КАФЕДРА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра электродинамики и механики сплошных сред

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(межвузовский)

Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 1985

УДК 517,518,534,537,538,539,621

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

МЕТОДЫ КОМПЛЕКСНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств: Сборник научных трудов (межвузовский)/ Под ред. Ю.Я.Микельсона. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985. -

Предлагаемый сборник содержит 14 научных статей, посвященных актуальным научно-техническим проблемам. Публикуются результаты исследований последних лет и обобщается опыт комплексного исследования различных электродинамических устройств: индукционных и центробежных МГД-насосов, металлургических установок и других МГД-устройств, а также конструкций, состоящих из оболочек, при динамическом нагружении, и др.

Сборник научных трудов предназначен для специалистов, работающих в области электродинамики и механики сплошных сред, прикладной математики, а также для научно-технических работников, аспирантов и студентов, занимающихся вопросами расчета, моделирования и исследования разнообразных электродинамических устройств.

Рис. 43, табл. 3, библиогр. 63 назв.

Э $\dfrac{20305-064у}{М\ 812(11)-85}$ 10.85.1703040000

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им.П.Стучки, с.3-14

УДК 538.4:621.365

Л.Л.Булыгин
ЛГУ им. П.Стучки

РАСЧЁТ ЭМ-ПОЛЕЙ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МГД-УСТАНОВКАХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

При решении ряда научно-технических задач в металлургии возникает необходимость расчёта электромагнитных полей. Численные методики, основанные на использовании метода конечных разностей (МКР) [I], мало приспособлены для моделирования ЭМ полей в проводниках сложной формы, однако именно такие задачи представляют наибольший интерес. К таким задачам относятся определения формы жидкого металла, сжатого от стенок ЭМ силами (индукционные тигельные печи, кристаллизаторы, индукционные печи с холодным тиглем) и другие задачи со свободной поверхностью в ЭМ поле. Потенциально большими возможностями обладают методы конечных элементов (МКЭ) и граничных элементов (МГЭ), однако их использование сильно зависит от реализации МКЭ на ЭВМ, математического обеспечения подготовки исходных данных и обработки численных результатов.

В настоящей работе изложены основные концепции и методика расчёта квазистационарных ЭМ полей МКЭ в МГД-установках с осевой симметрией - индукционных электропечах (ИЭП), кристаллизаторах и др.

I. Расчёт электромагнитного поля

Электромагнитное поле в ИЭП описывается с помощью векторного потенциала [I]:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \hat{A}}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial z^2}-\frac{\hat{A}}{r^2}=i\hat{\omega}\hat{A}-\hat{j}_{ex}, \qquad (I)$$

где

$\hat{A}(r,z)=\hat{A}_R(r,z)+i\hat{A}_I(r,z)$ - векторный потенциал;

$\hat{j}_{ex}=\hat{j}_{exR}+j_{exI}\,i$ - плотность внешнего тока;

i - мнимая единица;

безразмерные величины введены следующим образом:

$\hat{\omega}=\mu\sigma\omega r_0^2$ - безразмерная частота;

$A_0=B_0 r_0$ - характерное значение векторного потенциала;

$B_0=I_0\mu_0$ - характерное значение магнитной индукции;

I_0 - настил тока в индукторе;

r_0 - радиус проводящей области.

Ток в индукторе задаётся отдельными витками:

$$\hat{j}_{ex}=I_K\,\delta(r-r_K)\,\delta(z-z_K)/j_0, \qquad (2)$$

где I_K - ток в K-том витке индуктора;

r_K, z_K - координаты K-того витка индуктора;

$\delta(r-r_K)$ - дельта функция;

$j_0=\dfrac{I_0}{r_0}$ - характерная плотность тока.

Ток в отдельном витке имеет значение:

$$I_K=\frac{H I_0}{n}, \qquad (3)$$

где H - высота индуктора;

n - число витков.

Граничные условия для векторного потенциала следующие:

$$\hat{A}\big|_{r=0}=0, \qquad (4)$$

$$\hat{A}\big|_{r,z\to\infty}=0.$$

Первое из них аппроксимируется точно, второе выполняется на некотором расстоянии, обеспечивающем допустимую точность. При наличии идеального ферромагнитного экрана в области, на границе экрана задаётся граничное условие:

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial n}\Big|_S = 0, \tag{5}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная в направлении внешней нормали, S - поверхность.

Уравнения (I)+(4) решаются МКЭ с использованием линейных треугольных элементов [2]. Применение стандартной техники МКЭ приводит к уравнениям для одного элемента:

$$\hat{A}_k\left[\frac{\bar{r}}{4\Delta}(b_m b_k + a_m a_k) + \frac{d_{km}}{\bar{r}} + i\hat{\omega} r_n e_{knm}\right] = r_i L_m(r_i, z_i) I_i, \tag{6}$$

где

$a_k = r_m - r_l$,

$b_k = z_l - z_m$,

$c_k = r_l z_m - r_m z_l$; $k, m, l = 1, 2, 3$ с циклической заменой,

$\Delta = (b_1 a_2 - b_2 a_1)/2$ - площадь элемента,

$L_m = (b_m r + a_m z + c_m)/2\Delta$ - L - координата элемента,

$\bar{r} = (r_k + r_l + r_m)/3$ - средний радиус элемента,

$$d_{km} = \frac{\Delta}{12}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e_{knm} = \begin{cases} \frac{\Delta}{10}, & \text{если все индексы одинаковы,} \\ \frac{\Delta}{30}, & \text{если два индекса одинаковы,} \\ \frac{\Delta}{60}, & \text{если все индексы различны.} \end{cases}$$

r_i, z_i - координаты i -того витка индуктора,

I_i - ток в i-том витке индуктора,

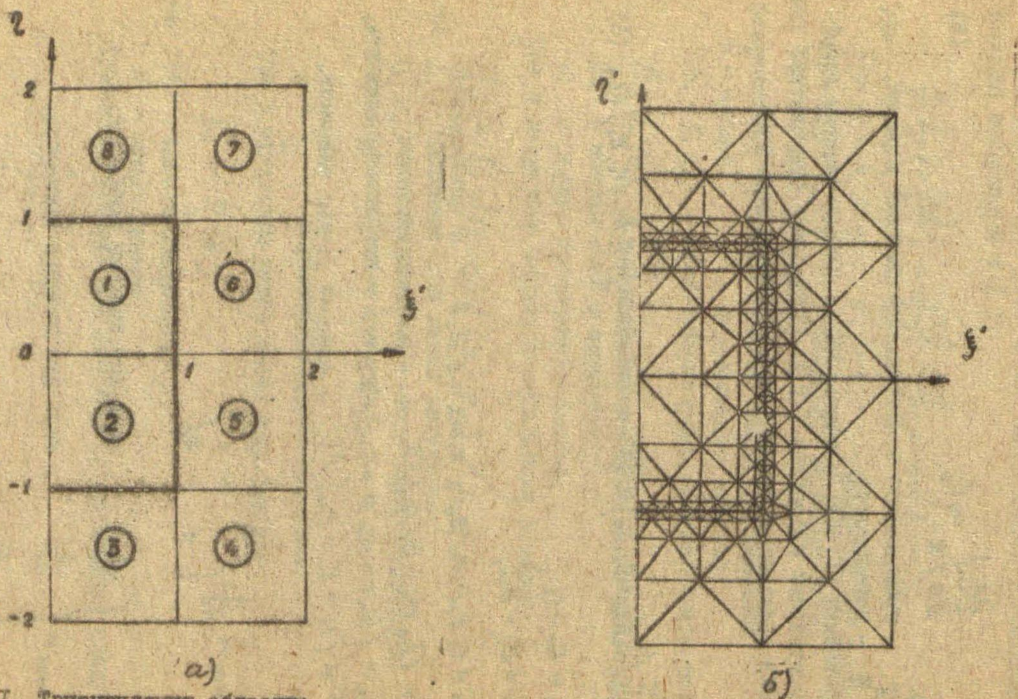


Рис. I. Триангуляция области:

а) Размещение проводящих зон в области I , 2 - металл, 3 - 8 - вакуум;

б) Триангуляция в координатах ξ', η'.

по индексу l суммирование производится по числу витков, попавших в рассматриваемый элемент.

Система уравнений для всей области получается суммированием соответствующих матриц элементов. Уравнения решаются методом релаксации.

2. Триангуляция области

При выборе алгоритма задания треугольной конечно-элементной сетки основными критериями были выбраны следующие:

I) алгоритм должен задавать сетку автоматически при минимальном числе входных параметров. Обычно решение задач МКЭ требует задания большого количества информации для генерации сетки, что зачастую является источником ошибок;

2) сетка должна сгущаться вблизи поверхности проводящей области, чтобы правильно описывать явления, связанные со скин-эффектом. Это позволяет получать решение эффективно, с уменьшенными затратами памяти и времени ЭВМ. Сгущение сетки также должно удовлетворять следующим свойствам:

а) мера сгущения сетки должна быть достаточно простой, чтобы можно было легко изменять параметры сетки;

б) шаг сетки не должен сильно различаться в различных направлениях для сохранения точности решения;

3) поскольку форма проводящей области может иметь различную геометрию, то алгоритм триангуляции должен описывать эти границы, при этом должен выполняться пункт 2.

Эти весьма противоречивые требования сильно усложняют задачу задания сетки. Последняя была решена следующим способом. Область, в которой решается задача нахождения электромагнитного поля, представляется в нормализованных координатах ξ' и η'. Так проводящая область всегда локализована в зоне, где $0 \leq \xi' \leq I$; $-I \leq \eta' \leq I$ (рис. I.а). Для такой прямоугольной области строится треугольная сетка, удовлетворяющая требованиям I) и 2) (рис. I.б). Для такой сетки шаг по координате ξ' в середине проводящей области ($\eta' = 0$) уменьшается по геометрической прогрессии с параметром 2, т.е. каждый следующий шаг в два раза меньше предыдущего. Все проводящей области происходит такое нарастание шага. Такая сетка позволяет:

I) априори учитывать информацию о решении при построении сетки;

2) значительно экономить ресурсы ЭВМ, поскольку примерно половина всех узлов находится на поверхности проводящей области.

Мерой сгущения сетки естественно считать число элементов по координате ξ' в середине проводящей области ($\eta'=0$). Это является единственным параметром, необходимым для построения сетки, остальная часть (составление матриц связности, вычисление координат узлов сетки) производится ЭВМ по разработанным программам.

Однако такая сетка приспособлена только для прямоугольной области, поэтому необходимо её преобразовать для описания границ криволинейных областей. Для этого каждая из восьми подобластей (рис. I.а), нумерация в кружочках) представляется прямоугольным конечным элементом третьего порядка с исключенными внутренними узлами (рис.2.а). Функции формы для такого элемента следующие [3]:

$$\Phi_i=\frac{1}{32}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)[-10+9(\xi^2+\eta^2)],\ i=1,2,3,4, \tag{7}$$

$$\Phi_i=\frac{9}{32}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)(1+9\eta_i\eta),\ i=7,8,11,12, \tag{8}$$

$$\Phi_i=\frac{9}{32}(1+\eta\eta_i)(1-\xi^2)(1+9\xi_i\xi),\ i=5,6,9,10. \tag{9}$$

Каждый из этих элементов преобразуется в физическое пространство r,z (рис. 2.б) по следующему закону:

$$r=\sum_{i=1}^{12}\Phi_i(\xi,\eta)\,r_i\ , \tag{I0}$$

$$z=\sum_{i=1}^{12}\Phi_i(\xi,\eta)\,z_i\ , \tag{II}$$

где r_i, z_i - значения координат r,z в точке i, т.е. задание координат r,z в 12 точках определяет преобразование квадратичного элемента в криволинейный. Один узел может принадлежать нескольким элементам. Эту информацию содержит матрица связности для прямоугольного разбиения на элементы

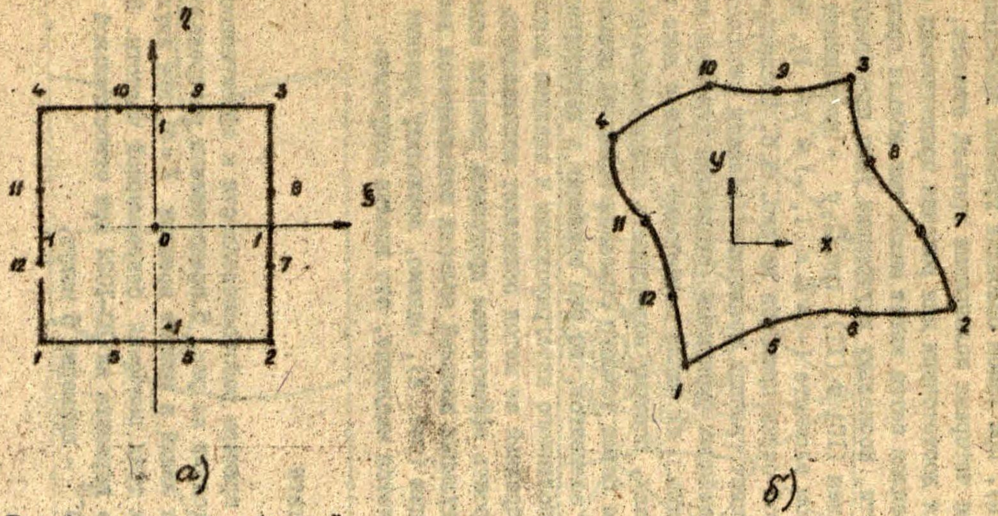


Рис. 2. Преобрезование подобластей:

а) Прямоугольный элемент третьего порядка в координатах ξ, η.

б) Преобразованный элемент в физических координатах r, z.

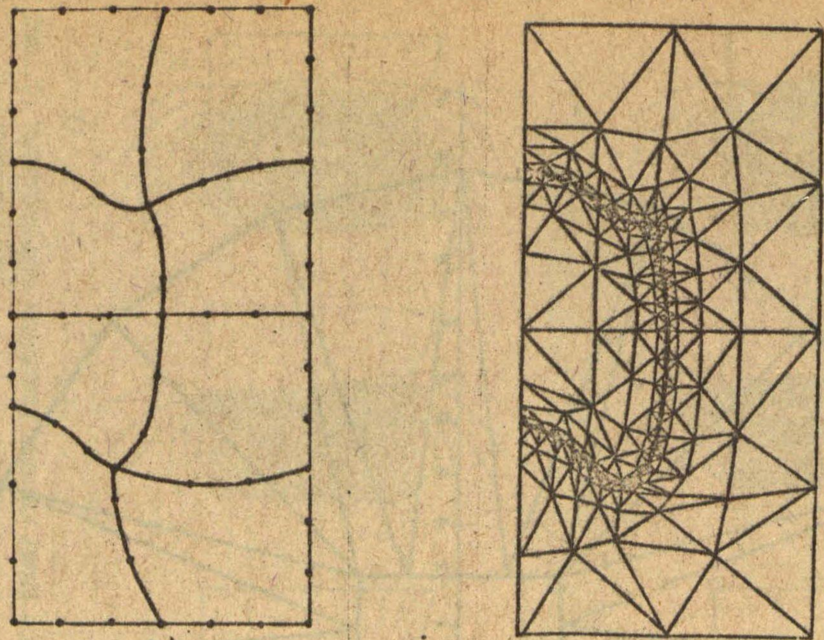
(рис. I,а), Общее число узлов - 59, т.е. столько координат (r и z) необходимо задать, чтобы описать геометрию задачи (рис. 3.а). При таком описании граница проводящей области задаётся четырьмя полиномами третьей степени, что представляется достаточным для решения практических задач.

Преобразованная сетка имеет малый шаг вблизи границы проводящей области, поскольку внутренние узлы преобразуются также по законам (I0) и (II), где ξ, η - координаты узла в нормированном элементе ($-I \leq \xi \leq I$, $-I \leq \eta \leq I$). Пример преобразованной сетки приведён на рис. 3.б. После преобразования координат граница проводящей области аппроксимируется кусочно-линейными функциями (сторонами линейных конечных элементов), однако их число достаточно большое даже при весьма грубых сетках, поэтому поверхность описывается достаточно гладко. Для более точного описания возможно применение криволинейных элементов, но это приводит к необходимости использования численного интегрирования и задания дополнительных узлов. Выбранный же метод позволяет использовать простые элементы и строить эффективные программы решения задач.

Для триангуляции внешней области используется весьма грубая триангуляция (рис. 4), однако, поскольку решение в этой области изменяется медленно, это вполне допустимо.

3. Результаты

В качестве примера работоспособности и эффективности разработанной методики на рис. 5 представлены распределения магнитных силовых линий в момент времени $t=0$ при двух различных геометриях трёх значений безразмерной частоты. Время расчёта одного варианта на ЕС-I022 при относительной точности порядка $I0^{-3}$ - примерно 5 минут.



а.) б)

Рис. 3. Задание геометрии задачи:

а) Определение трансформации заданием координат r, z в точк

б) Полученная триангуляция.

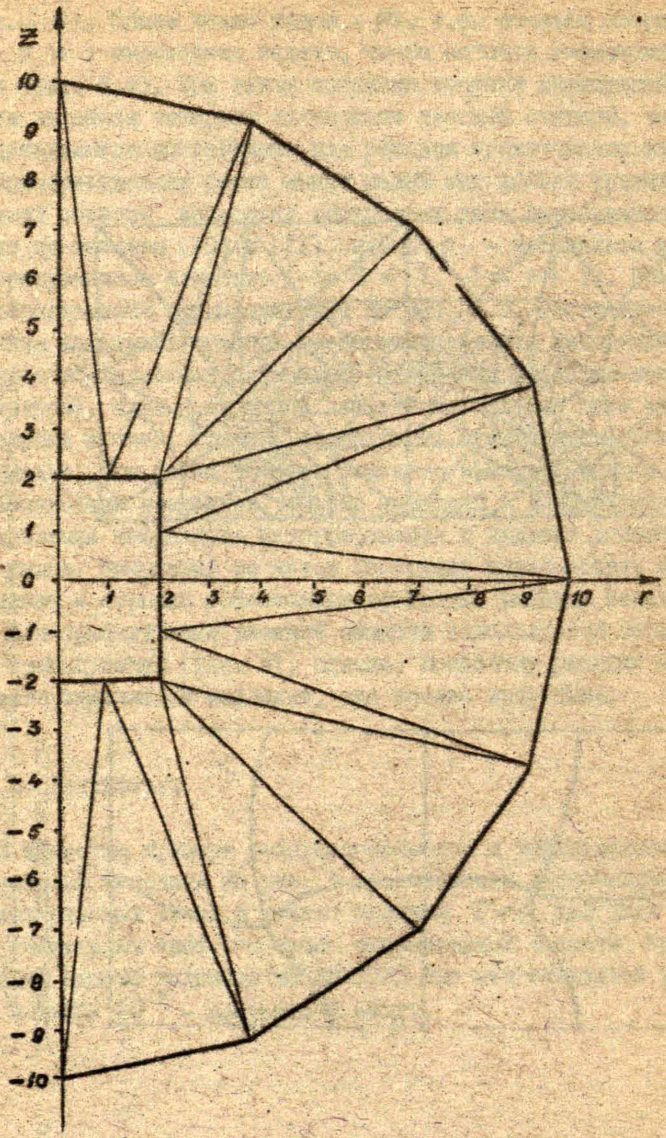


Рис. 4. Триангуляция внешней области

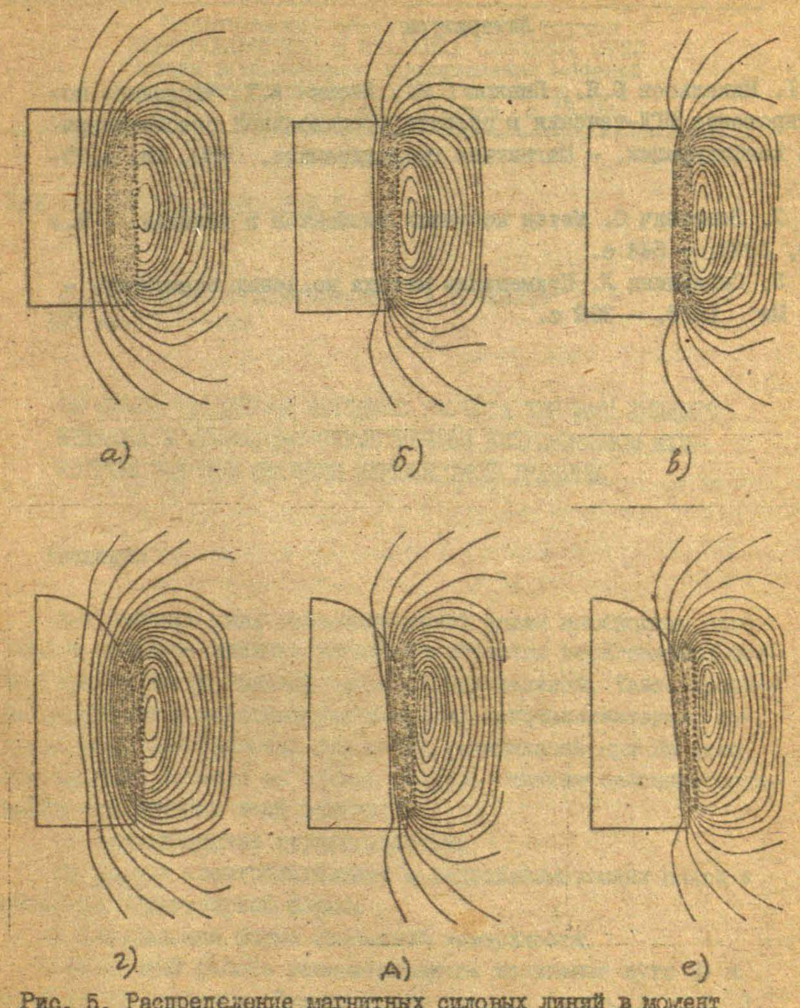


Рис. 5. Распределение магнитных силовых линий в момент времени $t=0$:

а), г) – $\hat{\omega}=10$,

б), д) – $\hat{\omega}=50$,

в), е) – $\hat{\omega}=100$.

Литература

I. Микельсон Ю.Я., Павлов С.И., Якович А.Т. Численное моделирование МГД-течения в области произвольной осесимметричной конфигурации. - Магнитная гидродинамика, 1980, №3, с.73-80.

2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 544 с.

3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979. - 392 с.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им.П.Стучки, с.15-24

УДК 518.12:538.4+621.365.5

Л.Л.Булыгин, Ю.Я.Микельсон, А.Т.Якович
ЛГУ им. П.Стучки

ОБ ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ МЕТОДИКЕ РАСЧЁТА ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ ИНДУКЦИОННОМ МГД-УСТРОЙСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЫ

Введение

Для решения ряда технологических задач необходимо определить движение жидкого металла в областях нерегулярной формы, причём часть границы является неизвестной. Такие проблемы возникают в электромагнитных (ЭМ) кристаллизаторах, индукционных электропечах различных модификаций при ЭМ отжатии жидкого металла от стенок сосуда. Отметим основные трудности при решении этой задачи:

1) моделирование турбулентности;

2) расчёт электромагнитных и гидродинамических полей в областях нерегулярной формы;

3) определение формы свободной поверхности.

В настоящей работе рассматриваются возможные пути 2) и отчасти 3) проблемы. Существующие подходы (напр. [1, 2, 3, 4]) используют вихрь скорости и функцию тока в качестве независимых переменных. Для дискретизации уравнений движения используется метод конечных разностей (МКР). Это создаёт определённые трудности при получении разностных уравнений и постановке граничных условий. В настоящей работе предлагается математическая модель и численная методика, использующая метод конечных элементов и естественные переменные скорость-давление.

Постановка задачи

Модель индукционной электропечи представлена на рис. I. Жидкий металл отжимается от стенок тигля и приводится в движение ЭМ силами из-за наличия переменного тока в индукторе. Основные трудности связаны с определением свободной поверхности 4. На свободной поверхности должны выполняться три граничных условия:

I) отсутствие нормальной к поверхности скорости;

2) отсутствие касательных напряжений;

3) баланс нормальных напряжений.

Одно граничное условие является "лишним" в том смысле, что все граничные условия задать нельзя, они выполняются лишь на истинной границе. Обычно задаются два граничных условия, а оставшиеся используют для коррекции границы. Отметим, что никто из авторов работ [I, 2, 3, 4] не требуют выполнения граничного условия 3), поскольку расчёт проводился в переменных вихрь скорости-функция тока, и давление не рассчитывалось.

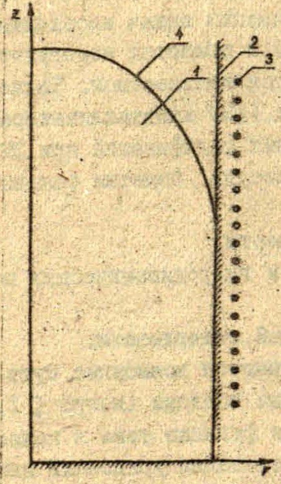


Рис. I. Модель индукционной электропечи:

I - жидкий металл; 2 - тигель; 3 - индуктор;

4 - свободная поверхность жидкого металла.

В настоящей работе предлагается задавать граничные условия 2) и 3) на свободной поверхности, а условие I) используется для коррекции последней.

Математическая модель

Стационарное движение жидкого металла в ИЭП описывают уравнения Навье-Стокса:

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + Al f_i - \frac{1}{Fr}, \tag{I}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{3}$$

где v_i – i-тая компонента скорости; p – давление; σ_{ij} – тензор напряжений; Re – число Рейнольдса; Al – число Альфвена; Fr – число Фруда.

Для решения (I) – (3) необходимо задать граничные условия на границе области S. Пусть

$$S = S_v + S_t, \tag{4}$$

где S_v – часть границы, на которой известна скорость; S_t – часть границы, на которой заданы внешние силы.

Разлагая v_i и p в ряд по базовым функциям:

$$v_i = v_{im}\,\varphi_m, \tag{5}$$

$$p = p_k\,\psi_k, \tag{6}$$

используя метод Галеркина и интегрируя по частям, получаем:

$$\int\limits_V v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\varphi_m\, dV = -\int\limits_V \sigma_{ij}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_j} dV + \int\limits_{S_t} \sigma_{ij} n_j \varphi_m\, dS + \int\limits_V f_i \varphi_m\, dV - \frac{1}{Fr}\int\limits_V \varphi_{im}\, dV, \tag{7}$$

где V – объём области течения; n_j – нормаль к внешней стороне границы области.

Для решения (7) используется МКЭ [6]. Скорости аппроксимируются линейными функциями формы, давление – постоянными.

...ётом аксиальной симметрии (7) получаем:

$$v_{ik}\left[\frac{r_m}{2\Delta} e_{ilm}(v_{rl} b_k + v_{zl} a_k) + \frac{\bar F}{4Re\Delta}(2b_k b_i + a_k a_i) + \frac{2}{Re\bar F} d_{ik}\right] =$$

$$p\left(\frac{\bar F}{2\Delta} b_i + \frac{\Delta}{3}\right) - \frac{b_k a_i \bar F}{4Re\Delta} v_{zk} + F_{rn} r_j h_{inj} + Al f_{rk} r_l e_{ikl}, \qquad (8)$$

$$v_{zk}\left[\frac{r_m}{2\Delta} e_{ilm}(v_{rl} b_k + v_{zl} a_k) + \frac{\bar F}{4Re\Delta}(b_k b_i + 2a_k a_i)\right] =$$

$$p\frac{\bar F}{2\Delta} a_i \cdot \frac{a_k b_i \bar F}{4Re\Delta} v_{rk} + F_{zn} r_j h_{inj} + Al f_{zk} r_l e_{ikl} - \frac{r_l}{\bar F r} d_{ik}, \qquad (9)$$

где i, k, l, m $=1,2,3$; n, j $=1,2$; $a_i = r_k - r_l$, остальные индексы; $b_i = z_l - z_k$ получаются циклической заменой; $\Delta = (a_1 b_2 - b_1 a_2)/2$ - площадь элемента; $\bar F = (r_i + r_k + r_l)/3$ - средний радиус элемента; $d_{ik} = \int_\Delta L_i L_k \, d\Delta$; $e_{ikl} = \int_\Delta L_i L_k L_l \, d\Delta$; $h_{inj} = \int_S L_i L_n L_j \, dS$; $f_{rk}, f_{zk}, F_{rn}, F_{zn}$ - радиальная и аксиальная составляющие объёмной и поверхностных сил в точке K или n.

Нелинейные уравнения (8) + (9) решаются методом Ньютона-Рафсона [7]:

$$V_{rk}^{\alpha+1} = V_{rk}^{\alpha} + V_{rk}^{*\alpha}, \qquad (10)$$

$$V_{zk}^{\alpha+1} = V_{zk}^{\alpha} + V_{zk}^{*\alpha}, \qquad (11)$$

$$p^{\alpha+1} = p^{\alpha} + p^{*\alpha}. \qquad (12)$$

Приращения $V_{rk}^{*\alpha}, V_{zk}^{*\alpha}, p^{*\alpha}$ удовлетворяют уравнениям:

$$V_{rk}^{*\alpha}\left[\frac{\bar r_m}{2\Delta} e_{ilm}(V_{rl}^{\alpha} b_k + V_{zl}^{\alpha} a_k) + \frac{\bar F}{4Re\Delta}(2b_k b_i + a_k a_i) + \frac{2}{Re\bar F} d_{ik}\right] =$$

$$p^{*\alpha}\left(\frac{\bar r}{2\Delta} b_i + \frac{\Delta}{3}\right) - \frac{b_k a_i \bar F}{4Re\Delta} V_{zk}^{*\alpha} + \theta_r(V_r^{\alpha}, V_z^{\alpha}, p^{\alpha}), \qquad (13)$$

$$V_{zk}^{*\alpha}\left[\frac{r_m}{2\Delta}e_{ilm}(V_{rl}^{\alpha}b_k+V_{zl}^{\alpha}a_k)+\frac{\bar{r}}{4Re\Delta}(b_kb_i+2a_ka_i)\right]=$$

$$p\frac{a_i\bar{r}}{2\Delta}-\frac{a_kb_i\bar{r}}{4Re\Delta}V_{rk}^{*\alpha}+\theta_z(V_r^{\alpha},V_z^{\alpha},p^{\alpha}), \quad ()$$

где

$$\theta_r(V_r^{\alpha},V_z^{\alpha},p^{\alpha})=-V_{rk}^{\alpha}\left[\frac{r_m}{2\Delta}e_{ilm}(V_{rl}^{\alpha}b_k+V_{zl}^{\alpha}a_k)+\frac{\bar{r}}{4Re\Delta}(2b_kb_i+a_ka_i)+\frac{2}{Re\bar{r}}d_{ik}\right]+$$

$$p^{\alpha}\left(\frac{\bar{r}}{2\Delta}b_i+\frac{\Delta}{3}\right)-\frac{b_ka_i\bar{r}}{4Re\Delta}V_{zk}^{\alpha}+F_{rn}r_jh_{inj}+Al\,f_{rk}r_le_{ikl}, \quad (15)$$

$$\theta_z(V_r^{\alpha},V_z^{\alpha},p^{\alpha})=-V_{zk}^{\alpha}\left[\frac{r_m}{2\Delta}e_{ilm}(V_{rl}^{\alpha}b_k+V_{zl}^{\alpha}a_k)+\frac{\bar{r}}{4Re\Delta}(b_kb_i+2a_ka_i)\right]+$$

$$p^{\alpha}\frac{\bar{r}}{2\Delta}a_i-\frac{a_kb_i\bar{r}}{4Re\Delta}V_{rk}^{\alpha}+F_{zn}r_jh_{inj}+Al\,f_{zk}r_le_{ikl}-\frac{r_id_{ik}}{Fr}. \quad (16)$$

Давление рассчитывается с помощью алгоритма Удзавы [6]:

$$V_{rk}^{*\alpha,\beta+1}\left[\frac{r_m}{2\Delta}e_{ilm}(V_{rl}^{\alpha}b_k+V_{zl}^{\alpha}a_k)+\frac{\bar{r}}{4Re\Delta}(2b_kb_i+a_ka_i)+\frac{2d_{ik}}{Re\bar{r}}\right]=$$

$$p^{*\alpha,\beta}\left(\frac{\bar{r}}{2\Delta}b_i+\frac{\Delta}{3}\right)-\frac{b_ka_i\bar{r}}{4Re\Delta}V_{zk}^{*\alpha,\beta+1}+\theta_r(V_r^{\alpha},V_z^{\alpha},p^{\alpha}), \quad (17)$$

$$V_{zk}^{*\alpha,\beta+1}\left[\frac{r_m}{2\Delta}e_{ilm}(V_{rl}^{\alpha}b_k+V_{zl}^{\alpha}a_k)+\frac{\bar{r}}{4Re\Delta}(b_kb_i+2a_ka_i)\right]=$$

$$p^{*\alpha,\beta}\frac{\bar{r}}{2\Delta}a_i-\frac{a_kb_i\bar{r}}{4Re\Delta}V_{rk}^{*\alpha,\beta+1}+\theta_z(V_r^{\alpha},V_z^{\alpha},p^{\alpha}), \quad (18)$$

$$p^{*\alpha,\beta+1}=p^{*\alpha,\beta}-\rho\left(V_{rk}^{*\alpha,\beta+1}\frac{b_k}{2\Delta}+\frac{\overline{V_r^{*\alpha,\beta+1}}}{\bar{r}}+V_{zk}^{*\alpha,\beta+1}\frac{a_k}{2\Delta}\right). \quad (19)$$

Граничные условия задаются следующим образом. На границе области S_v задаются условия прилипания:

$$V_r|_{S_v}=0, \quad V_z|_{S_v}=0. \quad (20)$$

На свободной поверхности задаются условия отсутствия поверхностных сил:

$$F_r|_{S_t}=0, \quad F_z|_{S_t}=0. \quad (21)$$

Эти же условия задаются на вертикальной стенке тигля. Если рассчитанная радиальная скорость положительна, то скорости в этой точке полагаются равными нулю, т.е. задаётся граничное условие прилипания. Отметим, что данный подход может быть обобщён на случай других геометрий стенок тигля и случая взвешивания жидкого металла в магнитном поле.

После получения решения корригируется поверхность в соответствии со скоростями на ней;

$$r_i^{n+1} = r_i^n + V_{ri}\tau, \tag{22}$$

$$z_i^{n+1} = z_i^n + V_{zi}\tau, \tag{23}$$

где r_i, z_i - радиальная и аксиальная координаты i-той точек на поверхности; V_{ri}, V_{zi} - радиальная и аксиальная скорости i-той точки на поверхности; τ - параметр.

Новая $n+1$-ая поверхность параметризуется по длине. Новые точки на $n+1$-ой поверхности реализуются на одинаковых расстояниях по длине дуги, чтобы сохранить регулярность стенки. По новой поверхности проводится триангуляция согласно алгоритму, изложенному в [5].

Уравнения (17), (18), (19) с граничными условиями (20), (21) решаются методом нижней релаксации. Параметр ρ выбирается из интервала $0 < \rho < \frac{2}{Re}$, для которого доказана сходимость алгоритма Удзавы [6].

Результаты

Расчёты с использованием выше указанной методики проводились для модели цилиндрической индукционной электропечи.

Электромагнитное поле рассчитывалось МКЭ с использованием методики, описанной в [5]. Турбулентность моделировалась введением большого коэффициента вязкости, на несколько порядков превышающей физическую. Результаты расчётов приведены на рис. 2 и 3. На рис. 2 представлены картины линий тока и изобар для случая граничных условий прилипания на свободной поверхности. Для прямоугольной геометрии показан случай отсутствия сил тяжести, поэтому получается симметричная картина для давления.

Для случая с мениском сила тяжести присутствует. Для показанных случаев градиент давления в основном компенсируется объёмными силами. Отметим, что для случая граничных условий прилипания на свободной поверхности вышеизложенная методика не позволяет находить истинную поверхность. В таком случае необходимо использовать граничное условие 3) для коррекции границы.

На рис. 3 приведены гидродинамические поля для случая задания граничных условий 2) и 3) на свободной поверхности. Из представленных рисунков видно, что прямоугольная геометрия является плохим начальным приближением в случае выраженного мениска, поскольку поверхность передвигается, сохраняя прямой угол. По-видимому, этого можно избежать в случае более высоких частот (безразмерная частота в этом случае $\hat{\omega}=10$), или введя поверхностные силы натяжения. Также видно, что недостаточно задавать граничные условия свободной поверхности только на зеркале металла, а на стенках тигля задавать условие прилипания. В таком случае даже при больших настилах тока в индукторе жидкий металл не может быть отжат от стенок сосуда. На рис. 3.в) показана новая поверхность после I шага итераций по поверхности. После этого новая поверхность используется для последующих приближений.

Выводы

Представлена математическая модель и численный алгоритм для задач с неизвестной границей. Работоспособность проиллюстрирована рядом примеров.

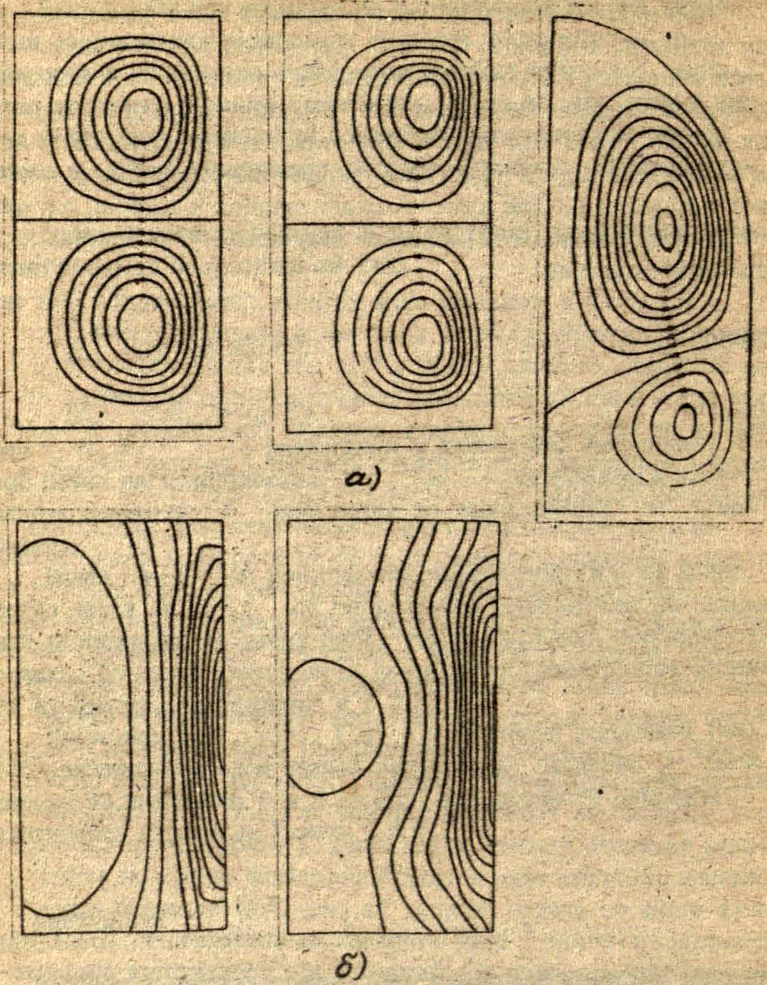


Рис. 2. Гидродинамические поля при граничных условиях прилипания на свободной поверхности.
а) функция тока,
б) давление.

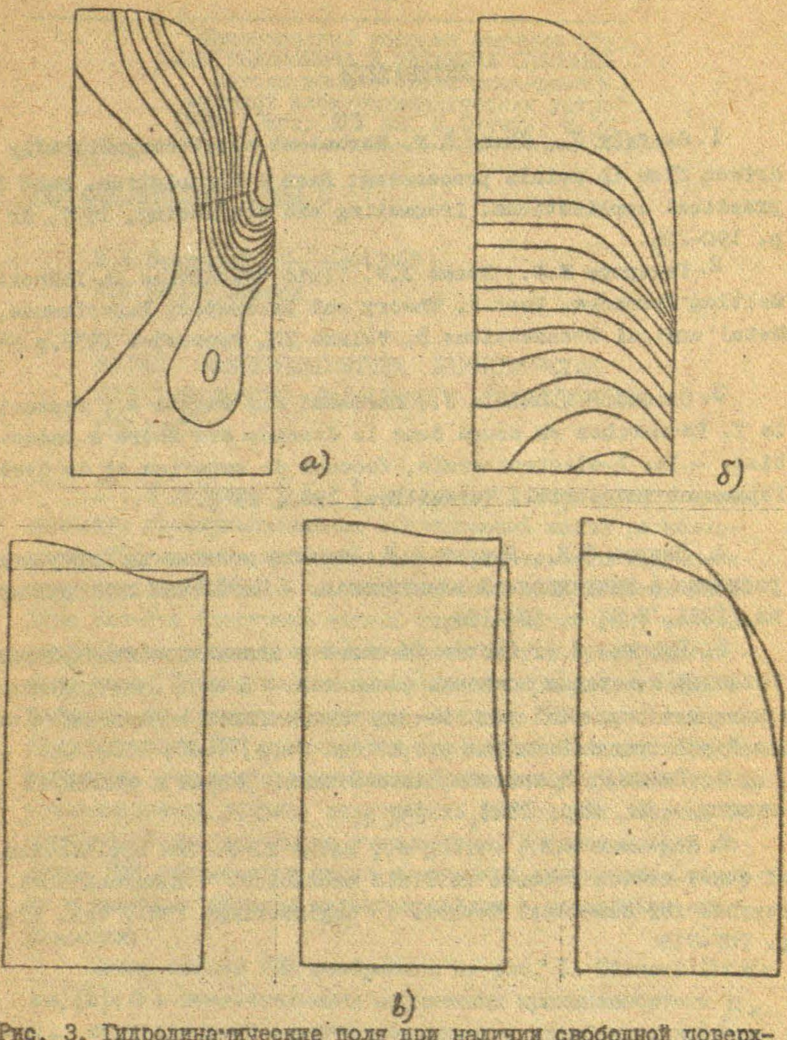


Рис. 3. Гидродинамические поля при наличии свободной поверхности:
а) функция тока,
б) давление,
в) перемещение поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

I. Szekely J., Chang C.W. Turbulent electromagnetically driwen flow in metals processing: Part 1 formulation. Part 2 practical applications. Ironmaking and Stulmaking, 1977, Nr 3, p. 190-204.

2. Tarapore E.D., Evans J.W. Fluid Velocities in Induction Melting Furnaces. Part 1. Theory and Laboratory Experiments. - Metallurgical Transactions B, Volume 7B, September 1976, p.343.

3. Cremer P., Driole J., Marchand C., Foggia A., Fautrelle Y. Recherches en cours dans le domaine des fours a induction. - In: L-electrothermie, facceur de mutation et de developpement industriel. Versailles, 1980, 23 p.

4. Павлов С.И., Якович А.Т. Влияние мениска на циркуляцию расплава в индукционной электропечи. - Магнитная гидродинамика, I981, № 3, с. I04-I09.

5. Булыгин Л.Л. Расчёт ЭМ-полей в аксиально-симметричных установках методом конечных элементов. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига, I985, с.3-I4.

6. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса. Теория и численный анализ. - М., Мир, I984, - 382 с.

7. Engelman M.S., Strang G., Bathe K.-J. The application of quasi-newton methods in fluid mechanics. - International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981, Vol. 17, p. 707-718.

Межвузовский сборник научных труд
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ
Методы комплексного исследования
моделей электродинамических устройс
1985, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 25-3

УДК 621.313.333 : 538.4

Э.А.Завицкий, В.Г.Смирнов
ЛГУ им. П.Стучки

РАСЧЁТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОКАНАЛЬНОГО РАДИАЛЬНОГО ИНДУКЦИОННОГО МГД-НАСОСА

1°. В работах [1,2] описываются конструкция и результаты экспериментальных исследований новой разновидности МГД-машин - многоканального радиального индукционного насоса (РИН). В настоящей работе предлагается методика расчёта электромагнитных характеристик РИН, основывающаяся на решении краевой задачи теории электромагнитного поля. Математически описываются периодически повторяющиеся по азимуту индукторы - секции РИН; при этом радиус кривизны РИН принимается бесконечно большим. Предполагается, что все секции насоса работают в одном и том же установившемся режиме; зависимость физических величин от поперечной координаты не учитывается. Математической моделью РИН учитываются схема соединения проводников обмотки и конечные размеры магнитопроводов в продольном направлении.

Схема секции РИН изображена на рис. I. Область $0<x<a$, $|z|<a'$ с относительными магнитными проницаемостями μ_x, μ_z соответствует секционированному в продольном направлении магнитопроводу. Трёхфазная обмотка, образованная из одинаковых равноотстоящих катушек, моделируется токовыми пластинками на рабочих поверхностях магнитопровода и характеризуется следующими параметрами: зубцовым делением τ_z,

Рис. I. К математической модели РИН

шириной пластинки b, катушечным шагом Y, числом полюсов N, числом пазов на полюс и фазу q, числом витков в катушке w, активными сопротивлениями ветвей R_s (см. ниже). Относительное расположение магнитопровода и обмотки характеризует величина l. Каналы с жидким металлом заменены проводящими слоями толщиной $2h$, имеющими электропроводность σ и движущимися со скоростью v вдоль оси x. Магнитопровод от проводящих слоёв отделяют зазоры толщиной g. Источник питания характеризуют максимальное значение межфазного напряжения U и частота ω.

Полоса $|z|<d+g+h$, изображённая на рис. I, соответствует периодически повторяющейся по азимуту части РИН, приходящейся на один индуктор. Величины R_s, U, как и все другие интегральные величины, относятся к одному индуктору на единицу ширины модели РИН.

2⁰. Разместим индукторы по оси x периодически с периодом $L=a+c$, где c - расстояние между магнитопроводами; примем, что питающие напряжения соседних индукторов сдвинуты во времени на полупериод (аналогично сдвинуты первичные и вторичные токи, а также магнитное поле $\vec{B}$ - см. равенство (I0)). В этих условиях поле $\vec{B}$, периодическое с периодом $2L$ по x, в области $0<x<L$, $|z|$ где $\delta = h+g$, описывается следующей краевой зад

$$(\mu_x \partial^2/\partial x^2 + \mu_z \partial^2/\partial z^2)\vec{B}^{I} = 0,$$

$$\Delta \vec{B}^{II,\pm} = 0,$$

$$(\Delta - \mu_0 \sigma (i\omega + v\,\partial/\partial x))\vec{B}^{(\pm)} = 0, \qquad (3)$$

$$div\,\vec{B}^{I,II,\pm,(\pm)} = 0; \qquad (4)$$

$$(\mu_x^{-1} B_x^{I} - B_x^{\pm})\Big|_{z=\pm d} = \mp \mu_0 J^{\pm}, \quad 0<x<a; \qquad (5)$$

$$B_z^{I}\Big|_{z=\pm d} = B_z^{\pm}\Big|_{z=\pm d}, \quad 0<x<a; \qquad (6)$$

$$\vec{B}^{II}\Big|_{z=\pm d} = \vec{B}^{\pm}\Big|_{z=\pm d}, \quad a<x<L; \qquad (7)$$

$$\vec{B}^{\pm}\Big|_{z=\pm(d+g)} = \vec{B}^{(\pm)}\Big|_{z=\pm(d+g)}, \quad 0<x<L; \qquad (8)$$

$$\vec{B}^{-}\Big|_{z=-d-\delta} = \vec{B}^{+}\Big|_{z=d+\delta}, \quad 0<x<L; \qquad (9)$$

$$\vec{B}^{\pm,(\pm)}\Big|_{x=L} = -\vec{B}^{\pm,(\pm)}\Big|_{x=0}, \quad d<|z|<d+\delta; \qquad (10)$$

$$B_x^{I}\Big|_{x=0,a} = 0, \quad B_x^{II}\Big|_{x=a,L} = 0, \quad |z|<d. \qquad (11),(12)$$

Примечания.

I. Везде пишутся комплексные амплитуды гармонических во времени величин.

2. Верхние индексы I, II, $\pm$, ($\pm$) указывают подобласть на рис. I.

3. $J^{\pm}$ означает поверхностную плотность первичного тока при $z=\pm d$, перпендикулярного к плоскости рисунка; имеет место равенство

$$J^{-}(x) = -J^{+}(x+Y). \qquad (13)$$

4. Граничные условия (II),(I2), описывающие бесконечно тонкие сверхпроводящие экраны на торцах магнитопроводов, введены с целью упрощения математической задачи.

3[0]. Функции $J^{\pm}$ имеют следующий общий вид:

$$J^{\pm} = \sum_s I_s \Omega_s^{\pm},$$

где I_s – ток в s-ой ветви обмотки, $\Omega_s^{\pm}$ – вещественные функции, зависящие от размеров и схемы соединения проводников ветви; суммирование ведётся по всем неразветвлённым токовым ветвям обмотки. В настоящей работе рассматривается последовательное или параллельное соединение катушечных групп фазы (катушки в группах соединены последовательно), следовательно, сумма $\sum_s$ представляет собой $\sum_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$, для последовательного включения или $\sum_{\alpha,\nu}$, $\alpha = 1,2,3$, $\nu = 1,\ldots,N$, для параллельного включения групп; соответственно I_s, $\Omega_s^{\pm}$ равны I_α, $\Omega_\alpha^{\pm}$ или $I_{\alpha,\nu}$, $\Omega_{\alpha,\nu}^{\pm}$.

Функции $\Omega_s^{\pm}$, как и функции $J^{\pm}$, связывает равенство

$$\Omega_s^{-} = -\Omega_s^{+}(x+Y). \tag{14}$$

Функции Ω_α^{+} имеют следующий вид:

$$\Omega_1^{+}(x) = \frac{w}{b}\sum_{\nu=1}^{N}(-1)^{\nu}\sum_{\varkappa=1}^{q}\vartheta\left(\frac{b}{2} - |x - x_{\varkappa\nu}|\right),$$

$$\Omega_2^{+}(x) = \Omega_1^{+}(x - 2\tau/3), \quad \Omega_3^{+}(x) = -\Omega_1^{+}(x - \tau/3),$$

где $x_{\varkappa\nu} = l + Y + b/2 + (\varkappa - 1)t_z + (\nu - 1)\tau, \quad \tau = 3qt_z,$

ϑ – функция Хевисайда.

Функции $\Omega_{\alpha,\nu}^{+}$, $\nu = 1,\ldots,N$, имеют следующий вид:

$$\Omega_{1,\nu}^{+}(x) = \frac{w}{b}(-1)^{\nu-1}\sum_{\varkappa=1}^{q}\vartheta\left(\frac{b}{2} - |x - x_{\varkappa\nu}|\right),$$

$$\Omega_{2,\nu}^{+}(x) = \Omega_{1,\nu}^{+}(x - 2\tau/3), \quad \Omega_{3,\nu}^{+}(x) = -\Omega_{1,\nu}^{+}(x - \tau/3).$$

Разложим функции $J^{\pm}$ в ряд Фурье:

$$J^{\pm} = \sum_n{}' \hat{J}_n^{\pm} e^{ip_n x}, \quad \hat{J}_n^{\pm} = \frac{1}{L}\int_0^L J^{\pm} e^{-ip_n x}\,dx\,;$$

$\sum\limits_n{}'$ везде означает $\sum\limits_{n=\pm 1,\pm 3,\ldots}$; $p_n = n\pi/L$; аналогично разлагаются функции $\Omega_s^{\pm}$ и магнитное поле в областях $\pm$, $(\pm)$; соответствующие фурье-коэффициенты также помечаются шапочкой.

Имеет место равенство $\hat{J}_n^{\pm} = \sum\limits_s I_s \hat{\Omega}_{sn}^{\pm}$; величины $\hat{\Omega}_{sn}^{\pm}$, означающие $\hat{\Omega}_{\alpha n}^{\pm}$ или $\hat{\Omega}_{\alpha,\nu n}^{\pm}$, определяются по следующим соотношениям:

$$\hat{\Omega}_{1n}^{+} = \frac{1}{L} w e^{i\varphi_n} K_{qn} K_{Nn} \frac{\sin(bp_n/2)}{bp_n/2},$$

$$\hat{\Omega}_{1,\nu n}^{+} = \frac{1}{L} w e^{i\psi_n} K_{qn} \frac{\sin(bp_n/2)}{bp_n/2}\,;$$

$$K_{qn} = \frac{\sin(\tau p_n/6)}{\sin(\tau p_n/6q)}, \quad K_{Nn} = \frac{\sin(N(\pi+\tau p_n)/2)}{\sin((\pi+\tau p_n)/2)};$$

$$\varphi_n = -(l+Y+b/2)p_n - (N-1)(\pi+\tau p_n)/2 - (q-1)t_z p_n/q$$

$$\psi_n = -(l+Y+b/2)p_n - (\nu-1)(\pi+\tau p_n) - (q-1)t_z p_n/q$$

$$\hat{\Omega}_{2n}^{+} = \hat{\Omega}_{1n}^{+} e^{-i2\tau p_n/3}, \quad \hat{\Omega}_{3n}^{+} = -\hat{\Omega}_{1n}^{+} e^{-i\tau p_n/3}$$

$$\hat{\Omega}_{2,\nu n}^{+} = \hat{\Omega}_{1,\nu n}^{+} e^{-i2\tau p_n/3}, \quad \hat{\Omega}_{3,\nu n}^{+} = -\hat{\Omega}_{1,\nu n}^{+} e^{-i\tau p_n/3}$$

наконец, в соответствии с равенствами (I4),(I3),

$$\hat{\Omega}_{sn}^{-} = -e^{-ip_n Y}\hat{\Omega}_{sn}^{+} \quad \text{и} \quad \hat{J}_n^{-} = -e^{-ip_n Y}\hat{J}_n^{+}.$$

4°. Рассмотрим решение краевой задачи (I)-(I2).

В областях $\pm$, $(\pm)$ имеем следующие соотношения для фурье-коэффициентов магнитной индукции, полученные на основе уравнений (2)-(4):

$$\hat{B}^{\pm}_{zn} = C^{\pm}_n \, ch p_n (z \mp d) + D^{\pm}_n \, sh p_n (z \mp d), \qquad (15)$$

$$\hat{B}^{(\pm)}_{zn} = E^{\pm}_n \, ch \varrho_n (z \mp (d+\delta)) + F^{\pm}_n \, sh \varrho_n (z \mp (d+\delta)), \qquad (16)$$

$$\hat{B}^{\pm,(\pm)}_{xn} = i/p_n \cdot d\hat{B}^{\pm,(\pm)}_{zn}/dz,$$

$$\varrho_n = (p_n^2 + i\mu_0 \sigma(\omega + p_n v))^{1/2}, \quad Re\, \varrho_n > 0.$$

В областях I,II имеют место следующие разложения, полученные используя (1),(2),(4) и (11),(12):

$$B^{I}_{x} = \sum_n (A_n \, ch\beta_n z + B_n \, sh\beta_n z) \sin \lambda_n x, \qquad (17)$$

$$B^{I}_{z} = -\frac{1}{2} \varkappa B_0 - \varkappa \sum_n (A_n \, sh\beta_n z + B_n \, ch\beta_n z) \cos \lambda_n x; \qquad (18)$$

$$B^{II}_{x} = \sum_n (G_n \, ch\nu_n z + H_n \, sh\nu_n z) \sin \nu_n (x-a), \qquad (19)$$

$$B^{II}_{z} = -\frac{1}{2} H_0 - \sum_n (G_n \, sh\nu_n z + H_n \, ch\nu_n z) \cos \nu_n (x-a); \qquad (20)$$

$\sum_n$ везде означает $\sum_{n=1,2,\ldots}$; $\lambda_n = n\pi/a$, $\varkappa = (\mu_z/\mu_x)^{1/2}$, $\beta_n = \lambda_n/\varkappa$, $\nu_n = n\pi/c$.

Для определения 12 неизвестных множителей, входящих в фурье-коэффициенты (15),(16) и разложения (17)-(20), срастим магнитное поле на границах отдельных подобластей согласно условиям (5)-(9). При этом при $z = \pm d$ составляющую B_x сращиваем на отрезке $0<x<L$, а B_z - отдельно на отрезках $0<x<a$ и $a<x<L$. Получим следующие равенства:

$$D^{\pm}_m = \mp i\mu_0 \hat{J}^{\pm}_m + \sum_n \Lambda_{nm} (A_n \, ch\beta_n d \pm B_n \, sh\beta_n d) +$$
$$+ \sum_n N_{nm} (G_n \, ch\nu_n d \pm H_n \, sh\nu_n d), \quad m = \pm 1, \pm 3, \ldots; \qquad (21)$$

$$\sum_n{}' Q_{n0} C^{\pm}_n = B_0, \qquad (22.1)$$

$$\sum_n{}' Q_{nm} C^{\pm}_n = \pm A_m \, sh\beta_m d + B_m \, ch\beta_m d, \qquad (22.2)$$

$$\sum_n{}' R_{n0} C^{\pm}_n = H_0, \qquad (23.1)$$

$$\sum_n{}' R_{nm} C_n^{\pm} = \pm G_m \, sh\nu_m d + H_m \, ch\nu_m d\,, \quad m = 1,2,\ldots; \qquad (23.2)$$

$$C_n^{\pm} ch p_n g \pm D_n^{\pm} sh p_n g = E_n^{\pm} ch \varrho_n h \mp F_n^{\pm} sh \varrho_n h, \qquad (24)$$

$$\pm C_n^{\pm} sh p_n g + D_n^{\pm} ch p_n g = \varrho_n / p_n \cdot (\mp E_n^{\pm} sh \varrho_n h + F_n^{\pm} ch \varrho_n h), \qquad (25)$$

$$E_n^{+} = E_n^{-}\,, \quad F_n^{+} = F_n^{-}\,, \quad n = \pm 1, \pm 3, \ldots \qquad (26),(27)$$

Здесь обозначено:

$$\Lambda_{nm} = 1/(\mu_x L) \cdot (\Pi^-(a/2, p_m + \lambda_n) - \Pi^-(a/2, p_m - \lambda_n)),$$

$$N_{nm} = 1/L \cdot e^{-iap_m} (\Pi^-(c/2, p_m + \nu_n) - \Pi^-(c/2, p_m - \nu_n)),$$

$$Q_{nm} = -2/(\varkappa a) \cdot (\Pi^+(a/2, p_n + \lambda_m) + \Pi^+(a/2, p_n - \lambda_m)),$$

$$R_{nm} = -2/c \cdot e^{iap_n} (\Pi^+(c/2, p_n + \nu_m) + \Pi^+(c/2, p_n - \nu_m));$$

функция $\Pi^{\pm}(A, x) = \sin Ax / x \cdot e^{\pm iAx}$; $\lambda_0 = 0$, $\nu_0 = 0$.

Введём обозначение

$$X_n^{\pm} = C_n^{+} \pm C_n^{-}\,. \qquad (28)$$

Алгебраические преобразования равенств (21)-(27) приводят к двум бесконечным системам уравнений относительно величин $X_n^{\pm}$.

Величины X_n^{+} удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_k{}' \Theta_{km}^{+} X_k^{+} = i\mu_0 \sum_s I_s (\hat{\Omega}_{sm}^{+} + \hat{\Omega}_{sm}^{-}), \quad m = \pm 1, \pm 3, \ldots \qquad (29.1)$$

Величины X_n^{-} удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_k{}' Q_{k0} X_k^{-} = 0, \qquad \sum_k{}' R_{k0} X_k^{-} = 0, \\ &\sum_k{}' \Theta_{km}^{-} X_k^{-} = i\mu_0 \sum_s I_s (\hat{\Omega}_{sm}^{+} - \hat{\Omega}_{sm}^{-}), \quad m = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (29.2)$$

Коэффициенты $\Theta_{km}^{\pm}$ имеют следующий вид:

$$\Theta_{km}^{\pm} = \sum_n (\Lambda_{nm} Q_{kn} (th \beta_n d)^{\pm 1} + N_{nm} R_{kn} (th \nu_n d)^{\pm 1}) + \delta_{km} \xi_m^{\pm}\,,$$

где δ_{km} – символ Кронекера,

$$\xi_n^+ = (p_n \operatorname{th} p_n g + \varrho_n \operatorname{th} \varrho_n h)/(p_n + \varrho_n \operatorname{th} \varrho_n h \cdot \operatorname{th} p_n g),$$

$$\xi_n^- = (\varrho_n + p_n \operatorname{th} \varrho_n h \cdot \operatorname{th} p_n g)/(\varrho_n \operatorname{th} p_n g + p_n \operatorname{th} \varrho_n h).$$

Поскольку токи I_s в правых частях систем уравнений (29.I),(29.2) не определены, строим решения для произвольных значений I_s. С этой целью неизвестные $X_n^\pm$ представляем в виде сумм

$$X_n^\pm = \sum_s I_s X_{sn}^\pm , \tag{30}$$

где $v_{sn}^\pm$ означают $X_{\alpha n}^\pm$ или $X_{\alpha, \nu n}^\pm$ в зависимости от схемы соединения проводников обмотки.

Подставляя разложения (30) в (29.I),(29.2) и приравнивая в каждом уравнении коэффициенты у токов I_s нулю, получаем бесконечные системы уравнений относительно $X_{sn}^\pm$.

Величины X_{sn}^+ удовлетворяют системам уравнений

$$\sum_k{}' \theta_{km}^+ X_{sk}^+ = i\mu_0 (\hat{\Omega}_{sm}^+ + \hat{\Omega}_{sm}^-), \quad m = \pm 1, \pm 3, \ldots \tag{31.I}$$

Величины X_{sn}^- удовлетворяют системам уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_k{}' Q_{k0} X_{sk}^- = 0, \quad \sum\limits_k{}' R_{k0} X_{sk}^- = 0, \\ \sum\limits_k{}' \theta_{km}^- X_{sk}^- = i\mu_0 (\hat{\Omega}_{sm}^+ - \hat{\Omega}_{sm}^-), \; m = \pm 1, \pm 3, \ldots \end{array}\right\} \tag{31.2}$$

Число разрешаемых систем (31.I) или (31.2) равно числу неизвестных токов I_s.

5°. Магнитный поток, сцеплённый с s-ой ветвью обмотки,

$$\Phi_s = \Phi_s^+ + \Phi_s^-,$$

где
$$\Phi_s^\pm = -\int_0^L B_z^\pm \Big|_{z=\pm d} \left(\int_0^x \Omega_s^\pm(\xi) d\xi \right) dx; \tag{32}$$

последнее выражение математически равносильно определению потока в работе [3]. Подстановка фурье-разложений функций $B_z^\pm$, $\Omega_s^\pm$ в (32) и последующие преобразования дают:

$$\Phi_s^\pm = \sum_{s'} L_{ss'}^\pm I_{s'},.$$

где $L^{\pm}_{ss'} = -\frac{1}{2} i L \sum_n{}' \frac{1}{P_n} (X^+_{s'n} \pm X^-_{s'n}) \overset{*}{\hat{\Omega}}{}^{\pm}_{sn}$;

звёздочка означает комплексное сопряжение.

Напряжение на s-ой ветви обмотки

$$U_s = \sum_{s'} Z_{ss'} I_{s'}, \text{ где } Z_{ss'} = i\omega (L^+_{ss'} + L^-_{ss'}) + R_s \delta_{ss'}.$$

(Величины $L^{\pm}_{ss'}$, $Z_{ss'}$ представляют собой $L^{\pm}_{\alpha\alpha'}$, $Z_{\alpha\alpha'}$ или $L^{\pm}_{\alpha,\nu;\alpha',\nu'}$, $Z_{\alpha,\nu;\alpha',\nu'}$.)

Для определения токов I_s составляются уравнения Кирхгофа для конкретной схемы соединения проводников обмотки. В случае соединения фаз в звезду без нулевого провода разрешаемые системы уравнений имеют следующий вид (вывод уравнений см. [3]).

Для последовательно включённых катушечных групп

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\alpha (Z_{1\alpha} - Z_{2\alpha}) I_\alpha = U, \\ &\sum_\alpha (Z_{2\alpha} - Z_{3\alpha}) I_\alpha = U e^{-i2\pi/3}, \\ &\sum_\alpha I_\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Для параллельно включённых катушечных групп

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha,\nu} (Z_{1,1;\alpha,\nu} - Z_{2,\nu';\alpha,\nu}) I_{\alpha,\nu} = U, && \nu' = 1,\dots,N; \\ &\sum_{\alpha,\nu} (Z_{2,1;\alpha,\nu} - Z_{3,\nu';\alpha,\nu}) I_{\alpha,\nu} = U e^{-i2\pi/3}, && \nu' = 1,\dots,N; \\ &\sum_{\alpha,\nu} (Z_{3,1;\alpha,\nu} - Z_{1,\nu';\alpha,\nu}) I_{\alpha,\nu} = U e^{-i4\pi/3}, && \nu' = 2,\dots,N; \\ &\sum_{\alpha,\nu} I_{\alpha,\nu} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Таким образом, алгоритм определения магнитного поля замкнут: сперва разрешаются системы уравнений (31.1), (31.2); с помощью решений $X^{\pm}_{sn}$ вычисляются элементы матрицы импедансов $Z_{ss'}$; из систем (33) или (34) находятся токи I_s; на основе равенств (21)-(28),(30) определяются коэффициенты разложений магнитного поля.

6° Электромагнитное давление определим через x-составляющую усреднённой по времени силы, действующей на индуктор:

$$P_э = -F_x/(2h), \quad F_x = F_x^+ + F_x^-,$$

$$F_x^{\pm} = \pm\frac{1}{2\mu_0} Re\int_0^L (P_x^{\pm} \overset{*}{B}{}_x^{\pm})\Big|_{z=\pm d} dx. \qquad (35)$$

Переходя в выражении (35) к фурье-коэффициентам, имеем

$$F_x^{\pm} = \mp\frac{1}{2\mu_0} L\, Im \sum_n{}' D_n^{\pm} \overset{*}{C}{}_n^{\pm}.$$

Связь коэффициентов $C_n^{\pm}$, $D_n^{\pm}$ с токами I_s и решениями систем (31.1) или (31.2) $X_{sn}^{\pm}$ определяется соотношениями

$$C_n^{\pm} = \frac{1}{2}\sum_s I_s (X_{sn}^+ \pm X_{sn}^-),$$

$$D_n^{\pm} = -\frac{1}{2}\sum_s I_s (\xi_n^- X_{sn}^- \pm \xi_n^+ X_{sn}^+).$$

На основе величин I_s, U_s, F_x вычисляются все энергетические характеристики секции РИН. Так, потребляемая комплексная мощность

$$P = \sum_s P_s = \frac{1}{2}\sum_s U_s \overset{*}{I}_s = \frac{1}{2}\sum_{ss'} Z_{ss'} I_{s'} \overset{*}{I}_s.$$

Коэффициент полезного действия $\eta = F_x v / Re P$.

Коэффициент мощности s-ой ветви $\cos\varphi_s = Re P_s / |P_s|$.

Мощность джоулевых потерь в обмотке $Q_1 = \frac{1}{2}\sum_s R_s |I_s|^2$.

Джоулевы потери во вторичной части $Q_2 = Re P - F_x v - Q_1$.

7°. Подытожим результаты работы. Поставлена и решена двухмерная краевая задача, в электродинамическом приближении описывающая многоканальный РИН. Методом разделения переменных Фурье задача сведена к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, через решения которых выражаются локальные и интегральные электромагнитные характеристики насоса.

По полученным зависимостям были рассчитаны характеристики РИН для нескольких вариантов значений параметров модели. Результаты расчётов предполагается опубликовать отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дронник Л.М. и др. Исследование холостого хода многоканальной индукционной машины с объединённой магнитной системой. - В кн.: XI Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Рига: Зинатне, 1984, т. 2, с. 23-26.

2. Аснович Э.З. и др. Экспериментальное исследование многоканальной индукционной машины с объединённой магнитной системой в насосном режиме. - В кн.: XI Рижское совещание по магнитной гидродинамике. Рига: Зинатне, 1984, т. 2, с. 243-246.

3. Завицкий Э.А. Математическая модель линейного асинхронного двигателя. - Известия АН ЛатвССР. Серия физических и технических наук, 1985, № 2, с. 111-118.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им.П.Стучки, с.36-49

УДК 537.84 + 517.962.8

А.Р Чуйжниекс, А.Т.Якович
ЛГУ им. П.Стучки

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ДИСКОВОЙ КАМЕРЕ ПРИ ПРОПУСКАНИИ ТОКА ЧЕРЕЗ ЖИДКИЙ МЕТАЛЛ И НАЛОЖЕНИИ АКСИАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Введение. Практика выдвигает новые требования к МГД-установкам, применяемым в металлургической технологии: необходимо увеличить их производительность, при одновременном увеличении КПД, увеличить долговечность и безопасность их эксплуатации, улучшить качество конечного продукта и др. Задачей ближайшего будущего является создание полностью автоматизированных технологических циклов - непрерывных процессов плавки, обработки и дозирования металла с использованием МГД-установок.

Органичным звеном решения указанных задач в эпоху компьютеризации является численное моделирование МГД-процессов в активных зонах металлургических устройств различной конструкции. При этом,как правило,используются двумерные и трёхмерные математические модели, учитывающие нелинейность процессов и численные методы (метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ) и др.) с их последующей реализацией на ЭВМ. Численному моделированию доступны как электрические и магнитные поля, так и поля скоростей, давления, температуры и др. величин.

I. Физическая модель.

Необходимость исследования стационарного течения жидкого металла в дискообразной области в аксиальном внешнем магнитном поле, при пропускании через область постоянного тока от двух осесимметричных электродов, расположенных произвольно на поверхности области, также определяется приложениями в металлургической технике, в частности, в виде кондукционных центробежных МГД-насосов.

Предполагается, что высота h цилиндрической области, заполненной жидким металлом, существенно меньше диаметра (рис. I), а вязкость, электропроводность и плотность жидкости постоянны. В результате взаимодействия тока, пропускаемого через область, $\vec{j}=(j_r(r,z); 0; j_z(r,z))$ с аксиальным внешним однородным магнитным полем $\vec{B}_0$ возникает азимутальная электромагнитная сила, раскручивающая проводящую жидкость. Взаимодействием тока с собственным магнитным полем b_α определяется наличие также радиальной и аксиальной составляющих силы ($f_r(r,z)$ и $f_z(r,z)$) и возникновение электровихревого течения. Если электроды проницаемы для жидкости, то в результате создавшегося в основном из-за центробежных сил перепада давлений между приосевой и периферийной зонами области возникает транзитное течение. Результирующее течение со скоростью $\vec{V}=(V_r(r,z); V_\alpha(r,z); V_z(r,z))$ формируется при взаимодействии всех указанных факторов и оказывает существенное обратное действие на токи и магнитное поле в области.

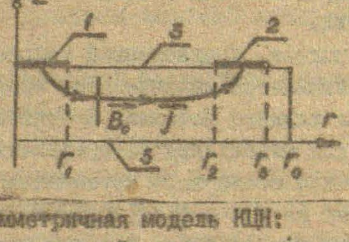


Рис. I. Осесимметричная модель КЦН:
I - центральный электрод - входное отверстие,
2 - периферийный электрод - выходное отверстие.
3 - твердая стенка.

2. Характеристика математических моделей и методов расчёта. Развёрнутый анализ работ, посвящённых численному исследованию движения проводящей жидкости в цилиндрической области при наложении аксиального магнитного поля и пропускании тока через жидкость, приведён в обзоре [I]. Далее укажем на те из них, которые содержат более общие математические постановки задач, решаемых МКР или аналитически.

В работе Калиса и Колесникова [2] рассмотрено вращение жидкости с учётом азимутальной составляющей магнитного поля при пропускании через область в направлении внешнего поля потока жидкости с постоянной скоростью. Не учитывается вихревое течение в меридиональной плоскости, что позволяет задачу определения V_α и H_α решить аналитически модифицированным методом разделения переменных.

Белогравцев в работе [3] МКР исследует стационарное радиальное растекание проводящей жидкости в аксиальном магнитном поле. Так как внешнее напряжение не приложено, то отсутствуют азимутальные составляющие силы и скорости. Решение осуществлено методом Зейделя с использованием уравнения четвёртого порядка для функции тока.

В работе Миллере и др. [4] ток подводится к противоположным торцам цилиндрической области. Кроме взаимодействия тока с аксиальным магнитным полем, учитывается также взаимодействие его с собственным магнитным полем, однако пренебрегается токами, индуцированными движением в магнитном поле. Азимутальное поле находится аналитически, а гидродинамическая часть задачи решается с использованием переменных: азимутальная скорость, функция тока и вихрь скорости – методом переменных направлений.

В математической модели, предложенной Орловым и Головановым [5], также учитывается наличие всех трёх составляющих скорости движения жидкого металла. В отличие от работ [2], [3], [6] для нахождения распределения токов используется уравнение для скалярного потенциала электрического поля, однако так же как в [4] влияние движения на распределение токов не учитывается. Так как игнорируется наличие магнитного поля токов, протекающих в области, то

ЭМ-сила азимутально направлена и возникновение меридионального течения обусловлено только вторичным перетеканием. Уравнение Лапласа для потенциала решается с помощью консервативной локально-одномерной схемы, а решение уравнения Навье-Стокса осуществляется в естественных переменных методом типа SMAC.

В работе Калиса, Колесникова и Полякова [6] дана наиболее полная постановка исследуемой задачи с тремя составляющими скорости при наличии транзитного потока и с учётом азимутальной индукции поля. Так как используются переменные функция тока и вихрь скорости, то транзитный поток зафиксирован заданием граничных условий для функции тока. Задача решается с использованием монотонной векторно-разностной схемы.

3. Математическая модель. Для более полного описания МГД-процессов в сформулированной в пункте I физической модели построена математическая модель [8], учитывающая:

I) взаимодействие радиальной составляющей плотности тока с внешним магнитным полем, определяющее наличие азимутальной составляющей электромагнитной силы;

2) взаимодействие токов с собственным магнитным полем (электровихревой эффект);

3) влияние движения жидкого металла на распределение плотности тока, следствием чего является образование гартмановских пограничных слоёв, перпендикулярных внешнему полю;

4) наличие разности давлений между отверстиями (см. рис. I);

5) возникновение в результате действия факторов I-4 транзитного течения.

Из-за объёмного характера течения необходим учёт всех трёх составляющих скорости в цилиндрической системе координат, а неопределённостью транзитного потока диктуется необходимость использования в расчёте естественных переменных $\vec{V}$ и p.

Кроме того предполагается, что аксиальная и радиальная составляющие магнитного поля, индуцированные токами, протекающими в области, малы - $b_z \sim b_r \ll b_\alpha \sim r_o$.

Полученные при этом описания исследуемых МГД-процессов уравнения Навье-Стокса, магнитной индукции и условие несжимаемости имеют следующую безразмерную форму:

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\alpha^2}{r}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{Re}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}-\frac{v_r}{r^2}\right)-$$

$$-Al\, b_\alpha\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r b_\alpha)-Al\,Rm\,v_r; \qquad (1)$$

$$v_r\frac{\partial v_\alpha}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_\alpha}{\partial z}+\frac{v_r v_\alpha}{r}=\frac{1}{Re}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_\alpha}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial z^2}-\frac{v_\alpha}{r^2}\right)+Al\frac{\partial b_\alpha}{\partial z}; \qquad (2)$$

$$v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)-Al\, b_\alpha\frac{\partial b_\alpha}{\partial z}; \qquad (3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial b_\alpha}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 b_\alpha}{\partial z^2}-\frac{b_\alpha}{r^2}=-Rm\left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial z}-b_\alpha\frac{\partial v_r}{\partial r}-v_r\frac{\partial b_\alpha}{\partial r}-b_\alpha\frac{\partial v_z}{\partial z}-v_z\frac{\partial b_\alpha}{\partial z}\right); \qquad (4)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,$$

где $Re=\frac{r_o V_o}{\nu_{эф}}$ - число Рейнольдса, $Al=\frac{B_o^2}{\rho\mu_o V_o^2}$ - число Альфвена, $Rm=\sigma V_o r_o \mu_o$ - магнитное число Рейнольдса.

При составлении безразмерных параметров используется радиус цилиндрической области r_o, индукция внешнего магнитного поля B_o, характерная скорость V_o, а характерное давление, определяемое по максимуму азимутальной скорости, определено следующим образом: $p_o=\rho V_o^2$.

Условия для b_α на границах области $0 \le r \le 1;\ 0 \le z \le h$ задаютс приближённо на основе закона полного тока [I].

Граничные условия для составляющих скорости традиционные:

I) на непроницаемых стенках задаётся условие прилипания - $\vec{V}=0$;

2) на проницаемых стенках (электродах) - $v_\tau=0, \frac{\partial v_n}{\partial n}=0$.

При отсутствии транзитного потока фиксируется значение давления в одной точке, а при его наличии задаются значения давления на отверстиях.

4. Характеристика методик расчёта. Ввиду относительной сложности задачи и численных алгоритмов её решения, а также с целью выявления численных эффектов осуществлены два подхода к решению задачи: I) конечно-разностный с использованием метода SMAC, реализация которого подробно описана в работе [7]; 2) конечно-элементный с использованием прямого метода решения линеаризованных уравнений [8]. Полученные этим путём результаты сопоставляются с данными, полученными по методике [6]. Методики расчёта реализованы в виде комплексов программ на языке ФОРТРАН для ЕС ЭВМ.

Было проведено сравнение результатов, полученных расчётным путём, с точными для ряда тестовых задач (течение Пуазейля в единичном квадрате; течение в тороидальной трубе прямоугольного сечения; вращение жидкости в бесконечно длинном цилиндре и др.).

Сравнение результатов, полученных при использовании метода SMAC и МКЭ, проводилось также для исследуемого течения при высоте области равной радиусу (для метода SMAC использовалась сетка IOxIO точек, а для МКЭ триангуляция, состоящая из 46 элементов). Установлено хорошее совпадение результатов, получаемых обоими методами с результатами, полученными по методике [6] с переменными вихрь скорости функция тока. Однако использование МКЭ и метода Гауса для решения полученной системы алгебраических уравнений с матрицей ленточного типа даже при указанном ограниченном числе элементов требует существенно больших ресурсов ЭВМ, нежели метод SMAC при тех же параметрах задачи. При указанной дискретизации области и значениях числа Рейнольдса порядка 10^2 время решения задачи на ЭВМ ЕС 1060 МКЭ составляет примерно 30 минут, а методом SMAC менее двух минут, причём ресурсы памяти, необходимые в последнем случае, более чем в 10 раз меньше, что позволяет осуществить решение задачи методом SMAC на ЭВМ средней мощности, например, ЕС-1022.

Преимущества метода SMAC определяются также тем, что может быть исследовано развитие нестационарного течения и нет необходимости фиксировать величину транзитного потока, что неизбежно при использовании метода, предложенного в работе [6]. По этим причинам подавляющее большинство расчётов было проведено по программе, реализующей метод SMAC с использованием сеток порядка 51х21 узловых точек.

Трудности, связанные с расчётом течений, в которых конвекция существенно преобладает над диффузией, в одинаковой степени проявляется во всех трёх подходах: в явном методе SMAC необходимо уменьшать временной и пространственный шаги сетки; при использовании переменных ω , ψ ухудшается сходимость итерационного процесса; в МКЭ растёт количество итераций Пикара. Таким образом, во всех случаях растёт необходимое для расчёта машинное время и память.

5. Анализ результатов расчёта. Для выявления общих закономерностей течения проводились расчёты в интервале изменения внешнего поля от 0,1 до 1,5 Тл и тока от 0,1 до 2 кА, в результате чего соотношение b_α/B_0 менялось в пределах от 0,002 до 0,6. При радиусе цилиндрической области r_0 =0,3 М, высоте h =0,2 и r_1 =0,2; r_2 =0,8, r_3 =1,0 (см. рис. 1) исследовались два режима течения:

1) Входное и выходное отверстия закрыты - транзитный поток через область отсутствует, т.е. расход $Q=0$.

2) Входное и выходное отверстия открыты ($Q\neq 0$) и между ними задаётся разность давлений, характеризующая внешние условия. В частности проводились расчёты при

$$\Delta p_{12} = p_{вых} - p_{вх} = 0 \div 10.$$

Электропроводность и плотность жидкого металла соответствуют олову: $\sigma = 2\cdot 10^6 (См\cdot м)^{-1}$; $\rho = 7\cdot 10^3$ кг/м^3, а значение эффективной вязкости $\nu_{эф}$ менялось в пределах $1,5\div 3\ 10^{-4}$ м^2/с. При этом в зависимости от B_0, I и Δp_{12} безразмерные параметры в уравнениях (1-4) менялись в следующих пределах: Re =10÷300, $R_m \leqslant 0,3$; Al =1÷200.

В результате расчётов, подобным работам [1], [2], [6], проявляется эффект Гартмана - вытеснение тока из основной части области и образование при росте числа Гартмана тонких токовых и гидродинамических пограничных слоёв с толщиной $\sim 1/Ha$ перпендикулярно внешнему полю. Если при малых значениях числа Ha азимутальное магнитное поле по высоте растёт плавно, то при больших Ha, в связи с вытеснением тока в пограничные слои, b_α в средней по высоте части области практически постоянно (рис. 2).

В отсутствии транзитного потока $Q=0$ давление по радиусу быстро меняется в приосевой части области, что определяется интенсивностью вращения при $r \approx r_1$ и тем, что $p \sim \int_0^r V_\alpha^2/r\,dr$, а при $r > 2r_1$ давление меняется мало. Перепады давления в вертикальном направлении малы по сравнению с перепадами в радиальном направлении и с перепадами, полученными в расчётах в отсутствии меридионального течения ($V_r = V_z = 0$). Течение в меридиональной плоскости в виде двух тороидальных вихрей практически симметричных к среднему сечению ячейки $z=h/2$ способствует выравниванию давления в области. Симметрия разделений скорости, в т.ч. азимутальной, относительно плоскости $z=h/2$ обусловлена симметрией распределения тока $j_r \sim \partial b_\alpha/\partial z$ (см. рис. 2) относительно этой плоскости, несмотря на несимметричный токоподвод (рис. I).

Наличие положительного транзитного потока $Q>0$ при открытых входном и выходном отверстиях всегда приводит к уменьшению максимальной абсолютной скорости вращения жидкости по сравнению со случаем замкнутого течения $Q=0$, сглаживанию максимума, который наблюдается в распределении по радиусу при $r \approx r_1$ в отсутствии транзитного потока и смещению его в сторону выходного отверстия. Это обусловлено тем, что часть мощности ЭМ сил тратится на закручивание аксиально направленного потока жидкости, непрерывно поступающей через входное отверстие, а закрученная масса жидкости радиальным потоком сносится в сторону выходного отверстия (конвективный перенос азимутального количества движения в меридиональном сечении). При $Q<0$ наоборот - "пик" в распределении $V_\alpha(r)$ усиливается (рис. 3), смещается в сторону оси и растёт максимально абсолютное значение V_α, что является следствием частичного сохранения момента импульса в потоке.

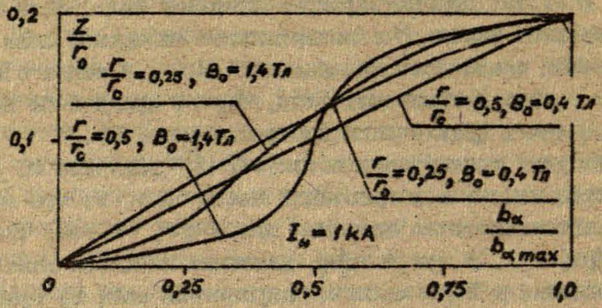


Рис. 2. Нормированные распределения азимутальной составляющей магнитного поля по высоте.

При $\Delta p_{12}=0$ расход Q всегда положителен, интенсивность вращения и радиального потока растёт с ростом индукции внешнего поля (рис. 4.а,б), а также с увеличением тока, пропускаемого через область (рис. 4.б,в и 5.а,б). Если при малых значениях I и B_0 распределения V_r по высоте зазора близки к параболическому (рис. 5.а), то с ростом тока и поля наблюдается усиление вихревого движения в меридиональной плоскости, усиливается отрыв течения у верхнего торца области вблизи входного отверстия, что является непосредственным результатом роста Q, а также результатом усиления электровихревых эффектов при росте I; появляется также донный вихрь (рис. 5.б). Усиление паразитических вихрей в меридиональной плоскости увеличивает гидродинамическое сопротивление транзитному потоку и тормозит дальнейший рост Q. Так как поток является радиально расширяющимся, то около выходного отверстия ($r_2 > 4r_1$) скорости потока несколько раз меньше скоростей при $r = r_1$ и замкнутые вихри в меридиональной плоскости в обследованном интервале изменения параметров не наблюдаются. Увеличение транзитного потока

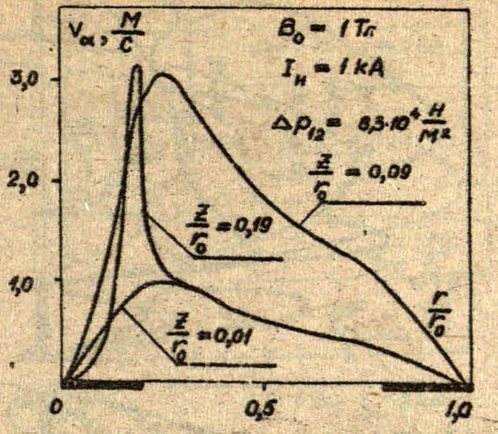


Рис. 3. Распределение азимутальной составляющей скорости по радиусу при наличии противодавления.

(рис. 4 и 5) приводит к существенным перестроениям в распределениях азимутальной скорости: растёт неоднородность распределения V_α по r по сравнению со случаем $Q = 0$; из-за поступления незакруглённых масс жидкости вблизи края центрального электрода скорость вращения существенно падает - наблюдается "овраг" (рис. 4.б,в); в межэлектродной зоне $r_1 < r < r_2$ распределение азимутальной скорости становится колоколообразной. Кроме того, параболическое распределение скоростей на входе переходит в распределение с максимумом вблизи края входного отверстия и минимумом на оси симметрии (рис. 6). Этому, как и рециркуляционному движению, при больших токах способствует также электровихревой эффект, который в данных расчётах из-за относительно большого радиуса центрального электрода проявляется умеренно.

При $\Delta p_{12} > 0$ в зависимости от физических параметров модели может наблюдаться как положительный ($Q > 0$), так и отрицательный ($Q < 0$) расход жидкого металла. Рост противодавления влечёт за собой не только снижение расхода, но и усиливает рециркуляционное движение непосредственно на входе и выходе. Распределение давления в области при $\Delta p_{12} > 0$

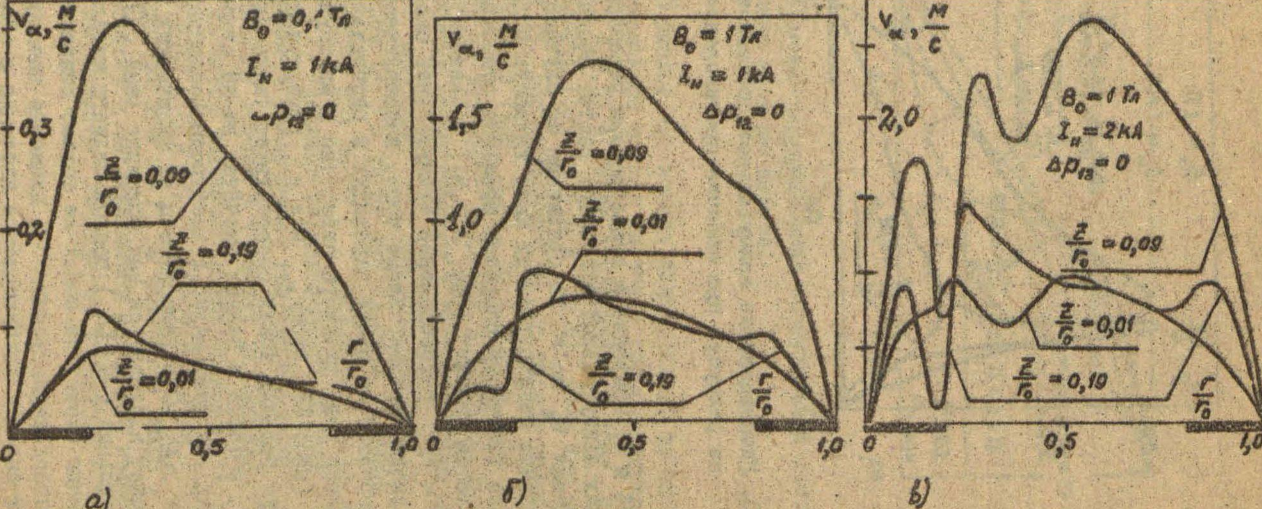
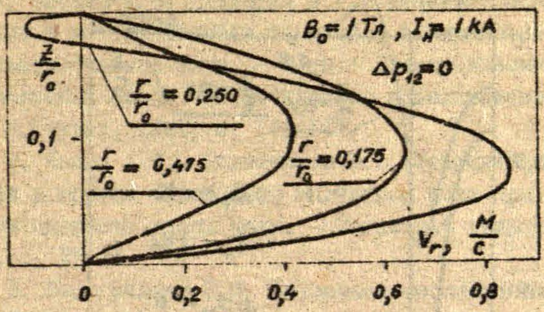
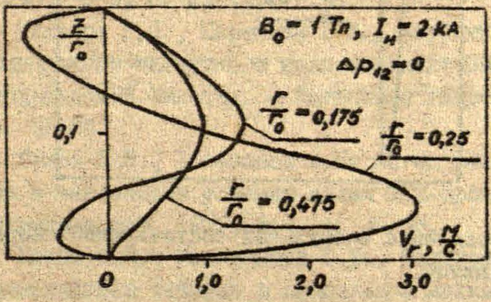


Рис. 4. Распределение азимутальной составляющей скорости по радиусу.



а)



б)

Рис. 5. Распределение радиальной составляющей скорости по высоте при разных значениях тока.

практически полностью определяется заданной разностью давлений: по вертикали давление меняется мало, а по радиусу меняется таким же образом, как в случае отсутствия транзитного потока-при $r > 2r_1$ давление близко к постоянному.

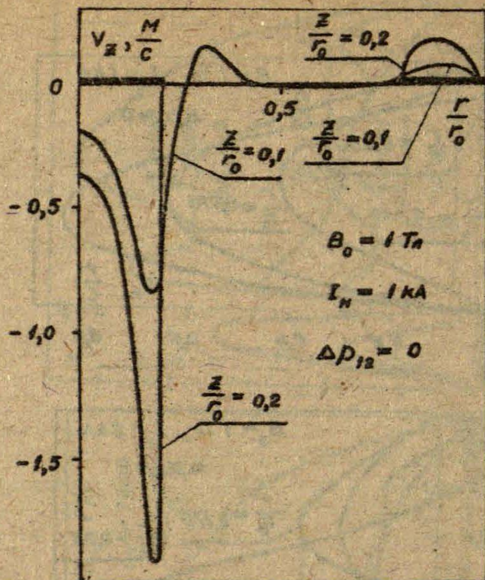


Рис. 6. Распределение аксиальной составляющей скорости по радиусу.

Выводы.

I. Сформулирована и уточнена осесимметричная математическая модель для исследования МГД-течения в дискообразной области во внешнем аксиальном магнитном поле при пропускании тока через неё (раздел 3).

2. Проведено тестирование и опробование двух осуществлённых методик расчёта (МКЭ и МКР) выявило преимущества МКР с применением метода SMAC (раздел 4).

3. Исследованы качественные особенности течений при положительном и отрицательном транзитных потоках, по сравнению со случаем замкнутого МГД-течения (раздел 5).

ЛИТЕРАТУРА

I. Якович А.Т., Булыгин Л.Л., Дзенитис О.Я. Некоторые модели и методы расчёта течений в кондукционном МГД-насосе центробежного типа. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 146-167.

2. Калис Х.Э., Колесников Ю.Б. Исследование единичного вихря в осевом однородном магнитном поле при наличии компоненты скорости вдоль поля. - Магнитная гидродинамика, 1981, № 1, с. 29-35.

3. Белогривцев В.М. Численное исследование стационарного МГД-течения в радиальном канале. - Магнитная гидродинамика, 1980, № 3, с. 69-72.

4. Миллере Р.П., Шарамкин В.И., Щербинин Э.В. О влиянии продольного магнитного поля на электровихревое течение в цилиндрической ёмкости. - Магнитная гидродинамика, 1980, № 1, с. 81-85.

5. Орлов Л.П., Голованов А.П. Метод расщепления в применении к численному решению задач МГД-вращения. - Магнитная гидродинамика, 1979, № 4, с. 35-38.

6. Калис Х.Э., Колесников Ю.Б., Поляков А.Н. Исследование вращающегося течения в продольном магнитном поле. - Магнитная гидродинамика, 1983, № 1, с. 71-76.

7. Павлов С.И. О выборе метода численного расчёта движения расплава в индукционной тигельной печи. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Промышленные процессы и устройства. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1983, с.3-21.

8. Якович А.Т., Калис Х.Э., Муйжниекс А.Т. Численное исследование течения в узком зазоре, перпендикулярном полю, при пропускании тока через проводящую жидкость. - В кн.: XI Рижское совещание по МГД. Саласпилс: ИФ АН ЛатвССР, 1984, т.I, с. 63-66.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им.П.Стучки, с.50-62

УДК 517.955.8:537.84

О.Я.Дзенитис
ЛГУ им. П.Стучки

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МГД

I. Постановка задачи

Рассмотрим движение жидкого металла в цилиндрической ячейке при взаимодействии постоянного тока, подводимого через концентрически расположенные электроды, и аксиально направленного постоянного магнитного поля (рис. I).

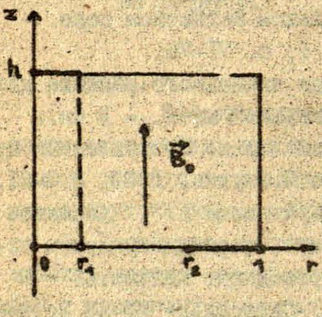


Рис. I.

Такая модель обладает аксиальной симметрией и её расчёт в безиндукционном приближении, считая, что радиальная v_r и аксиальная v_z составляющие скорости движения металла пренебрежимо малы по сравнению с азимутальной составляющей v_α , сводится к решению следующей задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r v_\alpha\right), \\ &\Delta v_\alpha - \left(\frac{1}{r^2} + Ha^2\right) v_\alpha = - Ha^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \\ &\Delta := \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=0} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=1} = 0, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = F_0(r), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=h} = F_1(r), \\ &v_\alpha|_{z=0} = v_\alpha|_{z=h} = v_\alpha|_{r=0} = v_\alpha|_{r=1} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где φ - безразмерный потенциал, нормированный по отношению к Φ_0 ; v_α - безразмерная азимутальная составляющая скорости, нормированная по отношению к V_0 ; так что

$$\left.\begin{aligned} &\varphi = \Phi/\Phi_0 ; \quad v_\alpha = V_\alpha/V_0 ; \\ &F_0(r) = \frac{r_1^2 j}{1-r_2^2}\eta(r-r_2) ; \\ &F_1(r) = j\left[\eta(r) - \eta(r-r_1)\right] \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$Ha = \frac{B_0 r_0 \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\nu\rho}} ; \quad V_0 = \frac{\Phi_0}{r_0 B_0} ; \quad (4)$$

η - единичная функция; j - плотность тока в центральном электроде; r_0 - радиус ячейки. Остальные обозначения - стандартные.

Методом разделения переменных получено, что

$$\varphi(r,z,Ha) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z,Ha) J_0(\xi_k r)/J_0^2(\xi_k), \quad (5)$$

$$v_\alpha(r,z,Ha) = 2\sum_{k=0}^{\infty} v_{\alpha k}(z,Ha) J_1(\xi_k r)/J_0^2(\xi_k). \quad (6)$$

В этих формулах: ξ_k - неотрицательные корни уравнения

$$J_1(\xi) = 0,$$

причём $\xi_0 = 0$; а φ_k и $V_{\alpha k}$ являются решениями задач

$$\varphi_k'' - \xi_k^2 \varphi_k - \xi_k V_{\alpha k} = 0 \ (7); \ \varphi_k'(0) = F_{0k}, \ \varphi_k'(h) = F_{1k}; \qquad (9)$$

$$V_{\alpha k}'' - \lambda_k^2 V_{\alpha k} - \xi_k Ha^2 \varphi_k = 0 \ (8); \ V_{\alpha k}(0) = V_{\alpha k}(h) = 0; \qquad (10)$$

$$\lambda_k^2 = Ha^2 + \xi_k^2, \quad k = 0; 1; 2; \ldots$$

F_{0k}, F_{1k} – коэффициенты Фурье функций F_0 и F_1 соответственно.

Задачи (7) - (10) и вместе с тем и задачи (1) и (2) можно решить точно. Однако выражения для φ_k и $V_{\alpha k}$ очень громоздки и, кроме того, при значениях числа Гартмана $Ha > 50$ алгоритм счёта неустойчив. А расчёты по разностным схемам для $Ha > 50$ требуют большого машинного времени. В реальных МГД-установках индукция внешнего поля B_0 достигает больших величин, что приводит к значениям $Ha = 10^4 \div 10^6$. В такой ситуации, естественно, целесообразно получить асимптотические формулы для φ и V_α при $Ha \to \infty$. Основной целью настоящей статьи как раз является нахождение асимптотических формул для φ и V_α при $Ha \to \infty$.

Для нахождения этих формул мы предположим, что ряды в (5) и (6) сходятся равномерно по $Ha \in [Ha_0, \infty[$, $Ha_0 > 0$. Тогда нахождение асимптотических формул для φ и V_α можно свести к нахождению асимптотик для φ_k и $V_{\alpha k}$, т.е. для решений задач (7) - (10).

2. Асимптотика решений задач (7) - (10)

Если $k = 0$, то из (7) - (10) получаем

$$\varphi_0'' = 0, \ \varphi_0'(0) = F_{00}, \ \varphi_0'(h) = F_{10},$$

$$V_{\alpha 0}'' - Ha^2 V_{\alpha 0} = 0, \ V_{\alpha 0}(0) = V_{\alpha 0}(h) = 0,$$

т.к. $\xi_0 = 0$. В данном случае решение не зависит от Ha и, следовательно, точное и асимптотическое решения совпадают. Действительно,

$$V_{\alpha 0} \equiv 0, \ \varphi_0 = C_0 + F_{00} z = C_0 + F_{10} z,$$

ибо

$$F_{00} = \int_0^1 r F_0(r) dr = \frac{r_1^2 j}{1-r_2^2} \int_{r_2}^1 r\,dr = \frac{r_1^2}{2} j;$$

$$F_{10} = \int_0^1 r F_1(r) dr = j \int_0^{r_1} r\,dr = \frac{r_1^2}{2} j = F_{00}.$$

Если $k \neq 0$, т.е. $k=1,2,\ldots$, то точное и асимптотическое решения (7) - (I0) не совпадают, причём асимптотические решения существенно проще. Найдём их.

Исключая из системы (7) - (I0), например, $v_{\alpha k}$, приведём (7) - (I0) к задачам

$$\varphi_k^{IV} - (Ha^2 + 2\xi_k^2)\varphi_k'' + \xi_k^4 \varphi_k = 0, \quad k = 1,2,\ldots \tag{II}$$

$$\varphi_k'(0) = F_{0k};\ \varphi_k'(h) = F_{1k};\ \xi_k^{-1}\varphi_k''(0) - \xi_k\varphi_k(0) = 0;\ \xi_k^{-1}\varphi_k''(h) - \xi_k\varphi_k(h) = 0 \tag{I2}$$

Корни характеристических уравнений для (II) представим в виде

$$\alpha_{k1} = -\varepsilon^{-1}\varkappa_k;\ \alpha_{k2} = \varepsilon^{-1}\varkappa_k;\ \alpha_{k3} = -\varepsilon\mu_k;\ \alpha_{k4} = \varepsilon\mu_k, \tag{I3}$$

$$\varepsilon := Ha^{-1};$$

$$\varkappa_k = 1 + (\varepsilon\xi_k)^2 + O(\varepsilon^4\xi_k^4),\ \varepsilon \to 0, \tag{I4}$$

$$\mu_k = \xi_k\left[1 - (\varepsilon\xi_k)^2 + O(\varepsilon^4\xi_k^4)\right],\ \varepsilon \to 0, \tag{I5}$$

а систему фундаментальных решений уравнения (II) - в виде вектор-функции

$$\vec{u}_k = \left(\frac{\varepsilon}{\varkappa_k} e^{-\frac{\varkappa_k z}{\varepsilon}},\ \frac{\varepsilon}{\varkappa_k} e^{-\frac{\varkappa_k (h-z)}{\varepsilon}},\ \frac{\operatorname{ch} \varepsilon\mu_k z}{\varepsilon\mu_k},\ \frac{\operatorname{sh} \varepsilon\mu_k z}{\varepsilon\mu_k}\right). \tag{I6}$$

$\vec{u}_k$, принимая во внимание (I4) и (I5), можно выразить как сумму

$$\vec{u}_k = \vec{u}_k^1 + \varepsilon \vec{u}_k^2. \tag{I7}$$

Здесь

$$\vec{u}_k^1 = \left(0,\ 0,\ \frac{1}{\varepsilon\xi_k^2},\ z\right), \tag{I8}$$

а компоненты вектора $\vec{u}_k^2$ равномерно по $z \in [0,h]$ ограничены при $\varepsilon \to 0$. Общее решение уравнения (II) можно написать так

$$\varphi_k = (\vec{u}_k(z), \vec{a}_k),\quad \vec{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, a_{k4}). \tag{I9}$$

Подставляя (I9) в (I2), получим систему уравнений для определения вектора постоянных интегрирования $\vec{a}_k$, которую можно записать в виде матричного уравнения

$$A_k \vec{a}_k = \vec{\xi}_k . \tag{20}$$

В этом уравнении

$$A_k = \begin{Vmatrix} \vec{u}_k'(0) \\ \vec{u}_k'(h) \\ \dfrac{\vec{u}_k''(0)}{\xi_k} - \xi_k \vec{u}_k(0) \\ \dfrac{\vec{u}_k''(h)}{\xi_k} - \xi_k \vec{u}_k(h) \end{Vmatrix} ; \quad \vec{\xi}_k = \begin{Vmatrix} F_{0k} \\ F_{1k} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} . \tag{21}$$

Подобно вектору $\vec{u}_k$, матрицу A_k также можно выразить как сумму

$$A_k = B_k + \varepsilon C_k , \tag{22}$$

где матрица

$$B_k = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{\varepsilon \xi_k} & 0 & -\dfrac{1}{\varepsilon \xi_k} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\varepsilon \xi_k} & -\dfrac{1}{\varepsilon \xi_k} & -h\xi_k \end{Vmatrix} ,$$

а элементы матрицы C_k ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Матрица B_k неособая и имеет обратную матрицу

$$B_k^{-1} = \begin{Vmatrix} -(1+\varepsilon h \xi_k^2) & 1 & \varepsilon \xi_k & -\varepsilon \xi_k \\ -1 & 1+\varepsilon h \xi_k^2 & -\varepsilon \xi_k & \varepsilon \xi_k \\ -(1+\varepsilon h \xi_k^2) & 1 & -\varepsilon \xi_k (1+\varepsilon h \xi_k^2) & -\varepsilon \xi_k \\ 1 & 1 & \varepsilon \xi_k & -\varepsilon \xi_k \end{Vmatrix} \frac{1}{2+\varepsilon h \xi_k^2} . \tag{23}$$

Очевидно, элементы матрицы B_k^{-1} ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Теорема. Если

1) матрица $A = B + \varepsilon C$, A, B, C - $n \times n$ матрицы,

2) существует B^{-1},

3) элементы матриц B^{-1} и C ограничены при $\varepsilon \to 0$, то

$A^{-1} = B^{-1} + \varepsilon D$, причём

элементы матрицы D ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Сперва докажем теорему для более простого случая

$E = I + \varepsilon F$, I - единичная матрица,

т.е. докажем, что

$$E^{-1} = (I + \varepsilon F)^{-1} = I + \varepsilon H,$$

и элементы матрицы H ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Как известно

$$E^{-1} = |E|^{-1} \| E_{ki} \|,$$

$|E|$ - определитель матрицы E,

E_{ik} - алгебраическое дополнение элемента e_{ik} матрицы E.

Принимая во внимание выражение характеристического многочлена матрицы F, получим, что

$$|E| = |I + \varepsilon F| = (-\varepsilon)^n \left| -\tfrac{1}{\varepsilon} I - F \right| = (-\varepsilon)^n \left[\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^n - \varphi_1(F)\left(-\tfrac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (-1)^n \varphi_n(F) \right] = 1 + \varphi_1(F)\varepsilon + \ldots + \varphi_n(F)\varepsilon^n = 1 + o(1), \varepsilon \to 0;$$

$$E_{ii} = 1 + \varphi_1(\|F_{ii}\|)\varepsilon + \ldots + \varphi_{n-1}(\|F_{ii}\|)\varepsilon^{n-1} = 1 + O(\varepsilon), \varepsilon \to 0,$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

В этих формулах

$\varphi_r(F)$ - сумма всех главных миноров порядка r матрицы F, $r = 1, 2, \ldots, n$; $\|F_{ii}\|$ - матрица, получаемая из F путем вычеркивания i строки и i столбца.

Оценим элементы E_{ik}, $i \neq k$. Они равны со знаком "+" или "-" определителю матрицы $\|F_{ik}\|$, получаемой из E путём вычёркивания i -ой строки и k -ого столбца. Очевидно, матрица $\|E_{ik}\|$ имеет столбец $(\varepsilon f_{1i}, \varepsilon f_{2i}, \ldots, \varepsilon f_{i-1,i},$ $\varepsilon f_{i+1,i}, \ldots, \varepsilon f_{n,i})$ и строку $(\varepsilon f_{k1}, \varepsilon f_{k2}, \ldots, \varepsilon f_{k,k-1},$ $\varepsilon f_{k,k+1}, \ldots, \varepsilon f_{k,n})$, а все остальные столбцы и строки содержат элемент $1+\varepsilon\xi_{jj}$, $j\neq i,k$. Но так как определитель матрицы является алгебраической суммой произведений, содержащих один и только один элемент из каждой строки и каждого столбца, то ясно, что E_{ik} имеет со знаком "+" или "-" слагаемое

$$(1+\varepsilon\xi_{11})\dots(1+\varepsilon\xi_{k-1,k-1})(1+\varepsilon\xi_{k+1,k+1})\dots(1+\varepsilon\xi_{i-1,i-1})\cdot$$
$$\cdot(1+\varepsilon\xi_{i+1,i+1})\dots(1+\varepsilon\xi_{nn})\varepsilon\xi_{ki},$$

и слагаемые, каждый из которых содержит множитель типа $\varepsilon\xi_{\ell m}$. Отсюда видно, что многочлен E_{ik} (относительно ε) не содержит свободного члена и равен $O(\varepsilon)$, $\varepsilon\to 0$.

Таким образом,

$$E_{ik}=\delta_{ik}+O(\varepsilon),\ \varepsilon\to 0;\quad \delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$$

а

$$\frac{E_{ki}}{|E|}=\frac{\delta_{ki}+O(\varepsilon)}{1+o(1)}=[\delta_{ki}+O(\varepsilon)][1+o(1)]=\delta_{ki}+$$
$$+\varepsilon\left[\delta_{ki}\frac{o(1)}{\varepsilon}+\frac{O(\varepsilon)}{\varepsilon}+\frac{O(\varepsilon)o(1)}{\varepsilon}\right]=\delta_{ki}+\varepsilon O(1),\ \varepsilon\to 0.$$

Следовательно,

$$E^{-1}=(I+\varepsilon F)^{-1}=I+\varepsilon H,\ h_{ij}=O(1),\ \varepsilon\to 0, \tag{24}$$

и теорема для матрицы E доказана.

Очевидно, доказательство теоремы для общего случая сводится к определению матрицы D и доказательству ограниченности элементов D при $\varepsilon\to 0$.

Так как $AA^{-1}=I$, то для определения D получим уравнение

$$(B+\varepsilon C)(B^{-1}+\varepsilon D)=I \quad \text{или} \quad D(B+\varepsilon C)=-B^{-1}C.$$

Умножая обе части последнего равенства, например, справа на $(B+\varepsilon C)^{-1}=B^{-1}+\varepsilon D$, получим, что

$$D=-B^{-1}CB^{-1}-\varepsilon B^{-1}CD \quad \text{или} \quad (I+\varepsilon B^{-1}C)D=-B^{-1}CB^{-1}.$$

Отсюда

$$D=-(I+\varepsilon B^{-1}C)^{-1}B^{-1}CB^{-1}$$

или, учитывая (24),

$$D = -(I + \varepsilon H) B^{-1} C B^{-1}.$$

Теорема доказана, т.к. элементы матрицы, полученной путём умножения матриц с ограниченными элементами при $\varepsilon \to 0$ – ограничены.

Согласно этой теореме решение уравнения (20)

$$\vec{a}_k = A_k^{-1} \vec{\xi}_k = (B_k^{-1} + \varepsilon D_k) \vec{\xi}_k = B_k^{-1} \vec{\xi}_k + \varepsilon D_k \vec{\xi}_k,$$

или, вводя обозначения

$$\vec{b}_k := B_k^{-1} \vec{\xi}_k, \quad \vec{d}_k := D_k \vec{\xi}_k, \tag{25}$$

$$\vec{a}_k = \vec{b}_k + \varepsilon \vec{d}_k, \tag{26}$$

причём компоненты вектора $\vec{d}_k$ ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Подставляя (17) и (26) в (19), будем иметь

$$\varphi_k = (\vec{u}_k^1 + \varepsilon \vec{u}_k^2, \vec{b}_k + \varepsilon \vec{d}_k) = (\vec{u}_k^1, \vec{b}_k) +$$
$$+ \varepsilon [(\vec{u}_k^1, \vec{d}_k) + (\vec{u}_k^2, \vec{b}_k)] + \varepsilon^2 (\vec{u}_k^2, \vec{d}_k) =$$
$$= (\vec{u}_k^1, \vec{b}_k) + o(1), \quad \varepsilon \to 0. \tag{27}$$

Таким образом,

$$\varphi_k \sim \frac{F_{1k} - (1 + \varepsilon h \xi_k^2) F_{0k}}{2 + \varepsilon h \xi_k} \cdot \frac{1}{\varepsilon \xi_k^2} + \frac{F_{1k} + F_{0k}}{2 + \varepsilon h \xi_k^2} \cdot z, \quad \varepsilon \to 0 \tag{28}$$

Но

$$\frac{F_{1k} - (1 + \varepsilon h \xi_k^2) F_{0k}}{2 + \varepsilon h \xi_k} \cdot \frac{1}{\varepsilon \xi_k^2} + \frac{F_{1k} + F_{0k}}{2 + \varepsilon h \xi_k^2} \cdot z \sim \frac{F_{1k} - F_{0k}}{2\varepsilon \xi_k^2}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Поэтому, пользуясь свойством транзитивности эквивалентных функций, также

$$\varphi_k \sim \frac{F_{1k} - F_{0k}}{2\varepsilon \xi_k^2}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{29}$$

Получим асимптотические формулы для функций $v_{\alpha k}$.

Из уравнений (7) и равенств (19) следует, что

$$v_{\alpha k} = \left(\frac{\vec{u}_k'' - \xi_k^2 \vec{u}_k}{\xi_k}, \vec{a}_k \right),$$

или

$$v_{\alpha k} = (\vec{W}_k, \vec{a}_k), \tag{30}$$

где

$$\vec{W}_k = \frac{\vec{u}_k'' - \xi_k^2 \vec{u}_k}{\xi_k} = \left(\left(\frac{\varkappa_k}{\varepsilon \xi_k} - \frac{\varepsilon \xi_k}{\varkappa_k} \right) e^{-\frac{\varkappa_k z}{\varepsilon}}, \left(\frac{\varkappa_k}{\varepsilon \xi_k} - \frac{\varepsilon \xi_k}{\varkappa_k} \right) e^{-\frac{\varkappa_k (h-z)}{\varepsilon}}, \right.$$

$$\left. \left(\frac{\varepsilon \mu_k}{\xi_k} - \frac{\xi_k}{\varepsilon \mu_k} \right) ch\, \varepsilon \mu_k z, \left(\frac{\varepsilon \mu_k}{\xi_k} - \frac{\xi_k}{\varepsilon \mu_k} \right) sh\, \varepsilon \mu_k z \right). \tag{31}$$

Вектор $\vec{W}$ также выразим как сумму двух векторов

$$\vec{W}_k = \vec{W}_k^1 + \varepsilon \vec{W}_k^2. \tag{32}$$

Вектор

$$\vec{W}_k^1 = \left(\frac{e^{-z/\varepsilon}}{\varepsilon \xi_k}, \frac{e^{-(h-z)/\varepsilon}}{\varepsilon \xi_k}, -\frac{1}{\varepsilon \xi_k}, -\xi_k z \right), \tag{33}$$

а компоненты вектора $\vec{W}_k^2$ равномерно по $z \in [0, h]$ ограничены при $\varepsilon \to 0$.

Подставляя выражения для $\vec{W}_k$ из (32) и для $\vec{a}_k$ из (26), получим, что

$$v_{\alpha k} = (\vec{W}_k^1 + \varepsilon \vec{W}_k^2, \vec{b}_k + \varepsilon \vec{d}_k) = (\vec{W}_k^1, \vec{b}_k) + \varepsilon [(\vec{W}_k^1, \vec{d}_k) +$$

$$+ (\vec{W}_k^2, \vec{b}_k)] + \varepsilon^2 (\vec{W}_k^2, \vec{d}_k) = (\vec{W}_k^1, \vec{b}_k) + o(1), \ \varepsilon \to 0.$$

После подстановки выражений для $\vec{W}_k^1$ из (33) и $\vec{b}_k$ из (25) в это равенство будем иметь

$$v_{\alpha k} \sim \frac{1 + \varepsilon h \xi_k^2}{2 + \varepsilon h \xi_k^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon \xi_k} \left[F_{0k} (1 - e^{-z/\varepsilon}) - F_{1k} e^{-(h-z)/\varepsilon} \right] -$$

$$- \frac{1}{2 + \varepsilon h \xi_k^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon \xi_k} \left[F_{1k} (1 - e^{-z/\varepsilon}) + F_{0k} e^{-(h-z)/\varepsilon} - \varepsilon \xi_k^2 z (F_{0k} + F_{1k}) \right],$$

$$\varepsilon \to 0. \tag{34}$$

Но правая часть этого эквивалентного равенства эквивалентна при $\varepsilon \to 0$ также выражению

$$\frac{1}{2 \varepsilon \xi_k} (F_{1k} - F_{0k}) (e^{-z/\varepsilon} + e^{-(h-z)/\varepsilon} - 1).$$

Пользуясь опять же свойством транзитивности эквивалентных функций, также

$$V_{\alpha k} \sim \frac{(F_{1k}-F_{0k})(e^{-z/\varepsilon}+e^{-(h-z)/\varepsilon}-1)}{2\varepsilon\xi_k}, \quad \varepsilon\to 0. \qquad (35)$$

Таким образом, для φ_k и $V_{\alpha k}$ получены две пары асимптотических формул: (28), (34) и (29), (35). Из самого построения пары формул (2.), (35) ясно, что она применима для очень больших значений Ha.

3. Асимптотика решения задачи (I) + (2)

Выше найденным двум парам асимптотик для φ_k и $V_{\alpha k}$ соответствуют две пары асимптотик решения задачи (I) + (2). Эти пары мы получим, подставляя асимптотики для φ_k и $V_{\alpha k}$ из (28), (34) и (29), (35) в ряды формул (5), (6).

Рассмотрим асимптотику, соответствующую паре формул (29), (35). Принимая во внимание нормировку, (см. формулы (3),(4)), получим, что асимптотика размерного потенциала

$$\Phi \sim \Phi_0\left[r_1^2 j z + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_{1k}-F_{0k}}{\xi_k^2}\cdot\frac{J_0(\xi_k r)}{J_0^2(\xi_k)} + z\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(F_{0k}+F_{1k})\frac{J_0(\xi_k r)}{J_0^2(\xi_k)}\right] + \mathrm{const}., \qquad (36)$$

а асимптотика размерной азимутальной скорости

$$V_\alpha \sim \bar V_0 A(z,\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_{1k}-F_{0k}}{\xi_k}\cdot\frac{J_1(\xi_k r)}{J_0^2(\xi_k)},$$
$$\bar V_0 = \frac{\Phi_0\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\nu\rho}}, \qquad (37)$$

$$A(z,\varepsilon) = e^{-z/\varepsilon}+e^{-(h-z)/\varepsilon}-1. \qquad (38)$$

Суммы рядов, входящих в эти асимптотические формулы можно вычислить. Для этой цели сперва заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(F_{0k}+F_{1k})\frac{J_0(\xi_k r)}{J_0^2(\xi_k)} = \frac{F_0(r)+F_1(r)}{2} - r_1^2 j. \qquad (39)$$

Далее, обозначая

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{F_{1k}-F_{0k}}{\xi_k}\cdot\frac{J_1(\xi_k r)}{J_0^2(\xi_k)} = S(r),$$

принимая во внимание, что

$$\frac{d J_1(\xi_k r)}{dr} = \xi_k J_0(\xi_k r) - \frac{1}{r} J_1(\xi_k r),$$

и формально дифференцируя ряд почленно, получим

$$S'(r) = \sum_{k=1}^{\infty} [F_{1k} - F_{0k}] \frac{J_0(\xi_k r)}{J_0^2(\xi_k)} - \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{1k} - F_{0k}}{\xi_k} \cdot \frac{J_1(\xi_k r)}{J_0^2(\xi_k)}. \qquad (40)$$

Последнее равенство равносильно уравнению

$$r S' + S = r \frac{F_1(r) - F_0(r)}{2}. \qquad (41)$$

Его решение

$$S(r) = \frac{1}{2r} \int_0^r \tau [F_1(\tau) - F_0(\tau)] d\tau + \frac{C}{r}.$$

Из ограниченности S в $r = 0$ следует, что $C = 0$; и после вычисления интеграла, получаем

$$S(r) = \frac{j}{4} \begin{cases} r, & r \in [0, r_1], \\ r_1^2/r, & r \in [r_1, r_2], \\ \frac{r_1^2}{r} \cdot \frac{1 - r^2}{1 - r_2^2}, & r \in [r_2, 1]. \end{cases} \qquad (42)$$

Обозначая

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_{1k} - F_{0k}}{\xi_k^2} \cdot \frac{J_0(\xi_k r)}{J_0^2(\xi_k)} = S_1(r),$$

принимая во внимание, что

$$\frac{d J_0(\xi_k r)}{dr} = - \xi_k J_1(\xi_k r),$$

и опять дифференцируя почленно, получим

$$\frac{dS_1}{dr} = - S.$$

Отсюда после интегрирования имеем

$$S_1(r) = \text{const} + \frac{r_1^2 j}{8} \begin{cases} (r/r_1)^2, & r \in [0, r_1], \\ 1 + \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)^2, & r \in [\ , r_2], \\ \frac{1 - r^2}{1 - r_2^2} + \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + \frac{1}{1 - r_2^2} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right)^2, & r \in [r_2, 1] \end{cases} \qquad (43)$$

Таким образом, окончательно будем иметь

$$\phi \sim \phi_0 \left[\frac{F_0(r) + F_1(r)}{2} z + \frac{1}{2} S_1(r) \right], \ \varepsilon \to 0 \tag{44}$$

$$V_\alpha \sim \overline{V}_0 A(z, \varepsilon) S(r), \ \varepsilon \to 0. \tag{45}$$

Здесь S, S_1, A заданы формулами (42), (43), (37) соответственно.

4. Анализ полученных результатов

Рассмотрим асимптотическую формулу (45) для V_α. Как явствует из формулы (38) для функции A, профиль скорости при $\varepsilon \to 0$, $(H_a \to \infty)$ становится всё более трапецоидальным. За исключением тонких слоёв, прилегающих к стенкам ячейки, перпендикулярным внешнему полю $\vec{E}_0$, скорость по высоте ячейки меняется мало. Назовём гартмановскими пограничные слои ячейки, прилегающие к стенкам, перпендикулярным внешнему полю, и координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{\max_z |V_\alpha(r,z)|}{\max_z |V_\alpha(r,z)| - |V_\alpha(r,z)|} = e. \tag{46}$$

Так как $\max_z |V_\alpha(r,z)|$ соответствует значению $z = h/2$, то (46) эквивалентно уравнению

$$\frac{1 - 2\exp\left(-\frac{h}{2\varepsilon}\right)}{-2\exp\left(-\frac{h}{2\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{z}{\varepsilon}\right) + \exp\left(-\frac{h-z}{\varepsilon}\right)} = e.$$

Решая его, получаем, что

$$(z_H)_1 \sim \varepsilon \ ; \ (z_H)_2 \sim h - \varepsilon, \ \varepsilon \to 0. \tag{47}$$

Следовательно, толщина гартмановского слоя, т.е. слоя, в котором быстро изменяется величина скорости, эквивалентна ε (или H_a^{-1}) и стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Это означает, что в гартмановском слое возникают большие градиенты скорости. Но эти явления - трапецоидальность профиля скорости и возникновение больших градиентов -, как известно, носят название эффекта Гартмана, наблюдаемого при стационарном ламинарном течении в поперечном магнитном поле.

В ядре течения, т.е. в области $]0,1[\times]\varepsilon, h-\varepsilon[$, асимптотику скорости определяет функция (см. (42)), которая совпадает с асимптотикой в ядре, полученной и физически объяснённой другими авторами [I].

Таким образом, асимптотическая формула (45) хорошо согласуется с физическими представлениями.

ЛИТЕРАТУРА

I. Калис Х.Э., Колесников Ю.Б. Численное исследование единичного вихря вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости в осевом однородном магнитном поле. - Магнитная гидродинамика, 1980, № 2, с. 57-61.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 63-67

УДК 621.745.3

Ю.А.Крылов, В.И.Платонов, В.В.Фёдоров
ВНИИ электротермического оборудования,
г.Москва

ИССЛЕДОВАНИЯ ПОГРУЖНОГО МГД-НАСОСА ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Во многих отраслях промышленности требуются магнитогидродинамические устройства для дозированной разливки расплавов металлов. Разработанные ранее погружные МГД-насосы постоянного тока с дисковой рабочей зоной надёжны по конструкции, применимы для литья изделий из свинца, олова и подобных им сплавов. Однако их главный недостаток, присущий всем кондукционным насосам, заключается в необходимости силового понижающего трансформатора, выпрямителя и шинопроводов, рассчитанных на 3,5 кА. Указанное оборудование, кроме того, занимает значительные производственные площади. Поэтому поставлена задача разработки и исследования погружного МГД-насоса с индукционным (трансформаторным) способом подвода тока.

Подобно насосам постоянного тока [1], принцип действия заключается во взаимодействии радиальной составляющей тока дисковой камеры с синфазным магнитным потоком, перпендикулярным плоскости этой камеры. За счёт этого взаимодействия происходит вращение расплава, в результате между центральным заборным и периферийным раздаточным патрубками центробежные силы создают разность давлений.

Отличительной конструктивной чертой насоса переменного тока является наличие замкнутого магнитопровода с первичной катушкой, охватывающей дисковую камеру, которая совместно с

...тным и раздаточным патрубками образует вторичный виток. ...кции создания тока и потока в рабочей зоне для уменьшения габаритов насоса совмещены в одном магнитопроводе.

С целью определения энергетических и расходных характеристик МГД-насоса переменного тока проведено физическое моделирование. Рабочая среда - олово, питание осуществлялось от сети 380 В через однофазный тиристорный регулятор напряжения типа РНТО-63. Диаметр и высота дисковой камеры составили 0,13 м и 0,011 м соответственно, сечение магнитопровода 0,08х0,09 м.

На рис. 1 приведены вольтамперные характеристики насоса. Кривая 1 получена при числе витков первичной катушки 140, кривая 2 - при 150 и кривая 3 - при 160. Все кривые имеют линейный участок и участок, обусловленный насыщением магнитной системы. Из этих кривых выбрано оптимальное число витков с точки зрения насыщения магнитной системы и использования всего диапазона регулируемого напряжения, равного 150.

На рис. 2 показана зависимость расхода расплава от тока первичной катушки. Кривая 1 - для случая с указанными параметрами. Характеристика практически линейна, максимальный расход составил 4,0 кг/с при токе 140 А и высоте подъёма расплава над зеркалом 0,67 м.

Исследуемый насос переменного тока прост по устройству, технологичен в изготовлении. Габариты составили 0,44х0,35х х0,4 м.

Разработаны аналогичные насосы других габаритов на другие мощности. Один из вариантов исследуемого МГД-насоса испытан в промышленных условиях и внедрён на Новосибирском оловокомбинате в установке вакуумного рафинирования. При разработке исходили из конкретных технологических требований: величины расхода, габаритов, высоты подъёма. Его расходная характеристика при высоте подъёма 0,35 м представлена кривой 2 на рис. 2. Параметры насоса: диаметр и высота рабочей камеры 0,130 м и 0,011 м соответственно, сечение магнитопровода 0,07х0,07 м, число витков первичной катушки 175.

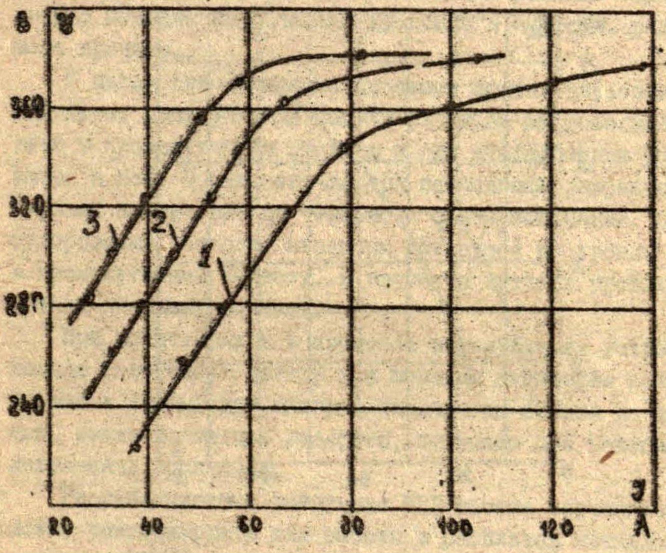


Рис. I. Вольт-амперная характеристика погружного МГД-насоса переменного тока

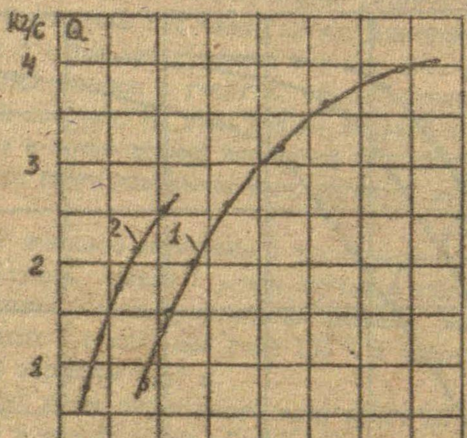


Рис. 2. Зависимость расхода расплава от тока первичной катушки

Установка вакуумного рафинирования представляет собой вакуумный аппарат с испарительными тарелями и раздельными сливными желобами для рафинированного металла и включений. Подача чернового расплава в вакуумную камеру осуществляется по металлопроводу из промежуточной ёмкости под действием разности давлений в вакуумной камере и ёмкости (барометрический столб расплава). Важным технологическим параметром является расход чернового олова в вакуумную камеру, который необходимо стабилизировать. Основным возмущающим фактором является изменение уровня расплава в ванне и ёмкости. В действующем устройстве стабилизация расхода осуществлялась с помощью игольчатого дросселя в ёмкости, регулируемого вручную.

С целью автоматизации процесса подачи чернового олова МГД-насос применён для подачи расплава из основной ванны печи в промежуточную ёмкость и для стабилизации уровня расплава в ней. В этом случае при постоянном разряжении в вакуумной камере расход чернового олова постоянен. Система регулирования расхода выполнена замкнутой по уровню расплава в промежуточной ёмкости. В качестве датчика уровня применён датчик стержневого типа.

При испытаниях и в процессе эксплуатации устройство показало устойчивую работу при широком диапазоне колебаний уровня в плавильной камере. Устройство просто по конструкции, имеет небольшие габариты, пригодно для подобных технологических процессов.

Разрабатываемые погружные МГД-насосы переменного тока можно рекомендовать для работы в расплавах металлов до температуры 500°С, таких, как свинец, олово, кадмий, теллур и других, в качестве дозатора и перемешивателя.

Литература

1. А.с. 679783 (СССР). Устройство для откачки жидкого металла / Д.Г.Быховский, А.Н.Панов. - Опубл. в Б.И., 1979, № 30.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им.П.Стучки, с.68-78

УДК 519.615:537.311.31+537.622.4

В.Я.Ауза, Я.Р.Круминьш, ЛГУ им. П.Стучки

Н.Н.Устинов, ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

Б.М.Шикин
завод "РЭЗ"

КОМПЛЕКСНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ И УДЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ВИХРЕТОКОВЫМ МЕТОДОМ

Одним из наиболее информативных параметров физических свойств материалов изделий являются магнитная проницаемость μ и удельная электрическая проводимость σ. Эти параметры представляют большой практический интерес, так как они связаны с электронным строением кристаллов, дефектами структуры, химическим составом изделий.

Разработке методов измерения μ и σ посвящен ряд работ [1, 2]. Однако, как правило, измерение этих величин выполняется раздельно, причём σ магнитных материалов определяется в основном контактными методами, и для измерения μ используются шихтованные образцы.

При определении физических свойств сплошных проводящих изделий, изготовленных из магнитных материалов в условиях крупномасштабного производства возникает необходимость быстрого бесконтактного измерения μ и σ на основе вихретокового метода [2].

В сплошном изделии магнитная проницаемость μ и удельная электропроводность σ тесно связаны между собой, поскольку на величину магнитного потока оказывают влияние вихревые токи. В связи с этим измерение одной из указанных характеристик невозможно без информации о величине другой.

В настоящей работе рассмотрен бесконтактный метод одновременного измерения μ и σ для сплошного, магнитного, цилиндрически симметричного изделия (рис. I), с помощью проходных наружных датчиков (рис. 2). Наличие двух датчиков объясняется тем, что в ходе работы определялся более подходящий проходкой датчик для данного типа изделий и используемой математической модели. Датчик a намотан из провода марки ПЭЛ диаметром 0,4 мм. Индуктивность L и активное сопротивление датчика без образца составляют соответственно L = 43,02 мГн и R =38,5 Ом. Число витков w =750.

Для фиксации положения детали в датчике через центр проходит цилиндрический стержень, изготовленный из текстолита, а дно датчика залито эпоксидной смолой толщиной 30 мм. Датчик δ намотан из провода марки ПЭЛ диаметром 0,28 мм, число витков 375, высота витков 3I мм. Индуктивность L и активное сопротивление R датчика без образца составляет соответственно L =I0,6 мГн и R =22 Ом.

Деталь помещается в датчике (рис. 2), к которому прикладывается переменное синусоидальное напряжение U. Через датчик проходит ток I, который смещается по отношению к напряжению на угол φ_0. Рассматривая одномерную математическую модель длинного датчика и магнитопровода, получаем, что отношение магнитного потока в датчике с магнитопроводом к магнитному потоку в датчике без магнитопровода равно

$$\Phi = \eta\mu \frac{2 I_1(z)}{z I_0(z)}, \qquad (I)$$

где $\eta = \frac{a^2-b^2}{a_0^2}$; a - внешний радиус детали, b - внутренний радиус детали; a_0 - радиус датчика; μ - относительная магнитная проницаемость; $z=\sqrt{\mu_0\mu\omega\sigma(a^2-b^2)i}$; $i=\sqrt{-1}$; μ_0 - магнитная проницаемость вакуума; $\omega=2\pi f$ - круговая частота; f - частота; I_0, I_1 - модифицированные функции Бесселя.

Поток Φ является комплексной величиной и его можно выразить через вещественную A и мнимую B части

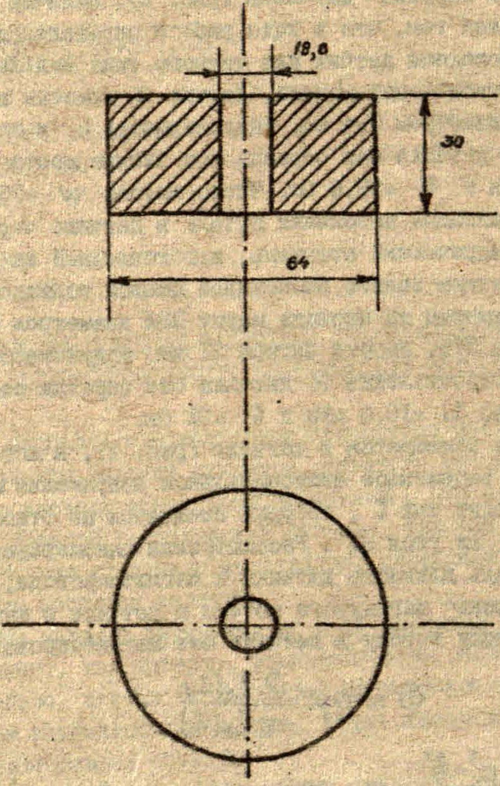


Рис. I. Магнитопровод

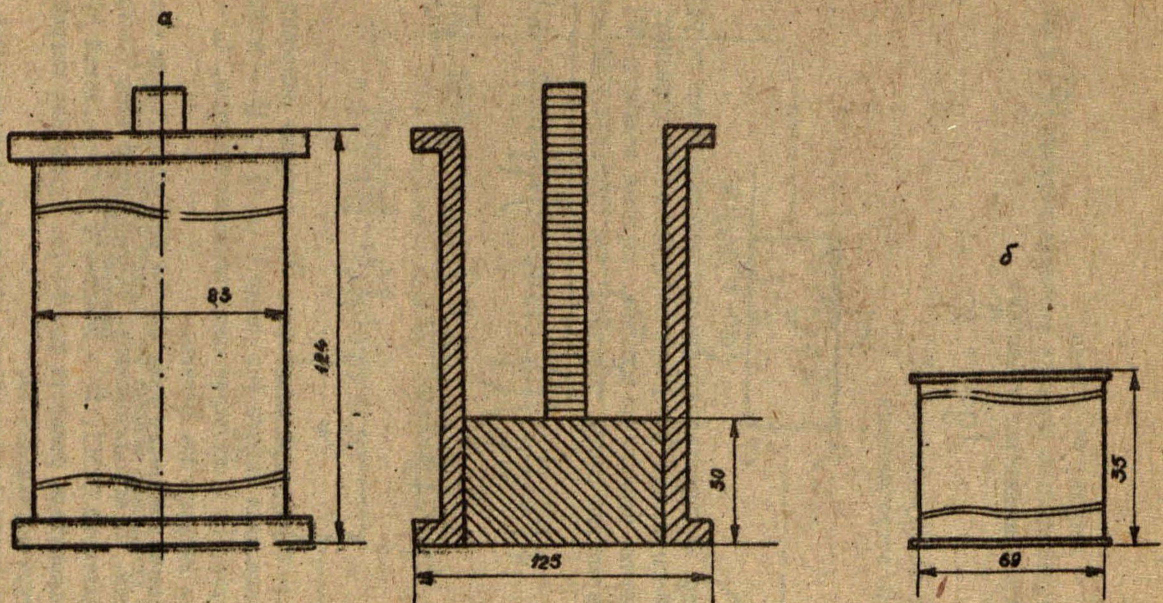


Рис. 2. Проходные наружные датчики

$$\Phi = |\Phi| e^{i\alpha} = 2\eta\mu(A + Bi), \qquad (2)$$

где $|\Phi|$ - модуль; α - фаза.

Эксперементально измеряя значения величин $|\Phi|$ и α, получаем трансцендентное уравнение

$$tg\alpha = \frac{B}{A}, \qquad (3)$$

из которого определяется Z.

После этого находим

$$\mu = \frac{|\Phi|}{2\eta\sqrt{A^2+B^2}}; \qquad (4)$$

$$\sigma = -\frac{z^2 i}{(a^2-b^2)\mu_0\mu\omega} \qquad (5)$$

На рис. 3 представлена фазометрическая схема по реализации данного метода [3] при определённых допущениях: образец и датчик бесконечно длинные. Выражая величины $|\Phi|$ и $tg\alpha$ через параметры схемы, получаем, что относительный поток равен

$$|\Phi| = \frac{1}{\omega L}\sqrt{\left(\frac{U}{I}\cos\varphi_0 - R\right)^2 + \left(\frac{U}{I}\sin\varphi_0 - \omega L(1-\eta)\right)^2}; \qquad (6)$$

$$tg\alpha = \left(\frac{U}{I}\cos\varphi_0 - R\right) / \left[\frac{U}{I}\sin\varphi_0 - \omega L(1-\eta)\right]; \qquad (7)$$

$$\varphi_0 = arctg\left[\left(1+\frac{R_1}{R}\right)tg\varphi\right], \qquad (8)$$

где φ - измеряемый сдвиг фаз, R_1 - опорное сопротивление для определения сдвига фаз между U и I, U - напряжение на катушке, R - активное сопротивление катушки, L_0 - индуктивность катушки без детали.

В схеме измерения угла сдвига фаз между током и напряжением (рис. 3) использовались: ЗГ-генератор типа ТЗ-33; A - ампервольтметр Ц4311; B - вольтметр универсальный В7-16; Φ - измеритель разности фаз Ф2-16. Суммарная погрешность аппаратуры составляет 2%.

Далее приводятся значения магнитной проницаемости и удельной электропроводности, полученные при обработке эксп -

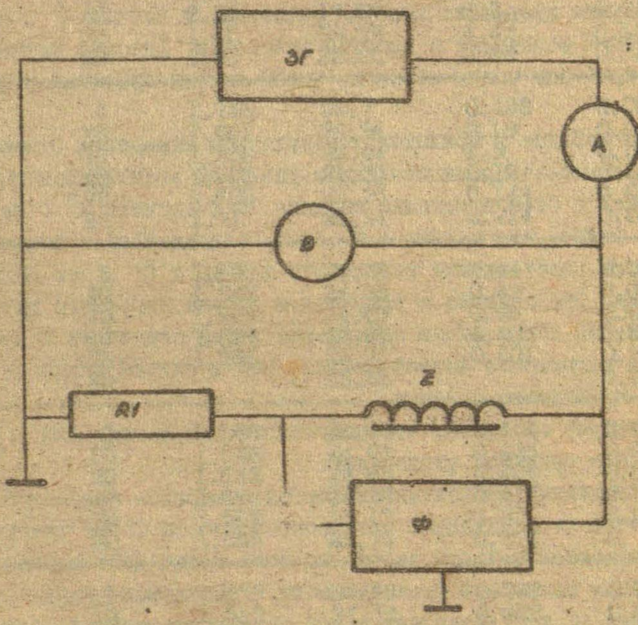


Рис. 3. Схема измерения сдвига фаз между током и напряжением

риментальных данных при помощи формул (3) - (8) на ЭВМ ЕС-1022. Трансцендентное уравнение (3) решается методом хорд.

Наибольшая ошибка при определении относительной магнитной проницаемости μ и удельной электрической проводимости σ появляется при обработке экспериментальных данных, так как одномерная модель длинного соленоида с сердечником не полностью правдоподобна для нашего случая: высота и диаметр прессовки одного порядка. Для отыскания возможности снижения экспериментальной ошибки были сделаны два проходных наружных датчика (рис. 2). Датчик a, высота которого в четыре раза превышает высоту прессовки, и датчик δ, высота которого совпадает с высотой прессовки. Диаметр датчика δ был подобран таким образом, чтобы датчик прилегал к прессовке.

В таблице I приводятся результаты измерения относительной магнитной проницаемости и удельной электропроводности для Ст3 и Ст45 с помощью датчика a и датчика δ. Из таблицы I видно, что датчик с высотой, совпадающей с высотой сердечника, даёт лучшие результаты для μ и σ, чем длинный датчик. Это связано с тем, что в случае короткого датчика магнитный поток лучше замыкается через сердечник и рассеивания магнитного потока меньше, чем в случае длинного наружного проходного датчика.

Следует отметить, что полученные результаты для μ и σ являются средними значениями.

Изложенный бесконтактный метод измерения магнитной проницаемости μ и удельной электропроводности σ не требует больших подготовительных работ, но этот метод даёт заниженные значения магнитной проницаемости. Наибольшая ошибка при определении μ и σ появляется при математической обработке экспериментальных данных, так как одномерная математическая модель недостаточно хорошо описывает физическую картину протекающих явлений. Относительный поток Φ для деталей, высота которых того же порядка, что и радиус, меньше, чем для длинных деталей. Одномерная математическая модель даёт достоверные результаты при определённых допущениях: деталь и датчик бесконечно длинные. Поэтому для получения более точных результа-

Таблица I

Результаты измерений для определения μ и σ бесконтактным методом с помощью разных катушек возбуждения

f	I	Ст45			
Гц	mA	μ_a	$\mu_б$	$\sigma_a \cdot 10^{-6}$	$\sigma_б \cdot 10^{-6}$
20	5	2.06	36.7I	4.98	0.065
	I0	I.74	29.57	3.23	0.I7
	20	I.58	27.38	I9	0.26
	40	2.04	I7.67	2.3	0.9I
	70	I.5I	36.98	4.42	0.I2
	90	I.58	33.0[illegible]	3.63	0.I4
40	5	I.746	26.7	0.436	0.068
	I0	I.62I	26.96	0.I9	0.04
	20	I.356	25.44	I.9	0.037
	40	I.728	2I.38	0.I2	0.062
	70	I.695	28.25	0.I44	0.002
	90	I.7I	28.24	0.2I4	0.0I6
80	5	I.59	24.24	0.44	0.0062
	I0	I.547	24.35	0.49	0.0I55
	20	I.524	24.63	0.58	0.02
	40	I.584	23.85	0.405	0.043
	70	I.586	25.3I	0.40I	0.02
	90		25.43		0.024
I00	5	I.588	24.82	0.4I4	0.026
	I0	I.546	24.67	0.425	0.023
	20	I.543	24.88	0.42I	0.027
	40	I.564	24.28	0.414	0.058
	70	I.569	25.I7	0.39	0.024
	90	I.564	24.99	0.372	0.[illegible]3
I60	5	I.5[illegible]3	24.I9	0.386	0.032
	I0	I.5I9	24.I9	0.272	0.032
	20	I.5I5	24.63	0.[illegible]8I	0.027
	40	I.52I	24.I9	0.3I7	0.033
	70	I.55	24.29	0.286	0.025
	90	I.542	24.I4	0.248	0.024

μ_a - с длинным датчиком

$\mu_б$ - с коротким датчиком

Продолжение таблицы I

f	I	Ст3			
Гц	mA	μ_a	$\mu_б$	$\sigma_a \cdot 10^{-6}$	$\sigma_б \cdot 10^{-6}$
20	5	2.054	37.46	4.04	0.068
	I0	I.7I2	30.23	2.9I4	0.I6
	20	I.II8	27.88	I6.98	0.2I
	40	2.I94	I7.99	I.366	0.8
	70	I.839	38.0I	3.8I4	0.I
	90	I.863	33.75	3.I88	I.2
40	5	I.792	27.72	0.272	0.073
	I0	I.643	27.82	0.I05	0.045
	20	I.376	25.97	I.583	0.049
	40	I.8	22.22	0.II8	0.047
	70	I.745	29.4	0.036	0.0II8
	90	I.7I5	29.29	0.056	0.0028
80	5	I.63	25.29	0.306	0.0048
	I0	I.59	25.33	0.592	0.0042
	20	I.586	25.68	0.408	0.0076
	40	I.6I8	24.9	0.306	0.028
	70	I.626	26.35	0.283	0.0I
	90	I.627	26.4	0.259	0.0I3
I00	5	I.6I2	25.75	0.30I	0.0I5
	I0	I.579	25.79	0.344	0.02I
	20	I.603	25.86	0.233	0.0I7
	40	I.608	25.4I	0.2II	0.025
	70	I.6I6	26.23	0.238	0.0I4
	90	I.609	26	0.252	0.0I9
I60	5	I.58I	24.97	0.22	0.0I9
	I0	I.583	25.07	0.2I	0.022
	20	I.58I	25.85	0.246	0.02
	40	I.585	25.3I	0.25I	0.025
	70	I.604	25.59	0.2	0.0I9
	90	I.604	25.29	0.I74	0.0I7

μ_a – с длинным датчиком

$\mu_б$ – с коротким датчиком

тов необходимо результаты измерений обрабатывать по двухмерной математической модели. Однако такая модель даёт громоздкое решение, которым трудно оперировать. Поэтому в конкретных измерениях более целесообразно ввести поправочный коэффициент. Так в формуле (4) можно ввести поправочный коэффициент K_n и написать, что

$$\mu = \frac{K_n \cdot |\Phi|}{2\eta\sqrt{A^2+B^2}}\ .$$

Поправочный коэффициент определяется экспериментально.

Одним из наиболее простых является метод, основанный на измерении индуктивности тороида. На двух образцах (рис. I), изготовленных из Ст3 и Ст45, медным проводом диаметром 0,28 мм были намотаны замкнутые тороидальные катушки. Чтобы учесть влияние геометрических размеров при определении магнитной проницаемости μ , из стали Ст3 и Ст45 были выточены два кольца, высота и внешний диаметр которых совпадал с размерами образцов. Толщина стен колец 2 мм. Этим же проводом и на кольцах были намотаны замкнутые тороидальные катушки. Индуктивность L тороидальных катушек при частоте 100 Гц измерялась универсальным измерителем Е7-II, после чего магнитная проницаемость определялась по формуле

$$\mu = \frac{L \cdot l}{\mu_0 \omega^2 S}\ , \tag{9}$$

где L - индуктивность тороида, l - длина средней линии тороида, S - сечение тороида, ω - число витков, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

В таблице 2 приведены результаты измерений индуктивности L и полученные по формуле (9) результаты магнитной проницаемости μ .

Результаты измерений показывают, что магнитная проницаемость μ для деталей из одной и той же стали по разным r_{min} сильно отличается. Это объясняется тем, что величина скин-слоя для стали имеет порядок 2-3 мм при частоте 100 Гц и следовательно для деталей с r_{min} =30 мм магнитное поле при частоте f =100 Гц полностью пронизывает деталь. Но для деталей с r_{min} =9,3 мм объём, который фактически использует-

..я как магнитопровод, уменьшается примерно 4-6 раз. Следовательно, для деталей из стали с радиусом r_{min} =9,3 мм получаем заниженное значение μ (для стали Ст3 - 5,3 раза, для Ст45 - 5,4 раза) по сравнению с деталями с r_{min} =30 мм.

Таблица 2

Значения индуктивности L и относительной магнитной проницаемости μ для образцов с тороидальной замкнутой катушкой

Материал	h (мм)	r_{max} (мм)	r_{min} (мм)	W	L (mH)	μ
Ст3	30	32	30	564	21	171,7
Ст3	30	32	9,3	496	52,3	32,45
Ст45	30	32	30	564	13,7	112,0
Ст45	30	32	9,3	564	43,4	20,82

Сравнивая полученные результаты относительной магнитной проницаемости для Ст3 и Ст45 при r_{min} =9,3 ранее полученными с помощью короткого проходного датчика при f =100 Гц, получаем хорошее совпадение. Это значит, что при определении бесконтактным методом с помощью короткого проходного датчика, для деталей с электропроводностью порядка 10^6 надо для получения достоверных результатов ввести поправочный коэффициент K_n =5-6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кифер И.И. Испытания ферромагнитных материалов. - М.: Энергия, 1969. - 197 с.

2. Неразрушающий контроль металлов и изделий / Под ред. Г.С.Самойлова. - М.: Машиностроение, 1976. - 456 с.

3. Бахтачников Л.А. и др. Определение характеристик материала сплошных цилиндрических изделий. - Дефектоскопия, 1980, № 8, с. 5-9.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.79-87

УДК 517.632:537.811

В.Я.Ауза , Я.Р.Круминьш
ЛГУ им. П.Стучки

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТА ДЛЯ ЗАМЫКАНИЯ КОНТАКТОВ

Для замыкания электроконтактов кроме обычных реле используются и электромагниты специальной формы. В данной работе рассматриваются математическая модель, алгоритм и результаты численного расчёта на ЭВМ цилиндрического электромагнита. На рис. I приводится половина аксиального сечения электромагнита. При исследовании замыкателя контактов, учитывая, что электромагнит имеет выраженную осевую симметрию, будем считать, что сила замыкания контактов F и индукция магнитного поля B не зависят от угла α в цилиндрической системе координат r, α, z.

Реальная конструкция имеет несколько выступов крепления, которые мало влияют на распределение магнитного поля.

Дискретность структуры обмотки не будем учитывать и примем, что в области обмотки протекает ток с усреднённой плотностью тока

$$\vec{J} = (0, J, 0) . \tag{I}$$

Будем исследовать зависимость индукции магнитного поля и электромагнитной силы от геометрии электромагнита, тока в обмотке и магнитных свойств материалов. Для этого необходимо найти магнитное поле в электромагните, обмотке и воздухе.

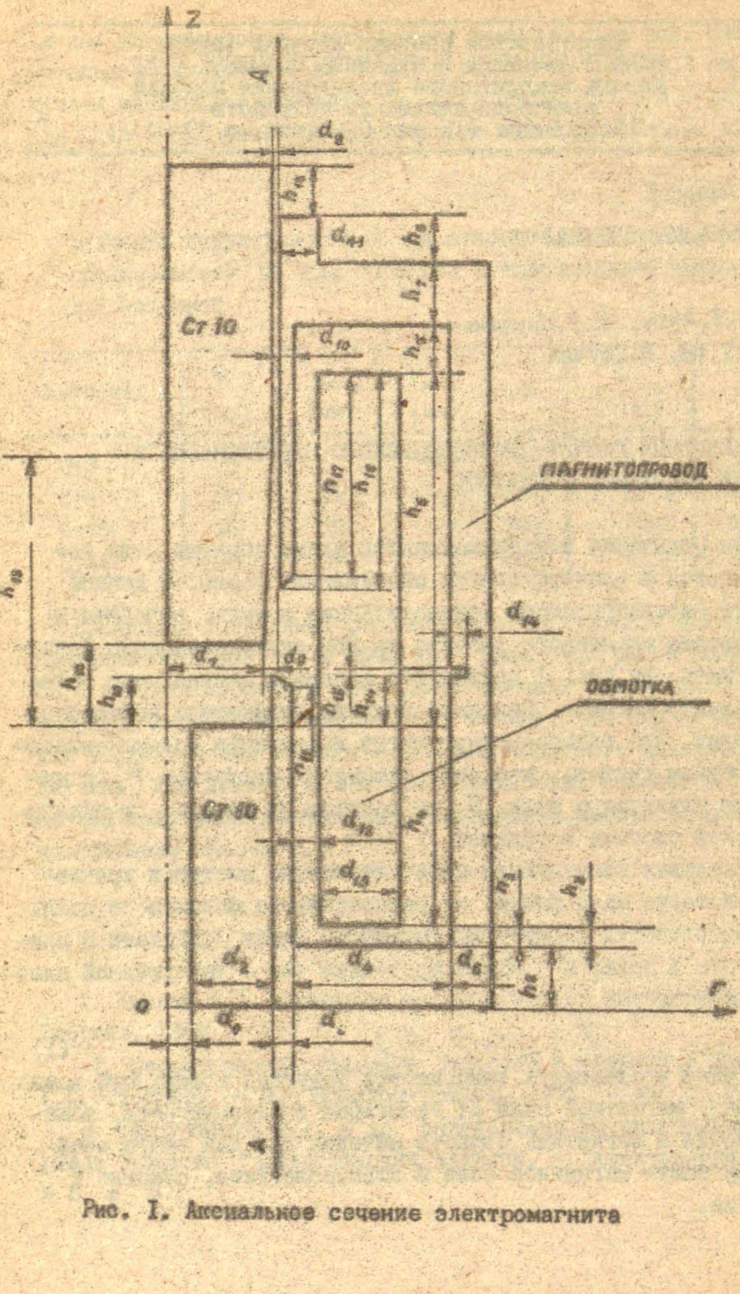


Рис. I. Аксиальное сечение электромагнита

Применим теорему о циркуляции напряжённости $\vec{H}$ магнитного поля

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \iint_S \vec{J} d\vec{s}. \qquad (2)$$

Введём величину ν, обратную магнитной проницаемости по формуле

$$\nu = 1/\mu. \qquad (3)$$

Магнитную индукцию $\vec{B} = \mu \vec{H}$ будем искать через векторный потенциал магнитного поля $\vec{A}$, который связан с $\vec{B}$ соотношением

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\, \vec{A} \qquad (4)$$

В рассмотренной постановке задачи векторный потенциал $\vec{A}$ имеет только одну (угловую) компоненту

$$\vec{A} = (0, A, 0). \qquad (5)$$

Из уравнения (2), учитывая (3) и (4), получаем

$$\oint (\nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA) dz - \nu \frac{\partial A}{\partial z} dr) = \iint_S \vec{J} d\vec{s}. \qquad (6)$$

Величина ν зависит от индукции магнитного поля $\vec{B}$ в ферромагнетиках (магнитопроводе), поэтому уравнение (6) нелинейно по отношению к A и его необходимо решить численно на ЭВМ.

Будем считать, что в бесконечности источников электромагнитного поля нет, следовательно

$$\lim_{r \to \infty} A = 0 \quad , \quad \lim_{z \to \infty} A = 0. \qquad (7)$$

Для получения конечно-разностных уравнений используется неравномерная расчётная сетка с шагами h_j, $j = 1, 2, \ldots, L$ по оси r и с шагами h_k, $k = 1, 2, \ldots, N$ по оси z. Будем считать, что обратная величина магнитной проницаемости ν и плотность тока J в пределах расчётной ячейки (рис. 2) не меняются. После интегрирования уравнения (6) по замкнутому контуру I-2-3-4-I получаем конечно-разностное уравнение для векторного потенциала в узловой точке 0:

$$A_{jk} = (r_{j-1} C_{j-1,k} A_{j-1,k} + r_{j+1} C_{jk} A_{j+1,k} + e_{j,k-1} A_{j,k-1} + e_{jk} A_{j,k+1} + 0{,}5(S_{jk} + S_{j-1,k} + S_{j,k-1} + S_{j-1,k-1})) / (r_j C_{jk} + r_j C_{j-1,k} + e_{jk} + e_{j,k-1}), \qquad (8)$$

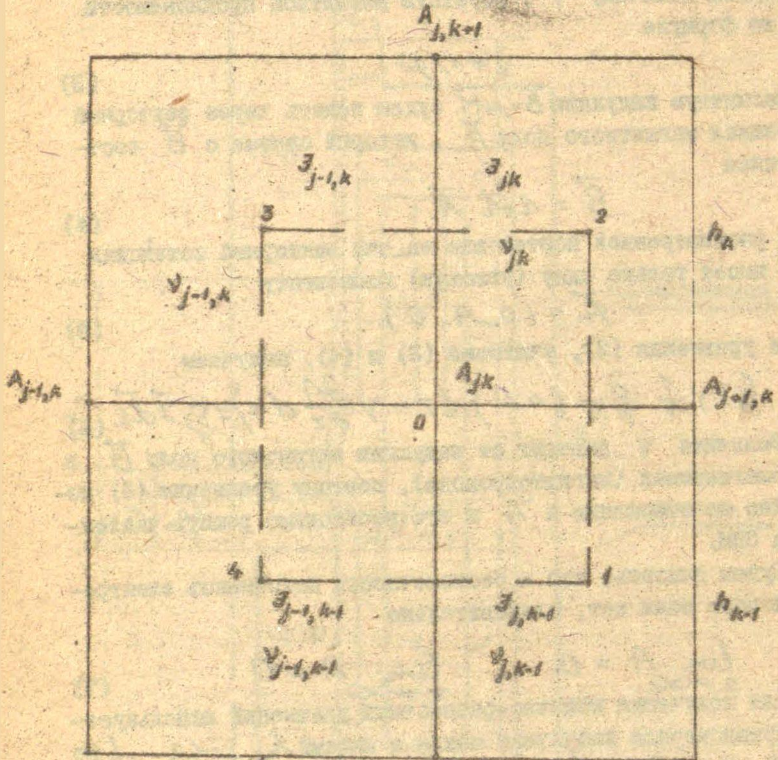


Рис. 2. Четыре ячейки колечно-разностной сетки

где $$C_{jk}=\frac{2(h_{k-1}\nu_{j,k-1}+h_k\nu_{jk})}{h_j(r_j+r_{j+1})},\qquad(9)$$

$$S_{jk}=\mathcal{J}_{jk}h_j h_k,\qquad(10)$$

$$e_{jk}=\frac{h_j\nu_{jk}+h_{j-1}\nu_{j-1,k}}{h_k},\qquad(11)$$

$j=2,3,\ldots,L$; $k=2,3,\ldots,N$,

где r_j - значения координаты по оси r.

Полученные консервативные разностные уравнения имеют первый порядок аппроксимации для неравномерной сетки и второй порядок аппроксимации для равномерной сетки. Система уравнений (8)-(II) решается методом последовательной верхней релаксации. Векторный потенциал в узловых точках вычисляется по формуле:

$$A_{jk}^{n+1}=W^n A_{jk}+(1-W^n)A_{jk}^n,\qquad(12)$$

где A_{jk} определяется соотношением (8).

Обратная величина магнитной проницаемости пересчитывается методом нижней релаксации

$$\nu_{jk}^{n+1}=\alpha_0\nu_{jk}+(1-\alpha_0)\nu_{jk}^n,\qquad(13)$$

где ν_{jk} вычисляется по следующей формуле

$$\nu_{jk}=\sum_{l=0}^{3}\mathcal{D}_{lm}\cdot(B_{jk})^{2l},\qquad(14)$$

а массивы коэффициентов кусочной аппроксимации $\mathcal{D}_{lm}$, $l=0,1,2,3$ вычисляются заранее и задаются в виде векторов для конкретных ферроматериалов. Константа m равна целой части от ($B_{jk}^2/\Delta B^2+1$), где ΔB^2 - подобласть аппроксимации. Константы аппроксимации подбираются с таким расчётом, чтобы функция $\nu(B^2)$ и первая производная по B^2 были непрерывны в точках сшивания.

Для тех ячеек расчёта, через которые проходят границы физических областей, вводится эквивалентная величина обратной магнитной проницаемости.

$$\nu_{jk}^{n+1}=\left(\frac{1-\beta_{jk}}{\nu_c}+\frac{\beta_{jk}}{\alpha_0\nu_{jk}+(1-\alpha_0)\nu_{jk}^n}\right)^{-1},\qquad(15)$$

где β_{jk} – отношение площади, занимаемой ферромагнетиком в ячейке к всей площади ячейки, $\nu_0 = 1/\mu_0$ – магнитная проницаемость вакуума.

Индукция магнитного поля в ячейке находится из следующих выражений:

$$B_{jk} = \sqrt{(B_r)_{jk}^2 + (B_z)_{jk}^2}\,, \tag{16}$$

$$(B_r)_{jk} = -\frac{A_{j,k+1} - A_{jk} + A_{j+1,k+1} - A_{j+1,k}}{2\,h_k}\,, \tag{17}$$

$$(B_z)_{jk} = \frac{2}{r_j + r_{j+1}}\,\frac{A_{j+1,k+1} + A_{j+1,k} + A_{j,k+1} + A_{jk}}{4} +$$

$$+ (A_{j+1,k+1} - A_{j,k+1} + A_{j+1,k} - A_{jk})/(2\,h_j)\,. \tag{18}$$

Силу замыкающего контакта находим из следующего выражения

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0}\oint \left(\vec{B}(\vec{n}\,\vec{B}) - \frac{1}{2}B^2\vec{n}\right) dS\,, \tag{19}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали поверхности.

Учитывая симметрию, от нуля отлична только z компонента.

По методике, изложенной выше, разработан комплекс прикладных программ на алгоритмическом языке ФОРТРАН-ЕС, рассчитывающей нелинейную двухмерную модель цилиндрического электромагнита. Расчёты проведены на ЭВМ ЕС-1022 в ВЦ ЛГУ им. П.Стучки. Рассчитывается сила, замыкающая контакты, распределение индукции магнитного поля B_r и B_z и модуль

$$|B| = \sqrt{B_r^2 + B_z^2} \tag{19}$$

индукции магнитного поля.

Как пример рассмотрим цилиндрический электромагнит (см. рис. I) со следующими параметрами:

d_1 =0,0025 м	h_2 =0,0060 м
d_2 = 0,0080 м	h_3 =0.0020 м
d_3 =0,0020 м	h_4 =0,0200 м
d_4 =0,0755 м	h_5 =0,0350 м
d_5 =0,0040 м	h_6 =0,0050 м
d_7 =0,0096 м	h_7 =0,0060 м

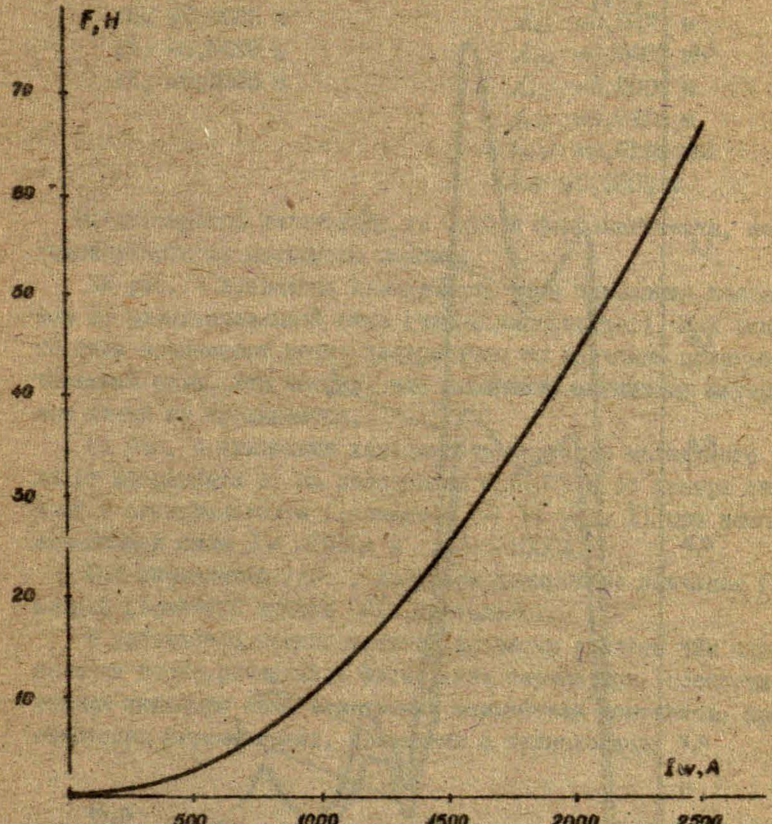


Рис. 3. Зависимость силы замыкания контактов F от величины намагничивающей силы Iw.

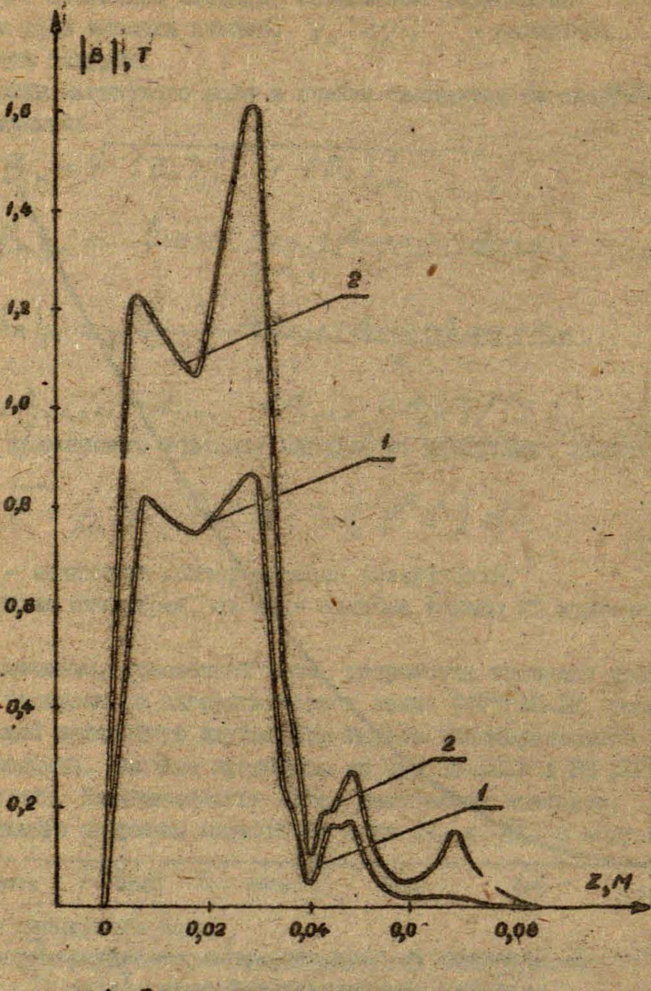


Рис. 4. Распределение модуля индукции магнитного поля по оси.
Намагничивающая сила I - 1000 А, 2 - 2000 А

d_8 =0,0010 м
d_9 =0,0005 м
d_{10} =0,0015 м
d_{11} =0,0040 м
d_{12} =0,0025 м
d_{13} =0,0080 м
d_{14} =0,0015 м

h_8 =0,0050 м
h_{10} =0,0050 м
h_{11} =0,0043 м
h_{12} =0,0080 м
h_{13} =0,0270 м
h_{14} =0,0050 м
h_{15} =0,0004 м
h_{16} =0,0210 м
h_{17} =0,0195 м
h_{18} =0,0100 м

Магнитопровод изготовлен из Ст10 и ферромагнетика, изготовленного из железного порошка.

На рис. 3 приведена зависимость силы замыкания контактов от намагничивающей силы (числа ампервитков). Как видно, то сила возрастает почти квадратично от значения намагничивающей силы. Это потому, что насыщение магнитных материалов почти не наблюдается.

На рис. 4 приведена зависимость индукции магнитного поля от координаты z на расстоянии 0,01075 м от центра симметрии электромагнита (сечение $A-A$ на рис. 1) при намагничивающей силе Iw =1000А и Iw =2000А.

При вычислении $|B|$, получаем дискретные значения (в каждой расчётной ячейке $|B|$ постоянно).

В дальнейшем предполагается провести расчёты для определения геометрических и физических параметров, обеспечивающих максимум силы втягивания замыкателя контактов, при некоторых ограничениях, связанных с технологией.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.88-92

УДК 534.414

Л.Г.Иванов
ЛГУ им. П.Стучки

УМЕНЬШЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБЪЁМОВ ИЗДЕЛИЙ АКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

При производстве некоторых промышленных изделий требуется определить объёмы этих изделий или их плотность. В частности при производстве изделий порошковой металлургии требуется определить их пористость. Определение пористости проводится при помощи гидростатического взвешивания. Этот метод имеет ряд недостатков: относительно большая трудоёмкость при невысокой точности измерений. Гидростатическое взвешивание особенно затруднено при определении пористости изделий порошковой металлургии, поскольку перед взвешиванием детали необходимо парафинировать. Все эти обстоятельства практически исключают возможность автоматизации описанного процесса, что особенно важно при реализации "безлюдной" технологии. Кроме того, относительная погрешность измерений гидростатическим взвешиванием при определении плотности малых объёмов может превысить 2%, что явно не удовлетворяет потребностям производства.

Кроме метода гидростатического взвешивания существует возможность определить объёмы изделий косвенным образом.

Способ определения ёмкости сосудов, имеющих форму резонатора Гельмгольца, описан в работах [1], [2], [3]. На том же принципе основывается метод определения объёмов образцов, помещённых в ёмкость резонатора.

Метод основан на том, что резонансная частота акустических колебаний ω_0, возбуждаемых в резонаторе, меняется в зависимости от параметров резонатора, в частности, от свободного объёма ёмкости резонатора. Измерения объёмов образцов, мало отличающихся друг от друга по объёмам (что, например, характерно при производстве одинаковых деталей способом прессовки), проводятся при рабочей частоте, близкой к резонансной, а объём изделия определяется по амплитуде колебаний [I]. Чувствительность этого способа измерений проанализирована в работе [3], где показано, что

$$S_V = \frac{\Delta A / A_p}{\Delta V_x / V_x} \sim \frac{\omega_0}{\alpha^2} \cdot \frac{V_x}{V_0}, \tag{I}$$

где S_V – относительная чувствительность измерений;

α – коэффициент затухания акустических колебаний;

A_p – максимальная амплитуда колебаний при резонансе;

V_x – объём измеряемого образца;

V_0 – свободный объём резонатора.

Погрешность измерений является обратно пропорциональной величиной чувствительности измерений, но, кроме того, зависит и от других факторов. Основным источником погрешности измерений является зависимость резонансной частоты от значения физических параметров воздуха: температуры, плотности, влажности, запылённости, – влияние которых трудно учесть.

В работе [2] представлена возможность исключить погрешность, вызванную зависимостью резонансной частоты от температурного влияния, путём введения в ёмкость резонатора некоторого количества газа с другим показателем адиабаты. Однако практическая применимость такого способа представляет существенные трудности и, кроме того, не учитывается переменный характер остальных физических параметров воздуха.

Возможность существенно уменьшить погрешность измерений представляется на том основании, что характер резонансной кривой при условии $\alpha \ll \omega_0$ в интервале частот, близких к резонансной, не меняется. Это можно показать, используя приближённое выражение для резонансной кривой

$$A \approx \frac{A_0 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{2}$$

В интервале частот, близких к резонансной (в этом интервале выбирается рабочая частота), можно пользоваться приближением $\omega_0^2 - \omega^2 \approx (\omega_0 - \omega) \cdot 2\omega_0$. Следовательно, выражение (2) принимает вид

$$A \approx \frac{A_0 \cdot \omega_0}{2(\omega_0 - \omega)} . \qquad (3)$$

Если менять начальный уровень A_0 согласно закону $A_0 = \frac{const}{\omega_0}$, выражение (3) при различных значениях становится зависимым только от разницы частот $(\omega_0 - \omega)$:

$$A \approx \frac{const}{2(\omega_0 - \omega)} . \qquad (4)$$

Упомянутое обстоятельство позволяет проводить измерения не при постоянной рабочей частоте, как это описано в работе [I], а при частоте, которая выбирается перед началом измерений в зависимости от значения физических параметров воздуха.

В работе [I] измерения проводятся по дифференциальной схеме измерений. Сравниваются амплитуды колебаний в эталонной и в измерительной камерах при одной и той же частоте, но несколько меньшей, чем резонансные частоты в соответствующих камерах. Такая схема измерений позволяет уменьшить погрешность измерений, возникающую при изменениях резонансных частот, поскольку сдвиг резонансных кривых на малую величину в одну или в другую сторону относительно мало меняет разницу измеряемых амплитуд при установленной постоянной рабочей частоте. Однако эта разница всё-таки существует, так как характер резонансной кривой на склоне не является строго линейным.

Если проводить измерения не при постоянной частоте, а устанавливать её перед началом измерений по определённой точке на склоне резонансной кривой, то в силу приведённых обстоятельств (неизменности характера резонансной кривой) можно существенно уменьшить погрешность измерений. Последовательность операций по предлагаемой методике выглядит следующим образом:

I. В измерительную камеру помещается эталонный образец, объём которого известен, а геометрия его соответствует геометрии измеряемых деталей.

2. Меняя частоту колебаний, находится максимальный уровень амплитуды (при резонансе).

3. Меняя уровень колебаний A_0 , устанавливается определённый уровень максимальной амплитуды - нормируется резонансная кривая.

4. Плавно уменьшая частоту, уровень амплитуды понижается до определённого заранее выбранного значения на склоне резонансной кривой в области её наибольшей крутизны - устанавливается рабочая точка и одновременно рабочая частота.

5. В камеру помещается измеряемый образец и определяется уровень амплитуды колебаний. Объём образца определяется по амплитуде акустических колебаний.

Приведённая методика позволяет проводить измерения для партии однотипных образцов в течение времени, за которое практически не меняются внешние физические параметры воздуха (температура, влажность). Кроме того, существует возможность через некоторое количество измерений с помощью эталонного образца провести корректировку рабочей частоты. По предлагаемой методике за погрешность измерений можно принять половину наименьшей значащей цифры на регистрирующем амплитуду колебаний приборе. Проведённые практические измерения показали, что относительная погрешность измерений для образцов объёмом $V_x \approx 10$ см^3 составляет приблизительно 0,2%, что примерно в пять раз лучше, чем измерения, проводимые гидростатическим способом. Для образцов, имеющих большой объём - 50÷100 см^3, относительная погрешность составляет приблизительно 0,05%, что является хорошим результатом.

Приведённые результаты показывают, что измерение объёмов множества однотипных образцов акустическим методом по сравнению с гидростатическим даёт большой выигрыш во времени, существенно уменьшает погрешность измерений и может быть применён в целом ряде отраслей народного хозяйства.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. № 476451 (СССР). Способ определения емкости сосудов/ В.Н.Кичатов, С.М.Монастырский, Ю.А.Полунов, М.Л.Фролов. - Опубл. в Б.И., 1975, № 25.

2. А.с. № 907395 (СССР). Способ измерения объема емкости/ О.Е.Котов, Ю.И.Казаков. - Опубл. в Б.И., 1982, № 7.

3. Ауза В.Я., Иванов Л.Г., Устинов Н.Н., Шикин Б.М. Физические основы измерения объемов акустическим методом. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1982, с. 78-92.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.93-103

УДК 517.9:537.811

Н.Ф.Блюменау
ЛГУ им. П.Стучки

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЁТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ИЛИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТОНКИХ ТЕЛ С ПОЛЕМ ИСТОЧНИКА

Расчёт магнитного поля в присутствии проводящих или ферромагнитных тел представляет собой актуальную задачу для ряда технических направлений, в частности для задач экранирования магнитного поля с помощью ферромагнитных или сверхпроводящих экранов, для задач электромагнитной левитации, при расчёте электродинамического подвеса для высокоскоростного наземного транспорта [1]. При необходимости учёта краевых эффектов, а также малой толщины проводящего или ферромагнитного тела традиционно применяемые методы расчёта оказываются малоэффективными, и приходится прибегать к особым приёмам. Метод парных интегральных уравнений позволяет получить явное аналитическое решение для ряда задач взаимодействия магнитных систем с проводящими или ферромагнитными тонкими телами, для которых толщина принимается нулевой и, соответственно, проводимость или магнитная проницаемость считаются бесконечными. Указанным методом в [2, 3, 4] была рассчитана электродинамическая сила, возникающая при взаимодействии прямоугольного токового контура постоянного тока, движущегося вдоль проводящей пластины в высокоскоростном приближении, когда пластина имела форму полуплоскости или полосы. В работе [5] тот же метод был применён для исследования магнитного поля прямоугольного контура постоянного тока вблизи края ферромагнитного экрана, имеющего форму полуплоскости. Успешное использование метода парных интегральных уравнений при решении этих задач позволяет предположить, что он может оказаться эффективным и для решения ряда смежных проблем расчёта электромагнитного взаимодействия, которые сводятся к аналогичным математическим моделям. При этом возникает необходимость разработки методики приведения задач к парным интегральным уравнениям, а также решения этих уравнений, последующего вычисления магнитного поля или сил.

Рассмотрим задачу о нахождении собственного магнитного поля совокупности n бесконечно тонких полос (границ)

$$z = z_0,\ x \in R,\ y \in \bigcup_{i=1}^{n} [\ell_{i-1}; \ell_i],\ (\ell_i \in \bar{R}), \tag{I}$$

помещённых в магнитное поле трёхмерного источника индукции $\vec{B}_0$, которая считается известной. Все n полос либо идеально проводящие, либо идеально ферромагнитные. Для величин, относящихся к границам, введём верхний индекс m, который характеризует их набор: если границы идеально проводящие, то $m = \sigma$, если идеально ферромагнитные, то $m = \mu$.

Определим скалярный магнитный потенциал Φ соотношением

$$\vec{B} = -\mu_0 \operatorname{grad} \Phi, \tag{2}$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г·м$^{-1}$ – магнитная постоянная.

Пространственным областям $z > z_0$ и $z < z_0$ присвоим нижние индексы 1 и 2 соответственно. Тогда для скалярного магнитного потенциала границ Φ_k^m, $k \in \{1;2\}$, $m \in \{\sigma, \mu\}$ справедливо уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi_k^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k^m}{\partial z^2} = 0, \tag{3}$$

а также граничное условие

$$\Phi_k^m \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \longrightarrow +\infty, \tag{4}$$

которое соответствует внешнему полю, скалярный магнитный потенциал которого убывает на бесконечности до нуля.

Нормальная составляющая вектора магнитной индукции суммарного поля $\vec{B}^\sigma + \vec{B}_0$ должна быть равна нулю на поверхности идеально проводящих полос. Это требование приводит к граничному условию

$$\left.\frac{\partial \Phi_K^{\varepsilon}}{\partial z}\right|_{z=z_0} = -\left.\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\right|_{z=z_0}, \quad K\in\{1;2\},\ y\in\bigcup_{i=1}^{\infty}[\ell_{i-1};\ell_i],\ x\in R, \tag{5}$$

где Φ_0 - скалярный магнитный потенциал источника.

На поверхности идеального ферромагнетика равна нулю тангенциальная составляющая вектора суммарной магнитной индукции $\vec{B}^{\mu}+\vec{B}_0$. Поэтому

$$\left.\Phi_K^{\mu}\right|_{z=z_0} = -\left.\Phi_0\right|_{z=z_0}, \quad K\in\{1;2\},\ y\in\bigcup_{i=1}^{\infty}[\ell_{i-1};\ell_i],\ x\in R. \tag{6}$$

Из условия непрерывности магнитного поля следуют также условия для идеального проводника

$$\left.\Phi_1^{\varepsilon}\right|_{z=z_0} = \left.\Phi_2^{\varepsilon}\right|_{z=z_0}, \quad y\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}[\ell_{i-1};\ell_i],\ x\in R, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi_1^{\varepsilon}}{\partial z}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{\partial \Phi_2^{\varepsilon}}{\partial z}\right|_{z=z_0}, \quad y\in R,\ x\in R; \tag{8}$$

и для идеального ферромагнетика

$$\left.\frac{\partial \Phi_1^{\mu}}{\partial z}\right|_{z=z_0} = \left.\frac{\partial \Phi_2^{\mu}}{\partial z}\right|_{z=z_0}, \quad y\notin\bigcup_{i=1}^{\infty}[\ell_{i-1};\ell_i],\ x\in R, \tag{9}$$

$$\left.\Phi_1^{\mu}\right|_{z=z_0} = \left.\Phi_2^{\mu}\right|_{z=z_0}, \quad y\in R,\ x\in R. \tag{10}$$

Задачи (3) - (5), (7), (8) для $m=\varepsilon$ и (3), (4), (6), (9), (10) для $m=\mu$ будем решать с помощью интегрального преобразования Фурье по координатам x и y :

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\alpha,\beta;z) &= \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x,y,z)\,e^{-i\vec{æ}\vec{r}}\,dx\,dy, \\ \Phi(x,y,z) &= \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha,\beta;z)\,e^{i\vec{æ}\vec{r}}\,d\alpha\,d\beta, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где $\vec{æ}=(\alpha,\beta,0)$, $\vec{r}=(x,y,z)$.

Относительно изображения скалярного магнитного потенциала φ_K^m, $(K\in\{1;2\},\ m\in\{\varepsilon,\mu\})$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решением, отвечающим преобразованным граничным условиям (4) и (8) для идеального проводника, будет

$$\varphi^{e}(z) = -\frac{U^{e}}{\varkappa}\, e^{-\varkappa|z-z_0|}\cdot \operatorname{sgn}(z-z_0), \tag{12}$$

где
$$\varkappa = |\vec{\varkappa}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,, \tag{13}$$

U^{e} - некоторая, пока неизвестная функция от α и β, определяемая соотношением

$$\left.\frac{d\varphi^{e}_{k}}{dz}\right|_{z=z_0} = U^{e}, \quad k\in\{1;2\}. \tag{14}$$

Для идеального ферромагнетика используем условия (4) и (10). Тогда

$$\varphi^{M}(z) = U^{M}\cdot e^{-\varkappa|z-z_0|}, \tag{15}$$

U^{M} - также пока неизвестная функция. Она определяется из условия

$$\left.\varphi^{M}_{k}\right|_{z=z_0} = U^{M}, \quad k\in\{1;2\}. \tag{16}$$

Так как все интересующие нас физические эффекты связаны с зависимостью рассматриваемых величин от координаты y, будем особо интересоваться зависимостью их фурье-изображений от соответствующего параметра β, и для краткости обозначать

$$U^{m}(\alpha,\beta) = U^{m}(\beta), \quad \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \varkappa(\beta),$$

считая α фиксированным параметром.

Используя граничные условия (7) - (10), получим для парные интегральные уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U^{m}(\beta)\, e^{i\beta y}\, d\beta = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g^{m}(\beta)\, e^{i\beta y}\, d\beta, \quad y\in\bigcup_{i=1}^{n}\,]l_{i-1};l_i[,\\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} U^{m}(\beta) K^{m}(\beta)\, e^{i\beta y}\, d\beta = 0, \quad y\notin\bigcup_{i=1}^{n}[l_{i-1};l_i],\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m\in\{e;M\},
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$K^{e}(\beta) = \frac{1}{\varkappa(\beta)}\,, \qquad K^{M}(\beta) = \varkappa(\beta), \tag{18}$$

$$g^{e}(p) = \frac{d\varphi_0}{dz}\Big|_{z=z_0}, \quad g^{\mu}(p) = \varphi_0\Big|_{z=z_0}, \qquad (19)$$

где φ_0 - изображение скалярного магнитного потенциала источника магнитного поля.

Таким образом, задача об отыскании собственного магнитного поля совокупности идеально проводящих или идеально ферромагнитных границ сводится к решению парных интегральных уравнений (17). Решив их мы найдём U^m, затем φ^m, а потом получим выражения для изображения вектора магнитной индукции собственного поля

$$\vec{b}^m = -\mu_0\left(i\alpha\varphi^m, ip\varphi^m, \frac{d\varphi^m}{dz}\right), \; m \in \{e;\mu\}. \qquad (20)$$

При таком подходе к решению проблемы основным требованием к трёхмерному источнику магнитного поля является требование затухания его скалярного магнитного потенциала до нуля на бесконечности.

Метод решения парных интегральных уравнений (17) и его сложность определяются количеством границ, а также функцией источника g^m. Самым простым и важным является случай, когда имеется лишь одна граница, неограниченная с одной стороны, например, $n=1$, $\ell_0=-\infty$, $\ell_1=\ell\in R$:

$$z=z_0, \; y<\ell, \; x\in R. \qquad (21)$$

В этом случае существует много способов решения парных интегральных уравнений [6, 7]. Это - метод преобразующего множителя, метод сведения к краевой задаче Римана и её решение, сведение к интегральному уравнению типа свёртки и другие. Решим уравнения (17) для случая (21) методом их сведения к краевой задаче Римана. Для (21) уравнения (17) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(U^m(p)+g^m(p))e^{ip(\ell+y')}dp = 0, \; y'<0, \\ &\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}U^m(p)K^m(p)e^{ip(\ell+y')}dp = 0, \; y'>0, \; m\in\{e;\mu\}. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

при $y'=y-\ell$. Функция $(U^m(p)+g^m(p))e^{i\ell p} = F^-(p)$ является краевым значением некоторой аналитической в нижней полуплоскости функции $F^-(\tau)$, а $U^m(\beta)K^m(\beta)e^{i\beta\ell} = F^+(\beta)$ – краевым значением функции $F^+(\tau)$, аналитической в верхней полуплоскости [6]. Выражая $U^m(\beta)$ через $F^-(\beta)$ и $F^+(\beta)$, получим краевую задачу Римана для нахождения аналитических функций $F^+(\tau)$ и $F^-(\tau)$ соответственно в верхней и нижней полуплоскостях:

$$F^+(\beta)-K^m(\beta)F^-(\beta)=-g^m(\beta)K^m(\beta)e^{i\beta\ell},\ m\in\{\sigma;\mu\}. \tag{23}$$

Коэффициент задачи $K^m(\beta)$ легко факторизуется

$$K^m(\beta)=K^m_+(\beta)\cdot K^m_-(\beta),\quad m\in\{\sigma;\mu\}, \tag{24}$$

$$K^\sigma_+(\beta)=\frac{1}{\varkappa_+(\beta)},\quad K^\sigma_-(\beta)=\frac{1}{\varkappa_-(\beta)}, \tag{25}$$

$$K^\mu_+(\beta)=\varkappa_+(\beta),\quad K^\mu_-(\beta)=\varkappa_-(\beta), \tag{26}$$

$$\varkappa_+(\beta)=\sqrt{\beta+i|\alpha|},\quad \varkappa_-(\beta)=\sqrt{\beta-i|\alpha|}. \tag{27}$$

Функции $\varkappa_+$ и $\varkappa_-$ определяются на комплексной плоскости $\tau=\tau_1+i\tau_2,(\tau_1=\beta,\tau_2\in R)$, разрезанной вдоль мнимой оси от точки $i|\alpha|$ до $+i\infty$ и от точки $-i|\alpha|$ до $-i\infty$. Ветви этих функций выбраны так, чтобы $\varkappa_\pm(\tau)\sim\sqrt{\tau_1}$ при $\tau=\tau_1\to+\infty$. Тогда $\varkappa=\varkappa_+\varkappa_-$. Задача (23) имеет единственное решение. Умножая (23) на $1/K^m_+(\beta)$, получим задачу о скачке

$$\frac{F^+(\beta)}{K^m_+(\beta)}-K^m_-(\beta)F^-(\beta)=-g^m(\beta)K^m_-(\beta)e^{i\beta\ell}, \tag{28}$$

решением которой является

$$F^-(\tau)=\frac{1}{2\pi K^m_-(\tau)}\int_0^{+\infty}e^{-it\tau}dt\int_{-\infty}^{+\infty}g^m(\beta)K^m_-(\beta)e^{i\beta(\ell+t)}d\beta, \tag{29}$$

$F^+(\tau)$ легко находится из краевого условия. Переходя к выражению для U^m, получим

$$U^m(\beta)=\frac{1}{2\pi K^m_-(\beta)}\int_\ell^{+\infty}e^{-i\beta\xi}d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}g^m(t)K^m_-(t)e^{i\xi t}dt-g^m(\beta),$$
$$m\in\{\sigma;\mu\}. \tag{30}$$

Таким образом, формула (30) даёт решение парных интегральных уравнений в случае границы - полуплоскости. Заметим, что при $l = -\infty$, $U^m = 0$, $\varphi^m = 0$, что соответствует отсутствию границы. При $l = +\infty$, $U^m = -g^m$ и изображение скалярного магнитного потенциала совпадает с изображением потенциала границы-плоскости: $l_0 = -\infty$, $l_1 = +\infty$. Поэтому структура решения электродинамической задачи рассматриваемым методом такова, что собственное поле границы представляется в виде суммы двух слагаемых, первое из которых отвечает случаю границы-плоскости, а второе учитывает "краевой эффект", вносимый ограниченностью с одной стороны.

При $n = 1$, $l_0, l_1 \in R$ (граница - полоса конечной ширины), либо при $n = 2$, $l_0 = -\infty$, $l_1, l_2 \in R$, $l_3 = +\infty$ (граница - плоскость со щелью конечной ширины) (17) представляют собой тройные интегральные уравнения, которые решаются методами, приводящими к интегральным уравнениям типа Фредгольма. Собственный магнитный потенциал границы, полученный из решения тройных уравнений представляется в виде суммы

$$\varphi^m = \varphi^m_\infty + \varphi^m_1 + \varphi^m_2 + \varphi^m_{12}, \quad m \in \{\varepsilon; \mu\},$$

где φ^m_∞ - потенциал границы-плоскости, φ^m_1, φ^m_2 - потенциалы границ-полуплоскостей, получаемые из решения соответствующих парных интегральных уравнений и учитывающие "краевой эффект" от $l_{1(0)}$ и $l_{2(1)}$, φ^m_{12} - поправка, характеризующая взаимодействие краёв, получаемая из уравнений Фредгольма [3, 7]. Случай, когда $m = \varepsilon$, $n = 1$, $l_0, l_1 \in R$ был рассмотрен в работах [3, 4]. Рассмотрение общего случая выходит за рамки настоящей работы.

Решение парных интегральных уравнений (30) содержит функцию g^m, которая выражается через скалярный магнитный потенциал источника (см. (19)). Найдём g^m для произвольного замкнутого линейного постоянного тока. Скалярный потенциал такого тока силы J можно вычислить через величину телесного угла под которым виден контур из точки наблюдения поля [8, 9],

$$\Phi_0 = -\frac{J}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{x'-x}{r^3}\cos\lambda + \frac{y'-y}{r^3}\cos\mu + \frac{z'-z}{r^3}\cos\nu\right)dS,$$

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \tag{31}$$

S – поверхность, натянутая на токовый контур, $M(x',y',z')\in S$, $\vec{n}_0=(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ – единичная нормаль к S. После преобразования (II) изображением Φ_0 будет

$$\varphi_0 = \frac{J}{2}\iint\limits_S\left(\frac{\alpha\cos\lambda+\beta\cos\mu}{i\varkappa} + \operatorname{sgn}(z-z')\cos\nu\right)e^{-\varkappa|z-z'|-i\bar{\omega}\bar{r}'}\,dS. \qquad (32)$$

При выводе (32) использованы формулы (I.3.7), (I.13.44), (2.13.43) из [I0]. Из (32) легко найти функции g^m, $m\in\{\alpha;\mu\}$. В частности, если точка $M(x',y',z')\in S$ и $z'\in[z_1;z_2]$, то

$$g^{\alpha} = \frac{J\varkappa}{2}\begin{cases} -e^{-\varkappa z}g_0^{+}, & z>z_2,\\ e^{\varkappa z}g_0^{-}, & z<z_1,\end{cases} \qquad (33)$$

$$g^{\mu} = \frac{J}{2}\begin{cases} e^{-\varkappa z}g_0^{+}, & z>z_2,\\ e^{\varkappa z}g_0^{-}, & z<z_1,\end{cases} \qquad (34)$$

где

$$g_0^{\pm} = \frac{1}{i\varkappa}\iint\limits_S(\alpha\cos\lambda+\beta\cos\mu\pm i\varkappa\cos\nu)e^{\pm\varkappa z'-i\bar{\omega}\bar{r}'}\,dS. \qquad (35)$$

Таким образом, изложенная методика приводит к выражениям для изображения скалярного магнитного потенциала и изображения вектора магнитной индукции. На практике важно знать либо саму магнитную индукцию, либо электромагнитную силу, действующую на магнитную систему. Для нахождения используются либо формулы обращения (II), либо теорема Парсеваля. В обоих случаях появляются кратные несобственные интегралы от комплексных функций, что вызывает затруднения при расчётах на ЭВМ. Однако кратность интегрирования можно понизить, число несобственных интегралов свести до одного, а подынтегральную функцию получить действительной, меняя порядок интегрирования и используя интегралы специального вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\varkappa_1(t))^{n_1}(\varkappa_2(t))^{n_2}e^{-h\varkappa(t)+ity}\,dt,\ (h>0,\ y\in R;\ n_1,n_2\in Z), \qquad (36)$$

Таблица интегралов

к	$f_k(t)$, $(h>0,\ x>0)$	$I_k(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_k(t)e^{ity}dt$, $y\in R$, $(r=\sqrt{y^2+h^2})$.
1	$\frac{1}{\sqrt{t+ix}}e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$\frac{\sqrt{2\pi(r-y)}}{r}e^{-xr-\frac{\pi i}{4}}$
2	$\frac{1}{\sqrt{t-ix}}e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$\frac{\sqrt{2\pi(r+y)}}{r}e^{-xr+\frac{\pi i}{4}}$
3	$\sqrt{t+ix}\,e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{r-y}}{r^2}\left(2x(r+y)+\frac{2y}{r}+1\right)e^{-xr+\frac{\pi i}{4}}$
4	$\sqrt{t-ix}\,e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{r+y}}{r^2}\left(2x(r-y)-\frac{2y}{r}+1\right)e^{-xr-\frac{\pi i}{4}}$
5	$\frac{t}{\sqrt{t+ix}}e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{r-y}}{r^2}\left(2xy+\frac{2y}{r}+1\right)e^{-xr-\frac{\pi i}{4}}$
6	$\frac{t}{\sqrt{t-ix}}e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{r+y}}{r^2}\left(2xy+\frac{2y}{r}-1\right)e^{-xr+\frac{\pi i}{4}}$
7	$\sqrt{t+ix}\sqrt{t^2+x^2}\,e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{r+y}}{r^3}\left(2h^2x^2+2x\left(y+\frac{h^2-2y^2}{r}\right)+\frac{3y}{r}+\frac{3(h^2-3y^2)}{2r^2}\right)e^{-xr+\frac{\pi i}{4}}$
8	$\sqrt{t-ix}\sqrt{t^2+x^2}\,e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{r-y}}{r^3}\left(2h^2x^2+2x\left(-y+\frac{h^2-2y^2}{r}\right)-\frac{3y}{r}+\frac{3(h^2-3y^2)}{2r^2}\right)e^{-xr-\frac{\pi i}{4}}$
9	$t\sqrt{t+ix}\,e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{r-y}}{r^3}\left(2y(y+r)x^2+x\left(\frac{6y^2}{r}+4y-r\right)+\frac{6y^2}{r^2}+\frac{3y}{r}-\frac{3}{2}\right)e^{-xr+\frac{\pi i}{4}}$
10	$t\sqrt{t-ix}\,e^{-h\sqrt{t^2+x^2}}$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{r+y}}{r^3}\left(2y(y-r)x^2+x\left(\frac{6y^2}{r}-4y-r\right)+\frac{6y^2}{r^2}-\frac{3y}{r}-\frac{3}{2}\right)e^{-xr-\frac{\pi i}{4}}$

где $\varkappa_+$, $\varkappa_-$, $\varkappa$ определены выше. Методика вычисления интегралов этого типа рассмотрена в [4]. Приведём таблицу интегралов, вычисленных по этой методике, которые могут быть использованы при решении различных задач, сводящихся к решению парных интегральных уравнений (17).

В ы в о д ы

1. Задача нахождения собственного магнитного поля совокупности идеально проводящих или идеально ферромагнитных бесконечно тонких плоских полос (границ), находящихся в поле трёхмерного источника, сведена к парным интегральным уравнениям.

2. Для особо важного случая границы-полуплоскости получено решение парных интегральных уравнений.

3. Найдено изображение скалярного магнитного потенциала источника, когда им является произвольный линейный замкнутый постоянный ток.

4. Приведена таблица интегралов, позволяющая при вычислении магнитной индукции и электродинамической силы понижать кратность интегрирования, избавляться от несобственных интегралов и получать действительную подынтегральную функцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наземный транспорт 80-х годов.-М.: Мир, 1974. - 242 с.

2. Блюменау Н.Ф. Взаимодействие токовой рамки с идеально проводящей полуплоскостью. - Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук, 1980, № 1, с. 112-118.

3. Блюменау Н.Ф. Взаимодействие токовой рамки с идеально проводящей полосой. Часть 1. Определение магнитного поля. - Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук 1980, № 6, с. 92-98.

4. Блюменау Н.Ф. Взаимодействие токовой рамки с идеаль-

но проводящей полосой. Часть 2. Вычисление электродинамической силы. - Изв. АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук, 1981, № 1, с. 108-116.

5. Блюменау Н.Ф., Воловик М.В. Расчёт магнитного поля прямоугольной токовой рамки в присутствии полуплоского идеально ферромагнитного экрана. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 30-39.

6. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свёртки. - М.: Наука, 1978. - 295 с.

7. Нобл Б. Применение метода Винера Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. - М.: ИЛ, 1962. - 279 с.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Государственное изд-во физ.-мат. лит., 1959. - 532 с.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 1969, Том 3. - 656 с.

10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. - М.: Наука, 1969. - 343 с.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.104-116

УДК 539.3:534.1

Я.П.Варна
ЛГУ им. П.Стучки

ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ ПО ТОРЦУ

Известны многие исследования [1-6] реакции цилиндрической оболочки на динамическое воздействие. Большинство из них посвящено изучению установившихся колебаний оболочек [6], а те, которые посвящены переходным процессам, чаще всего проводятся определённым численным методом [5] с использованием того или иного варианта теории оболочек, и не ставят своей целью исследование применимости самой теории.

Это оправдано тем, что очень часто рассматривается воздействие однородным импульсом давления на всей поверхности или её части, когда волновые процессы играют незначительную роль и выбор уточнённой или классической теории оболочек для описания процессов мало влияет на результат.

Целью данной работы является изучение волновых процессов в цилиндрических оболочках в осесимметричном случае, используя при этом как классическую теорию недеформируемых нормалей", так и уточнённую теорию оболочек, учитывающую поперечный сдвиг и инерцию вращения, для выяснения возможностей применения классической "неволновой" теории в волновых задачах. Напомним, что пределы применимости приближённых теорий изучались ранее У.К.Нигулом [3] с использованием асимптотических свойств уравнений движения различных теорий оболочек. Данная статья является продолжением работы [I], в которой рассматривались особенности волновых процессов при продольном динамическом нагружении оболочки на торце и проводился сравнительный анализ результатов по обеим теориям.

Рассмотрим вначале ненагруженную свободную изотропную цилиндрическую оболочку, имеющую длину $2L$, радиус R, толщину h, на торце $x=-L$ которой приложена внешняя поперечная сила $Q_x^*(t)$. Система уравнений движения по классической теории Кирхгофа-Лява и по уточнённой теории, учитывающей поперечный сдвиг и инерцию вращения, а также соответствующие начальные и граничные условия, приведены в [I]. Безразмерные величины введём аналогично, как в [I]:

$$\alpha=\frac{x}{R}, \quad \tau=\frac{t\cdot c}{R}, \quad w=\frac{w^*}{R}, \quad u=\frac{u^*}{R},$$

$$Q_\alpha=\frac{Q_\alpha^*(1-\nu^2)}{Eh}, \quad M_\alpha=\frac{M_\alpha^*\, 12R(1-\nu^2)}{Eh^3} \qquad (I)$$

Форма импульса внешнего воздействия, приведённого к безразмерному виду $f_\alpha(\tau)\equiv f(\tau)$, показана на рис. I., где кривая I соответствует существенно динамическому ("короткому") воздействию, а кривая 2 – квазистационарному нагружению. В дальнейшем импульс будем называть "коротким", если безразмерное время его действия существенно меньше времени прохода волной растяжения-сжатия расстояния, равного длине оболочки. Продолжительность "длинного" импульса примерно на порядок больше этого характерного для конкретной оболочки времени. При таком воздействии волновые эффекты играют уже второстепенную роль. При нашем выборе безразмерных величин (I) волна проходит расстояние, равное радиусу оболочки, за

$$\tau_0=1$$

Внешнее воздействие удобно представить в форме

$$Q_\alpha\big|_{\alpha=-\alpha_1}\equiv f(\tau)=A\,exp(-\beta\tau)[1-exp(-\gamma\tau)]^n \qquad (2)$$

где β, γ, n – параметры нагрузки, с помощью которых можно менять длительность и характер импульса, A – нормирующий множитель, выбранный так, чтобы

$$\max_\tau f(\tau)=1$$

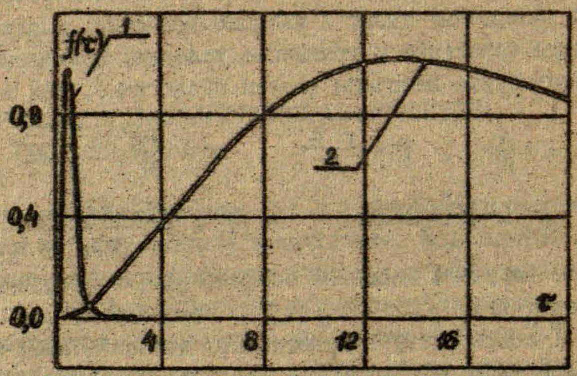


Рис. I. Зависимость приложенной нагрузки от безразмерного времени τ . I - "короткий"импульс; 2 - "длинный" импульс.

Этому соответствует неправдоподобно большое значение размерной нагрузки ($Q_\alpha^* = \frac{Eh}{1-\nu^2} f(\tau)$), однако, учитывая линейную постановку, переход к реальным нагрузкам элементарен, а с другой стороны - использование единичной нагрузки очень удобно для проведения сравнительного анализа.

Решение поставленной задачи проводилось методом преобразования Лапласа с последующим нахождением аналитического решения в пространстве изображений. Методика расчёта более подробно рассмотрена в [I, 4].

Волновые процессы рассмотрим на примере цилиндрической оболочки со следующими параметрами

$$R/h = 50 \quad , \quad 2L/R = 2 \quad , \quad \nu = 0{,}3 \qquad (3)$$

Ниже на всех рисунках приведены зависимости характеристик напряжённо-деформированного состояния от времени τ в определённых точках срединной поверхности:

$$\alpha_k = \frac{L}{2R}(k-3) \quad , \quad k = 1, \dots , 4 \qquad (4)$$

В дальнейшем точку с координатой α_k будем называть "точкой k ".

При воздействии на оболочку "коротким" импульсом максимальное значение $Q_\alpha(\tau,\alpha)$ достигается в точке приложения. Имеет место краевой эффект, что вообще характерно именно для поперечного нагружения. Для Q_α этот эффект является слабо выраженным (в точке 2 (рис. 2) максимальное значение по теории Тимошенко $Q_{\alpha max}$ =0,35, в т. 4 - 0,30 и т.д.). Сравнение результатов по уточнённой (2а) и классической теории (2б) указывает на хорошее совпадение результатов в начальной стадии деформирования. По уточнённой теории возмущение распространяется со скоростью волны сдвига, равной примерно 0,6 от скорости волны растяжения-сжатия и доходит до точки $k=2$ за время τ_2 =0,5/0,6 $\approx$ 0,8. Форма исходного импульса к этому моменту уже сильно изменилась. После прохода пика возмущения начинаются сравнительно медленные колебания усилия Q_α. С приходом отражённой волны в момент времени τ =6,5 начинается наложение высокочастотного импульса на указанные колебания. Аналогично процесс протекает в точке $k=4$, где возмущения начинаются при

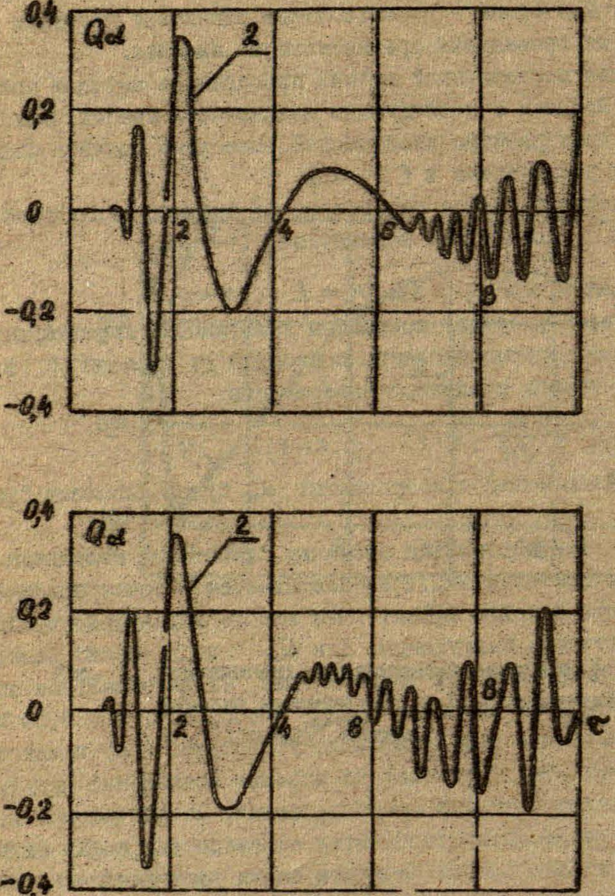


Рис. 2. Зависимость перерезывающих усилий Q_α от времени τ при "коротком" поперечном ударе;
а – уточненная теория;
б – классическая теория.

$\tau = 2{,}5$, но так как отражённая волна приходит в эту точку раньше чем в точку 2, промежуточный процесс медленных колебаний практически отсутствует. Использование классических гипотез (рис. 2б) приводит к искажению поля усилий, т.е. к появлению характерных высокочастотных колебаний, отмеченных уже при продольном ударном нагружении [I]. При нагружении "длинным" импульсом имеет место ярко выраженный краевой эффект для усилий Q_α, и хотя количественные и качественные показатели по обеим теориям сильно отличаются, общим для этого случая являются пренебрежительно малые значения перерезывающей силы Q_α во внутренних точках оболочки.

На напряжённое состояние при поперечном нагружении заметно влияют изгибающие моменты $M_\alpha(\tau,\alpha)$. Так при "коротком" воздействии максимальные значения M_α примерно в 10^3 больше соответствующих значений при продольном ударе [I]. Волновой процесс распространения моментов M_α (рис. 3) аналогичен, как у перерезывающей силы Q_α. С приходом отражённой волны также начинаются сложные высокочастотные колебания. Моменты M_α при "коротком" нагружении глубоко проникают внутрь оболочки и краевой эффект слабо выражен. Так, например, в т. 3 $M_{\alpha\, max} \approx 300$, в т. 4 ≈ 350. При этом классическая теория может быть успешно применена для количественного описания максимальных моментов (3б). Качественное и количественное совпадение, имеющее место в т. 2, существенно ухудшается в точках, более близких к торцу отражения. При нагружении "длинным" импульсом максимальные моменты по обеим теориям в несколько раз меньше и результаты по уточнённой теории меньше, чем по классической.

Зависимость прогибов w от τ на торце $\alpha = -\frac{L}{R}$ при "коротком" ударе (рис. 4) имеет достаточно медленный квазигармонический характер без пиков, характерных для волновых процессов. Учёт деформаций поперечного сдвига и инерции вращения приводит к увеличению максимальных прогибов примерно на 20%. Максимальные по амплитуде поперечные колебания имеют место в точке приложения нагрузки. В точке 2, отстоящей на расстоянии $R/2$ от торца нагружения, амплитуда колебаний примерно в 7 раз меньше (рис. 4б) и уменьшается ещё примерно в два раза в середине оболочки. По классической тео-

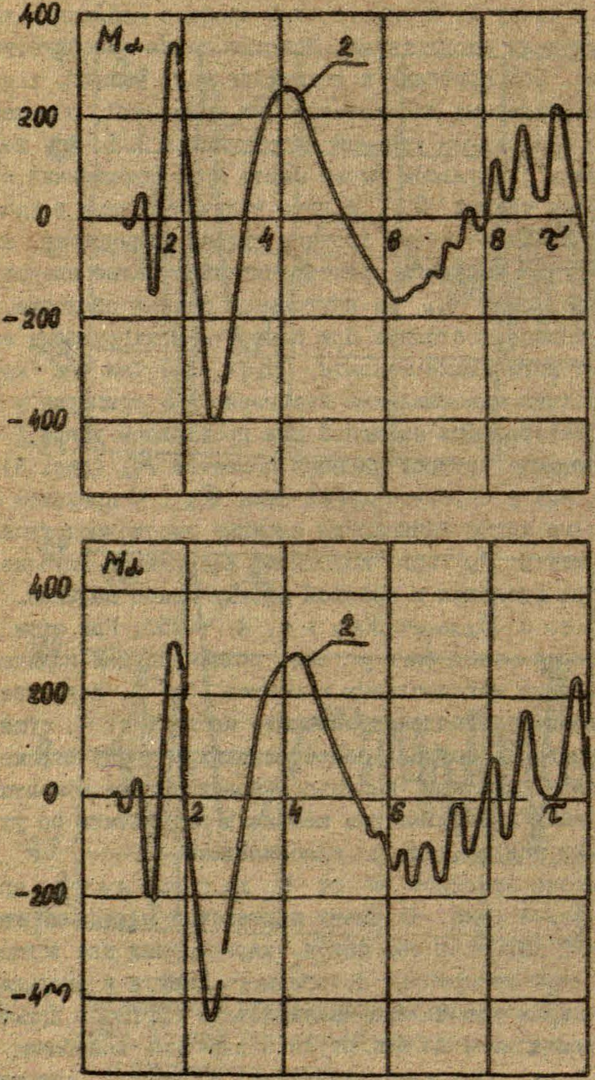


Рис. 3. Зависимость M_α от τ при "коротком" поперечном ударе; а - уточненная теория; б - классическая теория.

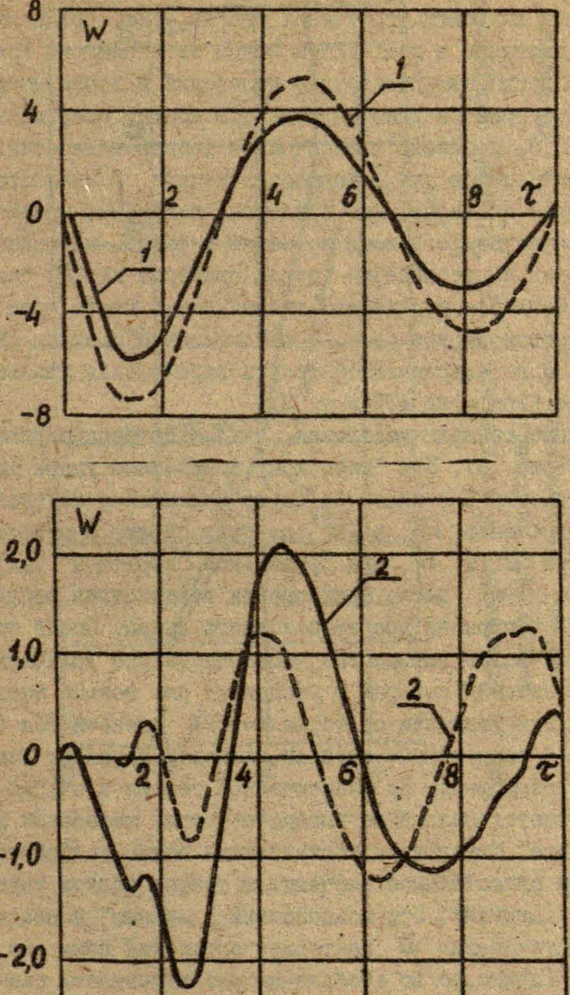


Рис. 4. Зависимость W от времени τ при "коротком" поперечном воздействии.

- - - - уточненная теория,

———— . классическая теория.

рии прогибы уменьшаются медленнее и в т. 2 они уже больше соответствующих значений уточнённой теории (рис. 4б) и их максимальные значения в дальнейшем почти не меняются. Кроме того, в то время как поперечные колебания в точке $\kappa=2$ по уточнённой теории начинаются только в момент прихода возмущений $\tau \approx 0{,}9$, согласно классической теории колебательный процесс начинается уже в начальный момент. В квазистационарном случае на торце, где приложена нагрузка, изменения прогиба качественно похожи по обеим теориям, но максимальные значения по уточнённой теории примерно на 20% больше (рис. 5). Согласно уточнённой теории имеет место ярко выраженный краевой эффект (в т. 2 максимальные прогибы 1% от торцевых), а по классической теории перемещения уменьшаются медленнее (примерно 15% в т. 2).

В заключение сравним ускорения $\ddot{w}(\tau,\alpha)$ по рассматриваемым теориям (рис. 6). При "коротком" поперечном ударе максимальные ускорения возникают на торце приложения нагрузки. Максимальное значение $\ddot{w}$ в 10^2 раз превосходит соответствующие значения $\ddot{u}$ и $\ddot{w}$ при продольном "коротком" ударе [1]. В точке $\kappa=1$ после прекращения воздействия наблюдается "хвост" ускорения противоположного знака. После прихода отражённой волны начинаются высокочастотные колебания, максимальные значения которых в несколько раз меньше первого. Ускорения при удалении от торца $\alpha=-L/R$ уменьшаются (в точке 2 уже в 4 раза). Ярко выражен волновой характер распространения возмущений. По классической теории в очередной раз наблюдается наложение высокочастотных колебаний на основной процесс. Мгновенная составляющая волны ускорения имеет при этом существенное значение в точках вблизи торца, свободного от нагрузки. При воздействии "длинным" поперечным импульсом ускорения $\ddot{w}$ на торце нагружения примерно в 30 раз меньше (примерно во столько же раз изменилась скорость нагружения) и имеет характер медленных колебаний (рис. 7). Аналогично процесс развивается в т. 2, 3, но там максимальные ускорения на порядок меньше.

Исходя из анализа численных расчётов, можно сделать следующие выводы:

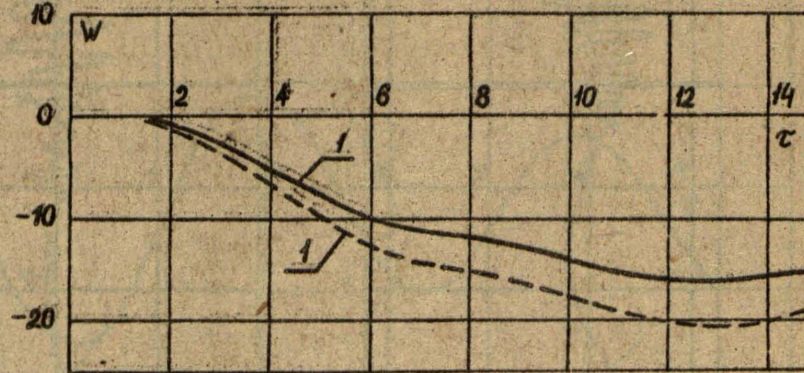
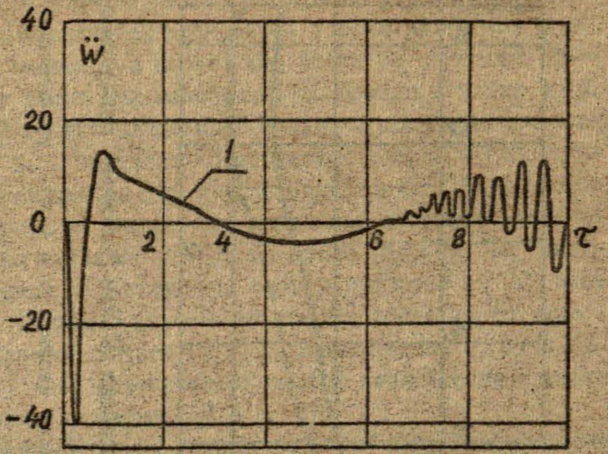


Рис. 5. Зависимость W от времени τ при "длинном" поперечном воздействии на торец.
——— классическая теория; - - - - - уточненная теория.



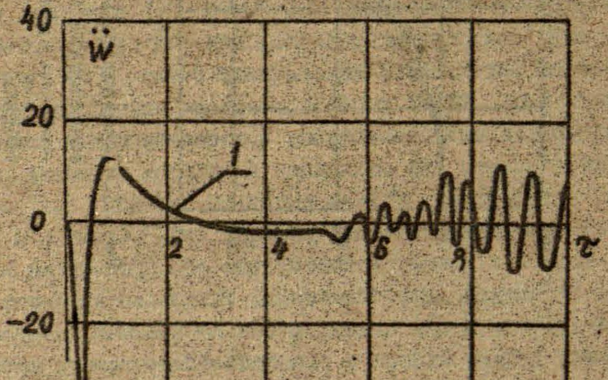


Рис. 6. Ускорения $\ddot{w}$ на торце оболочки при "коротком" поперечном воздействии; а – уточненная теория, б – классическая теория.

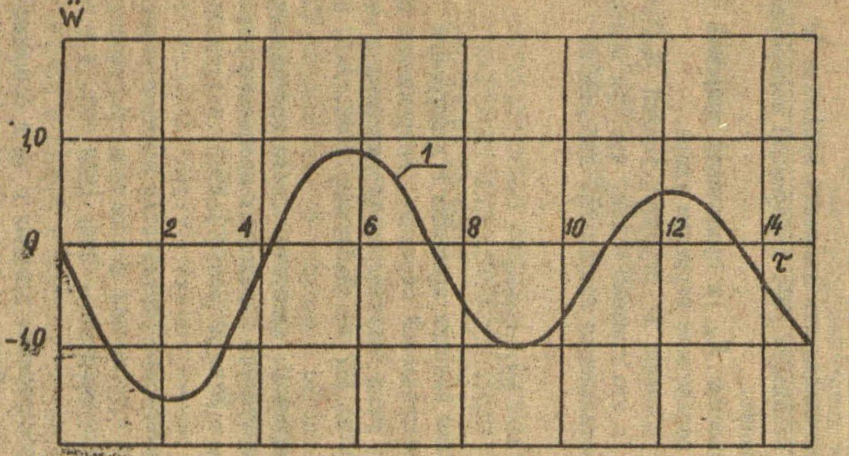


Рис. 7. Ускорения $\ddot{W}$ при воздействии "длинного" поперечного импульса. Уточненная теория.

1. Классическая теория пригодна для определения максимальных значений моментов M_α, перерезывающей силы Q_α и ускорений $\ddot{w}$ с точностью до 15% при "коротком" поперечном ударе по торцу.

2. Для правильного нахождения значений прогибов W и окружных усилий N_β необходим учёт деформаций поперечного сдвига и инерции вращения.

3. Продольными усилиями N_α и продольной инерцией можно пренебречь при поперечном торцевом ударе.

4. Зависимость от времени τ окружных усилий $N_\beta(\tau,\alpha)$ аналогична, как у w ; это связано с тем, что при поперечном ударе волновая составляющая продольной деформации пренебрежимо мала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Варна Я.П. Влияние инерции вращения и деформации сдвига в задаче о цилиндрической оболочке, нагруженной продольным импульсом. - В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1980, № 5, с. 124-140.

2. Нигул У.К., Петерсон М. Алгоритм метода трёхмерных сеток для анализа динамических переходных процессов осесимметричной оболочки. - Изв. АН ЭстССР, 1966, № 1, с.28-35.

3. Нигул У.К. Сопоставление результатов анализа переходных волновых процессов в оболочках и пластинах по теории упругости и приближённым теориям. - ПММ, 1969, 33, № 2, с. 308-322.

4. Варна Я.П Распространение ударных волн в осесимметричных оболочках. - В кн.: Вопросы электродинамики и механики сплошных сред. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1978, вып. 4, с. 116-128.

5. Мальцев А. К численному расчёту задач динамики составных оболочечных конструкций. - М., 1979, 30 с. / Рук. деп. в ВИНИТИ 10 дек. 1979 г., № 4194 - 79 Деп /

6. Greenspon I.E. Vibration of a thick-walled cylindrical shell-comparison of the exact theory with approximate theories.- es. - J.Acoust.Soc.America, 1960, 32, p. 571 - 578.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.II7-I24

УДК 539.63

М.А.Белов, О.М.Юдрупс
ЛГУ им. П.Стучки

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЁТОМ МОМЕНТОВ ПРИ УДАРЕ ПО ТОРЦУ

В настоящее время имеется много различных моделей теории пластичности, достаточно хорошо описывающих пластические деформации, но численное решение задач пластичности в силу нелинейности полученных уравнений, наталкивается на существенные математические затруднения, которые заставляют рассматривать более упрощённые модели. В статье [I] рассматривались пластические деформации в цилиндрической оболочке при ударе по торцу в предположениях безмоментной теории упруго-пластических деформаций [2] без учёта упругой разгрузки. В настоящей статье рассматривается решение той же задачи в рамках моментной теории упруго-пластических деформаций.

Рассмотрим изотропную осесимметричную цилиндрическую оболочку длины L с толщиной стенок h и радиусом срединной поверхности R. В начальный момент времени на левый торец оболочки начинает действовать осесимметричная нагрузка ударного типа, а правый торец всё время остаётся свободным. Исследуются пластические деформации, которые возникают при достаточно сильном ударе.

Уравнения равновесия для цилиндрической оболочки в безразмерных величинах получены стандартным образом и имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial N_1}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = -N_2 - \frac{\partial^2 M_1}{\partial \alpha^2}, \tag{1}$$

где τ - безразмерное время, u, w - безразмерные перемещения срединной поверхности, α - безразмерная координата оболочки.

Усилия N_1, N_2 и моменты M_1, M_2 были получены обычным путём [3], учитывая как допущения теории тонких оболочек, так и предположения теории упруго-пластических деформаций, где интенсивность касательных напряжений T связана с интенсивностью деформации сдвига Γ соотношением

$$T = \frac{G}{E}\left(\Gamma + A\Gamma^3\right) \tag{2}$$

где G - упругая константа Ламе, E - модуль упругости, а A константа, определяющая пластические свойства материала. Она определяется экспериментально.

В перемещениях усилия и моменты имеют следующий вид:

$$N_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \nu w - H\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{4}{9}A(1-\nu)\Big[2\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3 - w^3 + 3w^2\frac{\partial u}{\partial \alpha} - w\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{h^3}{4R^3}\Big[\frac{\partial u}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)^2 - \frac{1}{2}w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)^2 + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{h}{10R}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)^3\Big]\Big]; \tag{3}$$

$$N_2 = \nu\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w + \frac{4}{9}A(1-\nu)\Big[-\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3 + 3w\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 - 3w^2\frac{\partial u}{\partial \alpha} - 2w^3 + \frac{h^2}{4R^2}\Big[-\frac{\partial u}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)^2 - 2w^2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2w\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)^2\Big]\Big]; \tag{4}$$

$$M_1 = -H\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{4}{9}A(1-\nu)\left[-6\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \right.\right.$$

$$- 3w^2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 2w^3 + 6w\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - 3w^2\frac{\partial u}{\partial \alpha} +$$

$$\left.\left. + 2\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^3 + \frac{3h^2}{10R^2}\left[-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)^3 + 3\frac{\partial u}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)^2\right]\right]\right); \qquad (5)$$

$$M_2 = H\left(w + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{4}{9}A(1-\nu)\left[6w^2\frac{\partial u}{\partial \alpha} - 6\frac{\partial u}{\partial \alpha}w\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \right.\right.$$

$$- 6w^3 + 3\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + 3w^2\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - 3\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 w +$$

$$\left.\left. + \frac{3h^2}{20R^2}\left[-3w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}\right)^3\right]\right]\right), \qquad (6)$$

где $H = \frac{h^2}{12R^2}$, а A определяется из формулы (2).

К системе уравнений (I) добавляются следующие граничные и начальные условия:

$$N_1\Big|_{\alpha=0} = f_1(\tau) \quad , \quad N_1\Big|_{\alpha=l} = 0,$$

$$M_1\Big|_{\alpha=0} = f_2(\tau) \quad , \quad M_1\Big|_{\alpha=l} = 0, \qquad (7)$$

$$Q_1\Big|_{\alpha=0} = f_3(\tau) \quad , \quad Q_1\Big|_{\alpha=l} = 0,$$

$$u\Big|_{\tau=0} = w\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \qquad (8)$$

где $Q_1 = -\frac{\partial M_1}{\partial \alpha}$, $l = L/R$, $f_i(\tau)$, $i = 1,2,3$ – безразмерные функции внешней нагрузки.

Решая задачу (I) + (7) + (8), находим u , w , по значениям которых вычисляются усилия N_1 , N_2 и моменты M_1 , M_2 . Интенсивность касательных напряжений для осесимметричной цилиндрической оболочки находим по формуле

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{S_1^2 + S_2^2 - S_1 S_2} \ ,$$

где
$$S_1 = \frac{1}{1-\nu}\left(N_1 + \sqrt{3H}\,|M_1|\right),$$
$$S_2 = \frac{1}{1-\nu}\left(N_2 + \sqrt{3H}\,|M_2|\right),$$
которая приведена в [4]. Если $T > T_s$ (T_s - предел текучести) при фиксированном $\alpha \in [0, \ell]$ в некоторый момент времени τ, то в этом сечении α в данный момент времени $\tau \geqslant 0$ имеют место пластические деформации.

Математически задача решается численно с помощью конечно-разностной аппроксимации дифференциальных операторов по пространственной координате α. Это позволяет свести задачу (I) + (7) + (8) к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений по времени τ, аналогично [I]. Число обыкновенных дифференциальных уравнений при выбранном шаге s по координате α равно $(4\ell/s + 1)$, где ℓ - безразмерная длина оболочки.

Составленная программа позволяет вычислять интенсивность касательных напряжений T в различные моменты времени. Для сходимости конечноразностной аппроксимации установлено что шаг S по пространственной координате нужно брать большим или равным шагу по времени τ.

При контрольных расчётах выбирались следующие функции внешней нагрузки
$$f_1(\tau) = F_0\left(\frac{\alpha}{4}\right)^4\left(1+\frac{\alpha}{4}\right)^{10} e^{-6\tau}\left(1-e^{-\tau}\right)^4,$$
$$f_2(\tau) = 0, \qquad f_3(\tau) = 0.$$
Для интенсивности касательных напряжений T использовалось соотношение
$$T = \frac{G}{E}\left(\Gamma + A\Gamma^3\right)$$
где A -200 и A = -0,5. Численные значения остальных параметров следующие:
$$F_0 = 0{,}006,\ \nu = 0{,}4,\ \ell = 3,\ R/h = 25.$$
Шаг по координате $S = 0{,}1$, шаг по времени 0,I. На ЭВМ ЕС-1022 расчёт данного примера потребовал 22 минуты машинного

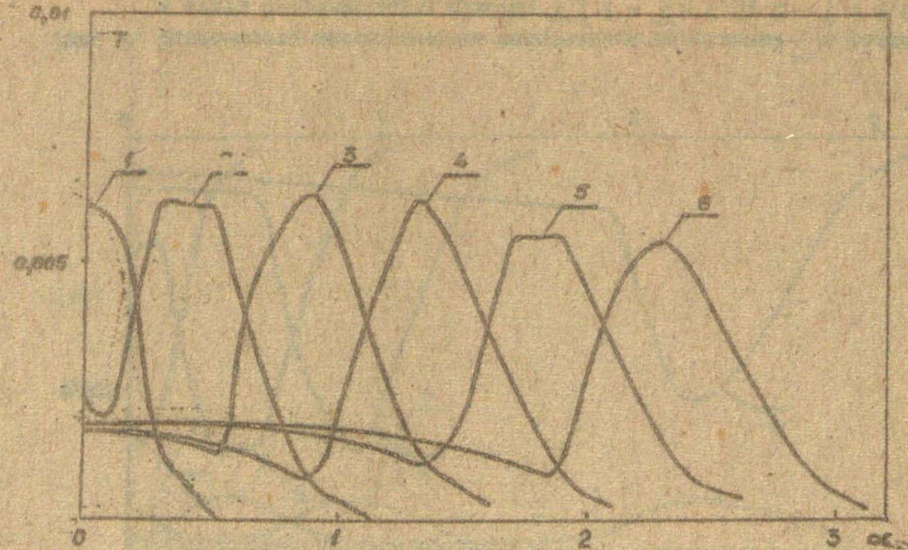


Рис. I. Зависимость интенсивности касательных напряжения T в различные моменты безразмерного времени τ; I - τ = 0,5; 2 - τ = I,0; 3 - τ = I,5; 4 - τ = 2,0; 5 - τ = 2,5; 6 - τ = 3,0. A = -0,5.

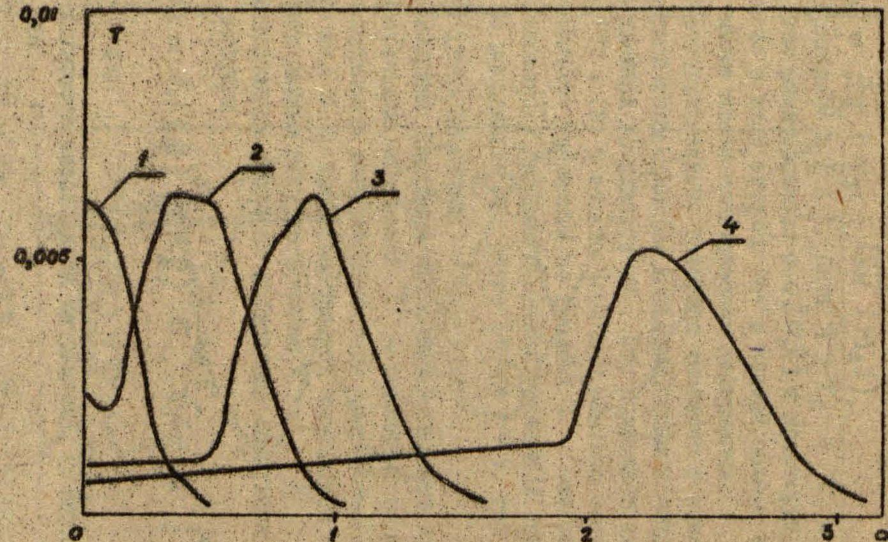


Рис. 2. Зависимость интенсивности касательных напряжений T в различные м менты безразмерного времени τ: I - τ= 0,5; 2 - τ = I,0; 3 - τ = I,5; 4 - τ = 3,0. A= -200.

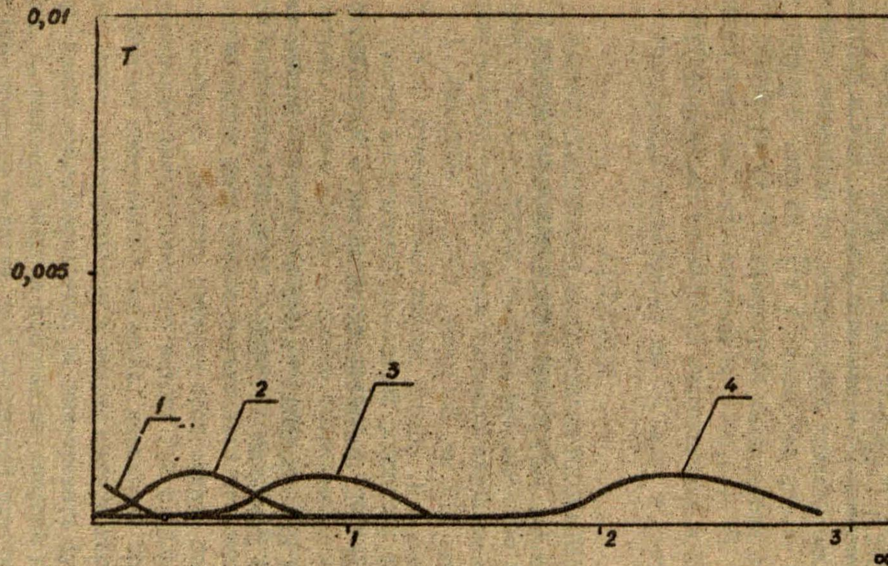


Рис. 3. Зависимость интенсивности касательных напряжений T в различные моменты времени τ: I – τ = 0,5; 2 – τ = I,0; 3 – τ = I,5; 4 – τ = 3. A = –200.

времени. Программа требует резерва памяти в 102 К.

На рис. 1 и рис. 2 изображены интенсивности касательных напряжений T в различные моменты безразмерной времени τ при $A = -0{,}5$ и $A = -200$ соответственно. По мере увеличения τ, величина T постепенно убывает, как и предполагается при пластических деформациях, но медленнее, чем при безмоментной теории деформации [1]. На рис. 3 видно, что интенсивность касательных напряжений T не меняется, ($A = -200$, $A = 0{,}001$) по времени, так как удар недостаточно сильный и пластические деформации не наблюдаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов М.А., Юдрупс О.М. Пластические деформации в цилиндрической оболочке при ударе по торцу. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1982, с. 136-145.
2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. - М.: Наука, 1969.-420 с.
3. Власов В.С. Общая теория оболочек. - М.: ГИТТЛ, 1949.-770 с.
4. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. - Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1962. - Ч.1, 273 с.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.125-141

УДК 539.4

Г.-Ю.Шлютер
Ростокский университет им. В...ика, г.Росто.., ГДР

РАСЧЁТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОГОНАЛЬНО РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ *

I. Введение

Расчёт собственных колебаний ребристых пластин аналитическим путём можно провести только в частных (специальных) случаях. Такие случаи подробно исследованы в [I], где рассматривались прямоугольные пластины с продольными рёбрами при шарнирном опирании поперечных краёв. В общем случае эта задача может быть решена только лишь приближённо. Известно, что одним из пособов решения этой задачи является также применение энергетического метода [2]. Для этого краевая задача на собственные значения, используя принцип виртуальных работ, преобразуется в эквивалентную вариационн.,ю задачу. После этого необходимо м..нимизировать функционал энергии. ..ункционал энергии состоит из энергии деф..мирования и кинетической энергии .сей ребристой пла.тины, включая энергию на краю или внутри пластины ук.еплённых (присоединенных) масс и упругих элеме..тов, как, наприме., у..угие защемления, упругие опоры, точечные массы. по лини. ра..пределённые массы или пружины и т.д. Рассмотрение пластин с гра-

---

* перевод И.П.Варна, И.Я.Лусе
(ЛГУ им. П.Стучки)

ничными условиями и особенностями такого типа указанным методом очень наглядно и удобно.

Существенное преимущество по отношению к классическому подходу в виде краевой задачи на собственные значения состоит в том, что в результате определённого обобщения энергетического подхода эту вариационную задачу можно сформулировать как задачу функционального анализа и тем самым использовать её математический аппарат, что особенно окупается в исследованиях существования, сходимости и регулярности решения. Объясним коротко способ перехода.

Краевая задача на собственные значения задана операторным уравнением

$$Au - \lambda Bu = 0 \tag{I}$$

для $u \in \mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, где λ - собственное значение, а $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{D}(B)$ - области определения операторов A и B.

Эквивалентная вариационная задача имеет вид:

$$\min_{u \in \mathcal{D}(A)} \left[\mathcal{U}(u) - \lambda_1 T(u) \right] = 0, \quad u \neq 0 \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{U}(u)$, $T(u)$ - однородные квадратичные функционалы, соответствующие энергии деформирования и кинетической энергии ребристой пластины. С их помощью могут быть определены энергетические нормы

$$|u|_A = \sqrt{\mathcal{U}(u)}, \quad |u|_B = \sqrt{T(u)} \tag{3}$$

Замыкание множеств $\mathcal{D}(A)$, $\mathcal{D}(B)$ относительно этих норм образует энергетические пространства H_A, H_B. Из (2) следует функционально-аналитическая формулировка

$$\min_{u \in H_A} \left[|u|_A^2 - \lambda_1 |u|_B^2 \right] = 0, \quad u \neq 0 \tag{4}$$

где $H_A \subset H_B$.

Таким образом получено обобщение исходной граничной задачи на собственные значения (I) в смысле обобщённого решения, что позволяет провести дальнейшее рассмотрение методами функционального анализа. Если A, B положительно определённые операторы, H_A и H_B являются Гильбертовыми пространствами. Можно показать, что при определённых предположениях эти пространства содержатся в пространствах Соболева. Тогда можно применить теоремы вложения Соболева [3] для выяснения важных свойств обобщённого решения. Используя теорему I.Hlavaček и H.Nečas [4], можно доказать также существование дискретного спектра для (I).

К обобщённому принципу минимума (4) применяется метод Ритца. Координатные функции являются элементами энергетического пространства H_A , и должны удовлетворять только граничным условиям и условиям сопряжения. Если использовать минимальный принцип (2), то координатные функции принадлежат множеству $\mathfrak{D}(A)$ и должны удовлетворять добавочным условиям сопряжения в форме скачков производных в точках нахождения рёбер. Здесь проявляются преимущества работы с обобщёнными производными. Можно доказать, что собственные значения задач (4) и (I) соответственно (2) совпадают [2]. Таким образом, расширение множества функций $\mathfrak{D}(A)$ на множество функций H_A не меняет спектр. Основываясь на теоремы вложения Соболева, аналогичные выводы можно сделать также относительно собственных функций.

После выбора соответствующей системы координатных функций $\{u_i\}$, $i=1,2,\dots$, $u_i \in H_A$ в результате подстановки

$$u = \sum_{i=1}^{N} a_i u_i \tag{5}$$

в (4) получим алгебраическую задачу на собственные значения

$$(\hat{A} - \lambda \hat{B})\hat{a} = 0 \ , \quad \hat{a} \in R^n \tag{6}$$

с симметричными положительно определёнными матрицами $\hat{A}$ и $\hat{B}$, для приближённого расчёта искомых собственных значений λ и собственных функций (I). Система координатных функций должна обеспечить сходимость метода Ритца и также численную устойчивость всего вычислительного процесса. При этих условиях методом Ритца получим оценку "сверху" для собственных значений. Значительный интерес представляет также расчёт оценки "снизу", например, методом Кнауера [5] при использовании приближения Ритца.

2. Вариационная задача для собственных колебаний ребристых пластин

Пусть $\hat{u}=\{u,v,w\}$ - вектор перемещений срединной поверхности пластины; Ω - область в плоскости, которую пластина занимет, Γ - достаточно гладкий край пластины (рис. I), S - объединение линий контакта пластины и подкреплений. Тогда для $\mathcal{U}(\hat{u})$, $T(\hat{u})$ имеет место [2]:

$$2\cdot\mathcal{U}(\hat{u})=\iint_\Omega N\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v}{\partial y}\Big)^2+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big)^2\Big]\,dx\,dy+$$

$$+\iint_\Omega K\Big[\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2(1-\mu)\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big)^2\Big]\,dx\,dy+$$

$$+\int_S E^*\hat{v}^T\hat{C}\hat{v}\,ds+\int_\Gamma \hat{u}_1^T\hat{G}\,\hat{u}_1\,d\Gamma\;,$$

$$2\cdot T(\hat{u})=\iint_\Omega \rho h(u^2+v^2+w^2)\,dx\,dy+\int_S \rho^*\hat{w}^T\hat{M}\hat{w}\,ds+$$

$$+\int_\Gamma \hat{u}_1^T\hat{N}\hat{u}_1\,d\Gamma\;, \qquad (7)$$

где

$$\hat{u}_1=\begin{bmatrix} u_n\\ u_t\\ w\\ \frac{\partial w}{\partial n}\\ \frac{\partial w}{\partial t}\end{bmatrix},\qquad \hat{v}=\begin{bmatrix}\bar{u}'\\ \bar{v}''\\ \bar{w}''\\ \theta''\\ \theta'\end{bmatrix},\qquad \hat{w}=\begin{bmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}'\\ \bar{w}'\\ \theta'\\ \bar{v}\\ \bar{w}\\ \theta\end{bmatrix}$$

$$\hat{C}=\begin{bmatrix} F & -S_z & -S_y & -S_\omega & 0\\ -S_z & J_{zz} & J_{yz} & J_{\omega y} & 0\\ -S_y & J_{yz} & J_{yy} & J_{\omega z} & 0\\ -S_\omega & J_{\omega y} & J_{\omega z} & J_\omega & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G^*}{E^*}J_d\end{bmatrix}$$

Рис. I. Пластина с ортогональными подкреплениями

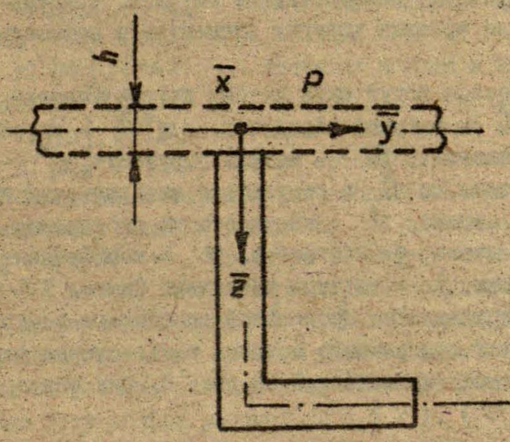


Рис. 2. Система координат в ребре

$$\hat{M}' = \begin{bmatrix} F & 0 & -S_y \\ 0 & F & S_z \\ -S_y & S_z & J_p \end{bmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{C}' & \hat{0} \\ \hat{0} & M' \end{bmatrix}$$

Вектор $\hat{U}_1$ содержит деформации края (n - в направлении нормали, t - в касательном направлении), $\hat{\vartheta}$ и $\hat{w}$ - деформации в подкреплении, которые связаны с деформациями в пластине. Например, в случае продольного ребра ($y = y_K$) имеются соотношения связи:

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= u(x, y_K) \\ \bar{v}(x) &= v(x, y_K) \\ \bar{w}(x) &= w(x, y_K) \\ \theta(x) &= \frac{\partial}{\partial y} w(x, y_K) \end{aligned} \tag{8}$$

$\hat{G}$ и $\hat{N}$ - симметричные положительные матрицы, содержащие коэффициенты для краевых упругих элементов и присоединённых масс.

Аналогичным образом могут быть учтены другие упругие элементы и массы. $E^*\hat{C}$ - матрица жёсткости, а $\rho^*\hat{M}$ - матрица инерции для подкреплений (E^* - модуль упругости, ρ^* - плотность), $\hat{C}'$ получена из $\hat{C}$ в результате вычёркивания последнего столбца и строки. N - жёсткость на растяжение, K - жёсткость на изгиб, ρ - плотность, μ - коэффициент поперечной деформации, h - толщина пластины. Символ " $'$ " - означает дифференцирование по продольной координате подкрепления. Характеристики поперечного сечения подкрепления даны в координатной системе, приведённой на рис. 2. Они определяются по формулам:

$$S_y = \int_F \bar{z}\, dF, \quad S_z = \int_F \bar{y}\, dF, \quad S_\omega = \int_F \omega_p\, dF, \quad J_{\omega y} = \int_F \bar{y}\,\omega_p\, dF,$$

$$J_{\omega z} = \int_F \bar{z}\,\omega_p\, dF, \quad J_{yy} = \int_F \bar{z}^2\, dF, \quad J_{yz} = \int_F \bar{y}\,\bar{z}\, dF, \quad J_{zz} = \int_F \bar{y}^2\, dF, \tag{9}$$

$$J_p = J_{yy} + J_{zz}\ , \quad J_d = \frac{1}{3}\int\limits_t t^3 ds'\ , \quad J_\omega = \int\limits_F \omega_p^2 dF\ ,$$

где F - площадь поперечного сечения, ω_p - удельная депланация относительно точки контакта p (рис. 2), t - толщина стенки и s' - длина дуги вдоль срединной линии профиля.

Из соображений большей простоты в (7) не учтены деформации сдвига в подкреплениях. Как их учесть показано в [7].

3. Расчёт собственных колебаний ребристых пластин методом Ритца

Система координатных функций $\{u_i\}, i=1,2,..$, используемая в методе Ритца (5), должна обладать следующими свойствами:

а) $u_i \in H_A$, $i=1,2,..$

б) $u_1, u_2, \dots, u_N$ - для произвольного N линейно независимы;

в) $\{u_i\}, i=1,2,..$ - является полным в энергетическом пространстве H_A ;

г) $\{u_i\}, i=1,2,..$ - сильно минимальна в H_A ;

д) $\{u_i\}, i=1,2,..$ почти ортонормирована в H_B .

Свойство в) гарантирует сходимость приближения Ритца к обобщённому решению уравнения (4) относительно нормы H_A и H_B при $N \to \infty$. Свойство г) обеспечивает численную устойчивость метода Ритца относительно малых ошибок, возникающих при вычислении матриц $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Наконец, из д) следует, что вычислительный процесс решения общей алгебраической задачи на собственные значения является устойчивым. Более подробно этот вопрос рассмотрен в [2], [8], [9], [10].

После введения безразмерных координат

$$\xi = \frac{x}{a}\ , \quad \eta = \frac{y}{b}$$

и некоторых преобразований в (7) из задачи на минимум (4) для функционала (7) в результате подстановки .

$$u(\xi,\eta)=\sum_{l=1}^{L}a_l u_l(\xi,\eta)$$

$$v(\xi,\eta)=\sum_{l=1}^{M}b_l v_l(\xi,\eta) \qquad (10)$$

$$w(\xi,\eta)=\sum_{l=1}^{N}c_l w_l(\xi,\eta)$$

для перемещений срединной поверхности пластины, и учитывая

$$\mathcal{U}(\hat{u})=\mathcal{U}(\hat{a})=\frac{1}{2}\hat{a}^T\hat{A}\hat{a} \qquad (11)$$

$$T(\hat{u})=T(\hat{a})=\frac{1}{2}\hat{a}^T\hat{B}\hat{a}$$

$$\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial\hat{a}}=\hat{A}\hat{a}\ ,\ \frac{\partial T}{\partial\hat{a}}=\hat{B}\hat{a} \qquad (12)$$

получаем алгебраическую задачу на собственные значения

$$(\hat{A}-\lambda\hat{B})\hat{a}=0 \qquad (13)$$

где

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \hat{a}_3\end{bmatrix},\quad \hat{a}_1=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_L\end{bmatrix},\quad \hat{a}_2=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_M\end{bmatrix},\quad \hat{a}_3=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_N\end{bmatrix},$$

$$\lambda=\frac{\bar{\rho}\bar{h}a^4}{\bar{K}}\omega^2. \qquad (14)$$

Величина λ является безразмерным собственным значением; $\bar{\rho}$, $\bar{h}$, $\bar{K}$ – приведённые величины для плотности, толщины пластины и жёсткости пластины, ω – собственная круговая частота.

Матрицы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ разбиваются на составные части – матрицы. Для матрицы $\hat{A}$ это разбиение следующее:

$$\begin{array}{c|ccc} & L & M & N \\ \hline L & \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} & \hat{A}_{13} \\ M & \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} \\ N & \hat{A}_{31} & \hat{A}_{32} & \hat{A}_{33} \end{array}$$

Аналогичный вид имеет также матрица $\hat{B}$.

5. Примеры

Рассмотрим прямоугольную пластину с продольными рёбрами и линиями ассиметрии на поперечных краях. Такие пластины исследовались в [I], так что имеющиеся обширные численные результаты можно использовать для установления точности приближённого метода на этих примерах. Использовались собственные функции продольных и поперечных колебаний балки постоянного поперечного сечения. Оказалось, что их использование является очень целесообразным. Интегралы, появляющиеся в матрицах $\hat{A}$ и $\hat{B}$, можно вычислить аналитическим путём. Рис. 3 и рис. 4 дают сравнение приближённых значений, полученных энергетическим методом, с точными результатами [I] для двух различных расстояний между рёбрами в зависимости от высоты вертикальной стенки подкрепления. Даже при экстремальной большой высоте подкреплений и маленького расстояния между ними имеется отличное совпадение результатов. Рис. 5 показывает процесс сходимости приближённых решений для собственных значений. Использованы обозначения

$$q = \frac{n\pi}{a}, \quad \gamma = \frac{\rho h}{\kappa q^4}\omega^2 .$$

Аналогичные зависимости имеют место также в случае защемления продольных краёв.

В исследованиях установлено, что перемещения u и v срединной поверхности имеют ничтожно малое влияние на собственные частоты ребристых пластин, за исключением случая тесного расположения высокостенных подкреплений. Но так как такой экстремальный случай встречается редко, представляется целесообразным пренебречь этим влиянием по сравнению с прогибом и тем самым существенно упростить расчёты и уменьшить работы по составлению програм. Если положить $u=0$ $v=0$, то остаются только подматрицы $\hat{A}_{33}$ и $\hat{B}_{33}$.На рис. 6 показана такая модельная пластина, расчёт которой был проведён при указанных упрощениях. Сравнение с точным решением проведено на рис. 7. Несмотря на небольшое число координатных функций получено сравнительно хорошее совпадение как собственных частот, так и собственных форм колебаний. Наибольшая ошибка при расчёте первых 10 собственных частот имеет место для четвёртой собственной частоты и составляет 11%. При N=7 она понижается до 7,7%. Первая собственная частота уже при N =4 имеет ошибку только в 0,1%. Указанная пластина исследовалась также экспериментально и было получено хорошее совпадение с результатами расчёта. Проведено большое количество численных исследований.

6. Программа расчёта ØVPLA3

На основе приведённых исследований разработана программа счёта ØVPLA3 для расчёта ребристых прямоугольных пластин [11]. Охвачены все комбинации граничных условий, изображённые на рис. 8, включая упругое защемление и упругое опирание вместе с инерцией краевых масс. Могут быть учтены различного рода подкрепления, имеющие кусочно постоянное поперечное сечение и расположенные параллельно координатным осям. Возможно также рассмотрение прямоугольных вырезов, точечных масс, упругих опор и упруго с ребристой пластиной связанных твёрдых тел. Для этого необходимо лишь несколько минут машинного времени. Программа составлена для ЭВМ CD 3300 Института Судостроения г. Росток. В настоящее время производится приспособление программы для ЭВМ ЕС-1040.

7. Заключение

Используя энергетический метод, разработана методика расчёта собственных колебаний ребристых пластин. Эф[illegible]

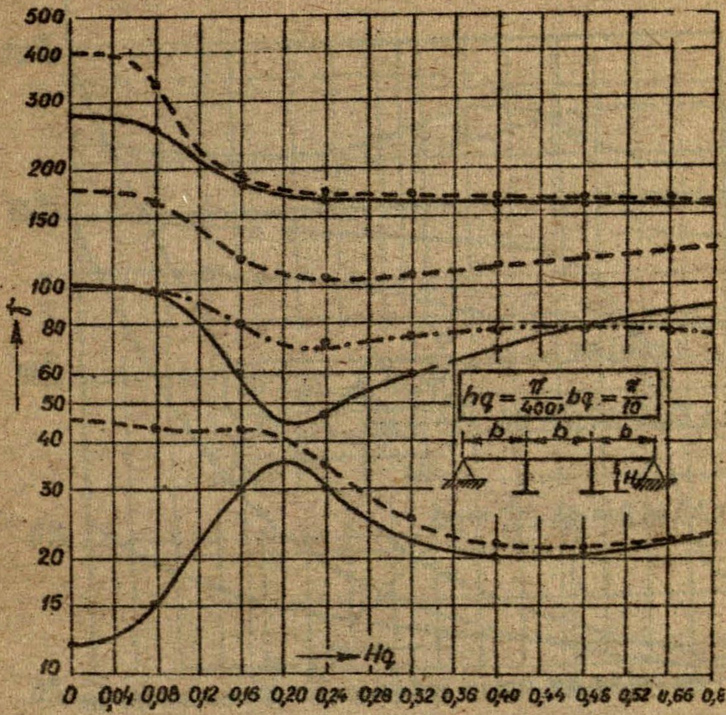


Рис. 3. Приближенные безразмерные собственные значения γ и точные результаты [I] для прямоугольной пластины с двумя равноотстоящими подкреплениями при шарнирном закреплении продольных краев в зависимости от безразмерной высоты подкреплений Hq при $bq=\frac{\pi}{10}$ (L =M=5, N =I5).

Точные значения: ——— симметричные, - - - - асимметричные, —•—•— колебания сдвига.

Приближенные значения: + симметричные колебания, • асимметричные колебания.

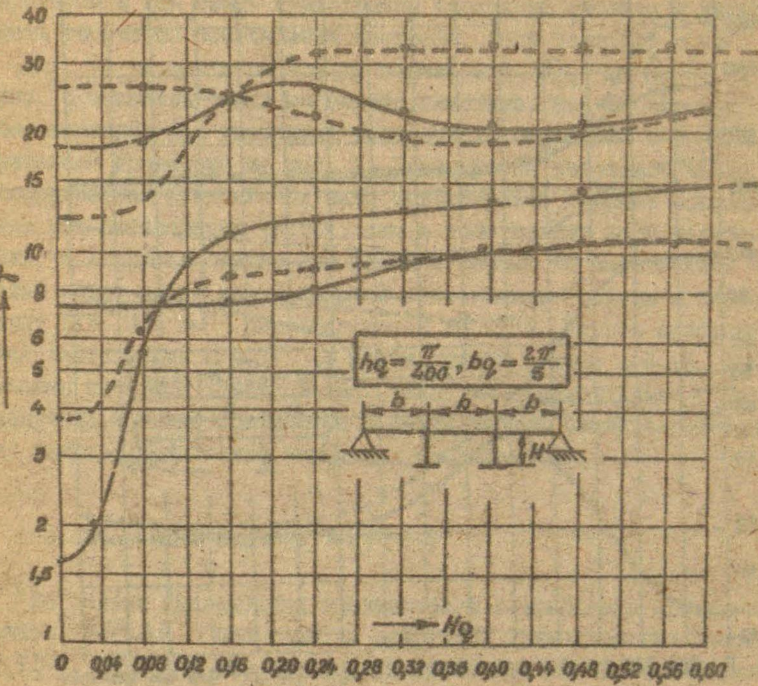


Рис. 4. Зависимость точных [I] и приближенных собственных значений γ от безразмерной высоты подкреплений H_q для прямоугольной пластины с двумя эквидистантными подкреплениями при шарнирном закреплении продольных краев ($b_q = \frac{2\pi}{5}$, $L = M = 5$, $N = 15$).

Точные значения: ——— симметричные колебания,

\- - - асимметричные колебания.

Приближенные значения: + симметричные колебания,

• асимметричные колебания.

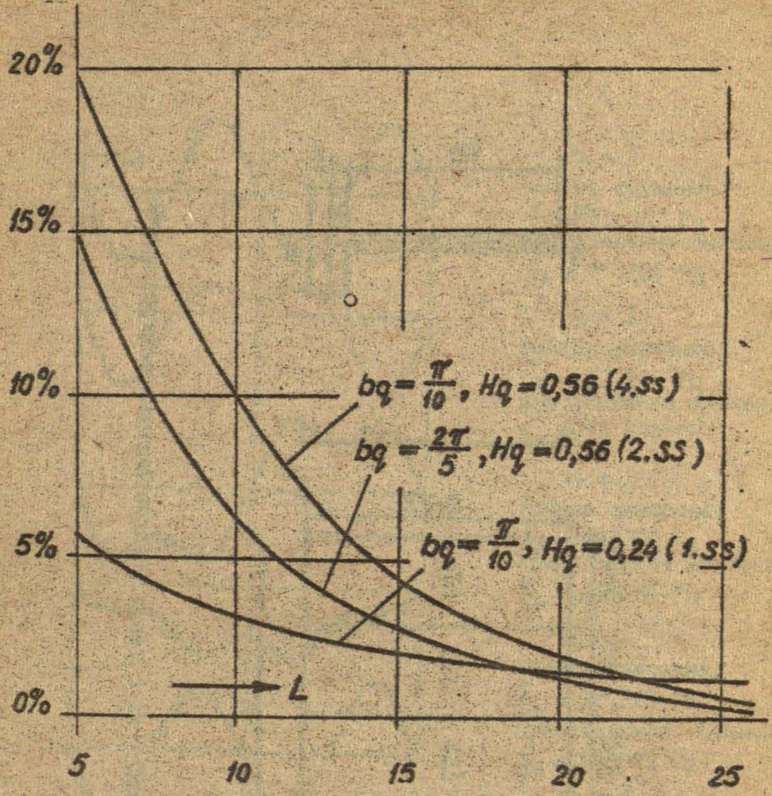


Рис. 5. Ошибка приближенного расчета для собственных значений в зависимости от N при L = M =5

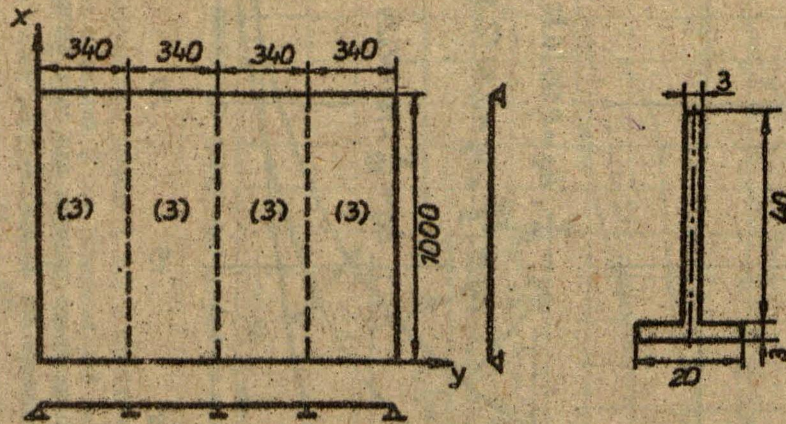
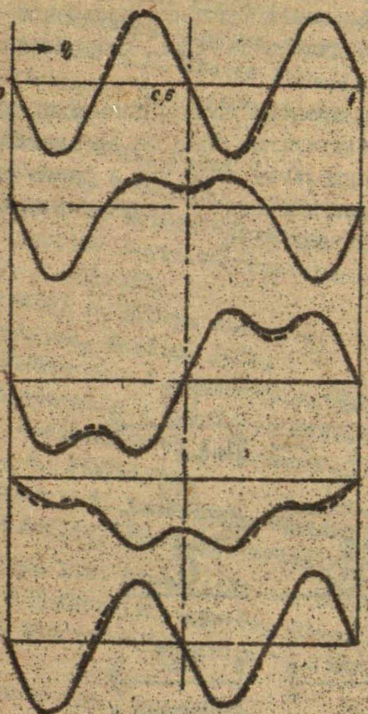


Рис. 6. Пластина с тремя эквидистантными подкреплениями



n = I
точное значение:
f_1 = 7I,037 Гц
приближенное значение:
f_1 = 7",IOI Гц

n = I
точное значение:
f_2 = 73,343 Гц
приближенное значение:
f_2 = 74,735 Гц

n = I
точное значение:
f_3 = 77,384 Гц
приближенное значение:
f_3 = 82,34I Гц

n = I
точное значение:
f_4 = 79,829 Гц
приближенное значение:
f_4 = 88,773 Гц

n = 2
точное значение:
f_5 = 97,022 Гц
приближенное значение:
f_5 = 97,228 Гц

Рис. 7. Сравнение собственных частот и форм для пласти ы при N = 8, L = M = 0.
——— точное значение, - - - - приближенное значение, n - число полуволн в направлени

оказался подход с использованием функционального анализа. Доказано существование дискретного спектра для ребристых пластин и сходимость метода Ритца в энергетических пространствах H_A , H_B . Система координатных функций состоит из собственных функций продольных и изгибных колебаний балки Бернулли постоянного поперечного сечения. Разработана программа расчёта ØVPLA3.

Программа характеризуется простым вводом данных и очень маленьким временем счёта. Желательным было бы дальнейшее развитие для области непрямоугольных пластин, а также расчёты нижних границ собственных значений и получение пригодных оценок ошибки для собственных форм.

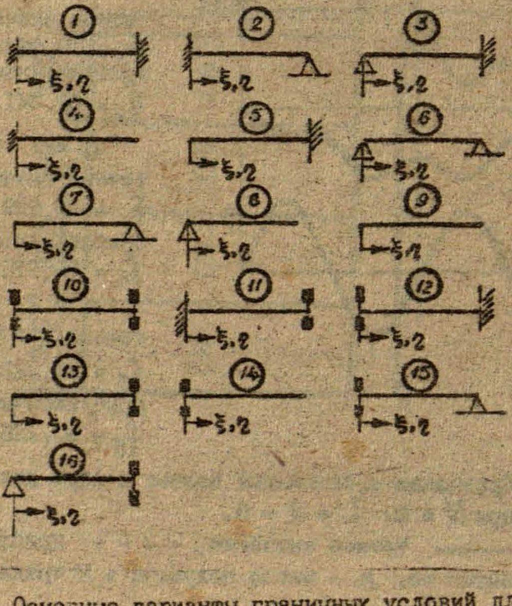


Рис. 8. Основные варианты граничных условий для пластины

ЛИТЕРАТУРА

1. Schlüter H.- J. Über das Eigenschwingungsverhalten der längsverripten Rechteckplatte mit drehbar gelagerten Querrädern. Tagung Dynamik und Getriebetechnik vom 13.bis 16.Juni 1973 in Dresden.- VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1973, Band B.

2. Michlin S.G. Variationsmethoden der mathematischen Physik (in russisch). Moskau, Verlag Nauka, 1970.

3. Sobolew S.L. Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. Akademie Verlag Berlin, 1964.

4. Hlavaček I., Nečas H. On Inequalities of Korn's Typ.- Arch. Rational Mech.Anal., 1970, Vol 36, S.305-334.

5. Knauer B. Untere Schranken für Eigenwerte selbstadjungierter positiv definiter Operatoren.- Numerische Mathematik, 1971, 17, S.166-171.

6. Triebel H. Höhere Analysis.- VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.

7. Schlüter H.- J.: Numerische Untersuchungen zum Eigenschwingungsverhalten verripter Platten mit Hilfe der Energiemethode.- Wissenschaftl.Zeitschrift der Universität Rostock, 1975, H.9, S. 1167-1178.

8. Michlin S.G. Numerische Realisierung von Variationsmethoden.- Berlin, Akademie Verlag, 1969.

9. Dowbysch L.N. Stabilität der Ritzschen Methode in Aufgaben der Spektraltheorie von Operatoren (in russisch).- Arbeiten des Mathemat.Instituts "W.A.Steklow", 1965, 84, S. 78-92.

IO. Wilkinson J.H., Reinsch C. Linear Algebra. Handbook for Automatic Computation.- Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1971, Vol.2 .

11. Schlüter H.- J. Benutzeranleitung für das Rechenprogramm Ø VPLA3.- Wilhelm-Pieck-Universität Rostock, Sektion Schiffstechnik, 1978.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы комплексного исследования моделей
электродинамических устройств
1985, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 142-155

УДК 539.3

Н.Н.Блумберг
ЛГУ им. П.Стучки

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Различные конструкции, обладающие слоистой структурой, имеют широкое распространение в современной технике. Особенно сильно эта тенденция проявляется в настоящее время в связи с повсеместным использованием новых композитных материалов. Наиболее часто слоистые конструкции образованы из материалов с резко различающимися физико-механическими свойствами. Как правило, можно выделить "жёсткие" - несущие слои, воспринимающие воздействия окружающей среды, и "мягкие" - связующие слои, обеспечивающие целостность и совместную работу всей конструкции.

Основные особенности контакта и механизма передачи усилий между отмеченными двумя группами слоёв можно выяснить, рассматривая задачу об изгибе пластин, лежащих на упругом основании. В данной статье, используя работу Б.Г.Коренева [I], исследование напряжённо-деформированного состояния круглой пластины обобщается для случая совместного изгиба произвольного числа таких пластин, связанных между собой упругой прослойкой. При построении соответствующего алгоритма вычислений и для последующего эффективного использования ЭВМ в конкретных расчётах целесообразно использовать аппарат матричной алгебры.

I. Постановка задачи и её математическая модель

Пусть дана круглая в плане многослойная пластина радиуса R с чередующимися жёсткими и мягкими слоями. Общее количество слоёв n будем считать числом нечётным, а нумерацию обусловимся вести сверху вниз, т.е. в противоположном направлении оси z цилиндрической системы координат. Начало этой системы расположим в центре пластины на срединной поверхности одного из слоёв. Толщины несущих слоёв обозначим h_i (i - нечётное число), а толщины связующих слоёв - s_k (k - чётное число). Будем также считать, что материалы, из которых изготовлены жёсткие слои, являются изотропными, и их упругие свойства характеризуют модуль упругости E_i и коэффициент Пуассона ν_i . Связующие слои трактуются как "мягкие" в том смысле, что их сопротивлением продольным деформациям можно пренебречь, а учитывать следует лишь напряжения, возникающие вследствие изменения поперечных деформаций. Поперечное обжатие последних характеризует модуль упругости E_k , а поперечные сдвиги - модуль сдвига G_k .Далее будем предполагать, что продольные перемещения в пределах любого из слоёв изменяются линейно, т.е. для всего многослойного пакета в целом принимается кинематическая гипотеза ломаной нормали. Если при этом в несущих слоях пренебречь поперечными деформациями, то каждый из них работает согласно классической гипотезе Кирхгофа-Лява. Принятые допущения позволяют написать разрешающую систему уравнений для определения напряжённо-деформированного состояния многослойного пакета рассматриваемых круглых пластин.

Решая задачу в перемещениях, неизвестными в жёстких слоях являются продольные перемещения u_i , v_i , а также поперечное смещение w_i произвольной точки срединной поверхности слоя в направлении осей цилиндрической системы координат r , φ , z . Вводя вспомогательную функцию - потенциал перемещений Φ_i , продольные смещения выразим в следующем виде:

$$u_i=\frac{\partial \Phi_i}{\partial r}; \quad v_i=\frac{\partial \Phi_i}{r\,\partial \varphi} . \qquad (1)$$

Тогда, согласно классической теории Кирхгофа-Лява, погонные силы и моменты в цилиндрической системе координат выражаются следующими формулами [2]:

$$N_{ri}+N_{\theta i}=B_i\left[\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r^2}+\nu_i\left(\frac{\partial^2\Phi_i}{r^2\partial\varphi^2}+\frac{\partial\Phi_i}{r\partial r}\right)\right];$$

$$N_{\varphi i}+N_{\theta i}=B_i\left[\frac{\partial^2\Phi_i}{r^2\partial\varphi^2}+\frac{\partial\Phi_i}{r\partial\varphi}+\nu_i\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r^2}\right];$$

$$S_i=B_i(1-\nu_i)\left[\frac{\partial^2\Phi_i}{r\partial\varphi\partial r}-\frac{\partial\Phi_i}{r^2\partial\varphi}\right];$$

$$M_{ri}+M_{\theta i}=-D_i\left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}+\nu_i\left(\frac{\partial^2 w_i}{r^2\partial\varphi^2}+\frac{\partial w_i}{r\partial r}\right)\right];$$

$$M_{\varphi i}+M_{\theta i}=-D_i\left[\frac{\partial^2 w_i}{r^2\partial\varphi^2}+\frac{\partial w_i}{r\partial r}+\nu_i\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2}\right];$$

$$H_i=-D_i(1-\nu_i)\left[\frac{\partial^2 w_i}{r\partial\varphi\partial r}-\frac{\partial w_i}{r^2\partial\varphi}\right];$$

$$Q_{ri}=-D_i\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w_i);\quad Q_{\varphi i}=-D_i\frac{\partial}{r\partial\varphi}(\Delta w_i); \qquad (2)$$

где $\Delta(\ldots)=\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\varphi^2}\right](\ldots)$ - оператор Лапласа в цилиндрической системе координат; $B_i=\frac{E_i h_i}{1-\nu_i^2}$ - жёсткость слоя при растяжении-сжатии; $D_i=\frac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}$ - цилиндрическая жёсткость слоя; N_{ri}, $N_{\varphi i}$, S_i - продольные силы; M_{ri}, $M_{\varphi i}$, H_i - изгибающие моменты; Q_{ri}, $Q_{\varphi i}$ - поперечные силы; $\sigma_{\theta i}=\frac{\alpha_i E_i \theta_i}{1-\nu_i}$ - температурные напряжения;

α_i - коэффициент линейного температурного расширения;
θ_i - температура, которая задаётся или находится из реше-

ния несвязанной тепловой задачи; $N_{\theta i}=\int\limits_{н}^{в}\sigma_{\theta i}\,dz$; $M_{\theta i}=\int\limits_{н}^{в}\sigma_{\theta i}\,z\,dz$ — при определении температурного воздействия интегрирование ведётся снизу вверх.

Неизвестные функции Φ_i и W_i определяются, решая систему уравнений равновесия, которая в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial N_{ri}}{\partial r}+\frac{\partial S_i}{r\partial\varphi}+\left(\tau_{rz}^{iв}-\tau_{rz}^{iн}\right)+p_{ri}+\frac{N_{ri}-N_{\varphi i}}{r}=0;$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial r}+\frac{\partial N_{\varphi i}}{r\partial\varphi}+\left(\tau_{\varphi z}^{iв}-\tau_{\varphi z}^{iн}\right)+p_{\varphi i}+\frac{2S_i}{r}=0;$$

$$\frac{\partial Q_{ri}}{\partial r}+\frac{\partial Q_{\varphi i}}{r\partial\varphi}+\left(\sigma_z^{iв}-\sigma_z^{iн}\right)+p_{zi}+\frac{Q_{ri}}{r}=0;$$

$$\frac{\partial M_{ri}}{\partial r}+\frac{\partial H_i}{r\partial\varphi}+\frac{h_i}{2}\left(\tau_{rz}^{iв}+\tau_{rz}^{iн}\right)+m_{ri}-Q_{ri}+\frac{M_{ri}-M_{\varphi i}}{r}=0;$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial r}+\frac{\partial M_{\varphi i}}{r\partial\varphi}+\frac{h_i}{2}\left(\tau_{\varphi z}^{iв}+\tau_{\varphi z}^{iн}\right)+m_{\varphi i}-Q_{\varphi i}+\frac{2H_i}{r}=0; \qquad (3)$$

где p_{ri}, $p_{\varphi i}$, p_{zi} — заданные и распределённые по площади пластинки силы, а m_{ri}, $m_{\varphi i}$ — их моменты; τ_{rz}, $\tau_{\varphi z}$ — касательные напряжения, а σ_z — нормальное напряжение, воздействующее на i-ый слой со стороны верхнего и нижнего мягкого слоя.

Контактные напряжения τ_{rz}, $\tau_{\varphi z}$ и σ_z определяются из условий сшивания слоёв и выражаются в следующем виде:

$$\tau_{rz}^{iв}=\frac{G_{i-1}}{S_{i-1}}\left(\frac{\partial\Phi_{i-1}}{\partial r}-\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}+\frac{h_{i-1}}{2}\frac{\partial W_{i-1}}{\partial r}+\frac{h_i}{2}\frac{\partial W_i}{\partial r}\right);$$

$$\tau_{\varphi z}^{iн}=\frac{G_{i+1}}{S_{i+1}}\left(\frac{\partial\Phi_i}{r\partial\varphi}-\frac{\partial\Phi_{i+1}}{r\partial\varphi}+\frac{h_i}{2}\frac{\partial W_i}{r\partial\varphi}+\frac{h_{i+1}}{2}\frac{\partial W_{i+1}}{r\partial\varphi}\right);$$

$$\sigma_z^{iв}=\frac{E_{i-1}}{S_{i-1}}\left(W_{i-1}-W_i\right);\qquad \sigma_z^{iн}=\frac{E_{i+1}}{S_{i+1}}\left(W_i-W_{i+1}\right). \qquad (4)$$

Подставляя выражения сил и моментов (2), а также контактных напряжений (4) в систему уравнений равновесия (3), после несложных, но достаточно громоздких преобразований, получим для каждого i -того жёсткого слоя два уравнения:

$$\mathcal{D}_i \Delta^2 w_i - \sigma_z^{iв} + \sigma_z^{iн} - \frac{h_i}{2}\left(\tau^{iв} + \tau^{iн}\right) = p_{iz} - \Delta M_{\theta i};$$

$$B_i \Delta^2 \Phi_i + \tau^{iв} - \tau^{iн} = \Delta N_{\theta i};$$

(5)

где функции $\tau^{iв}$ и $\tau^{iн}$, учитывающие касательное воздействие на жёсткий слой со стороны мягких слоёв, получаются по формулам (4), если имеющиеся там частные производные заменить оператором Δ. Совокупность уравнений вида (5), когда индекс i пробегает все нечётные значения от 1 до n, образует разрешающую систему линейных дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи. Вводя компактные матричные обозначения, упомянутая система приобретает вид:

$$\Delta \vec{f} + A\vec{f} = \vec{\varphi} \qquad (6),$$

где $\vec{f}$ - вектор искомых неизвестных функций:

$$\left\{ \Delta\Phi_1, \Delta w_1, w_1, \ldots\ldots, \Delta\Phi_i, \Delta w_i, w_i; \ldots\ldots, \Delta\Phi_n, \Delta w_n, w_n \right\}$$

$\vec{\varphi}$ - вектор заданных внешних механических и температурных воздействий:

$$\left\{ \frac{\Delta N_{\theta 1}}{B_1}, \frac{p_1 - \Delta M_{\theta 1}}{\mathcal{D}_1}, 0, \ldots\ldots, \frac{\Delta N_{\theta i}}{B_i}, \frac{p_i - \Delta M_{\theta i}}{\mathcal{D}_i}, 0, \ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots, \frac{\Delta N_{\theta n}}{B_n}, \frac{p_n - \Delta M_{\theta n}}{\mathcal{D}_n}; 0 \right\}$$

A - трёхдиагональная блочная матрица коэффициентов, которая в каждом частном случае легко формируется на ЭВМ, но из-за громоздкости её записи здесь не приводится.

Однозначное решение задачи (6) можно получить, сформулировав дополнительные - граничные - условия в центре пластины и на её краях:

$$B_0 \vec{f}_* = \vec{\varphi}_* \Big|_{r=0}; \quad B_R \vec{f}_{**} = \vec{\varphi}_{**} \Big|_{r=R}, \qquad (7)$$

где $\vec{\varphi}_*$ и $\vec{\varphi}_{**}$ - заданные вектор функции;

B_0 и B_R - матрицы коэффициентов, конкретный вид которых может быть весьма разнообразным и зависит от выбранного способа опирания торцевых поверхностей многослойной пластины;

$\vec{f}_*$ и $\vec{f}_{**}$ - также разнообразные вектор функции, компонентами которых в простейших случаях могут быть силы и моменты (см. форм. 2), перемещения и углы поворота торцов, а также их различные комбинации.

В заключения этого пункта следует заметить, что уравнения (5) и (6) справедливы не только для пластин круглых в плане, но и ограниченных прямоугольным контуром. В этом случае меняется содержание оператора Δ , который следует рассматривать в прямоугольной Декартовой системе координат.

2. Методика решения задачи и алгоритм вычислений

Решение полученной в предыдущем пункте линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных (6) будем искать для осесимметричного случая нагружения. В других случаях переход от двухмерных задач к одномерным может быть осуществлён путём разложения искомых фнукций в тригонометрические ряды по окружной координате φ . В осесимметричном - основном для нас случае - решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка строится стандартными методами. Общеизвестная методика состоит из 3 основных этапов: I) нахождения общего решения однородной системы, полученной из (6) после замены $\vec{\varphi}$ нулевым вектором; 2) нахождения частного решения неоднородной системы (6); 3) вычисления констант интегрирования, удовлетворяющих граничным условиям (7).

Этому общетеоретическому подходу следует автор упомянутой выше монографии [I], где представлено решение ряда задач об изгибе, колебаниях и устойчивости пластин, лежащих на упругом основании. Рассматриваемая в данной статье задача принципиальных отличий не имеет, но практическая реализация вычислений "ручным" способом, обременённым использованием таблиц специальных функций, вряд ли осуществима. Поскольку,в отличие от работы [I], вместо одного бигармонического уравнения следует решать уже систему похожих уравнений, то обобщение исследуемой проблемы и модификацию алгоритма вычислений необходимо ориентировать на использование ЭВМ, а также на предоставляемые в вычисли-

...льных центрах математическое обеспечение. Многослойная структура конструкции выявляет потребность в подпрограммах, решающих задачи линейной и матричной алгебры, а круговая форма пластины приводит к вычислениям Бесселевых функций. Последующее изложение посвящено обсуждению некоторых деталей алгоритма вычислений, который из-за указанных далее особенностей не сводится к трём механически выполняемым этапам программирования согласно наиболее часто избираемой и приведённой выше методике.

Начальный шаг вычислений, предусматривающий решение однородной системы дифференциальных уравнений

$$\Delta\vec{\xi}+A\vec{\xi}=0 \tag{8}$$

заменяется нахождением собственных значения и собственных векторов матрицы A. Это возможно благодаря тому, что любая цилиндрическая функция нулевого порядка $Z_0(r\sqrt{p})$ удовлетворяет соотношению:

$$\Delta Z_0(r\sqrt{p})=\frac{d^2Z_0(r\sqrt{p})}{dr^2}+\frac{dZ_0(r\sqrt{p})}{r\,dr}=-pZ_0(r\sqrt{p}). \tag{9}$$

Нужным для нас следствием является то, что вектор-функция $C_m Z_0(r\sqrt{p_m})\vec{X}_m$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению(8) независимо от значения произвольной константы C_m тогда, когда $\vec{X}_m$ собственный вектор, а p_m собственное значение матрицы A. Искомым общим решением будет линейно независимая комбинация частных решений $C_m Z_0(r\sqrt{p_m})\vec{X}_m$, причём число слагаемых этой комбинации должно равняться порядку матрицы A, который равен $\frac{3(n+1)}{2}$. Другими словами вектора $\vec{X}_m$ должны образовывать базис линейного пространства размерности $\frac{3(n+1)}{2}$, а их нахождение требует решения, так называемой, полной проблемы собственных значений. Некоторые чисто технические трудности, с которыми приходится сталкиваться и которые преодолеваются после проверки различных условий и осуществления логических переходов в программе вычислений, обусловлены следующими особенностями матрицы A : I) имеются кратные собственные значения, причём равные нулю; 2) матрица A не является матрицей простой структуры, т.е. количество её собственных векторов не равно её порядку; 3) собственные числа и компоненты собственных векторов, как правило, не только вещественные, но и комплексные числа. Как следствие из перечисленных свойств получается, что матрица A вырождена и не существует её обратная матрица.

Существование трёхкратного корня характеристического уравнения, равного нулю, обосновывается физико-механическим содержанием решаемой задачи. Суммарные усилия: изгибающий момент, растягивающие и перерезывающие силы, прикладываемые на торцах по всему многослойному пакету не могут резко возрастать или затухать в смежных поперечных сечениях пластины, перпендикулярных её радиусу. Вычисляя собственные значения матриц A при произвольном строении многослойной пластины (различные толщины и материалы слоёв), указанные три нулевые собственные значения обнаруживаются во всех случаях в пределах машинной точности. Также всегда оказывается, что ранг матрицы лишь на 2 единицы меньше её порядка. Соответствующий 3-му нулю собственный вектор, вообще говоря, не существует. Использование стандартных программ в этом случае малоэффективно, поскольку операции с матрицами, почти вырожденными, плохо обусловлены. Обычно имеет место аварийный останов ЭВМ из-за переполнения разрядной сетки, а результат вычислений, если таковой и получен, как правило, имеет небольшую достоверность. Теорией матриц [3] установлено, что в базис матриц сложной структуры наряду с собственными векторами необходимо включить вектора Жордановой цепочки, а саму матрицу нельзя привести к диагональному виду. Нахождение векторов Жордановой цепочки $\vec{y}_0$, собственное значение которых равно нулю и которые недостают в искомом базисе, проводится в специальном блоке программы. Вектор $\vec{y}_0$ и промежуточные результаты расчёта, необходимые здесь и используемые в дальнейшем после окончания работы упомянутого блока, представлены в виде:

$$Q=\left(\begin{array}{c|c} \tilde{A}^{-1} & X \\ \hline Z & E \end{array}\right)_{\substack{\underbrace{\qquad}_{n}\;\underbrace{\quad}_{s}}};\quad \vec{q}_{стб}=\left\{\begin{array}{c} №_1 \\ №_2 \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ №_n \end{array}\right\};\quad \vec{q}_{стр}=\left\{\begin{array}{c} №_1 \\ №_2 \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ №_{ns} \end{array}\right\};\quad \vec{y}_0=\left\{\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{ns} \end{array}\right\}; \qquad (10)$$

где $r+l=s$; s - порядок матрицы A ; $s=\frac{3(n+1)}{2}$; r - её ранг; $\vec{q}_{ст}$ - список номеров столбцов матрицы, причём первые r компоненты целочисленного вектора указывают линейно независимые столбцы, а остальные l определяют номера линейно зависимых столбцов; $\vec{q}_{стр}$ - список номеров строк с аналогичным предыдущему содержанием; E - единичная матрица порядка l ; $\tilde{A}^{-1}$ - матрица, обратная $\tilde{A}$, которая получается, исключая линейно зависимые строки и столбцы из заданной матрицы A системы уравнений (6); X, Z - матрицы коэффициентов, устанавливающие связь между линейно независимыми столбцами (строками) к каждым из линейно зависимым столбцом (строкой):

$$AX_E=0; \qquad Z_E A=0. \tag{II}$$

Матрицы X_E и Z_E получены, дополнив X и Z соответственно снизу или справа единичной матрицей E . Первое из уравнений (II) показывает, что столбцы матрицы X_E представляют собой собственные вектора матрицы A для нулевых собственных значений с точностью до произвольных постоянных множителей. Вектор Жордановой цепочки $\vec{y}_0$ должен удовлетворять уравнению

$$A\vec{y}_0=\vec{X}_{0*}, \tag{I2}$$

где $\vec{X}_{0*}$ тот столбец матрицы X_E , для которой система уравнений (I2) совместна. Нужный столбец находится, перемножая матрицу Z_E на X_E и выбирая нулевой столбец произведения Ψ :

$$\Psi=Z_E X_E \tag{I3}$$

Вычисления, связанные с определением собственных векторов, имеющих собственные значения, отличные от нуля, менее громоздки. В этом случае к удовлетворительным результатам приходим, используя стандартные подпрограммы, с помощью которых формируется комплексная матрица собственных векторов W и вектор собственных значений $\vec{p}$:

$$W=T+iR, \quad \vec{p}=\vec{u}+i\vec{v}. \tag{I4}$$

Вычисления показывают, что ненулевые собственные значения образуют группы из 3 чисел, причём одно из них отрицательно, а два других комплексно сопряжены. Это отражает локальные эффекты механического взаимодействия смежных слоёв пластины. Отрицательные корни характеристического уравнения количественно описывают межслойные сдвиги, а комплексные корни – поперечное обжатие связующих слоёв.

Решение однородной системы уравнений (8) теперь представляется в виде:

$$\vec{f}_{oo} = (c_{10} + c_{20}\ln r)\vec{x}_{o*} + (d_{10} + d_{20}\ln r)\vec{x}_o +$$
$$+ b_1\left(\vec{x}_{o*}\frac{r^2}{4} + \vec{y}_o\right) + b_2\left[\vec{x}_{o*}\frac{r^2}{4}(\ln r - 1) + \vec{y}_o \ln r\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{(n-1)/2}\left[c_{1k} I_o\left(r\sqrt{p_{kc}}\right) + c_{2k} K_o\left(r\sqrt{p_{kc}}\right)\right]\vec{x}_{kc} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{(n-1)/2}\left[d_{1k} J_o\left(r\sqrt{p_{kd}}\right) + d_{2k} Y_o\left(r\sqrt{p_{kd}}\right)\right]\vec{x}_{kd}; \qquad (15)$$

где J_o, Y_o – цилиндрические функции (Бесселя и Неймана) первого и второго рода нулевого порядка;

I_o, K_o – цилиндрические функции чисто мнимого аргумента (модифицированные);

$b_\cdot$, $c_{\cdot k}$ – произвольные вещественные постоянные;

$d_{\cdot k}$ – комплексные постоянные; отделение вещественной и мнимой части в последней строке уравнения (15) осуществляется обычными методами, на чём здесь не останавливаемся.

Для нахождения частного решения неоднородной системы применим метод неопределённых коэффициентов, т.е. $\vec{f}_{част.}$ будем искать по виду правой части уравнения (6), которое задаётся вектором $\vec{\varphi}$.

Ограничимся рассмотрением 3 случаев.

1) $\vec{\varphi} = \vec{q}$

$\vec{q}$ – числовой вектор, компонентами которого, к примеру, могут быть внешнее давление, испытываемое жёсткими слоями. Частное решение уравнения (6) тогда следует искать в виде:

$$\vec{f}_{\text{ост.1}} = \vec{a}_{11}\frac{r^2}{4} + \vec{a}_{01}. \tag{16}$$

Приравнивая нулю множители при r^2 , получаем однородную систему алгебраических уравнений:

$$A\vec{a}_{11} = 0. \tag{17}$$

Её решением является линейная комбинация столбцов матрицы X_E (II):

$$\vec{a}_{11} = X_E\vec{c} \tag{18}$$

где $\vec{c}$ - вектор произвольных констант, имеющий l компонент (I0).

Второй неизвестный вектор $\vec{a}_{01}$ находится из уравнения:

$$A\vec{a}_{01} = \vec{q} - \vec{a}_{11}. \tag{19}$$

Поскольку матрица A вырождена, то система (I9) совместна только тогда, когда выполняется условие, аналогичное (I3):

$$Z_E(\vec{q} - \vec{a}_{11}) = 0. \tag{20}$$

Этого всегда можно добиться, варьируя постоянные, определяющие $\vec{a}_{11}$ (I8).

2) $$\vec{\varphi} = \vec{\theta}_2 Z_0(r\sqrt{s}); \quad s \neq p_{ck}; \quad s \neq p_{4k}. \tag{21}$$

Правая часть, подобная написанной, может получиться из решения несвязанной тепловой задачи. Решение будем искать в таком же виде:

$$\vec{f}_{\text{ост.2}} = \vec{a}_2 Z_0(r\sqrt{s}). \tag{22}$$

Подставляя (22) в (6), получаем:

$$-s\vec{a}_2 + A\vec{a}_2 = \vec{\theta}_2 \tag{23}$$

Учитывая неравенства (2I), заключаем, что матрица ($A - sE$) невырождена. Следовательно вектор $\vec{a}_2$ находится, обращая матрицу любым стандартным методом.

3) $$\vec{\varphi} = \vec{\theta}_3 Z_0(r\sqrt{p}); \quad p = p_{ck}; \, p_{4k}$$

В этом случае попытка решать задачу по образцу предыдущего пункта в общем случае несостоятельна, ибо матрица

($A-pE$) вырождена, а система, аналогичная (23), может быть несовместной. Поэтому форму искомого решения следует видоизменить на следующую:

$$\vec{f}_{част.3} = \vec{a}_{31} \frac{r}{2\sqrt{p}} Z_1(r\sqrt{p}) + \vec{a}_{30} Z_0(r\sqrt{p}). \tag{24}$$

Приравнивая коэффициенты при слагаемых, содержащих цилиндрическую функцию I-го порядка $Z_1(r\sqrt{p})$, получаем:

$$A\vec{a}_{31} = p\vec{a}_{31} \tag{25}$$

Из этого следует, что $\vec{a}_{31}$ собственный вектор матрицы A с точностью до произвольной постоянной, которая подбирается таким образом, чтобы обеспечить совместность системы уравнений, получаемой из сравнения коэффициентов при слагаемых, умноженных на $Z_0(r\sqrt{p})$:

$$A\vec{a}_{30} - p\vec{a}_{30} = \vec{\theta}_3 - \vec{a}_{31}. \tag{26}$$

Действуя похожим образом и в других случаях, общее решение системы (6) может быть записано как сумма соотношения (I5) и выражений типа (I6, 22, 24 и т.п.):

$$\vec{f} = \vec{f}_{0} + \sum_{i=1}^{3} \vec{f}_{част.i} \tag{27}$$

Завершает решение исследуемой задачи отыскание констант интегрирования и окончательный подсчёт внутренних сил и моментов, а также перемещений, деформаций и напряжений. Все эти вычисления громоздки и утомительны. Автоматизируя вычисления с привлечением ЭВМ, учитывается, что производная цилиндрической функции нулевого порядка связана с цилиндрической функцией первого порядка соотношением:

$$\frac{dZ_0(r\sqrt{p})}{dr} = -\sqrt{p}\, Z_1(r\sqrt{p}). \tag{28}$$

Это равенство вместе с соотношением (9) использовалось ранее, когда частное решение (24) подставлялось в уравнение (6). Теперь оно позволяет все вычисления сил и моментов (2), а также других похожих выражений осуществлять, оперируя только со значениями Z_0 и Z_1 . Стандартные программы вычисляют эти функции в ограниченном интервале изменения аргумента. Поэтому возникает потребность в использовании асимптотических свойств цилиндрических функций. Для больших значений аргумента используются следующие асимптотические формулы:

$$J_n(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right);\quad I_n(r)\approx\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\,e^{r};$$

$$Y_n(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{4}\right);\quad K_n(r)\approx\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\,e^{-r}. \qquad (29)$$

Для малых значений аргумента в справочниках по специальным функциям даются соотношения:

$$Y_0(z)\approx-\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma z};\quad K_0(r)\approx\ln\frac{2}{\gamma r};$$

$$Y_n(z)\approx-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^n;\quad K_n(r)\approx\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^n; \qquad (30)$$

где γ - постоянная Эйлера. $n=1,2,3,\ldots$

Вычислив и собрав все необходимые данные в систему уравнений (7), задающих условия на граничном контуре, находятся константы интегрирования в (15). С теоретической точки зрения решение системы (7) существует, и оно единственно, поскольку базис матрицы A построен из линейно независимых векторов. Практически же, этот базис при решении системы дифференциальных уравнений (6) может "сплющиваться". Это явление более заметно, если модули собственных значений матрицы-большие числа, или велико отношение радиуса пластины к суммарной толщине слоёв. В этих случаях снижается точность расчёта, и необходимо принимать специальные меры для устранения неустойчивости вычислений. Этой цели служат различные методы, обсуждаемые в литературе. К ним относится метод ортогонализации, а также предлагается ряд асимптотических разложений, из которых хотелось бы выделить метод пограничных функций для решения двухточечных краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в Бесселевых функциях. - М.: ГИФМЛ, 1960. - 460 с.

2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 636 с.

3. Блох Э.Л., Лошинский Л.И., Турин В.Я. Основы линейной алгебры и некоторые её приложения. - М.: Высшая школа, 1971. - 256 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств

Сборник научных трудов
/межвузовский/

Рецензенты: А.ВИЛНИТИС, канд.техн.наук, зав.РТО СКБ МГД ИФ АН ЛатвССР;

А.ЦЕБЕРС, канд.физ.-мат.наук, ст.научн.сотр. ИФ АН ЛатвССР;

Э.ШИЛТЕРС, канд.физ.-мат.наук, доц.ЛГУ им.П.Стучки

Редакторы: Ю. Микельсон, С. Рязанцева
Корректор И.Балоде
Технический редактор И.Балоде

Подписано к печати 27.05.85. ЯТ 09136 Ф/б 60х84/16
Бумага № 3. 11,0 физ.печ.л. 10,2 усл.печ.л. 7,8 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Зак.№ 719 Цена 1 р.20 к.

Латвийский государственный университет им. П. Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, 226050 Рига,ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П. Стучки

УДК 538.4:621.365

Булыгин Л.Л. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ МГД-УСТАНОВКАХ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 3-14.

Разработана методика расчета ЭМ полей в аксиально-симметричных индукционных МГД-установках методом конечных элементов. Излагаются основные концепции автоматической триангуляции областей с различными физическими свойствами. Индуктор задается отдельными витками для обеспечения независимости от использованной конечно-элементной сетки. Представлены численные решения при различных геометриях проводящей области и значениях безразмерной частоты. Ил. 5, библиогр. 3 назв.

УДК 518.12:538.4+621.365.5

Булыгин Л.Л., Микельсон Ю.Я., Якович А.Т. ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОМ МГД-УСТРОЙСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЫ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 15-24.

Представлена математическая модель и численный алгоритм для задач с неизвестной границей. Уравнения гидродинамики решаются методом конечных элементов с линейной аппроксимацией для скорости и постоянной для давления. Уравнения линеаризуются методом Ньютона-Рафсона. Система алгебраических уравнений решается методом релаксации. На неизвестной границе задаются граничные условия отсутствия касательных и баланса нормальных напряжений. Полученные скорости на границе используются для коррекции последней. Работоспособность методики иллюстрирована рядом примеров. Ил. 3, библиогр. 7 назв.

УДК 538.4:621.313.333

Завицкий Э.А., Смирнов В.Г. РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОКАНАЛЬНОГО РАДИАЛЬНОГО ИНДУКЦИОННОГО МГД-НАСОСА. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 25-35.

Разработана методика расчета электромагнитных характеристик многоканального радиального индукционного МГД-насоса (РИН). Периодически повторяющаяся по азимуту секция РИН описывается двухмерной математической моделью. Рассматривается линейный установившийся режим работы насоса. Учитывается структура обмотки и ограниченность магнитопровода. Задача теории поля методом разделения переменных сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, через решение которой выражаются магнитное поле, комплексная мощность, электромагнитное давление, элементы матрицы импедансов обмотки. Ил. 1, библиогр. 3 назв.

УДК 537.84+517.962.8

Муйжниекс А.Р., Якович А.Т. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ДИСКОВОЙ КАМЕРЕ ПРИ ПРОПУСКАНИИ ТОКА ЧЕРЕЗ ЖИДКИЙ МЕТАЛЛ И НАЛОЖЕНИИ АКСИАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 36-49.

Сформулирована осесимметричная модель кондукционного центробежного МГД-насоса (КЦН) постоянного тока, учитывающая наличие транзитного потока, разность давлений между входом и выходом насоса, а также обратное воздействие индуцированных движением токов (радиальных и азимутальных) на результирующее течение. Система уравнений относительно трех составляющих скорости, давления и азимутальной составляющей магнитного поля решается в конечно-разностном виде метода установления, в гидродинамической части задачи используется метод SMAC. Изучены зависимости структуры МГД-течения в КЦН от тока, пропускаемого через активную зону, наложенного магнитного поля, противодавления. Показано, что при моделировании реальных режимов работы КЦН, существенным фактором является транзитный поток, качественно меняющий распределение МГД величин в активной зоне КЦН. Ил. 6, библиогр. 8 назв.

УДК 518.12:538

Дзенитис О.Я. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ МГД. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1985, с. 50-62.

В статье рассмотрен расчет движения жидкого металла в цилиндрической ячейке при взаимодействии постоянного тока, подводимого через концентрически расположенные электроды, и аксиально направленного постоянного магнитного поля в безындукционном приближении. Получены асимптотические формулы для потенциала и азимутальной составляющей скорости. Ил. I, библиогр. I назв.

УДК 621.745.3

Крылов Ю.А., Платонов В.И., Федоров В.В. ИССЛЕДОВАНИЯ ПОГРУЖНОГО МГД-НАСОСА ПЕРЕМЕННОГО ТОКА. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 63-67.

Рассмотрен принцип действия МГД-насоса переменного тока, его преимущества по сравнению с аналогичными центробежными МГД-насосами постоянного тока. Приведены конструктивные особенности варианта исполнения насоса. Получены вольт-амперные характеристики, а также исследован развиваемый насосом расход расплава. Ил. 2, библиогр. I назв.

УДК 519.615:537.311+537.622.4

Ауза В.Я., Круминьш Я.Р., Устинов Н.Н., Шикин Б.М. КОМПЛЕКСНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ И УДЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ ВИХРЕТОКОВЫМ МЕТОДОМ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 68-78.

Разработана аппаратура и проведены измерения удельной электропроводности и магнитной проницаемости ферромагнитных деталей вихретоковым методом на основе использования цилиндрической математической модели. Ил. 3, табл. 2, библиогр. 3 назв.

УДК 517.632:537.811

Ауза В.Я., Круминьш Я.Р. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТА ДЛЯ ЗАМЫКАНИЯ КОНТАКТОВ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 79-87.

В работе приводится математическая модель цилиндрического электромагнита для замыкания контактов. Учитывается нелинейность магнитного поля в статике. Не учитываются угловые эффекты. Уравнения решаются численно, используя консервативную аппроксимацию закона полного тока для векторного потенциала магнитного поля. Решение ищется методом последовательной верхней релаксации. Ил. 4.

УДК 534.414

Иванов Л.Г. УМЕНЬШЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОБЪЕМОВ ИЗДЕЛИЙ АКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 88-92.

Рассмотрена возможность уменьшения погрешности измерения объемов изделий акустическим методом путем выбора рабочей частоты непосредственно перед началом измерений по определенному значению амплитуды акустических колебаний. Библиогр. 3 назв.

УДК 517.9:537.811

Блюменау Н.Ф. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ИЛИ ФЕРРОМАГНИТНЫХ ТОНКИХ ТЕЛ С ПОЛЕМ ИСТОЧНИКА. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 93-103.

Предложена методика нахождения собственного магнитного поля совокупности идеально проводящих или идеально ферромагнитных бесконечно тонких плоских полос границ, находящихся в поле трехмерного источника путем сведения задачи к парным интегральным уравнениям. Найдено изображение скалярного магнитного потенциала источника, когда им является линейный замкнутый ток. Приведена таблица интегралов, позволяющая при вычислении магнитной индукции и электродинамической силы понижать кратность интегрирования, получать действительную подынтегральную функцию. Табл. I, библиогр. 10 назв.

УДК 539.4:534.I

Варна Я.П. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ ПО ТОРЦУ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. I04-II6.

В геометрически линейной постановке рассматривается задача о переходных процессах в цилиндрических оболочках при поперечном динамическом нагружении на одном торце. Осесимметричная задача решается методом преобразования Лапласа по времени. Проведен анализ и сопоставление результатов, полученных с использованием классической теории недеформируемых нормалей и теории Тимошенко, учитывающей поперечный сдвиг и инерцию вращения. Ил. 7, библиогр. 6 назв.

УДК 539.63

Белов М.А., Юдрупс О.М. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЕТОМ МОМЕНТОВ ПРИ УДАРЕ ПО ТОРЦУ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. II7-I24.

Рассмотрено поведение тонкостенной цилиндрической оболочки в рамках моментной теории упруго-пластических деформаций при динамическом осесимметричном нагружении на торце. Конечно-разностной аппроксимацией по пространственной координате математическая модель сведена к задаче Коши для системы обыкновенных уравнений, которая решается методом Рунге-Кутта. Проведено сравнение с решением соответствующей задачи в приближении безмоментной теории упруго-пластических деформаций. Ил. 3, библиогр. 4 назв.

УДК 539.4

Шлютер Г.-Ю. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОРТОГОНАЛЬНО РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 125-141.

Разработана методика расчета собственных колебаний ребристых пластин, основанная на использовании энергетического метода. Использование методов функционального анализа оказалось эффективным в доказательстве дискретности спектра для ребристых пластин и сходимости метода Ритца в энергетических пространствах. Система координатных функций продольных и изгибных колебаний балки Бернулли постоянного поперечного сечения. Проведено сравнение результатов с точными значениями для некоторых модельных задач. Ил. 8, библиогр. II назв.

УДК 539.3

Блумберг Н.Н. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ. - В кн.: Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985, с. 142-155.

В статье ставится задача исследования напряженно-деформированного состояния многослойных круглых пластин. Математическая модель задачи строится при помощи кинематической гипотезы "ломанной" нормали. Разрешающая система дифференциальных уравнений представлена в компактной матричной форме, приспособленной к эффективному использованию ЭВМ. Показано, что принятая методика исследования сводит решение задачи к алгебраической проблеме вычисления собственных значений и векторов трехдиагональной блочной матрицы. Приводится алгоритм вычислений, содержащий анализ характерных особенностей рассматриваемых матриц и обсуждение необходимых условий для составления программ расчета, устойчивых к ошибкам округления на ЭВМ. Библиогр. 3 назв.

80190

482

I р. 20 к.