Министерство высшего и среднего специального образования Латвийской ССР

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени государственный университет имени Петра Стучки

Вычислительный центр

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки

том 233

ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

Выпуск II

Латвийский государственный университет

Рига 1975

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРЕДЕЛЬНОГО СИНТЕЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ (СТАТЬЯ ВТОРАЯ)

К.М.Подниекс

Эта статья завершает [I] . Напомним определения. $\{\varphi_i\}$ - фиксированная геделевская нумерация всех 1-местных частично рекурсивных (ч.р.) функций. Всюду определенную функцию φ можно представить как последовательность её значений:

$$\varphi(0),\ \varphi(1),\ \ldots,\ \varphi(n),\ \ldots \qquad (*)$$

Поэтому понятны следующие обозначения функций и операций над функциями:

$$0^{\infty},\quad ij\varphi,\quad 0^{x}1^{\infty},$$
$$0\,\varphi(0)\,0\,\varphi(1)\,0\,\varphi(2)\,0\ldots$$

К л а с с а м и называются только классы 1-местных общерекурсивных (о.р.) функций, R -класс всех таких функций. Символ $\subset$ означает строгое включение, $\subseteq$ - нестрогое. Через $\langle x_1 \ldots x_n \rangle$ обозначена фиксированная эффективная нумерация всех конечных кортежей натуральных чисел (в качестве номеров использованы в с е натуральные числа).

С т р а т е г и е й называется любая ч.р.функция. Особо выделяются о.р. стратегии.

I. П р е д е л ь н ы й с и н т е з. По данной последовательности $(*)$ требуется выявить (в каком-то смысле) закон ее становления. Если F - стратегия, φ -функция, то значения $F(\langle \varphi(0) \ldots \varphi(n) \rangle)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ называются г и п о т е з а м и. Гипотеза верна, если она - геделев номер функции φ.

Говорят, что F синтезирует класс U в смысле GN, если F - о.р. стратегия, и для любой $\varphi \in U$ последовательность гипотез $F(\langle \varphi(0) \ldots \varphi(n) \rangle)$ стабилизируется на верной гипотезе. Через GN обозначим семейство классов:

$$\{U \mid \exists F\ (F \text{ синтезирует } U \text{ в смысле } GN)\}.$$

Говорят, что F синтезирует класс U в смысле GN^{∞}, если F - о.р.стратегия, и для любой $\varphi \in U$ последовательность гипотез $F(\langle \varphi(0) \ldots \varphi(n) \rangle)$ состоит, начиная с некоторого места, только из верных гипотез.

Пусть ε - действительное число, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Говорят, что F синтезирует класс U в смысле $GN(\varepsilon)$, если F - о.р.стратегия, и для любой $\varphi \in U$ в последовательности гипотез $F(\langle \varphi(0) \ldots \varphi(n) \rangle)$ нижняя частота верных гипотез не меньше ε (см. [I]).

Если требование общерекурсивности стратегий ослабить до ч.р., то семейства синтезируемых классов GN, GN^{∞}, $GN(\varepsilon)$ не изменятся [I] .

Очевидно, $(1 > \varepsilon > \delta > 0)$:

$$GN \subseteq GN^{\infty} \subseteq GN(1) \subseteq GN(\varepsilon) \subseteq GN(\delta).$$

Уточнения:

а) Результат Я.М.Барздиня [2] : $GN \subset GN^{\infty}$

б) Результаты [I] : $\varepsilon > \frac{1}{2} \rightarrow GN(\varepsilon) = GN^{\infty}$,

$$GN^{\infty} \subset GN(\tfrac{1}{2}) \subset GN(\tfrac{1}{3}) \subset \cdots$$

Картину завершает

ТЕОРЕМА I. Если $q \geqslant 2$ -натуральное и $\frac{1}{q+1} < \varepsilon \leqslant \frac{1}{q}$, то $GN(\varepsilon) = GN(\frac{1}{q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть класс $U \in GN(\varepsilon)$ посредством о.р.стратегии F. Построим о.р.стратегию H, которая синтезирует любую $\varphi \in U$ с частотой верных гипотез не меньше $\frac{1}{q}$.

Пусть ε' -рациональное число, $\frac{1}{q+1} < \varepsilon' < \varepsilon$. Тогда, если $\varphi \in U$ и $h_i = F(\langle \varphi(0) \ldots \varphi(i) \rangle)$, то для всех достаточно больших n среди чисел $(h_0 \ldots h_{n-1})$ будет более $\varepsilon' n$ геделевских номеров функции φ. Сначала построим алгоритм, перерабатывающий всякий набор гипотез $(g_0 \ldots g_{n-1})$ в некоторый набор из q гипотез $(a_1 \ldots a_q)$. Причем, если среди g_i более $\varepsilon' n$ геделевых номеров функции φ, то о д н а из a_j также должна быть геделевым номером φ.

Будем говорить, что набор $(g_0 \ldots g_{n-1})$ голосует за начальный кусок $y_0 y_1 \ldots y_t$, если для более чем $\varepsilon' n$ значений i гипотеза g_i обладает следующим свойством:

$$\varphi_{g_i}(0) = y_0 \wedge \varphi_{g_i}(1) = y_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{g_i}(t) = y_t .$$

Существует эффективная процедура P, перечисляющая всевозможные начальные куски, за которые голосует набор $(g_0 \ldots g_{n-1})$. Если среди g_i более $\varepsilon' n$ номеров функции φ, то в список, порождаемый процедурой P, войдут все начальные куски вида $\varphi(0)\ \varphi(1) \ldots \varphi(t)$. Кроме того, если считать эквивалентными куски, один из которых продолжает другой, то число классов эквивалентности в списке процедуры P не превышает q (это следует из неравенства $\varepsilon' > 1/q+1$). Каждый класс эквивалентности - это либо конечный кусок функции, либо полная функция.

Через a_1 обозначим геделев номер функции f_1, вычисляемой следующим образом. Начальный кусок f_1 -первый кусок в списке процедуры P. Дальнейшие значения f_1 дают первое продолжение этого куска в списке P, и так далее. (Функция f_1 либо нигде не определена, либо всюду определена.)

Через a_2 обозначим геделев номер следующей функции φf_2. Начальный кусок f_2 – первый кусок в списке P, не являющийся начальным куском f_1. Дальнейшие значения f_2 дает первое продолжение начального куска и т.д. (Функция f_2 может быть нигде не определенной даже если f_1 всюду определена.)

Аналогично f_3 отличается (если возможно) от f_1 и f_2 одновременно, и так далее. Получается набор из q гипотез $(a_1 \ldots a_q)$.

Легко убедиться (от противного), что любой кусок из списка процедуры P попадает в какую-либо из функций $f_1, \ldots, f_q$. Поэтому, если среди гипотез $(g_0 \ldots g_{n-1})$ более $\varepsilon' n$ геделевых номеров функции φ, то одна из функций f_i совпадает с φ, т.е. одна из гипотез набора $(a_1 \ldots a_q)$ будет геделевым номером φ.

Определим следующую о.р. стратегию H:

$$H(\langle \varphi(0) \ldots \varphi(qn+r) \rangle) = a_{r+1},$$

где $n \geqslant 0$, $0 < r < q$ и $(a_1 \ldots a_q)$ – набор, полученный посредством построенного алгоритма из набора гипотез $(h_0 \ldots h_{n-1})$, где $h_i = F(\langle \varphi(0) \ldots \varphi(i) \rangle)$. Если $\varphi \in U$, то для всех достаточно больших n среди q гипотез с порядковыми номерами

$$qn, \quad qn+1, \ldots, qn+q-1$$

одна будет верна, т.е. H синтезирует φ с частотой верных гипотез не меньше $1/q$.

Итак, $U \in GN(1/q)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Конечные объединения классов из GN^∞. Если $A_1, \ldots, A_k \in GN^\infty$, то как легко видеть, $A_1 \cup \ldots \cup A_k \in GN(1/k)$. В доказательстве теоремы 3 из [I], по существу, построены k классов $B_i \in GN^\infty$ таких, что $B_1 \cup \ldots \cup B_k \notin GN(1/{k-1})$. В качестве B_i там фигурирует класс таких о.р. функций φ, что $\varphi(i)$ – геделев номер ч.р. функции, совпадающей с φ, начиная

с некоторого места. Таким образом, в терминах введенной иерархии полностью решен вопрос о сложности синтеза любых конечных объединений классов из GN^∞.

ПРОБЛЕМА. Сложность синтеза конечных объединений из GN. В [2] (теорема I) построены классы $A_1, A_2 \in GN$ такие, что $A_1 \cup A_2 \in GN(\frac{1}{2}) - GN^\infty$. Существуют ли классы $A_1, A_2, A_3 \in GN$ такие, что

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \in GN(\frac{1}{3}) - GN(\frac{1}{2})$?

2. П р о г н о з и р о в а н и е. По данным значениям $\varphi(0) \ldots \varphi(n)$ требуется предсказать $\varphi(n+1)$. Если F – стратегия, а φ -функция, то значения $F(\langle \varphi(0) \ldots$ $\ldots \varphi(n) \rangle)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ называют п р о г н о з а м и. Прогноз верен, если он равен $\varphi(n+1)$, в противном случае его называют ошибкой.

Говорят, что F прогнозирует класс U в смысле NV, если F – о.р. стратегия, и для всех $\varphi \in U$ среди прогнозов F на φ не более чем конечное число ошибочных. Обозначим:

$$NV = \{ U \mid \exists F \ (F \text{ прогнозирует } U \text{ в смысле } NV) \}$$

Ослабив требование общерекурсивности до ч.р., получаем понятие NV''. Добавляя в NV'' требование, чтобы при $\varphi \in U$ все прогнозы F на φ были определены, получаем понятие NV'. Обозначения семейств классов NV', NV'' понятны.

Очевидно: $NV \subseteq NV' \subseteq NV''$. Согласно [3]: $NV \subset NV'$, а в [I] показано, что $NV \subset GN$, $NV'' = GN^\infty$.

Пусть ε – действительное число, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Говорят, что F прогнозирует класс U в смысле $NV(\varepsilon)$, если F – о.р. стратегия, и для любой $\varphi \in U$ нижняя частота верных прогнозов F на φ не меньше ε. Аналогично определяются $NV'(\varepsilon)$ и $NV''(\varepsilon)$.

В [I] утверждается, что $(1 > \varepsilon > \delta > 0)$

$$NV \subset NV(1) \subset NV(\varepsilon) \subset NV(\delta),$$
$$NV' \subset NV'(1) \subset NV'(\varepsilon) \subset NV'(\delta).$$

В качестве класса, входящего в $NV(\delta)$, но не входящего в $NV'(\varepsilon)$, в [I] фигурирует

$$U_\delta\{\varphi \mid \varphi \in R \wedge \text{нижняя частота нулей в } \varphi \text{ не меньше } \delta\}.$$

Кроме того, $U_1 \in NV(1) - NV'$.

В случае $NV''(\varepsilon)$ ситуация совершенно противоположна: здесь $NV''(\varepsilon) = NV''(1)$ для всех $\varepsilon > 0$, как это показывает

ТЕОРЕМА 2. $R \in NV''(1)$, т.е. существует ч.р. стратегия, прогнозирующая с частотой 1 любую о.р. функцию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны построить ч.р. стратегию F, которая на любой о.р. функции φ допускает ошибки с частотой 0. Пусть h – монотонная неограниченная о.р. функция такая, что $h(n) \leqslant n$ для всех n.

Для определения прогноза $F(\langle \varphi(0) \dots \varphi(n) \rangle)$ берутся функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{h(n)}$ и среди них ищется φ_i такая, что

$$(\forall x \leqslant n)(\varphi_i(x) = \varphi(x) \wedge \varphi_i(n+1) \text{ определено}).$$

Если такое i найдено, полагаем:

$$F(\langle \varphi(0) \dots \varphi(n) \rangle) = \varphi_i(n+1),$$

в противном случае прогноз неопределен.

Легко проверить, что стратегия F обладает следующими свойствами.

(а) Пусть φ – о.р. функция, и $n_0(\varphi)$ – наименьшее n такое, что $h(n)$ больше минимального геделева номера φ. Тогда при $n \geqslant n_0(\varphi)$ прогноз $F(\langle \varphi(0) \dots \varphi(n) \rangle)$ определен.

(б) Для о.р.функции φ число ошибок среди первых n прогнозов стратегии F меньше $h(n) + n_0(\varphi)$.

Если в качестве h взять $h(n) = [\sqrt{n}]$, то получаемая ч.р.стратегия F на любой о.р.функции допускает ошибки с частотой 0.

Теорема 2 доказана.

Таким образом $P \subset NV''(1)$ для любого типа P (прогнозирования или синтеза), отличного от $NV''(\varepsilon)$.

Оставшиеся вопросы сравнения различных типов предельного синтеза и прогнозирования легко решаются с помощью двух следующих лемм. Это результаты двух видов: (а) устанавливается строгое включение двух типов, (б) устанавливается н е с р а в н и м о с т ь типов A, B, т.е. что соответствующие семейства $A - B$, $B - A$, $A \cap B$ все непусты. В доказательствах непустоты используются классы U_δ (особенно U_1, см. выше), а также два класса, построенные в доказательствах лемм I,2.

ЛЕММА I. Пусть $\vartheta = \{ i\varphi / \varphi \in R \wedge \varphi_i = i\varphi \}$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$: $\vartheta \in NV' - NV(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Класс ϑ (введенный Я.М.Барздинем для доказательства включения $NV \subset NV'$) прогнозируем в смысле NV' следующей ч.р.стратегией F:

$$F(\langle \varphi(0) \dots \varphi(n) \rangle) = \varphi_{\varphi(0)}(n+1).$$

Покажем, что при $\varepsilon > 0$: $\vartheta \notin NV(\varepsilon)$. Пусть H – о.р.стратегия. Для каждого i легко построить о.р.функцию f_i такую, что на функции if_i H делает только ошибочные прогнозы. Теорема о неподвижной точке дает i_0 такое, что $i_0 f_{i_0} = \varphi_{i_0}$, т.е. $i_0 f_{i_0} \in \vartheta$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Существует такой класс $W \in GN$, что $W \notin NV'(\varepsilon)$ для всех $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{k_m\}$ – рекурсивная возрастающая последовательность, частота которой в ряду всех натуральных чисел равна нулю. Искомый класс W состоит из всех о.р.функций φ, обладающих следующим свойством:

$$(\exists i)\left[\varphi_i = \varphi \wedge (\exists m_0\ \forall m > m_0)\ \varphi(k_m) = i\right],$$

т.е.функция $\varphi \in W$, если некоторый ее геделев номер, определенным образом, встречается среди значений $\varphi(x)$.

Следующая о.р.стратегия F синтезирует класс W в смысле GN:

$$F(\langle \varphi(0) \ldots \varphi(n) \rangle) = \begin{cases} 0 \ ; \text{ если } n < k_0, \\ \varphi(k_m) \ , \text{ если } k_m \leqslant n < k_{m+1}. \end{cases}$$

Покажем, что $W \notin NV'(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$. С помощью теоремы о неподвижной точке легко показать, что в качестве начальных кусков функций класса W выступают произвольные кортежи натуральных чисел. Поэтому, если ч.р. стратегия H прогнозирует W в смысле $NV'(\varepsilon)$, в с е прогнозы H должны быть определены, т.е. H на самом деле – о.р.стратегия.

Воспользуемся этим. Для каждого i определяется о.р. функция

$$g_i(x) = \begin{cases} 0 \ , \text{ если } x = 0, \\ i \ , \text{ если } (\exists m)(x - k_m > 0), \\ 1 + H(\langle g_i(0) \ldots g_i(x-1) \rangle), \\ \quad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

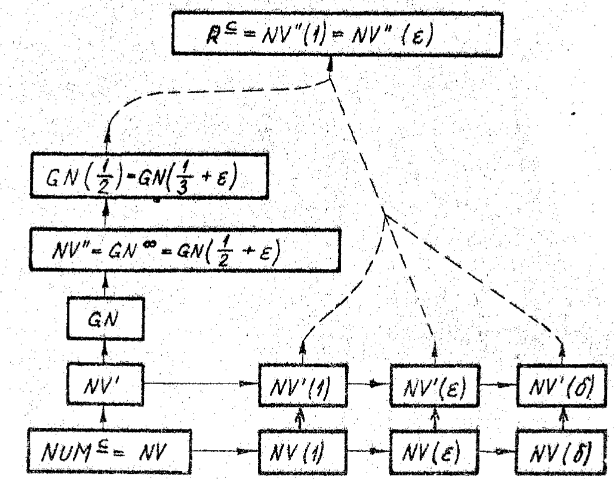
На всех g_i стратегия H делает ошибки с частотой 1 (ибо частота $\{k_m\}$ равна 0). По теореме о неподвижной точке найдется i_1 такое, что $g_{i_1} = \varphi_{i_1}$, т.е. $g_{i_1} \in W$.

Лемма 2 доказана.

Используя приведенные результаты, сравнение различных типов предельного синтеза и прогнозирования можно довести до конца. Полученные результаты сводятся в следующую схему (построенную по образцу [4]). В этой схеме стрелка $\longrightarrow$ означает строгое включение $\subsetneq$. Совпадающие понятия помещены в общую клетку. В случаях, когда из одной клетки в другую (и обратно) нет пути по стрелкам, доказано, что соответствующие типы несравнимы.

$NUM^{\subseteq}$ –семейство всех подклассов эффективно перечислимых классов о.р.функций, $R^{\subseteq}$ –семейство всех классов о.р.функций.

ПРИМЕР. Типы $NV(0{,}88)$; $NV'(0{,}93)$ несравнимы, т.е. (а), вообще говоря, нельзя повысить частоту верных прогнозов от $0{,}88$ до $0{,}93$ за счет перехода от о.р.стратегий к ч.р.стратегиям; (б), вообще говоря, нельзя получить о.р. стратегию вместо ч.р.стратегии, если разрешается понизить частоту верных прогнозов с $0{,}93$ до $0{,}88$.



$1 > \varepsilon > \delta > 0$

ЛИТЕРАТУРА

I. Подниекс К.М. Сравнение различных типов предельного синтеза и прогнозирования функций. - "Учен. зап. Латв. ун-та", 1974, т.210.
2. Барздинь Я.М. Две теоремы о предельном синтезе функций, там же.
3. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. Прогнозирование общерекурсивных функций. - ДАН СССР, 1972, т.206, № 3.
4. Klette R. Finitäre Erkennung allgemein-rekursiver Funktionen II, Sektion Mathematik der Friedrich - Schiller- Universität Jena, Jena, Juli 1974.

Comparing various concepts of function prediction and program synthesis. II

K.Podnieks

Prediction: $\varphi(m+1)$ is guessed from given $\varphi(0)\ldots\varphi(m)$. Program synthesis: the program computing φ is guessed from given $\varphi(0)\ldots\varphi(m)$. Maybe, the hypotheses H_m are correct for all sufficiently large m or with frequency ε . These approaches yield a hierarchy of prediction and program synthesis concepts. The comparison problem of any two concepts is solved.