0 \le t \le T} |x_n(t)|^2 \} < \infty .$$

<u>Доказательство</u>. Используя неравенства $\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^2 \le n \sum_{j=1}^n a_j^2$,

(I.3) и (I.5), легко получить

$$E\{ \sup_{0 \le s \le t} |x_{n_1}(t) - x_{n_2}(t)|^2 \} \le C_1 \Big[\sup_{n \in N} E\{ \sup_{0 \le t \le T} |y_n(t)|^2 \} +$$

$$+ \int_0^t E\{ \sup_{0 \le s \le \tau} |x_{n_1}(s) - x_{n_2}(s)|^2 \} d\tau \Big]$$

и тогда по неравенству Гронуолла

$$E\left\{\sup_{0\le s\le T}|x_{n_1}(s)-x_{n_2}(s)|^2\right\}\le C_2\sup_{n\in\Lambda}E\left\{\sup_{0\le t\le T}|y_n(t)|^2\right\}.$$

Зафиксируем в левой части предыдущего неравенства n_2 и возьмем $\sup$ по n_1, тогда получим

$$\sup_{n_1}E\left\{\sup_{0\le t\le T}|x_{n_1}(t)-x_{n_2}(t)|^2\right\}<\infty .$$

Поскольку при фиксированных n имеем неравенство (I.7), то лемма доказана.

Теорема I.3. Оператор S непрерывен по y, если $y_n(t)$ ограничены в совокупности по n и t (при выполнении условий теоремы I.2).

Доказательство. Введем функцию

$$\Psi^N_{n,n_0}(t)=\begin{cases} 1, \text{ если } \sup\limits_{0\le s\le t}\{|x_n(s)|+|x_{n_0}(s)|+|y_n(s)|+|y_{n_0}(s)|\}\le N,\\ 0 \text{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

Возьмем разность $x_n(t)-x_{n_0}(t)$, умножим ее на $\Psi^N_{n,n_0}(t)$, возведем обе части полученного выражения в квадрат и, взяв математическое ожидание, получим

$$Q^N_{n,n_0}(t)\le 3L_c^2\left[\int_0^t E|x_n(\tau)-x_{n_0}(\tau)|^2\cdot\Psi^N_{n,n_0}(\tau)d\tau+d^N_{n,n_0}(t)\right],$$

где $$Q^N_{n,n_0}(t)=E\{[x_n(t)-x_{n_0}(t)]^2\Psi^N_{n,n_0}(t)\},$$

$$d^N_{n,n_0}(t)=3L_c^2\int_0^t E\{[y_n(\tau)-y_{n_0}(\tau)]^2\Psi^N_{n,n_0}(\tau)d\tau .$$

На основании леммы Гронуолла имеем

$$Q^N_{n,n_0}(t)\le d^N_{n,n_0}(t)\,e^{3L_c^2T}\to 0 \quad \text{при } n\to n_0,$$

так как $d^N_{n,n_0}(t)\to 0$.

Так как

$$P\{|x_n(t)-x_{n_0}(t)|>\varepsilon\}\le\frac{1}{\varepsilon^2}E\{\Psi^N_{n,n_0}(t)|x_n(t)-x_{n_0}(t)|^2\}+$$

$$+P\{\Psi^N_{n,n_0}(t)=0\},$$

а на основании леммы I.I $x_n(t)$ ограничены в совокупности, т.е. при достаточно больших N

$$P\{\Psi^N_{n,n_0}(t)=0\}=0$$

и, значит

$$\lim_{n\to n_0}P\{|x_n(t)-x_{n_0}(t)|>\varepsilon\}=0.$$

Лемма I.2. Пусть выполняются условия (I.4), (I.6) для уравнения (I.2), тогда существует такое $R>0$, что

$$E\sup_{t\le s\le t+\Delta}|x(t)-x(s)|^2\le R\Delta. \qquad (I.II)$$

Доказательство. Лемма вытекает из условия (I.4), мартингальных свойств стохастических интегралов и ограниченности решения (I.2):

$$E\sup_{t\le s\le t+\Delta}|x(t)-x(s)|^2\le 16\left\{\int_t^{t+\Delta}E\left[T|a(\tau,x(\tau),y(\tau))|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+|b(\tau,x(\tau),y(\tau))|^2+\int_{R^m}|f(\tau,x(\tau),y(\tau),u)|^2\frac{du}{|u|^{m+1}}\right]d\tau\right\}\le$$

$$\le 16K\int_t^{t+\Delta}\left(E\sup_{t\le\tau\le t+\Delta}|x(\tau)|^2+E\sup_{t\le\tau\le t+\Delta}|y(\tau)|^2+1\right)d\tau\le R\Delta.$$

Из неравенства (I.II) следует стохастическая непрерывность $x(t)$.

Стохастические дифференциально-разностные уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$x(t)=x(0)+\int_0^t a(\tau,x(\tau),x(\tau-1))d\tau+\int_0^t b(\tau,x(\tau),x(\tau-1))dw(\tau)+$$
$$+\int_0^t\int_{R^m} f(\tau,x(\tau),x(\tau-1),u)q(d\tau\times du) \tag{I.12}$$

при заданном $x(t-1)\big|_{0\le t\le 1}=\varphi_1(t-1)=\varphi(t)\ (x,\varphi\in\mathfrak{M})$. (I.13)

Для установления свойств решения уравнения (I.12) используем методику работы [9]. Учитывая определение оператора S, его можно записать в виде:

$$x=S[x,\varphi]\quad (\text{при } t\in[0,1]). \tag{I.14}$$

Он задает некоторое отображение S_1, переводящее $\varphi\in\mathfrak{M}$ в $x\in\mathfrak{M}$, причем однозначно с точностью до эквивалентности. Оператор S_1 позволяет определить решение уравнения (I.12) на участке $[0,1]$ при заданном $x(t-1)\big|_{0\le t\le 1}=$ $=\varphi(t)\in\mathfrak{M}$ как решение уравнения

$$x_1=S[x_1,\varphi]$$

или

$$x_1=S_1\varphi.$$

На втором участке, т.е. при $t\in[1,2]$ уравнение (I.12) заменой переменных $\theta=t-1$ легко преобразуется к виду

$$x_2(\theta)=x_2(0)+\int_0^\theta a(s+1,x_2(s),x_2(s-1))ds+$$
$$+\int_0^\theta b(s+1,x_2(s),x_2(s-1))dw(s+1)+$$
$$+\int_0^\theta\int_{R^m} f(s+1,x_2(s),x_2(s-1),u)q(ds\times du)$$

при заданном

$$x_2(\theta-1)\Big|_{0\le\theta\le 1} = x_1(\theta) .$$

Тогда можно определить оператор S_2, который переводит $x_1 \in \mathfrak{M}$ в $x_2 \in \mathfrak{M}$

$$x_2 = S_2 x_1 = S_2 S_1 \varphi .$$

Легко видеть, что оператор S_2 обладает всеми свойствами S_1, если $t \in [1,2]$. Аналогично определяется оператор S_k:

$$x_k = S_k x_{k-1} = \prod_{i=1}^{k} S_i \varphi .$$

Таким образом, уравнение (I.I2) при всех $t \in [0,T]$ определяет некоторый процесс

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & \text{при} \quad t \in [0,1], \\ x_2(t-1), & \text{при} \quad t \in [1,2], \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

При выполнении условий теоремы (I.3) можно утверждать, что если в качестве $\varphi(t)$ взять функцию, не имеющую разрывов второго рода из $\mathfrak{M}$, то $x_i \in \mathfrak{M}$ также не имеют разрывов второго рода. Непрерывность почти наверное на стыках участков очевидна, так как интегралы в правой части (I.I2) обращаются в нуль почти наверное при $t=0$, также верны оценки (I.7) и (I.II), причем (I.7) примет вид

$$E \sup_{0\le t\le T} |x(t)|^2 \le H_1 \left(1 + E \sup_{-1\le t\le 0} |\varphi(t)|^2\right),$$

где H_1 зависит только от К и Т.

<u>Следствие I.I</u>. Если рассматривать уравнение (I.I2), удовлетворяющее условиям (I.I3), (I. 4) и (I.6), а также

$$a(t,0,0)=b(t,0,0)=f(t,0,0,u)\equiv 0, \qquad (I.15)$$

то имеется следующая оценка

$$E\sup_{0\le t\le T}|x(t)|^2\le HE\sup_{-1\le t\le 0}|\varphi(t)|^2, \qquad (I.16)$$

где H - константа, зависящая лишь от L_c и T.

Доказательство. Учитывая (I.15), условие Липшица примет вид

$$T|a(t,x,y)|^2+|b(t,x,y)|^2+\int_{R^m}|f(t,x,y,u)|^2\frac{du}{|u|^{m+1}}\le L_c^2\{|x|^2+|y|^2\}.$$

Тогда при $t\in[0,1]$

$$E\sup_{0\le s\le t}|x(s)|^2\le 4\{E|\varphi(0)|^2+\int_0^t E|a(\tau,x(\tau),x(\tau-1))|^2d\tau+$$

$$+E\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s b(\tau,x(\tau),x(\tau-1))dw(\tau)|^2+E\sup_{0\le s\le t}|\int_0^s\int_{R^m}f(\tau,x(\tau),x(\tau-1),u)q(d\tau\times du)|^2\}\le$$

$$\le 4\{E|\varphi(0)|^2+4L_c^2\int_0^1 E|\varphi(\tau-1)|^2d\tau+4L_c^2\int_0^t E\sup_{0\le s\le \tau}|x(s)|^2d\tau\}\le$$

$$\le(4+16L_c^2)E\sup_{-1\le\tau\le 0}|\varphi(\tau)|^2+16L_c^2\int_0^t E\sup_{0\le s\le\tau}|x(s)|^2d\tau.$$

Применяя лемму Гронуолла, получим:

$$E\sup_{0\le t\le 1}|x(t)|^2\le H_1E\sup_{-1\le t\le 0}|\varphi(t)|^2, \qquad (I.17)$$

где $H_1=4(1+4L_c^2)e^{16L_c^2}$, а следовательно, продвигаясь по интервалам $[i,i+1]$ и, используя оценку (I.17), получим

$$E\sup_{0\le t\le T}|x(t)|^2\le H\,E\sup_{-1\le t\le 0}|\varphi(t)|^2.$$

§ 2. УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СКАЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим скалярное дифференциально-разностное уравнение

$$dx(t)=a(t,x(t),x(t-1))dt+b(t,x(t),x(t-1))dw(t)+$$

$$+\int_{R^1} f(t,x(t),x(t-1),u)\,q(dt\times du), \qquad (2.I)$$

$$x(t)\Big|_{-1\le t\le 0}=\varphi(t),$$

$$a(t,0,0)\equiv b(t,0,0)\equiv f(t,0,0,u)\equiv 0.$$

Если выполнены условия Липшица во всем пространстве $R^1\times R^1$ для функций a, b^2 и f^2 (условия I.3 § I), то в силу проведенных в § I построений $x(s)$ F_t -измеримо при всех $0\le s\le t$ и поэтому процесс

$$\int_0^t b(\tau,x(\tau),x(\tau-1))dw(\tau)+\int_0^t\int_{R^1} f(\tau,x(\tau),x(\tau-1),u)\,q(d\tau\times du)$$

является мартингалом на решении (2.I) [I].

Обозначим $f_h(x_t)$ определенно-положительный непрерывный функционал на отрезке траектории $x_t=\{x(t+\theta),$ $-h\le\theta\le 0\}$ такой, что из $f(\varphi)=0$ следует $\varphi(\theta)\equiv 0$.

<u>Теорема 2.I</u>. Если

$$2a(t,x(t),x(t-1))x(t)+b^2(t,x(t),x(t-1))+$$

$$+\int_{R^1}\frac{f^2(t,x(t),x(t-1),u)}{u^2}du\le -f_h(x_t)$$

при некотором h, то тривиальное решение (2.I) равномерно асимптотически устойчиво.

<u>Доказательство</u>. Найдем дифференциал процесса $z(t)=x^2(t)$ с учетом (2.I). Имеем

$$dz(t)=\Big[2a(t,x(t),x(t-1))x(t)+b^2(t,x(t),x(t-1))+$$

$$+\int_{R^1}\frac{f^2(t,x(t),x(t-1),u)}{u^2}du\Big]dt+$$

$$+2x(t)b(t,x(t),x(t-1))dw(t)+2\int_{R^1}x(t)f(t,x(t),x(t-1),u)q(dt\times du)+$$

$$+\int_{R^1}f^2(t,x(t),x(t-1),u)\,q(dt\times du).$$

Перепишем это уравнение в интегральной форме (при $t>1$), используя оценку из условий теоремы 2.I:

$$z(t)\le\varphi^2(0)+\rho(t)-\int_1^t f_h(x_\tau)d\tau+\gamma,$$

где

$$\gamma=2\int_0^1 x(\tau)a(\tau,x(\tau),\varphi(\tau-1))d\tau+\int_0^1 b^2(\tau,x(\tau),\varphi(\tau-1))d\tau+$$

$$+\int_0^1\int_{R^1}\frac{f^2(\tau,x(\tau),\varphi(\tau-1),u)}{u^2}du\,d\tau,$$

$$\beta(t)=2\int_0^t x(\tau)\,b(\tau,x(\tau),x(\tau-1))\,dw(\tau)+$$

$$+2\int_0^t\int_{R^1} x(\tau)f(\tau,x(\tau),x(\tau-1),u)\,q(d\tau\times du)+$$

$$+\int_0^t\int_{R^1} f^2(\tau,x(\tau),x(\tau-1),u)\,q(d\tau\times du).$$

На участке $0\le t\le 1$ $x=S_1\varphi$ и, кроме того, $S_1 0=0$. Поэтому, легко видеть, что

$$|\gamma|\le C\sup_{0\le\tau\le 1}\{x^2(\tau)+|x(\tau)||\varphi(\tau-1)|+\varphi^2(\tau-1)\},$$

$$E\{|\gamma|\}\le C_1\sup_{-1\le\tau\le 0}\varphi^2(\tau).$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое δ_1, зависящее от $\sup\limits_{-1\le\tau\le 0}|\varphi(\tau)|$, что

$$P\left\{|\gamma|\le\frac{\varepsilon}{2}\right\}\ge 1-\frac{\delta_1\cdot 2}{\varepsilon}.$$

Т.к. $\beta(t)$ является мартингалом, причем на решении $\beta(t)>-\varphi^2(0)$, то при любом T

$$P\left\{\sup_{0\le t\le T}[\beta(t)+\varphi^2(0)]\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\le\frac{2\varphi^2(0)}{\varepsilon}.$$

Итак,

$$P\{\sup_{0\le t} x^2(t)\ge\varepsilon\}\le P\{|\gamma|>\frac{\varepsilon}{2}\}+$$

$$+P\{\sup_{0\le t}\{\beta(t)+\varphi^2(0)\}\ge\frac{\varepsilon}{2}\}\le\frac{\delta}{\varepsilon}, \qquad (2.2)$$

где δ зависит от $\sup_{-1\le\tau\le 0}|\varphi(\tau)|$. Это означает, что тривиальное решение (2.I) равномерно устойчиво. Докажем теперь асимптотическую устойчивость решения. Для этого достаточно показать, что $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$ на ω -множестве, мера которого может быть сделана как угодно близкой к единице, если C -норма начальной функции стремится к нулю. Покажем, что ω -множество, вероятность которого оценивается в (2.2), удовлетворяет этим условиям. Имеем (на этом множестве)

$$x^2(t)\le\varphi^2(0)+\gamma-\int_0^t f_h(x_\tau)d\tau+\beta(t)\le\varepsilon-\int_0^t f_h(x_\tau)d\tau .$$

Поскольку левая часть неравенства положительна, то на изучаемом ω -множестве интеграл в правой части должен, по крайней мере, сходиться и, в силу непрерывности функционала f, из $f_h(x_\tau)\to 0$ при $\tau\to\infty$ следует $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Замечание 2.I. Как видно из доказательства теоремы, нами использовались лишь те ограничения на $a(t,x,y)$, $b(t,x,y)$ и $f(t,x,y,u)$, которые давали возможность утверждать, что интегралы в уравнении (2.I) существуют, а оператор S_1 является локально-Липшицевым. Поэтому эти ограничения можно ослабить, потребовав только их локального выполнения. В этом параграфе мы этого делать не будем, а в следующем параграфе проведем эти рассуждения, используя остановленные процессы.

Следствие 2.I. Пусть неравенство теоремы I выполняется лишь на кривых $x(t)$, для которых

$$x^2(t-\tau)<\alpha x^2(t)$$

при $0 \le \xi \le h$ и $\alpha > 1$. Тогда тривиальное решение (2.I) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Покажем вначале, что решение равномерно устойчиво. Для этого зададимся $\varepsilon > 0$ и ω-множеством:

$$A_\varepsilon = \{\omega : |\gamma| < \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcap \{\omega : \sup_{0 \le t} |\beta(t)| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Если для любого $\eta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $\sup_{-1 \le \tau \le 0} |\varphi(\tau)| < \delta$ следует $P(A_\varepsilon) \ge 1 - \eta(\delta)$, причем $\eta(\delta)$ достаточно мало и $\eta(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то в силу неравенства теоремы имеем $\sup_{0 \le t} |x^2(t)| < \varepsilon$ на кривой $x^2(t-\xi) < \alpha x^2(t)$. Пусть теперь имеется кривая $y(t)$, для которой выполняется неравенство $\sup_{0 \le t} |y(t)| > \varepsilon$ на ω -множестве A_ε. Тогда в первый момент t^* выхода из ε -полосы имеем неравенство $y^2(t^* - \xi) < y^2(t^*)$ при всех $0 \le \xi \le t^*$, т.е. в момент t^* мы находимся на кривой, удовлетворяющей условиям следствия. Получили противорение. Итак, если кривая при $\omega \in A_\varepsilon$ попала в полосу $|x| < \delta$, то она из нее не выйдет. Пусть $\delta_0 > 0$ максимальный уровень, над которым некоторая кривая находится при всех $t \ge 0, \omega \in A_\varepsilon$; если такого уровня для любой кривой нет, то тривиальное решение асимптотически устойчиво, т.к. любое решение при $\omega \in A_\varepsilon$, начиная с некоторого T целиком располагается в наперед заданной окрестности нуля.

Итак, для любого $\eta > 0$ найдется такое T, что данное решение $x^2(T+\tau) < \delta_0^2 + \eta$ при $\omega \in A_\varepsilon$ и всех $\tau > 0$. Но тогда, выбрав $\eta = \delta_0^2(\alpha - 1)$, имеем

$$\frac{\delta_0^2 + \eta}{\delta_0^2} x^2(T+\tau) > \delta_0^2 + \eta > x^2(T+\tau-\xi),$$

и тогда при $\omega \in A_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$x^2(t+T) \le \delta_0^2 - \int_T^t f_h(x_s)\,ds,$$

и, следовательно, $\lim_{s\to\infty} f_h(x_s) = 0$, т.е. $|x(t+T)| \le \delta_0$ при всех $t > 0$. Полученное противоречие доказывает следствие 2.I.

Замечание 2.2. Можно исследовать устойчивость решений уравнения (I) при помощи функционала

$$y(t) = x^2(t) + p\int_{t-h}^{t} x^2(s)\,ds,$$

т.к. $dy(t) = dx^2(t) + p\,x^2(t)\,dt - p\,x^2(t-h)\,dt$

и тогда требование теоремы 2.I следует заменить на „$f_h(x_t) + p(x^2(t) - x^2(t-h))$ – определенно-положительный функционал". Это условие иногда легче проверять

Пример I. Рассмотрим уравнение:

$$dx(t) = -a\,x(t)\,dt + b\,x(t-1)\,dw(t).$$

Если проверять выполнение условий теоремы 2.I, то получим

$$-2a\,x^2(t) + b^2 x^2(t-1)$$

и условие устойчивости не установлено. Если же воспользоваться замечанием 2.2, то при $a > 0$, выбрав $p = b^2$ имеем

$$2a\,x^2(t) - b^2 x^2(t-1) - b^2 x^2(t) + b^2 x^2(t-1) =$$

$$= (2a - b^2)\,x^2(t)$$ и тогда

условие равномерной асимптотической устойчивости имеет вид $b^2 < 2a$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$dx(t)=[-ax(t)-bx(t-1)]dt+c\int_{R^1}x(t)f(t,u)q(dt\times du),$$
$$(a>0).$$

Имеем на кривых $\alpha x^2(t) > x^2(t-1)$

$$\left[-2a+c^2\int_{R^1}\frac{f^2(t,u)}{u^2}du\right]x^2(t)-2bx(t)x(t-1)\leq$$

$$\leq\left(-2a+c^2\int_{R^1}\frac{f^2(t,u)}{u^2}du+2|b|\sqrt{\alpha}\right)x^2$$

и достаточное условие устойчивости тривиального решения можно получить, взяв $\inf$ по $\alpha>1$:

$$\frac{c^2}{2}\int_{R^1}\frac{f^2(t,u)}{u^2}du+|b|<a.$$

Пример 3. Покажем, что тривиальное решение уравнения $\frac{dx(t)}{dt}=-ax(t)$ при $a>0$ устойчиво к малым постоянно действующим возмущениям, т.е. тривиальное решение уравнения

$$dx(t)=[-ax(t)+a_1(t,x(t),x(t-1))]dt+$$

$$+b(t,x(t),x(t-1))dw(t)+\int_{R^1}f(t,x(t),x(t-1),u)q(dt\times du)$$

равномерно асимптотически устойчиво при достаточно малой Липшицевой константе в неравенстве (I.6). Пусть

$$|a_1|\leq c(|x|+|y|),\ |b^2|<c(|x|^2+|y|^2),$$

$$\left|\int_{R^1} \frac{f^2(t,x,y,u)}{u^2}\, du\right| < C\left(|x|^2+|y|^2\right).$$

Тогда, взяв $\quad y(t) = x^2(t) + 2C\int\limits_{t-1}^{t} x^2(s)\, ds,$
получим

$$-2a x^2(t) + 2C|x(t)|\left(|x(t)| + |x(t-1)|\right) +$$

$$+2C\left(x^2(t)+x^2(t-1)\right) + 2C\left[x^2(t) - x^2(t-1)\right]$$

и на кривых $\quad \alpha x^2(t) > x^2(t-1)$:

$$\left[-2a + 2C(3+\sqrt{\alpha})\right] x^2 < -\mu x^2$$

т.е. при достаточно малом C имеет место стохастическая равномерная асимптотическая устойчивость.

Теорема 2.2. Пусть уравнение (2.I) удовлетворяет условиям (I.3), (I.4) и существуют положительные числа t_0, N, q и δ_0 такие, что для всех x таких, что $\sup\limits_{t_1-1\le s\le t_1} |x(s)| < \delta_0$ и t_1, t_2, $t_2 > t_1 > t_0$, выполнено неравенство

$$E|x(t_2)|^2 \le N e^{-q(t_2-t_1)}\left(1+\sup_{t_1-1\le s\le t_1}|x(s)|^2\right), \tag{2.3}$$

то решение $x(t)\equiv 0$ уравнения (2.I) равномерно стохастически устойчиво.

Доказательство. Равномерная стохастическая устойчивость означает следующее [I]: если задать произвольные малые положительные ε и δ, то можно определить такое достаточно большое t_0 и $\delta_0 > 0$, что, каково бы ни было $T>0$,

$$P\left\{\left(\sup_{0\le t\le T}|x(t)|>\varepsilon\right)/F_0\right\}\le P\left\{\left(\sup_{0\le t\le 2t_0}|x(t)|>\varepsilon\right)/F_0\right\}+ \tag{2.4}$$

$$+P\left\{\left(\sup_{2t_0\le t\le T}|x(t)|>\varepsilon\right)/F_0\right\}<5\delta$$

как только

$$\sup_{-1\le t\le 0}|\varphi(t)|<\delta_0$$

Согласно неравенству Чебышева и условию (I.I6) следствия I.I, получим:

$$P\left\{\left(\sup_{0\le t\le 2t_0}|x(t)|>\varepsilon\right)/F_0\right\}\le\frac{E\left\{\left(\sup_{0\le t\le 2t_0}|x(t)|^2\right)/F_0\right\}}{\varepsilon^2}\le \tag{2.5}$$

$$\le\frac{HE\left\{\sup_{-1\le t\le 0}|\varphi(t)|^2\right\}}{\varepsilon^2}<\delta ,$$

где δ - произвольное положительное число, если

$$E\sup_{-1\le t\le 0}|\varphi(t)|^2\le\frac{\delta\varepsilon^2}{H} . \tag{2.6}$$

(H зависит от L_c и t_0).

Оценим вероятность события $\sup_{2t_0\le t\le T}|x(t)|>\varepsilon$
Так как

$$|x(t)|\le|x(2t_0)|+\left|\int_{2t_0}^{t}a(\tau,x(\tau),x(\tau-1))d\tau\right|+$$

$$+\left|\int_{2t_0}^{t}b(\tau,x(\tau),x(\tau-1))dw(\tau)\right|+\left|\int_{2t_0}^{t}\int_{R'}f(\tau,x(\tau),x(\tau-1),u)\tilde q(d\tau\times du)\right| ,$$

то

$$P\left\{\left(\sup_{2t_0\le t\le T}|x(t)|>\varepsilon\right)/F_0\right\}\le P\left\{\left(|x(2t_0)|>\varepsilon\right)/F_0\right\}+$$

$$+P\Big\{\Big(\sup_{2t_0\le t\le T}\Big|\int_{2t_0}^{t} a(\tau,x(\tau),x(\tau-1))d\tau\Big|>\varepsilon\Big/F_0\Big\}+$$

$$+P\Big\{\Big(\sup_{2t_0\le t\le T}\Big|\int_{2t_0}^{t} b(\tau,x(\tau),x(\tau-1))dw(\tau)\Big|>\varepsilon\Big/F_0\Big\}+ \qquad (2.7)$$

$$+P\Big\{\Big(\sup_{2t_0\le t\le T}\Big|\int_{2t_0}^{t}\int_{R^1} f(\tau,x(\tau),x(\tau-1),u)q(d\tau\times du)\Big|>\varepsilon\Big)\Big/F_0\Big\}.$$

Первое слагаемое неравенства (2.7), согласно (2.5) оценивается так:

$$P\{(|x(2t_0)|>\varepsilon)/F_0\}<\delta, \qquad (2.8)$$

если выполняется (2.6).

Далее

$$P\Big\{\Big(\sup_{2t_0\le t\le T}\Big|\int_{2t_0}^{t} a(\tau,x(\tau),x(\tau-1))d\tau\Big|>\varepsilon\Big)\Big/F_0\Big\}\le$$

$$\le P\Big\{\Big(\int_{2t_0}^{T}|a(\tau,x(\tau),x(\tau-1))|d\tau>\varepsilon\Big)\Big/F_0\Big\}\le$$

$$\le\frac{1}{\varepsilon}\int_{2t_0}^{T}E\Big\{|a(\tau,x(\tau),x(\tau-1))|d\tau>\varepsilon/F_0\Big\}\le\frac{C}{\varepsilon}\Big[\int_{2t_0}^{T}E(x(\tau)/F_0)d\tau+$$

$$+\int_{2t_0}^{T}E\{x(\tau-1)/F_0\}d\tau\Big]\le\frac{C}{\varepsilon}\Big[2\int_{2t_0}^{T}E\{x(\tau)/F_0\}d\tau+$$

$$+\int_{2t_0-1}^{2t_0} E\{x(\tau)/F_0\}d\tau\Big] \leq \frac{CH}{\varepsilon} E \sup_{-1\leq t\leq 0} |\varphi(t)|^2 +$$

$$+\frac{2C}{\varepsilon} E\Big\{\int_{2t_0}^{T} \Big[E|x(\tau)|^2/F_{t_0}\Big]^{1/2} d\tau \Big/ F_0\Big\} \leq \frac{CH}{\varepsilon} E \sup_{-1\leq t\leq 0} |\varphi(t)|^2 +$$

$$+\frac{2C}{\varepsilon} E\Big\{\int_{2t_0}^{T} \Big[N e^{-q(\tau-t_0)} \big(1+\sup_{t_0-1\leq s\leq t_0} |x(s)|^2\big)\Big]^{1/2} d\tau \Big/ F_0\Big\} \leq$$

$$\leq \delta\varepsilon C + \frac{2CN^{1/2}}{\varepsilon} E\Big\{\big(1+\sup_{t_0-1\leq s\leq t_0} |x(s)|^2\big)^{1/2} \Big/ F_0\Big\} \int_{2t_0}^{T} e^{-\frac{q}{2}(\tau-t_0)} d\tau \leq$$

$$\leq \delta\varepsilon C + \frac{2CN^{1/2}}{\varepsilon}\big(1+\varepsilon^2\delta\big)^{1/2} \cdot \frac{2}{q}\Big(e^{-\frac{q}{2}t_0} - e^{-\frac{q}{2}(T-t_0)}\Big).$$

Откуда вытекает, что при любом положительном δ ($\delta < 1$) и $\varepsilon > 0$ можно подобрать достаточно большое t_0, что

$$P\Big\{\sup_{2t_0\leq t\leq T}\Big|\int_{2t_0}^{t} a(\tau, x(\tau), x(\tau-1))d\tau\Big| > \varepsilon \Big/ F_0\Big\} < \delta, \quad (2.9)$$

если выполнено (2.6).

Используя мартингальное свойство стохастических интегралов [1] и условие Липшица, получим

$$P\Big\{\sup_{2t_0\leq t\leq T}\Big|\int_{2t_0}^{t} b(\tau, x(\tau), x(\tau-1))dw(\tau)\Big| > \varepsilon \Big/ F_0\Big\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} E\Big\{\sup_{2t_0\leq t\leq T}\Big|\int_{2t_0}^{t} b(\tau, x(\tau), x(\tau-1))dw(\tau)\Big|^2 \Big/ F_0\Big\} \leq$$

$$\le \frac{4}{\varepsilon^2}\int_{2t_0}^{T} E\{|b(\tau, x(\tau), x(\tau-1))|^2/F_0\}d\tau \le$$

$$\le \frac{4c}{\varepsilon^2}\int_{2t_0}^{T} \{(E|x(\tau)|^2 + E|x(\tau-1)|^2)/F_0\}d\tau \le \tag{2.10}$$

$$\le \frac{8c}{\varepsilon^2}\int_{2t_0}^{T} E\{|x(\tau)|^2/F_0\}d\tau + \frac{4c}{\varepsilon^2}\int_{2t_0-1}^{2t_0} E\{|x(\tau)|^2/F_0\}d\tau \le$$

$$\le C\delta\varepsilon + \frac{8cN}{\varepsilon^2 q}(1+\varepsilon^2\delta)(e^{-qt_0} - e^{-q(T-t_0)}) < \delta$$

при достаточно большом t_0.

Аналогично оценив четвертое слагаемое (2.7) и объединив (2.5), (2.7) - (2.10), получим (2.4), т.е. теорема доказана.

§ 3. ПОЛУГРУППОВОЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ.

В работе [7] предложен полугрупповой подход к исследованию устойчивости решений дифференциально-функциональных уравнений Ито. В этой работе показано, что решение уравнения (2.1) без интеграла по случайной мере является непрерывным справа строго марковским процессом в пространстве $C_{[-1,0]}$. Рассуждения работы [7], обосновывающее этот факт, практически без изменений могут быть проделаны и в нашем случае, если в качестве фазового пространства взять пространство кусочно-непрерывным дифференцируемых справа ограниченных вектор-функций, имеющих конечное число разрывов I-го рода (пространство $M_{[-1,0]}$).

Для вычисления производящего оператора полугруппы решений переходных вероятностей автором [7] получены необходимые оценки разности решения в двух близких точках. Подобные оценки получены и в нашем случае в § I.

Рассмотрим стохастическое дифференциально-разностное уравнение

$$dx(t) = a(x(t), x(t-1))dt + b(x(t), x(t-1))dw(t) +$$

$$+ \int_{R^m} f(x(t), x(t-1), u) q(dt \times du), \qquad (3.I)$$

$$x(t)\Big|_{-1 \le t \le 0} = \varphi(t),$$

где $a(x,y)$, $f(x,y,u)$ - векторные функции со значениями из R^m , $t \in [0,T]$, $u \in R^m$ и $b(x,y)$ - операторная функция: $R^m \times R^m \to R^m$, $a(0,0) = b(0,0) = f(0,0,u) \equiv 0$, $w(t)$ - m - мерный винеровский процесс, $q(A) = p(A) - Ep(A)$, $p(A)$ - пуассоновская мера в R^m с параметром

$$Ep(A) = \int_A \frac{du\,dt}{|u|^{m+1}} < \infty,$$

$A \in [0,T] \times R^m$, процесс $w(t)$ и $p(A)$ независимы между собой. Для коэффициентов уравнения (3.I) выполняются глобальные условия Липшица (I.3) (или локальные условия (I.6)) и (I.4), а также непрерывность (см. § I).

Для элементов $x(t) \in M_{[-1,0]}$ введем норму так: если $|x(t)|^2 = \sum_i x_i^2(t)$, то

$$\|x_t\| = \sup_\theta \{|x(t+\theta)|, -1 \le \theta \le 0\}.$$

Определим нормы

$$|a| = \Big(\sum_i a_i^2\Big)^{1/2}; \quad |b| = \Big(\sum_i \sum_j b_{ij}^2\Big)^{1/2};$$

$$|f| = \Big(\sum_i f_i^2\Big)^{1/2}.$$

I. Марковское свойство решений (3.I) [7].

Пусть $\mathcal{Y}$ семейство открытых множеств в $M_{[-1,0]}$ с топологией, определенной нормой

$$\|x\| = \sup_{\theta}\big(|x(\theta)|,\ \theta \in [-1,0]\big).$$

и $\mathcal{B}$ - борелевское поле в $\mathcal{Y}$. Тройка $\{M_{[-1,0]}, \mathcal{Y}, \mathcal{B}\}$ является топологическим фазовым пространством.

Пусть $x = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-1,0]$ - начальное условие (3.I). Предположим, что последовательности мер на пространстве $\{M_{[-1,0]}, \mathcal{Y}, \mathcal{B}\}$ полные. Пусть Ω - вероятностное пространство и $\omega \in \Omega$.

Определим $\tilde{M}_t^x$ и $\tilde{N}_t^x$ как наименьшие σ -алгебры на Ω для каждого $x(s)$, $-1 \le s \le t$, и $x(s)$, $t-1 \le s \le t$, построенных по фиксированных $x = \varphi(\theta)$, $x \in M_{[-1,0]}$.

Пусть P_x - вероятностная мера на $\tilde{M}^x = \bigcup_{t \ge 0} \tilde{M}_t^x$. Рассмотрим ω -множества S, найденные следующим образом: для некоторого $y \in M_{[-1,0]}$, некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $0 \le s \le t$

$$S = \Big\{\omega : \sup_{-1 \le \theta \le 0} |x(s+\theta) - y(\theta)| < \varepsilon\Big\}.$$

Такие S содержатся в $\tilde{M}_t^x$. Обозначим через M_t^x наименьшую σ -алгебру, порожденную множествами S. Пусть выполняются условия существования и единственности решения (3.I) и $x=\varphi(\theta)\in M_{[-1,0]}$, тогда $x_s(\theta), 0\le s\le t$, есть случайная величина

$$\{\Omega, M_t^x, P_x\} \xrightarrow{x_t} \{M_{[-1,0]}, \mathcal{Y}, \mathcal{B}\}$$

и $x_t(\theta)$ не имеет разрывов 2го рода с вероятностью I, $x_t(\theta)$ - измерима на $\{\Omega, N_t^x, P_x\}$, где $N_t^x = M_t^x \cap \widetilde{N}_t^x$. Для любой функции g имеем с вероятностью I

$$E\{g(x_{t+s})/M_t^x\} = E\{g(x_{t+s})/N_t^x\}, \ s\ge 0.$$

Кроме того, $x_t(\theta)$ непрерывный справа строго марковский процесс на топологическом фазовом пространстве $\{M_{[-1,0]}, \mathcal{Y}, \mathcal{B}\}$ с моментом обрыва $\zeta(\omega)=\infty$ с вероятностью I.

Действительно, аналогично [7] следует $\mathcal{B}$ -измеримость функции

$$p(t,x,\Gamma) = P_x(x_t\in\Gamma)$$

для произвольного $\Gamma\in\mathcal{B}$ и равенство

$$P_x\{x_{t+h}\in\Gamma/M_t^x\} = p(h, x_t, \Gamma)$$

с вероятностью I, что и доказывает марковское свойство $x_t(\theta)$.

Строгая марковость $x_t(\theta)$ следует из непрерывности функции $\rho(x)$ по x , где

$$\rho(x) = E_x\, d(x_t(\theta))$$

для $d(x)$ - ограниченной и непрерывной на $M_{[-1,0]}$.

2. Остановленные процессы [7], [5].

Пусть R - открытое ограниченное множество в $M_{[-1,0]}$ и $\tau=\inf\{t: x_t\notin R\}$ - момент I-го выхода процесса $x_t(\theta)$ из R.

Если $x_t \in R$ для всех t, то $\tau = \infty$. τ есть марковский момент времени [3], т.е.

$$\{\omega : \tau \leq t\} \in M_t^x .$$

Определим остановленный процесс $\tilde{x}_t$ так

$$\tilde{x}_t = \begin{cases} \tilde{x}_t = x_t & \text{при } t < \tau, \\ \tilde{x}_t = x_\tau & \text{при } t > \tau . \end{cases}$$

$\tilde{x}_t$ тоже есть строго марковский процесс непрерывный справа при выполнении условий существования и единственности (см. § I) с $\zeta(\omega) = \infty$.

Следовательно, $\tilde{x}_t$ не зависит с вероятностью I от a, b и f вне R. Пусть теперь для уравнения (3.I) выполняется условие (I.6) вместо (I.3).

Решение $x_t(\theta)$ находим так: пусть

$$R_n = \{x : \|x\| < n\},\ R_n \to M_{[-1,0]}$$

и последовательность R_n такая, что условия существования и единственности с I.3 выполняются на каждом множестве R_n для $L = L_n$, т.е. для $n > 0$ существует L_n на $[-1,0]$, что для $\|x\| < n, \|y\| < n$ выполняется

$$T|a(x_1,y_1) - a(x_2,y_2)|^2 + |b(x_1,y_1) - b(x_2,y_2)|^2 +$$

$$+ \int_{R^m} |f(x_1,y_1,u) - f(x_2,y_2,u)|^2 \frac{du}{|u|^{m+1}} \leq \tag{3.2}$$

$$\leq L_n^2 \{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2\}.$$

Далее строим последовательности

$$a^n(x,y) = a(x,y),$$

$$b^n(x,y) = b(x,y)$$ и

$f^n(x,y,u) = f(x,y,u)$ на R^n и удовлетворяющая условиям существования и единственности решения с (3.2). Для a^n, b^n и f^n существует решение x_t^n (§ I). Пусть

$$\tau_n = \inf\{t : x_t^n \notin R^n\} = \inf\{t : |x_t^n| \geq n\}.$$

Если $x = \varphi(0) \in R_n$, то $\tau_n > 0$ с вероятностью I и x_t^n есть строго марковский процесс непрерывный справа для каждого $n > 0$. Итак, для каждого $n < m$ $x_t^n = x_t^m$ и $t < \tau_n$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \zeta$ (или ∞), $R_n \xrightarrow[n\to\infty]{} M_{[-1,0]}$ и $x_t^n \to x_t$, как решение (3.I).

Таким образом, решение (3.I) при выполнении (3.2) определяется как процесс $x_t = x_t^n$ вплоть до τ_n (для всех n). В дальнейшем будем считать, что для уравнения (3.I) выполняется условие (3.2), ибо в вопросах устойчивости нас интересует момент I-го выхода из области, содержащей начало координат.

3. Область определения слабого инфинитезимального оператора процесса x_t.

Будем говорить, что непрерывный функционал $V(x_t)$, определенный на $M_{[-1,0]}$ с областью значений из R, принадлежит области определения слабого инфинитезимального оператора $\tilde{A}$ процесса x_t (кратко будем писать $V \in \mathcal{D}(\tilde{A})$), если пределы

$$\lim_{s\to 0} \frac{E_x V(x_s) - V(x)}{s} = g(x), \tag{3.3}$$

$$\lim_{s\to 0} E_x g(x_s) = g(x)$$

существуют "поточечно" в $M_{[-1,0]}$ и последовательности равномерно ограничены по x.

В дальнейшем будем записывать это так

$$g(x)=\tilde{A}V(x).$$

Обозначим через $\tilde{A}_R$ слабый инфинитезимальный оператор для $\tilde{x}_t = x_t$, остановленного процесса при $\tau = \inf\{t: x_t \notin R\}$ для открытого множества R. Верна

Лемма 3.I. [7]. Пусть для уравнения (3.I) выполняются условия существования и единственности решения (с 3.2) и пусть $\hat{A}$ - слабый инфинитезимальный оператор процесса $\hat{x}(t)$, удовлетворяющего (3.I) с коэффициентами $\hat{a}=a$, $\hat{b}=b$ и $\hat{f}=f$ на R и $\hat{a}, \hat{b}, \hat{f}$ удовлетворяют (I.3). Пусть V - непрерывный ограниченный функционал на ограниченном множестве R.

Тогда, если $V \in \mathcal{D}(\hat{A})$ и $\hat{A}V=g$ есть ограниченная на ограниченном R, то сужение V на R принадлежит $\mathcal{D}(\tilde{A}_R)$ и на R

$$\hat{A}V=\tilde{A}_R V.$$

Здесь $\hat{a}, \hat{b}$ и $\hat{f}$ могут доопределяться и вне R, но так, чтобы $\sup_{t, \theta} |x(t-\theta)| \le K < \infty$ (для построения решения можно брать вне R $\hat{a}=\hat{b}=\hat{f}\equiv 0$).

Зависимость $V(x)$ от $x(0)$ может быть произвольной формы, а зависимость $V(x)$ от $x(\theta)$, $-1 \le \theta < 0$ задается во многих случаях в интегральной форме [I]. Аналог стохастических функций Ляпунова имеют в большинстве случаев ту же конструкцию, что и детерминированные функции Ляпунова. Приведенные ниже теоремы 3.I, 3.2 дают возможность вычислять слабые инфинитезимальные операторы для процессов $x_t(\theta)$, $-1 \le \theta \le 0$, определенные (3.I).

В дальнейшем нам понадобяться такие факты о бесконечно-малых величинах [8].

Замечание 3.I. Будем писать $\alpha(s)=o(s)$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения

$$P\{|\alpha(s)| > \varepsilon\} = o(s),$$

$$E\Psi_\varepsilon(\alpha(s))\alpha(s) = o(s), \quad E\Psi_\varepsilon(\alpha(s))(\alpha(s))^2 = o(s),$$

где

$$\Psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \le \varepsilon, \\ 0 & \text{при } |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидны следующие утверждения:

а) если $\alpha(s) = o(s)$ и $\beta(s) = o(s)$, то $\alpha(s) + \beta(s) = o(s)$,

б) пусть $E\alpha(s) = o(s)$ и $\mathcal{D}(\alpha(s)) = o(s)$, тогда $\alpha(s) = o(s)$, что следует из неравенства Чебышева,

в) если $\alpha(s)/s \to 0$ при $s \to 0$ по вероятности, то

$\alpha(s) = o(s)$,

г) пусть для дважды непрерывно-дифференцируемой функции, ограниченной вместе со своими производными, существует предел

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} E g(\alpha(s)) \quad \text{и} \quad \beta(s) = o(s),$$

тогда

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} E[g(\alpha(s) + \beta(s)) - g(\alpha(s))] = 0,$$

что следует из разложения в ряд Тейлора $g(\alpha(s) + \beta(s))$ в окрестности $\alpha(s)$.

Лемма 3.2. Пусть $x(t)$ - решение (3.I), для которого выполняются условия существования и единственности (с I.3), тогда

$$\alpha_1(s) = \int_0^s [a(x(\tau), x(\tau-1)) - a(\varphi(0), \varphi(-1))] d\tau = o(s) \qquad (3.4a)$$

$$d_2(s)=\int_0^s [b(x(\tau),x(\tau-1))-b(\varphi(0),\varphi(-1))]\,dw(\tau)=o(s), \qquad (3.4б)$$

$$d_3(s)=\int_0^s\int_{R^m}[f(x(\tau),x(\tau-1),u)-f(\varphi(0),\varphi(-1),u)]\,q(d\tau\,du)=o(s). \qquad (3.4в)$$

<u>Доказательство.</u> Согласно лемме I.2

$$E\sup_{0\le\tau\le s}|x(\tau)-\varphi(0)|^2\le R\cdot s,$$
$$E\sup_{0\le\tau\le s}|x(\tau-1)-\varphi(-1)|^2\le R\cdot s, \qquad (3.5а)$$

следовательно,

$$\sup_{0\le\tau\le s}|x(\tau)-\varphi(0)|\to 0$$
и $$\sup_{0\le\tau\le s}|x(\tau-1)-\varphi(-1)|\to 0 \qquad (3.5б)$$

по вероятности при $s\to 0$.

Используя условие Липшица, легко видеть, что $d_1(s)/s\to 0$ по вероятности при $s\to 0$, а из (в) следует $d_1(s)=o(s)$.

Далее по свойствам интеграла по процессу броуновского движения [8] и неравенству (I.II) получим $Ed_2(s)=0$ и

$$\lim_{s\to 0}\frac{\mathcal{D}d_2(s)}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\int_0^s E|b(x(\tau),x(\tau-1))-b(\varphi(0),\varphi(-1))|^2 d\tau\le$$

$$\le\lim_{s\to 0}\frac{L^2}{s}\int_0^s\{E\sup_{0\le\tau\le s}|x(\tau)-\varphi(0)|^2+E\sup_{0\le\tau\le s}|x(\tau-1)-\varphi(-1)|^2\}d\tau=$$

$$=0$$

из условия Липшица и (3.5а).

Учитывая условие леммы аналогично получим $\alpha_3(s)=o(s)$.

Теорема 3.I. Предположим, что для уравнения (3.I) выполнены условия существования и единственности с локальным условием Липшица (3.2) и

$$x=\varphi(\theta)\in M_{[-1,0]}.$$

Для всякой дважды непрерывно-дифференцируемой функции $V(x)=G(\varphi(0))$
водными

$$\hat{A}_R V(x)=L_1 V(x)=g(x)=G'_x(\varphi(0))\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j G_{x_ix_j}(\varphi(0))G_{ij}(\varphi(0),\varphi(-1))+\int_{R^m}\Big[G\big(\varphi(0)+$$

$$+f(\varphi(0),\varphi(-1),u)\big)-G(\varphi(0))-G'_x(\varphi(0))f(\varphi(0),\varphi(-1),u)\Big]\frac{du}{|u|^{m+1}}, \quad (3.6)$$

где $G'_x=(G_{x_1},\ldots,G_{x_m})$, $G_{x_ix_j}$ - вторые частные производные, $G_{ij}=\sum_k b_{ik}b_{jk}$.

Доказательство. Для вычисления $\hat{A}_R V$ достаточно положить, согласно лемме (3.I), выполнение (I.3) и $|x_t|\le K$ для некоторых достаточно больших конечных K и вычислить

$\hat{A}V$ для видоизмененного процесса (обозначим в дальнейшем $\hat{x}_t$ через x_t).

В условиях теоремы

$$x(s)=\varphi(0)+\int_0^s a(\varphi(0),\varphi(-1))dt+\int_0^s b(\varphi(0),\varphi(-1))dw(t)+$$

$$+\int_0^s\int_{R^m} f(\varphi(0),\varphi(-1),u)q(dt\times du)+\alpha(s),$$

где

$$\alpha(s)=\sum_{i=1}^3 \alpha_i(s)=o(s),$$

что следует из леммы 3.I.

На основании свойства 2) замечания 3.I легко видеть, что

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}E_x\left[G(x(s)-\alpha(s))-G(\varphi(0))\right]=$$

$$=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}E_x\left[G(x(s))-G(\varphi(0))\right].$$

Заметим прежде всего [8], что

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}E_x\Big[G\Big(\varphi(0)+\int_0^s a(\varphi(0),\varphi(-1))dt+$$

$$+\int_0^s b(\varphi(0),\varphi(-1))dw(t)+\int_0^s\int_{R^m} f(\varphi(0),\varphi(-1),u)q(dt\times du)\Big)-$$

$$-G(\varphi(0))\Big]=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}E_x\Big[G\Big(\varphi(0)+\int_0^s a(\varphi(0),\varphi(-1))dt+$$

$$+\int_0^s b(\varphi(0),\varphi(-1))dw(t)\Big)-G(\varphi(0))\Big]+$$

$$+\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}E_x\Big[G\Big(\varphi(0)+\int_0^s\int_{R^m} f(\varphi(0),\varphi(-1),u)\,q(dt\times du)\Big)-G(\varphi(0))\Big]. \qquad (3.7)$$

Сначала найдем первое слагаемое правой части (3.7).

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}E_x\Big[G\Big(\varphi(0)+\int_0^s a(\varphi(0),\varphi(-1))dt+\int_0^s b(\varphi(0),\varphi(-1))dw(t)\Big)-$$

$$-G(\varphi(0))\Big]=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\Big\{\sum_{i=1}^m\Big[G_{x_i}(\varphi(0))E_x\Big(\int_0^s a_i(\varphi(0),\varphi(-1))dt\ +$$

$$+\sum_{k=1}^m b_{ik}(\varphi(0),\varphi(-1))dw_k(t)\Big]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m G_{x_ix_j}(\varphi(0))E_x\Big(\int_0^s a_i(\varphi(0),\varphi(-1))dt+$$

$$+\sum_{k=1}^m b_{ik}(\varphi(0),\varphi(-1))dw_k(t)\Big)\Big(\int_0^s a_j(\varphi(0),\varphi(-1))dt+\sum_{k=1}^m b_{jk}(\varphi(0),\varphi(-1))dw_k(t)\Big)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m E_x\Big[G_{x_ix_j}\Big(\varphi(0)+\rho(\omega)\Big(\int_0^s a(\varphi(0),\varphi(-1))dt+\int_0^s b(\varphi(0),\varphi(-1))dw(t)\Big)-$$

$$-G_{x_ix_j}(\varphi(0))\Big]\Big(\int_0^s a_i(\varphi(0),\varphi(-1))dt+\sum_{k=1}^m b_{ik}(\varphi(0),\varphi(-1))dw_k(t)\Big)\times$$

$$\times\Big(\int_0^s a_j(\varphi(0),\varphi(-1))dt+\sum_{k=1}^m b_{jk}(\varphi(0),\varphi(-1))dw_j(t)\Big)\Big\}, \qquad (3.8)$$

где $0 \le \rho(\omega) \le 1$.

Легко видеть, что пределы первых двух членов в правой части (3.8) при $s \to 0$ существует равномерно по $x = \varphi(\theta)$ и являются первыми двумя членами правой части (3.6). Третий член в (3.8) стремится к нулю (равномерно по x) при $s \to 0$, если применить неравенство Коши-Буняковского (второй сомножитель этого выражения равномерно ограничен).

Осталось найти

$$\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}E_x\Big[G\Big(\varphi(0)+\int_0^s\int_{R^m} f(\varphi(0),\varphi(-1),u)q(dt\times du)\Big)-$$

$$-G(\varphi(0))\Big]=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}E_x\Big[G\Big(\varphi(0)+\int_0^s\int_{R^m} f(\varphi(0),\varphi(-1),u)q(dt\times du)\Big)-$$

$$-G(\varphi(0))-\sum_{i=1}^m G_{x_i}(\varphi(0))\int_0^s\int_{R^m} f_i(\varphi(0),\varphi(-1),u)q(dt\times du)\Big],$$

так как

$$E_x\int_0^s\int_{R^m} f_i(\varphi(0),\varphi(-1),u)q(dt\times du)=0.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $f(\varphi(0),\varphi(-1),u)$ является ступенчатой функцией по u :

$$f(\varphi(0),\varphi(-1),u)=C_\ell \quad \text{, если } u\in B_\ell,\ p\Big(\bigcup_{\ell=1}^N B_\ell\Big)$$

есть число скачков, тогда

$$P\Big\{p\Big(\bigcup_{\ell=1}^N B_\ell\Big)>1\Big\}=o(s)$$

Тогда можно найти

$$E_x\Big[G\Big(\varphi(0)+\int_0^s\int_{R^m} f(\varphi(0),\varphi(-1),u)\,q(dt\times du)\Big)-G(\varphi(0)) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m} G_{x_i}(\varphi(0))\int_0^s\int_{R^m} f_i(\varphi(0),\varphi(-1),u)\,q(dt\times du)\Big] =$$

$$= s\sum_{l=1}^{N}\Big[G\big(\varphi(0)+f(\varphi(0),\varphi(-1),u_l)\big)-G(\varphi(0)) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m} G_{x_i}(\varphi(0))\,f_i(\varphi(0),\varphi(-1),u)\Big]\int_{B_l}\frac{du}{|u|^{m+1}}+o(s).$$

Тогда и в общем случае [8]

$$E_x\Big[G\Big(\varphi(0)+\int_0^s\int_{R^m} f(\varphi(0),\varphi(-1),u)\,q(dt\times du)\Big) -$$

$$-G(\varphi(0))-\sum_{i=1}^{m} G_{x_i}(\varphi(0))\int_0^s\int_{R^m} f_i(\varphi(0),\varphi(-1),u)\,q(dt\times du)\Big] =$$

$$= s\int_{R^m}\Big[G\big(\varphi(0)+f(\varphi(0),\varphi(-1),u)\big)-G(\varphi(0)) -$$

$$-\sum_{i=1}^{m} G_{x_i}(\varphi(0))\,f_i(\varphi(0),\varphi(-1),u)\Big]\frac{du}{|u|^{m+1}}+o(s).$$

Объединяя эти два результата, получаем (3.6). Осталось показать , что

$$\lim_{t\to 0} E_x\, g(x_t) = g(x). \qquad (3.9)$$

Это следует из того, что $\|x_t\| \le K < \infty$, a_i, b_{ij}, f_i - ограничены и непрерывны, $G_{x_i}, G_{x_i x_j}$ - ограничены на ограниченных множествах, тогда возможен переход под знаком E_x.

Итак, $V(x) \in \mathcal{D}(\hat{A})$ и по лемме 3.I

$$V(x) \in \mathcal{D}(\tilde{A}_R) \quad , \text{т.е.} \quad \hat{A}V(x) = \tilde{A}_R V(x).$$

Теорема доказана.

<u>Теорема 3.2</u>. Пусть выполняются условия теоремы 3.I и

$$V(x) = \int_{-1}^{0} h(\theta) H(x(\theta), x(0))\, d\theta .$$

Пусть $h(\theta)$ определена и имеет непрерывную производную на открытом множестве, содержащем $[-1,0]$ и $H(\beta,\gamma)$, $H_{\gamma_i}(\beta,\gamma)$ и $H_{\gamma_i\gamma_j}(\beta,\gamma)$ ограничены и непрерывны по β и γ.

Тогда $V(x) \in \mathcal{D}(\tilde{A}_R)$ и

$$\tilde{A}_R V(x) = g(\dot{x}) - h(0)H(\varphi(0),\varphi(0)) - h(-1)H(\varphi(-1),\varphi(0)) -$$

$$- \int_{-1}^{0} h_\theta(\theta) H(\varphi(\theta),\varphi(0))\, d\theta + \int_{-1}^{0} h(\theta) L_1 H(\varphi(\theta),\varphi(0))\, d\theta , \qquad (3.10)$$

где оператор L_1 определен по (3.6) и действует на H лишь как функцию от $\varphi(0)$.

<u>Доказательство</u>. Как и при доказательстве теоремы 3.I используем лемму 3.I и предполагаем, что $|x_t| \le K < \infty$ и выполняются условия (I.3).

Тогда для малых S

$$\frac{1}{s}[E_x(V(x_s)-V(x)] = \frac{1}{s}E_x\int_{-1}^{0} h(\theta)[H(x(s+\theta),x(s))-$$

$$-H(\varphi(\theta),\varphi(0))]d\theta = \frac{1}{s}E_x\int_{s-1}^{s} h(\theta-s)H(x(\theta),x(s))d\theta -$$

$$-\frac{1}{s}E_x\int_{-1}^{0} h(\theta)H(\varphi(\theta),\varphi(0))d\theta = \frac{1}{s}\int_{-1}^{0}E_x[h(\theta-s)H(x(\theta),x(s))-$$

$$-h(\theta)H(\varphi(\theta),\varphi(0))]d\theta + \frac{1}{s}\int_{0}^{s}E_x h(\theta-s)H(x(\theta),x(s))d\theta -$$

$$-\frac{1}{s}\int_{-1}^{-1+s}E_x h(\theta-s)H(x(\theta),x(s))d\theta. \qquad (3.II)$$

Ввиду условий, наложенных на H и $h(\theta)$, первое слагаемое (3.II) стремится равномерно по x к последним двум членам (3.I0).

Далее, в силу соотношения (3.5б), последние два члена (3.II) стремятся равномерно по x к первым двум членам (3.I0).

Легко видеть, что

$$\lim_{t\to 0} E_x g(x_t) = g(x).$$

4. Теоремы устойчивости [7]

Сформулированные ниже теоремы являются обобщением леммы I и теоремы I.2 в [5], где пространство состояний предполагается Эвклидовым. Доказательство теорем проведено в [7].

Теорема 3.3. Пусть x_t непрерывный справа строго марковский процесс на топологическом пространстве состояний $\{M_{[-1,0]}, \mathcal{Y}, \mathcal{B}\}$ со слабым инфинитезимальным оператором $\tilde{A}$ и $V(x)\geq 0$ непрерывный функционал в $\mathcal{D}(\tilde{A})$. Пусть $Q=\{x: V(x)<m\}$ и пусть $\tau=\inf\{t: x_t \notin Q\}$ ($\tau=\infty$, если $x_t\in Q$ для всех $t<\infty$).

Пусть

$$\tilde{A}V(x)=-k(x)\leq 0 \quad \text{в } Q .$$

Тогда для $x=\varphi(0)\in Q$

I) $V(x_{t\wedge\tau})=\omega_t$ - неотрицательный супермартингал,

2) $P_x\{\sup_{\infty>t\geq 0} V(x_t)\geq m\}\leq \frac{V(x)}{m}$,

3) $V(x_{t\wedge\tau})\to v(\omega)\geq 0$ с вероятностью I.

Если к тому же

а) $k(x)$ - равномерно непрерывна на непустом открытом множестве

$$R_\delta=\{x: k(x)<\delta\}\cap Q$$

для некоторого $\delta>0$ и

б) для всех достаточно больших, но конечных марковских моментов времени t и всех достаточно малых ε

$$P_x\{\sup_{t\leq s\leq t+h}|x_s-x_t|\geq\varepsilon,\ x_\tau\in Q \text{ для всех } \tau<t\}\to 0$$

при $h\to 0$ равномерно по t и любых x из Q.

Тогда

4) $k(x_t)\to 0$ с вероятностью I, т.е.

$$x_t\to\{x: k(x_t)=0\} \quad \text{относительно}$$

$$\Omega_Q=\{\omega: \sup_{\infty>t\geq 0} V(x_t)<m\}.$$

Теорема 3.4. Предположим выполнение (3.2). Пусть $V(x)$ непрерывный функционал на $M_{[-1,0]}$. Предположим, что

с) имеется ограниченное открытое множество B такое, что

$$\varphi(\theta)=x\in Q\equiv\{x: V(x)<m\}\cap B$$

и $\sup\limits_{t\geq s\geq 0} V(x_s)<m$ означает, что $x_s\in Q$ для всех $0<s<t$.

Пусть $V(x)\in \mathcal{D}(\tilde{A}_Q)$ и $\tilde{A}_Q V(x)=k(x)\leq 0$ в Q и $x\in Q$.

Тогда I) - 3) выполняются и

$$P(\Omega_Q)\geq 1-\frac{V(x)}{m}.$$

Если $k(x)$ равномерно-непрерывна на $R_\delta=\{x: k(x)<0\}$ для $\delta>0$, тогда $k(x_t)\to 0$ с вероятностью I (относительно Ω_Q).

Пример. Пусть $x(t)$ определяется из уравнения

$$dx(t)=-(ax(t)+bx(t-1))dt+\sigma x(t)dw(t)+$$

$$+c\,x(t)\int_{R^1} f(u)\,q(dt\times du). \qquad (3.12)$$

$$V(x)=\frac{x^2(0)}{2}+d\int_{-1}^{0} x^2(\theta)\,d\theta,\quad d>0.$$

Фиксируем $m<\infty$ и $\varphi(\theta)=x\in M_{[-1,0]}$. Пусть $\|x\|=K$. Заметим, что если $V(x_s)<m$ для всех $s<t$, то и $x^2(s)<2m$ для всех $0\leq s\leq t$ и $\|x_s\|\leq\max([2m]^{1/2},K), 0\leq s\leq t$.

Тогда любое ограниченное множество, содержащее начало координат с радиусом по крайней мере $\max([2m]^{1/2},K)$ удовлетворяет условию, накладываемому на множество Q в теореме 3.4. Пусть $Q=\{x: V(x)<m\}\cap B$.

Тогда по теоремам 3.I и 3.2 $V(x) \in \mathcal{D}(\tilde{A}_Q)$ и

$$A_Q V(x) = \left(-a + d + \frac{1}{2}\sigma^2 + c^2 \int_{R^1} \frac{f^2(u)}{u^2} du\right) x^2(0) - \tag{3.13}$$

$$- d x^2(-1) - b x(0) x(-1) = k(x) .$$

Предположим, что имеется d такое, что квадратичная форма (3.I3) на $[x(0), x(-1)]$ отрицательно-определена

$$d\left(a - d - \frac{1}{2}\sigma^2 - c^2 \int_{R^1} \frac{f^2(u)}{u^2} du\right) > \frac{b^2}{4} .$$

Тогда по теореме 3.3

$$P_x \left\{ \sup_{\infty > t \geq 0} V(x_t) \geq m \right\} \leq \frac{V(x)}{m} .$$

Но так как $k(x)$ равномерно непрерывна на Q, тогда

$$V(x_t) \to \upsilon(\omega),$$
$$k(x_t) \to 0$$
$$x_t \to \{x : x(t) = x(t-1) = 0\},$$

где $\upsilon(\omega)$ - некоторая случайная величина. Следовательно, $x_t \to 0$ с вероятностью I.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И.,Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1969, 354с.
2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959, 212с.
3. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М., 1963, 859с.
4. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М., 1969, 367с.
5. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление. М., 1969, 199с.
6. Кац И.Я.,Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами.-"Прикладная математика и механика", 1960, 24, № 5, с.809-823.
7. Kushner J. On the Stability of Processes Defined by stochastic Difference - Differential Equations - "Journal of Differential Equations", 1969,4, Nr.3, p.424-443.
8. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов. Киев, 1961, 216с.
9. Царьков Е.Ф. О стохастических дифференциальных уравнениях с запаздыванием.- "Изв.АН ЛССР. Серия физ. и техн.наук", 1966, № 2, с.57-64.
10. Царьков Е.Ф. Об устойчивости линейных стохастических дифференциальных уравнений 2-го порядка с запаздыванием.- "Латвийский математический ежегодник", 1968, 4, с.369-387.
11. Царьков Е.Ф., Хижняк В.Н. Статистический запас устойчивости линейных стационарных систем.- "Вопросы динамики и прочности", 1969, 19, с.133-149.
12. Слюсарчук В.Е.,Царьков Е.Ф.,Ясинский В.К. Об устойчивости решений линейных дифференциально-функциональных уравнений к случайным возмущениям параметров.-"Украинский математический журнал",1973, 25,№ 3,с.409-415.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.С.Мастерков, А.В.Янсон

Рассмотрим разностную систему

$$x_{n+1} = x_n + \mu A_n(\omega) x_n \tag{I}$$

где $A_n(\omega)$ - последовательность одинаково распределенных, независимых в совокупности случайных матриц, норма которых имеет второй момент и почти наверное ограниченных. Обозначим F_n неубывающее семейство σ -алгебр, относительно которых $A_s(\omega)$ измеримо при всех $s \leq n$. Легко убедиться, что если x_0 измеримо относительно F_0, то решение x_n измеримо относительно F_{n-1}. Предел [1] выражения $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} A_i(\omega)$ при $N \to \infty$ обозначим через $\tilde{A}$. Положим $B_n = A_n - \tilde{A}$ - вероятностный процесс $\{B_n\}$ имеет спектральное представление [1]:

$$B_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i n\lambda}\, dy(\lambda)$$

Пусть $B_n^\eta = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \eta^{n-k-1} B_k$, где $0<\eta<1$, тогда

$$B_n^\eta = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \eta^{n-k-1} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i k\lambda}\, dy(\lambda) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{2\pi i(n-1)\lambda}}{1-\eta e^{-2\pi i\lambda}}\, dy(\lambda)$$

Покажем, что начиная с некоторого $\eta_1 > 0$, удовлетворяется неравенство $(1-\eta) M|B_n^\eta|^2 \leq C$, $(C>0)$. Для этого достаточно показать, что величина

$$(1-\eta)\int_{-1/2}^{1/2} \frac{|e^{2\pi i(n-1)\lambda}|^2}{|1-\eta e^{-2\pi i\lambda}|^2}\, d\Phi(\lambda)$$

меньше С при η , достаточно близких к I.

В случае $d\Phi(\lambda) = d\lambda$, имеем

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{|e^{2\pi i(n-1)\lambda}|^2}{|1-\eta e^{2\pi i\lambda}|^2} d\lambda = \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{d\lambda}{1-2\eta\cos 2\pi\lambda+\eta^2} +$$

$$+ \int_{-1/2}^{\varepsilon} \frac{d\lambda}{1-2\eta\cos 2\pi\lambda+\eta^2} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\lambda}{1-2\eta\cos 2\pi\lambda+\eta^2},$$

очевидно при $\eta \to 1$

$$(1-\eta) \int_{\varepsilon}^{1/2} \frac{d\lambda}{1-2\eta\cos 2\pi\lambda+\eta^2} \to 0,$$

$$(1-\eta) \int_{-1/2}^{\varepsilon} \frac{d\lambda}{1-2\eta\cos 2\pi\lambda+\eta^2} \to 0$$

Проинтегрировав последнее выражение, получим

$$(1-\eta) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d\lambda}{1-2\eta\cos 2\pi\lambda+\eta^2} \le \frac{1}{\sqrt{2\eta}\,\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi\varepsilon\sqrt{2\eta}}{1-\eta}\right) \le \frac{1}{2\sqrt{2\eta}}$$

Отсюда легко видеть, что для η_1 достаточно близких к I, существует постоянная С такая, что

$$(1-\eta) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{d\lambda}{1-2\eta\cos 2\pi\lambda+\eta^2} \le C, \quad \eta \in [\eta_1, 1]$$

или $$(1-\eta) M|B_n^{\eta}|^2 \leq C, \quad \eta \in [\eta_1, 1]$$

Покажем, что замена $$x_n = (J + \mu B_n^{\eta}) y_n$$

при некотором $\eta = \eta(\mu)$ приводит систему (I) к системе

$$y_{n+1} = (J + \mu \tilde{A} + \mu \tilde{B}_n) y_n, \quad M\|\tilde{B}_n\| \to 0, \text{ при } \mu \to 0 \quad (2)$$

Легко видеть, что

$$y_{n+1} = [J + \mu(A_n - B_n) + \mu(1-\eta) B_n^{\eta} + \mu^2 C_n] y_n$$

где $\eta = 1 - \sqrt{\mu}$, $\|C_n\| = O(\mu)$.

Покажем, что из экспоненциальной устойчивости системы

$$Z_{n+1} = (J + \mu \tilde{A}) Z_n \quad (3)$$

следует экспоненциальная устойчивость почти наверное системы (2).

Так как система (3) экспоненциально устойчива, то $\exists$ квадратичная форма (Hz, z) такая, что

$$(Hz_{n+1}, z_{n+1})|_{(3)} - (Hz_n, z_n) \leq -\mu C |z_n|^2$$, где

C некоторая константа; или иначе можно написать

$$(Hz_{n+1}, z_{n+1})|_{(3)} - (Hz_n, z_n) = (H(J+\mu\tilde{A})z_n, (J+\mu\tilde{A})z_n) -$$

$$-(Hz_n, z_n) = ((J+\mu\tilde{A})^* H(J+\mu\tilde{A})z_n, z_n) - (Hz_n, z_n) \leq -\mu C |z_n|^2$$

Напишем эту квадратичную форму в силу системы (2):

$$(Hy_{n+1}, y_{n+1})|_{(2)} - (Hy_n, y_n) = (H(J + \mu\tilde{A} + \mu(1-\eta)B_n^{\eta} + \mu^2 C_n) y_n,$$

$$(\left(I+\mu\tilde{A}+\mu(1-\eta)B_n^{\eta}+\mu^2C_n\right)y_n) - (Hy_n, y_n) =$$

$$\left(\left(I+\mu\tilde{A}+\mu(1-\eta)B_n^{\eta}+\mu^2C_n\right)^*H\left(I+\mu\tilde{A}+\mu(1-\eta)B_n^{\eta}+\mu^2C_n\right)y_n, y_n\right)-$$

$$-(Hy_n, y_n) = \left[\left(I+\mu\tilde{A}\right)^*H\left(I+\mu\tilde{A}\right)y_n, y_n\right] - (Hy_n, y_n) +$$

$$+\mu\left[\left((1-\eta)B_n^{\eta}+\mu C_n\right)^*H\left(I+\mu\tilde{A}+\mu(1-\eta)B_n^{\eta}+\mu^2C_n\right)y_n, y_n\right] \le$$

$$\le -\mu C|y_n|^2 + \mu\left(\|(1-\eta)B_n^{\eta}+\mu C_n\|\|H\|\|I+\mu\tilde{A}+\mu(1-\eta)B_n^{\eta}+\right.$$

$$\left.+\mu^2C_n\|\,|y_n|^2\right).$$

Покажем, что существует функция $\gamma(x_n(\omega))$ такая, что

$$M\left[\left((Hy_{n+1}, y_{n+1})|F_n\right)\right] - (Hy_n, y_n)\Big] \le -\gamma(|y_n(\omega)|).$$

Имеем

$$M\left[\left((Hy_{n+1}, y_{n+1})|F_n\right) - M\left((Hy_n, y_n)|F_n\right)\right] =$$

$$= M\left[(Hy_{n+1}, y_{n+1}) - (Hy_n, y_n)\,|F_n\right] \le M\left[-\mu C|y_n|^2 +\right.$$

$$\left.+\mu\left(\|(1-\eta)B_n^{\eta}+\mu C_n\|\|H\|\|I+\mu\tilde{A}+\mu(1-\eta)B_n^{\eta}+\mu^2C_n\|\,|y_n|^2/F_n\right]\le$$

$$\le -\mu C|y_n|^2 + \mu\ell M\left((1-\eta)\|B_n^{\eta}\|\|I+\mu\tilde{A}+\mu(1-\eta)B_n^{\eta}\|\,|y_n|^2/F_n\right) +$$

$$+\mu\ell M\left(\mu\|C_n\|\|I+\mu\tilde{A}+\mu(1-\eta)B_n^{\eta}+\mu^2C_n\|\,|y_n|^2/F_n\right) \le$$

$$\le -\mu C|y_n|^2 + \mu L M\left((1-\eta)\|B_n^{\eta}\|/F_n\right)|y_n|^2 + \mu\ell M\left((1-\eta)^2\|B_n^{\eta}\|^2|y_n|^2/F_n\right) +$$

$$+\mu L M\left(\mu\|C_n\||y_n|^2|F_n\right) + \mu^3\ell M\left((1-\eta)\|C_n\|\|B_n^{\eta}\|\,|y_n|^2/F_n\right) +$$

$$+\mu^4\ell M\left(\|C_n\|^2|y_n|^2|F_n\right).$$

При $\mu \to 0$ каждое из выражений в правой части неравенства, не рассматривая слагаемое $-\mu C|y_n|^2$, стремится к 0, т.к.

$$M((1-\eta)\|B_n^\xi\|/F_n) = M((1-\eta)\|B_n^\xi\|) = (1-\eta)M\|B_n^\xi\|$$

, но

$$(1-\eta)M\|B_n^\xi\| \leq \sqrt{(1-\eta)^2 M\|B_n^\xi\|^2}$$

, а правая часть этого неравенства по доказанному выше стремится к 0 при $\mu \to 0$.

Аналогично доказывается для остальных слагаемых. Отсюда получаем, что, начиная, с некоторого μ существует постоянная $C_1 > 0$, такая, что

$$M[(Hy_{n+1}, y_{n+1})|F_n] - M(Hy_n, y_n)] \leq -C_1\mu|y_n|^2$$

т.е. тривиальное решение системы (2) экспоненциально устойчиво почти наверное [2]. Учитывая, что матрица B_n^ξ почти наверное ограничена, получаем теорему.

Теорема. Если тривиальное решение системы (3) экспоненциально устойчиво, то тривиальное решение системы (I) экспоненциально устойчиво почти наверное при достаточно малом μ.

ЛИТЕРАТУРА

I. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., 1956, 605с.

2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971, 309с.

Ірч

НИЖНИЕ И ВЕРХНИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В.Д. Пономарев

Рассмотрим систему:

$$x' = h(t, x, y), \quad y' = f(t, x, y), \tag{I}$$

где функции $h, f: I \times R^2 \to R$ удовлетворяют условию Каратеодори на $I \times R^2$ (см. [I]), $I = [a, b]$, $a \in R$, $b \in (a, +\infty)$. Введем следующее

Определение. Пару абсолютных непрерывных на I функций (α, λ) и (β, μ) будем называть соответственно нижним и верхним решением системы (I), если выполняются условия:

I) $\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$,

2) $\alpha'(t) = h(t, \alpha(t), \lambda(t))$, $\lambda'(t) \geq f(t, \alpha(t), \lambda(t))$,

почти для всех $t \in I$,

3) $\beta'(t) = h(t, \beta(t), \mu(t))$, $\mu'(t) \leq f(t, \beta(t), \mu(t))$,

почти для всех $t \in I$.

Доказательство необходимых и достаточных условий разрешимости краевых задач как для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка так и для системы (I) опирается на существование нижних и верхних решений (см. например, [2] - [4]). Поэтому возникает вопрос: при каких условиях, налагаемых на функции h и f, существуют нижние и верхние решения системы (1).

В настоящей заметке приводятся достаточные условия, обеспечивающие существование нижнего и верхнего решений системы (I).

<u>Теорема I.</u> Пусть $m \in (0,+\infty)$, $\tau \in [0,m)$, $K=(m-\tau)(\ell-a)^{-1}$, $n \in [0,K)$, $\varepsilon \in (0,1)$ и существуют функции $\varphi_i, \psi_i \in C(-\infty,+\infty)$ $i=1,2$ такие, что выполняются условия:

I) для любых $x \in [0,+\infty)$ и $i \in \{1,2\}$ $\varphi_i(x)=\varphi_i(-x)$,

$$\psi_i(x)=\psi_i(-x),\ \varphi_1(x)>0\ ,\ \varphi_2(x)\geqslant 0\ ,\ \psi_1(x)\geqslant 0,$$

$$\psi_2(x)>0,$$

2) выполняется по крайней мере одно из условий:

$$h(t,x,y)\geqslant \varphi_1(x)\cdot\psi_1(y)\ ,\quad \text{где } (t,x,y)\in I\times[-m-\varepsilon,-\tau]\times[n,K]$$

или

$$h(t,x,y)\leqslant -\varphi_1(x)\cdot\psi_1(y)\ ,\quad \text{где } (t,x,y)\in I\times[-m,-\tau+\varepsilon]\times[-K,-n],$$

3) выполняется по крайней мере одно из условий:

$$h(t,x,y)\geqslant \varphi_1(x)\cdot\psi_1(y)\ ,\quad \text{где } (t,x,y)\in I\times[\tau-\varepsilon,m]\times[n,K]$$

или

$$h(t,x,y)\leqslant -\varphi_1(x)\cdot\psi_1(y),\quad \text{где } (t,x,y)\in I\times[\tau,m+\varepsilon]\times[-K,-n],$$

4) $h(t,x,y)\leqslant K$, где $(t,x,y)\in I\times([-m,-\tau]\cup[\tau,m])\times[n,K]$,

$h(t,x,y) \geq -k$, где $(t,x,y)\in I\times([-m,-r]\cup[r,m])\times[-k,-n]$,

5) $f(t,x,y) \leq \varphi_2(x)\cdot\psi_2(y)$, где $(t,x,y)\in I\times[-m,-r]\times([-k,-n]\cup[k,n])$,

$f(t,x,y) \geq -\varphi_2(x)\cdot\psi_2(y)$, где $(t,x,y)\in I\times[r,m]\times([-k,-n]\cup[k,n])$,

6)
$$\int_n^k \frac{\psi_1(s)}{\psi_2(s)}\,ds > \int_r^m \frac{\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)}\,ds .$$

Тогда существуют нижние и верхние решения системы (I).

Доказательство. Построим (α,λ) и (β,μ) когда выполняется условие

$h(t,x,y) \geq \varphi_1(x)\cdot\psi_1(y)$, где $(t,x,y)\in I\times([-m,-r]\cup[r,m])\times[n,k]$.

Для остальных возможных случаев построение проходит аналогично. Определим (α,λ) как решение следующей задачи Коши:

$$x' = h(t,x,y)\,,\quad y' = \varphi_2(x)\cdot\psi_2(y),$$
$$x(a) = -m\,,\quad y(a) = n,$$

а (β,μ) как решение следующей задачи Коши:

$$x' = h(t,x,y),\quad y' = -\varphi_2(x)\cdot\psi_2(y),$$
$$x(a) = r\,,\quad y(a) = k.$$

Покажем, что для любого $t\in I$ $(t,\alpha(t),\lambda(t))\in G_1$ и $(t,\beta(t),\mu(t))\in G_2$, где

$$G_1 = \{(t,x,y): t\in I,\ x\in[-m,-r],\ y\in[n,k]\},$$

$$G_2=\{(t,x,y): t\in I,\ x\in[r,m],\ y\in[n,k]\}.$$

Покажем, например, что для любого $t\in I$ $(t,\alpha(t),\lambda(t))\in G_1$. Действительно, пусть $[a,t_0]$ максимальный интервал на котором $n\leq\lambda(t)\leq k$. Тогда $0\leq\alpha'(t)\leq k$ почти для всех $t\in[a,t_0]$. Если $t_0=b$, то все доказано. Пусть $t_0\in(a,b)$. Случая $\lambda(t)\equiv n$ на $[a,t_0]$ не может быть в силу максимальности интервала $[a,t_0]$. Следовательно, $\lambda(t_0)=k$. Тогда имеем

$$f(t,\alpha(t),\lambda(t))\cdot\lambda'(t)=\varphi_2(\alpha(t))\cdot\psi_2(\lambda(t))\cdot\alpha'(t),$$

отсюда

$$\int_{\lambda(a)}^{\lambda(t_0)}\frac{\psi_1(\lambda(t))}{\psi_2(\lambda(t))}\,d\lambda(t)\leq\int_{\alpha(a)}^{\alpha(t_0)}\frac{\varphi_2(\alpha(t))}{\varphi_1(\alpha(t))}\,d\alpha(t)$$

или

$$\int_{n}^{k}\frac{\psi_1(s)}{\psi_2(s)}\,ds\leq\int_{-m}^{-r}\frac{\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)}\,ds,$$

что противоречит условию 5. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $r\in[0,+\infty)$ и существуют функции $p_i\in L(I)$ $\varphi_i\in C(-\infty,+\infty)$, $i=1,2$ такие, что выполняются условия:

1) для любых $x\in[0,+\infty)$ и $i\in\{1,2\}$ $\varphi_i(x)>0$, $\varphi_i(x)=\varphi_i(-x)$ и почти для всех $t\in I$ $p_i(t)>0$,

2) $$\int_{r}^{+\infty}\varphi_1^{-1}(s)\,ds>2\int_a^b p_1(s)\,ds,\quad\int_{r}^{+\infty}\varphi_2^{-1}(s)\,ds>\int_a^b p_2(s)\,ds,$$

3) $|h(t,x,y)| \le p_1(t)\cdot\varphi_1(x)$, где $(t,x,y)\in I\times(R\setminus(-r,r))\times[r,m]$

или $(t,x,y)\in I\times(R\setminus(-r,r))\times[-m,-r]$,

где $m\in[r,+\infty)$ определяется из уравнения

$$\int_r^m \varphi_2^{-1}(s)\,ds = \int_a^b p_2(s)\,ds ,$$

4) $f(t,x,y)\le p_2(t)\cdot\varphi_2(y)$, где $(t,x,y)\in I\times(-\infty,-r]\times([-m,-r]\cup[r,m])$,

$f(t,x,y)\ge -p_2(t)\cdot\varphi_2(y)$, где $(t,x,y)\in I\times[r,+\infty)\times([-m,-r]\cup[r,m])$.

Тогда существуют нижние и верхние решения системы (I).

<u>Доказательство.</u> Построим (α,λ) и (β,μ) для случая, когда выполняется условие 3 для $(t,x,y)\in I\times(R\setminus(-r,r))\times[r,m]$. Для остальных возможных случаев построение проходит аналогично. Из условия 2 следует, что найдется $n\in(r,+\infty)$ такое, что

$$\int_r^n \varphi_1^{-1}(s)\,ds > \int_a^b p_1(s)\,ds , \quad \int_n^{+\infty} \varphi_1^{-1}(s)\,ds > \int_a^b p_1(s)\,ds . \tag{2}$$

Определим (α,λ) как решение следующей задачи Коши:

$$x' = h(t,x,y),\quad y' = p_2(t)\cdot\varphi_2(y),$$
$$x(a) = -n ,\quad y(a) = r ,$$

а (β,μ) как решение следующей задачи Коши:

$$x' = h(t,x,y),\quad y' = -p_2(t)\cdot\varphi_2(y),$$
$$x(a) = n ,\quad y(a) = m .$$

Покажем, что решения (α, λ) и (β, μ) продолжимы на весь интервал I и $\alpha(t) \leq \beta(t)$ для всех $t \in I$. Проверим, например, что решение (α, λ) продолжимо на весь интервал I. Действительно, в силу определения числа m следует, что $r \leq \lambda(t) \leq m$ для всех $t \in I$, а существование функции $\alpha(t)$ на всем I вытекает из условия 3 и (2). Из (2) также следует, что $\alpha(t) < -r$ и $\beta(t) > r$ для всех $t \in I$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I Коддингтон Э., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958, 474с.

2 Васильев Н.И. Необходимые и достаточные условия существования некоторых краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.-"Латвийский математический ежегодник", 1970, 8,с.18-24.

3 Гудков В.В., Лепин А.Я. О разрешимости некоторых краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.- "Дифференциальные уравнения", 1971, 7, № 10, с.1779-1788.

4. Schrader K.W, Existence theorems for second order boundary value problems.- "J.Diff.Equations", 1969, 5, Nr.3,p.572-584.

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ В НЕРЕФЛЕКСИВНЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. И. Хазан

Рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$d(u)/d(t) = \mathcal{A}u(t) \qquad (t \geq 0) \tag{0.1}$$

$$u(0) = z \tag{0.2}$$

где $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \to X$ - нелинейный диссипативный /см. ниже/ оператор в банаховом пространстве X. Известно /см. [I], [2]/, что если

$$R(I - \lambda\mathcal{A}) \supset \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$$

при малых $\lambda > 0$, то оператор $\mathcal{A}$ "порождает" полугруппу нелинейных сжатий

$$S(t) : \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \to \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \qquad (t \geq 0)$$

по формуле

$$S(t)z = \lim_{\lambda \downarrow 0} (I - \lambda(\mathcal{A})^{-[t/\lambda]} z \tag{0.3}$$

Эта полугруппа тесно связана с задачей Коши /0.1/, /0.2/. Именно, если эта задача имеет решение $u : [0, \infty) \to X$, абсолютно непрерывное на компактных подмножествах $[0, \infty)$, сильно дифференцируемое и удовлетворяющее /0.I/ на $(0, \infty)$ почти всюду /такое решение называется сильным/, то $u(t) = S(t)z$ /[I], теорема II, [2], теорема 3.I/. С другой стороны, если оператор $\mathcal{A}$ замкнут, то функция $u(t) = S(t)z$ удовлетворяет уравнению /0.I/ в любой точке t, где существует сильная производная $du(t)/dt$ /[2], теорема 3.2, см. также [I], теорема II/. Это позволяет получить теорему существования сильного решения, если X рефлексивно и $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, так как при $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ функция $t \mapsto S(t)z$ удовлетворяет локальному условию Липшица /напомним, что абсолютно непрерывная функция со значениями в рефлексивном банаховом пространстве сильно дифференцируема почти всюду/. Аналогичные результаты /с заменой полугруппы на эволюционную систему/ справедливы и в случае, когда оператор $\mathcal{A}$ зависит от времени /см.[2]/. Если же пространство X не рефлексивно, то функция $t \mapsto S(t)z$ может не быть сильно дифференцируемой почти всюду даже при $z \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ [I], если не требовать непрерывности или деминепрерывности оператора $\mathcal{A}$. Вместе с тем, если оператор $\mathcal{A}$ в каком-либо функциональном пространстве порождён дифференциальным оператором и граничными условиями, то $\mathcal{A}$, как правило, не является деминепрерывным, а полугруппа $S(t)$ может всё же давать решение /и иногда довольно хорошее, с точки зрения дифференциальных свойств/ соответствующей /0.I/ /0.2/ задачи для уравнения в частных производных /см., например, [3] - [6]/. Поскольку многие нелинейные дифференциальные операторы диссипативны, если их рассматривать в нерефлексивных пространствах /например, L_1, L_∞ / и не являются диссипативными в пространствах L_p $(1 < p < \infty)$, необходима теория дифференцируемости нелинейных полугрупп и разрешимости нелинейных эволюционных уравнений, которая охватывала бы и нерефлексивные пространства. В настоящей работе мы доказываем довольно общий результат о дифференцируемости нелинейной эволюционной системы, связанной с задачей Коши

$$du(t)/dt = \mathcal{A}(t)u(t) \qquad (s \le t \le T) \quad u(s) = z \qquad (0.4)$$

Этот результат /теорема I.I/ применим как в рефлексивных, так и в нерефлексивных пространствах /см. теоремы I.3,I.4/ Примеры §3, где теорема I.I используется в полной общности, показывают, что приложения этой теоремы не ограничиваются следствиями, указанными в §I. В частности, операторы $\mathcal{A}(t)$ в теореме I.I могут иметь зависящую от t область определения /см. теорему 3.3/. Из всей многочисленной литературы, посвящённой нелинейным эволюционным уравнениям с диссипативными /или аккретивными/ операторами, нам известна лишь работа [6], где также допускается переменная область определения. Однако в [6] рассматриваются только равномерно выпуклые банаховы пространства, и, кроме того, нет примеров, подтверждающих, что условия теоремы I [6] могут выполняться для операторов с переменной областью определения. Формально условие постоянства $\mathcal{D}(\mathcal{A}(t))$ не накладывается также в [2] и в [7], но в [2] не зависит от времени обобщённая область определения, которая во многих важных случаях совпадает с обычной, а в [7] существование решения задачи /0.4/ доказывается только для $z \in \bigcap\limits_t \mathcal{D}(\mathcal{A}(t))$

Отметим, что в основе теоремы I.I лежат идеи, обобщающие идеи Охару [8], где, видимо, впервые, использовалась формула /0.3/ с целой частью в показателе, а также Кониши [5], где рассматривалось уравнение $u_t = u_{xx} - F(u_x)$ в пространстве $C_{2\pi}[-\pi, \pi]$, которое вкладывалось в $L_\infty(-\pi, \pi)$.

Содержание настоящей работы следующее. В §I приводится формулировка основного результата и выводятся следствия из него, §2 содержит доказательство основного результата, а в §3 теоремы §I используются для доказательства разрешимости в целом начально-краевых задач для уравнений

$$u_t = \Delta(\beta(u)) + f(t, x)$$

и

$$u_t + \varphi(t, x, u)\, u_x + \psi(t, x, u) = 0$$

Обозначения и терминология.

Оператором в пространстве X мы будем называть однозначное отображение $\mathcal{A}$, область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и множество значений $R(\mathcal{A})$ которого лежат в X. Тождественный оператор обозначается I, а сопряжённое к банахову пространству X - X'. Пусть E - векторное пространство /все рассматриваемые пространства предполагаются вещественными или комплексными/, F - некоторое множество линейных функционалов на E. F называется т о т а л ь н ы м, если $(E \ni z \neq 0 \Rightarrow \exists f \in F \ (z, f) \neq 0)$

Слабейшая локально выпуклая топология в E, при которой все $f \in F$ непрерывны, обозначается $\sigma(E,F)$. В частности, если X - банахово пространство, то $\sigma(X,X')$ - слабая топология в X, а $\sigma(X',X)$ - слабая* топология в X'. Символы $\lim$ и $\longrightarrow$, если явно не оговорено противное, будут указывать на сильную сходимость. Оператор $\mathcal{A}$ в банаховом пространстве X /соответственно, в X'/ назовём sw-замкнутым /соответственно, sw^*-замкнутым/, если

$$(\mathcal{D}(\mathcal{A}) \ni z_n,\ \lim z_n = z,\ \sigma(X,X')\text{-}\lim \mathcal{A}z_n = y) \Rightarrow (z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}z = y)$$

/соответственно,

$$(\mathcal{D}(\mathcal{A}) \ni z_n,\ \lim z_n = z,\ \sigma(X',X)\text{-}\lim \mathcal{A}z_n = y) \Rightarrow (z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \mathcal{A}z = y)$$

§I. Основная теорема о дифференцируемости нелинейных эволюционных систем и следствия из нее

Пусть $\mathcal{A}(t)$ $(0 \le t \le T)$ - семейство операторов в банаховом пространстве X. Зафиксируем $\forall t \in [0,T]$, $\forall \lambda > 0$ оператор

$$J_\lambda(t) : R(I - \lambda\mathcal{A}(t)) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) \qquad (1.1)$$

такой, что

$$(I - \lambda\mathcal{A}(t))J_\lambda(t)z = z \qquad (z \in \mathcal{D}(J_\lambda(t))) \qquad (1.2)$$

Если $I - \lambda\mathcal{A}(t)$ инъективен, то $J_\lambda(t) = (I - \lambda\mathcal{A}(t))^{-1}$, в общем случае существование такого оператора следует из аксиомы выбора. Далее, положим

$$\mathcal{U}^\lambda(t,s) = \prod_{i=1}^{[(t-s)/\lambda]} J_\lambda(s+i\lambda) \qquad (0 \le s \le t \le T) \qquad (1.3)$$

/в частности, если $[(t-s)/\lambda] = 0$, то $\mathcal{U}^\lambda(t,s) = I$ /.

Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема I.I. Пусть $\mathcal{A}(t) : \mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) \to X$ $(t \in [0,T])$ - семейство /нелинейных/ операторов в банаховом пространстве X. Допустим, что $(0,\infty) \ni \lambda_n \downarrow 0$, $s \in [0,T)$, $z \in \mathcal{D}(\mathcal{U}^{\lambda_n}(T,s))$

при всех $n \in \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots\}$,
и выполнены следующие условия:

(i) $\forall t \in [s,T]$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{U}^{\lambda_n}(t,s)z = u(t)$

(ii) множество $S(s,z,\{\lambda_n\}) =$
$$= \{\mathcal{A}(s+m\lambda_n)\prod_{i=1}^{m} J_{\lambda_n}(s+i\lambda_n)z : m,n \in \mathcal{N},\ 0<m\lambda_n<T-s\}$$
ограничено в X ;

Пусть, далее, X непрерывно вложено в локально выпуклое пространство $(E, \sigma(E,F))$, где F - некоторое тотальное множество линейных функционалов на векторном пространстве E, причём

(iii) множество $S(s,z,\{\lambda_n\})$ относительно секвенциально компактно в $(E, \sigma(E,F))$;

(iv) операторы $\mathcal{A}(t)$ допускают расширение до операторов $\tilde{\mathcal{A}}(t): \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t)) \to E$, так, что
$$\mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) \subset \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t)) \subset X, \quad \forall y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(t)),\ \tilde{\mathcal{A}}(t)y = \mathcal{A}(t)y$$

(v) если
$$[0,T] \ni t_n \to t,\ \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t_n)) \ni y_n \to y;\ \sigma(E,F)\text{-}\lim \tilde{\mathcal{A}}(t_n)y_n = v,$$
то $y \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t))$ и $\tilde{\mathcal{A}}(t)y = v$.

Тогда, если $z \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(s))$, то функция $u: [s,T] \to X$ удовлетворяет условию Липшица, $\forall t \in [s,T]$ $u(t) \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t))$ и $\forall f \in F$ функция $t \to (u(t),f)$ непрерывно дифференцируема на $[s,T]$, причём
$$(d/dt)(u(t),f) = (\tilde{\mathcal{A}}(t)u(t),f) \qquad (1.4)$$
$$u(s) = z \qquad (1.5)$$

З а м е ч а н и е I.I. В приложениях обычно условие (iii) вытекает из (ii) /см., например, теорему I.3 и I.4, а также теорему 3.I/. Достаточные условия для того, чтобы выполнялись предположения (i), (ii), указаны в теореме I.2.

З а м е ч а н и е I.2. Условие (v) можно заменить следующим:

$(V)'$ если

$$[0,T]\ni t_\alpha \to t,\ \mathcal{D}(\mathcal{A}(t_\alpha))\ni y_\alpha \to y,\ \sigma(E,F)\text{-}\lim \mathcal{A}(t_\alpha)y_\alpha = v$$

то $y\in\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t))$ и $\tilde{\mathcal{A}}(t)y=v$ /здесь α пробегает любое направленное множество/.

Прежде, чем переходить к доказательству теоремы I.I, отметим несколько следствий из неё.

Напомним, что оператор $\mathcal{A}$ в банаховом пространстве называется **диссипативным**, если $\forall z,y\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$\forall\lambda>0\qquad \|z-y-\lambda(\mathcal{A}z-\mathcal{A}y)\|\geq\|z-y\|.$$

/оператор $-\mathcal{A}$ в этом случае называется аккретивным/. Легко видеть, что если оператор $\mathcal{A}-\omega I$ диссипативен при некотором $\omega\in R^1$, то при $\lambda>0$, $\lambda\omega<1$ оператор $(I-\lambda\mathcal{A})$ инъективен, так что

$$(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}: R(I-\lambda\mathcal{A})\to\mathcal{D}(\mathcal{A})$$

однозначен /и удовлетворяет условию Липшица с константой $(1-\lambda\omega)^{-1}$ /.

Из результатов работы [2] вытекает

Теорема I.2. Пусть $\{\mathcal{A}(t): t\in[0,T]\}$ - семейство операторов в банаховом пространстве X, удовлетворяющее следующим условиям:

I° найдётся такое $\omega\in R^1$, что $\forall t\in[0,T]$ оператор $\mathcal{A}(t)-\omega I$ диссипативен;

2° $\forall t\in[0,T]\quad \mathcal{D}(\mathcal{A}(t))=\mathcal{D}\subset X$

3° $\exists\delta>0\ \forall t\in[0,T]\quad \forall\lambda\in(0,\delta)\quad R(I-\lambda\mathcal{A}(t))\supset\overline{\mathcal{D}}$

4° существует неубывающая функция $L: R^+\to R^+$ и непрерывная функция $f:[0,T]\to X$ с ограниченным изменением, такие, что

$$\forall z\in\overline{\mathcal{D}}\quad \|\mathcal{A}(t)z-\mathcal{A}(\tau)z\|\leq\|f(t)-f(\tau)\|L(\|z\|)(1+\|\mathcal{A}(t)z\|+\|\mathcal{A}(\tau)z\|)$$

Тогда $\forall z\in\overline{\mathcal{D}}$ при $0\leq s\leq t\leq T$ существует предел

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\mathcal{U}^\lambda(t,s)z=\mathcal{U}(t,s)z \tag{1.6}$$

причём

$$\|\mathcal{U}(t,s)z-\mathcal{U}(t,s)y\|\leq\exp(\omega(t-s))\|z-y\| \tag{1.7}$$

Кроме того, если $z \in \mathcal{D}$, $s \in [0,T]$, $(0,\delta) \ni \lambda_n \downarrow 0$, то множество $S(s; z; \{\lambda_n\})$ ограниченно по норме в X' константой C, зависящей лишь от $\|z\|$, $\|\mathcal{A}(0)z\|$, δ, ω, T, функций L и f. При этом

$$\|\mathcal{U}(t,s)z - \mathcal{U}(\tau,s)z\| \le C|t-\tau| \qquad (s \le t,\ \tau \le T)$$

З а м е ч а н и е I.3. Если $\forall t \in [0,T]$ оператор $\mathcal{A}(t)$ замкнут, то в условии 3^0 достаточно потребовать, чтобы $R(I-\lambda\mathcal{A}(t)) \supset \mathcal{D}$ /ср. [9], замечание I.I (а) /.

З а м е ч а н и е I.4. Относительно условия 4^0 заметим, что функция $f:[0,T] \to X$ имеет ограниченное изменение, если $\partial f/\partial t \in L_1(0,T;X)$ или если f удовлетворяет условию Липшица. В частности, можно вместо $\|f(t)-f(\tau)\|$ взять $|t-\tau|$.

Т е о р е м а I.3. Допустим, что выполнены условия теоремы I.2, X рефлексивно и $\forall t \in [0,T]$ оператор $\mathcal{A}(t)$ sw-замкнут. Тогда

$$\mathcal{U}(t,s)\mathcal{D} \subset \mathcal{D} \qquad (0 \le s \le t \le T) \qquad (1.8)$$

и если $z \in \mathcal{D}$, $s \in [0,T]$, $f \in X'$, то функция $t \mapsto (\mathcal{U}(t,s)z, f)$ непрерывно дифференцируема на $[s,T]$ и

$$(d/dt)(\mathcal{U}(t,s),z,f) = (\mathcal{A}(t)\mathcal{U}(t,s)z, f) \qquad (1.9)$$

Иначе говоря, функция $u(t)=\mathcal{U}(t,s)z$ является слабо непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши /0.4/. Это решение единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно применить теорему I.I с $E=X$, $F=X'$, $\tilde{\mathcal{A}}(t)=\mathcal{A}(t)$. Выполнение условий (i), (ii) гарантируется теоремой I.2, (iii) вытекает из (ii) /см. [15], теоремы 3.10.3 и 2.9.6/, (iv) тривиально, а (v) легко вывести из того, что каждый оператор $\mathcal{A}(t)$ sw-замкнут, пользуясь условием 4^0 теоремы I.2. Единственность следует из теоремы 3.I [2], поскольку слабо непрерывно дифференцируемое решение является в то же время сильным решением.

З а м е ч а н и е I.5. Теорема I.3 пересекается с теоремой 3.4 [2] /где рассматриваются эволюционные уравнения с многозначными операторами/ и содержит теоремы 6.2 [9] и теоремы I, 2 [I0].

Теорема I.4. Пусть выполнены условия теоремы I.2 и $X = Y'$, где Y - сепарабельное банахово пространство, причём $\forall t \in [0,T]$ оператор $\mathcal{A}(t)$ sW^*-замкнут. Тогда выполнены соотношения /I.8/, и если $z \in \mathcal{D}$, $s \in [0,T]$, $f \in Y$, то функция $t \to (\mathcal{U}(t,s)z, f)$ непрерывно дифференцируема на $[s,T]$ и удовлетворяет уравнению /I.9/. Таким образом, функция $u(t) = \mathcal{U}(t,s)z$ является слабо* непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши /0.4/.

Доказательство. Достаточно применить теорему I.I с $E = X$, $F = Y$, $\tilde{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{A}(t)$. Условия (i), (ii) вытекают из теоремы I.2, (iii) следует из (ii) /см.[I5], теорема 2.I0.I/, (iv) тривиально, а (v) выводится из sW^*-замкнутости каждого оператора $\mathcal{A}(t)$ с помощью условия 4^0 теоремы I.2.

Заметим, что в теореме I.4 ничего не говорится о единственности слабо* непрерывно дифференцируемого решения. В ряде случаев для доказательства единственности в пространстве $L_\infty = (L_1)'$ можно использовать приём, применённый Кониши [5].

§2. Доказательство теоремы I.I.

Лемма 2.I. Пусть $\{\mathcal{A}(t) : t \in [0,T]\}$ - семейство операторов в X, λ - скаляр и операторы $J_\lambda(t)$ удовлетворяют соотношениям /I,I/, /I.2/. Тогда для любого натурального m

$$\prod_{i=1}^{m} J_\lambda(t_i) z - z = \lambda \sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}(t_k) \prod_{i=1}^{k} J_\lambda(t_i) z \qquad (2.1)$$

если $t_1, \dots, t_m \in [0,T]$, $z \in X$ и левая часть определена.

Доказательство. Полагая в тождестве

$$J_\lambda(t) y - y = \lambda \mathcal{A}(t) J_\lambda(t) y$$

/которое следует из /I.2// $y = \prod_{i=1}^{k-1} J_\lambda(t_i) z$, $t = t_k$, получим:

$$\prod_{i=1}^{K} J_\lambda(t_i)z - \prod_{i=1}^{K-1} J_\lambda(t_i)z = \lambda A(t_K)\prod_{i=1}^{K} J_\lambda(t_i)z \qquad (2.2)$$

Суммируя /2.2/ по K от 1 до m, получим /2.I/.

Доказательство теоремы I.I. Положим

$$u_n(t) = \mathcal{U}^{\lambda_n}(t,s)z \qquad (s \le t \le T) \qquad (2.3)$$

Тогда, в силу /I.3/ и /2.I/,

$$\|u_n(t) - u_n(\tau)\| \le c\lambda_n \left|[(t-s)/\lambda_n] - [(\tau-s)/\lambda_n]\right| \le$$
$$\le c(|t-\tau| + \lambda_n) \qquad (2.4)$$

где c – радиус шара в X, содержащего множество $S(s, z, \{\lambda_n\})$ /см. условие (ii) /. Из (i), /2.3/ и /2.4/ очевидно, следует, что

$$\forall t,\tau \in [s,t] \qquad \|u(t)-u(\tau)\| < c|t-\tau| \qquad (2.5)$$

Далее, покажем, что $\forall t \in [s,T]$ $\quad u(t) \in \mathcal{D}(\tilde{A}(t))$ и

$$\sigma(E,F)\text{-}\lim A(s+[(t-s)/\lambda_n]\lambda_n)u_n(t) = \tilde{A}(t)u(t) \quad (2.6)$$

Действительно, зафиксируем $t \in (s,T)$ и положим $t_n = s + [(t-s)/\lambda_n]\lambda_n$. В силу условия (iii), последовательность $\{A(t_n)u_n(t)\}$ содержит $\sigma(E,F)$-сходящуюся подпоследовательность. Учитывая (i) и (V) /или $(v)'$ /, убедимся, что $u(t) \in \mathcal{D}(\tilde{A}(t))$ и предел указанной подпоследовательности равен $\tilde{A}(t)u(t)$. Поскольку мы могли начать с любой подпоследовательности последовательности $\{A(t_n)u_n(t)\}$, то $\tilde{A}(t)u(t)$ является её единственной предельной точкой. Следовательно, выполняется /2.6/. Далее, для любого $f \in F$ и любого натурального n функция

$$\tau \to (\tilde{A}(s+[(\tau-s)/\lambda_n]\lambda_n)u_n(\tau), f)$$

конечнозначна на $[s,T]$ и $\forall t \in (s,T]$

$$\int_s^t (\tilde{A}(s+[\tau-s]/\lambda_n]\lambda_n)u_n(\tau), f)\,d\tau =$$

$$=\lambda_n \sum_{k=0}^{[(t-s)/\lambda_n]-1} (\tilde{A}(s+k\lambda_n)\prod_{i=1}^{k} J_{\lambda_n}(s+i\lambda_n)z, f) +$$

$$+(t-s-[(t-s)/\lambda_n]\lambda_n)(\tilde{A}(s+[(t-s)/\lambda_n]\lambda_n)u_n(t), f) \quad (2.7)$$

Учитывая условие (iv) и пользуясь тождеством /2.I/, из /2.7/, /2.3/ и /I.3/ получим:

$$(u_n(t)-z, f) = \int_s^t (\tilde{A}(s+[(\tau-s)/\lambda_n]\lambda_n)u_n(\tau), f)d\tau -$$

$$-\lambda_n(\tilde{A}(s)z, f) + \mu_n(\tilde{A}(s+[(t-s)/\lambda_n]\lambda_n)u_n(t), f), \quad (2.8)$$

где $\mu_n = \lambda_n\{1-(t-s)/\lambda_n-[(t-s)/\lambda_n]\}$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ и учитывая условия (i), (ii), /2.6/, находим, что, в силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости,

$$(u(t)-z, f) = \int_s^t (\tilde{A}(\tau)u(\tau), f)\,d\tau \quad (s\le t\le T),\ f\in F \quad (2.9)$$

/следует принять во внимание, что $u_n(t)\in\mathcal{D}(A(t_n))$, если $[(t-s)/\lambda_n]>0$, так что при достаточно больших n можно в /2.8/ заменить $\tilde{A}$ на A при $\tau, t>s$ /. Для завершения доказательства остаётся показать, что $\forall f\in F$ функция $\tau\to(\tilde{A}(\tau)u(\tau), f)$ непрерывна на $[s,T]$. Пусть $[s,T]\ni\tau_n\to\tau$. Тогда, в силу /2.5/, $u(\tau_n)\to u(\tau)$. Из /2.6/ и условия (iii) следует, что множество $\sigma(E,F)$-предельных точек последовательности $\{\tilde{A}(\tau_n)u(\tau_n)\}$ непусто; условие (V) гарантирует, что это множество состоит лишь из точки $\tilde{A}(\tau)u(\tau)$. Следовательно,

$$\sigma(E,F)\text{-}\lim \tilde{A}(\tau_n)u(\tau_n) = \tilde{A}(\tau)u(\tau),$$

что и требовалось доказать. Если выполнено условие $(V)'$, а не (V), то последнее рассуждение нужно несколько видоизменить. Именно, рассмотрим множество

$$B=\{(t,y,z)\in[s,T]\times X\times E : y\in\mathcal{D}(A(t)),\ z=A(t)y\}$$

Условие $(V)'$ означает, что замыкание $\bar{B}$ множества B в $[s,T]\times X\times(E,\sigma(E,F))$ содержится в

$$\tilde{B} = \{(t,y,z) \in [s,T] \times X \times E : y \in \mathcal{D}(\tilde{A}(t)),\ z = \tilde{A}(t)y\}$$

Допустим теперь, что z - $\sigma(E,F)$-предельная точка последовательности $\{\tilde{A}(\tau_n)u(\tau_n)\}$. Не умаляя общности, можем считать, что $\forall n\ \tau_n \neq s$. В силу /2.6/, $\forall n$

$$(\tau_n, u(\tau_n), \tilde{A}(\tau_n)u(\tau_n)) \in \overline{B}$$

Учитывая, что $\tau_n \to \tau$, $u(\tau_n) \to u(\tau)$, видим, что $(\tau, u(\tau), z) \in \overline{\overline{B}} = \overline{B} \subset \tilde{B}$, следовательно, $z = \tilde{A}(\tau)u(\tau)$

Теорема доказана.

§3. Приложения.

В этом параграфе мы приведём несколько примеров использования теории §I в случае нерефлексивного основного пространства.

Будем пользоваться следующими обозначениями. $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, $n = n(x)$ - внешняя нормаль к Γ в точке $x \in \Gamma$. $W_p^\ell(\Omega)$ $(1 \le p \le \infty,\ \ell = 0,1,2,\dots)$ - пространство С.Л.Соболева /см. [I4]/. При нецелых $\ell > 0$ и $1 < p < \infty$ определим $W_p^\ell(R^n)$ с помощью комплексной интерполяции по параметру ℓ /см. [II], [I2]/, тогда пространство $W_p^\ell(\Omega)$ состоит из функций, $u : \Omega \to R^1$, допускающих продолжение $\tilde{u} \in W_p^\ell(R^n)$, при этом

$$\|u\|_{W_p^\ell(\Omega)} = \inf \|\tilde{u}\|_{W_p^\ell(R^n)}$$

Известно /см. [I6], стр. I53/, что так определённое $W_p^\ell(\Omega)$ совпадает с пространством бесселевых потенциалов, или лиувиллевским классом /в [I6] это пространство обозначается $H_p^\ell(\Omega)$, а в [I7], где рассматривается случай $\Omega = R^n$, - $L_p^\ell(R^n)$ /. Далее,

$$\overset{\circ}{W}{}_p^\ell(\Omega) \quad (1 \le p \le \infty,\ \ell > 0)$$

есть замыкание множества гладких финитных в Ω функций в $W_p^\ell(\Omega)$. Введём ещё обозначение

$$p' = p/(p-1) \quad (1 < p < \infty)$$

и при $l<0$ положим

$$W_p^l(\Omega) = (\overset{\circ}{W}{}_{p'}^{-l}(\Omega))' \quad (l<0,\ 1<p<\infty)$$

Нам потребуются также пространства О.В.Бесова $B_p^l(\Gamma)$ $(1<p<\infty,\ -\infty<l<\infty)$, определение которых см., например, в [16] /гл. II, §1.5/. При $l>0$ функции из $B_p^l(\Gamma)$ могут быть охарактеризованы как следы на Γ функций из $W_p^{l+\frac{1}{p}}(\Omega)$ /[16], стр. 82/.

Через $L_p^+(\Omega)$ обозначим конус неотрицательных функций в лебеговом пространстве $L_p(\Omega)$ $(1\le p\le\infty)$, а через $AC[a,b]$ - множество абсолютно непрерывных функций $u:[a,b]\to R^1$.

Если функция $u:[0,T]\to X$, где X - банахово пространство, слабо непрерывна, то будем писать, что $u\in wC([0,T];X)$. Аналогичный смысл имеют обозначения $wC^1([0,T];X)$, $w^*C([0,T];X)$, $w^*C^1([0,T];X)$

Рассмотрим теперь следующую задачу:

$$u\,(t,x) = \Delta\beta(u(t,x)) + f(t,x) \tag{3.1}$$

$$u\,(t,x) = 0 \quad (x\in\Gamma,\ t\ge 0) \tag{3.2}$$

$$u\,(0,x) = u_0(x) \quad (x\in\Omega) \tag{3.3}$$

Предположим, что

$$\left.\begin{array}{l}\beta:[0,a)\to[0,\infty) \text{ - строго возрастающая непрерывная функция, } \beta(0)=0\ ; \\[2mm] \underline{\lim}_{r\uparrow a}\ \beta(r)/r>0 \quad \text{, если } a=+\infty\ ; \\[2mm] \underline{\lim}_{r\uparrow a}\ \beta(r)/r=+\infty \quad \text{, если } 0<a<\infty\ .\end{array}\right\} \tag{3.4}$$

Определим операторы β_1 и Δ_1 в $L_1(\Omega)$:

$$\mathcal{D}(\beta_1) = \{u\in L_1(\Omega) : u(x)\in[0,a) \text{ п.в. в } \Omega,\ \beta(u(\cdot))\in L_1(\Omega)\},$$

$$\beta_1 u(x) = \beta(u(x)) \quad (u\in\mathcal{D}(\beta_1),\ x\in\Omega)$$

$$\mathcal{D}(\Delta_1)=W_1^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega), \quad \Delta_1 u(x)=\Delta u(x)$$

Конишi [4] доказал. что оператор $A=\Delta_1\beta_1$ диссипативен /а также дисперсивен/ в $L_1(\Omega)$, удовлетворяет соотношению

$$R(I-\lambda\Delta_1\beta_1)\supset L_1^+(\Omega) \quad (\lambda>0) \tag{3.5}$$

и, следовательно, порождает по формуле /0.3/ сжимающую /и сохраняющую порядок/ полугруппу операторов $S(t)$ на $\mathcal{D}(A)$. Вопрос о дифференцируемости этой полугруппы не был решен в [4], было показано лишь, что $\forall u_0\in\mathcal{D}(\Delta_1\beta_1)$ функция $u(t)=S(t)u_0$ удовлетворяет соотношениям

$$d(\Delta_1^{-1}u)/dt=\beta_1 u \quad \text{п. в. на } (0,\infty), \quad u_0=u(0)$$

Оставался открытым также вопрос о дифференциальных свойствах функции $u(t,x)=u(t)(x)$ по переменной x. Наша теорема I.I, как будет показано, позволяет ответить на оба эти вопроса.

Отметим, что к уравнению /3.I/ сводится, в частности, уравнение

$$u_t=div(k(u)\,grad\,u)+f(t,x)$$

если положить

$$\beta(r)=\int_0^r k(\rho)\,d\rho$$

Это нелинейное параболическое уравнение, описывающее процессы диффузии, фильтрации и т.п., является вырожденным, если $k(u)$ может обращаться в нуль. Случай $k(u)=|u|^p$ рассматривался в [I8], а также в книге Лионса [20] /гл. I, §12, гл. II, §3/, общие вырождающиеся параболические уравнения изучал Ю.А.Дубинский [I9]. Во всех этих работах было доказано лишь, что некоторая монотонная /степенная/ функция от решения начально-краевой задачи для соответствующего уравнения имеет обобщённые производные первого порядка /а не второго, как требует уравнение/, принадлежащие $L_2(\Omega)$. Мы же докажем существование решения задачи

/3.I/ - /3.3/, для которого функция $\beta(u)$ имеет обобщённые производные любого /вообще говоря, дробного/ порядка меньше 2, суммируемые в некоторой степени, большей I /см. теорему 3.I ниже/.

Допустим, что

$$f \in [0,T] \to L_1^+(\Omega) \text{ - непрерывная функция с ограниченным изменением} \quad (3.6)$$

и положим

$$\mathcal{A}(t)u = \Delta_1 \beta_1 u + f(t) \qquad (u \in \mathcal{D}(\Delta_1 \beta_1))$$

Тогда $\forall t \in [0,T]$ оператор $\mathcal{A}(t)$ действует в $L_1(\Omega)$. Из /3.5/, /3.6/ и диссипативности оператора $\Delta_1 \beta_1$ вытекает, что семейство операторов $\{\mathcal{A}(t): t \in [0,T]\}$ удовлетворяет условиям теоремы I.2. Следовательно, $\forall u_0 \in \mathcal{D}(\Delta_1 \beta_1)$ выполнены условия (i), (ii) теоремы I.I /где следует заменить z на u_0/. Теперь расширим операторы $\mathcal{A}(t)$ таким образом, чтобы удовлетворить остальным условиям теоремы I.I. В силу теоремы вложения для пространств С.Л.Соболева нецелого порядка /см. [I2], а также [16]/, $\forall p>1$ $\forall \varepsilon>0$ имеют место ограниченные вложения

$$\overset{\circ}{W}{}_{p'}^{\frac{n}{p'}+\varepsilon}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}) \subset L_\infty(\Omega),$$

откуда

$$L_1(\Omega) \subset (L_\infty(\Omega))' \subset \left(\overset{\circ}{W}{}_{p'}^{\frac{n}{p'}+\varepsilon}(\Omega)\right)' = W_p^{-(\frac{n}{p'}+\varepsilon)}(\Omega) \quad (3.7)$$

Поэтому можно положить в теореме I.I

$$X = L_1(\Omega), \; E = W_p^{-(\frac{n}{p'}+\varepsilon)}(\Omega), \; F = \overset{\circ}{W}{}_{p'}^{\frac{n}{p'}+\varepsilon}(\Omega)$$

Поскольку F рефлексивно, то и $E = F'$ рефлексивно, так что условие (iii) теоремы I.I вытекает из (ii). Пусть $\widetilde{W}_p^{\ell}(\Omega)$ $(\ell = 0,1)$ - пополнение $C^\infty(\bar{\Omega})$ по норме

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^{\ell}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{W_p^{\ell}(\Omega)} + \|u\|^p_{B_p^{\ell-\frac{1}{p}}(\Gamma)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial n}\right\|^p_{B_p^{\ell-1-\frac{1}{p}}(\Gamma)}\right)$$

и $\forall s \in (0,1) \cup (1,2)$ $\widetilde{W}_p^{s}(\Omega)$ - пространство, полученное комплексной интерполяцией [II] между $\widetilde{W}_p^{0}(\Omega)$ и $\widetilde{W}_p^{1}(\Omega)$

при $0<s<1$ и между $\widetilde{W}_p^1(\Omega)$ и $\widetilde{W}_p^2(\Omega)=W_p^2(\Omega)$ при $1<s<2$. Очевидно, что $\forall s\in[0,2]$

$$\widetilde{W}_p^s(\Omega)\subset W_p^s(\Omega)$$

Используя известную теорему о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами /см. [21]/, и учитывая, что дефектные числа задачи Дирихле для оператора Лапласа равны нулю, получаем, что при $p>1,\ p(n-1)<n,\ \varepsilon\in\left(0,1-\frac{n}{p'}\right)$ оператор

$$\mathfrak{A}:\widetilde{W}_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)\to W_p^{-(\frac{n}{p'}+\varepsilon)}(\Omega)\times B_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon-\frac{1}{p}}(\Gamma)$$

определённый равенством

$$\mathfrak{A}u=(\Delta u,u|_\Gamma),\quad (u\in\widetilde{W}_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)),$$

является линейным гомеоморфизмом. Зафиксируем p и ε, удовлетворяющие указанным выше неравенствам, положим

$$\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t))=\{u\in\mathcal{D}(\beta_1):\beta_1u\in\widetilde{W}_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)\}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(t)u=\Delta\beta_1u+f(t)\in W_p^{-(\frac{n}{p'}+\varepsilon)}(\Omega)\quad(u\in\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t)))$$

и покажем, что выполнены условия (iv), (v) теоремы I.I. Для проверки условия (iv) достаточно показать, что

$$W_1^2(\Omega)\subset\widetilde{W}_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)$$

Используя ограниченность оператора $\mathfrak{A}^{-1}$ и доказанную выше ограниченность вложения

$$L_1(\Omega)\subset W_p^{-(\frac{n}{p'}+\varepsilon)}(\Omega)$$

получим, что при $u\in C^\infty(\Omega)$

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)}\le C\left(\|\Delta u\|_{W_p^{-(\frac{n}{p'}+\varepsilon)}(\Omega)}+\|u\|_{B_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon-\frac{1}{p}}(\Gamma)}\right)$$

$$\le C_1\left(\|\Delta u\|_{L_1(\Omega)}+\|u\|_{W_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)}\right)\tag{3.10}$$

/мы применили также теорему о следах /[16], стр. 82/. Далее, имеют место ограниченные вложения

$$W_1^2(\Omega) \subset H_1^2(\Omega) \subset H_1^2(R^n) \subset H_p^{2-\frac{n}{p'}}(R^n) \subset$$

$$\subset W_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(R^n) \subset W_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega). \qquad (3.11)$$

Здесь H_p^r - классы С.М.Никольского /см. [17]/. Первое вложение в /3.11/ доказано в [17] /п.4.4.4, следствие 2/, второе - в [22], третье /при условии $2-n/p'>0$, т.е. $p(n-2)<n$ / - в [17]/п. 6.3/, четвёртое - в [17]/п.9.1/ а последнее вытекает из определения классов $W_p^s(\Omega)$. Таким образом,

$$\forall u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad \|u\|_{W_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)} \le c_2 \|u\|_{W_1^2(\Omega)}. \qquad (3.12)$$

Из /3.10/ и /3.12/, очевидно, вытекает, что

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)} \le const \|u\|_{W_1^2(\Omega)} \quad (u \in C^\infty(\bar{\Omega})),$$

откуда и следует /3.9/. Проверим теперь условие (v). Пусть $[0,T] \ni t_m \to t$, $u_m \in \mathcal{D}(\tilde{A}(t_m))$, $u_m \to u$ в $L_1(\Omega)$,

$\Delta \beta_1 u_m + f(t_m) \to v$ слабо в $W_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)$. Поскольку $\beta_1 u_m \in \mathring{W}_1^1(\Omega)$ и имеет место ограниченное вложение $W_1^1(\Omega) \subset L_1(\Gamma)$ [13], то $\beta_1 u_m|_\Gamma = 0$, значит,

$$\mathcal{A} \beta_1 u_m = (\Delta \beta_1 u_m, 0) \to (v - f(t), 0)$$

слабо в $W_p^{-(\frac{n}{p'}+\varepsilon)}(\Omega) \times B_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon-\frac{1}{p}}(\Gamma)$. Поэтому

$$\beta_1 u_m \to \mathcal{A}^{-1}(v - f(t), 0) \quad \text{слабо в } \widetilde{W}_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega),$$

а значит, и в $W_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)$. Поскольку вложение $W_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)$ в $L_1(\Omega)$ компактно, $\beta_1 u_m \to \mathcal{A}^{-1}(v-f(t),0)$ сильно в $L_1(\Omega)$. Так как оператор β_1 замкнут в $L_1(\Omega)$ [4], то $u \in \mathcal{D}(\beta_1)$ и $\beta_1 u = \mathcal{A}^{-1}(v - f(t), 0)$. Значит,

$$\beta_1 u \in \widetilde{W}_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega), \; \Delta \beta_1 u = v - f(t), \; \beta_1 u|_\Gamma = 0. \qquad (3.13)$$

Поскольку $(0 < s - \frac{1}{p} < 1, w \in W_p^s(\Omega), w|_\Gamma = 0) \Rightarrow w \in \mathring{W}_p^s(\Omega)$

/[16], стр. 83/ и $\frac{1}{p}<1\le 2-\frac{n}{p'}-\varepsilon<1+\frac{1}{p}$ при $p(n-1)<n$, то из /3.13/ следует, что

$$\beta_1 u\in \overset{\circ}{W}{}_p^{2-\frac{n}{p'}-\varepsilon}(\Omega)\subset \overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega).$$

Таким образом, $u\in\mathcal{D}(\tilde{A}(t))$ и $\tilde{A}(t)u=\Delta\beta_1 u+f(t)=v$, что и требовалось.

Учитывая, что замыканием $\mathcal{D}(\Delta_1\beta_1)$ в $L_1(\Omega)$ является множество

$$\bar{\mathcal{D}}=\{u\in L_1(\Omega): u(x)\in[0,x) \text{ п. в. в } \Omega\}$$

/см. [4], стр. 541/, видим, что из теорем 1.1, 1.2, в силу вышеизложенного, вытекает

Т е о р е м а 3.1. Допустим, что выполнены условия /3.4/, /3.6/. Тогда существует семейство нелинейных операторов $\mathcal{U}(t):\bar{\mathcal{D}}\to\bar{\mathcal{D}}$ $(0\ge t\le T)$, такое, что

$$\|\mathcal{U}(t)u_0-\mathcal{U}(t)v_0\|_{L_1(\Omega)}\le\|u_0-v_0\|_{L_1(\Omega)}$$

и если

$$u_0\in\mathcal{D}(\Delta_1\beta_1)=\{u\in L_1(\Omega): u(x)\in[0,x) \text{ п. в. в } \Omega,$$
$$\beta(u(\cdot))\in W_1^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_1^1(\Omega)\}$$

то функция $u(t,x)=\mathcal{U}(t)u_0(x)$ является решением задачи /3.1/ - /3.3/ в следующем смысле: если $p>0$, $p(n-1)<n$, $1\le s<2-\frac{n}{p'}$, то

$$\forall t\in[0,T]\quad \beta(u(t,\cdot))\in\overset{\circ}{W}{}_p^s(\Omega);$$

$$\Delta\beta(u),\qquad \partial u/\partial t\in wC([0,T];W_p^{s-2}(\Omega));$$

$$u\in Lip([0,T];L_1(\Omega))\cap wC^1([0,T];W_p^{s-2}(\Omega));$$

уравнение /3.1/ выполняется в смысле распределений, а условия /3.2/, /3.3/ - почти всюду на Γ и Ω соответственно.

З а м е ч а н и е 3.1. Отметим, что $2-\frac{n}{p'}\to 2$ при $p\to 1$.

Перейдём теперь к уравнениям первого порядка и рассмотрим следующую задачу:

$$u_t + \varphi(t,x,u)u_x + \psi(t,x,u) = 0 \quad (0 \le t \le T,\ a < x < b), \qquad (3.14)$$

$$u(t,a) = \mu(t) \quad (0 \le t \le T), \quad u(0,x) = u_0(x) \quad (a \le x \le b). \qquad (3.15)$$

В отличие от задачи Коши, начально-краевая задача для уравнения /3.14/ изучалась сравнительно немного /см. [23], где использовался метод параболической регуляризации, а также пример в §2 работы [9], где задача

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(t,a) = 0, \quad u(0,x) = u_0(x)$$

сводилась к абстрактной задаче Коши в $L_2(a,b)$ и исследовалась с помощью теории нелинейных полугрупп/. Автору /в работе, которая находится в печати/ удалось дать простые достаточные условия, гарантирующие существование в целом и единственность Липшиц-непрерывного на $[0,T]\times[a,b]$ решения задачи /3.14/, /3.15/ для всех u_0 из некоторого множества функций, Липшиц-непрерывных на $[a,b]$, а также непрерывную /в норме $L_2(a,b)$ / и монотонную зависимость этого решения от u_0. При этом предполагалось, что функции φ, ψ непрерывно дифференцируемы по x и u, а задача /3.14/, /3.15/ сводилась к абстрактной задаче Коши в $L_2(a,b)$. Сейчас мы покажем, как можно дополнить эти результаты, сводя задачу /3.14/, /3.15/ к абстрактной задаче Коши в $L_\infty(a,b)$ и используя теоремы I.I, I.4. В частности, в ряде случаев удаётся отказаться от непрерывной дифференцируемости функций φ, ψ /теоремы 3.2, 3.3/. С другой стороны, следует отметить, что в случае непрерывно дифференцируемых φ и ψ использование пространства $L_2(a,b)$ позволяет охватить более широкий класс уравнений.

Начнём со следующего предложения:

Л е м м а 3.I. Пусть функции $\varphi(x,\xi)$ и $\psi(x,\xi)$ определены и непрерывны при $x\in[a,b]$, $\xi\in R^1$ и не убывают по ξ при $\xi \ge \mu$, где $\mu\in R^1$, причём $\varphi(b,\xi)\ge 0$ при $\xi\ge\mu$. Определим оператор A в $L_\infty(a,b)$ так:

$$\mathcal{D}(A) = \{u \in AC[a,b] : u' \in L_\infty^+(a,b),\ u(a) = \mu\}$$

/т.е. $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ состоит из неубывающих на $[a,b]$ функций, удовлетворяющих условию Липшица и условию $u(a)=\mu$ /,

$$\mathcal{A}u(x)=\varphi(x,u(x))\,u'(x)+\psi(x,u(x)).$$

Тогда оператор $-\mathcal{A}$ диссипативен в $L_\infty(a,b)$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $u,v\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$, $u\neq v$, то $\forall\lambda,\varepsilon>0$ множество точек $x\in(a,b)$, для которых

$$W(x)\equiv|u(x)-v(x)+\lambda(\varphi(x,u(x))u'(x)+\psi(x,u(x))-$$
$$-\varphi(x,v(x))v'(x)-\psi(x,v(x)))|\geq\|u-v\|_{L_\infty(a,b)}-\varepsilon \quad (3.16)$$

имеет положительную меру. Так как $u-v\in C[a,b]$, $u\neq v$, $u(a)=v(a)=\mu$, то

$$\exists x^*\in(a,b] \quad |u(x^*)-v(x^*)|=\|u-v\|_{L_\infty(a,b)}, \quad (3.17)$$

$$\exists\delta>0\ (|x-x^*|<\delta)\Rightarrow(|u(x)-v(x)|\geq|u(x^*)-v(x^*)|-\varepsilon/2) \quad (3.18)$$

Заметим, что

$$W(x)=|u(x)-v(x)+\lambda(\varphi(x,u(x))-\varphi(x,v(x)))v'(x)+$$
$$+\lambda\varphi(x,u(x))(u'(x)-v'(x))+\lambda(\psi(x,u(x))-\psi(x,v(x)))|, \quad (3.19)$$

причём второе и четвёртое слагаемые имеют знак, не противоположный знаку $u(x)-v(x)$ /это следует из того, что φ и ψ не убывают по второму аргументу и $v'(x)\geq 0$ п. в. на (a,b) /. Поэтому достаточно показать, что одно из множеств

$$E_1=\{x\in(x^*-\delta,x^*+\delta):\varphi(x,u(x))(u'(x)-v'(x))(u(x)-v(x))\geq 0\} \quad (3.20)$$

$$E_2=\{x\in(x^*-\delta,x^*+\delta):|\varphi(x,u(x))||(u'(x)-v'(x))|<\varepsilon/2\lambda\} \quad (3.21)$$

имеет положительную меру. Действительно, из /3.19/, в силу сказанного выше, следует, что

$$W(x)=\begin{cases}|u(x)-v(x)|, & x\in E_1\\ |u(x)-v(x)|-\varepsilon/2, & x\in E_2\end{cases}$$

значит, в силу /3.17/ и /3.18/,

$$W(x) \geq \|u-v\|_{L_\infty(a,b)} - \varepsilon \qquad (x \in E_1 \cup E_2)$$

Итак, для завершения доказательства мы покажем, что

$$\varphi(x^*, u(x^*)) \neq 0 \Rightarrow mes\, E_1 > 0, \qquad (3.22)$$

$$\varphi'(x^*, u(x^*)) \neq 0 \Rightarrow mes\, E_2 > 0 \qquad (3.23)$$

В самом деле, пусть $\varphi(x^*, u(x^*)) \neq 0$. Так как также $u(x^*) - v(x^*) \neq 0$, то $\varphi(x, u(x))(u(x) - v(x))$ сохраняет постоянный знак в некоторой окрестности $(x^* - \delta_1, x^* + \delta_1) \cap [a, b]$ точки x^* .Поэтому из $mes\, E_1 = 0$ вытекало бы, в силу /3.20/, что $u'(x) - v'(x)$ также сохраняет постоянный /и противоположный/ знак почти всюду в некоторой окрестности точки x^* ,т.е. $u(x) - v(x)$ строго монотонна в точке $x = x^*$. Так как $u(x) - v(x)$ имеет экстремум при $x = x^*$ /см./3.17//, то x^* не может быть внутренней точкой в $[a, b]$, значит, $x^* = b$. Но,согласно условию леммы, $\varphi(b, u(b)) > 0$, следовательно,

$$sgn\, \varphi(x, u(x))(u(x) - v(x)) = sgn(u(b) - v(b)) \qquad (b - \delta_1 < x < b)$$

откуда, как показано выше, $sgn(u'(x) - v'(x)) = -sgn(u(b) - v(b))$ при п. в. $x \in (b - \delta_1, b]$, но это невозможно, если $x = b$ является точкой экстремума функции $u(x) - v(x)$ на $[a, b]$. Полученное противоречие доказывает /3.22/. Пусть теперь $\varphi(x^*, u(x^*)) = 0$. Тогда, в силу непрерывнсти,

$$\exists\, \delta_2 > 0 \quad |\varphi(x, u(x))| < \varepsilon / 2\lambda \|u' - v'\|_{L_\infty(a,b)} \quad (|x - x^*| < \delta_2)$$

откуда $mes\, E_2 \geq \min(\delta, \delta_2) > 0$, т.е. выполнено /3.23/. Лемма доказана.

Л е м м а 3.2. Если

$$\varphi(x, \xi) > 0 \qquad (a \leq x \leq b, \ \xi \geq \mu), \qquad (3.24)$$

то оператор $\mathcal{A}$, определённый в лемме 3.I, sw^*-замкнут.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \ni u_n \to u$ в $L_\infty(a, b)$, $v_n = \mathcal{A} u_n = \varphi(\cdot, u_n(\cdot))\, u_n'(\cdot) + \psi(\cdot, u_n(\cdot)) \to v$ слабо * в $L_\infty(a, b)$. Тогда

$$u_n(x) = \mu + \int_a^x \frac{v_n(y) - \psi(y, u_n(y))}{\varphi(y, u_n(y))}\, dy. \qquad (3.25)$$

Поскольку $\varphi(x, u_n(x)) \geq \gamma > 0 \ (a \leq x \leq b)$, то

$$\frac{1}{\varphi(x, u_n(x))} \longrightarrow \frac{1}{\varphi(x, u(x))}$$

равномерно на $[a, b]$, а значит, и сильно в $L_1(a, b)$. Учитывая ещё, что

$$\frac{\psi(x, u_n(x))}{\varphi(x, u_n(x))} \longrightarrow \frac{\psi(x, u(x))}{\varphi(x, u(x))}$$

равномерно на $[a, b]$, из /3.25/ получим:

$$u(x) = \mu + \int_a^x \frac{v(y) - \psi(y, u(y))}{\varphi(y, u(y))}\, dy,$$

значит,

$$u'(x) = \frac{v(x) - \psi(x, u(x))}{\varphi(x, u(x))} \quad \text{п. в. на } (a, b) \qquad (3.26)$$

Очевидно, $u' \in L_\infty(a, b)$, а так как все u_n не убывают, то u не убывает и $u' \in L^+_\infty(a, b)$. Кроме того, очевидно, $u(a) = \mu$. Таким образом, $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Из /3.26/ ясно, что $\mathcal{A}u = v$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.3. Допустим, что при $x \in [a, b]$, $\xi \geq \mu$ функции $\varphi(x, \xi)$ и $\psi(x, \xi)$ непрерывны, причём φ не убывает по ξ, $\varphi(x, \xi) > 0$, ψ не убывает по ξ и не возрастает по x, $\psi(a, \mu) \leq 0$. Тогда для оператора $\mathcal{A}$, определённого в лемме 3.1, имеем: $R(I + \lambda\mathcal{A}) \supset \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \ (\lambda > 0)$

Доказательство. Достаточно показать, что для любой неубывающей $v \in C[a, b]$, такой, что $v(a) = \mu$, и любого $\lambda > 0$ найдётся неубывающая $u \in C^1[a, b]$, такая, что

$$u(x) + \lambda\varphi(x, u(x))u'(x) + \lambda\psi(x, u(x)) = v(x) \ (a \leq x \leq b) \quad (3.27)$$

$$u(a) = \mu \qquad (3.28)$$

Это, в силу положительности φ, эквивалентно нахождению решения следующей абстрактной задачи Коши в R^1:

$$du(x)/dx = G(x)u(x) \quad (a \le x \le b), \quad u(a) = \mu \qquad (3.29)$$

где $\{G(x) : a \le x \le b\}$ – семейство нелинейных операторов в R^1, определённое так:

$$\mathcal{D}(G(x)) = \{\xi \in R^1 : \xi \ge \mu,\ v(x) - \xi - \lambda\psi(x,\xi) \ge 0\} \qquad (3.30)$$

$$G(x)\xi = \frac{v(x) - \xi - \lambda\psi(x,\xi)}{\lambda\varphi(x,\xi)} \equiv g(x,\xi) \qquad (3.31)$$

Для доказательства разрешимости задачи /3.29/ мы применим теорему I.I, положив в ней $X = E = F = R^1$, и заменив z на μ, $[0,T]$ на $[a,b]$, $\mathcal{A}(t)\,(=\tilde{\mathcal{A}}(t))$ на $G(x)$. Тем самым будет показано, что теорема I.I может оказаться полезной и в конечномерном случае. Подчеркнём, что операторы $G(x)$ имеют з а в и с я щ у ю о т x о б л а с т ь о п р е д е л е н и я /пример применения теоремы I.I в такой ситуации в бесконечномерном случае см. в теореме 3.3 ниже/. Перейдём к проверке условий теоремы I.I. Отметим, во-первых, что

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall \xi \in \mathcal{D}(G(x)) \quad 0 \le G(x)\xi \le c, \qquad (3.32)$$

где

$$c = \frac{v(b) - \mu - \lambda\psi(b,\mu)}{\lambda \min\{\varphi(x,\mu) : a \le x \le b\}}.$$

Далее, $v(a) - \mu - \lambda\psi(a,\mu) = -\lambda\psi(a,\mu) \ge 0$, так что

$$\mu \in \mathcal{D}(G(a))$$

Поскольку функция $g(x,\xi)$ не возрастает по ξ при $\xi \in \mathcal{D}(G(x))$, то $\forall x \in [a,b]$ оператор $G(x)$ диссипативен в R^1. Поэтому при $\alpha > 0$ на $R(I - \alpha G(x))$ определены однозначные операторы $(I - \alpha G(x))^{-1}$. Покажем, что

$$\exists \alpha_0 > 0 \quad \forall \alpha \in (0,\alpha_0) \quad \mu \in \mathcal{D}\Big(\prod_{i=1}^{[(b-a)/\alpha]} (I - \alpha G(a + i\alpha))^{-1}\Big) \qquad (3.33)$$

Выберем $\alpha_0 > 0$ столь малым, что

$$\alpha_0 |g(x,\xi)| < 1 \quad (a \le x \le b), \quad \mu \le \xi \le \mu + c(b-a) + 1, \tag{3.34}$$

зафиксируем $\alpha \in (0, \alpha_0)$ и будем доказывать индукцией по m, что

$$\mu \in \mathcal{D}\Big(\prod_{i=1}^{m} (I - \alpha G(a + i\alpha))^{-1}\Big), \quad 1 \le m \le [(b-a)/\alpha], \tag{3.35}$$

$$\mu \le \prod_{i=1}^{m} (I - \alpha G(a + i\alpha))^{-1} \mu \le \mu + c(b-a), \tag{3.36}$$

считая $[(b-a)/\alpha] \ge 1$. Из леммы /2.1/ и /3.32/ следует, что если при некотором m выполнено /3.35/, то выполнено и /3.36/. Поэтому достаточно показать, что /3.35/ верно при $m=1$ и что справедливость /3.35/, /3.36/ при $m=k$ влечёт справедливость /3.35/ при $m=k+1$, если $k \le [(b-a)/\alpha]$. Оба эти утверждения будут доказаны, если мы покажем, что уравнение

$$\xi - \alpha g(x, \xi) = \eta \tag{3.37}$$

имеет решение $\xi \in \mathcal{D}(G(x))$, при условии, что

$$a \le x - \alpha < x \le b, \; \eta \in \mathcal{D}(G(x-\alpha)), \; \mu \le \eta \le \mu + c(b-a) \tag{3.38}$$

Определим непрерывное отображение $\Phi : R^1 \to R^1$ так:

$$\Phi(\xi) = \eta + \alpha g(x, \max(\xi, \mu)) \tag{3.39}$$

Из /3.34/ и /3.38/ следует, что Φ переводит отрезок $[\eta - 1, \eta + 1]$ в себя; значит, в этом отрезке найдётся такая точка ξ_0, что $\Phi(\xi_0) = \xi_0$. Допустим, что $\xi_0 < \eta$. Так как $\eta \in \mathcal{D}(G(x-\alpha))$, то $v(x-\alpha) - \eta - \lambda \psi(x-\alpha, \eta) \ge 0$. Пусть $\xi_1 = \max(\xi_0, \mu)$. Тогда $\xi_1 \le \eta$ и

$$v(x) - \xi_1 - \lambda \psi(x, \xi_1) \ge v(x-\alpha) - \eta - \lambda\psi(x-\alpha, \eta) \ge 0, \tag{3.40}$$

$$\xi_0 = \Phi(\xi_0) = \eta + \alpha g(x, \xi_1) = \eta + \alpha \frac{v(x) - \xi_1 - \lambda\psi(x, \xi_1)}{\lambda \varphi(x, \xi_1)} \ge \eta.$$

Полученное противоречие показывает, что $\xi_0 \ge \eta \ge \mu$, так что $\xi_1 = \xi_0$ и, в силу /3.40/, /3.39/, $\xi_0 \in \mathcal{D}(G(x))$ и $\xi_0 - \alpha g(x, \xi_0) = \eta$, что и требовалось. Итак, мы доказали /3.35/ – /3.36/. Из /3.36/ следует, что /с помощью диагонального процесса/ можно выбрать последовательность $\alpha_n \downarrow 0$, такую, что при всех рациональных $x \in [a,b]$

$$\xi_n(x) = \prod_{i=1}^{[(x-a)/\alpha_n]} (I - \alpha_n G(a + i\alpha_n))^{-1} \mu \to \xi(x) \in R^1, \quad (3.41)$$

а поскольку, в силу /3.32/, и леммы 2.I,

$$|\xi_n(x) - \xi_n(y)| \le c(|x-y| + \alpha_n) \quad (a \le x \le b)$$

/ср. с /2.4//, то предел в /3.4I/ существует при всех $x \in [a,b]$. Таким образом, выполнено условие (i) теоремы I.I. Из /3.32/ вытекает, что выполнены также условия (ii), (iii), а из непрерывности функции $g(x,\xi)$ /см. /3.3I//, поскольку

$$[a,b] \ni x_n \to x, \quad \mathcal{D}(G(x_n)) \ni \xi_n \to \xi \Rightarrow \xi \in \mathcal{D}(G(x))$$

/см. /3.30//, следует условие (v). В силу теоремы I.I, задача /3.29/ имеет решение $u \in C^1[a,b]$, что и доказывает лемму.

Из лемм 3.I - 3.3 и теорем I.2, I.4 вытекает

Т е о р е м а 3.2. Допустим, что функции $\varphi(t,x,\xi)$ и $\psi(t,x,\xi)$ определены и непрерывны при $t \in [0,T]$, $x \in [a,b]$, $\xi \ge \mu$ и удовлетворяют следующим условиям:

(i) $\varphi(t,x,\xi) > 0$ и не убывает по ξ;

(ii) $\psi(t,x,\xi)$ не возрастает по x и не убывает по ξ;

(iii) $\psi(t,a,\mu) \le 0$

(iv) φ и ψ удовлетворяют локальному условию Липшица по t.

Пусть, кроме того, $u_0 : [a,b] \to R^1$ - неубывающая функция, удовлетворяющая условию Липшица, $u_0(a) = \mu$ /т.е. $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ /. Тогда задача

$$u_t + \varphi(t,x,u)u_x + \psi(t,x,u) = 0 \quad (0 \le t \le T, a < x < b), \quad (3.42)$$

$$u(t,a) = \mu \quad (0 \le t \le T), \quad u(0,x) = u_0(x) \quad (a \le x \le b) \quad (3.43)$$

имеет решение $u : [0,T] \times [a,b] \to R^1$, липшиц-непрерывное по обеим переменным, неубывающее по x и удовлетворяющее /3.36/ п. в. на (a,b) при п. в. $t \in [0,T]$. Более того, существует семейство операторов $\mathcal{U}(t) : \overline{\mathcal{D}(A)} \to \overline{\mathcal{D}(A)}$ $(0 \le t \le T)$, такое, что $\forall u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ функция $u(t,x) = \mathcal{U}(t)u_0(x)$ является решением задачи /3.36/, /3.37/ и

$$\|\mathcal{U}(t)u_0 - \mathcal{U}(t)v_0\|_{C[a,b]} \le \|u_0 - v_0\|_{C[a,b]} \quad (u_0, v_0 \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}).$$

Замечание 3.2. Очевидно, что $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$ состоит из всех неубывающих непрерывных на $[a,b]$ функций, таких, что $u(a) = \mu$.

Замечание 3.3. Если функции φ и ψ непрерывно дифференцируемы по x , ξ , то решение задачи /3.36/, /3.37/ в условиях теоремы 3.2 единственно. Это замечание относится и к теореме 3.3 ниже.

Результат, аналогичный теореме 3.2, можно получить для задачи

$$u_t + \varphi(t,x,u)u_x + \psi(t,u) = 0 \quad (0 \le t \le T,\ a < x < b), \tag{3.44}$$

$$u(t,a) = \mu(t) \quad (0 \le t \le T), \quad u(0,x) = u_0(x) \quad (a \le x \le b), \tag{3.45}$$

в которой граничное условие зависит от времени и, кроме того, допускается вырождение: φ может обращаться в нуль.

Теорема 3.3. Допустим, что $\mu : [0,T] \to R^1$ удовлетворяет условию Липшица, функции $\varphi(t,x,\xi)$ и $\psi(t,\xi)$ определены и непрерывны при $t \in [0,T]$, $x \in [a,b]$, $\xi \ge \mu(t)$ и удовлетворяют следующим условиям:

(i) $\varphi(t,x,\xi) \ge 0$, не убывает по ξ , не убывает и непрерывно дифференцируема по x ;

(ii) $\psi(t,\xi)$ не убывает по ξ ;

(iii) $\exists M > 0 \quad -M\varphi(t,a,\mu(t)) \le \psi(t,\mu(t)) + \mu'(\tau) \le 0$
$$(0 < t \le T,\ \tau \in (t-\delta, t) \cap (0,t),\ \delta > 0).$$

Пусть, кроме того, $u_0 : [a,b] \to R^1$ - неубывающая функция, удовлетворяющая условию Липшица, $u(a) = \mu(0)$. Тогда существует липшиц-непрерывное на $[0,T] \times [a,b]$ решение $u(t,x)$ задачи /3.44/, /3.45/, такое, что

$$0 \le u_x(t,x) \le \max(M, \|u_0'\|_{L_\infty(a,b)}).$$

Доказательство. Определим семейство операторов $\{\mathcal{A}(t) : 0 \le t \le T\}$ в $L_\infty(a,b)$ так:

$\mathcal{D}(\mathcal{A}(t))=\{u\in AC[a,b]: u(a)=\mu(t),\ 0\le u'(x)\le\nu$ п. в. в $(a,b)\}$,
где $\nu=\max(M,\ \|u_0'\|_{L_\infty(a,b)})$,

$$\mathcal{A}(t)u(x)=-(\varphi(t,x,u(x))u'(x)+\psi(t,u(x))).$$

и применим теорему I.I с $X=E=L_\infty(a,b)$, $F=L_1(a,b)$, $\widetilde{\mathcal{A}}(t)=\mathcal{A}(t)$, $z=u_0\in\mathcal{D}(\mathcal{A}(0))$. Основная трудность состоит в том, чтобы показать, что

$$R(I-\lambda\mathcal{A}(t))\supset\mathcal{D}(\mathcal{A}(t-\lambda))\quad(\lambda\in(0,\delta),\ t\in[\lambda,T]), \qquad (3.46)$$

откуда будет следовать, что $\forall\lambda\in(0,\delta)$ $u_0\in\mathcal{D}(\mathcal{U}^\lambda(T,0))$ /см. /I.3//. Поскольку $\bigcup\limits_{0\le t\le T}\mathcal{D}(\mathcal{A}(t))$ компактно, а $\bigcup\limits_{0\le t\le T}R(\mathcal{A}(t))$ ограниченно /и, значит, относительно слабо* секвенциально компактно/ в $L_\infty(a,b)$, то выполнены условия (i) – (iii) теоремы I.I /условие (i) проверяется так же, как это было сделано для операторов $G(x)$ в лемме 3.3/. Условие (iv) теоремы I.I тривиально, а условие (v) доказывается по той же схеме, что и демизамкнутость оператора $\mathcal{A}$ в [9] на стр. 530 /именно здесь используется непрерывная дифференцируемость φ по x /. Таким образом, доказав /3.46/, мы сведём теорему 3.3 к теореме I.I. Поскольку оператор $\mathcal{A}(t)$ диссипативен /лемма 3.1/ и замкнут в $L_\infty(a,b)$, то $R(I-\lambda\mathcal{A}(t))$ замкнуто в $L_\infty(a,b)$ /ср. с замечанием I.3/, поэтому достаточно показать, что если $\lambda\in(0,\delta)$, $t\in[0,T]$, то задача

$$u(x)+\lambda\varphi(t,x,u(x))u'(x)+\lambda\psi(t,u(x))=v(x), \qquad (3.47)$$

$$u(a)=\mu(t) \qquad (3.48)$$

имеет решение $u\in AC[a,b]$, такое, что $0\le u'(x)\le\nu$ п. в. в (a,b), для любой $v\in C^1[a,b]$, такой, что $v(a)=\mu(t-\lambda)$, $0<v'(x)<\nu$ $(a\le x\le b)$. Уравнение /3.47/ аппроксимируем невырожденным уравнением

$$u_\varepsilon'(x)=\frac{v(x)-u(x)-\lambda\psi(t,u(x))}{\lambda(\varphi(t,x,u(x))+\varepsilon)} \qquad (3.49)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$u'_\varepsilon(x) = \frac{\tilde v(x) - u_\varepsilon(x) - \lambda\tilde\psi(u_\varepsilon(x))}{\lambda\tilde\varphi(x, u_\varepsilon(x))}, \tag{3.50}$$

где $\tilde v(x) = v(x) + \mu(t) - \mu(t-\lambda)$, $\tilde\psi(\xi) = \psi(t,\xi) + \lambda^{-1}(\mu(t) - \mu(t-\lambda))$, $\tilde\varphi(x,\xi) = \varphi(t,x,\xi) + \varepsilon$. Тогда $\tilde v(a) = \mu(t)$. Так как $\nu \geq M$, то неравенство условия (iii) настоящей теоремы сохранится при замене M на ν. Интегрируя полученное неравенство по τ от $t-\lambda$ до t, найдём:

$$-\lambda\nu\varphi(t,a,\mu(t)) \leq \lambda\psi(t,\mu(t)) + \mu(t) - \mu(t-\lambda) \leq 0 \tag{3.51}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\tilde\psi(\mu(t)) \leq 0$. Таким, образом, функции $\tilde\varphi$, $\tilde\psi$ и число $\mu = \mu(t)$ удовлетворяют всем условиям леммы 3.3. Поэтому задача /3.50/,/3.48/ /а тем самым и задача /3.49/, /3.48// имеет неубывающее решение $u_\varepsilon \in C^1[a,b]$. Покажем, что $u'_\varepsilon(x) < \nu$ $(a \leq x \leq b)$. Действительно, в силу /3.5I/,

$$u'_\varepsilon(a) = \frac{\mu(t-\lambda) - \mu(t) - \lambda\psi(t,\mu(t))}{\lambda(\varphi(t,a,\mu(t)) + \varepsilon)} \leq \frac{\lambda\nu\varphi(t,a,\mu(t))}{\lambda(\varphi(t,a,\mu(t)) + \varepsilon)} < \nu$$

Допустим, что неравенство $u'_\varepsilon(x) < \nu$ впервые нарушается в точке $x_1 \in (a,b]$. Тогда $u'_\varepsilon(x_1) = \nu$,

$$v(x_1) - u_\varepsilon(x_1) - \lambda\psi(t,u_\varepsilon(x_1)) - \nu\lambda(\varphi(t,x_1,u_\varepsilon(x_1)) + \varepsilon) = 0 \tag{3.52}$$

Так как $(v - u_\varepsilon)'(x_1) = v'(x_1) - \nu < 0$, то

$$\exists x \in [a, x_1) \quad v(x) - u_\varepsilon(x) > v(x_1) - u_\varepsilon(x_1). \tag{3.53}$$

Кроме того, при $x < x_1$ $u_\varepsilon(x) \leq u_\varepsilon(x_1)$, значит, в силу условий (i), (ii) настоящей теоремы,

$$\forall x \in [a, x_1) \quad \lambda\psi(t, u_\varepsilon(x)) + \nu\lambda(\varphi(t,x,u_\varepsilon(x)) + \varepsilon) \leq$$
$$\leq \lambda\psi(t, u_\varepsilon(x_1)) + \nu\lambda(\varphi(t,x_1,u_\varepsilon(x_1)) + \varepsilon) \tag{3.54}$$

Из /3.52/ - /3.54/ следует, что

$$\exists x \in [a, x_1) \ v(x) - u_\varepsilon(x) - \lambda\psi(t, u_\varepsilon(x)) > \nu\lambda(\varphi(t,x,u_\varepsilon(x)) + \varepsilon),$$

а отсюда, согласно /3.49/, выводим: $\exists x \in [a, x_1)$ $u'_\varepsilon(x) > \nu$.

Но это противоречит выбору точки x_1. Таким образом, мы доказали, что $\forall \varepsilon > 0$ задача (3.49), (3.48) имеет решение $u_\varepsilon \in C^1[a,b]$, такое, что $0 \le u_\varepsilon'(x) \le \nu$ $(a \le x \le b)$. Из теоремы Арцела вытекает, что семейство функций $\{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ относительно компактно в $C[a,b]$. Устремляя ε к нулю, получим абсолютно непрерывную функцию $u:[a,b] \to R^1$, такую, что $u(a) = \mu(t)$ и п.в. на (a,b) выполняются равенство (3.47) и неравенства $0 \le u'(x) \le \nu$. Обоснование предельного перехода проведено в лемме 3.4. нашей работы, упомянутой на стр.102, и здесь мы его опускаем. Итак, мы установили справедливость соотношения (3.46), чем и завершается доказательство теоремы 3.3.

Автор приносит глубокую благодарность Г.И.Лаптеву, под руководством которого выполнена эта работа.

Добавление

Здесь мы приводим усиленный вариант теоремы I.I.

Т е о р е м а Д.I. Пусть $\mathcal{A}(t):\mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) \to X$ $(0 \le t \le T)$ – семейство операторов в банаховом пространстве X. Допустим, что $(0,\infty) \ni \lambda_n \downarrow 0$, $s \in [0,T)$, $z \in \bigcap_n \mathcal{D}(\mathcal{U}^{\lambda_n}(T,s))$ и выполнены условия (i), (ii) теоремы I.I. Пусть, далее, X непрерывно вложено в отделимое локально выпуклое пространство E, причем множество $S(s,z,\{\lambda_n\})$ относительно секвенциально компактно в E, выполнено условие (iv) теоремы I.I и следующее условие:

$(v)''$ если $[0,T) \ni t_n \to t$, $\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t_n)) \ni y_n \to y$ в X, $\tilde{\mathcal{A}}(t_n) y_n \to v$ в E, то $y \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t))$ и $\tilde{\mathcal{A}}(t) y = v$

Тогда, если $z \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(s))$, то $\forall t \in [s,T]$ $u(t) \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{A}}(t))$,

$$u \in Lip([s,T];X) \cap C^1([s,T];E),$$

$$du(t)/dt = \tilde{\mathcal{A}}(t)u(t) \quad (s \le t \le T), \quad u(s) = z.$$

Теорема Д.I позволяет установить, что построенное в теореме 3.I решение задачи /3.I/ - /3.3/ на самом деле принадлежит классу $C^1([0,T];W_p^{s-2}(\Omega))$ /следует учесть, что второе вложение в /3.7/ компактно/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grandall M.G., Ligett T.M. Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces.-"Amer.J.Math"., 1971, 93, No.2, p.265 - 298.
2. Grandall M.G., Pazy A. Nonlinear evolution equations in Banach spaces.-"Isr.J.Math", 1972, 11, No.1, p.57 - 94.
3. Grandall M.G. The semi-group approach to first order quasilinear equations in several space variables.-"Isr.J.Math"., 1972, 12, No.1, p.108 - 132.
4. Konishi Y. Some examples of nonlinear semi-groups in Banach lattices.-"J.Fac.Sci.Univ.Tokyo.Sect.IA", 1972, 18, No.3, p.537 - 543.
5. Konishi Y. On $u_t = u_{xx} - F(u_x)$ and the differentiability of the nonlinear semi-group associated with it.-"Proc. Japan Acad.", 1972, 48, No.5, p.281 - 286.
6. Martin R.H., Jr.Generating an evolution system in a class of uniformly convex Banach spaces.-"J.Functional Analysis", 1972, 11, No.1, p.62 - 76.
7. Webb G.F. Nonlinear evolution equations and product stable operators in Banach spaces.-"Trans.Amer.Math. Soc.", 1971, 155, No.2, p.409 - 426.
8. Ôharu S. A note on the generation of nonlinear semi-groups in a locally convex space.-"Proc.Japan Acad.", 1967, 47, No.9, p.847 - 851.
9. Ôharu S. On the generation of semi-groups of nonlinear contractions.-"J.Math.Soc.Japan", 1970, 22, No.4, p.526 - 550.
10. Kato T. Nonlinear semi-groups and evolution equations.-"J. Math Soc.Japan", 1967, 19, No.4, p.508 - 520.
11. Calderon A.P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. "Studio Math.", 1964, 24, No.2, p.113 - 190.
12. Peetre J. Espaces d'interpolation et theoreme de Sobolev.-"Ann.Inst.Fourier", 1966, 16, No.2, p.279-317.

13. Gagliardo E. Caratterizzazione della tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili.-"Rend.Semin.Matem.un-ta di Padova", 1957, 27, No.3, p.284 - 305.

14. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950, 255 с.

15. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962, 829 с.

16. Функциональный анализ. Под. ред. С.Г.Крейна., М., 1972, 544 с.

17. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1969, 480 с.

18. Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу Юй-линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации.-"Изв. АН СССР. Серия матем.", 1958, 22, № 5, с. 667 - 704.

19. Дубинский Ю.А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях.-"Математический сборник", 1965, 67(109), № 4, с. 609 - 642.

20. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972, 587 с.

21. Ройтберг Я.А. Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами. - "Украинский математический журнал", 1965, 17, № 5, с. 122 - 127.

22. Бесов О.В. Продолжение функций из L_p^ℓ и W_p^ℓ. - "Труды МИАН СССР", 1967, 89, с. 5 - 17.

23. Быховский Э.Б. Начально-краевая задача для уравнения $u_t + (a(u))_x = 0$. - "Докл. АН СССР", 1972, 202, № 3, с. 511 - 514.

ТЕОРЕМА О ВОЗМУЩЕНИЯХ m-ДИССИПАТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.И. Хазан

Введение

В теории нелинейных эволюционных уравнений и полугрупп нелинейных операторов в банаховых пространствах важную роль играют m-диссипативные операторы /см. [I] - [4], [9], а также литературу, указанную в нашей работе [I0]; определения диссипативных и m-диссипативных операторов приводятся ниже/. В теории возмущений рассматривается следующая задача: дан m-диссипативный оператор $\mathcal{A}$; при каких условиях на оператор B оператор $\mathcal{A}+B$ будет m-диссипативным? Различные достаточные условия даны в работах [I] - [8] /отметим, что во многих работах рассматриваются аккретивные операторы, т.е. "диссипативные с обратным знаком"; наряду с терминами "m-диссипативный", "m-аккретивный" употребляются в том же смысле термины "гипердиссипативный", "гипермаксимальный аккретивный" и др./. Однако достаточно общих результатов, применимых в произвольных банаховых пространствах, насколько нам известно, в литературе нет. В [I] - [6] рассмотрения ведутся в различных подклассах класса рефлексивных банаховых пространств, причём на возмущающий оператор B либо накладываются условия типа непрерывности /или хотя бы непрерывности по отношению к $\mathcal{A}$ /, либо он предполагается m-диссипативным. В работах [7], [8] не накладываются ограничения на банаховы пространства, однако в [7] оператор $\mathcal{A}$ предполагается линейным, а B всюду определённым и непрерывным, а в [8] /лемма I/ используется следующее условие:

$$\|Bu - Bv\| \leq a\|u-v\| + b\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\| \quad (u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ b<1),$$

которое для приложений представляется слишком ограничительным.

В настоящей работе мы доказываем новую теорему о возмущениях m-диссипативных операторов в произвольных банаховых пространствах /теорема 2/, которая оказывается довольно полезной в приложениях, особенно в нерефлексивных пространствах. При доказательстве теоремы 2 используется один признак m-диссипативности /теорема 1/, который, на наш взгляд, представляет и самостоятельный интерес.

Обозначения и терминология.

Под **многозначным оператором** в банаховом пространстве X мы понимаем множество $\mathcal{A} \subset X \times X$. При этом используются следующие стандартные обозначения:

$$\forall x \in X \quad \mathcal{A}x = \{y \in X : [x, y] \in \mathcal{A}\},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{x \in X ; \mathcal{A}x \neq \emptyset\},$$

$$R(\mathcal{A}) = \cup \{\mathcal{A}x : x \in \mathcal{D}(\mathcal{A})\}$$

Если $\mathcal{A}, B \subset X \times X$, $\lambda \in R^1$, то положим

$$\mathcal{A} + B = \{[x, y+z] : x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{D}(B), y \in \mathcal{A}x, z \in Bx\},$$

$$\mathcal{A}B = \{[x, z] : \exists y \in X \ [x, y] \in B, [y, z] \in \mathcal{A}\},$$

$$\lambda \mathcal{A} = \{[x, \lambda y] : x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), y \in \mathcal{A}x\},$$

$$\mathcal{A}^{-1} = \{[y, x] : [x, y] \in \mathcal{A}\}.$$

Однозначный оператор в X отождествляется со своим графиком; при этом, если $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \to X$ - однозначный оператор, то $\mathcal{A}x$ обозначает, разумеется, единственный элемент $y \in X$, такой, что $[x, y] \in \mathcal{A}$ /а не множество, состоящее из этого элемента/. Такие обозначения несколько двусмысленны, но общеприняты и не должны приводить к недоразумениям. Тождественный оператор в X /и диагональ в $X \times X$ / обозначается I.

Все рассматриваемые в дальнейшем операторы, вообще говоря, нелинейны и многозначны, если явно не оговорено противное.

Напомним, что оператор $\mathcal{A}$ в вещественном банаховом пространстве X называется **диссипативным**, если $\forall\lambda>0$ оператор

$$(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}:R(I-\lambda\mathcal{A})\to\mathcal{D}(\mathcal{A})$$

однозначен и

$$\|(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}u-(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}v\|\le\|u-v\|\quad(u,v\in R(I-\lambda\mathcal{A})).$$

Если, кроме того,

$$\forall\lambda>0\quad R(I-\lambda\mathcal{A})=X,$$

то оператор $\mathcal{A}$ называется m-диссипативным. Наконец, если $S\subset X$, то

$$|S|=\inf\{\|u\|:u\in S\}.$$

Теоремы и их доказательства.

Нам потребуются два простых и хорошо известных факта о диссипативных операторах: нелинейный аналог тождества Гильберта, который состоит в том, что при $\lambda,\mu>0$, $u\in R(I-\mu\mathcal{A})$ справедливы соотношения

$$\frac{\lambda}{\mu}u+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(I-\mu\mathcal{A})^{-1}u\in R(I-\lambda\mathcal{A}),$$

$$(I-\mu\mathcal{A})^{-1}u=(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}u+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)(I-\mu\mathcal{A})^{-1}u\right)\quad(1)$$

/см. [9], предложение 3.I/, а также очевидное следствие определения обратного оператора:

$$\forall\lambda>0\ \forall u\in R(I-\lambda\mathcal{A})\quad \lambda^{-1}((I-\lambda\mathcal{A})^{-1}u-u)\in\mathcal{A}(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}u\quad(2)$$

Т е о р е м а I. Пусть $\mathcal{A}$ - диссипативный оператор в вещественном банаховом пространстве X, причём для любого ограниченного множества $S\subset X$ найдётся такое $\lambda(S)>0$, что $\forall\lambda\in(0,\lambda(S))$ $R(I-\lambda\mathcal{A})\supset S$. Тогда $\forall\lambda>0$ $R(I-\lambda\mathcal{A})=X$, т.е. $\mathcal{A}$ m-диссипативен.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведём в предположении, что $\mathcal{D}(\mathcal{A})\ni 0$ и $\mathcal{A}0\ni 0$ /общий случай легко сводится к этому, так как условия теоремы инвариантны относительно переносов $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $R(\mathcal{A})$ /. Зафиксируем $\lambda>0$ и $u_0\in X$. Пусть $r>\|u_0\|$. По условию, найдётся такое $\mu\in(0,\lambda)$, что

$R(I-\mu A)\supset\{u\in X: \|u\|\le r\}$. Положим

$$V=\{v\in X: \|v\|<\gamma=(\lambda-\mu)^{-1}(\lambda r-\mu\|u_0\|)\}$$

и определим однозначный оператор $T: V\to X$ соотношением

$$Tv=(I-\mu A)^{-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}u_0+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)v\right)\quad (v\in V).$$

Учитывая, что $(I-\mu A)^{-1}$ является сжатием и $(I-\mu A)^{-1}0=0$, получим:

$$\forall u,v\in V\quad \|Tu-Tv\|\le \kappa\|u-v\|,\quad \kappa=1-\frac{\mu}{\lambda}<1,$$

$$\|T0\|=\|(I-\mu A)^{-1}\lambda^{-1}\mu u_0\|\le\lambda^{-1}\mu\|u_0\|<$$

$$<\gamma(1-\kappa)=(\lambda-\mu)^{-1}\lambda^{-1}\mu(\lambda r-\mu\|u_0\|).$$

В силу известной теоремы о неподвижной точке /см., например, [II], 10.1.2/, $\exists u_1\in V\ Tu_1=u_1$, т.е.

$$u_1=(I-\mu A)^{-1}\left(\frac{\mu}{\lambda}u_0+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)u_1\right)\qquad(3)$$

Воспользовавшись тождеством /1/, из /3/ получим:

$$u_1=(I-\lambda A)^{-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\mu}{\lambda}u_0+\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)u_1\right)+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)u_1\right)=$$

$$=(I-\lambda A)^{-1}\left(u_0+\left(\frac{\lambda}{\mu}-1\right)u_1+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)u_1\right)=(I-\lambda A)^{-1}u_0,$$

значит, $u_0\in(I-\lambda A)u_1\subset R(I-\lambda A)$, что и доказывает теорему.

Т е о р е м а 2. Пусть A - m-диссипативный оператор в вещественном банаховом пространстве X, B - однозначный оператор в X, такой, что $\mathcal{D}(B)\supset\mathcal{D}(A)$, оператор $A+B$ диссипативен, $\forall\lambda>0$ оператор $B(I-\lambda A)^{-1}$ вполне непрерывен и

$$\forall u\in\mathcal{D}(A)\quad \|Bu\|\le\varphi(\|u\|,|Au|)+\kappa|Au|,\quad \kappa<0{,}5\qquad(4)$$

где $\varphi:(r,\rho):[0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ - функция, неубывающая по r и ρ, причём

$$\forall r\ge 0\quad \varphi(r,\rho)/\rho\to 0\quad(\rho\to+\infty)\qquad(5)$$

Тогда оператор $A+B$ m-диссипативен.

Доказательство. В силу теоремы I, достаточно показать, что

$$\forall r>0 \quad \exists \lambda(r)>0 \quad R(I-\lambda(\mathcal{A}+B))\supset$$
$$\supset \{u\in X : \|u\|\leq r\} \qquad (0<\lambda<\lambda(r)) \qquad (6)$$

Поскольку $\forall \lambda>0 \quad I-\lambda(\mathcal{A}+B)=(I-\lambda B(I-\lambda\mathcal{A})^{-1})(I-\lambda\mathcal{A})$ и $R(I-\lambda\mathcal{A})=X$, то

$$R(I-\lambda(\mathcal{A}+B))=R(I-\lambda B(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}).$$

Поэтому /6/ эквивалентно тому, что для данного $u_0\in X$ уравнение

$$u=u_0+\lambda B(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}u \qquad (7)$$

разрешимо относительно u при всех $\lambda\in(0,\lambda_0)$, где λ_0 зависит лишь от $\|u_0\|$ и операторов $\mathcal{A}$, B. Из условий теоремы следует, что однозначный оператор $T_\lambda : X\to X$, определённый соотношением

$$T_\lambda u=u_0+\lambda B(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}u,$$

вполне непрерывен при каждом $\lambda>0$. Зафиксируем $v_0\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $w_0\in\mathcal{A}v_0$. Положим

$$r=2(1-2\kappa)^{-1}(\|u_0\|+2\|v_0\|+\|w_0\|)+1>0 \qquad (8)$$

и покажем, что если $\lambda>0$ достаточно мало, то T_λ переводит шар

$$\mathcal{U}=\{u\in X : \|u-u_0\|\leq r\}$$

в себя. Имеем:

$$\forall u\in X \quad \forall\lambda>0 \quad \|(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}u-v_0\|=$$
$$=\|(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}u-(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}(v_0-\lambda w_0)\|\leq\|u-v_0+\lambda w_0\|,$$

значит,

$$\forall u\in\mathcal{U} \quad \forall\lambda\in(0,1] \quad \|(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}u\|\leq\|u_0\|+r+2\|v_0\|+\|w_0\|=r_1 \quad (9)$$

Далее, в силу /2/,

$$\forall u\in\mathcal{U} \quad \forall\lambda\in(0,1] \quad |\mathcal{A}(I-\lambda\mathcal{A})^{-1}u|\leq$$

$$\leq \|\lambda^{-1}(I-\lambda A)^{-1}u-u)\| \leq \lambda^{-1}(r_1+\|u_0\|+r) \qquad (10)$$

Согласно /5/,

$$\exists \rho_0>0 \quad \forall \rho \geq \rho_0 \quad \varphi(r_1,\rho) \leq 0,25(1-2k)\rho \qquad (11)$$

Определим $\lambda_1>0$ условием

$$\lambda_1 \rho_0 = r_1 + \|u_0\| + r \qquad (12)$$

и положим $\lambda_0 = \min(\lambda_1, 1)$. Тогда, в силу /4/ и /8/ - /12/,

$$\forall \lambda \in (0,\lambda_0) \quad \forall u \in U \quad \|T_\lambda u - u_0\| =$$

$$= \lambda\|B(I-\lambda A)^{-1}u\| \leq \lambda(\varphi(r_1, \lambda^{-1}(r_1+\|u_0\|+r))+$$

$$+k\lambda^{-1}(r_1+\|u_0\|+r) \leq \lambda\frac{1-2k}{4}\lambda^{-1}(r_1+\|u_0\|+r)+$$

$$+k(r_1+\|u_0\|+r) = \left(\frac{1-2k}{4}+k\right)(2r+2\|u_0\|+2\|v_0\|+\|w_0\|)<$$

$$<\frac{1+2k}{2}\left(r+\frac{1-2k}{2}r\right) = \frac{(1+2k)(3-2k)}{4}r < r,$$

так как квадратный трёхчлен $p(k)=(1+2k)(3-2k)=3+4k-4k^2$ достигает своего наибольшего значения при $k=0,5$, и $p(0,5)=4$, а по условию теоремы $k<0,5$. Итак, при $\lambda \in (0,\lambda_0)$ $T_\lambda U \subset U$. Согласно теореме Шаудера, $\forall \lambda \in (0,\lambda_0)$ в шаре U имеется неподвижная точка оператора T_λ, т.е. решение уравнения /7/. Теорема доказана.

О приложениях полученных результатов.

С помощью теоремы 2 и результатов Брезиса [12] можно получить теорему существования для задачи

$$Lu(x) + \gamma(x, u(x), \operatorname{grad} u(x)) = f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad (13)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \in \beta(u(x)) \quad (x \in \partial\Omega) \qquad (14)$$

с односторонним граничным условием. Здесь L - линейный эллиптический оператор второго порядка, $\partial u/\partial \nu$ -

производная по конормали, β – максимальный монотонный оператор (вообще говоря, многозначный) в R^1, а функция γ имеет рост по последнему (векторному) аргументу меньше 2. В [10] рассматривался случай $\gamma = 0$, т.е. задача (14) для линейного уравнения. С помощью теоремы 2 и теоремы 1.4 нашей работы [12] можно доказать также теорему существования для задачи

$$u_t = Lu + \gamma(x, u, \operatorname{grad} u) + f(t,x), \ (t \in [0,T], x \in \Omega)$$
$$-\frac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) \in \beta(u(t,x)) \ (t \in [0,T], x \in \partial\Omega), \ u(0,x) = u_0(x) (x \in \Omega).$$

Точные формулировки и доказательства будут приведены в отдельной работе.

Автор приносит свою искреннюю признательность Лаптеву Г.И., под руководством которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Browder F.E. Nonlinear equations of evolution and nonlinear accretive operators in Banach spaces.-"Bull Amer.Math.Soc", 1967, 73, No.6, 867 - 874.
2. Kato T. Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces.-"Proc.Symp. in Pure Math." 1970, 18, Part I, p.138 - 161.
3. Grandall M.G., Pazy A. Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets.-"J.Functional Analysis", 1969, 3, No.3, p.376 - 418.
4. Brezis H., Pazy A. Semigroups of nonlinear contractions on convex sets.-"J.Functional Analysis", 1970, 5, No.2, p.237 - 280.
5. Brezis H., Grandall M.G., Pazy A. Perturbations of nonlinear maximal monotone sets in Banach space.-"Comm.Pure Appl.Math.", 1970, 23, No.1, p.123 - 144.
6. Konishi Y. A remark on perturbation of m-accretive operators in Banach space.-"Proc.Japan Acad", 1971,

47, No.5, p.452 - 455.
7. Webb G.F. Continuous nonlinear perturbations of linear accretive operators in Banach spaces.-"J.Functional Analysis", 1972, 10, No.2, p.191 - 203.
8. Calvert B., Gustafson K.. Multiplicative perturbation of nonlinear m-accretive operators.-"J.Functional Analysis", 1972, 10, No.2, p.149 - 158.
9. Ôharu S. On the generation of semi-groups of nonlinear contractions.-"J.Math.Soc. Japan", 1970, 22, No.4, p.526 - 550.
10. Brezis H. Problems unilateraux.-"J.Math pures et appl.", 1972, 51, No.1, p.1 - 168.
II. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., 1964, 430 с.
I2. Хазан М.И. О дифференцируемости нелинейных эволюционных систем в нерефлективных банаховых пространствах. Настоящий сборник, с. 85 - II4.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Коллектив авторов

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сборник научных работ аспирантов и молодых сотрудников

Редактор Г.Лаптев
Технический редактор Е.Царьков
Корректор М.Хазан

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1974

Подписано к печати 13.12.1973 ЯТ 19874 Зак.№ 49.
Ф/б 60x84/16. Бумага №3. Физ.п.л. 8,0. Уч.-и.л. 5,5
Тираж 350 экз. Цена 55 к.

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки