

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра дифференциальных уравнений
и приближенных методов

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(междуведомственный)

Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 1983

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Прикладные задачи математической физики: Сборник научных трудов (межведомственный). - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1983. - 168 с.

В сборник включены статьи, посвященные вопросам решения прикладных задач математической физики. Большинство работ связано с построением численных методов решения задач, моделирующих конкретные физические процессы фильтрации жидкости, кристаллизации, гидродинамики. Исследуются также методы решения определенных классов математических задач, которые также могут встречаться при математическом исследовании физических процессов.

Сборник предназначен для математиков, физиков и специалистов, занимающихся проблемами тепло-массопереноса, а также для аспирантов и студентов старших курсов.

Илл. - 26, библ. - 90.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

А.А.Буйкис (отв.ред.), А.А.Земитис, Х.Э.Калис

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

П 20200-091у 35.83.1702000000
М 812(II)-83

С Латвийский
государственный
университет
им.П.Стучки, 1983



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА СОРБЦИИ

А.Я.Аболтиньш

(ЛГУ им. П. Стучки)

В работе анализируется классическая модель процесса диффузии и показывается, что обработка данных некоторых сорбционных экспериментов о диффузии паров низкомолекулярных веществ в гидрофобные полимеры приводит к необходимости пересмотра некоторых предположений классической модели диффузии для таких ситуаций.

Напомним классическую математическую модель процесса диффузии. Пусть в начальный момент времени $t=0$ концентрация паров $\tilde{c}(x, t)$ внутри полимерной пленки толщины $2l$ постоянна и равна c_s , а на боковых поверхностях пленки поддерживается постоянная концентрация c_b . Введя нормированную концентрацию $c(x, t)$ при помощи соотношения:

$$c(x, t) = \frac{\tilde{c}(x, t) - c_s}{c_b - c_s} \quad (1)$$

для нее имеем постановку (см. [1], [2]):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad -l < x < l, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$c|_{t=0} = 0 \quad (3)$$

$$c|_{x=-l} = c|_{x=l} = 1, \quad (4)$$

где D - коэффициент диффузии.

Согласно [2] ее решение записывают в двух формах в зависимости от величины безразмерного времени

$$\tilde{\tau} = \frac{Dt}{4l^2}, \quad (5)$$

причем для малых $\tilde{\tau}$

$$\tilde{\tau} < \Delta \quad (6)$$

решение записывается в форме:

$$c(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\operatorname{erfc} \frac{(2k+1)l-x}{2\sqrt{Dt}} + \operatorname{erfc} \frac{(2k+1)l+x}{2\sqrt{Dt}} \right], \quad (7)$$

а для $\zeta \geq \Delta$ концентрация определяется как сумма следующего ряда (см. также [3]):

$$C(x, t) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp\left(-\frac{D(2k+1)^2 \pi^2 t}{4l^2}\right) \cos \frac{(2k+1)\pi}{2l} x. \quad (8)$$

В сорбционных экспериментах по диффузии паров в полимерную пленку фиксируется изменение во времени веса образца, что отражается в удлинении спирали $\Delta l(t)$, в которой образец прикреплен [4], [5]. Это значит, что фактически из эксперимента получается средняя концентрация $\bar{c}(t)$:

$$\bar{c}(t) = \frac{j}{M_0 (c_6 - c_3)} \Delta l(t), \quad (9)$$

где M_0 - начальная масса образца,

j - коэффициент чувствительности спирали,

$$\bar{c}(t) = \frac{1}{2l} \int_0^l c(x, t) dx = \frac{1}{l} \int_0^l c(x, t) dx. \quad (10)$$

Для вычисления $\bar{c}(\zeta)$ имеем следующие выражения [2]:

при $\zeta < \Delta$

$$\bar{c}(\zeta) = 4\sqrt{\zeta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{\exp\left(-\frac{k^2}{4\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta}} - \frac{k}{2\sqrt{\zeta}} \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{\zeta}} \right] \right\}, \quad (11)$$

при $\zeta > \Delta$

$$\bar{c}(\zeta) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \exp\left[-(2k+1)^2 \frac{\zeta}{4l^2}\right]. \quad (12)$$

Сорбционный эксперимент по диффузии паров внутри пленки проводят до установления процесса, когда удлинение спирали Δl_{∞} уже не меняется. При этом принимается $\bar{c}(t) = 1$ и тогда из (9) можно найти C_6 , которое при проведении эксперимента неизвестно:

$$C_6 = C_3 + \frac{j \Delta l_{\infty}}{M_0}. \quad (13)$$

Из (9) вытекает:

$$\bar{c}(t) = \frac{\Delta l(t)}{\Delta t} \quad (14)$$

Первый вопрос: о вычислении сумм рядов (II) и (I2), т.е. о вычислении $\bar{c}(\varepsilon)$. С знакопеременным рядом (II) не возникает проблем. Для оценки остатка ряда (I2) R_n введем вспомогательную функцию

$$f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} \exp[-(2x+1)^2 \pi^2 \varepsilon]$$

Используя формулу Лагранжа для монотонно убывающей функции $f(x)$ и очевидное при $x \geq 0$ неравенство

$$\frac{4}{(2x+3)^3} + \frac{4\pi^2 \varepsilon}{2x+3} > \frac{4\pi^2 \varepsilon}{(2x+3)^2}$$

для оценки производной функции $f(x)$ через значение ее самой, получаем связь

$$f(x+1) < \frac{1}{1+4\pi^2 \varepsilon} f(x),$$

которая позволяет мажорировать остаток ряда (I2) суммой геометрической прогрессии с знаменателем $q = 1/(1+4\pi^2 \varepsilon)$:

$$R_n < \frac{1+4\pi^2 \varepsilon}{4\pi^2 \varepsilon} \cdot f(n+1),$$

т.е. позволяет оценить погрешность в вычислении суммы ряда ε через величину первого отброшенного члена.

Второй вопрос: какое должно быть то значение Δ , при котором целесообразно переходить от формулы (II) к формуле (I2)? В [2] указывается, что $\Delta = 0,01$, однако расчеты не подтвердили эту оценку. Результаты этих расчетов обобщены в табл. I. Отсюда вытекает (с учетом необходимого объема вычислительной работы на ЭВМ для нахождения одного члена ряда), что целесообразное место перехода от расчета по формуле (II) к расчету по (I2) будет $\varepsilon = 0,04 \pm 0,05$.

Таблица I.

Сравнение средних концентраций, полученных по формулам (II) - $\bar{c}_1(\xi)$ и (I2) - $\bar{c}_2(\xi)$.

Значение ξ	$\varepsilon = 0.001$		$\varepsilon = 0.0001$		$\varepsilon = 0.0001$	
	$\bar{c}_2(\xi)$	n	$\bar{c}_2(\xi)$	n	$\bar{c}_1(\xi)$	n
0.01	0.2258	3	0.2257	4	0.2257	0
0.02	0.3194	2	0.3192	3	0.3192	0
0.03	0.3909	2	0.3909	2	0.3909	0
0.04	0.4512	2	0.4512	2	0.4512	1
0.05	0.5041	2	0.5041	2	0.5041	1
0.06	0.5517	1	0.5512	2	0.5512	1
0.07	0.5938	1	0.5936	2	0.5936	1
0.08	0.6319	1	0.6319	1	0.6319	1

Обратимся теперь к вопросу о вычислении D , если известно $\bar{c}(t)$. Если $\bar{c}(t) < 0.5$, то из формулы (II) без учета ряда следует, что

$$D = \frac{\pi l^2}{4t} \bar{c}^2(t), \quad (15)$$

причем погрешность при этом не превышает 0,05%. Надо учесть, что l в формуле (15) - это половина толщины пластинки.

Если же $\bar{c}(t)$ больше 0,5, то согласно классической монографии по теории диффузии [1] нужно поступить следующим образом. Находится тот момент времени t_* , для которого $\bar{c}(t_*) = 0.5$. После этого коэффициент диффузии D вычисляется по формуле ($L = 2l$):

$$D = 0,049 \frac{L^2}{t_*} \quad (16)$$

Этот прием для вычисления D обладает следующим недостатком: требуется интерполяция по соседним с 0.5 значениям $\bar{c}(t)$ для нахождения момента времени t_* . Интерполяция вносит некоторую дополнительную погрешность, неудобна для реализации на ЭВМ, не говоря уже о том, что случайно в эксперименте именно в одной из соседних точек может быть допущена большая неточность.

Данная в [1] формула (16) может быть легко обобщена для произвольного момента времени t и соответствующего ему $\bar{c}(t)$. Она имеет вид:

$$D = -\frac{4}{\pi^2} \ln \left\{ \frac{\pi^2}{8} [1 - \bar{c}(t)] - \frac{1}{9} \left[\frac{\pi^2}{8} (1 - \bar{c}(t)) \right]^3 \right\} \frac{1}{t} \quad (17)$$

Она получена следующим образом: берем формулу (12) и находим D из выражения с одним членом ряда. Найденное D вновь подставляем во втором члене выражения (12), взятого с двумя членами ряда и отсюда уже получаем (17).

Легко проверить, что при $\bar{c}(t) = 0.5$ из этой формулы получается (16).

Из формулы (15) вытекает, что до $\bar{c}(t) = 0.5$ должно выполняться соотношение

$$K = \frac{\bar{c}(t)}{\sqrt{t}} = 4 \sqrt{\frac{D}{\pi^2 L^2}} = \text{const} \quad (18)$$

При обработке экспериментов выяснилось, что соотношение (18) не выполняется даже для малых концентраций, для которых должно заведомо быть справедливо линейное уравнение диффузии (2) с постоянным D : экспериментальные данные дают систематически более низкие значения отношения K . Это хорошо видно из табл.2, в которой приведена вычисленная по формуле (14) из экспериментальных удлинений спирали средняя концентрация \bar{c}_3 , также даны теоретически вычисленные \bar{c}_1 и \bar{c}_2 по двум величинам коэффициента диффузии (эти величины D_1 и D_2 найдены из \bar{c}_3).

Из табл.2 видно, что по крайней мере коэффициент D_1 не завышен (это следует из нижней части таблицы), но с другой стороны, если смотреть на верхнюю часть таблицы, то видно, что для всех моментов времени до $t = 7$ мин, когда уже $\bar{c}(t) \approx 0.5$, средняя концентрация по реальному эксперименту ниже полученной теоретически. Наконец, теоретическая величина K до $\bar{c}(t) = 0.5$ с точностью до трех знаков остается постоянной, а ее экспериментальное значение меньше, не монотонно, но с определенной тенденцией роста. Осредненное, по интервалу до 7 мин включительно, значение отношения \bar{c}_3 / \sqrt{t} равно 2.43, что на 5% ниже теоретического значения. Такая систематичес-

Таблица 2.

Экспериментальные (\bar{c}_3), вычисленные (\bar{c}_1, \bar{c}_2) средние концентрации (\bar{c}_1 и \bar{c}_2 вычислены при $D_1 = 2,2709 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2/\text{с}$ и $D_2 = 2,329 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2/\text{с}$) и соответствующая им константа K .

t (мин)	Средняя концентрация $\bar{c}(t)$			Отношение $\frac{\bar{c}(t)}{\sqrt{t}} = K$		
	\bar{c}_3	\bar{c}_1	\bar{c}_2	$10^4 K_3$	$10^4 K_1$	$10^4 K_2$
0.25	0.091	0.098	0.100	2.35	2.56	2.59
0.50	0.129	0.140	0.142	2.36	2.56	2.59
0.75	0.155	0.171	0.174	2.31	2.56	2.59
1.00	0.182	0.198	0.200	2.35	2.56	2.59
1.25	0.208	0.221	0.224	2.40	2.56	2.59
1.75	0.239	0.262	0.265	2.33	2.56	2.59
2.00	0.269	0.280	0.283	2.46	2.56	2.59
2.25	0.289	0.297	0.301	2.49	2.56	2.59
2.50	0.307	0.313	0.317	2.51	2.56	2.59
3.00	0.333	0.343	0.347	2.48	2.56	2.59
3.50	0.360	0.370	0.375	2.48	2.56	2.59
4.00	0.383	0.396	0.401	2.47	2.56	2.59
4.50	0.405	0.420	0.425	2.46	2.56	2.59
5.00	0.424	0.443	0.448	2.45	2.56	2.59
6.00	0.470	0.485	0.491	2.48	2.56	2.59
7.00	0.504	0.523	0.529	2.46	2.55	2.58
8.00	0.542	0.558	0.565	2.47	2.55	2.58
9.00	0.583	0.591	0.598	2.51	2.54	2.57
10.00	0.614	0.621	0.628	2.51	2.54	2.56
12.00	0.663	0.675	0.682	2.47	2.52	2.54
15.00	0.731	0.741	0.748	2.44	2.47	2.49
18.00	0.784	0.794	0.801	2.39	2.42	2.44
21.00	0.833	0.836	0.842	2.35	2.36	2.37
25.00	0.879	0.879	0.884	2.27	2.27	2.28
30.00	0.917	0.917	0.922	2.16	2.16	2.17
40.00	0.966	0.961	0.964	1.97	1.96	1.97
55.00	0.985	0.988	0.989	1.72	1.72	1.72
70.00	0.996	0.996	0.997	1.54	1.54	1.54
87.00	1.000	0.999	0.999	1.38	1.38	1.38
100.00	1.000	0.996	0.997	1.29	1.29	1.29

кая погрешность выходить за рамки случайных ошибок эксперимента, тем более, что такое же систематическое занижение наблюдается в других имеющихся экспериментах серии.

Вывод один: нет соответствия между реальным процессом и описывающей его теорией. Наиболее слабым местом в исходной постановке (2)-(4) является краевое условие (4): естественно, что концентрация не моментально на внутренней стороне поверхности материала достигает величины C_b .

Рассмотрим постановку исходной задачи (2)-(4), заменив в ней краевые условия I-го рода (4) на краевое условие 3-го рода:

$$\left[D \frac{\partial c}{\partial x} + \alpha(c-1) \right] \Big|_{x=l} = 0 \quad (19)$$

и условие симметрии при $x = 0$:

$$D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (20)$$

Решение этой задачи дано в [2], [3]. Приведем сразу выражения для осредненной концентрации. Для малых времен имеем:

$$\bar{c}(t) = 2 \operatorname{erfc} \left(\frac{l}{\sqrt{Dt}} \right) + \frac{2\sqrt{Dt}}{l\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{l^2}{Dt}} \right) + \\ + \frac{1}{h} e^{-\frac{h^2 t}{D}} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{h\sqrt{Dt}}{l} \right) - e^{-\frac{h^2 t}{D}} \operatorname{erfc} \left(\frac{l}{\sqrt{Dt}} + h \frac{\sqrt{Dt}}{l} \right) \right] - \frac{1}{h} \operatorname{erfc} \left(\frac{l}{\sqrt{Dt}} \right) \quad (21)$$

для больших:

$$\bar{c}(t) = 1 - \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2 \sin(\beta_n l)}{\beta_n^2 [(\beta_n^2 + h_1^2)l + h_1]} \exp(-D\beta_n^2 t), \quad (22)$$

где $h = \frac{\alpha}{D}$, $h_1 = \frac{\alpha}{D}$, $c_n = h_1 \sin \beta_n l + \beta_n \cos \beta_n l$,

β_n - положительные корни трансцендентного уравнения

$$(\beta^2 - h_1^2) \operatorname{tg} 2\beta l = 2\beta h_1.$$

Если h становится большим, то возникают вычислительные трудности при счете по формуле (21) (экспонента стремится к бесконечности, erfc - к нулю). Их удастся обойти, используя асимптотическую формулу для функции $\operatorname{erfc}(x)$ при больших x :

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} \right),$$

Таблица 3.

Сравнение средних концентраций эксперимента и теоретических при краевых условиях 3-го рода ($\bar{c}_1 - D = 2,2709 \cdot 10^{-8}$ см²/с, $h = 80$ л/с; $\bar{c}_2 - D = 2,329 \cdot 10^{-8}$ см²/с, $h = 60$ л/с; $\bar{c}_3 - D = 2,3 \cdot 10^{-8}$ см²/с, $h = 60$ л/с).

t (мин)	\bar{c}_1	\bar{c}_2	\bar{c}_3	\bar{c}_4
0.25	0.091	0.089	0.085	0.085
0.50	0.129	0.128	0.126	0.126
0.75	0.155	0.160	0.158	0.157
1.00	0.182	0.186	0.185	0.184
1.25	0.208	0.209	0.200	0.207
1.75	0.239	0.250	0.249	0.248
2.00	0.269	0.268	0.268	0.266
2.25	0.289	0.285	0.285	0.283
2.50	0.307	0.301	0.301	0.299
3.00	0.333	0.331	0.331	0.329
3.50	0.360	0.359	0.359	0.357
4.00	0.383	0.384	0.385	0.382
4.50	0.405	0.408	0.409	0.407
5.00	0.424	0.431	0.432	0.429
6.00	0.470	0.473	0.475	0.472
7.00	0.504	0.511	0.514	0.510
8.00	0.542	0.546	0.549	0.546
9.00	0.583	0.578	0.582	0.579
10.00	0.614	0.609	0.613	0.609
12.00	0.663	0.663	0.667	0.663
15.00	0.731	0.730	0.735	0.731
18.00	0.784	0.784	0.788	0.785
21.00	0.833	0.827	0.831	0.828
25.00	0.879	0.872	0.875	0.872
30.00	0.917	0.911	0.914	0.912
40.00	0.966	0.958	0.960	0.958
55.00	0.985	0.986	0.987	0.986
70.00	0.996	0.995	0.996	0.996
87.00	1.000	0.999	0.999	0.999
100.00	1.000	0.999	0.996	0.995

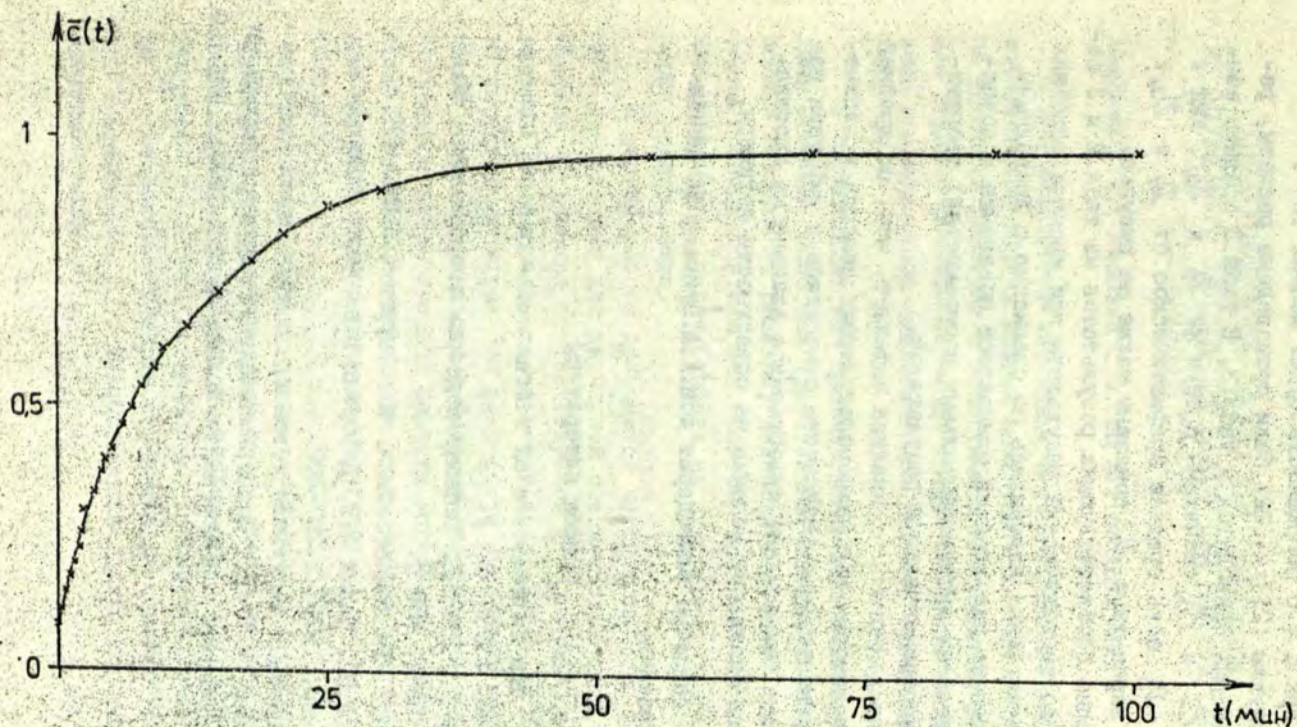


Рис. Сравнение средних концентраций: полученных из эксперимента (x) и теоретически с краевым условием 3-го рода (—), $D = 2,329 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2/\text{с}$, $h = 60 \text{ } 1/\text{с}$

причем уже при $\chi = 6$ погрешность будет меньше 10^{-4} .

По формулам (21) и (22) были произведены расчеты, результаты которых приводятся в табл.3. В табл.3 средние концентрации \bar{C}_1 и \bar{C}_2 сосчитаны с теми же D_1 и D_2 , как в табл.2; а D_3 есть среднее арифметическое от D_1 и D_2 . Результаты варианта с D_2 показаны также на рисунке.

Сравнение соответствующих результатов из табл.2 и 3 показывает, что теоретические результаты при краевых условиях 3^{го} рода качественно изменились по сравнению с предыдущим случаем и теперь уже имеется одинаковое поведение и совпадение (в пределах экспериментальных погрешностей) теоретических и экспериментальных результатов.

Из приведенного анализа вытекает, что, по крайней мере, для некоторых пар низкомолекулярных веществ и полимеров (экспериментальные результаты относились к диффузии паров ацетона в полиэтилен) существенное влияние на протекание процесса оказывают явления на поверхности полимера.

Автор сердечно благодарит доц.А.А.Буйкиса за ценные советы и указания.

Список литературы

1. Crank I. The Mathematics of Diffusion. - Oxford, Clarendon press. 1979, 414 p.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
3. Лыков А.В. Тепломассообмен. М.: Энергия, 1978. 479 с.
4. Малкин А.Я., Чалых А.Е. Диффузия и вязкость полимеров. М.: Химия, 1979, с.257-260.
5. Адсорбционная вакуумная установка с пружинными кварцевыми весами. - В кн.: Экспериментальные методы в адсорбции и молекулярной хроматографии. М.:Изд-во МГУ, 1973, с.108-123.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ
ИЗ ОДНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ
ВЫТЯГИВАНИЯ СЛИТКА

Авдонин Н.А., Иванова Г.Ф. (ВЦ ЛГУ им. П. Стучки)

При разработке численных методов решения задач математической физики важным моментом является их проверка на тестовых примерах с известным аналитическим решением. Для задач о фазовом переходе (задач Стефана) известно лишь авторемодельное аналитическое решение одномерной задачи [1].

В приложениях, как правило, возникают многомерные задачи Стефана. Основным требованием, предъявляемым к численным методам их решения, является получение правильной формы границы раздела фаз. Поэтому проверка методов решения многомерных задач Стефана на одномерных тестовых примерах недостаточна.

В данной работе приводится метод получения формы границы раздела фаз для двумерной осесимметрической задачи Стефана из решения соответствующей осредненной одномерной задачи. Такого рода задачи могут использоваться в качестве тестовых примеров при разработке численных методов решения многомерных задач с фазовыми переходами. Кроме того, полученное аналитическое решение модельной задачи может быть использовано для оценки формы фронта кристаллизации для образцов малого радиуса, вытягиваемых с большой скоростью.

Рассмотрим задачу о кристаллизации полубесконечного цилиндрического слитка радиуса R , вытягиваемого из расплава заданной температуры со скоростью v . Слиток охлаждается с боковой поверхности. Температура внешней среды T_1 на боковой поверхности цилиндра линейно убывает при возрастании z . Математически задача формулируется следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = c \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right),$$

$$0 < r < R, z > 0, t > 0, T \neq T_n; \quad (1)$$

$$T(r, 0, t) = T_0 > T_n; \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = -\alpha_0 (T - T_1(z)), T_1(z) = T_2 - \kappa z, r = R; \quad (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{\partial T}{\partial z} = -\kappa; \quad (4)$$

$$\chi \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \right) + ([\lambda \text{grad} T], \text{grad} \psi) = 0, T = T_n; \quad (5)$$

$$T(r, z, 0) = T_n. \quad (6)$$

При записи задачи использованы следующие обозначения:
 λ, c - коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости, χ - скрытая теплота фазового перехода, α_0 - коэффициент теплообмена с внешней средой, T_n - температура кристаллизации, $[\lambda \text{grad} T]$ - скачок теплового потока при переходе границы раздела фаз $\psi(r, z, t) = 0$.

Введем осредненную по сечению цилиндра температуру

$$\bar{T} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r T(r, z, t) dr$$

и проинтегрировав уравнение (1), сведем задачу (1)-(6) к одномерной. Для упрощения обозначений для осредненной температуры \bar{T} сохраним прежнее обозначение T .

Индексом 1 будем обозначать теплофизические константы жидкой фазы, индексом 2 - твердой. В квазистационарном случае одномерную задачу можно записать следующим образом:

$$T'' - (v_1 T' - \alpha_1 (T - T_1(z))) = 0, 0 < z < z_1; \quad (7)$$

$$T(0) = T_0, \quad T(z_1) = T_w; \quad (8)$$

$$T'' - (M_2 T' - \alpha_2 (T - T_2(z))) = 0, \quad z > z_1; \quad (9)$$

$$T(z_1) = T_w, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} T' = -v; \quad (10)$$

$$\lambda_1 T'(z_1-0) - \lambda_2 T'(z_1+0) = \alpha v, \quad z = z_1; \quad (II)$$

$$\alpha_i = \frac{2\alpha_0}{\lambda_i R}, \quad M_i = \frac{v c_i}{\lambda_i}, \quad i = 1, 2.$$

Решение задачи (7)-(II) легко находится:

$$T = \begin{cases} T_0, & z = 0 \\ A_1 \exp(\kappa_{11} z) + B_1 \exp(\kappa_{12} z) - \kappa z + a_1, & 0 < z < z_1 \\ T_w, & z = z_1 \\ (T_w + \kappa z_1 - a_2) \exp(\kappa_{22} (z - z_1)) - \kappa z + a_2, & z > z_1 \end{cases}$$

где

$$A_1 = \frac{(T_w + \kappa z_1 - a_2) - (T_0 - a_1) \exp(\kappa_{12} z_1)}{\exp(\kappa_{11} z_1) - \exp(\kappa_{12} z_1)},$$

$$B_1 = T_0 - a_1 - A_1,$$

$$\kappa_{11} = 0.5(M_1 + \sqrt{0.25M_1^2 + \alpha_1}), \quad \kappa_{12} = 0.5(M_1 - \sqrt{0.25M_1^2 + \alpha_1}),$$

$$\kappa_{22} = 0.5(M_2 - \sqrt{0.25M_2^2 + \alpha_2}), \quad a_i = T_2 + \frac{M_i v}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2;$$

а квазистационарное положение границы раздела фаз z_1 определяется из трансцендентного уравнения

$$\lambda_1 \{ A_1 k_{11} \exp(k_{11} z_1) + B_1 k_{12} \exp(k_{12} z_1) - k \} = \\ = \lambda_2 \{ (T_w + k z_1 - a_2) k_{22} - k \} + \mathcal{L} \nu.$$

Решение $T(z)$ задачи (7)-(II) не при всех значениях констант будет монотонно убывающей функцией. Если

$T'(z_1-0) > 0$, то решение задачи будет немонотонным. Можно найти, при каких значениях ν нарушается монотонность решения. Определив значение ν_0 из условия

$$T'(z_1-0) = A_1 k_{11} \exp(k_{11} z_1) + B_1 k_{12} \exp(k_{12} z_1) - k = 0,$$

мы получим, что при $\nu > \nu_0$ $T'(z_1-0) > 0$ и, следовательно, решение немонотонно.

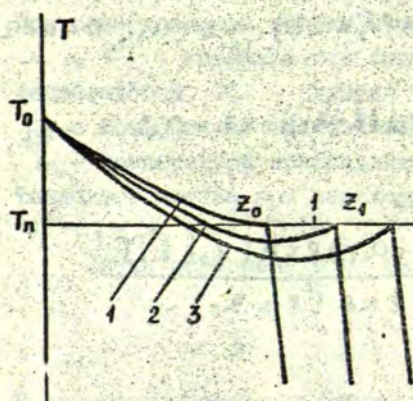


Рис.1. Решение задачи (7)-(II):

1 - $\nu = \nu_0$, 2 - $\nu = 1.5\nu_0$, 3 - $\nu = 2\nu_0$.

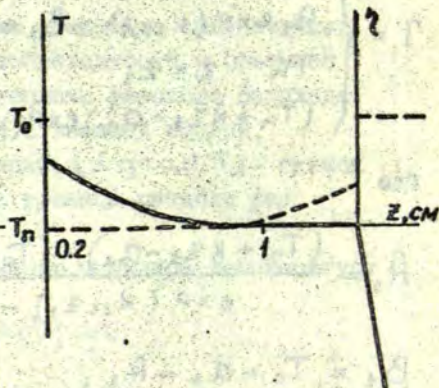


Рис.2. Решение задачи

(13)-(21), $\nu = 2\nu_0$: — T , --- z

На рис.1 приведены решения задачи (7)-(II) при различных значениях ν . В качестве материала для расчета в данной работе был взят германий. При расчетах были приняты следующие значения констант: $\lambda_1 = 0.412$, $\lambda_2 = 0.173$

вт. см⁻¹ град⁻¹; $C_1 = 1.884$, $C_2 = 1.894$ дж. град⁻¹ см⁻³;

$$\begin{aligned} \chi &= 2656 \text{ Дж} \cdot \text{см}^{-3}; \quad \alpha = 0.157 \text{ Вт} \cdot \text{град}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}; \\ \kappa &= 100 \text{ град} \cdot \text{см}^{-1}; \quad T_2 = T_n = 1210, \quad T_c = 1220^\circ\text{K}; \\ R &= 0.15 \text{ см}; \quad v_0 = 0.0115 \text{ см} \cdot \text{сек}^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку, при $z = z_1$, выполняется соотношение (II), то выполнение условия $T'(z_1 - 0) > 0$ эквивалентно неравенству

$$\lambda_2 T'(z_1 + 0) + \chi v > 0,$$

которое означает, что при больших скоростях продвижения границы раздела фаз ($v > v_0$) теплота фазового перехода не успевает отводиться в твердую фазу и следствием этого является образование в жидкой фазе области (z_0, z_1) переохлажденного расплава. Отметим, что хотя в точке z_0 (см. рис. I) температура равна T_n , эта точка не является точкой фазового перехода, так как решение задачи мы получили в предположении, что вся теплота фазового перехода выделяется в точке z_1 (см. условие (II)). В точке z_0 выполняются обычные условия сопряжения: равенство температур и тепловых потоков.

В реальных условиях кристаллизация однокомпонентных материалов (именно такой случай мы и рассматриваем, так как считаем, что температура кристаллизации $T_n = \text{const}$) проходит без переохлаждения. Если в процессе кристаллизации создаются условия для появления переохлаждения в жидкой фазе, то возникшее переохлаждение мгновенно снимается за счет изгиба фронта кристаллизации. В нашем случае одномерной модели это будет означать появление двухфазной зоны.

Для описания процесса кристаллизации в постановке, не допускающей переохлаждения в жидкой фазе, введем еще одну неизвестную функцию η - долю твердой фазы в сечении

слитка. Функция η определяется следующим образом, [2]:

$$\eta = \begin{cases} 1, & T < T_w \\ 0, & T > T_w \end{cases}$$

и принимает значения из интервала $(0,1)$ при $T = T_w$. В данной постановке процесс кристаллизации в квазистационаре описывается обобщенным уравнением, которое справедливо во всей рассматриваемой области:

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda \frac{dT}{dz} \right) - \alpha (T - T_1(z)) - c v \frac{dT}{dz} + \chi v \frac{d\eta}{dz} = 0. \quad (I2)$$

Приведем полную формулировку одномерной задачи в классической постановке с выделением границ начала и конца двухфазной зоны:

$$T'' - (\mu_1 T' - \alpha_1 (T - T_1(z))) = 0, \quad 0 < z < z_0; \quad (I3)$$

$$T(0) = T_0, \quad T(z_0) = T_w; \quad (I4)$$

$$T = T_w, \quad z_0 \leq z \leq z_1; \quad (I5)$$

$$\chi v \eta' = \alpha_2 \lambda_2 (T_w - T_2(z)), \quad z_0 < z \leq z_1; \quad (I6)$$

$$\eta(z_0) = 0; \quad (I7)$$

$$T'' - (\mu_2 T' - \alpha_2 (T - T_2(z))) = 0, \quad z > z_1; \quad (I8)$$

$$T(z_1) = T_w, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} T' = -K; \quad (I9)$$

$$T'(z_0 - 0) = 0; \quad (I20)$$

$$\lambda_2 T'(z_1 + 0) = -\chi v (1 - \eta(z_1)). \quad (I21)$$

Отметим, что уравнение (16) для определения функции η в области $z_0 < z \leq z_1$ получено из уравнения (12) с учетом равенства (15), выполняющегося в этой области. В частности, из (15) следует, что $T'(z_0+0) = 0$, $T'(z_1-0) = 0$. Соотношение (20) следует из условия равенства тепловых потоков в точке z_0 с учетом, что $T'(z_0+0) = 0$. Условие (21) - это уравнение теплового баланса в точке z_1 с учетом, что $T'(z_1-0) = 0$ и что в точке z_1 кристаллизуется оставшаяся часть материала, объем которой $1 - \eta(z_1)$.

Задача (13)-(21) решается в аналитически замкнутой форме. Приведем здесь конечный вид ее решения:

$$T = \begin{cases} T_0, & z = 0 \\ A_0 \exp(\kappa_{11} z) + B_0 \exp(\kappa_{12} z) - \kappa z + a_1, & 0 < z < z_0 \\ T_n, & z_0 \leq z \leq z_1 \\ (T_n + \kappa z_1 - a_2) \exp(\kappa_{22}(z - z_1)) - \kappa z + a_2, & z > z_1 \end{cases}$$

$$\eta = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq z_0 \\ S_1(z^2 - z_0^2) + S_2(z - z_0), & z_0 \leq z \leq z_1 \\ 1, & z > z_1 \end{cases}$$

где

$$A_0 = \frac{(T_n + \kappa z_0 - a_2) - (T_0 - a_1) \exp(\kappa_{12} z_0)}{\exp(\kappa_{11} z_0) - \exp(\kappa_{12} z_0)}, \quad B_0 = T_0 - a_1 - A_0,$$

$$S_1 = 0,5 \kappa S_0, \quad S_2 = (T_n - T_0) S_0, \quad S_0 = \frac{\alpha_1 \lambda_1}{\kappa \nu},$$

а z_0 и z_1 определяются из следующих соотношений

$$A_0 \kappa_{11} \exp(\kappa_{11} z_0) + B_0 \kappa_{12} \exp(\kappa_{12} z_0) - \kappa = 0,$$

$$\lambda_2 [k_{22}(T_w + kz_1 - a_2) - \kappa] + \\ + \chi v [1 - s_1(z_1^2 - z_0^2) - s_2(z_1 - z_0)] = 0.$$

На рис. 2 приведено решение задачи (13)-(21) при $v = 2v_0$.

Форму фронта кристаллизации можно восстановить по найденным значениям функции η . Учитывая, что рост дендритов происходит на боковой поверхности слитка и что η - это отношение площади, занимаемой твердой фазой в сечении цилиндра, ко всей площади сечения, мы можем выразить η через координату ρ границы раздела фаз

$$\eta(z) = \frac{\pi R^2 - \pi \rho^2(z)}{\pi R^2}, \quad \rho(z) = R \sqrt{1 - \eta(z)}$$

и тем самым восстановить конфигурацию границы раздела фаз в двумерной задаче.

Таким образом, из решения одномерной задачи (13)-(21) при $v > v_0$ можно получить форму фронта кристаллизации для двумерной задачи (1)-(6) в квазистационаре, причем, при $v \leq v_0$ фронт кристаллизации будет плоским. Следует отметить, что из одномерного приближения удовлетворительное определение формы фронта кристаллизации можно ожидать лишь при малых значениях радиуса R слитка. Приведем здесь некоторые результаты расчетов.

Исследовалась зависимость формы фронта кристаллизации от величины скорости вытягивания слитка v . На рис. 3 представлены зависимость величины прогиба фронта кристаллизации $\Delta z = z_1 - z_0$ и положения начала двухфазной зоны z_0 от v . Отметим, что значение z_0 почти не изменяется при увеличении v ; это объясняется тем, что при выбранных значениях параметров $\alpha_1 \gg M_1(v)$ и $T_w \gg M_1(v)k$. При фиксированных теплофизических характеристиках материала основными параметрами, от которых существенно зависит z_0 , являются T_0 и $T_d(z)$, определяющие тепло-

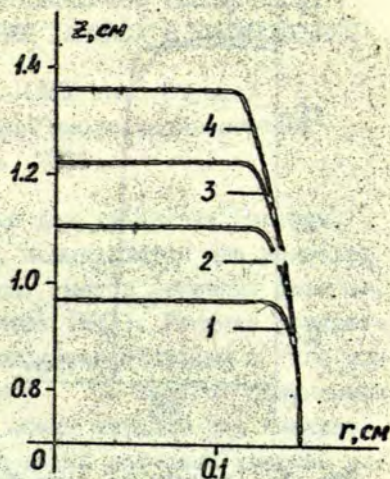
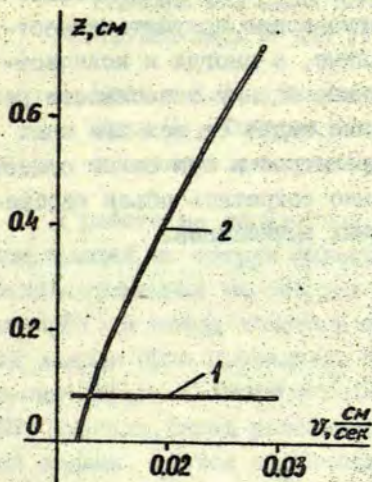
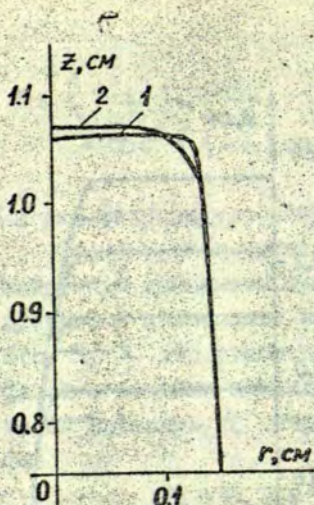


Рис.3.Изменения z_0 , Δz от ν :
1 - $z_0(\nu)$, 2 - $\Delta z(\nu)$.

Рис.4.Граница раздела фаз:
1 - $\nu = 1,25\nu_0$, 2 - $\nu = 1,5\nu_0$,
3 - $\nu = 1,75\nu_0$, 4 - $\nu = 2\nu_0$.

вой режим на внешних границах слитка. Величина Δz изменяется почти линейно в зависимости от ν . На рис.4 приведено положение границы раздела фаз при различных значениях ν .

На рис. 5. приведено сравнение конфигураций границы раздела фаз в квазистационаре, полученных из одномерного приближения и численного решения двумерной задачи (I)-(6) методом введения параметра β , [2]. Сравнение результатов проводилось при $\nu = 1,4\nu_0$. Как видно из приведенных на рис. 5 данных положения границы раздела фаз, полученные из решений одномерной и двумерной задач, достаточно хорошо совпадают, что свидетельствует об удовлетворительной точности одномерного приближения.



Используя одномерное приближение, также сравнительно легко можно получить качественные, а иногда и количественные оценки зависимости решения задач от тех или иных параметров и тем самым существенно сократить объем необходимых вычислений.

Рис. 5. Граница раздела фаз по расчетам: 1- одномерной, 2- двумерной задач.

Список литературы

1. Тихонов А.Н.; Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 724 с.
2. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. Рига: Зинатне, 1980. 178 с.

РЕШЕНИЕ МЕТОДАМИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И КОНЕЧНЫХ
РАЗНОСТЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Буйкис А.А., Земитис А.А. (ЛГУ им.П.Стучки)

Мика С., Сobotка Л. (Высшая школа машиностроения
и электротехники, Пилзень, ЧССР)

В работе на конкретной задаче для уравнения Лапласа, возникающей из теории фильтрации, испытываются два наиболее распространенные на сегодня метода: метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Решение конкретной задачи было проведено: первыми двумя авторами в Риге при помощи МКР, С.Микой и Л.Соботкой в Пилзени при помощи МКЭ. Сначала, перед рассмотрением обоих методов для конкретной задачи, дается подготовленное всеми авторами краткое изложение применения МКЭ для более общей задачи эллиптического типа в многоугольнике для всех основных типов краевых условий, причем акцентируются некоторые моменты, существенные при практической реализации МКЭ.

Рассмотрим ограниченный многоугольник $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, границей $\partial\Omega$ (т.е. $\partial\Omega$ — замкнутая ломаная; заметим здесь, что большинство рассуждений без каких-либо существенных изменений переносится на случай, когда $\partial\Omega$ является замкнутой кусочно-гладкой кривой). В качестве основных задач в Ω будем рассматривать уравнение

$$-\operatorname{div}[k(M) \operatorname{grad} u(M)] + q(M)u(M) = f(M), \quad M \in \Omega \quad (1)$$

вместе с одним из следующих краевых условий:

$$P_1: u(M) = g(M), \quad M \in \partial\Omega, \quad (2_1)$$

$$P_2: k(M) \frac{\partial u(M)}{\partial n} = g(M), \quad M \in \partial\Omega, \quad (2_2)$$

$$P_3: k(M) \frac{\partial u(M)}{\partial n} + \sigma(M)u(M) = g(M), \quad M \in \partial\Omega \quad (2_3)$$

$$P_4: u(M) = g_1(M), M \in \Gamma_1, k(M) \frac{\partial u(M)}{\partial n} = g_2(M), M \in \Gamma_2, \quad (2_4)$$

$$k(M) \frac{\partial u(M)}{\partial n} + \sigma(M)u(M) = g_3(M), M \in \Gamma_3,$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial\Omega, \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

Потребуем выполнение следующих условий относительно коэффициентов уравнений:

$k(M), q(M)$ - ограниченные измеримые функции

$$0 < k_0 \leq k(M) \leq c_1, \quad 0 \leq q(M) \leq c_2;$$

$f(M)$ - суммируемая с квадратом функция - $f \in L_2(\Omega)$;

$g(M), g_i(M)$ - суммируемые (вместе с первыми производными) с квадратом функции - $g, g_i \in W_2^1(\Omega)$;

$\sigma(M)$ - ограниченная, суммируемая (вместе с первыми производными) с квадратом функция -

$$0 \leq \sigma(M) \leq c_3, \quad \sigma \in W_2^1(\Omega)$$

При столь слабых требованиях относительно коэффициентов мы можем говорить об обобщенном решении задач (I), (2) (мы здесь и ниже пользуемся следующим принципом в обозначениях: если какое-то высказывание относится лишь к одной конкретной задаче P_i ($i = \overline{1,4}$), то при формулировке этого высказывания явно пишется это конкретное значение индекса i , если же данное высказывание имеет место для всех задач, то индекс i опускается). Для введения этого обобщенного решения нам необходимы некоторые понятия. Рассмотрим $\Gamma \subset \partial\Omega$ и введем классы функций:

$$V = \{v \mid v \in W_2^1(\Omega), v=0 \text{ на } \Gamma \text{ в смысле следов}\},$$

$$V(g) = \{v \mid v \in W_2^1(\Omega), v=g \text{ на } \Gamma \text{ в смысле следов}\}.$$

(Очевидно, что при $\Gamma = \partial\Omega$ имеем $V = \dot{W}_2^1(\Omega)$, при $g=0$ на Γ - $V(g) = V$, при $\Gamma = \emptyset$, $V(g) = V = W_2^1(\Omega)$). По отношению к отдельным задачам P_i имеем: $\Gamma = \partial\Omega$ для $i=1$, $\Gamma = \emptyset$ для $i=2,3$ и $\Gamma = \Gamma_1$ для $i=4$. Значит, $V_1 = \dot{W}_2^1(\Omega)$, $V_i(g) = V(g)$, $V_i = V_i(g) = W_2^1(\Omega)$ для $i=2,3$ и $V_4 = \{v \mid v \in W_2^1(\Omega), v=0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ в смысле следов}\}$, $V_4(g) = \{v \mid v \in W_2^1(\Omega), v=g \text{ на } \Gamma_1 \text{ в смысле следов}\}$).

Определим в $W_2^1(\Omega)$ симметричную эллиптическую (т.е. положительно определенную) билинейную форму $a(u, v)$ (см.

напр. [I], [2]); $a: W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}$, вид которой зависит от конкретной задачи P_i . Точнее

$$a_1(u, v) = \int_{\Omega} [k g_1 \text{grad} u \cdot \text{grad} v + q_1 uv] d\omega, \quad a_2(u, v) = a_1(u, v),$$

$$a_3(u, v) = a_1(u, v) + \int_{\partial\Omega} \sigma uv ds, \quad a_4(u, v) = a_1(u, v) + \int_{\Gamma_3} \sigma uv ds. \quad (3)$$

Определим далее линейный функционал $F(v): W_2^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}$ следующим образом:

$$F_1(v) = \int_{\Omega} f v d\omega, \quad F_2(v) = F_3(v) = F_1(v) + \int_{\partial\Omega} g \sigma ds,$$

$$F_4(v) = F_1(v) + \int_{\Gamma_2} g_2 v ds + \int_{\Gamma_3} g_3 v ds. \quad (4)$$

Определим, наконец, для $v \in V(g)$ квадратичный функционал

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - F(v) \quad (5)$$

Тогда обобщенное решение задачи (1), (2) определяется как функция $u \in V(g)$, для которой при $\forall v \in V$ выполнено равенство

$$a(u, v) = F(v) \quad (6)$$

(Для получения из (6) определение обобщенного решения конкретной задачи P_i , надо, согласно принятому принципу, заменить в (6) $a(u, v)$ и $F(v)$ конкретными их выражениями для интересующего i). При наложении более жестких ограничений на гладкость коэффициентов, задача (1), (2) будет иметь классическое решение, совпадающее с обобщенным. При помощи функционала (5) можно сформулировать следующую вариационную задачу: найти функцию $u \in V(g)$, доставляющую минимум функционалу $\Phi(v)$:

$$\Phi(u) = \min_{v \in V(g)} \Phi(v). \quad (7)$$

Отметим здесь лишь то (отсылая за подробностями к [I], гл. I), что задачи (6) и (7) эквивалентны (теоремы I.1.2 из

[1]) и что вариационная задача (7) имеет единственное решение, непрерывно зависящее от f (лемма Лакса-Мильграма).

Описание МКЭ для задач (1), (2).

Численное решение при помощи МКЭ любой из краевых задач (1), (2) можно проводить, исходя либо из определения решения (6), либо из (7). Ниже за исходный пункт взято определение при помощи (7). Построение приближенного решения состоит из двух этапов: на первом проводится дискретизация исходной области Ω и выбор аппроксимирующих функций на элементе, на втором - дискретизация функционала (7).

Переходим к описанию первого этапа: аппроксимации многоугольника Ω . Выберем в Ω множество n точек-узлов - M_1, M_2, \dots, M_n (будем считать, что ν из них являются внутренними точками Ω , а остальные $n - \nu$ принадлежат границе) и при помощи этих точек сделаем триангуляцию области Ω . Объединение всех получившихся m треугольников e_s (их называют конечными элементами) дает исходную область $\Omega: \Omega = \Omega_h \equiv \bigcup_{s=1}^m e_s$. Любые два треугольника имеют либо пустое пересечение, либо пересечением является вершина - узел, либо сторона.

На рис.1 показана триангуляция области той конкретной задачи для уравнения Лапласа, которое решалась МКЭ и МКР (подробная формулировка задачи и ее решение будет дано ниже). Эта триангуляция содержит 30 узлов (точек M_r) и 41 треугольник e_s (номера треугольников на рис. как принято в литературе-[3] в отличие от номеров вершин, заключены в скобки). На рис.2 показана другая триангуляция той же области с 36 узлами и 49 треугольниками, т.е. $n = 36, m = 49$. Заметим, что по приведенным здесь триангуляциям были проведены конкретные расчеты МКЭ. В каждом треугольнике e_s занумеруем вершины: выбирая одну из вершин, которая обозначается через $M_i^{(s)}$, мы обходим треугольник в положительном направлении (оставляя его слева) и по порядку остальным двум присваиваются обозначения $M_j^{(s)}$ и $M_k^{(s)}$. Эти номера вершин треугольника (они же и узлы триангуляции Ω) называются локальными индексами, в отличие от глобального индекса r - номера узла в множестве M_1, M_2, \dots, M_n . С каждым узлом, кроме того, связывается один или несколько па-

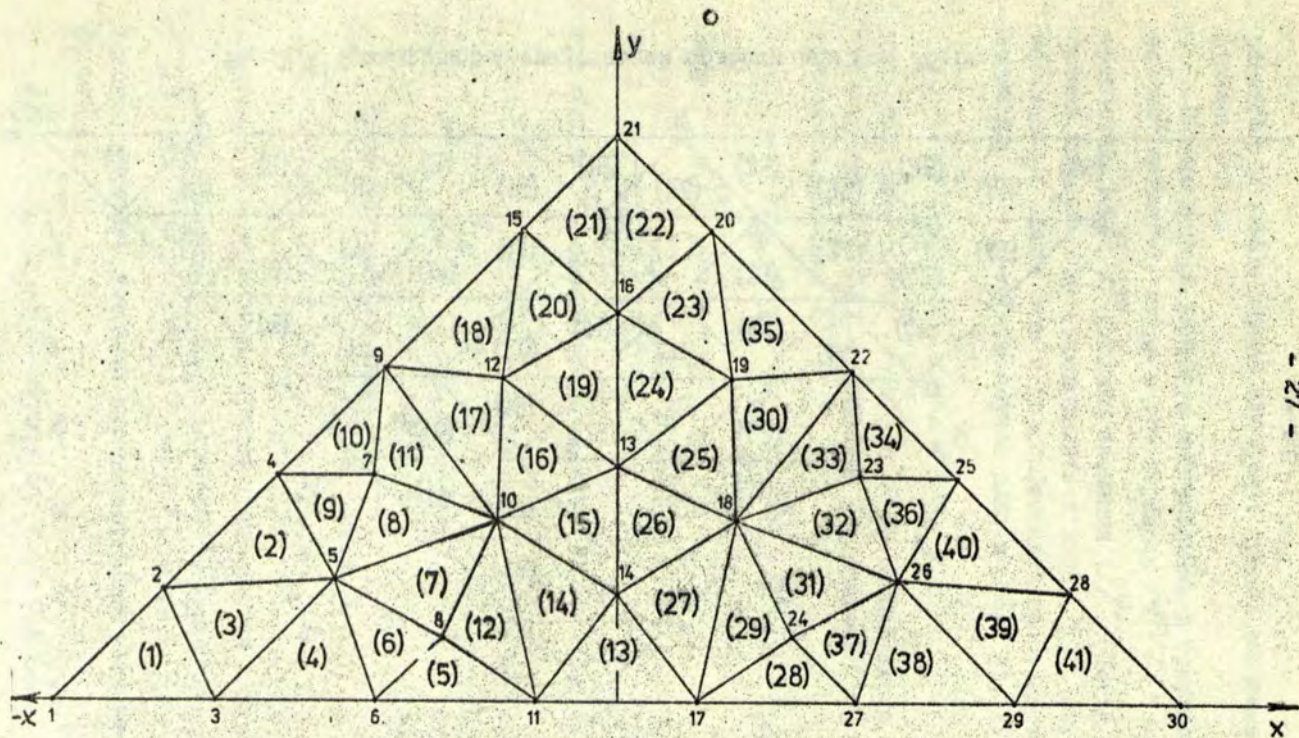


Рис. I. Триангуляция треугольной области при $n = 30, m = 41$

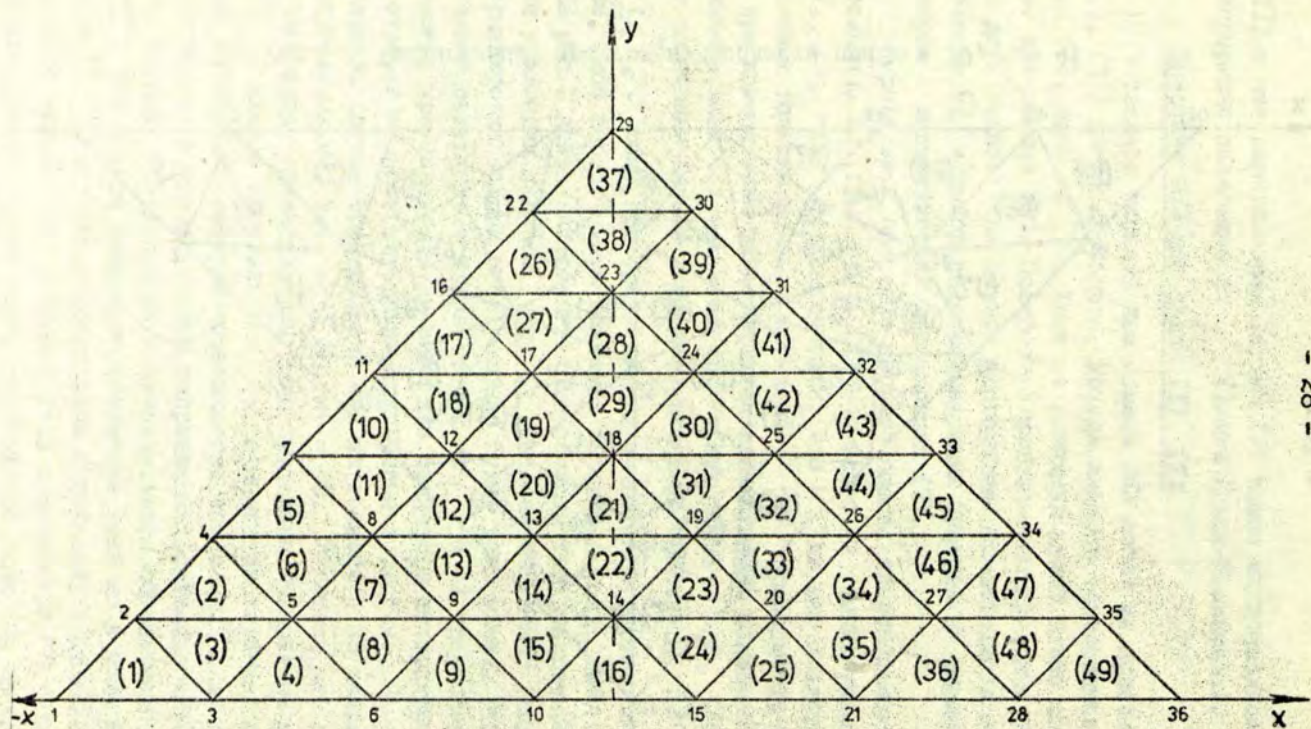


Рис.2. Триангуляция треугольной области при $n = 36, m = 49$

раметров (в нашем случае это будет просто значение искомой функции U_r).

Опишем теперь линейную интерполяцию в треугольнике (конечном элементе), когда в его вершинах $M_l^{(s)}$ ($l = i, j, \kappa$) в координатах $(x_l^{(s)}, y_l^{(s)})$ заданы значения $U_l^{(s)}$. Тогда этот линейный полином можем представить в виде ([4], гл. I и IV; изложение в общем виде с классификацией пространств конечных элементов в n -мерном случае дано в [1], гл. II):

$$P^{(s)}(x, y) = \alpha_1^{(s)} + \alpha_2^{(s)}x + \alpha_3^{(s)}y, \quad (8)$$

где коэффициенты $\alpha_m^{(s)}$ ($m = 1, 2, 3$) легко находятся из условий, что полином $P^{(s)}(x, y)$ на вершинах треугольника e_s должен принимать значения $U_l^{(s)}$:

$$\alpha_1^{(s)} + \alpha_2^{(s)}x_l^{(s)} + \alpha_3^{(s)}y_l^{(s)} = U_l^{(s)} \quad (l = i, j, \kappa). \quad (9)$$

Напр., $\alpha_1^{(s)}$ имеет вид:

$$\alpha_1^{(s)} = \frac{1}{\det S^{(s)}} [(x_j^{(s)}y_\kappa^{(s)} - x_\kappa^{(s)}y_j^{(s)})U_i^{(s)} + (x_\kappa^{(s)}y_i^{(s)} - x_i^{(s)}y_\kappa^{(s)})U_j^{(s)} + (x_i^{(s)}y_j^{(s)} - x_j^{(s)}y_i^{(s)})U_\kappa^{(s)}],$$

где $\det S^{(s)}$ - определитель матрицы

$$S^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & x_i^{(s)} & y_i^{(s)} \\ 1 & x_j^{(s)} & y_j^{(s)} \\ 1 & x_\kappa^{(s)} & y_\kappa^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Вводя векторы-столбцы

$$\vec{\alpha}^{(s)} = (\alpha_1^{(s)}, \alpha_2^{(s)}, \alpha_3^{(s)})^T, \quad \vec{U}^{(s)} = (U_i^{(s)}, U_j^{(s)}, U_\kappa^{(s)})^T \quad (11)$$

система (9) и ее решение кратко записываются в виде

$$S^{(s)} \vec{\alpha}^{(s)} = \vec{U}^{(s)}, \quad \vec{\alpha}^{(s)} = (S^{(s)})^{-1} \vec{U}^{(s)}. \quad (12)$$

Удобнее записать линейный интерполяционный полином на e_s в форме [4]

$$P^{(s)}(x, y) = N_i^{(s)}(x, y)U_i^{(s)} + N_j^{(s)}(x, y)U_j^{(s)} + N_\kappa^{(s)}(x, y)U_\kappa^{(s)}, \quad (13)$$

где

$$N_l^{(s)}(x, y) = \frac{1}{\det S^{(s)}} (a_l^{(s)} + b_l^{(s)}x + c_l^{(s)}y), \quad (14)$$

а коэффициенты $a_l^{(s)}$, $b_l^{(s)}$, $c_l^{(s)}$ выражаются однозначно через координаты вершин треугольника:

$$\begin{aligned} a_i^{(s)} &= x_j^{(s)}y_k^{(s)} - x_k^{(s)}y_j^{(s)}, & b_i^{(s)} &= y_j^{(s)} - y_k^{(s)}, & c_i^{(s)} &= x_k^{(s)} - x_j^{(s)}, \\ a_j^{(s)} &= x_k^{(s)}y_i^{(s)} - x_i^{(s)}y_k^{(s)}, & b_j^{(s)} &= y_k^{(s)} - y_i^{(s)}, & c_j^{(s)} &= x_i^{(s)} - x_k^{(s)}, \\ a_k^{(s)} &= x_i^{(s)}y_j^{(s)} - x_j^{(s)}y_i^{(s)}, & b_k^{(s)} &= y_i^{(s)} - y_j^{(s)}, & c_k^{(s)} &= x_j^{(s)} - x_i^{(s)}. \end{aligned}$$

Легко показать, что для коэффициентов $N_l^{(s)}(x, y)$ выполняются следующие равенства:

$$N_i^{(s)}(x, y) + N_j^{(s)}(x, y) + N_k^{(s)}(x, y) = 1 \quad \text{для всех } (x, y) \in e_s$$

$$N_l^{(s)}(x_m, y_m) = \delta_{l, m}, \quad \text{где } \delta_{l, m} = \begin{cases} 1, & l = m, \\ 0, & l \neq m. \end{cases}$$

т.е. коэффициент $N_l^{(s)}(x, y)$ на вершине $M_l^{(s)}$ треугольника e_s равен 1, а на остальных двух принимает значение нуля.

Сейчас можем переходить к описанию базисных функций, с помощью которых будем строить приближенное решение вариационной задачи (7). Оно будет строиться в виде линейной комбинации функций v_1, v_2, \dots, v_n (напомним, что n - число точек M_r триангуляции области $\bar{\Omega}$), а сами эти функции v_r будем строить при помощи функций $N_l^{(s)}(x, y)$ из (14). Точнее, если M_r есть узел с глобальным индексом r , то $v_r(x, y)$ определяется так:

1) она отлична от нуля только на тех треугольниках, которые имеют точку M_r своей вершиной;

2) если точка M_r является вершиной $M_l^{(s)}$ треугольника e_s , т.е. $M_r = M_l^{(s)}$, то имеем $v_r(x, y) = N_l^{(s)}(x, y)$ для $(x, y) \in e_s$ (значит, $v_r = 1$ в точке M_r). С геометрической точки зрения это означает, что $v_r(x, y)$ совпадает с боковой поверхностью пирамиды единичной высоты с вершиной

над точкой M_r , построенной на многоугольнике, являющемся объединением тех треугольников e_s , для которых точка M_r является одной из вершин. Очевидно, что все функции $v_r(x, y)$ являются непрерывными и линейно независимыми. Очевидно также, что $v_r \in W_2^1(\Omega)$ с почти везде дифференцируемыми первыми производными $\frac{\partial v_r}{\partial x}$, $\frac{\partial v_r}{\partial y}$. Эти производные являются кусочно постоянными функциями, терпящими разрывы на сторонах тех треугольников e_s , на которых $v_r(x, y)$ отлична от нуля. Введем теперь множество функций:

$$V^{(n)} = \left\{ w^{(n)}(x, y) \mid w^{(n)}(x, y) = \sum_{r=1}^n c_r v_r(x, y), c_r \in \mathbb{R} \right\}, \quad (15)$$

элементы которого называются линейными сплайнами и на этом множестве $V^{(n)}$ будем искать решение вариационной задачи (аналог задачи (?)): найти элемент $u^{(n)} \in V^{(n)}$ такой (этот элемент будем называть приближенным решением задачи (I), (2) в смысле МКЭ), что

$$\Phi(u^{(n)}) = \min_{v^{(n)} \in V^{(n)}} \Phi(v^{(n)}). \quad (16)$$

Функции $v^{(n)}(x, y)$ будем искать в виде

$$v^{(n)}(x, y) = \sum_{r=1}^n U_r v_r(x, y) \quad (17)$$

где $\bar{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)^T$ - (18)

вектор-столбец (подчеркнем, что \bar{U} является искомой величиной: U_r есть значение неизвестной функции в узле M_r). Из определения $v^{(n)}(x, y)$ непосредственно вытекает, что:

- а) на каждом из треугольников e_s она является линейным полиномом - $v^{(n)}(x, y) = P^{(s)}(x, y)$ при $(x, y) \in e_s$;
- б) она является непрерывной на $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{s=1}^m e_s$ функцией;
- в) внутри каждого треугольника e_s она имеет постоянные первые производные (см. (14)):

$$\frac{\partial v^{(s)}(x, y)}{\partial x} = \frac{b_i^{(s)} U_i^{(s)} + b_j^{(s)} U_j^{(s)} + b_k^{(s)} U_k^{(s)}}{\det S^{(s)}}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial v^{(s)}(x, y)}{\partial y} = \frac{c_i^{(s)} U_i^{(s)} + c_j^{(s)} U_j^{(s)} + c_k^{(s)} U_k^{(s)}}{\det S^{(s)}},$$

которые, как уже отмечалось, терпят разрыв первого рода на сторонах треугольника e_s . В связи с этим, если требуется определить первые производные решения, то вычисленные по формулам (19) величины для рассматриваемых здесь линейных сплайнов относят к барицентру (центру тяжести) треугольника. При рассмотрении сплайнов более высокого порядка, сохраняющих непрерывность производных при переходе от одного конечного элемента к другому, производные могут быть определены в вершинах или определенных точках на сторонах конечного элемента. (Подробное описание различных типов конечных элементов и полиномов на них дано в [1], см. также [3], [5]).

Рассмотрим сперва задачу минимизации при краевых условиях I^{го} рода, т.е. задачу P_1 . Для нее на множестве $V^{(s)}$, согласно (3)-(5):

$$\Phi_1(v^{(s)}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_h} [k g \vec{\omega} d^2 v^{(s)} + q(v^{(s)})^2 - 2 f v^{(s)}] d\omega,$$

что в силу определения $v^{(s)}(x, y)$ можно записать так:

$$\Phi_1(v^{(s)}) = \sum_{s=1}^m \Phi_{1,s}(P^{(s)}), \quad (20)$$

где

$$\Phi_{1,s}(P^{(s)}) = \frac{1}{2} \int_{e_s} [k g \vec{\omega} d^2 P^{(s)} + q(P^{(s)})^2 - 2 f P^{(s)}] d\omega. \quad (21)$$

Для более краткой записи дальнейших выражений введем векторы-столбцы \vec{G} , \vec{G}_x , \vec{G}_y и матрицу H следующим образом:

$$\vec{G} = (1, x, y)^T, \quad \vec{G}_x \equiv \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} = (0, 1, 0)^T, \quad \vec{G}_y \equiv \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = (0, 0, 1)^T,$$

$$H = \vec{G}_x \vec{G}_x^T + \vec{G}_y \vec{G}_y^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно определению $\vec{\alpha}^{(s)}$ по (II) имеем

$$P^{(s)}(x, y) = \alpha_1^{(s)} + \alpha_2^{(s)} x + \alpha_3^{(s)} y = \vec{G}^T \vec{\alpha}^{(s)}, \quad (22)$$

поэтому

$$(P^{(s)})^2 = (\vec{G}^T \vec{\alpha}^{(s)})^T \vec{G}^{-1} \vec{\alpha}^{(s)} = (\vec{\alpha}^{(s)})^T \vec{G} \vec{G}^{-1} \vec{\alpha}^{(s)},$$

где

$$\vec{G} \vec{G}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Аналогично получаем

$$g \vec{\alpha} \alpha^2 P^{(s)} = \left(\frac{\partial P^{(s)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P^{(s)}}{\partial y} \right)^2 = (\vec{\alpha}^{(s)})^T H \vec{\alpha}^{(s)}.$$

Так как, согласно (12) $\vec{\alpha}^{(s)} = (S^{(s)})^{-1} \vec{U}^{(s)}$, то мы можем $g \vec{\alpha} \alpha^2 P^{(s)}$, $(P^{(s)})^2, P^{(s)}$ выразить через вектор-столбец $\vec{U}^{(s)}$ локальных параметров. Для первого слагаемого правой части (21) будем иметь (для краткости опускаем индекс s у матрицы $S^{(s)}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{e_s} k(x, y) g \vec{\alpha} \alpha^2 P^{(s)} dx dy &= \frac{1}{2} \int_{e_s} k(x, y) (\vec{\alpha}^{(s)})^T H \vec{\alpha}^{(s)} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{U}^{(s)})^T (S^{-1})^T H S^{-1} \vec{U}^{(s)} \int_{e_s} k(x, y) dx dy = \frac{1}{2} (\vec{U}^{(s)})^T P^{(s)} \vec{U}^{(s)}, \end{aligned}$$

где

$$P^{(s)} = (S^{-1})^T H S^{-1} \int_{e_s} k(x, y) dx dy \quad (24)$$

Подобно поступаем с вторым слагаемым из (21):

$$\frac{1}{2} \int_{e_s} q(x, y) (P^{(s)}(x, y))^2 dx dy = \frac{1}{2} (\vec{U}^{(s)})^T Q^{(s)} \vec{U}^{(s)}$$

где

$$Q^{(s)} = (S^{-1})^T \left[\int_{e_s} q(x, y) \vec{G} \vec{G}^T dx dy \right] S^{-1} \quad (25)$$

В (25) выражение в квадратных скобках есть матрица, каждый элемент которой - интеграл по e_s от функции $q(x, y)$, умноженной на соответствующий элемент матрицы (23).

Наконец, так как по (22) и (12) имеем

$$P^{(s)}(x, y) = \vec{G}^T S^{-1} \vec{U}^{(s)},$$

то последнее слагаемое правой части (21) можно записать в виде

$$\int_{e_s} f(x, y) P^{(s)}(x, y) dx dy = (\vec{b}^{(s)})^T \vec{U}^{(s)},$$

где $(\vec{b}^{(s)})^T$ есть вектор-строка:

$$(\vec{b}^{(s)})^T = \left(\int_{e_s} f(x, y) dx dy, \int_{e_s} x f(x, y) dx dy, \int_{e_s} y f(x, y) dx dy \right) S^{-1}$$

Введем обозначение

$$A^{(s)} = P^{(s)} + Q^{(s)} \quad (26)$$

Тогда можно сказать, что $A^{(s)}$ есть симметричная матрица третьего порядка, так как H и $\vec{G} \cdot \vec{G}^T$ и следовательно, $P^{(s)}$ и $Q^{(s)}$ являются таковыми.

Полученные выражения позволяют записать функционал

$\Phi_{1,3}(P^{(s)})$ в виде

$$\Phi_{1,3}(P^{(s)}) = \frac{1}{2} (\vec{U}^{(s)})^T A^{(s)} \vec{U}^{(s)} - (\vec{b}^{(s)})^T \vec{U}^{(s)}$$

Вспомнив обозначение (18) для вектора-столбца глобальных параметров \vec{U} , мы можем ввести глобальную матрицу A и глобальный вектор-строку \vec{b}^T при помощи соотношений:

$$\begin{aligned} \vec{U}^T A \vec{U} &= \sum_{s=1}^m (\vec{U}^{(s)})^T A^{(s)} \vec{U}^{(s)}, \\ \vec{b}^T \vec{U} &= \sum_{s=1}^m (\vec{b}^{(s)})^T \vec{U}^{(s)} \end{aligned} \quad (27)$$

и записать выражение для функционала (20) в виде

$$\Phi_1(v^{(n)}) = \frac{1}{2} \vec{U}^T A \vec{U} - \vec{b}^T \vec{U} \quad (28)$$

Необходимое и достаточное условие минимума функционала $\Phi_1(v^{(n)})$ имеет вид [6], [7]

$$A \vec{U} = \vec{b} \quad (29)$$

Решив эту систему уравнений, мы найдем $\vec{U}^* = (U_1^*, U_2^*, \dots, U_n^*)^T$, а тем самым и решение вариационной задачи в виде

$$v^{(n)}(x, y) = \sum_{r=1}^n U_r^* \psi_r(x, y) \quad (30)$$

Если вместо задачи Дирихле P_1 рассматриваем другую задачу - P_2 , P_3 или P_4 - то, согласно (3) и (4), в функционале $\Phi(v^{(n)})$ появляются интегралы типа

Таблица I

Номер r узла M_r , координаты (x_r, y_r) узла, характеристика μ_r узла
и значение краевой функции $g(M_r)$ для граничных узлов

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_r	-0.71	-0.57	-0.5	-0.42	-0.35	-0.3	-0.29	-0.22	-0.29	-0.15
y_r	0	0.14	0	0.28	0.15	0	0.28	0.1	0.42	0.23
μ_r	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1
$g(M_r)$	14.85	2.972	3.028	1.675	-	1.822	-	-	0.945	-
r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_r	-0.1	-0,14	0	0	-0,14	0	0,1	0,15	0,14	0,14
y_r	0	0,39	0,29	0,13	0,57	0,48	0	0,23	0,39	0,57
μ_r	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0
$g(M_r)$	1.232	-	-	-	0.426	-	0.932	-	-	0.183
r	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_r	0	0.29	0.29	0.22	0.42	0.35	0.3	0.57	0.5	0.71
y_r	0.71	0.42	0.28	0.1	0.28	0.15	0	0.14	0	0
μ_r	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
$g(M_r)$	0	0.357	-	-	0.602	-	0.896	1.116	1.228	6.908

способами (с 30 и 36 узловыми точками). Оба способа триангуляции были показаны на рис. 1 и 2. Координаты (x_r, y_r) узлов для I-go способа триангуляции приводились в табл. 1, для второго, регулярного, способа триангуляции они не приведены, так как их очень просто вычислить. Как видно, по первому способу мы имеем 13 внутренних узлов, по второму - 15. Системы такого порядка решались на ЭВМ ТЕСЛА 200, время счета было 7, соответственно 9 минут. В таблице 2 приводятся результаты расчета поля давления $u^{(00)}(x_r, y_r)$ по МКЭ с 30 узловыми точками, а рядом - точное, согласно (36), решение $u(x_r, y_r)$.

Таблица 2

Поле давления $u^{(00)}(x_r, y_r)$, вычисленное по первому способу триангуляции

r	1	2	3	4	5	6	7	8
$u^{(00)}$	14.85	2.972	3.028	1.675	1.837	1.822	1.343	1.489
u	11.34	3.009	2.961	1.679	1.831	1.790	1.342	1.467
r	9	10	11	12	13	14	15	16
$u^{(00)}$	0.945	1.147	1.232	0.810	0.811	0.988	0.426	0.476
u	0.970	1.132	1.212	0.817	0.807	0.989	0.415	0.471
r	17	18	19	20	21	22	23	24
$u^{(00)}$	0.932	0.752	0.511	0.183	0	0.357	0.617	0.845
u	0.928	0.745	0.513	0.176	-0.006	0.367	0.618	0.838
r	25	26	27	28	29	30		
$u^{(00)}$	0.602	0.815	0.896	1.116	1.228	0.691		
u	0.615	0.817	0.885	1.129	1.198	0.149		

В табл. 3 приводятся компоненты скорости фильтрации \vec{w}_0 и ее модуль, где $\vec{w}_0 \equiv \frac{\vec{w}}{k_0} = -\text{grad} u$,
 отнесенные как это уже отмечалось, к центрам тяжести $(x_i^{(s)}, y_i^{(s)})$ конечных элементов - треугольников e_s . (37)

$$\frac{1}{2} \int \sigma v^2 ds, \int q ds,$$

значит, в $\Phi(v^{(n)})$ появляются дополнительные слагаемые

$$\frac{1}{2} \int_{\Gamma_h^{(s)}} \sigma(x, y) (P^{(s)}(x, y))^2 ds, \int_{\Gamma_h^{(s)}} q(x, y) P^{(s)}(x, y) ds,$$

где $\Gamma_h^{(s)}$ - те стороны треугольников e_s , которые принадлежат границе $\partial \Omega_h$ и на которых $\sigma \neq 0$ и $q \neq 0$. Сумму всех этих слагаемых можно представить в виде

$$\frac{1}{2} \bar{U}^T \Sigma \bar{U}$$

с матрицей Σ , (которая добавляется к матрице A в (27)) и в виде

$$\bar{g}^T \bar{U}$$

с вектором-строкой \bar{g}^T (который добавляется к вектору-строке \bar{b}^T). Это позволяет писать функционал $\Phi(v^{(n)})$ в одной и той же форме (28) для всех задач P_i :

$$\Phi(v^{(n)}) = \frac{1}{2} \bar{U}^T A \bar{U} - \bar{b}^T \bar{U}, \quad (28')$$

причем по прежнему матрица A будет симметричной.

Порядок системы уравнений (29) совпадает с числом узловых точек M_r . Но фактически требуется определить ν_1 компоненту вектора \bar{U} (ν_1 совпадает с n лишь для задач P_2 и P_3), где $n - \nu_1$ есть число тех граничных точек $M_r \in \partial \Omega_h$, в которых заданы граничные условия I^{r0} рода (т.е. известно значение искомой функции). С целью использования этого момента для более эффективного решения системы уравнений (29) предлагается поступать так (ср. с [3], где, правда, не проводится упорядочение нумерации узлов M_r): сперва нумеруются все внутренние узлы, а граничные узлы получают глобальные индексы $\nu_1 + 1, \nu_1 + 2, \dots, n$. После этого последние $n - \nu_1$ уравнений системы (29) заменяются на систему

$$I \bar{U} = \bar{g}.$$

Здесь I - матрица $(n - \nu_1) \times n$, содержащая в K -ой строке единицу в $(\nu_1 + K)$ -ом месте и нули в остальных, \bar{g} - вектор-столбец с первыми ν_1 нулевыми компонентами и с остальными, равными $g(M_r)$, $r = \nu_1 + 1, n$, где g - функция из краевого условия (2₁) или первого из условий (2₄). Этот прием удобен тем, что

система (29) имеет порядок, совпадающий с числом узловых точек, но практически мы должны решить систему более низкого порядка: порядка ν .

Уже отмечалось, что матрица A является симметричной матрицей. Из положительной определенности билинейной формы следует невырожденность матрицы A (единственный сингулярный случай: задача P_2 с $q(x,y) \equiv 0$; тогда полагаем значение одного параметра U_r , напр., для фиксированной граничной точки, равным нулю).

Опишем теперь некоторые практические моменты, связанные с реализацией МКЭ на ЭВМ. Исходные данные для программы содержат следующую информацию:

а) координаты каждого узла M_r , $r = \overline{1, n}$ и его коды, т.е. глобальный индекс узла и его характеристику (если данный узел является граничным с заданным значением краевой функции Γ^0 рода, то его характеристика равна, напр., нулю и к информации тогда добавляется известное значение граничной функции в этой точке, для остальных узлов характеристика равняется, напр., единице);

б) глобальные индексы вершин $M_e^{(s)}$ ($e = i, j, k$) всех треугольников e_s ($s = \overline{1, m}$).

В качестве примера приведем необходимые нам при рассмотрении конкретной задачи исходные данные, которые соответствуют показанной на рис. I триангуляции области, имеющей форму прямоугольного треугольника: в табл. I приводятся величины, относящихся к пункту а). (Информация по пункту б) ясна из рис. I).

Зная глобальные индексы, тем самым и координаты вершин всех треугольников, легко вычислить матрицы $S^{(s)}$ и $(S^{(s)})^{-1}$. После этого, с применением какой-нибудь кубатурной формулы (о них подробнее будет сказано ниже), вычисляются входящие в выражения для $P^{(s)}$, $Q^{(s)}$ и $\bar{b}^{(s)}$ интегралы. Тем самым по (26) определены матрицы $A^{(s)}$. Остается перейти по формуле (27) от матриц $A^{(s)}$ и векторов $\bar{b}^{(s)}$ третьего порядка к глобальной матрице A и вектору-столбцу \bar{b} n -го порядка. Это удобно сделать следующим образом. Начинаем с нулевой матрицы A и вектора \bar{b} . Пусть рассматривается треугольник e_s и вершины его $M_e^{(s)}$ име-

ют глобальные индексы r_i, r_j, r_k . Тогда элемент $a_{r_i r_m}^{(s)}$ матрицы $A^{(s)}$ добавляется к элементу $a_{r_i r_m}$ матрицы A и элемент $b_{r_i}^{(s)}$ добавляется к элементу b_{r_i} вектора \vec{b} . После рассмотрения всех треугольников $e_s (s = \overline{1, m})$ получим окончательный вид матрицы A и вектора \vec{b} . Отметим следующее важное свойство матрицы A : если рассматриваются два узла триангуляции M_{r_1} и M_{r_2} и они не являются соседними (т.е. нет треугольника, для которого M_{r_1} и M_{r_2} являются двумя его вершинами), то в матрице A элементы $a_{r_1 r_2} = a_{r_2 r_1} = 0$. Следовательно, надо стараться нумерацию узлов триангуляции проводить таким образом, чтобы величина $L = \max_j |r_i - r_j|$, где r_i, r_j - номера соседних узлов, была минимальной: при такой нумерации обращаются в нуль все элементы матрицы A , отстоящие от главной диагонали дальше чем L . Это значит, что матрица A будет иметь вид ленточной матрицы с общей шириной ленты $2L + 1$. Это, во-первых, позволяет (с учетом симметрии матрицы A) всю информацию о матрице A оформить в виде прямоугольной матрицы величины $(L+1)n$. Во-вторых, можно применять методы для решения системы (29), учитывающие ленточную структуру и симметричность матрицы A , значит, являющихся более эффективными, чем стандартные методы. В частности, при решении рассматриваемой ниже конкретной задачи использовался алгоритм Холецкого. [3].

Уже отмечалось, что вычисление $P^{(s)}$, $Q^{(s)}$ и $\vec{b}^{(s)}$ требует применения кубатурных формул. Рассмотрим этот вопрос немного подробнее. Кубатурные формулы, с одной стороны, должны быть достаточно просты - с малым количеством узловых точек - чтобы объем работы по приближенному вычислению интегралов по треугольникам e_s и кускам границы не стал обременяющим для метода. С другой стороны, нельзя допускать слишком большой погрешности при замене интегралов их приближенными значениями, тем более, что это часто приводит к ухудшению свойства положительной определенности матрицы A . Например, можно предложить точную для квадратичных полиномов формулу:

$$\int_{e_s} \varphi(x, y) dx dy = \frac{\det S^{(s)}}{6} \left[\varphi\left(\frac{M_1^{(s)} + M_2^{(s)}}{2}\right) + \varphi\left(\frac{M_2^{(s)} + M_3^{(s)}}{2}\right) + \varphi\left(\frac{M_3^{(s)} + M_1^{(s)}}{2}\right) \right],$$

где в правой стороне использована краткая запись: $\varphi\left(\frac{M_i^{(3)} + M_j^{(3)}}{2}\right) =$

$= \varphi\left(\frac{x_i^{(3)} + x_j^{(3)}}{2}, \frac{y_i^{(3)} + y_j^{(3)}}{2}\right)$ и т.д. Другой возможный подход: трансформация треугольника e_s в "стандартный" треугольник e_0 с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ при помощи формул преобразования:

$$\begin{aligned} x &= x_i^{(3)} + (x_j^{(3)} - x_i^{(3)})\xi + (x_k^{(3)} - x_i^{(3)})\eta, \\ y &= y_i^{(3)} + (y_j^{(3)} - y_i^{(3)})\xi + (y_k^{(3)} - y_i^{(3)})\eta. \end{aligned}$$

Тогда
$$\int_{e_s} \varphi(x, y) dx dy = \int_{e_0} \bar{\varphi}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (31)$$

где
$$\bar{\varphi}(\xi, \eta) = \varphi\left[x_i^{(3)} + (x_j^{(3)} - x_i^{(3)})\xi + (x_k^{(3)} - x_i^{(3)})\eta, y_i^{(3)} + (y_j^{(3)} - y_i^{(3)})\xi + (y_k^{(3)} - y_i^{(3)})\eta\right].$$

Если коэффициенты исходного уравнения (I) являются постоянными, то интеграл в правой части вычисляется точно с использованием известной формулы:

$$\int_{e_0} \xi^a \eta^b d\xi d\eta = \frac{a! b!}{(a+b+2)!}$$

При переменных коэффициентах для эффективного приближенного вычисления интегралов от функции $\varphi(\xi, \eta)$ по e_0 можно поступать следующим образом. При помощи замены переменных: сначала $\eta = (1-\xi)t$, потом $\xi = \frac{1-u}{2}$, $t = \frac{1-p}{2}$ получаем

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \varphi(\xi, \eta) d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^1 w(u, p) \varphi\left[\frac{1-u}{2}, \frac{(1-p)(1+u)}{4}\right] du dp,$$

где
$$w(u, p) = \frac{1}{8}(1+u) \varphi\left\{\frac{1-u}{2}, \frac{(1-p)(1+u)}{4}\right\}.$$

Теперь к последнему интегралу можно применить двухточечную формулу Гаусса [9]:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w(u, p) du dp \approx w\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + w\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + w\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) + w\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Это описание МКЭ закончим рассмотрением сходимости решения дискретной задачи к решению исходной вариационной задачи, сделав предварительно одно замечание относительно терминологии. МКЭ иногда называют вариантом метода Ритца (по крайней мере, для задач с симметрическим положительно определенным оператором). На наш взгляд, это не совсем справедливо и по следующей причине. По методу Ритца, как известно (напр. [6]) выбирается последовательность координатных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая кроме линейной независимости любого конечного числа n элементов $\{\varphi_k\}_{k=1}^n$ должна обладать свойством полноты в соответствующем функциональном пространстве. Это позволяет представить любой элемент пространства сходящимся рядом по системе координатных функций, из которой для приближенного решения используется конечный начальный отрезок последовательности. По отношению к МКЭ нельзя ставить условие полноты системы базисных функций, так как при изменении n меняется вся система базисных функций-сплайнов. Требование полноты системы координатных функций в МКЭ заменяется условием плотности системы множеств $V^{(n)}$: множество функций $V^{(n)}$ называется плотным, если для любой $v \in W_2^1(\Omega)$ и любого $\epsilon > 0$ существует такое n и коэффициенты $\{c_k\}_{k=1}^n$, что

$$\|w^{(n)} - v\|_{W_2^1} < \epsilon.$$

(Здесь $w^{(n)}$ определено согласно (15)).

Выше уже отмечалось, что используются также сплайны более высоких степеней (напр., при рассмотрении задач для уравнений порядка выше $2^{го}$). Множество сплайнов $v^{(n)}$, определенных на $\bar{\Omega}_h$ и являющихся на каждом из треугольников полиномами степени k , будем обозначать через $V_k^{(n)}$. Проведенное нами рассмотрение относилось к $V_1^{(n)}$, для которых узловыми параметрами являются значения искомой функции в вершинах треугольников. Это множество $V_1^{(n)}$ входит в $C^0(\bar{\Omega}_h)$. Для множества $V_2^{(n)}$ узловыми параметрами являются значения искомой функции в вершинах и серединах сторон треугольников. Множество $V_2^{(n)}$, так же как и $V_3^{(n)}$, по-прежнему являются подмножествами $C^0(\bar{\Omega}_h)$. Для $V_3^{(n)}$ узловыми параметрами являются значения функции и ее первых производ-

ных в вершинах и значение функции в центре тяжести треугольника. Наконец, для множества $V_{\Gamma}^{(n)}$ узловыми параметрами являются значения функции, ее 1^x и 2^x производных в вершинах и нормальной производной в серединах сторон треугольников. Имеем включение $V_{\Gamma}^{(n)} \subset C^1(\bar{\Omega}_h)$. (Доказательство всех указанных включений можно найти в [2], гл. I; необходимо учесть только различие обозначений: автор [2] функции, K -ая производная которых терпят разрывы первого рода лишь на сторонах конечного элемента, обозначает через $C_1^k(\bar{\Omega}_h)$).

Мы приведем здесь несколько утверждений относительно сходимости для задачи P_1 с однородным краевым условием (2_I) , в случае интереса отсылая читателя к следующей литературе: [1], гл. 3, 4, [2], гл. 4, [5], гл. 2, 3.

Теорема. Пусть билинейная форма удовлетворяет условиям:

$$|a(v, w)| \leq c_1 \|v\| \|w\|, \quad a(v, v) \geq c_2 \|v\|^2.$$

Пусть, далее, система $V_{\kappa}^{(n)}$ плотна (по отношению к параметру n) в $V = W_1^2(\Omega)$. Тогда существует точно один элемент $u^{(n)} \in V_{\kappa}^{(n)}$ со свойствами

$$a(u^{(n)}, v^{(n)}) = F(v^{(n)}), \quad \forall v^{(n)} \in V_{\kappa}^{(n)}, \quad \Phi(u^{(n)}) = \min_{v^{(n)} \in V_{\kappa}^{(n)}} \Phi(v^{(n)}),$$

причем $\|u^{(n)} - u\| \leq \sqrt{\frac{c_1}{c_2}} \|v^{(n)} - u\|$.

Теорема. Пусть h - максимум длин сторон треугольников e_s , α - минимальный угол треугольников и u - решение задачи (I) с однородным условием (2_I) . Тогда:

1) если $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $|D^2 u| \leq M_2$ в Ω , то существует $v^{(n)} \in V_1^{(n)}$, для которой выполняются следующие неравенства:

$$\|v^{(n)} - u\| \leq \beta_1 M_2 h^2 \quad \text{для } \forall (x, y) \in \bar{\Omega},$$

$$|D^1 v^{(n)} - D^1 u| \leq \frac{\beta_2 M_2}{\sin \alpha} h \quad \text{для } \forall (x, y) \in e_s; \quad (32)$$

2) если $u \in C^3(\bar{\Omega})$, $|D_3 u| \leq M_3$ в Ω , то существует $v^{(n)} \in V_2^{(n)}$, для которой выполняются неравенства

$$\|v^{(n)} - u\| \leq \gamma_1 M_3 h^3 \quad \text{для } \forall (x, y) \in \bar{\Omega},$$

$$|D^1 v^{(n)} - D^1 u| \leq \frac{\gamma_2 M_3}{\sin \alpha} h^2 \quad \text{для } \forall (x, y) \in e_s; \quad (33)$$

3) если $u \in C^4(\bar{\Omega})$, $|D^4 u| \leq M_4$ в Ω , то существует $v^{(n)} \in V_3^{(n)}$ для которой выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |v^{(n)} - u| &\leq \delta, M_4 h^4 \quad \text{для } \forall (x, y) \in \bar{\Omega}, \\ |D^i v^{(n)} - D^i u| &\leq \frac{\delta_2 M_4}{\delta^{1/2} \alpha} h^3 \quad \text{для } \forall (x, y) \in e_3. \end{aligned} \quad (34)$$

Здесь $D^i u$ обозначает любую из производных i -го порядка функции u .

Если коэффициент $\kappa(M)$ в уравнении (I) тождественно равен 1, то константы в оценках (32)–(34) имеют следующие величины: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 6$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 2$, $\delta_1 = 3$, $\delta_2 = 5$.

Из последней теоремы вытекает следующая оценка:

$$\|u^{(n)} - u\|_{L_2} \leq K_i M_{\text{opt}} \frac{h^i}{\delta^{1/2} \alpha} \quad \text{для } u \in V_i^{(n)} \quad \text{при } i = 1, 2, 3.$$

Постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа в треугольнике и результаты ее решения МКЭ

Рассмотрим задачу об определении поля давления в несжимаемой жидкости, фильтрующейся в пористой среде при наличии в ней скважин, на которых заданы давления. Как известно ([10], [11]), математическое описание фильтрации однородной жидкости в пористой среде основывается на законе Дарси,

$$\vec{w} = -\kappa_0 \text{grad } u, \quad (35)$$

устанавливающим линейную связь между скоростью фильтрации \vec{w} и градиентом давления u . Коэффициент фильтрации κ_0 характеризует свойства как среды, так и жидкости и может быть представлен в виде $\kappa_0 = \kappa/\mu$, где κ – проницаемость среды, а μ – вязкость жидкости. Подставляя скорость фильтрации из закона Дарси в уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$\text{div } \vec{w} = 0$$

получаем, что поле давления в однородной среде ($\kappa_0 = \text{const}$) удовлетворяет уравнению Лапласа. Для теории фильтрации представляет особый интерес рассмотрение задач об определении поля давления с учетом работы скважины, на которых могут быть заданы граничные условия всех трех основных типов. Для задач, возникающих в теории нефтедобычи, характерны следующие две

особенности: 1) радиусы скважин очень малы по сравнению с расстояниями между ними; 2) скважины, как правило, располагаются регулярно во всей области (напр., в параллельных рядах). Эта регулярность расположения скважин позволяет рассматривать задачу для отдельного участка области (называемого элементом пласта). Элементы пласта имеют простую геометрическую форму - напр., прямоугольника, многоугольника и т.п. Нами для модельной задачи в качестве элемента был взят прямоугольный треугольник ABC с катетами единичной длины. Наличие скважин моделировалось кругами малого радиуса r_0 (в конкретных расчетах в основном варианте была взята величина $r_0 = 0.0005$), центры которых были помещены на концах гипотенузы; в точках A $(-\sqrt{2}, 0)$ и C $(\sqrt{2}, 0)$. Вершина B при прямом угле имела координату $(0, 1)$. Для анализа эффективности применяемых численных методов - МКЭ и МКР - было желательно иметь точное решение. В качестве такого была взята суперпозиция двух фундаментальных решений на плоскости, имеющая вид:

$$u = 2 \ln \frac{1}{r_A} + \ln \frac{1}{r_C}, \quad (36)$$

где r_A , r_C - расстояние от рассматриваемой точки до точек A и C соответственно. Итак, рассматривалась в дальнейшем задача Дирихле для уравнения Лапласа в треугольнике ABC за выбросом двух секторов радиуса r_0 с центрами в точках A и C . В качестве крайних значений задавалось точное решение из (36), значит, в результате численного решения мы должны получить также (36) внутри нашей области.

Для МКЭ представляло бы существенные трудности учет выброса секторов в точках A и C , так как тогда условие отделения от нуля минимального угла α треугольников e_s (согласно последней теореме) требовал бы введения большого числа конечных элементов. С другой стороны, решение u в вершинах A и C имеет особенности. Поэтому при реализации МКЭ было сделано следующее: триангулировался весь треугольник, без выброса малых секторов, а в качестве краевой функции в точках вершин A и C бралось значение по (36), с заменой $r_A = 0$ (или $r_C = 0$) на $r_A = r_0$ (соответственно $r_C = r_0$).

Триангуляция треугольника ABC осуществлялась двумя

Таблица 3

Координаты $(x_i^{(s)}, y_i^{(s)})$ центров тяжести треугольников, компоненты $w_{0,x}$ и $w_{0,y}$ скорости фильтрации \vec{w}_0 и ее модуль $|\vec{w}_0|$; вычисленные в центрах тяжести треугольников по первому способу триангуляции ($n = 30, m = 41$)

s	$x_i^{(s)}$	$y_i^{(s)}$	$w_{0,x}$	$w_{0,y}$	$ \vec{w}_0 $
1	2	3	4	5	6
1	-0,59	0,05	5,6295E+1	2,8547E+1	6,3120E+1
2	-0,45	0,19	4,9794E+0	3,9291E+0	6,3430E+0
3	-0,47	0,10	5,0257E+0	2,9128E+0	5,8088E+0
4	-0,38	0,05	6,0300E+0	1,9085E+0	6,3248E+0
5	-0,21	0,03	2,9500E+0	9,6719E-1	3,1045E+0
6	-0,29	0,08	3,0253E+0	9,0696E-1	3,1583E+0
7	-0,24	0,16	3,0560E+0	9,8692E-1	3,2114E+0
8	-0,26	0,22	2,3668E+0	2,7101E+0	3,5981E+0
9	-0,35	0,24	2,5546E+0	2,6234E+0	3,6617E+0
10	-0,33	0,33	2,5546E+0	2,8422E+0	3,8215E+0
11	-0,24	0,31	2,4139E+0	2,8422E+0	3,7269E+0
12	-0,16	0,11	2,9942E+0	1,0202E+0	3,1632E+0
13	0,00	0,04	1,5000E+0	7,2380E-1	1,6655E+0
14	-0,08	0,12	1,5288E+0	7,0166E-1	1,6821E+0
15	-0,05	0,22	1,8000E+0	1,1085E+0	2,1139E+0
16	-0,10	0,30	1,4360E+0	2,0186E+0	2,4772E+0
17	-0,19	0,35	1,3071E+0	2,0266E+0	2,4116E+0
18	-0,19	0,46	1,3282E+0	2,1318E+0	2,5117E+0
19	-0,05	0,39	1,2537E+0	1,7633E+0	2,1635E+0
20	-0,09	0,48	1,0167E+0	2,1318E+0	2,3619E+0
21	-0,05	0,59	9,7537E-1	2,0675E+0	2,2860E+0
22	0,05	0,59	7,6034E-1	2,0675E+0	2,2029E+0
23	0,09	0,48	9,1815E-1	1,8220E+1	2,0403E+0
24	0,05	0,39	8,8041E-1	1,7633E+0	1,9709E+0
25	0,10	0,30	1,0183E+0	1,5703E+0	1,8715E+0
26	0,05	0,22	8,3358E-1	1,1085E+0	1,3869E+0
27	0,08	0,12	1,2290E+0	5,1535E-1	1,3327E+0

Продолжение табл.3

I	2	3	4	5	6
28	0,21	0,03	1,8000E-I	6,5538E-I	6,7965E-I
29	0,16	0,11	9,0431E-2	7,6286E-I	7,6821E-I
30	0,19	0,35	7,1612E-I	1,5514E+0	1,7087E+0
31	0,24	0,16	-3,4907E-2	6,9538E-I	6,9626E-I
32	0,26	0,22	3,6131E-I	1,6859E+0	1,7242E+0
33	0,24	0,31	2,9979E-I	1,8582E+0	1,8822E+0
34	0,33	0,33	1,1647E-I	1,8582E+0	1,8618E+0
35	0,19	0,46	6,6200E-I	1,8220E+0	1,9385E+0
36	0,35	0,24	1,1647E-I	1,5729E+0	1,5772E+0
37	0,29	0,08	2,7423E-2	5,3332E-I	5,3403E-I
38	0,38	0,05	-1,6600E+0	1,0958E+0	1,9891E+0
39	0,47	0,10	-1,3039E+0	1,4519E+0	1,9515E+0
40	0,45	0,19	-1,2646E+0	2,3185E+0	2,6392E+0
41	0,59	0,05	-2,7048E+1	1,4324E+1	3,0606E+1

Наконец, в табл.4 приводятся те же величины, что в табл.3, но для второго способа триангуляции.

Таблица 4

Координаты $(x_i^{(3)}, y_i^{(3)})$ центров тяжести треугольников, компоненты $w_{0,x}$ и $w_{0,y}$ скорости фильтрации \vec{w}_0 и ее модуль $|\vec{w}_0|$, вычисленные в центрах тяжести треугольников по второму способу триангуляции ($n = 36, m = 49$)

s	$x_i^{(3)}$	$y_i^{(3)}$	$w_{0,x}$	$w_{0,y}$	$ \vec{w}_0 $
I	2	3	4	5	6
1	-0,60	0,04	5,6762E+1	4,6238E+1	7,3211E+1
2	-0,50	0,14	7,0929E+0	5,7071E+0	9,1038E+0
3	-0,50	0,07	7,0929E+0	1,0845E+0	7,1753E+0
4	-0,40	0,04	5,8000E+0	2,2599E+0	6,2247E+0
5	-0,40	0,24	3,8076E+0	3,3924E+0	5,0996E+0

Продолжение табл.4

I	2	3	4	5	6
6	-0,40	0,18	3,8076E+0	2,4217E+0	4,5124E+0
7	-0,30	0,14	3,7017E+0	2,5275E+0	4,4823E+0
8	-0,30	0,07	3,7017E+0	3,5237E-I	3,7185E+0
9	-0,20	0,04	2,8500E+0	1,1267E+0	3,0646E+0
10	-0,30	0,34	2,9427E+0	6,5573E+0	7,1873E+0
11	-0,30	0,28	2,9427E+0	2,5275E+0	3,8791E+0
12	-0,20	0,24	2,3853E+0	3,0849E+0	3,8995E+0
13	-0,20	0,18	2,3853E+0	1,2111E+0	2,6751E+0
14	-0,10	0,14	1,9338E+0	1,6625E+0	2,5502E+0
15	-0,10	0,07	1,9338E+0	2,9382E-I	1,9560E+0
16	0,00	0,04	1,4000E+0	7,7913E-I	1,6022E+0
17	-0,20	0,44	-5,2976E-I	2,9764E-2	5,3060E-I
18	-0,20	0,38	-5,2977E-I	3,0849E+0	3,1301E+0
19	-0,10	0,34	9,6289E-I	1,5922E+0	1,8608E+0
20	-0,10	0,28	9,6289E-I	1,6625E+0	1,9212E+0
21	0,00	0,24	1,1056E+0	1,5198E+0	1,8794E+0
22	0,00	0,18	1,1056E+0	8,3432E-I	1,3851E+0
23	0,10	0,14	7,7714E-I	1,1628E+0	1,3986E+0
24	0,10	0,07	7,7714E-I	2,1289E-I	8,0578E-I
25	0,20	0,04	2,5000E-I	6,9211E-I	7,3588E-I
26	-0,10	0,54	1,0327E+0	2,2673E+0	2,4914E+0
27	-0,10	0,48	1,0327E+0	1,5922E+0	1,8978E+0
28	0,00	0,44	8,9040E-I	1,7346E+0	1,9497E+0
29	0,00	0,38	8,9040E-I	1,5198E+0	1,7614E+0
30	0,10	0,34	7,4871E-I	1,6614E+0	1,8224E+0
31	0,10	0,28	7,4871E-I	1,1628E+0	1,3830E+0
32	0,20	0,24	3,5944E-I	1,5521E+0	1,5932E+0
33	0,20	0,18	3,5944E-I	7,4513E-I	8,2729E-I
34	0,30	0,14	-3,3382E-I	1,4384E+0	1,4766E+0
35	0,30	0,07	-3,3382E-I	1,6137E-I	3,7077E-I
36	0,40	0,04	-1,5500E+0	1,2669E+0	2,0019E+0
37	0,00	0,64	4,9999E-I	2,4000E+0	2,4515E+0
38	0,00	0,58	5,0000E-I	1,7346E+0	1,8052E+0

Продолжение табл.4

1	2	3	4	5	6
39	0,10	0,54	8,1728E-I	1,4173E+0	1,6360E+0
40	0,10	0,48	8,1728E-I	1,6614E+0	1,8516E+0
41	0,20	0,44	6,3936E-I	1,8394E+0	1,9473E+0
42	0,20	0,38	6,3936E-I	1,5521E+0	1,6786E+0
43	0,30	0,34	2,4573E-I	1,9457E+0	1,9612E+0
44	0,30	0,28	2,4573E-I	1,4384E+0	1,4592E+0
45	0,40	0,24	-4,0794E-I	2,0921E+0	2,1315E+0
46	0,40	0,18	-4,0794E-I	1,3643E+0	1,4239E+0
47	0,50	0,14	-2,3718E+0	3,3282E+0	4,0868E+0
48	0,50	0,07	-2,3718E+0	5,1985E-I	2,1281E+0
49	0,60	0,04	-2,8905E+1	2,4641E+1	3,7982E+1

Эти результаты по расчету модельной задачи МКЭ, конечно, надо оценивать как методические: для получения более точных результатов требуется взять значительно большее число узловых точек (конечных элементов).

Решение МКР модельной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в треугольнике.

Наибольшую вычислительную трудность в этой модельной задаче, как уже отмечалось, представляет наличие скважин, работа которых моделируется выбросом из рассматриваемой области малых секторов радиуса r_0 с центрами в вершинах A и C треугольника. Один из подходов для преодоления этой сложности в МКР: построение особой разностной аппроксимации в точках A и C (эта аппроксимация строится с учетом асимптотики поведения решения вблизи особенности). Такой подход реализован, например, в серии работ В.Б. Андреева, из которых здесь укажем [12]. Нами был использован другой подход, базирующийся на альтернирующем методе Шварца, дающем возможность разбить исходную область на подобласти (в нашем случае это будут два частично пересекающихся кольцевых сектора, каждый из которых

представляет собой разность двух секторов - с радиусами единица и r_0), в которых удобно аппроксимировать условия на скважинах и в которых для решения сеточных уравнений можно применить наиболее эффективные методы.

Итак, из вершин A и C проводим дуги радиуса единица и в итоге получаем два частично пересекающихся сектора, из которых выброшены малые сектора радиуса r_0 . Введем в каждом из кольцевых секторов свою полярную систему координат с центром в точке A (соответственно C) и введем, соответственно, две полярные сетки, которые можно записать в единообразном виде:

$$\bar{\omega}_{hrh\theta} = \bar{\omega}_{hr} \cup \bar{\omega}_{h\theta},$$

где

$$\bar{\omega}_{hr} = \{r_i | r_i = r_0 + (i-1)h_r; i = \overline{1, N}; h_r = \frac{1-r_0}{N-1}\},$$

$$\bar{\omega}_{h\theta} = \{\theta_j | \theta_j = (j-1)h_\theta; j = \overline{1, L}; h_\theta = \frac{\pi}{4(L-1)}\}.$$

Классическую аппроксимацию второго порядка для уравнения Лапласа, следуя [14], [15] запишем в виде

$$\frac{1}{r} \left[\left(r - \frac{hr}{2} \right) y_r^{\kappa} \right]_r + \frac{1}{r^2} y_{\theta\theta}^{\kappa} = 0. \quad (38)$$

Здесь использована безиндексная запись $y^{\kappa} = y_i^{j,\kappa}$, где индекс κ указывает принадлежность решения одной из подобластей: при $\kappa = 1$ это левая сторона (с центром в точке A), при $\kappa = 2$ - правая сторона. В индексах (38) запишется так:

$$\frac{1}{r_i} \left[\left(r_i + \frac{hr}{2} \right) \frac{y_i^{j,\kappa} - y_i^{j+1,\kappa}}{h_r^2} - \left(r_i - \frac{hr}{2} \right) \frac{y_i^{j,\kappa} - y_{i-1}^{j,\kappa}}{h_r^2} \right] + \frac{1}{r_i^2} \frac{y_i^{j,\kappa} - 2y_i^{j+1,\kappa} + y_i^{j+2,\kappa}}{h_\theta^2} = 0.$$

Считая, что $L = 2^{\ell} + 1$, ℓ - целое, мы можем для каждого из кольцевых секторов применить эффективный метод решения разностных уравнений - метод полной редукции в направлении (см. [6], гл. III). Но для этого требуется знание граничных условий на дугах радиуса единица. Эти граничные условия можно получить двояким образом: 1) использовать интерполяцию; 2) разностной аппроксимацией оператора Лапласа на нерегуляр-

ном шаблоне. Нами при практическом решении была использована первая возможность. Как интерполяция, так и аппроксимация на нерегулярном шаблоне вносят дополнительную погрешность. Можно показать, однако, что если локальная аппроксимация на дуге имеет порядок $O(\eta)$, то на всей сетке по-прежнему будем иметь $O(h_r^2 + h_\theta^2)$. (Этот известный результат при неравномерной аппроксимации уравнения Лапласа около границы [14], гл. IV).

Опишем теперь применение метода Шварца. Задаются произвольные значения решения на дуге радиуса I , проведенной из точки A (назовем ее "левой" дугой), и находится методом полной редукции I^e приближение к решению в левом кольцевом секторе: \hat{y}^1 . Исходя из него, одним из указанных выше двух способов находятся значения на "правой" дуге и находится I^e приближение к решению в правом кольцевом секторе \hat{y}^2 . Переходя вновь к левому кольцевому сектору, находим \hat{y}^3 и т.д. В результате получаем последовательность решений $\hat{y}^1, \hat{y}^2, \hat{y}^3, \hat{y}^4, \dots, \hat{y}^n, \hat{y}^{n+1}, \dots$, где индекс n указывает номер итерации. Процесс продолжаем до выполнения условия сходимости:

$$\max_{i,j,k} |\hat{y}_i^{n+1,j,k} - \hat{y}_i^{n,j,k}| < \epsilon_1 |\hat{y}_i^{n,j,k}| + \epsilon_0, \quad (39)$$

где $\epsilon_1 > 0, \epsilon_0 > 0$ - заданные числа.

Можно доказать, что построенный метод сходится не хуже геометрической прогрессии с множителем $q = \frac{1}{3} + \epsilon$. Здесь ϵ - точность, с которой разностная схема дает решение краевой задачи в кольцевом секторе, если на всей границе имеем однородные краевые условия, кроме большой дуги, на которой задано условие $y = 1$.

Опишем теперь результаты численных расчетов, которые проводились при $N = 11$ и $L = 9$.

Рассматривались две различные величины r_0 . При $r_0 = 0,1$ за 4 итерации (при $n = 4$) было найдено точное разностное решение, т.е. разность между 4-й и 5-й итерациями равнялась машинному нулю. Уже после 2-й итерации разность между точным и приближенным решением не превосходила 0,5%. Скорость сходимости не уменьшалась при уменьшении r_0 , однако ошибка в окрестности скважины, где имеются наибольшие градиенты (см.

табл. 3 и 4 при ε , близким к единице и m), начинает возрастать. Так, при $r_0 = 0,0005$, ошибка на дуге $r_1 = r_0 + h_r$ достигает 6%, на дуге $r_2 = r_0 + 2h_r$ - 2%, становясь меньше 1% на третьей дуге. Уменьшение шага по r в два раза уменьшает ошибку на первой дуге которая теперь в два раза ближе к дуге $r = r_0!$ до 4%.

Подчеркнем в заключение, что мы использовали в расчетах постоянный шаг по радиусу. При желании можно было бы, конечно, сделать сгущение шага в направлении r вблизи $r = r_0$ это позволило бы еще уменьшить погрешность.

Список литературы

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
2. Деклу Ж. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1976. 95 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
4. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981. 216 с.
5. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
7. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.
8. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. М.: Мир, 1977. 189 с.
9. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981. 336 с.
10. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
- II. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963. 396 с.

12. Андреев В.Б. Новая сеточная аппроксимация задачи о скважине. - В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.:Изд-во МГУ, вып.34, 1981, с.95-103.
13. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
14. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
15. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.
16. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ

А.А.Буйкис, М.З.Шмите
(ЛГУ им.П.Стучки)

Предлагаемые здесь разностные схемы и алгоритмы их реализации ориентированы в основном на приложения в двух областях. Первая - это вопросы вычисления температурных полей в слоистых и трещиноватых пластах; вторая - процессы переноса загрязнений в пластах подземных вод.

Вычисление температурных полей нефтяных пластов входит частью в общую задачу определения полей давлений, насыщенностей и температур. Однако расчет поля температуры в общей задаче, с одной стороны, является достаточно автономной частью (в общепринятых на сегодня постановках влияние полей давления и насыщенности проявляется лишь как возмущение коэффициентов уравнений теплопереноса), с другой стороны, представляет достаточно много трудностей в вычислительном плане (особенно для многослойных и (или) трещиноватых пластов). Поэтому оправдано отдельное изучение численных методов для определения температурных полей таких сред. Это тем более справедливо потому, что модели теплопереноса (в принятой схематизации процесса) идентичны моделям, которые описывают миграцию примесей в слоистых пластах подземных вод [1], [2].

Задача нахождения температурных полей нефтяных пластов в связи с необходимостью увеличения эффективности нефтедобычи в последние десятилетия непрерывно привлекает внимание исследователей. Подавляющее большинство работ свое внимание сосредотачивают на исследовании однослойных пластов (укажем лишь на монографию [3] и приведенную там библиографию), причем наибольшее распространение получили (как экономичные и достаточно точные для многих конкретных ситуаций) постановки типа "сосредоточенной емкости" или их модификации. Для этих постановок построено много решений в замкнутом виде [3] (см. также [4], [5]). Многослойные пласты менее исследованы. В [6] дано решение в частном случае двухслойного (т.е. симметричного трех-

слоистой) пласта, а в [7] приводится приближенная формула, полученная из некоторых эвристических соображений. Не останавливаясь на публикациях, в которых без какого-либо математического исследования дается решение методом конечных разностей задачи о температурном поле многослойного пласта, укажем на [8], в которой дается вывод осредненных уравнений для определения полей насыщенности, давления и температуры (предполагая линейное распределение температуры (давления) как в каждом пропластке, так и в каждой перемычке, а также нулевую теплоемкость перемычек). Наиболее полное исследование задачи совместного определения полей температуры, насыщенности и давления в многослойных пластах дано в монографии [9]. Но в ней, как и в [8], изучается случай тонких слабопроницаемых перемычек, когда можно пренебречь их теплоемкостью и тем самым исключить их из рассмотрения, вводя в уравнения для пропластков дополнительные источники.

Ниже дается несколько разностных схем для расчета температурных (концентрационных) полей в слоистом пласте, состоящем из пропластков, по которым осуществляется массоперенос (трактуя эти пропластки как сосредоточенные емкости); пропластки разделены непроницаемыми прослойками (перемычками).

Рассмотрим многослойный пласт, состоящий из \mathcal{K} пропластков и расположенный между нагнетательной и эксплуатационной галереями. Пусть координатная ось x ориентирована по направлению простираения пропластков (мощность k -того пропластка принимается равной H_k , мощность перемычки между k -тым и $(k+1)$ -ым пропластком $- H_{k+1/2} > 0$), а координатная ось z перпендикулярна простираению пропластков. Далее, пусть подошва k -го пропластка имеет координату $z = z^{(k)}$, $k = 1, \mathcal{K}$.

Итак, многослойный пласт представляет собой систему чередующихся хорошо и плохо проницаемых слоев. Хорошо проницаемый слой (пропласток) номера k ограничен линией $z = z^{(k)}$ (подошва) и $z = z^{(k)} + H_k = z^{(k+1/2)}$ (кровля его). Конвективный поток в нем характеризуется величиной расхода Q_k (т.е. скорость фильтрации в k -том пропластке равна $V_k = Q_k/H_k$).

Теплопроводностью (диффузией) в направлении конвекции (вдоль оси x) можно пренебрегать (см. [1], [3]). Как уже отме-

чалось, принимается, что непроницаемая для конвективного потока прослойка между кровлей k -того пропластка $\xi = \xi^{(k+\frac{1}{2})}$ и подошвой $(k+1)$ -го пропластка $\xi = \xi^{(k+1)}$ имеет ненулевую толщину $H_{k+\frac{1}{2}}$. Допустим, как в [1]-[9], что в прослойках происходит кондукция (диффузия) лишь в направлении, перпендикулярном простиранию пропластков. Для более удобной записи дальнейших постановок введем еще два фиктивных, бесконечно удаленных слоя: нулевой с $\xi^{(0)} = -\infty$, $H_0 = 0$ и $(k+1)$ -ый с $\xi^{(k+1)} = \infty$.

Приведем теперь систему уравнений для моделирования процессов переноса в описанной выше среде. Уравнения для хорошо проницаемых слоев ($\kappa = \overline{1, K}$):

$$\frac{\partial \tilde{T}_\kappa}{\partial t} = \alpha_{\kappa, \kappa}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_\kappa}{\partial \xi^2} - w_\kappa \frac{\partial \tilde{T}_\kappa}{\partial x}, \quad x > 0, \xi^{(k)} < \xi < \xi^{(k+\frac{1}{2})}, t > 0; \quad (1)$$

непроницаемых слоев ($\kappa = \overline{0, K}$):

$$\frac{\partial \tilde{T}_{\kappa+\frac{1}{2}}}{\partial t} = \alpha_{\kappa+\frac{1}{2}}^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}_{\kappa+\frac{1}{2}}}{\partial \xi^2}, \quad x > 0, \xi^{(k+\frac{1}{2})} < \xi < \xi^{(k+1)}, t > 0. \quad (2)$$

Условий сопряжения на границах слоев ($\kappa = \overline{1, K}$):

$$\tilde{T}_{\kappa-\frac{1}{2}} \Big|_{\xi^{(k)}-0} = \tilde{T}_\kappa \Big|_{\xi^{(k)}+0}, \quad \lambda_{\kappa, \kappa} \frac{\partial \tilde{T}_\kappa}{\partial \xi} \Big|_{\xi^{(k)}+0} = \lambda_{\kappa-\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{T}_{\kappa-\frac{1}{2}}}{\partial \xi} \Big|_{\xi^{(k)}-0}, \quad (3)$$

$$\tilde{T}_\kappa \Big|_{\xi^{(k+\frac{1}{2})-0} = \tilde{T}_{\kappa+\frac{1}{2}} \Big|_{\xi^{(k+\frac{1}{2})+0}, \quad \lambda_{\kappa, \kappa} \frac{\partial \tilde{T}_\kappa}{\partial \xi} \Big|_{\xi^{(k+\frac{1}{2})-0} = \lambda_{\kappa+\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{T}_{\kappa+\frac{1}{2}}}{\partial \xi} \Big|_{\xi^{(k+\frac{1}{2})+0}.$$

Начальные условия ($\kappa = \overline{0, K}$):

$$\tilde{T}_\kappa \Big|_{t=0} = \tilde{T}_\kappa^0(x, \xi), \quad \tilde{T}_{\kappa+\frac{1}{2}} \Big|_{t=0} = \tilde{T}_{\kappa+\frac{1}{2}}^0(x, \xi), \quad (4)$$

и граничные условия на входе (при $x=0$) хорошо проницаемых слоев ($\kappa = \overline{1, K}$):

$$\tilde{T}_\kappa \Big|_{x=0} = \tilde{T}_\kappa^i(\xi, t), \quad (5)$$

Поясним обозначения. Для задачи определения температурного поля: $\alpha_{i,k}^2 = \lambda_{i,k} / c_{i,k} \rho_{i,k}$ - температуропроводность к-того пропластка, где λ - теплопроводность, c - теплоемкость, ρ - плотность (индекс "i" указывает, что параметры относятся к свойствам продуктивного пропластка), $\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2$ - температуропроводность прослойки между к-тым и (к+1)-ым пропластками (как видно, тепловые свойства как различных пропластков, так и различных прослоек могут отличаться друг от друга), $W_k = V_k c_{o,k} \rho_{o,k} / c_{i,k} \rho_{i,k} = Q_k c_{o,k} \rho_{o,k} / H_k c_{i,k} \rho_{i,k}$, где $c_{o,k}$, $(\rho_{o,k})$ теплоемкость (плотность) жидкости, нагнетаемой в к-тый пропласток. Для задачи миграции подземных вод (вытеснения растворов) в слоисто-неоднородном пласте: $\tilde{T}_k(\tilde{T}_{k-\frac{1}{2}})$ - нормированная концентрация в хорошопроницаемых (слабопроницаемых) слоях. Далее (по [I]): $\alpha_{i,k}^2 = D_k / m_{e,k}$, где коэффициент микродисперсии $D_k = D_{m,k} + \delta_{T,k} V_k$, а эффективная пористость $m_{e,k} = m_k + 1/\beta_k$. Здесь $D_{m,k}$ - коэффициент молекулярной диффузии в к-том пропластке, $\delta_{T,k}$ - коэффициент поперечной гидродисперсии, m_k - активная пористость, β_k - коэффициент распределения для процесса сорбции (в этой постановке пренебрегаем кинетикой процесса сорбции);

$\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2 = D_{m,k+\frac{1}{2}} / m_{e,k+\frac{1}{2}}$ (т.е. в слабопроницаемых слоях пренебрегаем гидродисперсией),

$$W_k = V_k / m_{e,k}, \quad \lambda_{i,k} = D_k, \quad \lambda_{k+\frac{1}{2}} = D_{m,k+\frac{1}{2}}$$

Перейдем теперь к осреднению исходной системы уравнений.

Введем

$$\bar{T}_k(x, t) = \frac{1}{H_k} \int_{\tilde{z}^{(k)}}^{\tilde{z}^{(k+\frac{1}{2})}} \tilde{T}_k(x, \tilde{z}, t) d\tilde{z} = \frac{1}{H_k} \int_{\tilde{z}^{(k)}}^{\tilde{z}^{(k+\frac{1}{2})}} \tilde{T}_k(x, \tilde{z}, t) d\tilde{z}, \quad (6)$$

проинтегрируем (1) по \tilde{z} в пределах от $\tilde{z}^{(k)}$ до $\tilde{z}^{(k+\frac{1}{2})}$, выразим в первом члене правой части $\lambda_{i,k} \partial \tilde{T}_k / \partial \tilde{z}$ через потоки $\tilde{T}_k \pm \frac{1}{2}$ при помощи (3).

Это дает:

$$\frac{\partial \bar{T}_k}{\partial t} = \frac{1}{H_k c_{i,k} \rho_{i,k}} \left[\lambda_{k+\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{T}_{k+\frac{1}{2}}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}^{(k-\frac{1}{2})+0}} - \lambda_{k-\frac{1}{2}} \frac{\partial \tilde{T}_{k-\frac{1}{2}}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}^{(k)-0}} \right] - W_k \frac{\partial \tilde{T}_k}{\partial x} \quad (7)$$

причем это уравнение не зависит от значений $z \in [z^{(k)}, z^{(k+1)}]$.

Это показывает, что целесообразно перейти от координаты z к новой координате x_1 по следующему соотношению:

$$x_1 = \begin{cases} z^{(k)} - \sum_{i=0}^{k-1} H_i, & z \in [z^{(k)}, z^{(k+1)}], \\ z - \sum_{i=0}^k H_i, & z \in [z^{(k+1)}, z^{(k+2)}], \end{cases} \quad (H_0 = 0),$$

ставящее интервалу $z^{(k)} \leq z \leq z^{(k+1)}$, который занимает k -тый пропласток, в соответствии координату $x_1^{(k)} = z^{(k)} - \sum_{i=0}^{k-1} H_i$.

Для единообразия обозначений переименуем также другую - горизонтальную - ось x , введя для нее обозначение x_2 . Итак, в новой системе координат (x_1, x_2) пропластки представлены полупрямыми $\{x_1 = x_1^{(k)}, x_2 \geq 0\}$, $k = 0, 1, \dots$

Установим теперь соотношения между температурами $T_k(x_2, t)$ и $\tilde{T}_{k \pm \frac{1}{2}}(x_1, x_2, t)$. Примем, как в классической постановке Ловьерье, что для температуры $T_k(x_2, t)$ (средней температуры k -того пропластка) остаются в силе условия непрерывности (3) температур на кровле и подошве пропластков. Из этого вытекает, что должны выполняться следующие условия непрерывности:

$$\tilde{T}_{k-\frac{1}{2}} \Big|_{x_1^{(k)}-0} = T_k = \tilde{T}_{k+\frac{1}{2}} \Big|_{x_1^{(k)}+0} \quad (3)$$

Далее, так как по определению $\tilde{T}_{k \pm \frac{1}{2}}$ (решение уравнения теплопроводности (2)) она является непрерывной при $x_1^{(k)} < x_1 < x_1^{(k+1)}$, то из сказанного вытекает непрерывность $\tilde{T}_{k \pm \frac{1}{2}}$ при $x_1^{(k)} \leq x_1 \leq x_1^{(k+1)}$ (единственные разрывы первого рода могут появиться при $t=0$ или $\{x_1 = x_1^{(k)}, x_2=0, t \geq 0\}$, если это обусловлено характером правых частей дополнительных условий (4), (5)). Температуру $T_k(x_2, t)$ при этом надо представлять как предел непрерывных $\tilde{T}_{k-\frac{1}{2}}(x_1, x_2, t)$ при $x_1 \rightarrow x_1^{(k)}+0$ и $\tilde{T}_{k+\frac{1}{2}}(x_1, x_2, t)$ при $x_1 \rightarrow x_1^{(k)}-0$. Это позволяет не определять как различные функции $T_k(x_2, t)$ и $\tilde{T}_{k \pm \frac{1}{2}}(x_1, x_2, t)$ и писать просто $T(x_1, x_2, t)$, имея в виду единую непрерывную и ограниченную функцию во всей области определения $\Omega_{t_0} = \Omega \times \{t \in [0, t_0]\}$, где $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq 0\}$. Для $T(x_1, x_2, t)$ имеем следующую задачу, которую естественно

назвать постановкой Ловере для многослойного пласта:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2(x_1) \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}, \quad x_1 \neq x_1^{(k)}, \quad x_2 > 0, \quad t > 0; \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta_{\kappa}^{+} \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1^{(k)+0}} - \beta_{\kappa}^{-} \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1^{(k)-0}} - W_{\kappa} \frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad x_1 = x_1^{(k)}, \quad x_2 > 0, \quad t > 0; \quad (10)$$

$$T|_{t=0} = T^0(x_1, x_2), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 > 0; \quad (11)$$

$$T|_{x_1=x_1^{(k)}, x_2=0} = T_{\kappa}^1(t), \quad (12)$$

Здесь в (9), (10)

$$\alpha^2(x_1) = \alpha_{\kappa, \pm}^2, \quad x_1 \in (x_1^{(k)}, x_1^{(k+1)}), \quad \beta_{\kappa}^{\pm} = \frac{\lambda_{\kappa \pm t}}{c_{4\kappa} \beta_{\kappa} H_{\kappa}},$$

а уравнения (11), (12) однозначно получаются из (4), (5).

Постановка (9) - (12) в несколько иных обозначениях была дана в нашей работе [10], где рассматривалась также разностная схема, аппроксимирующая ее. Поэтому здесь приведем лишь окончательные результаты, за подробностями отсылая к работам [10], [11].

Введем кусочно-постоянный шаг $h_{1, \kappa \pm \frac{1}{2}}$ в направлении x_1 для $x_1^{(k)} < x_1 < x_1^{(k+1)}$, причем так, чтобы все линии $x_1 = x_1^{(k)}$ были узловыми, считая, что $x_1 = x_1^{(k)}$ соответствует индекс $i = N_1^{(k)}$. Пусть шаг в направлении x_2 будет h_2 с индексом j , а шаг в направлении t будет с индексом n . Сеточную функцию, аппроксимирующую $T(x_1, x_2, t)$, обозначим через $y = y_{i,j}^n = y(x_1^i, x_2^j, t^n)$. Пусть, как обычно (см. [12]), $\Lambda_{\alpha}^{+} (\Lambda_{\alpha}^{-})$ - разностная аппроксимация первой производной по x_1 с шагом вперед, (назад), Λ_{β} - аппроксимация второй производной по x_1 центральной разностью, $y_i = (\hat{y} - y)/\tau$, $y^{(\alpha)} = \hat{\sigma} \hat{y} + (\hat{\sigma} - \hat{\sigma}) y$, где $\hat{y} = y_{i,j}^{n+1}$, а вес $\hat{\sigma} \in [0, 1]$. Тогда разностная схема для задачи (9) - (12) записывается в виде:

$$y_t = \alpha_{k+\frac{1}{2}}^2 \Lambda_{11} y^{(b_{1,k+\frac{1}{2}})}, \quad i = \overline{N_1^{(k)}+1, N_1^{(k+1)}-1}, \quad j = \overline{1, N_2}, \quad n = \overline{1, N}; \quad (13)$$

$$\left(1 + \frac{\beta_k h_{1,k-\frac{1}{2}}}{2\alpha_{k-\frac{1}{2}}^2} + \frac{\beta_k^+ h_{1,k+\frac{1}{2}}}{2\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2}\right) y_t = \beta_k^+ \Lambda_{11}^+ y^{(b_{1,k+\frac{1}{2}})} -$$

(14)

$$- \beta_k \Lambda_{11}^- y^{(b_{1,k-\frac{1}{2}})} - W_k \Lambda_{22} y^{(b_{2,k})}, \quad i = \overline{N_1}, \quad j = \overline{1, N_2}, \quad n = \overline{1, N};$$

$$y = T^0(x_1^i, x_2^j), \quad N_1^0 = 0 \leq i \leq N_1^{(k+1)} = N_1, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad n = 0; \quad (15)$$

$$y = T_k^1(t^n), \quad i = \overline{N_1^{(k)}}, \quad j = 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (16)$$

Заметим, что допустима ситуация, когда $N_1^{(k+1)} = N_1^{(k)} + 1$, т.е. когда шаг $h_{1,k+\frac{1}{2}} = h_{k+\frac{1}{2}}$. Тогда выпадает уравнение (13) для промежутка $N_1^{(k)} < i < N_1^{(k+1)}$, но влияние перемычки учитывается в (14) - см. на коэффициент при y_t .

Уравнения (13) и (14) вместе можно записать в стандартном виде разностного уравнения второго порядка по i (при фиксированном $1 \leq j \leq N_2$):

$$A_i \hat{y}_{i-1,j} - C_i \hat{y}_{i,j} + B_i \hat{y}_{i+1,j} = -F_{i,j}, \quad i = \overline{1, N_1-1}, \quad n = \overline{0, N-1}, \quad (17)$$

а граничные условия по x_1 - задание решения (или его производной по x_1) при больших x_1 - в виде:

$$-C_0 \hat{y}_{0,j} + B_0 \hat{y}_{1,j} = -F_{0,j},$$

$$A_{N_1} \hat{y}_{N_1-1,j} - C_{N_1} \hat{y}_{N_1,j} = -F_{N_1,j}, \quad j = \overline{1, N_2}, \quad n = \overline{0, N-1}. \quad (18)$$

Приведем коэффициенты уравнения (17). При $N_1^{(k)} < i < N_1^{(k+1)}$ имеем:

$$A_i = B_i = \frac{\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2 b_{1,k+\frac{1}{2}}}{h_{1,k+\frac{1}{2}}^2}, \quad C_i = \frac{1}{\tau} + B_i + B_i, \quad (19)$$

$$F_{i,j} = \frac{\alpha_{k-\frac{1}{2}}^2 (1 - b_{1,k+\frac{1}{2}})}{h_{1,k+\frac{1}{2}}^2} (y_{i-1,j} - y_{i+1,j}) + \left[\frac{1}{\tau} - \frac{2\alpha_{k-\frac{1}{2}}^2 (1 - b_{1,k+\frac{1}{2}})}{h_{1,k+\frac{1}{2}}^2} \right] y_{i,j}.$$

Для $i = N_1^{(k)} : A_i = \frac{\beta_k^- \sigma_{1,k-\frac{1}{2}}}{h_{1,k-\frac{1}{2}}}$, $B_i = \frac{\beta_k^+ \sigma_{1,k+\frac{1}{2}}}{h_{1,k+\frac{1}{2}}}$,

$C_i = \frac{1}{\tau} + A_i + B_i + \frac{\beta_k^- h_{1,k-\frac{1}{2}}}{2\alpha_{k-\frac{1}{2}}^2 \tau} + \frac{\beta_k^+ h_{1,k+\frac{1}{2}}}{2\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2 \tau} + \frac{w \sigma_{2,k}}{h_2}$,

$F_{i,j} = \frac{w_k \sigma_{2,k}}{h_2} y_{i,j-1} + \left[\frac{1}{\tau} + \frac{\beta_k^- h_{1,k-\frac{1}{2}}}{2\alpha_{k-\frac{1}{2}}^2 \tau} + \frac{\beta_k^+ h_{1,k+\frac{1}{2}}}{2\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2 \tau} - \frac{w_k(1-\sigma_{2,k})}{h_2} - \right.$ (20)

$\left. - \frac{\beta_k^- (1-\sigma_{1,k-\frac{1}{2}})}{h_{1,k-\frac{1}{2}}} - \frac{\beta_k^+ (1-\sigma_{1,k+\frac{1}{2}})}{h_{1,k+\frac{1}{2}}} \right] y_{i,j} + \frac{\beta_k^- (1-\sigma_{1,k-\frac{1}{2}})}{h_{1,k+\frac{1}{2}}} y_{i+1,j} +$
 $+ \frac{\beta_k^+ (1-\sigma_{1,k+\frac{1}{2}})}{h_{1,k+\frac{1}{2}}} y_{i+1,j} + \frac{w_k(1-\sigma_{2,k})}{h_2} y_{i,j-1}$

Алгоритм решения задачи (I3) - (I6) простой - проведение одномерных прогонок по i для последовательно возрастающих от единицы значений индекса j . Этот алгоритм по отношению к разностным схемам типа (I3) - (I6) проанализирован в наших работах [I0], [I1].

Условие устойчивости в равномерной метрике для разностной схемы имеет вид:

$\tau \leq \min \left\{ \min_{0 \leq k \leq K} \frac{h_{1,k+\frac{1}{2}}^2}{2\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2 (1-\sigma_{1,k+\frac{1}{2}})}, \tau_2 \right\}$,

где

$\tau_2 = \min_{1 \leq k \leq K} \frac{1 + \beta_k^- h_{1,k-\frac{1}{2}} \cdot (2\alpha_{k-\frac{1}{2}}^2)^{-1} + \beta_k^+ h_{1,k+\frac{1}{2}} (2\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2)^{-1}}{\beta_k^- (1-\sigma_{1,k-\frac{1}{2}}) h_{1,k-\frac{1}{2}}^{-1} + \beta_k^+ (1-\sigma_{1,k+\frac{1}{2}}) h_{1,k+\frac{1}{2}}^{-1} + w_k (1-\sigma_{2,k}) h_2^{-1}}$

Рассмотрим теперь многослойный пласт, в котором отдельные пропластки представляют гетерогенную среду, состоящую из слабопроницаемых блоков и трещин, по которым происходит движение жидкости со скоростью фильтрации w_k^0 . Для скорости фильтрации в блоках оставим обозначение w_k (очевидно, что $w_k \ll w_k^0$). В [I], [4], [I3] - [I5] дан вывод уравнений тепло-(массопереноса) для трещиноватой среды с учетом тепло-(массообмена) между трещинами и блоками. Поэтому здесь приведем сразу окончательную осредненную систему уравнений -

аналог системы (9) - (12). Уравнение (9) для прослоек остается без изменений, а вместо уравнения (10) для температуры (концентрации) в k -том пропластке появляются два уравнения: для температуры (концентрации) в блоках ($x_1 = x_1^{(k)}$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta_k^+ \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1^{(k)}=0} - \beta_k^- \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1^{(k)}} - w_k \frac{\partial T}{\partial x_2} + \alpha_k (T - \theta_k) \quad (21)$$

и температуры (концентрации) $\theta_k(x_2, t)$ в трещинах

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial t} = -w_k^0 \frac{\partial \theta_k}{\partial x_2} + \alpha_k^0 (T - \theta_k), \quad (22)$$

где α_k, α_k^0 - коэффициенты тепло-(массообмена) между трещинами и блоками. Не останавливаясь на записи очевидных начальных условий и условий на входе k -того пропластка, перейдем к записи разностной аппроксимации уравнений (9), (21), (22). Аппроксимация (9) уравнением (13) останется без изменений. Обозначая через $\bar{z}_k = \bar{z}_{k,j}^n = z_k(x_2^j, t^n)$ сеточную функцию, аппроксимирующую температуру (концентрацию) $\theta_k(x_2, t)$, жидкости (раствора) в трещинах k -того пропластка, разностную аппроксимацию уравнений (21), (22) запишем в виде:

$$\left(1 + \frac{\beta_k^- h_{1,k-\frac{1}{2}}}{2\alpha_{k-\frac{1}{2}}^2} + \frac{\beta_k^+ h_{1,k+\frac{1}{2}}}{2\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2}\right) \bar{z}_k = \beta_k^+ \Lambda_{1,j}^+ (\theta_{1,k+\frac{1}{2}}) - \beta_k^- \Lambda_{1,j}^- (\theta_{1,k-\frac{1}{2}}) - w_k \Lambda_{2,j}^- (\theta_{2,k}) + \alpha_k (\bar{z}_k - y) \quad (23)$$

$$\frac{\partial \theta_{k,t}}{\partial t} = -w_k^0 \Lambda_k^- \bar{z}_k + \alpha_k^0 (y - \bar{z}_k), \quad i = \overline{1, N_1}, j = \overline{1, N_2}, n > 0. \quad (24)$$

Для решения разностной задачи (13), (23), (24) (вместе с соответствующими дополнительными условиями) поступаем так. При помощи (24) исключаем $\bar{z}_k = \bar{z}_{k,j}^{n+1}$ из (23), тогда (13) вместе с преобразованным уравнением (23) вновь можно записать в виде (17) и применять для решения этого уравнения одномер-

ную прогонку по i для последовательно возрастающих значений индекса j . Единственное отличие состоит в том, что после очередной прогонки нужно, зная все $\hat{y}_j = y_j^{n+1}$ (в том числе $y_{N_1, j}^{n+1}$), из уравнений (24) найти \hat{x}_k для $k = \overline{1, N}$.

По предложенным разностным схемам были проведены расчеты вычисления температурных полей в двух- и трехслойных нефтяных пластах (как однородных, так и трещиноватых). Дадим здесь анализ примеров расчета температурного поля в однородном трехслойном симметричном пласте, акцентируя внимание на проверке предложенной в [8], [9] идее о возможности пренебрежения теплоемкостью перемычек (что приводит к линейному в направлении x_2 распределению температуры в них). Для расчета были взяты следующие исходные параметры: $\alpha_{k+\frac{1}{2}}^2 = 0.123$, $\beta_k^+ = \beta_k^- = 0.2665$ для всех k , $w_1 = w_3 = 8.42$, $w_2 = 0.842$ (т.е. рассматривался пласт, когда центральный, в десять раз менее проницаемый пропласток зажат двумя более проницаемыми пропластками; линия $x_2 = 0$ - месторасположение центрального пропластка - является при этом осью симметрии для поля температуры, поэтому в дальнейшем можно говорить просто о поле температуры при $x_2 \geq 0$). Рассматривались два случая: в первом $H_{k+\frac{1}{2}} = 0.1$, т.е. расстояние между пропластками (толщина перемычки) равна 0.1, во втором случае $H_{k+\frac{1}{2}} = 0.4$.

На приведенных рисунках дается распределение температуры по мощности слоистого пласта (в направлении x_2) для нескольких значений x_1 (т.е. на различном расстоянии от входа в пласт). Результаты для первого случая представлены на рис.1, для второго - на рис.2. Расчеты для обоих случаев проводились при одних и тех же численных параметрах: $h_{n, k-\frac{1}{2}} = h_{n, k} = 0.025$, $h_{n, 2} = 0.05$, $\tau = 0.0059$, $\beta_{(1, k+\frac{1}{2})} = 1$, $\beta_{(2, n)} = 0$, $N_1 = 66$, $N_2 = 81$. Расчеты проводились до момента времени $T = 0.4962$ (для этого момента времени дано и распределение температуры на рис.1-2) и это требовало до 9 минут машинного времени на ЕС-1022.

Перейдем к рассмотрению результатов расчета. Как видно из рис.1, в области между пропластками (при $0 < x_2 < 0.1$) распределение температуры весьма близко к линейному. Однако

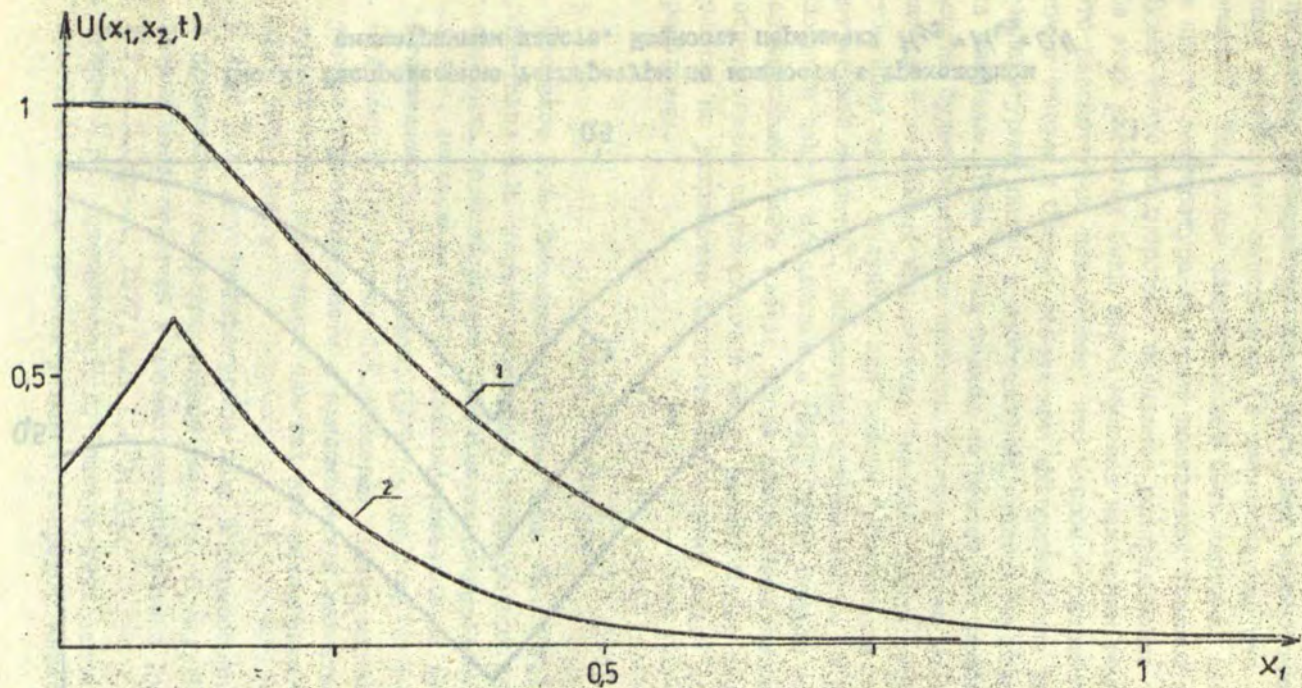


Рис.1. Распределение температуры по мощности в трехслойном симметричном пласте. Мощность перемычки $H_{V_2} = H_{3V_2} = 0,1$

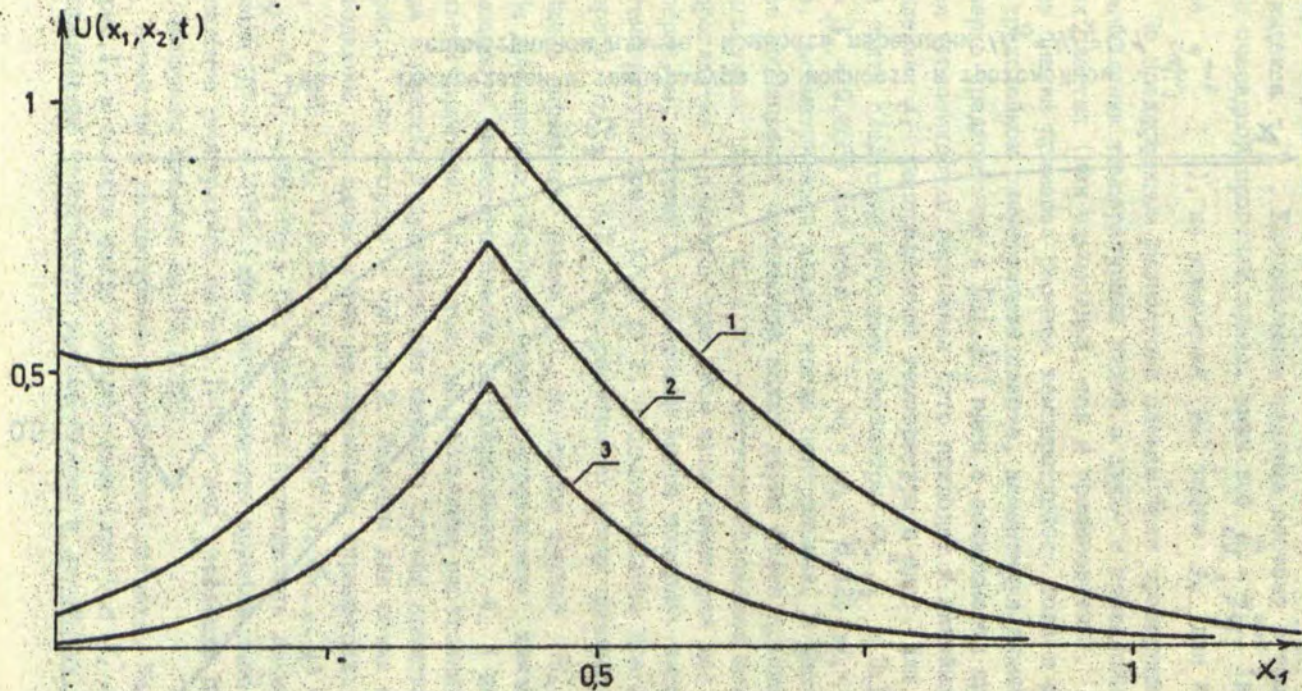


Рис.2. Распределение температуры по мощности в трехслойном симметричном пласте. Мощность перемычки $H_{12} = H_{22} = 0,4$

рис.2 показывает, что при увеличении мощности перемычек распределение температуры может быть даже немонотонным - с точками внутреннего экстремума (в данном случае это - точка минимума). Еще более сложной может быть картина, если на входе в пласт температура не будет постоянной (равной единице) и будет взято неоднородное начальное распределение температуры (в этих расчетах была взята нулевая начальная температура). Это рассмотрение показывает, что вопрос о разработке достаточно точных и быстро работающих алгоритмах для расчета температурных полей в многослойных пластах не может считаться решенным. Ведь и наш подход не решает все проблемы: не всегда будет возможным принять постоянство по мощности температуры в отдельных пропластках (правда, здесь существенное уточнение можно получить при помощи "уточненной схемы сосредоточенной емкости", разностная аппроксимация ее для однослойного пласта предложена в [16]), этот подход не проходит без видоизменений в случае, когда проницаемые пропластки непосредственно соприкасаются между собой. Одним словом, исследования по разработке алгоритмов для этих задач должны быть продолжены.

Список литературы

1. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. М.: МГУ, 1979, 368 с.
2. Шестаков В.М. Модели переноса в неоднородных пластах и породах. Тр. конференции "Simulation gekoppelter Transport-, Austausch- und Umwandlungsprozesse im Boden- und Grundwasser". Дрезден, 1979, с.186-196.
3. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложениях к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: КГУ, 1978, 188 с.
4. Буйкис А.А. Двухтемпературное поле в гетерогенной среде в приближении сосредоточенной емкости. - В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1977, вып. I, с.74-83.
5. Буйкис А.А., Кузмишкина Н.В. Решение двух задач теплопроводности при краевых условиях сосредоточенной емкости.

- В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1980, вып.3. с.85-90.
6. Антимиров М.Я., Панферова А.А. О расчете температурного поля в трехслойном пласте при нагнетании в него горячей жидкости (обобщение формулы Ловерье). - Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1968, с.271-280.
 7. Авдонин Н.А. и др. Расчет нефтеотдачи нефтяных пластов в неизотермических условиях фильтрации. - Теория и практика добычи нефти. М.: Недра, 1966, с.195-205.
 8. Болков Ю.А., Плохова Ю.В., Чекалин А.Н. Численное моделирование двухфазной изо- и низотермической фильтрации в слоистом пласте. - В кн.: Динамика многофазных сред. Новосибирск, 1981, с.124-128.
 9. Чкалин А.Н. Численные решения задач фильтрации в водо-нефтяных пластах. Казань, КГУ, 1981, -208 с.
 10. Буйкис А.А., Шмите М.З. О разностной аппроксимации одной неклассической задачи для уравнения теплопроводности. - В кн.: Латвийский математический ежегодник. Рига: Зинатне, 1982, вып.26, с.217-222.
 11. Буйкис А.А. Разностные схемы для уравнения теплопроводности при краевых условиях типа сосредоточенной емкости. - В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига: Изд. ЛГУ им.П.Стучки, 1978, вып.2, с.130-145.
 12. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977, 656с.
 13. Рыжик В.М., Кисиленко Б.Е., Солопин Е.Ф. Вопросы вытеснения нефти повышенной вязкости из трещиноватых пластов путем закачки горячего агента. - В кн.: Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений. М.: Недра, 1969, с.117-129.
 14. Малофеев Г.Е., Кеннави Ф.А. О коэффициенте теплоотдачи от теплоносителя блокам трещиноватого пласта. - Известия ВУЗ'ов. Нефть и газ, 1978, № 1, с.29-35.
 15. Буйкис А.А. Тождественность задач определения температурных полей в однородном и трещиноватом пластах. - Известия ВУЗ'ов. Нефть и газ, 1979, № 3, с.49-52.
 16. Буйкис А.А. Разностная аппроксимация "уточненной схемы сосредоточенной емкости". - В кн.: Исследования по прикладной математике. Казань: Изд. КГУ, 1981, вып.9, с.68-72.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРИСТАЛЛОВ, ВЫРАЩИВАЕМЫХ ИЗ РАСПЛАВА

Вахрамеев С.С., Освенский В.Б.

(ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, Рига, Гиредмет, Москва)

В реальных условиях роста монокристаллов часть термоупругих напряжений релаксирует при формировании дислокационной структуры, [1]. При низкой плотности дислокаций, порядка $10^3 - 10^4 \text{ см}^{-2}$, пластическая деформация достаточно мала и в этом случае дислокационную структуру кристалла удобнее сопоставлять не со степенью пластической деформации, а с условиями ее протекания (диапазоном температур, величиной термоупругих напряжений и характером их распределения по объему). В ряде работ, см., напр. [2], при решении задач, связанных с анализом тепловых условий выращивания малодислокационных кристаллов, был использован подход, основанный на сопоставлении расчетных термоупругих напряжений в слитке с экспериментально определенными критическими напряжениями размножения дислокаций при соответствующих температурах. При этом используется следующий критерий. Если расчетные термоупругие напряжения не превышают критическое сдвиговое напряжение, то кристалл оказывается практически бездислокационным^{х)}. Это подтверждается экспериментальными данными. Если термоупругие напряжения в некоторой системе скольжения превышают критическое сдвиговое напряжение, то в кристалле происходит интенсивное движение и размножение дислокаций. Такой анализ проводился на реальных кристаллах, выращиваемых из расплава; результаты расчетов термоупругих напряжений, а также плотности дислокаций, имеются в работе [3]. Наблюдается удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными.

х) Наличие некоторого количества дислокаций в кристалле объясняется действием других факторов, например, ростовым путем или вхождением примесей. В другом случае учет этих факторов не производится.

Однако, расчеты плотности дислокаций, основанные на термоупругих напряжениях, являются приближенными, так как предположение об упругости кристалла справедливо, строго говоря, до тех пор, пока напряжения не превосходят критическое. Целью настоящей работы является постановка и решение упруго-пластической задачи в случае роста дислокационного кристалла.

Работа состоит из трех пунктов, в которых соответственно рассматриваются: постановка упруго-пластической задачи, метод решения и результаты расчетов.

П.1. Для вывода уравнений упруго-пластического равновесия воспользуемся, наряду с тензорами напряжений σ_{ij} и деформаций ϵ_{ij} , девиаторами напряжений S_{ij} и деформаций e_{ij} , которые определяются следующим образом [4]:

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \\ e_{ij} &= \epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (1)$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, $i, j = 1, 2, 3$;

$$\sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad \epsilon = \frac{1}{3} \epsilon_{ii}, \quad (2)$$

среднее нормальное напряжение и объемное расширение. Здесь принята индексная система обозначений в декартовой системе координат X_i , $i = 1, 2, 3$.

При малых упруго-пластических деформациях девиатор суммарной деформации представим в виде суммы двух слагаемых

$$e_{ij} = e_{ij}^y + e_{ij}^p. \quad (3)$$

Девиатор упругой деформации e_{ij}^y , как известно, связан с напряжениями законом Гука, и, с учетом теплового расширения, записывается в виде следующих двух соотношений

$$\frac{1}{2G} S_{ij} = e_{ij}^y, \quad (4)$$

$$\sigma = 2G \frac{1+\mu}{1-2\mu} (\epsilon^y - \alpha T), \quad (5)$$

где μ , α - коэффициенты Пуассона и термического расширения, G - модуль сдвига, T - температура кристалла.

Пластическая деформация ϵ_{ij}^p определяется с учетом механизма движения и размножения дислокаций по системам скольжения. Примем, что монокристалл имеет M систем скольжения и, используя соотношение Орована [5], определим скорость пластической деформации $(\dot{\epsilon}^p)^k$ в k -ой системе скольжения следующим образом:

$$(\dot{\epsilon}^p)^k = b(N_g^k)(V)^k \quad (6)$$

Здесь $(N_g^k)^k$ - плотность и $(V)^k$ - скорость движения дислокаций в k -ой системе ($k=1, 2, \dots, M$), b - величина смещения (модуль вектора Бюргера), постоянная для данного материала.

Не рассматривая поведение каждой дислокации в отдельности, а размазывая все дислокации в однородное распределение, [6], используем осредненные характеристики подвижности дислокаций. Исходя из этого, осредненная скорость V дислокаций в поле эффективных напряжений $\tau_{эф}$, с учетом экспериментальных измерений подвижности дислокаций, задается в виде

$$(V)^k = V_0 \left(\frac{\tau_{эф}^q}{\tau_0^q} \right)^k \exp\left(-\frac{U}{kT}\right). \quad (7)$$

V_0 - константа материала, τ_0 - нормирующий множитель q - показатель степени, $\exp(-U/kT)$ - энергия активации (распределение Больцмана), T - температура. Эффективное напряжение в k -ой системе скольжения, с учетом упрочнения кристалла при пластической деформации, определяется следующим образом:

$$(\bar{\epsilon}_{эф})^k = \begin{cases} |\bar{\epsilon}|^k - G(\epsilon^p)^k - A\sqrt{(N_0)^k}, (\bar{\epsilon}_{эф})^k > (\bar{\epsilon}_{кр})^k, \\ 0, (\bar{\epsilon}_{эф})^k \leq (\bar{\epsilon}_{кр})^k, \end{cases} \quad (8)$$

где A - константа.

В неравенствах (8) заключено то обстоятельство, что скольжение в k -ой системе возникает тогда, когда эффективные касательные напряжения достигают определенного критического уровня $(\bar{\epsilon}_{кр})^k$, определяемого экспериментально. В однородном напряженном кристалле результирующее касательное напряжение в k -ой системе скольжения равно, [7],

$$(\bar{\epsilon})^k = \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(m_i^{(k)} n_j^{(k)} + m_j^{(k)} n_i^{(k)} \right), \quad (9)$$

где σ_{ij} - тензор напряжений, $m_i^{(k)}$ - единичный вектор, нормальный к плоскости скольжения, $n_i^{(k)}$ - единичный вектор в направлении скольжения.

Таким образом, все возможные M механизмов скольжения образуют условия текучести материала. К уравнениям (6)-(9) следует добавить уравнение, определяющее скорость размножения дислокаций. Для k -ой системы скольжения оно задается следующим образом [8]:

$$(\dot{N}_0)^k = \beta (N_0)^k (V)^k, \quad (10)$$

$$(N_0)^k = N_0^k, \quad \text{при } t = 0,$$

где β - коэффициент размножения дислокаций, N_0^k - начальная их плотность.

Если из уравнений (6)-(10) определена пластическая деформация $(\epsilon^p)^k$ для всех $k = 1, 2, \dots, M$, то компоненты тензора суммарной пластической деформации, вызванной скольжением по всем системам, выразятся по формулам, [7]:

$$\xi_{ij}^p = \frac{1}{2} \sum_{\kappa=1}^M (\xi^p)^\kappa (m_i^{(\kappa)} n_j^{(\kappa)} + m_j^{(\kappa)} n_i^{(\kappa)}) \quad (11)$$

На основании свойств преобразования (II) выполняется условие

$$m_i^{(\kappa)} n_i^{(\kappa)} = 0, \quad (12)$$

поэтому

$$\xi_{ii}^p = 0, \quad (13)$$

т.е. выполняется условие пластической несжимаемости [4].

Используя полученные выражения для компонент тензора пластической деформации ξ_{ij}^p , запишем определяющие уравнения следующим образом. Учитывая соотношение (3), уравнения (4), (5) перепишем в виде:

$$\frac{1}{2G} S_{ij} = e_{ij} - e_{ij}^p, \quad (14)$$

$$G = 2G \frac{1+\mu}{1-2\mu} (\varepsilon - \alpha T). \quad (15)$$

Подставив значения девиаторов (I) в уравнение (14) и, учитывая условие пластической несжимаемости (13) и соотношение (15), получим уравнения связи между напряжениями и деформациями в следующей форме:

$$G_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} - \xi_{ij}^p + 3 \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon \delta_{ij} - \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha T \delta_{ij} \right], \quad (16)$$

где общая пластическая деформация ξ_{ij}^p , вызванная скольжением по всем системам определяется соотношениями (II), пластическая деформация $(\xi^p)^\kappa$ в κ -ой системе скольжения определяется из уравнений (6)-(10), что можно записать в следующем виде:

$$(\xi^p)^\kappa = \int_0^t \mathcal{F}[\varepsilon^\kappa, (\xi^p)^\kappa, \dots] d\mu, \quad (17)$$

причем в начальный момент времени $t=0, (\epsilon^p)^K = 0$.

Подставим полученные соотношения (16) в уравнения равновесия в напряжениях без объемных сил

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (18)$$

получим систему уравнений упруго-пластического равновесия в перемещениях следующего вида:

$$\Delta u_i + \frac{3}{1-\nu} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = 2 \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{ij}^p, \quad (19)$$

где Δ - оператор Лапласа, деформации ϵ_{ij} и перемещения u_i связаны соотношениями

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (20)$$

Граничные условия, в случае свободной от внешних сил поверхности, задаются следующим образом:

$$\left[\epsilon_{ij} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \epsilon \delta_{ij} \right] n_j = \left[\frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha T \delta_{ij} + \epsilon_{ij}^p \right] n_j. \quad (21)$$

Уравнения (19) с граничными условиями (21) и уравнениями для определения пластической деформации (6)-(11) образуют нелинейную задачу для определения упруго-пластических деформаций, напряжений и плотности дислокаций при заданном температурном поле T в кристалле. Систему уравнений упруго-пластического равновесия можно решить численными методами, на основе последовательных приближений, [4]. В следующем пункте для решения упруго-пластической задачи применяется метод последовательных упругих решений для случая цилиндрического кристалла с заданным осесимметрическим полем температур.

П.2. Рассмотрим конкретный случай выращивания цилиндрического кристалла из расплава, в системе координат (r, z, t) , жестко связанной с кристаллом, которую в

дальнейшем будем называть подвижной системой. Здесь координата z направлена по радиусу кристалла, координата x вдоль его оси, а t - время. На границе раздела фаз кристалл ограничен фронтом кристаллизации $z^* = f(z)$, длина кристалла много больше поперечного его размера. Слиток движется с постоянной скоростью w_0 относительно неподвижной координаты x , связанной с подвижной z следующим образом

$$x = z + w_0 t, \quad 0 < x < L. \quad (22)$$

Ограничимся случаем стационарного роста кристалла, когда температурное поле и поле напряжений в неподвижной системе координат (z, x, t) не зависят от времени. Скорость пластической деформации в этом случае также не зависит от времени и равна:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = w_0 \frac{\partial \epsilon_{ij}^p}{\partial x}, \quad i, j = r, \varphi, x. \quad (23)$$

Отметим, что скорость продвижения кристалла w_0 мала и равна $\sim 0,3$ мм/мин, но характерное время релаксации, как показали предварительные расчеты, составляет лишь несколько секунд. Это говорит о том, что релаксация напряжений происходит мгновенно вслед за продвижением кристалла, что дает возможность считать $\partial \epsilon_{ij}^p / \partial t$ равным нулю.

Уравнения упруго-пластического равновесия в цилиндрической системе координат (z, x) , аналогичные уравнениям (19), имеют вид:

$$a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z u) \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = d \frac{\partial T}{\partial z} + 2 \left(\frac{\partial \epsilon_r^p}{\partial z} + \frac{\epsilon_r^p - \epsilon_\varphi^p}{z} + \frac{\partial \epsilon_{rx}^p}{\partial x} \right), \quad (24)$$

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} a + b \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z u) \right) = d \frac{\partial T}{\partial x} + 2 \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z \epsilon_{rx}^p) + \frac{\partial \epsilon_x^p}{\partial x} \right). \quad (25)$$

Граничные условия в случае свободной от внешних сил по -
 поверхности, задаются следующим образом

$$\sigma_z n_z + \sigma_{zx} n_x = 0, \quad (26)$$

$$\sigma_{zx} n_z + \sigma_x n_x = 0, \quad z=R; x=0, L.$$

В уравнениях (24), (25) обозначены компоненты векторов:
 радиального U и осевого W перемещений, n_z и n_x -
 внешней нормали к граничной поверхности.

Уравнения связи между напряжениями и деформациями,
 аналогичные уравнениям (16), имеют вид:

$$\sigma_z = \sigma_a \left[\frac{\partial U}{\partial z} + \kappa \left(\frac{U}{z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - cT - \frac{2}{a} \epsilon_z^p \right],$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_a \left[\frac{U}{z} + \kappa \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - cT - \frac{2}{a} \epsilon_\varphi^p \right],$$

$$\sigma_x = \sigma_a \left[\frac{\partial W}{\partial x} + \kappa \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{U}{z} \right) - cT - \frac{2}{a} \epsilon_x^p \right],$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_a \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} - 2 \epsilon_{zx}^p \right]. \quad (27)$$

Введенные константы определяются следующим образом:

$$a = 2 \frac{1-\mu}{1-2\mu}, \quad b = \frac{1}{1-2\mu}, \quad d = 2 \frac{1+\mu}{1-2\mu} \alpha, \quad (28)$$

$$\kappa = \frac{\mu}{1-\mu}, \quad c = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha.$$

Деформации и перемещения связаны соотношениями

$$\epsilon_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \epsilon_\varphi = \frac{U}{z}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial W}{\partial x},$$

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right). \quad (29)$$

Компоненты тензора пластической деформации определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{w_0} \sum_{k=1}^M \int_0^X f[\varepsilon^k, (\varepsilon^p)^k, \dots] dM \alpha_{ij}^{(k)}, \quad (30)$$

где $\alpha_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} (m_i^{(k)} n_j^{(k)} + m_j^{(k)} n_i^{(k)})$, $i, j = \lambda, \psi, \chi$;

причем координата X отсчитывается от фронта кристаллизации.

Для решения нелинейных уравнений (24), (25) с условиями (26) применяются различные варианты метода последовательных приближений, [7]. Решение задач теории пластичности сводится при этом к решению последовательности линейных задач, каждая из которых может быть интерпретирована как некоторая задача упругости.

Численное решение упруго-пластической задачи в данном случае заключается в следующем.

В начальном приближении полагаем, что пластическая деформация отсутствует и для решения имеем задачу термоупругости, т.е. уравнения (24), (25) с граничными условиями (26), при $(\varepsilon_{ij}^p)^0 = 0$. Эта задача решается хорошо разработанным методом, который изложен в [9]. Определив таким образом упругие перемещения u^i, w^i и напряжения σ_{ij}^i , по формулам (30) найдем первые приближения пластической деформации $(\varepsilon_{ij}^p)^1$. Найденные значения $(\varepsilon_{ij}^p)^1$ подставим в уравнения (24), (25) и граничные условия (26). Для решения вновь полученной задачи имеем задачу термоупругости, но с вычисленными дополнительными "нагрузками".

Процесс последовательных приближений схематично запишется в следующем виде.

Уравнения упруго-пластического равновесия

$$a \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z U^n) + \frac{\partial^2 U^n}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 W^n}{\partial z \partial x} = d \frac{\partial T}{\partial z} + \quad (31)$$

$$+ 2 \left[\frac{\partial \epsilon_z^p}{\partial z} + \frac{\epsilon_z^p - \epsilon_\varphi^p}{z} + \frac{\partial \epsilon_{zx}^p}{\partial x} \right]^{n-1}$$

$$\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z \frac{\partial W^n}{\partial z}) + a \frac{\partial^2 W^n}{\partial x^2} + b \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z U^n) = d \frac{\partial T}{\partial x} + \quad (32)$$

$$+ 2 \left[\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (z \epsilon_{zx}^p) + \frac{\partial \epsilon_x^p}{\partial x} \right]^{n-1}$$

Граничные условия, аналогичные условиям (26)

$$\sigma_z^n n_z + \sigma_{zx}^n n_x = 0, \quad (33)$$

$$\sigma_{zx}^n n_z + \sigma_x^n n_x = 0,$$

и компоненты тензора напряжений

$$\sigma_z^n = G a \left[\frac{\partial U^n}{\partial z} + \kappa \left(\frac{U^n}{z} + \frac{\partial W^n}{\partial x} \right) - c T - \frac{2}{a} (\epsilon_z^p)^{n-1} \right],$$

$$\sigma_\varphi^n = G a \left[\frac{U^n}{z} + \kappa \left(\frac{\partial U^n}{\partial z} + \frac{\partial W^n}{\partial x} \right) - c T - \frac{2}{a} (\epsilon_\varphi^p)^{n-1} \right],$$

$$\sigma_x^n = G a \left[\frac{\partial W^n}{\partial x} + \kappa \left(\frac{\partial U^n}{\partial z} + \frac{U^n}{z} \right) - c T - \frac{2}{a} (\epsilon_x^p)^{n-1} \right],$$

$$\sigma_{zx}^n = G \left[\frac{\partial U^n}{\partial x} + \frac{\partial W^n}{\partial z} - 2 (\epsilon_{zx}^p)^{n-1} \right]. \quad (34)$$

Выражения для компонент пластической деформации запишем следующим образом

$$(\epsilon_{ij}^p)^n = \frac{1}{W_0} \sum_{\kappa=1}^M \int_0^x f [(\epsilon_n^\kappa), (\epsilon_n^p)^\kappa, \dots] d\mu \alpha_{ij}^{(\kappa)}, \quad (35)$$

где число n означает номер последовательного приближения, ($n = 1, 2, 3, \dots$), M — число всех систем скольжения.

Если процесс сходится, то

$$\max |\sigma_{ij}^n - \sigma_{ij}^{n-1}| < \varepsilon, \quad (36)$$

при достаточно больших n .

Напряжения σ_{ij}^n получены решением упруго-пластической задачи, с учетом их релаксации, которая обусловлена движением и размножением дислокаций при росте кристалла. Переход к разностной задаче, аппроксимирующей уравнения (31) - (34), осуществляется обычным образом [9], поэтому не останавливаясь на этом вопросе, рассмотрим пример расчета по изложенной методике.

П.3. Целью проведения расчетов было исследование сходимости процесса последовательных приближений и степени релаксации исходных напряжений при движении и размножении дислокаций в кристалле.

Расчеты проводились для кристалла арсенида галлия, выращиваемого по методу Чохральского в направлении [111], при заданном температурном поле $T(z, x)$. Для арсенида галлия, как известно [10], относительная ориентация четырех плоскостей скольжения кристалла совпадает с гранями правильного тетраэдра, а три возможных направления скольжения в каждой плоскости совпадают с ребрами треугольных граней. Поэтому в этом случае имеется всего 12 систем скольжения. В дальнейшем учитываются только 3 направления в плоскости скольжения (111). Поскольку кристалл растет в направлении [111], то ориентация этой плоскости в цилиндрической системе координат такова, что координатная ось

X является нормалью к этой плоскости, как указано на рис. 1. Три возможных направления скольжения $\bar{\xi}^k$, $k = 1, 2, 3$ в этой плоскости образуют правильный треугольник. Результирующие касательные напряжения $\bar{\tau}^k$ рассчитываются по формулам (9) следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}^k = & \cos(\gamma, x) \cos(\gamma, \bar{\xi}^k) + \\ & + \cos(\bar{\varphi}, x) \cos(\bar{\varphi}, \bar{\xi}^k) + \end{aligned}$$

$$+ \sigma_x \cos(\chi, \chi) \cos(\chi, \bar{\xi}^k) + \\ + \sigma_{2x} [\cos(\chi, \chi) \cos(\chi, \bar{\xi}^k) + \cos(\chi, \chi) \cos(\chi, \bar{\xi}^k)] \quad (37)$$

Учитывая, что ось X является нормалью к плоскости скольжения (III), получим:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \sigma_{2x} \cos \varphi, \\ \xi^2 &= -\sigma_{2x} \cos(\varphi - \frac{\pi}{3}), \\ \xi^3 &= -\sigma_{2x} \cos(\varphi + \frac{\pi}{3}). \end{aligned} \quad (38)$$

По найденным ξ^{k^0} пластическая деформация $(\epsilon^p)^k$ определяется из уравнений (6)-(8), (10).

Компоненты тензора общей пластической деформации, вызванной скольжением по всем трем выбранным системам определяются согласно формулам (II).

$$\epsilon_{2x}^p = (\epsilon^p)^1 \cos \varphi - (\epsilon^p)^2 \cos(\varphi - \frac{\pi}{3}) - (\epsilon^p)^3 \cos(\varphi + \frac{\pi}{3}), \quad (39)$$

остальные компоненты тензора пластической деформации ϵ_z^p , ϵ_φ^p , ϵ_x^p равны нулю, ввиду ориентации плоскости (III). Пластическая деформация, заданная уравнением (39), используется при решении упруго-пластической задачи (31)-(35) по итерационной схеме, изложенной в предыдущем пункте.

Отметим, что для правильного определения упруго-пластических деформаций и напряжений в цилиндрическом кристалле теперь необходимо решать трехмерную (не симметричную по углу φ) задачу, так как пластическая деформация существенно анизотропна. Для случая заданных уравнений равновесия с осевой симметрией, приближенно рассматривается релаксация напряжений при заданном угле $\varphi = \text{const}$, считая, что суммарная пластическая деформация по всем 12 системам скольжения будет слабо зависеть от угла φ .

Численное решение упруго-пластической задачи и оп -

ределение термических напряжений и плотности дислокаций, показало хорошую сходимость последовательных приближений для различных значений угла φ (расчеты проводились для 3-х значений угла $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$). Для сходимости требовалось 5-6 итераций, при этом максимальные напряжения для пятой и шестой итераций отличались менее, чем на 2%. В расчетах приняты следующие величины физических констант:

$$G = 3400 \text{ кг/мм}^2, \mu = 1/3, \alpha = 0,64 \cdot 10^{-5} \text{ I/гр}^{\circ}\text{C},$$

$$T_{пл} = 1238^{\circ}\text{C}, W_0 = 0,5 \text{ мм/мин}, b = 4 \cdot 10^{-7} \text{ мм},$$

$V_0 = 10^5 \text{ мм/сек}, A = 4 \cdot 10^{-4}, q = 3/2, \varphi = \frac{\pi}{4}, \beta = 4 \text{ I/мм}$. Критический уровень сдвиговых напряжений $\epsilon_{кр}$ в расчетах равен 7-12 г/мм² в зависимости от температуры T и рассчитывался по следующей формуле:

$$\epsilon_{кр} = 1,2 \cdot 10^{-4} \exp\left(\frac{6 \cdot 10^3}{T}\right). \quad (40)$$

Результаты расчетов упруго-пластической задачи представлены на рис.2 - рис.4. На рис.2 указано распределение температур и сдвиговых напряжений

$$\tau = |\tau^1| + |\tau^2| + |\tau^3| \quad (41)$$

в кристалле Арсенида галлия диаметром 25 мм и длиной 42 мм. Тепловой режим в кристалле на рисунке показан в виде изотерм по радиусу, температура плавления $T_{пл} = 1238^{\circ}\text{C}$. На этом рисунке показаны результаты расчетов напряжений τ упругой задачи, т.е. показаны результаты расчетов для первого приближения. Из этих расчетов следует, что уровень максимальных сдвиговых напряжений соответствует $\sim 70 \text{ г/мм}^2$, а плотность дислокаций $1,5 \cdot 10^2 \text{ мм}^{-2}$ (см.рис. 4). На рис.2 указано распределение сдвиговых напряжений при решении упруго-пластической задачи, для 6-ой итерации. Сравнивая рис.3 и рис.2 получается, что максимальный уровень сдвиговых напряжений снизился более, чем на 20%. Вместе с тем произошло и изменение распределения напряжений в кристалле. Максимальная плотность дислокаций стала меньше и равна $1,2 \cdot 10^2 \text{ мм}^{-2}$, см.рис.4.

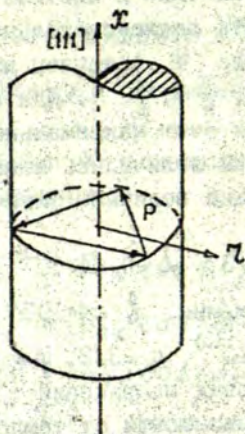


Рис.1. Р - плоскость скольжения (III) в цилиндрическом кристалле, стрелками указаны направления скольжения τ_1, τ_2, τ_3

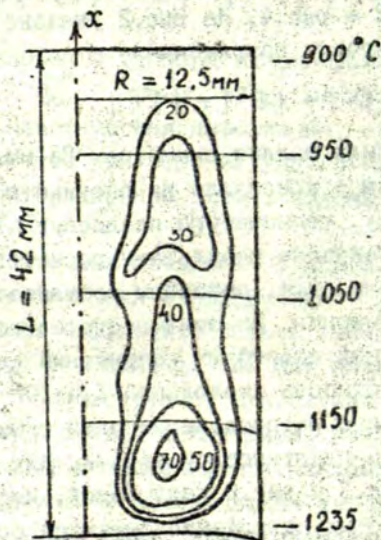


Рис.2. Распределение температур и сдвиговых термоупругих напряжений τ в г/мм^2 в кристалле.

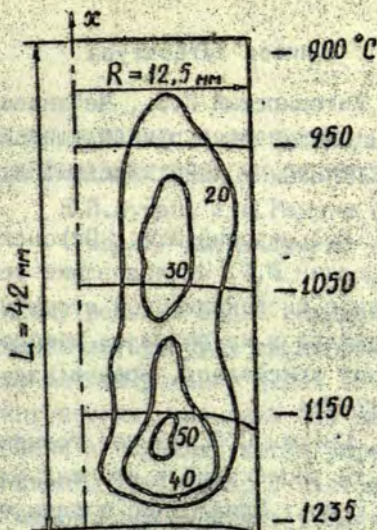


Рис.3. Распределение температур и сдвиговых напряжений τ в кристалле при решении упруго-пластической задачи.

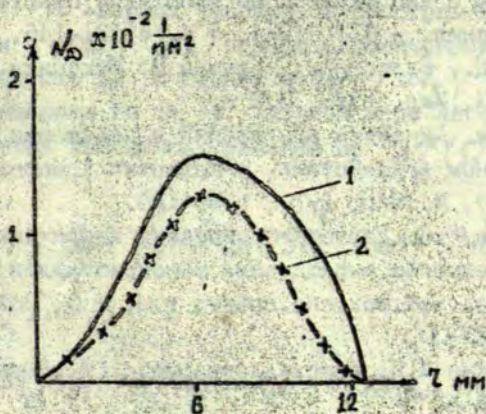


Рис.4. Максимальная величина плотности дислокаций по радиусу кристалла при решении задач: упругой (кривая 1), упруго-пластической (кривая 2).

Список литературы

1. Инденбом В.А., Житомирский И.С., Чебанова Т.С. Внутренние напряжения, возникающие при выращивании кристаллов в стационарном режиме. - Кристаллография, 1973, т.18, вып.1, с.39-48.
2. Вахрамеев С.С., Мильвидский М.Г., Освенский В.В., Смирнов В.А., Щелкин Ю.Ф. Исследование термоупругих напряжений в связи с дислокационной структурой при выращивании монокристаллов из расплава методом Чохральского. - В кн.: Рост кристаллов, Ереван:Изд-во ЕГУ, 1977, т.,12, с.287-293.
3. Вахрамеев С.С., Гифрин С.С. Расчет термических напряжений и плотности дислокаций в кристаллах, выращиваемых из расплава. - В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига, 1978, с.87-96.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.:Наука, 1962. 420 с.
5. Cowan E. Problems of plastic gliding.- Proc.Phys.Soc., 1940, vol.52, N 1, p.8-22.
6. Нигматуллин Р.И., Холин Н.И. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования. - ИГГ, 1974, № 4, с.131-146.
7. Коларов Д., Балтов А., Бончева Н. Механика пластических сред. М.:Мир, 1979. 302 с.
8. Пилман Дж. Динамика дислокаций и поведение материалов при ударном воздействии. - Механика (сборник переводов), 120, М.:Мир, 1970, с.96-124.
9. Вахрамеев С.С. Расчет термических напряжений, связанных с процессом выращивания монокристаллов из расплава. - Числ.мет.мех.спл.среды, т.8, № 5, Новосибирск, 1977, с.23-35.
10. Шаскольская М.П. Кристаллография. М.:Высшая школа, 1976, 390 с.

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Я.П.Вуцан, У.Е.Райтум
(ВЦ ЛГУ им.П.Стучки)

Приближенному решению задач оптимального управления посвящена обширная литература, см, например, [4]. Тем не менее численные методы решения задач оптимального управления для эллиптических уравнений еще не достаточно разработаны, особенно в случаях, когда управление входит в старшие коэффициенты уравнения. В настоящей работе предлагается один метод приближенного решения подобных задач, основанный на идее преобразования экстремальных задач [2] и позволяющий в единой схеме рассмотреть достаточно широкий класс конкретных задач, когда отсутствуют фазовые ограничения. При этом в предлагаемом методе не требуется решать уравнение состояния системы или вычислять функциональные производные минимизируемого функционала.

Пусть в n -мерном евклидовом пространстве R^n с элементами $x = (x_1, \dots, x_n)$ задана ограниченная строго липшицева область Ω с границей $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_0$, $\Gamma \cap \Gamma_0 = \emptyset$, Γ и Γ_0 измеримы по $n-1$ мерной мере Лебега на $\partial\Omega$. Рассматриваются обобщенные решения из $W_2^1(\Omega)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(z_{x_j} + g_j)) - \sum_{i=1}^n a_i(z_{x_i} + g_i) - a_{00}(z + g_0) = \\ & = -f_0 + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i, \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_{ij}(z_{x_j} + g_j) - f_i) \cos(\vec{n}, x_i) \right) + \sigma(z + g_{n+1}) - \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \Big|_{\Gamma} = 0,$$

$$z|_{\Gamma_0} = 0,$$

где \vec{n} - внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Управлениями являются как коэффициенты уравнения (I), так и функции $\sigma, f_0, \dots, f_{n+1}, g_0, \dots, g_{n+1}$. Требуется минимизировать заданный функционал, зависящий от управлений и решения краевой задачи (I), когда управления принадлежат заданному множеству.

Определим гильбертово пространство

$$V = L_2(\Omega) \times \underbrace{L_2(\Omega) \times \dots \times L_2(\Omega)}_n \times L_2(\Gamma)$$

со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и элементами

$$g = (g_0, g_1, \dots, g_n, g_{n+1}), \quad f = (f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1});$$

$$\langle g, f \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i=0}^n g_i f_i dx + \int_{\Gamma} g_{n+1} f_{n+1} d\Gamma,$$

$$\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle}.$$

Пусть W - линейное замкнутое подпространство в V и G - ортогональное дополнение к W в V . Элементы пространства W будут обозначаться через

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}), \quad v = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}),$$

$$w = (w_0, w_1, \dots, w_n, w_{n+1}),$$

а пространства G - через

$$f = (f_0, f_1, \dots, f_n, f_{n+1}), \quad \eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \eta_{n+1})$$

Для различения элементов пространств V, W, G будут употребляться верхние индексы.

В качестве конкретных реализаций пространства в основном будут рассматриваться

$$W_0 = \{g: g \in V, g = (z, z_1, \dots, z_n, z), z \in W_2'(\Omega), z|_{\Gamma} = 0\}$$

или конечномерные подпространства $W_N \subset W_0$.

Определим обобщенное решение из $W_2'(\Omega)$ краевой задачи (I) как элемент $z \in W_2'(\Omega)$ такой, что

$$z|_{\Gamma_0} = 0,$$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} (z_{x_j} + g_j) - f_i \right] \varphi_{x_i} + \right. \\ \left. + \left[\sum_{i=1}^n a_i (z_{x_i} + g_i) + a_{00} (z + g_0) - f_0 \right] \varphi \right\} dx + \\ + \int_{\Gamma} [\sigma (z + g_{n+1}) - f_{n+1}] \varphi d\Gamma = 0 \quad (2)$$

для всех $\varphi \in W_2'(\Omega)$, $\varphi|_{\Gamma_0} = 0$.

Определим также оператор $A: V \rightarrow V$,

$$Ag = \left(\sum_{i=1}^n a_i g_i + a_{00} g_0, \sum_{j=1}^n a_{1j} g_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj} g_j, \sigma g_{n+1} \right). \quad (3)$$

Из определений обобщенного решения краевой задачи (I), оператора A и пространства W_0 следует, что любому обобщенному решению Z краевой задачи (I) однозначно соответствуют элементы $u = (z, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}, z) \in W_0$ и $\eta \in V \oplus W_0 = G_0$ такие, что

$$\langle A(u+g) - f, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W_0,$$

$$A(u+g) = f + \eta.$$

Обозначим через $I = I(A, g, f, u)$ минимизируемый функционал (в случае $W = W_0$ элемент u однозначно определяется функцией Z), через \mathcal{A} - множество допустимых операторов (оно полностью определяется множеством допустимых коэффициентов уравнения и граничных условий (I)), через Q_1 - множество допустимых элементов g , через Q_2 - множество допустимых элементов f .

В этих обозначениях рассматриваемая задача формулируется следующим образом.

Задача I. Минимизировать по

$$u \in W, A \in \mathcal{A}, g \in Q_1, f \in Q_2, \eta \in G \equiv V \oplus W$$

функционал $I(A, g, f, u)$ при ограничениях

$$A(u+g) - f - \eta = 0.$$

Когда $W = W_0$, то задача I совпадает с исходной задачей, если же $W = W_N$, то задача I уже является некоторой конечномерной аппроксимацией исходной задачи и способ ее решения определяет численный алгоритм.

В дальнейшем предполагается выполнение следующих условий.

1. Все $A \in \mathcal{A}$ имеют представление (3) с измеримыми на Ω и Γ соответственно функциями a_{ij} , a_i , $i, j = 1, \dots, n$, a_{00} , σ , множества Q_1 и Q_2 принадлежат пространству V .

2. Существуют константы $0 < \nu < \mu_1$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ такие, что для всех $A \in \mathcal{A}$, $g \in Q_1$, $f \in Q_2$, $\xi \in R^n$, $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$

$$\nu \|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \mu_1 \|\xi\|^2,$$

$$|a_i(x)| \leq \mu_1, \quad i=1, \dots, n, \quad |a_{00}(x)| \leq \mu_1, \quad |\sigma(x')| \leq \mu_1,$$

$$\|g\| \leq \mu_2, \quad \|f\| \leq \mu_2.$$

3. Существует константа $\nu_1 > 0$ такая, что для всех $A \in \mathcal{A}$ и $u \in W$

$$\langle Au, u \rangle \geq \nu_1 \|u\|^2.$$

4. Для любых $A \in \mathcal{A}$, $g \in Q_1$, $f \in Q_2$ функционал $I(A, g, f, \cdot)$ определен на V , имеет непрерывную первую производную Фреше $I'(A, g, f, g')$ по $g' \in V$ и существует константа μ_3 такая, что для всех $A \in \mathcal{A}$, $g \in Q_1$, $f \in Q_2$, $g', g^2 \in W$

$$\begin{aligned} I(A, g, f, g' + g^2) &\leq \\ &\leq I(A, g, f, g') + \langle I'(A, g, f, g'), g^2 \rangle + \mu_3 \|g^2\|^2. \end{aligned}$$

Из условия 3 следует, что для каждого $A \in \mathcal{A}$ и любых $g, f \in V$ уравнение

$$A(u+g) = f + \eta \quad (4)$$

однозначно разрешимо относительно $u \in W$, $\eta \in G$ и, если (u^0, η^0) - решение уравнения (4), то для любых $u \in W$, $\eta \in G$

$$\begin{aligned} \|A(u+g) - f - \eta\| &= \|A(u-u^0) - (\eta-\eta^0)\| \geq \\ &\geq \frac{1}{\|u-u^0\|} \langle A(u-u^0), u-u^0 \rangle \geq \nu_1 \|u-u^0\|. \end{aligned} \quad (5)$$

Вполне аналогичные свойства имеет уравнение

$$A^*(v+g) = f + \eta,$$

где A^* - сопряженный к A оператор.

Для $A \in \mathcal{A}$, $g, f \in V$, $u, v \in W$, $\eta, \xi \in G$ определим функционал

$$\begin{aligned} J(A, g, f, u, v, \eta, \xi) &\equiv I(A, g, f, u) - \langle A(u+g) - f, v \rangle + \\ &+ \alpha \|A(u+g) - f - \eta\|^2 + \beta \|A^*v - I'(A, g, f, u) - \xi\|^2, \end{aligned}$$

где α и β - некоторые положительные константы.

При помощи условия 4 и оценки (5) показывается оценка

$$\begin{aligned} J(A, g, f, u, v, \eta, \xi) &\geq I(A, g, f, u(A, g, f)) + \\ &+ \varepsilon \nu_1^2 (\|u - u(A, g, f)\|^2 + \|v - v(A, g, f, u)\|^2); \end{aligned} \quad (6)$$

справедливая для всех $A \in \mathcal{A}$; $g, f \in V$, $u, v \in W$, $\eta, \xi \in G$ если только

$$2(\beta - \varepsilon) \nu_1 \left(\alpha - \varepsilon - \frac{\nu_3}{\nu_2} \right) \geq 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (7)$$

Здесь через $u(A, g, f)$ обозначено решение уравнения

$$\langle A(u+g) - f, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W$$

а через $\vartheta(A, g, f, u)$ - решение уравнения

$$\langle A^* \vartheta - I'(A, g, f, u), w \rangle = 0 \quad \forall w \in W.$$

Таким образом при выполнении условия (7) для фиксированных $A \in \mathcal{A}$, $g, f \in V$ функционал J достигает своего минимума по (u, ϑ, η, f) на единственном элементе c

$$u = u(A, g, f), \quad \vartheta = \vartheta(A, g, f, u(A, g, f))$$

и этот минимум равен $I(A, g, f, u(A, g, f))$.

Поэтому при выполнении условия (7) задача 1 эквивалентна задаче 2.

Задача 2. Минимизировать функционал J по $A \in \mathcal{A}$, $g \in Q_1$, $f \in Q_2$, $u, \vartheta \in W$, $\eta, f \in G$.

Отсюда следует, что любой численный метод минимизации функционала J в случае $W = W_N$ является численным методом приближенного решения задачи 1.

Обозначим через P оператор ортогонального проектирования пространства V на W и будем считать, что функционал $I(A, g, f, \cdot)$ является полиномом второго порядка, определенным на V . Тогда функционал J также является выпуклым полиномом второго порядка по совокупности аргументов (u, ϑ, η, f) (здесь и в дальнейшем всегда предполагается, что выполнено условие (7)).

Для произвольного $g \in V$ значение оператора P на g определяется как элемент $w \in W$ такой, что

$$\langle w - g, \vartheta \rangle = 0 \quad \forall w \in W$$

В случае, когда $W \subset W_0$ описание элемента Pg эквивалентно решению задачи минимизации функционала

$$\int_{\Omega} [|\nabla z|^2 + z^2 - 2 \sum_{i=1}^n g_i z_{x_i} - 2 g_0 z] dx + \int_{\Gamma} (z^2 - 2 z g_{n+1}) d\Gamma$$

по $\omega = (z, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}, z) \in W$. Для решения такой задачи имеются хорошо разработанные численные методы, особенно в случае, когда W определено при помощи базисных функций метода конечных элементов.

Рассмотрим следующий алгоритм минимизации функционала

Отправляясь от начальных $A_1 \in \mathcal{A}$, $g^1 \in Q_1$, $f^1 \in Q_2$, $u^1, v^1 \in W$, $\eta^1, f^1 \in G$ строится итерационный процесс для $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \omega^{1k} &= P J_u^1(A_k, g^k, f^k, u^k, v^k, \eta^k, f^k), \\ \omega^{2k} &= P J_v^1(A_k, g^k, f^k, u^k, v^k, \eta^k, f^k), \\ \omega^{3k} &= P [A_k(u^k + g^k) - f^k], \\ \omega^{4k} &= P [A_k^* v^k - I_u^1(A_k, g^k, f^k, u^k)], \\ \omega^{5k} &= P A_k \omega^{1k}, \\ \omega^{6k} &= P A_k^* \omega^{2k}, \\ \omega^{7k} &= P I_{uu}^1(A_k, g^k, f^k) \omega^{1k}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$(t_k, \tau_k) \longrightarrow \min J_{1k}(t, \tau),$$

$$\begin{aligned} J_{1k}(t, \tau) &= J(A_k, g^k, f^k, u^k + t \omega^{1k}) - \\ &= \langle A_k(u^k + g^k + t \omega^{1k}) - f^k, v^k + \tau \omega^{2k} \rangle + \\ &+ \alpha \| \omega^{3k} + t \omega^{5k} \|^2 + \beta \| \omega^{4k} + \tau \omega^{6k} - t \omega^{7k} \|^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$u^{k+1} = u^k + t_k w^{1k},$$

$$v^{k+1} = v^k + \tau_k w^{2k},$$

(I0)

$$\eta^{k+1} = A_k(u^{k+1} + g^k) - f^k - w^{3k} - t_k w^{5k},$$

$$f^{k+1} = A_k^* v^{k+1} - I_u'(A_k, g^k, f^k, u^{k+1}) - w^{4k} - \tau_k w^{6k} + t_k w^{7k},$$

и $A_{k+1} \in \mathcal{A}$, $g^{k+1} \in Q_1$, $f^{k+1} \in Q_2$ определяются из условия

$$J(A_{k+1}, g^{k+1}, f^{k+1}, u^{k+1}, v^{k+1}, \eta^{k+1}, f^{k+1}) \leq$$

(II)

$$\leq J(A_k, g^k, f^k, u^{k+1}, v^{k+1}, \eta^{k+1}, f^{k+1}).$$

Здесь под производными J'_u , J'_v , I'_u , I''_{uu} понимаются производные по соответствующим аргументам как элементов V .

Примечание. Для достаточно широкого класса задач

A_{k+1} , f^{k+1} , g^{k+1} можно определить в формулах путем решения в каждой точке $x \in \mathcal{D}$ или $x^i \in \Gamma$ соответствующей задаче минимизации согласно отысканию

$$\min_{A, g, f} J(A, g, f; u^{k+1}, v^{k+1}, \eta^{k+1}, f^{k+1}).$$

Теорема I. Пусть выполнены условия $I^0 \sim I^4$, функционал $J(A, g, f, \cdot)$ является полиномом второго порядка, определенным на V , и выполнено условие (7). Тогда итерационный процесс (8)-(II) определяет последовательность такую, что

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}(A_{k+1}, g^{k+1}, f^{k+1}, u^{k+1}, v^{k+1}, \eta^{k+1}, f^{k+1}) \leq \\ & \leq \mathcal{J}(A_k, g^k, f^k, u^k, v^k, \eta^k, f^k), \\ & k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Доказательство. Согласно (6)-10)

$$\|A_k(u^k + g^k) - f^k - \eta^k\| \geq \|\omega^{3k}\|,$$

$$\|A_k v^k - I'_u(A_k, g^k, f^k, u^k) - f^k\| \geq \|\omega^{4k}\|,$$

$$\mathcal{J}(A_k, g^k, f^k, u^k, v^k, \eta^k, f^k) \geq \mathcal{J}_{1k}(0, 0),$$

$$\mathcal{J}(A_k, g^k, f^k, u^{k+1}, v^{k+1}, \eta^{k+1}, f^{k+1}) \leq \mathcal{J}_{1k}(t_k, \tau_k) \leq \mathcal{J}_{1k}(0, 0).$$

Отсюда и из (II) следует утверждение теоремы. Будем говорить, что последовательность операторов $\{A_m\} \subset \mathcal{A}$, имеющих представление (3) при помощи наборов функций $\{\alpha_{ij}^m, \alpha_i^m, i, j=1, \dots, n, \alpha_{oo}^m, \sigma^m\}, m=1, 2, \dots$, соответственно, сходится к оператору A_o , имеющему представление (3) при помощи набора функций

$\{\alpha_{ij}^o, \alpha_i^o, i, j=1, \dots, n, \alpha_{oo}^o, \sigma^o\}$, если

$\alpha_{ij}^m \rightarrow \alpha_{ij}^o, \alpha_i^m \rightarrow \alpha_i^o, \alpha_{oo}^m \rightarrow \alpha_{oo}^o, \sigma^m \rightarrow \sigma^o$
в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ соответственно.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, некоторая подпоследовательность $\{A_m\} \subset \{A_k\}$ сходится к оператору $A_o, g^m \rightarrow g^o, f^m \rightarrow f^o$, множества \mathcal{A}, Q_1, Q_2 замкнуты, функционал $I(A, g, f, \cdot)$, элемент $I'_u(A, g, f, \cdot) \in V$ и оператор $I''_{uu}(A, g, f) \in L(V \rightarrow V)$ непрерывны по $(A, g, f) \in \mathcal{A} \times Q_1 \times Q_2$ и их нормы в рассматриваемом множестве равномерно ограничены.

Если для всех $k=1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
 & J(A_{K+1}, g^{K+1}, f^{K+1}, u^{K+1}, v^{K+1}, \eta^{K+1}, f^{K+1}) \leq \\
 & \leq J(A_K, g^K, f^K, u^{K+1}, v^{K+1}, \eta^{K+1}, f^{K+1}) - \\
 & - \gamma [J(A_K, g^K, f^K, u^{K+1}, v^{K+1}, \eta^{K+1}, f^{K+1}) - \\
 & - \inf_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ g \in Q_1 \\ f \in Q_2}} J(A, g, f, u^{K+1}, v^{K+1}, \eta^{K+1}, f^{K+1})], \quad (I2)
 \end{aligned}$$

где константа $\gamma > 0$ не зависит от K , то при достаточно большом отношении $\frac{\alpha}{\beta}$ последовательности $\{u^m\}$, $\{v^m\}$, $\{\eta^m\}$, $\{f^m\}$ сходятся к $u^0 = u(A_0, g^0, f^0)$, $v^0 = v(A_0, g^0, f^0, u^0)$, η^0 , f^0 соответственно и

$$\begin{aligned}
 & I(A_0, g^0, f^0, u^0) = J(A_0, g^0, f^0, u^0, v^0, \eta^0, f^0) \leq \\
 & \leq J(A, g, f, u^0, v^0, \eta^0, f^0) \quad \forall A \in \mathcal{A}, g \in Q_1, f \in Q_2. \quad (I3)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned}
 P[J'_u] &= P[-(A^* \delta - I'_u(A, g, f, u) - f) + 2\alpha A^*(A(u+g) - f - \eta) - \\
 & - 2\beta I''_{uu}(A, g, f)(A^* \delta - I'_u(A, g, f, u) - f)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P[J'_v] &= P[-(A(u+g) - f - \eta) + \\
 & + 2\beta A(A^* \delta - I'_u(A, g, f, u) - f)],
 \end{aligned}$$

то в силу условий теоремы при достаточно большом отношении $\frac{\alpha}{\beta}$

$$\|A_m(u^{m+s} + g^m) - f^m - \eta^{m+s}\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad s=0,1,$$

$$\|A_m^* \varphi^{m+s} - I_u'(A_m, g^m, f^m, u^{m+s}) - f^{m+s}\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad s=0,1,$$

$$\|u^m - u(A_m, g^m, f^m)\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

Отсюда аналогично как и в [3] показывается, что $u^m \rightarrow u^0 = u(A_0, g^0, f^0)$, $\varphi^m \rightarrow \varphi^0 = \varphi(A_0, g^0, f^0, u^0)$, $\eta^m \rightarrow \eta^0$, $f^m \rightarrow f^0$.

Поэтому в силу (I2) и равномерной ограниченности вторых частных производных функционала J по u , φ выполняется неравенство (I3).

Отметим, что в случае, когда функционал J не является полиномом по u , вместо формул (8)-(10) можно применить обычный шаг метода градиента по (u, φ) , а элементы (η, f) определить по аналогичным (8), (10) соотношениям. В свою очередь множество \mathcal{A} допустимых операторов для ряда задач можно однозначно определить множеством \mathcal{A}^0 допустимых матриц.

В случае, когда $n=2$, $\partial\Omega = \Gamma_0$, состояние системы описывается уравнением

$$\operatorname{div}(A(x) \nabla z) = \operatorname{div} f^0, \quad x \in \Omega, \quad A \in \mathcal{A}^0 \quad (I4)$$

$$z|_{\partial\Omega} = 0,$$

и минимизируемый функционал J имеет вид

$$J = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n g_i^0 z_{x_i} dx, \quad (I5)$$

в качестве V можно брать пространство

$$V = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega),$$

$$W_0 \equiv \{g: g \in V, g = (z_{x_1}, z_{x_2}), z \in W_2'(\Omega), z|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Здесь $f^0 = (f_1^0, f_2^0)$ и $g^0 = (g_1^0, g_2^0)$ заданные фиксированные элементы из V .

Введем в пространстве V скалярное произведение и соответствующую норму равенствами

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f_i(x) g_i(x) dx, \quad \|g\|_V = \sqrt{\langle g, g \rangle},$$

тогда функционал J из задачи 2 имеет вид

$$J = I(u) - \langle Au - f^0, v \rangle + \alpha \|Au - f^0 - \eta\|_V^2 + \quad (16)$$

$$+ \beta \|Au^* - g^0 - f\|_V^2 \equiv I - J_1 + \alpha J_2 + \beta J_3.$$

Оператор проектирования $P: V \rightarrow W_0$ каждому $g \in V$ сопоставляет элемент $Pg = u = (z_{x_1}, z_{x_2}) \in W_0$, где z - обобщенное решение из $W_2'(\Omega)$ краевой задачи

$$\Delta z = \operatorname{div} g, \quad x \in \Omega, \quad z|_{\partial\Omega} = 0. \quad (17)$$

В такой постановке сохраняют силу все утверждения теорем 1 и 2.

В дальнейшем рассмотрим конкретную задачу, в которой множество Ω^0 определяется следующим образом

$$\Omega^0 \equiv \left\{ \begin{aligned} & \mathcal{A}: \mathcal{A}(x) = \frac{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\lambda_1(x) - \lambda_2(x)}{1 + p^2(x)} \begin{pmatrix} 1 - p^2(x) & 2p(x) \\ 2p(x) & p^2(x) - 1 \end{pmatrix}, \quad x \in \Omega, \\ & -\infty < p(x) < +\infty, \quad x \in \Omega, \\ & 0 < \gamma_1(x) \leq \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \gamma_2(x) \leq \mu, \quad x \in \Omega, \\ & [\lambda_1(x) \cdot \lambda_2(x) - \lambda_1(x)(\gamma_1(x) + \gamma_2(x)) + \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(x)] \leq 0, \quad x \in \Omega \end{aligned} \right\}. \quad (18)$$

где $0 < \nu < \mu$ - фиксированные константы,
 y_1, y_2 - заданные фиксированные скалярные функции.

Шаг (II) минимизации функционала J по оператору $A \in \mathcal{A}$ в этой задаче сводится к минимизации подынтегрального выражения функционала (I6) по матрице $\mathcal{K}(x) \in \mathcal{A}^0$ в каждой точке $x \in \Omega$, а это можно осуществить методом переменных направлений - поочередно минимизируя подынтегральное выражение функционала (I6) по ρ при фиксированных (λ_1, λ_2) и по (λ_1, λ_2) при фиксированном ρ . Минимизация по ρ - это задача отыскания безусловного минимума скалярной функции, а по (λ_1, λ_2) - задача минимизации скалярной функции при ограничениях в виде неравенств из (I6). Решения обеих этих задач можно найти путем перебора всех точек в которых выполняются необходимые условия минимума.

Для практической реализации описанного метода на ЭВМ следует произвести его дискретизацию. Если Ω - прямоугольная область, то пространство $W_2'(\Omega)$ можно аппроксимировать конечномерным пространством $W_{2N}'(\Omega)$, базисными элементами которого являются функции типа конечных элементов из $W_2'(\Omega)$ на равномерной прямоугольной сетке, а пространство W_0 - пространством

$$W_N = \{g : g \in V, g = \nu z, z \in W_{2N}'(\Omega), z|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$G_N = V \ominus W_N.$$

Дискретизированный оператор проектирования $P_N : V \rightarrow W_N$ в этом случае сводится к решению конечно-разностного аналога краевой задачи (I7). Эта задача хорошо решается прямым методом [1] с применением дискретного синуспреобразования Фурье. С целью экономии машинного времени целесообразно воспользоваться быстрым преобразованием Фурье (см. [5]).

Был проведен численный расчет для задачи (I4), (I5), (I8) в области $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$, разбитой равно-

мерной прямоугольной сеткой порядка 16×16 , при следующих функциях и значениях численных параметров

$$f_1^0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Omega \setminus [2h; 14h] \times [7h; 9h], \\ x_1 - 2h, & \text{если } x = (x_1, x_2) \in [2h; 4h] \times [7h; 9h], \\ 2h, & \text{если } x \in [4h; 12h] \times [7h; 9h], \\ 14h - x_1, & \text{если } x = (x_1, x_2) \in [12h; 14h] \times [7h; 9h], \end{cases}$$

$$f_2^0(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$g_1^0(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$g_2^0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Omega \setminus [6h; 10h] \times [7h; 9h], \\ -1, & \text{если } x \in [6h; 10h] \times [7h; 9h], \end{cases}$$

$$y_1(x) = 1, \quad x \in \Omega,$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [h; 11h] \times [6h; 10h], \\ 10, & \text{если } x \in \Omega \setminus [h; 11h] \times [6h; 10h], \end{cases}$$

$$h = \frac{1}{16}, \quad \alpha = \beta = 1,$$

В качестве начальных значений выбирались

$$\forall x \in \Omega \quad u^0(x) = v^0(x) = 0,$$

$\mathcal{A}(x)$ - матрица определенная величинами

$$p(x) = \frac{1}{2}, \quad \lambda_1(x) = \frac{1}{2} (y_1(x) + y_2(x)),$$

$$\lambda_2(x) = \frac{1}{2} \left(\lambda_1(x) + y_1(x) + y_2(x) - \frac{g_2^0(x) \cdot f_2^0(x)}{\lambda_1(x)} \right).$$

Результаты расчета помещены в таблице, где величины J , I , J_1 , J_2 , J_3 определены соотношением (16), а K - номер итерации.

k	$J \cdot 10^9$	$I \cdot 10^9$	$J_1 \cdot 10^9$	$J_2 \cdot 10^9$	$J_3 \cdot 10^9$
0	18405373	0	0	117463	18287910
1	9502168	-617488	-246510	143393	9729746
70	-21429	-484973	-430176	17671	15697
140	-45117	-183633	-134785	1612	2121
210	-49648	-110605	-60254	313	402
280	-51289	-81152	-29668	74	104
350	-52129	-67129	-14943	19	43
420	-52656	-60625	-7916	6	31
490	-53027	-57578	-4506	4	45
560	-53477	-56113	-2639	1	4

Список литературы

1. Ляшенко И.Н., Мередов Х.М. Численное решение некоторых спектральных задач теории колебаний. Киев, 1978, с.59-64.
2. Райтум У.Ё. Об одном преобразовании неявных экстремальных задач. - Журн.вычисл.мат. и мат.физ., 1969, т.9, № 4, с.822-829.
3. Райтум У.Ё. О некоторых экстремальных задачах, связанных с линейным эллиптическим уравнением. - В кн.: Латы мат.ежегодник. Рига: Зинатне, 1968, вып.4, с.257-279.
4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978, 488 с.
5. Christiansen J.P., Hockney R.W. Four 67, a fast Fourier transform package. - In: Comput.Phys.Communic. N. - Holland Publ., 1971, vol 2, p.127-138.

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ
ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕЙ ЖИДКОСТИ

Егоров А.Г., Пудовкин М.А.

(Казанский ГУ им.В.И.Ульянова-Ленина)

Рассмотрим процесс теплообмена при течении жидкости в двумерной трещиноватой среде. Предположим, что среда имеет периодическую геометрическую структуру, период которой мал по сравнению с другими геометрическими величинами, входящими в задачу. Изучается вопрос получения осредненного уравнения, описывающего процесс теплообмена. При этом используется метод осреднения дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами, изложенный в [1,2]. Полученное осредненное уравнение имеет тот же вид, что и уравнение, описывающее процесс теплообмена в пористой среде при бесконечно большой скорости межфазного теплообмена, однако при этом в уравнении появляются дополнительные кондуктивные члены - члены "конвективной теплопроводности". Наличие их можно объяснить флуктуациями, имеющими в нашем случае периодическую структуру, действительной скорости вокруг средней скорости движения жидкости [4].

I. Постановка задачи.

Предположим, что:

а) трещины образуют две системы l_1 и l_2

$$l_1: \bar{y} = ka \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$l_2: \bar{x} = ka \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a - расстояние между трещинами

б) раскрытие трещин L_0 мало по сравнению с a

в) составляющие скорости фильтрации по осям x и y

$$\bar{v}_1 = \mathcal{N}_1 \frac{L_0}{a}, \quad \bar{v}_2 = \mathcal{N}_2 \frac{L_0}{a} - \text{постоянные.}$$

Здесь $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ - фактические скорости движения жидкости по первой и по второй системе трещин соответственно.

г) характерный размер R области Ω , в которой рассматри-

вается процесс, много больше, чем α .

Уравнения, описывающие исследуемый процесс, с учетом а)-г) могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} = \Delta T_\varepsilon + f(x, y, t) \quad \text{в } \Omega \setminus (l_1 \cup l_2) \quad (1)$$

$$N_1 \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial x} = \left[\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial y} \right] \quad \text{при } y = \kappa \varepsilon, \quad \kappa = 0, \pm 1, \dots \quad (2)$$

$$N_2 \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial y} = \left[\frac{\partial T_\varepsilon}{\partial x} \right] \quad \text{при } x = \kappa \varepsilon, \quad \kappa = 0, \pm 1, \dots \quad (3)$$

Начальные и граничные условия не поставлены, так как осредненное уравнение от вида их не зависит. Здесь

$$x = \frac{\bar{x}}{R}, \quad y = \frac{\bar{y}}{R}, \quad t = \frac{\bar{t} \lambda_c}{R^2 c_c}, \quad N_i = \frac{c_x \bar{n}_i \alpha}{\lambda_c}, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{R}$$

$(\bar{x}, \bar{y}), \bar{t}$ - декартовы координаты, время

λ_c, c_c, c_x - коэффициенты теплопроводности и теплоемкости среды и жидкости.

$$[g(x)] \Big|_{x=\alpha} = g|_{x=\alpha+} - g|_{x=\alpha-}$$

Заметим, что уравнения (1)-(3) можно переписать следующим образом

$$L(T_\varepsilon) = \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial t} - \Delta T_\varepsilon + \delta_m(x) N_2 \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial y} + \delta_n(y) N_1 \frac{\partial T_\varepsilon}{\partial x} = f, \quad (4)$$

где $\delta_m(x) = \sum_{(m)} \delta(x - m\varepsilon)$; $\delta(x)$ - функция Дирака.

Изучается асимптотическое поведение T_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Асимптотическое разложение.

В соответствии с [1,2] введем быстрые пространственные переменные

$$X = \frac{x}{\varepsilon}, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon}.$$

Тогда

$\delta_m(x) = \frac{1}{\varepsilon} \delta_m(X)$; $\delta_m(X)$ - периодическая, с периодом 1, функция Дирака. Решение (4) ищем в виде

$$T_\varepsilon = \sum_{i,j,k \geq 0} \varepsilon^{i+j+2k} N_{ij}^k(X, Y) u_{ijk}; \quad u_{ijk} = \frac{\partial^{i+j+k} u_0(x, y, t)}{\partial t^k \partial x^i \partial y^j}. \quad (5)$$

Требуем при этом, чтобы N_{ij}^k являлись периодическими, с периодом 1, функциями каждого аргумента, $N_{00}^0 = 1$ и

$$\int_I N_{ij}^k(x, y) dx dy = 0; \quad I = \left\{ |x| < \frac{1}{2}, |y| < \frac{1}{2} \right\}. \quad (6)$$

Подставив (5) в (4) и собрав члены при одинаковых степенях ε , получим

$$L(T_\varepsilon) = \sum_{i, j, k \geq 0} \varepsilon^{i+j+2k-2} c_{ij}^k u_{ijk}$$

$$c_{ij}^k = L_1(N) - 2 \frac{\partial}{\partial y} N_{j-1} - 2 \frac{\partial}{\partial x} N_{i-1} + \delta_n(x) \eta_2 N_{j-1} +$$

$$+ \delta_n(y) \eta_1 N_{i-1} + N^{k-1} - N_{i-2} - N_{j-2}.$$

В N указаны лишь индексы, отличные от i, j, k . Считаем при этом, что $N_{ij}^k = 0$ при отрицательных индексах.

$$L_1(N) = - \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + \delta_n(x) \eta_2 \frac{\partial N}{\partial y} + \delta_n(y) \eta_1 \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Потребуем, чтобы c_{ij}^k не зависели от x и y .

Воспользуемся тем, что уравнение

$$L_1(N) = f(x, y)$$

имеет периодическое решение тогда и только тогда, когда

$$\int_I f(x, y) dx dy = 0,$$

причем решение это определяется с точностью до постоянной.

Учитывая этот факт, а так же условия (6), находим последовательно функции N_{ij}^k как решения некоторых периодических задач с оператором L_1 , и c_{ij}^k как значения некоторых функционалов на N_{ij}^k .

Можно показать, что $L_1(N_{10}^0) = \eta_1 (1 - \delta_n(y))$, $L_1(N_{01}^0) = \eta_2 (1 - \delta_n(x))$

$$c_{00}^0 = 0, \quad c_{10}^0 = \eta_1, \quad c_{01}^0 = \eta_2, \quad c_{00}^1 = 1, \quad c_{20}^0 = \alpha - 1, \quad c_{02}^0 = \beta - 1, \quad c_{11}^0 = c_1 + c_2$$

$$c_1 = \eta_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} N_{10}^0(0, y) dy \quad c_2 = \eta_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} N_{01}^0(x, 0) dx$$

$$\alpha = \eta_1 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} N_{10}^0(x, 0) dx \quad \beta = \eta_2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} N_{01}^0(0, y) dy.$$

Таким образом

$$T_\varepsilon \sim u(x, y, t) + \varepsilon N_{10}^0(x, y; \nu_1, \nu_2) \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon N_{01}^0 \frac{\partial u}{\partial y} + O(\varepsilon^2) \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\nu_1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu_2}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial y} - \Delta u + (a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (c_1 + c_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = f(x, y, t) + O(\varepsilon). \quad (8)$$

Заметим, что в силу соотношения (6)

$$u(x, y) = \int_I T_\varepsilon(x, y, X, Y) dX dY.$$

Таким образом $u(x, y)$ имеет физический смысл средней по ячейке I температуры.

Величины $a, b, c_1 + c_2$ можно рассматривать как составляющие тензора конвективной теплопроводности.

Замечания.

1. Полученные соотношения имеют место и в том случае, когда

$$\nu_i = \tilde{\nu}_i(x, y) + \varepsilon f_i(x, y, X, Y); \quad \int_I f_i dX dY = 0, \quad i = 1, 2.$$

В этом случае вместо ν_i в формулы (7), (8) необходимо подставить $\tilde{\nu}_i$.

2. Пусть системы трещин представимы в виде

$$l_1: \varphi(\bar{x}, \bar{y}) = k\alpha \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

$$l_2: \psi(\bar{x}, \bar{y}) = k\alpha \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

где $\varphi + i\psi$ - аналитическая функция.

После перехода к новым переменным $\varphi = \varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi = \psi(\bar{x}, \bar{y})$ приходим к задаче, аналогичной рассмотренной выше.

3. Вычисление коэффициентов.

Для вычисления a, c_1 необходимо знать значения N_{10}^0 при $X=0$ и при $Y=0$. Пусть

$$N_{10}^0|_{Y=0} = A_0 + \sum_k A_k^1 \sin 2\pi k X + A_k^2 \cos 2\pi k X$$

$$N_{10}^0|_{X=0} = B_0 + \sum_k B_k^1 \sin 2\pi k Y + B_k^2 \cos 2\pi k Y.$$

Можно показать, что коэффициенты A и B удовлетворяют следующим соотношениям

$$A_0 = -\frac{\nu_1}{12} - \nu_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} B_k^1, \quad B_0 = -\nu_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} A_k^1,$$

$$A'_k = \nu_1 \frac{1}{2} \operatorname{cth}(\pi k) A_k^2, \quad B'_k = \nu_2 \frac{1}{2} \operatorname{cth}(\pi k) B_k^2$$

$$A_k^2 + \nu_1 \frac{1}{2} \operatorname{cth}(\pi k) A_k^1 + \nu_2 \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \times 2\pi n B_n^1}{(2\pi k)^2 + (2\pi n)^2} = 0$$

$$B_k^2 + \nu_2 \frac{1}{2} \operatorname{cth}(\pi k) B_k^1 + \nu_1 \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \times 2\pi n A_n^1}{(2\pi k)^2 + (2\pi n)^2} = \frac{-2\nu_1}{(2\pi k)^2}$$

Отсюда для

$$y_k = \frac{\nu_2^2 + 4}{\nu_2^2} \frac{\nu_2}{\nu_1} B_k^1, \quad x_k = A_k^1$$

получаем следующую систему

$$\begin{aligned} (\Gamma - \Gamma_2)y - sK(\Gamma - \Gamma_1)^{-1}Ky &= b \\ x &= -s(\Gamma - \Gamma_1)^{-1}Ky. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь x, y, b - последовательности с членами x_k, y_k, b_k

$$s = \frac{\nu_1^2 \nu_2^2}{(\nu_1^2 + 4)(\nu_2^2 + 4)}; \quad \Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, K - \text{операторы,}$$

$$(\Gamma x)_n = \operatorname{cth}(\pi n)x_n, \quad (\Gamma_1 x)_n = \frac{4}{\nu_1^2 + 4} \frac{4e^{-2\pi n}}{1 - e^{-4\pi n}} x_n$$

$$(Kx)_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 \times 2\pi k}{(2\pi k)^2 + (2\pi n)^2} x_k.$$

При этом

$$a = \nu_1^2 \left(-\frac{1}{12} - \frac{\nu_2^2}{\nu_2^2 + 4} \right) f(\nu_1, \nu_2)$$

$$c_1 = -\nu_1 \nu_2 g(\nu_1, \nu_2)$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} y_n(\nu_1, \nu_2) \quad (10)$$

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} x_n(\nu_1, \nu_2). \quad (11)$$

Рассмотрим вместе с задачей (9) и функциями (10), (11) задачу

$$\Gamma \bar{y} - sK\Gamma^{-1}K\bar{y} = b \quad (I2)$$

$$x = -s\Gamma^{-1}K\bar{y}$$

и функции

$$\bar{y}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2Tm} \bar{y}_m(s) \quad (I3)$$

$$g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2Tm} \bar{x}_m(s). \quad (I4)$$

Введем пространства последовательностей

$$l_k = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \mid \sum_{m=1}^{\infty} |x_m| (2Tm)^{-k} < \infty \right\}$$

с нормами

$$\|x\|_k = \sum_{m=1}^{\infty} |x_m| (2Tm)^{-k}.$$

Нетрудно, опираясь на равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2Tm)^2 + (2Tk)^2} = \operatorname{cth}(Tm) \frac{1}{2Tm} = -\frac{2}{(2Tm)^2}$$

получить следующие оценки

$$\|x\|_0 \leq \|z\|_0 \quad (I5)$$

$$\|x\|_2 \leq \frac{1}{6} \|z\|_1. \quad (I6)$$

Кроме того, очевидно, выполнены следующие неравенства

$$\|(\Gamma - \Gamma_1)^{-1} z\|_0 \leq \|z\|_0 \quad (I7)$$

$$\|\Gamma_1^{-1} z\|_0 \leq \|z\|_0 \quad (I8)$$

$$\|\Gamma_2^{-1} z\|_0 \leq 2T \times 4e^{-2T} (1-s) \|z\|_1, \quad (I9)$$

$$\|(\Gamma - \Gamma_1)^{-1} z - \Gamma_1^{-1} z\|_0 \leq 4 \times (2T)^2 e^{-2T} (1-s) \|z\|_2. \quad (20)$$

Введем обозначения

$$T_1 = (\Gamma - \Gamma_2) - sK(\Gamma - \Gamma_1)^{-1}K,$$

$$T_2 = \Gamma - sK\Gamma^{-1}K, \quad R = T_1 - T_2.$$

Теорема: T_1, T_2 как операторы из l_0 в l_0 непрерывно обратимы при всех $s < 1$

$$\|T_i^{-1}\| \leq \frac{1}{1-s} \quad (21)$$

и

$$\bar{y} = \sum_{n=0}^{\infty} (s\Gamma^{-1}K\Gamma^{-1}K)^n \Gamma^{-1}t \quad (22)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (s(\Gamma-\Gamma_2)^{-1}K(\Gamma-\Gamma_1)^{-1}K)^n (\Gamma-\Gamma_2)^{-1}t \quad (23)$$

Для всех $t \in l_0$, таких, что $t_k < 0$, справедлива оценка

$$|\varphi(n_1, n_2) - \bar{\varphi}(s)| < \frac{\delta}{1-\delta} |\bar{\varphi}(s)|, \quad (24)$$

где $\varphi, \bar{\varphi}$ определяются формулами (10), (13),

$$\delta = 4e^{-2T} \left(1 + \frac{T}{3} s^2\right).$$

Доказательство. Первая часть теоремы и формулы (21), (22), (23) следуют из (15), (17), (18) и известной теоремы об обратном операторе [3], с.228). Несложно заметить, исходя из (22), (23), что если $t_k < 0$, то

$$y_k < 0, \quad \bar{y}_k < 0, \quad y_k - \bar{y}_k < 0. \quad (25)$$

Из (12), (9) следует

$$\bar{y} = (E + T_2^{-1}R)y,$$

где E - единичный оператор.

Используя оценки (16), (19), (20), (21), получаем

$$\|T_2 R y\|_1 \leq \delta \|y\|_1.$$

Отсюда и из неравенств (25) следует соотношение (24).

Замечания. 1. Соотношение вида (24) можно доказать аналогично и для функций $g(n_1, n_2), \bar{g}(s)$.

2. Теорема остается справедливой и в том случае, когда в ее формулировке $l_0 = \{(x_1, x_2, \dots) | \max_n |x_n| < \infty\}$ с нормой $\|x\|_0 = \max_n 2^{Tn} |x_n|$. Можно показать, опираясь на регулярность сопряженного к K оператора [5], что для всех t , таких, что $\max_n |n t_n| < \infty$ и $s \leq 1, \bar{y} \in l_0$; при этом формула (22) для вычисления \bar{y} оказывается пригодной.

3. Таким же образом можно установить, что величину

$$\frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{12} + s f(v_1, v_2) + g(v_1, v_2) \right)$$

с малой погрешностью можно представить в виде $h(s)$, где

$$h(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi n}} z_n(s), \quad z_n - \text{решение уравнения (12) с}$$

$$b_n = \frac{c \text{th } \pi n v}{\pi n v}.$$

Итак, с малыми относительными погрешностями, задаваемыми неравенствами вида (24) имеем:

$$\alpha = v_1^2 \left(-\frac{1}{12} - \frac{v_2^2}{v_2^2 + 4} \bar{f}(s) \right)$$

$$c_1 = -v_1 v_2 \bar{g}(s).$$

Очевидно, что

$$b = (v_1, v_2) = \alpha(v_2, v_1), \quad c_1(v_2, v_1) = c_2(v_1, v_2).$$

Прямые вычисления по формуле (22) дают

$$\bar{f}(s) = -\frac{1}{2\pi^3} (1,2 + 0,41s + 0,22s^2 + \dots)$$

$$\bar{g}(s) = \frac{1}{2\pi^3} (0,63s + 0,29s^2 + 0,19s^3 + \dots).$$

Из замечания 2 вытекает, что $\bar{f}(s)$, $\bar{g}(s)$ ограничены при $0 \leq s \leq 1$. Можно показать, что эти функции монотонны и

$$\frac{1}{12} + f(1) = g(1) \approx 0,03.$$

Функция $h(s)$ неограниченно возрастает при $s \rightarrow 1$.

4. Оценка членов конвективной теплопроводности.

Перейдем в (8) к новым координатам

$$\xi = \frac{v_2}{v} x + \frac{v_1}{v} y, \quad \eta = -\frac{v_2}{v} x + \frac{v_1}{v} y; \quad v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Таким образом, ось ξ направлена по средней скорости движения жидкости, η перпендикулярно ей. Уравнение для среднеинтегральной температуры u в новых координатах запишется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{v}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{c} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}) = f. \quad (26)$$

Для $\bar{\alpha}, \bar{c}, \bar{b}$ получаем следующие выражения

$$\bar{b} \approx -2s \left(4 + \frac{16}{\nu^2}\right) h(s) \quad (27)$$

$$\bar{\alpha} \approx \nu^2 \left(-\frac{1}{12} - s f(s)\right) - \bar{b} \quad (28)$$

$$\bar{c} \approx \frac{(\nu_2^2 - \nu_1^2) \nu_1 \nu_2}{\nu^2} \left(\frac{1}{12} - g(s)\right). \quad (29)$$

В (27)–(29) мы не выписали члены, малые по сравнению с I. При больших ν_1, ν_2

$$\bar{\alpha} \sim -0,05 \nu^2, \quad \bar{c} \sim \frac{\nu_2^2 - \nu_1^2}{\nu^2} \nu_1 \nu_2 \times 0,053. \quad (30)$$

Рассмотрим теперь вопрос о величине членов конвективной теплопроводности при характерных для нефтепромысловой практики и подземных тепловых котлов фильтрационных потоках в двух различных случаях.

1. Пористая среда.

В этом случае можно положить $\alpha < 10^{-2}$ см. Поэтому даже при значительных скоростях фильтрации $\bar{v} \sim 10^{-2}$ (см/с) ν мало ($\nu \sim 10^{-1}$), а значит, в соответствии с (27)–(29), коэффициенты конвективной теплопроводности много меньше I. Это подтверждает вывод, сделанный в [4], о незначительном влиянии конвективной теплопроводности на процесс теплообмена в пористом пласте в реальных условиях.

2. Трещиноватая среда.

Характеризуется большим, чем в случае пористой среды, размером породных блоков. Пусть, например, $\alpha \sim 10^1$ см, $\bar{v} \sim 10^{-3}$ (см/с). При этом $\nu \sim 10$ и коэффициенты $\bar{\alpha}, \bar{c}$ могут принимать в соответствии с (30) большие значения. Однако и в этом случае, по-видимому, является справедливым пренебрежение соответствующими членами в (26) по сравнению с конвективным переносом, соответствующим среднему движению жидкости (членом $\frac{\nu}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \xi}$ в (26)). Наибольший интерес, на наш взгляд, представляет член конвективной теплопроводности в поперечном среднем движении жидкости направлении (коэффициент \bar{b}). Как уже было отмечено $h(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 1$, следовательно $\bar{b} \rightarrow \infty$ при $\nu_1, \nu_2 \rightarrow \infty$. Для $\nu_1 = \nu_2 = 10$ даже заведомо заниженные оценки дают $\bar{b} > 2.7$. Таким обра-

зом, учет отличия эффективного коэффициента поперечной теплопроводности от коэффициента теплопроводности пласта является существенным при изучении процессов теплообмена в трещиноватой среде. С этой точки зрения может быть оправдано, видимо, применение схемы "сосредоточенной емкости" для рассматриваемого случая.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Осредненные характеристики тел с периодической структурой. - ДАН СССР, 1974, т.218, № 5, с.1046-1049.
2. Бахвалов Н.С. Осреднение дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами. - ДАН СССР, 1975, т.221, № 3, с.516-519.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1968. 496 с.
4. Ентов В.М. Об эффективном коэффициенте теплопроводности насыщенной пористой среды при наличии фильтрационного движения. - Прикл.мех. и техн.физ., 1965, № 5, с. 153-155.
5. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М., 1949, 695 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО
УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Елкина Н.Г.

(ВЦ ЛГУ им.П.Стучки)

В работах [1], [2] был предложен численный метод и дано его теоретическое обоснование для решения задачи Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа. В данной работе приводится подробный алгоритм численного решения этой задачи и результаты расчетов для модельных примеров.

I. Напомним коротко постановку задачи и основные результаты работы [2]. Требуется получить решение следующей задачи:

$$\Delta u = f(x, u, u_x), \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

$\mathcal{K} = (x_1, x_2)$, $x \in \mathcal{K}$, \mathcal{K} - односвязная область в R_2 ограниченная кусочно-гладкой кривой Γ ;

$f(x, u, u_x)$ - действительная, непрерывно-дифференцируемая по всем переменным функция в области \mathcal{D} :

$\mathcal{D} = \{x \in \mathcal{K}, -\infty < u, u_x < \infty\}$, также удовлетворяющая требованиям существования решения задачи (1,2).

Задача (1,2) сводится к задаче нахождения неподвижной точки $v(x) \in L_p(\mathcal{K})$ для оператора F из $L_p(\mathcal{K})$

$$(Fv)(x) = f(x, \int_{\mathcal{K}} G(x, s)v(s)ds, \int_{\mathcal{K}} G'_x(x, s)v(s)ds),$$

где $G(x, s)$ - функция Грина для следующей задачи:

$$\Delta u = -v(x), \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

$v(x)$ - некоторая функция из $L_p(K)$.

Итак, исходная задача (1,2) сводится к следующей задаче:

$$F(v) = v. \quad (3)$$

Согласно [2], семейство уравнений -

$$V^h = P_c^h V^h \quad (4)$$

аппроксимирует задачу (3), где V^h - элемент сеточного пространства S_h на сетке N_h .

$P_c^h V^h$ - аппроксимация оператора F , если V^h принадлежит сфере радиуса " c " в пространстве

$$S_h : V^h \in S_h([0]_w^h, c) \quad \text{и} \quad [0]_w^h$$

- нулевой элемент пространства S_h .

В работе [2] доказана теорема о необходимых и достаточных условиях существования неподвижной точки для оператора F :

ТЕОРЕМА. Пусть функция $f(x, u, u_x)$ непрерывна по всем переменным в D . Тогда для того, чтобы оператор F имел, по крайней мере, одну неподвижную точку, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое значение параметра " c ", что семейство уравнений (4) $\mathcal{E}(h)$ -разрешимо, где

$$\mathcal{E}_{c,p}(h) = \min \|V^h - P_c^h V^h\|_{p,0}^h;$$

т.е. $\mathcal{E}(h) \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$.

Для решения исходной задачи (1,2) находится

$$\min \|V^h - P_c^h V^h\| \quad (5)$$

в пространстве S_h . Параметр " c " можно определить из априорных оценок задачи (1,2).

2. Схема численного решения задачи.

Для решения задачи (1,2) необходимо задать следующее: значение параметра „ ϵ^n “, сетку N_{kz} , ($kz = (k_x, k_y)$), начальное приближение функции $V^h_{k, n}$ на сетке N_{kz} . Для заданной области вычисляются значения функции Грина на сетке N_{kz} .

Задача (1,2) решалась для прямоугольника K :
 $K = [0, a] \times [0, b]$ Функция Грина для внутренности прямоугольника $[0, a] \times [0, b]$ за исключением окрестности источника может быть представлена в следующем виде [3]:

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{a^2 b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \kappa \frac{\pi}{a} x \cdot \sin m \frac{\pi}{b} y \cdot \sin \kappa \frac{\pi}{a} \xi \cdot \sin m \frac{\pi}{b} \eta}{\frac{m^2}{b^2} + \frac{\kappa^2}{a^2}}$$

В работе [2] использовалось кусочно-постоянное продолжение сеточной функции $V^h \in S_h$ на область K , определенное равенством:

$$\{V^h\}_0(x, y) = V_{k, n}^h \text{ при } \begin{cases} x \in (x_k - h_x, x_k + h_x], \\ y \in (y_n - h_y, y_n + h_y], \\ (k = 1, \dots, K; n = 1, \dots, N), \end{cases}$$

(скобки $\{ \cdot \}_0$ — обозначение кусочно-постоянного продолжения).

Функция $u(x) = \int_K G(x, s) v(s) ds$ аппроксимируется функцией

$$u_{i, j}^h = \int_0^a \int_0^b G(x_i, y_j, \xi, \eta) \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N v_{k, n}^h d\xi d\eta, \\ (i = 1, \dots, K; j = 1, \dots, N).$$

Учитывая кусочно-постоянное продолжение сеточной функции V^h , получаем следующее выражение для $u_{i, j}^h$:

$$u_{i, j}^h = \sum_{k=2}^{K-1} \sum_{n=2}^{N-1} v_{k, n}^h A_{k, n} + \sum_{n=2}^{N-1} v_{1, n}^h A_{1, n} + \sum_{n=2}^{N-1} v_{k, n}^h A_{k, n} +$$

$$\sum_{\kappa=2}^{\kappa-1} V_{\kappa,1} A_{\kappa,1} + \sum_{\kappa=2}^{\kappa-1} V_{\kappa,N} A_{\kappa,N} + V_{1,1} A_{1,1} + V_{\kappa,1} A_{\kappa,1} +$$

$$+ V_{1,N} A_{1,N} + V_{\kappa,N} A_{\kappa,N}.$$

где коэффициенты $A_{\kappa,n}$, за исключением окрестности источника, имеют следующий вид:

$$A_{\kappa,n} = \int_{y_n-h_y}^{y_n+h_y} \int_{x_\kappa-h_x}^{x_\kappa+h_x} G(x_i, y_j, f, \eta) df d\eta; \quad (\kappa=2, \dots, \kappa-1),$$

$$(n=2, \dots, N-1),$$

$$A_{1,n} = \int_{y_n-h_y}^{y_n+h_y} \int_{x_1=0}^{x_1=h_x} G(x_i, y_j, f, \eta) df d\eta,$$

$$(n=2, \dots, N-1),$$

$$A_{\kappa,n} = \int_{y_n-h_y}^{y_n+h_y} \int_{x_\kappa-h_x}^{x_\kappa=a} G(x_i, y_j, f, \eta) df d\eta,$$

$$(n=2, \dots, N-1),$$

$$A_{\kappa,1} = \int_{y_\kappa-h_y}^{y_\kappa=h_y} \int_{x_\kappa-h_x}^{x_\kappa+h_x} G(x_i, y_j, f, \eta) df d\eta,$$

$$(\kappa=2, \dots, \kappa-1),$$

$$A_{\kappa,N} = \int_{y_\kappa-h_y}^{y_\kappa=h_y} \int_{x_\kappa-h_x}^{x_\kappa+h_x} G(x_i, y_j, f, \eta) df d\eta,$$

$$(\kappa=2, \dots, \kappa-1),$$

$$A_{1,1} = \int_0^{h_x} \int_0^{h_y} G(x_i, y_j, \xi, \eta) d\xi d\eta; \quad A_{k,1} = \int_{x_k-h_x}^x \int_0^{h_y} G(x_i, y_j, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$A_{1,N} = \int_0^{h_x} \int_{y_N-h_y}^y G(x_i, y_j, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad A_{k,N} = \int_{x_k-h_x}^x \int_{y_N-h_y}^y G(x_i, y_j, \xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Используя симметричность функции Грина, достаточно получить значения коэффициентов $A_{k,n}$ ($k=1, \dots, K, n=1, \dots, N$) только для функции

$$z_{i,j} \text{ где } \begin{cases} i = 1, \dots, (K+1)/2, \\ j = 1, \dots, (N+1)/2. \end{cases}$$

(K - число узлов сетки по x , N - число узлов сетки по y);

$$h_x = H_x/2, \quad \text{где } H_x = \frac{a}{K-1},$$

$$h_y = H_y/2, \quad \text{где } H_y = \frac{b}{N-1}.$$

Функция $z_{i,j} = \int_{\kappa} G_{\kappa}(x, y) v(\xi) v(\eta) d\xi d\eta$ аппроксимируется аналогичным образом.

Вычисления были проведены на машине СЕ-400. Для минимизации (5) использовался метод Ньютона с максимально возможным числом узлов $[11 \times 11]$ для этой машины.

Для решения полученной системы уравнений также использовался метод Вегстейна [4] на сетке с числом узлов $[21 \times 21]$.

Были получены решения для следующего вида функций $f(x, y)$ в области $K = [0, 1] \times [0, 1]$:

$$1) f(x, y) = e^{2x} - \varphi(x, y) y;$$

$$2) f(x, u) = \frac{1}{u^2 + 1} + u^3,$$

$$3) f(x, u) = \sin u.$$

В качестве модельного примера также рассматривалась задача, предложенная в [5]:

$$\Delta u = u^3 + (-2 + (1 - 2x)^2)(e^{y(1-y)} - 1 + u) +$$

$$+ (-2 + (1 - 2y)^2)(e^{x(1-x)} - 1 + u) - (e^{x(1-x)} - 1)^3 (e^{y(1-y)} - 1)^3,$$

$$u|_r = 0,$$

Γ - граница области $K = [0, 1] \times [0, 1]$.

Полученное численное решение этой задачи сравнивалось с точным решением. Начальные приближения -

$$v^0(x, y) = 0,5; \quad \varepsilon = 0,001.$$

Результаты решения тестовой задачи приведены в таблице:

Метод	Сетка	Число итераций	Погрешность
Львтона	II x II	3	0,30%
Вегстейна	II x II	13	0,31%
Вегстейна	2I x 2I	7	0,14%

Список литературы

1. Горбунов А.Д. Разностные методы для нелинейных задач. - В кн.: Вопросы оптимизации вычислений. Киев, 1977.
2. Елкина Н.Г. Об одном методе решения задачи Дирихле для квазилинейного уравнений эллиптического типа. - В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1980, с.53-62.

3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951.
4. Ланс Дж.Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: ... Иностранная литература, 1962.- с.207.
5. Pereyra V. Highly accurate numerical solution of castilinear elliptic boundary-value problems in "n" dimensions".-Math,Comp., 1970, v.24, pp.771-783.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА

Х.Э.Калис
(ЛГУ им. П.Стучки)

Метод сеток построен на основе точных разностных схем относительно решения линеаризованных дифференциальных уравнений, причем линеаризация проводится или с "замороженными" (постоянными) коэффициентами уравнения [1-5] или на основе разложения в ряд Тейлора. Проводится оценка точности построенных разностных схем на основе сравнения с точной схемой А.А.Самарского [6]. Приведены расчеты конкретной краевой задачи.

В промежутке $[0, 1]$ рассматривается следующая двухточечная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$\begin{cases} Ly = y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x) \\ y(0) = y_a, y(1) = y_b \end{cases} \quad (I)$$

где y_a, y_b - заданные значения функции на концах промежутка, $a = a(x), b = b(x), f = f(x)$ - непрерывные, гладкие функции на $[0, 1]$.

Для дискретизации краевой задачи (I) введем равномерную сетку [6]

$$\bar{\omega}_h = \{x_k = kh, k = 0, 1, 2, \dots, N-1, N; h = 1/N\}.$$

Разностную схему строим на трехточечном шаблоне $\{x_{k-1}, x_k, x_{k+1}\}$ сетки $\bar{\omega}_h$ так, чтобы она была точна для решения в промежутке $\Omega_k = [x_{k-1}, x_{k+1}]$ краевой задачи с постоянными коэффициентами вида

$$\begin{cases} L\bar{y}_k = \bar{y}'' + \bar{a}_k \bar{y}' + \bar{b}_k \bar{y} = \bar{f}_k, \\ \bar{y}(x_{k-1}) = \bar{y}_{k-1}, \bar{y}(x_{k+1}) = \bar{y}_{k+1}, \end{cases} \quad (2)$$

где $\bar{y}_{k-1}, \bar{y}_{k+1}$ - фиксированные значения сеточной функции $\bar{y}(x), x \in \omega_h$.

Решение краевой задачи (2) в Ω_k строим аналитически.

Пусть

$$V(x) = \begin{cases} \bar{f}_k / \bar{b}_k, & (\bar{b}_k \neq 0), \\ \bar{f}_k / \bar{a}_k (x - x_k), & (\bar{b}_k = 0, \bar{a}_k \neq 0), \\ 1/2 \bar{f}_k (x - x_k)^2, & (\bar{b}_k = \bar{a}_k = 0) \end{cases}$$

частное решение ОДУ (2). Тогда общее решение ОДУ (2) при $\bar{a}_k^2 > 4\bar{b}_k, \bar{b}_k \neq 0$ можно записать в виде

$$\bar{y}(x) = \exp(\bar{z}_k(x-x_k)) [C_k \operatorname{ch}(\bar{z}_k(x-x_k)) + D_k \operatorname{sh}(\bar{z}_k(x-x_k))] + V(x), \quad (3)$$

где $\bar{z}_k = \bar{a}_k/2, x_k = (\bar{a}_k^2/4 - \bar{b}_k)^{1/2}, x \in \Omega_k,$

C_k, D_k - произвольные постоянные интегрирования, которые определяются из краевых условий (2), т.е. из системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \bar{y}_{k-1} = \exp(-\bar{z}_k h) [C_k \operatorname{ch}(x_k h) - D_k \operatorname{sh}(x_k h)] + V_{k-1}, \\ \bar{y}_{k+1} = \exp(\bar{z}_k h) [C_k \operatorname{ch}(x_k h) + D_k \operatorname{sh}(x_k h)] + V_{k+1}, \\ (V_{k\pm 1} = V(x_{k\pm 1})). \end{cases}$$

Следовательно, точное решение краевой задачи (2) имеет вид

$$\bar{y}(x) = -\frac{\exp(\bar{z}_k(x-x_k))}{\operatorname{sh}(2x_k h)} [(\bar{y}_{k-1} - V_{k-1}) \exp(\bar{z}_k h) \operatorname{sh}(x_k(x-x_k-h)) - (\bar{y}_{k+1} - V_{k+1}) \exp(-\bar{z}_k h) \operatorname{sh}(x_k(x-x_k+h))] + V(x), \quad (4)$$

$(x \in \Omega_k).$

При $x = x_k$ из (4) получим трехточечную разностную схему вида

$$\begin{cases} 2 \operatorname{ch}(x_k h) (\bar{y}_k - V_k) = \exp(-\bar{z}_k h) (\bar{y}_{k+1} - V_{k+1}) + \exp(\bar{z}_k h) (\bar{y}_{k-1} - V_{k-1}) \\ \bar{y}_0 = y_a, \bar{y}_N = y_b \quad (k=1, \dots, N-1). \end{cases} \quad (5)$$

Схема (5) сохраняет свой вид при $\bar{a}_k^2 \leq 4\bar{b}_k$, если заменить $ch(x_k h)$ на $\omega(\bar{x}_k h)$, где $\bar{x}_k = (\bar{b}_k - \bar{a}_k^2/4)^{1/2}$.

При $\bar{b}_k = 0$ разностную схему можно получить из (5), если $x_k \rightarrow |z_k|$. После элементарных преобразований получим монотонную разностную схему А.М.Ильина [2]

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\bar{a}_k) \bar{y}_{x\bar{x}_k} + \bar{a}_k \bar{y}_{x_k} = \bar{f}_k, \\ \bar{y}_0 = y_a, \quad \bar{y}_N = y_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1), \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\bar{a}_k) (\bar{y} - V)_{x\bar{x}_k} + \bar{a}_k (\bar{y} - V)_{x_k} = 0, \\ \bar{y}_0 = y_a, \quad \bar{y}_N = y_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1), \end{array} \right. \quad (6)$$

где $y_{x\bar{x}_k} = \frac{1}{h^2} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$ - центральная разность второго порядка,

$y_{x_k} = \frac{1}{2h} (y_{k+1} - y_{k-1})$ - центральная разность первого порядка,

$f(\bar{a}_k) = \frac{\bar{a}_k h}{2} ch \frac{\bar{a}_k h}{2}$ - возмущенный коэффициент схемы.

При $\bar{a}_k = \bar{b}_k = 0$ из (6) имеем схему в центральных разностях, так как $f(0) = 1$.

Разностную схему (5) можно записать в эквивалентном виде с

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1 \bar{y}_{x\bar{x}_k} + \delta_2 \bar{a}_k \bar{y}_{x_k} + \bar{b}_k \bar{y}_k = \bar{f}_k \\ \bar{y}_0 = y_a, \quad \bar{y}_N = y_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \end{array} \right.$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \bar{y}_k = \delta_1 (\bar{y} - V)_{x\bar{x}_k} + \delta_2 \bar{a}_k (\bar{y} - V)_{x_k} + \bar{b}_k (\bar{y} - V)_k = 0 \\ \bar{y}_0 = y_a, \quad \bar{y}_N = y_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1), \end{array} \right. \quad (7)$$

где $\delta_1 = \frac{\bar{b}_k h^2}{4} (ch \frac{\lambda_1 h}{2} ch \frac{\lambda_2 h}{2} + 1) = \frac{\bar{b}_k h^2}{2} \frac{ch(\bar{z}_k h)}{ch(\bar{z}_k h) - ch(x_k h)}$,

$\delta_2 = -\frac{\bar{b}_k h}{2\bar{a}_k} (ch \frac{\lambda_1 h}{2} + ch \frac{\lambda_2 h}{2}) = -\frac{\bar{b}_k h}{\bar{a}_k} \frac{sh(\bar{z}_k h)}{ch(\bar{z}_k h) - ch(x_k h)}$

возмущенные коэффициенты схемы,

$\lambda_1 = \bar{z}_k + \bar{x}_k$, $\lambda_2 = \bar{z}_k - \bar{x}_k$ — корни характеристического уравнения

$$-\lambda^2 + \bar{a}_k \lambda + \bar{b}_k = 0.$$

При $\bar{b}_k \equiv -1$ разностная схема (7) приведена в работе [4], а при $\bar{b}_k \rightarrow 0$ получим схему (6), так как $\lambda_1 \rightarrow -\bar{a}_k$, $\lambda_2 \rightarrow 0$.

Разностные схемы (6), (7) применены для решения краевой задачи (I) с большими коэффициентами a, b [3, 4].

Если $\bar{a}_k = 0$, $\bar{b}_k < 0$ в разностных уравнениях (5) надо перейти к пределу, когда $\bar{z}_k \rightarrow 0$, т.е. получим схему

$$\begin{cases} \gamma(\bar{b}_k) \bar{y}_{x\bar{x}_k} + \bar{b}_k \bar{y}_k = \bar{f}_k \\ \bar{y}_0 = \bar{y}_a, \bar{y}_N = \bar{y}_e \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \gamma(\bar{b}_k) (\bar{y} - V)_{x\bar{x}_k} + \bar{b}_k (\bar{y}_k - V_k) = 0 \\ \bar{y}_0 = \bar{y}_a, \bar{y}_N = \bar{y}_e \quad (k=1, 2, \dots, N-1), \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\gamma(\bar{b}_k) = \frac{x_k^2 \rho^2}{2(ch x_k h - 1)} = \left(\frac{x_k h}{2 \operatorname{sh} \frac{x_k h}{2}} \right)^2,$$

$$x_k^2 = -\bar{b}_k, \gamma(0) = 1.$$

Если $\bar{b}_k > 0$ ($\bar{a}_k = 0$), то в разностной схеме (8) величину $\operatorname{sh} \frac{x_k h}{2}$ надо заменить на $\sin \frac{x_k h}{2}$, $x_k^2 = \bar{b}_k$ [1].

Если $\bar{a}_k \rightarrow 0$, то из (7) следует (8), так как $\lambda_1 \rightarrow x_k$, $\lambda_2 \rightarrow -x_k$.

Вид разностных уравнений (6-8) более удобный для решения неоднородных уравнений и может быть применен для решения методом сеток дифференциальных уравнений в частных производных [2], [4], [3].

Разностная схема (5) или (7) при $\bar{b}_k \leq 0$ монотонна [6], так как $\exp(-\bar{z}_k h) > 0$, $\exp(\bar{z}_k h) > 0$,

$$2 \operatorname{ch}(x_k h) - \exp(-\bar{z}_k h) - \exp(\bar{z}_k h) = 2(\operatorname{ch}(x_k h) - \operatorname{ch}(\bar{z}_k h)) =$$

$$= 4 \operatorname{sh}\left(\frac{x_k + \bar{z}_k}{2} h\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x_k - \bar{z}_k}{2} h\right) = -4 \operatorname{sh} \frac{\rho h}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_k h}{2} \geq 0 (\lambda_k = \bar{b}_k \leq 0).$$

Если $\bar{b}_k > 0$, то разностные уравнения можно решать методом немонотонной прогонки [7].

Для оценки точности разностной схем (5-8), интегрирующей точно краевую задачу (2) с кусочно-постоянными коэффициентами $\bar{a}_k, \bar{b}_k, \bar{f}_k$ в промежутке $[0, 1]$, используем точную разностную схему А.А. Самарского [6] относительно решения исходной краевой задачи (1) в Ω_k в виде

$$y(x) = y_{k+1} \frac{u(x)}{u_{k+1}} + y_{k-1} \frac{v(x)}{v_{k-1}} + w(x), \quad (9)$$

где $u_{k+1} = u(x_{k+1}), v_{k-1} = v(x_{k-1}), u_k = u(x_k), v_k = v(x_k)$.
Здесь u, v - решения следующих задач Коши:

$$Lu = 0, u(x_{k-1}) = 0, u'(x_{k-1}) = 1, \quad (10)$$

$$Lv = 0, v(x_{k+1}) = 0, v'(x_{k+1}) = -1, \quad (11)$$

$w = w(x)$ - решение краевой задачи

$$Lw = f(x), w(x_{k-1}) = w(x_{k+1}) = 0, \quad (12)$$

которое можно представить в виде

$$w(x) = - \frac{u(x)}{u_{k+1}} \int_x^{x_{k+1}} v(t) \exp\left(-\int_t^{x_{k+1}} a(z) dz\right) f(t) dt - \\ - \frac{v(x)}{v_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^x u(t) \exp\left(\int_{x_{k-1}}^t a(z) dz\right) f(t) dt, x \in \Omega_k. \quad (13)$$

Следовательно, точная разностная схема для решения исходной краевой задачи (1) имеет вид

$$\begin{cases} y_k = \frac{u_k}{u_{k+1}} \left(y_{k+1} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(t) \exp\left(-\int_t^{x_{k+1}} a(z) dz\right) f(t) dt \right) + \\ + \frac{v_k}{v_{k+1}} \left(y_{k-1} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(t) \exp\left(\int_{x_{k-1}}^t a(z) dz\right) f(t) dt \right), \\ y_0 = y_a, y_N = y_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1). \end{cases} \quad (14)$$

Для краевой задачи (2) разностную схему (5) можно представить в виде

$$\begin{cases} \bar{y}_k - \bar{w}_k = \frac{\bar{u}_k}{\bar{u}_{k+1}} \bar{y}_{k+1} + \frac{\bar{v}_k}{\bar{v}_{k-1}} \bar{y}_{k-1} \\ \bar{y}_0 = \bar{y}_a, \bar{y}_N = \bar{y}_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1), \end{cases} \quad (15)$$

где $\bar{u}(x) = x_k^{-1} \operatorname{sh}(x_k(x-x_{k-1})) \exp(\bar{z}_k(x-x_{k-1}))$,

$$\bar{v}(x) = x_k^{-1} \operatorname{sh}(x_k(x_{k+1}-x)) \exp(\bar{z}_k(x-x_{k+1}))$$

решения соответствующих задач Коши (I0), (II),

$$\bar{u}_k = \bar{u}(x_k), \quad \bar{v}_k = \bar{v}(x_k),$$

$$\bar{w}_k = V_k - \frac{\exp(-\bar{z}_k h)}{2 \operatorname{ch}(x_k h)} V_{k+1} - \frac{\exp(\bar{z}_k h)}{2 \operatorname{ch}(x_k h)} V_{k-1}$$

значение функции $w(x_k)$ из (I3) при $a(x) = \bar{a}_k, x \in \Omega_k$.

Если $\bar{b}_k \neq 0$, то $\bar{w}_k = \frac{f_k}{\bar{b}_k} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(\bar{z}_k h)}{\operatorname{ch}(x_k h)} \right]$,

а при $\bar{b}_k \neq 0, \bar{a}_k \neq 0$ имеем $(x_k \rightarrow |\bar{z}_k|)$

$$\bar{w}_k = h \frac{f_k}{\bar{a}_k} \operatorname{th}(\bar{z}_k h)$$

(при $\bar{a}_k = \bar{b}_k = 0 \quad \bar{a}_k - \bar{w}_k = -h^2/2$).

Для определения локального порядка точности разностных схем сравним величины y_k, \bar{y}_k , принимая, что

$$y_{k+1} = y_{k+1}, \quad y_{k-1} = y_{k-1}$$

Разножим в промежутке Ω_k коэффициенты уравнения (I) и решения задач Коши (I0), (II) в окрестности центральной узловой точки $x=x_k$ в степенной ряд, т.е.

$$a(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a^{(l)}(x-x_k)^l, \quad b(x) = \sum_{l=0}^{\infty} b^{(l)}(x-x_k)^l,$$

$$u(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{(l)}(x-x_k)^l, \quad v(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \beta^{(l)}(x-x_k)^l, \quad (I6)$$

где $a^{(i)} = \frac{1}{i!} a^{(i)}(x_k), b^{(i)} = \frac{1}{i!} b^{(i)}(x_k)$ - коэффициенты ряда Тейлора, а $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$ - неопределенные коэффициенты ($i=0,1,\dots$).

В разложениях для функций $a(x), b(x)$ можно ограничиться конечным числом слагаемых.

Из (I0), (II), (I6) имеем бесконечную систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов $\alpha^{(i)}, \beta^{(i)}$.

Например, для определения $\alpha^{(i)}$ имеем

$$(i+2)(i+1)\alpha^{(i+2)} + \sum_{j=0}^i [(i+1-j)\alpha^{(i+1-j)} a^{(j)} + \alpha^{(i-j)} b^{(j)}] = 0,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{(j)}(-h)^j = 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\alpha^{(j+1)}(-h)^j = 1 \quad (i=0,1,2,\dots).$$

Рассмотрим обрезанную систему уравнений при $i = 0, 1, 2$ учетом слагаемых с точностью до $O(h^4)$ при $h \rightarrow 0$. Тогда для определения $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 2\alpha^{(2)} + \alpha^{(1)}\alpha^{(0)} + \alpha^{(0)}b^{(0)} = 0, \\ 6\alpha^{(3)} + 2\alpha^{(2)}\alpha^{(0)} + \alpha^{(1)}(\alpha^{(1)} + b^{(0)}) + \alpha^{(0)}b^{(1)} = 0, \\ 12\alpha^{(4)} + 3\alpha^{(3)}\alpha^{(0)} + \alpha^{(2)}(2\alpha^{(1)} + b^{(1)}) + \alpha^{(1)}(\alpha^{(2)} + b^{(1)}) + \alpha^{(0)}b^{(2)} = 0, \\ \alpha^{(0)} - \alpha^{(1)}h + \alpha^{(2)}h^2 - \alpha^{(3)}h^3 + O(h^4) = 0, \\ \alpha^{(1)} - 2\alpha^{(2)}h + 3\alpha^{(3)}h^2 - 4\alpha^{(4)}h^3 + O(h^4) = 1. \end{cases} \quad (17)$$

Так как мы ищем функции $u(x), v(x)$ в Ω_k с точностью до слагаемых порядка $O(h^4)$ то достаточно определить $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}, \alpha^{(4)}$ соответственно с точностью до слагаемых порядка $O(h^4), O(h^3), O(h^2), O(h), O(1)$.

Из разложений (16) следует, что

$$P_k = \frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{1 + \alpha^{(2)}h - 2\alpha^{(3)}h^2 + 3\alpha^{(4)}h^3 + O(h^4)}{2 + 4\alpha^{(2)}h - 4\alpha^{(3)}h^2 + 8\alpha^{(4)}h^3 + O(h^4)} = \\ = \frac{1}{2} [1 - h\alpha^{(2)} + 2h^2(\alpha^{(2)})^2 - h^3(\alpha^{(4)} + 2\alpha^{(2)}\alpha^{(3)} + 4(\alpha^{(2)})^3)] + O(h^4).$$

Решая систему уравнений (17), получим

$$\alpha^{(0)} = h + \alpha^{(2)}h^2 - 2\alpha^{(3)}h^3 + 3\alpha^{(4)}h^4 + O(h^5),$$

$$\alpha^{(1)} = 1 + 2\alpha^{(2)}h - 3\alpha^{(3)}h^2 + 4\alpha^{(4)}h^3 + O(h^4)$$

$$\alpha^{(2)} = -\frac{1}{2} [a^{(0)} + h(b^{(0)} - (a^{(0)})^2) + \frac{h^2}{2} ((a^{(0)})^3 + a^{(0)}a^{(1)} - 2a^{(0)}b^{(0)})] + O(h^3),$$

$$\alpha^{(3)} = \frac{1}{6} [(a^{(0)})^2 - a^{(1)}b^{(0)} + h(2a^{(0)}b^{(0)} + a^{(0)}a^{(1)} - b^{(1)} - (a^{(0)})^3)] + O(h^2),$$

$$\alpha^{(4)} = -\frac{1}{24} [(a^{(0)})^3 - 3a^{(0)}a^{(1)} - 2b^{(0)}a^{(0)} + 2a^{(2)} + 2b^{(1)}] + O(h).$$

Аналогично,

$$Q_k = \frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{1}{2} [1 - h\beta^{(2)} + 2h^2(\beta^{(2)})^2 - h^3(\beta^{(4)} - 2\beta^{(2)}\beta^{(3)} + 4(\beta^{(2)})^3)] + O(h^4),$$

где

$$\beta^{(0)} = h + \beta^{(2)}h^2 + 2\beta^{(3)}h^3 + 3\beta^{(4)}h^4 + O(h^5),$$

$$\beta^{(1)} = -1 - 2\beta^{(2)}h - 3\beta^{(3)}h^2 - 4\beta^{(4)}h^3 + O(h^4),$$

$$\beta^{(2)} = \frac{1}{2} [a^{(0)} + h((a^{(0)})^2 - b^{(0)}) + \frac{h^2}{2} (-2a^{(0)}b^{(0)} + (a^{(0)})^3 + a^{(0)}a^{(1)})] + O(h^3),$$

$$\beta^{(2)} = \frac{1}{6} [a^{(1)} + b^{(1)} - (a^{(0)})^2 + h(2a^{(0)}b^{(0)} + a^{(0)}a^{(1)} - b^{(1)}(a^{(0)})^3)] + O(h^2),$$

$$\beta^{(1)} = \frac{1}{24} [(a^{(0)})^3 - 3a^{(0)}a^{(1)} - 2a^{(0)}b^{(0)} + 2a^{(2)} + 2b^{(1)}] + O(h).$$

Следовательно,

$$Q_k = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{a^{(0)}h}{2} + \frac{b^{(0)}h^2}{2} + \frac{h^3}{24} ((a^{(0)})^3 - 6a^{(0)}b^{(0)} + a^{(0)}a^{(1)} - 2(a^{(2)} + b^{(1)})) \right] + O(h^4),$$

$$P_k = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{a^{(0)}h}{2} + \frac{b^{(0)}h^2}{2} + \frac{h^3}{24} (- (a^{(0)})^3 + 6a^{(0)}b^{(0)} - a^{(0)}a^{(1)} + 2(a^{(2)} + b^{(1)})) \right] + O(h^4).$$

Аналогично, но с учетом разложения

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x-x_k)^i \quad (f^{(i)} = \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_k)),$$

оцениваются интегралы в (14)

$$I_1 = \int_{x_k}^{x_{k+1}} v(t) \exp\left(-\int_t^{x_{k+1}} a(z) dz\right) f(t) dt = \frac{h^2}{2} f^{(0)} + \frac{h^3}{6} (f^{(1)} - f^{(0)} a^{(0)}) + O(h^4),$$

$$I_2 = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(t) \exp\left(-\int_t^{x_k} a(z) dz\right) f(t) dt = \frac{h^2}{2} f^{(0)} - \frac{h^3}{6} (f^{(1)} - f^{(0)} a^{(0)}) + O(h^4),$$

т.е. частное решение (13) имеет вид

$$w_k = w(x_k) = -(P_k I_1 + Q_k I_2) = -\frac{h^2}{2} f^{(0)} + O(h^4).$$

Проведя аналогичные оценки для разностной схемы (15), имеем

$$\bar{P}_k = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\bar{a}_k h}{2} + \frac{\bar{b}_k h^2}{2} + \frac{h^3}{24} (-\bar{a}_k^3 + 6\bar{a}_k \bar{b}_k) \right] + O(h^4),$$

$$\bar{Q}_k = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\bar{a}_k h}{2} + \frac{\bar{b}_k h^2}{2} + \frac{h^3}{24} (\bar{a}_k^3 - 6\bar{a}_k \bar{b}_k) \right] + O(h^4),$$

$$\bar{w}_k = \frac{h^2}{2} \bar{f}_k + O(h^4),$$

т.е.

$$\Delta y_k = y_k - \bar{y}_k = y_{k+1} (P_k - \bar{P}_k) + y_{k-1} (Q_k - \bar{Q}_k) + w_k - \bar{w}_k = (y_{k+1} - y_{k-1}) (2a^{(2)} + 2b^{(1)} - a^{(0)}a^{(1)}) \frac{h^3}{48} + O(h^4), \quad (18)$$

если $\bar{a}_k = a_0, \bar{b}_k = b_0, \bar{f}_k = f_0$.

Если $\bar{a}_k = \frac{1}{2h} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} a(t) dt = a^{(0)} + \frac{h^2}{3} a^{(2)} + O(h^4)$ —

среднее значение коэффициента $a(x)$ в Ω_k , то порядок аппроксимации сохраняется, так как

$$\Delta y_k = (y_{k+1} - y_{k-1}) = (2b^{(1)} - 2a^{(2)} - a^{(0)} a^{(1)}) \frac{h^3}{48} + O(h^4)$$

Из $y_{k+1} - y_{k-1} = \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} y'(x) dx \leq \max_{x \in \Omega} |y'| 2h$ также следует, что $\Delta y_k = O(h^4)$ при $h \rightarrow 0$.

Разностную схему (5) можно модифицировать, рассматривая в Ω_k линеаризованную по Ньютону краевую задачу, т.е.

$$\left. \begin{aligned} L \bar{y}_k &= \bar{y}'' + a_k \bar{y}' + b_k \bar{y} = f_k + d_k(x - x_k) \\ \bar{y}(x_{k-1}) &= \bar{y}_{k-1}, \quad \bar{y}(x_{k+1}) = \bar{y}_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где $d_k = f_k' - a_k' \bar{y}_k' - b_k' \bar{y}_k$.

Тогда схема (5) сохраняет свой вид, только частное решение $V(x)$ зависит от \bar{y}_k, \bar{y}_k' , так как

$$V(x) = \begin{cases} f_k/b_k + d_k/b_k \cdot ((x-x_k) - a_k/b_k), & (b_k \neq 0) \\ d_k/(2a_k) \cdot (x-x_k)^2 + (f_k/a_k - d_k/a_k^2) \cdot (x-x_k), & (b_k=0, a_k \neq 0) \\ f_k/2 \cdot (x-x_k)^2 + d_k/b' \cdot (x-x_k)^3, & (a_k=b_k=0). \end{cases}$$

Для определения \bar{y}_k' в выражении для d_k можно поступить двояко:

1) заменить \bar{y}_k' с разностью $(\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_{k-1}) / (2h)$,

2) найти аналитическое выражение $\bar{y}'(x)$ из (4) и положить $\bar{y}_k' = \bar{y}'(x_k)$,

т.е.

$$\bar{y}_k' = \frac{1}{1 + B_3 a_k'} (B_1 \bar{y}_{k+1} + B_2 \bar{y}_{k-1} + B_3 (f_k' - b_k' \bar{y}_k) - f_k/b_k \cdot (B_1 + B_2)),$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2} \exp(-z_k h) (z_k / \operatorname{ch}(x_k h) + z_k / \operatorname{sh}(x_k h)), \\ B_2 &= \frac{1}{2} \exp(z_k h) (z_k / \operatorname{ch}(x_k h) - z_k / \operatorname{sh}(x_k h)), \\ B_3 &= b_k^{-1} (a_k b_k^{-1} (B_1 + B_2) + h (B_2 - B_1) + 1). \end{aligned} \quad (20)$$

В первом случае разностная схема имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \bar{y}_k (1 + B_4 b_k') - \frac{f_k}{b_k} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(z_k h)}{\operatorname{ch}(x_k h)} \right) - B_4 f_k' = \\ & = \left(\frac{\exp(-z_k h)}{2 \operatorname{ch}(x_k h)} - \frac{B_4 a_k'}{2h} \right) \bar{y}_{k+1} + \left(\frac{\exp(z_k h)}{2 \operatorname{ch}(x_k h)} + \frac{B_4 a_k'}{2h} \right) \bar{y}_{k-1}, \\ & \bar{y}_0 = y_a, \quad \bar{y}_N = y_b \quad (k = 1, 2, \dots, N-1), \end{aligned} \right. \quad (21)$$

где

$$B_4 = b_k^{-1} [h z_k \operatorname{th}(z_k h) / \operatorname{ch}(x_k h) - a_k b_k^{-1} (1 - \operatorname{ch}(z_k h) / \operatorname{ch}(x_k h))].$$

Во втором случае -

$$\left\{ \begin{aligned} & \bar{y}_k \left(1 + \frac{B_4 b_k'}{1 + B_3 a_k'} \right) - \frac{f_k}{b_k} \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(z_k h)}{\operatorname{ch}(x_k h)} \right) - B_4 (f_k' + \\ & + f_k b_k^{-1} (B_1 + B_2) + B_3 B_5 f_k') = \left(\frac{\exp(-z_k h)}{2 \operatorname{ch}(x_k h)} - B_1 B_5 \right) \bar{y}_{k+1} + \\ & + \left(\frac{\exp(z_k h)}{2 \operatorname{ch}(x_k h)} - B_2 B_5 \right) \bar{y}_{k-1}, \\ & \bar{y}_0 = y_a, \quad \bar{y}_N = y_b \quad (k = 1, 2, \dots, N-1), \end{aligned} \right. \quad (22)$$

где

$$B_5 = a_k' B_4 / (1 + a_k' B_3).$$

В обоих случаях, имеем

$$\Delta y_k = y_k - \bar{y}_k = O(h^4).$$

Точность разностных схем можно получить, исследуя локальную ошибку аппроксимации Ψ_k разностной схемы (7) на решении ОДУ (1), т.е.

$$\Psi_k = \Lambda y(x_k) - (\Lambda y(x_k) - f(x_k)) = \Lambda y(x_k). \quad (23)$$

Так как при $b_k \neq 0$

$$0 < (z \operatorname{th} z - 1) z^{-2} \leq \frac{1}{3}, \quad z \in [0, \infty),$$

$$\alpha h(\alpha h) = (\alpha h)^{-1} + \frac{1}{3}\alpha h - \frac{1}{45}(\alpha h)^3 + O(h^5),$$

$$\delta_2 \bar{a}_k - \bar{a}_k = \frac{1}{12} \bar{a}_k \bar{b}_k h^2 + O(h^4),$$

$$\delta_1 - 1 = \frac{1}{12} (\bar{a}_k^2 + \bar{b}_k) h^2 + O(h^4),$$

$$y_{x\bar{x}_k} = y_k'' + \frac{1}{12} h^2 y_k^{(4)} + O(h^4), \quad y_{x_k} = y_k' + \frac{1}{6} h^2 y_k''' + O(h^4),$$

$$V_{x\bar{x}_k} \equiv 0, \quad \bar{b}_k V_k + \delta_2 \bar{a}_k V_{x_k} = \bar{f}_k + d_k \bar{b}_k^{-1} (\delta_2 \bar{a}_k - \bar{a}_k),$$

То

$$\Psi_k = (\delta_1 - 1) y_k'' + \frac{1}{12} h^2 \delta_1 y_k^{(4)} + (\bar{a}_k \delta_2 - \bar{a}_k) y_k' +$$

$$+ \frac{1}{6} h^2 y_k''' \bar{a}_k \delta_2 - \frac{1}{12} d_k \bar{a}_k h^2 + O(h^4) =$$

$$= \frac{h^2}{12} [(\bar{a}_k^2 + \bar{b}_k) y_k'' + y_k^{(4)} + \bar{a}_k \bar{b}_k y_k' + 2\bar{a}_k y_k''' -$$

$$- (\bar{f}_k' - \bar{b}_k' y_k - \bar{a}_k' y_k') \bar{a}_k] + O(h^4)$$

$$(y_k^{(l)} = y^{(l)}(x_k), \quad l \geq 1). \quad (24)$$

Отсюда, вычисляя высшие производные при помощи ОДУ (1), (2), (19), следует $\Psi_k = O(h^4)$, если $y \equiv \bar{y}$ решение линеаризованных задач; $\Psi_k = O(h^2)$, если $\bar{a}_k = a(x_k)$, $\bar{b}_k = b(x_k)$, $\bar{f}_k = f(x_k)$, $\bar{a}_k' = a'(x_k)$, причем для разностных схем (21), (22)

$$\Psi_k = \frac{h^2}{12} [y_k' (2a_k a_k' - a_k'' - 2b_k') + y_k (2a_k' b_k - b_k'') + f_k'' - 2a_k' f_k] + O(h^4),$$

а для разностной схемы (5) ($d_k = 0$)

$$\Psi_k = \frac{h^2}{12} [y_k' (a_k a_k' - a_k'' - 2b_k') + y_k (2a_k' b_k - a_k b_k' - b_k'') +$$

$$+ f_k'' + a_k f_k' - 2a_k' f_k] + O(h^4).$$

Фактически для линеаризованных задач (2), (19) $\Psi_k \equiv 0$, что можно доказать, если использовать выражения [6]

$$y_{x\bar{x}_k} = y_k'' + \frac{h^2}{6} \left[\int_0^1 (1-s)^3 [y^{(4)}(x_k+sh) + y^{(4)}(x_k-sh)] ds \right]$$

$$y_{x_k}^0 = y_k' + \frac{h^2}{4} \left[\int_0^1 (1-s)^2 [y'''(x_k+sh) + y'''(x_k-sh)] ds \right]. \quad (25)$$

Точность разностной схемы можно увеличить, если за основу в Ω_k брать линейризованные уравнения вида

$$\bar{y}'' + a_k \bar{y}' + b_k \bar{y} = f_k + d_k(x-x_k) + \bar{d}_k(x-x_k)^2, \quad (26)$$

где $\bar{d}_k = \frac{1}{2} f_k'' - a_k' f_k + (a_k' b_k - \frac{1}{2} b_k'') \bar{y}_k + c_k \bar{y}_k'$

$$d_k = f_k' - b_k' \bar{y}_k - a_k' \bar{y}_k', \quad c_k = a_k a_k' - b_k' - \frac{1}{2} a_k''.$$

Тогда частное решение в Ω_k уравнения (26) при $b_k \neq 0$ имеет вид

$$V(x) = \frac{f_k}{b_k} + \frac{d_k}{b_k} \left((x-x_k) - \frac{a_k}{b_k} \right) + \frac{\bar{d}_k}{b_k} \left((x-x_k)^2 - \frac{2a_k}{b_k} (x-x_k) + \frac{2}{b_k^2} (a_k^2 - b_k) \right)$$

и разностные уравнения можно записать в виде (7).

Так как

$$b_k V_k + j_2 a_k V_{x_k}^0 + j_1 V_{x\bar{x}_k} = f_k + b_k^{-2} (b_k d_k - 2\bar{d}_k a_k) (j_2 a_k - a_k) + \\ + 2 b_k^{-1} \bar{d}_k (j_1 - 1) = f_k + \frac{h^2}{12} (a_k d_k + 2 b_k^{-1} \bar{d}_k) + O(h^4), \\ y_k'' = -a_k y_k' - b_k y_k + f_k,$$

то локальная ошибка аппроксимации на решении уравнения (I) имеет оценку

$$\psi_k = (j_1 - 1) y_k'' + \frac{1}{12} h^2 j_1 y_k^{(4)} + (a_k j_2 - a_k) y_k' + \frac{1}{6} h^2 a_k j_2 y_k''' - \\ - \frac{1}{12} h^2 (a_k d_k + 2\bar{d}_k) + O(h^4) = \frac{h^2}{12} [(a_k^2 + b_k) y_k'' + y_k^{(4)} + a_k b_k y_k' + \\ + 2a_k y_k''' - a_k d_k - 2\bar{d}_k] + O(h^4) = \frac{h^2}{12} [(a_k^2 + b_k) y_k'' - 2a_k' y_k'' - \\ - 2b_k' y_k' + f_k'' - a_k'' y_k' - b_k'' y_k - a_k (-a_k y_k'' - b_k y_k' + f_k' - a_k' y_k' - \\ - b_k' y_k) - b_k y_k'' + a_k b_k y_k' + 2a_k (-a_k y_k'' - b_k y_k' + f_k' - a_k' y_k' - \\ - b_k' y_k) - a_k d_k - 2\bar{d}_k] + O(h^4) = O(h^4).$$

Для реализации уточненной разностной схемы, удобнее рассматривать эквивалентную схему вида (5), определяя y_k^1 из (4) с учетом (20), следующим образом;

$$y_k^1 = \frac{1}{1+C_3} (B_1 \bar{y}_{k+1} + B_2 \bar{y}_{k-1} + C_{10} \bar{y}_k + C_9),$$

где

$$C_3 = (a_k' a_k b_k^{-2} + c_k b_k^{-1} (h^2 + 2b_k^{-2} (a_k^2 - b_k))) (B_1 + B_2) - h b_k^{-2} (a_k' b_k + 2a_k c_k) (B_1 - B_2) + a_k' b_k^{-1} + 2c_k a_k b_k^{-2},$$

$$C_9 = (-f_k' b_k^{-1} + a_k f_k' b_k^{-2} - \frac{1}{2} b_k^{-1} (f_k'' - 2a_k' f_k) (h^2 + 2b_k^{-2} (a_k^2 - b_k))) (B_1 + B_2) + h b_k^{-2} (a_k (f_k'' - 2a_k' f_k) - b_k f_k') (B_1 - B_2) + b_k^{-1} f_k' - a_k b_k^{-2} (f_k'' - 2a_k' f_k),$$

$$C_{10} = (-a_k b_k^{-2} b_k' - \frac{1}{2} b_k^{-1} (2a_k' b_k - b_k'') (h^2 + 2b_k^{-2} (a_k^2 - b_k))) (B_1 + B_2) + h b_k^{-2} (a_k (2a_k' b_k - b_k'') + b_k b_k') (B_1 - B_2) - b_k' b_k^{-1} - a_k b_k^{-2} (2a_k' b_k - b_k'').$$

$$\text{Так как } \bar{w}_k = V_k - (2ch(x_k h))^{-1} [\exp(-z_k h) V_{k+1} + \exp(z_k h) V_{k-1}] =$$

$$= C_1 + C_2 \bar{y}_k + C_3 \bar{y}_k^1 = C_4 + C_5 \bar{y}_k + C_6 \bar{y}_{k+1} + C_7 \bar{y}_{k-1},$$

где

$$C_1 = (f_k b_k^{-1} - a_k f_k' b_k^{-2} + b_k^{-3} (f_k'' - 2a_k' f_k) (a_k^2 - b_k)) (1 - CH_k) + h (f_k' b_k^{-1} - a_k b_k^{-2} (f_k'' - 2a_k' f_k)) SC_k - \frac{1}{2} h^2 b_k^{-1} (f_k'' - 2a_k' f_k) CH_k,$$

$$C_2 = (b_k' a_k b_k^{-2} + b_k^{-3} (2a_k' b_k - b_k'') (a_k^2 - b_k)) (1 - CH_k) + h (-b_k' b_k^{-1} - a_k b_k^{-2} (2a_k' b_k - b_k'')) SC_k - \frac{1}{2} h^2 b_k^{-1} (2a_k' b_k - b_k'') CH_k,$$

$$C_3 = (a_k' a_k b_k^{-2} + 2c_k b_k^{-3} (a_k^2 - b_k)) (1 - CH_k) + h (-a_k' b_k^{-1} - 2a_k c_k b_k^{-2}) SC_k - h^2 c_k b_k^{-1} CH_k,$$

$$SC_k = \frac{sh(z_k h)}{ch(x_k h)}, \quad CH_k = \frac{ch(z_k h)}{ch(x_k h)},$$

$$C_4 = C_1 + C_3 C_9 / (1 + C_3), \quad C_5 = C_2 + C_3 C_{10} / (1 + C_3),$$

$$C_6 = C_3 B_1 / (1 + C_3), \quad C_7 = C_3 B_2 / (1 + C_3),$$

то разностная схема имеет вид

$$\begin{cases} \bar{y}_k(1-C_5) - C_4 = \left(\frac{1}{2} \frac{\exp(-\lambda_k h)}{\operatorname{ch}(x_k h)} + C_6\right) \bar{y}_{k+1} + \left(\frac{1}{2} \frac{\exp(\lambda_k h)}{\operatorname{ch}(x_k h)} + C_7\right) \bar{y}_{k-1} \\ \bar{y}_0 = y_a, \bar{y}_N = y_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \end{cases} \quad (27)$$

Если заменить в (26) производную

$$\bar{y}'_k \approx \bar{y}'_{x_k} = \frac{1}{2h} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_{k-1}),$$

то имеем следующую разностную схему:

$$\begin{cases} \bar{y}_k(1-C_2) - C_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\exp(-\lambda_k h)}{\operatorname{ch}(x_k h)} + \frac{C_3}{h} \right) \bar{y}_{k+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\exp(\lambda_k h)}{\operatorname{ch}(x_k h)} - \frac{C_3}{h} \right) \bar{y}_{k-1} \\ \bar{y}_0 = y_a, \bar{y}_N = y_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1), \end{cases} \quad (28)$$

которая при $\bar{d}_k = 0$ совпадает с (21).

Так как

$$\begin{aligned} 1 - CH_k &= -\frac{h^2}{2} b_k + \frac{h^4}{24} b_k (a_k^2 - 5b_k) + O(h^6), \\ h \cdot SC_k &= -\frac{h^2}{2} a_k + \frac{h^4}{24} a_k (a_k^2 - 6b_k) + O(h^6), \\ \bar{y}'_k &= \bar{y}'_{x_k} + O(h^2), \quad C_3 = \frac{h^4}{24} (a_k'' + 2b_k' - a_k' a_k) + O(h^6), \end{aligned}$$

то замена производной с центральной разностью не уменьшает точность разностной схемы (28). Разностная схема (28) условно монотонна при $b_k \leq 0, |C_3| < h \exp(-|\lambda_k| h) / \operatorname{ch}(x_k h), |C_2| < 1$

так как $C_2 = \frac{h^4}{24} (a_k b_k' + b_k'' - 2a_k' b_k) + O(h^6),$

$$\delta = 1 - C_2 - CH_k = -\frac{h^2}{2} b_k + O(h^4) \geq 0$$

с точностью до слагаемых порядка $O(h^4)$.

Из разложений в ряд Тейлора следует, что

$$C_1 = -\frac{h^2}{2} f_k + \frac{h^4}{24} (2a_k' f_k - f_k'' - a_k f_k' + f_k (a_k^2 - 5b_k)) + O(h^6),$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_k \cdot SH_k &= \beta_k \left(1 + \frac{1}{6} h^2 b_k\right) + O(h^4), \\
 \alpha_k \cdot CS_k &= h^{-1} \left(1 + \frac{1}{12} h^2 (a_k^2 + 2b_k)\right) + O(h^3), \\
 B_1 + B_2 &= \beta_k \cdot CH_k - \alpha_k SH_k = \frac{1}{3} \beta_k b_k h^2 + O(h^4), \\
 B_1 - B_2 &= \alpha_k CS_k - \beta_k SC_k = h^{-1} + \frac{h}{6} (b_k - a_k^2) + O(h^3), \\
 C_8 &= -\frac{1}{6} h^2 a_k' + O(h^4), \\
 B_9 &= (2h)^{-1} - \frac{1}{12} h (a_k^2 - b_k) + O(h^2), \\
 B_{10} &= -(2h)^{-1} + \frac{1}{12} h (a_k^2 - b_k) + O(h^2), \\
 C_6 &= (2h)^{-1} C_3 + O(h^5), \quad C_7 = -(2h)^{-1} C_3 + O(h^5) \\
 C_9 &= \frac{1}{6} h^2 (a_k - 1) f_k' + O(h^4), \quad C_{10} = \frac{1}{6} h^2 b_k' + O(h^4), \\
 C_4 &= C_1 + O(h^6), \quad C_5 = C_2 + O(h^6) \\
 \left(SH_k = \frac{sh(\beta_k h)}{sh(\alpha_k h)}, \quad CS_k = \frac{ch(\beta_k h)}{sh(\alpha_k h)} \right).
 \end{aligned}$$

Следовательно, разностная схема (27) с точностью до слагаемых порядка $O(h^6)$ совпадает с (28).

Сходимость монотонных разностных схем доказывается аналогично [8].

Пример. Применим разностную схему (5) с точностью $O(h^2)$ для решения следующей краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \sqrt{x} y' - \left(9 - \frac{x}{4} - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) y = x \exp\left(-\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}\right) \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \end{cases} \quad (29)$$

(точное решение $- y(x) = (D_1 e^{3x} + D_2 e^{-3x} - \frac{1}{9} x) \exp\left(-\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)$,
 $D_1 = -D_2 = \left(\frac{1}{9} + \exp\left(\frac{1}{3}\right)\right) / (e^3 - e^{-3})$).

Результаты расчетов методом прогонки ($h = 1/10$) показаны в таблице, где значения y_c получены по схеме в центральных разностях.

x	\bar{y}	y_c	y
0,1	0,03431	0,03460	0,03433
0,2	0,07132	0,07188	0,07137
0,3	0,11450	0,11532	0,11461
0,4	0,16769	0,16873	0,16782
0,5	0,23511	0,23634	0,23527
0,6	0,32173	0,32307	0,32191
0,7	0,43347	0,43480	0,43364
0,8	0,57750	0,57867	0,57765
0,9	0,76269	0,76345	0,76279

Заметим, что краевую задачу (I) можно записать в сопряженном виде

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = g_1(x) \\ y(0) = y_a, y(1) = y_b \end{cases} \quad (30)$$

или в виде

$$\begin{cases} z'' + r(x)z = g_2(x) \\ z(0) = z_a, z(1) = z_b, \end{cases} \quad (31)$$

где $p = p(x) = \exp(\int_0^x a(t) dt) > 0$, $q = p^b$, $g_1 = pf$,
 $z = z(x) = y \cdot s$, $g_2 = f \cdot s$, $s = s(x) = \exp(-\frac{1}{2} \int_0^x a(t) dt)$,
 $r = b - a^2/4 - a'/2$, $z_a = y_a \cdot s(a)$, $z_b = y_b \cdot s(b)$,

C - произвольная постоянная.

Если, функция $p(x)$ дифференцируема в $[0, 1]$, то краевые задачи (I), (30) эквивалентны. Уравнение (30) более общее, чем (I) и может быть применено и для кусочно-постоянных функций $p(x)$. Уравнение (I) более общее, чем (31), так как (31) неприменимо для недифференцируемых функций $a(x)$

Для краевой задачи (30) применим метод построения разностной схемы на основе интегрального тождества Г.И. Мар-

чука [9]. Тогда разностная схема имеет вид

$$\begin{cases} e_{k+1}(y_{k+1} - y_k) - e_k(y_k - y_{k-1}) = \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} g(x) dx + B_{k+1} - B_k \\ y_0 = y_a, y_N = y_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1), \end{cases} \quad (32)$$

где

$$e_k = \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} p^{-1}(x) dx \right)^{-1}, \quad g(x) = g_1(x) - q(x)y(x),$$

$$B_k = e_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} p^{-1}(x) \int_{x_{k-1/2}}^x g(t) dt dx.$$

Если $b=0$ ($g=g_1$), то разностная схема (32) точна относительно краевой задачи (30) в узлах сетки, а если еще $q(x) = \bar{q}_k$, $f(x) = \bar{f}_k$ ($x \in \Omega_k$), то (32) совпадает с разностной схемой А.М.Ильина (6).

При $b \neq 0$ разностную схему с точностью $O(h^2)$ можно записать в виде [6]

$$\begin{cases} \Lambda \bar{y}_k = h^{-2} [P_{k+1/2} \bar{y}_{k+1} - (P_{k+1/2} + P_{k-1/2}) \bar{y}_k + P_{k-1/2} \bar{y}_{k-1}] + q(x_k) \bar{y}_k - g_1(x_k) = 0 \\ \bar{y}_0 = y_a, \bar{y}_N = y_b \quad (k=1, 2, \dots, N-1), \end{cases} \quad (33)$$

где $P_{k \pm 1/2} = P(x_{k \pm 1/2})$.

Локальная ошибка аппроксимации разностной схемы (33) на решении ОДУ (30) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_k = \Lambda y(x_k) &= y_k'' \cdot P_k + y_k' P_k' + h^2 (y_k^{(4)} P_k / 12 + y_k''' P_k' / 6 + \\ &+ y_k'' P_k'' / 8 + y_k' P_k''' / 24 + q(x_k) y_k - g_1(x_k)) + O(h^4) = \\ &= \frac{h^2}{24} (2 y_k^{(4)} P_k + 4 y_k''' P_k' + 3 y_k'' P_k'' + y_k' P_k''') + O(h^4). \end{aligned}$$

Эта ошибка неустранима, если шаблон схемы трехточечный.

Даже, в случае $p \equiv 1$, $q = \text{const}$, $g_1 = \text{const}$ с учетом уравнения (30), имеем

$$\Psi_k = \frac{h^2}{12} (q^2 y_k - q g_1) + O(h^4),$$

т.е. для ОДУ с постоянными коэффициентами разностная схема (33) имеет только второй порядок точности. Точность особенно понижается, если коэффициент ϱ по модулю большой.

Для интегрирования краевой задачи (31) аналогично строится точная разностная схема (8), если коэффициенты постоянны в Ω_k и $c = \chi_k$. Соответствующая разностная схема монотонна, если $r(x) \leq 0, x \in [0, 1]$.

Разностные схемы типа (8) можно построить и для систем уравнений вида (31), где r - квадратная матрица. В этом случае возмущенный коэффициент ϱ схемы (8) есть матрица-функция, которая вычисляется при помощи интерполяционной формулы Лагранжа-Сильвестра [10].

Специальные разностные схемы могут быть применены и для решения многомерных задач математической физики, если использовать такие методы решения, как метод прямых или метод переменных направлений [7]. Рассмотрим смешанную краевую задачу для уравнения теплопроводности в прямоугольнике $\Omega_T = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq 1\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu - \tilde{f}(t, x) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u|_{x=0} = \mu_a(t), u|_{x=1} = \mu_b(t), \end{cases} \quad (34)$$

где

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{a}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{b}(t, x) u.$$

Методом прямых получим неявную разностную схему по времени

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = Lu^{n+1} - \tilde{f}^{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ u^0 = \varphi(x), u^{n+1}|_{x=0} = \mu_a(t_{n+1}), u^{n+1}|_{x=1} = \mu_b(t_{n+1}), \end{cases}$$

где $u^n = u(t_n, x)$, $\tilde{f}^{n+1} = \tilde{f}(t_{n+1}, x)$, $\tau = t_{n+1} - t_n > 0$, $t_0 = 0$.

Следовательно, на $(n+1)$ -м временном слое имеем ОДУ типа (I), где $u^n = u(t_n, x)$, $a = \tilde{a}^{n+1}$, $b = \tilde{b}^{n+1} - \tau^{-1}$, $f = \tilde{f}^{n+1} - \tau^{-1} u^n$, $\tilde{a}^{n+1} = \tilde{a}(t_{n+1}, x)$, $\tilde{b}^{n+1} = \tilde{b}(t_{n+1}, x)$, $x \in [0, 1]$.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1973. 631 с.
2. Ильин А.М. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. - Математич. заметки, 1969, т.6, вып.2, с.234-248.
3. Емельянов К.В. Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. - Численные методы механики сплошной среды, т. II, № 5, Новосибирск, 1980, 54-74 с.
4. Шишкин Г.И. Разностная схема для решения эллиптических уравнений с малыми параметрами при производных. - В кн.: Матем. модели течений жидкости. Новосибирск, 1978, с.280-282.
5. Шишкин Г.И. Численное решение эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных. - Численные методы механики сплошной среды, т.10, № 4, Новосибирск, 1979, с.107-124.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 589 с.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. М.: Наука, 1977. 399 с.
9. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 454 с.
10. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.

НЕКОТОРЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Х.Э.Калис, И.Э.Пагодкина
(ЛГУ им.П.Стучки)

На основе тестовой задачи о свободной конвекции жидкости подогреваемой сбоку [1],[2], ранее рассматривался ряд конечно-разностных схем. Результаты численных экспериментов показали, что как неявные, так и явные разностные схемы вполне пригодны, но только при умеренных числах Грасгофа ($G < 10^5$).

В настоящей работе найдена оценка устойчивости разностной схемы в центральных разностях относительно числа Грасгофа и предложена консервативная векторно-разностная схема для решения совместно уравнений для функции вихря и температуры.

Плоское конвективное движение вязкой несжимающейся жидкости в квадратной области в переменных функции вихря w , тока ψ и температуры T описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x_1} + v \frac{\partial w}{\partial x_2} = \Delta w + G \frac{\partial T}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x_1} + v \frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{1}{P} \Delta T, \\ \Delta \psi = -w, \end{cases} \quad (I)$$

где $u = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$, $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$,

G - число Грасгофа, P - число Прандтля.

Решение данной системы уравнений методом сеток зависит от числа G . От числа G изменяются условия устойчивости разностных схем.

1. Линеаризованная система (I) относительно решения

$$w_0 \equiv \psi_0 \equiv 0, \quad T_0 = x_2 \cdot \delta, \quad (\psi = \psi_0 + \tilde{\psi}, \quad T = T_0 + \tilde{T})$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta w + G \frac{\partial T}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{P} \Delta T + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \delta, \\ \Delta \psi = -w, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} = \Delta \Delta \psi - G \frac{\partial T}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{P} \Delta T + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \delta, \end{cases} \quad (2)$$

где в случае подогрева снизу $\delta < 0$, а сверху $\delta > 0$.

Соответствующая разностная схема в центральных разностях

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta_h \psi^{n+1} - \Delta_h \psi^n}{\tau} &= \Delta_h^2 \psi^{n+1} - \sigma \delta_{x_1} T^n, \\ \frac{T^{n+1} - T^n}{\tau} &= \frac{1}{\rho} \Delta_h T^{n+1} + \delta \delta_{x_1} \psi^{n+1}, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

где δ_{x_1} - центральная разность, Δ_h - разностный оператор, соответствующий дифференциальному оператору Δ .

Исследуем оператор перехода с n -го на $(n+1)$ -й временной слой методом разделения переменных, полагая

$$\begin{aligned} \psi^n &= a^n \exp(i\kappa_1 x_1 + i\kappa_2 x_2), \\ T^n &= b^n \exp(i\kappa_1 x_1 + i\kappa_2 x_2), \\ (x_1, x_2) &\in \mathcal{W}_h, \quad i = \sqrt{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{\lambda}{\tau} (a^{n+1} - a^n) &= \lambda^2 a^{n+1} - i\sigma \alpha_1 b^n, \\ \frac{1}{\tau} (b^{n+1} - b^n) &= i\delta \alpha_1 a^{n+1} - \frac{\lambda}{\rho} b^{n+1}, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{h_1} \sin(\kappa_1 h_1), \quad \alpha_2 = \frac{1}{h_2} \sin(\kappa_2 h_2), \\ \lambda_1 &= \frac{4}{h_1^2} \sin^2 \frac{\kappa_1 h_1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{4}{h_2^2} \sin^2 \frac{\kappa_2 h_2}{2}, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из выражения (5) видно, что матрица перехода Φ с n -го, на $(n+1)$ -й временной слой $\left(\begin{smallmatrix} \psi \\ T \end{smallmatrix} \right)^{n+1} = \Phi \left(\begin{smallmatrix} \psi \\ T \end{smallmatrix} \right)^n$ следующая:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\tau\lambda} & \frac{i\sigma\alpha_1\tau}{\lambda(1+\tau\lambda)} \\ \frac{i\delta\alpha_1\tau}{(1+\tau\lambda)(1+\frac{\tau\lambda}{\rho})} & \frac{1 - \frac{\tau^2\alpha_1^2\sigma\delta}{\lambda(1+\tau\lambda)}}{1 + \frac{\tau\lambda}{\rho}} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение $|\Phi - \mu E| = 0$ или

$$\mu^2 - \mu \left(\frac{1}{1+\tau\lambda} + \frac{1}{1+\frac{\tau\lambda}{\rho}} - \frac{\tau^2\alpha_1^2\sigma\delta}{\lambda(1+\tau\lambda)(1+\frac{\tau\lambda}{\rho})} \right) + \frac{1}{(1+\tau\lambda)(1+\frac{\tau\lambda}{\rho})} = 0.$$

Собственные значения матрицы перехода Φ $|\mu| < 1$, если

$$\left| \frac{1}{1+\tau\lambda} + \frac{1}{1+\frac{\tau\lambda}{\rho}} - \frac{\tau^2\alpha_1^2\sigma\delta}{\lambda(1+\tau\lambda)(1+\frac{\tau\lambda}{\rho})} \right| \leq 1 + \frac{1}{(1+\tau\lambda)(1+\frac{\tau\lambda}{\rho})}$$

или $4 + 2\tau\lambda \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) + \frac{\tau^2\lambda^2}{\rho} - \frac{\tau^2\alpha_1^2\sigma\delta}{\lambda} \geq 0.$

Исследуем неравенство в случае одинаковых волновых чисел $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ и шагах сетки $h_1 = h_2 = h$. Тогда

$$f(\alpha) = 4 + \frac{16\tau\alpha}{h^2} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) + \tau^2 \left(\frac{64\alpha^2}{h^4\rho} - \frac{(1-\alpha)}{2} 6\delta \right) \geq 0,$$

где $\alpha = \sin^2 \frac{\kappa h}{2}$, $\lambda = \frac{2c\alpha}{h^2}$, $\alpha_1^2 = \frac{4c\alpha(1-\alpha)}{h^2}$.

Так как $0 \leq \alpha \leq 1$, то при $\delta > 0$, $f(1) > 0$, $f_\alpha(\alpha) > 0$, а

$f(0) = 4 - \frac{16\tau\delta}{2} > 0$, если

$$\tau \leq \sqrt{\frac{8}{6\delta}}, \quad (7)$$

а при $\delta < 0$

$$f(1) > 0, f(0) > 0, \min f(\alpha^*) < 0, \alpha^* < 0,$$

если

$$\tau \leq \frac{32(\rho+1)}{6|\delta|h^2\rho}. \quad (8)$$

В общем случае линеаризации относительно произвольного решения (ψ_0, T_0) имеем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_1} + v_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_2} + u \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x_1} + v \frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x_2} = \Delta \Delta \psi - G \frac{\partial T}{\partial x_0}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_0 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_0 \frac{\partial T}{\partial x_2} + u \frac{\partial T_0}{\partial x_1} + v \frac{\partial T_0}{\partial x_2} = \frac{1}{\rho} \Delta T. \end{cases} \quad (9)$$

Обозначая $\frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x_1} = \psi_{\Delta x_1}$, $\frac{\partial \Delta \psi_0}{\partial x_2} = \psi_{\Delta x_2}$ и $\frac{\partial T_0}{\partial x_1} = T_{0x_1}$, $\frac{\partial T_0}{\partial x_2} = T_{0x_2}$,

получим следующую разностную схему в центральных разностях

$\delta x_1, \delta x_2$:

$$\begin{cases} \frac{\Delta_n \psi^{n+1} - \Delta_n \psi^n}{\tau} + u_0 \delta x_1 \Delta_n \psi^{n+1} + v_0 \delta x_2 \Delta_n \psi^{n+1} + \psi_{\Delta x_1} \delta x_1 \psi^{n+1} - \psi_{\Delta x_2} \delta x_2 \psi^{n+1} = \Delta_n^2 \psi^{n+1} - G \delta x_1 T^{n+1}, \\ \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\tau} + u_0 \delta x_1 T^{n+1} + v_0 \delta x_2 T^{n+1} + T_{0x_1} \delta x_1 T^{n+1} - T_{0x_2} \delta x_2 T^{n+1} = \frac{1}{\rho} \Delta_n T^{n+1}. \end{cases}$$

Учитывая (4) и (6), получим:

$$\begin{cases} -\frac{\lambda}{2} (a^{n+1} - a^n) - i(u_0 \lambda \alpha_1 + v_0 \lambda \alpha_2) a^{n+1} + i(\psi_{\Delta x_1} \alpha_2 - \psi_{\Delta x_2} \alpha_1) a^n = \lambda^2 a^{n+1} - iG \alpha_1 b^n, \\ \frac{i}{2} (b^{n+1} - b^n) + i(u_0 \alpha_1 + v_0 \alpha_2) b^{n+1} + i(T_{0x_1} \alpha_2 - T_{0x_2} \alpha_1) a^{n+1} = -\frac{\lambda}{\rho} b^{n+1}. \end{cases}$$

Отсюда матрица перехода

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \tau\lambda + i(A_1 + A_2)} & \frac{i\tau G \alpha_1}{\lambda(1 + \tau\lambda + i(A_1 + A_2))} \\ \frac{-iA_3}{(1 + \frac{\tau\lambda}{\rho} + iA_1)(1 + \tau\lambda + i(A_1 + A_2))} & \frac{1 + \frac{\tau A_3 G \alpha_1}{\lambda(1 + \tau\lambda + i(A_1 + A_2))}}{1 + \frac{\tau\lambda}{\rho} + iA_1} \end{pmatrix}$$

где $A_1 = \tau(u_0 \alpha_1 + v_0 \alpha_2)$, $A_2 = \frac{\tau}{\lambda} (\Psi_{\Delta x_1} \alpha_1 - \Psi_{\Delta x_2} \alpha_2)$,
 $A_3 = \tau(T_{0x_1} \alpha_2 - T_{0x_2} \alpha_1)$.

Оценку корней собственного многочлена данной комплексной матрицы Φ при помощи вещественных чисел получить не удалось. Но для устойчивости вычислительного процесса достаточно, чтобы какая-либо из норм оператора Φ была меньше 1. Рассмотрим $\|\Phi\|_{\bar{u}}$, так как $\|\Phi\|_{\bar{u}} = \sqrt{M^*}$, M^* - максимальное собственное значение матрицы $\bar{\Phi}^* \Phi$ ($\bar{\Phi}^*$ - комплексно сопряженная с транспонированной матрицей Φ^T), то $M^* < 1$, если

$$\begin{aligned} & [A_1^2 + (1 + \frac{\tau\lambda}{\rho})^2] [1 + (\frac{\tau G \alpha_1}{\lambda})^2] + A_1^2 + A_2^2 + [1 + \tau\lambda + \frac{\tau G \alpha_1}{\lambda} A_3]^2 \leq \\ & \leq 1 + [(1 + \tau\lambda)^2 + A_1^2 + A_2^2] [(1 + \frac{\tau\lambda}{\rho})^2 + A_1^2]. \end{aligned}$$

После несложных выкладок видно, что на шаг по времени τ и в этом случае накладывается ограничение типа $\tau \leq \frac{\tau_{\text{const}}}{G}$.

II. Рассмотрим интегро-интерполяционный метод для составления векторно-разностной схемы. Для этого первые два уравнения системы (I) перепишем в матрично-векторной форме

$$\Delta \vec{V} + A_1 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_2} = B \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}, \quad (10)$$

где $\vec{V} = \begin{pmatrix} w \\ T \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} -u(x) & G \\ 0 & -u(x)\rho \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} v(x) & 0 \\ 0 & -v(x)\rho \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$.

На неравномерной сетке

$$\omega_h = \left\{ (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}), x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} = h_{i+}, x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} = h_{i-}, k_i = 1, 2, \dots, N_i \right\}$$

(N_i - число внутренних узлов в направлении оси Ox_i) в окрестности центрального узла

$$\Omega_h = \left\{ x_i^{(k_i-1/2)} \leq x_i \leq x_i^{(k_i+1/2)}, i=1, 2 \right\}, x_j^{(k_j \pm 1/2)} = x_j^{(k_j)} \pm \frac{1}{2} h_{j \pm}, (j=1, 2)$$

систему (I0) можно переписать следующим образом

$$\sum_{i=1}^2 W_i^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} (W_i(x) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_i}) = B \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}, \quad (II)$$

где $W_1(x) = \exp \int_{x_1^{(k_1)}}^{x_1} A_1(t, x_2) dt,$

$W_2(x) = \exp \int_{x_2^{(k_2)}}^{x_2} A_2(x_1, t) dt$ - матрицы экспоненты.

Перепишем (II) в форме

$$W_1^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_1} (W_1(x) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1}) = B \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - W_2^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x_2} (W_2(x) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_2}) \equiv \vec{F}_1(x).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (W_1(x) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1}) = W_1(x) \vec{F}_1(x). \quad (I2)$$

Интегрируя уравнение (I2) по переменной x_1 на промежутке

$[x_1^{(k_1-1/2)}, x_1^{(k_1+1/2)}]$ имеем уравнение для одномерного вектора

"потока" $\vec{F}_1(x) = W_1(x) \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1}$ в виде

$$L_{1+} \vec{V} \equiv \frac{1}{h_{1+}} (\vec{F}_{1+} - \vec{F}_{1-}) = \vec{F}_1(x_1^{(k_1)}, x_2), \quad (I3)$$

где $\vec{F}_{1\pm} = \vec{F}(x_1^{(k_1 \pm 1/2)}, x_2), h_{1\pm} = \frac{1}{2} (h_{1+} + h_{1-}).$

Здесь интеграл вычислялся по формуле прямоугольника в центральном узле и учитывалось, что $W_1(x_1^{(k_1)}, x_2) = E$ - единичная матрица второго порядка.

Далее определим \vec{F}_{1+} и \vec{F}_{1-} .

Интегрируя соотношение

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x_1} = W_1^{-1}(x) \vec{F}_1(x), \quad (I4)$$

в промежутке $[x_1^{(k_1)}, x_1^{(k_1+1)}]$ получим

$$\vec{V}(x_1^{(k_1+1)}, x_2) - \vec{V}(x_1^{(k_1)}, x_2) = A_{1+}^{-1} (E - \exp(-A_{1+} h_{1+})) \vec{F}_{1+},$$

где

$$A_1(x) = A_{1+}(x_1^{(k_1+1/2)}, x_2), \quad \vec{F}_{1+} = \vec{F}_1(x).$$

Отсюда

$$\vec{F}_{1+} = A_{1+} [E - \exp(-A_{1+} h_{1+})]^{-1} [\vec{V}(x_1^{(k_1+1)}, x_2) - \vec{V}(x_1^{(k_1)}, x_2)]. \quad (15)$$

Аналогично, интегрируя соотношение (14), в промежутке $[x_1^{(k_1-1)}, x_1^{(k_1)}]$ получим

$$\vec{F}_{1-} = A_{1-} [\exp(A_{1-} h_{1-}) - E]^{-1} [\vec{V}(x_1^{(k_1)}, x_2) - \vec{V}(x_1^{(k_1-1)}, x_2)], \quad (16)$$

где

$$A_1(x) = A_{1-}(x_1^{(k_1-1/2)}, x_2), \quad \vec{F}_{1-}(x) = \vec{F}_{1-}.$$

Из (15) и (16) видно, что соотношение (13) есть дифференциально-разностное уравнение с одной непрерывной переменной x_2 и одной дискретной переменной x_1 .

Продолжая процесс дискретизации по переменной x_2 придем к векторно-разностной схеме

$$\Lambda_1 \vec{V}_k + \Lambda_2 \vec{V}_k = B \frac{\partial \vec{V}_k}{\partial t}, \quad (17)$$

где

$$\Lambda_i \vec{V}_k = a_i^{(k_i)} \vec{V}_{k_i+1} - (a_i^{(k_i)} + b_i^{(k_i)}) \vec{V}_{k_i} + b_i^{(k_i)} \vec{V}_{k_i-1},$$

$$\vec{V}_k = \vec{V}(x^{(k)}),$$

$$\vec{V}_{k_i \pm 1} = \vec{V}(x_1^{(k_1 \pm 1)}, x_2^{(k_2)}), \quad \vec{V}_{k_2 \pm 1} = \vec{V}(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2 \pm 1)}),$$

$$a_i^{(k_i)} = \frac{1}{h_i} A_{i+} [E - \exp(-A_{i+} h_{i+})]^{-1},$$

$$b_i^{(k_i)} = \frac{1}{h_i} A_{i-} [\exp(A_{i-} h_{i-}) - E]^{-1}, \quad (i=1, 2)$$

$$A_{1\pm} = A(x_1^{(k_1 \pm 1/2)}, x_2^{(k_2)}), \quad A_{2\pm} = A(x_1^{(k_1)}, x_2^{(k_2 \pm 1/2)})$$

- квадратичные матрицы второго порядка.

Аппроксимируя производную по времени $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ односторонней разностью, т.е., проводя дискретизацию по времени с шагом τ из (17) получим неявную разностную схему

$$\Lambda \vec{V}_k^{n+1} = B \frac{\vec{V}_k^{n+1} - \vec{V}_k^n}{\tau}, \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (18)$$

где $\vec{V}_k^n = \vec{V}_k |_{t=t_n}$, $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$.

Разностная схема (18) консервативна и монотонна, если на сетке w_h матрицы $a_i^{(k)}$ и $b_i^{(k)}$ положительные [4].

В случае равномерной сетки ($h_{i+} = h_{i-} = \bar{h}_i = h_i$ и $A_{i+} = A_i = A_i$) векторно-разностное уравнение (18) принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^2 [\gamma(A_i) \frac{1}{h_i^2} (\vec{V}_{k,i+1} - 2\vec{V}_{k,i} + \vec{V}_{k,i-1}) + \frac{A_i}{2h_i} (\vec{V}_{k,i+1} - \vec{V}_{k,i-1})] = B \frac{\partial \vec{V}_{k,i}}{\partial t}, \quad (19)$$

где $\gamma(A_i) = \frac{A_i h_i}{2} \operatorname{cth} \frac{A_i h_i}{2}$ - функция-матрица.

Для вычисления функции-матрицы $g(A)$, во-первых, рассматривается характеристический многочлен данной матрицы $\varphi(M) = |A - ME|$ и ее собственные значения. Если собственные значения матрицы A M_1 и M_2 различные, т.е. $M_1 \neq M_2$, то интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра $\eta(M)$ [3] определяется следующим образом:

$$\eta(M) = \frac{M - M_2}{M_1 - M_2} g(M_1) + \frac{M - M_1}{M_2 - M_1} g(M_2),$$

если же $M_1 = M_2$, то

$$\eta(M) = g(M_1) + (M - M_1) g'(M_1).$$

Тем самым определена функция от матрицы, т.е. $g(A) = \eta(M)$.

Для вещественной матрицы A , $g(A)$ - вещественная.

Очевидно, что $g(0) = E$.

Если M_1 и M_2 собственные значения матрицы A_1 , то

$M_1 = -u(x^{(k)})$; $M_2 = -p \cdot u(x^{(k)})$, для матрицы A_2 соответственно, $M_1 = -v(x^{(k)})$, $M_2 = -p \cdot v(x^{(k)})$.

Тогда

$$\gamma(A_i) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_{1i} \\ 0 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{h_1 M_1}{2} \operatorname{cth} \frac{h_1 M_1}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{h_2 M_2}{2} \operatorname{cth} \frac{h_2 M_2}{2},$$

$$\gamma_{11} = \frac{B[\delta_2 - \delta_1]}{M_2 - M_1}, \quad \gamma_{12} = 0.$$

Для общего случая в формуле (17)

$$a_i^{(k)} = \frac{1}{h_i} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_{1i} \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad b_i^{(k)} = \frac{1}{h_i} \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_{1i} \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{12} = \beta_{12} = 0$,

$$\alpha_{11} = \frac{M_1^{(i+)}}{1 - \exp(-M_1^{(i+)} h_i)}, \quad \alpha_2 = \frac{M_2^{(i+)}}{1 - \exp(-M_2^{(i+)} h_i)}, \quad \alpha_{11} = \frac{G[\alpha_2 - \alpha_1]}{M_2^{(i+)} - M_1^{(i+)}}$$

$$\beta_1 = \frac{M_1^{(i-)}}{\exp(M_1^{(i-)} h_i) - 1}, \quad \beta_2 = \frac{M_2^{(i-)}}{\exp(M_2^{(i-)} h_i) - 1}, \quad \beta_{11} = \frac{G[\beta_2 - \beta_1]}{M_2^{(i-)} - M_1^{(i-)}}$$

$$M_1^{(12)} = -U(x_1^{(K_1 \pm 1/2)}, x_2^{(K_2)}), \quad M_1^{(22)} = -U(x_1^{(K_1)}, x_2^{(K_2 \pm 1/2)}),$$

$$M_2^{(12)} = -P U(x_1^{(K_1 \pm 1/2)}, x_2^{(K_2)}), \quad M_2^{(22)} = -P U(x_1^{(K_1)}, x_2^{(K_2 \pm 1/2)})$$

- для матрицы A_1 и

$$M_1^{(12)} = -V(x_1^{(K_1 \pm 1/2)}, x_2^{(K_2)}), \quad M_1^{(22)} = -V(x_1^{(K_1)}, x_2^{(K_2 \pm 1/2)}),$$

$$M_2^{(12)} = -P V(x_1^{(K_1 \pm 1/2)}, x_2^{(K_2)}), \quad M_2^{(22)} = -P V(x_1^{(K_1)}, x_2^{(K_2 \pm 1/2)})$$

• для матрицы A_2 .

Схема (17) реализуется методом векторной прогонки.

Список литературы

1. Онянов В.А., Тарунин Е.Л. Численные эксперименты по использованию различных разностных схем для задач свободной конвекции в замкнутой области. - Уч. зап. Пермского ун-та, 1975, № 327. Гидродинамика, вып. У1, с. 156-181.
2. Герщуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Симоновский И.Б. Об устойчивости равновесия и конечно-амплитудных движениях в двухслойной системе, нагреваемой сверху. - Изв. АН СССР, 1966, Механика жидкости и газа, № 5, с. 3-II.
3. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В МОДЕЛИ
ЭЛЕКТРОШЛАКОВОГО ПЕРЕПЛАВА

Дуринс Г.Р.

(ВЦ ЛГУ им. П. Стучки)

Объектом данного численного исследования является разрабатываемая в Институте Физики АН Латвийской ССР физическая модель электрошлакового переплава. Часть сечения цилиндрической осесимметричной установки изображена на рис. 1 (1, 3, 5 - цилиндрические медные электроды; 2 - емкость с ртутью; 4 - непроводящая перегородка). При пропускании электрического тока жидкость под воздействием электромагнитной силы, ротор которой отличен от нуля, приходит в движение электровихревого характера.

Математическая постановка задачи в основном заимствована из [1]. Если не учитывать тепловые процессы, то движение описывается системой уравнений Навье-Стокса в переменных (ψ, Ω)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} + \left[\frac{1}{r\eta} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{3}{r} \right] \frac{\partial \Omega}{\partial r} - \frac{1}{r\eta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \\ = -(\text{rot } F)_\varphi / r\eta, \quad (I) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\Omega \rho r^2, \end{aligned} \right.$$

где ψ - функция гидродинамического тока,

$\Omega = \omega/r$, ω - функция завихренности,

η - вязкость (кг/(м с)),

ρ - плотность (кг/м³),

$(\text{rot } F)_\varphi$ - φ -тая компонента ротора электромагнитных сил.

Граничные условия для системы уравнений (I) трех разновидностей:

а) на твердых стенках обычные условия прилипания;

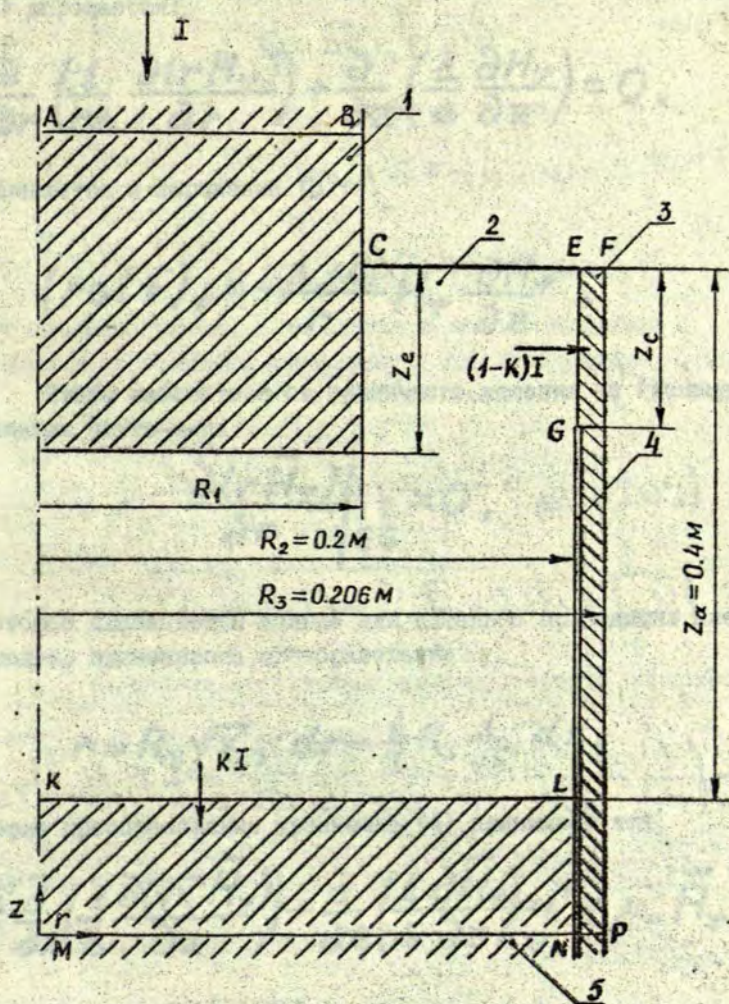


Рис. I. Экспериментальная установка

б) на свободной поверхности условия "Свободного скольжения"

$$\psi = 0, \quad \mathcal{R} = 0;$$

в) на оси предполагалось

$$\psi = \alpha r^2 + \beta r^4,$$

(2)

$$\omega = -8\beta r / \rho.$$

В безиндукционном приближении в случае переменного электрического тока для определения среднего во времени $(\text{rot } F)_\varphi$ согласно выражению

$$(\text{rot } F)_\varphi = -\frac{\mu_0}{r} |\tilde{H}_\varphi| \frac{\partial |\tilde{H}_\varphi|}{\partial z},$$

(3)

где $|\tilde{H}_\varphi| = \sqrt{(\text{Re } \tilde{H}_\varphi)^2 + (\text{Im } \tilde{H}_\varphi)^2}$,

необходимо отдельно решить комплексное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \tilde{H}_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \tilde{H}_\varphi}{\partial z} \right) = i^* \varepsilon \mu_0 \tilde{H}_\varphi,$$

где \tilde{H}_φ - комплексная компонента напряженности магнитного поля,

$$\varepsilon = 2\pi \varepsilon_0 - \text{удельная емкость переменного тока (1/с)},$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м}, \quad i^* = \sqrt{-1},$$

σ - электропроводность среды (1/Ом),

$I_{\text{эф}}$ - эффективное значение силы переменного тока (А).

В случае постоянного электрического тока уравнение (4) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r\epsilon} \frac{\partial(rH_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} \right) = 0. \quad (5)$$

Изменяется и выражение (3):

$$(\text{rot } F)_\varphi = -\frac{2\mu_0}{r} H_\varphi \frac{\partial H_\varphi}{\partial z}. \quad (6)$$

Чтобы избавиться от граничного условия на границе раздела ртуть-медь

$$\left. \frac{\partial(r\tilde{H}_\varphi)}{\partial r} \right|_{EG} = 0, \quad (7)$$

которое выполняется только для идеально проводящих электродов, применялось преобразование

$$r = R_3 \sqrt{x}, \quad dr = \frac{1}{2} R_3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx. \quad (8)$$

После преобразования уравнение (4) принимает вид

$$\frac{4\sqrt{x}}{R_3^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial(\sqrt{x}\tilde{H}_\varphi)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \tilde{H}_\varphi}{\partial z} \right) = i^* \epsilon \mu_0 \tilde{H}_\varphi. \quad (9)$$

Граничные условия тогда только первого рода и берутся из точного аналитического решения задачи на определение магнитного поля тока, протекающего по бесконечному цилиндрическому электроду. В случае переменного электрического тока эти граничные условия следующие:

$$\tilde{H}_\varphi|_{MA} = 0, \quad \tilde{H}_\varphi|_{AB} = \frac{I_{ef}}{\pi R_3 \sqrt{2X_E}} \frac{J_2(\rho R_3 \sqrt{X})}{J_2(\rho R_3 \sqrt{X_E})}$$

$$\tilde{H}_\varphi|_{BC} = I_{ef} / \pi R_3 \sqrt{2X_E}, \quad \tilde{H}_\varphi|_{DEF} = I_{ef} / \pi R_3 \sqrt{2X}, \quad (10)$$

$$\tilde{H}_\varphi|_{EP} = I_{ef} / \pi R_3 \sqrt{2X_P}, \quad \tilde{H}_\varphi|_{GLN} = k I_{ef} / \pi R_3 \sqrt{2X_V},$$

$$\tilde{H}_\varphi|_{MN} = \frac{k I_{ef}}{\pi R_3 \sqrt{2X_V}} \cdot \frac{J_2(\rho R_3 \sqrt{X})}{J_2(\rho R_3 \sqrt{X_V})},$$

$$\tilde{H}_\varphi|_{NP} = C_1 J_2(\rho R_3 \sqrt{X}) + C_2 Y_2(\rho R_3 \sqrt{X}),$$

где J_1, Y_2 - функции Бесселя 1-го и 2-го рода,

$$\rho = (1-i^*) \sqrt{0,5 \varepsilon \sigma \mu_0},$$

$$X_E = \frac{R_2^2}{R_3^2}, \quad X_V = \frac{R_2^2}{R_3^2}, \quad X_P = \frac{R_1^2}{R_3^2} = 1,$$

C_1, C_2 - константы;

k - параметр, указывающий, какая часть полного тока проходит через нижний электрод.

Для постоянного тока граничные условия также упрощаются:

$$H_\varphi|_{MA} = 0, \quad H_\varphi|_{AB} = \frac{I}{2\pi R_3 \sqrt{X_E}} \cdot \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{X_E}}, \quad H_\varphi|_{BC} = \frac{I}{2\pi R_3 \sqrt{X_E}},$$

$$H_\varphi|_{DEF} = \frac{I}{2\pi R_3 \sqrt{X}}, \quad H_\varphi|_{EP} = \frac{I}{2\pi R_3 \sqrt{X_P}}, \quad H_\varphi|_{GLN} = \frac{k I^{(II)}}{2\pi R_3 \sqrt{X_V}},$$

$$H_{\varphi}|_{MN} = \frac{kI}{2\pi R_3 \sqrt{x_v}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x_v}},$$

$$H_{\varphi}|_{MP} = C_3 \sqrt{x} + C_4 / \sqrt{x}.$$

На равномерной сетке

$$R_{x_2} = \{x_i = h_x(i-1), i=1, 2, \dots, M, h_x = 1/(M-1); \quad (I2)$$

$$z_j = h_z(j-1), j=1, 2, \dots, N, h_z = -0,6/(N-1)\}$$

для численного решения уравнения (9) была построена разностная схема со вторым порядком аппроксимации:

$$\frac{4\sqrt{x_i}}{R_3^2} \left(\frac{2}{\delta_{ij-1} + \delta_{ij}} \frac{\sqrt{x_{i+1}} H_{i+1j} - \sqrt{x_i} H_{ij}}{h_x^2} - \right. \\ \left. - \frac{2}{\delta_{i+1j-1} + \delta_{i-1j}} \frac{\sqrt{x_i} H_{ij} - \sqrt{x_{i-1}} H_{i-1j}}{h_x^2} \right) + \quad (I3)$$

$$+ \frac{2}{\delta_{ij-1} + \delta_{i-1j-1}} \frac{H_{ij+1} - H_{ij}}{h_z^2} - \frac{2}{\delta_{i-1j} + \delta_{ij}} \frac{H_{ij} - H_{ij-1}}{h_z^2} =$$

$$= i^* \mathcal{L}_0 H_{ij},$$

где $H_{ij} = \tilde{H}_{\varphi}(r_i, z_j),$

$$i = 2, 3, \dots, M-1,$$

$$j = 2, 3, \dots, N-1,$$

Система уравнений (I) аппроксимировалась на равномерной сетке

$$R_{r,z} = \{r_i = h_r(i-1), i = 1, 2, \dots, M, h_r = 0,2/(M-1);$$

$$z_j = h_z(j-1), j = 1, 2, \dots, N, h_z = 0,4/(N-1)\} \quad (I4)$$

центральными разностями. При этом для получения значений $(rot F)_\varphi$ в точках сетки (I4) проводилась интерполяция с сетки (I2), применяя кубические сплайны [2].

Для функции \mathcal{P} на твердых стенках использовалось условие Вудса [3], а на оси симметрии - выражение

$$\mathcal{P}_{2j} = -\frac{8}{35h_r^4} \left(\frac{\psi_{3j}}{4} - \psi_{2j} \right), \quad (I5)$$

которое получается из (2).

Все разностные уравнения решались итерационным методом Зейделя, по возможности применяя верхнюю релаксацию.

Численные результаты, полученные, используя граничное условие (7), подтвердили необходимость решения преобразованного уравнения (9) с граничными условиями (I0).

Численные расчеты проводились для центральных электродов формы А ($R_2 = 0,16$ м, $Z_e = 0,02$ м) и формы Б ($R_2 = 0,08$ м, $Z_e = 0,28$ м). В случае переменного тока ($I_{ef} = 20$ А) для обоих электродов рассчитаны следующие варианты: $Z_c = 0,1$ м и $Z_c = 0,4$ м, меняя параметр k с $0 \div 1$ с шагом $0,25$. Некоторые из этих вариантов просчитались и для постоянного тока и оказалось, что характер движения зависит не только от формы электрода, значений Z_e и k , а также от вида тока (рис.2,3).

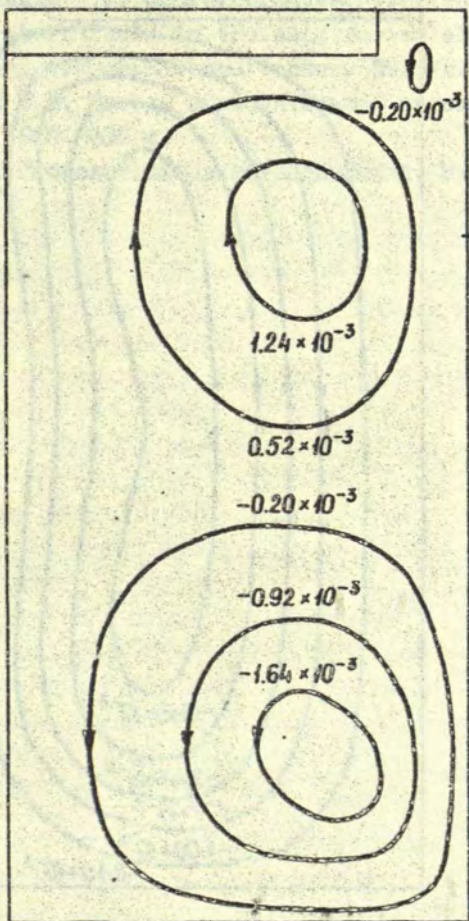


Рис. 2. Линии уровня функции тока
($I_{ef} = 20A$, $z_c = 0$, I_m , $k = 0,75$)

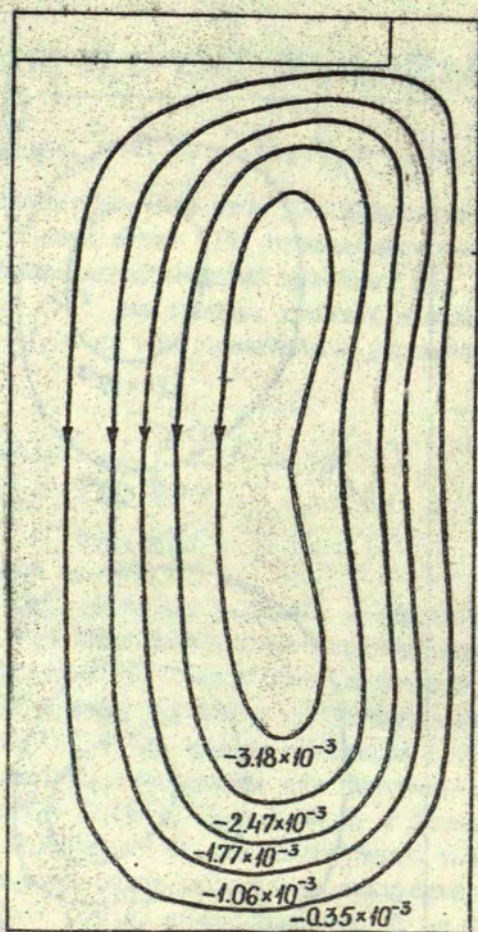


Рис.3. Линии уровня функции тока.
($I = 20A$, $\alpha_c = 0,1m$, $K = 0,75$)

Список литературы

1. Kreyenberg, J. & Schwerdtfeger, K. Stirring velocities and temperature field in the slag during electroslag remelting, J. Arch. Eisenhüttenwes. 50, Nr. 1, 1979, pp. 1-6.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М., Наука, 1980. 536 с.
3. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Г.М.Мусаев, В.Г.Пирмамедов
(Институт кибернетики АН АзССР)

В связи с тем, что тепловые методы воздействия на эксплуатируемые нефтяные месторождения, содержащие высоковязкие нефти, являются одним из основных средств интенсификации добычи нефти и увеличения нефтеотдачи пластов, значительный теоретический и практический интерес представляет изучение влияния температурного фактора на эффективность разработки месторождения на основе численного моделирования неизомермического процесса фильтрации двухфазной жидкости с учетом относительных фазовых проницаемостей и капиллярных сил.

Ввиду того, что система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая указанный процесс, обладает рядом специфических особенностей, не позволяющих использовать классические численные методы, то следует разработать эффективный численный метод решения задач нестационарной двухфазной фильтрации.

Далее, используя разработанный метод, при помощи вычислительных экспериментов на ЭВМ необходимо исследовать влияния различных факторов на процесс вытеснения с целью определения рационального метода воздействия на продуктивный пласт.

Исследованию этих вопросов при неизомермической плоско-радиальной фильтрации посвящена настоящая работа.

I. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть горизонтальный изотропный круговой пласт постоянной мощности H и протяженностью R перекрыт непроницаемыми кровлей и подошвой. В центре пласта расположена гидродинамически совершенная эксплуатационная скважина радиуса $r=r_c$, а на внешнем контуре, являющимся окружностью ($r=R$) расположена батарея нагнетательных скважин. Известно, что неизомермическая радиальная фильтрация с учетом теплообмена с окружающими породами и различием теплофизических параметров жидкостей в безраз-

мерных величинах может быть описана следующей системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot K_{\alpha}(r, s, U, P_{\alpha}) \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial r}) = r \frac{\partial}{\partial t} (m S_{\alpha} S_{\alpha}), \quad (I.1)$$

$$P_1 - P_2 = P_K(s), \quad S_1 + S_2 = 1, \quad (S_2 = S), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \lambda \frac{\partial U}{\partial r}) + \nu \frac{\partial U}{\partial r} - \alpha^* (U - \bar{U}) = \frac{\partial}{\partial t} (cU), \quad (I.2)$$

$$(r, t) \in G_T = \{ (r, t) : r_c < r < R, 0 < t \leq T \},$$

где

$$K_{\alpha} = k(r) \frac{f_{\alpha}(s) S_{\alpha}(P_{\alpha})}{M_{\alpha}(U)} > 0,$$

$$\lambda = m (S_1 \lambda_1 + S_2 \lambda_2) + (1-m) \lambda_3 > 0,$$

$$c = m (S_1 c_1 S_1 + S_2 c_2 S_2) + (1-m) c_3 S_3 > 0,$$

$$V = S_1 c_1 V_1 + S_2 c_2 V_2, \quad V_{\alpha} = K_{\alpha} \frac{\partial P_{\alpha}}{\partial r},$$

α - номер фазы (1 - для нефтяной, 2 - для водяной), r - полярная координата; t - время; $K(r)$ - абсолютная проницаемость пористой среды, m - пористость в долях единицы, U - температура, P_K - капиллярное давление, V_{α} , P_{α} , S_{α} , S_{α} , M_{α} , f_{α} , λ_{α} , c_{α} - соответственно массовый расход, давление, плотность, относительная фазовая проницаемость, коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость фазы α , \bar{U} - температура окружающей среды, α^* - коэффициент теплоотдачи, и наконец, c_3 , λ_3 , S_3 - соответственно удельная теплоемкость, коэффициент теплопроводности и плотность твердого скелета.

Начальные условия для P_{α} и U определяются из решения соответствующей стационарной задачи или из эксперимента.

$$P_{\alpha}(r, 0) = P_{\alpha}^0(r), \quad U(r, 0) = U^0(r), \quad (r, 0) \in \bar{G}_0. \quad (I.3)$$

Перейдем теперь к формулировке граничных условий, которые при фильтрации двухфазной жидкости являются нетривиальными.

Предположим, что через внешнюю границу ($r=R$) в пласт с заданной скоростью $q_2(t)$ и температурой U^* поступает только вытесняющая фаза (вода). Тогда имеем:

$$K_{v1} \frac{\partial P_1}{\partial r} = 0, \quad K_2 \frac{\partial P_2}{\partial r} = q_2(t), \quad U(r,t) = U^*(t), \quad r=R, \quad 0 < t \leq T,$$

где

$$q_2 = \frac{Q_2(t)}{2\pi R H} > Q_2(t) \quad - \text{массовый расход.}$$

В случае, когда на $r=R$ задано давление воды, а поток нефти равен нулю, граничные условия примут вид

$$K_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} = 0, \quad P_2 = P_2(t), \quad U(r,t) = U^*(t), \quad r=R, \quad 0 < t \leq T.$$

Несколько сложнее обстоит дело с формулировкой граничных условий на эксплуатационной скважине ($r=r_c$). В настоящее время для двухфазных течений в основном используют следующий подход: предполагается, что отбор каждой из фаз пропорционален ее подвижности [3]. В этом случае при задании суммарного отбора жидкостей $q_1(t)$ имеем

$$(K_1 + K_2) \frac{\partial P_1}{\partial r} = q_1(t), \quad \frac{\partial P_1}{\partial r} = \frac{\partial P_2}{\partial r}, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad r=r_c, \quad 0 < t \leq T,$$

а если задано давление одной из фаз, например, воды, где

$$q_1(t) = \frac{Q_1(t)}{2\pi r_c H}, \quad Q_1(t) - \text{массовый отбор.}$$

Вышеуказанные граничные условия на r_c и R можно записать в следующем компактном виде

$$\begin{cases} \alpha_1 (K_1 + K_2) \frac{\partial P_1}{\partial r} + (1 - \alpha_1) P_2 = \alpha_1 q_1(t) + (1 - \alpha_1) P_2(t), \\ \frac{\partial P_1}{\partial r} = \frac{\partial P_2}{\partial r}, \\ \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad r=r_c, \quad 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (I.4)$$

$$\begin{cases} K_1 \frac{\partial P_1}{\partial r} = 0, \\ \alpha_2 K_2 \frac{\partial P_2}{\partial r} + (1 - \alpha_2) P_2 = \alpha_2 q_2(t) + (1 - \alpha_2) P_2(t), \\ U = U^*(t), \quad r=R, \quad 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (I.5)$$

Здесь α_1 и α_2 могут принимать только значения 0 или 1

В рассматриваемой модели температурное поле пласта находится исходя из следующего предположения: тепловой баланс меж-

ду жидкостью и породой пласта достигается мгновенно, так что в любой точке пласта и в любой момент $t > 0$ температура твердого скелета, воды и нефти одинакова.

Заметим, что задачи (I.1)-(I.5) нелинейны, как по давлению и насыщенности, так и по температуре. Поэтому получение решений задач (I.1)-(I.5) в замкнутой аналитической форме не представляется возможным. В связи с этим единственно возможным путем решения является привлечение численных методов, реализуемых на современных ЭВМ.

2. Численное решение задачи

Методы и алгоритмы решения задач (I.1)-(I.5) в случае изотермической фильтрации рассмотрены в [1]. Трудности, возникающие при численном решении задач двухфазной изотермической фильтрации в рамках модели Рапопорта-Лиса, заключается в том, что, во-первых, нелинейные дифференциальные уравнения (I.1) описывают как конвективный, так и "диффузионный" (действие капиллярных сил) процессы, происходящие в пласте. Поэтому разностные аналоги дифференциальных уравнений должны хорошо учитывать оба процесса. Во-вторых, при численном моделировании процессов двухфазной фильтрации необходимо с высокой точностью аппроксимировать краевые условия, так как вблизи границ области фильтрации в течение всего процесса происходит резкое изменение фазовых давлений.

Разностно-итерационный метод в подвижных сетках, предложенный в работе [1], позволяет учитывать эти особенности. Идея метода заключается в том, что по пространственной переменной наряду с фиксированной эйлеровой сеткой вводится подвижная (псевдолагранжевая) сетка, которая движется вместе с "фронтом" вытеснения. Сгущение сетки происходит в окрестностях "фронта"

$\lambda = \epsilon^*(t)$, критерием выбора которой является максимальное значение градиента водонасыщенности по пространственной переменной

Ввиду того, что в задачах неизотермической фильтрации требуется также с высокой точностью определить еще температурное поле, то предлагается разностно-итерационный метод в подвижных сетках, являющийся обобщением указанного.

Вводится неравномерная подвижная пространственно-временная сетка

$$\hat{\Omega}_{h_i, \tau_n} = \left\{ (x_i, \tau_n, t_n) : x_{i,n} = x_{i,n-1} + h_i, i = 1, 2, \dots, M-1, \right. \\ \left. x_{0,n} = a, x_{M,n} = b; t_n = t_{n-1} + \tau_n, n = 1, 2, \dots, N-1, t_0 = 0, t_N = T \right\},$$

существует в окрестностях точек, где достигаются максимальные значения градиента водонасыщенности и температуры. Ввиду того, что принцип построения сетки $\hat{\Omega}_{h_i, \tau_n}$ такой же, как и в работе [1], то алгоритм нахождения узлов сетки не приводится.

Воспользовавшись для задачи массопереноса неявной консервативной схемой, а для задачи теплопереноса неявной монотонной схемой [5], и сохраняя для сеточных функций прежние обозначения, дифференциальные задачи (1)–(5) на сетке $\hat{\Omega}_{h_i, \tau_n}$ аппроксимируем следующими разностными

$$\Delta \hat{A}_z \nabla \hat{P}_\alpha - \sum_{\beta=1}^2 \hat{D}_{\alpha\beta} \hat{P}_\beta = - \sum_{\beta=1}^2 \hat{D}_{\alpha\beta} \hat{P}_\beta, \quad (2.1)$$

$$\Delta \hat{B} \nabla \hat{U} + E_1 \Delta \hat{U} + E_2 \nabla \hat{U} + (\hat{F}_1 - \hat{F}_2) \hat{U} = D_i, \quad (2.2) \\ 1 \leq i \leq M-1, \quad 1 < n \leq N,$$

$$\hat{P}_i(x_i, 0) = P_i^0(x_i), \quad U(x_i, 0) = U^0(x_i), \quad \alpha = 1, \quad 0 \leq i \leq M \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} \Delta \hat{P}_{2,i} - \Delta \hat{P}_{2,i} = 0, \\ x_1 \Delta \hat{P}_{2,i} - (1-x_1) \hat{P}_{2,i} = \psi_1^*, \quad i=0, \quad 0 < n \leq N, \\ \Delta U_i = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{cases} \nabla \hat{P}_{2,i} = 0, \\ x_2 \nabla \hat{P}_{2,i} + (1-x_2) \hat{P}_{2,i} = \psi_2^*, \quad i=M, \quad 0 < n \leq N, \\ \hat{U} = U^*, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $\Delta P_{\alpha,i} = P_{\alpha,i+1} - P_{\alpha,i}$, $\nabla P_{\alpha,i} = P_{\alpha,i} - P_{\alpha,i-1}$, $\hat{P}_{\alpha,i} = P_{\alpha,i}^{n+1}$, $P_{\alpha,i} = P_{\alpha,i}^n$,

$$\Delta \hat{A}_z \nabla \hat{P}_\alpha = A_{z,i+1/2} \Delta P_{\alpha,i} - A_{z,i} \nabla P_{\alpha,i}, \quad A_{z,i} = h_i^{-1} (2k_z)_{i-1/2}, \quad A_{z,i+1/2} = \\ = h_{i+1/2}^{-1} (2k_z)_{i+1/2}, \quad D_{11} = \gamma_1 (P_2' (1-S) - P_1 S')_i, \quad D_{21} = \gamma_1 (P_2 S')_i, \quad D_{22} = \gamma_2 (P_2 S' - P_1 S')_i,$$

$$\gamma_1 = m \tau_i h_i \tau_{n+1}, \quad \tau_{n+1} = \Delta t_n, \quad \tau_i = 0.5 (h_i + h_{i+1}),$$

$$S_i = \alpha_1 P_i + b_{\alpha 1}, \quad \alpha = 1, 2; \quad B_i = h_i^{-1} (a \lambda)_{i-1/2}, \quad B_{i+1} = h_{i+1}^{-1} (a \lambda)_{i+1/2};$$

$$E_1 = \delta_2^+ b_i^+ \lambda_{i+1} h_{i+1}^{-1}, \quad E_2 = \delta_2^- b_i^- \lambda_i h_i^{-1}, \quad b_i^\pm = v^\pm / \lambda, \quad \delta_2^\pm = z_i t_i / \bar{x}_i, \\ V^\pm = 0.5(v^\pm |v^\pm|) \geq 0, (< 0), \quad \bar{x} = (1+L)^{-1}, \quad L_i = \frac{1}{2\lambda_i}(h_{i+1} v_i^+ - h_i v_i^-)$$

$$F_1 = -\delta_2^+ \alpha_i^*, \quad F_2 = C \delta_2^+ \tau_{n+1}^{-1}, \quad D_1 = -\delta_2^+ (\alpha_i^* \bar{u} + \tau_{n+1}^{-1} C u).$$

$$\varphi_1^* = \begin{cases} \frac{h_1 q_1}{k_1 + k_2}, & \alpha_1 = 1, \\ \varphi_1, & \alpha_1 = 0, \end{cases} \quad \varphi_2^* = \begin{cases} \frac{h_1 q_2}{k_2}, & \alpha_2 = 1, \\ \varphi_2, & \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Для решения нелинейных систем алгебраических уравнений (2.1)-(2.5) используется следующий итерационный процесс.

По известным значениям $\hat{P}_{\alpha,i}^{(l)}$ и $\hat{u}_i^{(m)}$ (l, m - номера итераций по $\hat{P}_{\alpha,i}$ и \hat{u}_i , $i=1, 2, \dots, M$), с помощью метода матричной прогонки с использованием итерационной схемы Ньютона, определяем $\hat{P}_{\alpha,i}^{(l+1)}$ во всех узлах сетки $\Omega(h_i, \tau_{n+1})$. Для каждого фиксированного $\hat{u}_i^{(m \geq 0)}$ ($m \geq 0$) итерации по $\hat{P}_{\alpha,i}$ продолжаются до такого $l = l_m$, при котором

$$\max_i | \hat{P}_{\alpha,i}^{(l_m)} - \hat{P}_{\alpha,i}^{(l_m-1)} | \leq \epsilon_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

По найденным $\hat{P}_{\alpha,i}^{(l_m)}$ (для фиксированных $\hat{u}_i^{(m)}$, $m \geq 0$) из задачи теплопереноса методом обычной правой прогонки с использованием простой итерации определяем $\hat{u}_i^{(m+1)}$, для которого повторяем весь вычислительный процесс до тех пор, пока не выполнится условие практической сходимости.

$$\max_i | \hat{u}_i^{(m_0)} - \hat{u}_i^{(m_0-1)} | \leq \epsilon_3,$$

где $\epsilon_{\alpha} > 0$, ($\alpha = 1, 2, 3$) достаточно малые числа, а $\hat{P}_{\alpha,i}^{(l_{m_0})}$ и $\hat{u}_i^{(m_0)}$ принимаются за решение разностной задачи на $m+1$ -м временном слое.

3. Анализ полученных результатов

Для оценки влияния вязкости нефти на процесс вытеснения нефти горячей водой были проведены серии расчетов как для гидрофильного, так и для среднесмачиваемого пласта. В приводимых результатах использовались следующие данные: $m = 0.3$, $\mu = 0.5$ Дарси, $\mu_2 = 0.01$ пуаз, $r_c = 0.1$ м, $R = 100$ м, $C_1 = 2270$, $C_2 = 4187$, $C_3 = 837$ дж/кг.град., $\lambda_1 = 0.15$, $\lambda_2 = 0.6$, $\lambda_3 = 1.38$ Вт/м.град, $\alpha^* = 1.163$ Вт/м².град, $a_1 = 0.00853$, $b_1 = 0.82592$, $a_2 = 0.01033$, $b_2 = 0.99989$, $\rho_s = 2.6$ г/см³, $Q_1(z) = P_2^0(z) + P_K(S_*)$, $P_2^0(z) = 100$ ата, $u^0(r) = 40^\circ\text{C}$, $T_0 = 10^8$ сек, $K_0 = 1$ Дарси, $\mu_0 = 1$ пуаз, $R_0 = 100$ м, $\rho_0 = 1$ г/см³, $P_0 = 100$ ата, $\lambda_0 = 1$ Вт/м.град, $C_0 = 1$ дж/кг.град, $R_0, P_0, \mu_0, K_0, \rho_0, T_0, \lambda_0, C_0$ - характерные величины, используемые для приведения исходной математической постановки к безразмерному виду, S_* - насыщенность связанной воды. Относительные фазовые проницаемости и капиллярные силы для среднесмачиваемой и гидрофильной породы, а также зависимости $M_0(u)$ для высоковязкой и средневязкой нефти заимствованы из работ [2]-[4].

Результаты расчетов для случая $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, q_w(t) = 50$ м³/сут, представлены на рисунках 1, 2. На этих рисунках показано распре-

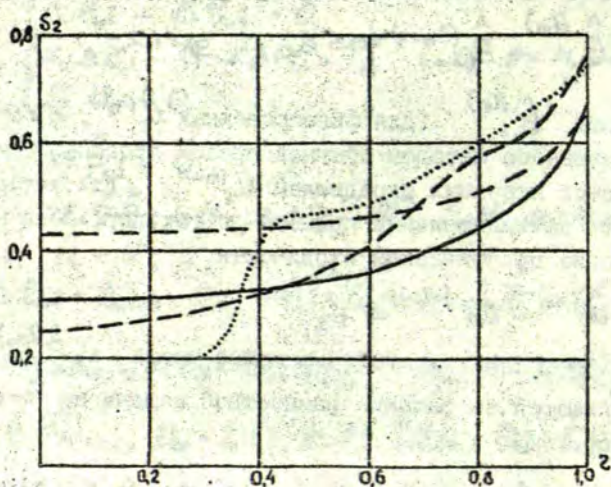


Рис. I

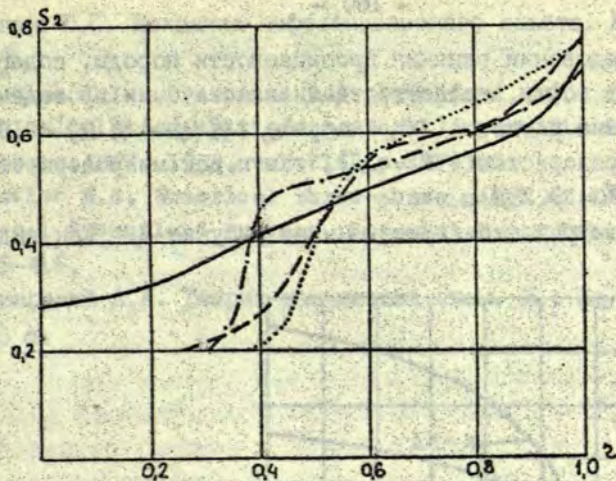


Рис. 2

деление водонасыщенности по пласту ($t = 1$ год) при закачке воды с различной температурой в гидрофильный и среднесмачиваемый пласты, содержащие высоковязкую (рис. 1) или средневязкую (рис. 2) нефть. Кривые, изображенные сплошной линией, соответствуют гидрофильному пласту, штрих-пунктирные — среднесмачиваемому пласту. Эти кривые относятся к случаю, когда в пласт закачивается вода с температурой, равной начальной пластовой температуре ($U^* = 40^\circ\text{C}$). Пунктирами и точками на рисунках представлены кривые, соответственно, для гидрофильного и среднесмачиваемого пластов. Температура закачиваемой воды для высоковязкой нефти бралась равной 150°C , а для средневязкой — 100°C .

Анализ приведенных результатов показывает, что, во-первых, эффект от закачки горячей воды для нефти средней вязкости независимо от смачиваемости пород незначителен, во-вторых, более полное вытеснение нефти происходит в пластах со средней смачиваемостью, в-третьих, наибольший эффект от термовоздействия достигается, если пласт гидрофильный и нефть высоковязкая (нефтеотдача увеличивается на 9,56% от начального запаса нефти, причем доля нефти в добываемой смеси составляет 86,95%).

Для исследования влияния проницаемости породы, содержащей высоковязкую нефть, на нефтеотдачи пласта были проведены гидродинамические расчеты ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\varphi_2(t) - \varphi_1(t) = 10$ ата), как для макропористых ($K = 3Д$), так и для микропористых коллекторов ($K = 0.25Д$).

Результаты расчетов приведены на рисунке 3. Как видно из

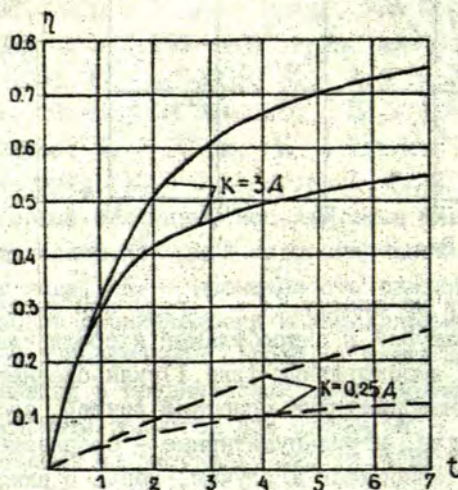


Рис.3

численных расчетов, при низкой проницаемости пласта для высоковязкой нефти [2] за 7 лет разработки залежей нефтеотдача составляет около 15%. При использовании же в качестве вытесняющего агента горячей воды с температурой 150°C нефтеотдача составляет 30%. Вместе с тем; из рис.3 видно, что нефтеотдача из высокопроницаемого макропористого коллектора достигает высоких значений: 55% и 75%, соответственно, при закачке холодной и горячей воды.

Список литературы

1. Пирмамедов В.Г. Об одном разностно-итерационном методе в подвижных сетках решения некоторых нелинейных задач теории фильтрации и теплопроводности. - ВНИИГИ, 1975, № 2027-75 ДСП.

2. Желтов Ю.П. Механика нефтегазоносного пласта. М.: Недра, 1975.
3. Douglas I.Ir., Peeseman D.W., Rachford H.H. A method for calculating multi-dimensional immiscible displacement. - Trans.AIME, 1959, vol.216. p.297-306.
4. Shutler N.D. Numerical three-phase model of the two-dimensional Steamflood Process. Soc.-Pet.Eng.I.Dec. 1970, p. 405-416.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. - 656 с.

ОДНОМЕРНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕФТИ РАСТВОРОМ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ

Таранчук В.Б. (БГУ им.В.И.Ленина, г.Минск)

В настоящей работе изучается модельная задача о вытеснении вязкопластической нефти раствором активной примеси; построено аналитическое решение, которое может использоваться для изучения структуры и характеристик фильтрационного течения, а также в качестве эталонного при оценке точности численных решений.

Рассмотрим процесс изотермической фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в недеформируемой пористой среде, когда вытесняемая жидкость является вязкопластической, а вытесняющая — ньютоновской жидкостью, причем содержит активную примесь, которая растворяется только в вытесняющей фазе; имеет место одномерное линейное течение в горизонтальном полубесконечном пласте; капиллярный скачок давления и диффузионный перенос примесей пренебрежимо малы; фильтрация вытесняющей жидкости описывается обобщенным законом Дарси, а движение вытесняемой жидкости описывается законом фильтрации с предельным градиентом. Из законов фильтрации, уравнений неразрывности фаз и закона сохранения массы примеси имеем (см., например, [1, 2])

$$u_1 = -\frac{k f_1}{\mu_1} \cdot \psi_1 \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad u_2 = -\frac{k f_2}{\mu_2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$m \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \quad m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m s c + a) + \frac{\partial}{\partial x} (c u_2) = 0, \quad (3)$$

где индексы $i = 1$ и 2 относятся к вытесняемой и вытесняющей фазам, u_i — скорость фильтрации i -й фазы, k и m — абсолютная проницаемость и пористость среды, μ_i и f_i — вязкость и относительная фазовая проницаемость i -й фазы; x и t — пространственная координата и время, $x \geq 0$; $t \geq 0$; $\psi_1 = 1 - G / |\partial p / \partial x|$, если $|\partial p / \partial x| > G$, $\psi_1 = 0$, если

$|\partial p / \partial x| \leq G$; G - предельный градиент давления; S - насыщенность пористой среды вытесняющей жидкостью, C - концентрация примеси в вытесняющей фазе, Q - количество примеси, сорбированное пористым скелетом.

Преобразуем систему уравнений (1)-(3). Складывая уравнения неразрывности (2), получаем, что суммарная скорость фильтрации $u = u_1 + u_2$, которая считается неотрицательной, не зависит от координаты x , а является функцией только времени t .

Из закона фильтрации вытесняемой фазы следует, что если модуль градиента давления меньше предельного, то нефть застывает и не движется. Условие застывания $|\partial p / \partial x| \leq G$ может быть преобразовано к виду

$$f_2 \geq x, \quad (4)$$

где $x^{-1} = \pi \mu$, $\pi = kG / (u \mu_1)$, $\mu = \mu_1 / \mu_2$.

Нетрудно показать, что из (1)-(3) с учетом (4) для определения насыщенности S и концентрации C , можно получить систему уравнений

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

$$m \frac{\partial}{\partial t} (sC + \frac{a}{m}) + u \frac{\partial}{\partial x} (\Phi C) = 0, \quad (6)$$

где $\Phi = 1$ при $f_2 \geq x$, $\Phi = F(1 + \pi f_1)$ при $f_2 < x$ и $F = \mu f_2 / (f_1 + \mu f_2)$.

Заметим, что при $G = 0$ система (5), (6) является частным случаем системы, исследованной в [2]. При условии отсутствия примесей уравнение (5) совпадает с аналогичным уравнением, рассмотренным в [1].

Методика решения задачи о вытеснении нефти раствором активной примеси, развитая в работах Ентова В.М. (см., например [2]), допускает обобщение и на рассматриваемый здесь случай, когда движение нефти описывается законом фильтрации с предельным градиентом. С целью сокращения изложения приведем решение задачи в относительно простом случае. Пусть в начальный момент в пласте имеются связанная

вода и нефть, вытесняемая водным раствором активной примеси, которая снижает остаточную нефтенасыщенность, адсорбируется скелетом пористой среды, причем $a = a(c)$, $a'' < 0$, $F_{,c} < 0$. Также считается, что на входе $x = 0$ скорость фильтрации нефти $u_1 = 0$, а скорость фильтрации водной фазы задана и постоянна $u = \text{const} > 0$.

При сделанных предположениях естественно искать автомодельное решение

$$S = S(\xi), \quad c = c(\xi), \quad \xi = m\alpha(ut)^{-1}. \quad (7)$$

Из (5), (6), переходя к переменной ξ , получаем

$$\xi \frac{ds}{d\xi} = \frac{d\Phi}{d\xi}, \quad (8)$$

$$\xi \frac{d(sc + a/m)}{d\xi} = \frac{d(\Phi c)}{d\xi}, \quad (9)$$

а сформулированные начальные и граничные условия приводят к соотношениям

$$S = S^*, \quad c = c^0, \quad \xi = 0, \quad (10)$$

$$S = S_*, \quad c = 0, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (11)$$

где S_* - насыщенность связанной воды, $1 - S^*$ - остаточная нефтенасыщенность, c^0 - концентрация примеси в закачиваемой вытесняющей жидкости.

Задача (8)-(11), как и исходная задача для системы уравнений в частных производных, не имеет непрерывных решений и следует строить разрывные решения. Соотношения на скачках после перехода к автомодельной переменной и некоторых преобразований могут быть записаны в виде [2]

$$\xi_c = \frac{\Phi^- - \Phi^+}{s^- - s^+}, \quad \xi_c = \frac{\Phi^\pm}{s^\pm + s_a}, \quad (12)$$

где индексы "+" и "-" обозначают функции перед и за скачком, соответственно, $s_a = (\alpha^- - \alpha^+)(c^- - c^+)^{-1} \cdot m^{-1}$.

Учитывая, что $a'' < 0$ нетрудно показать, что решение $c(\xi)$ является кусочно-постоянным

$$\begin{aligned} c(\xi) &= c^0, & 0 \leq \xi \leq \xi_c, \\ c(\xi) &= 0, & \xi > \xi_c, \end{aligned} \quad (13)$$

после чего построение решения не вызывает трудностей.

Пусть $\tilde{\Phi}$ - функция, которая при $f_2 < \mathcal{X}$ совпадает с Φ , а при $f_2 \geq \mathcal{X}$ $\tilde{\Phi} = F(1 + \tau f_1)$. Заметим, что функции f_i , а следовательно и $F, \Phi, \tilde{\Phi}$ зависят от s и c , μ_i - от c и, т.к. решение $c(\xi)$ - кусочно-постоянная функция необходимо знать константы $\mu(0)$, $\mu(c^0)$ и функции $f_i(s, 0)$, $f_i(s, c^0)$.

Опишем основные этапы построения решения:

А. Формально решается трансцендентное уравнение $f_2(s, c^0) = \mathcal{X}(c^0)$. Пусть $s = s_3^-$ - корень этого уравнения. Если $s_3^- < s^*(c^0)$, значение s_3^- называется насыщенностью застывания, а $1 - s_3^-$ является неуменьшаемой при данном режиме вытеснения величиной нефтенасыщенности. Если $s_3^- \geq s^*(c^0)$, застывания нефти не происходит, такой режим вытеснения по аналогии с [3] будем называть режимом вытеснения Баклея-Леверетта.

Б. Формально решается трансцендентное уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}(s, c^0)}{\partial s} = \frac{\tilde{\Phi}(s, c^0)}{s + s_a} \quad (14)$$

Учитывая характерный вид функции $\tilde{\Phi}(s, c^0)$ очевидно, что корень уравнения (14) $s = s_{c1}^- < s^*(c^0)$. В случае, если реализуется режим вытеснения Баклея-Леверетта, $s_a < s_{c1}^- < s^*(c^0)$. Когда $s_3^- < s^*(c^0)$, возможны два случая: $s_{c1}^- < s_3^-$ и $s_{c1}^- > s_3^-$. Если корень уравнения (14) $s_{c1}^- > s_3^-$, то принимается $s_{c1}^- = s_3^-$, а такой режим вытеснения по аналогии с [3] будем называть поршневым. При $s_{c1}^- < s_3^-$ корень уравнения (14) определяет насыщенность за первым скачком, такой режим будем называть режимом вытеснения с застыванием.

В. Решается трансцендентное уравнение

$$\xi_1 = \frac{\Phi(s_{c1}^-, c^0)}{s_{c1}^- + s_a} = \frac{\Phi(s_{c1}^-, c^0) - \Phi(s_{c1}^-, 0)}{s_{c1}^- - s_{c1}^0} \quad (15)$$

откуда определяется значение s_{c1}^+ . Вычисляется координата первого скачка ξ_1 .

Г. Определяется положение второго скачка

$$\xi_2 = \frac{\Phi(s_{c2}^-, 0) - \Phi(s_{c2}^+, 0)}{s_{c2}^- - s_{c2}^+}, \quad (16)$$

где $s_{c2}^- = s_{c1}^+$, $s_{c2}^+ = s_*$.

Д. После определения положения скачков и значений насыщенности на них определяется координата точки застывания ξ_3 , и, если реализуется режим вытеснения, отличный от поршневого, то находится решение для $s_{c1}^- < s < s_3^-$. Координата точки застывания в случае, если реализуется поршневой режим вытеснения, определяется из (15). Для режима вытеснения с застыванием имеем

$$\xi_3 = \frac{\partial \Phi(s, c^0)}{\partial s}, \quad s = s_3^-. \quad (17)$$

Для режима вытеснения Баклея-Левверетта застывания не происходит и условно можно принять $\xi_3 = 0$. Для $\xi_{c1} < \xi < \xi_3$ решение определяется из

$$\xi = \frac{\partial \Phi(s, c^0)}{\partial s}. \quad (18)$$

Таким образом, для трех выделенных случаев решение определяется следующим образом:

поршневой режим вытеснения

$$\begin{aligned} s(\xi) &= s_3^-, \quad c(\xi) = c^0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_3, \\ s(\xi) &= s_{c1}^+, \quad c(\xi) = 0, \quad \xi_3 < \xi \leq \xi_2, \\ s(\xi) &= s_*, \quad c(\xi) = 0, \quad \xi > \xi_2; \end{aligned} \quad (19)$$

режимы вытеснения с застыванием и Баклея-Левверетта

$$\begin{aligned} s(\xi) &= s_3^-, \quad c(\xi) = c^0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_3, \\ s &= s(\xi), \quad c(\xi) = c^0, \quad \xi_3 \leq \xi \leq \xi_1, \\ s(\xi) &= s_{c1}^+, \quad c(\xi) = 0, \quad \xi_1 < \xi \leq \xi_2, \\ s(\xi) &= s_*, \quad c(\xi) = 0, \quad \xi > \xi_2, \end{aligned} \quad (20)$$

где при $\xi_3 \leq \xi \leq \xi_1$ насыщенность $s(\xi)$ монотонно убывает от s_3^- до s_{c1}^+ и ее изменение описывается соотношением (18).

(Заметим, что в формулах (20) в случае режима вытеснения Баклея-Левверетта подразумевается, что $S_3 = S^*(C^0)$ и $\xi_3 = 0$).

Для иллюстрации описанного решения рассмотрим случай вытеснения вязкопластической нефти раствором поверхностно-активного вещества (ПАВ). Предположим, что адсорбция ПАВ описывается изотермой Ленгмюра, насыщенность связанной воды при добавлении примеси не меняется, вязкость вытесняемой нефти постоянна; относительные фазовые проницаемости, вязкость водной фазы и остаточная нефтенасыщенность определяются по аналогии с [4], причем принимается, что концентрация соли и вытесняемой и вытесняющей фазах постоянна и равна 1%.

Некоторые решения, построенные при различных значениях вязкости нефти μ_1 и предельного градиента давления G , когда $C^0 = 0,05\%$, $S_{cl} = 0,2$, определяются с помощью данных, приведенных в таблице. Для рассмотренных случаев при

Таблица

μ_1	I	$\alpha(C^0)$	S_3	ξ_3	S_{cl}	ξ_{cl}	S_{cl}^*	ξ_{cl}^*
20	5	0,04	0,5	1,4286	—	—	0,3880	9,5486
	0,5	0,4	0,9324	0,0052	0,6788	1,0481	0,4381	4,8410
	0,05	4	—	—	0,7040	1,0028	0,4483	4,3877
2	50	0,04	0,5	1,4286	—	—	0,3915	9,2276
	5	0,4	0,9324	0,0517	0,8398	0,9261	0,5098	3,1302
	0,5	4	—	—	0,9153	0,8669	0,5583	2,5445

$\mu_1 = 20$ и 2 , если $\alpha(C^0) = 4$ реализуется режим вытеснения Баклея-Левверетта, при $\alpha = 0,4$ - режим вытеснения с застыванием, при $\alpha = 0,04$ - поршневой режим вытеснения.

Список литературы

I. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория

- фильтрации аномальных жидкостей. М.:Наука,1975.199 с.
2. Ентов В.М. Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах (математические модели методов повышения нефтеотдачи пластов). -Препринт ИПМ АН СССР, №161, 1980. 64 с.
 3. Алишаев М.Г. Одномерное несмешивающееся вытеснение не-ньютоновской жидкости водой. -В кн.:Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости. Новоси-бирск, 1975, с.38-50.
 4. Таранчук В.Б. О постановке и методе расчета задачи ми-целлярно-полимерного заводнения. -ДАН БССР, 1981, т.25, № 3, с.232-235.

Содержание

Аболтиньш А.Я. Математическое описание процесса сорбции	3
Авдонин Н.А., Иванова Г.Ф. Определение формы фронта кристаллизации из одномерного приближения задачи при больших скоростях вытягивания слитка	13
Буйкис А.А., Земитис А.А., Мика С., Сobotка Л. Решение методами конечных элементов и конечных разностей задачи для уравнения Лапласа в треугольнике	23
Буйкис А.А., Шмите М.З. Разностные схемы для процессов переноса в многослойных пластах	53
Вахрамеев С.С., Освенский В.Б. Численное решение упруго-пластической задачи для кристаллов, выращиваемых из расплава	67
Вуцан Я.П., Райтум У.Е. К численному решению задач оптимального управления для линейных эллиптических уравнений	83
Егоров А.Г., Пудовкин М.А. Об эффективном коэффициенте теплопроводности трещиноватой среды при фильтрации в ней жидкости	98
Елкина Н.Г. Численное решение задачи Дирихле для квазилинейного уравнения эллиптического типа	108
Калис Х.Э. Специальные разностные схемы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка	115
Калис Х.Э., Пагодкина И.Э. Некоторые разностные схемы для решения задач конвекции вязкой несжимаемой жидкости	134
Луринс Г.Р. Численный расчет движения жидкости в модели электрошлакового переплава	142
Мусаев-Г.М., Пирмамедов В.Г. Численное решение задачи неизотермической двухфазной фильтрации	152
Таранчук В.Б. Одномерное вытеснение вязкопластической нефти раствором активной примеси	162

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Сборник научных трудов
(межведомственный)**

**Редакторы: А. Буйкис, Р. Довгополова
Технический редактор А. Лобанович
Корректор А. Лобанович**

Подписано к печати 11.05.1983. ЯТ 09084. Ф/б 60x84/16.
Бумага №1. П, 3 физ. печ. л. 10,5 усл. печ. л. 8,3 уч.-изд. л.
Тираж 290 экз. Зак. № 1030. Цена 1 р. 30 к.

Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 226098, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, Рига 226050, ул. Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им. П. Стучки

УДК 517.944/947:533.15

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА СОРЕЦЦИИ/Аболтиньш А.Я.,
- В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб.
научн.тр. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1983, с.3-12.

В работе анализируется классическая модель процесса диффузии с краевыми условиями 1-го рода и показывается, что обработка данных некоторых сорбционных экспериментов о диффузии паров низкомолекулярных веществ в гидрофобные полимеры приводит к необходимости применить математическую модель с краевыми условиями 3-го рода.

Табл.3, рис.1, библи.5.

УДК 536.421.4+536.421.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ИЗ ОДНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ ВЫТЯГИВАНИЯ СЛИТКА/Авдонин Н.А., Иванова Г.Ф. - В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб.научн.тр. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1983, с.13-22.

Предложен модельный пример задачи Стефана, когда задача решается аналитически.

Двумерная задача с определением формы фронта кристаллизации сводится к одномерной задаче в обобщенной постановке. Найдено аналитическое решение задачи, в том числе форма фронта кристаллизации. Предложенная модель может служить тестовой задачей при решении двумерных задач Стефана.

Рис.5, библи.2.

УДК 538.4

РЕШЕНИЕ МЕТОДАМИ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ/Буйкис А.А., Земитис А.А., Мика С., Соботка Л. - В кн.: Прикладные за-

дачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1983, с. 23-52.

Излагается метод конечных элементов для решения эллиптических уравнений. На примере задачи Дирихле в треугольнике рассматривается численная реализация метода, проводится сравнение метода конечных элементов с разностным методом.

Табл. 4, рис. 2, библиогр. 16.

УДК 532.546

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТАХ/Буйкис А.А., Шmite М.З. - В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1983, с. 53-66.

В статье даются постановки в рамках предположения о сосредоточенной емкости задач об определении температурных (концентрационных) полей в многослойной однородной или трещиноватой среде. Предлагаются классы условно устойчивых в равномерной метрике разностных схем и приводятся примеры расчетов.

Рис. 2, библиогр. 16.

УДК 539.3:551.243

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРИСТАЛЛОВ, ВЫРАЩИВАЕМЫХ ИЗ РАСПЛАВА/Вахрамеев С.С., Освенский В.Б. - В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1983, с. 67-82.

Рассматривается постановка упруго-пластической задачи для дислокационных кристаллов. Пластическая деформация определяется с учетом механизма движения дислокаций по системам скольжения. Численное решение нелинейной задачи, основано на методе последовательных упругих решений. Проведены расчеты напряжений и плотности дислокаций для кристалла арсенида галлия.

Рис. 4, библиогр. 10.

УДК 517.95

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ/Вуцан Я.П., Райтум У.Е. - В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1983, с.83-97.

Рассматривается метод приближенного решения задач оптимального управления для линейных эллиптических уравнений с коэрцитивным оператором и полиномиальным функционалом качества без фазовых ограничений. Метод основан на преобразовании исходной задачи и не требует численного решения уравнения состояния системы.

Табл.1, библиограф. 5.

УДК 532.546

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТРЕЩИНОВАТОЙ СРЕДЫ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕЙ ЖИДКОСТИ/Егоров А.Г., Пудовкин М.А. - В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1983, с.98-107.

В работе рассматривается математическое моделирование процесса теплообмена при течении жидкости в двумерной трещиноватой среде. Получено осредненное уравнение процесса теплообмена, изучаются его свойства.

Библиограф. 5.

УДК 518.5

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА/Елкина Н.Т. - В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1983, с.108-114.

В работе приводится численная реализация предложенного метода решения задачи Дирихле для квазилинейного уравнения и результаты расчетов для модельных примеров.

Табл.1, библиограф. 5.

УДК 538.4

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА/Калис Х.Э. – В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1983, с. 115–133.

Метод сеток построен на основе точных разностных схем относительно решения линеаризованных дифференциальных уравнений. Проводится оценка точности построенных разностных схем. Приведены расчеты конкретной краевой задачи.

Табл. I, библиогр. 10.

УДК 538.4

НЕКОТОРЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ/Калис Х.Э., Пагодкина И.Э. – В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1983, с. 134–141.

В работе найдены оценки устойчивости разностных схем в центральных разностях для решения задач конвекции в квадратичной области в зависимости от числа Грасгоффа и предложена консервативная векторно-разностная схема для решения совместных уравнений для функции вихря и температуры.

Библиогр. 4.

УДК 538.4

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОШЛАКОВОГО ПЕРЕПЛАВА/Луринос Г.П. – В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1983, с. 142–151.

Проведено численное исследование ламинарного движения жидкости в физикальной модели электрошлакового переплава без учета тепловых процессов. Получены численные

результаты для центральных электродов двух форм и для переменного и постоянного токов.

Рис.3, библ.3.

УДК 532.546

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ/Мусаев Г.М., Пирмамедов В.Г. - В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1983, с.152-161.

В работе разработан численный метод решения задач нестационарной двухфазной фильтрации. При помощи вычислительных экспериментов на ЭВМ исследовано влияние различных факторов на процесс вытеснения с целью определения рационального метода воздействия на продуктивный пласт.

Рис.3, библ.5.

УДК 532.546

ОДНОМЕРНОЕ ВЫТЕСНЕНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ НЕФТИ РАСТВОРОМ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ/Таранчук В.Б. - В кн.: Прикладные задачи математической физики. Сб. научн. тр. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1983, с.162-168.

Рассматривается модельная задача о вытеснении вязкопластической нефти раствором активной примеси. Построено аналитическое решение, анализ которого показывает, что возможны три режима вытеснения: Баклея-Левретта, с застыванием и поршневой. Решение иллюстрируется примерами.

Табл. I, библ.4.