ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Межведомственный сборник научных трудов

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1980

ББК 22.31

В работах настоящего сборника основное внимание уделяется постановке задач, описывающих те или иные физические процессы, их качественному анализу и разработке численных методов решения таких задач. В большинстве работ приводятся результаты численных расчетов и анализ решений. Круг вопросов, затронутых в работах данного сборника, охватывает задачи теплопроводности и диффузии при описании процессов кристаллизации, задачи естественной и вынужденной конвекции в жидком расплаве, а также в электропроводящей среде, задачи с условиями типа сосредоточенной емкости.

По этой тематике вышли два сборника "Прикладные задачи теоретической и математической физики" в 1977 и в 1978 гг.

Тематика сборника представляет интерес для широкого круга математиков, физиков и специалистов, занимающихся изучением процессов роста и выращивания кристаллов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им.П.Стучки от 27 июня 1980 года

П $\frac{20402-084у}{М\ 812(11)-80}$ 112.80.1704 020 000

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ, ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ, НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ГОМОПОЛЯРНИКЕ

Калис Х.Э., Луринс Г.Р.
(ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, г.Рига)

В работе рассмотрено стационарное осесимметричное движение электропроводящей, вязкой, несжимаемой жидкости в гомополярнике без внешнего магнитного поля. Для получения приближенного распределения скорости применены три метода переменных направлений: Писмена-Рэкфорда (ПР), Дугласа-Рэкфорда (ДР) и видоизмененный метод Писмена-Рэкфорда (ВПР) для совместного решения системы уравнений магнитной гидродинамики в переменных функции вихря и функции тока.

Гомополярник представляет собой осесимметричную установку, состоящую из двух конечных коаксиальных медных цилиндров (электродов) с диэлектрическим основанием, заполненную электропроводящей жидкостью [1]. Через жидкость пропускается постоянный электрический ток, который, взаимодействуя с индуцированным магнитным полем, приводит жидкость в движение. Распределение тока в жидкости приближенно можно считать однородным:

$$j_r = \frac{I}{2\pi a r},$$

где j_r - компонента плотности электрического тока,
I - полный электрический ток,
a - высота гомополярника,
r, φ, z - цилиндрические координаты.

Индуцированное магнитное поле имеет одну составляющую:

$$B_\varphi = -\frac{I z \mu_0}{2\pi a r},$$

где μ_0 - абсолютная магнитная проницаемость.

Движение жидкости возникает согласно закону Лоренца, так как электромагнитная сила

$$f_z = -\frac{\mu_0 I^2 z}{4\pi^2 a^2 r^2}$$

Из $(\mathrm{rot}\,\vec{j})_\varphi = -\frac{\partial j_z}{\partial r} = -\frac{\mu_0 I^2 z}{2\pi^2 a^2 r^3} \neq 0$

следует, что движение вихревое.

Данная задача в области $D = \{0 < z < 1;\ 0{,}1 < r < 1\}$ описывается системой уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega)\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\omega}{r}\right) = S\frac{z}{2\cdot r^3} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) = -\omega \ , \end{cases} \qquad (I)$$

где $S = \frac{\mu_0 I^2}{\rho \nu^2 \pi^2}$ - безразмерный параметр,

ν - кинематическая вязкость

ψ - гидродинамическая функция тока $\left(V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z},\ V_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)$

ρ - плоскость

ω - функция вихря $\left(\omega = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)$.

На твердых границах $(r = 0.1,\ r = 1,\ z = 0)$ имеем условия прилипания, т.е.

$$V_r = 0 \quad и \quad V_z = 0,$$

а на "свободной" поверхности $(z = 1)$:

$$V_z = 0 \quad и \quad \frac{\partial V_r}{\partial z} = 0.$$

В переменных ψ, ω этому соответствуют условия:

$\psi = 0$ и $\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$ - на всех границах;

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (r = 0{,}1;\ 1;\ z = 0) \ ,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad или \quad \omega = 0 \ (z = 1) \ ,$$

$$\omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (r = 0{,}1;\ 1) \ ,$$

$$\omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \quad (z=0)$$

Для получения дискретной задачи в области D вводим квадратную сетку. Тогда систему уравнений (I) можем аппроксимировать со вторым порядком:

$$\begin{cases} \Lambda_1\omega + \Lambda_2\omega = f \\ \tilde{\Lambda}_1\psi + \tilde{\Lambda}_2\psi = -\omega \end{cases} \qquad (3)$$

где

$$\Lambda_1(\psi)\omega = \frac{1}{h^2}\left(\frac{r_{i+1}\omega_{i+1j} - r_i\omega_{ij}}{r_{i+1/2}} - \frac{r_i\omega_{ij} - r_{i-1}\omega_{i-1j}}{r_{i-1/2}}\right) +$$

$$+ \frac{\psi_{ij+1} - \psi_{ij-1}}{4h^2}\left(\frac{\omega_{i+1j}}{r_{i+1}} - \frac{\omega_{i-1j}}{r_{i-1}}\right),$$

$$\Lambda_2(\psi)\omega = \frac{\omega_{ij+1} - 2\omega_{ij} + \omega_{ij-1}}{h^2} - \frac{(\psi_{i+1j} - \psi_{i-1j})(\omega_{ij+1} - \omega_{ij-1})}{4r_i h^2},$$

$$f = \frac{S z_j}{2 r_i^3},$$

$$\tilde{\Lambda}_1\psi = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\psi_{i+1j} - \psi_{ij}}{r_{i+1/2}} - \frac{\psi_{ij} - \psi_{i-1j}}{r_{i-1/2}}\right),$$

$$\tilde{\Lambda}_2\psi = \frac{\psi_{ij+1} - 2\psi_{ij} + \psi_{ij-1}}{r_i h^2},$$

$$\omega = \omega_{ij} = (r_i, z_j); \; \psi_{ij} = \psi(r_i, z_j),$$

$$1 \le j \le N; \; 1 \le i \le M,$$

С таким же порядком аппроксимируем и граничные условия. Для функции тока Ψ :

$$\Psi_{i1} = \Psi_{iN} = \Psi_{1j} = \Psi_{Mj} = 0. \qquad (4а)$$

Чтобы получить граничные условия для функции вихря, используем соотношения (2) и разложение функции Ψ в ряд Тейлора. Таким образом, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{1j} &= -\frac{1}{\tau_1 2h^2}\left(8\Psi_{2j} - \Psi_{3j}\right) \\ \omega_{Mj} &= -\frac{1}{\tau_M 2h^2}\left(8\Psi_{M-1j} - \Psi_{M-2j}\right) \end{aligned}\right\} j = 2,3,\dots,N-1 \qquad (4б)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_{i1} &= -\frac{1}{\tau_i 2h^2}\left(8\Psi_{i1} - \Psi_{i2}\right) \\ \omega_{iN} &= 0 \end{aligned}\right\} i = 2,3,\dots,M-1$$

Для решения данной разностной схемы использованы три метода переменных направлений:

метод Писмена-Рэкфорда [3]

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\bar\omega-\omega}{\tau} &= \Lambda_1(\Psi)\bar\omega + \Lambda_2(\Psi)\omega - f \\ \frac{\hat\omega-\bar\omega}{\tau} &= \Lambda_1(\Psi)\bar\omega + \Lambda_2(\Psi)\hat\omega - f \end{aligned}\right. ,$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\bar\Psi-\Psi}{\tau} &= \tilde\Lambda_1\bar\Psi + \tilde\Lambda_2\Psi + \hat\omega \\ \frac{\hat\Psi-\bar\Psi}{\tau} &= \tilde\Lambda_1\bar\Psi + \tilde\Lambda_2\hat\Psi + \hat\omega \end{aligned}\right. \qquad (5)$$

метод Дугласа-Рэкфорда [3]

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\bar\omega-\omega}{\tau} &= \Lambda_1(\Psi)\bar\omega + \Lambda_2(\Psi)\omega - f \\ \frac{\hat\omega-\bar\omega}{\tau} &= \Lambda_2(\Psi)(\hat\omega-\omega) \end{aligned}\right. , \qquad (6)$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\bar\Psi-\Psi}{\tau} &= \tilde\Lambda_1\bar\Psi + \tilde\Lambda_2\Psi + \hat\omega \\ \frac{\hat\Psi-\bar\Psi}{\tau} &= \tilde\Lambda_2(\hat\Psi-\Psi) \end{aligned}\right. ,$$

где $\Psi=\Psi^{n}$; $\bar{\Psi}=\Psi^{n+1/2}$; $\hat{\Psi}=\Psi^{n+1}$; $n=0,1,2,\dots$ - номер итерации. Эти два метода применены совместно с граничными условиями для функции вихря в виде (4б).

Подробнее остановимся на видоизмененном методе Писмена-Рэкфорда:

$$\begin{cases} \dfrac{\bar{\omega}-\omega}{\tau}=\Lambda_1(\Psi)\bar{\omega}+\Lambda_2(\Psi)\omega-f \\ \dfrac{\bar{\Psi}-\Psi}{\tau}=\tilde{\Lambda}_1\bar{\Psi}+\tilde{\Lambda}_2\Psi+\bar{\omega} \end{cases}, \tag{7a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{\omega}-\bar{\omega}}{\tau}=\Lambda_1(\bar{\Psi})\bar{\omega}+\Lambda_2(\bar{\Psi})\hat{\omega}-f \\ \dfrac{\hat{\Psi}-\bar{\Psi}}{\tau}=\tilde{\Lambda}_1\bar{\Psi}+\tilde{\Lambda}_2\hat{\Psi}+\hat{\omega} \end{cases}. \tag{7б}$$

Для реализации (7а) на каждой из линий сетки ($j=2,3,\dots N-1$) решение находим в форме:

$$\bar{\omega}_{ij}=G_i+\omega_{1j}E_i+\omega_{Mj}S_i \tag{8a}$$

$$\bar{\Psi}_{ij}=\tilde{G}_i+\omega_{1j}\tilde{E}_i+\omega_{Mj}\tilde{S}_i \tag{8б}$$

где G_i, $\tilde{G}_i$, E_i, $\tilde{E}_i$, S_i, $\tilde{S}_i$ являются решениями следующих разностных краевых задач [2]:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\tau}G+\Lambda_1 G=-\dfrac{1}{\tau}\omega-\Lambda_2\omega+f; & G_1=G_M=0 \\ -\dfrac{1}{\tau}E+\Lambda_1 E=0; & E_1=1,\ E_M=0 \\ -\dfrac{1}{\tau}S+\Lambda_1 S=0; & S_1=0,\ S_M=1, \end{cases} \tag{9a}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\tau}\tilde{G}+\tilde{\Lambda}_1\tilde{G}=-\dfrac{1}{\tau}\Psi-\tilde{\Lambda}_2\Psi-G; & \tilde{G}_1=\tilde{G}_M=0 \\ -\dfrac{1}{\tau}\tilde{E}+\tilde{\Lambda}_1\tilde{E}=-E & \tilde{E}_1=\tilde{E}_M=0 \\ -\dfrac{1}{\tau}\tilde{S}+\tilde{\Lambda}_1\tilde{S}=-S & \tilde{S}_1=\tilde{S}_M=0. \end{cases}$$

Каждая из этих разностных задач решается отдельно методом скалярной прогонки. Для определения граничных значений функции вихря ω_{1j} и ω_{Mj} используем аппроксимацию условия (2) $\frac{\partial\psi}{\partial z}=0$:

$$\psi_{1j}=\frac{1}{4}\psi_{2j} \quad \text{и} \quad \psi_{M-1j}=\frac{1}{4}\psi_{M-1j} \tag{10а}$$

или

$$\psi_{1j}=\frac{1}{2}\psi_{2j}-\frac{1}{9}\psi_{3j} \quad \text{и} \quad \psi_{M-1j}=\frac{1}{2}\psi_{M-2j}-\frac{1}{9}\psi_{M-3j} \tag{10б}$$

второго или третьего порядка соответственно. Решая алгебраическую систему (10а,8б) или (10б,8б), находим ω_{1j} и ω_{Mj} после чего, используя соотношения (8), находим все значения $\bar{\omega}_{ij}$ и $\bar{\psi}_{ij}$ на конкретной линии сетки. Аналогичный алгоритм применяем и на каждой из узловых линий разностной сетки (i =2,3,...M-1) при реализации (7б).

Численные расчеты проводились при различных значениях безразмерного параметра S (S =50,100,500,1000) и шага сетки h (h =0,1;0,05). Для достижения сходимости итерационных процессов пришлось применять нижнюю релаксацию к граничным значением функции вихря, т.е.

$$\hat{\omega}=(1-\alpha)\omega+\alpha\cdot\hat{\omega},\quad 0<\alpha\leq 1$$

Конкретно при h =0,1 использовалась α =0,5; при

$h=0{,}05$; $\alpha=0{,}1$.

Первые два метода давали практически одинаковые численные результаты. Так при S =500 и h =0,1 метод ПР дает $|\vartheta|_{max}$=10,848, а метод ДР + 10,849. Метод ВПР с использованием аппроксимации $\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{\partial\psi}{\partial z}$ =0 в виде (10а) дает $|\vartheta|_{max}$ =7,511, а с (10б) + 9,509. Однако, как видно из рис.1., эти различия существенно не влияют на характер распределения скорости в плоскости z =0,5 (1 - метод ПР, S =100; 2 - метод ПР; 3 - метод ВПР с (10б), S =500). Кроме того, с уменьшением шага сетки наблюдается тенденция уменьшения различий. Так при S =50; h =0,05 метод ДР дает $|\psi|_{max}$=0,0845; $|\omega|_{max}$=47,61; $|\vartheta|_{max}$=1,361.

а метод ВПР с использованием (10б) соответственно: 0,0835; 48,14; 1,333. Так как точное решение задачи неизвестно, то определенно судить о преимуществах одного из методов невозможно. Из анализа и сопоставления численных результатов, полученных различными методами следует, что в случае сетки с h =0,1 лучше применять первые два метода, а применение метода ВПР более целесообразно с использованием аппроксимации $\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\partial\psi}{\partial z}$ =0 в виде (10б).

На рис.2 изображены линии уровня функции тока при S=500. Из результатов расчетов следует, что в гомополярнике образуется тороидальный вихрь и что вихревой характер движения в исследованном интервале значений параметра S существенно не меняется. С нарастанием S наблюдается только нарастание $|v|_{max}$ (рис.1). Численное исследование движения жидкости при больших значениях параметра S требует специального рассмотрения.

Литература

1. Бояревич В.И., Шарамкин В.И. МГД течения при растекании электрического тока в осесимметричном слое конечной толщины.- Магнитная гидродинамика, Рига: Зинатне, 1977, № 2, с.55-60.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.:Наука, 1978. 592 с.
3. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.

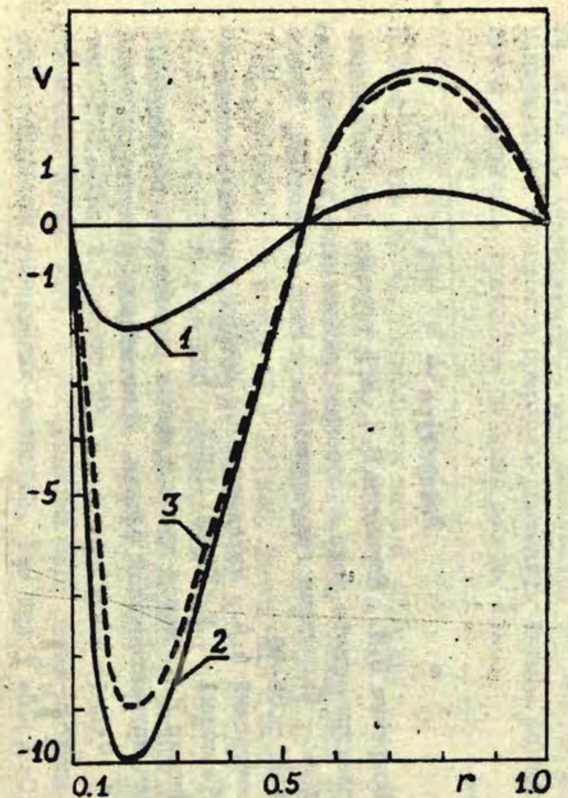


Рис.I.

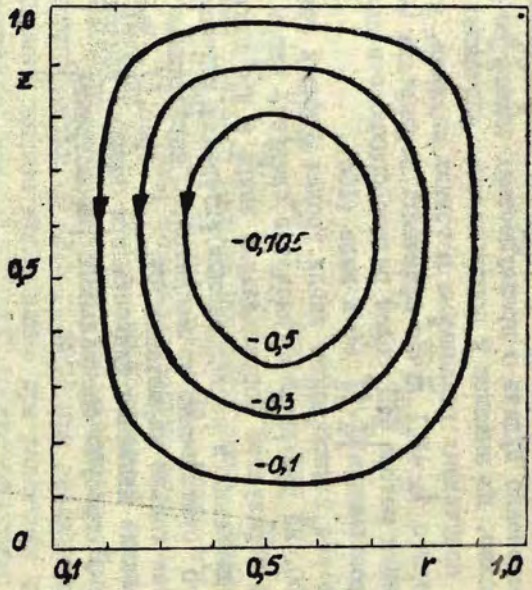


Рис.2.

К РАСЧЕТУ СТАЦИОНАРНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ

Козельская Н.В., Лимкис Е.Д.

(ВЦ ЛГУ им.П.Стучки)

I. Задача численного решения двумерных уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса, как известно, оказывается весьма сложной, что связано с появлением малого параметра при старшей производной в уравнениях.

Кроме того, в задачах, учитывающих дифференциальное вращение жидкости, обычным оказывается ветвление решений или возникновение стационарных автоколебаний уже при сравнительно небольших числах Рейнольдса. Подобные решения при моделировании движения расплава в методе зонной плавки и в методе Чохральского получения кристаллов были численно получены в работах [I-3] . При переходе от дифференциальных уравнений к конечно-разностным в разностные уравнения вносится так называемая схемная вязкость, величина которой может превысить значение физической вязкости, и получаемые численные решения могут сильно отличаться от решений соответствующих дифференциальных уравнений. В связи со всеми этими вопросами остро встает проблема получения точных решений уравнений Навье-Стокса в условиях, достаточно близких к реальным. Такое решение может служить тестом при проведении двумерных расчетов и хорошим объектом для методических исследований.

Представляется, что задача о течении жидкости между бесконечными вращающимися дисками достаточно близка по постановке к задачам моделирования движения расплава в процессах получения кристаллов, особенно в методе зонной плавки (ср. с I). Задача о течении жидкости между бесконечными коаксиальными вращающимися дисками после преобразования Кармана [4] сводится в стационарном случае к решению системы краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. В литературе имеется много работ, в которых предложены различные численные методы решения этой системы уравнений (см.ссылки в работе [6]). Наиболее надежным представляется метод, основанный на линеаризации системы уравнений по Ньютону. Использование этого подхода позволило авторам работы [5] получить решения при $R=7000$, а в работе [6] - при $R\sim 10^5$, $R=\frac{\omega d^2}{\nu}$ - число Рейнольдса задачи, ω - угловая скорость вращения нижнего диска, d - расстояние между дисками, ν - кинематическая вязкость жидкости. Этот подход, как будет показано ниже, легко распространяется и на случай нестационарной задачи.

2. Перейдем к постановке задачи. Пусть нижний диск вращается с угловой скоростью ω , верхний со скоростью $S\omega, -1\leq S\leq 1$. Сделаем в системе уравнений Навье-Стокса замену

$$\xi=z/d,\ t^*=\frac{\omega}{R}t,\ \bar{r}=r/d,\ \bar{u}=u/\omega d \qquad (I)$$

и будем искать компоненты скорости жидкости в виде

$$\bar{u}_r=\bar{r}F(\xi),\ \bar{u}_\varphi=\bar{r}G(\xi),\ \bar{u}_z=R^{-\frac{1}{2}}H(\xi) \qquad (2)$$

Тогда вместо систёмы уравнений Навье-Стокса получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{F}&=F''-R^{\frac{1}{2}}HF'-R(F^2-G^2+K)\\ \dot{G}&=G''-2RF\cdot G-R^{\frac{1}{2}}G'H\\ H'&=-2R^{\frac{1}{2}}F \end{aligned} \qquad (3)$$

При выполнении условий прилипания краевые условия задачи принимают вид

$$\begin{aligned} &F(0)=H(0)=F(1)=H(1)=0\\ &G(0)=1,\ G(1)=S \end{aligned} \qquad (4)$$

Лишнее краевое условие для системы уравнений 5-го порядка используется для определения неизвестной константы K в (3).

На отрезке [0,1] введем неравномерную разностную сетку с узлами X_i, $i=0,1,\dots N$, $X_0=0$, $X_N=1$. Введем обозначения:

$$h_i = X_i - X_{i-1}, \quad \hbar_i = 0.5(h_i + h_{i+1})$$

$$y_x = (y_{i+1} - y_i)/h_{i+1}, \; y_{\bar{x}} = (y_i - y_{i-1})/h_i, \; y_{\hat{x}} = (y_{i+1} - y_i)/\hbar_i$$

Для системы (3) запишем неявную разностную схему:

$$\frac{F - F^{\nu-1}}{\tau} = F_{\bar{x}\hat{x}} - 0.5R^{\frac{1}{2}}H(F_x + F_{\bar{x}}) - R(F^2 - G^2 + K)$$

$$\frac{G - G^{\nu-1}}{\tau} = G_{\bar{x}\hat{x}} - 2RFG - 0.5R^{\frac{1}{2}}H(G_x + G_{\bar{x}}) \qquad (5)$$

$$H_x = -R^{\frac{1}{2}}(F_{i+1} + F_i)$$

Здесь τ - шаг интегрирования по времени, переменные без верхнего индекса соответствуют ν -му временному слою.

Далее к системе уравнений (5), в которой неизвестными являются переменные на верхнем временном слое, применяется методика работы [6] : решение нелинейной системы уравнений находится последовательными итерациями, уравнения линеаризуются по методу Ньютона, и на каждой итерации решается система линейных уравнений. Обращение матрицы оказывается достаточно экономичной процедурой, поскольку матрица системы имеет почти ленточную структуру.

3. Задача (3)-(4), если в ней отбросить производные по времени, становится стационарной и представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При $S=1$ нами был предпринят поиск различных стационарных решений задачи. Алгоритм поиска основывался на последовательном выборе разных начальных приближений задачи. При $S=1$ стационарные решения, очевидно,

должны быть либо сами симметричными по отношению к плоскости $\xi = \frac{1}{2}$, параллельной дискам, либо должны переходить друг в друга при зеркальном отражении относительно этой плоскости. Т.е. должны выполнятся соотношения

$$H_l(\xi) = -H_m(1-\xi),\ F_l(\xi) = F_m(1-\xi),\ G_l(\xi) = G_m(1-\xi),$$

где индексы l и m, обозначающие здесь номер решения, могут или совпадать между собой, или отличаться друг от друга. Нами при R =625 были найдены семь различных стационарных решений. При этом 4-ое решение оказалось зеркально-симметричным, состоящим из двух симметричных вихрей. Близким к 4-му оказалось 7-е решение. Оно также зеркально-симметрично, но, в отличие от 4-го решения, оно состоит из четырех вихрей. Большая часть жидкости в этих решениях почти не вращается, т.е. это решение типа Стьюартсона [7] по терминологии авторов [5,6]. Решения 2-е и 3-е, 5-е и 6-е зеркально-симметричны друг другу. В I-м решении жидкость вращается как квазитвердое тело, с угловой скоростью I, вторичные решения отсутствуют (решение типа Бэтчелора [8]). Заметим здесь, что функцию тока $\bar{\Psi}$ двумерной задачи можно определить формулой

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2R\xi} H \bar{r}^2. \tag{6}$$

Из (6) следует, что решение обладает таким количеством вихрей, сколько раз функция H меняет знак. Как видно из рис.I, для решений 2-6 существуют 2 вихря, у решения I нет вторичных движений при $S=1$, при $S \neq 1$ возникает вторичное движение, состоящее из одного вихря. Решение 7-ое состоит из четырех вихрей.

Полученные при $S=1$ решения продолжались в сторону уменьшения S. При $S=0.8$ продолжения первых пяти решений совпадали с решениями, полученными в [6]. Шестое решение удалось продолжать только до $S=0.852$. При меньших

ς ньютоновские итерации не сходились.

На рис.I штриховой линией изображены первые пять решений при ς =0,8, шестое решение при ς =0,852, седьмое при ς =0,86.

Каждое из найденных при ς =I стационарных решений возмущалось, именно, стационарные распределения $H(\xi)$, $F(\xi), G(\xi)$ умножались на 0,99. Полученное таким образом возмущенное состояние бралось в качестве начального приближения и решалась нестационарная задача. При $t \to \infty$ разность между нестационарным и стационарным решениями ведет себя в окрестности стационарного решения как $e^{\lambda t}$, где λ - самое правое собственное значение линеаризованной задачи для возмущений. Если $Re\,\lambda < 0$, то решение устойчиво по отношению к возмущениям, для которых выполняются соотношения (2), если же $Re\,\lambda > 0$, то решение неустойчиво. Как показали расчёты решения I,2,3,7 - устойчивы по отношению к малым возмущениям рассматриваемого типа, т.е. при $t \to \infty$ возмущение затухает. Остальные решения оказались неустойчивыми. При этом 4-е решение переходит в I-е решение, а 5 и 6 решения в 7-е решение при $t \to \infty$.

В заключение авторы пользуются случаем выразить искреннюю признательность Б.Я.Мартузану за интерес к данной работе и многочисленные полезные обсуждения.

Литература

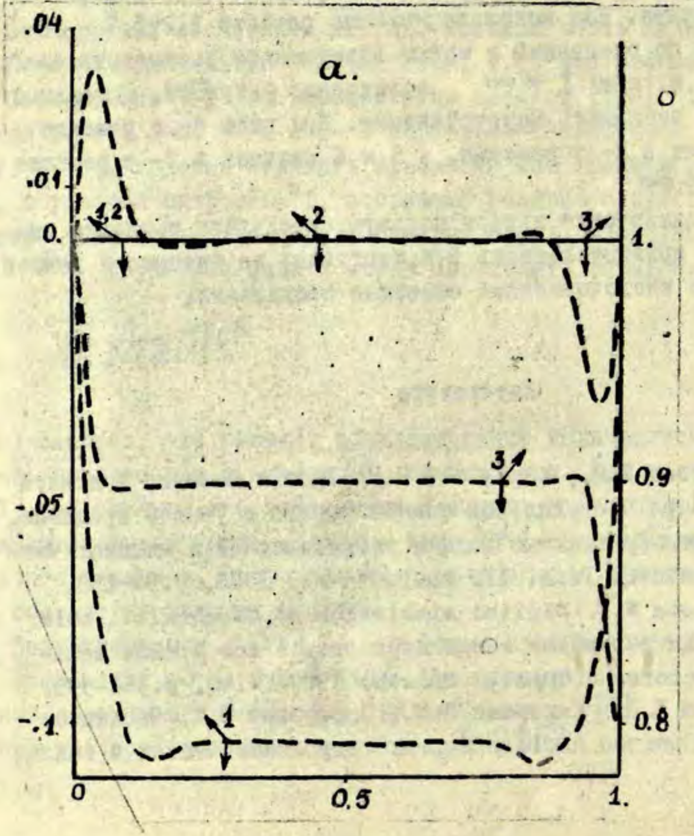
I. Мартузан Б.Я., Мартузане Э.Н. Расчет течения в жидкой зоне при бестигельной зонной плавке с учетом вращений. - В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1978, с.97-118.

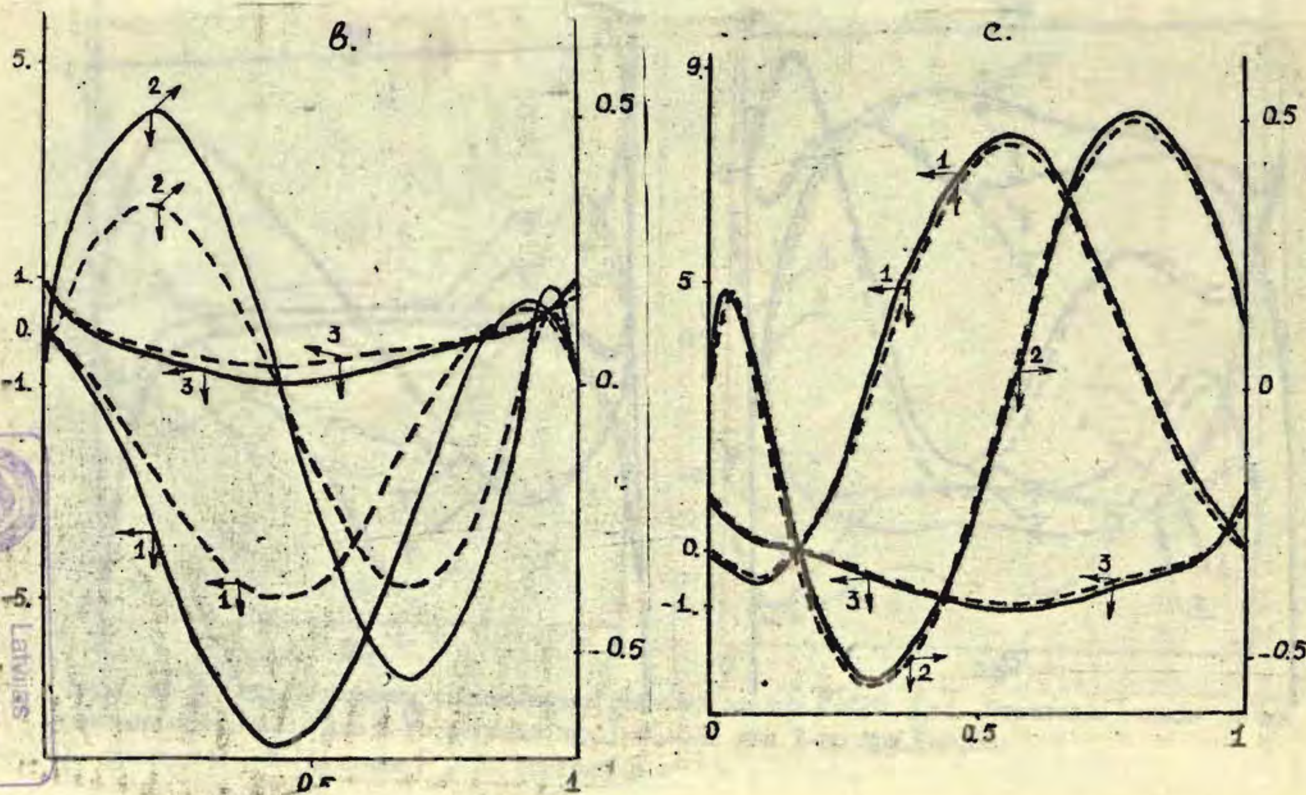
2. Langlois W.E. Digital simulation of Czochralski bulk flow in parameter range appropriate for liquid semiconductors. J.Crystal Growth, 1977, v.42, p.386-399.

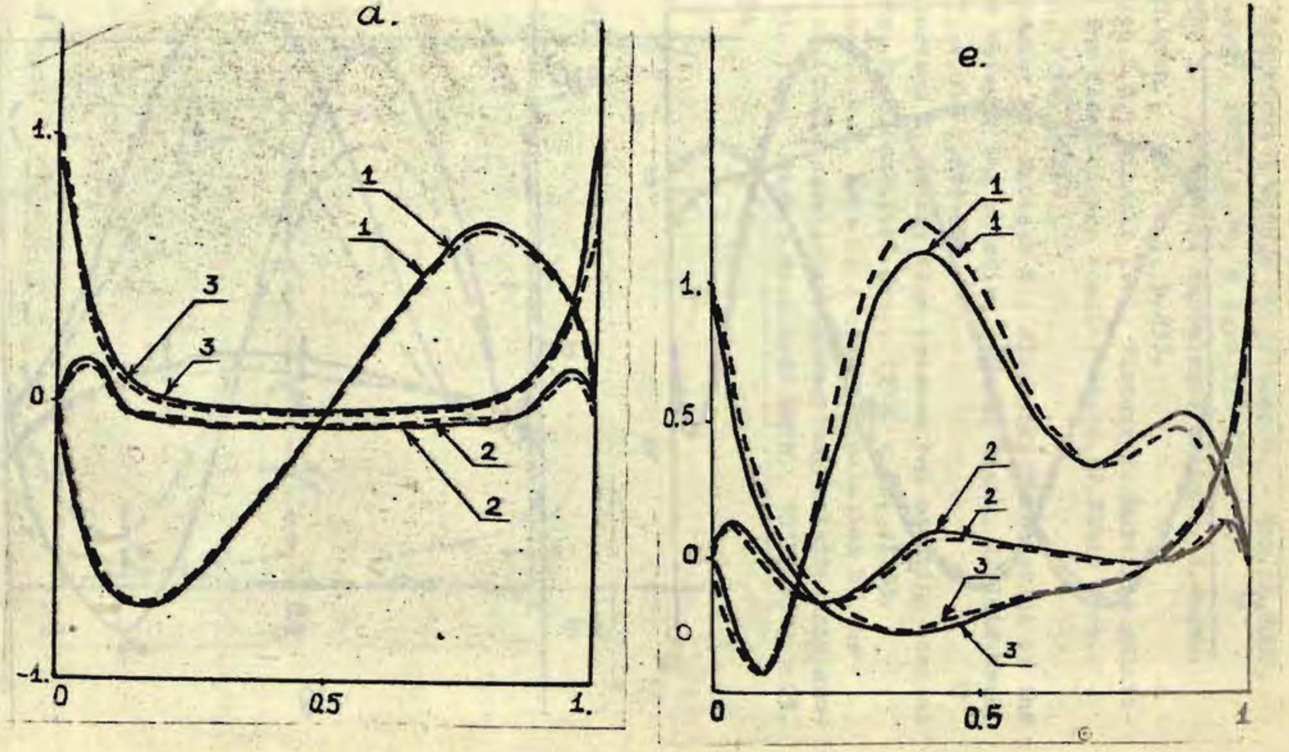
3. Люмкис Е.Д., Мартузан Б.Я., Мартузане Э.Н. Численное исследование нестационарных гидродинамических и тепло-

вых процессов в методе Чохральского. - Изв.АН СССР, Сер.физ., 1980, т.44, № 2, с.373-377.

4. Karman T. Laminar und turbulente Reibung. Z.angew. Math.Mech., 1921, v,1, p.233.
5. Nguyen N.D., Ribault I.P., Florent P. Multiple solutions for flow between coaxial disks. J.Fluid Mech., 1975, v.68, p.369.
6. Holodniak M., Kubicek M., Hlavacek. Computation of the flow between two rotating coaxial disks. J.Fluid Mech. 1977, v.81, p.689-699.
7. Stewartson K. On the flow between two rotating coaxial disks. Proc.Camb.Phil.Soc., 1953, v.49, p.333.
8. Batchelor G.K. Note on a class of solution of the Navier-Stokes equations representing rotationally symmetric flow. Quart.J.Mech.Appl.Math., 1951, v.4, p.29.




b.
5.
1.
0.
-1.
-5.
0.5
0.
-0.5
0.5
1
c.
9
5
0.
-1.
0.5
0
-0.5
0
0.5
1


a.
e.
1.
0
-1.
0
0.5
1.
1
2
3
1.
0.5
0
0
0.5
1

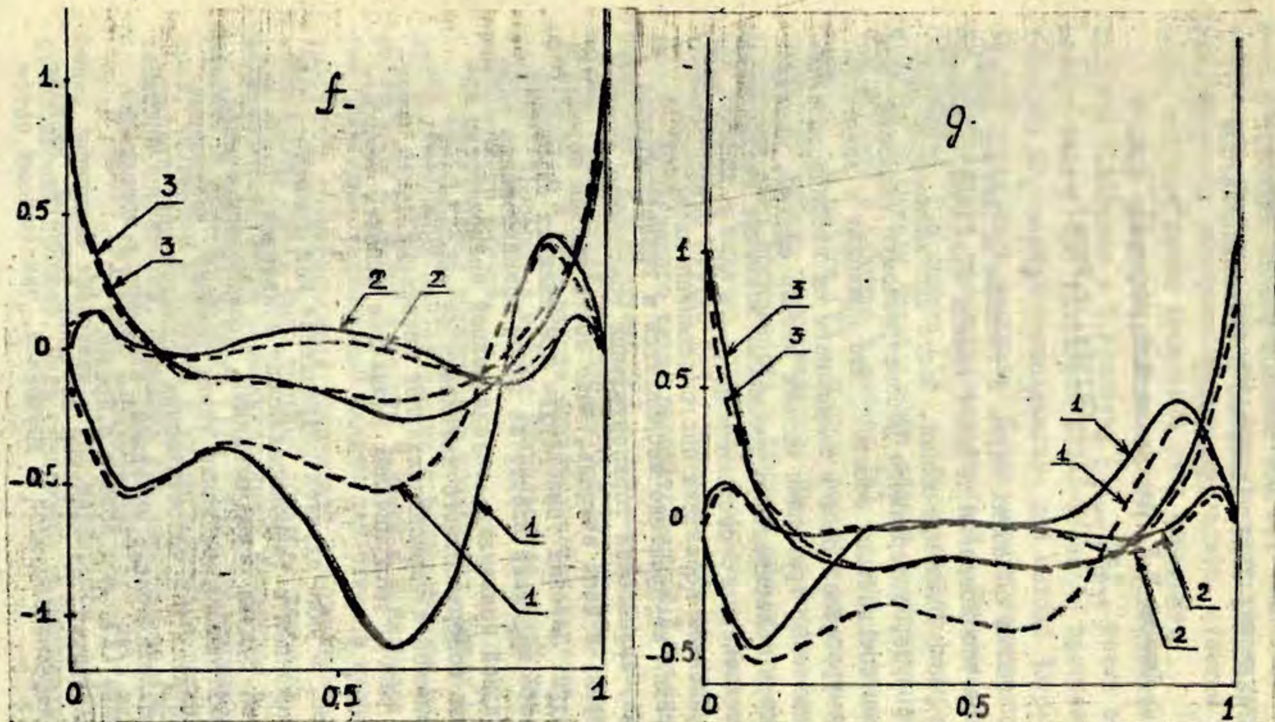


Рис. I (a–g) Семь различных стационарных решений задачи, R=625, S=I. Штриховые линии– те же решения при S=0,8, для 6-го решения при S=0,852, для 7-го при S=0,86.
I– функция H, 2– функция F, 3– функция G.

К ЧИСЛЕННОМУ РАСЧЕТУ ПОТОКОВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ВРАЩЕНИЕМ, ГРАВИТАЦИОННОЙ И ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИЕЙ

Люмкис Е.Д., Мартузане Э.Н., Мартузан Б.Я.

(ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, г.Рига)

Во многих областях науки и техники возникает необходимость рассмотрения течения вязкой жидкости, обусловленного различными причинами. Часто оно вызывается вращением сосуда, содержащего рассматриваемую жидкость, или вращением специальных мешалок, что приводит к возникновению центробежной силы и вызванного ею вторичного течения. Вызываемые вращением потоки весьма сложны, нередко наблюдаются колебательные процессы, возможна неединственность стационарного состояния потока и др. Изучению потоков с вращением посвящена многочисленная литература.

Нередко на практике наблюдается и гравитационная конвекция, вызываемая горизонтальным градиентом плотности, который, в свою очередь, чаще всего вызван перепадом температуры. Перепад температуры при наличии свободной поверхности жидкости влечет за собой возникновение термокапиллярной конвекции, обусловленной зависимостью коэффициента поверхностного натяжения от температуры. По гравитационной и термокапиллярной конвекции также имеется много работ, раскрывающих различные аспекты этих видов течения.

Далее, в ряде случаев встречаются как вращение, так и гравитационная и термокапиллярная конвекции. Такие виды течения, будучи более сложными, исследованы меньше.

Результаты исследования таких течений, полученные в экспериментах и в теоретических исследованиях приближенными аналитическими методами, изложены в монографии Л.А.Дорфмана [I] и в обзоре Ф.Крейца [2] .

Исследований, посвященных изучению течений, вызванных тепловым воздействием и вращением, численными методами значительно меньше. Поскольку настоящая статья ориентирована на исследование течений, возникающих в различных процессах выращивания монокристаллов, отметим те работы, которые также посвящены этой тематике.

Первую попытку провести подобные исследования предприняли Н.Кобаяши и Т.Аридзуми [3] , [4] , решив стационарную задачу для уравнений Навье-Стокса с вращением и тепловой конвекцией применительно для метода Чохральского, но для модельного расплава. Стационарную задачу для метода Чохральского рассматривали также И.А.Ремизов, И.А. Старшинова, Ю.Ф.Щелкин [5] . Для реального расплава кремния по методу Чохральского задачу распределения потоков решал В.Ланглуа в работе [6] а для выращивания граната - в работе [7] . В этих работах решалась нестационарная задача явным методом. Решение нестационарных уравнений дало возможность В.Ланглуа обнаружить интересное явление - наличие колебаний скорости по времени в изотермическом случае [6] . Реальный расплав кремния в методе Чохральского также рассматривали Е.Д.Люмкис, Э.Н. Мартузане, Б.Я.Мартузан [8] , с применением метода переменных направлений, изложенного в [9] с небольшими модификациями . В этой работе подтверждается наличие колебательного процесса в методе Чохральского также для неизотермического случая.

Другой метод выращивания кристаллов, метод вертикальной бестигельной зонной плавки с рассмотрением модельной формы зоны изучался в работе Ч.Чэнга и В.Вилкокса [10] , где решалась стационарная задача для потоков жидкости, вызванных гравитационной конвекцией и термокапиллярной конвекцией. Здесь было впервые обращено внимание на превалирующее значение термокапиллярной конвекции в зонной плавке. В работах Ч.Чэнга [11] , [12] исследовались потоки, вызванные вращением и взаимодействием вращения с тепловой конвекцией. Решалась стационарная задача.

В работе [9] также исследовались потоки в жидкой зоне, вызванные вращением. Рассматривался, однако, нестационарный процесс. Была обнаружена зависимость стационарного состояния от пути выхода на него. В [13] приводятся результаты, свидетельствующие о возможности развития колебаний в потоке при вращении в изотермическом случае.

В настоящей статье приводится дальнейшее развитие методики расчета, проводятся сравнения с другими расчетами и экспериментом для одной задачи с вращением изотермической жидкости в постановке, близкой к задачам выращивания монокристаллов. Также приводится результат расчета для зонной плавки с учетом как гравитационной, так и термокапиллярной конвекции и вращения.

Предполагается, что жидкость занимает область, имеющую цилиндрическую форму. Считается, что нижнее основание области всегда является твердой стенкой, верхнее же основание может быть или твердым полностью, или только частично, а частично содержать свободную поверхность. То же самое относится к боковой поверхности. Какие именно условия будут реализованы зависит от исследуемой физической ситуации, например, от рассматриваемого метода выращивания монокристаллов.

В этой области рассматривается система уравнений для вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах в приближении Буссинеска с учетом осевой симметрии для безразмерных осевой, радиальной и вращательной компонент скорости u, v, w, соответственно.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial r}+u\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+E_K\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-GrE_K^2(T-1) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial r}+u\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{w^2}{r}=-\frac{\partial p}{\partial r}+E_K\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right)+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+v\frac{\partial w}{\partial r}+u\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{vw}{r}=E_K\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)+\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (4)$$

$$0<r<1; \quad 0<z<H/R,$$

где p - давление;

$Ek = \nu/R^2\omega_*$ - число Экмана;

ν - кинематическая вязкость;

ω_* - характерная частота вращения;

$Gr = \beta g T_{пл} R^3/\nu^2$ - число Грасгофа;

β - коэффициент термического расширения жидкости;

$T_{пл}$ - температура плавления.

Пространственные переменные отнесены к радиусу рассматриваемой цилиндрической области R; компоненты скорости - к $R\omega_*$, давление - к $\rho R^2\omega_*^2$, где ρ - плотность жидкости; время - к ω_*^{-1}, температура - к температуре плавления $T_{пл}$.

Для определения распределения тепла задается уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{Ek}{Pr}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\right) - \left(u\frac{\partial T}{\partial z} + v\frac{\partial T}{\partial r}\right), \tag{5}$$

где $Pr = \nu/a$ - число Прандтля;

a - коэффициент температуропроводности.

Краевые условия для компонент скорости следующие. На твердых стенках: для осевой и радиальной компонент скорости обычные условия прилипания, для вращательной компоненты - заданная скорость вращения стенки.

$$u = v = 0; \quad w = 2\pi\omega \tag{6}$$

На вертикальной части свободной поверхности выполняются условия, полученные из условия равенства нулю касательных напряжений с учетом зависимости коэффициента натяжения γ от температуры (эффект Марангони), который по предположению, имеет вид $\gamma = \gamma_0(1-\beta_\gamma(T-T_{пл}))$

где γ_0 - удельный коэффициент поверхностного натяжения;
β_γ - коэффициент, определяющий зависимость поверхностного натяжения от температуры.

$$\vartheta = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = M \frac{\partial T}{\partial z}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{w}{R}, \tag{7}$$

где $M = \gamma_0 \beta_\gamma / \rho \nu \omega_* R$.

На горизонтальной части свободной поверхности выполняются условия:

$$u = 0; \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = M \frac{\partial T}{\partial z}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

На оси $r = 0$:

$$\vartheta = w = \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \tag{9}$$

Для температуры на границе раздела фаз задается температура плавления, а на оси $r = 0$ - условие симметрии

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0 \tag{10}$$

На других границах области задаются либо условия первого рода, когда температура известна, либо условия теплообмена излучением, а также может задаваться тепловой поток, обусловленный внешним нагревательным устройством, например, высокочастотным индуктором или электронной пушкой.

Вводя функцию тока ψ и функцию вихря ζ, связанные с компонентами скоростей соотношениями

$$\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \tag{11}$$

$$\zeta = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial r} \tag{12}$$

и новые переменные

$$\xi = \frac{\zeta}{r}; \quad W = r w \tag{13}$$

получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+v\frac{\partial \xi}{\partial r}+u\frac{\partial \xi}{\partial z}-\frac{1}{r^4}\frac{\partial W^2}{\partial z}=Ek\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\xi\right)\right)+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)- \tag{I4}$$

$$-Gr\,Ek^2\,\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}+v\frac{\partial W}{\partial r}+u\frac{\partial W}{\partial z}=Ek\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right) \tag{I5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}=\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+r^2\xi \tag{I6}$$

Учитывая, что при $r=0$ $\frac{\partial \xi}{\partial r}=0$; $\frac{\partial T}{\partial r}=0$,
уравнения (I4) и (5) на оси принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}+u\frac{\partial \xi}{\partial z}-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}\right)^2=Ek\left(4\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}\right)- \tag{I7}$$

$$-Gr\,Ek^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)-u\frac{\partial T}{\partial z}\;. \tag{I8}$$

Функция тока, определяемая с точностью до константы, полагается равной нулю на границе области.

Краевые условия для функции ξ и W следующие. На твердых горизонтальных стенках

$$\xi=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\;;\qquad W=2\pi r^2\omega. \tag{I9}$$

На твердых вертикальных стенках

$$\xi=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\;;\qquad W=2\pi r^2\omega \tag{20}$$

На свободной горизонтальной поверхности

$$-\tau\xi - \frac{1}{\tau}\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau^2}\frac{\partial y}{\partial \tau} = M\frac{\partial T}{\partial z}\ ;\ \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{21}$$

На свободной вертикальной поверхности

$$\xi + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = M\frac{\partial T}{\partial z}\ ;\ \frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{2W}{\tau} \tag{22}$$

Уравнения (I4)-(I6) и (5) аппроксимируются монотонной разностной схемой второго порядка точности, предложенной А.А.Самарским для дифференциальных уравнений второго порядка с младшей производной [I4] .

Введем следующие обозначения. Если x_i - узел сетки, а $f_i = f(x_i)$ - функция, определенная в этом узле, то $h_i = x_i - x_{i-1}$ - шаг сетки;

$$\hbar_i = 0.5(h_i + h_{i+1})\ ;\ f_x = (f_{i+1} - f_i)/h_{i+1}\ ;$$

$$f_{\bar{x}} = (f_i - f_{i-1})/h_i\ ;\ f_{\hat{x}} = (f_{i+1} - f_i)/\hbar_i$$

Пусть h_i - шаг сетки в осевом направлении; g_j - шаг сетки в радиальном направлении, τ - шаг по времени

$$R^+ = \frac{v + |v|}{2}\ ;\qquad R^- = \frac{v - |v|}{2} \tag{23}$$

$$Z^+ = \frac{u + |u|}{2}\ ;\qquad Z^- = \frac{u - |u|}{2} \tag{24}$$

Тогда система дифференциальных уравнений (I4)-(I6) заменяется следующей системой разностных уравнений;

$$\xi_t = \frac{E\kappa}{\tau_j}\left\{\frac{1}{1 + \frac{|v|}{2E\kappa}g_j}\cdot\frac{1}{g_j}\left[\frac{1}{\tau_{j+1/2}}(\tau^2\xi)_\tau - \frac{1}{\tau_{j-1/2}}(\tau^2\xi)_{\bar{\tau}}\right] - \right.$$

$$- \frac{R^-}{r_{j+1/2}}\left(r^2\xi\right)_r - \frac{R^+}{r_{j-1/2}}\left(r^2\xi\right)_{\bar r}\Big\} + \frac{2v}{r_j}\xi_{ij} +$$

$$+ \frac{Ek}{1+\frac{|u|}{2Ek}h_i}\xi_{\bar z\hat z} - Z^-\xi_z - Z^+\xi_{\bar z} +$$

$$+ \frac{1}{r_j^4}\frac{1}{2}\left(W_z^2 + W_{\bar z}^2\right) - Gr\,Ek^2\frac{1}{2r_j^2}\left(T_z + T_{\bar z}\right) \qquad (25)$$

$$\frac{r_j}{g_j}\left(\frac{1}{r_{j+1/2}}\varphi_r - \frac{1}{r_{j-1/2}}\varphi_{\bar r}\right) + \varphi_{\bar z\hat z} + r^2\xi_{ij} = 0 \qquad (26)$$

$$W_t = \frac{Ek\,r_j}{1+\frac{|v|}{2Ek}g_j}\cdot\frac{1}{g_j}\left(\frac{1}{r_{j+1/2}}W_r - \frac{1}{r_{j-1/2}}W_{\bar r}\right) - \frac{r_j}{r_{j+1/2}}R^-W_r -$$

$$- \frac{r_j}{r_{j-1/2}}R^+W_{\bar r} + \frac{Ek}{1+\frac{|u|}{2Ek}h_i}W_{\bar z\hat z} - Z^-W_z - Z^+W_{\bar z} \qquad (27)$$

$$T_t = \frac{R_0}{1+\frac{|u|}{2R_0}h_i} - Z^-T_z - Z^+T_{\bar z} + \frac{R_0}{r_j}\frac{1}{1+\frac{|v|}{2R_0}g_j}\times$$

$$\times\frac{1}{g_j}\left(r_{j+1/2}T_r - r_{j-1/2}T_{\bar r}\right) - \frac{r_{j+1/2}}{r_j}R^-T_r - \frac{r_{j-1/2}}{r_j}R^+T_{\bar r} \qquad (28)$$

$$i = 2,\dots,N-1;\quad j = 2,\dots,M-1;$$

где M и N - число узлов по радиусу и высоте.

В качестве метода решения нестационарных уравнений (25),(27),(28) использовался метод переменных направлений.

Уравнение (26) для функции тока на каждом временном шаге итерировалось до сходимости. Для его решения использовался метод Писмена-Рэкфорда с оптимальным набором параметров. Для выбора этих параметров предварительно оценивались границы спектра одномерных сеточных операторов A_1 и A_2

$$(A_1 y) = y_{z\bar{z}}\, ; \quad (A_2 y)_j = \frac{r_j}{g_j}\left(\frac{1}{r_{j+1/2}}\, y_r - \frac{1}{r_{j-1/2}}\, y_{\bar{r}}\right).$$

Параметры $\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, \ldots \quad i=1,\ldots,n$ затем определялись "по Жордану" (см., напр., [I4]), количество итераций n при этом варьировалось от 2 до 6 в зависимости от пространственной сетки задачи. В большинстве расчетов за 4 итерации невязка уравнения (26) уменьшалась в I00-500 раз.

В последние годы в литературе появились работы, в которых приводятся значения скорости движения внутренних слоев жидкости, полученные при помощи тщательных измерений лазерными устройствами. В частности, в работе [I5] приводятся результаты подобных измерений, а также численных расчетов. В настоящей работе приводится сравнение этих результатов с расчетами, выполненными по описанной выше разностной схеме. Постановка задачи следующая. Запаянный цилиндр, наполненный жидкостью, вращается с частотой ω_0. С той же скоростью, т.е. как квазитвердое тело, вращается жидкость внутри цилиндра. В момент времени $t=0$ частота вращения цилиндра скачком увеличивается на $\Delta\omega$. В жидкости при этом возникает вторичное течение, которое постепенно затухает, и при $t\to\infty$ жидкость вновь начинает вращаться как квазитвердое тело с частотой $\omega_0+\Delta\omega$. В ряде случаев выход

на новое стационарное состояние (spin-up) носит колебательный характер. Представляется интересным провести сравнение предлагаемой методики расчета с экспериментом именно для подобного режима перехода в стационарное состояние, и добиться, по возможности, удовлетворительного согласия характеристик течения, в частности, и периода колебаний. Эксперименты выполнялись для цилиндра радиуса R =9,5 см и высотой H =6 см. Число Экмана $Ek = \nu / R^2 \omega_0$ равнялось $2.1 \cdot 10^{-3}$; $\Delta\omega/\omega_0 = 0.111$
В силу симметричности течения относительно серединной плоскости цилиндра, в наших расчетах z менялось от 0 до $H/2$, при $z = H/2$ ставилось условие симметрии, сетка выбиралась равномерной или сгущающейся к границам с числом узлов 21 * 21.

На рис.1 приведены значения величины $\eta = (\Delta\omega - \frac{\omega}{2\pi r}) / \Delta\omega_0$ в точке с координатами z =3 см; r =4,75 см в зависимости от числа оборотов $\omega_0 t$. Видно, что результаты наших расчетов удовлетворительно совпадают с расчетами и экспериментом из [15] .

Отметим, что расчет на неравномерной сетке ближе к данным эксперимента, поскольку сгущение сетки у границ области позволяет лучше описать пограничные слои течения жидкости. Некоторое расхождение с расчетом, приведенным в [15] , можно объяснить тем, что наши расчеты проводились на сетке, имеющей в два раза меньшее число узлов по каждому из направлений.

В качестве примера расчетов процесса, где работает совместно как тепловая, так и термокапиллярная конвекция, а также вращение приведем потоки в жидкой зоне в процессе бестигельной зонной плавки.

В этом случае рассматриваемая область имеет цилиндрическую форму. Торцы цилиндра являются твердыми и могут вращаться. Боковая поверхность цилиндра свободная. Торцевые стенки имеют одинаковую температуру, равную температуре плавления материала.

Через боковую поверхность поступает тепло таким образом, что тепловой поток имеет максимум в середине ци-

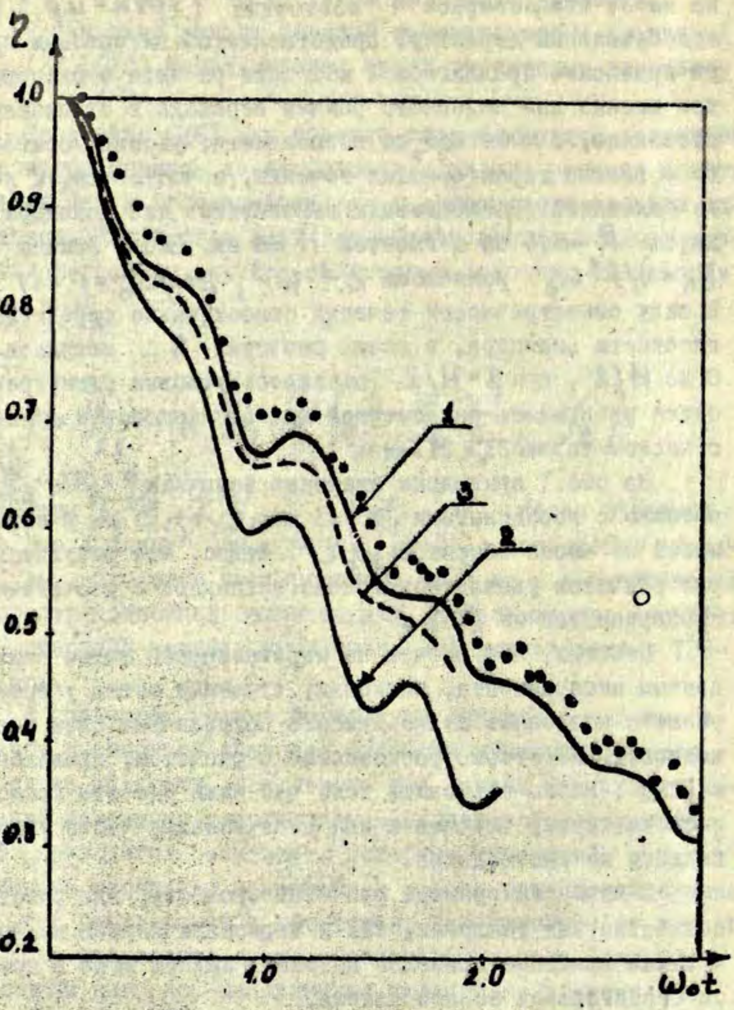


Рис.I. Колебательный характер выхода на стационарное состояние (spin-up);

• – экспериментальные данные [I5] ;

I – результат расчета на сетке 42 × 42 из [I5] ;

2 – результат расчета на равномерной сетке 2I × 2I по описанной методике;

3 – результат расчета на неравномерной сетке 2I × 2I.

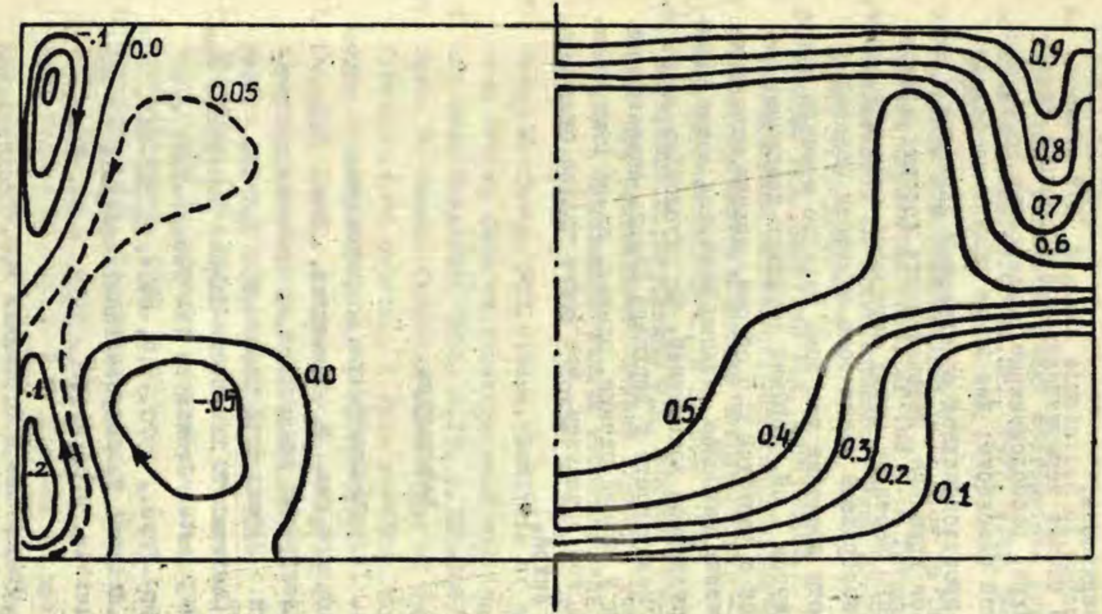


Рис.2. Изолинии функции тока и угловой скорости вращения с учетом естественной и термокапиллярной конвекции при вращении верхнего торца с частотой 0,5 об/сек и неподвижном нижнем торце.

линдра и симметричен по отношению к срединной плоскости цилиндра.

Расчет проводился на сетке 19×21 со сгущением вблизи боковой поверхности.

При учете только термокапиллярной конвекции создаются четыре вихря, расположеннные симметрично по отношению к серединной плоскости: два вихря вблизи свободной поверхности с противоположной ориентацией движения и два вихря вблизи оси вращения, интенсивность которых зависит от температурного перепада между серединой зоны и торцами.

На рис.2 изображены линии тока жидкости (слева) и изолинии скорости вращения для зоны жидкого кремния высотой I см и радиусом I см. Верхняя торцевая плоскость цилиндра вращается с частотой 0,5 об/сек, нижняя неподвижна. В этих условиях наиболее сильным является поток, вызванный термокапиллярной конвекцией. Ею обусловлен вихрь вблизи боковой поверхности у верхнего торца. Аналогичный вихрь имеется и у нижней стенки, однако, из-за центробежной силы, вызванной вращением, его форма сильно отличается от верхнего вихря.

Литература

I. Дорфман Л.А., Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. М.:Физматгиз, 1960. 260 с.
2. Крейц Ф. Конвективный теплообмен во вращающихся системах. - В кн.: Успехи теплопередачи . М.: Мир, 1971.
3. Kobayashi N.,Arizumi T. The Solid-liquid Interface Shape during the Crystal Growth by the Czochralski method. Jap.J.Appl.Phys., 1970, v.9, No.4, p.361-367.
4. Kobayashi N.,Arizumi T. Computational Analysis of the flow in a crucible. J.Cryst.Gr., 1975, v.30, No.2, p.177-184.
5. Ремизов И.А.,Старшинова И.В.,Щелкин Ю.Ф. Исследование движения расплава при выращивании монокристаллов по

методу Чохральского.–Тезисы докладов У Всесоюзного совещания по росту кристаллов. Тбилиси, 1977, т.2, с.173-174.

6. Langlois W.E. Digital simulation of Czochralski bulk flow in a parameter range appropriate for liquid semiconductors. J.Cryst.Gr., 1977, v.42, No.12, p.386-399.
7. Langlois W.E. Czochralski bulk flow in the growth of garnet crystals. Proc. of the 6-th Intern.Conf. on num.methods in fluid dinamics, June 20-25, Tbilisi, 1978, v.1, p.172-177.
8. Люмкис Е.Д., Мартузан Б.Я., Мартузане Э.Н. Численные исследования нестационарных гидродинамических и тепловых процессов в методе Чохральского. - Изв.АН СССР. Сер.физическая, 1980, № 2, с.373-377.
9. Мартузан Б.Я., Мартузане Э.Н. Расчет течения в жидкой зоне при бестигельной зонной плавке с учетом вращения. – В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1978, с.97-117.
10. Chong E. Chang, W.R.Wilcox. Analysis of surface tension driven flow in floating zone melting. Int.J.Heat and Mass Transfer, 1976, v.19, p.355-366.
11. Chong E. Chang. Computer simulation of convection in floating zone melting. I Pure rotation driven flows. J.Cr.Growth, 1978, v.44, p.168-177.
12. Chong E. Chang. Computer simulation of convection in floating zone melting. II Combined free and rotation driven flows, 1978, v.44, p.178-186.
13. Мартузан Б.Я., Мартузане Э.Н., Ратников Д.Г. Тепло- и массообмен в процессе бестигельной зонной плавки. - Электротермия, 1980, № 2.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 653 с.
15. Warn-Warnas A., Fowlis W.W., Piacsek S., Lee S.M. Numerical solutions and laser - Doppler measurements of spin-up. J.Fluid Mech., 1978, part 4, p.609-639.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИИ КРИСТАЛЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В МОНОКРИСТАЛЛАХ МЕДИ, ВЫРАЩИВАЕМЫХ ИЗ РАСПЛАВА

Вахрамеев С.С. (ВЦ ЛГУ им.П.Стучки), Засимчук И.К., Фомин А.В. (Ин-т металло-физики АН УССР)

В работе [I] показана зависимость совершенства медных кристаллов от толщины шейки при выращивании их из расплава по методу Чохральского. В настоящей работе численно исследуется влияние наличия шейки на распределение температурного поля и термических напряжений. Проведено сопоставление расчетов с экспериментальными данными. Наблюдаемое согласие с экспериментом указывает на решающую роль термических напряжений при образовании дислокаций в монокристаллах меди.

I. Опишем принятую нами математическую модель задачи. При выращивании кристалла меди по методу Чохральского для определения температурного поля будем рассматривать кристалл, шейку и затравку, как показано на рис.I. Уравнение теплопроводности в случае осевой симметрии имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad (I)$$

$$-L < z < 0, \quad 0 < r < R(z), \quad t > 0,$$

$T(r,z,t)$ - температура,

a^2 - коэффициент температуропроводности.

На границе раздела фаз

$$T\big|_{z=-L} = T_{пл.} \qquad (2)$$

На остальной границе области Γ выполняется условие

$$-\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \frac{\varepsilon\sigma}{K}\left[T^4 - T_1^4(x)\right], \qquad (3)$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по нормали к внешней поверхности,

$T_1(x)$ - температура нагревателя, а координата x связана с z соотношением

$$x = z + v_0 t, \qquad (4)$$

V_0 - скорость выращивания кристалла,

ε - степень черноты,

σ - коэффициент Стефана-Больцмана.

$$T\big|_{t=0} = T_{пл}. \qquad (5)$$

Учитывая, что в нашем случае радиус $R(z)$ переменного сечения мал по сравнению с длиной, а также радиальные температурные градиенты много меньше осевых, осредним исходные уравнения.

Обозначим среднюю по сечению температуру

$$U(z,t) = \frac{2}{R^2}\int\limits_0^{R(z)} r\,T(r,z,t)\,dr \qquad (6)$$

и проинтегрируем уравнение (I) от 0 до $R(z)$.

$$\frac{2}{R^2}\int\limits_0^{R(z)} r\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,dr + \frac{2}{R^2}\left[r\frac{\partial T}{\partial r}\right]_0^R = \frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}. \qquad (7)$$

Для того, чтобы в уравнении (7) в левой части первый член выразить через среднюю температуру, продифференцируем (6) два раза по переменной z и учтем, что на поверхности $T(r,z)=U(z)$, тогда получим

$$\frac{2}{R^2}\int_0^{R(z)} r\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,dr=\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{2R'}{R}\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{8}$$

Учитывая выражение (8) и граничное условие Стефана-Больцмана (3), получим уравнение для средней температуры U в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{2R'}{R}\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{2}{\cos\alpha}\frac{\varepsilon\sigma}{RK}\left(U^4-T_1^4(x)\right)+\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}\,. \tag{9}$$

Линеаризация нелинейного члена производится следующим образом

$$U^4-T_1^4=(U-T_1)(U^3+U^2T_1+UT_1^2+T_1^3)\approx 4T_1^3(U-T_1).$$

Таким образом, вместо исходной задачи (I)-(5) получим[x)]

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{2R'}{R}\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\alpha}{R}\left(U-T_1(x)\right)+\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t} \tag{I0}$$

$$U\big|_{z=-L}=T_{пл.} \tag{II}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_{z=0}=-\frac{\alpha}{2}\left(U-T_1\right) \tag{I2}$$

$$U\big|_{t=0}=T_{пл.};\qquad \alpha=\frac{8\varepsilon\sigma}{K\cos\alpha}T_1^3 \tag{I3}$$

---

x) Практика расчетов показывает, что такое осреднение и линеаризация дает достаточно хорошее приближение, [2].

Из физических экспериментов известно, что при небольшой скорости выращивания кристалла в процессе кристаллизации быстро устанавливается квазистационарное состояние, поэтому переходя к неподвижной системе координат (x,t), которая связана с подвижной системой (ξ,t) соотношением (4), запишем уравнение (I0) в стационарном случае.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{2R'}{R}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\alpha}{R}\left(U-T_1(x)\right)+\frac{1}{a^2}V_0\frac{\partial U}{\partial x} \tag{I4}$$

В нашем случае влияние конвективного члена, стоящего в правой части уравнения (I4), мало, т.к. величина коэффициента V_0/a^2 на 3 порядка меньше коэффициента $2R'/R$ конвективного члена, стоящего в левой части. Если $R'=0$, например, в случае отсутствия шейки, из аналитического решения уравнения (I4) видно, что влиянием конвективного члена также можно пренебречь.

Для решения поставленной задачи используется разностный метод. Введем на отрезке $0\le x\le L$ равномерный шаг h и разностную задачу запишем следующим образом, [3].

$$\frac{1}{h^2}\left[a_i U_{i-1}-(a_{i+1}+a_i)U_i+a_{i+1}U_{i+1}\right]=\frac{\alpha_i}{R_i}(U_i-T_i) \tag{I5}$$

$$i=1,2,\dots,M-1$$

$$-\frac{U_M-U_{M-1}}{h}=\frac{\alpha}{2}(U_M-T_M) \tag{I6}$$

$$U_0=T_{пл}. \tag{I7}$$

где $a_i = \frac{R_i^2 + R_{i+1}^2}{2} + o(h^2)$.

По определенному таким способом температурному полю рассчитываются термические напряжения по методике, изложенной в [4]. Разностным методом решается несвязанная квазистатическая задача термоупругости в двумерной области (r, x), занятой кристаллом. Расчет термических напряжений в шейке и затравке не производится.

В расчетах приняты следующие значения констант.

$$K = 0{,}32 \frac{вт}{мм\,град}, \quad \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-14} \frac{вт}{мм^2 град^4},$$

$$a^2 = 0{,}487 \cdot 10^4 \frac{мм^2}{мин}, \quad V_0 = 0{,}5\ мм/мин,$$

$$T_{пл.} = 1083^\circ, \quad \varepsilon = 0{,}16,$$

$$G = 2913 \frac{кГ}{мм^2}, \quad \nu = 0{,}3.$$

Размеры для:
кристалла $L_{кр}$ = 60 мм, $R_{кр}$ = 2,5 мм;
шейки $L_ш$ = 25 мм, $R_ш$ = 0,5 мм;
затравки $L_з$ = 20 мм, $R_з$ = 2,5 мм.
На конусной части шейки (см.рис.I) угол α = I5°.

2. Рассмотрим результаты расчетов. На рис.2 дается экспериментально измеренное распределение температуры на нагревателе (печи). В начальный момент температура составляет I086°С и в области над кристаллом мало меняется, а затем резко падает и понижается до I00°. Такое распределение температуры задается на нагревателе при выращивании кристалла меди как с шейкой, так и без шейки.

На рис.3 показаны результаты расчета распределения температуры в кристалле, шейке и затравке. На графике видно, что при наличии шейки очень мал градиент (он равен

-1,1 град/мм) в кристалле и в затравке, но в шейке градиент большой (он равен - 25 град/мм). В случае отсутствия шейки, т.е. когда радиус шейки равен радиусу кристалла, в кристалле градиент больше и составляет в среднем - 6,0 град/мм, т.е. почти в 6 раз больше. Отсюда следует вывод, что наличие шейки при выращивании кристалла снимает градиент температуры в кристалле.

Аналогичная ситуация возникает и с термическими напряжениями, величина которых приводится на рис.4, рис.5. На этих рисунках в виде изолиний приводятся величины осредненных сдвиговых касательных напряжений τ для направления (100) и рассчитываются по формуле, [5]:

$$\tau^2 = \frac{1}{24}\Big[(\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\varphi)^2 + \tag{18}$$

$$+ \frac{2}{3}(\sigma_r - \sigma_z)(\sigma_\varphi - \sigma_z)\Big] .$$

В случае выращивания кристалла с шейкой напряжения τ не больше 0,3 г/мм^2 (рис.4), тогда как в случае выращивания кристалла без шейки максимальные напряжения достигают 1,5 г/мм^2. (рис.5).

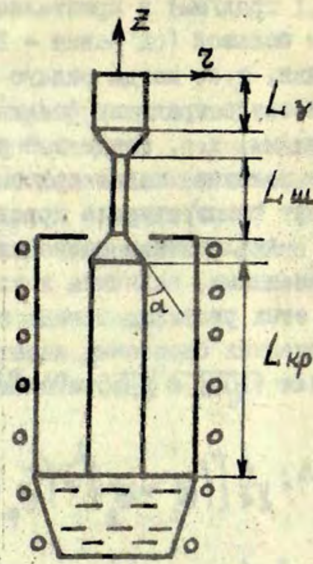


Рис.I. Схема кристаллизации из расплава меди по методу Чохральского. Длина: $L_{кр}$ - кристалла, $L_ш$ - шейки, $L_з$ - затравки.

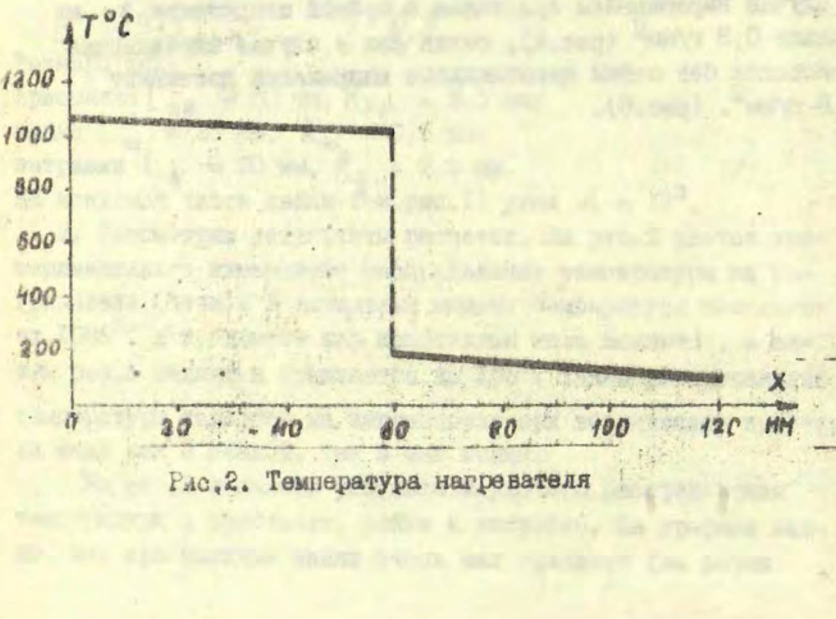


Рис.2. Температура нагревателя

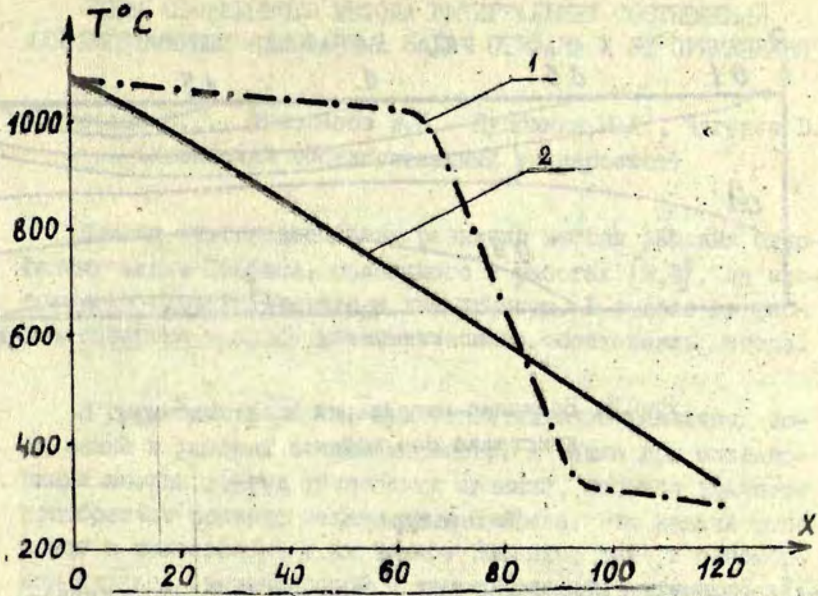


Рис.3. Распределение темпертуры:
I - кристалл с шейкой,
2 - кристалл без шейки.

Рис.4. Величина напряжений τ г/мм^2 для кристалла с шейкой.

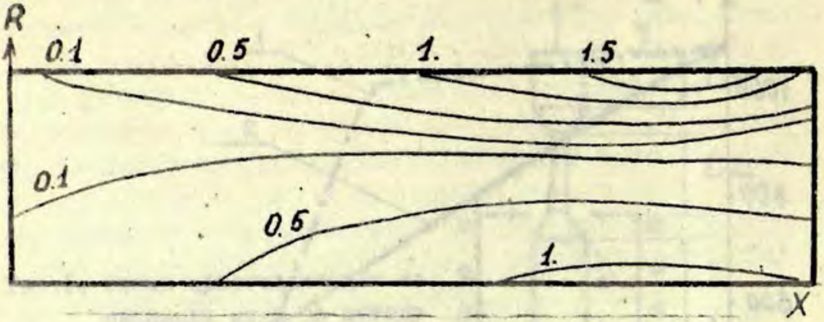


Рис.5. Величина напряжений τ г/мм^2 для кристалла без шейки.

Литература

1. Засимчук И.К., Фомин А.В., Овсиенко Д.Е. Роль термических напряжений в образовании дислокаций при выращивании из расплава монокристаллов меди.- ДАН СССР, 1979, 224, №2, с.341-344.
2. Авдонин Н.А., Мартузан Б.Я., Пыленкова Э.Н., Фридман Т.С. Решение тепловой задачи, связанной с процессом направленной кристаллизации слитков.- Латв.матем.ежегодник. Рига.: Зинатне, 1970, №7, с.3-16.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977, с.154-159.
4. Вахрамеев С.С. Расчет термических напряжений в кристаллах, выращиваемых из расплава.- В кн.: Вопросы теории кристаллизации. Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1975, т.237, с.101-122.
5. Фомин В.Г., Освенский В.Б., Мильвидский М.Г. и др. Влияние отклонения состава от стехиометрии и кристаллографического направления роста на дислокационную структуру монокристаллов арсенида галлия.- В кн.: Процессы роста и синтеза полупроводниковых кристаллов и пленок. Новосибирск: Наука, 1975, ч.2, с.3-6.

СХЕМА ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ОДНОФАЗНЫХ ЗАДАЧ СТЕФАНА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Григорьев С.Г., Косолапов В.Н., Пудовкин М.А., Чугунов В.А.
(Казанский государственный университет)

Данная статья посвящена развитию метода решения однофазных задач Стефана, описанного в работах [2,3], на многомерный случай. Приведены два примера. В статье не рассматриваются вопросы математического обоснования метода.

В процессах абляции, при строительстве различных сооружений в районах вечной мерзлоты, а также при исследовании многих других физических явлений, большое значение приобретает решение задачи типа Стефана. Эти задачи относятся к нелинейным, и их точное решение, даже в одномерном случае, связано порой с непреодолимыми математическими трудностями. Поэтому большое внимание уделяется развитию методов, позволяющих получить приближенное решение подобных задач. В частности, работы [2,3] посвящены одному такому подходу к решению одномерных задач с подвижными границами.

В данной работе дается его обобщение на случай многомерных задач.

Пусть необходимо отыскать функцию $\theta(x,Fo)$, которая в области $\mathcal{D}$ удовлетворяет уравнению вида

$$\rho(x)\frac{\partial\theta}{\partial Fo}=L\theta,\ x\in\mathcal{D},\ Fo>0, \tag{1}$$

где x – точка евклидова пространства; $L=div(K_\lambda(x)grad)+g(x)$; $\rho(x)>0, K_\lambda(x)>0, g(x)<0$ – известные кусочно-непрерывные функции; $\mathcal{D}$ – область, заключенная между заданной неподвижной границей Γ_0 и некоторой границей Γ, зависящей от параметра Fo, и которая должна быть определена в ходе решения задачи.

На границе Γ_0 функция $\theta(x,Fo)$ должна удовлетворять условию

а) $-\frac{\partial\theta}{\partial n_0} = Bi(\theta - \theta_\Gamma),\ x \in \Gamma_0$;

а на границе Γ

б) $\theta = 0,\ x \in \Gamma$,

в) $K_\lambda(x)\frac{\partial\theta}{\partial n} = Ko\, V_\Gamma,\ x \in \Gamma$;

г) $Fo = 0,\ \Gamma = \Gamma_0$.

Здесь θ_Γ - заданная функция; Ko, Bi - заданные постоянные, причем $Bi > 0$, а $Ko > 0$; если $\theta_\Gamma < 0$ и $Ko < 0$, если $\theta_\Gamma > 0$; V_Γ - скорость движения границы Γ в направлении $\vec{n}$; $\vec{n}_0$, $\vec{n}$ - внешние по отношению к $\mathcal{D}$ нормали к Γ_0 и Γ соответственно.

Следует отметить, что из условия а) вытекают как частный случай граничные условия первого и второго рода.

Приступим к построению приближенного решения поставленной задачи. Так, как и в работах [I,2], введем функции $f_i(x)$ следующим образом

$$\begin{aligned} &L f_i = \rho(x) f_{i-1},\ f_0 \equiv 0,\ x \bar{\in} \Gamma_0 \\ &-\frac{\partial f_i}{\partial \vec{n}_0} = Bi\, f_i,\ x \in \Gamma_0 . \end{aligned} \quad (2)$$

Заметим, что в выборе функции f_i существует некоторый произвол, так как решение задачи (2) не единственно. На это указывалось и в работе [I], где с помощью таких функций задача Стефана сводится к системе интегральных уравнений.

Обозначим

$$\nu_i(Fo) = \int_{\mathcal{D}} \rho(x) f_i(x)\, \theta(x, Fo)\, dx . \quad (3)$$

Умножим уравнение (I) на f_i и проинтегрируем его по области $\mathcal{D}$.

Применяя вторую фурмулу Грина и условие б), получим

$$\frac{\partial \vartheta_i}{\partial Fo} = \int\limits_{\mathcal{D}} \theta L f_i \, dx + \int\limits_{\Gamma_0} K_\lambda(x)\left(f_i \frac{\partial \theta}{\partial n_0} - \theta \frac{\partial f_i}{\partial n_0}\right) ds + \int\limits_{\Gamma} K_\lambda(x) f_i \times \frac{\partial \theta}{\partial n} ds \tag{4}$$

Используя граничные условия а) и в), с учетом (2), имеем

$$\frac{d}{dFo}\left[\vartheta_i - Ko \int\limits_{\mathcal{D}} f_i(x)\,dx\right] = \vartheta_{i-1} + \int\limits_{\Gamma_0} K_\lambda(x) f_i(x) Bi\, \theta_\Gamma \, ds \tag{5}$$

Это равенство можно рассматривать как уравнение для ϑ_i, причем начальное условие для ϑ_i вытекает из соотношения (3) $Fo = 0: \vartheta_i = 0$. Приближенное решение задачи будем искать в виде

$$\theta_n(x, Fo) = \theta_0(x) + \sum_{K=1}^{n} a_K(Fo) f_K(x), \quad x \in \mathcal{D}_n \tag{6}$$

$\mathcal{D}_n$ - область, заключенная между границей Γ_0 и Γ_n, Γ_n $-n$-ое приближение для искомой границы Γ, которое может быть определено из граничных условий на Γ. θ_0 - функция, являющаяся решением соответствующей стационарной задачи. Очевидно, что θ_n удовлетворяет условию на Γ_0.

Потребуем, чтобы функция θ_n удовлетворяла n интегральным соотношениям вида (3). Тогда для определения коэффициентов имеем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \int\limits_{\mathcal{D}_n} \rho(x) f_i(x) f_j(x)\,dx = -\int\limits_{\mathcal{D}_n} \rho f_j(x)\theta_0(x)\,dx + \vartheta_j \tag{7}$$

Рассмотрим конкретные примеры:

I. Задача об определении температурного поля под зданием, построенным в зоне вечной мерзлоты.

Эта задача может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений.

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (x, z) \in \mathcal{D}, \; Fo > 0, \tag{8}$$

$$z=0,\ \theta=\begin{cases}1, |x|<1,\\ 0, |x|>1;\end{cases} \qquad \theta=0,\ -\frac{\partial\theta}{\partial n}=Ko\,V_\Gamma .$$

Для ее решения применим описанный выше метод. Нетрудно убедиться, что функции $f_1=z$, $f_2=z^3/12+x^2z/4$ и т.д. удовлетворяют системе (2) при граничных условиях первого рода ($Bi=\infty$).

Будем искать первое приближение. Согласно (6) имеем:

$$\theta_1=\theta_0(x,z)+a_1 z . \tag{9}$$

Из (5) и (7) при $i=1$ получим

$$\int\limits_{D_1} z\,\theta_0\,dx\,dz+a_1\int\limits_{D_1} z^2 dx\,dz+Ko\int\limits_{D_1} z\,dx\,dz=2Fo . \tag{10}$$

Для определения границы Γ используем граничное условие б), которое примет вид:

$$\theta_0(x,z)=-a_1(Fo)z . \tag{11}$$

(10) и (11) служат для определения $a_1(Fo)$. Пусть z_0 – глубина максимального протаивания вдоль оси z, θ_0 – решение стационарной задачи, имеющее в данном случае вид:

$$\theta_0=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}((1+x)/z)+\operatorname{arctg}((1-x)/z)\right), \tag{12}$$

тогда коэффициент a_1 определяется формулой:

$$a_1=-\frac{2}{\pi z_0}\operatorname{arctg}\frac{1}{z_0} \tag{13}$$

и

$$x=\pm\sqrt{1-z^2+\frac{2z}{\operatorname{tg}\{\pi[\theta\,\frac{2}{\pi}\,\frac{z}{z_0}\operatorname{arctg}\frac{1}{z_0}]\}}} . \tag{14}$$

Уравнение (10) имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{z_0}\{[1+x(z)]\operatorname{arctg}\frac{1+x(z)}{z}-[1-x(z)]\operatorname{arctg}\frac{1-x(z)}{z}- \tag{15}$$

$$-\frac{z}{2}\ln\frac{z^2+[1+x(z)]^2}{z^2+[1-x(z)]^2}-\frac{2z\,x(z)}{z_0}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{z_0}+\pi Ko\,x(z)\Big\}z\,dz= \\ =Fo,$$

где

$$x(z)=\pm\sqrt{1-z^2+\frac{2z}{tg\left(2\frac{z}{z_0}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{z_0}\right)}},\quad z\in(0,z_0). \qquad (16)$$

Выражение (15) дает связь Fo от z_0. Решение задачи в первом приближении имеет вид

$$\theta_1(x,z,Fo)=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1+x}{z}+\mathrm{arctg}\,\frac{1-x}{z}\right)-\frac{2z}{\pi z_0}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{z_0}. \qquad (17)$$

Наряду с получением аналитического решения данная задача решалась и численно. Для численного решения также использовался данный метод.

Приведем результаты проведенных расчетов.

Зависимость z_0 от Fo для значения $Ko=1;5$ приведена на рисунке 1. Расчеты показали, что глубина протаивания, равная половине длины задания, (в данном случае $z_0=1$) достигается при $Fo\approx 1$, что примерно соответствует $\tau=10^8$ сек. Поэтому во всех дальнейших расчетах предполагалось, что $0\leq z_0\leq 1$. Граница протаивания представлена на рисунке 2 для значений $z_0=0,1$, $z_0=0,5$, $z_0=1$. Приведенные графики совпадают с результатами работы [5], в которой рассматривалась аналогичная задача определения температурного поля.

2. Задача определения границы ледогрунтового ограждения горной выработки в водонасыщенных средах.

По периметру горной выработки (рисунок 3) радиуса R расположены $2\cdot P$ замораживающих колонок радиуса $R_к$ при температуре $\theta_к$. Учитывая симметрию, задача может быть сформулирована с использованием безразмерных переменных в виде:

$$\frac{\partial\theta}{\partial Fo}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2},\quad (x,y)\in\mathcal{D}<\Omega,\ Fo>0,$$

$$\Gamma_0=\Gamma_к\cup\Gamma_н,\ \theta|_{\Gamma_к}=\theta_к,\ \frac{\partial\theta}{\partial n}\Big|_{\Gamma_н}=0, \tag{18}$$

$$\theta|_{\Gamma}=0,\ -\frac{\partial\theta}{\partial n}=KoV_{\Gamma}\Big|_{\Gamma}.$$

Конформное преобразование $G=z^p$ переводит область Ω ($z=x+iy$) в полуплоскость $G=u+iv$, которую затем зеркально отображаем в нижнюю полуплоскость.

Исследуя геометрию образа окружности радиуса r_0 ($r_0=R_к/R$) методом малого параметра по $\varepsilon=pr_0$ можно показать, что отклонение границы образа от окружности с центром в точке $u=1+\varepsilon^2/2$, $v=0$ и радиусом $\bar{r}=\varepsilon+\varepsilon^3/6$ равномерно ограничено сверху величиной $\varepsilon^2/2p+\varepsilon^3/6+\varepsilon^4/5+\varepsilon^5/3+O(\varepsilon^6)$, т.е. относительная погрешность для большинства практических случаев не превышает 3-5%, что находится в пределах технических допусков. Это позволяет рассматривать $\bar{\Gamma}_к$ как окружность радиуса $\bar{r}_0$. Перенеся начало координат в центр окружности $\bar{v}=v$, $\bar{u}+1+\varepsilon^2/2$, получим задачу:

$$\rho(\bar{u},\bar{v})\frac{\partial\theta}{\partial Fo}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{u}^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial\bar{v}^2},\ (\bar{u},\bar{v})\in\bar{\mathcal{D}}<G,\ Fo>0.$$

$$\theta|_{\bar{\Gamma}_к}=\theta_к,$$

$$\theta|_{\bar{\Gamma}}=0,\ -\frac{\partial\theta}{\partial n}=KoV_{\bar{\Gamma}}\Big|_{\bar{\Gamma}}$$

где $\rho(\bar{u},\bar{v})=((\bar{u}-1-\varepsilon^2/2)^2+\bar{v}^2)^{1/2p}/p^2$

Далее, следуя методу настоящей работы, находим

$$\theta_0=\theta_к,\ f_1=\ln\frac{\bar{u}^2+\bar{v}^2}{\bar{r}_0^2}, \tag{19}$$

$$f_{i+1} = (\rho f_i) * G \quad (i=1,2,3,\ldots)$$

где (I9) выражение типа свертки, а

$$G = \frac{\bar{r}_0^2}{4\pi} \ln \frac{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta-\varphi)}{\rho^2 r^2 - 2\rho r \cos(\theta-\varphi)}$$

– функция Грина для уравнения Пуассона в области вне окружности радиуса $\bar{r}_0$.

Для определения искомой границы воспользоваться одним из соотношений типа (7) и двумя граничными условиями на подвижной границе.

$$a_1 \int_{\bar{D}} \rho f_1^2 dx + a_2 \int_{\bar{D}} \rho f_1 f_2 dx = -\frac{\theta_к \pi Fo}{\bar{r}_0} + \int_{\bar{D}} Ko f_1 dx - \theta_к \int_{\bar{D}} \rho f_1 dx \tag{20}$$

$$a_1 f_1\big|_\Gamma + a_2 f_2\big|_\Gamma = -\theta_к \tag{21}$$

$$a_1 \frac{\partial f_1}{\partial n}\Big|_\Gamma + a_2 \frac{\partial f_2}{\partial n}\Big|_\Gamma = -Ko V_\Gamma \tag{22}$$

Выражая из (20), (2I) $a_1(Fo)$, $a_2(Fo)$ и подставляя их в (22), получим функциональное уравнение относительно области $\mathcal{D}$, для решения которого можно использовать довольно простую разностную схему и интерационный процесс.

Следует отметить, что в начальный момент времени $Fo=0$ имеет интегрируемую особенность и для получения хорошего начального приближения следует воспользоваться решением одномерной задачи при малых Fo .

$$r = r_0 \exp\left(\left(-\frac{2\theta_к}{Ko r_0^2} Fo\right)^{1/2}\right).$$

Распределение температуры получается по формуле (6):

$$\theta = \theta_к + f_1 \frac{\left(-\frac{\theta_к \pi Fo}{\bar{r}_0} + Ko \int_{\bar{D}} f_1 dx - \theta_к \int_{\bar{D}} \rho f_1 dx\right) f_2 + \theta_к \int_{\bar{D}} \rho f_1 f_2 dx}{f_2 \int_{\bar{D}} \rho f_1^2 dx - f_1 \int_{\bar{D}} \rho f_1 f_2 dx}$$

$$-f_2\,\frac{\left(-\frac{\theta_k \pi Fo}{\bar{\tau}_0}+Ko\int\limits_D f_1\,dx-\theta_k\int\limits_D \rho f_1\,dx\right)f_1+\theta_k\int\limits_D \rho f_1^2\,dx}{f_2\int\limits_D \rho f_1^2\,dx-f_1\int\limits_D \rho f_1 f_2\,dx}$$

Результаты работ [2,3,4] позволяют надеятся, что первое-второе приближения дают достаточные по точности решения задач.

Предлагаемый в работе метод можно использовать и для решения нестационарных задач в бесконечных областях, так как они могут быть сведены к однофазной задаче Стефана путем введения возмущенной зоны.

Литература

I. Гринберг Г.А. Об одном общем методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии и им подобных при наличии границ, движение которых задано или подлежит определению в ходе решения задачи (проблема Стефана и др.) - Ж.техн.физ. , 1974, 44, №10, 2033-2042.

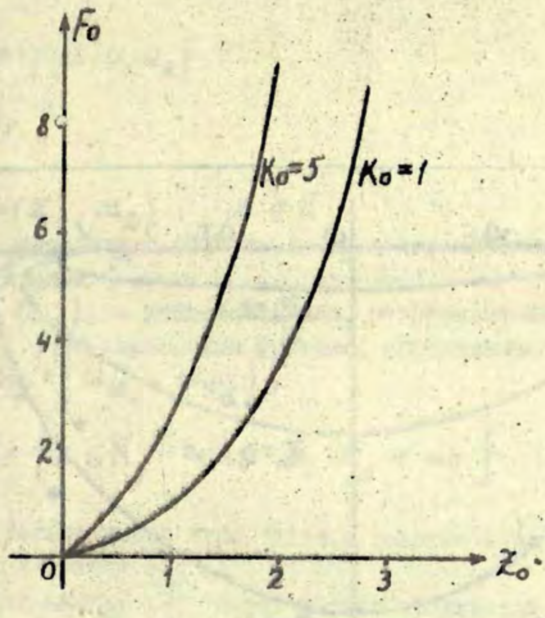
2. Волков И.К., Чугунов В.А., Саламатин А.Н. Обобщение метода интегральных соотношений и применение его к некоторым задачам теплопроводности.- В кн.:Исследования по прикл.мат .Казань,Изд-воКГУ,1974,вып.2, с. 18-34.

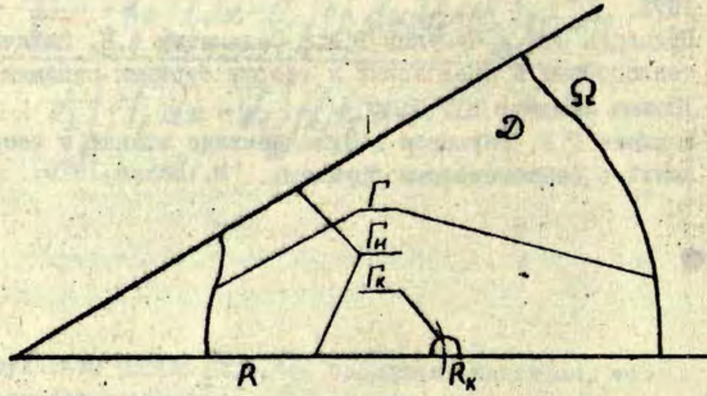
3. Чугунов В.А. О решении однофазовой задачи Стефана для

цилиндрической области с граничным условием третьего рода. - Точные науки.Математика. Казань :Изд-воКГУ, 1973.

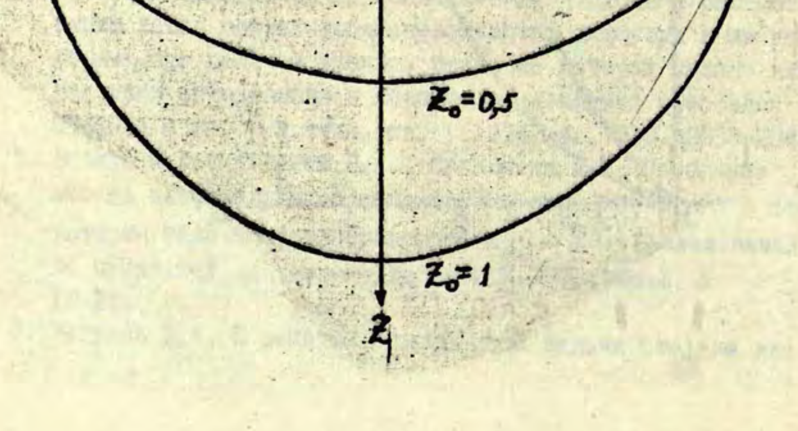
4. Пудовкин М.А., Чугунов В.А., Саламатин А.Н. Задачи теплообмена в приложении к теории бурения скважин. Казань :Изд-во КГУ,1977.

5. Порхаев Г.В. Тепловое взаимодействие зданий и сооружений с вечномерзлыми грунтами. М.:Наука,1970.





Ω
D
Γ
Γн
Γк
R
Rк



-1
-0,5
0
0,5
1
x
z₀=0,1
z₀=0,5
z₀=1
z

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Елкина Н.Г. (ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, г.Рига)

В работе [4] был предложен разностный метод решения нелинейных задач, рассмотренный на примере решения нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. В данной работе этот метод используется для решения задачи Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа.

I. Рассматривается следующая краевая задача:

$$\Delta u = f(x, u, u_x) \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2)$. $x \in K$.

K – односвязная область в R_2, ограниченная кусочно-гладкой кривой Γ.

$f(x, u, u_x)$ – действительная, непрерывно-дифференцируемая по всем переменным функция, определенная в области $\mathcal{D}$; $u_x = (u_{x_1}, u_{x_2})$,

$$\mathcal{D} = \{x \in K, -\infty < u, u_x < \infty\}$$

Эта задача имеет единственное решение в частности при следующих условиях [3]:

1) $f(x, u, u_x)$ имеет первые производные по всем переменным, удовлетворяющие условию Гельдера в любой ограниченной области K, граница $\Gamma \in C^{2,\beta}$;

2) для всех $x \in K$ и произвольных "u" $f_u(x, u, 0) \geq C_0 = const > 0$; положим

$$M_0 = \frac{1}{C_0} \max |f(x,0,0)|,$$

3) для всех $x \in K$ и $|u| \leq M_0$, и произвольных u_x

$$|f(x,u,u_x)| + |f_{x_k}(x,u,u_x)| + |f_u(x,u,u_x)| + (1+|u_x|) f_{u_{x_k}}(x,u,u_x) \leq B_0(|u_x|^2+1)$$

4) условие согласования:

$$f(x,0,0)\big|_\Gamma = 0$$

Пусть $V(x)$ - ограниченна и суммируема со степенью $p\ (1<p<\infty)$. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области K

$$\Delta u = V(x) \tag{Ia}$$

$$u\big|_\Gamma = 0. \tag{2a}$$

Решение задачи (Ia, 2a) можно представить в следующем виде:

$$u(x) = \int_K G(x,s)\, V(s)\, ds,$$

где $s = (s_1, s_2)$, $G(x,s)$ - функция Грина для задачи (Ia, 2a). Решение задачи (I,2) можно свести к задаче нахождения неподвижной точки для оператора F в $L_p(K)$

$$(FV)(x) = f\Big(x, \int_K G(x,s)V(s)\,ds, \int_K \frac{\partial G}{\partial x}(x,s)\,V(s)\,ds\Big) \tag{3}$$

Пусть $S_h = S_{h[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}$, где $h=(h_1,h_2)$ - пространство сеточных функций на сетке N_h. Норму в пространстве S_h определим следующим образом: если $V^h \in S$, то

$$\|v^h\|^h_{p,0} = \|\{v^h\}_0\|_p \ , \tag{4}$$

где $\{v^h\}_0$ – кусочно-постоянное продолжение сеточной функции $v^h \in S_h$ на область K, определенное равенством:

$$\{v^h\}_0(x_1, x_2) = v^h_{k,n} \quad \text{при} \begin{cases} x_1 \in (x_{1k} - h_1, x_{1k} + h_1] \\ x_2 \in (x_{2n} - h_2, x_{2n} + h_2]. \end{cases}$$

Сужением функции $v \in L_p(K)$ на сетку N_h назовем сеточную функцию

$$[v]^h_\omega = \tilde{v}_h(x_{1k}, x_{2n}), \tag{5}$$

где $\tilde{v}_h$ – средняя по Стеклову для функции v – [I] с усредняющим ядром $\omega_h(x,s) = \omega_{h_1}(x_1, s_1) \times \omega_{h_2}(x_2, s_2)$ и с

$$\tilde{v}_h = \frac{1}{4h_1h_2} \iint_K \omega_{h_1}(x_1, s_1) \times \omega_{h_2}(x_2, s_2) v(s_1, s_2) ds_1 ds_2. \tag{6}$$

Пусть $\Omega_i(h_i) = \sup\left(\frac{1}{2}\sum' \omega_{h_i}(x_{ik}, s_i) + \sum \omega_{h_i}(x_{ik}, s_i)\right) 2h_i$ $(i = 1,2)$, $\sum'$ – граничные, $\sum$ – внутренние точки сетки N_h. Тогда

$$\Omega_1(h_1) \times \Omega(h_2) = \sup\Big[\frac{1}{4}\sum' \omega_{h_1}(x_{1k}, s_1) \sum' \omega_{h_2}(x_{2n}, s_2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big(\sum \omega_{h_2}(x_{2n}, s_2) \times \sum' \omega_{h_1}(x_{1k}, s_1) + \sum' \omega_{h_1}(x_{1k}, s_1) \sum \omega_{h_2}(x_{2n}, s_2)\Big) +$$

$$+ \sum\sum \omega_{h_1}(x_{1k}, s_1) \omega_{h_2}(x_{2n}, s_2)\Big] 4h_1h_2 .$$

Лемма.

Если в пространстве $\mathcal{S}_h$ норма определена по формуле (4), то выполняется следующее соотношение

$$\| [v]_\omega^h \|_{p;0}^h \le K_{p_1} \times K_{p_2} \|v\|_p, \quad v \in L_p(K), \tag{7}$$

где $K_p = K_{p_1} \times K_{p_2}$ не зависит ни от $h=(h_1,h_2)$, ни от V.

Доказательство.

Покажем, что выполняется неравенство:

$$\| [v]_\omega^h \|_{p,0}^h \le \left(\frac{\Omega_1(h_1)}{h_1}\right)^{1/p} \cdot \left(\frac{\Omega_2(h_2)}{h_2}\right)^{1/p} \cdot \|v\|_p .$$

$$\| [v]_\omega^h \|_{p,0}^h = \Big(\Big(\frac{1}{4} \sum_k{}' \sum_n{}' |\tilde{v}_h(x_{1k}, x_{2n})|^p + \frac{1}{2}\Big(\sum_k{}' \sum_n |\tilde{v}_h(x_{1k}, x_{2n})|^p +$$

$$+ \sum_k \sum_n{}' |\tilde{v}_h|^p\Big) + \sum_k \sum_n |\tilde{v}_h(x_{1k}, x_{2n})|^p\Big) \cdot 4h_1 h_2\Big)^{1/p}, \tag{8}$$

где $\tilde{V}_h(x_{1k}, x_{2n})$ – определена по формуле (6).

Используя неравенство Гельдера, получаем:

$$|\tilde{v}_h(x_{1k}, x_{2n})| \le \Big(\frac{1}{4h_1h_2} \iint_K \omega_{h_1}(x_{1k}, s_1)\omega_{h_2}(x_{2n}, s_2) \times$$

$$\times |v(s_1, s_2)|^p ds_1 ds_2\Big)^{1/p}$$

Вносим эту оценку в (8) и получаем:

$$\| [v]_\omega^h \|_{p;0}^h \le \Big(\frac{1}{4h_1h_2} \iint_K \Big(\frac{1}{4} \sum_k{}' \sum_n \omega_{h_1}(x_{1k}, s_1)\omega_{h_2}(x_{2n}, s_2) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big(\sum_k{}' \omega_{h_1}(x_{1n}, s_1) \sum_n \omega_{h_2}(x_{2k}, s_2) +$$

$$+\sum_{k}\omega_{h_1}(x_{1n},s_1)\sum_{n}{}'\omega_{h_2}(x_{2k},s_2)+$$

$$+\sum_{k}\sum_{n}\omega_{h_1}(x_{1n},s_1)\omega_{h_2}(x_{2k},s_2))4h_1h_2|v(s_1,s_2)|^p ds_1 ds_2)^{1/p}=$$

$$=\left(\frac{\Omega_1(h_1)\times\Omega_2(h_2)}{4h_1h_2}\right)^{1/p}\cdot\|v\|_p$$

Теорема I.

Если в пространстве $\int_h$ норма определена по формуле (4), то семейство норм сильно согласовано с нормой в L_p относительно сужения $[\cdot]_\omega^h$, т.е. для любых двух сходящихся в L_p последовательностей $x^{(\nu)}$ и $y^{(\nu)}$ справедливо следующее:

$$\|[x^{(\nu)}]_\omega^h-[y^{(\nu)}]_\omega^h\|_{p;o}^h\to\|x^{(\nu)}-y^{(\nu)}\|_p$$

равномерно относительно (ν) при $h\to 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4 [4].

Введем предлагаемую аппроксимацию F^h для оператора F

$$F^h v^h=[F\{v^h\}_0]_0^h\ ,\ v^h\in\int_h \tag{9}$$

и покажем справедливость теорем 5 и 6 из [4].

Теорема 2.

Если $f(x,u,u_x)$ - непрерывна, то семейство операторов F^h сильно аппроксимирует оператор F по семейству норм $\|\cdot\|_{p,o}^h$ относительно сужения $[\cdot]_\omega^h$, т.е. для любой сходящейся последовательности $v^{(\nu)}$ точек пространства L_p справедливо соотношение

$$\|[Fv^{(\nu)}]_\omega^h-F^h[v^{(\nu)}]_\omega^h\|_{p;o}^h\to 0$$

при $h \to 0, \nu \to \infty$. $(|V^{(\nu)}| < \beta;\ \beta = const.)$.

Доказательство.

Пусть $v^{(\nu)} (\nu = 1,2)$ – сходящаяся в $L_p(K)$ к V последовательность. Согласно определению сужения функции на N_h, имеем:

$$\|[Fv^{(\nu)}]^h_\omega - F^h[v^{(\nu)}]^h_\omega\|^h_{p;0} = \|[Fv^{(\nu)} - \{F^h[v^{(\nu)}]^h_\omega\}_0]^h_\omega\|^h_{p;0}$$

Затем, используя результат леммы и (9), получаем следующие оценки:

$$\|[Fv^{(\nu)}]^h_\omega - F^h[v^{(\nu)}]^h_\omega\|^h_{p;0} \le K_p \|Fv^{(\nu)} - \{F^h[v^{(\nu)}]^h_\omega\}_0\|_p =$$

$$= K_p \|Fv^{(\nu)} - \{[F\{[v^{(\nu)}]^h_\omega\}_0]\}_0\|_p \le K_p \cdot S_K^{1/p} \mu_0(\eta),$$

где $(S = \iint_K ds_1 ds_2)$, $\mu_0(\eta)$ – модуль непрерывности сужения функции $f(x, u, u_x)$ на компактную часть $\mathcal{D}^*$ области $\mathcal{D}$

$$\eta = \eta_h^{(\nu)} = \max_{K,n} \Big(\max_{x_{1K} - h_1 \le x_1 \le x_{1K} + h_1} |x_1 - x_{1,K}|, \max_{x_{2n} - h_2 \le x_2 \le x_{2n} + h_2} |x_2 - x_{2,n}|,$$

$$\max_{x_{K,n} - h \le x \le x_{K,n} + h} \Big| \iint_K [G(x,s) v^{(\nu)}(s) - G(x_{K,n}, s)\{[v^{(\nu)}]^h_\omega\}_0] ds \Big|,$$

$$\max_{x_{K,n} - h \le x \le x_{K,n} + h} \Big| \iint_K [G'_x(x,s) v^{(\nu)}(s) - G'_x(x_{K,n}, s)\{[v^{(\nu)}]^h_\omega\}_0] ds \Big| \Big).$$

Пусть $\mu_1^{(\delta)}(\lambda)$ и $\mu_2^{(\delta)}(\lambda)$ - модули непрерывности сужения функций $G(x,s)$ и $G_x(x,s)$ на множество $\Phi_\delta\,(\delta>0)$, полученное из $K\times K$ удалением $\delta/\sqrt{2}$ - раздутия множества точек разрыва функций $G(x,s)$ и $G_x(x,s)$.

При $\|h\|\le\delta$:

$$\Big|\int_K [G_x'(x,s)-G_x'(x_{k,n},s)]v^{(\nu)}(S)\,dS\Big|\le$$

$$\le \mu_2^{(\delta)}(\|h\|)S_K^{1/q}\cdot\|v^{(\nu)}\|_p+2\beta\pi\delta/\sqrt{2}\,.$$

$$\Big|\int_K G_x'(x_{k,n},s)[v^{(\nu)}(s)-\{[v^{(\nu)}]_\omega^h\}_o(s)]\,ds\Big|\le$$

$$\le M_2 S_K^{1/q}\|v^{(\nu)}-\{[v^{(\nu)}]_\omega^h\}_o\|_p+2\beta\pi\delta/\sqrt{2}+$$

$$+\int_{K/K\delta/\sqrt{2}}\frac{1}{z}\,|v^{(\nu)}-\{[v^{(\nu)}]_\omega^h\}_o|\,ds;\quad z=\frac{1}{\sqrt{(x_1-s_1)^2+(x_2-s_2)^2}}$$

$$\|v^{(\nu)}-\{[v^{(\nu)}]_\omega^h\}_o\|_p\to 0 \text{ и } |v^{(\nu)}-\{[v^{(\nu)}]_\omega^h\}_o|\to 0$$

$$\eta_h^{(\nu)}\to 0 \text{ при } \|h\|\to 0 \text{ и } \nu\to\infty.$$

Аналогично для $G(x,s)$.

Определение - [4].

Семейство уравнений $v^h=F^h v^h$ называется $\varepsilon(h)$ -разрешимо по семейству норм $\|\cdot\|_{p,o}^h$, если существует действительная неотрицательная функция $\varepsilon(h)$, определенная при $0<h\le h_o$, $\varepsilon(h)\to 0$ при $\|h\|\to 0$ и такая, что для оператора F^h существует такая точка $v^h\in S_h$ что $\|v^h-F^h v^h\|\le\varepsilon(h)$.

Пусть $P_c^h v^h=F^h v^h$, если $v^h\in S_h([\theta]_\omega^h,c)$, где θ - нулевой элемент пространства $L_p(K)$,

$S_h([\theta]_\omega^h,C)$ - замкнутая сфера радиуса C с центром в $[\theta]_\omega^h$, C -параметр.

$$v^h=P_c^h v^h \tag{10}$$

Теорема 3.

Пусть функция $f(x, u, u_x)$ непрерывна по всем переменным в $\mathcal{D}$. Тогда для того, чтобы оператор F имел, по крайней мере, одну неподвижную точку, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое значение параметра " C ", что семейство уравнений $v^h = P_c^h v^h$ $\varepsilon(h)$ – разрешимо, где (II)

$$\varepsilon c, p(h) = \min \| v^h - P_c^h v^h \|_{p,0}^h$$

Достаточность.

Пусть семейство уравнений (IO) $\varepsilon c, p(h)$ – разрешимо:

$$\| v^h - P_c^h v^h \|_{p;0}^h = \varepsilon c, p(h) \to 0 \quad \text{при } \|h\| \to 0$$

$$(h = (h_1, h_2))$$

$$\| \{v^h\}_0 \|_p = \| v^h \|_{p,0}^h \le C .$$

Положим $\tau^h = v^h - P_c^h v^h$ o , получаем

$$\{v^h\}_0 = \{P_c^h v^h\}_0 + \{\tau^h\}_0 .$$

Пусть $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ – действительный параметр.

$$[v_\tau(s) = v(s+\tau), \quad s = (s_1, s_2)]$$

$$\| \{v^h\}_{0,\tau} - \{v^h\}_0 \|_p \le \| \{P_c^h v^h\}_{0,\tau} - \{P_c^h v^h\}_0 \|_p +$$

$$+ \| \{\tau^h\}_{0,\tau} \|_p + \| \{\tau^h\}_0 \|_p .$$

$$\| \{P_c^h v^h\}_{0,\tau} - \{P_c^h v^h\}_0 \|_p \le S_k^{1/p} \mu_0(\eta)$$

$$\eta = \eta_\tau^{(h)} = \max\Big(\max_{x_i \in K} \left| x_{ik}(x+\tau) - x_{ik(x)} \right|,$$

$$\max_{x_i \in K} \left| \int_{K^*} \left[G(x_{K(x+\tau)}, s) - G(x_{K(x)}, s) \right] \{v^h\}_0(s)\,ds \right|,$$

$$\max_{x_i \in K} \left| \int_{K^*} \left[G'_x(x_{K(x+\tau)}, s) - G'_x(x_{K(x)}, s) \right] \{v^h\}_0(s)\,ds \right| \Big)$$

$$i = (1,2)$$

и функция $K = K(x)$ определяется соотношением

$$x_{iK(x)} - h_i \le x_i \le x_{iK(x)} + h_i\,, \quad i = 1,2\,,$$

так как

$$\left| x_{K(x+\tau)} - x_{K(x)} \right| \le \|\tau\| + 2\|h\|$$

$$\left| \int_{K^*} \left[G(x_{K(x+\tau)}, s) - G(x_{K(x)}, s) \right] \{v^h\}_0(s)\,ds \right| \le$$

$$\le \mu_1^{(\delta)}(\|\tau\| + 2\|h\|) \cdot S_K^{1/q} \left\| \{v^h\}_0 \right\|_p + 2\beta\pi\delta/\sqrt{2}$$

$$\|\tau\| + 2\|h\| \le \delta\,;$$

$$\left| \int_{K^*} \left[G'_x(x_{K(x+\tau)}, s) - G'_x(x_{K(x)}, s) \right] \{v^h\}_0(s)\,ds \right| \le$$

$$\le \mu_2^{(\delta)}(\|\tau\| + 2\|h\|)\, S_K^{1/q} \left\| \{v^h\}_0 \right\|_p + 2\beta\pi\delta/\sqrt{2}\,.$$

то $\zeta_\tau^{(h)} \to 0$ при $\|h\| \to 0,\ \|\tau\| \to 0$ и, следовательно

$$\left\| \{P_c^h v^h\}_{0,\tau} - \{P_c^h v^h\}_0 \right\|_p \to 0,$$

$$\left\| \{\tau^h\}_{0,\tau} \right\|_p \le \left\| \{\tau^h\}_0 \right\|_p = \varepsilon_{c,p}(h) \to 0$$

при $\|\tau\| \to 0,\ \|h\| \to 0$.

Семейство функций $\{v^h\}_0$ равностепенно непрерывно в целом в $L_p(K)$ и ограничено. Следовательно, $\{v^h\}_0$ сильно компактно в $L_p(K)$ - [2]. Оператор F имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку.

Необходимость доказана в работе [4].

Литература

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.
2. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.
3. Кружков С.Н. Лекции по нелинейным уравнениям в частных производных. М., 1969-1970.
4. Горбунов А.Д. Разностные методы для нелинейных задач.— Вопросы оптимизации вычислений . Киев, 1977.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ПРИМЕРЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ

Иванова Г.Ф. (ВЦ ЛГУ им.П.Стучки,г.Рига)

В работе [I] для описания процесса кристаллизации бинарной системы используется система термодиффузионных уравнений, полученных путем осреднения по элементарным объемам температуры T и концентрации C и введением функции η - доли твердой фазы в элементарном объеме. Эти уравнения выведены с учетом выполнения в среднем всех необходимых балансов и единообразно описывают всю кристаллизующуюся систему (двухфазную зону, твердую и жидкую фазы системы), не требуя выделения каких-либо внутренних границ.

Полученная система осредненных термодиффузионных уравнений не обладает свойством сильной параболичности, что существенно затрудняет построение устойчивых разностных схем для ее решения. В работе [I] предложен метод введения параметра β сведения исходной системы к сильно параболической, а также показано, что при $\beta \to \infty$ решение сильно параболической системы сходится к обобщенному решению исходной системы. Определение обобщенного решения системы термодиффузионных уравнений также дано в работе [I].

В данной работе метод параметра β применяется для нахождения решения системы термодиффузионных уравнений в обобщенной постановке, описывающей кристаллизацию бинарного сплава, показывается, что указанный метод применим и в случае кристаллизации чистого компонента, когда двухфазная зона отсутствует. Приводятся результаты численных расчетов.

§ I. Кристаллизация бинарного сплава

В качестве модельного примера рассматривается задача для расчетов кристаллизации образца цилиндрической формы радиуса R и высоты H. Расчеты проводились без учета конвекции в жидкой фазе и при постоянном равновесном коэффициенте распределения примеси m. В осесимметрическом случае при данных предположениях осредненные уравнения теплопроводности и диффузии записываются следующим образом, [I]:

$$\mathcal{L}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \gamma \rho \eta', \qquad (1)$$

$$\left(1-(1-m)\eta\right)\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathcal{D} r \frac{\partial C}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{D}\frac{\partial C}{\partial z}\right) +$$

$$+ (1-m) C \eta', \qquad (2)$$

$$0 < r < R, \quad 0 < z < H, \quad t > 0.$$

Здесь λ, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$ - осредненные по элементарным объемам коэффициенты теплопроводности, диффузии и объемной теплоемкости

$$\lambda = \lambda_1 \eta + \lambda_2 (1-\eta),$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 m \eta + \mathcal{D}_2 (1-\eta),$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \eta + \mathcal{L}_2 (1-\eta),$$

γ - удельная скрытая теплота кристаллизации,

ρ - средняя плотность среды. Индексом I отмечены константы, относящиеся к твердой фазе, индексом 2 - к жидкой.

Система уравнений (I)-(2) является параболической по Петровскому, но не обладает свойством сильной параболичности. Однако ее можно свести к сильно параболической системе, используя метод введения параметра β, предложенный в работе [I].

Этот метод основан на предположении, что скорость объемной кристаллизации пропорциональна переохлаждению ΔT, а именно:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \beta \Delta T \theta (1-J) , \qquad (3)$$

где β - параметр, определяющий скорость объемной кристаллизации, θ - единичная функция, ΔT - переохлаждение

$$\Delta T = T_\ell - T = T_0 - f_\ell(C) - T ,$$

где $T_\ell = T_0 - f_\ell(C)$ уравнение линии ликвидус диаграммы фазового состояния сплава, а J определяется интегралом

$$J = \beta \int_0^t \Delta T d\tau . \qquad (4)$$

Для определения значения η получаем выражение

$$\eta = J\theta(1-J) + \theta_1(J-1) , \qquad (5)$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, x<0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases} , \quad \theta_1(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1, x>0 \end{cases} .$$

Согласно (5) в твердой фазе η =I.

Система (I)-(2) с учетом (3) перепишется следующим образом

$$\mathcal{L}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \gamma \rho \beta \Delta T \theta (1-J) , \qquad (6)$$

$$\left(1-(1-m)\eta\right)\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathcal{D} r \frac{\partial C}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{D}\frac{\partial C}{\partial z}\right) +$$

$$+ (1-m) C \beta \Delta T \theta (1-J) , \qquad (7)$$

$$0<r<R , \quad 0<z<H , \quad t>0 .$$

В работе [I] показано, что решение системы (6)-(7), (5) при соответствующих начальных и краевых условиях, T_β, C_β, η_β при $\beta \to \infty$ сходится к обобщенному решению T, C, η системы (I)-(2) с теми же начальными и краевыми условиями.

При расчетах в начальный момент времени задавались одинаковые для всех точек образца состав расплава C_0 и температура перегрева δT

$$C = C_0,\ T = T_l(C_0) + \delta T,\ \eta = 0,\ t = 0. \tag{8}$$

В расчетах принималось, что образец теплоизолирован сверху, а теплообмен с внешней средой на боковой поверхности и основании цилиндра происходит по закону Ньютона:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha (T - T_1),\ z = 0;\ \frac{\partial T}{\partial z} = 0,\ z = H; \tag{9}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha (T - T_2),\ r = R.$$

В диффузионной задаче принималось, что на всех участках внешней границы выполняется условие непроницаемой стенки $\partial C / \partial n = 0$.

Уравнения (6)-(7) аппроксимировались схемой переменных направлений, см. [2], причем значения нелинейных коэффициентов и функций η и η' брались с предыдущего целого временного слоя.

Для вычисления значений интеграла (4), используемого для определения значений η, использовалась формула трапеций.

Расчеты проводились на разностной сетке IIxII.

Необходимые для расчета теплофизические характеристики были взяты для углеродистой стали: λ_1 =39.6, λ_2=79,2 вт·м$^{-1}$·^{0}С$^{-1}$, $\mathcal{L}_1$ =5.3·10^6, $\mathcal{L}_2$ =5.9·10^6 дж·м$^{-3}$·^{0}С$^{-1}$, γ = = 2.4·10^5 дж кг$^{-1}$, $\rho_1 = \rho_2$ =7000 кг·м$^{-3}$, $\mathcal{D}_1$=0.5·10^{-10}, $\mathcal{D}_2$=0.5·10^{-8} м^2·сек$^{-1}$; а константы, входящие в краевые и начальные условия, следующими: C_0 =0.005, δT = 10^{0}С, α =2300 вт·м$^{-2}$·^{0}С$^{-1}$, T_1 =100, T_2 = 1300^{0}С. Размеры образца: R =0.01 м, H =0.01 м.

Диаграмма фазового состояния аппроксимировалась пряными линиями

$$T_l(C) = T_0 - \kappa C\,, \quad m = const. \tag{10}$$

Для углеродистой стали полагалось T_0 =1534°C, κ =6700, m =0.4, [3].

Для выяснения сходимости решения системы (6)-(7),(5) при $\beta \to \infty$ к обобщенному решению были проведены расчеты при различных значениях β. В таблице I для двух моментов времени приведены значения функций C, η и ΔT в точках двухфазной зоны. Первое число в каждой паре чисел в таблице - значение функции при расчетах с β =I ,

Таблица I

(r,z)	t = I сек			(r,z)	t = 2.5 сек		
	C	η	ΔT		C	η	ΔT
(0.0,0.2)	0.714 0.720	0.50I 0.508	0.84 0.28	(00, 0.3)	I.050 I.056	0.870 0.875	0.42 0.I4
(0.2,0.2)	0.714 0.720	0.502 0.509	0.84 0.28	(0.2,0.3)	I.054 I.06I	0.877 0.88I	0.43 0.I4
(0.4,0.2)	0.717 0.723	0.505 0.5I3	0.85 0.28	(0.4,0,3)	I.08I I.089	0.897 0.90I	0.43 0.I4
(0.6,0.2)	0.727 0.734	0.522 0.53I	0.89 0.30	(0.6,0.3)	I.I60 I.I69	0.949 0.954	0.42 0.I4
(0.8,0.2)	0.789 0.800	0.6I3 0.624	0.94 0.3I	(0.8,0.4)	0.856 0.865	0.694 0.702	0.55 0.I8
(0.9,0.2)	0.884 0.896	0.727 0.737	0.83 0.27	(0.9,0.4)	0.983 0.992	0.82I 0.827	0.44 0.I4

второе с β =3. Значения C приводятся в процентах, ΔT в °C, r и z в см, t в секундах.

Из приведенных данных следует, что отличие значений C, η, T при расчетах с β =I и 3 составляет менее 2%. Результаты расчетов с β =3 и 9 практически совпадают. Результаты расчетов при β =I уже дают хорошее приближение к точному решению. Остановимся на этих результатах более подробно.

При кристаллизации образца образуется двухфазная зона значительных размеров. Размеры двухфазной зоны в начале, середине и конце процесса кристаллизации показаны на рис.I. Более подробные данные о характере изменения функций η, C и ΔT в двухфазной зоне при t=3 сек приведены в таблице 2. В областях, занятых жидкой (η =0) и твердой фазами образца, приведены только значения функции η. В точках двухфазной зоны ($0 < \eta < I$) приведены значения функций: η - первое число, C - второе число, ΔT - третье число в каждой тройке чисел.

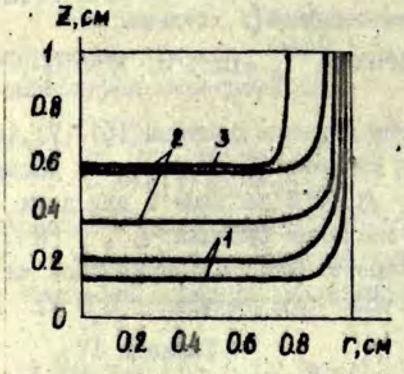


Рис.I. Границы двухфазной зоны: I- t=I,2- t=3,3- t=5 сек

Таблица 2

z \ η	0	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	I
I.0	0	0	0	0	0.I4 0.55 0.09	0.28 0.60 0.II	0.47 0.69 0.I0	I
0.8	0	0	0	0	0.I5 0.55 0.I0	0.28 0.60 0.I2	0.47 0.70 0.II	I
0.6	0.08 0.53 0.I3	0.09 0.53 0.I3	0.I0 0.53 0.I5	0.I7 0.56 0.2I	0.26 0.59 0.25	0.40 0.66 0.26	0.57 0.76 0.22	I
0.5	0.26 0.60 0.3I	0.27 0.60 0.32	0.29 0.6I 0.36	0.38 0.65 0.42	0.47 0.70 0.43	0.60 0.78 0.39	0.74 0.90 0.33	I
0.4	0.64 0.8I 0.53	0.65 0.82 0.54	0.69 0.85 0.54	0.78 0.94 0.50	0.85 I.02 0.45	0.93 I.I3 0.39	I	I
0.3	I	I	I	I	I	I	I	I

Анализируя значения функции C, следует отметить, что в процессе кристаллизации очистки образца от примесей не происходит. Концентрация примесей в образовавшейся твердой фазе практически равна первоначальной концентрации C =0,5%.

Иная картина очистки сплава наблюдается при расчетах с большим коэффициентом диффузии в жидкой фазе. Были проведены расчеты при $D_l = 0.5\cdot10^{-6},\ 0.5\cdot10^{-5},\ 0.5\cdot10^{-4}\ м^2\cdot сек^{-1}$ и при прежних значениях всех остальных констант. В таблице 3 для момента времени t =3 сек приведены значения функций φ и C при расчетах с $D_l = 0.5\cdot10^{-5}\ м^2\cdot сек^{-1}$. В каждой паре чисел первое число - значение φ, второе - C. В твердой фазе приведены значения $m\cdot C$. Из приведенных данных видно, что в образовавшейся твердой фазе концентрация примесей значительно меньше первоначальной.

Таблица 3

z \ η	0	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	I
I.0	0 0.6I	0 0.6I	0 0.62	0 0.64	0 0.65	0.08 0.67	0.08 0.69	I 0.27
0.8	0 0.62	0 0.62	0 0.64	0 0.66	0 0.67	0.08 0.68	0.78 0.7I	I 0.28
0.6	0 0.68	0.05 0.69	0.06 0.7I	0.07 0.73	0.07 0.75	0.II 0.76	0.8I 0.79	I 0.32
0.5	0.08 0.74	0.09 0.75	0.I0 0.76	0.II 0.79	0.I3 0.82	0.20 0.84	0.98 0.90	I 0.36
0.4	0.57 0.84	0.58 0.84	0.6I 0.86	0.68 0.9I	0.75 0.94	I 0.4I	I 0.36	I 0.36
0.3	I 0.32	I 0.32	I 0.33	I 0.34	I 0.35	I 0.36	I 0.34	I 0.34
0.I	I 0.29	I 0.29	I 0.29	I 0.29	I 0.30	I 0.30	I 0.30	I 0.30

§ 2. Кристаллизация однокомпонентного расплава

Метод введения параметра β может быть использован и для нахождения решения задачи кристаллизации чистого компонента. Эта задача может быть рассмотрена как частный случай задачи о кристаллизации бинарного сплава, когда уравнение линии ликвидуса записывается в виде $T=T_0 (к=0)$. Тогда

$$\Delta T = T_0 - T \ . \qquad \text{(II)}$$

Процесс кристаллизации в данном случае описывается осредненным уравнением теплопроводности, которое с учетом (II) записывается следующим образом

$$\mathcal{L}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \gamma\rho\beta\left(T_0 - T\right)\theta\left(1-\eta\right), \qquad \text{(I2)}$$

$$0<r<R, \ 0<z<H, \ t>0 ,$$

а η по-прежнему определяется выражением (5).

Расчеты проводились при прежних значениях теплофизических констант. Начальные и краевые условия задавались в виде (8)-(9).

Уравнения (I2) аппроксимировались схемой переменных направлений [2]:

$$\mathcal{L}_{ij}^{k}\frac{T_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - T_{ij}^{k}}{\tau} = \frac{1}{r_i}\left(r_{i-\frac{1}{2}}\, a_{ij}^{k}\, T_{\bar r}^{k+\frac{1}{2}}\right)_r + \left(b_{ij}^{k}\, T_{\bar z}^{k}\right)_z +$$

$$+ \gamma\rho\beta\left[T_0 - \left(\sigma T^{k} + (1-\sigma)T^{k+\frac{1}{2}}\right)\right]\theta\left(1-\eta^{k}\right), \ t = t_{k+\frac{1}{2}} , \qquad \text{(I3)}$$

$$\mathcal{L}_{ij}^{k}\frac{T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{1}{r_i}\left(r_{i-\frac{1}{2}}\, a_{ij}^{k}\, T_{\bar r}^{k+\frac{1}{2}}\right)_r + \left(b_{ij}^{k}\, T_{\bar z}^{k+1}\right)_z +$$

$$+ \gamma\rho\beta\left[T_0 - \left(\sigma T^{k+\frac{1}{2}} + (1-\sigma)T^{k+1}\right)\right]\theta\left(1-\eta\right), \ t = t_{k+1} , \qquad \text{(I4)}$$

$$a_{ij} = 0.5\left(\lambda_{ij} + \lambda_{i-1j}\right), \ b_{ij} = 0.5\left(\lambda_{ij} + \lambda_{ij-1}\right) .$$

начения интеграла (4), используемого для вычислений значений η, находились по формуле трапеций. Краевые и начальные условия аппроксимировались обычным образом.

Были проведены расчеты при σ =0, 0.5, I в схеме (I3)-(I4). Отметим, что σ =I соответствует явной аппроксимации η', σ = 0 - неявной и σ =0.5 - линейной комбинации явной и неявной аппроксимации. Расчеты с σ =0 позволяли получить устойчивый счет при значениях временного шага в два раза больших, чем в расчетах с σ =0.5 и в 4 раза больших, чем в расчетах с σ =I.

В данной задаче для выяснения сходимости решения при $\beta \to \infty$ к обобщенному решению исходной задачи были проведены расчеты при различных значениях β. В таблице 4 приведены значения функций η и ΔT в точках, расположенных вблизи фронта кристаллизации. Первое число из каждой тройки чисел в таблице 4 - значение функции при расчетах с β =I, второе - с β =3, третье - с β =9.

Таблица 4

(r, z)	t = I сек		(r, z)	t = 2.5 сек	
	η	ΔT		η	ΔT
(0,0.2)	0.669 0.693 0.699	I.6I 0.54 0.I8	(0,0.4)	0.468 0.499 0.509	I.2I 0.42 0.I4
(0.2,0.2)	0.670 0.696 0.702	I.6I 0.54 0.I8	(0.2,0.4)	0.475 0.506 0.5I7	I.22 0.42 0.I4
(0.4,0.2)	0.680 0.70I 0.713	I.62 0.55 0.I8	(0.4,0.4)	0.5I5 0.546 0.558	I.25 0.43 0.I5
(0.6,0.2)	0.70I 0.733 0.740	I,63 0.55 0.I9	(0.6,0.4)	0.630 0.659 0.67I	I.34 0.46 0.I5
(0.8,0.2)	0.833 0.880 0.895	2.3I 0.8I 0.27	(0.8,0.5)	0.200 0.213 0.220	I.20 0.44 0.I5
(0.9,0.3)	0.427 0.440 0.442	I.II 0.40 0.I3	(0.9,0.6)	0.935 0.960 0.968	0.67 0.23 0.04

Из приведенных данных видно, что значения ζ при расчетах с β =3 и β =9 отличаются менее, чем на 2,5% , а значения $T=T_0-\Delta T$ еще меньше. Дальнейшие расчеты проводились при β =3. На рис.2 изображена форма фронта кристаллизации. В данном случае кристаллизация происходит между двумя соседними узлами сетки, так что можно сказать, что движется "неразмытая", гладкая поверхность раздела фаз. Отметим, что при численном решении скрытая теплота кристаллизации не "размазывается", а выделяется на фронте кристаллизации.

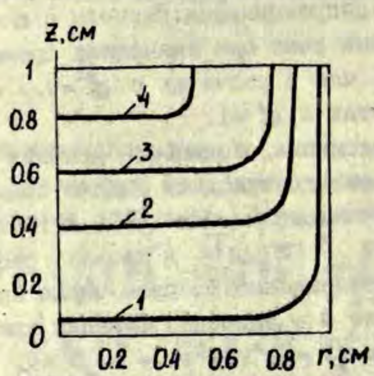


Рис.2.Форма фронта кристаллизации: I-t=I, 2-t=3, 3-t=5, 4 - t=7 сек.

В заключение отметим, что, как видно из приведенных данных, метод введения параметра β может быть успешно использован для численного решения задачи кристаллизации как бинарного сплава, так и чистого компонента. В случае кристаллизации сплава мы получаем подробную информацию о температуре и составе сплава во всей рассматриваемой области, а также о возникновении и развитии двухфазной зоны, т.е. все основные характеристики процесса.

В случае кристаллизации чистого компонента преимуществом метода введения параметра β является то, что скрытая теплота плавления выделяется строго на фронте кристаллизации. Достоинством метода является и то, что он применим в случае, когда фронт кристаллизации имеет сложную форму с точки зрения численного решения, как, например, в приведенном примере (см. рис.2).

Литература

I. Авдонин Н.А. Теория обобщенного решения задачи кристаллизации бинарной системы. - В кн.:Прикладные задачи теоретической и математической физики . Рига,ЛГУ им. П.Стучки, 1977,с.3-26.

2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:Наука,1977.

3. Хансен М.,Андреко К. Структуры двойных сплавов. М.: Металлургиздат, 1962.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ БИНАРНЫХ СПЛАВОВ С УЧЕТОМ КИНЕТИКИ ЗАРОЖДЕНИЯ И ДИНАМИКИ РОСТА КРИСТАЛЛИТОВ

Авдонин Н.А., Иванова Г.Ф. (ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, г.Рига)

При кристаллизации бинарных сплавов, как правило, возникает двухфазная зона, представляющая собой область, занятую как твердой, так и жидкой фазами сплава. При наличии двухфазной зоны классическая задача Стефана не описывает процесса кристаллизации. В работе [I] предложена теория квазиравновесной двухфазной зоны, которая достаточно хорошо описывает внешние характеристики процесса кристаллизации бинарной системы, включая размеры двухфазной зоны и долю твердой фазы. Однако в такой постановке задачи нельзя получить данные о структуре двухфазной области.

Иной подход, включающий описание элементов структуры двухфазной области, предложен в работе [2]. Бинарная система описывается посредством осредненных по элементарным объемам уравнений теплопроводности и диффузии, выведенных с учетом выполнения в среднем всех необходимых балансов. Эти уравнения, являющиеся обобщенной системой уравнений задачи теории двухфазной зоны, описывают кристаллизующуюся систему как сплошную среду. Подобное описание системы допускает постановку задачи, позволяющую определить и структуру двухфазной зоны. Для этого необходимо ввести в рассмотрение кинетику структурообразования дисперсной среды (ветвей дендритов, глобулярных зерен, которые в данной статье будут коротко называться кристаллитами). Кинетику возникновения кристаллитов в каждом элементарном объеме можно определить путем задания зависимости скорости образования кристаллитов ϑ от переохлаждения ΔT. Конкретный вид этой зависимости предлагается определять из экспериментальных данных.

В данной работе указанный подход применяется для численного решения двумерной задачи кристаллизации образца углеродистой стали.

§ I. Постановка задачи

Расчеты проводились для образца цилиндрической формы радиуса R и высоты H. В осесимметрическом случае без учета конвекции в жидкой фазе и при постоянном равновесном коэффициенте распределения m осредненные по элементарным объемам уравнения теплопроводности и диффузии запишутся следующим образом,[2]:

$$\mathcal{L}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\gamma\rho\eta', \quad (1)$$

$$(1-(1-m)\eta)\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathcal{D}r\frac{\partial C}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mathcal{D}\frac{\partial C}{\partial z}\right)+$$
$$+(1-m)C\eta', \quad (2)$$
$$0<r<R,\ 0<z<H,\ t>0.$$

Здесь T и C - осредненные по элементарным объемам температура и концентрация, η - относительная доля твердой фазы в элементарном объеме, λ, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$ - осредненные по элементарным объемам коэффициенты теплопроводности, диффузии и объемной теплоемкости

$$\lambda=\lambda_1\eta+\lambda_2(1-\eta),$$
$$\mathcal{D}=\mathcal{D}_1 m\eta+\mathcal{D}_2(1-\eta),$$
$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\eta+\mathcal{L}_2(1-\eta),$$

γ - удельная скрытая теплота кристаллизации,
ρ - средняя плотность среды. Индексом I отмечены константы, относящиеся к твердой фазе, а индексом 2 - к жидкой.

Функция η в твердой фазе сплава равна I, в жидкой - 0, а в двухфазной зоне $0<\eta<$ I. Для определения η необходимо учесть кинетику зарождения и динамику роста кристаллитов.

Кинетику образования кристаллитов определим заданием скорости образования кристаллитов ϑ в единице объема в единицу времени как функции переохлаждения ΔT

$$\begin{aligned} &\vartheta = f(\Delta T), \\ &\Delta T = T_l(C) - T = T_0 - f_l(C) - T, \end{aligned} \tag{3}$$

где $T_l(C) = T_0 - f_l(C)$ уравнение линии ликвидус диаграммы фазового состояния сплава. Тогда число образовавшихся кристаллитов N в единице объема за промежуток времени от 0 до t выразится интегралом

$$N = \int_0^t \vartheta(\tau)(1-\eta(\tau))\, d\tau. \tag{4}$$

В формуле (4) учтено, что кристаллиты образуются только в жидкой части, относительный объем которой равен $1-\eta$.

При учете динамики роста кристаллитов будем исходить из предположения, что кристаллиты имеют цилиндрическую форму. Учитывая влияние теплоотвода и диффузии аналогично тому, как это сделано в работе [3] для случая кристаллитов сферической формы, получим, что в момент времени t объем V кристаллита, зародившегося в момент времени τ, будет выражаться интегралом

$$V(t,\tau) = \beta \int_\tau^t (\Delta T - T_l(aC) + T_l(C))\, ds, \tag{5}$$

$$a^{-1} = 1 - (1-m)(1 - \exp(-\mathcal{D}^{-1}\delta \dot{r}_1)), \tag{6}$$

$$\beta = 2\pi\lambda_2 l/\gamma 3,$$

где δ -величина диффузионного пограничного слоя, $\dot{r}_1$ - скорость бокового роста цилиндрического зародыша, l - длина кристаллита в пределах элементарного объема. При малых значениях скорости $\dot{r}_1$ в (6) $\exp(-\mathcal{D}^{-1}\delta\dot{r}_1) \approx 1$, и, следовательно, $a \approx 1$. Выражение (5) при $a = 1$ имеет простой вид:

$$V(t,\tau) = \beta \int_\tau^t \Delta T\, ds. \tag{7}$$

Это упрощенное выражение для $V(t,\tau)$ и использовалось при расчетах..

Доля образовавшейся твердой фазы η за промежуток времени от 0 до t приближенно выразится интегралом:

$$\eta(t)=\beta\int_0^t v(\tau)(1-\eta(\tau))\,d\tau\int_\tau^t \Delta T\,ds. \qquad (8)$$

В уравнения (I) и (2) входит η'. Продифференцировав (8) по t, получим для η' следующее выражение

$$\eta'(t)=\beta\Delta T\int_0^t v(\tau)(1-\eta(\tau))\,d\tau. \qquad (9)$$

Остановимся теперь на краевых и начальных условиях.

В расчетах принималось, что образец охлаждения с боковой поверхности ($r=R$) и основания цилиндра ($z=0$) и теплоизолирован сверху ($z=H$):

$$\left.\begin{aligned}&\lambda\frac{\partial T}{\partial z}=\alpha(T-T_1),\ z=0;\ \frac{\partial T}{\partial z}=0,\ z=H;\\ &-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}=\alpha(T-T_2),\ r=R.\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Здесь α - коэффициент теплообмена, а T_1 и T_2 - значения температур внешней среды.

В диффузионной задаче принималось, что на всех участках границы выполняется условие непроницаемой стенки

$$\frac{\partial C}{\partial n}=0. \qquad (11)$$

В начальный момент времени $t=0$ принималось, что образец находится в жидком состоянии. Для всех точек образца задавались начальный состав расплава C_0 и температура перегрева δT

$$C=C_0,\ T=T_l(C_0)+\delta T,\ \eta=0,\ t=0. \qquad (12)$$

Отметим, что задача (I)-(2), (8), (I0)-(I2) допускает лишь обобщенное решение, существование которого вытекает из априорных оценок, полученных в работе [2].

Для численного решения поставленной задачи использовался метод переменных направлений, [4]. Значения нелинейных коэффициентов, а также значения η и η' брались с предыдущего временного слоя. Для вычисления значений η и η', представляемых интегралами (8) и (9), использовалась формула трапеций с шагом интегрирования равным шагу по времени t. Граничные условия (I0)-(II) аппроксимировались обычным образом с порядком аппроксимации $O(h)$.

Необходимые для расчета теплофизические характеристики были взяты для углеродистой стали. Размеры образца: R = = 0.0I м, H =0.0I м. Значения констант, входящих в начальные и краевые условия, следующие: C_0 =0.005, δT =50°C, α = = 2300 вт·м$^{-2}$·°C^{-I}, T_1 =I00, T_2 =I300°C.

Линии ликвидус и солидус для углеродистой стали на их начальном участке аппроксимировались прямыми линиями:

$$T_\ell(C) = 1500 - 7700 \cdot C, \quad m = 0.4.$$

Для углеродистой стали отсутствуют экспериментальные данные, позволяющие определить зависимость скорости образования кристаллитов от переохлаждения. Поэтому при расчетах была использована зависимость, полученная для кремнистого железа [5] по экспериментальным данным работы [6]:

$$\vartheta = A \cdot \Delta T^2, \quad A = const. \tag{I3}$$

Для кремнистого железа A =I0^5. При расчетах кристаллизации углеродистой стали параметр A варьировался в пределах от I0^2 до I0^5.

§ 2. Анализ численных расчетов

Прежде всего исследовалось влияние кинетического коэффициента A на результаты расчетов. Значение константы изменялось в диапазоне от I0^2 до I0^5. В таблице I для двух моментов времени приведены значения функций C, η и ΔT

Таблица I

r	$t=2,\ z=0.2$			$t=4,\ z=0.4$		
	C	η	ΔT	C	η	ΔT
	I.048	0.87	0.52	0.994	0.82	0.57
0.0	I.054	0.87	0.24	I.00I	0.83	0.26
	I.057	0.87	0.II	I.004	0.83	0.I2
	I.05I	0.87	0.52	I.000	0.83	0.57
0.2	I.054	0.87	0.24	I.006	0.84	0.26
	I.060	0.88	0.II	I.009	0.84	0.I2
	I.066	0.88	0.52	I.026	0.85	0.55
0.4	I.072	0.89	0.24	I.032	0.86	0.25
	I.075	0.89	0.II	I.035	0.86	0.I2
	I.I00	0.9I	0.52	I.079	0.89	0.50
0.6	I.I06	0.9I	0.23	I.085	0.90	0.23
	I.II0	0.9I	0.II	I.088	0.90	0.II
	I.I75	0.96	0.45	I.I7I	0.96	0.42
0.8	I.I82	0.96	0.2I	I.I77	0.96	0.I9
	I.I85	0.96	0.I0	I.I8I	0.96	0.09

в точках (r, z) двухфазной зоны, расположенных вблизи ее границы с твердой фазой. Первое число из каждой тройки чисел в таблице I соответствует значению $A = 10^3$, второе-$A=10^4$, третье - $A=10^5$. В данном параграфе значения C приводятся в процентах, ΔT в ^oC, r и z в см, t в сек. Из приведенных данных следует, что при изменении значения коэффициента A на порядок функции C и η мало изменяются, в то время как значение переохлаждения ΔT уменьшается примерно вдвое. Существенное влияние коэффициент A оказывает и на число образующихся кристаллитов, определяемых интегралом (4). В таблице 2 для момента времени t = 4 сек приведены значения функции $N(0, z, t)$ при расчетах с различными значениями A. Естественно, что при

Таблица 2

Число дендритных ветвей $N(0,z,t)$

A \ z	0	0.2	0.4	0,6	0.8	0
10^3	8260	2234	1814	1007	0	0
10^4	23041	4796	3900	2199	0	0
10^5	61753	10312	8391	4765	0	0

увеличении значения A структура двухфазной зоны и закристаллизовавшейся части образца становится более дисперсной. При увеличении A на порядок N увеличивается примерно в три раза.

На рис.1 показаны границы начала и конца двухфазной зоны в начале (t =1 сек), середине (t =3 сек) и конце (t = = 6 сек) процесса кристаллизации при расчетах с A =10^5.

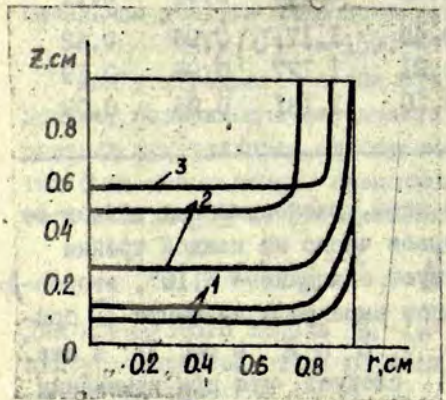


Рис.1. Изменение размеров двухфазной зоны: 1-t=1, 2-t=3, 3-t=6 сек.

Данные, представляющие более подробную информацию о характере изменения функций η , C и ΔT в двухфазной зоне при расчетах с A =10^5, приведены в таблице 3.

Таблица 3

η \ τ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	I
			t = I сек				
0.4	0	0	0	0	0	0	I
					0.05	0.I2	
0.3	0	0	0	0	0.52	0.54	I
					0.38	0.33	
	0.38	0.38	0.39	0.4I	0.47	0.53	
0.2	0.65	0.65	0.65	0.67	0.70	0.73	I
	0.28	0.28	0.28	0.27	0.23	0.2I	
	0.93	0.93	0.93	0.94	0.96	0.99	
0.I	I.I2	I.I2	I.I2	I.I3	I.I8	I.23	I
	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.07	
0.0	I	I	I	I	I	I	I
			t = 3 сек				
					0.06	0.I6	
I.0	0	0	0	0	0.52	0.55	I
					0.II	0.09	
					0.06	0.I6	
0.8	0	0	0	0	0.52	0.56	I
					0.I2	0.09	
			0.05	0.08	0.I7	0.27	
0.6	0	0	0.52	0.52	0.56	0.60	I
			0.I7	0.I7	0.I6	0.I4	
	0.I8	0.I8	0.20	0.24	0.34	0.4[illegible]	
0.5	0.5[illegible]	0.56	0.57	0.58	0.63	0.68	I
	0.I9	0.I9	0.I9	0.I9	0.I7	0.I5	
	0.48	0.48	0.50	0.55	0.64	0.7I	
0.4	0.70	0.7I	0.72	0.75	0.8I	0.87	I
	0.I7	0.I7	0.I7	0.I7	0.I5	0.I4	

Продолжение таблицы 3

x \ η	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	I
	0.85	0.86	0.88	0.9I	0.97		
0.3	I.03	I.04	I.06	I.II	I.I9	I	I
	0.I2	0.I2	0.I2	0.II	0.I0		
0.2	I	I	I	I	I	I	I
			t = 6 сек				
	0.I4	0.I5	0.I7	0.26	0.4I	0.52	
I.0	0.55	0.55	0.56	0.59	0.67	0.72	I
	0.I4	0.I4	0.I5	0.I4	0.I3	0.II	
	0.25	0.26	0.30	0.37	0.52	0.6I	
0.8	0.59	0.59	0.6I	0.64	0.72	0.79	I
	0.I4	0.I5	0.I5	0.I5	0.I2	0.I0	
	0.75	0.76	0.80	0.85	0.93	0.97	
0.6	0.92	0.92	0.96	I.02	I.I3	I.20	
	0.I4	0.I4	0.I3	0.II	0.09	0.08	
0.5	I	I	I	I	I	I	I

В точках областей, занимаемых жидкой (η =0) и твердой (η =I) фазами образца, приведены только значения η . В точках двухфазной зоны в каждой тройке чисел первое число значение функции η , второе - C : третье - ΔT .

Приведем также данные о характере изменения ΔT от времени. На рис. 2 для трех точек, расположенных на оси образца, приведены кривые изменения ΔT от времени при расчетах с A =I0^5. Отметим, что для всех точек ΔT достигает максимального значения через небольшой промежуток времени с момента начала кристаллизации данного объема образца, а затем медленно убывает. Чем дальше от охлаждаемого основания образца расположена точка, тем продолжительнее

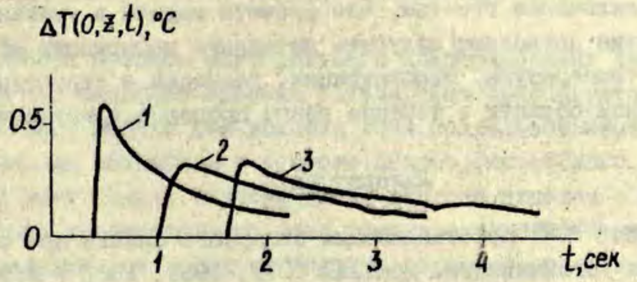


Рис.2. Зависимость ΔT от t в различных точках образца: I- z=0.2, 2- z=0.3, 3- z=0.4 см.

процесс кристаллизации ее. Так точка (0,0.2) кристаллизуется в течение I,8 сек, точка (0,0.3) - 2,5 сек, а точка (0, 0.4) - 2,9 сек.

В таблице 4 представлены также данные, характеризующие дисперсность полностью закристаллизовавшегося образца.

Таблица 4

Значения функции N в различных точках образца, $A = 10^4$.

z \ r	0	0.2	0.4	0.6	0.8	I
0	2304I	2304I	23042	23078	22860	20983
0.2	4796	4808	4828	4879	5003	I4240
0.4	3929	394I	3950	3973	4002	II55I
0.6	3369	3385	340[illegible]	3427	33[illegible]I	II[illegible]63
0.8	3I94	32I2	32I3	3I8I	3027	II673
I	3268	3282	3270	3I88	2976	II703

Отметим, что более дисперсная структура в закристаллизовавшемся образце наблюдается вблизи охлаждаемых основания и боковой поверхности образца.

В заключение отметим, что расчеты задачи в указанной постановке позволяют получить детальную информацию об изменении температуры, концентрации, размерах и структуре двухфазной области в течение всего процесса кристаллизации.

Литература

I. Борисов В.Т. Кристаллизация бинарного сплава при сохранении устойчивости. Докл.АН СССР, I96I, I36, № 3,с.583-586.
2. Авдонин Н.А. Теория обобщенного решения задачи кристаллизации бинарной системы. - В кн.:Прикладные задачи теоретической и математической физики . Рига,ЛГУ им.П.Стучки, 1977,с.3-26.
3. Авдонин Н.А. Описание процессов затвердевания бинарных систем с учетом кинетики объемной кристаллизации. - Вкн.: Вопросы теории кристаллизации . Рига,ЛГУ им.П.Стучки, 1974,с.56-75.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:Наука, I977.
5. Авдонин Н.А.,Карножицкий В.Н.,Клявинь Я.Я. Постановка задачи, описывающей гетерофазную кристаллизацию бинарных сплавов. - В кн.: Оптимизация теплофизических процессов литья. Киев: ИПЛ АН УССР,I977, с.99-III.
6. Алфинцев Г.А.,Овсиенко Д.Е. и др. Влияние кремния на переохлаждение железа и структура слитков железокремнистых сплавов после разных переохлаждений. - В кн.: Кинетика и механизм кристаллизации. Минск: Наука и техника, 1973, с.332-337.

РЕШЕНИЕ ДВУХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ЕМКОСТИ

Буйкис А.А. (ЛГУ им. П.Стучки)
Кузмишкина Н.В. (Латв.ф-л ВГПТИ ЦСУ СССР)

В работе методом интегрального преобразования Лапласа решаются две начально-краевые задачи теплопроводности, когда на границе заданы два условия типа сосредоточенной теплоемкости. Мы оставляем в стороне анализ физического содержания этих задач; отметим лишь, что они связаны с исследованием температурного поля однородного пласта при учете различия локальных температур пористой среды и движущейся по ней жидкости или с исследованием температурного поля трещиноватого пласта. Для интересующихся физической стороной вопроса читателей укажем некоторые работы: [I] - [4]. Точные решения этих модельных задач, кроме того, представляют интерес как тестовые задачи для проверки качества разностных схем, предложенных для расчета задач при краевых условиях такого типа (см., напр., [5] и настоящий сборник).

Первая из задач формулируется так. Для $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ требуется найти функции $\vartheta(x,y,t), \vartheta_0(x,t), u(x,t)$, исходя из условий:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad x>0,\ y>0,\ t>0; \tag{I}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \vartheta_0}{\partial t} = \alpha_0 (u - \vartheta_0), && (2_1)\\
&\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1(\vartheta_0 - u), && (2_2)\\
&\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \beta_0 (\vartheta - \vartheta_0), && (2_3)
\end{aligned}\right\} \quad x>0,\ y=0,\ t>0;$$

$$\vartheta\big|_{t=0} = \vartheta_0\big|_{t=0} = u\big|_{t=0} = 0; \tag{3}$$

$$u\big|_{x=0}=1; \quad \vartheta\big|_{x^2+y^2\to\infty}\to 0. \tag{4}$$

Укажем кратко на содержание входящих в (I) - (4) величин: $\vartheta(x,y,t)$ - температура окружающих пласт пород, $\vartheta_0(x,t)$ - осредненная по мощности пласта температура скелета его (или температура блоков для трещиноватого пласта), $u(x,t)$ - осредненная по мощности пласта температура движущейся по пласту (по трещинам) жидкости. Далее, α_0 и α_1 характеризуют скорость межфазного теплообмена, а β_0 характеризует величину теплообмена между окружающими породами на границе пласта и средней по мощности температурой скелета пласта (блоков).

Обозначим через $\bar{g}$ преобразование Лапласа функции g. Тогда, применяя к системе (I)-(4) преобразование Лапласа по переменной t найдем легко, что:

$$\bar{\vartheta}_0(x,p)=\frac{1}{p}e^{-px}\frac{\alpha_0}{p+\alpha_0}e^{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}}e^{-\alpha_1 x}, \tag{5}$$

$$\bar{u}(x,p)=\frac{1}{p}e^{-px}e^{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}}e^{-\alpha_1 x}, \tag{6}$$

$$\bar{\vartheta}(x,y,p)=\frac{1}{p}e^{-px}\frac{\beta_0}{\sqrt{p}+\beta_0}e^{-\sqrt{p}y}\frac{\alpha_0}{p+\alpha_0}e^{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}}e^{-\alpha_1 x} \tag{7}$$

Обратное преобразование начнем с функции $\bar{\vartheta}_0(x,p)$, представляя ее как произведение $\frac{1}{p}\exp(-px)$ и $\dfrac{\exp\left(\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}\right)}{p+\alpha_0}$

Как хорошо известно:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}e^{-px}\right\}=\eta(t-x)=\begin{cases}1, x<t,\\ 0, x>t.\end{cases} \tag{8}$$

Для обращения второй части: $\frac{1}{p+\alpha_0}\exp\left(\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}\right)$ применим сперва теорему о сдвиге на величину α_0, а потом воспользуемся формулой (35) из § 5.5 книги [6] при $\nu=0$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+\alpha_0}e^{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}}\right\}=e^{-\alpha_0 t}I_0\left(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 xt}\right).$$

где I_0 - модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Отсюда получаем:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+\alpha_0} e^{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}}\right\} = e^{-\alpha_0 t} I_0\left(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 x t}\right). \tag{9}$$

Остается применить теорему о свертке обоих функций и это в итоге дает:

$$\vartheta_0(x,t) = \alpha_0 e^{-\alpha_1 x}\int_0^{t-x} e^{-\alpha_0\tau} I_0\left(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 x\tau}\right)d\tau\cdot\eta(t-x). \tag{10}$$

Проведение обратного преобразования для функции $\bar{u}(x,p)$: распишем ее так:

$$\bar{u}(x,p) = e^{-\alpha_1 x}\left\{\frac{1}{p} e^{-px}\left[e^{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}} - 1\right] + \frac{1}{p} e^{-px}\right\}.$$

Для обращения $\exp\left(\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}\right) - 1$ применим сперва теорему о сдвиге, потом формулу (3I) из § 5.5 книги [6]. Это дает:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}} - 1\right\} = e^{-\alpha_0 t}\sqrt{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{t}}\, I_1\left(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 x t}\right). \tag{11}$$

Применяя теперь теорему о свертке, легко получить:

$$u(x,t) = e^{-\alpha_1 x}\left\{1 + \int_0^{t-x} e^{-\alpha_0\tau}\sqrt{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{\tau}}\, I_1\left(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 x\tau}\right)d\tau\right\}\eta(t-x). \tag{12$_1$}$$

Проводя интегрирование по частям, можно получить другую форму для функции $u(x,t)$: $u(x,t) = \exp(-\alpha_1 x)\times$

$$\times\left\{e^{-\alpha_0(t-x)} I_0\left(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 x(t-x)}\right) + \alpha_0\int_0^{t-x} e^{-\alpha_0\tau} I_0\left(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 x\tau}\right)d\tau\right\}\eta(t-x) \tag{12$_2$}$$

Обратное преобразование для функции $\bar{\vartheta}(x,y,p)$ начнем с формулы из [6] :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta_0}{\sqrt{p}+\beta_0}e^{-\sqrt{p}y}\right\}=\beta_0\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{y^2}{4t}}-\right.$$

$$\left.-\beta_0 e^{\beta_0(y+\beta_0 t)}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{t}}+\beta_0\sqrt{t}\right)\right]. \qquad (13)$$

Теперь представляем $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}e^{-px}\frac{\beta_0}{\sqrt{p}+\beta_0}e^{-\sqrt{p}y}\right\}$ в виде свертки, после этого путем интегрирования по частям преобразовываем к виду:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}e^{-px}\frac{\beta_0}{\sqrt{p}+\beta_0}e^{-\sqrt{p}y}\right\}=\left[\operatorname{erfc}\frac{y}{2\sqrt{t-x}}-\right.$$

$$\left.-e^{\beta_0(y+\beta_0(t-x))}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{t-x}}+\beta_0\sqrt{t-x}\right)\right]\eta(t-x) \qquad (14)$$

Остается представить (7) в виде свертки (9) и (14) и окончательно получаем:

$$\vartheta(x,y,t)=\alpha_0 e^{-\alpha_1 x}\int_0^{t-x}e^{-\alpha_0\tau}I_0\left(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 x\tau}\right)\left[\operatorname{erfc}\frac{y}{2\sqrt{t-x-\tau}}-\right.$$

$$\left.-e^{\beta_0(y+\beta_0(t-x-\tau))}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{t-x-\tau}}+\beta_0\sqrt{t-x-\tau}\right)\right]d\tau\cdot\eta(t-x). \qquad (15)$$

Не составляет особого труда проверить, что (10), (12_1) (или (12_2)) и (15) дают решение задачи (1)-(4).

Вторая задача отличается от первой уравнением (2_3), которое имеет вид:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y}=\beta_1(\vartheta-u),\quad x>0,\ y=0,\ t>0. \qquad (2_3)$$

Выражения для $\bar{\vartheta}_0(x,p), \bar{u}(x,p)$, тем самым, и для $\vartheta_0(x,t)$ и $u(x,t)$ не меняются, а $\bar{\vartheta}(x,y,p)$ имеет вид:

$$\bar{\vartheta}(x,y,p)=\frac{1}{p}e^{-px}\frac{\beta_1}{\sqrt{p}+\beta_1}e^{-\sqrt{p}y}e^{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}}e^{-\alpha_1 x} \qquad (7')$$

Представим ($7'$) в виде суммы двух слагаемых, записывая $\exp\left(\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}\right)$, как и для функции $\bar{u}(x,p)$, в виде суммы $\exp\left(\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{p+\alpha_0}\right)-1$ и I. Тогда для первого слагаемого пользуемся (II) и (I4), а для второго – (I4) и в итоге получаем:

$$\vartheta(x,y,t)=e^{-\alpha_1 x}\Big\{\operatorname{erfc}\frac{y}{2\sqrt{t-x}}-e^{\beta_1(y+\beta_1(t-x))}\operatorname{erfc}\Big(\frac{y}{2\sqrt{t-x}}+\beta_1\sqrt{t-x}\Big)+$$
$$+\int_0^{t-x}e^{-\alpha_0\tau}\Big[\operatorname{erfc}\frac{y}{2\sqrt{t-x-\tau}}-e^{\beta_1(y+\beta_1(t-x-\tau))}\operatorname{erfc}\Big(\frac{y}{2\sqrt{t-x-\tau}}+ \qquad (16_I)$$
$$+\beta_1\sqrt{t-x-\tau}\Big)\Big]\sqrt{\frac{\alpha_0\alpha_1 x}{\tau}}\,I_1\big(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 x\tau}\big)d\tau\Big\}\eta(t-x)$$

Для функции $\vartheta(x,y,t)$ подобно тому, как это делалось для $u(x,t)$, можно интегрированием по частям перейти к другой форме записи:

$$\vartheta(x,y,t)=e^{-\alpha_1 x}\int_0^{t-x}e^{-\alpha_0\tau}I_0\big(2\sqrt{\alpha_0\alpha_1 x\tau}\big)\Big\{\alpha_0\Big[\operatorname{erfc}\frac{y}{2\sqrt{t-x-\tau}}-$$
$$-e^{\beta_1(y+\beta_1(t-x-\tau))}\operatorname{erfc}\Big(\frac{y}{2\sqrt{t-x-\tau}}+\beta_1\sqrt{t-x-\tau}\Big)\Big]+\beta_1\Big[\frac{1}{\sqrt{\pi(t-x-\tau)}}e^{-\frac{y^2}{4(t-x-\tau)}}- \qquad (16_2)$$
$$-\beta_1 e^{\beta_1(y+\beta_1(t-x-\tau))}\operatorname{erfc}\Big(\frac{y}{2\sqrt{t-x-\tau}}+\beta_1\sqrt{t-x-\tau}\Big)\Big]\Big\}d\tau\cdot\eta(t-x).$$

Итак, (16_I) (или(16_2)) вместе с (I0) и (12_I) (или (12_2)) дают решение второй задачи.

Литература

I. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань.:Изд-во КГУ,1978.188с.

2. Буйкис А.А. Двухтемпературное поле в гетерогенной среде в приближении сосредоточенной емкости. - В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики.Рига,ЛГУ им.П.Стучки,1977,№I,с.74-83.

3. Рыжик В.М., Кисиленко Б.Е., Солопин Е.Ф. Вопросы вытеснения нефти повышенной вязкости из трещиноватых пластов путем закачки горячего агента. - В кн.:Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений. М.:Недра, 1969, с. 117-129.

4. Буйкис А.А. Тождественность задач определения температурных полей в однородном и трещиноватом пластах. - Известия ВУЗов. Нефть и газ, 1979, № 3, с.49-52.

5. Буйкис А.А. Разностные схемы для уравнения теплопроводности при краевых условиях типа сосредоточенной емкости. - В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики,2. Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1978, №2, с.130-145.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований.М.:Наука,1969,т.I.344с.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Буйкис А.А. (ЛГУ им. П.Стучки, г.Рига)
Чередниченко И.И. (СКТБ Главтоннельстроя, г.Москва)

В настоящей работе проводится численное апробирование разностных схем для двух модельных задач подземной термогидродинамики. Пласт в них трактуется как двухтемпературная сосредоточенная теплоемкость. Настоящую работу следует рассматривать как примыкающую к исследованиям первого из авторов по постановке и анализу разностным методом задач для уравнения теплопроводности при одном или нескольких краевых условиях со сосредоточенными факторами [1]-[6].

Постановка первой задачи и ее аналитическое решение дано в [1], а в [2] рассмотрена разностная аппроксимация и дан алгоритм численной реализации. В этой задаче требуется найти функции $\vartheta(x,y,t)$ и $u(x,t)$, исходя из условий:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad x>0, y>0, t>0; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \alpha (u-\vartheta), &(2)\\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_0 (\vartheta - u), &(3) \end{aligned}\right\} x>0, y=0, t>0;$$

$$u\Big|_{t=0} = \vartheta\Big|_{t=0} = 0; \; u\Big|_{x=0} = 1; \; \vartheta\Big|_{x^2+y^2\to\infty} \to 0. \tag{4}$$

Здесь $\vartheta(x,y,t)$ при $y>0$ характеризует температуру окружающих пласт пород, $\vartheta(x,0,t)$ - температуру скелета пласта (или блоков при рассмотрении трещиноватого пласта), $u(x,t)$ - температуру фильтрующейся жидкости, а α и α_0 характеризуют скорость межфазного теплообмена между $u(x,t)$ и $\vartheta(x,0,t)$.

Введем равномерную сетку с шагами: h_1 по x, h_2 по y, τ по t. Пусть N_1 и N_2 - количество сеточных узлов в направлении x, соответственно y. Пусть, далее, $x_i = i h_1$, $y_j = j \cdot h_2$, $t_k = k\tau$ и $u(x_i, t_k) = u_i^k$, $\vartheta(x_i, y_j, t_k) = \vartheta_{i,j}^k$. Будем пользоваться следующими краткими обозначениями (см. [2]): $u_i^k = u$, $\vartheta_{i,j}^k = \vartheta$, $u_i^{k+1} = \hat{u}$, $\vartheta_{i,j}^{k+1} = \hat{\vartheta}$, $\vartheta_{i,0}^k = \vartheta_0$, $\vartheta_{i,1}^k = \vartheta_1$, $\vartheta_{i,j\pm1}^k = \vartheta^{(\pm1)}$, $\vartheta_{i\pm1,j}^k = \vartheta_{(\pm1)}$, $u_{i\pm1}^k = u_{(\pm1)}$, $\vartheta^{(\sigma)} = \sigma\hat{\vartheta} + (1-\sigma)\vartheta$.

Семейство разностных схем, аппроксимирующих задачу (I)-(4), запишем в виде:

$$\vartheta_t = \Lambda_{yy}\vartheta^{(\sigma_2)}, \quad i, j \geq 1, \ k \geq 0; \tag{5}$$

$$\left(1 + \eta\frac{h_2}{2}\right)\vartheta_t = \Lambda_y \vartheta^{(\sigma_2)} + \alpha(u - \vartheta)^{(\sigma_0)}, \ i \geq 1, j = 0, k \geq 0; \tag{6}$$

$$u_t = -\Lambda_{\bar{x}} u^{(\sigma_1)} + \alpha_0(\vartheta - u)^{(\sigma_0)}, \quad i \geq 1, j = 0, k \geq 0; \tag{7}$$

$$u = \vartheta = 0, \quad i, j \geq 0, \ k = 0; \tag{8}$$

$$u = \mathring{1}, \quad i = j = 0, \ k \geq 0; \ \vartheta = 0, \ i, k \geq 0, \ j = N_2. \tag{9}$$

Здесь

$$\Lambda_{\bar{y}y}\vartheta = \frac{\vartheta^{(+1)} - 2\vartheta + \vartheta^{(-1)}}{h_2^2}, \quad \Lambda_y \vartheta = \frac{\vartheta^{(+1)} - \vartheta}{h_2},$$

$$\Lambda_{\bar{x}} u = \frac{\hat{u} - u_{(-1)}}{h_1}, \quad u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}.$$

При $\eta = 0$ в (6) разностная схема (5)-(9) имеет первый порядок аппроксимации по y, а при $\eta = 1$ - второй (см. [2]). При произвольных $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ имеем первый порядок аппроксимации по x и t, а при $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ порядок аппроксимации по t возрастает до второго.

Для численной реализации (5)-(9) при помощи (7) исключим из (6) $\hat{u} = u_i^{k+1}$. Тогда можно (6) записать в стандартном виде (см. [4], [5]) краевого условия 3-го рода:

$$\hat{\vartheta}_0 = \varkappa_1 \hat{\vartheta}_1 + \mu_1 . \tag{10}$$

Для нашей задачи

$$\varkappa_1 = \frac{\sigma_2\left(1+\sigma_1\frac{\tau}{h_1}+\sigma_0\alpha_0\tau\right)}{k_2 c}, \quad \mu_1 = \frac{a_0\vartheta_0 + a_1\vartheta_1 + bu + b_1 u_{i+1} + \hat{b}_1\hat{u}_{i+1}}{c},$$

$$c = \left(1+\sigma_1\frac{\tau}{h_1}+\alpha_0\sigma_0\tau\right)\left(\frac{1+\gamma\frac{h_2}{2}}{\tau}+\frac{\sigma_2}{h_2}\right)+\alpha\alpha_0\left(1+\sigma_1\frac{\tau}{h_1}\right),$$

$$a_0 = \left(1+\sigma_1\frac{\tau}{h_1}+\alpha_0\sigma_0\tau\right)\left[\frac{1+\gamma\frac{h_2}{2}}{\tau}-\frac{1-\sigma_2}{h_2}-(1-\sigma_0)\alpha\right]+\alpha\alpha_0\sigma_0(1-\sigma_0)\tau,$$

$$a_1 = \frac{1-\sigma_2}{h_2}\left(1+\sigma_1\frac{\tau}{h_1}+\alpha_0\sigma_0\tau\right), \quad b = \alpha\left(1+\frac{\sigma_1-\sigma_0}{h_1}\tau\right),$$

$$b_1 = \frac{\alpha\sigma_0(1-\sigma_1)\tau}{h_1}, \quad \hat{b}_1 = \frac{\alpha\sigma_0\sigma_1\tau}{h_1}.$$

В [2] дано достаточное условие устойчивости для разностной схемы, более общей, чем (5)-(9). Это условие для (5)-(9) можно записать в виде

$$\tau \le \min\left\{\frac{h_2^2}{2(1-\sigma_2)}, \frac{1+\gamma\frac{h_2}{2}}{\frac{1-\sigma_2}{h_2}+\alpha(1-\sigma_0)}, \frac{h_1}{\sigma_0-\sigma_1}\right\},$$

причем при $\sigma_0 \le \sigma_1$ последний член из условия устойчивости выпадает.

Алгоритм реализации разностной схемы (5)-(9) состоит из N_2+1 одномерных правых прогонок (см. [4], [5]) в направлении y для возрастающих значений индекса i. В качестве левого краевого условия берется (10), а правого – второе из условий (9). После вычисления $\hat{\vartheta}$ определить $\hat{u}$ из (6) или (7) уже не составляет труда.

Вторая рассматриваемая здесь модельная задача учитывает теплопроводность в направлении x как в основном уравнению (I), так и в условиях (2) и (3). Эта задача формулируется так:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t}=\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}, \quad x>0,\ y>0,\ t>0; \tag{II}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \vartheta}{\partial t}=a_1^2\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}+\frac{\partial \vartheta}{\partial y}+\alpha(u-\vartheta), &(\text{I2})\\ &\frac{\partial u}{\partial t}=a_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_0(\vartheta-u), &(\text{I3})\end{aligned}\right\} x>0,\ y=0,\ t>0;$$

$$u\big|_{t=0}=\vartheta\big|_{t=0}=0;\quad u\big|_{x=0}=1;\quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big|_{x=0,\,y>0}=0; \tag{I4}$$

$$u\big|_{x\to\infty}\to 0;\quad \vartheta\big|_{x^2+y^2\to\infty}\to 0. \tag{I5}$$

Задачу (II)-(I5) будем аппроксимировать трехпараметрическим семейством типа локально-одномерных разностных схем, зависящих от весов σ_0, σ_1 и σ_2. Введем для этого промежуточный временной слой $t_{k+1/2}=t_k+\tau/2$ и обозначения: $u_i^{k+1/2}=\bar{u}$, $\vartheta_{i,j}^{k+1/2}=\bar{\vartheta}$. Разностная схема распадается на цепочки уравнений. На первом этапе решается система:

$$\vartheta_t=a_1^2\Lambda_{\bar{x}x}\vartheta^{(\sigma_1)}+\frac{\alpha}{2}(u-\vartheta)^{(\sigma_0)},\quad i\geq 1,\ j=0,\ k\geq 0; \tag{I6}$$

$$u_t=a_0^2\Lambda_{\bar{x}x}u^{(\sigma_1)}-\nu\Lambda_{\bar{x}}u^{(\sigma_1)}+\frac{\alpha_0}{2}(\vartheta-u)^{(\sigma_0)},\quad i\geq 1,\ j=0,\ k\geq 0; \tag{I7}$$

$$\vartheta_t=\Lambda_{\mathring{\bar{x}}x}\vartheta^{(\sigma_1)},\quad i\geq 1,\ j\geq 1,\ k\geq 0; \tag{I8}$$

а на втором этапе - система:

$$\bar{\vartheta}_t=\Lambda_y\bar{\vartheta}^{(\sigma_2)}+\frac{\alpha}{2}(\bar{u}-\bar{\vartheta})^{(\sigma_0)},\quad i\geq 1,\ j=0,\ k\geq 0; \tag{I9}$$

$$\bar{u}_t=\frac{\alpha_0}{2}(\bar{\vartheta}-\bar{u})^{(\sigma_0)},\quad i\geq 1,\ j=0,\ k\geq 0; \tag{20}$$

$$\bar{\vartheta}_t=\Lambda_{\bar{y}y}\bar{\vartheta}^{(\sigma_2)},\quad i\geq 1,\ j\geq 1,\ k\geq 0. \tag{2I}$$

В связи с введением промежуточного слоя $t_{k+1/2}$ уточним обозначения. В (I6)-(I8): $\vartheta_t = \frac{\bar{\vartheta}-\vartheta}{\tau}$, $\vartheta^{(\sigma)} = \sigma\bar{\vartheta} + (1-\sigma)\vartheta$, а в (I9)-(2I): $\bar{\vartheta}_t = \frac{\hat{\vartheta}-\bar{\vartheta}}{\tau}$, $\bar{\vartheta}^{(\sigma)} = \sigma\hat{\vartheta} + (1-\sigma)\bar{\vartheta}$. (Для u вводятся аналогичные обозначения). К системе (I6)-(2I) должны добавляться конечно-разностные аппроксимации дополнительных условий (I4),(I5).

Алгоритм численной реализации описанной разностной схемы состоит в следующем. На первом этапе сперва проводится матричная прогонка для системы двух уравнений (I6) и (I7) в направлении x. После этого проводится обычная скалярная прогонка уравнения (I8) для $j=\overline{1,N_2-1}$. На втором этапе проводится скалярная прогонка для уравнения (2I) в направлении y по возрастающим значениям i от 1 до N_1-1 с левым краевым условием типа (I0). Для этого из (I9) предварительно исключается $\hat{u}$ при помощи (20).

Остановимся подробнее на проведении матричной прогонки для системы (I6),(I7). (Ее описание для общего случая дано в [4], гл.X или [5], гл.II). Уравнения (I6) и (I7) мы можем записать в матричном виде

$$A\bar{W}_{i-1} - C\bar{W}_i + B\bar{W}_{i+1} = -F_i\,, \quad i=\overline{1,N_1-1}\,, \tag{22}$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22}\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

$$F_i=\begin{pmatrix} F_{i,1} \\ F_{i,2}\end{pmatrix},\quad \bar{W}_i=\begin{pmatrix} \bar{\vartheta}_{i,0} \\ \bar{\tau}_i\end{pmatrix},$$

а элементы матриц принимают следующие значения:

$$a_{11}=b_{11}=a_1^2\sigma_1\frac{\tau}{h_1^2},\ a_{22}=b_{22}+\nu\sigma_1\frac{\tau}{h_1},\ b_{22}=\frac{a_0^2}{a_1^2}b_{11},$$

$$c_{11}=2a_{11}+1-c_{12},\ c_{12}=\frac{\alpha}{2}\sigma_0\tau,\ c_{21}=\frac{\alpha_0}{\alpha}c_{12},$$

$$c_{22}=2b_{22}+\nu\sigma_1\frac{\tau}{h_1}+1-c_{21},\ F_{i,1}=\vartheta+a_1^2(1-\sigma_1)\tau\Lambda_{\bar{x}x}\vartheta+$$

$$+\frac{\alpha}{2}(1-\sigma_0)\tau(u-\vartheta),$$

$$F_{i,2} = u + a_0^2(1-\sigma_1)\tau\Lambda_{\bar{x}x}u - \nu(1-\sigma_1)\tau\Lambda_{\bar{x}}u + \frac{\alpha_0}{2}(1-\sigma_0)\tau(\vartheta-u).$$

Решение (22) ищется в виде

$$\bar{W}_i = \alpha_{i+1}\bar{W}_{i+1} + \beta_{i+1}, \tag{23}$$

где α_{i+1} - матрица 2-го порядка, а β_{i+1} - вектор-столбец из двух элементов. Они определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$\alpha_{i+1} = (C - A\alpha_i)^{-1}B, \quad \beta_{i+1} = (C - A\alpha_i)^{-1}(F_i + A\beta_i). \tag{24}$$

Если ввести обозначения:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} & \alpha_{i,2} \\ \alpha_{i,3} & \alpha_{i,4} \end{pmatrix}, \quad \beta_i = \begin{pmatrix} \beta_{i,1} \\ \beta_{i,2} \end{pmatrix}$$

то в нашем частном случае легко выписывается явный вид обратной матрицы $\mathcal{D}_i = (C - A\alpha_i)^{-1}$:

$$\mathcal{D}_i = \begin{pmatrix} \frac{d_{i,4}}{\Delta_i} & -\frac{d_{i,2}}{\Delta_i} \\ -\frac{d_{i,3}}{\Delta_i} & \frac{d_{i,1}}{\Delta_i} \end{pmatrix},$$

где $\Delta_i = d_{i,1}d_{i,4} - d_{i,2}d_{i,3}$,

а $d_{i,1} = c_{11} - a_{11}\alpha_{i,1}, \quad d_{i,2} = c_{12} - a_{11}\alpha_{i,2},$

$d_{i,3} = c_{21} - a_{22}\alpha_{i,3}, \quad d_{i,4} = c_{22} - a_{22}\alpha_{i,4}.$

Тогда из (24) следует, что

$$\alpha_{i+1} = \begin{pmatrix} b_{11}\frac{d_{i,4}}{\Delta_i} & -b_{22}\frac{d_{i,2}}{\Delta_i} \\ -b_{11}\frac{d_{i,3}}{\Delta_i} & b_{22}\frac{d_{i,1}}{\Delta_i} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\beta_{i+1}=\begin{pmatrix} \frac{d_{i,4}}{\Delta_i}(F_{i,1}+\alpha_{11}\beta_{i,1})-\frac{d_{i,2}}{\Delta_i}(F_{i,2}+\alpha_{22}\beta_{i,2}) \\ -\frac{d_{i,3}}{\Delta_i}(F_{i,1}+\alpha_{11}\beta_{i,1})+\frac{d_{i,1}}{\Delta_i}(F_{i,2}+\alpha_{22}\beta_{i,2}) \end{pmatrix}.$$

Остается добавить к (23) запись краевых условий в матричном виде. Из (I4) следует, что при $x=0$ оно выглядит так:

$$C_0\bar{W}_0-B_0\bar{W}_1=F_0\ ,$$

где

$$C_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ B_0=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ F_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Перейдем к анализу результатов расчетов. Сразу отметим, что главной целью этой работы была практическая апробация свойств предлагаемых разностных методов для рассматриваемых задач. Однако проведенные расчеты позволяют сделать также и некоторые выводы физического характера.

Первый рассмотренный вопрос:о влиянии величин коэффициентов межфазного теплообмена α и α_0 на температуры пласта (блоков) $\vartheta(x,0,t)$ и фильтрующихся с безразмерной скоростью $\nu=1$ жидкости $u(x,t)$. Если сравнить кривые с одинаковыми номерами из рис.Iа и Iб, то видно, что при $\alpha=\alpha_0=100$ температура $u(x,t)$ отличается от $\vartheta(x,0,t)$ на величину порядка 0,0I, при $\alpha=\alpha_0=10$ эта разность равна 0,0I5-0,035, а при $\alpha=\alpha_0=0.1$ эта разность есть величина порядка единицы. Т.е. в последнем случае для момента времени t =5,25, для него даны эти и все последующие результаты, движущейся по пласту (трещинам) жидкость передала небольшую часть своего теплосодержания пористой среде (блокам). Проведенные расчеты показывают сильную зависимость разности температур $u(x,t)-\vartheta(x,0,t)$ от величины межфазного теплообмена. Из этих расчетов можно сделать вывод, что при величинах α и α_0, приближающихся к ста, правомерно разностью температур фаз пренебречь, т.е. правомерно трактовать полупрямую $x\geqslant 0$, $y=0$ (т.е. пласт) как однородную среду. Тогда, как видно, вместо первой задачи (I)-(4) придем к широко известной постановке Ловерье.

Как уже указывалось, в расчетах величины α и α_0 изменялись в 10^3 раз. При расчетах по предложенной разностной схеме (5)-(9) при этом не возникало никаких затруднений. Разностная схема с вторым порядком аппроксимации по y (т.е. при $\gamma=1$) позволяла для достижения той же точности расчетов пользоваться в приблизительно в два раза большими шагами по пространству (тем самым и по времени) по сравнению со схемой первого порядка аппроксимации по y (при $\gamma=0$). Отметим, что все расчеты (это относится также ко второй задаче) были проведены при весах $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$.

Следующий вопрос, рассматривавшийся нами, - влияние на температурные поля теплопроводности в направлении x как при $y=0$ (пласт), так и при $y>0$ (окружающие породы). С этой целью помимо второй задачи (II)-(I5) была рассмотрена задача, в которой пренебрегалось теплопроводностью в направлении x при $y>0$, т.е. рассматривалась задача (II)-(I5) с вырожденным по x уравнением (II). На рисунках 2 и 3 решение этой задачи для краткости обозначается через 2_0. Итак, задача 2_0 отличается от первой задачи (I)-(4) только тем, что дополнительно учитывается теплопроводность пласта в направлении движения жидкости. Скорость фильтрации жидкости v , как и прежде, была принята равной единице. Величины $a_0^2 = a_1^2 = 0.01$, $\alpha = \alpha_0 = 10$.

Рассмотрим сперва влияние учета теплопроводности только в пласте (сравнение кривых 1 и 2_0 на рис.2а и 2б). Для малых x (вблизи входа в пласт) влияние теплопроводности пласта на температуру фильтрующейся жидкости практически незаметно. Влияние теплопроводности пласта на $\vartheta(x,0,t)$ достаточно сильное, хотя сами безразмерные величины температуропроводности, как уже указывалось, являются небольшими (такие их величины физически соответствуют пласту довольно большой мощности). Для больших значений x (вблизи фронта нагнетания) отличие температур заметнее как для твердой, так и для движущейся жидкой фазы. Еще более заметно влияние теплопроводности в направлении x окружающих пород (кривые 2 на рис. 2а и 2б). Заметим сразу, что столь большое влияние теплопроводности окружающих пород в этих модельных расчетах вызвано отчасти выбранными нами величинами температуропроводности ~~фаз пласта~~ и окружающих пород (безразмерные величины введены путем нормировки к величине темературопроводности окружающих пород, принятой равной единице). Но такой выбор отношения температуропроводности окружающих пород $(a^2=1)$ к температуропроводности фаз пласта $(a_0^2=a_1^2=0.01)$ позволил обнаружить следующий интересный эффект: вблизи температурного фронта распределение температуры вглубь пород (в направлении y) может быть не монотонным $(\vartheta(x,0,t)<\vartheta(x,y^*,t)$, где $y^*>0$). Тепло от более горячих зон пласта отдано окружающим пласт породам, а из-за хорошей теплопроводности пород в направлении x повышение температуры в них опередило повышение температуры в пласте.

Наконец, на рис. 3 дано распределение температуры твердой фазы вдоль пласта $\vartheta(x,0,t)$ для всех трех рассмотренных здесь постановок при краевом условии второго рода на входе пласта, когда третье из условий (4) и (I4): $u|_{x=0}=1$ заменяется на условие

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-1. \qquad (26)$$

Это означает, что мы во всех трех случаях вносим в пласт жидкостью одинаковое количесто тепла. Как и следовало ожидать, наиболее сильное отличие наблюдается между постановками I и 2, а 2_0 занимает промежуточное положение. Как видно температурные фронты для задач I и 2_0 практически совпадают, а температурный фронт для задачи 2 расположен существенно дальше: опережает остальные фронты приблизительно на 20 %. Тем самим распределение температуры в пласте для последней задачи более равномерное.

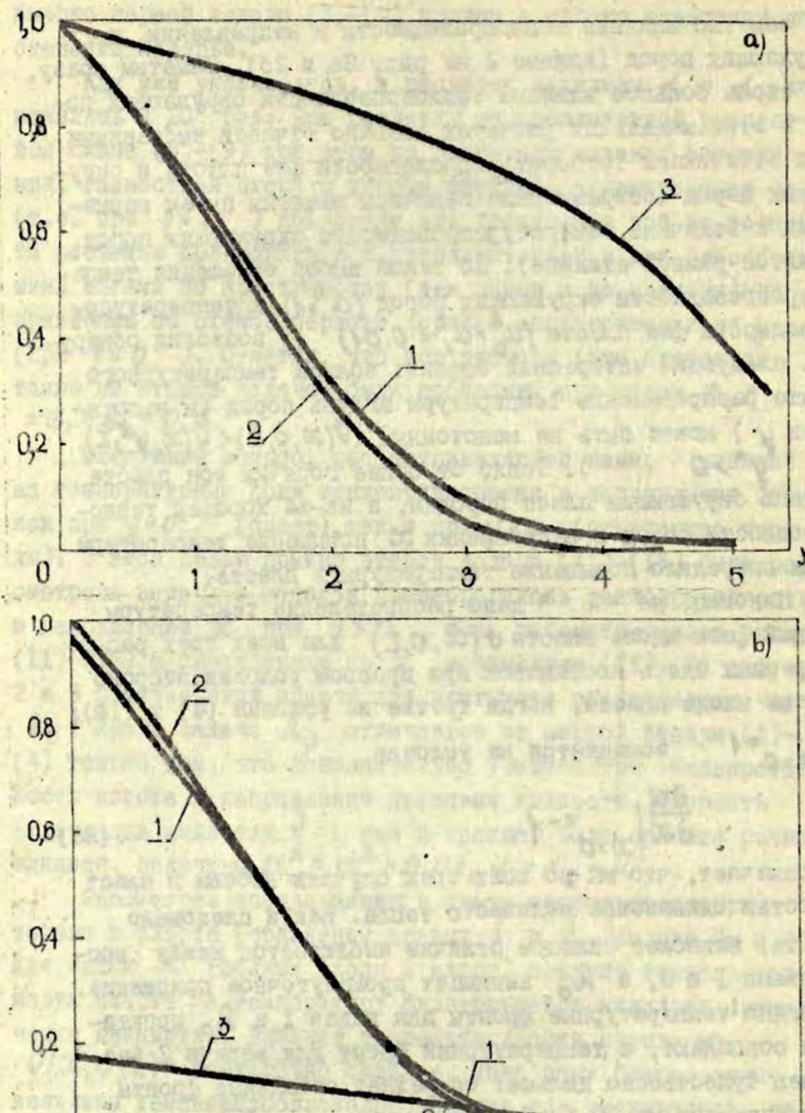


Рис.I. Распределение температуры: а) $u(x,t)$;
в) $\vartheta(x,0,t)$. 1- $\alpha=\alpha_0=10$;
2- $\alpha=\alpha_0=100$; 3- $\alpha=\alpha_0=0,1$.

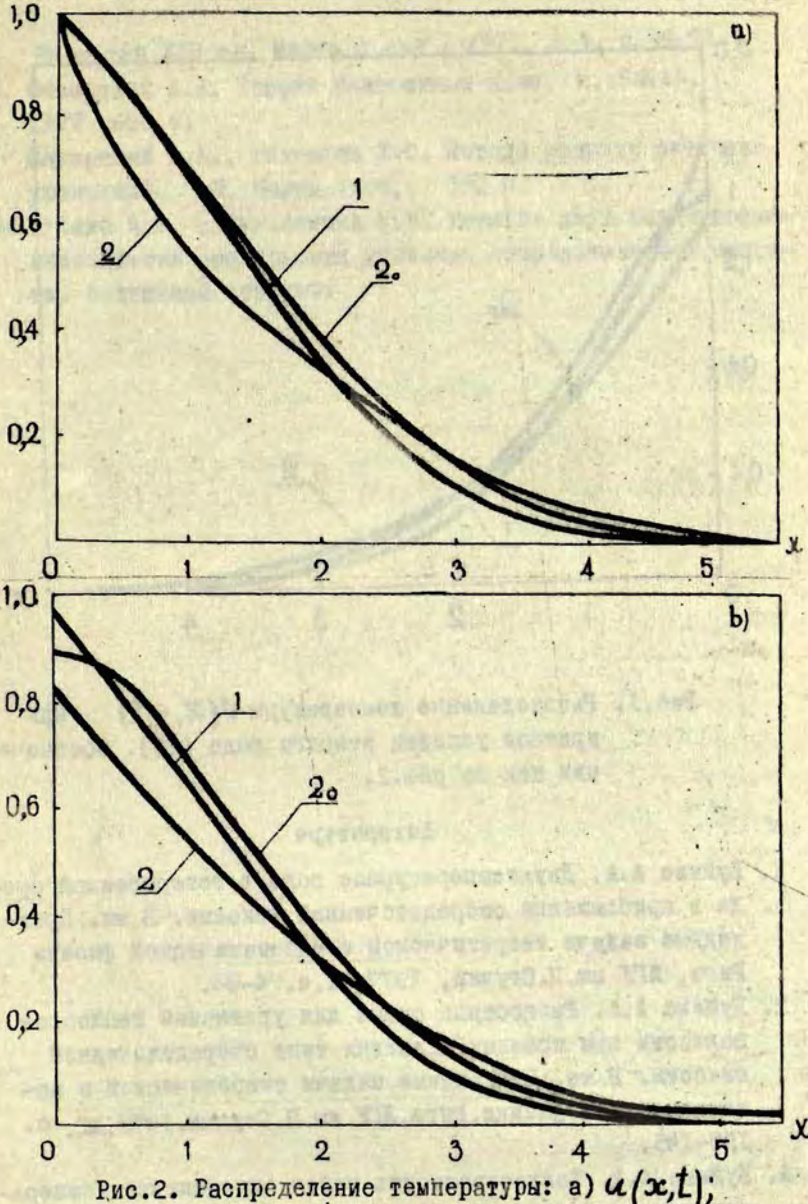


Рис.2. Распределение температуры: а) $u(x,t)$; в) $v(x,o,t)$. I-задача (I)-(4); 2-задача (II)-(I5); 2_0-задача (II)-(I5) при вырождении уравнения (II) по x .

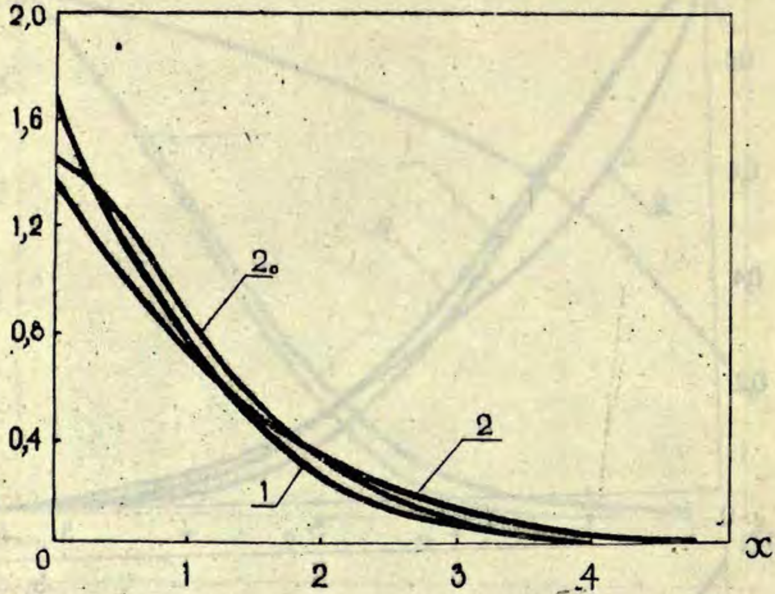


Рис.3. Распределение температуры $\vartheta(x,0,t)$ при краевом условии второго рода (26). Обозначения как на рис.2.

Литература

I. Буйкис А.А. Двухтемпературное поле в гетерогенной среде в приближении сосредоточенной емкости.– В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1977, №I, с.74-83.

2. Буйкис А.А. Разностные схемы для уравнения теплопроводности при краевых условиях типа сосредоточенной емкости.– В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига, ЛГУ им.П.Стучки, 1978, №2, с. 130-145.

3. Буйкис А.А. Тождественность задач определения температурных полей в однородном и трещиноватом пластах.—

Известия ВУЗ ов. Нефть и газ , 1979, № 3, с.49-52.

4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:Наука, 1977 ,656 с.
5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.:Наука,1978. 592 с.
6. Буйкис А.А. , Кузмишкина Н.В. Решение двух задач теплопроводности при краевых условиях сосредоточенной емкости. Настоящий сборник.

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ПРОГОНКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ЕМКОСТЬЮ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Буйкис А.А. (ЛГУ им.П.Стучки)

Ниже дается конечно-разностная аппроксимация одной задачи, неоднократно рассмотренной в подземной термодинамике и в некотором смысле обобщается классический вариант метода прогонки для численной реализации предложенной разностной схемы.

Модельная задача типа, рассматриваемого в этой работе, впервые в замкнутом виде была решена в [I] при помощи интегрального преобразования Лапласа-Карсона.

Математическая формулировка задачи такова: требуется найти непрерывную в первом квадранте функцию $u(x_1, x_2, t)$ удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \quad x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ t > 0; \tag{I}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{\partial u}{\partial x_1} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \vartheta \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad x_1 = 0,\ x_2 > 0,\ t > 0; \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \alpha u\right)\Big|_{x_1 = x_2 = 0} = q(t), \quad t > 0; \tag{3}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x_1, x_2),\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0;\ u\big|_{x_1^2 + x_2^2 \to \infty} < \infty,\ t > 0. \tag{4}$$

Физическая интерпретация задачи (I)-(4): она описывает распределение температуры в пласте и вокруг него, при этом пласт рассматривается как сосредоточенная теплоемкость. По пласту $\{(x_1, x_2):\ x_1 = 0,\ x_2 > 0\}$ со скоростью ϑ движется теплоноситель, теплопроводность пласта в направлении x_2 характеризует коэффициент a^2, теплоотдачу его в окружающие породы – коэффициент β. Предполагается, что окружающие пласт породы $\{(x_1, x_2): x_1 > 0, x_2 > 0\}$ не обладают теплопроводностью в направлении x_2. Величина $q(t)$ характеризует количество вносимого в пласт тепла. Анализ физической обоснованности описанных здесь предположений см., напр., в [2], [3].

Переходим к построению разностной схемы для задачи (1)-(4). Для задачи, весьма близкой к рассматриваемой здесь, в [4] была предложена разностная схема типа переменных направлений. Мы здесь предлагаем разностную схему, которая позволяет перейти на следующий временной слой без введения промежуточных значений. Эта разностная схема является обобщением схемы, предложенной в нашей работе [5] для задачи (I)-(4) при $a^2=0$. Поэтому здесь не будем останавливаться на деталях получения разностной схемы, а сразу выпишем ее окончательный вид. Уравнения (I)-(2) аппроксимируются так:

$$y_t=\Lambda_{11}y^{(\sigma_1)},\quad i\geq 1,\ j,k\geq 0; \tag{5}$$

$$\left(1+\beta\frac{h_1}{2}\right)y_t=\beta\overset{+}{\Lambda}_1 y^{(\sigma_1)}+a^2\Lambda_{22}y^{(\sigma_2)}-v\overset{=}{\Lambda}_2 y^{(\sigma_3)},\ i=0,\ j,\ k\geq 0. \tag{6}$$

Здесь для краткости опущены индексы у сеточной функции: $y^k_{i,j}=y(x_1^i,x_2^j,t_k)=y$. Далее, $y^{(\sigma)}=\sigma\hat{y}+(1-\sigma)y$, где $\hat{y}=y^{k+1}_{i,j}$. Наконец,

$$y_t=\frac{\hat{y}-y}{\tau},\ \overset{+}{\Lambda}_1 y=\frac{y^k_{i+1,j}-y^k_{i,j}}{h_1},\ \Lambda_{11}y=\frac{y^k_{i+1,j}-2y^k_{i,j}+y^k_{i-1,j}}{h_2^2}$$

Ясно, как определяются разностные операторы $\bar{\Lambda}_2$, Λ_{22}.

Условие на бесконечности (второе из условий (4)), как обычно, переносим на линии $x_1=L_1$ и $x_2=L_2$, где L_1, L_2 выбираются в зависимости от промежутка времени T, на котором ищется решение. Условия на этих линиях мы запишем в таком же виде, как (3). Конечно-разностная аппроксимация этих условий проводится стандартным образом с получением первого порядка аппроксимации по x_2. Условие на линии $x_1=L_1$, аппроксимируется со вторым порядком по x_1 путем использования уравнения (I) на границе - см.[6]. Заметим, что этот же принцип использован при получении разностной аппроксимации уравнением (6) уравнения (2) -

из-за этого у временной производной коэффициент имеет вид $\left(1+\beta\frac{h_1}{2}\right)$ вместо единицы. Но вернемся к виду конечно-разностной аппроксимации граничных условий. Их можно записать так:[x)]

$$\hat{y}_{0,0}=\varkappa_{0,0}\hat{y}_{0,1}+\mu_{0,0}\,, \tag{7_1}$$

$$\hat{y}_{0,N_2}=\varkappa_{0,N_2}\hat{y}_{0,N_2-1}+\mu_{0,N_2}\,; \tag{7_2}$$

$$\hat{y}_{N_1,j}=\varkappa_{N_1,j}\hat{y}_{N_1-1,j}+\mu_{N_1,j}\,. \tag{7_3}$$

Мы не будем приводить здесь конкретных выражений для коэффициентов $\varkappa$ и μ, отметим только, что при произвольных σ_3, σ_1 и σ_2 коэффициенты $\varkappa\in[0,1)$, а коэффициенты μ содержат значения y с предыдущего слоя t_k.

Уравнение (5) имеет стандартный вид трехточечного разностного уравнения ([6]):

$$A_{i,j}\hat{y}_{i-1,j}-C_{i,j}\hat{y}_{i,j}+B_{i,j}\hat{y}_{i+1,j}=-F_{i,j}\,, \tag{8}$$

а (6) можно записать в виде

$$\hat{y}_{0,j}=\varkappa_{0,j}\hat{y}_{1,j}+\nu_{0,j}\hat{y}_{0,j-1}+\pi_{0,j}\hat{y}_{0,j+1}+\mu_{0,j}\,, \tag{9}$$

причем опять $0\le\varkappa_{0,j},\nu_{0,j},\pi_{0,j}<1$. Мы записали уравнения (8) и (9) с коэффициентами, зависящими от рассматриваемой точки пространства (x_1^i, x_2^j), имея в виду возможность аппроксимации задачи типа (I)-(4) с переменными коэффициентами, зависящими от x_1, x_2 и t.

Рассмотрим теперь возможность экономичного численного решения системы линейных алгебраических уравнений (7_1)-(7_3), (8) и (9). Если рассматривать подсистему неизвестных $\hat{y}_{i,j}$ при фиксированном $j\,(0\le i\le N_1)$, то стандартный

x) Для краткости в (7_1)-(7_3) у величин $y_{i,j}^{k+1}=\hat{y}_{i,j}$ опущен временной индекс t_{k+1}.

вид трехдиагональной матрицы для этих неизвестных портится уравнением (9), в которое дополнительно входят неизвестные $\hat{y}_{0,j-1}$ и $\hat{y}_{0,j+1}$. Однако оказывается возможным видоизменить основную идею метода прогонки и для этой ситуации, когда на границе $i=0$ шаблон содержит четыре точки, а не две, как обычно. С этой целью на первом этапе $\hat{y}_{i,j}$ будем представлять в следующем виде:

$$\hat{y}_{i,j} = \alpha_{i,j}\,\hat{y}_{i+1,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j}\,\hat{y}_{0,j+1} . \tag{10}$$

Таким же путем, как это делается в стандартной ситуации (см. [6], [7]) легко получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\alpha_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{C_{i,j} - \alpha_{i-1,j} A_{i,j}}, \quad \beta_{i,j} = \frac{\beta_{i-1,j} A_{i,j} + F_{i,j}}{C_{i,j} - \alpha_{i-1,j} A_{i,j}}, \tag{11}$$
$$\gamma_{i,j} = \frac{\gamma_{i-1,j} A_{i,j}}{C_{i,j} - \alpha_{i-1,j} A_{i,j}}, \quad i = \overline{1, N_1 - 1} .$$

Счет по этим соотношениям требует, чтобы были известны величины $\alpha_{0,j}, \beta_{0,j}, \gamma_{0,j}$, для этого необходимо из (9) исключить $y_{0,j-1}$; чтобы сделать это, рассмотрим следующий шаг - вычисление дополнительных коэффициентов $\delta_{i,j}$, $\varepsilon_{i,j}$. Условие (7_3) вместе с (10) при $i = N_1 - 1$ позволяет определить $\hat{y}_{N_1-1,j}$ в виде:

$$y_{N_1-1,j} = \delta_{N_1-1,j}\, y_{0,j+1} + \varepsilon_{N_1-1,j} ,$$

где

$$\delta_{N_1-1,j} = \frac{\gamma_{N_1-1,j}}{1 - \alpha_{N_1-1,j}\,\varkappa_{N_1,j}}, \quad \varepsilon_{N_1-1,j} = \frac{\beta_{N_1-1,j} + \alpha_{N_1-1,j}\,\mu_{N_1,j}}{1 - \alpha_{N_1-1,j}\,\varkappa_{N_1,j}} . \tag{12}$$

Теперь $\hat{y}_{i,j}$ можем представлять в виде:

$$\hat{y}_{i,j} = \delta_{i,j}\,\hat{y}_{0,j+1} + \varepsilon_{i,j} . \tag{13}$$

Напишем представление $\hat{y}_{i+1,j}$ в виде (I3) и подставим его в (I0); это дает рекуррентные формулы для коэффициентов $\delta_{i,j}, \varepsilon_{i,j}$ по уменьшающимся значениям индекса i:

$$\delta_{i,j} = \alpha_{i,j}\,\delta_{i+1,j} + \gamma_{i,j}, \quad \varepsilon_{i,j} = \alpha_{i,j}\,\varepsilon_{i+1,j} + \beta_{i,j}, \quad i = \overline{N_1 - 2, 0}. \tag{14}$$

Возьмем (I3) при $i=0$ и $j-1$ и подставим его в (9). Это дает формулы для вычисления $\alpha_{0,j}, \beta_{0,j}, \gamma_{0,j}$:

$$\alpha_{0,j} = \frac{\varkappa_{0,j}}{1-\nu_{0,j}\,\delta_{0,j-1}}, \quad \beta_{0,j} = \frac{\mu_{0,j} + \nu_{0,j}\,\varepsilon_{0,j-1}}{1-\nu_{0,j}\,\delta_{0,j-1}}, \tag{15}$$

$$\gamma_{0,j} = \frac{\pi_{0,j}}{1-\nu_{0,j}\,\delta_{0,j-1}}.$$

Заметим, наконец, что (7_1) дает:

$$\alpha_{0,0} = 0, \quad \beta_{0,0} = \mu_{0,0}, \quad \gamma_{0,0} = \varkappa_{0,0}.$$

Значит, определение всех прогоночных коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ проводится в таком порядке. Зная $\alpha_{0,0}, \beta_{0,0}, \gamma_{0,0}$, находим $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$ при $j=0$ по (II). Это позволяет из (I2) и (I4) найти все $\delta_{i,0}, \varepsilon_{i,0}$. Увеличиваем j на единицу, т.е. берем $j=1$ и по (I5) и (II) находим $\alpha_{i,1}, \beta_{i,1}, \gamma_{i,j}$ для всех i. Далее, по (I2) и (I4) для $j=1$ находим $\delta_{i,1}, \varepsilon_{i,1}$. Вновь увеличиваем j на единицу и вычисления продолжаем в прежнем порядке.

После того, как мы таким путем нашли все коэффициенты до $\delta_{0,N_2-1}, \varepsilon_{0,N_2-1}$ включительно, начинается второй этап – этап обратной прогонки: последовательное определение неизвестных $y_{i,j}$. Для этого из (I3) при $i=0$, $j=N_2-1$ и (7_2) находим неизвестное $\hat{y}_{0,N_2}$. Теперь из (I3) при $j=N_2-1$ можем найти все $\hat{y}_{i,N_2-1}$. Уменьшаем j на единицу и находим все $\hat{y}_{i,N_2-2}$ и т.д.

до $\hat{y}_{i,0}$. Заметим, что при такой реализации обратной прогонки на втором этапе не нужны коэффициенты $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$, т.е. их можно не запоминать в памяти ЭВМ. Для вычисления $\delta_{i,j}, \varepsilon_{i,j}$ необходимы лишь, как это видно из (I4), величины $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}, \gamma_{i,j}$ при том же номере j. Мы не будем останавливаться здесь на обосновании корректности предложенного обобщения метода прогонки: мы предполагаем рассмотреть этот вопрос отдельно.

Отметим в заключении, что наличие различных весов для аппроксимации отдельных производных в уравнениях (5) и (6) существенно. Например, численные эксперименты для случая $a^2=0$ показали, что наилучшие численные результать (сравнивая их с точным решением) достигаются при $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$, $\sigma_3 = 0$. При этом на временной шаг накладываются условия типа условия Куранта, т.е. τ должно быть пропорционально h_1 и обратно пропорционально величине ϑ скорости конвективного переноса.

Литература

I. Авдонин Н.А. О некоторых формулах для расчета температурного поля пласта при тепловой инжекции.- Известия ВУЗов. Нефть и газ, 1964, № 3, с.37-4I.

2. Цудоркин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах. Казань.:Изд-во КГУ, 1978, 188 с.

3. Рубинштейн Л.И. Температурные поля в нефтяных пластах. М.:Недра,1972.

4. Авдонин Н.А., Белоглазов К.С. Приближенный расчет температурного поля пласта при переменной скорости фильтрации. -В кн.:Расчеты неизотермической нефтеотдачи многослойных пластов. Рига, ЛГУ им. П.Стучки, 1970, с. 24-32.

5. Буйкис А.А. Разностные схемы для уравнения теплопро-

водноoти при краевых уоловиях типа оосредоточенной емкости. -В кн.:Прикладные задачи теоретической и математичеокой физики .Рига,ЛГУ им.П.Стучки,1978,№2, о.130-145.

6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:Наука,1977. 656 с.

7. Самарокий А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.:Наука,1978.592с.

ОПИСАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ЭПИТАКСИАЛЬНОМ РЕАКТОРЕ ПРИ УГЛАХ НАКЛОНА ПОДЛОЖКИ $45^0 \leq \alpha \leq 90^0$.

Кемерс В.У. (ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, г.Рига)

Решение проблемы оптимизации технологических процессов эпитаксиального выращивания монокристаллических пленок из газовой фазы в проточных системах требует описания газодинамических, тепловых и диффузионных полей в реакторах. Ранее было показано [I], что при малых скоростях закачки газовой смеси приближение пограничного слоя неприменимо и необходимо рассматривать полную систему уравнений Навье-Стокса.

Целью настоящей работы является решение осесимметричной и плоской задач стационарного течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа в реакторе при углах наклона подложки α относительно оси реактора $45^0 \leq \alpha \leq 90^0$. Течение газа будем описывать системой уравнений, полученной из уравнений Навье-Стокса и теплопроводности в первом нетривиальном приближении по квадрату числа Маха [I]. Введем переменные: функцию тока $\vec{\Psi}$ и вихря $\vec{\omega}$ связанные с полем скоростей $\vec{V}$ соотношениями

$$\rho \vec{V} = \mathrm{rot}\, \vec{\Psi}\ , \quad \vec{\omega} = \mathrm{rot}\, \vec{V}\ . \tag{I}$$

В первом приближении по квадрату числа Маха безразмерное уравнение состояния имеет вид

$$\rho \cdot T = 1\ . \tag{2}$$

Учитывая (2) выражение для скорости принимает вид

$$\vec{V} = T\, \mathrm{rot}\, \vec{\Psi}\ . \tag{3}$$

В выражениях (I)-(3) ρ - плотность, T - температура газа. На рис.I представлена схема эпитаксиального реактора.

Рис.I. Схема эпитаксиального реактора.

При ориентации подложки под углом α =90^0 к оси реактора задача обладает осевой симметрией, решение ее удобно расчитывать в цилиндрической системе координат.

Осесимметричное течение газа в реакторе.

В силу осевой симметрии вращательная вокруг оси канала составляющая скорости ϑ_φ равна нулю и задача из пространственной трехмерной становится двумерной в плоскости (r, x), где r - расстояние от оси реактора, x - координата вдоль оси канала. За расчетную область примем половину продольного вдоль оси сечения канала. На рис.I этому соответствует прямоугольник $ABCD$. Искомые функции зависят от x и r: $\vec{\Psi}=\vec{\Psi}(r,x), \vec{V}=\vec{V}(r,x)$ и т.д., т.е. на координатных линиях (r =const, x =const) все функции постоянные. Из (I) в цилиндрической системе координат имеем

$$\rho\vec{V}=rot\,\vec{\Psi}=-\vec{e}_r\frac{\partial\Psi_\varphi}{\partial x}-\vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial\Psi_x}{\partial r}-\frac{\partial\Psi_r}{\partial x}\right)+\vec{e}_x\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi_\varphi). \quad (4)$$

В силу осевой симметрии $\rho\vartheta_\varphi=\frac{\partial\Psi_r}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_x}{\partial r}=0$. Как видно из (4), задача сводится к расчету угловой составляющей вектора $\vec{\Psi}$. Обозначим ее в дальнейшем через Ψ. Из (4) следует, что

$$u=\frac{T}{r}(r\Psi)_r\,,\quad \vartheta=-T\Psi_x\,, \qquad (5)$$

где u - продольная, а ϑ - поперечная составляющие. Нижние индексы r и x означают соответствующие частные производные. Учитывая (I), в осесимметричном случае имеем

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\,\vec{v} = -\vec{e}_{\varphi}(u_r - \vartheta_x) \ . \tag{6}$$

В дальнейшем эту составляющую вектора $\vec{\omega}$ обозначим через $\omega = -u_r + \vartheta_x$. Система уравнений, описывающая течение газа в цилиндрических координатах в первом нетривиальном приближении по квадрату числа Маха имеет вид

$$Re\Big[B(T_x\Psi_{rr} - T_r\Psi_{xr} - \omega_x) - \frac{1}{r^3}T_x\Psi^2 + T\Psi_x\Big(\frac{F}{r} - \frac{\Psi}{r^3}\Big) + \frac{1}{r}T_x\Psi_r^2 + \tag{7}$$
$$+ \Psi_x\Big(\frac{E}{r} + T_x\Psi_{xr} - T_r\Psi_{xx} + \omega_r\Big)\Big] = \frac{\omega}{r^2} - \Delta\omega \ ,$$

$$\omega = \frac{T\Psi}{r^2} - T_r B - \frac{1}{r}(r\Psi)_r - E \ , \tag{8}$$

$$T_x\Psi_r - T_r\Psi_x + \frac{T_x\Psi}{r} = \frac{\lambda}{RePr}\Delta T + \frac{1}{RePr}(\lambda_x T_x + \lambda_r T_r) \ . \tag{9}$$

Для сокращения записи здесь введены обозначения

$$B = \frac{1}{r}(r\Psi)_r \ , \quad F = \frac{\Psi_r}{r} + \Psi_{rr} \ , \quad E = (T\Psi_x)_x \ ,$$

$$\Delta\cdot = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial\cdot}{\partial r} + \frac{\partial^2\cdot}{\partial x^2} \ .$$

Безразмерные параметры Re - число Рейнольдса, Pr - число Прандтля:

$$Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu_0} \ , \qquad Pr = \frac{C_p\mu_0}{\lambda_0} \ ,$$

здесь L - характерный размер системы (радиус канала), C_p - удельная теплоемкость при постоянном давлении,

ρ_0, μ_0, λ_0 - значения соответствующих функций на входе,

u_0 - масштаб скорости.

Зависимость теплопроводности от температуры учтем в виде разложения по степеням температуры

$$\lambda(T) = \lambda_1 + \lambda_2 T + \lambda_3 T^2 . \tag{10}$$

Рассмотрим граничные условия для искомых функций. Из условий симметрии на оси $T_r = 0$, $u_r = 0$. После несложных вычислений получаем $\psi|_{r=0} = \omega|_{r=0} = 0$. На входе в реактор для поля скоростей зададим параболический профиль Пуазейля, чему соответствует выражения для ψ и ω

$$\psi(r) = r - \frac{r^3}{2} , \quad \omega = 4r . \tag{11}$$

На стенках реактора, как следует из (II) $\psi|_{r=1} = \frac{1}{2}$. На подложке $\psi = 0$, на выходе $\psi_x = 0$, $\omega_x = 0$, что соответствует $\vartheta = 0$. На входе, стенках и подложке значение температуры задано.

Плоское приближение течения газа в реакторе.

В общем случае, когда система не осесимметрична (подложка не круглая, подложка ориентирована к оси реактора под углом не равным 90^0, существенно влияние естественной конвекции), появляется зависимость скоростей газодинамических потоков от угловой координаты φ, и необходимо решить трехмерную задачу. В то же время качественную, а в некоторых областях реактора и количественную информацию о процессах тепло- и массопереноса можно получить, рассматривая плоское приближение. А именно, если заменить описание течения газа в цилиндрическом реакторе на течение в плоском канале, поперечный размер которого равен диаметру реактора [I]. Для этого координатные оси x и y выбираем направленными вдоль оси реактора (ось x) и вдоль пластинки в секущей цилиндрический реактор плоскости (см.рис.2)

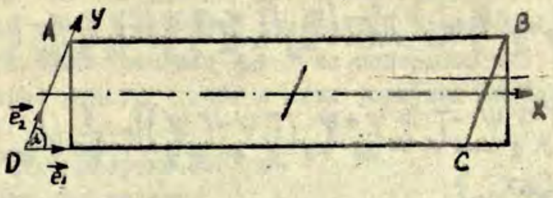


Рис.2. Расчетная область и базисные векторы в косоугольной системе координат.

Базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют между собой угол α, равный минимальному острому углу между осью канала и диаметров подложки. Третий единичный вектор $\vec{e}_3$ ортогонален обоим векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Выбранная система координат в плоскости (x, y) является неортогональной. Вектор скорости $\vec{V}$ в косоугольной системе координат в плоском приближении разлагается на составляющие

$$\vec{V}(x,y)=\vec{e}_1\, a(x,y)+\vec{e}_2\, b(x,y). \tag{12}$$

Учитывая $\rho\vec{V}=\mathrm{rot}\,\vec{\Psi}$, видно, что вектор $\vec{\Psi}$ можно выбрать параллельным вектору $\vec{e}_3$, его величина определяется полем скоростей. Соотношения (1), учитывая (12) в косоугольной системе координат, принимает вид

$$\rho\vec{V}=\mathrm{rot}\,\vec{\Psi}=\frac{1}{\sin\alpha}\Psi_y\vec{e}_1-\frac{1}{\sin\alpha}\Psi_x\vec{e}_2, \tag{13}$$

$$\omega=-\frac{1}{\sin^2\alpha}\left[(T\Psi_x)_x+(T\Psi_y)_y-\cos\alpha\,(T_x\Psi_y+2T\Psi_{xy}+T_y\Psi_x)\right], \tag{14}$$

где через Ψ и ω обозначены единственные отличные от нуля составляющие векторов $\vec{\Psi}$ и $\vec{\omega}$ соответственно. В результате система уравнений Навье-Стокса в косоугольной системе координат принимает вид

$$\omega=-\frac{1}{\sin^2\alpha}\left[(T\psi_x)_x+(T\psi_y)_y-\cos\alpha\left(T_x\psi_y+2T\psi_{xy}+T_y\psi_x\right)\right], \qquad (14)$$

$$\sin\alpha(\psi_x\omega_y-\psi_y\omega_x)+\frac{1}{\sin\alpha}\left[\psi_{xy}(T_x\psi_x-T_y\psi_y)+T_x\psi_y\psi_{yy}-T_y\psi_x\psi_{xx}\right]+ \qquad (15)$$

$$+ctg\alpha\left[T_y\psi_y\psi_{xx}-T_x\psi_x\psi_{yy}+\psi_{xy}(T_y\psi_x-T_x\psi_y)\right]=-\frac{1}{Re}\left(\omega_{xx}+\omega_{yy}-\right.$$
$$\left.-2\cos\alpha\,\omega_{xy}\right),$$

$$Re\,Pr\sin\alpha\left(T_x\psi_y-T_y\psi_x\right)=\lambda(T_{xx}+T_{yy})+\lambda_xT_x+\lambda_yT_y- \qquad (16)$$
$$-\cos\alpha\left(\lambda_yT_x+2\lambda T_{xy}+\lambda_xT_y\right).$$

На входе ψ и ω задаются из профиля Пуазейля, на выходе $\psi_x=\omega_x=0$. На стенках канала величина ψ задана из условия сохранения расхода газовой смеси в канале $\psi\big|_{y=-\frac{1}{\sin\alpha}}=-\frac{4}{3}$, $\psi\big|_{y=\frac{1}{\sin\alpha}}=\frac{4}{3}$.

Алгоритм решения и результаты расчетов.

Системы уравнений для расчета газодинамической тепловой задачи в осесимметричном (7)-(9) и в плоском (I4)-(I6) случае решены численно на ЭВМ. Для этого в расчетной области введена разностная сетка с одинаковыми шагами h по обоим направлениям. Производные в уравнениях аппроксимированы с точностью до $O(h^2)$ с помощью центральных разностей. В граничных условиях на твердых поверхностях производные, не являющиеся тангенциальными по отношению к поверхности, производные аппроксимированы односторонними разностями с точностью $O(h^2)$.

Значения функции вихря ω на стенках реактора и подложки вычислены следующим образом [I]. В окрестности каждого узла сетки, лежащего на указанных поверхностях, функция ψ разложена в ряд Тейлора по степеням шага сетки с точностью до $O(h^5)$. Учитывая условия прилипания и равенства нулю тангенциальных производных от составляющих скоростей u и v, нормальные производные функции ψ выражены через функцию ω и ее производные. Подставив эти выражения в ряд Тейлора, получено уравнение для нахождения ω в рассматриваемой точке с точностью до $O(h^3)$. Ниже приводятся расчетные формулы для нахождения значения ω на поверхностях (17)-(22). Обозначение узловых точек в этих формулах показано на рис.3.

На этом рисунке изображен шаблон для расчета значения функции ω на нижней стенке реактора (случай, когда разложение в ряд Тейлора берется в направлении возрастания соответствующей координаты). Для верхней стенки (разложение в направлении убывания соответствующей координаты) шаблон получается поворотом рисунка вокруг линии АВ.

Рис.3. Обозначение узловых точек в выражениях (17)-(22).

В осесимметричном случае на стенке реактора

$$\omega=\Big[\frac{24}{h^2}T\Big(\psi_1-\psi\sum_{j=0}^{h}h^j\Big)+9\omega_1-\omega_2-\omega_{i+1}-\omega_{i-1}+\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{4T}\times(\omega_{i+1}-\omega_{i-1})-3\frac{T_1\omega_1}{T}\Big]\Big/\Big[-19-5h-4h^2+19\frac{T_1}{T}-\frac{T_2}{T}+2h\frac{T_1}{T}+\Big(\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2T}\Big)^2-\frac{T_{i+1}+T_{i-1}}{T}-6\Big(\frac{T_1}{T}\Big)^2\Big]. \tag{17}$$

В узлах на плоской поверхности подложки (за исключением узлов на конце подложки)

$$\omega=\Big[\frac{24}{h^2}T\psi_1+\Big(9-3\frac{T_1}{T}\Big)\omega_1-\omega_2-\omega_{i+1}\Big(1+\frac{h}{2r}\Big)-\omega_{i-1}\Big(1-\frac{h}{2r}\Big)\Big]\Big/\Big[-21+19\frac{T_1}{T}-\frac{T_2}{T}-6\Big(\frac{T_1}{T}\Big)^2\Big]. \tag{18}$$

Толщина подложки принимается много меньшей шага сетки. Так же, как в [I] эффективное влияние толщины на распределения поля скоростей учитывается введением в рассмотрение при написании граничных условий для ω трех поверхностных узлов на торце подложки. Два из них принадлежат плоской поверхности. Функция ω находится из разложения функции ψ в окрестности этих узлов по направлению оси x.

$$\omega=\left[\frac{24}{h^2}T\psi_1+\left(9-3\frac{T_1}{T}\right)\omega_1-\omega_2+2\left(1+\frac{h}{R}\right)\omega_{i-1}-\left(1+\frac{h}{2R}\right)\omega_{i-2}\right]/ \tag{19}$$

$$/\left[-18+19\frac{T_1}{T}-\frac{T_2}{T}-6\left(\frac{T_1}{T}\right)^2+1{,}5\frac{h}{R}-\frac{h^2}{R^2}\right],$$

где R - радиус подложки. Третий узел принадлежит цилиндрической поверхности, ограничивающей плоскость подложки. Разложение функции ψ в окрестности этого узла берется по направлению оси r, и значение ω в нем

$$\omega=\left[\frac{24}{h^2}T\psi_1+\left(9-3\frac{T_1}{T}\right)\omega_1-\omega_2-\omega_1\frac{h}{R}+\omega_{i+1}+\omega_{i-1}\right]/ \tag{20}$$

$$/\left[-21+19\frac{T_1}{T}-\frac{T_2}{T}-6\left(\frac{T_1}{T}\right)^2+5\frac{h}{R}-4\frac{h^2}{R^2}-2h\frac{T_1}{T}\right].$$

В плоском приближении формула для расчета функции ω на стенках имеет вид

$$\omega=\left\{\frac{24}{\sin^2\alpha\, h^2}T(\psi_1-\psi)+\left(9-3\frac{T_1}{T}\right)\omega_1-\omega_2+(1-4\cos^2\alpha)\left[\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{4T}\times\right.\right.$$

$$\left.\times(\omega_{i+1}-\omega_{i-1})-(\omega_{i+1}+\omega_{i-1})\right]-\eta\cos\alpha\left[(\omega_{i+1}-\omega_{i-1})\left(2{,}5\frac{T_1}{T}-5{,}5\right)-\right.$$

$$\left.\left.-(\omega_{1,i+1}-\omega_{1,i-1})+\omega_1\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2T}\right]\right\}/\left\{4\cos^2\alpha-19+\right.$$

$$+\left(19-6\frac{T_1}{T}\right)\frac{T_1}{T}-\frac{T_2}{T}+(2\cos^2\alpha-1)\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{T}+\frac{1-3\cos^2\alpha}{4}\times \tag{21}$$

$$\left.\times\left(\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{T}\right)^2+\eta\cos\alpha\left[\frac{T_{1,i+1}-T_{1,i-1}}{T}+\left(5-4\frac{T_1}{T}\right)\frac{T_{i+1}-T_{i-1}}{2T}\right]\right\}.$$

$\eta=+1$ для нижней и $\eta=-1$ для верхней стенки. Сеточное значение ω на подложке определяется со вторым порядком точности.

$$\omega=\frac{T}{15\sin^2\alpha h^2}\left[47\psi+\sum_{j=1}^{3}\psi_j+\psi_{2,i+1}+\psi_{2,i-1}-26\left(\psi_{1,i+1}+\psi_{1,i-1}\right)\right]. \qquad (22)$$

Для нахождения функций ψ, ω, T использован итерационный метод нижней релаксации. При углах наклона подложки $\alpha < 90^0$ значение параметра релаксации для разностных уравнений выбиралось меньшим единицы. Для каждого значения угла α существовало оптимальное значение $\tau(\alpha)$. При $\tau(\alpha)$ большем критического значения $\tau_{кр}(\alpha)$, схема теряла устойчивость. Расчеты проведены для следующих значений численных параметров $Re=0.049$; $P_r=0.67$; $\lambda_1=0.586634$; $\lambda_2=-0.044784$; $\lambda_3=0.458151$. Отношение длины реактора к его диаметру равно шести. Осесимметричная задача решена на разностной сетке, содержащей 12×133 узлов, шаг $h=\frac{1}{11}$. Сетка для плоской задачи содержала $23\times[133\sin\alpha]$ узлов с шагом сетки $h=\frac{1}{11\sin\alpha}$ (квадратные скобки означают целую часть произведения).

Распределения газодинамических полей в осесимметричном случае представлены на рис.4-6, в плоском случае - на рис.7-9. Результаты расчетов показали, что при малых скоростях закачки газа в реактор температура в нем с хорошей точностью сохраняет линейно убывающий профиль, заданный на стенках реактора. При углах наклона подложек $\alpha < 90^0$ имеет место несущественное отклонение от линейного распределения. Течение газа сохраняет ламинарный характер во всей расчетной области. Профиль скорости отличается от профиля Пуазейля перед подложкой и за ней в области, начало и конец которой отстоят на расстояниях порядка диаметра канала от подложки. Сравнение решений осесимметричной и плоской задач при $\alpha=90^0$ указывают на то, что плоское приближение дает количественное описание процессов внутри реактора, где краевые эффекты несущественны. Это относится, в том числе, к значениям расченых функций перед подложкой и на ней, за исключением узловых точек, прилежащих к торцам подложки.

Литература

I. Черепанова Т.А., Черепанов В.Ю. Описание газодинамических и тепловых процессов в реакторах применительно к эпитаксиальному выращиванию монокристаллических пленок из газовой фазы. - Изв.АН ЛатвССР.Серия физ. техн.наук, 1979, № 6.

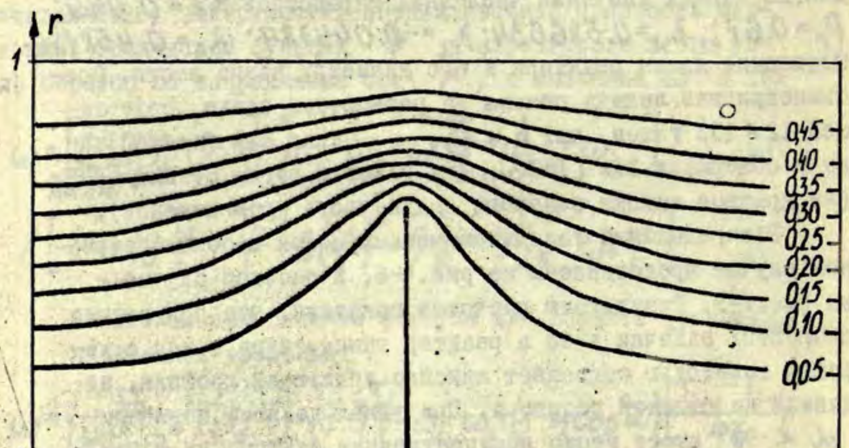


Рис.4. Уровни постоянных значений функции $r\Psi$ в осесимметричном случае.

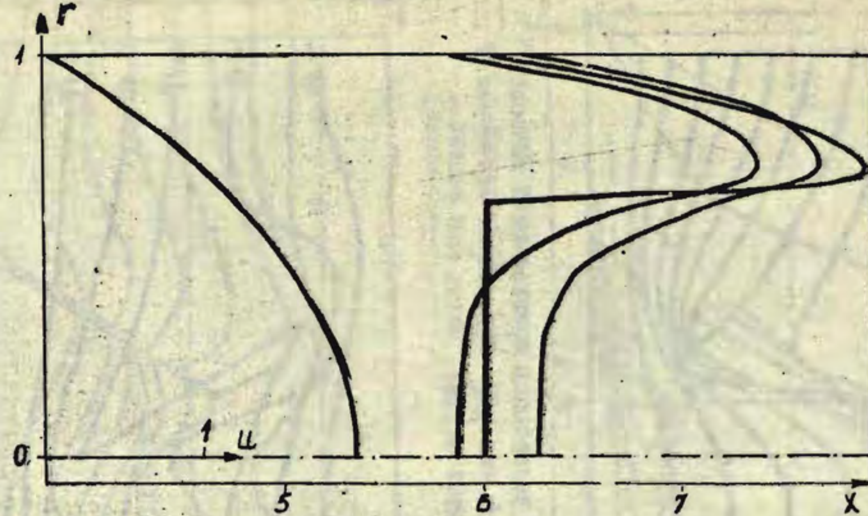


Рис.5. Зависимость продольной составляющей массовой скорости ρu от r при разных поперечных сечениях. Осесимметричный случай.

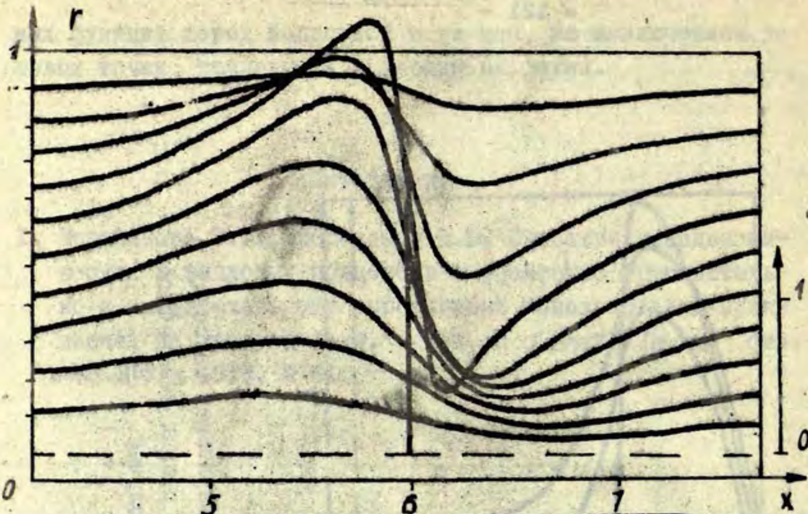


Рис.6. Зависимость поперечной составляющей массовой скорости ρv от x при разных значениях y. Осесимметричный случай.

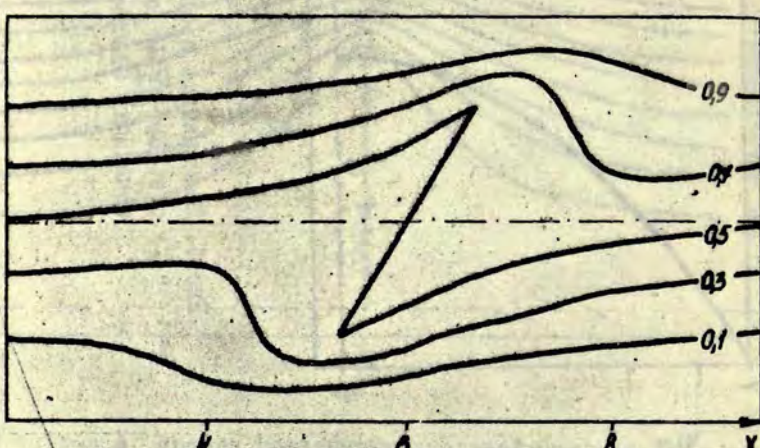


Рис.7. Уровни постоянных значений функции тока ψ для α =60^0. Плоский случай.

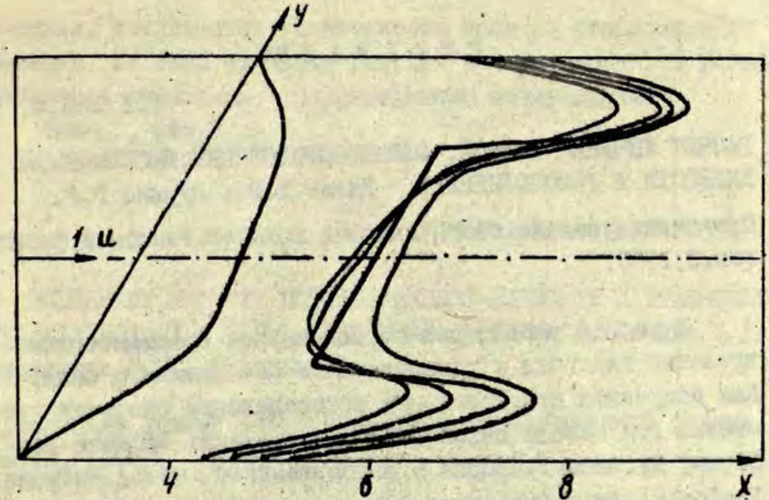


Рис.8. Зависимость продольной составляющей массовой скорости ρu от y для разных сечений реактора под углом α=60°. Плоский случай.

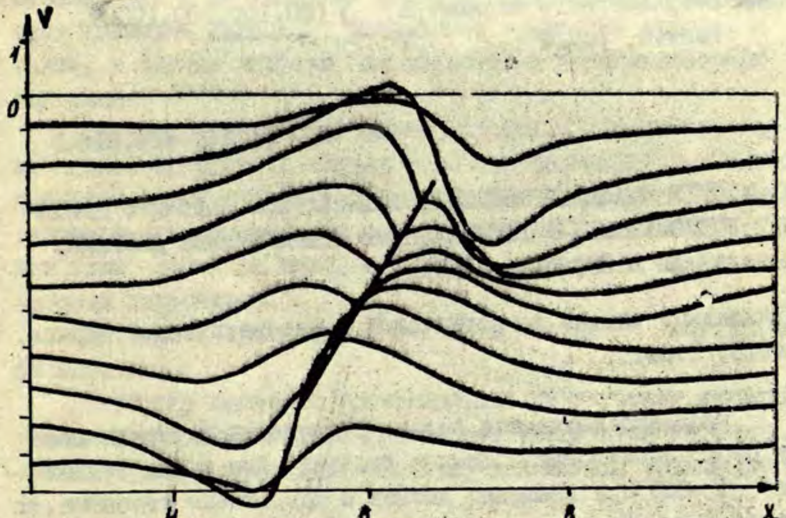


Рис.9. Зависимость поперечной составляющей массовой скорости ρu от x для различных значений y при α =60°. Плоский случай.

условиях 91
Буйкис А.А. Обобщение метода прогонки
для уравнения теплопроводности с со-
средоточенной емкостью в краевом условии 104
Кемеро В.У. Описание газодинамических течений
в эпитаксиальном реакторе при углах наклона
подложки $45^0 \leqslant \alpha \leqslant 90^0$ 111
Рефераты 124

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Межведомственный сборник научных трудов

Редактор Р.Довгополова
Технический редактор А.Муромская
Корректор Л.Решко

Подписано к печати 28.06.1980. ЯТ 12218 Ф/б 60x84/16.
Бумага №1. 8,5 физ.печ.л. 7,9 усл.печ.л. 6,0 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Зак. № 1404. Цена 60 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 226098, б. Райниса, 19
Отпечатано на ротапринте, Рига 226050, ул. Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

РЕФЕРАТЫ

УДК 538.4.

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ, ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ, НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ГОМОПОЛЯРНИКЕ. Калис Х.Э., Лурино Г.Р.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3, 1980.

В работе рассмотрено стационарное осесимметричное движение жидкости в гомополярнике без внешнего поля. Для получения приближенного распределения скорости применены три метода переменных направлений: Писмена-Рекфорда, Дугласа-Рекфорда и видоизменённый метод Писмена-Рекфорда для совместного решения системы управлений магнитной гидродинамики в переменных функции вихря и функции тока.

Приведены численные результаты при различных значениях безразмерного параметра S (50,100,500,1000).

Библ.3, рис.2

УДК 518.61+532.516.5

К РАСЧЕТУ СТАЦИОНАРНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНЫМИ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ДИСКАМИ. Козельская Н.В., Люмкис Е.Д.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3, 1980.

Численно изучается задача о движении жидкости между бесконечными вращающимися дисками. Для числа Рейнольдса R=625 при вращении дисков с одинаковыми угловыми скоростями найдено семь различных стационарных решении. Путем решения нестационарной задачи, в качестве начальных условий которой берется возмущенное стационарное решение, исследуется устойчивость каждого стационарного решения. Из семи найденых решений четыре оказались устойчивыми по отношению к рассмотренным возмущениям.

Библ.8, рис.7

УДК 532.516+621.385.592

К ЧИСЛЕННОМУ РАСЧЕТУ ПОТОКОВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ВРАЩЕНИЕМ, ГРАВИТАЦИОННОЙ И ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЙ КОНВЕКЦИЕЙ. Люмкис Е.Д. Мартузане Э.Н., Мартузан Б.Я.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3, 1980 .

Рассматривается численный метод для изучения динамики потоков вязкой теплопроводящей жидкости в цилиндрической области, граница которой может состоять как из твердых стенок, так и из участков сводной поверхности. Учитывается движение жидкости, вызываемое вращением стенок, а также, в случае нагрева, термическая и термокапилярная конвекция.

На каждом шаге по времени уравнения для вихря, азимутальной скорости и температуры аппроксимируются монотонной разностной схемой второго порядка Самарского А.А. и решаются методом переменных направлений. Уравнения для функции тока решается методом Писмана-Рекфорда с оптимальным набором параметров.

Проводится сравнение с экспериментальными результатами по спинапу.

Методика расчетов ориентирована на изучение динамики расплава при выращивании кристаллов различными методами. Приводится пример такого расчета для метода зонной плавки.

Библ.15, рис.2

УДК 518.61/539.377

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИИ КРИСТАЛЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В МОНОКРИСТАЛЛАХ МЕДИ, ВЫРАЩИВАЕМЫХ ИЗ РАСПЛАВА. Вахрамеев С.С., Засимчук И.К., Фомин А.В.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3,1980.

Численно исследуется влияние наличия шейки у кристалла меди на распределение температурного поля и термических напряжений. Термические напряжения определяются путем численного решения несвязной квазистатической задачи термоупрогости для осесимметричной цилиндрической области, занятой кристаллом. Приводятся результаты расчетов полей температур и напряжений.

Библ.5, рис.5.

УДК 536.421.4+536.421.I

СХЕМА ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ОДНОФАЗНЫХ ЗАДАЧ СТЕФАНА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ. Григорьев С.Г., Косолапов В.Н., Пудовкин М.А., Чугунов В.А.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3, 1980.

В статье предложено обобщение метода интегральных соотношений на многомерные однофазные задачи Стефана. Рассматривается вычислительная схема данного метода.

Схема иллюстрирована двумя примерами, представляющими собой двумерные задачи типа Стефана. Первый пример - задача об определении температурного поля под зданием в зоне вечной мерзлоты. Приведены численные и приближенные решения. Второй пример - задача об образовании криогидратного ограждения горной выработки. Получено приближенное аналитическое решение.

Библ.5, рис.3

УДК 518.5

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА. Ёлкина Н.Г.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3, 1980.

Для нахождения приближенного решения задачи Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа предлагается искать приближенное решение задачи о неподвижной точке для некоторого оператора, к которой можно свести исходную задачу с помощью функции Грина для оператора Лапласа. Дана методика разностной аппроксимации уравнения, рассмотрена сходимость алгоритма.

Библ.4.

УДК 536.42I.4+536.42I.I

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТЕРМОДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЕННОЙ ПОСТАНОВКЕ НА ПРИМЕРЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ. Иванова Г.Ф.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3, 1980.

Для нахождения решения системы термодиффузионных уравнений, описывающих кристаллизацию бинарного сплава, используется метод введения параметра β, основанный на предположение, что скорость объемной кристаллизации пропорциональна переохлаждению ΔT $\left(\frac{\partial s}{\partial t} = \beta \Delta T\right)$. При помощи данного метода исходная система уравнений параболическая по И.Г. Петровскому сводится к сильно параболической системе, зависящей от параметра β. Приведенные результаты расчетов, показывают сходимость при $\beta \to \infty$ решения сильно параболической системы к обобщенному решению исходной системы.

Приводятся подробные данные о распределении температуры, концентрации, движения и формы двухфазной зоны. Указанный метод применим и в случае кристаллизации чистого компонента при наличии фронта кристаллизации сложной формы.

Библ. 3., рис. 2

УДК 536.421.4+536.421.1

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ БИНАРНЫХ СПЛАВОВ С УЧЕТОМ КИНЕТИКИ ЗАРОЖДЕНИЯ И ДИНАМИКИ РОСТА КРИСТАЛЛИТОВ. Авдонин Н.А., Иванова Г.Ф.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3, 1980.

Разработана методика численного решения задачи кристаллизации бинарного сплава в обобщенной постановке. Кинетика возникновения кристаллов определяется путем задания зависимости скорости образования кристаллов от переохлаждения. При учете динамики разрастания дендритов принято, что кристаллиты имеют цилиндрическую форму.

Приводятся результаты численных расчетов кристаллизации цилиндрического образца углеродистой стали, охлаждаемого с поверхности. Расчетные данные содержат детальную информацию об изменении температуры, концентрации переохлаждения и структуры двухфазной области в течение процесса кристаллизации.

Библ.6,рис.2

УДК 517.947

РЕШЕНИЕ ДВУХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ЕМКОСТИ. Буйкис А.А., Кузмишкина Н.В.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3, 1980.

Методом интегрального преобразования Лапласа решены две начально краевые задачи теплопроводности для первого квадранта. Основное уравнение вырождено по одной переменной, на границе заданы два условия типа сосредоточенной емкости. Решения получены в виде интегралов, содержащих экспоненту, интеграл вероятности, модифицированные функции Бесселя. Задачи рассмотренного типа возникают в подземной термогидродинамике.

Библ. 7

УДК 518:517.947:536.242

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ И СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ В КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ. Буйкис А.А., Чередниченко И.И.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3, 1980.

Проводится численное апробирование разностных схем для двух модельных задач подземной термогидродинамики, в которых пласт трактируется как двухтемпературная сосредоточенная теплоемкость (т.е.вводятся средние по мощности пласта температуры пористой среды и фильтрующейся по пласту жидкости). В постановке задачи учитывается теплообмен между фазами, между пластом и окружающими породами, а также теплопроводность и конвекция вдоль пласта. Предлагаются разностные схемы, аппроксимирующие исходные задачи, дается экономичные алгоритмы их решения и проводится некоторый анализ полученных результатов расчета.

Библ.7, рис.5

УДК 518.517.947

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ПРОГОНКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ЕМКОСТЬЮ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ. Буйкис А.А.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып. 3,1980.

Рассматривается задача для уравнения теплопроводности в первом квадранте, вырожденное по одному из двух пространственных переменных. Заданное на полуоси краевое условие содержит производную по времени, производную по внутренней нормали, вторую и первую производные по касательному направлению. Приводится разностная схема, аппроксимирующая исходную задачу и обобщается классический метод фактризации для экономичного решения получающейся разностной задачи.

Библ. 7

УДК 532.516

ОПИСАНИЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ В ЭПИТАКСИМАЛЬНОМ РЕАКТОРЕ ПРИ УГЛАХ НАКЛОНА ПОДЛОЖКИ $45^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$.

Кемерс В.У.

Прикладные задачи теоретической и математической физики, вып.3,1980

Изучены процессы тепло - и массопереноса в эпитаксимальных реакторах при выращивании монокристаллических пленок газотранспортными методами. Получено решение газодинамической тепловой задачи в плоском приближении и в цилиндрической системе координат. Дан анализ применимости результатов плоского приближения к описанию трехмерных процессов.

Библ. I, рис.9

Содержание

Калис Х.Э., Луринс Г.Р. Расчет течения вязкой, электропроводящей, несжимаемой жидкости в гомополярнике 3
Козельская Н.В., Люмкис Е.Д. К расчету стационарной и нестационарной задач о движении жидкости между бесконечными вращающимися дисками......... II
Люмкис Е.Д., Мартузане Э.Н., Мартузан Б.Я. К численному расчету потоков вязкой жидкости с вращением, гравитационной и термокапиллярной конвекцией 20
Вахрамеев С.С., Засимчук И.К., Фомин А.В. Исследование влияния геометрии кристалла на распределение температуры и термических напряжений в монокристаллах меди, выращиваемых из расплава 34
Григорьев С.Г., Косолапов В.Н., Пудовкин М.А., Чугунов В.А. Схема обобщенного метода интегральных соотношений для многомерных однофазных задач Стефана и ее применения 43
Елкина Н.Г. Об одном методе решения задачи Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа 53
Иванова Г.Ф. Решение системы термодиффузионных уравнений в обобщенной постановке на примере двумерной задачи 63
Авдонин Н.А., Иванова Г.Ф. Численное решение задачи кристаллизации бинарных сплавов с учетом кинетики зарождения и динамики роста кристаллитов 74
Буйкис А.А., Кузмишкина Н.В. Решение двух задач теплопроводности при краевых условиях сосредоточенной емкости 85
Буйкис А.А., Чередниченко И.И. Численное исследование разностных схем для некоторых задач с сосредоточенной теплоемкостью в краевых