Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том 210

# ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ И ПРОГРАММ

Выпуск I

Под ред. Я.М.Барздиня

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1974

## СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ПРЕДЕЛЬНОГО СИНТЕЗА И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

К.М.Подниекс

1. С о г л а ш е н и я. $\varphi_n$ – фиксированная геделевская нумерация всех 1-местных частично-рекурсивных функций (ч.р.ф.). $R$ – класс всех 1-местных общерекурсивных функций (о.р.ф.). В дальнейшем классами называются только множества о.р.ф. Класс $U$ называется эффективно перечислимым классом, если существует о.р.ф. $\alpha(i)$ такая, что $U = \{ \varphi_{\alpha(i)} \mid i = 0, 1, 2, \dots \}$.

$\subset$ – строгое включение, $\subseteq$ – нестрогое.

$< x_1 \dots x_n >$ – эффективная нумерация всех конечных кортежей натуральных чисел; в качестве номеров использованы все натуральные числа.

Стратегия – это любая (частичная) функция типа $N \to N$. Особо выделяются ч.р. и о.р. стратегии.

Если всюду определенную функцию $\varphi$ представлять как последовательность значений $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots$, то понятны обозначения $i\varphi, 0^k 1 0^\infty, \bar{x} 0^k \varphi$ и т.п. (здесь $i, k$ – натуральные числа, $\bar{x}$ – кортеж натуральных чисел, $\varphi$ – всюду определенная функция). Например, $0^k 1 0^\infty$ обозначает функцию, которая равна нулю на всех $x$, за исключением $x = k$.

2. П р е д е л ь н ы й с и н т е з. Предельным синтезом называется восстановление "в пределе" геделевского номера функции $\varphi$ по данной последовательности ее значений: $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots$. Для этой цели мы используем только о.р. стратегии. Если $F$ – стратегия, а $\varphi$ – всюду определенная функция, то значения $F(<\varphi(0) \dots \varphi(n)>)$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ называются г и п о т е з а м и. Гипотеза $p$ считается верной, если $\varphi_p = \varphi$, т.е. $p$ – некоторый геделев номер функции $\varphi$.

Первое понятие предельного синтеза под названием



**"identification in the limit"** изучалось Голдом [1, 2]. В наших терминах оно определяется следующим образом. Говорят, что о.р. стратегия $F$ предельно синтезирует функцию $\varphi$ в смысле $GN$, если последовательность гипотез $F(<\varphi(0) \dots \varphi(n)>) (n = 0, 1, \dots)$ имеет верную гипотезу в качестве предела, т.е. если она "стабилизируется" на некотором геделевом номере функции $\varphi$. (Символ $GN$ означает "геделев номер").

Если о.р. стратегия $F$ синтезирует в смысле $GN$ каждую функцию класса $U$, то говорят, что $F$ синтезирует класс $U$ в смысле $GN$. В этом случае мы пишем: $U \in GN$ (т.е. символ $GN$ понимается как семейство всех классов, предельно синтезируемых в смысле $GN$).

Результаты, полученные Голдом [1]:

а) Если класс $U$ содержится в эффективно перечислимом классе о.р.ф., то $U \in GN$.

б) $R \,\overline{\in}\, GN$ (этот результат значительно усилен нашей теоремой 1).

Отметим также один результат Я.М.Барздиня [3]

а) Существует класс $U$ такой, что $U \in GN$, однако $U$ не содержится ни в одном эффективно перечислимом классе о.р.ф. (В качестве $U$ можно взять класс $V$ из доказательства теоремы 1 в [4]).

Таким образом, семейство $GN$ весьма нетривиально.

Следующее понятие предельного синтеза под названием **"matching in the limit"** рассматривалось Фелдманом [5] для языков. В нашем случае это означает следующее. Говорят, что о.р. стратегия $F$ предельно синтезирует функцию $\varphi$ в смысле $GN^\infty$, если последовательность $F(<\varphi(0) \dots \varphi(n)>)$ $(n = 0, 1, \dots)$ состоит, начиная с некоторого места, только из верных гипотез. (Знак $\infty$ у символа $GN$ указывает, что допускается даже бесконечное число различных гипотез на одной функции).

Если о.р. стратегия $F$ синтезирует в смысле $GN^\infty$ каждую функцию класса $U$, то говорят, что $F$ синтезирует

$U$ в смысле $GN^{\infty}$. Запись $U \in GN^{\infty}$ определяется аналогично $GN$.

Очевидно: $GN \subseteq GN^{\infty}$, так как все, что синтезируемо в смысле $GN$, синтезируемо и в смысле $GN^{\infty}$. С другой стороны, Барздинь [4] доказал, что существует класс $U$ такой, что $U \in GN^{\infty}$, однако $U \bar{\in} GN$. Таким образом: $GN \subset GN^{\infty}$.

Последним в нашей схеме является понятие "частотного" синтеза. Пусть $\varepsilon$ – действительное число, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Говорят, что о.р. стратегия $F$ предельно синтезирует функцию $\varphi$ в смысле $GN(\varepsilon)$, если в последовательности $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ нижняя частота верных гипотез не меньше $\varepsilon$, т.е.

$$\underline{\lim_{n}} \frac{card\{x \mid x \leqslant n \;\&\; \varphi_{F(<\varphi(0) \ldots \varphi(x)>)} = \varphi\}}{n} \geqslant \varepsilon.$$

Семейство $GN(\varepsilon)$ определяется аналогично $GN$ и $GN^{\infty}$. Очевидно: $GN^{\infty} \subseteq GN(1)$, $\varepsilon > \delta \longrightarrow GN(\varepsilon) \subseteq GN(\delta)$.

ТЕОРЕМА I. Если $\varepsilon > 0$, то $R \bar{\in} GN(\varepsilon)$.

Эта теорема является упомянутым усилением результата Голда ($R \bar{\in} GN$): оказывается, что класс всех о.р.ф. нельзя предельно синтезировать, например, даже с частотой $10^{-6}$. Поэтому все семейства $GN(\varepsilon)$ (а также $GN^{\infty}$) нетривиальны вместе с $GN$. Теорема I легко следует из теоремы 3.

ТЕОРЕМА 2. Если $\varepsilon > \frac{1}{2}$, то $GN(\varepsilon) = GN^{\infty}$.

Эта теорема выражает обычную ситуацию "детерминизации": если частота синтеза превосходит $\frac{1}{2}$, то можно построить стратегию, которая синтезирует тот же класс "в абсолютном смысле". Теорема 2 следует из теоремы 4, если предварительно установить, что при $\varepsilon > \frac{1}{2}$ имеет место $GN(\varepsilon) \subseteq$ NV" (см.дальше). Это несложно.

Теорему 2 нельзя "усилить": оказывается, что $GN^{\infty} \subset$



$GN(\frac{1}{2})$ (это следует из теорем 2, 3). Из теоремы 3 следует, что $GN(\frac{1}{2}) \subset GN(\frac{1}{3}) \subset GN(\frac{1}{4}) \subset \ldots$ (можно предположить, что $GN(\varepsilon) \subset GN(\delta)$ для всех $\varepsilon, \delta: 0 < \delta < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$)

ТЕОРЕМА 3. Если $q \geqslant 2$ – натуральное число и $\delta > 0$, то $GN(\frac{1}{q} + \delta) \subset GN(\frac{1}{q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим "почти-равенство" двух частичных функций $\varphi, \psi$ так:

$$\varphi \overset{n}{=} \psi \longleftrightarrow \exists x_0 \forall x > x_0 \;\; \varphi(x) = \psi(x).$$

Соответственно: $i$ – почти-геделев номер функции $\varphi$, если $\varphi_i \overset{n}{=} \varphi$. Для любых $0 < p \leqslant q$ определяется класс функций:

$$C_{pq} = \{\varphi \mid \varphi = i_1 \ldots i_q \varphi' \;\&\; \varphi' \in R \;\&\; \varphi_{i_k} \overset{n}{=} \varphi \text{ для } \geqslant p \text{ значений } k\}$$

Таким образом, если $\varphi \in C_{pq}$, то из первых $q$ значений этой функции не менее $p$ будут ее почти-геделевыми номерами.

I. Покажем сначала, что $C_{pq} \in GN(\frac{p}{q})$. Обозначим для данной $\varphi$ через $j_{sn}$ (где $0 \leqslant s \leqslant q-1; n \geqslant 0$) некоторый геделев номер функции

$$\eta_{sn}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \leqslant n \\ \varphi_{\varphi(s)}(x), & \text{если } x > n \end{cases}$$

Тогда гипотеза $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ полагается равной $j_{sn}$, если $n$ при делении на $q$ дает в остатке $s$. Очевидно, если $\varphi_{\varphi(s)} \overset{n}{=} \varphi$, то для всех достаточно больших $n$, которые при делении на $q$ дают в остатке $s$, гипотеза $F(<\varphi(0) \ldots \varphi(n)>)$ будет верной. Поэтому на $\varphi \in C_{pq}$ стратегия $F$ дает верные гипотезы с нижней частотой $\frac{p}{q}$, что и требовалось.

2. Теперь мы должны установить, что $C_{pq} \bar{\in} GN(\frac{p}{q} + \delta)$ при $p = 1, q \geqslant 2$, $\delta > 0$. Допустим противное: существует о.р. стратегия $H$, которая на всех функциях из $C_{pq}$ дает вер-

ные гипотезы с частотой $\geq \frac{p}{q} + \delta$. Сразу же перейдем к подклассу $C_{pq}$, зафиксировав $l_q = a$, где $\varphi_a = 0^\infty$. Всякая функция вида $l_1 \ldots l_{q-1} a \bar{\alpha} 0^\infty$ ($\bar{\alpha}$ – произвольный кортеж чисел) входит в $C_{pq}$, следовательно, стратегия $H$ должна ее синтезировать с частотой $\geq \frac{p}{q} + \delta$.

Для построения "контрпримера" (такой о.р.ф., которая входит в $C_{pq}$, но, тем не менее $H$ дает на ней верные гипотезы лишь с нижней частотой $\leq \frac{p}{q}$) мы должны будем рассмотреть действие $H$ на различных кортежах $\bar{\alpha}$. Эти кортежи воспринимаются как начальные куски функций, поэтому $H$ даст на $\bar{\alpha}$ всего $|\bar{\alpha}|$ гипотез ($|\bar{\alpha}|$ – длина кортежа $\bar{\alpha}$). Гипотезу $i$, которую $H$ выдает где-нибудь на $\bar{\alpha}$, мы называем "приятной", если значение $\varphi_i(|\bar{\alpha}|)$ определено. ("Приятной" – потому, что такую гипотезу легко опровергнуть, переходя к кортежу $\bar{\alpha} y$, где $y \neq \varphi_i(|\bar{\alpha}|)$, что облегчает построение контрпримера).

Кортеж $l_1 \ldots l_{q-1} a$, содержащий $q-1$ переменных, обозначим через $\Gamma$ и введем следующий предикат $(0 \leq l \leq q)$:

$$B(\Gamma, \bar{\alpha}, l) \equiv \exists \bar{\beta} \left(H \text{ на } \Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta} \text{ не менее } \tfrac{l}{q}|\Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta}| \text{ раз дает "приятные" гипотезы}\right)$$

Этот предикат рекурсивно перечислим, следовательно, для произвольных $\Gamma, \bar{\alpha}, l$ его истинность можно разрешить, задав единственный вопрос оракулу $\emptyset'$ (см. [7], гл.14).

Введем еще один предикат $(0 \leq l \leq q)$:

$$A(\Gamma, l) \equiv \forall \bar{\alpha}\, B(\Gamma, \bar{\alpha}, l).$$

Он входит в $\Pi_2$, поэтому его истинность решается при помощи оракула $\emptyset''$.

Поскольку на любой о.р.ф. $\varphi$ со свойством $\varphi = \Gamma\bar{\alpha}0^\infty$ стратегия $H$ дает верные гипотезы с нижней частотой $> \frac{p}{q}$, то $A(\Gamma, p)$ должно быть истинно для всех $\Gamma$ (напомним, что последняя компонента $\Gamma$ суть $a$, $\varphi_a = 0^\infty$, поэтому $\varphi \in C_{pq}$). Очевидно также, что при $l < q$: $\neg A(\Gamma, l+1) \rightarrow$ $\neg A(\Gamma, l)$. Поэтому условие:



$$\left[\frac{l_0}{p} - \text{целое} \;\&\; p \leq l_0 < q - p \;\&\; A(\Gamma, l_0) \;\&\; \neg A(\Gamma, l_0 + p)\right] \vee$$
$$\vee \left[l_0 = q - p \;\&\; A(\Gamma, l_0)\right] \qquad (*)$$

определяет единственное число $l_0$, для каждого $\Gamma$ (заметим, что $p \leq q - p$ при $\frac{p}{q} \leq \frac{1}{2}$). Здесь $l_0$ принимает одно из $]\frac{q}{p}[ - 1$ возможных значений; какое именно – это можно узнать, задав подходящие вопросы оракулу $\emptyset''$.

Теперь мы приступаем непосредственно к построению контрпримера, опровергающего предполагаемое свойство стратегии $H$. Сначала мы построим такой "контрпример" для каждого кортежа $\Gamma = l_1 \ldots l_{q-1} a$, затем применим подходящим образом теорему о неподвижной точке; в результате окажется, что один из "контрпримеров" входит в $C_{pq}$, это – противоречие, доказывающее теорему 3.

Если дано $\Gamma$, мы с помощью оракула $\emptyset''$ определяем $l_0$ из условия $(*)$. Дальше различаются два случая.

а) Выполняется первый член дизъюнкции $(*)$. Воспользуемся сначала тем, что $A(\Gamma, l_0 + p)$ ложно:

$$\exists \bar{\alpha} \forall \bar{\beta} \left(H \text{ на } \Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta} \text{ менее } \tfrac{l_0+p}{q}|\Gamma\bar{\alpha}\bar{\beta}| \text{ раз дает "приятные" гипотезы}\right),$$

т.е. существует $\bar{\alpha}_0$ такой, что

$$\forall \bar{\beta} \left(H \text{ на } \Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta} \text{ более } \left(1 - \tfrac{l_0+p}{q}\right)|\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}| \text{ раз дает "неприятные" гипотезы}\right),$$

а для каждого $\bar{\beta}$ все эти "неприятные" гипотезы заведомо неверны (не являются номерами о.р.ф.). Найти указанный кортеж $\bar{\alpha}$ можно, перебирая по порядку всевозможные $\bar{\alpha}$ и задавая оракулу $\emptyset'$ вопросы об истинности $B(\Gamma, \bar{\alpha}, l_0 + p)$.

Теперь начнем с этого $\bar{\alpha}_0$ построение контрпримера – некоторый о.р.ф. $\varphi'$. Так как $A(\Gamma, l_0)$ истинно, то для $\bar{\alpha}_0$ эффективно найдется $\bar{\beta}_0$ такой, что $H$ на $\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0$ не менее $\frac{l_0}{q}|\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0|$ раз дает "приятные" гипотезы. Но тогда легко подобрать число $\gamma_0$ так, что на кортеже $\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0\gamma_0$ не менее $\frac{l_0}{q}|\Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0|$ из этих "приятных" гипотез окажутся опровергнутыми. Затем берем $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0\gamma_0$ и эту процедуру повторяем, и так далее. В результате определена о.р.ф. $\varphi' = \Gamma\bar{\alpha}_0\bar{\beta}\gamma_0\bar{\beta}_1\gamma_1 \ldots$.

Заметим, что на любом начальном куске вида $T\bar{\alpha}_0\bar{\beta}_0\gamma_0\ldots\bar{\beta}_n$ частота "неприятных" гипотез, даваемых стратегией $H$, больше $1-\frac{l_0+p}{q}$. К этому можно прибавить частоту тех "приятных" гипотез, которые опровергнуты значением $\gamma_n$ (следующим за $\bar{\beta}_n$). Эта частота $\geqslant \frac{l_0}{q}$, поэтому общая частота неверных гипотез на выбранном куске больше $1-\frac{l_0+p}{q}+\frac{l_0}{q}=1-\frac{p}{q}$. Так будет при любом $n$, потому нижняя частота в е р н ы х гипотез, которые $H$ дает на $\varphi'$, не превосходит $\frac{p}{q}$. Значит - $\varphi'$ является контрпримером.

б) Выполняется второй член дизъюнкции (*). Так как здесь $A(T, q-p)$ истинно, то для каждого $\bar{\alpha}$ можно эффективно построить $\bar{\beta}$ такой, что $H$ на $T\bar{\alpha}\bar{\beta}$ не менее $\frac{q-p}{q}\times|T\bar{\alpha}\bar{\beta}|$ раз дает "приятные" гипотезы. Эти гипотезы можно опровергнуть значением $\gamma$, следующим за $\bar{\beta}$. Итерации этого процесса дают, как и в предыдущем случае, функцию $\varphi'$, на которой стратегия $H$ дает верные гипотезы с нижней частотой $\leqslant\frac{p}{q}$. Таким образом, и здесь $\varphi'$ - контрпример.

Итак, отправляясь от $T=i_1\ldots i_{q-1}a$, мы сначала задали несколько вопросов оракулу $\varnothing''$, получив в результате одно из $]\frac{q}{p}[-1$ возможных значений числа $l_0$ из условия (*). Затем, задав еще несколько вопросов, на этот раз - оракулу $\varnothing'$, мы сумеем построить в конце концов о.р.ф. $\varphi'=i_1\ldots i_{q-1}a\varphi''$, на которой стратегия $H$ дает верные гипотезы с нижней частотой $\leqslant\frac{p}{q}$. Остается каким-то способом применить теорему о неподвижной точке, "заставив" одно из $i_s$ $(s\leqslant q-1)$ стать почти-геделевым номером для $\varphi'$. Тогда получится, что $\varphi'\in C_{pq}$ - противоречие с предположением, что $H$ синтезирует $C_{pq}$ в смысле $GN(\frac{p}{q}+\delta)$.

Все предыдущее построение дает, по существу, некоторую функцию $\varphi'(T,x)$, которая вычислима с оракулом $\varnothing'$ и $\varnothing''$ (контрпримером для данного $T$ тогда будет функция $\lambda x\varphi'(T,x)$). От оракула $\varnothing''$ мы освобождаемся так: переходим от одной функции $\varphi'(T,x)$ к $]\frac{q}{p}[-1$ функциям $f_s(T,x)$ (где $1\leqslant s\leqslant]\frac{q}{p}[-1$), именно: $f_s(T,x)$ вычисляется по



возможности так же, как $\varphi'(T,x)$, с использованием оракула $\varnothing'$, где это необходимо, однако вместо того, чтобы задавать вопросы $\varnothing''$, мы уже с самого начала "полагаем", что значение $l_0$ в условии (*) равно $t_s$ ($s$-му значению из всех возможных). В тех случаях, когда (для данного $T$) это предположение неверно, $\lambda x f_s(T,x)$ будет только частичной функцией (например, поиск кортежа $\bar{\alpha}_0$ в случае (а) может оказаться бесконечным). Однако, если для данного $T$ число $t_s$ совпадает с $l_0$ из условия (*), то $\lambda x f_s(T,x)=\lambda x\varphi'(T,x)$.

Освободимся теперь от оракула $\varnothing'$. Заменим его некоторой процедурой перечисления (креативного) множества $\varnothing'$. Если для определения ответов оракула $\varnothing'$ мы пользуемся тем, что уже перечислено к данному моменту, то ошибок при вычислении таким способом $f_s(T,x)$ нельзя избежать полностью. Однако в случае, когда (для данного $T$) число $t_s$ совпадает с $l_0$ из условия (*), при вычислении в с е й функции $\lambda x f_s(T,x)$ оракулу $\varnothing'$ задается не более, чем конечное число вопросов (поиск $\bar{\alpha}_0$ в случае (а)). Ошибки в ответах на эти вопросы (а также отошедший от "верного" направления процесс вычисления) можно "в пределе" скорректировать, поэтому, начиная с некоторого $x_0$, все значения функции $\lambda x f_s(T,x)$ будут вычислены правильно (когда дойдет очередь до них, ошибки в ответах $\varnothing'$ уже будут исправлены). Таким образом, мы вместо $f_s(T,x)$ вычислим некоторую ч.р.ф. $g_s(T,x)$ со свойством:

если $t_s$ равно $l_0$ из условия (*), составленного для $T$, то

$$\lambda x g_s(T,x)\overset{n}{=}\lambda x f_s(T,x)=\lambda x\varphi'(T,x). \qquad (**)$$

По существу, мы имеем теперь $]\frac{q}{p}[-1=q-1$ функций $g_s$ от $q$ аргументов $i_1,\ldots,i_{q-1},x$:

$$g_s=g_s(i_1,\ldots,i_{q-1},a,x).$$

Начинаем применять теорему о неподвижной точке: существует о.р.ф. $h_1(i_2,\ldots,i_{q-1})$ такая, что

$$\lambda x g_1(h_1(\ldots),i_2,\ldots,i_{q-1},a,x)=\varphi_{h_1(\ldots)}$$

Далее: $\lambda x g_2(h_1(h_2\ldots), h_2(\ldots), l_3,\ldots, l_{q-1}, a, x) = \varphi_{h_2(\ldots)}$, наконец: $\lambda x g_{q-1}(h_1,\ldots,h_{q-1}, a, x) = \varphi_{h_{q-1}}$, где $h_{q-1}$ – число. Поэтому кортеж чисел $\tau = h_1\ldots h_{q-1}a$ обладает свойством $(1 \leq s \leq q-1)$: $\lambda x g_s(\tau, x) = \varphi_{h_s}$. Если для этого кортежа составить условие $(*)$ и взять $s$ таким, что $t_s = l_s$ из этого условия, то соответствующий контрпример будет обладать (в силу $(**)$ ) свойством:

$$\lambda x \varphi'(\tau, x) = h_1\ldots h_{q-1} a \varphi \triangleq \varphi_{h_1} \vee \varphi_{h_2} \vee \ldots \dot{\vee} \varphi_{h_{q-1}}.$$

Итак, одно из первых $q$ значений функции $\lambda x \varphi'$ суть ее почти-геделев номер, поэтому $\lambda x \varphi' \in C_{1q}$. Противоречие с предположением, что $C_{1q} \in GN(\frac{1}{q} + \delta)$ посредством стратегии $H$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если в определениях типов предельного синтеза заменить о.р. стратегии на ч.р. (тогда $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ = "неопределено" считается "неверной гипотезой"), то, как легко видеть, расширения семейств $GN, GN^{\infty}, GN(\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \leq 1)$ не происходит. В случае $GN$ это можно доказать простой процедурой "выжидание" (см. дальше первую часть доказательства теоремы 5) а в остальных случаях значение "неопределено" можно включить в гипотезу (например, выдать номер пустой функции).

3. П р о г н о з и р о в а н и е. Прогнозированием называется предсказание значения $\varphi(n+1)$ по данным значениям $\varphi(0),\ldots,\varphi(n)$ функции $\varphi$. Здесь мы будем пользоваться как ч.р., так и о.р. стратегиями. Если $F$ – стратегия, а $\varphi$ – (всюду определенная) функция, то значения $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ назовем п р о г н о з а м и. Прогноз считается верным, если он равен $\varphi(n+1)$, в противном случае прогноз считается ошибочным. (Если значение $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ неопределено, то это также считается ошибкой).



Говорят, что стратегия $F$ прогнозирует функцию $\varphi$, если в последовательности $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ не более чем конечное число прогнозов ошибочны.

Если существует о.р. стратегия, прогнозирующая каждую функцию класса $U$, то мы пишем $U \in NV$ (символ $NV$ означает "следующее значение"). Если существует ч.р. стратегия, прогнозирующая все функции класса $U$, мы будем писать $U \in NV''$.

Очевидно, $NV \subseteq NV''$, но здесь не хватает еще промежуточного $NV'$. $U \in NV'$ истинно, если и только если существует ч.р. стратегия, которая прогнозирует все функции класса $U$, и при этом для всех $\varphi \in U$ и всех $n$ значение $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ определено. (Здесь случай $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ -неопределено" принимается сразу за "бесконечное число ошибок", это довольно естественно: сколько можно ожидать появление о д н о г о прогноза?) Очевидно, $NV \subseteq NV' \subseteq NV''$.

Прогнозирования в смысле $NV, NV'$ введены Я.М. Барздинем [3, 6]; в частности, им получены результаты:

а) $U \in NV$ если и только если $U$ содержится в некотором эффективно перечислимом классе о.р.ф.

б) Существует $U \in NV'$, который не содержится ни в одном эффективно перечислимом классе о.р.ф. (в качестве $U$ можно взять класс $\mathcal{V}$ из доказательства теоремы I в [4]).

Таким образом: $NV \subset NV'$. Из теорем 4, 5 легко следует, что $NV' \subset NV''$.

4. С в я з ь м е ж д у п р о г н о з и р о в а н и е м и с и н т е з о м. Оказывается, что прогнозирование посредством ч.р. стратегий (в смысле $NV''$) "по силе" эквивалентно предельному синтезу в смысле $GN^{\infty}$.

ТЕОРЕМА 4. $NV'' = GN^{\infty}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) $U \in GN^{\infty} \longrightarrow U \in NV''$ доказывается очень просто.

2) Покажем, что $U \in NV'' \longrightarrow U \in GN^{\infty}$. Пусть $U \in NV''$ посредством ч.р. стратегии $H$. Определим следующую стратегию $F$: $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>) = j_n$, где $j_n$ — некоторый геделев номер следующей функции $\eta_n$ (по существу, $\eta_n$ — это "экстраполяция" начального куска $\varphi(0)\ldots\varphi(n)$ посредством прогнозирующей стратегии $H$):

$$\eta_n(x) = \varphi(x), \text{ если } x \leq n,$$

$$\eta_n(n+1) = H(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>),$$

$$\eta_n(n+k+1) = \begin{cases} H(\varphi(0)\ldots\varphi(n)\eta_n(n+1)\ldots\eta_n(n+k)), \text{ если все входящие} \\ \quad \text{сюда значения } \eta_n \text{ определены}, \\ \text{неопределено, в противном случае.} \end{cases}$$

Если $\varphi \in U$, то $H$ прогнозирует $\varphi$, т.е. начиная с некоторого $n$ функция $\eta_n$ совпадает с $\varphi$, для этих $n$ гипотезы $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ будут верны. Итак, $U \in GN^{\infty}$ посредством $F$. Теорема 4 доказана.

Из упомянутых результатов Голда и Ьарадиня легко следует, что $NV \subset GN$. Но теорема 5 показывает, что даже прогнозирование в смысле $NV'$ "слабее" предельного синтеза в смысле $GN$.

ТЕОРЕМА 5. $NV' \subset GN$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Сначала покажем, что $NV' \subseteq GN$. Пусть $U \in NV'$ посредством ч.р. стратегии $H$. Построим следующую стратегию $F$ (определение $j_x$ и $\eta_x$ см. в конце доказательства теоремы 4):

$$F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>) = \begin{cases} j_k, \text{ где } k = \min\{x \mid x \leq n \,\&\, \forall y \leq n[\eta_x(y) = \varphi(y)]\} \\ \quad \text{если значения } \eta_x(y) \text{ определены для} \\ \quad \text{всех } x, y \leq n, \\ \quad \text{неопределено, в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что $F$ "пока что" лишь ч.р. стратегия (для $U \in GN$ требуется о.р.), тем не менее, если $\varphi \in U$, то:

а) $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ определено для всех $n$ (ибо $H$ про-



нозирует $U$ в смысле $NV'$, поэтому для всех $n$ прогноз $(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ определен и, таким образом, все значения $_x(y)$ также определены).

б) Начиная с некоторого $n = n_0$, будет $\eta_{n_0} = \varphi$ (ибо $_n$ экстраполирует $\varphi(0)\ldots\varphi(n)$ посредством стратегии $H$, которая прогнозирует функцию $\varphi$). Но тогда при достаточно большом $n$ гипотеза $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ меняться больше не будет: она стабилизируется на числе $j_{n_0}$ — геделевском номере функции $\eta_{n_0} = \varphi$.

Теперь легко определить о.р. стратегию $F'$, которая синтезирует класс $U$ в смысле $GN$. Именно, если даны значения функции $\varphi$, зафиксируем некоторую процедуру параллельного вычисления значений $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ для всех $n$, причем в момент времени $t$ разрешается использовать только значения $\varphi(0)\ldots\varphi(t)$.

$$F'(<\varphi(0)\ldots\varphi(t)>) = \begin{cases} i, \text{ если } i \text{ — значение } F(<\varphi(0)\ldots\varphi(x)>), \\ \quad \text{вычисленное до момента } t \text{ в последнюю очередь}, \\ 0, \text{ если до момента } t \text{ никаких значений не вычислено.} \end{cases}$$

Ясно, что $F'$ будет о.р. стратегией, даже если $F$ нигде не определена, и если последовательность $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ стабилизируется на числе $j$, то и $F'(<\varphi(0)\ldots\varphi(n)>)$ стабилизируется на $j$. Поэтому из а), б) следует, что $U \in GN$ посредством $F'$, что и требовалось доказать.

2) Построим теперь класс $U \in GN \setminus NV'$ (это построение существенно использует одну идею М.И.Аугустона).

$$U = \{\varphi \mid \varphi = \bar{\alpha}\, i\, \varphi'(0)\, i\, \varphi'(1)\, i \ldots \,\&\, \bar{\alpha} \text{ — кортеж четной длины } \&\, \varphi' \in R \,\&\, \varphi_i = \varphi\}$$

Из теоремы о неподвижной точке легко следует, что для всякого $\bar{\alpha}$ и всякой $\varphi'$ найдется такое $i$, что $\varphi \in U$. Очевидно, о.р. стратегия $F$ со свойством $F(<\varphi(0)\ldots\varphi(2n+1)>) = F(<\varphi(0)\ldots\varphi(2n)>) = \varphi(2n)$ синтезирует $U$ в смысле $GN$.

Предположим теперь, что $U \in NV'$ посредством ч.р. стратегии $H$. В качестве начальных кусков функций класса $U$

выступают произвольные кортежи натуральных чисел. Но тогда, если $H$ прогнозирует $U$ именно в смысле $NV'$, то любое значение $H(\langle x \rangle)$ должно быть определено, т.е. $H$ является на самом деле о.р. стратегией. Итак, оказалось, что $U \in NV$. Отсюда, по теореме Барздиня (формулировку см. в п.3°), класс $U$ содержится в некотором эффективно перечислимом классе о.р.ф. Пусть $\{\tau_i\}$ - вычислимая нумерация этого класса. Определим новую нумерацию $\tau_i'(x)=\tau_i(2x)$. Тогда из упомянутого свойства класса $U$ (каждая функция которого находится среди $\tau_0, \tau_1, \ldots$) следует, что $\{\tau_i'\}$ содержит все о.р.ф., что невозможно.

Поэтому $U \notin NV'$ и теорема 5 доказана.

Все предыдущие результаты сводятся в схему: $NV \subset NV' \subset GN \subset GN^{\infty} = NV'' = GN(\frac{1}{2}+\varepsilon) \subset GN(\frac{1}{2}) \subset GN(\frac{1}{3}) \subset \ldots$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. (Совместно с Е.Б.Кинбером). Наряду с частотным синтезом можно интересоваться и частотным прогнозированием. Но здесь почти все результаты доказываются очень легко.

Для класса о.р.ф. $U$ будем писать $U \in NV(\varepsilon)$, если существует о.р. стратегия $F$ такая, что для любой функции $\varphi \in U$ в последовательности прогнозов $F$ нижняя частота верных прогнозов не меньше $\varepsilon$. Очевидно: $NV \subseteq NV(1)$, $\varepsilon > \delta \rightarrow NV(\varepsilon) \subseteq NV(\delta)$.

Введем для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ класс:

$$U_\varepsilon = \{\varphi \mid \varphi \in R \mathbin{\&} \underline{\lim} \frac{card\{x \mid x \leq n \mathbin{\&} \varphi(x) = 0\}}{n} \geq \varepsilon\}.$$

Очевидно, $U_\varepsilon \in NV(\varepsilon)$ посредством о.р. стратегии $F(x) \equiv 0$. Можно показать, что $U_1 \in NV(1) \setminus NV$ (для этого следует доказать от противного, что $U_1$ не содержится ни в одном эффективно перечислимом классе о.р.ф.). Таким образом: $NV \subset NV(1)$. Непосредственно (построением о.р.ф.-контрпримера) доказывается, что $U_\varepsilon \notin NV(\delta)$ $(\delta > \varepsilon)$, таким образом: $\varepsilon > \delta \rightarrow NV(\varepsilon) \subset NV(\delta)$.

Можно ввести также понятие $NV''(\varepsilon)$, заменив в



предыдущем определении о.р. стратегии на ч.р.. Нетрудно показать, что $R \in NV''(1)$, т.е. что существует ч.р. стратегия, которая на любой о.р.ф. делает верные прогнозы с частотой 1. Здесь, таким образом, $NV''(\varepsilon) = NV''(1)$ для всех $\varepsilon$.

Для понятия $NV'(\varepsilon)$ доказываются те же результаты, что для $NV(\varepsilon)$, используя те же классы $U_\varepsilon$. Но взаимная связь семейств $NV(\varepsilon), NV'(\delta)$ совершенно неясна, в первую очередь, неясно, будет ли $NV(1) \subset NV'(1)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Gold E.M. Limiting recursion.- "Journal of Symbolic Logic", 1965, 3, No.1.
2. Gold E.M. Language identification in the limit.- "Information and Control", 1967, 10, No.5.
3. Barzdin J.M. Prognostication of automata and functions - Information Processing 71, North-Holland, 1972.
4. Барздинь Я.М. Две теоремы о предельном синтезе.- Настоящий сборник, стр.82-88.
5. Feldman J. Some decidability results on grammatical inference and complexity.- "Information and Control", 1972, 20, No.3.
6. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В. Прогнозирование общерекурсивных функций.- "ДАН СССР", 1972, 206, № 3.
7. Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972.