



**ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И
МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД**

**ПРОМЫШЛЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ
И УСТРОЙСТВА**

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки

Кафедра электродинамики и механики сплошных сред

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

ПРОМЫШЛЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ И УСТРОЙСТВА

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(межвузовский)

Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 1983

158 59 50M

УДК 517,518,528,534,536,538,539,621

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
ПРОМЫШЛЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ И УСТРОЙСТВА

Электродинамика и механика сплошных сред. Промышленные процессы и устройства: Сборник научных трудов (межвузовский) / Под ред. Ю.Я.Микельсона. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1983. - 141 с.

Предлагаемый сборник содержит 10 научных статей, посвященных актуальным научно-техническим проблемам, связанным с исследованием промышленных процессов и устройств:

- индукционных тигельных печей;
- центробежных МГД-насосов;
- асинхронных электродвигателей;
- конструкций, состоящих из оболочек, при динамическом нагружении и др.

Сборник научных статей предназначен для специалистов, работающих в области электродинамики и механики сплошных сред, прикладной математики, а также для научно-технических работников, аспирантов и студентов, занимающихся вопросами исследования, проектирования и моделирования промышленных процессов и устройств.

Рис. 50, библиогр. 88 назв.

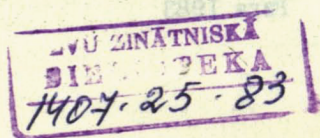
РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Ю.Я.Микельсон (отв. ред.),
Г.Я.Сермонс, А.Т.Якович,
С.И.Павлов, С.М.Рязанцева

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

Э 20305-098у 83.83.1703040000
М 812(II)-83

С Латвийский
государственный
университет
им.П.Стучки, 1983



УДК 518.12:538.4+621.365.5

С.И.Павлов

ЛГУ им. П.Стучки

О ВЫБОРЕ МЕТОДА ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ РАСПЛАВА В ИНДУКЦИОННОЙ ТИГЕЛЬНОЙ ПЕЧИ

I. Постановка задачи

Стационарное течение жидкого металла в осесимметричной модели индукционной тигельной печи (ИТП) [1,2], характеризующееся радиальной и аксиальной компонентами скорости $\vec{v} = (v_r(r,z), 0, v_z(r,z))$, описывается безразмерным уравнением Рейнольдса в приближении Буссинеска [3] с введением переменной по объему расплава эффективной вязкости $\nu_{эф} = \nu + \nu_t$ (ν, ν_t - коэффициенты кинематической молекулярной и турбулентной вязкости; о выборе последнего см. [3,4]):

$$[(\vec{v} - 2\text{grad}R)\text{grad}]\vec{v} = -\text{grad}p + R\Delta\vec{v} + \text{grad}R \times \text{rot}\vec{v} + \\ + Al\vec{f} - \vec{e}_z / Fr, \quad (1)$$

где $R = 1/Re_{эф}$, $Re_{эф} = v_0 r_0 / \nu_{эф}$ - эффективное число Рейнольдса, $Al = j_0^2 \mu_0 r_0^2 / g v_0^2$ - число Альфвена, $Fr = v_0^2 / g r_0$ - число Фруда, v_0, r_0 и j_0 - характерные скорость, радиус и плотность тока, g - ускорение свободного падения, g и p - плотность и давление жидкости, \vec{e}_z - единичный вектор в аксиальном направлении, $\vec{f} = (f_r(r,z), 0, f_z(r,z))$ - плотность электромагнитной (ЭМ) силы, усредненной по периоду переменного тока в индукторе (определяется по методике [2]).

Чтобы исключить из рассмотрения давление p , уравнение (I) можно записать в роторной форме относительно вихря скорости $\vec{\omega} = \text{rot}\vec{v}$ [3]:

$$\text{rot}[(\vec{v}-\text{grad}R)\times\vec{w}]=\text{rot}(R\text{rot}\vec{w})+ \\ +2\text{rot}[(\vec{v}\text{grad})\text{grad}R]-Ae\cdot\text{rot}\vec{f}. \quad (2)$$

Уравнение (2) решается совместно с уравнением для функции тока ψ (в ИТП у вихря, имеющего тороидальную форму, отлична от нуля азимутальная компонента $\vec{w}=(0, w(r, z), 0)$)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=rw \quad (3)$$

и связями (следующими из условия несжимаемости $\text{div}\vec{v}=0$)

$$v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad v_z=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (4)$$

Уравнения (1) или (2-4) дополняются граничными условиями: на свободной поверхности расплава (форма поверхности считается фиксированной; о методике ее определения в гидростатическом приближении см. [5-7]) задаются условия непротекания, свободного скольжения и постоянства давления; на оси $r=0$ - условия симметрии потока и давления; на поверхности тигля - условия непротекания и прилипания (см. раздел 3).

Для решения поставленной задачи используется конечно-разностный подход. Настоящая работа является продолжением и развитием исследований [8], связанных с разработкой численной методики расчета поля скоростей в ИТП.

2. Конечно-разностные схемы для расчета ротора скорости

При проведении расчетов область расплава покрывается неоднородной конечно-разностной сеткой (в отличие от [8], где сетка принята однородной) и рассматривается сеточная область Ω с координатами узловых точек (r_k, z_m) и шагами сетки в радиальном $h_k^r=r_{k+1}-r_k$ и аксиальном $h_m^z=z_{m+1}-z_m$ направлениях (значения шагов с полуцелыми индексами равны $h_{k-1/2}^r=\frac{1}{2}(h_{k-1}^r+h_k^r)$ и $h_{m-1/2}^z=\frac{1}{2}(h_{m-1}^z+h_m^z)$). Величины, входящие в уравнение (2), заданы в узловых точках сетки и нумеруются индексами (k, m) (значения

величин в промежуточных точках с полуцелыми индексами вычисляются по формулам вида $X_{k+1/2} = \frac{1}{2}(X_{k+1} + X_k)$.

Консервативные конечно-разностные схемы получаются методом баланса; интегрирование уравнения (2) по площади ячейки $S_{k,m}$ вспомогательной сетки, содержащей узловую точку с индексами (k,m) , редуцируется на интегрирование по замкнутому контуру $L_{k,m}$, ограничивающему ячейку $S_{k,m}$ [8]

$$\oint_{L_{k,m}} (\vec{v} - \text{grad}R) \times \vec{w} d\vec{e} = \oint_{L_{k,m}} \{ R \text{rot} \vec{w} + 2[(\vec{v} \text{grad}) \text{grad}R] - A \vec{f} \} d\vec{e}. \quad (5)$$

Аппроксимация правой части J соотношения (5) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} J = & \sum_{t=1}^4 \left\{ \frac{h_{m-1/2}^z}{h_{k+1/2}^r} R_{k+1/2,m} \left(r_{k+t} \omega_{k+t,m}^{(n+1/2-t/2)} - r_k \omega_{k,m}^{(n+1)} \right) + \right. \\ & + \frac{h_{k-1/2}^r}{h_{m-1/2+t/2}^z} \left(\omega_{k,m+t}^{(n+1/2-t/2)} - \omega_{k,m}^{(n+1)} \right) + \\ & + v_{k+t/2,m}^m \frac{R_{k+t,m+1} - R_{k+t,m-1} - R_{k,m+1} + R_{k,m-1}}{h_{k-1/2+t/2}^r} - \\ & - 2t v_{k,m+t/2}^m \left(\frac{R_{k,m+t/2} - R_{k,m-t/2}}{h_k} - \frac{R_{k,m+t/2} - R_{k-1,m+t/2}}{h_{k-1}^r} \right) - \\ & - v_{k,m+t/2}^z \frac{R_{k-1,m+t} - R_{k-1,m-t} - R_{k+1,m} + R_{k-1,m}}{h_{m-1/2+t/2}^z} + \\ & \left. + 2t v_{k+1/2,m}^z \left(\frac{R_{k+1/2,m+1} - R_{k+1/2,m}}{h_m^z} - \frac{R_{k+1/2,m} - R_{k+1/2,m-1}}{h_{m-1}^z} \right) \right\} + \\ & + A e \left[h_{k-1/2}^r (f_{k,m+1/2}^r - f_{k,m-1/2}^r) - h_{m-1/2}^z (f_{k+1/2,m}^z - f_{k-1/2,m}^z) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где верхние индексы в скобках (n) и $(n+1)$ означают номера итерационных слов, к которым относятся соответствующие значения ω (используются только для схемы 2).

Трудности при построении разностной схемы для вихря скорости связаны с аппроксимацией нелинейных конвективных членов (левая часть соотношения (5)). Для расчета течений расплава в ИТП опробованы следующие варианты.

1. Схема с центральными разностями. При простейшем способе аппроксимации конвективных членов J_u

$$J_u = h_{m-1/2}^z (A_{k+1/2,m}^r \tilde{w}_{k+1/2,m} - A_{k-1/2,m}^r \tilde{w}_{k-1/2,m}) + \\ + h_{k-1/2}^r (A_{k,m+1/2}^z \tilde{w}_{k,m+1/2} - A_{k,m-1/2}^z \tilde{w}_{k,m-1/2}), \quad (7)$$

где коэффициенты A_r и A_z определяются по формулам

$$A_{k+t/2,m}^r = v_{k+t/2,m}^r - t(R_{k+t,m} - R_{k,m})/h_{k-1/2+t/2}^r; \\ A_{k,m+t/2}^z = v_{k,m+t/2}^z - t(R_{k,m+t} - R_{k,m})/h_{m-1/2+t/2}^z; \quad t = \pm 1 \quad (8)$$

схема (7) счетно устойчива лишь в сравнительно узком интервале малых чисел Рейнольдса $Re_{exp} \lesssim 1 \div 50$ (установлено численным экспериментом на ЭВМ). Ширина интервала зависит от параметров задачи (формы области, распределений массовой ЭМ силы и узловых точек сетки, приближенных граничных условий для вихря на твердой стенке и других).

2. Схема с разделением итерационных слоев. Для расширения области устойчивости схемы с центральными разностями (7) применяется метод [9], обобщенный на случай переменного по объему числа Рейнольдса и неоднородной сетки в цилиндрической системе координат. Метод основан на разделении в схеме двух последовательных итерационных слоев (n) и ($n+1$) (см. соотношения (6) и (9)) и введении в коэффициенты при центральных членах на (n) и ($n+1$) слоях $w_{k,m}^{(n)}$ и $w_{k,m}^{(n+1)}$ дополнительных слабоопределенных слагаемых, обеспечивающих диагональное преобладание в матрице, обрабатываемой при численном решении задачи. Для названной схемы аппроксимация нелинейных членов J_T приобретает вид

$$J_T = \frac{1}{2} h_{m-1/2}^z \left\{ \left[|A_{k+1/2,m}^r - A_{k-1/2,m}^r| + |A_{k,m}^r| \right] \left[w_{k,m}^{(n+1)} - w_{k,m}^{(n)} \right] + \right. \\ \left. + A_{k+1/2,m}^r \left[w_{k+1,m}^{(n)} + w_{k,m}^{(n+1)} \right] - A_{k-1/2,m}^r \left[w_{k,m}^{(n+1)} + w_{k-1,m}^{(n)} \right] \right\} + \quad (9)$$

$$+ \frac{1}{2} h_{k-1/2}^r \left\{ \left[|A_{k,m+1/2}^z - A_{k,m-1/2}^z| + |A_{k,m}^z| \right] \left[\omega_{k,m}^{(n+1)} - \omega_{k,m}^{(n)} \right] + \right. \\ \left. + A_{k,m+1/2}^z \left[\omega_{k,m+1}^{(n)} + \omega_{k,m}^{(n+1)} \right] - A_{k,m-1/2}^z \left[\omega_{k,m}^{(n+1)} + \omega_{k,m-1}^{(n+1)} \right] \right\},$$

где аналог формул (8)

$$A_{k,m}^r = v_{k,m}^r - L_1^r(R_{k,m}; h_k^r); \quad A_{k,m}^z = v_{k,m}^z - L_1^z(R_{k,m}; h_m^z), \quad (10)$$

а L_1^r и L_1^z представляют собой центрально-разностные аппроксимации первых производных по r и z со вторым порядком точности на неоднородной сетке (при $t=1/2$ формулы (II) дают аппроксимацию производных на сетке с половинным шагом).

$$L_t^r(X_{i,j}; h_e^r) = \frac{1}{t(h_{e-1}^r + h_e^r)} \left[\frac{h_e^r}{h_e^r} (X_{i+t,j} - X_{i,j}) + \frac{h_e^r}{h_{e-1}^r} (X_{i,j} - X_{i-t,j}) \right]; \quad (11) \\ L_t^z(X_{i,j}; h_e^z) = \frac{1}{t(h_{e-1}^z + h_e^z)} \left[\frac{h_e^z}{h_e^z} (X_{i,j+t} - X_{i,j}) + \frac{h_e^z}{h_{e-1}^z} (X_{i,j} - X_{i,j-t}) \right].$$

Когда достигнута сходимость итерационного процесса, значения вихря $\omega^{(n)}$ и $\omega^{(n+1)}$ на двух последовательных итерационных слоях (n) и ($n+1$) отличаются в пределах заданной точности вычислений, и, таким образом, слагаемые, введенные в (9) для стабилизации схемы, компенсируются.

Как показали численные эксперименты, верхняя граница интервала устойчивости для схемы (9) по крайней мере на порядок выше по сравнению со схемой (7): $Re_{эф} \lesssim 10^4 - 500$.

3. Схема с направленными разностями. С целью обеспечения устойчивости схемы при аппроксимации конвективных членов J_H используется аналог разностей против потока: в зависимости от положительной или отрицательной знакоопределенности $A_{k\pm 1/2,m}^r$ или $A_{k,m\pm 1/2}^z$ значение вихря скорости берется в узловой точке в направлении, соответственно, против или по потоку жидкости:

$$J_H = \frac{1}{2} h_{m-1/2}^z \left\{ \left[A_r - |A_r| \right]_{k+1/2,m} \omega_{k+1,m} + \left[A_r + |A_r| \right]_{k+1/2,m} \omega_{k,m} - \right. \\ \left. - \left[A_r - |A_r| \right]_{k-1/2,m} \omega_{k,m} - \left[A_r + |A_r| \right]_{k-1/2,m} \omega_{k-1,m} \right\} + \quad (12)$$

$$+ \frac{1}{2} h_{k-1/2}^r \left\{ [A_z - |A_z|]_{k,m-1/2} \omega_{k,m+1} + [A_z + |A_z|]_{k,m+1/2} \omega_{k,m} - [A_z - |A_z|]_{k,m-1/2} \omega_{k,m} - [A_z + |A_z|]_{k,m+1/2} \omega_{k,m-1} \right\}.$$

Схема (12) устойчива при любых значениях числа Рейнольдса (на ЭМ проверено для $Re_{эф} \leq 10^6$), однако уже при $Re_{эф} \geq 50 \rightarrow 500$ (в зависимости от характера течения и распределения шагов сетки и других) результаты расчета, соответствующие двум различным $Re_{эф}$, практически совпадают. Причиной искажения результатов является аппроксимационная (схемная) вязкость $J_{об}^h$, которая получается вычитанием схемы с центральными разностями $J_{ц}$ (7) из схемы с направленными разностями J_H (12)

$$J_{об}^h = -\frac{1}{2} h_{m-1/2}^z \left\{ |A_{k+1/2,m}^r| (\omega_{k+1,m} - \omega_{k,m}) - |A_{k-1/2,m}^r| (\omega_{k,m} - \omega_{k-1,m}) \right\} - \frac{1}{2} h_{k-1/2}^r \left\{ |A_{k,m+1/2}^z| (\omega_{k,m+1} - \omega_{k,m}) - |A_{k,m-1/2}^z| (\omega_{k,m} - \omega_{k,m-1}) \right\}. \quad (13)$$

4. Схема с компенсацией схемной вязкости. Аппроксимационная вязкость $J_{об}^h$ (13) из схемы с направленными разностями $J_H = J_{ц} + J_{об}^h$ вычитается на сетке с удвоенным шагом (метод [10], обобщенный на случай течений с переменной вязкостью [8], применяется на неоднородной сетке):

$$J_{ц} + J_{об}^h = J + J_{об}^{2h}, \quad (14)$$

где схемная вязкость, вычисленная на сетке с удвоенным шагом,

$$J_{об}^{2h} = -\frac{1}{2} h_{m-1/2}^z \left\{ h_k^r |A_{k+1/2,m}^r| L_1(\omega_{k+1/2,m}) h_{k+1/2}^r - h_{k-1}^r |A_{k-1/2,m}^r| \times L_1(\omega_{k-1/2,m}) h_{k-1/2}^r \right\} - \frac{1}{2} h_{k-1/2}^r \left\{ h_m^z |A_{k,m+1/2}^z| L_1(\omega_{k,m+1/2}) h_{m+1/2}^z - h_{m-1}^z |A_{k,m-1/2}^z| L_1(\omega_{k,m-1/2}) h_{m-1/2}^z \right\}. \quad (15)$$

Разностная схема (14) в пределе на решении задачи оказывается свободной от схемной вязкости, сохраняя при этом устойчивость при любых значениях числа Рейнольдса (на ЭМ проверено для $Re_{эф} \leq 10^6$):

При расчетах значений вихря $\omega_{k,m}$ в приграничных узлах, ввиду применения девятиточечного шаблона типа "крест", требуется значение вихря $\omega_{k\pm 2,m}$ или $\omega_{k,m\pm 2}$ в точке, находящейся за границей области Ω . Например, для нахождения $\omega_{k+2,m}$ используются формулы экстраполяции вправо

$$\omega_{k+2,m} = (h_{k-1}^r + h_k^r + h_{k+1}^r) \left(\frac{h_{k+1/2}^r}{h_k^r h_{k-1/2}^r} \omega_{k+1,m} - \frac{h_{k+1}^r}{h_k^r h_{k-1}^r} \omega_{k,m} \right) + \frac{h_{k+1}^r h_{k+1/2}^r}{h_{k-1}^r h_{k-1/2}^r} \omega_{k-1,m}. \quad (16)$$

В заключении раздела отметим, что схемы типа (7), (9), (12) или (14) применяются также для расчетов распределений векторного магнитного потенциала в ИТП.

3. Вычисление вихря скорости на твердой стенке

Точность решения в переменных "ротор скорости" ω и "функция тока" ψ существенно зависит от выбора приближенного граничного условия для вихря на твердой стенке (отсутствующего в физической постановке задачи), на которой задаются условия непротекания и прилипания $v_r = v_z = 0$; в терминах функции тока эти условия записываются следующим образом (для определенности будем считать, что стенка перпендикулярна оси r и ограничивает область расплава справа):

$$\psi = \text{const}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0. \quad (17)$$

Опробованы следующие варианты расчета ω на твердой стенке (в формулах (18-22), (24) индекс "r" в обозначении шага сетки в радиальном направлении опущен).

I. Вычисление вихря, исходя из определения через производные от скорости $\omega = -\partial v_z / \partial r$ (учтено, что $\partial v_r / \partial z = 0$). Разностная аппроксимация условия имеет вид (узловая точка (k,m) лежит на границе)

$$\omega_{k,m} = \frac{2h_{k-3/2}}{h_{k-1}h_{k-2}} v_{k-1,m}^z - \frac{h_{k-1}}{2h_{k-3/2}h_{k-2}} v_{k-2,m}^z. \quad (18)$$

2. Нахождение ω из уравнения связи (3) (учтено, что $\partial^2\psi/\partial z^2=0$), разностная аппроксимация которого получается путем разложения функции тока в ряд Тейлора вблизи границы [II]. Применяются следующие формулы первого (19) и второго (20, 21) порядка: условие Тома

$$\omega_{k,m} = \frac{2(\psi_{k-1,m} - \psi_{k,m})}{r_k h_{k-1}^2} + \frac{2r_k - h_{k-1}}{r_k^2 h_{k-1}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)_{k,m}; \quad (19)$$

условие Будса

$$\begin{aligned} \omega_{k,m} = & \frac{3(\psi_{k-1,m} - \psi_{k,m})}{h_{k-1}^2 (r_k - h_{k-1})} - \frac{r_k \omega_{k-1,m}}{2(r_k - h_{k-1})} + \\ & + \frac{3(2r_k - h_{k-1})}{2r_k h_{k-1} (r_k - h_{k-1})} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)_{k,m}; \end{aligned} \quad (20)$$

условие Йенсена

$$\begin{aligned} \omega_{k,m} = & - \frac{6h_{k-1}h_{k-3/2} + h_{k-2}^2}{2r_k h_{k-1}^2 h_{k-3/2}^2} \psi_{k,m} + \frac{4h_{k-3/2}}{r_k h_{k-2} h_{k-1}^2} \psi_{k-1,m} - \\ & - \frac{h_{k-1}}{2r_k h_{k-2} h_{k-3/2}^2} \psi_{k-2,m} + \frac{2h_{k-3/2}(r_k - h_{k-3/2}) + r_k h_{k-1}}{2r_k^2 h_{k-1} h_{k-3/2}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)_{k,m} \end{aligned} \quad (21)$$

Недостатком расчетов по формулам (18), а также (19-21) с подстановкой в них условий (17), является косвенное выполнение $\partial\psi/\partial r=0$, в результате чего разностный аналог производной на сетке

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)_{k,m} = & \left(\frac{4h_{k-3/2}^2 - h_{k-1}^2}{2h_{k-1} h_{k-3/2}} \psi_{k,m} - \frac{2h_{k-3/2}}{h_{k-1}} \psi_{k-1,m} + \right. \\ & \left. + \frac{h_{k-1}}{2h_{k-3/2}^2} \psi_{k-2,m} \right) / (2h_{k-3/2} + h_{k-1}) \end{aligned} \quad (22)$$

оказывается отличным от нуля.

3. Итерационное определение вихря на твердой стенке из условия [I2, I3]

$$\omega_{k,m}^{(n+1)} = \omega_{k,m}^{(n)} + \mu \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{k,m}, \quad (23)$$

где μ - итерационный параметр - выбирается по результатам численного эксперимента.

4. Постановка граничного условия для вихря осуществляется не на твердой стенке $\omega_{k,m}$, а в приграничных узлах $(k-1, m)$ расчетной области [I4]. Поскольку значение функции тока на границе определено первым из условий (I7), второе из условий (I7) дает возможность, пользуясь его разностным аналогом (22), рассчитать значение $\psi_{k-1, m}$ в приграничных узлах.

$$\psi_{k-1, m} = \frac{h_{k-1}^2}{4h_{k-3/2}^2} (\psi_{k-2, m} - \psi_{k, m}) - \psi_{k, m}. \quad (24)$$

Таким образом, разностный аналог уравнения связи (3) необходимо решать во внутренних точках сеточной области Ω_1 , не содержащей граничных точек сеточной области Ω . Разностный аналог уравнения (2) для вихря при этом также решается внутри области Ω_1 ; на границе которой значение вихря $\omega_{k-1, m}$ рассчитывается, исходя из соотношения (3) в разностной форме. На границе сеточной области Ω (например, при использовании девятиточечного шаблона типа "крест") значение вихря $\omega_{k, m}$ можно найти, пользуясь экстраполяцией типа (I6) (вместо примененного в [8] одного из условий (I9-2I), приводящего к искажению результатов).

4. Методика расчета течения в естественных переменных

Для исследования движения расплава в ИТП с использованием переменных "скорость" и "давление" выбран метод SMAC [I5] (применения см., например, [I6, I7]). Метод основан на расщеплении уравнения (I) (с учетом временной производной) таким образом, что вычисление поля скорости \vec{v}^{n+1} на $n+1$ временном слое по известному полю скорости \vec{v}^n на n временном слое производится в два этапа (τ - шаг по времени)

$$\frac{\vec{v} - \vec{v}^n}{\tau} = -[(\vec{v}^n - 2\text{grad}R)\text{grad}]\vec{v}^n + R\Delta\vec{v}^n + \text{grad}R \times \text{rot}\vec{v}^n + A\vec{e}_z \vec{f}; \quad (25)$$

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}}{\tau} = -\text{grad}p - \frac{\vec{e}_z}{Fr}. \quad (26)$$

Уравнение для давления

$$\Delta p = \frac{1}{\tau} \text{div}\vec{v}, \quad (27)$$

полученное действием оператора дивергенции на соотношение (26) с одновременным требованием выполнения условия несжимаемости $\text{div}\vec{v}^{n+1} = 0$ на $n+1$ временном слое, решается после нахождения из (25) значений скорости \vec{v} на промежуточном слое расщепления.

Метод SMAC (записанный выше для случая движения расплава с переменной вязкостью под действием массовой ЭМ силы) имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами расчета течений в естественных переменных.

1) Использование характерной для MAC методов конечно-разностной сетки со смещенными друг относительно друга узловыми точками для неизвестных функций (рис. 1) позволяет повысить точность, с которой выполняется на сетке условие несжимаемости $\text{div}\vec{v} = 0$, поскольку разностный аналог дивергенции от скорости записывается в пределах одной ячейки сетки.

2) Требование выполнения уравнения несжимаемости $\text{div}\vec{v}^n = 0$ на каждом временном слое n по сравнению с известным методом введения псевдосжимаемости жидкости [18] сокращает время расчета стационарного течения методом установления особенно при больших числах Рейнольдса $Re_{эф} \geq 10^2$.

3) Метод расщепления (25-27) дает возможность существенно упростить источникный член в уравнении Пуассона для давления (27), куда входит только дивергенция от скорости \vec{v} на промежуточном слое расщепления. При этом в сравнении с традиционным уравнением для давления, которое получается действи-

ем оператора дивергенции на уравнение (I), значительно сокращается объем вычислений ввиду того, что отпадает необходимость расчета на каждом временном слое громоздкой правой части, содержащей сложную комбинацию производных от скорости, ЭМ силы и числа Рейнольдса.

4) Поскольку давление задано в центрах ячеек конечно-разностной сетки (рис. I), не требуется его вычисления на твердой стенке (граничные условия для давления на стенке также, как и условия для вихря, в физической постановке задачи отсутствуют). Давление в приграничных ячейках рассчитывается из уравнения (27) с учетом соотношения (26) и условий прилипания для скорости (см. [19]).

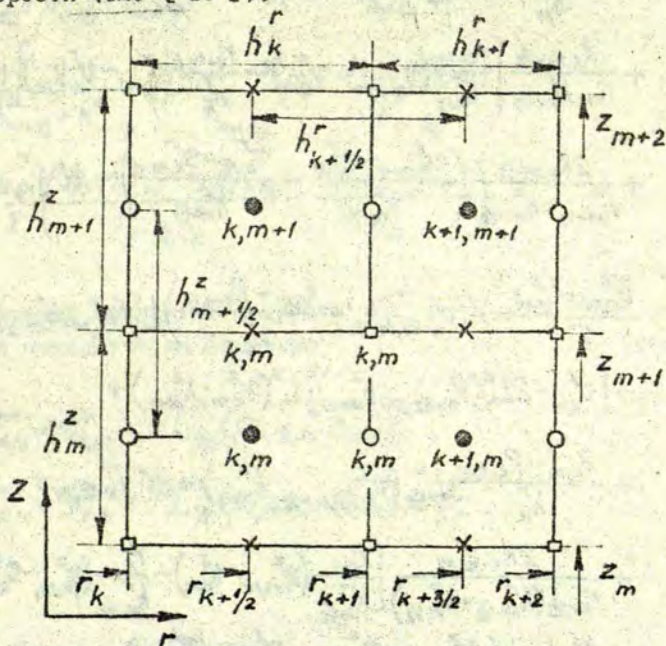


Рис. I. Конечно-разностная сетка для метода SMAC. Обозначения точек, в которых определяются следующие величины: ● - давление p ; ○ - радиальная v_r и x - аксиальная v_z составляющие скорости; □ - радиальная f_r и аксиальная f_z составляющие плотности ЭМ силы, а также эффективное число Рейнольдса.

Далее приводятся разностные аналоги уравнений (25-27) на неоднородной конечно-разностной сетке (рис. I).

Промежуточные значения \tilde{v}_r и \tilde{v}_z на слое расщепления рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}_{k,m}^r - v_{k,m}^r}{\sigma} = & - \left[v_{k,m}^r - 2L_1^r(R_{k,m-1/2}; h_{k+1}^r) \right] L_1^r(v_{k,m}^r; h_{k+1}^r) - \\ & - \left(v_{k+1/2,m-1/2}^z - \frac{R_{k,m} - R_{k,m-1}}{h_m^z} \right) L_1^z(v_{k,m}^z; h_{m+1/2}^z) + \\ & + \frac{R_{k,m} - R_{k,m-1}}{h_m^z} L_{1/2}^r(v_{k+1/2,m-1/2}^z; h_{k+1}^r) - \frac{R_{k,m-1/2}}{r_{k+1}^z} v_{k,m}^r + \\ & + \frac{R_{k,m-1/2}}{r_{k+1} h_{k+1/2}^z} \left[\frac{r_{k+3/2}}{h_{k+1}^r} (v_{k+1,m}^r - v_{k,m}^r) - \frac{r_{k+1/2}}{h_k^r} (v_{k,m}^r - v_{k-1,m}^r) \right] + \\ & + \frac{2R_{k,m-1/2}}{h_{m+1/2}^z + h_{m-1/2}^z} \left(\frac{v_{k,m+1}^r - v_{k,m}^r}{h_{m+1/2}^z} - \frac{v_{k,m}^r - v_{k,m-1}^r}{h_{m-1/2}^z} \right) + A\ell \cdot f_{k,m-1/2}^r \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{v}_{k,m}^z - v_{k,m}^z}{\sigma} = & - \left(v_{k-1/2,m+1/2}^r - \frac{R_{k,m} - R_{k-1,m}}{h_k^r} \right) L_1^r(v_{k,m}^z; h_{k+1/2}^r) - \\ & - \left[v_{k,m}^z - 2L_1^z(R_{k-1/2,m}; h_{m+1}^z) \right] L_1^z(v_{k,m}^z; h_{m+1}^z) + \\ & + \frac{R_{k,m} - R_{k-1,m}}{h_k^r} L_{1/2}^z(v_{k-1/2,m+1/2}^r; h_{m+1}^z) + A\ell \cdot f_{k-1/2,m}^z + \\ & + \frac{2R_{k-1/2,m}}{r_{k+1/2} (h_{k+1/2}^r + h_{k-1/2}^r)} \left[\frac{r_{k+1}^z}{h_{k+1/2}^r} (v_{k+1,m}^z - v_{k,m}^z) - \frac{r_k^z}{h_{k-1/2}^r} (v_{k,m}^z - v_{k-1,m}^z) \right] + \\ & + \frac{R_{k-1/2,m}}{h_{m+1/2}^z} \left(\frac{v_{k,m+1}^z - v_{k,m}^z}{h_{m+1}^z} - \frac{v_{k,m}^z - v_{k,m-1}^z}{h_m^z} \right), \end{aligned} \quad (29)$$

где введены следующие обозначения

$$v_{k+1/2, m-1/2}^z = \frac{v_{k+1, m-1/2}^z h_k^r + v_{k, m-1/2}^z h_{k-1}^r}{2h_{k+1/2}^r};$$

$$v_{k-1/2, m+1/2}^r = \frac{v_{k-1/2, m+1}^r h_m^z + v_{k-1/2, m}^r h_{m+1}^z}{2h_{m+1/2}^z}.$$
(30)

Разностный аналог уравнения (27) для давления имеет вид

$$\frac{2/r_{k+1/2}}{h_{k+1/2}^r + h_{k-1/2}^r} \left[\frac{r_{k+1}}{h_{k+1/2}^r} (p_{k+1, m} - p_{k, m}) - \frac{r_k}{h_{k-1/2}^r} (p_{k, m} - p_{k-1, m}) \right] +$$

$$+ \frac{2}{h_{m+1/2}^z + h_{m-1/2}^z} \left(\frac{p_{k, m+1} - p_{k, m}}{h_{m+1/2}^z} - \frac{p_{k, m} - p_{k, m-1}}{h_{m-1/2}^z} \right) =$$

$$= \frac{1}{\tau} \left(\frac{r_{k+1} \tilde{v}_{k, m}^r - r_k \tilde{v}_{k-1, m}^r}{r_{k+1/2} h_k^r} + \frac{\tilde{v}_{k, m}^z - \tilde{v}_{k, m-1}^z}{h_m^z} \right).$$
(31)

Значения компонент скорости v_r^{n+1} и v_z^{n+1} на $n+1$ временном слое находятся по формулам

$$v_{r, k, m}^{n+1} = \tilde{v}_{k, m}^r - \tau L_{1/2}^r (p_{k+1/2, m}; h_{k+1}^r);$$

$$v_{z, k, m}^{n+1} = \tilde{v}_{k, m}^z - \tau L_{1/2}^z (p_{k, m+1/2}; h_{m+1}^z) - \frac{\tau}{Fr}.$$
(32)

5. Результаты расчетов

Методики расчета движения металла, изложенные в пунктах 2-4, реализованы на ЭВМ ЕС-1033. Программы написаны на языке ФОРТРАН и совместно с программами расчетов ЭМ и теплового поля применяются для численного исследования ИТП (информация

в комплексе программ приведена в [20]).

Для численных экспериментов выбрана цилиндрическая модель [21], на которой осуществлены подробные измерения поля скорости, возникающего в ртути (плотность ρ и электропроводность σ - $\rho = 1,36 \cdot 10^4$ кг/м³; $\sigma = 1,13$ МСм/м) под действием ЭМ сил, созданных индуктором, расположенным симметрично относительно средней плоскости металла. Параметры модели следующие: радиус r_0 и высота h_p металла - $r_0 = 0,15$ м; $h_p = 2r_0$; радиус r_u и высота h_u индуктора - $r_u = 1,1r_0$; $h_u = 0,8h_p$; линейная плотность тока в индукторе $I = 130$ кА/м (плотность тока $j_0 = 8,7$ МА/м²).

Расчеты проводились при постоянной эффективной вязкости, а также с заданием экспоненциального распределения эффективной вязкости по радиусу [3, формула (146)]. В центральной части модели значения числа Рейнольдса выбирались равными $Re_{эф} = 1; 10; 50; 100; 500; 1000$ (отдельные проверочные расчеты делались при промежуточных значениях $Re_{эф}$, а также при $Re_{эф} = 10^4; 10^5; 10^6$). На рис. 2, где представлены безразмерные распределения составляющей скорости v_z по радиусу r и скорости движения металла v_n на свободной поверхности, результаты расчета (кривые 1) соответствуют $Re_{эф} = 100$, для которого наблюдается лучшее согласование с экспериментом [21].

Численными экспериментами установлено:

1) Расчеты по различным схемам для ротора скорости в пределах значений числа Рейнольдса, указанных в разделе 2, дают совпадающие с точностью 0,5-1 % результаты (кривые на графике сливаются).

2) При изменении формул аппроксимации вихря на твердой стенке результаты для поля скорости в объеме металла согласуются с точностью 1-2 %. В приграничных узловых точках различие составляет 3-5 %, причем расчеты по формулам (23, 24), обеспечивающими выполнение обоих условий (17), совпадают с точностью 1-2 %.

3) Результаты расчетов в переменных "ротор скорости" и "функция тока" по схеме (14) с компенсацией схемной вязкости и условиями (23, 24) для вихря на стенке согласуются с точ-

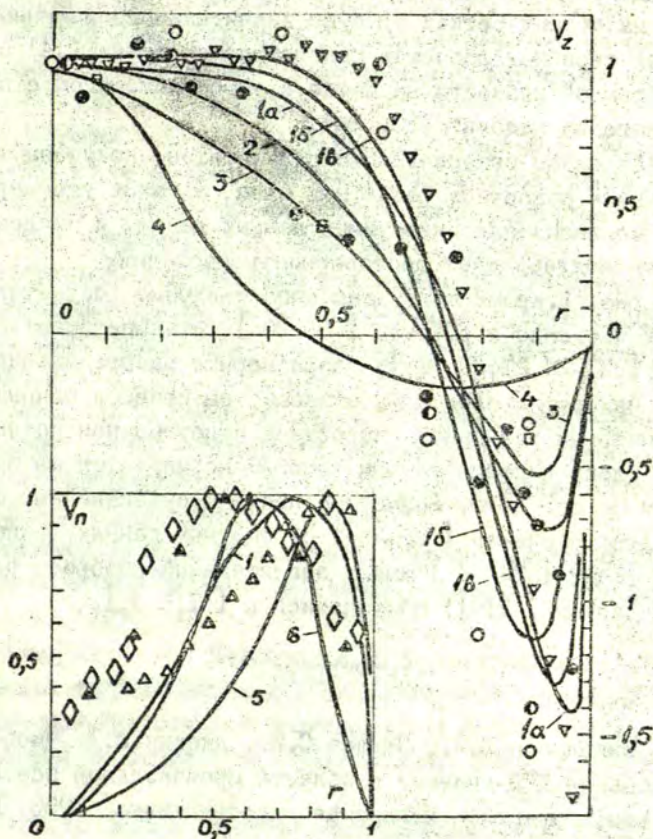


Рис. 2. Распределение аксиальной составляющей безразмерной скорости V_z по радиусу r , а также безразмерной скорости движения расплава на свободной поверхности V_n .

Эксперимент: ∇ - [21]; \circ - [22]; \square - [23]; \diamond - [24]; \square - [29]; \diamond - [27]; \triangle - [30].
 Расчет: 1 - автор (постоянная (Iб, Iв) и переменная (Iа) вязкость, заданная формулой [3]; условия скольжения без трения (Iа, Iб) и прилипания (Iв) на поверхности зеркала расплава); 2 - [26]; 3 - [28]; 4 - [25]; 5 - [27]; 6 - [28].

ностью 3-5 % с результатами расчетов в переменных "скорость" и "давление" по методике (28-32) для значений числа Рейнольдса в пределах: $0 \leq Re_{эф} \leq 10^4$. Поскольку расчеты по явной схеме (25-27) на мелких сетках требуют значительного машинного времени, для серийных расчетов рекомендуется схема (14) с компенсацией схемной вязкости на сетке с удвоенным шагом с применением одного из условий (23, 24).

Проведенное сопоставление результатов, полученных с использованием различных расчетных схем, а также удовлетворительное согласование экспериментальных данных и численных результатов подтверждает достоверность последних.

На рис. 2, кроме того, дано сопоставление результатов, полученных численно в работах [25-28], с экспериментальными данными [21-24, 27, 29, 30]; безразмерные распределения $v_z = v_z(r)$ находятся следующим образом: выбирается сечение $Z=Z_N$ с максимальным значением скорости в пристеночном потоке, названное распределение в этом сечении нормируется на значение скорости на оси $r=0$. Возможные причины существенных отличий результатов расчетов [25-28] от опытных данных (экспериментальные точки [22-24] имеют значительный разброс, однако следуют данным [21]) обсуждались в [1, 2, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Микельсон Ю.Я., Павлов С.И., Якович А.Т. Численное моделирование МГД-течения в области произвольной осесимметричной конфигурации. - Магнитная гидродинамика, 1980, № 3, с. 73-80.

2. Микельсон Ю.Я., Павлов С.И., Якович А.Т. Методика численного расчета осесимметричного МГД-течения в произвольной области. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1980, с. 3-19.

3. Микельсон Ю.Я., Якович А.Т., Павлов С.И. Численное моделирование осредненного МГД-течения в цилиндрической области с использованием рабочих гипотез для турбулентных напряжений. - Магнитная гидродинамика, 1978, № 1, с. 51-58.

4. Szekely J., Asai S. The general mathematical statements of turbulent recirculatory flows.- Transactions of Iron and Steel Institut of Japan, 1975, vol. 15, No 5, p. 270-275.

5. Павлов С.И., Якович А.Т. Влияние мениска на циркуляцию расплава в индукционной электропечи.- Магнитная гидродинамика, 1981, № 3, с. 104-109.

6. Губченко А.П., Свидо А.В., Простяков А.А. Высота и форма мениска при плавке металла в индукционных печах.- В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева: Труды ВНИИЭТО. М.: Энергия, 1979, вып. 10, с. 25-30.

7. Nissen P. Ein Beitrag zur numerischen Bestimmung der freien Oberflächenform von rotationssymmetrischen induktiv erwärmten Metallschmelzen.- Hannover: Technische Universität, 1976.- 113 S.

8. Якович А.Т., Павлов С.И. Некоторые конечно-разностные методы расчета осесимметричного стационарного течения.- В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1978, вып. 4, с. 44-62.

9. Takemitsu H. On a finite-difference approximation for steady-state Navier-Stokes equations.- Journal of Computational Physics, 1980, vol. 36, p. 236-248.

10. Кочергин В.П., Щербаков А.В. О разностных схемах второго порядка аппроксимации для эллиптических уравнений с малым параметром при старшей производной.- В кн.: Численные методы механики сплошных сред. Новосибирск, 1974, т. 5, № 1, с. 88-97.

11. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.- М.: Мир, 1980.- 616 с.

12. Дородницын А.А., Меллер Н.А. О некоторых подходах к решению стационарных уравнений Навье-Стокса.- Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968, т. 8, № 2, с. 393-402.

13. Israely M.A. A fast implicit numerical methods for time-dependent viscous flows.- Studies in Applied Mathematics, 1970, vol. 39, No 4, p. 327-349.

14. Полежаев В.И., Грязнов В.Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье-Стокса в переменных "вихрь, функция тока".- ДАН СССР, 1974, т. 219, № 2, с. 301-304.

15. Amsden A.A., Harlow F.H. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculation.- Journal of Computational Physics, 1970, vol. 6, p. 322-325.

16. Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики жидкости.- Журнал вычислительной математики и математической физики, 1975, т. 15, № 1, с. 197-207.

17. Орлов Л.П., Голованов А.Л. Метод расщепления в применении к численному решению задач МГД-вращения электропроводной жидкости в цилиндрическом сосуде.- Магнитная гидродинамика, 1979, № 4, с. 35-38.

18. Владимирова Н.Н., Кузнецов Б.Г., Яненко Н.Н. Численный расчет осесимметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости.- В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. Новосибирск, 1966, с. 186-192.

19. Easton C.R. Homogeneous boundary conditions for pressure in MAC method.- Journal of Computational Physics, 1972, vol. 9, p. 375-379.

20. Якович А.Т., Павлов С.И. Комплекс программ для численного моделирования электромагнитных, гидродинамических и тепловых полей в аксиально-симметричных металлургических установках с замкнутым течением жидкого металла.- Рига, 1983.- 3 с. (Информационный листок о научно-техническом достижении / ЛатНИИ НТИ: № 83-II, серия 50.4I)

21. Moore D.J., Hunt J.C.R. Electromagnetic stirring in the coreless induction furnace.- In: Proceedings of the 3rd Beer-Sheva Symposium on MHD Flows and Turbulence (to be published).

22. Тир Л.Л. Методы расчета движения расплава в индукционных тигельных печах.- В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева: Труды ВНИИЭТО. М.: Энергия, 1979, вып. 9, с. 83-90.

23. Макарс Я.П., Павлов С.И., Якович А.Т. Численное и экспериментальное исследование динамики расплава для некоторого класса индукционных МГД-устройств.- В кн.: Десятое рижское собрание по магнитной гидродинамике. Саласпилс, 1981, т. 3, с. 19-20.

24. Микельсон А.Э., Панасюк Л.С., Слюсарев И.М., Явич В.Е. Исследование перемешивания в модели горнищажного тигля в переменном магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1973, № 3, с. 71-75.

25. Reichert K. Die numerische Berechnung der elektromagnetisch Verursachten Strömung in Induktionstiegelöfen.- Scientia Electrica, 1970, vol. XXI, Fasc. 4, S. 126-146.

26. Khaletzky D. Etude theorique du brassage electromagnetique dans les fours a induction. Application a l'analyse d'un procede de separation d'inclusions.- Grenoble: L'institut National Polytechnique, 1976,- 102 p.

27. Tarapore E.D., Evans J.W. Fluid velocities in induction melting furnace: Part 1. Theory and laboratory experiments.- Metallurgical Transactions, 1976, vol. 7B, September, p. 343-351; (&Langfeldt J.) Part 2. Large scale measurements and predictions.- Metallurgical Transactions, 1977, vol. 8B, March, p. 179-184.

28. Szekely J., Chang C.W., Johnson W.E. Experimental measurement and prediction of melt surface velocities in a 30.000 lb inductively stirred melt.- Metallurgical Transactions, 1977, vol. 8B, September, p. 514-517.

29. Szekely J., Chang C.W., Ryan R.E. The measurement and prediction of melt velocities in turbulent, electromagnetically driven recirculating low melting system.- Metallurgical Transactions, 1977, vol. 8B, June, p. 333-338.

30. Тир Л.Л., Простяков А.А., Свидо А.В. Регулирование движения металла у поверхности ванны в индукционных тигельных печах.- В кн.: Исследования в области промышленного электромагнетизма: Труды ВНИИЭТО. М.: Энергия, 1976, вып. 8, с. 72-76.

Статья поступила 22 февраля 1983 г.

УДК 621.365.52:538.4

А. П. Губченко

ВНИИ электротермического оборудования, Москва

ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМЫ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Введение. Плавка металлов в индукционной тигельной печи (ИТП) осуществляется в осесимметричном электромагнитном поле (ЭМ) цилиндрического индуктора и сопровождается рядом МГД-эффектов. Наиболее существенные из них следующие: деформация свободной поверхности жидкого металла в виде выпуклого мениска, ЭМ циркуляция и турбулентные пульсации расплава, проявление МГД-неустойчивости в виде вертикальных "рифов" на поверхности мениска и выбросов расплава из тигля (или наплесков на стенку), явления кавитации и МГД-сепарации неметаллических и газовых включений.

Деформация свободной поверхности расплава в ИТП играет важную роль при выплавке сложнoleгированных сплавов из компонентов, сильно отличающихся по температуре плавления, плотности и упругости паров, при шлаковой обработке расплава и плавке стружки, при рафинировке и дистилляционной обработке расплава и т.д.

В работах по определению формы мениска в ИТП авторы ограничиваются рассмотрением либо только теоретических вопросов [1], либо довели задачу до численного решения, приняв ряд допущений [2,3], и полностью отсутствуют экспериментальные исследования, что затрудняет суждение о применимости и точности расчётных методов.

I. Методика экспериментального определения геометрии мениска. Измерение высоты и формы мениска производилось двумя способами:

- 1) погружными измерительными стержнями из тугоплавких металлов (вольфрама, молибдена);
- 2) замораживанием мениска.

Измерительные стержни закреплялись на горизонтальной планке таким образом, что один из крайних стержней фиксирует нижнюю точку мениска, а другой - верхнюю точку. Остальные стержни измеряют промежуточные положения. Перед измерением нижние концы стержней устанавливаются на одном уровне. При перемещении планки вниз происходит поочередное погружение стержней в расплав. Момент касания расплава каждым стержнем фиксируется по замыканию электрической цепи через стержень и расплав.

Другой способ замеров заключался в том, что мениск расплава тугоплавкого металла (хрома, ниобия) при определённых условиях замораживался, слиток вынимался из тигля и путём непосредственного обмера геометрии мениска определялась его высота и форма.

2. Результаты измерений геометрии мениска. На высоту и форму мениска, при прочих равных условиях, существенное влияние оказывает заполнение тигля расплавом. Заполнение характеризуется величиной свеса, т.е. l - расстоянием от верхнего края индуктора до зеркала невозмущённого расплава при отключенном индукторе. За критерий, характеризующий заполнение тигля, принимают величину относительного свеса, т.е. $\bar{l} = l/2h$. Где $2h$ - высота индуктора. На рис. I представлены графики зависимости высоты мениска от линейной плотности тока в индукторе при различном заполнении тигля расплавом алюминия. Эксперименты выполнены на серийной электропечи ИАТ-0,4 при частотах тока в индукторе 50, 200, 300, 400, 500 Гц, что соответствует значениям относительного радиуса $\bar{R} = 8, 25, 31, 36, 40$, где $\bar{R} = R/\Delta$, R - радиус тигля, Δ - глубина проникновения тока в расплав. Как видно из графиков, при $\bar{R} > 10$ высота мениска h_m практически не зависит от частоты, а определяется только линейной плотностью

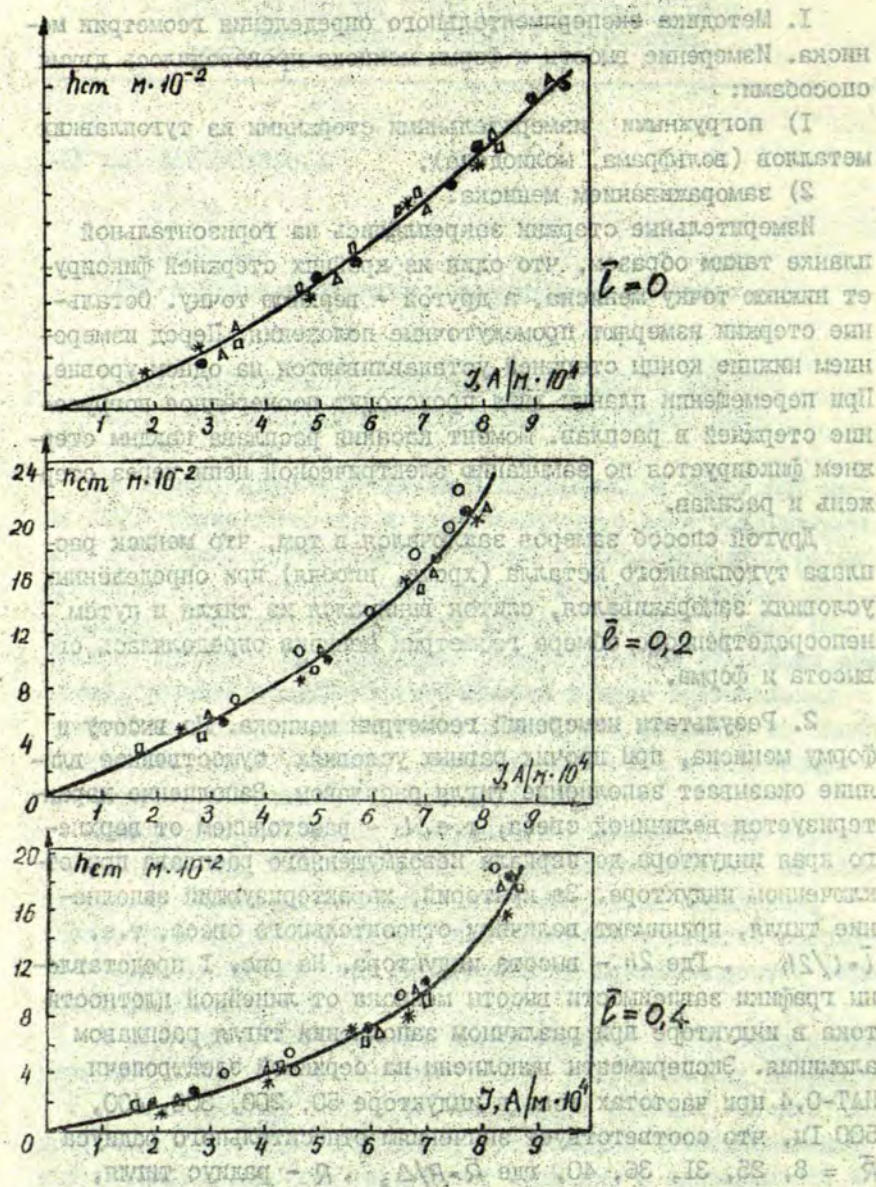


Рис. 1. Графики зависимости высоты мениска от линейной плотности тока в индукторе в электронечи ИАТ-0,4:
 ○ - 50 Гц; ● - 200 Гц; △ - 300 Гц; □ - 400 Гц;
 * - 500 Гц.

тока в индукторе и величиной свеса. На рис. 2 представлен график зависимости относительной высоты мениска \bar{h} от величины свеса. Где \bar{h} - высота мениска по отношению к h_0 при $\bar{l} = 0$. Максимального значения высота мениска достигает при $\bar{l} \approx 0,2$ (при прочих равных условиях). Это объясняется тем, что при $\bar{l} \approx 0,2$ точка отрыва мениска от стенки тигля находится в области наиболее сильного ЭМ поля - в центре индуктора. На рис. 3 представлена форма мениска расплава алюминия в печи ИАТ-0,4.

3. Исследование влияния движения расплава на геометрию мениска. Влияние интенсивности движения жидкого металла на высоту и форму мениска может проявляться через изменение величины сил в расплаве, зависящих от скорости - силы инерции и силы трения. Кроме того, в общем случае, движение расплава оказывает влияние на величину ЭМ силы посредством воздействия движущегося металла на магнитное поле индуктора. Следует отметить, что при плавке металлов в ИТП влияние движения на магнитное поле не существенно и им можно пренебречь [5].

Исследование влияния движения расплава на геометрию мениска производилось двумя методами:

1) при фиксированных параметрах системы изменялась только скорость движения расплава и для каждой величины скорости измерялась геометрия мениска;

2) при фиксированных параметрах системы измерялась геометрия мениска, затем путём внесения в расплав перегородок исключилось движение металла, и вторично при этих же параметрах измерялась высота и форма мениска.

Эксперименты с изменением скорости движения расплава выполнялись на расплаве алюминия в электропечи ИАТ-0,4. Изменение скорости движения расплава производилось путём изменения частоты тока в индукторе (при постоянной линейной плотности тока). Частота изменялась от 50 до 500 Гц, что позволяло изменять скорость движения расплава более чем в три раза.

Анализ результатов измерений, выполненных при линейной плотности тока в индукторе $A = 5 \cdot 10^3$ А/м при различном заполнении тигля расплавом ($\bar{l} = 0; 0,2; 0,4$) показал, что

расхождение между величинами составляет менее 5% и лежит в пределах точности эксперимента.

Эксперименты с введением перегородок в жидкий металл производились на расплаве олова в кварцевом тигле диаметром 100 мм на частоте 2,4 кГц. Первая серия замеров выполнялась при наличии движения расплава, а вторая - при тех же параметрах, но при внесении в расплав горизонтальных перегородок. Перегородки в форме цилиндрических дисков толщиной 1 мм, изготовленные из немагнитной стали, устанавливались по всей высоте тигля с интервалом 15 мм, причём верхние диски повторяли форму мениска. Третья серия замеров выполнялась при введении в расплав вертикальных перегородок в виде коаксиальных цилиндров радиусами 10, 20, 30, 40 мм. Измерения показали, что форма и высота мениска остаются практически неизменными при внесении перегородок и без них.

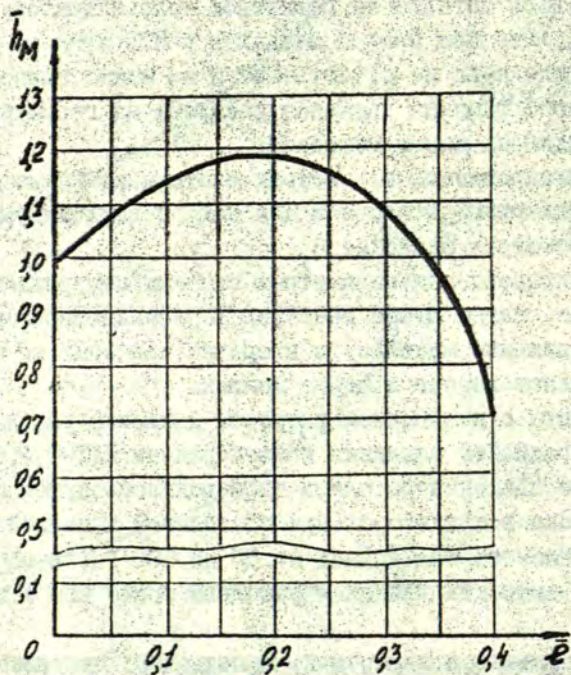


Рис. 2. Зависимость относительной высоты мениска от высоты свеса.

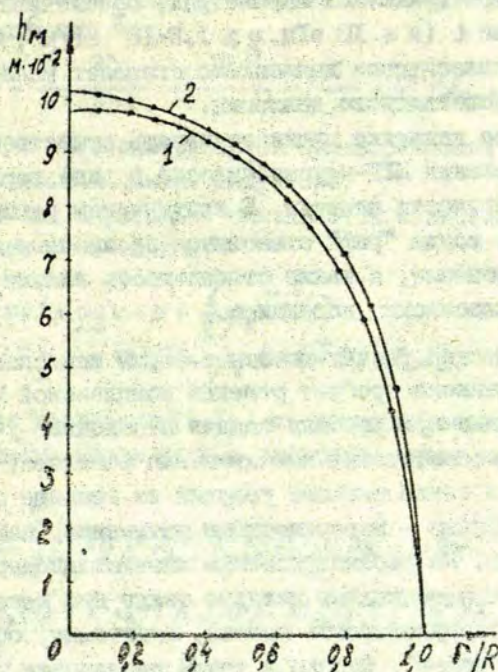


Рис. 3. Форма свободной поверхности расплава алюминия в печи ИАТ-0,4 при $f = 500$ Гц(1), $\bar{l} = 0,2$
 $f = 50$ Гц(2), $\bar{l} = 0,2$

Таким образом, при скоростях движения расплава в ИТП движение металла не оказывает практического влияния на геометрию мениска и при расчёте деформации свободной поверхности расплава им можно пренебречь. С другой стороны, высота мениска не может служить критерием оценки интенсивности движения расплава в ИТП.

4. Силы поверхностного натяжения при плавке металлов в ИТП. Пренебрежение силами поверхностного натяжения при определении высоты и формы мениска исключает из рассмотрения лапласовское давление. Оценим величину лапласовского давления $L = \sigma/R$ относительно электромагнитного давления P_e , которое можно принять равным $P_e = \rho g h_m$, где ρ - плотность рас-

плава, ε - коэффициент поверхностного натяжения. Расчёты показывают, что при граничных параметрах, обеспечивающих наибольшее значение L ($f \leq 10$ кГц, $\rho \geq 1,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $R \geq 0,03$ м, $h_{\text{н}} \geq 0,03$ м), лапласовское давление составляет менее 1% от величины электромагнитного давления.

Лапласовское давление начинает играть существенную роль только при появлении МГД-неустойчивости в виде вертикальных "риффов" на поверхности мениска. В критическом режиме МГД-неустойчивости, когда "риф" становится прозрачным для ЭМ поля, его существование, а также стабильность плавки, обусловлены только лапласовским давлением.

5. Аналитический расчёт высоты и формы мениска. Определённые геометрии мениска требуют решения комплексной МГД-задачи. В общем случае при решении задачи необходимо учесть ряд физических процессов, таких как движения расплава, турбулентные пульсации, а также сложные условия на границе свободной поверхности расплава - поверхностное натяжение, наличие плёнки окислов и т.д. На рассматриваемые квазистационарные характеристики процесса оказывает влияние также его нестационарный механизм - турбулентность потока, кавитация, образование и исчезновение "риффов". Однако в такой постановке задача становится столь сложной, что не может быть точно решена. Анализ возможности упрощения задачи показал, что применительно к плавке металлов в ИПН можно получить аналитическое решение, приемлемое для практического использования [4]. Корректность принятых допущений обосновывается экспериментальной проверкой, а также сравнением полученных результатов с численными расчётами, учитывающими отдельные допущения.

Расчётная ЭМ система состоит из тонкостенного цилиндрического индуктора конечной длины и цилиндрического расплава бесконечной длины. По индуктору протекает переменный ток, аксиальная компонента которого равна нулю. Допускаем, что удельная электрическая проводимость и абсолютная магнитная проницаемость не зависят от координат и времени, ЭМ поле квазистационарно, а движение расплава не влияет на магнитное поле. Для расчёта уравнений ЭМ поля использовано выражение векторного потенциала $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, который в рассматриваемом

случае имеет лишь азимутальную составляющую A_φ и удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} - \left(\frac{1}{r^2} + k^2 \right) A_\varphi = 0, \quad (5.1)$$

где $k^2 = i\omega\mu_0\sigma$. Рассматривается цилиндрическая система координат с началом в центре индуктора.

Баланс сил в расплаве описывается известным уравнением Навье-Стокса с ЭМ членом

$$\text{grad} [\rho v^2 + \rho g z + p + \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H} \vec{H}^*] - \rho [\vec{v} \text{rot} \vec{v}] - \nu \nabla^2 \vec{v} + \mu_0 \text{Re} (\vec{H} \nabla) \vec{H}^* = 0. \quad (5.2)$$

Решение уравнения (5.1), из которого определяется значение векторного потенциала в расплаве, имеет следующий вид [5]:

$$A_\varphi = \frac{2\mu_0 D A}{\pi d} \int_0^\infty I_1(r\sqrt{\lambda^2+k^2}) \cdot K_0(\lambda r) \cdot \sin \lambda h \cdot \cos \lambda z \times \\ \times [\sqrt{\lambda^2+k^2} \cdot I_0(\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2+k^2}) \cdot K_1(\lambda r) + \lambda I_1(\frac{d}{2}\sqrt{\lambda^2+k^2}) \cdot K_0(\lambda \frac{d}{2})]^{-1} d\lambda, \quad (5.3)$$

где D - диаметр индуктора, d - диаметр расплава.

В общем случае выражение (5.3) неразрешимо аналитическими методами. Применительно к процессу плавки металлов в ИПП, т.е. для случая $\bar{R}\sqrt{2} > 10$, подынтегральное выражение (5.3) может быть упрощено за счёт применения асимптотических разложений функций Бесселя.

Принимая во внимание это обстоятельство, выражение для векторного потенциала в расплаве может быть представлено в следующем виде [6]:

$$A_\varphi = \frac{A\mu_0 \Delta_\varphi}{l} \sqrt{(M-N)^2 + M^2} \cdot e^{(\bar{R}-\bar{r})} + i[\psi - (\bar{R}-\bar{r})],$$

где $M = \frac{1}{2\pi} \left[\text{arctg} \frac{\bar{h} + \bar{z}}{\bar{\delta}} + \text{arctg} \frac{\bar{h} - \bar{z}}{\bar{\delta}} \right];$ (5.4)

$$N = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\bar{h} + \bar{z}}{\bar{\delta}^2 + (\bar{h} + \bar{z})^2} + \frac{\bar{h} - \bar{z}}{\bar{\delta}^2 + (\bar{h} - \bar{z})^2} \right];$$

$$\varphi = \arctg \frac{M}{M-N}; \quad \bar{h} = \frac{h}{\Delta_0}; \quad \bar{z} = \frac{z}{\Delta_0}; \quad \bar{r} = \frac{r}{\Delta_0}; \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\Delta_0}; \quad \delta = \frac{11}{2} \frac{1}{\dots}$$

Переход к напряжённости электрического и магнитного полей осуществляется на основании известных соотношений

$$H_r = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}; \quad H_z = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi); \quad E_r = -i\omega A_\varphi. \quad (5.5)$$

Решение уравнения (5.2) получено в гидростатическом приближении, из которого после подстановки решения ЭМ задачи получаем высоту мениска на оси тигля [4]:

$$h_n = \frac{\mu_0 A^2}{4\pi^2 g} \left[\left(\arctg \frac{\bar{h} + \bar{z}'}{\bar{\delta}} + \arctg \frac{\bar{h} - \bar{z}'}{\bar{\delta}} - \frac{\bar{h} - \bar{z}'}{\bar{\delta}^2 + (\bar{h} - \bar{z}')^2} - \frac{\bar{h} + \bar{z}'}{\bar{\delta}^2 + (\bar{h} + \bar{z}')^2} \right)^2 + \left(\arctg \frac{\bar{h} + \bar{z}'}{\bar{\delta}} + \arctg \frac{\bar{h} - \bar{z}'}{\bar{\delta}} \right)^2 \right] \left(2 + \frac{2}{\bar{R}} + \frac{1}{\bar{R}^2} \right), \quad (5.6)$$

где z' - координата отрыва мениска от стенки тигля. Превышение свободной поверхности расплава над недеформированной жидкометаллической ванной в точках, имеющих координаты (z', r) (см. рис. 4), определяется как:

$$h_r = h_n \left[1 - \frac{\bar{R}^2 [1 + 2(\bar{r} + \bar{r}^2)] e^{-2(\bar{R} - \bar{r})}}{\bar{r}^2 [1 + 2(\bar{R} + \bar{R}^2)]} \right]. \quad (5.7)$$

На рис. 5 представлены расчётные графики относительной формы мениска $\bar{h}_n = h_r/h_n$ для различных значений относительного радиуса \bar{R} . Расчётные значения мениска отличаются от экспериментальных менее, чем на 10%, что вполне приемлемо для практического использования.

6. Определение формы мениска методом электродинамической аналогии (ЭДА). Исходными данными для расчёта являются высота мениска h_n и геометрия индуктора. Рассматривается случай сильно выраженного поверхностного эффекта, т. е. $\bar{R}\sqrt{2} > 10$. Распределение потенциала магнитного поля φ_n в зазоре между индуктором и расплавом подчиняется уравнению Лапласа, которое для рассматриваемой осесимметричной системы имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} = 0. \quad (6.1)$$

Решение уравнения (6.1) находим моделированием на электро-

проводной бумаге методом ЭГДА. Моделирование осуществляется в соответствии с системой аналогов квазистационарного ЭМ поля и стационарного электрического поля в проводящей среде [7]. Для моделирования осесимметричного поля используется электропроводная бумага с проводимостью, нарастающей по линейному закону в сторону увеличения радиуса, что достигается склеиванием электропроводной бумаги в виде клина. Решение задачи находим при граничных условиях второго рода. Рассмотрим их более подробно. Так как задача симметрична относительно оси, то магнитные силовые линии не пересекают ось, а следовательно на оси должно выполняться условие $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$. Примем ось в качестве одной из границ модели. Другие границы модели выберем достаточно удалёнными от всех токов в си-

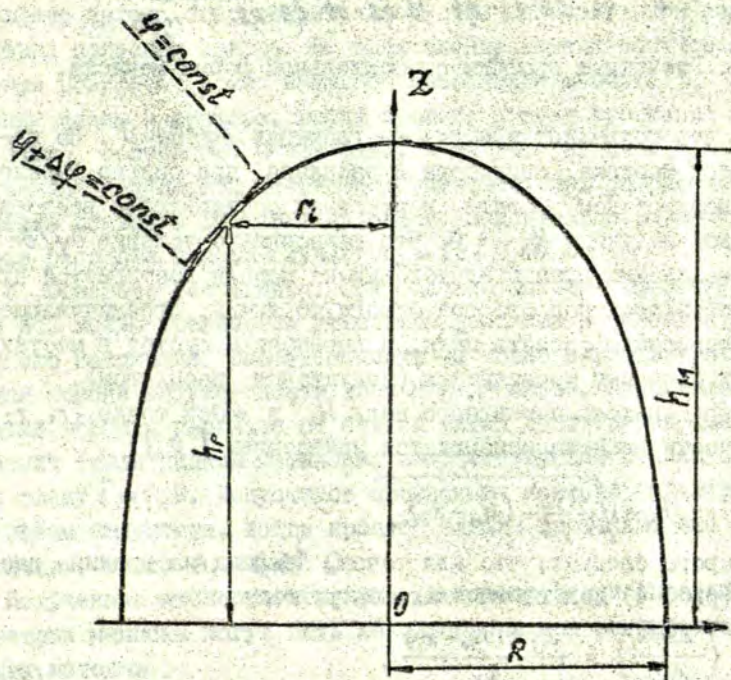


Рис. 4. Основные обозначения при расчёте геометрии мениска.

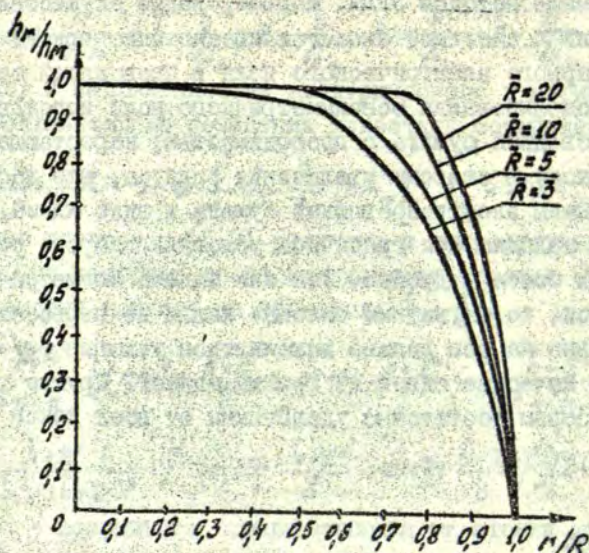


Рис. 5. Расчётные графики относительной формы мениска.

стеме, что позволяет принять на границах $\partial\varphi/\partial n = 0$. На поверхности мениска, индуктора и расплава, при сильно выраженном поверхностном эффекте, нормальная составляющая вектора магнитной индукции $B_n = 0$, что равносильно условию $\partial\varphi/\partial n = 0$. Реализация граничных условий на модели достигается путём обреза электропроводной бумаги по линии, ограничивающей рассматриваемую область поля, и вырезанием пустот в местах, занятых сечением проводников (индуктором, расплавом).

Напряжённость магнитного поля H_i в любой точке (r_i, z_i) поверхности мениска описывается уравнением [8]:

$$H_i = \sqrt{\frac{2\varphi g}{\mu_0} (h_m - z_i)}, \quad (6.2)$$

из которого следует, что для точек, лежащих на границе расплава (рис. 4) должно выполняться условие:

$$\left(\frac{\Delta\varphi_i}{\Delta l_i}\right)^2 = \frac{2\varphi g (h_m - z_i)}{\mu_0}, \quad (6.3)$$

где $\Delta\varphi_i$ - разность потенциалов между эквипотенциальными линиями, Δl_i - расстояние вдоль линии тока между эквипотен-

циальными линиями.

В процессе решения измеряются потенциалы электрического поля на поверхности мениска и его форма корректируется до тех пор, пока на всей границе будет выполняться условие (6.3).

7. Максимальная высота мениска в ЭМ поле цилиндрического индуктора. Предельно возможная высота мениска в цилиндрическом индукторе ограничена режимом МПД-неустойчивости и определяется возможностью удержания вершины расплава, выступающей над верхним краем индуктора. Выбранные для исследования металлы - бериллий, алюминий и сталь имеют довольно большое различие по определяющим параметрам - по плотности они отличаются более, чем в 4 раза ($Ba - Cr$), а по электропроводности в 13 раз ($Al - Cr$). Чтобы исключить влияние окисной плёнки на удержание мениска, все эксперименты проводились в атмосфере аргона с предварительной откачкой вакуумной камеры перед напуском аргона. Во всех экспериментах получен одинаковый результат - максимальное превышение мениска h_m над верхним краем индуктора, когда процесс плавки протекает ещё устойчиво, составляет менее радиуса индуктора, т.е. $h_m \approx 0,45 D$. Полученные результаты необходимо учитывать при разработке процесса плавки в ЭМ тигле на опоре. Максимально возможная высота расплава в этом случае $h_m \approx 2h + 0,45 D$.

8. Основные результаты. При расчёте высоты и формы мениска в ИТП можно пренебречь движением расплава и силами поверхностного натяжения. Высота мениска не может служить критерием для оценки интенсивности движения расплава. Максимальное отжатие вершины расплава от стенок тигля достигается при заполнении тигля жидким металлом, соответствующим относительному свесу $\bar{l} \approx 0,2$. Допустимое превышение мениска над верхним краем индуктора, когда процесс плавки протекает ещё устойчиво, равно $h_m \approx 0,45 D$.

Полученные экспериментальные зависимости при определении геометрии мениска могут быть использованы при разработке расчётных методов.

Представленные расчётные зависимости не трудоёмки и требуют незначительного времени для определения геометрии мениска в ИТП и обладают достаточной степенью точности для прак-

тического применения.

Эффективным средством определения формы свободной поверхности расплава в осесимметричном ЭМ поле является метод электрогидродинамической аналогии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коровин В.М. О форме свободной поверхности и осесимметричном МГД-течении жидкого металла в непроводящем сосуде, при наличии тонкого скин-слоя. - Магнитная гидродинамика, 1981, №3, с. 67-73.

2. Nissen P. Ein Beitrag zur numerischen Bestimmung der freien Oberflächenform von rotationssymmetrischen induktiv erwärmten Metallschmelzen. Technische Universität Hannover, 1976, S.114.

3. Павлов С.И., Якович А.Т. Методика расчёта формы свободной поверхности при осесимметричном МГД-течении вязкой несжимаемой жидкости. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛТУ им. П.Стучки, 1981, с. 70-77.

4. Губченко А.П., Свида А.В., Простяков А.А. Высота и форма мениска при плавке металлов в индукционных тигельных печах. - В кн.: Исследования в области промышленного электронагрева: Труды ВНИИЭТО. М.: Энергия, 1979, вып. 10, с. 25-30.

5. Махмудов К.М., Слухоцкий А.Е. Расчёт электрических параметров цилиндрических индукторов произвольной длины. - В кн.: Промышленное применение токов высокой частоты: Труды ВНИИТВЧ. М.: Машиностроение, вып. 10, с. 20-35.

6. Mühlbauer A. Kräfte und Strömungen in der Schmelze eines Induktions - Tiegelofens. - Acta Technica, 1969, Nr.6, S. 686-692.

7. Рязанов Г.А. Опыты и моделирование при изучении электромагнитного поля. - М.: Наука, 1966. - 191 с.

8. Губченко А.П., Свида А.В. Применение электрогидродинамической аналогии для определения формы мениска в индукционной печи. - Электротехническая промышленность, сер. Электротермия, 1983, вып. 2 (240), с. 5-6.

Статья поступила 5 марта 1983 года

УДК 621.745.3

Л.А.Босых, В.И.Платонов

Отделение ВНИИ электротермического оборудования, Москва

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ МГД-НАСОСОВ В ЛИТЕЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

В настоящее время литейное производство нуждается в компактных, надёжных дозирующих устройствах. Среди них наиболее перспективными являются МГД-насосы. Известно достаточно много типов насосов - индукционных с бегущим полем, кондукционных прямоточных, винтовых и др. [1, 2].

В данной работе приводятся результаты экспериментальных исследований кондукционного МГД-насоса с центробежным принципом действия. Основным элементом насоса является активная зона в виде цилиндрической полости, помещённая в осевое магнитное поле (рис. 1). Система токопровода расположена таким образом, что протекающий по металлу радиальный ток взаимодействует с внешним магнитным полем, в результате чего возникает азимутальная электромагнитная сила. Она раскручивает металл в активной зоне насоса, и, как в обычном центробежном насосе, перепад давления в периферийных точках и точках на оси вращения обеспечивает подачу металла вверх по металлопроводу.

Эксперименты проводились на олове. Исследованы насосы с активной зоной двух разных диаметров - $d_1 = 0,065$ м и $d_2 = 0,13$ м при одинаковой высоте $h = 0,006$ м. Внешнее магнитное поле создавалось соленоидом при пропускании тока I_c . К насосу подводился ток I_n от 1 до 5 кА.

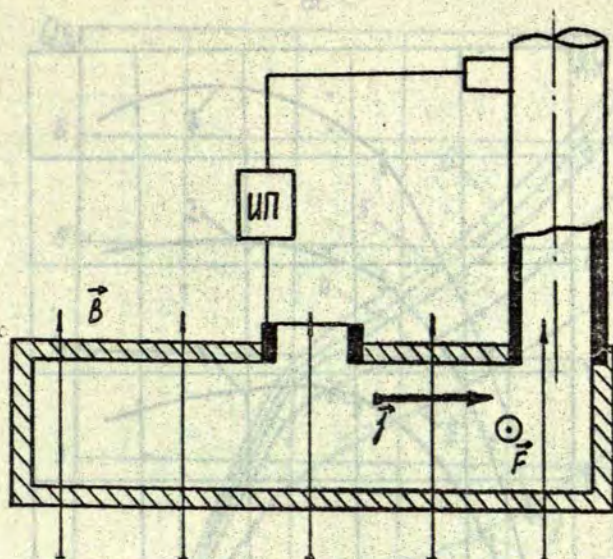


Рис. 1. Схема активной зоны МГД-насоса. (ИП - источник питания).

На рис. 2 представлена зависимость производительности насоса Q от тока соленоида I_c для насоса с активной зоной диаметра d_1 при заданной высоте подъёма металла над уровнем расплава в печи $H = 0,38$ м и четырёх значениях тока I_n , подводимого к насосу - 1; 2; 3,75 и 5 кА (на рисунке кривые 1, 2, 3, 4 соответственно). Из характера полученных кривых следует, что увеличение тока соленоида (т.е. внешнего электромагнитного поля) существенно влияет на рост производительности насоса только до некоторого предельного значения I_c^* ; дальнейшее увеличение I_c практически не сказывается на повышении производительности. Некоторое снижение производительности насоса в области 600-800 А тока соленоида при $I_n = 1-2$ кА (кривые 1, 2 на рис. 2), с одной стороны, возможно, связано с погрешностью экспериментов, с другой стороны - может быть обусловлено более сильным тормозящим действием индуцированного поля. При больших токах, подводимых к

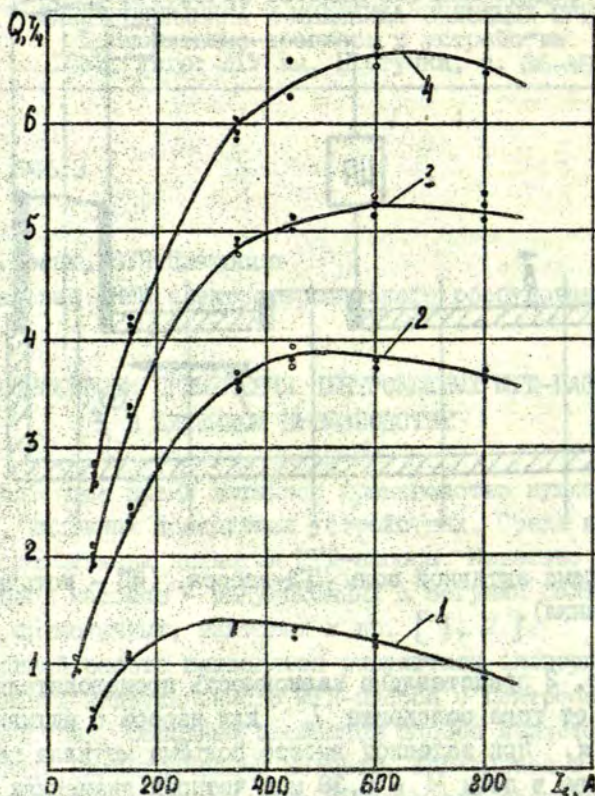


Рис. 2. Зависимость расхода от тока соленоида ($d_1 = 0,065$ м; $h = 0,06$ м; $H = 0,38$ м).

1. - $I_n = 1$ кА; 2. - $I_n = 2$ кА; 3. - $I_n = 3,75$ кА;
4. - $I_n = 5$ кА.

насосу ($I_n = 3-5$ кА) снижение производительности в этом диапазоне I_c не замечено.

Величина предельного значения тока соленоида I_c^* с увеличением тока I_n сдвигается в область больших значений. Так, при токе $I_n = 1$ кА она составляет порядка 350 А (производительность насоса достигает в этом случае 1,4 т/ч), с увеличением тока насоса до 5 кА максимальная производительность (6,6 т/ч) достигается уже при $I_c = 600$ А.

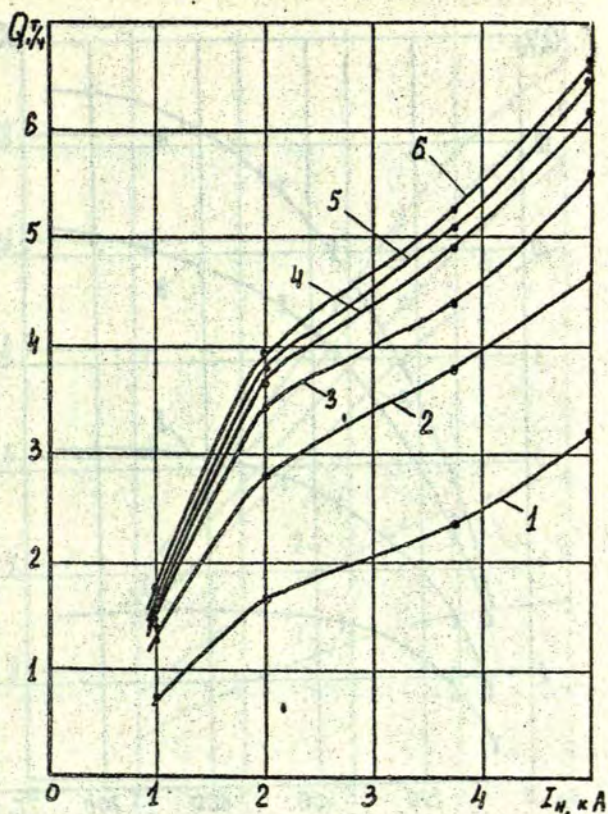


Рис. 3. Зависимость расхода от тока, подводимого к насосу ($d_1 = 0,065 \text{ м}$; $h = 0,06 \text{ м}$; $H = 0,38 \text{ м}$).
1. - $I_c = 100 \text{ А}$; 2. - $I_c = 200 \text{ А}$; 3. - $I_c = 300 \text{ А}$;
4. - $I_c = 400 \text{ А}$; 5. - $I_c = 500 \text{ А}$; 6. - $I_c = 600 \text{ А}$.

На рис. 3 представлена зависимость производительности насоса от тока I_n при тех же геометрических параметрах. Как видно по рисунку, с увеличением тока соленоида кривые $Q=f(I_n)$ располагаются плотнее - это подтверждает факт ограниченности влияния внешнего электромагнитного поля на производительность насоса. Так, для $I_n = 4 \text{ кА}$, например, увеличение тока соленоида от 100 до 200 А приводит к росту производительности на 80%; от 300 до 400 А - на 20%, дальнейшее увеличение тока со-

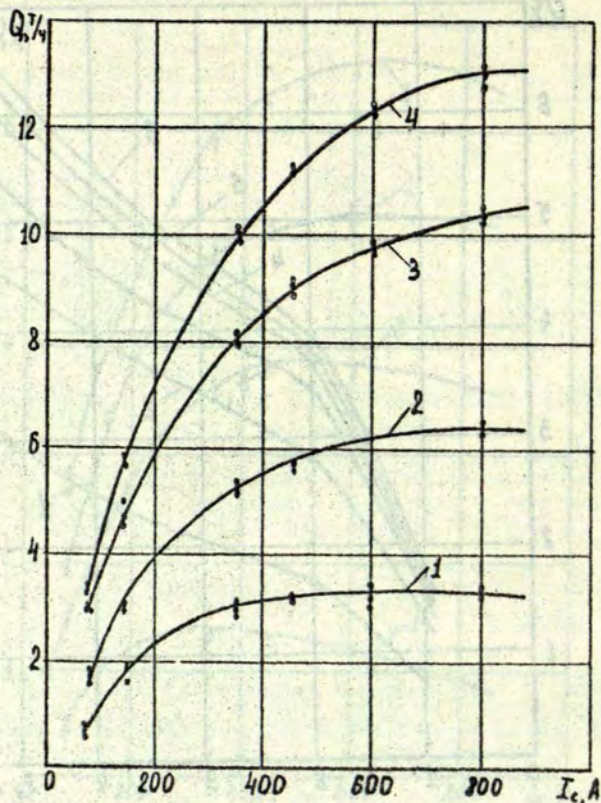


Рис. 4. Зависимость расхода от тока соленоида ($d_2 = 0,13$ м ;
 $h = 0,06$ м; $H = 0,38$ м).
 1. - $I_n = 1$ кА; 2. - $I_n = 2$ кА; 3. - $I_n = 3,5$ кА;
 4. $I_n = 5$ кА.

леноида (от 500 до 600 А) увеличивает производительность насоса всего на 2%.

На следующих двух рисунках приведены аналогичные зависимости производительности насоса от тока соленоида и тока насоса для активной зоны диаметра $d_2 = 0,13$ м. Характерное поведение кривых $Q=f(I_c)$ имеет место лишь для сравнительно небольших токов, подводимых к насосу - $I_n = 1-2$ кА (рис. 4).

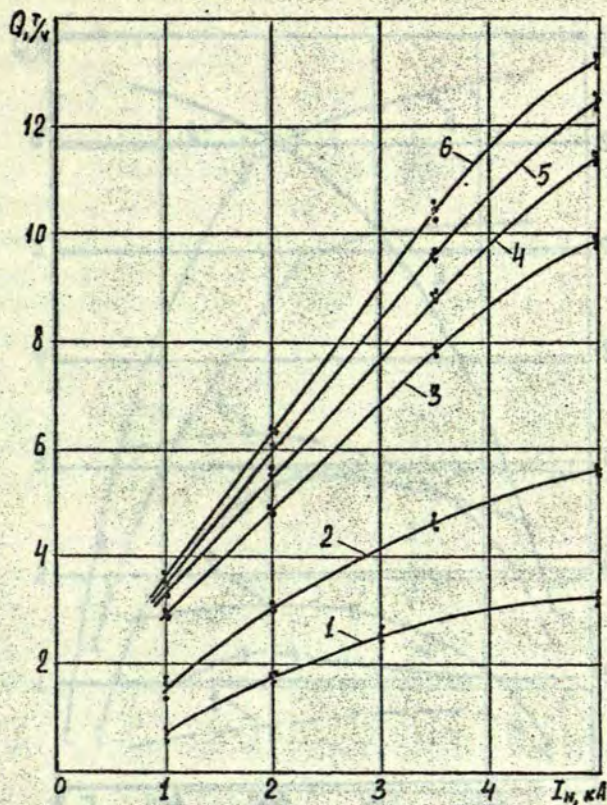


Рис. 5. Зависимость расхода от тока, подводимого к насосу ($d_2 = 0,13 \text{ м}$; $h = 0,006 \text{ м}$; $H = 0,38 \text{ м}$).

1. - $I_c = 80 \text{ А}$; 2. - $I_c = 147 \text{ А}$; 3. - $I_c = 348 \text{ А}$;
4. - $I_c = 454 \text{ А}$; 5. - $I_c = 600 \text{ А}$; 6. - $I_c = 800 \text{ А}$.

При этом предельное значение тока соленоида составляет 400 - 450 А для $I_M = 1 \text{ кА}$ и 750-800 А для $I_M = 2 \text{ кА}$. В случае больших токов насоса ($I_M = 3-5 \text{ кА}$) наблюдается увеличение производительности вплоть до $I_c = 800 \text{ А}$. Максимальная полученная в этом эксперименте производительность достигается при $I_c = 800 \text{ А}$, $I_M = 5 \text{ кА}$ и составляет порядка 13 т/ч. На рис. 5 представлены кривые зависимости производительности от тока,

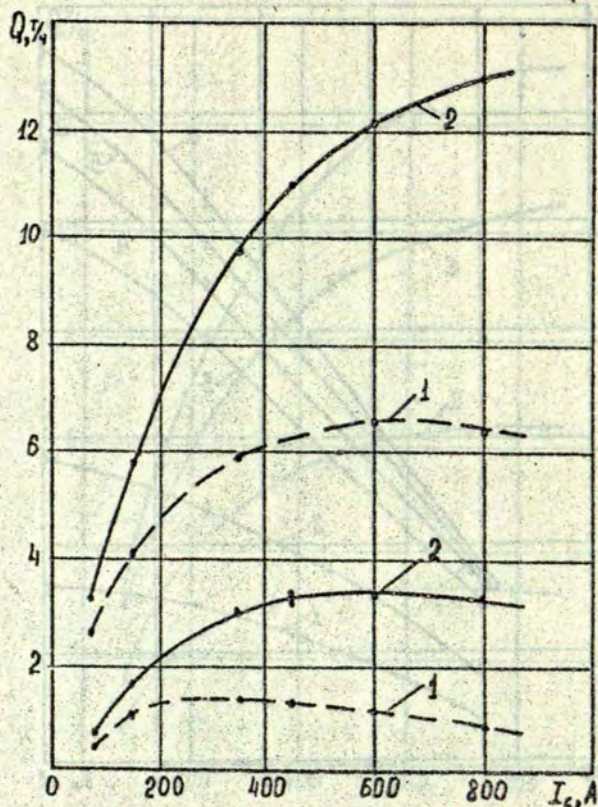


Рис. 6. Зависимость расхода от тока соленоида.

1. - $d_1 = 0,065$ м; 2. - $d_2 = 0,13$ м.

(штриховая линия - $I_n = 1$ кА; сплошная линия - $I_n = 5$ кА)

подводимого к насосу. Как и в первом случае, относительное расположение кривых свидетельствует об ограниченном влиянии тока соленоида на увеличение производительности насоса. Однако при использовании насосов с большей активной зоной диапазон изменения тока соленоида значительно шире. Даже при увеличении I_c от 600 до 800 А наблюдается заметный рост производительности - до 10%, что вполне может иметь практическое значение.

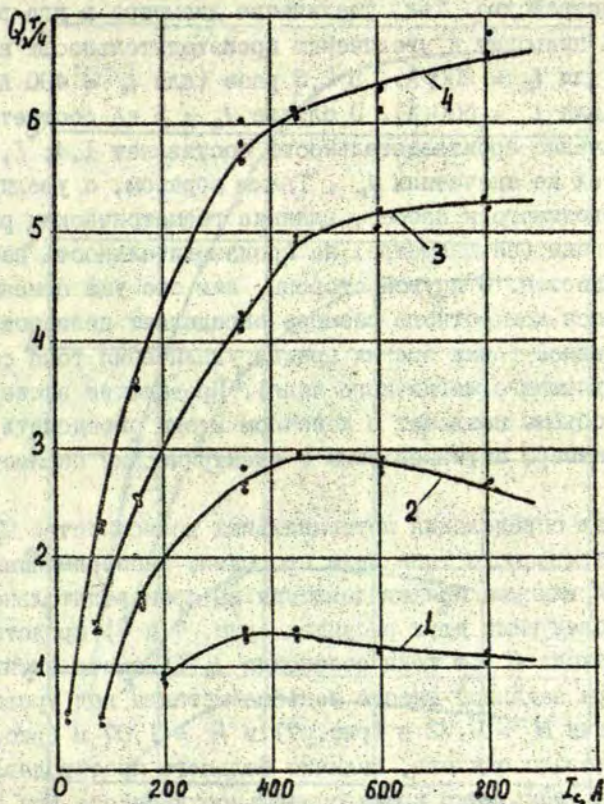


Рис. 7. Зависимость расхода от тока соленоида ($d_1 = 0,065 \text{ м}$; $h = 0,006 \text{ м}$; $H = 0,72 \text{ м}$).
 1. - $I_n = 1 \text{ кА}$; 2. - $I_n = 2 \text{ кА}$; 3. - $I_n = 3,5 \text{ кА}$;
 4. - $I_n = 5 \text{ кА}$.

Взаимное влияние геометрических и электромагнитных параметров на производительность МД-насоса показано на рис. 6. Здесь представлены кривые $Q=f(I_c)$ для двух диаметров активной зоны d_1 и d_2 (соответственно, кривые 1 и 2) при двух значениях тока, подводимого к насосу - 1 кА (штриховая линия) и 5 кА (сплошная линия). Как следует из рисунка, увеличение диаметра активной зоны проявляется непосредственно в росте производительности насоса, причём, характер этой зави-

симости в сильной степени определяется электрическими параметрами устройства. Так, увеличение диаметра в два раза при $I_n = 1$ кА приводит к увеличению производительности насоса в 1,6 раз (для $I_c = 200$ А), в 2,3 раза (для $I_c = 400$ А) и в 2,8 раз (для $I_c = 600$ А). В случае $I_n = 5$ кА соответствующее увеличение производительности составляет 1,4; 1,7; 1,8 раз при тех же значениях I_c . Таким образом, с увеличением тока, проводимого к насосу, влияние геометрических размеров активной зоны (её диаметра) на производительность насоса заметно снижается. С другой стороны, как это уже отмечалось, выбор насоса конкретного размера определяет целесообразный с практической точки зрения предел увеличения тока соленоида (т.е. внешнего магнитного поля). Проведение экспериментов в полном объёме позволит в конечном итоге определить оптимальные размеры активной зоны и электрические параметры устройства.

С целью определения потенциальных возможностей МГД-насоса рассматриваемого типа были проведены экспериментальные исследования влияния противодавления на производительность насоса. На следующих двух рисунках (рис. 7 и 8) представлены кривые расхода Q от тока соленоида I_c (диаметр активной зоны d_a) при заданной высоте подъёма металла над уровнем расплава в печи $H = 0,72$ м (рис. 7) и $H = 1,07$ м (рис. 8). Как и следовало ожидать, наличие большего противодавления приводит к уменьшению производительности насоса при тех же электрических параметрах (сравнить с рис. 2). Это особенно заметно в случае сравнительно небольших токов, подводимых к насосу ($I_n = 1-2$ кА). Увеличение тока в разумных пределах ($I_n = 3-5$ кА) позволяет поддерживать практически ту же производительность порядка 5-6 т/ч при увеличении заданной высоты подъёма расплава в 2-3 раза.

Таким образом, полученные результаты подтверждают значительные потенциальные возможности МГД-насосов рассматриваемого типа, возможность и целесообразность их использования в качестве раздаточных и дозирующих устройств для подачи металла на большую высоту, для мелкого фасонного литья под давлением и др. Компактность и простота конструкции рассматриваемого

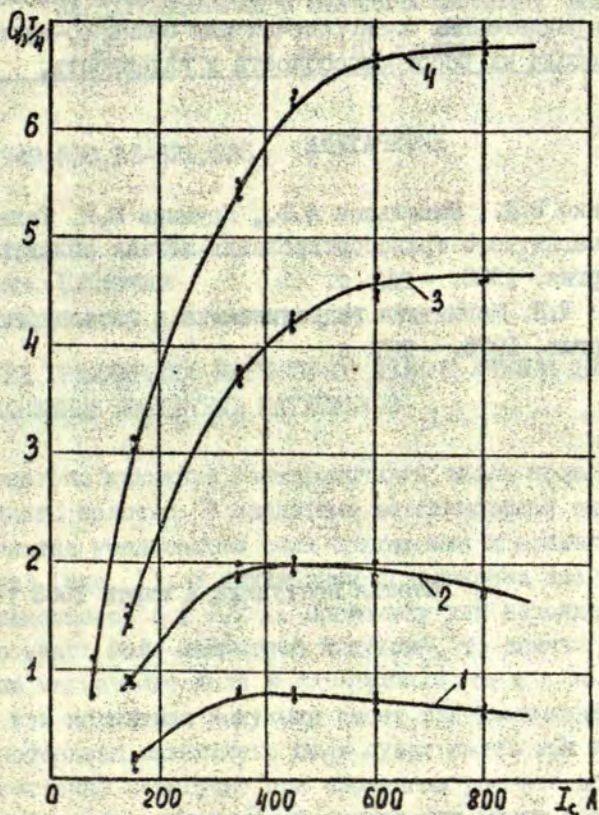


Рис. 8. Зависимость расхода от тока соленоида ($d_s = 0,065$ м; $h = 0,006$ м; $H = 1,07$ м).
 1. - $I_m = 1$ кА; 2. - $I_m = 2$ кА; 3. - $I_m = 3,5$ кА;
 4. - $I_m = 5$ кА.

мого МГД-насоса позволяет выполнять его в погружном варианте, что делает насос более универсальным, пригодным для различных технологических процессов литейного производства. Кроме того, конструкция насоса позволяет не только конденсировать возможные тепловые потери в металлопроводе, но и дополнительно подогревать металл в процессе его транспортирования.

Опытно-промышленная эксплуатация МГД-насоса рассматриваемого типа в раздаточных электропечах для свинцово-сурьмяных сплавов показала их работоспособность и надёжность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миценко В.Д., Микельсон А.Э., Круминь Ю.К. Технологии электромагнитного транспортирования лёгких сплавов. - М.: Metallurgy, 1980. - 253 с.
2. Верте Л.Н. Магнитная гидродинамика в металлургии. - М.: Metallurgy, 1975. - 287 с.

Статья поступила 4 марта 1983 года.

УДк 617.949:538.12-621.335

В.Я.Луза
ЛГУ им. П.Стучки

РАСЧЁТ ТРЁХМЕРНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ С УЧЁТОМ ДВИЖЕНИЯ И НАСЫЩЕНИЯ МАГНИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрим движение электромагнита вдоль проводящего ферромагнитного полотна. В следствие возникновения вихревых токов в полотне уменьшается сила притяжения и возникает сила торможения (рис. 1). В двумерном приближении эта проблема уже исследовалась в [1,2]. Поскольку для нахождения сил необходимо знать поле магнитной индукции, то задача сводится к отысканию магнитного поля в электромагните и в полотне.

Так как магнитная индукция имеет три компонента, то и векторный потенциал магнитного поля будет иметь три компонента, что существенно невыгодно при численном расчёте на ЭВМ, так как требует много оперативной памяти или много машинного времени.

Поэтому магнитную индукцию \vec{B} будем искать, используя векторный потенциал тока \vec{G} и скалярный потенциал магнитного поля ψ

$$\vec{B} = \mu (\vec{G} - \text{grad } \psi), \quad (1)$$

где μ - магнитная проницаемость.

Векторный потенциал токов \vec{G} вводится так, чтобы он удовлетворял уравнению

$$\text{rot } \vec{G} = \vec{J} \quad (2)$$

в области, где имеется ток, где $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ - плотность то-

ка в обмотке или в полотне. Там, где нет токов $\vec{G} = 0$

При этом векторный потенциал токов \vec{G} в обмотке можно определить аналитически, так как при стационарном движении распределение тока в обмотке известно и \vec{G} в обмотке определяется так, чтобы удовлетворялось уравнение (2)

$$\vec{G} = \vec{e}_y \mathcal{F}_z x + \vec{e}_z (\mathcal{F}_x y - \mathcal{F}_y x), \quad (3)$$

где \vec{e}_y и \vec{e}_z - единичные векторы.

В области полотна там, где имеются вихревые токи, определить потенциал \vec{G} более сложно, так как распределение вихревых токов неизвестно и их определение будет происходить в процессе расчёта магнитного поля.

Плотность вихревых токов в полотне можем выразить через напряжённость электрического поля \vec{E} , скорость движения электромагнита \vec{V} (в математической модели движется полотно, а начало координат связано с электромагнитом) вдоль оси x , индукцию магнитного поля в полотне \vec{B} и удельную проводимость полотна σ_n

$$\vec{J} = \sigma_n (\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \quad (4)$$

Из уравнений

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}, \quad (5)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (6)$$

и учитывая, что $\vec{V} = (v, 0, 0)$, получаем в области полотна

$$\text{rot rot } \vec{H} = - \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_n v \vec{B}), \quad (7)$$

где \vec{H} - напряжённость магнитного поля.

Подбираем векторный потенциал тока \vec{G} в области полотна так, чтобы выполнялось (2) [3]

$$\vec{G} = \int_0^x (\vec{J} \times \vec{e}_x) dx. \quad (8)$$

При этом векторный потенциал тока имеет две от нуля отличные компоненты

$$\vec{G} = (0, G_y, G_z). \quad (9)$$

Подставляя (8) в уравнение (7) с учётом (1), получаем уравнение для определения потенциала тока \vec{G} в полотне

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{G}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x} (\chi \bar{G}) = \\ = \text{grad} \left(\chi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\chi \text{grad} \psi) \end{aligned} \quad (10)$$

где $\chi = \mu \nu \epsilon_n$.

Граничные условия на поверхности полотна следующие:

$$\frac{\partial G_y}{\partial y} = \chi \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial G_z}{\partial z} = \chi \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (11)$$

Так как магнитная проницаемость μ зависит от индукции магнитного поля $\mu = \mu(B)$, то решение можно найти только численно.

Индукция магнитного поля \vec{B} должна удовлетворять уравнению

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad (12)$$

или в интегральной форме

$$\int_V \text{div} \vec{B} dV = 0. \quad (13)$$

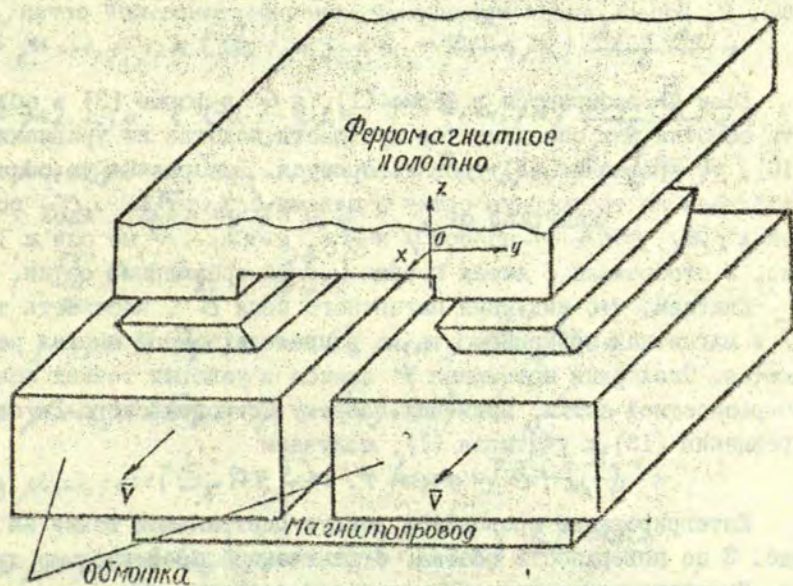


Рис. 1. Электромагнит

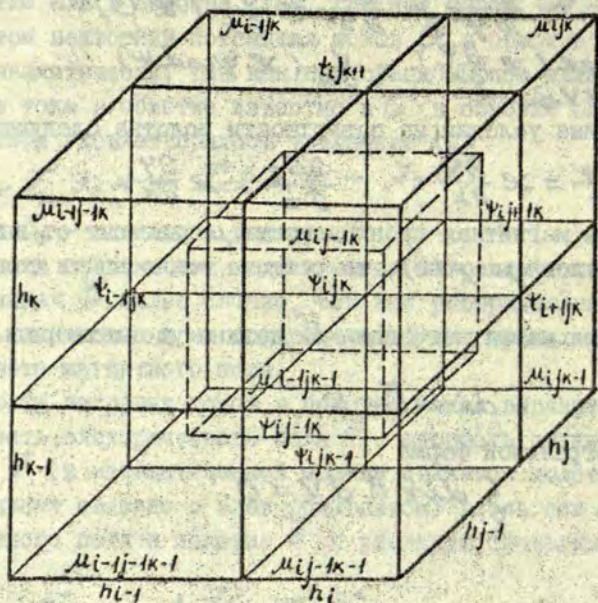


Рис. 2. Восемь ячеек трехмерной конечно-разностной сетки

Если \vec{B} выбирается в форме (1), а \vec{G} в форме (3) в области обмотки или определяется в области полотна из уравнения (10), то уравнение (5) удовлетворяется. Всю расчётную область разбиваем на трёхмерную сетку с шагами $h_i, i=1, 2, \dots, M$ по оси x , $h_j, j=1, 2, \dots, L$ по оси y и $h_k, k=1, 2, \dots, N$ по оси z . На рис. 2 отображены 8 ячеек неравномерной трёхмерной сетки.

Считаем, что индукция магнитного поля \vec{B} , плотность тока \vec{J} и магнитная проницаемость μ в пределах одной ячейки не меняются. Скалярный потенциал ψ ищется в узловых точках конечно-разностной сетки. Применяя теорему Остроградского-Гаусса к уравнению (13) и учитывая (1), получаем

$$\oint \mu (\vec{G} - \text{grad } \psi) d\vec{S} = 0. \quad (14)$$

Интегрирование проводится вокруг центральной точки на рис. 2 по поверхности объёма, ограниченной прерывистыми линиями. Интегрирование проводим по шести поверхностям.

Из уравнения (14), интегрируя по поверхности, направленной по оси X (если $dS = \vec{e}_x dy dz$), получаем

$$\begin{aligned} & \iint_S \mu (G_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x}) dy dz = \\ & = \mu_{i,j-1,k-1} (G_{x i,j-1,k-1} - t_{ijk}) \frac{h_{j-1} h_{k-1}}{4} + \\ & + \mu_{i,j-1,k} (G_{x i,j-1,k} - t_{ijk}) \frac{h_{j-1} h_k}{4} + \\ & + \mu_{ijk} (G_{x ijk} - t_{ijk}) \frac{h_j h_k}{4} + \\ & + \mu_{i,j,k-1} (G_{x i,j,k-1} - t_{ijk}) \frac{h_j h_{k-1}}{4}, \end{aligned}$$

где $t_{ijk} = (\Psi_{i+1,jk} - \Psi_{ijk}) / h_i$.

Если $dS = -\vec{e}_x dy dz$, то получаем

$$\begin{aligned} & \iint_S -\mu (G_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x}) dy dz = \\ & = -(\mu_{i-1,j-1,k-1} (G_{x i-1,j-1,k-1} - t_{i-1,jk}) \frac{h_{j-1} h_{k-1}}{4} + \\ & + \mu_{i-1,j-1,k} (G_{x i-1,j-1,k} - t_{i-1,jk}) \frac{h_{j-1} h_k}{4} + \\ & + \mu_{i-1,jk} (G_{x i-1,jk} - t_{i-1,jk}) \frac{h_j h_k}{4} + \\ & + \mu_{i-1,j,k-1} (G_{x i-1,j,k-1} - t_{i-1,jk}) \frac{h_j h_{k-1}}{4}). \end{aligned}$$

Если $dS = \vec{e}_y dx dz$, то получаем

$$\begin{aligned} & \iint_S \mu (G_y - \frac{\partial \Psi}{\partial y}) dx dz = \\ & = \mu_{ijk} (G_{y ijk} - t'_{i,j+1,k}) \frac{h_i h_k}{4} + \\ & + \mu_{i-1,jk} (G_{y i-1,jk} - t'_{i,j+1,k}) \frac{h_{i-1} h_k}{4} + \\ & + \mu_{i-1,j,k-1} (G_{y i-1,j,k-1} - t'_{i,j+1,k}) \frac{h_{i-1} h_{k-1}}{4} + \\ & + \mu_{ijk-1} (G_{y ijk-1} - t'_{i,j+1,k}) \frac{h_i h_{k-1}}{4}. \end{aligned}$$

где $t'_{ijk} = (\Psi_{ij+1,k} - \Psi_{ijk}) / h_j$.

Если $dS = -\vec{e}_y dx dz$, то имеем

$$\begin{aligned} & \iint_S -\mu (G_y - \frac{\partial \Psi}{\partial y}) dx dz = \\ & = -(\mu_{ij-1,k} (G_{yij-1,k} - t'_{ij-1,k}) \frac{h_i h_k}{4} + \\ & + \mu_{i-1,j-1,k} (G_{yi-1,j-1,k} - t'_{ij-1,k}) \frac{h_{i-1} h_k}{4} + \\ & + \mu_{i-1,j-1,k-1} (G_{yi-1,j-1,k-1} - t'_{ij-1,k}) \frac{h_{i-1} h_{k-1}}{4} + \\ & + \mu_{ij-1,k-1} (G_{yij-1,k-1} - t'_{ij-1,k}) \frac{h_i h_{k-1}}{4}). \end{aligned}$$

Если $dS = \vec{e}_z dx dy$, то имеем

$$\begin{aligned} & \iint_S \mu (G_z - \frac{\partial \Psi}{\partial z}) dx dy = \\ & = \mu_{ijk} (G_{zijk} - t''_{ijk}) \frac{h_i h_j}{4} + \\ & + \mu_{i-1,j,k} (G_{zi-1,j,k} - t''_{ijk}) \frac{h_{i-1} h_j}{4} + \\ & + \mu_{i-1,j-1,k} (G_{zi-1,j-1,k} - t''_{ijk}) \frac{h_{i-1} h_{j-1}}{4} + \\ & + \mu_{ij-1,k} (G_{zij-1,k} - t''_{ijk}) \frac{h_i h_{j-1}}{4}, \end{aligned}$$

где $t''_{ijk} = (\Psi_{ijk+1} - \Psi_{ijk}) / h_k$.

Если $dS = -\vec{e}_x dx dy$, то имеем

$$\begin{aligned} & \iint_S -\mu (G_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x}) dx dy = \\ & = -(\mu_{ijk-1} (G_{xijk-1} - t''_{ijk-1}) \frac{h_i h_j}{4} + \\ & + \mu_{i-1,j,k-1} (G_{xi-1,j,k-1} - t''_{ijk-1}) \frac{h_{i-1} h_j}{4} + \\ & + \mu_{i-1,j-1,k-1} (G_{xi-1,j-1,k-1} - t''_{ijk-1}) \frac{h_{i-1} h_{j-1}}{4} + \\ & + \mu_{ij-1,k-1} (G_{xij-1,k-1} - t''_{ijk-1}) \frac{h_i h_{j-1}}{4}). \end{aligned}$$

Суммируя все шесть интегралов и приравнявая сумму нулю (согласно уравнению (I4)), получаем следующее выражение для скалярного потенциала в центре восьми ячеек

$$\Psi_{ijk} = (\Psi_{i+1,jk} C_{ijk} + \Psi_{i-1,jk} C_{i-1,jk} + \Psi_{ij+1,k} E_{ijk} + \Psi_{ij-1,k} E_{ij-1,k} + \Psi_{ijk+1} g_{ijk} + \Psi_{ijk-1} g_{ijk-1} + a_{ijk} + a_{i-1,jk} + a_{ij-1,k} + a_{ijk-1} + a_{i-1,j-1,k} + a_{i-1,jk-1} + a_{ij-1,k-1} + a_{i-1,j-1,k-1}) / (C_{ijk} + C_{i-1,jk} + E_{ijk} + E_{ij-1,k} + g_{ijk} + g_{ijk-1}),$$

$$\text{где } C_{ijk} = (W_{ij-1,k-1} + W_{ijk-1} + W_{ij-1,k} + W_{ijk}) / h_i^2,$$

$$E_{ijk} = (W_{i-1,jk} + W_{ijk} + W_{i-1,jk-1} + W_{ijk-1}) / h_j^2,$$

$$g_{ijk} = (W_{ij-1,k} + W_{ijk} + W_{i-1,j-1,k} + W_{i-1,jk}) / h_k^2,$$

$$W_{ijk} = \mu_{ijk} h_i h_k h_j$$

$$a_{ijk} = W_{ijk} (b(i) G_{xijk} / h_i + b(j) G_{yijk} / h_j + b(k) G_{zijk} / h_k),$$

$$b(m) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } m=i; j; k, \\ -1 & , \text{ если } m=i-1; j-1; k-1, \end{cases}$$

$$i = 2, 3, \dots, M, \quad j = 2, 3, \dots, L, \quad k = 2, 3, \dots, N$$

Преобразуя правую часть уравнения (10) находим, что

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} (x \frac{\partial \Psi}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (x \operatorname{grad} \Psi) = \\ = (\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial x}) \bar{e}_y + (\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial x}) \bar{e}_z \end{aligned} \quad (15)$$

Учитывая, что векторный потенциал вихревых токов задается в узловых точках, а x во всем объеме ячейки, получаем

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{ijk} = \frac{\Psi_{i-1,jk} - \Psi_{ijk}}{2 h_i} + \frac{\Psi_{ijk} - \Psi_{i+1,jk}}{2 h_{i-1}},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{ijk} = \frac{x_{ijk} - x_{i,j-1,k}}{(h_j + h_{j-1})/2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial x^2}\right)_{ijk} = \frac{(\bar{G}_{i+1,jk} - \bar{G}_{ijk})/h_i - (\bar{G}_{ijk} - \bar{G}_{i-1,jk})/h_{i-1}}{(h_i + h_{i-1})/2}$$

Замещая уравнение (10) с правой частью (15) на конечно-разностные уравнения, получаем

$$\begin{aligned} & ((\bar{G}_{i+1,jk} - \bar{G}_{ijk})/h_i - (\bar{G}_{ijk} - \bar{G}_{i-1,jk})/h_{i-1})/(h_i + h_{i-1}) + \\ & + ((\bar{G}_{ij+1,k} - \bar{G}_{ijk})/h_j - (\bar{G}_{ijk} - \bar{G}_{ij-1,k})/h_{j-1})/(h_j + h_{j-1}) + \\ & + ((\bar{G}_{ijk+1} - \bar{G}_{ijk})/h_k - (\bar{G}_{ijk} - \bar{G}_{ijk-1})/h_{k-1})/ \\ & = 2(((\Psi_{i+1,jk} - \Psi_{ijk})/h_i + (\Psi_{ijk} - \Psi_{i-1,jk})/h_{i-1})(\mathcal{L}_{ijk} - \mathcal{L}_{ij-1,k})/ \\ & / (h_j + h_{j-1}) - ((\Psi_{ij+1,k} - \Psi_{ijk})/h_j + (\Psi_{ijk} - \Psi_{ij-1,k})/ \\ & / h_{j-1})(\mathcal{L}_{ijk} - \mathcal{L}_{i-1,jk})/(h_i + h_{i-1})) \bar{e}_y + \\ & + 2(((\Psi_{i+1,jk} - \Psi_{ijk})/h_i + (\Psi_{ijk} - \Psi_{i-1,jk})/h_{i-1})(\mathcal{L}_{ijk} - \mathcal{L}_{ijk+1})/ \\ & / (h_k + h_{k-1}) - ((\Psi_{ijk+1} - \Psi_{ijk})/h_k + (\Psi_{ijk} - \Psi_{ijk-1})/ \\ & / h_{k-1})(\mathcal{L}_{ijk} - \mathcal{L}_{i-1,jk})/(h_i + h_{i-1})) \bar{e}_z. \end{aligned}$$

Полученные конечно-разностные уравнения для Ψ_{ijk} (также для G_{yijk} и G_{zijk} в области полотна решаются численно на ЭВМ методом верхней релаксации. Магнитная проницаемость μ_{ijk} пересчитывается через 2 итерации методом нижней релаксации. Основные сложности, которые возникают при решении конечно-разностных уравнений, связаны с неустойчивостью разностной схемы уравнений относительно G_{yijk} и G_{zijk} , и это требует дополнительных исследований для получения более устойчивой разностной схемы и определения оптимальных параметров релаксации.

По приведённой методике расчёта составлен и отлажен комплекс программ для ЭВМ на алгоритмическом языке ФОРТРАН ЕС. Комплекс состоит из 42 подпрограмм, имеющих в общей сложности 3800 операторов и занимает 296 К оперативной памяти.

Время счёта на ЭВМ ЕС-1022 одного варианта зависит от числа расчётных ячеек и скорости движения электромагнита:

для 2000 ячеек и скорости 50 м/с - 3,5 часов;

для 3000 ячеек и скорости 100 м/с - 7,5 часов.

В качестве примера расчёта выбрана следующая система: ширина магнитопровода электромагнита 0,2 м, толщина магнитопровода 0,04 м, заход магнитопровода за обмотку по оси Z равен

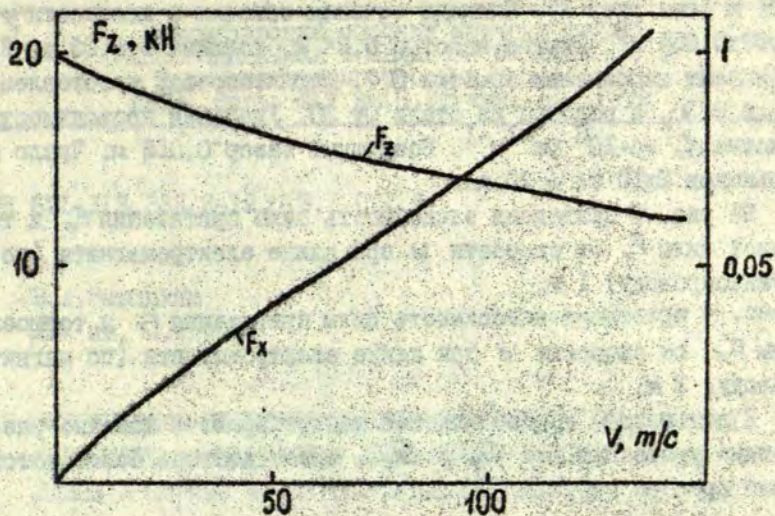


Рис. 3. Зависимость сил от скорости движения электромагнита длиной 1 м

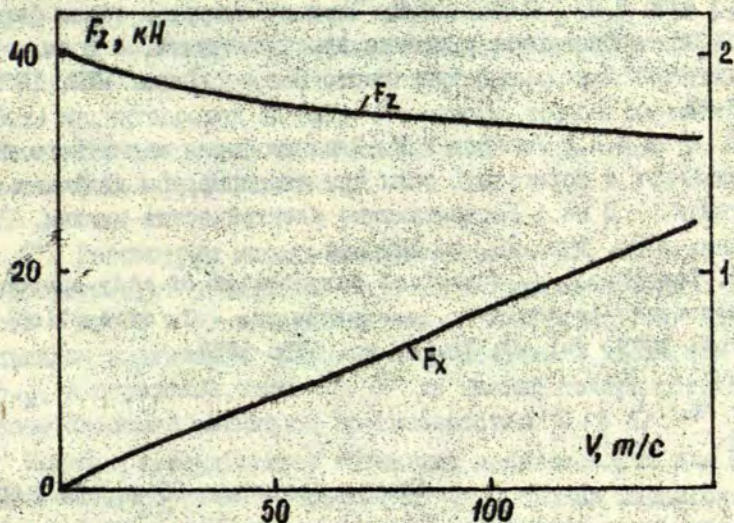


Рис. 4. Зависимость сил от скорости движения электромагнита длиной 2 м.

0,01 м (см. рис. 1). Площадь сечения обмотки в плоскости yOz (0,09x0,05) м². Ширина полотна 0,24 м, толщина - 0,03 м. Коэффициент заполнения обмотки 0,7. Магнитопровод изготовлен из стали Э330, а полотно из стали Ст 30. Удельная проводимость полотна $\sigma_c = 4 \cdot 10^6 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$. Воздушный зазор 0,015 м. Число ампервитков $2 \times 10 \text{ кА} = 20 \text{ кА}$.

На рис. 3 приведена зависимость силы притяжения F_z и тормозной силы F_x от скорости V при длине электромагнита (по магнитопроводу) 1 м.

На рис. 4 приведена зависимость силы притяжения F_z и тормозной силы F_x от скорости V при длине электромагнита (по магнитопроводу) 2 м.

В дальнейшем предполагается модифицировать конечно-разностные уравнения для G_y и G_z , чтобы достичь более устойчивый процесс счёта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ауза В.Я., Устинов Н.Н. Влияние вихревых токов феррорельса на стационарное движение электромагнита. - В кн.: Высокоскоростной наземный транспорт. Новочеркасск: НИИ, 1979, с. 76-83.

2. Ауза В.Я., Устинов Н.Н. Влияние формы магнитного поля на подъёмную и тормозящую силы при стационарном движении электромагнита. - В кн.: Бесконтактные электрические машины. Рига: Зинатне, 1981, вып. 20, с. 137-144.

3. Langerholc J. Numerical computation of eddy-current in ferromagnetic maglev suspensions. - J. of Applied Physics, 1975, vol.46, Nr.12, pp. 5255-5258.

Статья поступила 20 апреля 1983 г.

УДК 621.313.333.2-12.013.1.001.5

Э. А. Завицкий
ЛГУ им. П. Стучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ЛИНЕЙНОГО АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ С УЧЁТОМ
ДЛИНЫ И ШИРИНЫ МАГНИТОПРОВОДА ИНДУКТОРА

1°. Выделим из множества математических моделей ЛАД модели, учитывающие ограниченность магнитопровода индуктора на основе трёхмерной краевой задачи [1-3]. В [1-3] магнитопровод моделируется параллелепипедом с конечной [1,2] или бесконечной [3] магнитной проницаемостью. В настоящей работе магнитопровод заменён бесконечно тонким плоским магнитно-анизотропным слоем. Решение задачи при этом, по сравнению с [1-3], упрощается.

2°. Рассмотрим модель двигателя (рис. 1). Области I, II, III соответствуют реактивной шине (электропроводность σ , скорость v вдоль x), воздушному зазору и пространству над неподвижным индуктором, который сосредоточен в плоскости $z = \delta$, $\delta = h + g$, и образован током $\vec{J}(x, y)$ на нижней поверхности слоя с поверхностной магнитной проницаемостью $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x(x, y) & 0 \\ 0 & \mu_y(x, y) \end{pmatrix}$.
Понятие поверхностной магнитной проницаемости для изотропной бесконечно тонкой ферромагнитной оболочки вводится в [4]; использовать такую оболочку (одномерный экран) для математического моделирования магнитопровода линейной индукционной машины предложено в [5]; здесь, на основе предельного перехода, аналогичного [4], для описания магнитно-анизотропно-

го индуктора введена тензорная поверхностная магнитная проницаемость $\hat{\mu}$, физический смысл которой явствует из граничного условия (43).

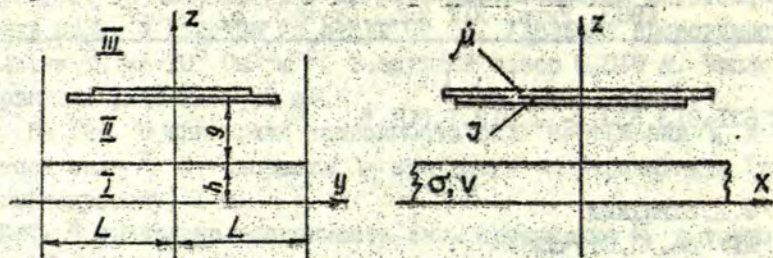


Рис. 1. Математическая модель ЛАД

Функция \hat{J} , а в дальнейшем также векторы поля \vec{B}, \vec{E} и плотность вихревых токов \vec{j} есть комплексные амплитуды величин, зависящих от времени с частотой ω .

Конкретные выражения функций $\hat{J}, \hat{\mu}$ приводятся ниже.

Как и в [1-3], требуется, чтобы касательная составляющая магнитного поля обращалась в нуль в плоскостях $y = \pm L$ (отсюда следует $j_y = 0$ при $y = \pm L$) и в плоскости $z = 0$ (рассматривается половина двустороннего ЛАД или односторонний ЛАД с шиктованным обратным магнитопроводом). Модель принимается неограниченной по x и $z, z \geq 0$.

Подразумевая, что электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла, математическая модель на этом полностью определена.

3°. Будем иметь целью определение магнитного поля, вихревых токов, тягового и нормального усилий, комплексной мощности.

Зависящие от координаты x величины преобразуем по Фурье согласно равенствам

$$\hat{\varphi}(p) = (2\pi)^{-1/2} \int \varphi(x) e^{-ipx} dx, \quad \varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} \int \hat{\varphi}(p) e^{ipx} dp. \quad (1), (2)$$

Для вычисления интегральных величин ниже будем использовать равенство

$$\int \varphi_1 \varphi_2^* dx = \int \hat{\varphi}_1 \hat{\varphi}_2^* dp, \quad (3)$$

где звездочкой помечена комплексно сопряженная функция.

Обустроимся, как и в (1)-(3), не указывать бесконечные

пределы интегрирования по x, p (или ξ), а также пределы интегрирования по y , равные $\pm L$.

Рассмотрим область I, в которой имеет место уравнение $(\Delta - \mu_0 \sigma (i\omega + \nu \partial/\partial x)) B_x = 0$ с условиями $B_x(x, \pm L, z) = 0$. (4), (5)

Применим к (4), (5) преобразование Фурье (I). В результате получим

$$(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 - (p^2 + i\mu_0 \sigma (\omega + \nu p))) \hat{B}_x = 0; \quad \hat{B}_x(p, \pm L, z) = 0. \quad (6), (7)$$

Метод разделения переменных для задачи (6), (7) даёт:

$$\hat{B}_x = \sum_n (A_n \operatorname{ch} \rho_n z + B_n \operatorname{sh} \rho_n z) \cdot s_n, \quad (8)$$

где $\rho_n = (r_n^2 + i\mu_0 \sigma (\omega + \nu p))^{1/2}$, $\operatorname{Re} \rho_n > 0$; $r_n = (p^2 + q_n^2)^{1/2}$,

$$q_n = n\pi/2L, \quad n=1, 2, 3, \dots; \quad s_n = s_n(y) = L^{-1/2} \sin q_n(y+L);$$

далее подобно обозначается $c_n = c_n(y) = L^{-1/2} \cos q_n(y+L)$;

A_n, B_n - подлежащие определению функции параметра p .

Поскольку уравнению (4) с условиями (5) удовлетворяет и B_x , имеем:

$$\hat{B}_x = \sum_n (\alpha_n \operatorname{ch} \rho_n z + \beta_n \operatorname{sh} \rho_n z) \cdot s_n, \quad (9)$$

где α_n, β_n - также неизвестные функции.

Для определения \hat{B}_y преобразуем по Фурье уравнение $\operatorname{div} \vec{B} = 0$; получим

$$ip \hat{B}_x + \partial \hat{B}_y / \partial y + \partial \hat{B}_z / \partial z = 0. \quad (10)$$

Подстановка (8), (9) в (10) с последующим интегрированием по y (постоянную интегрирования полагаем равной нулю) даёт

$$\hat{B}_y = \sum_n q_n^{-1} ((ip \alpha_n + \rho_n B_n) \operatorname{ch} \rho_n z + (ip \beta_n + \rho_n A_n) \operatorname{sh} \rho_n z) \cdot c_n. \quad (11)$$

Установим связь между функциями $\alpha_n, \beta_n, A_n, B_n$. Для этого используем фурье-образ z -составляющей уравнения $\mu_0 \hat{j}_z = \operatorname{rot} \vec{B}$ $\mu_0 \hat{j}_z = ip \hat{B}_y - \partial \hat{B}_x / \partial y$, в который подставим разложения (9), (11). Будем иметь

$$\mu_0 \hat{j}_z = \sum_n q_n^{-1} ((ip \rho_n B_n - r_n^2 \alpha_n) \operatorname{ch} \rho_n z + (ip \rho_n A_n - r_n^2 \beta_n) \operatorname{sh} \rho_n z) \cdot c_n. \quad (12)$$

Поскольку $j_z(x, y, 0) = j_z(x, y, h) = 0$ и, следовательно, $\hat{j}_z(p, y, 0) = \hat{j}_z(p, y, h) = 0$, заключаем, что $\alpha_n = ip \rho_n r_n^{-2} B_n$, $\beta_n = ip \rho_n r_n^{-2} A_n$. Отсюда следует, что $j_z = 0$ также при $0 < z < h$.

Рассмотрим разложение (9) при $z = 0$. Из равенства

$\hat{B}_x(p, y, 0) = 0$ следует $\alpha_n = 0$ и, согласно предыдущему абзацу, $B_n = 0$. (Аналогичный результат даёт подстановка $z = 0$ в (II).) Окончательно, общие (определённые с точностью до множителей A_n) выражения составляющих фурье-образа \hat{B} в I области имеют следующий вид:

$$\hat{B}_x^I = ip \sum_n q_n r_n^{-2} A_n \operatorname{sh} q_n z \cdot s_n, \quad (13)$$

$$\hat{B}_y^I = \sum_n q_n q_n r_n^{-2} A_n \operatorname{sh} q_n z \cdot c_n, \quad \hat{B}_z^I = \sum_n A_n \operatorname{ch} q_n z \cdot s_n. \quad (14), (15)$$

Общие выражения \hat{B} в областях II, III выводятся подобно, но при условиях $\sigma = 0$ ($q_n = r_n$), $\int = 0$, а также условия ограниченности поля при $z \rightarrow \infty$. Результат имеет следующий вид:

$$\hat{B}_x^{II} = ip \sum_n r_n^{-1} (D_n \operatorname{ch} \zeta_n + C_n \operatorname{sh} \zeta_n) \cdot s_n, \quad (16)$$

$$\hat{B}_y^{II} = \sum_n q_n r_n^{-1} (D_n \operatorname{ch} \zeta_n + C_n \operatorname{sh} \zeta_n) \cdot c_n, \quad (17)$$

$$\hat{B}_z^{II} = \sum_n (C_n \operatorname{ch} \zeta_n + D_n \operatorname{sh} \zeta_n) \cdot s_n; \quad (18)$$

$$\hat{B}_x^{III} = -ip \sum_n r_n^{-1} G_n e^{-\zeta_n} \cdot s_n, \quad (19)$$

$$\hat{B}_y^{III} = -\sum_n q_n r_n^{-1} G_n e^{-\zeta_n} \cdot c_n, \quad (20)$$

$$\hat{B}_z^{III} = \sum_n G_n e^{-\zeta_n} \cdot s_n; \quad (21)$$

здесь введено обозначение $\zeta_n = r_n(z - \delta)$; функции C_n, D_n, G_n , как и A_n , определяются ниже в § 0.

Выражения ненулевых составляющих вихревых токов получаются преобразованием уравнений $\mu_0 \hat{j}_{x,y} = \operatorname{rot}_{x,y} \hat{B}^I$:

$$\mu_0 \hat{j}_x = \partial \hat{B}_z^I / \partial y - \partial \hat{B}_y^I / \partial z, \quad \mu_0 \hat{j}_y = \partial \hat{B}_x^I / \partial z - ip \hat{B}_z^I. \quad (22), (23)$$

Подстановка (13), (14) в соотношения (22), (23) приводит к равенствам

$$\hat{j}_x = -i\sigma(\omega + p\nu) \sum_n q_n r_n^{-2} A_n \operatorname{ch} q_n z \cdot c_n, \quad (24)$$

$$\hat{j}_y = -\sigma(\omega + p\nu) p \sum_n r_n^{-2} A_n \operatorname{ch} q_n z \cdot s_n. \quad (25)$$

Далее найдём общие выражения x - и y -составляющих фурье-образа электрического поля в областях II, III. Будем исходить из задачи

$$\Delta E_y^{II,III} = 0, \quad E_y^{II,III}(x, \pm L, z) = 0. \quad (26), (27)$$

Разделяя переменные как в случае магнитного поля, полу-

$$\hat{E}_y^{\text{II}} = \sum_n (\alpha'_n \text{ch } \zeta_n + \beta'_n \text{sh } \zeta_n) \cdot s_n, \quad \hat{E}_y^{\text{III}} = \sum_n \gamma'_n e^{-\zeta_n} \cdot s_n. \quad (28), (29)$$

Преобразуем по Фурье равенство $\text{rot } \vec{E} = -i\omega \vec{B}$; в результате получим уравнение $ip\hat{E}_y - \partial \hat{E}_x / \partial y = -i\omega \hat{B}_z$, подстановка в которое разложений (28), (29), (18), (21) с последующим интегрированием по y даёт:

$$\hat{E}_x^{\text{II}} = -i \sum_n q_n^{-1} ((p\alpha'_n + \omega C_n) \text{ch } \zeta_n + (p\beta'_n + \omega D_n) \text{sh } \zeta_n) \cdot c_n, \quad (30)$$

$$\hat{E}_x^{\text{III}} = -i \sum_n q_n^{-1} (p\gamma'_n + \omega G_n) e^{-\zeta_n} \cdot c_n. \quad (31)$$

4⁰. В данном пункте получим выражения усреднённых по времени интегральных величин. Более подробные выкладки см. [6].

Сила $-F$, действующая на индуктор одностороннего ЛАД, определяется равенством

$$\vec{F} = \vec{e}_z \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \iint B_x^{\text{II}} B_x^{\text{III}} dx dy + \vec{e}_z \frac{1}{4\mu_0} \iint (|B_z^{\text{II}}|^2 - |B_x^{\text{II}}|^2 - |B_y^{\text{II}}|^2) dx dy. \quad (32)$$

Здесь отброшена y -составляющая силы, которая, однако, при несимметричных по y функциях \vec{J}, \vec{j} может отличаться от нуля, но такие случаи не рассматриваются.

Подстановка разложений п. 3⁰ в (32) и интегрирование по x, y приводит к результату:

$$\vec{F} = \vec{e}_z \frac{1}{2\mu_0} \text{Im} \sum_n \int p r_n^{-1} C_n D_n^* dp + \vec{e}_z \frac{1}{4\mu_0} \sum_n \int (|C_n|^2 - |D_n|^2) dp. \quad (33)$$

Здесь были использованы равенство (3) и свойство ортогональности функций s_n, c_n на отрезке $|y| \leq L$ -

$$\int s_m s_n dy = \delta_{mn}, \quad \int c_m c_n dy = \delta_{mn}, \quad (34), (35)$$

где δ_{mn} - символ Кронекера.

Комплексная мощность P выражается через поток

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\mu_0} \iint (E_x \vec{B}_y - E_y \vec{B}_x) dx dy; \quad P = -\Pi(\delta=0) - \Pi(\delta=0). \quad (36), (37)$$

Подстановка в (36) разложений п. 3⁰ даёт:

$$P = \frac{i\omega}{2\mu_0} \sum_n \int r_n^{-1} (C_n D_n^* + |G_n|^2) dp, \quad P_a = \text{Re } P, \quad P_r = \text{Im } P, \quad (38), (39), (40)$$

где P_a, P_r - активная и реактивная мощности; при этом исчезла зависимость от содержащихся в (28)-(31) функций $\alpha'_n, \beta'_n, \gamma'_n$.

5⁰. Далее определим функции A_n, C_n, D_n, G_n . Используем следующие граничные условия:

$$B_{x,z}^I = B_{x,z}^{II}, \quad z=h; \quad B_x^{II} - B_x^{III} = \mu_0 J_y, \quad z=\delta; \quad (41), (42)$$

$$B_z^{II} - B_z^{III} = \partial(\mu_x B_x^{III})/\partial x + \partial(\mu_y B_y^{III})/\partial y, \quad z=\delta. \quad (43)$$

Соотношения (41), (42) общеизвестны, при этом можно сращивать либо x -, либо y -составляющую поля; уравнение (43) получено обобщением уравнения (I) из [4].

Подставим в преобразованные по Фурье равенства (41), (42) попарно разложения (I3), (I6); (I5), (I8); (I6), (I9). В результате получим 3 уравнения:

$$A_n \operatorname{ch} \rho_n h = C_n \operatorname{ch} r_n g - D_n \operatorname{sh} r_n g, \quad \rho_n r_n^{-1} A_n \operatorname{sh} \rho_n h = D_n \operatorname{ch} r_n g - C_n \operatorname{sh} r_n g, \quad (44), (45)$$

$$G_n + D_n = i r_n \rho_n^{-1} \mu_0 J_{yn}, \quad \text{где } J_{yn} = (2\pi)^{-1/2} \iint J_y e^{-i\rho y} s_n dx dy. \quad (46), (47)$$

Выразим функции A_n, C_n, D_n через G_n :

$$A_n = (1/\operatorname{ch} \rho_n h) \cdot (\chi_n \operatorname{ch} r_n g - \operatorname{sh} r_n g) \cdot (i r_n \rho_n^{-1} \mu_0 J_{yn} - G_n), \quad (48)$$

$$C_n = \chi_n (i r_n \rho_n^{-1} \mu_0 J_{yn} - G_n), \quad D_n = i r_n \rho_n^{-1} \mu_0 J_{yn} - G_n, \quad (49), (50)$$

$$\text{где } \chi_n = (r_n + \rho_n \operatorname{th} \rho_n h \cdot \operatorname{th} r_n g) / (\rho_n \operatorname{th} \rho_n h + r_n \operatorname{th} r_n g). \quad (51)$$

Займемся определением функций G_n . Помножим уравнение (43) на функцию $(2\pi)^{-1/2} e^{-i\rho x} s_n$ и результат проинтегрируем по x, y в полосе $|x| < \infty, |y| \leq L$. Прделаем это для $n=1, 2, 3, \dots$. Учитывая равенства (2), (I8)-(2I), (34), (35), а также равенство

$$\int e^{i(\varepsilon-p)x} dx = 2\pi \cdot \delta(\varepsilon-p), \quad (\delta - \text{дельта-функция}) \quad (52)$$

после преобразований получим:

$$C_n - G_n = \sum_m \int (r_m(\varepsilon))^{-1} K_{mn}(\varepsilon, p) G_m(\varepsilon) d\varepsilon, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots, \quad (53)$$

$$\text{где } K_{mn}(\varepsilon, p) = p \varepsilon K_{xmn}(\varepsilon, p) + q_m q_n K_{ymn}(\varepsilon, p), \quad (54)$$

$$K_{xmn} = \frac{1}{2\pi} \iint \mu_x e^{i(\varepsilon-p)x} s_m s_n dx dy, \quad (55)$$

$$K_{ymn} = \frac{1}{2\pi} \iint \mu_y e^{i(\varepsilon-p)x} c_m c_n dx dy. \quad (56)$$

Исключение C_n из (49), (53) приводит к бесконечной системе интегральных уравнений относительно функций G_n :

$$(1 + \chi_n) G_n + \sum_m \int r_m^{-1} K_{mn}(\varepsilon, p) G_m(\varepsilon) d\varepsilon = i r_n \rho_n^{-1} \chi_n \mu_0 J_{yn}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (57)$$

Для перехода к локальным и интегральным характеристикам модели следует воспользоваться соотношениями (48)-(50),

позволяющими вычислить Фурье-образ магнитного поля в каждой из областей I, II, III (разложения (13)-(21)), а также Фурье-образ вихревых токов (разложения (24), (25)); сами же локальные величины вычисляются с помощью обратного преобразования Фурье (2); интегральные величины вычисляются по выражениям (33), (38).

6°. В качестве примера рассмотрим два частных выражения функции J_y . При этом составляющие J_x определяются уравнением $\text{div } \vec{J} = 0$.

Так, однослойную обмотку шириной $2c$ с амплитудой поверхностного тока J_0 , чётным числом полюсов $2N$, полюсным делением $\tau = \pi/\alpha$, размещённую симметрично относительно осей x, y , описывает функция

$$J_y^{(1)} = J_0 e^{-i\alpha x} \theta(N\tau - |x|) \cdot \theta(c - |y|), \quad (58)$$

где θ - единичная функция Хевисайда. Соответственно

$$J_x^{(1)} = -J_0 i\alpha^{-1} (e^{-i\alpha x} - (-1)^N) \cdot \theta(N\tau - |x|) \cdot (\delta(y+c) - \delta(y-c)). \quad (59)$$

Понятно, что функция

$$J_y^{(2)} = J_y^{(1)}(x + \beta\tau, y) - J_y^{(1)}(x - \beta\tau, y), \quad (60)$$

где $J_y^{(1)}$ определяется равенством (58), описывает двухслойную обмотку с относительным шагом 2β , симметричную относительно x, y ; в этом случае в выражении (58) $2N$ - целое.

Подстановка (58), (60) в (47) приводит к следующим ненулевым коэффициентам J_{yn} :

$$J_{yn}^{(1)} = (2\pi L)^{-1/2} J_0 (-1)^{(n-1)/2} 4 \sin N\tau(p+\alpha)/(p+\alpha) \cdot \sin c q_n / q_n, \quad (61)$$

$$J_{yn}^{(2)} = 2i \sin \beta\tau p \cdot J_{yn}^{(1)}, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (62)$$

Можно также построить более сложные функции J_y , учитывающие структуру обмотки и размеры проводников [1, 2] или описывающие обмотку ЛАД с поперечным магнитным потоком [6].

7°. Рассмотрим функцию

$$j(x, y) = \begin{vmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{vmatrix} \theta(a - |x|) \cdot \theta(b - |y|), \quad M_{x,y} = \text{const}, \quad (63)$$

описывающую прямоугольный магнитопровод исчезающей толщины размеров $2a \times 2b$, имеющий поверхностные магнитные проницаемо-

сти M_x, M_y и размещённый симметрично относительно осей x, y . По аналогии с [4,5], значения $M_{x,y}$ приближённо равны произведению относительной магнитной проницаемости (в рассматриваемом направлении) на высоту магнитопровода. Для функции (63), согласно (55), (56), получаем:

$$K_{xmn} = M_x U \Lambda_{mn}^-, \quad K_{ymn} = M_y U \Lambda_{mn}^+, \quad (64), (65)$$

$$U(\xi, p) = (2\pi L)^{-1} 2 \sin a (\xi - p) / (\xi - p), \quad (66)$$

$$\Lambda_{mn}^{\pm} = \sin b (q_m - q_n) / (q_m - q_n) \cdot \cos (m-n)\pi/2 \pm \sin b (q_m + q_n) / (q_m + q_n) \cdot \cos (m+n)\pi/2. \quad (67)$$

Детальный анализ показывает, что в случае описания магнитопровода функцией (63) и обмотки - какой-либо из функций (58), (60) для чётных n имеет место $G_n = 0$ и в системе интегральных уравнений (57) $m, n = 1, 3, 5, \dots$

Функцией $\dot{j}(x, y)$ можно также моделировать разделённый магнитопровод ЛДД поперечного потока [6].

8°. Рассмотрим кратко три частных случая функции \dot{j} , в которых система интегральных уравнений (57) упрощается. Для каждого случая приведём соответствующее выражение ядра (54); выкладки при этом опустим.

I. $\dot{j} \neq \dot{j}(x)$. Учитывается "ферромагнитный поперечный эффект", не учитывается "ферромагнитный продольный эффект".

$$K_{mn}(\xi, p) = \delta(\xi - p) \cdot (p \xi Q_{xmn} + q_m q_n Q_{ymn}),$$

где $Q_{xmn} = \int \mu_x(y) s_m s_n dy, \quad Q_{ymn} = \int \mu_y(y) c_m c_n dy.$

Система (57) приобретает следующий вид:

$$(1 + \chi_n) G_n + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m^{-1} (p^2 Q_{xmn} + q_m q_n Q_{ymn}) G_m = i \Gamma_n p^{-1} \chi_n \mu_n J_{yn}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для произвольного фиксированного p значения функций $G_n(p), n = 1, 2, 3, \dots$, определяются бесконечной алгебраической системой уравнений.

В случае периодической зависимости \vec{J} от x параметр p принимает дискретные значения; в частности, $p = -\alpha$ для моногармонического \vec{J} (например, предел $N \rightarrow \infty$ в выражениях (58), (61); N - чётно). Соответственно упрощаются все характеристики модели (при этом \vec{F}, P следует относить к N).

2. $\dot{\mu} \neq \dot{\mu}(y)$. Учитывается "ферромагнитный продольный эффект", не учитывается "ферромагнитный поперечный эффект".

$$K_{mn}(\varepsilon, \rho) = \delta_{mn} \cdot (\rho \varepsilon N_x(\varepsilon, \rho) + q_m q_n N_y(\varepsilon, \rho)),$$

где
$$N_{x,y}(\varepsilon, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int \mu_{x,y}(x) e^{i(\varepsilon - \rho)x} dx.$$

Система (57) приобретает следующий вид:

$$(1 + \chi_n) G_n + \int_0^{\rho} r_n^{-1} (\rho \varepsilon N_x(\varepsilon, \rho) + q_n^2 N_y(\varepsilon, \rho)) G_n(\varepsilon) d\varepsilon = i r_n \rho^{-1} \chi_n \mu_0 J_{yn}.$$

Для произвольного фиксированного n , $n = 1, 2, 3, \dots$, функция $G_n(\rho)$ определяется интегральным уравнением.

3. $\dot{\mu} \neq \dot{\mu}(x, y)$. Модель без "ферромагнитных краевых эффектов".

$$K_{mn}(\varepsilon, \rho) = \delta(\varepsilon - \rho) \cdot \delta_{mn} \cdot (\rho \varepsilon \mu_x + q_m q_n \mu_y).$$

Система (57) приобретает следующий вид:

$$(1 + \chi_n) G_n + r_n^{-1} (\rho^2 \mu_x + q_n^2 \mu_y) G_n = i r_n \rho^{-1} \chi_n \mu_0 J_{yn}.$$

Для произвольных фиксированных ρ, n значение $G_n(\rho)$ определяется алгебраическим уравнением.

Полагая $\mu_x = \mu_y = \mu$ и стремя $\mu \rightarrow \infty$, приходим к модели [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Yoshida K. New transfer-matrix theory of linear induction machines, taking into account longitudinal and transverse ferromagnetic end effects. - Proc. IEE, 1981, vol. B 128, N 5, p. 225-236.
2. Yoshida K. Three-dimensional analysis of short-primary linear induction machines with finite iron length, width and depth using new transfer-matrix method. - Int. Conf. on Electrical Machines, Athens, Greece, 15-17 Sept. 1980, vol. I, p. 20-27.
3. Петражицкий А.С. Трёхмерная математическая модель линейного асинхронного двигателя с магнитопроводом в форме параллелепипеда. - В кн.: Бесконтактные электрические машины. Рига: Зинатне, 1980, вып. 19, с. 119-129.

4. Куков С.В. Однородно экранирующие тонкие ферромагнитные оболочки. - Журнал технической физики, т. 37, № 6, с. 1021-1024.

5. Вилнитис А.Я. К задаче внешнего рассеивания: учёт действия ярма линейной индукционной МГД-машины введением новых граничных условий. - Магнитная гидродинамика, 1978, № 2, с. 87-96.

6. Завицкий Э.А. Расчёт электромагнитных характеристик линейного асинхронного двигателя с поперечным магнитным потоком (ЛАДП). - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 57-68.

7. Oberretl K. Three-dimensional analysis of the linear motor. - In: Transport Without Wheels. London, 1977, p.217-247.

Статья поступила 15 февраля 1983 года

УДК 621.313:536.241

Л.Я.Шнидере
ЛГУ им. П.Стучки

ОДНОМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ
АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ В РЕЖИМЕ КОРОТКОГО
ЗАМЫКАНИЯ

В электромашиностроении определилась тенденция к возрастанию мощности электродвигателей при сохранении или минимальном увеличении их геометрических размеров и массы. Особое внимание уделяется оптимальному проектированию и эксплуатации электрических машин с точки зрения нагрева. Основным направлением исследования нагрева электрических машин в настоящее время является расчёт теплового состояния в нестационарных режимах работы — с изменяющимся графиком нагрузки, при случайно периодической нагрузке, в режиме короткого замыкания [1].

Одним из наиболее распространённых методов теплового расчёта асинхронных двигателей является метод эквивалентных тепловых схем [2], который обычно обеспечивает приемлемую для практических целей точность расчёта стационарных тепловых процессов. При расчёте нестационарного распределения температуры методом эквивалентных тепловых схем делаются дополнительные допущения применительно к конкретному режиму нагревания асинхронных электродвигателей [3].

Более точное описание нестационарных процессов нагревания в электрических машинах достигается методом температурного поля. Так как электрическая машина в отношении тепловых свойств является неоднородной средой, теплофизические характеристики

которой зависят от температуры, то также делаются допущения - выделяются наиболее существенные стороны теплопередачи, которые определяют т.н. физическую модель процесса. Математической моделью является уравнение нестационарной теплопроводности и граничные условия, описывающие физическую модель процесса, а также применяемый метод решения (обычно численный) и результат - нестационарное распределение температуры [4].

Одним из показателей интенсивности нагрева электрических машин считается скорость нарастания температуры для адиабатического нагрева в режиме короткого замыкания [5,6]. Наличие таких ориентировочных данных для большинства типопредставителей асинхронных двигателей [6] является основой для использования этого режима нагревания в качестве тестовой задачи для применяемого метода. Кроме того, как отмечается в [7], при анализе высокотемпературных режимов преобразования энергии ставится качественно новая задача - учёт влияния рабочих температур активных элементов электрических машин на рабочие характеристики, т.е., развиваемое усилие. Применительно к асинхронным электродвигателям это может оказаться несущественным из-за сравнительно низких рабочих температур, но тем не менее такой расчёт в режиме короткого замыкания является полезным для практических целей, так как допустимая продолжительность нагрева в режиме к.з. определяет требования к защите и надёжности асинхронного электродвигателя.

Метод температурного поля для теплового расчёта электрических машин применяется в двух направлениях - для расчёта стационарных температурных полей в отдельных элементах электрических машин [2] и разработки расчётных моделей [8,9] нестационарных тепловых процессов в них.

В этой связи предпринимается попытка моделировать одномерное нестационарное температурное поле асинхронного электродвигателя в целом [10]. При этом делаются следующие допущения:

а) область расчёта распределения температуры в радиальном направлении по поперечному сечению электродвигателя, состоящая из 6 подобластей, (рис. 1), рассматривается по основным элементам: 1) вал и сердечник ротора, 2) Этержень короткозамк-

нутой клетки ротора, 3) воздушный зазор, 4) обмотка статора, 5) сердечник статора, 6) корпус электродвигателя;

б) тепловой поток в поперечном сечении двигателя имеет только радиальную составляющую;

в) тепловой поток в продольном направлении двигателя рассматривается как эквивалентный отрицательный источник тепла;

г) теплоотдача на поверхности асинхронного электродвигателя происходит по линейному закону Ньютона, при этом рассматривается как свободная, так и вынужденная конвекция;

д) теплопроводность λ , плотность и удельная теплоёмкость среды ρ, c в каждой подобласти принимаются постоянными;

е) тепло выделяется только в стержнях клетки ротора и обмотке статора.

Уравнение нестационарной теплопроводности для расчётной области в одномерном приближении в цилиндрической системе координат пишется в следующем виде:

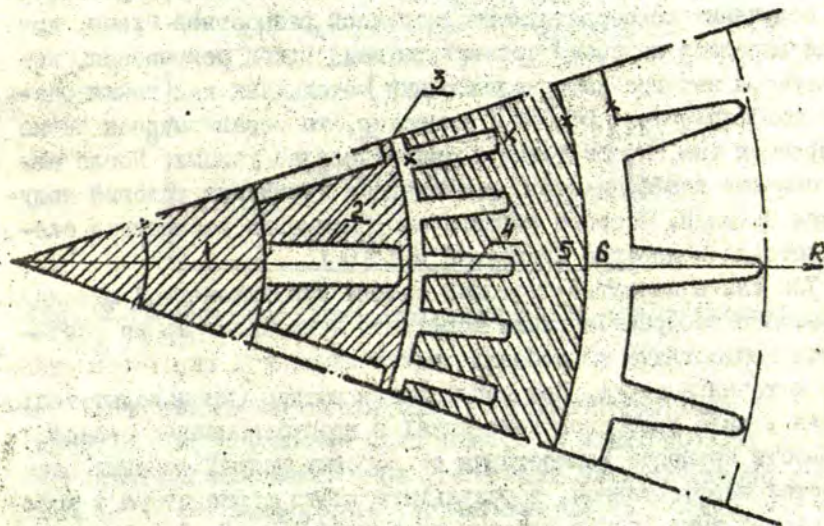


Рис. 1. Схема области расчёта распределения температуры в асинхронном электродвигателе.

$$c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(r) \cdot r \cdot \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right) + f(r,t), \quad (1)$$

$$\text{начальное условие} \quad u(r, 0) = u_0(r), \quad (1a)$$

$$\text{условие ограничения} \quad r \cdot \lambda(r) \cdot \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (1б)$$

и граничное условие при $r=1$

$$\lambda(r) \cdot \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \Big|_{r=1} = -\alpha (u|_{r=1} - u_s(t)), \quad (1в)$$

где $u(r,t)$ - искомое распределение температуры,

$f(r,t)$ - плотность источника тепла,

$u_0(r)$ - начальная температура,

$u_s(t)$ - температура окружающей среды,

c - удельная теплоёмкость среды,

ρ - плотность среды,

λ - коэффициент теплопроводности среды,

α - коэффициент теплоотдачи.

Для решения задачи (1-1в) используется численный метод конечных разностей. Так как среда неоднородна по своим теплофизическим характеристикам и коэффициенты уравнения разрывны, то для получения консервативной однородной разностной схемы, которая выражает на сетке соответствующий закон сохранения, используется интегро-интерполяционный метод. Так как точки разрыва коэффициентов c , ρ , λ и f известны, то неравномерная сетка выбирается так, чтобы точки разрыва были её узлами. После аппроксимации коэффициентов, уравнения и граничных условий получается неявная, второго порядка аппроксимации разностная схема, которая полностью приведена в [10].

Так как в качестве тестовой задачи для изложенной методики расчёта выбирается режим короткого замыкания, то не учитывается теплоотдача от лобовых частей обмотки в виде отрицательного источника тепла. При неподвижном роторе (происходит теплоотдача в виде свободной конвекции) и кратковременной продолжительности процесса теплоотдача от лобовых частей обмотки оказывается неэффективной, в результате этого температура в лобовых частях выше, чем в пазовых частях обмотки [5] электродвигателя.

Так как в режиме короткого замыкания асинхронного электро-

двигателя отношение силы тока в обмотке статора к номинальной, т.е., коэффициент нагрузки, равняется $K_n = 5+7$ в зависимости от типа асинхронного электродвигателя, и скорость нарастания температуры сравнительно велика [6], то учитывается зависимость от температуры источника тепла.

Плотность теплового источника как в статоре, так и в роторе рассчитывается по известному соотношению:

$$f = j^2 \cdot g, \quad (2)$$

где j - плотность тока (а/м^2),

g - удельное электрическое сопротивление ($\Omega \cdot \text{м}$).

Зависимость удельного электрического сопротивления от температуры учитывается по линейному закону:

$$g = g_0 (1 + \alpha u), \quad (3)$$

где g_0 - удельное электрическое сопротивление при температуре 0°C ,

α - температурный коэффициент сопротивления,

u - температура в $^\circ\text{C}$.

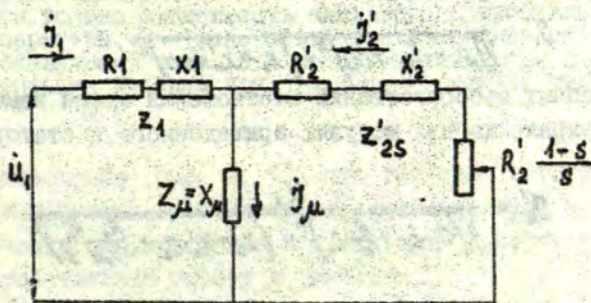


Рис. 2. Т-образная схема замещения асинхронного электродвигателя.

Зависимость плотности тока от температуры учитывается косвенно - как уменьшение силы тока \vec{I} в электрической цепи с заданным напряжением U при увеличении электрического сопротивления R . Эта зависимость рассчитывается по Т-образной схеме замещения (рис. 2) асинхронного электродвигателя, согласно которой находится следующее выражение для тока нагрузки \vec{I}_2 асинхронного электродвигателя в комплексной форме записи:

$$j_2 = \frac{U_2}{Z(s)} = \frac{U_2}{[R_2 + \frac{R_2'}{s} \cdot a(s)] + j[X_2 + X_2' \cdot b(s)]}, \quad (4)$$

- где U_2 - фазное напряжение обмотки статора;
 $Z(s)$ - начальное комплексное сопротивление схемы замещения;
 R_2 - активное сопротивление фазы обмотки статора;
 X_2 - реактивное сопротивление фазы обмотки статора;
 X_{μ} - реактивное сопротивление цепи намагничивания;
 R_2' - активное сопротивление фазы обмотки ротора, приведённое к статору;
 X_2' - реактивное сопротивление фазы обмотки ротора, приведённое к ротору;
 s - скольжение;

$$a(s) = \frac{1}{\left(\frac{R_2'}{X_{\mu} s}\right)^2 + \left(1 + \frac{X_2'}{X_{\mu}}\right)^2},$$

$$b(s) = a(s) \left(1 + \frac{X_2'}{X_{\mu}} + \frac{R_2'^2}{X_{\mu} \cdot X_2' \cdot s^2}\right),$$

Модуль тока j_2 из (4) равняется:

$$j_2 = \frac{U_2}{\sqrt{\left[R_2 + \frac{R_2'}{s} a(s)\right]^2 + \left[X_2 + X_2' b(s)\right]^2}} \quad (5)$$

После подобных преобразований соотношений схемы замещения получается выражение для модуля, приведённого к статору, тока ротора:

$$j_2' = \frac{U_2}{\sqrt{\left(R_2 C_2 + \frac{R_2'}{s} C_2\right)^2 + \left(X_2 + X_2' C_2 + \frac{R_2' \cdot R_2'}{X_{\mu} s}\right)^2}} \quad (6)$$

где

$$C_2 = 1 + \frac{X_2'}{X_{\mu}},$$

$$C_2 = 1 + \frac{X_2'}{X_{\mu}}.$$

Численные значения параметров для электродвигателя 4A132 S 8/4 рассчитываются согласно данным [6] при расчётной рабочей температуре 75°C: $R_2 = 4,45 \Omega$, $X_2 = 5,18 \Omega$, $X_{\mu} = 66,64 \Omega$, $X_{2\mu}' = 6,42 \Omega$, $R_{2\mu}' = 2,71 \Omega$ ($X_{2\mu}'$ и $R_{2\mu}'$ - значения в режиме короткого замыкания). Результаты трёх разных приближений зависимости потерь $P_{2\mu}$ в обмотке статора асинхронного электродвигателя 4A132 S 8/4 приводятся на рис. 3. Оказывается, что обыч-

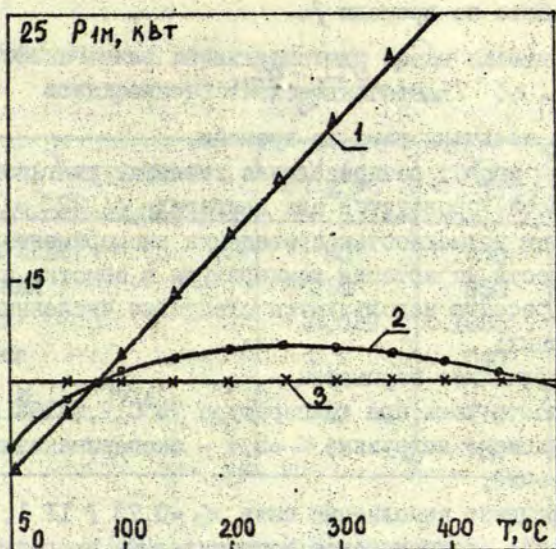


Рис. 3. Зависимость тепловых потерь P_m в обмотке асинхронного электродвигателя от температуры. 1 - учитывается только зависимость активного сопротивления от температуры, 2 - рассчитывается изменение активной составляющей тока, 3 - потери принимаются постоянными, равными потерям при расчетной рабочей температуре $T^* = 75^\circ\text{C}$

ное представление (рис. 3, 1), что тепловые потери в обмотке статора изменяются в зависимости от температуры пропорционально увеличению сопротивления при больших температурах ($> 100^\circ\text{C}$), вносит существенную ошибку в расчётах.

В программе численного расчёта на ЭММ распределения температуры по разностной схеме, приведённой в работе [10], коэффициент линейной части плотности источника тепла q и его разностный аналог d принимаются равными нулю, а зависимость плотности источника f - P тепла от температуры рассчитывается на каждом шагу по времени $j+1$ по формуле:

$$f_i^{j+1/2} = f(r_i, u_{max}^i + \Delta u^{j+1}), \quad (7)$$

где $f_i^{j+1/2}$ - разностный аналог плотности источника тепла;

U_{max}^j - максимальная температура в обмотке на предыдущем шаге по времени j ,

$$\Delta U^{j+1} = 1/2 \cdot \tau_{j+1} \cdot \frac{U_{max}^j - U_{max}^{j-1}}{\tau_j}, \quad (8)$$

τ_j - величина шага по времени.

Численный расчёт распределения температуры в асинхронном электродвигателе проводится для двигателя 4А132S 8/4. Этот выбор обусловлен возможностью проведения экспериментального измерения скорости нарастания температуры в обмотке электродвигателя. При расчёте используются следующие численные значения исходных данных:

а) электрические параметры -

плотность тока при температуре 75°C $7,5 \cdot 10^6 \text{ а/м}^2$,

коэффициент нагрузки $K_n = 5,4$ - экспериментально установленный,

коэффициент заполнения паза $K_s = 0,73$ [II],

удельное электрическое сопротивление проводника статора при температуре 20°C ,

$\rho_c = 1,78 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{м}$, удельное электрическое сопротивление проводника ротора $\rho_a = 2,87 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{м}$,

температурный коэффициент меди $\alpha_c = 0,0038 \text{ 1/К}$,

алюминия $\alpha_a = 0,0043 \text{ 1/К}$,

плотность тока в стержне ротора при температуре 75°C $j_a = 3,1 \cdot 10^6 \text{ а/м}^2$;

б) исходные данные для теплофизических параметров среды

элементов асинхронного электродвигателя приводятся в таблице I.

В основном используются литературные источники теплофизических характеристик [2, II] среды элементов электродвигателя. Начальная температура принимается равной температуре окружающей среды 20°C , коэффициент теплоотдачи от поверхности электродвигателя $\kappa = 15 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}$.

в) геометрические параметры в программу расчёта распределения температуры на ЭВМ вводятся следующие: внешний радиус электродвигателя $R_{вн} = 0,1225 \text{ м}$ и координаты границ элементов, т.е., точки разрыва $R_1 = 0,049 \text{ м}$ (1-2 элемент), $R_2 = 0,0775 \text{ м}$ (2-3 элемент), $R_3 = 0,0779 \text{ м}$ (3-4 элемент), $R_4 = 0,098 \text{ м}$ (4-5 элемент) и $R_5 = 0,11$ (5-6 элемент).

Теплофизические характеристики среды элементов
асинхронного электродвигателя

Подобласть или элемент	$\lambda \left(\frac{бр}{н.к} \right)$	$c \left(\frac{гос}{к^2.к} \right)$	$\gamma^2 \left(\frac{к^2}{н^3} \right)$
1 - сталь 2112	50	470	7800
2 - алюминий	210	950	2700
3 - воздух	0,029	1020	1,00
4 - обмотка	0,7	540	6370 (расчет)
5 - сталь 2112	50	470	7800
6 - чугун	47	500	7700

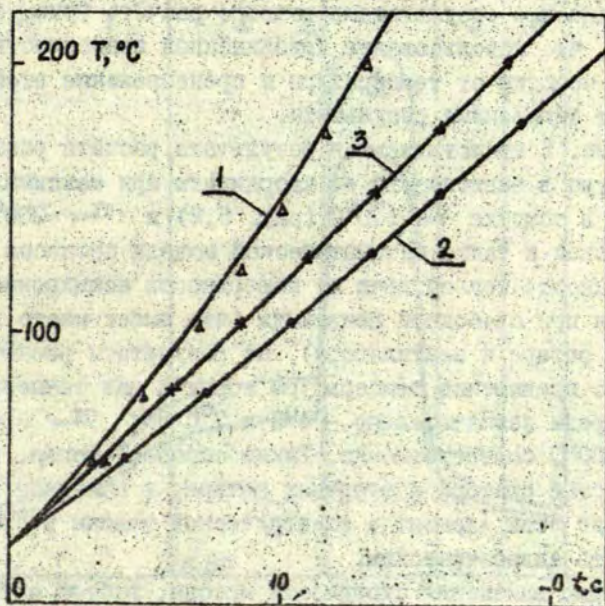


Рис. 4. Зависимость максимальной температуры T_{max} в обмотке асинхронного электродвигателя от времени t при трёх способах учёта зависимости источника тепла от температуры (см. рис.3).

Расчёт распределения температуры в радиальном направлении поперечного сечения асинхронного электродвигателя проводился при выше упомянутых трёх способах учёта зависимости плотности источника тепла (или тепловых потерь - рис. 3) от температуры. Результаты расчёта зависимости максимальной температуры в обмотке статора от времени представляются на рис. 4. График I на рис. 4 соответствует линейной зависимости плотности источника тепла от температуры (рис. 3, I), а график 3 рис. 4 - случаю, когда плотность источника тепла постоянна (рис. 3,3). Скорость нарастания температуры в обмотке асинхронного электродвигателя в режиме короткого замыкания рассчитывается по приближённой формуле [6]:

$$V_t = (K_n \cdot j)^2 / N, \quad (9)$$

где $N = 200$, если начальная температура равняется температуре холодного состояния $T = 20^\circ\text{C}$. Для коэффициента нагрузки $K_n = 5,4$ скорость нарастания температуры равняется $V_t = 8,2^\circ\text{C}/\text{сек}$, что совпадает с результатами точного расчёта (рис. 4,2). Оказывается, что использование приближённой зависимости тепловых потерь в обмотке от температуры и пренебрежение этой зависимостью дают завышенные результаты.

На рис. 5 представляются результаты расчёта распределения температуры в зависимости от координаты при максимальной температуре в обмотке $T_{\text{но}} = 140^\circ\text{C}$ (рис. 5,2) и $T_{\text{нах}} = 200^\circ\text{C}$ (рис. 5,1). В физической и также математической модели процесса учитывается возможность теплоотдачи от поверхности асинхронного электродвигателя при свободной конвекции (что имеет место при затор-моженном роторе и вентиляторе), но результаты расчёта показывают, что превышение температуры корпуса над температурой окружающей среды незначительно - 4°C и 7°C при $T_{\text{нах}} = 140^\circ\text{C}$ и $T_{\text{нах}} = 200^\circ\text{C}$ соответственно. Таким образом, тепло, выделяющееся в обмотке статора и стержнях ротора, в основном тратится на нагревание этих элементов электрической машины и процесс можно считать адиабатическим.

С целью выяснения сходимости метода, выбора оптимального шага по времени и выбора числа итераций на каждом временном шаге проводились расчёты при разных величинах шага τ . Характер графиков $T_{\text{нах}} = f(t)$ стабилизируется при $\tau < 1\text{с}$. При шаге по

времени $\tau = 0,5 \text{ с}$, числе итераций на каждом временном слое $n_i = 2$ и числе точек по радиусу $N = 50$ время расчёта одного варианта до 300°C на ЭВМ ЕС 1022 составляет около 1 мин.

Хорошее совпадение результатов расчёта максимальной температуры в обмотке асинхронного электродвигателя 4А132 S8/4 с справочными данными [6] позволяет делать следующие заключения:

1) несмотря на сделанные допущения при образовании физической модели процесса теплопередачи в асинхронном электродвигателе, в целом полученные результаты адекватно отражают распределение температуры в радиальном направлении и скорость нарастания температуры в обмотке при выше перечисленных исходных данных;

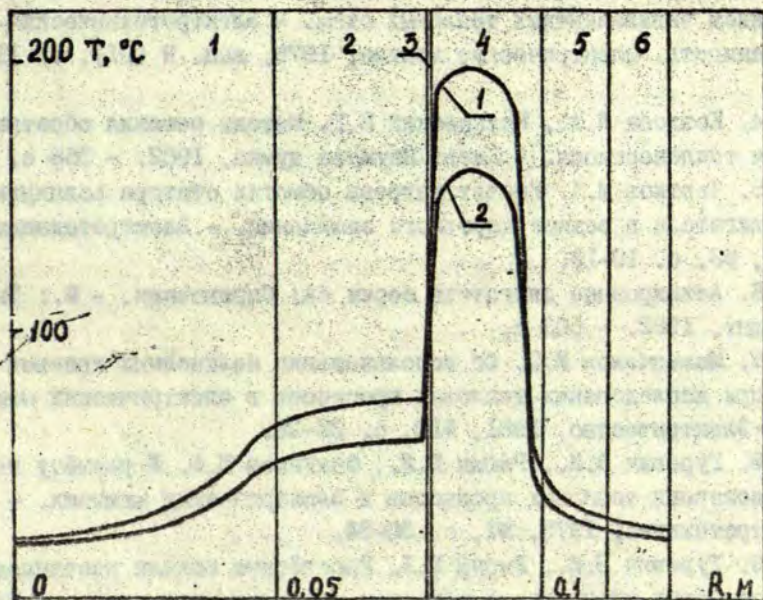


Рис. 5. Распределение температуры T по координате R расчетной области (см. рис. 1). 1 - при $T_{max} = 200^\circ\text{C}$, 2 - при $T_{max} = 140^\circ\text{C}$.

2) если зависимость тепловых потерь в обмотке от температуры учитывается только как увеличение активного сопротивления от температуры по линейному закону или не учитывается вообще, то расчёт распределения температуры даёт завышенные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Межотраслевой семинар "Охлаждение электрических машин". - Электротехническая промышленность. Электрические машины, 1979, вып. 10 (104), с. 17-18.
2. Борисенко А.И., Данько В.Г., Яковлев А.И. Аэродинамика и теплопередача в электрических машинах. - М.: Энергия, 1974. - 559 с.
3. Воробьёв В.А., Тубис Я.Б. Обобщённый метод расчёта квазистационарного режима нагрева асинхронных двигателей с использованием эквивалентных тепловых схем. - Электротехническая промышленность. Электрические машины, 1978, вып. 9 (91), с. II-14.
4. Коздоба Л.А., Круковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. - Киев: Наукова думка, 1982. - 358 с.
5. Чертков М.А. Расчёт нагрева обмотки статора асинхронного двигателя в режиме короткого замыкания. - Электротехника, 1975, №3, с. 10-13.
6. Асинхронные двигатели серии 4А: Справочник. - М.: Энергоиздат, 1982. - 503 с.
7. Мамедшахов М.Э. Об использовании нелинейных краевых задач при исследовании тепловых процессов в электрических машинах. - Электричество, 1981, №10, с. 22-26.
8. Гуревич Э.И., Рыбин Ю.Л., Филиппов И.Ф. К расчёту нестационарных тепловых процессов в электрических машинах. - Электротехника, 1975, №1, с. 30-34.
9. Гуревич Э.И., Рыбин Ю.Л. Расчётные модели нестационарных тепловых процессов в обмотках электрических машин. - Электротехника, 1975, №12, с. 35-38.

10. Грундулис А.О., Шнидере Л.Я. Методика расчета распределения температуры в асинхронном электродвигателе. - Труды ЛСХА, 1981, вып. 193, с. 55-65.

11. Яковлев Л.И. Исследование теплофизических характеристик электротехнических материалов. - В кн.: Аэродинамика и теплопередача в электрических машинах, 1978, вып. 8, с. 17-54.

Статья поступила 15 апреля 1983 г.

УДК 539.4

Г.-Ю.Шлютер

Ростокский университет им. В.Пика, г.Росток, ГДР

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЁННЫХ ПО
ПОПЕРЕЧНЫМ КРАЯМ РЕБРИСТЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН *

I. ВВЕДЕНИЕ

На рис. 1 схематически изображена прямоугольная пластинка с продольными рёбрами, которая будет исследоваться в этой работе при определённых граничных условиях на продольные и поперечные края. Она состоит из основной плиты и жёстко (без сдвига) с нею связанными продольными рёбрами, направленными параллельно продольному краю. Предполагается, что соединение обеих элементов однородное и происходит по линии. Рёбра должны иметь открытое поперечное сечение и их толщина должна быть существенно меньше расстояния между ними. В литературе известны следующие расчётные модели ребристых пластин:

- а) ортотропная пластинка;
- б) несущая решётка;
- в) пластинка с дискретно расположенными рёбрами.

Применение обеих первых моделей связано с применением существенных упрощений, которые могут привести к непригодным результатам [1, 2]. Метод ортотропной пластины предполагает "размазывание" дискретно расположенных рёбер по всему расстоянию между рёбрами, а также введение приведённых жёсткостей и

* Перевод Я.П.Варна (ЛГУ им. П.Стучки)

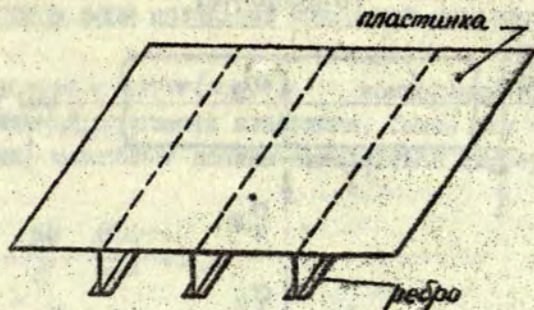


Рис. 1. Схематическое изображение прямоугольной пластинки с продольными подкреплениями

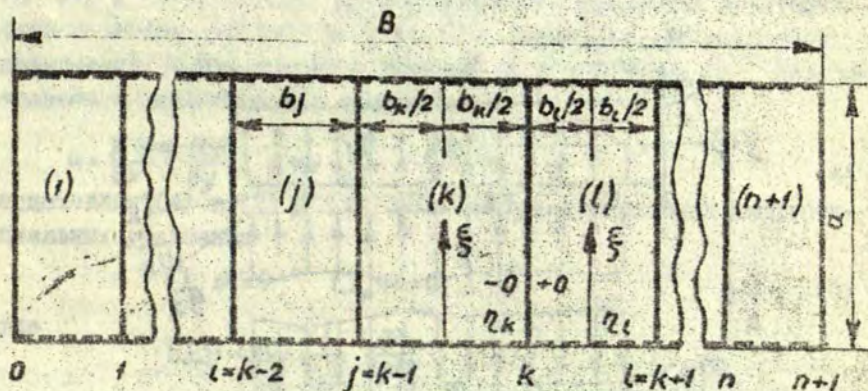


Рис. 3. Прямоугольная пластинка с продольными подкреплениями

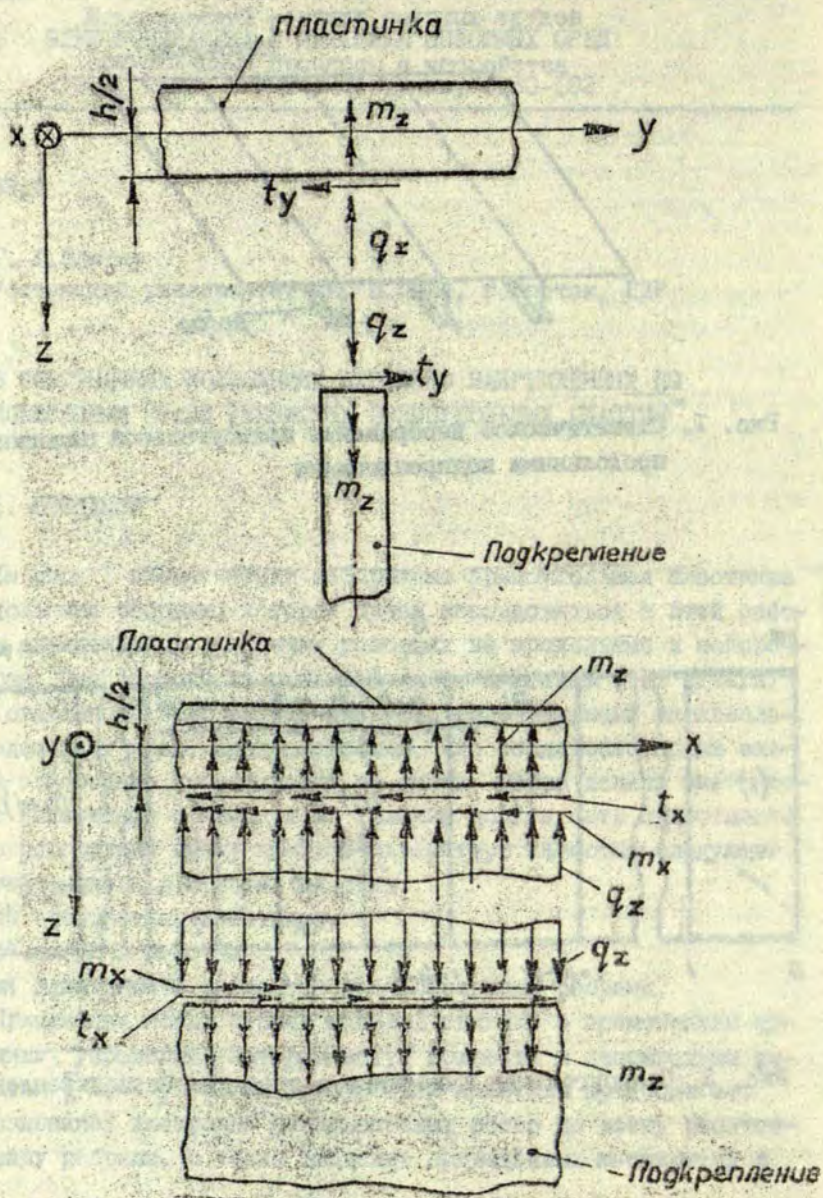


Рис. 2. Усилия и моменты в подкреплении, параллельном оси x

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ РЕБРИСТОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть $u, v, w = u, v, w(x, y, t)$ компоненты вектора перемещений срединной плоскости пластинки. Тогда для каждого элемента (секции) пластинки должны выполняться дифференциальные уравнения

$$\Delta \Delta w + \frac{\rho h}{K} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

$$\Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Уравнение (1) является известным уравнением колебаний пластинки, (2) и (3) - система дифференциальных уравнений эластодинамики в случае плоского напряжённого состояния для мембранных деформаций. С помощью двух функций $\Phi, \Psi = \Phi, \Psi(x, y, t)$, которые связаны с перемещениями соотношениями

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (4)$$

подставляя (4) в (2) и (3), получим два несвязанных дифференциальных уравнения

$$\square_1 \Phi = 0, \quad \square_2 \Psi = 0, \quad (5)$$

где

$$\square_{1,2} = \Delta - \frac{1}{c_{1,2}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

После определения Ψ и Φ , деформации и напряжения определяются в результате дифференцирования. Для напряжений имеем

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + (1-\mu) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right],$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - (1-\mu) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right], \quad \tau_{xy} = G \left[2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right]. \quad (6)$$

масс. Очевидно, эта модель ребристых пластин может быть использована только для приближённого расчёта основной частоты, или когда собственные колебания определяются в основном плитой. В случае модели несущей решётки ребристая пластина рассматривается как стержневая конструкция. Этот метод можно успешно использовать лишь если колебательное движение определяется в основном подкреплениями.

Модель "в" встречается в литературе с упрощениями различной значительности. Самое распространённое упрощение заключается в том, что пренебрегается деформациями в срединной плоскости пластины. Ниже будет показано, что при этом могут возникнуть значительные ошибки. Значительное улучшение достиг Shimizu [3], который эти деформации учёл и тем самым может удовлетворить условия "сшивания" между отдельными элементами плиты. В данной работе, основываясь на [3], предложены дальнейшие улучшения, в которых учитываются деформации сдвига рёбер и все силы инерции, имеющие место в плите и в рёбрах. Ребристая оболочка рассматривается как несущая конструкция, состоящая из трёх элементов: пластина-мембрана-стержень. Для пластинки используется теория пластин Кирхгофа-Лява, для мембраны - теория эластодинамики для плоского напряжённого состояния, для стержня - расширенная теория стержней В.З.Власова. Таким образом, в исследованиях принимаются соответствующие данным теориям гипотез, обоснованность которых доказана многочисленными экспериментами.

Цель предложенной работы состоит в том, чтобы получить сравнительные данные для приближённых методов (см., например, [4]), одновременно оценить влияние обычных упрощений, а также по возможности в более обобщённом виде представить зависимость собственных колебаний от высоты стержня, расстояния между стержнями и толщины плиты и получить данные о напряжённом состоянии плиты и рёбер. Более подробное рассмотрение указанной проблематики можно найти в [5, 6, 7].

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial x} \\ t_y \\ q_z + \frac{\partial t_x}{\partial x} \cdot \frac{h}{2} \\ m_x - t_y \cdot \frac{h}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F & S_z & S_y & S_{\omega_p} \\ -S_z & J_{zz} & J_{yz} & J_{\omega_p y} \\ -S_y & J_{yz} & J_{yy} & J_{\omega_p z} \\ -S_{\omega_p} & J_{\omega_p y} & J_{\omega_p z} & J_{\omega_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(0)} \\ v_p^{(0)} \\ w_p^{(0)} \\ \delta^{(0)} \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} \ddot{u}' \\ \ddot{v}'_p \\ \ddot{w}'_p \\ \ddot{\delta}'' \end{bmatrix} - 6J_d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta'' \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_y & S_z \\ 0 & 0 & S_y & J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} v' \\ w' \end{bmatrix} = \frac{1}{GF} \begin{bmatrix} \frac{1}{K_{yy}} & \frac{1}{K_{yz}} \\ \frac{1}{K_{yz}} & \frac{1}{K_{zz}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_z \\ S_y - F \frac{h}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -J_{zz} & -J_{yz} \\ -J_{yz} & -J_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'' \\ v''_p \\ w''_p \\ \delta'' \end{bmatrix} - \rho \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v}' \\ \ddot{w}' \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Для стержня третьего элемента ребристой пластины - имеем систему дифференциальных уравнений (7), (8). Здесь t_x, t_y, q_z, m_x - контактные усилия и моменты, v_p, w_p - перемещения точки P стержня в результате чистого изгиба, δ - искривление поперечного сечения. Обозначения $F, S_y, S_z, J_{yy}, J_{yz}, S_{\omega p}, J_{\omega p y}, J_{\omega p z}, J_{\omega p}, J_{zz}$ - использованы для общеизвестных величин, согласно теории стержней В.З.Власова, K_{yy}, K_{yz}, K_{zz} - множители, учитывающие сдвиг поперечного сечения профиля стержня, * - означает дифференцирование по времени t , ' - по продольной координате стержня x . На рис. 2 представлена система координат для стержня и указана ориентация сил и моментов. Кроме рассмотренных дифференциальных уравнений для изгиба пластинки, мембраны и стержня, должны быть удовлетворены также определённые условия "сшивания" решений. Рассмотрим равновесие пластинки в непосредственной близости от одного ребра. Отсюда и на основании чисто кинетических соображений следуют условия "сшивания" для мембраны и пластинки

$$\left. \begin{aligned} u^{+0} &= u^{-0}, & n_{yx}^{+0} - n_{yx}^{-0} &= t_x \\ v^{+0} &= v^{-0}, & n_y^{+0} - n_y^{-0} &= t_y \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} w^{+0} &= w^{-0} \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^{+0} &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^{-0} \\ Q_y^{+0} - Q_y^{-0} &= q_z + \frac{h}{2} \frac{\partial t_x}{\partial x} \\ M_y^{+0} - M_y^{-0} &= \frac{h}{2} t_y - m_x \end{aligned} \right\} \quad (9'')$$

Усилия и моменты в мембране и в пластине (плите), мы можем выразить также через деформации. Тогда вместо (9) получим

$$\left. \begin{aligned} u^{+0} - u^{-0} &= 0 \\ v^{+0} - v^{-0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{+0} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{-0} &= \frac{2}{(1-\mu)N} t_x \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^{+0} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^{-0} &= \frac{1}{N} t_y \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

$$\left. \begin{aligned} w^{+0} - w^{-0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{+0} - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^{-0} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^{+0} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^{-0} &= \frac{1}{K} \left(m_x - \frac{h}{2} t_y\right) \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)^{+0} - \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)^{-0} &= -\frac{1}{K} \left(q_z + \frac{h}{2} \frac{\partial t_x}{\partial x}\right) \end{aligned} \right\} \text{(IO")}$$

В пластине имеет место скачок напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y^{+0} - \sigma_y^{-0} &= \frac{1}{h} \left(1 + 6 \frac{z}{h}\right) t_y - \frac{12z}{h^3} m_x, \\ \sigma_x^{+0} - \sigma_x^{-0} &= \mu (\sigma_y^{+0} - \sigma_y^{-0}), \\ \tau_{xy}^{+0} - \tau_{xy}^{-0} &= \frac{1}{h} t_x. \end{aligned} \right\} \text{(II)}$$

Все величины с верхним индексом "+0" относятся к точкам за линией контакта в положительном направлении оси y , а "-0" - непосредственно перед линией контакта. Из (IO) следует, что первая производная от u и v , а также вторая и третья производные от w , перпендикулярно продольному направлению ребра, могут иметь скачок. То же самое относится к распределению напряжений.

3. ПОДКРЕПЛЕННАЯ В ПРОДОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПЛАСТИНКА С ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ КРАЯМИ

Элемент прямоугольной продольно ребристой пластинки, в результате отбрасывания обеих боковых элементов, ограничивается двумя продольными стержнями и двумя шарнирами на поперечных краях ($x = \text{const}$). Для перемещений u , v , w имеем граничные условия (условия Навье):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = v = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Только при этих граничных условиях можно сразу получить выра-

жения для перемещений, которые удовлетворяют дифференциальным уравнениям (I) - (3). Они имеют форму

$$\left. \begin{aligned} qu(\xi, \eta, t) &= [A_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \eta + A_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \eta + \alpha_3 (A_3 \operatorname{sh} \alpha_3 \eta + \\ &\quad + A_4 \operatorname{ch} \alpha_3 \eta)] \cdot \cos \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ qv(\xi, \eta, t) &= [\alpha_1 (A_1 \operatorname{sh} \alpha_1 \eta + A_2 \operatorname{ch} \alpha_1 \eta) + A_3 \operatorname{ch} \alpha_3 \eta + \\ &\quad + A_4 \operatorname{sh} \alpha_3 \eta] \cdot \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ qw(\xi, \eta, t) &= (B_1 \operatorname{ch} \alpha_1 \eta + B_2 \operatorname{sh} \alpha_1 \eta + B_3 \cos \alpha_2 \eta + \\ &\quad + B_4 \sin \alpha_2 \eta) \cdot \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где

$$q = \frac{m\pi}{a}, \quad \xi = qx, \quad \eta = qy,$$

$$\gamma = \frac{\omega}{q^2} \sqrt{\frac{\rho h}{K}}, \quad \nu = \frac{\rho}{G} \left(\frac{\omega}{q}\right)^2,$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\gamma + 1}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\gamma - 1}, \quad 1 < \gamma < \infty,$$

$$\alpha_3 = \sqrt{1 - \frac{1-\nu}{2}\gamma}, \quad \alpha_4 = \sqrt{1-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Для определения пока неизвестных постоянных $A_i, B_i, i = 1, 2, 3, 4$, на боковых краях $y = \text{const}$ могут быть поставлены произвольные условия. Рассмотрим k -тый элемент пластинки (рис. 3), введём понятие о деформации края и заменим ими постоянные $A_i, B_i, i = 1, 2, 3, 4$. Таким образом, для перемещений вблизи k -того ребра имеем (рис. 3):

$$\left. \begin{aligned} qu_k(\xi, t) &= \bar{u}_k \cos \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ qv_k(\xi, t) &= \bar{v}_k \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ qw_k(\xi, t) &= \bar{w}_k \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ \bar{\theta}_k(\xi, t) &= \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_k = \bar{\theta}_k \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Эти крайние деформации должны равняться деформациям стержней. Для деформаций изгиба k -того ребра имеем

$$\left. \begin{aligned} qV_{p,k}(\xi, t) &= \bar{v}_{p,k} \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ qW_{p,k}(\xi, t) &= \bar{w}_{p,k} \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

для усилий и моментов

$$\left. \begin{aligned} t_{x,k}(\xi, t) &= T_{x,k} \cos \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ t_{y,k}(\xi, t) &= T_{y,k} \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ q_{z,k}(\xi, t) &= \bar{Q}_{z,k} \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ m_{x,k}(\xi, t) &= \bar{M}_{x,k} \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Составляющие вектора перемещений (12) можно выразить через неизвестные пока деформации краёв $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \theta_k, \bar{u}_j, \bar{v}_j, \bar{w}_j, \theta_j$:

$$\left. \begin{aligned} qu(\xi, \eta_k, t) &= [(f_1 + f_2)\bar{u}_k + (f_3 + f_4)\bar{v}_k + (f_1 - f_2)\bar{u}_j + (f_3 - f_4)\bar{v}_j] \cos \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ qv(\xi, \eta_k, t) &= [(f_5 + f_6)\bar{u}_k + (f_7 + f_8)\bar{v}_k + (f_5 - f_6)\bar{u}_j + (f_7 - f_8)\bar{v}_j] \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ qw(\xi, \eta_k, t) &= [(g_1 + g_2)\bar{w}_k + (g_3 + g_4)\theta_k + (g_1 - g_2)\bar{w}_j + (g_3 - g_4)\theta_j] \sin \xi \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Здесь f_i, g_i — известные функции безразмерной координаты η_k , причём

$$-q \frac{b_k}{2} \leq \eta_k \leq q \frac{b_k}{2}.$$

Наша задача состоит в определении краевых деформаций (метод деформаций). Если они известны, можно определить напряжённо-деформированное состояние каждого элемента пластины и ребра.

В результате введения $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \theta_k, k = \bar{1}, \dots, n$, обеспечена кинематическая совместимость между отдельными элементами пластины и рёбрами. Кинетическая совместимость также гарантирована, так как в каждом ребре выполняются соответственно последние два из соотношений (10) и (10'). В метричной форме они имеют вид:

как решение для каждого стержня имеет четыре неизвестных, для системы из n стержней имеем систему уравнений порядка $4n$. Матрица выражения (18) является несимметричной.

Для определения собственных частот ребристой пластины, которые мы будем выражать через безразмерный параметр γ , должны быть определены нули определителя системы (18). Если они известны, можно вычислить также деформации ребра $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k, \theta_k$ ($k = 1, \dots, n$) и вместе с этим определить также относительное напряжённо-деформированное состояние для каждого элемента пластины и ребра.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для некоторых частных случаев в [5] проведен численный расчёт (18): для случая равноотстоящих ребер, для прямоугольной пластины с ребром посредине и с двумя равноотстоящими ребрами при шарнирном закреплении продольных краёв, а также для пластинки с тремя и четырьмя равноотстоящими ребрами в случае защемлённых продольных краёв. В качестве жёсткого подкрепления применялся стержень Т-образного и углового поперечного разреза, широко употребляющиеся в судостроении. Имеются три безразмерных параметра: высота подкрепления (ребра) $H^* = Hq$, толщина плиты $h^* = hq$, расстояние между подкреплениями $b^* = bq$. В зависимости от этих параметров были получены собственные значения γ , собственные формы и относительная зависимость напряжений.

Между собственным значением γ и собственной частотой ν имеется соотношение:

$$\gamma = \frac{hq}{4\sqrt{3(1-\nu^2)}} m \sqrt{\frac{E}{\rho a^2}} \cdot \nu \quad (m = 1, 2, \dots)$$

где m означает число полуволн в направлении продольных подкреплений. Здесь приведено обобщение следующих исследований, проведённых в [5]:

1. Зависимость собственных частот от Hq, bq, hq .

2. Влияние деформаций отгиба в подкреплениях (ребрах) на собственные частоты.

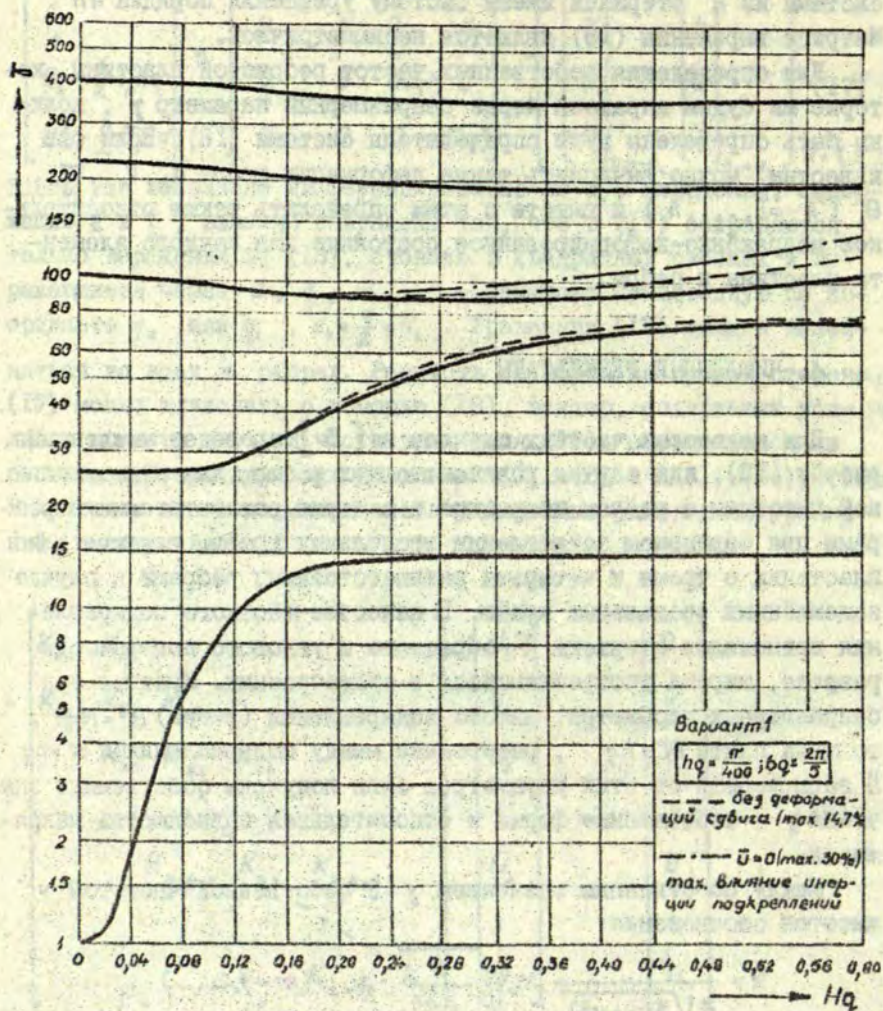


Рис. 4. Безразмерная собственная частота γ первой симметричной собственной формы для полосы пластинки с равноотстоящими ребрами в зависимости от безразмерной высоты ребра H_q (вариант I)

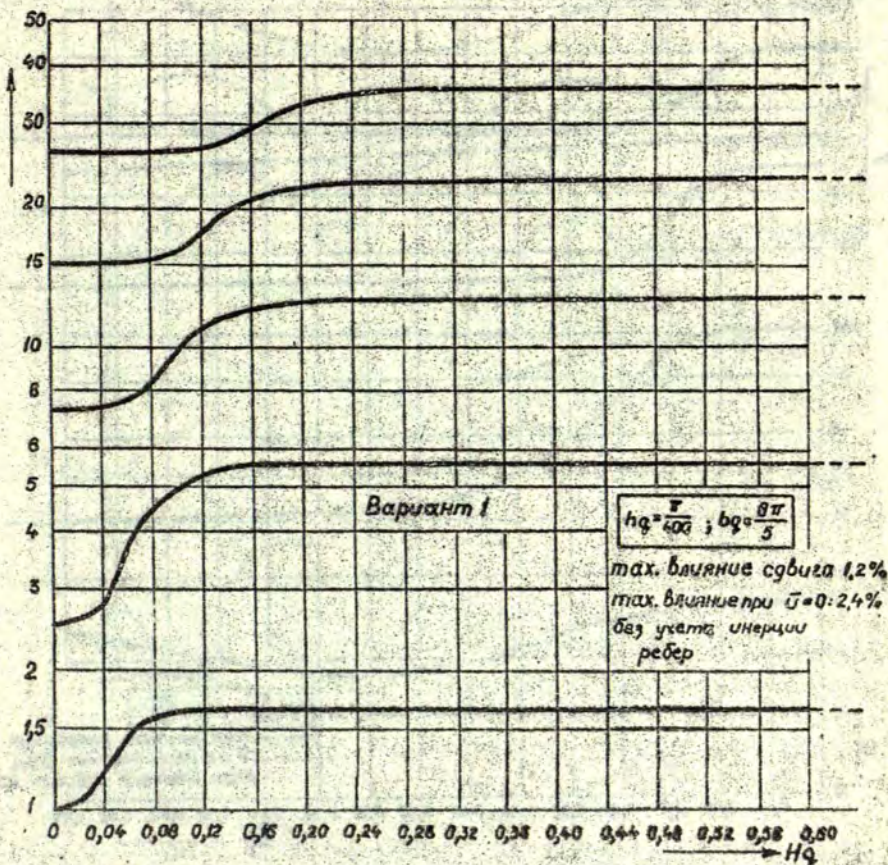


Рис. 5. Безразмерная собственная частота γ первой симметричной собственной формы для полосы пластинки с равноотстоящими ребрами в зависимости от безразмерной высоты ребра Hq (вариант I).

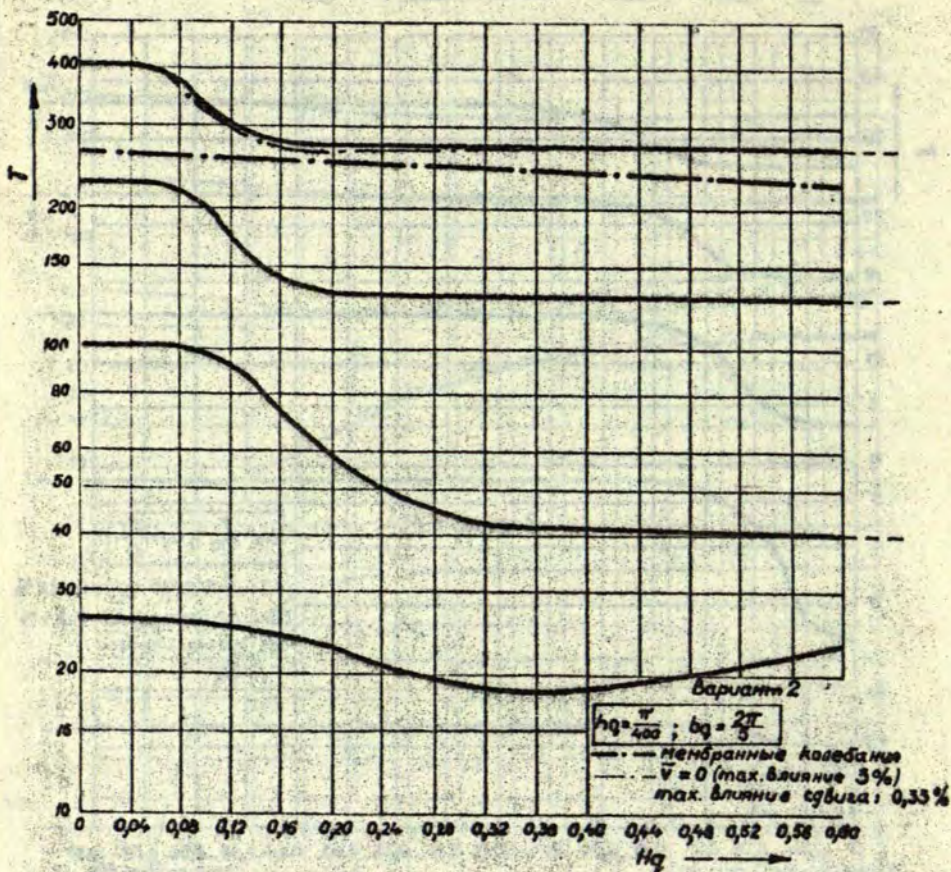


Рис. 6. Безразмерная собственная частота γ первой симметричной собственной формы для полосы пластинки с равноотстоящими рёбрами в зависимости от безразмерной высоты ребра Hq (вариант 2)

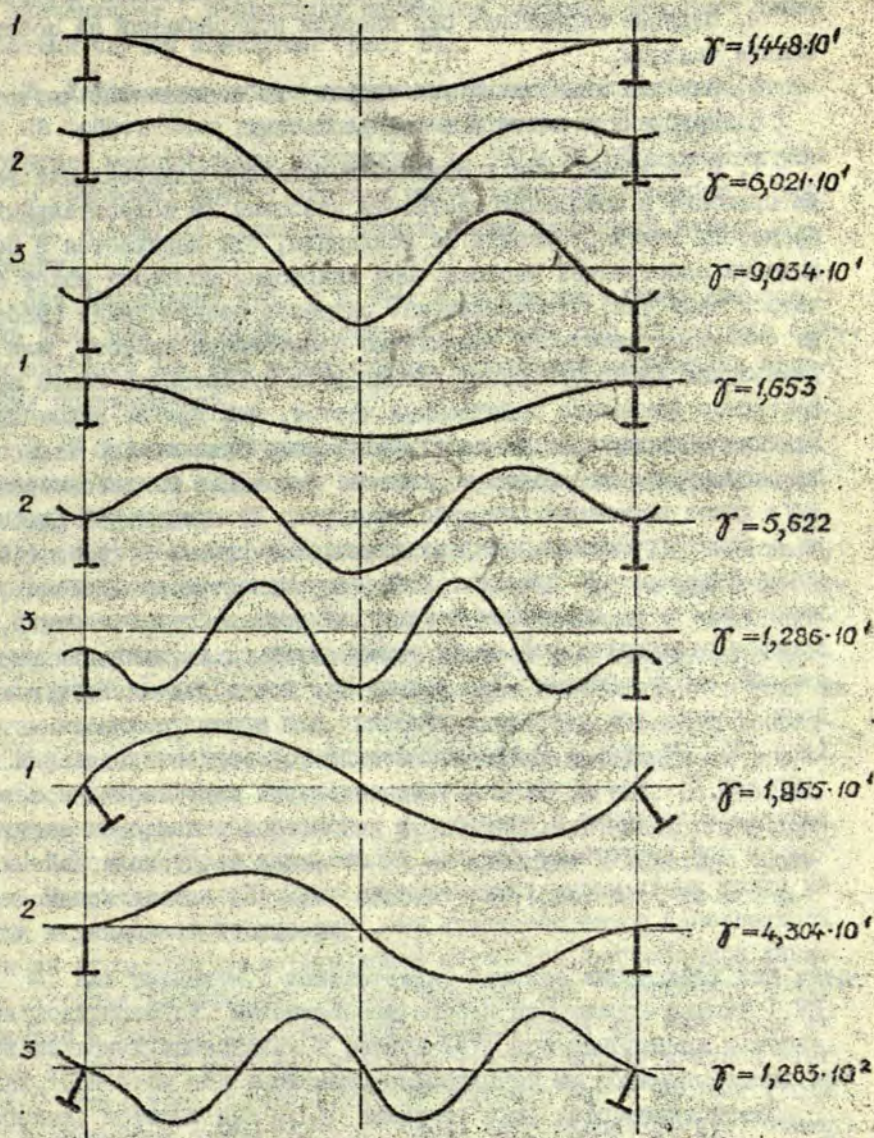


Рис. 7. Первые три формы собственных колебаний (прогиб w) для вариантов, изображённых на рис. 4, 5, 6 при $Hq = 0,32$

3. Влияние мембранных деформаций на собственные частоты.
4. Влияние аксиальных сил инерции подкреплений на собственные частоты.
5. Влияние мембранных сил инерции на собственные частоты.
6. Нагрузки в плите и в подкреплениях.

1. В то время, как в статике добавление подкреплений всегда приводит к повышению жёсткости пластины, в колебательных процессах может произойти её понижение, что выражается в понижении собственной частоты. При некоторых условиях может случиться даже так, что увеличение размеров подкреплений (рёбер) не оказывает заметного влияния на собственную частоту, или при уменьшении жёсткости рёбер достигается существенно более эффективное изменение собственных частот, чем при её повышении. Влияние подкрепления на собственные колебания сильно зависит от рассматриваемой формы колебаний. Это видно из рассмотрения двух типов колебаний (см. рис. 4 - рис. 7) продольной пластины с равноотстоящими подкреплениями. В варианте I (рис. 4, 5), когда подкрепления приводят к чистому поперечному движению, надо указать на повышение частот для первых форм колебаний, которое становится всё более значительным с увеличением расстояния между рёбрами. Чем больше bq , тем вернее действуют подкрепления как жёсткое защемление для элемента пластины (рис. 5). На рис. 6, 7 представлен другой вариант поведения (вариант 2). Здесь подкрепления совершают ясно выраженное вращательное движение и вызывают в основном понижение частоты. Только при достаточно больших расстояниях между подкреплениями может иметь место увеличение частоты. Различное поведение подкреплений можно объяснить тем, что при трансляционном движении подкреплений полностью используется их жёсткость на изгиб и преобладает над влиянием массы, уменьшающей частоту, в то время как при вращательном движении подкреплений в результате незначительной сопротивляемости кручению и большому моменту инерции можно отметить противоположный результат. Положение (суперпозиция) этих обоих эффектов можно наблюдать у пластин, подкреплённых двумя и более рёбрами (рис. 8). Увеличение размеров подкреплений также приводит, в результате к увеличению частоты, однако, если они становятся больше некоторо-

го значения Hq , происходит понижение частоты. Возможен также обратный случай поведения (рис. 8).

2. Деформации сдвига подкреплений могут значительно влиять на собственные частоты. Это влияние на рис. 4 и рис. 5 достигает максимальное значение в 14,7% и 16,8% соответственно. В некоторых других случаях могут возникнуть ошибки порядка 25%. К тому же сдвиг на каждую форму колебаний влияет по-разному.

Как показывают рис. 4 и рис. 8, в каждом случае имеются лишь одна или две формы колебаний, которые при достаточно большом значении Hq ещё имеют сильно выраженные поперечные колебания подкреплений.

3. В большинстве публикаций, посвящённых вычислению собственных частот ребристых пластин, пренебрегают деформациями в срединной плоскости пластинки. Рис. 4 показывает, что в результате этого могут возникнуть большие ошибки. Для собственных частот они могут достигнуть 65% и больше. Ошибка увеличивается с уменьшением расстояния между подкреплениями и увеличением высоты подкреплений. Конечно, и здесь это относится в каждом случае лишь к одной или двум формам колебаний, и к тому же к тем же самым, что в п.2. Рассмотренная здесь ошибка возникла в результате пренебрежения мембранными деформациями в продольном направлении подкреплений ($\bar{u}=0$). На рис. 6 показано влияние мембранных деформаций перпендикулярно осям подкреплений. Как видно, упрощение $\bar{v}=0$ не приводит к заметным ошибкам. Максимальное значение ошибки - 3% (рис. 6), что полностью оправдывает допущение.

4. Для варианта I использовано влияние аксиальных сил инерции подкреплений. Максимальная ошибка получилась равной 1,2% при изгибных колебаниях и равной 147% при мембранных колебаниях. При этом под изгибными колебаниями мы понимаем такие колебания, которые при $Hq=0$ вызывают лишь деформации изгиба ($u=v=0, w \neq 0$), а мембранными колебаниями - в которых $u \neq 0, v \neq 0, w=0$. При расчётах изгибных колебаний влиянием указанных сил инерции можно пренебречь.

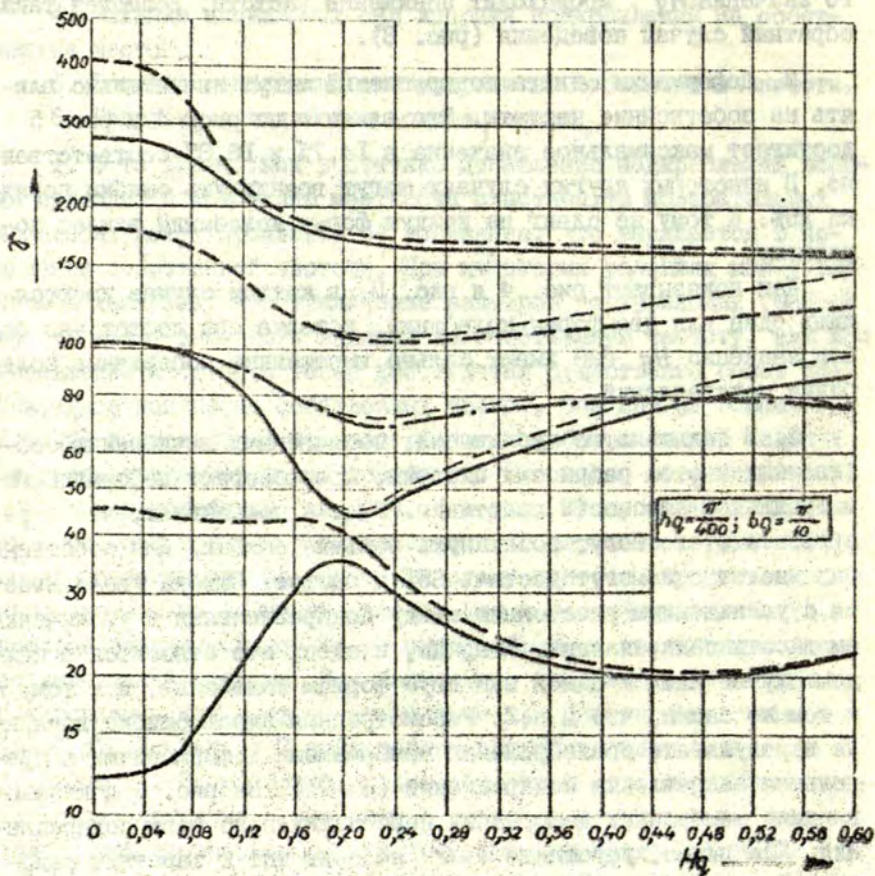


Рис. 8. Безразмерные собственные частоты для первых шести собственных форм для прямоугольной пластинки с двумя равноотстоящими рёбрами и шарнирно закреплёнными продольными краями в зависимости от безразмерной высоты ребра Hq .

5. Рассмотрим и здесь вариант I. В изгибных колебаниях ошибка не превышает 2%. Мембранные колебания, разумеется, полностью отсутствуют. Конечно, вырисовываются одна или две линии, похожие на гиперболы, в зависимости от того, учитываются или нет деформации сдвига подкреплений. При этом вычисляются частоты, которые на самом деле не существуют.

Можно сделать общий вывод, что при вычислении собственных частот надо учитывать как аксиальные силы инерции подкреплений, так и мембранные силы инерции. Если рассматриваются мембранные колебания, должны быть учтены обе составляющие сил инерции, что особенно рекомендуется в случае густого расположения подкреплений ($bq \approx \frac{\pi}{10}$). Существенны также граничные условия для мембранных деформаций. Мембрана в случае незащемлённых краёв имеет существенно меньшие собственные частоты, чем в случае защемления, так что собственные частоты мембранных колебаний могут достичь одинаковые значения с низшими частотами изгибных колебаний (рис. 8).

Рис. 9 показывает зависимость напряжений для пластины, подкреплённой двумя равноотстоящими рёбрами. Дано также отношение напряжений в подкреплениях к суммарно максимальным напряжениям в пластинке $\sigma_{sr} / |\sigma|$ и безразмерное отношение экстремальных напряжений в пластине к экстремальным деформациям пластинки $\sigma/s = \sigma_{Ext.} / Eqw_{Ext.}$. Наибольшие напряжения в пластинке возникают всегда в местах соединения пластинки и подкрепления. Как констатировал Shimizu [3], этим фактом объясняется возникновение трещин в окрестности подкреплений. Максимальные напряжения в подкреплениях даже при выраженном трансверсальном движении почти всегда существенно меньше максимальных напряжений в пластинке. Таким образом, в случае ребристых пластин пластинка является элементом, где могут возникнуть наиболее опасные напряжения, которые возрастают при одинаковой максимальной деформации вместе с порядком колебаний.

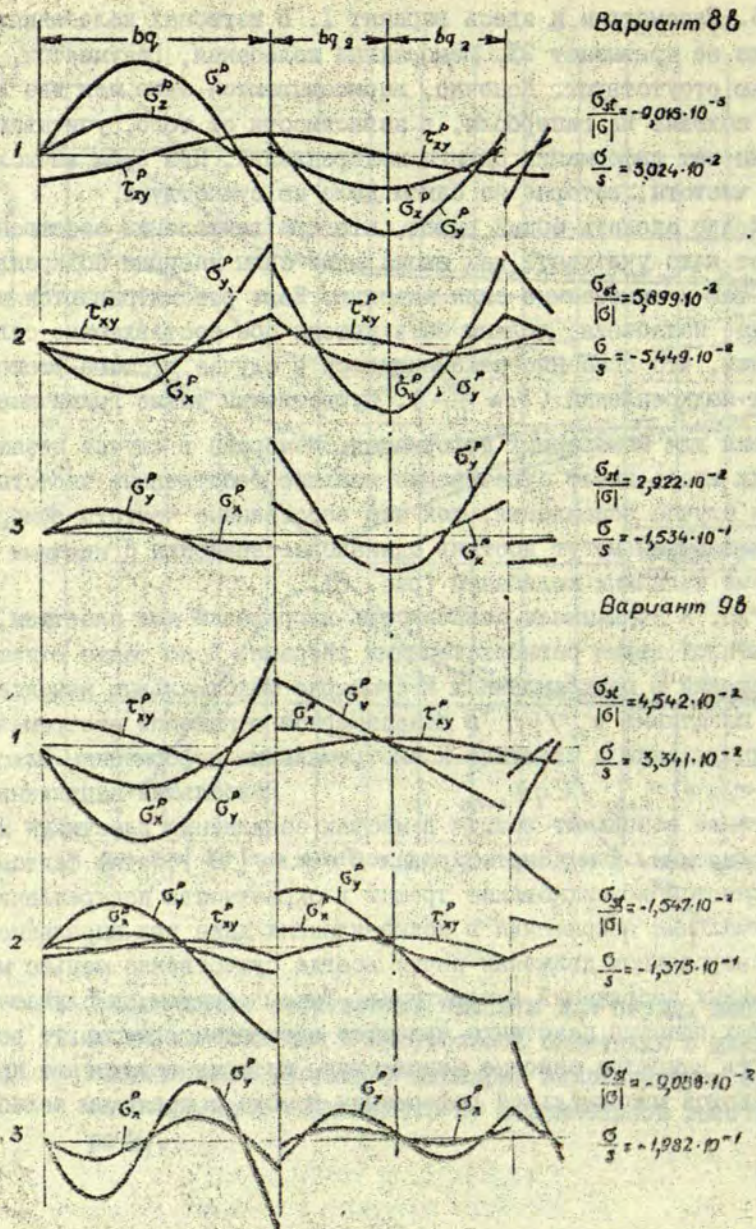


Рис. 9. Напряжения в прямоугольной пластинке с двумя равноотстоящими подкреплениями и шарнирно закрепленными краями
 $(h\eta = \frac{2\pi}{400}; H\eta = 0,32; b\eta = \frac{2\pi}{5})$

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Численные расчёты некоторых специальных случаев для ребристой пластинки с шарнирно закреплёнными поперечными краями были проведены с целью получить по возможности более обширную информацию о процессе собственных колебаний таких плоских несущих конструкций и прийти к более общим умозаключениям. Особенности отдельных случаев, как, например, условия симметричности или асимметричности, использовались для сокращения затрат на вычисления. Несмотря на это, время вычислений сильно возрастало с увеличением числа подкреплений. Для получения 225 собственных значений, которые были необходимы для построения трёх частотных диаграмм для каждого случая, вычислительной машине СДС 1604 для полосы пластинки потребовалось 4', для пластинки с четырьмя равноотстоящими подкреплениями - 20'.

Собственные значения находились способом, в котором сперва увеличивалось значение в пошаговом процессе до изменения знака в двух последовательных точках, чем определялся интервал, в котором находится корень. Потом происходило уточнение собственного значения с определённой заданной точностью.

Эта работа была выполнена по заданию судостроительного завода г. Ростов и при поддержке Института судостроения г. Ростов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schumann M. Zur Berechnung orthogonal-anisotroper Rechteckplatten unter Berücksichtigung der diskontinuierlichen Anordnung der Rippen. - Der Stahlbau, 29 (1960), 10, S. 302-309.
2. Short R.D. Theoretical determination of natural modes of deck vibrations. - Marine Technologie, January 1966, S. 66-79.
3. Shimizu S. On the Dynamical Stress Distribution of Stiffened Plate during Vibration. - Rep. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, 1968, Vol. XVI, No 54, S. 165-209.

4. Malkowski P. Berechnung der Eigenfrequenzen von Klapp-
ter Rechteckplatten mit Hilfe der Methode finiter Elemente.
- Forschungsbericht, Rostock, Universität, 1972.

5. Schlüter H.-J. Über das Eigenschwingungsverhalten
der längsverrippten Rechteckplatte mit drehbar gelagerten
Querrändern. Dissertation, Rostock, Universität, 1973.

6. Schlüter H.-J. Die Berechnung des Eigenschwingungs-
verhaltens der längsverrippten Rechteckplatte mit drehbar
gelagerten Querrändern. - Schiffbauforschung, II (1972),
3/4.

7. Schlüter H.-J. Über das Eigenschwingungsverhalten
des äquidistant längsverrippten Plattenstreifens mit drehbar
gelagerten Rändern. - Schiffbauforschung, II (1972), 3/4.

8. Wlassow W.S. Dünnwandige elastische Stäbe, Band I
und 2. - VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1964/65.

Статья поступила 15 февраля 1982 г.

УДК 539.4:534.1

Я.П. Варна
ЛГУ им. П.Стучки

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ ТОРЦЕВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

1. Постановка задачи

Исследованию динамики сферических оболочек посвящено сравнительно много работ отечественных [1,4,5,6] и зарубежных [2,3] исследователей. В [1] рассматривался начальный этап переходных процессов в сферической оболочке, нагруженной локальным динамическим давлением в полюсе, без учёта отражения волн от торца оболочки. Методом разложения решения в ряд по формам собственных колебаний в постановке классической теории оболочек в [2,3] исследовалась реакция сферической оболочки на воздействие динамического давления. Аналогичные задачи решались также вариационно-разностным методом [4] и обратно-характеристическим методом [5]. Задача о распространении волн в сферической оболочке по безмоментной теории, с использованием интегрального преобразования Лапласа, решалась в [6].

В результате в конструкциях полимерных и композиционных материалов возникает необходимость проводить исследования по теории, учитывающей деформации поперечного сдвига. Кроме того, большинство имеющихся работ посвящено изучению воздействия кратковременного динамического давления, а волновые процессы вследствие торцевых ударов являются мало изученными. В

том числе в стороне от внимания исследователей остался вопрос о концентрации динамических напряжений в полюсе оболочки в зависимости от скорости нагружения при торцевых импульсных воздействиях.

Рассмотрим изотропную, симметричную, упругую сферическую оболочку с углом полураствора α_0 , радиусом срединной поверхности R и постоянной толщиной h . Уравнения движения в перемещениях согласно теории С.П.Тимошенко, учитывающей инерцию вращения нормального к срединной поверхности элемента и деформации поперечного сдвига в осесимметричном случае имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} (\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 1 - \nu)\theta_1 + (1 - \nu)\theta_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= 0, \\ -(1 + \nu)\theta_1 + \epsilon(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 1 - \nu)\theta_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= 0, \\ -\frac{3 + \nu}{2}\theta_1 + \frac{1 - \nu}{2}\theta_2 + (\frac{1 - \nu}{2}\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + 1 - \nu)w &= 0 \end{aligned} \quad (I.1)$$

Здесь $\Delta f \equiv \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\sin \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha})$,

θ_1 и θ_2 функции, связанные с безразмерными перемещениями по формулам:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} [\sin \alpha u(\alpha, \tau)] + 2w(\alpha, \tau), \\ \theta_2 &= \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} [\sin \alpha \psi(\alpha, \tau)], \end{aligned} \quad (I.2)$$

где $u = u^*/R, w = w^*/R$ - безразмерные перемещения (здесь и в дальнейшем звездочкой обозначены размерные величины); ψ - угол поворота нормали, α - угол долготы, отсчитываемый от полюса, $\tau = t \cdot c / R$ - безразмерное время; $c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$ - скорость продольной волны в сферической оболочке; ν - коэффициент Пуассона, $\epsilon = \frac{h^2}{12R^2}$ - геометрический параметр оболочки.

Безразмерные усилия и моменты, введенные по формулам

$$N_k = \frac{N_k^*(1-\nu^2)}{Eh}, M_k = \frac{M_k^* 12R(1-\nu^2)}{Eh^3}, \theta_\alpha = \frac{\theta_\alpha^*(1-\nu^2)}{Eh} \quad (I.3)$$

$$k = \alpha, \beta$$

связаны с перемещениями следующим образом:

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha} &= \frac{\partial u}{\partial \alpha} + w(1+\gamma) + \gamma \operatorname{ctg} \alpha u, \\
 N_{\beta} &= \gamma \frac{\partial u}{\partial \alpha} + w(1+\gamma) + u \operatorname{ctg} \alpha, \\
 \theta_{\alpha} &= \frac{1-\gamma}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - u + \psi \right), \\
 M_{\kappa} &= \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \gamma \psi \operatorname{ctg} \alpha, \\
 M_{\beta} &= \gamma \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \psi \operatorname{ctg} \alpha.
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

2. Метод решения

Система (I.I) имеет сравнительно простое аналитическое решение. После интегрального преобразования Лапласа по времени решение будем искать в форме функций, удовлетворяющих уравнениям:

$$\Delta \bar{w} = \lambda \bar{w}, \quad \Delta \bar{\theta}_1 = \lambda \bar{\theta}_1, \quad \Delta \bar{\theta}_2 = \lambda \bar{\theta}_2
 \tag{2.1}$$

Здесь \bar{w} , $\bar{\theta}_1$, $\bar{\theta}_2$ обозначены изображения соответствующих величин.

В результате подстановки (2.1) в систему (I.I) получаем следующее характеристическое уравнение для определения $\lambda = \lambda(p)$:

$$a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0,
 \tag{2.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1-\gamma}{2}, \quad a_2 = -(2-\gamma)p^2 + (1-\gamma)^2, \\
 a_3 &= \frac{5-\gamma}{2} p^4 + \left(\varepsilon^{-1} \frac{1-\gamma}{2} - \frac{2\gamma^2 - 11\gamma + 1}{2} \right) p^2 + \\
 &\quad + (\gamma^2 - 4\gamma - 1) \frac{1-\gamma}{2} + \varepsilon^{-1} \frac{1-\gamma}{2} (1-\gamma^2), \\
 a_4 &= -p^6 - p^4 \left(\frac{7\gamma+1}{2} + \varepsilon^{-1} \frac{1-\gamma}{2} \right) + p^2 \left[\frac{7\gamma+5}{2} (1-\gamma) - \right. \\
 &\quad \left. - \varepsilon^{-1} \frac{1-\gamma}{2} (1+3\gamma) \right] + (1-\gamma^2) (\varepsilon^{-1} - 1) (1-\gamma)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Решения (I.5) при каждом λ_k $k=1,2,3$ выражаются через сферические функции Лежандра первого и второго рода [8]. Постоянные в общем решении системы (I.I) в изображениях (линейная комбинация шести сферических функций) определяются из преобразованных по Лапласу граничных условий и условия ограниченности решений в полюсе оболочки ($\alpha = 0$). Учитывая последнее требование и свойства функций Лежандра, по изображениям формул (I.2), (I.4) можно определить все кинематические и силовые характеристики в пространстве ИПИ:

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \sum_{k=1}^3 A_k \Omega_k P_{\mu_k}(\cos \alpha), \\ \bar{u} &= -\sum_{k=1}^3 A_k \Omega_{u_k} \frac{\sin \alpha}{\lambda_k} P_{\mu_k}^{(1)}(\cos \alpha), \\ \bar{\psi} &= -\sum_{k=1}^3 A_k \Omega_{\theta_{2k}} \frac{\sin \alpha}{\lambda_k} P_{\mu_k}^{(1)}(\cos \alpha), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\bar{N}_\alpha = \sum_{k=1}^3 A_k \left\{ P_{\mu_k}(\cos \alpha) [\Omega_{u_k} + (1+\gamma)\Omega_{w_k}] + P_{\mu_k}^{(1)}(\cos \alpha) \frac{1-\gamma}{2} \cos \alpha \Omega_{u_k} \right\},$$

$$\bar{N}_\beta = \sum_{k=1}^3 A_k \left\{ P_{\mu_k}(\cos \alpha) [\gamma \Omega_{u_k} + (1+\gamma)\Omega_{w_k}] - P_{\mu_k}^{(1)}(\cos \alpha) \frac{1-\gamma}{\lambda_k} \Omega_{u_k} \cos \alpha \right\},$$

$$\bar{M}_\alpha = \sum_{k=1}^3 A_k \Omega_{\theta_{2k}} \left[P_{\mu_k}(\cos \alpha) + \frac{1-\gamma}{\lambda_k} \cos \alpha P_{\mu_k}^{(1)}(\cos \alpha) \right],$$

$$\bar{M}_\beta = \sum_{k=1}^3 A_k \Omega_{\theta_{2k}} \left[\gamma P_{\mu_k}(\cos \alpha) - \frac{1-\gamma}{\lambda_k} \cos \alpha P_{\mu_k}^{(1)}(\cos \alpha) \right],$$

$$\bar{\theta}_\alpha = -\frac{1-\gamma}{2} \sum_{k=1}^3 A_k \frac{\sin \alpha}{\lambda_k} P_{\mu_k}^{(1)}(\cos \alpha) [\Omega_{\theta_{2k}} - \Omega_{\theta_{1k}} + (2+\lambda_k)\Omega_{w_k}].$$

Здесь $P_{\mu_k}(x)$ - функция Лежандра первого рода,

$$P_{\mu_k}^{(1)} = \frac{d}{dx} P_{\mu_k}(x), \quad \mu_k = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \lambda_k},$$

$$\Omega_{w_k} = \frac{1-\gamma}{2} (\lambda_k - p^2 + 2), \quad \Omega_{\theta_{1k}} = \frac{1-\gamma}{2} [(1-\gamma)(\lambda_k + 2) - 3p^2],$$

$$\Omega_{\theta_{2k}} = -\left[(\lambda_k - p^2 - 1 - \gamma) \left(\frac{1-\gamma}{2} \lambda_k - p^2 + 1 - \gamma \right) + \frac{3+\gamma}{2} p^2 \right],$$

(2.5)

$$\Omega_{u_k} = \Omega_{\theta_{1k}} - 2\Omega_{w_k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Для нахождения постоянных A_k $k=1,2,3$ используются три граничных условия на торце $\alpha = \alpha_0$. Граничные условия, выражающиеся через определённые комбинации перемещений и их производные, после подстановки в них соотношений (2.4) образуют линейную алгебраическую систему уравнений третьего порядка относительно A_k $k=1,2,3$. Правые части этих уравнений зависят от нагружающих функций $f_k(p)$ $k=1,2,3$, т.е. зависят от параметра интегрального преобразования p .

После определения A_k $k=1,2,3$ задача сводится к нахождению оригиналов по заданным изображениям по Лапласу. Анализ соотношений (2.1) - (2.5) показал, что кроме особых точек функций нагрузки $f_k(p)$ $k=1,2,3$, изображения усилий, моментов и перемещений имеют в качестве особенностей лишь полюса первого порядка, находящиеся на мнимой оси и определяемые как корни уравнения

$$\Delta_0(p) = 0 \quad (2.6)$$

где $\Delta_0 = \Delta_0(p, \lambda_k, \epsilon, \gamma, \alpha_0)$ - определитель системы граничных условий. Для нахождения p_k $k=1,2,\dots$ при различных граничных условиях составлена программа расчёта на языке ФОРТРАН/ЕС. Значения корней используются в другой программе, производящей расчёт кинематических и силовых характеристик напряжённо-деформированного состояния.

3. Продольный удар по полусферической оболочке

В качестве числового примера рассмотрим переходные процессы в полусферической ($\alpha_0 = 90^\circ$) изотропной оболочке, на свободный торец которой действует приложенное внешнее продольное усилие $N^*(t)$. Соответствующие безразмерные граничные условия имеют вид:

$$N_\alpha \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = \frac{N^* \left(\frac{\tau \cdot R}{c} \right) (1 - \gamma^2)}{E h}, \quad M_\alpha \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = 0, \quad \alpha_\alpha \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = 0 \quad (3.1)$$

Правую часть первого граничного условия (3.1) в дальнейшем обозначим через $f(\tau)$ и выберем в следующей форме:

$$f(\tau) = A \exp(-\beta \tau) (1 - \exp(-\gamma \tau))^n, \quad (3.2)$$

где β, γ, n - параметры нагрузки, с помощью которых можно менять длительность и характер действия импульса (характерная форма представлена на рис. 1, кривая 4), A - нормирующий множитель. В этом пункте рассмотрим реакцию оболочки на "короткое" воздействие, т.е. продолжительность воздействия существенно меньше времени прохождения волной расстояния, равного радиусу оболочки.

На рис. 1 - рис. 5 $R/h=20, \gamma=0,3, \beta=10, \delta=1, n=4, \tau_f=0,336\tau_0$ - время возрастания импульса до максимального значения).

На рис. 1-5 приведены зависимости от времени в различных K -тых точках срединной поверхности

$$\alpha_k = \frac{\pi}{6}(k-1), \quad k=1, 2, 3, 4$$

Таким образом, кривая 1 соответствует полюсу полусферической оболочки и т.д.

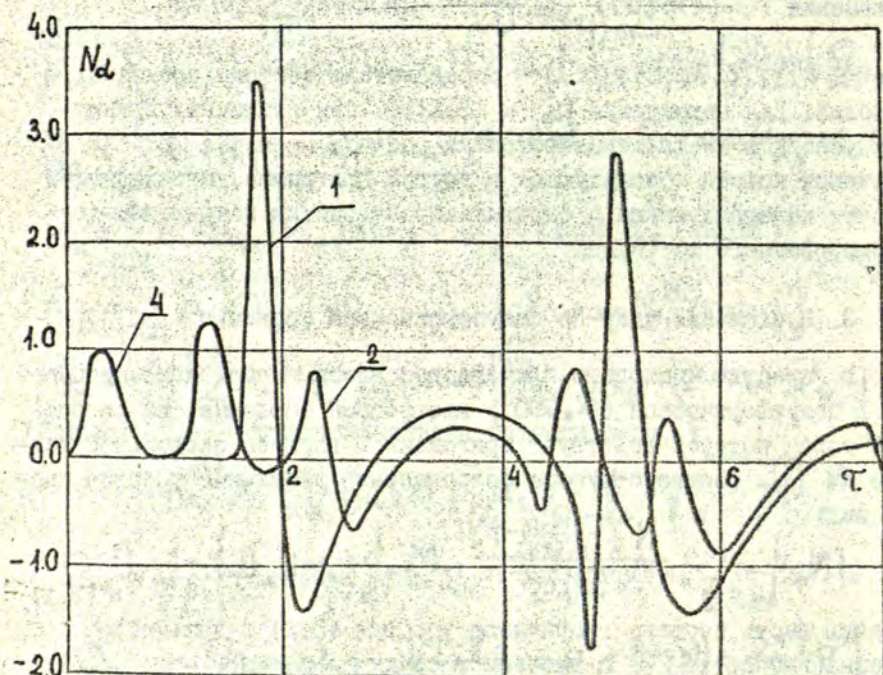


Рис. 1. Продольные усилия в полусферической оболочке.

На рис. 1 изображена зависимость поля продольных усилий $N_{\alpha}(\alpha, \tau)$ от безразмерного времени в точке 1 и точке 2 полусферической оболочки, к торцу которой ($K=4$) приложен нормированный динамический импульс. Характерной особенностью процесса деформирования является ярко выраженная концентрация напряжений в полусфере оболочки. В сравнительно большой окрестности торца оболочки ($\alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$) распространение волн в начальной стадии деформирования мало отличается от аналогичных процессов в цилиндрических оболочках (форма и максимальное значение приложенного импульса почти не меняется).

Введём коэффициент, характеризующий концентрацию продольных усилий в различных точках оболочки:

$$K_N(\alpha) = \frac{\max_{\tau} N_{\alpha}(\alpha, \tau)}{\max_{\tau} f_N(\tau)}$$

В точке 2 ($\alpha = \frac{\pi}{6}$) импульс продольных усилий приходит лишь с небольшими изменениями в форме и в максимальном значении ($K_N(\frac{\pi}{6}) = 1,25$). Опасные для прочности напряжения возникают лишь в непосредственной близости от полюса. При воздействии рассматриваемого импульса $K_N(0) = 4,0$. Необходимо отметить, что при $\alpha = 0$

$$N_{\alpha}(\alpha, \tau) \equiv N_{\beta}(\alpha, \tau)$$

и $K_N(0)$ характеризует также концентрацию окружных усилий. В точке $\alpha = 0$ за основным импульсом следует импульс противоположного знака, но меньших значений $K_N = 1,4$. Учитывая, что полимерные и композитные материалы гораздо легче разрушаются при растяжении, чем при сжатии, указанный вторичный импульс также может привести к разрушению оболочки. Распространение продольных усилий имеет ярко выраженный волновой характер. После отражения от свободного торца оболочки импульс меняет знак, при $\tau \approx 4,25$ доходит до точки 2 и в момент времени $\tau \approx 4,5$ начинаются сильные возмущения в полусфере. Форма основного импульса постепенно меняется: он становится уже и несколько ниже. Первостепенное значение приобретают следующие за ним возмущения противоположного знака.

Зависимость окружных усилий $N_{\beta}(\alpha, \tau)$ от времени в точке приложения нагрузки (кривая 4 рис. 2) качественно очень похо-

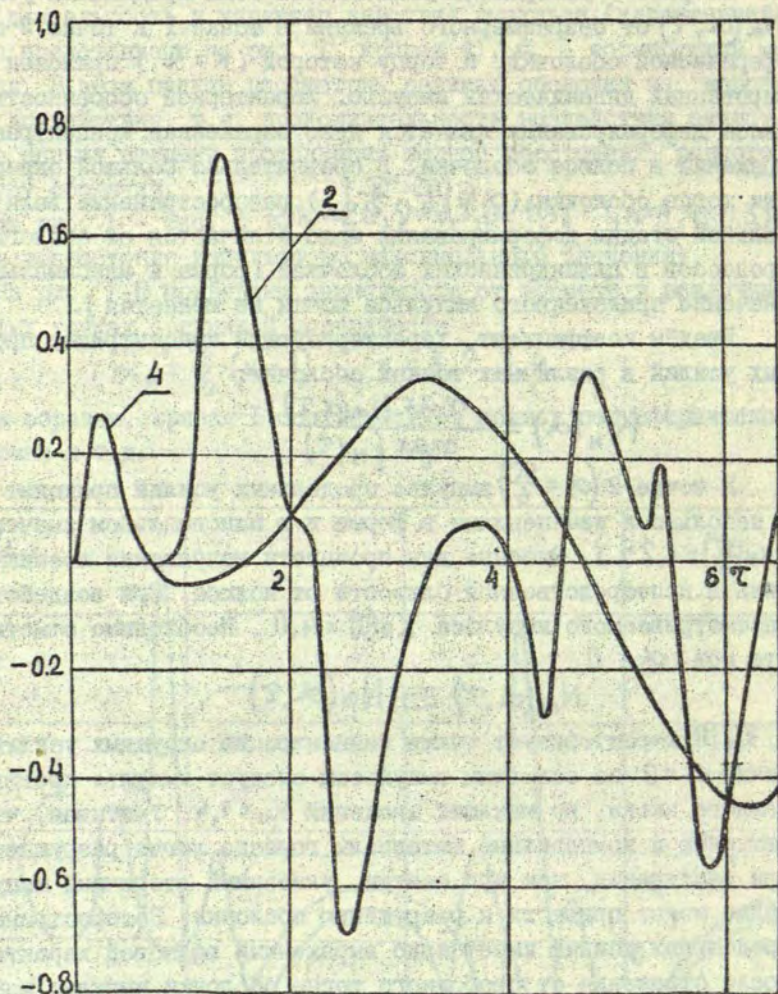


Рис. 2. Зависимость окружных усилий N_p от безразмерного времени.

жа на аналогичную зависимость для цилиндрической оболочки [9]. Однако, возникающие в дальнейшем медленные колебания больше по амплитуде, чем в случае цилиндрической оболочки.

Возникновение и постепенное развитие моментов $M_{\alpha}(\alpha, \tau)$ в оболочке изображено на рис. 3. В точке 3 моменты появляются сразу после прихода волны растяжения-сжатия, и их максимальные значения в дальнейшем мало меняются. Моменты в полусе оболочке примерно в два раза больше, и происходит постепенное увеличение максимальных значений (раскачивание "оболочки").

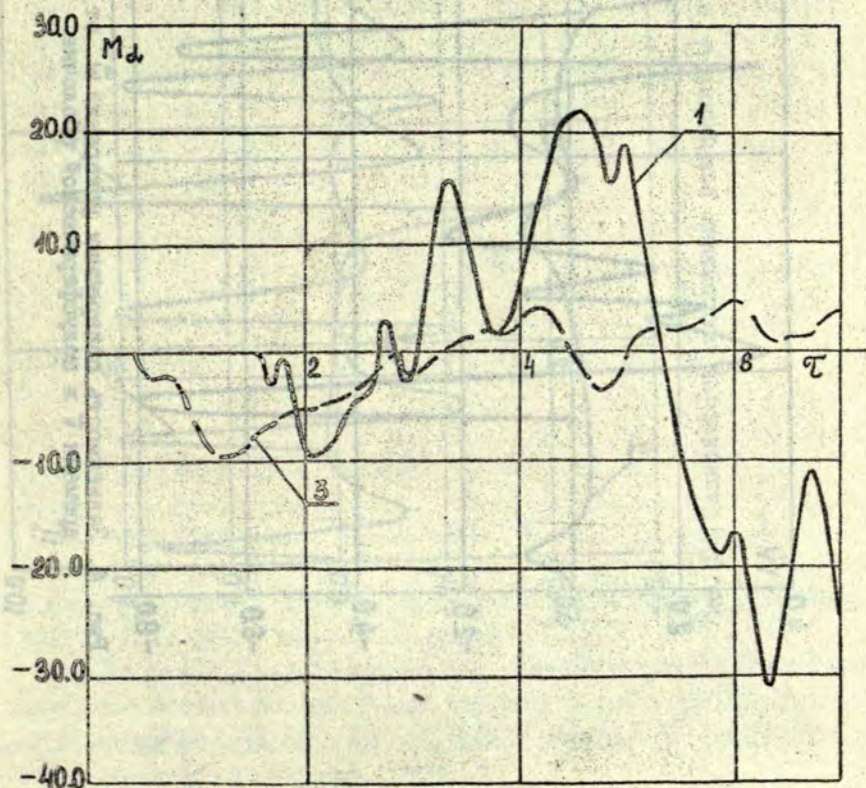


Рис. 3. Безразмерные моменты M_{α} в полусферической оболочке.

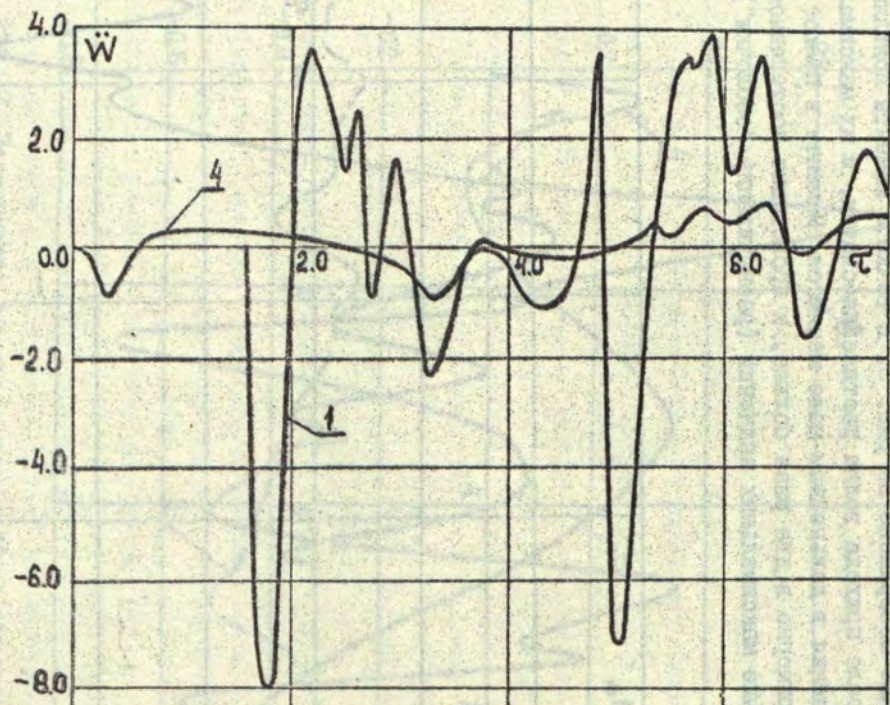


Рис. 4. Зависимость поперечных ускорений \ddot{W} от безразмерного времени τ в полусферической оболочке

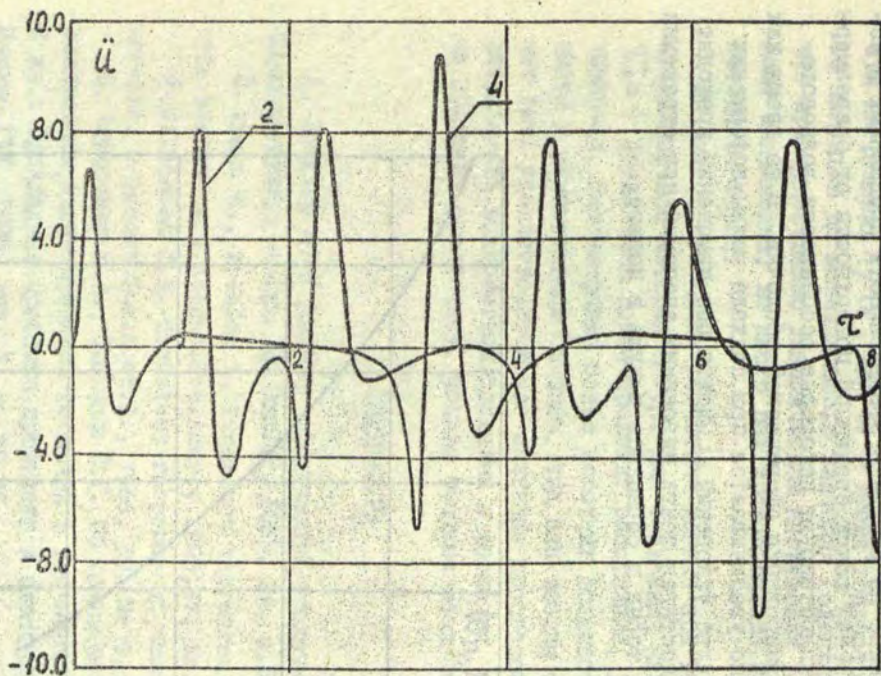


Рис. 5. Зависимость продольных ускорений \ddot{u} от безразмерного времени τ .

Максимальные значения $M_{\alpha}(\alpha, \tau)$ примерно в сто раз больше соответствующих значений в цилиндрической оболочке при продольном ударе [9] и примерно на порядок меньше, чем при поперечном ударе по цилиндрической оболочке. В полюсе $M_{\alpha} \equiv M_{\beta}$

Представленные на рис. 4 и 5 зависимости продольных и поперечных ускорений точек срединной поверхности от безразмерного времени иллюстрируют некоторые особенности волнового процесса деформирования сферической оболочки. В то время как \ddot{W} существенно увеличивается при подходе волны деформации к полюсу, импульс ускорений \dot{u} почти без изменений проходит по оболочке, достигая почти удвоенных значений при отражении от свободного торца и обращаясь в нуль в полюсе.

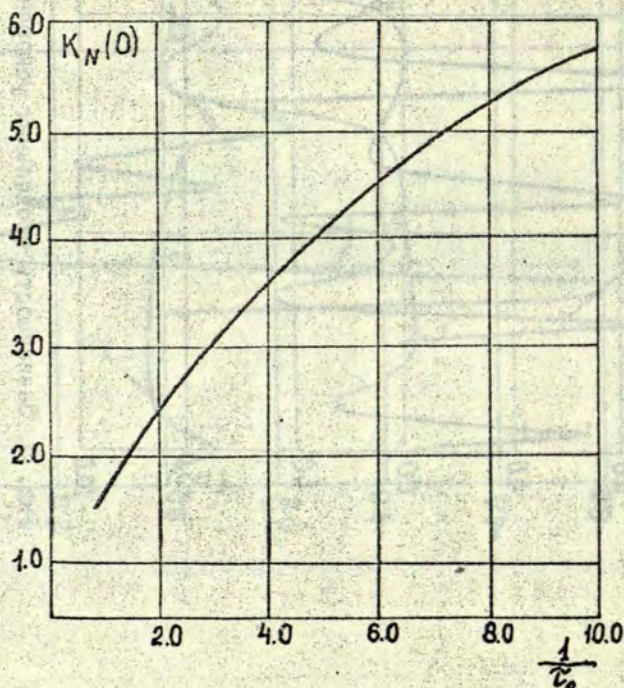


Рис. 6. Зависимость коэффициента концентрации усилий от средней скорости нагружения.

Проведённые многочисленные расчёты показывают, что при медленном нагружении концентрация напряжений вблизи полюса оболочки не наблюдается, и напряжения в других точках могут быть даже больше, чем в полюсе. Представленная на рис. 6 зависимость коэффициента концентрации $K_M(0)$ от средней скорости нагружения $1/\tau_0$, где τ_0 - время возрастания приложенного импульса до максимального значения (единицы), показывает, что при существенно динамическом нагружении в полюсе возникают напряжения, во много раз превосходящие приложенные на свободном торце.

На рис. 6 приведены расчётные данные при нагружении импульсами, для которых $\tau_0 \geq 0,1$. Для сравнения напомним, что за $\tau_0 = 1$ продольная волна проходит расстояние, равное радиусу оболочки. Рассмотрение более коротких воздействий может привести к значительным ошибкам, так как теория оболочек не может дать удовлетворительное описание процессов, если продолжительность воздействия сравнима с временем, за которое волна проходит расстояние, равное толщине оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веколер Н. К расчёту сферической оболочки на динамическую нагрузку. - Изв. АН ЗетССР, 1965, №4, с.559-563.
2. Kraus H., Kalnins A. Transient vibration of thin elastic shells. - J. Acoust. Soc. Amer., 1965, 38, Nr. 6, p.994-1002.
3. Wilkinson J.P. Transient response of thin elastic shells. - Acoust. Soc. Amer. J., 1966, 39, Nr 5, part I, p.895-898.
4. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Об одном методе решения нелинейных задач динамики оболочек в уточнённой постановке. - В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во ГТУ, 1975, вып. I, с. 58-66.
5. Иванов В.Л., Кукуджанов В.Н. Численное исследование нелинейных переходных процессов деформирования упругих сферических оболочек при ударном нагружении давлением. - Моск. физ.-техн. ин-т, Долгопрудный, 1979, 33 с.
6. Селезов И.Т., Сорокина В.В., Циганов Н.К., Яковлев В.В. Динамика незамкнутой сферической оболочки при импульсном на-

гружении. - Изв. АН СССР. МТТ, 1978, №2, с. 145-149.

7. Белов М.А., Варна Я.П. Собственные колебания составных тонкостенных конструкций из цилиндрических и сферических элементов. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига; ЛГУ им. П.Стучки, 1981, с. 139-153.

8. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. - М.: Наука, 1973, т.1, 294 с.

9. Варна Я.П. Влияние инерции вращения и деформации сдвигов в задаче о цилиндрической оболочке, нагруженной продольным импульсом. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1980, с. 124-140.

Статья поступила 13 апреля 1983 г.

УДК 539.3:534.1

Т. Б. Кошкина

Институт механики полимеров АН ЛатвССР

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОДКРЕПЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫМИ РЁБРАМИ
ЖЁСТКОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, НАГРУЖЕННЫХ
ДИНАМИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Проблеме динамической устойчивости цилиндрических оболочек, подкреплённых ребрами жёсткости, при нестационарном внешнем давлении посвящено небольшое число работ [1-3].

Экспериментальные результаты, приведённые в [1, 2], а также в ряде работ, посвящённых исследованию динамического выпучивания цилиндрических оболочек, подкреплённых кольцевыми ребрами [4, 6], свидетельствуют о том, что частота расположения и жёсткость подкрепляющих элементов весьма сложным образом влияют на процесс динамического выпучивания и, в частности, на то, какая форма потери устойчивости (общая или местная) будет доминирующей.

Теоретические исследования неосесимметричного выпучивания при динамическом внешнем давлении цилиндрических оболочек с учётом дискретности расположения продольных рёбер, видимо, не проводились.

В настоящей работе рассматривается решение задачи деформирования несовершенной ортотропной цилиндрической оболочки, подкреплённой продольными ребрами жёсткости, при равномерно распределённом по боковой поверхности динамическом внешнем давлении. Рёбра рассматриваются как одномерные элементы, расположенные вдоль координатных линий $y = y_s$. Принимается, что рёбра сопротивляются осевой деформации и изгибу в направле-

нии, нормальном к срединной поверхности оболочки. Подробно постановка задачи дана в работе [7].

Линеаризованные уравнения движения оболочки, подкреплённой продольными рёбрами жёсткости, в перемещениях имеют вид^{*)}:

$$\begin{aligned}
 & C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \\
 & - \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial(w-w_0)}{\partial x} + \sum_s \delta(y-y_s) E_s A_s \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3(w-w_0)}{\partial x^3} \right) = 0 \\
 & C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{C_{22}}{R} \frac{\partial(w-w_0)}{\partial y} = 0 \\
 & D_{11} \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial y^4} - \\
 & - \frac{C_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{C_{22}}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{C_{22}}{R^2} (w-w_0) + \\
 & + \sum_s \delta(y-y_s) E_s A_s \left[\frac{J_{ys}}{A_s} \frac{\partial^4(w-w_0)}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + \\
 & + q(t) R \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \sum_s \delta(y-y_s) \beta_s A_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Принимая на торцах оболочки условия шарнирного опирания, разложим перемещения в ряды, почленно удовлетворяющие этим условиям:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (U_{mn}(t) \cos \beta_n y + U'_{mn}(t) \sin \beta_n y) \cos d_m x; \\
 v(x, y, t) &= \sum_m \sum_n (V_{mn}(t) \sin \beta_n y - V'_{mn}(t) \cos \beta_n y) \sin d_m x; \\
 w(x, y, t) &= \sum_m \sum_n (W_{mn}(t) \cos \beta_n y + W'_{mn}(t) \sin \beta_n y) \sin d_m x; \\
 w_0(x, y) &= \sum_m \sum_n (W_{mn}^0 \cos \beta_n y + W_{mn}^0 \sin \beta_n y) \sin d_m x,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $d_m = \pi m / L$; $\beta_n = n / R$; $m = 1, 2, \dots$;
 $n = 1, 2, \dots$; L - длина, R - радиус оболочки.

^{*)} В статье используются обозначения, принятые в работе [7].

Подставляя (2) в (1) и применяя процедуру Бубнова-Галеркина для каждого фиксируемого m сводим систему дифференциальных уравнений в частных производных к следующей системе 1-го типа брайческих и 2-го обыкновенных дифференциальных уравнений ($K = N - n_0 + 1$)

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[(Q_{11}^{mn} \delta_n^l + \sum_s Q_{14}^{ms} \cos \beta_e y_s \cos \beta_n y_s) U_{mn} + \right. \\ & \left. + \sum_s Q_{14}^{ms} \cos \beta_e y_s \sin \beta_n y_s U'_{mn} + Q_{12}^{mn} \delta_n^l V_{mn} \right] = \\ & = \sum_n \left[(Q_{13}^m \delta_n^l + \sum_s Q_{15}^{ms} \cos \beta_e y_s \cos \beta_n y_s) (W_{mn} - W_{mn}^0) + \right. \\ & \left. + \sum_s Q_{15}^{ms} \cos \beta_e y_s \sin \beta_n y_s (W'_{mn} - W'_{mn}{}^0) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \left[(Q_{11}^{mn} \delta_n^l + \sum_s Q_{14}^{ms} \sin \beta_e y_s \sin \beta_n y_s) U'_{mn} + \right. \\ & \left. + \sum_s Q_{14}^{ms} \sin \beta_e y_s \cos \beta_n y_s U_{mn} + Q_{12}^{mn} V'_{mn} \right] = \\ & = \sum_n \left[(Q_{13}^m \delta_n^l + \sum_s Q_{15}^{ms} \sin \beta_e y_s \sin \beta_n y_s) (W'_{mn} - W'_{mn}{}^0) + \right. \\ & \left. + \sum_s Q_{15}^{ms} \sin \beta_e y_s \cos \beta_n y_s (W_{mn} - W_{mn}{}^0) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_n [Q_{12}^{mn} U_{mn} + Q_{22}^{mn} V_{mn}] = \sum_n Q_{23}^n (W_{mn} - W_{mn}^0) \quad (5)$$

$$\sum_n [Q_{12}^{mn} U'_{mn} + Q_{22}^{mn} V'_{mn}] = \sum_n Q_{23}^n (W'_{mn} - W'_{mn}{}^0) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \left\{ \rho h \frac{d^2 W_{mn}}{dt^2} \delta_n^l + \sum_s \mu_s \left(\frac{d^2 W_{mn}}{dt^2} \cos \beta_e y_s \cos \beta_n y_s + \frac{d^2 W'_{mn}}{dt^2} \cos \beta_e y_s \sin \beta_n y_s \right) + \right. \\ & \left. + (Q_{35}^{mn} \delta_n^l + \sum_s Q_{35}^{ms} \cos \beta_e y_s \cos \beta_n y_s) (W_{mn} - W_{mn}^0) + \right. \\ & \left. + \sum_s Q_{35}^{ms} \cos \beta_e y_s \sin \beta_n y_s (W'_{mn} - W'_{mn}{}^0) + (Q_{13}^m \delta_n^l + \sum_s Q_{15}^{ms} \cos \beta_e y_s \cos \beta_n y_s) U_{mn} + \right. \\ & \left. + \sum_s Q_{15}^{ms} \cos \beta_e y_s \sin \beta_n y_s U'_{mn} \right\} - \beta^2 q(t) R W_{mc} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \left\{ \rho h \frac{d^2 W_{mn}'}{dt^2} \delta_n^l + \sum_s \mu_s \left(\frac{d^2 W_{mn}'}{dt^2} \sin \beta_e y_s \sin \beta_n y_s + \frac{d^2 W_{mn}'}{dt^2} \sin \beta_e y_s \cos \beta_n y_s \right) \right. \\ & + (Q_{33}^{mn} \delta_n^l + \sum_s Q_{35}^{ms} \sin \beta_e y_s \sin \beta_n y_s) (W_{mn}' - W_{mn}^o) + \\ & + \sum_s Q_{35}^{ms} \sin \beta_e y_s \cos \beta_n y_s (W_{mn}' - W_{mn}^o) + \\ & + (Q_{13}^m \delta_n^l + \sum_s Q_{15}^{ms} \sin \beta_e y_s \sin \beta_n y_s) U_{mn}' + \\ & \left. + \sum_s Q_{15}^{ms} \sin \beta_e y_s \cos \beta_n y_s U_{mn} \right\} - \beta^2 q(t) R W_{me}' = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

В системе (3) - (8) использованы обозначения:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{mn} &= -(\alpha_m^2 C_{11} + \beta_n^2 C_{66}) ; \quad Q_{12}^{mn} = \alpha_m \beta_n (C_{12} + C_{66}) ; \\ Q_{13}^m &= \alpha_m C_{12} / R ; \quad Q_{14}^{ms} = -\alpha_m^2 E_s A_s / \mathcal{K} R ; \quad Q_{15}^{ms} = -\alpha_m^3 \bar{z}_s E_s A_s / \mathcal{K} R ; \\ Q_{22}^{mn} &= -(C_{66} \alpha_m^2 + C_{22} \beta_n^2) ; \quad Q_{23}^n = -\beta_n C_{22} / R ; \\ Q_{33}^{mn} &= \frac{C_{22}}{R^2} + D_{11} \alpha_m^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \alpha_m^2 \beta_n^2 + D_{22} \beta_n^4 ; \\ Q_{35}^{ms} &= \alpha_m^4 \bar{z}_s E_s / \mathcal{K} R ; \quad \mu_s = \rho_s A_s / \mathcal{K} R . \end{aligned}$$

Решение системы (3) - (8) проводится следующим образом. Во-первых, выражаются V_{mn} через U_{mn} и W_{mn} , и V_{mn}' через U_{mn}' и W_{mn}' из уравнений (5) и (6) соответственно. Подстановка V_{mn} и V_{mn}' в уравнения (3), (4) и (7), (8) приводит к системе уравнений, записанной ниже в матричном виде:

$$\hat{A}_m \vec{U}_m = \hat{B}_m (\vec{W}_m - \vec{W}_m^o) \quad (9)$$

$$\hat{M} \frac{d^2 \vec{W}_m}{dt^2} + \hat{C}_m (\vec{W}_m - \vec{W}_m^o) + \hat{B}_m \vec{U}_m - \hat{F}_m \vec{W}_m = 0 \quad (10)$$

Элементы матриц \hat{A}_m , \hat{B}_m , \hat{C}_m , \hat{M} , \hat{F}_m - определяются следующим образом:

$$a_{ij}^m = \left[Q_{11}^{mj} - \frac{(Q_{12}^{mj})^2}{Q_{22}^{mj}} \right] \delta_j^i + \sum_s Q_{14}^{ms} \cos \beta_i y_s \cos \beta_j y_s ,$$

$$b_{ij}^m = \left[Q_{13}^m - \frac{Q_{23}^j Q_{12}^{mj}}{Q_{22}^{mj}} \right] \delta_j^i + \sum_s Q_{15}^{ms} \cos \beta_i y_s \cos \beta_j y_s,$$

$$c_{ij}^m = \left[Q_{33}^{mj} - \frac{(Q_{23}^j)^2}{Q_{22}^{mj}} \right] \delta_j^i + \sum_s Q_{35}^{ms} \cos \beta_i y_s \cos \beta_j y_s,$$

$$\mu_{ij} = \rho h \delta_j^i + \sum_s \mu_s \cos \beta_i y_s \cos \beta_j y_s,$$

$$f_{ij}^m = \beta_j^2 q(t) R \delta_j^i,$$

для $i = 1, \dots, \kappa$; $j = 1, \dots, \kappa$.

$$a_{ij}^m = \sum_s Q_{14}^{ms} \cos \beta_i y_s \sin \beta_j y_s,$$

$$b_{ij}^m = \sum_s Q_{15}^{ms} \cos \beta_i y_s \sin \beta_j y_s,$$

$$c_{ij}^m = \sum_s Q_{35}^{ms} \cos \beta_i y_s \sin \beta_j y_s,$$

$$\mu_{ij} = \sum_s \mu_s \cos \beta_i y_s \sin \beta_j y_s,$$

$$f_{ij}^m = 0$$

для $i = 1, \dots, \kappa$; $j = \kappa + 1, \dots, 2\kappa$.

$$a_{ij}^m = \sum_s Q_{14}^{ms} \sin \beta_i y_s \cos \beta_j y_s,$$

$$b_{ij}^m = \sum_s Q_{15}^{ms} \sin \beta_i y_s \cos \beta_j y_s,$$

$$c_{ij}^m = \sum_s Q_{35}^{ms} \sin \beta_i y_s \cos \beta_j y_s,$$

$$\mu_{ij} = \sum_s \mu_s \sin \beta_i y_s \cos \beta_j y_s,$$

$$f_{ij}^m = 0$$

для $i = \kappa + 1, \dots, 2\kappa$; $j = 1, \dots, \kappa$.

$$a_{ij}^m = \left[Q_{11}^{mj} - \frac{(Q_{12}^j)^2}{Q_{22}^{mj}} \right] \delta_j^i + \sum_s Q_{14}^{ms} \sin \beta_i y_s \sin \beta_j y_s,$$

$$b_{ij}^m = \left[Q_{13}^m - \frac{Q_{23}^j Q_{12}^{mj}}{Q_{22}^{mj}} \right] \delta_j^i + \sum_s Q_{15}^{ms} \sin \beta_i y_s \sin \beta_j y_s,$$

$$C_{ij}^m = \left[Q_{33}^{mj} + \frac{(Q_{23}^d)^2}{Q_{22}^{mj}} \right] \delta_j^i + \sum_s Q_{35}^{ms} \sin \beta_i y_s \sin \beta_j y_s,$$

$$M_{ij} = \rho h \delta_j^i + \sum_s \mu_s \sin \beta_i y_s \sin \beta_j y_s,$$

$$f_{ij}^m = \beta_j^2 q(t) R \delta_j^i.$$

для $i = \kappa+1, \dots, 2\kappa$; $j = \kappa+1, \dots, 2\kappa$

где δ_j^i - символ Кронекера; при $i > \kappa$ $\beta_i = \frac{i - \kappa}{R}$.

при $j > \kappa$ $\beta_j = \frac{j - \kappa}{R}$.

Отметим, что матрицы $\hat{A}_m, \hat{B}_m, \hat{C}_m, \hat{F}_m, \hat{M}$ - симметричные.

Далее находим из уравнения (9):

$$\vec{U}_m = \hat{A}_m^{-1} B_m (\vec{W}_m - \vec{W}_m^0),$$

подставляем его в дифференциальное уравнение (10) и умножаем обе части полученного уравнения на матрицу \hat{M}^{-1} . В результате получаем:

$$\hat{I} \frac{d^2 \vec{W}_m}{dt^2} + [\hat{M}^{-1} \hat{C}_m + \hat{M}^{-1} \hat{B}_m \hat{A}_m^{-1} \hat{B}_m] (\vec{W}_m - \vec{W}_m^0) - \hat{M}^{-1} \hat{F}_m \vec{W}_m = 0 \quad (II)$$

Начальные условия задаются в виде:

$$\vec{W}_m \Big|_{t=0} = \vec{W}_m^0 ; \quad \frac{d\vec{W}_m}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (12)$$

Решение системы 2κ дифференциальных уравнений проводилось методом Рунге-Кутты с использованием стандартных программ, имеющихся в математическом обеспечении ЭВМ ЕС.

В результате численного решения системы находим весь комплекс коэффициентов Фурье ($U_{mn}(t), V_{mn}(t), W_{mn}(t)$) в требуемом интервале времени. Последующее суммирование рядов (2) позволяет определить зависимости от времени перемещений u, v, w в произвольной точке (x, y) срединной поверхности оболочки.

На основе изложенной методики была решена задача о выпучивании подкреплённой стрингерами ортотропной оболочки при действии динамического внешнего давления. Характеристики оболочки: $R = 1m$; $L/R = 2$; $R/h = 200$; $E_1 = 12 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$;

$$E_2 = 0,95 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; G_{12} = 0,45 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2; \nu_{12} = 0,3; \quad (13)$$

$$\rho = 1,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

где ось I направлена вдоль образующей оболочки. Рёбра имеют прямоугольное сечение и изготовлены из того же материала, причём $E_s = E_1$. Площадь поперечного сечения ребра $A_s = h_s h$. Начальные несовершенства для оболочки $w^0(x, y)$ задаются посредством ряда Фурье (2) с коэффициентами

$$W_{mn}^0 = 0,02 h \frac{(-1)^{\ell+n}}{m^2} \exp\left[-\frac{(n-4)^2}{4}\right], \quad (14)$$

где $\ell = \frac{m}{2}$ при m - чётном и $\ell = \frac{m+1}{2}$ при m - нечётном. Внешнее давление рассматривается как линейно возрастающая во времени нагрузка $q_r(\tau) = V_q \tau q^*$, где q^* - критическое статическое давление для гладкой оболочки; $\tau = t c / L$,

$$c = \sqrt{E_1 / \rho (1 - \nu_{12}^2)}$$

Последующие результаты получены для безразмерной скорости нагружения $V_q = 2$ и для момента $\tau = 4,85$. Суммирование рядов (2) проводилось в пределах от 1 до 3 по m и от 1 до 20 по n .

На рис. 1 даны зависимости прогиба от окружной координаты при подкреплении оболочки различным количеством равных по высоте ($h_s = 10h$) стрингеров.

Первый стрингер поставлен в сечении $\psi = 180^\circ$, где максимален прогиб для гладкой оболочки. Следующие два стрингера расположены в сечениях $\psi_{2,3} = \pm 152^\circ$, т.е. в сечениях максимального прогиба для оболочки, подкреплённой первым стрингером.

Место расположения следующих двух стрингеров определяется сечением максимального прогиба для оболочки, подкреплённой тремя стрингерами, и т.д.

Как видно из рис. 1, постановка одного стрингера в сечение максимального прогиба для гладкой оболочки даёт сильный подкрепляющий эффект в месте его постановки, но увеличивает прогиб в других местах.

Подкрепление оболочки семью стрингерами, расположенными согласно описанной выше схеме, снижает величину прогиба в точках максимума более чем в 2 раза.

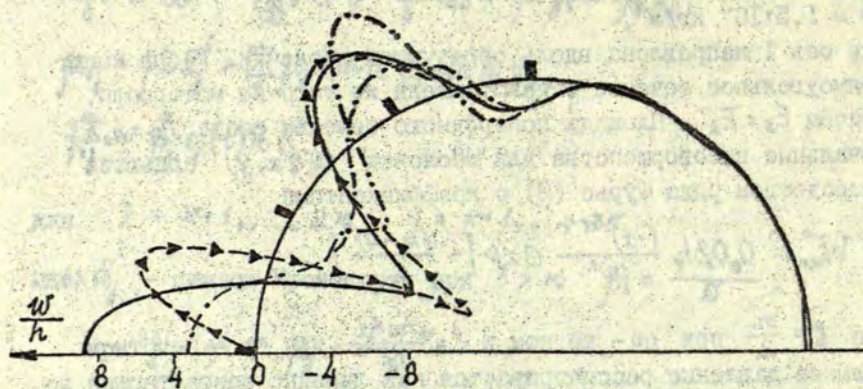


Рис. 1. Распределение прогиба по окружной координате при подкреплении стрингерами высотой $h_s = 10h$

- · — 7 стрингеров;
- · · — 3 стрингера;
- - - 1 стрингер;
- гладкая оболочка.

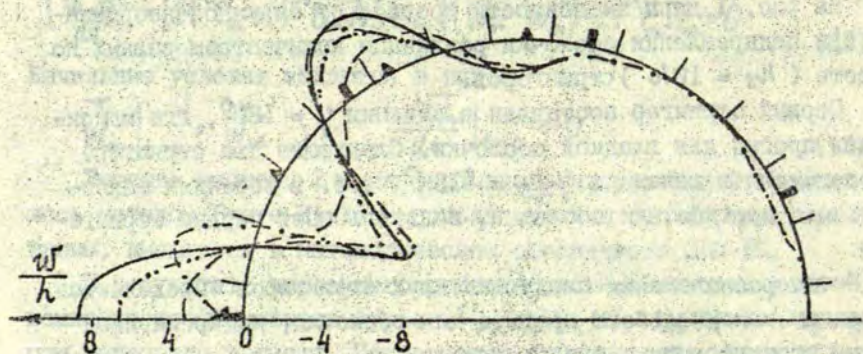


Рис. 3. Зависимость прогиба от окружной координаты для — гладкой оболочки и при подкреплении равноотстоящими (I) — · · — 28 стрингерами, $h_s = 2,5h$; (II) — — — 7 стрингерами, $h_s = 10h$ и (▲) — · · — 7 стрингерами, $h_s = 10h$, расположенными в точках максимального прогиба гладкой оболочки.

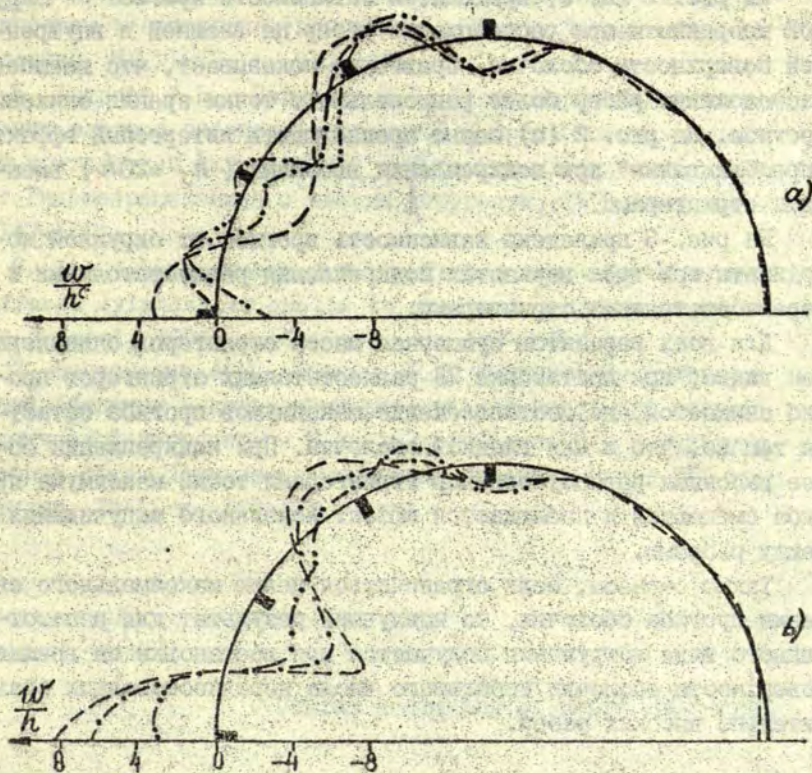


Рис. 2. Зависимость прогиба от окружной координаты при
а) внешнем и б) внутреннем подкреплении 7 стрингерами высотой

- — — $h_s = 10 h$;
- · - · - $h_s = 15 h$;
- · · - · $h_s = 20 h$.

На рис. 2 (а, б) приводятся зависимости прогиба от окружной координаты при расположении рёбер на внешней и внутренней поверхности оболочки. Сравнение показывает, что внешнее расположение рёбер более рационально с точки зрения снижения прогиба. На рис. 2 (а) можно пронаблюдать интересный эффект "прощёлкивания" при подкреплении высокими ($h_s = 20h$) внешними стрингерами.

На рис. 3 приведена зависимость прогиба от окружной координаты при трёх вариантах подкрепления равноотстоящими и неравноотстоящими стрингерами.

Для всех вариантов суммарная масса стрингеров одинакова. Как видно, при постановке 28 равноотстоящих стрингеров прогиб снижается, но местоположение максимумов прогиба остаётся тем же, что и для гладкой оболочки. При подкреплении более высокими равноотстоящими стрингерами точки максимума прогиба смещаются и наблюдается эффект локального выпучивания между рёбрами.

Таким образом, если ограничиться целью максимального снижения прогиба оболочки, то наилучший результат для рассмотренного вида нагружения получается при постановке на внешней поверхности оболочки небольшого числа неравноотстоящих сравнительно высоких рёбер.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев Л.В., Крушельницкий И.Н., Павленко И.Д., Приварников Ю.К., Прокопало Е.Ф. Динамическая устойчивость подкреплённых цилиндрических оболочек при нагружении импульсом внешнего давления. - Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела, 1974, № 1, с. 118-125.
2. Андреев Л.В., Дубовик О.М., Дышко А.Л., Павленко И.Д. Приближённые оценки критического импульса цилиндрической оболочки, подкреплённой продольными дискретными рёбрами. - Проблемы прочности, 1978, № 3, с. 66-69.
3. Ross C.A., Sierakowski R.L., Ebciloglu I.K., Strickland W.S. The dynamic response of stiffened cylindrical shells to impulsive loads. - AIAA Pap., 1979, N 236, 9 pp., ill.

4. Пайда А.А., Шумик М.А. Экспериментальное исследование поведения подкреплённых цилиндрических оболочек при динамическом всестороннем давлении. - В кн.: Теория оболочек и пластин. М., 1973, с. 535-537.

5. Андреев Л.В., Павленко И.Д. Экспериментальное исследование влияния параметров оболочек и подкрепления на величину критической нагрузки при импульсном нагружении. - В кн.: Гидроаэромеханика и теория упругости, 1975, вып. 19, с. 147-150.

6. Lee I.h.n., Horng I.T. Inelastic response of ring-stiffened cylindrical shells to external pressure shock waves. - AIAA Journal, 1976, v. 14, n 3, pp. 327-332.

7. Богданович А.Е., Кошкина Т.Б. Выпучивание цилиндрической оболочки с кольцевыми рёбрами жёсткости при осевой динамической нагрузке. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Применение численных методов. Рига: ЛТУ им. П.Стучки, 1981, с. 103-122.

Статья поступила 24 марта 1983 года.

УДК 518.12:538

А.Т.Якович, С.И.Лацис, А.Ф.Тимберс

ЛГУ им.П.Стучки

Рижский медицинский институт

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ИМПЛАНТИРУЕМОГО ЭЛАСТИЧНОГО МАГНИТНОГО ЭЛЕМЕНТА

I. Введение

Одной из областей использования магнитного поля в медицине является применение стационарного поля в лечении атеросклероза. Кровь, состоящая из плазмы, с положительным объемным зарядом, и формэлементов (тромбоцитов, эритроцитов, лейкоцитов), имеющих отрицательный поверхностный заряд, при течении взаимодействует с внутренним слоем стенки сосуда - интимой, потенциал которой в нормальном состоянии отрицателен. Склеротический процесс приводит к изменению свойств сосуда, в том числе, происходит инверсия потенциала интимы, что способствует осаждению формэлементов на поврежденные участки стенки сосуда. Во избежание зарастания сосуда при прогрессировании заболевания склеротически поврежденный участок артерии шунтируется с помощью параллельно ему присоединяемого протеза. Однако срок службы лавсано-фторопеновых протезов, как правило, не превышает несколько лет - в них также происходит отложение элементов крови и наблюдается зарастание. Для ослабления этих явлений используются эластичные магнитные элементы (ЭМЭ) [1], изготовленные из нетоксичной резины на силиконовой основе с магнитным наполнителем - ферритом бария. Их назначение - отталкивать заряженные элементы крови от зон риска, а также частично сепарировать поток крови, с целью увеличения при этом срока службы протеза.

Для определения оптимального расположения ЭМЭ необходимы исследования создаваемого им распределения магнитного поля и влияния неоднородного поля на скоростную структуру частиц в потоке крови.

2. Математическая модель

Стационарное магнитное поле в сосуде описывается уравнениями Максвелла для индукции :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{j}, \quad (2)$$

где \vec{j} - плотность тока проводимости. Так как электропроводимость крови относительно мала, ее магнитная проницаемость близка к единице и кровь в среднем электрически нейтральна [2], то приближенно можно положить $\vec{j} = 0$ и $\operatorname{rot} \vec{B} = 0$. В результате введения скалярного потенциала магнитного поля соотношением

$$\vec{B} = -\operatorname{grad} \Psi \quad (3)$$

из (1) следует уравнение Лапласа:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Psi = 0. \quad (4)$$

Из вида расположения ЭМЭ на поверхности цилиндрического сосуда (рис. 1) следует, что наиболее удобна для решения задачи запись уравнения (4) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Так как магнит состоит из двух антисимметричных частей (рис. 2), то индукция магнитного поля на плоскости $y=0$ перпендикулярна к ней, а $\Psi = \text{const}$. Учитывая произвол нормировки потенциала на плоскости $y=0$, также как в бесконечно отдаленных точках, можно принять нулевое значение потенциала

$$\Psi|_{y=0} = \Psi|_{r \rightarrow \infty} = \Psi|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (6)$$

Так как в средней плоскости магнита $B_z = 0$, то при $z=0$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

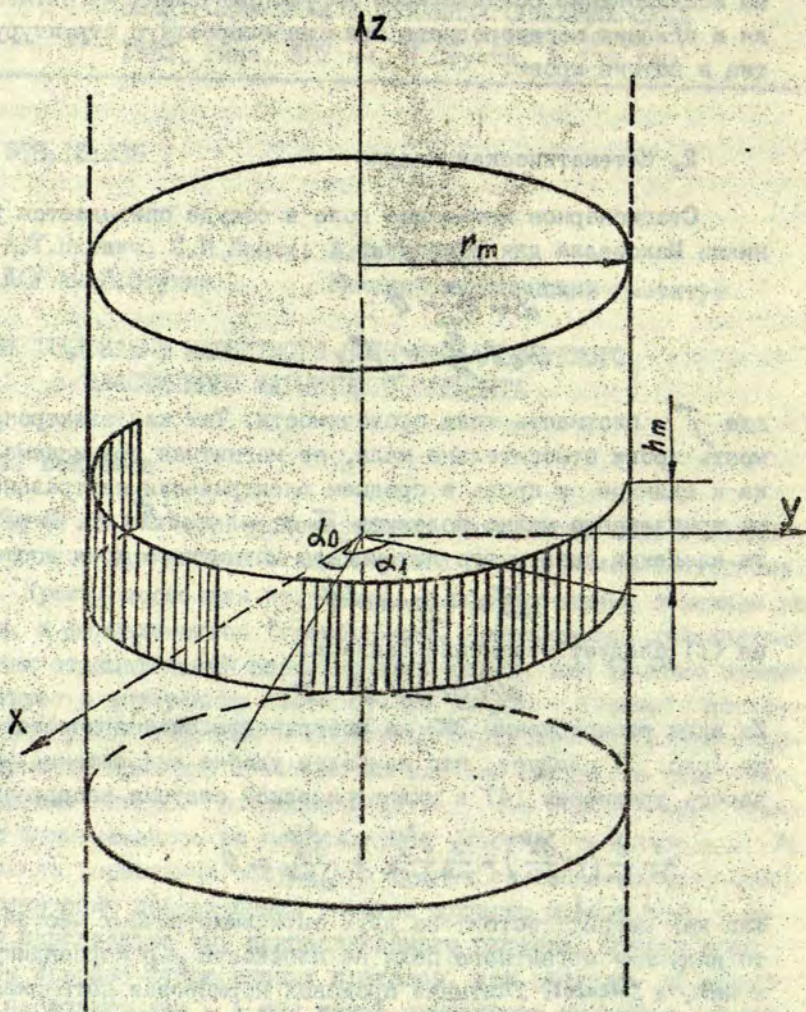


Рис. I. Схема расположения эластичного магнитного элемента (ЭМЭ) на поверхности сосуда.

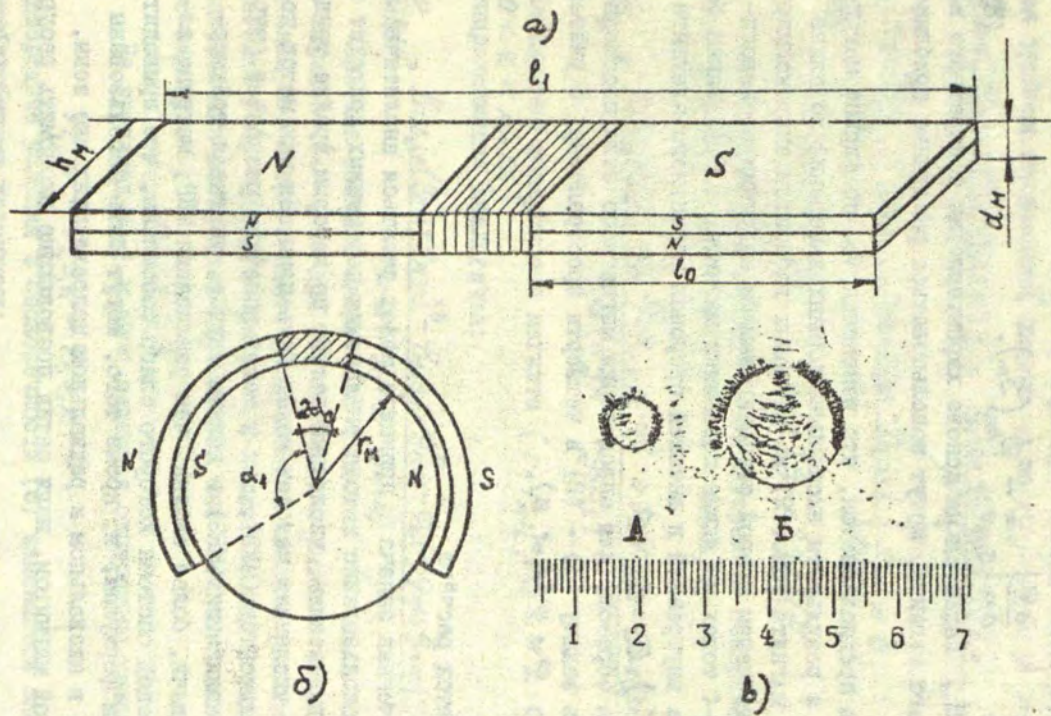


Рис. 2. а) Схема в исходном состоянии;
 б) Схема сечения сосуда с наложенным ЭМЭ;
 в) Качественная картина силовых линий ЭМЭ.

Учёт магнитного элемента в модели осуществляется заданием на его поверхности нормальной составляющей индукции в виде функции точки поверхности $B_n = \phi_m(S_m)$, т.е.,

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{S_m} = - \phi_m(S_m). \quad (8)$$

Функция ϕ_m задаётся на основе характеристик конкретного используемого магнита, могут использоваться различные приближения.

Здесь предполагается, что изменения ϕ_m по ширине магнита малы, а результаты экспериментальных измерений по длине половины магнита (рис. 2) из-за малых габаритов аппроксимируются многочленом второй степени (замеры индукции производились в 3-4 токах по длине половинки магнита [I]). Таким образом, на внутренней и внешней сторонах магнитного элемента

$$B_r = \phi_m(\alpha), B_\alpha = B_z = 0.$$

Таким образом, для определения магнитного поля необходимо решить задачу (5) - (8) в четверти пространства, с учётом того, что $\psi = \psi(r, \alpha, z)$.

3. Метод расчёта

Полученная задача в принципе может решаться аналитически, однако использование метода разделения переменных приводит к сложным выражениям, численный расчёт по которым крайне трудоёмок. Из численных методов может быть применён как метод конечных элементов (МКЭ), так и метод конечных разностей (МКР). Однако реализация (МКЭ) в данном случае, учитывая трёхмерность задачи, более сложна, чем реализация МКР, матрица алгебраической системы которого слабо заполнена, что приводит к простым формулам, и, кроме того, могут быть использованы растущие в аксиальном и радиальном направлениях вне зоны, охваченной магнитом, шаги сетки позволяющие экономить ресурсы ЭВМ.

Таким образом, используется конечно-разностная сетка с постоянным шагом по углу α и переменным по r и z . Обозначения шагов соответственно - β, g_i, h_k . Аппроксимация урав-

нения (5) производится с таким расчётом, чтобы разностный аналог имел второй порядок аппроксимации на неоднородной сетке в отрицательной норме [3]. При записи схемы используется тройная индексация (индекс i по r , j по α и k по z):

$$\left(\frac{\Psi_{i,j,k+1} - \Psi_{i,j,k}}{h_{k+1}} - \frac{\Psi_{i,j,k} - \Psi_{i,j,k-1}}{h_k} \right) \frac{1}{h_k} + \frac{\Psi_{i,j+1,k} - 2\Psi_{i,j,k} + \Psi_{i,j-1,k}}{\beta^2 r_i^2} + \left[\frac{r_{i+1/2} (\Psi_{i+1/2,j,k} - \Psi_{i,j,k})}{g_{i+1}} - \frac{r_{i-1/2} (\Psi_{i,j,k} - \Psi_{i-1/2,j,k})}{g_i} \right] \frac{1}{r_i g_i} = 0, \quad (9)$$

где

$$\hat{h}_k = (h_{k+1} + h_k)/2; \quad \hat{g}_i = (g_{i+1} + g_i)/2.$$

Аппроксимируя формулу (8) на внутренней поверхности магнита ($r = r_M$; $\alpha_0 < \alpha < \alpha_2$; $0 < z < hm/\beta$):

$$\Psi_{M,j,k} = \frac{\Psi_{M-1,j,k} (g_{M-1} + g_M)^2 - \Psi_{M-2,j,k} g_M^2 + \Phi_m(\alpha) g_M \cdot g_{M-1} (g_{M-1} + g_M)}{g_{M-1} (2g_M + g_{M-1})}. \quad (10)$$

На внешней поверхности магнита ($r = r_{M+1}$; $\alpha_0 < \alpha < \alpha_2$; $0 < z < hm/\beta$) аппроксимация аналогична:

$$\Psi_{M+1,j,k} = \frac{\Psi_{M+2,j,k} (g_{M+1} + g_{M+2})^2 - \Psi_{M+3,j,k} g_{M+2}^2 - \Phi_m(\alpha) g_{M+1} g_{M+2} (g_{M+1} + g_{M+2})}{g_{M+2} (2g_{M+1} + g_{M+2})}. \quad (11)$$

Так как толщина магнитного элемента d_M мала по сравнению с шириной h_M , то при решении задачи выгодно выбрать радиальный шаг сетки в месте расположения магнита равным толщине магнита ($d_M = g_{M+1}$). При $r < r_M$ (рис. 2) шаг в радиальном направлении выбирается постоянным, вне этой зоны шаг растёт по закону:

$$g_{i+1} = r_i / \beta.$$

На границах $z=0$ и $y=0$ заданы однородные условия:

$$\Psi_{i,j,0} = \Psi_{i,0,k} = \Psi_{i,\pi,k} = 0. \quad (12)$$

Однородные условия в бесконечности (6) заменяются следующими приближёнными условиями:

$$\Psi_{i,j,k_0} = \Psi_{2,j,k} \quad (13)$$

Максимальные значения индексов узлов сетки в радиальном и ак-

сиальном направлениях I_0 и K_0 определяются в численном эксперименте с таким расчётом, чтобы в пределах выбранной точности расчётов дальнейшее увеличение I_0 и K_0 уже не влияло на распределение функции ψ в зоне, охваченной магнитом.

Система уравнений (9) совместно с условиями (I0)-(I3) образует линейную неоднородную систему алгебраических уравнений, решение которой осуществляется методом верхней релаксации в следующем порядке:

1. Во всех внутренних точках сеточной области находятся промежуточные значения потенциала на $n + \frac{1}{2}$ -том итерационном слое по формуле, следующей из (9):

$$\psi_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{\beta^2 r_i^2} (\psi_{i,j+2,k}^n + \psi_{i,j-2,k}^n) + \frac{1}{h_k} \left(\frac{1}{h_{k+1}} \psi_{i,j,k+1}^n + \frac{1}{h_k} \psi_{i,j,k-1}^n \right) + \frac{1}{r_i g_i} \left(\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{g_{i+1}} \psi_{i+1,j,k}^n + \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{g_i} \psi_{i-1,j,k}^n \right) \right] / \left[\frac{2}{\beta^2 r_i^2} + \frac{2}{h_k h_{k+1}} + \frac{1}{r_i g_i} \left(\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{g_{i+1}} + \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{g_i} \right) \right].$$

Индексация итерационного слоя в правой части уравнения (I4) определяется последовательностью вычислений на сетке, которая в целях быстрой сходимости процесса меняется от итерации к итерации.

2. Корректируются значения функции в узлах согласно методу верхней релаксации

$$\psi_{i,j,k}^{n+1} = \tau \psi_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\tau) \psi_{i,j,k}^n, \quad (I5)$$

где τ - параметр релаксации, значение которого в зависимости от размеров сеточной области варьировалось в пределах $1,6 \leq \tau \leq 1,75$.

3. Уточнение значений потенциала на внутренней и внешней поверхностях магнита согласно формулам (I0) и (II).

Окончание итерационного процесса осуществляется при достижении заданной относительной точности. Для определения индукции используются разностные аналоги формулы (3):

$$B_{i,j,k}^r = \frac{\psi_{i+2,j,k} - \psi_{i-2,j,k}}{g_i + g_{i+2}};$$

$$B_{i,j,k}^z = \frac{\psi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k-1}}{h_k + h_{k+1}};$$

$$B_{i,j,k}^x = \frac{\psi_{i,j+2,k} - \psi_{i,j-2,k}}{2\beta r_i}.$$

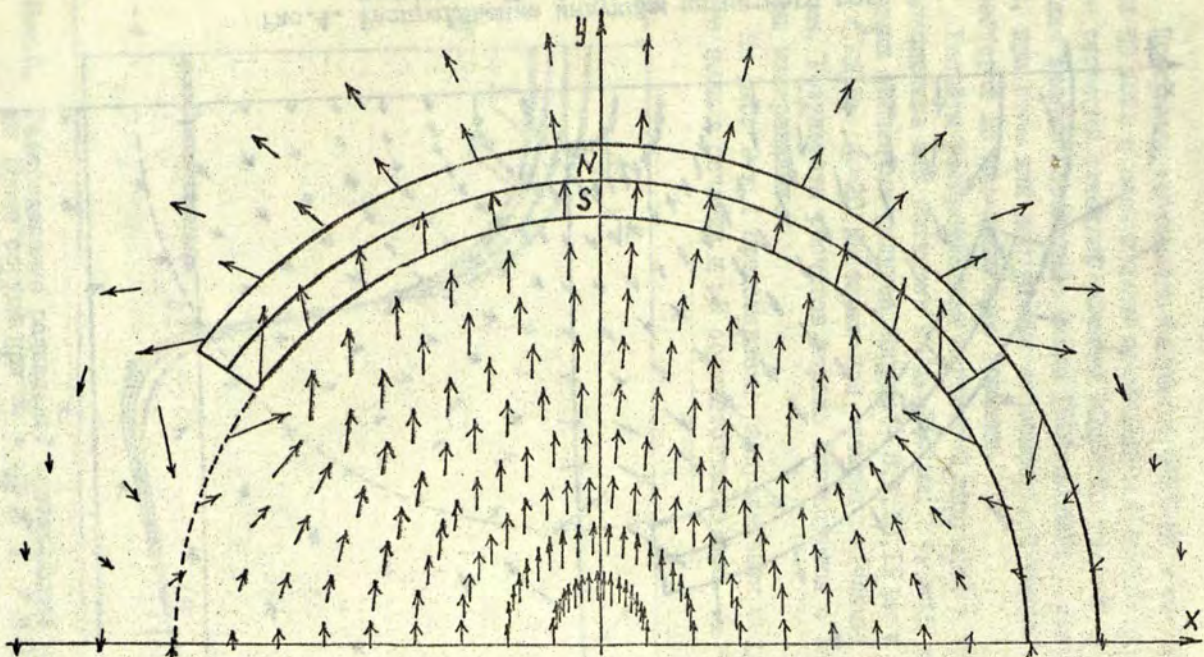


Рис. 3. Распределение индукции магнитного поля в сечении $z=0$ при $\epsilon_1 \approx 1,5 \chi_M$.

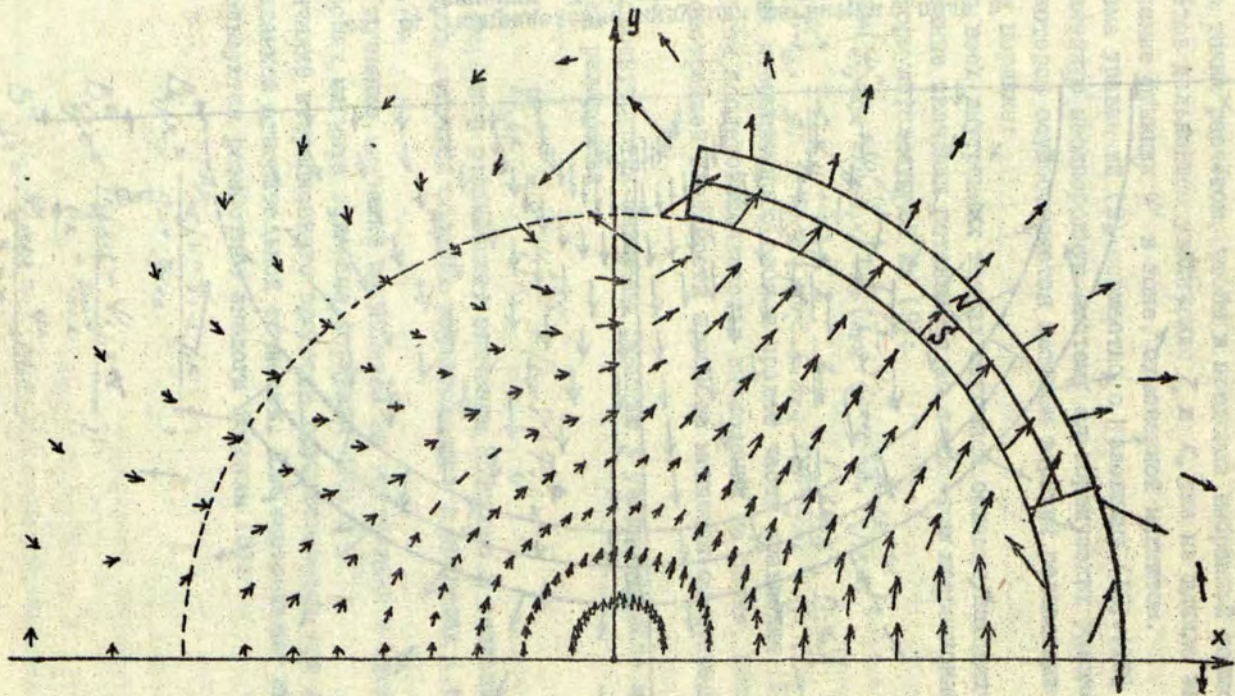


Рис.4. Распределение индукции магнитного поля в сечении $\mathbb{E} = 0$ при $l_2 \approx \pi r_M$.

4. Результаты расчёта

Программа составлена на языке ФОРТРАН и используется на ЭВМ ЕС 1022 с последующим применением графопостроителя ЕС 7054. При размерах сеточной области $20 \times 24 \times 20$ узловых точек для решения задачи необходимо около 100 килобайт оперативной памяти, при этом для достижения относительной точности $\epsilon = 10^{-4}$ требуется 15 мин машинного времени.

Расчёты распределений магнитной индукции в пространстве проводились для магнитов с $l_0 = 2,5$ мм; $l_1 = 15$ мм при следующих значениях радиуса сосуда - 8, 9, 10, 11 мм и для магнита с $l_0 = 2,5$; $l_1 = 20$ мм также при четырёх значениях $r_M = 4, 5, 6, 7$ мм. Результаты расчётов хорошо согласуются с экспериментальными измерениями.

На рис. 3 и 4 представлены распределения индукции магнитного поля в сечении $z = 0$ соответственно при $l_1 \approx 1,5 \pi r_M$ и

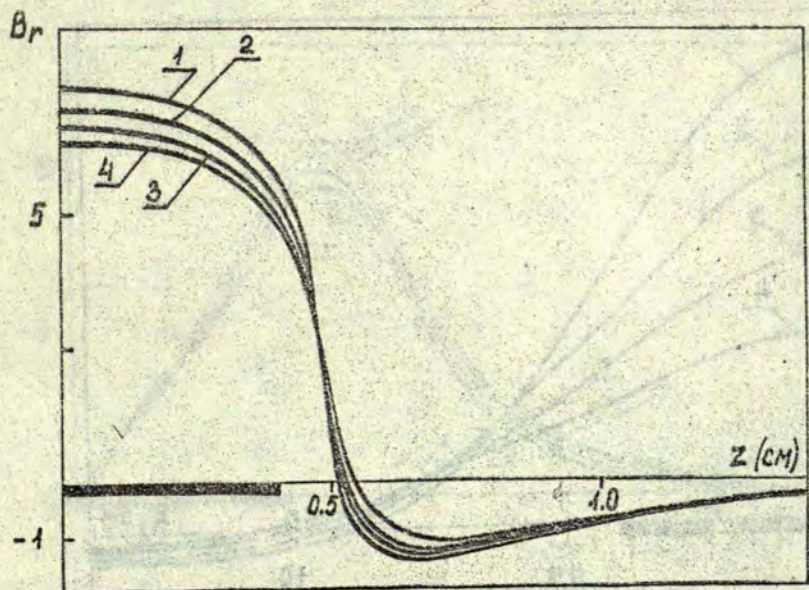


Рис. 5. Распределение радиальной составляющей индукции по длине сосуда при $\alpha = \frac{4}{19} \pi$; $r = 0,85 r_M$:

- 1. - $r_M = 8$ мм;
- 2. - $r_M = 9$ мм;
- 3. - $r_M = 10$ мм;
- 4. - $r_M = 11$ мм.

$l_2 \approx \pi \cdot r_m$. С увеличением охвата магнита до симметричного однородность магнитного поля в сечении сосуда увеличивается. Если в первом случае (рис. 3) интенсивность в центре сосуда близка по абсолютной величине интенсивности в периферии и в сосуде доминирует однонаправленное поле, то в случае относительно короткого магнита (рис. 4) индукция поля в центре сосуда более пяти раз меньше индукции на поверхности магнита, а направление индукции в сечении меняется весьма существенно. Таким образом, при использовании длинных магнитов можно достичь заметного эффекта сепарирования положительных и отрицательных частиц по всему сечению сосуда. В случае короткого магнита может быть достигнут эффект локального воздействия, в т.ч., отталкивания отрицательных формэлементов от зоны риска, в соответствии с законом

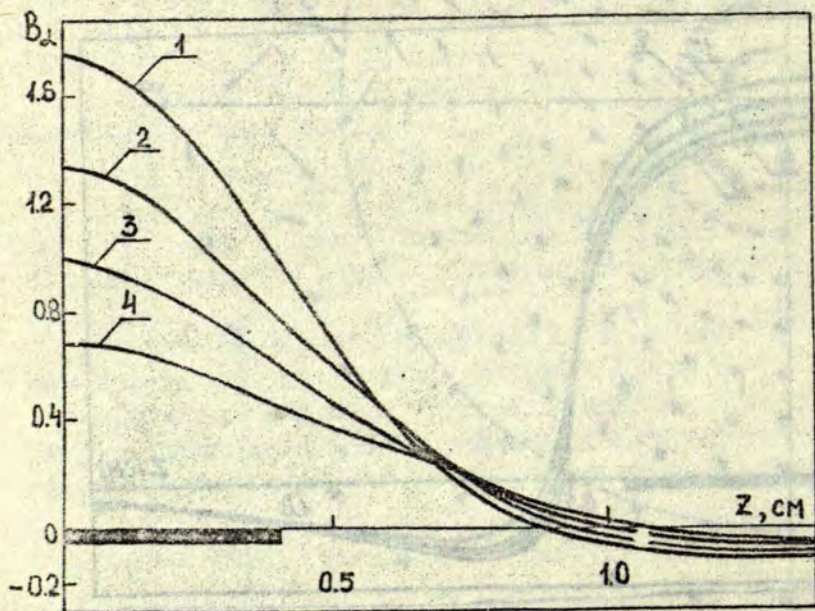


Рис. 6. Распределение азимутальной составляющей индукции по длине сосуда (параметры те же, что в рис. 5.).

$$\vec{F} = q[\vec{v}; \vec{B}], \quad (16)$$

где \vec{F} — сила, действующая на частицу, q — её заряд и \vec{v} — скорость движения. При этом воздействие на поток крови в остальной части сосуда незначительно.

На рис. 5, 6, 7 представлены зависимости составляющих индукции от z при $\alpha = \frac{4}{19}\pi$; $r = 0,85 r_M$ при разных диаметрах сосуда.

В зоне концов магнита наблюдается явно выраженная вихревая структура поля (рис. 3, 4), но по мере отдаления от магнита в аксиальном направлении (рис. 1) значения индукции быстро убывают (рис. 5, 6, 7). При $z > 0,5 h_M$ значения индукции на порядок меньше значений в плоскости симметрии $z = 0$. Изменение знака радиальной составляющей индукции при $z > 0,5 h_M$ также определяется вихревой структурой поля. Аксиальное значение индукции максимально при $z \approx 0,5 h_M$ и по величине сравнимо с

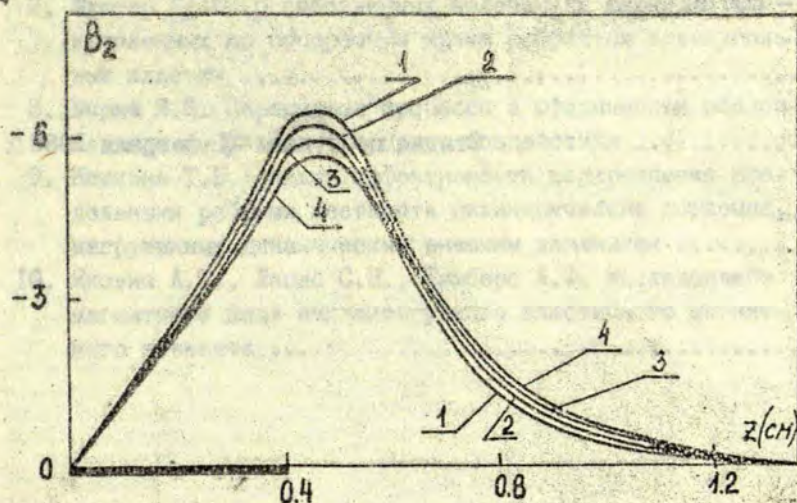


Рис. 7. Распределение аксиальной составляющей индукции по длине сосуда (параметры те же, что в рис. 5.).

радиальной составляющей, однако ею не определяется существенное силовое воздействие на заряженные частицы, т.к. скорость основного потока $\vec{v}_k \parallel \vec{B}_z$.

С использованием разработанной программы составлен атлас силового воздействия на элементы крови при различных радиусах сосуда и типовых размерах имплантируемого магнита.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимберс А.Ф., Якович А.Т., Устинович И.В. Изучение распределения магнитного поля имплантируемых эластичных магнитных элементов. - В кн.: Республиканская конференция молодых учёных медиков: Тезисы докладов. Рига, 1982, с. 106-107.
2. Кузник Б.И., Скипетров В.П. Форменные элементы крови. - М.: Медицина, 1974. - 308 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656 с.

Статья поступила 21 февраля 1983 г.

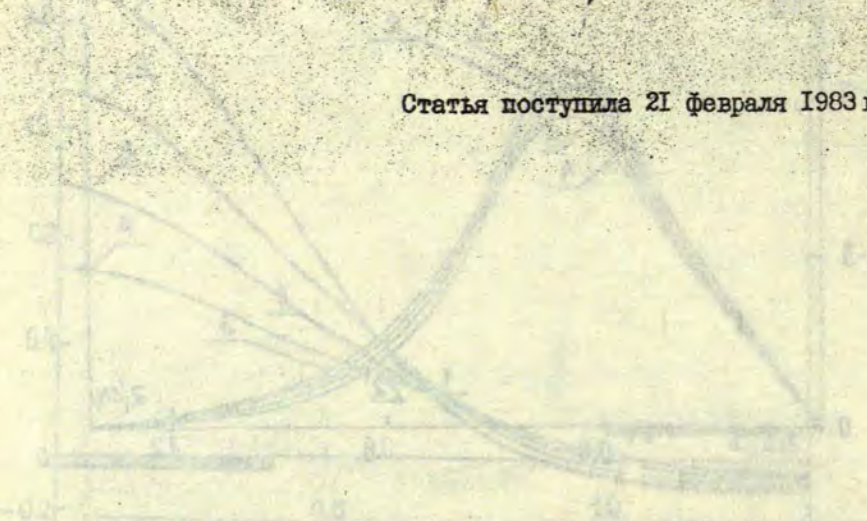


Рис. 5. Расчеты влияния магнитного поля на движение заряженных частиц в сосуде с током. (а) - радиальная составляющая скорости; (б) - продольная составляющая скорости; (в) - радиальная составляющая ускорения; (г) - продольная составляющая ускорения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Павлов С.И. О выборе метода численного расчета движения расплава в индукционной тигельной печи	3
2. Губченко А.П. Исследование формы свободной поверхности жидкого металла в осесимметричном магнитном поле	22
3. Босых Л.А., Платонов В.И. О возможности применения центробежных МГД-насосов в литейном производстве ...	36
4. Ауза В.Я. Расчет трехмерного магнитного поля с учетом движения и насыщения магнитных материалов	47
5. Завицкий Э.А. Определение электромагнитных характеристик линейного асинхронного двигателя с учетом длины и ширины магнитопровода индуктора	57
6. Шнидере Л.Я. Одномерное моделирование теплового состояния асинхронного электродвигателя в режиме короткого замыкания	67
7. Шлютер Г.-Ю. О собственных колебаниях шарнирно закрепленных по поперечным краям ребристых прямоугольных пластин	80
8. Варна Я.П. Переходные процессы в сферических оболочках при импульсном торцевом воздействии	103
9. Кошкина Т.Б. Анализ эффективности подкрепления продольными ребрами жесткости цилиндрических оболочек, нагруженных динамическим внешним давлением	117
10. Якович А.Т., Лацис С.И., Тимберс А.Ф. Исследование магнитного поля имплантируемого эластичного магнитного элемента	128

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
ПРОМЫШЛЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ И УСТРОЙСТВА

Сборник научных трудов
(межвузовский)

Редакторы: Ю. Микельсон, С. Рязанцева
Технический редактор И. Балодэ
Корректор И. Фридрига

Подписано к печати 1983.23.06. ЯТ 09142 Ф/6 60x84/16.
Бумага №1. 9,8 физ. печ. л. 9,1 усл. печ. л. 6,9 уч.-изд. л.
Тираж 500 экз. Зак. № 1114. Цена 1 р.

Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 226098, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, Рига 226050, ул. Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им. П. Стучки