Моделирование физических процессов в сплошных средах

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Рига 1985

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Физико-математический факультет
Совет молодых ученых

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

(межвузовский)

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1985

УДК 517, 519,532,534,536,537,539,621,629

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Моделирование физических процессов в сплошных средах: Сборник научных трудов (межвузовский)/ Под ред. А.А.Буйкиса. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985. - 159 с.

Сборник научных трудов содержит результаты исследований, проведенных молодыми учеными физико-математического факультета ЛГУ им.П.Стучки, Института физики АН ЛатвССР, Института органического синтеза АН ЛатвССР и других организаций. Научные статьи, включенные в сборник, посвящены различным аспектам моделирования физических процессов. Часть исследований направлена на изучение конкретных технических устройств, другие носят теоретический характер.

Сборник предназначен для специалистов, работающих в области электродинамики и механики сплошных сред, прикладной математики, а также аспирантов и студентов, специализирующихся в этих направлениях.

Ил. 38, табл. 7, библиогр. 97 назв.

Печатается по решению Издательского совета ЛГУ им. П.Стучки.

М $\frac{20305-087у}{М812(11)-85}$ 11.85.1703040000

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 3-23

УДК 536.421.1:537.84

Л.Л.Булыгин
ЛГУ им. П.Стучки

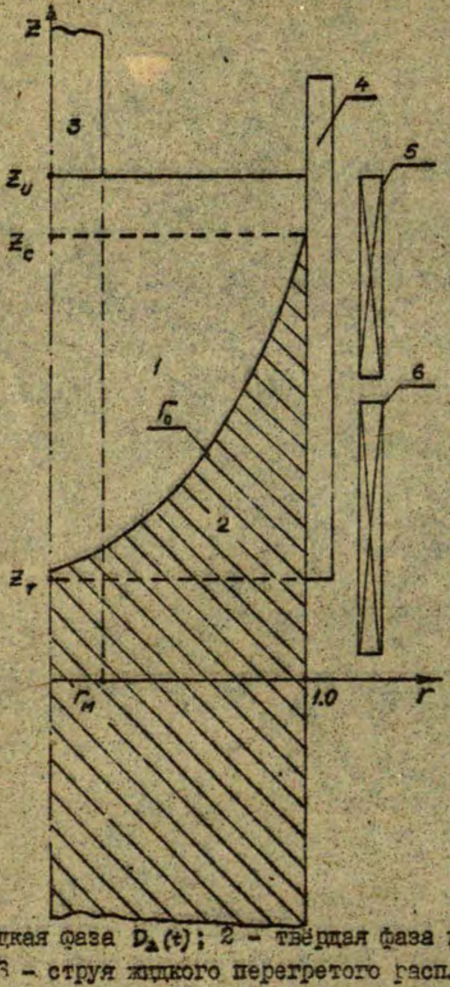
РАСЧЁТ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В СЛУЧАЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ КОНВЕКЦИИ МЕТОДОМ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Введение

Разные аспекты процессов кристаллизации при наличии ЭМ воздействия на расплав рассмотрены рядом авторов. Так,в работе [1] проведён сравнительный анализ способов электромагнитного перемешивания расплава в условиях затвердевания непрерывного слитка, однако рассматривается только гидродинамическая задача в прямоугольной области, а фронт кристаллизации зафиксирован.

В работе [2] анализируется воздействие термогравитационной конвекции на процесс затвердевания. Для уравнения теплопроводности учитывается конвективный перенос и тепло кристаллизации, которое включается в коэффициент эффективной теплоёмкости. Уравнения Навье-Стокса и теплопроводности решаются МКЭ. Аналогичный подход использован в работе [3], приводится также алгоритм построения нерегулярной конечно-разностной сетки, согласованный с фронтом кристаллизации на каждом временном слое. Рассматривается модельная задача, возникающая при изучении процесса плазменно-дугового переплава.

Рис. I. Модель аксиально-симметричного МГД-устройства для кристаллизации



I - жидкая фаза $D_1(t)$; 2 - твёрдая фаза перегретого расплава $(D_2(t))$; 3 - струя жидкого перегретого расплава; 4 - тигель (кристаллизатор); 5 - плавильный индуктор; Γ_0 - фронт кристаллизации.

Задачи кристаллизации для выращивания монокристаллов полупроводниковых материалов рассмотрены рядом авторов, например, [4, 5], однако также рассматривается воздействие отдельных факторов на процессы кристаллизации при упрощающих предположениях (отсутствие конвективного переноса тепла и др.).

Процессы непрерывного литья моделируются в [6]. Уравнения гидродинамики и теплопроводности решаются МКР. Движение в твёрдой фазе блокируется введением большого коэффициента вязкости. В уравнении теплопроводности учитывается конвективный перенос тепла. Коэффициенты турбулентного переноса моделируются с использованием уравнения для турбулентной энергии. Турбулентное число Прандтля полагается равным 0.7. Задача решается в стационарной постановке. В работе [7] анализ процессов непрерывного литья проводится на основе одномерных моделей.

Очевидно, что процессы, происходящие при совместном воздействии тепловых и ЭМ полей на кристаллизацию,в металлургических установках изучены в недостаточной мере. Ввиду практической важности этих вопросов возникает необходимость разработки математической модели и численных методик. Учитывая нелинейное взаимодействие тепловых и гидродинамических полей в таких задачах, целесообразно использовать простые численные методы сквозного счёта (МКР), а также метод установления, позволяющий получить решение по крайней мере на нескольких временных слоях. Использование МКЭ или нерегулярных сеток в МКР [1,2,3] представляется невыгодным ввиду малоэффективности при наличии нескольких фронтов кристаллизации, их слияния и др.

I. Физическая модель

Модель аксиально-симметричного МГД-устройства для кристаллизации представлена на рис. I. Жидкий металл I подаётся в кристаллизатор 4 сверху через отверстие радиусом r_k - 3.

Затвердевший слиток вытягивается со скоростью V_*. В модели приняты следующие допущения.

I) Физические параметры полагаются постоянными в каждой фазе (ρ, λ, c, σ и др.). Возможно введение зависимости $\rho(T)$ в приближении Буссинеска.

2) Вязкость в жидкой фазе является переменной в объёме.

3) Процесс кристаллизации происходит при одной температуре плавления T_c .

4) Теплообмен со стенками кристаллизатора происходит по закону Ньютона.

5) Верхняя поверхность жидкой фазы $z = z_н$ – плоская.

Тепловыми источниками являются джоулево тепло от индуктора 5 и перегретый жидкий металл 3. Для адекватного описания теплоотдачи к стенкам кристаллизатора и внешней среде вводятся три зоны с различными коэффициентами теплоотдачи – зона жидкий металл – стенка, затвердевший слиток – стенка, слиток-воздух. Теплоотдача в слиток ($z=0$) может моделироваться заданием температуры. Теплоотдача от верхней поверхности жидкого металла может быть учтена в зависимости от конкретного устройства условием теплоотдачи излучением, теплообмена по закону Ньютона или тепловой изоляции.

2. Математическая модель

Для определения поля температуры и формы фронта кристаллизации необходимо решить систему уравнений Гельмгольца, Навье-Стокса и теплопроводности:

$$\Delta A - \frac{A}{r^2} = i\omega A - j_*, \qquad (I)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_r = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re}\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2}\right) + Al f_r, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re}\Delta v_z + Al f_z, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0, \qquad (4)$$

$$Pe\,C^*\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+(\vec{V}\nabla)\theta\right)=\lambda^*\Delta\theta+\frac{1}{2}P_0 q, \qquad (5)$$

где безразмерные величины введены следующим способом:

$\hat{\omega}=\mu_0\sigma\omega r_0^2$ - безразмерная частота,

$Re=\frac{V_0 r_0}{\nu}$ - число Рейнольдса,

$Pe=\frac{V_0 r_0}{\varkappa}$ - число Пекле,

$Al=\frac{B_0^2}{\mu_0\rho V_0^2}$ - число Альфвена,

$P_0=\frac{j_0^2 r_0^2}{\sigma\lambda_2(T_0-T_c)}$ - число Померанцева.

$C^*=\begin{cases}\frac{c_1}{c_2} & \text{- в твёрдой фазе,}\\ 1 & \text{- в жидкой фазе,}\end{cases}$

$\lambda^*=\begin{cases}\frac{\lambda_1}{\lambda_2} & \text{- в твёрдой фазе,}\\ 1 & \text{- в жидкой фазе,}\end{cases}$

r_0 - характерный размер (м),

V_0 - характерная скорость (м/сек),

$t_0=\frac{r_0}{V_0}$ - характерное время (сек),

$\varkappa=\frac{\lambda_2}{\rho c_2}$ - характерный коэффициент температуропроводности,

$\theta=\frac{T-T_c}{T_0-T_c}$ - безразмерная температура,

T_c - температура кристаллизации (К),

T_0 - температура струи перегретого расплава (К),

c_1, c_2 - удельная теплоёмкость твёрдой и жидкой фаз $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}\right)$,

λ_1, λ_2 - коэффициент теплопроводности твёрдой и жидкой фазы $\left(\frac{Вт}{м.К}\right)$.

Граничные условия для температуры следующие:

- при фиксированной температуре на границе:

$\theta = \theta_*$, где θ_* - заданная температура; (6)

- при заданном тепловом потоке:

$$\lambda^* \frac{\partial\theta}{\partial n} = -Ki, \tag{7}$$

где $Ki = \frac{q r_0}{\lambda_2 (T_0 - T_c)}$ - критерий Кирпичева,

q - заданный тепловой поток;

- при заданном теплообмене по закону Ньютона:

$$\lambda^* \frac{\partial\theta}{\partial n} = -Bi\,(\theta - \theta_*), \tag{8}$$

где $Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda_2}$ - критерий Био,

α - коэффициент теплообмена,

θ_* - температура окружающей среды;

- при теплообмене излучением:

$$\lambda^* \frac{\partial\theta}{\partial n} = S_k\,\theta^4, \tag{9}$$

где $S_k = \frac{\varepsilon\sigma (T_0 - T_c)^3}{\lambda_2}$ - критерий Старка,

ε - коэффициент зачернения,

σ - постоянная Стефана-Больцмана.

Для отображения картины течения вводится функция тока ψ:

$$V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\ ;\ V_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{10}$$

которая находится решением уравнения:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = r\overline{\omega} - V_z, \tag{11}$$

где $\overline{\omega} = \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}$ - ротор скорости.

Введём деление границ Γ на подобласти:

$$\Gamma_1 = \{(r,z) \mid 0 \le r \le r_M,\ z = z_u\},$$
$$\Gamma_2 = \{(r,z) \mid r_M < r \le 1,\ z = z_u\},$$
$$\Gamma_3 = \{(r,z) \mid r = 1,\ z_c \le z < z_u\},$$
$$\Gamma_4 = \{(r,z) \mid r = 1,\ z_T \le z < z_c\},$$
$$\Gamma_5 = \{(r,z) \mid r = 1,\ 0 \le z < z_T\},$$
$$\Gamma_6 = \{(r,z) \mid 0 \le r \le 1,\ z = 0\},$$
$$\Gamma_7 = \{(r,z) \mid r = 0,\ 0 \le z \le z_u\}.$$

Граничные условия для всех физических полей, кроме магнитного, сведены в табл. I. Граничные условия задаются на границе Γ_i (i =I, ..., 7), однако часть из них должна выполняться на границе Γ_0 (граничные условия прилипания и др.).

Чтобы задать необходимые условия на границе Γ_0 , используется искусственный приём увеличения (на 3–6 порядков) коэффициентов переноса в твёрдой фазе, что обеспечивает "диффузию граничных условий" от Γ_i к Γ_0 . Так, при больших коэффициентах вязкости скорости в твёрдой фазе малы и граничные условия прилипания на Γ_i дают тот же эффект, что и граничные условия прилипания на Γ_0 . Прямая же аппроксимация граничных условий на Γ_0 сильно усложняет задачу, если учесть, что Γ_0 определяется в процессе счёта.

На границе Γ_0 должно также выполняться условие Стефана:

$$\lambda^* [\nabla\theta] \nabla S + l = 0, \tag{I2}$$

где $[\nabla\theta] = (\nabla\theta)^+ - (\nabla\theta)^-$,

$(\phi)^+$ – предел функций ϕ на Γ_0 со стороны жидкой фазы,

Таблица I. Граничные условия для полей $\vec{V}$, p, ψ и θ.

Граница / Поле	$Г_1$	$Г_2$	$Г_3$	$Г_4$	$Г_5$	$Г_6$	$Г_7$
V_r	0	0	0	0	0	0	0
V_z	$\frac{2V_*}{r_м^4}(r_м^2-r^2)$	0	0	V_*	V_*	V_*	V_*
p	$\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{1}{Re}\frac{8V_*}{r_м^4}$	$\frac{\partial p}{\partial n}=0$	$\frac{\partial p}{\partial n}=0$	$\frac{\partial p}{\partial n}=0$	$\frac{\partial p}{\partial n}=0$	$\frac{\partial p}{\partial n}=0$	$\frac{\partial p}{\partial n}=0$
ψ	$V_*\left(\frac{r^4}{2r_м^4}-\frac{r^2}{r_м^2}\right)$	$-\frac{V_*}{2}$	$-\frac{V_*}{2}$	$-\frac{V_*}{2}$	$-\frac{V_*}{2}$	$-r^2\frac{V_*}{2}$	0
θ	1	$\frac{\partial\theta}{\partial n}=-Ki_2$	$\frac{\partial\theta}{\partial n}=-Bi_3\cdot(\theta-\theta_{*3})$	$\frac{\partial\theta}{\partial n}=-Bi_4\cdot(\theta-\theta_{*4})$	$\frac{\partial\theta}{\partial n}=-Bi_5\cdot(\theta-\theta_{*6})$	θ_{*6}	$\frac{\partial\theta}{\partial n}=0$

$(\varphi)^-$ — предел функции φ на Γ_0 со стороны твёрдой фазы,

$s(x)=t$ — функция, описывающая положение границы Γ_0, обратная функция $x = L(t)$,

$l = \frac{e r_0^2}{\lambda_2 (T_0 - T_c) t_0}$ — безразмерное тепло кристаллизации,

e — тепло кристаллизации $\left(\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}\right)$.

Для решения задач с неизвестной границей хорошо себя зарекомендовал метод вариационных неравенств [8]. Для преодоления трудностей, связанных с разрывностью градиентов температуры на неизвестной границе, задача решается в переменных индекса замерзания Фремона [9]:

$$u(x,t) = \int_0^t \lambda^* \theta(x,\tau)\, d\tau. \tag{I3}$$

При такой замене переменных уравнение теплопроводности преобразуется к следующей форме:

$$Pe\, \frac{c^*}{\lambda^*}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{V}\nabla)u\right) = \Delta u + Pe\, c^* \theta(0) + \varepsilon_{pj} l + \frac{1}{2} P_0 \int_0^t q\, d\tau, \tag{I4}$$

где

$$p = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D_1(t), \\ 2, & \text{если } x \in D_2(t), \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D_1(0), \\ 2, & \text{если } x \in D_2(0), \end{cases}$$

$\theta(0)$ — начальное распределение температуры.

Граничные условия преобразовываются соответственно (I3) и (6) – (8).

Первого рода:

$$u = \int_0^t \lambda^* \theta_* \, d\tau, \tag{I5}$$

второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\int_0^t Ki\, d\tau, \tag{I6}$$

третьего рода:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{Bi}{\lambda^*} u + Bi \int_0^t \theta_* \, d\tau. \tag{17}$$

3. Численные схемы

Уравнения (2) - (5) и (II) решаются методом конечных разностей, (I) - методом конечных элементов [I0]. Для МКР вводится прямоугольная сетка, делящая область $D_1 \cup D_2$ на ячейки. Определение узловых значений на ячейке представлено на рис. 2.

Гидродинамические уравнения (2) - (4) решаются по неявной схеме SIMPLE на шахматной сетке [II]:

$$\frac{\tilde{\vec{V}} - \vec{V}^n}{\tau} = -(\vec{V}^n \nabla)\tilde{\vec{V}} + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\vec{V}} - \nabla p^n + Al\vec{f}, \tag{18}$$

$$\Delta \delta p^n = \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \tilde{\vec{V}}, \tag{19}$$

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \tilde{\vec{V}}}{\tau} = -\nabla \delta p^n; \tag{20}$$

$$p^{n+1} = p^n + \delta p^n; \tag{21}$$

где τ - шаг по времени,

Φ^n - значение функции на n -том временном слое,

$\tilde{\Phi}$ - промежуточное значение функции Φ .

Уравнение теплопроводности решается совместно с уравнениями движения по неявной схеме:

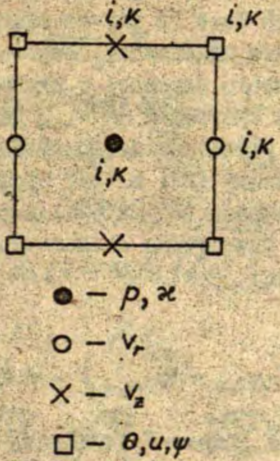
$$Pe \frac{c^*}{\lambda^*}\left(\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + (\tilde{\vec{V}}\nabla)u^{n+1}\right) = \Delta u^{n+1} + Pe\, c^* \theta^n + \varepsilon_{pj} L + \frac{1}{2} Pe\, q\tau, \tag{22}$$

где θ^n - значение температуры на n -том временном слое.

Уравнения (I8) и (22) решаются методом релаксации:

$$\frac{\tilde{\vec{V}}^m - \vec{V}^n}{\tau} = -(\vec{V}^n \nabla)\tilde{\vec{V}}^m + \frac{1}{Re} \Delta \tilde{\vec{V}}^m - \nabla p^n + Al\vec{f}, \tag{23}$$

Рис. 2. Определение неизвестных на конечно-разностной сетке



$$Pe\frac{c^*}{\lambda^*}\left(\frac{u^{n+1,m}-u^{n}}{\tau}+(\tilde{\vec V}\nabla)u^{n+1,m}\right)=\Delta u^{n+1,m}+PeC^*\theta^{n}+\varepsilon_{pj}L+\frac{1}{2}P_0 q\tau, \qquad (24)$$

где $\Phi^{n+1,m}$ – значение функции Φ на $n+1$ -м временном слое в m -той итерации,

$\tilde{\Phi}^{m}$ – промежуточное значение функции Φ в m -той итерации.

Использование значения $\tilde{\vec V}^{m}$ для конвективного переноса индекса замерзания u несколько противоречит условиям постоянства $\vec V$ (при таком предположении и получено уравнение (I4), однако предполагается, что ошибка невелика. На наш взгляд использование значения $\vec{V}^n$ приводит к более нефизичному алгоритму решения, поскольку в таком случае в течение всего временного слоя τ конвективный перенос сохраняется с предыдущего временного слоя, что приводит к наличию конвективного переноса в твёрдой фазе (в случае замерзания), или отсутствию в жидкой (в случае плавления). Использование же $\tilde{\vec{V}}^m$ согласует зону конвективного переноса с жидкой фазой, правда, на основе промежуточных скоростей $\tilde{\vec{V}}^m$. В дальнейшем при необходимости возможно уточнение этого приближения. При достижении сходимости уравнений (23) и (24) производится коррекция полей $\vec{V}$ и P согласно (20) и (2I) и рассчитывается функция тока по (II). Разностные аналоги уравнений (23), (24), (I9), (II) имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{r\,i,k} = \Big\{ & V^n_{r\,i,k} + d\cdot\big[-V^n_{r\,i,k}\cdot(\tilde{V}_{r\,i+1,k} - \tilde{V}_{r\,i-1,k}) - 0.25\cdot(V^n_{z\,i,k} + \\ & + V^n_{z\,i+1,k} + V^n_{z\,i,k-1} + V^n_{z\,i+1,k-1})\cdot(\tilde{V}_{r\,i,k+1} - \tilde{V}_{r\,i,k-1})\big] + g\cdot \\ & \cdot\Big[\Big(1-\frac{h}{2r_{i+1}}\Big)\cdot\xi_{wc}\,\tilde{V}_{r\,i-1,k} + \Big(1+\frac{h}{2r_{i+1}}\Big)\cdot\xi_{Ec}\,\tilde{V}_{r\,i+1,k} + \\ & + \xi_{Nc}\,\tilde{V}_{r\,i,k+1} + \xi_{sc}\,\tilde{V}_{r\,i,k-1}\Big] + Al\cdot\tau\cdot f_r - 2\cdot d\cdot(P^n_{i+1,k} - \\ & - P^n_{i,k})\Big\} \Big/ \big[(\xi_T + \xi_c/r^2_{i+1})g + 1\big],\end{aligned} \qquad (25)$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{z\,i,k} = \Big\{ & V^n_{z\,i,k} + d\big[-0.25\,(V^n_{r\,i-1,k+1} + V^n_{r\,i,k+1} + \\ & + V^n_{r\,i-1,k} + V^n_{r\,i,k})\cdot(\tilde{V}_{z\,i,k} - \tilde{V}_{z\,i-1,k}) - V^n_{z\,i,k}\,(\tilde{V}_{z\,i,k+1} - \\ & - \tilde{V}_{z\,i,k-1})\big] + g\cdot\Big[\Big(1-\frac{h}{2r_{i+\frac{1}{2}}}\Big)\cdot\eta_{wc}\cdot\tilde{V}_{z\,i-1,k} + \\ & + \Big(1+\frac{h}{2r_{i+\frac{1}{2}}}\Big)\cdot\eta_{Ec}\cdot\tilde{V}_{z\,i+1,k} + \eta_{Nc}\cdot\tilde{V}_{z\,i,k+1} + \eta_{sc}\,\tilde{V}_{z\,i,k-1}\Big] + \\ & + AL\cdot\tau\cdot f_z - 2\cdot d\cdot(P^n_{i,k+1} - P^n_{i,k})\Big\} \Big/ (\eta_T g + 1),\end{aligned} \qquad (26)$$

$$u_{i,k} = R_1 u_{i-1,k} + R_2 u_{i+1,k} + R_3 u_{i,k-1} + R_4 u_{i,k+1} + h^2/A \cdot$$

$$\left(Pe \cdot C^{n} \theta^{n}_{i,k} + \varepsilon p j l + \frac{1}{2} Po\, q \tau - Pe \frac{C^*}{\lambda^*} \frac{u_{i,k} - u^{n}_{i,k}}{\tau}\right), \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\delta p^{n}_{i,k} = \Big\{ & \left(1 + \frac{h}{2 r_{i+\frac{1}{2}}}\right) \mu_{EC}\, \delta p^{n}_{i+1,k} + \left(1 - \frac{h}{2 r_{i+\frac{1}{2}}}\right) \mu_{WC}\, \delta p^{n}_{i-1,k} + \\ & + \mu_{SC}\, \delta p^{n}_{i,k-1} + \mu_{NC}\, \delta p^{n}_{i,k+1} - h/\tau \Big[\left(1 + \frac{h}{2 r_{i+\frac{1}{2}}}\right) \tilde{V}_{r\,i,k} - \\ & - \left(1 - \frac{h}{2 r_{i+\frac{1}{2}}}\right) \tilde{V}_{r\,i-1,k} + \tilde{V}_{z\,i,k} - \tilde{V}_{z\,i,k-1} \Big] \Big\} / \mu_T ,\end{aligned} \tag{28}$$

$$V_{r\,i,k}^{n+1} = \tilde{V}_{r\,i,k} - \tau/h \left(\delta p^{n}_{i+1,k} - \delta p^{n}_{i,k}\right), \tag{29}$$

$$V_{z\,i,k}^{n+1} = \tilde{V}_{z\,i,k} - \tau/h \left(\delta p^{n}_{i,k+1} - \delta p^{n}_{i,k}\right), \tag{30}$$

$$p^{n+1}_{i,k} = p^{n}_{i,k} + \delta p^{n}_{i,k}, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}\psi^{n+1}_{i,k} = \Big\{ & Z_{EC}\, \psi^{n+1}_{i+1,k} + Z_{WC}\, \psi^{n+1}_{i-1,k} + Z_{SC}\, \psi^{n+1}_{i,k-1} + \\ & + Z_{NC}\, \psi^{n+1}_{i,k+1} + h\Big[r_{i+1} \left(V_{r\,i,k}^{n+1} - V_{r\,i,k+1}^{n+1}\right) - \\ & - r_{i+\frac{1}{2}} V_{z\,i,k}^{n+1} + r_{i+\frac{3}{2}} V_{z\,i+1,k}^{n+1} \Big] \Big\},\end{aligned} \tag{32}$$

где

$$d = \tau / 2h,$$

$$g = \tau / h^2,$$

$$\Phi_{WC} = 2 \Phi_W \Phi_C / (\Phi_W + \Phi_C),$$

$$\Phi_T = \Phi_{NC} + \Phi_{EC} + \Phi_{SC} + \Phi_{WC},$$

$\Phi = \Xi, \rho, \mu, Z,$ см. Рис.3,

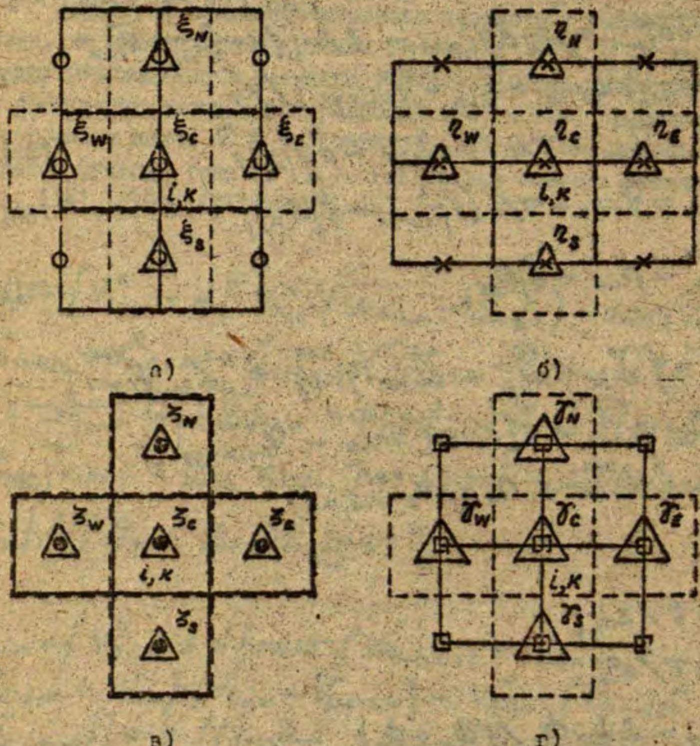
Рис. 3. Определение коэффициентов переноса:

а) для V_r ,

б) для V_z ,

в) для p ,

г) для ψ .



$$R_1 = 0.25\left[1 - \frac{h}{2r_{i+1}} + \frac{r_i h\left(\tilde{V}_{r\,i-1,k} + \tilde{V}_{r\,i-1,k+1}\right)}{4r_{i+1}} Pe\right],$$

$$R_2 = 0.25\left[1 + \frac{h}{2r_{i+1}} - \frac{r_{i+2} h\left(\tilde{V}_{r\,i+1,k} + \tilde{V}_{r\,i+1,k+1}\right)}{4r_{i+1}} Pe\right],$$

$$R_3 = 0.25\left[1 + \frac{h\left(\tilde{V}_{z\,i,k-1} + \tilde{V}_{z\,i+1,k-1}\right)}{4} Pe\right],$$

$$R_4 = 0.25\left[1 - \frac{h\left(\tilde{V}_{z\,i,k+1} + \tilde{V}_{z\,i+1,k+1}\right)}{4} Pe\right].$$

Критерий сходимости выбран следующий:

$$\max\left(\varepsilon_r, \varepsilon_z, \varepsilon_u\right) < \varepsilon_1, \qquad (33)$$

$$\varepsilon_p < \varepsilon_2, \qquad (34)$$

$$\varepsilon_\psi < \varepsilon_3, \qquad (35)$$

где

$$\varepsilon_r = \frac{\sum\limits_{i,k}\left|\tilde{V}_{r\,i,k}^{\,n+1,m+1} - \tilde{V}_{r\,i,k}^{\,n+1,m}\right|}{\sum\limits_{i,k}\left|\tilde{V}_{r\,i,k}^{\,n+1,m+1}\right|},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sum\limits_{i,k}\left|\tilde{V}_{z\,i,k}^{\,n+1,m+1} - \tilde{V}_{z\,i,k}^{\,n+1,m}\right|}{\sum\limits_{i,k}\left|\tilde{V}_{z\,i,k}^{\,n+1,m+1}\right|},$$

$$\varepsilon_u = \frac{\sum\limits_{i,k}\left|u_{i,k}^{\,n+1,m+1} - u_{i,k}^{\,n+1,m}\right|}{\sum\limits_{i,k}\left|u_{i,k}^{\,n+1,m+1}\right|},$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sum\limits_{i,k} \left| \delta p_{i,k}^{n+1,m+1} - \delta p_{i,k}^{n+1,m} \right|}{\sum\limits_{i,k} \left| \delta p_{i,k}^{n+1,m+1} \right|},$$

$$\varepsilon_\psi = \frac{\sum\limits_{i,k} \left| \psi_{i,k}^{n+1,m+1} - \psi_{i,k}^{n+1,m} \right|}{\sum\limits_{i,k} \left| \psi_{i,k}^{n+1,m+1} \right|},$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = 10^{-2} \div 10^{-3}$ – заданная точность для функций V_r, V_z, u; p и ψ.

4. Некоторые результаты расчётов

Описанная методика была опробована на решении модельной задачи, качественно моделирующей процесс плавления прямого цилиндра квадратного сечения в поле однофазного индуктора. Все стенки теплоизолированные, кроме верхней, на которой заданы граничные условия теплоотвода по закону Ньютона (8) с параметрами – $Bi = 1$, $\theta_* = -1$. Остальные параметры следующие: $C^* = 1$, $\lambda^* = 1$ (т.е., коэффициенты теплоёмкости и теплопроводности в твёрдой и жидкой фазе предполагаются одинаковыми), $L = 1$, $P_0 = 2$, $Re = 50$. Полученные температурные поля на 6-ти временных слоях представлены на рис. 4. Гидродинами-

Рис. 4. Распределение температуры и расположение фронта кристаллизации. а) Pe =0, б) Pe =50, в) Pe =100.

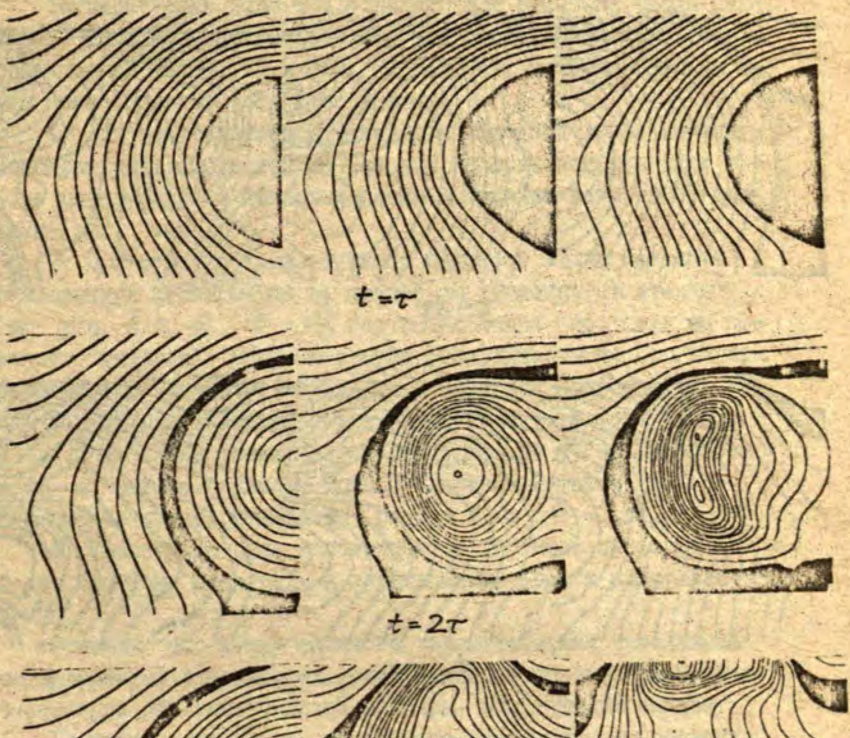
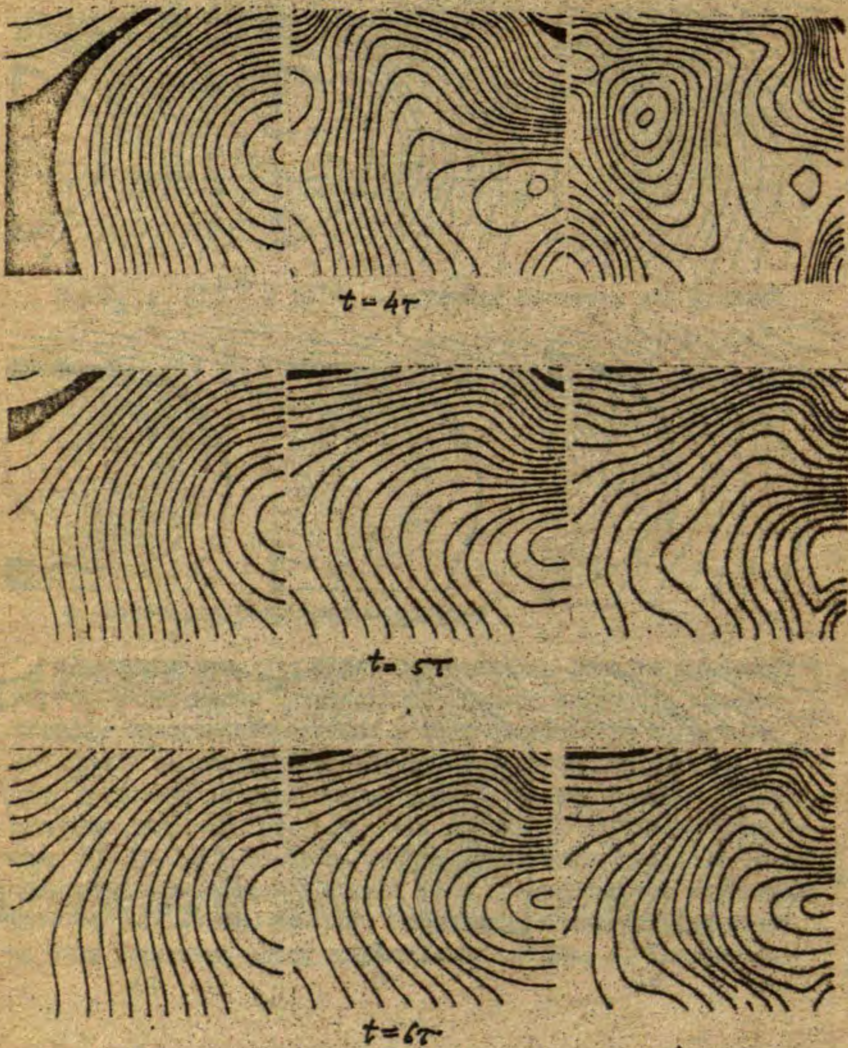


Рис. 4. Продолжение.



ческие поля не приведены, поскольку последние представляют два тороидальных вихря, характерных для однофазного индуктора, деформированные границей твёрдой фазы.

Температурные поля представлены для значений числа Пекле - 0 (под этим понимается отсутствие конвективного переноса в жидкой фазе), 50 и 100. По полученным температурным полям можно сделать следующие выводы.

1) При отсутствии конвективного переноса тепла максимум температуры достигается на боковой поверхности цилиндра в зоне максимального тепловыделения и линейно зависит от времени (рис. 4.а).

2) При наличии конвективного переноса тепла максимум температуры достигается на некотором удалении от стенки (см. рис. 4.б, в), $t = 3\tau$. Это объясняется поступлением холодного металла в зону максимума тепловыделения. При полном расплавлении максимум находится на боковой поверхности цилиндра, однако изотермы имеют более изогнутую форму, обусловленную конвективным переносом (рис. 4. $t = 6\tau$). Перестройка от одного режима к другому характеризуется весьма сложным температурным полем (рис. 4.б, в $t = 3,4\tau$).

3) Увеличение роли конвективного переноса приводит к более быстрому плавлению и передвижению фронта кристаллизации.

Отметим, что ввиду сложного взаимодействия механизмов теплопереноса в процессах кристаллизации целесообразно рассматривать ряд интегральных величин, облегчающих анализ:

1) количество тепла, отводимого через границу области Γ,

2) количество тепла, идущее на нагрев в жидкой и твёрдой фазе,

3) количество тепла, идущее на плавление,

4) количество выделенного в области тепла.

Расчёт 10-ти временных слоёв при $\varepsilon = 10^{-2}$ на сетке 21x21 занимает ЭВМ ЕС-1022 $\sim$ 1 час при объёме памяти 100 килобайт.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самойлович Ю.А., Ясницкий Л.Н., Кабаков З.К. Гидродинамические явления при затвердевании непрерывного слитка в условиях индуктивного МГД-взаимодействия. - Магнитная гидродинамика, 1983, № 4, с. 123-130.

2. Самойлович Ю.А., Ясницкий Л.Н., Кабаков З.К. Исследование термогравитационной конвекции при затвердевании жидкой стали методом математического моделирования. - ИФЖ, 1982, № 3, с. 465-473.

3. Бакирова О.И., Фрязинов И.В. Метод совместного решения задачи Стефана и уравнений Навье-Стокса. - М.: ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1981,-29 с.

4. Авдонин Н.А., Иванова Г.Ф. Численное решение задачи кристаллизации бинарных сплавов с учётом зарождения и динамики роста кристаллов. - В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики, Рига, 1980, с. 74-84.

5. Дзенис Е.Д., Мартузан Б.Я. Расчёт температуры в растущем кристалле с учётом радиационного теплообмена с окружающей средой в условиях процесса Чохральского.-В кн.: Прикладные задачи теоретической и математической физики, Рига, 1978, с. 70-86.

6. Asai S., Szekely J. Turbulent flow and its effects in continuous casting. - Ironmaking and Stulmaking, 1975, Nr. 3, pp. 205-213.

7. Берзинь В.А. и др. Оптимизация режимов затвердевания непрерывного слитка. - Рига: Зинатне, 1977,-146 с.

8. Дюво Г., Лионс Ж. - Л. Неравенства в механике и физике. - М.: Наука, 1980,-384 с.

9. Kikuchi N., Ichikawa Y. Numerical methods for a two-phase Stefan problem by variational inequalities. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1979, Nr. 14, pp. 1221-1239.

10. Булыгин Л.Л. Расчёт ЭМ-полей в аксиально-симметричных МГД-установках методом конечных элементов. - В кн.:

Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1985, с. 3-14.

11. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 24-36

УДК 519.63

А.А.Земитис
ЛГУ им.П.Стучки

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В работе [6] исследовалась МГД-неустойчивость свободной поверхности зажатой капли магнитной жидкости с помощью численного эксперимента. Изменение свободной поверхности определялось, используя лагранжевые частицы - "маркеры", скорости передвижения которых вычислялись в фиксированных моментах времени. Это давало возможность моделировать передвижение границы в целом.

В данной работе рассматривается та же задача, однако развитие свободной границы вычисляется в эйлеровых переменных. Налагаются ограничения на форму капли - граница должна быть представлена в любой момент времени t как функция $r = r(\varphi, t)$, где r - полярный радиус, φ - полярный угол,

Мы будем использовать безразмерную систему уравнений, данную в работе [6], только сначала выведем условия передвижения границы. Вывод аналогичен выводу условий на свободной поверхности грунтовых вод [5].

Предположим, что на свободной границе некоторая функция $F(r,\varphi,t) = 0$ для всех моментов времени t . Тогда полная производная по времени $\frac{dF}{dt} = 0$. Это означает:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = 0. \qquad (1)$$

Учтем, что $\frac{dr}{dt}=v_r$ — скорость движения частиц в направлении r, $\frac{d\varphi}{dt}=\frac{1}{r}v_\perp$, $v_\perp$ — скорость в перпендикулярном к r направлении. Скорости $v_r, v_\perp$ можно выразить через v_n и v_τ — скорости в направлении внешней нормали и касательной (в направлении положительного обхода контура)

$$v_r=(\tilde r_\varphi'^2+\tilde r^2)^{-\frac{1}{2}}(v_n\tilde r+v_\tau\tilde r_\varphi'),\ v_\perp=(\tilde r_\varphi'^2+\tilde r^2)^{-\frac{1}{2}}(v_\tau\tilde r-v_n\tilde r_\varphi') \quad (2)$$

Здесь $\tilde r=\tilde r(\varphi,t)$ — представление свободной границы в рассматриваемом моменте времени, $\tilde r_\varphi'=\frac{\partial\tilde r}{\partial\varphi}$. Положим

$$F=r-\tilde r(\varphi,t). \quad (3)$$

После этого вместо $\tilde r$ будем писать r и будем понимать как функцию от φ и t. Уравнение (3) перепишем в виде:

$$-\frac{\partial r}{\partial t}+\frac{v_n r+v_\tau r_\varphi'}{\sqrt{r_\varphi'^2+r^2}}-\frac{r_\varphi'(v_\tau-v_n r_\varphi')}{r\sqrt{r_\varphi'^2+r^2}}=0.$$

Окончательно:

$$\frac{\partial r}{\partial t}=\sqrt{1+\frac{r_\varphi'^2}{r^2}}\,v_n. \quad (4)$$

Теперь запишем систему уравнений в безразмерном виде, моделирующую развитие гидродинамических неустойчивостей капель в приближении Дарси, при условии, что граница области может быть задана как $r=r(\varphi,t)$.

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}=0,\ (\rho,\varphi)\in G(t)=\{(\rho,\varphi)\,|\,0<\rho<r(\varphi,t),\,0\le\varphi\le 2\pi\}, \quad (5)$$

$$p\big|_{(r(\varphi_0,t),\varphi_0)}=K+\frac{BmR^2}{h^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r(\varphi,t)}\rho\Bigg(\frac{1}{\sqrt{r^2(\varphi_0,t)-2r(\varphi_0,t)\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho^2}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{r^2(\varphi_0,t)-2r(\varphi_0,t)\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho^2+(h/R)^2}}\Bigg)d\rho,\ 0\le\varphi_0\le 2\pi,\ t>0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}=-\sqrt{1+\frac{r_\varphi'^2}{r^2}}\,\frac{\partial p}{\partial n}\bigg|_{(r(\varphi,t),\varphi)},\ G(0)=G_0,\ r(\varphi,0)=r_0(\varphi), \quad (7)$$

$0\le\varphi\le 2\pi,\ t>0.$

Здесь $p=p(\rho,\varphi,t)$, K - кривизна, Bm - магнитное число Бонда, характеризующее соотношение магнитных и капилярных сил. $R=\sqrt{\frac{mes G_0}{\pi}}$, h - толщина слоя. Более подробно о параметрах см. в [6].

Остановимся кратко на особенностей сформулированной задачи (I). Эта так называемая задача со свободной границей. Важно отметить, что в этой задаче вся граница свободна (то есть неизвестна). Если не интересоваться динамикой процесса, описываемой задачей (5)-(7), а только стационарным состоянием, то можно поставить следующую задачу:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}=0,\ (\rho,\varphi)\in G^*=\{(\rho,\varphi)\,|\,0\le\rho\le r^*(\varphi),\ 0\le\varphi<2\pi\},$$

$$-p(r(\varphi_0),\varphi_0)=K+\frac{BmR^2}{h^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r^*(\varphi)}\rho\Bigg(\frac{1}{\sqrt{r^{*2}(\varphi_0)-2r^*(\varphi_0)\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho^2}}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{r^{*2}(\varphi_0)-2r^*(\varphi_0)\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho^2+(h/R)^2}}\Bigg)d\rho\equiv\Phi(S^*,r(\varphi_0),\varphi_0),$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{S^*}=0,\ mes\,G^*=mes\,G_0,\quad S^* \text{ - граница } G^*.$$

Так как решением задачи Неймана для уравнения Лапласа является произвольная постоянная, то отсюда следует, что $p|_{S^*}=C$, где C - неизвестная постоянная. Таким образом с этого момента информация о том, что p является решением уравнения Лапласа, полностью использована. Тогда стационарную задачу можно сформулировать в следующем виде. Найти контур S^*, который ограничивает область размера $mes\,G_0$, на котором функционал

$$\Phi(S^*,r(\varphi_0),\varphi_0)$$

принимает постоянные значения.

Однако не понятно, как в общем случае из таких условий можно найти две функции $X(s)$, $Y(s)$, задающие контур S^*. В случае, когда границу S^* можно представить в виде функции полярного угла $r=r(\varphi,t)$, тогда в принципе можем получить интегро-дифференциальное уравнение для определения функции $r(\varphi,t)$. Но и здесь возникают трудности в связи с тем, что дополнительные условия специального вида. Одно из них – требование на величину площади

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = mes\,G_0 ,$$

второе – $r(\varphi) \geq 0$.

Если рассматривать самый простейший случай, когда значение параметра Bm при интеграле равняется 0, то видно, что условие $r(\varphi) \geq 0$ заставляет отбросить решения, которые другим требованиям отвечают. В качестве примера

$$\frac{r^2 + 2r'^2 - r r''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} = C, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = mes\,G_0,\ r(\varphi) \geq 0,\ r(0) = r(2\pi)$, C – неизвестная постоянная.

Как легко видеть, уравнение $r^2 + 2r'^2 - r r'' = 2$ удовлетворяет, например, $r = \cos\varphi$ и $r = \sin\varphi$. Однако здесь не выполняется условие $r(\varphi) \geq 0$ для $\varphi \in [0, 2\pi]$. Единственным решением данной задачи является $r(\varphi) = const$ и эта постоянная равна $\sqrt{\frac{mes\,G_0}{\pi}}$.

Несмотря на то, что мы сумели "избавиться" от времени в задаче (5)-(7), для полученных задач необходимо строить итерационный процесс так, чтобы начальное приближение удовлетворяло дополнительным условиям. Это фактически соответствует введению аналога времени. Возможно, что каким-то образом можно построить такой процесс установления, в результате которого получим решение поставленной задачи. Мы, однако, будем использовать процесс установления, который заложен в модели (5)-(7). Систему вида (5)-(7) естественно решать следующим образом. В моменте времени t_0, при котором известен вид границы – $r(\varphi, t_0)$, определяем $\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_S$ – нормальную производную от решения соответствующей задачи Дирихле для уравнений Лапласа на границе области. Далее, используя уравнение (7), вычисляем новое положение границы в моменте времени $t_0 + \tau$. Понятно, что основная слож-

..ость при таком решении заключается в определении $\frac{\partial\rho}{\partial n}\Big|_S$. Для его нахождения можно использовать метод граничных интегральных уравнений. Однако здесь возможны различные варианты:

1) можно использовать интегральное представление решения уравнения Лапласа ρ на границе области.

Для определения $\frac{\partial\rho}{\partial n}\Big|_S$ тогда имеем интегральное уравнение первого рода с логарифмической особенностью.

В [4] показано, что наличие логарифмической особенности дает возможность решать полученное интегральное уравнение I-го рода, не применяя специальных методов регуляризации. Нами было проверено, можно ли этот подход использовать при решении рассматриваемой задачи. Оказалось, что в тех случаях, когда мы имеем точные граничные условия, контур достаточно гладкий, $\frac{\partial\rho}{\partial n}\Big|_S$ можно определить с точностью 0,5-1,0% при числе точек на границе 40-30. Однако рассматриваемая задача сложна и тем, что граничные условия всегда вычисляем с определенной ошибкой (граничные значения зависят от свойств контура, который мы задаем с помощью кубических сплайнов). Оказывается,

если в граничных условиях допустить погрешность, то точность результатов резко ухудшается. Это подтверждает следующий факт. Если искать $\frac{\partial\rho}{\partial n}\Big|_S$ в случае задачи Дирихле для единичного круга, когда на границе $\rho = 1$ (т.е. равно кривизне), то вместо $\frac{\partial\rho}{\partial n} = 0$ мы получили величины порядка 10^{-3}, 10^{-4}. Но когда на границе задаем кривизну, вычисленную с помощью сплайновых коэффициентов, точность падает до 10^{-1}. Таким образом, здесь наблюдаем эффект того, что необходимо решать интегральное уравнение первого рода. Можно сделать вывод, что рассматриваемый подход неприемлем для решения задач с неточными граничными условиями (если не использовать методы регуляризаций), а также и задач, подобных рассматриваемой.

2) Следующий подход может быть основан на определении гармонически сопряженной функции. В работе [2] дано

необходимое и достаточное условие того, чтобы комплексно-значная функция $p+iq$, заданная на границе S области G, была бы граничным значением аналитической в G функции, обращающейся в бесконечности в нуль. Это условие можно написать после отделения мнимой и вещественной части, в следующем виде:

$$p(x_0,y_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_S p\frac{\cos\varkappa}{l}ds=-\frac{1}{\pi}\int\limits_S q\frac{\sin\varkappa}{l}ds, \qquad (8)$$

$$q(x_0,y_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_S q\frac{\cos\varkappa}{l}ds=\frac{1}{\pi}\int\limits_S p\frac{\sin\varkappa}{l}ds, \qquad (9)$$

где $l=((x_0-x)^2+(y_0-y)^2)^{\frac{1}{2}}$, $\varkappa$ - угол между вектором $(x-x_0, y-y_0)$ и внутренней нормалью в точке (x,y), ds – элемент дуги. В работе [8] используются аналогичные соотношения для определения нормальной или касательной производной гармонической функции.

Можно показать, что выполнение одного соотношения влечет за собой выполнение другого интегрального соотношения. Но тогда эти соотношения можно использовать как интегральные уравнения для определения значений на границе мнимой (вещественной) части аналитической в G функции, если известны на S значения вещественной (мнимой) части аналитической функции. Надо отметить, что интегральные уравнения (8)-(9)-второго рода, но в правой части необходимо вычислять интеграл, который существует только в смысле главного значения Коши.

Указанная система (7)-(8) может быть непосредственно связана с рассматриваемой задачей (5)-(7), так как после нахождения гармонически сопряженной функции q, можем найти $\frac{\partial p}{\partial n}$ из соотношения:

$$\frac{\partial p}{\partial n}=-\frac{\partial q}{\partial \tau}, \qquad (10)$$

где τ - направление касательной в положительном направлении обхода контура.

Используя этот подход, были проведены расчеты для рассматриваемой задачи. Используя (9), определялись границ-

ные значения функции q, потом была построена сплайновая интерполяция, используя которую, находилась касательная производная функция q на границе области. Сначала было получено решение задачи (I) при отсутствии магнитного поля ($B_m=0$). Полученные результаты аналогичны результатам, данным в [6]. Однако при учете магнитного поля ($B_m \neq 0$) правильных результатов получить не удалось. Важно отметить, что в первые 40-50 временных шагов изменение контура (вначале задавался эллипс) происходило в соответствии с результатами в [6], но потом началась "болтанка" отдельных узловых точек контура. Причем, просто увеличивая число узлов на контуре, ситуацию спасти нельзя. Это связано с тем, что в некоторых местах изменение искомой функции от одного узла до другого меньше точности вычислений. Поэтому для получения достоверных результатов необходимо особое внимание уделить операции численного дифференцирования.
И в том случае, если производную аппроксиморовать с первым порядком, используя разделенные разности, возникают эффекты, несоответствующие физическому процессу.

3) Еще одна возможность реализирована в [6]. В этом случае также используют гармонически сопряженную функцию. Вместо задачи Дирихле для самой функции p, ищут решение задачи Неймана для гармонически сопряженной функции q в виде потенциала простого слоя ($\frac{\partial q}{\partial n}$ на границе находим как $\frac{\partial p}{\partial \tau}$). Для определения функции плотности тогда получим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Если функция плотности найдена, тогда можно найти и производные потенциала простого слоя, например, $\frac{\partial q}{\partial \tau}$, что дает и $\frac{\partial p}{\partial n}$. Этот подход хорош тем, что дифференцирование происходит на уровне аналитических формул и приближенно найденную функцию плотности при вычислении скоростей передвижения границы необходимо интегрировать.

Теперь изложим алгоритмы решения задачи. Учитывая третий вариант решения, задачу можно переписать в следующем виде:

$$f_1(s_0) = -2\frac{\partial p}{\partial s}\Big|_{s=s_0} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2\varphi' - r' r_0\sin(\varphi-\varphi_0) - r r_0\varphi'\cos(\varphi-\varphi_0)}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)} f_1\, ds, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{s=s_0} = \frac{1}{\sqrt{r'^2+r^2\varphi'^2}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r r_0'\cos(\varphi-\varphi_0) - r_0' r_0}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{r_0 r\varphi_0'\sin(\varphi_0-\varphi)}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\right) f_1\, ds, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t}\Big|_{s=s_0} = -\sqrt{1+\frac{r_0'^2}{(r_0\varphi_0')^2}}\;\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{s=s_0},\; t\geq 0,\; 0\leq s_0\leq 2\pi,\; r=r(s,t), \qquad (13)$$

$$p\big|_{s=s_0} = K + \frac{BmR^2}{h^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r(\varphi,t)}\rho\Big((r_0^2-2r_0\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho^2)^{-\frac{1}{2}} - (r_0^2-2r_0\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho^2+\frac{h^2}{R^2})^{-\frac{1}{2}}\Big)d\rho. \qquad (14)$$

Опишем численный метод решения задачи. Контур в фиксированных моментах времени t_j задается с помощью кубических сплайнов, построенных по значениям $r(s,t_j)$, $\varphi(s,t_j)$ в узловых точках s_i, $i=1,2,\dots,N$. Здесь используется параметрическое представление $r=r(s,t)$, $\varphi=\varphi(s,t)$ для того, чтобы можно было управлять расстояниями между узловыми точками контура $(r(s_i,t),\varphi(s_i,t))$. А именно, во время счета узловые точки контура перемещаются по контуру из тех соображений, чтобы расстояния между ними по дуге контура были примерно одинаковы. Метод выравнивания точек следующий. Сначала вычисляются длины дуг l_i с узловой точки $(r(s_1,t),\varphi(s_1,t))$ до узловой точки $(r(s_i,t),\varphi(s_i,t))$. Потом строится сплайновая интерполяция функции $s(l)$ по известным значениям (l_i, s_i). После этого можно вычислять значения параметра ξ_i, $i=1,2,\dots,N$, для которых расстояния по дуге контура между новыми узловыми точками будут одинаковыми. Когда вычислены и сами значения $r(\bar{s}_i,t), \varphi(\bar{s}_i,t)$, тогда строятся еще раз сплайновые аппроксимации для того, чтобы значения $r(\bar{s}_i,t), \varphi(\bar{s}_i,t)$ соответствовали "старым" узловым точкам параметра s_i.

Метод решения интегрального уравнения в моменты времени t_j такой же, как в [6]. То есть, решение $f_1(s)$ ищется в виде

$$f_1(s)=\sum_{i=1}^{N} f_i \varphi_i(s), \tag{15}$$

f_i - значения функции f_1 в узловых точках s_i,

$$\varphi_i(s)=\begin{cases} \dfrac{s_{i+1}-s}{s_{i+1}-s_i}, & s_i \le s \le s_{i+1}, \\ \dfrac{s-s_{i-1}}{s_i-s_{i-1}}, & s_{i-1} \le s \le s_i, \\ 0, & s \bar{\in} [s_{i-1}, s_{i+1}]. \end{cases} \tag{16}$$

Систему алгебраических уравнений для определения $f_i, i=1,2,\dots,N$ получаем методом ортогонализации невязки. При этом учитывается, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi_i(s)\varphi_k(s)\,ds = \begin{cases} 0, & i<k-1, i>k+1, \\ (s_k-s_{k-1})/6, & i=k-1, \\ 2(s_{k+1}-s_{k-1})/3, & i=k, \\ (s_{k+1}-s_k)/6, & i=k+1, \end{cases}$$

$$\int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} \varphi_i \frac{\partial p}{\partial s}\,ds = -\int_{s_i}^{s_{i+1}} p\frac{d\varphi_i}{ds}\,ds - \int_{s_{i-1}}^{s_i} p\frac{d\varphi_i}{ds}\,ds = \frac{1}{s_{i+1}-s_i}\int_{s_i}^{s_{i+1}} p\,ds - \frac{1}{s_i-s_{i-1}}\int_{s_{i-1}}^{s_i} p\,ds \approx \tag{17}$$

$$\approx p(s_{i+\frac{1}{2}}) - p(s_{i-\frac{1}{2}}), \quad s_{i\pm\frac{1}{2}} = (s_i + s_{i\pm 1})/2.$$

В итоге система алгебраических уравнений для f_i принимает вид:

$$\frac{2}{3}Hf_i + \frac{1}{6}Hf_{i+1} + \frac{1}{6}Hf_{i-1} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N} R(s_i, s_k) f_k H = 2(P_{i+\frac{1}{2}} - P_{i-\frac{1}{2}}), \tag{18}$$

где $H = s_{i+1} - s_i = s_i - s_{i-1}$, $P_{i\pm\frac{1}{2}} = p(s_{i\pm\frac{1}{2}})$,

$$R(s_i, s_k) = \frac{r_k r_i' \sin(\varphi_k-\varphi_i) - r_k r_i \varphi_k' \cos(\varphi_k-\varphi_i) + r_i^2\varphi_i'}{r_k^2 + r_i^2 - 2r_k r_i \cos(\varphi_k-\varphi_i)},$$

$$R(s_i,s_i)=\frac{\varphi_i'(2r_i'^2+(r_i\varphi_i')^2)+r_i(r_i'\varphi_i''-r_i''\varphi_i')}{2(r_i'^2+r_i^2\varphi_i'^2)},\ i=\overline{1,N-1},$$

$$r_m=r(s_m,t_j),\quad r_m'=\frac{\partial r}{\partial s}\Big|_{(s_m,t_j)},\quad r_m''=\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\Big|_{(s_m,t_j)},$$

$$\varphi_m=\varphi_m(s_m,t_j),\ \varphi_m'=\frac{\partial\varphi}{\partial s}\Big|_{(s_m,t_j)},\ \varphi_m''=\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\Big|_{(s_m,t_j)},$$

$$f_m=f(s_m).$$

Функции $\rho(s_{i+\frac{1}{2}})$ вычисляются по следующей формуле:

$$\rho(s_{i+\frac{1}{2}})=\frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2\varphi_{i+\frac{1}{2}}'^3+2r_{i+\frac{1}{2}}'^2\varphi_{i+\frac{1}{2}}'-r_{i+\frac{1}{2}}(r_{i+\frac{1}{2}}''\varphi_{i+\frac{1}{2}}'-r_{i+\frac{1}{2}}'\varphi_{i+\frac{1}{2}}'')}{(r_{i+\frac{1}{2}}'^2+(\varphi_{i+\frac{1}{2}}'r_{i+\frac{1}{2}})^2)^{3/2}}+$$

$$+\frac{BmR^2}{h_i^2}\Bigg(4r_{i+\frac{1}{2}}+\int_0^{2\pi}\Bigg(\sqrt{r^2-2rr_{i+\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}})+r_{i+\frac{1}{2}}^2}-\sqrt{2r_{i+\frac{1}{2}}^2(1-\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}}))}+$$

$$+r_{i+\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}})\Bigg(\ln\frac{\sqrt{r^2-2rr_{i+\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}})+r_{i+\frac{1}{2}}^2}+r-r_{i+\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}})}{\sqrt{2r_{i+\frac{1}{2}}^2(1-\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}}))}+r_{i+\frac{1}{2}}(1-\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}}))}-$$

$$-\ln\frac{\sqrt{r_{i+\frac{1}{2}}^2-2r_{i+\frac{1}{2}}r\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}})+r^2+(h/R)^2}+r-r_{i+\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}})}{\sqrt{r_{i+\frac{1}{2}}^2+(h/R)^2}-r_{i+\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}})}\Bigg)- \tag{I9}$$

$$-\sqrt{r^2-2rr_{i+\frac{1}{2}}\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}})+r_{i+\frac{1}{2}}^2+(h/R)^2}+\sqrt{r_{i+\frac{1}{2}}^2+(h/R)^2}\Bigg)\varphi'ds.$$

Формула получена, один раз проинтегрируя по r в двойном интеграле (I1) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{r_{i+\frac{1}{2}}}r(r_{i+\frac{1}{2}}^2-2r_{i+\frac{1}{2}}r\cos(\varphi-\varphi_{i+\frac{1}{2}})+r^2)^{-\frac{1}{2}}dr=4r_{i+\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Оставшийся интеграл по ds в (I9) вычисляется, используя квадратурную формулу Симпсона.

После вычисления плотности потенциала простого слоя, вычисляется интеграл (I4) с помощ[illegible] формулы трапеции

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{s=s_i} = -v_n(i) \approx \frac{r_i'' r_i' + r_i r_i' \varphi_i'^2 + r_i \varphi_i'' \varphi_i'}{(r_i'^2 + r_i^2 \varphi_i'^2)\, 4\pi} \cdot f_i H +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq i} f_k H \frac{r_k r_i' \cos(\varphi_k - \varphi_i) - r_i' r_i + r_k r_i \varphi_i' \sin(\varphi_k - \varphi_i)}{(r_k^2 + r_i^2 - 2 r_k r_i \cos(\varphi_k - \varphi_i))\sqrt{r_i^2 + r_i'^2 \varphi_i'^2}}, \tag{21}$$

$i = 1, 2, \dots, N-1.$

Теперь вычисляем положение границы для следующего момента времени

$$r(s_i, t_{j+1}) = r(s_i, t_j) + \tau \sqrt{1 + \frac{r_i'^2}{r_i^2 \varphi_i'^2}}\, v_n'(i). \tag{22}$$

Таким образом, совершен один шаг по времени. Отметим, что выравнивание узловых точек контура можно проделать не на каждом временном слое, а через определенное число временных шагов-5, I0 и более. Наиболее эффективно будет использовано машинное время ЭВМ, если выравнивание точек будет производиться по критерию неравномерности расстояний, например, если отношение между минимальной дугой и максимальной меньше определенного значения.

Анализ результатов расчета

Первая цель, как выше было отмечено, проверит точность результатов, данных в [6]. В этой работе расчеты проводились в координатах Лагранжа, хотя это только условно, так как там тоже необходимо было выравнивать точки. Поэтому частицы, за которыми следили, со временем менялись. В рассматриваемом случае расчеты проводятся в переменных Эйлера.

Проведенные расчеты дают возможность сделать следующие выводы.

I. Построенный метод работает и дает результаты, которые практически совпадают с ранее полученными в [6] при определенных ограничениях на область (нужно рассматривать такие значения параметров, при которых область не слишком растягивается).

2. При расчетах с высокой точностью сохранилась площадь области. За 1200 временных шагов величина площади изменилась в пределах 0,5%.

3. Удалось установить, что существует критическое значение параметров, при которых контур начинает изгибаться. При соотношении $h/R=2$ критическое значение параметра B_m около 19. Однако получить стационарное решение на изгиб капли не удалось, так как начиная с некоторого момента времени контур нельзя было задавать как функцию $r=r(\varphi,t)$, то есть, в некоторых точках $\frac{\partial r}{\partial \varphi}\to\infty$ и счет прекратился.

4. Гантелеобразная форма в стационарном режиме получена не только исходя из эллипса, но и из области, граница которой представляется в виде $r=1+\varepsilon\cos 3\varphi$, где $\varepsilon>0$ - численный параметр. Таким образом, можно говорить о некоторой устойчивости гантелеобразной формы относительно начального состояния контура. Слово "некоторое" надо понимать в таком смысле, что эта устойчивость не будет проявляться при любых начальных состояниях и любых значениях параметров.

Автор сердечно благодарит Цеберса А.О. за руководство работой, а также Буйкиса А.А. за помощь при подготовке статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.-М.: Наука, 1977.-736 с.
2. Мускелишвили Н.Н. Сингулярные интегральные уравнения.-М.: Наука, 1968.-511 с.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений.-М.: Наука, 1978.-588 с.
4. Механика. Новое в зарубежной науке. Метод граничных интегральных уравнений. - М.:Мир, 1978, вып.15. - 109 с.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод.-М.:Наука, 1977.-664 с.

6. Цеберс А.О., Земитис А.А. Численный эксперимент по моделированию МГД-неустойчивости свободной поверхности зажатой капли магнитной жидкости. I. - Магнитная гидродинамика, 1983, №4, с.15-26.
7. Цеберс А.О. Численный эксперимент по моделированию МГД-неустойчивости свободной поверхности зажатой капли магнитной жидкости. II. - Магнитная гидродинамика, 1984, №2, с.43-46.
8. Земитис А.А. Об использовании дискретизации условия разрешимости одной задачи для гармонических функций.- В кн.: Алгебра и дискретная математика. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1984, с. 60-64.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1985, с.37-46

УДК 517.962.8:537.811+621.365.5

С.И.Павлов
Вычислительный центр
ЛГУ им. П.Стучки

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ РАСЧЁТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКОВ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ОДНОРОДНЫХ ПРОВОДНИКОВ

При численном исследовании металлургических МГД-устройств - индукционных печей с холодным тиглем (ИПХТ) [1], вакуумных дуговых печей (ВДП) [2], руднотермических печей (РТП), устройств электрошлакового переплава (УЭШП) и др. - возникает необходимость расчёта электромагнитного поля постоянных или переменных токов, пересекающих границу контакта проводников с различной электропроводностью - расплава и тигля в ИПХТ (в том числе при наличии переходного электрического сопротивления), электрода и расплава в ВДП, РТП и УЭШП.

В настоящей работе предлагается конечно-разностная методика расчёта на полярной сетке магнитной индукции в горизонтальном сечении ИПХТ. Разностные схемы для расчёта моделей меридионального сечения ВДП, РТП, УЭШП и др. строятся аналогично на прямоугольной сетке (пример расчёта для РТП приведён в параграфе 4).

I. Постановка задачи

Математическая модель горизонтального сечения ИПХТ (рис. I) подробно описана в [I].

Комплексная амплитуда аксиальной составляющей магнитной индукции вихревых токов радиального и азимутального направлений находится из следующего безразмерного уравнения, записанного в векторной форме

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} + i\hat{\omega}\vec{B} = 0, \tag{I}$$

где $\hat{\omega} = \sigma\mu_0\omega r_0^2$ - безразмерная частота соответствующей области с постоянной электропроводностью σ, r_0 - внутренний радиус тигля, ω - круговая частота возбуждающего тока.

На границе контакта расплава (p) и тигля (T) ставится условие непрерывности нормальных составляющих плотности тока

$$j_n^{(p)} = j_n^{(T)} \tag{2}$$

и разрыва тангенциальных составляющих плотности тока

$$j_\tau^{(p)}/\hat{\omega}_p = j_\tau^{(T)}/\hat{\omega}_T \tag{3}$$

при наличии переходного электрического сопротивления $R_п$ условие (3) заменяется следующим

$$j_\tau^{(T)}/\hat{\omega}_T - j_\tau^{(p)}/\hat{\omega}_p = \hat{R}_п \frac{\partial j_n}{\partial \tau}, \tag{4}$$

где $\hat{R}_п = R_п / \mu_0 \omega r_0^3$.

На границе канала (K) для охлаждения и тигля также используются условия (2), (3), при этом канал моделируется зоной с малой проводимостью - $\hat{\omega}_K \ll \hat{\omega}_T$.

Условия (2)-(4) в терминах магнитной индукции могут быть записаны с учётом соотношения

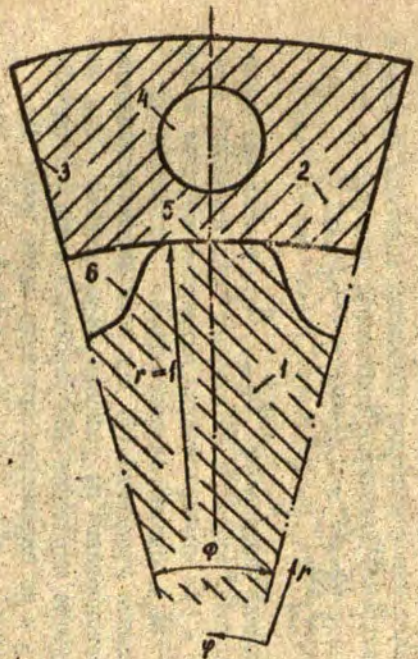


Рис. I.

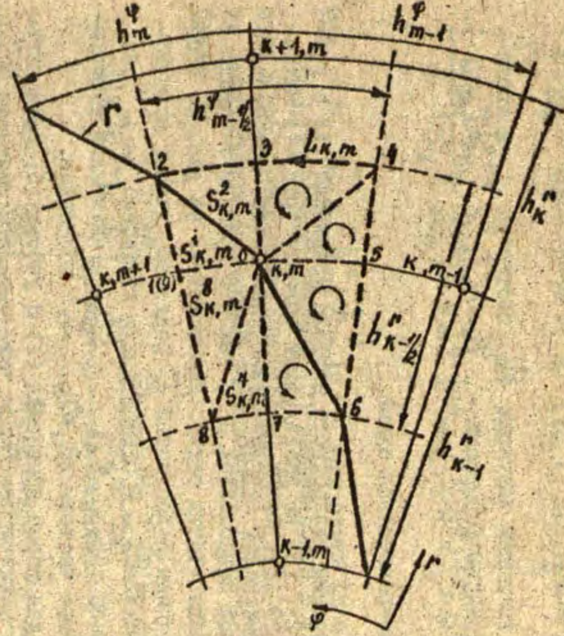


Рис. 2.

Рис. I. Модель горизонтального сечения ИПХТ: I – расплав; 2 – секция тигля; 3 – изолирующий промежуток между секциями тигля; 4 – канал охлаждения тигля; 5 – контактная зона расплава и тигля; 6 – зона отжатия расплава от тигля.

Рис. 2. Полярная конечно-разностная сетка.

$$\mathrm{rot}\,\vec{B}=\vec{j}\qquad(5)$$

(характерные величины индукции B_0, плотности j_0 и настила I_0 тока связаны формулами - $B_0=\mu_0 I_0$; $j_0=I_0/r_0$).

2. Конечно-разностная схема

Для построения разностного аналога уравнения (I) с учётом условий (2), (3) на исследуемую областъ (рис. I) накладывается неоднородная конечно-разностная сетка, согласованная с границами подобластей Γ , так что границы Γ проходят через узловые точки сетки. Как показано на рис. 2, в общем случае границы подобластей Γ разделяют ячейку конечно-разностной сетки $S_{k,m}$, ограниченную контуром $L_{k,m}$, на восемь подъячеек $S^1_{k,m}, S^2_{k,m}, \dots, S^8_{k,m}$, в каждой из которых безразмерные частоты $\hat\omega_1, \hat\omega_2, \dots, \hat\omega_8$ постоянны.

Интегральная форма уравнения (I) с учётом (5) применяется для каждой подъячейки $S^n_{k,m}$, ограниченной контуром $L^n_{k,m}$ n =1,2, ...,8 (для контуров принято направление против часовой стрелки):

$$\int\limits_{0}^{n+1}\frac{\dot{j}_r^{(n)}}{\hat\omega_n}d\Gamma+\int\limits_{n+1}^{n}\frac{\dot{j}_r^{(n)}}{\hat\omega_n}d\Gamma+\int\limits_{n}^{0}\frac{\dot{j}_r^{(n)}}{\hat\omega_n}d\Gamma+iS_n B_{k,m}=0,\qquad(6)$$

где S_n - площадь подъячейки $S^n_{k,m}$, $B_{k,m}$ - значение аксиальной составляющей индукции магнитного поля в узловой точке (k,m) - при интегрировании магнитная индукция в пределах ячейки $S_{k,m}$ считается постоянной.

После сложения уравнений (6) для всех восьми подъячеек $S^n_{k,m}$ и интегрирования по границе $L_{k,m}$ ячейки $S_{k,m}$ получается следующее выражение(для упрощения записи подъячейке с номером I и её параметрам присвоен также номер 9):

$$\sum_{n=1}^{8}\int\limits_{0}^{n+1}\left\{\frac{\dot{j}_r^{(n)}}{\hat\omega_n}-\frac{\dot{j}_r^{(n+1)}}{\hat\omega_{n+1}}\right\}d\Gamma-\frac{1}{2}\left(\frac{h^r_k}{\hat\omega_1}+\frac{h^r_{k-1}}{\hat\omega_8}\right)\dot{j}^r_{k,n+1/2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{h_k^r}{\omega_4}+\frac{h_{k-1}^r}{\omega_5}\right)j^r_{k,m-1/2}+\frac{r_{k+1/2}}{2}\left(\frac{h_m^\varphi}{\omega_2}+\frac{h_{m-1}^\varphi}{\omega_3}\right)j^\varphi_{k+1/2,m}-$$
$$-\frac{r_{k-1/2}}{2}\left(\frac{h_m^\varphi}{\omega_7}+\frac{h_{m-1}^\varphi}{\omega_6}\right)j^\varphi_{k-1/2,m}+\frac{i}{2}h^\varphi_{m-1/2}\left(r_{k+1/4}h_k^r+r_{k-1/4}h^r_{k-1}\right)B_{k,m}=0, \tag{7}$$

где $h_k^r,\ h_{k-1/2}^r,\ h_m^\varphi,\ h^\varphi_{m-1/2}$ - шаги сетки (рис. 2).

Из-за граничных условий (3) первая сумма в (7) обращается в нуль. Используя соотношения связи (5), аппроксимируя их центральными разностями относительно промежуточных точек сетки

$$j^r_{k,m\pm1/2}=\frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial\varphi}\bigg|_{k,m\pm1/2}=\frac{B_{k,m+1/2\pm1/2}-B_{k,m-1/2\pm1/2}}{r_k h^\varphi_{m-1/2\pm1/2}};$$
$$j^\varphi_{k\pm1/2,m}=-\frac{\partial B}{\partial r}\bigg|_{k\pm1/2,m}=-\frac{B_{k+1/2\pm1/2,m}-B_{k-1/2\pm1/2,m}}{h^r_{k-1/2\pm1/2}}. \tag{8}$$

и выражая значение магнитной индукции в центральной точке (k,m), получаем разностное уравнение относительно $B_{k,m}$

$$B_{k,m}=\left(C^{(1)}_{k,m}B_{k+1,m}+C^{(2)}_{k,m}B_{k-1,m}+C^{(3)}_{k,m}B_{k,m+1}+\right.$$
$$\left.+C^{(4)}_{k,m}B_{k,m-1}-iC^{(\hat\omega)}_{k,m}B_{k,m}\right)/C^{(0)}_{k,m}. \tag{9}$$

Коэффициенты $C^{(0)}_{k,m},\dots,C^{(4)}_{k,m},\ C^{(\hat\omega)}_{k,m}$ в уравнении (9) находятся по формулам

$$C^{(0)}_{k,m}=C^{(1)}_{k,m}+C^{(2)}_{k,m}+C^{(3)}_{k,m}+C^{(4)}_{k,m};$$

$$C^{(1)}_{k,m}=\left(\frac{h_k^r}{\omega_1}+\frac{h_{k-1}^r}{\omega_8}\right)/2r_kh_m^\varphi;\quad C^{(2)}_{k,m}=\left(\frac{h_k^r}{\omega_4}+\frac{h_{k-1}^r}{\omega_5}\right)/2r_kh^\varphi_{m-1};$$

$$C_{k,m}^{(3)}=\frac{r_{k+1/2}}{2h_k^r}\left(\frac{h_m^\varphi}{\hat\omega_2}+\frac{h_{m-1}^\varphi}{\hat\omega_3}\right);\ C_{k,m}^{(4)}=\frac{r_{k-1/2}}{2h_{k-1}^r}\left(\frac{h_m^\varphi}{\hat\omega_7}+\frac{h_{m-1}^\varphi}{\hat\omega_6}\right);$$

$$C_{k,m}^{(\omega)}=\frac{i}{2}h_{m-1/2}^\varphi\left(r_{k+1/4}h_k^r+r_{k-1/4}h_{k-1}^r\right). \qquad (\mathrm{I0})$$

3. Учёт переходного электрического сопротивления

При отличном от нуля переходном сопротивлении (для определённости будем рассматривать границу I-0-5 (рис. 2)) конечно-разностная схема (9), (I0) несколько модифицируется. В выражении (7) из первой суммы будут отличными от нуля слагаемые с номерами n =4,8:

$$\int_0^1\left\{\frac{j_r^{(8)}}{\hat\omega_8}-\frac{j_r^{(1)}}{\hat\omega_1}\right\}dr-\int_5^0\left\{\frac{j_r^{(4)}}{\hat\omega_4}-\frac{j_r^{(5)}}{\hat\omega_5}\right\}dr\neq 0. \qquad (\mathrm{II})$$

Подынтегральные выражения в (II) преобразуются в соответствии с граничным условием (4) и аппроксимируются на сетке

$$-\hat R_n\int_5^1\frac{\partial j_n}{\partial r}dr=-\frac{\hat R_n}{r_k}\left.\frac{\partial^2 B}{\partial\varphi^2}\right|_{k,m}h_{m-1/2}^\varphi=$$

$$=-\frac{\hat R_n}{r_k}\left(\frac{B_{k,m+1}-B_{k,m}}{h_m^\varphi}-\frac{B_{k,m}-B_{k,m-1}}{h_{m-1}^\varphi}\right), \qquad (\mathrm{I2})$$

а коэффициенты $C_{k,m}^{(0)}, C_{k,m}^{(3)}$ и $C_{k,m}^{(4)}$ в (9) заменяются на следующие:

$$\tilde C_{k,m}^{(0)}=C_{k,m}^{(1)}+C_{k,m}^{(2)}+\tilde C_{k,m}^{(3)}+\tilde C_{k,m}^{(4)};$$

$$\tilde C_{k,m}^{(3)}=C_{k,m}^{(3)}+\hat R_n/r_k h_m^\varphi;\ \tilde C_{k,m}^{(4)}=C_{k,m}^{(4)}+\hat R_n/r_k h_{m-1}^\varphi. \qquad (\mathrm{I3})$$

4. Комплекс программ и примеры расчётов

Конечно-разностные схемы сквозного счёта (9), (10) или (9), (10), (13) решаются методом итераций с применением релаксации (при значительном соотношении электропроводностей сред, находящихся в контакте $\hat{\omega}_1/\hat{\omega}_2 \sim 10 \div 100$), используется нижняя релаксация). Методика реализована на ЭВМ ЕС-1033 в виде программы "ССМ" на языке ФОРТРАН, являющейся составной частью комплекса программ для численного моделирования электромагнитных, гидродинамических и тепловых процессов в ИПХТ.

Схема, аналогичная представленной в статье, для расчётов осесимметричных объектов (ВДП, РТП, УЭШП) с кондукционным подводом энергии (математическая модель, предложенная в [3], обобщена на случай погруженного электрода) реализована на ЭВМ ЕС-1033 в виде программы "РГМ" на языке ФОРТРАН, дополняющая ранее разработанный комплекс программ [4] для численного моделирования электромагнитных, гидродинамических и тепловых полей в электропечах с индукционным подводом энергии.

По программам ССМ и РГМ проводились расчёты в следующем диапазоне безразмерных частот и соотношений электропроводностей: $\hat{\omega} \lesssim 5 \cdot 10^4$; $\hat{\omega}_1/\hat{\omega}_2 \lesssim 5 \cdot 10^3$. Расчёт одного варианта на сетке с 1500 узловыми точками в зависимости от выбранной точности требует 0,5÷1 час машинного времени ЭВМ ЕС-1033 (на ~ 2/3 границы области заданы условия второго рода).

На рис. 3 показаны линии плотности электрического тока, полученные с помощью комплекса программ для вывода линий уровня на АЦПУ ЭВМ.

На рис. 3-а,б представлено горизонтальное сечение ИПХТ, соответствующее по угловым размерам ($\varphi/2=5^{\circ}$) половине секции холодного тигля. Безразмерные частоты для тигля ($r > 1$) и расплава ($r < 1$): $\hat{\omega}_T = 1250$, $\hat{\omega}_p = 50$. Переходное электрическое сопротивление на границе контакта "расплав"-"холодный тигель" на рис. 3-а - $R_п = 0$, на рис. 3-б - $R_п = 10^{-5}$ Ом·м^2. Картины линий плотности тока построены с шагом 0,1

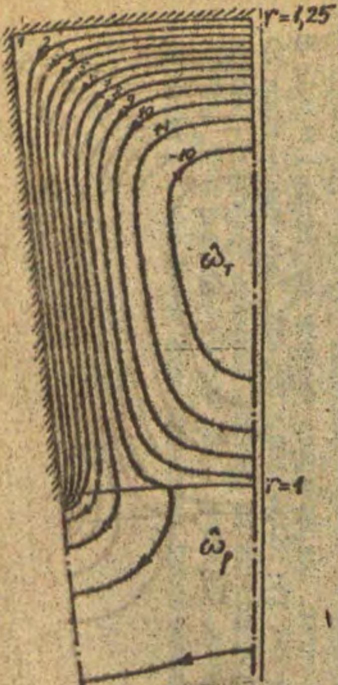


Рис. 3-а

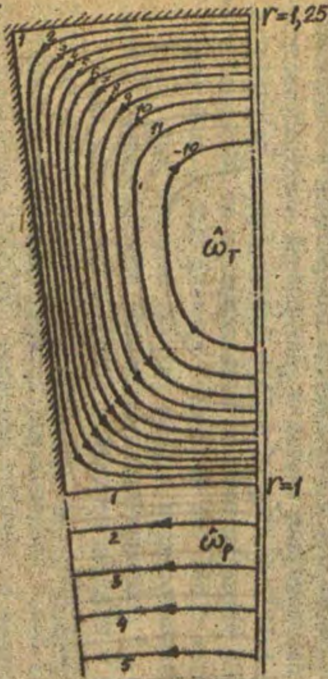


Рис. 3-б

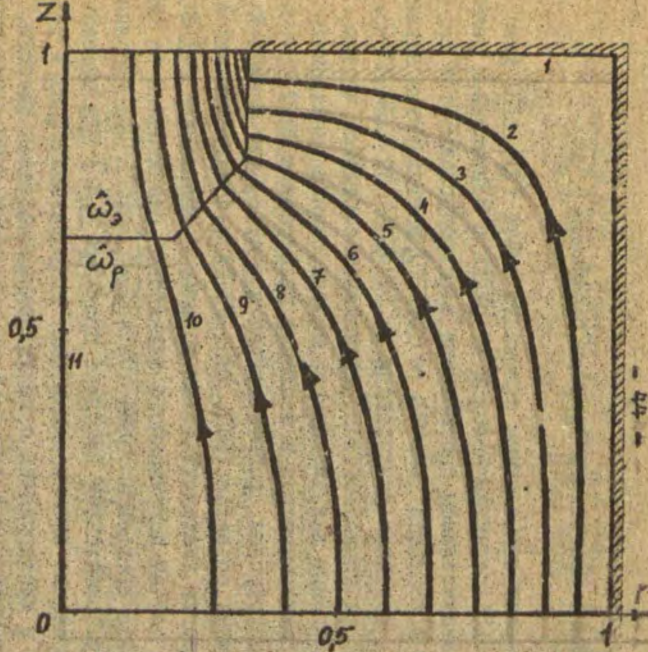


Рис. 3-в

Рис. 3. Линии плотности электрического тока: а) ИПХТ при $R_п = 0$; б) ИПХТ при $R_п = 10^{-5}$ Ом.м^2; в) РТП.

(максимум соответствует линии с номером I и равен единице) в момент времени

$$t = -(\gamma - 2\pi n)/\omega, \quad n = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots, \qquad (14)$$

где сдвиг фаз

$$\gamma = \operatorname{arctg}\left\{ \operatorname{Im} j_\varphi^\circ / \operatorname{Re} j_\varphi^\circ \right\}\Big|_{\substack{r=1 \\ \varphi = m\varphi}}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad (15)$$

(верхним индексом "0" помечена комплексная амплитуда плотности тока, m_c - количество секций холодного тигля).

На рис. 3-в показано меридиональное сечение РТП. Безразмерные частоты расплава и электрода: $\hat{\omega}_p$ =0,00267; $\hat{\omega}_э$ = 4,45. Линии построены с шагом 0,03333 (максимум соответствует линии с номером I и равен 0,333).

Плотности токов на границе раздела областей с различными электропроводностями, полученные численным дифференцированием разностного решения, обеспечивают выполнение условий (3), (4) с точностью не хуже 1%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов С.И., Тир Л.Л., Якович А.Т. Математические модели и методика численного расчёта электромагнитного поля и движения расплава в индукционной печи с холодным тиглем. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с.3-19.

2. Сандлер В.Ю. Численное исследование полей температуры и скорости в шлаковой ванне. - Магнитная гидродинамика, 1982, № 2, с. 113-119.

3. Павлов С.И., Якович А.Т. Численное моделирование осесимметричного течения проводящей жидкости при подводе скрещенных индукционного и кондукционного токов. - В кн.: Одиннадцатое рижское совещание по магнитной гидродинамике. Саласпилс: Институт физики АН ЛатвССР, 1984, т.I, с. 67-70.

4. Якович А.Т., Павлов С.И. Комплекс программ для численного моделирования электромагнитных, гидродинамических и тепловых полей в аксиально-симметричных металлургических установках с замкнутым течением жидкого металла. - Рига, 1983. - 3 с. (Информационный листок о научно-техническом достижении / Латвийский НИИ научно-технической информации: № 83-II, серия 50.41).

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.47-64

УДК 537.84:519.63

А.Р.Муйжниекс
ЛГУ им.П.Стучки

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОНДУКЦИОННОМ МГД-НАСОСЕ

Введение

В настоящее время исследованию структур МГД-полей в математических моделях кондукционного центробежного насоса (КЦН) (об устройстве и принципах действия КЦН см. [1, 2]) посвящено большое количество работ (см., например, [3, 4, 5, 6]). Однако все предложенные математические модели КЦН построены в плоскости (r , z), тем самым исключая возможность исследования эффектов, связанных с несимметричностью наложенного магнитного поля, расположения токопроводящих электродов и отверстий для жидкости. Поскольку построение и исследование трёхмерных математических моделей затруднено из-за высоких требований к использованным в расчетах ЭВМ, то представляет интерес построение и исследование двухмерной математической модели КЦН в плоскости (r , α) (плоскость основного азимутального вращения, обеспечивающего центробежный режим работы насоса).

---

* Научный руководитель работы канд.физ.-мат.наук доц. Якович А.Т.

I. Несимметричная математическая модель КЦН

Уравнения, описывающие гидродинамические и электромагнитные процессы в активной зоне насоса (рис. I), имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\vec{B} = \mu\mu_0\vec{j}\\
&\operatorname{rot}\vec{E} = 0\\
&\operatorname{div}\vec{B} = 0\\
&\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\\
&\operatorname{div}\vec{j} = 0\\
&(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p + \nu\Delta\vec{v} + \frac{\vec{f}_э}{\rho}\\
&\operatorname{div}\vec{v} = 0\\
&\vec{f}_э = \vec{j}\times\vec{B},
\end{aligned}$$

где $\mu = 1$, $\sigma = const$, $\rho = const$, $\nu = const$ (исследуемые течения, как правило, являются турбулентными, в данной работе турбулентность моделируется введением постоянной по объёму эффективной турбулентной вязкости).

Исключив из неизвестных $\vec{E}$, $\vec{j}$ и преобразив уравнения к безразмерному виду, получаем систему:

$$\begin{aligned}
&(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\operatorname{grad}p + \frac{1}{Re}\Delta\vec{v} + \vec{f}_э\\
&\vec{f}_э = -N(\operatorname{grad}\varphi\times\vec{B} - (\vec{v}\times\vec{B})\times\vec{B})\\
&\Delta\varphi = \operatorname{div}(\vec{v}\times\vec{B})\\
&\operatorname{div}\vec{v} = 0,
\end{aligned} \qquad (I)$$

где $Re = \frac{r_0 v_0}{\nu}$ - эффективное число Рейнольдса,

$N = \frac{\sigma B_0^2 r_0}{\rho v_0}$ - параметр МГД-взаимодействия, а r_0 (радиус ячейки), v_0 (максимальное значение азимутальной составляющей скорости), B_0 (максимальная величина наложенного магнитного поля, $p_0 = \rho v_0^2$, $\varphi_0 = r_0 v_0 B_0$ являются характерными величинами.

Эта система решается (используется цилиндрическая система координат) в сечении (r, α). Насчёт распределения $\vec{v}, p, \varphi, \vec{B}$ по z делаются следующие предположения:

1) $v_z = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ (ввиду малости h).

2) Турбулентное трение жидкости о горизонтальные стенки определяется выражениями:

$$v_r(r,\alpha,z) = v_r(r,\alpha,h_э/2)(1-4(z-h_э/2)^2/h_э^2)$$
$$v_z(r,\alpha,z) = v_z(r,\alpha,h_э/2)(1-4(z-h_э/2)^2/h_э^2),$$

т.е., предполагается параболическое распределение составляющих скорости по высоте. Здесь $h_э$ - эффективная высота активной зоны, в общем случае зависящая от r и α. В данной работе используется допущение $h_э = const$.

3) $\vec{B} = \vec{B}_0$, где $\vec{B}_0 = B_0(r,\alpha)\vec{e}_z$ - внешнее магнитное поле, т.е., пренебрегается магнитное поле, создаваемое токами, протекающими в жидкости.

В цилиндрических координатах с учётом вышеуказанных предположений система (I) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\alpha\frac{\partial v_r}{\partial \alpha} - \frac{v_\alpha^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \alpha^2} - \right.\\
&\left.-\frac{8v_r}{h_э^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{v_r}{r^2}\right) + f_r\\
&v_r\frac{\partial v_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\alpha}{r}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{v_r v_\alpha}{r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \alpha} + \frac{1}{Re}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\alpha}{\partial r}\right) + \right.\\
&\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial \alpha^2} - \frac{8v_\alpha}{h_э^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \alpha} - \frac{v_\alpha}{r^2}\right) + f_\alpha \qquad (2)\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} = 0\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\alpha B_0) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \alpha}(v_r B_0)\\
&f_r = -N\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}B_0 + v_r B_0^2\right)\\
&f_\alpha = N\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}B_0 - v_\alpha B_0^2\right)
\end{aligned}
$$

и решается в области $r_1 \leq r \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq \pi$ (рис. I). Граничные условия в случае режима с транзитным потоком для составляющих скорости следующие:

$$v_\alpha \big|_{\Gamma_1} = 0 \tag{3}$$

$$v_\alpha \big|_{\Gamma_3} = 0 \tag{4}$$

$$v_\alpha \big|_{\Gamma_2} = v_r \big|_{\Gamma_2} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\Big|_{\Gamma_1, \Gamma_3} = 0 \tag{6}$$

(условие (3) моделирует втекание в активную зону насоса незакрученного металла, условие (4) - поворот движения жидкости в отводящей трубе в аксиальном направлении).

Для давления:

$$p\big|_{\Gamma_1} = p_1 \tag{7}$$

$$p\big|_{\Gamma_3} = p_2 , \tag{8}$$

где p_1 и p_2 значения давления на входе I и выходе 2 (рис.I) соответственно.

В случае режима без транзитного потока давление фиксируется в одной точке расчётной области.

Граничные условия для потенциала следующие:

$$\varphi\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1 ; \ \varphi\big|_{\Gamma_3} = \varphi_2 ; \ \frac{\partial \varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = 0 , \tag{9}$$

где φ_1 и φ_2 значения потенциала на входе I и выходе 2 (рис. I) соответственно.

В случае режима без транзитного потока граничные условия

$$\vec{v}\big|_{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3} = 0 .$$

2. Методика расчета математической модели

Для расчёта математической модели КЦН используется метод конечных разностей (МКР). Гидродинамическая часть системы (2) решается методом $SMAC$ и стационарное решение всей системы (2) находится методом установления.

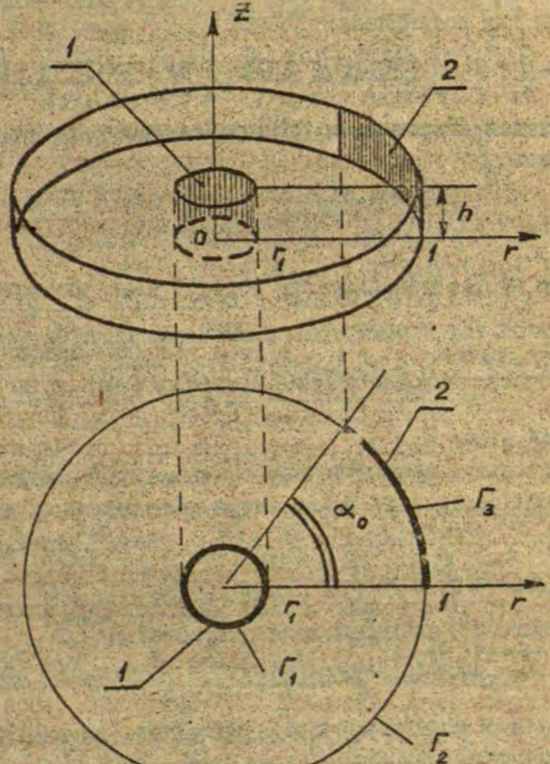


Рис. I. Несимметричная математическая модель активной зоны кондукционного МГД-насоса центробежного типа.
I - центральный электрод (отверстие);
2 - периферийный электрод (отверстие);
Γ_1 - часть границы двухмерной области, соответствующая центральному электроду;
Γ_3 - часть границы двухмерной области, соответствующая периферийному электроду;
Γ_2 - остальная часть границы двухмерной области.

Первый этап вычисления поля скорости $\vec{V}^{n+1}$ на $n+1$ временном слое по известному полю скорости $\vec{V}^{n}$ на n -том временном слое (τ - шаг по времени) следующий:

а) используя $\vec{V}^{n}$, решается методом верхней релаксации уравнение для потенциала:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi^n}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi^n}{\partial\alpha^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\alpha^n B_0\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(v_r^n B_0\right), \quad (10)$$

б) из найденного поля φ^n вычисляется поле электромагнитной силы $\vec{f}^n$:

$$f_r^n=-N\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi^n}{\partial\alpha}B_0+v_r^n B_0^2\right) \quad (11)$$

$$f_\alpha^n=N\left(\frac{\partial\varphi^n}{\partial r}B_0-v_\alpha^n B_0^2\right),$$

в) находится промежуточное значение поля скорости:

$$\frac{\tilde{\vec{V}}-\vec{V}^n}{\tau}=-\left(\vec{V}^n\nabla\right)\vec{V}^n+\frac{1}{Re}\Delta\vec{V}^n+\vec{f}^n. \quad (12)$$

Второй этап:

а) используя промежуточные значения поля скорости, методом верхней релаксации вычисляется поле давления из уравнения

$$\Delta p=\frac{1}{\tau}\operatorname{div}\tilde{\vec{V}}, \quad (13)$$

б) находятся значения поля скоростей $\vec{V}^{n+1}$:

$$\frac{\vec{V}^{n+1}-\tilde{\vec{V}}}{\tau}=-\operatorname{grad}p. \quad (14)$$

Для данной модели используется равномерная по углу и радиусу конечно-разностная сетка (рис. 2) ($N-1$ ячейка по радиусу и M ячеек по углу).

Разностные аналоги уравнений (10)-(14) пишутся для каждой составляющей скорости в тех точках, где эти составляющие заданы.

Если какая-то величина на рассматриваемой точке не задана, то она находится линейным интегрированием.

Таким образом, разностные аналоги имеют вид:

1) для уравнения (10) -

$$\frac{1}{r_{k+1}}\left(r_{k+3/2}\frac{\varphi_{k+1,i}-\varphi_{k,i}}{\Delta r^2}-r_{k+1/2}\frac{\varphi_{k,i}-\varphi_{k-1,i}}{\Delta r^2}\right)+\frac{\varphi_{k,i+1}+\varphi_{k,i-1}-2\varphi_{k,i}}{r_{k+1}^2\Delta\alpha^2}=$$

$$=\frac{1}{r_{k+1}\Delta r}\left(V^\alpha_{k+1,i}\, r_{k+3/2}\frac{B_{k+1,i}+B_{k,i}}{2}-V^\alpha_{k,i}\, r_{k+1/2}\frac{B_{k,i}+B_{k-1,i}}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{r_{k+1}\Delta\alpha}\left(V^r_{k,i}\frac{B_{k,i+1}+B_{k,i}}{2}-V^r_{k,i-1}\frac{B_{k,i}+B_{k,i-1}}{2}\right),$$

2) для выражений составляющих электромагнитной силы (II) -

$$f^r_{k,i}=-N\left(\frac{(\varphi_{k,i+1}-\varphi_{k,i})(B_{k,i+1}+B_{k,i})}{2r_{k+1}\Delta\alpha}+\frac{V^r_{k,i}(B_{k,i+1}+B_{k,i})^2}{4}\right)$$

$$f^\alpha_{k,i}=N\left(\frac{(\varphi_{k,i}-\varphi_{k-1,i})(B_{k-1,i}+B_{k,i})}{2\Delta r}-\frac{V^\alpha_{k,i}(B_{k-1,i}+B_{k,i})^2}{4}\right),$$

3) для уравнений (I2) -

$$\frac{\tilde V^r_{k,i}-V^r_{k,i}}{\tau}=-V^r_{k,i}\frac{V^r_{k+1,i}-V^r_{k-1,i}}{2\Delta r}-\frac{V^\alpha_{k,i}+V^\alpha_{k+1,i}+V^\alpha_{k,i+1}+V^\alpha_{k+1,i+1}}{4r_{k+1}}\times$$

$$\times\frac{V^r_{k,i+1}-V^r_{k,i-1}}{2\Delta\alpha}+\frac{(V^\alpha_{k,i}+V^\alpha_{k+1,i}+V^\alpha_{k,i+1}+V^\alpha_{k+1,i+1})^2}{16r_{k+1}}+$$

$$+\frac{1}{Re}\left(\frac{1}{r_{k+1}}\left(r_{k+3/2}\frac{V^r_{k+1,i}-V^r_{k,i}}{\Delta r^2}-r_{k+1/2}\frac{V^r_{k,i}-V^r_{k-1,i}}{\Delta r^2}\right)+\frac{V^r_{k,i+1}-2V^r_{k,i}+V^r_{k,i-1}}{r_{k+1}^2\Delta\alpha^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{8V^r_{k,i}}{h_{\text{э}}^2}-\frac{V^\alpha_{k,i+1}+V^\alpha_{k+1,i+1}-V^\alpha_{k,i}-V^\alpha_{k+1,i}}{r^2_{k+1}\Delta\alpha}-\frac{V^r_{k,i}}{r^2_{k+1}}\right)+f^r_{k,i}$$

$$\frac{\tilde V^\alpha_{k,i}-V^\alpha_{k,i}}{\tau}=-\frac{(V^r_{k,i}+V^r_{k-1,i}+V^r_{k,i-1}+V^r_{k-1,i-1})(V^\alpha_{k+1,i}-V^\alpha_{k-1,i})}{8\Delta r}-$$

$$-\frac{V^\alpha_{k,i}(V^\alpha_{k,i+1}-V^\alpha_{k,i-1})}{2r_{k+1/2}\Delta\alpha}-V^\alpha_{k,i}\frac{V^r_{k,i}+V^r_{k-1,i}+V^r_{k,i-1}+V^r_{k-1,i-1}}{4r_{k+1/2}}+$$

$$+\frac{1}{Re}\left(\frac{1}{r_{k+1/2}}\left(r_{k+1}\frac{V^\alpha_{k+1,i}-V^\alpha_{k,i}}{\Delta r^2}-r_k\frac{V^\alpha_{k,i}-V^\alpha_{k-1,i}}{\Delta r^2}\right)+\frac{V^\alpha_{k,i+1}-2V^\alpha_{k,i}+V^\alpha_{k,i-1}}{r^2_{k+1/2}\Delta\alpha^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{8V^\alpha_{k,i}}{h_{\text{э}}^2}+\frac{V^r_{k,i}+V^r_{k-1,i}-V^r_{k,i-1}-V^r_{k-1,i-1}}{r^2_{k+1/2}\Delta\alpha}-\frac{V^\alpha_{k,i}}{r^2_{k+1/2}}\right)+f^\alpha_{k,i},$$

4) для уравнения (I3) -

$$\frac{1}{r_{k+1/2}}\left(r_{k+1}\frac{p_{k+1,i}-p_{k,i}}{\Delta r^2}-r_k\frac{p_{k,i}-p_{k-1,i}}{\Delta r^2}\right)+\frac{p_{k,i+1}-2p_{k,i}+p_{k,i-1}}{r^2_{k+1/2}\Delta\alpha^2}=$$

$$=\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{r_{k+1/2}\Delta r}\left(r_{k+1}V^r_{k,i}-r_k V^r_{k-1,i}\right)+\frac{V^\alpha_{k,i+1}-V^\alpha_{k,i}}{r_{k+1/2}\Delta\alpha}\right),$$

5) для уравнения (I4) -

$$\tilde{\tilde{V}}^r_{k,i}=\tilde{V}^r_{k,i}-\tau\frac{p_{k+1,i}-p_{k,i}}{\Delta r}$$

$$\tilde{\tilde{V}}^\alpha_{k,i}=\tilde{V}^\alpha_{k,i}-\tau\frac{p_{k,i}-p_{k,i-1}}{r_{k+1/2}\Delta\alpha},$$

где $V^r_{k,i}$, $V^\alpha_{k,i}$ - составляющие скорости на n - том временном слое;

$\tilde{V}^r_{k,i}$, $\tilde{V}^\alpha_{k,i}$ - промежуточные значения составляющих скорости;

$\tilde{\tilde{V}}^r_{k,i}$, $\tilde{\tilde{V}}^\alpha_{k,i}$ - составляющие скорости на $n+1$ -ом временном слое.

Разностные аналоги граничных условий в расчёте режима с транзитным потоком следующие:

I) для потенциала φ условие (9) аппроксимируется соотношениями:

$$\left.\frac{\varphi_{N,i}-\varphi_{N-1,i}}{\Delta r}\right|_{\Gamma_2}=0,$$

$$\left.\varphi_{1,i}\right|_{\Gamma_1}=\varphi_1,\ \left.\varphi_{N,i}\right|_{\Gamma_3}=\varphi_2,$$

2) для азимутальной составляющей скорости V^α условия (3), (4), (5) аппроксимируются:

$$V^\alpha_{N+1,i}=-V^\alpha_{N,i}\ ,\ V^\alpha_{1,i}=-V^\alpha_{2,i}\ ,\ i=1,\dots,M,$$

3) для радиальной составляющей скорости V^r условия (5), (6) аппроксимируются соответственно:

$$\left.V^r_{N,i}\right|_{\Gamma_2}=0,$$

$$\left.\frac{1}{r_{k+1/2}\Delta r}\left(r_{k+1}V^r_{k,i}-r_k V^r_{k-1,i}\right)+\frac{V^\alpha_{k,i+1}-V^\alpha_{k,i}}{r_{k+1/2}\Delta\alpha}\right|_{\Gamma_1(k=1),\Gamma_3(k=N)}=0$$

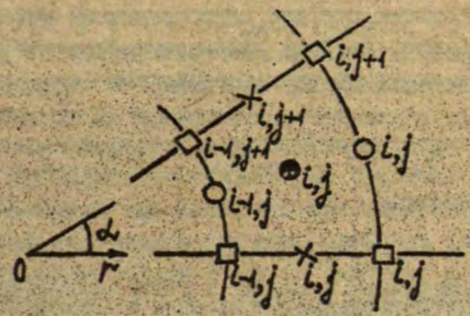


Рис. 2. Конечно-разностная сетка в полярных координатах для метода SMAC.
Обозначения точек, в которых определяются следующие величины: ● - давление p ; ○ - радиальная V_r и x - азимутальная V_α составляющие скорости и электромагнитной силы; □ - электрический потенциал и внешнее магнитное поле.

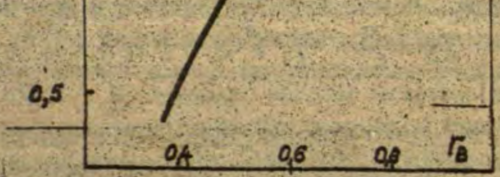


Рис. 3. Зависимость развиваемого насосом нормированного расхода от радиуса r_B зоны наложения аксиального магнитного поля.

4) для давления p условия (7), (8) аппроксимируются в следующем виде:

$$p_{1,i}\big|_{\Gamma_1} = p_1 \quad , \quad p_{N+1,i}\big|_{\Gamma_3} = p_2 ,$$

На Γ_2 $\quad p_{N+1,i} = p_{N,i}$ $\qquad$ [7].

Разностные аналоги граничных условий в расчёте режима без транзитного потока отличаются от вышерассмотренных только для радиальной составляющей скорости:

$$v^r_{1,i} = 0 \ , \ v^r_{N,i} = 0 \ , \ i = 1, \ldots, M \ ,$$

и для давления:

$$p_{1,i} = p_{2,i} \ , \ p_{N+1,i} = p_{N,i} \ , \ i = 1, \ldots, M .$$

Рассмотренная методика расчёта реализована в виде программы на языке ФОРТРАН.

3. Результаты численного исследования математической модели

Так как для реальных конструкций КЦН характерна более или менее выраженная неоднородность наложенного аксиального магнитного поля (предполагается, что радиальная и азимутальная составляющие наложенного поля равны нулю), то представляет интерес исследование влияния локализации этого поля на картину течения. Для этой цели проводились расчёты несимметричной математической модели насоса при следующих диапазонах значений параметров:

$r_1 = 0.2$, $h_э = 0.2$, $\alpha_0 = 1.3$, $p_1 = p_2 = 0$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 0$, $Re = 100$, $N = 43$ (в качестве характерной величины скорости выбрано значение $V_0 = 1$ м/с), с различными областями наложения внешнего поля.

Достоверность численных результатов проверялась следующими способами:

1) Для тестования составленных программ решался ряд осесимметричных задач (радиальное течение жидкости, вызван-

ное разностью давления на периферийном и центральном электродах, вращение жидкости без транзитного потока благодаря осесимметричной азимутальной электромагнитной силе, и т.п., а также некоторые несимметричные задачи. Проверялось также выполнение условия несжимаемости. Как это характерно для метода SMAC, точность выполнения условия несжимаемости тем выше, чем точнее вычисляется поле давления на каждом временном слое.

2) Для оценки достоверности результатов модельных задач сравнивались результаты, полученные на различных разностных сетках. Сравнения показали, что при вышеуказанных диапазонах изменения параметров угущение сетки от IIx30 (первое число - число расчётных точек по радиусу, второе - по углу) к I6x45 приводит к изменениям в результатах в целом меньше, чем на 5%.

Представленные в данной работе результаты получены на разностной сетке I6x45.

При указанных значениях параметров задачи, расчёт одного варианта на ЭВМ ЕС-I022 требует не более 20 минут машинного времени с использованием безразмерного шага по времени τ =0,0I.

Результаты расчёта модели с наложенным на всю активную зону магнитным полем представлены на рис. 4-5 и 7-а.

На рис. 4-а представлено распределение давления p по углу α при различных значениях координаты r. Характерным является рост p с увеличением α, обусловленный тем, что азимутальная составляющая электромагнитной силы действует главным образом в секторе, соответствующем периферийному электроду, и тем самым азимутальное вращение жидкости в остальной части насоса должно поддерживаться распределением давления.

Из распределений составляющих скорости (рис. 5 и 7-а) следует наличие вихря у периферийного электрода, а также то, что на центральном электроде существует область с отрицательным V_r. Наличие вихря объясняется градиентом давления (см. рис. 4-а), направленным внутрь активной зоны при значении угла $\alpha \approx \alpha_0$, а также характером электромагнитных сил.

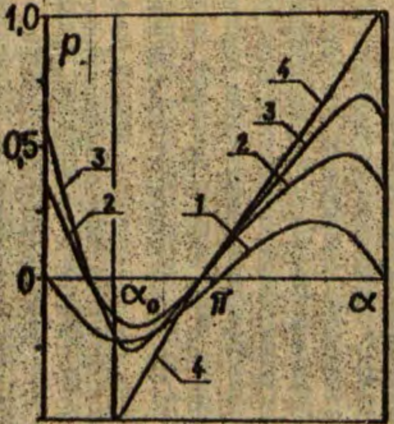


Рис.4-а.

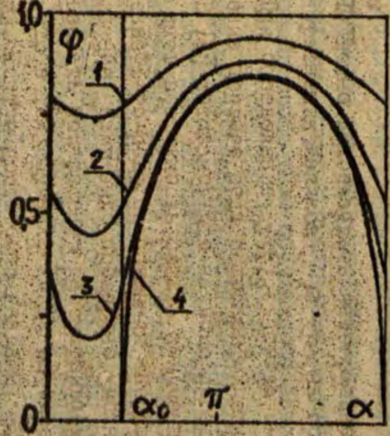


Рис.4-б.

Рис. 4. Результаты расчёта при наложенном на всю активную зону магнитном поле.

Рис. 4-а. Распределение давления по углу α. I - r=0.33. 2 - r=0.55. 3 - r=0.76. 4 - r=I.0.

Рис. 4-б. Распределение электрического потенциала по углу α. I - r=0.36. 2 - r=0.57. 3 - r=0.79. 4 - r=I.0

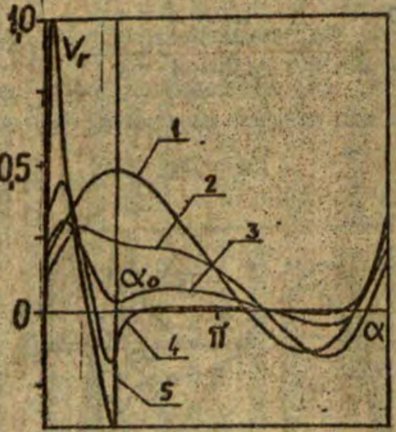


Рис.5-а.

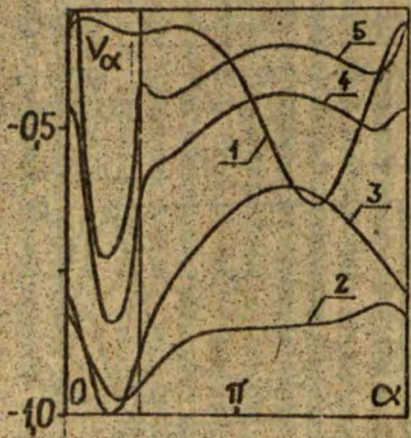


Рис.5-б.

Рис. 5. Результаты расчёта при наложенном на всю активную зону магнитном поле.

Рис. 5-а. Распределение V_r по углу α. I - r=0.20. 2 - r=0.36. 3 - r=0.57. 4 - r=0.79. 5 - r=1.0.

Рис. 5-б. Распределение V_α по углу α. I - r=0,23. 2 - r=0,33. 3 - r=0,55. 4 - r=0,71. 5 - r=0,87.

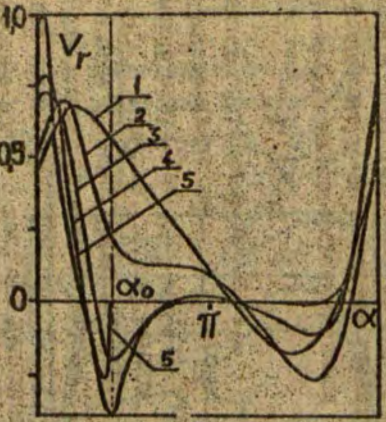


Рис.6-а.

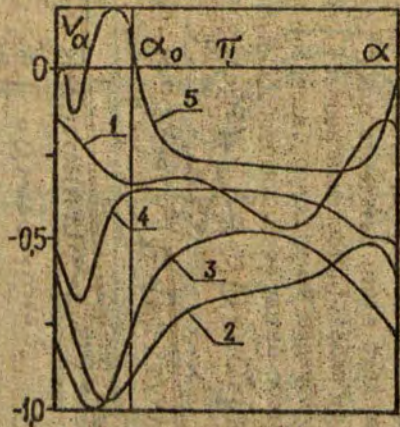


Рис.6-б.

Рис. 6. Результаты расчёта при наложенном в пределах $0.2 \leq r \leq 0.79$ магнитном поле.

Рис. 6-а. Распределение V_r по углу α. I - r=0.20. 2 - r=0.36. 3 - r=0.57. 4 - r=0.79. 5.- r=1.0.

Рис. 6-б. Распределение V_α по углу α. I - r=0.23. 2 - r=0.33. 3 - r=0.55. 4 - r=0.71. 5 - r=0.87.

На рис. 4-б приводится распределение электрического потенциала φ по α. Большое значение градиента φ напротив периферийного электрода свидетельствует о том, что электрический ток течёт главным образом в пределах угла $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$. Так как для представленных расчётных вариантов $\Delta\varphi \gg \operatorname{div}(\vec{V}\times\vec{B})$, то распределение φ от локализации наложенного магнитного поля практически не зависит.

На рис.7-а представлено распределение V_α по радиусу. Несовпадение расположений максимумов этих кривых с центральным элктродом (r =0,2) (там азимутальная составляющая электромагнитной силы имеет наибольшее значение) обусловлено условием прилипания для V_α при r =0,2 и втечением в активную зону насоса жидкости, имеющей нулевую азимутальную составляющую скорости.

Влияние локализации наложенного магнитного поля около центрального электрода иллюстрируется следующим расчётным примером:

$$B_0(r,\alpha)=\begin{cases}1, & r_1 \leqslant r \leqslant 0{,}79\\ 0, & 0{,}79 \leqslant r \leqslant 1\end{cases}$$

Результаты расчёта представлены на рис. 6 и 7-б.

Из распределений составляющих скорости (рис. 6 и рис. 7) также следует наличие вихря у центрального электрода, а также то, что центральный электрод имеет область с отрицательным V_r .

Распределения давления и электрического потенциала практически совпадают с соответствующими распределениями для предыдущего примера (см. рис. 4). Наличие вихря у периферийного электрода в данном случае объясняется градиентом давления, направленном внутрь активной зоны при $\alpha=\alpha_0$ и $r=1$. Положительные значения V_α вблизи периферийного электрода также объясняется направлением градиента давления и отсутствием там азимутально направленных электромагнитных сил, так как $B_0=0$ при $r \geqslant 0{,}79$).

На рис.7-б представленные распределения V_α по r показывают, что при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$ V_α вне области наложения аксиального магнитного поля падает до нуля и может иметь даже противоположные значения.

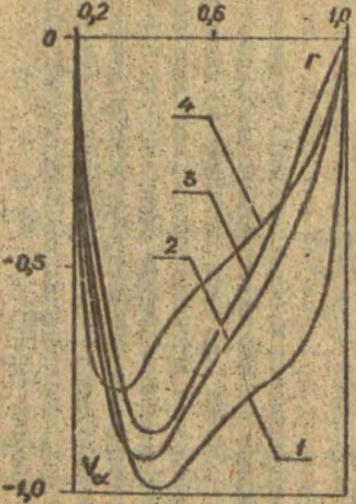


Рис. 7-а.

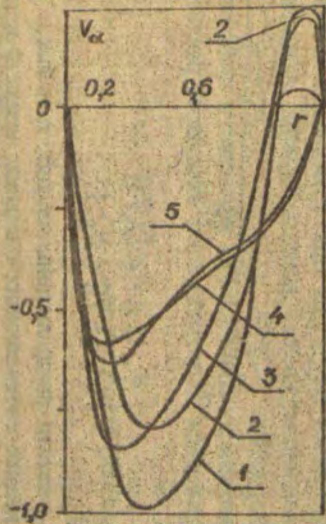


Рис. 7-б.

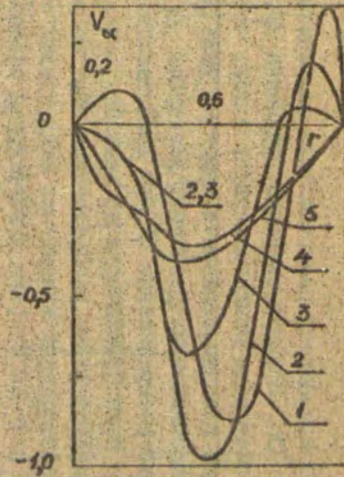


Рис. 7-в.

Рис.7. Распределение V_α по радиусу r при значениях угла α (I- α=0, 2-α=0,56, 3- α=1,40, 4- α=2,93, 5 - α=4,47). Магнитное поле наложено: а)на всю зону; б) в пределах 0,2÷0,8; в) в пределах 0,4÷0,8.

Зависимость развиваемого насосом транзитного потока от радиуса $r_в$ области локализации аксиального магнитного поля (при одинаковых остальных электромагнитных и геометрических параметрах) представлена на рис.3. Интересным является факт, что при изменении $r_в$ в пределах $0{,}6 \leqslant r_в \leqslant 1$, транзитный поток практически не меняется. Расчёты при $r_в < 0{,}3$ не проводились из-за необходимости угущения сетки вблизи центрельного электрода при малых $r_в$.

Влияние локализации аксиального магнитного поля в пределах кольца ($0{,}3 \leqslant r \leqslant 0{,}8$)(остальные параметры как и выше) иллюстрируется на рис.7-в. Характерным для этой картины течения является струйный вид азимутального вращения, причём струя расположена в зоне наложения магнитного поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложена двухмерная математическая модель КЦН, позволяющая исследовать влияние неосесимметричного характера внешнего магнитного поля, расположения токоподводящих электродов и отверстий для жидкости. Турбулентность моделируется введением эффективной турбулентной вязкости, а зависимость поля скорости от z моделируется введением эффективной высоты ячейки КЦН. Оба эффективных параметра должны подбираться из сопоставления расчётных и экспериментальных данных.

Для расчёта математической модели разработана методика, основанная на решении дифференциальных уравнений МКР, в частности для гидродинамической части используется метод SMAC.

Проведено исследование влияния локализации наложенного магнитного поля вблизи центрального электрода. Выявлено, что уменьшение зоны магнитного поля в достаточно широких пределах не уменьшает развиваемый насосом расход.

ЛИТЕРАТУРА

I. Босых Л.А., Платонов В.И., О возможности применения центробежных МГД-насосов в литейном производстве. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Промышленные процессы и устройства. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1983, с. 36-46.

2. Горбунов В.А., Колесников Ю.Б., Колоколов В.Е., Поляков Н.Н., Фролов В.В. Экспериментальное исследование характеристик макета центробежного кондукционного МГД-насоса.- Магнитная гидродинамика, 1984, № 1, с. 134-137.

3. Калис Х.Э., Колесников Ю.Б. Исследование единичного вихря в осевом однородном магнитном поле при наличии компоненты скорости вдоль поля. - Магнитная гидродинамика, 1981, № 1, с. 29-35.

4. Калис Х.Э., Колесников Ю.Б., Поляков А.Н. Исследование вращающегося течения в предельном магнитном поле. - Магнитная гидродинамика, 1983, № 1, с. 72-76.

5. Якович А.Т., Булыгин Л.Л., Дзенитис О.Я. Некоторые модели и методы расчета течений в кондукционном МГД-насосе центробежного типа. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1982, с. 146-167.

6. Горбунов В.А., Колоколов В.Е. Влияние проводимости торцевых стенок на характеристики центробежного кондукционного МГД-насоса. II. Теория. - Магнитная гидродинамика, 1985, № 1, с. 106-114.

7. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. - М.:Наука, 1982. - 391 с.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 65-75

УДК 519.6

М.З.Шмите
ЛГУ им.П.Стучки

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С КОНВЕКЦИЕЙ И ДИФФУЗИЕЙ

Цель данной работы - рассмотрение нескольких постановок для задачи по определению поля концентрации в двух соприкасающихся пластах, в которых имеет место горизонтальная конвекция и поперечная диффузия. На основе вычислительного эксперимента выясняются области применимости некоторых отличающихся методом осреднения по мощности (толщине) отдельных пластов постановок в зависимости от соотношения величин коэффициентов диффузии.

Пусть $c_0(\bar{x},\bar{z},\bar{t})$ и $c_1(\bar{x},\bar{z},\bar{t})$ являются решениями (полями концентрации) следующей задачи

$$\bar{n}_0\frac{\partial c_0}{\partial \bar{t}}=\bar{D}_0\frac{\partial^2 c_0}{\partial \bar{z}^2}-\bar{V}_0\frac{\partial c_0}{\partial \bar{x}}, \quad -\bar{H}_0<\bar{z}<0, \tag{1}$$

$$\bar{n}_1\frac{\partial c_1}{\partial \bar{t}}=\bar{D}_1\frac{\partial^2 c_1}{\partial \bar{z}^2}-\bar{V}_1\frac{\partial c_1}{\partial \bar{x}}, \quad 0<\bar{z}<\bar{H}_1, \tag{2}$$

$$\bar{D}_0\frac{\partial c_0}{\partial \bar{z}}\Big|_{\bar{z}=-\bar{H}_0}=0, \tag{3}$$

$$\bar{D}_1\frac{\partial c_1}{\partial \bar{z}}\Big|_{\bar{z}=+\bar{H}_1}=0, \tag{4}$$

$$C_0\Big|_{\bar z=-0}=C_1\Big|_{\bar z=+0}\,, \tag{5}$$

$$\bar D_0\frac{\partial C_0}{\partial \bar z}\Big|_{\bar z=-0}=\bar D_1\frac{\partial C_1}{\partial \bar z}\Big|_{\bar z=+0}\,, \tag{6}$$

$$C_i\Big|_{\bar t=0}=0\,,\quad C_i\Big|_{\bar x=0}=1\quad (i=0,1). \qquad (7),(8)$$

Здесь $\bar n_i$, $\bar D_i$, $\bar V_i$ - положительные постоянные (коэффициенты пористости, диффузии и скорости фильтрации), $\bar H_i$ - мощности пластов. Физическое содержание задачи (1-8) здесь подробнее рассматриваться не будет. Оно для задач такого типа рассматривается, напр., в монографии [I].

Определим задачу в безразмерных переменных

$$t=\frac{\bar t}{l_0}\,,\quad x_1=\frac{\bar z}{l_1}\,,\quad x_2=\frac{\bar x}{l_2}\,,\quad H_i=\frac{\bar H_i}{l_1}$$

с помощью безразмерных коэффициентов

$$D_i=\frac{\bar D_i l_0}{\bar n_i l_1^2}\,,\quad w_i=\frac{\bar V_i l_0}{\bar n_i l_2}\,,\quad n_i=\frac{\bar n_i l_1^2}{l_0}\quad (i=0,1).$$

Получаем следующую постановку

$$\frac{\partial C_0}{\partial t}=D_0\frac{\partial^2 C_0}{\partial x_1^2}-w_0\frac{\partial C_0}{\partial x_2}\,,\qquad -H_0<x_1<0, \tag{$\overline{9}$}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t}=D_1\frac{\partial^2 C_1}{\partial x_1^2}-w_1\frac{\partial C_1}{\partial x_2}\,,\qquad 0<x_1<H_1, \tag{$\overline{10}$}$$

$$n_0 D_0\frac{\partial C_0}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-H_0}=0,\quad n_1 D_1\frac{\partial C_1}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+H_1}=0, \qquad \overline{(11)},\overline{(12)}$$

$$C_0\Big|_{x_0=-0}=C_1\Big|_{x_1=+0},\quad n_0 D_0\frac{\partial C_0}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-0}=n_1 D_1\frac{\partial C_1}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+0}, \qquad \overline{(13)},\overline{(14)}$$

$$C_i\Big|_{t=0}=0\,,\quad C_i\Big|_{x_2=0}=1\quad (i=0,1). \qquad \overline{(15)},\overline{(16)}$$

Перейдем к построению разностной схемы для задачи ($\overline{9}$-$\overline{16}$). Предположим, что $x_2\in[0,L_2]$, $t\in[0,T]$. Введем по x_2 и t постоянную с шагами $h_2 = \frac{L_2}{N_2}$, $\tau = \frac{T}{N_0}$, а по направлению x_1 – кусочно постоянную сетку; в первом пласте (т.е., при $x_1 \in [-H_0, 0]$) шаг сетки $h_{1,0} = \frac{H_0}{N_{1,0}}$, а во втором – $h_{1,1} = \frac{H_1}{N_{1,1}}$. Сеточную функцию, аппроксимирующую решение задачи (9-16) будем обозначать через y_k,

$$c_k(x_1,x_2,t)\Big|_{\substack{x_1=x_1^i\\ x_2=x_2^j\\ t=t^n}} = y_k(x_1^i, x_2^j, t^n) = (y_k)^n_{i,j} \quad (k=0,1).$$

Пользуясь обозначениями [2] (см. также [3]), получаем следующее семейство зависящих от весов σ разностных схем:

$$y_{0,t} = D_0 \Lambda_{11} y_0^{(\sigma_{1,0})} - w_0 \Lambda_2^- y_0^{(\sigma_{2,0})}, \quad i_0 < i < i_1, \tag{17}$$

$$y_{1,t} = D_1 \Lambda_{11} y_1^{(\sigma_{1,1})} - w_1 \Lambda_2^- y_1^{(\sigma_{2,1})}, \quad i_1 < i < i_2, \tag{18}$$

$$\Lambda_1^+ y_0^{(\sigma_{1,0})} = \frac{h_{1,0}}{2D_0}\left(y_{0,t} + w_0 \Lambda_2^- y_0^{(\sigma_{2,0})}\right), \quad i = i_0, \tag{19}$$

$$\Lambda_1^- y_1^{(\sigma_{1,1})} = -\frac{h_{1,1}}{2D_1}\left(y_{1,t} + w_1 \Lambda_2^- y_1^{(\sigma_{2,1})}\right), \quad i = i_2, \tag{20}$$

$$y_0 = y_1, \quad n_0 D_0 \Lambda_1^- y_0^{(\sigma_{1,0})} + \frac{h_{1,0}}{2} n_0\left(y_{0,t} + w_0 \Lambda_2^- y_0^{(\sigma_{2,0})}\right) = \tag{21}$$
$$= n_1 D_1 \Lambda_1^+ y_1^{(\sigma_{1,1})} - \frac{h_{1,1}}{2} n_1\left(y_{1,t} + w_1 \Lambda_2^- y_1^{(\sigma_{2,1})}\right), \quad i = i_1,$$

$$(y_k)^0_{i,j} = 0, \tag{22}$$

всюду, кроме узловых точек $j = n = 0$, где имеет место разрыв начальных и граничных данных, здесь берется среднее арифметическое их – $(y_k)^0_{i,0} = 0.5$,

$$(y_k)^n_{i,0} = 1, \quad n > 0. \tag{23}$$

Здесь $H_0 = i_0 h_{1,0}$, $x_1 = 0 = i_1 h_{1,0}$, $H_1 = (i_2 - i_1) h_{1,1}$.

Назовем задачу математической физики (9-16), а также аппроксимирующую ее разностную схему (17-23) "точной" в том смысле, что остальные постановки и их разностные схемы будут вытекать из нее путем дополнительных упрощающих предположений.

Требования точности и устойчивости разностной схемы для параболического уравнения, как известно, существенно зависят от отношения коэффициентов диффузии (теплопроводности). Поэтому при сильно отличающихся D_0 и D_1 будут также сильно отличаться допустимые уравнениями (17) и (18) шаги по времени τ. С другой стороны, сравнительно большой D_0 по отношению к D_1 приводит к малым изменениям функции в направлении x_1, т.е. функция $c_0(x_1, x_2, t)$ близка к константе по координате x_1. Это приводит к наиболее простой и весьма часто применявшейся многими авторами (см., напр., [4]) возможности - замены по направлению x_1 в (9)-(16) функции $c_0(x_1, x_2, t)$ константой, т.е. введем

$$\tilde{c}_0(x_2,t) = \frac{1}{H_0}\int_{-H_0}^{0} c_0(x_1, x_2, t)\,dx_1 \qquad (24)$$

и предположим, что

$$\tilde{c}_0(x_2,t) = c_1(0, x_2, t) = c(0, x_2, t).$$

Получаем следующую постановку, имеющую уже одну неизвестную функцию $c(x_1, x_2, t)$ (см. [3]):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x_1^2} - w_1 \frac{\partial c}{\partial x_2}, \quad 0 < x_1 < H_1, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \beta^+ \frac{\partial c}{\partial x_1} - w_0 \frac{\partial c}{\partial x_2}, \quad \beta^+ = \frac{n_1 D_1}{n_0 H_0}, \quad x_1 = 0, \qquad (26)$$

$$n_1 D_1 \frac{\partial c}{\partial x_1}\bigg|_{x_1 = H_1} = 0, \quad c\Big|_{t=0} = 0, \quad c\Big|_{x_2 = 0} = 1. \qquad (27)-(29)$$

Назовем постановку (25)-(29) постановкой II. Соответствующая постановке II разностная схема имеет вид:

$$y_t = D_1 \Lambda_{11} y^{(\sigma_1,1)} - w_1 \Lambda_2^- y_1^{(\sigma_2,1)}, \quad 0 < i < i_2 - i_1, \tag{30}$$

$$\left(1 + \frac{\beta^+ h_{1,1}}{2D_1}\right) y_t = \beta^+ \Lambda_1^+ y^{(\sigma_1,1)} - w_0 \Lambda_{2}^- y_0^{(\sigma_2,0)} - \frac{\beta^+ h_{1,1}}{2D_1} w_1 \Lambda_{2}^- y_0^{(\sigma_2,1)}, \quad i = 0, \tag{31}$$

$$\Lambda_1^- y^{(\sigma_1,1)} + \frac{h_{1,1}}{2D_1}\left(y_t + w_1 \Lambda_2^- y^{(\sigma_2,1)}\right) = 0, \quad i = i_2 - i_1, \tag{32}$$

$$\overset{0}{y}_{i,j}\Big|_{j>0} = 0, \quad \overset{0}{y}_{i,0} = 0.5, \tag{33}$$

$$\overset{n}{y}_{i,0}\Big|_{n>0} = 1. \tag{34}$$

Постановка II и ее разностная аппроксимация была рассмотрена также в [3].

Более точным осреднением является замена искомой функции в пласте с более высоким D или даже в обоих параболами. Рассмотрим первый случай. Предположим, что в (9)

$$C_0(x_1, x_2, t) = \bar{u}_0 + m_0\left(x_1 + \frac{H_0}{2}\right) + \frac{e_0}{D_0 H_0}\left(x_1 + \frac{H_0}{2}\right)^2, \tag{35}$$

где $\bar{u}_0$, m_0, e_0 - константы по отношению к x_1 и введем

$$u_0(x_2, t) = \frac{1}{H_0}\int_{-H_0}^{0} C_0 \, dx_1. \tag{36}$$

Такая аппроксимация (35) является частным случаем предложенного в [5] интегрально параболического сплайна для интерполяции кусочно гладкой функции. Там же предложен алгоритм для нахождения величин $\bar{u}_0$, m_0 и e_0 (см. также [6]). В нашем случае он сводится к использованию (11), (14), (36) и интегрированию (9) по x_1. Получаем следующую постановку, которую назовем постановкой III:

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c_1}{\partial x_1^2} - w_1 \frac{\partial c_1}{\partial x_2}, \quad 0 < x_1 < H_1, \tag{37}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = \alpha_0 \left(c_1\big|_{x_1=0} - u_0\right) - w_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_2}, \quad x_1 = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial x_1} = \beta_1 \left(c_1\big|_{x_1=0} - u_0\right), \quad x_1 = 0, \tag{39}$$

$$c_1\big|_{t=0} = u_0\big|_{t=0} = 0, \tag{40}$$

$$c_1\big|_{x_2=0} = u_0\big|_{x_2=0} = 1, \tag{41}$$

где $\alpha_0 = \dfrac{3D_0}{H_0^2}$, $\beta_1 = \dfrac{3n_0 D_0}{n_1 D_1 H_0}$.

Разностная схема, аппроксимирующая постановку III, имеет вид:

$$y_{1,t} = D_1 \Lambda_{11} y_1^{(\sigma_1,1)} - w_1 \Lambda_2^- y_1^{(\sigma_2,1)}, \quad 0 < i < i_2 - i_1, \tag{42}$$

$$y_{0,t} = \alpha_0 (y_1 - y_0)^{(\sigma_1,0)} - w_0 \Lambda_2^- y_0^{(\sigma_2,0)}, \quad i = 0, \tag{43}$$

$$\Lambda_1^+ y^{(\sigma_1,1)} - \frac{h_{1,1}}{2D_1}\left(y_{1,t} + w_1 \Lambda_2^- y_1^{(\sigma_2,1)}\right) = \beta_1 (y_1 - y_0), \quad i = 0, \tag{44}$$

$$(y_k)_{i,0}^0 = 0{,}5, \quad (y_k)_{i,j}^0 = 0, \tag{45}$$

$$(y_k)_{i,0}^n = 1, \quad n > 0 \quad (k = 0, 1). \tag{46}$$

Наконец, если искомую функцию заменить параболой и во втором пласте, т.е. к (35) добавить

$$c_1(x_1,x_2,t)=\bar{u}_1+m_1\left(x_1-\frac{H_1}{2}\right)+\frac{e_1}{D_1H_1}\left(x_1-\frac{H_1}{2}\right)^2, \qquad (47)$$

то, согласно [5], получим систему двух уравнений параболического типа первого порядка с одной пространственной переменной

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=-w_0\frac{\partial u_0}{\partial x_2}+\beta_0(u_1-u_0), \qquad (48)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=-w_1\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\beta_1(u_0-u_1),\ x_2>0,\ t>0, \qquad (49)$$

$$\beta_0=\frac{3}{n_0H_0}\left[\frac{H_0}{n_0D_0}+\frac{H_1}{n_1D_1}\right]^{-1},$$

$$\beta_1=\frac{3}{n_1H_1}\left[\frac{H_0}{n_0D_0}+\frac{H_1}{n_1D_1}\right]^{-1},$$

$$u_k\big|_{t=0}=0, \qquad (50)$$

$$u_k\big|_{x_2=0}=1\ ,\ k=0,1. \qquad (51)$$

Разностная схема, выбранная нами для постановки IУ, выглядит следующим образом:

$$y_{0,t}=-w_0\Lambda_2^-y_0^{(\sigma_2,0)}+\beta_0(y_1-y_0)^{(\sigma_1,0)}, \qquad (52)$$

$$y_{1,t}=-w_1\Lambda_2^-y_1^{(\sigma_2,1)}+\beta_1(y_0-y_1)^{(\sigma_1,1)}, \qquad (53)$$

$$(y_k)_0^0=0{,}5\ ,\ (y_k)_j^0=0, \qquad (54)$$

$$(y_k)_0^n=1\ ,\ n>0\ ,\ k=0,1 \qquad (55)$$

Рассмотрим теперь некоторые из полученных численных результатов, которые отражены на рисунках I-3. Все расчеты были проведены при следующих входящих в постановки безразмерных параметрах: $\psi_0 = 0,1$, $\psi_1 = 0,75$, $H_0 = 0,5$, $H_1 = 0,35$, $n_0 = 0,005$, $n_1 = 0,004$, $\ell_0 = 10^4$, $\ell_1 = 10$, $\ell_2 = 10^4$. Шаги для всех разностных схем были выбраны одинаковыми: $\tau = 0,0125$, $h_{1,0} = 0,1$, $h_{1,1} = 0,0175$, $h_2 = 0,01$. Весы схем были выбраны так, чтобы схемы имели минимальную численную диффузию (τ максимально близко к предельному значению в условии устойчивости в равномерной метрике). Именно, для "точной" - $\sigma_{1,0} = 0,913$, $\sigma_{2,0} = \sigma_{2,1} = 0$, $\sigma_{1,1} = 0,994$, для II постановки - $\sigma_{1,1} = 0,994$, $\sigma_{2,0} = \sigma_{2,1} = \sigma_{1,0} = 0$, для III и IУ постановок - $\sigma_{1,1} = \sigma_{1,0} = 0,5$, $\sigma_{2,1} = \sigma_{2,0} = 0$. На рис.I даны решения "точной" постановки, постановок II и III

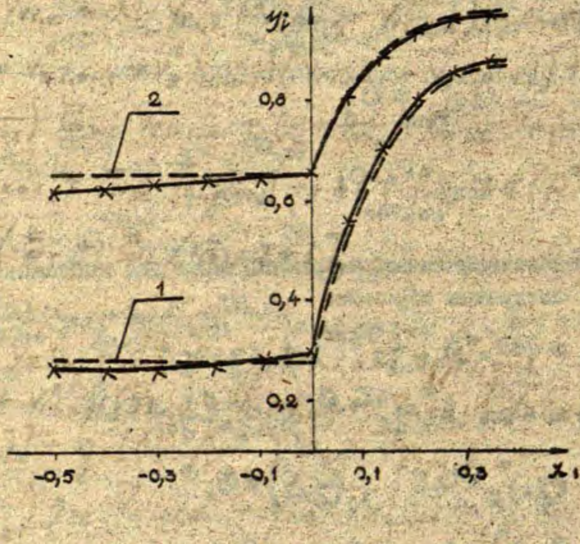


Рис.I. Распределение концентрации по мощности пластов при $\frac{D_0}{D_1} = 16$, $x_2 = 0,1$. Кривые I - $T = 0,3$, кривые 2 - $T = 0,5$.

по мощности пластов при соотношении размерных коэффициентов диффузии $\frac{\mathcal{D}_0}{\mathcal{D}_1} = 20$ (т.е. $\frac{\mathcal{D}_0}{\mathcal{D}_1} = 16$). Здесь непрерывной кривой обозначено решение "точной" задачи, прерывистой - II постановки, а крестиками - III постановки. Как видно, II постановка в первом пласте дает относительную ошибку не более 5%, а постановка III - 0,5%. Решение постановки IУ на рис.I не дано, так как оно с точностью 0,05% совпадает с решением постановки III. На рис.2 даны аналогичные результаты при $\frac{\mathcal{D}_0}{\mathcal{D}_1} = 5$ (т.е. $\frac{\mathcal{D}_0}{\mathcal{D}_1} = 4$). Здесь крестиком обозначено решение постановки IУ. Как видно, относительная ошибка постановки II уже достигает 6%, постановки III - 4%, а постановки IУ - около I%. Из этих результатов вытекает что,

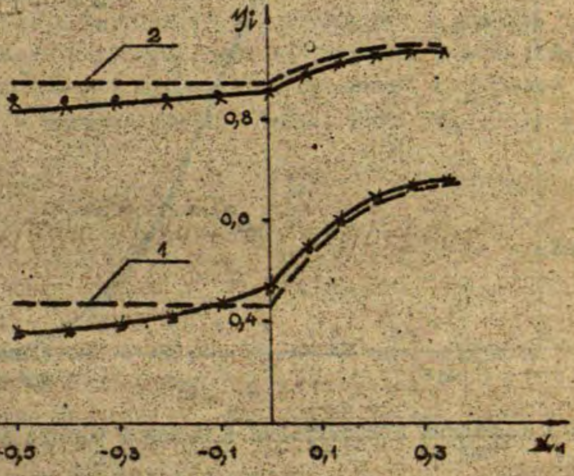


Рис.2. То же самое, что на рис.I, но при $\frac{\mathcal{D}_0}{\mathcal{D}_1} = 4$.
Кружочками обозначено решение постановки III.

если отношение коэффициентов диффузии больше 4÷5, то с точностью до I-2% "точную" постановку можно заменить постановками III или IУ. Если же коэффициенты отличаются более чем на порядок, то достаточно точной будет также постановка II. Если нас интересуют средние по мощности пропластков концентрации, то постановка II дает достаточно хорошие результаты и при малых соотношениях коэффициентов диффузии (см. рис.3).

Рис.3. Средняя концентрация в нулевом пласте при $\frac{D_0}{D_1} = 4$. $T=1$.

Крестиками обозначено решение постановки III.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестаков В.М. Динамика подземных вод.-М.:МГУ,1979. - 368 с.

2. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656 с.

3. Буйкис А.А., Шмите М.З. Численное решение одной конвективно-диффузионной задачи.- Латв.мат.ежегодник, 1984, вып.28, с.10-13.

4. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении.- Казань: КГУ, 1978.- 188 с.

5. Буйкис А.А. Интерполяция интегральных средних кусочно гладкой функции параболическим сплайном. - Латв.мат.ежегодник, вып.29, ~~в печати~~. с. 191-197.

6. Буйкис А.А., Шмите М.З. Постановка и решение одной задачи миграции подземных вод. - Численные методы решения задач математической физики: Тезисы лекций и докладов Всесоюзной школы молодых ученых, Львов, 1983. М.:1983, ч.II, с.35.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 76-82

УДК 532.72

А.Я.Аболтиньш, И.И.Яунроманс
ЛГУ им.П.Стучки ВНИИ водполимер

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ИЗ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРОНИЦАЕМОСТИ

Исследование процессов массопереноса низкомолекулярных веществ (НМВ) является одним из основных экспериментальных методов в исследовании долговечности полимерных изделий при эксплуатации их в определенной среде. Наряду с широко распространенными сорбционными экспериментами часто применяются эксперименты по проницаемости [I].

В данной работе рассматриваются некоторые особенности обработки на ЭВМ результатов эксперимента по проницаемости.

На установке проницаемости регистрируется кинетика установления стационарного потока через мембрану из исследуемого материала. Мембрана закрепляется в термостатируемой ячейке и разделяет объем ячейки на проточную и приемную камеру. Приемная камера соединена с детектором теплопроводности, регистрирующим изменения состава проходящего потока. Сперва обе стороны закрепленной мембраны обмываются потоком газа-носителя (He). При режиме "прорыва" с определенного момента времени в проточную камеру подается поток исследуемого газа (пара, смеси газов и т.п.), а по кинетике изменений состава потока, прошедшего через приемную камеру, определяется кинетика проницаемости НМВ через исследуемую мембрану.

После достижения стационарного процесса установка переводится на режим "откачки" - в проточную камеру подается чистый газ-носитель и регистрируется изменение величины поток диффузанта в приемной камере.

Математическая модель процесса проницаемости НМВ через мембрану имеет вид:

$$\frac{\partial \tilde{c}(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \tilde{c}(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$\tilde{c}(x,0) = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{- "прорыв"} \\ c_p \frac{x}{l} & \text{- "откачка"} \end{cases}, \tag{2}$$

где D - коэффициент диффузии, l - толщина образца, $\tilde{c}(x,t)$ - концентрация НМВ в образце, c_p - максимальная при данных условиях концентрация НМВ на поверхности мембраны. В зависимости от характера взаимодействия НМВ с мембраной необходимо использовать граничные условия I, II или III рода. Весьма часто взаимодействие НМВ с исследуемым материалом незначительно и оправдано применение граничных условий I рода:

$$\tilde{c}(l,t) = 0, \quad \tilde{c}(0,t) = \begin{cases} c_p & \text{- "прорыв"} \\ 0 & \text{- "откачка".} \end{cases} \tag{3}$$

В экспериментальной установке измеряется величина потока НМВ через мембрану. Введя нормированную концентрацию

$$c(x,t) = \frac{\tilde{c}(x,t)}{c_p}, \tag{4}$$

задачу (I)-(3) решаем относительно $c(x,t)$ с целью нахождения выражения для потока J, соответствующего экспериментально снятой кинетике:

$$J = -D\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=l}. \tag{5}$$

Дифференцируя решение задачи (I)-(3) по x, получаем следующие выражения для нормированного потока через поверхность $x = l$ [2].

Для малых τ:

$$\gamma_н = \frac{J(t)}{J_\infty} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{1}{\tau}}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\frac{(2n-1)}{4\tau}\right), \tag{6}$$

для больших $\mathcal{T}$:

$$\gamma_к(t) = \frac{Э(t)}{Э_\infty} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \exp(-\pi^2 n^2 \mathcal{T}). \qquad (7)$$

Здесь $\mathcal{T} = \dfrac{Dt}{l^2}$.

Для определения величины коэффициента диффузии используем первые члены рядов (6) и (7). Согласно [2], при $Э(t)/Э_\infty < 0,9$ можно ограничиться первым членом ряда (6), а при $Э(t)/Э_\infty > 0,46$ - первым членом ряда (7). Тогда коэффициент диффузии для малых времен можно найти из формулы

$$D_н = \frac{l^2}{4\,tg\alpha}, \qquad (8)$$

где

$$tg\alpha = \frac{\Delta \ln(t^{1/2}\gamma_н(t))}{\Delta(\frac{1}{t})} = \frac{\ln[(t+\Delta t)^{1/2}\gamma_н(t+\Delta t)] - \ln[t^{1/2}\cdot\gamma_н(t)]}{\frac{1}{t+\Delta t} - \frac{1}{t}}.$$

Для больших времен $D_к$ находится из формулы

$$D_к = \frac{l^2 \cdot tg\beta}{\pi^2}, \qquad (9)$$

где
$$tg\beta = \frac{\Delta \ln(1-\gamma_к(t))}{\Delta t} = \frac{\ln[1-\gamma_к(t+\Delta t)] - \ln[1-\gamma_к(t)]}{\Delta t}.$$

Величины $tg\alpha$ и $tg\beta$ можно интерпретировать и как направляющие коэффициенты прямых, соответствующих экспериментальным точкам в системах координат $\ln(t^{1/2}\gamma_н(t)) \div 1/t$ или $\ln(1-\gamma_к(t)) \div t$. Вычисление $tg\alpha$ и $tg\beta$ методом наименьших квадратов позволяет получить наилучшие величины D .

Однако, использование (6) и (8) требует точного отсчета времени с момента соприкосновения фронта диффузанта с поверхностью $x = 0$, что на установке не регистрируется. Поэтому часто используется другой подход для определения D по первому члену ряда (7). Именно, (7) переписывается в виде [3]:

$$\gamma_н(t) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\, y \cdot \exp(-y^2), \qquad (10)$$

где
$$y^2 = \frac{l^2}{4Dt}.$$

Зная экспериментальные значения $\gamma_н(t)$, из (10) методом деления сегмента пополам с заданной точностью можно найти соответствующие значения y и $1/y^2$. Тогда

$$D_н^* = \frac{l^2 tg\alpha'}{4}, \quad tg\alpha' = \frac{\Delta(y^{-2})}{\Delta t} \tag{11}$$

и значение $D_н^*$ вычисляется аналогично $D_н$ и $D_к$. При расчетах использовался сегмент $y \in [0,71; 3]$, что соответствует изменениям $\gamma_н(t)$ от 1.10^{-4} до 0,96. С помощью найденного $D_н^*$ можно рассчитать время от начала проникновения НМВ в мембрану. Для этого из выражения, соответствующего первому члену (6)

$$\gamma_н(t_э) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{l^2}{D_н^* t_т}} \exp\left(-\frac{l^2}{4D_н^* t_т}\right), \tag{12}$$

определяется время $t_т$, прошедшее от момента соприкосновения диффузанта с мембраной при $x = 0$ до достижения $\gamma_н(t_э)$, где $t_э$ - время с начала эксперимента, при котором регистрировано $\gamma_н(t) = \gamma_н(t_э)$. Теперь, учитывая сдвиг отсчета времени эксперимента относительно "истинного" ($\Delta t^* = t_э - t_т$), можно провести расчеты и по формулам (6) и (8).

Данный метод использовался для обработки экспериментальных данных проницаемости паров воды через полиэтиленовую пленку. Результаты расчетов показали изменения коэффициента диффузии на разных стадиях процесса, что указывает на несоответствие модели (1)-(3) системе вода-полиэтилен (ПЭ).

Таблица I

Интервал расчета потока ($\mathcal{J}_н \div \mathcal{J}_к$)	0,10-0,25	0,18-0,29	0,20-0,43	0,29-0,49	0,81-0,91
$D_н (\times 10^7 см^2/с)$	1,763	1,629	1,555	1,448	0,807

Из табл. I можно сделать вывод, что коэффициент диффузии зависит от концентрации молекул воды в ПЭ.

Ввиду этого при решении обратной задачи (нахождение $D(c)$) из эксперимента по проницаемости целесообразно использовать алгоритмы метода обработки сорбционного эксперимента [4], модифицируя его для случая, когда исходными данными является кинетика изменения нормированного потока через поверхность $x=l$.

Математическая задача в этом случае такова:

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(c)\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\right), \quad t>0, \ 0<x<l, \tag{13}$$

$$c(0,x)=\varphi(x), \tag{14}$$

$$c(t,l)=0, \qquad c(t,0)=\begin{cases} 1 - \text{"прорыв"} \\ 0 - \text{"откачка"} . \end{cases} \tag{15}$$

Для обхвата более широкого класса изменений $D(c)$ (вогнутость или выпуклость) использовалась закономерность

$$D(c)=D_p+(D_o-D_p)(1-c)^{\alpha}, \tag{16}$$

где $D_o=D(0)$, $D_p=D(1)$.

Квазилинейная задача (13)-(15) аппроксимировалась неявной разностной схемой, решалась методом прогонки с итерациями [5]. Решая обратную задачу для нахождения $D(c)$ (т.е. нахождения α и уточнения D_o и D_p), мы используем минимизацию квадратичного функционала

$$M_o=\frac{1}{N}\sum k_i(Э_т-Э_э)^2=min, \tag{17}$$

где k_i - коэффициент достоверности экспериментальных замеров; $Э_т$, $Э_э$ - нормированный теоретический, соответственно, экспериментальный поток при $x=l$. Минимум M_o по отношению к α находится как численное решение уравнения

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i(Э_т-Э_э)^2=min. \tag{18}$$

Аналогично уточняется D_o и D_p (в качестве начального приближения D_o и D_p можно взять $D_н$ и $D_к$).

По сравнению с обработкой эксперимента сорбции-десорбции (граничные условия $c(0,t)=c(l,t)=c_p$, начальные условия $c(x,0)=c_0$) в случае проницаемости имеет место отличие при обработке результатов откачки: во втором случае не имеется экспериментальных данных о равновесном распределении НМВ в образце после установления стационара в режиме "прорыва" (при $D \neq const$ зависимость нелинейна). В качестве начальных условий для расчетов теоретической кривой "откачки" необходимо использовать стационарное распределение НМВ, полученное при расчетах кривой "прорыва" с оптимальными параметрами, определяющими $D(c)$. Таким образом, расчеты по проницаемости целесообразно производить совместно для кривых "прорыва" и "откачки".

Для ряда закономерностей $D(c)$ начальное распределение НМВ в мембране при "откачке" можно найти и аналитически, как решение задачи:

$$\frac{d}{dx}\left(D(c)\frac{dc}{dx}\right)=0, \tag{19}$$

$$c\Big|_{x=0}=1, \quad c\Big|_{x=l}=0. \tag{20}$$

В случае закономерности (16) решение (19)-(20) имеет вид

$$(\alpha+1)D_p\left(c-1+\frac{x}{l}\right)=(D_0-D_p)\left[(1-c)^{\alpha+1}-\frac{x}{l}\right], \quad \alpha \neq -1 \tag{21}$$

и начальное распределение можно найти, решая (21) для сеточных точек $x_k \in [0,l]$, где $k=\overline{1,\mathcal{X}}$.

Проведенные расчеты по оптимизации параметров проницаемости дали возможность теоретически описать отдельные кривые "прорыва" и "откачки" с точностью, не превышающей погрешность эксперимента. Однако характеристики оптимальных зависимостей $D(c)$ отличаются для "прорыва" и "откачки", т.е. нельзя установить однозначную взаимосвязь между коэффициентом диффузии и концентрацией (см.табл.2).

Таблица 2

$D_0 (\times 10^7 cм^2/c)$	$D_p (\times 10^7 cм^2/c)$	α	$M_c (\times 10^2)$	Эксперимент
I.608	0.5	0.6	0.08	прорыв
I.608	0.5	0.6	I.5	откачка
2.2	0.375	I.5	2.3	прорыв
2.2	0.375	I.5	0.6	откачка

Это может быть связано с процессом локализации молекул воды в мембраны [6] . В связи с этим в модели (I3), (I4), (I5) требуется учесть и возможность локализации НмВ в мембране.

ЛИТЕРАТУРА

I. Малкин А.Я., Чалых А.Е. Диффузия и вязкость полимеров. Методы измерения. М.: Химия, I979, с.256-299.

2. Crank J. The mathematics of diffusion. - Oxford: Clarendon press, 1979.-414 с.

3. Pasternak R.A., Schimscheimer J.F., Heller J. A dynamic approach to diffusion and permeation measurements.- Amer.Chem.Soc.Polym.Prepr., 1969, VI0, N 2, p.1234-1240.

4. Аболтиньш А.Я., Буйкис А.А., Яунроманс И.И. Методика вычисления зависящего от концентрации коэффициента диффузии паров воды в полимерах.- В кн.: Физика и механика композиционных материалов на основе полимеров: Тезисы докл. XII областной научно-технической конференции молодых ученых и специалистов, Гомель, I984, с.I6-I7.

5. Самарский А.А. Теория разностных схем.-М.: Наука, I977.-656 с.

6. Метра А.Я., Крейтус А.Э., Вятере Э.Ф. Особенности проникновения и локализации воды в полиэтилене.-В кн.: Полимеры в мелиорации и водном хозяйстве, Елгава, I976, с.66-73.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 83-94

УДК 536.24:621.313

Л.Я.Шнидере
ЛГУ им.П.Стучки

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОЛИНЕЙНОМ ИНДУКЦИОННОМ МГД-НАСОСЕ

Введение

В связи с использованием МГД-машин в энергонапряженных режимах работы актуальной является задача адекватного прогнозирования теплового состояния элементов машины. На практике проектирования МГД-машин используют тепловые схемы замещения [1]. Такая методика позволяет судить лишь о средних температурах элементов машины. Локальные превышения температуры остаются невыявленными, однако именно максимальные температуры в обмотке МГД-машины являются тем критерием, который ограничивает увеличение электромагнитных нагрузок.

Настоящая работа является дальнейшим развитием теплофизического исследования плосколинейного МГД-насоса (ПЛИН) полевыми методами математической физики [2,3].

В отличие от [4], которая посвящена численному исследованию тепловых режимов цилиндрических индукционных МГД-насосов, в численных исследованиях тепловых режимов ПЛИН коэффициенты теплопроводности паза, источник тепла и параметры теплоотдачи представляются зависящими от температуры. Таким образом, более адекватно моделируется тепловое состояние МГД-машин в энергонапряженных режимах, когда перепады температур достигают 400-600 °С.

Задача прогнозирования теплового состояния МГД-машин как задача теплофизического исследования является внутренней задачей и ее решение основывается на решении уравнения теплопроводности в соответствующей области. Теплообмен с окружающей средой описывается в форме нелинейного закона Ньютона и характеризуется соответствующими параметрами конвективной и радиационной теплоотдачи [3]. Настоящее исследование посвящено уточнению математической модели стационарной внутренней задачи теплопроводности в элементе продольного сечения ПЛИН.

I. Постановка задачи

На рис.I изображена половина зубцового деления ПЛИН; здесь выделены основные элементы насоса: канал с жидким металлом I, теплоизоляция канала 2, зубец 3, обмотка 4, пазовая изоляция 5, спинка 6.

Для последовательности изложения кратко повторим основные допущения [3].

I. Устройство симметрично относительно трех координатных плоскостей ПЛИН как в конструктивном, так и в тепловом отношении.

2. Распределение температуры по длине насоса является периодической функцией с периодом, равным зубцовому шагу t_z. Продольный тепловой поток через срединную плоскость паза и зубца принимается равным нулю, что соответствует пренебрежению теплоотвода через концы ПЛИН. Это позволяет вместо всего индуктора рассматривать его участок длины $t_z/2$.

3. Не учитываются температурные перепады по ширине индуктора, температурное поле считается плоскопараллельным, и задача о распределении температуры решается в двухмерном приближении. Реальная трехмерная структура учитывается неявно путем введения эквивалентного отрицательного источника тепла (стока), соответствующего величине теплоотдачи от поверхности лобовых частей обмотки.

Область расчета двухмерного стационарного поля состоит из шести подобластей (см.рис.I). Каждая из слоисто-неоднородных сред характеризуется своим эквивалентным коэффициентом теплопроводности λ_i, а также плотностью источника (стока) тепла W_i . Так как при стандартной частоте тока питания f = 50 Гц доля потерь в стали индуктора относительно мала, принимается, что весь джоулев источник тепла распределен в обмотке.

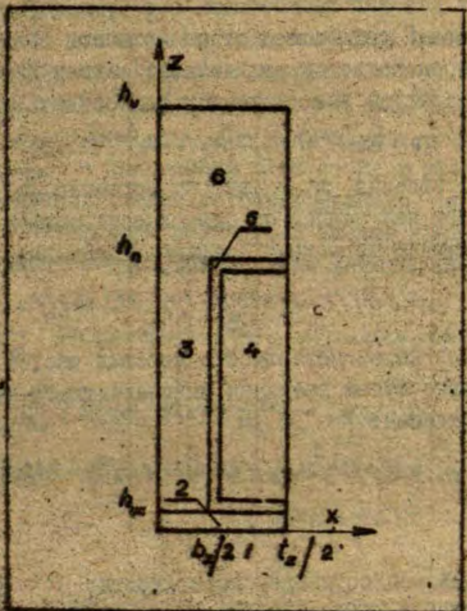


Рис.I. Область расчета стационарного температурного поля в ЛИН: I - канал с жидким металлом; 2- изоляция канала; 3 - зубец; 4 - паз; 5- изоляция паза; 6 - спинка магнитопровода

Внутренний джоулев источник тепла рассматривается как функция от температуры

$$w = K_з j^2 \rho_0 (1+\alpha t), \qquad (I)$$

где $K_з$ - коэффициент заполнения паза медью; ρ_0 - удельное электрическое сопротивление меди при 0 °C; α - температурный коэффициент сопротивления; j - плотность тока.

Теоретические теплофизические исследования проведены при следующих видах условий теплообмена с окружающей средой.

I. Конвективный теплоотвод от поверхности спинки к окружающей среде происходит по нелинейному закону Ньютона с зависящим от температуры коэффициентом теплоотдачи $\varkappa_c(t)$:

$$q_к = \varkappa_c(t)(t-t_0) = \varkappa_0 (t-t_0)^{\beta}(t-t_0), \qquad (2)$$

где закон представления $\varkappa_c(t)$ выбран согласно [5].

2. Теплоотвод излучением от поверхности спинки к окружающей среде происходит по закону Стефана-Больцмана:

$$q_л = \varepsilon\sigma[(t+273,16)^4 - (t_0+273,16)^4]. \qquad (3)$$

3. Теплоотвод через поверхность лобовых частей обмотки учитывается неявно путем введения эквивалентного стока тепла в обмотке возбуждения:

$$w_л = S_л / V \{\varkappa(t_л)(t_л - t_0) + \varepsilon\sigma[(t_л + 273,16)^4 - (t_0 + 273,16)^4]\}, \qquad (4)$$

где $S_л$ - площадь теплоотдающей поверхности; V - объем обмотки; $K_p = S_л/V$, $t_л$ - характерная температура, $\varkappa(t_л) = \varkappa_0(t_л - t_0)^{\beta}$ [4,5].

На основе принятых допущений ставится следующая математическая задача теплопроводности для элемента продольного сечения ШЛИН:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z}\right) + w - w_л = 0,$$

$$t = t(x,z), \quad 0 \le x \le t_z/2, \quad 0 \le z \le h_ш, \qquad (5)$$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=0} = \lambda \frac{\partial t}{\partial x}\Big|_{x=t_z/2} = 0,$$

$$t|_{z=0} = t_{жм},$$

$$-\lambda \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{z=h_u} = q_x + q_в,$$

которая является нелинейной с разрывными коэффициентами.

2. Разностная схема

Задача (5) решается методом конечных разностей. Введем в расчетном элементе (рис.I) пространственную сетку $\omega_h = \{(x_i, z_k),\ i = 0, 1, 2, \ldots, N,\ k=0, 1, 2, \ldots, M,\ x_{i+1} = x_i + h_{xi+1},\ z_{k+1} = z_k + h_{zk+1},\ x_0 = 0, x_N = t_z/2,\ z_0 = 0,\ z_M = h_u\}$. Здесь h_{xi}, h_{zk} - переменные шаги сетки в направлениях x и z соответственно. Введем сеточную функцию $y_{i,k}$, определенную на ω_h, и запишем разностный аналог уравнения (5), полученный интегро-интерполяционным методом [6]:

$$\frac{a_{xi+1}}{h_{xi+1}\hbar_{xi}}(y_{i+1,k} - y_{i,k}) - \frac{a_{xi}}{h_{xi}\hbar_{xi}}(y_{i,k} - y_{i-1,k}) + \frac{a_{zk+1}}{h_{zk+1}\hbar_{zk}}(y_{i,k+1} - y_{i,k}) - \frac{a_{zk}}{h_{zk}\hbar_{zk}}(y_{i,k} - y_{i,k-1}) - q_{i,k}y_{i,k} + f_{i,k}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1,\ k = 1, 2, \ldots, M-1, \tag{6}$$

где a_{xi}, a_{zk} - разностные аналоги коэффициента теплопроводности в направлениях x и z, которые на границах разнородных подобластей аппроксимируются следующим образом:

$$a_{эxi} = \frac{2\hbar_{xi}}{\dfrac{h_{xi}}{\lambda_{xi-1/2}} + \dfrac{h_{xi+1}}{\lambda_{xi+1/2}}}, \quad a_{эzi} = \frac{2\hbar_{zk}}{\dfrac{h_{zk}}{\lambda_{zk-1/2}} + \dfrac{h_{zk+1}}{\lambda_{zk+1/2}}},$$

$$\hbar_{xi} = 0{,}5(h_{xi} + h_{xi+1}), \quad \hbar_{zk} = 0{,}5(h_{zk} + h_{zk+1}). \tag{7}$$

Функция источника тепла $f = w - w_{\ell}$ представляется сложной зависимостью от температуры (I, 4), и так как решаемая задача (5) нелинейна (от температуры зависят и коэффициенты уравнения, и граничные условия), то необходима линеаризация источникового члена. Для этого используют в [7] предложенный способ линеаризации, который дает касательную к кривой f от t в точке t^* (значение температуры в предыдущей итерации):

$$f = f^* + df/dt\,(t - t^*) = \varphi - q \cdot t, \qquad (8)$$

если $df/dt < 0$.

В интервале температур, с возрастающей функцией источника тепла f от температуры t применяется метод искусственного создания отрицательного коэффициента q, что приводит к замедленному достижению сходимости итерационного процесса:

$$\begin{aligned} f &= f^* + (1+\alpha^\circ)\,df/dt\,(t - t^*) - \alpha^\circ df/dt\,(t - t^*) = \\ &= f^* + (1+\alpha^\circ)\,df/dt\,\Delta t + \alpha^\circ df/dt \cdot t^* - \alpha^\circ df/dt \cdot t, \end{aligned} \qquad (9)$$

где $\Delta t = t^* - t^{**}$ и α° - параметр линеаризации, определяемый численным экспериментом.

Производная функции источника тепла f от температуры t для настоящей задачи выражается явно

$$\begin{aligned} df/dt &= k_3 j^2 \rho_0 \alpha - k_p [(1+\beta)\,\varkappa_0\,(t - t_0)^\beta + \\ &+ 4 \varepsilon \sigma (t + 273{,}16)^3]. \end{aligned} \qquad (10)$$

Таким образом, член $- f_{\ell k} - q_{\ell k}\, y_{\ell k}$ в разностном уравнении (6) представляет разностный аналог линеаризованной функции источника тепла $f(t)$, при том $q_{\ell k} \geq 0$.

Граничные условия задачи (5) аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{a_{\ell 1}}{h_{\ell 1}} (y_{1k} - y_{0k}) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, M,$$

$$- \frac{a_{xN}}{h_{xN}} (y_{N,k} - y_{N-1,k}) = 0,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, M, \qquad \text{(II)}$$

$$y_{i,0} = t_{жм}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

$$- \frac{a_{zM}}{h_{zM}} (y_{i,M} - y_{i,M-1}) = \nu_{i,M} \cdot y_{i,M} - \mu_{i,M},$$

где $\nu_{i,M}$, $\mu_{i,M}$ - параметры линеаризованного коэффициента суммарной теплоотдачи спинки [2,3].

Разностное уравнение (6) и разностные граничные условия (II) вместе определяют разностную схему на сетки ω_h и приводят к нелинейной системе алгебраических уравнений. Эта система решается итерационными методами в два этапа. Нелинейная система алгебраических уравнений решается методом нижней релаксации [7] (внешний итерационный процесс), а линеаризованная двухмерная задача - линейная система - решается итерационным методом переменных направлений [6] (внутренний итерационный процесс).

Критерием сходимости выбрано следующее соотношение

$$\max_{i,k} \frac{(y_{i,k}^{j+1} - y_{i,k}^{j})}{y_{i,k}^{j+1}} < \varepsilon^{в1} \qquad (I2)$$

где j - номер итерации, $\varepsilon^{в1}$ - заданные параметры.

3. Результаты численных расчетов

По предложенной методике проведены численные расчеты распределения температуры в элементе продольного сечения ШЛИН для следующих конструктивных и теплофизических параметров:

- высота индуктора $h_ц$ = 85 мм, высота паза $h_п$ = 43 мм; зубцовый шаг t_z = 20 мм, ширина зубца $b_з$ = 8 мм, толщина пазовой изоляции b_{un} = I,I мм, толщина теплоизоляции канала $h_{uк}$ = = 2,0 мм, коэффициент заполнения паза медью $k_з$ = 0,5, коэффициент отношения площади теплоотдающей поверхности лобовых частей обмотки к объему $k_р$ = 70 I/м;

- теплопроводность кремний-органической изоляции канала и паза $\lambda_2 = \lambda_5$ = 0,2 вт/мК, теплопроводность электротех-

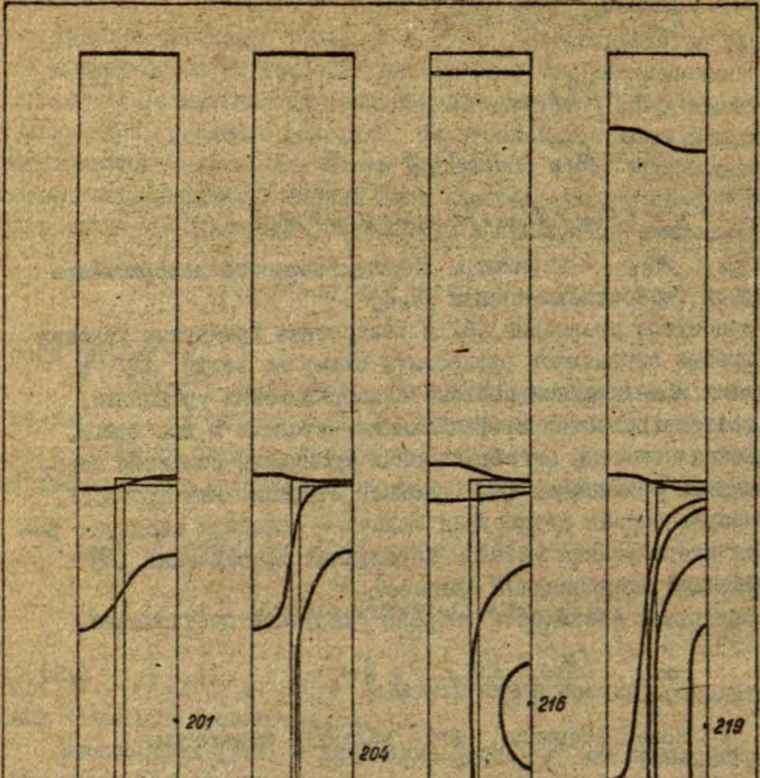


Рис.2. Результаты расчета температурного поля в элементе продольного сечения ПЛИН при температуре жидкого металла в канале $t_{жм}$ =200°С и плотности тока в обмотке j=4 а/мм² (Iа,Iб), j=5 а/мм² (2а,2б), шаг изотерм Δt =5°С. а,б - результаты расчета для "трехслойной" и "четырехслойной" математической модели соответственно.

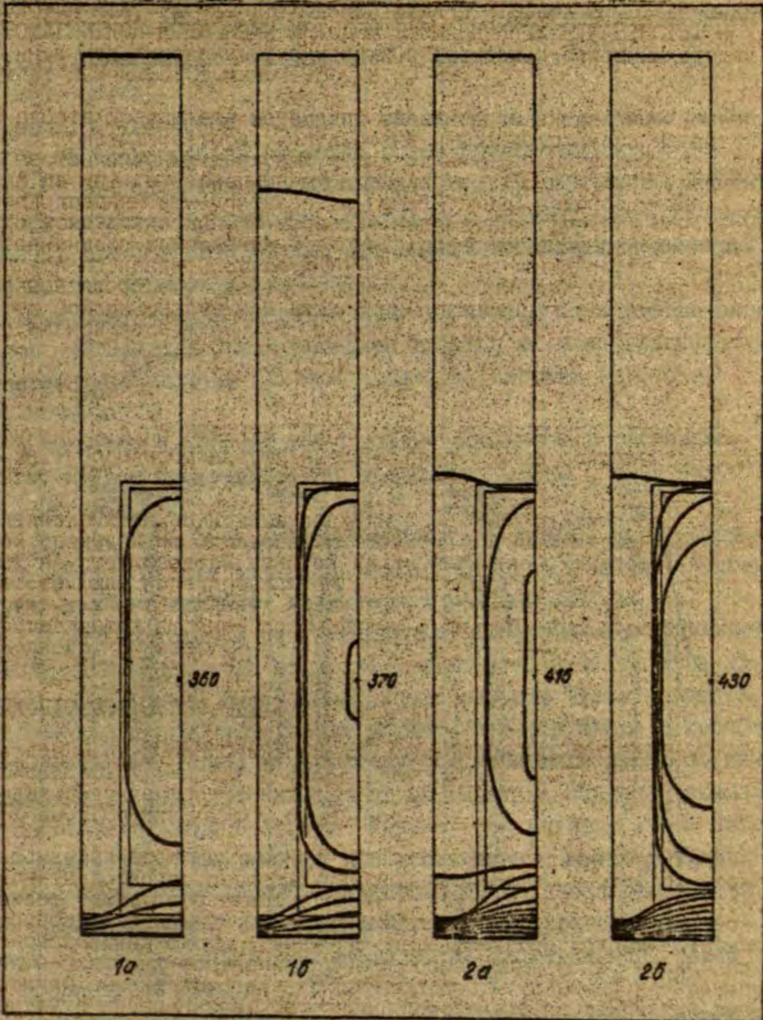


Рис.3. Результаты расчета температурного поля в элементе продольного сечения ПЛИН при температуре жидкого металла в канале $t_{жм}$=300°С и плотности тока в обмотке j=7 а/мм² (Iа,Iб), j=8 а/мм² (2а,2б), шаг изотерм Δt=10°С. а,б - результаты расчета для "трехслойной" и "четырехслойной" математической модели соответственно.

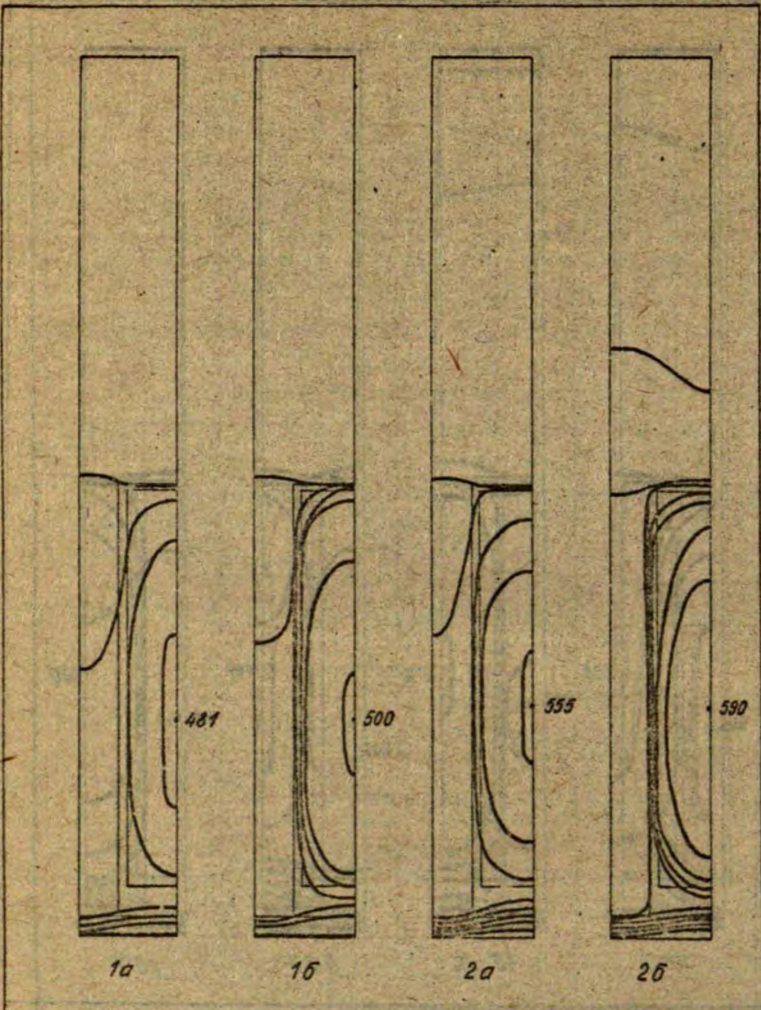


Рис. 4. Результаты расчета температурного поля в элементе продольного сечения ПЛИН при температуре жидкого металла в канале $t_{жм}$=380°С и плотности тока в обмотке j=9 а/мм^2 (Iа,Iб), j=I0 а/мм^2 (2а,2б), шаг изотерм Δt =20°С. а,б – результаты расчета для "трехслойной" и "четырехслойной" математической модели соответственно.

нической стали пакета спинки и зубца $\lambda_3 = \lambda_6 = 50$ вт/мК, эквивалентная теплопроводность обмотки представляется линейной функцией температуры /4/ $\lambda_4 = a + bt$, где $a = 0{,}8$ вт/мК, $b = 0{,}0005$ вт/мК^2.

Наряду с примерами численных расчетов распределения температуры по предложенной методике здесь представляются и результаты исследования математической модели внутренней задачи теплопроводности в элементе продольного сечения ШЛИН. Рассматриваются два варианта модели при равных остальных параметрах определения внутренней задачи:

- математическая модель с единой пазовой подобластью расчетного элемента и пренебрежением влияния на распределение температуры прослойки пазовой изоляции (назовем эту модель "трехслойной");
- математическая модель с явным выделением в расчетном элементе подобласти прослойки пазовой изоляции ("четырехслойная" модель).

На рис.2, 3, 4 приведены результаты расчета распределения температуры для вышеопределенных вариантов математической модели и шесть наиболее характерных режимов нагрева.

В установившихся режимах нагрева ШЛИН тепловое состояние установки определяется взаимодействием источника тепла в обмотке, теплоотдачи через поверхность лобовых частей обмотки, теплоотдачи через поверхность спинки магнитопровода и теплового потока от канала к индуктору или теплового стока от индуктора к каналу, что зависит от температуры жидкого металла и энергонапряженности режима. Режимы, для которых здесь представлены результаты расчета для исследования математических моделей внутренней задачи теплопроводности, являются в этом отношении средними, хотя для энергонапряженных режимов (рис. 3, 4) основным путем теплоотвода является сток тепла от индуктора к каналу.

Программа численного расчета для ЭВМ написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV. Расчеты приведенных вариантов выполнены для сетки $N = 20$, $M = 60$, необходимый объем оперативной памяти при этом 105 кБ, время счета одного режима при $\varepsilon^{M} = 10^{-2}$ на ЭВМ ЕС 1022 ~ 3 мин.

Анализ представленных результатов расчета позволяет сделать следующие выводы:

I. При настоящей постановке задачи моделирования установившихся тепловых режимов ЦЛИН в элементе продольного сечения температурное поле является двухмерным с явно выраженным перегревом обмотки по отношению к зубцу и спинке магнитопровода и наибольшие перепады температур относятся к слоям изоляции паза и канала.

2. Расчет распределения температуры в расчетном элементе по математической модели внутренней задачи теплопроводности с явно выделенной подобластью прослойки пазовой изоляции для представленных режимов дает увеличение максимальной температуры в пазовой зоне в среднем на 5%.

ЛИТЕРАТУРА

I. Баранов Г.А., Глухих В.А., Кириллов И.Р. Расчет и проектирование индукционных МГД-машин с жидкометаллическим рабочим телом.- М.: Атомиздат, 1978. - 248 с.

2. Микельсон Ю.Я., Шмит Я.Р. Теплофизическое исследование магнитогидродинамических устройств в энергонапряженных режимах.- В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1982, с.168-180.

3. Микельсон Ю.Я., Шмит Я.Р., Шнидере Л.Я. Определение параметров теплообмена в МГД-машинах в энергонапряженном состоянии. - В кн.: Тепломассообмен-УП. Тепломассообмен в энергетических устройствах. Минск, 1984, т.УШ, часть I, с.107-III.

4. Андреев А.М., Болотова Е.Д., Живанин В.А., Кириллов И.Р. Исследование температурных режимов индукционных электромагнитных насосов.- Магнитная гидродинамика, 1982, № 2, с.97-102.

5. Кутателадзе С.С., Боришанский В.М. Справочник по теплопередаче. - М.-Л., 1959.- 414 с.

6. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М.: Наука, 1983.- 616 с.

7. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.- М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 95-98

УДК 621.313.532.019.3

Ю.П.Агафонов

СКБ МГД ИФ АН ЛатвССР

МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ НАСОСОВ ПРИ СТАРЕНИИ АКТИВНЫХ МАТЕРИАЛОВ

При эксплуатации электромагнитных насосов (ЭМН) в них протекают необратимые деградационные изменения физических параметров активных материалов, приводящие к некоторым изменениям интегральных характеристик (ИХ). Последние дают привлекательную возможность прогноза и контроля предотказного (предельного) состояния ЭМН. Тем не менее, в литературе отсутствуют работы, посвященные вопросам динамики технического состояния при долговременной работе ЭМН.

Для моделирования изменения ИХ ЭМН применим математическую модель [I], основанную на введении поправочных коэффициентов в решение задачи электродинамики сплошных сред. Построим иерархическую систему плоского ЭМН [2] из двух уровней: ИХ и входные параметры (ВП). К первым отнесем: η - КПД, P_a - активные потери, $\cos\varphi$ - коэффициент мощности, M_a - масса активных элементов, p - давление на выходе, B_m - индукция в рабочем зазоре. Их величина определяется ВП: b_n - ширина паза магнитопровода, $b_з$ - ширина зубца, $q_м$ - сечение провода, $j_ф$ - плотность фазного тока, f - частота тока, a - полуширина канала, b - полувысота слоя жидкого металла, Q - расход, K_{tp} и K_{tq} - коэффициенты продольного эффекта для давления и реактивной мощности во вторичной цепи.

Обозначим ИХ - y_i, (i = I, 2,...6), ВП - x_j (j = I, 2, ..., I0). Соотношение между ИХ и ВП задается матрицей связи, элементы которой

$$K_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{x_j}{y_i} \quad (I)$$

называются функциями влияния. Относительные изменения ИХ тогда

$$\frac{\Delta y_i}{y_i} = \sum_{j=1}^{10} K_{ij} \frac{\Delta x_j}{x_j} . \quad (2)$$

В общем случае K_{ij} - это сложные функции ВП. Без ограничения общности для методики, их можно заменить на C_{ij} - коэффициенты влияния для конкретной конструкции и заданного режима работы. Численные значения C_{ij} возьмем из [2].

У существующих конструкций ЭМН наименее надежным элементом является обмотка, при этом выход изделия из строя чаще всего вызывается пробоем межвитковой изоляции. Изменение величины пробивного напряжения коррелировано с изменением различных физико-химических параметров. При выборе параметра диагностики руководствуются удобствами регистрации и величиной коэффициента корреляции. Параметром ухудшения свойств обмоточного провода может служить увеличение электрического сопротивления в процессе эксплуатации. Для проводов марки ПОЖ оно вызывается взаимной диффузией металлов сердечника и оболочки [3, с.95].

Изменение в процессе эксплуатации с $U_ф = const$ активного сопротивления обмоточного провода приводит, ввиду наличия реактивной составляющей полного сопротивления, к нелинейному изменению фазного тока $I_ф$. В табл. I приведены справочные данные прямоугольного ПОЖа до 20 мм^2 4 и результаты расчета $I_ф$ для $U_ф$= 68,3 В при двух различных тепловых режимах.

Параметр	Температура обмотки	
	500°C	600°C
Допускаемое время эксплуатации, ч	500	I50
Увеличение электрического сопротивления в конце срока службы,%	7	I5
Начальный $I_ф$, А	33,5	35,5
В конце эксплуатации $I_ф$ А	34,5	37

Табл. I. Изменение фазного тока ЭМН в процессе эксплуатации.

Изменение ВП $I_ф$ вызывает изменение ИХ, относительную величину которых проще всего найти по (2). Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Температура обмотки	Изменения ИХ, %			
	$\Delta\eta$	ΔP_a	Δp	ΔB_m
500°C	0,25	5,88	6,I2	2,94
600°C	0,35	8,28	8,6I	4,I4

Табл. 2. Изменение ИХ ЭМН в процессе эксплуатации.

Данные о старении ПОЖа [4] носят справочный характер, поэтому необходимо уточнение численных результатов табл.2. по эксплуатационным испытаниям. При этом следует учесть разброс ИХ ЭМН, вызванный отклонениями ВП от номинальных значений (свойства активных материалов, влияние технологического процесса). При контроле старения ЭМН по изменениям ИХ наиболее информативны интегральные параметры P и P_a.

Применение системного подхода [2] позволяет различить последствия изменения ИХ, вызванные возрастанием активного сопротивления во времени от иных причин. Например, изменение немагнитного зазора (при вибрации) приводит к существенным изменениям другого набора ИХ: η, P и B_m. Строгое доказательство требует анализа образвекторов в многомерных пространствах ИХ и ЕП.

ЛИТЕРАТУРА

I. Лиелпетер Я.Я. Жидкометаллические индукционные МГД-машины. - Рига: Зинатне, 1969.- 246 с.

2. Агафонов Ю.П. Погрешность параметрической надежности МГД-насоса. - Магнитная гидродинамика, 1984, № 4, с. 130-132.

3. Белинская Г.В., Пешков И.Б., Харитонов Н.П. Жаростойкая изоляция обмоточных проводов. Изд. 2-е, переработ. и дополненное. - Л.: Наука, 1978. - 160 с.

4. Провода обмоточные жаростойкие. ТУ 16-505-399-77.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.99-110

УДК 539.4:539.2.678

А.М.Красников

Институт механики полимеров
АН ЛатвССР

КИНЕТИКА НАКОПЛЕНИЯ ДЕФЕКТОВ В НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Применение всё новых материалов в конструкциях машин и механизмов (включая электрические) приводит к необходимости изучения явлений прочности и разрушения. Экспериментальное изучение макроразрушения твёрдых тел фиксирует существование стадии дисперсного накопления субмикротрещин (СМТ) в объёме нагруженного материала, предшествующей появлению и развитию магистральной макротрещины [1, 2]. В случае одноосного растяжения их форма хорошо аппроксимируется сплюснутыми сфероидами, малая высота которых соосна внешней нагрузке; поперечный размер минимальных СМТ совпадает с размером структурного элемента в материале [2, 3] (микрофибриллы в аморфнокристаллическом полимере, зерна в поликристалле и пр.). Экспериментальные затруднения, не позволяющие провести детальное исследование фазы дисперсного разрушения, вызывают естественную потребность в математическом её моделировании.

1. В работе [4] построена статистическая кинетическая модель накопления дефектов в материале, вплоть до его макроразрушения, основывающаяся на вероятностном аппарате марковских процессов. Моделируемый материал представляется ансамблем элементов, разрушающихся в поле приложенной нагрузки. Объединения разрушенных элементов в плоскостях, ей перпендикулярных, образуют СМТ. Введена $W(\Sigma,t)$ - функция веро-

ятности разрушения элемента в зависимости от величины параметра нагрузки Σ на нём. Элементы, пограничные СМТ, испытывают перенапряжения. Моделируется появление, рост, взаимовлияние и слияние СМТ, причём под слиянием понимается разрушение элемента, являющегося пограничным одновременно для двух СМТ; разрушение элемента, пограничного одной СМТ, но испытывающего перенапряжение также от другой СМТ, для которой он не является пограничным, называется ростом при взаимовлиянии. Изолированный рост учитывает разрушение только от перенапряжений СМТ, для которой рассматриваемый элемент является пограничным. Концентрация дефектов площадью не менее $S_j = jS_0$ (где S_0 - поперечное сечение элемента) ко времени t — $D_j(t)$ имеет следующий вид:

$$D_j(t) = R_j(t) + \int_0^t \sum_{k_1} \sum_{\ell_1} \frac{dQ_{k_1}(t^*)}{dt^*} F_{k_1\ell_1}(t,t^*)dt^*;$$

$$R_j(t) = \int_0^t \frac{dQ_j(t^*)}{dt} \bar{F}_{j\,i=1,\ldots\infty}(t,t^*)dt^*;$$

$$Q_j(t) = \int_0^t \frac{dR_{j-1}(t^*)}{dt} P^j_{j-1}(t,t^*)dt^* + \int_0^t \sum_{k_2} \sum_{\ell_2} \frac{dQ_{k_2}(t^*)}{dt^*} F_{k_2\ell_2}(t,t^*)dt^*; \quad (1)$$

где $R_j(t)$, $Q_j(t)$ - промежуточные величины, учитывающие: убыль количества дефектов в процессе слияния, концентрацию дефектов размера j, образующихся слиянием, и не менее j, получающихся в результате подрастания.

$$P^j_{j-1}(t,t^*) = P^j_{j-1}(W);\ F_{k\ell}(t,t^*) = F_{k\ell}(W);\ \bar{F}_{k\ell}(t,t^*) = \bar{F}_{k\ell}(W) -$$

вероятности роста, слияния и неслияния за время $t^* \div t$.
$k_2\ell_2$, $k_1\ell_1$ - пары дефектов, дающих при своём слиянии дефект размера j ; более j .

В этом случае концентрация дефектов размера j записывается как

$$C_j(t) = D_j(t) - D_{j+1}(t). \quad (2)$$

2. Большинство реальных материалов являются микронеоднородными[2]. Области начальных перенапряжений, наличие

которых обусловлено пластическими и усадочными деформациями, включениями, микропримесями и прочими микроконцентраторами, вносят разброс значения Σ на элементах в материале (при приложении внешней растягивающей нагрузки). В рамках данного сообщения ограничимся именно таким пониманием неоднородности материала. Выберем, как и ранее [4], параметр нагрузки в виде растягивающего напряжения, усреднённого по сечению элемента. Тогда согласно кинетической концепции прочности [5] его долговечность равна:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U_0 - \gamma\Sigma}{kT}\right) = a^{-1} \exp(-b\Sigma); \tag{3}$$

и функция вероятности разрушения микрообъёма:

$$W(\Sigma,t) = 1 - \exp(-t/\tau) = 1 - \exp[-at\exp(b\Sigma)] \tag{4}$$

вид которой аналогичен [6]. T - абсолютная температура; k - константа Больцмана; $\tau_0, U_0, \gamma, a, b$ - параметры, зависящие от материала и условий проведения эксперимента. Неоднородность структуры моделируемого материала в этом случае может быть учтена заданием распределения $\varphi_0(b)$. Функция вероятности разрушения элемента запишется в виде:

$$W(\Sigma,t) = \int_0^{\infty} \left\{1 - \exp[-at\exp(b\Sigma)]\right\} \varphi_0(b)\,db. \tag{5}$$

Будем считать, что основная масса элементов лишена начальных перенапряжений, за исключением некоторой небольшой части, на которых нагрузка выше нормальной. Для простоты распределение выберем в виде ступеньки с дельта функцией вначале (рис. I):

$$\varphi_0(b) = \begin{cases} 0, & b \in [0, b_m) \\ (1-hd)\,\delta(b-b_m), & b = b_m \\ h, & b \in (b_m, b_m+d] \\ 0, & b \in (b_m+d, +\infty) \end{cases}; \tag{6}$$

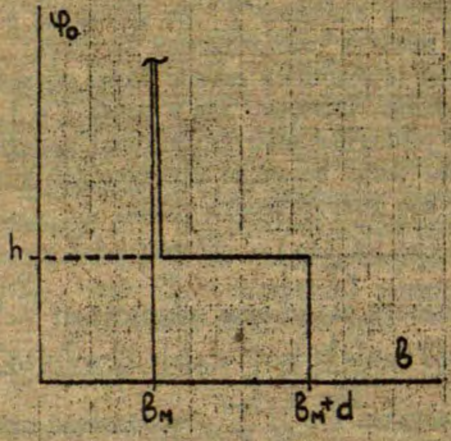


Рис. I. Функция распределения параметра $в$, характеризующая неоднородность напряжённого состояния в материале.

где h - высота ступеньки; d - её длина; δ - дельта функция. В данном случае параметр $в$, по сути дела, выполняет роль коэффициента концентрации напряжений на неоднородностях не трещинной природы. Теперь для сравнения с экспериментом воспользуемся данными для ориентированной капроновой плёнки ПК-4, приведёнными в [7, 8]. Размер структурного элемента 0,025х0,025х0,013 мк; линейный размер минимальной СМТ L_1 =0,025 мк; отношение высоты к поперечному диаметру H/L_1 =0,36; объём образца V =0,0128 см^3. Выражение для функции вероятности разрушения элемента (6) в этом случае переписывается в виде:

$$W(\Sigma,t)=1-\frac{h}{2}\{Ei(-tv_1)-Ei(-tv_2)\}-$$
$$-(1-hd)\exp[-ta\exp(в_м\Sigma)], \quad (7)$$

где введены обозначения: $v_1 = a\exp[(b_M+d)\Sigma]$; $v_2 = a\exp[b_M\Sigma]$; $-Ei(x)$ – интегральная показательная функция. Из опытов на длительную прочность для капроновой плёнки получаем $a = 1{,}31 \cdot 10^{-19}$ с$^{-1}$. Будем считать, что данный параметр сохраняет своё значение и при описании разрушения микрообъёма. В [7] приводятся результаты эксперимента по изучению накопления СМТ в ориентированном капроне.* Фиксировались СМТ двух различных линейных размеров 0,025 мк и 0,075-0,01 мк при комнатной температуре T =293 К и постоянном внешнем растягивающем напряжении σ_0 =181 МПа. Долговечность образца при этом равнялась 1400 с. Потребуем теперь совпадения теоретически рассчитанной долговечности образца объёмом 0,0128 см$^{-3}$, при σ_0 =181 МПа, с экспериментально измеренной. Отсюда получаем первое условие, определяющее один из оставшихся параметров; два других определяются из корреляции расчётного и экспериментального разброса по долговечностям и совпадения теоретически рассчитанной концентрации дефектов минимального размера $C_1(t)$ с экспериментально измеренной концентрацией СМТ линейного размера L_1=0,025 мк (рис. 2), совпадающего с линейным размером поперечного сечения фибриллы. Расчётные величины: b_M =0,094 I/МПа; d =0,093 I/МПа; h =0,5 МПа. Численная реализация рассмотренного алгоритма даёт нам полную картину накопления дефектов различных размеров во времени. На рис. 3 приводятся концентрации СМТ величиной 0,075-0,01 мк, расчётные и полученные экспериментально. Как видно, в пределах точности эксперимента получено качественное и количественное совпадение результатов. Число перенапряжённых элементов не превышает 5%. В табл. I приведены соотношения предразрывного вклада механизмов разрушения для различных дефектов в зависимости от напряжения и неоднородности структуры материала. Оказывается, что основным механизмом разрушения хрупких микронеоднородных материалов, не обладающих начальными трещинами, является подрастание СМТ в поле действия

---

* Измерения проводились в Физико-техническом институте им. А.Ф.Иоффе АН СССР, г. Ленинград, Д.И.Фроловым

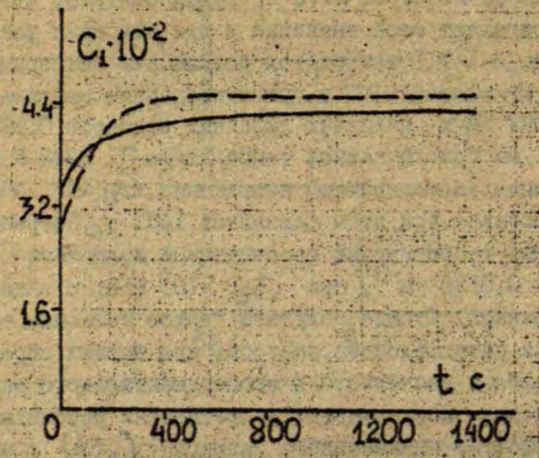


Рис. 2. Накопление дефектов размера 0,025 мк в ориентированной капроновой плёнке ПК-4. ______ - эксперимент [7]; _ _ _ - расчёт.

своих развивающихся соседей. Данное утверждение верно для этапа диффузного накопления дефектов. Образование разрушающего дефекта ведёт за собой переход к этапу лавинообразного формирования магистральной трещины, для которого оценить вклад механизмов разрушения в общий процесс можно посредством следующих рассуждений. Будем считать, что, начиная с разрушающего дефекта, скорость разрушения элемента, находящегося на границе микротрещины, не растёт и остаётся постоянной $V_{j\rho}$. В рамках предложенной модели это вызовет рост величины поперечного сечения разрушающихся элементов, находящихся на границе, что приведёт к большей взаимочувствительности дефектов. Это же в свою очередь приводит к увеличению вклада слияния в общий процесс разрушения [9].

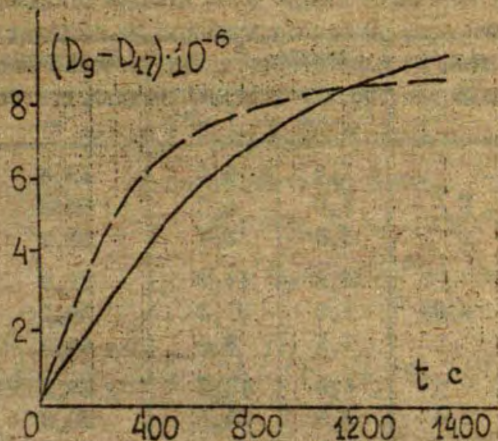


Рис. 3. Накопление дефектов размера 0,075-0,1 мк в ориентированной капроновой плёнке ПК-4. _____ - эксперимент [7]; _ _ _ - расчёт.

Именно существенность слияния в таком смысле его понимания может быть отмечена на этапе формирования магистральной трещины. Результаты [10] подтверждают это. С ростом неоднородности материала уменьшается величина разрушающего дефекта, так как при $d \times h$ =2% размер разрушающего дефекта j_p = 33; при $d \times h$ =4,65% - j_p =28. Разрушающим назывался дефект, с размера которого $D(t) = \lim_{j \to \infty} D_j(t)$, т.е. происходит переход к лавинообразному развитию макротрещины. Задание неоднородности материала (3) носит двоякий характер. Увеличение параметра h при условии неизменности прочих величин можно трактовать как повышение в материале числа концентраторов нетрещинной природы. Увеличение же постоянной d при том же условии трактуется как наличие микротрещин; т.е., существование начальной концентрации микротрещин может быть

Таблица I

Вклад механизмов разрушения в предразрывную концентрацию дефектов размера j.

σ_0 МПа	$d \times h$ %	Слияние, %		Изолированный рост, %	
		j =4	j =20	j =4	j =20
I00		I,4	6,6	43,4	36,3
I8I	2	I,0	4,0	50,0	4I,3
250		0,8	3,I	6I,2	64,2
I00		3,8	I4,2	3I,9	24,I
I8I	4,65	I,9	II,3	38,I	29,0
250		I,I	8,9	45,2	35,2
I00		4,8	I8,2	25,I	I8,I
I8I	6,5	2,9	I5,I	28,0	22,I
250		2,I	II,6	30,6	25,6

учтено в рамках данной модели, заданием начальных перенапряжений на элементах путём значений параметра перегрузки b, при которых среднее время жизни рассматриваемого элемента $\tau = a^{-1}exp(-b\Sigma)$ не меньше времени жизни пограничного элемента СМТ единичного размера. Предразрывные концентрации дефектов, превышающие 4-6%, в нашем случае, при неизменной высоте h =0,5 МПа, будут соответствовать этому варианту. При увеличении высоты ступеньки h это процентное отношение будет возрастать.

3. При расчёте перенапряжений на элементах, окружающих СМТ, мы аппроксимируем её полостью сфероидальной формы, предполагая, что перенапряжение Σ_j равно усреднённому перенапряжению по реализации дефектов такого размера. Полный учёт влияния формы дефектов возможен заданием функции распределения перенапряжений для элемента, находящегося на границе дефекта. Реализации данного пути встречает существенные трудности. Поэтому ограничимся качественным анализом явления. Предположим, что дисперсия функции распределения

перенапряжений (6) меняется для пограничного элемента, в зависимости от размера и вероятности образования СМТ данного размера слиянием. Результатом слияния является дефект с разрушенным, по крайней мере, одним элементом в перемычке; перенапряжения на соседних элементах перемычки превышают перенапряжения на границе сфероидального дефекта той же площади. Это и учитывает вышеупомянутое утверждение.

$$\varphi_j(b)=\begin{cases}0, & b\in[0,b_м)\\ (1-hd)\delta(b-b_м), & b=b_м\\ h, & b\in(b_м, b_м+d+d^*Q_j^c(t)]\\ 0, & b\in(b_м+d+d^*Q_j^c(t), +\infty)\end{cases};$$

$$Q_j^c(t)=\int_0^t\sum_k\sum_e\frac{dQ_k(t^*)}{dt^*}F_{ke}(t,t^*)dt^*, \tag{8}$$

где $Q_j^c(t)$ - концентрация дефектов размера j, образующихся слиянием; $d^*=d^{**}j$ - увеличение дисперсии функции распределения в зависимости от размера дефекта. На рис. 4 приведены кривые концентраций разрушающего дефекта для ориентированного капрона объёмом образца V =0,0I см^3 в зависимости от величины добавочной перегрузки.

4. Рассмотрим теперь накопление повреждений при линейном изменении нагрузки во времени $\Sigma=\dot{\Sigma}t$. Функция вероятности (5) в этом случае запишется в виде:

$$W(\Sigma,t)=\int_0^\infty\left\{1-\exp\left[-\frac{a}{b\dot{\Sigma}}\left(1-\exp(b\dot{\Sigma}t)\right)\right]\right\}\varphi_0\,db; \tag{9}$$

вытекающем из марковского рассмотрения разрушения элемента со скоростью разрушения, явно зависящей от времени. На рис. 5 приводятся экспериментальные [7] и расчётные результаты для образцов из ориентированного капрона при линейном нагружении $\Sigma_0=\dot{\Sigma}_0t=\dot{\varepsilon}_0t$. Параметры распределения берутся из опытов на статическое растяжение (п. 2). Как видно, теоретическая кривая хорошо совпадает с экспериментом. С увеличением скорости нагружения предразрывная концентрация уменьше-

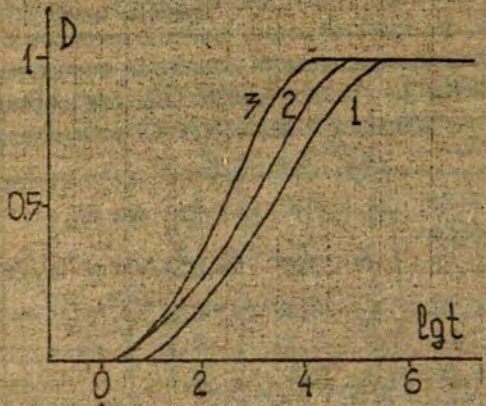


Рис. 4. Влияние формы дефектов на вероятность образования разрушающего дефекта в ориентированной капроновой плёнке. I - без учёта формы; 2 - $d^{*}=0{,}05$ I/МПа; 3 - $d^{*}=0{,}05\ d^{**}$, $d^{**}=d\cdot j$ I/МПа.

ется. Механизм слияния даёт малый вклад в процесс накопления дефектов и играет тем меньшую роль, чем больше скорость нагружения.

5. Заключение. I. Модель, основывающаяся на статических кинетических уравнениях, позволяет успешно описывать механизмы процесса разрушения при статическом и динамическом нагружении материала. 2. Дисперсное разрушение хрупких неоднородных материалов происходит подрастанием дефектов во взаимодействии с развивающимися соседями. Под хрупкостью материала понимается отсутствие пластических и реономных деформаций в нагруженном материале. Слияние начинает играть роль при достижении неоднородностью материала такого уровня, когда приложение нагрузки вызывает структурные перенапряже-

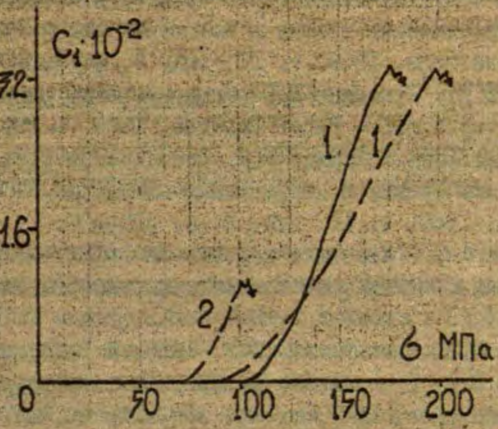


Рис. 5. Накопление дефектов размером 0,025 мк в режиме линейного нагружения $\sigma_0 = \dot{\sigma}_0 t$; I - $\dot{\sigma}_0$ =0,34 МПа/с; 2 - $\dot{\sigma}_0$ =I,2 МПа/с. ____ - эксперимент [7], - - - - расчёт.

ния, превышающие перенапряжения от наименьшей СМТ, что может характеризоваться как начальная концентрация микродефектов. Большое количество сливающихся микротрещин, получающееся в [10], относится к этому случаю, а также к описанию фазы лавинообразного формирования магистральной трещины, 3. При динамическом нагружении вклад слияния в образование разрушающего дефекта также незначителен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журков С.Н., Куксенко В.С., Слуцкер А.И. Образование субмикроскопических трещин в полимерах под нагрузкой. - Физика твёрдого тела, 1969, т. II, вып. 2, с. 296-307.

2. Тамуж В.П., Куксенко В.С. Микромеханика разрушения полимерных материалов. - Рига: Зинатне, 1978. - 294 с.

3. Куксенко В.С., Слуцкер А.И. Особенности роста субмикроскопических трещин в нагруженных полимерах. - Физика твёрдого тела, 1969, т. II, вып. 2, с. 405-409.

4. Красников А.М. Кинетика накопления дефектов при одноосном растяжении. - Механика композитных материалов, 1983, № 6, с. 1016.

5. Журков С.Н. Вестник АН СССР, 1968, № 3, с. 46.

6. Петров В.А. О механизме и кинетике макроразрушения. - Физика твёрдого тела, 1979, т. 21, вып. 12, с. 3681.

7. Юшанов С.П. Статистические методы исследования процессов разрушения. - Дис. ..., канд. физ.-мат. наук. Рига, 1980. - 174 с.

8. Гезалов М.А., Куксенко В.С., Слуцкер А.И. Фибриллярная структура и субмикроскопические трещины в ориентированных кристаллических полимерах. - Физика твёрдого тела, 1970, т. 12, вып. 1, с. 100-108.

9. Красников А.М. Об учёте слияния микротрещин в статической кинетической модели разрушения при одноосном растяжении материала. - Механика композитных материалов, 1983, № 1, с. 52-60.

10. Овчинский А.С., Гусев Ю.С. Моделирование на ЭВМ процессов образования, роста и слияния микродефектов в структурно неоднородных материалах. - Механика композитных материалов, 1982, № 4, с. 585-592.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. III-I2I

УДК 629.7

Э.В.Ярве
Институт физики АН ЛатвССР

МЕТОДИКА РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕДАХ С ВЯЗКОУПРУГИМИ СЛОЯМИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ

Большое практическое значение имеет расчет слоистых конструкций с вязкоупругими слоями. Методика расчета напряжений в упругих многослойных балках описана в [I]. В данной работе указанная методика развивается на случай произвольного числа линейно-вязкоупругих слоев.

Рассматривается n -слойная балка с произвольными ортотропными вязкоупругими слоями $[z_{0,k}; z_{0,k+1}]$, где $z_{0,k}$ - координата границы раздела К$^{\text{ого}}$ и К + I$^{\text{ого}}$ слоёв, К = 0, ..., n - I, $z_{0,0}$ =0, $z_{0,k}$ =Н, Н - общая толщина балки.

Для расчета распределения напряжений и перемещений по толщине балки при поперечном изгибе [I] имеем следующую систему пяти уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho(z)\frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho(z)\frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2}\\
&\sigma_{xx} = \hat{B}_{11}(z)\frac{\partial U_x}{\partial x} + \hat{B}_{13}(z)\frac{\partial U_z}{\partial z}\\
&\sigma_{zz} = \hat{B}_{31}(z)\frac{\partial U_x}{\partial x} + \hat{B}_{33}(z)\frac{\partial U_z}{\partial z}\\
&\sigma_{xz} = \hat{B}_{55}(z)\left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}\right),
\end{aligned}
\qquad (I)
$$

ж) Работа выполнена под руководством канд.физ.-мат.наук А.Е.Богдановича где $\rho(z) = \rho^{(k)}$

$$\hat{B}_{ij}(z)\cdot f = B^{o(k)}_{ij} f - \frac{B^{o(k)}_{ij} - B^{\infty(k)}_{ij}}{\eta^{(k)}_{ij}} \int_0^t R^{(k)}_{ij}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

при $z \in [z_{0,k}; z_{0,k+1}]$.

$R^{(k)}_{ij}(t)$ – ядра релаксации для вязкоупругого материала $k^{го}$ слоя.

Для решения системы (I) используем полудискретный метод Галеркина [I]. Используя линейную интерполяцию перемещений

$$U_x(x,z,t) = \sum_{i=0}^{N} u_i(x,t)\cdot \varphi_i(z)$$

$$U_z(x,z,t) = \sum_{i=0}^{N} w_i(x,t)\cdot \varphi_i(z),$$

получим следующую систему уравнений относительно неизвестных функций $u_i(x,t)$, $w_i(x,t)$, $i = 0,\dots,N$

$$\sum_{i=0}^{N}\Big\{-\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \rho^{(i)}\varphi_i\varphi_m\, dz + \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \varphi_i\varphi_m\, dz\cdot \hat{B}^{(i)}_{11}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} +$$

$$+\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dz}\varphi_m\, dz\cdot \hat{B}^{(i)}_{13}\frac{\partial w_i}{\partial x} - \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \frac{d\varphi_m}{dz}\varphi_i\, dz\cdot \hat{B}^{(i)}_{55}\frac{\partial w_i}{\partial x} -$$

$$-\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \frac{d\varphi_m}{dz}\cdot\frac{d\varphi_i}{dz}\, dz\cdot \hat{B}^{(i)}_{55} u_i\Big\} = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{N}\Big\{-\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \rho^{(i)}\varphi_i\varphi_m\, dz + \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \varphi_i\varphi_m\, dz\cdot \hat{B}^{(i)}_{55}\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \qquad (2)$$

$$+\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dz}\varphi_m\, dz\cdot \hat{B}^{(i)}_{55}\frac{\partial u_i}{\partial x} - \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \varphi_i\frac{d\varphi_m}{dz}\cdot \hat{B}^{(i)}_{13}\frac{\partial u_i}{\partial x}\, dz -$$

$$-\int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dz}\cdot\frac{d\varphi_m}{dz}\, dz\cdot \hat{B}^{(i)}_{33} w_i\Big\} = \delta^m_N q(x,t);\ m = 0,\dots,N,$$

где $q(x,t)=\sigma_{xz}(H,x,t)$ – внешняя нагрузка, N – количество подслоев, на которые разбита балка для достижения заданной точности расчета напряжений.

Для решения системы (2) запишем ее в матричном виде:

$$\tilde{V}\frac{\partial^2\vec{W}}{\partial t^2}+\left\{\tilde{S}_0\frac{\partial^2\vec{W}}{\partial x^2}+\tilde{\mathcal{D}}_0\frac{\partial\vec{W}}{\partial x}+\tilde{P}_0\vec{W}\right\}-\vec{Q}(x,t)-$$
$$-\sum_{r=1}^{n}\tilde{S}_{11}^{(r)}\int_0^t R_{11}^{(r)}(t-\tau)\frac{\partial^2\vec{W}(\tau)}{\partial x^2}d\tau-\sum_{r=1}^{n}\tilde{S}_{55}^{(r)}\int_0^t R_{55}^{(r)}(t-\tau)\frac{\partial^2\vec{W}(\tau)}{\partial x^2}d\tau$$
$$-\sum_{r=1}^{n}\tilde{\mathcal{D}}_{13}^{(r)}\int_0^t R_{13}^{(r)}(t-\tau)\frac{\partial\vec{W}(\tau)}{\partial x}d\tau-\sum_{r=1}^{n}\tilde{\mathcal{D}}_{55}^{(r)}\int_0^t R_{55}^{(r)}(t-\tau)\frac{\partial\vec{W}(\tau)}{\partial x}d\tau- \qquad (3)$$
$$-\sum_{r=1}^{n}\tilde{P}_{33}^{(r)}\int_0^t R_{33}^{(r)}(t-\tau)\vec{W}(\tau)d\tau-\sum_{r=1}^{n}\tilde{P}_{55}^{(r)}\int_0^t R_{55}^{(r)}(t-\tau)\vec{W}(\tau)d\tau\,.$$

Элементы квадратных матриц $\tilde{S}_0$, $\tilde{\mathcal{D}}_0$, $\tilde{P}_0$, $\tilde{S}_{ij}^{(r)}$, $\tilde{\mathcal{D}}_{ij}^{(r)}$, $\tilde{P}_{ij}^{(r)}$ размера $2(N+1)\times2(N+1)$ можно определить, сравнивая (3) с (2). Матрицы $\tilde{S}_0$, $\tilde{\mathcal{D}}_0$, $\tilde{P}_0$, содержат только мгновенные жесткости слоев, элементы остальных матриц зависят от величин $[B_{ij}^{0(r)}-B_{ij}^{\infty(r)}]/\eta_{ij}^{(r)}$.

При граничных условиях свободного опирания, приведенных в [1], решение (3) можно искать в виде

$$\vec{W}=\sum_{m=1}^{\infty}\begin{pmatrix} T_m^{(1)}\cos\frac{\pi m x}{L} \\ \cdots\cdots\cdots \\ T_m^{(N+1)}\cos\frac{\pi m x}{L} \\ T_m^{(N+2)}\sin\frac{\pi m x}{L} \\ \cdots\cdots\cdots \\ T_m^{(2N+2)}\sin\frac{\pi m x}{L}\end{pmatrix} \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем следующие системы интегродифференциальных уравнений для определения векторов $\vec{T}_m(t)$ ($m=1,\ldots,\infty$) с компонентами $T_m^{(i)}$, $i=1,\ldots,2N+2$:

$$\tilde{V}\frac{d^2\vec{T}_m}{dt^2}+\left[-\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2\tilde{S}_0+\left(\frac{\pi m}{L}\right)\tilde{\mathcal{D}}_0^{-T}+\tilde{P}_0\right]\vec{T}_m-$$

$$-\sum_{\tau=1}^{n}-\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2\tilde{S}_{11}^{(\tau)}\int_0^t R_{11}^{(\tau)}(t-\tau)\,\vec{T}_m(\tau)\,d\tau-$$

$$-\sum_{\tau=1}^{n}\left[-\tilde{S}_{55}^{(\tau)}\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2+\tilde{\mathcal{D}}_{55}^{(\tau)^{-T}}\left(\frac{\pi m}{L}\right)+\tilde{P}_{55}^{(\tau)}\right]\int_0^t R_{55}^{(\tau)}(t-\tau)\,\vec{T}_m(\tau)\,d\tau-$$

$$-\sum_{\tau=1}^{n}\left(\frac{\pi m}{L}\right)\tilde{\mathcal{D}}_{13}^{(\tau)^{-T}}\int_0^t R_{13}^{(\tau)}(t-\tau)\,\vec{T}_m(\tau)\,d\tau- \tag{5}$$

$$-\sum_{\tau=1}^{n}\tilde{P}_{33}^{(\tau)}\int_0^t R_{33}^{(\tau)}(t-\tau)\,\vec{T}_m(\tau)\,d\tau=p_m(t)\cdot\vec{F}_m,\quad m=1,\dots,\infty,$$

где $\quad p_m(t)=\frac{2}{L}\int_0^L q(x,t)\sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right)dx,$

$$F_m^T=(0\dots 0\;1),\quad m=1,\dots,\infty$$

L - длина балки.

Перепишем систему (5) в более компактном виде

$$\tilde{V}\frac{d^2\vec{T}_m}{dt^2}+\tilde{M}_0\vec{T}_m-\sum_{\tau=1}^{n}\sum_{(ij)}\tilde{M}_{ij}^{(\tau)}\int_0^t R_{ij}^{(\tau)}(t-\tau)\,\vec{T}_m(\tau)\,d\tau=p_m(t)\vec{F}_m, \tag{6}$$

$m=1,\dots,\infty$

Матрицы $\tilde{M}_0$, $\tilde{M}_{ij}^{(\tau)}$, $\tau=1,\dots,n$; $(ij)=(11),(13),(33),(55)$ выражаются через $\tilde{S}_0$, $\tilde{\mathcal{D}}_0$, $\tilde{P}_0$ и $\tilde{S}_{ij}^{(\tau)}$, $\tilde{\mathcal{D}}_{ij}^{(\tau)}$, $\tilde{P}_{ij}^{(\tau)}$ согласно (5).

Использование для решения (6) метода Рунге-Кутта с численным вычислением интегралов в вязкоупругих слагаемых приводит к необходимости задавать очень мелкий шаг интегрирования, кроме того, происходит быстрое накопление погрешности, не позволяющее получить решение на промежутках времени больших, чем несколько пробегов упругой волны по толщине. Это связано с тем, что отношение наименьшего собственного числа матрицы $\tilde{V}^{-1}\tilde{M}_0$ к наибольшему имеет порядок отношения времени пробега упругой волны по толщине балки к периоду изгибных колебаний (для углепластиковой балки при H/L =0,I $\lambda_{min}/\lambda_{max}$ =10^{-5}). Таким образом, использование конечно-разностной аппроксимации левой части системы (6) неперспективно для отыскания $\vec{T}_m(t)$ на конечных интервалах времени.

Для решения этой системы в упругом случае $\tilde{M}_{ij}^{(2)}=0$ эффективным оказался метод Эйлера. Предлагаемая ниже методика решения (6) при $M_{ij}^{(2)}\neq 0$ основана на сведении исходной системы к последовательности систем с $M_{ij}^{(2)}$ =0. Прежде чем излагать методику решения (6) с $M_{ij}^{(2)}\neq 0$, выпишем решение этой системы в упругом случае. Из физических соображений следует, что собственные значения $\tilde{V}^{-1}\tilde{M}_0$ различны и положительны. Обозначим их через λ_i , а соответствующие собственные вектора через $\vec{a}_i$, i =I,..., $2N+2$. Тогда при однородных начальных условиях решение системы (6) ($M_{ij}^{(2)}$ =0) имеет вид:

$$\vec{T}_m(t)=\sum_{i=1}^{4N+2}\frac{\varkappa_i\vec{a}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\int_0^t \sin\sqrt{\lambda_i}(t-\tau)p_m(\tau)d\tau , \qquad (7)$$

причем $\sum\limits_{i=1}^{2N+2}\varkappa_i\vec{a}_i=\tilde{V}^{-1}\vec{F}_m$.

Процедуру отыскания λ_i и $\vec{a}_i$ можно запрограммировать на ЭВМ, поскольку при линейной интерполяции перемещений матрицы $\tilde{V}$ и $\tilde{M}_0$ -трех и пятидиагональные соответственно. Так как интегралы в (7) для многих практически важных программ нагружения берутся аналитически, этот метод позволяет рассчитать $\vec{T}_m(t)$ на больших промежутках времени без накопления погрешности.

Перейдем к $\tilde{M}_{ij}^{(2)}\neq 0$. В основе сведения исходной системы к последовательности систем с $\tilde{M}_{ij}^{(2)}$ = 0 лежит следующее общее свойство вязкоупругих операторов [2] :

$$\sigma_{ij}(t/\gamma) = B^{\circ}_{ik} \cdot \varepsilon_{kj}(t/\gamma), \quad \gamma \to \infty, \tag{8}$$

т.е. при $t/\eta_{ij} \ll 1$ вклад релаксационного члена мал и между напряжениями и деформациями выполняется упругая зависимость с мгновенным модулем.

Рассмотрим последовательность интервалов $[0, t_\ell]$, $t_0 = 0$, $t_{\ell+1} - t_\ell = \Delta_\ell > 0$, $\ell = 1, \ldots$. Обозначим через $\vec{T}^{\ell}_m(t)$ решение (6) на конечном интервале $[0, t_\ell]$. Предположим, что нам известно $\vec{T}^{\ell}_m(t)$ и определим $\vec{T}^{\ell+1}_m(t)$. Для этого введем функцию $\vec{U}^{\ell}_m(t)$, $t \in [0, \Delta_\ell]$ такую, что

$$\vec{T}^{\ell+1}_m(t) = \vec{T}^{\ell}_m(t_\ell) + \frac{d\vec{T}^{\ell}_m(t_\ell)}{dt}(t - t_\ell) + \vec{U}^{\ell}_m(t - t_\ell), \quad t \in [t_\ell, t_{\ell+1}]. \tag{9}$$

Требование непрерывности $\vec{T}^{\ell+1}_m$ и ее производных в точке t_ℓ приводит к начальным условиям

$$\vec{U}^{\ell}_m(0) = d\,\vec{U}_m(0)/dt = 0 .$$

Подставляя (9) в (6) и вводя новую переменную $\mu = t - t_\ell$, $\mu \in [0, \Delta_\ell]$, получаем систему уравнений относительно $\vec{U}^{\ell}_m(\mu)$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{V}\frac{d^2\vec{U}^{\ell}_m}{d\mu^2} + \tilde{M}_0 \vec{U}^{\ell}_m - \sum_{\tau=1}^{n}\sum_{(ij)} \tilde{M}^{(\tau)}_{ij} \int_0^{\mu} R^{(\tau)}_{ij}(\mu - \tau)\vec{U}^{\ell}_m(\tau)\,d\tau = \\
&= -\tilde{M}_0\left(\vec{T}^{\ell}_m(t_\ell) + \mu \cdot \frac{d\vec{T}^{\ell}_m(t_\ell)}{dt}\right) + \\
&+ \sum_{\tau=1}^{n}\sum_{(ij)} \tilde{M}^{(\tau)}_{ij} \int_0^{t_\ell} \vec{T}^{\ell}_m(\tau) R^{(\tau)}_{ij}(t_\ell + \mu - \tau)\,d\tau + \\
&+ \sum_{\tau=1}^{n}\sum_{(ij)} \tilde{M}^{(\tau)}_{ij} \left(\vec{T}^{\ell}_m(t_\ell) \cdot \int_0^{\mu} R^{(\tau)}_{ij}(\mu - \tau)\,d\tau + \right. \\
&\left. + \frac{d\vec{T}^{\ell}_m(t_\ell)}{dt} \int_0^{\mu} \tau R^{(\tau)}_{ij}(\mu - \tau)\,d\tau\right) + \vec{F}_m(t_\ell + \mu), \quad \mu \in [0, \Delta_\ell].
\end{aligned} \tag{10}$$

Правая часть (10) зависит от $\vec{T}^{\ell}_m(t)$, ядер релаксации и внешней нагрузки. Неизвестная функция $\vec{U}^{\ell}_m(\mu)$ входит только в левую часть. Выбирая $\Delta_\ell \ll \min\limits_{\tau(ij)} \eta^{(\tau)}_{ij}$, в силу (8), интегральными членами в левой части (I0) можно пренебречь. Такое пренебрежение означает, что вязкоупругая составляющая за время Δ_ℓ мала. Начальные условия, введенные в правую часть (I0), определяются с учетом релаксации напряжений на всем предшествующем промежутке $[0, t_\ell]$. Для простоты изложения положим, что $R_{ij}^{(\tau)}(\alpha+\beta) = R_{ij}^{(\tau)}(\alpha) \cdot R_{ij}^{(\tau)}(\beta)$.

Тогда, систему (I0) можно переписать в виде:

$$\tilde{V}\frac{d^2\vec{U}_m^\ell}{d\mu^2} + \tilde{M}_o\vec{U}_m^\ell = \vec{A}_m^\ell + \mu\vec{B}_m^\ell + \sum_\tau\sum_{(ij)}\Big\{R_{ij}^{(\tau)}(\mu)\vec{C}_{m\tau ij}^\ell + \int_0^\mu R_{ij}^{(\tau)}(\mu-\tau)d\tau\cdot\vec{D}_{m\tau ij}^\ell + \int_0^\mu \tau R_{ij}^{(\tau)}(\mu-\tau)d\tau\cdot\vec{E}_{m\tau ij}^\ell\Big\} + \vec{F}_m(t_\ell+\mu)\ ,\ \mu\in[0,\Delta_\ell]. \tag{II}$$

Левая часть (II) отличается от (I0) лишь формой записи, в ней явно выделены функции, зависящие от μ. Вектора, обозначенные латинскими буквами, от μ не зависят и вычисляются по известной $\vec{T}_m^\ell$. Решение (II) записывается с использованием (7) в квадратурах. Далее, зная $\vec{U}_m^\ell(\mu)$, по формуле (9) найдем $\vec{T}_m^{\ell+1}$. На первом шаге $[0, t_1]$ в правой части (II) есть лишь одно ненулевое слагаемое $\vec{F}_m(\mu)$. Определив $\vec{U}_m^0(\mu)$, из (9) получаем $\vec{T}_m^1(t) = \vec{U}_m^0(t)$. Для вычисления $\vec{C}_{m\tau ij}^1$ необходимо рассчитать интегралы

$$\vec{I}_{m\tau ij} = \int_0^{t_1}\vec{T}_m^1(\tau)R_{ij}^{(\tau)}(t_1-\tau)d\tau\ ,\ \tau = 1,\dots,n\ .$$

Это проще всего сделать, применив к (II) свертку по $R_{ij}^{(\tau)}(t)$. Зная $\vec{I}_{m\tau ij}^1$, и $\vec{T}_m^1(t)$, можно рассчитать $\vec{A}_m^1$, $\vec{B}_m^1$, $\vec{C}_{m\tau ij}^1$, $\vec{D}_{m\tau ij}^1$, $\vec{E}_{m\tau ij}^1$, а затем найти $\vec{U}_m^1(\mu)$. После чего из (9) получаем $\vec{T}_m^2(t)$. На последующих шагах необходимо знать $\vec{I}_{m\tau ij}^\ell$ при ℓ =2, ... Для этого можно получить рекуррентную формулу, связывающую $\vec{I}_{m\tau ij}^{\ell+1}$ и $\vec{I}_{m\tau ij}^\ell$, которую не приводим ввиду громоздкости. Описанная методика позволяет получить решение (6) на любом заданном интервале времени, разбив его на малые отрезки Δ_ℓ и последовательно определив $\vec{T}_m^\ell$, ℓ = I, ...

Проиллюстрируем применение данной методики на простом примере. Рассмотрим уравнение продольного изгиба вязкоупругого стержня. В безразмерных величинах оно имеет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\varepsilon^2\frac{\hat{B}_{11}}{B_{11}^{o}}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\varepsilon^2\frac{p(t)}{B_{11}^{o}}\frac{\partial^4(w+w_o)}{\partial x^4}-$$

$$-p(t)/B_{11}^{o}\cdot\partial^2(w+w_o)/\partial x^2=0, \tag{12}$$

где $\varepsilon^2=(H/L)^2/12$. H - толщина, L - длина стержня, $p(t)$ - внешнее продольное напряжение на торце, w, w_o - отнесенные к H начальный и дополнительный прогиб. Координата x отнесена к L, а время t к $L/\sqrt{B_{11}^{o}/\rho}$. В случае свободно опертых торцов, при начальном прогибе $w_o=T_{mo}\sin\pi m x$, решение (15) ищем в виде $w=T_m\sin\pi m x$.

Зададим $p(t)$ линейной функцией времени

$$p(t)=-\frac{t\cdot\varepsilon^2(\pi m)^4}{t_{кр}(\pi m)^2(1+(\pi m)^2\varepsilon^2)} \tag{13}$$

так, что за время $t=t_{кр}$ достигается одна критическая статическая нагрузка. Тогда для искомой функции $T_m(t)$ имеем следующее уравнение

$$\frac{d^2T_m(t)}{dt^2}+\varepsilon^2(\pi m)^4(1-t/t_{кр})T_m(t)-\varepsilon^2(\pi m)^4\frac{t\cdot T_{mo}}{t_{кр}}-$$

$$-\varepsilon^2(\pi m)^4\beta/\eta_H\int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\eta_H}}T_m(\tau)d\tau=0, \tag{14}$$

где $\beta=(B_{11}^{o}-B_{11}^{\infty})/B_{11}^{o}$.

Для решения этого уравнения применим описанную выше общую методику решения системы (6).

Используя принятые обозначения, считаем, что $T_m^{\ell}(t)$ известно. Для вспомогательной функции $U_m^{\ell}(\mu)$, введенной в (9), имеем следующее уравнение:

$$\frac{d^2U_m^{\ell}}{d\mu^2}+\varepsilon^2(\pi m)^4(1-t/t_{кр})U_m^{\ell}(\mu)-$$

$$-\varepsilon^2(\pi m)^4\left[\frac{\mu}{t_{кр}}U_m^{\ell}(\mu)+\frac{\beta}{\eta_H}\int_0^{\mu}e^{-\frac{\mu-\tau}{\eta_H}}U_m^{\ell}(\tau)d\tau\right]= \tag{15}$$

$$= -\varepsilon^2(\pi m)^4\left[T_m^l(t_l) + \mu\frac{dT_m^l(t_l)}{dt}\right] +$$

$$+ \varepsilon^2(\pi m)^4\beta/\eta_{11}\cdot\int_0^{t_l} e^{-\frac{t_l+\mu-\tau}{\eta_{11}}}\,T_m^l(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \varepsilon^2(\pi m)^4\beta/\eta_{11}\left[\int_0^{\mu} e^{-\frac{\mu-\tau}{\eta_{11}}}d\tau\cdot T_m^l(t_l) + \int_0^{\mu}\tau e^{-\frac{\mu-\tau}{\eta_{11}}}d\tau\cdot\frac{dT_m^l(t_l)}{dt}\right] +$$

$$+ \varepsilon^2(\pi m)^4\frac{t_l+\mu}{t_{кр}}\left[T_m^l(t_l) + \mu\frac{dT_m(t_l)}{dt} + T_{m0}\right].$$

Выберем $\Delta_l \ll \min(t_{кр}, \eta_{11})$. Это дает возможность пренебречь обоими слагаемыми в квадратных скобках в левой части. Выделив явно в правой части зависимость от μ, запишем (I5) в виде, аналогичном (II):

$$\frac{d^2U_m^l(\mu)}{d\mu^2} + \varepsilon^2(\pi m)^4(1 - t_l/t_{кр})U_m^l(\mu) = a_m^l + \mu b_m^l +$$
$$+ \mu^2 C_m^l + e^{-\mu/\eta_{11}}d_m^l.$$

Решение этого уравнения при однородных начальных условиях можно записать в элементарных функциях при любом $l = 0, I\ldots$ Это дает возможность легко вычислять интегралы

$$I_m^l = \frac{1}{\eta_{11}}\int_0^{t_l} e^{-\frac{t_l-\tau}{\eta_{11}}}\,T_m^l(\tau)\,d\tau,$$

через которые выражаются d_m^l. Процесс последовательного вычисления $T_m^l(t)$, $l = 0, I\ldots$ легко алгоритмизируется на ЭВМ.

Расчеты производились для вязкоупругого стержня с $L/H = 20$, $\beta = 0{,}5$. Время достижения критической нагрузки $t_{кр} = 5$. На рис. I приведены результаты расчета прогиба для $m = I$ и $m = 3$ при различных временах релаксации. Кривые I и 4 получены методом Рунге-Кутта для упругого стержня. Кривые I – результат интегрирования (I4) при $\beta = 0$ (упругое решение с мгновенным модулем), кривые 4 при $\eta_{11} \to 0$ (упругое решение с длительным модулем). В последнем случае

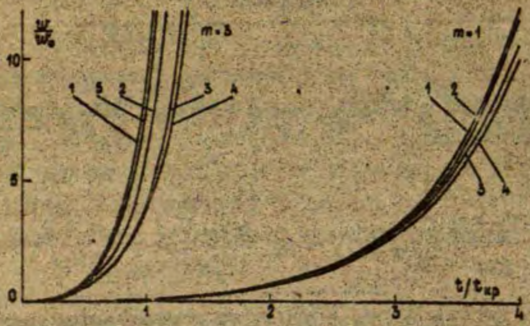


Рис. I. Зависимость прогиба от времени для двух форм выпучивания стержня

Таблица I

η_{11} \ Δ	0,2	0,I	0,05	0,025
0,I	3.10^{-3}	3.10^{-3}	3.10^{-3}	0
I00	8.10^{-2}	2.10^{-2}	2.10^{-2}	0

Максимальное отличие расчетов с различным шагом от расчета с Δ = 0,025.

интегрировалось уравнение

$$\frac{d^2 T_m}{dt^2} + \varepsilon^2 (\mathfrak{I} m)^4 (1-\beta - t/t_{kp}) T_m = \varepsilon^2 (\mathfrak{I} m)^4 / t_{kp} \cdot t,$$

которое описывает изгиб упругого стержня с модулем упругости $B_{11}^{\infty} = (1-\beta)\, B_{11}^{0}$. Кривые 2, 3, 5 получены с помощью разработанной методики решения вязкоупругой задачи для $\eta_{11} = 0{,}1$; 1; 10 соответственно. При $m = 1$ и времени релаксации $\eta_{11} = 0{,}1$ расчет совпадает с кривой 1, при $m = 3$ совпадение с "длительным" упругим решением достигается при $\eta_{11} = 0{,}05$. Кроме того, для обоих m получено, что при $\eta_{11} = 100$ прогиб вязкоупругой балки не отличается от прогиба упругой с мгновенным модулем (кривые 4). Все расчеты на рис. 1 выполнены с шагом $\Delta_\ell = \Delta = 0{,}05$, $\ell = 1, \ldots, 200$. В таблице 1 показано максимальное относительное отличие результатов расчета с разным шагом от расчета с шагом $\Delta = 0{,}025$ на интервале $t \in [0, 10]$ и $m = 3$. Как видно, при большом времени релаксации погрешность расчета постоянна для всех величин шага. В случае $\eta_{11} = 0{,}1$ при $\Delta = 0{,}2$ погрешность выше, чем для меньших величин шага и практически постоянна при $\Delta < \eta_{11}$.

Достоинством предложенной методики является ее быстродействие. Машинное время, затрачиваемое на расчет вязкоупругой задачи этим методом на интервале $t \in [0, 10]$ с шагом $\Delta = 0{,}05$ в 2 раза меньше, чем время решения упругой задачи методом Рунге-Кутта на таком же интервале времени с помощью стандартной программы SSP.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданович А.Е., Ярве Э.В. Анализ напряжений в многослойных балках при поперечном динамическом изгибе. - Механика композитных материалов, 1983, № 5 с. 824 - 837.

2. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости.- М.: Мир, 1974. - 338 с.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 122-131

УДК 539.374:534.13

А.И.Зведе
ЛГУ им.П.Стучки

ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЁТА ПРОЦЕССА ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КВАДРАТНОЙ ЖЁСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

При обычной постановке в задачах о динамическом нагружении жёсткопластических тел получаем краевую задачу для нелинейных уравнений в областях с неизвестными границами. Для упрощения задач обычно используют разные априорные гипотезы о предполагаемом распределении жёстких и пластически деформирующихся областей. При использовании вариационных принципов такая необходимость отпадает, так как краевые условия для напряжений, задаваемые на неизвестной границе жёстких и пластических областей, выполняются автоматически.

Впервые вариационный принцип, содержащий ускорения, был сформулирован В.П.Тамужем [I]. Он широко использован в практических расчётах. Однако в приложениях появляются трудности при установлении связи между допустимыми ускорениями и напряжениями, так как ассоциированный закон течения связывает последние непосредственно только со скоростями.

В книге [2, с. 178] сформулирован вариационный принцип, содержащий только скорости деформаций. Время движения t разделяется на K интервалов Δt_i $(\sum_i \Delta t_i = t)$ и скорости деформации e_{ij}

---

* Научный руководитель работы чл.-корр. АН ЛССР докт. физ.-мат. наук проф. В.П.Тамуж

и скорости u_i $(i=1,2,3)$ в интервале Δt_e находятся минимизац функционала:

$$J(u_i,\Delta t_e)=\frac{1}{2\Delta t_e}\int_\omega \rho(u_i-u_i^{\Delta t_{e-1}})d\omega+\int_\omega \varphi(e)d\omega-\int_{S_p} P_i u_i dS \quad (I)$$

при $u_i|_{t=0}=u_i^0$, $u_i|_{S_u}=0$; $e_{ii}=0$,

где $e_{ij}=1/2(u_{i,j}+u_{j,i})$

ρ - плотность,

$u_i^{\Delta t_{e-1}}$ - скорость в интервале времени Δt_{e-1} ,

P_i - поверхностная нагрузка, действующая в области S_p,

$\varphi(e)$ - диссипативный потенциал.

При использовании условия текучести Мизеса

$$s_{ij}s_{ij}=2/3\,\sigma_0^2 , \quad (2)$$

где s_{ij} - девиатор напряжений,

σ_0 - предел текучести при чистом растяжении

$$\varphi(e)=\sigma_0\sqrt{2/3\,e_{ij}e_{ij}} . \quad (3)$$

Приведённый принцип мало использован в численных расчётах, хотя обладает преимуществом по сравнению с принципами [I,3]: неизвестной является только функция u_i , не надо заботиться о соблюдении ассоциированного закона течения и для решения можно использовать процедуру безусловной минимизации (условие несжимаемости можно удовлетворить, например, подходящей гипотезой Кирхгофа-Лява). Трудности применения связаны с недифференцируемостью функционала (I). Однако существуют методы, позволяющие находить экстремумы негладких функционалов, допускающие простую численную реализацию, например, [4, с. 35].

Как пример практического использования принципа (I) рассматривается задача динамического нагружения свободно опертой жёсткопластической пластины равномерно распределённой нагрузкой. Эта задача представляет и самостоятельный интерес, так как в известных решениях её [5,6] используются приближённые квадратные условия текучести, а также априорные гипотезы о взаимном расположении жёстких и пластических областей. В работе [3, с.33[illegible] рассматриваются линеаризованные условия текучести Треска-Сен-Венана и неточные граничные условия. Решения, где использовались бы нелинейные условия текучести, неизвестны.

Пластину представим в виде области $\omega=(0\le x_1\le L)\times\times(0\le x_2\le L)\times(-h\le x_3\le h)$ и на плоскость $x_3=-h$ действует постоянная нормальная поверхностная нагрузка p в течение интервала времени τ. Так как $h\ll L$, то рассматриваем задачу в рамках гипотезы Кирхгофа-Лява:

$$u_1(x_1,x_2,x_3)=-x_3\frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_1},\qquad (4)$$

$$u_2(x_1,x_2,x_3)=-x_3\frac{\partial w(x_1,x_2)}{\partial x_2}$$

$$u_3(x_1,x_2,x_3)=w(x_1,x_2)+\frac{x_3^2}{2}\left(\frac{\partial^2 w(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}\right).$$

Заметим, что u_i удовлетворяют условию несжимаемости. Ограничиваясь членами порядка $O(h)$, получаем из (3) выражение для диссипативного потенциала:

$$\varphi(w)=\sigma_0|x_3|\sqrt{\frac{2}{3}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right]}=\varphi^*(w)\frac{|x_3|}{h^2}\qquad (5)$$

и после интегрирования по x_3 из (I) для функционала:

$$\mathcal{J}(w,\Delta t_\ell)=\frac{1}{2\Delta t_\ell}\int_0^L\!\!\int_0^L m(w-w^{\Delta t_{\ell-1}})^2dx_1dx_2+\int_0^L\!\!\int_0^L\varphi^*(w)dx_1dx_2-\int_0^L\!\!\int_0^L p\,w\,dx_1dx_2,\qquad (6)$$

где $m=\int_{-h}^{h}\rho\,dx_3$ - масса на единицу площади.

В случае свободного опирания начальное и граничные условия следующие:

$$w|_{t=0}=w^0,\; w|_{\substack{x_1=0\\x_1=L}}=w|_{\substack{x_2=0\\x_2=L}}=0,\qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right|_{\substack{x_1=0\\x_1=L}}=\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right|_{\substack{x_2=0\\x_2=L}}=0.\qquad (8)$$

Вводим безразмерные переменные

$$\bar{x}_1=x_1/L;\ \bar{x}_2=x_2/L;\ \overline{\Delta t}=\Delta t/\tau;\ \bar{w}=mL^2w/(4M_0\tau);\ z=pL^2/(4M_0),\qquad (9)$$

где $M_0=\sigma_0h^2$ - предельный изгибающий момент,

z - параметр нагрузки,

τ - время нагружения.

Тогда получаем (чёрточки опускаем):

$$\mathcal{J}(w,\Delta t_\ell)=\frac{1}{2\Delta t_\ell}\int_0^1\!\!\int_0^1(w-w^{\Delta t_{\ell-1}})^2dx_1dx_2+\frac{1}{4}\int_0^1\!\!\int_0^1\Phi(w)dx_1dx_2-z\int_0^1\!\!\int_0^1 w\,dx_1dx_2,\qquad (10)$$

где $\Phi(w)=\varphi^*(w)/(\sigma_0h^2)$. $\qquad$ (II)

Минимизацию функционала (10) проведём, используя принцип двойственности. Известно, что всякий выпуклый, полунепрерывный снизу функционал совпадает с верхней гранью семейства всех не превосходящих его непрерывных функционалов. Тогда мы можем второй интеграл функционала (1) представить в виде:

$$\sigma_0 \int_\omega \sqrt{2/3\, e_{ij} e_{ij}}\, d\omega = \sup_{s_{ij} s_{ij} \le 2/3 \sigma_0^2} \int_\omega s_{ij} e_{ij}\, d\omega = \int_\omega s_{ij}^{\circ} e_{ij}\, d\omega, \qquad (12)$$

где s_{ij}° – девиатор тензора напряжений и (12) выражает принцип Мизеса максимума скорости диссипации энергии [2, с. 20] и минимизацию (10) заменить нахождением седловой точки лагранжиана:

$$\inf_{W} \sup_{s_{ij} \in \lambda} L(W, s_{ij}, \Delta t_i),$$

где
$$L = \frac{1}{2\Delta t_i} \iint_{00}^{11} (W - W^{\Delta t_{i-1}})^2 dx_1 dx_2 + \frac{1}{4} \iint_{00}^{11} s_{ij} K_{ij}(W) dx_1 dx_2 - 2 \iint_{00}^{11} W dx_1 dx_2 \qquad (13)$$

$$K_{ij}(W) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial^2 x_2^2}\right) \end{bmatrix}; \quad s_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix}$$

соответственно скорости изгиба и изгибным моментам M_1, M_2, M_{12} соответствующие девиаторы

$$\lambda = \{ s_{ij} \mid s_{ij} s_{ij} \le 2/3 \}.$$

Для решения можно приспособить процедуру, описанную в [4, с. 107]: задавая s_{ij}°, вычисляем s_{ij}^{1}, далее находим s_{ij}^{2} и т.д. по правилу:

1) зная $s_{ij}^{n} \in \lambda$, определяем W^{n} как элемент, минимизирующий (13) при неизменных функциях s_{ij}^{n};

2) строим

$$s_{ij}^{n+1} = P_\lambda \left(s_{ij}^{n} + \rho_n K_{ij}(W^{n}) \right), \qquad (14)$$

где $P_\lambda(t_{ij})$ – оператор проектирования на область λ, выглядящий в нашем случае:

$$P_\lambda(t_{ij}) = t_{ij} / \max\left(1, \sqrt{2/3\, t_{ij} t_{ij}}\right)$$

ρ_n – численный параметр.

Если область значений W, область λ и функция $K_{ij}(W)$ выпуклы, $0<\alpha_1\leq g_n\leq\alpha_2$, где α_1, α_2 выбраны надлежащим образом и седловая точка существует, то алгоритм сходится к решению.

Минимизация (I3) по W, соответствующая 1) шагу, эквивалентна решению вариационного неравенства:

$$\frac{1}{\Delta t_\ell}\int_0^1\!\!\int_0^1 (W-W^{\Delta t_{\ell-1}})(U-W)\,dx_1dx_2+\frac{1}{4}\int_0^1\!\!\int_0^1 S_{ij}[K_{ij}(U)-K_{ij}(W)]\,dx_1dx_2-Z\int_0^1\!\!\int_0^1(U-W)\,dx_1dx_2\geq 0, \tag{I5}$$

где U - любая кинематически допустимая функция.

Рассмотрим произвольную бесконечно дифференцируемую функцию φ с носителем [7, с. 33], компактным в области $\omega_2=(0<x_1<1)\times(0<x_2<1)$, то есть $\varphi\neq 0$ только в ω_2. Тогда $U=W\pm\varphi$ будет кинематически допустимой и, вставляя U в (I5), получим, что:

$$\frac{1}{\Delta t_\ell}\int_0^1\!\!\int_0^1 (W-W^{\Delta t_{\ell-1}})\varphi\,dx_1dx_2+\frac{1}{4}\int_0^1\!\!\int_0^1 S_{ij}K_{ij}(\varphi)\,dx_1dx_2-Z\int_0^1\!\!\int_0^1\varphi\,dx_1dx_2=0. \tag{I6}$$

Используя определение производных обобщённых функций [7, с. 48] или просто интегрируя по частям и учитывая, что на границе ω_2 φ и её производные равны нулю, и что φ - произвольная функция, получаем:

$$\frac{W-W^{\Delta t_{\ell-1}}}{\Delta t_\ell}=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 S_{11}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 S_{22}}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2 S_{33}}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 S_{33}}{\partial x_2^2}+2\frac{\partial^2 S_{12}}{\partial x_1\partial x_2}\right)+Z \tag{I7}$$

Из (I4) следует, что граничные условия (9) можно заменить на:

$$S_{11}|_{\delta\omega_2}=S_{22}|_{\delta\omega_2}=S_{33}|_{\delta\omega_2}=0;\quad W|_{\delta\omega_2}=0, \tag{I8}$$

где $\delta\omega_2$ - граница области ω_2.

Для численного решения задачи (I4), (I7), (I8) используем конечно-разностный подход и аппроксимация (I4) и (I7) в случае равномерной сетки следующая:

$$\frac{W_{ij}^n-W_{ij}^{\Delta t_{\ell-1}}}{\Delta t_\ell}=-\frac{1}{4}\left(S_{11,11}^n+S_{22,22}^n-S_{33,11}^n-S_{33,22}^n+2S_{12,12}\right)+Z;\quad \begin{matrix} i=1,\dots,N-1\\ j=1,\dots,M-1\end{matrix}$$

$$W_{i1}^n=W_{iM}^n=W_{1j}^n=W_{Nj}^n=0\quad;\quad i=1,\dots,N;\quad j=1,\dots,M$$

$$\left.\begin{aligned} S_{11}^{n+1}&=P_\lambda(S_{11}^n+g_n/4\ W_{,11}^n)\\ S_{22}^{n+1}&=P_\lambda(S_{22}^n+g_n/4\ W_{,22}^n)\end{aligned}\right\}\ \begin{matrix} i=1,\dots,N-1\\ j=1,\dots,M-1\end{matrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} S_{33}^{n+1} &= P_\lambda\left(S_{33}^{n} + g_n/4\left(-W_{,11}^{n} - W_{,22}^{n}\right)\right) \\ S_{12}^{n+1} &= P_\lambda\left(S_{12}^{n} + g_n/4\ \ W_{,12}^{n}\right) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} i &= 1,\dots,N-1 \\ j &= 1,\dots,M-1 \end{aligned}$$

$$S_{\alpha\alpha i1}^{n+1} = S_{\alpha\alpha iM}^{n+1} = S_{\alpha\alpha 1j}^{n+1} = S_{\alpha\alpha Nj}^{n+1} = 0\ ;\quad \alpha = 1,2,3;\ i = 1,\dots,N;\ j = 1,\dots,M,$$

где $A_{,11} = \dfrac{A_{i-1j} - 2A_{ij} + A_{i+1j}}{H^2}$, $A_{,22} = \dfrac{A_{ij-1} - 2A_{ij} + A_{ij+1}}{H^2}$

$$A_{,12} = \frac{A_{i+1j+1} + A_{i-1j-1} - A_{i+1j-1} - A_{i-1j+1}}{4H^2}$$

$H = 1/N$ - шаг конечно-разностной сетки,

P_λ - оператор в (I3).

Рассмотрим как пример аппроксимации $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}$ на границе пластины определение $\left.\dfrac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\substack{i=1\\ j=1}}$:

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{1,1} = \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{2,2} - \left.\frac{\partial^3 W}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right|_{2,2} \cdot H - \left.\frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right|_{2,2} \cdot H$$

$$\left.\frac{\partial^3 W}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right|_{2,2} = \frac{1}{2H}\left(\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right|_{2,3} - \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\right|_{2,1}\right),\quad \frac{\partial^3 W}{\partial x_1 \partial x_2^2} = \frac{1}{2H}\left(\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right|_{3,2} - \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2}\right|_{1,2}\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{1,1} = \frac{-3W|_{33} + 4(W|_{23} + W|_{32})}{4H^2}.$$

Тогда $S_{12}^{n+1}\Big|_{1,1} = P_\lambda\left(S_{12}^{n}\Big|_{1,1} + \dfrac{g_n}{4}\left(\dfrac{4(W|_{23} + W|_{32}) - 3W|_{33}}{4H^2}\right)\right)$.

Так же строятся и $S_{12}^{n+1}\Big|_{1,j}, S_{12}^{n+1}\Big|_{Nj}, S_{12}^{n+1}\Big|_{iM}, S_{12}^{n+1}\Big|_{i1}$; $i = 1,\dots,N$; $j = 1,\dots,M$.

Задача решалась для I/4 части пластины, шаг разбиения H =0,05. Рассматривались нагрузки разной интенсивности и рассчитывались распределения скоростей прогиба и прогибы пластины в разные моменты времени как в фазе нагружения, так и в фазе инерционного движения. В каждый момент времени устанавливалось также и распределение жёстких и пластических областей. Результаты представлены на рис. I. Видно, что, как и в [5,6], в зависимости от интенсивности нагрузки наблюдаются два основных механизма движения - с жёсткой областью в центре (рис. Iа, рис. Iб) и без неё (рис. Iв), но в предлагаемом решении, где используется условие текучести Мизеса, не выполняются принятые в [5, 6] гипотезы о локализации деформаций только вдоль шарнирных линий, хотя это может оказаться только влиянием неточности аппроксимации. Погрешность в [5,6] вносит и приближённое квадратное условие текучести. Локализованные вдоль линий деформации

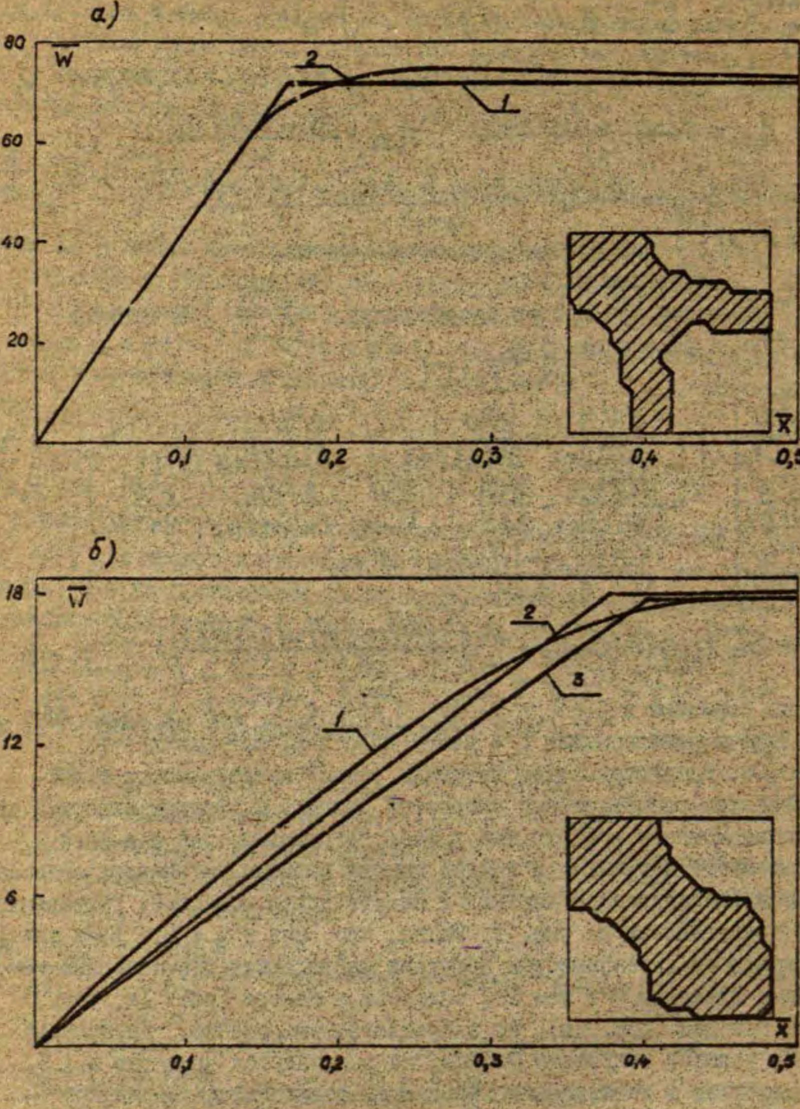

a)
80
60
40
20
$\overline{W}$
2
1
$\overline{X}$
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
б)
18
12
6
$\overline{W}$
2
3
1
$\overline{X}$
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5

Рис. I.

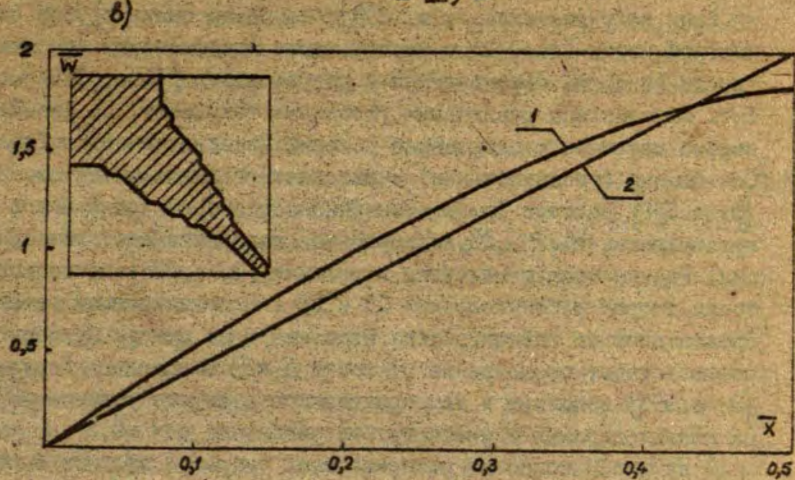


Рис. I. Распределение безразмерных скоростей прогиба и расположение жестких и пластических (заштриховано) областей во время нагружения: а) нагрузка $Z = 72$; б) $Z = 18$; в) $Z = 7$; I - полученное решение; 2 - решение [5,6] ; 3 - решение [3]. Центр пластины в правом нижнем углу.

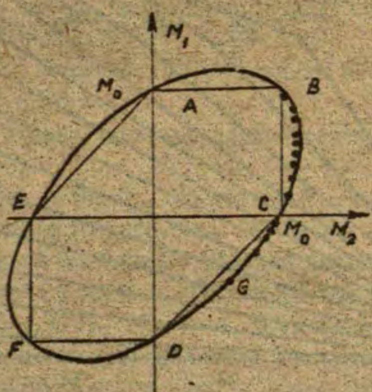


Рис. 2. Условия текучести Треска-Сен-Венана и Мизеса (эллипс).

но были получены и в [3, с. 338], но из-за очень грубой разностной сетки (H=0,2) о расположении пластических зон там трудно говорить. Расхождения с результатами [3, с. 338] могут быть обусловлены различными условиями текучести. На рис.2 показано взаимное расположение условий Мизеса (эллипс) и Треска-Сен-Венана (шестиугольник) в плоскости главных моментов. В [3, с.338] условие Треска-Сен-Венана для применения его в пространстве M_{11}, M_{22}, M_{12} подвергается дополнительной линеаризации. Разным точкам пластины в решении [3, с.338] соответствуют точки сторон шестиугольника CB и CD. В предлагаемом решении продвижению от внешнего угла пластины к ее центру примерно соответствует продвижение от точки G к B по эллипсу. Результаты [3, с.338] искажает и там примененное излишнее условие $\frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2}=0$ на линии опирания и очень грубое разбиение с H =0,2.

На рис.3 показаны распределения скорости прогиба в момент снятия нагрузки интенсивности Z =72 и в последующие моменты времени инерционной фазы движения. Видно, что деформации заканчиваются в момент времени t =13τ, где τ время нагружения.

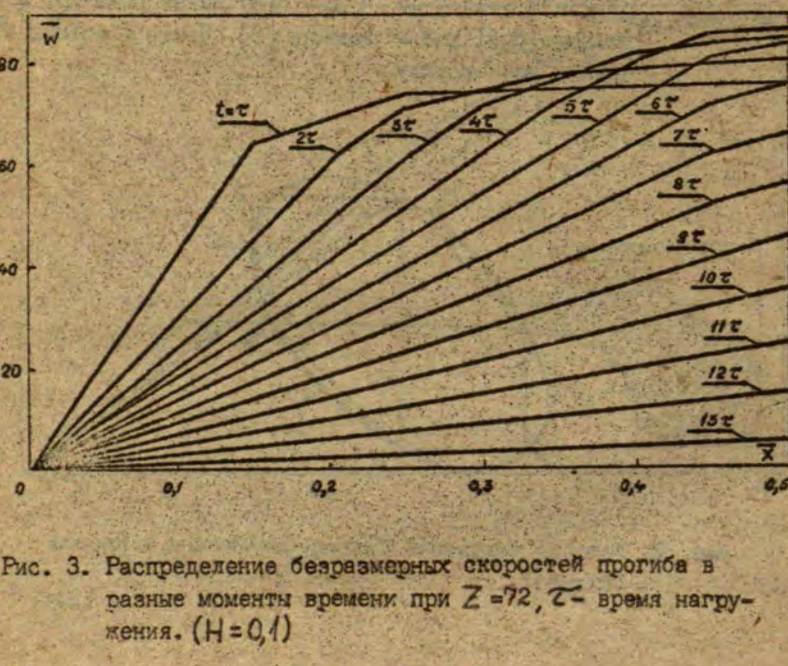


Рис. 3. Распределение безразмерных скоростей прогиба в разные моменты времени при Z =72, τ – время нагружения. (H=0,1)

Для [5] и [6] это время t =12τ. Можно наблюдать и то, как с ростом времени движение пластины принимает так называемую модальную форму - форма распределения скоростей не меняется со временем.

Параметр ϑ_n в (14) был взят постоянным. Его оптимальное значение не зависело от интенсивности нагрузки и равнялось 0,013. Для расчета одного распределения скоростей при $H=0,05$ нужно до 50 минут машинного времени ЭВМ ЕС-1060. Предполагается исследовать возможности оптимизации алгоритма, применяя нестационарную последовательность ϑ_n.

Для повышения точности полученного приближенного решения надо применять неравномерную сетку или метод конечных элементов. Вопрос о получении достаточной точности конечномерных аппроксимаций в задачах механики жесткопластических сред является особенно острым, так как поля скоростей деформаций могут быть разрывными. Определение точности приближенного решения можно провести методом двухсторонних оценок [2, с.86].

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамуж В.П. Об одном минимальном принципе в динамике жесткопластического тела.- Прикладная математика и механика, 1962, т.26, №4, с.715-722.

2. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жесткопластических сред.- М., 1981,-208 с.

3. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций.-М., 1978,-352 с.

4. Гловински Р., Лионс Ж., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств.-М., 1979,-574 с.

5. Cox A., Morland L. Dynamic plastic deformations of simply-supported square plates.- Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1959, v7, Nr.4, pp.229-241.

6. Вирма Э. Динамическое поведение жесткопластической свободно опертой квадратной пластины.- В кн.: Уч.зап. Тартуского университета, 1970, вып.305, с.282-288.

7. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики.-М., 1982,-486 с.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 132-143

УДК 539.4:534.1

Я.П.Варна, М.А.Раугулис
ЛГУ им. П.Стучки

ЯВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА В СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

Формы и частоты собственных осесимметричных колебаний оболочек можно условно разбить на три семейства: изгибные, мембранные и сдвиговые. Последние связаны с инерцией вращения нормального к срединной поверхности элемента, и указанное семейство наблюдается лишь в решениях уравнений, полученных с использованием кинематических гипотез С.П.Тимошенко [1,2]. Кроме этого, характерной чертой семейства частот поперечного сдвига является то, что они появляются лишь в диапазоне безразмерных частот $\bar{\omega} \geq \frac{12R^2}{h^2}$, где $\bar{\omega} = \frac{\omega R}{\sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}}$ – безразмерная частота, R – радиус оболочки, h – толщина оболочки, ν – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга, ρ – плотность материала оболочки.

Условность разбиения заключается в том, что прогиб w, продольное перемещение u и угол поворота нормали ψ связаны системой уравнений движения и при всех трёх типах колебаний отличны от нуля как w, так и u, ψ. Поэтому правильнее было бы назвать частоты преимущественно изгибными, мембранными или сдвиговыми.

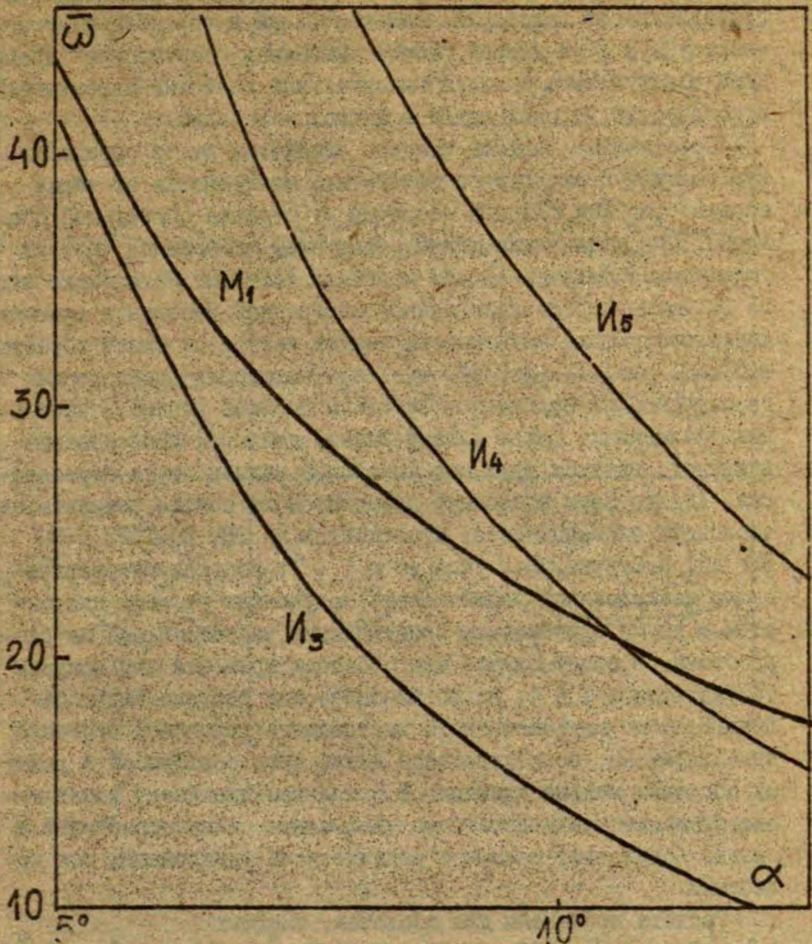


Рис. I. Зависимость безразмерных частот от угла полураствора сферической оболочки.
$И_к$ - изгибные, $M_к$ - мембранные частоты.

В литературе известны различные подходы к установлению принадлежности некоторой моды колебаний к определённому семейству [3]. В данной работе указанная "сортировка" проведена в результате анализа максимальных значений перемещений и количества узловых точек в формах колебаний.

Собственные частоты каждого семейства имеют определённую (отличную от другого семейства) зависимость от таких параметров, как толщина оболочки h и длина образующей оболочки. При увеличении длины образующей мембранные частоты уменьшаются медленнее, чем изгибные частоты. Вследствие этого возможно пересечение кривой мембранной частоты с кривыми, характеризующими зависимость частот изгиба от длины образующей (см. рис. I, рис. 4), т.е. при некоторых соотношениях геометрических параметров возможен двойной корень в частотных уравнениях. Целью данной работы является исследование взаимного влияния двух мод колебаний вблизи точки пересечения. Анализ форм колебаний проводится на основе результатов численных экспериментов, проведённых на ЭВМ ЕС-IO22 в ВЦ ЛГУ им. П.Стучки. Как указано в [4], вопросы математического исследования устойчивости полученных решений для систем с двумя одинаковыми собственными частотами ещё не разработаны. В общем случае для оболочек вращения эти вопросы обсуждаются в [5], но по классической теореме Кирхгофа-Лява. Явление двухчастотного внутреннего резонанса особенно ярко выражено, если отношение длины дуги образующей к радиусу оболочки меньше единицы. В остальном диапазоне имеет место сгущение всех частот при увеличении длины образующей и сильно возрастает взаимное влияние всех близлежащих мод колебаний.

Расчёты проведены для оболочек, имеющих

$$h = 2 \text{ мм}, \quad R = 100 \text{ мм}, \quad \rho = 7{,}7 \text{ г/см}^3, \quad E = 2.10^6 \text{ кГ/см}^2, \quad \nu = 0{,}3$$

В дальнейшем обозначим мембранные моды (продольные колебания) - M_i , а изгибные моды - $И_i$, где i - порядковый номер частоты данного семейства. Знаком * обозначена форма,

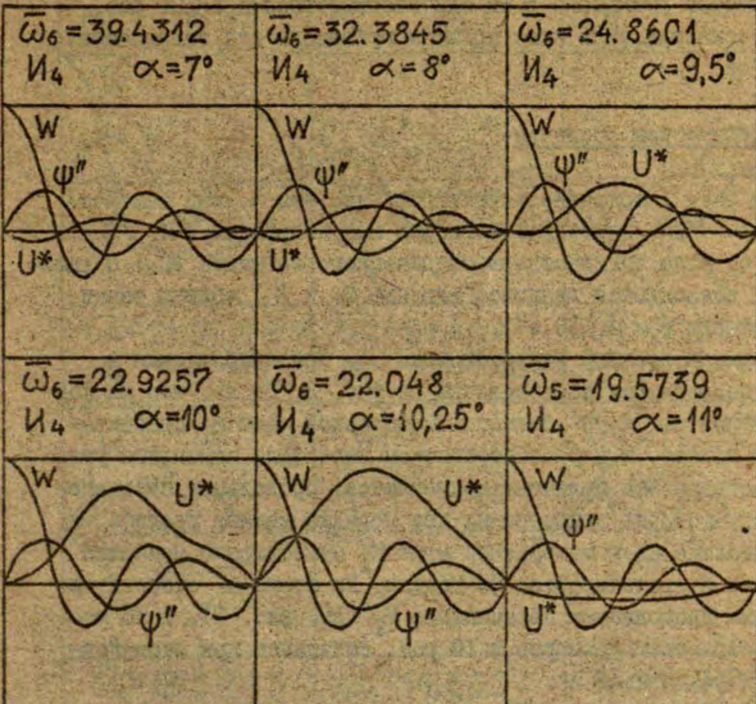


Рис. 2. Поведение изгибных форм колебаний вблизи точки пересечения.

которая на рисунках увеличена в 10 раз, а знаком $'$, $''$-формы, которые уменьшены в 10 или соответственно в 100 раз.

Рассматриваемые ниже примеры приведены для защемлённых оболочек.

Сферическая оболочка

На рис. I показана зависимость частоты первой мембранной моды M_1 и некоторых изгибных мод колебаний ($И_3$, $И_4$ $И_5$) от угла полураствора сферического сегмента α. В дальнейшем исследуется взаимное влияние M_I и $И_4$ вблизи точки пересечения ($\alpha \approx 10{,}5^o$).

Формы колебаний изгибной моды $И_4$ при приближении к точке пересечения представлены на рис. 2. Видно, что на форму прогиба w и ψ близость мембранной моды M_I практически не влияет, и в рассматриваемом интервале изменения угла полураствора эти величины не меняются. Продольное перемещение u, которое примерно на два порядка меньше прогиба w, при приближении к мембранной моде M_I существенно меняется по форме и увеличивается по модулю. По форме u становится подобным продольному перемещению M_I (см. рис. 3), а по модулю возрастает примерно в 10 раз, оставаясь при этом почти в 10 раз меньше w.

При переходе через точку пересечения u скачкообразно меняет знак по отношению к w и ψ (напомним, что формы колебаний определены только с точностью до произвольного общего множителя, поэтому есть смысл говорить только об изменении знака одного перемещения относительно другого), примерно сохраняя свою величину по модулю. В дальнейшем происходит уменьшение u до начальных невозмущённых значений.

Формы первой мембранной моды колебаний M_I приведены на рис. 3. В начале рассматриваемого интервала (α $=5^o$) мода M_I находится вблизи изгибной моды $И_3$ (см. рис. I) и поэтому прогиб и угол ψ по форме напоминает соответствующие формы для w и ψ моды $И_3$. Этим объясняется также срав-

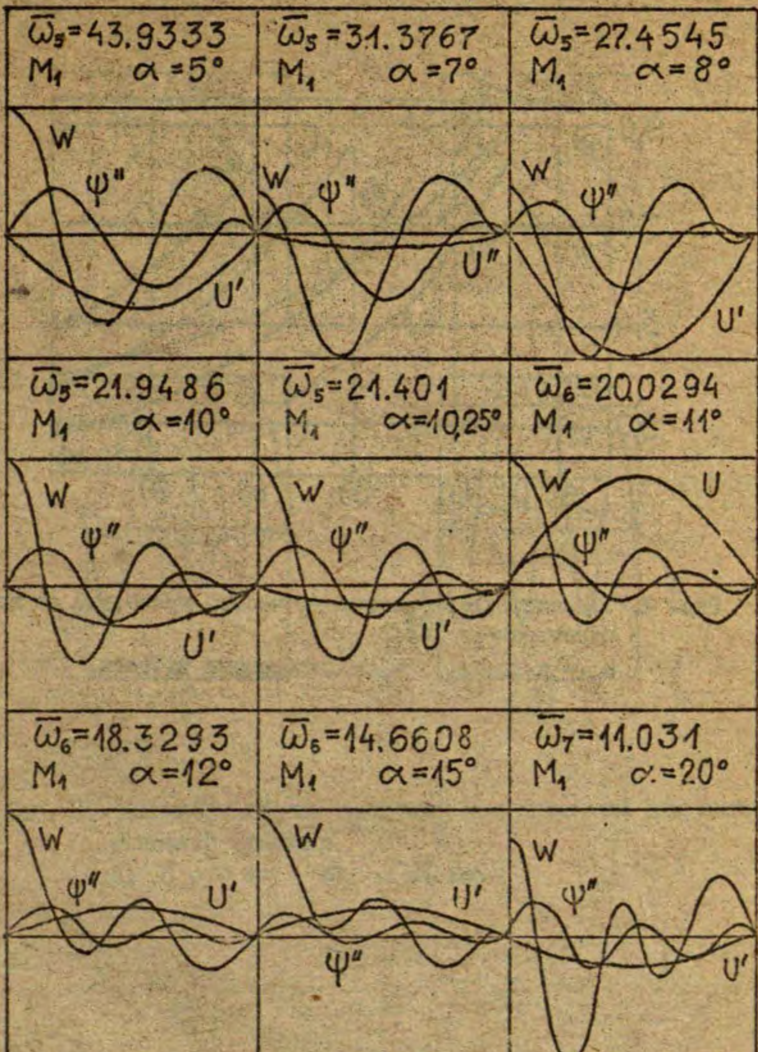


Рис. 3. Влияние близости изгибной моды на первую мембранную моду колебаний.

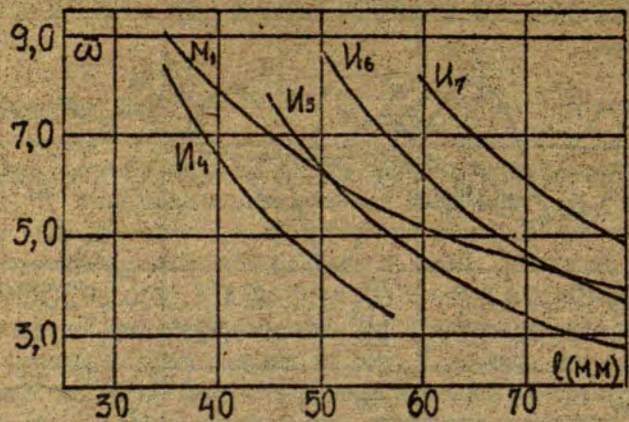


Рис. 4. Зависимость безразмерных частот колебаний от длины цилиндрической оболочки.

$И_к$ - изгибные, $М_к$ - мембранные частоты.

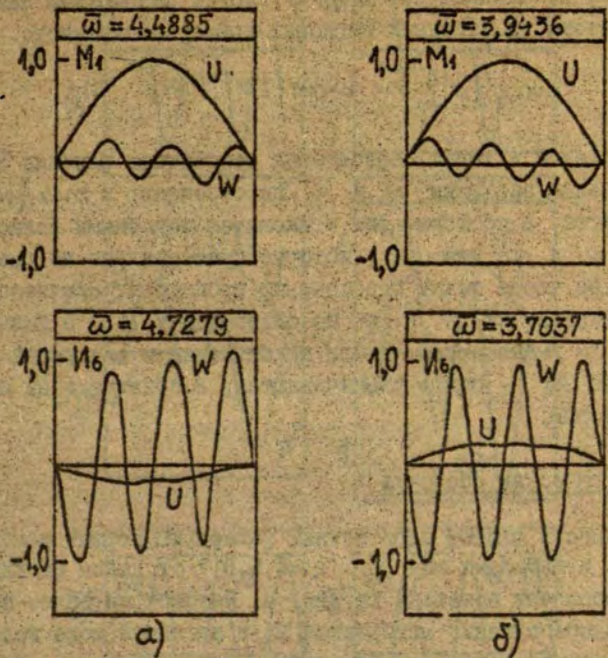


Рис. 5. Взаимное влияние различных мод колебаний для цилиндрической оболочки.
а) l =70 мм; б) l=80 мм.

нительно большие значения w и ψ по отношению к u. Наименьшие возмущения со стороны соседних изгибных мод колебаний мода M_I испытывает при $\alpha \approx 7^0$, когда расстояние мембранной частоты от соседних изгибных примерно одинаково. Тогда

$$max\{|u|\} >> max\{|w|, |\psi|\}$$

При приближении к точке пересечения возрастает влияние $И_4$ и максимальные значения w и ψ по отношению к $max\{|u|\}$ увеличиваются, а по форме они становятся подобными зависимостям для w и ψ для $И_4$, которые представлены на рис. 2. При переходе через точку пересечения происходит скачкообразное изменение знака w и ψ по отношению к u. В дальнейшем w и ψ уменьшаются, а при приближении к следующей изгибной моде $И_5$ - опять увеличиваются, и принимают ей свойственные формы.

Цилиндрическая оболочка

Зависимость частот собственных колебаний первой мембраны моды M_I и изгибных мод $И_k$, k =4,5,6,7 от длины цилиндрической оболочки показана на рис. 4. Рассмотрим более подробно взаимное влияние мембранной M_I и изгибной моды колебаний $И_4$ вблизи точки пересечения $\ell \approx 73$ мм.

Как видно из рис. 5, рис. 6, прогиб w изгибной моды $И_4$ практически не меняется при приближении к точке пересечения и близость мембранной моды колебаний не оказывает заметного влияния. Продольное перемещение u изгибной моды возрастает примерно в 10 раз при приближении к точке пересечения и соответствующая форма становится похожей на форму u для мембранной моды. Так же как у сферической оболочки, наблюдается скачкообразное изменение знака формы u по отношению к w.

Рассмотрим изменения мембранной моды колебаний, считая $max\{|u|\} = 1$. Из рис. 5,6 видно, что близость мембран-

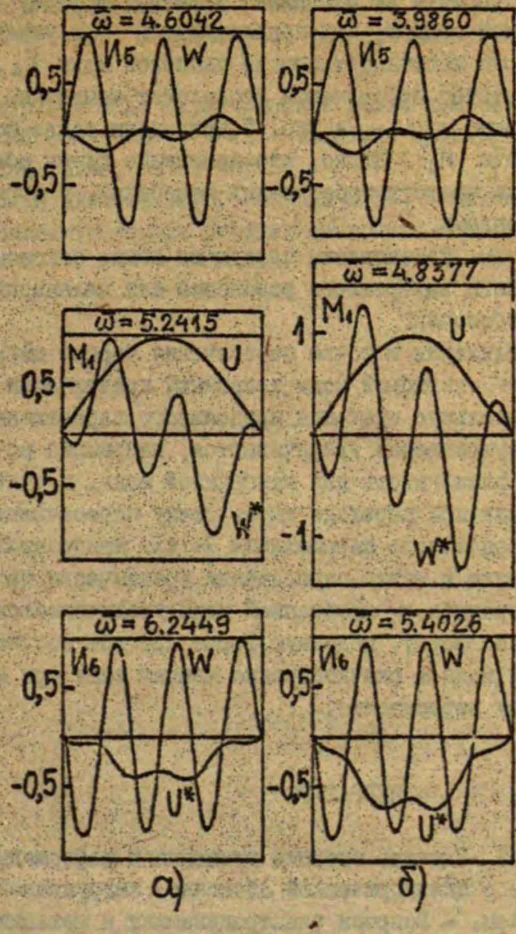


Рис. 6. Взаимное влияние различных мод колебаний для цилиндрической оболочки.
а) l =60 мм; б) l=65 мм.

ной и изгибной частоты не оказывает влияния на форму u. Прогиб мембранной моды M_I при приближении к $И_4$ увеличивается и по форме напоминает прогиб изгибной моды $И_4$. При переходе через точку пересечения происходит изменение знака w по отношению к u'. На рис. 5 приведены также формы для изгибной моды $И_5$. Видно, что изменение длины оболочки меняет только частоту собственных колебаний, а формы остаются неизменными.

Таким образом, установлены следующие общие закономерности двухчастотного внутреннего резонанса для цилиндрических и сферических оболочек:

I. При приближении к точке пересечения частот двух семейств прогиб w изгибной моды колебаний практически не меняется. Максимальные значения продольного перемещения изгибной моды существенно увеличиваются, напоминая по форме аналогичную зависимость для мембранной моды, и скачкообразно меняет знак при переходе через точку пересечения;

2. Форма продольного перемещения u для мембранной моды при приближении к точке пересечения практически не меняется, а форма прогиба w мембранной моды увеличивается по модулю, принимает форму, подобную форме прогиба соответствующей изгибной моды и скачкообразно меняет знак при переходе через точку пересечения.

ЛИТЕРАТУРА

I. Варна Я.П. Влияние инерции вращения и деформаций сдвига в задаче о цилиндрической оболочке, нагруженной продольным импульсом. - Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига, 1980, вып. 5, с. I24-I40.

2. Варна Я.П. Переходные процессы в сферических оболочках при импульсном торцевом воздействии. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Промышленные процессы и устройства. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1983, с. I03-II6.

3. Kalnins A. Effect of bending on vibration of spherical shells. - J. Acoust. Soc. Amer.,1964, 36, Nr. 1, p. 74-81.

4. Петренко М.П. Двухчастотные резонансы сжатой пологой сферической оболочки. - В кн.: Динамика пространственных конструкций. Киев, 1978, 235 с.

5. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М., 1979. - 384 с.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 144-148

УДК 515.1+517.98

И.Т.Лиепиня,
Институт органического
синтеза АН ЛатвССР

А.К. Лиепиньш
ЛГУ им. П.Стучки

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ КЭННЭНА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Поселимся в метрическом пространстве (X, d).

В переводе это означает, что X - множество и d - расстояние на нём. Т.е., d является отображением, сопоставляющим каждым двум точкам x, $y \in X$ вещественное число $d(x,y)$ так, что для любых x, y, $z \in X$:

1) расстояние $d(x,y)$ между точками x и y равно 0 тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $d(x,y) = d(y,x)$;

3) $0 \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(x,y)$

(аксиома треугольника - сумма длин любых двух сторон треугольника больше или равна длине третьей стороны).

1. Что для нас - сплошная среда?

Сплошная среда для нас - подчинённая определённым условиям тройка (X, d, S), где S - оператор замыкания на X, посредством которого формализуется наше интуитивное представление о совокупности отношений, обозначаемой набором слов "сплошная среда".

Отображение $S : PX \to PX$, где через PX обозначено множество всех подмножеств множества X, называется оператором замыкания на X, если оно для любых A, $B \in PX$ удовлетворяет перечисляемым ниже трём условиям. Эти условия естественным образом позволяют воспринимать оператор замыкания как отображение, сопоставляющее каждому множеству

$A \in PX$ множество $S(A)$ точек в X, близких к A (не вкладывая в слово "близкий" какой-либо определённый смысл). Т.е. воспринимать как аксиоматическое определение самого отношения близости точек к множествам. Вот, эти условия:

I) $A \subset B$ влечёт $S(A) \subset S(B)$

(если точка близка к A и $A \subset B$, то она близка и к B);

2) $A \subset S(A)$

(каждая точка множества A близка к A);

3) $S(S(A)) = S(A)$

(если точка близка к множеству $S(A)$ точек, близких к A, то она близка и к самому A).

В дальнейшем, для любого $A \in PX$ скажем, что A S-замкнуто тогда и только тогда, когда $A = S(A)$.

В случае метрического пространства на X естественно задан оператор замыкания S_t - оператор топологического замыкания ($S_t(\emptyset) := \emptyset$ и

$$S_t(A) := \{x \in X \mid \inf\{d(x,y) \mid y \in A\} = 0\}$$

для любого $A \in PX : A \neq \emptyset$). Но, так как оператор S_t непосредственно определяется расстоянием d, т.е. отображением, которое в силу первой аксиомы расстояния "отличает" отдельные точки множества X, то нам, моделируя понятие сплошной среды, представляется более естественным считать, что в тройке (X, d, S) оператор замыкания S не является оператором S_t. Последнее, тем не менее, вовсе не исключает, а наоборот, даже предполагает, наличие определённой связи между S и S_t.

Выразим эту предполагаемую связь следующими двумя условиями, которые впредь будем считать выполненными:

I) для любого $x \in X$ и $r \in \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ - множество всех вещественных положительных чисел) замкнутый шар $B(x,r) := \{y \in X \mid d(y,x) \leq r\}$ радиуса r с центром в x S-замкнут,

2) для любого S-замкнутого множества $A \in PX$ S-замкнуто его топологическое замыкание $S_t(A)$.

Относительно самого оператора замыкания S также сделаем предположение, а именно:

для любого $A \in PX$ и любого $x \in S(A)$ существуют такие $x_i \in A$ ($i=1, \cdots, n$), что $x \in S(\{x_1, \cdots, x_n\})$.

Определим отображение $S_0 : PX \to PX$ для любого $A \in PX$

равенством: $S_0(A) := S_t(S(A))$.
Как нетрудно убедиться, S_0 — оператор замыкания на X .

Основное условие, которое будем считать выполненным, называя тройку (X, d, S) сплошной средой, — это условие её компактности (точнее: S_0 -компактности или, что то же, компактности в смысле оператора замыкания S_0), углубляющее предполагаемую связь между операторами замыкания S и S_t .

Напомним, что система множеств называется центрированной, если пересечение множеств любой её конечной подсистемы непусто.

Скажем, что (X, d, S) компактно, если пересечение множеств любой центрированной системы S_0 -замкнутых подмножеств множества X непусто.

Таким образом, ответом на поставленный вопрос пусть будет нижеприведенное определение.

Определение. Тройка (X, d, S) , где X — множество, d — расстояние и S — оператор замыкания на нём, называется сплошной средой (или более точно: моделью сплошной среды) , если выполнено:

1) $(\forall x \in X)(\forall r \in R_+)$:
$B(x,r) = S(B(x,r))$;
2) $(\forall A \in PX)$:
$A = S(A) \Rightarrow S_t(A) = S(S_t(A))$;
3) $(\forall A \in PX)(\forall x \in S(A))$
$(\exists x_i \in A\ (i=1,\cdots,n))$:
$x \in S(\{x_1, \cdots, x_n\})$;
4) (X, d, S) — компактно.

2. Уравнение Кэннэна для процессов в сплошных средах.

Пусть (X, d, S) — сплошная среда, Y — непустое S_0-замкнутое подмножество в X , $f: Y \to X$.

Уравнение $f(x) = x$ назовём уравнением Кэннэна, полагая, что отображение f непрерывно и удовлетворяет неравенству Кэннэна (R.Kannan):

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2}(d(x, f(x)) + d(y, f(y)))$$

для любых $x, y \in X$.

3. Теорема. Пусть (X,d,S) - сплошная среда, Y - непустое S_0 -замкнутое подмножество в X, $f: Y \to X$.

Предположим, что для любого S_0 -замкнутого подмножества A в Y, содержащего более одной точки, существует такое $x \in A$, что $f(x) \in Y$, $d(x,f(x)) < \sup\{d(y,f(y)) \mid y \in A\}$ и $S_0(S(f(B))) \cap Y = S_0(S(f(B)) \cap Y)$ для любого замкнутого подмножества B в Y, содержащего x.

Тогда уравнение Каннена разрешимо и решение единственно.

Доказательство, в ходе которого будем пользоваться тем, что пересечение S_0 -замкнутых подмножеств множества X S_0-замкнуто.

Прежде всего, основываясь на лемму Цорна, построим подмножество M в X, минимальное по отношению к S_0 -замкнутости и свойствам:

$M \cap Y \neq \emptyset$ и $f(M \cap Y) \subset M$.

Допустим, что $f(M \cap Y) \not\subset Y$.

Тогда $M \cap Y$ содержит более одной точки. Поэтому существует такое $x_0 \in M \cap Y$, что $f(x_0) \in Y$ и

$$d(x_0, f(x_0)) =: r < \sup\{d(x,f(x)) \mid x \in M \cap Y\}.$$

Пусть $A := \{x \in M \cap Y \mid d(x,f(x)) \leq r\}$

и $B := S_0(f(A)) = S_0(S(f(A)))$.

По построению $f(x_0) \in B \cap Y$. Тем самым $B \cap Y \neq \emptyset$. Реализуя идеи доказательства, предложенного в [I, теорема 3, с. 65], заключаем, что $B \cap Y \subset A$ и, следовательно, $f(B \cap Y) \subset B$.

Таким образом, $B = M$ в силу минимальности M.

Одновременно:

$$\sup\{d(x,f(x)) \mid x \in B \cap Y\} \leq r <$$
$$< \sup\{d(x,f(x)) \mid x \in M \cap Y\}.$$

Заключаем, что $f(M \cap Y) \subset M$.

Тогда $f(M \cap Y) \subset M \cap Y$ и, следовательно, $M \cap Y = M$ в силу минимальности M. Таким образом, $f(M) \subset M$ и утверждение теоремы следует согласно [I, теорема 3, с. 65].

Наш результат примыкает к [2, теорема 5, с.II4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лиепиньш А.Х. Колыбельная для маленького тигрёнка о неподвижных точках. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1983, с. 61 - 69.
2. Kannan R. Fixed point theorems in reflexive Banach spaces. - Proc.Amer.Math.Soc., 1973, vol. 38, № 1, p. 111 - 118.

Межвузовский сборник научных трудов
МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 149-158

УДК 539.184.28

М.П.Аузиньш
ЛГУ им. П.Стучки

РАСЧЕТ ОПТИЧЕСКОЙ НАКАЧКИ ДЛЯ ДВУХАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ С БОЛЬШИМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ

1.Введение

Под оптической накачкой будем подразумевать метод передачи в результате поглощения ансамблю атомов или молекул, находящихся в газовой фазе, части углового момента, переносимого направленным и, как правило, поляризованным резонансным светом [1,2]. Исследование характеристик света, поглощаемого или переизлучаемого (флюоресценция) ансамблем таких атомов или молекул, особенно при наложении внешних полей или временной модуляции света, даёт богатую информацию о структуре частиц, процессах их релаксации, взаимодействии света с атомами и молекулами.

Часто для описания процессов оптической накачки наиболее удобными являются коэффициенты разложения матрицы плотности [3] по неприводимым тензорным операторам [4]. Эти коэффициенты в оптике принято называть поляризационными моментами (ПМ) [5,6]. Они несут в себе всю информацию, содержащуюся в матрице плотности и, следовательно, с наибольшей возможной полнотой описывают статистический ансамбль слабо взаимодействующих квантовых частиц.

В общем случае для произвольных значений угловых моментов основного состояния J'' и возбужденного J', уравнения движения ПМ известны [7,8]. Однако до сих пор для наиболее информативного и интересного случая при возбуждении интенсивным светом (лазером) эти уравнения решались лишь для состоний, где $J \sim 1$. Для случая больших значений угловых моментов (например, в двухатомных молекулах типичны переходы, где $J \sim 100$) решение этих уравнений оказывалось неосуществимым из-за технических трудностей. На пути преодоления этих трудностей были предприняты попытки описания процессов оптической накачки при помощи классической модели, базирующейся на понятии непрерывной функции плотности распределения углового момента молекул по направлениям [9]. Однако эта модель имеет ряд существенных недостатков. Во-первых, она не позволяет исследовать деориентацию углового момента молекул в столкновительных процессах. Во-вторых, в модели вообще не поддаются рассмотрению процессы, связанные с поглощением и испусканием циркулярно поляризованного света, а это весьма существенно еще и по той причине, что именно вследствие поглощения циркулярно поляризованного света возникает ориентация углового момента частиц, то есть, ПМ наименьшего отличного от нуля ранга $K=1$.

В настоящей статье приводятся некоторые результаты цикла работ, целью которых ставилось получение асимптотических уравнений движения ПМ в случае больших угловых моментов, а также формализация их решения для создания ЭВМ-программ. При этом в качестве обязательного условия предполагалось сохранение преимуществ квантовой модели ПМ над классической моделью функции плотности распределения углового момента. При помощи полученных асимптотических уравнений был интерпретирован ряд экспериментальных результатов [10,11,12].

2. Асимптотические уравнения движения поляризационных моментов

Предположим, что на ансамбль частиц с большим угловым моментом наложено внешнее стационарное магнитное поле $\vec{H}$, вдоль которого и выбрана ось квантования. Тогда, используя свойства 3-j, 6-j, 9-j символов [13], уравнения движения ПМ с хорошей точностью могут быть аппроксимированы (предполагая $J \to \infty$) системой уравнений [1]

$$\dot{\rho}^{K}_{Q} = \Gamma_p\Big(\sum_{\varkappa q} {}^{K}_{Q}D^{\varkappa}_{q}\varphi^{\varkappa}_{q} - \sum_{K'Q'} {}^{K}_{Q}D^{K'}_{Q'}\rho^{K'}_{Q'}\Big) - (\Gamma_K - iQ\Omega)\rho^{K}_{Q} \qquad (1а)$$

$$\dot{\varphi}^{\varkappa}_{q} = \Gamma_p\Big(\sum_{KQ} {}^{\varkappa}_{q}D^{K}_{Q}\rho^{K}_{Q} - \sum_{\varkappa' q'} {}^{\varkappa}_{q}D^{\varkappa'}_{q'}\varphi^{\varkappa'}_{q'}\Big) - (\gamma_\varkappa - iq\omega)\varphi^{\varkappa}_{q} +$$
$$+ \Gamma_{J'J''}\rho^{K}_{Q}\delta_{K\varkappa}\delta_{Qq} + \lambda^{\varkappa}_{q}\delta_{\varkappa 0}\delta_{q0}\,. \qquad (1б)$$

В этом уравнении ρ^{K}_{Q} и $\varphi^{\varkappa}_{q}$ есть ПМ возбужденного и основного состояний, с математической точки зрения являющиеся тензорами: ранг тензора $0 \leqslant K \leqslant 2J'$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 2J''$, а компонента $-K \leqslant Q \leqslant K$, $-\varkappa \leqslant q \leqslant \varkappa$, Γ_p -скорость поглощения света на переходе $J'' \to J'$, Γ_K, $\gamma_\varkappa$ -скорости релаксации соответствующих моментов, а $\Gamma_{J'J''}$ -скорости обратного спонтанного перехода. Ω и ω -частоты зеемановского расщепления верхнего и нижнего уровней под воздействием внешнего магнитного поля, $\lambda^{\varkappa}_{q}\delta_{\varkappa 0}\delta_{q0}$ характеризует изотропное восстановление заселенности нижнего уровня в результате столкновительных процессов,

$${}^{\varkappa}_{q}D^{\varkappa'}_{q'} = \frac{\Pi_{\varkappa'}}{\Pi_\varkappa}(-1)^{\Delta}\sum_{X}\Pi_X C^{X0}_{1\Delta 1-\Delta}\, C^{\varkappa b}_{X0\varkappa 0}\, C^{\varkappa q}_{Xq-q'\varkappa' q'}\, \Phi^{X}_{q-q'}\,. \qquad (2)$$

Здесь $\Pi_a = \sqrt{2a+1}$, $\Delta = J'-J''$, коэффициенты вида $C^{c\gamma}_{a\alpha b\beta}$ есть коэффициенты Клебша-Гордана, Φ^{X}_{ξ} -компоненты тензора, характеризующего поляризацию света накачки [5]

$$\Phi^{X}_{\xi} = \frac{1}{\Pi_X}\sum_{q_1 q_2}(-1)^{q_2} e_{q_1}(e_{q_2})^{*}\, C^{X\xi}_{1q_1 1-q_2}\,, \qquad (3)$$

e_q -круговые компоненты вектора поляризации света.

Учитывая эрмитовость матрицы плотности, можно показать, что

$$\rho^{K}_{-Q} = (-1)^{Q}(\rho^{K}_{Q})^{*};\quad \varphi^{\varkappa}_{-q} = (-1)^{q}(\varphi^{\varkappa}_{q})^{*};\quad \Phi^{X}_{\xi} = (-1)^{\xi}(\Phi^{X}_{\xi})^{*}\,. \qquad (4)$$

Для величин ${}^{\varkappa}_{q}D^{\varkappa'}_{q'}$ асимптотических уравнений, используя симметрию коэффициентов Клебша-Гордана и выражение (4), можно получить следующие свойства симметрии:

$${}^{\varkappa}_{q}D^{\varkappa'}_{q'} = (-1)^{q-q'}\big({}^{\varkappa}_{-q}D^{\varkappa'}_{-q'}\big)^{*} = \Big(\frac{\Pi_{\varkappa'}}{\Pi_\varkappa}\Big)^{2}\big({}^{\varkappa'}_{q'}D^{\varkappa}_{q}\big)^{*} = (-1)^{q-q'}\Big(\frac{\Pi_{\varkappa'}}{\Pi_\varkappa}\Big)^{2}\, {}^{\varkappa'}_{-q'}D^{\varkappa}_{-q}\,. \qquad (5)$$

Можно также показать, что ${}^{\varkappa}_{q}D^{\varkappa'}_{q'}=0$ при $|\varkappa-\varkappa'|>2$, а при возбуждении неполяризованным или линейно поляризованным светом вдобавок ${}^{\varkappa}_{q}D^{\varkappa'}_{q'}=0$ при $|\varkappa-\varkappa'|=1$.

Для интенсивности света, рассеянного на переходе $J'\to J''_1$ можно, используя асимптотические выражения 6-j символов, получить [I4]

$$I(\vec{e}')\sim(-1)^{\Delta}\sum_K \Pi_K C^{K0}_{1-\Delta 1\Delta}\sum_Q(-1)^Q f^K_Q\,\Phi^K_{-Q}(\vec{e}')\,. \tag{6}$$

(В работе [I4] знаки проекций в коэффициенте $C^{K0}_{1-\Delta 1\Delta}$ по вине автора в этом выражении указаны неверно).

3. Примеры расчета

I°. В качестве первого примера рассмотрим численное моделирование эффекта Ханле основного состояния двухатомных молекул [I5]. Суть эффекта заключается в том, что при взаимно ортогональном расположении направления распространения линейно поляризованного света, внешнего магнитного поля и направления наблюдения (ведется с конца $\vec{E}$ вектора) для величины степени поляризации флюоресценции с возбужденного уровня, определяемой как

$$P=\frac{I_{\parallel}-I_{\perp}}{I_{\parallel}+I_{\perp}}\,, \tag{7}$$

где $I_{\parallel}$ - интенсивность света, поляризованного параллельно внешнему магнитному полю $\vec{H}$, а $I_{\perp}$ - перпендикулярно, наблюдается её увеличение с ростом магнитного поля (рис. Iб). К описанному эффекту также примешивается эффект Ханле возбужденного состояния [6], вызывающий последующее уменьшение степени поляризации при дальнейшем увеличении магнитного поля. В системе уравнений (I) эффект Ханле проявляется как разрушение магнитным полем поперечных компонент ($Q, q\neq 0$) соответствующих ПМ.

Для интерпретации экспериментально полученных кривых Ханле [I5] система (I) нами решалась в [I0] для значений

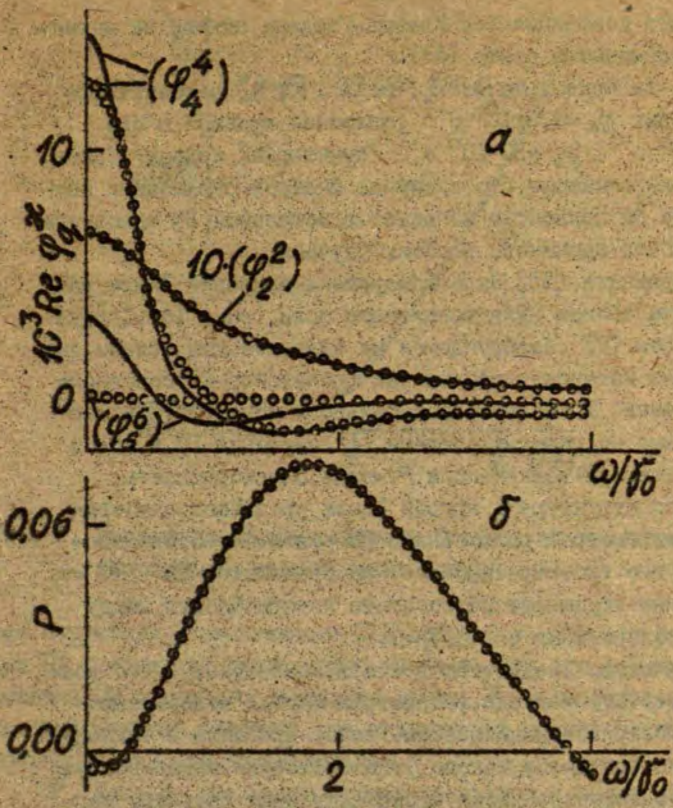


Рис. I. Действительные части ПМ различного ранга (а) и соответствующие сигналы Ханле (б).

параметров, имеющих место при возбуждении перехода (v''=I, J''=72)$X^1\Sigma_g^+ \rightarrow$($v'$=8, J'=72) $B^1\Pi_u$. He-Ne лазером (λ =6328 Å) в молекуле K_2, а именно $\Gamma_p=10^6$ c^{-1}, Γ_K =86,2$\cdot10^6$ c^{-1}, Ω =I,67$\cdot10^3$H c^{-1}, ω=I,04$\cdot10^2$H, c^{-1}, где H задано в гауссах. Так как эксперимент проводился при стационарном возбуждении, полагалось $\dot{f}_Q^K = \dot{\varphi}_q^{\varkappa}$=0. Было найдено, что, ввиду структуры системы уравнений, достаточно учесть ПМ ранга $\varkappa$, K $\leqslant$ 6, и решение для $f_Q^{K\leqslant 2}$ уже сходится (только эти ПМ ввиду свойств коэффициентов Клебша-Гордана влияют на интенсивность рассеянного света (6)).

На рис. Iа приведены $\mathrm{Re}\,\varphi^2_{\pm2}$, $\mathrm{Re}\,\varphi^4_{\pm4}$, $\mathrm{Re}\,\varphi^6_{\pm6}$, рассчитанные при одинаковых $\gamma_{\varkappa}=0{,}3\cdot10^6$ c^{-1} (сплошная кривая) и при $\gamma_{\varkappa<6}=0{,}3\cdot10^6$ c^{-1}, $\gamma_6=30\cdot10^6$ c^{-1} (пунктирная кривая). Такое моделирование показало, что в случае быстрой релаксации шестого момента он полностью исчезает, а остальные ПМ основного состояния почти одинаковы в обоих случаях.

В эксперименте [15] была обнаружена в кривой Ханле узкая структура вблизи нуля магнитного поля (рис. Iб). Следуя авторам работы [9], базирующимся на классической модели, она была ошибочно интерпретирована как проявление ПМ основного состояния ранга $\varkappa=4$ (гексадекапольного момента). Подставляя полученные из решения системы (I) значения ПМ в (6) и переходя к степени поляризации P, можно, однако, увидеть (рис. Iб), что структура в кривой Ханле пропадает одновременно с более быстрой релаксацией ПМ ранга $\varkappa=6$. Следовательно, ее нужно интерпретировать как проявление ПМ $\varkappa=6$, что однозначно указывает на создание когерентности между магнитными подуровнями с $\Delta M_J=6$.

2^0. В качестве следующего примера, демонстрирующего возможности развитого подхода, рассмотрим случай возбуждения циркулярно поляризованным светом. Расчет проведен в традиционной для экспериментов такого типа геометрии, когда возбуждающий свет распространяется перпендикулярно внешнему магнитному полю $\vec{H}$ и поляризован, скажем для определенности, по правому кругу. Наблюдение ведется с конца возбуждающего луча. Определим степень циркулярности как

$$C=\frac{I_1-I_2}{I_1+I_2}, \qquad (8)$$

где I_1 -интенсивность света, поляризованного так же, как и возбуждающий луч, а I_2 -по противоположному кругу. На рис.2 приведена зависимость C от магнитного поля при малых значениях поля, в случае существенно нелинейного возбуждения $\Gamma_p=100\cdot10^6$ c^{-1} (остальные параметры как в I^0). Как видно из рисунка, при малых H аналогично случаю I^0, наблюдается уз-

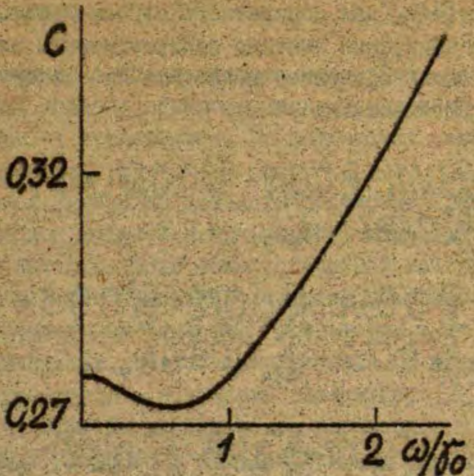


Рис. 2. Зависимость циркулярности C света от магнитного расщепления зеемановских подуровней.

кая структура в зависимости $C(H)$. Варьируя скорости релаксации ПМ различного ранга, можно показать, что эта структура вызвана ПМ основного состояния ранга $\varkappa = 3$ (октупольным моментом). Следует отметить, что октупольный момент экспериментально до сих пор не наблюдался.

3°. Наконец, последний пример относится к зависящим от времени решениям системы уравнений (I). Рассмотрим группу экспериментов [II, I6], где по кинетике переходного процесса в лазерно индуцированной флюоресценции (ЛИФ) исследовалась релаксация основного состояния двухатомных молекул. Суть экспериментов следующая: пусть до некоторого момента времени t_0 действует стационарное накачивающее световое поле $\Gamma_p \sim \gamma_\varkappa$. В момент t_0 оно выключается и остается слабое поле $\Gamma_p \ll \gamma_\varkappa$, которым зондируется нижний уровень [II, I6]. Дальнейшее рассмотрение будем вести по следующей схеме [I2]. В начале найдем ПМ ${}^{\varkappa}\varphi_q^{\varkappa}$ нижнего состояния в период действия накачивающего света. Аналитически это можно сделать, разлагая решение в ряд по степеням накачивающего поля. Приведем решение с точностью до членов $\sim(\Gamma_p/\gamma_\varkappa)^3$ для конкретного случая перехода Q типа ($\Delta=0$) при возбуждении линейно поляризованным светом (ось квантования вдоль $\vec{E}$, внешнее магнитное поле отсутствует). Отличные от нуля ПМ имеют вид

$$ {}^s\varphi^0_0=\Big[1-\frac{\Gamma_p}{\gamma_0}\Big(0{,}333-\frac{\Gamma_p}{\gamma_0}0{,}111-\frac{\Gamma_p}{\gamma_2}0{,}089+\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_0^2}0{,}037+ $$

$$ +\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_0\gamma_2}0{,}059+\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_2^2}0{,}047\Big)\Big]n_{v''J''}\,, \tag{9а} $$

$$ {}^s\varphi^2_0=-\frac{\Gamma_p}{\gamma_2}\Big(0{,}133-\frac{\Gamma_p}{\gamma_0}0{,}044-\frac{\Gamma_p}{\gamma_2}0{,}070+\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_0^2}0{,}015+ $$

$$ +\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_0\gamma_2}0{,}035+\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_2^2}0{,}037+\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_2\gamma_4}0{,}009\Big)n_{v''J''}\,, \tag{9б} $$

$$ {}^s\varphi^4_0=\frac{\Gamma_p}{\gamma_4}\Big(\frac{\Gamma_p}{\gamma_2}0{,}025-\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_0\gamma_2}0{,}008-\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_2^2}0{,}013-\frac{\Gamma_p^2}{\gamma_2\gamma_4}0{,}013\Big)n_{v''J''}. \tag{9в} $$

После выключения света накачки в момент t_0 ПМ ранга $\varkappa$ релаксируют экспоненциально со своими скоростями $\gamma_\varkappa$ к равновесным значениям.

Чтобы найти сигналы ЛИФ в период действия слабого зондирующего света при $t>t_0$, определим входящие в выражение для интенсивности света флуоресценции (6) ПМ f^K_Q путем решения системы (Iа). Во многих случаях, в частности в экспериментах [II, I6], выполняется условие $\Gamma_K \gg \Gamma_p$. Тогда система (I) квазистационарна, и эволюция управляется более медленными процессами для $\varphi^\varkappa_q$. Если сохранить для пробного луча ту же линейную поляризацию, что и для накачки, то уравнение (Iа) имеет точное решение

$$ f^0_0=\frac{1}{3}\Gamma_p\Gamma_0^{-1}\left(\varphi^0_0+2\varphi^2_0\right), \tag{I0а} $$

$$ f^2_0=\Gamma_p\Gamma_2^{-1}\Big(\frac{2}{15}\varphi^0_0+\frac{11}{21}\varphi^2_0+\frac{12}{35}\varphi^4_0\Big). \tag{I0б} $$

Здесь интересен тот факт, что в выражении (I0б) и, следовательно в кинетике сигнала ЛИФ при линейном отклике системы (слабое пробное поле), непосредственно проявляется ПМ основного состояния ранга $\varkappa=4$.

4. Заключение

В заключение следует сказать несколько слов о перспективах развития подхода асимптотических уравнений к решению задач,описывающих эксперименты по оптической накачке в различных их вариантах.

Во-первых,интересно провести сравнение классической и асимптотической моделей и при помощи этого сравнения углубить физическую интерпретацию асимптотической модели.Далее небезынтересно провести разложение матрицы плотности не по стандартным неприводимым тензорным операторам,а по реальным [17] и,получив реальные (вместо комплексных) ПМ,можно при переходе к асимптотике ожидать появления возможности их наглядной интерпретации.Также могут оказаться рассмотренными далеко не все возможные применения метода для интерпретации экспериментальных результатов.Например,в настоящее время еще ждут своего рассмотрения эксперименты по восстановлению ПМ основного состояния ранга $\varkappa = 4$ вследствие воздействия гармонически модулированного возбуждающего лазерного света [18] .

ЛИТЕРАТУРА

I. Happer W. Optical pumping.-Rev.Mod.Phys.,1972,vol.44, p.169-279.

2. Cohen-Tannoudji C. Optical pumping with lasers.-Preceedings of 4 th ICAP,Heidelberg,1975,p.589-614.

3. Fano U. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques.-Rev.Mod.Phys.,1957, vol.29,p.74-93.

4. Эдмондс А.Р. Угловые моменты в квантовой механике.- В кн.:Деформация атомных ядер.М.:ИИЛ,1958,с.305-351.

5. Дьяконов М.И. К теории резонансного рассеяния света в газе при наличии магнитного поля.-ЖЭТФ,1964,т.47,с.2213-2221.

6. Чайка М.П. Интерференция вырожденных атомных состояний.-Л.:изд.ЛГУ,1975.192 с.

7. Котликов Е.Н.,Кондратьева В.А. Влияние сильного электромагнитного поля на форму сигналов пересечения в нулевых магнитных полях.-Опт.и спектр.,1980,т.48,с.667-674.

8. Ferber R.S.,Okunevich A.I.,Shmit O.A.,Tamanis M.Ya. Lande factor measurements for $^{130}Te_2$ electronic ground state.-Chem.Phys.Lett.,1982,vol.90,p.478-480.

9. Ducloy M. Non-linear efects in optical pumping with lasers.I.General theory of the classical limit for levels of large angular moments.-J.Phys. B,1976,vol.9,p.357-381.

10. Аузиньш М.П.,Фербер Р.С. Проявление поляризационного момента шестого ранга в сигнале Ханле основного электронного состояния димеров.-Опт.и спектр.,1983,т.55,с.1105-1108.

11. Auzin'sh M.P.,Ferber R.S.,Pirags I.Ya. K_2 ground state relaxation studies from transient process kinetics.-J.Phys. B,1983,vol.16,p.2759-2771.

12. Аузиньш М.П.,Фербер Р.С. О проявлении релаксации поляризационных моментов основного состояния двухатомных молекул в кинетике переходного процесса.-Изв.АН ЛССР,Серия физ. и техн.наук,1984,№1,с.16-20.

13. Варшалович Д.А.,Москалев А.Н.,Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента.-Л.:Наука,1975.-439 с.

14. Аузиньш М.П. О решении уравнений движения поляризационных моментов для больших значений углового момента.-Изв. АН ЛССР,Серия физ.и техн.наук,1984,№1,с.9-15.

15. Ferber R.S.,Shmit O.A.,Tamanis M.Ya. Ground state Hanle efect of optically aligned diatomic moleсules Na_2 and K_2.-Chem.Phys.Lett.,1979,vol.61,p.441-444.

16. Аузиньш М.П.,Пирагс И.Я.,Фербер Р.С.,Шмит О.А. Прямое измерение скорости термализации основного состояния молекулы K_2.-Письма в ЖЭТФ,1980,т.31,с.589-592.

17. Fano U. Real representation of coordinate rotations.-J.Mat.Phys.,1960,vol.1,p.417-424.

18. Аузиньш М.П.,Фербер Р.С. Наблюдение резонанса квантовых биений между магнитными подуравнями с $\Delta M = 4$.-Письма в ЖЭТФ,1984,т.39 с.376-378.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ

Сборник научных трудов
(межвузовский)

Рецензенты: Коллектив преподавателей кафедры электродинамики и механики сплошных сред ЛГУ им. П.Стучки;
В.Гемст, доцент РПИ;
К.Вартукаптейнис, доцент ЛСХА.

Редакторы А.А.Буйкис, С.М.Рязанцева
Технический редактор А.Яковича
Корректор И.Белоде

Подписано к печати 27.09.85 ЯТ 05558 Ф/б 60х84/16.
Бумага № 3. 10,8 физ.печ.л. 10,0 усл.печ.л. 8,0 уч.-изд.л.
Тираж 300 экз. Зак. № 1223 Цена 1 р. 30 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, 226050 Рига, ул.Вейденбаума 5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 536.421.I:537.84

Булыгин Л.Л. РАСЧЕТ ДВУХФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА В СЛУЧАЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ КОНВЕКЦИИ МЕТОДОМ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ. – В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 3-23.

В работе предложена математическая модель аксиально-симметричного кристаллизатора. Разработана методика расчета магнитных и нестационарных тепловых и гидродинамических полей, основанная на методе вариационных неравенств, МКР и МКЭ. В уравнении теплопроводности учитывается конвективный перенос тепла и тепло кристаллизации. В качестве неизвестной функции используется индекс замерзания Фремона. Уравнения гидродинамики решаются по неявной схеме SIMPLE на шахматной сетке при переменной по объему вязкости. Движение в твердой фазе блокируется большим значением вязкости. Приведены численные решения модельной задачи. Ил. 4, табл. I, библиогр. II назв.

УДК 519.632

Земитис А.А. О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ. – В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 24-36.

Анализируются возможные подходы к решению задачи со свободной границей по определению развития магнитогидродинамических неустойчивостей зажатой капли магнитной жидкости. Соответствующая задача решается в эйлеровых переменных методом граничных интегральных уравнений. Полученные результаты сопоставляются с ранее полученными в лагранжевых переменных. Библиогр. 8 назв.

УДК 517.962.8:537.8II+621.365.5

Павлов С.И. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ТОКОВ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ОДНОРОДНЫХ ПРОВОДНИКОВ. – В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 37-46.

Рассматривается двухмерная задача по определению индукции магнитного поля, перпендикулярной плоскости, в которой протекают токи, пересекающие границу раздела проводников. Интегроинтерполяционным методом построены консервативные конечно-разностные схемы сквозного счета с учетом условий разрыва тангенциальных составляющих плотности тока (в том числе при наличии переходного электрического сопротивления) на границе контакта проводников. Методика иллюстрируется примерами расчетов электромагнитного поля в индукционной печи с холодным тиглем (для модели горизонтального сечения), а также в системе кондукционного подвода тока к расплаву с помощью погружного электрода. Ил. 3, библиогр. 4 назв.

11

УДК 537.84:519.63

Муйжниекс А.Р. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КОНДУКЦИОННОМ МГД-НАСОСЕ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 47-64.

Предложена двухмерная математическая модель кондукционного центробежного МГД-насоса (КЦН) в плоскости основного азимутального вращения, позволяющая исследовать влияние неосесимметричного характера внешнего магнитного поля, расположения токоподводящих электродов и отверстий для жидкости. Турбулентность моделируется введением эффективной турбулентной вязкости, а зависимость поля скорости от высоты введением эффективной высоты ячейки КЦН. Разработанная методика расчета основана на решении дифференциальных уравнений методом конечных разностей (используется метод SMAC). Ил. 7, библиогр. 7 назв.

УДК 519.6

Шмите М.З. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С КОНВЕКЦИЕЙ И ДИФФУЗИЕЙ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 65-75.

В работе дается несколько постановок для одной задачи подземной термогидродинамики с продольной конвекцией и поперечной диффузией в двухслойной среде. Строятся разностные схемы к этим постановкам, анализируются полученные численные результаты. Ил. 3, библиогр. 6 назв.

УДК 532.72

Аболтиньш А.Я., Яунроманс И.И. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ДИФФУЗИИ ИЗ ДАННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРОНИЦАЕМОСТИ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 76-8[illegible].

Рассматривается решение обратной задачи для вычисления коэффициента диффузии (постоянного и зависящего от концентрации). Выработан подход, позволяющий уточнить начальный момент эксперимента. Дается совместная обработка эксперимента "прорыва" и "откачки" при переменном коэффициенте диффузии, используя минимизацию квадратичного функционала. Табл. 2, библиогр. 6 назв.

УДК 536.24:621.313

Шнидере Л.Я. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЛОСКОЛИНЕЙНОМ ИНДУКЦИОННОМ МГД-НАСОСЕ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1985, с. 83-94.

Моделируются установившиеся тепловые режимы плосколинейного МГД-насоса (ПЛИН). Ставится и численно исследуется внутренняя задача теплопроводности в характерном элементе продольного сечения ПЛИН. Теплообмен с окружающей средой представляется в форме нелинейного закона Ньютона и описывается соответствующими параметрами конвективной и радиационной теплоотдачи. Теплоотдача от поверхности лобовых частей обмотки представляется эквивалентным стоком тепла. Представлены результаты расчета для разных режимов работы ПЛИН и определено влияние явного выделения подобласти прослойки пазовой изоляции на распределение температуры и величину максимальной температуры в расчетном элементе. Ил. 4, библиогр. 7 назв.

УДК 621.313:532.019.3

Агафонов Ю.П. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ НАСОСОВ ПРИ СТАРЕНИИ АКТИВНЫХ МАТЕРИАЛОВ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 95-98.

Излагается методика учета старения активных материалов на примере активного сопротивления обмоточного провода через интегральные характеристики плоского индукционного электромагнитного насоса. Получено изменение входного параметра - I_φ . С помощью коэффициентов связи определены наиболее информативные параметры: развиваемое давление P и активные потери - P_a . Дан метод различия от последствий, вызванных иными деградационными факторами. Табл. 2, библиогр. 4 назв.

УДК 539.4:539.2.678

Красников А.М. КИНЕТИКА НАКОПЛЕНИЯ ДЕФЕКТОВ В НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛАХ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 99-110.

Предложен метод учета микронеоднородностей (таких как области скопления дислокаций, микропримесей, усадочных перенапряжений и пр.) и их влияния на картину дисперсного накопления субмикротрещин (СМТ) в рамках ранее разработанной статистической кинетической модели. Приводятся расчеты для статистического и динамического нагружения, которые свидетельствуют о том, что хрупкие материалы в фазе диффузного накопления повреждений разрушаются подрастанием СМТ во взаимодействии с развивающимися соседями. В пределах точности эксперимента получено совпадение с результатами структурного анализа методом малоуглового рентгеновского рассеяния по накоплению СМТ в ориентированном капроне, приведенными в литературе. Ил. 5, табл. 1, библиогр. 10 назв.

УДК 629.7

Ярве Э.В. МЕТОДИКА РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕДАХ С ВЯЗКОУПРУГИМИ СЛОЯМИ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 111-121.

Предложен метод расчета перемещений и напряжений в многослойных балках с произвольным числом линейно-вязкоупругих ортотропных слоев. Решение полученной системы интегро-дифференциальных уравнений относительно перемещений сведено к последовательному интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений на малых промежутках времени. В основу сведения положено то, что при быстрой деформации в линейно-вязкоупругих средах приближенно выполняется закон Гука с мгновенными жесткостями. В качестве примера рассмотрено решение уравнения продольного изгиба вязкоупругого стержня. Получены зависимости прогиба от времени для разных времен релаксации. Ил. 1, табл. 1, библиогр. 2 назв.

УДК 539.374:534.13

Шведе А.И. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КВАДРАТНОЙ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 122-131.

Рассмотрена задача динамического нагружения квадратной свободно опертой жесткопластической пластины прямоугольным импульсом равномерно распределенной силы. Использовано условие текучести Мизеса. Решение получено из вариационного принципа. Для минимизации функционала разработан численный алгоритм, основанный на теории двойственности. Приведены распределения скоростей прогиба и жестких и пластических областей при нагрузках разной интенсивности и в разные моменты времени. Произведено сравнение с известными решениями, где используются другие условия текучести. Ил. 3, библиогр. 7 назв.

УДК 539.4:534.1

Варна Я.П., Раугулис М.А. ЯВЛЕНИЕ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА В СФЕРИЧЕСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1985, с. 132-143.

В результате различной зависимости семейств изгибных и мембранных частот от геометрических параметров оболочек при некоторых значениях параметров возможно совпадение какой-то мембранной и изгибной частоты. Исследуется взаимное искажение форм колебаний, обусловленное близостью частот двух семейств. Проводится анализ форм собственных осесимметричных колебаний для сферических и цилиндрических оболочек, полученных в результате численных экспериментов на ЭВМ. Установлены основные закономерности двухчастотного внутреннего резонанса. Ил. 6, библиогр. 5 назв.

УДК 515.1+517.98

Лиепиня И.И., Лиепиньш А.Х. РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ КЭННЭНА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ В СПЛОШНЫХ СРЕДАХ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 144-148.

В работе исследуется разрешимость уравнения Кэннэна, к которому сводятся математические модели многих физических явлений и процессов. Рассматривается случай, когда уравнение имеет вид $f(x)=x$, где отображение f удовлетворяет условиям, которые аналогичны некоторым широко используемым метрическим неравенствам. Библиогр. 2 назв.

УДК 539.184.28

Аузиньш М.П. РАСЧЕТ ОПТИЧЕСКОЙ НАКАЧКИ ДЛЯ ДВУХАТОМНЫХ МОЛЕКУЛ С БОЛЬШИМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ. - В кн.: Моделирование физических процессов в сплошных средах. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 149-158.

Приводится система линейных дифференциальных уравнений, описывающих процесс оптической накачки в случае объектов с большими угловыми моментами. При этом используется формализм поляризационных моментов матрицы плотности. Обсуждаются свойства симметрии полученных уравнений. В качестве примеров решения системы уравнений рассмотрены: во-первых, эксперимент по пересечению уровней в нулевом магнитном поле при линейно поляризованном возбуждающем свете (эффект Ханле), во-вторых, на основании расчета предложен эксперимент по наблюдению октупольного момента основного состояния двухатомных молекул при циркулярно поляризованном возбуждающем свете, в-третьих, с точки зрения релаксации поляризационных моментов рассмотрен эксперимент по наблюдению кинетики переходного процесса в основном состоянии двухатомных молекул при лазерно индуцированной флюоресценции. Ил. 2, библиогр. 18 назв.

1 р. 30 к.