КАФЕДРА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра электродинамики и механики сплошных сред

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сборник научных трудов
(межвузовский)

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1982

УДК 517, УДК 518, УДК 531, УДК 534, УДК 537, УДК 539, УДК 621

Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование: Межвуз.сб.науч.тр. /Под ред. Ю.Я.Микельсона. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982. - 191 с.

Предлагаемый сборник содержит 16 научных статей, посвященных разработке и применению математических моделей для решения численными и аналитическими методами задач:
- магнитной гидродинамики;
- стационарного магнитного поля с учетом экранирования;
- динамики оболочечных конструкций и др.

Сборник предназначен для специалистов, работающих в области механики, электродинамики и прикладной математики, а также для научно-технических работников, аспирантов и студентов, интересующихся прикладными вопросами и вычислительными методами решения задач электродинамики и механики сплошных сред.

Рис. 40, табл. 11, библиогр. 116 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

Э $\frac{20305-116у}{М\ 812(11)-82}$ Изм.82.1703040000

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 3-19

УДК 518.12:538.4 + 621.365.5

С.И.Павлов
ЛГУ им. П.Стучки

Л.Л.Тир
ВНИИ электротермического оборудования, гор.Москва

А.Т.Якович
ЛГУ им.П.Стучки

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЁТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ДВИЖЕНИЯ РАСПЛАВА В ИНДУКЦИОННОЙ ПЕЧИ С ХОЛОДНЫМ ТИГЛЕМ

Современная технология нуждается в металлах высокой чистоты. Широко распространённые индукционные тигельные печи (ИТП) во многих случаях не обеспечивают чистоту выплавляемого металла из-за взаимодействия его с материалом тигля. Индукционные печи с холодным тиглем (ИПХТ) - новый вид плавильного оборудования, позволяющий избежать загрязнения расплава материалами тигля [I]. Это достигается применением металлического водоохлаждаемого разрезного тигля, состоящего из m_c электрически изолированных друг от друга секций, а также электромагнитным (ЭМ) отжатием расплава от тигля.

Для нахождения оптимальной конструкции ИПХТ необходимо исследовать распределение вихревых токов, джоулевых потерь в расплаве и тигле, так как, варьируя частоту возбуждающего тока, число секций тигля и их конструкцию, можно менять в широких пределах к.п.д. и коэффициент мощности печи. Представляет также интерес выявление особенностей движения расплава, возникающих из-за специфики симметрии тигля (в отличие от ИТП имеет место не круговая, а поворотная симметрия порядка m_c).

Расчёты ИПХТ проводились в небольшом количестве работ. В [2] оценки энергетических характеристик ИПХТ делались на основе априори заданного распределения вихревых токов. В [3,4] осуществлялось решение краевой задачи для магнитной индукции в двумерной модели зоны контакта расплава и тигля ИПХТ. В [4], кроме того, предлагалась модель зоны отжатия при наличии "рифов" и более общая трёхмерная модель ИПХТ, а также исследовалось движение расплава.

В настоящей работе рассматриваются математические модели ИПХТ и уточнённая методика численного расчёта ЭМ поля и движения расплава [4].

I. Математические модели ИПХТ

Модель ИПХТ (рис. I, 2) состоит из пяти областей (обл.) с различными свойствами. Расплав металла (обл. I) считается однородной ($\rho = const$) несжимаемой ($div\,\vec{v} = 0$) электропроводящей ($\sigma_p = const$) жидкостью и находится в металлическом ($\sigma_T = const$) разрезном тигле (обл. 2). Секции тигля, азимутальные размеры которых одинаковы и равны $2\varphi_0$ ($\varphi_0 = \pi/m_c$), разделены слоем электрической изоляции ($\sigma = 0$), расположенной в вертикальных разрезах (обл. 3). Внутри каждой секции тигля имеется один или два вертикальных канала (обл. 4) для водяного охлаждения ($\sigma = 0$). ЭМ поле возбуждается однофазным или многофазным индуктором (обл. 5), в котором задана плотность наружных периодических во времени токов j^{ex} с одинаковой круговой частотой $\omega = 3 \cdot 10^2 \div 6 \cdot 10^4\ c^{-1}$. Ток в индукторе имеет только азимутальную составляющую, поэтому в расплаве и секциях тигля наводятся вихревые токи, текущие преимущественно в плоскости $z = const$.

Нижняя часть боковой поверхности расплава прилегает к стенке тигля (зона контакта расплава и тигля). Выше этой зоны наблюдается постепенный отход расплава от тигля под действием ЭМ сил: сперва - против границ секций тигля (зона частичного отжатия), а по мере приближения к вершине - по всему периметру сечения расплава плоскостью $z = const$ (зона полного отжатия). В зоне контакта ток пересекает границу тигля и расплава ($\sigma_T >> \sigma_p$). На этой границе существует конечное переходное электрическое сопротивление $R_п = 10^{-10} \div 10^{-5}$ Ом·м^2 [5]. Отметим, что введение в зоне контакта подобласти конечной толщины с малой проводимостью [3], по-видимому, за-

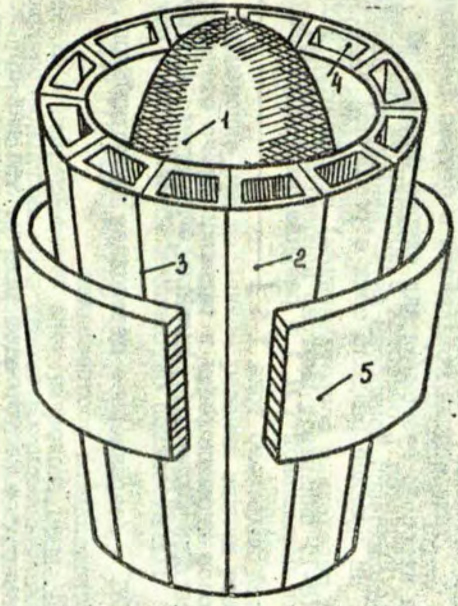


Рис. I. Трёхмерная модель ИПХТ:
I) Жидкий металл. 2) Металлический разрезной водоохлаждаемый тигель. 3) Слой изоляции между секциями тигля. 4) Каналы для охлаждения. 5) Индуктор.

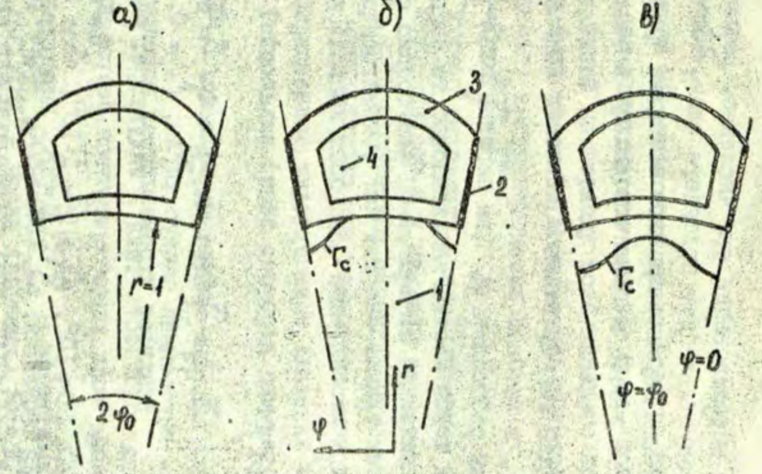


Рис. 2. Двумерные модели ИПХТ (обозначения см. на рис. I):
а) Зона контакта расплава и тигля. б) Зона частичного отжатия. в) Зона полного отжатия.

трудняет адекватное моделирование при численном решении эффекта переходного сопротивления, присущего слою, толщина которого существенно меньше глубины проникновения ЭМ поля в среду. Этот эффект можно учесть в граничном условии для вихревого тока (2).

В общем случае для исследования ИПХТ необходима трёхмерная модель (рис. I), в которой рассматривается половина секции тигля с угловыми размерами φ_0 (на плоскостях $\varphi = const$ учитываются условия периодичности и симметрии секции тигля).

ЭМ поле определяется из уравнений в безразмерной форме для комплексной амплитуды индукции магнитного поля, имеющей в цилиндрической системе координат три составляющие $\vec{B} = (B_r, B_\varphi, B_z)$[I]:

$$\Delta\vec{B} - i\hat{\omega}\vec{B} = -rot\,\vec{j}^{\,ex}. \qquad (1)$$

Характерные величины введены следующим образом: $B_0 = \mu_0 I_0$; $j_0 = I_0/r_0$, где r_0 - внутренний радиус тигля, $I_0 = 0{,}5\cdot 10^5 \div 3\cdot 10^5$ А/м - линейная плотность тока в индукторе, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м. Вихревые токи характеризуются безразмерной частотой $\hat{\omega} = \sigma\mu_0\omega r_0^2$ ($\hat{\omega}_p = 30 \div 10^3$, $\hat{\omega}_T = 10^3 \div 5\cdot 10^5$; чаще всего на практике встречаются значения: $\hat{\omega}_p = 100 \div 500$, $\hat{\omega}_T = 2\cdot 10^3 \div 5\cdot 10^3$, входящие в интервал $0 < \hat{\omega} \leq 10^4$, для которого можно проводить вычисления по методике, предложенной в разделе 2). Принято безындукционное приближение, так как для расплава $Re_m/\hat{\omega}_p \ll 1$ (Re_m - магнитное число Рейнольдса).

Уравнение (I) решается в областях с постоянной безразмерной частотой $\hat{\omega}$. На границе раздела сред с различной электропроводимостью (и переходным сопротивлением) применяются условия непрерывности нормальной (n) и разрыва тангенциальной (τ) составляющей вихревого тока [6][2]

$$(\vec{j}_1^{\,i})_n = (\vec{j}_2^{\,i})_n; \quad \hat{\omega}_1(\vec{j}_2^{\,i})_\tau - \hat{\omega}_2(\vec{j}_1^{\,i})_\tau = \hat{R}_n\hat{\omega}_1\hat{\omega}_2\frac{\partial \vec{j}_n^{\,i}}{\partial\tau}, \qquad (2)$$

где $\hat{R}_n = R_n/\mu_0\omega r_0^3$ - безразмерное переходное сопротивление, а вихревые токи определяются соотношением

I Введение потенциалов не упрощает задачу, так как при исследовании перетекания токов через границу сред с различной электропроводностью наряду с векторным потенциалом магнитного поля необходимо рассматривать и скалярный потенциал.

$$\vec{j}^{\,i} = rot\vec{B}. \tag{3}$$

Поскольку вихревые токи имеют все три составляющие, в расплаве создаётся трёхмерное силовое поле, которое характеризуется усреднённой по периоду возбуждающего поля плотностью ЭМ сил (звёздочкой отмечено комплексное сопряжение):

$$\vec{f} = \frac{1}{2} Real\, \vec{j}^{\,i} \times \vec{B}^{*}. \tag{4}$$

В отличие от тороидальных вихрей ИТП в ИПХТ имеет место трёхмерное скоростное поле, причём движение в плоскостях $z = const$ существенно, так как оно влияет на возникновение нестабильных складок свободной поверхности - так называемых "рифов". Осредненное турбулентное движение определяется из уравнений Рейнольдса (поле скорости считается стационарным)

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\Delta\vec{v} + Al\cdot\vec{f} - \frac{1}{Fr}\vec{e}_z \tag{5}$$

с учётом условия несжимаемости расплава

$$div\,\vec{v} = 0, \tag{6}$$

где p - давление, $Re = v_o r_o/\nu$ - эффективное число Рейнольдса, $Al = j_o^2\mu_o r_o^2/\rho v_o^2$ - число Альфвена, $Fr = v_o^2/r_o g$ - число Фруда, v_o - характерная (максимальная в расплаве) скорость, ν - эффективная вязкость, g - ускорение свободного падения, $\vec{e}_z$ - единичный вектор в аксиальном направлении.

На твёрдой стенке для компонент скорости используется условие прилипания, а на свободной поверхности - условие свободного скольжения.

Решение трёхмерной системы уравнений (I-6) представляет

---

2 Применение при численном решении задачи разностной схемы сквозного счёта приводит к необходимости использования вместо (I) следующего уравнения для магнитной индукции (при этом увеличивается количество неизвестных):

$$\Delta\vec{B} + rot\,\hat{\omega}\vec{E} = -rot\,\vec{j}^{\,ex}, \tag{Iа}$$

где $\vec{E}$ - напряжённость электрического поля. На границе двух электропроводящих сред скачок $\hat{\omega}$ размазывается, и $grad\,\hat{\omega} \neq 0$. Расчёты по схеме сквозного счёта для уравнения (I) приводят к существенно искаженным результатам.

собой сложную дорогостоящую вычислительную задачу, требующую значительной оперативной памяти (около I Мбайта) и процессорного времени (порядка IO часов) ЭВМ ЕС-IO60, и, таким образом, не позволяет проводить многовариантные расчёты, необходимые для конструирования ИПХТ. Поэтому целесообразно использование более простых двумерных моделей, дающих возможность исследовать наиболее важные аспекты трёхмерных ЭМ и гидродинамических (ГД) полей ИПХТ.

Для изучения МГД-процессов в расплаве и тигле реальной ИПХТ предлагаются две двумерные модели:

I) Осесимметричная модель (сечение $\varphi=const$ (рис. I)) индукционной печи с непроводящим тиглем.

2) Модель, неограниченная в аксиальном направлении, с геометрией, соответствующей фиксированному сечению $z=const$ ИПХТ (рис. I,2). При рассмотрении каждого из горизонтов $z=const$ не учитывается влияние выше и ниже расположенных слоёв ИПХТ на процессы в выбранном сечении, а также игнорируется аксиальная составляющая вихревых токов (последнее мало существенно, так как z - составляющая тока на один-два порядка меньше r - или φ - компоненты).

Качественная оценка трёхмерных ГД полей производится на основе сравнительного анализа:

а) распределений скорости в сечениях $\varphi=const$ и $z=$ $=const$, полученных в двумерных моделях ИПХТ при заданном Re;

б) максимальных значений φ - и z - составляющих ротора ЭМ силы Φ^{φ}_{max} и Φ^{z}_{max} и ротора скорости;

в) значений циркуляции ЭМ силы по замкнутым контурам, ограничивающим области с определённым знаком Φ_{φ} и Φ_{z} в сечениях $\varphi=const$ и $z=const$ соответственно.

Поскольку первая модель исследована достаточно полно (методика расчёта опубликована в [7], см. там же библиографию), остановимся подробнее на второй модели и будем применять её к трём зонам:

I) зоне электрического контакта расплава и тигля с учётом переходного сопротивления (рис. 2а);

2) зоне частичного отжатия расплава от тигля в области перегородок между секциями (рис. 2б);

3) зоне полного отжатия расплава (рис. 2в).

Так как модель бесконечна в аксиальном направлении и учитываются только r - и φ - составляющие тока, индукция имеет одну отличную от нуля составляющую $B_z = B(r,\varphi)$, удовлетворяющую следующему уравнению в полярной системе координат (r, φ):

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 B}{\partial \varphi^2} - i\hat{\omega}B = 0. \qquad (7)$$

Для сокращения времени расчётов вместо индуктора на поверхности тигля задаётся постоянное значение магнитной индукции $B=1$. Введение такого граничного условия соответствует реальной ИПХТ, в которой отсутствует тепловая изоляция и воздушный зазор между холодным тиглем и индуктором.

Магнитное поле источника идеально проникает в область изолирующей перегородки между секциями тигля, а также в область отжатия расплава от тигля, где при решении задаётся $B=1$ [3].

Для модели зоны контакта (рис. 2а) на границе расплава и тигля $r=1$ записывается условие (2).

$$\hat{\omega}_p j^i_{\varphi(\tau)}\Big|_{r=1} - \hat{\omega}_\tau j^i_{\varphi(p)}\Big|_{r=1} = \hat{R}_п \hat{\omega}_p \hat{\omega}_\tau \frac{\partial j_r}{\partial \varphi}\Big|_{r=1}. \qquad (8)$$

Составляющие вихревых токов вычисляются по формулам

$$j^i_r = \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial \varphi}; \quad j^i_\varphi = -\frac{\partial B}{\partial r}, \qquad (9)$$

а индексы (т) и (р) в (8) означают, что производная по r во втором соотношении (9) берётся, соответственно, в тигле и расплаве.

На границе тигля и канала (обл. 4, рис. 2) со стороны тигля (для определённости будем считать, что граница проходит по линии $r=r_1$) используется условие

---

[3] Это следует из решения краевой задачи для уравнения (7) в непроводящей области с условием равенства нулю на границе тангенциальной составляющей тока.

При численном решении задачи условие $B=1$ использовалось для тестирования разностной схемы и исследования влияния шагов сетки на сходимость к решению (см. раздел 2).

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial B}{\partial r}\right)\bigg|_{r=r_1} - i\hat{\omega}_T B\bigg|_{r=r_1} = 0, \tag{10}$$

которое получается из уравнения (7) с учётом

$$j^i_{r(T)}\bigg|_{r=r_1} = \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial \varphi}\bigg|_{r=r_1} = 0, \tag{11}$$

а со стороны канала (к) -

$$j^i_{\varphi(K)}\bigg|_{r=r_1} = -\frac{\partial B}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = 0. \tag{12}$$

Условия (8-12) для уравнения (7) дополняются (см. рис. 2) условиями симметрии секции тигля (при $\varphi = \varphi_0$) и периодичности (при $\varphi = 0$).

$$\frac{\partial B}{\partial \varphi}\bigg|_{\varphi=0,\varphi_0} = 0. \tag{13}$$

В расплаве при взаимодействии вихревых токов с внешним полем создаётся вихревая ЭМ сила, имеющая r- и φ- составляющие

$$f_r = \frac{1}{2} Real(j^i_\varphi B^*);\; f_\varphi = -\frac{1}{2} Real(j^i_r B^*), \tag{14}$$

ротор которой

$$\Phi_z = (rot\vec{f})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r f_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial \varphi} \tag{15}$$

создаёт движение со скоростью $\vec{v} = (v_r, v_\varphi, 0)$.

Для описания движения удобно ввести ротор скорости с отличной от нуля z-составляющей

$$w = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}, \tag{16}$$

удовлетворяющей следующему уравнению

$$v_r\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} = \frac{1}{Re}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right] + Al\cdot\Phi_z. \tag{17}$$

Уравнение (I7) дополняется уравнением для функции тока

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=\omega, \tag{I8}$$

определённой соотношениями, удовлетворяющими условию несжимаемости,

$$v_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi};\ v_\varphi=\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{I9}$$

На границах сектора $\varphi=0,\varphi_0$ для компонент скорости выполняются условия

$$v_\varphi\Big|_{\varphi=0,\varphi_0}=\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=0,\varphi_0}=0, \tag{20}$$

подстановка которых в соотношение для ротора скорости (I6) даёт граничное условие

$$\omega\Big|_{\varphi=0,\varphi_0}=0. \tag{2I}$$

Если рассматривается модель зоны контакта или частичного отжатия (рис. 2а, б), на поверхности тигля задаются условия прилипания для компонент скорости $v_r=v_\varphi=0$, откуда следует, что

$$\omega\Big|_{r=1}=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\Big|_{r=1}. \tag{22}$$

На поверхности расплава, не соприкасающейся с тиглем, задаются условия свободного скольжения, дающие

$$\omega\Big|_{\Gamma_c}=0. \tag{23}$$

Граница сектора является линией тока, на которой функция тока равна нулю.

2. Конечно-разностные уравнения

Уравнения (7,I7,I8) с соответствующими граничными условиями решаются конечно-разностным методом на неоднородной полярной сетке (рис. 4).

Каждая область с постоянным значением $\hat{\omega}$, в которой решается уравнение (7) для индукции магнитного поля, заменяется сеточной областью Ω_j (j =1,2,..., J_M) (или несколькими сеточными областями), причём сетка строится согласованной с криволинейными границами[4]. Координаты узловых точек сеточной области Ω_j – (r_K, φ_n) $(K=K_C^j(n),\ldots,K_F^j(n);\ n=N_C^j,\ldots,N_F^j)$; шаги сетки – $h_K^r=r_{K+1}-r_K$ $(K=K_C^j(n),\ldots,K_F^j(n)-1)$ и $h_n^\varphi=\varphi_{n+1}-\varphi_n$ $(n=N_C^j,\ldots,N_F^j-1)$ соответственно в радиальном и азимутальном направлениях.

В расчётах ГД величин используются сеточные области Ω_j $(j=1,\ldots,J_r)$, относящиеся к расплаву (как правило, для расплава строится единая сетка).

Средний линейный размер ячейки сетки в азимутальном направлении $r_{K+1/2}h^\varphi$ (h^φ – характерный шаг по φ [5]) возрастает при удалении от полюса r = 0, поэтому при увеличении индекса K должен расти и шаг в радиальном направлении h_K^r (рис. 4). Отношение размеров ячейки

$$a=h_K^r/r_{K+1/2}h^\varphi \tag{24}$$

рекомендуется поддерживать примерно постоянным в пределах $0,5<a<2$.

Интервал значений a получен в результате методических расчётов по схеме (29) для уравнения (7) при $\hat{\omega}$= 0 (для выраженного скин-эффекта интервал может быть расширен - $0,2<a<5$).

---

[4] Каждая сеточная область может иметь "индивидуальную" сетку, отличную от сетки соседней области. Для согласования значений искомой функции в граничных узловых точках, принадлежащих соседним сеточным областям, используется интерполяция вдоль границы.

[5] Характерный шаг h^φ можно связать с глубиной проникновения ЭМ поля в материал тигля или расплава или задать h^φ как среднее арифметическое шагов h_n^φ $n=N_C,\ldots,N_F$

$$h^\varphi=\frac{1}{N_F-N_C}\sum_{n=N_C}^{N_F}h_n^\varphi .$$

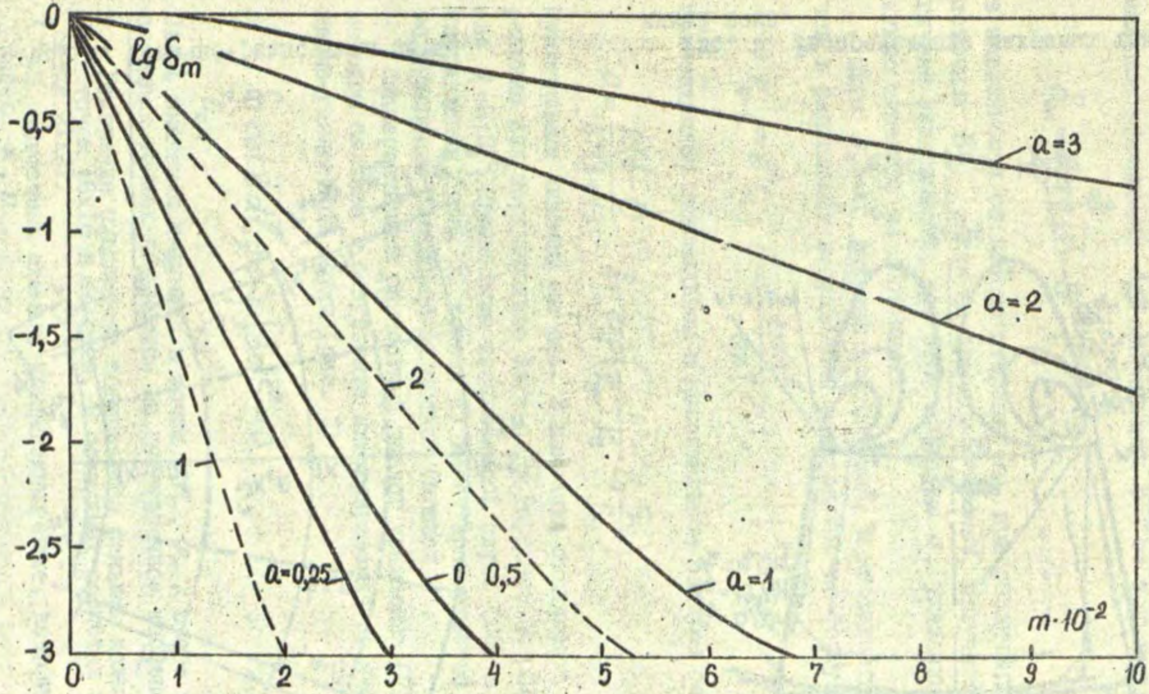


Рис. 3. Зависимость невязки δ_m от числа итераций m при различных отношениях a шагов сетки в радиальном и азимутальном направлениях.

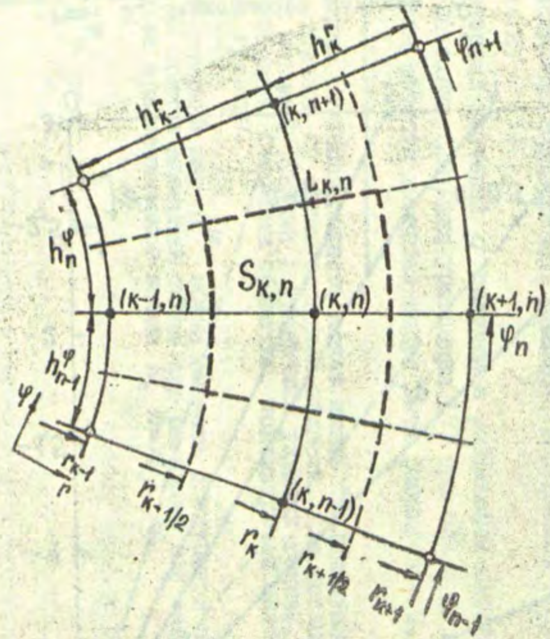


Рис. 4. Конечно-разностная сетка.

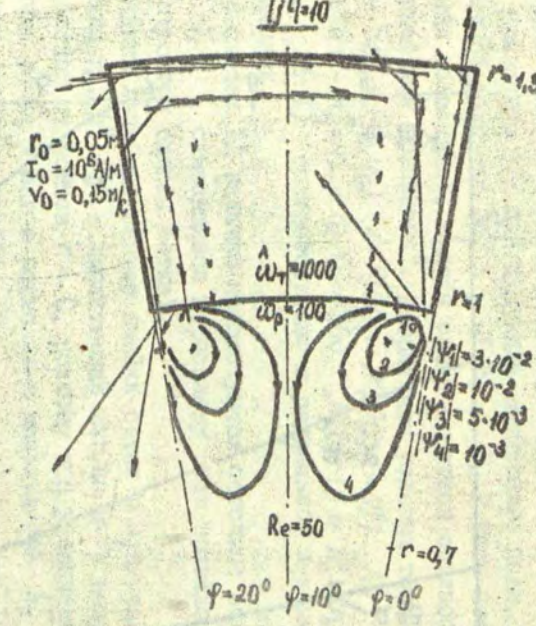


Рис. 5. Распределение вихревых токов и линий тока.

Если источник $B=1$ задан на границе $r=const$, а на остальных границах нормальная производная равна нулю, точное решение задачи во всей области - $\bar{B}=1$. На рис. 3 показано максимальное отклонение δ_m приближения $B^{(m)}$ от точного решения $\bar{B}$

$$\delta_m = \max_{\Omega} |\bar{B} - B^{(m)}| \tag{25}$$

в зависимости от номера итерации m при различных a (когда источник $B=1$ задан на границе $\varphi=const$, получаются аналогичные зависимости, при этом значения a, указанные на рис.3, нужно заменить на обратные).

Шаги $h_n^\varphi = h^\varphi$ выбраны постоянными, а координаты узловых точек в радиальном направлении вычислялись по формулам:

$$r_{k+i} = b^i r_k\,; \quad b = \frac{2+ah^\varphi}{2-ah^\varphi} > 1; \tag{26}$$

при заданном минимальном и максимальном радиусе сетки r_{K_c} и r_{K_F}

$$a = \frac{2(b-1)}{h^\varphi(b+1)}\,; \quad b = \exp\left(\frac{1}{K_F - K_c} \ln\frac{r_{K_F}}{r_{K_c}}\right). \tag{27}$$

Пунктирными линиями на рис. 3 показана сходимость к точному решению при неоднородном шаге по φ (среднее по области значение a =0,3)[6]. Применение неоднородной сетки (26) в радиальном направлении (рис. 3, кривая I) имеет преимущества в сходимости по сравнению с однородной сеткой (кривая 2).

Консервативный разностный аналог уравнения (7) получается методом баланса в результате интегрирования по ячейке $S_{k,n}$ конечно-разностной сетки (рис. 3)

$$\oint\limits_{L_{k,n}} \mathrm{rot}\,\vec{B}\,d\vec{l} + i\hat{\omega}_j \int\limits_{S_{k,n}} \vec{B}\,d\vec{S} = 0. \tag{28}$$

Связь значения индукции в точке (r_k, φ_n) с его значениями в соседних точках получается на пятиточечном шаблоне [7]:

---

[6] Ускорение сходимости объясняется меньшим количеством узловых точек I6xI6 в области. В остальных расчётах исследовалась сетка 2Ix2I.

[7] В разностных схемах, приведённых ниже, коэффициенты имеют индекс k, n.

$$ {}_{k,n} = (C_1^+ B_{k+1,n} + C_1^- B_{k-1,n} + C_2^+ B_{k,n+1} + C_2^- B_{k,n-1})/C_0; $$

$$ C_1^{\pm} = \frac{2 r_{k\pm 1/2} h^{\varphi}_{n-1/2}}{h^r_{k-1/2\pm 1/2}}; \quad C_2^{\pm} = \frac{2 h^r_{k-1/2}}{r_k h^{\varphi}_{n-1/2\pm 1/2}}; \tag{29} $$

$$ C_{\omega}^{\Phi} = \hat{\omega}_j h^{\varphi}_{n-1/2} (r_{k+1/2} h^r_k + r_{k-1/2} h^r_{k-1}); $$

$$ C_0 = C_1^+ + C_1^- + C_2^+ + C_2^- + i C_{\omega}^{\Phi}; $$

$$ k = K_c^j(n)+1, \ldots, K_F^j(n)-1; \quad n = N_c^j+1; \ldots, N_F^j-1; \quad j = 1, 2, \ldots, J_K. \tag{30} $$

Счётно-устойчивый разностный аналог условия (8) имеет вид (..); коэффициенты вычисляются по формулам (для простоты рассматривается случай совпадающих на границе узловых точек, соответствующих сеточным областям тигля и расплава):

$$ C_1^+ = \frac{\hat{\omega}_P}{h^r_k}; \quad C_1^- = \frac{\hat{\omega}_T}{h^r_{k-1}}; \quad C_2^{\pm} = \frac{\hat{R}_\Pi \hat{\omega}_P \hat{\omega}_T}{h^{\varphi}_{n-1/2} h^{\varphi}_{n-1/2\pm 1/2}}; $$

$$ C_0 = C_1^+ + C_1^- + C_2^+ + C_2^-. \tag{31} $$

Разностные аналоги остальных граничных условий имеют второй порядок аппроксимации на неравномерной сетке.

Разностная аппроксимация уравнения (I7) осуществляется методом баланса из интегральной формы уравнения

$$ \oint_{L_{k,n}} \left(\vec{v} \times \vec{w} - \frac{1}{Re} \operatorname{rot} \vec{w} + Al \cdot \vec{f}\right) d\vec{l} = 0. \tag{32} $$

Для построения разностной схемы без аппроксимационной вязкости для уравнения (I7) используется способ расширения области устойчивости схемы с центральными разностями, изложенный в [8]. В отличие от схемы с компенсацией аппроксимационной вязкости на сетке с удвоенным шагом [9], в приведенной ниже схеме значение ротора скорости в точке (r_k , φ_n) связано с его значениями в соседних точках на пятиточечном шаблоне - таким образом, отпадает необходимость во введении расширенной сеточной области (m - номер итерации):

$$\omega_{k,n}^{(m+1)}=(D_1^+\omega_{k+1,n}^{(m)}+D_1^-\omega_{k-1,n}^{(m+1)}+D_2^+\omega_{k,n+1}^{(m)}+$$
$$+D_2^-\omega_{k,n-1}^{(m+1)}+D_0^-\omega_{k,n}^{(m)}+G)/D_{k,n}^+;$$

$$D_1^{\pm}=r_{k\pm 1/2}h_{n-1/2}^{\varphi}(1/Re\cdot h_{k-1/2\pm 1/2}^{r}\mp v_{k\pm 1/2,n}^{r}/2); \tag{33}$$

$$D_2^{\pm}=h_{k-1/2}^{r}(1/Re\cdot r_k h_{n-1/2\pm 1/2}^{\varphi}\mp v_{k,n\pm 1/2,n}^{\varphi}/2);$$

$$D_0^-=\frac{1}{2}h_{n-1/2}^{\varphi}(|r_k v_{k,n}^r|+|r_{k+1/2}v_{k+1/2,n}^r-r_{k-1/2}v_{k-1/2,n}^r|)+$$
$$+\frac{1}{2}h_{k-1/2}^{r}(|v_{k,n}^{\varphi}|+|v_{k,n+1/2}^{\varphi}-v_{k,n-1/2}^{\varphi}|);$$

$$D_0^+=D_0^-+\sum_{i=\pm 1}[r_{k+i/2}h_{n-1/2}^{\varphi}(1/Re\cdot h_{k-1/2+i/2}^{r}+i v_{k+i/2,n}^{r}/2)+ \tag{34}$$
$$+h_{k-1/2}^{r}(1/Re\cdot r_k h_{n-1/2+i/2}^{\varphi}+i v_{k,n+i/2}^{\varphi}/2)];$$

$$G=Al[h_{n-1/2}^{\varphi}(r_{k+1/2}f_{k+1/2,n}^{\varphi}-r_{k-1/2}f_{k-1/2,n}^{\varphi})-h_{k-1/2}^{r}(f_{k,n+1/2}^{r}-f_{k,n-1/2}^{r})];$$

$$k=K_c^j(n)+1,\dots,K_F^j(n)-1;\; n=N_c^j+1,\dots,N_F^j-1;\; j=1,2,\dots,J_r.$$

где значения функций в точках с полуцелым индексом равны полусумме значений в соседних узловых точках.

Один из возможных вариантов разностной аппроксимации уравнения для функции тока (18) имеет вид

$$\psi_{k,n}=(E_1^+\psi_{k+1,n}+E_1^-\psi_{k-1,n}+E_2^+\psi_{k,n+1}+E_2^-\psi_{k,n-1}-r_k\omega_{k,n})/E_0; \tag{35}$$

$$E_1^{\pm}=\frac{r_{k\pm 1/2}}{h_{k-1/2}^{r}h_{k-1/2\pm 1/2}^{r}};\; E_2^{\pm}=\frac{1}{r_k h_{n-1/2}^{\varphi}h_{n-1/2\pm 1/2}^{\varphi}};$$

$$E_0=E_1^++E_1^-+E_2^++E_2^-. \tag{36}$$

Граничное условие (22) заменяется следующим разностным аналогом:

$$w_{k,n}=\frac{4h^r_{k-3/2}}{(h^r_{k-1})^2 h^r_{k-2}}\psi_{k-1,n}-\frac{h^r_{k-1}}{2h^r_{k-1}(h^r_{k-3/2})^2}\psi_{k-2,n}. \tag{37}$$

В условии (37) учтено, что на границе области функция тока равна нулю.

3. Характеристика методики решения

Система конечно-разностных уравнений и граничных условий (29–37) решается методом релаксации (для уравнений (29) при $\hat{\omega}\neq 0$ и (33) применяется нижняя релаксация, для уравнения (29) при $\hat{\omega}=0$ и (35) – верхняя). Итерационный процесс реализован на ЭВМ ЕС-1033 в виде комплекса программ, написанных на языке ФОРТРАН. В зависимости от размеров сеточных областей, распределений шагов сетки, значений релаксационных параметров и выбранной точности вычислений время расчёта одного варианта магнитного поля может меняться от десяти минут до одного часа (для поля скорости – от 15 до 45 минут) машинного времени. Отметим, что при применении схемы сквозного счёта для уравнения (7) сходимость замедлялась на 20÷30%, что свидетельствует о преимуществе счёта по подобластям.

В результате численных экспериментов установлено, что расчёты могут проводиться в следующем диапазоне безразмерных параметров: $0<\hat{\omega}\lesssim 10^4$; $0<Re\lesssim 10^4$, а также при любых значениях $R_\text{п}$.

Достоверность результатов, полученных с использованием конечно-разностной методики, проверялась на тестовой задаче для модели зоны контакта расплава и тигля, допускающей аналитическое решение как в полярной, так и декартовой системе координат (сектор с малыми угловыми размерами при выраженном скин-эффекте заменяется прямоугольником [10]). Получено хорошее качественное и количественное согласование результатов.

На рис. 5 показан пример расчёта распределения плотности вихревых токов в расплаве и тигле, а также линий тока, характеризующих циркуляцию расплава.

ЛИТЕРАТУРА

I. Тир Л.Л., Фомин Н.И. Современные методы индукционной плавки. - М.: Энергия, 1975. - II2 с.

2. Фомин Н.И. Выделение электромагнитной энергии в расплавленном металле при наличии контакта металла со стенкой разрезного металлического канала в аксиальном магнитном поле. - В кн.: Седьмое рижское совещание по магнитной гидродинамике. Рига: Зинатне, 1972, т. 3, с. 45-47.

3. Ефимовских Н.А. Расчёт электромагнитного поля плавильного устройства с "холодным" тиглем. - В кн.: Применение токов высокой частоты в электротермии: Тезисы 9-ой Всесоюзной научно-технической конференции. Л., 198I, с. I20-I2I.

4. Павлов С.И., Тир Л.Л., Якович А.Т. Численное моделирование движения металла в индукционной печи с холодным тиглем. - В кн.: Десятое рижское совещание по магнитной гидродинамике. Саласпилс: Институт физики АН ЛатвССР, 198I, т. 3, с. 2I-22.

5. Жидкометаллические контакты / Информэлектро. - Обзорная информация ТС-7. Аппараты низкого напряжения. М., I980. - 65 с.

6. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. - М.: Мир, I967. - 352 с.

7. Микельсон Ю.Я., Павлов С.И., Якович А.Т. Методика численного расчёта осесимметричного МГД-течения в произвольной области. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, I980, с. 3-I9.

8. Takemitsu N. On a finite-difference approximation for the steady Navier-Stokes equations.- Journal of Computational Physics, 1980, vol. 36, p. 236-248.

9. Якович А.Т., Павлов С.И. Некоторые конечно-разностные методы расчёта осесимметричного стационарного течения. - В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, I978, т. 4, с. 44-62.

I0. Гельфгат А.Ю., Павлов С.И. Аналитический расчёт электромагнитного поля и движения расплава в зоне контакта с холодным тиглем индукционной печи. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, I982, с. 20-29.

Статья поступила первоначально I9 января I98I года,
в окончательной редакции 22 марта I982 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига, ЛГУ им. П.Стучки, с. 20-29

УДК 538.4+621.365+517.958

А.Ю.Гельфгат, С.И.Павлов
ЛГУ им. П.Стучки

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ДВИЖЕНИЯ РАСПЛАВА В ЗОНЕ КОНТАКТА С ХОЛОДНЫМ ТИГЛЕМ ИНДУКЦИОННОЙ ПЕЧИ

В [I] предложены математические модели и разработана конечно-разностная методика расчёта электромагнитных (ЭМ) и гидродинамических (ГД) полей в индукционной печи с холодным тиглем (ИПХТ). Для оценки достоверности результатов, полученных по методике [I], представляет интерес их сравнение с результатами решения тестовой задачи.

В настоящей работе проведено аналитическое решение в декартовой системе координат уравнения для аксиальной составляющей магнитной индукции, а также системы из двух уравнений для аксиальной составляющей ротора скорости (в линеаризованной постановке) и функции тока в двумерной модели зоны контакта расплава и тигля (ИПХТ). Отметим, что в [2] для магнитной индукции получено решение методом конечных интегральных преобразований, однако отсутствуют результаты расчётов по аналитическим выражениям.

I. Постановка задачи

Для построения аналитического решения используется математическая модель зоны контакта расплава и тигля с бесконечно тонкой изолирующей перегородкой между секциями тигля; причём вместо сектора, соответствующего половине секции тигля [I, рис. 2а], рассматривается прямоугольник (рис. I)[I]. Это правомерно при следующих ограничениях на геометрические параметры

[I] см. стр. 22.

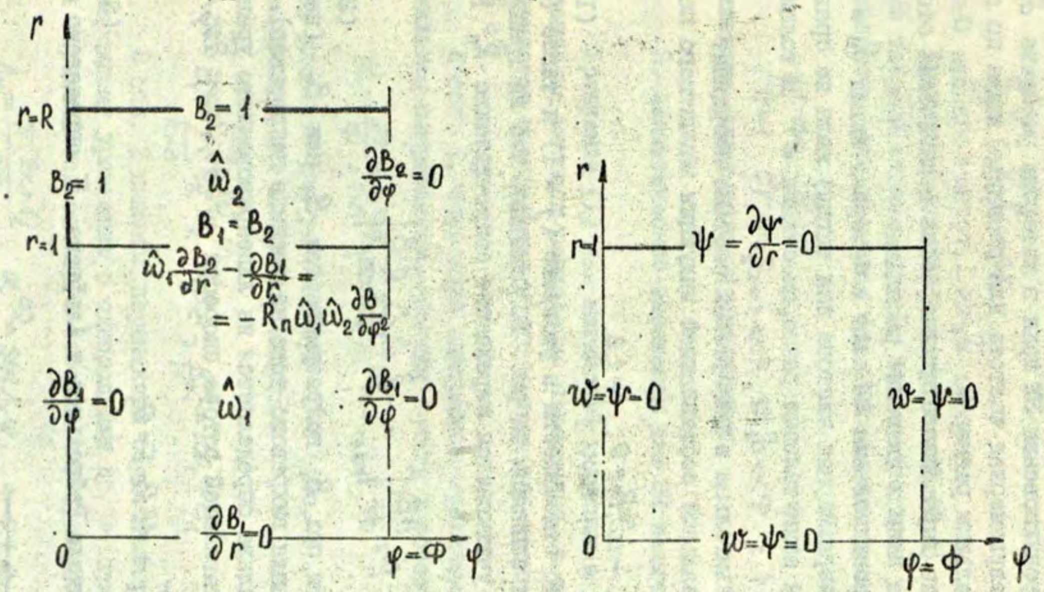


Рис. I. Электромагнитные и гидродинамические граничные условия.

системы:

I) Максимальный размер секции $2\Phi R$ в азимутальном направлении φ мал по сравнению с радиальным размером R : $\Phi \ll 0,5$.

2) Глубина проникновения ЭМ поля в материал расплава $\delta_1 = \sqrt{2/\hat{\omega}_1}$ ($\hat{\omega}_1$ - безразмерная частота для расплава) мала по сравнению с его радиальным размером: $\delta_1 \ll 1$, тогда в области $0 < r \lesssim 0,5 \div 0,7$ из-за выраженного скин-эффекта практически отсутствует ЭМ силовое поле и движение расплава.

3) Глубина проникновения ЭМ поля в материал тигля $\delta_2 = \sqrt{2/\hat{\omega}_2}$ ($\hat{\omega}_2$ - безразмерная частота для тигля) мала по сравнению с минимальным азимутальным размером секции 2Φ и толщиной стенки тигля $R-1$: $\Phi \gg \delta_2/2$; $R \gg 1+\delta_2$.

Уравнение Гельмгольца в декартовой системе координат относительно аксиальной составляющей индукции магнитного поля

$$\frac{\partial^2 B_j}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 B_j}{\partial \varphi^2} - i\hat{\omega}_j B_j = 0; \quad j = 1,2 \tag{I}$$

рассматривается по отдельности в расплаве (j = I) и тигле ($j=2$). Граничные условия записаны на рис. I. Отметим, что на границе расплава и тигля учитывается переходное сопротивление $\hat{R}_п$ [I, 3]:

$$\hat{\omega}_1 \frac{\partial B_2}{\partial r}\bigg|_{r=1} - \hat{\omega}_2 \frac{\partial B_1}{\partial r}\bigg|_{r=1} = -\hat{R}_п \hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 \frac{\partial^2 B}{\partial \varphi^2}\bigg|_{r=1}, \tag{2}$$

где в правой части под B подразумевается B_1 или B_2 (нормальная составляющая вихревого тока на границе непрерывна).

Движение расплава определяется из линеаризованного уравнения для z - составляющей ротора скорости $w = \partial v_r/\partial\varphi - \partial v_\varphi/\partial r$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + Al \cdot Re \cdot F = 0, \tag{3}$$

где Re , Al - числа Рейнольдса и Альфвена, F определено соотношением (I5).

---

[1] Авторами проводились расчёты по аналитическим выражениям для модели прямоугольной формы с учётом конечной толщины перегородки, а также для аналогичных моделей, имеющих форму сектора.

Уравнение (3) решается совместно с уравнением для функции тока ψ, связанной с компонентами скорости v_r и v_φ формулами (2I),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = w. \tag{4}$$

Граничные условия для уравнений (3,4) показаны на рис. I. На твёрдой стенке r = I, где отсутствует условие для ротора скорости, используются оба условия для функции тока

$$\psi\Big|_{r=1} = \frac{\partial \psi}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0, \tag{5}$$

имеющие смысл условий прилипания.

2. Аналитические выражения для ЭМ величин

Уравнение (I) для магнитной индукции в расплаве (обл. I) решается методом разделения переменных, в тигле (обл. 2) применяется модификация этого метода для неоднородных уравнений [4].

В обл. I, используя однородные граничные условия в азимутальном направлении, находим спектр и собственные функции

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{\Phi}; \; u_k^{(1)} = \cos \alpha_k \varphi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

и, удовлетворяя условию при r=0 (рис. I), получаем следующее выражение для магнитной индукции

$$B_1 = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(1)} u_k^{(1)} \operatorname{ch} \beta_k r; \; \beta_k^2 = i\hat{\omega}_1 + \alpha_k^2 \tag{7}$$

В обл. 2 заменой переменных осуществляется переход к неоднородному уравнению с однородными по φ граничными условиями и определяются спектр и собственные функции

$$\lambda_k = \frac{\pi (2k+1)}{2\Phi}; \; u_k^{(2)} = \sin \lambda_k \varphi, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Соотношение для индукции B_2 получается следующим (удовлетворено условие при $r = R$):

$$B_2 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(2)} u_k^{(2)} e^{\mu_k r}\left[1 - e^{2\mu_k (R-r)}\right] -$$

$$- \frac{2i\hat{\omega}_2}{\Phi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k^{(2)}}{\lambda_k \mu_k^2}\left[1 - e^{\mu_k (R-r)}\right]; \quad \mu_k^2 = i\hat{\omega}_2 + \lambda_k^2. \tag{9}$$

Коэффициенты разложения $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ в формулах (7,9) находятся из бесконечной системы алгебраических уравнений (собственные функции обл. I (6) разлагаются по системе функций (8))

$$\frac{2(2k+1)e^{-\mu_k}}{\pi\left[1 - e^{2\mu_k (R-1)}\right]} \sum_{j=0}^{\infty} D_j^{(1)} \frac{1 + e^{-2\beta_j}}{(2k+1)^2 - 4j^2} - C_k^{(2)} =$$

$$= \frac{2e^{-\mu_k}}{\Phi \lambda_k \left[1 - e^{2\mu_k (R-1)}\right]}\left[1 - \frac{i\hat{\omega}_2}{\mu_k^2}\left(1 - e^{\mu_k (R-1)}\right)\right]; \tag{10}$$

$$\frac{2(2k+1)\hat{\omega}_2 e^{-\mu_k}}{\hat{\omega}_1 \mu_k \left[1 + e^{2\mu_k (R-1)}\right]} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_j^{(1)}}{(2k+1)^2 - 4j^2}\left[\beta_j\left(1 - e^{-2\beta_j}\right) + \right.$$

$$\left. + \hat{\omega}_1 \hat{R}_\pi \lambda_k^2 \left(1 + e^{-2\beta_j}\right)\right] - C_k^{(2)} = \frac{2i\hat{\omega}_2 e^{\mu_k (R-2)}}{\lambda_k \mu_k^2 \Phi \left[1 + e^{2\mu_k (R-1)}\right]}; \tag{11}$$

$$C_k^{(1)} = e^{-\beta_k} D_k^{(1)}; \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

полученной в результате сшивания на границе расплава и тигля r =I (рис. I) значений индукции и её производных (2).

Плотность вихревых токов вычисл.ется дифференцированием индукции (7,9)

$$j_r = -\frac{\partial B}{\partial \varphi}; \quad j_\varphi = \frac{\partial B}{\partial r}. \tag{12}$$

При взаимодействии вихревых токов с внешним полем в расплаве создаётся вихревая ЭМ сила

$$f_r = -\frac{1}{2} Real\left(j_\varphi^{(1)} B_1^*\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} Real \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} C_k^{(1)} C_l^{(1)*} \beta_k \, sh\beta_k r \, ch\beta_l^* r \cos\alpha_k \varphi \cos\alpha_l \varphi; \tag{13}$$

$$f_\varphi = \frac{1}{2} Real\left(j_r^{(1)} B_1^*\right) =$$

$$= \frac{1}{2} Real \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_k^{(1)} C_l^{(1)*} \alpha_k ch\beta_k r\, ch\beta_l^* r \sin\alpha_k\varphi \cos\alpha_l\varphi, \qquad (I4)$$

ротор которой имеет отличную от нуля z-составляющую

$$F = \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial r} = \frac{1}{2} Real \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_k^{(1)} C_l^{(1)*} \times$$

$$\times (\alpha_l \beta_k sh\beta_k r\, ch\beta_l^* r \sin\alpha_l\varphi \cos\alpha_k\varphi -$$

$$- \alpha_k \beta_l^* ch\beta_k r\, sh\beta_l^* r \sin\alpha_k\varphi \cos\alpha_l\varphi) \qquad (I5)$$

(звёздочкой отмечено комплексное сопряжение).

3. Аналитические выражения для ГД величин

Поскольку для ротора скорости ϑ и функции тока ψ граничные условия в азимутальном направлении одинаковы (рис. I), при отыскании решения уравнений (3,4) применяется один и тот же спектр и собственные функции

$$\gamma_k = \frac{\pi k}{\Phi};\ u_k^{\vartheta} = \sin\gamma_k\varphi;\ k = 1, 2, \ldots \qquad (I6)$$

После разделения переменных в уравнении (3) и использования условия при $r=0$ (рис. I) получается следующее выражение для ротора скорости

$$\vartheta = \frac{\pi ReAl}{8\Phi} Real \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} C_k^{(1)} C_l^{(1)*} u_m^{\vartheta} \left[\frac{\Lambda^-}{\Gamma_+} sh(\beta_k + \beta_l^*) r +\right.$$

$$\left. + \frac{\Lambda^+}{\Gamma_-} sh(\beta_k - \beta_l^*) r\right] + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{\vartheta} u_m^{\vartheta} sh\gamma_m r, \qquad (I7)$$

где введены следующие обозначения

$$\Lambda^{\pm}=\ell\beta_k\Delta^{-}\pm k\beta_\ell^{*}\Delta^{+};\qquad \varkappa_a=\begin{cases}0, & a\neq 0;\\ 1, & a=0.\end{cases}$$

$$\Gamma_{\pm}=(\beta_k\pm\beta_\ell^{*})^2-\gamma_m^{2};$$

$$\Delta^{\pm}=\varkappa_{k+\ell-m}+\varkappa_{k+\ell+m}\pm(\varkappa_{k-\ell-m}-\varkappa_{k-\ell+m}). \tag{18}$$

Применяя аналогичную процедуру для уравнения (4) и удовлетворяя граничные условия $\psi=0$ при $r=0$; $r=1$, находим разложение для функции тока

$$\psi=-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_m^{w}u_m^{w}}{\gamma_m^{2}}(r\,ch\gamma_m r-cth\gamma_m\,sh\gamma_m r)+$$

$$+\frac{\pi ReAl}{8\Phi}Real\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}C_k^{(1)}C_\ell^{(1)*}u_m^{w}\left\{\frac{\Lambda^{-}}{\Gamma_{+}^{2}}\left[sh(\beta_k+\beta_\ell^{*})\frac{sh\gamma_m r}{sh\gamma_m}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-sh(\beta_k+\beta_\ell^{*})r\right]+\frac{\Lambda^{+}}{\Gamma_{-}^{2}}\left[sh(\beta_k-\beta_\ell^{*})\frac{sh\gamma_m r}{sh\gamma_m}-sh(\beta_k-\beta_\ell^{*})r\right]\right\}. \tag{19}$$

Коэффициенты C_m^{w} в формулах (17,19) определяются из граничного условия (5) для производной от функции тока

$$C_m^{w}=\frac{\pi ReAl\,\gamma_m\,sh\gamma_m}{2\Phi(sh2\gamma_m-2\gamma_m)}Real\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty}C_k^{(1)}C_\ell^{(1)*}\left\{\frac{\Lambda^{-}}{\Gamma_{+}^{2}}\times\right.$$

$$\times\left[\gamma_m sh(\beta_k+\beta_\ell^{*})cth\gamma_m-(\beta_k+\beta_\ell^{*})ch(\beta_k+\beta_\ell^{*})\right]+$$

$$\left.+\frac{\Lambda^{+}}{\Gamma_{-}^{2}}\left[\gamma_m sh(\beta_k-\beta_\ell^{*})cth\gamma_m-(\beta_k-\beta_\ell^{*})ch(\beta_k-\beta_\ell^{*})\right]\right\}. \tag{20}$$

Компоненты скорости v_r и v_φ находятся дифференцированием функции тока:

$$v_r=\frac{\partial\psi}{\partial\varphi};\quad v_\varphi=-\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{21}$$

4. Характеристика методики расчёта

Для расчётов по аналитическим выражениям (7, 9 - I2) и (I7-20) составлены программы на языке ФОРТРАН для ЭВМ ЕС-I033.

При вычислениях на ЭВМ бесконечная система уравнений (I0, II) для коэффициентов $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ заменяется конечной системой размерности $2n$. Сходимость метода редукции для системы (I0,II), приведённой к виду

$$\xi_i - \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}\xi_k = h_i, \quad i=0,1,2,\ldots \tag{22}$$

определяется условием [5]

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty, \tag{23}$$

где под ξ_i подразумевается $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$.

Система из $2n$ алгебраических уравнений решается методом Гаусса с выбором главного элемента [6].

Для достижения точности 3-5% в расчётах магнитной индукции по формулам (7,9) в зависимости от положения точки с координатами (φ, r) необходимо выбрать $n = 3 \div 6$ членов ряда[2] (если r =I, ряды (7,9) сходятся медленно, и при n =I0 точность составляет лишь 40÷50%).

Суммирование трёхкратных рядов (I7,I9) при n =3÷6 даёт для ротора скорости и функции тока точность 30÷40%, то есть оценку по порядку величины.

Улучшить точность вычислений можно увеличением числа n, величина которого, однако, ограничена сверху максимальной степенью экспоненты, вычисляемой на ЕС ЭВМ. Для безразмерной частоты расплава и тигля $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2$ =I00÷I000 количество суммируемых членов составляет n =5÷I0.

5. Некоторые результаты

В расчётах использовалась модель со следующими параметрами: R =I,2; Φ =0,I74; $\hat{\omega}_1$ =I00; $\hat{\omega}_2$=I000; $\hat{R}_n$ =0; Re =50;

---

[2] Суммирование проводится с двойной точностью.

$A\ell = 10^3$.

На рис. 2 показаны результаты для магнитной индукции в тигле, полученные различными методами: сплошная кривая соответствует конечно-разностной методике [I]; кружками отмечены результаты расчёта по формуле (9) при n =7; квадратиками изображены результаты расчёта, полученные по аналитическим выражениям для модели, аналогичной представленной на рис. I, но учитывающей конечную ширину перегородки, изолирующей секции тигля. Наблюдается хорошее согласование результатов.

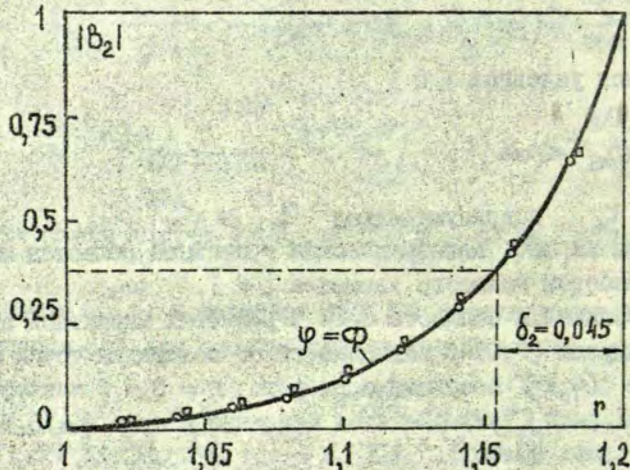


Рис. 2. Зависимость модуля магнитной индукции от радиуса в тигле.

Результаты расчётов движения расплава по формулам (I7,I9) качественно согласуются с результатами, полученными конечно-разностным методом [I]; максимальные значения ротора скорости и функции тока, рассчитанные по обеим методикам, совпадают по порядку величины.

ЛИТЕРАТУРА

I. Павлов С.И., Тир Л.Л., Якович А.Т. Математические модели и методика расчёта электромагнитного поля и движения расплава в индукционной печи с холодным тиглем. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 3-19.

2. Ефимовских Н.А. Расчёт электромагнитного поля плавильного устройства с "холодным" тиглем. - В кн.: Применение токов высокой частоты в электротермии: Тезисы 9-ой Всесоюзной научно-технической конференции. Л., 1981, с. 120-121.

3. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики.-М.: Мир, 1967. - 352 с.

4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972, - 735 с.

5. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. - М.: Наука, 1967. - 416 с.

6. Калиткин Н.Н. Численные методы. - М.: Наука, 1978. - 512 с.

Статья поступила 10 апреля 1982 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 30-39

УДК 538.323.001

Н.Ф.Блюменау, М.В.Воловик
ЛГУ им. П.Стучки

РАСЧЁТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТОКОВОЙ РАМКИ В ПРИСУТСТВИИ ПОЛУПЛОСКОГО ИДЕАЛЬНО ФЕРРОМАГНИТНОГО ЭКРАНА

Расчёт магнитного поля в присутствии ферромагнитных тел представляет собой актуальную задачу для целого ряда технических направлений. Особый класс задач связан с оценкой экранирующего действия ферромагнитных листов и учётом краевых эффектов [1]. В связи с тем, что на практике ферромагнитные экраны выполняются тонкими, многие традиционно применяемые методы расчёта оказываются для этого случая малоэффективными, и здесь целесообразно применять особые приёмы, учитывающие малую толщину экрана. Тем не менее, точная постановка задачи, особенно при учёте насыщения материала экрана, является весьма сложной и приводит к необходимости численного решения нелинейных интегральных уравнений [2].

В связи с трудностями, возникающими при точной постановке задачи, особое значение приобретают те методы приближённой оценки поля, для которых удаётся получить явное аналитическое решение и на его основе провести исследование характера изменения поля как на поверхности экрана, так и в удалении от него. Один из таких методов может быть развит применительно к случаю тонкого плоского экрана, для которого магнитная проницаемость считается бесконечной, а толщина экрана принимается нулевой. Если экран при этом имеет форму полуплоскости, то, как показано ниже, при трёхмерном источнике[x)] удаётся получить явное решение задачи на основе рассмотрения парных интеграль-

x) см. след. стр.

уравнений с ядрами Фурье. Изложению соответствующего расчётного метода, а также получающихся результатов, связанных с оценкой эффективности экранирования, и посвящена настоящая работа.

Рассмотрим ферромагнитный экран с бесконечным значением магнитной проницаемости. Его расположение определим как $z=h$, $(h>0)$, $y<l$, $x\in(-\infty;+\infty)$. Полное значение магнитной индукции $\vec{B}^{x)}$ вне экрана определим как сумму поля $\vec{B}^{0}$ внешнего источника в отсутствие экрана, которое считается известным, и поля $\vec{B}$, связанного с намагничиванием экрана. Для нахождения магнитной индукции собственного магнитного поля экрана $\vec{B}$ введём скалярный магнитный потенциал Φ по формуле

$$\vec{B} = -\mu_0 \operatorname{grad} \Phi, \tag{1}$$

где $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Г$\cdot$м$^{-1}$ – магнитная постоянная.

Пространственным областям $z>h$ и $z<h$ присвоим индексы 1 и 2 соответственно. Тогда для Φ_m, $m=1,2$ справедливы уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi_m}{\partial z^2} = 0, \quad m=1,2 \tag{2}$$

и граничные условия

$$\Phi_m \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2+z^2} \longrightarrow +\infty, \; m=1,2, \tag{3}$$

$$\Phi_m\Big|_{z=h} = -\Phi_m^0\Big|_{z=h}, \; y<l, \; x\in(-\infty;+\infty), \; m=1,2, \tag{4}$$

где Φ_m^0 – скалярный магнитный потенциал внешнего магнитного поля, который считается известным,

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\Big|_{z=h} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\Big|_{z=h}, \; y>l, \; x\in(-\infty;+\infty), \tag{5}$$

$$\Phi_1\Big|_{z=h} = \Phi_2\Big|_{z=h}, \; y\in(-\infty;+\infty), \; x\in(-\infty;+\infty). \tag{6}$$

Граничное условие (3) соответствует внешнему полю, убывающему на бесконечности до нуля, а условие (4) выражает требование

---

x) Для двумерного источника, имеющего вид совокупности токовых нитей, параллельных границе экрана, решение задачи может быть найдено методом конформного отображения, однако этот случай в дальнейшем не рассматривается.

равенства тангенциальной составляющей вектора магнитной индукции суммарного поля нулю на поверхности идеального ферромагнетика.

Задачу (2) - (6) будем решать с помощью применения преобразования Фурье по координатам x и y:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\alpha,\beta;z) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,y,z)\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, dx\,dy, \\ \Phi(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha,\beta;z)\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, d\alpha\, d\beta, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где $\vec{k} = (\alpha,\beta,0)$, $\vec{r} = (x,y,z)$. Для изображения скалярного магнитного потенциала φ_m, $m=1,2$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решением, отвечающим преобразованным граничным условиям (3) и (6), будет

$$\varphi(\alpha,\beta;z) = U(\alpha,\beta)\, e^{-k|z-h|}, \quad k = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \qquad (8)$$

где $U(\alpha,\beta)$ - неизвестная функция от α и β, определяемая соотношением

$$\varphi_1(\alpha,\beta;h) = \varphi_2(\alpha,\beta;h) = U(\alpha,\beta).$$

Так как все интересующие нас физические эффекты связаны с зависимостью рассматриваемых величин от координаты y, будем особо интересоваться зависимостью их Фурье-изображений от соответствующего параметра β и для краткости обозначать

$$U(\alpha,\beta) = U(\beta), \quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = k(\beta),$$

считая α фиксированным параметром.

Используя граничные условия (4) и (5), получим для U парные интегральные уравнения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\beta)\, e^{i\beta y}\, d\beta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta)\, e^{i\beta y}\, d\beta, \quad y<l, \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} k(\beta)\, U(\beta)\, e^{i\beta y}\, d\beta = 0, \quad y>l, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где

$$g(\beta) = \varphi^0(\alpha,\beta;h), \qquad (10)$$

а φ^0 - изображение скалярного магнитного потенциала источника Φ^0. Обозначим $y' = y - l$. Тогда уравнения (9) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u(\beta)+g(\beta))\,e^{i\beta(l+y')}\,d\beta=0, \quad y'<0, \\ &\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\beta)u(\beta)\,e^{i\beta(l+y')}\,d\beta=0, \quad y'>0. \end{aligned}\right\} \tag{I2}$$

Функция $(u(\beta)+g(\beta))e^{i\beta l} = F^-(\beta)$ является краевым значением некоторой аналитической в нижней полуплоскости функции $F^-(\tau)$, а $K(\beta)u(\beta)e^{i\beta l} = F^+(\beta)$ - краевым значением функции $F^+(\tau)$, аналитической в верхней полуплоскости [3]. Выражая $u(\beta)$ через $F^+(\beta)$ и $F^-(\beta)$, получим краевую задачу Римана

$$F^+(\beta) - K(\beta)F^-(\beta) = -g(\beta)K(\beta)e^{il\beta}. \tag{I3}$$

Коэффициент задачи легко факторизуется:

$$K(\beta)=K_+(\beta)K_-(\beta),\ K_+(\beta)=\sqrt{\beta+i|\alpha|},\ K_-(\beta)=\sqrt{\beta-i|\alpha|}. \tag{I4}$$

Функции K_+ и K_- определяются на комплексной плоскости $\tau=\tau_1+i\tau_2$, $(\tau_1=\beta)$, разрезанной вдоль мнимой оси от точки $i|\alpha|$ до $+i\infty$ и от точки $-i|\alpha|$ до $-i\infty$. Ветви этих функций выбраны так, чтобы $K_\pm(\tau)\sim\sqrt{\tau_1}$ при $\tau=\tau_1\to+\infty$. Тогда $K=K_+K_-$.

Задача (I3) имеет единственное решение. Умножая равенство (I3) на $1/K_+(\beta)$, получим задачу о скачке

$$\frac{F^+(\beta)}{K_+(\beta)} - K_-(\beta)F^-(\beta) = -g(\beta)K_-(\beta)e^{i\beta l},$$

решением которой является

$$F^-(\tau) = \frac{1}{2\pi K_-(\tau)}\int\limits_0^{+\infty} e^{-it\tau}\,dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\beta)K_-(\beta)e^{i\beta(l+t)}\,d\beta.$$

($F^+(\tau)$ (легко находится из краевого условия).

Переходя к выражению для u, получим

$$u(\beta) = -g(\beta) + \frac{1}{2\pi K_-(\beta)}\int\limits_l^{+\infty} e^{-i\beta\xi}\,d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t)K_-(t)e^{it\xi}\,dt. \tag{I5}$$

В качестве источника внешнего поля рассмотрим прямоугольный токовый контур, расположенный в плоскости $z=0$, симметричный относительно осей x и y (рисунок I). Размеры контура

$2a \times 2b$, по контуру течёт постоянный ток силы J. Нетрудно показать, что изображение скалярного магнитного потенциала источника равно

$$\varphi^0 = \frac{2J \sin\alpha a \sin\beta b}{\alpha\beta} \operatorname{sgn} z \cdot e^{-|z|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \tag{I6}$$

Для $g(\beta)$ из (I0) получим

$$g(\beta) = \frac{2J \sin\alpha a \sin\beta b}{\alpha\beta} e^{-h\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}. \tag{I7}$$

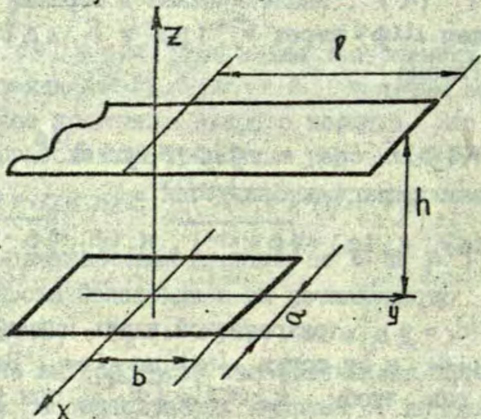


Рис. I. Взаимное расположение прямоугольной токовой рамки и полуплоского ферромагнитного экрана с бесконечной магнитной проницаемостью.

Обозначим

$$\omega^l(\alpha,\beta) = \int\limits_l^{+\infty} e^{-i\beta\xi} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin tb}{t}\sqrt{t-i|\alpha|}\, e^{-h\sqrt{\alpha^2+t^2}+it\xi} dt. \tag{I8}$$

Тогда изображение скалярного магнитного потенциала φ_m^Σ $(m=1,2)$, отвечающего полному значению магнитной индукции вне экрана $\vec{B}^\Sigma$, для области $z>h$ будет равно

$$\varphi_1^\Sigma = \varphi_1 + \varphi^0 = \omega^l(\alpha,\beta)\frac{J\sin\alpha a}{\pi\alpha\sqrt{\beta-i|\alpha|}} e^{-(z-h)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad z>h, \tag{I9}$$

а для области источника $z<h$ получим

$$\varphi_2^{\Sigma} = \frac{2J \sin\alpha a \sin\beta b}{\alpha\beta}\left(e^{-|z|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \cdot \operatorname{sgn} z - e^{(z-2h)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) +$$

$$+ \omega^{\ell}(\alpha,\beta)\frac{J \sin\alpha a}{\pi\alpha\sqrt{\beta - i|\alpha|}} e^{(z-h)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}, \quad z<h. \tag{20}$$

В расположении края экрана существуют два предельных положения: I) $\ell = +\infty$, что соответствует экрану в виде плоскости, 2) $\ell = -\infty$ – отсутствие экрана.

При этом

$$\omega^{+\infty} = 0, \quad \omega^{-\infty} = \frac{2\pi \sin\beta b}{\beta}\sqrt{\beta - i|\alpha|}\, e^{-h\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

а значения φ_m^{Σ} будут соответственно равны

$$\ell = +\infty: \quad \varphi_1^{\Sigma} = 0,$$

$$\varphi_2^{\Sigma} = \frac{2J \sin\alpha a \sin\beta b}{\alpha\beta}\left(\operatorname{sgn} z \cdot e^{-|z|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} - e^{(z-2h)\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right),$$

$$\ell = -\infty: \quad \varphi_m^{\Sigma} = \varphi^0; \quad m = 1,2.$$

В выражениях (I9), (20) слагаемое, содержащее ω^{ℓ}, характеризует влияние края экрана на величину магнитного потенциала. Из них следует, что магнитное поле будет иметь следующую структуру. В зоне экранирования:

$$\vec{B}_1^{\Sigma}(x,y,z) = \vec{B}^{\ell}(x,y,z), \quad z>h, \tag{21}$$

в зоне источника:

$$\vec{B}_2^{\Sigma}(x,y,z) = \vec{B}^0(x,y,z) + \vec{B}^{\infty}(x,y,z) + \vec{B}^{\ell}(x,y,z), \quad z<h, \tag{22}$$

где $\vec{B}^0$ – поле источника, $\vec{B}^{\infty}$ – поле, которое создавалось бы присутствием идеально ферромагнитного экрана-плоскости, $\vec{B}^{\ell}$ – поле, обусловленное наличием края экрана. $\vec{B}^0$ и $\vec{B}^{\infty}$ для рассматриваемой прямоугольной токовой рамки легко находятся с использованием (I) и интегрированием формулы обращения (7) в полярной системе координат. Приведём получающиеся выражения для $\vec{B}^0$ и $\vec{B}^{\infty}$, записанные с помощью индекса " s ", который обозначает либо "0", либо "∞":

$$B_x^s = \frac{J\mu_0 \vartheta_s}{4\pi}\left(\frac{r_{3s}(b-y) + r_{1s}(b+y)}{r_{1s} r_{3s}((a-x)^2 + \vartheta_s^2)} - \frac{r_{2s}(b+y) + r_{4s}(b-y)}{r_{2s} r_{4s}((a+x)^2 + \vartheta_s^2)}\right),$$

$$B_y^s = \frac{J\mu_0 \vartheta_s}{4\pi}\left(\frac{r_{1s}(a+x) + r_{2s}(a-x)}{r_{1s} r_{2s}((b-y)^2 + \vartheta_s^2)} - \frac{r_{3s}(a+x) + r_{4s}(a-x)}{r_{3s} r_{4s}((b+y)^2 + \vartheta_s^2)}\right)$$

$$B_x^s = \frac{y\mu_0}{4\pi}\left(\frac{(a+x)(r_{2s}(b+y)+r_{4s}(b-y))}{r_{2s}r_{4s}((a+x)^2+\vartheta_s^2)} + \frac{(a-x)(r_{1s}(b+y)+r_{3s}(b-y))}{r_{1s}r_{3s}((a-x)^2+\vartheta_s^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(b+y)(r_{3s}(a+x)+r_{4s}(a-x))}{r_{3s}r_{4s}((b+y)^2+\vartheta_s^2)} + \frac{(b-y)(r_{1s}(a+x)+r_{2s}(a-x))}{r_{1s}r_{2s}((b-y)^2+\vartheta_s^2)}\right), \quad (23)$$

где

$$\vartheta_0 = z,$$

$$\vartheta_\infty = z - 2h, \quad z < h,$$

$$r_{1s} = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+\vartheta_s^2}, \qquad r_{3s} = \sqrt{(a-x)^2+(b+y)^2+\vartheta_s^2}, \quad (24)$$

$$r_{2s} = \sqrt{(a+x)^2+(b-y)^2+\vartheta_s^2}, \qquad r_{4s} = \sqrt{(a+x)^2+(b+y)^2+\vartheta_s^2}.$$

Магнитное поле $\vec{B}^\ell$, характеризующее влияние края экрана, можно рассчитать следующим образом. Из (I), (7), (I8), (I9)-(22) следует, что

$$\vec{B}^\ell(x,y,z) = \frac{\mu_0 y}{4\pi^2}\int\limits_{\ell}^{+\infty}\vec{W}(x,y,z;\xi)\,d\xi, \quad (25)$$

где

$$\vec{W} = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha a\cos\alpha x}{\alpha}\vec{T}(\alpha\ \xi)\,d\alpha, \quad (26)$$

$$\vec{T}(\alpha,\xi) = f(\alpha,\xi)(\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha x\, S_x;\ -iS_y;\ \mathrm{sgn}(z-h)S_z), \quad (27)$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{S}(\alpha,\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{æ}(\alpha,\beta)}{\sqrt{\beta - i|\alpha|}}e^{i\beta(y-\xi)-|z-h|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,d\beta,\\ &\vec{æ} = (1;\ \beta;\ \sqrt{\alpha^2+\beta^2}), \end{aligned}\right\} \quad (28)$$

$$f(\alpha,\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin tb}{t}\sqrt{t-i|\alpha|}\,e^{it\xi - h\sqrt{\alpha^2+t^2}}\,dt. \quad (29)$$

Интегралы (28) - (29) берутся с помощью методики, изложенной в [4]. Обозначим

$$\gamma(y,z,\xi) = \frac{\sqrt{r+y-\xi}}{r}, \quad r = \sqrt{(y-\xi)^2+(z-h)^2}. \quad (30)$$

Тогда компоненты вектора $\vec{S}(\alpha,\xi)$, через которые выражена функция $\vec{T}(\alpha,\xi)$, будут

$$S_x = \sqrt{2\pi i}\,\gamma\, e^{-\tau|\alpha|}\ ; \quad S_y = \frac{i}{\tau}\left((y-\xi)|\alpha| + \frac{y-\xi}{\tau} - \frac{1}{2}\right) S_x\ ;$$
$$S_z = \frac{1}{\tau}\left(|z-h|\cdot|\alpha| + \frac{(z-h)^2 + \tau(y-\xi) - (y-\xi)^2}{2\tau\,|z-h|}\right) S_x\,. \qquad (3I)$$

Для $f(\alpha, \xi)$ получим

$$f(\alpha,\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2i}} \int\limits_0^b \sum_{K=1}^{2} (a_K|\alpha| + b_K)\, e^{-\rho_K|\alpha|}\, d\tau, \qquad (32)$$

$$a_K = \frac{2h}{\rho_K^2}\sqrt{\rho_K - \xi_K}\,, \quad b_K = \frac{\sqrt{\rho_K - \xi_K}}{h\rho_K^3}\left(h^2 - \xi_K\rho_K - \xi_K^2\right),$$
$$\rho_K = \sqrt{h^2 + \xi_K^2}\,, \quad \xi_1 = \xi + \tau\,, \quad \xi_2 = \xi - \tau. \qquad (33)$$

Подставляя (3I) и (32) в (27), а затем в (26) и интегрируя по α, получим выражение для компонент вектора $\vec{W}(x, y, z, \xi)$:

$$W_m = \gamma \int\limits_0^b \sum_{K=1}^{2} \vec{A}_{Km} \cdot \vec{C}_{Km}\, d\tau. \qquad (34)$$

Здесь и ниже индекс m принимает значения x, y, z, а компоненты векторов $\vec{A}_{Km} = (A_{Kmx}, A_{Kmy}, A_{Kmz})$ и $\vec{C}_{Km} = (C_{Kmx}, C_{Kmy}, C_{Kmz})$ приводятся в таблицах I и 2, где $p_K = \tau + \rho_K$.

Таблица I

A_{Kmj}	$m = x$	$m = y$	$m = z$
$j = x$	$\frac{1}{2}a_K$	$a_K(y-\xi)/\tau$	$a_K(z-h)/\tau$
$j = y$	$\frac{1}{2}b_K$	$\frac{2\tau b_K(y-\xi) + a_K(y-\xi-\tau)}{4\tau^2}$	$\frac{2\tau b_K(z-h)^2 + a_K((z-h)^2 + \tau(y-\xi) - (y-\xi)^2)}{4\tau^2(z-h)}$
$j = z$	0	$\frac{b_K}{4\tau^2}(2(y-\xi) - \tau)$	$\frac{b_K}{\tau(z-h)}((z-h)^2 + \tau(y-\xi) - (y-\xi)^2)$

Таблица 2

C_{kmj}	$m=x$	$m=y,z$
$j=x$	$\frac{p_k^2-(a-x)^2}{(p_k^2+(a-x)^2)^2}-\frac{p_k^2-(a+x)^2}{(p_k^2+(a+x)^2)^2}$	$\frac{p_k(a+x)}{(p_k^2+(a+x)^2)^2}+\frac{p_k(a-x)}{(p_k^2+(a-x)^2)^2}$
$j=y$	$\frac{p_k}{p_k^2+(a-x)^2}-\frac{p_k}{p_k^2+(a+x)^2}$	$\frac{a+x}{p_k^2+(a+x)^2}+\frac{a-x}{p_k^2+(a-x)^2}$
$j=z$	0	$\mathrm{arctg}\frac{a+x}{p_k}+\mathrm{arctg}\frac{a-x}{p_k}$

Таким образом, нахождение вектора магнитной индукции $\vec{B}^{\ell}$ сводится к вычислению интегралов (25) и (34) от скалярных произведений векторов $\vec{A}_{km}, \vec{C}_{km}\ (m=x,y,z)$, компоненты которых помещены в таблицах I, 2, а входящие в них величины a_k, b_k, τ, ρ_k задаются формулами (30), (33). По изложенной выше методике были проведены расчёты коэффициента экранирования магнитного поля η, определяемого как

$$\eta(x,y,z)=\frac{|\vec{B}^{z}(x,y,z)|}{|\vec{B}^{0}(x,y,z)|},$$

в зависимости от взаимного расположения токовой рамки и экрана.

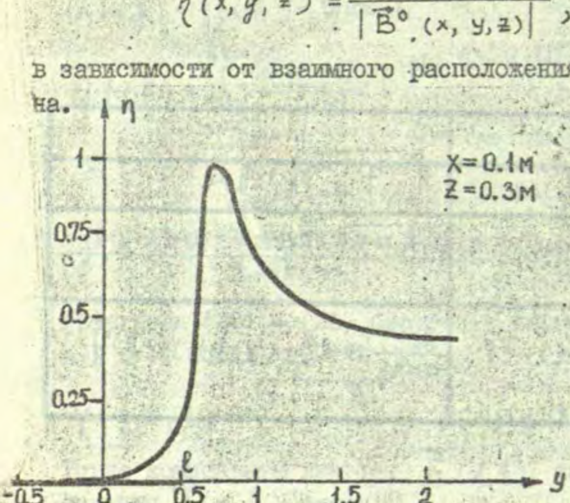


Рис. 2. Зависимость коэффициента экранирования η от координаты y. Размеры рамки 1,0 м × 0,3 м.

Пример расчёта зависимости η от координаты y приведён на рис.2. Как и ожидалось, вблизи края экрана наблюдается резкое увеличение η и, затем, более медленное его уменьшение при удалении от экрана.

Таким образом, предложенный метод позволяет учесть влияние края идеально ферромагнитного экрана на величину магнитного поля и экранирующие свойства, если источником магнитного поля является прямоугольная рамка с постоянным током.

ЛИТЕРАТУРА

I. Иваса. Магнитное экранирование для экипажей с магнитным подвешиванием. - В кн.: Наземный транспорт 80-х годов. М.: Мир, 1974, с. II4-I20.

2. Толмачев С.Т. Расчёт магнитных полей в нелинейных анизотропных средах. - Электричество, 1980, № 9, с. 7-I3.

3. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. - М.: Наука, 1978. - 295 с.

4. Блюменау Н.Ф. Взаимодействие токовой рамки с идеально проводящей полосой. Часть 2. Вычисление электродинамической силы. - Изв. АН ЛатвССР. Серия физических и технических наук, 1981, №I, с. I08-II6.

Статья поступила 26 марта 1982 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 40-50

УДК 538.54:001.24

К.Э.Воеводский

Ленинградский институт инженеров
железнодорожного транспорта

О ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ

Технические трудности, возникающие при расчёте трёхмерных полей, возбуждаемых токовым источником в присутствии магнетика (экрана), часто заставляют обращаться к двумерному приближению. В двумерной задаче экран имеет вид цилиндра с сечением произвольной формы, источником служит совокупность токовых нитей, нормальных, как и образующие экрана, некоторой плоскости (x, y). Экран считается идеально ферромагнитным ($\mu = \infty$) или сверхпроводящим ($\sigma = \infty$).

Обычная схема решения задачи такова [1,2]. Ищется комплексный потенциал, возбуждаемый экраном (полный потенциал за вычетом потенциала источника), что равносильно отысканию аналитической функции по граничным значениям её вещественной или мнимой частей. Конформным отображением область аналитичности переводится в каноническую область, и потенциал выражается интегралом Пуассона.

Как будет видно, в роли искомой функции удобнее использовать полный комплексный потенциал. Тогда дело сведётся к отысканию функции с заданными особенностями и вещественными или чисто мнимыми граничными значениями. Решение такой задачи не содержит квадратур и весьма просто выражает потенциал через соответствующее конформное отображение. Простота итоговых формул позволяет в общем виде исследовать поле вблизи точек, нарушающих гладкость поверхности экрана (углы, края, стыки). В некоторых особых случаях традиционная постановка двумерной задачи оказывается некорректной. Соответствующая модификация условия приводит к новым задачам, допускающим физическую интерпретацию.

Во второй части работы будут рассмотрены разнообразные конкретные приложения полученных здесь общих результатов.

I. Формулировка основных задач

Пусть $\overline{C}_z$ - расширенная комплексная плоскость переменной $z=x+iy$, S_z - её бесконечно удалённая точка, D^- - сечение экрана плоскостью $\overline{C}_z$. Γ - его граница, D^+ - дополнение до $\overline{C}_z$. Мы считаем, что Γ - связная кривая, $\Gamma \subset D^-$; случай $\Gamma = D^-$ (бесконечно тонкий экран) не исключается. Пусть $z_1,\ldots,z_n$; $I_1,\ldots,I_n$ - комплексные координаты токовых нитей и токи в них (орты e_x, e_y и положительное направление тока образуют правую тройку). Комплексный потенциал λ определён в D^+ формулой $\lambda=-A-i\Psi$, где A - однокомпонентный векторный, Ψ - скалярный потенциалы. Магнитный вектор связан с $\lambda(z)$ соотношением $\lambda'(z)=H_y+iH_x$. Потенциал, возбуждаемый k-ой токовой нитью $\lambda_k=\frac{1}{2\pi}\ln(z-z_k)$, и собственный потенциал экрана $\lambda(z)-\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(z)\equiv u(z)$ есть аналитические функции всюду в D^+, за исключением, быть может, точки S_z. Вследствие обнуления тангенциальных (нормальных) компонент $\vec{H}$ на поверхности ферромагнитного (сверхпроводящего) экрана

$$\operatorname{Im}\lambda(z)\Big|_{z\in\Gamma}=0\;,\quad \left(\operatorname{Re}\lambda(z)\Big|_{z\in\Gamma}=0\right). \tag{I.I}$$

Ход дальнейших рассуждений зависит от того, лежит ли точка S_z внутри D^-, на границе Γ или в D^+. Разберём эти возможности.

Случай А: $S_z\in D^-\setminus\Gamma$ (ищется поле, возбуждаемое источником внутри замкнутой оболочки). В случае "А" область аналитичности функции u — $D^+\setminus S_z=D^+$ односвязна, поэтому $u(z)$ голоморфна в D^+. Мы приходим к формулировке задач A_I, A_2 (индекс "I" отвечает ферромагнитному, "2" - сверхпроводящему экранам).

Задача $A_I(A_2)$. В ограниченной области D^+ ищется функция λ, удовлетворяющая первому (второму) условию (I.I) и такая, что

$$u(z)\equiv\lambda(z)-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}I_k\ln(z-z_k) \text{ голоморфна в } D^+. \tag{I.2}$$

Случай В: $S_z \in \Gamma$ (экран с неограниченным сечением в плоскости (x, y)). Функция u остаётся голоморфной и в случае "В". Выполнения же граничных условий теперь можно требовать лишь для конечных точек границы, а в точке S_z эти условия нужно заменить требованием ограниченности скалярного потенциала. Итак:

задача B_I (B_2). Искомая функция λ удовлетворяет условию (I.2), и

$$\operatorname{Im} \lambda(z)\Big|_{z\in\Gamma\setminus S_z} = 0, \quad \left(\operatorname{Re} \lambda(z)\Big|_{z\in\Gamma\setminus S_z} = 0\right), \tag{I.3}$$

$$\operatorname{Im} \lambda(z) \text{ ограничена при } z \to \infty. \tag{I.4}$$

Случай С: $S_z \in D^+$ (экран ограниченного сечения). Для случая "С" сохраняют силу условия (I.I) и (I.4), а область аналитичности функции u — $D^+ \setminus S_z$ двусвязна. Очевидно, $u(z)$ голоморфна в $D^+ \setminus \ell$, где ℓ - разрез от некоторой граничной точки до S_z. Вычислим приращение этой функции $[u]_\gamma$ на произвольном замкнутом пути γ, лежащем в $D^+ \setminus S_z$ и охватывающем область D^-. Поскольку область $D^+ \setminus S_z$ не содержит особых точек функции u, путь γ можно деформировать таким образом, чтобы он не охватывал точек $z_1, \ldots, z_n$. Тогда $[\ln(z-z_k)]_\gamma = 0$, и $[u]_\gamma = [\lambda]_\gamma =$

$$= \int_\gamma \lambda'(z)dz = \int_\gamma (H_y + iH_x)(dx + idy) = -\int_\gamma H_n |dz| + i\int_\gamma H_t |dz|.$$

Первый интеграл в этой сумме равен нулю из-за соленоидальности магнитного вектора, второй - есть его циркуляция вдоль пути γ. Поскольку кольцо между γ и границей Γ не пронизывается токами, циркуляции вдоль этих контуров одинаковы, и, следовательно,

$$[u]_\gamma = i\int_\Gamma H_t |dz| = -[\Psi]_\Gamma = [\operatorname{Im}\lambda]_\gamma. \tag{I.5}$$

Для ферромагнитного экрана $[u]_\gamma = [\operatorname{Im}\lambda]_\gamma = 0$ вследствие первого из условий (I.I), поэтому функция u голоморфна в $D^+ \setminus S_z$. В силу (I.4) S_z не может быть ни полюсом, ни существенно особой точкой, так что $u(z)$ голоморфна во всей области D^+. Мы пришли к задаче C_I, которая формулируется так же, как задача A_I, с той разницей, что в задаче C_I $S_z \in D^+$.

В случае сверхпроводящего экрана из равенств (I.5) следует, что $[u]_\gamma = iI$, где I – полный транспортный ток, текущий по сверхпроводнику. Теперь можно сформулировать задачу C_2.

Задача C_2. Искомая функция λ определена в $D^+ (S_z \in D^+)$, удовлетворяет второму условию (I.I), условию (I.4) и условиям:

$$u(z) = \lambda(z) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} I_k \ln(z - z_k) \text{ голоморфна в } D^+ \setminus l, \quad \text{(I.6)}$$

$[u]_\gamma = iI$ для любого пути γ гомотопного Γ в $D^+ \setminus S_z$. (I.7)

В разделе 3 естественным образом возникнут ещё две задачи, формулировку которых мы приводим пока без обсуждения.

Задача A_I'. Пусть $S_z \in D^- \setminus \Gamma$, a – некоторая граничная точка. Искомая функция λ удовлетворяет условию (I.2) и условиям

$$\operatorname{Im} \lambda(z)\big|_{z \in \Gamma \setminus a} = 0 \,; \quad \operatorname{Im} \lambda(z) \text{ ограничена при } z \to a. \quad \text{(I.8)}$$

Задача C_I'. Пусть $S_z \in D^+$. Искомая функция λ определена в D^+ и удовлетворяет условиям (I.4), (I.6), (I.8).

2. Формулировка и решение вспомогательных задач

Решаемые здесь задачи I, I', П, П' совпадают или сходны с задачами B_I, B_2 в том частном случае, когда D^+ – верхняя полуплоскость. Для удобства дальнейшего изложения здесь, по сравнению с разделом I, изменены некоторые обозначения.

Итак, пусть P^+ – открытая верхняя полуплоскость расширенной комплексной плоскости $\overline{C}_w$; S_w – бесконечно удалённая точка; $w_0, w_1, \dots, w_n \in P^+$; $I_0, I_1, \dots, I_n$ – некоторые постоянные. Каждой из задач: I, I', П, П' отвечает определённый набор требований к искомой функции $\Lambda(w)$ из числа приведённых ниже.

$$\text{Функция } \Lambda(w) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} I_k \ln(w - w_k) \text{ голоморфна в } P^+, \quad \text{(2.I)}$$

$$\operatorname{Im} \Lambda(w) \to 0 \text{ при } \operatorname{Im} w \to 0, \quad \text{(2.2)}$$

$$\operatorname{Re} \Lambda(w) \to 0 \text{ при } \operatorname{Im} w \to +0, \quad \text{(2.3)}$$

$\operatorname{Im} \Lambda(w)$ ограничена при $w \to \infty$, $w \in P^+$, (2.4)

$\operatorname{Im} \Lambda(w) \to 0$ при $w \to \infty$, $w \in P^+$, (2.5)

$\operatorname{Re} \Lambda(w) \to 0$ при $w \to \infty$, $w \in P^+$. (2.6)

Все задачи включают условие (2.I) и в дополнение к нему: задача I - условия (2.2), (2.4); задача П - (2.3), (2.4); задача I^r - (2.2), (2.5); задача П^r - (2.3), (2.6).

Теорема 2.I. Решения задач I - П^r единственны с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. Пусть Λ', Λ'' - решения задачи I. Функция $\Lambda = \Lambda' - \Lambda''$ голоморфна в P^+, принимает на вещественной оси вещественные значения, и по принципу симметрии её можно продолжить в нижнюю полуплоскость. В силу (2.4) S_w может быть особой точкой функции Λ, так что Λ голоморфна во всей C_w, откуда $\Lambda = const$. Для других задач доказательство аналогично.

Займёмся решением задач I, П. Легко проверить, что функция

$$\Lambda(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} I_k \left[\ln(w - w_k) \pm \ln(w - \bar{w}_k) \right], \tag{2.7}$$

где верхний (нижний) знак отвечает задаче I(П), удовлетворяет всем условиям этих задач. (Черта над символом обозначает комплексное сопряжение). Нетрудно проверить, что поведение функций (2.7) в бесконечности определяется соотношениями

$$\Lambda(w) = \frac{1}{\pi} \ln w \sum_{k=0}^{n} I_k + O\left(\frac{1}{w}\right); \quad \Lambda(w) = O\left(\frac{1}{w}\right). \tag{2.8}$$

Первое (второе) представление отвечает задаче (П).

Как видно из (2.8), решение задачи П удовлетворяет и условиям задачи П^r, так что в силу теоремы 2.I эти задачи равносильны. То же можно сказать о задачах I и I^r, если $\sum_{k=0}^{n} I_k = 0$. Отметим, что задача I^r есть усиленный вариант задачи I, поэтому она не может иметь решений, отличных от решений последней. Отсюда и из теоремы 2.I заключаем, что при $\sum_{k=0}^{n} I_k \neq 0$ задача I^r неразрешима.

3. Решение основных задач

Пусть $w = f(z)$ - конформное однолистное отображение области

D^+ на верхнюю полуплоскость P^+; $w_\kappa = f(z_\kappa)$, $\kappa = 1,\dots,n$; $w_0 = f(\infty)$; $\Lambda(w) = \lambda(f^{-1}(w))$.

Необходимо сформулировать задачи раздела I в терминах новой искомой функции $\Lambda(w)$.

Заметим, что предельные значения $\lambda(z)$ на Γ суть предельные значения функции $\Lambda(w)$ на вещественной оси и в точке S_w. Поэтому граничные условия задач A_I, C_I (A_2, C_2) равносильны совокупности условий (2.2) и (2.5) ((2.3) и (2.6)). В случае "B", применив подходящее дробно-линейное преобразование, можно добиться выполнения равенства $f(\infty)=\infty$, и тогда граничные условия задачи B_I (B_2) сведутся к совокупности условий (2.2) (или 2.3)) и (2.4). Для задачи C_2 условие (I.5) эквивалентно требованию

$$Im\,\Lambda(w) \text{ ограничена при } w \to w_0. \tag{3.I}$$

Для приведения условий (I.2), (I.7) к виду (2.I) понадобится

Теорема (3.I). Для функции $p_\kappa(w) \equiv z - z_\kappa = f^{-1}(w) - f^{-1}(w_\kappa)$, $(\kappa = 1,\dots,n)$ справедливо представление

$$\ln p_\kappa(w) = \ln(w - w_\kappa) - \varkappa \ln(w - w_0) + Q_\kappa(w), \tag{3.2}$$

где $Q_\kappa(w)$ голоморфна в P^+, $\varkappa = 1(0)$, если $S_z \in D^+(D^-)$.

Доказательство. Пусть $S_z \in D^+$, тогда $w_0 \in P^+$, и функция $p_\kappa(w)$ имеет в P^+ корень w_κ и полюс w_0. В силу однолистности отображения f кратность их равна единице, и других нулей и особых точек в P^+ нет [3]. Поэтому $p_\kappa(w) = \frac{w - w_\kappa}{w - w_0}\, q(w)$, где q голоморфна и отлична от нуля в P^+. Отсюда получаем представление (3.2), в котором $Q_\kappa = \ln q$, $\varkappa = 1$. При $S_z \in D^-$ доказательство аналогично.

Теорема 3.I. и сделанные выше замечания о граничных условиях влекут за собой следующие важные следствия.

I^0 задача A_I (A_2) равносильна задаче I' (II') с $I_0 = 0$,

2^0 задача B_I (B_2) равносильна задаче I (II) с $I_0 = 0$,

3^0 задача C_I равносильна задаче I' с $I_0 = -\sum_{\kappa=1}^{n} I_\kappa$.

Утверждения I^0 – 3^0 доказываются подстановкой представления (3.2) в условие (I.2) и отбрасыванием несущественного вследствие своей голоморфности слагаемого $\sum_{\kappa=1}^{n} I_\kappa Q_\kappa(w)$.

Перейдём к рассмотрению задачи C_2. С помощью теоремы 3.I условие (I.6) сводится к требованию голоморфности функции

$U(w) \equiv \Lambda(w) - \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{k=1}^{n} I_k \ln(w - w_k) - \ln(w - w_0)\sum_{k=1}^{n} I_k\right]$ в P^+ с разрезом от некоторой граничной точки до w_0. С помощью (I.7) легко проверить, что при обходе точки w_0 функция U приобретает слагаемое $-iI$. Отсюда и из (3.I) следует, что функция $U(w) + I\ln(w - w_0)/2\pi$ голоморфна в P^+. Мы пришли к условию вида (2.I), в котором $I_0 = -I - \sum_{k=1}^{n} I_k$, и тем самым свели задачу C_2 к задаче II'.

Две из рассмотренных задач - A_I и C_I-эквивалентны задаче I', которая разрешима лишь при $\sum_{k=0}^{n} I_k = 0$. Для задачи C_I это условие выполняется всегда (см. п. 3^0); в задаче A_I $I_0 = 0$, поэтому она разрешима лишь при нулевом суммарном токе источника. Для выяснения физической причины этого факта рассмотрим задачу с такой же, как в A_I, геометрией, но с $\mu < \infty$. Пусть H_μ - её решение. Обычно считают, что при $\mu \to \infty$ на поверхности магнетика $(H_\mu)_{\text{танг.}} \longrightarrow 0$. (условие (I.I). В действительности для геометрии задачи A_I при ненулевом суммарном токе это соотношение неверно, в чём можно убедиться на примере задачи о токовой нити внутри круговой цилиндрической полости в среде с $\mu < \infty$.

Ослабим задачу A_I, заменив условие (I.I) условием (I.8). Мы придём тогда к задаче A_I'. Наложив на отображение f не ограничивающее общности условие $f(a) = \infty$, задачу A_I' можно свести к задаче I, которая разрешима при любых значениях $\sum_{k=0}^{n} I_k$. Одна из возможных физических интерпретаций задачи A_I' состоит в следующем. Пусть вдоль образующей, проходящей через точку a, в экране прорезана бесконечно тонкая щель (стык). Вычисляя циркуляцию и поток магнитного вектора для всевозможных кривых в области D^+, можно заметить, что они равны аналогичным величинам, построенным из решения задачи A_I' с помощью формулы (2.7). Таким образом, задача A_I' позволяет рассчитать поле, возбуждаемое токовыми нитями внутри замкнутой ферромагнитной оболочки со стыком. Если в тех же условиях искать поле вне оболочки, можно прийти к задаче C_I', причём под $I_1, \ldots, I_k$ следует понимать токи во внешней области, под

I - суммарный ток, текущий внутри оболочки. Наложив условие $f(a)=\infty$, задачу $C_{I'}$ можно свести к задаче I. Заметим, что при $\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$ задача $A_{I'}$ равносильна задаче A_I. То же верно в отношении задач $C_{I'}$ и C_I, если $I=0$. Это означает, что при нулевом внутреннем суммарном токе влияние стыка не сказывается.

Итак, решения всех задач первого раздела определяются формулой (2.7), но смысл входящих в неё величин различен для различных задач. Возвращаясь к исходной переменной z, приведём универсальную итоговую формулу для компонент магнитного вектора. Эта формула получается из (2.7) дифференцированием по z:

$$H_y + iH_x = \frac{f'(z)}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} I_k \left[(w - w_k)^{-1} \pm (w - \overline{w}_k)^{-1} \right]. \qquad (3.3)$$

Сделаем необходимые пояснения к формуле (3.3):

- верхний (нижний) знак отвечает экрану с $\mu=\infty$ ($\mu=0$);
- $w = f(z)$, $w_k = f(z_k)$ $(k=1,\dots,n)$, $w_0 = f(\infty)$;
- f - конформное однолистное отображение области D^+ на верхнюю полуплоскость, причём для задач B_I, B_2 $f(\infty)=\infty$, для задач $A_{I'}$, $C_{I'}$ $f(a)=\infty$, где a - комплексная координата стыка;
- $z_1,\dots,z_n$ и $I_1,\dots,I_n$ координаты нитей источника и токи в них;
- для задачи C_I $I_0 = -\sum_{k=1}^{n} I_k$, для задач C_2 и $C_{I'}$ $I_0 = -I - \sum_{k=1}^{n} I_k$, причём I есть транспортный ток в сверхпроводнике (задача C_2), или суммарный ток, текущий внутри ферромагнитной оболочки (задача $C_{I'}$), для остальных задач $I_0 = 0$.

В заключение приведём ещё одну формулу, отвечающую случаю экрана ограниченного сечения в однородном внешнем поле. Она получается из решения задач класса "С" с одной токовой нитью при согласованном стремлении к бесконечности координаты нити и силы тока в ней. Эта формула имеет вид

$$H_y + iH_x = f'(z)\left\{ iH^\circ\left[\frac{C\exp(-i\delta)}{(w-w_0)^2} \pm \frac{\overline{C}\exp(i\delta)}{(w-\overline{w}_0)^2}\right] - \frac{I}{2\pi}\left[\frac{1}{w-w_0} \pm \frac{1}{w-\overline{w}_0}\right]\right\}. \qquad (3.4)$$

Здесь H° - величина внешнего магнитного поля, δ - угол между его направлением и вещественной осью, C - вычет функции f в бесконечности, смысл прочих обозначений такой же, как в формуле (3.3).

4. Поведение поля вблизи поверхности экрана

Если граничная кривая Γ является гладкой, предельные значения магнитного вектора на поверхности экрана ограничены. Иначе обстоит дело вблизи от точек, нарушающих гладкость границы. Мы рассмотрим два типа таких точек - стыки и угловые точки. Частным случаем последних является край бесконечно тонкого экрана. Оказывается, что в окрестности таких точек величина напряжённости может быть сколь угодно большой. Значение этого факта для проблем экранирования и некоторых других приложений очевидно.

С помощью рассуждений, используемых обычно при выводе формулы Кристоффеля-Шварца [4], нетрудно доказать следующее утверждение

Теорема 4.I. Пусть $w = f(z)$ есть конформное однолистное отображение области D^+ с границей Γ в верхнюю полуплоскость, и часть кривой Γ имеет вид угла величины α с вершиной в точке a. (Величина угла измеряется со стороны области D^+). Тогда в окрестности точки a функцию $f(z)$ можно представить рядом

$$f(z) = f(a) + c_1 (z-a)^{\frac{\pi}{\alpha}} + \cdots + c_n (z-a)^{\frac{\pi n}{\alpha}} + \cdots ; \quad c_1 \neq 0 . \tag{4.I}$$

Представление (4.I) и формула (3.3) (или 3.4) позволяют получить разложение магнитного вектора в окрестности угловой точки a. Обозначим сумму в (3.3) через $\Phi(z)$. Очевидно, эта величина является голоморфной функцией переменной w в окрестности точки $A = f(a)$. Разлагая её в ряд по целым степеням $w - A$ и используя разложение (4.I), нетрудно получить представление

$$\Phi(z) = \Phi(a) + b_1 (z-a)^{\pi/\alpha} + O[(z-a)^{2\pi/\alpha}] .$$

Производную $f'(z)$ в силу (4.I) можно представить в виде

$$f'(z) = \frac{\pi}{\alpha} c_1 (z-a)^{\pi/\alpha - 1} + O[(z-a)^{2\pi/\alpha - 1}] .$$

Подставив эти представления в (3.3), получим

$$H_y + iH_x = \frac{c_1}{2\alpha} \Phi(a)(z-a)^{\pi/\alpha - 1} + O[(z-a)^{2\pi/\alpha - 1}] . \tag{4.2}$$

Представление (4.2) позволяет сделать следующие заключения:

1^0 В окрестности угловой точки поле имеет степенную особенность (при $\alpha > \pi$) или корень (при $\alpha < \pi$) порядка $\pi/\alpha - 1$.

2^0 Поскольку $\alpha \leq 2\pi$, упомянутая особенность не может быть сильнее, чем $H_y + iH_x \sim (z-a)^{-\frac{1}{2}}$; последний случай ($\alpha = 2\pi$) отвечает краю бесконечно тонкого экрана.

3^0 При специальном взаимном расположении экрана и источника величина $\Phi(a)$ может обратиться в нуль. Тогда, вследствие ограниченности второго слагаемого в (4.2), особенность фактически отсутствует. В подробной записи условие исчезновения особенности в угловой точке a имеет следующий вид (см. (3.3)

$$\Phi(a) \equiv \sum_{k=0}^{n} I_k \left[(f(a) - f(z_k))^{-1} \pm (f(a) - \overline{f(z_k)})^{-1} \right] = 0 ; \; (z_0 = \infty). \tag{4.3}$$

4^0 При $\alpha \neq \pi, 2\pi$ поле не может принимать в угловой точке конечного ненулевого значения.

Всё сказанное остаётся в силе и для задачи об экране в однородном внешнем поле; изменяется лишь вид условия (4.3).

Перейдём к рассмотрению задач о замкнутой ферромагнитной оболочке со стыком. Комплексные потенциалы внутри оболочки (задача A_I') и вне её (задача C_I') даются формулой (2.7), причём на отображение f накладывается условие $f(a) = \infty$, где a - точка стыка. Пусть a является одновременно и угловой точкой. Легко проверить, что при $f(a) = \infty$ представление (4.I) приобретает вид $f(z) = c_1 (z-a)^{-\pi/\alpha} + O(1)$. Подставляя это представление в первую формулу (2.8), описывающую поведение решения в окрестности точки S_w , найдём, что в окрестности точки a

$$\lambda(z) = -\frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} I_k \cdot \ln(z-a) + O(1). \tag{4.4}$$

Можно заметить, что старший член в правой части (4.4) представляет собой потенциал токовой нити, расположенной в точке и несущей ток силой $-\frac{2\pi}{\alpha} \sum_{k=0}^{n} I_k$. Пусть I есть полный ток, текущий внутри оболочки, β - измеренная с внутренней стороны величина угла. Вспоминая смысл величин I_0 и α , легко понять, что для внутренней задачи A_I' $\sum_{k=0}^{n} I_k = I, \alpha = \beta$; для внешней задачи C_I' $\sum_{k=0}^{n} I_k = -I$, $\alpha = 2\pi - \beta$.

Суммируя сказанное, можно следующим образом охарактеризовать поведение поля в окрестности стыка, расположенного в вершине угла, образованного замкнутой ферромагнитной оболочкой. Наблюдателю, находящемуся вблизи стыка, этот стык представляется токовой нитью, причём с точки зрения внешнего наблюдателя сила тока в этой нити составляет $\frac{2\pi}{2\pi-\beta} I$, с точки зрения внутреннего наблюдателя - $\left(-\frac{2\pi}{\beta} I\right)$. Если, в частности, стык расположен на гладком участке оболочки, то упомянутые величины токов составляют, соответственно, $2I$ и $-2I$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marin L., Lee K. Forces on a line current moving above a discontinuous ground plane.- Journal of Applied Physics, 1974, vol 45, No 5, p. 2055-2069.

2. Кочетков В.М. Учёт неровностей трассы ВСНТ на основе методов конформного отображения. - В кн.: Высокоскоростной наземный транспорт, Новочеркасск, 1979, с. 17.

3. Евграфов М.А. Аналитические функции.- М.: Наука, 1968.- 462 с.

4. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 3. Часть 2.- М.: Наука, 1974.- 672 с.

Статья поступила 17 октября 1981 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 51-56

УДК 517.949:538.12 - 621.335

В.Я.Ауза
ЛГУ им. П.Стучки

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ С УЧЁТОМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

При проектировании сложных технических устройств возникает необходимость расчёта нелинейных магнитных полей. Одним из наиболее простых численных методов является метод конечных разностей. Но обычно этот метод применяется, если границы физического объекта параллельны координатным осям. В работе предлагается метод расчёта двумерного магнитного поля методом конечных разностей в случае, когда часть поверхностей ферромагнитных материалов не параллельны координатным осям. Из теоремы о циркуляции напряжённости $\vec{H}$ магнитного поля

$$\oint_L \vec{H}\, d\vec{l} = I,$$

если ток I имеет только x координату и

$$\vec{H} = \nu \operatorname{rot} \vec{A},$$

$$\vec{A} = (A(y\,z),0,0),$$

получаем

$$\oint_L \left(\nu \frac{\partial A}{\partial z} dy - \nu \frac{\partial A}{\partial y} dz\right) = I,$$

где ν - обратная величина магнитной проницаемости.

Используем неравномерную расчётную сетку с шагами h_j, $j = 1,2,\ldots,L$ по оси y и с шагами h_k, $k = 1,2,\ldots,N$ по оси z. Считаем, что обратная величина магнитной проницаемости ν и плотность тока J в пределах расчётной ячейки не меняются. Проводя интегрирование вокруг точки (y_j, z_k) (подробнее изложено в [1]), получаем конечно-разностное уравнение

$$A_{jk} = (0{,}5\,(s_{jk} + s_{j,k-1} + s_{j-1,k} + s_{j-1,k-1}) + c_{jk} A_{j+1,k} + c_{j-1,k} A_{j-1,k} + e_{jk} A_{j,k-1} + e_{j,k-1} A_{j,k-1}) \,/\, (c_{jk} + c_{j-1,k} + e_{j,k} + e_{j,k-1}),$$

где

$$s_{jk} = J_{jk} h_j h_k ,$$
$$c_{jk} = (\nu_{j,k-1} h_{k-1} + \nu_{jk} h_k) \,/\, h_j ,$$
$$e_{jk} = (\nu_{j-1,k} h_{j-1} + \nu_{jk} h_j) \,/\, h_k ,$$
$$j = 2,3,\ldots,L ; \quad k = 2,3,\cdots,N .$$

Обычно разбиение проводится таким образом, что узлы разностной сетки размещаются на границах области модели. В работе для тех ячеек расчёта, через которые проходят границы областей, вводится эквивалентная обратная магнитная проницаемость

$$\nu^n_{jk} = \left(\frac{1 - \gamma_{jk}}{\nu_0} + \frac{\gamma_{jk}}{(1-\alpha)\,\nu^{n-1}_{jk} + \alpha\,\nu'_{jk}} \right)^{-1} , \tag{I}$$

где γ_{jk} – отношение площади ферромагнетика ко всей площади расчётной ячейки. Если ферромагнетик занимает всю расчётную ячейку, то γ_{jk} = I и имеем обычную формулу для пересчёта обратной величины магнитной проницаемости методом нижней релаксации

$$\nu^n_{jk} = (1 - \alpha)\,\nu^{n-1}_{jk} + \alpha\,\nu'_{jk} ,$$

где n – номер приближения. Если ячейка не содержит ферромагнетика, то $\gamma_{jk} = 0$, и $\nu^n_{jk} = \nu_0 = 1/\mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. Величина ν'_{jk} вычисляется по следующей формуле

$$\nu'_{jk} = \sum_{l=0}^{3} D_{lm}\,(B_{jk})^{2l} ,$$

m – целая часть от $(B^2_{jk}+1)/\Delta B^2$, ΔB^2 – величина области аппроксимации. Массивы коэффициентов кусочной аппроксимации D_{lm} вычислены заранее и заданы в виде одномерных массивов для конкретной стали так, чтобы функция $\nu(B^2)$ и первая производная по B^2 была непрерывна в точках сшивания.

Предложенная методика апробирована для расчёта двумерной модели длинного электромагнита, который притягивается к ферромагнетику в форме полукольца, треугольника и " П " образного (рис. I).

Для расчётов выбраны следующие параметры

$d_2 = 0,07$ м, $d_4 = 0,02$ м, $d_5 = 0,07$ м, $d_6 = 0,01$ м,

$h_2 = 0,02$ м, $h_3 = 0,07$ м, $h_4 = 0,01$ м, $h_5 = 0,01$ м, $h_6 = 0,075$ м, $h_7 = 0,02$ м,

длина электромагнита I м. Магнитопровод изготовлен из стали Ст-IO, феррорельс Ст-30. Обмотка изготовлена из алюминия. Число ампервитков вместе в обеих обмотках I2 кА (средняя плотность тока I,224 МА/м^2). Принимаем, что на расстоянии I м от центра электромагнита векторный потенциал A равен нулю.

Для проверки предположения о форме эквивалентной магнитной проницаемости были проведены исследования силы по оси z для феррорельса в виде полукольца $F_{z\cap}$, треугольника $F_{z\Lambda}$ и " П " образного $F_{z\Pi}$ по отношению к весу электромагнита P (P = 845 H) от числа расчётных ячеек во всей области $L \times N$ и в области феррорельса $L_1 \times N_1$. Полученные результаты отображены в таблице I.

Таблица I. Зависимость силы по оси z от числа расчётных ячеек

$L \times N$	$L_1 \times N_1$	$F_{z\cap}/P$	$F_{z\Lambda}/P$	$F_{z\Pi}/P$	$F_{z\cap}/F_{z\Pi}$	$F_{z\Lambda}/F_{z\Pi}$
36 x 29	I6 x 5	I0,82	I0,43	I0,52	I,028	0,99I
42 x 29	22 x 5	II,09	I0,73	I0,83	I,024	0,99I
42 x 32	22 x 8	II,40	I0,96	II,I5	I,022	0,983
42 x 40	22 x I6	II,3I	I0,86	II,05	I,023	0,988
50 x 40	30 x I6	II,28	I0,82	II,0I	I,024	0,985

Из табл. I видно, что силы $F_{z\cap}$, $F_{z\Lambda}$ и $F_{z\Gamma}$ в зависимости от числа ячеек меняются в пределах нескольких процентов, а соотношения $F_{z\cap}/F_{z\Pi}$ и $F_{z\Lambda}/F_{z\Pi}$ меняется в несколько раз мен

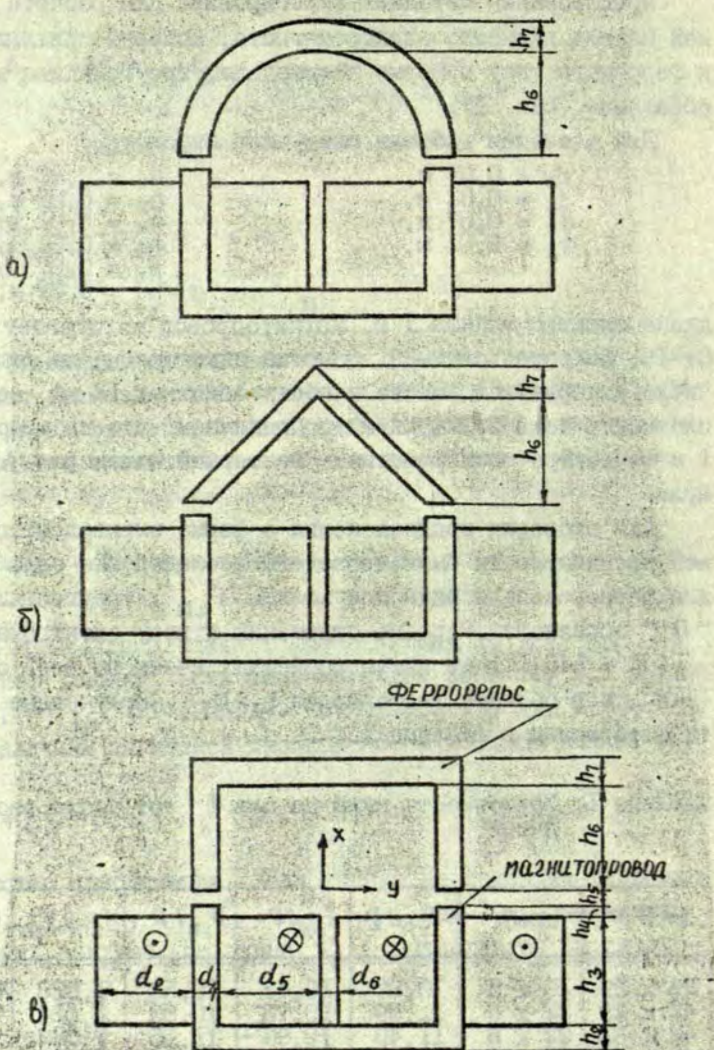


Рис. I. Двухмерная модель электромагнита. Феррорельс: а) полукольцо; б) треугольник, в) " П "-образный.

ше. Но так как при более мелком разбиении расчётной области эквивалентная обратная магнитная проницаемость играет меньшую роль, то можем считать, что в рассмотренных пределах разбиения области предположение (1) верно.

На рис. 2 представлено распределение модуля $B=(B_y^2+B_z^2)^{0,5}$ индукции магнитного поля в воздушном зазоре по оси y при $L \times N$ = 42 х 32 для трёх форм феррорельса. Так как число разбиений достаточно велико, то кусочно-ступенчатая картина значений B заменена гладкой.

В табл. 2 представлены результаты расчёта сил по оси y и оси z от величины бокового смещения (по оси y) центра феррорельса относительно центра электромагнита.

Таблица 2. Зависимость сил от бокового смещения для электромагнита с двумя катушками

Δ, м	$F_{z\cap}/P$	$F_{y\cap}/F_{z\cap}$	$F_{z\Lambda}/P$	$F_{y\Lambda}/F_{z\Lambda}$	$F_{z\Pi}/P$	$F_{y\Pi}/F_{z\Pi}$
0	11,40	0	10,96	0	11,15	0
0,005	10,74	0,126	10,26	0,124	10,40	0,147
0,010	9,30	0,266	8,78	0,255	8,91	0,295

В табл. 3 представлены значения сил для случая, когда имеется одна катушка на ярме. В этом случае меняется: $d_2 = 0$, $d_5 = 0,075$ м, $d_6 = 0$, $h_3 = 0,0653$ м, $P = 830$ Н.

Таблица 3. Зависимость сил от бокового смещения для электромагнита с катушкой на ярме

Δ, м	$F_{z\cap}/P$	$F_{y\cap}/F_{z\cap}$	$F_{z\Lambda}/P$	$F_{y\Lambda}/F_{z\Lambda}$	$F_{z\Pi}/P$	$F_{y\Pi}/F_{z\Pi}$
0	10,52	0	10,08	0	10,38	0
0,005	9,98	0,134	9,61	0,125	9,87	0,145
0,010	8,83	0,269	8,57	0,252	8,62	0,292

Получаем, что сила по оси z наибольшая для феррорельса в виде полукольца, а сила по оси y для " П " образного феррорельса.

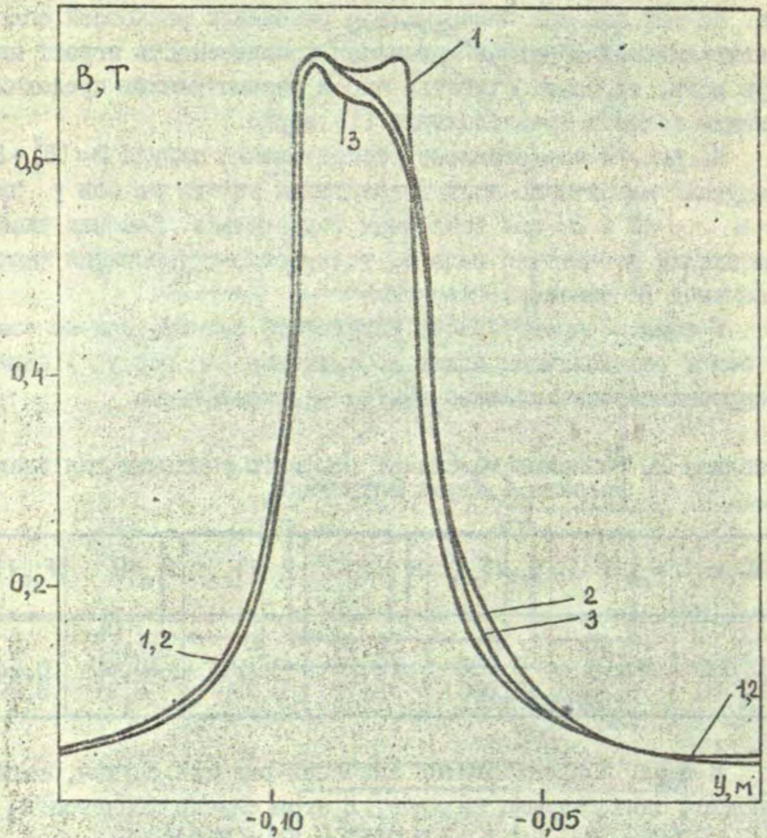


Рис. 2. Распределение магнитной индукции для феррорельсов: I - " П "-образный; 2 - полукольцо; 3 - треугольник.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ауза В.Я., Устинов Н.Н. Анализ магнитного поля и сил в системе бесконтактного подвеса с учётом насыщения магнитных материалов. - В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига: ЛГУ, 1978, вып. 4, с. 16-29.

Статья поступила 25 марта 1982 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига, ЛГУ им. П.Стучки, с. 57-68

УДК 621.313.333 + 621.3.013 + 537.811

Э.А.Завицкий
ЛГУ им. П.Стучки

РАСЧЁТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ МАГНИТНЫМ ПОТОКОМ (ЛАДПП)

Наряду с ЛАД традиционного исполнения (ЛАД с продольным потоком) разрабатываются ЛАД с поперечно замыкающимся магнитным потоком. Различные конструкции ЛАДПП описываются в [1], а также в многочисленных авторских свидетельствах и патентах. В [1] приводится методика расчёта характеристик ЛАДПП, в различной степени приближения рассматривая взаимодействие с рабочим телом основной и высших пространственных гармоник бегущего поля. В [2] в рамках плоскопараллельного приближения выведены уравнения электромагнитного поля ЛАДПП, в [3], используя результаты работы [2], рассчитано поле идеального холостого хода двигателя с Ш-образными сердечниками. В [4] разработана двухмерная математическая модель для электромагнитного расчёта индукционного МГД-насоса с С-образными сердечниками индуктора.

В настоящей работе рассматривается трёхмерная математическая модель ЛАДПП, двустороннего (ДЛАД) или одностороннего с шихтованным обратным магнитопроводом (ОЛАД). Выводятся математические выражения магнитного поля, вихревых токов и интегральных величин взаимодействия первичной и вторичной частей ЛАД. Общим для настоящей работы и [2-4] является замена разделённого магнитопровода индуктора однородным магнитно-анизотропным слоем конечной толщины. При этом, как и в [2, 3], катушки обмотки моделируются прямоугольными токовыми контурами. Отличием является меньшее число допущений при решении полевой задачи и более полный охват локальных и интегральных электромагнитных характеристик ЛАДШ.

Обратимся к математической модели двигателя. Анализ проведём для случая П-образных сердечников (рис. I, 2), а впоследствии распространим результаты также на Ш-образные сердечники.

Свяжем декартову систему координат xyz с индуктором двигателя.

По координате z зададим четыре области с различными физическими характеристиками среды, высота и нумерация которых пояснена на рис. 2,а,б.

Область I с электропроводностью σ и относительной магнитной проницаемостью $\mu = 1$ соответствует реактивной шине, движущейся со скоростью v вдоль оси x. В случае ОЛАД h есть высота реактивной шины, и область $z<0$ следует считать идеальным магнетиком, соответствующим шихтованному обратному магнитопроводу. В случае ДЛАД высота реактивной шины равна $2h$, а плоскость $z = 0$ является плоскостью симметрии. В обоих случаях граничные условия для поля при $z = 0$ совпадают.

Области II и IV ($\sigma=0$, $\mu=1$) соответствуют воздушному зазору и пространству над индуктором. Таким образом, моделью учитывается рассеяние поля через спинку индуктора.

Область III - однородный магнитно-анизотропный слой ($\sigma=0$), соответствующий набору равноотстоящих одинаковых сердечников индуктора и характеризующийся тензором относительной магнитной проницаемости.

$$\dot{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}; \quad \vec{B} = \mu_0 \dot{\mu} \vec{H}.$$

Далее определим математическое выражение первичного тока. Введём следующие обозначения: t_x - зубцовое деление (рис. I,а), m - число фаз, q - число смежных сердечников с токами одинаковой фазы, N - число групп из q сердечников, принадлежащих одной и той же фазе; соседние группы соединены по схеме с фазной зоной π/m так, чтобы образовалось бегущее поле в положительном направлении оси x. Понятно, что N - число полюсов индуктора, q - число пазов на полюс и фазу. Введём также обо-

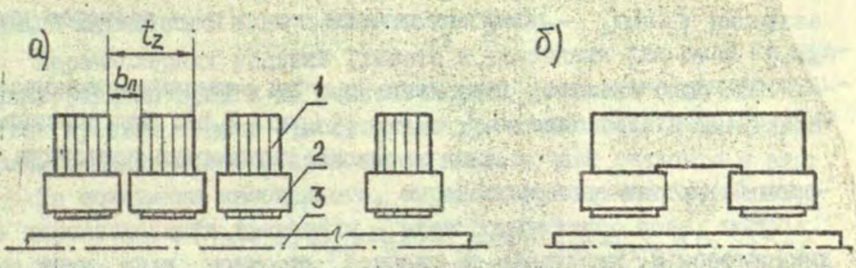


Рис. I. Двусторонний ЛАДПП: I – П-образные сердечники, 2 – обмотка, 3 – реактивная шина.

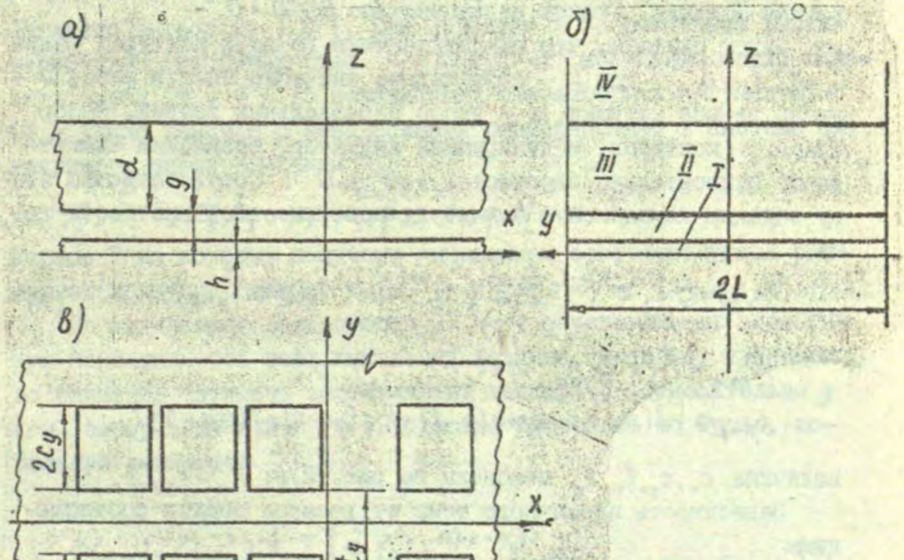


Рис. 2. Математическая модель ЛАДПП.

значения $\tau = mqt_z$ – полюсное деление, $\alpha = \pi/\tau$ – волновое число.

Как было сказано, обмоточные катушки заменяются токовыми контурами в плоскости $z=\delta$, $\delta = h+g$ (рис. 2,в). Для описания тока в отдельно взятом контуре введём двухмерную векторную функцию (с размерностью I/м)

$$\vec{\Lambda} = \vec{\Lambda}(x,y;c_x,c_y) = \vec{e}_x\left[\delta(y+c_y)-\delta(y-c_y)\right]\theta(c_x-|x|) + \\ +\vec{e}_y\left[\delta(x-c_x)-\delta(x+c_x)\right]\theta(c_y-|y|), \qquad (1)$$

где $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ – единичные векторы, δ – дельта-функция, θ – единичная функция. Укажем на равенство $\operatorname{div}\vec{\Lambda} = 0$.

Будем считать, что амплитуда тока во всех контурах равна $I_0 = \sqrt{2}\,Iw/a$, где I – эффективное значение тока в фазе, w – число витков катушки, a – число параллельных ветвей. Набор $2Nmq$ контуров, моделирующий индуктор, разместим симметрично относительно плоскостей $x=0$, $y=0$. Соответственно этому зададим комплексную амплитуду поверхностной плотности тока

$$\vec{J}(x,y) = I_0 \sum_{\mu=1}^{m} e^{-i(\mu-1)\frac{\pi}{m}} \sum_{\nu=1}^{N} (-1)^{\nu-1} \sum_{\varkappa=1}^{q} \left(\vec{\Lambda}^{+}_{\mu\nu\varkappa} - \vec{\Lambda}^{-}_{\mu\nu\varkappa}\right), \qquad (2)$$

где $\vec{\Lambda}^{\pm}_{\mu\nu\varkappa} = \vec{\Lambda}(x-x_{\mu\nu\varkappa},\ y\pm t_y;\ c_x, c_y)$,

$$x_{\mu\nu\varkappa} = \left[2(\varkappa-1)+2mq(\nu-1)+2q(\mu-1)-Nmq-1\right]t_x\,;$$

величины c_x, c_y, t_x, t_y пояснены на рис. 2,в; $t_x = t_z/2$.

Зависимость пёрвичного тока от времени даётся соотношением

$\vec{\mathcal{J}}(x,y,t) = \operatorname{Re}\vec{J}(x,y)e^{i\omega t}$, где ω – угловая частота.

Аналогичные равенства имеют место для электромагнитного поля и вихревых токов; ниже везде пишутся комплексные амплитуды этих величин.

С целью учёта конечной ширины реактивной шины будем считать первичный ток периодической функцией координаты y, а (2) – определением этой функции на периоде $|y|<L$, где L – полуширина реактивной шины (аналогичный приём используется в [5-7], см. также [8, с. 206]). Можно доказать, что периодизация первичного тока обусловливает обращение в нуль нормальной составляющей вихревых токов и касательной состав-

ляющей магнитного поля к плоскостям $y=\pm L$.

Перечисленных условий (вместе с условиями для поля на границах раздела сред и на бесконечности) достаточно для формулировки краевой задачи относительно уравнений электромагнитного поля, решение которой проводится ниже.

На основании изложенного, определяемые по настоящей модели характеристики двигателя - электромагнитное поле, вихревые токи, сила, мощность зависят от следующих 19 независимых величин:

$L, h, g, d; c_x, c_y, t_x, t_y; \mu_x, \mu_y, \mu_z; m, q, N; \sigma, v, \omega; l_0; \mu_0$.

Согласно П-теореме [9], при переходе к безразмерным характеристикам (например силе. $\bar{F}=F/\mu_0 l_0^2$) последние можно выразить через 19 - 4 = 15 независимых безразмерных аргументов (4 - число величин с независимыми размерностями в системе СИ), например, через величины

$\bar{L}, \bar{h}, \bar{g}, \bar{d}; \bar{c}_x, \bar{c}_y, \bar{t}_y; \mu_x, \mu_y, \mu_z; m, q, N; \varepsilon, \bar{v}$,

первые 7 из которых получены умножением соответствующей размерной величины (длины) на α ; $\varepsilon=\mu_0\sigma\omega/\alpha^2$, $\bar{v}=\alpha v/\omega$.

Периодическая зависимость $\vec{J}=\vec{J}(y)$ обусловливает аналогичную периодичность всех локальных величин, которые, принимая во внимание чётность составляющих вектора $\vec{J}$ относительно y (см. выбор значений n в (5)), можно разложить по Фурье, используя равенства

$$\Phi(x,y)=(4\pi L)^{-\frac{1}{2}}\sum_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{\Phi}_n(p)e^{i(px+q_n y)}dp, \tag{3}$$

$$\hat{\Phi}_n(p)=(4\pi L)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{y=-L}^{L}\int\limits_{x=-\infty}^{\infty}\Phi(x,y)e^{-i(px+q_n y)}dx\,dy, \tag{4}$$

$$q_n=n\pi/L,\quad n=\pm 1,\pm 2,\dots \tag{5}$$

Здесь Φ - какая-либо составляющая векторов $\vec{B},\vec{H},\vec{E}$ или вихревых токов $\vec{j}$; $\hat{\Phi}_n$ - её образ Фурье. Имеет место равенство (ср. [10, с. 442])

$$\iint \Phi_1 \overset{*}{\Phi}_2 \, dx\, dy = \sum_n \int \hat{\Phi}_{1n} \overset{*}{\hat{\Phi}}_{2n} \, dp\,, \tag{6}$$

где, как и везде далее, пределы изменения величин x, y, p, n такие же, как в (3) – (5), а звёздочка означает комплексное сопряжение.

Займёмся определением фурье-образа магнитной индукции $\hat{\vec{B}}_n$. Сперва выразим (в условиях настоящей задачи) составляющие $\hat{B}_{xn}, \hat{B}_{yn}$ через $\hat{B}_{zn}$, для чего преобразуем по Фурье уравнения $div\, \vec{B} = 0$ и $rot_z\, \vec{H} = 0$ (в области I второе уравнение справедливо из-за равенства $j_z = 0$, доказательство которого не приводим). В областях I, П, IУ (с учётом $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$) имеем:

$$ip\hat{B}_{xn} + iq_n \hat{B}_{yn} + \hat{B}'_{zn} = 0, \quad p\hat{B}_{yn} - q_n \hat{B}_{xn} = 0, \qquad (7),(8)$$

откуда, как из системы линейных уравнений, находим

$$\hat{B}_{xn} = ipr_n^{-2} \hat{B}'_{zn}\,, \quad \hat{B}_{yn} = iq_n r_n^{-2} \hat{B}'_{zn}\,, \qquad (9),(10)$$

где $r_n = (p^2 + q_n^2)^{\frac{1}{2}}$, а штрих означает дифференцирование по z.

В области IУ, учитывая $\vec{B} = \mu_0 \hat{\mu} \vec{H}$, вместо (8) имеем

$$(p/\mu_y)\hat{B}_{yn} - (q_n/\mu_x)\hat{B}_{xn} = 0\,,$$

а (7) не меняется, следовательно,

$$\hat{B}_{xn} = ip\lambda_n^{-2}(\mu_x/\mu_z)\hat{B}'_{zn}\,, \quad \hat{B}_{yn} = iq_n \lambda_n^{-2}(\mu_y/\mu_z)\hat{B}'_{zn}\,, \qquad (11),(12)$$

где $\lambda_n = ((\mu_x/\mu_z)p^2 + (\mu_y/\mu_z)q_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Итак, в областях I–IУ $\hat{B}_{xn}, \hat{B}_{yn}$ выражены через составляющую $\hat{B}_{zn}$, которую определяем, исходя из уравнений для B_z:

$$[\Delta - \mu_0 \sigma(i\omega + v\,\partial/\partial x)]\, B_z^{I} = 0, \quad \Delta B_z^{II,IV} = 0, \qquad (13),(14)$$

$$(\mu_x\, \partial^2/\partial x^2 + \mu_y\, \partial^2/\partial y^2 + \mu_z\, \partial^2/\partial z^2)\, B_z^{III} = 0. \tag{15}$$

Преобразованные по Фурье уравнения (13)–(15) имеют следующий вид:

$$\hat{B}^{I''}_{zn} - \rho_n^2 \hat{B}^{I}_{zn} = 0, \quad \rho_n = (r_n^2 + i\mu_0\sigma(\omega + pv))^{\frac{1}{2}}, \quad Re\,\rho_n > 0;$$

$$\hat{B}^{II,IV''}_{zn} - r_n^2 \hat{B}^{II,IV}_{zn} = 0, \quad \hat{B}^{III''}_{zn} - \lambda_n^2 \hat{B}^{III}_{zn} = 0,$$

общие решения которых

$$\hat{B}^{I}_{zn} = C^{I}_{n}\, ch\,\rho_n z, \quad \hat{B}^{IV}_{zn} = C^{IV}_{n}\, e^{-r_n(z-\delta-d)}, \tag{I6),(I7}$$

$$\hat{B}^{II}_{zn} = C^{II}_{1n}\, ch\, r_n(z-\delta) + C^{II}_{2n}\, sh\, r_n(z-\delta), \tag{I8}$$

$$\hat{B}^{III}_{zn} = C^{III}_{1n}\, ch\,\lambda_n(z-\delta) + C^{III}_{2n}\, sh\,\lambda_n(z-\delta), \tag{I9}$$

где C – подлежащие определению коэффициенты; в (I6) из соображений симметрии опущено слагаемое с $sh\,\rho_n z$; в (I7) учтено условие ограниченности поля при $z \to \infty$.

Для определения коэффициентов C запишем преобразованные по Фурье условия относительно $\vec{B}$ на границах между областями I–IУ:

$$\hat{B}^{I}_{zn} = \hat{B}^{II}_{zn}, \quad \hat{B}^{I}_{xn} = \hat{B}^{II}_{xn}, \qquad z = h, \tag{20),(2I}$$

$$\hat{B}^{II}_{zn} = \hat{B}^{III}_{zn}, \quad \hat{B}^{III}_{xn}/\mu_x - \hat{B}^{II}_{xn} = \mu_0 \hat{J}_{yn}, \qquad z = \delta, \tag{22),(23}$$

$$\hat{B}^{III}_{zn} = \hat{B}^{IV}_{zn}, \quad \hat{B}^{III}_{xn}/\mu_x = \hat{B}^{IV}_{xn}, \qquad z = \delta + h. \tag{24),(25}$$

Из всех соотношений, выполняющихся для вектора $\vec{\hat{B}}_n$ при $z = h, \delta, \delta + d$, здесь приведены лишь непосредственно используемые для определения величин C . Остальная их часть является следствием перечисленных: так, равенство $\hat{B}^{I}_{yn} = \hat{B}^{II}_{yn}$ при $z = h$ следует из (9), (I0), (2I) и т.п.

Подставим выражения (I6)–(I9) в граничные условия (20)–(25), используя при этом соотношения (9)–(I2). В результате относительно коэффициентов C получим систему из 6 линейных уравнений, решение которой

$$\left.\begin{aligned} &C^{I}_{n} = r_n R_n K_n, \quad C^{II}_{1n} = C^{III}_{1n} = Q_n R_n K_n, \quad C^{II}_{2n} = P_n R_n K_n, \\ &C^{III}_{2n} = -Q_n S_n K_n, \quad C^{IV}_{n} = r_n Q_n K_n. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$K_n = ip^{-1}(\mu_z \lambda_n P_n R_n + r_n Q_n S_n)^{-1} \mu_0 \mu_z r_n \lambda_n \hat{J}_{yn}, \tag{27}$$

$$P_n = \rho_n \operatorname{sh}\rho_n h \cdot \operatorname{ch} r_n g + r_n \operatorname{ch}\rho_n h \cdot \operatorname{sh} r_n g\,, \tag{28}$$

$$Q_n = \rho_n \operatorname{sh}\rho_n h \cdot \operatorname{sh} r_n g + r_n \operatorname{ch}\rho_n h \cdot \operatorname{ch} r_n g\,, \tag{29}$$

$$R_n = \mu_z \lambda_n \operatorname{sh}\lambda_n d + r_n \operatorname{ch}\lambda_n d\,, \tag{30}$$

$$S_n = \mu_z \lambda_n \operatorname{ch}\lambda_n d + r_n \operatorname{sh}\lambda_n d\,, \tag{31}$$

$$\hat{J}_{yn} = I_0 e^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{m} - N\right)} k_N k_q \, 2i \sin t_y q_n \cdot \hat{\Lambda}_{yn}\,, \tag{32}$$

$$k_N = \frac{\sin N(\pi/2 + mqt_x p)}{\sin(\pi/(2m) + qt_x p)}\,, \quad k_q = \frac{\sin qt_x p}{\sin t_x p}\,, \tag{33),(34}$$

$$\hat{\Lambda}_{yn} = -(4\pi L)^{-\frac{1}{2}}\, 4iq_n^{-1} \sin c_x p \cdot \sin c_y q_n\,. \tag{35}$$

Итак, выражения (I6)–(I9), (26)–(35) определяют $\hat{B}_{zn}$ при $z \geqslant 0$, а с учётом соотношений (9)–(I2) – также $\hat{B}_{xn}, \hat{B}_{yn}$. Само же поле определяется обратным преобразованием (3) (при условии его существования, что для рассматриваемой задачи не имеет места при $z = \delta$ вследствие задания первичного тока с помощью дельта-функции).

Фурье-образ вихревых токов находится путём преобразования уравнения $\vec{j} = \operatorname{rot} \vec{H}^{I}$. Окончательный результат имеет вид:

$$\hat{j}_{xn} = q_n r_n^{-2} \sigma(\omega + pv) \hat{B}_{zn}^{I}\,, \qquad \hat{j}_{yn} = -p r_n^{-2} \sigma(\omega + pv) \hat{B}_{zn}^{I}\,.$$

Отметим соотношение $p\hat{j}_{xn} + q_n \hat{j}_{yn} = 0$, следующее из $\operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Далее определим усреднённую по времени силу взаимодействия первичной и вторичной частей ЛАД. Воспользуемся выражением [II]

$$\vec{F} = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \oint \left[\vec{B}(\vec{n} \cdot \overset{*}{\vec{B}}) - \frac{1}{2}\vec{n}(\vec{B} \cdot \overset{*}{\vec{B}})\right] dS\,, \tag{36}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на тело с поверхностью S, $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к S.

В условиях рассматриваемой задачи интеграл (36) приобретает следующий вид:

$$\vec{F} = \vec{e}_x \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} \iint B_x^{II} \overset{*}{B}{}_z^{II}\, dx\, dy +$$

$$+\vec{e}_z \frac{1}{4\mu_0} \iint \left(|B_z^{II}|^2 - |B_x^{II}|^2 - |B_y^{II}|^2 \right) dx\, dy . \tag{37}$$

Здесь $\vec{F}$ – сила, действующая на вторичную часть ОЛАД – область $|x|<\infty, |y|\leqslant L, -\infty<z\leqslant h$; заведомо равная нулю y-составляющая силы отброшена; интегрирование может проводиться при любом z из области II, разделяющей первичные и вторичные токи; в случае ДЛАД су..марное усилие, действующее на реактивную шину (высотой $2h$), равно $2F_x\vec{e}_x$. На индуктор ОЛАД (или на одну сторону индуктора ДЛАД) действует сила $-\vec{F}$.

Для преобразования выражения (37) используем последовательно равенства (6),(9),(IC),(I8). Окончательно будем иметь

$$\vec{F} = \vec{e}_x \frac{1}{2\mu_0} \, Im \sum_n \int p r_n^{-1} C_{1n}^{II} \overset{*}{C}{}_{2n}^{II} \, dp +$$

$$+\vec{e}_z \frac{1}{4\mu_0} \sum_n \int \left(|C_{1n}^{II}|^2 - |C_{2n}^{II}|^2 \right) dp .$$

Далее определим отдаваемую обмоткой усреднённую по времени комплексную мощность $P=P_a+iP_r$, где P_a, P_r – активная и реактивная мощности; $P_a=F_x v+Q$, Q – джоулевы потери в реактивной шине. На основании теоремы Умова-Пойнтинга [I2] $P=-\Pi^{II}(\delta)+\Pi^{III}(\delta)$, где $-\Pi^{II}(\delta)$ – поток вектора $\frac{1}{2}\vec{E}\times\overset{*}{\vec{H}}$, исходящий из полосы $|x|<\infty, |y|\leqslant L, z=\delta$ в направлении вектора $-\vec{e}_z$, $\Pi^{III}(\delta)$ – аналогичный поток в направлении $\vec{e}_z$.

Запишем выражение потока комплексной мощности через полосу $|x|<\infty, |y|\leqslant L$ в направлении $\vec{e}_z$ $(|z|<\delta)$:

$$\Pi(z) = \frac{1}{2} \iint (\vec{E}\times\overset{*}{\vec{H}}) \vec{e}_z \, dx\, dy = \frac{1}{2} \sum_n \int (\hat{E}_{xn} \overset{*}{\hat{H}}_{yn} - \hat{E}_{yn} \overset{*}{\hat{H}}_{xn}) dp . \tag{38}$$

(Здесь было использовано равенство (6)).

Выразим $\Pi(z)$ через $\hat{C}_{xn}(z)$. Для этого преобразуем по Фурье уравнения $rot_z \vec{E} = -i\omega B_z$ и $div \vec{E} = 0$, последнее из которых имеет место в областях II, III. В результате получим соотношения

$$p\hat{E}_{yn} - q_n \hat{E}_{xn} = -\omega \hat{B}_{zn} , \quad ip\hat{E}_{xn} + iq_n \hat{E}_{yn} + \hat{E}'_{zn} = 0$$

из которых выразим $\hat{E}_{xn}, \hat{E}_{yn}$:

$$\hat{E}_{xn} = r_n^{-2}(q_n \omega \hat{B}_{zn} + ip\hat{E}'_{zn}), \quad \hat{E}_{yn} = -r_n^{-2}(p\omega \hat{B}_{zn} - iq_n \hat{E}'_{zn}).$$

Подставим $\hat{E}_{xn}, \hat{E}_{yn}$ в (38) и выразим $\hat{H}_{xn}, \hat{H}_{yn}$ через $\hat{B}_{zn}$, различая при этом области II и III. В результате получим

$$\Pi^{II}(z) = -i\omega/(2\mu_0) \sum_n \int r_n^{-2} \hat{B}^{II}_{zn} \overset{*}{\hat{B}}{}^{II\prime}_{zn} \, dp, \qquad h \leqslant z \leqslant \delta,$$

$$\Pi^{III}(z) = -i\omega/(2\mu_0 \mu_z) \sum_n \int \lambda_n^{-2} \hat{B}^{III}_{zn} \overset{*}{\hat{B}}{}^{III\prime}_{zn} \, dp, \quad \delta \leqslant z \leqslant \delta + d.$$

Можно убедиться, что $\mathrm{Re}\,\Pi^{III} = 0$, так как активная мощность передаётся только реактивной шине; следовательно,

$$P_a = -\mathrm{Re}\,\Pi^{II}(\delta) = -\frac{\omega}{2\mu_0}\,\mathrm{Im} \sum_n \int r_n^{-1} C^{II}_{1n} \overset{*}{C}{}^{II}_{2n} \, dp.$$

Наоборот, реактивная мощность образуется из двух положительных слагаемых, соответствующих магнитным потокам при $z \leqslant \delta$ и $z \geqslant \delta$:

$$P_r = -\mathrm{Im}\,\Pi^{II}(\delta) + \mathrm{Im}\,\Pi^{III}(\delta) = -\frac{\omega}{2\mu_0}\,\mathrm{Re} \sum_n \int r_n^{-1} C^{II}_{1n} \overset{*}{C}{}^{II}_{2n} \, dp -$$

$$- \frac{\omega}{2\mu_0 \mu_z} \sum_n \int \lambda_n^{-1} C^{III}_{1n} \overset{*}{C}{}^{III}_{2n} \, dp.$$

Итак, интегральные величины $\vec{F}$ и P выражены через коэффициенты C, определяющие фурье-образ z-составляющей поля $\hat{B}_{zn}$.

В заключение рассмотрим двигатель с Ш-образными сердечниками индуктора, отличия математической модели которого от описанной выше заключаются в следующем (рис. 3,а).

Первичный ток задаётся равенством

$$\vec{J} = I_0 \sum_{\mu=1}^{m} e^{-i(\mu-1)\frac{\pi}{m}} \sum_{\nu=1}^{N} (-1)^{\nu-1} \sum_{\varkappa=1}^{q} \left(\vec{\Lambda}^{+}_{\mu\nu\varkappa} - \vec{\Lambda}^{0}_{\mu\nu\varkappa} + \vec{\Lambda}^{-}_{\mu\nu\varkappa}\right), \tag{39}$$

где $\vec{\Lambda}^{0}_{\mu\nu\varkappa} = \vec{\Lambda}(x - x_{\mu\nu\varkappa}, y; c_x, c_{y0})$;

величины c_{y0} пояснены на рис. 3,б; остальные обозначения имеют прежний смысл (см. формулу (2) и рис. 2,в).

Кроме этого, в поперечном направлении размещаются "индукторы" с токами противоположной фазы [5-8].

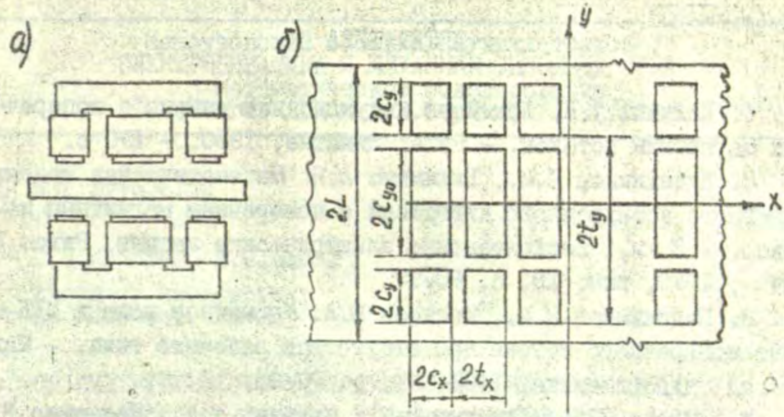


Рис. 3. К математической модели ЛАДПП с Ш-образными сердечниками индуктора

В этих условиях в преобразовании Фурье (3)-(5) и, следовательно, во всех других выражениях необходимо полагать $q_n = n\pi/2L$, $n = \pm 1, \pm 3, \ldots$

Образ Фурье y -составляющей тока (39) равен

$$\hat{J}_{yn} = I_0 \, e^{i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{m} - N\right)} k_n k_q \left(2\cos t_y q_n \cdot \hat{\Lambda}_{yn} - \hat{\Lambda}^0_{yn}\right).$$

$\hat{\Lambda}^0_{yn}$ получается из (35) заменой c_y на c_{y0}. Все остальные математические выражения и смысл использованных обозначений не меняются. Стало быть, электромагнитные расчёты ЛАДПП с П- и Ш-образными сердечниками различаются лишь соответствующим выбором величин $\hat{J}_{yn}$ и q_n.

Подытожим результаты работы.

Построена трёхмерная математическая модель ЛАДПП с П- и Ш-образными сердечниками индуктора. Получены аналитические выражения индукции магнитного поля, вихревых токов в реактивной шине, тягового и нормального усилий, активной и реактивной мощности.

Путём изменения тензора $\dot{\mu}$ и функции первичного тока $\vec{J}$ модель может быть применена для расчёта ЛАД с продольным магнитным потоком, а также для расчёта других конструктивных вариантов ЛАДПП.

Полученные выражения легко поддаются программированию на ЭВМ. Результаты расчётов предполагается опубликовать отдельно,

ЛИТЕРАТУРА

I. Калнинь Т.К. Линейные индукционные машины с поперечным магнитным потоком. - Рига: Зинатне, 1980. - 170 с.

2. Надежников Н.М., Вилнитис А.Я. Математическая модель линейного асинхронного двигателя с поперечным магнитным потоком. - В кн.: Бесконтактные электрические машины. Рига: Зинатне, 1979, вып. 18, с. 80-97.

3. Надежников Н.М., Иостсон Ю.А. Магнитное поле в МГД-машине поперечного потока при отсутствии рабочего тела. - Магнитная гидродинамика, 1981, №I, с. 79-83.

4. Биргер Б.Л., Горовиц В.С., Калнинь Т.К., Полманис Я.Э. Математическая модель индукционных МГД-машин с разделённым магнитопроводом. - Магнитная гидродинамика, 1969, №4, с. 78-82.

5. Охременко Н.М. Основы теории и проектирования линейных индукционных насосов для жидких металлов. - М.: Атомиздат, 1968. - 396 с.

6. Oberretl K. Three-dimensional analysis of the linear motor.- In: Transport Without Wheels. London, 1977, p. 217-247.

7. Schieber D. Principles of operation of linear induction devices.- Proceedings of IEEE, special issue: Ground Transportation for the Eighties; 1973, vol. 61, No 5, p. 647-656.

8. Вольдек А.И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. - Л.: Энергия, 1970. - 272 с.

9. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т. I. - М.: Наука, 1973. - 536 с.

I0. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976. 544 с.

II. Сермонс Г.Я. Динамика твёрдых тел в электромагнитном поле. - Рига.: Зинатне, 1974. - 248 с.

I2. Теоретические основы электротехники, т. П. Под ред. П.А.Ионкина. - М.: Высшая школа, 1976. - 383 с.

Статья поступила I4 марта 1982 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 69-73

УДК 531.37:538.32

В.В.Козорез, В.П.Шаблий
Институт кибернетики
АН УССР гор. Киев

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В ГЛУБОКОЙ МАГНИТНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

В работах [1-4] на основании представления магнитной системы в виде идеально проводящих витков с током изучается устойчивость двух типов частных решений - равновесия и орбитального движения. Так как при этом используется метод функций Ляпунова, вопрос об интегрировании уравнений динамики в упомянутых работах не ставится. Однако, этот вопрос представляет интерес в связи с тем, что в системе магнитных тел взаимодействие нецентрально. Это приводит к взаимосвязи уравнений поступательного движения центра масс и уравнений вращения вокруг центра масс свободного тела.

В этой заметке исследуется вопрос об интегрировании уравнений в частном случае осесимметричных идеально проводящих витков и глубокой магнитной потенциальной ямы в положении их соосности.

Пусть ϱ , λ , ζ - цилиндрические координаты центра масс O_1 свободного тела, а ϑ , ψ , φ - углы Эйлера, определяющие его ориентацию относительно инерциальной системы отсчёта. Угол нутации ϑ - угол между вертикальной осью неподвижного сверхпроводящего витка $O\zeta$ и осью симметрии поля $O_1\zeta_1$ витка, принадлежащего свободному телу, угол прецессии ψ - угол поворота относительно оси $O\zeta$, угол собственного вращения φ - угол поворота вокруг оси $O_1\zeta_1$.

В случае витков в виде окружностей магнитной потенциальной энергией вблизи положения соосности будет [2]

$$U = \frac{1}{2} U_{\zeta\zeta} (\zeta - \zeta_0)^2 + \frac{1}{2} U_{\rho\rho} \rho^2 + \frac{1}{2} U_{\vartheta\vartheta} \vartheta^2 + U_{\rho\vartheta} \rho\vartheta \ , \qquad \text{(I)}$$

где

$$U_{\zeta\zeta} = \kappa_0^2 \ , \quad U_{\rho\rho} = \kappa_1^2 \ , \quad U_{\rho\vartheta} = 2an\kappa_1^2 + \kappa_2^2 \ ,$$
$$U_{\vartheta\vartheta} = 4a^2 n(n + K'K^{-1})\kappa_1^2 + \kappa_3^2 \ , \quad n = \frac{1}{2} l a^{-1} , \qquad (2)$$

a - радиус колец, l - расстояние от центра свободного кольца до центра масс тела, k , k' - модуль и дополнительный модуль полных эллиптических интегралов K и E , а коэффициенты $\kappa_i \ (i = \overline{0,3})$ вычислены в работе [2].

Можно сказать, что для произвольных витков, создающих осесимметричное магнитное поле, формула для U отличается численным значением постоянных коэффициентов.

Если вместо цилиндрических координат точки O_1 и углов Эйлера ϑ , ψ , φ ввести декартовы координаты x , y , z точки O_1 и углы Эйлера-Крылова α , β , γ , то выражением для U будет

$$U = \frac{1}{2} U_{\zeta\zeta} (z - z_0)^2 + \frac{1}{2} U_{\rho\rho} (x^2 + y^2) + \frac{1}{2} U_{\vartheta\vartheta} (\alpha^2 + \beta^2) + U_{\rho\vartheta} (x\beta - y\alpha) . \qquad (3)$$

Из (3) и уравнений динамики следует, что вертикальные колебания по оси z не зависят от остальных координат. Они описываются уравнением

$$z = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \ ,$$

где $\omega_0 = m^{-\frac{1}{2}} U_{\zeta\zeta}^{\frac{1}{2}}$ - собственная частота, m - масса тела.

Области устойчивости равновесия численно получены в работе [2]. В случае малых k необходимым условием равновесия является неравенство $\partial U / \partial z > 0$, которое означает, что магнитная сила имеет характер притяжения. Устойчивость равновесия обеспечивается неравенством $\partial^2 U / \partial z^2 > 0$. Для витков в виде колец можно получить аналитические выражения для области устойчивости

$$\frac{64}{7} s^{-1} p < k^3 < 16 s^{-1} p \ , \qquad (p \ll 1) \ ,$$

$$\frac{64}{7} s^{-1} p^{-1} < \kappa^3 < 16 s^{-1} p^{-1}, \quad (p \gg 1),$$

$p = \Psi_1 \Psi_2^{-1}$, $s = \mu_0 a L^{-1}$; Ψ_1, Ψ_2, L – потокосцепления колец и собственная индуктивность, μ_0 – магнитная постоянная.

Для составления уравнений движения по остальным координатам введём безразмерные переменные $x = x a^{-1}$, $y = y a^{-1}$ (сохраняя прежние обозначения), безразмерное время $\tau = \omega t$ ($\omega = r$ – проекция угловой скорости на ось z) и безразмерные параметры

$$m_1^2 = U_{\varrho\varrho} m^{-1} \omega^{-2}, \quad m_2^2 = U_{\varrho\vartheta} m^{-1} a^{-1} \omega^{-2}, \quad m_3^2 = U_{\vartheta\vartheta} A^{-1} \omega^{-2},$$

$$m_4^2 = U_{\varrho\vartheta} A^{-1} \omega^{-2}, \quad m_5^2 = C A^{-1}, \tag{4}$$

где A и C – экваториальный и полярный моменты инерции тела. Тогда на основании основного закона динамики, динамических и кинематических уравнений Эйлера [5] получим

$$\begin{aligned}
&x'' = -m_1^2 x - m_2^2 \beta, \\
&y'' = -m_1^2 y + m_2^2 \alpha, \\
&\alpha'' + (m_5^2 - 1)\alpha'\beta'\beta + m_5^2 \beta'\gamma' = -m_3^2 \alpha + m_4^2 y, \\
&\beta'' - (m_5^2 - 1)\alpha'^2 \beta - m_5^2 \alpha'\gamma' = -m_3^2 \beta - m_4^2 x, \\
&\alpha'\beta + \gamma' = 1,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $f' = \dfrac{df}{d\tau}$.

В силу нецентральности магнитного взаимодействия уравнения боковых смещений центра масс оказались взаимосвязаны с уравнениями вращения.

Рассмотрим случай быстрого вращения свободного тела вокруг оси поля ($\gamma' \gg \alpha'\beta$), тогда совокупность (5) превращается в линейную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
&x'' = -m_1^2 x - m_2^2 \beta, \\
&y'' = -m_1^2 y + m_2^2 \alpha, \\
&\alpha'' + m_5^2 \beta' = -m_3^2 \alpha + m_4^2 y, \\
&\beta'' - m_5^2 \alpha' = -m_3^2 \beta - m_4^2 x.
\end{aligned} \tag{6}$$

Введём комплексные переменные

$$u = x + iy\,, \quad v = \alpha + i\beta\,.$$

Тогда (6) примет вид

$$u'' + m_1^2 u - i m_2^2 v = 0\,,$$
$$v'' - i m_5^2 v' + m_3^2 v + i m_4^2 u = 0\,. \qquad (7)$$

Характеристическим уравнением системы (7) будет

$$w^4 - i m_5^2 w^3 + (m_1^2 + m_3^2) w^2 - i m_1^2 m_5^2 w + m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2 = 0. \qquad (8)$$

Найдя его корни, можно записать общее решение (7). Функции x, y, α, β находятся выделением действительных и мнимых частей u и v

$$x = \operatorname{Re} u\,, \quad y = \operatorname{Im} u\,, \quad \alpha = \operatorname{Re} v\,, \quad \beta = \operatorname{Im} v\,.$$

В двух частных случаях можно найти в явном виде собственные частоты колебаний.

Пусть маятник представляет собой тонкий стержень ($m_5^2 = CA^{-1} \ll 1$). Пренебрегая в уравнении (8) членами, содержащими m_5^2, получим

$$w^4 + (m_1^2 + m_3^2) w^2 + m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2 = 0.$$

Это уравнение имеет решения

$$w = \pm \left\{ \frac{1}{2} \left[-m_1^2 - m_3^2 \pm \sqrt{(m_1^2 + m_3^2)^2 - 4(m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)} \right] \right\}^{1/2}.$$

Если свободное тело является длинным маятником ($n = \frac{1}{2} l a^{-1} \gg 1$), то уравнения (6) запишутся в виде

$$\begin{aligned} x'' &= -m_1^2 x - m_2^2 \beta\,, \\ y'' &= -m_1^2 y + m_2^2 \alpha\,, \\ \alpha'' &+ m_5^2 \beta' + m_6^2 \alpha = 0\,, \\ \beta'' &- m_5^2 \alpha' + m_6^2 \beta = 0\,, \end{aligned} \qquad (9)$$

где $m_6^2 = 4 a^2 n^2 K_1^2$.

Последние два уравнения представляют собой уравнения горизонтального движения маятника при учёте вращения Земли. Они легко интегрируются [6]. После этого два первых уравнения совокупности (9) становятся линейными неоднородными уравнениями с постоянными коэффициентами, а общее решение (9) выглядит так:

$$x = A_3 \cos m_1\tau + A_4 \sin m_1\tau + A_1 m_2^2 (b^2 - m_1^2)^{-1} \sin(b\tau + \delta_1) +$$
$$+ A_2 m_2^2 (c^2 - m_1^2)^{-1} \sin(c\tau + \delta_2),$$
$$y = A_5 \cos m_1\tau + A_6 \sin m_1\tau + A_1 m_2^2 (m_1^2 - b^2)^{-1} \cos(b\tau + \delta_1) +$$
$$+ A_2 m_2^2 (m_1^2 - c^2)^{-1} \cos(c\tau + \delta_2),$$

$$\alpha = A_1 \cos(b\tau + \delta_1) + A_2 \cos(c\tau + \delta_2),$$
$$\beta = A_1 \sin(b\tau + \delta_1) + A_2 \sin(c\tau + \delta_2),$$

$$b, c = \frac{1}{2}\left(m_5^2 \pm \sqrt{m_5^4 + 4m_6^2}\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Козорез В.В., Чеборин О.Г. Об устойчивости равновесия в системе двух идеальных токовых колец. - Докл. АН УССР, сер. А, 1977, №1, с. 80-81.

2. Бандурин В.В., Зиновьев А.С., Козорез В.В., Ляшенко А.М., Чеборин О.Г. Об устойчивости равновесия свободного физического маятника в магнитной потенциальной яме. - Докл. АН УССР. сер. А, 1979, №6, с. 478-482.

3. Козорез В.В. Об устойчивости орбитального движения в задаче двух свободных магнитов. - Изв. АН СССР. МТТ, 1976, №1, с. 3-13.

4. Козорез В.В., Чеборин О.Г. Об устойчивости орбитального движения двух свободных идеально проводящих токовых колец. - Докл. АН УССР, сер. А, 1978, №10, с. 932-934.

5. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. - М.: Наука, 1976. - 670 с.

6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1971. - 576 с.

Статья поступила 15 декабря 1981 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 74-77

УДК 538.32

В.П.Шаблий

Институт кибернетики
АН УССР гор. Киев

О ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОЖЁСТКОЙ ОПОРЫ, ОСНОВАННОЙ НА ЭФФЕКТЕ МАГНИТНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА

В различных областях современной техники (приборостроении, энергетике и транспорте [I]) в настоящее время важное значение начинает приобретать вопрос об использовании магнитной левитации. В частности, использование магнитно подвешенного тела позволит существенно улучшить тепловую изоляцию ротора криотурбугенератора, что представляет важное значение для повышения к.п.д. (по этому поводу см. [2]).

В ряде работ [3-5] изучаются вопросы об устойчивости магнитного подвеса, основанного на исследовании магнитного взаимодействия сверхпроводящих короткозамкнутых обмоток.

В данной заметке изучается возможность существования опоры с магнитным взаимодействием идеально проводящих токовых колец и одинаковой жёсткостью в осевом и радиальном направлениях.

Пользуясь формулами для безразмерных вертикальной $U_{\zeta\zeta}$ и боковой $U_{\rho\rho}$ жёсткостей, полученных в [3], можем записать

$$U_{\zeta\zeta} = 4\Psi_2^{-2} a^2 L \Big\{ \big[(1-py)(1-2py+y^2)+(p-y)(p-2y+py^2)\big] \times$$
$$\times (1-y^2)^{-3} (\kappa')^{-2} \big[\kappa'^2 (E-2K)+E\big]^2 +$$
$$+ (p-y)(1-py)(1-y^2)^2 \kappa^3 (\kappa')^{-2} \big[\kappa'^2 (2E-K)-E\big]\Big\}, \qquad (I)$$

$$U_{\rho\rho} = \frac{1}{2}\Psi_2^{-2} a^2 L\, (p-y)(1-py)(1-y^2)^{-2} \kappa^3 (\kappa')^2 \big[\kappa'^2 (K-E)+\kappa^2 E\big], \qquad (2)$$

где a - радиус колец, L - собственная индуктивность, Ψ_1, Ψ_2 - магнитные потоки колец, $p = \Psi_1 \Psi_2^{-1}$ - отношение магнитных потоков, $K(\kappa)$ и $E(\kappa)$ - полные эллиптические интегралы модуля κ, $y = L_{12} L^{-1}$ - отношение взаимной индуктивности колец L_{12} к собственной, $\kappa'^2 = 1 - \kappa^2$.

Тогда условие равной жёсткости имеет вид

$$U_{\zeta\zeta} = U_{\varrho\varrho}$$

или

$$2[(1-py)(1-2py+y^2)+(p-y)(p-2y+py^2)][\kappa'^2(E-2K)+E]^2 =$$

$$= 3(p-y)(1-py)(1-y^2)\kappa^3[\kappa'^2(K-E)+\kappa^2 E]. \tag{3}$$

Устойчивость равновесия опоры в вертикальном направлении обеспечивается неравенством

$$U_{\zeta\zeta} > 0,$$

которое в данном случае выглядит так

$$[(1-py)(1-2py+y^2)+(p-y)(p-2y+py^2)][\kappa'^2(E-2K)+E]^2 -$$

$$-(p-y)(1-py)(1-y^2)\kappa^3[\kappa'^2(K-E)+\kappa^2 E] > 0. \tag{4}$$

Одновременное выполнение условий (3) и (4) будет означать возможность существования равножёсткой опоры. Найдём решения (3) и (4) при малых и больших κ, что отвечает соответственно случаям удалённых и близкорасположенных колец. Воспользуемся разложением полных эллиптических интегралов K и E [6]. При малых

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \frac{\kappa^2}{4} + \frac{9\kappa^4}{64} + \dots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 \kappa^{2n} + \dots\right.$$

$$E = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{\kappa^2}{4} - \frac{3\kappa^4}{64} - \dots - \left[\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right]^2 \frac{\kappa^{2n}}{2n-1} - \dots\right., \tag{5}$$

а при больших κ

$$K = \ln\frac{4}{\kappa'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\ln\frac{4}{\kappa'} - \frac{2}{1\cdot 2}\right)\kappa'^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\left(\ln\frac{4}{\kappa'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{2}{3\cdot 4}\right)\kappa'^4 + \dots$$

$$E = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{4}{\kappa'} - \frac{1}{1\cdot 2}\right)\kappa'^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\ln\frac{4}{\kappa'} - \frac{2}{1\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 4}\right)\kappa'^4 + \dots \tag{6}$$

Тогда приближённые уравнение (3) и неравенство (4) при малых κ запишутся в виде

$$\frac{3}{32}\pi\alpha\kappa^3 p^2 - p + \frac{3}{32}\pi\alpha\kappa^3 = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{4}{64}\pi\alpha\kappa^3 p^2 - p + \frac{7}{64}\pi\alpha\kappa^3 > 0,$$

$$\alpha = \mu_0^{-1} a^{-1} L, \qquad (8)$$

а при больших κ

$$p^2 - 2p + 1 = 0, \qquad (9)$$

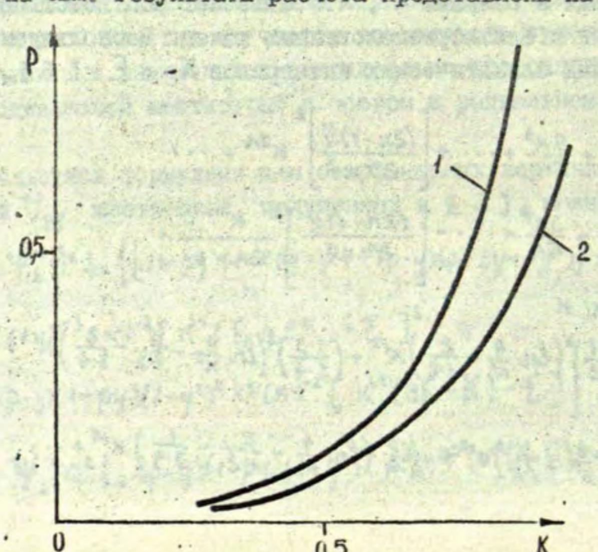
$$p^2 - 2p + 1 > 0. \qquad (10)$$

Корень (7), удовлетворяющий условию $p < 1$, равен

$$p \approx \frac{3}{32}\pi\alpha\kappa^3,$$

а (8) выполняется при $p < \frac{4}{64}\pi\alpha\kappa^3$. Следовательно, уравнение (7) имеет корень, являющийся решением неравенства (8), т.е. опора будет устойчивой. При больших κ уравнение (9) имеет корень $p = 1$, а точное уравнение (3) будет иметь корень, близкий к 1 и удовлетворяющий неравенству (10).

Решение точных уравнений (3) и неравенства (4) проводилось на ЭВМ. Результаты расчёта представлены на рисунке:



Кривая I соответствует уравнению $U_{\zeta\zeta} = 0$, а решения неравенства $U_{\zeta\zeta} > 0$ находятся ниже этой кривой. Кривая 2 определяет решения уравнения $U_{\zeta\zeta} = U_{\varphi\varphi}$. Тогда очевидно, что при любых k корень уравнения (3) удовлетворяет неравенству (4). Тем самым показана возможность создания равножёсткой опоры, основанной на эффекте минимума магнитной потенциальной энергии.

ЛИТЕРАТУРА

I. Сверхпроводящие машины и устройства. Под ред. С.Фонера и Б.Шварца. - М.: Мир, 1977. - 763 с.

2. Казовский Е.Я., Карцев В.П., Шахтарин В.Н. Сверхпроводящие магнитные системы. - Л.: Наука, 1967. - 323 с.

3. Козорез В.В., Чеборин О.Г. Об устойчивости равновесия в системе двух идеальных токовых колец. - Докл. АН УССР. Сер. ', 1977, №I, с. 80-8I.

4. Бандурин В.В., Зиновьев А.С., Козорез В.В., Ляшенко А.М., Чеборин О.Г. Об устойчивости равновесия свободного физического маятника в магнитной потенциальной яме. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1979, №6, с. 478-482.

5. Козорез В.В., Чеборин О.Г. Об одном коллинеарном случае задачи трёх магнитов. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, №II, с. 995-998.

6. Градштейн И.С., Рыжик Н.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.- М.: Физматгиз, 1962.- 1100 с.

Статья поступила 15 декабря 1981 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 78-92

УДК 534.615:621.372.41

В.Я.Ауза, Л.Г.Иванов, Н.Н.Устинов, Шикин Б.М.
ЛГУ им. П.Стучки Завод РЭЗ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ ОБЪЁМОВ АКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Элементной базой для автоматизации основных технологических процессов современного производства является возможность точного и быстрого измерения объёмов тел-деталей.

Основной недостаток распространённого в настоящее время метода измерения объёмов, основанного на гидростатическом взвешивании тел, заключается в необходимости дополнительной обработки объекта измерения (обычно парафином) для предотвращения смачивания. В процессе парафинирования изменяется также измеряемый объём, что необходимо учитывать при окончательных вычислениях.

Всё большее распространение в последнее время начинает получать акустический способ измерения объёмов [I], основным преимуществом которого является, при сохранении высокой точности измерений, экспрессность и возможность совмещения с технологическим процессом.

Акустический способ измерения объёмов основан на изменении резонансной частоты объёмного резонатора Гельмгольца (рис. I) при помещении в него измеряемого объекта.

Если трубу, закрытую с одного конца и имеющую одинаковое сечение по всей длине, можно рассматривать как сплошную колебательную систему, обладающую множеством нормальных колебаний и поэтому способную резонировать на множество гармонических сигналов, то у резонатора Гельмгольца, представляющего предельный случай такой трубы с неоднородным по длине сечением,

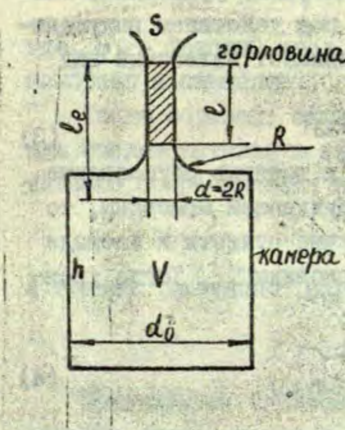


Рис.I. Резонатор Гельмгольца

все обертоны будут достаточно далеко отодвинуты от основной частоты, которую можно определить, рассматривая резонатор как линейную колебательную систему с сосредоточенными параметрами.

Если объём горловины Sl гораздо меньше свободного объёма камеры V (в дальнейшем будем требовать, чтобы выполнялось соотношение $Sl \leqslant 0{,}1V$), то при колебаниях роль колеблющейся массы играет воздух в горловине резонатора (воздушная поршневая мембрана массы $M=\rho Sl$), а воздух в камере, практически оставаясь неподвижным, выполняет роль пружины с коэффициентом сжатия k .

Для определения этого коэффициента заметим, что при смещении поршневой мембраны на расстояние dx возвращающая сила $dF=kdx$ уравновешивается изменением силы давления в камере резонатора Sdp , т.е.

$$Sdp = k\,dx. \tag{I}$$

Поскольку сжатие воздуха в этом случае можно считать адиабатическим, то из соотношения [3]

$$pV^{\gamma} = \mathrm{const},$$

где γ - показатель адиабаты (для воздуха равный I.4), получаем, что $dp=\gamma p\,dV/V = \gamma pS\,dx/V$, а коэффициент сжатия равен

$$k = \frac{S^2\gamma p}{V} = c^2\frac{\rho S^2}{V}, \tag{2}$$

где $c=\sqrt{\gamma p/\rho}=\sqrt{RT}$ - адиабатическая скорость звука, ρ - плотность воздуха при температуре T, p - давление воздухе при данной плотности.

Учитывая, что затухание в такой колебательной системе обусловлено потерями на трение и местными сопротивлениями, возникающими при движении поршневой мембраны, уравнение, описывающее смещение мембраны во времени под действием вынуждающей периодической силы $F_0 \sin \omega t$, принимает известный вид [3]

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t . \tag{3}$$

Поскольку, однако, акустическая волна в воздухе обусловлена действием периодического давления возбуждающей мембраны, то в написанном уравнении все величины лучше отнести к площади поршневой мембраны, т.е. к площади горловины S , Тогда уравнение (3) можно записать так

$$\mu\ddot{x} + \beta\dot{x} + \varkappa x = \frac{p_0}{S} \sin \omega t , \tag{4}$$

где $\beta = b/S^2$ – приведенное трение; p_0/S – приведённая амплитуда давления мембраны, или удельное давление;

$$\mu = M/S^2 = \rho l_e/S ; \quad l_e = l + \pi R/2 ; \; S = \pi R^2 ;$$
$$\varkappa = k/S^2 = c^2 \rho / V .$$

В этом случае $\dot{x} = v$ имеет смысл скорости воздуха в горловине, т.е. скорости поршневой мембраны, а $Q = Sv$ – определяет расход воздуха в акустической цепи. $Q = const$; $Sv = S_{камеры} v_{камеры}$
Если в уравнении (4) ввести стандартные обозначения

$$\alpha = \beta/2\mu ; \quad \omega_0 = \varkappa/\mu ; \; p_0/\mu S = X_0 , \tag{5}$$

то оно принимает каноническую форму

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = X_0 \sin \omega t, \tag{6}$$

интересующее нас частное решение которого имеет вид

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) ; \tag{7}$$

$$A = X_0 / [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]^{1/2} , \tag{8}$$

где A – амплитуда колебаний.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\omega\alpha}{(\omega_0^2-\omega^2)}\,,$$ (.

где φ - фазовый угол между возбуждающим давлением звуков: мембраны и смещением.

Таким образом, если резонатор Гельмгольца рассматривать как последовательную акустическую цепь, то в ней роль реактивного сопротивления цепи играет величина

$$\omega\mu - \frac{\varkappa}{\omega}\,, \tag{10}$$

а полный импеданс равен

$$Z = [\,\beta^2 + (\omega\mu - \varkappa/\omega)^2\,]^{1/2}\,. \tag{11}$$

Приведённые соотношения (4) - (11) показывают, что резонансные свойства такой системы, как резонатор Гельмгольца, определяются взаимодействием между первичным источником акустических волн, каким является звуковая мембрана, и вторичным источником - поршневой мембраной в горловине резонатора.

Как видно из выражения (7), скорость поршневой мембраны опережает смещение мембраны на $\pi/2$, а давление на поршневой мембране или давление в горловине $p_{горл}$ опережает смещение на π,

$$v = A\omega\cos(\omega t+\varphi) = A\omega\sin(\omega t+\psi)\,,$$

$$p_{горл} \sim -A\omega^2\sin(\omega t+\varphi) = A\omega^2\sin(\omega t+\theta)\,, \tag{12}$$

где $\psi = \varphi + \pi/2$; $\theta = \varphi + \pi$.

Таким образом, при $\omega \ll \omega_0$, когда $\varphi \approx 0$, $\psi \approx \pi/2$ и $\theta \approx \pi$, скорос воздуха в горловине опережает на $\pi/2$ звуковое давление возбуждающей мембраны, а давление воздуха в горловине находится в противофазе с этим давлением. Поскольку при этих частотах импеданс камеры значительно превышает импеданс горловины, то давление в горловине резонатора, т.е. на поршневой мембране, практически равно нулю.

При $\omega \gg \omega_0$, т.е. когда $\varphi \approx -\pi$; $\psi \approx \pi/2$; $\theta \approx 0$, скорост поршневой мембраны в горловине отстаёт на $\pi/2$ от звукового давления возбуждающей мембраны, а давление в горловине совдает по фазе с давлением возбуждающей мембраны. Поскольку при таких частотах импеданс горловины значительно превышает импеданс камеры, то давление в горловине резонатора будет максимальным и приблизительно равным возбуждающему давлению, а давление в камере будет практически равно нулю.

Наконец, при $\omega \approx \omega_0$, когда $\varphi \approx -\pi/2$, $\psi \approx 0$ и $\theta \approx \pi/2$, видим, что скорость поршневой мембраны в горловине совпадает по фазе с возбуждающим звуковым давлением, а давление в горловине опережает на $\pi/2$ давление возбуждающей мембраны и находится в противофазе с давлением в камере (причём $p_{горл} + p_{кам} = 0$, и наблюдается резонанс давлений). Отметим также, что резонансные значения смещений, скоростей и давлений сдвинуты друг относительно друга так, что $\omega_{рез\,x} <$ $\omega_{рез\,v} < \omega_{рез\,p}$, причём

$$\omega_{рез\,x} = \omega_0\sqrt{1-2\alpha^2/\omega_0^2}\,;\quad \omega_{рез\,v} = \omega_0\,;\quad \omega_{рез\,p} = \omega_0/\sqrt{1-2\alpha^2/\omega_0^2}\,. \tag{13}$$

Наконец, учитывая в соответствии с вышесказанным, что при малых и больших частотах давление в камере ведёт себя так же, как смещение, т.е., что

$$p_{кам} = S v Z_{кам} = v\frac{\varkappa}{\omega}S = \varkappa S X\,,$$

а давление в горловине при малых частотах ($\omega \ll \omega_0$)

$p_{горл} = S v Z_{горл} \sim v\mu\omega \to 0$, а при больших $p_{горл} \sim \frac{p_0}{\mu\omega}\mu\omega \to p_0$ можно проследить зависимость амплитуд скорости воздуха в горловине и давлений в камере и горловине от частоты (рис.2).

Выразим собственную частоту резонатора в формуле (5) через его геометрические параметры:

$$\omega_0^2 = \frac{\varkappa}{\mu} = c^2\frac{S}{l_e V}\,;\quad \omega_0 = c\sqrt{\frac{S}{l_e V}}\,, \tag{14}$$

где S – площадь сечения горловины, l_e – эффективная длина горловины, V – свободный объём камеры.

Полученное соотношение не учитывает зависимость собственной частоты от формы объёма, однако, как показано в работе [4], такая зависимость существует и заключается в изменении длины горловины на некоторую величину $\Delta l(V)$, определяемую

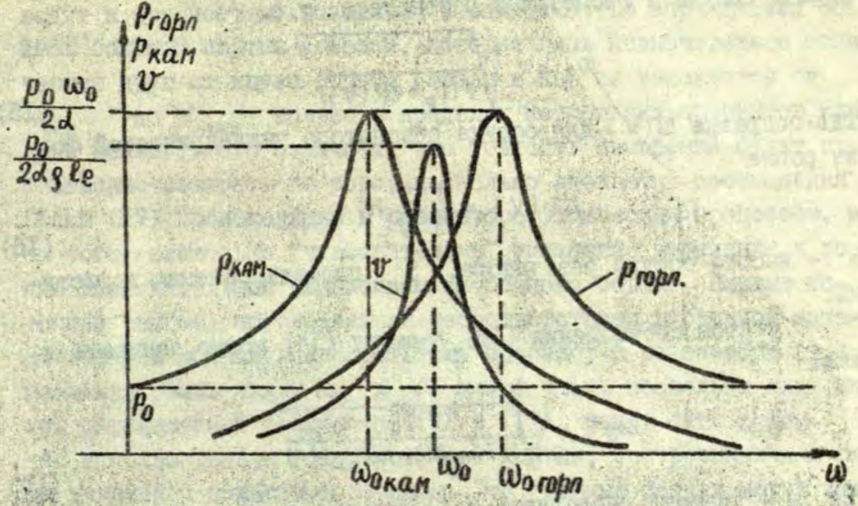


Рис. 2. Частотные зависимости амплитуд скорости и давлений в камере и горловине для резонатора Гельмгольца.

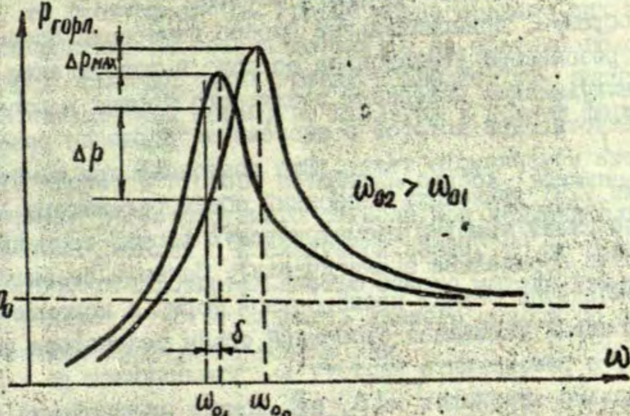


Рис. 3. Зависимость амплитуды давлений в горловине резонатора от частоты.

формой сосуда и геометрией резонатора, т.е.

$$\omega_0 = c\sqrt{\frac{S}{V(l_e + \Delta l(V))}}\ , \qquad (I5)$$

где поправка $\Delta l(V)$ для сосуда резонатора цилиндрической формы равна

$$\Delta l(V) = \frac{1}{3}\frac{S}{V}h^2\ , \qquad (I6)$$

h – высота сосуда резонатора, S – площадь сечения горловины.

С учётом соотношения (I6) формулу (I4) можно записать в виде

$$\omega_0 = c\sqrt{\frac{S/l_e}{V(1+d^2h/(3l_e d_0^2))}}\ , \qquad (I7)$$

где d – диаметр горловины; d_0 – диаметр основания сосуда; h – высота сосуда; формула (I7) показывает, что поправка на форму объёма резонатора будет несущественной, если при $h \approx l_e$ $d \ll d_0$, т.е. в этом случае собственную частоту резонатора можно считать однозначной функцией объёма.

Таким образом, принципиальный способ измерения объёмов при помощи резонатора Гельмгольца состоит в возбуждении и регистрации вынужденных колебаний воздушного поршня в горловине такой частоты, при которой в системе наблюдается резонанс (в отсутствие измеряемого тела). Это позволяет при помощи формул (I4) или (I7) вычислить свободный объём резонатора V (если резонатор имеет простую геометрическую форму, то величина V может быть определена аналитически). Затем в резонатор помещается измеряемый объект произвольной формы с искомым объёмом V_*, который уменьшает свободный объём резонатора до величины V' , а резонансную частоту ω_0 увеличивает до ω_0' . Экспериментально определив ω_0' , при помощи соотношений (I4) или (I7) можно найти новый свободный объём V' , а вместе с ним и искомый объём V_* , как

$$V_* = V - V'.$$

Однако, подобная реализация изложенного способа измерения объёмов на практике, в условиях конкретного производства, приводит к трудностям, вызванным необходимостью определения объёмов большой партии деталей, которые лишь незначительно отличаются друг от друга (объём детали в партии изменяется от V_{min} до V_{max} только в пределах нескольких процентов или даже меньше). Это означает, что точность измерений будет существенно зависеть от того, насколько адекватны соотношения (I4) и (I7) происходящим в резонаторе физическим процессам, и от того, насколько "чувствительны" указанные выражения к таким незначительным изменениям свободного объёма. Первый источник ошибок, обусловленный несоответствием выбранной математической модели колебательному процессу в резонаторе (т.е. истинная связь между ω_0 и V может иметь несколько иной вид, чем определяемый формулами (I4) и (I7), может быть исключён использованием градуировочных кривых, построенных для ряда деталей с известным объёмом. Эти опорные детали могут иметь форму, отличную от той, которая присуща исследуемым объектам, но должны иметь объёмы, приблизительно совпадающие по величине с искомыми. Поскольку величина э.д.с., наводимой в приёмнике резонансных колебаний, является однозначной функцией частоты, то градуировочным кривым можно придать вид зависимостей напряжения от объёма детали (а не свободного объёма резонатора). Наличие таких кривых позволяет уже экспрессно находить неизвестный объём, не прибегая к помощи формул (I4) или (I7).

Что касается второго источника ошибок, вызванного малыми изменениями регистрируемого сигнала при незначительных изменениях объёма деталей в исследуемой серии, то он в значительной мере связан с чувствительностью самого метода измерений.

Определим чувствительность данного метода по отношению к изменению свободного объёма как

$$S_V = \frac{\Delta A / A}{\Delta V / V}, \tag{I8}$$

где $\Delta V / V$ – относительное изменение свободного объёма камеры; $\Delta A / A$ – относительное изменение регистрируемого сигнала.

Поскольку датчики, применяемые для регистрации сигнала, реагируют, как правило, на изменение акустического давления, проведём дальнейший анализ соотношения (I8) для амплитуды давлений в горловине и камере. Используя соотношения (7), (8) и (II) для амплитуд давления в горловине и камере, получаем

$$p_{горл} = Q Z_{горл} = S v \omega \mu = S \omega^2 \mu X ,$$

$$p_{горл} = \frac{p_0 \omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]^{1/2}} . \tag{I9}$$

Аналогично

$$p_{кам} = Q Z_{кам} = S v \varkappa / \omega = S \varkappa X ,$$

$$p_{кам} = \frac{p_0 \omega_0^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]^{1/2}} . \tag{20}$$

Дифференцируя эти выражения по ω_0 и, замечая, что из соотношения (I4) $d\omega_0 = -1/2\, \omega_0 dV/V$, получаем для относительных изменений амплитуд давления в горловине и камере

$$\frac{\Delta p_{горл}}{p_{горл}} = \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \frac{\Delta V}{V} , \tag{2I}$$

$$\frac{\Delta p_{кам}}{p_{кам}} = \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2) - 4\alpha^2\omega^2 - (\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \frac{\Delta V}{V} . \tag{22}$$

Как видно из рис. 3, относительные изменения регистрируемого сигнала будут больше, если измерения производить на частоте ω , несколько меньшей, чем резонансная. Пусть

$$\delta = \omega_0 - \omega$$

определяет необходимый сдвиг от резонансной частоты. Тогда

$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\delta\omega_0$ и выражениям (2I) и (22) можно придать следующий приближённый вид:

$$\frac{\Delta p_{горл}}{p_{горл}} = \frac{\omega_0 \delta}{2(\delta^2 + \alpha^2)} \frac{\Delta V}{V} ,$$

$$\frac{\Delta p_{кам}}{p_{кам}} = \frac{\omega_0 \delta / 2 - (\delta^2 + \alpha^2)}{\delta^2 + \alpha^2} \frac{\Delta V}{V} .$$

В этом случае для чувствительностей горловины и камеры получаем соответственно

$$S_{V\,горл} = \frac{\omega_0 \delta}{2(\delta^2 + \alpha^2)}, \quad S_{V\,кам} = \frac{\omega_0 \delta}{2(\delta^2 + \alpha^2)} - 1. \tag{23}$$

Соотношения (23) имеют максимум при $\delta = \alpha$ (более точный анализ выражений (2I) и (22) показывает, что максимальными эти чувствительности становятся примерно при $\delta \approx \alpha / \sqrt{3}$). Подставляя в (23) $\delta = \alpha$, находим, что

$$S_{V\,горл} = \omega_0 / 4\alpha, \quad S_{V\,кам} = \omega_0 / 4\alpha - 1. \tag{24}$$

Из соотношений (24) видим также, что

$$\frac{S_{V\,горл}}{S_{V\,кам}} = \left(1 - \frac{4\alpha}{\omega_0}\right)^{-1}. \tag{25}$$

Выражение (25) показывает, что если $4\alpha \ll \omega_0$, то чувствительности метода измерения в горловине и камере примерно одинаковы, однако, если $4\alpha \sim \omega_0$, чувствительность метода измерения, связанная с помещением регистрирующего прибора в камеру резонатора, практически равна нулю, и метод не может гарантировать высокой точности измерений. Дальнейший анализ выражений (24) требует проведения количественных оценок в отношении показателя затухания системы α.

Для этого предположим, что резонанс давлений и скорости наступает при одной и той же частоте ω_0, и заметим, что при резонансе скорость воздуха в горловине совпадает по фазе с давлением возбуждающей звуковой мембраны.

Таким образом, давление звуковой мембраны при резонансе приложено только к активному сопротивлению резонатора, и движение воздуха в нём аналогично попеременному вытеканию и втеканию жидкости через сосуд с насадкой за счёт разности между звуковым и атмосферным давлением. При этом согласно (II)

$$p_\beta = p_0 = \beta \zeta Q = \beta \zeta S v_0, \tag{26}$$

где p_0 и v_0 – амплитуды давлений возбуждающей мембраны и скорости воздуха в горловине; ζ – коэффициент расхода жидкости, обусловленный местными сопротивлениями насадки и имеющий оптимальные значения при длине насадки $l = 3 \div 4$, где d – диаметр горловины; β – характеристика активных потерь системы.

В зависимости от конструкции насадка, величина $0.62 \leqslant \zeta \leqslant 0.98$ [5]. При длине насадка $l > 4d$ возрастают потери напора, зависящие от того, является режим движения ламинарным или турбулентным, а величина ζ становится меньше 0.6. Поэтому для уменьшения активных потерь в резонаторе нецелесообразно выбирать длину горловины l больше, чем $l = 4d$. При $l < 3d$ возрастают местные сопротивления, и ζ также уменьшается. Из соотношений (26) и (5) получаем

$$\beta = \frac{p_0}{\zeta S v_0} = \alpha\, 2\mu ,$$

откуда

$$\alpha = \frac{p_0}{2\zeta v_0 \rho l_e} = \frac{p_{эф}}{2\zeta v_{эф} \rho l_e} . \qquad (27)$$

Для оценки эффективных значений давления возбуждающей мембраны и скорости воздуха в горловине необходимо выразить $p_{эф}$ через потребляемую мощность N источника акустических волн. Известно [6], что если длины волн, возбуждаемых резонатором ($\lambda = c_0 / f$, c_0 – скорость звука в воздухе, f – воздействующая частота) удовлетворяют неравенству $d_м < \lambda / 3$, где $d_м$ – диаметр пульсирующего источника звука, то его можно аппроксимировать малой сферой радиуса r_0 . При этом $4\pi r_0^2 = \pi R_м^2$, т.е. $r_0 = R_м / 2$. Известно также [7], что если $\omega r_0 \ll c_0$, то определяющую роль в распространении акустических волн играет так называемое ближнее поле, в котором скорость

$$v = \frac{p_0}{\omega \rho r^2} \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$$

отстаёт по фазе от звукового давления $p = \frac{p_0}{r} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ на $\pi / 2$.

В этом случае ближнее поле не даёт вклада в энергию, передаваемую среде источником звука. Эту часть звукового поля называют реактивной компонентой, и она характеризует только кинетическую энергию прилегающего к поверхности источника колебаний воздуха, т.е. движение воздушной массы в ближней зоне необходимо рассматривать как поток несжимаемой жидкости. Кинетическую энергию такого потока можно найти как

$$W_k = \frac{1}{2} \int_{V_0}^{V} \rho v^2 dV = \frac{1}{2} \int_{r_0}^{R} \rho v^2 4\pi r^2 dr . \qquad (28)$$

Обозначая скорость частиц воздуха в ближней зоне как

$$v = \frac{A}{r^2}\sin(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \qquad (29)$$

где $A = p_0/\omega\rho$, и пренебрегая в (28) $1/R$ по сравнению с $1/r_0$, где R – расстояние, соответствующее границе камеры, получим после усреднения по времени для энергии, излучаемой единицей поверхности источника

$$W_k = \frac{A^2\rho 4\pi}{4r_0} = \frac{\pi p_0^2}{\omega^2\rho r_0} = \frac{p_{эф}^2}{\pi f^2\rho R_м} \qquad (30)$$

Тогда энергия, передаваемая окружающей среде всем источником, будет равна

$$W = W_k S = \frac{p_{эф}^2 R_м}{f^2\rho},$$

или с учётом того, что $Wf = N_0$ есть мощность, излучаемая поверхностью отверстия мембраны, получим

$$p_{эф}^2 = N_0 f\rho / R_м . \qquad (31)$$

Так как источник колебаний обычно выполняется в виде акустического трансформатора, для которого излучаемая мощность N_1 равна

$$N_1 = N_0\frac{S_м}{S} = N_0\frac{R_м^2}{r_1^2} ,$$

где $R_м$ – радиус мембраны; r_1 – радиус выходного отверстия датчика; то в выражение (31) необходимо вместо N_0 подставить N_1. Поскольку, кроме того,

$$N_1 = \eta N ,$$

где η – к.п.д. датчика $0{,}1\% \leq \eta \leq 5\%$; N – потребляемая датчиком мощность; для эффективного давления получим

$$p_{эф}^{\circ} = \sqrt{\rho\frac{R_м}{r_1^2} f\eta N} . \qquad (32)$$

Отметим, что это выражение, с учётом принятых допущений, справедливо для всего диапазона частот возбуждения.

Если $N = 45\cdot 10^{-3}$ Вт, $R_м = 0{,}000$ м, $r_1 = 0{,}001$ м, $\rho = 1{,}25$ кг/м^3 (при $t = 20^\circ C$) и $\eta = 0{,}005$, то

$$p_{эф} \approx 1,59\sqrt{f} \quad Н/м^2. \tag{33}$$

Соотношение (33) показывает, что даже при частотах возбуждения порядка 700 Гц, когда длина волны λ порядка 0,5 м, значения $p_{эф}$ не превосходят 45 $Н/м^2$, т.е. звуковые давления в резонаторе весьма малы по сравнению с атмосферным давлением $p_A = 1,073 \cdot 10^5$ $Н/м^2$. Поскольку диаметр горловины резонатора гораздо меньше размеров поперечного сечения камеры, скоростью воздуха в камере по сравнению со скоростью его в горловине можно пренебречь и для определения скорости воздуха в горловине при резонансе давлений в резонаторе можно использовать известную в газодинамике формулу [2]:

$$v_{эф} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\,\frac{p_A}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p_A}{p_A+p_{эф}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]},$$

которую с учётом практической несжимаемости воздуха при отмеченных давлениях можно представить в виде

$$v_{эф} \approx \gamma\sqrt{p_{эф}/\rho} = \sqrt{2p_{эф}/\rho}. \tag{34}$$

Тогда с помощью выражений (34) и (32) для показателя затухания резонатора Гельмгольца при резонансе можем записать

$$\alpha^2 = \frac{p}{4\zeta^2\gamma^2\rho l_e^2} = \frac{1}{4\zeta^2\gamma^2 l_e^2}\sqrt{\frac{R_м \eta N f}{r_1^2\rho}}. \tag{35}$$

Отметим, что полученному соотношению (35) для показателя затухания системы можно доверять, с известными предосторожностями, лишь в небольших пределах отклонения от резонансной частоты.

Возвращаясь к выражениям (24), характеризующим чувствительности метода измерений, можем, учитывая, что $l = 3,5d$, записать

$$S^4_{V горл} \approx 12,2\cdot 10^8\,\frac{\zeta^4 d^5\sqrt{d}\,r_1^2}{V^{3/2}R_м\eta N}, \tag{36}$$

которое вместе с соотношениями

$$l = 3,5d \quad \text{и} \quad Sl = 0,1V \tag{37}$$

позволяет проводить оптимизацию чувствительности метода измерения по отношению к измеряемым объёмам.

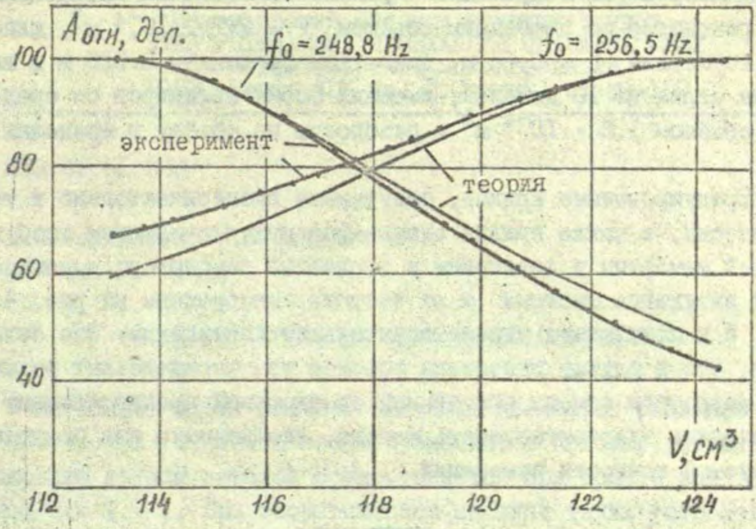


Рис. 4. Градуировочные кривые для резонатора Гельмгольца.

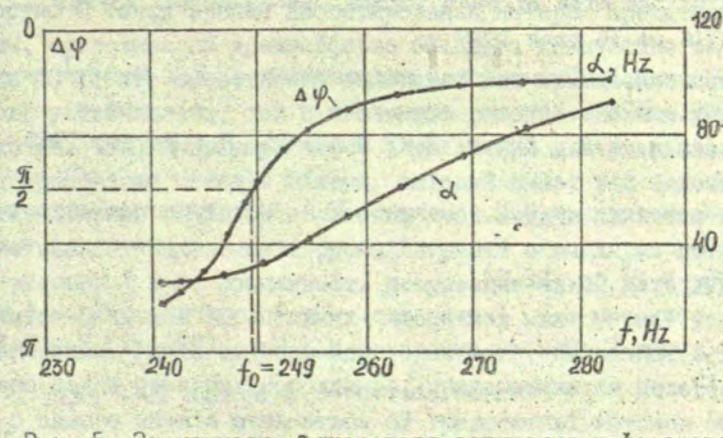


Рис. 5. Зависимости показателя затухания и фазового угла от частоты.

Для проверки полученных в работе соотношений был изготовлен резонатор со свободным объёмом $V = 2.7 \cdot 10^{-4}$ м^3, длиной горловины $l = 0.04$ м, диаметром горловины 0.015 м и выбрана серия из 10 деталей, имеющих форму цилиндров со средним объёмом $1.2 \cdot 10^{-4}$ м^3 и разбросом по объёму в пределах 5%.

Градуировочные кривые, полученные экспериментально и теоретически, а также кривые сдвига фаз между давлением возбуждающей мембраны и давлением в горловине резонатора и показателя затухания системы α от частоты, изображены на рис. 4 и рис. 5 и показывают удовлетворительное совпадение. Это означает, что в случае измерения объёмов тел определённых размеров можно при помощи полученных соотношений предварительно определить чувствительность метода, необходимую для получения требуемой точности измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roberts W.L. Method and apparatus for acoustically determining the size of cast ingots. Пат. США кл. 73-149, № 3324716 от 16 июня 1967 г.

2. Повх И.Л. Техническая гидродинамика. Л.: Машиностроение, 1969.- 524 с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1965.- 204 с.

4. Монастырский С.М., Полунов Ю.Л. Методическая погрешность акустического способа измерения объёмов.- Измерительная техника, 1979, № 11, с. 22-24.

5. Рабинович Е.З. Гидравлика. М.: Физматгиз, 1963.- 408 с.

6. Скучик Е. Основы акустики. М.: Мир, 1976, т. 2.- 542 с.

Статья поступила 4 апреля 1982 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 93-100

УДК 538.65:51.380

А.И.Резинский, Б.Л.Цилевич
ЛГУ им. П.Стучки

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА

В настоящее время большое внимание уделяется созданию электродинамических устройств кассетирования, в которых управление положением группы деталей осуществляется при помощи электромагнитных сил [I]. При теоретическом анализе таких устройств возникает задача о расчёте равновесной конфигурации системы диполей во внешнем электромагнитном поле. Существенной особенностью этой задачи является локализация тел системы в замкнутой области. С точки зрения кассетирования интерес представляют системы, состоящие из сравнительно большого количества тел (порядка 10^1); это существенно осложняет как применение методов теории устойчивости, так и численное решение системы уравнений движения. Так, например, в [2] уравнения движения интегрируются простейшим методом Эйлера, который имеет ряд недостатков. Альтернативным подходом к решению этой задачи является непосредственное применение теоремы Лагранжа о минимуме потенциальной энергии [3]. Возможность реализации такой методики определяется наличием эффективных алгоритмов многомерной условной оптимизации. Учитывая возможные сложности, связанные с вычислением полей реальных источников, представляется целесообразным с самого начала отказаться от градиентных методов оптимизации. Один из возможных безградиентных методов, построенный путём модификации комплекс-алгоритма Бокса, был описан в [4]. В настоящей работе предлагается другой алгоритм минимизации, относящийся к методам случайного поиска. Потенциальная энергия системы диполей в магнитном поле выражается формулой [3]:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i \left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_k}{R_{ik}^3} - B_0 \right], \tag{I}$$

где R_{ik} - расстояние между i-ым и k-ым диполями, выраженное в полярных координатах:

$$R_{ik} = \sqrt{r_i^2 + r_k^2 - 2 r_i r_k \cos(\varphi_i - \varphi_k)}, \tag{2}$$

B_0 - внешнее поле, дипольные моменты p_i определяются из линейной системы уравнений

$$p_i = \frac{V\alpha'}{\mu_0}\left[B_0 - \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \frac{p_k}{R_{ik}^3} \right], \tag{3}$$

где V - объём диполя, α' - намагничиваемость.

Пусть диполи локализованы на плоскости в круглой области радиуса R_0. Область ограничена немагнитным барьером. В полярных координатах ограничения можно записать как

$$0 \leq r_i \leq R_0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

$$0 \leq \varphi_i < 2\pi, \quad i = 2, \ldots, N. \tag{5}$$

Кроме того, наложим ещё ограничения [4]:

$$\varphi_1 = 0, \tag{6}$$

$$\varphi_i \leq \varphi_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{7}$$

частично устраняющие алгоритмическую многоэкстремальность.

Для решения нелинейной задачи математического программирования (I) - (7) целесообразно использовать алгоритм случайного поиска. Как показано в [5], если для детерминированных методов число вычислений целевой функции растёт пропорционально M ($M = 2N$ - размерность задачи), то для методов случайного поиска - пропорционально $\sqrt{M}$. Этот факт может оказаться существенным в связи с указанной многомерностью задачи.

Для достаточно эффективной работы алгоритма необходима, как правило, адаптация, то есть изменение длины шага или других характеристик в зависимости от условий поиска [6]. В данной работе выбран способ адаптации по длине шага, т.е. увеличение длины шага в направлении, близком к направлению предыдущего удачного шага. За основу способа адаптации взята идея [7], заключающаяся в следующем. Положение следующей точки поиска определяется по правилу:

$$\vec{X}^{i+1} = \begin{cases} \vec{X}^{i}, & \Delta Q \geqslant 0, \\ \alpha(1+\cos\beta_i)\left|\vec{X}^{i} - \vec{X}^{i-1}\right|\vec{\Xi}, & \Delta Q < 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $\vec{\Xi}$ - случайный вектор, равномерно распределённый по единичной сфере, ΔQ - приращение целевой функции, $\vec{X}^{i}$ и $\vec{X}^{i-1}$ - радиус-вектора текущих точек поиска на i-ом и $(i-1)$-ом шаге, β_i - угол между направлением предыдущего шага и $\vec{\Xi}$, α - коэффициент увеличения шага. Таким образом, пробная точка расположена на кардиоиде (рис. I). В [7] этот способ адаптации предложен для задач безусловной оптимизации, и поэтому значение коэффициента α равно I/2, т.е. длина шага монотонно невозрастающая функция номера шага. Для решения задачи (I) - (7) использовался способ адаптации (8) со значением коэффициента α, равным I. Это позволяет шагу увеличиваться в перспективном направлении. С целью сокращения времени поиска в алгоритм введён этап спуска по найденному направлению, определяющемуся по направлению предыдущего удачного шага, с коэффициентом увеличения шага $C_2 > I$ (аналогично тому, как это делается в других алгоритмах случайного поиска, например, [8]). Значение C_2 не меняется, т.е. минимум по данному направлению не ищется во избежание попадания в овраг.

Весьма важен вопрос о способе учёта ограничений. Наиболее широко распространён способ учёта ограничений в виде штрафных функций (барьерные функции, метод скользящего допуска и т.д. [9]). В рассматриваемой задаче метод штрафных функций неэффективен, поскольку в ряде случаев минимум достигается на границе (ограничения активны). Неприменим и способ учёта ограничений, используемый в [IO], так как в этом алгоритме не используется адаптация по направлению x).

---

x) Другие современные способы учёта ограничений описаны в [II].

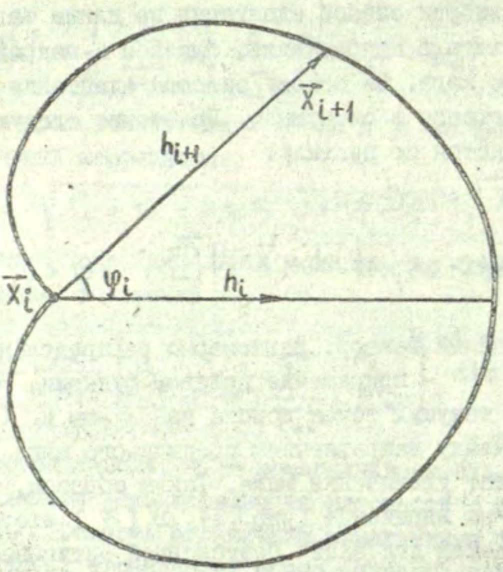


Рис. I. К способу адаптации алгоритма

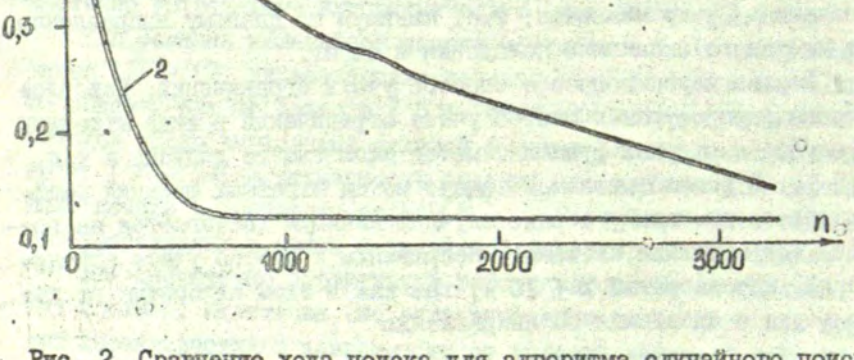


Рис. 2. Сравнение хода поиска для алгоритма случайного поиска (I) и алгоритма, описанного в [4] (2). W – текущее минимальное значение целевой функции, n – количество шагов поиска.

Подходящий способ учёта ограничений позволяют выбрать следующие физические соображения. В зависимости от конкретного вида внешнего поля при не слишком большой плотности диполей (рассматриваемые случаи удовлетворяют этому условию) минимум достигается либо на границе, либо вдали от неё. Поэтому естественно предположить, что, если процесс поиска привёл в область вблизи границы, то минимум достигается на границе, и в дальнейшем ход поиска будет осуществляться вдоль этой границы. Поэтому ограничения учитываются следующим образом: если пробная точка нарушает какое-либо ограничение на радиусы, длина шага уменьшается в C_3 раз. Как только пробная точка окажется в δ - окрестности границы и в неё будет совершён переход, то соответствующий радиус фиксируется на этой границе, дальнейший поиск происходит в подпространстве размерности $M-1$, т.е. происходит редукция размерности. Подобный способ учёта ограничений был предложен в [I2].

Таким образом, общая схема алгоритма такова:

I) Выбирается стартовая точка. Устанавливается $\rho = \rho_0$ (ρ - радиус сферы в пространстве размерности M).

2) Осуществляется поиск по сфере радиуса ρ. Если найдена точка с меньшим значением целевой функции, то переход к п.3. Если за заданное число проб n_1 такая точка не найдена, то радиус сферы уменьшается в C_1 раз. Если новое значение радиуса ρ / C_1 меньше параметра ε_1 в первом критерии останова (см. ниже), то поиск прекращается; если нет, то повторяется поиск по сфере меньшего радиуса.

3) Осуществляется переход в найденную точку с меньшим значением целевой функции. Происходит проверка второго и третьего критериев останова (см. ниже). Делается пробный шаг спуска в том же направлении длиной $C_2 S$ (S -длина предыдущего шага). Если в полученной после пробного шага новой точке целевая функция не меньше, чем в предыдущей, - переход к п.4. В противном случае проверяется, не попала ли точка с лучшим значением целевой функции в δ -окрестность границы. Если это так, то производится фиксация соответствующей координаты и редукция размерности, затем переход к п.2. Если нет, то повторяется операция построения пробного шага спуска.

4) Производится поиск по кардиоиде (8). Если за n_2 проб не найдена точка с меньшим значением целевой функции, то устанавливается $\rho = S$ и совершается переход к п. 2. Если найдена, то к п.3.

Во всех случаях до вычисления целевой функции проверяется выполнение ограничений. Если они нарушены, то шаг уменьшается в C_3 раз до тех пор, пока пробная точка не окажется в допустимой области.

В данном алгоритме применены следующие критерии останова: поиск прекращается, если:

I) Радиус сферы станет меньше заданной точности ε_1.

2) n_3 раза подряд будет совершён переход с шагом, меньшим заданной точности ε_2.

3) В течение последовательных n_4 переходов значение целевой функции изменится меньше, чем на ε_3.

Эффективность работы алгоритма существенно зависит от удачного выбора параметров. В табл. I приведены значения параметров, использовавшихся в программной реализации.

В таблице 2 приведены найденные минимальные значения целевой функции и необходимое количество шагов поиска для некоторых тестовых задач (внешнее поле однородно). Для сравнения приведены результаты расчёта при помощи алгоритма [4].

Табл. I. Численные значения параметров алгоритма

ρ_0	n_1	n_2	n_3	n_4	C_1	C_2	C_3	δ	ε_1	ε_2	ε_3
I,0	50	I5	50	5	5	I,5	I,2	0,5	0,I	0,I	10^{-7}

Табл. 2. Сравнение описанного алгоритма случайного поиска и алгоритма [4], W - найденное минимальное значение целевой функции, L - число вычислений целевой функции, M - размерность задачи.

M	Случайный поиск		Алгоритм [4]	
	W	L	W	L
6	$0{,}8923273\ 10^{-3}$	500	$0{,}8923273\ 10^{-3}$	820
8	$0{,}2600347\ 10^{-2}$	I980	$0{,}2572136\ 10^{-2}$	II40
I0	$0{,}5879644\ 10^{-2}$	4I50	$0{,}5879645\ 10^{-2}$	I840
I2	0,0II63758	88I0	0,0II63758	2I00

На рис. 2 приведена зависимость текущего минимального значения целевой функции от номера шага (в сравнении с результатами, полученными при использовании алгоритма [4]). Отметим, что при сравнении результатов в табл. 2 и на рис. 2 следует иметь в виду неизбежные различия, обусловленные свойствами алгоритмов (различные критерии останова и т.п.).

Многократные численные эксперименты, проведённые с программной реализацией изложенного алгоритма, позволяют сделать следующие выводы:

I. Алгоритм достаточно эффективен для решения данной задачи многомерной условной оптимизации.

2. Успех работы алгоритма сильно зависит от выбора численных значений параметров алгоритма.

3. Возможность достижения минимума зависит от стартовой точки, причём эта зависимость усиливается с ростом размерности задачи. Следовательно, в случае неуспешного завершения поиска надо повторить поиск с другой стартовой точки либо с другим набором случайных чисел.

4. Существенное влияние на работу алгоритма оказывает качество генератора случайных чисел.

5. Как правило, изложенный алгоритм требует большего количества вычислений целевой функции и, следовательно, большего машинного времени, чем алгоритм, описанный в [4]. В то же время он эффективно работает в некоторых случаях, когда алгоритм [4] оказывается бессильным.

6. Как следует из рис. 2, применение изложенного алгоритма случайного поиска оправдано в тех случаях, когда требуется сравнительно большая точность определения минимума, либо алгоритм [4] по тем или иным причинам неэффективен.

ЛИТЕРАТУРА

I. Жук В.В. Электродинамический метод кассетирования деталей. - Рига: ЛатНИИНТИ, I979. - 46 с.

2. Жук В.В., Путриньш Ю.Ю. Образование структуры системой взаимно отталкивающихся диполей в прямоугольной области. - Известия АН ЛатвССР. Серия физ. и техн. наук, 1982, № 1, с. II0-II2.

3. Цилевич Б.Л. Применение метода многомерной условной минимизации для расчёта конфигурации системы диполей во внешнем электромагнитном поле. - Известия АН ЛатвССР. Серия физ. и техн. наук, 1981, № 2, с. 114-118.

4. Цилевич Б.Л. Об одном методе многомерной условной оптимизации. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ, 1981, с. 34-46.

5. Растригин Л.А. Статистические методы поиска. - М: Наука, 1968. - 376 с.

6. Растригин Л.А., Рипа К.К., Тарасенко Г.С. Адаптация случайного поиска. - Рига: Зинатне, 1978. - 242 с.

7. Куммер Б. Алгоритм случайного поиска с шагом, зависящим от направления. - В кн.: Проблемы случайного поиска. Рига: Зинатне, 1975, вып. 4, с. 122-125.

8. Эглайс В.О. Алгоритм интуитивного поиска для оптимизации сложных систем. - В кн.: Вопросы динамики и прочности. Рига: РПИ, 1980, вып. 34. с. 28-33.

9. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975. - 540 с.

10. Лазарев И.Б., Валуйских В.П. Алгоритм случайного поиска для решения условно экстремальных задач. - В кн.: Проблемы случайного поиска. Рига, 1976, вып. 5. с. 150-162.

11. Гроссман К., Каплан А.А. Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации. - Новосибирск: Наука, 1981. - 184 с.

12. Box M.J. A new method of constrained optimization and a comparison with other methods. - The Computer Journal, 1965, vol. 8, No 1, p. 42-52.

Статья поступила 14 ноября 1981 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 101-108

УДК 517.63:518.43

М.А.Белов
ЛГУ им. П.Стучки

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ ИНТЕРВАЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим задачу о тепловом потоке через область R с границей Γ, изучение которой сводится к решению уравнения теплопроводности в области R с определёнными начальными и граничными условиями.

Как известно [1], в этом случае эффективным алгоритмом исследования является метод конечно-разностной аппроксимации. Однако, как указано в [2], для двумерной и тем более трёхмерной области R приходится сталкиваться с двумя трудностями, связанными с размерностью и устойчивостью. Увеличение размерности приводит к тому, что приходится рассматривать уравнения с тремя и более независимыми переменными. Здесь следует проявлять осторожность, иначе число операций может легко превысить разумные пределы. Кроме того, в этом случае простейшим вычислительным схемам присущи некоторые неблагоприятные свойства в отношении их численной устойчивости. Определённые вычислительные трудности могут возникнуть и вследствие других причин, как, например, разрывности начальных условий [1]. Иногда с помощью интегрального преобразования Лапласа (ИПЛ) по времени t удаётся избежать некоторых из указанных выше трудностей (конечно, предполагается, что рассматриваемая задача линейна по t). Основным здесь является то обстоятельство, что ИПЛ понижает размерность и сводит параболическое уравнение теплопроводности к эллиптическому. В общем случае успех этой процедуры определяется возможностью решения преобразованной задачи и умением выполнять численное обращение. Ниже будет показано, что в некоторых случаях необходимое численное обращение может быть проведено методом асимптотического расширения интервала (АРИ) [3].

Для выявления сути дела рассмотрим следующую задачу (предполагается, что для всех поставленных ниже задач решение существует и единственно):

$$\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2 + q(x)u + f(x), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad \text{(I)}$$
$$u(x,0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Исключая t из (I) с помощью ИПЛ, получаем

$$p\bar{u}(x,p) - h(x) = \partial^2 \bar{u}(x,p)/\partial x^2 + q(x)\bar{u}(x,p) + f(x)/p, \ \bar{u}(0,p) = \bar{u}(1,p) = 0. \qquad (2)$$

Предположим, что мы умеем находить $\bar{u}(x,p)$ из (2) при комплексных значениях параметра преобразования Лапласа p, например, с помощью конечно-разностной аппроксимации. Это равносильно тому, что мы знаем численные значения изображения $\bar{u}(x,p)$. Теперь, воспользовавшись некоторым алгоритмом приближённого обращения преобразования Лапласа, можно найти значения искомой функции $u(x,t)$. Успех зависит от того, насколько удачен алгоритм обращения. В данном случае весьма эффективно применение метода АРИ. Однако для метода АРИ, кроме значений изображения $\bar{u}(x,p)$, необходимо иметь асимптотику $u(x,t)$ при $t \to +\infty$. Данную асимптотику можно определить с помощью различных приёмов. Укажем один достаточно общий способ, основанный на следующем предложении [4]. Если все собственные значения $\{\lambda_k\}$ проблемы Штурма-Лиувилля

$$\vartheta_k''(x) + q(x)\vartheta_k(x) = \lambda_k \vartheta_k(x), \ \vartheta_k(0) = \vartheta_k(1) = 0 \qquad (3)$$

отрицательны, то при $t \to +\infty$

$$u(x,t) = u(x) + O(e^{\lambda_0 t}), \qquad (4)$$

где λ_0 - максимальное собственное значение, а $u(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$u''(x) + q(x)u(x) + f(x) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0. \qquad (5)$$

Отсюда необходимая для применения метода АРИ асимптотика $u(x,t)$ при $t \to +\infty$ находится посредством алгоритма, решающего задачу (2). При необходимости оценку (4) можно уточнить.

Данные результаты легко обобщить на проблемы более сложные, чем (I). Так, например, рассмотрим следующую задачу:

$$\rho\, \partial u/\partial t = div(\varkappa\, grad\, u) - qu, \quad x \in R; \tag{6}$$
$$u\Big|_{t=+0} = u_0(x), \; x \in R; \quad \{\alpha u + \beta\, \partial u/\partial \vec{n}\}\Big|_{\Gamma} = 0, \; t > 0;$$

где $\varkappa(x)$ - непрерывна вместе со своими первыми производными в области R, включая её границу Γ, т.е. $\bar{R}$; $\rho(x)$ и $q(x)$ непрерывны в $\bar{R}$; $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ непрерывны на границе Γ;

$\rho(x) > 0$, $\varkappa(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $x \in \bar{R}$; $\alpha(x) \geqslant 0$, $\beta(x) \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$, $x \in \Gamma$; $\vec{n}$ - внешняя нормаль к границе Γ. Применяя к (6) ИПЛ, получаем

$$div(\varkappa\, grad\, \bar{u}) - (q + p\rho)\bar{u} + \rho u_0 = 0, \quad x \in R; \tag{7}$$
$$\{\alpha \bar{u} + \beta\, \partial \bar{u}/\partial \vec{n}\}\Big|_{\Gamma} = 0.$$

Предположим, что мы умеем находить $\bar{u}$ из (7) при комплексных значениях параметра преобразования Лапласа p, например, с помощью конечно-разностной аппроксимации. Требуемую для метода АРИ асимптотику $u(x,t)$ при $t \to +\infty$ можно определить следующим образом. Допустим, что для решения задачи (6) применим метод Фурье. Тогда [5]

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \exp(-\lambda_k t)\, \vartheta_k(x), \tag{8}$$

где

$$\gamma_k = \int_R u_0(x)\, \rho(x)\, \vartheta_k(x)\, dx, \tag{9}$$

а λ_k и $\vartheta_k(x)$, $k = 0,1,2,\ldots$ - собственные значения и собственные ортонормированные функции следующей проблемы Штурма-Лиувилля:

$$-div(\varkappa\, grad\, u) + qu = \lambda \rho u, \quad x \in R; \quad \{\alpha u + \beta\, \partial u/\partial \vec{n}\}\Big|_{\Gamma} = 0. \tag{10}$$

Не ограничивая общности, допустим, что $\lambda_0 = 0$, тогда [5]: $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Предположим, что, используя некоторые вариационные методы [6], мы можем определить N первых собственных значений и соответствующих собственных функций проблемы (10). Тогда из (8) получаем необходимую для АРИ асимптотику

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{N} \gamma_k \exp(-\lambda_k t)\vartheta_k(x) + O(\exp(-\lambda_{N+1} t)), \quad t \to +\infty, \tag{11}$$

причём для каждой конкретной задачи всегда можно определить такое $0 < M_N(x,\delta) < +\infty$, что при $t \geq \delta > 0$

$$\left| u(x,t) - \sum_{k=0}^{N} \gamma_k \exp(-\lambda_k t)\vartheta_k(x) \right| \leq M_N(x,\delta)\exp(-\lambda_{N+1} t). \tag{12}$$

Теперь, используя результаты [3], имеем

$$u(x,t) = S(t,T) + R(t,T), \quad t \in [0,T), \tag{13}$$

где

$$S(t,T) = e^{t/T} \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{res}\left\{ e^{tp}\bar{u}(x,p+T^{-1})\Psi(e^{-Tp}); -iT^{-1}\arg z_k + 2n\pi i T^{-1} \right\}, \tag{14}$$

$$R(t,T) = \sum_{k=0}^{N} \gamma_k \exp(-\lambda_k t)\vartheta_k(x)\Psi[\exp(1+\lambda_k T)] + R_N(t,T), \tag{15}$$

причём

$$|R_N(t,T)| \leq M_N(x,\delta)\exp[-\lambda_{N+1}(t+Tl)]\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| e^{-Tn\lambda_{N+1}}, \quad T \geq \delta, \tag{16}$$

т.е. получаем приближённую формулу

$$u(x,t) \approx S(t,T) + \sum_{k=0}^{N} \gamma_k e^{-\lambda_k t}\vartheta_k(x)\Psi[\exp(1+\lambda_k T)], \quad t \in [0,T). \tag{17}$$

Напомним, что $\Psi(z)$ – опорная функция метода АРИ определяется следующими условиями:

1) $\Psi(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$;
2) на окружности $|z| = 1$ $\Psi(z)$ имеет конечное число полюсов $z_1, z_2, \ldots, z_m$;
3) при $|z| > 1$ $\Psi(z)$ разложима в ряд Лорана

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n-l}, \quad a_0 \neq 0. \tag{18}$$

где l - натуральное число.

Отметим, что в (I4) вычеты вычисляются в полюсах функции $\psi(e^{-Tp})$, т.е. в точках, где $e^{-Tp}=z_k$, $k=1,2,\dots,m$. Так, например, если взять $\psi(z)=1/(1-z^2)$, то

$$S(t,T)=\frac{e^{t/T}}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left(\frac{n\pi i t}{T}\right)\bar{u}(x,p+\frac{1}{T}), \tag{I9}$$

$$R(t,T)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\gamma_k\frac{\exp(-1-\lambda_k(t+T))}{sh(1+\lambda_k T)}\vartheta_k(x)+R_N(t,T). \tag{20}$$

Таким образом, с помощью метода АРИ мы получили приближённый алгоритм, который по существу является естественным объединением аналитического метода (ИПЛ) и двух приближённых: конечно-разностного и вариационного. Для нахождения практической оценки погрешности счёта по формуле (I7) необходимо знать погрешность решения задачи (7), а также точность определения λ_k и $\vartheta_k(x)$. Заметим, что чем больше N, т.е. чем больше удалось определить первых собственных значений и собственных функций, тем меньше T можно брать в соотношении (I3) (при $t>T$ $u(x,t)$ определяется из (II)), что в свою очередь позволяет уменьшить число точек $p=p_k$, в которых необходимо определить $\bar{u}(x,p)$, т.е. решить задачу (7). С другой стороны, чем меньше N, тем большим надо полагать T, т.е. увеличивать число точек $p=p_k$, в которых при каждом фиксированном x необходимо определить $\bar{u}(x,p)$. В (I3), (I5) и (I6) можно перейти к пределу при $N\to+\infty$. Получаем

$$u(x,t)=e^{t/T}\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underset{p}{res}\left\{e^{pt}\bar{u}(x,p+T^{-1})\psi(e^{-Tp});-iT^{-1}\arg z_k+2n\pi i T^{-1}\right\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k e^{-\lambda_k t}\vartheta_k(x)\psi[\exp(1+\lambda_k T)],\quad t\in[0,T),\ T>0. \tag{2I}$$

Соотношение (2I) можно интерпретировать как среднее между решениями задачи (6), полученными методом Фурье и методом ИПЛ.

В качестве численного примера рассмотрим задачу с разрывным начальным условием:

$$\partial u/\partial t=\partial^2 u/\partial x^2+\pi^2 u,\quad u(0,t)=u(1,t)=0,\quad u(0,x)=f(x), \tag{22}$$

где

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \leqslant x < 0{,}5, \\ 0{,}75, & x=0{,}5, \\ 1-x, & 0{,}5 < x \leqslant 1, \end{cases} \tag{23}$$

решение которой методом конечно-разностной аппроксимации требует больших затрат машинного времени [I]. Исключая t из (22) с помощью преобразования Лапласа, получаем

$$p\bar{u}(x,p)-f(x)=\partial^2\bar{u}(x,p)/\partial x^2+\pi^2\bar{u}(x,p), \quad \bar{u}(0,p)=\bar{u}(1,p)=0. \tag{24}$$

Решение задачи в изображениях имеет вид

$$\bar{u}(x,p)=\begin{cases} f(x)/\nu^2-\dfrac{3\,sh\,\nu x}{2\nu^3 ch\,\nu/2}-\dfrac{sh\,\nu x}{4\nu^2 sh\,\nu/2}, & 0 \leqslant x \leqslant 0{,}5, \\ f(x)/\nu^2+\dfrac{3\,sh\,\nu(x-1)}{2\nu^3 ch\,\nu/2}+\dfrac{sh\,\nu(x-1)}{4\nu^2 sh\,\nu/2}, & 0{,}5 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \tag{25}$$

где $\nu=(p-\pi^2)^{\frac{1}{2}}$.

Легко показать, что при $t \to +\infty$

$$u(x,t)=6/\pi^2\cdot\sin\pi x+O(e^{-\pi^2 t}). \tag{26}$$

Используя результаты [3], можно доказать, что при $t\in[0,T]$ справедливо представление

$$u(x,t)=S(t,T)-R(t,T), \tag{27}$$

где

$$S(t,T)=\frac{2}{T}\exp\left(\frac{t}{2T}\right)\left\{\frac{1}{2}\bar{u}\left(x,\frac{1}{2T}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty}Re\left[\bar{u}\left(x,\frac{1+2ik\pi}{2T}\right)\right]\cos\frac{k\pi t}{T}\right\}, \tag{28}$$

$$R(t,T)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}\left\{u(x,t+2Tn)+e^{t/T}u(x,2Tn-t)\right\}. \tag{29}$$

Согласно методу АРИ для приближённого вычисления $R(t,T)$ используется асимптотика (26) и при $T\to+\infty$

$$R(t,T)=\frac{6\sin\pi x}{\pi^2}\cdot\frac{1+e^{t/T}}{e-1}+O(e^{-\pi^2 T}). \tag{30}$$

Для вычисления $u(x,t)$ имеем следующую приближённую формулу

Таблица I.

t	$u(0{,}3\,,t)$	$u_1(0{,}3\,,t)$
0	0,600000	0,600028
0,02	0,573420	0,57345I
0,04	0,537369	0,537355
0,06	0,5I726I	0,5I7258
0,08	0,505954	0,505963
0,I0	0,499652	0,499648
0,I2	0,496I56	0,496I52
0,I4	0,494220	0,494227
0,I6	0,493I49	0,493I48
0,I8	0,492556	0,492552
0,20	0,492229	0,492234
0,22	0,492047	0,492049
0,24	0,49I947	0,49I945
0,26	0,49I892	0,49I90I
0,28	0,49I86I	0,49I874

Таблица 2.

t	$u(0{,}5\,,t)$	$u_1(0{,}5\,,t)$
0	0,725000	0,725I63
0,02	0,622066	0,62I779
0,04	0,6I0799	0,6I0924
0,06	0,6085I8	0,608553
0,08	0,608049	0,607958
0,I0	0,607952	0,607990
0,I2	0,607932	0,60797I
0,I4	0,607928	0,607939
0,I6	0,607927	0,607939
0,I8	0,607927	0,607970
0,20	0,607927	0,607882
0,22	0,607927	0,60792I
0,24	0,607927	0,607975
0,26	0,607927	0,607893
0,28	0,607927	0,607908

Таблица 3.

t	$u(0{,}7\,,t)$	$u_1(0{,}7\,,t)$
0	0,300000	0,300084
0,02	0,40II93	0,40I2I0
0,04	0,444499	0,444492
0,06	0,4660I9	0,4660I7
0,08	0,4776I7	0,477622
0,I0	0,483978	0,483976
0,I2	0,487487	0,487484
0,I4	0,489425	0,489428
0,I6	0,490497	0,490495
0,I8	0,49I089	0,49I086
0,20	0,49I4I7	0,49I4I9
0,22	0,49I598	0,49I597
0,24	0,49I699	0,49I693
0,26	0,49I754	0,49I75I
0,28	0,49I785	0,49I775

$$u(x,t) \approx S(t,T) - \frac{6\sin \pi x}{\pi^2} \cdot \frac{1+e^{t/T}}{e-1}, \quad t \in [0,T]. \tag{31}$$

Результаты расчётов для x = 0.3, 0.5, 0.7 приведены в таблицах I÷3. Через $u(x,t)$ обозначены значения, полученные методом разделения переменных, а через $u_1(x,t)$ – значения, вычисленные по формуле (3I) при T =0.3. Для нахождения соответствующих результатов на машине GE -400 потребовалось I минута машинного времени.

ЛИТЕРАТУРА

I. Самарский А.А. Теория разностных схем.-М., Наука, 1977.-656 с.

2. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных.-М., Мир, 1974.-207 с.

3. Белов М.А., Цирулис Т.Т. Асимптотические методы в приближённом обращении интегрального преобразования Лапласа. Часть II.-В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига, 1977, Вып. III, с. 142-150.

4. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.-М., Мир, 1968.-189 с.

5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.-М., Наука, 1967.-436 с.

6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике.-М., Наука, 1970.-512 с.

Статья поступила 7 января 1982 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 109-122

УДК 539.3:534.I

А.Е.Богданович, Э.Г.Фелдмане
Институт механики полимеров
АН ЛатвССР

О ВЫПУЧИВАНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

К настоящему времени опубликовано большое число работ, посвящённых проблеме выпучивания цилиндрических оболочек при действии нестационарного внешнего давления. Введённая в [I] классификация нагрузок на "импульсные", "динамические" и "квазистатические" позволяет по такому же принципу разделить и известные исследования.

Выпучивание цилиндрических оболочек при "импульсных", кратковременных нагрузках высокой интенсивности, сопровождающееся значительными пластическими деформациями и развитием очень высоких окружных форм, рассматривалось в работах [2-5]. Специальных исследований для более продолжительных, но достигающих меньшей величины ("динамических") нагрузок, видимо, не проводилось. Очевидно, для них также характерно образование пластических деформаций до начала интенсивного неосесимметричного выпучивания. При этом, согласно [I], номера доминирующих окружных форм выпучивания значительно ниже, чем при "импульсных" нагрузках, но намного превышают номера доминирующих окружных форм при статической потере устойчивости; кроме того, может быть существенен эффект инерционности осесимметричного обжатия оболочки [6]. Такое нагружение можно назвать "быстрым" динамическим нагружением. Решение задачи динамической потери устойчивости при этом необходимо проводить в упруго-пластической постановке.

При "медленном" динамическом ("квазистатическом" в терминах [1]) нагружении номера доминирующих окружных форм выпучивания ненамного выше, чем при статическом нагружении; инерционностью докритического осесимметричного обжатия можно пренебречь. Критическая величина давления, согласно данным экспериментов [7-10], в несколько раз превышает критическое статическое значение. В этом случае возможна динамическая потеря устойчивости в области упругих деформаций и оправдано решение задачи в геометрически нелинейной, но физически линейной постановке [11-14]. Особое внимание в этой связи привлекает работа [14], в которой решение нелинейной системы уравнений движения построено с учётом взаимосвязанности конечного числа окружных форм выпучивания. Величина критической динамической нагрузки (критического импульса) определялась в этой работе, как и ранее в [6], по моменту наиболее раннего появления пластических деформаций. Кольцевые напряжения при этом рассчитывались для каждой окружной гармоники в отдельности. Следует отметить, что такой метод расчёта напряжений может привести к сильно завышенной величине критической нагрузки, поскольку в результате суперпозиции всех интенсивно растущих форм выпучивания на поверхности оболочки образуются зоны, в которых прогиб и напряжения оказываются значительно большими, чем если бы они вычислялись для каждой отдельной формы. Именно в этих зонах и возникают первые пластические деформации.

В настоящей работе при решении задачи о "медленном" динамическом нагружении рассмотрены следующие вопросы. Во-первых, на основе методики, изложенной в [15], проиллюстрирована процедура определения формы выпученной поверхности оболочки и расчёта напряжений в ней при линейно возрастающей во времени нагрузке. Во-вторых, исследованы некоторые особенности динамического выпучивания оболочки при различных скоростях нагружения. В-третьих, на основе сравнения полученных теоретических результатов с некоторыми известными экспериментальными данными показана применимость двух возможных критериев определения критической величины динамического внешнего давления.

Предполагая, что осесимметричное напряженное состояние, имеющее место накануне интенсивного неосесимметричного выпучивания, безмоментно и однородно, для описания процесса неосесимметричного деформирования ортотропной круговой цилиндрической оболочки будем использовать известные уравнения среднего изгиба в смешанной форме:

$$A_{22}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+(A_{66}+2A_{12})\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+A_{11}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2(w-w^0)}{\partial x^2}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}; \tag{I}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4(w-w^0)}{\partial x^4}+2(D_{12}+2D_{66})\frac{\partial^4(w-w^0)}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4(w-w^0)}{\partial y^4}=$$

$$=\frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-$$

$$-N_x^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-N_y^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где x и y - продольная и окружная координаты; $w(x,y,t)$ и $w^0(x,y)$ - полный и начальный прогибы; $\Phi(x,y,t)$ - функция усилий; L, h, R, μ - длина, толщина, радиус срединной поверхности и масса единицы поверхности оболочки; A_{ij} и D_{ij} - компоненты матриц податливости и изгибной жёсткости ортотропного материала. Принимаем, что $N_x^0\equiv 0$, $N_y^0=-qR$.

Предполагая на торцах оболочки условия шарнирного опирания, аппроксимацию полного и начального прогиба выбираем в форме, аналогичной [I4]:

$$w_m(x,y,t)=\sin\alpha_m x\sum_{n=n_0}^{N}W_{mn}(t)\cos\beta_n y;$$

$$w_m^0(x,y)=\sin\alpha_m x\sum_{n=n_0}^{N}W_{mn}^0\cos\beta_n y, \tag{3}$$

где $\alpha_m=\pi m/L$; $\beta_n=n/R$; $m=1,2,\ldots$; $n=0,1,\ldots$; n_0 и $N>n_0$ - произвольные целые числа.

Не останавливаясь на процедуре решений, изложенной в [I5] укажем лишь, что исходная задача сводится к интегрированию для каждого фиксированного номера m осевой формы выпучивания системы $N-n_0+1$ нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $W_{mn}(t)$.

После определения функций $W_{mn}(t)$ прогиб оболочки может быть найден суммированием ряда Фурье

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{M}\sin\alpha_m x\sum_{n=n_0}^{N}W_{mn}(t)\cos\beta_n y \tag{4}$$

Функция усилий имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,t)=\sum_{m=1}^{M}\sin\alpha_m x&\Big\{\sum_{n=n_0}^{N}C_{mn}^{(1)}(W_{mn}-W_{mn}^{0})\cos\beta_n y+\\
+\cos 2\alpha_m x&\sum_{n=n_0}^{N}C_{mn}^{(2)}(W_{mn}^{2}-W_{mn}^{0\,2})+\sum_{n=n_0}^{N}C_{mn}^{(3)}(W_{mn}^{2}-W_{mn}^{0\,2})\times\\
\times\cos 2\beta_n y&+\sum_{i=n_0+1}^{N}\sum_{j=n_0}^{i-1}\Big[(C_{mij}^{(4)}+C_{mij}^{(6)}\cos 2\alpha_m x)\cos(\beta_i-\beta_j)y+\\
+(C_{mij}^{(5)}&+C_{mij}^{(7)}\cos 2\alpha_m x)\cos(\beta_i+\beta_j)y\Big](W_{mi}W_{mj}-W_{mi}^{0}W_{mj}^{0})\Big\}\end{aligned} \tag{5}$$

Выражения для коэффициентов $C_{mn}^{(1)}, C_{mn}^{(2)}, C_{mn}^{(3)}, C_{mij}^{(4)}, C_{mij}^{(5)}, C_{mij}^{(6)}, C_{mij}^{(7)}$, входящих в (5), приведены в [15].

Согласно принятой исходной модели Кирхгофа-Лява, напряжения в произвольной точке однородной ортотропной оболочки определяются через прогиб и функцию усилий посредством формул

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x,y,z,t)&=\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-z\left[B_{11}\frac{\partial^2(w-w^0)}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2(w-w^0)}{\partial y^2}\right];\\
\sigma_{yy}(x,y,z,t)&=\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-z\left[B_{12}\frac{\partial^2(w-w^0)}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2(w-w^0)}{\partial y^2}\right]-\frac{qR}{h};\\
\sigma_{xy}(x,y,z,t)&=-\frac{1}{h}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-2zB_{66}\frac{\partial^2(w-w^0)}{\partial x\partial y},\end{aligned} \tag{6}$$

где z - координата, отсчитываемая от срединной поверхности в направлении внутренней нормали.

Если исходить из одночленной аппроксимации прогиба

$$w_{mn}(x,y,t)=\tilde{W}_{mn}(t)\sin\alpha_m x\cos\beta_n y, \tag{7}$$

то после применения процедуры Бубнова-Галёркина к (1) - (2) для определения каждой из функций $\tilde{W}_{mn}(t)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение.

Прогиб оболочки и функция усилий при этом имеют вид

$$w(x,y,t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=n_0}^{N}\tilde{W}_{mn}(t)\sin\alpha_m x\cos\beta_n y; \tag{8}$$

$$\Phi(x,y,t)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=n_0}^{N}\Big[C^{(1)}_{mn}(\tilde{W}_{mn}-W^{o}_{mn})\sin\alpha_m x\cos\beta_n y+$$
$$+C^{(2)}_{mn}(\tilde{W}^{2}_{mn}-W^{o2}_{mn})\cos 2\alpha_m x+C^{(3)}_{mn}(\tilde{W}^{2}_{mn}-W^{o2}_{mn})\cos 2\beta_n y\Big] \tag{9}$$

Напряжения, как и прежде, определяются по известным $w(x,y,t)$ и $\Phi(x,y,t)$ посредством формул (6).

В качестве примера рассмотрим оболочку из дюралюминия с L = 0,2 м, R = 0,09 м, h = 8·I0^{-4}м. Результаты испытаний таких оболочек при динамическом внешнем давлении приведены в [7].Для проведения расчётов необходимо знать начальный прогиб $w^{o}(x,y)$ или значения коэффициентов Фурье W^{o}_{mn} для интенсивно развивающихся форм выпучивания, которые необходимо учитывать при суммировании рядов (4), (5) или (8), (9). В указанной работе такой информации не содержится. Примем зависимость W^{o}_{mn} от m и n в виде

$$W^{o}_{mn}=a_o(-1)^{l+n}e^{-\frac{(m-m^*)^2}{2\sigma_m}-\frac{(n-n^*)^2}{2\sigma_n}}, \tag{I0}$$

где $l=m/2$ при m чётном и $l=(m+1)/2$ при m нечётном, и положим m^* = I, n^* = 4, σ_m = 5, σ_n = 5, $a_o=0{,}02\,h$. Внешнее давление будем считать линейно возрастающим во времени: $q = Vt$. Начальные условия зададим в виде

$$W_{mn}\Big|_{t=0}=W^{o}_{mn};\quad \frac{dW_{mn}}{dt}\Big|_{t=0}=0$$

Рассмотрим сначала случай V = 6500 ат/с. На рис. I сплошной линией приведены результаты расчётов с аппроксимацией прогиба (3) при m = I, n_o = 5 и двух значениях N. Как видно, дополнительный учёт в (3) члена с n = II в рассмотренном времен-

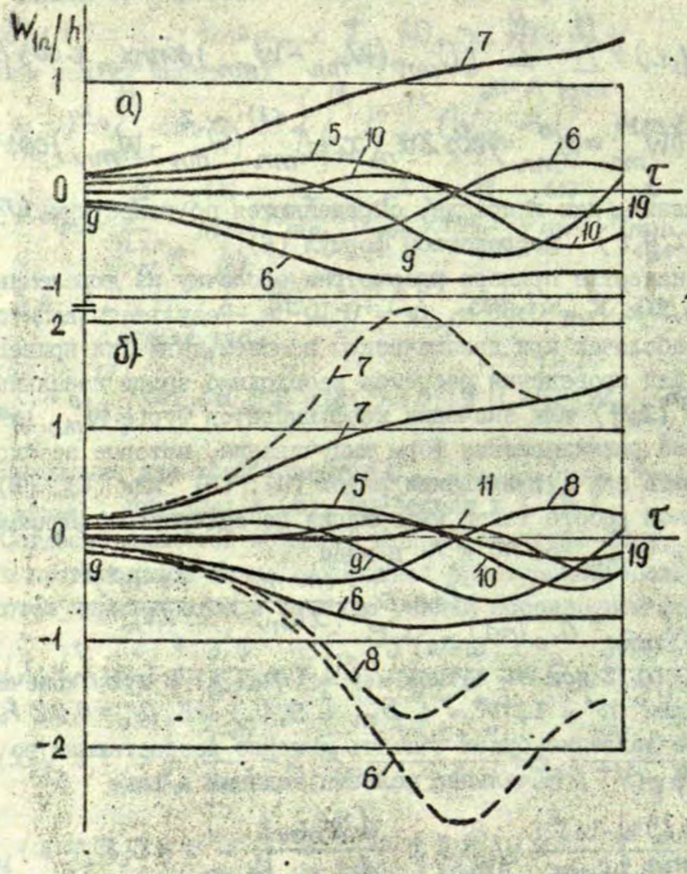


Рис. I. Зависимости $W_{1n}(\tau)$ при расчётах с учётом взаимосвязанности окружных форм (сплошные линии) при $n_0 = 5$, $N = 10$ (а) и $n_0 = 5$, $N = 11$ (б). Штриховые линии - результаты, полученные без учёта взаимосвязанности окружных форм. Числа у кривых - значения n.

ном интервале[x)] практически не отразился на зависимостях $W_{1n}(\tau)$ для форм с $n = 5 \div 10$; сама же функция $W_{1,11}(\tau)$ при $0 < \tau < 16$ по модулю значительно меньше, чем остальные. Как показали расчёты, добавление в аппроксимацию (3) членов с $n = 4$ и $n = 12$ не вносит при $\tau < 20$ сколь-нибудь заметных изменений в приведённые на рис. 1,б зависимости $W_{1n}(\tau)$ для гармоник с $n = 5 \div 11$, а функции $|W_{1,4}(\tau)|$ и $|W_{1,12}(\tau)|$ в этом временном интервале весьма малы.

Результаты расчётов при $m = 2$ и $m = 3$ и различных n_0, N показали, что интенсивное выпучивание по этим формам начинается значительно позже, чем по форме с $m = 1$. Исходя из вышеизложенного, при определении прогиба и напряжений в дальнейшем полагаем $m_0 = 1$, $M = 1$, $n_0 = 5$, $N = 10$.

Штриховой линией на рис. 1,б изображены зависимости $\tilde{W}_{1n}(\tau)$, рассчитанные с использованием аппроксимации (7). Как видно, до момента $\tau \approx 11$ кривые, полученные при многочленной и одночленных аппроксимациях прогиба, совпадают. При больших временах учёт взаимосвязанности окружных форм выпучивания приводит для всех рассмотренных значений n к заметному уменьшению $|W_{1n}(\tau)|$.

На рис. 2, а приведены зависимости $w(y)$ в сечении $x = L/2$ (к этому сечению относятся и все последующие результаты) при $\tau = 13$. Сплошная линия соответствует решению с многочленной аппроксимацией прогиба, штрих-пунктирная – с одночленной. Как видно, максимальная величина прогиба уже в этот момент времени различается весьма сильно.

На рис. 2,б проиллюстрирована трансформация формы поверхности оболочки во времени. Интересно отметить, что максимальная величина прогиба в интервале $15 < \tau < 19$ остаётся практически неизменной, но непрерывно меняется местоположение зон наиболее интенсивного выпучивания. Так, например, в момент $\tau = 15$ максимум прогиба при выпучивании вовнутрь достигался в точке A с координатой $y = 0{,}85\,\pi R$, а в момент $\tau = 19$ – в точке

---

x) Безразмерное время $\tau = tc/2L$, где $c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$, E, ν, ρ – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки.

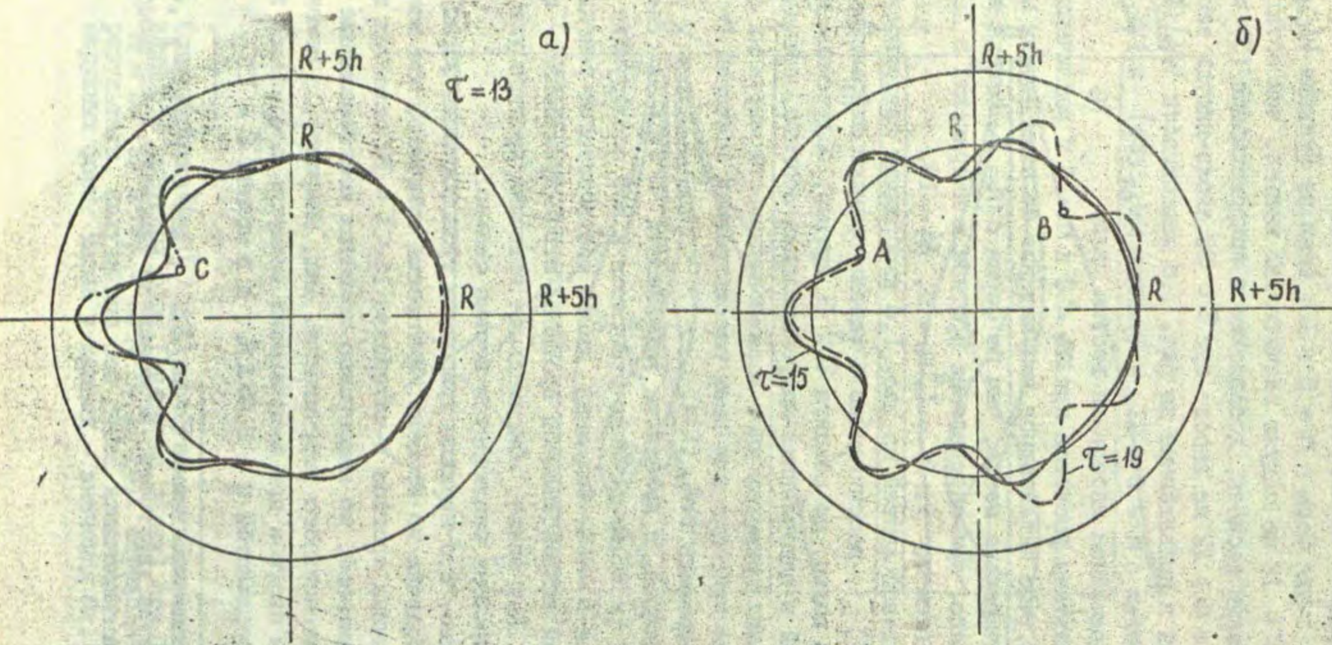


Рис. 2. Зависимости прогиба от окружной координаты в три момента времени. Штрих-пунктирная линия - решение без учёта взаимосвязанности окружных форм.

B с координатой $y = 0{,}272\,\pi R$. Следует подчеркнуть, что получить такую трансформацию формы поверхности оболочки в процессе динамического выпучивания можно лишь при учёте взаимосвязанности наиболее интенсивно развивающихся окружных форм. Как показали расчёты, при решении с одночленной аппроксимацией прогиба координаты точек, в которых $|w(y)|$ максимален, с течением времени практически не меняются.

Введём далее в рассмотрение интенсивность касательных напряжений

$$T = \sqrt{(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2 - \sigma_{xx}\,\sigma_{yy})/3}\;.$$

На рис. 3 приведены зависимости $T(\tau)$, полученные при расчётах с многочленной и одночленной аппроксимациями прогиба. Кривые построены в различных точках сечения $x = L/2$; точки, которым соответствуют кривые I, 3÷5, указаны в скобках (см. обозначения на рис. 2). Кривая 2 относится к точке $y = 0{,}544\,\pi R$. Как видно, вплоть до момента $\tau \approx$ II зависимости $T(\tau)$, рассчитанные с обоими видами аппроксимаций прогиба, практически совпадают (см. кривые I и 5). При больших временах они кардинально различаются.

Все приведённые на рис. 3 кривые достигают максимума в различные моменты времени. Это связано с отмеченным выше изменением во времени местоположения зон наиболее интенсивного выпучивания. Поскольку величины максимумов у зависимостей $T(\tau)$, построенных в разных точках оболочки, различны, необходимо найти такую точку $\{x^*, y^*, z^*\}$, интенсивность касательных напряжений в которой раньше всего достигает заданного предела текучести T_i. Будем называть эту точку наиболее опасной, поскольку именно в её окрестности образуется первая локальная пластическая зона. Проведённые расчёты показали, что интенсивность касательных напряжений в тех местах поверхности оболочки, где выпучивание произошло вовнутрь, значительно выше, чем в местах, где выпучивание произошло наружу, даже если в последних прогиб имеет большее значение. Кроме того, было установлено, что на внутренней поверхности оболочки предел текучести достигается раньше, чем на внешней. В результате проверки условия $T(x, y, z, \tau) = T_i$ [x)] вдоль всей поверхности и по толщине на всём

---

x) Принято, что $T_i = 3 \cdot 10^8$ Н/м^2 $(T_i/E = 4 \cdot 10^{-3})$.

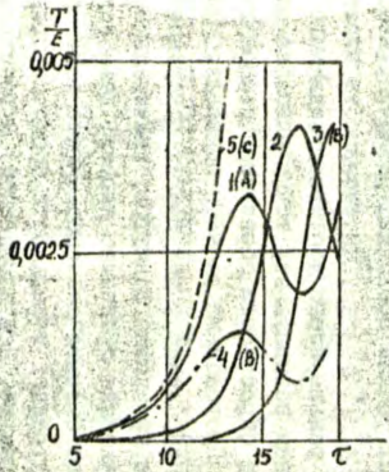


Рис. 3. Зависимости $T(\tau)$ на внутренней (сплошные линии) и внешней (штрих-пунктирная линия) поверхностях оболочки при решении с учётом взаимосвязанности окружных форм выпучивания. Штриховая линия - зависимость $T(\tau)$ на внутренней поверхности при решении без учёта взаимосвязанности.

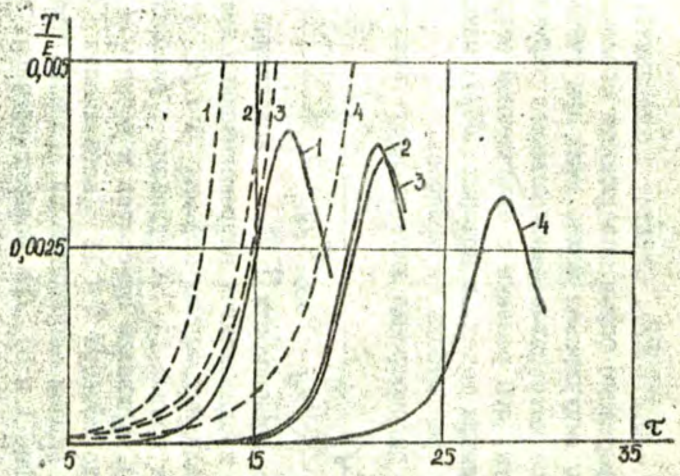


Рис. 4. Зависимости $T(\tau)$ в наиболее опасных точках оболочки при решении с учётом (сплошные линии) и без учёта (штриховые линии) взаимосвязанности окружных форм. Цифры у кривых соответствуют скоростям нагружения: I - 6500 ат/с; 2 - 5000 ат/с; 3 - 4700 ат/с; 4 - 3340 ат/с.

этапе нагружения было установлено, что первая пластическая зона возникает при решении с многочленной аппроксимацией в точке $\{0{,}5L;\ 0{,}54\pi R;\ 0{,}5h\}$ в момент времени $\tau^* = 17{,}0$ и при решении с одночленной аппроксимацией в точке $\{0{,}5L;\ 0{,}87\pi R;\ 0{,}5h\}$ в момент времени $\tau^* = 12{,}8$. Таким образом, пренебрежение эффектом взаимосвязанности окружных форм выпучивания приводит к сильно заниженной величине, при которой в оболочке начинается образование пластических деформаций.

Согласно изложенной методике были проведены расчёты и для других значений скорости нагружения, рассмотренных в [7]. Зависимости $T(\tau)$ в наиболее опасных точках приведены на рис. 4. Отметим, что с уменьшением скорости нагружения учёт взаимосвязанности окружных форм даёт всё более сильный эффект. При скоростях, меньших 5000 ат/с (кривые 3, 4), принятый предел текучести в рассматриваемом промежутке времени вообще не достигается ни в одной точке оболочки. Таким образом, при достаточно низких скоростях приложения внешнего давления, в различных точках оболочки после достижения прогибом и напряжениями максимумов происходит резкое падение этих величин, причём весь процесс протекает без возникновения пластических деформаций. Если под динамической потерей устойчивости понимать резкое возрастание прогиба ("прощёлкивание") в некоторых частях оболочки с последующим резким его падением ("выхлопом"), то можно сказать, что в определённом диапазоне $V<V^*$ скоростей нагружения внешним давлением динамическая потеря устойчивости достаточно тонких оболочек происходит в области упругого поведения материала. Подчеркнём, что согласно рис. 4 это явление можно теоретически описать лишь при учёте взаимосвязанности окружных форм выпучивания. При скоростях $V \geqslant V^*$ динамическая потеря устойчивости сопровождается возникновением пластических зон в местах резкого выпучивания оболочки. Вследствие этого корректно решить задачу динамической устойчивости при таких скоростях нагружения можно лишь в упруго-пластической постановке.

Из вышеизложенного следует, что при решении задачи в линейно упругой постановке величину критического динамического внешнего давления при $V \geqslant V^*$ естественно определять по моменту времени $\tau=\tau^*$, когда хоть в одной точке оболочки выполняется условие $T=T_i$ (критерий I). Обозначив $q(\tau^*)=q_g^*$, коэффициент динамичности определим как $K_g=q_g^*/q^*$. Значения K_g, рассчитанные согласно критерию I, приведены в первых двух строках таблицы. Как видно, теоретические значения, полученные при использовании многочленной аппроксимации прогиба, довольно близки к экспериментальным. Следует ещё раз отметить в этой связи, что начальные несовершенства оболочки, несомненно влияющие на значение K_g, были заложены в расчёт произвольно. Определённую погрешность могло внести также возможное отличие использованного в теоретическом анализе значения $T_i = 3\cdot10^8$ Н/м^2 от истинного. Согласно приведённым результатам, решение с одночленной аппроксимацией прогиба даёт сильно заниженное значение K_g.

Таблица. Зависимость коэффициента динамичности от скорости приложения внешнего давления.

V, ат/с	K_g		
	решение без учёта взаимосвязанности окружных форм	решение с учётом взаимосвязанности окружных форм	экспериментальные данные [7]
6500	2,56 (критерий I)	3,40 (критерий I)	3,98
5000	2,31 (критерий I)	3,30 (критерий I)	3,54
4700	2,25 (критерий I)	3,15 (критерий 2)	3,19
3340	2,00 (критерий I)	2,88 (критерий 2)	2,80

Как было показано выше, при скоростях нагружения внешним давлением $V<V^*$ процесс динамической потери устойчивости протекает в области упругого поведения материала, и критерий I становится неприменимым. Ввести другой универсальный критерий потери оболочкой несущей способности при этом, видимо, не удастся.

Один из возможных вариантов состоит в определении критического момента времени τ^* по выполнению хотя бы в одной точке оболочки условия $w(\tau^*)=w^*$, где w^* – заданная предельно допустимая величина прогиба. Согласно другому критерию, допускающему математическую формулировку, момент времени τ^* может быть определён по наиболее раннему на всей поверхности оболочки достижению зависимостью $w(\tau)$ первого максимума. Ещё один вариант критерия потери несущей способности (назовём его критерий 2) может быть основан на следующей процедуре. В наиболее опасных точках поверхности оболочки строятся зависимости $w_i(\tau)$ и определяются моменты τ_i^*, в которые каждая из функций $|w_i(\tau)|$ достигает первого максимума. Из всех значений $w_i^*=|w(\tau_i^*)|$ выбирается наибольшее, а соответствующая ему величина τ^* принимается за критический момент времени.

Значения коэффициента динамичности, определённые при решении с многочленной аппроксимацией прогиба по критерию 2, приведены в третьей и четвёртой строках таблицы. Как видно, они очень близки к экспериментальным.

Из зависимостей, изображённых на рис. 4, следует, что при решении с одночленной аппроксимацией прогиба коэффициент динамичности может быть найден по критерию I также и при $V<V^*$. Однако, как видно из таблицы, определённые таким образом величины K_g значительно меньше экспериментальных.

Полученные результаты свидетельствуют о важности учёта нелинейных эффектов при расчёте несущей способности цилиндрических оболочек, нагруженных динамическим внешним давлением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson D.L., Lindberg H.E. Dynamic pulse buckling of cylindrical shells under transient lateral pressures.- AIAA Journal, 1968, vol. 6, No 4, p. 589-598.

2. Abrahamson G.R., Goodier I.N. Dynamic plastic flow buckling of a cylindrical shell from uniform radial impulse.- Proceedings of the 4th National Congress of Applied Mechanics, 1962, vol. 2, p. 939-950.

3. Lindberg H.E. Buckling of a very thin cylindrical shell due to an impulsive pressure.- Journal of Applied Mechanics: Transactions of ASME, ser. E, 1964, vol. 31, No 2, p. 267-272.

4. Баженов В.Г., Мухина А.С., Угодчиков А.Г. Упруго-пластическое выпучивание цилиндрических оболочек с начальными несовершенствами под действием импульса внешнего давления. - В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М., Изд-во АН СССР, 1974, с. 73-82.

- I22 -

5. Везенберг Д.Л. Упругопластическое выпучивание алюминиевой цилиндрической оболочки при действии осесимметричной импульсной нагрузки. - В кн.: Новое в зарубежной науке, механика, вып. 8. Нестационарные процессы в деформируемых телах. М., Мир, I976, с. I87-I98.

6. Кадашевич Ю.П., Перцев А.К. О потере устойчивости цилиндрической оболочки при динамическом нагружении. - Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, I960, № 3, с. 30-33.

7. Вольмир А.С., Минеев В.Е. Экспериментальное исследование процесса выпучивания оболочки при динамическом нагружении. - ДАН СССР, I959, т. I25, № 5, с. I002-I003.

8. Бивин Ю.К., Найда А.А. Несущая способность цилиндрических оболочек при воздействии динамического внешнего давления. - Прикладная механика, I970, т. УI, вып. I0, с. 28-34.

9. Найда А.А., Шумик М.А. Экспериментальное исследование поведения подкреплённых цилиндрических оболочек при динамическом всестороннем давлении. - В кн.: Теория оболочек и пластин. М., Наука, I973, с. 535-537.

I0. Войцеховский А.И., Шумик М.А. Устойчивость цилиндрических оболочек при динамическом всестороннем сжатии. - Прикладная механика, I976, № II, с. II7-II9.

II. Агамиров В.Л., Вольмир А.С. Поведение цилиндрических оболочек при динамическом приложении всестороннего давления и осевого сжатия. - Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, I959, № 3, с. 78-83.

I2. Болотин В.В., Бойченко Г.А., Макаров Б.П., Судакова Н.И., Швейко Ю.Ю. О потере устойчивости тонких упругих оболочек под действием импульсивной нагрузки. - Строительная механика и расчёт сооружений, I959, № 2, с. 9-I6.

I3. Вольмир А.С., Сметанина Л.Н. Исследование динамической устойчивости стеклопластиковых оболочек. - Механика полимеров, I968, № I, с. I09-II5.

I4. Григолюк Э.И., Сребовский А.И. Тонкие круговые цилиндрические оболочки под действием импульса внешнего давления. - Инж. журнал МТТ, I968, № 3, с. II0-II8.

I5. Богданович А.Е., Фелдмане Э.Г. Расчёт несущей способности композитных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении. - Механика композитных материалов, I980, № 3, с. 476-484.

Статья поступила I7 декабря I98I года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 123-135

УДК 539.3:534.1

А.Е.Богданович, Т.Б.Кошкина
Институт механики полимеров
АН ЛатвССР

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЫПУЧИВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЁННОЙ КОЛЬЦЕВЫМИ РЁБРАМИ ЖЁСТКОСТИ

Согласно обстоятельным обзорам литературы по динамике ребристых оболочек [1, 2], задачи неосесимметричного деформирования цилиндрических оболочек, подкреплённых редко расположенными рёбрами жёсткости, при динамических нагрузках исследованы недостаточно. В значительной степени это связано с серьёзными вычислительными трудностями, возникающими при учёте дискретности подкрепляющих элементов.

Общая схема решения методом Бубнова-Галёркина нелинейной задачи динамического выпучивания изотропной цилиндрической оболочки, подкреплённой изотропными кольцевыми и продольными рёбрами жёсткости, изложена в работе [3]. Конкретных же результатов, позволяющих судить об эффектах, связанных с геометрической нелинейностью, и о необходимости учёта её при различных видах динамического нагружения, до настоящего времени, видимо, получено не было. В настоящей работе изложен простейший вариант методики решения геометрически нелинейной неосесимметричной динамической задачи для подкреплённой шпангоутами цилиндрической оболочки. Проведено сравнение с результатами решения геометрически линейной задачи по методике, изложенной в [4].

При описании деформирования цилиндрической оболочки, подкреплённой кольцевыми рёбрами жёсткости, будем предполагать, что шпангоуты расположены вдоль координатных линий $x = x_r$ (координата x отсчитывается от одного из торцов в направлении образующей). Для оболочки принимаются гипотезы Кирхгофа-Лява, материал оболочки - ортотропный. Считается, что рёбра сопротивляются осевой деформации, изгибу в направлении, нормальном к срединной поверхности оболочки, и кручению в плоскости, перпендикулярной оси ребра. Предполагается, что толщина стенки ребра значительно меньше минимального расстояния между соседними рёбрами (что позволяет учесть воздействие ребра на оболочку посредством дельта-функции) и что высота ребра значительно меньше его радиуса кривизны (это делает допустимым использование технической теории изгиба стержней). Рёбра считаются монотропными; плоскость изотропии совпадает с плоскостью поперечного сечения ребра.

За основу примем нелинейную систему уравнений* движения [3], модифицировав её для ортотропной оболочки, подкреплённой монотропными кольцевыми рёбрами. В пренебрежении тангенциальными силами инерции и компонентами поверхностных нагрузок на оболочку система уравнений, описывающих неосесимметричное деформирование, записывается в виде:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{1}{R} N_y + \tag{I}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y}\right) +$$

$$+ N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \sum_r \delta(x - x_r)\rho_r A_r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где $N_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y$

$$N_y' = C_{22}\varepsilon_y + C_{12}\varepsilon_x + \sum_r \delta(x - x_r) E_r A_r \left(\varepsilon_y + \bar{z}_r \varkappa_y\right)$$

$$N_{xy} = C_{66}\gamma$$

$$M_x = D_{11}\varkappa_x + D_{12}\varkappa_y$$

$$M_y = D_{12}\varkappa_x + D_{22}\varkappa_y + \sum_r \delta(x-x_r)E_r\left(J_{o_r}\varkappa_y + \bar{z}_r A_r \mathcal{E}_y\right) \qquad (2)$$

$$M_{xy} = 2D_{66}\chi + \frac{1}{2}\sum_r \delta(x-x_r)\, G_r J_r \chi,$$

а деформации связаны с перемещениями нелинейными соотношениями

$$\mathcal{E}_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w_o}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R}(w-w_o) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial w_o}{\partial y}\right)^2\right] \qquad (3)$$

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_o}{\partial x}\frac{\partial w_o}{\partial y}$$

$$\varkappa_x = -\frac{\partial^2(w-w_o)}{\partial x^2};\ \varkappa_y = -\frac{\partial^2(w-w_o)}{\partial y^2};\ \chi = -\frac{\partial^2(w-w_o)}{\partial x\,\partial y}$$

В уравнениях (I) - (3) сохранены обозначения работы [4]. Через N_x° и N_y° обозначены осевое и кольцевое усилия, возникающие при осесимметричной деформации оболочки под действием заданной системы осесимметричных нагрузок. Неосесимметричные деформации вызываются неосесимметричными начальными несовершенствами формы $w_o(x,y)$. Предполагается, что N_x° и N_y° не зависят от координаты x, вследствие чего анализ неосесимметричного деформирования корректен лишь вне зон осесимметричного краевого эффекта. В дальнейшем будет приниматься также, что при действии на торцы оболочки осевых сжимающих усилий $P(t)$, $N_x^\circ = -P(t)$. Это исключает из рассмотрения процесс распространения возмущений вдоль оболочки. При действии равномерно распределённого по боковой поверхности внешнего давления $q(t)$ считаем, что $N_y^\circ = -q(t)R$. Введенные предположения допустимы в широких пределах изменения скоростей приложения осевого сжатия и внешнего давления.

Подстановка (2) и (3) в (I) приводит к следующей системе уравнений движения в перемещениях:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{C_{12}}{R}\frac{\partial(w-w_0)}{\partial x}+$$

$$+C_{11}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+C_{66}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\left(C_{12}+C_{66}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)=0 \qquad (4)$$

$$C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(C_{12}+C_{66}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{C_{22}}{R}\frac{\partial(w-w_0)}{\partial y}+$$

$$+C_{22}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right)+C_{66}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+$$

$$+\left(C_{12}+C_{66}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial y}\right)+$$

$$+\sum_r\delta(x-x_r)E_rA_r\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial(w-w_0)}{\partial y}-\bar{z}_r\frac{\partial^3(w-w_0)}{\partial y^3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right]=0 \qquad (5)$$

$$D_{11}\frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^4}+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^2\partial y^2}+D_{22}\frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial y^4}-$$

$$-\frac{C_{12}}{R}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{C_{22}}{R}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{C_{22}}{R^2}(w-w_0)+$$

$$+\sum_r\delta(x-x_r)\left\{G_rJ_r\frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^2\partial y^2}+E_rJ_{0r}\frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial y^4}+\right.$$

$$\left.+E_rA_r\left[\frac{w-w_0}{R^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y}-\bar{z}_r\left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}-\frac{2}{R}\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{C_{22}}{2R}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{C_{12}}{2R}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]-$$

$$-\sum_r \delta(x-x_r) E_r A_r \Bigl\{ \frac{1}{2R}\Bigl[\Bigl(\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2-\Bigl(\frac{\partial w_0}{\partial y}\Bigr)^2\Bigr]+\bar{z}_r\Bigl[\Bigl(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Bigr)^2-\Bigl(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\Bigr)^2+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3}\Bigr]\Bigr\}-\frac{\partial}{\partial x}\Bigl\{\frac{\partial w}{\partial x}\Bigl[C_{11}\Bigl[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2-$$

$$-\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2\Bigr]+C_{12}\Bigl[\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{w-w_0}{R}+\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2-\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w_0}{\partial y}\Bigr)^2\Bigr]\Bigr]+$$

$$+C_{66}\frac{\partial w}{\partial y}\Bigl[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\Bigr]\Bigr\}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\Bigl\{C_{66}\frac{\partial w}{\partial x}\Bigl[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\Bigr]+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial y}\Bigl[C_{22}\Bigl[\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{w-w_0}{R}+\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2-\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w_0}{\partial y}\Bigr)^2\Bigr]+$$

$$+C_{12}\Bigl[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2-\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w_0}{\partial x}\Bigr)^2\Bigr]+$$

$$+\sum_r\delta(x-x_r)E_rA_r\Bigl[\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{w-w_0}{R}-\bar{z}_r\frac{\partial^2(w-w_0)}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2-\frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial w_0}{\partial y}\Bigr)^2\Bigr]\Bigr]\Bigr\}-$$

$$-\overset{\circ}{N}_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\overset{\circ}{N}_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\sum_r\delta(x-x_r)\rho_r A_r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0. \qquad (6)$$

При решении в [4] линейной системы уравнений движения, получаемой из (4) – (6) отбрасыванием нелинейных членов, перемещения оболочки раскладывались в двойные ряды Фурье. В результате последующего применения процедуры Бубнова-Галёркина исходная система была сведена к линейной системе 2 к алгебраических и к обыкновенных дифференциальных уравнений (к – число членов, удерживаемых в аппроксимациях перемещений). Таким образом, линейную задачу принцициально можно решить при любом κ . Решение же нелинейной задачи даже при сравнительно небольшом числе гармоник, учитываемых в разложениях в ряды Фурье, становится трудноосуществимым. Для гладких цилиндрических оболочек профлема выбора аппроксимации прогиба при решении нелинейных задач динамического выпучивания обсуждалась в [5]. Для оболочки, подкреплённой ребрами жёсткости, рассматриваемыми как дискретные элементы, довести до численных результатов решение нелинейной системы (4) - (6) при использовании многочленных аппроксимаций перемещений, видимо, невозможно. В такой ситуации разумным представляется последовательное изучение основных особенностей рассматриваемой нелинейной задачи.

Простейшее решение системы (4) - (6) можно построить, удержав в разложении прогиба в полный ряд Фурье лишь один член, соответствующий фиксированным формам волнообразования m в осевом и n в окружном направлениях:

$$w_{mn}(x,y,t)=\left[W_{mn}(t)\cos\beta_n y+\tilde{W}_{mn}(t)\sin\beta_n y\right]\sin\alpha_m x$$

$$w^{\circ}_{mn}(x,y)=\left(W^{\circ}_{mn}\cos\beta_n y+\tilde{W}^{\circ}_{mn}\sin\beta_n y\right)\sin\alpha_m x, \tag{7}$$

$$\alpha_m=\frac{\pi m}{L},\quad \beta_n=\frac{n}{R}.$$

Уравнению (4) при заданных аппроксимациях (7) можно, как нетрудно убедиться, точно удовлетворить, задав тангенциальные перемещения в виде

$$u_{mn}(x,y,t)=\left[U^{(1)}_{mn}(t)\cos\beta_n y+\tilde{U}^{(1)}_{mn}(t)\sin\beta_n y\right]\cos\alpha_m x+$$

$$+\left[U^{(2)}_{mn}(t)\cos 2\beta_n y+\tilde{U}^{(2)}_{mn}(t)\sin 2\beta_n y+\right. \tag{8}$$

$$\left.+U^{(3)}_{mn}(t)\right]\sin 2\alpha_m x+U^{(4)}_{mn}(t)x;$$

$$v_{mn}(x,y,t)=\left[V^{(1)}_{mn}(t)\sin\beta_n y-\tilde{V}^{(1)}_{mn}\cos\beta_n y\right]\sin\alpha_m x+$$

$$+\left[V_{mn}^{(2)}(t)\sin 2\beta_n y-\tilde V_{mn}^{(2)}(t)\cos 2\beta_n y\right]\cos 2\alpha_m x+$$

$$+\ V_{mn}^{(3)}(t)\sin 2\beta_n y-\tilde V_{mn}^{(3)}\cos 2\beta_n y.$$

Подставив (7) и (8) в (4), получаем пять уравнений, связывающих временные функции в аппроксимациях (7) и (8).

Уравнению (5), содержащему дельта-функции, точно удовлетворить не удаётся. Это можно сделать приближённо, подставив в него (7) и (8), умножив полученное уравнение шесть раз на следующие комбинации тригонометрических функций:

$$\sin\alpha_m x\sin\beta_n y,\ \sin\alpha_m x\cos\beta_n y,\ \cos 2\alpha_m x\sin 2\beta_n y,$$
$$\cos 2\alpha_m x\cos 2\beta_n y,\ \sin 2\beta_n y,\ \cos 2\beta_n y$$

и проинтегрировав каждое из полученных шести уравнений по поверхности оболочки. В результате получаем ещё шесть алгебраических уравнений, связывающих временные функции в (7) и (8). Недостающее двенадцатое уравнение получаем, удовлетворив в интегральном смысле условию равенства нулю осевого усилия на торцах оболочки: $\int_0^{2\pi R} N_x\Big|_{x=0,L} dy = 0.$

Из системы алгебраических уравнений, полученной описанным выше способом, можно выразить двенадцать временных функций в аппроксимациях тангенциальных перемещений через две функции времени $W_{mn}(t), \tilde W_{mn}(t)$ и две постоянные $W_{mn}^{o}, \tilde W_{mn}^{o}$. Решение этой системы имеет вид

$$U_{mn}^{(1)}=\frac{\alpha_m}{\Delta_{mn}}\Big\{\beta_n^2 C_{22}-\alpha_m^2 C_{12}+$$
$$+\frac{2}{L}\beta_n^2\Big[\sum_r E_r A_r \sin^2\alpha_m x_r\Big(1-\bar z_r\beta_n^2 R\Big(\frac{C_{12}}{C_{66}}+1\Big)\Big)\Big]\Big\}\left(W_{mn}-W_{mn}^{o}\right)$$

$$V_{mn}^{(1)}=\frac{\beta_n}{\Delta_{mn}}\Big\{\beta_n^2 C_{22}+\alpha_m^2\Big(\frac{\Omega_o}{C_{66}}-C_{12}\Big)+$$
$$+\frac{2}{L}\Big(\frac{C_{11}}{C_{66}}\alpha_m^2+\beta_n^2\Big)\Big[\sum_r E_r A_r\sin^2\alpha_m x_r\left(1-\bar z_r\beta_n^2 R\right)\Big]\Big\}\left(W_{mn}-W_{mn}^{o}\right) \tag{9}$$

$$U_{mn}^{(2)}=-\frac{\alpha_m}{16}\left[\left(W_{mn}^2-W_{mn}^{o2}\right)-\left(\tilde W_{mn}^2-\tilde W_{mn}^{o2}\right)\right]$$

$$V_{mn}^{(2)} = -\frac{\beta_n}{16}\left[\left(W_{mn}^2 - W_{mn}^{o2}\right) - \left(\tilde{W}_{mn}^2 - \tilde{W}_{mn}^{o2}\right)\right]$$

$$U_{mn}^{(3)} = -\frac{\alpha_m}{16}\left(1 - \frac{C_{12}\beta_n^2}{C_{11}\alpha_m^2}\right)\left[\left(W_{mn}^2 - W_{mn}^{o2}\right) + \left(\tilde{W}_{mn}^2 - \tilde{W}_{mn}^{o2}\right)\right]$$

$$V_{mn}^{(3)} = \frac{\beta_n}{16}\left[1 - \frac{\alpha_m^2 C_{12}}{\beta_n^2\left(C_{22} + \frac{1}{L}\sum\limits_{z} E_z A_z\right)}\right]\left[\left(W_{mn}^2 - W_{mn}^{o2}\right) - \left(W_{mn}^2 - \tilde{W}_{mn}^{o2}\right)\right]$$

$$U_{mn}^{(4)} = -\frac{\alpha_m}{8}\left(1 + \frac{C_{12}\beta_n^2}{C_{11}\alpha_m^2}\right)\left[\left(W_{mn}^2 - W_{mn}^{o2}\right) + \left(\tilde{W}_{mn}^2 - \tilde{W}_{mn}^{o2}\right)\right]$$

где $\Omega_o = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$,

$$\Delta_{mn} = R\left[C_{11}\alpha_m^4 + \left(\frac{\Omega_o}{C_{66}} - 2C_{12}\right)\alpha_m^2\beta_n^2 + C_{22}\beta_n^4 + \frac{2\beta_n}{L}\left(\frac{C_{11}}{C_{66}}\alpha_m^2 + \beta_n^2\right)\sum_z E_z A_z \sin^2\alpha_m x_z\right].$$

Величины $\tilde{U}_{mn}^{(1)}$, $\tilde{V}_{mn}^{(1)}$ получаются из $U_{mn}^{(1)}$, $V_{mn}^{(1)}$ заменой $\left(W_{mn} - W_{mn}^o\right)$ на $\left(\tilde{W}_{mn} - \tilde{W}_{mn}^o\right)$, а $\tilde{U}_{mn}^{(2)}, \tilde{V}_{mn}^{(2)}, \tilde{V}_{mn}^{(3)}$ – из $U_{mn}^{(2)}$, $V_{mn}^{(2)}$, $V_{mn}^{(3)}$ заменой $\left[\left(W_{mn}^2 - W_{mn}^{o2}\right) - \left(\tilde{W}_{mn}^2 - \tilde{W}_{mn}^{o2}\right)\right]$ на $2\left(W_{mn}\tilde{W}_{mn} - W_{mn}^o\tilde{W}_{mn}^o\right)$.

Подставив далее аппроксимации (7) и аппроксимации (8) с коэффициентами (9) в уравнение (6), умножив его на $\sin\alpha_m x \cos\beta_n y$ и на $\sin\alpha_m x \sin\beta_n y$ и проинтегрировав по поверхности оболочки, приходим к следующей системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для каждой фиксированной пары значений m, n:

$$\frac{d^2 W_{mn}}{dt^2} + \omega_{mn}^2\left[\left(1 - \frac{P(t)}{P_{mn}^*} - \frac{q(t)}{q_{mn}^*}\right)W_{mn} - W_{mn}^o\right] +$$
$$+ d_{mn}^{(1)}\left(W_{mn}^3 - W_{mn}W_{mn}^{o2} + W_{mn}\tilde{W}_{mn}^{o2} + W_{mn}\tilde{W}_{mn}^2 - 2\tilde{W}_{mn}W_{mn}^o\tilde{W}_{mn}^o\right) +$$
$$+ d_{mn}^{(2)} W_{mn}\left(W_{mn}^2 - W_{mn}^{o2} + \tilde{W}_{mn}^2 - \tilde{W}_{mn}^{o2}\right) = 0 \qquad (10)$$

$$\frac{d^2\tilde{W}_{mn}}{dt^2}+\omega_{mn}^2\left[\left(1-\frac{P(t)}{P_{mn}^*}-\frac{q(t)}{q_{mn}^*}\right)\tilde{W}_{mn}-\tilde{W}_{mn}^{o}\right]+$$

$$+d_{mn}^{(1)}\left(\tilde{W}_{mn}^3-\tilde{W}_{mn}\tilde{W}_{m}^{o2}+\tilde{W}_{mn}W_{mn}^{o2}+\tilde{W}_{mn}W_{mn}^2-2W_{mn}\tilde{W}_{mn}^{o}W_{mn}^{o}\right)+$$

$$+d_{mn}^{(2)}\tilde{W}_{mn}\left(\tilde{W}_{mn}^2-\tilde{W}_{mn}^{o2}+W_{mn}^2-W_{mn}^{o2}\right)=0,$$

где

$$\omega_{mn}^2=\frac{1}{\mu_m}\Big\{\alpha_m D_{11}+2\alpha_m^2\beta_n^2\left(D_{12}+2D_{66}\right)+\beta_n^4 D_{22}+$$

$$+\frac{2}{L}\alpha_m^2\beta_n^2\sum_r G_r J_r\sin^2\alpha_m x_r+\frac{2}{L}\beta_n^4\sum_r E_r J_{o_r}\sin^2\alpha_m x_r+$$

$$+\frac{1}{\Delta_{mn}R}\Big\{\alpha_m^4\left(\Omega_o+\frac{2}{L}C_{11}\sum_r E_r A_r\sin^2\alpha_m x_r\right)-$$

$$-\frac{4R}{L}\beta_n^2\Big[\alpha_m^2\left(\alpha_m^2 C_{11}-\beta_n^2 C_{12}\right)+ \tag{11}$$

$$+\frac{R}{L}\beta_n^4\left(\frac{C_{11}}{C_{66}}\alpha_m^2+\beta_n^2\right)\sum_r E_r A_r\bar{z}_r\sin^2\alpha_m x_r\Big]\sum_r E_r A_r\bar{z}_r\sin^2\alpha_m x_r\Big\}\Big\}$$

$$P_{mn}^*=\frac{\omega_{mn}^2\mu_m}{\alpha_m^2}\ ;\qquad q_{mn}^*=\frac{\omega_{mn}^2\mu_m}{\beta_n^2 R} \tag{12}$$

$$d_{mn}^{(1)}=\frac{1}{16\mu_m}\,\frac{\alpha_m^4\left(\Omega_o+\frac{1}{L}C_{11}\sum_r E_r A_r-\frac{1}{L}C_{12}\alpha_m^2\beta_n^2\sum_r E_r A_r\cos 2\alpha_m x_r\right)}{C_{22}+\frac{1}{L}\sum_r E_r A_r}$$

$$d_{mn}^{(2)}=\frac{1}{16\mu_m}\beta_n^4\left(\frac{3\Omega_o}{C_{11}}+\frac{8}{L}\sum_r E_r A_r\sin^4\alpha_m x_r\right), \tag{13}$$

где $\mu_m=\rho h+\frac{2}{L}\sum_r \rho_r A_r\sin^2\alpha_m x_r$.

Выражения (11), (12) могут рассматриваться как простейшие формулы расчёта спектров частот собственных колебаний, критических осевых усилий и внешних давлений для ортотропной цилиндрической оболочки, подкреплённой системой произвольно расположенных вдоль образующей кольцевых рёбер жёсткости. Если положить $E_r=0$, $G_r=0$, $\rho_r=0$, то (11) переходит в известную формулу для частоты собственных колебаний шарнирно опертой ортотропной цилиндрической оболочки.

Начальные условия, необходимые для решения системы (10), зададим в виде:

$$W_{mn}\Big|_{t=0} = W^{\circ}_{mn}\ ; \qquad \frac{dW_{mn}}{dt}\Big|_{t=0} = \hat{W}^{\circ}_{mn}\ ;$$
$$\tilde{W}_{mn}\Big|_{t=0} = \tilde{W}^{\circ}_{mn}\ ; \qquad \frac{d\tilde{W}_{mn}}{dt}\Big|_{t=0} = \hat{\tilde{W}}^{\circ}_{mn}\ . \tag{14}$$

Численно проинтегрировав (10), находим зависимости $W_{mn}(t)$ и $\tilde{W}_{mn}(t)$. Используя далее формулы (9), определяем временные коэффициенты в аппроксимациях тангенциальных перемещений. В конечном итоге перемещения произвольной точки срединной поверхности оболочки можно рассчитать, просуммировав ряды

$$w(x,y,t) = \sum_{m=m_0}^{M} w_{mn}(x,y,t)$$
$$u(x,y,t) = \sum_{m=m_0}^{M} u_{mn}(x,y,t)$$
$$v(x,y,t) = \sum_{m=m_0}^{M} v_{mn}(x,y,t) \tag{15}$$

В качестве примера рассмотрим оболочку, подкреплённую двумя одинаковыми шпангоутами прямоугольного сечения, при линейно возрастающей во времени осевой сжимающей нагрузке. Материал оболочки и ребер - однонаправленный углепластик; оболочка армирована вдоль образующей. Геометрические и механические характеристики: R = 1 м, L/R = 2; R/h = 200; $h_z/h = 10$; $A_z/h^2 = 10$; $E_1 = E_z = 11{,}95\cdot 10^{10}$ Н/м^2;

$E_2 = 0{,}95\cdot 10^{10}$ Н/м^2; $G_{12} = G_z = 0{,}457\cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\nu_{12} = 0{,}3$;

$\rho = \rho_z = 1{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3. Коэффициенты Фурье в разложении начальных несовершенств примем в виде:

$$W^{\circ}_{mn} = 0{,}2h\,\frac{(-1)^{k+n}}{m^2}\cdot e^{-\frac{(n-4)^2}{4}}\ ; \quad \tilde{W}^{\circ}_{mn} = 0, \tag{16}$$

где $k = m/2$ при m чётном и $k = (m+1)/2$ при m нечётном. Начальные скорости в (14) считаем равными нулю. Заданное на торцах осевое сжимающее усилие $P(t)$ запишем в виде

$P(t)=VP^{*}\tau$, где P^{*} - эйлерово критическое усилие для гладкой оболочки, $\tau=tc/2L$, $c=[E_1/\rho(1-\nu_{12}^2)]^{1/2}$.

Таким образом, за время двухкратного пробега продольной волны по длине оболочки осевое усилие достигает V эйлеровых значений.

На рис. I даны результаты численных расчётов для V = = 2. Оба шпангоута расположены на внешней поверхности оболочки в сечениях $x_1 = 0,48L$ и $x_2 = 0,56L$ (именно этим сечениям соответствуют максимальные значения прогиба при выпучивании гладкой оболочки). Отметим, что все приведённые кривые получены при суммировании рядов для прогиба в одинаковых пределах $m_0 = 1$, $M = 21$, $n_0 = 1$, $N = 6$.

Из представленных результатов можно сделать следующий основной вывод. Учёт взаимосвязанности осевых форм выпучивания, возникающей вследствие дискретности расположения подкрепляющих элементов, при $w \sim h$ значительно сильнее влияет как на максимальную величину прогиба, так и на вид зависимости $w(x)$, чем учёт геометрической нелинейности. Так, при τ = 3,17 решение нелинейной задачи с одночленной аппроксимацией даёт $\max\limits_{x\in[0,L]} w(x) = 4,4h$, а решение линейной задачи с многочленной аппроксимацией - $\max\limits_{x\in[0,L]} w(x)=1,25h$.

При использовании одночленной аппроксимации не удаётся описать изменение значений координаты x , соответствующих наиболее интенсивному выпучиванию, а также выпучивание между рёбрами, наблюдаемое при достаточно высокой их жёсткости.

Таким образом, при решении задач о выпучивании цилиндрических оболочек, подкреплённых системой редко расположенных рёбер жёсткости, при осевых сжимающих нагрузках, учёт взаимосвязанности различных форм волнообразования является принципиально необходимым. Исходя из этого следует развивать методы решения в области геометрической нелинейности.

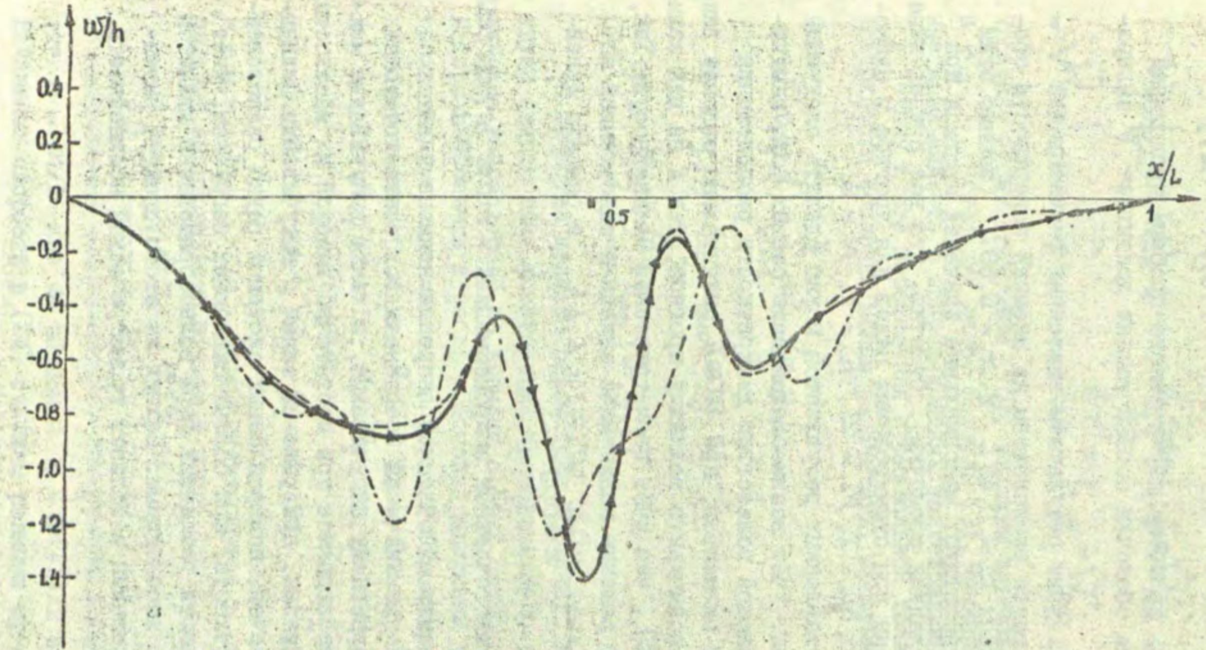


Рис. 1. Зависимость прогиба от осевой координаты в сечении $y = \pi R$ для гладкой оболочки при τ = 2,35 (штриховая линия) и оболочки с двумя шпангоутами:

——— одночленная аппроксимация, линейное решение при τ = 2,5;

▲ ▲ ▲ ▲ одночленная аппроксимация, нелинейное решение при τ = 2,5;

—·—·— многочленная аппроксимация, линейное решение [4] при τ = 3,17.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигалко Ю.П., Дмитриева Л.М. Динамика ребристых пластин и оболочек. - В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: КГУ, 1978, вып. 13, с. 3-30.

2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Исследования в области динамики ребристых оболочек. - Прикладная механика, 1981, т.17, № 11, с. 3-20.

3. Fisher C.A., Bert C.W. Dynamic buckling of an axially compressed cylindrical shell with discrete rings and stringers.- Journal of Applied Mechanics: Transactions of ASME, ser. E, 1973 p. 363-381.

4. Богданович А.Е., Кошкина Т.Б. Выпучивание цилиндрической оболочки с кольцевыми рёбрами жёсткости при осевой динамической нагрузке. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1981, с. 103-122.

5. Богданович А.Е., Фелдмане Э.Г. Расчёт несущей способности композитных цилиндрических оболочек при динамическом нагружении. - Механика композитных материалов, 1980, №3, с. 476-484.

Статья поступила 23 марта 1982 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 136-145

УДК 678:539.63

М.А.Белов, О.М.Юдруп
ЛГУ им. П.Стучки

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ УДАРЕ ПО ТОРЦУ

Задана изотропная осесимметричная цилиндрическая оболочка длины L, толщины h с радиусом срединной поверхности R (рис. 1).

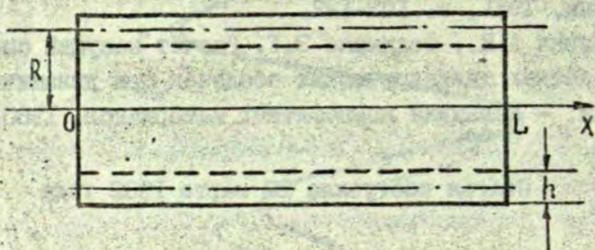


Рис. 1.

В начальный момент времени на левый торец оболочки начинает действовать осесимметричная нагрузка ударного типа, правый торец всё время остаётся свободным. Требуется изучить пластические деформации, которые возникают при достаточно сильном ударе.

1. Выбор математической модели

В общем случае решение поставленной задачи наталкивается на существенные математические затруднения, связанные с её нелинейностью. Поэтому возникает задача выбора компромиссной модели процесса, которая, с одной стороны, допускает возможность эффективного численного расчёта, а с другой стороны достаточно точно описывает реальную ситуацию. Известно, что в тонкостенных оболочках при кратковременных нагружениях значительных моментов не возникает, поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь безмоментной теории оболочек. В настоящее время имеется много различных моделей теории пластичности, достаточно хорошо описывающих физику процесса. Однако, желание получить простую вычислительную схему приводит к необходимости выбора наиболее простой из таких теорий, а именно деформационной теории пластичности. Итак, исследования проводятся на модели цилиндрической оболочки в рамках безмоментной теории [1] и в приближении деформационной теории пластичности без учёта упругой разгрузки [2]. Если интенсивность деформаций сдвига больше предела текучести, то считается, что материал находится в пластическом состоянии.

Из-за симметрии задачи все величины зависят лишь от координаты вдоль образующей цилиндра x^* и времени t .

Тогда согласно [3] поставленная задача имеет следующую математическую модель

$$\begin{cases} \partial N_x^*/\partial x^* = \rho h\, \partial^2 u^*/\partial t^2; \\ N_y^*/R = \rho h\, \partial^2 w^*/\partial t^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$N_x^* = \frac{h}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)\frac{\sigma(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i}, \tag{1.2}$$

$$N_y^* = \frac{h}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)\frac{\sigma(\varepsilon_i)}{\varepsilon_i}, \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_x = \partial u^*/\partial x^*, \quad \varepsilon_y = -w^*/R, \tag{1.4}$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y^2}\,, \tag{1.5}$$

где ρ , ν , h , R и x^* соответственно плотность, коэффициент Пуассона материала оболочки, толщина, радиус срединной поверхности оболочки и размерная координата вдоль образующей оболочки, а u^*, w^*, N_x^*, N_y^* - размерные продольные и поперечные смещения срединной поверхности оболочки и соответствующие размерные усилия. Через t обозначено размерное время, а через ε_i - интенсивность деформаций сдвига.

Функция $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ - это зависимость между напряжением и деформацией при одноосном растяжении, получаемая из экспериментальных данных при растяжении стержней. Качественно эта зависимость изображена на рис. 2, причём при напряжениях ниже предела текучести ($\sigma \leqslant \sigma_T$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_T$) материал упругий, а при $\varepsilon > \varepsilon_T$ материал находится в пластическом состоянии, и зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ при $\varepsilon > \varepsilon_T$, описывает пластические свойства материала.

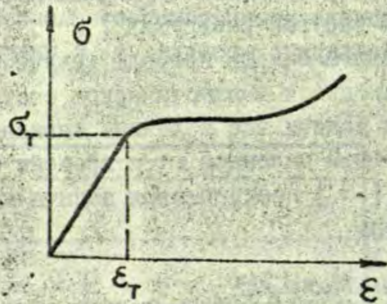


Рис. 2.

Таким образом, функцию $\sigma(\varepsilon)$ можно определить соотношением

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon\,\sigma_0(\varepsilon), \tag{I.6}$$

где:

$$\sigma_0(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \leq \varepsilon_T, \\ \sigma(\varepsilon)/E\varepsilon, & \varepsilon > \varepsilon_T, \end{cases} \tag{I.7}$$

E - модуль упругости материала оболочки, $\sigma(\varepsilon)$ - экспериментальная зависимость между напряжением и деформацией при одноосном растяжении в зоне пластических деформаций.

К системе (I.I) необходимо добавить граничные условия:

$$N_x^* \Big|_{x^*=0} = \Phi(t), \quad N_x^* \Big|_{x^*=L} = 0, \tag{I.8}$$

где $\Phi(t)$ - внешнее усилие типа удара, действующее на левый торец цилиндрической оболочки, а также однородные начальные условия.

Введём безразмерные усилия

$$N_x = N_x^*/N_0, \quad N_y = N_y^*/N_0; \quad N_0 = Eh/(1-\nu^2); \tag{I.9}$$

безразмерные перемещения

$$u = u^*/R, \quad w = w^*/R; \tag{I.I0}$$

безразмерное время

$$\tau = ct/R, \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \tag{I.II}$$

и безразмерную координату вдоль образующей цилиндрической оболочки

$$x = x^*/R. \tag{I.I2}$$

Тогда безразмерная математическая модель поставленной задачи имеет следующий вид

$$\begin{cases} \partial^2 u/\partial \tau^2 = \partial N_x/\partial x, \\ \partial^2 w/\partial \tau^2 = N_y, \end{cases} \tag{I.I2}$$

$$N_x = (\partial u/\partial x - \nu w)\,\sigma_0(\varepsilon_i), \tag{I.I3}$$

$$N_y = (\nu\,\partial u/\partial x - w)\,\sigma_0(\varepsilon_i), \tag{I.I4}$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\partial u/\partial x)^2 - w\,\partial u/\partial x + w^2}, \tag{I.I5}$$

$$N_x \Big|_{x=0} = f(\tau), \quad N_x \Big|_{x=l} = 0, \tag{I.I6}$$

$$u\Big|_{\tau=0} = w\Big|_{\tau=0} = \partial u/\partial \tau\Big|_{\tau=0} = \partial w/\partial \tau\Big|_{\tau=0} = 0, \tag{I.I7}$$

где $l = L/R$, $f(\tau) = \Phi(R\tau/c)/N_0$, а $\sigma_0(\varepsilon)$, $\Phi(t)$, c и N_0 заданы соотношениями (I.7), (I.8), (I.II) и (I.9).

Выясним, как глубоко проникают пластические деформации в цилиндрическую оболочку.

Математически эта задача сводится к вычислению из системы (I.I2) - (I.I7) зависимости $\varepsilon_i = \varepsilon_i(x, \tau)$, где ε_i - интенсивность деформации сдвига определена соотношением (I.I5). Условие наличия пластической деформации следующее:

$$\varepsilon_i(x, \tau) > \varepsilon_T . \tag{I.I8}$$

2. Схема решения математической модели

Задачу (I.I2) - (I.I7) преобразуем следующим образом. От обеих частей первого уравнения системы (I.I2) возьмём частную производную по x и введём обозначения

$$U = \partial u/\partial x, \quad \nu w = V. \tag{2.I}$$

Система (I.I2) преобразуется в

$$\begin{cases} \partial^2 U/\partial \tau^2 = \partial^2 N/\partial x^2, \\ \partial^2 V/\partial \tau^2 = T, \end{cases} \tag{2.2}$$

где

$$N = (U - V)\,\sigma_0(\varepsilon_i), \tag{2.3}$$

$$T = (\nu^2 U - V)\,\sigma_0(\varepsilon_i). \tag{2.4}$$

Вычтем из первого уравнения системы (2.2) второе, введём обозначение $Z = U - V$ и таким образом получим следующую математическую задачу:

$$\begin{cases} \partial^2 Z/\partial \tau^2 = \partial^2 N/\partial x^2 - T, \\ \partial^2 V/\partial \tau^2 = T, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$N = Z\,\sigma_0(\varepsilon_i), \tag{2.6}$$

$$T=[\nu^2 Z-(1-\nu^2)V]\,\sigma_0(\varepsilon_i), \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_i=\frac{2}{\nu\sqrt{3}}\sqrt{aV^2+bVZ+dZ^2}, \tag{2.8}$$

$$a=1-\nu+\nu^2,\quad b=\nu(2\nu-1),\quad d=\nu^2, \tag{2.9}$$

$$N\big|_{x=0}=f(\tau),\quad N\big|_{x=l}=0, \tag{2.10}$$

$$Z\big|_{\tau=0}=V\big|_{\tau=0}=\partial Z/\partial\tau\big|_{\tau=0}=\partial V/\partial\tau\big|_{\tau=0}=0. \tag{2.11}$$

Задача (2.5) – (2.11) решается численно. Для этого цилиндрическую оболочку разобьём по её длине на M равных частей точками деления $x=\lambda k$, $k=0,1,\dots,M$, где $\lambda=l/M$ – шаг сетки. От непрерывного распределения по переменной x перейдём к дискретному и задачу будем решать лишь во внутренних точках сетки. Введём обозначение $Z^k\equiv Z^k(\tau)=Z(\lambda k,\tau)$, $k=0,1,\dots,M$, для значений функции $Z(x,\tau)$ в узлах сетки, а также подобные обозначения и для всех остальных функций двух переменных нашей задачи. Таким образом все функции двух переменных мы заменяем $(M+1)$– мерными векторами, например, $Z(x,\tau)\Rightarrow\{Z^0(\tau),\dots,Z^M(\tau)\}$. Если производную $\partial^2N/\partial x^2$ заменить конечно-разностным приближением

$$(\partial^2N/\partial x^2)^k=\frac{1}{\lambda^2}\left(N^{k+1}+N^{k-1}-2N^k\right), \tag{2.12}$$

то система (2.5) перейдёт в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} d^2Z^k/d\tau^2=\dfrac{1}{\lambda^2}\left(N^{k+1}+N^{k-1}-2N^k\right)-T^k, \\ d^2V^k/d\tau^2=T^k, \end{cases} \tag{2.13}$$

$k=1,2,\dots,M-1$, с однородными начальными условиями. Краевые условия (2.10) учитываются следующим образом. В системе (2.13) выделяются уравнения, соответствующие $k=1$ и $k=M-1$, в которых полагается $N^0=f(\tau)$, а $N^M=0$. Таким образом, окончательно задача (2.5) – (2.11) после дискретизации по x сводится к решению задачи Коши для системы из $2(M-1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно τ с однородными начальными условиями, которая весьма эффективно решается классическим методом Рунге-Кутта. Искомую интенсивность деформаций сдвига $\varepsilon_i(x,\tau)$ получаем лишь в точках сетки $x=\lambda k,\ k=1,2,\dots,M-1$. Промежуточные значения можно получить посредством линейной интерполяции. Сходимость приближённой схемы при $M\to\infty$ проверялась на численных экспериментах и оказалась достаточно хорошей.

3. Численный пример

Возьмём функцию внешней нагрузки $f(\tau)$ в следующем виде

$$f(\tau)=F_0 f_0(\tau),\quad \tau\geqslant 0, \tag{3.I}$$

где

$$f_0(\tau)=\left(\frac{\gamma}{\alpha n}\right)^n\left(1+\frac{\alpha n}{\gamma}\right)^{n+\gamma/\alpha} e^{-\gamma\tau}\left(1-e^{-\alpha\tau}\right)^n, \tag{3.2}$$

$\alpha>0,\ \gamma>0,$ n – натуральное число являются свободными параметрами. На промежутке $[0,\tau_0]$, где

$$\tau_0=\ln(1+\alpha n/\gamma)/\alpha; \tag{3.3}$$

функция $f_0(\tau)$ монотонно возрастает от нуля до своего максимального значения $f_0(\tau_0)=1$, а на промежутке $[\tau_0,+\infty[$ монотонно убывает и $\lim\limits_{\tau\to+\infty} f_0(\tau)=0$. Таким образом внешняя нагрузка (3.I) при $\tau>0$ положительна и принимает максимальное значение при $\tau=\tau_0$ $f(\tau_0)=F_0$, т.е. F_0 – максимальное значение внешнего усилия.

Наиболее важным является выбор функции (I.7), которая определяет пластические свойства материала оболочки и требует для своего построения экспериментальных зависимостей напряжение-деформация при одноосном растяжении. Кривые напряжение-деформация могут существенно меняться в зависимости от скорости нагружения. Для внешней нагрузки (3.I) безразмерная скорость нагружения v_n при малых τ_0 приближенно равна

$$v_n\approx F_0/\tau_0=F_0\alpha/\ln(1+\alpha n/\gamma). \tag{3.4}$$

Таким образом, для проведения численного расчёта при данной скорости нагружения v_n необходимо знать соответствующую зависимость напряжения от деформации при одноосном растяжении. Для численного примера функция $\sigma_0(\varepsilon)$ соотношения (I.7) выбиралась в следующем виде

$$\sigma_0(\varepsilon)=\begin{cases}1, & \varepsilon \leqslant \varepsilon_T,\\ \sqrt{\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}}, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_T.\end{cases} \tag{3.5}$$

Результаты расчёта приведены на рис. 3 и рис. 4. В обоих случаях

$$\varepsilon_T = 0{,}05; \qquad l = 5, \qquad \nu = 0{,}4; \qquad M = 100. \tag{3.6}$$

Функция внешней нагрузки имеет следующие значения свободных параметров

$$\alpha = 1, \qquad \gamma = 6, \qquad n = 4, \tag{3.7}$$

поэтому в обоих случаях $\tau_0 = 0{,}5108$.

Для примера, результаты счёта которого приведены на рис.3, $F_0 = 0{,}003$, а на рис. 4 $F_0 = 0{,}006$.

Отметим сразу, что дальнейшее увеличение числа точек деления оболочки M практически не изменяет результатов вычисления (более того, те же результаты получаются и при $M = 50$). На ЭВМ ЕС-1022 расчёт каждого примера потребовал 10 минут машинного времени.

Пример, приведённый на рис. 3, характерен тем, что $\varepsilon_i < \varepsilon_T = 0{,}05$ и имеет место чисто упругий процесс.

Из результатов, приведённых на рис. 4, хорошо видно, что упругая волна имеет большую скорость распространения, чем пластическая. Пластические деформации уменьшаются по мере распространения вглубь оболочки, и максимальная безразмерная глубина проникновения пластической деформации $H \approx 2$. Отметим, что так как в выбранной модели не учитывается вязкость материала, то потерь нет, а поэтому упругий фронт ε_i имеет высоту ε_T.

Итак, численные примеры показывают, что результаты, полученные на основании выбранной модели и принятого алгоритма счёта, качественно совпадают с реальной ситуацией. Окончательное решенче о соответствии выбранной модели требует сравнения

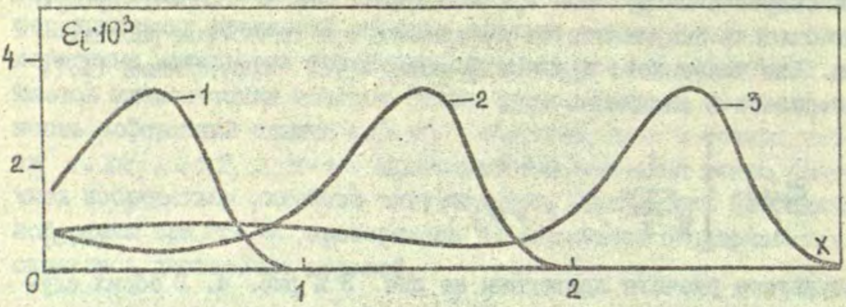


Рис. 3. Зависимость интенсивности деформаций сдвига $\varepsilon_i(x,\tau)$ в различные моменты безразмерного времени τ:
I - τ = 0,95; 2 - τ = I.95; 3 - τ = 2.95.

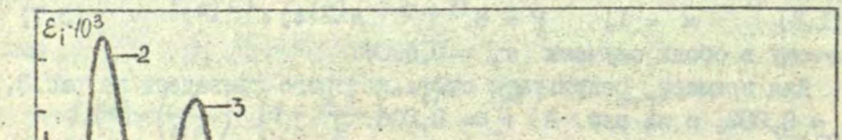


Рис. 4. Зависимость интенсивности деформации сдвига $\varepsilon_i(x,\tau)$ в различные моменты времени τ:
I - τ = 0,45; 2 - τ = 0,95; 3 - τ = I,45;
4 - τ = I,95; 5 - τ = 2,45; 6 - τ = 2,95.

с экспериментальными данными. В плане уточнения модели процесса можно провести следующие исследования: I) учесть волну упругой разгрузки, что не представляет особых трудностей; 2) учесть вязкость материала; 3) перейти к моментным теориям оболочек; 4) использовать более точную теорию пластичности.

ЛИТЕРАТУРА

I. Власов В.З. Общая теория оболочек.-М., ГИТТЛ, I949.-770 с.

2. Качанов Л.М. Основы .еории пластичности.-М., Наука, I969.-420 с.

3. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трёх томах.-М., Машиностроение, I968, т. 2.-464 с.

Статья поступила I3 января I982 года

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с. 146-167

УДК 518.12:538.4

А.Т.Якович, Л.Л.Булыгин, О.Я.Дзенитис
ЛГУ им. П.Стучки

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЁТА ТЕЧЕНИЙ В КОНДУКЦИОННОМ МГД-НАСОСЕ ЦЕНТРОБЕЖНОГО ТИПА

Расширение применений в металлургии и в литейном производстве кондукционных МГД-насосов центробежного типа, действие которых обусловлено возникновением вихря проводящей жидкости при взаимодействии аксиального магнитного поля с током, пропускаемым через жидкость, определяет необходимость исследования электромагнитных полей и полей скоростей в установках с различной геометрией и электромагнитными параметрами. Одной из основных целей этих исследований является создание таких МГД-насосов, которые позволят развивать необходимый расход жидкого металла при минимальной потребляемой мощности и габаритах.

В первой части данной работы характеризуется ряд математических моделей и методов, которые могут быть применены при исследовании процессов в центробежном МГД-насосе. Во второй части предложены аналитические и конечно-разностные методики расчёта для двумерной осесимметричной модели насоса, в которой учитывается наличие только вращательной составляющей скорости и характеризуются полученные результаты.

I. Обзор моделей и методов расчёта

Ряд характерных моделей, применяемых в исследованиях, представлен на рис.I. Через проводящую жидкость между расположенными на поверхности ячейки осесимметричными электродами пропускается постоянный или переменный ток. Исследованию вращения жидкости, возникающего в результате взаимодействия тока с перпендикулярно к плоскости вращения направленным однородным магнитным полем, посвящено множество работ.

В работе Брагинского [I] центральный электрод полностью погружен, а внешний электрод расположен на боковой поверхности цилиндрической области (рис. I.а, $h=h_э$) и предполагается, что $\varphi=\varphi(r)$. В результате этого j_z =0 и $V_\varphi \sim \frac{1}{r}$ образуется потенциальное ядро потока, вязкие силы в котором равны нулю и следовательно j_r =0. Вне гартмановских пограничных слоёв толщины $O(Ha^{-1})$ приложенное внешнее электрическое поле компенсируется индуцированным ЭДС $(\partial\varphi/\partial r = V_\varphi \cdot B_0)$. Скорость вращения при этом не зависит от величины приложенного магнитного поля, так как вращательный момент и трение в гартмановском слое пропорциональны полю.

В работе Глазова [2] рассмотрен случай больших чисел Гартмана с разбиением течения на две зоны - ядро и пограничные слои. В ядре потока в предположении $Re \gg I$ опущены вязкие члены и течение с двумя составляющими скорости $\vec{V}(V_r(r), V_\varphi(r), 0)$ описывается системой уравнений

$$V_r \frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi^2}{r^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{j_\varphi \cdot B_0}{\rho} \quad ; \qquad (I.I)$$

$$V_r \frac{dV_r}{dr} + \frac{V_\varphi \cdot V_r}{r} = \frac{j_r \cdot B_0}{\rho} \qquad (I.2)$$

где $j_r = \sigma E_r + \sigma \cdot V_\varphi \cdot B_0$; $j_\varphi = -\sigma V_r B_0$. (I.3)

В приграничной зоне приближённое решение строится в рамках теории пограничного слоя с применением интегрального метода решения полученных уравнений. Так как в [2] предположено, что через внешний электрод прокачивается жидкость из вне с заданной скоростью V_0 , то результаты работы непосредственно к расчёту течения в МГД-насосе не применимы, но аналогичным образом может быть развита методика для расчёта насоса.

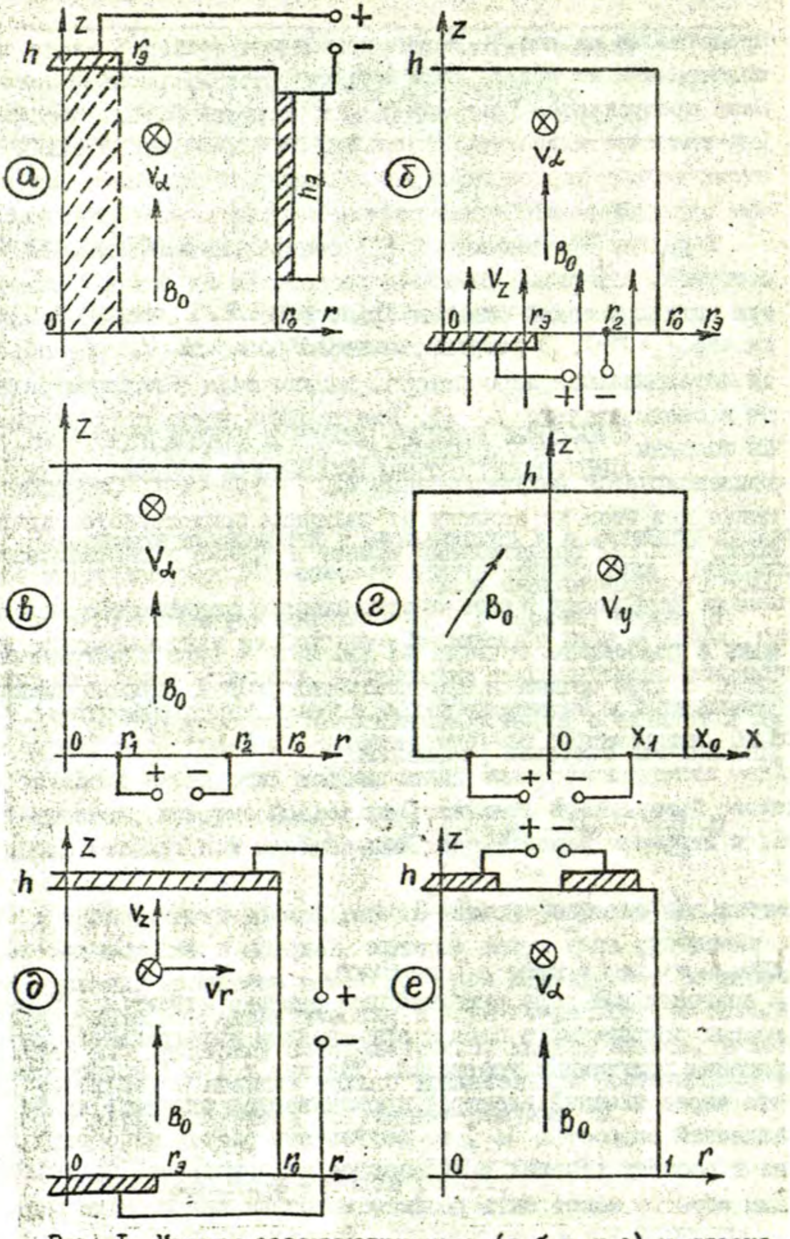


Рис. I. Модели осесимметричного (а,б,в,д,е) и плоскопараллельного (г) МГД течения в однородном наружном магнитном поле.

Игнорирование влияния течения на распределение тока в области течения позволяет отделить электрическую часть задачи от гидродинамической и при определении электрического потенциала решается уравнение Лапласа. В работе Зибольда и Капусты [3] при $h_э = h$ (рис. I.а) и заданной плотности тока на электродах

$$\left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{r=1} = 1\,;$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z=1} = \begin{cases} j_1/\delta\,, & 0 < r \le r_э\,; \\ 0\,, & r_э < r \le 1\,, \end{cases} \tag{I.4}$$

выражение для потенциала имеет следующий вид:

$$f = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_э\, sh\,\nu_k\, J_0(\lambda_k) - 2J_1(\lambda_k r_э)\cdot ch\,\nu_k z}{\lambda_k^2 \cdot r_э\, sh\,\nu_k} \cdot \frac{J_0(\lambda_k \cdot r)}{J_0^2(\lambda_k)}\,, \tag{I.5}$$

где $J_0(x), J_1(x)$ – функции Бесселя, λ_k – корни уравнения $J_1(\lambda_k) = 0$; $\nu_k = \frac{\lambda_k}{\delta}$; $\delta = \frac{r_0}{h}$ – соотношение радиуса и высоты области.

Выражение для азимутальной составляющей скорости при нулевых граничных условиях получено, разлагая искомую функцию в ряд по собственным функциям задачи для однородного уравнения:

$$V_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V_k\, J_1(\lambda_k \cdot r)}{J_0^2(\lambda_k)}\,, \tag{I.6}$$

где $$V_k = Ha \cdot Ha^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^3}\Big\{ J_0(\lambda_k)\Big[th\,\frac{\mu_k z}{2} - th\,\frac{\mu_k}{2}\Big] sh\,\mu_k z \; +$$

$$+ \frac{4J_1(\lambda_k r_э)\,\mu_k^2}{r_э\, sh\,\nu_k \cdot sh\,\mu_k \cdot (\mu_k^2 - \nu_k^2)}\Big(sh\,\frac{\mu_k+\nu_k}{2} \cdot sh\,\frac{\mu_k-\nu_k}{2} \cdot sh\,\mu_k z \; - \tag{I.7}$$

$$- sh\,\frac{\mu_k+\nu_k}{2} z \cdot sh\,\frac{\mu_k-\nu_k}{2} z \cdot sh\,\mu_k \Big)\Big\}\;; \quad \mu_k = \sqrt{\frac{\lambda_k^2 + Ha^2}{2}}\,.$$

Появление двух чисел Гартмана Ha и Ha^* обусловлено использованием при их определении двух характерных значений магнитного поля: индукции внешнего поля – B_0 и $B_0^* = \mu_0 j_2 r_0$, характеризующего поле тока, где j_2 – плотность тока на электроде при $r = r_э$.

Максимальные значения скорости вращения достигаются при $0,2 < r < 0,4$ и $0,5 < z < 0,8$ (рис. 2). Усреднённое по сечению значение скорости падает при увеличении радиуса электрода $r_э$, а увеличение числа Ha приводит к смещению максимума скорости в сторону больших значений δ , однако исследования в работе [3] проводились и в указанном приближении допустимы только при малых значениях числа Гартмана ($Ha \leqslant 3$), так как не учитывается влияние течения на электрическое поле.

Такое же приближение используется в работе Абрицки и др. [4] и потенциал электрического поля при $h_э = h$ представляется в виде ряда Фурье-Бесселя, содержащего модифицированные функции Бесселя. Характеризуются также электромагнитные силы, но течение математически не моделируется.

Случай пропускания через жидкий металл переменного тока с заданной амплитудой плотности на электроде

$$j_z = \frac{J_0 K^* J_1(K^* r)}{2\pi r_э J_1(K^* r_э)} , \tag{I.8}$$

где $K^* = i\omega\mu_0\mu_э\sigma_э$ и ω - циклическая частота, рассмотрен в работе Щедухина и др. [5]. В безиндукционном приближении магнитное поле тока имеет только азимутальную составляющую, амплитуда которой определяется из комплексного уравнения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2} - \frac{H_\varphi}{r^2} - i\beta^2 H_\varphi = 0 , \tag{I.9}$$

где $\beta^2 = \mu_0\mu\sigma\omega$, используя метод разделения переменных. Скорость выражается подобным работе [3] образом. При пропускании переменного тока существенно меняется характер распределения скорости по радиусу (рис. 3), максимумы ЭМ-силы, плотности тока и скорости сдвигаются в сторону боковой стенки ($0,6 < r < 0,75$), что обусловлено скин-эффектом и наличием проводящего дна сосуда. Так же как в [3] и [4], рассмотрены только числа $Ha \leqslant 1$.

Вращение жидкости с учётом влияния течения на магнитное поле в предположении, что $V_r = V_z = 0$, исследуется в работах Ка-

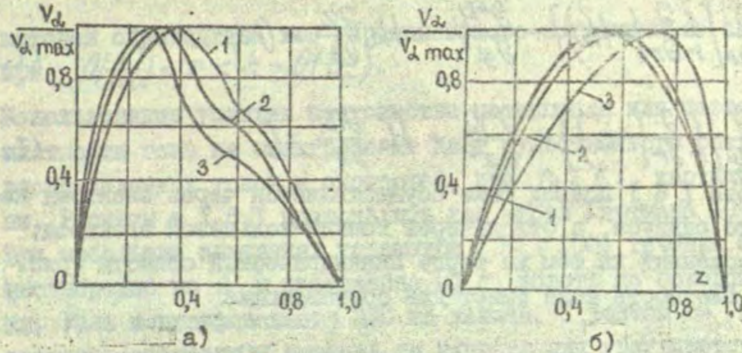


Рис.2. Радиальные и аксиальные распределения азимутальной скорости [3] при $Ha = I$ и $r_0 = 2h$:
а) I - $z = 0,2h$; 2 - $z = 0,5$; 3 - $z = 0,7$
б) I - $r = 0,2r_0$; 2 - $r = 0,4r_0$; 3 - $r = 0,7r_0$

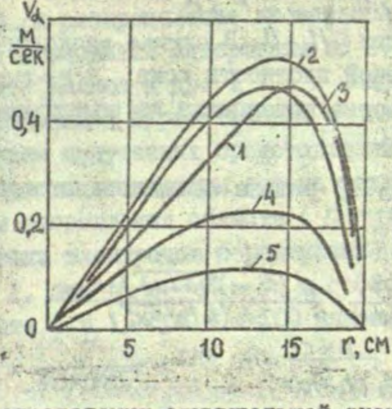


Рис.3. Распределения азимутальной скорости по радиусу [5]:
I - $z = 0,85h$; 2 - $z = 0,7h$; 3 - $z = 0,57h$;
4 - $z = 0,3h$; 5 - $z = 0,14h$:

лиса и Колесникова:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\varphi\right)\right]+\frac{\partial^2 H_\varphi}{\partial z^2}+Ha\,\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}=0\ ; \qquad (I.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rV_\varphi\right)\right]+\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2}+Ha\,\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}=0\ . \qquad (I.11)$$

В работе [6] подвод тока осуществляется через электрод конечного радиуса, а отвод-через тонкий кольцевой электрод, расположенный на том же торце цилиндрической области (рис. I.б). Плотность тока имеет две составляющие

$$j_r(r,z)=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}+Ha\,V_\varphi=-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z};\quad j_z(r,z)=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\varphi\right) \qquad (I.12,\ I.13)$$

На торце $z=0$, где расположены электроды, поле тока задаётся в следующем виде:

$$H_0(r,0)=\begin{cases} f(r), & r\le r_э\ ;\\ r^{-1}, & r_э<r<r_1\ ;\\ (2r)^{-1}, & r=r_1\ ;\\ 0, & r>r_1\ , \end{cases} \qquad (I.14)$$

а на остальных границах $H_\varphi=0$. В случае дискового электрода ($r_э\neq 0$) при постоянной плотности тока $f(r)=r/r_э^2$, а в предположении постоянства потенциала на электроде

$f(r)=\left[1-\sqrt{1-(r/r_э)^2}\right]/r$.

Задача (I.10), (I.11) решена аналитически методом разделения переменных

$$V_\varphi=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2b_n J_1(\varkappa_n r)}{r_0\lambda_n J_2^2(\lambda_n)}\cdot\frac{sh\left[(h-z)\sqrt{\beta^2+\varkappa_n^2}\right]sh\beta z}{sh\left(h\sqrt{\beta^2+\varkappa_n^2}\right)}\ , \qquad (I.15)$$

где $b_n=\int_0^{r_0} rH_0(r)J_1(\varkappa_n r)\,dr$;

$\beta=\dfrac{Ha}{2}$;

$\varkappa_n=\dfrac{\lambda_n}{r_0}$,

и при больших значениях числа Ha получена следующая оценка решения:

$$V_\alpha \approx -\frac{1}{2}H_0(r);\ H_\alpha \approx \frac{1}{2}H_0(r);\ j_z \approx \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_0),$$

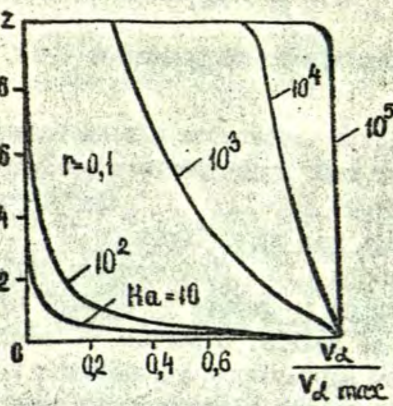
которая справедлива вне гартмановского пограничного слоя, т.е. при $O(\frac{2}{Ha}) < z < h - O(\frac{2}{Ha})$.

Использование условия постоянства потенциала или постоянства плотности тока на электроде не даёт существенного различия в распределениях токов и скоростей, при $r_э \leq 0,1$ картины подобны. Расчёты в [6] проводились для чисел Гартмана $10 < Ha < 10^5$. При небольших значениях параметра ($Ha < 100$) течение сильно неоднородно по z и протяжённо по r вплоть до боковой стенки. Роль индуцированного ЭДС не велика. С ростом Ha неоднородность скорости в аксиальном направлении уменьшается и при $Ha \approx 10^5$ течение всюду, кроме тонких гартмановских слоёв, однородно (рис. 4). В области между электродами формируется потенциальное ядро, токи в котором практически отсутствуют (рис. 4); токи сосредоточены в тонких экспоненциальных пограничных слоях толщины порядка Ha^{-1} у торцов цилиндрической области, перпендикулярных полю, а также в свободных пограничных слоях, продольных по отношению к полю. При больших Ha максимум скорости расположен над границей центрального электрода $r = r_э$ и распределение аксиальной составляющей плотности тока также становится однородным по z .

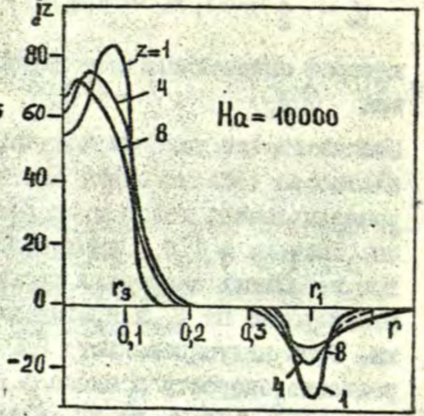
В работе Калиса и др. [7] в подобной постановке, пользуясь трансформацией Фурье-Бесселя с последующим численным интегрированием полученных представлений для азимутальной составляющей скорости и индукции решена задача при неограниченной в радиальном направлении области ($r_c \to \infty$) и бесконечной тонкости кольцевых электродов с радиусами r_1 и r_2 . Так же как в [I] [6], при $Ha \to \infty$ $V_\alpha \sim \frac{1}{r}$ и свойства течения такие же как в работе [6]. При $Ha > 100$ максимальное значение скорости $V_{max} = \frac{J}{4\pi R\sqrt{\sigma\mu}}$, где $R = \frac{r_1 + r_2}{2}$,

т.е. становится независимой от наложенного поля и растёт пропорционально току.

В работе [8] рассмотрен случай, когда в модели (рис. I.б) через торец z =0 дополнительно прокачивается жидкость с постоянной по радиусу скоростью V_z . Из условия несжимаемости в

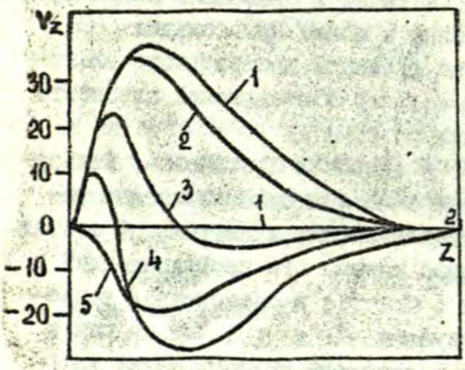


а)

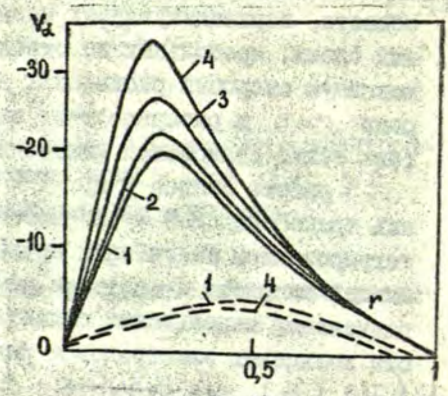


б)

Рис. 4. а) Распределения азимутальной скорости по высоте сосуда [6],
б) распределения аксиальной составляющей плотности тока по радиусу [6].



а)



б)

Рис. 5. а) Распределения аксиальной скорости по оси симметрии [I0]:
I. – S= 250, N_z= 0; 2. – S= 250, N_z= I00; 3. – S= 250, N_z= 500; 4. – S= 250, N_z= 500; 5. – S= 0, N_z= 250.

б) Распределения азимутальной скорости по радиусу при z= 0,I (сплошные линии) и z= I (прерывистые линии) при N= 250 [I0]:
I. – S= 0; 2. – S= I00; 3. – S= 250; 4. – S= 500.

двумерном случае следует, что при этом скорость во всей области остаётся постоянной, и система уравнений МГД приобретает вид

$$V_z \frac{\partial V_\alpha}{\partial z} = \nu\left(\Delta_{rz} V_\alpha - \frac{V_\alpha}{r^2}\right) + \nu_m B_0 \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} ; \qquad (I.16)$$

$$V_z \frac{\partial H_\alpha}{\partial z} = \nu_m \left(\Delta_{rz} H_\alpha - \frac{H_\alpha}{r^2}\right) + \mu B_0 \frac{\partial V_\alpha}{\partial z} , \qquad (I.17)$$

где $\nu_m = \frac{1}{\sigma\mu}$ - магнитная вязкость.

Решение задачи ищется в виде разложения по бесселевым функциям J_1, что позволяет систему (I.16), (I.17) свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для определения коэффициентов разложения, зависящих от z . Если число Альфвена $Al>10$, то толщина пограничных слоёв по z больше, чем в отсутствии осевой скорости, что обусловлено преобладанием диффузии завихренности от стенки по сравнению с подавляющим действием магнитного поля. Если $Al<1$ и $Re>R_m>1$, то градиенты поля в аксиальном направлении существенно не меняются - практически во всей области течения вязкость можно принять малой, конвекция преобладает над диффузией, за счёт роста V_z растут индуцированные движением токи $V_z H_\alpha$ и интегральная величина азимутальной силы уменьшается. Если Re и Ha достаточно велики, то задание $R_m > Re$ существенно не меняет скоростной структуры потока по сравнению с предыдущим случаем, но однородность поля по z существенно растёт и магнитные пограничные слои становятся значительно тоньше гидродинамических. Перераспределение ЭМ-силы происходит также в радиальном направлении - с ростом Re вблизи электродов появляются большие градиенты j_z ,в результате чего образуются обратные течения в зонах $r<r_0$ и $r>r_1$.

Результаты, подобные полученным в работах [6], [7], [8] приводятся также в работе Калиса и Колесникова [9], где рассмотрена бесконечная прямоугольная область с подводом тока через бесконечные линейные электроды (рис. I.г).

В работе Миллере [10] ток подводится к противоположным торцам цилиндрической области. Кроме взаимодействия тока с наружным аксиальным магнитным полем учитывается также взаимодействие его с собственным магнитным полем, а поле индуцированных движением токов предполагается пренебрежимо малым (в уравнении I.10 подставляется $Ha = 0$). Осесимметричное течение с тремя составляющими скорости в переменных "вихрь скорости" и "функция тока" при этом описывается системой уравнений

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi^2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rw)\right] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{S}{r}\frac{\partial H_\varphi^2}{\partial z}; \quad (I.18)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial z} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi)\right] + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} + N_1\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}; \quad (I.19)$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -rw; \quad (I.20)$$

где $S = \frac{\mu_0 J^2}{4\pi^2\rho\nu^2}$ – параметр, характеризующий электровихревое взаимодействие,

$N_1 = \frac{\mu_0 r_0 J H_0}{2\pi\rho\nu^2}$ – параметр, характеризующий взаимодействие тока с внешним магнитным полем и определяющий интенсивность вращения жидкости.

Азимутальное магнитное поле, также как в работах [6], [8], может быть вычислено на основе аналитических выражений, а система (I.18) - (I.20) решается в конечно-разностном виде методом переменных направлений по схеме Дугласа-Рекфорда при $S = 0 \div 750$ и $N_1 = 0 \div 500$. При $N_1 = 0$ имеется только электровихревое течение, представляющее собой тороидальный вихрь. В осевом поле $N_1 \neq 0$ и возникает дифференциальное вращение жидкости (как в ранее рассмотренных работах), которое обуславливает вторичное тороидальное течение (раньше не учитывалось) обратное электровихревому. С ростом поля B_0 вторичное течение подавляет электровихревое (рис. 5.а). Меридиональное течение оказывает заметное обратное влияние на вращение жидкости – кинетическая энергия электровихревого течения частично передаётся вращательному движению, усиливая его (рис. 5.б). Максимальное значение V_φ также как в [6], [8] достигается над краем электрода, а по высоте максимум скорости достигается вблизи электрода с меньшим радиусом, так как в этой зоне j_r максимально. Полем индуцированных движением токов пренебрегается, что так же как в работах [3], [4] сужает возможности приложения полученных результатов.

В работе Орлова и Голованова [II] используется такое же приближение, как в работе [IO], при расположении электродов, как показано на рис. I.а и I.д. Уравнение Лапласа для скалярного потенциала электрического поля решается с помощью консервативной локально-одномерной схемы. Для решения уравнения Навье-Стокса используется метод покоординатного расщепления. На первом этапе методом одномерных прогонок решается уравнение

$$(\tilde{\vec{V}} - \vec{V}^k)/\tau = -(\vec{V}\nabla)\vec{V} + \nu\vec{V} + \vec{f}_э/\rho \tag{I.2I}$$

и находится некоторое промежуточное значение скорости $\tilde{\vec{V}}$, неудовлетворяющее условию несжимаемости. Далее методом верхней релаксации определяется приближённое поле давления

$$\Delta p = \rho \cdot \nabla \tilde{\vec{V}}/\tau \tag{I.22}$$

при специально построенных однородных граничных условиях. К+I - ое приближение скорости находится из выражений

$$\vec{V}^{k+1} = \tilde{\vec{V}} - \frac{\tau}{\rho}\nabla p - \tau\vec{g}\ ; \quad \nabla\vec{V}^{k+1} = 0 \tag{I.23}$$

где τ - шаг по времени, g - ускорение силы тяжести. Расчёты проводились при числах Гартмана порядка 30.

Так как ЭМ-сила в указанном приближении имеет только азимутальную составляющую, то возникновение меридионального течения обусловлено вторичным перетеканием. Аксиальная скорость максимальна в случае бокового токоотвода к относительно короткому цилиндру ($r_o = h$). При расположении электродов на торцах цилиндрической области перетекания малы. По сравнению с результатами работы [3], где перетекание не учитывается, максимум азимутальной скорости сдвинут в сторону боковой стенки и находится в интервале $0{,}7 < r < 0{,}9$, причём в случае бокового токоотвода азимутальная скорость существенно больше, однако с ростом высоты области растущие перетекания уменьшают азимутальную скорость. Противоречия этих результатов с результатами работы [IO] могут быть объяснены тем, что в [II] не учитываются поле токов, протекающих в области, и связанные с этим полем радиальная и аксиальная составляющие силы, ротор которых представлен последним слагаемым уравнения (I.I8).

2. Расчёт вращения жидкости при произвольном осесимметричном токопроводе с использованием скалярного потенциала

В отсутствии осевой симметрии в периферийной зоне расположенного электрода, вокруг него возникает вторичный вихрь, который противонаправлен основному и способствует уменьшению перепада давления между приосевой зоной и периферией. Поэтому максимальное значение этого перепада может быть оценено с применением осесимметричной модели. В отличие от ранее рассмотренных моделей предполагается, что периферийный электрод может быть расположен на любой из поверхностей цилиндрической области (рис. I) и на электродах может задаваться значение потенциала или плотность тока. Особый интерес представляет случай, когда кольцеобразный электрод конечной толщины расположен на том же торце цилиндрической области, на котором находится центральный электрод (рис. I.е). Так как электровихревым эффектом и меридиональным перетеканием пренебрегается, то задача, сформулированная для потенциала электрического поля и азимутальной скорости имеет следующий вид в безразмерной постановке:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r V_\varphi\right); \qquad (2.I)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2}-\left(\frac{1}{r^2}+Ha^2\right)V_\varphi=-Ha^2\frac{\partial \varphi}{\partial r}; \qquad (2.2)$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right|_{r=1}=0;\ \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=0}=0;\ \left.V_\varphi\right|_{r=1}=\left.V_\varphi\right|_{z=0}=0. \qquad (2.3)$$

На электродах задаётся плотность тока

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=h}=-j_1;\ \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=h}=j_1\frac{r_2^2}{r_3^2-r_2^2} \qquad (2.4)$$

или значение потенциала

$$\varphi\Big|_{\substack{z=h\\ r<r_2}} = 1\ ;\ \varphi\Big|_{\substack{z=h\\ r_2\le r\le r_3}} = 0 . \tag{2.5}$$

Характерная скорость определена по формуле , а плотность тока $j_0 = \sigma_0 \varphi_0 / r_0$.

Давление определяется интегрированием уравнения

$$\frac{V_\alpha^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}\ , \qquad \text{следовательно} \tag{2.6}$$

$$p(r,z) = \int_0^r \frac{1}{\tau} V_\alpha^2(\tau,z)\,d\tau + const . \tag{2.7}$$

Так как подинтегральная функция положительна, то максимальный перепад давления в рамках рассматриваемой модели достигается между точками оси симметрии и боковой стенкой цилиндрической области, т.е.

$$\Delta p_{max} = \max_{0\le z\le h} \int_0^1 \frac{1}{\tau} V_\alpha^2(\tau,z)\,d\tau . \tag{2.8}$$

При аналитическом решении задачи (2.I) - (2.4) потенциал ищется в виде разложения

$$\varphi(r,z) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(z) J_0(\lambda_k r), \tag{2.9}$$

где Z_k функции, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям $Z_k'' - \lambda_k Z_k = \beta_k,\ k=0,1,2,\dots$ и условиям $Z_k''(0) = 0,\ k=0,1,2,\dots,$ где $\beta_k = \frac{2\lambda_k V_{\alpha k}(z)}{J_0^2(\lambda_k)}$. Азимутальная составляющая скорости ищется в виде разложения

$$V_\alpha(r,z) = 2\sum_{k=1}^{\infty} V_{\alpha k}(z) J_1(\lambda_k r)/J_0^2(\lambda_k) . \tag{2.I0}$$

Для определения функции $V_{\alpha k}$ имеем следующую задачу:

$$V_{\alpha k}''(z) - \gamma_k^2 V_{\alpha k}(z) = \lambda_k Ha^2\Big[C_k\, ch\,\lambda_k z + \int_0^z V_{\alpha k}(p)\, sh\,\lambda_k(z-p)\,dp ,$$

$$V_{\alpha k}(0) = 0;\ V_{\alpha k}(h) = 0, \tag{2.II}$$

где $\qquad \gamma_k^2 = \lambda_k^2 + Ha^2$.

и которая решается методом преобразования Лапласа. В окончательном виде потенциал и скорость имеют следующие выражения:

$$\varphi(r,z)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k\cdot\Phi_k(z)\cdot J_0(\lambda_k\cdot r)\ ; \tag{2.12}$$

$$V_{\varphi}(r,z)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k\,\Psi_k(z)\cdot J_1(\lambda_k r)\ , \tag{2.13}$$

где $A_k=\dfrac{2F_k}{\Phi_k'(h)J_0^2(\lambda_k)}$,

$$F_k=\frac{j_1}{\lambda_k}\left\{\frac{r_1^2}{r_3^2-r_2^2}\left[r_3J_1(\lambda_k r_3)-r_2J_1(\lambda_k r_2)\right]-r_1J_1(\lambda_k r_1)\right\}\ ; \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\Phi_k(z)&=\frac{1}{4d_k}\Big\{(2d_k^2-Ha^2)\,ch\,\nu_{1k}z+(2d_k^2+Ha^2)\,ch\,\nu_{2k}z-\\&-\varsigma_{1k}\left[(2d_k^2-Ha^2)\,sh\,\nu_{1k}z+\varsigma_{2k}(2d_k^2+Ha^2)\,sh\,\nu_{2k}z\right]\Big\};\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}\Phi_k'(h)&=\frac{1}{4d_k}\Big\{\nu_{1k}(2d_k^2-Ha^2)\,sh\,\nu_{1k}h+\nu_{2k}(2d_k^2+Ha^2)\,sh\,\nu_{2k}h-\\&-\nu_{1k}\varsigma_{1k}(2d_k^2-Ha^2)(ch\,\nu_{1k}h-ch\,\nu_{2k}h)\Big\}\ ;\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}&\Psi_k(z)=\varsigma_{3k}\left[ch\,\nu_{1k}z-ch\,\nu_{2k}z-\varsigma_{1k}(sh\,\nu_{1k}z-\varsigma_{2k}\,sh\,\nu_{2k}z)\right];\\&\varsigma_{1k}=\frac{ch\,\nu_{1k}h-ch\,\nu_{2k}h}{sh\,\nu_{1k}h-\varsigma_{2k}\,sh\,\nu_{2k}h}\ ;\ \varsigma_{2k}=\frac{\nu_{1k}}{\nu_{2k}}\,\frac{2d_k^2-Ha^2}{2d_k^2+Ha^2}\ ;\\&\varsigma_{3k}=\frac{Ha^3\lambda_k}{2d_k^2}\ ;\quad d_k=\left(\tfrac{1}{4}Ha^4+\lambda_k Ha^2\right)^{1/2}\ ;\\&\nu_{1k}=\left(\lambda_k^2+\tfrac{1}{2}Ha^2+d_k^2\right)^{1/2}\ ;\ \nu_{2k}=\left(\lambda_k^2+\tfrac{1}{2}Ha^2-d_k^2\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Как показывают оценки, числа Ha в данном устройстве достигают большие значения ($10^2<Ha<10^6$), поэтому целесообразно получение асимптотических формул. При $Ha\to\infty$ функции Φ_k', Φ_k, Ψ_k имеют простой вид:

$$\Psi_k(z) = A_k(\mathrm{ch}\,Haz - \mathrm{ch}\,\lambda_k z - \bar{\varrho}_{1k}\,\mathrm{sh}\,Haz) + O(1);$$

$$\Phi_k(z) = \mathrm{ch}\,\lambda_k z + O(1);\quad \Phi_k'(h) = \lambda_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k h + O(1);\qquad (2.18)$$

$$\bar{\varrho}_{1k} = \frac{\mathrm{ch}\,Ha\,h - \mathrm{ch}\,\lambda_k h}{\mathrm{sh}\,Ha\,h}.$$

Решение задачи (2.1) - (2.3), (2.5), в которой задан потенциал на электродах, также представимо в виде (2.12), (2.13). Постоянные A_k в этих формулах следует определить так, чтобы удовлетворить условию (2.5). Методом Бубнова-Галёркина из системы линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{\beta_{jk}\left[\Phi_k'(h) - \Phi_k(h)\right] - N_k^2\Phi_k(h)\delta_{jk}\right\}A_k = \varkappa_j,\; j=0,1,\dots,n \qquad (2.19)$$

где

$$\beta_{jk} = \frac{\lambda_k r_2 J_1(\lambda_k r_2)J_0(\lambda_j r_2) - \lambda_j r_2 J_0(\lambda_k r_2)J_1(\lambda_j r_2)}{\lambda_k^2 - \lambda_j^2} -$$

$$- \frac{\lambda_k r_1 J_1(\lambda_k r_1)J_0(\lambda_j r_1) - \lambda_j r_1 J_0(\lambda_k r_1)J_1(\lambda_j r_1)}{\lambda_k^2 - \lambda_j^2}; \qquad (2.20)$$

$$\beta_{jj} = \frac{r_2^2}{2}\left[J_0^2(\lambda_j r_2) + J_1^2(\lambda_j r_2)\right] - \frac{r_1^2}{2}\left[J_0^2(\lambda_j r_1) + J_1^2(\lambda_j r_1)\right],$$

$$\varkappa_j = \frac{r_1 J_1(\lambda_j r_1)}{\lambda_j};\quad N_k^2 = \frac{1}{2}J_0^2(\lambda_k) \qquad (2.21)$$

находятся приближённые значения этих постоянных.

При конечно-разностном решении область течения покрывается сеткой с неоднородным шагом по каждому из направлений. Шаг сетки по $r - h_i$; шаг по $z - g_j$, где $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, m$. Необходимость использования неоднородной сетки со сгущением линий в приграничных зонах обусловлено наличием пограничных слоёв. Разностные аналоги уравнений (2.1) и (2.2) на пятиточечном шаблоне для решения задачи методом релаксации следующие:

$$f_{i,j}^{k+1/2} = \Big[C_1 f_{i+1,j}^{k} + C_2 f_{i-1,j}^{k+1} + C_3 f_{i,j+1}^{k} + C_4 f_{i,j-1}^{k+1} + (C_1 + C_2)V_{i,j}^{k} -$$

$$- C_1 V_{i+1,j}^{k} - C_2 V_{i-1,j}^{k+1}\Big] \Big/ \sum_{p=1}^{4} C_p; \qquad (2.22)$$

$$\rho_{i,j}^{k+1} = U_1 \rho_{i,j}^{k+1/2} + (1-U_1)\,\rho_{i,j}^{k} ;$$

$$V_{i,j}^{k+1/2} = \Big[\frac{2}{r_i}\big(C_1 V_{i+1,j}^{k} + C_2 V_{i-1,j}^{k+1} + C_3 V_{i,j+1}^{k+1} + C_4 V_{i,j-1}^{k}\big) + C_5\big(\rho_{i+1,j}^{k} - \rho_{i-1,j}^{k+1}\big)\Big] \Big/$$

$$\Big/ \Big[\frac{2}{r_i}\sum_{p=1}^{4} C_p + \frac{1}{r_i^2} + Ha^2\Big] ; \tag{2.23}$$

$$V_{i,j}^{k+1} = U_2 V_{i,j}^{k+1/2} + (1-U_2)\,V_{i,j}^{k} ,$$

где $C_1 = \dfrac{r_{i+1/2}}{2h_i \cdot \hat{h}_i}$; $C_2 = \dfrac{r_{i-1/2}}{2h_{i-1} \cdot \hat{h}_i}$; $C_3 = \dfrac{r_i}{2g_j\,\hat{g}_j}$;

$C_4 = \dfrac{r_i}{2g_{j-1}\,\hat{g}_j}$; $C_5 = \dfrac{Ha^2}{2\hat{h}_i}$;

$\hat{h}_i = \dfrac{h_i + h_{i-1}}{2}$; $\hat{g}_j = \dfrac{g_j + g_{j-1}}{2}$.

Для аппроксимации граничных условий второго рода используется трёхточечный шаблон, например, при $z=0$ задаётся условие

$$\rho_{i,1}\, g_2 (g_2 + 2g_1) - \rho_{i,2}(g_1 + g_2)^2 + \rho_{i,3}\, g_1^2 = 0 .$$

Аналитическое решение задачи более просто осуществить при фиксированной плотности тока на электродах, а конечно-разностное решение рационально, с точки зрения сокращения объёма вычислений, проводить при фиксированном потенциале на электродах, поэтому решение (2.12), (2.13), (2.19)-(2.21) представляет интерес при тестировании результатов численного расчёта.

Был проведён ряд расчётов по этой методике при значениях числа Гартмана в интервале 1 – 10^3 и при $h=0{,}2$; $r_1=0{,}25$; $r_2=0{,}7$; $r_3=1{,}0$. Если при малых значениях числа Ha потенциал быстро падает по мере удаления от центрального электрода, что обусловлено растеканием тока по всей области, то в случае больших чисел Ha убывание потенциала в радиальном направлении происходит более плавно (рис. 6), так как радиальный ток концентрируется в тонком поверхностном слое. Следовательно, при наличии неподвижной проводящей стенки ячейки насоса токи будут концентрироваться преимущественно в ней. В моделях,

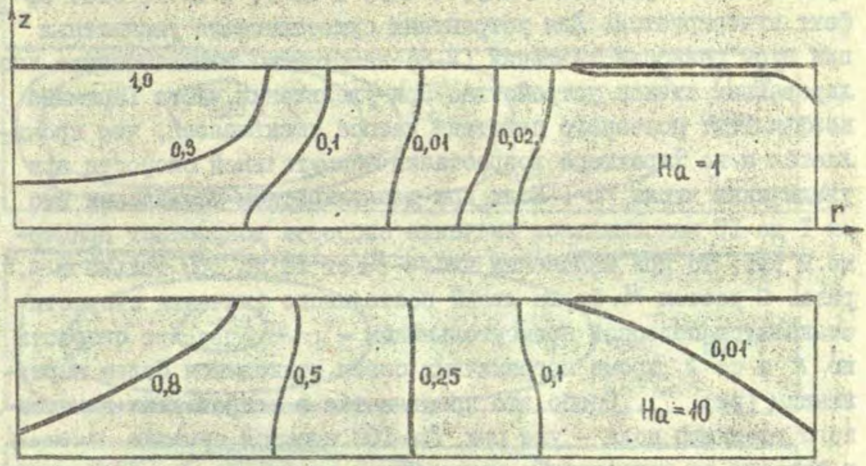


Рис. 6. Эквипотенциальные линии.

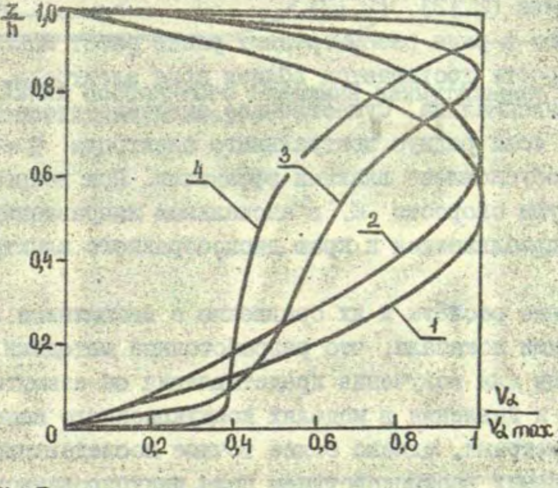


Рис. 7. Распределения азимутальной скорости по высоте сосуда.
I. – Ha = I; 2. – Ha = I0; 3. – Ha = I00;
4. – Ha = I000.

приведённых в работах [3], [4], [10], [11], этот эффект игнорируется. Для устранения существенного уменьшения при этом разности давлений (2.8) необходимо использование изолированных стенок устройства. При увеличении числа Гартмана коэффициент полезного действия насоса уменьшается, что проявляется и на характере возрастания азимутальной скорости при увеличении числа Ha. Если при десятикратном увеличении его от 1 до 10 максимальное значение скорости возрастает примерно 9 раз, то при изменении числа Ha от 10 до 100 только в 4,5 раза. С ростом Ha форма линий постоянного значения скорости становится подобной прямоугольникам - распределение скорости по r и по z, кроме пограничных слоёв, становится более выравненным (рис. 7). Особо это проявляется в направлении наложенного внешнего поля - уже при Ha=100 имеются сечения $r = const$ в которых, за исключением пограничных слоёв, $V_\alpha = const$. Полученные результаты качественно согласуются с результатами работы [6], а также с результатами, полученными на основе аналитического решения (2.12), (2.13).

Так же как в ряде рассмотренных ранее работ максимальное значение скорости достигается вблизи края электрода, где плотность тока максимальна. Существенное смещение этого максимума имеет место, если радиус центрального электрода $r_1 \to 0$ или $r_1 \to 1$, что обусловлено вязкими эффектами. При возрастании Ha точка максимума скорости V_α в аксиальном направлении непосредственно приближается к краю дискообразного электрода (рис. 7 и 8).

Проведённые расчёты и их сравнение с имеющимися литературными данными показали, что разработанные методики могут быть применены для получения представления об азимутальном поле скоростей и давления в моделях кондукционного насоса с различными параметрами, однако более точное исследование эффектов, определяемых взаимодействием поля, индуцированного движением, с током и меридиональным перетеканием жидкости может быть проведено только на основе модели, в которой учитывается наличие трёх составляющих скорости и индукции магнитного поля. Даже наиболее общие из моделей, приведённых ранее, т.е. [10], [11], этим требованиям не удовлетворяют.

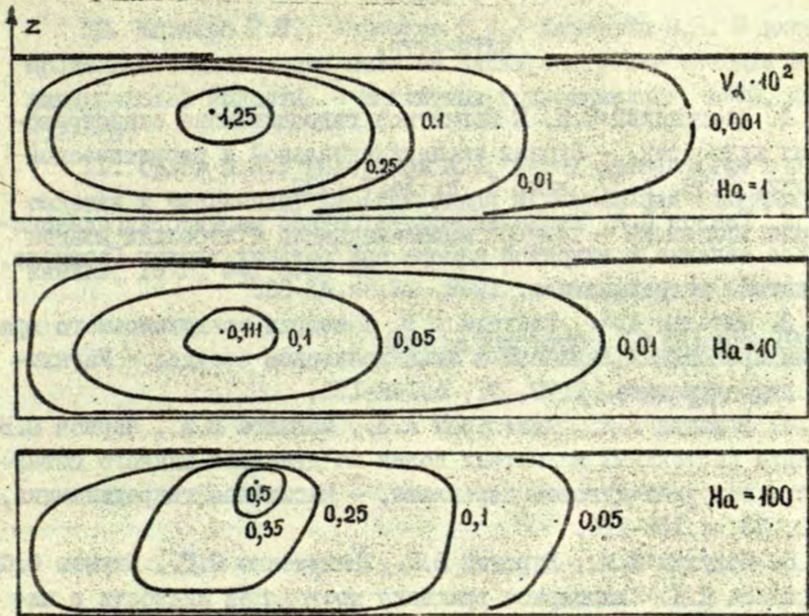


Рис. 8. Линии постоянного значения азимутальной составляющей скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брагинский С.И. К магнитной гидродинамике слабопроводящих жидкостей. - Журнал экспериментальной и теоретической физики, 1959, т.37, вып. 5, с. 1417-1430.

2. Глазов О.А. Аксиально-симметричное магнитогидродинамическое течение в вихревой камере при больших числах Гартмана. - Магнитная гидродинамика, 1968, №3, с.43-53.

3. Зибольд А.Ф., Капуста А.Б. К теории кондукционного вращения проводящей жидкости в цилиндрическом сосуде. - Магнитная гидродинамика, 1972, №1, с.148-151.

4. Абрицка Н.Д., Микельсон А.Э., Мошняга В.Н., Чернов Ю.В. Влияние постоянных магнитных полей на движение жидкого металла при вакуумно-дуговом переплаве. - Магнитная гидродинамика, 1979, №3, с.105-110.

5. Щелухин Е.М., Бурский В.П., Бакуменко С.П., Якушев О.С., Афанасьев Н.Д. Ламинарное вращение проводящей жидкости в цилиндрическом сосуде под действием кондукционных сил. - Магнитная гидродинамика, 1978, №2, с.73-76.

6. Калис Х.Э., Колесников Ю.Б. Численное исследование единичного вихря вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в осевом однородном магнитном поле. - Магнитная гидродинамика, 1980, №2, с.37-61.

7. Калис Х.Э., Клюкин А.А., Колесников Ю.Б. Влияние сильного магнитного поля на сдвиговые течения вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости. - В кн.: VI Международная конференция по численным методам в гидродинамике: Сборник докладов. - М., 1978, т.2, с.115-120.

8. Калис Х.Э., Колесников Ю.Б. Исследование единичного вихря в осевом однородном магнитном поле при наличии компоненты скорости вдоль поля. - Магнитная гидродинамика, 1981, №1, с.29-35.

9. Калис Х.Э., Колесников Ю.Б. Влияние однородного поперечного магнитного поля на сдвиговое течение вязкой электропроводящей жидкости. - Магнитная гидродинамика, 1979, №2, с.51-54.

10. Миллерс Р.П., Шарамкин В.И., Щербинин Э.В. О влиянии продольного магнитного поля на электровихревое течение в цилиндрической ёмкости. - Магнитная гидродинамика, 1980, №1, с.81-85.

11. Орлов Л.П., Голованов А.Л. Метод расщепления в применении к численному решению задач МГД-вращения электропроводной жидкости в цилиндрическом сосуде. - Магнитная гидродинамика, 1979, №4, с.35-38.

Статья поступила 13 октября 1982 г.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Математическое моделирование
1982, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с. 168-180

УДК 536.12:537.311.6:621.313.3

Ю.Я.Микельсон, Я.Р.Шмит
ЛГУ им. П.Стучки

ТЕПЛОФИЗИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ В ЭНЕРГОНАПРЯЖЁННОМ РЕЖИМЕ

I. Введение

Магнитогидродинамические устройства (насосы, генераторы, печи и др.) находят всё более широкое применение в народном хозяйстве. Методы расчёта этих устройств, принципы оптимального проектирования отражены в целом ряде публикаций и обобщены в монографиях [I - 4]. Однако в настоящее время ряд вопросов теории и проектирования МГД-устройств разработаны недостаточно. В частности, это относится к теплофизическому исследованию и оптимальному проектированию плоских линейных индукционных насосов (ПЛИН) в энергонапряжённом режиме. Решение вопросов оптимального проектирования ставит вполне определённые требования к выбору алгоритмов комплексного исследования ПЛИН.

На начальном этапе электромагнитные, гидравлические и тепловые аспекты исследовались независимо друг от друга. Ознакомление с работами по теплофизическому исследованию МГД-насосов [5 - 8] позволяет назвать её этапом линейного приближения. Применяемые методы основываются на линейной теории цепей (принцип суперпозиции) при следующих основных предположениях: постоянство теплофизических параметров и линейность условий теплоотдачи, приближённо имеющие место только в энергонапряжённых МГД-машинах.

Анализ рассмотренных работ позволяет сделать следующие основные выводы:

- авторы работ используют опыт, накопленный при разработке электрических машин [9]. Однако из-за высокой температуры жидкого металла и увеличенного немагнитного зазора ПЛИН находятся в существенно другом тепловом режиме, чем асинхронные двигатели, и многие вопросы теплового расчёта решаются заново;

- основное внимание уделяется исследованию нагрева и охлаждению ПЛИН в стационарном режиме. Математические модели теплового расчёта ПЛИН не учитывают концевые эффекты (одномерное и двумерное приближение);

- применяются следующие основные методы: аналитическое решение соответствующей задачи теплопроводности, численное решение методом сеток аналогичной задачи, метод электромоделирования и самый распространённый метод - эквивалентных схем замещения;

- методики теплового расчёта ПЛИН не включены в единую методику оптимального проектирования;

- они в основном предназначены для определения установившихся температур в отдельных элементах уже выбранного варианта насоса;

- в связи с напряжённым тепловым режимом ПЛИН одной из важнейших задач теплового расчёта является адекватное прогнозирование максимальной температуры в обмотке (определяется срок службы изоляционных материалов) и в магнитопроводе (при превышении точки Кюри теряются магнитные свойства). Следовательно, актуальной является задача нахождения непрерывного распределения температурного поля. С этой целью наиболее перспективными являются аналитические и численные методы теории поля;

- перепады температур в МГД-машинах для нужд металлургической технологии в большинстве случаев порядка $200^{\circ}C \div 600^{\circ}C$, и существенную роль играют нелинейные эффекты - зависимость параметров машины и условий теплоотдачи от температуры. Следовательно, теплофизическое исследование МГД-машин в линейном приближении является недостаточным;

- недостаточно исследован вопрос о достоверности всего комплекса входных данных теплового расчёта ПЛИН. В [5, 8] и других работах проведено сопоставление расчётных и экспериментальных данных с целью уточнения некоторых эмпирических коэффициентов. Особенно важно знать значения эквивалентных коэффициентов теплопроводности неоднородных структурных элементов (как пазовая зона индуктора), коэффициентов теплоотдачи от спинки и лобовых частей к внешней среде и др.

Таким образом, актуальной является задача разработки теории теплового расчёта МГД-машин, удовлетворяющей следующим основным требованиям: адекватность при широких диапазонах изменений параметров эксплуатации (учёт нелинейных эффектов), возможность использования для решения прямых задач анализа определения температурного поля и синтеза (составная часть методики оптимального проектирования), а также обратных задач (определение эквивалентных теплофизических параметров).

Ниже рассмотрена постановка задачи теплофизического исследования ПЛИН в энергонапряжённом режиме с учётом нелинейных эффектов (зависимости теплофизических параметров ПЛИН от температуры при нелинейных законах теплообмена ПЛИН с окружающей средой).

2. Постановка задачи теплопроводности ПЛИН

ПЛИН в тепловом отношении является сложным устройством, имеющим распределённые источники тепла и, как правило, большие (порядка $100^{\circ}C \div 500^{\circ}C$) перепады температур. В условиях противоречивых требований - адекватности теоретической модели и её пригодности для оптимального проектирования, следует сделать компромиссный выбор.

ПЛИН состоит из следующих основных структурных элементов: канал с жидким металлом, теплоизоляция канала, зубцы и ярмо магнитопровода, обмотка. Наличие специальных, внутренних устройств охлаждения в настоящем исследовании не предполагается. Принимается, что весь класс явлений теплопроводности описывается феноменологически законами Фурье сохранения энергии, приводящими к дифференциальному уравнению теплопроводности. Частные особенности отдельных конкретных явлений учитываются геометрическими и физическими свойствами, начальными и граничными условиями.

При определении геометрических свойств задаются размерность задачи теплопроводности, конфигурация структурных элементов устройства и их размеры. В настоящем исследовании приняты следующие основные допущения:

- устройство симметрично относительно трёх координатных плоскостей ПЛИН как в конструктивном, так и в тепловом отношении. Следовательно, исследуемая область находится в окрестности центральной оси канала. Так как краевые и концевые эффекты могут привести лишь к понижению температуры, можно утверждать, что такой естественный подход приводит к результатам теплового расчёта с некоторым запасом;
- распределение температуры по длине насоса является периодической функцией с периодом, равным величине длины зубцового шага t_z . Это позволяет вместо всего индуктора рассмотреть небольшой его участок длиной $t_z/2$. Следовательно, пренебрегается концевым тепловым эффектом, а также изменением температуры перекачиваемого металла по длине насоса. Продольный тепловой поток по середине паза и зубца принимается равным нулю;
- не учитываются температурные перепады по ширине индуктора, что позволяет считать температурное поле плоскопараллельным (двумерное приближение). Реальная трёхмерная структура учитывается неявно путём введения эквивалентного отрицательного источника тепла, соответствующего величине теплоотвода через лобовые части.

На рис. I представлена принципиальная схема теплофизической модели участка продольного сечения ПЛИН, состоящая из пяти подобластей: стенки и теплоизоляции канала, половины зубца, половины обмотки, пазовой изоляции, спинки. В настоящей работе более подробно рассматривается одномерное приближение по распределению температуры по высоте насоса. Оно соответствует осреднению теплофизических величин в пазово-зубцовой зоне индуктора.

Каждая из слоисто-неоднородных сред моделей характеризуется своими эквивалентными теплофизическими параметрами: коэффициентом теплопроводности λ_i, теплоёмкости c_i, плотности ρ_i, а также удельной плотности источника (стока) тепла w. Так как при стандартной частоте тока питания $f = 50$ гц доля потерь в стали индуктора мала, принимается, что джоулевый источник тепла распределён в обмотке.

Внутренний джоулевый источник тепла рассматривается в линейном приближении

$$W = K_з \rho_0 (1+\alpha t) j^2 , \qquad (1)$$

где $K_з$ - коэффициент заполнения медью, j - плотность тока.

Теплообмен между отдельными частями ПЛИН и между насосом и внешней средой может осуществляться теплопроводностью, конвекцией и излучением, а также их сочетанием. Каждому виду теплообмена соответствует свой механизм переноса тепла, особенности которого учитываются при формулировке краевых (начальных и граничных) условий. В настоящей работе принимается наличие идеального теплового контакта между отдельными подобластями устройства. В математических моделях это допущение учитывается или введением условий сопряжения или соответствующих разрывных теплофизических параметров. Теплофизические исследования ПЛИН проведены при следующих видах внешних условий теплообмена:

- при заданной температуре поверхности теплоизоляции канала насоса, т.е., при пренебрежении тепловыми сопротивлениями стенки канала и конвективного теплообмена между жидким металлом и стенкой канала;

- конвективным теплообменом по нелинейному закону Ньютона с зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности $\varkappa$:

$$q_к = \varkappa_к(t)(t - t_c) \qquad (2)$$

где $\varkappa_к$ - коэффициент теплоотдачи конвекцией, t_c - температура среды;

- теплоотвод излучением со спинки по закону Стефана-Больцмана:

$$q_u = \sigma \cdot \varepsilon (T^4 - T_c^4), \tag{3}$$

- теплоотвод через лобовые части учитывается неявно путём введения эквивалентного стока тепла в обмотке возбуждения

$$W_- = \{-\varkappa(t_x)(t_x - t_c) - \varepsilon\sigma(T_x^4 - T_c^4)\} \frac{S_л}{V}, \tag{4}$$

где $S_л$ – площадь поверхности лобовых частей, V – объём обмотки, t_x – температура характерной точки .

Наиболее неопределёнными величинами в рассматриваемой методике являются эквивалентные (осреднённые) теплофизические параметры, такие как коэффициенты теплопроводности обмотки и стали индуктора (или пазово-зубцовой зоны) в одномерном приближении, коэффициент конвективного теплообмена, степень черноты, а также эквивалентные параметры теплоотвода через лобовые части. Это приводит к необходимости рассмотрения также обратных задач идентификации коэффициентов задачи теплопроводности.

В соответствии с принятыми допущениями ставится конкретная математическая задача теплопроводности ЛЛИН.

В настоящей работе наиболее общей является задача определения двумерного, нестационарного температурного поля в выделенной области индуктора с учётом стока тепла W_- – теплоотвода через лобовые части. Задача теплопроводности во всей рассматриваемой области имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = div(\lambda\, grad\, t) + k_з \rho_0 (1 + \alpha_\rho t) j^2 - \frac{S_л}{V}\{\varkappa_0 (t_x - t_c)^\beta + $$
$$+ \varepsilon\sigma[(t_x + 273,16)^4 - (t_0 + 273.16)^4]\},$$

$$t = t(x, z, \tau), \ \tau > 0, \ 0 < x < \ell, \ 0 < z < h, \tag{5}$$

$$t_x = t(0, h, \tau),$$

$$t|_{\tau=0} = t_н(x, z), \ t|_{z=0} = t_н, \quad \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0,$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=h} = \varkappa(t|_{z=h} - t_c) + \varepsilon\sigma[(t|_{z=h} + 273.16)^4 - (t_c + 273.16)^4].$$

Задача является сугубо нелинейной с разрывными коэффициентами $c, \varrho, \lambda, \kappa_3$ и она не поддаётся аналитическому решению. Вычислительные алгоритмы её приближённого решения, полученные сочетанием методов квазилинеаризации и разностных схем, из-за своей громоздкости мало пригодны для прикладных целей и в настоящей работе используется в качестве реперной тестовой модели. Наибольший практический интерес представляет стационарное температурное поле, соответствующее $\partial t/\partial \tau = 0$. Некоторые приближённые аналитические решения удаётся получить в одномерном приближении $\partial t/\partial \tau = 0$ с осреднённым по пазово-зубцовой зоне коэффициентом теплопроводности и учётом теплоотвода через лобовые части в приближении постоянства соответствующего теплового сопротивления r_λ.

3. Стационарное одномерное температурное поле ПЛИН при нелинейном теплообмене

Рассматривается одномерная модель ПЛИН, состоящая из четырёх слоёв (рис. I): спинки (I), эквивалентной пазо-зубцовой зоны (2), теплоизоляции канала (3), стенки канала (4). Каждая из областей характеризуется высотой h_i, коэффициентом теплопроводности λ_i, $i=1\div4$. Принимается, что в пазо-зубцовой зоне имеются равномерно распределённый джоулевый источник тепла W, соответствующий прохождению электрического тока, и эквивалентный сток тепла W_-, соответствующий теплоотводу через лобовые части при заданном постоянном тепловом сопротивлении $\tilde{r}_\lambda$. Считаем, что поверхность $z=0$ имеет температуру перекачиваемой среды $t_м$. На поверхности $z_4 = h$ происходит теплообмен конвекцией и излучением с окружающей средой, температура которой равна .

Задачу теплопроводности целесообразно ставить и решить в безразмерном виде. В качестве масштабов приведения удобно принять постоянные величины, входящие в условия однозначности: высоту устройства h, температуру перекачиваемой среды $t_м$.

Основные безразмерные величины задачи имеют вид:

- длина $\xi = \frac{z}{h}$, (6)

- температура $u = \frac{t}{t_M}$, (7)

- критерии Померанцева, соответствующие тепловыделению в обмотке

$$P_{o(c)} = \frac{k_3 \varrho_o j^2 h^2}{\lambda_3} , \quad P_o = \frac{k_3 \varrho_o \alpha_\varrho j^2 h^2}{\lambda_3} , \tag{8}$$

- тепловое сопротивление теплоотводу от лобовых частей

$$\tilde{r}_\lambda = \frac{1}{\varkappa_{\lambda э} \cdot \lambda_3 \cdot h} \tag{9}$$

- критерий Био $Bi = \frac{\varkappa_o \cdot b}{\lambda_4}$, (10)

- критерий Старка $S_K = \frac{\varepsilon \sigma \cdot t_M^3}{\lambda_4}$, (11)

- температурный коэффициент электросопротивления

$$\tilde{\alpha}_\varrho = \alpha_\varrho t_M , \tag{12}$$

- тепловой поток на поверхности спинки

$$\tilde{q}_4 = Bi\,(u_4(\xi_4) - u_o)^\beta + S_K\{[u_4(\xi_4) + u_K]^4 - [u_o + u_K]^4\} . \tag{13}$$

Постановка задачи теплопроводности относительно температурного поля $u = u(\xi), 0 < \xi < h$ формулируется в следующем виде:

уравнения теплопроводности в отдельных слоях -

$$-\frac{d^2 u_i}{d\xi^2} = \begin{cases} 0, & i \in \{1,2,4\}, \\ P_{o(c)} + P_o u_3 - \tilde{r}_\lambda (u_3(\xi_3) - u_o) , & 0 < \xi < 1 , \end{cases} \tag{14}$$

условия сопряжения на внутренних границах слоёв -

$$u_i(\xi_i) = u_{i+1}(\xi_i) ,$$

$$\lambda_i \frac{du_i(\xi_i)}{d\xi} = \lambda_{i+1} \frac{du_{i+1}(\xi_i)}{d\xi} , \quad i \in \{1,2,3\} , \tag{15}$$

граничное условие первого рода на поверхности стенки канала, соответствующее температуре жидкого металла -

$$u_1(0) = u_M = 1 , \tag{16}$$

граничное условие третьего рода на спинке индуктора -

$$\frac{du_4(\xi_4)}{d\xi} = \tilde{q}_4(u_4(\xi_4)) . \tag{17}$$

Поставленная задача является нелинейной, зависящей от параметров: $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, P_{0(c)}, P_0, Bi, \beta, S_K, \tilde{r}_2, U_c$.

Решение уравнений (I4) ищем в виде

$$\begin{aligned} U_1 &= A_1 + B_1(\xi - \xi_1), \\ U_2 &= A_2 \sin[P_0^{1/2}(\xi-\xi_1)] + B_2\cos[P_0^{1/2}(\xi-\xi_1)] - \left\{\frac{1}{\alpha t_M} - [U_1(\xi_1) - U_c]\,\mu\right\}, \\ U_3 &= A_3 + B_3(\xi - \xi_2), \\ U_4 &= A_4 + B_4(\xi - \xi_3); \end{aligned} \qquad (I8)$$

где $\mu = \dfrac{1}{\rho_0 \alpha h^2 l^2 \tilde{r}_2}$.

Вводя вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} a &= U_1(0), \quad b = U_1(\xi_1), \\ f(a) &= \tilde{\varkappa}[a - U_c]^{4/3} + \tilde{\sigma}\left\{\left[a + \frac{273.16}{t_M}\right]^4 - \left[U_c + \frac{273.16}{t_M}\right]^4\right\}, \\ \tilde{\varkappa} &= \frac{\varkappa_0 h\, t_M^{1/3}}{\lambda_1}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma \varepsilon h t_M^3}{\lambda_1}, \\ A_0 &= \frac{1}{\alpha t_M} - \mu[U_1(\xi_1) - U_c]. \end{aligned} \qquad (I9)$$

коэффициенты $A_1 \div B_4$ решений (I8), содержащие неизвестные температуры $a_1 = U_1(0)$ и $b = U_1(\xi_1)$ выражаются последовательно из условий (I5) – (I7) следующим образом:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\alpha t_M} - \mu[b - U_c], \\ A_1 &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{f(a)}{P_0^{1/2}}\,tg\,\theta + (1 + A_0)\frac{\cos\varphi}{\cos\theta} - A_0, \\ B_1 &= f(a), \\ A_2 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{f(a)}{P_0^{1/2}}, \\ B_2 &= -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{f(a)}{P_0^{1/2}}\cdot tg\,\theta + (1 + A_0)\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}, \\ A_3 &= \frac{\cos(\theta-\varphi)\cos\varphi}{\cos\theta} + A_0\frac{\sin(\theta-\varphi)\sin\varphi}{\cos\theta} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{f(a)}{P_0^{1/2}}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}, \\ A_4 &= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_4}(1-\xi_3)\left[\frac{\sin(\theta-\varphi)\cos\varphi}{\cos\theta}(1 + A_0) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{f(a)}{P_0^{1/2}}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right], \\ B_4 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_4}\left[(1 + A_0)\frac{\sin(\theta-\varphi)\cos\varphi}{\cos\theta} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\frac{f(a)}{P_0^{1/2}}\cdot\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right], \end{aligned} \qquad (20)$$

$$tg\,\varphi = \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_3}(\xi_3 - \xi_2) + \frac{\lambda_2}{\lambda_4}(1 - \xi_3)\right] P_0^{1/2} ,$$

$$\theta = \varphi + P_0^{1/2}(\xi_2 - \xi_1) .$$

С целью нахождения приближённых значений величин a и b на основании теоремы о неподвижной точке применяется следующий итерационный процесс:

$$a_n = f(a_{n-1}) , \tag{21}$$

где

$$f(a) = a + s\cdot F(a) ,$$

$$F(a) = a + \beta_1 \cdot f(a) - \gamma_1 ,$$

$$\beta_1 = -\frac{\beta + \xi_1 \mu\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta} - 1\right)}{1 + \mu\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta} - 1\right)} ,$$

$$\gamma_1 = \frac{\gamma}{1 + \mu\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\theta} - 1\right)} , \ -\frac{2}{1 + \beta_1 f'(\gamma_1)} < s < 0 ,$$

$$f'(a) \geqslant 0 .$$

Оценка точности следующая:

$$|a - a_n| \leqslant \frac{m}{1-m}|a_n - a_{n-1}| , \tag{22}$$

где

$$m = \max f'(a) , \ a \in [u_0, \gamma_1] .$$

Величина b выражается через a :

$$b = a + \xi_1 f(a) . \tag{23}$$

В итоге получены приближённые решения нелинейной одномерной задачи тепловой модели ПЛИН в виде элементарных функций и без необходимости решения системы нелинейных уравнений. Апробация последовательности решений на тестовых примерах теплового режима ПЛИН показывает, что достаточно брать начальные (два, три) приближения, чтобы ошибка не превысила 5%.

В рамках рассматриваемой модели определяются основные интегральные характеристики нелинейного теплового расчёта ПЛИН:

максимальная температура в обмотке и электрическое сопротивление обмотки.

Максимальная температура в эквивалентной зоне "паз-зубец" определяется из выражений:

$$\xi_m = \frac{1}{P_0^{1/2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{A_2}{B_2}\right) + \xi_1 ,$$

$$U_{max} = \max\left\{ U_2(\xi_1), U_2(\xi_m)\right\}. \tag{24}$$

Оценка точности -ого приближения имеет вид:

$$|U_{max} - U_{n\,max}| \leq K_n |a_n - a_{n-1}| ,$$

$$K_n = \frac{\lambda_c}{\lambda_n}\cdot\frac{1}{P_0^{1/2}}\cdot\frac{\left|\sin[\theta - P_0^{1/2}(\xi_m - \xi_1)]\right|}{\cos\theta}\cdot\frac{m + |\lambda|^{\frac{m}{1-m}}}{\lambda\beta_2} +$$

$$+ \left|1 - \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\cos P_0^{1/2}(\xi_m - \xi_1)\right|\cdot\left[\frac{m}{1-m} + \xi_1\frac{m + |\lambda|^{\frac{m}{1-m}}}{|\lambda\beta_2|}\right]. \tag{25}$$

Основной функцией, определяющей тепловое состояние МГД-машины является электрическое сопротивление обмотки возбуждения R как функция тока J, температуры перекачиваемого металла t_M и др. величин. В рамках рассматриваемой расчётной модели величина R имеет вид:

$$R = \rho_0\frac{l_W}{S_{CM}}\left\{\frac{\alpha\cdot t_M}{\xi_2 - \xi_1}\cdot\frac{1}{P_0^{1/2}}\left[\frac{\lambda_c}{\lambda_{n\vartheta}}\cdot\frac{f(a)}{P_0^{1/2}}\left(1 - \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(1 + \frac{1}{\alpha\cdot t_M} - \mu(b - u_0)\right)\frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\cdot\sin(\theta - \varphi)\right] + \alpha t_M \mu(b - u_0)\right\}, \tag{26}$$

где l_W - длина обмотки, S_{CM} - площадь сечения обмотки.

Оценка точности n - ого приближения имеет вид:

$$|R - R_n| \leq K_R |a_n - a_{n-1}| ,$$

$$K_R = \rho_0 \frac{l_w}{S_{cri}} \left\{ \frac{\alpha \cdot t_M}{\xi_2 - \xi_1} \cdot \frac{\lambda_c}{\lambda_n} \cdot \frac{1 - \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}}{P_0} \cdot \frac{m + |\mu|^{\frac{m}{1-m}}}{|\lambda \beta_1|} + \right.$$

$$\left. + \mu \frac{|P_0^{1/2} \alpha \cdot t_M - \sin(\theta - \varphi)|}{P_0^{1/2}} \cdot \left[\frac{m}{1-m} + \xi_1 \frac{m + |\lambda|^{\frac{m}{1-m}}}{|\lambda \beta_1|} \right] \right. . \qquad (27)$$

4. Заключение

Разработанная методика теплового расчёта ПЛИН с учётом нелинейных эффектов реализована в форме математического обеспечения решения на ЭВМ прямых задач анализа для определения температурного поля и интегральных характеристик при заданных условиях единственности, так и обратных задач идентификации с целью определения неизвестных коэффициентов. Модель может быть включена в качестве составной части в единую комплексную программу оптимального проектирования ПЛИН.

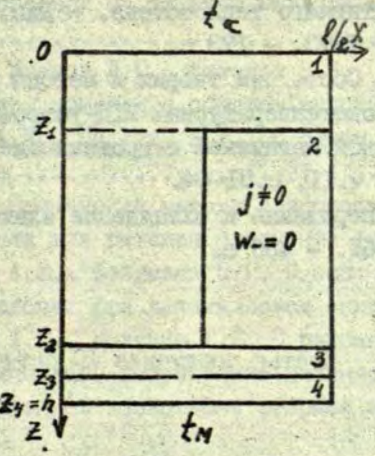


Рис.I. Принципиальная схема теплофизической модели участка продольного сечения ПЛИН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Охременко Н.М. Основы теории и проектирования линейных индукционных насосов для жидких металлов. - М.: Атомиздат, 1968. - 396 с.
2. Лиелпетер Я.Я. Жидкометаллические индукционные МГД-машины. - Рига: Зинатне, 1969. - 246 с.
3. Вольдек А.И. Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом. - Л.: Энергия, 1970. - 272 с.
4. Баранов Г.А., Глухих В.А., Кириллов Л.Р. Расчёт и проектирование индукционных МГД-машин с жидкометаллическим рабочим телом. - М.: Атомиздат, 1978. - 248 с.
5. Клявинь Я.Я. Распределение температуры в электромагнитном индукционном насосе и его тепловой расчёт. - Дис. ... канд. техн. наук. - Рига, 1967. - 228 с.
6. Ратниек У.А. Методы электромоделирования при расчёте нагрева электромагнитных насосов. - Дис. ... канд. техн. наук. - Рига, 1968. - 224 с.
7. Шилтер Э.П. Тепловой режим проводников электрического тока в условиях активного теплообмена. - Дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Рига, 1973. - 173 с.
8. Реймал Л.Р. Состояние теории и методы расчёта температурного поля в высокотемпературных МГД-устройствах. - В кн.: Семинар по прикладной магнитной гидродинамике. Тезисы докладов. Пермь, 1978, ч.II, с.81-84.
9. Готтер Р. Нагревание и охлаждение электрических машин. - М.: РЭИ, 1961. - 480 с.

Статья поступила 10 октября 1982 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
Сборник научных трудов
(межвузовский)

Редакторы: Ю.Микельсон, С.Павлов
Технический редактор Г.Сома
Корректоры: Б.Цилевич, С.Рязанцева

Подписано к печати 29.XI.I982. ЯТ 09I64. Ф/б 60x84/I6.
Бумага №I.I2,0 физ.печ.л.II,2 усл.печ.л. 9,2 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Зак.№ 2000. Цена I р. 40 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 226098, б. Райниса, I9
Отпечатано в типографии, Рига 226050, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 518.12:538.4+621.365.5

Павлов С.И., Тир Л.Л., Якович А.Т. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЁТА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ДВИЖЕНИЯ РАСПЛАВА В ИНДУКЦИОННОЙ ПЕЧИ С ХОЛОДНЫМ ТИГЛЕМ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 3-19.

Для исследования электромагнитного (ЭМ) поля и движения расплава в индукционной печи с холодным тиглем (ИПХТ), обладающей поворотной симметрией, предлагаются две двумерные модели, являющиеся характерными сечениями трёхмерной модели. Разработана конечно-разностная методика расчёта движения расплава, возникающего из-за перетекания вихревых токов между проводящим разрезным тиглем и расплавом при наличии переходного электрического сопротивления. Учитывается возможность частичного и полного отжатия расплава от тигля напротив перегородок, электрически изолирующих секции тигля. ЭМ величины определяются на основе уравнения для аксиальной составляющей индукции магнитного поля, которое решается в подобластях с постоянным значением безразмерной частоты. Форма подобластей может быть произвольной. При сшивании на границах используются условия для радиальной и азимутальной составляющих плотности вихревого тока. Гидродинамические величины находятся из решения уравнений для аксиальной составляющей ротора скорости и функции тока. Приводятся консервативные конечно-разностные схемы, построенные на неоднородной полярной сетке, характеристика методики и пример расчёта. Ил. 5, библиогр. 10 назв.

УДК 538.4+621.365.5+517.958

Гельфгат А.Ю., Павлов С.И. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЁТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И ДВИЖЕНИЯ РАСПЛАВА В ЗОНЕ КОНТАКТА С ХОЛОДНЫМ ТИГЛЕМ ИНДУКЦИОННОЙ ПЕЧИ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1982, с. 20-29.

Для двумерной модели зоны контакта расплава и тигля индукционной печи с холодным тиглем методом разделения переменных проведено аналитическое решение в декартовой системе координат уравнения для аксиальной составляющей индукции магнитного поля и линеаризованного уравнения для аксиальной составляющей ротора скорости совместно с уравнением для функции тока. Коэффициенты разложения магнитной индукции в расплаве и тигле определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений, которая после редукции размерности решается на ЭВМ методом исключения Гаусса с выбором главного элемента. Ротор скорости и функция тока находятся суммированием трёхкратных рядов. Результаты расчётов на ЭВМ по аналитическим выражениям сравниваются с результатами конечно-разностного решения. Ил. 2, библиогр. 6 назв.

УДК 538.323.001

Блюменау Н.Ф., Воловик М.В. РАСЧЁТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТОКОВОЙ РАМКИ В ПРИСУТСТВИИ ПОЛУПЛОСКОГО ИДЕАЛЬНОГО ФЕРРОМАГНИТНОГО ЭКРАНА. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 30-39.

Рассмотрена задача об экранировании бесконечно тонким идеально ферромагнитным экраном, имеющим форму полуплоскости. Для трёхмерного источника получено явное аналитическое решение на основе парных интегральных уравнений с ядрами Фурье. В качестве примера рассмотрен случай, когда магнитное поле создаётся прямоугольной рамкой с постоянным током, расположенной параллельно экрану. Ил. 2, табл. 2, библиогр. 4 назв.

УДК 538.323.001

Воеводский К.Э. О ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МАГНИТОСТАТИКИ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 40-50.

Выведены простые формулы, позволяющие рассчитать двумерное статическое магнитное поле, возбуждаемое токовым источником в присутствии идеально ферромагнитного или сверхпроводящего экрана произвольной двумерной конфигурации. Выявлены особые случаи, для которых традиционная постановка задачи об экране с бесконечной магнитной проницаемостью некорректна. Особо изучено поведение поля на краю экрана, в окрестности стыков и угловых точек его поверхности. Показано, что в указанных областях поле может многократно усиливаться по сравнению с собственным полем источника. Полученные результаты могут быть использованы в задачах магнитного экранирования и других приложениях; они допускают и электростатическую интерпретацию. Библиогр. 4 назв.

УДК 517.949:538.12-621.335

Ауза В.Я. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ С УЧЁТОМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 51-56.

Предложен метод расчёта двумерного магнитного поля с использованием конечных разностей в случае, когда часть поверхностей ферромагнитных материалов не параллельны координатным осям. Для тех ячеек расчёта, через которые проходит граница области, вводится эквивалентная обратная магнитная проницаемость. Методика апробирована для расчёта двумерной модели длинного электромагнита, который притягивается к ферромагнетику в форме полукольца и треугольника. Ил. 2, табл. 2, библиогр. 1 назв.

УДК 621.313.333+621.3.013+537.811

Завицкий Э.А. РАСЧЁТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С ПОПЕРЕЧНЫМ МАГНИТНЫМ ПОТОКОМ (ЛАДПП). - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 57-68.

Разработана трёхмерная математическая модель линейного асинхронного двигателя с поперечным магнитным потоком. Рассмотрены случаи П- и Ш-образных сердечников индуктора. Разделённый магнитопровод индуктора моделируется магнитно-анизотропным электронепроводящим слоем, обмотка - набором токовых контуров на поверхности магнитопровода. Электромагнитное поле и вихревые токи определены с помощью двойного преобразования Фурье. Получены выражения тягового и нормального усилий, активной и реактивной мощностей. Ил. 3, библиогр. 12 назв.

УДК 531.37:538.32

Козорез В.В., Шаблий В.П. ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СВОБОДНОГО ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА В ГЛУБОКОЙ МАГНИТНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 69-73.

Определены уравнения движения свободного физического маятника в магнитном поле, создаваемом парой идеально проводящих токовых колец вблизи положения их соосности. В частном случае быстрого вращения маятника вокруг оси поля получено общее решение уравнений движения. Библиогр. 6 назв.

УДК 538.32

Шаблий В.П. О ВОЗМОЖНОСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОЖЁСТКОЙ ОПОРЫ, ОСНОВАННОЙ НА ЭФФЕКТЕ МАГНИТНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЯМА. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 74-77.

Доказана возможность создания подвеса с одинаковой жёсткостью в осевом и радиальном направлениях, основанного на эффекте минимума магнитной потенциальной энергии (магнитная потенциальная яма). Получены приближённые формулы магнитных характеристик в зависимости от зазора опоры, которые могут быть полезны при инженерных расчётах. Ил. 1, библиогр. 6 назв.

УДК 534.615:621.372.41

Ауза В.Я., Иванов Л.Г., Устинов Н.Н., Шикин Б.М. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ ОБЪЕМОВ АКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 78-92.

На основе анализа резонатора Гельмгольца как акустической цепи с сосредоточенными параметрами получены аналитические соотношения, позволяющие оценить чувствительность метода определения объёмов акустическим способом и выбрать необходимые параметры резонатора для достижения требуемой точности. Ил. 5, библиогр. 7 назв.

УДК 538.65:51.380

Резинский А.И., Цилевич Б.Л. ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ СЛУЧАЙНОГО ПОИСКА. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 93-100.

Предложен алгоритм случайного поиска для задач многомерной условной оптимизации. Используется адаптация по длине шага. Применяется нестандартный метод учёта ограничений. Алгоритм построен для задач, связанных с расчётом равновесной конфигурации системы диполей во внешнем поле. Приведены результаты для тестовых задач, а также проведено сравнение с другими алгоритмами. Ил. 2, табл. 2, библиогр. 12 назв.

УДК 517.63:518.43

Белов М.А. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ ИНТЕРВАЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 101-108.

Предложен алгоритм решения задач теплопроводности, являющийся естественным объединением трёх приближённых методов: конечноразностного, вариационного и метода асимптотического расширения интервала для численного обращения интегрального преобразования Лапласа. Приведён иллюстрационный пример. Табл. 3, библиогр. 6 назв.

УДК 539.3:534.I

Богданович А.Е., Фелдмане Э.Г. О ВЫПУЧИВАНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ. – В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. I09–I22.

Рассмотрена задача о неосесимметричном деформировании несовершенной цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределённым динамическим внешним давлением. Решение проводится методом Бубнова-Галёркина в геометрически нелинейной постановке. Исследован эффект взаимосвязанности окружных форм выпучивания при различных скоростях нагружения. Показано, что учёт этого эффекта приводит к значительному увеличению рассчитываемой величины критического давления, определяемой по моменту образования в оболочке первой пластической зоны. Дано сопоставление с результатами экспериментов А.С.Вольмира, В.Е.Минеева на дюралюминиевых оболочках. Расчётные значения коэффициента динамичности, полученные при учёте взаимосвязанности окружных форм выпучивания, хорошо согласуются с экспериментальными. Ил. 4, табл. I, библиогр. I5 назв.

УДК 539.3:534.I

Богданович А.Е., Кошкина Т.Б. О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЫПУЧИВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЁННОЙ КОЛЬЦЕВЫМИ РЁБРАМИ ЖЕСТКОСТИ. – В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. I23–I35.

В геометрически нелинейной постановке рассматривается задача неосесимметричного деформирования ортотропной цилиндрической оболочки с системой произвольно расположенных вдоль образующей монотропных кольцевых рёбер. Решение строится при аппроксимации прогиба одним членом полного ряда Фурье. Одно из уравнений движения удовлетворяется точно, остальные два – приближённо путём применения процедуры Бубнова-Галёркина. В конечном итоге задача сводится к системе двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Многократное численное интегрирование её для различных сочетаний форм выпучивания и последующее суммирование рядов Фурье позволяет рассчитать перемещения в оболочке. Приведён пример численного расчёта для оболочки, подкреплённой двумя рёбрами, при действии осевой динамической сжимающей нагрузки. Дано сопоставление зависимостей прогиба от осевой координаты, полученных согласно описанной выше методике и по разработанной авторами ранее методике решения линейной задачи при аппроксимации прогиба конечным числом членов ряда Фурье. Ил. I, библиогр. 5 назв.

УДК 678:539.63

Белов М.А., Юдрупп О.М. ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ УДАРЕ ПО ТОРЦУ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 136-145.

Рассмотрено поведение тонкостенной цилиндрической оболочки в приближении безмоментной теории при динамическом осесимметричном нагружении на торце. Конечно-разностной аппроксимацией по пространственной координате математическая модель сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом Рунге-Кутта. Изучены пластические деформации в рамках деформационной теории пластичности. Ил. 4, библиогр. 3 назв.

УДК 518.12:538.4

Якович А.Т., Булыгин Л.Л., Дзенитис О.Я. НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ В КОНДУКЦИОННОМ МГД-НАСОСЕ ЦЕНТРОБЕЖНОГО ТИПА. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1982, с. 146-167.

В работе характеризуется ряд математических моделей и методов, которые могут быть применены при исследовании процессов в центробежном МГД насосе. Предложены аналитические и конечно-разностные методики расчета для двумерной осесимметричной модели насоса, в которой учитывается наличие только вращательной составляющей скорости и характеризуются полученные результаты. Ил. 8, библиогр. 11 назв.

УДК 536.12:537.311.6:621.313.3

Микельсон Ю.Я., Шмит Я.Р. ТЕПЛОФИЗИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ В ЭНЕРГОНАПРЯЖЕННОМ РЕЖИМЕ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1982, с. 168-180.

Разработана методика теплового расчета ПЛИН с учетом нелинейных эффектов (зависимость параметров от температуры, нелинейный конвективный теплообмен, излучение) в приближении элементарными функциями. Модель может быть использована с целью определения температурного поля ПЛИН (прямая задача), уточнения теплофизических параметров устройства (обратная задача)идентификации), а также при оптимальном проектировании (задача синтеза). Ил. 1, библиогр. 9 назв.