Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1985

УДК 519.927

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений: Сборник научных трудов (межвузовский) /Отв. ред. Ю.А.Клоков. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1985. - 157 с.

Сборник содержит 15 научных статей, написанных представителями пяти вузов страны и одного научно-исследовательского института АН СССР. Статьи посвящены вопросам качественной теории нелинейных краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений таким, как существование и единственность решений, асимптотики и априорные оценки решений, методы численного решения конкретных прикладных задач.

Сборник предназначен для специалистов по краевым задачам обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для студентов и аспирантов по прикладной математике, занимающихся исследованиями практических задач, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Печатается по решению Издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

Н $\frac{20201-014у}{М812(11)-85}$ 12.85.1702050000

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.3-14.

УДК 517.927

А.И.Колосов

Харьковский институт инженеров коммунального строительства

О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$x^{(n)}=f_1(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)})+\beta\cdot f_2(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)}) \quad (n=2,3,\ldots), \tag{1}$$

$$x^{(s)}(t_s)=0 \quad (s=\overline{0,n-1};\ t_s\in\{0,1\}) \tag{2}$$

$$x^{(l)}(t)\geq 0\ (\leq 0)\ (0\leq t\leq 1;\ l=\overline{p+1,n-1};\ p\in\{\overline{0,n-2}\},\ t_p=1), \tag{3}$$

где $\beta\geq 0$ - вещественный параметр, p задано, знак $x^{(l)}(l=\overline{p+1,n-1})$ задан.

Под решением задачи (I)-(3) будем понимать пару $(x_\beta(t),\beta)\in\tilde{C}_{n,p}]0,1[\times[0,\infty[$, где $\tilde{C}_{n,p}]0,\tau[\equiv C^{(n-1)}[0,\tau]\cap C^{(n)}]0,\tau[\bigcap\limits_{k=p}^{n-2}M^{(k)}]0,\tau[$, $M^{(k)}]0,\tau[$ - множество выпуклых (вогнутых) K-го порядка на $]0,\tau[$ функций, т.е. таких функций, $(K+1)$-я производная которых неотрицательна (неположительна) на $]0,\tau[$.

$$\|(x_\beta,\beta)\|=\|x_\beta\|_{C^{(n-1)}}+|\beta|.$$

Пусть $(x_{\bar\beta},\bar\beta)$ - некоторое решение задачи (I)-(3). Пара $(x_{\bar\beta},\bar\beta)$ называется точкой ветвления задачи (I)-(3) [I], если для любых $\delta>0$ и $\varepsilon>0$ найдется такое β, что

$|\beta-\bar{\beta}|<\delta$, которому отвечают по крайней мере два решения задачи (I)-(3), лежащие в ε-окрестности $(x_{\bar{\beta}},\bar{\beta})$.

Пусть $f_i(t,0,\ldots,0)=0$ $(i=1,2)$ для любого $t>0$. Число $\bar{\beta}$ называется точкой бифуркации задачи (I)-(3), если $(0,\bar{\beta})$ является точкой ветвления этой задачи.

В данной работе выясним некоторые условия, при которых задача (I)-(3) имеет точки ветвления. При этом будем предполагать, что $f_1(t,0,\ldots,0)=0$ для любого $t>0$.

Пусть $F_\beta(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)}) \equiv$

$$\equiv f_1(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)})+\beta f_2(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)}).$$

Перейдем от задачи (I)-(3) к следующей задаче на незакрепленном отрезке

$$x^{(n)}=F_\beta(t,x,x',\ldots,x^{(n-1)}) \quad (n=2,3,\ldots), \tag{I}$$

$$\begin{aligned} &x^{(s)}(t_s)=0 \ (s=\overline{0,n-1};\ t_s\in\{0,t_*\},\ 0<t_*<\infty), \\ &x^{(p)}(0)=\alpha\neq 0 \quad (p\in\{\overline{0,n-2}\};\ t_p=t_*) \\ &x^{(l)}(t)>0\ (<0)\ (0<t<t_*;\ l=\overline{p+1,n-1}). \end{aligned} \tag{4}$$

В этой задаче $\alpha\in]-\infty,\infty[$, $\beta\in[0,\infty[$ - заданы, $t_*=t_*(\alpha,\beta)$ - подлежит определению.

Под решением задачи (I),(4) будем понимать пару $(x(t),t_*)\in\tilde{C}_{n,p}]0,t_*[\times]0,\infty[$.

Выясним, имеет ли задача (I),(4) решения и имеются ли соответствующие им решения задачи (I)-(3).

Для этого преобразуем задачу (I),(4) к некоторой системе интегральных уравнений.

Пусть $S=\{(x(t),\tau)\in\tilde{C}_{n,p}]0,\tau[\times]0,\infty[\ |$

$x^{(s)}(t_s)=0\ (s=\overline{0,n-1};\ t_s\in\{0,\tau\});\ x^{(p)}(0)=\alpha,$

$(p\in\{\overline{0,n-2}\},\ t_p=\tau);\ x^{(l)}(t)>0(<0)\ (0<t<\tau,$

$l=\overline{p+1,n-1})\}.$

$$Q=\{\varphi(z)=\{\varphi_1(z),\dots,\varphi_{n-p-1}(z)\}\,|\,\varphi_j(z)\in C^{(1)}[0,\alpha],$$
$$(j=\overline{1,n-p-2}),\ \varphi_{n-p-1}(z)\in C[0,\alpha]\cap C^{(1)}]0,\alpha[,$$
$$\varphi(z)>0\ (z\in]0,\alpha[),\ \varphi_m^{K_m}(c_{p+m})=0,\ K_m=\frac{m}{n-p},$$
$$(m=\overline{1,n-p-1}),\ C_s=x^{(p)}(t_s)\ (s=\overline{0,n-1}),$$
$$\varphi_1^{-K_1}\in L[0,\alpha]\}.$$

Здесь $]0,\alpha[\equiv\{z=\gamma\alpha,\ 0<\gamma<1\}$.

Упорядоченность в Q понимается в обычном смысле: $\varphi^1\leqslant\varphi^2$, если $\varphi_m^1\leqslant\varphi_m^2$ $(m=\overline{1,n-p-1})$.

Рассмотрим оператор $\Phi: S\xrightarrow{HA}Q$:

$$(\Phi(x,\tau))(\cdot)\equiv\{|x^{(p+1)}(\chi(\cdot))|^{\frac{1}{K_1}},\dots,|x^{(n-1)}(\chi(\cdot))|^{\frac{1}{K_{n-p-1}}}\},$$

где $\chi:[0,\alpha]\to[0,\tau]$ – отображение, обратное к $x^{(p)}:[0,\tau]\to[0,\alpha]$.

Существует обратный к Φ оператор $\Phi^{-1}:Q\xrightarrow{HA}S$ и он имеет вид

$$\Phi^{-1}\varphi=(x,\tau)\equiv\{x[\varphi],\dots,x^{(n-1)}[\varphi],\ t[\varphi],\tau\},$$

где $(x^{(p+m)}[\varphi])(z)\equiv\operatorname{sgn}x^{(p+m)}\cdot\varphi_m^{K_m}(z)$

$$(m=\overline{1,n-p-1}),$$

$$(x^{(r)}[\varphi])(z)\equiv\operatorname{sgn}x^{(p+1)}\cdot\int_{c_r}^{z}\varphi_1^{-K_1}(\omega)(x^{(r+1)}[\varphi])(\omega)d\omega$$
$$(c_r=x^{(p)}(t_r),\ r=\overline{0,p}),\qquad(5)$$

$$(t[\varphi])(z)\equiv\operatorname{sgn}x^{(p+1)}\cdot\int_{\alpha}^{z}\varphi_1^{-K_1}(\omega)d\omega,$$

$$\tau=\lim_{z\to0}(t[\varphi])(z).$$

Оператор Φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами S и Q.

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\varphi_j(z) = \operatorname{sgn} x^{(p+j)} \cdot \operatorname{sgn} x^{(p+j+1)} \cdot \frac{1}{K_j} \int_{C_{p+j}}^{z} \varphi_j^{1-K_j}(\omega) \cdot \varphi_{j+1}^{K_j+1}(\omega) \cdot dt[\varphi_1] \tag{6}$$

$$(j = \overline{1, n-p-2}),$$

$$\varphi_{n-p-1}(z) = \operatorname{sgn} x^{(n-1)} \frac{1}{K_{n-p-1}} \cdot \int_{C_{n-1}}^{z} \varphi_{n-p-1}^{1-K_{n-p-1}}(\omega)(F_\beta[\varphi])(\omega)\, dt[\varphi_1].$$

Здесь $F_\beta[\varphi] \equiv f_1[\varphi] + \beta \cdot f_2[\varphi]$,

$$f_i[\varphi] \equiv f_i(t[\varphi], x[\varphi], \ldots, x^{(n-1)}[\varphi]) \quad (i=1,2).$$

В дальнейшем для краткости систему интегральных уравнений (6) будем записывать в виде $\varphi = \Gamma(\varphi; \beta)$, где оператор $\Gamma(\varphi; \beta)$ определен правой частью системы.

Будем говорить, что два операторных уравнения эквивалентны, если между множествами их решений установлена биекция.

Л е м м а I. Дифференциальное уравнение (I) на множестве S эквивалентно системе интегральных уравнений (6) на множестве Q.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно проверить, что каждому решению $\varphi \in Q$ системы (6) отвечает решение $(x, t_*) = \Phi^{-1}\varphi$ задачи (I),(4) и каждому решению $(x, t_*) \in S$ задачи (I),(4) отвечает решение системы (6) $\varphi = \Phi(x, t_*)$.

А так как отображение Φ – биекция между S и Q, то, действительно, уравнение (I) на множестве S эквивалентно системе (6) на множестве Q. Лемма доказана.

Пусть $\Omega = \{(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in]0, \infty[\times R^n :$

$y_q \in R^1 (q = \overline{0, p-1}),\ y_p \in]0, a[,\ y_l \cdot \operatorname{sgn} x^{(l)} > 0$

$(l=\overline{p+1,n-1})\}$.

В дальнейшем полагаем, что для любого $\gamma>0$ в области Ω

$$f_1(\gamma^{-1}\cdot t,\dots,\gamma^{s-p}\cdot y_s,\dots)\equiv\gamma^{n-p}\cdot f_1(t,\dots,y_s,\dots),$$

$$f_2(\gamma^{-1}\cdot t,\dots,\gamma^{s-p}\cdot y_s,\dots)\equiv f_2(t,\dots,y_s,\dots), \qquad (7)$$

$$(s=\overline{0,n-1}).$$

Л е м м а 2. Пусть функции $f_i(t,y_0,\dots,y_{n-1})$ $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям однородности (7). Тогда для любого $\beta>0$

$$f_1[\beta\varphi]=\beta f_1[\varphi],\quad f_2[\beta\varphi]=f_2[\varphi].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\gamma=\beta^{\frac{1}{n-p}}$, тогда из (7) имеем

$$f_1(\beta^{-\frac{1}{n-p}}t,\dots,\beta^{\frac{s-p}{n-p}}y_s,\dots)=\beta\cdot f_1(t,\dots,y_s,\dots).$$

Так как $K_m=\dfrac{m}{n-p}$, то

$$f_1(\beta^{-K_1}t,\dots,\beta^{(s-p)K_1}\cdot y_s,\dots)=\beta\cdot f_1(t,\dots,y_s,\dots).$$

Из соотношений (5) имеем

$$t[\beta\varphi]=\beta^{-K_1}t[\varphi],\ x^{(s)}[\beta\varphi]=\beta^{(s-p)K_1}x^{(s)}[\varphi],$$

$$(s=\overline{0,n-1}).$$

Следовательно, $f_1[\beta\varphi]=\beta f_1[\varphi]$.
Аналогичным образом доказывается, что $f_2[\beta\varphi]=f_2[\varphi]$.
Лемма доказана.

Положим $\varphi(z)=\beta\Psi(z)$ $\varphi\in Q$, $\beta>0$. Очевидно, если $\varphi\in Q$, то и $\Psi\in Q$. Подставим такое $\varphi(z)$ в систему (6). Так как функции $f_1(t,y_0,\dots,y_{n-1})$ и $f_2(t,y_0,\dots,y_{n-1})$ удовлетворяют условию (7), а кроме того, $K_m=m\cdot(n-p)^{-1}$ $(m=\overline{1,n-p-1})$, то система (6) преобразуется в следующую систему интегральных уравнений

$$\Psi=\Gamma(\Psi;1). \qquad (8)$$

Тем самым справедливо следующее утверждение .

Л е м м а 3. Система интегральных уравнений (8) не зависит от параметра β , входящего в дифференциальное уравнение (I).

Т е о р е м а I. Если для некоторого $\alpha \neq 0$ система интегральных уравнений (8) имеет решение $\psi \in Q$, то задача (I)-(3) имеет решение (x_β, β) , где

$$\beta^{K_1} = \left| \int_0^\alpha \psi_1^{-K_1}(\omega)\, d\omega \right|,$$

$$(x_\beta^{(p+m)}[\psi])(z) = \operatorname{sgn} x^{(p+m)} \cdot \beta^{K_m} \cdot \psi_m^{K_m}(z),$$

$$(m = 1, n-p-1)$$

$$(x_\beta^{(r)}[\psi])(z) = \operatorname{sgn} x^{(p+1)} \cdot \beta^{-K_1} \cdot \int_{c_r}^{z} \psi_1^{-K_1}(\omega) (x_\beta^{(r+1)}[\psi])(\omega)\, d\omega, \tag{9}$$

$$(c_r = x^{(p)}(t_r),\ r = \overline{0,p}),$$

$$(t_\beta[\psi])(z) = \operatorname{sgn} x^{(p+1)} \cdot \beta^{-K_1} \cdot \int_\alpha^z \psi_1^{-K_1}(\omega)\, d\omega .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (8) при некотором $\alpha \neq 0$ имеет решение $\psi \in Q$. Тогда $\forall \beta > 0$ $\varphi = \beta\psi$ будет решением системы (6).

Как следует из теоремы I, краевая задача (I),(4) имеет при этом решение $(x, \tau) = \Phi^{-1}\varphi$.

Решению задачи (I),(4) будет отвечать некоторое решение задачи (I)-(3), если $\tau = 1$. Очевидно, это будет иметь место, если

$$\left| \int_0^\alpha [\beta \psi_1(\omega)]^{-K_1} d\omega \right| = 1,$$

откуда

$$\beta^{K_1} = \left| \int_0^a \psi_1^{-K_1}(\omega)\,d\omega \right|.$$

Теорема доказана.

Если система (8) может быть разрешена конструктивно (существуют последовательности, сильно сходящиеся к решению), то в силу соотношений (9) и решение задачи (I)-(3) может быть найдено конструктивно. Если имеются двусторонние приближения решения системы (8), то двусторонние приближения есть и для решения задачи (I)-(3).

Построив график зависимости $\beta = \beta(\alpha)$, мы тем самым получим некоторую диаграмму, из которой, полагая $\beta = const$ легко определить количество решений задачи (I)-(3), отвечающих данному β, а также выяснить, имеются ли у задачи (I) -(3) точки ветвления.

Введем характеристику

$$\beta(0) = \lim_{a\to 0} \left| \int_0^a \psi_1^{-\frac{1}{n-p}}(\omega, a)\,d\omega \right|^{n-p}, \tag{10}$$

где $\psi(z, \alpha)$ - решение системы (8), в предположении, что указанный предел существует.

Так как система (8) может иметь несколько решений, то $\beta(0)$, вообще говоря, определено неоднозначно.

Л е м м а 4. Если $f_2(t, 0, \ldots, 0) \neq 0$ для $t > 0$, то $\beta(0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a = x^{(p)}(0)$, то для $x(t) \in S$ $a \to 0$ равносильно тому, что $\|x\| \to 0$. Подставив $x(t) \equiv 0$ в уравнение (I), получим $\beta(0) = 0$.

Т е о р е м а 2. Среди решений задачи (I)-(3) не может быть точек ветвления вида $(0, \bar\beta)$, где $\bar\beta \neq \beta(0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем доказывать от противного. Пусть $\bar\beta \neq \beta(0)$ и $(0, \bar\beta)$ - точка ветвления задачи (I)-(3). Тогда $\forall \delta, \varepsilon > 0$ имеется решение (x_β, β) задачи (I)-(3) такое, что $|\beta - \bar\beta| < \delta$ и $\|(x_\beta, \beta) - (0, \bar\beta)\| < \varepsilon$.

Отсюда $\|x_\beta\| < \varepsilon$, а т.к. $|\alpha| \le \|x_\beta\| < \varepsilon$, то $|\alpha| < \varepsilon$. Но тогда согласно соотношениям (9),(10) разность $|\beta - \beta(0)|$ может быть сделана сколь угодно малой, что противоречит условию $\bar\beta \neq \beta(0)$. Теорема доказана.

Налагая определенные ограничения на условия (2),(3), а также на поведение функции $F_\beta(t, y_0, \dots, y_{n-1})$ в области Ω, можно получить различные условия разрешимости задачи (1)-(3). Например, такие:

Пусть условия (3) имеют вид

$$x^{(u)}(t)\cdot x^{(u+1)}(t) \le 0 \quad (0 \le t \le 1;\ u = \overline{p+1, n-2}). \tag{11}$$

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены требования:

1) $n - p = 2; 3; 4$,

2) $t_{p+m} = t_*$ $(m = \overline{1, n-p-1})$,

3) $F_\beta(t, 0, \dots, 0) = 0$ $\forall t > 0,\ \beta \ge 0$, в области Ω

4) функция $F_1(t, y_0, \dots, y_{n-1})$ непрерывна в каждой точке области,

5) $y_{n-1}\cdot F_1(t, y_0, \dots, y_{n-1}) \le 0$,

6) существуют такие $A > 0$, $B > 0$, $\mu \ge \nu \ge 0$, что

$$A\cdot|y_p|^{\mu} \le \left| y_{p+1}^{-1}\cdot y_{n-1}^{\frac{1}{n-p-1}}\cdot F_1(t, y_0, \dots, y_{n-1})\right| \le B\cdot|y_p|^{\nu}, \quad \forall |y_p| \le 1,$$

$$\begin{aligned} &\text{где } \mu < 1 && \text{при } n-p=2 \\ &2\mu < 1 && \text{при } n-p=3 \\ &6\mu - 3\nu < 1 && \text{при } n-p=4. \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда $\beta = 0$ - точка бифуркации задачи (1),(2),(11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $F_\beta(t, 0, \dots, 0) = 0$ для любых $t > 0$ и $\beta \ge 0$, то, очевидно, $(0, \beta)$ - решение задачи (1)-(3).

Условия I,2,5,6 теоремы позволяют построить для оператора Γ инвариантный отрезок $<g,h> \equiv \{\psi | g \leq \psi \leq h\}$:

$$\Gamma(<g,h>) \subset <g,h>.$$

При этом $g=g(z)$ и не зависит от α. Тогда $A\psi \in <g,h>\ \psi_1 \geq g_1$ и

$$\Big|\int_0^a \psi_1^{-\kappa_1}(\omega,\alpha)d\omega\Big| \leq \Big|\int_0^a g_1^{-\kappa_1}(\omega)d\omega\Big| \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$$

Следовательно, в данном случае $\beta(0)=0$.

Нетрудно проверить, что множество $\Gamma(<g,h>)$ равностепенно непрерывно. Отсюда, согласно теореме Арцеля [2], Γ - компактный оператор. Непрерывность $F_1(t,y_0,\dots,y_{n-1})$ обеспечивает непрерывность оператора Γ на $<g,h>$. Но тогда, согласно принципу Шаудера [I], система (8) имеет на $<g,h>$ решение при любом $|\alpha| \leq 1$.

Но $\alpha \to 0$ равносильно тому, что $\beta \to 0$ и $\|x_\beta\| \to 0$.

Итак, выполнены все условия того, что $\beta = 0$ - точка бифуркации задачи (I),(2),(II).

Условия (I2) являются достаточными для того, чтобы $t_* < \infty$. Теорема доказана.

Как правило, рассматривается ветвление от решения, у которого $x_\beta(t) \equiv 0$. Но могут быть ветвления и от ненулёвых решений. Примером тому следующая задача.

В теории химических реакций, теории теплового взрыва рассматривается такая краевая задача

$$x'' = -\frac{x'}{t} - \beta\cdot f(x) \quad (\beta>0) \qquad \text{(I3)}$$

$$x'(0)=x(1)=0,\ x'(t)<0\ (0<t<1),$$

где $x(t)$ - безразмерная температура, а $\beta\cdot f(x)$ - некоторая "скорость реакции".

Очевидно, что задача (I3) относится к задачам вида (I)-(3). Легко проверить, что правая часть дифференциального уравнения этой задачи удовлетворяет условиям однородности (7). Система интегральных уравнений (8) в данном случае имеет вид

$$\psi(x)=(\Gamma\psi)(x)\equiv 2\int_x^a f(s)ds-2\int_x^a\psi^{1/2}(s)\Big[\int_s^a\frac{d\omega}{\psi^{1/2}(\omega)}\Big]^{-1}ds. \quad (14)$$

Легко видеть, что Γ - антимонотонный оператор на K-конусе неотрицательных функций в пространстве $C[0,a]$

Положим $P=\{a:g(0)>0\}$, где

$$g(x)=\int_x^a[2f(\omega)-f(a)]d\omega, \quad h(x)=f(a)(a-x).$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 4. Пусть $f(x)$ - положительная, не убывающая, непрерывная на $[0,a]$ функция.

Тогда множество тех $\beta>0$, при которых задача (I3) имеет решение, не пусто. $\beta=\beta(a)$ - непрерывная, однозначная функция $a\in P$, $\beta(0)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу положительности и монотонности функции $f(x)$ оператор Γ переводит $\langle g,h\rangle$ в себя. Пользуясь теоремой Арцеля, получаем компактность оператора Γ на $\langle g,h\rangle$. Непрерывность функции $f(x)$ обеспечивает непрерывность оператора Γ на $\langle g,h\rangle$.

Так как уравнение (I4) - интегральное уравнение типа Вольтерра с антимонотонным оператором, то уравнение (I4) не может иметь более одного решения в конусе K . Тогда уравнение (I4) при каждом $a\in P$ имеет единственное решение ψ_* на $\langle g,h\rangle$. Отсюда сразу же получаем, что $\beta=\beta(a)$ однозначная функция a . Непрерывность $\beta=\beta(a)$ следует из непрерывности ψ_* по a , которая в свою очередь следует из полной непрерывности оператора Γ по совокупности переменных ψ и a. Теорема доказана.

Так как оператор Γ - антимонотонный, то для ψ_* справедливы двусторонние приближения $\psi^1\leq\psi^3\leq\ldots\leq\psi_*\leq\ldots\leq\psi^2\leq\psi^1$, где $\psi^{d+1}=\Gamma\psi^d$, $(d=0,1,\ldots)$, $\psi^0=h$, $\psi^1=g$.

В теории теплового взрыва рассматривается задача

$$x''=-\frac{x'}{t}-\beta\cdot\exp x \quad (\beta>0),$$

$$x'(0)=x(1)=0, \quad x'(t)<0 \quad (0<t<1). \qquad (I5)$$

Имеется решение этой задачи [3]. Установлена зависимость $\beta=\beta(\alpha)$, из которой следует, что задача (I5) имеет два решения при каждом $0<\beta<2$, при $\beta=2$ задача (I5) имеет единственное решение, соответствующее критическому условию воспламенения, при $\beta>2$ задача решений не имеет.

Эти же результаты могут быть получены путем исследования интегрального уравнения (I4) на $\langle g,h\rangle$. Задача (I5) имеет единственную точку ветвления $(x_{\bar\beta},\bar\beta)$, где $\bar\beta=2$. При этом $(x_{\bar\beta},\bar\beta)$ - точка прекращения решений задачи (I5) [I]. В эту точку "втекают" два решения при $\beta\to\bar\beta-0$ и не выходит ни одного решения при $\beta>\bar\beta$. В окрестности $(x_{\bar\beta},\bar\beta)$ имеются две непрерывные ветви решений (одна конечной длины, другая - бесконечной длины).

В теории химических реакций рассматривается задача

$$x''=-\frac{x'}{t}-\beta\cdot exp\left(-\frac{1}{x+\sigma}\right) \quad (\beta>0,\ \sigma\geqslant 0)$$

$$x'(0)=x(1)=0 \quad x'(t)<0 \quad (0<t<1). \qquad (I6)$$

Эта задача исследовалась рядом авторов [4-6], которые доказали существование единственного решения задачи при $\beta>0$, $\sigma\geqslant 0{,}25$. Устанавливали и уточняли границы (по β), в которых задача (I6) имеет определенное число решений.

Задача (I6) удовлетворяет требованиям теоремы 4. Исследование уравнения (I4), численное его решение и построение диаграммы $\beta=\beta(\alpha)$ показывают, например, что при σ = 0,I25 задача (I6) имеет две точки ветвления (x_{β_1},β_1) и (x_{β_2},β_2), где II,I49 $<\beta_1<$ II,I54; I08,347 $<\beta_2<$ < I08,368. При этом получаем более точные границы, в которых задача (I6) имеет определенное число решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин Н.Я. и др. Функциональный анализ. Сер. Справочная математическая библиотека .-М.: Наука , 1964.-424 с.
2. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.-М.: Наука , 1964.-272 с.
3. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике.-М.: Наука , 1967.-491 с.
4. Parter S.V. SIAM J.Appl.Math., 1974, 26, N 4, pp.687-716.
5. Parter S.V., Stein M.L., Stein P.R. Studies in Appl. Math., 1975,54, N 4, pp.293-314.
6. Williams L.R., Leggett R.W., J.Math.Anal.and Appl., 1979, 69, N 1, pp.180-193.

Поступила 15.5.84.

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.15–28

УДК 517.5

А.И.Звягинцев
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НОРМ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Настоящая работа посвящена экстремальным задачам, решение которых позволяет получать наилучшие априорные оценки производных решения дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений при наличии априорной оценки самого решения.

На протяжении всего изложения статьи считаем, что $n \in \{2,3,\dots\}$, $k \in \{1,\dots,n-1\}$, $0<\ell<\infty$, $I=[0,\ell]$ $W^n_\infty(I)$ – пространство функций, имеющих на I абсолютно непрерывную производную порядка $n-1$ и n-ую производную из $L_\infty(I)$, а для $f \in W^n_\infty(I)$ норма

$$\|f^{(i)}\|_I = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in I} |f^{(i)}(t)|, \quad i=0,1,\dots,n.$$

Определение I. Для заданных неотрицательных чисел M_0, M_k, M_n набор (ℓ, M_0, M_k, M_n) будем называть допустимым, если существует функция $f \in W^n_\infty(I)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\|f\|_I = M_0, \quad \|f^{(k)}\|_I = M_k, \quad \|f^{(n)}\|_I = M_n. \tag{I}$$

Будем говорить, что функция $f(t)$ соответствует набору (ℓ, M_0, M_k, M_n), если $f \in W^n_\infty(I)$ и для нее справедливо (I). Через D обозначим множество всех допустимых наборов.

Рассмотрим задачу А.Н.Колмогорова, которая в терминах допустимых наборов формулируется следующим образом: какие условия необходимо и достаточно наложить на неотрицательные числа M_0, M_k, M_n , чтобы $(\ell, M_0, M_k, M_n) \in D$.

Сразу отметим, что случай равенства одного из чисел M_0, M_k, M_n нулю неинтересен.

Т е о р е м а I. а) $(\ell, 0, M_k, M_n) \in D$ тогда и только тогда, когда $M_k = M_n = 0$;

б) $(\ell, M_0, 0, M_n) \in D$ тогда и только тогда, когда $M_n = 0$;

в) $(\ell, M_0, M_k, 0) \in D$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$M_k \leq 2^k \ell^{-k} M_0 T_{n-1}^{(k)}(1). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения а) и б) тривиальны. В утверждении в), если $(\ell, M_0, M_k, 0) \in D$, то в силу теоремы В.А.Маркова [I] получаем неравенство (2). Пусть теперь справедливо (2). Тогда для функции

$$f(t) = \frac{\ell^k M_k}{2^k T_{n-1}^{(k)}(1)} \left(T_{n-1}(2\ell^{-1}t - 1) - 1 \right) + M_0$$

имеем $\|f\|_I = M_0$, $\|f^{(k)}\|_I = M_k$, $\|f^{(n)}\|_I = 0$, т.е. набор $(\ell, M_0, M_k, 0)$ допустимый. Теорема доказана.

Рассматривая наряду с функцией $f(t)$, удовлетворяющей равенствам (I), трансформированную функцию $\alpha f(\beta t)$, получим очевидную лемму.

Л е м м а I. Если $(\ell, M_0, M_k, M_n) \in D$, то для любых $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ $(\beta^{-1}\ell, \alpha M_0, \alpha\beta^k M_k, \alpha\beta^n M_n) \in D$.

Т е о р е м а 2. Пусть $(\ell, M_0, M_k, M_n) \in D$ и $0 < \ell' \leq \ell$, $M_0' \geq M_0 > 0$, $0 < M_k' \leq M_k$, $M_n' \geq M_n \geq 0$. Тогда $(\ell', M_0', M_k', M_n') \in D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(t)$ соответствует набору (ℓ, M_0, M_k, M_n) . Обозначим через $t_0 \in I$ точку, в которой $f^{(k)}(t)$ принимает одно из значений $\pm M_k$, и выберем отрезок $[\sigma, \sigma + \ell'] \subset I$ таким, чтобы $t_0 \in [\sigma, \sigma + \ell']$. Тогда для функции $g(t) = f(t + \sigma)$ имеем

$$\|g\|_{I'} \leq M_0, \ \|g^{(k)}\|_{I'} = M_k, \ \|g^{(n)}\|_{I'} \leq M_n,$$

где $\mathcal{J}=[0,\ell']$.

Разберем случай, когда $M_n>0$ или $M_n=0$ и $|g^{(k)}(t)|\neq M_k$ для $t\in\mathcal{J}$. Ясно, что найдется точка $\tau\in(0,\ell')$, в которой $|g(\tau)|<M_0$ и $|g^{(k)}(\tau)|<M_k$. В силу непрерывности $g(t)$ и $g^{(k)}(t)$ существует отрезок $[\tau,\tau+\delta]\subset\subset(0,\ell')$, на котором выполняются неравенства $|g(t)|<<M_0$ и $|g^{(k)}(t)|<M_k$. Возьмем $\varepsilon>0$ таким, чтобы $|g(t)|+\varepsilon<M_0$, $|g^{(k)}(t)|+\varepsilon<M_k$ при $t\in[\tau,\tau+\delta]$, и выберем $\delta_0\in[0,\delta]$, для которого имеют место неравенства

$$2\gamma M_n'\delta_0^n<\varepsilon n!\,,\quad 2\gamma M_n' k!\,\delta_0^{n-k}\sum_{m=0}^{k}C_{n+1}^m C_n^{k-m}<\varepsilon n!\,, \qquad (3)$$

где

$$\gamma=\frac{M_k}{M_k'}\geqslant 1.$$

Для полинома

$$p_\lambda(t)=\frac{\lambda}{n!}(\tau+\delta_0-t)^{n+1}(t-\tau)^n$$

по формуле Лейбница получаем

$$p_\lambda^{(i)}(t)=\lambda\frac{i!}{n!}\sum_{m=0}^{i}(-1)^m C_{n+1}^m C_n^{i-m}(\tau+\delta_0-t)^{n+1-m}(t-\tau)^{n-i+m},$$

где $i=0,1,\dots,n$, а $\lambda\in R$ определим ниже. Введем финитную функцию класса $C_{n-1}(R)$

$$h_\lambda(t)=\begin{cases} p_\lambda(t)\,, & t\in[\tau,\tau+\delta_0],\\ 0\,, & t\notin[\tau,\tau+\delta_0].\end{cases}$$

При каждом фиксированном $t\in(\tau,\tau+\delta_0)$, где $p_\lambda^{(n)}(t)$ не обращается в нуль, $h_\lambda^{(n)}(t)$ является монотонной и непрерывной функцией от λ. Поэтому найдется такое $\lambda_0\in R$, что $\|g^{(n)}+h_{\lambda_0}^{(n)}\|_{\mathcal{J}}=\gamma M_n'$.

Так как

$$|\lambda_0|\delta_0^{n+1}=|h_{\lambda_0}^{(n)}(\tau+0)|\le\|h_{\lambda_0}^{(n)}\|_\gamma\le\|g^{(n)}+h_{\lambda_0}^{(n)}\|_\gamma+\|g^{(n)}\|_\gamma\le 2\gamma M_n',$$

то из (3) вытекает

$$\|h_{\lambda_0}\|_\gamma\le\frac{|\lambda_0|}{n!}\delta_0^{2n+1}<\varepsilon,$$
$$\|h_{\lambda_0}^{(\kappa)}\|_\gamma\le|\lambda_0|\frac{\kappa!}{n!}\delta_0^{2n+1-\kappa}\sum_{m=0}^{\kappa}C_{n+1}^{m}C_n^{\kappa-m}<\varepsilon. \tag{4}$$

Следовательно, для функции $x(t)=g(t)+h_{\lambda_0}(t)$ имеем

$$\|x\|_\gamma<M_0,\quad \|x^{(\kappa)}\|_\gamma=M_\kappa,\quad \|x^{(n)}\|_\gamma=\gamma M_n'. \tag{5}$$

Если $M_n=0$ и $|g^{(\kappa)}(t)|\equiv M_\kappa$, то, не теряя общности, считаем $g^{(\kappa)}(t)\equiv M_\kappa$ (случай $g^{(\kappa)}(t)\equiv -M_\kappa$ аналогичен). Так как $g(t)$ является полиномом степени κ, то имеются отрезок $[\tau,\tau+\delta]\subset(0,\ell')$ и $\varepsilon>0$ такие, что $\varepsilon<M_\kappa$ и $|g(t)|+\varepsilon<M_0$ для $t\in[\tau,\tau+\delta]$. Повторяя предыдущие рассуждения, построим финитную функцию $h_{\lambda_0}(t)$, для которой справедливы оценки (4) и $\|h_{\lambda_0}^{(n)}\|_\gamma=\gamma M_n'$.

Пусть $\tau_0\in[\tau,\tau+\delta]$ точка, в которой $|h_{\lambda_0}^{(\kappa)}(\tau_0)|=\|h_{\lambda_0}^{(\kappa)}\|_\gamma$. Тогда для функции

$$x(t)=\left(1-\frac{\|h_{\lambda_0}^{(\kappa)}\|_\gamma}{M_\kappa}\right)g(t)+h_{\lambda_0}(t)\,\mathrm{sign}\,h_{\lambda_0}^{(\kappa)}(\tau_0)$$

выполняются соотношения (5).

Определим теперь функцию

$$y_\omega(t)=x(t)+\omega,$$

где $\omega\in R$. Ясно, что можно выбрать такое ω_0, для которого $\|y_{\omega_0}\|_\gamma=\gamma M_0'$. Полученная функция $y_{\omega_0}(t)$ соответствует набору $(\ell',\gamma M_0',M_\kappa,\gamma M_n')$. Взяв $\beta=1$, $\alpha=\gamma^{-1}=M_\kappa'/M_\kappa$, по лемме I заключаем $(\ell',M_0',M_\kappa',M_n')\in D$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е I. Множество D связное.

Доказательство. Пусть $(l', M_0', M_k', M_n') \in \mathcal{D}$ и $(l'', M_0'', M_k'', M_n'') \in \mathcal{D}$. Обозначим

$$\underline{l} = \min\{l', l''\}, \qquad \bar{l} = \max\{l', l''\},$$
$$\underline{M}_0 = \min\{M_0', M_0''\}, \qquad \bar{M}_0 = \max\{M_0', M_0''\},$$
$$\underline{M}_k = \min\{M_k', M_k''\}, \qquad \bar{M}_k = \max\{M_k', M_k''\},$$
$$\underline{M}_n = \min\{M_n', M_n''\}, \qquad \bar{M}_n = \max\{M_n', M_n''\}.$$

По теореме 2 $(l, M_0, M_k, M_n) \in D$ для любых $l \in [\underline{l}, \bar{l}]$, $M_0 \in [\underline{M}_0, \bar{M}_0]$, $M_k \in [\underline{M}_k, \bar{M}_k]$, $M_n \in [\underline{M}_n, \bar{M}_n]$, откуда вытекает связность D. Что требовалось доказать.

Рассмотрим следующие вариационные задачи: Даны числа $M_0, M_k > 0$, $M_n \geqslant 0$.

Задача $\tilde{A}$. Найти

$$\tilde{\mu}_0 = \inf\{\|f\|_I : f \in W_\infty^n(I),\ \|f^{(k)}\|_I \geqslant M_k,\ \|f^{(n)}\|_I \leqslant M_n\}.$$

Задача $\tilde{B}$. Найти

$$\tilde{\mu}_k = \sup\{\|f^{(k)}\|_I : f \in W_\infty^n(I),\ \|f\|_I \leqslant M_0,\ \|f^{(n)}\|_I \leqslant M_n\}.$$

Задача $\tilde{C}$. Найти

$$\tilde{\mu}_n = \inf\{\|f^{(n)}\|_I : f \in W_\infty^n(I),\ \|f\|_I \leqslant M_0,\ \|f^{(k)}\|_I \geqslant M_k\}.$$

Известно (см. В.Н.Габушин [2]), что в задачах $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ существуют экстремальные функции, то есть функции из пространства $W_\infty^n(I)$, для которых минимизируемый (в задачах $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$) или максимизируемый (в задаче $\tilde{B}$) функционал достигает соответственно нижней или верхней грани.

Вместо задач $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ будем рассматривать эквивалентные им задачи: Даны числа $M_0, M_k > 0$, $M_n \geqslant 0$.

Задача A. Найти

$$\mu_0 = \inf\{\|f\|_I : f \in W_\infty^n(I),\ \|f^{(k)}\|_I = M_k,\ \|f^{(n)}\|_I = M_n\}.$$

Задача B. Найти

$$\mu_k = \sup\{\|f^{(k)}\|_I : f \in W^n_\infty(I),\ \|f\|_I = M_0,\ \|f^{(n)}\|_I = M_n\}.$$

Задача C. Найти

$$\mu_n = \inf\{\|f^{(n)}\|_I : f \in W^n_\infty(I),\ \|f\|_I = M_0,\ \|f^{(k)}\|_I = M_k\}.$$

Докажем, что $\tilde{\mu}_0 = \mu_0$. Очевидно, что $\tilde{\mu}_0$ не превосходит μ_0. Предположим $\tilde{\mu}_0 < \mu_0$. Обозначим через $f_0(t)$ экстремальную функцию в задаче A, получим допустимый набор $(\ell, \tilde{\mu}_0, \|f_0^{(k)}\|_I, \|f_0^{(n)}\|_I)$. Так как $\|f_0^{(k)}\|_I \geqslant M_k$ и $\|f_0^{(n)}\|_I \leqslant M_n$, то из теоремы 2 следует, что $(\ell, \tilde{\mu}_0, M_k, M_n) \in D$. Но тогда $\tilde{\mu}_0 \geqslant \mu_0$, а это противоречит предположению.

Аналогично доказываются равенства $\tilde{\mu}_k = \mu_k$, $\tilde{\mu}_n = \mu_n$. В дальнейшем везде полагаем, что μ_0, μ_k, μ_n, определенные в задачах A,B,C числа.

Так как для любых $M_0, M_k > 0, M_n \geqslant 0$ в задачах A, B,C существуют экстремальные функции, то наборы (ℓ, μ_0, M_k, M_n), (ℓ, M_0, μ_k, M_n), (ℓ, M_0, M_k, μ_n) допустимые и в дальнейшем будут называться экстремальными.

Т е о р е м а 3. Пусть $M_0, M_k > 0, M_n \geqslant 0$.

1) $(\ell, M_0, M_k, M_n) \in D$ тогда и только тогда, когда $M_0 \geqslant \mu_0$;
2) $(\ell, M_0, M_k, M_n) \in D$ тогда и только тогда, когда $M_k \leqslant \mu_k$;
3) $(\ell, M_0, M_k, M_n) \in D$ тогда и только тогда, когда $M_n \geqslant \mu_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как в задачах A,B,C экстремальные функции существуют для любых $\ell, M_0, M_k > 0$, $M_n \geqslant 0$, то наборы (ℓ, μ_0, M_k, M_n), (ℓ, M_0, μ_k, M_n), (ℓ, M_0, M_k, μ_n) допустимые. Используя теорему 2 и определения величин μ_0, μ_k, μ_n, заканчиваем доказательство теоремы.

Таким образом, решение задачи А.Н.Колмогорова сводится к решению одной из задач A,B,C.

Покажем, что задачи A,B,C эквивалентны между собой. Для этого потребуется следующая

Л е м м а 2. Пусть $M_0, M_k, M_n > 0$, $(\ell, M_0, M_k, M_n) \in D$. и выполнено одно из неравенств

$$M_0 > \mu_0, \tag{6}$$

$$M_k < \mu_k, \tag{7}$$

$$M_n > \mu_n. \tag{8}$$

Тогда существуют $0<M_0'<M_0$, $M_k'>M_k$, $0<M_n'<M_n$, для которых $(\ell, M_0', M_k', M_n')\in D$.

Доказательство. Пусть выполняется неравенство (6). Возьмем число a, удовлетворяющее оценкам $1<a^{1-\frac{1}{2n}}<\mu_0^{-1}M_0$. Для $\alpha=a^{1-\frac{1}{2n}}$, $\beta=a^{-\frac{1}{n}}$ в силу леммы I имеем

$$(a^{\frac{1}{n}}\ell, a^{1-\frac{1}{2n}}\mu_0, a^{1-\frac{1}{2n}-\frac{k}{n}}M_k, a^{-\frac{1}{2n}}M_n)\in D,$$

так как $(\ell,\mu_0,M_k,M_n)\in D$. Учитывая оценку $\ell<a^{\frac{1}{n}}\ell$, по теореме 2 получаем

$$(\ell, a^{1-\frac{1}{2n}}\mu_0, a^{1-\frac{1}{2n}-\frac{k}{n}}M_k, a^{-\frac{1}{2n}}M_n)\in D.$$

Следовательно, можно положить

$$M_0'=a^{1-\frac{1}{2n}}\mu_0,\ M_k'=a^{1-\frac{1}{2n}-\frac{k}{n}}M_k,\ M_n'=a^{-\frac{1}{2n}}M_n.$$

Если выполняется неравенство (7), то из $(\ell, M_0, \mu_k, M_n)\in D$ в силу леммы I следует $(\ell, \alpha M_0, \alpha\mu_k, \alpha M_n)\in D$. Таким образом, для $\mu_k^{-1}M_k<\alpha<1$ можно взять

$$M_0'=\alpha M_0,\ M_k'=\alpha\mu_k,\ M_n'=\alpha M_n.$$

Пусть справедливо неравенство (8) и $f(t)$ - экстремальная функция в задаче С. Можно считать, что $f(t)$ имеет на I только изолированные максимумы и минимумы. Действительно, если, например, $f(t)=M_0$ для $t\in[\tau_1,\tau_2]\subset I$, то определим функцию

$$f_1(t)=f(t)-\delta\omega_\varepsilon\left(t-\frac{\tau_1+\tau_2}{2}\right),$$

где

$$\omega_\varepsilon(s) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - s^2}\right), & |s| \leq \varepsilon, \\ 0 & , |s| > \varepsilon . \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}(\tau_2 - \tau_1)$, а $\delta > 0$ выберем таким, чтобы

$$\delta \|\omega_\varepsilon\|_I \leq M_0, \quad \delta \|\omega_\varepsilon^{(\kappa)}\|_I \leq M_\kappa, \quad \delta \|\omega_\varepsilon^{(n)}\|_I \leq \mu_n .$$

Тогда $f_1(t)$ соответствует набору $(\ell, M_0, M_\kappa, \mu_n)$ и имеет изолированные точки максимума τ_1 и τ_2.

Пусть функция $f(t)$ r раз достигает значение M_0 и p раз значение $-M_0$. Не уменьшая общности, считаем $\tau, t_1, .., t_r \in I$, $\tau \notin \{t_1, ..., t_r\}$, $|f^{(\kappa)}(\tau)| = M_\kappa$, $f(t_i) = M_0$ для $i = 1, ..., r$. При достаточно малых $\varepsilon, \delta > 0$ функция

$$g(t) = f(t) - \delta \sum_{i=1}^{r} \omega_\varepsilon(t - t_i)$$

удовлетворяет на I оценкам

$$-M_0 \leq g(t) < M_0, \quad \|g^{(\kappa)}\|_I \geq M_\kappa, \quad \|g^{(n)}\|_I < M_n .$$

Взяв положительную константу

$$c < M_0 - \sup\{g(t) : t \in I\},$$

для функции

$$h(t) = g(t) + c$$

имеем

$$\|h\|_I < M_0, \quad \|h^{(\kappa)}\|_I \geq M_\kappa, \quad \|h^{(n)}\|_I < M_n .$$

Наконец, если α выбрать из промежутка

$$1 < \alpha < \min\left\{\frac{M_0}{\|h\|_I}, \frac{M_n}{\|h^{(n)}\|_I}\right\},$$

то можно положить

$$M_0' = \alpha \|h\|_I, \quad M_\kappa' = \alpha \|h^{(\kappa)}\|_I, \quad M_n' = \alpha \|h^{(n)}\|_I .$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а 4. I) В задаче A $\mu_0 = M_0$ тогда и только тогда, когда в задаче B $\mu_\kappa = M_\kappa$;

2) В задаче B $\mu_\kappa = M_\kappa$ тогда и только тогда, когда в задаче C $\mu_n = M_n$;

3) В задаче C $\mu_n = M_n$ тогда и только тогда, когда в задаче A $\mu_0 = M_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство только для первого утверждения, так как остальные два доказываются аналогично. Пусть $\mu_0 = M_0$ в задаче A. Тогда в силу первых двух утверждений теоремы 3 $(\ell, M_0, M_\kappa, M_n) \in D$ и $M_\kappa \leqslant \mu_\kappa$. Предполагая $M_\kappa < \mu_\kappa$, по лемме 2 имеем $(\ell, M_0', M_\kappa', M_n') \in D$, где $M_0' < \mu_0, M_\kappa' > M_\kappa, M_n' < M_n$. Используя теорему 2, получаем $(\ell, M_0', M_\kappa, M_n) \in D$ и $M_0' < \mu_0$, что противоречит первому утверждению теоремы 3. Таким образом, $M_\kappa = \mu_\kappa$.

Пусть теперь $\mu_\kappa = M_\kappa$ в задаче B. Тогда из теоремы 3 следует $(\ell, M_0, M_\kappa, M_n) \in D$ и $M_0 \geqslant \mu_0$. Если $M_0 > \mu_0$, то в силу леммы 2 $(\ell, M_0', M_\kappa', M_n') \in D$ и $M_0' < M_0, M_\kappa' > \mu_\kappa$, $M_n' < M_n$. По теореме 2 получаем $(\ell, M_0, M_\kappa', M_n) \in D$ и $M_\kappa' > \mu_\kappa$, что противоречит второму утверждению теоремы 3. Теорема доказана.

Л е м м а 3. Для любых $\alpha, \beta, M_0, M_\kappa > 0$, $M_n \geqslant 0$

$$\alpha\beta^\kappa\mu_\kappa = \sup\{\|g^{(\kappa)}\|_{\mathcal{J}} : g \in W_\infty^n(\mathcal{J}), \|g\|_{\mathcal{J}} = \alpha M_0, \|g^{(n)}\|_{\mathcal{J}} = \alpha\beta^n M_n\},$$

$$\alpha\mu_0 = \inf\{\|g\|_{\mathcal{J}} : g \in W_\infty^n(\mathcal{J}), \|g^{(\kappa)}\|_{\mathcal{J}} = \alpha\beta^\kappa M_\kappa, \|g^{(n)}\|_{\mathcal{J}} = \alpha\beta^n M_n\},$$

$$\alpha\beta^n\mu_n = \inf\{\|g^{(n)}\|_{\mathcal{J}} : g \in W_\infty^n(\mathcal{J}), \|g\|_{\mathcal{J}} = \alpha M_0, \|g^{(\kappa)}\|_{\mathcal{J}} = \alpha\beta^\kappa M_\kappa\},$$

где $\mathcal{J} = [0, \beta^{-1}\ell]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем только первое равенство, так как остальные два доказываются аналогично. Обозначим через $\tilde{\mu}_\kappa$ правую часть первого равенства. Из допустимости набора $(\ell, M_0, \mu_\kappa, M_n)$ по лемме I следует допустимость $(\beta^{-1}\ell, \alpha M_0, \alpha\beta^\kappa\mu_\kappa, \alpha\beta^n M_n)$. Предположив $\alpha\beta^\kappa\mu_\kappa < \tilde{\mu}_\kappa$, по лемме 2 найдется допустимый набор $(\beta^{-1}l, M_0', M_k', M_n')$, где

$$M_0'<\alpha M_0,\ M_k'>\alpha\beta^k\mu_k,\ M_n'<\alpha\beta^n M_n. \tag{9}$$

Заменяя α и β на α^{-1} и β^{-1}, применим к набору $(\beta^{-1}l, M_0', M_k', M_n')$ лемму I. Тогда

$$(l, \alpha^{-1}M_0', \alpha^{-1}\beta^{-k}M_k', \alpha^{-1}\beta^{-n}M_n')\in D.$$

В силу (9) и теоремы 2 имеем $(l, M_0, \alpha^{-1}\beta^{-k}M_k', M_n)\in D$ и $\alpha^{-1}\beta^{-k}M_k'>\mu_k$, что противоречит второму утверждению теоремы 3. Лемма доказана.

Л е м м а 4. Пусть $l'>l$, $\delta\in[l,l']$, $\mathcal{J}=[0,\delta]$, $M_0, M_k>0, M_n\geqslant 0$. Тогда

I) в случае $(l', M_0, \mu_k, M_n)\in D$

$$\mu_k=\sup\{\|f^{(k)}\|_{\mathcal{J}}: f\in W_\infty^n(\mathcal{J}),\ \|f\|_{\mathcal{J}}=M_0,\ \|f^{(n)}\|_{\mathcal{J}}=M_n\};$$

2) в случае $(l', \mu_0, M_k, M_n)\in D$

$$\mu_0=\inf\{\|f\|_{\mathcal{J}}: f\in W_\infty^n(\mathcal{J}),\ \|f^{(k)}\|_{\mathcal{J}}=M_k,\ \|f^{(n)}\|_{\mathcal{J}}=M_n\};$$

3) в случае $(l', M_0, M_k, \mu_n)\in D$

$$\mu_n=\inf\{\|f^{(n)}\|_{\mathcal{J}}: f\in W_\infty^n(\mathcal{J}),\ \|f\|_{\mathcal{J}}=M_0,\ \|f^{(k)}\|_{\mathcal{J}}=M_k\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду аналогичности рассуждений докажем только первое утверждение. По теореме 2 $(\delta, M_0, \mu_k, M_n)\in D$ для любого $\delta\in[l,l']$. Предположив

$$\mu_k<\sup\{\|f^{(k)}\|_{\mathcal{J}}: f\in W_\infty^n(\mathcal{J}),\ \|f\|_{\mathcal{J}}=M_0,\ \|f^{(n)}\|_{\mathcal{J}}=M_n\},$$

в силу леммы 2 имеем $(\delta, M_0', M_k', M_n')\in D$, где $M_0'<M_0, M_k'>\mu_k, M_n'<M_n$. По теореме 2 получаем $(l, M_0, M_k', M_n)\in D$. Но неравенство $M_k'>\mu_k$ противоречит второму утверждению теоремы 3. Лемма доказана.

Т е о р е м а 5. Пусть $\delta, M_0, M_n, m_0, m_k, m_n$ - положительные числа, $\delta^n m_0^{-1} m_n \geqslant \ell^n M_0^{-1} M_n, (\delta, m_0, m_k, m_n) \in D$, μ_k - определенное в задаче В число. Тогда

$$m_k \leqslant c_{nk} m_0^{1-\frac{k}{n}} m_n^{\frac{k}{n}},$$

где $c_{nk} = \mu_k M_0^{\frac{k}{n}-1} M_n^{-\frac{k}{n}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\alpha = m_0 M_0^{-1}$, $\beta = (m_0^{-1} M_0 m_n M_n^{-1})^{\frac{1}{n}}$. Так как $(\delta, m_0, m_k, m_n) \in D$ и $\delta \geqslant \beta^{-1}\ell$, то по теореме 2 $(\beta^{-1}\ell, m_0, m_k, m_n) \in D$. В силу леммы 3 получаем $(\beta^{-1}\ell, \alpha M_0, \alpha\beta^k\mu_k, \alpha\beta^n M_n) = (\beta^{-1}\ell, m_0, \alpha\beta^k\mu_k, m_n)$ и $m_k \leqslant \alpha\beta^k\mu_k = c_{nk} m_0^{1-\frac{k}{n}} m_n^{\frac{k}{n}}$.

Теорема доказана.

Лемма 3 позволяет за счет выбора α и β в задачах А, В, С два из параметров ℓ, M_0, M_k, M_n нормировать на единицу.

Положим $T = [0,1]$ и определим функции

$$\Phi_{nk}(z) = \sup\{\|f^{(k)}\|_T : f \in W_\infty^n(T), \|f\|_T = 1, \|f^{(n)}\|_T = z\},$$

$$\Phi_{kn}(z) = \inf\{\|f^{(n)}\|_T : f \in W_\infty^n(T), \|f\|_T = 1, \|f^{(k)}\|_T = z\},$$

$$\Phi_{0k}(z) = \sup\{\|f^{(k)}\|_T : f \in W_\infty^n(T), \|f\|_T = z, \|f^{(n)}\|_T = 1\},$$

$$\Phi_{k0}(z) = \inf\{\|f\|_T : f \in W_\infty^n(T), \|f^{(k)}\|_T = z, \|f^{(n)}\|_T = 1\},$$

$$\Phi_{0n}(z) = \inf\{\|f^{(n)}\|_T : f \in W_\infty^n(T), \|f\|_T = z, \|f^{(k)}\|_T = 1\},$$

$$\Phi_{n0}(z) = \inf\{\|f\|_T : f \in W_\infty^n(T), \|f^{(k)}\|_T = 1, \|f^{(n)}\|_T = z\}.$$

Например, при $n=2$, $k=1$ в силу результатов Ландау [3]

$$\Phi_{21}(z) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{2}z, & 0 \leqslant z \leqslant 4, \\ 2\sqrt{z}, & z \geqslant 4. \end{cases}$$

В силу теоремы I функции $\Phi_{0k}, \Phi_{k0}, \Phi_{0n}$ определены лишь при $z > 0$, $\Phi_{nk}(0) = 2^k T_{n-1}^{(k)}(1)$, $\Phi_{n0}(0) = 1/2^k T_{n-1}^{(k)}(1)$,

$\Phi_{kn}(z)=0$ при $0 \leqslant z \leqslant 2^k T^{(k)}_{n-1}(1)$,

$\Phi_{on}(z)=0$ при $z \geqslant 1/2^k T^{(k)}_{n-1}(1)$.

Теорема 6. I) Функция $\Phi_{nk}(z)$ монотонно возрастает и непрерывна на $(0,+\infty)$;

2) Функция $\Phi_{kn}(z)$ монотонно возрастает и непрерывна на $(2^k T^{(k)}_{n-1}(1),+\infty)$;

3) Функция $\Phi_{ok}(z)$ монотонно возрастает и непрерывна на $(0,+\infty)$;

4) Функция $\Phi_{ko}(z)$ монотонно возрастает и непрерывна на $(0,+\infty)$;

5) Функция $\Phi_{on}(z)$ монотонно убывает и непрерывна на $\left(0,\frac{1}{2^k T^{(k)}_{n-1}(1)}\right)$;

6) Функция $\Phi_{no}(z)$ монотонно убывает и непрерывна на $(0,+\infty)$.

Доказательство. Предположим, что существуют $0<z_1<z_2$, для которых $\Phi_{nk}(z_1)\geqslant\Phi_{nk}(z_2)$. В задаче В при $\ell=1, M_0=1, M_n=z_1$ существует экстремальная функция и $\mu_k=\Phi_{nk}(z_1)$. Следовательно, набор

$$(1,1,\Phi_{nk}(z_1),z_1)\in D. \tag{10}$$

Если $\Phi_{nk}(z_1)>\Phi_{nk}(z_2)$, то из (10) в силу теоремы 2 следует $(1,1,\Phi_{nk}(z_1),z_2)\in D$, что противоречит определению $\Phi_{nk}(z_2)$.

Рассмотрим теперь случай $\Phi_{nk}(z_1)=\Phi_{nk}(z_2)$. Решая задачу С при $\ell=1, M_0=1, M_k=\Phi_{nk}(z_2)$, согласно второму утверждению теоремы 4 получим $\mu_n=z_2$, что противоречит (10). Таким образом, Φ_{nk} - монотонно возрастающая фунакция. Легко проверяется, что $\Phi_{nk}(z)>$ $>2^k T^{(k)}_{n-1}(1)$ для $z>0$.

Если предположить, что Φ_{nk} не непрерывная функция, то в силу монотонности Φ_{nk} может иметь только разрывы первого рода. Отсюде следует, что обратная функция Φ^{-1}_{nk} определена не везде на $(2^k T^{(k)}_{n-1}(1),+\infty)$. Но Φ^{-1}_{nk} совпадает с функцией $\Phi_{кп}$, которая однозначно определена в каждой точке интервала $(2^k T_{n-1}^{(k)}(1), +\infty)$. Полученное противоречие доказывает непрерывность $\Phi_{пк}$.

Используя теорему об обратной функции, получаем, что $\Phi_{кп}$ непрерывная, монотонно возрастающая функция. Тем самым доказали первые два утверждения. Остальные утверждения доказываются аналогично. Теорема доказана.

Нетрудно установить связь между функциями $\Phi_{пк}, \Phi_{кп}, \Phi_{ок}, \Phi_{ко}, \Phi_{оп}, \Phi_{по}$.

Задаче В при $\ell=1, M_0=1$ и $M_n=z$ соответствует экстремальный набор

$$(1, 1, \Phi_{пк}(z), z). \tag{II}$$

Взяв $\beta=1$ и сначала $\alpha=\frac{1}{z}$, а потом $\alpha=\frac{1}{\Phi_{пк}(z)}$, в силу леммы 3 получим еще два экстремальных набора

$$(1, \frac{1}{z}, \frac{\Phi_{пк}(z)}{z}, 1), \tag{I2}$$

$$(1, \frac{1}{\Phi_{пк}(z)}, 1, \frac{z}{\Phi_{пк}(z)}). \tag{I3}$$

Полагая в задаче С $\ell=1, M_0=1, M_к=x$, а затем $\ell=1, M_0=y, M_к=1$, имеем соответственно экстремальные наборы

$$(1, 1, x, \Phi_{кп}(x)), \tag{I4}$$

$$(1, y, 1, \Phi_{оп}(y)). \tag{I5}$$

Сравним (I4) с (II). Если $x=\Phi_{пк}(z)$, то по теореме 4 $\Phi_{кп}(x)=z$ и получается

$$\Phi_{кп}(\Phi_{пк}(z))=z.$$

Сравнивая (I5) с (I3), из $y=1/\Phi_{пк}(z)$ в силу теоремы 4 имеем $\Phi_{оп}(y)=z/\Phi_{пк}(z)$. Отсюда следует

$$\Phi_{оп}\left(\frac{1}{\Phi_{пк}(z)}\right)=\frac{z}{\Phi_{пк}(z)}.$$

В задаче А для $\ell=1, M_к=1, M_п=x$ и для $\ell=1$, $M_к=y, M_п=1$ получаем экстремальные наборы

$$(1, \Phi_{по}(x), 1, x), \tag{I6}$$

$$(1, \Phi_{ко}(y), y, 1). \tag{I7}$$

Из (I6) и (I3) выводим соотношение

$$\Phi_{по}\left(\frac{z}{\Phi_{пк}(z)}\right)=\frac{1}{\Phi_{пк}(z)}.$$

Из (I7) и (I2) вытекает, что

$$\Phi_{ко}\left(\frac{\Phi_{пк}(z)}{z}\right)=\frac{1}{z}.$$

Наконец, положив в задаче В $\ell=1, M_о=x, M_п=1$, имеем экстремальный набор

$$(1, x, \Phi_{ок}(x), 1),$$

сравнив который с набором (I2), получим

$$\Phi_{ок}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\Phi_{пк}(z)}{z}.$$

Таким образом, зная функцию $\Phi_{пк}(z)$, можно изучить и все остальные функции $\Phi_{кп}, \Phi_{ок}, \Phi_{ко}, \Phi_{оп}, \Phi_{по}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Марков В.А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПб., I892.
2. Габушин В.Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах. - Матем. заметки, I970, т.8, № 5, с.55I-562.
3. Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen. - Meddelelser Kobenhavn, 1925, 6, N 10.

Поступила 29.6.84

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.29-34

УДК 517.927

Л.А.Лепин
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЬЮ

Различные процессы физики, химии, биологии сводятся (см.[I] и указанную там литературу) к изучению краевой задачи вида

$$x'' + g(t)x' = f(t, x, x'), \tag{I}$$

$$x'(0) = 0, \ H(x(\tau), x'(\tau)) = h, \tag{2}$$

где $\tau \in (0, +\infty)$, $I = [0, \tau]$, функция $f: I \times R^2 \to R$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори, g - суммируемая на любом компактном интервале $\mathcal{J} \subset (0, \tau]$ функция, $H \in C_2(R^2, R)$, $h \in R$. Эта задача хорошо изучена при условии $g(t) > \kappa \cdot t^{-1}$, где $\kappa \in (-1, +\infty)$ которое, однако, не всегда выполняется на практике. В работе изучается случай, когда g может иметь произвольную отрицательную особенность в нуле. При этом используются понятия обобщенных нижних и верхних функций и обобщенного решения для уравнения второго порядка, определения которых можно найти в [2].

Т е о р е м а I. Пусть $\alpha, \beta: I \to R$ - соответственно обобщенные нижняя и верхняя функции уравнения (I) такие, что $\alpha \leq \beta$, функция H не убывает по второму аргументу, выполняется неравенство

$$H(\alpha(\tau),\alpha'(\tau))\leqslant h\leqslant H(\beta(\tau),\beta'(\tau)),$$

функция g суммируема на любом компактном интервале $J\subset(0,\tau)$, $g\leqslant 0$ на I и

$$\int_0^\tau g(t)\,dt=-\infty.$$

Тогда найдется обобщенное решение $x: I\to R$ уравнения (I) такое, что $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, $H(x(\tau),x'(\tau))=h$ и либо $x'(0)=0$, либо $|x'(0)|=+\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [3] найдется обобщенное решение $\bar{x}:(0,\tau]\to R$ уравнения (I) такое, что $\alpha(t)\leqslant\bar{x}(t)\leqslant\beta(t)$ на $(0,\tau]$ и $H(\bar{x}(\tau), \bar{x}'(\tau))=h$. Покажем, что

$$\underline{\lim}_{t\to 0+} x'(t)=\overline{\lim}_{t\to 0+} x'(t).$$

Предположим, что это не так. Тогда найдутся $c_1,c_2\in R$ такие, что

$$\underline{\lim}_{t\to 0+} x'(t)\leqslant c_1<c_2\leqslant\overline{\lim}_{t\to 0+} x'(t). \tag{3}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что c_1 и c_2 одного знака. Рассмотрим случай, когда c_1 и c_2 неотрицательны. На множестве

$$\{(t,x,y): t\in I,\ \alpha(t)\leqslant x\leqslant\beta(t),\ c_1\leqslant y\leqslant c_2\}$$

функция $|f|$ ограничена некоторой суммируемой функцией $p: I\to R$. Выберем $\delta\in(0,+\infty)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_0^\delta p(t)\,dt<c_2-c_1.$$

Согласно (3) можно найти $t_1,t_2\in(0,\delta)$ такие, что $t_1<t_2$, $\bar{x}'(t_1)=c_2$, $\bar{x}(t_2)=c_2$ и $c_1\leqslant x'(t)\leqslant$ $\leqslant c_2$ при всех $t\in[t_1,t_3]$. Интегрируя уравнение (I)

от t_1 до t_2, получим

$$\bar{x}'(t_2)-\bar{x}'(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} g(t)\bar{x}'(t)dt=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2} f(t,\bar{x}(t),\bar{x}'(t))dt \geqslant -\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt > c_1-c_2,$$

что противоречит неположительности функции g и неотрицательности функции $\bar{x}'$ на интервале $[t_1, t_2]$.

Случай, когда c_1 и c_2 отрицательны, рассматривается аналогично.

Из доказанного, в частности, следует, что

$$\underline{\lim}_{t\to 0+} \bar{x}(t)=\overline{\lim}_{t\to 0+} \bar{x}(t).$$

Определим функцию $x: I \to R$ следующим образом:

$$x(t)=\bar{x}(t) \quad , \text{ если } t\in(0,\tau],$$
$$x(0)=\lim_{t\to 0+} \bar{x}(t).$$

Тогда очевидно

$$x'(0)=\lim_{t\to 0+} \bar{x}'(t)=\lim_{t\to 0+} x'(t).$$

Покажем, что случай $x'(0)=c$, где $c\in(0,+\infty)$, невозможен. Предположим, что это не так. Тогда найдутся $c_1\in(0,c)$, $c_2\in(c,+\infty)$ и $\delta\in(0,\tau]$ такие, что

$$c_1\leqslant x'(t)\leqslant c_2 \quad \text{при всех } t\in[0,\delta] \tag{4}$$

На множестве

$$\{(t,x,y): t\in I, \alpha(t)\leqslant x\leqslant \beta(t), c_1\leqslant y\leqslant c_2\}$$

функция $|f|$ ограничена суммируемой функцией $q: I\to R$. Выберем $t\in(0,\delta)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_1\int_{t_1}^{\delta} g(t)\,dt < -\int_{t_1}^{\delta} q(t)\,dt - c_2 + c_1 . \tag{5}$$

Интегрируя уравнение (I) от t_1 до δ, получим

$$x'(\delta) - x'(t_1) + \int_{t_1}^{\delta} g(t)\,x'(t)\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{\delta} f(t, x(t), x'(t))\,dt \geq -\int_{t_1}^{\delta} q(t)\,dt ,$$

что противоречит неравенствам (4) и (5).

Случай $c \in (-\infty, 0)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Следствие I. Пусть выполняются условия теоремы I и, кроме того, функция f удовлетворяет условию Шредера в точке $t=0$, т.е. уравнение

$$x'' = f(t, x, x') \tag{6}$$

не имеет обобщенных решений $x: (0, \delta] \to R$, где $\delta \in (0, \tau]$ таких, что $\lim\limits_{t\to 0+} |x'(t)| = +\infty$. Тогда краевая задача (I)-(2) имеет обобщенное решение $x: I \to R$ лежащее между α и β.

Доказательство. В силу теоремы I достаточно показать, что обобщенное решение x не может иметь в нуле бесконечную производную.

Предположим, что $x'(0) = +\infty$. Выберем $\delta_1 \in (0, \tau]$ так, чтобы $x'(t) \geq 0$ при всех $t \in [0, \delta_1]$. Тогда x - обобщенная нижняя функция для уравнения (6) на интервале $[0, \delta_1]$. Возьмем решение задачи Коши β_1 для уравнения (6) с условиями

$$\beta_1(0) = x(0) + 1, \quad \beta_1'(0) = 0,$$

и пусть $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ - таково, что $x(t) < \beta(t)$ при всех $t \in [0, \delta_2]$. Согласно [2] найдется обобщенное решение $y: [0, \delta_2] \to R$ уравнения (6), удовлетворяющее условиям

$$y(0)=x(0), \quad y(\delta_2)=x(\delta_2),$$

и лежащее между x и β_1 при всех $t\in[0,\delta_2]$. Имеем $y'(0)\geqslant x'(0)=+\infty$, что противоречит условиям следствия.

Случай $x'(0)=-\infty$ рассматривается аналогично.

С л е д с т в и е 2. Пусть выполняются условия теоремы I и, кроме того, функция f удовлетворяет следующему условию: для всякого $M\in(0,+\infty)$ найдутся $h_1\in L_\infty(I,R)$ и $h_2\in L(I,R)$ такие, что на множестве

$$\{(t,x,y): t\in I,\ |x|\leqslant M,\ y\in R\}$$

выполняется неравенство

$$|f(t,x,y)|\leqslant|y|(h_1(t)(1+|y|)+h_2(t)). \tag{7}$$

Тогда краевая задача (I)-(2) имеет решение $x: I\to R$, лежащее между α и β.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (7) следует выполнение условия Шредера, поэтому в силу следствия I задача (I)-(2) имеет обобщенное решение $x: I\to R$. Так как функция f удовлетворяет условию (7), то и функция $\varphi:(0,\tau]\times R^2\to R$, определенная равенством

$$\varphi(t,x,y)=f(t,x,y)-g(t)y$$

будет удовлетворять условию (7) (с другой функцией h_2) на любом компактном интервале $\mathcal{J}\subset(0,\tau]$, а это означает (см.[4]), что x не может иметь бесконечных производных на $(0,\tau]$. Следовательно, x является решением уравнения (I).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Цепитис Я.В. Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с несуммируемой особенностью. - Дифференц.уравнения, 1983, т.19, № 12, с.2071-2075.
2. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка.- Дифференц.уравнения, 1982, т.18, № 8, с.1323-1330.
3. Лепин А.Я. Обобщенная разрешимость нелинейных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Дифференц.уравнения, 1981, т.17, № 4, с.752-753.
4. Кигурадзе И.Т. О некоторых сингулярных краевых задачах для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. - Дифференц.уравнения, 1968, т.4, № 10, с.1753-1773.

Поступила 16.7.84

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.35-42

УДК 517.927.4

Я.В.Цепитис
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

НИЖНИЕ И ВЕРХНИЕ ФУНКЦИИ И РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим краевую задачу

$$x''=h(t,x,x'), \tag{1}$$

$$x'(0)=x(1)=0, \tag{2}$$

при предположении, что $n\in\{1,2,\dots\}$ и для любого $\delta\in(0,1)$ $h\in Car([\delta,1]\times R^{2n},R^{n})$. Используемые в статье обозначения классов функций и другие не поясненные обозначения заимствованы из монографии [1] и статьи [2]. Если $x,y\in R^n$, то $x=(x_1,\dots,x_n)$, запись $x\le y$ будет пониматься покомпонентно и в формулировках настоящей статьи индекс i пробегает множество $\{1,\dots,n\}$.

Введем следующие два определения.

Определение 1. Предположим существование вектор-функций $\alpha,\beta:(0,1]\to R^n$ таких, что для любого $\delta\in(0,1)$

$$\alpha_i|_{[\delta,1]}\in BVI_1^+([\delta,1],R),$$

$$\beta_i|_{[\delta,1]}\in BVI_1^-([\delta,1],R),$$

$$\alpha(t)\le\beta(t),\quad t\in(0,1]$$

и найдется число $N_1\in(0,+\infty)$ такое, что

$$\sup\{|D_-\alpha(t)|, |D_-\beta(t)| : t\in(0,1]\} < N_1.$$

Далее, для некоторого $N\in[N_1,+\infty)$

$$\rho\ \forall t\in I,\ \forall k\in\{1,\dots,i-1,i+1,\dots,n\},$$
$$\forall x_k\in[\alpha_k(t),\beta_k(t)],\ \forall y_k\in[-N,N]$$

выполняются неравенства

$$\begin{aligned}\alpha_i''(t) &\geq h_i(t,x_1,\dots,\alpha_i(t),\dots,x_n,\\ &\qquad y_1,\dots,\alpha_i'(t),\dots,y_n),\\ \beta_i''(t) &\leq h_i(t,x_1,\dots,\beta_i(t),\dots,x_n,\\ &\qquad y_1,\dots,\beta_i'(t),\dots,y_n).\end{aligned} \tag{3}$$

При выполнении вышеперечисленных условий будем говорить, что для системы (I) существуют, соответственно, нижняя и верхняя функции α и β.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\sigma\in(0,1]$, $\varepsilon:(0,\sigma]\to[0,+\infty)$ ограниченная функция такая, что $\lim\limits_{t\to 0+}\varepsilon(t)=0$ и S некоторое семейство решений системы (I). Будем говорить, что производные решений системы (I) ε-ограничены на семействе S, если для любых $t_0\in(0,\sigma)$, $t_1\in(t_0,\sigma]$ и решения $x:[t_0,t_1]\to R^n$ системы (I), принадлежащего семейству S, из неравенства

$$|x'(t_0)|\leq\varepsilon(t_0) \tag{4}$$

следует $|x'(t)|\leq\varepsilon(t),\ t\in(t_0,t_1]$.

На протяжении настоящей статьи под S будет подразумеваться семейство решений x системы (I), для которых на области определения $I_x\subseteq I$ выполняются оценка

$$\alpha(t)\leq x(t)\leq\beta(t). \tag{5}$$

При этом предположим, согласно результатам работы [3], в случае выполнения условий определений I и 2 задача (I), (2) разрешима, если $n=1$ и

$$\alpha(1) \leq 0 \leq \beta(1) \tag{6}$$

Легко видеть, что результаты работы [3] распространяются для произвольных n, если в определении 2 имеем $\sigma=1$. В настоящей заметке уделено внимание вопросу об априорной ограниченности решений системы (I) при $\sigma \in (0,1)$. Отметим, что аналогичный вопрос без использования нижних и верхних функций изучается в работе [5]. В работе [5] также приводятся условия на правую часть системы (I), которые влечет за собой выполнение условий определения 2 и на примерах показывается, что случай $\sigma=1$ не перекрывает важные, возникшие из приложений, классы задач.

Определение 3. Пусть α, β - произвольные нижняя и верхняя функции системы (I). Будем говорить, что система (I) удовлетворяет условию В, если:

B_1) производные решений системы (I) ε-ограничены на семействе S,

B_2) для некоторого $s \in (0,6]$, любых $\tau \in (0,s]$ и решений $x^{(1)}, x^{(2)}$ системы (I), удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} x^{(1)}(\tau)=\alpha(\tau), \quad x^{(2)}(\tau)=\beta(\tau), \\ x^{(1)\prime}(\tau)=x^{(2)\prime}(\tau)=0. \end{gathered} \tag{7}$$

из существования $j \in \{1,\dots,n\}$ и $\delta \in (0,+\infty)$ таких, что для $t \in [\tau, \tau+\delta]$

$$x_j^{(1)}(t) \geq \alpha_j(t) \quad \text{либо} \quad x_j^{(2)}(t) \leq \beta_j(t),$$

следует, соответственно,

$$|\alpha'(t)| \leq \varepsilon(t), \ |\beta'(t)| \leq \varepsilon(t), \ p \ \forall t \in [\tau; \tau+\delta],$$

B_3) существует число $N_0 \in (0,+\infty)$ такое, что для функций x из семейства S, удовлетворяющих для некоторого $t_0 \in (0,\sigma]$ оценке (4), выполняется

$$|x'(t)| \leq N_0, \quad t \in (\sigma, 1],$$

B_4) $N \geq \max\{N_0, N_1, \varepsilon(t): t \in (0,\sigma]\}$.

Основной результат статьи содержится в следующей теореме для доказательства которой мы выделили три леммы.

Т е о р е м а. Пусть для системы (I) существуют нижняя и верхняя функции α, β, выполняется (6) и условие B. Тогда краевая задача (I),(2) имеет решение x, для которого на $(0,1]$ имеет место оценка (5) и

$$\lim_{t \to 0+} x'(t) = 0. \qquad (8)$$

Л е м м а I. Пусть $\tau \in (0,1)$,

$f \in Car([\tau,1] \times R^{2n}, R^n)$ и для некоторого $\gamma \in L([\tau,1], [0,+\infty))$ выполняется

$$|f(t,x,y)| \leq \gamma(t), \ (t,x,y) \in [\tau,1] \times R^{2n}. \qquad (9)$$

Тогда имеет место разрешимость краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'), \qquad (10)$$

$$x_{i_k}(\tau) = a_k, \ x'_{i_\ell}(\tau) = 0, \ x(1) = 0, \qquad (11)$$

где $m \in \{1,\dots,n\}$, $i \to i_m$ взаимно однозначное отображение множества $\{1,\dots,n\}$ в себя, $k = 1,\dots,m$; $\ell = m+1,\dots,n$; $a_k \in R$.

Лемма непосредственно следует из теоремы существования гл.2, § 2 монографии [I].

Л е м м а 2. Пусть выполняются все условия теоремы, тогда для любого $\tau \in (0,s]$ существует решение x системы (I) для которого выполняется

$$|x'(\tau)| \leqslant \varepsilon(\tau), \quad x(1)=0 \tag{I2}$$

и для $t\in[\tau,1]$ имеет место оценка (5).

Доказательство. Пусть $x^{(1)}, x^{(2)}$ - решения системы (I), удовлетворяющие условиям (7). Из B_1 следует возможность построения функций $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}:[\tau,1]\to R^n$ нижеуказанным образом. Пусть $t_{1i}, t_{2i}\in[\tau,1]$ - крайние справа точки такие, что $x_i^{(1)}\geqslant\alpha_i$, $t\in[\tau,t_{1i}]$,

$x_i^{(2)}\leqslant\beta_i$, $t\in[\tau,t_{2i}]$. Если $t_{1i}=\tau$, то $\tilde{\alpha}_i=\alpha_i$, $t\in[\tau,1]$. Если $t_{1i}\neq\tau$ и в некоторой точке $t_{3i}\in(\tau, t_{1i}]$, $x_i^{(1)}(t_{3i})=\beta_i(t_{3i})$, либо при $t_{1i}=1$, $x_i^{(1)}>0$ положим $t_{3i}=1$, то

$$\tilde{\alpha}_i=\alpha_i, \quad t\in[\tau,1],$$

$$\tilde{\beta}_i=\begin{cases} x_i^{(1)}, & t\in[\tau,t_{3i}],\\ \beta_i, & t\in(t_{3i},1].\end{cases}$$

В случае, когда $t_{1i}\in(\tau,1]$, $x_i^{(1)}\leqslant\beta_i$, $t\in[\tau,t_{1i}]$, либо $t_{1i}=1$, $x_i^{(1)}(1)<0$, положим

$$\tilde{\alpha}_i=\begin{cases} x_i^{(1)}, & t\in[\tau,t_{1i}],\\ \alpha_i, & t\in(t_{1i},1].\end{cases}$$

Если $\tilde{\beta}_i$ еще не определено, то в случае $\tau=t_{2i}$, $\tilde{\beta}_i=\beta_i$, $t\in[\tau,1]$. Далее, если $t_{2i}\neq\tau$ и в некоторой точке $t_{3i}\in(\tau,t_{2i}]$, $x_i^{(2)}(t_{3i})=\alpha_i(t_{3i})$, либо при $t_{2i}=1$, $x_i^{(2)}(1)<0$, положим $t_{2i}=1$, то $\tilde{\beta}_i=\beta_i$, $t\in[\tau,1]$ и функцию $\tilde{\alpha}_i$ переопределим так

$$\tilde{\alpha}_i=\begin{cases} x_i^{(2)}, & t\in[\tau,t_{3i}],\\ \alpha_i, & t\in(t_{3i},1].\end{cases}$$

Наконец, если $t_{2i}\in(\tau,1]$ и $x_i^{(2)}\geqslant\alpha_i$, $t\in[\tau,t_{2i}]$, либо $t_{2i}=1$ и $x_i^{(2)}(1)>0$, положим

$$\tilde{\beta}_i = \begin{cases} x_i^{(2)}, & t\in[\tau,t_{2i}], \\ \beta_i, & t\in(t_{2i},1]. \end{cases}$$

Очевидно, что в силу (3), B_1, B_3 и B_4 для функций $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ $p\,\forall t\in[\tau,1]$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} \tilde{\alpha}_i''(t)\geqslant h_i(t,\tilde{\alpha}(t),\tilde{\alpha}'(t)), \\ \tilde{\beta}_i''(t)\leqslant h_i(t,\tilde{\beta}(t),\tilde{\beta}'(t)), \\ \tilde{\alpha}(1)\leqslant 0\leqslant \tilde{\beta}(1). \end{gathered} \tag{13}$$

Положим для $(t,x,y)\in[\tau,1]\times R^{2n}$

$$\xi_i(t,x)=|x_i-\delta(\tilde{\alpha}_i(t),x_i,\tilde{\beta}_i(t))|,$$

$$\eta_i(t,x)=2^{-1}(D_-\tilde{\alpha}(t)(1+\operatorname{sign}(\tilde{\alpha}_i(t)-$$
$$-x_i))+D_-\tilde{\beta}(t)(1+\operatorname{sign}(x_i-\tilde{\beta}_i(t))),$$

$$z(t,x,y)=y-\delta(-\xi(t,x),y-\eta(t,x),$$
$$\xi(t,x)),$$

$$f(t,x,y)=h(t,\delta(\tilde{\alpha}(t),x,\tilde{\beta}(t)),$$
$$z(t,x,\delta(-\bar{N},y,\bar{N}))),$$

где для $x,y,z\in R$

$$\delta(x,y,z)=2^{-1}(x+|x-y|+|y-z|+z),$$

а для $x,y,z\in R^n$

$$\delta(x,y,z)=(\delta(x_1,y_1,z_1),\dots,\delta(x_n,y_n,z_n)),$$

$\bar{N}=(N,\dots,N)$. Ясно, что $f\in Car([\tau,1]\times$ $\times R^{2n},R^n)$, для некоторого $\psi\in L([\tau,1],[0,+\infty))$ выполняется (9) и для $t\in[\tau,1]$, $x\in[\alpha(t),\beta(t)]$,

$y \in [-\bar{N}, \bar{N}]$ функции f и h совпадают. Определим краевые условия вида (II) следующим образом: $x(1)=0$,
$x_i(\tau)=\tilde{\alpha}_i(\tau)$, если $\tilde{\alpha}_i(\tau)=\tilde{\beta}_i(\tau)$,
$x_i'(\tau)=0$ если $\tilde{\alpha}_i(\tau)<\tilde{\beta}_i(\tau)$.
Заметим, что в последнем случае имеем $\tilde{\alpha}_i'(\tau)\geq 0\geq\tilde{\beta}_i'(\tau)$. Согласно лемме I, так поставленная краевая задача для уравнения (I0) имеет решение x. Оценку

$$\tilde{\alpha}\leq x\leq\tilde{\beta}, \qquad t\in[\tau,1] \tag{I4}$$

мы можем установить, например, используя функции типа Ляпунова. Действительно, положив $g_1=g_2=0$, $V_1(t,x,y)=$ $=\tilde{\alpha}_i(t)-x_i$, $V_2(t,x,y)=x_i-\tilde{\beta}_i(t)$, используя (I3), определение функции f и повторяя рассуждения доказательства теоремы I статьи [4] убеждаемся в справедливости нужной нам оценки. Далее, из B_1, B_3 и B_4 следует $|x'(t)|\leq N$, $t\in[\tau,1]$, так что x является и решением системы (I). Наконец, из (I4) следует выполнение на $[\tau,1]$ оценки (5) и из B_2 и построения краевых условий следует соотношение (I2). Лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть производные решений системы (I) ε-ограничены на семействе S, $t_1\in(0,\sigma]$, $x:(0,t_1)\to R^n$ решение системы (I), удовлетворяющее оценке (5) и для любого $t\in(0,t_1)$ существует $t_0\in(0,t)$ такое, что выполняется (4). Тогда имеет место равенство (8).

Лемма непосредственно следует из условий определения I.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть $k\to s_k$ - последовательность чисел из $(0,s)$ такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} s_k=0, \tag{I5}$$

$k\to x^{(k)}$ последовательность решений системы (I), удовлетворяющая условиям

$$|x^{(k)\prime}(s_k)|\leq\varepsilon(s_k), \quad x^{(k)}(1)=0,$$

$$\alpha(t) \leq x^{(k)}(t) \leq \beta(t), \quad t \in [s_k, 1],$$

существование которой обеспечивается леммой 2. Согласно B_1, B_3 и (I5), мы можем из этой последовательности выделить подпоследовательность, которая сходится к решению $x:(0,1] \to R^n$ системы (I) для которого выполняется оценка (5) и $x(1)=0$. Для сужения $x|_{(0,s]}$ этого решения выполнены условия леммы 3, так что имеет место и равенство (8). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, I978.-I83 с.

2. Пономарев В.Д. Существование решения простейшей краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. - Латв.матем.ежегодник, I978, вып.22, с.69-74.

3. Цепитис Я.В. Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с несуммируемой особенностью. - Дифференц.уравнения, I983, т.I9, № I2, с.2071 - 2075.

4. Цепитис Я.В. Необходимые и достаточные условия разрешимости двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. - Латв. матем.ежегодник, I977, вып.2I, с.I08-II2.

5. Цепитис Я.В. Разрешимость краевой задачи смешанного типа для системы уравнений второго порядка. - Латв.матем. ежегодник (в печати).

Поступила 3I.8.84

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.43-48

УДК 517.927

Г.П.Гризанс
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки .

ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' + \frac{1-p+q}{t} x' - \frac{pq}{t^2} x = f(t, x, x'), \tag{I}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

$$x(\tau) = b, \tag{3}$$

где $f(t,x,x') = p_1(t) + p_2(t)x + p_3(t)x^2 + p_4(t)x' + p_5(t)xx' + p_6(t)x'^2$, $p>0$, $q \geq 0$, $b \in R$, $p_i \in C(I_0)$, $i = \overline{1,6}$, $I_0 = (0,\tau]$, $I = [0,\tau]$, $\tau > 0$

и кроме того существуют постоянные $c_i > 0$ и r_i, $i=\overline{1,6}$ такие, что $r_1, r_2, r_3 > -2$, $r_4, r_5 \geq -1$, $r_6 \geq 0$ и

$|p_i(t)| \leq c_i t^{r_i}$ $\forall t \in I$.

О п р е д е л е н и е. Под решением задачи (I)-(3) будем понимать функцию $x \in C(I) \cap C^2(I_0)$, удовлетворяющую краевым условиям (2),(3) и при $t \in I_0$ уравнению (I).

Для задачи (I)-(3) необходимым и достаточным условием существования решения является ([I]-[3], см.также [4]) наличие двух функций, так называемых нижней и верхней, $\alpha, \beta \in C(I) \cap C^2(I_0)$ таких, что

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \ \forall t \in I, \tag{4}$$

$$\alpha'' + \frac{1-p+q}{t}\alpha' - \frac{pq}{t^2}\alpha \geq f(t,\alpha,\alpha'), \qquad (5)$$

$$\forall t \in I_0$$

$$\beta'' + \frac{1-p+q}{t}\beta' - \frac{pq}{t^2}\beta \leq f(t,\beta,\beta'),$$

$$\alpha(0) \leq 0 \leq \beta(0), \quad \alpha(\tau) \leq b \leq \beta(\tau). \qquad (6)$$

Однако построение таких функций α и β в общем случае представляет известные трудности. Для задачи (I)-(3) рассмотрим некоторые случаи, когда такие функции удается построить.

Заметим, что при $p=1,\ q=0,\ p_i \in C(I),\ i=\overline{1,6}$ построение нижних и верхних функций рассмотрено в статье [5]. В предлагаемой работе получены результаты для задачи (I)-(3).

I. Пусть в уравнение (I)

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0, \quad \forall t \in I_0$$

Тогда в качестве α и β можно взять

$$\alpha(t) = \min(0,b), \quad \beta(t) = \max(0,b)$$

2. Пусть $q=0,\ p_3=0,\ p_2>0,\ \forall t \in I_0$ и

$$\sup_{t \in I_0} \frac{|p_1(t)|}{p_2(t)} = H < \infty$$

Тогда $-\alpha(t) = \beta(t) = \max(H,b)$

3. Пусть $q>0,\ p_3=0,\ p_2 > -\frac{pq}{t^2}\ \ \forall t \in I_0$ и

$$\sup_{t \in I_0} \frac{|p_1(t)|t^2}{pq + p_2(t)t^2} = H < \infty$$

Тогда $-\alpha(t) = \beta(t) = \max(H,b)$.

4. Пусть $p_3=0,\ p_5 \neq 0,\ \forall t \in I_0$. Предположим, ч.о $p_5>0$ $\forall t \in I_0$. Пусть также существует постоянная $K>0$ такая, что

$$p_2(t) + p_5(t)K > -\frac{pq}{t^2} \quad \forall t \in I_0$$

и

$$\sup_{t\in I_0} \frac{|p_1(t)+p_2(t)\kappa t+p_4(t)\kappa+p_5(t)\kappa^2 t+p_6(t)\kappa^2-(1+q)(1-p)\kappa^{-1}|}{p_2(t)+p_5(t)\kappa+pq\,t^{-2}} =$$
$$= H_1 < \infty$$

или для более удобного пользовачия

$$\sup_{t\in I_0} \left\{ \frac{|p_1(t)+p_4(t)\kappa+p_6(t)\kappa^2|}{p_2(t)+p_5(t)\kappa} + \kappa \right\} = H_1 < \infty$$

причем $p_2(t)+p_5(t)\kappa > 0 \quad \forall t\in I_0$

Теперь функции α и β можно определить следующим образом.

$$\alpha(t)=\kappa t-H, \; \beta(t)=\kappa t+H,$$

где $H=\max(H_1, |b|+\kappa T)$

5. Пусть $p_3(t)\neq 0 \; \forall t\in I_0$. Можем считать, что $p_3(t)>0$ $\forall t\in I_0$ (в противном случае делаем замену x на $-x$). Предположим далее, что для всех $t\in I_0$ квадратное уравнение

$$p_1(t)+p_2(t)r+p_3(t)r^2=0$$

имеет вещественные корни $r_1(t), r_2(t)$, причем существуют числа $a, e \in R$ такие, что

$$r_1(t)\leq a\leq 0\leq r_2(t)\leq e \quad \forall t\in I_0 \, .$$

Тогда $\alpha(t)=a, \; \beta(t)=\max(e,b)$

Задача (I)-(3) имеет решение для $b\geq a$.

В случаях I-4 задача (I)-(3) разрешима для любого $b\in R$. В 5 случае представляет интерес существование решения при $b<a$.

По теореме о несуществовании решения [4], если $f(t,x,x')\geq t^r(P(t)+Q(t)x+R(t)x^2)$, где $P,Q,R\in C(I)$, $r>-2$, $R(t)>0 \;\; \forall t\in I$,

то при

$$b<b_0<0 \qquad (7)$$

где b_0 - некоторая постоянная, зависящая от p, q, f, τ задача (I)-(3) не имеет решения. Следовательно, в этом случае построение верхних и нижних функций также невозможно.

Численное решение задачи (I)-(3) можно найти, применяя метод стрельбы. Задавая m, где

$$m = \lim_{t \to 0} x(t) t^{-p} \tag{8}$$

и решая начальную задачу (I),(2),(8) на отрезке $[0, \tau]$ можем получить значение $x(\tau)$. Заметим, что решение задачи (I),(2),(8) существует и единственно [6]. В зависимости от полученной величины $x(\tau)$ значение m уточняется. Однако метод стрельбы применим лишь при единственности решения задачи (I)-(3). Так как в противном случае зависимость $x(\tau)$ от m не является монотонной. В этом случае полезно построение графика $x(\tau)$ в зависимости от m Такой график позволяет определить количество существующих решений задачи (I)-(3).

Рассмотрим пример при

$$p = q = 1, \; f(t, x, x') = 10x^2 - 100x, \; \tau = 1$$

$$x'' + \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2} = 10x^2 - 100x \tag{9}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = b \tag{10}$$

С помощью метода Рунге-Кутта с шагом $1/512$ на ЭВМ получен график зависимости $x(1)$ от $m = \lim_{t \to 0} x(t) t^{-1} = x'(0)$.

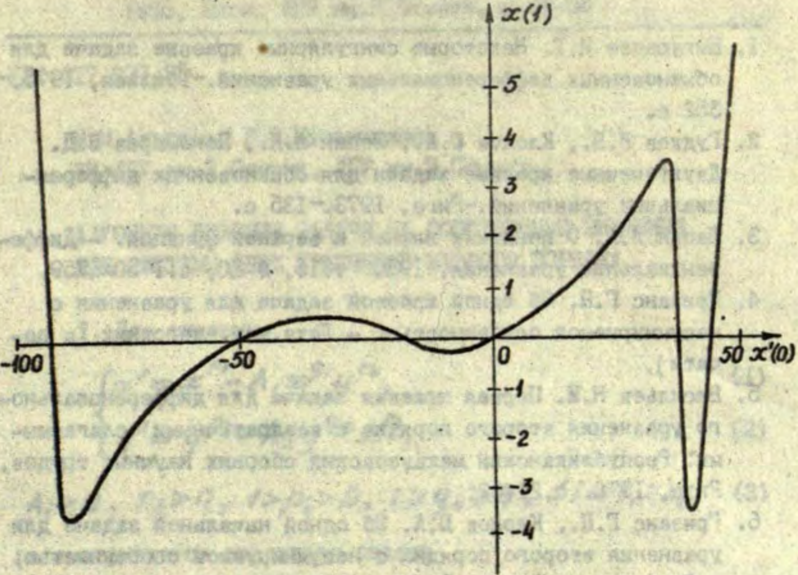

Рис.I. График зависимости $x(1)$ от $x'(0)$.

Из этого графика легко судить для задачи (9),(I0) о количестве существующих решений. Также можно получить значение $b_0 \approx -4$ для (7). Как видно из рисунка при $b < b_0$ решения задачи (9),(I0) не существует, что находится в полном соответствии с результатами работы [4]. При необходимости b_0 можно уточнить.

В заключении выражаю благодарность Ю.А.Клокову за постановку задачи и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.-Тбилиси, 1975.-352 с.
2. Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.-Рига, 1973.-135 с.
3. Лепин Л.А. О понятиях нижней и верхней функций. - Дифференциальные уравнения, 1980. т.16, № 10, с.1750-1759.
4. Гризанс Г.П. Об одной краевой задаче для уравнения с несуммируемой особенностью. - Латв.мат.ежегодник (в печати).
5. Васильев Н.И. Первая краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с квадратичными слагаемыми. Республиканский межвузовский сборник научных трудов, Рига, 1976. с.21-32.
6. Гризанс Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью. - Латв.мат.ежегодник (в печати).

Поступила 4.09.84

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.49-56

УДК 517.927.25

М.М.Адъютов, Р.В.Кузьмишкина
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, ЛГУ им.П.Стучки

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. Для системы

$$\begin{cases} x'' = x^{p_1} - A_1 x^{q_1} y^{r_2}, & (1) \\ y'' = y^{p_2} - A_2 y^{q_2} x^{r_1}, & (2) \end{cases}$$

$$A_i > 0,\ r_i > 0,\ 1 > p_i > 0,\ 1 \geq q_i \geq 0,\ (i = 1,2), \quad (3)$$

рассматривается следующая задача

$$x'(0) = 0, \quad (4)$$

$$x(t_1) = x'(t_1) = 0, \quad (5)$$

$$x(t) > 0 \text{ для } t \in [0, t_1) \text{ и } x(t) = 0 \text{ для } t \in [t_1, \infty), \quad (6)$$

$$y'(0) = 0, \quad (7)$$

$$y(t_2) = y'(t_2) = 0, \quad (8)$$

$$y(t) > 0 \text{ для } t \in [0, t_2) \text{ и } y(t) = 0 \text{ для } t \in [t_2, \infty). \quad (9)$$

t_1 и t_2 неопределены - их необходимо установить в ходе решения, т.е. являются собственными значениями задачи. При этом значения t_1 и t_2 могут быть как конечными, так и бесконечными.

Необходимость изучения задачи (I)-(9) возникла при исследовании нестационарных диссипативных структур в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками. В частности, постановка (I)-(9) соответствует случаю так называемого S-режима [I]. Приведем формулы перехода от обозначений, принятых в [I], к обозначениям в постановке (I)-(9):

$$x=\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1+1}\right)^{\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1}} f_1^{\sigma_1+1},$$

$$y=\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2+1}\right)^{\frac{\sigma_2+1}{\sigma_2}} f_2^{\sigma_2+1};$$

$$p_1=\frac{1}{\sigma_1+1}, \quad p_2=\frac{1}{\sigma_2+1},$$

$$q_1=\frac{\beta_1}{\sigma_1+1}, \quad q_2=\frac{\beta_2}{\sigma_2+1},$$

$$r_1=\frac{\sigma_1(\sigma_2+1-\beta_2)}{\sigma_2(\sigma_1+1)}, \quad r_2=\frac{\sigma_2(\sigma_1+1-\beta_1)}{\sigma_1(\sigma_2+1)},$$

$$A_1=(\sigma_1+1)\left(\frac{\sigma_2(\sigma_1+1)}{\sigma_1(\sigma_2+1)}\right)^{\frac{\beta_1-\sigma_1-1}{\sigma_1}}, \quad A_2=(\sigma_2+1)\left(\frac{\sigma_1(\sigma_2+1)}{\sigma_2(\sigma_1+1)}\right)^{\frac{\beta_2-\sigma_2-1}{\sigma_2}},$$

$$t_1=\xi_{f_1}, \quad t_2=\xi_{f_2}.$$

Ограничения (3) и условия (4)-(9) следуют из постановки задачи в [I]. Как несложно заметить, в данной статье рассматривается несколько более общая задача, чем в [I], т.к. здесь в постановку задачи входят 8 параметров: $p_1, p_2, A_1, A_2, q_1, q_2, r_1, r_2$, в то время как в [I] имеется 4 параметра: $\sigma_1, \sigma_2, \beta_1, \beta_2$.

Цель данной работы - предложить и обосновать алгоритм решения задачи (I)-(9). В то же время необходимо отметить, что ни существование, ни единственность решения этой задачи до сих пор не доказаны. Поэтому в дальнейшем предполагается, что решение задачи существует, и исходя из этого предположения доказываются некоторые его свойства, на основании которых и строится алгоритм. Этот алгоритм реализован в виде программы для ЭВМ и авторы надеются, что численные эксперименты и дальнейшие теоретические исследования позволят получить новые результаты для задачи (I)-(9) и, в частности, доказать существование решения.

Однако известен один частный случай, в котором имеется аналитическое решение задачи (I)-(9). При $p_1=p_2,\ A_1=A_2,$ $q_1+r_2=q_2+r_1$ решения уравнений

$$\begin{cases} x''=x^{p_1}-A_1x^{q_1+r_2}, \\ y''=y^{p_2}-A_2y^{q_2+r_1} \end{cases}$$

с краевыми условиями (4)-(9) являются решениями системы (I)-(9). При этом $x\equiv y$. Известно [4], что задача

$$x''=x^{\frac{1}{\sigma_1+1}}-(\sigma_1+1)x,$$
$$x'(0)=0,$$
$$x(t_f)=x'(t_f)=0$$

имеет аналитическое решение

$$x(t)=\left(\frac{2(\sigma_1+2)}{\sigma_1+1}\sin^2\frac{2(\sigma_1+1)}{\sigma_1}(t_f-t)\right)^{\frac{\sigma_1+1}{\sigma_1}}.$$

При численных экспериментах алгоритма проводилось сравнение с этим решением, давшее хорошие результаты.

В пункте 2 приводятся теоремы, на основании которых в пункте 3 строится алгоритм и обсуждаются полученные результаты. Здесь же отметим, что решения системы (I)-(2) продолжимы и из $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$ следует $\lim\limits_{t\to\infty}x'(t)=0$ и $\lim\limits_{t\to\infty}y'(t)=0$. Эти результаты для более общего случая доказаны в [2].

2. Т е о р е м а I. Если $t_2<\infty$, то и $t_1<\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: пусть $t_1=\infty$. Тогда при $t\geq t_2$ $y(t)=0,\ x(t)>0$ и уравнение (I) запишется в виде

$$x''=x^{p_1}. \tag{I0}$$

Будем искать решение этого уравнения с условиями

$$x(\infty)=x'(\infty)=0. \tag{II}$$

Умножим уравнение (I0) на x' и проинтегрируем от $t\geq t_2$ до ∞, используя (II):

$$\int_t^\infty x''x'ds=\int_t^\infty x^{p_1}x'ds,$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{x'^2}{2} = -\frac{x^{p_1+1}}{p_1+1}\,, \\
&x' = -\sqrt{\frac{2}{p_1+1}}\; x^{\frac{p_1+1}{2}}\,.
\end{aligned}
\tag{I2}
$$

Корень взят со знаком "-", т.к. нас интересует решение, убывающее при $t \to \infty$. Найдем общее решение уравнения (I2):

$$
x = \left(\frac{1-p_1}{\sqrt{2(1+p_1)}}(c-t)\right)^{\frac{2}{1-p_1}}\,. \tag{I3}
$$

Отсюда видно, что условие $x(\infty)=0$ выполнено быть не может. Таким образом, $t_1 < \infty$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е I. Совершенно аналогично доказывается симметричный результат: если $t_1 < \infty$, то и $t_2 < \infty$.

С л е д с т в и е 2. Пусть $t_2 < \infty$ и $x(t_2) > 0$, тогда

$$
x(t) = \left(\frac{1-p_1}{\sqrt{2(1+p_1)}}(t_1-t)\right)^{\frac{2}{1-p_1}} \tag{I4}
$$

при $t \in [t_2, t_1]$

и
$$
t_1 = \sqrt{\frac{2(1+p_1)}{1-p_1}}\; x(t_2)^{\frac{1-p_1}{2}} + t_2\,. \tag{I5}
$$

Эти формулы легко получить из (I3).

Т е о р е м а 2. Пусть $q_1 \geq p_1$, тогда задача (I)-(9) не может иметь решений таких, что $x(t)>0$ для любого $t \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного. Пусть $x(t)>0$ для любого $t \geq 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ и $y(t)>0$ для любого $t \geq 0$ т.к. в противном случае согласно теореме I найдется точка $t_1 > 0$, что $x(t_1)=0$.

Поскольку $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, то найдется точка t_3 , что при $t \geq t_3$ $x(t) \leq \varepsilon_1$ и $y(t) \leq \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 таковы, что

$$1-\varepsilon_1^{q_1-p_1}\varepsilon_2^{r_2} = \frac{2(1+p_1)}{(1-p_1)^2}.$$

Определим функцию

$$\varphi(t) = 1-x^{q_1-p_1}y^{r_2}.$$

Очевидно $\varphi(t) \geq \frac{2(p_1+1)}{(1-p_1)^2}$ при $t \geq t_3$. Уравнение (I) теперь можно записать в виде

$$x'' = x^{p_1}\varphi(t), \tag{16}$$

причем $x(t_3) = \varepsilon_3 \leq \varepsilon_1$.

Выберем точку t_4 следующим образом

$$t_4 = t_3 + 2\varepsilon_1^{\frac{1-p_1}{2}}.$$

Очевидно, $x(t_4) \leq \varepsilon$. Определим 2 функции на интервале $[t_3, t_4]$:

$$\alpha(t) = 0;$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \left(\varepsilon_3^{\frac{1-p_1}{2}} + t_3 - t\right)^{\frac{2}{1-p_1}}, & t \in [t_3, t_3+\varepsilon_3^{\frac{1-p_1}{2}}); \\ 0, & t \in [t_3+\varepsilon_3^{\frac{1-p_1}{2}}, t_4 - x(t_4)^{\frac{1-p_1}{2}}]; \\ \left(t - t_4 + x(t_4)^{\frac{1-p_1}{2}}\right)^{\frac{2}{1-p_1}}, & t \in (t_4 - x(t_4)^{\frac{1-p_1}{2}}, t_4]. \end{cases}$$

Несложно показать, что это нижняя и верхняя функции для уравнения (16).

Рассмотрим краевую задачу, состоящую из уравнения (16) и условий $x(t_3) = \varepsilon_3$ и $x(t_4) = \varepsilon_4$. Для этой задачи выполнены условия теоремы I из главы 3 монографии [3], согласно которой существует решение этой задачи $x_*(t)$, которое заключено между $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Очевидно, $x_*(t_3+\varepsilon_3^{\frac{1-p_1}{2}}) = 0$. Единственность решения $x_*(t)$

следует из замечания 2 к теореме 4 главы 6 монографии [3].

Таким образом, мы доказали, что существует точка $t_5 = t_3 + \varepsilon_3^{\frac{1-p_1}{2}}$, в которой решение $x(t)$ задачи (I)-(9) обращается в нуль, а это противоречит предположению $x(t) > 0$ для любого $t \geq 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Следствие I. Пусть $q_2 \geq p_2$, тогда задача (I)-(9) не может иметь решений таких, что $y(t) > 0$ для любого $t \geq 0$. Это утверждение симметрично утверждению теоремы 2 и доказывается аналогично.

Следствие 2. Если выполнено хотя бы одно из условий $q_1 \geq p_1$ или $q_2 \geq p_2$, то t_1 и t_2 - конечны. Это утверждение непосредственно вытекает из теорем I и 2.

Теорема 3. Если $q_1 > p_1$, то

$$x(t) = \left(\frac{1-p_1}{\sqrt{2(1+p_1)}}(t_1 - t)\right)^{\frac{2}{1-p_1}}(1+\varepsilon(t)), \tag{I7}$$

где $\lim\limits_{t \to t_1} \varepsilon(t) = 0$.

Доказательство.

$$x'' = x^{p_1} - A_1 x^{q_1} y^{r_2},$$

$$x'' = x^{p_1}(1 - A_1 x^{q_1 - p_1} y^{r_2}).$$

Обозначим $\varepsilon_1(t) = A_1 x^{q_1 - p_1} y^{r_2}$. Поскольку $q_1 > p_1$, то $\lim\limits_{t \to t_1} \varepsilon_1(t) = 0$.

$$x'' = x^{p_1}(1 - \varepsilon_1(t)).$$

Умножим это уравнение на x' и интегрируем от $t < t_1$ до t_1:

$$\int_t^{t_1} x'' x' ds = \int_t^{t_1} x^{p_1} x'(1 - \varepsilon_1(s)) ds,$$

$$-\frac{x'^2}{2}=\int\limits_t^{t_1} x^{p_1}x'ds\,\frac{\int\limits_t^{t_1} x^{p_1}x'(1-\varepsilon_1(s))ds}{\int\limits_t^{t_1} x^{p_1}x'ds}.$$

Интегрируем и применяем правило Лопиталя, получаем

$$\frac{x'^2}{2}=\frac{x^{p_1+1}}{p_1+1}(1+\varepsilon_2(t)), \qquad \text{где } \lim_{t\to t_1}\varepsilon_2(t)=0.$$

Поскольку нас интересуют убывающие решения, то

$$x'=-\sqrt{\frac{2}{p_1+1}}\,x^{\frac{p_1+1}{2}}(1+\varepsilon_3(t)) \quad \text{где } \lim_{t\to t_1}\varepsilon_3(t)=0.$$

Разделяем переменные, повторно интегрируем от t до t_1 и применяем правило Лопиталя. В результате получаем утверждение теоремы.

С л е д с т в и е. Аналогичная формула справедлива и для $y(t)$.

3. t_1 и t_2 конечны. Выберем произвольно t_2 (например, $t_2=0$) и будем подбирать значение t_1 таким образом, чтобы при счете назад системы (I),(2) в некоторой точке t_3 выполнилось бы условие $x'(t_3)=y'(t_3)=0$. В системе сделаем замену переменного $t_н=t-t_3$. Т.к. система автономна, то она не изменится. Теперь выполнены условия (4)-(9) и сразу найдено решение и собственные значения.

При решении системы (I),(2) назад необходимо использовать точное решение (I4) и асимптотику (I7), т.к. в противном случае получится лишь тривиальное решение системы (I), (2) $x(t)\equiv y(t)\equiv 0$.

Предлагаемый алгоритм характеризуется тем, что требуется подобрать лишь значение $\Delta t=t_2-t_1$. Определив это значение, мы можем с какой угодно точностью вычислить остальные искомые величины. Однако, как уже отмечалось выше, ничто пока не гарантирует, что Δt будет найдено, т.к. теорема существования для задачи (I)-(9) не доказана. Одним из путей доказательства теоремы существования может быть следующий: получить оценки снизу и сверху для Δt в зависимости от параметров (3), а затем использовать непрерывную зависимость решения задачи (I)-(9) от величины Δt

Проведенные расчеты на ЭВМ дают основание надеяться, что нужные оценки могут быть получены, т.к. для широкого класса параметров (3) программа всегда находила Δt, т.е. решение задачи (I)-(9). Другим направлением исследования этой задачи остается случай, когда одновременно выполнены неравенства $q_1 < p_1$ и $q_2 < p_2$, для которых пока нет никаких результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками. - Доклады АН СССР. 1981, т. 258, № 5, с.1084-1088.
2. Клоков Ю.А. О предельной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. - Вестник Московского университета, 1959, № 5, с.197-204.
3. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.-Рига: Зинатне, 1978.-184 с.
4. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов обострения / Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препринт № 74. М., 1976. 68 с.

Поступила 10.9.84.

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.57-62

УДК 519.31

Ф.Ж.Садырбаев
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

ОБ ЭКСТРЕМАЛЯХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ МЕДЛЕННОГО РОСТА ИНТЕГРАНТА

Рассматривается вопрос о существовании экстремалей в одномерных задачах вариационного исчисления для функционала

$$J(x) = \int_0^1 L(t, x, x')\,dt. \tag{1}$$

Будем считать, что функция L имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет усиленному условию Лежандра $L_{33} > 0$ (условимся использовать цифровые индексы в обозначениях частных производных).

В этом случае правая часть f уравнения Эйлера

$$\frac{d}{dt} L_3 = L_2 , \tag{2}$$

записанного в виде

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{3}$$

является непрерывной функцией.

Решения уравнения Эйлера принято называть экстремалями функционала (1).

Различные постановки вариационных задач приводят к различным краевым задачам для уравнения (2). Так, в задачах с закрепленными концами, свободными концами, смешанной задаче краевые условия соответственно имеют вид

$$x(0)=A, \qquad x(1)=B, \tag{4}$$

$$L_3(i, x(i), x'(i))=0, \quad i=0,1, \tag{5}$$

$$x(0)=A, \quad L_3(1, x(1), x'(1))=0. \tag{6}$$

При доказательстве теорем существования решения в вариационных задачах от функционала обычно требуется выполнение т.н. условия роста ([I], гл.9). Это условие для функциона (I) выполняется, например, в случае, когда порядок роста функции $L(t,x,y)$ по третьей переменной больше единицы. Для таких функционалов, как установил С.Н.Бернштейн [2], правая часть соответствующего уравнения Эйлера (3) имеет квадратичный рост по x', т.е. производная ограниченного решения уравнения (3) ограничена.

В противном случае говорят о проблеме медленного роста в задачах вариационного исчисления. В силу условия $L_{33}>0$ функция $L_3(t,x,y)$ возрастает по y при фиксированных t,x и величины $\ell_\pm(t,x)=\lim\limits_{y\to\pm\infty} L_3(t,x,y)$ могут быть ограниченными. Правая часть уравнения Эйлера (3) может при этом иметь произвольный рост по x'.

Ниже приводятся теоремы существования экстремалей некоторых вариационных задач в случае медленного роста интегранта L. Эти теоремы основаны на одном результате для уравнений (3), но при их доказательстве существенно используется специфическая форма уравнения Эйлера (2).

Пусть краевые условия имеют вид

$$g_i(x(i), x'(i))=0, \quad i=0,1, \tag{7}$$

где g_0, g_1 - непрерывные функции. Для краевой задачи (3), (7) хорошо известен следующий результат (см., например, [3]):

Т е о р е м а I. Пусть

I) существуют нижняя и верхняя функции α, β , т.е. $\alpha'' \geq f(t,\alpha,\alpha')$, $\beta'' \leq f(t,\beta,\beta')$, причем $\alpha(t) \leq \leq \beta(t)$ при $t \in [0,1]$;

2) существует число N такое, что

а) $\alpha'(t) \in [-N,N]$, $\beta'(t) \in [-N,N]$ при $t \in [0,1]$;

б) для любого решения $x(t)$ задачи (3),(7), определенного на $[0,1]$, график которого (т.е. множество $\Gamma = \{(t, x(t)) : t \in [0,1]\}$ лежит в $\omega(\alpha,\beta) = \{(t,x): \alpha(t) \leq x \leq \beta(t), t \in [0,1]\}$ имеет место оценка

$$|x'(t)| \leq N, \quad t \in [0,1]; \tag{8}$$

3) $g_0(\alpha(0),y) \geq 0$ при $\alpha'(0) \leq y \leq N$,

$g_0(\beta(0),y) \leq 0$ при $-N \leq y \leq \beta'(0)$,

$g_1(\alpha(1),y) \geq 0$ при $-N \leq y \leq \alpha'(1)$,

$g_1(\beta(1),y) \leq 0$ при $\beta'(1) \leq y \leq N$.

Тогда существует дважды непрерывно дифференцируемое решение задачи (3),(7).

О п р е д е л е н и е. Функция $\gamma \in C^2([0,1])$ называется нижней (верхней) функцией для функционала (I), если разность

$$\frac{d}{dt} L_3(t,\gamma,\gamma') - L_2(t,\gamma,\gamma')$$

неположительна (неотрицательна) в $[0,1]$.

Заметим, что нижняя (верхняя) функция γ для функционала (I) является одновременно нижней (верхней) функцией для уравнения Эйлера (3) в смысле условия I теоремы I.

Будем говорить, что выполняется условие А, если существуют нижняя и верхняя функции α, β функционала (I) такие, что $\alpha(t) \leq \beta(t)$ в $[0,1]$.

Т е о р е м а 2. Пусть

I) выполняется условие А;

2) существует функция $\mu \in C'([0,1])$ такая, что

а) $\alpha(t) \leq \mu(t) \leq \beta(t)$, $t \in [0,1]$;

б) $\mu(0) = A$, $\mu(1) = B$;

в) $L_2(t,x,y)(x-\mu(t))\geq 0,\ (t,x,y)\in\omega(\alpha,\beta)\times R;$

3) существуют числа c_1, c_2 такие, что

а) $\ell_-(t,x)<c_1<c_2<\ell_+(t,x)$ в $\omega(\alpha,\beta)$;

б) $c_1\leq L_3(t,\alpha,\alpha')\leq c_2,$

$c_1\leq L_3(t,\beta,\beta')\leq c_2,\quad t\in[0,1];$

в) $c_1\leq L_3(t,\mu,\mu')\leq c_2,\quad t\in[0,1].$

Тогда существует решение задачи (2),(4).

Доказательство. Пусть $g_0(x,y)=x-A$, $g_1=x-B$. Теперь покажем, что для решения x, график которого лежит в $\omega(\alpha,\beta)$, выполняется (8), где N - некоторое число.

Пусть непрерывные (в силу свойств производной L_3) функции $\varphi,\psi:\omega(\alpha,\beta)\to R$ определены соотношениями

$$c_1=L_3(t,x,\varphi),\quad c_2=L_3(t,x,\psi).\qquad (9)$$

Покажем, например, что $x'(t)\leq\psi(t,x(t)),\ t\in[0,1]$. Пусть это не так. Рассмотрим, для определенности, случай $x'(t_0)>\psi(t_0,x(t_0)),\ x(t_0)>\mu(t_0),\ t_0\in[0,1)$. Поскольку $x(1)=\mu(1)$, найдется $t_1\in(t_0,1]$ такое, что $x(t_1)=\mu(t_1),\ x(t)>\mu(t)$ при $t\in[t_0,t_1]$. Тогда $x'(t_1)\leq\mu'(t_1)$. Следовательно, $L_3(t_1,x(t_1),x'(t_1))\leq$ $\leq L_3(t_1,\mu(t_1),\mu'(t_1))\leq c_2\leq L_3(t_0,x(t_0),\psi(t_0,x(t_0))<$ $<L_3(t_0,x(t_0),x'(t_0))$. Но т.к. на интервале $[t_0,t_1]$ $L_2\geq 0$ (условие 2в) и $(L_3)'_t\geq 0$, функция L_3 на этом интервале не убывает. Полученное противоречие доказывает, что $x'(t)\leq\psi(t,x(t))$. В завершение доказательства достаточно взять $N=\max\limits_t\{|\varphi|+|\psi|\}$.

Теорема 3. Пусть

1) выполняется условие А;

2) $yL_2(t,x,y)\leq 0$ при $(t,x)\in\omega(\alpha,\beta)$, $|y|>K$, где K - положительное число такое, что $\alpha'(t)\in[-K,K],\ \beta'(t)\in[-K,K],\ t\in[0,1]$;

3) $\ell_-(t,x)<-c_0,\ \ell_+(t,x)>c_0,\ (t,x)\in\omega(\alpha,\beta),$

$c_0 = max\{|L_3(t,x,y)| : (t,x)\in\omega(\alpha,\beta), |y|\leqslant K\}$;

4) $\alpha(0)=A=\beta(0)$, $\alpha(1)\leqslant B\leqslant\beta(1)$.

Тогда верно заключение теоремы 2.

Доказательство. Существуют числа c_1, c_2 такие, что $\ell_-(t,x)<c_1<-c_0$, $\ell_+(t,x)>c_2>c_0$. Пусть $N_2 = max\{y: L_3(t,x,y)=c_2\}$, $-N_1 = min\{y: L_3(t,x,y)=c_1\}$. Заметим, что $N_2>K$, $-N_1<-K$. Покажем, что $-N_1\leqslant x'(t)\leqslant N_2$, $t\in[0,1]$. Докажем оценку сверху. Согласно условию 4, $x'(0)\leqslant\beta'(0)\leqslant K$. Следовательно, $L_3(0,x(0),x'(0))\leqslant c_0$. Предположим, что в некоторой точке $t_1\in(0,1]$ $x'(t_1)>N_2$. Тогда $L_3(t_1,x(t_1),x'(t_1))>c_2>c_0$. Значит, на некотором интервале $[t_0,t_1]$ функция $L_3(t,x(t),x'(t))$ меняется от c_0 до c_2, причем $x'(t)\geqslant K$ на этом интервале. Однако, используя условие 2, для указанных значений t имеем $\frac{d}{dt}L_3(t,x,x')=L_2(t,x,x')\leqslant 0$. Отсюда вытекает, что функция L_3 возрастать в $[t_0,t_1]$ не может. Полученное противоречие доказывает ограниченность сверху числом N_2 производной решения.

Аналогично доказывается оценка снизу.

Полагая $g_0=x-A$, $g_1=x-B$ и выбирая в качестве N максимальное из чисел N_1, N_2, убеждаемся, что все условия теоремы I выполнены.

Теорема 4. Пусть выполняются условия I–3 теоремы 3, причем неравенство в условии 2 имеет обратный знак. Пусть также выполняются условия

4) $\alpha(0)\leqslant A\leqslant\beta(0)$,
$L_3(1,\alpha(1),\alpha'(1))\leqslant 0\leqslant L_3(1,\beta(1),\beta'(1))$.

Тогда существует решение задачи (2),(6).

Доказательство. Определим числа c_1, c_2, N_1, N_2 как при доказательстве предыдущей теоремы. Докажем, например, что производная x' решения ограничена сверху числом N_2. Пусть это не так, т.е. найдется $t_0\in[0,1]$ такое, что $x'(t_0)>N_2>K$. Тогда, согласно определению числа c_2, $L_3(t_0,x(t_0),x'(t_0))>c_2$.

Поскольку при $t=1$ значение функции L_3 на решении равно нулю, найдется правая окрестность точки t_0 , в которой $L_3(t,x(t),x'(t))$ убывает, но это противоречит знаку производной $(L_3)'_t$.

Аналогично доказывается оценка снизу. Полагая $g_0=x-A$, $g_1=-L_3(1,x,y)$, убеждаемся, что выполняется также условие 3 теоремы I.

Т е о р е м а 5. Пусть

I) выполняется условие А;

2) функция $L_2(t,x,y)$ не меняет знака в областях $\omega(\alpha,\beta)\times[K,+\infty)$, $\omega(\alpha,\beta)\times(-\infty,-K]$, где K - число, описанное в условии 2 теоремы 3;

3) выполняется условие 3 теоремы 3;

4) $(-1)^i L_3(i,\beta(i),\beta'(i))\leqslant 0\leqslant$
$\leqslant(-1)^i L_3(i,\alpha(i),\alpha'(i)$, $i=0,1$.

Тогда существует решение задачи (2),(5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности функция $L_2(t,x,y)$ неотрицательна в обеих описанных в условии 2 областях. Определим, как и ранее, числа c_1,c_2,N_1,N_2. Значение производной $x'(t)$ ни в одной точке не может превышать числа N_2 , т.к. в противном случае на некотором интервале функция $L_3(t,x(t),x'(t))$ убывает, а это противоречит знаку ее производной.

Аналогично доказывается оценка снизу.

Для функций $g_0=L_3(0,x,y)$, $g_1=-L_3(1,x,y)$ выполняются условия 3 теоремы I.

Доказательство завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач.- М.: Наука, I974.-479 с.

2. Бернштейн С.Н. Об уравнениях вариационного исчисления.- Усп.мат.наук, I940, вып.8, с.32-74.

3. Гудков В.В. Замечание об одной краевой задаче.-Дифференциальные уравнения, I973, т.9, № 6. с.II33-II35.

Поступила I2.9.84.

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.63-71

УДК 517.929

М.Е.Драхлин
Пермский политехнический институт

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть R^n - линейное пространство n-мерных вещественных векторов с нормой $\|\cdot\|$. Этим же символом будем обозначать норму $n\times n$-матрицы, согласованную с нормой в R^n. Если $n=1$, то вместо R^1 будем писать просто R.

Пусть $[a,b]\subset R$, $-\infty<a<b<\infty$, Σ - σ-алгебра подмножеств сегмента $[a,b]$, m - мера Лебега, определенная на Σ.

Обозначим:

L_p^n, $1\le p<\infty$ - пространство суммируемых функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой

$$\|x\|_p=\Big(\int_a^b\|x(s)\|^p\,dm(s)\Big)^{\frac{1}{p}};$$

L_∞^n - пространство измеримых функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой

$$\|x\|_\infty=\operatorname*{vraisup}_{s\in[a,b]}\|x(s)\|;$$

C^n - пространство непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой

$$\|x\|_C=\max_{s\in[a,b]}\|x(s)\|;$$

D_p^n, $1\le p\le\infty$ - пространство абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to R^n$ с нормой

$$\|x\|_{D_p} = \|x(a)\| + \|\dot{x}\|_p .$$

При $n=1$ индекс n в обозначении пространств будем опускать.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=1}^{k} B_i(t)\dot{x}(g_i(t)) = (Fx)(t), \quad t \in [a,b], \qquad (1)$$
$$\dot{x}(\xi) = 0, \qquad \xi \notin [a,b]$$

в следующих предположениях.

Элементы $n \times n$ -матриц B_i, $i=1,2,\dots,k$, -измеримые скалярные функции; функции $g_i : [a,b] \to R$, $i=1,2,\dots,k$, измеримые и удовлетворяющие условию:

$$(\forall e \in \Sigma)\ m(e) = 0 \Rightarrow m(g_i^{-1}(e)) = 0, \ i=1,2,\dots,k; \qquad (2)$$

оператор F непрерывно действует из D_p^n в L_p^n.

Определим операторы $S_i : L_p^n \to L_p^n$, $i=1,2,\dots,k$, $S : L_p^n \to L_p^n$ соответственно равенствами

$$(S_i y)(t) = \begin{cases} B_i(t) y(g_i(t)), & g_i(t) \in [a,b], \\ 0 \quad , & g_i(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

$$(Sy)(t) = \sum_{i=1}^{k} (S_i y)(t), \qquad t \in [a,b].$$

Вопрос о разрешимости краевых задач для уравнения (I) тесно связан (см. I) с вопросом об однозначной разрешимости функционального уравнения

$$Sy = f, \quad f \in L_p^n \qquad (3)$$

в пространстве L_p^n, на решении которого мы сейчас остановимся.

Пусть $r : [a,b] \to [0,\infty[$ - измеримая функция, а функция $g : [a,b] \to R$ удовлетворяет условию (2). Определим на Σ функцию $\mu(r,g,m)$ равенством

$$\mu(r,g,m)(e)=\int\limits_{g^{-1}(e)} r(t)\,dm(t), \quad e\in\Sigma.$$

По теореме Радона-Никодима (см., например, [2]) существует измеримая функция $\varphi(r,g,m)$ такая, что

$$\mu(r,g,m)(e)=\int\limits_{e} \varphi(r,g,m)(t)\,dm(t), \quad e\in\Sigma$$

(в [3,4] приведены некоторые способы вычисления этой функции). Если $r(t)=1$, $t\in[a,b]$, то будем писать $\varphi(1,g,m)$.

Определение. Будем говорить, что функция $g:[a,b]\to R$ удовлетворяет условию $\omega(h)$ и писать $g\in\omega(h)$, если существует функция $h:[a,b]\to R$ удовлетворяющая условию (2) и такая, что $h(g(t))=t$ почти всюду на множестве $g^{-1}([a,b])$.

Лемма I [5]. Пусть $g_j\in\omega(h_j)$, $j\in\{1,2,\dots,k\}$. Для того, чтобы оператор $S_j: L_p^n\to L_p^n$, $1\le p\le\infty$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. $m([a,b]\setminus g_j^{-1}([a,b]))=m([a,b]\setminus h_j^{-1}([a,b]))=0;$

2. $m(\{t\in[a,b]: \det B_j(t)=0\})=0;$

3. $\operatorname*{vraisup}\limits_{t\in[a,b]}\|[(\varphi(1,g_j,m)(g_j(t)))^{\frac{1}{p}}B_j(t)]^{-1}\|<\infty$

($\frac{1}{p}=0$, если $p=\infty$).

Обозначим:

$$\hat{B}_i(t)=B_j^{-1}(h_j(t))B_i(h_j(t)) \quad (\hat{B}_i(t)=B_i(t)B_j^{-1}(t)),$$

$$\hat{g}_i(t)=g_i(h_j(t)) \quad ((\hat{g}_i(t))=h_j(g_i(t))),$$

$$\hat{b}_i(t)=\|\hat{B}_i(t)\|, \; t\in[a,b], \; i=1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,k,$$

χ_e - характеристическая функция множества $e\in\Sigma$.

Лемма 2 [5]. Пусть выполнены условия леммы I, причем, если $1<p<\infty$, то выполнено неравенство

$$\sum_{i=1,i\neq j}^{k} \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} [\varphi(\varphi(\hat{b}_i^p, h_j, m), g_i, m)(t)]^{\frac{1}{p}} < 1;$$

если $p=1$, то выполнено неравенство

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \sum_{i=1,i\neq j}^{k} \varphi(\varphi(\hat{b}_i, h_j, m), g_i, m)(t) < 1;$$

если $p=\infty$, то выполнено неравенство

$$\operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \sum_{i=1,i\neq j}^{k} \hat{b}_i(t)\chi_{g_i^{-1}([a,b])}(t) < 1.$$

Тогда уравнение (3) однозначно разрешимо в пространстве L_p^n Определим вектор-функционал $l: D_p^n \to R^n$ равенством

$$lx = x(a) + \int_a^b \Phi(s)\dot{x}(s)\,dm(s),$$

где элементы $n\times n$ -матрицы Φ принадлежат $L_q \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$.

Рассмотрим уравнение (I) с краевыми условиями

$$lx=0. \tag{4}$$

Решением задачи (I),(4) будем называть абсолютно непрерывную функцию $x\in D_p^n$, удовлетворяющую уравнению (I) почти всюду на $[a,b]$ и краевому условию (4).

Т е о р е м а. Пусть выполнены условия леммы 2 и одно из условий:

I) оператор $F: D_p^n \to L_p^n$ вполне непрерывен;

2) $p>1$ и оператор F непрерывно отображает пространство C^n в пространство L_p^n ;

3) оператор F непрерывно отображает пространство $L_{p_1}^n$, $1\le p_1<\infty$ в пространство L_p^n .

Пусть, кроме того,

$$\lim_{\|x\|_C\to\infty} \frac{\|Fx\|_P}{\|x\|_C} = 0. \tag{5}$$

Тогда существует решение задачи (I),(4).

Доказательство. Для доказательства применим W-метод Н.В.Азбелева (см., например, [I]). В силу леммы 2, существует линейный непрерывный оператор $W: L_p^n \to \{x \in D_p^n : \ell x = 0\}$, причем для любого $y \in L_p^n$ справедливо равенство $S\frac{d}{dt}Wy = y$. Здесь $\frac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования. Отсюда следует, что задача (I), (4) эквивалентна функциональному уравнению

$$y = FWy, \quad y \in L_p^n, \tag{6}$$

и взаимно однозначное соответствие между решениями задачи (I),(4) и уравнения (6) устанавливается с помощью равенств:

$$x = Wy, \qquad y = Fx.$$

Покажем, что в условиях теоремы оператор $FW: L_p^n \to L_p^n$ является вполне непрерывным. Если выполнено условие I), то это очевидно. Пусть выполнено условие 2. Так как $D_p^n \subset C^n$ и при $p > 1$ ограниченное множество пространства D_p^n является компактным в смысле топологии пространства C^n, то непрерывный оператор $W: L_p^n \to D_p^n$, рассматриваемый как оператор, действующий из пространства L_p^n в пространство C^n, является вполне непрерывным. Следовательно, вполне непрерывен оператор $FW: L_p^n \to L_p^n$. При выполнении условия 3) полная непрерывность оператора FW следует из того, что при любом $1 \le p \le \infty$ пространство D_p^n компактно вложено [6, с.295] в пространство $L_{p_1}^n$, $1 \le p_1 < \infty$.

Из неравенства

$$\frac{\|FWy\|_P}{\|Wy\|_C} \geq \frac{\|FWy\|_P}{\|W\|_{L_p\to C}\|y\|_p}$$

следует, что

$$\lim_{\|y\|_p \to \infty} \frac{\|FWy\|_p}{\|y\|_p} = 0.$$

Тогда существует замкнутый ограниченный шар в пространстве L_p^n, который оператор FW отображает в себя. Ссылка на принцип Шаудера завершает доказательство.

Частным случаем уравнения (I) является уравнение

$$(S\dot{x})(t) = f(t,(Tx)(t)), \quad t \in [a,b], \tag{7}$$

где T - непрерывный оператор, действующий из пространства D_p^n в пространство L_p^n, функция $f: [a,b] \times R^n \to R^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори и

$$\|f(t,u)\| \leq \gamma(t) + \beta\|u\|^\delta, \; 0 \leq \delta < 1, \; \gamma \in L_p, \; \beta \in [0,\infty[. \tag{8}$$

Применительно к уравнению (7) доказанная теорема позволяет получить несколько следствий.

С л е д с т в и е I. Пусть $p>1$, выполнены условия леммы 2 и линейный оператор T непрерывно отображает пространство C^n в L_p^n. Тогда существует решение задачи (7), (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через N оператор Немыцкого:

$$(Nu)(t) = f(t,u(t)), \quad t \in [a,b].$$

Из неравенства (8) следует:

$$\|NTx\|_p \leq \|\gamma\|_p + \beta\|Tx\|_{p\delta}^\delta \leq \|\gamma\|_p + \beta\{\|T\|_{C^n \to L_{p\delta}^n}\}^\delta \|x\|_c^\delta .$$

Так как $\delta < 1$, то

$$\lim_{\|x\|_c\to\infty} \frac{\|NTx\|_p}{\|x\|_c} = 0 .$$

Ссылка на теорему завершает доказательство.

Следствие 2. Пусть оператор $T: D_p^n \to L_p^n$ определяется равенством

$$(Tx)(t) = \int_a^b d_s K(t,s) x(s), \quad t \in [a,b], \tag{9}$$

где K - $n \times n$ -матрица с измеримыми на $[a,b] \times [a,b]$ компонентами $\|K(\cdot,s)\|, \{\underset{s\in[a,b]}{var} \|K(\cdot,s)\|\} \in L_p^n$ и выполнены условия леммы 2. Тогда существует решение задачи (7), (4).

Доказательство. В работе [7] показано, что оператор $T: D_1^n \to L_p^n$, $1 \le p < \infty$, определяемый равенством (9), является вполне непрерывным. Следовательно, выполнено условие I) теоремы. Условие (5) проверяется так же как при доказательстве следствия I.

Следствие 3. Пусть $p > 1$, оператор $G: D_p^n \to L_p$ непрерывный, оператор $T: D_p^n \to L_p^n$ определяется равенством

$$(Tx)(t) = \begin{cases} x((Gx)(t)), & (Gx)(t) \in [a,b], \\ 0 & (Gx)(t) \notin [a,b]. \end{cases}$$

Пусть, кроме того, выполнены условия леммы 2 и одно из условий:

I) $(\forall x \in D_p^n)$
$m(\{t\in[a,b]:(Gx)(t)=a\} \cup \{t\in[a,b]:(Gx)(t)=b\})=0;$

2) $(\forall x_1, x_2 \in D_p^n)$
$m(\{t\in[a,b]:(Gx_1)(t)\notin[a,b]\} \cap \{t\in[a,b]:(Gx_2)(t)\notin[a,b]\}=$

$= m(\{t \in [a,b] : (Gx_1)(t) \notin [\alpha,\beta]\}$.

Тогда существует решение задачи (7),(4).

Доказательство. Пусть $\|x_n - x\|_{D_p^n} \to 0$, при $n \to \infty$. Из условия 1) или 2) следует (см. [8]), что $(\forall \sigma > 0)\ m(\{t \in [a,b] : \|(Tx_n)(t) - (Tx)(t)\| \geq \sigma\}) \to 0$

при $n \to \infty$. Так как $\sup_{n \geq 1} \{\|x_n\|_C\} < \infty$, то семейство функций $\{Tx_n\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Следовательно, $\|Tx_n - Tx\|_p \to 0$, при $n \to \infty$. Из того, что $(\forall x \in D_p^n)\ \|Tx\|_\infty \leq \|x\|_C$, вытекает неравенство

$$\|NTx\|_p \leq \|\gamma\|_p + \beta \|Tx\|_{p\delta}^{\delta} \leq \|\gamma\|_p + \beta [b-a]^{\frac{1}{p}} \|x\|_C^{\delta}.$$

Из последнего следует (5). Итак, выполнены все условия теоремы.

Пример. Рассмотрим задачу:

$$\dot{x}(\sqrt{t}) + 3\dot{x}(t^2) = |x(|\sin(x(t) + \dot{x}(t))|)|^{\frac{1}{2}} + r(t), \quad (10)$$

$$t \in [0,1], \qquad r \in L_2,$$

$$x(0) + \int_0^1 \varphi(s)\dot{x}(s)\,dm(s) = \alpha, \ \alpha \in R, \ \varphi \in L_2. \quad (11)$$

Обозначим

$$(S_1 y)(t) = y(\sqrt{t}), \ (S_2 y)(t) = 3y(t^2), \ S = S_1 + S_2,$$

$$(Tx)(t) = x(|\sin(x(t) + \dot{x}(t))|), \quad t \in [0,1].$$

Для оператора S выполняются условия леммы 2, так как (см., например, [4])

$$\|S_2^{-1} S_1\|_{L_2 \to L_2} = \frac{1}{3} \sqrt{\max_{t \in [0,1]} 4t^3} = \frac{2}{3}.$$

Для оператора T выполняется условие 2) следствия 3. Итак, в силу следствия 3, существует решение задачи (10),(11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. - Дифференц.уравнения, 1978, т.14, № 5, с.771-797.
2. Халмош П. Теория меры. - М.: ИЛ, 1953. 291 с.
3. Драхлин М.Е., Плышевская Т.К.-Дифференц.уравнения, 1978, т.14, № 8, с.1347-1367.
4. Драхлин М.Е., Плышевская Т.К. - В кн.: Краевые задачи. Пермь, 1980, с.158-165.
5. Драхлин М.Е. - В кн.: Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1985, с.3-25.
6. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. - М.: Наука, 1965. 520 с.
7. Максимов В.П. - В кн.: Краевые задачи. Пермь, 1979, с.113-115.
8. Драхлин М.Е. - Дифференц.уравнения, 1972, т. 8, № 4, с.721-724.

Поступила 13.9.84.

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.72-83

УДК 517.927

С.А.Беспалова
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ 4-ГО ПОРЯДКА

I. Постановка задачи.

В приложениях (см., например, [8]-[10]) встречается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} x'' &= -\Phi(x,y) \\ y'' &= \Phi(x,y) \end{aligned} \qquad (I.I)$$

где $\Phi(x,y)$ - нелинейная функция с различными краевыми условиями. Так, в [10] изучаются априорные оценки и единственность решения системы (I.I) для случая

$$\Phi(x,y)=\alpha[y-\gamma(1-y)x], \qquad (I.2)$$

$\alpha, \gamma \in R$, $\alpha, \gamma > 0$, удовлетворяющего краевым условиям

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \quad x(1)=x_1, \\ y(0) &= y_0, \quad y(1)=y_1. \end{aligned} \qquad (I.3)$$

В [I] изучена более общая, по сравнению с (I.I)-(I.3), краевая задача и получены менее ограничительные, чем в [10], условия единственности решения задачи (I.I)-(I.3).

В настоящей статье исследуется вопрос существования решения задачи (I.I),(I.3) при использовании специфики системы (I.I) и теории нижних и верхних функций, [4 - 7].

Во всех встречающихся системах типа (I.I) функцию $\Phi(x,y)$ посредством подходящей замены независимой переменной можно записать в виде

$$\Phi(x,y) = ay - bx + xy,$$

при этом отрезок $[0,1]$ преобразуется в некоторый отрезок $[0,\tau], \tau>0$. Поэтому будем исследовать краевую задачу

$$x'' = -(ay - bx + xy)$$

$$y'' = (ay - bx + xy), \quad 0 \leq t \leq \tau, \tag{I.4}$$

$$x(0) = x_0, \quad x(\tau) = x_\tau,$$
$$y(0) = y_0, \quad y(\tau) = y_\tau, \tag{I.5}$$

$a, b \in R$.

Из системы (I.4) имеем $x'' + y'' = 0$. Так что

$$y = A + Bt - x, \tag{I.6}$$

где $A = x_0 + y_0$, $B = (x_\tau + y_\tau - x_0 - y_0)/\tau$.

Используя (I.6), систему (I.4) можно свести к уравнению 2-го порядка и тем самым от (I.4),(I.5) перейти к задаче

$$x'' = x^2 + x[a + b - (A+Bt)] - a(A+Bt), \quad 0 \leq t \leq \tau$$
$$x(0) = x_0, \quad x(\tau) = x_\tau.$$

Если теперь ввести функцию

$$z = x + \frac{a + b - (A+Bt)}{2},$$

то придем к задаче

$$z'' = z^2 - \varphi(a, b, x_0, y_0, x_\tau, y_\tau, t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \tag{I.7}$$

$$z(0) = \varphi_1(a, b, x_0, y_0),$$
$$z(\tau) = \varphi_2(a, b, x_0, y_0, x_\tau, y_\tau, \tau), \tag{I.8}$$

где

$$\varphi(a,b,x_0,y_0,x_\tau,y_\tau,t)=ab+((b-a-x_0-y_0)\tau-$$
$$-(x_\tau+y_\tau-x_0-y_0)t)^2/4\tau^2,$$

$$\varphi_1(a,b,x_0,y_0)=(a+b+x_0-y_0)/2,$$

$$\varphi_2(a,b,x_\tau,y_\tau)=(a+b+x_\tau-y_\tau)/2.$$

Обозначим $\alpha\equiv\max\limits_{0\le t\le\tau}(-\sqrt{\varphi(a,b,x_0,y_0,x_\tau,y_\tau,t)})\equiv$

$\equiv\Psi(a,b,x_0,y_0,x_\tau,y_\tau)$. Очевидно, что $\alpha\le-\sqrt{ab}$. Легко видеть, что верхняя функция всегда существует:

$\beta\equiv\max\{\varphi_2,\bar\varphi\}$, где $\bar\varphi\equiv\max\limits_{0\le t\le\tau}\sqrt{\varphi(a,b,x_0,y_0,x_\tau,y_\tau,t)}$

Следовательно, область существования решения задачи (I.7), (I.8) (а значит и задачи (I.4),(I.5)) определяется неравенствами

$$\varphi_1,\varphi_2\ge\Psi(a,b,x_0,y_0,x_\tau,y_\tau).$$

Эта область больше, чем в [I], [8] и решение во всяком случае существует, если

$$\varphi_1\ge-\sqrt{ab} \qquad (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+(x_0-y_0)/2\ge 0$$

или

$$\varphi_2\ge-\sqrt{ab} \qquad (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+(x_\tau-y_\tau)/2\ge 0.$$

Таким образом, применение аппарата верхних и нижних функций позволяет улучшить известные результаты для задачи (I.4), (I.5).

2. Обоснование одного метода определения области существования решения краевой задачи.

Рассмотрим уравнение

$$x''=\alpha x^2+bx+c, \tag{2.1}$$

где $x = x(t), t \in R, a, b, c \in R$ – постоянные, $a \neq 0$, $(a > 0)$. Сделав замену $x + b/2a = y$ и введя новые переменные z, s посредством равенств

$$y = \alpha z, \quad t = ks \quad (\alpha, k \in R \text{ -параметры}) \tag{2.2}$$

перепишем (2.I) в виде

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = k^2 a \alpha z^2 + \frac{k^2}{\alpha} \cdot \frac{4ac - b^2}{4a} \,. \tag{2.3}$$

При этом возможны следующие случаи:

I. $4ac - b^2 = 0$,

2. $4ac - b^2 > 0$,

3. $4ac - b^2 < 0$.

Рассмотрим каждый из них отдельно.

I. Полагая в (2.3) $k^2 a \alpha = 1$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = z^2 . \tag{2.4}$$

Как следует из [5], его решения, удовлетворяющие условию

$$z(0) = z_0 , \quad z'(0) = 0 , \tag{2.5}$$

где $z_0 < 0$, определены на отрезке $[-1, 1]$, если $\sqrt{|z_0|} \in [0, \tau), \tau \geq 0$. Обозначим эти решения через $z(t, z_0)$. Если теперь взять в качестве нижней функции

$$\alpha(t) = \inf\{z(t, z_0)\},$$

а верхней функцией

$$\beta(t) = H > 0$$

(H - достаточно велико), то краевая задача

$$z'' = z^2$$

$$z(-1)=z_1, \quad z(1)=z_2$$

имеет решения при $z_1 \leqslant \alpha(-1)$, $z_2 \leqslant \alpha(1)$.

2. Как и в предыдущем случае полагаем, что $k^2 a\alpha = 1$, а также $k^2(4ac-b^2)/4a\alpha = 1$, откуда для α и k получаем их выражения через коэффициенты уравнения (2.I):

$$\alpha=(4ac-b^2)^{1/2}/2a, \quad k=2/(4ac-b^2)^{-1/2}. \qquad (2.6)$$

Таким образом, если в (2.2) параметры α и k взять такими, как в (2.6), тогда от (2.I) приходим к уравнению

$$z''=z^2+1. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим для него задачу Коши (2.5).

Легко показать, что решение задачи (2.7),(2.5) для $\forall z_0 \in R$ имеет вертикальную асимптоту при некотором $s=\tau(z_0)$. Если обозначить $\tau_0=\max\limits_{z_0 \in R} \tau(z_0)$, то, очевидно, ни для какого значения z_0 не существует решения задачи (2.7),(2.5), определенного на всем отрезке $[-\tau_0, \tau_0]$.

Рис.I. Поведение решений задачи Коши (2.7),(2.5).

Для определения τ_0 переходим на фазовую плоскость и получаем

$$\int_{z_0}^{z(s)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{3}(r^3 - z_0^3) + 2(r - z_0)}} = s \ .$$

Так как при $s \to \tau(z_0)$ $z(s) \to +\infty$, то

$$\tau(z_0) = \int_{z_0}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{3}(r^3 - z_0^3) + 2(r - z_0)}} = \sqrt{6}\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^4 + 3\xi^2 z_0 + 3z_0^2 + 3}} \ . \tag{2.8}$$

Для численных расчетов интеграл (2.8) удобнее представить в следующем виде

$$\tau(z_0) = \sqrt{6}\int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{\xi^4 + 3\xi^2 z_0 + 3z_0^2 + 3}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 3\xi^2 z_0 + \xi^4(3z_0^2 + 3)}}\right] ds \tag{2.9}$$

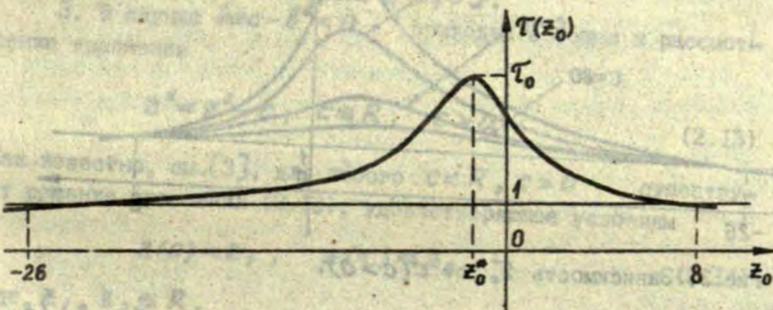

Рис.2. Характер зависимости τ от z_0.

Посредством численных расчетов получено значение

$$\tau_0 = \max_{z_0 \in R} \tau(z_0) = \tau(z_0^*) \approx 3.6384 \ , \quad z_0^* \approx -0.5536. \tag{2.10}$$

Таким образом, если $\tau \geqslant 3.6384$, то на отрезке $[-\tau, \tau]$ нет ни одного решения уравнения (2.7) и краевая задача

$$z'' = z^2 + 1 \ ,$$
$$z(-\tau) = z_1 \ , \quad z(\tau) = z_2$$

не имеет решения ни для каких значений $z_1, z_2 \in R$.

З а м е ч а н и е I. Если вместо (2.7) взять уравнение

$$z'' = z^2 + c, \quad c \in R, \quad c > 0,$$

то

$$\tau = \tau(c, z_0) = \sqrt{6} \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{\xi^4 + 3\xi^2 z_0 + 3(z_0^2 + c)}} + \frac{1}{\sqrt{1 + 3\xi^2 z_0 + 3\xi^4 (z_0^2 + c)}} \right] d\xi \quad (2.9)$$

и, следовательно, в этом случае $\tau_0 = \tau_0(c) = \max_{z_0 \in R} \tau(c, z_0) = \tau(c, z_0^*)$.

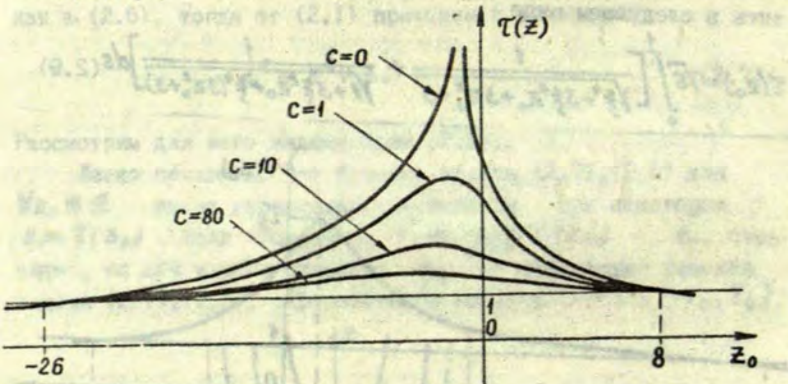

Рис.3. Зависимость τ_0 от $c (c > 0)$.

Из вышесказанного следует, что уравнение $z'' = z^2 + h^2$, $h \in R$, $h > 0$ не имеет ни одного решения, определенного на отрезке $\left[-\frac{\tau_0}{\sqrt{h}}, \frac{\tau_0}{\sqrt{h}}\right]$, где τ_0 определено равенством (2.10).

З а м е ч а н и е 2. Краевая задача

$$z'' = z^2 + a^2(s), \quad z(-\tau) = z_1, \quad z(\tau) = z_2, \quad \tau > 0, \quad (2.11)$$

$a(s) > 0$, $s \in [-\tau, \tau]$, не имеет решения ни для каких значений z_1, z_2, если $\tau \geq \frac{\tau_0}{\sqrt{a_*}}$, $a_* = \min_{s \in [-\tau, \tau]} a(s)$, τ_0 – из (2.10). Действительно, если бы такое решение существовало (скажем, $\bar{z}(s)$), то оно было бы нижней функцией для уравнения

$$z''=z^2+\alpha_*^2 \qquad (2.12)$$

и тогда уравнение (2.12) имело бы решения, определенные на отрезке $[-\tau_0,\tau_0]$, чего не может быть, так как $(\tau_0/\sqrt{a_*})\le\tau$. Если же $\alpha^*=\max\limits_{s\in[-\tau,\tau]}\alpha(s)$ таково, что $\alpha^*<(\tau_0/\tau)^2$, то задача (2.11) имеет решения при некоторых значениях $z_1,z_2\in R$.

Аналогично можно показать, что если уравнение (2.1) не имеет ни одного решения на отрезке $[-\tau,\tau]$ (это будет иметь место при $\tau\ge\tau_0\sqrt{2/(4ac-b^2)}$, то уравнение $x''=f(t,x,x')$, где $f(t,x,x')\ge ax^2+bx+c$ $\forall(t,x,x')\in[-\tau,\tau]\times R^2$, также не будет иметь ни одного решения, определенного на всем отрезке $[-\tau,\tau]$.

3. В случае $4ac-b^2<0$ приходим в общем к рассмотрению уравнения

$$z''=z^2-c,\quad c\in R,\quad c>0. \qquad (2.13)$$

Как известно, см.[3], для любого $c\in R$, $c>0$ существует решение уравнения (2.13), удовлетворяющее условиям

$$z(0)=z_1,\quad z(\tau)=z_2, \qquad (2.14)$$

где $z_1,z_2\in R$.

Для краевой задачи

$$x''=x^2+c(t),\ x(-1)=x_1,\ x(1)=x_2, \qquad (2.15)$$

где $|c(t)|\le c_0$ $\forall t\in[-1,1]$ справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. Существует $\mathcal{L}>0$ $(\mathcal{L}=\mathcal{L}(c))$ такое, что если $x_1\le-\mathcal{L}$ или $x_2\le-\mathcal{L}$, то решение задачи (2.15) не существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим автономное уравнение

$$x''=x^2-c_0. \qquad (2.16)$$

Переходя на фазовую плоскость, находим $\mathcal{L}=\mathcal{L}(c_0)$ и предполагаем, что для некоторого $x_1 \leq -\mathcal{L}$ решение задачи (2.I5) существует. Обозначим его через $\alpha(t),\ t\in I=[-1,1]$. Это решение будет нижней функцией для уравнения (2.I6). Действительно, $\alpha''=\alpha^2+c(t)\geq\alpha^2-c_0$ и, следовательно, уравнение (2.I6) имеет решение, удовлетворяющее условию $x(-1)=x_1,\ x(1)=\alpha(1)$, что противоречит выбору $\mathcal{L}$.

Тем самым теорема доказана.

Аналогично можно показать, что краевая задача

$$z''=a_{2n}(t)z^{2n}+\ldots+a_0(t)+h,\ z(0)=z_1,\ z(\tau)=z_2, \quad (2.I7)$$

где $a_{2n}(t)>0\ \ \forall t\in[0,\tau]$, не имеет решения, если $z_1,z_2\leq-\mathcal{L},\ \mathcal{L}>0$ - достаточно велико. Кроме того, если $a_0(t)>A_0\ \ \forall t\in[0,\tau]$, где A_0 - достаточно большая величина, то уравнение (2.I7) не имеет ни одного решения, определенного на отрезке $[0,\tau]$.

3. Численные результаты.

Проиллюстрируем применение вышеизложенного на примере определения области существования решения краевой задачи

$$x''=x^2+c,\ x(-1)=A,\ x(1)=B, \quad (3.I)$$

$c,A,B\in R,\quad x=x(t),\ t\in I.$

Надо определить область значений A,B, для которых (3.I) имеет решение.

Прежде всего, отметим, что, как следует из раздела 2, задача (3.I) имеет решение для некоторых $A,B\in R$, если $c<\tau_0^4\ (\tau_0\approx 3.6384)$, т.к. при $c\geq\tau_0^4$ уравнение в (3.I) не имеет ни одного решения, определенного на отрезке I.

Отдельно рассмотрим случаи

1. $0<c<\tau_0^4$,
2. $c=0$,
3. $c<0$.

I. Пусть F - область значений A,B, для которых задача (3.I) имеет решение. Очевидно, $F=F(c)$ и, кроме того, $F(c)$ - выпукла. Действительно, предположим, что (3.I) имеет решения для (A_1,B_1) и $(A_2,B_2), A_2\geqslant A_1, B_2\geqslant B_1$. Обозначим эти решения, соответственно, $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Тогда $x_1(t)$ есть нижняя функция, а $x_2(t)$ - верхняя функция и поэтому (3.I) имеет решения для всех

$$A=A_1+s(A_2-A_1)$$
$$B=B_1+s(B_2-B_1), \qquad 0\leqslant s\leqslant 1.$$

Введем вспомогательную задачу Коши

$$x''=x^2+c,\ x(0)=x_0,\ x'(0)=0, \tag{3.2}$$
$x_0\in R,\ x=x(t).$

Поскольку нас интересуют решения задачи (3.2), определенные на отрезке $[0,1]$, то согласно результатам раздела 2, в дальнейшем будем иметь в виду, что $c\in(0;178)=I_c$, $x_0\in[-26;8]=I_{x_0}$. Заметим также, что решение задачи (3.2) - функция четная.

Для фиксированного значения $c\in I_c$ и $\forall x_0\in I_{x_0}$ вычисляем $\tau(c,x_0)$, используя (2.9), где z_0 заменяем на x_0. Если при этом для некоторого $x_0\in I_{x_0}$ $\tau(c,x_0)>1$ решаем задачу (3.2) "вправо" до $t=1$ и тем самым находим такое значение $\bar{A}=\bar{A}(x_0)$, для которого задача (3.I) с $A=B=\bar{A}$ имеет решение.

Затем решаем задачу Коши

$$x''=x^2+c,\ x(1-\tau(c,x_0))=x_0,\ x'(0)=0$$

"влево" до $t=-1$. Обозначим $\mathcal{L}=x(-1)$. Очевидно, для фиксированного значения $c\in I_c$ $\mathcal{L}=\mathcal{L}(x_0)$. Теперь, чтобы построить область значений A,B существования решения задачи (3.I), дл: фиксированного c определяем

$$A(c)=\min_{x_0\in I_{x_0}}\bar{A}(x_0),$$

$$\mathcal{L}(c)=\min_{x_0\in I_{x_0}}\mathcal{L}(x_0).$$

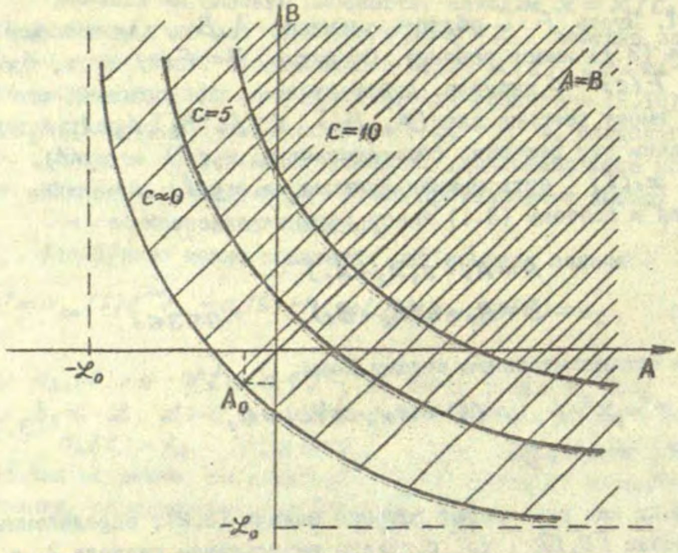

Рис.4. Область значений A, B , для которых задача (3.I) при $c \in I_c$ имеет решение. Характер ее зависимости от c. $A_0 = \lim_{c \to 0} A(c) \approx -0.57$, $\mathscr{L}_0 = \lim_{c \to 0} \mathscr{L}(c) \approx 7.02$.

Для случаев 2), 3) предлагаемая здесь методика определения области существования решения задачи (3,I) неприменима в силу сказанного о них в разделе 2.

4. Обобщение.

Используя метод, изложенный в разделе 2, можно изучить вопрос существования решения для задачи (I,I),(I,3) с

$$\Phi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

где $A, \ldots, F \in R$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Об одной краевой задаче для системы о.д.у., встречающейся в диффузионных процессах, В печати.
2. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. О двухточечной краевой задаче для системы четвертого порядка (встречающейся в биохимии). В печати.
3. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.— Рига : Зинатне , 1978.—183 с.
4. Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Рига : Зинатне , 1973.—135 с.
5. Васильев Н.И. Первая краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с квадратичными слагаемыми. В кн.: Исследования по теории диф.и разностных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1976, с.21-32.
6. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Тбилиси: Изд-во Тбилисского гос.ун-та, 1975.—352 с.
7. Лепин Л.А. Обобщенные нижние и верхние функции и их свойства. - Латв.мат.ежегодник. Рига : Зинатне, 1980, вып.24, с.113-123.
8. Gonzales-Fernandes J.M. and Atta S.E. Transport of Oxygen in Solutions of Hemoglobin and Myoglobin. - Mathem. Biosic., 1981, v.54, N 3-4, p.265-290.
9. Lopez Luciano, Stability and asymptotic behaviour for the numerical solution of a reaction diffusion model for a deterministic diffusive epidemic. - IMA J.Numer.Anal., 1983, v.3, N 3, p.341-351.
10. Ruth E.Hanna and J.B.Garner. An Analysis of Facilitated -Diffusion Problems. - Mathem.Biosic., 1983, v.63, N 1, p.9-20.

Поступила 17.9.84

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.84-92

УДК 517.927

Я.В.Виржбицкий
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ФИКСИРОВАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t)=f(t,x,x'),$$
$$Gx=G(x(a),x(b),x'(a),x'(b))=g, \qquad (\mathrm{I})$$

$$Hx=H(x(a),x(b),x'(a),x'(b))=h, \qquad (2)$$

где $a\in R$, $b\in(a,+\infty)$, $I=[a,b]$, $f\in Car(I\times R^2,R)$, G и H - граничные функции, $G,H\in C(R^2\times\bar{R}^2,\bar{R})$, $g,h\in\bar{R}$, $Car(I\times R^2,R)$ - класс функций, удовлетворяющих условию Каратеодори. На протяжении всей работы функция G предполагается фиксированной.

В работе при предположении разрешимости краевой задачи (I),(2) исследованы свойства граничных функций. Показано, что выявленные свойства этих функций гарантируют разрешимость краевой задачи. Существенно задействован аппарат нижних и верхних функций уравнения (I). Рассмотрение случая исследованного в [I], доведено до полной обратимости теоремы. Случай с дополнительным условием $\alpha(a)=\beta(a)$ рассмотрен полностью.

Наряду с краевой задачей (I),(2) рассмотрим краевую задачу для уравнения (I) с условиями

$$H_1x=h_1, \quad H_2x=h_2, \qquad (3)$$

где $H_i x = H_i(x(a), x(b), x'(a), x'(b))$, $H_i \in C(R^2 \times \bar{R}^2, \bar{R})$, $h_i \in \bar{R}$, $i \in \{1,2\}$.

Введем обозначения. $AG_f(I,R)$, $BG_f(I,R)$ – классы обобщенных нижних и верхних функций [2] уравнения (I). Класс монотонности $M(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4)$, где $\sigma_j \in \{0,-,+,1\}$, $j \in \{1,2,3,4\}$, есть семейство функций $\varphi \in C(R^2 \times \bar{R}^2, \bar{R})$ таких, что при $\sigma_1 = 0$ φ по первому аргументу постоянная, при $\sigma_1 = +$ – функция φ по первому аргументу не возрастает, при $\sigma_1 = -$ – не убывает, при $\sigma_1 = 1$ ограничения не накладываются. Для остальных аргументов определения аналогичны.

Будем говорить, что краевая задача (I),(3) нормально разрешима для классов монотонности M_1 и M_2, если для любых $f \in Car(I \times R^2, R)$, $\alpha \in AG_f(I,R)$, $\beta \in BG_f(I,R)$, $H_i \in M_i$ из выполнения $\alpha \leq \beta$, $H_i\alpha \leq h_i \leq H_i\beta$ следует существование обобщенного решения [2] краевой задачи (I),(3) такого, что $\alpha \leq z \leq \beta$.

Неравенство $z_1 \leq z_2$ для функций означает выполнение на I неравенства $z_1(t) \leq z_2(t)$.

Краевая задача (I),(3) нормально разрешима для классов монотонности M_1 и M_2 при условии $\alpha(a) = \beta(a)$, если для любых $f \in Car(I \times R^2, R)$, $\alpha \in AG_f(I,R)$, $\beta \in BG_f(I,R)$, $H_i \in M_i$ из выполнения $\alpha \leq \beta$, $\alpha(a) = \beta(a)$, $H_i\alpha \leq h_i \leq H_i\beta$ следует существование обобщенного решения z краевой задачи (I),(3) такого, чтс $\alpha \leq z \leq \beta$.

Аналогично определяется нормальная разрешимость краевой задачи (I),(3) для классов монотонности M_1 и M_2 при условиях $\alpha'(a) = \beta'(a)$, $\alpha'(a) > \beta'(a)$, $\alpha'(b) < \beta'(b)$, $\alpha'(b) = \beta'(b)$, $\alpha(a) = \beta(a)$ и $\alpha'(a) = \beta'(a)$, $\alpha(a) = \beta(a)$ и $\alpha'(b) < \beta'(b)$, $\alpha(a) = \beta(a)$ и $\alpha'(b) = \beta'(b)$.

Сформулируем теорему о нормальной разрешимости краевой задачи (I),(3) (см.[3],[4]).

Т е о р е м а I. Краевая задача (I),(3) нормально разрешима для следующих классов монотонности:

1) $M_1 = M(1--0)$, $M_2 = M(-10+)$,

2) $M_1 = M(11-+)$, $M_2 = M(--00)$,

3) $M_1 = M(1--0)$, $M_2 = M(11-+)$ при условии $\alpha(a) = \beta(a)$,

4) $M_1=M(-11+)$, $M_2=M(--10)$ при условии $\alpha'(a)=\beta'(a)$,
5) $M_1=M(-1++)$, $M_2=M(--10)$ при условии $\alpha'(a)>\beta'(a)$,
6) $M_1=M(1---)$, $M_2=M(--01)$ при условии $\alpha'(b)<\beta'(b)$,
7) $M_1=M(1--1)$, $M_2=M(--01)$ при условии $\alpha'(b)=\beta'(b)$,
8) $M_1=M(1-10)$, $M_2=M(111+)$ при условиях $\alpha(a)=\beta(a)$ и $\alpha'(a)\doteq\beta'(a)$,
9) $M_1=M(1---)$, $M_2=M(1--1)$ при условиях $\alpha(a)=\beta(a)$ и $\alpha'(b)<\beta'(b)$,
10) $M_1=M(1--1)$, $M_2=M(1--1)$ при условиях $\alpha(a)=\beta(a)$ и $\alpha'(b)=\beta'(b)$,

причем классы M_1 и M_2 перестановочны.

Будем говорить, что краевая задача (I),(2) нормально разрешима для класса монотонности M_1, если для любых $f\in Car(I\times R^2,R)$, $\alpha\in AG_f(I,R)$, $\beta\in BG_f(I,R)$, $H\in M_1$ из выполнения $\alpha\leqslant\beta$, $G\alpha\leqslant g\leqslant G\beta$, $H\alpha\leqslant h\leqslant H\beta$ следует существование обобщенного решения краевой задачи (I),(2) такого, что $\alpha\leqslant z\leqslant\beta$. Аналогично определяется нормальная разрешимость краевой задачи (I),(2) для класса монотонности M_1 при дополнительных условиях как и для краевой задачи (I),(3).

Для описания поведения функции G понадобятся обобщенные классы монотонности $MG(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$, которые при $\sigma_j\in\{0,-,+,1\}$ совпадают с классами монотонности $M(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$. При $\sigma_j\in\{X,Y,A,B,C,D,E,F,K,L\}$, $j\in\{1,2,3,4\}$ поведение функции $\varphi\in MG(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$ определяется следующим образом. При $\sigma_1=X$ функция φ строго убывает по первому аргументу, при $\sigma_1=Y$ — строго возрастает по первому аргументу, а при остальных σ_1 определяется равенствами

$$MG(A\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=M(1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus M(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(B\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=M(1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus M(+\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(C\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=M(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus M(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(D\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=M(+\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus M(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(E\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=M(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus MG(X\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(F\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=M(+\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus MG(Y\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

$$MG(K\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(E\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus M(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(L\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(F\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\setminus M(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

для остальных же аргументов определения аналогичны. Выпишем некоторые равенства:

$$M(1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(A\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\cup M(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$M(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(C\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\cup M(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$M(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(E\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\cup MG(X\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$M(+\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(D\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\cup M(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$M(+\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(F\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\cup MG(Y\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(C\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(X\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\cup MG(K\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(D\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(Y\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\cup MG(L\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(E\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(K\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\cup M(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(F\sigma_2\sigma_3\sigma_4)=MG(L\sigma_2\sigma_3\sigma_4)\cup M(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4).$$

Аналогичные равенства имеют место для остальных аргументов. Для любых $t_1,t_2,u_2\in R$, $u_3,u_4\in\bar{R}$ таких, что $t_1<t_2$,
при $\sigma_1=0$ $\varphi(t_1,u_2,u_3,u_4)=\varphi(t_2,u_2,u_3,u_4)$,
при $\sigma_1\in\{-,C,E,K\}$ $\varphi(t_1,u_2,u_3,u_4)\geq\varphi(t_2,u_2,u_3,u_4)$,
при $\sigma_1\in\{+,D,F,L\}$ $\varphi(t_1,u_2,u_3,u_4)\leq\varphi(t_2,u_2,u_3,u_4)$,
при $\sigma_1=X$ $\varphi(t_1,u_2,u_3,u_4)>\varphi(t_2,u_2,u_3,u_4)$,
при $\sigma_1=Y$ $\varphi(t_1,u_2,u_3,u_4)<\varphi(t_2,u_2,u_3,u_4)$.
При $\sigma_1\in\{A,D\}$ существуют $t_1,t_2,u_2\in R$, $u_3,u_4\in\bar{R}$ такие, что
$t_1<t_2$ и $\varphi(t_1,u_2,u_3,u_4)<\varphi(t_2,u_2,u_3,u_4)$,
при $\sigma_1\in\{B,C\}$ существуют $t_1,t_2,u_2\in R$, $u_3,u_4\in\bar{R}$ такие, что
$t_1<t_2$ и $\varphi(t_1,u_2,u_3,u_4)>\varphi(t_2,u_2,u_3,u_4)$,
при $\sigma_1\in\{E,F\}$ существуют $t_1,t_2,u_2\in R$, $u_3,u_4\in\bar{R}$ такие, что

$t_1 < t_2$ и $\varphi(t_1, u_2, u_3, u_4) = \varphi(t_2, u_2, u_3, u_4)$.

Опишем некоторые примеры дифференциальных уравнений вида (I) с обобщенными нижними и верхними функциями, аналоги которых будут использованы в леммах. α, β - обобщенные нижняя и верхняя функции уравнения (I).

Пример EI.

$$f = \begin{cases} 0, & t \in [0, 2^{-1}], \\ 48x^{1/2}, & t \in (2^{-1}, 1], \end{cases}$$

$\alpha = 0$,

$$\beta = \begin{cases} 2t, & t \in [0, 2^{-1}], \\ (2(1-t))^4, & t \in (2^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Пример E2.

$$f = \begin{cases} \varepsilon^2 x, & t \in [0, 2^{-1}], \\ 0, & t \in (2^{-1}, 1], \end{cases}$$

$\alpha = 0$,

$$\beta = \begin{cases} (sh\, \varepsilon t)(sh\, 2^{-1}\varepsilon)^{-1}, & t \in [0, 2^{-1}], \\ 1, & t \in (2^{-1}, 1]. \end{cases}$$

Пример E3. $f = \varepsilon^{-2} x, \alpha = 0, \beta = \varepsilon\, sh\, \varepsilon^{-1} t \cdot (ch\, \varepsilon^{-1})$

Лемма I. Пусть M_1 - класс монотонности. Если краевая задача (I),(2) нормально разрешима или нормально разрешима при условии $\alpha(a) = \beta(a)$ для класса монотонности M_1, то $G \in M(11-+)$.

Доказательство. аналогично доказательству леммы I в [I].

Лемма 2. Пусть M_1 - класс монотонности и краевая задача (I),(2) нормально разрешима или нормально разрешима при условии $\alpha(a) = \beta(a)$ для M_1. Тогда имеет место:

I) $G \in MG(11E1) \Longrightarrow M_1 \subset M(11-1)$,

2) $G \in MG(1A-+) \Rightarrow M_1 \subset M(1--0)$,

3) $G \in MG(11-D) \Rightarrow M_1 \subset M(1---)$,

4) $G \in MG(111F) \Rightarrow M_1 \subset M(111+)$.

Доказательство. Проводится от противного. Выбирается конкретная функция H, не содержащаяся в указанном M_1, и показывается возможность построения примера краевой задачи, содержащей указанное H и не имеющей свойства нормальной разрешимости при $\alpha(a)=\beta(a)$.

I) Возьмем пример типа EI такой, чтобы выполнялось $G\alpha = G\beta$. Это возможно в силу $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha(b)=\beta(b)$, $\alpha'(b)=\beta'(b)$ и $G \in MG(11E1)$. Полагаем $H \in M(00+0)$, $Hx = x'(a)-\beta'(a)$, $h=0$, $g=G\alpha$ и получаем требуемое.

2) Возьмем пример типа E2, ε достаточно малое, чтобы в силу непрерывности G выполнялось $G\alpha < G\beta$. Это возможно в силу $\alpha(a)=\beta(a)$, малости $|\alpha'(a)-\beta'(a)|$ и $|\alpha'(b)-\beta'(b)|$ и $G \in MG(1A-+)$. Необходимо взять $H \in M(0+00)$, $H \in M(00+0)$, $H \in M(000+)$ или $H \in M(000-)$. Полагаем соответственно $Hx = x(b)-\alpha(b)$, $Hx = x'(a)-\alpha'(a)$, $Hx = x'(b)-\alpha'(b)$, $Hx = -x'(b)+\alpha'(b)$, $h=0$, $g=G\beta$.

3) Возьмем пример типа E3, ε достаточно малое, чтобы выполнялось $G\alpha < G\beta$. Это возможно в силу $\alpha(a)=\beta(a)$, малости $|\alpha(b)-\beta(b)|$, $|\alpha'(a)-\beta'(a)|$ и $G \in MG(11-D)$. Необходимо взять $H \in M(0+00)$, $H \in M(00+0)$ или $H \in M(000+)$. Полагаем соответственно $Hx = x(b)-\alpha(b)$, $Hx = x'(a)-\alpha'(a)$ или $Hx = x'(b)-\alpha'(b)$, $h=0$, $g=G\beta$.

4) Получается из I) заменой типа $t \to -t$.

Лемма 3. Пусть M_1 - класс монотонности и краевая задача (I),(2) нормально разрешима для M_1. Тогда имеет место:

I) $G \in MG(A1-+) \Rightarrow M_1 \subset M(-10+)$,

2) $G \in MG(11C+) \Rightarrow M_1 \subset M(-1++)$.

Лемма получается из 2), 3) леммы 2 заменой типа $t \to -t$.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 2. Если краевая задача (I),(2) нормально разрешима для класса монотонности M_1 , то в зависимости от вида функции G M_1 имеет следующий вид:

I) $G \in MG(AA-+)$, $M_1 \subset M(--OO)$,
2) $G \in MG(A--O)$, $M_1 \subset M(-1O+)$,
3) $G \in MG(A--D)$, $M_1 \subset M(--OO)$,
4) $G \in MG(-AO+)$, $M_1 \subset M(1--O)$,
5) $G \in MG(-AC+)$, $M_1 \subset M(--OO)$,
6) $G \in MG(--CD)$, $M_1 \subset M(--OO)$,
7) $G \in MG(--XO)$, $M_1 \subset M(-1++)$,
8) $G \in MG(--KO)$, $M_1 \subset M(-1O+)$,
9) $G \in MG(--OY)$, $M_1 \subset M(1---)$,
I0) $G \in MG(--OL)$, $M_1 \subset M(1--O)$,
II) $G \in MG(--OO)$, $M_1 \subset M(11-+)$.

Справедливость теоремы следует из лемм I–3 и равенств

$$MG(11-+) = MG(A1-+) \cup MG(-1-+),$$
$$MG(A1-+) = MG(AA-+) \cup MG(A--+),$$
$$MG(A--+) = MG(A--O) \cup MG(A--D),$$
$$MG(-1-+) = MG(-A-+) \cup MG(---+),$$
$$MG(-A-+) = MG(-AC+) \cup MG(-AO+),$$
$$MG(---+) = MG(--C+) \cup MG(--O+),$$
$$MG(--C+) = MG(--CD) \cup MG(--CO),$$
$$MG(--CO) = MG(--XO) \cup MG(--KO),$$
$$MG(--O+) = MG(--OO) \cup MG(--OD),$$
$$MG(--OD) = MG(--OY) \cup MG(--OL).$$

Отметим, что неравенство $G\alpha \leq G\beta$ выполняется в 7) при $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$ в 9) – при $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$.

Т е о р е м а 3. Если краевая задача (I),(2) нормально разрешима для класса монотонности M_1 при условии $\alpha(a) = \beta(a)$, то в зависимости от вида функции G M_1 имеет следующий вид:

I) $G \in MG(1A-+)$, $M_1 \subset M(1--O)$,
2) $G \in MG(1-XO)$, $M_1 \subset M(111+)$,
3) $G \in MG(1-EO)$, $M_1 \subset M(11-+)$,

4) $G \in MG(1--y),\ M_1 \subset M(1---),$

5) $G \in MG(1--L),\ M_1 \subset M(1--0).$

Справедливость теоремы следует из лемм I,2 и равенств

$$MG(11-+) = MG(1A-+) \cup MG(1--+),$$
$$MG(1--+) = MG(1--0) \cup MG(1--D),$$
$$MG(1--0) = MG(1-X0) \cup MG(1-E0),$$
$$MG(1--D) = MG(1--y) \cup MG(1--L).$$

Отметим, что неравенство $G\alpha \leqslant G\beta$ выполняется в 2) при $\alpha(a) = \beta(a),\ \alpha'(a) = \beta'(a)$ в 4) - при $\alpha(a) = \beta(a),\ \alpha'(b) \leqslant \beta'(b).$

Т е о р е м а 4. Для функции G и класса монотонности M_1, указанных в теореме 2, краевая задача (I),(2) нормально разрешима для M_1, причем в 7) при условиях $\alpha'(a) = \beta'(a)$ или $\alpha'(a) > \beta'(a)$, в 9) - при условиях $\alpha'(b) = \beta'(b)$ или $\alpha'(b) < \beta'(b).$

Т е о р е м а 5. Для функции G и класса монотонности M_1, указанных в теореме 3, краевая задача (I), (2) нормально разрешима для M_1 при условии $\alpha(a) = \beta(a)$, причем в 2) добавляется условие $\alpha'(a) = \beta'(a)$, в 4) - $\alpha'(b) = \beta'(b)$ или $\alpha'(b) < \beta'(b).$

Справедливость т-орем 4,5 следует из теоремы I.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Виржбицкий Я.В. Обобщенная разрешимость двухточечной краевой задачи с фиксированным граничным условием. - Латв.мат.ежегодник (в печати).
2. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка.- Дифференц.уравнения, 1982, т.18, № 8, с.1323-1330.
3. Лепин А.Я. Обобщенная разрешимость нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Дифференц.уравнения, 1981, т.17, № 4, с.752-753.
4. Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.-Рига : Зинатне , 1973.-135 с.

Поступила 18.9.84.

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.93-102

УДК 519.21

Л.Л.Ионин
Рижский политехнический институт им.А.Я.Пельше

ПРИМЕНЕНИЕ 2-ГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} dx &= A(t,y_t)x\,dt + B(t,y_t)x\,dW(t) + b(y_t)f(\sigma)\,dt \\ d\eta &= [(c,x) - rf(\sigma)]\,dt \\ \sigma &= d_1\eta + (d_2,x), \end{aligned} \tag{I}$$

где $A(t,y)$, $B(t,y)$ действительные $(n\times n)$ -матрицы, периодические по t с периодом ϑ при каждом $y\in Y$

$$Y \equiv \{y^1, y^2, \dots, y^k\}.$$

Однородный марковский процесс y_t с конечным числом состояний определен на фазовом пространстве Y и задан матрицей переходных вероятностей

$$P(\tau) = [P\{y_{t+\tau} = y^j | y_t = y^i\}] = e^{\pi\tau}, \tag{2}$$

$$\pi = [\alpha_{ij}]_1^k, \ \alpha_{ij} > 0 \ \text{при} \ i\neq j, \alpha_{ii} = -\sum_{j\neq i}\alpha_{ij}$$
$$i,j = 1,2,\dots,k.$$

Векторы $b(y)$, c, d имеют размерность n, причем вектор $b(y)$ определен на Y. Величины d_1 и r являются некоторыми постоянными. Скалярная функция $f(\sigma)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma f(\sigma) > 0 \quad \text{при } \sigma \neq 0, \quad f(0) = 0,$$

$$\int_0^{\sigma} f(\tau)d\tau \to +\infty \qquad \text{при } \sigma \to \pm\infty,$$

$W(t)$ - скалярный виннеровский процесс [I].

В статье исследуется условия устойчивости тривиального решения уравнения (I). Прежде чем дать определения, используемые ниже, выпишем линейное уравнение, связанное с системой (I)

$$dz(t) = A(t, y_t)z\,dt + B(t, y_t)z\,dW(t). \tag{3}$$

Определение I. Тривиальное решение уравнения (3) называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном, если существуют такие положительные постоянные M и γ, что для любого $z \in R^n$ решение уравнения (3) $z(t, z, y)$ удовлетворяет условию

$$E\{|z(t,z,y)|^2\} \leq M|z|^2 \exp \gamma t. \tag{4}$$

Определение 2. Тривиальное решение $z(t) \equiv 0$ уравнения (3) называется устойчивым по вероятности при $t \geq 0$, если для любых $y \in Y$ и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{z \to 0} P\{\sup_{\substack{t \geq 0 \\ y \in Y}} |z(t,z,y)| > \varepsilon\} = 0. \tag{5}$$

Определение 3. Тривиальное решение $z(t) \equiv 0$ уравнения (3) называется асимптотически устойчивым по вероятности, если оно устойчиво по вероятности и, кроме того, справедливо соотношение

$$\lim_{z \to 0} P\{\lim_{t \to \infty} z(t,z,y) = 0\} = 1, \quad \forall y \in Y.$$

Эффективным средством исследования устойчивости решений дифференциальных уравнений типа (I) и (3) являются функции Ляпунова $v(t, x, y)$, определенные на $R^1_+ \times R^n \times Y \to R^1$ и принадлежащие классу функций непрерывно дифференцируемых по t и x при каждом $y \in Y$.

Следуя результатам работы [2], можно утверждать, что для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения уравнения (3) необходимо и достаточно существования квадратичной формы

$$v(t,x,y)=(q(t,y)x,x),$$

положительно определенной при $t \geqslant 0,\ y \in Y$, производная которой в силу системы (3) является отрицательно определенной квадратичной формой. Используя эти результаты и ограничения на коэффициенты уравнения (3), имеем следующий результат.

Теорема I. Тривиальное решение $z(t) \equiv 0$ уравнения (3) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда существует ϑ - периодическое семейство матриц $q(t,y)$, положительно определенное в смысле скалярного произведения при всех $t \geqslant 0,\ y \in Y$, и таких, что

$$\frac{dq(t,y)}{dt} + F(t,y)q(t,y) = -J, \quad \forall y \in Y, \tag{6}$$

где $F(t,y^i)q(t,y^i) = A^T(t,y^i)q(t,y^i) +$

$$+q(t,y^i)A(t,y^i)+B^T(t,y^i)q(t,y^i)B(t,y^i)+\sum_{l=1}^{k}\alpha_{il}q(t,y^l),$$

J - единичная $(n \times n)$-матрица.

Доказательство необходимости. Если тривиальное решение уравнения (3) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном, то существует квадратичная форма

$$v(t,z,y) = \int_t^{\infty} E\{|z(\tau,t,z,y)|^2\} d\tau = (q(t,y)z,z).$$

Для доказательства равенства (6) вычислим производную функции $v(t,z,y)$ в силу системы (3)

$$\mathcal{L}v=\lim_{\Delta\to+0}\frac{1}{\Delta}[E\{v(t+\Delta,z(t+\Delta,t,z,y),y_{t+\Delta})\}-v(t,z,y)]=$$

$$=\lim_{\Delta\to+0}\frac{1}{\Delta}[\int_0^\infty E\{|z(t+\tau+\Delta,t+\Delta,z(t+\Delta,t,z,y),y_{t+\Delta})|^2\}d\tau-$$

$$-\int_0^\infty E\{|z(t+\tau,t,z,y)|^2\}d\tau]=$$

$$=-\lim_{\Delta\to+0}\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta E\{|z(t+s,t,z,y)|^2\}ds=-(Jx,x).$$

С другой стороны

$$\mathcal{L}v=\lim_{\Delta\to+0}\frac{1}{\Delta}[E(q(t+\Delta,y_{t+0})z(t+\Delta,t,y),z(t+\Delta,t,y))-$$

$$-(q(t,y)z,z)]=\lim_{\Delta\to+0}\frac{1}{\Delta}[E\{(q(t+\Delta,y_{t+0})z(t+\Delta,t,z,y),$$

$$z(t+\Delta,t,z,y))\}-E\{(q(t,y_{t+0})z(t+\Delta,t,z,y),$$

$$z(t+\Delta,t,z,y))\}+E\{(q(t,y)z(t+\Delta,t,z,y),$$

$$z(t+\Delta,t,z,y))\}+\lim_{\Delta\to+0}\frac{1}{\Delta}[E\{(q(t,y)z(t+\Delta,t,z,y),$$

$$z(t+\Delta,t,z,y))\}-(q(t,y)z,z)]=$$

$$=(\mathcal{L}_0 q(t,y)z,z)+(Fq(t,y)z,z),$$

где :

$$\mathcal{L}_0 q(t,y^i)=\sum_{l=1}^{k}\alpha_{il}\,q(t,y^l).$$

Сравнивая полученные выкладки, получаем равенство (6). Периодичность матрицы $q(t,y)$ следует из цепочки равенств

$$(q(t+\nu,y)z,z)=\int_{t+\nu}^{\infty}E\{(Z(s,t+\nu,y)z,\ Z(s,t+\nu,y)z\}ds=$$

$$=\int_{t}^{\infty}E\{(Z(s+\nu,t+\nu,y)z,\ Z(s+\nu,t+\nu,y)z)\}ds=$$

$$=\int_{t}^{\infty}E\{(Z(s,t,y)z,\ Z(s,t,y)z)\}ds=(q(t,y),z,z).$$

Необходимость доказана.

Достаточность следует из того, что функция

$$v(t,z,y)=(q(t,y)z,z)$$

является функцией Ляпунова, обеспечивающей экспоненциальную устойчивость в среднем квадратичном тривиального решения уравнения (3).

Введем обозначения: $\bar{x}=\binom{x}{\eta}$, $\bar{d}=\binom{d_2}{d_1}$.

Определение 4. Если решение уравнения (I), начинающееся в области $\varepsilon<|\bar{x}|<r$, с вероятностью I выходит на границу этой области за конечное время, каковы бы ни были достаточно малые r и $\varepsilon>0$, то такой факт будем называть условием "Т".

Теорема 2. Пусть существует положительно определенная, допускающая бесконечно малый высший предел, функция $v(t,\bar{x},y)$, удовлетворяющая условию $\mathcal{L}v\leqslant-\alpha<0$. Пусть, кроме того, выполнено условие "Т". Тогда решение $\bar{x}(t)\equiv 0$ уравнения (I) асимптотически устойчиво по вероятности.

Доказательство. Определим случайную величину

$$\tau_u^{(n)}(t)=\min\{\tau_u,\ t,\ \tau_n\},$$

где

$$\tau_n=\inf\{t:|\bar{x}(t)|=n\},\quad \tau_u=\inf\{t:|\bar{x}(t)\in u\}.$$

На основании формулы Дынкина имеем

$$E_{s,\bar{x},y}\, v(\tau_u^{(n)}(t),\ \bar{x}(\tau_u^{(n)}(t)),\ y(\tau_u^{(n)}(t))) - v(s,\bar{x},y) = E_{s,\bar{x},y}\int\limits_s^{\tau_u^{(n)}(t)} \mathcal{L}v(\rho,\bar{x}(\rho),y(\rho))\,d\rho .$$

Учитывая условие теоремы, получим неравенство

$$E\,\alpha\,\tau_v^{(n)}(t) \leqslant \alpha s + v(s,\bar{x},y),$$

откуда получаем

$$P_{s,\bar{x},y}\{\tau_v \geqslant t\} \leqslant \frac{\alpha s + v(s,\bar{x},y)}{\alpha t} .$$

Если в этом неравенстве перейти к пределу при $t \to \infty$, то получим условие "Т". Рассмотрим далее процесс

$$v(\tau_u(t),\ \bar{x}(\tau_u(t)),\ y(\tau_u(t))),$$

который представляет собой супермартингал [3]. А это означает существование предела

$$\lim_{t\to\infty} v(\tau_u(t),\bar{x}(\tau_u(t)),y(\tau_u(t))) = \ell .$$

Пусть $R_{\bar{x},y}$ множество траекторий процесса $\bar{x}(t)$, для которых $\tau_u = \infty$. На основании неравенства Чебышева имеем

$$P\{\sup_{s\leq u\leq t} |\bar{x}(u)| > r\} \leqslant \frac{E v(\tau_{v_r}(t),\bar{x}(\tau_{v_r}(t)),y(\tau_{v_r}(t)))}{v_r} \leqslant \frac{v(s,\bar{x},y)}{v_r} .$$

В силу непрерывности функции $v(s\ \bar{x},y)$, условия $v(s,0,y)=0$ и переходя к пределу, получим условие устойчивости по вероятности. А это означает, что

$$P\{R_{\bar{x},y}\} \to 1 \quad \text{при} \quad \bar{x} \to 0 .$$

Из выполнения условия "Т" вытекает, что для почти всех траекторий из множества $R_{\bar{x},y}$ имеет место равенство $\lim\limits_{t\to\infty} |\bar{x}(t)| = 0$. Далее имеем

$$\lim_{t\to\infty} v(\tau_v(t), \bar{x}(\tau_v(t)), y(\tau_v(t))) = \lim_{t\to\infty} v(t, x(t), y(t)) = 0.$$

Поэтому из положительной определенности функции $v(t,\bar{x},y)$ для траекторий из $R_{\bar{x},y}$ следует равенство $\lim\limits_{t\to\infty} |x(t)| = 0$. А это и доказывает теорему.

Перейдем теперь к построению функции Ляпунова для системы (I), удовлетворяющей условиям теоремы 2. Будем подбирать функцию Ляпунова в виде

$$V(t,x,y,\eta) = (q(t,y)x,x) + \int_0^\eta f(s)\,ds, \tag{7}$$

где $q(t,y)$ положительно определенная матрица, являющаяся решением уравнения (6). Второе слагаемое в (7) тоже положительно в силу свойств функции $f(s)$. Кроме того, $V(t,0,y,0)=0$, $V(t,x,y,\eta)\to\infty$ при $|x|^2+\eta\to\infty$.
Далее рассмотрим производную в силу системы (I):

$$\mathcal{L}V = \lim_{\Delta\to+0} \frac{1}{\Delta}[E\,V(\Delta, x(\Delta), y_\Delta, \eta_\Delta) - V(0,x,y,\eta)] =$$

$$= (\mathcal{L}_0 q(t,y)x,x) + (q(t,y)A(t,y)x,x) + (q(t,y)x, A(t,y)x) +$$

$$+ (q(t,y)B(t,y)x, B(t,y)x) + (q(t,y)b(y)f(\eta),x) +$$

$$+ (q(t,y)x, b(y)f(\eta)) + (f(\eta)d_1 q(t,y),x) - d_1 r f^2(\eta) +$$

$$+ f(\eta)(d, A(t,y)x) + f^2(\eta)(d,b) = ([\mathcal{L}_0 q(t,y) + A^T(t,y)q(t,y) +$$

$$+ q(t,y)A(t,y) + B^T(t,y)q(t,y)B(t,y)]x,x) +$$

$$+ 2f(\eta)(q(t,y)b(y) + \frac{1}{2}d_1c_1 + \frac{1}{2}A^T(t,y)d_1, x - f^2(\eta)((d,b) - d_1 r) =$$

$$= -(x,x) + 2f(\eta)([q(t,y)b(y) + \frac{1}{2}d_1c_1 + \frac{1}{2}A^T(t,y)d_1], x) - $$
$$- f^2(\eta)(d_1r - (d_2, b(y))).$$

В силу существования матрицы $q(t,y)$, удовлетворяющей уравнению (4), получим выражение

$$\mathcal{L}V = -(x,x) + 2f(\eta)([q(t,y)b(y) + \frac{1}{2}d_1c_1 +$$
$$+ \frac{1}{2}A^T(t,y)d_1]x) - f^2(\eta)((d_2, b) + d_1r).$$

Таким образом, $\mathcal{L}V$ есть квадратичная форма переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, f(\eta)$. Таким образом, имеем $-\mathcal{L}V = (S\bar{x}, \bar{x})$ где

$$S = \begin{pmatrix} J & -[q(t,y)b(y) + \frac{1}{2}d_1c_1 + \frac{1}{2}A^T(t,y)d_1] \\ -[q(t,y)b(y) + \frac{1}{2}d_1c_1 + \frac{1}{2}A^T(t,y)d_1]^T & d_1r - (d_2, b(y)) \end{pmatrix}.$$

По критерию Сильвестра положительная определенность квадратичной формы $(S\bar{x}, \bar{x})$ следует из неравенства $|S| > 0$, а это эквивалентно неравенству

$$d_1r - (d_2, b(y)) > |q(t,y)b(y) + \frac{1}{2}d_1c + \frac{1}{2}A^T(t,y)d_2|^2. \quad (8)$$

Таким образом доказана следующая

Т е о р е м а 3. Пусть тривиальное решение уравнения (3) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном, тогда для асимптотической устойчивости по вероятности тривиального решения уравнения (I) достаточно выполнения неравенства (8), где $q(t,y)$ определяется из уравнения (6).

Рассмотрим пример вида

$$\begin{aligned} dx &= A(y_t)x\,dt + b(y_t)f(\sigma)\,dt \\ d\eta &= (c,x) - rf(\sigma) \\ \sigma &= d_1\eta + (d_2, x), \end{aligned} \quad (9)$$

где y_t – марковский процесс с двумя состояниями $Y=\{y^1, y^2\}$. Вероятности перехода для этого процесса имеют вид:

$$P\{y_{t+\delta}=y^2 | y_t=y^1\} = \delta + o(\delta),$$

$$P\{y_{t+\delta}=y^1 | y_t=y^2\} = \beta\delta + o(\delta).$$

Пусть

$$A(y^1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A(y^2)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (6) в этом случае имеет вид

$$q(y^1)=\frac{1}{s}\begin{pmatrix} 6\beta^3-12\beta^2+39\beta+27 & 2\beta^3-3\beta^2+3\beta \\ 2\beta^3-3\beta^2+3\beta & 2\beta(\beta^2+6) \end{pmatrix}$$

$$q(y^2)=\frac{1}{s}\begin{pmatrix} 6\beta^3-12\beta^2+27\beta+81 & 2\beta^3+3\beta^2-18\beta-27 \\ 2\beta^3+3\beta^2-18\beta-27 & 2(\beta^3+6\beta^2+18\beta+27) \end{pmatrix}$$

$$s=2(\beta^3-3\beta^2+9\beta-27).$$

После проверки получаем, что при $\beta > 3$ квадратичная форма $(q(y)x, x)$ положительно определена. Предположим далее, что

$$d_1 = 1, \quad d_2 = 0, \quad \beta = 4,$$
$$b(y) = (0,1)^T, \quad c = (77, 320)^T.$$

Тогда условие асимптотической устойчивости по вероятности тривиального решения уравнения (9) будет иметь вид $r > 56{,}3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения.–К.: Наукова думка, 1967.–354 с.
2. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами. - ПММ, 28:2, 1964, с.366-372.
3. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.–М.: Наука, 1969.–368 с.

Поступила 25.9.84.

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.103-112

УДК 517.9:533.6

Г.Г.Горобец
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

МЕТОДЫ ПОИСКА АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ

В статье на примере двух задач демонстрируется методика численного анализа на ЭВМ решений краевых задач, возникающих при исследовании ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости по трубам с пористыми (проницаемыми) стенками.

Задачи тепло- и массопереноса при течении вязкой несжимаемой жидкости в трубе с отсосом или вдувом через поверхность стенок изучались многими исследователями [1-7]. В настоящее время представление решений этих задач в виде рядов, как, например, это делается в работе [7], не является удовлетворительным, поскольку аппроксимации решений рядами подходят лишь для малых значений входящих в задачу параметров, соответствуют случаям слабого отсоса или вдува. Ставящиеся ныне задачи в этой области являются существенно нелинейными и для решения требуют использования быстродействующих ЭВМ, в связи с чем повышается роль численных методов, применяемых при решении этих задач.

Для поиска на ЭВМ автомодельных решений в данной работе предлагается использовать одну из модификаций метода секущих [8] - безградиентного метода, применяемого не только при решении задач гидродинамики [9], но также при решении задач химической технологии [10], некоторых задач оптимального управления [11] и в других областях. Модификация метода секущих [12] , являясь методом последовательных приближений, оказалась более удобной в применении, что позволило расширить класс решаемых прикладных задач.

Если решается уравнение

$$f(x)=0, \tag{I}$$

то формула метода секущих для нахождения приближенного решения по двум предыдущим имеет вид:

$$x^{(n+1)}=\frac{x^{(n-1)}f(x^{(n)})-x^{(n)}f(x^{(n-1)})}{f(x^{(n)})-f(x^{(n-1)})},\quad n=1,2,\ldots . \tag{2}$$

Из формулы (2) видно, что, когда значения функции, вычисленные при двух последующих приближенных решениях, близки, то знаменатель оказывается близок к нулю, а это на практике может приводить к машинному переполнению. Геометрическая интерпретация подсказала целесообразность введения в формулу (2) весового коэффициента,

$$x^{(n+1)}=\frac{x^{(n-1)}f(x^{(n)})-g\,x^{(n)}f(x^{(n-1)})}{f(x^{(n)})-g\,f(x^{(n-1)})},\quad n=1,2,\ldots , \tag{3}$$

где в качестве $x^{(n-1)}$ берется то из двух предыдущих приближенных решений, которому соответствует большее абсолютное значение функции, а значение весового коэффициента $g,\ g\geqslant 1,$ выбирается таким, чтобы новое приближенное решение было лучше по крайней мере одного из двух предыдущих в смысле абсолютного значения функции. Описанная модификация метода секущих легла в основу алгоритма решения рассматриваемых задач.

I. Задача о стационарном осесимметричном течении несжимаемой жидкости в круглой трубе с объемными источниками (стоками) массы, моделирующая процесс испарения (конденсации) в парокапельном потоке, описываемая уравнениями Навье-Стокса, сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка [I]

$$(ty'')'+R(y'^2-(y-t)y'')=K, \tag{4}$$

где R - параметр, значение которого задается, K - искомый параметр. Начальные условия для этой задачи записываются в виде:

$$y(0)=0;\quad y''(0)=K-Ry'^2. \tag{5}$$

Конечные условия имеют вид:

$$y(1)=1;\quad y'(1)=0. \tag{6}$$

Традиционно подобные задачи решаются методом пристрелки, сводящим краевую задачу к задаче отыскания решения системы нелинейных алгебраических и (или) трансцендентных уравнений. Введем обозначения: $y_1=t$, $y_2=y$, $y_3=y'$, $y_4=y''$, $x_1=y'(0)$, $x_2=K$. Тогда уравнение (4) можно записать в виде эквивалентной системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1'=1; \\ y_2'=y_3; \\ y_3'=y_4; \\ y_4'=\frac{1}{y_1}((R(y_2-y_1)-1)y_4-Ry_3^2+x_2); \end{cases} \tag{7}$$

начальные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} &y_1(\delta)=\delta; \\ &y_2(\delta)=0; \\ &y_3(\delta)=x_1; \\ &y_4(\delta)=x_2-Rx_1^2, \end{aligned} \tag{8}$$

где δ - положительная величина, $\delta \ll 1$. Введение этой величины в краевую задачу связано с необходимостью избежать действия несуммируемой особенности в начальной точке. Невязки в конечной точке $t=1$ являются функциями неизвестных x_1 и x_2 и имеют вид:

$$f_1(x_1, x_2) = y_2(1) - 1;$$
$$f_2(x_1, x_2) = y_3(1). \tag{9}$$

Конечные условия (6) приводят, следовательно, к системе двух нелинейных уравнений с неявно заданными функциями f_1 и f_2,

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0; \\ f_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Формулы модификации метода секущих для двумерного случая принимают вид:

$$x_j^{(n+1)} = \frac{\begin{vmatrix} g x_j^{(n-2)} & f_1^{(n-2)} & f_2^{(n-2)} \\ x_j^{(n-1)} & f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} \\ x_j^{(n)} & f_1^{(n)} & f_2^{(n)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g & f_1^{(n-2)} & f_2^{(n-2)} \\ 1 & f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} \\ 1 & f_1^{(n)} & f_2^{(n)} \end{vmatrix}}, \quad j = 1, 2, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{11}$$

где в качестве $x^{(n-2)}$ берется то из трех предыдущих приближенных решений, которому соответствует наибольшее значение нормы

$$\|f^{(k)}\| = |f_1^{(k)}| + |f_2^{(k)}|, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{12}$$

$$f_j^{(k)} = f_j(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}).$$

Таким образом, алгоритм решения задачи состоит из следующих частей.

I°. Выбор начальных приближенных решений для неизвестного вектора $x = (x_1, x_2)$.

2^0. Вычисление соответствующих невязок (9) посредством решения задачи Коши (7),(8).

3^0. Нахождение нового приближенного решения с помощью модификации метода секущих (11).

4^0. Вычисление соответствующих новому приближенному решению невязок (9) посредством решения задачи Коши (7), (8).

5^0. Проверка: не удовлетворяет ли найденное приближенное решение заданной точности? Если оно не удовлетворяет заданной точности, то худшее из трех предыдущих приближенных решений (в смысле нормы (12)) заменяется новым приближенным решением и осуществляется переход к 3^0.

6^0. Если новое приближенное решение удовлетворяет заданной точности, то выводятся на печать искомые результаты расчетов.

В связи с приведенным алгоритмом сделаем следующие замечания.

1) Неточность, вызванную смещением начальных условий в выражениях (8), можно уменьшить, если удается разложить решение в ряд в окрестности начальной точки.

2) В настоящее время хорошо известны трудности, к которым приводит жесткость интегрируемых дифференциальных уравнений. Не останавливаясь здесь на специальных численных методах, используемых в этих случаях, заметим лишь, что для большинства решаемых прикладных задач, как и для задач, представленных в этой статье, удобным оказывается метод Рунге-Кутта четвертого порядка [13].

Если система дифференциальных уравнений оказывается неустойчивой при интегрировании, то почти всегда можно изменить направление интегрирования. Если система неустойчива при интегрировании в обоих направлениях, то влияние неустойчивости можно уменьшить, введя на интервале интегрирования точку " шивания" [14, с.198].

3) Вопрос о том, каким образом осуществлять проверку на точность, о которой говорится в пятом пункте алгоритма, решается по-разному. Здесь будем считать, что приближенное решение найдено с заданной точностью, если норма (12), со-

ответствующая этому решению, оказалась меньше априорно заданной величины $\varepsilon > 0$.

4) Вопрос о том, каким образом выбирать весовой коэффициент в формулах (11), можно решать также, как в некоторых модификациях метода Ньютона с весовым коэффициентом [15]. Так, можно подбирать величину q из ряда натуральных чисел или чисел Фибоначчи, или использовать какое-либо другое простое правило увеличения весового коэффициента для нахождения приближенного решения, лучшего (в смысле нормы (12)) по крайней мере одного из трех предыдущих решений. Диалоговые системы позволяют исследователю изменять это правило в процессе вычислений, что может дать в некоторых случаях значительный выигрыш во времени [12].

Результаты расчетов по приведенному алгоритму подтверждают асимптотические решения задачи (4)-(6), полученные в работе [1]. Один из результатов счета, соответствующий значению $R=-10$, приведен на рис.1.

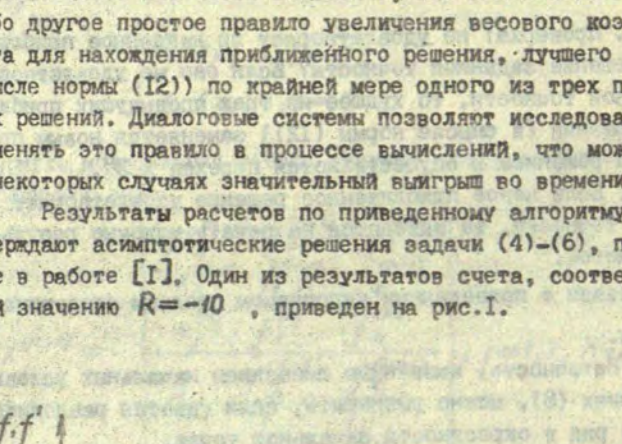

Рис.1. Результат расчета при $R=-10$.

Значение K, полученное в этом случае, равно -17,1035. Расчеты проводились для $\delta = 10^{-5}$ с шагом интегрирования, равным 10^{-3}, путем продолжения по параметру R.

2. В работе [6] изучалась задача о ламинарном течении жидкости в кольцеобразной трубе с пористыми стенками и находились численные решения с помощью метода квазилинеаризации. Эта задача сводится к краевой для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка

$$ty'''' + 2y''' + R(y'y'' - yy''') = 0, \tag{13}$$

где значение параметра R считается заданным. Начальные условия при $t_0 > 0$:

$$y(t_0) = -p\sqrt{t_0}; \quad y'(t_0) = 0; \tag{14}$$

конечные условия:

$$y(1) = q; \quad y'(1) = 0, \tag{15}$$

где p и q - параметры, характеризующие просачивание сквозь внутреннюю и внешнюю стенки кольцеобразной трубы.

Как и в предыдущей задаче, перейдем от уравнения (13) к системе дифференциальных уравнений первого порядка,

$$\begin{cases} y_1' = y_2; \\ y_2' = y_3; \\ y_3' = y_4; \\ y_4' = \dfrac{1}{y_5}(R(y_1y_4 - y_2y_3) - 2y_4); \\ y_5' = 1, \end{cases} \tag{16}$$

где $y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', y_4 = y''', y_5 = t$. Начальные условия запишем в виде:

$$y_1(t_0) = -p\sqrt{t_0};$$
$$y_2(t_0) = 0;$$

$$y_3(t_0)=x_1;$$
$$y_4(t_0)=x_2; \qquad (I7)$$
$$y_5(t_0)=t_0.$$

Невязки при $t=1$ имеют вид:

$$f_1(x_1,x_2)=y_1(1)-q; \qquad (I8)$$
$$f_2(x_1,x_2)=y_2(1).$$

Таким образом, задача (I3)-(I5) также сводится к решению системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными x_1 и x_2. С помощью описанного алгоритма были проведены расчеты на ЭВМ и этой задачи. Расчеты показали, что для значений $|R|=5$ методом секущих получаются результаты, близкие к результатам, полученным методом квазилинеаризации в работе [6]. Алгоритм, опирающийся на модификацию метода секущих, позволил получить решения и при бо́льших по модулю значениях параметра R. На рис.2 дана зависимость производной решения задачи (I3)-(I5) от переменной t, полученная при следующих значениях параметров: $t_0=0,25$;

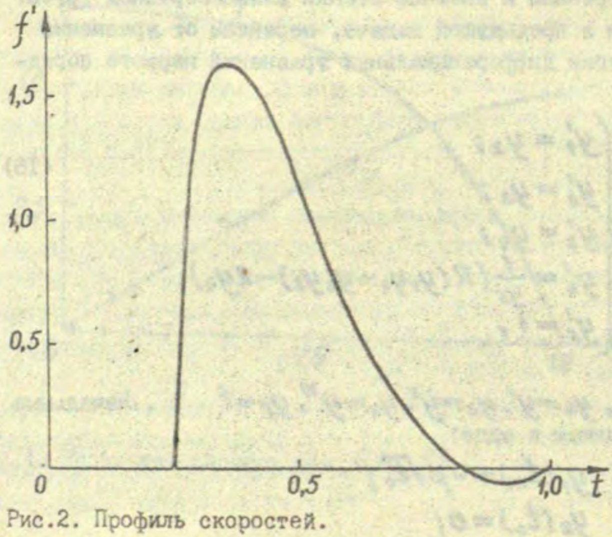

Рис.2. Профиль скоростей.

$R=20; p=0,7$ и $q=0,1$. Представленный на рис.2 профиль скоростей течения жидкости в кольцеобразной трубе, указывает на возникновение возвратного течения вдоль внешней пористой стенки трубы. При тех же значениях t_0 и R, и при $p=q=0,6$ с помощью ЭВМ обнаружено возвратное течение вдоль внутренней стенки трубы.

ВЫВОДЫ

I) ЭВМ позволяют численно моделировать сложные течения жидкости путем решения соответствующих краевых задач. С помощью изложенной методики решения краевых задач, опирающейся на модифицированный метод секущих, удается успешно решать прикладные задачи из области гидродинамики.

2) Численный анализ автомодельных решений позволяет изучать гидродинамические процессы без проведения сложных и дорогостоящих натурных экспериментов, позволяет выявить особенности процессов тепло- и массообмена (как, например, возвратные течения в задаче о движении жидкости в кольцеобразной трубе с пористыми стенками).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Аладьев С.П., Зайчик Л.И. Об автомодельном решении уравнений Навье-Стокса с объемными источниками и стоками массы. - Прикл.матем.и механика, 1976, № 6, с.II2I-II24.

2. Бабаджанян Г.А. Течение вязкой жидкости в трубе с пористыми стенками. - Изв.АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук, 1965, № 4, с.73-79.

3. Berman A.S. Laminar flow in an annulus with porous walls.-J.Appl.Phys., 1958, N 1, p.71-75.

4. Регирер С.А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками. - Изв.вузов. Математика, 1962, № 5, с.65-74.

5. Уайт Ф.М. Ламинарный поток в трубе с однородной пористостью. - Прикладная механика, 1962, № I, с.225-228.

6. Huang C.-L. Applying quasilinearization to the problem

of flow through an annulus with porous walls of different permeability.-Appl.Sci.Res., 1974, N 2, p.145-158.
7. Yuan S.W., Finkelstein A.B. Laminar flow with injection and suction through a porous wall.-Trans.ASME, 1956, v.78, p.719-724.
8. Островский А.М. Решение уравнений и систем уравнений.- М.: ИЛ, 1963.-220 с.
9. Гольдштик М.А., Штерн В.Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. - М.: Наука, 1977. - 366 с.
10. Островский Г.М., Волин Ю.М., Ханзель К. Расчет стационарных режимов химико-технологических схем. - М.: НИИТЭХИМ, 1981. - 64 с.
11. Горобец Г.Г. Один алгоритм решения задачи синтеза в условиях помех. - В кн.: Вопросы разработки автоматизированных систем управления. Рига: Звайгзне, 1977, вып.2, с.67-74.
12. Горобец Г.Г. Решение систем нелинейных уравнений и вопросы диалога. - В кн.: Диалоговые системы, - Рига :Зинатне, 1977, вып.1, с.154-157.
13. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. - М.: Физматгиз, 1962, т.2.-640 с.
14. Гладуэлл Я. Метод пристрелки для краевых задач. - В кн.: Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1979, с.196-216.
15. Исаев В.К., Сонин В.В. Об одной модификации метода Ньютона численного решения краевых задач. - Журнал вычисл.мат. и мат.физики, 1963, № 6, с.1114-1116.

Поступила 1.10.84.

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.113-122

УДК 517.927

Е.И.Горленко
ЛГУ им.П.Стучки

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

1. Теорема существования решения для уравнения общего вида

Рассмотрим краевую задачу

$$y'''' = -\psi(t,y,y',y'',y''') \quad \forall t\in I \tag{1.1}$$

$$y(0)=0 \qquad y(\tau)=0 \tag{1.2}$$

$$y'(0)=0 \qquad y'(\tau)=0 \tag{1.3}$$

$I=[0,\tau],\ \tau>0,\ \psi\in C(I\times R^4)$.

Для доказательства теоремы о существовании решения краевой задачи (1.1)-(1.3) понадобится Лемма [1] (стр.25).

Л е м м а. Если существует $m>0$ такое, что
$|\psi(t,y,y',y'',y''')|<m \quad \forall (t,y,y',y'',y''')\in I\times R^4$,
то решение задачи (1.1)-(1.3) существует.

Т е о р е м а 1 (о существовании решения).
Если выполняются условия

(A_1): $\exists r_0\in(0,\frac{12}{\tau^4})$ & $\exists m_0\geq 0$:
$$y(\psi(t,y,y',y'',y''')+r_0 y)+m_0\geq 0$$
$$\forall (t,y,y',y'',y''')\in I\times R^4$$
и

$(B_4'):\ \forall H_0, H_1 > 0 \quad \exists b_0, \varepsilon > 0:$

$$|\psi(t,y,y',y'',y''')| \le b_0\left(1+|y''|^3+|y'''|^{\frac{3}{2}}\right)^{1-\varepsilon}$$

$$\forall t\in I, \quad \forall |y|\le H_0, \quad \forall |y'|\le H_1$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ - некоторое решение задачи (I.I)-(I.3). Проинтегрируем (I.I), домножив на $y(t)$:

$$\int_0^\tau y(t)y^{IV}(t)dt = -\int_0^\tau y(t)\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))dt,$$

$$\underbrace{y(t)y'''(t)\Big|_0^\tau}_{0} - \int_0^\tau y'(t)y'''(t)dt = -\int_0^\tau y(t)\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))dt,$$

по (I.2),(I.3)

$$\underbrace{-y'(t)y''(t)\Big|_0^\tau}_{0} + \int_0^\tau y''^2(t)dt = -\int_0^\tau y(t)\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))dt.$$

по (I.2),(I.3)

Таким образом,

$$\int_0^\tau y''^2(t)dt = -\int_0^\tau y(t)\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))dt.$$

Преобразуем это выражение:

$$\int_0^\tau y''^2(t)dt + \int_0^\tau [y(t)(\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t)) + r_0 y(t)) + m_0]dt = r_0\int_0^\tau y^2(t)dt + m_0\tau, \tag{I.4}$$

где m_0 - из условия теоремы.

Так как $y''^2(t) \ge 0 \ \forall t\in I$ и выполняется (A_1), имеет место неравенство

$$0 \le \int_0^t y''^2(t)dt + \int_0^t [y(t)(\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t)) + r_0 y(t)) + m_0]dt \le r_0\int_0^\tau y^2(t)dt + m_0\tau. \tag{I.5}$$

Обозначим

$$g(t) = \int_0^t y''^2(t)dt + \int_0^t [y(t)(\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t)) + r_0 y(t)) + m_0]dt$$

Введем функцию $V(t) = \frac{1}{2}y^2(t)$

$$V'(t) = y(t)y'(t)$$

$$V''(t) = y'^2(t) + y(t)y''(t)$$

$$V'''(t) = 3y'(t)y''(t) + y(t)y'''(t)$$

$$(1.2),(1.3) \Rightarrow V(0)=V(\tau)=V'(0)=V'(\tau)=V''(0)=V''(\tau)=$$
$$=V'''(0)=V'''(\tau)=0$$

$$V^{IV}(t)=3y''^2(t)+4y'(t)y'''(t)+y(t)y^{IV}(t)=3y''^2(t)+4y'(t)y'''(t)-$$
$$-y(t)\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))=3y''^2(t)+4y'(t)y'''(t)-$$
$$-[y(t)(\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))+r_o y(t))+m_o]+r_o y^2(t)+m_o$$

Проинтегрируем последнее выражение:

$$V'''(t)=3\int_0^t y''^2(t)dt+4y'(t)y''(t)\Big|_0^t-4\int_0^t y''^2(t)dt-\int_0^t[y(t)\times$$
$$\times(\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))+r_o y(t))+m_o]dt+$$
$$+r_o\int_0^t y^2(t)dt+m_o t=4y'(t)y''(t)-\{\int_0^t y''^2(t)dt+$$
$$+\int_0^t[y(t)(\psi(t,y(t),y'(t),y''(t),y'''(t))+r_o y(t))+m_o]dt\}+$$
$$+r_o\int_0^t y^2(t)dt+m_o t=4y'(t)y''(t)-g(t)+r_o\int_0^t y^2(t)dt+$$
$$+m_o t,$$

$$V''(t)=4\int_0^t y''(t)y'(t)dt-\int_0^t g(t)dt+\int_0^t(r_o\int_0^s y^2(z)dz+m_o s)ds=$$
$$=2y'^2(t)-\int_0^t g(t)dt+\int_0^t(r_o\int_0^s y^2(z)dz+m_o s)ds.$$

Для однородной краевой задачи

$$V''=0,\quad V(0)=V(\tau)=0$$

существует функция Грина.

$$G(t,s)=\begin{cases}\dfrac{t(\tau-s)}{\tau}, & t\le s\\[2mm] \dfrac{s(\tau-t)}{\tau}, & t\ge s\end{cases},$$

Используя функцию Грина $G(t,s)\geq 0$, имеем

$$V(t)=-\int_0^\tau G(t,s)[2y'^2(s)+\int_0^s(r_0\int_0^z y^2(\alpha)d\alpha+m_0z)dz-$$
$$-\int_0^s g(z)dz]ds\leq\int_0^\tau G(t,s)(\int_0^s g(z)dz)ds\overset{(1.4)}{\leq}\int_0^\tau G(t,s)\times$$
$$\times[\int_0^s(r_0\int_0^\tau y^2(z)dz+m_0\tau)dr]ds=(r_0\int_0^\tau 2V(s)ds+ \tag{I.6}$$
$$+m_0\tau)\int_0^\tau G(t,s)sds$$

$$\int_0^\tau G(t,s)sds=\int_0^t\frac{s(\tau-t)}{\tau}sds+\int_t^\tau\frac{t(\tau-s)}{\tau}sds=\frac{1}{6}(\tau^2t-t^3)$$
$$\exists\max_{z\in[0,\tau]}\int_0^\tau G(z,s)sds=\gamma$$

γ находим из необходимого условия экстремума:

$$\frac{1}{6}(\tau^2-3t^2)=0\Rightarrow t=\frac{\tau}{\sqrt{3}}$$
$$\gamma=\frac{\tau}{6\sqrt{3}}(\tau^2-\frac{\tau^2}{3})=\frac{\tau^3\sqrt{3}}{27}$$

Найдем оценку $V(t)$. Проинтегрировав (I.6), получим

$$\int_0^\tau V(t)dt\leq 2r_0\int_0^\tau\int_0^\tau G(t,s)sdsdt\cdot\int_0^\tau V(s)ds+m_0\tau\int_0^\tau\int_0^\tau G(t,s)sdsdt.$$

Обозначим $q=2r_0\int_0^\tau\int_0^\tau G(t,s)sdsdt=2r_0\int_0^\tau\frac{1}{6}(\tau^2t-t^3)dt=\frac{\tau^4r_0}{12}$

$\exists r_0\in(0,\bar r_0): q<1$, где $\bar r_0=\frac{12}{\tau^4}$

Тогда имеем

$$\int_0^\tau V(t)dt\leq\frac{m_0\tau^2\gamma}{1-q},\ \text{где}\quad \gamma=\max_{z\in[0,\tau]}\int_0^\tau G(z,s)sds=\frac{\tau^3\sqrt{3}}{27}.$$

Из (I.6) получим оценку $V(t)$ и $y(t)$

$$V(t)\leq(2r_0\int_0^\tau V(s)ds+m_0\tau)\int_0^\tau G(t,s)sds\leq\left(\frac{2r_0m_0\tau^2\gamma}{1-q}+m_0\tau\right)\gamma=$$
$$=m_0\tau\gamma\left(\frac{2r_0\tau\gamma}{1-q}+1\right),$$

$$|y(t)|\leq M_0\quad\forall t\in I,\quad\text{где}\quad M_0=\sqrt{2m_0\tau\gamma\left(\frac{2r_0\tau\gamma}{1-q}+1\right)}.$$

А так как, кроме того, имеет место условие (A_1), из (I.4) следует

$$\int_0^{\tau} y''^2(t)dt \le H_2, \quad H_2 > 0.$$

$y'(t)=\int_0^t y''(s)ds$. Тогда

$$|y'(t)| \le \int_0^{\tau} |1\cdot y''(t)|dt \le \int_0^{\tau}\left(\frac{1}{2}+\frac{y''^2(t)}{2}\right)dt \le \frac{\tau}{2}+\frac{H_2}{2}=M_1.$$

По условию (B_4') и лемме I из монографии [I] (стр.I36)

$$\exists M_i>0: |y^{(i)}(t)| \le M_i, \quad i=2,3.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$y^{IV}=-F(t,y,y',y'',y''') \quad \forall t\in I \tag{I.7}$$

$$y(0)=0 \qquad y(\tau)=0 \tag{I.8}$$

$$y'(0)=0 \qquad y'(\tau)=0 \tag{I.9}$$

$I=[0,\tau]$, где

$$F(t,y,y',y'',y''')=\frac{|\Psi(t,y,y',y'',y''')|}{1+\rho\left(\frac{|y|+|y'|+|y''|+|y'''|}{M_0+M_1+M_2+M_3}\right)\cdot|\Psi(t,y,y',y'',y''')|}$$

и

$$\rho(t)=\begin{cases}0, & t\in[0,1]\\ t-1, & t\in(1,+\infty).\end{cases}$$

Функция F ограничена. Тогда по Лемме существует решение задачи (I.7)-(I.9). Обозначим его $y(t)$.

Легко проверить, что функция F удовлетворяет условиям (A_1) и (B_4') с теми же входящими в эти условия постоянными.

Дословно повторяя предыдущие рассуждения, получим те же априорные оценки решения задачи (I.7)-(I.9):

$$|y^{(i)}(t)| \le M_i \quad \forall t\in I, \quad i=0,1,2,3.$$

Но при выполнении этих оценок

$$F(t,y,y',y'',y''')=\Psi(t,y,y',y'',y''') \quad \forall t\in I$$

Следовательно, решение задачи (I.7)-(I.9) является решением задачи (I.I)-(I.3).

2. Теорема существования и единственности решения для уравнения $x^{IV}=-\varphi(t,x)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{IV}=-\varphi(t,x) \qquad \forall t\in I \tag{2.I}$$

$$x(0)=a_0 \qquad x(\tau)=b_0 \tag{2.2}$$

$$x'(0)=a_1 \qquad x'(\tau)=b_1 \tag{2.3}$$

$$I=[0,\tau],\ a_0,a_1,b_0,b_1\in R,\quad \varphi\in C(I\times R).$$

Т е о р е м а 2 (о существовании решения).

Если выполняется условие

$$(A_0): \exists r_0\in\left(0,\frac{12}{\tau^4}\right): x(\varphi(t,x)+r_0x)\geq 0 \quad \forall |x|\geq M_0,\ \forall t\in I,$$

то для $\forall a_0,a_1,b_0,b_1\in R$ решение задачи (2.I)-(2.3) существует.

Доказательство. Сделаем замену $x=\ell(t)+y$, где $\ell(t)$ - решение краевой задачи (2.I)-(2.3) для однородного дифференциального уравнения:

$$\ell(t)=\left[\frac{12}{\tau^3}(a_0-b_0)-\frac{6}{\tau^2}(a_1-b_1)+\frac{12}{\tau^2}a_1\right]\frac{t^3}{3!}+$$

$$+\left[-\frac{2}{\tau}(b_1-a_1)+\frac{6}{\tau^2}(b_0-a_0)-\frac{6}{\tau}a_1\right]\frac{t^2}{2}+a_1t+a_0$$

Получим задачу

$$y^{IV}=-\Psi(t,y) \qquad \forall t\in I \tag{2.4}$$

$$y(0)=0 \qquad y(\tau)=0 \tag{2.5}$$

$$y'(0)=0 \qquad y'(\tau)=0, \tag{2.6}$$

причем имеет место условие

$$(A_0): \exists r_0 \in \left(0, \frac{12}{\tau^4}\right): y(\psi(t,y)+r_0 y) \geq 0 \quad \forall |y| \geq M_0 + l_0, \forall t \in I,$$

где $l_0 = \max\limits_{t \in I} l(t)$.

Легко проверить, что функция $\psi(t,y)$ удовлетворяет условиям $(A_1), (B_4^1)$. Обозначив

$$-m_0 = \min_{\substack{t \in I \\ |y| \leq M_0 + l_0}} y(\psi(t,y)+r_0 y) \quad , \text{ получим}$$

$$(A_1): y(\psi(t,y)+r_0 y)+m_0 \geq 0 \quad \forall (t,y) \in I \times \mathbb{R}.$$

Так как функция $\psi(t,y)$ не зависит от производных y, для любого $H_0 > 0$ существуют $b_0 > 0$ и $\varepsilon = 1 > 0$ такие, что имеет место

$$(B_4^1): |\psi(t,y)| \leq b_0 \quad \forall t \in I, \quad \forall |y| \leq H_0.$$

Так как выполняются условия $(A_1), (B_4^1)$, по теореме I о существовании решения задача (2.I)-(2.3) разрешима.

Т е о р е м а 3 (о единственности решения). Если функция φ такова, что существует $r_0 \in \left(0, \frac{12}{\tau^4}\right)$ такое, что $\varphi(t,x) + r_0 x$ не убывает для любых $(t,x) \in I \times \mathbb{R}$, то решение задачи (2.I)-(2.3) единственно.

Доказательство. Предположим, что существуют $x_1(t)$, $x_2(t)$ - различные решения задачи (2.I)-(2.3).

Обозначим $u(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad \forall t \in I$ (2.7)

Имеем краевую задачу

$$u^{IV} = -(\varphi(t,x_1(t)) - \varphi(t,x_2(t))) \quad \forall t \in I \qquad (2.8)$$

$$u(0) = 0 \qquad u(\tau) = 0 \qquad (2.9)$$

$$u'(0) = 0 \qquad u'(\tau) = 0 \qquad (2.10)$$

Проинтегрируем (2.8), домножив на $u(t)$:

$$\int_0^\tau u(t) u^{IV}(t) dt = -\int_0^\tau (\varphi(t,x_1(t)) - \varphi(t,x_2(t)))(x_1(t) - x_2(t)) dt.$$

После интегрирования по частям получим

$$\int_0^\tau u'''^2(t)dt=-\int_0^\tau(\varphi(t,x_1(t))-\varphi(t,x_2(t)))u(t)dt \quad (2.11)$$

$\exists r_0\in(0,\frac{12}{\tau^4})$: выполняется условие

$$(A_0):[\varphi(t,x_1(t))-\varphi(t_1,x_2(t))+r_0(x_1(t)-x_2(t))](x_1(t)-x_2(t))\geq 0$$
$$\forall t\in I,\ \forall x_1,x_2\in R.$$

Преобразуем уравнение (2.11):

$$\int_0^\tau u'''^2(t)dt+\int_0^\tau[\varphi(t,x_1(t))-\varphi(t,x_2(t))+r_0u(t)]u(t)dt=\int_0^\tau r_0u^2(t)dt$$

$u'''^2(t)\geq 0 \quad \forall t\in I$

имеет место (A_0) $\Rightarrow$ выполняется неравенство

$$0\leq\int_0^t u'''^2(t)dt+\int_0^t[\varphi(t,x_1(t))-\varphi(t,x_2(t))+r_0u(t)]u(t)dt\leq$$
$$\leq\int_0^\tau r_0u^2(t)dt. \quad (*)$$

Обозначим

$$g(t)=\int_0^t[\varphi(t,x_1(t))-\varphi(t,x_2(t))+r_0u(t)]u(t)dt+\int_0^t u'''^2(t)dt.$$

Введем функцию $V(t)=\frac{1}{2}u^2(t)$

$$V'(t)=u(t)u'(t)$$
$$V''(t)=u'^2(t)+u(t)u''(t)$$
$$V'''(t)=3u'(t)u''(t)+u(t)u'''(t)$$

$(2.9),(2.10)\Rightarrow V(0)=V(\tau)=V'(0)=V'(\tau)=V''(0)=V''(\tau)=V'''(0)=V'''(\tau)=0$

$$V^{IV}(t)=3u''^2(t)+4u'(t)u'''(t)+u(t)u^{IV}(t)=3u''^2(t)+4u'(t)u'''(t)-$$
$$-u(t)(\varphi(t,x_1(t))-\varphi(t,x_2(t))+r_0u(t))+r_0u^2(t).$$

Проинтегрировав полученное выражение, имеем

$$V'''(t)=3\int_0^t u''^2(t)dt+4u'(t)u'''(t)\Big|_0^t-\int_0^t u(t)(\varphi(t,x_1(t))-$$

$$-\varphi(t,x_2(t))+r_0u(t))dt+\int_0^t r_0u^2(t)dt=4u'(t)u''(t)-g(t)+$$

$$+\int_0^t r_0u^2(t)dt,$$

$$V''(t)=4\int_0^t u'(t)u''(t)dt-\int_0^t g(t)dt+\int_0^t\int_0^s r_0u^2(z)dzds=$$

$$=2u'^2(t)+\int_0^t\int_0^s r_0u^2(z)dzds-\int_0^t g(t)dt.$$

Используя функцию Грина $G(t,s)\geq 0$ задачи $V''=0$, $V(0)=V(\tau)=0$, имеем

$$V(t)\leq-\int_0^\tau G(t,s)(2u'^2(s)+\int_0^s\int_0^z r_0u^2(\alpha)d\alpha dz-\int_0^s g(z)dz)ds\leq$$

$$\leq\int_0^\tau G(t,s)(\int_0^s g(z)dz)ds\overset{(*)}{\leq}\int_0^\tau G(t,s)(\int_0^s\int_0^\tau r_0u^2(\alpha)d\alpha dz)ds=$$

$$=2r_0\int_0^\tau V(t)dt\cdot\int_0^\tau G(t,s)sds. \qquad (2.12)$$

Проинтегрировав (2.I2), получим

$$\int_0^\tau V(t)dt\leq 2r_0\int_0^\tau\int_0^\tau G(t,s)sdsdt\cdot\int_0^\tau V(t)dt .$$

Обозначим $q=2r_0\int_0^\tau\int_0^\tau G(t,s)sdsdt=\frac{r_0\tau^4}{12}$

$\exists r_0\in(0,\frac{12}{\tau^4}):q<1$. Тогда имеем

$$\int_0^\tau V(t)dt\cdot(1-q)\leq 0 .$$

Так как $V(t)=\frac{1}{2}u^2(t)\geq 0$ и $u(t)\neq 0$, то $1\leq q$.
С другой стороны, $\exists r_0>0:\ q=\frac{r_0\tau^4}{12}<1$.

Таким образом, получено противоречие. Следовательно, предположение теоремы неверно, и решение задачи (2.I)-(2.3) единственно.

3. Некоторые результаты для краевых задач, встречающихся в приложениях

Рассмотрим краевую задачу [2]

$$x''' = ke^{\alpha x}, \quad x(0) = x(\tau) = x'(0) = x'(\tau) = 0,$$
$$\alpha, k \in R, \quad I = [0, \tau], \quad k \geq 0.$$

Для нее имеют место следующие результаты: если $\alpha k < 0$, то по теореме I решение существует и по теореме 3 единственно; если $\alpha k > 0$, то можно показать, что существует $\alpha k = \gamma^*$ такое, что для $0 < \alpha k < \gamma^*$ решение существует, для $\alpha k > \gamma^*$ решения не существует.

В работе [3] изучается прикладная задача

$$x''' = k(1-x)^{-2}, \quad x(0) = x(\tau) = x'(0) = x'(\tau) = 0, \quad k \in R_+ .$$

Используя соответствующую обрезку правой части дифференциального уравнения, можно показать, что существует $k^* > 0$ такое, что для $0 < k < k^*$ решение задачи существует, а для $k > k^*$ решения не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.–Рига : Зинатне , 1978.–189 с.

2. Anderson N. and Arthurs A.M. Proc.Cambridge Philos. Soc., 1970, N 68, pp.173-177.

3. Anderson N., Arthurs A.M. and Hall R.R. Proc.Cambridge Philos.Soc., 1972, N 72, pp.315-318.

Поступила 5.10.84.

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.I23-I32

УДК 517.927

Ф.Ж.Садырбаев, Г.И.Федорова
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, ЛГУ им.П.Стучки

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА

I. Рассматривается краевая задача на конечном интервале для обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера

$$(f(x)y')' + g(x)y\psi(y^2) = 0, \tag{I}$$

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{2}$$

Будем предполагать выполненными следующие условия:

(A) функции f, g непрерывны в $[a,b]$;

(B) $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – непрерывная функция;

(C) существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $s^{-\varepsilon}\psi(s)$ не убывает по s в $[0,\infty)$.

Из (B) и (C) следует, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(s)$ строго возрастает по s.

Краевая задача (I),(2) изучается с помощью вариационного метода Нехари, развитого в работах [I], [2].

2. Рассмотрим случай $f>0, g\geq 0$, причем g не равняется нулю тождественно. При этом будем следовать работам [I], [2].

Уравнение (I) является уравнением Эйлера для функционала

$$H(y) = \int_a^b [f(x)y'^2 - g(x)\mathcal{F}(y^2)]dx, \tag{3}$$

где $\mathcal{F}(y^2) = \int\limits_0^{y^2} \psi(s)ds$.

Пусть D_1 - множество кусочно-непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, обращающихся в нуль на концах интервала.

Вариационное доказательство разрешимости задачи (I), (2) затрудняется тем обстоятельством, что функционал (3) не имеет нижней грани на множестве D_1. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть последовательность "трапецеобразных" функций, боковые стороны графиков которых стремятся к прямым $x=a$, $x=b$ и учесть условие (С).

Поэтому класс функций сравнения сужается следующим образом. Пусть Γ - множество функций $y(x)$, кусочно-непрерывно дифференцируемых в $[a,b]$, $y(x) \not\equiv 0$, и удовлетворяющих условию

$$\int\limits_a^b f(x) y'^2 dx = \int\limits_a^b g(x) y^2 \psi(y^2) dx . \tag{4}$$

Умножив левую часть (I) на $y(x)$ и проинтегрировав на интервале $[a,b]$, учитывая краевые условия (2), убедимся, что любое решение краевой задачи (I),(2) удовлетворяет условию (4).

Условие (4) является условием нормализации, т.к. для любой допустимой функции $u(x)$ существует число $\alpha > 0$ такое, что $\alpha u(x)$ удовлетворяет условию (4).

Покажем это. Из условия (С) вытекает, что при изменении аргумента t от 0 до ∞ функция $\psi(t)$ монотонно возрастает от 0 до ∞. Пусть для определенности

$$\int\limits_a^b f(x) u'^2 dx > \int\limits_a^b g(x) u^2 \psi(u^2) dx .$$

Для функции $\alpha u(x)$ с некоторым $\alpha > 1$ выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)u'^2dx = \int_a^b g(x)u^2\psi(\alpha^2u^2)dx\ ,$$

т.е. для $\alpha u(x)$ выполняется условие (4).

Л е м м а I. Значения интегралов $\int_a^b y'^2(x)dx$ ограничены снизу положительным числом β_0, не зависящим от выбора допустимой функции $y(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y(x)$ - произвольная допустимая функция. Пользуясь неравенством Гельдера, получаем

$$y(x) = \int_a^x y'dx \leq \left(\int_a^x dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^x y'^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

или $y^2(x) \leq (x-a)\int_a^x y'^2dx \leq (x-a)\beta$,

где $\beta = \int_a^b y'^2dx$.

Подставив в (4), имеем

$$f_m\int_a^b y'^2dx \leq \int_a^b f(x)y'^2dx \leq \beta\int_a^b g(x)(x-a)\psi(\beta(x-a))dx$$

или $f_m \leq \int_a^b g(x)(x-a)\psi(\beta(x-a))dx$, (5)

где $f_m = min\{f(x): x\in[a,b]\} > 0$.

Поскольку правая часть в (5) стремится к нулю при $\beta \to 0$, число $\beta_0 > 0$ существует.

Л е м м а 2. В классе функций Γ значения функционала $H(y)$ ограничены снизу положительным числом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя условие (C), получаем

$$F(y^2)=\int_0^{y^2}\psi(s)ds=\int_0^{y^2}s^{\varepsilon}(s^{-\varepsilon}\psi(s))ds\leqslant$$
$$\leqslant y^{-2\varepsilon}\psi(y^2)\int_0^{y^2}s^{\varepsilon}ds=(\varepsilon+1)^{-1}y^2\psi(y^2). \tag{6}$$

Используя (6) и условие нормализации (4), имеем

$$H(y)=\int_a^b[f(x)y'^2-g(x)\mathcal{F}(y^2)]dx\geqslant$$
$$\geqslant\int_a^b[-g(x)(\varepsilon+1)^{-1}y^2\psi(y^2)+g(x)y^2\psi(y^2)]dx=$$
$$=\varepsilon(\varepsilon+1)^{-1}\int_a^b g(x)y^2\psi(y^2)dx=\varepsilon(\varepsilon+1)^{-1}\int_a^b f(x)y'^2dx\geqslant$$
$$\geqslant\varepsilon(\varepsilon+1)^{-1}f_m\beta_0.$$

Т е о р е м а I. Функционал $H(y)$ достигает минимума во множестве Γ на функции u_0 такой, что $f(x)u_0'\in\in C'([a,b])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку значения функционала ограничены снизу на рассматриваемом множестве функций, существует $\{y_n\}$ - минимизирующая последовательность. Для достаточно большого N имеем

$$N>H(y_n)\geqslant\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}f_m\int_a^b y_n'^2dx$$

или $\int_a^b y_n'^2dx\leqslant N\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}f_m^{-1}$.

Т.к. к тому же $y_n(a)=0$, последовательность $\{y_n\}$ удовлетворяет критерию Арцела и, следовательно, существует предельная функция $y_0(x)$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{u_n\}$, построенную следующим образом. Пусть функции $z_n(x)$ определяются соотношениями

$$(f(x)z_n')' = -g(x)y_n\psi(y_n^2), \tag{7}$$

$$z(a) = z(b) = 0. \tag{8}$$

Пусть числа α_n таковы, что функции $u_n = \alpha z_n$ удовлетворяют условию нормализации.

Для каждой функции u_n имеем (индекс n опускаем)

$$(f(x)u')' = -\alpha g(x)y\psi(y^2), \tag{9}$$

$$\int_a^b f(x)u^2dx = \int_a^b g(x)u^2\psi(u^2)dx \tag{I0}$$

Аналогично доказательству в ([I], с.II2) можно показать, что

$$\int_a^b g(x)u^2\psi(u^2)dx \leq \int_a^b g(x)u^2\psi(y^2)dx \tag{II}$$

При доказательстве этого соотношения испо"ьзуется неравенство Шварца, поэтому равенство в (II) имеет место лишь при $u=y$.

По условию (C) функция $\psi(t)$ - возрастающая по поэтому ее первообразная $F(t)$ - выпуклая функция. Следовательно,

$$\int_a^b g(x)(\mathcal{F}(u^2) - \mathcal{F}(y^2))dx \geq \int_a^b g(x)(u^2-y^2)\psi(y^2)dx$$

и, учитывая (II), получаем

$$\int_a^b g(x)(u^2\psi(u^2) - \mathcal{F}(u^2))dx \leq \int_a^b g(x)(y^2\psi(y^2) - \mathcal{F}(y^2))dx.$$

Используя условие нормализации, окончательно имеем

$$H(u) \le H(y) \tag{I2}$$

Это означает, что последовательность $\{u_n\}$ также является минимизирующей. Т.к. $\{y_n\}$ стремится к непрерывной функции, это же верно для последовательности $(f(x)u_n')'$. Тогда и последовательности $\{u_n\},\{u_n'\}$ стремятся к непрерывным предельным функциям, т.е. $u_n \to u_0$, где $f(x)u_0' \in C'([a,b])$, $H(u_n) \to H(u_0) = H(y_0)$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Функция u_0 является решением краевой задачи (I),(2), положительным в (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $z(t)$ определяется равенством

$$\begin{gathered}(f(x)z')' = -\alpha g(x)u_0\psi(u_0^2),\\ z(a) = z(b) = 0,\end{gathered} \tag{I3}$$

где α таково, что

$$\int_a^b f(x)z'^2 dx = \int_a^b g(x)z^2\psi(z^2)dx \tag{I4}$$

По доказанному ранее, $H(z) \le H(u_0)$, причем равенство имеет место лишь при $z = u_0$. Умножая обе части (I3) на $u_0(x)$ и интегрируя на $[a,b]$, получаем

$$\int_a^b f(x)u_0'^2 dx = \alpha\int_a^b g(x)u_0^2\psi(u_0^2)dx . \tag{I5}$$

Учитывая, что $u_0 = z$ и сравнивая (I5) с (I4), заключаем, что $\alpha = 1$, т.е. функция $u_0(x)$ является решением краевой задачи (I),(2).

Кроме того, $u_0(x)$ - положительная в (a,b) функция. Покажем это.

Функции y_n можно заменить на $|y_n|$, т.е. считать члены минимизирующей последовательности $\{y_n\}$ неотрицательными. Тогда

$$(f(x)u_n')' = -\alpha_n g(x) y_n \psi(y_n^2) \leq 0$$

и $(f(x)u_0')' \leq 0$ Пусть ξ_0 - точка, в которой функция u_0 достигает максимума. Т.к. случай $u_0 \equiv 0$ исключается, $u_0(\xi_0) > 0$ и $\xi_0 \in (a,b)$. Без ограничения общности считаем, что $u_0(x) < u_0(\xi_0)$ при $x < \xi_0$. Тогда $u_0'(x) > 0$ в $[a, \xi_0)$. В противном случае $u_0'(\xi) = 0$ в некоторой точке $\xi \in [a, \xi_0)$ и, т.к. функция $f(x)u_0'$ не возрастает, $u_0'(x) \leq 0$ при $x \in [\xi, \xi_0]$, что противоречит выбору точки ξ_0. Следовательно, $u_0(x) > 0$ при $x \in (a, \xi_0]$.

Аналогично показывается, что $u_0(x) > 0$ при $x \in [\xi_0, b)$. Теорема доказана.

3. Следуя [2], назовем минимальное значение функционала $H(y)$ характеристическим числом задачи (I),(2) и обозначим его $\lambda(a,b)$.

Справедлива

Л е м м а 3.

I) если $a \leq a' \leq b' < b$, то $\lambda(a,b) \leq \lambda(a',b')$;

2) $\lambda(a,b) \to \infty$ при $b - a \to 0$;

3) $\lambda(a,b)$ - непрерывная функция от a и b.

При этом предполагается, что ни на одном интервале функция $g(x)$ не равняется нулю тождественно.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3 проводится аналогично доказательству леммы 3.I из [2].

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть $n+1$ точек a_ν таковы, что

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b.$$

По доказанному ранее, в каждом из интервалов $[a_{\nu-1}, a_\nu]$ существует функция $y_\nu(x)$, минимизирующая функционал $H(y)$ в соответствующем классе функций. Минимизировать сумму $\Lambda(a,b) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda(a_{\nu-1}, a_\nu)$ по различным разбиениям интервала (a,b).

Теорема 3. Пусть Γ_n – класс кусочно-непрерывно дифференцируемых в $[a,b]$ функций, обращающихся в нуль в точках a_ν $(\nu=0,1,\dots,n)$ таких, что $a=a_0<a_1<\dots<a_n=b$;

для $\nu=1,\dots,n$ выполняется

$$\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} f(x)y'^2dx=\int_{a_{\nu-1}}^{a_\nu} g(x)y^2\Psi .$$

Тогда вариационная задача

$$H(y)\longrightarrow \min,\quad y\in\Gamma_n ,$$

имеет решение $y_n(x)\in C^1([a,b])$. Функция $y_n(x)$ имеет ровно $n-1$ нуль в интервале (a,b) и является решением краевой задачи (I),(2).

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.2 из [2].

4. Рассмотрим уравнение (I), где функция $f(x)$ может обращаться в нуль в отдельных точках интервала $[a,b]$. Пусть

$$c=\int_a^b f^{-1}(x)dx<\infty . \tag{I6}$$

Здесь интеграл от функции $f^{-1}(x)$ рассматривается как несобственный.

Путем стандартной замены независимой переменной

$$s=\int_a^x f^{-1}(x)dx \tag{I7}$$

уравнение (I) приводится к виду

$$y''+f(x)g(x)y\Psi(y^2)=0 . \tag{I8}$$

Здесь $fg\geqslant 0$, поэтому для (I8) справедливы теоремы I,2,3.

Поэтому для краевой задачи (I),(2) с функцией $f(x)$ удовлетворяющей условию (I6), справедливы заключения теорем I,2,3 с той лишь поправкой, что производная решения $y'(x)$ обращается в бесконечность в точках, в которых $f(x)$ обращается в нуль. Это видно из соотношения $y'_x = y'_s f^{-1}(x)$.

5. Докажем теоремы сравнения, аналогичную теореме 6 из [I].

Наряду с уравнением (I) рассмотрим уравнение

$$(f_1(x)y')' + g_1(x)y\psi(y^2) = 0 \tag{I9}$$

где функции f, f_1, g, g_1 описаны ранее. Характеристическое число задачи (I9),(2) обозначим $\lambda_1(a,b)$.

Т е о р е м а 4. Пусть на интервале $[a,b]$ выполняются соотношения

$$f_1 \leq f,$$
$$gf \leq g_1 f_1.$$

Тогда $\lambda(a,b) \geq \lambda_1(a,b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$c = \int_a^b f^{-1}(x)\,dx,$$
$$c_1 = \int_a^b f_1^{-1}(x)\,dx.$$

Путем замен независимых переменных (I7), уравнения (I), (I9) переходят соответственно в

$$u'' = -g(x)f(x)u\psi(u^2), \quad 0 \leq x \leq c, \tag{20}$$

$$u'' = -g_1(x) f_1(x) u \psi(u^2), \quad 0 \leq x \leq c_1 , \qquad (21)$$

причем $c_1 \geq c$. Характеристические числа краевых задач, порожденных уравнениями (20),(21), обозначим соответственно $\mu(0,c)$ и $\mu_1(0,c_1)$. Т.к. $gf \leq g_1 f_1$ на интервале $[0,c]$, применяя теорему 6 из [1] (которая справедлива и в случае, когда gf и $g_1 f_1$, могут обращаться в нуль), получаем

$$\lambda(a,b) = \mu(0,c) \geq \mu_1(0,c) \geq \mu_1(0,c_1) = \\ = \lambda_1(a,b),$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Z.Nehari. On a class of nonlinear second-order differential equations.-Trans.Amer.Math.Soc., 1960, v.93, p.101-123.
2. Z.Nehari. Characteristing values associated with a class of nonlinear second-order differential equations. -Acta Math., 1961, v.105, N 3-4, p.141-175.

Поступила 12.10.84.

Межвузовский сборник научных трудов
НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
1985, Рига, ЛГУ им.П.Стучки, с.133-156

УДК 517.927.4

В.В.Гудков, А.П.Михайлов, В.В.Степанова
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, Институт прикладной математики им.М.В.Келдыша, МГУ им.М.В.Ломоносова

ОБ АСИМПТОТИКАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

1. Постановка задачи.

Рассматривается краевая задача

$$\begin{gathered} m\xi g' + g^2 v' = kg, \\ \theta g' + m\xi v' + g\theta' = lv, \\ (1-\gamma)m\xi\theta g' + m\xi g\theta' - (1-\gamma)gw' = (n-\gamma k)\theta g, \\ \theta' = -w\theta^{-\beta} g^{-1-\alpha}, \end{gathered} \tag{1.1}$$

$$g(\xi_\phi) = v(\xi_\phi) = w(\xi_\phi) = 0, \; \pi(\xi_\phi) = g(\xi_\phi)\theta(\xi_\phi) = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $0 \leq \xi \leq \xi_\phi$, $\xi_\phi > 0$, g, v, θ, w - неизвестные неотрицательные функции; $k, l, m, n, \alpha, \beta, \gamma$ - действительные параметры, причем:

$$\gamma > 1, \; \beta > 0, \; n < 0, \; m \neq 0, \; k = \frac{(\beta-1)n-1}{\beta-\alpha},$$

$$l = \frac{(1-\alpha)n+1}{2(\beta-\alpha)}, \quad m = \frac{(2\beta-\alpha-1)n+2\beta-2\alpha-1}{2(\beta-\alpha)} \tag{1.3}$$

Замечание 1. Между параметрами k, l, m, n

существуют следующие соотношения:

$$k+l-m=-1,\ l+m=n+1,\ (1+\alpha)k+2l(1+\beta)=2n+1. \quad (I.4)$$

Задача (I.I)-(I.2) связана с задачей о сжатии идеального теплопроводного газа поршнем, давление на котором растет в режиме с обострением, т.е. обращается в бесконечность за конечный промежуток времени.

Система (I.I) получена из системы уравнений газовой динамики с учетом процесса теплопроводности (коэффициент теплопроводности -степенная функция температуры и плотности) путем подстановки:

$$F_i(x,t)=F_{0i}(t_f-t)^{n_i} f_i(\xi), \quad \xi=\frac{x}{x_0(t_f-t)^m},$$

где ξ - автомодельная переменная, $n_i<0$, $x\geq 0$, $-\infty\leq t<t_f$. Функции $g(\xi), v(\xi), \theta(\xi), w(\xi), \pi(\xi)$ - автомодельные функции плотности, скорости, температуры, теплового потока и давления соответственно.

Граничные режимы с обострением для процессов распространения тепла и в задачах газовой динамики изучались в работах [I-5] (см.также библиографию к этим работам). Некоторые автомодельные задачи газовой динамики с нелинейной теплопроводностью исследовались в [6,7].

В настоящей работе построены асимптотики решений задачи (I.I)-(I.2) при $\xi\to\xi_\phi$. При этом рассматривается случай $k<0$, $l<0$, представляющий физический интерес. В силу (I.3) он соответствует следующим соотношениям между параметрами α, β, n:

$$\begin{aligned}
&\alpha<1\leq\beta, \quad n<\frac{1}{\alpha-1},\\
&\alpha<\beta<1, \quad \frac{1}{\beta-1}<n<\frac{1}{\alpha-1},\\
&\beta<1\leq\alpha, \quad n<\frac{1}{\beta-1},\\
&\beta<\alpha<1, \quad \frac{1}{\alpha-1}<n<\frac{1}{\beta-1}.
\end{aligned} \quad (I.5)$$

2. Асимптотический вид решений.

Решения задачи (I.I)-(I.2) в окрестности точки $\xi=\xi_\phi$ ищутся в виде степенных рядов. При этом оказывается, что необходимо $\xi_\phi=\infty$. Действительно, предположим, что ξ_ϕ - конечная величина. Тогда решение задачи (I.I)-(I.2) в окрестности $\xi=\xi_\phi$ представляется в виде

$$
\begin{aligned}
g&=g_0(\xi_\phi-\xi)^a+\ldots, \quad a>0, \quad g_0>0,\\
v&=v_0(\xi_\phi-\xi)^b+\ldots, \quad b>0, \quad v_0>0,\\
\theta&=\theta_0(\xi_\phi-\xi)^c+\ldots, \quad \theta_0>0,\\
w&=w_0(\xi_\phi-\xi)^d+\ldots, \quad d>0, \quad w_0>0.
\end{aligned} \tag{2.I}
$$

Ясно, что функции g, v, θ, w удовлетворяют краевому условию (I.2). Подставим их в систему (I.I) и выпишем первое уравнение системы

$$
-m\xi_\phi a g_0(\xi_\phi-\xi)^{a-1}-g_0^2 b v_0(\xi_\phi-\xi)^{2a+b-1}\ldots=kg_0(\xi_\phi-\xi)^a+\ldots
$$

Из положительности показателей в разложениях (2.I) для функций g и v следует, что $a-1<2a+b-1$ и меньше всех остальных показателей. Таким образом, необходимо $m\xi_\phi a g_0=0$, но это невозможно. Полученное противоречие исключает случай $\xi_\phi<0$. Итак, всюду ниже $\xi_\phi=\infty$.

Искомые функции при $\xi\to\infty$ ищутся в виде

$$
\begin{aligned}
g&=g_0\xi^a+g_1\xi^{a_1}+\ldots, \quad 0>a>a_1\ldots, \quad g_0>0,\\
v&=v_0\xi^b+v_1\xi^{b_1}+\ldots, \quad 0>b>b_1\ldots, \quad v_0>0,\\
\theta&=\theta_0\xi^c+\theta_1\xi^{c_1}+\ldots, \quad c>c_1\ldots, \quad \theta_0>0,\\
w&=w_0\xi^d+w_1\xi^{d_1}+\ldots, \quad 0>d>d_1\ldots, \quad w_0>0.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Условия $a<0$, $b<0$, $d<0$ следуют из (I.2). В силу произвольности показателей все коэффициенты предполагаются отличными от нуля, кроме того, из неотрицательности функций g, v, θ, w следует положительность коэффициентов g_0, v_0, θ_0, w_0. Из 4-го уравнения системы (I.I) следует, что $\theta' < 0$ для всех ξ, а так как

$$\theta' = c\theta_0 \xi^{c-1} + c_1\theta_1\xi^{c_1-1} + \dots, \quad c > c_1 \dots,$$

то необходимо $c \leq 0$. Тогда $a+c<0$.

Коэффициенты разложения (2.2) и показатели степеней определяются из системы (I.I), которая в окрестности точки $\xi = \infty$ имеет вид:

$$(ma-k)g_0\xi^{a} + (ma_1-k)g_1\xi^{a_1} + bg_0^2v_0\xi^{2a+b-1} + \\ + b_1g_0^2v_1\xi^{2a+b_1-1} + 2bg_0g_1v_0\xi^{a+a_1+b-1} + \dots = 0, \tag{2.3}$$

$$(a+c)g_0\theta_0\xi^{a+c-1} + (a+c_1)g_0\theta_1\xi^{a+c_1-1} + (a_1+c)g_1\theta_0\xi^{a_1+c-1} + \\ + (mb-l)v_0\xi^{b} + (mb_1-l)v_1\xi^{b_1} + \dots = 0, \tag{2.4}$$

$$(mc+(1-\gamma)ma-n+\gamma k)g_0\theta_0\xi^{a+c} - (1-\gamma)dg_0w_0\xi^{a+d-1} + \\ + (mc+(1-\gamma)ma_1-n+\gamma k)g_1\theta_0\xi^{a_1+c} - (1-\gamma)dg_1w_0\xi^{a_1+d-1} + \\ + (mc_1+(1-\gamma)ma-n+\gamma k)g_0\theta_1\xi^{a+c_1} - (1-\gamma)d_1g_0w_1\xi^{a+d_1-1} + \dots = 0, \tag{2.5}$$

$$w_0\xi^{d} + w_1\xi^{d_1} + \dots = -cg_0^{1+\alpha}\theta_0^{1+\beta}\xi^{a(1+\alpha)+c(1+\beta)-1} \times \\ \times \left(1 + \left(\beta + \frac{c_1}{c}\right)\frac{\theta_1}{\theta_0}\xi^{c_1-c} + (1+\alpha)\frac{g_1}{g_0}\xi^{a_1-a} + \dots\right). \tag{2.6}$$

3. Анализ старших показателей.

Выделение старших степеней в уравнениях (2.3)-(2.6) приводит к следующему результату: из (2.3) и (2.6) однозначно определяются показатели a и d, а из (2.4) и (2.5) находятся по два значения для каждого из показателей b и c. В дальнейшем устанавливается, что из найденных 4-х вариантов с показателями a, b, c, d реализуются только 3 варианта.

В уравнении (2.3) старшей степенью является ξ^{a}. Действительно, из $0>a>a_1\ldots,\ 0>b>b_1\ldots$ следует

$$a>2a+b-1>2a+b_1-1,\quad 2a+b-1>a+a_1+b-1.$$

Приравняв к нулю коэффициент при ξ^{a}, найдем

$$a=\frac{\kappa}{m}, \qquad g_0 \text{ - не определено}. \tag{3.I}$$

Из условия $a<0$ в силу $\kappa<0$ следует неравенство $m>0$. Итак, к ограничениям (I.5) на параметры α, β, n добавилось еще одно условие

$$m=\frac{(2\beta-\alpha-1)n+2\beta-2\alpha-1}{2(\beta-\alpha)}>0. \tag{3.2}$$

Для определения следующего члена разложения (2.3) надо сравнить показатели a_1 и $2a+b-1$. Если $a_1>2a+b-1$, то $(ma_1-\kappa)g_1=0$, но это невозможно в силу неравенств $a_1\neq a,\ g_1\neq 0$. Если же $a_1<2a+b-1$, то $b g_0^2 v_0=0$, что также невозможно. Таким образом, необходимо

$$a_1=2a+b-1. \tag{3.3}$$

При этом коэффициенты связаны соотношением

$$(ma_1-\kappa)g_1+b g_0^2 v_0=0,$$

из которого с учетом (3.I) и (3.3) находим

$$g_1 = -\frac{b g_0^2 v_0}{k + m(b-1)} < 0. \qquad (3.4)$$

Из уравнения (2.6) следует

$$d = a(1+\alpha) + c(1+\beta) - 1, \qquad (3.5)$$

$$w_0 = -c g_0^{1+\alpha} \theta_0^{1+\beta}, \quad c < 0. \qquad (3.6)$$

Неизвестные d_1 и w_1 можно определить лишь после нахождения показателей b и c.

Анализ старших показателей уравнения (2.4) приводит к двум случаям

B1) $b > a + c - 1, \quad (mb - l) v_0 = 0.$

В этом случае находим

$$b = \frac{l}{m}, \qquad v_0 \text{ - не определено.}$$

Далее, если $b_1 > a + c - 1$, то $(mb_1 - l) v_1 = 0$, что невозможно. Если же $b_1 < a + c - 1$, то $(a+c) g_0 \theta_0 = 0$, что также невозможно. Следовательно,

$$b_1 = a + c - 1, \quad v_1 = -g_0 \theta_0 \frac{a+c}{mb_1 - l} < 0.$$

Характерной особенностью случая B1 является условие

$$b = \frac{l}{m} > \frac{k}{m} + c - 1. \qquad (3.7)$$

B2) $b = a + c - 1, \quad (mb - l) v_0 + (a+c) g_0 \theta_0 = 0.$

В этом случае находим

$$v_0 = -g_0 \theta_0 \frac{a+c}{mb - l}.$$

Из положительности коэффициента v_0 следует $mb - l > 0$. Так что, характерной особенностью данного случая является условие

$$b=\frac{k}{m}+c-1>\frac{l}{m}. \tag{3.8}$$

З а м е ч а н и е 2. Случай $b<a+c-1$ приводит к соотношению $a+c=0$, что противоречит условию

Анализ старших показателей уравнения (2.5) также приводит к двум случаям.

CI) $a+c>a+d-1, \quad c>d-1,$

$$(mc+(1-\gamma)ma-n+\gamma k)g_0\theta_0=0. \tag{3.9}$$

Отсюда, учитывая соотношение (I.4) из замечания I, находим

$$c=\frac{n-k}{m}=\frac{2l}{m}, \qquad \theta_0 \text{ - не определено.}$$

З а м е ч а н и е 3. Случай CI не может реализоваться одновременно со случаем B2. Действительно, если при $c=\frac{2l}{m}$ осуществляется случай B2, когда $b=a+c-1$, то (см.(I.4))

$$b=\frac{k}{m}+\frac{2l}{m}-1=\frac{l-1}{m}<\frac{l}{m},$$

что противоречит условию (3.8).

Таким образом, при $c=\frac{2l}{m}$ необходимо $b=\frac{l}{m}$ и, следовательно, условие (3.7) выполняется автоматически.

Условие $c>d-1$ выполняется при любых α, β, n. Действительно, учитывая (3.5) и (I.4), находим

$$d-1=\frac{(1+\alpha)k+2l(1+\beta)}{m}-2=\frac{2l-1}{m}<c.$$

C2) $a+c=a+d-1, \quad c=d-1.$

Значение показателя c находится из (3.5)

$$c=\frac{2-(1+\alpha)\frac{k}{m}}{\beta}=\frac{2l}{m}+\frac{1}{\beta m}>\frac{2l}{m}.$$

Из уравнения (2.5) следует

$$(mc+(1-\gamma)ma-n+\gamma\kappa)g_0\theta_0-(1-\gamma)dg_0\dot{w}_0=0. \qquad (3.10)$$

Если подставить сюда значения показателей a и c, то получится соотношение между коэффициентами θ_0 и $\dot{w}_0$

$$\theta_0=\beta d(1-\gamma)\dot{w}_0. \qquad (3.11)$$

Более того, отсюда и из (3.6) следует равенство

$$1=\beta cd(\gamma-1)\,g_0^{1+\alpha}\theta_0^{\beta},$$

которое позволяет определить θ_0 через g_0 или наоборот. Полагая g_0 независимой величиной, найдем

$$\theta_0=(\beta cd(\gamma-1)g_0^{1+\alpha})^{-\frac{1}{\beta}}. \qquad (3.12)$$

В данном случае $d=c+1$, поэтому условие $d<0$ равносильно условию $c+1<0$. Таким образом, должно выполняться неравенство

$$(2l+m)\beta+1<0, \qquad (3.13)$$

которое с помощью (1.4) или (3.5) может быть записано в виде:

$$(2+\beta)m<(1+\alpha)\kappa, \quad 1+\alpha<0. \qquad (3.14)$$

Ясно, что если выполняется условие $c+1<0$, то тем более выполняется $c<0$.

Случай C2 может осуществляться как со случаем B1, так и со случаем B2. Таким образом, учитывая замечание 3, возможны три варианта для показателей a, b, c, d. Им соответствуют три группы асимптотик.

4. Первая группа асимптотик.

Рассмотрим вариант, когда реализуются случаи CI и BI. Тогда

$$a=\frac{k}{m}\ ;\ b=\frac{l}{m}\ ,\ c=\frac{2l}{m}\ ,\quad g_0, v_0, \theta_0 \text{ - не определены.}$$

Из (3.3)-(3.6) и из BI находим

$$d=\frac{(1+\alpha)k+(1+\beta)2l}{m}-1=\frac{n+l}{m}\,,$$

$$w_0=-\frac{2l}{m}g_0^{1+\alpha}\theta_0^{1+\beta}>0\,,$$

$$a_1=2\frac{k}{m}+\frac{l}{m}-1=\frac{k-1}{m}\,,$$

$$g_1=-\frac{l g_0^2 v_0}{m(k+l-m)}=\frac{l}{m}g_0^2 v_0<0\,,$$

$$b_1=\frac{k}{m}+\frac{2l}{m}-1=\frac{l-1}{m}\,,$$

$$v_1=-g_0\theta_0\frac{k+2l}{m(-1)}=\frac{n}{m}g_0\theta_0<0\,.$$

Определим показатели c_1 и d_1 и соответствующие им коэффициенты θ_1 и w_1. Для нахождения c_1 надо установить соотношения между показателями a_1+c, $a+c_1$ и $a+d-1$ в уравнении (2.5). Заметим, что $a_1+c=$ $=a+d-1$. Действительно, с помощью (3.3) и (I.4) находим

$$a_1+c=\frac{2k}{m}+\frac{l}{m}-1+\frac{2l}{m}=\frac{k}{m}+\frac{n+l}{m}-1=a+d-1.$$

Для установления соотношения с показателем $a+c_1$ рассмотрим различные случаи

1) $a_1+c>a+c_1$. Тогда из уравнения (2.5) следует

$$(mc+(1-\gamma)ma_1-n+\gamma k)g_1\theta_0-(1-\gamma)dg_0w_0=0.$$

Отсюда, учитывая (3.9), находим

$$m(a_1-a)g_1\theta_0=dg_0w_0<0,$$

что невозможно, так как $a_1-a<0,\ g_1<0,\ m\theta_0>0$.

2) $a_1+c<a+c_1$. Тогда из уравнения (2.5) следует

$$(mc_1+(1-\gamma)ma-n+\gamma k)g_0\theta_1=0,$$

что в силу $g_0\theta_1\neq 0$ противоречит (3.9).

Итак, необходимо $a_1+c=a+c_1=a+d-1$. Отсюда следует $a_1-a=c_1-c$, а из уравнения (2.6) следует $d_1=d+c_1-c=d+a_1-a$. Таким образом,

$$c_1=c+a_1-a=\frac{2l-1}{m},$$

$$d_1=\frac{n+l}{m}+a_1-a=\frac{n+l-1}{m}.$$

Отметим характерное для данного варианта равенство

$$a-a_1=b-b_1=c-c_1=d-d_1=\frac{1}{m}.$$

Коэффициент θ_1 определяется из уравнения (2.5)

$$(mc+(1-\gamma)ma_1-n+\gamma k)g_1\theta_0-(1-\gamma)dg_0w_0+$$
$$+(mc_1+(1-\gamma)ma-n+\gamma k)g_0\theta_1=0.$$

Отсюда получаем

$$(\gamma-1)g_1\theta_0-g_0\theta_1+(\gamma-1)dg_0w_0=0.$$

и находим

$$\theta_1=\frac{l}{m}(\gamma-1)g_0\theta_0\left(v_0-2\frac{n+l}{m}g_0^{\alpha}\theta_0^{\beta}\right)<0 .$$

Коэффициент w_1 определяется из уравнения (2.6)

$$w_1 = w_0\left((1+\alpha)\frac{g_1}{g_0}+\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{\theta_1}{\theta_0}\right). \tag{4.I}$$

Отметим, что формула (4.I) определяет w_1 всегда, когда $c_1-c = a_1-a$. Подставим в (4.I) значения показателей c и c_1 и коэффициентов g_1 и θ_1 , тогда получим

$$w_1=-2\frac{l^2}{m^2}g_0^{2+\alpha}\theta_0^{1+\beta}\Big(v_0(1+\alpha)+$$

$$+\frac{2l(1+\beta)-1}{2l}(\gamma-1)\left(v_0-2\frac{n+l}{m}g_0^{\alpha}\theta_0^{\beta}\right)\Big); \tag{4.2}$$

В разложении (2.2) все коэффициенты предполагаются отличными от нуля. Относительно w_1 можно сказать, что если $1+\alpha\geq 0$, то в силу отрицательности g_1 и θ_1 из (4.I) следует $w_1<0$. Если $1+\alpha<0$, то записав (4.2) в другой форме

$$w_1=-2\frac{l^2}{m^2}g_0^{2+\alpha}\theta_0^{1+\beta}\Big(v_0\left(1+\alpha+(\gamma-1)\frac{2l(1+\beta)-1}{2l}\right)-$$

$$-2(\gamma-1)\frac{n+l}{m}g_0^{\alpha}\theta_0^{\beta}\frac{2l(1+\beta)-1}{2l}\Big),$$

придем к следующему результату: $w_1\neq 0$, если

$$v_0\neq R=\frac{2(\gamma-1)\frac{n+l}{m}g_0^{\alpha}\theta_0^{\beta}\left(1+\beta-\frac{1}{2l}\right)}{1+\alpha+(\gamma-1)\left(1+\beta-\frac{1}{2l}\right)} . \tag{4.3}$$

Используя только что введенное обозначение R , более подробно распишем условие (4.3):

$$w_1 < 0 \text{ , если } 1+\alpha \geqslant -(\gamma-1)\left(1+\beta-\frac{1}{2l}\right) \quad \text{или если}$$

$$1+\alpha < -(\gamma-1)\left(1+\beta-\frac{1}{2l}\right) \quad \text{и} \quad v_0 < R \, ;$$

$$w_1 > 0 \text{ , если } 1+\alpha < -(\gamma-1)\left(1+\beta-\frac{1}{2l}\right) \quad \text{и} \quad v_0 > R \, .$$

Итак, чтобы коэффициент w_1 был полностью определен, надо наложить дополнительное условие на коэффициенты g_0, v_0, θ_0, именно, связать их соотношением (4.3) в том случае, когда α, β, γ, n удовлетворяют неравенству

$$1+\alpha < -(\gamma-1)\left(1+\beta-\frac{1}{2l}\right) . \tag{4.4}$$

Таким образом, получена первая группа асимптотик функций g, v, θ, w при $\xi \to \infty$, удовлетворяющая условиям поставленной задачи

$$\begin{aligned}
g &= g_0 \xi^{\frac{k}{m}} + \frac{l}{m} g_0^2 v_0 \xi^{\frac{k-1}{m}} + \ldots , \\
v &= v_0 \xi^{\frac{l}{m}} + \frac{n}{m} g_0 \theta_0 \xi^{\frac{l-1}{m}} + \ldots , \\
\theta &= \theta_0 \xi^{\frac{2l}{m}} + \frac{l}{m}(\gamma-1) g_0 \theta_0 \xi^{\frac{2l-1}{m}}\left(v_0 - 2\frac{n+l}{m} g_0^{\alpha} \theta_0^{\beta}\right) + \ldots , \\
w &= -\frac{2l}{m} g_0^{1+\alpha} \theta_0^{1+\beta} \xi^{\frac{n+l}{m}} - 2\frac{l^2}{m^2} g_0^{2+\alpha} \theta_0^{1+\beta} \times \\
&\times \left(v_0(1+\alpha) + (\gamma-1)\frac{2l(1+\beta)-1}{2l}\left(v_0 - 2\frac{n+l}{m} g_0^{\alpha}\theta_0^{\beta}\right)\right) \xi^{\frac{n+l-1}{m}} + \ldots
\end{aligned} \tag{4.5}$$

При этом должны выполняться условия $k<0$, $l<0$, $m>0$ (см.(1.5) и (3.2)). Разрешая их относительно α, β, n, найдем области изменения параметров α, β, n:

$$\alpha \leqslant 0 , \; \beta < \frac{1}{2} , \; \frac{1}{\beta-1} < n < \frac{1}{\alpha-1} ;$$

$$\alpha<0,\ \beta\geq\frac{1}{2},\ \frac{1+2\alpha-2\beta}{2\beta-\alpha-1}<n<\frac{1}{\alpha-1};$$

$$0<\alpha<\beta,\ \beta<\frac{1}{2},\ \frac{1}{\beta-1}<n<\frac{1+2\alpha-2\beta}{2\beta-\alpha-1}; \qquad (4.6)$$

$$0<\beta<\alpha,\ \beta<\frac{1}{2},\ \frac{1+2\alpha-2\beta}{2\beta-\alpha-1}<n<\frac{1}{\beta-1}.$$

Кроме того, должно выполняться условие (4.3) при соотношениях (4.4). Если разрешить (4.4) относительно α и n, то условие (4.3),(4.4) будет иметь вид:

$$v_0\neq g_0^{\alpha}\theta_0^{\beta}\,\frac{2(\gamma-1)\frac{n+l}{m}\left(1+\beta-\frac{1}{2l}\right)}{1+\alpha+(\gamma-1)\left(1+\beta-\frac{1}{2l}\right)} \qquad (4.7)$$

при

$$\alpha<-1-(\gamma-1)(1+\beta),\ n<\frac{1}{\alpha-1}+\frac{(\gamma-1)(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\alpha+(\gamma-1)(1+\beta))} \qquad (4.8)$$

Следовательно, определены области (4.6) существования асимптотик (4.5). При этом коэффициенты в разложениях (4.5) выражаются через три независимых величины g_0, v_0, θ_0, за исключением случая, когда параметры α, β, n из (4.6) удовлетворяют условиям (4.8), тогда коэффициенты g_0, v_0, θ_0 связаны между собой неравенством (4.7).

5. Вторая группа асимптотик.

Рассмотрим вариант, когда реализуются случаи С2 и ВI. Установим прежде, что в случае С2 $(c=d-1)$ из уравнений (2.5) и (2.6) следует равенство

$$c_1-c=a_1-a. \qquad (5.1)$$

Причем равенство (5.I) справедливо независимо от того, выполняется ли случай BI или B2. Для доказательства рассмотрим два случая.

I) Допустим, что $c_1 - c > a_1 - a$. Тогда из уравнения (2.6) следует

$$d_1 = d + c_1 - c, \qquad w_1 = w_0\left(\beta + \frac{c_1}{c}\right)\frac{\theta_1}{\theta_0}\,.$$

В силу $c = d - 1$ выполняются соотношения

$$a + d_1 - 1 = a + d + c_1 - c - 1 = a + c_1 > a_1 + c = a_1 + d - 1.$$

Учитывая их, из уравнения (2.5) находим

$$(mc_1 + (1-\gamma)ma - n + \gamma k)g_0\theta_1 - (1-\gamma)d_1 w_1 g_0 = 0.$$

Преобразуем это равенство с учетом соотношения (3.I0) и выражения для w_1

$$m(c_1 - c)\theta_1 + \frac{(1-\gamma)d w_0 \theta_1}{\theta_0} - \frac{(1-\gamma)d_1(\beta c + c_1)w_0\theta_1}{c\theta_0} = 0.$$

Отсюда получаем

$$(\gamma - 1)\frac{w_0}{\theta_0}\left(d - d_1\frac{\beta c + c_1}{c}\right) = m(c_1 - c) < 0,$$

что справедливо при

$$d < d_1\frac{\beta c + c_1}{c},$$

а это может быть выполнено лишь при

$\dfrac{\beta c + c_1}{c} < 1$, т.е. при $\beta c + c_1 - c > 0$.

Но это невозможно, так как $\beta c < 0$ и $c_1 - c < 0$.

2) Допустим, что $a_1-a > c_1-c$. Тогда из уравнения (2.6) следует

$$d_1 = d + a_1 - a, \qquad w_1 = w_0(1+\alpha)\frac{g_1}{g_0}.$$

При этом оказывается

$$a + d_1 - 1 = a_1 + d - 1 = a_1 + c.$$

Соответствующие коэффициенты в уравнении (2.5) связаны соотношением

$$(mc + (1-\gamma)ma_1 - n + \gamma k)g_1\theta_0 - (1-\gamma)dg_1 w_0 - (1-\gamma)d_1 g_0 w_1 = 0.$$

Преобразовав это равенство, учитывая соотношение (3.I0) и выражение для w_1 , найдем

$$(1+\alpha)d_1 w_0 = m(a_1 - a)\theta_0 < 0.$$

Но это невозможно, так как $w_0 > 0$, $d_1 < 0$ и $1+\alpha < 0$ (см.(3.I4)). Тем самым равенство (5.I) доказано.

Вариант со случаями С2 и ВI приводит к следующим выражениям для показателей и коэффициентов:

$$a = \frac{k}{m},\ b = \frac{l}{m},\ c = \frac{2l}{m} + \frac{1}{\beta m},\ d = c + 1 = \frac{2l+m}{m} + \frac{1}{\beta m};$$

g_0 и v_0 - не определены, θ_0 определяем из соотношения (3.I2)

$$\theta_0 = \left(\frac{1+2l\beta}{\beta m^2}(1+\beta(2l+m))(\gamma-1)g_0^{1+\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}}, \tag{5.2}$$

из (3.6) находим

$$w_0 = -\frac{1+2l\beta}{\beta m} g_0^{1+\alpha}\theta_0^{1+\beta}.$$

Чтобы обеспечить условие $d<0$, надо удовлетворить условие (3.14) (см.C2). Тогда будет $(2\ell+m)\beta+1<0$, т.е. $d<0$ и тем более $2\ell\beta+1<0$, т.е. $c<0$. Из (3.14) следует $1+\alpha<0$.

Отметим, что условие (3.7) (см.B1) равносильно требованию $b-b_1>0$. В данном варианте находим

$$b-b_1=\frac{\ell}{m}-\frac{k}{m}-\frac{2\ell}{m}-\frac{1}{\beta m}+1=\frac{1}{m}-\frac{1}{\beta m}=\frac{\beta-1}{\beta m}.$$

Таким образом, условие (3.7) равносильно требованию $\beta>1$.

Из (3.3),(3.4) и B1 находим

$$a_1=\frac{k-1}{m}, \qquad g_1=\frac{\ell}{m}g_0^2v_0<0,$$

$$b_1=\frac{\ell-1}{m}+\frac{1}{\beta m}, \quad v_1=-\frac{1+\beta n}{m(1-\beta)}g_0\theta_0<0.$$

Кстати, из (1.4) и (3.14) следует

$$1+\beta n=1+\beta(k+2\ell)<1+\beta(2\ell+m)<0.$$

Из равенства (5.1) следует

$$c_1=c+a_1-a=\frac{2\ell-1}{m}+\frac{1}{\beta m},$$

а из уравнения (2.6) благодаря (5.1) следует

$$d_1=d+c_1-c=\frac{2\ell+m-1}{m}+\frac{1}{\beta m};$$

коэффициент w_1 определяется формулой (4.1).

Отметим характерное для данного варианта соотношение:

$$a-a_1=c-c_1=d-d_1=\frac{1}{m}>\frac{1}{m}-\frac{1}{\beta m}=b-b_1.$$

Для показателей в уравнении (2.5) верно

$$a+c_1=a_1+c=a_1+d-1=a+d_1-1,$$

так что для коэффициентов находим

$$(mc+(1-\gamma)ma_1-n+\gamma k)g_1\theta_0-(1-\gamma)dg_1w_0+$$

$$+(mc_1+(1-\gamma)ma-n+\gamma k)g_0\theta_1-(1-\gamma)d_1g_0w_1=0.$$

Далее, используя (3.I0) и (4.I)

$$(\gamma-1)g_1\theta_0-g_0\theta_1+(1-\gamma)dg_0w_0\frac{\theta_1}{\theta_0}-$$

$$-(1-\gamma)d_1g_0w_0\left(\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{\theta_1}{\theta_0}+(1+\alpha)\frac{g_1}{g_0}\right)=0.$$

Если воспользоваться соотношением между θ_0 и w_0 (3.II), сгруппировать члены в предыдущем равенстве, то найдем

$$g_1\theta_0\left(\beta(\gamma-1)-(1+\alpha)\frac{d_1}{d}\right)=g_0\theta_1\left(\beta-1+\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{d_1}{d}\right).$$

Отсюда определяется коэффициент θ_1:

$$\theta_1=\frac{l}{m}g_0v_0\theta_0\,\frac{d\beta(\gamma-1)-(1+\alpha)d_1}{d(\beta-1)+(\beta+\frac{c_1}{c})d_1}<0. \tag{5.3}$$

Подставим в (4.I) значения w_0, g_1, θ_1

$$w_1=-\frac{l(1+2l\beta)}{\beta m^2}g_0^{2+\alpha}v_0\theta_0^{1+\beta}\Big(1+\alpha+ \tag{5.4}$$

$$+\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{d\beta(\gamma-1)-(1+\alpha)d_1}{d(\beta-1)+(\beta+\frac{c_1}{c})d_1}\Big).$$

Отсюда следует, что $w_1\neq 0$, если

$$1+\alpha\neq S=-\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{d\beta(\gamma-1)-(1+\alpha)d_1}{d(\beta-1)+(\beta+\frac{c_1}{c})d_1}. \tag{5.5}$$

Отметим, что $w_1<0$ при $1+\alpha>S$ и $w_1>0$

при $1+\alpha < S$.

Чтобы не загромождать изложение, мы не подставляем в (5.3) и (5.4) выражение для коэффициента θ_0 (5.2) и значения показателей c, d, c_1, d_1.

Таким образом, получена вторая группа асимптотик функций g, v, θ, w в окрестности точки $\xi = \infty$.

$$
\begin{aligned}
g &= g_0 \xi^{\frac{k}{m}} + \frac{l}{m} g_0^2 v_0 \xi^{\frac{k-1}{m}} + \dots, \\
v &= v_0 \xi^{\frac{l}{m}} - \frac{1+\beta n}{m(1-\beta)} g_0 \theta_0 \xi^{\frac{l-1}{m}+\frac{1}{\beta m}} + \dots, \\
\theta &= \left(\frac{1+2l\beta}{\beta m^2}(1+\beta(2l+m))(\gamma-1) g_0^{1+\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{2l}{m}+\frac{1}{\beta m}} + \\
&\quad + \theta_1 \xi^{\frac{2l-1}{m}+\frac{1}{\beta m}} + \dots, \\
w &= -\frac{1+2l\beta}{\beta m} g_0^{1+\alpha} \theta_0^{1+\beta} \xi^{\frac{2l+m}{m}+\frac{1}{\beta m}} + w_1 \xi^{\frac{2l+m-1}{m}+\frac{1}{\beta m}} + \dots,
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

θ_1 и w_1 определены формулами (5.3) и (5.4).

При этом должны выполняться кроме условий $k<0$, $l<0$, $m>0$ еще условия (3.7), (3.14) и (5.5), т.е.

$$\beta>1, \ (2+\beta)m<(1+\alpha)k, \ 1+\alpha<0, \ 1+\alpha \neq S.$$

Необходимые условия существования асимптотик (5.6) получаются в результате решения системы указанных неравенств относительно параметров α, β, n:

$$
\begin{gathered}
1+\alpha<0, \quad 1+\alpha \neq S, \quad \beta>1, \\
\frac{1+2\alpha-2\beta}{2\beta-\alpha-1} < n < \frac{2\alpha\beta+2\alpha-3\beta-2\beta^2}{\beta(2\beta-3\alpha+1)}.
\end{gathered}
\tag{5.7}
$$

З а м е ч а н и е 4. Коэффициенты в асимптотиках (5.6) выражаются через две независимых величины g_0 и v_0.

6. Третья группа асимптотик.

Рассмотрим вариант, когда реализуются случаи С2 и В2. Тогда

$$a=\frac{k}{m}, \quad b=a+c-1=\frac{l-1}{m}+\frac{1}{\beta m},$$

$$c=d-1=\frac{2l}{m}+\frac{1}{\beta m}, \quad d=c+1=\frac{2l+m}{m}+\frac{1}{\beta m};$$

должны выполняться условия (3.8) и (3.14). Условие $b<0$ будет выполнено, если выполняется неравенство

$$(l-1)\beta+1<0. \tag{6.1}$$

Справедливость неравенств $c<0$ и $d<0$ следует из условия (3.14), кстати из (3.14) следует $(2l+m)\beta+1<0$ (см.(3.13)) и тем более $1+\beta n<0$.

Условие (3.8) приводит к неравенствам

$$b-\frac{l}{m}=\frac{1-\beta}{\beta m}>0, \quad \beta<1.$$

Следовательно, условие (3.8) равносильно требованию $\beta<1$. Далее, из (3.3),(3.4) и (3.6) находим

$$a_1=\frac{k-2}{m}+\frac{1}{\beta m},$$

$$a-a_1=\frac{2\beta-1}{\beta m}>0 \Longrightarrow \beta>\frac{1}{2},$$

$$g_1=-g_0^2 v_0\frac{1+\beta(l-1)}{m(1-2\beta)}<0,$$

$$w_0=-\frac{1+2l\beta}{\beta m}g_0^{1+\alpha}\theta_0^{1+\beta}>0.$$

Таким образом, параметр β изменяется в пределах

$$\frac{1}{2} < \beta < 1 . \tag{6.2}$$

Случай B2 позволяет определить коэффициент v_0:

$$v_0 = -g_0\theta_0 \frac{1+\beta n}{m(1-\beta)} > 0 , \tag{6.3}$$

а из (3.I2) определяется коэффициент θ_0, причем задается он формулой (5.2). Последнее следует из совпадения показателей c и d для вариантов C2,BI и C2,B2. Неопределенным, как и в двух предыдущих вариантах, является коэффициент g_0.

Из равенства (5.I) следует

$$c_1 = c + a_1 - a = \frac{2(l-1)}{m} + \frac{2}{\beta m} ,$$

а также следует $a + c_1 - 1 = a_1 + c - 1$. В связи с этим в уравнении (2.4) должно быть

$$b_1 = a + c_1 - 1 = \frac{l-3}{m} + \frac{2}{\beta m} .$$

Для коэффициента v_1 из уравнения (2.4) получается соотношение

$$v_1(mb_1 - l) + (a + c_1)(g_0\theta_1 + g_1\theta_0) = 0. \tag{6.4}$$

Из уравнения (2.6), учитывая (5.I), находим показатель

$$d_1 = d + c_1 - c = \frac{2l+m-2}{m} + \frac{2}{\beta m}$$

и коэффициент w_1, который определяется формулой (4.I).

Отметим характерное для данного случая равенство

$$a - a_1 = b - b_1 = c - c_1 = d - d_1 = \frac{2}{m} - \frac{1}{\beta m} , \tag{6.5}$$

причем для β из (6.2) оказывается

$$0<\frac{2}{m}-\frac{1}{\beta m}<\frac{1}{m}.$$

Благодаря соотношению (6.5) из уравнения (2.5) найдем

$$(mc+(1-\gamma)ma_1-n+\gamma k)g_1\theta_0-(1-\gamma)dg_1w_0+$$
$$+(mc_1+(1-\gamma)ma-n+\gamma k)g_0\theta_1-(1-\gamma)d_1g_0w_1=0.$$

Подставим сюда значения некоторых показателей и выражение для коэффициента w_1

$$g_1\theta_0\left(\frac{1}{\beta}+(1-\gamma)\frac{1-2\beta}{\beta}\right)+g_0\theta_1\frac{2-2\beta}{\beta}-$$
$$-(1-\gamma)w_0\left(dg_1+d_1\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{g_0\theta_1}{\theta_0}+d_1(1+\alpha)g_1\right)=0.$$

Воспользуемся соотношением (3.II) и сгруппируем члены в предыдущем равенстве

$$g_0\theta_1\left(\frac{2-2\beta}{\beta}-\frac{1}{\beta}\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{d_1}{d}\right)+g_1\theta_0\left((1-\gamma)\frac{1-2\beta}{\beta}-\frac{1}{\beta}(1+\alpha)\frac{d_1}{d}\right)=0.$$

Отсюда находим

$$\theta_1=-\frac{g_1\theta_0}{g_0}\;\frac{(\gamma-1)(2\beta-1)-(1+\alpha)\frac{d_1}{d}}{2-2\beta-\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{d_1}{d}}. \qquad (6.6)$$

Исследуем знак знаменателя в (6.6), используя (6.5),

$$2-2\beta-\left(\beta+1+\frac{\frac{1}{\beta m}-\frac{2}{m}}{c}\right)\left(1+\frac{\frac{1}{\beta m}-\frac{2}{m}}{d}\right)=$$

$$=1-3\beta-\frac{1-2\beta}{md}-\frac{1-2\beta}{\beta mcd}\left(c+d+\frac{1-2\beta}{\beta m}\right)<0.$$

Следовательно, $\theta_1 < 0$.

Из (6.4), учитывая $g_1 < 0$ и $\theta_1 < 0$, следует

$$m b_1 - l \neq 0 \implies \beta \neq \frac{2}{3}. \tag{6.7}$$

Таким образом, из области (6.2) изменения параметра β надо исключить точку $\beta = \frac{2}{3}$. Тогда из (6.4) находим

$$v_1 = \frac{\beta(2-n)-2}{m(2-3\beta)}\left(g_0\theta_1 + g_1\theta_0\right). \tag{6.8}$$

При этом $v_1 < 0$, если $m b_1 - l > 0$, т.е. $\beta < \frac{2}{3}$, $v_1 > 0$, если $m b_1 - l < 0$, т.е. $\beta > \frac{2}{3}$.

Подставим в (4.I) выражение (6.6) и найдем

$$w_1 = w_0 \frac{g_1}{g_0}\left(1+\alpha - \left(\beta + \frac{c_1}{c}\right)\frac{(\gamma-1)(2\beta-1)-(1+\alpha)\frac{d_1}{d}}{2-2\beta-\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{d_1}{d}}\right). \tag{6.9}$$

Отсюда следует, что $w_1 \neq 0$, если

$$1+\alpha \neq T = \left(\beta + \frac{c_1}{c}\right)\frac{(\gamma-1)(2\beta-1)-(1+\alpha)\frac{d_1}{d}}{2-2\beta-\left(\beta+\frac{c_1}{c}\right)\frac{d_1}{d}}. \tag{6.10}$$

Отметим, что $w_1 < 0$ при $1+\alpha > T$ и $w_1 > 0$ при $1+\alpha < T$.

Таким образом, получена третья группа асимптотик функций g, v, θ, w в окрестности точки $\xi = \infty$.

$$g = g_0 \xi^{\frac{k}{m}} - g_0^2 v_0 \frac{1+\beta(l-1)}{m(1-2\beta)} \xi^{\frac{k-2}{m}+\frac{1}{\beta m}} + \ldots,$$

$$v = g_0\theta_0 \frac{1+\beta n}{m(\beta-1)} \xi^{\frac{l-1}{m}+\frac{1}{\beta m}} + v_1 \xi^{\frac{l-3}{m}+\frac{2}{\beta m}} + \ldots, \tag{6.11}$$

$$\theta = \left(\frac{1+2l\beta}{\beta m^2}\left(1+\beta(2l+m)\right)(\gamma-1) g_0^{1+\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{2l}{m}+\frac{1}{\beta m}} +$$

$$+\theta_1 \xi^{\frac{2(\ell-1)}{m}+\frac{2}{\beta m}} + \ldots ,$$

$$w = -\frac{1+2\ell\beta}{\beta m} g_0^{1+\alpha} \theta_0^{1+\beta} \xi^{\frac{2\ell+m}{m}+\frac{1}{\beta m}} +$$

$$+ w_1 \xi^{\frac{2\ell+m-2}{m}+\frac{2}{\beta m}} + \ldots ,$$

$v_0, \theta_0, v_1, \theta_1, w_1$ определяются формулами (6.3), (5.2), (6.8), (6.6), (6.9).

При этом должны выполняться кроме условий $k < 0$, $\ell < 0$, $m > 0$ еще условия (3.I4), (6.I), (6.2), (6.7), (6.I0), т.е.

$$(2+\beta)m < (1+\alpha)k, \quad 1+\alpha < 0, \quad 1+\alpha \neq T,$$

$$(\ell-1)\beta + 1 < 0, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1, \quad \beta \neq \frac{2}{3}.$$

Необходимые условия существования асимптотик (6.II) получаются в результате решения системы указанных неравенств относительно параметров α, β, n:

$$1+\alpha < 0, \quad 1+\alpha \neq T, \quad \frac{1}{2} < \beta < 1, \quad \beta \neq \frac{2}{3},$$

$$\frac{1+2\alpha-2\beta}{2\beta-\alpha-1} < n < \frac{2\alpha\beta+2\alpha-3\beta-2\beta^2}{\beta(2\beta-3\alpha+1)}. \tag{6.I2}$$

З а м е ч а н и е 5. Коэффициенты в асимптотиках (6.II) выражаются через одну независимую величину g_0.

7. Заключение.

Для задачи (I.I)-(I.2) доказано существование асимптотик на бесконечности. Построены три группы асимптотик (4.5), (5.6), (6.II) и определены области их существования, соответственно (4.6), (5.7), (6.I2). Области существования асимптотик второй и третьей групп являются частями области существования первой группы асимптотик, между собой же они не имеют общих точек.

Построение асимптотик является первым шагом в исследовании исходной задачи. В частности, оно позволяет определить необходимые условия существования решений задачи в зависимости от параметров α, β, n . Полученные асимптотики позволяют также провести анализ некоторых физических свойств решений исходной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. - Докл.АН СССР, 1975, т.233, № 6, с.1344.
2. Змитренко Н.В., Курдюмов С.П. N - и S -режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. - ПМТФ, 1977, № 1, с.3-23.
3. Ануфриева М.А., Демидов М.А., Михайлов А.П., Степанова В.В. Режимы с обострением в задачах газовой динамики. - В кн.: Математ.модели, аналитические и численные методы в теории переноса. - Минск. Изд.ин-та тепло- и массообмена АН БССР, 1982, с.19-25.
4. Ануфриева М.А., Михайлов А.П. Локализация газодинамических процессов при изоэнтропическом сжатии газа в режиме с обострением. - Дифф.уравнения, 1983, т.19, № 3, с.483
5. Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Локализация тепла в нелинейных средах. - Дифф. уравнения, 1981, т.17, № 10, с.1826-1841.
6. Бусурина Л.Н., Волосевич П.П., Курдюмов С.П., Крус В.П. Решение одномерной плоской задачи о движении поршня в идеальном теплопроводном газе. - ПМТФ, 1963, № 1, с. 159.
7. Волосевич П.П., Леванов Е.И. Автомодельные решения уравнений газовой динамики с учетом нелинейной теплопроводности. Курс лекций. - Тбилиси: ТГУ, 1977. - 78 с.

Поступила 15.10.84

ОГЛАВЛЕНИЕ

НЕЛИНЕЙНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сборник научных трудов

Рецензенты: Л.Э.Рейзинь, зав.лаб.мат. Института физики АН ЛатвССР;
Е.Ф.Царьков, зав.каф. спецкурсов высшей мат. РПИ им. А.Я.Пельше;
Н.И.Васильев, зам.дир. по науч.работе ВЦ ЛГУ им. П.Стучки

Редакторы: Ю.Клоков, Р.Павлова
Технический редактор Е.Сундеева
Корректор Н.Цульнова

Подписано к печати 31.01.85. ЯТ 09012. Ф/б 60х84/16.
Бум.№1. 10,5 физ.печ.л. 9,8 усл.печ.л. 7,6 уч.-изд.л.
Тираж 400 экз. Зак.№ 144 Цена 1 р. 20 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, 226050 Рига, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 519.927

Колосов А.И. О ВЕТВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.3-14.

Рассматривается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка, правая часть которого зависит от вещественного параметра β. Решение задачи ищется на множестве функций, производные которых, начиная с некоторой, сохраняют знак.

Требование, чтобы правая часть дифференциального уравнения удовлетворяла определенным условиям однородности, допускает преобразование задачи к эквивалентной системе интегральных уравнений, не зависящей явным образом от параметра β.

Исследование полученной системы интегральных уравнений позволяет установить факт ветвления решений исходной краевой задачи.
Библиогр.6 назв.

УДК 517.5

Звягинцев А.И. О ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НОРМ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.15-28.

Рассматриваются экстремальные задачи

$$\inf\{\|f\|_{C(I)} : f\in W^n_\infty(I),\ \|f^{(k)}\|_{C(I)}=M_k,\ \|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)}=M_n\},$$

$$\sup\{\|f^{(k)}\|_{C(I)} : f\in W^n_\infty(I),\ \|f\|_{C(I)}=M_0,\ \|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)}=M_n\},$$

$$\inf\{\|f^{(n)}\|_{L_\infty(I)} : f\in W^n_\infty(I),\ \|f\|_{C(I)}=M_0,\ \|f^{(k)}\|_{C(I)}=M_k\},$$

где n - натуральное число, $0<k<n$, I - конечный отрезок числовой прямой, $W^n_\infty(I)$ - пространство Соболева, M_0, M_k, M_n - заданные неотрицательные числа. Приводятся основные свойства этих задач, доказывается их эквивалентность между собой, а также устанавливается их связь с задачей А.Н.Колмогорова о нормах функции и ее производных. Библиогр.3 назв.

УДК 517.927

Лепин Л.А. РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЬЮ. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.29-34.

Приведены условия разрешимости краевой задачи

$$x'' + g(t)x' = f(t,x,x'),$$

$$x'(0) = 0, \quad H(x(\tau), x'(\tau)) = h,$$

где функция $f: [0,\tau] \times R^2 \to R$ удовлетворяет условию Каратеодори, функция $H: R^2 \to R$ непрерывна и не убывает по второму аргументу, а функция $g: [0,\tau] \to (-\infty, 0]$. несуммируема в нуле.
Библиогр.4 назв.

УДК 517.927.4

Цепитис Я.В. НИЖНИЕ И ВЕРХНИЕ ФУНКЦИИ И РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.35-42.

Для краевой задачи

$$x'' = h(t,x,x'), \quad x'(0) = x(1) = 0,$$

при предположении, что $n \in \{1,2,\dots\}$ и для любого $\delta \in (0,1]$, $h \in Car([\delta,1] \times R^{2n}, R^n)$ сформулированы условия разрешимости в терминах нижних, верхних функций и ограниченности производных решений в окрестности точки $t=0$. Библиогр.5 назв.

УДК 517.927

Гризанс Г.П. ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1985, с.43-48.

Рассматривается краевая задача

$$x'' + \frac{1-p+q}{t}x' - \frac{pq}{t^2}x = f(t,x,x'),\ x(0)=0,\ x(\tau)=b,$$

где $p>0,\ q\geq 0,\ b\in R,\ f\in C((0,\tau]\times R^2)$.

Для некоторых частных случаев функции f построены верхние и нижние функции рассматриваемой краевой задачи. Рис. 1, библиогр.6 назв.

УДК 517.927.25

Адьютов М.М., Кузьмишкина Р.В. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.49-56.

Для задачи

$$\begin{cases} x'' = x^{p_1} - A_1 x^{q_1} y^{r_2}, \\ y'' = y^{p_2} - A_2 y^{q_2} x^{r_1}, \end{cases}$$

$$A_i>0,\ r_i>0,\ 1>p_i>0,\ 1\geq q_i\geq 0,\ (i=1,2),$$

$$x'(0)=x(t_1)=x'(t_1)=y'(0)=y(t_2)=y'(t_2)=0,$$

$$x(t)>0 \text{ для } t\in[0,t_1) \text{ и } x(t)=0 \text{ для } t\in[t_1,\infty),$$
$$y(t)>0 \text{ для } t\in[0,t_2) \text{ и } y(t)=0 \text{ для } t\in[t_2,\infty),$$

t_1 и t_2 - собственные значения (могут быть как конечными, так и бесконечными), которая встречается при изучении диссипативных структур в двухкомпонентных средах, предлагается простой численный алгоритм. Алгоритм основывается на доказанных в настоящей работе свойствах решения задачи. Библиогр.4 назв.

УДК 519.31

Садырбаев Ф.Ж. ОБ ЭКСТРЕМАЛЯХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В СЛУЧАЕ МЕДЛЕННОГО РОСТА ИНТЕГРАНТА. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с,57-62.

Рассматриваются краевые задачи одномерного вариационного исчисления в случае медленного роста интегранта. В этом случае соответствующее уравнение Эйлера может не удовлетворять условиям Бернштейна-Нагумо. В терминах интегранта приводятся условия существования экстремалей. Библиогр. 3 назв.

УДК 517.929

Драхлин М.Е. О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.63-71.

Приведены условия существования решения краевой задачи для нелинейного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа. В основу доказательств положены W-метод Н.В.Азбелева и ранее изученные автором свойства внутренней суперпозиции.
Библиогр.8 назв.

УДК 517.927

Беспалова С.А. ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ 4-ГО ПОРЯДКА. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.72-83.

Для краевой задачи

$$x'' = -\Phi(x,y)$$
$$y'' = \Phi(x,y)$$
$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1,$$
$$y(0) = y_0, \quad y(1) = y_1,$$

где $\Phi(x,y)$ - нелинейная функция, приводится метод определения области существования решения, основанный на специфике ее системы и теории верхних и нижних функций. Применение метода иллюстрируется на конкретном примере. Рис. 4, библиогр.10 назв.

УДК 517.927

Виржбицкий Я.В. ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ФИКСИРОВАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.84-92.

Изучается краевая задача

$$x'' = f(t, x, x')$$
$$G(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = g,$$
$$H(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h,$$

где $f \in Car(I \times R^2, R)$, $G, H \in C(R^2 \times \bar{R}^2, \bar{R})$. Функция G предполагается фиксированной. При предположении обобщенной разрешимости краевой задачи исследованы свойства функций G и H . Показано, что выявленные свойства гарантируют разрешимость краевой задачи. Существенно задействован аппарат нижних и верхних функций. Библиогр.4 назв.

УДК 519.21

Ионин Л.Л. ПРИМЕНЕНИЕ 2-ГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П. Стучки, 1985, с.93-102.

В статье исследуется асимптотическая устойчивость по вероятности тривиального решения одного класса нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со случайными параметрами. Строится функция Ляпунова и находятся достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности. Результат хорош тем, что доведен до соотношений между коэффициентами. В конце статьи приведен пример. Библиогр.3 назв.

УДК 517.9:533.6

Горобец Г.Г. МЕТОДЫ ПОИСКА АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.103-112.

На двух примерах демонстрируется методика численного решения на ЭВМ краевых задач, возникающих при исследовании ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости по трубам с пористыми стенками. Рис.2, библиогр.15 назв.

УДК 517.927

Горленко Е.И. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.113-122.

Для краевых задач

$$y^{IV} = -\psi(t,y,y',y'',y''') \qquad \forall t \in I$$
$$y(0)=0 \qquad y(\tau)=0$$
$$y'(0)=0 \qquad y'(\tau)=0$$
$$I=[0,\tau], \ \tau>0, \ \psi \in C(I \times R^4)$$

и

$$x^{IV} = -\varphi(t,x) \qquad \forall t \in I$$
$$x(0)=a_0 \qquad x(\tau)=b_0$$
$$x'(0)=a_1 \qquad x'(\tau)=b_1$$
$$I=[0,\tau], \ \tau>0, \ a_0,a_1,b_0,b_1 \in R, \ \varphi \in C(I \times R)$$

приводятся некоторые теоремы существования и единственности решений. Применение теорем демонстрируется на конкретных примерах. Библиогр.3 назв.

УДК 517.927

Сапырбаев Ф.Ж., Федорова Г.И. О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭМДЕНА-ФАУЛЕРА. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.123-132.

Для краевой задачи

$$(f(x)y')' + g(x)y\psi(y^2) = 0$$
$$y(a) = y(b) = 0$$

где f, g, ψ - непрерывные функции с неотрицательными значениями, доказаны теоремы существования решения, имеющего заданное число нулей в (a,b). Используется вариационный метод З.Нехари. Библиогр.2 назв.

УШ

УДК 517.927.4

Гудков В.В., Михайлов А.П., Степанова В.В. ОБ АСИМПТОТИКАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ. - В кн.: Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с.133-156.

Рассмотрена нелинейная краевая задача, связанная с задачей о сжатии идеального теплопроводного газа поршнем, давление на котором растет в режиме с обострением:

$$m\xi g' + g^2 v' = kg, \qquad 0 \le \xi \le \xi_\varphi,$$

$$\theta g' + m\xi v' + g\theta' = lv,$$

$$(1-\gamma)m\xi\theta g' + m\xi g\theta' - (1-\gamma)gw' = (n-\gamma k)\theta g,$$

$$\theta' = -w\theta^{-\beta}g^{-(1+\alpha)},$$

$$g(\xi_\varphi) = v(\xi_\varphi) = w(\xi_\varphi) = 0, \quad \pi(\xi_\varphi) = g(\xi_\varphi)\theta(\xi_\varphi) = 0.$$

Здесь g, v, θ, w - неизвестные неотрицательные функции; $k<0$, $l<0$, $m \neq 0$, $n<0$, $\gamma>1$, $\beta>0$, α - действительные параметры. Построены три группы асимптотик функций g, v, θ, w при $\xi \to \infty$, указаны области существования асимптотик в пространстве параметров α, β, n. Библиогр. 7 назв.

УДК 517.927.4

[illegible] — В сб.: [illegible] задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. [illegible] им. П.Стучки, 1986, с.153–156.

Рассмотрена нелинейная краевая задача, [illegible] с [illegible] режиме с обострением.

$$m\xi g' + g^2 v = kg, \qquad 0<\xi<\xi_\varphi,$$

$$\theta g' + m\xi v' + g\theta = \delta v,$$

$$(1-\gamma)m\xi\theta g' - m\xi g\theta' + (1-\gamma)g\theta v' = (1-\gamma)\ldots,$$

$$\theta' = -w\theta^{-\beta} g^{(1+\alpha)},$$

$$g(\xi_\varphi) = v(\xi_\varphi) = w(\xi_\varphi) = \theta_\varphi \ldots$$

Здесь g, v, θ, w — неизвестные неотрицательные функции, $k<0$, $\gamma<2$, $m\neq 0$, $\alpha<0$, $\gamma>1$, $\beta>0$ [illegible] — постоянные параметры. Построены три группы асимптотик функций g, v, θ, w при $\xi\to-\infty$, указаны области существования асимптотик в пространстве параметров α, β, γ. Библиогр. 7 назв.

80574

473

1 р. 20 к.