SKOLAS MATEMĀTIKAS IZVĒLĒTĀS TĒMAS

ИЗБРАННЫЕ ТЕМЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Latvijas PSR Augstākās un vidējās speciālās izglītības ministrija

Daugavpils pedagogiskais institūts

SKOLAS MATEMĀTIKAS IZVĒLĒTĀS TĒMAS
ИЗБРАННЫЕ ТЕМЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Starpaugstskolu zinātnisko rakstu krājums
Межвузовский сборник научных трудов

Š.Miheloviča redakcijā

P.Stučkas Latvijas Valsts universitāte
Rīga 1980

ВВК 22.10

УДК 51

Zinātnisko rakstu krājumā ir aplūkoti daži matemātikas pasniegšanas aspekti saskaņā ar vidusskolas programmu.

Rakstu krājums paredzēts matemātikas specialitāšu studentiem un matemātikas pasniedzējiem vidusskolās.

В предлагаемом сборнике научных трудов рассматриваются некоторые аспекты методики преподавания математики по программе средней школы.

Сборник предназначается для студентов математических факультетов вузов и преподавателей математики средних школ.

I $\frac{20202-124u}{М\ 812(11)-80}$ 100.80.1702020000

В.А.Старцев

Локальное и тотальное исследование функции
(в помощь учителю математики)

Пополнение школьного курса математики вводными вопросами математического анализа и элементами дифференциального и интегрального исчисления существенно расширяет идейное содержание предмета и, несомненно, ведет к оживлению и подъему в работе учителя математики. Но обогащение школьного курса математики этими интересными разделами выдвигает на передний план два никогда не стареющих требования:

1) учитель "должен стоять достаточно высоко над тем материалом, который ему приходится излагать, и должен в точности знать все те подводные скалы и мели, среди которых он проводит своих учеников" [1, с.243];

2) учитель должен быть "в состоянии разрешить основную методическую задачу: найти равнодействующую между требованиями науки и интеллектуальными ресурсами ученика" [2, с.9].

Готовность учителя математики к выполнению указанных требований во многом зависит от подготовки, полученной им в институте."Однако недостаточная профессиональная направленность курса математического анализа в педвузе (тем более в университете), стесненность лектора рамками времени, нежелание многих вузовских преподавателей уделить должное внимание глубокому и подробному освещению с точки зрения современной науки важных вопросов школьной математики - все это ведет к тому, что математический анализ часто остается в голове учителя лишь в виде некоторого воспоминания, не оказывающего прямого влияния на его преподавание. Что касается курса методики математики, то и здесь ограниченность во времени не позволяет подвергнуть обстоятельной дискуссии принципиальные вопросы связи математического анализа со школьным курсом" [3, с.3].

Приведенное замечание из пособия [3] ,вышедшего из печати в 1964 г., на наш взгляд, остается актуальным и по сей день, несмотря на то, что в педвузах и университетах, готовящих учителей математики,делается многое для упрочения связей между вопросами школьной математики и их современным научным толкованием.

Отметим также, что изменение в 1970 и последующих годах программ курсов математического анализа,алгебры и теории чисел, геометрии сделало последние более профессионально направленными.

Известно, что хорошее усвоение основных понятий делает изучаемый предмет более доступным. Между тем,беседы со студентами-выпускниками и учителями математики позволяют заключить,что у них подчас нет полного и четкого представления о том,что общего и в чем различие между современным научным толкованием основных понятий и фактов математического анализа и неполным, упрощенным,обусловленным психолого-педагогическими соображениями изложением их в школе.

На примере темы "Применение производной к исследованию функций" мы попытаемся помочь учителю математики и студенту - будущему учителю глубже вникнуть в некоторые понятия школьного курса,осветив их с точки зрения математического анализа,убедить на примерах в том,что математический анализ является "хлебом насущным" для учителя математики, что он должен постоянно обновлять и пополнять свои знания по этому предмету.

Обычно различают локальное и тотальное поведение функции,понимая соответственно поведение функции в точке и её достаточно малой окрестности в первом случае и поведение функции на всей её области определения (чаще всего промежутке или объединении промежутков) - во втором.

В статье рассмотрены некоторые вопросы такого поведения.

I. Локальная монотонность функции. Локальный экстремум.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (другими словами, в некотором интервале с центром в точке x_0). Тогда для достаточно малых приращений Δx аргумента имеет смысл приращение Δy функции в этой точке x_0, т.е. величина $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Будем говорить, что $f(x)$:

I) возрастает в точке x_0, если существует положительное число δ такое, что

$$\Delta y/\Delta x > 0 \quad \text{при} \quad 0<|\Delta x|<\delta; \qquad (I)$$

2) убывает в точке x_0, если существует положительное число δ такое, что

$$\Delta y/\Delta x < 0 \quad \text{при} \quad 0<|\Delta x|<\delta; \qquad (2)$$

3) достигает локального максимума в точке x_0, если существует положительное число δ такое, что

$$\Delta y \leq 0 \quad \text{при} \quad |\Delta x|<\delta; \qquad (3)$$

4) достигает локального минимума в точке x_0, если существует положительное число δ такое, что

$$\Delta y \geq 0 \quad \text{при} \quad |\Delta x|<\delta. \qquad (4)$$

Указанные четыре свойства можно выразить и так: для всех $x' \in]x_0-\delta, x_0[$ и $x'' \in]x_0, x_0+\delta[$

$$f(x') < f(x_0) < f(x'') \text{ - в первом случае;}$$

$$f(x') > f(x_0) > f(x'') \text{ -во втором случае;}$$

для всех $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ - в третьем случае;}$$

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ - в четвертом случае.}$$

Если в случаях I и 2 неравенства $\Delta y/\Delta x > 0$ ($\Delta y/\Delta x < 0$) заменить на неравенства $\Delta y/\Delta x \geq 0$ ($\Delta y/\Delta x \leq 0$), то мы аналогично определим неубывание (невозрастание) функции $f(x)$ в точке x_0. Заменяя неравенства $\Delta y \leq 0$ ($\Delta y \geq 0$) на неравенства $\Delta y < 0$

($\Delta y > 0$) в случаях 3 и 4 соответственно, мы определим понятие строгого локального максимума (минимума) (в отличие от нестрогих, определенных выше).

Обычно локальный максимум и минимум называют локальными экстремумами. Всюду ниже, где это не оговорено особо, мы рассматриваем возрастание (убывание) в точке, нестрогие экстремумы.

Кроме определенной двусторонней локальной монотонности, иногда рассматривают и одностороннюю локальную монотонность. Так, функция $f(x)$ возрастает в точке x_0 справа, если существует положительное число δ такое, что

$$\Delta y / \Delta x > 0 \qquad \text{при всех} \quad 0 < \Delta x < \delta. \qquad (\mathrm{I}')$$

Аналогично определяется возрастание в точке слева (справа) и убывание в точке слева (справа).

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос, как определить, какой из четырех случаев имеет место, если известны производные функции $f(x)$ первого или более высоких порядков.

Прежде всего заметим, что наличие в точке x_0 локального экстремума исключает локальную монотонность $f(x)$ в этой точке. В самом деле, если функция $f(x)$ достигает в некоторой точке x_0 локального экстремума, то существует интервал $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, в котором разность $f(x) - f(x_0)$ сохраняет знак, поэтому точка x_0 не может быть точкой возрастания или убывания, ибо в противном случае знак разности $f(x) - f(x_0)$ будет меняться в зависимости от знака разности $x - x_0$.

Следующие теоремы описывают простые достаточные и необходимые условия локальной монотонности.

<u>Теорема I</u>. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 в широком смысле[I] и $f'(x_0) > 0$

I. Т.е. имеет конечную или бесконечную (определенного знака) производную.

$(f'(x_0)<0)$,то $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в широком смысле в точке x_0 и $f'(x_0)>0$. Это означает, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y/\Delta x>0$. Поэтому[I] существует $\delta>0$ такое,что при $0<|\Delta x|<\delta$ имеет место неравенство $\Delta y/\Delta x>0$,что доказывает локальное возрастание $f(x)$ в точке x_0 .

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в широком смысле в точке x_0 и локально возрастает или не убывает (убывает или не возрастает) в этой точке,то $f'(x_0)\geqslant 0$ $(f'(x_0)\leqslant 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: теорема вытекает из неравенства (I) или (2) переходом к пределу при Δx ,стремящемся к нулю.

Следует заметить,что из условия $f'(x_0)>0$ нельзя сделать вывод,что $f'(x)$ сохраняет положительный знак в некоторой окрестности точки x_0 (ибо производная,хотя и существует в точке x_0 ,может в ней не быть непрерывной) и,следовательно, из того,что $f'(x_0)>0$ нельзя сделать вывод,что $f(x)$ возрастает во всех точках достаточно малой окрестности точки x_0 .

Так,функция

$$f(x)=\begin{cases} x/2+x^2\sin 1/x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

имеет производную $f'(0)>0$,но в любой окрестности точки $x_0=0$ имеет как точки локального возрастания,так и точки локального убывания. В самом деле,имеем:

$$f'(x)=\tfrac{1}{2}+2x\sin 1/x-\cos 1/x\ , \quad x\neq 0;$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}[f(x)-f(0)]/(x-0)=\lim_{x\to 0}(x/2+x^2\sin 1/x)/x=1/2.$$

Отсюда видно,что $f'(x)$ не является непрерывной в точке $x_0=0$ (ибо $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ не существует).

I См. [4], п. 37, с.80.

В точках $x=1/2k\pi$ $(k\in Z)$ $f'(x)=-1/2<0$ и, следовательно, функция локально убывает; в точках $x=1/(2k+1)\pi$ $(k\in Z)$ $f'(x)=3/2>0$ и, значит, функция локально возрастает. Ясно, что такие точки есть в любой окрестности точки $x_0=0$.

Необходимое условие локального экстремума вытекает из следующей теоремы Ферма[I].

Теорема 3. Если функция $f(x)$ достигает в точке x_0 локального экстремума и дифференцируема в этой точке, то $f'(x_0)=0$.

Доказательство: Если бы $f'(x_0)\neq 0$, то по теореме I функция $f(x)$ была бы возрастающей или убывающей в точке x_0, что, как замечено выше, исключает достижение в этой точке локального экстремума.

Заметим, что наличие условия $f'(x_0)=0$ недостаточно для того, чтобы функция $f(x)$ достигала в точке x_0 локального экстремума.

Например, функция $y=x^3$ возрастает в точке $x_0=0$, а функция $y=-x^3$ убывает в точке $x_0=0$, хотя $y'(0)=0$.

Кроме того, точка x_0, удовлетворяющая условию $f'(x_0)=0$, может не быть ни точкой локального экстремума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания.

Например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin 1/x, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

имеет в точке $x_0=0$ производную, равную нулю, но в любой окрестности этой точки функция $f(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Имеем $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2\sin 1/x)/x=0$,

$$f(2/(4k+1)\pi)>0 \qquad f'(2/(4k+3)\pi)<0 \quad (k\in Z).$$

Отсюда следует, что точка $x_0=0$ не может быть ни точкой экстремума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания для этой функции.

I Ферма (I60I - 1655) - французский математик.

Простые примеры показывают, что локальный экстремум функция может иметь и в тех точках, в которых она не дифференцируема в широком смысле. Так, функция $y=|x|$ не дифференцируема в точке $x_0=0$, но имеет в этой точке локальный минимум. В точках недифференцируемости функция может и не иметь локального экстремума. Так, функция $y=x-\frac{1}{2}|x|$ не дифференцируема в точке $x_0=0$, эта точка является точкой локального возрастания; функция

$$f(x)=\begin{cases} x\sin 1/x\ , & x\neq 0;\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

недифференцируема в точке $x_0=0$, но эта точка не является ни точкой локального экстремума, ни точкой локальной монотонности. Это следует из того, что отношение

$$[f(x)-f(0)]/(x-0)=\sin 1/x\ ,\quad x\neq 0$$

не имеет предела при x, стремящемся к нулю; кроме того, в любой окрестности точки $x_0=0$ функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Более подробно с исследованием поведения функции в точках её недифференцируемости можно познакомиться по пособию [7] [I].

Следующие теоремы дают достаточные условия локального экстремума.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и её окрестности, возрастает (убывает) слева от x_0, убывает (возрастает) справа от x_0, то точка x_0 есть точка локального максимума (минимума).

Другими словами, смена характера монотонности функции $f(x)$ при переходе через точку x_0 (в окрестности которой $f(x)$ непрерывна) является достаточным условием локального экстремума. Заметим, что выражение "справа (слева) от точки x_0" означает "на достаточно малом промежутке с левым (правым) концом в точке x_0".

I См. [7], гл.УП, § 96.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть функция $f(x)$ возрастает в промежутке $]x_0-\delta_1, x_0]$ и убывает в промежутке $[x_0, x_0+\delta_2[$ и $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Тогда при $x\in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ будем иметь $f(x)\leqslant f(x_0)$; это означает, что точка x_0 – точка локального максимума. Аналогично рассматривается другой случай.

Заметим, что предположение о непрерывности функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 существенно для справедливости теоремы О.

Рассмотрим, например, такие функции:

$$f_1(x)=\begin{cases} x, & x<0; \\ x+2, & x\geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_2(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 0; \\ 1, & x=0. \end{cases}$$

Первая из них не имеет локальных экстремумов, а вторая имеет в точке $x_0=0$ локальный максимум, хотя слева от $x_0=0$ функции убывают, а справа возрастают.

Теорема 5. Если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и имеет производную в этой окрестности, исключая, быть может, точку x_0, причем производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0; это будет локальный минимум (максимум), если $f'(x)<0$ ($f'(x)>0$) слева от x_0, $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) справа от x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Теорема вытекает из теоремы 4, если воспользоваться достаточным условием возрастания и убывания функции на промежутке (см. теорему 9).

Другое доказательство следует из формулы конечных приращений[I].

Имеем $\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0+\theta(x-x_0))$, где $0<\theta<1$. Отсюда $\Delta f(x_0)>0$ ($\Delta f(x_0)<0$), это означает, что $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум (максимум) (даже строгий).

Заметим, что в условиях теоремы 5 ничего не говорится о дифференцируемости функции в самой точке x_0: в

I См. [4], п. 102, с. 180.

точке x_0 функция может быть недифференцируемой, если же она дифференцируема, то необходимо $f'(x_0)=0$. Действительно, в этом случае в некотором интервале $]x_0-\delta, x_0+\delta[$ производная $f'(x)$ имеет значения разных знаков, поэтому она должна по свойству производной[I] принимать все промежуточные значения - обратиться в некоторой точке в нуль; но в $]x_0-\delta, x_0[$ и $]x_0, x_0+\delta[$ $f'(x)$ в нуль не обращается, поэтому $f'(x_0)=0$.

Условия теорем 4 и 5 являются достаточными для существования локального экстремума, но не необходимыми. Можно привести пример функции, имеющей в некоторой точке экстремум, но не являющейся монотонной ни слева, ни справа от нее (или не меняющей знака производной при прохождении через эту точку, ибо производная этой функции не сохраняет знака ни в левой, ни в правой окрестности этой точки).

Этими свойствами обладает, например, функция

$$f(x)=\begin{cases}(2-\sin 1/x)|x|, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Имеем: $f(0)=0$, $f(x)>0$ при $x\neq 0$, поэтому $x_0=0$ является точкой локального минимума.

При положительных x $f(x)=(2-\sin 1/x)x$ и $f'(x)=2-\sin 1/x+1/x\cos 1/x$.

В точках $x=1/2k\pi$, $k\in\mathcal{N}$, $f'(x)>0$,

в точках $x=1/(2k+1)\pi$, $k\in\mathcal{N}$, $f'(x)<0$.

Аналогично при отрицательных x

$f(x)=(\sin 1/x-2)x$ и $f'(x)=\sin 1/x-2-1/x\cos 1/x$.

В точках $x=-1/2k\pi$, $k\in\mathcal{N}$, $f'(x)>0$,

в точках $x=-1/(2k+1)\pi$, $k\in\mathcal{N}$, $f'(x)<0$.

<u>Теорема 6.</u> Если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)>0$ ($f''(x_0)<0$), то точка x_0 - точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$.

I См. [4], п. 103, с.182 .

Д о к а з а т е л ь с т в о: Существование $f''(x_0)$ гарантирует существование $f'(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, отсюда $f(x)$ непрерывна в этой окрестности. Из условия $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$) по теореме I следует, что функция $f'(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0. Значит, $f'(x) < f'(x_0)$ ($f'(x) > f'(x_0)$) при $x < x_0$ и $f'(x) > f'(x_0)$ ($f'(x) < f'(x_0)$) при $x > x_0$. По теореме 5 это означает, что x_0 - точка локального минимума (максимума) функции $f(x)$.

Теорема 6 допускает обобщение (см. теорему 7).

Теорема 7: Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные до n-го порядка включительно, причем $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Если n - число четное, то точка x_0 является точкой экстремума, а именно: точкой локального максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и точкой локального минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$; если же порядок n первой не обращающейся в нуль производной в точке x_0 - число нечетное, то точка x_0 не является точкой локального экстремума.

Доказательство этой теоремы обычно основывается на формуле Тейлора, мы его опускаем, отсылая читателя к соответствующей литературе.[I]

Заметим, что как теорема 6, так и её обобщение - теорема 7 носят лишь достаточный характер.

Существуют функции, имеющие производные любого порядка, обращающиеся в нуль в некоторой точке x_0. Тем самым теоремы 6 и 7 к таким функциям применять нельзя. Точка x_0 в этом случае может быть как точкой локального экстремума, так и не являться таковой. Так, функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

I) См. [4], п.II7, с.206 .

имеет производные любого порядка, причем $f^{(n)}(0)=0$[I] ($n=1,2,\dots$). Точка $x_0=0$ является точкой локального минимума.

Функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -e^{-1/x^2}, & x<0 \end{cases}$$

имеет также $f^{(n)}(0)=0$ $(n=1,2,\dots)$, но в точке $x_0=0$ локального экстремума нет (ведь $f(x)>0$ при $x>0$, $f(x)<0$ при $x<0$).

При исследовании заданной функции на локальный экстремум необходимо прежде всего найти критические точки (т.е. точки, в которых либо производная обращается в нуль, либо не существует) и подвергнуть их исследованию. Для этой цели существуют два способа (в соответствии с теоремами 4,5 и 6,7): I) исследование знака первой производной в окрестности критической точки; 2) установление знака производной второго или (если $f''(x_0)=0$) более высокого порядка в критической точке. Каким из этих способов предпочтительнее пользоваться? Следует сказать, что если нахождение производной второго (или более высокого) порядка не слишком длительно, то вторым способом пользоваться проще, ибо в дальнейшем требуется определение знака производной только в критической точке; первый же способ требует установления знака первой производной в левой и правой окрестностях

I Доказательство можно провести методом математической индукции; имеем:

$$f'(x)=2/x^3\, e^{-1/x^2},\ x\neq 0;\quad f'(0)=\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}/x=\lim_{z\to 0} z/e^{z^2}=0.$$

Далее, допустив, что $f^{(n)}(x)=P(1/x)e^{-1/x^2},\ x\neq 0;\ f^{(n)}(0)=0,$ будем иметь

$$f^{(n+1)}(0)=\lim_{x\to 0}[f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)]/(x-0)=\lim_{x\to 0}(P(1/x)e^{-1/x^2})/x=0$$

(здесь через P обозначен многочлен).

этой точки. Однако пользование производными высшего порядка возможно лишь в стационарных точках, т.е. таких, где $f'(x_0)=0$ (в точках, где не существует первая производная, нет и производных высших порядков); кроме того, и там, где существует равная нулю первая производная (вторая производная может не существовать). Может быть и такой исключительный случай, что существуют производные всех порядков, но второй способ не может быть применен, ибо все производные обращаются в нуль (см. с.13); первый же способ во всех таких случаях дает определенный ответ. Кроме того, применение производных высших порядков дает ответ относительно поведения функции в одних только стационарных точках. Для исследования же всего поведения функции, установления её промежутков монотонности, точек локального экстремума удобнее прибегнуть к рассмотрению первой производной. При пользовании этим способом в случае наличия нескольких[I] критических точек последние следует располагать в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$; тогда знак производной справа от x_1 будет знаком её слева от x_2 и т.д. Кроме того, поскольку, например, в интервале $]x_1, x_2[$ нет критических точек, то производная сохраняет знак. Поэтому для установления знака производной в этом интервале достаточно определить его в одной какой-либо точке интервала. Заметим еще, что если функция непрерывна, то обстоятельство, что знак производной справа от одной из критических точек является знаком ее слева от следующей критической точки, говорит о том, что в случае наличия нескольких точек локального экстремума точки максимума и минимума должны чередоваться.

2. Тотальная монотонность функции

Определения возрастающих (неубывающих), убывающих

I Рассматриваем лишь случай конечного числа критических точек.

(невозрастающих) на некотором множестве функций общеизвестны.

На первый взгляд может показаться, что возрастание функции на некотором множестве является очевидным следствием ее возрастания в каждой точке этого множества. Уже простейшие примеры показывают, что это не так. Функция $y = -1/x$, $x \in R \setminus \{0\}$ является возрастающей в каждой точке своей области определения, но не является возрастающей в этой области определения.

Функция $y = x - [x]$, $x \in]0,2[$ является возрастающей в каждой точке $x \neq 1$, а в точке $x = 1$ функция возрастает справа, тем самым возрастает в каждой точке $x \in]0,2[$ справа, но не возрастает на $]0,2[$.

Заметим, что в первом примере функция определена на множестве $R \setminus \{0\}$,которое не является промежутком; во втором - функция в точке $x = 1$ имеет разрыв. Положение проясняет следующая теорема.

Теорема 8. Для того, чтобы функция определенная и непрерывная в промежутке[I] была возрастающей (убывающей), необходимо и достаточно, чтобы она была возрастающей (убывающей) в каждой внутренней точке этого промежутка.

Доказательство необходимости: Пусть функция $f(x)$, $x \in X$ (X - промежуток на прямой) возрастает на X и x_0 - внутренняя точка X , тогда существует $\delta > 0$,что $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset X$. Используя возрастание $f(x)$ на X , имеем:

$$f(x) < f(x_0) \text{ при } x \in]x_0-\delta, x_0[$$

и

$$f(x) > f(x_0) \text{ при } x \in]x_0, x_0+\delta[,$$

это доказывает, что точка x_0 - точка возрастания функции $f(x)$. Если x_0 - концевая левая (правая) точка промежутка, то аналогично доказывается, что $f(x)$ возрастает в x_0 справа (слева).

Можно привести различные доказательства достаточности.

I В концевых точках промежутка имеется в виду односторонняя непрерывность.

а) Пусть $f(x)$ - функция определенная и непрерывная на некотором промежутке X прямой R, возрастающая в каждой внутренней точке этого промежутка.

Покажем, что для любых двух точек x_1 и x_2 промежутка X из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Предположим противное, это означает, что существуют, по крайней мере, две точки x_1, x_2 промежутка X, $x_1 < x_2$, такие, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[x_1, x_2]$, то она достигает в некоторой точке этого сегмента наибольшего значения[I]. Пусть это будет точка $x_0 \in [x_1, x_2]$.
Имеем $f(x_0) = \max\limits_{[x_1, x_2]} f(x)$.

Прежде всего, заметим, что $x_0 \neq x_1$, ибо в точке x_1 функция $f(x)$ возрастает справа, и поэтому для x из некоторого интервала $]x_1, x_1+\delta[$ $(\delta>0)$ $f(x)>f(x_1)$, отсюда в точке x_1 функция $f(x)$ не может достигнуть наибольшего значения на $[x_1, x_2]$. Далее, $x_0 \neq x_2$, ибо по нашему предположению $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, и поэтому тем более в точке x_2 функция $f(x)$ не может достигнуть наибольшего значения.

Значит, x_0 - внутренняя точка $[x_1, x_2]$. Так как по условию в точке x_0 функция $f(x)$ возрастает, то как отмечено выше, точка x_0 не может быть точкой локального максимума, а значит, и тем более функция $f(x)$ не может в точке x_0 достигнуть наибольшего значения на $[x_1, x_2]$. Полученное противоречие доказывает требуемое.

Пусть теперь x_1 -левая концевая точка промежутка X, а x_2 - внутренняя точка X, причем $x_1 < x_2$. Возьмем любую точку x_0, $x_1 < x_0 < x_2$, по доказанному выше имеем $f(x_0) < f(x_2)$ (ведь x_0 и x_2 - внутренние точки X). Пусть теперь ($\tilde{x}_n$) - сходящаяся к точке x_1 последовательность, $\tilde{x}_n \neq x_1$, $x_0 > \tilde{x}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Имеем: $f(\tilde{x}_n) < f(x_0)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

I См. [4], п.73, с. 135-136.

Переходя в этом неравенстве к пределу и учитывая непрерывность функции $f(x)$ в точке x_1 (справа), получаем $f(x_1) \leq f(x_0)$. Тогда $f(x_1) < f(x_2)$. Другие случаи расположения точек x_1 и x_2 промежутка X рассматриваются аналогично. Этим завершается доказательство.

б) Приводимое ниже другое доказательство достаточности теоремы 8 не использует теоремы о достижении непрерывной на сегменте функции наибольшего значения, а основано на другой идее.

Пусть, как и в доказательстве а), существуют две внутренние точки a_0, b_0 промежутка X, для которых $a_0 < b_0$ и $f(a_0) \geq f(b_0)$. Сегмент $[a_0, b_0]$ разделим на две равные части: $[a_0, b_0] = [a_0, c_0] \cup [c_0, b_0]$. Тогда либо $f(a_0) \geq f(c_0)$, либо $f(c_0) \geq f(b_0)$ (если $f(a_0) < f(c_0)$, $f(c_0) < f(b_0)$, то $f(a_0) < f(b_0)$ вопреки предположению).

Для дальнейшего выберем тот из сегментов $[a_0, c_0]$ и $[c_0, b_0]$, в левом конце которого значение функции $f(x)$ не меньше, чем в правом. Обозначим выбранный сегмент через $[a_1, b_1]$. С сегментом $[a_1, b_1]$ поступаем так же: делим на две равные части и через $[a_2, b_2]$ обозначаем тот из полученных сегментов, в левом конце которого значение $f(x)$ не меньше, чем в правом. Такой процесс выбора сегментов продолжим неограниченно. Имеем:

1) $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$;

3) $f(a_n) \geq f(b_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

По известному принципу вложенных стягивающихся сегментов[1] существует единственная точка $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Так как x_0 внутренняя точка промежутка X, то в силу того, что функция $f(x)$ возрастает в точке x_0, существует $\delta > 0$, что для $x \in \,]x_0 - \delta, x_0[$ имеет место неравенство $f(x) < f(x_0)$, а для $x \in \,]x_0, x_0 + \delta[$ –

1 См. [5], с.49 (мелкий шрифт).

неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Среди сегментов построенной последовательности сегментов всегда существует $[a_k, b_k]$, для которого $x_0 \in [a_k, b_k] \subset]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Поэтому $f(a_k) < f(b_k)$, что противоречит построению сегмента $[a_k, b_k]$ (ведь по 3) $f(a_k) \geqslant f(b_k)$). Это противоречие завершает доказательство достаточности теоремы 8. (Случай убывающих функций рассматривается аналогично).

Опираясь на теоремы 8, I, 2, получаем необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции, непрерывной на промежутке.

<u>Теорема 9.</u> Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке X , дифференцируема во внутренних точках промежутка, причем производная положительна (отрицательна), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на X .

<u>Теорема 10.</u> Если функция $f(x)$ возрастает (убывает) на промежутке X, дифференцируема во всех внутренних точках X , то $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$).

<u>Теорема II</u>. Для того, чтобы непрерывная в промежутке X функция $f(x)$, дифференцируемая во внутренних точках, была неубывающей (невозрастающей), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о : Необходимость условий очевидна (см. доказательство теоремы 2).

<u>Достаточность</u>. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке X , дифференцируема во внутренних точках этого промежутка и $f'(x) \geqslant 0$. Для произвольного натурального n рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) + x/n$. Очевидно, что $g'(x) = f'(x) + n$, тем самым функция $g(x)$ удовлетворяет теореме 9. Значит, функция $g(x)$ возрастает на X . Пусть теперь $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in X$, тогда $g(x_1) < g(x_2)$ или $f(x_1) + x_1/n < f(x_2) + x_2/n$. Отсюда $f(x_1) - f(x_2) < (x_1 - x_2)/n$.

Так как n -произвольное натуральное число, то

$f(x_1) - f(x_2) \leq 0$, или $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Это доказывает, что функция $f(x)$ не убывает на X.

Следствие. Для того, чтобы непрерывная на промежутке X, дифференцируемая во внутренних точках X функция $f(x)$ была постоянной функцией (константой), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$.

Доказательство достаточности: пусть $x_1 < x_2$ - произвольные точки X, тогда по теореме II $f(x_1) \leq f(x_2)$ и $f(x_1) \geq f(x_2)$, значит, $f(x_1) = f(x_2)$.

Доказательство необходимости очевидно.

Теорема I2. Для того, чтобы непрерывная на промежутке X, дифференцируемая во всех внутренних точках промежутка функция $f(x)$ была возрастающей (убывающей), необходимо и достаточно, чтобы: I) $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$); 2) множество $\{x \in X : f'(x) = 0\}$ целиком не заполняло никакого интервала.

Доказательство необходимости следует из теоремы IO и следствия теоремы II, доказательство достаточности - из теоремы II и ее следствия.

Заметим, что в большинстве современных курсов математического анализа[I] предлагается иной подход в исследовании функции на монотонность и постоянство в некотором промежутке. Основные теоремы (9-I2) доказываются с помощью формулы конечных приращений[2], при этом сначала доказывается следствие теоремы II, затем теоремы II, I2 (или 9 и IO). В рассмотренном выше изложении формула конечных приращений не используется, исследование на монотонность и постоянство непрерывной в промежутке функции опирается на теорему 8, которая, кроме того, до конца выясняет связь между локальной и тотальной монотонностью непрерывной на промежутке функции.

I См. [4], п.п. II0-III, с.I95-I97.

2 См. [4], п.I02, с.I80-I8I.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции (тотальные экстремумы)

Локальные экстремумы функции в точке дают лишь характеристику значений функции в достаточно малой окрестности этой точки. В отличие от них тотальные экстремумы функции $f(x)$, $x \in X$ характеризуют значения функции на всем рассматриваемом множестве X. Будем говорить, что функция $y=f(x)$, $x \in X$ принимает наибольшее значение (имеет тотальный максимум) в точке $x_0 \in X$, если для всех x из множества X выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

Аналогично определяется наименьшее значение функции (тотальный минимум).

Некоторые авторы различают случаи строгих и нестрогих тотальных экстремумов.

Так, приведенное определение тотального максимума в точке x_0 рассматривается как определение нестрогого тотального максимума; заменив в таком определении нестрогое неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ на строгое $f(x) < f(x_0)$ ($x \neq x_0$), мы получим определение строгого тотального максимума. С многочисленными примерами строгих и нестрогих тотальных и локальных экстремумов можно познакомиться по пособию [7] [I].

В соответствии с данными определениями локальный максимум и локальный минимум функции могут не являться ее наибольшим или наименьшим значением на всем рассматриваемом множестве. Они являются таковыми лишь в достаточно малой окрестности соответствующей точки, поэтому их и называют локальными (т.е. "местными") экстремумами.

Функция может иметь несколько локальных экстремумов, причем некоторые минимумы могут быть больше максимумов, не иметь при этом тотальных экстремумов или иметь лишь тотальный максимум (минимум). С другой стороны, функция

I См. [7], гл. УП, с. 92-95.

может иметь наименьшее и наибольшее значения, не имея ни одного локального экстремума: так, функция, возрастающая на $[a,b]$, имеет в левом конце наименьшее значение $f(a)$, в правом - наибольшее значение $f(b)$, однако эти значения не являются локальными экстремумами, ибо последние - согласно определению - могут существовать лишь во внутренних точках промежутка (достаточно малая окрестность точки локального экстремума должна всегда быть - согласно принятому определению - двусторонней).

В концевых точках промежутка функция не может иметь локальных экстремумов !

Если наибольшее (наименьшее) значение функция принимает во внутренней точке промежутка, то, очевидно, в такой точке функция имеет локальный максимум (минимум). Обратное, как отмечено выше, вообще говоря, не верно.

Конечно, существуют случаи, когда локальный максимум (минимум) совпадает с наибольшим (наименьшим) значением функции. Знание таких случаев освобождает от необходимости вычисления значений функции в концевых точках промежутков задания функции.

<u>Теорема 13</u>. Если функция $f(x)$, $x\in[a,b]$ имеет внутри $[a,b]$ один локальный максимум (минимум), а локальных минимумов (максимумов) не имеет, то этот локальный максимум (минимум) и будет наибольшим (наименьшим) значением функции на $[a,b]$.

Можно разными способами доказывать это утверждение, приведем одно из доказательств: пусть $x\in\,]a,b[$ - единственная точка локального максимума функции $f(x)$, поэтому существует $\delta>0$, что для $x\in\,]x_0-\delta, x_0+\delta[$ имеет место неравенство $f(x)\le f(x_0)$.

Покажем, что в концевых точках сегмента значение функции $f(x)$ не может быть больше, чем $f(x_0)$. Предположим, что $f(a)>f(x_0)$. На сегменте $[a,x_0]$ функция $f(x)$, являясь непрерывной, достигает наименьшего значения [I]. Как отмечено выше, если это наименьшее значение достигается во внутренней точке x_1 сегмента $[a, x_0]$, то точка x_1 будет точкой локального минимума функции $f(x)$, чего не может быть по условиям теоремы. Значит, наименьшее значение функции $f(x)$ на $[a, x_0]$ может достигаться лишь в точке x_0 (ведь $f(a) > f(x_0)$). Следовательно, имеем: $f(x) \geq f(x_0)$, $x \in [a, x_0]$. Тогда на полуинтервале $]x_0-\delta, x_0]$ $f(x) = f(x_0)$, и все точки интервала $]x_0-\delta, x_0[$ являются точками локального минимума, вопреки условиям теоремы. Аналогично доказывается невозможность неравенства $f(b) > f(x_0)$.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке X. Функция $f(x)$ не достигает в концевой точке промежутка наибольшего (наименьшего) значения, если ближайшая к этой точке точка локального экстремума является точкой локального максимума (минимума).

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции $f(x)$, $x \in X$ зависит как от свойств функции $f(x)$, так и от вида множества X.

Если функция $f(x)$, $x \in X$ непрерывна на X, а множество X является сегментом (замкнутым ограниченным множеством), то функция имеет наибольшее и наименьшее значения [2].

Обычно для нахождения их поступают следующим образом [3]: находят все точки возможного локального экстремума и выбирают наибольшее и наименьшее значения среди значений функции в таких точках и концевых точках множества X, при этом для уменьшения числа вычислений учитывается теорема I3 и её следствие.

Если же функция $f(x)$ не является непрерывной или множество не является сегментом (замкнутым ограничен-

---

I См. [4], п. 73, с.I35-I36.

2 См. [4], п. 73, с. I35 - I36.

3 Здесь рассмотрен случай, когда множество X является сегментом.

ным множеством), то наибольшего и наименьшего значения функция может и не иметь или иметь лишь один из тотальных экстремумов. Доказательство наличия или отсутствия тотальных экстремумов в этих случаях порой затруднительно. Нелегкой является и задача отыскания тотальных экстремумов в случаях их существования.

4. Выпуклые и вогнутые функции

Пусть $f(x)$ функция, определенная на промежутке J числовой прямой R.

Будем называть функцию $f(x)$, $x \in J$ выпуклой на J, если для любых точек x_1, x_2 из J, отличных друг от друга, и любого λ из интервала $]0, 1[$ имеет место неравенство

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2). \quad (5)$$

С геометрической точки зрения, свойство выпуклости функции $f(x)$ на J означает, что каждая дуга графика $f(x)$ лежит ниже стягивающей эту дугу хорды. В самом деле, пусть $x = (1 - \lambda) x_1 + \lambda x_2$, тогда $\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$. Из (5) имеем

$$f(x) < f(x_1) + \lambda [f(x_2) - f(x_1)] \quad \text{или}$$

$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1), \quad (6)$$

но $y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ - уравнение прямой, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ графика $f(x)$. Неравенство (6) означает, что дуга графика $f(x)$ лежит ниже стягивающей эту дугу хорды. Очевидно, верно и обратное, т.е. неравенство (6) влечет неравенство (5).

Многие авторы за определение выпуклой функции берут это геометрическое свойство графика. В дальнейшем мы будем использовать неравенства (5) и (6) на равных правах.

Сделаем еще одно замечание по поводу определения выпуклой функции: если вместо знака $<$ в неравенствах (5) и (6) поставить знак $\leqslant$, то не надо требовать отличия точек x_1 и x_2 друг от друга, и, кроме того, можно считать, что λ пробегает отрезок $[0,1]$. При таком подходе, очевидно, что линейная функция является выпуклой на прямой.

Следующее утверждение носит вспомогательный характер, но облегчает дальнейшее изложение.

Теорема I4. Функция $f(x)$ выпукла на J тогда и только тогда, когда справедлива любая из следующих трех равносильных импликаций:

$$x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad (7)$$

$$x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad (8)$$

$$x_1, x_2 \in J,\ x_1 < x < x_2 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \quad (9)$$

Доказательство: Прежде всего заметим, что если a, b, c, d вещественные числа, причем b и d положительные, то число $\frac{a+c}{b+d}$ лежит между числами $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, отсюда неравенства $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$, $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ равносильны.

Полагаем теперь $a = f(x) - f(x_1)$, $b = x - x_1$, $c = f(x_2) - f(x)$, $d = x_2 - x_1$, получим $a + c = f(x_2) - f(x_1)$, $b + d = x_2 - x_1$, отсюда импликации (7), (8), (9) равносильны.

Остается заметить, что свойство выпуклости $f(x)$ на J, выраженное неравенством (6) равносильно импликации (7).

Теорема I5. Функция $f(x)$ выпукла на J тогда и только тогда, когда выражение $\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ является возрастающей функцией от u при каждом фиксированном v (или возрастающей функцией от v при каждом фиксированном u).

Доказательство: Равенство $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$ показывает, что достаточно ограничиться рассмотрением одного из случаев. $\circ$

<u>Достаточность</u>. Пусть v - фиксированно и $\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ является возрастающей функцией от u. Покажем, что функция $f(x)$ является выпуклой на J.

Пусть x_1 и x_2 - любые точки из J и $x_1 < x < x_2$. По предположению из неравенств $u < u' < v$ следует неравенство

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u} < \frac{f(v)-f(u')}{v-u'}.$$

Поэтому считая $u = x_1$, $u' = x$, $v = x_2$ имеем

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

т.е. верна импликация (8), что доказывает выпуклость $f(x)$ на J.

<u>Необходимость</u>. Пусть функция $f(x)$ выпукла на J, покажем что выражение $\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ является возрастающей функцией от u при фиксированном v. Пусть $v < u < u'$. Считая $v = x_1$, $u = x$, $u' = x_2$, имеем по (7)

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \quad \text{или} \quad \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x} < \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2},$$

т.е. $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} < \frac{f(v)-f(u')}{v-u'}$, что означает, что $\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ возрастающая функция от u при фиксированном v.

Случаи $u < u' < v$ и $u < v < u'$ рассматриваются аналогично, лишь вместо неравенства (7) используются соответственно неравенства (8) и (9).

Переходим к изложению свойств выпуклой функции.

Пусть $f(x)$ функция, определенная на промежутке J и x_0, внутренняя точка из J.

Назовем правой (левой) производной функции $f(x)$ в точке x_0 правый (левый) предел разностного отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при x стремящемся к x_0 справа (слева). Обозначим их соответственно $f'_{пр}(x_0)$ ($f'_{л}(x_0)$).

Таким образом, $f'_{пр}(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$f'_{л}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Функция может иметь разные правую и левую производные (например, функция $f(x) = |x|$ имеет $f'_{np}(0) = 1$, $f'_{л}(0) = -1$). Необходимым и достаточным условием существования производной $f'(x)$ в точке x_0 является равенство $f'_{np}(x_0) = f'_{л}(x_0)$ [1].

Теорема 16. Пусть $f(x)$ функция, выпуклая на J. Тогда

1) $f(x)$ имеет в каждой внутренней точке x_0 промежутка J правую и левую производные, причем $f'_{л}(x_0) \le f'_{np}(x_0)$;

2) отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ меньше $f'_{л}(x_0)$ при $x < x_0$, и больше $f'_{np}(x_0)$ при $x > x_0$;

3) функции $f'_{л}(x_0)$ и $f'_{np}(x_0)$ возрастают внутри J.

Доказательство. 1) Пусть u, x_0, v - любые точки из J, причем $u < x_0 < v$. Тогда по неравенству (9) имеем неравенство
$$\frac{f(x_0)-f(u)}{x_0-u} < \frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0}.$$

Отсюда,
$$\sup_{\substack{u\in J\\ u<x_0}} \frac{f(x_0)-f(u)}{x_0-u} \le \inf_{\substack{v\in J\\ v>x_0}} \frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0}. \quad (10)$$

Но выражение $\frac{f(x_0)-f(u)}{x_0-u}$ является по теореме 15 возрастающей функцией от u, поэтому, используя теорему существования предела монотонной функции[2], получим:
$$\lim_{\substack{u\to x_0\\ u<x_0}} \frac{f(u)-f(x_0)}{u-x_0} = \lim_{\substack{u\to x_0\\ u<x_0}} \frac{f(x_0)-f(u)}{x_0-u} = \sup_{\substack{u\in J\\ u<x_0}} \frac{f(x_0)-f(u)}{x_0-u}. \quad (11)$$

Аналогично,
$$\lim_{\substack{v\to x_0\\ v>x_0}} \frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0} = \inf_{\substack{v\in J\\ v>x_0}} \frac{f(v)-f(x_0)}{v-x_0}. \quad (12)$$

Из (10) (11) (12) следует требуемое неравенство $f'_{л}(x_0) \le f'_{np}(x_0)$.

2) Прежде всего заметим, что если $\varphi(x)$ возрастает и $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = b$, то $\varphi(x) < b$ при $x < x_0$ и $\varphi(x) > b$ при $x > x_0$. Учитывая, что функция $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ возрастает на J, получаем по доказанному в 1)
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < f'_{л}(x_0) \text{ при } x < x_0 \text{ и}$$

---

1 Подробнее об односторонних пределах, односторонней непрерывности, односторонних производных см. [4] с. 76-77, 118-119, 158-159.

2 [4], с. 97-98.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'_{пр}(x_0) \quad \text{при} \quad x > x_0 .$$

3) Пусть x_0, x_1 внутренние точки $\mathcal{J}$, $x_1 < x_2$. Имеем по 2)

$$f'_л(x_0) \leq f'_{пр}(x_0) < \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

аналогично, $\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} < f'_л(x_0) \leq f'_{пр}(x_0)$,

отсюда $f'_л(x_0) < f'_л(x_1)$ и $f'_{пр}(x_0) < f'_{пр}(x_1)$, т.е. $f'_л(x)$ и $f'_{пр}(x)$ возрастающие внутри $\mathcal{J}$ функции.

Следствие: Если $f(x)$ выпуклая на $\mathcal{J}$ функция, то она непрерывна во всех внутренних точках $\mathcal{J}$.

В самом деле, наличие левой и правой производных во внутренних точках $\mathcal{J}$ гарантирует непрерывность слева и справа в таких точках, а отсюда следует непрерывность во всех внутренних точках $\mathcal{J}$.

Теперь переходим к изучению свойств дифференцируемых выпуклых функций.

Как следует из пункта I) теоремы I6 выпуклая функция имеет во всех внутренних точках промежутка $\mathcal{J}$ левую и правую производные, причем $f'_л(x) \leq f'_{пр}(x)$. Можно показать, что на самом деле, за исключением разве лишь счетного множества точек $\mathcal{J}$ $f'_л(x) = f'_{пр}(x)$, т.е. выпуклая функция дифференцируема на $\mathcal{J}$, за исключением разве лишь счетного множества точек из $\mathcal{J}$ [I].

<u>Теорема I7.</u> Пусть $f(x)$ функция, дифференцируемая внутри $\mathcal{J}$ и непрерывная на концах $\mathcal{J}$, входящих в $\mathcal{J}$. Тогда $f(x)$ выпуклая на $\mathcal{J}$ функция тогда и только тогда, когда $f'(x)$ возрастающая внутри $\mathcal{J}$ функция.

<u>Доказательство</u>. Необходимость следует из 3) теоремы I6. Достаточность: пусть x_1; x_2 точки из $\mathcal{J}$ и $x_1 < x < x_2$. На каждом из отрезков $[x_1, x]$ и $[x, x_2]$ можно применить формулу конечных приращений:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(c_1), \text{ где } \quad x_1 < c_1 < x$$

I [8] с. 6I.

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(c_2), \text{ где } x < c_2 < x_2.$$

По условию теоремы из $c_1 < c_2$ следует $f'(c_1) < f'(c_2)$ или

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} < \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x},$$

т.е. верна импликация (9) из теоремы I4, что доказывает выпуклость $f(x)$ на J.

Теорема I8. Пусть $f(x)$ функция, дифференцируемая внутри J и непрерывная на концах J, входящих в J. Тогда $f(x)$ выпукла на J, тогда и только тогда, когда график $f(x)$ лежит над каждой своей касательной.

Доказательство. Пусть x_0 внутренняя точка J и $(x_0, f(x_0))$ -соответствующая точка графика $f(x)$.

Необходимость: По пункту 2) теоремы I6 имеем при $x < x_0$

$$f'(x_0) > \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

т.е. $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Аналогично, при $x > x_0$ $\quad f'(x_0) < \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

т.е. $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Т.к. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ - уравнение касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ графика, то отмеченные неравенства означают, что график $f(x)$ лежит над каждой своей касательной.

Достаточность. Пусть x_1, x_2 две внутренние точки J и $x_1 < x_2$. Уравнение касательной в точке $(x_1, f(x_1))$ графика $f(x)$

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1).$$

Поэтому по условию $\quad f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1)$

или
$$f'(x_1) < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \qquad (13)$$

Аналогично, уравнение касательной в точке $(x_2, f(x_2))$ графика $f(x)$

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x-x_2).$$

Поэтому $f(x_1) > f(x_2) + f'(x_2)(x_1-x_2)$

или
$$f'(x_2) > \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}. \qquad (14)$$

Из (I3) и (I4) имеем $f'(x_1) < f'(x_2)$.
Это означает, что функция $f(x)$ возрастает внутри J. По теореме I7, функция $f(x)$ выпуклая на J.

Геометрическое свойство графика дифференцируемой функции, выраженное теоремой I8, или ~~свойство~~, выраженное теоремой I7, часто берутся за определения выпуклой функции, при этом, конечно, сужается класс выпуклых функций.

Из теорем I7 и I2 легко вытекает теорема I9.

<u>Теорема I9</u>. Пусть $f(x)$ функция, дважды дифференцируемая внутри J и непрерывная на концах J, входящих в J. Тогда $f(x)$ выпукла на J, тогда и только тогда, когда I) $f''(x)$ неотрицательна внутри J; 2) множество $\{x \in J \mid f''(x) = 0\}$ не заполняет целиком никакого интервала.

Пусть $f(x)$ функция, определенная на промежутке J числовой прямой R. Будем называть функцию $f(x)$ вогнутой на J, если функция $-f(x)$ выпуклая на J, т.е. для любых, отличных друг от друга точек x_1 и x_2 из J и любого λ из интервала $]0, 1[$ имеет место неравенство
$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) > (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2).$$
С геометрической точки зрения, свойство вогнутости функции $f(x)$ на J означает, что каждая дуга графика $f(x)$ лежит выше стягивающей её хорды. Из непрерывности выпуклой функции $-f(x)$ следует непрерывность вогнутой функции $f(x)$. Очевидным образом вытекает справедливость и следующих результатов.

<u>Теорема I7'</u>. Пусть $f(x)$ функция, дифференцируемая внутри J и непрерывная на концах J, входящих в J. Тогда $f(x)$ вогнутая на J функция, тогда и только тогда, когда $f'(x)$ убывающая внутри J функция.

<u>Теорема I8'</u>. Пусть $f(x)$ функция, дифференцируемая внутри J и непрерывная на концах J, входящих в J. Тогда $f(x)$ вогнута на J, тогда и только тогда, когда гра-

фик $f(x)$ лежит под каждой своей касательной.

Теорема I9'. Пусть $f(x)$ функция, дважды дифференцируемая внутри J и непрерывная на концах J, входящих в J. Тогда $f(x)$ вогнутая на J функция, тогда и только тогда, когда I) $f''(x)$ неположительна внутри J; 2) множество $\{x\in J \mid f''(x)=0\}$ целиком не заполняет никакого интервала.

В заключение отметим одно интересное свойство выпуклых и вогнутых функций, называемое неравенством Иенсена. Для этого введем следующее понятие. Выпуклой комбинацией чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется такая их линейная комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, для которой $\lambda_k \geqslant 0$ ($k = 1,\ldots,n$) и $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

Выпуклая комбинация называется строгой, если все $\lambda_k > 0$.

Отметим следующее свойство выпуклой комбинации:

I) Всякая выпуклая комбинация $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ есть их среднее, т.е. заключена между наименьшим и наибольшим из чисел x_k ($k = 1,\ldots,n$)

2) Если эта выпуклая комбинация является строгой и среди чисел x_k ($k = 1,\ldots,n$) есть хотя бы два различных, то выпуклая комбинация заключена строго между наименьшим и наибольшим из этих чисел.

В самом деле, если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - x_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - x_1) \geqslant 0,$$

т.е. $\min\limits_k x_k = x_1 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$

Аналогично, $x_n - \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k (x_n - x_k) \geqslant 0$,

т.е. $\max\limits_k x_k = x_n \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Второе утверждение следует из проведенных выкладок очевидным образом.

Как следствие отметим такое свойство выпуклой комбинации: Если числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат промежутку J, то любая их выпуклая комбинация принадлежит промежутку J.

<u>Теорема 20</u>. Пусть $f(x)$ выпуклая на промежутке J функция, и $x_1, x_2, \dots, x_n$ - произвольные точки этого промежутка, среди которых есть хотя бы две различные, тогда для любой их строгой выпуклой комбинации имеет место неравенство:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) < \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \qquad (15)$$

Доказательство проводим методом математической индукции. При $n = 2$ это неравенство совпадает с определением выпуклой функции, т.е. выполняется.

Пусть неравенство верно для $(n - 1)$ точек и $x_1, x_2, \dots, x_n$ - произвольные n -точек промежутка J, среди которых есть хотя бы две различные. Пусть $x_n = \max\limits_k x_k$, тогда

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}} < x_n \qquad (16)$$

для любых чисел $\lambda_k > 0$ $(k = 1, \dots, n)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_k = 1 - \lambda_n$.

В самом деле, по отмеченному свойству строгой выпуклой комбинации имеем:

$$(1-\lambda_n)\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}} + \lambda_n x_n < x_n,$$

отсюда следует неравенство (16).

Обозначим $x_0 = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}}$,

тогда $x_0 = \dfrac{\lambda_1}{1-\lambda_n} x_1 + \dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_n} x_2 + \dots + \dfrac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} x_{n-1}$.

Используя определение выпуклой функции и предположение индукции для $(n - 1)$ точки, получим:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n) = f((1-\lambda_n)x_0 + \lambda_n x_n) <$$
$$< (1-\lambda_n) f(x_0) + \lambda_n f(x_n) = (1-\lambda_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right) + \lambda_n f(x_n) <$$
$$< (1-\lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} f(x_k) + \lambda_n f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

т.е. неравенство (15) верно для n-точек. Отсюда вытекает справедливость теоремы 20.

Заметим, что для вогнутой функции в условиях теоремы 20, имеет место неравенство $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) > \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

Отметим также, что для любой выпуклой комбинации чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и любой выпуклой (вогнутой) функции всегда выполняется неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k) \quad \left(f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)\right).$$

Рассмотрим два примера:

I) Функция $f(x) = x^2$ является выпуклой на прямой, поэтому для любой строгой выпуклой комбинации чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеем:

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n)^2 \leq \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

(знак „равно" имеет место при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$).

В частности, если $\lambda_k = \frac{1}{n}$ ($k = 1, \ldots, n$), то

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}.$$

2) Функция $f(x) = \ln x$ является вогнутой на $]0, +\infty[$. Поэтому для строгой выпуклой комбинации положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеем

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x_n$$

или
$$x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

(знак „равно" имеет место при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$).

В частности, если $\lambda_k = \frac{1}{n}$ ($k = 1, \ldots, n$), то

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

5. Выпуклость и вогнутость функции в точке. Точки перегиба

Пусть $f(x)$ функция, определенная в точке x_0 и её окрестности.

Назовем функцию $f(x)$ выпуклой (вогнутой) в точке x_0, если существует окрестность $\mathcal{U}$ точки x_0, что функция $f|_{\mathcal{U}}(x)$ является выпуклой (вогнутой) в этой окрестности $\mathcal{U}$. (Здесь $f|_{\mathcal{U}}(x)$ - сужение функции f на окрестность $\mathcal{U}$ точки x_0). Очевидно, если $f(x)$ выпукла (вогнута) на промежутке J, то $f(x)$ выпукла (вогнута) в каждой внутренней точке промежутка J. Верно и обратное утверждение: если $f(x)$ выпукла (вогнута) в каждой внутренней точке промежутка $\mathcal{J}$, непрерывна на концах $\mathcal{J}$, входящих в $\mathcal{J}$, то $f(x)$ выпукла (вогнута) на $\mathcal{J}$ [I].

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\mathcal{J}$ и пусть этот промежуток разбит на частичные промежутки, на каждом из которых функция $f(x)$(точнее её сужение) или выпукла или вогнута. Точки промежутка $\mathcal{J}$, отделяющие участки выпуклости $f(x)$ от участков вогнутости $f(x)$, называются точками перегиба $f(x)$. (Соответствующие точки графика $f(x)$ называются точками перегиба графика $f(x)$).

Таким образом, точка $x_0 \in \mathcal{J}$ называется точкой перегиба $f(x)$, если существует её окрестность $\mathcal{U}$, так что функция $f/_{\mathcal{U}}(x)$ слева от x_0 выпукла, а справа от x_0 вогнута или наоборот.

Заметим, что точка перегиба $f(x)$ не может быть в то же время точкой выпуклости (вогнутости).

Из теорем I8 и I8' следует, что если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то точка x_0 является точкой перегиба $f(x)$ тогда и только тогда, когда существует окрестность $\mathcal{U}$ точки x_0, что график $f/_{\mathcal{U}}(x)$ лежит по разные стороны от касательной в точке $(x_0, f(x_0))$ графика $f(x)$.

Это свойство точки графика $(x_0, f(x_0))$ пересекать касательную часто принимается за определение точки перегиба $f(x)$ в точке x_0. Ясно, что такое определение не равносильно нами принятому. Функция может быть не дифференцируемой в точке x_0, но в то же время отделять участки выпуклости и вогнутости $f(x)$; такими свойствами обладает, например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases} \quad \text{в точке } x_0 = 0.$$

Функция может быть дифференцируемой в точке x_0, тем самым иметь касательную в точке $(x_0, f(x_0))$ графика, при этом график $f(x)$ может пересекать касательную, но

I См. [8], с. 65-66.

точка x_0 не отделяет участки выпуклости и вогнутости $f(x)$. Примером может служить функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

имеющая производную в точке $x_0 = 0$, равную нулю. Тем самым прямая $y = 0$ является касательной к графику $f(x)$ в точке $(0,0)$, график $f(x)$ пересекает касательную $y = 0$, но точка $x = 0$ не является точкой перегиба $f(x)$.

Из теорем I9 и I9$'$ вытекает следующее достаточное условие точки перегиба непрерывной функции.

Теорема 21. Пусть $f'(x)$ имеет производную в окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причем в пределах указанной окрестности $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. Тогда точка x_0 является точкой перегиба $f(x)$.

Доказательство. Пусть в пределах указанной окрестности $f''(x)$ больше нуля при $x > x_0$ и меньше нуля при $x < x_0$. Тогда точка x_0 разделяет участок выпуклости и вогнутости $f(x)$, т.е. является точкой перегиба.

Пусть теперь $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда из теорем I7, I7$'$, 4 вытекает следующее необходимое условие дифференцируемой функции.

Теорема 22. Пусть x_0 точка перегиба функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывна в точке x_0, тогда x_0 - точка локального экстремума функции $f'(x)$.

Доказательство: Так как x_0 точка перегиба функции $f(x)$, то при переходе через точку x_0 участок выпуклости $f(x)$ меняется на участок вогнутости (или наоборот), значит функция $f'(x)$ меняет характер монотонности при переходе через точку x_0. Поэтому x_0 - точка локального экстремума $f'(x)$.

Следствие. Если x_0 - точка перегиба функции $f(x)$ и $f''(x)$ существует, тогда $f''(x_0) = 0$.

Отмеченное обращение в нуль второй производной в точке x_0 является лишь необходимым условием того, чтобы x_0

была точкой перегиба, но это условие не является достаточным. Так, функция $f(x)=x^4$ имеет $f'(0)=0$, но точка $x=0$ является точкой выпуклости.

Отметим некоторые достаточные условия точки перегиба дифференцируемой функции.

Теорема 23. Пусть в точке x_0 вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль, а третья производная $f'''(x)$ не обращается в нуль, тогда x_0 - точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство: Пусть для определенности $f'''(x)>0$, тогда по теореме I функция $f''(x)$ возрастает в точке x_0. Так как $f''(x_0)=0$, то при $x<x_0$ $f''(x)$ меньше нуля, а при $x>x_0$ $f''(x)$ больше нуля[I], тогда по теореме 2I точка x_0 является точкой перегиба.

Обобщением доказанной теоремы является следующее утверждение.

Теорема 24. Пусть n - натуральное четное число, не меньше двух. Если $f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n)}(x_0)=0$, а $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$, то точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

Доказательство: Пусть для определенности $f^{(n+1)}(x_0)>0$. Тогда по теореме I функция $f^{(n)}(x)$ возрастает в точке x_0. Так как $f^{(n)}(x_0)=0$, то при $x<x_0$ $f^{(n)}(x)$ меньше нуля, а при $x>x_0$ $f^{(n)}(x)$ больше нуля[I)]. Отсюда по теореме I2 $f^{(n-1)}(x)$ убывает при $x<x_0$ и возрастает при $x>x_0$. Так как $f^{(n-1)}(x_0)=0$, то $f^{(n-1)}(x)$ больше нуля при $x<x_0$ и больше нуля при $x>x_0$. Далее рассуждения аналогичны: $f^{(n-2)}(x)$ меньше нуля при $x<x_0$ и больше нуля при $x>x_0$. Заметим, что так как n - четное число, то $n-2$ - четное число. Продолжая такие рассуждения, приходим к выводу: $f''(x)$ меньше нуля при $x<x_0$ и больше нуля при $x>x_0$, по теореме 23 точка x_0 является точкой перегиба $f(x)$[2].

I Имеется в виду в левой и правой полуокрестности точки x_0.

2 Рассуждения, используемые при доказательстве теоремы 24, можно применить для доказательства теоремы 7.

Заметим, что теоремы 23 и 24 носят лишь достаточный характер. Существуют функции, имеющие в точке перегиба производные любого порядка, равные нулю. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Как уже отмечалось, изложенный материал адресован учителю математики или студенту-математику, будущему учителю, но это не исключает использование его непосредственно в школе. На наш взгляд, это можно сделать как на обычных уроках, так и во внеклассной и факультативной работе. Для этого необходимо познакомить учащихся либо с принципом вложенных стягивающихся сегментов, либо с теоремой о достижении наибольшего (наименьшего) значения непрерывной на сегменте функции. Принцип вложенных сегментов упоминается в учебном пособии [5] для IX класса[1].

Конечно, как мы отмечали выше, можно, не используя теоремы 8, непосредственно доказать теоремы 9-12, но для этого необходимо привлечь формулу конечных приращений. Знакомство с геометрической интерпретацией этой формулы, думается, вполне достаточно для учащихся школы[2].

Очень полезным для учителя, на наш взгляд, является знакомство с изложенным материалом и дополнением его по задачам пособия [6], гл. I, § II - I3.

Литература

I. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. ГОНТИ, 1933, т.I, 486 с.
2. Дубнов Я.С. Измерение отрезков. М., Физматгиз, 1962. 100 с.
3. Марнянский И.А. Элементы математического анализа в школьном курсе математики. М., Просвещение, 1964. 144 с.

I См. [5], с. 49.

2 Так поступили авторы нового учебного пособия для школы [9].

4. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа, М., ГИТТЛ, 1956, т.I, 440 с.
5. Алгебра и начала анализа. Уч. пос. для 9-го класса средней школы/Под ред. Колмогорова А.Н. М., Просвещение , 1975, 224 с.
6. Рывкинд Я.И. Дифференциальное и интегральное исчисление в задачах. Минск, Вышэйшая школа , 1971. 192 с.
7. Гребенча М.К., Новоселов С.И. Курс математического анализа. М., Высшая школа, 1960, ч.I, 544 с.
8. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. М., Наука, 1965. 424 с.
9. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9 и 10 классов средней школы/ Под ред.Колмогорова А.Н. М., Просвещение, 1980. 336 с.

Б.Д.Дворецкий

Учебное оборудование для введения понятия предела и непрерывности функции в 9-м классе

Для подготовки учащихся к восприятию понятия предела функции можно использовать кинофильм "Переменная и её предел. Функция. Предел функции" (Свердловская киностудия. Режиссер А.И.Мельников. Автор сценария В.Г.Житомирский. Консультант И.Б.Вейцман. 1964 г.).

Хотя в этом фильме дана трактовка понятия функции как переменной величины (в школьном курсе алгебры и начал анализа принято сейчас определять функцию через соответствие между элементами множеств),тем не менее в нем в наглядной динамичной форме раскрывается понятие предела функции, дается представление о непрерывных и разрывных функциях.

Для усвоения формулировки определения предела может быть использована таблица 7 из серии таблиц по курсу "Алгебра и начала анализа для 9-го класса", разработанная Г.Г.Левитасом (рис.I). В этой таблице содержится текст определения предела функции, записанный в кванторах, приводятся графики, показывающие геометрический смысл этого определения, дан пример доказательства, основанного на данном определении. Таблица может быть изготовлена самими учащимися.

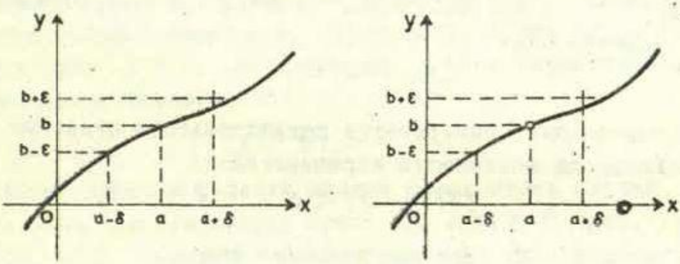
Для сокращения текста применяется символика,широко распространенная в математике: $\mathcal{D}ef$ (читается "по определению обозначает,что"), квантор общности $\forall$ (читается "для любого"), квантор существования $\exists$ ("существует такое,что") и знак $\Longrightarrow$ логического следования.

Учащимся сообщается определение предела функции,приведенное в учебнике,и предлагается проследить текст того же определения,кратко записанного в таблице. Затем учащимся предлагается сформулировать определение предела функции, используя таблицу.

Обращается внимание на то, что двойное неравенство

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) \overset{}{\underset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}} \left[(\forall \varepsilon>0)\,(\exists \delta>0)\,(0<|x-a|<\delta) \Rightarrow (|f(x)-b|<\varepsilon)\right]$$



ПРИМЕР:

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x\,(x-1)}{x-1} = 5$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\forall_{\varepsilon>0} \left|\frac{5x\,(x-1)}{x-1} - 5\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \begin{cases} |5x-5| < \varepsilon \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow 0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{5}$$

БЕРЯ $\delta = \frac{\varepsilon}{5} > 0$, ПОЛУЧАЕМ:

$$0 < |x-1| < \delta \quad 0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{5} \quad \left|\frac{5x(x-1)}{x-1} - 5\right| < \varepsilon$$

РИС. I

$$0<|x-a|<\delta$$

равносильно утверждению:

$$x \neq a \quad \text{и} \quad |x-a|<\delta.$$

С помощью графиков на таблице выясняется геометрический смысл определения предела, подчеркивается, что единственное различие между ними состоит в том, что в первом случае функция в точке определена, а во втором - нет.

В дальнейшем к таблице нужно обращаться при каждом затруднении с оперированием понятием предела, а также при решении задач на доказательство того, что

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

Для конкретных примеров это доказательство сводится к установлению истинности неравенства

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

для всякого $\varepsilon>0$ при условии, что

$$|x-a|<\mathcal{F}(\varepsilon)=\delta.$$

Это легко проделать в основном только для линейных функций, или функций, совпадающих с линейными везде, за исключением отдельных точек из R. (Например, функция

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2} \Longleftrightarrow f(x)=x-2 \quad \text{для} \quad x\neq -2$$

или пример в таблице).

В этих случаях просто устанавливается эквивалентность неравенств

$$|f(x)-b|<\varepsilon \Longleftrightarrow |x-a|<\mathcal{F}(\varepsilon)=\delta,\ x\neq a.$$

В других случаях проведение такого доказательства затруднительно (см. [I] пример 4, п.38), получение необходимой цепочки неравенств

$$|x-a|<\delta=\mathcal{F}(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$$

часто требует выполнения громоздких и искусственных преобразований, которые затушёвывают суть определения предела.

Проще и нагляднее это можно проделать, исходя из геометрической трактовки понятия предела и графического изображения функции. Для этой цели можно использовать кодоскоп.

На кодопозитивах (на прозрачной пленке) предварительно заготавливаются графики функций. Непосредственно на уроке наносятся фломастером горизонтальные полосы шириной 2ε около прямой $y = b$, показывается наличие такой δ-окрестности точки a, что при всех $x \neq a$, расположенных в этой окрестности, выполняется неравенство:

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Набор графиков функций должен реализовать случаи, когда $f(a)$ не существует (рис. 2), $f(a) \neq b$ (рис. 3) и $f(a) = b$ (функция $f(x)$ непрерывна, рис.4).

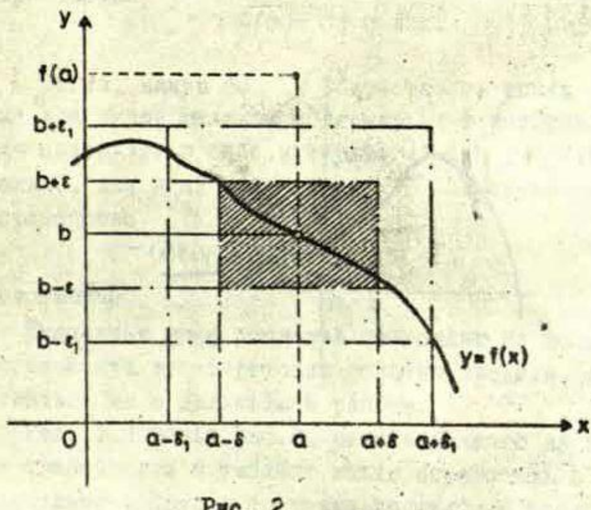


Рис. 2

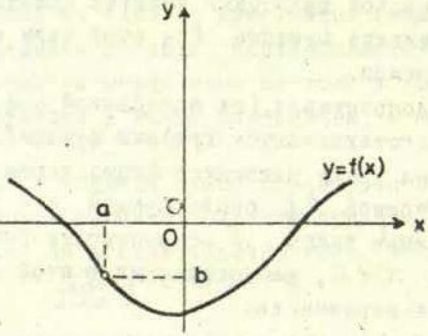


Рис.3

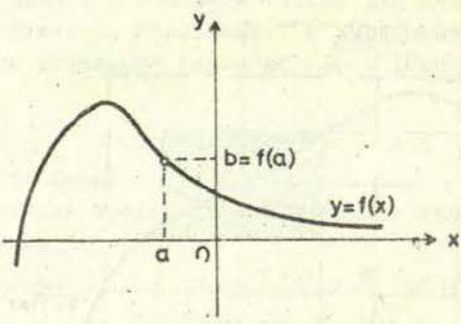


Рис. 4

Кодоскопами оснащены еще не все кабинеты математики. Работа с определением предела функции в приведенном выше смысле может быть реализована с помощью специального прибора, который можно изготовить силами учащихся. Описание его (автор Г.Г.Левитас) приведено в журнале "Математика в школе" (1974, № 1). Отметим, что с кодоскопом работает в основном учитель (вместе с классом). С помощью прибора могут работать непосредственно учащиеся: сами выбирать и изображать ε, находить по нему δ и др. Целесообразно выяснить геометрический смысл того, что

$$c \neq \lim_{x \to a} f(x).$$

Это особенно интересно, когда $c = f(a)$.

С помощью графической иллюстрации (рис.5) показывается, что в этом случае для некоторого $\varepsilon = \varepsilon_0$ найдется такое $\delta_0 > 0$, что во всех точках x, принадлежащих интервалу $]a-\delta_0; a+\delta_0[$ $(x \neq a)$, выполняется неравенство

$$|f(x) - c| > \varepsilon_0.$$

Тогда, какую бы δ-окрестность точки a ни взять, она или будет целиком содержаться в интервале $]a-\delta_0; a+\delta_0[$, или содержать в себе интервал $]a-\delta_0; a+\delta_0[$; следовательно, для всех x любой δ-окрестности точки a неравенство

$$|f(x) - c| < \varepsilon_0$$

невозможно.

Указанные выше средства позволяют не только дать геометрическую интерпретацию понятия предела, но и пользоваться им в дальнейшей работе.

Так, с помощью рис.2, реализованного на кодоскопе, на приборе или в таблице можно отработать с учащимися следующие вопросы: показать на графике несколько значеий функции $f(x)$, когда $x \in]a-\delta; a+\delta[$ и когда $x \notin]a-\delta; a+\delta[$; определить по чертежу величину $f(x)-b$ для выбранных значений x ; сравнить $|f(x)-b|$ с ε ; сделать вывод, что

$$\forall x \in]a-\delta; a+\delta[\Longrightarrow |f(x)-b| < \varepsilon,$$

а для $x \notin]a-\delta; a+\delta[$ не всегда $|f(x)-b| < \varepsilon$.

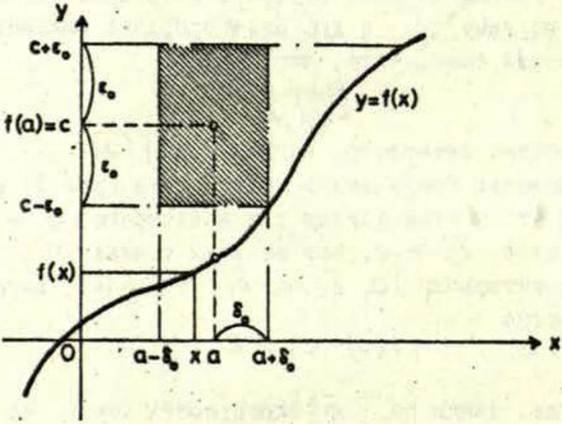


Рис.5

Полезно заметить, что $|f(x)-f(a)|$ может быть больше ε даже для всех x, принадлежащих интервалу $]a-\delta; a+\delta[$ (рис.2 или 5), и тем самым подчеркнуть, что для определения предела функции в точке $x=a$ значение $f(a)$ не существенно: здесь важно поведение функции в малой окрестности точки $x=a$. Те функции, у которых

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left[(|x-a|<\delta) \Longrightarrow (|f(x)-f(a)|<\varepsilon)\right],$$

т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, называются непрерывными в точке

a (рис. 4).

Для выяснения смысла фразы "для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$" в определении предела фиксируем ε (а значит, и горизонтальную полосу $b-\varepsilon < y < b+\varepsilon$) и начинаем изменять δ, а тем самым вертикальную полосу $a-\delta < x < a+\delta$.

Замечаем, что если для конкретного $\varepsilon > 0$ найдено $\delta > 0$, то для этого же ε будет подходить и всякое δ_1, такое, что $0 < \delta_1 < \delta$, но уже $\delta_2 > \delta$ вообще не подходит.

Изменяя величину ε, можно проследить изменение δ (максимально возможного). Удобнее всего это проделать с помощью прибора, описанного в журнале "Математика в школе" [2]. В этом случае выбор ε, а по нему и δ производится фиксированием натянутых резинок в горизонтальном и вертикальном положениях.

Упомянутый выше прибор, а также кодоскоп могут быть использованы и для геометрической иллюстрации определения предела числовой последовательности (a_n)(рис.6):

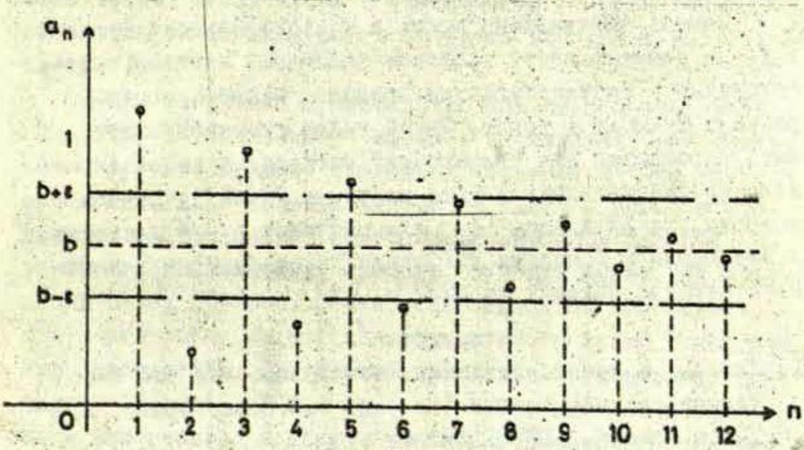


Рис.6

Только здесь по выбранному ε определяется не δ (δ-полоса), а N, такое, что при $\forall n > N$

$$|a_n - b| < \varepsilon,$$

т.е. фиксируется номер, начиная с которого все члены последовательности (a_n) попадают в полосу

$$b - \varepsilon < y < b + \varepsilon.$$

В этом случае иногда целесообразно выбирать различные масштабы по осям OX и OY. При введении предела последовательности можно использовать диафильм "Предел последовательности" (автор Ю.Н.Макарычев, редактор Л.Б.Книжникова. Студия "Диафильм" 1972г.).

В диафильме раскрывается геометрический смысл неравенства

$$|f(n) - b| < \varepsilon,$$

дано изображение графика сходящейся числовой последовательности (a_n) в различных масштабах, что позволяет в наглядной форме убедиться в зависимости числа N от ε.

Понять определение предела и непрерывности функции в точке поможет набор графиков различных случаев существования и несуществования предела, непрерывности и разрыва функции в точке. Такой набор графиков может быть изготовлен как раздаточный материал в кодопозитивах или диапозитивах в виде рисунков 38, 39 учебного пособия для IX класса [1] или рисунков 1 - 4 в статье А.Землякова и Б.Ивлева "17 задач по анализу" в 1-м номере журнала "Квант" за 1977 г. [3].

Литература

1. Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 9-го класса средней школы/ Под ред. А.Н.Колмогорова. М., Просвещение, 1976. 223 с.
2. Левитас Г.Г. К определению понятия предела.- Математика в школе, 1974, № 1, обложка.
3. Земляков А., Ивлев Б. 17 задач по анализу.- Квант, 1977, № 1, с.36-39.

Б.Д.Дворецкий

Об изготовлении экранных учебно-наглядных пособий по математике

Часто учителю нужно иметь на уроке заранее заготовленный материал (рисунки, чертежи, тексты и др.). Это бывает необходимо для экономии времени при подготовке к уроку и его проведении. Следует в особенности учесть, что некоторые чертежи, схемы неудобно или трудно воспроизводить мелом на доске. Широко распространена заготовка таких материалов в виде таблиц. Не отрицая важной роли математических таблиц на уроках, следует отметить, что заготовка большой части математического материала в виде таблиц имеет и свои недостатки. Большое их количество неудобно хранить, и много таблиц на одном уроке трудно эффективно использовать. Указанных недостатков можно избежать, если значительную часть наглядных пособий заготовить в виде диафильмов, диапозитивов или материалов для кодоскопа. Особенно в настоящее время, когда школа в достаточной степени оснащена проекционной аппаратурой и завершен переход к кабинетной системе.

Однако фабричное производство еще не в полной мере обеспечивает потребности школы в диафильмах, диапозитивах и других экранных средствах. Поэтому многие учителя математики собственными силами, а также с помощью учеников и шефов создают необходимые экранные пособия.

Применение экранных средств обучения имеет ряд преимуществ перед другими. Во-первых, создается возможность почти мгновенно подать или убрать изображение диафильма или диапозитива. При этом современные проекционные аппараты ("Свет", ЛЭТИ, "Протон") позволяют демонстрировать изображения в полузатемнённых помещениях, так что имеются условия для учащихся не только обозревать демонстрируемый материал, но и одновременно производить записи в тетрадях. Во-вторых, изображение можно получать не только на экране, но и на доске, окрашенной в светло-зеленый цвет. Их можно дополнять чертежами и формулами на доске с помощью мела.

Диапозитив (диафильм) можно демонстрировать на протяжении необходимого промежутка времени, можно возвращаться к кадру повторно, что затруднительно или невозможно, например, при демонстрации кинофильма. При этом диапроекционная аппаратура достаточно портативна и проста в обращении.

Изготовление диафильмов и слайдов представляет собой определенные трудности не только технического характера (умение фотографировать, обрабатывать пленку). Необходимо также учитывать дидактические возможности экранных средств и психологические аспекты усвоения знаний. Нельзя,например, весь урок только демонстрировать кино или диафильм. Важно поэтому решить вопрос, какой материал подать в виде таблицы, что заготовить в виде диапозитива, что поместить в диафильме.

Диафильм состоит из кадров, расположенных в определенном порядке на ленте, с его помощью удобно демонстрировать теоретический материал (теоремы, определения и др.), когда нужны кадры, которые сменяют друг друга в последовательности, обусловленной логикой излагаемого материала.

Диапозитивы можно демонстрировать в четкой последовательности. Преподаватель выбирает их согласно принятой им методике, по своему вкусу, учитывая возможности каждого класса.

Наиболее подходящим материалом для серии диапозитивов являются задачи, особенно те, которые учитель намерен обсудить со всем классом.

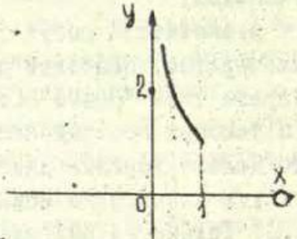
К каждому разделу программы должны быть созданы различные средства обучения (приборы, таблицы, диафильмы, диапозитивы и др.), тесно согласованные между собой и в комплексе решающие все задачи оснащения класса учебным оборудованием. Их использование должно органически включаться в урок , сочетаться с рассказом учителя и самостоятельной работой учеников.

Изготовлять диафильмы и диапозитивы могут учителя и ученики, владеющие фотоаппаратом. Наиболее подходящие для этой цели фотоаппараты типа "Зенит" (с зеркальным видоискателем). Но и с помощью простых аппаратов, например "Смена 8-М", можно делать хорошие диапозитивы. Удобно использовать позитивную пленку, но можно применять и обычную (негативную). Только на ней изображение будет "обратным"- белые участки чертежа будут черными и наоборот. Чертежи для съемки можно выполнять тушью на белом листе бумаги; текст хорошо отс имается, если он выполнен на пишущей машинке. Готовые чертежи и тексты можно снимать, используя проекции эпидиаскопа.

Приведем примеры кадров диафильма и диапозитивов по теме "Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке" ("Алгебра и начала анализа", 9 класс).

В первом кадре приведены примеры функций, одна из которых имеет на отрезке [0; 1] наименьшее, но не имеет наибольшего значения, а вторая имеет на отрезке [-1;1] наибольшее и наименьшее значения (рис.1). Ставится вопрос: „Всякая ли функция принимает в промежутке наибольшее и наименьшее значение ?" Второй кадр (рис.2) содержит теорему Вейерштрасса, ~~которая~~ приводится без доказательства, и график функции, непрерывной на отрезке [-2; 2] , принимающей на нем наименьшее и наибольшее значения. Кадр 3 содержит графики функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ и не содержащих критических точек, а следовательно принимающих наибольшее и наименьшее значения на концах отрезка (рис. 3). В кадре 4 (рис.4) содержится график непрерывной на отрезке функции, содержащей конечное число критических точек, которые разбивают весь отрезок $[a; b]$ на конечное число частей,

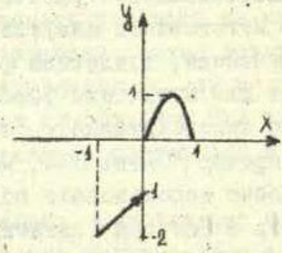
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{при } 0 < x \le 1 \end{cases}$$



$f_{наиб.}$ НЕТ

$f_{наим.}$ = при x =

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{при } -1 \le x < 0 \\ 4(x - x^2) & \text{при } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



$g_{наиб}$ =

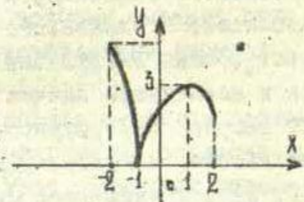
$g_{наим}$ =

РИС. 1

Теорема Вейерштрасса

Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет на нем наибольшее и наименьшее значения.

$F(x) = |x^2 - 2x - 3|$, $x \in [-2; 2]$



$F_{наиб} = 5$ при $x = -2$

$F_{наим} = 0$ при $x = -1$

РИС. 2

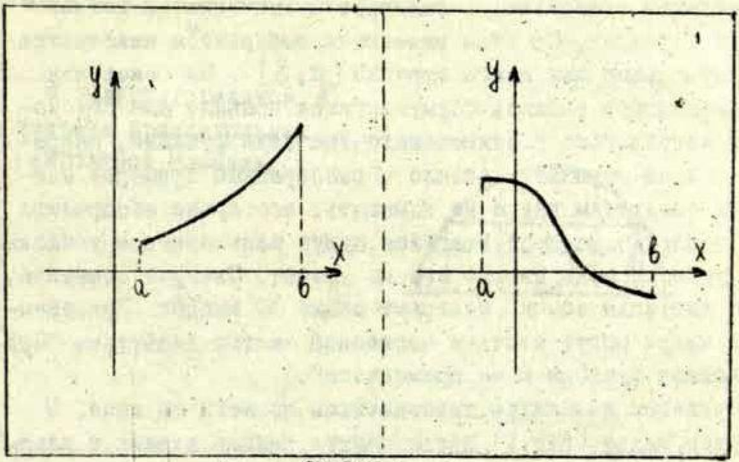

y
x
a
в
y
x
a
в

РИС. 3

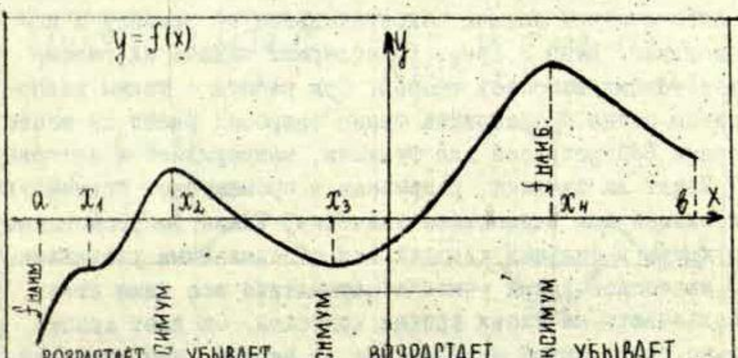

y = f(x)
y
a
x1
x2
x3
xн
в
x
f наим
f наиб.
ВОЗРАСТАЕТ
МАКСИМУМ
УБЫВАЕТ
МАКСИМУМ
ВОЗРАСТАЕТ
МАКСИМУМ
УБЫВАЕТ

РИС. 4

в каждой из которых функция монотонна и, следовательно, принимает наибольшее и наименьшее значения на концах этих отрезков. По этим значениям выбираются наибольшее и наименьшее для всего отрезка $[a; b]$. На основании проведенного анализа формулируется правило для отыскания наибольшего и наименьшего значения функции, непрерывной на отрезке. Правило с разобранным примером можно в следующем кадре не помещать: его лучше изобразить на таблице, которой учащиеся будут пользоваться несколько уроков, пока твердо его ю усвоят. Следует отметить, что диафильм обычно содержит около 30 кадров. Приведенные кадры могут явиться составной частью диафильма "Производная функции и ее применение".

Приведем два кадра диапозитивов по этой же теме. В первом кадре (рис.5) предлагается разбор задачи с классом: В данный полукруг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади. На основании этого кадра составляется план решения задачи, окончательное её решение и исследование. Кадр 2 (рис. 6) содержит задачи на разбор более тонких вопросов теории. При работе с таким диапозитивом можно проработать такие вопросы: Имеет ли место теорема Вейерштрасса для функции, непрерывной в интервале? Может ли функция, разрывная в промежутке, принимать наибольшее или наименьшее значения? Такие вопросы можно обсуждать в сильных классах или с отдельными учениками.

В настоящее время учителя математики все чаще стали использовать на своих уроках кодоскоп. Он дает значительно более яркое изображение на экране, чем диапроектор, и имеет еще ряд других преимуществ: изображение от кодоскопа на экране или на классной доске крупнее обычной диапроекции; проецируемые материалы располагаются на удобной для учителя высоте в горизонтальной плоскости, что позволяет изменять изображение, дополняя его или накладывая непрозрачную маску на часть изображения; учитель имеет возможность сдвигать изображение и проеци-

В полукруг радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади.

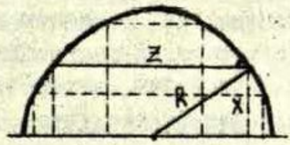
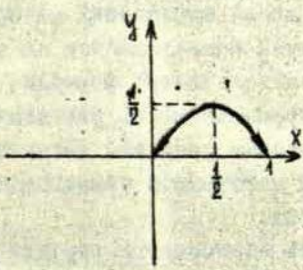


РИС. 5

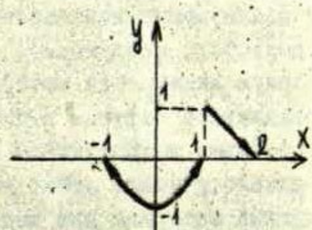
$h(x) = 2(x - x^2),\ x \in]0;1[$



$h_{наиб.} =$

$h_{наим.} =$

$$V(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{для } -1 < x < 1 \\ 2 - x & \text{для } 1 \le x < 2 \end{cases}$$



$V_{наиб.} =$

$V_{наим.} =$

РИС. 6

ровать одновременно несколько рисунков, наложенных один на другой. С кодоскопом может работать и учащийся при опросе, проецируя свои записи на экран или доску.

К сожалению, кодоскопами оснащены еще не все кабинеты математики, но за ними будущее: их применение значительно облегчит труд учителя и учащихся, сделает его более гигиеничным, в значительной степени или почти совершенно исключит из употребления мел и тряпку.

Все виды работ, которые можно проводить с помощью диафильмов и диапозитивов, выполняются и на кодоскопе. Только изготовление кодопозитивов проще: изображение наносится на прозрачную ленту или куски плёнки непосредственно тушью, шариковой ручкой или фломастером. Для этого используется фотоплёнка (или рентгеновская) размером 130х180 мм. Её нужно засветить, выдержать 10-15 мин. в растворе гипосульфита, а затем хорошо промыть и высушить. На обработанной таким способом прозрачной пленке удобно писать и чертить ручкой или рейсфедером, используя обычные чернила или тушь. Можно показывать записи, непосредственно выполняемые на уроке. С этой целью можно использовать любой прозрачный материал (целлофан, целлулоид), который накладывается на конденсорную линзу, на которой учитель пишет формулы, изготавливает чертежи и т.д. Промышленность уже выпускает готовые кодопозитивы по многим разделам математики, однако учитель легко может изготовить самостоятельно нужный материал для кодоскопа.

Особенно удобно использовать возможность передвигать и накладывать друг на друга изображения при работе с кодоскопом. Так, имея изображение координатной сетки и набор графиков стандартных парабол, можно, накладывая друг на друга или передвигая один относительно другого рисунки, отработать все основные вопросы школьной программы, связанные с исследованием квадратного трехчлена и квадратного уравнения, а также решением квадратичных неравенств. Особенно эффективно использование кодоскопа при изучении геометрического материала. Приведем примеры некоторых кодопозитивов по теме "Осевая симметрия" в 6 классе.

I) На прозрачной плёнке изображен $\triangle ABC$ и ось симметрии ℓ, на втором кодопозитиве - конгруэнтный $\triangle A'B'C'$, причем расположенный так, что при совмещении кадров он становится симметричным $\triangle ABC$ относительно оси ℓ (рис.7). Поворачивая второй кодопозитив относительно пер́вого, можно убедиться, что треугольники конгруэнтны. Нарисованы они разными цветами.

2) На трех кадрах изображены квадрат и две пары взаимно перпендикулярных прямых (рис.8). При наложении друг на друга этих кадров устанавливаем, что квадрат имеет четыре оси симметрии.

Считаем, что учитель математики вполне имеет возможность пополнить фильмотеку кабинета математики самодельными диафильмами, диа- и кодопозитивами.

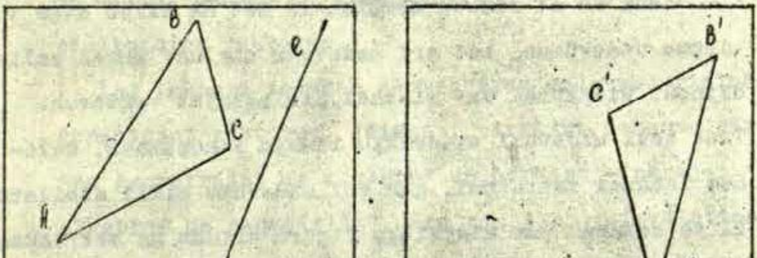


РИС.7

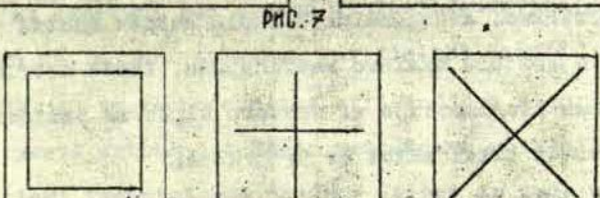


РИС.8

E.Laudiņa

Uzdevumi tēmai "Vektori" devītās klases kursā

Atbilstoši skolas kursa programmai vektori tiek mācīti septītajā un devītajā klasē. Visā turpmākajā ģeometrijas kursa izklāstā skolā, gan risinot uzdevumus, gan pierādot teorēmas, vēlams maksimāli izmantot zināšanas par vektoriem. Skolotājam pašam aizvien jāpilnveido savas iemaņas uzdevumu risināšanā, jāprot vienu un to pašu uzdevumu risināt ar dažādām metodēm, tai skaitā arī pielietojot vektorus, jāprot salīdzināt dažādas metodes.

Viens no šī raksta mērķiem ir dot ne tikai atsevišķus uzdevumus, bet arī uzdevumu ciklus, kurus salīdzinoši vienkārši var risināt, pielietojot vektorus. Tiek doti uzdevumi atsevišķu iemaņu izkopšanai, metodes labākai izpratnei, gan arī uzdevumu cikli atbilstoši to saturam par atsevišķo figūru afinām un metriskām īpašībām.

Kā zināms, astoņgadīgajā skolā netiek mācīta tēma par divu vektoru skalāro reizinājumu, tāpēc metriskus uzdevumus planimetrijā ar vektoru algebras palīdzību var risināt tikai sākot ar 9. klasi.

Skolēnu zināšanas par dažādām punktu kopām, piemēram par taisnes punktu kopu, par trijstūri, dažāda veida četrstūriem, riņķa līniju, par minēto figūru apvienojumiem un šķēlumiem, par tetraedru, paralēlskaldni un citām figūrām var papildināt, risinot uzdevumus. Vēlams, lai uzdevumi ģeometrijas kursā būtu saturīgi, lai tie izraisītu vismaz labākajos skolēnos zinātkāri. Daudzos ģeometrijas uzdevumu krājumos, kuri adresēti vai nu kā palīglīdzekļi skolotājiem, vai skolēniem, gatavojoties olimpiādēm, iestāju eksāmeniem augstskolās, klasēm ar padziļinātu matemātikas mācīšanu, sastopam daudzus klasiskus uzdevumus. Te var minēt Ptolomeja teorēmu, uzdevumus par Eilera taisni, Feierbaha punktu un citus. Daudzi no šiem uzdevumiem viegli atrisināmi, pielietojot vektorus.

Lai izkoptu iemaņas ģeometrijas uzdevumu risināšanā, izmantojot vektorus, jāizkopj, pirmkārt, iemaņas pārejai "no ģeometrijas uz algebru" un, otrkārt, - pārejai " no algebras uz ģeometriju". Bez tam jāprot izvēlēties risinājuma gaitu atkarībā no uzdevuma satura. Ģeometrijas uzdevumi pēc satura ir ļoti daudzveidīgi; arī vienu un to pašu uzdevumu var risināt dažādi, tāpēc nemeklēsim to viennozīmīgus atrisinājuma algoritmus. Šajā rakstā gribam dot dažus metodiskus norādījumus un praktiski izmantojamus padomus darbam ar uzdevumiem planimetrijā.

Devītās klases ģeometrijas kursā,atkārtojot vektora jēdzienu un lineārās darbības ar vektoriem (vektoru saskaitīšanu un reizināšanu ar skaitli),ieteicams vismaz vienu reizi izmantot katru no sekojošām figūrām; nogriezni sadalītu n vienādās daļās; kolineāru punktu trijnieku A, B, C,kur $\vec{AC} = \lambda\vec{AB}$,trijstūri kopā ar malu viduspunktiem un mediānu krustpunktu jeb centroīdu; paralelogramu kopā ar tā diagonāļu krustpunktu un atsevišķiem punktiem uz tā malām;trapeci, riņķa līniju kopā ar tajā ievilktu n-stūri. Ieteicams izmantot visas minētās figūras. Īpašu vērību pievēršam rombam,jo tā īpašības izmantojamas uzdevumos par trijstūra bisektrisi,ortocentru,trijstūrim apvilkto riņķa līniju un citur.Turpmāk to parādīsim ar konkrētiem piemēriem.

Metodiskajā literatūrā atrodam daudz uzdevumu,kurus risina,izmantojot lineāras darbības ar vektoriem. Šo uzdevumu risinājuma gaitā der iegaumēt šādas sakarības un ekvivalences,kuras pareizas jebkuram plaknes punktam O .

1. (M ir $[AB]$ viduspunkts) $\Longleftrightarrow$ $(\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}))$
2. ($ABCD$ - paralelograms) $\Longleftrightarrow$ $(\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD})$
3. ($\vec{AM} = \lambda\vec{AB}$) $\Longleftrightarrow$ ($\vec{OM} = (1-\lambda)\vec{OA} + \lambda\vec{OB}$)
4. (G ir trijstūra ABC centroīds) $\Longleftrightarrow$ $(\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}))$

Uzskatām,ka sākotnēji trešo ekvivalenci nav nepieciešams iegaumēt.Skaitliskajā piemērā aprēķinus var izpildīt pēc tiešās vai apgrieztās shēmas

$$(\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\overrightarrow{OM} = (1-\lambda)\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}).$$

Piemēram,

$$(\overrightarrow{AP} = -\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}) \Longrightarrow (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = -\tfrac{2}{3}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\overrightarrow{OP} = \tfrac{5}{3}\overrightarrow{OA} - \tfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}).$$

Ekvivalences (3) pielietošanai turpmākos uzdevumos ievērojam sekojošo.

Ja $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ un $m + n = 1$, tad punkti A, B un M ir kolineāri, jo
$\overrightarrow{OM} = (1-n)\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ un $\overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AB}$.

Uzdevumi

1. Pierādīt, ka patvaļīga četrstūra malu viduspunkti ir paralelograma virsotnes.
2. Pierādīt, ka punkti, simetriski dotajam punktam attiecībā pret četrstūra malu viduspunktiem ir paralelograma virsotnes.
3. Pierādīt, ka jebkura četrstūra viduslīnijas krustpunktā dalās uz pusēm.
4. Dots trijstūris ABC un konstruēti punkti A_1, B_1, C_1, tā, ka $\overrightarrow{AA_1} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BB_1} = m\overrightarrow{BC} + n\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CC_1} = m\overrightarrow{CA} + n\overrightarrow{CB}$. Pierādīt, ka trijstūrū ABC un $A_1B_1C_1$ centroīdi (mediānu krustpunkti) sakrīt.

A t r i s i n ā j u m s. Pēc dotā, patvaļīgam plaknes punktam

$$\overrightarrow{OA_1} = (1-m-n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OB_1} = (1-m-n)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} + n\overrightarrow{OA},$$
$$\overrightarrow{OC_1} = (1-m-n)\overrightarrow{OC} + m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}.$$

Ja G un G_1 ir trijstūru ABC un $A_1B_1C_1$ centroīdi, tad

$$OG_1 = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = OG$$

tātad $G_1 = G$. ○

P i e z ī m e. Apskatīto uzdevumu var formulēt konkrētām m un n skaitliskajām vērtībām, arī gadījumiem, kad $m + n = 1$, vai $m \cdot n = 0$ un $m^2 + n^2 \neq 0$. Tā pēc vajadzības varam dabūt viena un tā paša uzdevuma dažādus variantus, un ar dažādu grūtības pakāpi. Vienkāršākais gadījums ir, kad A_1, B_1, C_1 ir dotā trijstūra malu viduspunkti. Var ņemt

$\overrightarrow{AA_1} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BB_1} = 3\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{CA}$ un citus analoģiskos gadījumus. Analoģiski atrisināms un formulējams uzdevums četrstūrim.

5. Četrstūra $ABCD$ plaknē konstruēti punkti A_1, B_1, C_1, D_1 tā, ka

$$\overrightarrow{AA_1} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BB_1} = m\overrightarrow{BC} + n\overrightarrow{BD},$$
$$\overrightarrow{CC_1} = m\overrightarrow{CD} + n\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{DD_1} = m\overrightarrow{DA} + n\overrightarrow{DB}.$$

Pierādīt, ka četrstūriem $ABCD$ un $A_1B_1C_1D_1$ viduslīniju krustpunkti sakrīt.

Daudzi uzdevumi, kuri ir formulēti patvaļīgam četrstūrim, var būt vispārināti tetraedram, šajā gadījumā četrstūra viduslīnijām atbilst nogriežņi, kas savieno tetraedra pretējo šķautņu viduspunktus.

Lasītājam ieteicam uzdevumus I.- 3.un 5. vispārināt tetraedram, reizē piektajā uzdevumā izvēloties konkrētas m un n vērtības.

Uzdevumu materiāls vienmēr ir izmantojams, lai apgūtu pirmatnējas iemaņas patstāvīgos pētījumos. Gribas uzsvērt, ka uzdevumu r i s i n ā š a n a nav vienīga darba forma ar uzdevumu materiālu. Zināšanas var padziļināt, sastādot uzdevumus. Skolotājiem iemaņas uzdevumu sastādīšanā ir ļoti nepieciešamas. Arī spēcīgākie skolēni un pedagoģisko institūtu studenti ar interesi piedalās šajā darbā, sākotnēji parasti nesekmīgi, bet turpmāk rodas iespējas grūtības pārvarēt.

Varam ieteikt šādus paņēmienus jauno uzdevumu sastādīšanai.

1. Četrstūrim formulētu uzdevumu apskatīt gadījumam, kad tā divas virsotnes sakrīt, tādejādi dabūjam atbilstošo uzdevumu trijstūrim.
2. Patvaļīgam četrstūrim formulētu uzdevumu vispārināt tetraedram.
3. Tetraedram formulētu uzdevumu apskatīt gadījumam, kad visi četri punkti ir komplanāri, tādējādi formu-

lēt to plakanam četrstūrim.

Paņēmienu jauno uzdevumu sastādīšanā ir daudz, tos visus nemaz necentīsimies uzskaitīt, bet gan parādīsim dažus no tiem uzdevumos. Ieinteresēts lasītājs var patstāvīgi izmēģināt te savas spējas un veiksmi. Viegli saprotams, ka minētais otrais un trešais paņēmiens ir pieļaujams tad, ja atrisinājuma gaita nav atkarīga no punktu komplanaritātes.

U z d e v u m i

6. Pierādīt, ka nogriežņi, kas savieno piramīdas virsotnes ar pretējo skaldņu centroīdiem, krustojas vienā punktā un dalās tajā attiecībā 3 : I, skaitot no virsotnes.

P i e r ā d ī j u m s. Skaldņu BCD, CDA, DAB un ABC centroīdus apzīmēsim ar A_1, B_1, C_1 un D_1. Ja punkti M_1, M_2, M_3 un M_4 dala nogriežņus AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 attiecībā 3 : I, tad patvaļīgam telpas punktam O

$$\overrightarrow{OM_1} = \tfrac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \tfrac{3}{4}\overrightarrow{OA_1} = \tfrac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD});$$

Analoģiski atrodam, ka

$$OM_2 = OM_3 = OM_4 = \tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}),$$

tātad $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M$.

Šo kopīgo punktu M sauc par tetraedra centroīdu.

7. Pierādīt, ka tetraedram nogriežņi, kas savieno

pretējo šķautņu viduspunktus, krustojas vienā punktā un dalās tajā uz pusēm, pie kam šo nogriežņu kopējais viduspunkts sakrīt ar tetraedra centroīdu.

Visi iepriekš apskatītie uzdevumi ir afīnie, tie ir atrisināmi, izmantojot lineāras darbības ar vektoriem, proti, vektoru saskaitīšanu un reizināšanu ar skaitli. Šo uzdevumu risināšanā izmantojam ekvivalences I - 4, kuras pareizas jebkuram plaknes punktam O . Tie ir uzdevumi saistīti ar kolinearitāti, paralelitāti un kolineāro nogriežņu garumu attiecību.

Lielākā daļa no iepriekš dotajiem uzdevumiem ir domāti skolotājam viņa pašizglītošanai. Darbam ar skolēniem šie uzdevumi jāvienkāršo, ņemot, piemēram, parametriem noteiktas skaitliskās vērtības. Bez tam palīglīdzekļos skolotājiem afīno uzdevumu ir samērā daudz.

Uzdevumi, kuros ir runa par patvaļīgu nogriežņu garumiem un leņķu lielumiem ir metriski uzdevumi. Tie ir uzdevumi, kas saistīti ar trijstūra leņķu bisektrisēm, augstumu, ortocentru, uzdevumi par riņķa līnijām.

Pa lielākai daļai metriskus uzdevumus risina, izmantojot vektoru skalāro reizinājumu, taču ne vienmēr.

Interesi izraisa tie uzdevumi, kuru atrisināšanai izmanto tikai lineāras darbības ar vektoriem, bet metrika izmantojama tādējādi, ka, pārejot no ģeometrijas uz algebru, vai otrādi, tiek izmantotas atsevišķu figūru metriskās īpašības, piemēram, romba diagonāļu īpašības.

U z d e v u m i

8. Pierādīt, ka trijstūrim ABC vektors $\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ ir bisektrises AA_1 virziena vektors, t.i., vektori $\overrightarrow{AM}$ un $\overrightarrow{AA_1}$ ir kolineāri.

P i e r ā d ī j u m s. Pieņemsim, ka $b \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM_1}$ un $c\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM_2}$, tad $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2}$ un AM_1MM_2 ir rombs, jo $|\overrightarrow{AM_1}| = |\overrightarrow{AM_2}| = b \cdot c$, tātad $[AM)$ ir leņķa M_1AM_2 bisektrise, bet leņķis M_1AM_2 sakrīt ar leņķi BAC.

9. Pierādīt, ja AA_1 ir trijstūra ABC iekšējā bisektrise, tad

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}.$$

P i e r ā d ī j u m s. No iepriekšējā uzdevuma izriet, ka $\overrightarrow{AA_1} = \lambda(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC})$. Tā kā punkti B, A_1 un C ir kolineāri un $\overrightarrow{AA_1} = \lambda b\overrightarrow{AB} + \lambda c\overrightarrow{AC}$, tad $\lambda b + \lambda c = 1$ un $\lambda = \frac{1}{b+c}$, tātad

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}.$$

10. Pierādīt, ka trijstūrī ABC ar bisektrisi AA_1 $|BA_1| : |A_1C| = c : b = \frac{c}{b}$ vai $\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C} = c : b = \frac{c}{b}$

11. Pierādīt, ka trijstūrim ABC vektors

$\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB} - c\overrightarrow{AC}$ ir ārējās bisektrises AA_2 virziena vektors.

12. Pierādīt, ja AA_2 ir trijstūra ABC ārējā bisektrise, tad

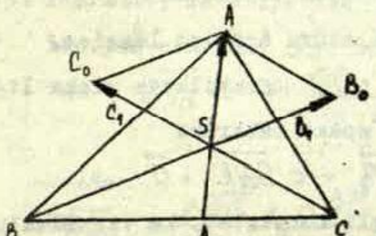
$$\overrightarrow{AA_2} = \frac{b}{b-c}\overrightarrow{AB} - \frac{c}{b-c}\overrightarrow{AC}.$$

13. Pierādīt, ja $\overrightarrow{AA_2}$ ir trijstūra ārējā bisektrise, tad $\overrightarrow{BA_2} : \overrightarrow{A_2C} = -\frac{c}{b}$.

14. Pierādīt, ka trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centram S ir spēkā sakarība

$$a\overrightarrow{SA} + b\overrightarrow{SB} + c\overrightarrow{SC} = \vec{0}.$$

P i e r ā d ī j u m s. Pieņemsim, ka $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SB_0} + \overrightarrow{SC_0}$, kur $\overrightarrow{SB_0} = m\overrightarrow{SB}$; $\overrightarrow{SC_0} = n\overrightarrow{SC}$ (zīm. I), tad ievērojot, ka



zīm.I

$$m = \frac{\overrightarrow{SB_0}}{\overrightarrow{SB}} = \frac{\overrightarrow{C_1A}}{\overrightarrow{C_1B}} = -\frac{b}{a}$$

$$n = \frac{\overrightarrow{SC_0}}{\overrightarrow{SC}} = \frac{\overrightarrow{B_1A}}{\overrightarrow{B_1C}} = -\frac{c}{a},$$

dabūjam

$$\overrightarrow{SA} = -\frac{b}{a}\overrightarrow{SB} - \frac{c}{a}\overrightarrow{SC}$$

vai $a\overrightarrow{SA} + b\overrightarrow{SB} + c\overrightarrow{SC} = \vec{0}$.

15. Pierādīt, ka trijstūrim ABC ar ievilktās riņķa līnijas centru S

$$\overrightarrow{AS} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

16. Pierādīt, ka trijstūrim ABC ar ievilktas riņķa līnijas centru S patvaļīgam punktam O

$$\overrightarrow{OS} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c}.$$

17. Pierādīt, ka ja AA_1 ir trijstūra ABC bisektrise un S ievilktās riņķa līnijas centrs, tad

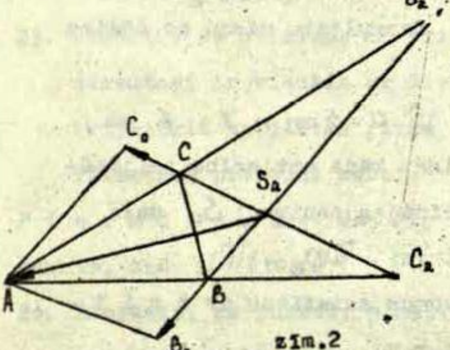
$$\overrightarrow{AS} = \frac{b + c}{a + b + c}\overrightarrow{AA_1} \quad \text{un} \quad \frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SA_1}} = \frac{b+c}{a}.$$

Analoģiskus uzdevumus var formulēt trijstūra pievilktām riņķa līnijām. Kā zināms, katra no trijstūra pievilktām riņķa līnijām pieskaras trijstūra vienai malai un divu malu pagarinājumiem. Ja S_a ir centrs tai riņķa līnijai, kura pieskaras malai BC, tad AS_a ir bisektrise trijstūra iekšējam leņķim un BS_a, CS_a ir bisektrises trijstūra ārējiem leņķiem.

18. Pierādīt, ka trijstūra ABC pievilktās riņķa līnijas centram S_a ir spēkā sakarība

$$-a\overrightarrow{S_aA} + b\overrightarrow{S_aB} + c\overrightarrow{S_aC} = \vec{0}.$$

P i e r ā d ī j u m s. Viegli konstatēt, ka vienādmalu trijstūra gadījumā $\overrightarrow{S_aA} = \overrightarrow{S_aB} + \overrightarrow{S_aC}$. Ja trijstūris nav vienādmalu, tad pieņemsim, ka $\overrightarrow{S_aA_0} = \overrightarrow{S_aB_0} + \overrightarrow{S_aC_0}$ (zīm.2), kur $\overrightarrow{S_aB_0} = m\overrightarrow{S_aB}$, $\overrightarrow{S_aC_0} = n\overrightarrow{S_aC}$.
Pieņemsim, ka $(CS_a) \cap (AB) = C_2$.



zīm.2

Ievērojam, ka

$$m = \frac{\overrightarrow{S_aB_0}}{\overrightarrow{S_aB}} = \frac{\overrightarrow{C_0A}}{\overrightarrow{S_0B}} = \frac{\overrightarrow{C_2A}}{\overrightarrow{C_2B}} = \frac{b}{a}$$

$$n = \frac{\overrightarrow{S_aC_0}}{\overrightarrow{S_aC}} = \frac{\overrightarrow{B_2A}}{\overrightarrow{B_2C}} = \frac{c}{a}$$

Ja,piemēram,punkts C_2 neeksistē, tad $b = a$ un

$$\frac{\overrightarrow{S_0B_0}}{\overrightarrow{S_aB}} = 1 = \frac{b}{a}.$$

Tātad

$$\overrightarrow{S_aA} = \frac{b}{a}\overrightarrow{S_aA} + \frac{c}{a}\overrightarrow{S_aC}$$ vai

$$-a\overrightarrow{S_aA} + b\overrightarrow{S_aB} + c\overrightarrow{S_aC} = \vec{0}.$$

19. Pierādīt, ka trijstūra ABC pievilktās riņķa līnijas centram S_a un patvaļīgam punktam O

$$\overrightarrow{OS_a} = \frac{-a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{-a + b + c}$$

Sekas

$$\overrightarrow{AS_a} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}.}{-a + b + c}; \quad \overrightarrow{AS_a} = \frac{b + c}{a + b + c}\overrightarrow{AA_1}$$

$$\overrightarrow{BS_a} = \frac{-a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}}{-a + b + c}$$

$$\overrightarrow{AS_a} = \frac{a + b + c}{-a + b + c}\overrightarrow{AS}$$

Izmantojot iepriekšējos uzdevumus par trijstūra bisektrisēm, ievilkto un pievilkto riņķa līniju centriem, var formulēt aprēķina uzdevumus, kuros, zinot trijstūra malu garumus, jāaprēķina noteiktū kolineāru nogriežņu attiecība. Kā piemēru formulēsim vienu no šādiem uzdevumiem.

20. Zinot, ka trijstūrī ABC $a = 5\,cm$, $b = 7$ cm, un $c = 3$ cm, aprēķināt kādā attiecībā trijstūrim pievilktās riņķa līnijas centrs S_a dala trijstūra ārējo bisektrisi CC_2.

Tālāk apskatīsim uzdevumus saistītus ar trijstūra ortocentru.

21. Pierādīt, ka trijstūra ABC ortocentram $\mathcal{H}$ un apvilktās riņķa līnijas centram O

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \qquad (I)$$

Pierādījums. Ja punktam $\mathcal{H}$ un apvilktās riņķa līnijas centram O izpildās vienādība (I), tad $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Apzīmējot $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, ievērojam, ka paralelograms $OAMB$ ir rombs, un, $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AB}$, tātad $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$.

Analoģiski atrodam, ka $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ un $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ tātad H ir trijstūra ABC ortocentrs.

Tā kā trijstūrim ortocentrs vienmēr eksistē un tikai viens, tad var pierādīt, ka ortocentram $\mathcal{H}$

$$\overrightarrow{O\mathcal{H}} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Formulu (I) var izmantot daudzu uzdevumu atrisināšanai.

22. Pierādīt, ka trijstūra ortocentrs, apvilktās riņķa līnijas centrs un centroīds ir kolineāri ($\overrightarrow{O\mathcal{G}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{O\mathcal{H}}$).

23. Pierādīt,ka attālums no trijstūra ortocentra līdz virsotnei ir vienāds ar divkāršoto attālumu no trijstūrim apvilktās riņķa līnijas centra līdz virsotnes pretējai malai.

P i e r ā d ī j u m s. Ja M_3 ir malas AB viduspunkts, tad $|\overrightarrow{CH}| = |\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OM_3}|$.

24. Pierādīt, ka punkti, simetriski trijstūra ortocentram attiecībā pret malu viduspunktiem, atrodas uz trijstūrim apvilktās riņķa līnijas.

P i e r ā d ī j u m s. Ja M ir ortocentram H simetrisks punkts attiecībā pret malas AB viduspunktu, tad nogriežņiem AB un HM ir kopīgs viduspunkts, tātad ievilktās riņķa līnijas centram O

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OM})$, no šejienes

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\mathcal{H}} = -\overrightarrow{OC}$, tātad punkts M ir diametrāli pretējs punktam C .

25. Pierādīt, ka riņķa līnijas, kas iet caur trijstūra divām virsotnēm un tā ortocentru un trijstūrim apvilktā riņķa līnija ir kongruentas.

P i e r ā d ī j u m s. Pieņemsim, ka O_3 ir trijstūrim $AB\mathcal{H}$ apvilktās riņķa līnijas centrs. Ievērojam, ka C ir šā trijstūra ortocentrs, tātad

$$\overrightarrow{O_3C} = \overrightarrow{O_3A} + \overrightarrow{O_3B} + \overrightarrow{O_3H}.$$

Ievērojot, ka trijstūra ABC apvilktās riņķa līnijas centram $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ un

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OO_3} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO_3} + \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OO_3}$$

vai $\overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, tātad punkts O_3 ir simetrisks punktam O attiecībā pret taisni AB, un riņķa līnijas $\omega(A,B,C)$ un $\omega_1(A,B,H)$ ir simetriskas, tātad kongruentas.

26. Trijstūra augstums AA_1 krusto trijstūrim apvilkto riņķa līniju punktā A_2. Pierādīt, ka A_1 ir nogriežņa HA_2 viduspunkts.

Šo uzdevumu var dabūt kā iepriekšējā uzdevuma sekas, bet to var risināt arī neatkarīgi.

P i e r ā d ī j u m s. Ja M_1 un M_2 ir attiecīgi hordu BC un AA_2 viduspunkti, tad

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_2}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA_2}),$$

tātad A_1 ir nogriežņa HA_2 viduspunkts.

I e v i l k t ā č e t r s t ū r a ievērojamie punkti

27. Riņķa līnijā ievilkts četrstūris $ABCD$, H_1, H_2, H_3, H_4 ir attiecīgi trijstūru BCD, CDA, DAB un ABC ortocentri. Pierādīt, ka nogriežņu AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 viduspunkti sakrīt.

P i e r ā d ī j u m s. Pieņemsim, ka riņķa līnijas centrs ir O un atbilstošo nogriežņu viduspunkti ir M_1, M_2, M_3, M_4, tad

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH_1}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Analoģiski atrodam, ka $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, tātad $M_1 = M_2 = M_3 = M_4$.

Nogriežņu AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 kopīgo viduspunktu, sauc par ievilktā četrstūra ortocentru, to apzīmēsim tradicionāli ar burtu H.

Ievērojam, ka četrstūris $H_1H_2H_3H_4$ ir simetrisks četrstūrim $ABCD$ attiecībā pret tā ortocentru H, tāpēc arī punkts Q, simetrisks punktam O attiecībā pret H, ir četrstūrim $H_1H_2H_3H_4$ apvilktās riņķa līnijas centrs. Šo punktu Q, kuram izpildās sakarība $\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OH}$, vai

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD},$$

sauc par ievilktā četrstūra Feierbaha punktu un četrstūrim $H_1H_2H_3H_4$ apvilkto riņķa līniju par dotā četrstūra Feierbaha riņķa līniju.

Kā zināms, četrstūra $ABCD$ viduslīniju krustpunktam M

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Punktu M sauc par četrstūra $ABCD$ smaguma centru jeb centroīdu.

Ievilktam četrstūrim $ABCD$ četri punkti - apvilktās riņķa līnijas centrs O, centroīds M, ortocentrs H un Feierbaha punkts Q ir kolineāri, pie kam $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

$$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}.$$

Vektoru skalārā reizinājuma pielietošana uzdevumos

Metriskajos uzdevumos pārējai no ģeometrijas uz algebru, un otrādi, izmantojam sakarības

$$|AB|^2 = \overrightarrow{AB}^2, \quad \cos \widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|BA| \cdot |BC|}.$$

Uzdevuma risinājuma gaitā izmantojam gan kārtulas darbībām ar vektoriem, gan zināmas sakarības ģeometriskajās figūrās, kuras iepriekš apskatītas, vai nu teorēmu veidā, definīcijās, pazīmēs, vai citādi. Lai aprēķins būtu iespējami racionālāks, der iegaumēt šādas ekvivalences un sakarības.

1. $(\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |AB| \cdot |CD|)$
2. $(\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -|AB| \cdot |CD|)$.
3. $(\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}, D \in (AB)) \Longleftrightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD})$

P i e r ā d ī j u m s. Pēc dotā $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ un

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}.$$

4. Trijstūrī ABC

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2.$$

P i e r ā d ī j u m s. $a^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 =$
$= b^2 + c^2 - 2\vec{AB}\cdot\vec{AC}$.

5. Riņķa līnijas $\omega(O,R)$ punktiem A un B
$$2\vec{OA}\cdot\vec{OB} = 2R^2 - |AB|^2$$

Izmantojot ekvivalences 1 – 3, viegli dabūjam pazīstamas metriskās sakarības taisnleņķa trijstūrī. Novelkam augstumu CD pret hipotenūzu AB.

1) $|AB|^2 = \vec{AB}^2 = \vec{AB}(\vec{AC} + \vec{CB}) =$
$= \vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{AB}\cdot\vec{CB} =$
$= \vec{AC}^2 + \vec{CB}^2 = |AC|^2 + |CB|^2$

2) $|AB|\cdot|AD| = \vec{AB}\cdot\vec{AD} = \vec{AB}\cdot\vec{AC} = \vec{AC}^2 = |AC|^2$

3) $|AD|\cdot|DB| = \vec{AD}\cdot\vec{DB} = (\vec{CD} - \vec{CA})(\vec{CB} - \vec{CD}) =$
$= \vec{CD}\cdot\vec{CB} - \vec{CD}^2 - \vec{CA}\cdot\vec{CB} + \vec{CA}\cdot\vec{CD} = \vec{CD}^2 - \vec{CD}^2 - 0 + \vec{CD}^2 = |CD|^2$.

Kaut gan apskatītās metriskās sakarības var iegūt arī citādi, taču der izmantot arī iepriekš apskatīto paņēmienu, jo tas ļauj nostiprināt ekvivalences 1 – 3.

U z d e v u m i

28. Caur riņķa līnijas diametra galapunktiem A un B uz vienu pusi no diametra vilktas hordas AC un BD, $P = (AC)\cap(BD)$. Pierādīt, ka
$$|AC|\cdot|AP| + |BD|\cdot|BP| = |AB|^2 \qquad (2)$$

P i e r ā d ī j u m s.
$$|AB|^2 = \vec{AB}^2 = \vec{AB}(\vec{AP} + \vec{PB}) = \vec{AB}\cdot\vec{AP} + \vec{AB}\cdot\vec{PB} =$$

$= \vec{AC}\cdot\vec{AP} + \vec{DB}\cdot\vec{PB} = |AC|\cdot|AP| + |BD|\cdot|BP|$

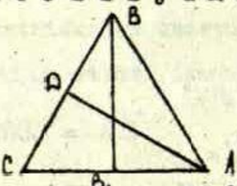
Lasītājam patstāvīgi izteicam noskaidrot, vai formula (2) ir spēkā arī gadījumam, kad hordas AC un BD ir dažādās pusēs no diametra.

29. Vienādsānu trijstūrī ABC $(|AB| = |BC|)$ novilkts augstums AD. Pierādīt, ka $|CD|\cdot|CB| = \frac{1}{2}|AC|^2$.

P i e r ā d ī j u m s. $|CD|\cdot|CB| = \vec{CD}\cdot\vec{CB}$;

$\vec{CA}\cdot\vec{CB} = \vec{CA}\cdot\frac{1}{2}\vec{CA} =$

$= \frac{1}{2}|CA|$



zīm.3

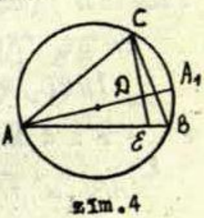
30. Pierādīt, ka trijstūrī ABC ar augstumiem AA_1, BB_1, CC_1 un ortocentru H

a) $|HA|\cdot|HA_1| = |HB|\cdot|HB_1| = |HC|\cdot|HC_1|$;

b) $|AB|\cdot|AC_1| = |AA_1|\cdot|AH| = |AC|\cdot|AB_1|$.

31. Trijstūrī ABC no virsotnes C novilkts perpendikuls CD pret trijstūrim apvilktās riņķa līnijas diametru AA_1, $(CD)\cap(AB) = E$.

Pierādīt, ka $|AE|\cdot|AB| = |AC|^2$.



zīm.4

P i e r ā d ī j u m s.

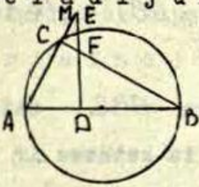
$|AB|\cdot|AE| = \vec{AB}\cdot\vec{AE} =$

$= \vec{AA_1}\cdot\vec{AE} = \vec{AA_1}\cdot\vec{AC} =$

$= \vec{AC}^2 = |AC|^2$.

32. Taisne t , kura novilkta perpendikulāri taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūzai AB , krusto taisnes AB , AC , BC un trijstūrim apvilkto riņķa līniju punktos D , E , F un M . Pierādīt, ka $|DM|^2 = |DE|\cdot|DF|$.

P i e r ā d ī j u m s. $|DM|^2 = |AD|\cdot|DB| = \vec{AD}\cdot\vec{DB} =$



$= \vec{AD}\cdot\vec{FB} = (\vec{AE}+\vec{ED})\cdot\vec{FB} =$

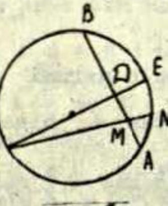
$= \vec{ED}\cdot\vec{FB} = \vec{ED}\cdot\vec{FD} =$

$= |DF|\cdot|DE|$.

zīm.5

33. Caur riņķa līnijas loka AB viduspunktu C novilkta sekante, kura krusto taisni AB punktā M un riņķa līniju atkārtoti punktā N . Pierādīt, ka reizinājums $|CM|\cdot|CN|$ nav atkarīgs no sekantes izvēles.

P i e r ā d ī j u m s. Novelkam diametru CE ,



$(CE)\cap(AB) = D$.

$|CM|\cdot|CN| = \vec{CM}\cdot\vec{CN} =$

$= \vec{CM}\cdot\vec{CE} = \vec{CE}\cdot\vec{CD} =$

$= |CE|\cdot|CD| = const$.

zīm.6

Interesi izraisa vienkāršākie uzdevumi, kur atrisināšanai vajadzīga minimāla iepriekšējā sagatavotība un neliels laika patēriņš, uzdevumi ar skaitliskām lielumu vērtībām.

34. Vienādsānu trijstūrī sānu malas garums ir 4 cm un garums mediānai, kura novilkta pret sānu malu, ir 3 cm. Aprēķināt pamatnes garumu.

A t r i s i n ā j u m s. Tā kā pēc dotā $|AB| = |AC| = 4$ un $|BB_1| = 3$, tad $(\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})^2 = 9$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 11$ un $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = 16 - 2\cdot 11 + 16 = 10$; $|BC| = \sqrt{10}$

35. Aprēķināt taisnleņķa trijstūra ABC taisnā leņķa bisektrises garumu, ja tā katetes ir a un b.

A t r i s i n ā j u m s.

$$\overrightarrow{CD} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB};$$

$$|CD|^2 = CD^2 = \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{2ab}{(a+b)^2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2}$$

$$|CD| = \frac{a\cdot b\cdot\sqrt{2}}{(a+b)}$$

36. Trijstūrī ABC doti divu malu garumi $a = 15$ cm, $b = 10$ cm. Pierādīt, ka leņķa C bisektrise CD nav lielāka par 12 cm.

A t r i s i n ā j u m s. $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$

$$|CD| = |\overrightarrow{CD}| = |\tfrac{3}{5}\overrightarrow{CA} + \tfrac{2}{5}\overrightarrow{CB}| < \tfrac{3}{5}\cdot 10 + \tfrac{2}{5}\cdot 15 = 12.$$

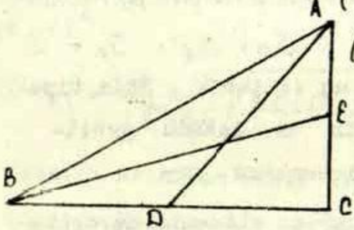
37. Zinot trijstūra ABC malas, a = I8 cm, b = I5 cm, c = I2 cm , aprēķināt bisektrises AA_1 garumu.

38. Taisnleņķa trijstūra mediānas, kuras novilktas pret katetēm ir $\sqrt{52}$ un $\sqrt{73}$ vienību garas. Aprēķināt hipotenūzas garumu.

A t r i s i n ā j u m s. Pēc dotā $\overline{AD}^2 = 52$, $\overline{BE}^2 = 73$

$$\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)^2 = 52$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}\right)^2 = 73$$



zīm.7

Tā kā $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$,

tad $\frac{5}{4}\left(\overrightarrow{CA}^2+\overrightarrow{CB}^2\right) = 125$

un $|AB|^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 = 100$

$|AB| = 10$.

39. Trijstūrī ABC $a=6$ un $b=8$. Aprēķināt trijstūra trešo malu, ja mediānas, kuras novilktas pret šīm malām, ir savstarpēji perpendikulāras.

A t r i s i n ā j u m s. $|AB|^2 = \overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}|^2 = \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 - 2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$. Pēc dotā mediānām $\overrightarrow{AA_1}$ un $\overrightarrow{BB_1}$

$\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BB_1} = 0$. $\left(\overrightarrow{CA} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{CB} - \tfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right) = 0$, tātad

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = \tfrac{2}{5}\left(\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2\right) = \tfrac{2}{5}(64+36) = 40$$

un $|AB| = 6^2 + 8^2 - 2\cdot 40 = 20$, $|AB| = 2\sqrt{5}$

40. Trijstūrī ABC mediānas, kuras vilktas pret malām BC un AC ir savstarpēji perpendikulāras. Aprēķināt $|AB|$, ja $|BC| = a$ un $|AC| = b$.

Risinot aprēķina un pierādījuma uzdevumus par trijstūriem, parasti starp dotajiem un meklējamiem elementiem ir malu garumi a, b, c leņķu lielumi α, β, γ, mediānu garumi m_a, m_b, m_c, augstumu garumi h_a, h_b, h_c, bisektrišu garumi l_A, l_B, l_C, apvilkto, ievilkto un pievilkto riņķa līniju rādiusu garumi R, r, r_a, r_b, r_c, attālumi no virsotnēm līdz dažādiem ievērojamiem punktiem O, G, H, S_a, S_b, S_c, S, attālumi starp šiem punktiem un tā tālāk. Šāda tipa uzdevumu ir daudz. Tie ir ar dažādu grūtības pakāpi. Pievērsīsim galvenokārt uzmanību uzdevumiem trijstūra dažādu elementu aprēķināšanai pēc tā pamatelementiem. Ievērojot, ka zināmas formulas $R = \frac{abc}{4S}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, rezultātu reizēm izteiksim atkarībā no trijstūra malām un R.

Izmantojot uzdevumus 9, 12, 15, 16, 19, 21 un, zinot trijstūra malas, var aprēķināt trijstūra iekšējo un ārējo bisektrisi, attālumus $|AS|$, $|OS|$, $|OS_a|$, $|AS_o|$, $|BS_o|$, $|OH|$. Kā piemērus atrisinām dažus no minētiem (un vēl citus uzdevumus).

41. Zinot trijstūra ABC malas, aprēķināt tā ārējo bisektrisi AA_2.

A t r i s i n ā j u m s.

$$\overrightarrow{AA_2} = \frac{b}{b-c}\,\overrightarrow{AB} - \frac{c}{b-c}\,\overrightarrow{AC}\,;$$

$$|AA_2|^2 = \overrightarrow{AA}^2 = \frac{2b^2c^2}{(b-c)^2} - 2\frac{bc}{(b-c)^2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$$

$$= \frac{bc}{(b-c)^2}\left(2b\cdot c - (b^2+c^2-a^2)\right) =$$

$$= \frac{bc}{(b-c)^2}\left(a^2-(b-c)^2\right) = \frac{bc}{(b-c)^2}(a-b+c)(a+b-c)$$

$$|AA_2| = \frac{1}{|b-c|}\sqrt{bc(a-b+c)(a+b-c)}\,.$$

42. Izteikt attālumu starp trijstūra apvilktās riņķa līnijas centru O un tā ortocentru $\mathcal{H}$ ar trijstūra malu un apvilktās riņķa līnijas rādiusa garumiem.

A t r i s i n ā j u m s.

$$|O\mathcal{H}|^2 = \overrightarrow{O\mathcal{H}}^2 = (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2 = 3R^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} +$$
$$+ 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA} = 3R^2 - (2R^2 - |AB|^2) +$$
$$+ (2R^2 - |BC|^2) + (2R^2 - |AC|^2) =$$
$$= 9R^2 - (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2);$$

$$|O\mathcal{H}| = \sqrt{9R^2 - (|AB|^2 + |BC|^2 + |CA|^2}$$

Sekas

$$|OG| = \tfrac{1}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2+b^2+c^2)}$$

$$|G\mathcal{H}| = \tfrac{2}{3}\sqrt{9R^2 - (a^2+b^2+c^2)}$$

43. Pierādīt, ka trijstūrim ABC ar ortocentru $\mathcal{H}$

un trijstūrim $AB\mathcal{H}$ apvilktās riņķa līnijas centru O_3

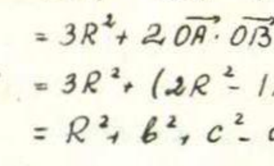
$$|CO_3|^2 = R^2 + b^2 + c^2 - a^2$$

P i e r ā d ī j u m s. $\overrightarrow{OO_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ (skat. 25. uzd.).

$$|CO_3|^2 = \overrightarrow{CO_3}^2 = (\overrightarrow{OO_3} - \overrightarrow{OC})^2 = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})^2 =$$
$$= 3R^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} =$$
$$= 3R^2 + (2R^2 - |AB|^2) - (2R^2 - |AC|^2) - (2R^2 - |BC|^2) =$$
$$= R^2 + b^2 + c^2 - a^2.$$

44. Dota riņķa līnija $\omega(O, R)$ un punkts M. Pierādīt, ka punkta M attālumu kvadrātu summa līdz galapunktiem hordai, kas paralēla taisnei MO, nav atkarīga no hordas izvēles.

P i e r ā d ī j u m s. Novelkam hordu $AB \parallel OM$.



zīm.8

$$|MA|^2 + |MB|^2 = |\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}|^2 = 2\overrightarrow{MO}^2 + 2R^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) =$$
$$= 2(|MO|^2 + R^2) = const$$

45. Riņķa līnijā $\omega(O, R)$ ievilkts regulārs trijstūris ABC. Pierādīt, ka

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 3(R^2 + |OM|^2)$$

P i e r ā d ī j u m s.

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 =$$
$$= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 =$$

Tā kā regulāram trijstūrim $\overrightarrow{OC} = -(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ un $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, tad

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 3(R^2 + |MO|^2).$$

46. Aprēķināt trijstūra leņķi, ja attālums no tā virsotnes līdz ortocentram vienāds ar apvilktās riņķa līnijas rādiusu.

Atrisinājums. Pieņemsim, ka $|CH| = R$.

Aprēķināsim $\cos 2\hat{C} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{R^2}$.

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Tātad $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})^2 = R^2$, $2R^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2$ un $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2} R^2$.

No šejienes

$$\cos 2\hat{C} = -\frac{1}{2}.$$

Iespējami divi gadījumi:

1) $2C = 120°$ un $\hat{C} = 60°$;

2) $2C = 240°$ un $\hat{C} = 120°$.

47. Divas riņķa līnijas pieskaras ārēji punktā C, OA un O_1B ir paralēli un vienādi vērsti rādiusi. Pierādīt, ka $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $\overrightarrow{O_1B} = \lambda \overrightarrow{OA}$, tad $\overrightarrow{CO_1} = \lambda \overrightarrow{OC}$ un

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{CO_1} + \overrightarrow{O_1B}) =$$

$$= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})(\lambda \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OC}) = \lambda(\overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OC}^2) = 0$$

48. Divas riņķa līnijas pieskaras iekšēji punktā C, $\overrightarrow{OA}$ un $\overrightarrow{OB}$ paralēli un pretēji vērsti rādiusi. Pierādīt, ka $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$.

49. Riņķa līnija, kura iet caur paralelograma $ABCD$ virsotni A, krusto starus AB, AC un AD punktos B_1, C_1 un D_1. Pierādīt, ka

$$|AB| \cdot |AB_1| + |AD| \cdot |AD_1| = |AC| \cdot |AC_1|$$

P i e r ā d ī j u m s. Novilksim diametru AE, tad

$$|AB| \cdot |AB_1| + |AD| \cdot |AD_1| = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD_1} =$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \overrightarrow{AE} =$$
$$= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC_1} = |AC| \cdot |AC_1|.$$

Izmantojot vienādību

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC_1},$$

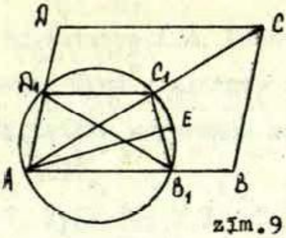
var formulēt uzdevumu gadījumiem, kad riņķa līnija krusto kādu no minēto staru papildinājumiem.

50. Izmantojot iepriekšējo uzdevumu, pierādīt, ka ievilktā četrstūrī diagonāļu garumu reizinājums ir vienāds ar pretējo malu garumu reizinājumu summu (Ptolomeja teorēma).

P i e r ā d ī j u m s. Apskatīsim iepriekšējā uzdevumā ievilkto četrstūri $AB_1C_1D_1$. Jāpierāda, ka

$$|AB_1| \cdot |C_1D_1| + |AD_1| \cdot |B_1C_1| = |AC_1| \cdot |B_1D_1|$$

Ievērojam, ka $\triangle D_1C_1B_1 \sim \triangle ABC$, tātad $|AC| = k|D_1B_1|$, $|AB| = k|D_1C_1|$. Tā kā $|BC| = |AD|$,



zīm.9

tad, ievietojot šīs vērtības vienādībā $|AB|\cdot|AB_1|+|AD|\cdot|AD_1|=$ $=|AC|\cdot|AC_1|$, dabūjam

$$k\cdot|D_1C_1|\cdot|AB_1|+k|C_1B_1|\cdot|AD_1|=k|D_1B_1||AC_1|.$$

51. Zinot tetraedra sešu šķautņu garumus, aprēķināt nogriežņus, kas savieno pretējo šķautņu viduspunktus un leņķus starp tetraedra pretējām šķautnēm.

A t r i s i n ā j u m s. Pieņemsim, ka $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|AB|=c$, $|DA|=d$, $|DB|=e$, $|DC|=f$ un M un N ir nogriežņu BC un AD viduspunkti, tad

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}) \quad \text{un}$$

$$|MN|^2=\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC})^2=$$

$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DB}^2+\overrightarrow{DC}^2-2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC})=$$

$$=\frac{1}{4}(d^2+e^2+f^2-(d^2+e^2-c^2)-(d^2+f^2-b^2)+(e^2+f^2-a^2))=$$

$$=\frac{1}{4}(b^2+c^2+e^2+f^2-a^2-d^2),$$

$$|MN|=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+e^2+f^2-a^2-d^2}.$$

Ievērojam, ka formulā ar mīnus zīmi, jāņem garuma kvadrāti tām šķautnēm, kuru viduspunkti ir ņemti. Pēc analoģijas varam atrast pārējo atbilstošo nogriežņu garumus.

Ja $\varphi = (\widehat{\vec{AB}, \vec{CD}})$, tad $\cos\varphi = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{CD}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{CD}|}$

$$\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \vec{AB}(\vec{AD}-\vec{AC}) = \vec{AB}\cdot\vec{AD} - \vec{AB}\cdot\vec{AC} =$$
$$= \tfrac{1}{2}(d^2+c^2-e^2) - \tfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2) = \tfrac{1}{2}(a^2+d^2-b^2-e^2)$$
$$\cos\varphi = \frac{1}{2cf}(a^2+d^2-b^2-e^2).$$

Sekas. Ja $a^2+d^2=b^2+c^2$, tad $\vec{AB}\perp\vec{CD}$.

Formulas var apskatīt piramīdu speciālgadījumiem, tai skaitā arī regulārai piramīdai, un formulēt uzdevumus gan par pretējo šķautņu perpendikularitāti, gan par attiecīgu leņķu un nogriežņu garumu aprēķināšanu.

L i t e r a t ū r a

I. Готман Э.Г.,Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом:Пособие для учащихся 9 и IO кл. М., Просвещение,1979.

2. Монахова Н.И. Из опыта обучения геометрии в старших классах: (9кл.). М., Просвещение, 1979.

3. Сборник задач по геометрии для 6-8 классов /В.А.Гусев, Г.Г.Маслова, З.А.Скопец, Р.С.Черкасов. 2-е изд. М., Просвещение, 1979.

4. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы. Учебн.пособие./Под ред. М.И.Сканави. 4-е изд. — М., Высш.школа, 1980.

5. Сборник задач по геометрии для 9 и IO классов. М., Просвещение , 1977.

6. Фетисов А.И. Геометрия в задачах. Пособие для учащихся школ и классов с углубл.теоретическим и практическим изучением математики. М., Просвещение , 1977.

7. Шувалова Э.З., Каплун В.И. Геометрия: Учеб. пособие для подготовительных отделений вузов. - М., Высш.школа, 1980.

Я.Я.Кокин

Из опыта реализации упрощенных вариантов алгоритмических языков Алгол-60 и Фортран на факультативных занятиях в средней школе

ЭВМ все шире проникают в различные сферы деятельности человека. В настоящее время значительно расширилось их производство и использование в науке, технике и в народном хозяйстве. В широких масштабах ведется подготовка специалистов по использованию ЭВМ.

Выпускники средней школы должны иметь достаточно четкое представление о современных вычислительных машинах и программировании для них. Значительная часть сведений, которые учащиеся средней школы получают об ЭВМ, перенесена на факультативные занятия по математике.

С точки зрения углубления математической подготовки учащихся средней школы целесообразно изучение программирования вести на алгоритмических языках. Наиболее подходящими для этих целей являются Алгол-60 и Фортран.

Выбор этих языков связан с их близостью к традиционному математическому языку, широким применением на действующих ЭВМ, существованием обширной научной и учебной литературы по этим языкам, а также наличием некоторых методических материалов относительно их преподавания в школе.

Нами были разработаны и под нашим руководством в течение последних лет проведены факультативы по программированию на языках Алгол-60 и Фортран для старшеклассников в школах № I и № II города Даугавпилса. В факультативе участвовали учащиеся 9-х, 10-х и II-х классов.

На одном из факультативов для обучения программированию использовали вариант эталонного языка Алгол-60. В качестве основных символов применяли арабские цифры, большие и малые буквы латинского алфавита, логические значения *true* (истина) и *false* (ложь). Большинство ограничителей эталонного языка Алгол-60 было использовано в факультативе. Из эталонного языка полностью применяли арифметические и логические операции, операции отношения и следования, скобки. Остальные символы эталонного языка Алгол-60 использовались неполностью. Так, мы не применяли разделители ⊔ (пробел), *comment* (комментарий), спецификатор *string* (строчка), описатели *own* (собственный) и *switch* (переключатель). Учитывая уровень знаний учащихся, мы пользовались следующими стандартными функциями эталонного языка:

sin (x) – $\sin x$,
cos (x) – $\cos x$,
arctan (x) – $\operatorname{arctg} x$,
ln (x) – $\ln x$,
exp (x) – e^x,
abs (x) – $|x|$,
sqrt (x) – $\sqrt{x}$.

Весь факультатив был реализован в течение 20 часов. Он имел следующую программу:

1. Понятие об электронных вычислительных машинах. Принципиальная схема ЭВМ. Понятие о работе вычислительной машины. Краткая характеристика некоторых ЭВМ отечественного производства.
2. Понятие о программировании для ЭВМ. Алгоритмические языки. Общая характеристика языка Алгол-60. Краткие сведения о синтаксисе языка Алгол-60.

3. Цифры и буквы в Алголе. Разделители: запятая, десятичная точка, десять, двоеточие, точка с запятой, знак присваивания. Их назначение. Запись чисел в Алголе.
4. Идентификаторы. Скобки. Массивы. Стандартные функции. Арифметические выражения и их запись.
5. Операции отношения: $<, \leq, =, \neq, >, \geq$. Логические значения true (истина), false (ложь). Логические операции $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\supset$, $\equiv$. Логические выражения.
6. Операции следования: go to, if, then, else, for, do. Описатели: Boolean, integer, real, array, procedure и их назначение. Понятие о спецификаторах.
7. Понятие оператора. Оператор присваивания. Вспомогательные операторы read (ввод) и print (вывод). Блок и его назначение. Понятие программы на языке Алгол-60. Примеры простейших программ.
8. Безусловный и условный операторы. Составной оператор. Их использование.
9. Понятие о циклическом вычислительном процессе. Разделители step, until, while. Оператор цикла. Цикл типа перечисления и арифметической прогрессии. Понятие о цикле типа пересчета.
10. Понятие о процедуре и ее использовании. Составление програмы на Алголе.

Обычно с учащимися проводились двухчасовые занятия. Всего было проведено таких занятий десять. Остановимся вкратце на распределении материала по занятиям.

На первом занятии был изложен материал первого пункта програмы. Учащимся было рассказано об ЭВМ, подробно изложены сведения о машинах третьего поколения ЕС единой системы, о применении вычислительной техники в науке, народном хозяйстве и т.д.

Школьники ознакомились с принципиальной схемой ЭВМ и с принципами ее работы.

На втором и третьем занятиях излагался материал второго, третьего и четвертого пунктов програмы. На этих двух занятиях был полностью разобран вопрос о записи чисел и арифметических выражений в Алголе, выборе обозначений переменных (идентификаторов), изучено понятие массива и его использование в программировании, рассмотрен список основных стандартных функций в Алголе. Школьники много практиковались в записи арифметических выражений. Было рассмотрено около I5 различных примеров, например:

записать на Алголе выражения:

$$\frac{3{,}6x + 10{,}4y^2 + 2}{2x+1},$$

$$\sqrt{\frac{|a|+|b|}{2} + |ab| + 2} + \frac{3}{7}x^3,$$

$$\sin^2\frac{x}{2} - \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \cos\frac{x-2}{x+1}}},$$

$$\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - e^{\sin x^2}\right]^{-3},$$

$$\frac{3{,}75ab + a_1}{p_{ij} + a_k} + \frac{m_j}{n_i},$$

$$\operatorname{tg}\pi x + \sqrt[6]{\frac{\alpha + \cos\beta}{\gamma^2+1}}.$$

и другие.

На четвертом занятии были изложены пятый и шестой пункты настоящей программы. Основное внимание на этом занятии уделялось составлению и изучению логических выражений, использованию описателей <u>integer</u>, <u>real</u>, array.

На пятом занятии изучались важнейшие понятия программирования на Алголе - оператор и блок. Там же было введено понятие программы на Алголе. На этом занятии учащиеся приступили к составлению простейших программ на языке Алгол-60. Школьники под руководством преподавателя составляли различные простые программы. Например, предлагалось составить программы решения следующих задач.

I) Составить программу для вычисления значения функции

$$y = \frac{0{,}3 \ln|\pi - x|}{1 - \sin\frac{x}{2}} + \frac{\pi x^2 \sin x^2}{0{,}12 \cdot 10^{-4} \sqrt[3]{\ln|\pi - x|}}$$

при x = I ;

2) Составить программу решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если известно, что его корни действительны ;

3) Составить программу вычисления площади треугольника по формуле Герона.

На шестой занятии изучались безусловный и полный условный операторы, их использование при составлении разветвляющихся программ, было введено понятие метки. На занятии был разобран целый ряд упражнений на использование безусловного и условного операторов. Рассматривались задачи типа:

I) составить программу вычисления значения функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 3 - \sqrt[3]{\pi + x}, & \text{если } x < 0, \\ (x^2-3)^2 + \sqrt{0{,}1(\pi + x)}, & \text{если } 0 \le x < 1, \\ x(x^2-3) + \ln(\pi + x), & \text{если } x \ge 1; \end{cases}$$

2) составить программу, которая выполняет следующую задачу: даны два действительных числа a и b $(a \ne b)$. Найти наибольшее из них ;

3) составить программу решения произвольного квадратного уравнения.

7-ое и 8-ое занятия посвящались изучению программирования циклических вычислительных процессов. В основном мы занимались программированием циклов типа перечисления и арифметической прогрессии. Для получения практических навыков программирования циклов предлагались задачи:

I) составить программу вычисления значений функции $y = |\cos x| + |\sin x|$, при $x = -24, 4, -0{,}14, 10^{-3}$;

2) составить программу вычисления значений функции $y = e^x + ax^2$ при $x = 0{,}01; 0{,}02; 0{,}03; 0{,}04; 0{,}05; 0{,}06; 0{,}07; 0{,}08$;

3) составить программу вычисления суммы

$$S = 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + 200^4.$$

О цикле пересчета, чаще всего используемом при программировании итерационных процессов, были даны только краткие сведения. С этой целью был рассмотрен и запрограммирован алгоритм нахождения m-ой степени арифметического корня из действительного числа $a > 0$ методом последовательных приближений по формуле:

$$x_n = \frac{1}{m}\left[\frac{a}{x_{n-1}^{m-1}} + (m-1)x_{n-1}\right],$$

где x_n и x_{n-1} соответственно n и $(n-1)$ приближения, с заданной абсолютной погрешностью ε.

Последние два занятия были посвящены изучению процедур и составлению программ более сложных задач. В заключение последнего занятия был проведен зачет, в котором учащимся предлагалось составить программы решения трех задач, одна из которых была на программирование циклов. Учащиеся справились успешно с предложенной контрольной работой.

На языке Фортран были проведены два факультатива (один в объеме I4 часов, другой - 20 часов). Остановимся подробнее на втором факультативе.

Этот факультатив проводился в 9-м классе в течение третьей четверти. Учащимся излагался сокращенный вариант языка Фортран по следующей программе.

I. Основные сведения о современных ЭВМ. Краткая характеристика и назначение основных узлов ЭВМ. Характеристика ЭВМ единой системы (ЭВМ ЕС). Различные применения ЭВМ.
2. Понятие о программировании для ЭВМ на алгоритмических языках. Язык программирования Фортран. Краткая история его развития.
3. Основные символы и ключевые слова языка Фортран. Классификация числовых величин на Фортране. Запись чисел. Логические переменные. Логические операции: отрицание, конъюнкция и дизъюнкция. Реализация основных арифметических и логических операций, а также операций отношения на Фортране.
4. Обозначение переменных на Фортране. Автоматическое присвоение типа числовым переменным. Массивы. Обозначение массивов и их элементов.
5. Арифметические и логические выражения. Основные стандартные функции Фортрана и их обозначения. Примеры записи арифметических и логических выражений.
6. Операторы Фортрана. Оператор присваивания. Условный и безусловный операторы передачи управления. Их применение в разветвляющихся программах. Правила записи операторов Фортрана на бланках.
7. Блоксхема решения задачи. Примеры ее построения. Понятие программы на Фортране. Составление прос-

тейших программ на Фортране.

8. Конечные циклы. Построение их программы при помощи оператора цикла. Примеры построения программы простейших циклов. Понятие об итерационных циклах.
9. Использование операторов 'CONTINUE', 'PAUSE', 'STOP', 'END' в программах.
10. Операторы ввода и вывода информации. Понятие об операторе 'FORMAT'.
11. Понятие подпрограммы. Подпрограммы типа 'SUBROUTINE' и 'FUNCTION'. Примеры программ с использованием подпрограмм.
12. Понятие о математическом обеспечении ЭВМ ЕС.

На прохождение теоритической части этой программы было затрачено 14 часов, а на практические занятия - 6 часов. На этом факультативе было рассмотрено программирование примерно тех же задач, что и на факультативе с языком Алгол-60.

Учитывая то, что Фортран является более машинно-ориентированным языком, чем Алгол-60, укажем на некоторые особенности методики проведения этого факультатива.

Следует отметить, что проведение факультатива на Фортране требует больше сведений об ЭВМ, особенно о представлении и переработке информации в них, устройствах ввода и вывода информации, о различных формах представления информации, так как восприятие сведений об операторах 'FORMAT', ввода и вывода информации 'PAUSE', 'END' и других вызывает затруднение.

Всюду надо иметь в виду автоматическое присвоение типа числовых величин, особенно это нужно учитывать в арифметических операторах присвоения, в выборе обозначений переменных, в записи числовых коэффициентов и т.д.

Имеются свои особенности и в построении конечных циклов: всегда надо учитывать то, что параметр цикла может быть только натуральным числом.

Учитывая специфику условного оператора передачи управления на Фортране, возрастает роль меток и блок-схемы программы по сравнению с программами на языке Алгол-60.

В заключение факультатива по программированию на Фортране следует подчеркнуть большие возможности, которые имеются для использования богатого математического обеспечения, имеющегося на этом языке для ЭВМ ЕС.

Программа второго факультатива на Фортране представляет из себя в основном сокращенный вариант только что рассмотренной программы, причем менее детально в ней рассматривались такие вопросы, как циклы (особенно итерационные) и подпрограммы.

Опыт проведения факультативов в средней школе показал, что программирование на алгоритмических языках вполне доступно старшеклассникам. Школьники интересуются ЭВМ и программированием, с интересом составляют самостоятельно программы.

В заключение хочется отметить, что все еще актуален вопрос об учебной литературе по программированию для школьников на алгоритмических языках, особенно по подбору задач. Наиболее удачным литературным источником для факультатива на языке Алгол-60 является [I]. Из большого числа пособий по программированию на Фортране в первую очередь следует отметить [4] и [5] как наиболее подходящие для подготовки факультатива. В конце статьи приведен список литературы, которой мы пользовались при проведении факультатива.

Литература

I. А б р а м о в С. А., А н т и п о в И.Н. Алгоритмический язык АЛГОЛ-60. М., Просвещение, 1975. 159 с.

2. С а в и н к о в В.М., Ц а л ь п В.Д. Программирование на Алголе. М., Высшая школа, 1975. 216 с.

3. К о р о л е в Л.Н. Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение. М., Наука, 1974. 255 с.

4. П е р в и н Ю.А. Основы Фортрана. М., Наука, 1972. 214 с.

5. Б у х т и я р о в А.М., Ф р о л о в Г.Д. Сборник задач по программированию на алгоритмических языках. М., Наука, 1974. 239 с.

6. М о н а х о в В.М. Программирование. М., Просвещение, 1974. 159 с.

М.Х.Скривеле

Применение композиций гомотетий к решению задач

Геометрические преобразования занимают важное место в школьном курсе математики. Свойства перемещений и подобий плоскости и пространства применяются при доказательстве теорем и решении задач. Однако композиции преобразований, групповые свойства преобразований пока не являются предметом обязательного изучения в школе. Этот логический пробел в обучении геометрическим преобразованиям целесообразно восполнить на факультативных занятиях. Круг использования геометрических преобразований можно значительно расширить за счет их композиций.

В данной статье рассматривается применение композиции гомотетий плоскости и пространства к решению ряда аффинных задач. Предлагаемый материал может быть использован на факультативных занятиях по теме "Геометрические преобразования" или на внеклассных занятиях.

Сравнивая свойства параллельных переносов и гомотетий (центральная симметрия - частный случай гомотетии) замечаем, что при любом из этих преобразований каждая прямая отображается на параллельную ей прямую. Это не случайно. Оказывается, что множество всех гомотетий и параллельных переносов плоскости, а также пространства образует группу.

Для выяснения вида преобразования, представляющего собой композицию двух или более преобразований, привлекаются признаки, которые могут быть описаны конструктивно или выражены с помощью векторов или в координатной форме. Векторное изложение вопроса о композиции двух гомотетий находим, например, в работе [3]; в статье [2] это доказывается с помощью конструктивно описываемых свойств и признаков.

Перечислим основные теоретические положения, которыми будем пользоваться при решении задач. Доказательства их имеются в указанной литературе.

Т е о р е м а I. Множество всех гомотетий с одним и тем же центром образует коммутативную группу.

Т е о р е м а 2. Композиция $H_B^n \circ H_A^k$ двух гомотетий с различными центрами при $kn \neq 1$ есть гомотетия с центром на прямой, проходящей через центры данных гомотетий, и коэффициентом, равным произведению коэффициентов данных гомотетий, а при $kn = 1$ – перенос параллельно прямой, проходящей через центры данных гомотетий.

Т е о р е м а 3. Композиция гомотетии и переноса (или наоборот) есть гомотетия, коэффициент которой равен коэффициенту данной гомотетии, а центр принадлежит прямой, проходящей через центр данной гомотетии параллельно данному вектору.

Обратим внимание на то, что композиция двух гомотетий с различными центрами, а также композиция гомотетии и переноса не может быть тождественным отображением. Кроме того, $H_A^k \circ \vec{a} \neq \vec{a} \circ H_A^k$ и $H_B^n \circ H_A^k \neq H_A^k \circ H_B^n$, если $A \neq B$.

Итак, вследствие свойств векторов и приведенных выше теорем имеем, что множество всех гомотетий и переносов образует группу, включающую следующие подгруппы:

1) переносов;

2) гомотетий с одним и тем же центром;

3) центральных симметрий и переносов и др.

Из теорем 2 и 3 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Если композиция трех гомотетий есть гомотетия $H_S^k = H_C^c \circ H_B^b \circ H_A^a$ (т.е. если $abc \neq 1$) и центры A, B, C принадлежат одной прямой, то и центр S принадлежит этой же прямой.

Все отмеченные факты имеют место и для пространства; они не зависят от размерности. Это нетрудно заметить, например, при векторных доказательствах данных свойств.

Отметим еще одно свойство гомотетий пространства.

Т е о р е м а 5. Если композиция трех гомотетий пространства есть гомотетия $H_O^k = H_C^c \circ H_B^b \circ H_A^a$ (т.е. если $abc \neq 1$) и центры A , B , C не принадлежат одной прямой, то центр O принадлежит плоскости ABC.

<u>Доказательство.</u> Пусть $ab \neq 1$, тогда $H_B^b \circ H_A^a = H_S^{ab}$, где $S \in (AB)$. Из равенства $H_O^k = H_C^c \circ H_B^b \circ H_A^a = H_C^c \circ H_S^{ab}$ следует, что $O \in (SC)$. Значит, точка O принадлежит плоскости, определяемой пересекающимися прямыми AB и SC, т.е. $O \in (ABC)$.

Если же $ab = 1$, то $H_B^b \circ H_A^a = \vec{m}$, где $\vec{m}$ коллинеарен $\vec{AB}$. Из того, что $H_O^k = H_C^c \circ \vec{m}$, согласно теореме 3 имеем, что $(OC) \cap (AB) = \varnothing$. Следовательно, и в этом случае $O \in (ABC)$.

Гомотетия обычно задается центром и коэффициентом, либо центром и парой соответственных точек. В дальнейшем гомотетию с центром S и парой (A, A') соответственных точек будем обозначать так: $H_S^{(A,A')}$. Целесообразность введения этого символа объясняется тем, что при композиции гомотетий бывает удобно вместо коэффициента гомотетии указать пару гомотетичных точек. Согласно определению гомотетии имеем:

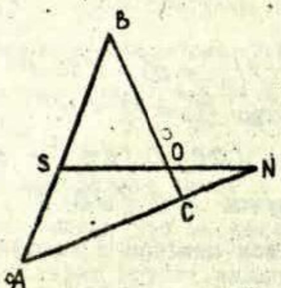
$$H_O^{(A,B)} = H_O^k \Longleftrightarrow \vec{OB} = k\,\vec{OA}$$

Преобразованием, обратным гомотетии $H_O^{(A,B)}$, является гомотетия $H_O^{(B,A)}$.

Из теоремы 2 и того, что при гомотетии точка, ее образ и центр гомотетии принадлежат одной прямой, а параллельный перенос задается парой соответственных точек, следует, что для любой точки $A \notin (SO)$

$$H_O^{(B,C)} \circ H_S^{(A,B)} = \begin{cases} H_N^{(A,C)}, & \text{если } (AC) \cap (OS) = N, \\ \overrightarrow{AC}, & \text{если } (AC) \cap (OS) = \varnothing. \end{cases} \text{(рисI)}$$

Это равенство лежит в основе решения многих геометрических задач.



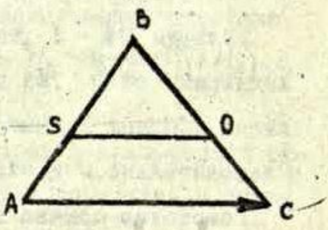


Рис.I

Задача I. Через точку M - середину медианы BB_1 - треугольника ABC проведена прямая AM, пересекающая сторону BC в точке A_1. В каком отношении точка A_1 делит сторону BC ?

Решение. Пусть $\overrightarrow{A_1C} = x\overrightarrow{A_1B}$, тогда $H_{A_1}^{(B,C)} = H_{A_1}^{x}$.

$$H_A^{(B_1,C)} \circ H_M^{(B,B_1)} = H_{A_1}^{(B,C)}, \quad \text{(I)},$$

ибо $(MA) \cap (BC) = A_1$ (рис.2). Согласно данному

$$H_M^{(B,B_1)} = H_M^{-1}, \quad H_A^{(B_1,C)} = H_A^{2}.$$

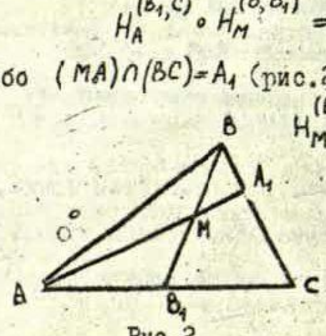


Рис.2

Поэтому соотношение (I) перепишется:

$$H_A^{2} \circ H_M^{-1} = H_{A_1}^{x},$$

отсюда на основании теоре-

мы 2 имем $x - 2(-1) = -2$. Итак, $\overrightarrow{A_1C} = -2\overrightarrow{A_1B}$.
Следовательно, $|CA_1| : |A_1B| = 2$.

Задача 2. Дана трапеция $ABCD$; M – середина основания AB, P – произвольная точка прямой BC, $(PM) \cap (AC) = Q$, $(DQ) \cap (AB) = X$, $(DP) \cap (AB) = Y$. Доказать, что $|MX| = |MY|$.

Решение. $H_Q^{(D,X)} \circ H_P^{(Y,D)} = H_M^{(Y,X)}$, ибо $(QP) \cap (YX) = M$. Так как $(AB) \parallel (DC)$, то $H_P^{(Y,D)} : B \to C$, а $H_Q^{(D,X)} : C \to A$.

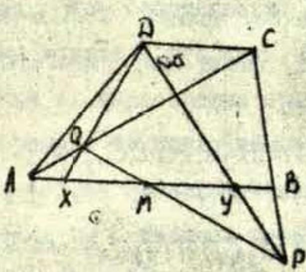


Рис.3

Следовательно, $H_M^{(Y,X)} : B \to A$ и $H_M^{(Y,X)} = H_M^{(B,A)}$. Поскольку M – середина $[AB]$, то $H_M^{(B,A)} = H_M^{-1}$. Итак, $H_M^{(Y,X)} = H_M^{-1}$, откуда $\overrightarrow{MX} = -\overrightarrow{MY}$.

Задача 3. Даны треугольник ABC и на прямых AB и AC точки C_1 и B_1 такие, что $\overrightarrow{AC_1} = \lambda\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{AB_1} = \mu\overrightarrow{B_1C}$. $(BB_1) \cap (CC_1) = O$. Выразить: а) $\overrightarrow{OB_1}$ через $\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OC_1}$ через $\overrightarrow{OC}$.

Решение. Пусть $\overrightarrow{OB_1} = x\overrightarrow{OB}$, т.е. $H_O^{(B,B_1)} = H_O^{x}$.

$$H_C^{(A,B_1)} \circ H_{C_1}^{(B,A)} = H_O^{(B,B_1)}, \quad (2)$$

так как $(CC_1) \cap (BB_1) = O$. Поскольку $\overrightarrow{C_1A} = -\lambda\overrightarrow{C_1B}$, то $H_{C_1}^{(B,A)} = H_{C_1}^{-\lambda}$. Из $\overrightarrow{AB_1} = \mu\overrightarrow{B_1C}$ следует, что $\overrightarrow{CB_1} - \overrightarrow{CA} = \mu\overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{CB_1} = \frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{CA}$. Значит, $H_C^{(A,B_1)} = H_C^{\frac{1}{1+\mu}}$. Соотношение (2) можно записать в виде: $H_C^{\frac{1}{1+\mu}} \circ H_{C_1}^{-\lambda} = H_0^{x}$. (2')

Отсюда $x = -\frac{\lambda}{1+\mu}$. Итак, $\overrightarrow{OB_1} = -\frac{\lambda}{1+\mu}\overrightarrow{OB}$.

Аналогично получаем, что $H_B^{(A,C_1)} \circ H_{B_1}^{(C,A)} = H_0^{(C,C_1)}$ или $H_B^{\frac{1}{1+\lambda}} \circ H_{B_1}^{-\mu} = H_0^{(C,C_1)}$, откуда $\overrightarrow{OC_1} = -\frac{\mu}{1+\lambda}\overrightarrow{OC}$.

Примечание. При $\lambda = \mu = 1$ получаем теорему о пересечении медиан треугольника.

Задача 4 (теорема Дезарга). Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что если прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке (или параллельны), то точки пересечения пар прямых BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 , AB и A_1B_1 (если они существуют) принадлежат одной прямой.

Решение. Пусть $(AA_1) \cap (BB_1) \cap (CC_1) = S$, $(AB) \cap (A_1B_1) = C_0$, $(BC) \cap (B_1C_1) = A_0$ (рис.4). Докажем, что $(AC) \cap (A_0C_0) = (A_1C_1) \cap (A_0C_0)$.

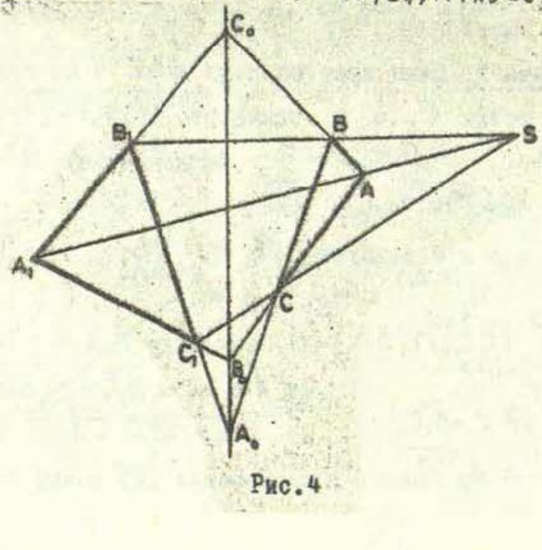


Рис.4

Поскольку $(CC_1)\cap(BB_1)=S$ и $(AA_1)\cap(BB_1)=S$, то $H_C^{(A_0,B)}\circ H_{C_1}^{(B_1,A_0)}=H_S^{(B_1,B)}$, $H_A^{(C_0,B)}\circ H_{A_1}^{(B_1,C_0)}=H_S^{(B_1,B)}$. Следовательно,

$$H_C^{(A_0,B)}\circ H_{C_1}^{(B_1,A_0)}=H_A^{(C_0,B)}\circ H_{A_1}^{(B_1,C_0)}. \quad (3)$$

"Умножив" обе части равенства (3) справа на $H_A^{(B,C_0)}$, а слева - на $H_{C_1}^{(A_0,B_1)}$, получим

$$H_A^{(B,C_0)}\circ H_C^{(A_0,B)}=H_{A_1}^{(B_1,C_0)}\circ H_{C_1}^{(A_0,B_1)}=\varphi \quad (4)$$

Из равенства (4) согласно теореме 2 следует, что если φ - перенос, то $(A_0C_0)\cap(AC)=\varnothing$ и $(A_0C_0)\cap(A_1C_1)=\varnothing$;, если же φ - гомотетия, то ее центр $B_0=(A_0C_0)\cap(AC)=(A_0C_0)\cap(A_1C_1)$. Итак, мы доказали, что если (AC) и (A_1C_1) пересекаются, то точка их пересечения принадлежит (A_0C_0).

Теорема и ее доказательство имеют место и для треугольников, не принадлежащих одной плоскости.

<u>Задача 5</u> (теорема Менелая). Даны треугольник ABC и на прямых AB, BC, CA соответственно точки K, L, M: $\overrightarrow{AK}=\alpha\overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{BL}=\beta\overrightarrow{LC}$, $\overrightarrow{CM}=\gamma\overrightarrow{MA}$. Доказать, что для того чтобы точки K, L, M принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно выполнения равенства $\alpha\beta\gamma=-1$.

Р е ш е н и е. <u>Необходимость</u>. Пусть прямая ℓ пересекает (AB), (BC), (CA) соответственно в точках K, L, M (рис.5).

$$H_L^{(C,B)}\circ H_M^{(A,C)}=H_K^{(A,B)},$$

так как $(LM)\cap(AB)=K$. Но $H_L^{(C,B)}=H_L^{-\beta}$, $H_M^{(A,C)}=H_M^{-\gamma}$, $H_K^{(A,B)}=H_K^{-\frac{1}{\alpha}}$. Следовательно, $H_L^{-\beta}\circ H_M^{-\gamma}=H_K^{-\frac{1}{\alpha}}$.

откуда $(-\beta)(-\gamma) = -\frac{1}{\alpha}$ или $\alpha\beta\gamma = -1$.

Достаточность. Пусть для некоторых точек $K \in (AB)$, $L \in (BC)$, $M \in (AC)$ выполняется равенство $\alpha\beta\gamma = -1$. Преобразование $f = H_K^{-\alpha} \circ H_L^{-\beta} \circ H_M^{-\gamma} = H_K^{(B,A)} \circ H_L^{(C,B)} \circ H_M^{(A,C)}$ является либо параллельным переносом, либо тождественным отображением, так как согласно данному произведение коэффициентов гомотетий равно единице. Но $f(A) = A$. Значит, $H_K^{-\alpha} \circ H_L^{-\beta} \circ H_M^{-\gamma} = E$.
Отсюда следует, что $H_L^{-\beta} \circ H_M^{-\gamma} = H_K^{-\frac{1}{\alpha}}$ и согласно теореме 2 точки K , L , M принадлежат одной прямой.

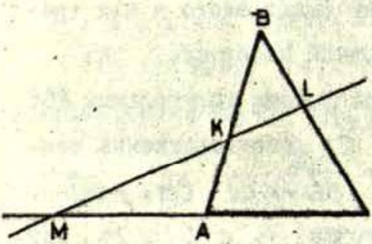


Рис.5

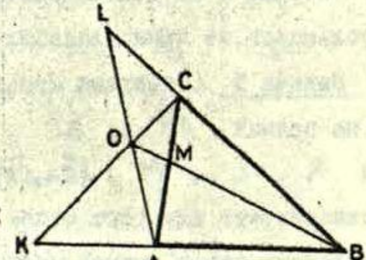


Рис.6

Задача 6 (теорема Чевы). На прямых AB , BC , CA , образующих треугольник ABC , взяты точки K , L , M : $\vec{AK} = \alpha \vec{KB}$, $\vec{BL} = \beta \vec{LC}$, $\vec{CM} = \gamma \vec{MA}$.
Доказать, что если прямые AL , BM , CK принадлежат одному пучку (т.е. пересекаются в одной точке или параллельны), то $\alpha\beta\gamma = 1$. Сформулировать и доказать об-

ратную теорему.

Р е ш е н и е. Пусть $(AL)\cap(BM)\cap(CK)=O$ (рис.6). Тогда $H_C^{(A,M)}\circ H_K^{(B,A)}=H_O^{(B,M)}$, $H_A^{(C,M)}\circ H_L^{(B,C)}=H_O^{(B,M)}$. Следовательно,

$$H_C^{(A,M)}\circ H_K^{(B,A)}=H_A^{(C,M)}\circ H_L^{(B,C)}. \qquad (5)$$

Из данных векторных равенств находим,что $\vec{CM}=\frac{\gamma}{1+\gamma}\vec{CA}$, $\vec{KA}=-\alpha\vec{KB}$, $\vec{AM}=\frac{1}{1+\gamma}\vec{AC}$, $\vec{LC}=-\frac{1}{\beta}\vec{LB}$.Поэтому равенство (5) эквивалентно равенству

$$H_C^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}\circ H_K^{-\alpha}=H_A^{\frac{1}{1+\gamma}}\circ H_L^{-\frac{1}{\beta}} \qquad (5').$$

Отсюда $\frac{\gamma\alpha}{1+\gamma}=\frac{1}{(1+\gamma)\beta}$ или $\alpha\beta\gamma=1$.

Это доказательство пригодно и для случая,когда прямые AL , BM , CK параллельны;но тогда вместо $H_O^{(B,M)}$ будем иметь перенос $\vec{BM}$.

Выполнение равенства $\alpha\beta\gamma=1$ является и достаточным условием принадлежности прямых AL , BM , CK одному пучку.Доказательство этого предоставляем читателю (рассуждения проводим в обратном порядке,пока не придем к соотношению (5),откуда заключаем,что $(CK)\cap(BM)=(AL)\cap(BM)$).

Заметим,что теоремы о пересечении медиан,высот,биссектрис треугольника являются частными случаями теоремы Чевы.

<u>Задача 7</u> На ребрах AD , BD , AC тетраэдра $ABCD$ взяты соответственно точки L , N , F так,что $|DA|=2|DL|$, $|DB|=3|DN|$, $|AC|=4|AF|$.В каком отношении плоскость,проходящая через точки L ,

N , F ,делит ребро BC ?

Р е ш е н и е. Рассмотрим композицию

$$f = H_N^{(D,B)} \circ H_L^{(A,D)} \circ H_F^{(C,A)} = H_N^{-2} \circ H_L^{-1} \circ H_F^{-\frac{1}{3}}.$$

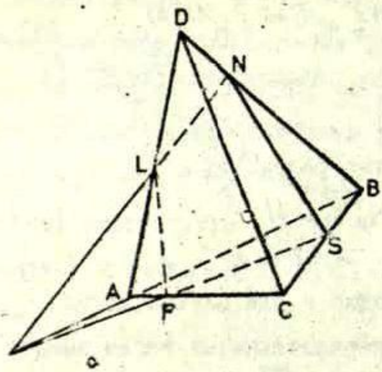


Рис.7

Поскольку произведение коэффициентов этих гомотетий $k = -\frac{2}{3} \neq 1$, то f - гомотетия: $f = H_S^{(C,B)} = H_S^{-\frac{2}{3}}$, где $S \in (CB)$. Но согласно теореме 5 центр S принадлежит плоскости FLN. Следовательно, $S = (BC) \cap \cap (FLN)$ (рис.7).

Так как $H_S^{(C,B)} = H_S^{-\frac{2}{3}}$, то $\vec{SB} = -\frac{2}{3}\vec{SC}$. Значит, $S \in [BC]$ и $|BS| : |SC| = 2:3$.

Задача 8 Дана усеченная (параллельно основанию) треугольная пирамида $ABCA_1B_1C_1$. Середина каждого из боковых ребер соединена с точкой пересечения диагоналей противоположной боковой грани. Доказать, что полученные три отрезка пересекаются в одной точке и делятся ею в одном и том же отношении.

Р е ш е н и е. Пусть O , P , R - середина ребер AA_1, BB_1, CC_1 соответственно, а O_0 , P_0 , R_0 - точки пересечения диагоналей противолежащих им граней; $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, и $[A_1A_1']$, $[B_1B_1']$, $[C_1C_1']$-медианы оснований (рис.8). Основания $A_1B_1C_1$ и ABC гомотетичны, поэтому

$$\vec{SA} = n\,\vec{SA_1}\,,\ \vec{SB} = n\,\vec{SB_1}\,,\ \vec{SC} = n\,\vec{SC_1}\,,\ n > 1 \quad (6).$$

Найдем три гомотетии, при композиции которых $O \to O_0$, $P \to P_0$, $R \to R_0$.

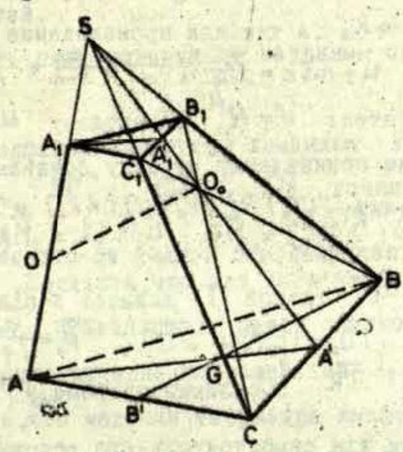


Рис. 8

Так как O - середина $[AA_1]$, то из (6) следует $\vec{SA} = n\vec{SA_1} = n(\vec{SO} - \vec{SA})$, откуда $\vec{SA} = \frac{2n}{1+n}\vec{SO}$. Аналогично $\vec{SB} = \frac{2n}{1+n}\vec{SP}$ и $\vec{SC} = \frac{2n}{1+n}\vec{SR}$. Значит при гомотетии H_S^k, где $k = \frac{2n}{1+n}$, имеем: $O \to A$, $P \to B$; $R \to C$.

При гомотетии H_G^l, где $l = -\frac{1}{2}$, а G - точка пересечения медиан треугольника ABC: $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.

$[C_1B_1]$ и $[CB]$ гомотетичны, центры их гомотетий S и O_0. Поэтому согласно (6) имеем $\vec{SA'} = n\vec{SA}$ и $\vec{O_0A'} = -n\vec{O_0A'_1}$. Из этих равенств найдем зависимость между $\vec{SO_0}$ и $\vec{SA'}$:

$$\vec{SA'} = n\vec{SA'_1} = n(\vec{SO'_0} + \vec{O_0A'_1}) = n\vec{SO_0} - \vec{OA'} = n\vec{SO_0} - (\vec{SA'} - \vec{SO_0}),$$

откуда $\vec{SO} = \frac{2}{1+n}\vec{SA'}$. Таким же образом находим, что $\vec{SP_0} = \frac{2}{1+n}\vec{SB'}$ и $\vec{SR_0} = \frac{2}{1+n}\vec{SC'}$. Значит, при гомотетии H_S^m, где $m = \frac{2}{1+n}$,имеем: $A' \to O_0$, $B' \to P_0$, $C \to K_0$.

При композиции $f = H_S^m \circ H_G^l \circ H_S^k$ получим $O \to O_0$, $P \to P_0$, $R \to R_0$.А так как произведение коэффициентов гомотетий $u = mlk = \frac{2}{1+n} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2n}{1+n} = -\frac{2n}{(1+n)^2} \neq 1$, то f - гомотетия: $f = H_T^u$.Поскольку $u < 0$,то центр гомотетии принадлежит отрезку,соединяющему точку и ее образ.Значит, $[OO_0] \cap [PP_0] \cap [RR_0] = T$.

Кроме того получили,что каждый из отрезков $[OO_0]$, $[PP_0]$, $[RR_0]$ точкой T делится в одном и том же отношении,ибо $\overrightarrow{TO_0} = -\frac{2n}{(1+n)^2}\overrightarrow{TO}$, $\overrightarrow{TP_0} = \frac{-2n}{(1+n)^2}\overrightarrow{TP}$, $\overrightarrow{TR_0} = -\frac{2n}{(1+n)^2}\overrightarrow{TR}$.Согласно теореме 4 $T \in (SG)$

Задачи для самостоятельного решения

I. Даны треугольник ABC и точки A_1 , B_1 , C_1 , такие,что $\overrightarrow{AC_1} = \alpha\,\overrightarrow{C_1B}$, $\overrightarrow{BA_1} = \alpha\,\overrightarrow{A_1C}$, $\overrightarrow{CB_1} = \alpha\,\overrightarrow{B_1A}$ (т.е. стороны треугольника разделены по его обходу в одном и том же отношении). $(BC) \cap (B_1C_1) = A_2$, $(AC) \cap (A_1C_1) = B_2$, $(AB) \cap (A_1B_1) = C_2$.Вычислить $|AC_2| : |C_2B|$, $|BA_2| : |A_2C|$, $|CB_2| : |B_2A|$.

2. При переносе $\vec{a}$ треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$.Доказать,что $[AA_0]$, $[BB_0]$, $[CC_0]$,где A_0 , B_0 , C_0 - соответственно середины сторон BC , AC ; AB, пересекаются в одной точке.

3. Дан параллелограмм $ABCD$.На прямой AB взята точка M ,такая,что $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$, $(MD) \cap (AC) = N$. Выразить $\overrightarrow{AN}$ через $\overrightarrow{AC}$

4. Даны при попарно касающиеся внешним образом окружности. Посредством одной линейки построить центры этих окружностей.

5. Построить пятиугольник по заданным серединам его сторон.

6. Дана неплоская замкнутая ломанная $ABCD$ и на прямых AB, BC, CD, DA точки M_1, M_2, M_3, M_4; $\overrightarrow{AM_1} = \lambda_1 \overrightarrow{M_1B}$, $\overrightarrow{BM_2} = \lambda_2 \overrightarrow{M_2C}$, $\overrightarrow{CM_3} = \lambda_3 \overrightarrow{M_3D}$, $\overrightarrow{DM_4} = \lambda_4 \overrightarrow{M_4A}$. Доказать, что для того чтобы точки M_1, M_2, M_3, M_4 принадлежали одной плоскости, необходимо и достаточно выполнения равенства $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \lambda_4 = 1$.

7. Доказать, что медианы тетраэдра имеют общую точку, которая делит каждую из них в отношении 3:I, считая от вершины. (Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противолежащей грани.)

8. $A_1B_1C_1D_1$ - образ тетраэдра $ABCD$ при переносе $\vec{m}$. A_0, B_0, C_0, D_0 - точки пересечения медиан граней тетраэдра $ABCD$, противолежащих соответственно вершинам A, B, C, D. Доказать, что $[A_1A_0]$, $[B_1B_0]$, $[C_1C_0]$, $[D_1D_0]$ имеют общую точку.

Литература

I. Яглом И.М. Геометрические преобразования. М., Гостехиздат, 1955, с. 89-94.

2. Кузнецова Л.И. К вопросу о преобразованиях и некоторых их группах в школьном курсе геометрии.

- В сб.: Методика преподавания математики в средней школе. Свердловск, 1975, вып. 2, с. 107-131.

3. Саранцев Г.И. Сборник задач на геометрические преобразования. Пособие для учителей. М., Просвещение, 1975, с. 74.

4. Шоластер Н.Н. Задачи на геометрические преобразования. - Математика в школе, №3, 1976, с. 58.

М.Х.Скривеле

Простейшие аффинные преобразования плоскости

Геометрические преобразования и их инварианты - один из основных вопросов школьного курса геометрии. Программой предусмотрено изучение только перемещений и подобий плоскости и пространства. Однако представляет интерес познакомить учащихся и с другими аффинными преобразованиями.

Как известно, перемещения образуют подгруппу эквиаффинных преобразований плоскости, а осевая симметрия является частным случаем косой симметрии. Все перемещения плоскости могут быть сведены к композиции осевых симметрий. Аналогично группа эквиаффинных преобразований плоскости порождается косыми симметриями [4] .

В статье предлагается один из возможных вариантов изучения простейшего эквиаффинного преобразования плоскости - косой симметрии - независимо от общей теории аффинных преобразований. Параболический поворот определяется как композиция косых симметрий. Изучение этих вопросов не требует расширения действующей программы и может быть использовано на внеклассных занятиях в VIII-IX классах по теме "Геометрические преобразования". Сведения о параболическом повороте необходимы и при знакомстве учащихся с одной из неевклидовых геометрий - геометрией Галилея, так как параболический поворот является одним из видов "перемещений" плоскости Галилея .

I. КОСАЯ СИММЕТРИЯ ПЛОСКОСТИ

Пусть на плоскости даны непараллельные прямые m и ℓ. Каждой точке прямой ℓ будем ставить в соответствие саму себя. Каждой точке $M \notin \ell$ поставим в соответствие точку M' такую, чтобы выполнялись следующие два условия: I) $(MM') \parallel m$; 2) прямая ℓ делит $[MM']$ пополам.

Легко проверить, что указанное соответствие есть обратимое отображение плоскости на себя (преобразование плоскости). Называется это преобразование к о с о й с и м м е т р и е й плоскости с осью ℓ параллельно прямой m. Косую симметрию с осью ℓ параллельно прямой m будем обозначать символом ℓ^m. Если A' - образ точки A при косой симметрии ℓ^m, то будем писать: $A' = \ell^m(A)$.

Следует отметить, что в известной нам литературе (см. список литературы) в определении вместо "параллельно прямой m" говорится "в направлении m". Мы от этого решили отказаться, так как понятие направления в школьном курсе имеет другое содержание: оно связано с множеством сонаправленных лучей, а не с пучком параллельных прямых.

При $m \perp \ell$ получаем осевую симметрию, изучаемую в школе. Если $m \parallel k$, то ℓ^m и ℓ^k одна и та же косая симметрия.

Отметим основные свойства косой симметрии.

I. Отображение $(\ell^m)^{-1}$, обратное косой симметрии ℓ^m, есть та же косая симметрия ℓ^m : $(\ell^m)^{-1} = \ell^m$.
Следовательно, результат двукратного выполнения ℓ^m есть тождественное отображение: $\ell^m \circ \ell^m = (\ell^m)^{-1} \circ \ell^m = E$.

2. Множество всех двойных точек косой симметрии ℓ^m есть ось ℓ.

3. При косой симметрии образом прямой является прямая.

<u>Доказательство.</u> Чтобы утверждать, что фигура F' является образом фигуры F при каком-либо преобразовании, убедимся в том, что образ любой точки фигуры F принадлежит фигуре F' и каждая точка фигуры F' является образом точки фигуры F.

а) Из определения косой симметрии следует, что при косой симметрии ℓ^m каждая прямая m_i, параллельная прямой m, отображается на себя. Причем преобразование ℓ^m на каждой прямой m_i индуцирует центральную симметрию с центром $O_i = \ell \cap m_i$. Следовательно, если $(AB) \parallel m$ и $A' = \ell^m(A)$, $B' = \ell^m(B)$, то $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$.

б) Пусть дана прямая OM, где $O = (OM) \cap \ell$ [redacted]чем

$(OM) \nparallel m$ (рис.I). Точки $O = l^m(O)$ и $M' = l^m(M)$ определяют прямую OM'; $(MM') \cap l = M_0$.

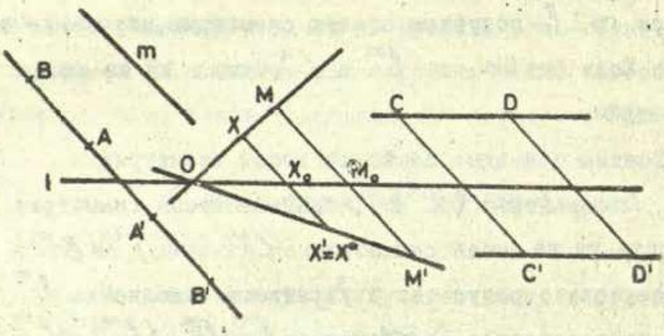


Рис.I

Пусть X - произвольная точка прямой OM, $X' = l^m(X)$, $(XX') \cap l = X_0$, $(XX') \cap (OM') = X^*$. При гомотетии плоскости с центром O, отображающей точку M на X, точка M_0 отобразится на X_0, а точка M' - на X^*. Поэтому согласно свойству гомотетии из равентства $\overrightarrow{M_0M} = -\overrightarrow{M_0M'}$ следует, что $\overrightarrow{X_0X} = -\overrightarrow{X_0X^*}$. Но согласно определению косой симметрии $\overrightarrow{X_0X} = -\overrightarrow{X_0X'}$. Следовательно, $X' = X^*$, т.е. $X' \in (OM)$.

Аналогично доказывается, что прообраз любой точки прямой OM' принадлежит прямой OM. Итак, доказали, что $l^m((OM)) = (OM')$.

в) Нетрудно доказать, что образ прямой CD, параллельной оси l, есть прямая $C'D'$, параллельная оси; $C' = l^m(C)$, $D' = l^m(D)$. При этом $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'}$.

4. Из рассмотренных свойств следует, что при косой симметрии l^m имеются только два инвариантных (т.е. отображающихся на себя) пучка параллельных прямых:

I) пучок $\{m\}$, задаваемый прямой m ; 2) пучок $\{\ell\}$, задаваемый прямой ℓ. При этом каждая прямая пучка $\{m\}$ инвариантна, а в пучке $\{\ell\}$ инвариантна только одна прямая - ось ℓ.

5. Параллельные прямые отображаются на параллельные прямые

На самом деле, если $a \cap b = \emptyset$, но $\ell^m(a) \cap \ell^m(b) = N'$, то прообраз N точки N' должен принадлежать как прямой a, так и прямой b, что невозможно.

6. При косой симметрии отрезок отображается на отрезок.

<u>Доказательство.</u> Для любой точки $X \in [AB]$ имеет место равенство $|AX| + |XB| = |AB|$. Пусть $[AB] \nparallel m$, а A', B', X' - образы точек A, B, X при симметрии ℓ^m. Из $(AA') \parallel (BB') \parallel (XX')$ следует, что $|A'B'| = \lambda |AB|$, $|A'X'| = \lambda |AX|$, $|X'B'| = \lambda |XB|$. Поэтому $|A'X'| + |X'B'| = \lambda |AX| + \lambda |XB| = \lambda |AB| = |A'B'|$, т.е. $X' \in [A'B']$.

Аналогично доказывается, что прообраз точки отрезка $A'B'$ есть точка отрезка AB. Следовательно, $\ell^m([AB]) = [A'B']$

7. При косой симметрии сохраняется отношение длин параллельных отрезков. (Длина отрезка и отношение длин непараллельных отрезков, в общем случае, не сохраняется).

<u>Доказательство.</u> Для отрезков, параллельных прямой m или ℓ, утверждение очевидно, так как в этих случаях длины отрезка и его образа равны (свойство 3).

Если $[AB] \subset a$ и $[CD] \subset a$, но $a \nparallel m$, $a \nparallel \ell$, то $|AB| : |CD| =$

$=|A'B'|:|C'D'|$ согласно теореме о пропорциональных отрезках.

Пусть $[AB] \subset a$, $[MN] \subset b$,где $a \cap b = \emptyset$.Построим параллелограмм $NMBE$.Согласно свойству 5 его образ $N'M'B'E'$ – также параллелограмм.Из равенства $|AB|:|BE| = |A'B'|:|B'E'|$ следует,что $|AB|:|MN| = |A'B'|:|M'N'|$.

6. Фигуру,имеющую площадь,косая симметрия отображает на равновеликую фигуру.

Докажем это для треугольников.Пусть ABC – произвольный треугольник,а A' , B' , C' , D' – образы точек A , B , C , D при данной косой симметрии,где $D = (AC) \cap (BB')$.Тогда $D' \in (A'C')$ и $|BD| = |B'D'|$ (рис.2)

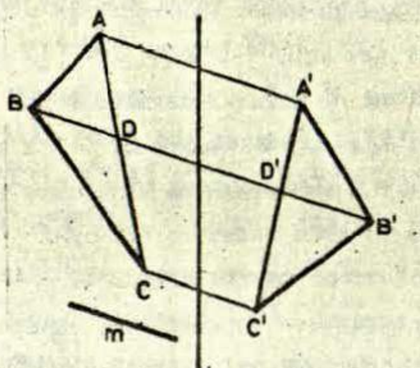


Рис.2

Треугольники ABD и $A'B'D'$, BDC и $B'D'C'$ соответственно равновелики,как треугольники с конгруэнтными основаниями и высотами.Следовательно, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta A'B'C'}$

Поскольку многоугольник является объединением треугольников,то при косой симметрии многоугольник отображается на равновеликий ему многоугольник.

Справедливость этого свойства для любой квадрируемой фигуры сообщается учащимся без доказательства.

Итак, видим, что косая симметрия искажает форму и размеры фигуры, но некоторые геометрические свойства фигуры (параллелизм прямых, площадь, отношение длин параллельных отрезков) при этом не меняются.

2. ОСИ КОСОЙ СИММЕТРИИ ФИГУРЫ

Косая симметрия плоскости дает возможность обобщить известное из школьного курса понятие "ось симметрии фигуры".

Определение. Если при косой симметрии ℓ^m фигура F отображается на себя, то прямая ℓ называется **осью косой симметрии** фигуры F, причем осью, сопряженной прямой m (или пучку прямых, параллельных прямой m). Фигура F называется **кососимметричной**.

Медиана треугольника есть его ось косой симметрии, сопряженная прямой, на которой лежит противолежащая сторона. Параллелограмм имеет четыре оси косой симметрии - - прямые, проходящие через середины противолежащих сторон, и прямые, на которых лежат его диагонали (укажите, какой прямой сопряжена каждая ось).

Рассмотрим вопрос об осях косой симметрии параболы.

Теорема I. Середины параллельных хорд параболы принадлежат прямой.

Доказательство. Пусть даны парабола и множество ее хорд, параллельных прямой p, причем прямая p непараллельна оси параболы (рис.3). Выберем систему координат Oxy так, чтобы уравнение данной параболы имело вид $y=ax^2$. Тогда прямые, которым принадлежат параллельные хорды, задаются уравнениями $y=kx+b$, где k - угловой коэффициент прямой p.

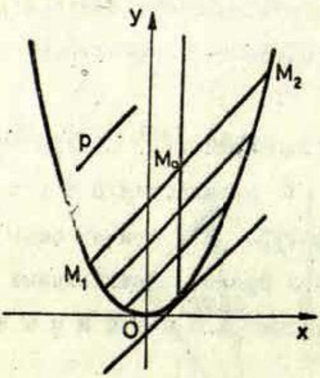


Рис.3

Координаты концов $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ хорды M_1M_2 удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y=ax^2; \\ y=kx+b. \end{cases}$$

Исключив y, находим уравнение для абсцисс точек M_1 и M_2: $ax^2-kx-b=0$.

Согласно свойству корней квадратного уравнения

$$x_1+x_2=\frac{k}{a}.$$

Значит, абсцисса середины $M_0(x_0,y_0)$ хорды M_1M_2 не зависит от значения b:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{k}{2a}=\text{const}.$$

Таким образом, середины хорд, параллельных прямой p, принадлежат прямой $x=\frac{k}{2a}$.

Определение. Прямая, которой принадлежат середины хорд, параллельных прямой p, называется диаметром параболы, сопряженным прямой p (или пучку прямых, параллельных p).

Из доказательства теоремы I следует, что:

1) диаметр с параболой имеет одну общую точку;

2) диаметр параболы сопряжен касательной, проведенной к параболе в точке пересечения с диаметром;

3) все диаметры параболы параллельны между собой (параллельны ее оси симметрии).

Итак, мы выяснили, что каждый диаметр параболы есть ее ось косой симметрии, сопряженной касательной, проведенной к параболе в точке пересечения ее с диаметром.

ЗАДАЧИ

1. Доказать, что середины оснований трапеции, точка пересечения диагоналей и точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, принадлежат одной прямой.

Р е ш е н и е. Пусть ℓ – прямая, проходящая через середины E и F оснований $[AB]$ и $[CD]$. При симметрии ℓ^a, где $a = (AB)$, имеем: $D \to C$, $A \to B$, $C \to D$, $B \to A$. Но соответственные прямые DA и CB, AC и BD пересекаются на оси ℓ.

2. $[A_1A_2]$ и $[B_1B_2]$ – параллельные хорды параболы; M и N – – параллельные проекции точек A_1 и A_2 на (B_1B_2) параллельно оси параболы. Доказать, что треугольники A_1B_1M и A_2B_2N равновелики.

3. Хорда AB параболы параллельна касательной, проведенной к параболе в точке C. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекают параболу соответственно в точках A_0 и B_0. Доказать, что $|AA_1| : |A_1A_0| = |BB_1| : |B_1B_0|$.

Р е ш е н и е. Прямая CC_1, где C_1 – середина $[AB]$, является осью косой симметрии параболы и треугольника ABC, причем сопряжена эта ось прямой AB (рис.4). Обозначим $(CC_1)=m$, $(AB)=c$. При косой симметрии m^c: $A \to B$, $A_1 \to B_1$. Следовательно, точка $A_0=(AA_1)\cap w$ отображается на точку пересечения соответственных образов, т.е. на $B_0=(BB_1)\cap w$ (w - данная парабола). Ввиду свойства косой симметрии сохранять отношение параллельных отрезков имеем равенство:

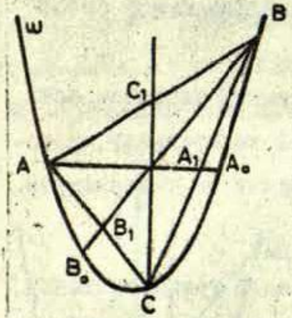


Рис.4

$$|AA_1|:|A_1A_0|=|BB_1|:|B_1B_0|$$

4. Даны ось l некоторой косой симметрии и прямые a и b, пересекающиеся в точке M, $M\notin l$. Задать косую симметрию так, чтобы образы a' и b' данных прямых были перпендикулярны.

5. Доказать, что $a^l \circ l^a$ есть центральная симметрия с центром $O=a\cap l$. Сформулировать и доказать обратное утверждение.

6. Составить формулы косой симметрии l^m, если ось l задана уравнением $x+2y-1=0$, а пучок прямых, параллельных прямой m - вектором $\vec{m}=(1,-1)$.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПОВОРОТА ПЛОСКОСТИ

<u>Определение.</u> Композиция $l_2^b \circ l_1^a$ двух косых симмет-

рий называется п а р а б о л и ч е с к и м п о в о р о т о м плоскости, если $l_1 \cap l_2 = \varnothing$, $a \nparallel b$.

Укажем основные свойства параболического поворота.

I. Прямая отображается на прямую, параллельные прямые - на параллельные прямые.

2. Отрезок отображается на отрезок.

3. Сохраняется отношение длин параллельных отрезков.

4. Сохраняется площадь фигуры.

Свойства I - 4 непосредственно следуют из определения параболического поворота.

5. Параболический поворот не имеет неподвижных точек.

<u>Доказательство.</u> Дан параболический поворот $\pi = l_2^b \circ l_1^a$. Пусть A - произвольная точка плоскости, $A_0 = l_1^a(A)$, $A' = l_2^b(A_0) = \pi(A)$, $(AA_0) \cap l_1 = L_1$, $(A_0A') \cap l_2 = L_2$ (рис.5).

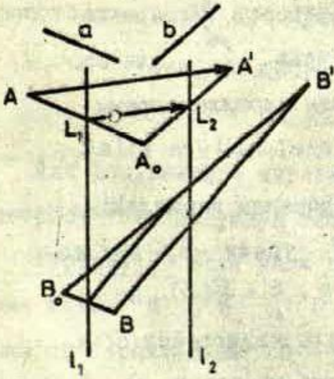


Рис.5

Тогда согласно свойству косой симметрии $\overrightarrow{AA_0} = 2\overrightarrow{L_1A_0}$, $\overrightarrow{A_0A'} = 2\overrightarrow{A_0L_2}$, откуда получаем, что

$$\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{L_1L_2} \qquad (I)$$

Для разных точек получим разные векторы $\overrightarrow{L_1L_2}$. Но поскольку $L_1 \in l_1$, а $L_2 \in l_2$, то $\overrightarrow{L_1L_2} \neq \vec{0}$. Поэтому никакая точка не может совпасть со своим образом.

6. Параболический поворот имеет один инвариантный пучок параллельных прямых.

Доказательство. Обозначим множество прямых, параллельных прямой l_1, через $\{l\}$. Если $(AB)\subset\{l\}$, то согласно свойству косой симметри.. $(A_0B_0)\parallel(AB)$ и $(A_0B_0)\parallel(A'B')$, где $(A_0B_0)=l_1^a((AB))$, $(A'B')=l_2^b((A_0B_0))=\pi((AB))$. Следовательно, $\{l\}$ - инвариантный пучок параллельных прямых параболического поворота $\pi=l_2^b\circ l_1^a$.

Докажем, что $\{l\}$ - единственный инвариантный пучок параллельных прямых. Допустим противное, т.е. что существует некоторая прямая $m\notin\{l\}$ такая, что прямые m и $m'=\pi(m)$ параллельны (рис.6). Обозначим $m\cap l_1=P$, $m'\cap l_2=R$. Поскольку $l_1^a(P)=P$, $l_2^b(R)=R$, то $l_1^a(m)=(PR)$.

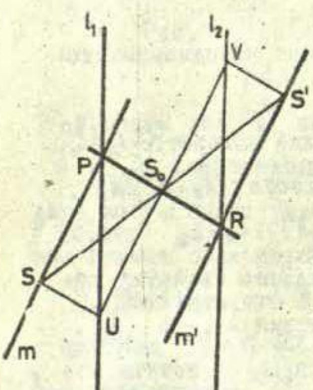


Рис.6

Найдем прообраз S середины S_0 отрезка PR при косой симметрии l_1^a. Для этого построим параллелограмм PS_0US, где $(S_0U)\parallel m$ и $U\in l_1$. Значит, $(S_0S)\parallel a$. Аналогично построением параллелограмма $S_0RS'V$ находим образ S' точки S_0 при косой симметрии l_2^b. Значит, $(S_0S')\parallel b$, $S'=\pi(S)$. Но поскольку S_0 - центр симметрии фигуры, являющейся объединением построенных параллелограммов, то точки S, S_0

и S' коллинеарны. Следовательно, $a \parallel b$, что противоречит данному. Итак, предположение неверно.

К тому же приходим, если допустить, что $m = m'$.

7. Если прямая принадлежит инвариантному параллельному пучку прямых, то расстояние от этой прямой до ее образа при параболическом повороте $\pi = l_2^b \circ l_1^a$ равно удвоенному (ориентированному!) расстоянию от прямой l_1 до прямой l_2.

Доказательство следует из равенства (I).

8. Параболический поворот не имеет инвариантных прямых.

Действительно, инвариантными прямыми могут быть только прямые инвариантного параллельного пучка. Но ввиду свойства 7 никакая прямая пучка $\{l\}$ не совпадает со своим образом.

9. Из свойства 7 следует, что расстояние между двумя прямыми инвариантного параллельного пучка равно расстоянию между их образами.

§ 4. МНОЖЕСТВО ИНВАРИАНТНЫХ ПАРАБОЛ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПОВОРОТА

Для дальнейшего изучения параболического поворота потребуется следующая теорема.

Теорема 2. Если даны прямая l и три неколлинеарные точки A, B, C, причем задаваемые ими прямые не параллельны l, то существует единственная парабола с диаметром l, проходящая через точки A, B и C.

Доказательство. Выберем систему координат Oxy так, чтобы начало координат совпало с точкой A, а ось Oy была параллельна прямой l. Тогда $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, причем $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, а уравнение искомой параболы имеет вид $y = ax^2 + bx$.

Так как парабола проходит через точки B и C, то

$$\begin{cases} x_1^2 a + x_1 b = y_1; \\ x_2^2 a + x_2 b = y_2. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение относительно неизвестных a и b, ибо $x_1 : x_2 \neq x_1^2 : x_2^2$. Следовательно, условию теоремы удовлетворяет только одна парабола, что и требовалось доказать.

Пусть $\{l\}$ - инвариантный пучок параллельных прямых параболического поворота $\pi = l_2^b \circ l_1^a$. Из теоремы 2 следует, что через точки M, $M_0 = l_1^a(M)$ и $M' = l_2^b(M_0) = \pi(M)$, если $M \neq M_0$ и $M_0 \neq M'$, проходит единственная парабола ω, множество диаметров которой есть пучок $\{l\}$ (рис.7).

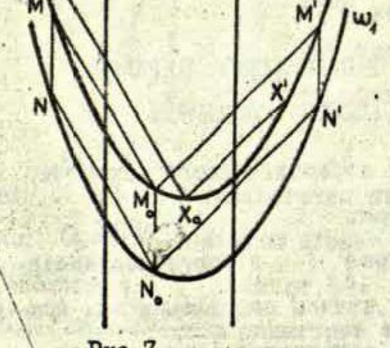


Рис.7

Найдем образ параболы ω при данном параболическом повороте $\mathcal{F} = \ell_2^b \circ \ell_1^a$.Так как ℓ_1 - диаметр параболы w ,сопряженный прямой a ,то $\ell_1^a(w) = w$.Так же $\ell_2^b(w) = w$,ибо ℓ_2 - диаметр,сопряженный прямой b . Следовательно,при преобразовании $\mathcal{F}$ парабола w отображается на себя,т.е. если $X \in w$,то и $\mathcal{F}(X) \in w$. (Парабола w как бы "скользит" сама по себе).

Поскольку M - произвольная точка плоскости,то получаем некоторое множество парабол,каждая из которых при данном параболическом повороте $\mathcal{F} = \ell_2^b \circ \ell_1^a$ отображается на себя.Диаметры этих парабол принадлежат инвариантному пучку $\{\ell\}$ параболического поворота.О взаимном расположении инвариантных парабол параболического поворота говорится в следующей теореме.

<u>Теорема 3.</u> Любая инвариантная парабола параболического поворота получается из другой инвариантной параболы путем параллельного переноса параллельно ее диаметрам.

<u>Доказательство.</u> Пусть w и w_1 - две инвариантные параболы параболического поворота $\mathcal{F}$ (рис.7). Возьмем точки $M \in w$ и $N \in w_1$,такие,чтобы $(MN) \subset \{\ell\}$

$N_0 = \ell_1^a(N)$, $M_0 = \ell_1^a(M)$, $N' = \ell_2^b(N_0)$, $M' = \ell_2^b(M_0)$

Согласно свойству косой симметрии $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_0N_0} = \overrightarrow{M'N'}$

Поскольку при параллельном переносе $\overrightarrow{MN}$ точки M , M_0 и M' отображаются соответственно на точки N , N_0 и N' ,а диаметры ℓ_1 и ℓ_2 - сами на себя,то согласно теореме 2 образом параболы w при переносе ми является парабола w_1. Теорема доказана.

Итак, инвариантные параболы параболического поворота конгруэнтны, имеют общую ось и обращены выпуклостями в одну сторону. Через каждую точку и ее образ проходит единственная инвариантная парабола, а расстояние (ориентированное) между диаметрами, проходящими через каждые соответственные точки, одно и то же. В геометрии Галилея это расстояние называется "углом" параболического поворота. (Сравните с поворотом плоскости).

Теорема 3. Для всякой инвариантной параболы площадь параболического сегмента, ограниченного хордой, соединяющей соответственный точки, есть величина, постоянная для данного параболического поворота.

Доказательство. Пусть w - инвариантная парабола данного параболического поворота $\mathcal{P}$, а A, $A'=\mathcal{P}(A)$, B, $B'=\mathcal{P}(B)$ - точки на ней (рис.8). Через точки A, A', B, B' проведем диаметры a, a', b, b'.

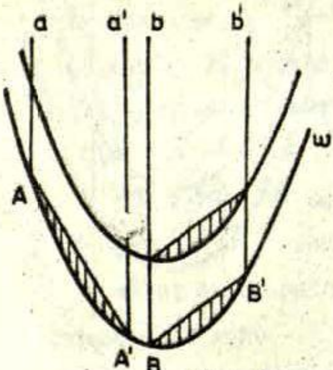


Рис.8

Выполним параболический поворот $\mathcal{P}_1$, отображающий параболу w на себя так, что $\mathcal{P}_1(A)=B$. Из того, что (a,a') и (b,b') - пары соответственных диаметров параболы w при параболическом повороте $\mathcal{K}$, следует,что расстояние от прямой a до b равно расстоянию от прямой a' до b' .Значит,$\mathcal{K}_1(A')=B'$.

Таким образом,при параболическом повороте $\mathcal{K}_1$ параболический сегмент AA' отображается на параболический сегмент BB' .Следовательно,сегменты AA' и BB' равновелики (свойство 4 § 3).Теорема доказана для сегментов одной и той же инвариантной параболы.

Так как две инвариантные параболы можно совместить параллельным переносом,при котором соответственные точки одной параболы отображаются на соответственные точки другой,а параболический сегмент - на конгруэнтный параболический сегмент,то теорема имеет место для всякой инвариантной параболы.

Поскольку параболическим поворотом параболу можно отобразить на себя,а ее точку - на любую другую точку этой параболы,то многие свойства парабол легко доказываются с помощью этого преобразования.Иногда целесообразно применить такой параболический поворот,чтобы образы рассматриваемых фигур (точек,прямых)были симметричны относительно оси параболы.

ЗАДАЧИ

I. Доказать,что прямая,проведенная через точку пересечения двух касательных к параболе параллельно оси параболы,делит хорду,соединяющую точки касания,пополам.

Р е ш е н и е. Пусть MA и MB - касательные к параболе w , m - диаметр,проходящий через точку M ;

$m \cap \omega = S$, $m \cap [AB] = K$. Выполним параболический поворот $\mathcal{P}$, отображающий ω на себя, а точку S – на вершину S' параболы ω (рис.9). Тогда $M' \in p$ (p – ось параболы), касательные MA и MB отобразятся на касательные $M'A'$ и $M'B'$. В силу симметрии относительно оси p : $|A'K'| = |K'B'|$. Но поскольку при параболическом повороте сохраняется отношение длин параллельных отрезков, то $|AK| = |KB|$.

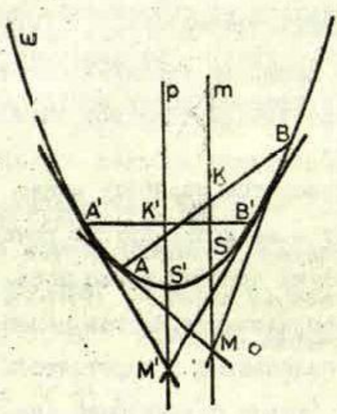


Рис.9

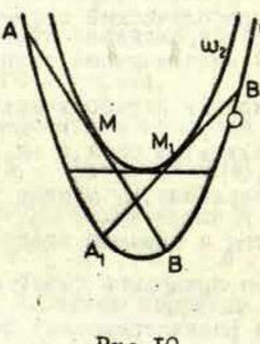


Рис.10

2. Даны параболы $y = x^2$ и $y = x^2 + a$ $(a > 0)$. Доказать, что:

а) всякие две хорды первой параболы, касающиеся второй, отсекают от первой равновеликие сегменты и делятся точками касания пополам;

б) для любой прямой, пересекающей параболы соответственно в точках K , L и K_1 , L_1 , справедливо равенство $|KK_1| = |LL_1|$.

Р е ш е н и е. а) Пусть хорды AB и A_1B_1 параболы w_1 касаются параболы w_2 в точках M и M_1 (рис.10). Выполним параболический поворот, отображающий параболу w_2 на себя, а точку M – на M_1. Тогда касательная к параболе в точке M отобразится на касательную в точке M_1, а парабола w_1 – на себя. Следовательно, $(AB) \cap w_1 = \{A, B\}$ отобразится на $(A_1B_1)_0 \cap w_1 = \{A_1, B_1\}$. Поскольку параболический поворот не меняет площадь фигуры, то параболические сегменты AB и A_1B_1 равновелики.

Применив параболический поворот, отображающий параболу w_2 на себя, а точку M – на вершину параболы, получим, что $|AM| = |MB|$.

3. MA и MB – касательные к параболе. (KL) касается параболы в ее точке R дуги AB и пересекает (MA) и (MB) соответственно в точках K и L. Доказать, что:

а) длина ортогональной проекции отрезка KL на касательную, проведенную в вершине параболы, не зависит от касательной KL ;

б) $\frac{|MK|}{|KA|} = \frac{|BL|}{|LM|} = \frac{|LR|}{|RK|}$;

в) $S_{\Delta ABR} = S_{\Delta MKL}$.

4. Доказать, что три произвольные касательные параболы высекают на двух других касательных пропорциональные отрезки.

5. $x^2 = 2py$ $(p>0)$ - инвариантная парабола параболического поворота. Расстояние между соответственными диаметрами $h>0$. Найти площадь параболического сегмента, ограниченного хордой, проходящей через соответственные точки.

Указание. $S = \frac{1}{12p}h^3$. Решение см. [I, с.I84].

Литература

I. Комиссарук А.М. Основы аффинной геометрии на плоскости. Минск, Вышейшая школа, I967. 240 с.

2. Яглом И.М., Ашкинузе В.Г. Идеи и методы аффинной и проективной геометрии. М., Учпедгиз, I962. 247 с.

3. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М., Наука, I969. 304 с.

4. Медведева Л.Б., Скопец З.А. Представление эквиаффинных преобразований плоскости в виде произведения осевых симметрий. - Ученые записки Ярославского désinstituta, I97I, вып. 92, с. I50-I75.

5. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М., Изд-во МГУ, I969, с. 249-253.

6. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Геометрические преобразования. М., Изд-во МГУ, I96I, с. 87-I29.

Ш.Х.Михелович

Периодические дроби как тема для внеклассных занятий в 9-м классе

В факультативном курсе "Избранные вопросы математики УП-УШ классов" учащиеся знакомятся с аппаратом сравнений. Хотелось бы, чтобы эта тема в старших классах не была предана забвению, а получила дальнейшее развитие в кружковых занятиях. В этом смысле весьма подходящей является тема о периодических дробях, которая затрагивается в обязательном курсе IX-го класса в связи с изучением действительных чисел.

В курсе IX-го класса доказывается теорема, что каждое рациональное число представимо бесконечной периодической десятичной дробью. Пользуясь аппаратом сравнений, можно доказать ряд других интересных свойств периодических дробей. С другой стороны, учащиеся знакомятся с новым важным понятием порядка вычета по данному модулю и узнают новый подход к доказательству теоремы Эйлера.

Ниже приводится примерное изложение темы для внеклассных занятий. Хочется обратить внимание на доступное доказательство свойств полупериода дроби $\frac{a}{p}$, где p - простое число, когда период состоит из чётного числа знаков. Обычное доказательство указанного свойства (см., напр., [2, с.228], [3, с.189-191], [4, с.43-44]) требует бóльших усилий.

I) При обращении обыкновенной несократимой дроби $\frac{a}{b}$, например $\frac{47}{42}$, содержащей в знаменателе отличные от чисел 2 и 5 сомножители, в десятичную получается собственная бесконечная периодическая дробь, т.е. такая, которая не имеет нулей (или девяток) в периоде.

Действительно, мы должны получить (собственную) бесконечную десятичную дробь, иначе мы имели бы

$\frac{47}{42} = \frac{a}{10^k}$,а следовательно, и

$47 \cdot 10^k = a \cdot 42$. Но этого не может быть, так как правая часть равенства делится на 3, а левая часть на 3 не делится, поскольку $(47,3) = 1$ и $(10^k,3) = 1$[1].

Период же получается потому, что все остатки, возникающие в процессе деления числителя несократимой дроби на её знаменатель, меньше знаменателя. Так, например, при делении 47 на 42 остатки r удовлетворяют условию $1 \leq r < 42$ ($r = 0$ исключается, потому что в таком случае получилась бы конечная десятичная дробь, что, как мы видели, невозможно), поэтому не далее чем через 41 шаг один из остатков должен появиться снова, а коль скоро начнут повторяться остатки, будут повторяться и цифры в частном.

2) Постараемся выяснить, сколько получится цифр в периоде. Начнем со случая, когда знаменатель положительной несократимой дроби $\frac{a}{b}$ не содержит сомножителей 2 и 5, т.е. когда $(b,10)=1$. При этом ограничимся правильной дробью (так как в случае обращения неправильной дроби в десятичную можно сначала выделить её целую часть).

Ясно, что в такой дроби, например, $\frac{a}{21}$, числитель может принять одно из $\varphi(21)$ значений, меньших 21 и взаимно простых с 21[2].

---

1 Символом (a, b) мы будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b.

2 $\varphi(m)$ - означает функцию Эйлера, т.е. число чисел ряда $0,1,2,\ldots, m-1$, взаимно простых с m. Если $m = p$ число простое, то $\varphi(p)=p-1$. Для чисел a и b взаимно простых $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, а для $m=p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Подробнее см., например, [1, с.141 - 152].

Пусть имеется дробь $\frac{5}{21}$. Выполним деление числителя на знаменатель так, как это обычно делается при обращении обыкновенной дроби в десятичную. Получим (записывая остатки, умноженные на IO в одну строку):

$$5\,\underline{|21}\quad 50\,\underline{|21}\quad 80\,\underline{|21}\quad 170\,\underline{|21}\quad 20\,\underline{|21}\quad 200\,\underline{|21}\quad 110\,\underline{|21}\quad 5.$$
$$0\qquad\quad 2\qquad\quad 3\qquad\quad 8\qquad\quad 0\qquad\quad 9\qquad\quad 5$$

Таким образом, 10^6 - наименьшая степень десяти, на которую надо умножить число 5, чтобы произведение указанных чисел при делении на 2I дало остаток 5, а в частном определился наименьший период дроби $\frac{5}{21}$. При этом $10^6\cdot 5\equiv 5 \pmod{21}$, откуда $10^6\equiv 1 \pmod{21}$.

Нетрудно понять, что 6 - это наименьшее натуральное значение числа m, для которого $10^m\equiv 1 \pmod{21}$. В самом деле, если такое сравнение имело бы место для $m<6$, то мы имели бы также $10^m\cdot 5\equiv 5 \pmod{21}$ и это означало бы, что 10^6 не является наименьшей натуральной степенью десяти, на которую следует умножить числитель дроби $\frac{5}{21}$, чтобы выделить из нее наименьший период.

В общем случае дробь $\frac{a}{b}$, $(a, b) = 1$, $(b, 10) = 1$ обращается в чисто периодическую десятичную дробь с m цифрами в периоде, если m - наименьший натуральный показатель степени, для которого выполняется сравнение $10^m\equiv 1 \pmod{b}$. Число цифр в периоде зависит только от знаменателя b, а от числителя a оно не зависит. Мы будем это число обозначать через $\lambda(b)$ и называть также порядком числа IO по модулю b.

Согласно теореме Эйлера[I] для $(b, 10) = 1$ $10^{\varphi(b)}\equiv 1 \pmod{b}$. Поэтому, рассматривая ряд чисел

$$10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots,$$

I Доказательство этой теоремы см., например, [I, с.152-157].

мы можем быть уверены в том, что не позже чем через $\varphi(b)$ шагов найдется число 10^m с наименьшим натуральным показателем m, таким, что впервые выполнится условие $10^m \equiv 1 \pmod{b}$. Итак, число цифр в периоде $\lambda(b) \leq \varphi(b)$.

3) Покажем, что $\varphi(b)$ делится на $\lambda(b)$, т.е. $\varphi(b)|\lambda(b)$[1]. В самом деле, пусть

$$\varphi(b) = \lambda(b)\cdot q + r \quad , \quad 0 \leq r < \lambda(b).$$

Тогда по модулю b имеем

$$10^{\varphi(b)} \equiv (10^{\lambda(b)})^q \cdot 10^r \equiv 10^r \equiv 1.$$

Получается противоречие с условием для $\lambda(b)$, так как $r < \lambda(b)$ и все же $10^r \equiv 1 \pmod{b}$. Чтобы этого противоречия не было, мы должны полагать, что $r = 0$, но в таком случае $\varphi(b)|\lambda(b)$, что и утверждается.

Заметим, что в случае, когда $b = p$ - число простое, $\lambda(p)$ является делителем $\varphi(p) = p - 1$. Доказанное свойство облегчает нахождение числа $\lambda(b)$.

<u>Пример</u>. Найти число цифр в периоде при обращении в десятичную дробь несократимой дроби со знаменателем 23.

Так как число $\lambda(23)$ делит $\varphi(23) = 22$, то оно находится среди чисел

$$1,\ 2,\ 11,\ 22.$$

По модулю 23 имеем:

$$10^1 \equiv 10,\ 10^2 \equiv 8,\ 10^4 \equiv 64 \equiv -5,\ 10^8 \equiv 25 \equiv 2;$$
$$10^{10} \equiv 16 \equiv -7,\ 10^{11} \equiv -70 \equiv -1,\ 10^{22} \equiv 1.$$

Итак, в периоде имеются 22 цифры.

4) Теперь, когда мы узнали, как определить число цифр в периоде, займемся изучением самого периода. Здесь также имеется много интересного.

---

1 То, что a делится на b, будем обозначать символом $a|b$.

Расчленяя деление $10^6 \cdot 5 : 21$ на отдельные этапы, находим:

$$10 \cdot 5 = 21 \cdot 2 + 8$$
$$10 \cdot 8 = 21 \cdot 3 + 17$$
$$10 \cdot 17 = 21 \cdot 8 + 2$$
$$10 \cdot 2 = 21 \cdot 0 + 20$$
$$10 \cdot 20 = 21 \cdot 9 + 11$$
$$10 \cdot 11 = 21 \cdot 5 + 5$$

Замечаем, что все неполные частные 2, 3, 8, 0, 9, 5 являются цифрами. Это и понятно, ведь в левой части равенства число 10 умножается на числа, меньшие 21, поэтому в правой части равенства дополнительные множители для 21 (т.е. неполные частные) - меньше 10. Кроме того, все остатки взаимно просты с 21, что легко усматривается из отдельных строк, например, $(10,21) = 1$, $(5,21) = 1 \Longrightarrow (10 \cdot 5, 21) = 1$, а отсюда уже далее следует, что и $(8,21) = 1$.

Отмеченные факты имеют место в общем случае для дроби $\frac{a}{b}$, $(b,10) = 1$, $(a,b) = 1$, $a < b$.

В результате m последовательных делений a на b, если m порядок 10 по модулю b, получаем

$$\begin{aligned} 10 \cdot a &= b q_1 + r_1 \\ 10 \cdot r_1 &= b q_2 + r_2 \qquad (1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 10\, r_{m-1} &= b q_m + a \end{aligned}$$

где r_i удовлетворяют условию $0 < r_i < b$, q_i - являются цифрами и $(r_i, b) = 1$.

Кроме того, из равенства (1) видно, что дробь

$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{b}$ имеет период $q_1 q_2, \ldots, q_m$

$\frac{r_1}{b}$ " " $q_2 q_3 \ldots q_1$ и т.д.,

а вообще дробь $\frac{r_k}{b}$ " " $q_{k+1}, \ldots, q_k$.

Таким образом, периоды дробей

$$\frac{r_0}{b}, \frac{r_1}{b}, \ldots, \frac{r_{m-1}}{b}$$

отличаются друг от друга только круговой перестановкой цифр.

Так, например,

$\frac{5}{21} = 0,(238095)$, $\frac{8}{21} = 0,(380952)$,

$\frac{17}{21} = 0,(809523)$, $\frac{2}{21} = 0,(095238)$, $\frac{20}{21} = 0,(952380)$,

$\frac{11}{21} = 0,(523809)$.

5) Но как в данном примере, так и вообще числители $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$ не обязательно исчерпывают все возможные числители несократимых правильных дробей со знаменателем b.

Спрашивается, что можно сказать о периодах несократимых правильных дробей со знаменателем b, но с другими возможными числителями?

Если исходить из дроби $\frac{1}{21}$, получаем:

$\frac{1}{21} = 0,(047619)$, $\frac{10}{21} = 0,(476190)$, $\frac{16}{21} = 0,(761904)$,

$\frac{13}{21} = 0,(619047)$, $\frac{4}{21} = 0,(190476)$, $\frac{19}{21} = 0,(904761)$.

В данной серии также 6 дробей, а их периоды отличаются между собой лишь круговой перестановкой.

Этот факт не должен нас удивить.

При обращении в десятичную дробь числа $\frac{1}{21}$ ни один из старых остатков не может появиться, так как каждый из старых остатков r_i порождает и все остальные. Вместе с новым остатком 1 появилось бы по меньшей мере 7 остатков до появления периода, а этого быть не может. Поэтому дробь $\frac{1}{21}$ порождает новую серию дробей

$$\frac{s_0}{b}, \frac{s_1}{b}, \ldots, \frac{s_{m-1}}{b},$$

которые также имеют периоды длины 6, отличающиеся между собой лишь круговой перестановкой цифр.

Это явление, очевидно, общее. Если $\lambda(b) \neq \varphi(b)$, то каждая дробь, не входящая в первую серию, порождает новую серию дробей с периодом такой же длины. Поскольку правильных несократимых дробей со знаменателем b всего имеется $\varphi(b)$, то должно быть $\varphi(b) = k \cdot \lambda(b)$. [Для $b = 21$ число $\varphi(b) = \varphi(3) \cdot \varphi(7) = 12$, так что $\varphi(21) = 2 \cdot \lambda(21)$]. Мы получили новое подтверждение известного факта, что $\varphi(b) | \lambda(b)$, причем независимо от теоремы Эйлера. Если учесть теперь, что $10^{\lambda(b)} \equiv 1 \pmod b$, то получаем далее $10^{k \cdot \lambda(b)} \equiv 1 \pmod b$ и $10^{\varphi(b)} \equiv 1 \pmod b$. Отсюда сразу же следует теорема Эйлера, если перейти к системе счисления с основанием a.

Итак, зная теорему Эйлера, можно установить, что $\varphi(b) | \lambda(b)$. Но можно и независимо от теоремы Эйлера доказать, что $\varphi(b) | \lambda(b)$ и получить тогда как следствие теорему Эйлера [а, значит, и малую теорему Ферма: если p простое число и $(a, p) = 1$, то $a^{p-1} \equiv 1 \, (p)$].

6) Рассмотрим теперь обращение несократимой дроби $\frac{a}{b}$ в десятичную, когда b и 10 не взаимно простые числа. Пусть при этом $b = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot b_1$, где $(b_1, 10) = 1$, а наибольшее из чисел α и β обозначено через n.

Тогда число

$$\frac{10^n \cdot a}{b} = \frac{2^{n-\alpha} \cdot 5^{n-\beta} \cdot a}{b_1} = \frac{a_1}{b_1},$$

где $(a_1, b_1) = 1$, $(b_1, 10) = 1$. Для этого случая имеем

$$\frac{10^n \cdot a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = K,(q_1 q_2 \ldots q_m).$$

Для того чтобы найти $\frac{a}{b}$, необходимо число $K,(q_1 q_2, \ldots q_m)$ разделить на 10^n, т.е. перенести запятую на n знаков влево. Получается смешанная периодическая дробь с n цифрами между запятой и началом периода:

$$\frac{a}{b} = K, k_1 k_2 \ldots k_n (q_1 q_2 \ldots q_m).$$

Итак, при обращении несократимой дроби $\frac{a}{b}$ в десятичную, где $b = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot b_1$, $(b_1, 10) = 1$, получается смешанная периодическая дробь. При этом число цифр в периоде равно порядку числа 10 по модулю b_1, а число цифр вправо от запятой до первого периода равно n, наибольшему из чисел α и β.

7) Остановимся в заключение на особенностях некоторых периодов.

а) Если для простого знаменателя p, отличного от 2 и 5, число цифр в периоде является четным, то сумма полупериодов состоит только из девяток.

Например,

$$\frac{1}{7} = 0,(142857), \quad 142 + 857 = 999;$$

$$\frac{1}{11} = 0,(09), \quad 0 + 9 = 9;$$

$$\frac{1}{17} = 0,(0588235294117647),$$

$$05882352 + 94117647 = 99999999.$$

Докажем это свойство. Предварительно отметим, что если по модулю p число 10 имеет порядок $2n$, то тогда $10^n \equiv -1 \pmod{p}$. В самом деле, по условию $2n$ – наименьший натуральный показатель степени, для которого выполняется сравнение $10^{2n} \equiv 1\ (p)$. Из него следует, что $10^{2n} - 1 \mid p$ или $(10^n - 1)(10^n + 1) \mid p$.

Первая скобка на p делиться не может, иначе мы имели бы $10^n \equiv 1\ (p)$, что противоречит условию. Поэтому на p делится вторая скобка, т.е. $10^n \equiv -1(p)$. Последнее сравнение можно переписать и в таком виде: $10^n \equiv p - 1\ (p)$. Отсюда видно, что через n делений I на p должен появиться остаток $p - 1$.

Если теперь

$$10 \cdot 1 = pq_1 + r_1, \quad 0 < r_1 < p.$$

то

$$10\,(p - 1) = p\,(9 - q_1) + (p - r_1), \; 0 < p - r_1 < p,$$

если

$$10 \cdot r_1 = p \cdot q_2 + r_2, \quad 0 < r_2 < p \;,$$

то

$$10 \cdot (p - r_1) = p(9 - q_2) + (p - r_2), \quad 0 < p - r_2 < p \text{ и т.д.}$$

Итак, видим следующее:

I) среди остатков деления I на p должен появиться остаток $p - 1$ и тогда можно сказать, что первый полупериод завершен;

2) цифры второго полупериода дополняют цифры первого до девяти. В самом деле, при делении чисел $10 \cdot 1, 10 \cdot r_1$ и т.д. на p, мы получим неполные частные q_1, q_2 и т.д.; затем после появления остатка $p - 1$, мы будем делить на p числа $10(p - 1)$, $10(p - r_1)$ и т.д. и в качестве неполных частных найдем числа $9 - q_1$, $9 - q_2$ и т.д.

Аналогичная картина получается, когда на p делим a, где $a < p$.

Упражнения.

I) Найдем число цифр в периоде при обращении несократимой дроби со знаменателем b в десятичную; значения для b следующие: а) 13, 17, 33, 37, 39, б) 220, 1150, 5250 (указать также число цифр вправо от запятой до первого периода).

Ответы: а) 6, 16, 2, 3, 6; б) 2, 2; 22, 2; 6, 3.

2) Сколько имеется систем несократимых дробей со знаменателем b, из которых каждая имеет периоды, отличающиеся только круговой перестановкой; значения для b - те же, что в упражнении I,а).

Ответы: 2, I, IO, I2, 4.

3) В каждой из систем несократимых дробей со знаменателем 39 указать по одному представителю, а также его десятичное представление.

Ответы: $\frac{1}{39} = 0,(025641)$, $\frac{2}{39} = 0,(051282)$.

$$\frac{7}{39} = 0,(179487),\ \frac{14}{39} = 0,(358974).$$

Указание.

Находим разложение для дроби $\frac{1}{39}$, затем записываем в возрастающей последовательности наименьшие положительные вычеты приведенной системы по модулю 39 и берем в ней первое число, которое не встречается среди остатков разложения дроби $\frac{1}{39}$. Это число 2. С разложением дроби $\frac{2}{39}$ обращаемся аналогично и находим далее дроби $\frac{7}{39}$ и $\frac{14}{39}$.

4) Зная, что

$$\frac{1}{17} = 0,(0588235294117647),$$

$$\frac{1}{19} = 0,(052631578947368421),$$

найти периоды дробей $\frac{6}{17}$ и $\frac{8}{19}$.

Решение. Поскольку число цифр в периоде $\frac{1}{17}$ равно I6, то $\lambda(17) = \varphi(17)$, поэтому периоды всех несократимых дробей со знаменателем I7 отличаются лишь круговой перестановкой. Непосредственным делением находим первые две цифры $\frac{6}{17} = 0,35...$, тогда уже ясно, что

$$\frac{6}{17} = 0,(3529411764705882).$$

Период $\frac{8}{19}$ находится аналогичным способом.

Литература

1. Михелович Ш.Х. Материалы для факультативных занятий по дополнительным вопросам арифметики. Даугавпилс, 1973, 180с.
2. Окунев Л.Я. Краткий курс теории чисел. М., 1956, 240 с.
3. Радемахер Г. и Теплиц О. Числа и фигуры. М., 1962, 264 с.
4. Müller M. Rechenvorteile. Leipzig, 1963, 82 s.

М.С.Старожицкий

Элементы теории вероятностей на факультативных занятиях в 9-м классе

Теория вероятностей как наука, изучающая закономерности в массовых случайных явлениях, имеет важное методологическое значение. Благодаря эффективности своих методов исследования теория вероятностей нашла свое приложение во многих областях науки и техники, экономике и даже в таких отраслях знания, как лингвистика, археология и др.

Многие выпускники средних школ в своей дальнейшей работе встречаются с вопросами, требующими обработки статистического материала, и в этой связи знакомство учащихся с основами теории вероятностей и элементами математической статистики имеет важное значение. Актуальность этих разделов в факультативном курсе средней школы определяется не только их практическим приложением, но также влиянием на развитие умственных способностей и формирование научного мировоззрения учащихся.

Изучение основ теории вероятностей способствует дальнейшему углублению диалектико-материалистического мировоззрения учащихся, позволяет на ряде простых примеров уяснить связь между случайностью и необходимостью.

Программа математики средней школы дает возможность достаточно широко ознакомить учащихся старших классов с основными положениями теории вероятностей. В ней находят применение некоторые факты из курса "Алгебра и начала анализа". Вероятностные методы, в свою очередь, могут быть использованы в ряде вопросов этого курса.

В настоящей статье излагаются соображения по изучению некоторых вопросов теории вероятностей на факультативных и внеклассных занятиях.

I. Случайные события и операции над ними.

На доступных для каждого ученика примерах, связанных с бросанием игрального кубика, монеты и пр., можно раскрыть понятие случайного события, множества элементарных событий.

Так при бросании монеты может выпасть герб - элементарное событие e_1 или цифра - элементарное событие e_2. Множество элементарных событий в этом примере состоит из 2 элементов, а множество случайных событий состоит из $4 = 2^2$ элементов e_1, e_2, U, V, где $U = e_1 + e_2$ - достоверное событие, заключающееся в том, что при одном бросании монеты непременно выпадет либо герб, либо цифра, а $V = e_1 \cdot e_2$ - невозможное событие, содержание которого состоит в том, что при одном броске монеты одновременно выпасть герб и цифра не могут.

Событие V соответствует в алгебре множеств пустому множеству.

При бросании двух монет число элементарных событий равно 4: e_1, e_2, e_1' и e_2', где e_1 и e_2 - выпадение герба и цифры при бросании первой монеты, а e_1' и e_2' - выпадение герба и цифры при бросании второй монеты. В этом примере учащиеся самостоятельно могут составить множество случайных событий, состоящее из $16 = 2^4$ элементов.

Понятие противоположного, совместных и несовместных, зависимых и независимых событий раскрываются на конкретных примерах и закрепляются в дальнейшем при прохождении факультативного курса. Операции сложения и произведения событий аналогичны операциям объединения и пересечения множеств и поясняются также на ряде примеров.

Пример I. Ученик в тире стреляет по мишени и делает 3 выстрела. Выразить через элементарные события следующие случайные события:

Событие B - одно попадание в цель.

Событие C - хотя бы одно попадание в цель.

Событие D - хотя бы один промах.

Решение

Рассмотрим множество элементарных событий. Пусть событие A_i - попадание в цель при i-м выстреле,(i = I, 2,3). Событие $\bar{A}_i$ - промах в i-м выстреле (i=I,2,3), U - достоверное, а V - невозможное событии.

Случайное событие B произойдет, если ученик попадет в цель в I-м выстреле и промахнется во 2-м и 3-м выстрелах, либо если он попадет во 2-м выстреле и промахнется в I-м и 3-м выстрелах, либо если ученик поразит цель в 3-м выстреле и промахнется в I-м и 2-м выстрелах. Поэтому событие B через элементарные события выражается следующим образом:

$$B = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3$$

Событие C заключается в том, что ученик попадет в цель при 3х выстрелах либо I, либо 2, либо 3 раза.

Выражение события C через элементарные будет следующим:

$$C = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$$

Здесь первые 3 слагаемые - события, заключающиеся в одном попадании, вторые 3 слагаемые - события, заключающиеся в двух попаданиях, а последнее слагаемое - событие - поражение цели во всех 3-х выстрелах.

Для события D получим

$$D = \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1\bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2\bar{A}_3 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$$

Пример 2. Бросаются 2 игральных кубика. Выразить через элементарные события A_i (выпадение i очков на Iм кубике, i = I,2,3,4,5,6) и B_i (выпадение i очков на 2м кубике, i = I,2,3,4,5,6) следующие случайные события:

Событие C - сумма выпавших на верхних гранях очков кратна 5.

Событие D - произведение очков, выпавших на верхних гранях больше 20.

Для появления события C сумма очков должна быть либо 5, либо 10 (наибольшая сумма очков при бросании двух кубиков очевидно равна 12).

Обозначим через C_1 - случайное событие, заключающееся в том, что сумма выпавших очков равна 5, а через C_2 - случайное событие - сумма выпавших очков равна 10.

Здесь $C_1 = A_1B_4 + A_4B_1 + A_2B_3 + A_3B_2$

$C_2 = A_4B_6 + A_6B_4 + A_5B_5$; $C = C_1 + C_2$

Аналогично получаем

$$Д = A_5B_5 + A_4B_6 + A_6B_4 + A_5B_6 + A_6B_5 + A_6B_6$$

2. Частота и вероятность. Вычисление вероятностей.

Ученикам целесообразно предложить провести самостоятельно эксперимент с бросанием монеты или игрального кубика, чтобы убедить их в существовании тенденция к стабилизации относительной частоты события при многократном воспроизведении опыта в одних и тех же условиях.

В подтверждение полученных результатов можно привести следующую таблицу известных экспериментов.

Фамилия ученого	Число бросков монеты	Число выпадений герба	Частота
Г.Бюффон	4040	2048	0,5080
К.Пирсон	12000	6019	0,5016
К.Пирсон	24000	12012	0,5005

Полученные данные наглядно показывают, что относительная частота выпадения герба стабилизируется около числа 0,5, которое является вероятностью выпадения герба.

Предполагаем, что учащиеся предварительно ознакомлены с элементами комбинаторики, то есть с формулами числа размещений, перестановок и сочетаний.

Рассмотрим теперь несколько типовых задач на вычисление вероятностей.

Задача I. В коробке находятся 4 белых и 5 черных шаров. Одновременно вынимается 2 шара. Событие A - оба вынутых шара одного цвета, а событие B - вынутые шары разного цвета. Какое из этих событий более вероятно?

Решение

Для ответа на поставленный вопрос нужно, очевидно, найти вероятности события A - $P(A)$ и события B - $P(B)$.

$P(A) = \frac{m}{n}$; здесь n - общее число равновозможных исходов - число способов, каким 2 шара можно выбрать из общего их числа 9. Так как порядок следования шаров роли не играет, то для определения числа n следует воспользоваться формулой числа сочетаний.

$$n = C_9^2 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36.$$

Число m - количество благоприятных исходов - число способов, каким можно выбрать 2 белых шара из 4 или 2 черных шара из 5. Здесь также порядок расположения шаров в каждой паре значения не имеет, и поэтому имеем $m = C_4^2 + C_5^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{5 \cdot 4}{2} = 16$ и

$$P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

Определим вероятность события B. $P(B) = \frac{m_1}{n_1}$, $n_1 = C_9^2 = 36$. Число благоприятных исходов m_1 есть число способов, каким можно выбрать 2 шара так, чтобы один был белым, а другой - черным. Возможностей выбрать один белый шар из 4-х белых имеется C_4^1, а один черный шар из 5-ти черных - C_5^1. Благоприятными являются те события, в которых какая-либо из первых возможностей сочетается с какой-либо из вторых возможностей, поэтому

$$m_1 = C_4^1 \cdot C_5^1$$

$$m_1 = C_4^5 \cdot C_5^1 = 4 \cdot 5 = 20 \text{ и } \quad P(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Итак, $P(B) > P(A)$, т.е. более вероятно, что два вынутые шара окажутся разного цвета.

Задача 2. В группе из 6 учеников 4 спортсмена. Произвольным образом отбираются 3 ученика. Какова вероятность того, что среди отобранных окажутся 2 спортсмена?

Решение.

Пусть событие A - среди 3 наудачу выбранных учеников 2 спортсмена. $P(A) = \frac{m}{n}$; здесь n - общее число способов, каким 3 элемента можно выбрать из 6. Порядок их в каждой тройке роли не играет, поэтому $n = C_6^3$. Благоприятными исходами являются те, для которых в каждой отобранной тройке учеников окажется 2 спортсмена и I неспортсмен. Число способов, каким 2 спортсмена можно отобрать из 4, равно C_4^2, а число способов, каким одного неспортсмена можно отобрать из 2, будет C_2^1. Поэтому общее число благоприятных исходов $m = C_4^2 \cdot C_2^1$, а искомая вероятность $P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}$.

Задачи, подобные разобранной, могут быть сформулированы в общем виде.

Пусть N - общее число предметов в совокупности, M - число предметов с данным признаком, K - число предметов, отбираемых из N случайным образом. Определить вероятность того, что среди K отобранных предметов ℓ окажется с данным признаком.

Решение этой задачи аналогично решению второго примера. Пусть A - событие, заключающееся в том, что среди K отобранных предметов ℓ будут с данным признаком, а $P(A)$ - искомая вероятность. Тогда $P(A) = \frac{m}{n}$, где m -число благоприятных, а n - общее число исходов. Здесь n - число способов, которым можно отобрать K элементов из N. Поскольку порядок следования элементов в отобранной группе роли не играет, то $n = C_N^K$.

Подсчитаем число благоприятных исходов. Поскольку N -

общее число предметов, а M - число предметов с данным признаком, то имеется $N-M$ предметов без данного признака. Если теперь среди отобранных K предметов ℓ должны обладать данным признаком, то одновременно $K-\ell$ предметов не должно им обладать. Далее порядки в группах из ℓ предметов среди M предметов с данным признаком, а также в группах из $K-\ell$ предметов среди $N-M$ предметов без данного признака значения не имеют, поэтому их количества соответственно равны C_M^{ℓ} и $C_{N-M}^{K-\ell}$. Но благоприятными являются такие исходы, когда в группе из K предметов какие-либо ℓ имеют данный признак, а $K-\ell$ его не имеют. Следовательно, общее количество благоприятных исходов равно

$$m = C_M^{\ell} \cdot C_{N-M}^{K-\ell},$$

так что

$$P(A) = \frac{C_M^{\ell} \cdot C_{N-M}^{K-\ell}}{C_N^{K}}.$$

С помощью найденной формулы можно решать много интересных задач, имеющих познавательное и практическое значение.

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей

I) При решении многих задач с использованием теорем сложения и умножения вероятностей нужно разобраться в алгебре событий, выяснить их взаимосвязь в смысле совместности и несовместности, зависимости и независимости. Рассмотрим некоторые примеры.

Задача I. 2 стрелка стреляют по мишени и делают по одному выстрелу. Определить вероятность поражения цели (попадание хотя бы одним стрелком), если вероятность поражения мишени I-м стрелком - 0,4, а вторым - 0,5.

Решение

Пусть событие A_1 - поражение цели I-м стрелком, событие A_2 - поражение цели вторым стрелком. Случайное событие B - поражение цели хотя бы одним стрелком осуществляется либо в случае попадания в цель только I-м стрелком, либо - только 2-м, либо обоими вместе. Поэтому $B = A_1 + A_2$. Следует обратить внимание учащихся на то, что события A_1 и A_2 совместны и независимы. По теореме сложения совместных событий имеем поэтому $P(B) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$. Используя далее теорему умножения независимых событий, получаем:

$P(B) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2)$.

В данном примере $P(B) = 0,4 + 0,5 - 0,4 \cdot 0,5 = 0,7$.

Решение подобных задач иногда упрощается, если использовать понятие противоположного события. В рассмотренной задаче введем события $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ и $\bar{B}$, противоположные соответственно событиям A_1, A_2 и B. Они означают промахи соответственно первого, второго и обоих стрелков. Тогда $\bar{B} = \bar{A}_1 \bar{A}_2$.

Но события $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$ независимы. Поэтому по теореме умножения независимых событий имеем: $P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2)$. В данном примере $P(\bar{A}_1) = 1 - 0,4 = 0,6$; $P(\bar{A}_2) = 1 - 0,5 = 0,5$; $P(\bar{B}) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3$.

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7$.

Задача 2. Определить вероятность того, что наудачу взятое двузначное число кратно 2, или 3, или 6.

Решение

Всего двузначных чисел 90 от 10 до 99 включительно. Пусть событие A_1 заключается в том, что наудачу взятое двузначное число делится на 2, а событие A_2 - что наудачу взятое двузначное число делится на 3. Эти события независимы; с другой стороны, они совместны, поэтому для события B, состоящего в том, что взятое наудачу число кратно 2, или 3, или 6, имеем $B = A_1 + A_2$. Применяя к B теорему сложения совместных событий, получаем $P(B) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$. Событие $A_1 A_2$ состоит в том, что наудачу взятое двузначное число делится и на 2 и на 3, а следовательно и на 6.

Применяя к событию $A_1 A_2$ теорему умножения независи-

мых событий, имеем $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$; таким образом, $P(B)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$.
Среди 90 двузначных чисел 45 делится на 2, 30 на 3 и 15 на 6. Поэтому $P(A_1)=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$; $P(A_2)=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$; $P(A_1A_2)=\frac{15}{90}=$ $=\frac{1}{6}$, а $P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

2) Для более глубокого понимания содержания теоретического материала нужно уделить внимание задачам не только тренировочного характера, но и повышенной трудности.
Задача 3. Рассматривается игра. Двое поочередно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого выпадает герб. Определить вероятности выигрыша для I-го и 2-го игрока.

Решение

Пусть: событие A_1 (A_2) - выпадение герба при бросании монеты I-м (2-м) игроком; событие B_1 (B_2) - выпадение цифры при бросании монеты I-м (2-м) игроком; событие C - выигрыш I-м игроком. Первый игрок может выиграть при I-м броске монеты (событие A_1) или при 2-м броске, если в I-м броске у I-го и 2-го игроков выпадет цифра (событие $B_1B_2A_1$), или при 3-м броске, если в I-м и 2-м бросках у каждого игрока выпадет цифра (событие $B_1B_2B_1B_2A_1$) и т.д. Теоретически игра может продолжаться неограниченно долго, таким образом событие C выражается суммой бесконечного числа событий. $C=A_1+B_1B_2A_1+B_1B_2B_1B_2A_1+\dots$
Все слагаемые в этом выражении попарно несовместны, т.к. содержат противоположные события A_1 и B_1 . Но появление цифры или герба при одном броске монеты не зависит от их появления в другом. Поэтому для определения вероятности события C применяем теорему сложения несовместных событий и теорему умножения независимых событий. Получаем $P(C)=P(A_1)+P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(A_1)+P(B_1)\cdot$ $\cdot P(B_2)\cdot P(B_1)\cdot P(B_2)\cdot P(A_1)+\dots$
Но $P(A_1)=P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$, поэтому

$$P(C) = \frac{I}{2} + \left(\frac{I}{2}\right)^3 + \left(\frac{I}{2}\right)^5 + \ldots = \frac{\frac{I}{2}}{I - \frac{I}{4}} = \frac{2}{3}$$

Пусть событие $\mathcal{D}$ - выигрыш 2-м игроком. Тогда $\mathcal{D} =$ $= B_1 A_2 + B_1 B_2 B_1 A_2 + \ldots$,

$$P(\mathcal{D}) = \frac{I}{4} + \left(\frac{I}{4}\right)^2 + \ldots = \frac{\frac{I}{4}}{I - \frac{I}{4}} = \frac{I}{3} .$$

$P(\mathcal{D})$ можно также определить, используя понятие противоположного события $\mathcal{D} = \bar{C}$, $C + \bar{C}_{\circ} = \mathcal{U} \Longrightarrow$ $P(\bar{C}) = I - \frac{2}{3} = \frac{I}{3}$.

Может возникнуть вопрос - какова вероятность того, что игра закончится вничью, т.е. при каждом броске монеты выпадет цифра - событие E . Очевидно,

$$E = B_1 \cdot B_2 \; B_1 \cdot B_2 \ldots$$

По теореме умножения независимых событий для n бросков имеем: $P(E_n) = P(B_1 \cdot B_2 \cdots B_n) = \left(\frac{I}{2}\right)^n$, а

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{I}{2}\right)^n = 0.$$

Вероятность $P(E_n)$ с возрастанием n быстро убывает, и поэтому игра практически на конечном этапе заканчивается выигрышем одного из игроков.

3) Теоремы сложения и умножения вероятностей можно использовать для вывода формул комбинаторики.

Например, формулу числа размещений A_n^k из n элементов по k можно доказать по следующей схеме. Пусть имеется совокупность из n элементов и $b_1 b_2 \ldots b_k$ - произвольное размещение, содержащее k элементов. Через B_1 обозначим событие, состоящее в появлении элемента b_1 на I-м месте указанного размещения. Тогда $P(B_1) =$ $= \frac{1}{n}$; если событие B_2 - означает появление элемента b_2 на 2-м месте в том же размещении, то $P_{B_1}(B_2) = \frac{I}{n-1}$ и т.д.

$P_{B_1,\dots,B_{k-1}}(B_k)=\dfrac{1}{n-(k-1)}$. Если, наконец, B - событие, состоящее в появлении указанного размещения, то $B = B_1 \cdot B_2 \dots B_k$ и по теореме умножения зависимых событий имеем:

$$P(B)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(B_2)\cdot P_{B_1B_2}(B_3)\dots P_{B_1\dots B_{k-1}}(B_k) \quad \text{или}$$

$$P(B)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\dots\frac{1}{n-(k-1)} \qquad (I)$$

С другой стороны, все размещения равновозможны и поэтому

$$P(B)=\frac{1}{A_n^k} \qquad (2)$$

Из равенств (I) и (2) находим:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)].$$

4. Из истории развития теории вероятностей

Знакомство с основными этапами развития теории вероятностей дает возможность проследить становление науки, борьбу различных тенденций в понимании и трактовке ее отдельных положений.

В ходе исторического развития науки совершенствовались и уточнялись вероятностные понятия. До начала нашего столетия не было четкого определения самого понятия вероятности, что приводило к ошибкам в решении простых задач даже видными математиками прошлого. Так, французский математик Ж.Даламбер (1717 - 1783) допускал логическую ошибку при решении следующей задачи. Монета бросается 2 раза. Определить вероятность того, что герб выпадет хотя бы I раз.

Он полагал, что общее число исходов - 3, т.к. если в I-м броске герб появится, то второй раз монету бросать не нужно. Исходы испытаний по Даламберу таковы: ЦЦ, ЦГ, Г~ , а искомая вероятность $P=\frac{2}{3}$.
Правильное решение задачи дает $P=\frac{3}{4}$.
В самом деле, возможные исходы испытаний следующие: ЦЦ,

ЦГ, ГЦ, ГГ. Если событие A - выпадение герба хотя бы I раз, то событие $\bar{A}$ - выпадение цифры в двух бросках монеты, причем $A+\bar{A} = U$. Поэтому $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Аналогичные ошибки допускал Даламбер и при решении других подобных задач. Недостатки в логическом построении теории вероятностей позволили некоторым математикам необоснованно применять ее к морали, праву и политике. Выдающийся французский математик П.С.Лаплас(1749-1827) считал даже, что в общественной жизни всецело господствует слепая случайность и что теория вероятностей может объяснить историю развития человеческого общества. П.С.Лаплас пытался также применить вероятностные методы к ведению судебных процессов, собраний и пр.

Характеризуя основные этапы развития теории вероятностей, значительное место следует отвести роли русских и советских математиков, в особенности - П.Л.Чебышева (1821- 1894), А.М.Ляпунова (1857 - 1918), А.Я.Хинчина (1894 - 1959), А.Н.Колмогорова (1903), Ю.В.Линника (1915 - 1972) и др.

Литература

1. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М.,Наука,1964.
2. Лютикас В.Л. Школьнику о теории вероятностей. М., Просвещение, 1976.
3. Дополнительные главы по курсу математики - 10. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 10-х классов. Составитель З.А.Скопец. М.,Просвещение, 1974.

СОДЕРЖАНИЕ

I. В.А.Старцев. Локальное и тотальное исследование функции (в помощь учителю математики)... 3

2. Б.Д.Дворецкий. Учебное оборудование для введения понятия предела и непрерывности функции в 9-м классе.................. 38

3. Б.Д.Дворецкий. Об изготовлении экранных учебно-наглядных пособий по математике........... 47

4. E.Laudiņa. Uzdevumi tēmai "Vektori" devītās klases kursā................................ 56

5. Я.Я.Кокин. Из опыта реализации упрощенных вариантов алгоритмических языков Алгол-60 и Фортран на факультативных занятиях в средней школе............................ 86

6. М.Х.Скривеле.Применение композиций гомотетий к решению задач................................ 96

7. М.Х.Скривеле.Простейшие аффинные преобразования плоскости................................ III

8. Ш.Х.Михелович. Периодические дроби как тема для внеклассных занятий в 9-м классе........ I3I

9. М.С.Старожицкий. Элементы теории вероятностей на факультативных занятиях в 9-м классе.... I42

ИЗБРАННЫЕ ТЕМЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
Межвузовский сборник научных трудов
Под ред. Ш.Х.Михеловича

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1980

На латышском и русском языках

SKOLAS MATEMĀTIKAS IZVĒLĒTĀS TĒMAS
Starpaugstskolu zinātnisko rakstu krājums

Redaktori: Š.Mihelovičs, R.Dovgopolova
Tehniskā redaktore I.Bobovica
Korektore I.Bobovica

Parakstīts iespiešanai 13. 11. 1980.JT 04310. Papīra formāts 60x84/16. Papīrs Nr.1.10,0 fiz.iespiedl. 9,3 uzsk.iespiedl. 7,5 uzsk.izdevn.l. Metiens 500 eks. Pasūt.Nr.2094 Maksā 47 k.

P.Stučkas Latvijas Valsts universitāte
Rīga 226098, Raiņa bulv.19
Iespiests ar rotaprintu P.Stučkas LVU
Rīga 226050,Veidenbauma ielā 5