АЛГЕБРА И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:

Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(межвузовский)

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра дискретной математики и программирования

АЛГЕБРА И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:

Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(межвузовский)

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1986

УДК 512.5+512.8+519.48+519.7+519.95

АЛГЕБРА И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ

Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ: Сборник научных трудов /Отв. ред. Я.П.Цирулис. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - 164 с.

Сборник научных трудов "Алгебра и дискретная математика" содержит результаты исследований, проведенных в 1984-1985 годах на математических кафедрах ЛГУ им.П.Стучки, РКИИГА им. Ленинского комсомола, а также в других вузах и научных учреждениях. Сборник предназначен для научных работников и аспирантов, работающих в области алгебры и теории автоматов. Часть работ так или иначе связана с приложениями алгебры. Сборник окажется полезным также студентам-математикам, интересующимся современной алгеброй и ее связями с дискретной математикой.

Рис. - 8, список лит. - 72 библиогр. назв.

Печатается по решению Издательского Совета
ЛГУ им. П.Стучки

А $\frac{20201-065у}{М\ 812(11)-86}$ 16.86.1702030000

ВВЕДЕНИЕ

Сборник содержит результаты исследований по теоретической кибернетике и алгебре, выполненных в основном математиками Латвийского государственного университета и Рижского института инженеров гражданской авиации. В нем отражается тематика работ, проведенных в 1984 - 85 гг. на математических кафедрах и в научных подразделениях этих вузов в рамках отраслевой программы:

Направление: Разработка теоретических основ математического обеспечения ЭВМ.

Проблемы I.I2.2 (по координационному плану АН ССР):

Системное математическое и программное обеспечение.

№ гос. регистрации 8I03I074

(см. также постановку Минвуза СССР и АН СССР № I473/I46 от 29.I2.80/3I.I2.80). Несколько результатов, имеющих выход в алгебру (см. ниже), представлены авторами, работающими по теме:

I.3.5. I60.РКИИ ГА — Исследования по алгебре и дифференциальным уравнениям,

утвержденной в координационном совете АН ЛатвССР.

Работы, включенные в сборник, имеют теоретический характер. В статьях по теории автоматов М.Албертса, С.Бойко, Я.Булса найдена оценка сложности распознавания контекстно-свободных языков, определены и изучены разные понятия моделирования, а также треугольного произведения автоматов. Сюда же относится работа А.Карташова, в которой вопрос о вероятности возникновения заданной системы рефлексов в нейронных сетях сводится к двум комбинаторным задачам.

Статьи Н.Волкова и Я.Цирулиса посвящены математической теории баз данных: показана равносильность двух имеющихся в литературе понятий алгебры отношений, изучаются алгебраические свойства так называемых абстрактных типов данных и многообразий алгебр данных. Еще больший прикладной характер имеют работы Н.Вавилова о решении систем линейных уравнений и работа В.Детловса, связанная с начатой в республике разработкой информационной системы для хранения и анализа народных мелодий.

В некоторых из названных работ использованы алгебраические методы исследования. В нескольких работах сборника изучаются более абстрактные алгебраические структуры (А.Гварамия, Г.Карасев, Р.Липянский, Г.Пивоварова, В.Штейнбук).Работа З.Дискина о синтаксических моделях примыкает к математической логике.

Результаты, полученные авторами сборника, - новые или же улучшают известные в литературе и представляют интерес для широкого круга специалистов, работающих в указаных областях, в том числе и прикладников.

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 519.95

М.Я.Албертс

РАСПОЗНАВАНИЕ КОНТЕКСТНО-СВОБОДНЫХ ЯЗЫКОВ НА АЛЬТЕРНИРУЮЩИХ МАШИНАХ ТЬЮРИНГА

Рассматривается однолентечная модель машины Тьюринга с записью на ленте [1] в целях распознавания контекстно-свободных языков [2]. Предположим, что все правила контекстно-свободного языка имеют один из следующих видов: $A \to BC$, $A \to aB$, $A \to ab$ или $A \to a$, где A, B, ... - нетерминальные, а a, b, ...-терминальные символы. Для описания вывода некоторого слова из языка мы воспользуемся записью в виде двухэтажного бинарного скобочного выражения, которое назовем скобочным выводом этого слова. Для простоты изложения продемонстрируем это кодирование вывода слова на примере.

Скобочное выражение

(((()(()()))())(()(()((()())(())))))
SACaaEbbccECaaABeeDffFGgghhGHaa HFDBS

означает, что слово $abcdefgha$ получено в результате применения следующих правил:

$S \to AB$, $A \to C\alpha$, $C \to aE$, $E \to bc$, $B \to eD$, $D \to fF$, $F \to GH$, $G \to gh$, $H \to a$.

Ниже мы будем изучать бинарные скобочные выражения, которые определим следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.

1. () - бинарное выражение,

2. если A, B - бинарные выражения, то (AB) - бинарное выражение.

Через ATIME(n) обозначим класс языков, распознаваемых на альтернирующих машинах Тьюринга с записью на ленте (АТМ) за линейное время. Точное определение АТМ см. в [3] .

Лемма I. Пусть A - конечный алфавит, $B \subset A$, $\# \notin A$ - маркер и пусть $L1 = \{x \# y \mid x, y \in A^*, proj_B x = proj_B y\}$. Тогда $L1 \in ATIME(n)$.

Доказательство. Данное входное слово w с $|w| = n$ принимается, если выполняются следующие условия:

(I.I) w имеет вид $x \# y$, где $x, y \in A^*$,

(I.2) $proj_B x$ является префиксом $proj_B y$,

(I.3) $proj_B y$ является префиксом $proj_B x$,

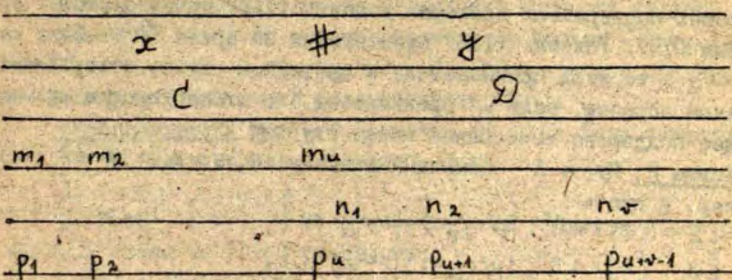
Предположим, что $proj_B x = x_1 \dots x_a$ и $proj_B y = y_1 \cdots y_b$, где $x_i, y_j \in B$.

Условие (I.I) проверяется детерминированно за время n . Опишем проверку условия (I.2); (I.3) проверяется аналогично. На ленте используем пять дорожек. Первая дорожка содержит входное слово. Машина универсально выбирает символ x_c $(1 \leq c \leq a)$ в слове x и отмечает его на второй дорожке, а затем экзистенциально выбирает и отмечает символ y_d $(1 \leq d \leq b)$ в слове y. Слово $proj_B x$ является префиксом $proj_B y$ т.т.т., когда для каждого c можно подобрать d такое, что выполняются следующие условия:

(I.4) $c = d$,

(I.5) $x_c = x_d$.

Машина экзистенциально угадывает и помещает на третью дорожку неперекрывающиеся двоичные представления m_1 , m_2 , ..., m_u натуральных чисел ($u \leq |x|$ выбрано произвольно) так, что $m_1 = 1$, m_1 находится под первым символом x , а первый символ m_u - под последним символом x . На четвертой экзистенциально угадываются n_1, ... , n_v ($v \leq |y|$ выбрано произвольно) так, что $n_1 = 1$, n_1 находится под первым символом y , а первый символ n_v под последним символом y . На пятой дорожке машина угадывает неперекрывающиеся двоичные представления p_1 , ... , p_{u+v-1} натуральных чисел так, что первые символы p_1, ... , p_{u+v-1} находятся под первыми символами m_1, ... , m_u , n_2 , ... , n_v соответственно.



Найдутся такие заполнения дорожек и вместе с тем такие поддеревья дерева вычисления, где все m_i, n_i и p_k имеют длину, не превосходящую $O(\log n)$ и все записи p_i находятся друг от друга на расстояниях, не превосходящих $O(n/\log n)$. Такие поддеревья назовем хорошими. Число, представленное словом m_i, обозначим через $\overline{m}_i$.

Машина универсально выбирает одно из следующих утверждений и детерминированно проверяет его в отдельности для каждого i, j, k.

(I.7) для каждого $i \in \{1,\ldots,u-1\}$ сегмент слова x на первой дорожке между левыми концами m_i и m_{i+1} содержит $\overline{m}_{i+1} - \overline{m}_i$ символов из алфавита B; если нет, то вход отвергается,

(I.8) для каждого $j \in \{1,\ldots,u-1\}$ сегмент слова x на первой дорожке между левыми концами n_j и n_{j+1} содержит $\overline{n}_{j+1} - \overline{n}_j$ символов из алфавита B; если нет, то вход отвергается,

(I.9) для каждого $k \in \{1,\ldots,u+v-2\}$ имеет место равенство $\overline{p}_{k+1} = \overline{p}_k$; если нет, то вход отвергается.

Заметим, что на хороших поддеревьях вычислений проверка каждого из утверждений (I.7)-(I.9) требует времени не больше чем $O(n)$. На второй дорожке детерминированно вычисляем двоичные записи с и d (используя отметки C и D и ближайшие записи m_i и n_j, соответственно). Это можно сделать за время $\Theta(n)$. Затем детерминированно проверяем, равны ли c и d как двоичные числа соседним записям p_k. Если хоть один из c и d отличается от ближайшего p_k, то вход отвергается.

На хороших поддеревьях проверка условия (I.4) производится за время $O(n)$. Условие (I.5) проверяется за время $O(n)$. Если $x_c = x_d$, то вход принимается, в противном случае отвергается. Таким образом, если w принимается, то любое хорошее принимающее поддерево вычислений имеет глубину $O(n)$.

Лемма 2. Пусть A - конечный алфавит, $B, C \subset A$, $\# \notin A$ - маркер, и пусть

$$L2 = \{x \mid x \in A^*, |proj_B x| = |proj_C x|\},$$
$$L3 = \{x \mid x \in A^*, |proj_B x| < |proj_C x|\},$$
$$L4 = \{x \mid x \in A^*, |proj_B x| > |proj_C x|\}.$$

Тогда $L2, L3, L4 \in ATIME(n)$.

Доказательство. Пусть $x \in A^*$. Предположим, что $proj_B x = b_1 \dots b_{n_b}$ и $proj_C = c_1 \dots c_{n_c}$. Данное входное слово x принимается т.т.т., когда $n_c = n_b$. Используем три дорожки, первая из которых содержит входное слово. На второй дорожке угадываются неперекрывающиеся двоичные представления $m_1, m_2, \dots, m_u$ $(u \le |x|)$ так, что $m_1 = 1$, m_1 начинается под первым символом x, а m_u - последним символом слова x. На третьей дорожке угадываются $n_1, \dots, n_v$ с такими же свойствами как $m_1, \dots, m_u$. Если все m_i и n_j имеют длину, не превосходящую $O(\log n)$, и все записи на каждой из дорожек находятся на расстояниях, не превосходящих $O(n/\log n)$, то такие поддеревья дерева вычисления назовем хорошими. Машина универсально выбирает одно из следующих условий и проверяет детерминированно для каждого i и j в отдельности:

(2.I) для каждого $i \in \{1, \dots, u-1\}$ сегмент слова x на первой дорожке между левыми концами m_i и m_{i+1} содержит $\overline{m}_{i+1} - \overline{m}_i$ символов из алфавита B; если нет, то вход отвергается,

(2.2) для каждого $j \in \{1, \dots, v-1\}$ сегмент слова x на первой дорожке между левыми концами n_j и n_{j+1} содержит $\overline{n}_{j+1} - \overline{n}_j$ символов из алфавита C; если нет, то вход отвергается,

(2.3) проверяем, имеет ли место равенство $m_u = n_v$,

если нет, то вход отвергается.
На хороших поддеревьях дерева вычислений проверка каждого из условий (2.I)-(2.3) требует времени не больше $O(n)$. Таким образом, если x принимается, то любое хорошее принимающее поддерево вычислений имеет глубину $O(n)$.

Определение 2. Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \{(,)\}^*$. Пару символов (a_i, a_j) будем называть хорошей, если:

I. $a_i = ($; $a_j =)$.

2. Если $j \neq i+1$, то существует так называемый центр $a_k a_{k+1}$ слова $a_i \ldots a_j$ такой, что

а) $a_k a_{k+1} =)($,

б) $|proj_{\{(\}} a_{i+1} \ldots a_k| = |proj_{\{)\}} a_{i+1} \ldots a_k|$,

$|proj_{\{(\}} a_k \ldots a_{j-1}| = |proj_{\{)\}} a_{k+1} \ldots a_{j-1}|$.

в) $\forall m (i+1 < m < k) |proj_{\{(\}} a_{i+1} \ldots a_m| > |proj_{\{)\}} a_{i+1} \ldots a_m|$,

$\forall p (k+1 < p < j+1) proj_{\{(\}} a_{k+1} \ldots a_p| > |proj_{\{)\}} a_{k+1} \ldots a_p|$.

Лемма 3. Пусть $a_1, \ldots a_n \in \{(,)\}^*$ Слово $a_1 \ldots a_n$ является бинарным скобочным выражением т.т.т., когда

I° (a_1, a_n)-хорошая пара,

2° $\forall i \in \{2, \ldots, n-1\}$ $\exists_j$ такое, что:

если $a_i = ($, то $j > i$ и (a_i, a_j) - хорошая пара;

если $a_i =)$, то $j < i$ и (a_j, a_i) - хорошая пара.

Доказательство. $\rightarrow$. Докажем с помощью математической индукции. Очевидно, что для слова ( ) имеет место I° и 2°. Предположим, что для $a_1 \ldots a_n \in \{(,)\}^*$ и $b_1 \ldots b_m \in \{(,)\}^*$ имеет место I° и 2°. Тогда для слова $(a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m)$ имеет место 2°. Осталось доказать I°, т.е. что первый и последний символ слова $(a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m)$ образуют хорошую пару. Выбрав центром слова $(a_1 \ldots a_n b_1 \ldots b_m)$ подслово $a_n b_1$, нетрудно видеть, что имеет место I°.

Рассмотрим слово $a_1 \ldots a_n \in \{(,)\}^*$. Из предположения вытекает, что (a_1, a_n)-хорошая пара. Если $a_1 \ldots a_n = ()$, то требуемое доказано. В противном случае пусть $a_k a_{k+1}$ - центр слова $a_1 \ldots a_n$. Это означает, что слово $a_1 \ldots a_n$ имеет вид $((a_3 \ldots a_{k-1})(a_{k+2} \ldots a_{n-2}))$. Далее рассмотрим слово $a_2 \ldots a_k$. Поскольку (a_1, a_n)-хорошая пара, легко видеть, что с символом a_2 ни один из символов слова $a_1 \dots a_n$, кроме a_k, не может образовать хорошую пару. Из предположения о том, что такая пара должна существовать, следует, что (a_2, a_k)-хорошая пара. По тем же соображениям и (a_{k+1}, a_{n-1}) - хорошая пара. Далее со словами $a_2 \dots a_k$ и $a_{k+1} \dots a_{n-1}$ поступаем так же как со словом $a_1 \dots a_n$. Поскольку слово $a_1 \dots a_n$ - конечное, через конечное число шагов этот процесс закончится. Очевидно, что в конце получим бинарное скобочное выражение.

<u>Лемма 4.</u> Пусть $L5 = \{x \mid x \in \{(,)\}^*$ - бинарное скобочное выражение. Тогда $L5 \in ATIME(n)$.

<u>Доказательство</u>. Построим машину M, которая принимает язык $L5$. M универсально выбирает одно из следующих утверждений и проверяет для каждого i в отдельности.

(4.I) (a_1, a_n)-хорошая пара.

(4.2) $\forall i \in \{2, \dots, n-1\}$ $\exists j: (a_i, a_j)$ или (a_j, a_i)-хорошая пара.

В силу леммы 3, данное слово $x = a_1 \dots a_n$ принадлежит языку $L5$ т.т.т., когда выполняются (4.I)-(4.2). Опишем проверку условия (4.2); (4.I) проверяется аналогично. Используем на ленте четыре дорожки. Первая дорожка содержит входное слово x. Предположим, что машина уже универсально выбрала символ a_i $(1 < i < n)$ и отметила его на второй дорожке. Рассмотрим случай, когда $a_i = ($. Справа от a_i экзистенционально выбирает некоторый a_j $(1 < j < n)$ и отмечает его на второй дорожке. Если $a_i =)$, то выбор a_j $(1 < j < i)$ происходит слева от a_i.

a_i	a_k	a_{k+1}	a_j
(	)	(	)
#	*	*	#

Если $a_j \neq)$, то M отвергает вход. Если $j = i+1$ и $a_j =)$, то M принимает вход.

В остальных случаях экзистенциально выбираем центр $a_k a_{k+1}$ $(i < k < j-1)$ слова $a_i \dots a_j$ и отмечаем его на второй дорожке. Потом (для всех m и p) универсально выбираем одно из следующих утверждений и проверяем его за время

$O(|a_i \dots a_j|)$, используя метки на второй дорожке, а в качестве рабочих - третью и четвертую дорожки (см. Лемму 2):

(4.3) $|proj_{\{(\}} a_{i+1} \dots a_k| = |proj_{\{)\}} a_{i+1} \dots a_k|$,

(4.4) $|proj_{\{(\}} a_{k+1} \dots a_{j-1}| = |proj_{\{)\}} a_{k+1} \dots a_{j-1}|$,

(4.5) $\forall m (i+1 < m < k) |proj_{\{(\}} a_{i+1} \dots a_m| > proj_{\{)\}} a_{i+1} \dots a_m|$,

(4.6) $\forall p (k+1 < p < j-1) |proj_{\{(\}} a_{k+1} \dots a_p| > proj_{\{)\}} a_{k+1} \dots a_p|$.

При проверке некоторого из условий (4.3), (4.6) машина M принимает x, если оно выполняется, и отвергает в противном случае.

Таким образом, M принимает $L5$ за время $O(n)$.

<u>Теорема</u>. Пусть L - контекстно-свободный язык. Тогда $L \in ATIME(n)$.

<u>Доказательство</u>. Предположим, что грамматика $\mathcal{L}$ задает некоторый контекстно-свободный язык L и все правила вывода имеют один из следующих видов: $A \to BC$, $A \to aB$, $A \to ab$ или $A \to a$, где A, B,... нетерминальные символа из алфавита Δ, и a, b,... терминальные символы из алфавита Σ. Построим АТМ M, которая принимает язык L за линейное время. Данное входное слово $x = x_1 \dots x_n \in \Sigma^*$ принимается т.т.т., когда существует скобочный вывод слова x в грамматике $\mathcal{L}$. Экзистенциально будем угадывать этот скобочный вывод слова x после записи слова x на ленте. Если такой вывод существует, то длина его $O(n)_c$.

Используем две дорожки. На первой экзистенциально угадываем слово $y \in (\Sigma \cup \Delta)^*$, а на второй - слово $z \in \{(,)\}^*$ той же длины.

#	x	#	y	#
		#	z	#

Нам остается проверить, является ли угаданная двухэтажная запись скобочным выводом слова x в грамматике $\mathcal{L}$. Машина M универсально выбирает и проверяет одно из следующих условий:

(5.I) $proj_z y = x_1 x_1 x_2 x_2 \dots x_n x_n$, если нет, то вход отвергается,

(5.2) z - бинарное скобочное выражение, если нет, то вход отвергается,

(5.3) если (z_i , z_j) хорошая пара в слове z , $z_k z_{k+1}$ - центр слова $z_i \dots z_j$, то на второй ленте имеет место следующая картина:

A B	B C	C A
$z_i \; z_{i+1}$	$z_k \; z_{k+1}$	$z_{j-1} \; z_j$

и грамматика $\mathcal{L}$ содержит правило вывода $A \to BC$; если нет, то вход отвергается.

Поскольку длина скобочного вывода слова $x \in \mathcal{L}$ есть $O(n)$, то (5.I)-(5.2) в силу лемм I и 4 проверяется за время $O(n)$. Условие (5.3) мы проверим параллельно проверке условия (5.2) следующим образом. В лемме 4 мы после выборки потенциально хорошей пары (z_i , z_j) и центра слова $z_k z_{k+1}$ универсально выбирали и проверяли условия (4.3)-(4.6). В этом случае параллельно проверим и условие (5.3). Поскольку число правил вывода грамматики $\mathcal{L}$ заранее известно, то эту проверку можно даже детерминированно произвести за время $O(|z_i \dots z_j|)$. Таким образом, машина M принимает язык L за время $O(n)$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Хенни Ф.К. Вычисления на одноленточной машине Тьюринга с записью на ленте // Проблемы математической логики.- М., I970.- С. 223-248.

2. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков.- М., I970.-326 С.

3. Chandra A.K. , Kozen D.C., Stokmayer L.J., Alternation // J. ACM.- I980 - Vol. 28 , N^{O}. I,- P . II4-I33.

ЛГУ им. П. Стучки Поступила 20.06.85

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 512.7

С.Н.Бойко

АВТОМОРФИЗМЫ ТРЕУГОЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БИАВТОМАТОВ

I. Введение. Биавтомат - это алгебраическая система $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ с тремя основными множествами A, B, Γ и тремя бинарными операциями $\circ: A\times\Gamma\to A$, $*: A\times\Gamma\to B$ и $\circ: B\times\Gamma\to B$. Множество A называется множеством внутренних состояний, множество Γ - множеством входных сигналов и B - множеством выходных сигналов (или внешних состояний) биавтомата. Каждый входной сигнал γ преобразует состояние a в новое состояние $a'=a\circ\gamma\in A$, внешнее состояние b - в новое внешнее состояние $b'=b\circ\gamma\in B$, и, кроме того, γ преобразует состояние a в сигнал на выходе $b=a*\gamma\in B$.

Мы будем рассматривать только линейные биавтоматы. Предполагаем, что A и B - линейные пространства над некоторым полем K и что все переходы: $a\to a\circ\gamma$, $a\to a*\gamma$ и $b\to b\circ\gamma$ при каждом данном γ являются линейными преобразованиями.

Полугрупповой биавтомат - это биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, в котором система входных сигналов Γ есть полугруппа, причем умножение в ней связано с операциями $\circ$ и $*$ следующими аксиомами:

$$a\circ\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)\circ\gamma_2,$$
$$b\circ\gamma_1\gamma_2=(b\circ\gamma_1)\circ\gamma_2,$$
$$a*\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)*\gamma_2+(a*\gamma_1)\circ\gamma_2.$$

Пусть A и B - два линейных пространства, $End\,A$ и

$End\ B$ - соответствующие системы эндоморфизмов и $Hom(A,B)$ - все линейные отображения из A в B. Все они также являются линейными над K пространствами, а в $End\,A$ и $End\,B$ имеется еще умножение, согласованное с линейными операциями аксиомами линейной K-алгебры.

Обозначим через $End(A,B)$ декартово произведение

$$End(A,B) = End\,A \times Hom(A,B) \times End(B),$$

и на этом множестве зададим полугруппу, полагая:

$$(\varphi_1', \psi', \varphi_2')(\varphi_1'', \psi'', \varphi_2'') = (\varphi_1'\varphi_1'', \varphi_1'\psi'' + \psi'\varphi_2'', \varphi_2'\varphi_2''),$$

где $\varphi_1', \varphi_1'' \in End\,A$, $\psi', \psi'' \in Hom(A,B)$, $\varphi_2', \varphi_2'' \in End\,B$.

Можно построить полугрупповой биавтомат $(A, End(A,B), B)$, в котором операции определяются правилами:

$$a \circ \gamma = a \circ (\varphi_1, \psi, \varphi_2) = a\varphi_1,$$
$$a * \gamma = a * (\varphi_1, \psi, \varphi_2) = a\psi,$$
$$b \circ \gamma = b \circ (\varphi_1, \psi, \varphi_2) = b\varphi_2,$$

где $a \in A$, $b \in B$, $\varphi_1 \in End\,A$, $\psi \in Hom(A,B)$, $\varphi_2 \in End\,B$.

Если задан биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$, то задан гомоморфизм $\Gamma \to End(A,B)$. Биавтомат точный, если этот гомоморфизм - вложение. Полугруппе Γ соответствует следующая матричная картинка:

$$\begin{pmatrix} End\,A & Hom(A,B) \\ 0 & End(B) \end{pmatrix}.$$

Биавтомат $\mathfrak{A}' = (A', \Gamma', B')$ есть подавтомат биавтомата $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$, если $A' \subset A$, $\Gamma' \subset \Gamma$, $B' \subset B$ и, кроме того, $a \circ \gamma \in A'$, $a * \gamma \in B'$, $b \circ \gamma \in B$ для любых $a \in A'$, $b \in B'$, $\gamma \in \Gamma'$.

Автоморфизм биавтомата $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ - это тройка отображений $\sigma_A : A \to A$, $\alpha : \Gamma \to \Gamma$, $\sigma_B : B \to B$, где σ_A, σ_B - автоморфизмы линейных пространств A и B соответственно, причем выполнены условия согласованности с операциями:

$$(a \circ \gamma)\sigma_A = a\sigma_A \circ \gamma^\alpha,$$
$$(a * \gamma)\sigma_B = a\sigma_A * \gamma^\alpha,$$
$$(b \circ \gamma)\sigma_B = b\sigma_B \circ \gamma^\alpha.$$

Для полугрупповых биавтоматов нужно требовать еще, чтобы соответствующее $\alpha : \Gamma \to \Gamma$ было автоморфизмом полугруппы Γ.

Обозначим через Σ_A, Σ_B группы автоморфизмов пространств A и B и положим $\Sigma = \Sigma_A \times \Sigma_B$. Определим действие Σ на $End(A,B)$ по правилу:

$$(\varphi_1, \psi, \varphi_2)\circ(\sigma_A, \sigma_B) = (\sigma_A^{-1}\varphi_1\sigma_A,\ \sigma_A^{-1}\psi\sigma_B,\ \sigma_B^{-1}\varphi_2\sigma_B),$$

где $(\varphi_1, \psi, \varphi_2) \in End(A,B)$, $(\sigma_A, \sigma_B) \in \Sigma$.

Непосредственно проверяется, что так определенное действие задает представление $(End(A,B), \Sigma)$. Покажем, что оно сохраняет умножение.

Возьмем $(\varphi_1', \psi', \varphi_2'), (\varphi_1'', \psi'', \varphi_2'') \in End(A,B)$, $(\sigma_A, \sigma_B) \in \Sigma$. Тогда

$$[(\varphi_1', \psi', \varphi_2')(\varphi_1'', \psi'', \varphi_2'')]\circ(\sigma_A, \sigma_B) = (\varphi_1'\varphi_1'', \varphi_1'\psi'' + \psi'\varphi_2'', \varphi_2'\varphi_2'')\circ(\sigma_A, \sigma_B) =$$

$$= (\sigma_A^{-1}\varphi_1'\varphi_1''\sigma_A,\ \sigma_A^{-1}(\varphi_1'\psi'' + \psi'\varphi_2'')\sigma_B,\ \sigma_B^{-1}\varphi_2'\varphi_2''\sigma_B) =$$

$$= (\sigma_A^{-1}\varphi_1'\varphi_1''\sigma_A,\ \sigma_A^{-1}\varphi_1'\psi'' + \sigma_A^{-1}\psi'\varphi_2''\sigma_B,\ \sigma_B^{-1}\varphi_2'\varphi_2''\sigma_B) =$$

$$= (\sigma_A^{-1}\varphi_1'\sigma_A\sigma_A^{-1}\varphi_1''\sigma_A,\ \sigma_A^{-1}\varphi_1'\sigma_A\sigma_A^{-1}\psi''\sigma_B + \sigma_A^{-1}\psi'\sigma_B\sigma_B^{-1}\varphi_2''\sigma_B,$$

$$\sigma_B^{-1}\varphi_2'\sigma_B\sigma_B^{-1}\varphi_2''\sigma_B) =$$

$$= [(\varphi_1', \psi', \varphi_2')\circ(\sigma_A, \sigma_B)][(\varphi_1'', \psi'', \varphi_2'')\circ(\sigma_A, \sigma_B)].$$

Σ–нормализатор множества $\Gamma \subset End(A,B)$ в данном представлении - это совокупность всех таких $\sigma \in \Sigma$, что $\gamma\circ\sigma \in \Gamma$, $\gamma\circ\sigma^{-1} \in \Gamma$.

<u>Лемма</u> I. Если $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ есть автоморфизм точного биавтомата $\mathcal{O}\!\iota = (A, \Gamma, B)$ и $\gamma = (\varphi_1, \psi, \varphi_2)$ - элемент из Γ, то

$$\gamma^\alpha = (\sigma_A^{-1}\varphi_1\sigma_A,\ \sigma_A^{-1}\psi\sigma_B;\ \sigma_B^{-1}\varphi_2\sigma_B).$$

<u>Доказательство</u>. Возьмем произвольные элементы $a \in A$, $b \in B$ и обозначим $\gamma^\alpha = (\varphi_1', \psi', \varphi_2')$. Из определения автоморфизма биавтомата имеем:

$$(a\circ\gamma)\sigma_A = a\sigma_A\circ\gamma^\alpha,\quad (a*\gamma)\sigma_B = a\sigma_A*\gamma^\alpha,\quad (b\circ\gamma)\sigma_B = b\sigma_B\circ\gamma^\alpha.$$

Так как $a\circ\gamma = a\varphi_1$, $a*\gamma = a\psi$, $b\circ\gamma = b\varphi_2$, то

$$(a\circ\gamma)\sigma_A = a\varphi_1\sigma_A,\quad (a*\gamma)\sigma_B = a\psi\sigma_B,\quad (b\circ\gamma)\sigma_B = b\varphi_2\sigma_B;$$

$$a\sigma_A\circ\gamma^\alpha = a\sigma_A\varphi_1',\quad a\sigma_A*\gamma^\alpha = a\sigma_A\psi',\quad b\sigma_B\circ\gamma^\alpha = b\sigma_B\varphi_2'.$$

Следовательно, для произвольных элементов $a \in A$, $b \in B$

$$a\varphi_1\sigma_A = a\sigma_A\varphi_1', \quad a\psi\sigma_B = a\sigma_A\psi', \quad b\varphi_2\sigma_B = b\sigma_B\varphi_2'.$$

Таким образом, $\varphi_1\sigma_A = \sigma_A\varphi_1'$, $\psi\sigma_B = \sigma_A\psi'$, $\varphi_2\sigma_B = \sigma_B\varphi_2'$ и $\varphi_1' = \sigma_A^{-1}\varphi_1\sigma_A$, $\psi' = \sigma_A^{-1}\psi\sigma_B$, $\varphi_2' = \sigma_B^{-1}\varphi_2\sigma_B$, т.е.

$$\gamma^\alpha = (\varphi_1', \psi', \varphi_2') = (\sigma_A^{-1}\varphi_1\sigma_A, \sigma_A^{-1}\psi\sigma_B, \sigma_B^{-1}\varphi_2\sigma_B),$$

что и требовалось.

Лемма означает, что если $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ - автоморфизм автомата $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$, то α однозначно определяется автоморфизмами линейных пространств A и B, соответственно.

Лемма 2. Пусть дан точный биавтомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ и (σ_A, σ_B) - такой элемент из $\Sigma_A \times \Sigma_B$, что для всех элементов $\gamma = (\varphi_1, \psi, \varphi_2) \in \Gamma$ справедливо включение $(\varphi_1, \psi, \varphi_2)\circ(\sigma_A, \sigma_B) \in \Gamma$. Тогда отображение $\alpha : \Gamma \to \Gamma$, определяемое по правилу

$$(\varphi_1, \psi, \varphi_2)^\alpha = (\varphi_1, \psi, \varphi_2)\circ(\sigma_A, \sigma_B),$$

есть автоморфизм полугруппы Γ, а тройка $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ - автоморфизм биавтомата $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$.

Доказательство. Возьмем $\gamma = (\varphi_1, \psi, \varphi_2)$. Дано, что

$$(\varphi_1, \psi, \varphi_2)^\alpha = (\varphi_1, \psi, \varphi_2)\circ(\sigma_A, \sigma_B) = (\sigma_A^{-1}\varphi_1\sigma_A, \sigma_A^{-1}\psi\sigma_B, \sigma_B^{-1}\varphi_2\sigma_B).$$

Выше отмечалось, что такое отображение сохраняет умножение. Таким образом, мы имеем тройку отображений $\sigma_A : A \to A$, $\alpha : \Gamma \to \Gamma$, $\sigma_B : B \to B$, где σ_A, σ_B - автоморфизмы пространств A и B соответственно, а α - автоморфизм полугруппы Γ. Чтобы тройка $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ была автоморфизмом биавтомата $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$, для всех $a \in A$, $b \in B$, $\gamma \in \Gamma$ должны выполняться условия

$$(a\circ\gamma)\sigma_A = a\sigma_A\circ\gamma^\alpha,$$
$$(a*\gamma)\sigma_B = a\sigma_A * \gamma^\alpha,$$
$$(b\circ\gamma)\sigma_B = b\sigma_B\circ\gamma^\alpha.$$

Действительно,

$$(a\circ\gamma)\sigma_A = a\varphi_1\sigma_A = a\sigma_A\sigma_A^{-1}\varphi_1\sigma_A = a\sigma_A\circ\gamma^\alpha,$$
$$(a*\gamma)\sigma_B = a\psi\sigma_B = a\sigma_A\sigma_A^{-1}\psi\sigma_B = a\sigma_A * \gamma^\alpha,$$
$$(b\circ\gamma)\sigma_B = b\varphi_2\sigma_B = b\sigma_B\sigma_B^{-1}\varphi_2\sigma_B = b\sigma_B\circ\gamma^\alpha.$$

Согласно доказанной лемме, найти все автоморфизмы биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ - значит описать в тех или иных терминах нормализатор $N_{\Sigma_A\times\Sigma_B}(\Gamma)$ полугруппы $\Gamma\in End(A,B)$ в описанном представлении $(End(A,B),\Sigma_A\times\Sigma_B)$.

2. <u>Треугольное произведение биавтоматов</u>. Пусть даны биавтоматы $\mathfrak{A}_1=(A_1,\Gamma_1,B_1)$ и $\mathfrak{A}_2=(A_2,\Gamma_2,B_2)$. Возьмем $\Phi_1=Hom(A_2,A_1)$, $\Psi=Hom(A_2,B_1)$, $\Phi_2=Hom(B_2,B_1)$. Φ_1, Ψ, Φ_2 рассматриваются как абелевы группы по сложению. Γ_1 действует на Φ_1, Φ_2, Ψ справа по правилам

$$a_2(\varphi_1\circ\gamma_1)=(a_2\varphi_1)\circ\gamma_1,\quad b_2(\varphi_2\circ\gamma_1)=(b_2\varphi_2)\circ\gamma_1,\quad a_2(\psi\circ\gamma_1)=(a_2\psi)\circ\gamma_1.$$

Γ_2 действует в Φ_1, Φ_2, Ψ слева:

$$b_2(\gamma_2\circ\varphi_2)=(b_2\circ\gamma_2)\varphi_2,\quad a_2(\gamma_2\circ\varphi_1)=(a_2\circ\gamma_2)\varphi_1,\quad a_2(\gamma_2\circ\psi)=(a_2\circ\gamma_2)\psi$$

для любых $a_2\in A_2$, $b_2\in B_2$, $\gamma_1\in\Gamma_1$, $\gamma_2\in\Gamma_2$, $\varphi_1\in\Phi_1$, $\varphi_2\in\Phi_2$, $\psi\in\Psi$. Кроме того, для любых $\varphi_1\in\Phi_1$, $\varphi_2\in\Phi_2$, $\gamma_1\in\Gamma_1$, $\gamma_2\in\Gamma_2$ определены элементы $\varphi_1*\gamma_1\in\Psi$, $\gamma_2*\varphi_2\in\Psi$, действующие по правилам $a_2(\varphi_1*\gamma_1)=(a_2\varphi_1)*\gamma_1$, $a_2(\gamma_2*\varphi_2)=(a_2*\gamma_2)\varphi_2$ для каждого $a_2\in A_2$. Все эти действия согласованы с линейными операциями в Φ_1, Φ_2 и Ψ. При этом $\varphi_1*\gamma_1'\gamma_1''=(\varphi_1\circ\gamma_1')*\gamma_1''+(\varphi_1*\gamma_1')\circ\gamma_1''$ и $\gamma_2'\gamma_2''*\varphi_2=\gamma_2'\circ(\gamma_2''*\varphi_2)+\gamma_2'*(\gamma_2''\circ\varphi_2)$.

Рассмотрим теперь декартово произведение множеств

$$\Gamma=\Gamma_1\times\Phi_1\times\Psi\times\Phi_2\times\Gamma_2$$

и определим в Γ умножение по правилу

$$(\gamma_1',\varphi_1',\psi',\varphi_2',\gamma_2')(\gamma_1'',\varphi_1'',\psi'',\varphi_2'',\gamma_2'')=(\gamma_1'\gamma_1'',\ \varphi_1'\circ\gamma_1''+\gamma_2'\circ\varphi_1'',$$
$$\varphi_1'*\gamma_1''+\gamma_2'*\varphi_2''+\gamma_2'\circ\psi''+\psi'\circ\gamma_1'',\ \varphi_2'\circ\gamma_1''+\gamma_2'\circ\varphi_2'',\ \gamma_2'\gamma_2''),$$

где $\gamma_1',\gamma_1''\in\Gamma_1$, $\gamma_2',\gamma_2''\in\Gamma_2$, $\varphi_1',\varphi_1''\in\Phi_1$, $\varphi_2',\varphi_2''\in\Phi_2$, $\psi',\psi''\in\Psi$.

Покажем, что Γ - полугруппа: проверим ассоциативность введенного умножения. Пусть $g_1=(\gamma_1',\varphi_1',\psi',\varphi_2',\gamma_2')$, $g_2=(\gamma_1'',\varphi_1'',\psi'',\varphi_2'',\gamma_2'')$, $g_3=(\gamma_1''',\varphi_1''',\psi''',\varphi_2''',\gamma_2''')$, тогда

$$(g_1g_2)g_3=(\gamma_1'\gamma_1''\gamma_1''',\ (\varphi_1'\circ\gamma_1''+\gamma_2'\circ\varphi_1'')\circ\gamma_1'''+\gamma_2'\gamma_2''\circ\varphi_1''',$$
$$(\varphi_1'\circ\gamma_1''+\gamma_2'\circ\varphi_1'')*\gamma_1'''+\gamma_2'\gamma_2''\circ\psi'''+\gamma_2'\gamma_2''*\varphi_2'''+(\varphi_1'*\gamma_1''+\gamma_2'\circ\psi''+\gamma_2'*\varphi_2''+$$
$$+\psi'\circ\gamma_1'')\gamma_1''',\ (\varphi_2'\circ\gamma_1''+\gamma_2'\circ\varphi_2'')\circ\gamma_1'''+\gamma_2'\gamma_2''\varphi_2''',\ \gamma_2'\gamma_2''\gamma_2''')=$$
$$=(\gamma_1'\gamma_2''\gamma_1''',\ \varphi_1'\circ\gamma_1''\gamma_1'''+\gamma_2'\circ(\varphi_1''\circ\gamma_1'''+\gamma_2''\circ\varphi_1'''),\ \varphi_1'*\gamma_1''\gamma_1'''+$$

$$+\gamma_2'\circ(\varphi_1''*\gamma_1'''+\gamma_2''\varphi'''+\gamma_2''*\varphi_2'''+\varphi''\circ\gamma_1''')+\gamma_2'*(\varphi_2''\gamma_1'''+\gamma_2''\varphi_2''')+\varphi'\circ\gamma_1''\gamma_1''',$$
$$\varphi_2'\circ\gamma_1''\gamma_1'''+\gamma_2'(\varphi_2''\gamma'''+\gamma_2''\varphi_2'''),\ \gamma_2'\gamma_2''\gamma_2''')=g_1(g_2g_3).$$

Итак, Γ - полугруппа.

Возьмем $A=A_1\oplus A_2$, $B=B_1\oplus B_2$. Для любых $a=a_1+a_2$, $b=b_1+b_2$, где $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, $b_1\in B_1$, $b_2\in B_2$ и $g=(\gamma_1,\varphi_1,\varphi,\varphi_2,\gamma_2)\in\Gamma$ полагаем:

$$a\circ g=a_1\circ\gamma_1+a_2\varphi_1+a_2\circ\gamma_2,$$
$$a*g=a_1*\gamma_1+a_2\varphi+a_2*\gamma_2,$$
$$b\circ g=b_1*\gamma_1+b_2\varphi_2+b_2\circ\gamma_2.$$

Проверим аксиомы биавтомата:

$$a\circ g_1g_2=a\circ\gamma_1\gamma_1''+a_2(\varphi_1'\circ\gamma_1''+\gamma_2'\circ\varphi_1)+a_2\circ\gamma_2'\gamma_2''=$$
$$=a_1\circ\gamma_1'\gamma_1''+a_2(\varphi_1'\circ\gamma_1'')+a_2(\gamma_2'\circ\varphi_1'')+a_2\circ\gamma_2'\gamma_2''=$$
$$=(a_1\circ\gamma_1'+a_2\varphi_1')\circ\gamma_1''+(a_2\circ\gamma_2')\varphi_1''+(a_2\circ\gamma_2')\circ\gamma_2''=(a\circ g_1)\circ g_2.$$

$$b\circ g_1g_2=b_1\circ\gamma_1'\gamma_1''+b_2(\varphi_2'\circ\gamma_1''+\gamma_2'\circ\varphi_2'')+b_2\circ\gamma_2'\gamma_2''=$$
$$=b_1\circ\gamma_1'\gamma_1''+(b_2\varphi_2')\circ\gamma_1''+(b_2\circ\gamma_2')\varphi_2''+(b_2\circ\gamma_2')\circ\gamma_2''=$$
$$=(b_1\circ\gamma_1'+b_2\varphi_2')\circ\gamma_1''+(b_2\circ\gamma_2')\varphi_2''+(b_2\circ\gamma_2')\circ\gamma_2''=(b\circ g_1)\circ g_2.$$

$$(a\circ g_1)*g_2+(a*g_1)\circ g_2=(a_1\circ\gamma_1'+a_2\varphi_1'+a_2\circ\gamma_2')*g_2+(a_1*\gamma_1'+a_2\varphi'+a_2*\gamma_2')\circ g_2=$$
$$=(a_1\circ\gamma_1'+a_2\varphi_1')*\gamma_1'+(a_2\circ\gamma_2')\varphi''+(a_2\circ\gamma_2')*\gamma_2''+(a_1*\gamma_1'+a_2\varphi')\circ\gamma_1''+$$
$$+(a_2*\gamma_2')\varphi_2''+(a_2*\gamma_2')\circ\gamma_2''=$$
$$=(a_1\circ\gamma_1')*\gamma_1''+a_2(\varphi_1'*\gamma_1'')+a_2(\gamma_2'\circ\varphi'')+(a_2\circ\gamma_2')*\gamma_2''+(a_1*\gamma_1')\circ\gamma_1''+$$
$$+a_2(\varphi'\gamma_1'')+(a_2*\gamma_2')\varphi_2''+(a_2*\gamma_2')\circ\gamma_2''=a*g_1g_2.$$

Биавтомат $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ называется треугольным произведением автоматов $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ и обозначается через $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\triangledown\mathfrak{A}_2$.

Пусть даны два биавтомата

$$\mathfrak{A}_1=(A_1,\Gamma_1,B_1)\subset(A_1,\operatorname{End}A_1\times\operatorname{Hom}(A_1,B_1)\times\operatorname{End}B_1,B_1),$$
$$\mathfrak{A}_2=(A_2,\Gamma_2,B_2)\subset(A_2,\operatorname{End}A_2\times\operatorname{Hom}(A_2,B_2)\times\operatorname{End}B_2,B_2).$$

Возьмем их треугольное произведение

$$\mathfrak{A}_1\triangledown\mathfrak{A}_2=(A_1\oplus A_2,\ \Gamma,\ B_1\oplus B_2).$$

Полугруппе Γ будет отвечать следующая матричная картинка:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{End}\,A_2 & \mathrm{Hom}(A_2,B_2) & \mathrm{Hom}(A_2,A_1) & \mathrm{Hom}(A_2,B_1) \\ & \mathrm{End}\,B_2 & & \mathrm{Hom}(B_2,B_1) \\ & & \mathrm{End}\,A_1 & \mathrm{Hom}(A_1,B_1) \\ & & & \mathrm{End}\,B_1 \end{pmatrix}.$$

3. Замечание об инцидентности.

Лемма 3. Если $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ - автоморфизм треугольного произведения конечных биавтоматов $\mathfrak{A}_1 \triangledown \mathfrak{A}_2 = (A_1 \oplus A_2, \Gamma, B_1 \oplus B_2)$, то матричная запись элементов σ_A и σ_B имеет вид

$$\sigma_A = \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{21} \\ 0 & \sigma_{11} \end{pmatrix}, \qquad \sigma_B = \begin{pmatrix} \delta_{22} & \delta_{21} \\ 0 & \delta_{11} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Из результатов работы [I] следует, что если A' - Γ-инвариантное подпространство из $A_1 \oplus A_2$, то либо $A' \supset A_1$, либо $A' \subset A_1$. Возьмем подавтомат (A_1, Γ, B_1) и его образ $(A_1^{\sigma_A}, \Gamma^{\alpha}, B_1^{\sigma_B})$ при автоморфизме $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ автомата $(A_1 \oplus A_2, \Gamma, B_1 \oplus B_2)$. Так как $A_1^{\sigma_A}$ инвариантно относительно Γ, то либо $A_1^{\sigma_A} \supset A_1$, либо $A_1^{\sigma_A} \subset A_1$. Учитывая конечномерность A_1, получим $A_1^{\sigma_A} = A_1$, т.е. A_1 инвариантно относительно σ_A. (Если пространство A_1 бесконечномерно, то A_1 может быть строго меньше (или строго больше) $A_1^{\sigma_A}$ - см.[3].) Аналогично B_1 инвариантно относительно σ_B. Из доказанной инвариантности подпространств A_1 и B_1 следует указанный в условии вид матричной записи σ_A и σ_B.

Наряду с матричной формой записи элементов σ_A и σ_B мы будем также использовать следующую запись:

$$\sigma_A = (\sigma_{22}, \sigma_{21}, \sigma_{11}), \quad \sigma_B = (\delta_{22}, \delta_{21}, \delta_{11})$$

Предположение. Если $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ - автоморфизм треугольного произведения не обязательно конечных биавтоматов $\mathfrak{A}_1 \triangledown \mathfrak{A}_2 = (A_1 \oplus A_2, \Gamma, B_1 \oplus B_2)$, то имеет место одна из следующих пар включений:

1. $A_1^{\sigma_A} \subset A_1$, $B_1^{\sigma_B} \subset B_1$;

2. $A_1^{\sigma_A} \supset A_1$, $B_1^{\sigma_B} \supset B_1$.

Доказательство. Как отмечалось в [I], либо $A_1^{\sigma_A} \supset A_1$, либо $A_1^{\sigma_A} \subset A_1$; аналогично либо $B_1^{\sigma_B} \subset B_1$, либо $B_1^{\sigma_B} \supset B_1$. Поэтому, вообще говоря, возможны, кроме названных, еще два случая:

3. $A_1^{\sigma_A} \subset A_1$, $B_1^{\sigma_B} \supset B_1$;

4. $A_1^{\sigma_A} \supset A_1$, $B_1^{\sigma_B} \subset B_1$.

Покажем, что случай 4 сводится к случаю 2. Пусть $A' = A_1^{\sigma_A}$ строго больше A_1, тогда A' содержит элемент $a_2 \in A_2$. Так как

$$\Gamma = \Gamma_1 \times Hom(A_2, A_1) \times Hom(A_2, B_1) \times Hom(B_2, B_1) \times \Gamma_2,$$

то $a_2 * \Gamma = \{a_2 * \gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = B_1$. Следовательно, $B_1^{\sigma_B} \supset B_1$, что и требовалось.

Если $A_1^{\sigma_A}$ строго меньше A_1, а $B_1^{\sigma_B}$ строго больше B_1, то $A_1 = A_1^{\sigma_A \sigma_A^{-1}}$ строго меньше $A_1^{\sigma_A^{-1}}$; $B_1 = B_1^{\sigma_B \sigma_B^{-1}}$ строго больше $B_1^{\sigma_B^{-1}}$, а этого, как показано выше, быть не может. Таким образом, случай 3 также сводится к одному из предыдущих случаев.

4. Основной результат. Пусть даны два биавтомата $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \Gamma_1, B_1) \subset (A_1, End(A_1, B_1), B_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (A_2, \Gamma_2, B_2) \subset (A_2, End(A_2, B_2), B_2)$. Возьмем треугольное произведение $\mathfrak{A}_1 \triangledown \mathfrak{A}_2 = (A_1 \oplus A_2, \Gamma, B_1 \oplus B_2)$.

Теорема. Для того, чтобы элемент

$$(\sigma_A, \sigma_B) = (\sigma_{22}, \sigma_{21}, \sigma_{11}, \delta_{22}, \delta_{21}, \delta_{11}) \in \Sigma_A \times \Sigma_B$$

определял автоморфизм треугольного произведения биавтоматов $\mathfrak{A}_1 \triangledown \mathfrak{A}_2$, необходимо и достаточно, чтобы элемент $(\sigma_{22}, \delta_{22}) \in \Sigma_{A_2} \times \Sigma_{B_2}$ определял автоморфизм биавтомата $\mathfrak{A}_2 = (A_2, \Gamma_2, B_2)$ и элемент $(\sigma_{11}, \delta_{11}) \in \Sigma_{A_1} \times \Sigma_{B_1}$ определял автоморфизм биавтомата $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \Gamma_1, B_1)$.

Доказательство. Мы должны описать все автоморфизмы треугольного произведения биавтоматов $\mathfrak{A}_1 \triangledown \mathfrak{A}_2 = (A_1 \oplus A_2, \Gamma, B_1 \oplus B_2)$. Полугруппа Γ изоморфна подполугруппе Γ' из полугруппы S матриц вида

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \varphi_{22} & \alpha_{21} & \varphi_{21} \\ & \beta_{22} & 0 & \beta_{21} \\ & & \alpha_{11} & \varphi_{11} \\ \multicolumn{2}{c}{0} & 0 & \beta_{11} \end{pmatrix},$$

а также полугруппе $\tilde{\Gamma}$ из полугруппы $\tilde{S}$ матриц вида

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{21} \\ & \alpha_{11} & 0 & \varphi_{11} \\ & & \beta_{22} & \beta_{21} \\ \multicolumn{2}{c}{0} & 0 & \beta_{11} \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{ij} \in Hom(A_i, A_j)$, $\varphi_{ij} \in Hom(A_i, B_j)$, $\beta_{ij} \in Hom(B_i, B_j)$. Напомним, что при описании автоморфизмов автомата $(A, \Gamma, B) = \mathfrak{A}$, мы исходим из представления $(End(A,B), \Sigma_A \times \Sigma_B)$; в нашей ситуации $A = A_1 \oplus A_2$, $B = B_1 \oplus B_2$. Поэтому начнем с рассмотрения представления $(\tilde{S}, \Sigma)$. Пусть

$$\tilde{S} \ni \tilde{s} = (\alpha_{22}, \alpha_{21}, \alpha_{11}, \varphi_{22}, \varphi_{21}, \varphi_{11}, \beta_{22}, \beta_{21}, \beta_{11}) = (\alpha, \varphi, \beta) \quad (1)$$

$$\sigma_A = (\sigma_{22}, \sigma_{21}, \sigma_{11}), \; \sigma_B = (\delta_{22}, \delta_{21}, \delta_{11}). \quad (2)$$

Тогда

$$\tilde{s} \circ (\sigma_A, \sigma_B) = (\alpha, \varphi, \beta) \circ (\sigma_A, \sigma_B) = (\sigma_A^{-1} \alpha \sigma_A, \sigma_A^{-1} \varphi \sigma_B, \sigma_B^{-1} \beta \sigma_B) = (\alpha'_{22}, \alpha'_{21}, \alpha'_{11}, \varphi'_{22}, \varphi'_{21}, \varphi'_{11}, \beta'_{22}, \beta'_{21}, \beta'_{11}),$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\alpha'_{22} = \sigma_{22}^{-1} \alpha_{22} \sigma_{22}, \quad \varphi'_{22} = \sigma_{22}^{-1} \varphi_{22} \delta_{22}, \quad \beta'_{22} = \delta_{22}^{-1} \beta_{22} \delta_{22}, \\ &\alpha'_{11} = \sigma_{11}^{-1} \alpha_{11} \sigma_{11}, \quad \varphi'_{11} = \sigma_{11}^{-1} \varphi_{11} \delta_{11}, \quad \beta'_{11} = \delta_{11}^{-1} \beta_{11} \delta_{11}, \\ &\alpha'_{21} = \sigma_{22}^{-1} \alpha_{22} \sigma_{21} + \sigma_{22}^{-1} \alpha_{21} \sigma_{11} - \sigma_{22}^{-1} \alpha_{11} \sigma_{21}, \\ &\varphi'_{21} = \sigma_{22}^{-1} \varphi_{22} \delta_{21} + \sigma_{22}^{-1} \varphi_{21} \delta_{11} - \sigma_{22}^{-1} \sigma_{21} \sigma_{11}^{-1} \varphi_{11} \delta_{11} \\ &\beta'_{21} = \delta_{22}^{-1} \beta_{22} \delta_{21} + \delta_{22}^{-1} \beta_{21} \delta_{11} - \delta_{22}^{-1} \beta_{11} \delta_{21}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Теперь определим представление $(S, \mathfrak{S})$, где $\mathfrak{S}$ – полугруппа матриц такого вида:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{22} & 0 & \sigma_{21} & 0 \\ & \delta_{22} & 0 & \delta_{21} \\ & & \sigma_{11} & 0 \\ & & & \delta_{11} \end{pmatrix},$$

где $\sigma_{ij} \in Hom(A_i, A_j)$, $\delta_{ij} \in Hom(B_i, B_j)$, $i, j = 1, 2$.
Действие в этом представлении определим следующим образом:

если

$$\mathcal{S} \ni s = (\alpha_{22}, \varphi_{22}, \beta_{22}, \alpha_{21}, \varphi_{21}, \beta_{21}, \alpha_{11}, \varphi_{11}, \beta_{11}),$$

$$\sigma = (\sigma_{22}, \sigma_{21}, \delta_{22}, \delta_{21}, \sigma_{11}, \delta_{11}),$$

то

$$s \circ \sigma = (\alpha'_{22}, \varphi'_{22}, \beta'_{22}, \alpha'_{21}, \varphi'_{21}, \beta'_{21}, \alpha'_{11}, \varphi'_{11}, \beta'_{11}),$$

где элементы $\alpha'_{22}, \alpha'_{11}, \varphi'_{22}, \varphi'_{11}, \beta'_{22}, \beta'_{11}$ вычисляются так же, как соответствующие элементы $\mathfrak{F} \circ (\sigma_A, \sigma_B)$, где $\mathfrak{F}$ задается формулой (I), σ_A, σ_B – формулой (2).

Легко понять, что представление ($\mathcal{S}, \mathfrak{S}$) изоморфно представлению ($\mathfrak{F}, \Sigma$).

Таким образом, для того, чтобы $(\sigma_A, \sigma_B) \in \Sigma$ определял автоморфизм автомата $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \triangledown \mathfrak{A}_2$, необходимо и достаточно, чтобы отвечающий (σ_A, σ_B) элемент $\sigma = (\sigma_{22}, \sigma_{21}, \delta_{22}, \delta_{21}, \sigma_{11}, \delta_{11})$ из $\mathfrak{S}$ принадлежал нормализатору полугруппы Γ' в представлении ($\mathcal{S}, \mathfrak{S}$).

Пусть $\gamma = (\alpha_{22}, \varphi_{22}, \beta_{22}, \alpha_{21}, \varphi_{21}, \beta_{21}, \alpha_{11}, \varphi_{11}, \beta_{11}),$

$$\sigma = (\sigma_A, \sigma_B) = (\sigma_{22}, \sigma_{21}, \sigma_{11}, \delta_{22}, \delta_{21}, \delta_{11}).$$

Тогда $\gamma \circ s = (\alpha'_{22}, \varphi'_{22}, \beta'_{22}, \alpha'_{21}, \varphi'_{21}, \beta'_{21}, \alpha'_{11}, \varphi'_{11}, \beta'_{11}),$
где элементы $\alpha'_{ij}, \varphi'_{ij}, \beta'_{ij}$ вычисляются по формулам (3). Так как $\Gamma' = \Gamma_1 \times Hom(A_2, A_1) \times Hom(A_2, B_1) \times Hom(B_2, B_1) \times \Gamma_2$ то для того, чтобы $\gamma \circ \sigma \in \Gamma'$, необходимо и достаточно, чтобы $(\alpha'_{22}, \varphi'_{22}, \beta'_{22}) \in \Gamma_2$, а $(\alpha'_{11}, \varphi', \beta') \in \Gamma_1$.

С другой стороны,

$$(\alpha'_{22}, \varphi'_{22}, \beta'_{22}) = (\sigma_{22}^{-1} \alpha_{22} \sigma_{22}, \sigma_{22}^{-1} \varphi_{22} \delta_{22}, \delta_{22}^{-1} \beta_{22} \delta_{22}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \varphi_{22} \\ 0 & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{22} & 0 \\ 0 & \delta_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= (\sigma_{22}, \delta_{22})^{-1} (\alpha_{22}, \varphi_{22}, \beta_{22})(\sigma_{22}, \delta_{22}) \in \Gamma_2,$$

а это означает, что элемент $(\sigma_{22}, \delta_{22})$ лежит в нормализаторе полугруппы Γ_2, вычисленном в соответствующем представлении. Таким образом, элемент $(\sigma_{22}, \delta_{22})$ определяет автоморфизм автомата $\mathfrak{A}_2$.

Аналогично,

$$(\alpha'_{11}, \varphi'_{11}, \beta'_{11}) = (\sigma_{11}^{-1} \alpha_{11} \sigma_{11}, \sigma_{11}^{-1} \varphi_{11} \delta_{11}, \delta_{11}^{-1} \beta_{11} \delta_{11}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & \delta_{11}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \varphi_{11} \\ 0 & \beta_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & \delta_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= (\sigma_{11}, \delta_{11})^{-1} (\alpha_{11}, \varphi_{11}, \beta_{11})(\sigma_{11}, \delta_{11}) \in \Gamma_1;$$

таким образом, $(\sigma_{11}, \delta_{11})$ лежит в нормализаторе полугруппы Γ_1 и, следовательно, определяет автоморфизм автомата $\mathfrak{A}_1$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плоткин Б.И. Треугольные произведения // Некоторые вопросы теории групп.-Рига: ЛГУ им.П.Стучки,1971.-С.140-170.
2. Плоткин Б.И. Биавтоматы // Тр. Тбил. ун-та. Сер. матем. мех., астрон.-1981.-Т.12- С. 123-159.
3. Бунт А.Я. Автоморфизмы треугольного произведения // Сборник работ по алгебре.- Рига, 1978.- С. 3-8.

Поступила 9.04.1985

ВШПД ВЦСПС

Alberts,M., Recognition of context-free languages by alternating Turing machines, 5-12.

A model of alternating one tape, off-line Turing machine is considered. Let $ATIME^{fin}(t(n))$ be the class of languages which can be accepted by a $\mathcal{O}(t(n))$-time bounded alternating Turing machine using a fixed number of alternations (where n denotes the length of input). The main theorem claims that any context-free language belongs to the class $ATIME^{fin}(n)$.

Boiko,S.N., Automorphisms of triangular products of automata, 13-23.

A description of automorphisms of the triangular product of linear biautomata is given in the article. If $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ is an automorphism of the biautomaton $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ then α is completely determined by the automorphisms σ_A, σ_B of the linear spaces A and B respectively. To determine all the automorphisms of $\mathfrak{A}$, we must describe, in some terms or others, the normalizer $N_{\Sigma_A \times \Sigma_B}(\Gamma)$ of the subgroup $\Gamma \in End(A,B)$ in the representation $(End(A,B), \Sigma_A \times \Sigma_B)$. A necessary and sufficient condition is presented for the element $(\sigma_A, \sigma_B) \in \Sigma_A \times \Sigma_B$ to determine an automorphism of the triangular product $\mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2$.

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 519.95

Я.А.Булс

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АВТОМАТОВ

Введение.

В работе исследуется моделирование конечных детерминированных автоматов. Мы ограничимся вопросами моделирования конечных детерминированных автоматов конечными детерминированными автоматами, и в дальнейшем слово "автомат" означает "конечный детерминированный автомат".

Под автоматом, как обычно, понимается упорядоченная пятерка $\langle P, Q, R, \Gamma, \partial\rangle$, где P, Q, R - произвольные конечные непустые множества, а Γ, ∂ - отображения $\Gamma: R\times P \to R$, $\partial: R\times P \to Q$ (см., например, [1],[2]).

Под $\mathfrak{A}$ всюду понимается автомат $\langle P, Q, R, \Gamma, \partial\rangle$, под $\mathfrak{B}$ - автомат $\langle X, Y, Z, \Delta, \lambda\rangle$.

Если φ, ψ - отображения, то вместо $\varphi(\psi(x))$ мы будем писать $\varphi\psi(x)$.

Пусть S - множество. Через $\mathrm{Card}\, S$ обозначается объем множества S. Слова "множество" и "алфавит" употребляются как синонимы. Множество всех слов в алфавите S обозначается через $W(S)$, а длина слова u - через $\ell(u)$.

За определениями неразъясненных здесь понятий читатель отсылается к [3].

Запись $z \equiv_k z'$ означает, что z, z' - к-эквивалентные (по другой терминалогии: к-неразличимые) состояния, запись

$z \approx z'$ -,что они эквивалентны, а запись $z \not\approx z'$ -,что они не эквивалентны.

Символ $\leftrightharpoons$ заменяет словесный оборот "есть по определению".

§I. I-прямое моделирование.

Определение I. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ I-прямо моделирует $\mathfrak{B}$ (в символической записи $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}$) посредством φ, ψ, χ, если $\varphi : X \to P$, $\psi : Y \to Q$, $\chi : Z \to R$ - инъекции, такие, что

$$\chi \Delta(z,x) = \Gamma(\chi(z), \varphi(x)), \qquad (1)$$

$$\psi \lambda(z,x) = \delta(\chi(z), \varphi(x)), \qquad (2)$$

где $(z,x) \in Z \times X$.

Если φ, ψ, χ - биекции, то говорят, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны.

Предложение I. Если $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \trianglerighteq_1 \mathfrak{A}$, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}$ посредством φ, ψ, χ, а $\mathfrak{B} \trianglerighteq_1 \mathfrak{A}$ посредством φ', ψ', χ'. Имея ввиду, что φ-инъекция, заключаем: $Card\, X \leq Card\, P$. φ'-также инъекция, значит $Card\, P \leq Card\, X$. Отсюда $Card\, P = Card\, X$, а так как P, X -конечные множества, то φ - биекция. Тем же способом можно показать, что ψ, χ тоже являются биекциями.

Пусть $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}$ посредством φ, ψ; χ. Отображения φ, ψ естественно продолжить на $W(X)$, $W(Y)$ соответственно. Тогда

$$\varphi(ux) \leftrightharpoons \varphi(u)\varphi(x), \qquad (3)$$

$$\psi(vy) \leftrightharpoons \psi(v)\psi(y), \qquad (4)$$

где x, y и u, v соответственно произвольные буквы и слова в алфавитах X, Y.

Предложение 2. Пусть $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}$ посредством φ, ψ, χ. Тогда для каждого $z \in Z$ и каждого $u \in W(X)$

$$\chi \Delta(z,u) = \Gamma(\chi(z), \varphi(u)),$$

$$\psi \lambda(z,u) = \delta(\chi(z), \varphi(u)) \qquad (5)$$

Доказательство индукцией по длине слова u.

§2. I-моделирование.

Определение 2. Будем говорить, что $\mathcal{A}$ I-моделирует $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \geqslant_1 \mathcal{B}$) посредством φ, ψ, χ, если $\varphi: X \to P$, $\psi: Y \to Q$, $\chi: Z \to R$ - отображения, где φ, ψ - инъекции такие, что для их продолжений $\varphi: W(X) \to W(P)$, $\psi: W(Y) \to W(Q)$

$$\varphi(ux) \leftrightharpoons \varphi(u)\varphi(x), \qquad (3')$$
$$\psi(vy) \leftrightharpoons \psi(v)\psi(y), \qquad (4')$$
$$\psi\lambda(z,u) \leftrightharpoons \lambda(\chi(z), \varphi(u)), \qquad (5')$$

$x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, а $u \in W(X)$, $v \in W(Y)$.

Имея ввиду (3')-(5'), из (3)-(5) сразу следует, если $\mathcal{A} \trianglerighteq_1 \mathcal{B}$, то $\mathcal{A} \geqslant_1 \mathcal{B}$.

Предложение 3. Если $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ - эквивалентные автоматы, то $\mathcal{A} \geqslant_1 \mathcal{A}'$ и $\mathcal{A}' \geqslant_1 \mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}' = \langle P, Q, R', \Gamma', \lambda' \rangle$. Используя эквивалентность автоматов $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$, определяются отображения $\chi: R \to R'$, $\chi': R' \to R$, ставящие в соответствии каждому состоянию эквивалентное ему состояние. Далее следует взять тождественные отображения множеств $W(P)$, $W(Q)$ из чего и получается требуемый результат.

Предложение 4. Отношения $\trianglerighteq_1$, $\geqslant_1$ на множестве всех автоматов являются предпорядками.

Следствие. Если $\mathcal{A}' \geqslant_1 \mathcal{B}'$ и $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ соответственно эквивалентны $\mathcal{A}', \mathcal{B}'$, то $\mathcal{A} \geqslant_1 \mathcal{B}$.

Пусть $\mathcal{A} \geqslant_1 \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \trianglerighteq_1 \mathcal{B}$) посредством φ, ψ, χ. Условимся говорить, что состояние $z \in Z$ переходит в состояние $r \in R$, если $\chi(z) = r$.

Предложение 5. Пусть z, z' - не k-эквивалентные состояния одного и того же автомата $\mathcal{B}$. Тогда эти состояния переходят в состояния, не являющиеся k-эквивалентными.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \geqslant_1 \mathcal{B}$ ($\mathcal{A} \trianglerighteq_1 \mathcal{B}$) посредством φ, ψ, χ, тогда ψ - инъекция. Остается использовать определение k-эквивалентности и тот факт, что $\lambda(z, ux) =$

$=\lambda(z,u)\lambda(\Delta(z,u),x)$ для любых $z\in Z$, $x\in X$, $u\in W(X)$.

<u>Следствие</u>. Неэквивалентные состояния переходят в неэквивалентные состояния.

<u>Теорема I</u>. $\mathfrak{A} \geqslant_1 \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда найдется автомат $\mathfrak{B}'$, эквивалентный $\mathfrak{B}$, такой, что $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}'$.

<u>Доказательство</u>. Достаточность. Сперва строится автомат $\mathfrak{A}'$ такой, что $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{A}'$. Потом, исходя из $\mathfrak{A}'$, определяется такой автомат $\mathfrak{B}'$, какой и требуется в теореме.

Так как $\mathfrak{A} \geqslant_1 \mathfrak{B}$, существуют инъективные отображения $\varphi: W(X)\to W(P)$, $\psi: W(Y)\to W(Q)$, $\chi: Z\to R$, удовлетворяющие (3')-(5').

(i) Пусть $P' \leftrightharpoons \varphi(X)$, $R' \leftrightharpoons \Gamma(\chi(Z), W(P'))$.

Множество R' содержит только те состояния, которые автомат $\mathfrak{A}$ может достичь из состояний множества $\chi(Z)$ входными словами из множества $W(\varphi(X))$. Значит $\chi(Z)\subseteq R'\subseteq R$.

Пусть $\mathfrak{A}'$ - автомат $\langle P', Q', R', \Gamma', \partial'\rangle$, где $\Gamma' \leftrightharpoons \Gamma|R'\times P$, $\partial' \leftrightharpoons \partial|R'\times P'$, $Q' \leftrightharpoons \partial'(R', W(P'))$. Понятно, что $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{A}'$ посредством соответствующих тождественных отображений множеств P', Q', R'.

(ii) Для каждого состояния $r'\in R'$ автомата $\mathfrak{A}'$ найдется такое состояние $r_0\in\chi(Z)$, что $r_0 \equiv r'$.

Докажем это. Пусть $r'\in R'$, тогда существует такое состояние $r\in\chi(Z)$ и такое слово $u\in W(P')$, что $r'=\Gamma(r,u)$. Пусть далее $w\in W(P)$, тогда

$$\partial(r,uw)=\partial'(r,uw)=\partial'(r,u)\partial'(r',w), \tag{6}$$

$$\partial(r,uw)=\partial(r,u)\partial(\Gamma(r,u),w). \tag{7}$$

Так как $uw\in W(\varphi(X))$ и $\varphi: X\to P'$ - биекция, а

$$\varphi\varphi^{-1}(uw)=uw,\quad \varphi(\varphi^{-1}(u)\varphi^{-1}(w))=\varphi\varphi^{-1}(u)\varphi\varphi^{-1}(w)=uw,$$

то $\varphi^{-1}(uw)=\varphi^{-1}(u)\varphi^{-1}(w)$. Значит, $\varphi^{-1}(u)$, $\varphi^{-1}(w)$ суть слова в алфавите X.

По предположению $r\in\chi(Z)$; из этого следует существование такого $z\in Z$, что $r=\chi(z)$. Имея ввиду, что $\mathfrak{A}\geqslant_1\mathfrak{B}$, получаем

$$\psi\lambda(z,\varphi^{-1}(u,w))=\partial(\chi(z),\varphi\varphi^{-1}(u,w))=\partial(r,uw). \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\psi\lambda(z,\varphi^{-1}(u,w))&=\psi\lambda(z,\varphi^{-1}(u)\varphi^{-1}(w))=\\&=\psi\lambda(z,\varphi^{-1}(u))\psi\lambda(\Delta(z,\varphi^{-1}(u)),\varphi^{-1}(w))=\\&=\partial(r,u)\partial(\chi\Delta(z,\varphi^{-1}(u)),w).\end{aligned} \tag{9}$$

Состояние $\chi\Delta(z,\psi^{-1}(u)) \in \chi(Z)$, поэтому

$$\partial(r,u)\partial(\chi\Delta(z,\psi^{-1}(u)),w) = \partial'(r,u)\partial'(\chi\Delta(z,\psi^{-1}(u)),w). \qquad (10)$$

Имея ввиду (6)-(10), получаем

$$\partial'(r',w) = \partial'(\chi\Delta(z,\psi^{-1}(u)),w), \quad \text{т.е.} \quad r' \equiv \chi\Delta(z,\psi^{-1}(u)).$$

Отсюда как следствие получается $Q' = \psi(Y)$, и так как ψ-иньекция, то $\psi: Y \to Q'$ - биекция.

(iii) Пусть $\mathcal{B}'$ - автомат $\langle X, Y, R', \Delta', \lambda' \rangle$, где

$$\Delta'(r,x) \leftrightharpoons \Gamma'(r,\psi(x)), \qquad \lambda'(r,x) \leftrightharpoons \psi^{-1}\nu'(r,\psi(x)).$$

Оказывается, что $\mathfrak{A}' \trianglerighteq_1 \mathcal{B}'$ и $\mathcal{B}', \mathcal{B}$ - эквивалентны.

Пусть $z \in Z$ и $u \in W(X)$, тогда $\lambda(z,u) = \psi^{-1}\psi\lambda(z,u) = \lambda'(\chi(z),u)$. Значит, $z \equiv \chi(z)$.

Если $r \in R'$, то по (ii) найдется $r_0 \in \chi(Z)$ такое, что для любого слова $u \in W(X)$

$$\nu'(r,\psi(u)) = \nu'(r_0,\psi(u)).$$

Отсюда $\lambda'(r,u) = \psi^{-1}\nu(r_0,\psi(u))$. Так как $r_0 \in \chi(Z)$, то найдется $z_0 \in Z$ такое, что $\chi(z_0) = r_0$. Это дает: $\psi^{-1}\nu(r_0,\psi(u)) = \lambda(z_0,u)$. Так как отношение $\geqslant_1$ транзитивно, заключаем: $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathcal{B}'$

Необходимость следует из предложений 2 и 3.

Из доказательства достаточности видно: если $\mathfrak{A} \geqslant_1 \mathcal{B}$, то $Q' = \psi(Y)$. В противном случае неверно, что $\mathfrak{A} \geqslant_1 \mathcal{B}$.

<u>Следствие</u>. $\mathfrak{A} \geqslant_1 \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда найдутся автоматы $\mathfrak{A}'$, $\mathcal{B}'$, эквивалентные соответственно $\mathfrak{A}$, $\mathcal{B}$, и такие, что $\mathfrak{A}' \trianglerighteq_1 \mathcal{B}'$.

Мы говорим, что $\mathfrak{A}$ приведенный автомат, если любые два состояния этого автомата неэквивалентны. Очевидно, следствие остается верным, если вместо произвольных автоматов $\mathfrak{A}$, $\mathcal{B}$ взять приведенные автоматы.

Полученные результаты показывают, что при изучении вопросов моделирования можно ограничиться классом приведенных автоматов, что кажется особенно привлекательным.

§3. I-прямое I-моделирование и подавтоматы.

В [3] употребляется понятие подавтомата. На интуитивном уровне это автомат, для которого представляющий его граф, является подграфом представления данного автомата.

Предложение 6. $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда существует подавтомат $\mathfrak{A}'$ автомата $\mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}$ изоморфны.

Мы ограничимся замечанием, что точное доказательство предложения требует четкой формулировки понятий "представление автомата графом" и "подавтомат".

Итак, для доказательства достаточности сперва замечаем, что $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{A}'$, потом используем, что $\trianglerighteq_1$ предпорядок.

При доказательстве необходимости предполагаем, что $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}$ посредством φ, ψ, χ и определяем $\mathfrak{A}'$ как автомат

$$\langle \varphi(X), \psi(Y), \chi(Z), \Gamma|\chi(Z)\times\varphi(X), \partial|\chi(Z)\times\varphi(X)\rangle.$$

Предложение 6 показывает, что автомат $\mathfrak{A}$ I-прямо моделирует только автоматы изморфные своим подавтоматам .

Теперь о I-моделировании. Пусть $\mathfrak{A} \geqslant_1 \mathfrak{B}$. Тогда по теореме I найдется автомат $\mathfrak{B}'$ эквивалентный автомату $\mathfrak{B}$, такой, что $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}'$. Из предложения 6 следует, что существует автомат $\mathfrak{A}'$, изоморфный автомату $\mathfrak{B}'$ и такой, что $\mathfrak{A}'$ - подавтомат автомата $\mathfrak{A}$.

Мы можем рассуждать несколько иначе. Пусть $\mathfrak{A}' = \langle P', Q', R', \Gamma', \partial\rangle$, $\mathfrak{B}' = \langle X, Y, Z', \Delta', \lambda'\rangle$, $P' = \{p_1, \ldots, p_k\}$,

$$Q' = \{q_1, \ldots, q_m\}, \ X = \{x_1, \ldots, x_k\},$$

$Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$, и пусть $\varphi : X \to P'$, $\psi : Y \to Q'$, , $\chi : Z' \to R'$ - биекции, устанавливающие изоморфизм $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$, причем буквы x_i , y_j расположены в списках так, чтобы $\varphi(x_i) = p_i$ и $\psi(y_j) = q_j$ для всех i, j . Густь, кроме того, $\Delta(z_i, x_j) = z_s$ и $\lambda(z_i, x_j) = y_t$. Определяем автомат $\mathfrak{A}'' \leftrightharpoons \langle P', Q', R'', \Gamma'', \lambda''\rangle$, где $R' \leftrightharpoons \{r_1, \ldots, r_n\}$, $\Gamma''(r_i, p_j) \leftrightharpoons r_s$ и $\partial''(r_i, p_j) \leftrightharpoons q_t$. Из этого определения следует, что $\mathfrak{A}''$ и $\mathfrak{B}$ изоморфны, а $\mathfrak{A}''$ и $\mathfrak{A}'$ эквивалентны.

Следствие. $\mathfrak{A} \geqslant_1 \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда найдется такой подавтомат $\mathfrak{A}'$ автомата $\mathfrak{A}$, который или сам изоморфен автомату $\mathfrak{B}$, или эквивалентен автомату $\mathfrak{A}''$, изоморфному $\mathfrak{B}$.

Все это показывает, что I-моделирование тоже охватывает очень ограниченный класс автоматов.

§4. Прямое моделирование.

<u>Определение 3</u>. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ прямо моделирует $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$) посредством φ, ψ, χ, если $\varphi: X \to W(P)$, $\psi: Y \to W(Q)$, $\chi: Z \to R$ - отображения такие, что $\chi\Delta(z,x) = \Gamma(\chi(z), \varphi(x))$, $\psi\lambda(z,x) = \nu(\chi(z), \varphi(x))$, где ψ - иньекция и $(z,x) \in Z \times X$. Условимся продолжать φ, ψ на $W(X)$, $W(Y)$ посредством (3), (4).

Таким образом, не исключено, что $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$ даже если $Card\, P < Card\, X$. Покажем, что это действительно так.

Условимся, что $\mathfrak{A}$ называется (ζ, ξ)-автоматом, если $Card\, P = \zeta > 1$ и $Card\, Q = \xi > 1$. Пусть $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$ посредством φ, ψ, χ. Тогда будем говорить, что $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$ со словами длины l^*, если

$$\max_{x \in X} l(\varphi(x)) = l^*.$$

<u>Предложение 7</u>. Если $\mathfrak{B}$, (ζ, ξ)-автомат, то существует такой (θ, η)-автомат $\mathfrak{A}$, что $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$ со словами длины

$$l^* =]\log_\theta \zeta[+]\log_\eta \xi[- 1.$$

<u>Доказательство</u> проведем для случая $\theta = \eta = 2$, так как в общем случае не имеется ничего существенно нового. Пусть $X = \{x_0, \ldots, x_{\zeta-1}\}$, $Y = \{y_0, \ldots, y_{\xi-1}\}$, $k =]\log_2 \zeta[$, $m =]\log_2 \xi[$.

Сперва поясним идею построения автомата $\mathfrak{A}$.

Используя Γ, автомат $\mathfrak{A}$ со словами длины k распознает запись буквы $x \in X$. Затем, зная ν, он выдает слово длины m, что является записью буквы $y \in Y$ в алфавите $\{0, I\}$. Замечая, что автомат сперва реагирует на появление входной буквы выдачей выходной буквы, а только потом переходит в новое состояние, удается сэкономить одну букву.

Далее следует более аккуратное изложение этой идеи. Как обычно, запись $i = \overline{1,n}$ означает, что индекс i пробегает все натуральные значения от I до n включительно.

(i) Пусть $Z=\{z_1,\dots,z_n\}$. Тогда состояниями автомата $\mathfrak{A}$ являются r^s, r^s_{0j}, $r^{si}_{\kappa j}$, где $s=\overline{1,n}$, $\sigma=\overline{0,\kappa}$, $j=\overline{0,2^{\sigma}-1}$, $i=\overline{1,m}$. При этом, если $\Delta(z_s,x_j)=z_{t_{sj}}$, то $r^{sm}_{\kappa j}\rightleftharpoons r^{t_{sj}}$, в противном случае (т.е. $j\geq\xi-1$) ради определенности $r^{sm}_{\kappa j}\rightleftharpoons r^{s}$. Кроме того $r^s_{\kappa j}\rightleftharpoons r^{s1}_{\kappa j}$ и $r^s\rightleftharpoons r^s_{00}$.

(ii) Определение отображения $\Gamma: R\times\{0,1\}\to R$.

(а) $\Gamma(r^s_{\sigma j},0)\rightleftharpoons r^s_{\sigma+1\,2j}$, $\Gamma(r^s_{\sigma j},1)\rightleftharpoons r^s_{\sigma+1\,2j+1}$,

где $\sigma=\overline{0,n-1}$, $j=\overline{0,2^{\sigma}-1}$, $s=\overline{1,n}$.

(б) Если $m>1$, то

$$\Gamma(r^{si}_{\kappa j},0)\rightleftharpoons\Gamma(r^{si}_{\kappa j},1)\rightleftharpoons r^{s\,i+1}_{\kappa j},$$

где $i=\overline{1,m-1}$, $j=\overline{0,2^{\kappa}-1}$, $s=\overline{1,n}$.

(iii) Определение отображения $\partial: R\times\{0,1\}\to\{0,1\}$. Буквы x_s, y_σ кодируются словами вида $\alpha_1\dots\alpha_{\kappa+m-1}$. Если запись числа s в двоичной системе имеет вид $\beta_1\dots\beta_{\eta'}$, то кодом буквы x_s по определению является слово $cod\,x_s\rightleftharpoons\alpha_1\dots\alpha_\kappa 0^{m-1}$, где $\alpha_j\rightleftharpoons 0$, если $j<\kappa-\eta'$; $\alpha_{\kappa-\eta'+i}\rightleftharpoons\beta_i$, если $i=\overline{1,\eta'}$, а 0^{m-1} означает слово, состоящее из $m-1$ нуля. Если запись числа в двоичной системе имеет вид $\gamma_1\dots\gamma_m$, то

$$cod\,y_\sigma\rightleftharpoons 0^{\kappa+m-1-p}\alpha_{\kappa+m-p}\dots\alpha_{\kappa+m-1},$$

где $\alpha_{\kappa+p-m-1+i}\rightleftharpoons\gamma_i$. Так как $\xi\leq 2^{\kappa}$ и $\zeta\leq 2^m$, описанная кодировка осуществима.

Если $\alpha=\alpha_1\dots\alpha_{\kappa+m-1}$, то $pr_i\alpha\rightleftharpoons\alpha_i$.

(а)
$$\partial(r^s_{\kappa-1\,j},0)\rightleftharpoons\begin{cases}pr_\kappa\,cod\,\lambda(z_s,x_{2j}) & \text{, если } 2j<\xi,\\ 0 & \text{, если } 2j\geq\xi.\end{cases}$$

$$\partial(r^s_{\kappa-1\,j},1)\rightleftharpoons\begin{cases}pr_\kappa\,cod\,\lambda(z_s,x_{2j+1}) & \text{, если } 2j+1<\xi,\\ 0 & \text{, если } 2j+1\geq\xi.\end{cases}$$

(б) Если $\kappa>1$, то

$$\partial(r^s_{\sigma j},0)\rightleftharpoons\partial(r^s_{\sigma j},1)\rightleftharpoons 0,\ \sigma=\overline{0,\kappa-2},\ j=\overline{0,2^{\sigma}-1},\ s=\overline{1,n}.$$

(в) Если $m>1$, то

$$\partial(r^{si}_{\kappa j},0)\rightleftharpoons\partial(r^{si}_{\kappa j},1)\rightleftharpoons\begin{cases}pr_{\kappa+i}\,cod\,\lambda(z_s,x_j) & \text{, если } j<\xi,\\ 0 & \text{, если } j\geq\xi.\end{cases}$$

$$i=\overline{1,m-1},\ j=\overline{0,2^{\kappa}-1},\ s=\overline{1,n}.$$

Этим полностью завершается определение автомата $\mathfrak{A}$. Далее следует проверить, что $\mathfrak{A}\trianglerighteq\mathcal{L}$, т.е., что если

$\Delta(z_s, x_j) = z_{\tau_{sj}}$ и $\lambda(z_s, x_j) = y_{\tau'_{sj}}$, то $\Gamma(\tau^s, cod\, x_j) = \tau^{\tau_{sj}}$ и $\vartheta(\tau^s, cod\, x_j) = cod\, y_{\tau'_{sj}}$.

Следующая теорема показывает, что полученный результат в некотором смысле наилучший.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $\zeta > 1$, $\xi > 1$ - произвольно выбранные натуральные числа. Тогда существует такой (ζ, ξ)-автомат $\mathfrak{B}$, для которого справедливо следующее высказывание: если $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$ (θ, η)-автомат, то $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ со словами длины $\ell \geq\,]\log_\theta \zeta[\, +\,]\log_\eta \xi[\, - 1$.

<u>Доказательство</u> проведем для случая $\theta = \eta = 2$. Сперва строится автомат $\mathfrak{B}$.

$$X \leftrightharpoons \{x_1, \ldots, x_\zeta\},\quad k \leftrightharpoons\,]\log_2 \zeta[\,,\quad Y \leftrightharpoons \{y_1, \ldots, y_\xi\},$$

$$m \leftrightharpoons\,]\log_2 \xi[\,,\quad Z \leftrightharpoons \{z_0, \ldots, z_{n-1}\},\quad n = \xi^\zeta,$$

$$\Delta(z_i, x_j) \leftrightharpoons z_{(i+j) \bmod n}.$$

Теперь лексикографически упорядочим все слова в алфавите , длина которых равна ζ :

$$\begin{aligned} v_1 &\leftrightharpoons y_1 \cdots y_1, \\ v_2 &\leftrightharpoons y_1 \cdots y_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ v_n &\leftrightharpoons y_\xi \cdots y_\xi. \end{aligned} \tag{II}$$

В дальнейшем считается, что список (II) зафиксирован. Ради удобства, если $v = \alpha_1 \ldots \alpha_\zeta$, то пусть $pr_j v \leftrightharpoons \alpha_j$ и $\overline{pr}_j v \leftrightharpoons \alpha_1 \ldots \alpha_j$. Положим $\lambda(z_{i-1}, x_j) \leftrightharpoons pr_j v_i$, где v_i - i-ое слово из списка (II). Тем самым автомат $\mathfrak{B}$ полностью определен.

Пусть $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ посредством φ, ψ, χ .

(i) Имея в виду (II), можно утверждать, что для любого $y \in Y$ найдется такой v_i , что $y = pr_1 v_i$. Значит, $\lambda(z_i, x_1) = y$. Теперь получается, что $\ell\psi(y) = \ell\psi\lambda(z_i, x_1) = \ell\vartheta(\chi(z_i), \psi(x_1)) = \ell\psi(x_1)$, а так как для произвольного $x \in X$ $\ell\psi(y_1) = \ell\psi\lambda(z_0, x) = \ell\vartheta(\chi(z_0), \psi(x)) = \ell\psi(x)$, то $\ell\psi(x_1) = \ell\psi(y) = \ell\psi(y_1) = \ell\psi(x)$.

Итак, $\ell\psi(x) = \ell\psi(y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Так как в алфавите $\{0, 1\}$ число разных слов длины h равно 2^h , то $\ell\psi(x) = \ell\psi(y) \geq \max(k, m)$.

(ii) Имея в виду, что $\overline{pr}_{k-1}\, \psi(x)$ - слово в алфавите

$\{0,1\}$, длина которого $k-1$, можно утверждать, что разных слов такого вида $= 2^{k-1}$. $Card\, X = \xi > 2^{k-1}$, поэтому найдутся такие s, σ, что $s \neq \sigma$, а $\overline{pr}_{k-1}\varphi(x_s) = \overline{pr}_{k-1}\varphi(x_\sigma)$. Для произвольно выбранных букв $y_i, y_j \in Y$ в списке (II) найдутся слово v_τ такое, что $pr_s v_\tau = y_i$ и $pr_\sigma v_\tau = y_j$. Отсюда

$$\overline{pr}_{k-1}\psi(y_i) = \overline{pr}_{k-1}\psi\lambda(z_{\tau-1}, x_s) = \overline{pr}_{k-1}\partial(\chi(z_{\tau-1}), \varphi(x_s)) =$$
$$= \partial(\chi(z_{\tau-1}), \overline{pr}_{k-1}\varphi(x_s)) = \partial(\chi(z_{\tau-1})), \overline{pr}_{k-1}\varphi(x_\sigma)) =$$
$$= \overline{pr}_{k-1}\psi(y_j).$$

Получается, что для любых y_i, y_j в словах $\psi(y_i)$, $\psi(y_j)$ первые $k-1$ буквы одинаковы.

(iii) Имея в виду (i), т.е., $l\psi(y) \geq \max(k,m)$, слово $\psi(y)$ можно рассматривать как слово вида uw, где $l(u) = k-1$. Из (ii) следует, что u не зависит от буквы y. Отсюда, для произвольных y_i, $y_j \in Y$ $\psi(y_i) = uw^i$, $\psi(y_j) = uw^j$. Следовательно, $\psi(y_i) \neq \psi(y_j)$ только тогда, когда $w^i \neq w^j$. $l\psi(y_i) = l\psi(y_j)$, поэтому $l(w^i) = l(w^j)$. Имеем $Card\, Y = \xi > 2^{m-1}$, значит $l(w^i) \geq m$. Отсюда $l\psi(y) \geq k-1+m$.

§5. Моделирование.

Определение 4. Пусть $z \in Z$, $x \in X$, $u \in W(X)$. Будем говорить, что $\mathfrak{A}$ моделирует $\mathfrak{B}$ ($\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$) посредством φ, f, χ, если отображения $\varphi: X \to W(P)$, $f: W(Q) \to Y$, $\chi: Z \to R$, такие, что $\lambda(\Delta(z,u), x) = f\partial(\Gamma(\chi(z), \varphi(u)), \varphi(x))$, где φ продолжено на $W(X)$ равенством (3).

Нетрудно показать; если хотя бы одна из возможностей $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \geq_1 \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$ имеет место, то $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$.

Предложение 8. Пусть $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ (или $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$), $z, z' \in Z$ и $z \neq z'$. Тогда состояния z, z' переходят в неэквивалентные состояния.

Доказательство. Если $z \neq z'$, то существует слово ux, $l(u) \geq 0$, такое, что $\lambda(z, ux) \neq \lambda(z', ux)$, но $\lambda(z,u) = \lambda(z',u)$. Получается $\lambda(\Delta(z,u),x) \neq \lambda(\Delta(z',u),x)$. Тогда предложение следует из определений моделирования (прямого моделирования) и отображения ∂.

Легко показать, что аналог предложения 5 не имеет места.

Именно: пусть z, z' не k-эквивалентные состояния одного и того же автомата $\mathcal{B}$; тогда эти состояния могут перейти в k-эквивалентные состояния.

Следствие. Пусть $\mathcal{B}$ приведенный автомат и $\mathcal{A} \geqslant \mathcal{B}$ (или $\mathcal{A} \trianglerighteq \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \trianglerighteq_1 \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \geqslant_1 \mathcal{B}$). Тогда число состояний автомата $\mathcal{A}$ не меньше числа состояний автомата $\mathcal{B}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. - М.: Наука, 1966. - 272 с.
2. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. - М.: Физматгиз, 1962. - 476 с.
3. Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М. Конечные автоматы: поведение и синтез. - М.: Наука, 1970. - 400 с.

ЛГУ им. П.Стучки Поступила 03.12.84.

Buls,J., Some notions of modelling of finite deterministic automata, 25-35.

Conventional signs are introduced as follows Let $\mathfrak{A} = \langle P,Q,R,\Gamma,\partial \rangle$ and $\mathfrak{B} = \langle X,Y,Z,\Delta,\lambda \rangle$ be automata, and let $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, $u \in W(X)$, $v \in W(Y)$, where $W(X)$ is the set of all words over the alphabet X. If

$\varphi : X \to P$, $\psi : Y \to Z$, $\chi : Z \to R$

is a triple of injective mappings, and if

$$\chi(\Delta(z,x)) = \Gamma(\chi(z),\varphi(z)), \quad \psi(\lambda(z,x) = \partial(\chi(z),\varphi(x)). \qquad (1)$$

then $\mathfrak{A} \trianglerighteq, \mathfrak{B}$. If these mappings are extended on $W(X)$, $W(Y)$ by

$$\varphi(ux) = \varphi(u)\varphi(x) , \quad \psi(vy) = \psi(v)\psi(y) \qquad (2)$$

so that $\psi(\lambda(z,u) = \partial(\chi(z),\varphi(u))$, then $\mathfrak{A} \geq, \mathfrak{B}$. If $\varphi : X \to W(P)$, $\psi : Y \to W(Q)$, $\chi : Z \to R$, χ is an injection, and (1), (2) hold, then $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. It is proved that $\mathfrak{A} \geq, \mathfrak{B}$ iff there is an automaton $\mathfrak{B}'$ equivalent to $\mathfrak{B}$ and such that $\mathfrak{A} \trianglerighteq, \mathfrak{B}'$. Upper and lower estimates are given for the length of words uder which $\trianglerighteq$-modeling can be realized.

Cīrulis,J., An abstract description of data types and of varieties of data algebras, 131-144.

The term 'data algebra' is used in the sense of Zilles [7]. By a data type we mean any data algebra freely generated with respect to itself by the set of all attributes. We characterize, in category-theoretic terms, the variety generated by a given data type, and describe endomorphism semigroups of data types. One of ours results shows that, up to the clone, a data type can be restored from its endomorphism semigroup.

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ,
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 519.46 : 512.8

Н.А.Вавилов

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ ОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Настоящая статья посвящена представлению решения системы однородных линейных уравнений с унимодулярной матрицей коэффициентов над коммутативным кольцом в виде линейной комбинации некоторых решений специального вида.

Пусть R – коммутативное кольцо с единицей, $GL(n,R)$ – полная линейная группа степени n над R, $E(n,R)$ – ее подгруппа, порожденная всеми элементарными трансвекциями. Одним из основных моментов в принадлежащем А.А.Суслину [5] замечательном доказательстве того факта, что при $n\geq 3$ подгруппа $E(n,R)$ – нормальный делитель в $GL(n,R)$, является следующее утверждение (которое было использовано также и при доказательстве нормальности подгруппы элементарных матриц в симплектической группе $Sp(2l,R)$ при $l\geq 2$, см. [4]).

Пусть $a=(a_1,\dots,a_n)$ – унимодулярная строка с коэффициентами из R, т.е. найдутся такие $b_1,\dots,b_n\in R$, что $a_1b_1+\dots+a_nb_n=1$. Тогда каждое решение $x=(x_1,\dots,x_n)^t$ однородного линейного уравнения

$$a_1x_1+\dots+a_nx_n=0 \tag{1}$$

является линейной комбинацией решений вида $a_je_i-a_ie_j$ (как обычно, e_i – столбец единичной матрицы с номером i). Точнее, имеет место формула

$$x=\sum (b_jx_i-b_ix_j)(a_je_i-a_ie_j),\ i<j. \tag{2}$$

(см. [5], §1, а также [2], §7).

В частности, это означает, что при $n \geq 3$ любое решение уравнения (I) представляется в виде суммы решений, каждое из которых имеет хотя бы одну нулевую координату. Это утверждение (но, разумеется, не формула (2)) переносится на случай почти коммутативных колец, т. е. колец, конечно порожденных как модулей над своим центром [6] (см. также [9], где рассматриваются кольца, алгебраичные над своим центром и удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям конечности). Далее, в связи с изучением группы Стейнберга в [7] было показано, что любое решение системы двух однородных линейных уравнений с унимодулярной (т.е. обратимой справа) матрицей коэффициентов представляется в виде суммы решений, в каждом из которых не больше трех ненулевых координат.

В настоящей заметке мы распространяем эти результаты (включая и явную формулу) на случай произвольного числа уравнений. Это представляет и некоторый самостоятельный интерес, но подлинной мотивировкой для автора явилось то, что этот вопрос естественно возникает при изучении корневых элементов особых групп Шевалле и, в частности, при любой попытке доказательства нормальности в группе Шевалле ее элементарной подгруппы.

Пусть вначале a - произвольная $m \times n$ матрица, $m < n$. Мы рассматриваем систему однородных линейных уравнений

$$ax = 0. \tag{3}$$

Положим $I = \{1, \ldots, n\}$. Как обычно, $|J|$ это мощность множества J. Если $J \subset I$, а $l \in I$, то через $p(J, l)$ обозначим число тех $j \in J$, которые строго меньше l. В частности, $p(j, l) = p(\{j\}, l)$ равно I, если $j < l$, и 0, если $j \geq l$. Для $H \subseteq I$, $|H| = m$, через $\Delta_H(a)$ обозначается минор матрицы a, составленный из столбцов с номерами из H. Аналогично, если b - $n \times m$ матрица, то через $\Delta^H(b)$ обозначается минор матрицы b, составленный из строк с номерами из H.

Лемма I. Для любого подмножества $J \subset I$ такого, что $|J| = m+1$, столбец $x = x^J$, где

$$x_j = \begin{cases} (-1)^{\rho(J,j)}\Delta_{J\setminus\{j\}}(a), \text{ если } j\in J, \\ 0, \text{ если } j\notin J, \end{cases}$$

является решением системы линейных уравнений (3).

Доказательство. Так как столбцы матрицы a с номерами, не принадлежащими J, никак не влияют на то, будет x решением или нет, мы можем сразу считать, что $n=m+1$ и $J=I$. Подстановка x в i-е уравнение дает нам

$$\sum_{j\in I}(-1)^{j-1}a_{ij}\Delta_{I\setminus\{j\}}(a),$$

что представляет собой разложение по первой строке определителя, получающегося из a приписыванием сверху строки, равной i-й строке a. Но такой определитель равен нулю.

Таким образом, для каждой матрицы a размера $m\times n$ мы построили C_n^{m+1} стандартных решений системы (3), в каждом из которых не больше $m+1$ ненулевого элемента. Теперь мы хотим доказать, что если матрица a унимодулярна, то любое решение представляется в виде линейной комбинации этих стандартных решений, и найти коэффициенты в этом представлении. Для этого нам понадобится еще простая лемма, которая также справедлива для не обязательно унимодулярной матрицы.

Лемма 2. Пусть $L\subseteq I$, $|L|=m-1$. Тогда для любого решения $x=(x_i)$ системы (3) имеет место равенство

$$\sum_{i\notin L}(-1)^{\rho(L,i)}x_i\Delta_{L\cup\{i\}}(a)=0.$$

Доказательство. Нам достаточно доказать, что строка c длины n с координатами

$$c_j = \begin{cases} (-1)^{\rho(L,j)}\Delta_{L\cup\{j\}}(a), \text{ если } j\notin L, \\ 0, \text{ если } j\in L \end{cases}$$

является линейной комбинацией строк матрицы a. Но это очевидно, в качестве h-го коэффициента этой линейной комбинации достаточно взять минор матрицы a, стоящий на пересечении столбцов с номерами из L и всех строк, кроме строки с номером h, со знаком $(-1)^{h-1}$.

Теорема. Пусть a - обратимая справа матрица размера $m\times n$, $m<n$, над коммутативным кольцом R, b - обратная к ней справа матрица. Тогда любое решение x системы (3) представляется в виде линейной комбинации решений x^J, построенных в лемме I. А именно,

$$x = \sum c^J x^J \quad (|J| = m+1), \tag{4}$$

где c^J - минор $n\times(m+1)$-матрицы (x, b), составленный из строк с номерами, принадлежащими J.

Доказательство. Мы хотим доказать, что l-я компонента y_l суммы в правой части формулы (4) равна x_l. Вычислим ее. По определению

$$c^J = \sum_{j\in J} (-1)^{p(J,j)} x_j \Delta^{J\setminus\{j\}}(b).$$

Таким образом,

$$y_l = \sum\Big(\sum (-1)^{p(J,j)} x_j \Delta^{J\setminus\{j\}}(b)\Big)(-1)^{p(J,l)} \Delta_{J\setminus\{l\}}(a), \tag{5}$$

где внешняя сумма берется по всем подмножествам $J \subseteq I$ таким, что $|J| = m+1$ и $l\in J$, а внутренняя сумма по всем $j\in J$. Разобьем эту сумму на два слагаемых y_l' и y_l'' соответственно тому, равны ли j и l или нет. Ясно, что

$$y_l' = x_l \sum \Delta_H(a)\Delta^H(b) \quad (|H| = m,\ l\notin H).$$

Так как $\det(a,b)=1$, то по теореме Бине-Коши получаем, что $y_l' = x_l(1-z)$, где

$$z = \sum \Delta_H(a)\Delta^H(b) \quad (|H|\ m,\ l\in H).$$

Перейдем теперь к вычислению y_l''. По определению y_l'' задается той же формулой (5), что и y_l, но теперь суммирование производится не по всем $j\in J$, а только по $j\neq l$. Изменим в формуле (5) порядок суммирования. Именно, пусть $J = L\cup\{j, l\}$, где $|L| = m-1$. Тогда ясно, что $p(J,j) = p(L,j) + p(l,j)$ и $p(J,l) = p(L,l) + p(j,l)$. Поскольку, кроме того, $p(l,j) + p(j,l) = 1$, то

$$y_l'' = \sum\Big(\sum (-1)^{p(L,j)+1} x_j \Delta_{L\cup\{j\}}(a)\Big)\cdot(-1)^{p(L,j)} \Delta^{L\cup\{l\}}(b),$$

где внешняя сумма берется по всем $L \subseteq I$ таким, что $|L| = m-1$

и $l \notin L$, а внутренняя сумма - по всем $i \notin L$, $j \neq l$. Теперь по лемме 2 внутренняя сумма равна $(-1)^{r(q,l)} x_l \Delta_{L \cup \{l\}}(a)$ и, окончательно, $y_l^q = x_l^q$. Тем самым действительно $y_l = x_l$, что и доказывает теорему.

Совершенно ясно, что для колец главных идеалов (и, в более общем виде, для колец Безу) случай системы уравнений $ax=0$ с произвольной матрицей коэффициентов a сразу сводится к случаю систем с унимодулярной матрицей. Лишь чуть сложнее проводится аналогичная редукция для дедекиндовых (и, в более общем виде, прюферовых) колец. Вообще, по-видимому, среди коммутативных колец именно прюферовы кольца являются тем классом, для которого только и естественно рассматривать системы общего вида. Например, именно для прюферовых колец имеются простые условия совместности неоднородной системы [10].

<u>Следствие</u>. Пусть a - обратимая справа матрица размера $m \times n$, $m+1 < n$ над коммутативным кольцом. Тогда любое решение системы (3) представляется в виде суммы решений, в каждом из которых есть хотя бы одна нулевая координата.

Ясно, что при помощи тех же соображений, что в [6], это следствие может быть перенесено и на случай почти коммутативных колец. С другой стороны, оно справедливо не для любого ассоциативного кольца. В самом деле, доказательство следствия I.4 из [5] показывает, что если для кольца Λ выполнено заключение этого следствия, то, в частности, $E(n,\Lambda) \trianglelefteq GL(n,\Lambda)$ для всех $n \geq 3$. Однако не всегда группа элементарных матриц является нормальным делителем в полной линейной группе. Первым примером кольца, для которого это не так, был известный пример В.Н.Герасимова: пусть x_{ij}, y_{ij}, $1 \leq i,j \leq n$, - свободные переменные, $x=(x_{ij})$, $y=(y_{ij})$, Λ - фактор-кольцо свободной ассоциативной алгебры $K\langle x_{ij}, y_{ij}\rangle$ с $2n^2$ образующим над полем K по соотношениям, которые записываются в матричной форме как $xy=yx=e$.

В работах [I], [2] отмечена та особая роль, которую играют в линейной алгебре и теории линейных групп вполне слабо конечные кольца, т.е. кольца такие, что для них самих и всех

их фактор-колец односторонняя обратимость матриц всех порядков совпадает с двусторонней обратимостью (см. [3], [8]).
В связи с этим напрашивается следующее предположение.

Пусть Λ - ассоциативное кольцо с единицей. Для того, чтобы заключение следствия выполнялось для всех m и n, $m+1<n$, необходимо и достаточно, чтобы кольцо Λ было вполне слабо конечным.

Доказательство этой гипотезы явилось бы существенным продвижением в доказательстве более трудной гипотезы 2 из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боревич З.И., Вавилов Н.А. Об определении сетевой подгруппы // Зап.науч.семинаров ЛОМИ.-1983.-Т.132.-С.26-33.
2. Боревич З.И., Вавилов Н.А. Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом // Тр.Мат.ин-та АН СССР.-1984.-Т.165.-С.24-42.
3. Кон П. Свободные кольца и их связи.-М.:Мир.-1975.-442 с.
4. Копейко В.И. Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов // Мат.сб..-1978.-Т.106, № 1.-С.94-107.
5. Суслин А.А.О структуре специальной линейной группы над кольцами многочленов // Изв.АН СССР. Сер. мат.-1977.-Т. 41, № 2.-С.235-252.
6. Туленбаев М.С. Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка // Зап.науч.семинаров ЛОМИ.-1979.-Т.86.-С.162-169.
7. Туленбаев М.С. Группа Стейнберга кольца многочленов // Мат.сб.-1982.-Т.117, № 1.-С.131-144.
8. Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории, Т.2.-М.:Мир.-1979.-464 с.
9. Хлебутин С.Г. Достаточные условия нормальности подгруппы элементарных матриц // Успехи мат.наук.-1984.-Т.39, № 3.-С.245-246.
10. Camion P., Levy L.S., Mann H.B. Linear equations over a commutative ring // J.Algebra. - 1971. - Vol. 18, N 3.-P. 432-446.

ЛГУ им.А.А.Жданова

Поступила 27.II.84.

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 512.563.6

Н.Д.Волков

ПЕРЕХОД ОТ РЕЛЯЦИОННОЙ АЛГЕБРЫ К АЛГЕБРЕ ХАЛМОША

I. Данная статья является продолжением работ [2] и [3]. В [2] по алгебре Халмоша строится реляционная алгебра, в [3] показывается, что каждая булевая алгебра $P(J)$ реляционной алгебры может быть наделена структурой алгебры Халмоша. В настоящей работе рассматривается построение по реляционной алгебре алгебры Халмоша и формулируется теорема об эквивалентности категорий алгебр Халмоша и реляционных алгебр. Учитывая ограничение статьи в объеме, не приводятся доказательства предложения I, теоремы 3, а также определения алгебр Халмоша и реляционных алгебр. Необходимые сведения можно найти в [I], [2], [4] и [5]. В статье сохраняются введенные в [2] и [3] обозначения.

2. Допустим, что задана схема алгебр Халмоша $n : I \to \Gamma$, и пусть K - категория - схема реляционных алгебр, определяемая схемой $n : I \to \Gamma$. Возьмем произвольную реляционную алгебру в схеме K и построим по ней алгебру Халмоша H в схеме $n : I \to \Gamma$.

Если J_1 - подмножество в J_2, то исходя из вложения $\varepsilon_{J_1}^{J_2} : J_1 \to J_2$ возьмем мономорфизм

$$(\varepsilon_{J_1}^{J_2})_* : P(J_1) \to P(J_2).$$

Этим все булевы алгебры $P(J)$ организованы в прямой спектр булевых алгебр. Через H обозначим соответствующий прямой предел. Это булева алгебра, и для каждого J она содержит подалгебру $H(J)$ с изоморфизмом $\mu(J): P(J) \to H(J)$.

Мы должны наделить H структурой алгебры Халмоша. С этой целью нужно определить в H квантор существования $\exists^J$ для каждого $J \subset I$ и осуществить представление в качестве полугруппы эндоморфизмов булевой алгебры H полугруппы S всех преобразований множества I, сохраняющих сорта переменных. На H нужно еще определить равенство. Нужно также показать, что в H выполняются все аксиомы алгебры Халмоша.

Займемся определением в H квантора $\exists^J$ для $J \subset I$. Заметим, что изоморфизм $\mu(J): P(J) \to H(J)$ для каждого конечного $J \subset I$ переносит на каждую булеву алгебру $H(J)$ структуру алгебры Халмоша, определенную на $P(J)$ в соответствии с [3]. Итак, каждая $H(J)$ - алгебра Халмоша в схеме $n_J: J \to \Gamma$, где n_J - ограничение отображения $n: I \to \Gamma$ на J.

<u>Предложение I</u>. Пусть $J \subset J'$, $J \subset J''$ и $h \in H(J')$, $h \in H(J'')$, т.е. для некоторых $a \in P(J')$, $b \in P(J'')$ $h = \mu(J')a = \mu(J'')b$. Тогда

$$\mu(J')\exists^J_{J'} a = \mu(J'')\exists^J_{J''} b.$$

Определим теперь квантор существования $\exists^J$ для каждого конечного $J \subset I$. Пусть $h \in H$. Берем J_1 так, чтобы $J \subset J_1$ и $h \in H(J_1)$. Тогда $\exists^J h = \mu(J_1)\exists^J_{J_1} a$, где $a \in P(J_1)$ и $h = \mu(J_1)a$. Предложение I показывает корректность введенного определения.

<u>Предложение 2</u>. Пусть $h \in H(J_1)$. Тогда для произвольного конечного $J \subset I$

$$\exists^J h = \exists^{J \cap J_1} h.$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим различные случаи. Пусть $J_1 \subset J$. Так как $h \in H(J_1)$, то существует $a \in P(J_1)$ такой, что $\mu(J_1)a = h$. Понятно, что $h \in H(J)$, т.е. для $b = (\varepsilon^J_{J_1})_* a$ $\mu(J)b = h$. Получаем

$$(\varepsilon^J_{J_1})_* (\varepsilon^J_{J_1})^* b = (\varepsilon^J_{J_1})_* (\varepsilon^J_{J_1})^* (\varepsilon^J_{J_1})_* a = (\varepsilon^J_{J_1})_* a,$$

т.е. $(\varepsilon^{J}_{J_1})_*(\varepsilon^{J}_{J_1})^* b = b$, откуда $\mu(J)(\varepsilon^{J}_{J_1})_*(\varepsilon^{J}_{J_1})^* b = \mu(J_1) b$.

Значит $\exists^{J_0} h = h$, где $J_0 = J \setminus J_1$. Воспользовавшись тем, что $H(J)$ алгебра Халмоша, получим

$$\exists^{J\cap J_1} h = \exists^{J_1} h = \exists^{J_1}(\exists^{J_0} h) = \exists^{J_1 \cup J_0} h = \exists^{J} h.$$

Ясно, что при $J \subset J_1$ предложение верно. Пусть далее $J \cap J_1 = J_0$, $J_0 \neq J_1$, $J_0 \neq J$ и $J_0 \neq \varnothing$. По определению квантора

$$\exists^{J} h = \mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_2})_*(\varepsilon^{J'}_{J_2})^* b,$$

где $J' = J \cup J_1$, $J_2 = J' \setminus J$, $b = (\varepsilon^{J'}_{J_1})_* a \in P(J_1)$. Далее

$$\exists^{J\cap J_1} h = \exists^{J_0} h = \mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_3})_*(\varepsilon^{J'}_{J_3})^* b, \quad J_3 = J' \setminus J_0.$$

Так как $P(J')$ - алгебра Халмоша, получаем

$$\mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_3})_*(\varepsilon^{J'}_{J_3})^* b = \mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_3})_*(\varepsilon^{J'}_{J_3})^*(\varepsilon^{J'}_{J_1})_* a =$$

$$= \mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_3})_*(\varepsilon^{J'}_{J_3})^*(\varepsilon^{J'}_{J_1})_*(\varepsilon^{J'}_{J_1})^*(\varepsilon^{J'}_{J_1})_* a =$$

$$= \mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_3\cap J_1})_*(\varepsilon^{J'}_{J_3\cap J_1})^* b.$$

Понятно, что $J_3 \cap J_1 = J_2$. Тогда окончательно

$$\exists^{J\cap J_1} h = \mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_2})_*(\varepsilon^{J'}_{J_2})^* b = \exists^{J} h.$$

Наконец, пусть $J_0 = \varnothing$. Тогда

$$\exists^{J\cap J_1} h = \exists^{\varnothing} h = h = \mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_1})_* a = \mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_1})_*(\varepsilon^{J'}_{J_1})^*(\varepsilon^{J'}_{J_1})_* a$$

(здесь $J' = J \cup J_1$), и так как

$$\mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_1})_* a = h \quad , \text{ а } \mu(J')(\varepsilon^{J'}_{J_1})_*(\varepsilon^{J'}_{J_1})^*(\varepsilon^{J'}_{J_1})_* a = \exists^{J} h,$$

то

$$\exists^{J} h = \exists^{J\cap J_1} h = \exists^{\varnothing} h = h.$$

Предложение доказано.

Определим теперь выражение $\exists^{J} h$ в том случае, когда J - бесконечное множество. Рассмотрим некоторое J_1 такое, что $h \in H(J_1)$. Полагаем $\exists^{J} h = \exists^{J\cap J_1} h$.

<u>Предложение 3</u>. От выбора J_1 выражение $\exists^{J} h$ для бесконечного J не зависит.

<u>Доказательство</u>. Пусть $h \in H(J_1')$, и пусть сперва $J_1 \subset J_1'$. Тогда $\exists^{J} h = \exists^{J\cap J_1} h$ и, с другой стороны $\exists^{J} h = \exists^{J\cap J_1'} h$. Обозначим $J_1 \cap J = J_2$, $J \cap J_1' = J_3$. Ясно, что $J_2 \subset J_3$ и

$J_3 \cap J_1 = J_2$. Получаем $\exists^J h = \exists^{J \cap J_1'} h = \exists^{J_3} h = \exists^{J_3 \cap J_1} h = \exists^{J_2} h = \exists^{J \cap J_1} h$. Здесь мы использовали предложение 2. Случай $J_1 \supset J_1'$ рассматривается таким же образом.

Разберем ситуацию $J_1 \not\subset J_1'$ и $J_1' \not\subset J_1$. Пусть $J_1 \cap J = J_2$, $J_1' \cap J = J_3$. Тогда, т.к. $h \in H(J_1)$, по определению $\exists^J h = \exists^{J \cap J_1} h = \exists^{J_3} h$, а с другой стороны, $\exists^J h = \exists^{J \cap J_1'} h = \exists^{J_2} h$. Но используя предложение 2, получаем для $J_0 = J_1 \cap J_1'$

$$\exists^{J \cap J_1} h = \exists^{J_2} h = \exists^{J_2 \cap J_1'} h = \exists^{J \cap J_0} h ;$$

$$\exists^{J \cap J_1'} h = \exists^{J_3} h = \exists^{J_3 \cap J_1} h = \exists^{J \cap J_0} h .$$

Все случаи разобраны. Предложение доказано.

Ясно, что отображение $\exists^J : H \to H$, определенное выше, действительно квантор существования.

3. Пусть, далее, s - преобразование множества I , согласованное с отображением $n: I \to \Gamma$. Определим действие s в H . Возьмем произвольный $h \in H$, и пусть $h \in H(J_1)$, т.е. существует $a \in P(J_1)$ такой, что $h = \mu(J_1) a$. Подберем конечное J_2 , содержащее J_1 и sJ_2 . Пусть s' - элемент в S_{J_2} , действующий как s на элементы из J_1 и как единица вне J_1 . Полагаем $sh = \mu(J_2) s'_* (\varepsilon_{J_1}^{J_2})_* a$. Нужно показать, что в этом определении sh не зависит от выбора J_2 и J_1 .

Предложение 4. От выбора J_2 при фиксированном J_1 выражение sh не зависит.

Доказательство. Пусть J_2' - другое конечное множество такое, что J_2' содержит J_1 и sJ_2 . Рассмотрим вначале случай $J_2 \subset J_2'$. Так как $h \in H(J_1)$, то существует $a \in P(J_1)$ для которого $\mu(J_1) a = h$. Положим

$$s_{(J_2)} h = \mu(J_2) s'_* (\varepsilon_{J_1}^{J_2})_* a , \quad s_{(J_2')} h = \mu(J_2') s''_* (\varepsilon_{J_1}^{J_2'})_* a ;$$

здесь $s' \in S_{J_2}$ и действует как s на J_1 и как единица вне J_1 , $s'' \in S_{J_2'}$ также действует как s на J_1 и как единица вне J_1 . Нужно показать, что $s_{(J_2)} h = s_{(J_2')} h$. Получаем

$$s_{(J_2')} h = \mu(J_2') s''_* (\varepsilon_{J_1}^{J_2'})_* a = \mu(J_2') s''_* (\varepsilon_{J_2}^{J_2'} \varepsilon_{J_1}^{J_2})_* a = \mu(J_2') s''_* (\varepsilon_{J_2}^{J_2'})_* (\varepsilon_{J_1}^{J_2})_* a .$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd} J_2' \arrow[r, "s''"] & J_2' \\ J_2 \arrow[u, "\varepsilon_{J_2}^{J_2'}"] \arrow[r, "s'"] & J_2 \arrow[u, "\varepsilon_{J_2}^{J_2'}"'] \end{tikzcd}$$

Запишем условие коммутативности. Имеем $s''\varepsilon_{J_2}^{J_2'}(\alpha)=\varepsilon_{J_2}^{J_2'}s'(\alpha)$ для $\alpha\in J_2$. Тогда

$$\mu(J_2')s''_*(\varepsilon_{J_2}^{J_2'})_*(\varepsilon_{J_1}^{J_2})_*a=\mu(J_2')(s''\varepsilon_{J_2}^{J_2'})_*(\varepsilon_{J_1}^{J_2})a=$$
$$=\mu(J_2')(\varepsilon_{J_2}^{J_2'}s')_*(\varepsilon_{J_1}^{J_2})_*a=\mu(J_2')(\varepsilon_{J_2}^{J_2'})_*s'_*(\varepsilon_{J_1}^{J_2})_*a,$$

что и дает требуемое. Полагая в рассмотренном доказательстве J_2' равным J_2 и J_2 равным J_2', получаем нужную независимость в случае $J_2\supset J_2'$.

Рассмотрим случай $J_2\cap J_2'=J_0$, $J_0\neq J_2$ и $J_0\neq J_2'$. Воспользуемся предыдущим доказательством. Получаем

$$\mu(J_2)s'_*(\varepsilon_{J_1}^{J_2})_*a=\mu(J'')s_{0*}(\varepsilon_{J_1}^{J''})_*a.$$

здесь $J''=J_2'\cup J_2$, $s_0\in S_{J''}$ и s_0 действует как s на J_1 и как единица вне J_1,

$$\mu(J_2')s''_*(\varepsilon_{J_1}^{J_2'})_*a=\mu(J'')s_{0*}(\varepsilon_{J_1}^{J''})_*a.$$

Отсюда имеем

$$\mu(J_2)s'_*(\varepsilon_{J_1}^{J_2})_*a=\mu(J'')s_{0*}(\varepsilon_{J_1}^{J''})_*a=\mu(J_2')s''_*(\varepsilon_{J_1}^{J_2'})_*a,$$

что и завершает доказательство предложения.

Предложение 5. От выбора J_1 выражение sh не зависит.

Доказательство. Пусть $h\in H(J_1)$, т.е. для некоторого $a\in P(J_1)$ имеем $h=\mu(J_1)a$, и пусть далее $h\in H(J_1')$, т.е. для подходящего $b\in P(J_1')$ имеет место $\mu(J_1')b=h$.

Рассмотрим случай $J_1\subset J_1'$. Тогда $b=(\varepsilon_{J_1}^{J_1'})_*a$. Воспользуемся результатом предыдущего предложения. Возьмем конечный J_2 такой, что $J_1\subset J_2$, $sJ_1\subset J_2$ и $J_1'\subset J_2$, $sJ_1'\subset J_2$.

Тогда $S_{(J_1')}h=\mu(J_2)s''_*(\varepsilon_{J_1'}^{J_2})_*b=\mu(J_2)s''_*(\varepsilon_{J_1'}^{J_2})_*(\varepsilon_{J_1}^{J_1'})_*a=$

$$=\mu(J_2)s''_*(\varepsilon_{J_1'}^{J_2}\varepsilon_{J_1}^{J_1'})_*a=\mu(J_2)s''_*(\varepsilon_{J_1}^{J_2})_*a.$$

Здесь $s''\in S_{J_2}$ и s'' действует на J_1' как s и как единица вне J_1'

С другой стороны, $s_{(J_2)}h = \mu(J_2)s'_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a$, где $s' \in S_{J_2}$, но s' действует как s на J_1 и как единица вне J_1 . Покажем, что

$$s''_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a = s'_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a$$

Действительно, $s'_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a = s''_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})^*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a$ и $s'_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a = s'_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})^*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a$. Отсюда, т.к. s' и s'' одинаково действуют на J_1 , получаем $s'_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a = s''_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a$, т.е. доказательство независимости sh от выбора J_1 для рассматриваемого случая закончено.

Случай $J_1 \supset J_1'$ сводится, как и ранее, к уже рассмотренному.

Разберем случай $J_1 \not\subset J_1'$, $J_1' \not\subset J_1$. По условию $h = \mu(J_1)a$ и $h = \mu(J_1')b$ для подходящих $a \in P(J_1)$, $b \in P(J_1')$. Возьмем конечный $J_2 = J_1 \cup J_1' \cup sJ_1 \cup sJ_1'$. Так как ранее мы доказали независимость sh от J_2 , получаем по определению

$$s_{(J_1)}h = \mu(J_2)s''_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a , \quad s_{(J_2)}h = \mu(J_2)s''_*(\varepsilon^{J_2}_{J_1'})_* b .$$

Для того, чтобы показать, что $s_{(J_1)}h = s_{(J_1')}h$, достаточно проверить, что $(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a = (\varepsilon^{J_2}_{J_1'})_* b$. Имеем $h = \mu(J_1)a = \mu(J_2)(\varepsilon^{J_2}_{J_1})a$ и $h = \mu(J_1')b = \mu(J_2)(\varepsilon^{J_2}_{J_1'})_* b$, что следует из определения H . Отсюда

$$\mu(J_2)(\varepsilon^{J_2}_{J_1'})_* b = \mu(J_2)(\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a ,$$

что влечет $(\varepsilon^{J_2}_{J_1'})_* b = (\varepsilon^{J_2}_{J_1})_* a$. В заключение заметим, что s'' действует как s на $J_1 \cup J_1'$, как единица на $J_2 \setminus (J_1 \cup J_1')$ и $s'' \in S_{J_2}$. Предложение доказано.

Легко показать. что s является эндоморфизмом булевой алгебры H ; ведь s мы определяем через эндоморфизм s'_* подходящей алгебры $P(J_2)$. Легко понять также, что единица полугруппы S действует на H тривиально.

4. Определим в H равенство. Для произвольного ко[illegible] $J \subset I$ такого, что $\alpha_1, \alpha_2 \in J$ полагаем

$$d(\alpha_1, \alpha_2) = \mu(J)(s^{\alpha_2}_{\alpha_1})^* 1_{P(J)} .$$

Здесь $s_{\alpha_1}^{\alpha_2} \in S_J$, $s_{\alpha_1}^{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_2$ и $s_{\alpha_1}^{\alpha_2}(\alpha) = 1_{P(J)}$ для остальных $\alpha \in J$.

<u>Предложение 6</u>. От выбора J выражение $d(\alpha_1, \alpha_2)$ не зависит.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in J'$ и $J' \neq J$. Нужно показать, что

$$\mu(J)(s_{\alpha_1}^{\alpha_2})^* 1_{P(J)} = \mu(J')(s_{\alpha_1}'^{\alpha_2})^* 1_{P(J')} ,$$

где $s_{\alpha_1}'^{\alpha_2} \in S_{J'}$ и $s_{\alpha_1}'^{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_2$, а на остальных элементах из J' $s_{\alpha_1}'^{\alpha_2}$ действует тождественно.

Обозначим $J_0 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $h_0 = \mu(J_0)(s_{0\alpha_1}^{\alpha_2})^* 1_{P(J_0)}$, причем $s_{0\alpha_1}^{\alpha_2}(\alpha_1) = \alpha_2$, $s_{0\alpha_1}^{\alpha_2}(\alpha_2) = \alpha_2$. Покажем, что

$$\mu(J)(s_{\alpha_1}^{\alpha_2})^* 1_{P(J)} = \mu(J')(s_{\alpha_1}'^{\alpha_2})^* 1_{P(J')} = h_0 .$$

Рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{s_{\alpha_1}^{\alpha_2}} & J \\ {\scriptstyle \varepsilon_{J_0}^{J}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon_{J_0}^{J}} \\ J_0 & \xrightarrow[s_{0\alpha_1}^{\alpha_2}]{} & J_0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} J' & \xrightarrow{s_{\alpha_1}'^{\alpha_2}} & J' \\ {\scriptstyle \varepsilon_{J_0}^{J'}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \varepsilon_{J_0}^{J'}} \\ J_0 & \xrightarrow[s_{0\alpha_1}^{\alpha_2}]{} & J_0 \end{array}$$

Рассмотрим еще две диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P(J) & \xleftarrow{(s_{\alpha_1}^{\alpha_2})^*} & P(J) \\ {\scriptstyle (\varepsilon_{J_0}^{J})_*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (\varepsilon_{J_0}^{J})_*} \\ P(J_0) & \xleftarrow[(s_{0\alpha_1}^{\alpha_2})^*]{} & P(J_0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P(J') & \xleftarrow{(s_{\alpha_1}'^{\alpha_2})^*} & P(J') \\ {\scriptstyle (\varepsilon_{J_0}^{J'})_*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle (\varepsilon_{J_0}^{J'})_*} \\ P(J_0) & \xleftarrow[(s_{0\alpha_1}^{\alpha_2})^*]{} & P(J_0) \end{array}$$

В [3] доказано, что эти диаграммы коммутативны. Имеем

$$\mu(J)(s_{\alpha_1}^{\alpha_2})^* 1_{P(J)} = \mu(J)(s_{\alpha_1}^{\alpha_2})^* (\varepsilon_{J_0}^{J})_* 1_{P(J_0)} =$$

$$= \mu(J)(\varepsilon_{J_0}^{J})_* (s_{0\alpha_1}^{\alpha_2})^* 1_{P(J_0)} = h_0 .$$

$$\mu(J')(s_{\alpha_1}'^{\alpha_2})^* 1_{P(J')} = \mu(J')(s_{\alpha_1}'^{\alpha_2})^* (\varepsilon_{J_0}^{J'})_* 1_{P(J_0)} =$$

$$= \mu(J')(\varepsilon_{J_0}^{J'})_* (s_{0\alpha_1}^{\alpha_2})^* 1_{P(J_0)} = h_0 .$$

Предложение доказано.

Заметим только, что α_1 и α_2 при определении равенства должны быть одного сорта. Легко понять, что аксиомы равенства в H выдерживаются, так как в каждой булевой алгебре $P(J)$ для любого конечного $J \subset I$ аксиомы равенства выполняются (см. [3]).

5. <u>Теорема I</u>. В H выполняются аксиомы алгебры Халмоша.

<u>Доказательство</u>. Доказательство следует из того, что каждая $H(J)$ для произвольного конечного $J \subset I$ является алгеброй Халмоша.

Этим закончено доказательство теоремы I.

Итак, по реляционной алгебре P в схеме K мы построили алгебру Халмоша H, которую обозначим $Pol\, P$, в схеме $n: I \to \Gamma$.

Пусть R – категория реляционных алгебр в схеме K. Пусть далее, $P \in Ob\, R$. Мы уже показали, что, применяя к P конструкцию Pol, мы получаем локально-конечную алгебру Халмоша. Если $P, P' \in Ob\, R$ и $\theta: P \to P'$ – гомоморфизм указанных алгебр, то, по определению, это значит, что для каждого конечного $J \subset I$ $\theta(J): P(J) \to P'(J)$ является гомоморфизмом соответствующих булевых алгебр, и если $\Psi: J_1 \to J_2$ – некоторый морфизм категории схемы K конечных J_1 и J_2, то коммутативны следующие диаграммы

$$\begin{array}{ccc} P(J_1) & \xrightarrow{\theta(J_1)} & P'(J_1) \\ {\scriptstyle P_*(\Psi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P'_*(\Psi)} \\ P(J_2) & \xrightarrow[\theta(J_2)]{} & P'(J_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P(J_1) & \xrightarrow{\theta(J_1)} & P'(J_1) \\ {\scriptstyle P^*(\Psi)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle P'^*(\Psi)} \\ P(J_2) & \xrightarrow[\theta(J_2)]{} & P'(J_2) \end{array}$$

Пусть $Pol\, P = H$, $Pol\, P' = H'$. Построим по θ отображение $\delta: H \to H'$. Берем $h \in H$ и пусть $h \in H(J)$. Полагаем

$$\delta h = \mu'(J)\theta(J)\mu^{-1}(J)h.$$

<u>Предложение 7</u>. Пусть для произвольного $h \in H$ $h \in H(J)$ и $h \in H(J')$. Тогда

$$\mu'(J)\theta(J)\mu^{-1}(J)h = \mu'(J')\theta(J')\mu^{-1}(J')h.$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим различные случаи.

Случай $J \subset J'$. Так как $h \in H(J)$ и $h \in H(J')$, найдутся $a \in P(J)$ и $b \in P(J')$, такие, что $h = \mu(J)a$ и $h = \mu(J')b$. Понятно, что в рассматриваемом случае $(\varepsilon_J^{J'})_* a = b$. Положим

$$\delta_{(J)}h = \mu'(J)\theta(J)\mu^{-1}(J)h \text{ и } \delta_{(J')}h = \mu'(J')\theta(J')\mu^{-1}(J')h.$$

Имеем

$$\mu'(J')\theta(J')\mu^{-1}(J')h = \mu'(J')\theta(J')\mu^{-1}(J')b = \mu'(J')\theta(J')b,$$

Аналогично, $\mu'(J)\theta(J)\mu^{-1}(J)h = \mu'(J)\theta(J)a$. Нужно показать, что $\delta_{(J)}h = \delta_{(J')}h$. Это будет сделано, если мы покажем, что

$$\mu'(J')\theta(J')b = \mu'(J)P'_*(\varepsilon_J^{J'})\theta(J)a.$$

Из того, что θ - гомоморфизм, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} P(J') \arrow[r, "\theta(J')"'] & P'(J') \\ P(J) \arrow[u, "P_*(\varepsilon_J^{J'})"] \arrow[r, "\theta(J)"] & P'(J) \arrow[u, "P'_*(\varepsilon_J^{J'})"'] \end{tikzcd}$$

Получаем, используя коммутативность указанной диаграммы

$$\mu'(J')\theta(J')b = \mu'(J')\theta(J')P_*(\varepsilon_J^{J'})a = \mu'(J')P'_*(\varepsilon_J^{J'})\theta(J)a.$$

Этим заканчивается рассмотрение указанного случая.

Случай $J \supset J'$ показывается аналогично, в доказательстве лишь меняются местами J и J'. Пусть $J \cap J' = J_0$, $J_0 \neq J$, $J_0 \neq J'$. Для подходящих $a \in P(J)$ и $b \in P(J')$ имеем $h = \mu(J)a$ и $h = \mu(J')b$. Тогда воспользовавшись уже проведенным доказательством и, полагая $J'' = J \cup J'$, запишем

$$\delta_{(J)}h = \mu'(J)\theta(J)a = \mu'(J'')\theta(J'')P_*(\varepsilon_J^{J''})_* a,$$

$$\delta_{(J')}h = \mu'(J')\theta(J')b = \mu'(J'')\theta(J'')P_*(\varepsilon_J^{J''})_* b.$$

По определению H $h = \mu(J'')P_*(\varepsilon_J^{J''})a$ и $h = \mu(J'')P_*(\varepsilon_{J'}^{J''})b$, что дает $P_*(\varepsilon_J^{J''})a = P_*(\varepsilon_{J'}^{J''})b$. Окончательно

$$\delta_{(J)}h = \mu'(J)\theta(J)a = \mu'(J'')\theta(J'')P_*(\varepsilon_J^{J''})a =$$

$$= \mu'(J'')\theta(J'')P_*(\varepsilon_{J'}^{J''})b = \mu'(J')\theta(J')b = \delta_{(J')}h.$$

Предложение доказано.

<u>Теорема 2</u>. Pol . есть функтор из категории реляционных алгебр в схеме K в категорию локально-конечных алгебр Халмоша в схеме $n: I \to \Gamma$.

<u>Доказательство</u>. Понятно, что $\delta: H \to H'$ - гомоморфизм булевых алгебр H и H'. Покажем, что для любого $J \subset I$, $h \in H$ и $s \in S_I$, $\delta \exists^J h = \exists^J \delta h$ и $\delta s h = s \delta h$. Если $h \in H(J_1)$ для подходящего J_1 , то покажем, прежде всего, что

$$\theta(J_1)P_*(\varepsilon_{J_2}^{J_1})P^*(\varepsilon_{J_2}^{J_1})a = P'_*(\varepsilon_{J_2}^{J_1})P'^*(\varepsilon_{J_2}^{J_1})\theta(J_1)a,$$

где $h = \mu(J_1)a$, $J_2 = J_1 \setminus J$ в случае конечного J , или

$J_2 = J_1 \setminus (J \cap J_1)$ в случае бесконечного J ; ранее уже J_1 подобрано нужным образом.

Так как θ - гомоморфизм реляционных алгебр, то имеем две коммутативные диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
P(J_1) \arrow[r, "\theta(J_1)"] & P'(J_1) \\
P(J_2) \arrow[u, "P^*(\varepsilon^{J_1}_{J_2})"] \arrow[r, "\theta(J_2)"'] & P'(J_2) \arrow[u, "P'_*(\varepsilon^{J_1}_{J_2})"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P(J_1) \arrow[r, "\theta(J_1)"] \arrow[d, "P^*(\varepsilon^{J_1}_{J_2})"'] & P'(J_1) \arrow[d, "P'^*(\varepsilon^{J_1}_{J_2})"] \\
P(J_2) \arrow[r, "\theta(J_2)"'] & P'(J_2)
\end{tikzcd}
$$

Используя коммутативность этих диаграмм, получаем

$$\theta(J_1) P_*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) P^*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) a = P'_*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) \theta(J_2) P^*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) a =$$
$$= P'_*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) P'^*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) \theta(J_1) a .$$

Теперь имеем

$$\delta \exists^J h = \mu'(J_1) \theta(J_1) \mu^{-1}(J_1) \exists^J h =$$
$$= \mu'(J_1) \theta(J_1) \mu^{-1}(J_1) \mu(J_1) P_*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) P^*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) a =$$
$$= \mu'(J_1) \theta(J_1) P_*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) P^*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) a = \mu'(J_1) P'_*(\varepsilon^{J_1}_{J_2}) \theta(J_1) a =$$
$$= \exists^J \mu'(J_1) \theta(J_1) a = \exists^J \mu'(J_1) \theta(J_1) \mu^{-1}(J_1) h = \exists^J \delta h .$$

Подобным образом показывается, что $\delta s h = s \delta h$, нужно лишь при этом использовать диаграмму первого вида. Итак, δ - гомоморфизм соответствующих алгебр Халмоша. Легко понять, что для тождественного $\theta : P \to P$ получаем тождественное отображение $\delta : H \to H$, $H = \mathrm{Pol}\, P$.

Пусть P, P', P'' - элементы $\mathfrak{R}$,и пусть имеются гомоморфизмы $\theta_1 : P \to P'$ и $\theta_2 : P' \to P''$. Построим $H = \mathrm{Pol}\, P$, $H' = \mathrm{Pol}\, P'$, $H'' = \mathrm{Pol}\, P''$ и возьмем по θ_1 и θ_2 $\delta_1 : H \to H'$ и $\delta_2 : H' \to H''$. Обозначим $\mathrm{Pol}\, \theta_1 = \delta_1$ и $\mathrm{Pol}\, \theta_2 = \delta_2$. Покажем, что

$$\mathrm{Pol}\, \theta_2 \, \mathrm{Pol}\, \theta_1 h = \mathrm{Pol}(\theta_1 \theta_2) h$$

для любого $h \in H$. Берем некоторый h , и пусть $h \in H(J_1)$.Имеем

$$\mathrm{Pol}\, \theta_2 \, \mathrm{Pol}\, \theta_1 h = \mu_2(J_1) \theta(J_1) \mu_1^{-1}(J_1) \mu_1(J_1) \theta_1(J_1) \mu^{-1}(J_1) h =$$
$$= \mu_2(J_1) \theta_2(J_1) \theta_1(J_1) \mu^{-1}(J_1) h = \mathrm{Pol}(\theta_2 \theta_1) h .$$

Здесь $\mu(J_1), \mu_1(J_1), \mu_2(J_1)$ - соответствующие изоморфизмы. Теорема доказана.

Легко показать далее, что каждый $h \in H$ имеет конечный носитель. Это обусловливается тем, что $h \in H(J)$ для некоторого конечного $J \subset I$.

Обозначим через R категорию реляционных алгебр в схеме K, а через $\mathcal{H}$ - категорию локально-конечных алгебр Халмоша в схеме и: $I \to \Gamma$. В [2] был построен функтор rel из $\mathcal{H}$ в R. Теперь нами построен функтор Pol из R в $\mathcal{H}$, и естественно поставить вопрос о взаимосвязи категорий R и $\mathcal{H}$.

Теорема 3. Категории R и $\mathcal{H}$ эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

I. Бениаминов Е.М. Алгебраическая структура реляционных моделей баз данных // Научно-техническая информация.- Сер.2.-1980.-№ 9.-С. 23-23.
2. Волков Н.Д. Алгебры Халмоша и реляционные алгебры // Латв.мат. ежегодник (в печати).
3. Волков Н.Д. Операции полиадических алгебр Халмоша в реляционных алгебрах // Латв.мат. ежегодник (в печати).
4. Плоткин Б.И. Алгебраическая модель базы данных-автомата // Латв. мат. ежегодник.-1983.-Вып.27.-С.216-232.
5. Halmos Algebraic logic.-N.Y.:Chelsea.-1962.-P.187.

РКИИГА им. Ленинского комсомола Поступила 29.II.85.

Detlovs, V., The tonality structure and melodic line, 67-87

A statistical analysis of tune is done with respect to degree. Melodies by Bach, Mozart, Beethoven, Schubert and Brahms, as well as Latvian folk tunes, are analysed (all in all, 65,600 intervals). Ascendings, descendings and curvature of melody are examined in neighbourhood of each degree. Existence of two scale zones (central zone VII, I, II and peripheral zone III, IV, V, VI), stated earlier in folk-music, is affirmed now by classical music.

Diskin, Z.B., Sintactic models of higher order set theories, 89-103

We suggest to consider models of higher order set theories as mathematical structures in the sense of Bourbaki, or, more formally, as syntactic models, i.e. structures the metatheory of which is formalized in some special way. In this formalism, the isomorphism of such structures is proved, and it is shown that truth or falsehood of CH in all these structures is predetermined by truth or, correspondingly, falsehood of CH in the metatheory.

Gvaramia, A.A., Karas'ov, G.A., Monoassociative n-nilpotent loops, 55-66.

The notion on n-nilpotency, that plays a significant role in the group theory, is generalised to the case of monoassociative loops, i.e. loops in which every element generates a subgroup. Some properties of the n-center of such a loop and of mutual n-commutants in a loop, as well as properties of n-nilpotent loops themselves, are studied.

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 512.548.7

А.А.Гварамия, Г.А.Карасев

МОНОАССОЦИАТИВНЫЕ n-НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ЛУПЫ

В теории групп заметную роль играют понятия n-абелевых и n-нильпотентных групп, введенные в[5] и [7]. Исследованию n-абелевых луп (с тождеством $(xy)^n = x^n y^n$) посвящена работа авторов [1]. В настоящей статье понятие n-нильпотентности и его основные свойства обобщаются на случай моноассоциативных луп, т.е. луп, в которых каждый элемент порождает подгруппу. Всюду далее под словом "лупа" понимается моноассоциативная лупа. Будем пользоватся следующими обозначениями:

$N(Q)$ - ядро лупы Q (т.е. пересечение левого, среднего и правого ядер);

$Z(Q)$ - центр лупы Q;

(x,y,z) - ассоциатор элементов x, y, z, определяемый равенством $xy\cdot z = (x\cdot yz)(x,y,z)$;

$[x,y]$ - коммутатор элементов x, y, определяемый равенством $xy = (yx)[x,y]$;

$\langle M\rangle$ - подлупа лупы Q, порожденная некоторым подмножеством $M\subset Q$; если, в частности, $M = \{a_1,\dots,a_k\}\cup M_1$, то используем запись $\langle M\rangle = \langle a_1,\dots,a_k, M_1\rangle$;

$x \overset{H}{\equiv} y$ - запись того факта, что x, y лежат в одном смежном классе по нормальной подлупе H;

$\vartheta(Q)$ - совокупность всех целых чисел n, для которых лупа Q n-нильпотентна.

§ I. n-центр лупы, его свойства

Определение I.I. Пусть n - некоторое фиксированное целое число. Совокупность $Z^*(Q;n) = \{a \in N(Q) : (\forall x \in Q)$

$[(xa)^n = x^n a^n \wedge (ax)^n = a^n x^n]\}$ назовем n-центроидом лупы Q.

Предложение I.I. n-центроид является подгруппой лупы Q.

Доказательство. Пусть $a, b \in Z^*(Q;n)$. Тогда $a \cdot b \in N(Q)$, $a^n \in N(Q)$ и для любого $x \in Q$ имеем

$(ab \cdot x)^n = (a \cdot bx)^n = a^n (bx)^n = a^n \cdot b^n x^n = a^n b^n \cdot x^n = (ab)^n \cdot x^n$

и аналогично $(x \cdot ab)^n = x^n (ab)^n$, т.е. $a \cdot b \in Z^*(Q;n)$. Далее для всех $a \in Z^*(Q;n)$ и $x \in Q$ получаем $x^n = (aa^{-1} \cdot x)^n = a^n (a^{-1}x)^n$, откуда

$a^{-n} x^n = a^{-n}[a^n (a^{-1}x)^n] = a^{-n} a^n \cdot (a^{-1}x)^n = (a^{-1}x)^n$ и $(a^{-1}x)^n = (a^{-1})^n x^n$.

Аналогично проверяется, что $(xa^{-1})^n = x^n (a^{-1})^n$ и, следовательно, $a^{-1} \in Z^*(Q;n)$. Таким образом, $Z^*(Q;n)$ - подгруппа ядра $N(Q)$.

Определение I.2. Подлупу $Z(Q;n)$ лупы Q, порожденную всеми ее нормальными подлупами, содержащимися в n-центроиде $Z^*(Q,n)$, назовем n-центром Q.

Для некоторых многообразий луп, например, луп Муфанг, понятия n-центроида и n-центра совпадают.

Лемма I.I. Пусть H - нормальная подгруппа лупы Q, содержащаяся в $N(Q)$. Тогда

$$(\forall x, y, z \in Q)(\forall h_1, h_2, h_3 \in H)(xh_1, yh_2, zh_3) = (x, y, z).$$

Доказательство. Покажем, например, что для любых элементов $x, y, z \in Q$ и любого $h \in H$ имеет место равенство

$$(x, yh, z) = (x, y, z) \qquad (I.I)$$

Т.к. H - нормальная подлупа в Q, то существуют элементы $h_1, h_2 \in H$ такие, что

$$yh = h_1 y \quad \text{и} \quad xh_1 = h_2 x. \qquad (I.2)$$

Поэтому $(x \cdot yh)z = (x \cdot h_1 y)z = (xh_1 \cdot y)z = (h_2 x \cdot y)z = (h_2 \cdot xy)z = h_2(xy \cdot z)$.

С другой стороны, $x(yh \cdot z) = x(h_1 y \cdot z) = x(h_1 \cdot yz) = xh_1 \cdot yz = h_2 x \cdot yz = h_2(x \cdot yz)$. Равенство $(x \cdot yh)z = x(yh \cdot z) \cdot (x, yh, z)$ превращается в $h_2(xy \cdot z) = h_2(x \cdot yz) \cdot (x, yh, z)$, из которого следует $xy \cdot z = (x \cdot yz) \cdot (x, yh, z)$, откуда $(x, yh, z) = (x, y, z)$.

Аналогично проверяется, что $(xh,y,z)=(x,y,z)$ и $(x,y,zh)=$ $=(x,y,z)$. Применяя последовательно полученные равенства и (I.I), убеждаемся в справедливости леммы I.I.

<u>Лемма I.2.</u> Если H - нормальная подгруппа лупы Q, содержащаяся в $N(Q)$, $x\in Q$, то $\langle x,H\rangle$ - подгруппа в Q.

<u>Доказательство</u>. Нетрудно видеть, что $H'=\langle x,H\rangle=\langle x\rangle H$. А тогда произвольные элементы $a,b,c\in H'$ можно представить в виде $a=x^k h_1$, $b=x^\ell h_2$, $c=x^m h_3$, где $h_1,h_2,h_3\in H$, k,ℓ,m - некоторые целые числа. В силу леммы I.I, $(a,b,c)=(x^k,x^\ell,x^m)=1$ и, следовательно, подлупа H' ассоциативна.

<u>Определение I.3.</u> n-коммутатором элементов x,y лупы Q назовем элемент $[x,y]_n$, определяемый равенством $(xy)^n=$ $=[x,y]_n(x^n\cdot y^n)$.

Легко видеть, что элемент z лупы Q тогда и только тогда принадлежит $Z^*(Q;n)$, когда $z\in N(Q)$ и для всех $x\in Q$ имеют место равенства $[z,x]_n=[x,z]_n=1$.

<u>Лемма I.3.</u> $(\forall x,y\in Q)(\forall z,u\in Z(Q;n))\ [xz,yu]_n=$ $=[x,y]_n$.

<u>Доказательство</u>. Покажем сначала, что

$$[x,yu]_n=[x,y]_n. \tag{I.3}$$

Действительно, $(x\cdot yu)^n=(xy\cdot u)^n=(xy)^n\cdot u^n$. С другой стороны, $x^n(yu)^n=x^n\cdot y^n u^n=x^n y^n\cdot u^n$. Тогда из равенства $(x\cdot yu)^n=[x,yu]_n[x^n(yu)^n]$ следует $(xy)^n\cdot u^n=[x,yu]_n[(x^ny^n)u^n]$ или $(xy)^nu^n=[[x,yu]_n\cdot(x^ny^n)$, откуда получаем $(xy)^n=$ $=[x,yu]_n\cdot(x^ny^n)$. Тем самым выполняется (I.3).

Теперь докажем равенство

$$[xz,y]_n=[x,y]_n \tag{I.4}$$

Т.к. $Z(Q;n)$ - нормальная подлупа в Q, то существует элемент $z_1\in Z(Q;n)$ такой, что $zy=yz_1$. Тогда

$$(xz\cdot y)^n=(x\cdot yz_1)^n=(xy\cdot z_1)^n=(xy)^n\cdot z_1^n.$$

С другой стороны,

$$(xz)^ny^n=(x^nz^n)\cdot y^n=x^n(z^ny^n)=x^n(zy)^n=x^n(yz_1)^n=$$
$$=x^n(y^nz_1^n)=(x^ny^n)z_1^n.$$

Теперь так же как и в предыдущем случае получаем $(xy)^nz_1^n=[xz,y]_n[(x^ny^n)z_1^n]$, откуда и следует (I.4).

Последовательно применяя (I.3) и (I.4), получаем требуемое.

Лемма I.4. Если x - произвольный элемент лупы Q, $Z = Z(Q;n)$, то подлупа $H = \langle x, Z \rangle$ является n-абелевой группой.

Действительно, т.к. Z - нормальная подлупа в Q, то в силу леммы I.2 H - группа. Для произвольных элементов $a = x^k z$, $b = x^\ell u$ из H, где $z, u \in Z$, k, ℓ - некоторые целые числа, в силу леммы I.3 имеем $[a,b]_n = [x^k z, x^\ell u]_n = [x^k, x^\ell]_n = 1$, т.е. $(ab)^n = a^n b^n$.

Используя лемму I.4, нетрудно обобщить свойства n-центров групп на случай моноассоциативных луп. Приведем некоторые из них.

Предложение I.2. Для любой лупы Q $Z(Q;n) = Z(Q;1-n)$, в частности, $Z(Q,2) = Z(Q;-1) = Z(Q)$.

Доказательство. Пусть $a \in Q$, $Z = Z(Q;n)$. В силу леммы I.4 подлупа $H = \langle a, Z \rangle$ является n-абелевой группой, а потому $(1-n)$-абелевой (см. [7], [2]). Следовательно, для любого $z \in Z$ имеем $(az)^{1-n} = a^{1-n} z^{1-n}$ и $(za)^{1-n} = z^{1-n} a^{1-n}$, откуда следует, что $z \in Z(Q;1-n)$. Таким образом, $Z(Q;n) \subset Z(Q;1-n)$ для любого целого n, а потому $Z(Q;1-n) \subset Z(Q;n)$, и предложение доказано.

Очевидно, что для любого n выполняется $Z(Q) \subset Z(Q;n)$.

Так же как и в случае групп ([2], [3]) доказываются следующие утверждения:

Предложение I.3. Если m, n - произвольные фиксированные целые числа и $P = Z(Q;m) \cap Z(Q;n)$, то

а) $P \subset Z(Q;mn)$;

б) $P \subset Z(Q;kn(1-n)+m)$ для любого целого k.

Следствие I.I. $Z(Q;3) \subset Z(Q;4)$ для любой лупы Q.

Предложение I.4. Для любого целого k выполняется включение $Z(Q;n) \subset Z(Q;kn(1-n))$.

В дальнейшем используем обозначение $\tilde{n} = n(1-n)$.

Предложение I.5. Если $n_1, \ldots, n_s, k_1, \ldots, k_s$ - произвольные целые числа, $n = k_1\tilde{n}_1 + k_2\tilde{n}_2 + \ldots + k_s\tilde{n}_s$, то

$$P = Z(Q;n_1) \cap Z(Q;n_2) \cap \ldots \cap Z(Q,n_s) \subset Z(Q;n).$$

Доказательство индукцией по числу s. При $s=1$ наше утверждение следует из предложения I.4. Допустим, что оно верно для числа $s-1$ и докажем для числа s. Пусть $m = k_1\tilde{n}_1 + k_2\tilde{n}_2 + \ldots + k_{s-1}\tilde{n}_{s-1}$. Тогда по предложению индукции $P \subset Z(Q;m) \cap Z(Q;n_s) = P_1$. В силу предложения I.3(б) имеем $P_1 \subset Z(Q;k_s\tilde{n}_s+m) = Z(Q,n)$, что и требовалось доказать.

Следствие I.2. Если $n_1, n_2, \ldots, n_s$ - произвольные целые числа, $d = НОД(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_s)$, то

$$Z(Q;n_1) \cap Z(Q;n_2) \cap \ldots \cap Z(Q;n_s) = Z(Q,d).$$

Следствие I.3. Если целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_s$ таковы, что $НОД(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \ldots, \tilde{n}_s) = 2$, то

$$Z(Q;n_1) \cap Z(Q;n_2) \cap \ldots \cap Z(Q;n_s) = Z(Q).$$

Следствие I.4. $Z(Q;n-1) \cap Z(Q;n) \cap Z(Q;n+1) = Z(Q)$ для любого целого числа n.

Предложение I.6. Если $a \in Z(Q,n)$, то следующие условия эквивалентны:

I) $a \in Z(Q;n+1)$;

2) $[a^n, x] = 1$ для любого $x \in Q$;

3) $[a,x]^n = 1$ для любого $x \in Q$;

4) $[a, x^n] = 1$ для любого $x \in Q$.

Доказательство. Пусть выполняется условие I) и $P = Z(Q;n) \cap Z(Q;n+1)$. Тогда P - нормальная подлупа лупы Q и $a \in P$. В силу леммы I.3, подлупа $H = \langle x, P \rangle$ нормальна в Q для любого $x \in Q$ и является одновременно n- и $n+1$-абелевой. Т.к. $a, x \in H$, то $[a^n, x] = 1$ [2], т.е. имеет место 2).

Пусть теперь выполняется 2) и $H = \langle x, Z(Q;n) \rangle$, $x \in Q$. Т.к. H является n-абелевой группой и $a, x \in H$, то

$$[a,x]^n = (a^{-1}x^{-1}ax)^n = a^{-n}(x^{-1}ax)^n = a^{-n}x^{-1}a^n x = [a^n, x] = 1,$$

а значит верно I).

Аналогично проверяется, что из 3) следует 4). Пусть, наконец, выполняется 4). Тогда для элементов a, x группы $H = \langle x, Z(Q;n) \rangle$ имеем

$$(ax)^{n+1} = (ax)^n ax = a^n x^n ax = a^n a x^n x = a \quad x^{n+1}$$

и аналогично $(xa)^{n+1} = x^{n+1}a^{n+1}$, следовательно, $a \in Z(Q; n+1)$, т.е. выполняется I), что и завершает доказательство.

Следствие I.5. Если в лупе Q нет нееденичных элементов, порядки которых делят n , то при $n \neq 0$ $Z(Q;n) \cap \cap Z(Q;n+1) = Z(Q)$.

Следствие I.6. Если $a \in Z(Q,3)$, то $a^3 \in Z(Q)$ и $(\forall x \in Q)[a,x^3] = [a,x]^3 = 1$.

Следствие I.7. Если в лупе Q нет элементов порядка 3, то $Z(Q;3) = Z(Q)$.

Следствие I.8. Если $a \in Z(Q;n)$, то $a^{n(1-n)} \in Z(Q)$ и $(\forall x \in Q)[a, x^{n(1-n)}] = [a,x]^{n(1-n)} = 1$.

Следствие I.9. Если в лупе Q нет элементов, порядки которых делят число $n(1-n)$ ($n \neq 0, 1$), то $Z(Q;n) = Z(Q)$

§ 2. Свойства взаимных n-коммутантов

Определение 2.I. Пусть H - нормальная подлупа лупы Q. Взаимным n-коммутантом H и Q назовем нормальную подлупу $[H,Q;n]$ лупы Q , порожденную всеми n-коммутаторами $[a,x]_n$, $[x,a]_n$, и ассоциаторами (a, y, z), (y, a, z), (y, z, a), где $a \in H$, $x,y,z \in Q$.

Аналогично определяется взаимный коммутант

$$[H,Q] = \langle [a,x], [x,a], (a,y,z), (y,a,z), (y,z,a) \mid a \in H, x,y,z \in Q \rangle.$$

Заметим, что $[H,Q;n] \subseteq H$ для произвольной нормальной подлупы H лупы Q и произвольного n .

Очевидно, что, если $x \overset{H}{\equiv} y$, то $x^n \overset{H}{\equiv} y^n$ и $axb = ayb$ для любых $a, b \in Q$.

Лемма 2.I. Если H , K - нормальные подлупы лупы Q , то $HK/K \subset Z^*(Q/K; n)$ тогда и только тогда, когда $[H,Q;n] \subset K$.

Действительно, если $a \in H$, $x, y \in Q$ и $HK/K \subset Z^*(Q/K;n)$ то $(aK \cdot xK)^n = (aK)^n \cdot (xK)^n$ или $(ax)^n K = (a^n x^n) K$, откуда $(ax)^n \overset{K}{\equiv} \overset{K}{\equiv} a^n x^n$ или $[a,x]_n \cdot a^n x^n \overset{K}{\equiv} a^n x^n$, а тогда $[a,x]_n \in K$. Аналогично доказывается, что $[x,a]_n$ и любой из ассоциаторов (a,x,y), (x,a,y), (x,y,a) также принадлежат K и, следовательно, $[H,Q;n]\subset K$. Таким же образом доказывается обратное утверждение.

Заметим, что в силу нормальности HK/K и Q/K , в формулировке леммы 2.1 $Z^*(Q/K;n)$ можно заменить на $Z(Q/K;n)$.

Следствие 2.1. Если H , K - нормальные подлупы лупы Q и $K\subset H$, то $H/K\subset Z(Q/K;n)$ тогда и только тогда, когда $[H,Q;n]\subset K$.

Лемма 2.2. Пусть целые числа $n,n_1,\dots,n_s$ таковы, что $Z(\bar{Q};n_1)\cap\dots\cap Z(\bar{Q};n_s)\subset Z(\bar{Q};n)$ для любой фактор-лупы $\bar{Q}$ лупы Q . Тогда для любой нормальной подлупы H лупы Q $[H,Q;n]\subset[H,Q;n_1]\dots[H,Q;n_s]$.

Доказательство. Пусть $K=[H,Q;n_1]\dots[H,Q;n_s]$. Т.к. K - нормальная подлупа лупы Q и $[H,Q;n_i]\subset K\subset H$ для $i=1,\dots,s$, то в силу следствия 2.1 $H/K\subset Z(Q/K;n_i)$ для всех $i=1,\dots,s$. А тогда $H/K\subset Z(Q/K;n_1)\cap\dots\cap Z(Q/K;n_s)\subset$ $\subset Z(Q/K;n_s)\subset Z(Q/K;n)$.

Следствие 2.2. Если целые числа m , n таковы, что $Z(\bar{Q};m)\subset Z(\bar{Q};n)$ для любой фактор-лупы $\bar{Q}$ лупы Q , то $[H,Q;n]\subset[H,Q;m]$ для любой нормальной подлупы H .

Используя лемму 2.2 и свойства n-центров из § 1, легко доказать следующие утверждения для нормальной подлупы H лупы Q :

Предложение 2.1. $[H,Q;n]\subset[H,Q]$ для любого целого n .

Предложение 2.2. $[H,Q;n]=[H,Q;1-n]$, в частности, $[H,Q;-1]=[H,Q;2]=[H,Q]$.

Предложение 2.3. а) $[H,Q;mn]\subset[H,Q;m]\cdot[H,Q;n]$; б) $[H,Q;n(1-n)+m]\subset[H,Q;m]\cdot[H,Q;n]$

Следствие 2.3. $[H,Q;4]\subset[H,Q;3]$.

Предложение 2.4. $[H,Q;\alpha n(1-n)]\subset[H,Q;n]$ для любых целых α , n .

Предложение 2.5. Если $n_1,\dots,n_s;\alpha_1,\dots,\alpha_s$ - произвольные целые числа, $n=\alpha_1\tilde{n}_1+\dots+\alpha_s\tilde{n}_s$, то $[H,Q;n]\subset$

$\subset [H,Q;n_1]\dots[H,Q;n_s]$.

Следствие 2.4. Если целые числа $n_1, \dots, n_s$ таковы, что $НОД(n_1,\dots,n_s)=2$, то $[H,Q;n_1]\dots[H,Q;n_s]=[H,Q]$

Следствие 2.5. $[H,Q]=[H,Q;n-1][H,Q;n][H,Q;n+1]$.

Определение 2.2. Пусть n - некоторое целое число. Лупу Q назовем $\mathcal{T}'(n)$-лупой, если любая ее фактор-лупа не содержит неединичных элементов, порядки которых делят n .

Предложение 2.6. Если Q - $\mathcal{T}'(n)$-лупа, то $[H,Q]=$ $=[H,Q;n][H,Q;n+1]$ при $n\neq 0$.

Следствие 2.6. Во всякой $\mathcal{T}'(3)$-лупе $[H,Q;3]=[H,Q]$.

Следствие 2.7. Во всякой $\mathcal{T}'(n(1-n))$-лупе $[H,Q;n]=[H,Q]$, если $n\neq 0,1$.

Докажем, например, предложение 2.6. Пусть $K=[H,Q;n]\cdot$ $\cdot[H,Q;n+1]$. Из предложения 2.I следует, что $K\subset[H,Q]$. С другой стороны, в силу следствия I.5 $Z(\bar{Q};n)\cap Z(\bar{Q};n+1)\subset Z(\bar{Q})=$ $=Z(\bar{Q};-1)$ для любой фактор-лупы $\bar{Q}$ лупы Q . А тогда по лемме 2.2 $[H,Q]=[H,Q]_{-1}\subset[H,Q;n][H,Q;n+1]=K$. Таким образом $[H,Q]=K$.

§ 3. Свойства n-нильпотентных луп.

Следуя Р.Браку [6] на классе $\mathcal{L}$ всех моноассоциативных луп рассмотрим функцию f, ставящую в соответствие всякой лупе $Q\in\mathcal{L}$ ее n-центроид $Z^*(Q;n)$. Нетрудно проверить, что f удовлетворяет всем условиям нильпотентности функции, указанных в [7]:

1) $f(Q)=Z^*(Q;n)$ - однозначно определяемая подлупа в $Q\in\mathcal{L}$ (см. предложение I.I);

2) Если K - подлупа в $Q\in\mathcal{L}$, то $K\cap Z^*(Q;n)\subset Z^*(K;n)$;

3) Если θ - гомоморфизм лупы $Q\in\mathcal{L}$ на какую-нибудь лупу, то $(Z^*(Q;n))\theta\subset Z^*(Q\theta;n)$;

4) Если H - нормальная подлупа лупы $Q\in\mathcal{L}$ и A - пересечение всех нормальных подлуп B лупы Q таких, что $HB/B\subset$ $\subset Z^*(Q/B;n)$, то $HA/A\subset Z^*(Q/A;n)$.

Проверим, например, что f удовлетворяет 4). В силу леммы 2.I $[H,Q;n]$ содержится в любой нормальной подлупе B, удовлетворяющей условию $HB/B \subset Z^*(Q/B;n)$, и следовательно, $[H,Q;n] \subset A$. Но тогда $HA/A \subset Z^*(Q/A;n)$ снова в силу леммы 2.I.

Заметим, что т.к. $H[H,Q;n]/[H,Q;n] = H/[H,Q;n] \subset Z^*(Q;n)$, то $A \subset [H,Q;n]$. Следовательно, $A = [H,Q;n]$.

Таким образом, нормальные подлупы $Z_f(Q)$ и $(H,Q)_f$, определенные в [6] для произвольной нильпотентной функции f, в нашем случае совпадают, соответственно, с $Z(Q,n)$ и $[H,Q;n]$. В связи с этим введем :

<u>Определение 3.I.</u> Лупу Q назовем n-нильпотентной, если в ней существует верхний n-центральный ряд, т.е. возрастающий ряд нормальных подлуп

$$Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_i \subset Z_{i+1} \subset \ldots \subset Z_s = Q,$$

где $Z_{i+1}/Z_i = Z(Q/Z_i;n)$, $i = 0,1,\ldots,s-1$.

При этом число s называется ступенью нильпотентности лупы Q и обозначается через $k(Q;n)$.

Из общих результатов, доказанных в [6], вытекает

<u>Предложение 3.I.</u> Лупа Q является n-нильпотентной ступени s тогда и только тогда, когда в ней существует нижний n-центральный ряд длины s, т.е. убывающий ряд нормальных подлуп $Q = Q_0 \supset Q_1 \supset \ldots \supset Q_i \supset Q_{i+1} \supset \ldots \supset Q_s$, где $i = 0,1,\ldots,s-1$.

<u>Предложение 3.2.</u> Любая подлупа и фактор-лупа n-нильпотентной лупы ступени s являются n-нильпотентными ступеней, не превосходящих s.

<u>Лемма 3.I.</u> Если A, B - нормальные подлупы лупы Q, то $[AB,Q;n] = [A,Q;n][B,Q;n]$ для любого целого n.

<u>Доказательство</u>. Пусть $H = [A,Q;n][B,Q;n]$. Легко видеть, что H - нормальная подлупа в Q. Покажем, что для любых элементов $a \in A$, $b \in B$, $x \in Q$ выполняется включение $[ab,x]_n \in H$. Действительно,

$$(ab \cdot x)^n = [(a \cdot bx)(a,b,x)]^n \overset{H}{\equiv} (a \cdot bx)^n = [a,bx]_n \cdot a^n(bx)^n \overset{H}{\equiv}$$
$$\overset{H}{\equiv} a^n(bx)^n = a^n([b,x]_n \cdot b^n x^n) \overset{H}{\equiv} a^n b^n x^n \overset{H}{\equiv} a^n b^n \cdot x^n \overset{H}{\equiv} (ab)^n x^n.$$

Тогда из $(ab\cdot x)^n \overset{H}{\equiv} (ab)^n\cdot x^n$ следует $[ab,x]_n \in H$. Покажем, далее, что $(\forall x y\in Q)(ab,x,y)\in H$. В самом деле, $(ab\cdot x)y \overset{H}{\equiv} (a\cdot bx)y \overset{H}{\equiv} a(bx\cdot y) \overset{H}{\equiv} a(b\cdot xy) \overset{H}{\equiv} ab\cdot xy$, откуда и следует требуемое. Аналогично проверяется, что (x,ab,y), $(x,y,ab)\in H$.

<u>Лемма 3.2.</u> Пусть целые числа $n, n_1, \ldots, n_k$ таковы, что

I) $[H,Q;n]\subset [H,Q;n_1]\ldots[H,Q;n_k]$ для любой нормальной подлупы H лупы Q;

2) лупа Q является n_i-нильпотентной ступени s_i, $i=1,2,\ldots,k$.

Тогда лупа Q является n-нильпотентной и ее ступень $k(Q;n)\leq 1-k+\sum_{i=1}^{k} k(Q;n_i)$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2 § 2 из [2] (при этом используется лемма 3.I).

Используя леммы 3.I, 3.2 и результаты § 2, нетрудно доказать, что всякая центрально-нильпотентная [6] лупа является n-нильпотентной для любого целого n, а также установить справедливость следующих утверждений:

<u>Предложение 3.I.</u> Если $-1\in\partial(Q)$ $(2\in\partial(Q))$, то Q является центрально-нильпотентной и ее ступень нильпотентности равна $k(Q;-1)$.

<u>Предложение 3.2.</u> Если $n\in\partial(Q)$, то $(1-n)\in\partial(Q)$, причем $k(Q;n)=k(Q;1-n)$.

<u>Предложение 3.3.</u> Если $m,n\in\partial(Q)$, то

а) $mn\in\partial(Q)$ и $k(Q;mn)\leq k(Q;m)+k(Q;n)-1$,

б) $q=\alpha n(1-n)+m\in\partial(Q)$ для любого целого α, причем $k(Q;q)\leq k(Q;n)+k(Q;m)-1$ (в частности, отсюда следует, что $\partial(Q)$ является объединением некоторых классов вычетов по модулю $n(1-n)$).

<u>Следствие 3.I.</u> Всякая 3-нильпотентная лупа Q является 4-нильпотентной, причем $k(Q;4)\leq k(Q;3)$.

<u>Предложение 3.4.</u> Если $n_1,\ldots,n_s\in\partial(Q)$, то каковы бы не были целые числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$, число $n=\alpha_1\tilde{n}_1+\ldots+\alpha_s\tilde{n}_s$ также принадлежит $\partial(Q)$, причем $k(Q;n)\leq 1-s+\sum_{i=1}^{s} k(Q;n_i)$ (для случая групп этот результат приведен в [4]).

<u>Следствие 3.2.</u> Если $n_1, \ldots, n_s \in \mathfrak{I}(Q)$ и $НОД(\tilde{n}_1, \ldots, \tilde{n}_s) = 2$, то Q - центрально-нильпотентная лупа и ее ступень $k(Q) \leq$ $\leq 1 - s + \sum_{i=1}^{k} k(Q; n_i)$.

<u>Следствие 3.3.</u> Если $n-1, n, n+1 \in \mathfrak{I}(Q)$, то лупа Q центрально - нильпотентная и $k(Q) \leq K(Q, n-1) + K(Q, n-2) + K(Q; n-3) - 2$

<u>Предложение 3.5.</u> Если $n, n+1 \in \mathfrak{I}(Q)$ и лупа Q является $\mathcal{T}'(n)$-лупой, то она является центрально-нильпотентной при $n \neq 0$ и $k(Q) \leq k(Q; n) + k(Q; n+1) - 1$.

<u>Следствие 3.4.</u> Если n-нильпотентная лупа Q является $\mathcal{T}'(3)$-лупой, то она центрально-нильпотентна, причем $k(Q) \leq$ $\leq k(Q; 3)$.

<u>Предложение 3.6.</u> Если n-нильпотентная лупа Q является $\mathcal{T}'(n(1-n))$-лупой при $n \neq 0, 1$, то она центрально-нильпотентна и $k(Q) \leq k(Q; n)$.

Утверждение следствия 3.2 для групп сформулировано без оценки ступени нильпотентности в [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гварамия А.А., Карасев Г.А. Диассоциативные лупы с эндоморфизмом $x \to x^n$ // Сообщ. АН ГССР.-1971.-Т.61, № 3.-С.341-343.
2. Карасев Г.А. К понятию n-нильпотентной группы // Сиб. мат. журн.-1966.-Т.7, № 5.-С.1014-1032.
3. Карасев Г.А. К теории n-нильпотентных групп // Мат. заметки.-1969.-Т.5, № 6.-С.653-664.
4. Карасев Г.А. Об условиях нильпотентности n-нильпотентных групп // Тезисы сообщ. ХУ Всес. алг. конф. Ч.I.-1979.-С.66.
5. Baer R. Factorisation of n-soluble and n-nilpotent groups // Proc. Amer. Math. Soc.-1953.-Vol.4, N 1.-P. 15-26.
6. Bruck R.H. A survey of binary systems.-Berlin-Heidelberg-Göttingen: Springer-Verlag.-1958.
7. Levi F. Notes on group theory, I // J.Indian Math. Soc.-1944.-Vol.8.-P.1-7 / 1945.-Vol.9.-P.37-42.

8. Ronse Ch., Teitler R. Groups dans lesquels l'élévation à une puissance entière est un endomorphisme // Bull. ci. ski. Acad. roy. Belg.– 1976.– Vol. 62, N 7-8.– P. 539 – 564.

РКИИГА
им. Ленинского комсомола

Поступила 4.02.85.

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 519.76

В.К.Детловс

ЛАД И МЕЛОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ

Понятие мелодической линии издавна присутствует в музыковедческих работах, но обычно это происходит на описательном уровне, без использования точных определений и количественных методов. В отличии от такого подхода, в работе [7] была предложена методика для статистического исследования локальных свойств мелодической линии в зависимости от той ступени диатонического лада, на которой находится текущий звук мелодии. В качестве статистического материала использовались интервалы, непосредственно предшествующие данной ступени (статистика iD) и интервалы, непосредственно следующие за ней (статистика Di). Сравнение средних значений интервалов в этих статистиках для каждой ступени позволило обнаружить в семиступенном диатоническом ладу две области с противоположными свойствами - центральную область (VII , I , II ступени) и периферийную область (III , IV , V и VI ступени). Эти выводы были получены после анализа двух разнородных массивов латышских народных песен (общим объемом около 15,6 тысяч интервалов).

В настоящей работе методика получает дальнейшее развитие. В качестве случайной величины используются не интервалы, а разности интервалов различных порядков. Анализируется массив, состоящий из всех опубликованных латышских народных мелодий одной конкретной тематики - календарных песен праздника летнего солнцестояния Līgo, и из вокальных партий произведений различных авторов западной классической музыки (в общей сложности около 65,6 тысяч интервалов).

Кстати, в таком объемистом материале (в том числе и в классической музыке) подтвердились выводы работы [7]. Однако подробное рассмотрение этого факта не является задачей настоящей статьи.

I. Попробуем подойти к понятию мелодической линии с математической точки зрения. В традиционной нотной записи никакой "линии", конечно же, нет. Однако соединяя в записи одноголосной мелодии головки соседних нот отрезками прямых, получаем некоторую ломаную линию. Она может трактоваться как график "мелодической функции" $f(t)$ от дискретного времени t, которое меняется с каждым звуком мелодии. Для характеристики формы этой ломаной могут быть использованы отношения конечных приращений различных порядков аналогичному тому, как форму плавной кривой характеризуют производные различных порядков.

Условимся, что приращение высоты измеряется количеством диатонических ступеней, отделяющих первый звук от второго. Будем считать, что каждая нота отстоит от соседней по горизонтали на единицу длины; это позволяет рассматривать просто разности высот, а не их отношения к приращениям времени.

Возможен и другой подход, при котором расстояние следующей ноты от текущей пропорциональнс длительности текущей ноты, но в настоящей работе такой способ измерения t не используется.

2. Сделаем краткий обзор разностей, которые в дальнейшем рассматриваются в качестве случайных величин.

Пусть $t=t_0$ обозначает тот момент времени, в котором регистрируется диатоническая ступень звука; номер ступени обозначается через D. Моментам времени $t_k = t_0+k$ соответствуют два предшествующих (к = -2, -I) и последующих (к = I, 2) звука. Пусть h_k - диатоническая высота звука в момент t_k. Величина интервала - это разность высот второго и первого звуков интервала: $i_к = h_{к+1} - h_к$. Первые разности интервалов обозначаются через $d_к = i_{к+1} - i_к$, вторые - через $c_к = d_{к+1} - d_к$.

В работе [7] как статистические элементы соответственно в статистиках iD и Di использовались пары чисел (D, i_{-1}) и (D , i_0). В настоящей статье речь пойдет главным образом о трех статистиках - iiD с элементом (D , d_{-2}), iDi с элементом (D , d_{-1}) и Dii с элементом (D , d_0).

Все величины показаны на рис.I, где числа $i_к$ являются разностями ближайших чисел $h_к$, числа $d_к$ - разностями чисел $i_к$, а $c_к$ - разностями чисел $d_к$. Конкретный пример показан на рис.7.

При постепенном передвижении вперед по нотному тексту меняется значение t (которое, по существу, является номером по порядку звуков мелодии), и для каждого t регистрируется очередной статистический элемент. Накопленный материал дает возможность вычислять условные вероятности (точнее, относительные частоты) интервалов $p(i|D)$, их дисперсии, и т.д. В частности, условные средние значения интервалов послужили исходным пунктом статьи [7] . Они характеризуют подъемы и спуски мелодической линии, но при этом в каждый момент охватывают очень небольшой отрезок мелодии - только пару соседних звуков.

$t-2$		$t-1$		t		$t+1$		$t+2$	время
				D					ступень
h_{-2}		h_{-1}		h_0		h_1		h_2	высота звука
	i_{-2}		i_{-1}		i_0		i_1		интервал
		d_{-2}		d_{-1}		d_0			первая разность интервалов
			c_{-2}		c_{-1}				вторая разность интервалов

Рис.I.

3. Все еще локальную, но уже более полную характеристику мелодического рисунка может дать использование т р е х с о с е д н и х з в у к о в , в том числе рассмотрение д в у х с о с е д н и х и н т е р в а л о в , например, исследование и х р а з н о с т и.

В работе [7] было установлено, что разные диатонические ступени не безразличны по отношению к величине одного (предыдущего или следующего) интервала. Это одно из конкретных проявлений функциональности лада [4] . Представляется интересным выяснить, будут ли функциональные свойства ступеней проявляться также и в несколько более широком контексте из <u>двух</u> соседних интервалов (имея в виду именно разность этих интервалов).

Осуществляя такой подход, не надо забывать, что разности интервалов d_k , вычисляемые для статистик iiD , iDi и Dii , ничего не говорят о величине самих интервалов, следовательно, не дают определенных высот звука. Они свидетельствуют исключительно и только о ф о р м е м е л о д и ч е с к о й л и н и и в с м ы с л е е е и з г и б о в.

Таким образом, разность интервалов d_k является весьма общей характеристикой формы мелодического рисунка, и каждому численному значению величины d_k соответствует не один определенный фрагмент мелодии (кусочек мелодической линии), а целый класс фрагментов, объединяемых их родственной формой в смысле изгиба. Если окажется, что статистические свойства случайной величины d_k для различных ступеней неодинаковы, то это и будет означать, что та степень абстракции, которая связана с понятием изгиба мелодической линии, хорошо соответствует той степени абстракции, которая проявляется в интуитивно осуществляемом композитором и слушателем понятии ладовой функциональности.

Переходим к проверке этого предположения.

4.В качестве материала для статистического анализа использовались произведения, перечисленные в таблице I (первые шесть строк). Из произведений Баха, Моцарта, Бетховена, Шуберта и Брамса были взяты только партии солистов-вокалистов. При анализе все мелодии предварительно разбивались на фрагменты так, чтобы в каждом фрагменте имелся один неизменный основной тон (тональный центр), который считался первой ступенью, и от которого велся счет остальных ступеней. Этот анализ модуляций проводился неформально, с привлечением интуиции.

Половина разности чисел двух предпоследних столбцов таблицы I указывает на количество однотоникальных фрагментов в каждом массиве. Исходя из этого легко определить среднее количество звуков в одном фрагменте; оно приводится в последнем столбце. Эти числа любопытны, если их воспринимать в качестве некоторой меры "тональной инерции". Следует, однако, воздержаться от далеко идущих выводов. Прежде всего потому, что не были найдены дисперсии, и поэтому неизвестна статистическая устойчивость средних значений. Кроме того, было бы трудно делать определенные выводы из анализа материалов не только разных авторов, но и различных жанров.

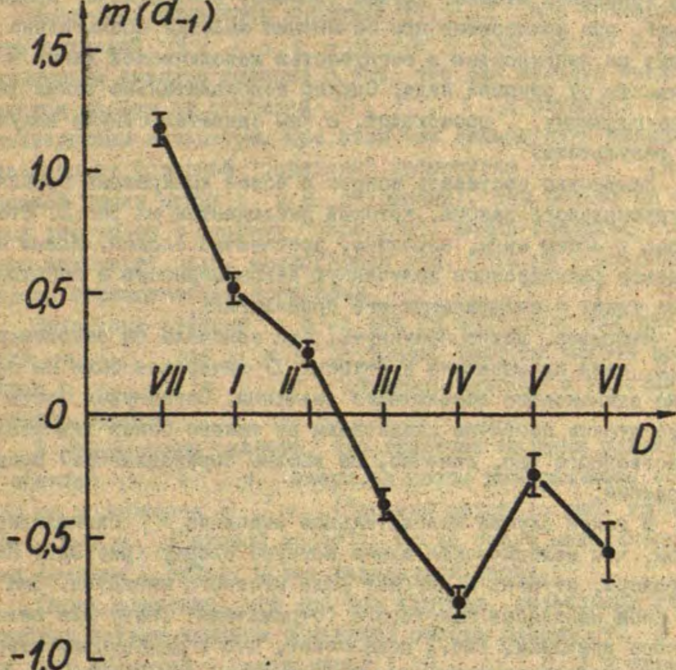
5. Основные результаты этой работы получены в рамках статистики iDi. Средние значения разностей интервалов $m(d_{-1})$ в зависимости от ступени D для общего массива $OБ$ представлены на рис.2, где соответствующие точки графика для наглядности соединены условной ломаной линией.

Вертикальные отрезки показывают доверительные интервалы средних при доверительной вероятности 99%. Скромная длина этих отрезков свидетельствует о высокой статистической устойчивости. Поскольку массив $OБ$ составлен из достаточно разнородного материала, такая устойчивость говорит о том, что факт зависимости величины d_{-1} от ступени носит весьма общий, надстилистический характер, присущий вообще тональной музыке, а не специфичный, скажем, только для латышского фольклора или только для романсов Брамса.

С другой стороны, средние значения $m(d_{-1})$ для различных

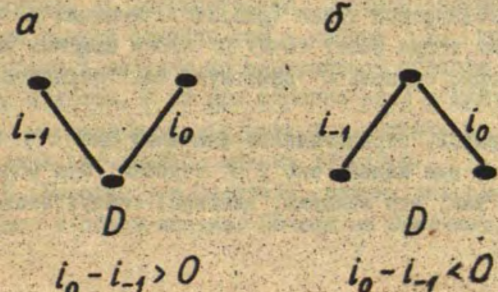
Таблица I

Массив	Автор	Название	Объем (в тысячах)		Средняя длина (количество звуков) однотонального фрагмента
			интервалы	пары интервалов	
ЛГ	латышский фольклор	песни Līgo	33,8	32,4	49
СМ	И.С.Бах	"Страсти по Матфею"	4,I	3,7	22
ВФ	В.Моцарт	"Волшебная флейта"	I4,0	I3,0	29
ТМ	Бетховен	"Торжественная месса"	4,3	3,7	I5
ПМ	Шуберт	"Прекрасная мельничиха"	3,7	3,6	75
СП	Брамс	сольные песни	5,9	5,2	I8
ОБ	общий массив		65,6	6I,5	33
ЛГI	подмассив ЛГ	амбитус до квинты	I4,4	I3,8	48
ЛГ2	" "	" больше "	I9,3	I8,6	55
КЛ	объединение массивов СМ, ВФ, ТМ, ПМ, СП		32,0	29,2	23
КЛI	объединение массивов СМ, ВФ, СП		24,0	2I,9	24



m(d-1)
1,5
1,0
0,5
0
-0,5
-1,0
VII
I
II
III
IV
V
VI
D

Рис. 2



а
i-1
i0
D
i0 - i-1 > 0
б
i-1
i0
D
i0 - i-1 < 0

Рис. 3.

ступеней разнятся весьма существенно. Мы имеем дело, таким образом, с некоторым ярким проявлением функциональности лада в тональной музыке. Трудно (вернее, фантастично) предположить, что композитор при сочинении мелодии сознательно следит за выпуклостью и вогнутостью мелодической линии в зависимости от ступени лада. Однако подсознательно такая работа, по-видимому, происходит, о чем свидетельствуют полученные результаты.

Заманчиво поставить вопрос о более конкретных причинах функционального закона, который наблюдается на рис.2. Этот вопрос в общем виде, вероятно, достаточно сложен. Можно попытаться расшифровать полученную закономерность в некоторых более узких и специальных его проявлениях.

Например, можно прикинуть, что означала бы закономернос рис.2, если примыкающие к ступени D интервалы были бы примерно одинакового абсолютного значения. Оставшуюся часть этого пункта посвятим следствиям из такого более или менее естественного (но, конечно, не вполне справедливого) предположения.

В таком случае положительное значение d_{-1} сигнализирует о том, что мелодическая линия вогнута сверху (рис.3а). Иначе говоря, ступень D играет роль местного минимума. Она ведет себя наподобие некоторого "отражателя" снизу для мелодического движения. Рис.2 показывает, что в наибольшей степени это свойство присуще седьмой ступени, менее ярко - первой ступени, и сравнительно меньше - второй ступени.

С другой стороны, отрицательное значение разности интервалов d_{-1} в тех же предположениях сигнализирует о выгнутой сверху мелодической линии (рис.3b). Функция $f(t)$ мелодической линии тогда имеет точку D своим местным максимумом. Иначе говоря, ступень D действует как "отражатель" сверху.

Согласно рис.2, отрицательное значение для d_{-1} имеется у III ступени, но еще меньше оно у IV ступени. Это можно интерпретировать так, что мелодия, двигаясь снизу, около III ступени достаточно часто поворачивает обратно, но еще чаще это наблюдается у IV ступени.

Монотонно убывающее значение $m(d_{-1})$ для последовательности ступеней VII - I - II - III - IV (см. рис.2) в рамках предыдущего анализа говорит о том, что для мелодии типичным является подъем от ступеней VII, I, II к ступеням III, IV с последующим возвратом. При этом чем дальше звук мелодии отдалился от условной "середины" промежутка VII - IV (воображаемой точки между II и III ступенями), тем больше он стремится вернуться в сторону "середины". Можно сказать, что здесь действует сила, аналогичная той, которая в механике порождает гармонические колебания.

Остальные ступени V и VI как бы повторяют еще раз значения $m(d_{-1})$ для III и IV ступеней. Поэтому вместе взятые, данные о III, IV и V, VI ступенях говорят о наличии двойного порога.

В итоге можно сказать, что типичная мелодия поднимается из области VII, I, II вверх, а потом поворачивает обратно либо из подобласти III, IV ("первый порог"), либо из подобласти V, VI ("второй порог"). После этого мелодический цикл (подъем - спуск) может начинаться снова.

Стоит отметить, что вся эта картина, вытекающая из рис.2, является подтверждением основного вывода работы [7] о наличии двух областей - центральной (VII, I, II) и периферийной (III, IV, V, VI). Действительно, именно для ступеней центральной области разность интервалов d_{-1} в среднем положительна. С другой стороны, именно в периферийной области величина d_{-1} отрицательна. Средние значения интервалов до и после данной ступени уже в работе [7] привели к гипотезе о колебаниях мелодии из центральной области вверх в периферийную область, а из нее обратно вниз в центральную область. Теперь эта гипотеза получила дополнительное подтверждение, и картина пополнилась новыми деталями.

6. Хорошая устойчивость средних значений разностей интервалов в общем массиве ОВ еще не означает, что средние зна-

чения величины d_{-1} для данной ступени D , вычисляемые в каких-то частях общего массива, будут близки друг к другу (даже если для этих частей устойчивость $m(d_{-1})$ также окажется неплохой). Стало быть, самостоятельный интерес имеет сравнение результатов для различных подмассивов. Прежде всего заманчиво сравнивать фольклорный массив ЛГ со стилистически отличным от него массивом КЛ классической музыки.

Полученные средние разностей интервалов изображены на рис.4. Здесь опять вертикальным отрезкам показаны доверительные интервалы, соответствующие доверительной вероятности 99%. Можно условиться считать, что два результата (для одной ступени) отличаются существенно, если их доверительные интервалы не перекрываются.

При таком подходе средние значения d_{-1} для классики и фольклора существенно отличаются на четырех ступенях - I , III , IV и V . Больше всего отличие для первой ступени. Во всех четырех случаях разность интервалов в классической музыке по абсолютному значению меньше разности интервалов в фольклорном материале. (Добавим, что та же тенденция проявляется также и на VII и II ступенях, т.е. на всех ступенях, кроме шестой.) Это приводит к несколько неожиданному выводу об усиленной функциональности ступеней (конечно, в рассматриваемом здесь аспекте - по изгибаемости мелодической линии) в фольклорных мелодиях по сравнению с классической музыкой.

Ситуацию в классике характеризует близость нулю величины $m(d_{-1})$ для первой и пятой ступеней. Следовательно, около этих ступеней мелодическая линия столь же часто бывает выгнутой, как и вогнутой формы.

7. Еще отдельно были обработаны два подмассива песен Līgo . Мелодии более узкого объема (ЛГ1, амбитус - до квинты) в среднем можно считать более древним, чем мелодии широкого объема (ЛГ2, амбитус - больше квинты). Представляется интересным вопрос о влиянии этого исторического и стилистического нюанса на статистику изгибов мелодической линии. Действительно, средние значения разностей интервалов $m(d_{-1})$

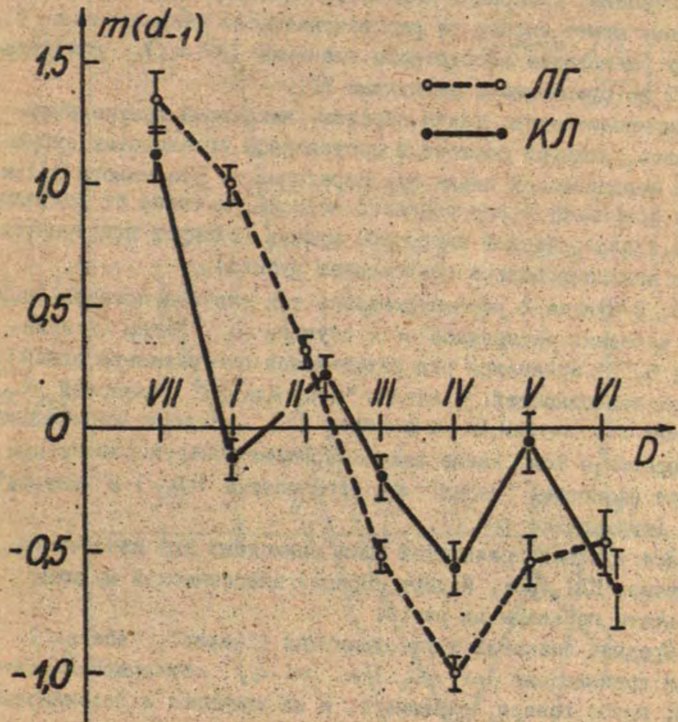


Рис. 4.

в обоих подмассивах оказались существенно отличными для всех ступеней кроме второй (см. рис.5; вспомним, что именно район II ступени является пограничным по отношению к центральной и периферийной областям, см. пункт 5). Все отличия (кроме VI ступени, которая в ЛГI имеет ничтожную частоту 0,007 и поэтому может вообще не рассматриваться) направлены в сторону уменьшения абсолютного значения $m(d_{-1})$ для мелодий ЛГ2 по сравнению с мелодиями ЛГI.

Вырисовывается, таким образом, некоторый диахронический закон, который состоит в постепенном сглаживании выпуклостей мелодической линии при переходах от старинного фольклора к фольклору более позднего периода, а также от фольклора вообще, к классической авторской музыке (следует подчеркнуть, что не анализировалась современная музыка).

8. В пункте 2 рассматривались три способа привязки разности соседних интервалов d к ступени D. Затем (в пунктах 5, 6, 7) излагался ряд результатов относительно одной из трех возможностей, а именно "центральных" разностей d_{-1}, т.е. делались выводы из статистики iDi. Теперь можно заняться вопросом о том, какие закономерности обнаруживаются при анализе разностей "назад" d_{-2} (статистика iiD) и "вперед" d_0 (статистика Dii).

Все три вида разностей были вычислены для некоторого подмассива КЛI (Бах, Моцарт, Брамс) классической музыки. Результаты показаны на рис.6.

Средние значения двух сдвинутых ("назад", "вперед") вторых производных $m(d_{-2})$ и $m(d_0)$ отличаются между собой, грубо говоря, ненамного, и их значения в большинстве случаев близки к нулю. Тем самым наблюдается большое расхождение с $m(d_{-1})$ там, где эта центральная вторая производная заметно отличается от нуля (VII, IV, VI ступени). В свою очередь, средние значения разности d_{-1} для подмассива КЛI очень близки к средним значениям для всего массива КЛ (см. рис.2.), что лишний раз говорит об устойчивости чисел, характеризующих классическую музыку.

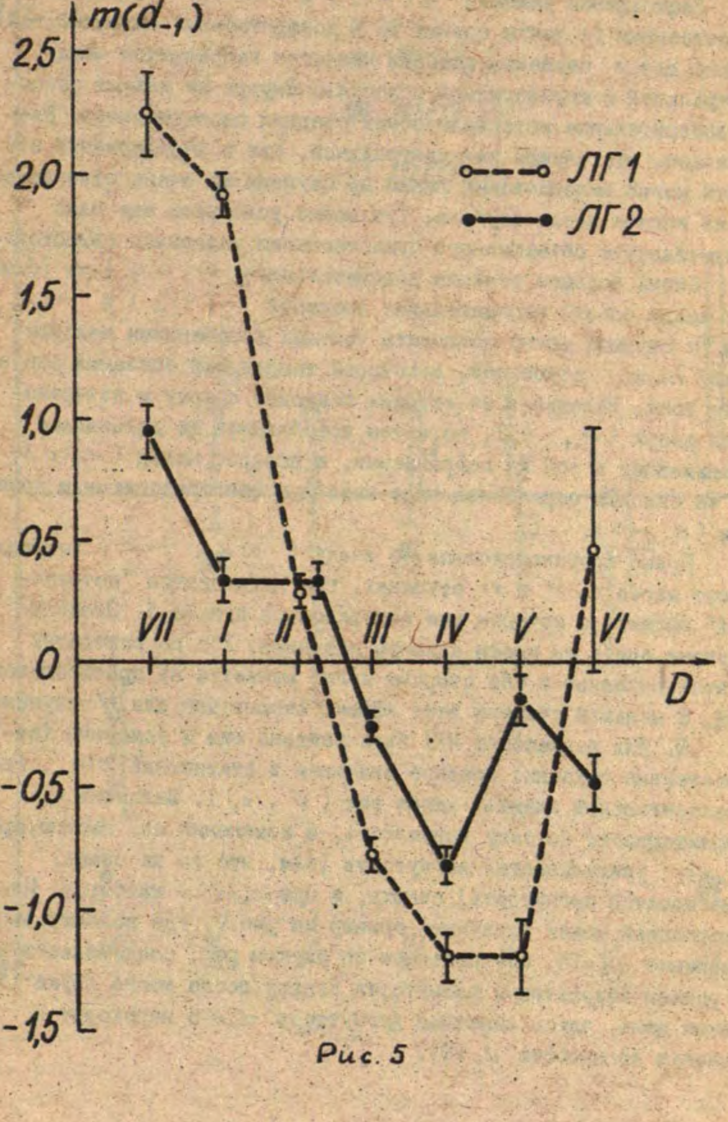


Рис. 5

Расхождение величин $m(d_{-2})$ и $m(d_0)$ является существенным (с точки зрения 99 % доверительных вероятностей) только для II ступени, которая является пограничной между центральной и периферийной областями.Внутри же каждой области доверительные интервалы обоих средних перекрываются. Это означает, что внутри как центральной, так и периферийной области изгиб мелодической линии до ступени не очень отличается от ее изгиба после ступени. Тут можно усмотреть еще одно свидетельство объективного существования названных областей.

Очень большое отличие положительного $m(d_{-1})$ от (близких между собой) отрицательных значений $m(d_{-2})$ и $m(d_0)$ для VII ступени можно объяснить частыми колебаниями мелодии между VII и I ступенями, некоторой тенденцией опевания основного тона. Мелодия, к VII ступени подходит сверху и возвращается вверх ($d_{-1} > 0$), но затем преобладает не дальнейшее продвижение в том же направлении, а поворот назад ($d_0 < 0$); то же самое в зеркальном виде было и в непосредственном прошлом ($d_{-2} < 0$).

Прямо противоположная по знаку ($m(d_{-1}) < 0$) ситуация имеет место на IV и VI ступенях, где наблюдается "потолочный" эффект, о котором уже говорилось в пункте 5. Около VI ступени опять мы имеем явление опевания, ибо по соседству с этой ступенью в обе стороны изгиб меняется на противоположный. В меньшей степени этот эффект характерен для IV ступени.

9. Для подмассива КЛI были найдены еще и условные (относительно ступени) средние значения в статистике D^{iii} , где статистический элемент имеет вид (D , c_0). Величина c_k характеризует не саму выпуклость, а изменения ее. Именно, при $c_k > 0$ увеличивается вогнутость (или, что то же самое, уменьшается выгнутость) сверху, а при $c_k < 0$ - наоборот. Иллюстрацией может послужить пример на рис.7, где положительное значение c_0=I5, соотнесенное со звуком ре^2, свидетельствует о резком возрастании вогнутости сверху после этого звука (в самом деле, здесь заметная выгнутость d_0=-6 переходит в сильную вогнутость d_1=9).

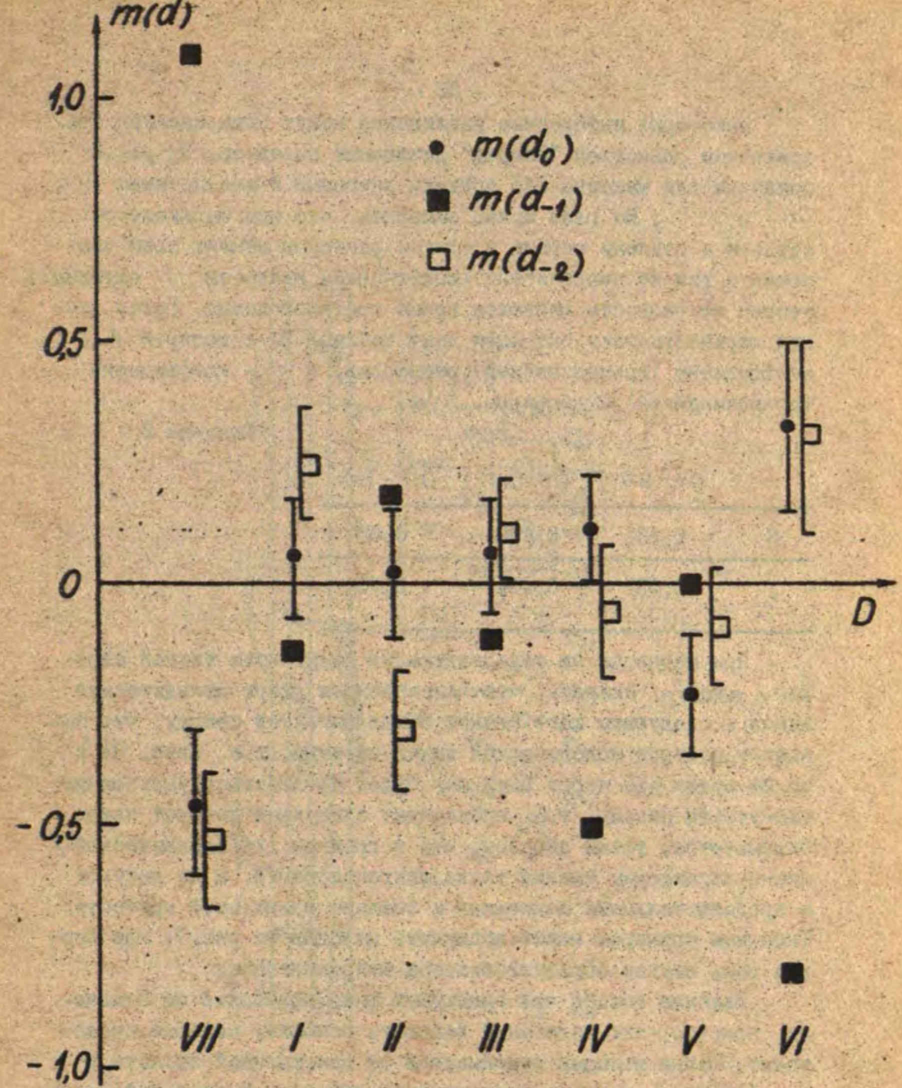


Рис. 6

Некоторые интересные наблюдения могут быть сделаны при сравнении разностей "вперед" различных порядков. На рис.8 показаны для массива КЛI средние значения в статистиках D^{i}, D^{ii} и D^{iii}. На глаз можно заметить, что при переходе от ступени к ступени первые и третьи разности меняют свои значения в том же направлении (исключением является IV ступень); вторые же разности меняются прямо противоположно. Более точную характеристику ситуации дает таблица 2, в которой β - коэффициент (прямолинейной) регрессии, а ρ - коэффициент (прямолинейной) корреляции.

Таблица 2

	$D^{i} - D^{ii}$	$D^{i} - D^{iii}$	$D^{ii} - D^{iii}$
β	- 0,681	0,290	- 0,603
ρ	0,931	0,494	0,752

При переводе на содержательный язык числа первой строки можно сказать, что направленная вверх мелодическая линия в следующем шаге станет более выгнутой сверху, что повлечет поворот мелодической линии обратно, т.е. вниз. Но в то же время еще через один шаг будет наблюдаться уменьшение выгнутости сверху, т.е. произойдет следующий поворот вверх. Оказывается, таким образом, что в среднем для мелодической линии характерны именно такие микроколебания, а не рисунок с продолжительными подъемами и спадами одинаковой крутости. Типичным примером может послужить мелодия на рис.7, где первые семь звуков образуют полтора микроколебания.

Наличие только что описанных микроколебаний не отменяет, конечно, тех колебаний большего размаха, которые происходят, когда мелодия поднимается от центральной области в периферийную, и затем возвращается обратно. В реальной мелодии они накладываются друг на друга - наподобие тому, как колебания моря складываются из мелкой ряби, порожденной силами поверхностного напряжения, и из крупных волн гравитационного происхождения.

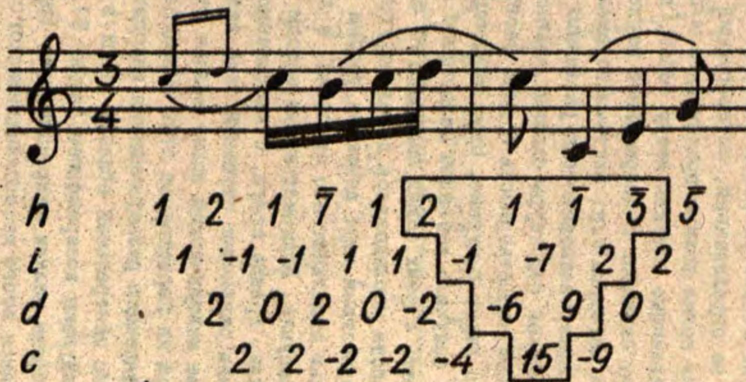


Рис. 7

Можно добавить, что связь средних значений в статистиках D_I, D_{II} и D_{III} бывает далека от линейного закона, о чем свидетельствует вторая строка таблицы 2. Ближе к линейному соответствию она в случае соседних порядков разностей (см. первый и третий столбцы). Соответствующие "облака" точек при желании легко могут быть построены по данным рис.8.

10. Научный анализ действительности требует абстрагироваться от многих сторон рассматриваемых объектов и сосредоточить внимание на определенный, интересующий нас аспект. Однако раньше или позже должны происходить и происходят попытки связать различные аспекты между собой, продвигаясь обратно в сторону синтеза. В современной науке все более распространяется методика т.н. системного анализа, предполагающего рассмотрение взаимодействия различных компонент, выявление иерархической структуры сложных явлений. Представляется несомненной плодотворность и даже необходимость такого подхода и в науке о музыке. Одна тенденция этого рода в музыковедении получила название целостного анализа.

Если смотреть с этих общих позиций, то следует сказать, что в данной работе исследовался довольно узкий частный вопрос о взаимодействии двух аспектов теории музыки - лада с различной ролью отдельных его ступеней и локальной формы мелодического рисунка. Количественные методы статистического анализа позволили, прежде всего, с несомненностью установить, что функционализм различных ступеней лада действительно отражается в форме мелодической линии вблизи этих ступеней. В качестве одной из первопричин этой функциональности можно усмотреть тенденцию разворачивания мелодии большими волнами, идущими из центральной области вверх в периферийную область с последующим возвращением (пункт 5). На эти волны накладываются более мелкие микроколебания (пункт 9).

Установлением этого метастилистического факта, имеющего место, по-видимому, во всей тональной музыке, не исчерпаются возможности метода. Рассмотрение стилистически разно-

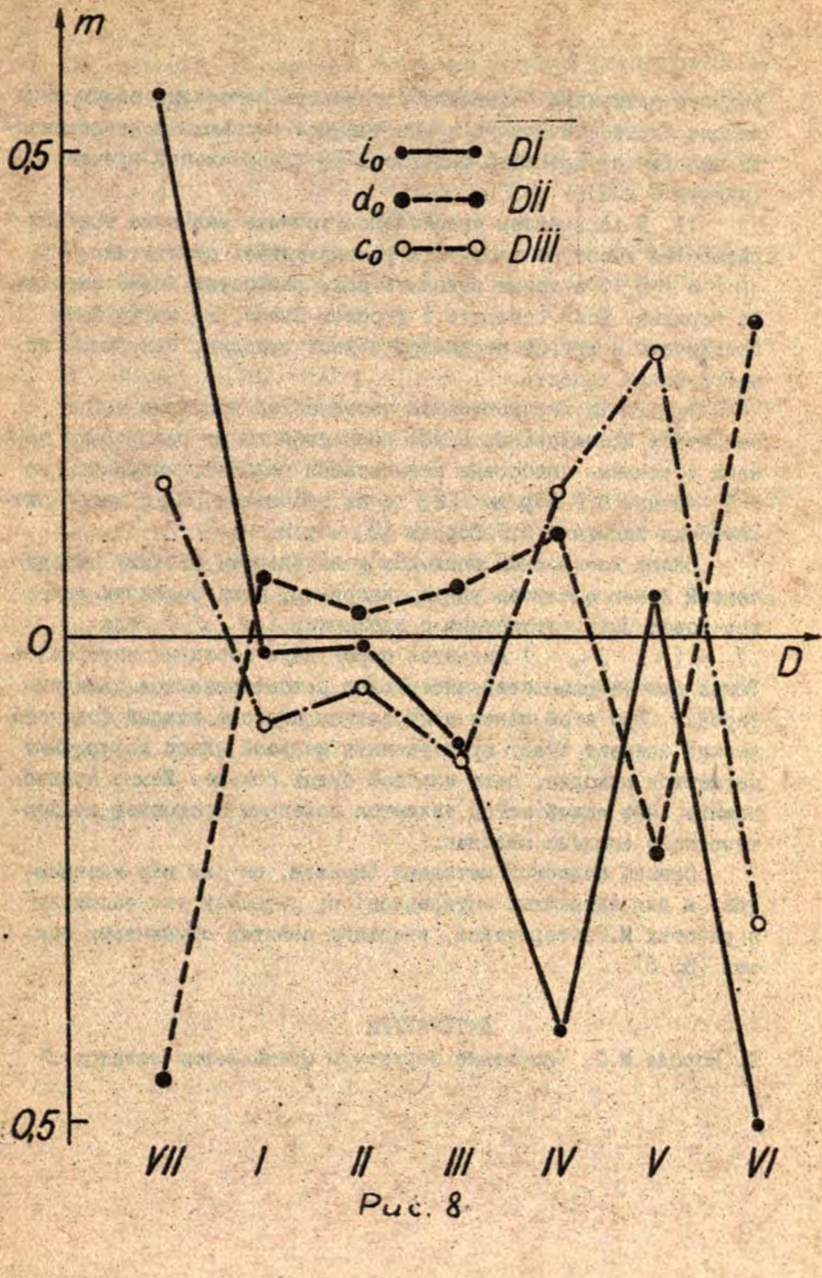


Рис. 8

родного материала позволило установить некоторую общую тенденцию систематического и монотонного уменьшения изгибаемости мелодии от древнего фольклора до классической музыки (пункты 6 и 7).

II. В дальнейшем желательно уточнить значение третьих разностей высот, в частности рассматривать статистики $iiiD$, $iiDi$ и $iDii$, а также выяснить роль разностей более высокого порядка. Если говорить в широком плане, то могут быть привлечены и другие параметры звуков мелодии, например, их метрическая тяжесть.

Отдельной перспективной постановкой проблемы могут оказаться исследования связи разностей высот различного порядка с точными способами сегментации мелодии, например, на F-мотивы М.Г.Бороды [I], их обобщения [3], метро-ритмические сегменты М.Г.Бороды [2] и т.п.

Более конкретным подходом к локальному анализу мелодической линии в случае учета, например, трех соседних звуков может быть статистика с элементом (D, J), где $J = (i_{-1}, i_0)$ является парой двух соседних интервалов. Тогда вместо разностей интервалов рассматриваются сами интервалы. При этом менее абстрактном подходе каждый статистический элемент будет представлять меньший класс конкретных сегментов мелодии, зато классов будет больше. Можно предположить, что такой метод является полезным средством стилистического анализа мелодии.

Основы подобной методики (правда, не для пар интервалов, а для единичных интервалов) по существу уже заложены в работах М.Ройтерштейна, введшего понятие ступеневых связей [5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

I. Борода М.Г. Частотные структуры музыкальных текстов //

Сб. статей, посвященный 60-летию Великой Октябрьской социалистической революции.-Тбилиси: Тбилисская гос. консерватория им. В.Сараджишвили.-1977.-С.178-202.

2. Борода М.Г. К вопросу об информационной единице типа мотива / Деп. № 500. НИО Информкультура Гос.библиотеки СССР им. В.И.Ленина.-М., 1983.
3. Детловс В.К. Обобщенные формальные мотивы // Алгебра и дискретная математика.-Рига: ЛГУ им. П.Стучки.-1984.-С.46-59.
4. Милка А. Теоретические основы функциональности в музыке.-Л.: Музыка.-1982.-150 с.
5. Ройтерштейн М.И. Граф и матрица как инструменты ладового анализа // Музыкальное искусство и наука.-М.: Музыка,-1973.-Вып.2.-С.175-189.
6. Ройтерштейн М.И. Некоторые особенности анализа вокальной музыки // Музыковедческая подготовка школьного учителя.-М.: МГПИ им. В.И.Ленина,-1984.-С.36-51.
7. Kļotiņš A., Detlovs V. A comparison of interval pattern parameters in some classes of Latvian folk-songs //

Симпозиум по общим аспектам обработки лингвистической и музыкальной информации, Таллин, 22-24 ноября 1982 г.-Таллин.-1982.-С.43-47.

ЛГУ им. П.Стучки . Поступила 22.07.85.

Kartashov, A.P., A combinatorical description of dinamic activity of stochastic neuron nets, 105-116.

We consider a probabilistic model of reflex realized in stochastically organized net of formal neurons. The problem of determining the probability of arising of prescribed system of unconditional reflexes is reduced to a certain problem concerning the structure of stochastic mappings of finite sets. The later can be solved by combinatorial methods.

Lipjanskiĭ, R.S., On triangulable representations of Lie algebras, 117-123.

A description of finite-dimensional Lie algebras (p-algebras), admitting a representation by triangular matrices over algebraically closed fields (finite fields), is presented in the paper.

Pivovarova, G.V., Notes on lattice pairs, 125-130.

The axioms of the notion of lattice pairs, introduced by the author in [2], are analized.

Shteinbuk, V.S., Endomorphism semigroups of ultrafilters, 145-155.

A transformation φ on a set Ω is called an endomorphism of a filter $\mathcal{F}$ on Ω if $\varphi(M) \in \mathcal{F}$ for all $M \in \mathcal{F}$. If $\mathcal{F}$ is an ultrafilter, the transformation φ is an endomorphism of $\mathcal{F}$ if and only if $\varphi^{-1}(M) \in \mathcal{F}$ for all $M \in \mathcal{F}$. It is shown that the set of all fixed points of such an endomorphism is contained in $\mathcal{F}$. The ideals and Green's equivalences of endomorphism semigroups of ultrafilters are described and a concrete characteristic of endomorphism semigroups of ultrafilters is obtained.

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 510

З.Б.Дискин

СИНТАКСИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

1. Мотировка и обзор полученных результатов.

Математик - в большей или меньшей степени платонист - обычно предпочитает работать не в рамках теории моделей: синтаксис, семантика, интерпретация, а непосредственно в терминах математических структур Бурбаки [1], рассматриваемых в некоторой интуитивной теории множеств и интуитивной логике. Формализуя последние, т.е. трактуя их как формальную метатеорию, можно перевести все рассмотрение в синтаксические рамки (и удовлетворить требованиям сторонника гильбертовского формализма). В настоящей статье подобная процедура проделывается для некоторой структуры, претендующей на роль универсума множеств. Однако, в отличие от обычно подразумеваемого способа введения формальной метатеории, когда в нее включаются понятия формулы, интерпретации, выполнимости (например, у Мостовского [2], где модели теории ZF, сама теория и предикат истинности рассматриваются как объекты формальной теории классов Морса M), ниже предлагается иной путь.

А именно, в стандартном логическом языке первого порядка теории множеств $\mathcal{L}_\in$ (с единственным нелогическим символом $\in$) вводится формула $SU(V,\varepsilon)$ с двумя свободными переменными V и ε, содержательно понимаемая как $\in$ — высказывание "множество V с бинарным отношением $\varepsilon \subset V \times V$ есть универсум множеств, т.е. модель некоторой теории множеств относительно символа ε ", и далее рассматриваются следствия из $SU(V,\varepsilon)$, которые можно получить при наличии в языке $\mathcal{L}_\in$ некоторой $\in$-теории множеств $ST_\in$, понимаемой как интуитивная внешняя метатеория множеств, .т.е. результаты рассмотрений имеют вид

$$ST_\in \vdash SU(V,\varepsilon) \to \Psi(V,\varepsilon),$$

где $\Psi(V,\varepsilon)$ понимается как $\in$-высказывание об универсуме (V,ε).

В качестве $SU(V,\varepsilon)$ взята аксиоматика ZF , записанная относительно символа ε и релятивизованная по V , в которой схема аксиом подстановки заменена очевидным образом единственно аксиомой подстановки высшего порядка $\alpha(V,\varepsilon)$, запись которой возможна благодаря $ST_\in$ (но $\alpha(V,\varepsilon)$ есть просто формула в $\mathcal{L}_\in$-языке первого порядка!). Для определения всех конструкций, входящих в $SU(V,\varepsilon)$, достаточно в качестве $ST_\in$ взять теорию Цермело $Z_\in$ в языке $\mathcal{L}_\in$ (или даже ограничиться фрагментом теории типов до четвертого уровня включительно).

При таком подходе используемые в метатеории теоретико-множественные средства явно фиксируются заданием теории $ST_\in$, а формулу $SU(V,\varepsilon)$ можно назвать синтаксической моделью теории множеств высшего порядка.

Будут доказаны следующие результаты.

Если в качестве внешней теории множеств $ST_\in$ взять $Z_\in$ (или указанный фрагмент теории типов), то

(I) в $SU(V,\varepsilon)$ интерпретируется теория классов Морса,

(2) любые два универсума (модели ZF_ε с аксиомой подстановки высшего порядка) либо ε-изоморфны, либо один из них ε-изоморфно вкладывается в другой

(точные формулировки приведены в пп. 3,2, 4.2).

Если в качестве $ST_\in$ взять $ZF_\in$, то для сильно недостижимого кардинала $\varkappa > \omega$ (обозначим это $InA(\varkappa)$)

(3) $ZF_\in \vdash InA(\varkappa) \to SU(R_\varkappa, \in\restriction R_\varkappa)$,

где $R_\varkappa$ - этаж универсума фон Неймана в $ZF_\in$, а также

(4) $ZF_\in \vdash SU(V,\varepsilon) \to \exists\varkappa \exists h(InA(\varkappa) \,\&\, h$ есть изоморфизм (V,ε) на $\langle R_\varkappa, \in\restriction R_\varkappa \rangle$

Отсюда следует равносильность аксиомы существования универсума (V,ε) (внутри ZF_ε) аксиоме существования сильно недостижимого кардинала $\varkappa$:

(5) $ZF_\epsilon \vdash \exists V \exists \varepsilon\, SU(V,\varepsilon) \leftrightarrow \exists \varkappa\, In A(\varkappa)$.

Результат о почти категоричности (в смысле теоремы 2) теории ZF^2, формулируемой в языке второго порядка, не нов (см., например, [4]), но соответствующие доказательства проводятся там в интуитивной теории множеств, и ряд обстоятельств затемняется. В частности, вполне правдоподобным выглядит тезис - "поскольку модели ZF^2 изоморфны, континуум-гипотеза либо истинна, либо ложна, но не независима" - активным пропагандистом которого является Крайзель (ссылки см. в [4]). Однако предложенный в статье подход, явно фиксирующий используемые в метатеории теоретико-множественные средства, позволяет сразу же продемонстрировать схоластичность подобной аргументации. Действительно, из (4) следует

$$ZF_\epsilon + CH_\epsilon \vdash SU(V,\varepsilon) \rightarrow CH(V,\varepsilon),$$
$$ZF_\epsilon + \neg CH_\epsilon \vdash SU(V,\varepsilon) \rightarrow \neg CH(V,\varepsilon),$$

и, таким образом, вопрос об истинности или ложности CH не решается, а всего лишь переносится в метатеорию, в которой он вновь возникает ввиду независимости CH_ϵ от Z_ϵ .

2. Универсум множеств как структура Бурбаки.

Работаем в интуитивной классической логике и в некоторой "общепринятой" интуитивной теории множеств, включающей в себя основные теоретико-множественные понятия - пустое множество, пара, множество всех подмножеств, отношения на множествах и отображения множеств.

Рассмотрим пару $v=\langle V,\varepsilon\rangle$, где V - некоторое множество, $\varepsilon \subset V\times V$ - бинарное отношение на V . Элементы V будем называть точками и, как правило, обозначать x, y, z , подмножества V будем называть классами и обычно обозначать $A, B, \ldots, X, Y, Z$. Множество всех классов, т.е. подмножеств V , обозначим $C = 2^V$.

Для удобства изложения аксиом, которые мы собираемся наложить на $\langle V, \varepsilon \rangle$, введем отображение "крышка" $\hat{}: V \to C$ правилом $x \mapsto \hat{x} = \{y \in V : y \varepsilon x\}$ (задание такого отображения равносильно заданию ε, т.к. $x \varepsilon y \Leftrightarrow x \in \hat{y}$, и мы могли бы начинать с $\hat{}$). Образ V при отображении $\hat{}$ обозначим $\mathcal{V} := \{\hat{x} : x \in V\}$.

<u>Определение</u>. Пара $v = \langle V, \varepsilon \rangle$ называется универсумом, если справедливы следующие аксиомы (AI)...(A8). (логическая символика в записи аксиом используется просто как заменитель слов "разговорного" математического языка. Аксиомы (AI)...(A6) есть обычные аксиомы теории Z в наших обозначениях.)

<u>Аксиома объемности</u>: $\forall x, y \in V \quad \hat{x} = \hat{y} \Rightarrow x = y$. (AI)

Таким образом, $\hat{}$ есть инъекция, и на $\mathcal{V}$ определено обратное отображение $\check{}: \mathcal{V} \to V$, $X \mapsto \check{X} = x$, если $\hat{x} = X$.

<u>Аксиома пустого множества</u>: $\phi \in \mathcal{V}$. (A2)

Обозначим $0_v := \check{\phi}$

<u>Аксиома пары</u>: $\forall x, y \in V \ \{x, y\} \in \mathcal{V}$. (A3)

Обозначим $\{x, y\}_v := \{\check{x, y}\}$

Как обычно, положим $\{x\}_v := \{x, x\}_v$, $\langle x, y \rangle_v := \{\{x\}_v, \{x, y\}_v\}_v$.

<u>Аксиома объединения</u>: $\forall x \in V \ \mathcal{U}_x := \bigcup\{\hat{y} : y \in \hat{x}\} \in \mathcal{V}$. (A4)

Обозначим $\bigcup_v(x) := \check{\mathcal{U}}_x$. Как обычно, $x \cup_v y := \bigcup_v(\{x, y\}_v)$. Легко проверить, что $\widehat{x \cup_v y} = \hat{x} \cup \hat{y}$.

<u>Аксиома степени</u>: $\forall x \in V \ P_x := \{y \in V : \hat{y} \subset \hat{x}\} \in \mathcal{V}$. (A5)

Обозначим $\mathcal{P}_v(x) := \check{P}_x$.

<u>Аксиома регулярности</u>: $\forall x \neq 0_v \ \exists y \in \hat{x} \ (\hat{x} \cap \hat{y} = \phi)$. (A6)

Определим на V унарную операцию $Sc_v : x \mapsto x \cup_v \{x\}_v$. $Sc_v(x)$ будем также обозначать $x +_v 1$ или x'^v.

<u>Аксиома бесконечности</u>: $\Omega := \{0_v, 0_v'^v, 0_v'^{v'^v}, \ldots\} \in \mathcal{V}$. (A7)

Обозначим $\omega_v := \check{\Omega}$.

<u>Аксиома подстановки</u>: Для любой функции $F : V \to V$

$$\forall x \in V \quad F''(\hat{x}) \in \mathcal{V}, \tag{A8}$$

где $F'' : 2^V \to 2^V$ есть отображение, порождаемое F.

Из аксиомы подстановки (A8) непосредственно следует

<u>Аксиома выделения подмножеств</u>: $\forall x \in V \ \forall A \subset \hat{x} \ A \in \mathcal{V}$. (A8')

Отметим, что по определению операции $\mathcal{P}_v$ в (A5) и из аксиомы выделения (A8) следует, что для $x \in V$ множества $\widehat{\mathcal{P}_v(x)}$ и $\mathcal{P}(x) := 2^{\hat{x}}$ естественным образом изоморфны. Отсюда ясно, что если в нашей интуитивной теории множеств мы принимаем аксиому выбора, то аксиома выбора для $\langle V, \varepsilon \rangle$ становится справедливой теоремой.

В универсуме $\langle V, \varepsilon \rangle$ обычным образом (с очевидными модификациями, обусловленными специфическим характером аксиомы подстановки) воспроизводится стандартный набор теоретико-множественных конструкций - классы-отношения (и точки-отношения), ординалы, равномощность и кардиналы и т.д. (например, по книге Йеха [3], трактуя "йеховские" классы как подмножества V, а множества - как точки из V или соответствующие им "крышки" из $\mathcal{V}$). Из этого набора отметим лишь построение универсума фон Неймана в $\langle V, \varepsilon \rangle$ как определенной по рекурсии на ординалах из V функции $R_v : On_v \to V$, где $On_v :=$ $= \{\alpha \in V : \hat{\alpha}$ - транзитивно и вполне упорядочено отношением $\varepsilon\}$, $R_v(O_v) = O_v$, $R_v(\alpha'^v) = \mathcal{P}_v(R_v(\alpha))$ и, если α предельный, то $R_v(\alpha) = U_v(\{R_v(\beta) : \beta \in \hat{\alpha}\}^\vee) = (\bigcup\{\hat{R_v}(\beta) : \beta \in \hat{\alpha}\})^\vee$. Будем обозначать $\hat{R_v}(\alpha)$ через V_α. Для универсума $\langle V, \varepsilon \rangle$ проходит стандартное доказательство того, что аксиома регулярности (A6) равносильна утверждению $V = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in On_v\}$.

Математик-платонист, по-видимому, согласится работать с введенной структурой $\langle V, \varepsilon \rangle$, если поверит в ее существование. Сторонник гильбертовского формализма потребует объяснить, что такое "множество V", "подмножество множества V", "функция $F: V \to V$" и т.д. (а также, что значат слова "любой", "существует" и т.д.) - этому посвящен следующий раздел.

3. Погружение теории универсума $\langle V, \varepsilon \rangle$ в формальную теорию множеств

3.1. С изложенной выше точки зрения внешняя теория множеств $ST_\in$ призвана служить формализации интуитивной теории множеств, в которой рассматриваются математические структуры. Поэтому методологически важно, чтобы внешний формализм был настолько слабым, чтобы быть "интуитивно понятным", во всяком случае, не хотелось бы использовать в нем трансфинитные конструкции. Требуемый минимум - определимость в этом формализме используемых в аксиомах (AI)...(A8) теоретико-множественных понятий.

Вообще говоря, для этой цели достаточно фрагмента теории типов до четвертого уровня включительно: точки из V - элементы уровня I; V и классы - уровня 2; ε, отношения и функции на V - уровня 4. Отображения $\hat{}$ и $\check{}$ (элементы уровня 5) не нужны, если определить $\mathcal{V} := \{X \subset V : \exists x \in V (\{y \in V : y \varepsilon x\} = X)\}$, а аксиому бесконечности (A7) можно записать в виде

$$\Omega := \bigcap \{X \subset V : O_{\mathcal{V}} \in X \;\&\; \forall x (x \in X \to x'^{\mathcal{V}} \in X)\} \in \mathcal{V} \qquad \text{(A7')}$$

Однако в силу того, что при развитии теории $\langle V, \varepsilon \rangle$ могут понадобиться элементы более высоких уровней, а также ввиду большей привычности и удобства обозначений, в качестве внешней формально теории множеств возьмем теорию Цермело Z .

Более подробно. Введем стандартный логический язык $\mathcal{L}_{\in}$ первого порядка с равенством и сигнатурой, состоящей из единственного бинарного предикатного символа $\in$. Будем $\mathcal{L}_{\in}$ называть $\in$-языком, его формулы - $\in$-формулами, а совокупность всех $\in$-формул обозначим $\Phi_{\in}$. В $Z_{\in} \subset \Phi_{\in}$ выразимы все используемые в п.2 интуитивные теоретико-множественные понятия: $V, \varepsilon \subset V \times V$, $\hat{} : V \to \mathcal{P}(V)$ и т.д. Что касается интуитивного множества $\{O_{\mathcal{V}}', O_{\mathcal{V}}'', \ldots\}$, то оно определяется как образ $Z_{\in}$-константы ω при отображении F из ω в V , определяемым рекурсией: $F(0) = O_{\mathcal{V}}$, $F(x') = (F(x))'^{\mathcal{V}}$. (Если представить $\mathcal{V}$-аксиому бесконечности (A7) в виде (A7′), то $Z_{\in}$-аксиома бесконечности вообще не потребуется)

Таким образом, мы можем записать все указанные в п.2 аксиомы (AI)...(A8) в виде $\in$-формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_8$ и ввести следующую $\in$-формулу с двумя свободными переменными V, ε:

$$SU(V, \varepsilon) := (\varepsilon \subset V \times V) \;\&\; \varphi_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \varphi_8 .$$

Теперь развитие теории универсума $\langle V, \varepsilon \rangle$, содержательно понимаемое как доказательство теорем вида "пусть $\langle V, \varepsilon \rangle$ - универсум, тогда справедливо ψ ", где ψ - некоторое утверждение об универсуме, в синтаксических рамках принимает вид выводов:

$$Z_\epsilon \vdash SU(V,\varepsilon) \to \psi(V,\varepsilon), \qquad (*)$$

где $\psi(V,\varepsilon)$ есть перевод на ϵ-язык утверждения Ψ.

3.2. Каково соотношение формализма $Z_\epsilon + SU(V,\varepsilon)$, т.е. тех утверждений $\psi(V,\varepsilon)$, которое можно вывести путем $(*)$, с общепринятыми формальными теориями множеств ZF, GB, M?

Для записи аксиом этих теорий введем стандартный логический язык $\mathcal{L}_e$ первого порядка с равенством и сигнатурой из единственного бинарного предикатного символа e. Будем этот язык называть e-языком, его формулы – e-формулами, а совокупность всех e-формул обозначим Φ_e (В качестве $\mathcal{L}_e$ можно, конечно, взять сам $\mathcal{L}_\epsilon$). Теперь фиксируем в $\mathcal{L}_\epsilon$ две переменные – V и ε, и определим следующее отображение $\#_{V,\varepsilon}: \Phi_e \to \Phi_\epsilon$, $\varphi \mapsto \varphi^\#$ (подробности и многочисленные "гигиенические" оговорки опущены в надежде, что это не приведет к недоразумениям). Каждой атомарной e-формуле вида $x\,e\,y$ поставим в соответствие ϵ-формулу $\langle x,y\rangle \in \varepsilon$, а равенства оставим без изменений, т.е. в качестве $(x =_e y)^\#$ возьмем $x = y$. Тогда и каждой составной e-формуле ставится в соответствие "такая же" по расположению связок и кванторов ϵ-формула, которую мы еще и V-релятивируем, т.е. ограничим все кванторы одноместным предикатом $\ldots \in V$ (так что $(\exists x\,\psi)^\#$ есть $\exists x \in V\ \psi^\#$). Результат будем называть $\epsilon^\#$-формулой. Полученное отображение $\#_{V,\varepsilon}$ таково, что для любой замкнутой e-формулы φ $\varphi^\#$ "говорит то же самое", но об универсуме $\langle V,\varepsilon\rangle$. В такую $\varphi^\#$ всегда входят свободные переменные V и ε и мы будем записывать ее в виде $\varphi^\#(V,\varepsilon)$. Легко видеть, что для любой аксиомы φ теории $ZF_e \subset \Phi_e$

$$Z_\epsilon \vdash SU(V,\varepsilon) \to \varphi^\#(V,\varepsilon),$$

т.е. $Z_\epsilon + SU(V,\varepsilon)$ сильнее ZF.

Переходя к рассмотрению отношения $Z_\epsilon + SU(V,\varepsilon)$ к теории классов Морса M, определим сначала, для фиксированного универсума (V,ε), отношение $\varepsilon_C \subseteq C \times C$, где $C := 2^V$, следующим образом:

$$\varepsilon_C := \{\langle X,Y\rangle : X \in V \,\&\, Y \in C \,\&\, \check{X} \in Y\} = \{\langle X,Y\rangle : \exists x \in V(\{z \in V : \langle z,x\rangle \in \varepsilon\} = X) \,\&\, Y \in C \,\&\, x \in Y\}$$

Теперь построим следующее отображение $*_{V,\varepsilon}: \Phi_e \to \Phi_\epsilon$, $\varphi \mapsto \varphi^*$. Каждой атомарной ε-формуле вида $X \varepsilon Y$ (понимаемой теперь как утверждение о классах) ставим в соответствие $\in$-формулу $\langle X, Y\rangle \in \varepsilon_C$, а равенства оставляем без изменений. Проведя далее C-релятивизацию для составных формул, построим всё отображение $*_{V,\varepsilon}$. Оно таково, что ε^*-формулы из Φ_ε "говорят" об универсуме классов $\mathfrak{C}_V := \langle C, \varepsilon_C\rangle$, построенном из универсума $\mathcal{V} = \langle V, \varepsilon\rangle$ (в частности, (X есть множество)$^* \leftrightarrow X \in \mathcal{V}$), и имеют два "свободных" $\in$-терма: C и ε_C (и, по-прежнему, две свободные переменные - V и ε - в точном смысле). Легко видеть, что для любой аксиомы φ теории $M_\varepsilon \subset \Phi_\varepsilon$

$$Z_\in \vdash SU(V,\varepsilon) \to \varphi^*(C, \varepsilon_C),$$

т.е. $Z_\in + SU(V,\varepsilon)$ сильнее M .

Содержательно это объясняется тем, что $*_{V,\varepsilon}$- интерпретация схемы аксиом существования классов из M_ε постулирует существование $\mathcal{V}$-класса, т.е. подмножества V, для любой $\in$-формулы вида φ^*, где φ из Φ_ε, в то время как $Z_\in$ - схема аксиом выделения подмножеств обеспечивает существование $\mathcal{V}$-класса для вообще произвольной $\in$-формулы. Поскольку $\Phi_\in$ богаче, чем $\Phi_\varepsilon^* := \{\varphi^* : \varphi \in \Phi_\varepsilon\}$, то M_ε интерпретируется в $Z_\in + SU(V,\varepsilon)$, но не наоборот (хотя бы в силу второй теоремы Геделя о неполноте: в $Z_\in + \exists V \exists \varepsilon\, SU(V,\varepsilon)$ доказуема непротиворечивость M).

4. Теорема об альтернативе изоморфизмов внутренних универсумов.

4.I. Дальнейшее изложение будет проводиться на неформальном математическом языке, но таким образом, что перевод утверждений в $\in$-формулы, а доказательств - в синтаксические выводы в $\in$-языке, представит - можно надеяться - лишь техническую работу. Обычные теоретико-множественные конструкции, воспроизведенные в универсуме $\mathcal{V}$, обозначаются без специального упоминания общепринятым образом с добавлением индекса $\mathcal{V}$, например: $\mathcal{P}_\mathcal{V}(x)$, $\bigcup_\mathcal{V}(x)$, $\omega_\mathcal{V}$, $On_\mathcal{V}$, $f_\mathcal{V}$ есть $\mathcal{V}$-функция и т.д., хотя часто подразумевается, что сами конструкции введены с некоторыми модификациями, аналогичными той, по которой схема аксиом подстановки в ZF преобразована в $\mathcal{V}$-аксиому подстановки (А8) в SU. Так, например, полнота отношения порядка R на x означает, что <u>любое</u> ϵ-подмножество $\hat{x}$, а не только выразимое ϵ^*-формулой, имеет R-наименьший элемент. (таким образом, сами $\mathcal{V}$-понятия в SU значат нечто большее, чем их аналоги в ZF.)

4.2. <u>Теорема</u>. Пусть $\mathcal{V}_1 = \langle V_1, \epsilon_1 \rangle, \mathcal{V}_2 = \langle V_2, \epsilon_2 \rangle$ - универсумы (внутри Z_ϵ). Тогда имеет место следующая альтернатива, т.е. справедливо одно и только одно из трех утверждений:

(i) $\langle V_1, \epsilon_1 \rangle$ изоморфен $\langle V_2, \epsilon_2 \rangle$,

(ii) в V_1 существует кардинал $\varkappa$ (необходимо $\mathcal{V}$-сильно недостижимый) такой, что $\langle V_{1\varkappa}, \epsilon_1 \rangle$ изоморфен $\langle V_2, \epsilon_2 \rangle$,

(iii) в V_2 существует кардинал $\varkappa$ (необходимо $\mathcal{V}$-сильно недостижимый) такой, что $\langle V_1, \epsilon_1 \rangle$ изоморфен $\langle V_{2\varkappa}, \epsilon_2 \rangle$.

Синтаксически это выглядит так:

$$Z \vdash [SU(V_1, \epsilon_1) \,\&\, SU(V_2, \epsilon_2) \to$$

$$(\exists h (h - \epsilon\text{-изоморфизм } \langle V_1, \epsilon_1 \rangle \text{ на } \langle V_2, \epsilon_2 \rangle) \veebar$$

$$\veebar (\exists h \exists \varkappa \in On_{\mathcal{V}_1} (h - \epsilon\text{-изоморфизм} \langle V_{1\varkappa}, \epsilon_1 \upharpoonright V_{1\varkappa} \rangle \text{ на} \langle V_2, \epsilon_2 \rangle \,\&\, In A_{\mathcal{V}_1}(\varkappa)) \veebar$$

$$\veebar (\exists h \exists \varkappa \in On_{\mathcal{V}_2} (h - \epsilon\text{-изоморфизм } \langle V_1, \epsilon_1 \rangle \text{ на } \langle V_{2\varkappa}, \epsilon_2 \upharpoonright V_{2\varkappa} \rangle) \,\&\, In A_{\mathcal{V}_2}(\varkappa))]$$

(здесь $\veebar$ есть символ строгой дизъюнкции). Для всех упомянутых изоморфизмов имеется явное построение (трансфинитной рекурсией по $\mathcal{V}_1$-ординалам).

<u>Следствие</u>. Добавляя к $SU(V,\epsilon)$ аксиому несуществования недостижимых кардиналов $\neg \exists \varkappa \, In A_{\mathcal{V}}(\varkappa)$, получим категоричную теорию $\overline{SU}(V,\epsilon)$ (внутри Z_ϵ):

$$Z_\epsilon \vdash \overline{SU}(V_1, \epsilon_1) \,\&\, \overline{SU}(V_2, \epsilon_2) \to (i).$$

4.3. Для доказательства 4.2 далее потребуются рассуждения по индукции и определения по рекурсии на ординалах из $\langle V, \epsilon \rangle$.

<u>Теорема</u>. Пусть $\langle V, \epsilon \rangle$ - универсум. Тогда

(i) $\forall A \subset On_{\mathcal{V}} [0_{\mathcal{V}} \in A \,\&\, (\alpha \in A \to \alpha'^{\mathcal{V}} \in A) \,\&\, (\hat{x} \subset A \to U_{\mathcal{V}}(x) \in A) \to A = On_{\mathcal{V}}]$,

(ii) $\forall G \forall W [G$ есть функция $\& \, dom(G) = \mathcal{P}(V \times W) \to \exists ! F$

$(F$ есть функция $\& \, dom(F) = On_{\mathcal{V}} \,\&\, rg(F) \subset W \,\&$

$\& \, \forall \alpha \in On_{\mathcal{V}} (F(\alpha) = G(F(\alpha)))]$.

В синтаксическом виде: $Z_\epsilon \vdash SU(V, \epsilon) \to (i) \,\&\, (ii)$.

Доказывается эта теорема так же, как ее аналог в ZF (см., например, Йех [3]) - то, что F и G теперь выходят за пределы V, требует лишь очевидной модификации, допустимость которой обеспечивается $\mathcal{V}$-аксиомой подстановки (А8) и Z_ϵ-аксиомой выделения.

4.4. Пусть $\langle V_1, \varepsilon_1\rangle, \langle V_2, \varepsilon_2\rangle$ - универсумы. Пользуясь теоремой 4.3, построим следующую ϵ-функцию $F: On_1 \to On_2$ (здесь и далее вместо индексов $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ пишутся просто I, 2) и одновременно установим ее свойства.

$F(O_1) = O_2$. Полагая, что на $\hat{\alpha}$ F уже определено, причем

$\forall \beta \in \hat{\alpha}\ F \upharpoonright \hat{\beta}$ есть $<_\varepsilon$-изоморфизм $\hat{\beta}$ на $\widehat{F(\beta)}$, $(*_\alpha)$

определим $F(\alpha)$ и докажем, что $(*)$ остается справедливым и для $\alpha +_1 1$.

Если $\alpha = \alpha^- +_1 1$, то положим $F(\alpha) = F(\alpha^-) +_2 1$ (очевидно, что $(*_\alpha)$ при этом остается справедливым и для $\alpha +_1 1$).

Если α - предельный, т.е. $\alpha = \bigcup_1(\alpha) = (\bigcup\{\hat{\beta}: \beta \in \hat{\alpha}\})^\vee$, то рассмотрим ϵ-множество ($\mathcal{V}_2$-класс) $A = F''(\hat{\alpha}) := \{F(\beta): \beta \in \hat{\alpha}\}$. То, что A действительно является ϵ-множеством, обеспечивается аксиомой выделения во внешней ϵ-теории Z_ϵ. Имеет место один и только один из случаев:

(a_α) $\quad \exists \lambda \in On_2\ \lambda > A$, т.е. $\exists \lambda \in On_2 (A \subset \hat{\lambda})$,

(b_α) $\quad \neg\exists \lambda \in On_2\ \lambda > A$, т.е. $\forall \lambda \in On_2\ \exists \gamma \in A\ (\lambda < \gamma)$.

В случае (a_α) по аксиоме выделения подмножеств (А8') в $\langle V_2, \varepsilon_2\rangle$ $\check{A} \in \mathcal{V}_2$ и, следовательно, определено $\check{A} \in V_2$. Положим $F(\alpha) = \bigcup_2(\check{A}) = (\bigcup\{\widehat{F(\beta)}: \beta \in \hat{\alpha}\})^\vee$. $(*_{\alpha +_1 1})$ проверяется непосредственно.

В случае (b_α) на самом деле $A = On_2$ - иначе мы пришли бы к противоречию с $(*_\alpha)$, т.е. F на $\hat{\alpha}$ есть на самом деле $<_\varepsilon$-изоморфизм $\hat{\alpha}$ на On_2.

В результате в ходе рекурсии по $\mathcal{V}_1$-ординалам имеем альтернативу:

(i) существует $\varkappa \in On_1$ такой, что для него имеет место $(b_\varkappa)$, тогда будет построена $<_\varepsilon$-изоморфная биекция $F: \hat{\varkappa} \to On_2$,

(ii) для всех $\alpha \in On_1$ имеет место (a_α), тогда мы сможем провести рекурсию до конца и получим $<_\varepsilon$-изоморфную инъекцию $F: On_1 \hookrightarrow On_2$, причем здесь снова альтернатива:

(ii') существует $\lambda > F''(On_1)$, тогда имеется наименьший $\varkappa > F''(On_1)$ и F есть $<_\varepsilon$-изоморфная биекция On_1 на $\hat{\varkappa}$,

(ii'') не существует $\lambda > F''(On_1)$, тогда F есть биекция On_1 на On_2.

Суммируя все рассмотрение, получаем следующий результат.

Теорема. Пусть $\langle V_1, \varepsilon_1 \rangle$, $\langle V_2, \varepsilon_2 \rangle$ - универсумы (внутри Z_ϵ). Тогда справедливо одно и только одно из следующих трех утверждений:

(i) On_{v_1} $<_\varepsilon$-изоморфно On_{v_2},

(ii) существует $\varkappa \in On_{v_1}$ такой, что $\hat{\varkappa}$ $<_\varepsilon$-изоморфно On_{v_2}

(iii) существует $\varkappa \in On_{v_2}$ такой, что On_{v_1} $<_\varepsilon$-изоморфно $\hat{\varkappa}$

Для всех упомянутых изоморфизмов имеется явное построение.

4.5. Приступаем к доказательству основной теоремы 4.2. Пусть $\langle V_1, \varepsilon_1 \rangle, \langle V_2, \varepsilon_2 \rangle$ - универсумы. Обозначим постулируемый предыдущей теоремой $<_\varepsilon$-изоморфизм через F. Докажем, что для любого предельного $\lambda \in dom(F)$ имеется изоморфизм $\langle V_{1\lambda}, \varepsilon_1 \rangle$ на $\langle V_{2F(\lambda)}, \varepsilon_2 \rangle$.

Рекурсией до λ определим следующее ϵ-отображение $H: \hat{\lambda} \to V_2^{V_1}$ (и одновременно установим его свойства).

$H(0) = H_0 = \Phi$. Полагая, что на $\hat{\alpha}$ (для $\alpha < \hat{\lambda}$) H уже определено, причем

$\forall \beta \in \hat{\alpha}\ dom(H_\beta) = V_{1\beta}$ и H_β есть ε-изоморфизм $V_{1\beta}$ на $V_{2F(\beta)}$ $\quad (*_\alpha)$

определим H_α и докажем, что $(*_\alpha)$ остается справедливым и для $\alpha +_1 1$.

Если $\alpha = \alpha^- +_1 1$, то $x \in V_{1\alpha}$ влечет $\hat{x} \subset V_{1\alpha^-}$ и, значит, определено ϵ-множество ($\mathcal{V}_2$-класс) $H''_{\alpha^-}(\hat{x}) \subset V_{2F(\alpha^-)}$. По аксиоме выделения в $\langle V_2, \varepsilon_2 \rangle$ оно входит в $\mathcal{V}_2$, и можно положить $H_\alpha(x) = (H''_{\alpha^-}(\hat{x}))^\vee$; таким образом, H_α определено на всем $V_{1\alpha}$. Докажем, что H_α есть изоморфизм.

$$(\forall x, z \in dom(H_\alpha)\ x \neq z \Rightarrow \hat{x} \neq \hat{z}) \Rightarrow H''_{\alpha^-}(\hat{x}) \neq H''_{\alpha^-}(\hat{z})$$

в силу того, что H_{α^-} есть изоморфизм по индуктивному предположению, тогда $H_\alpha(x) \neq H_\alpha(z)$ (т.к. $^\vee$ есть инъекция $\mathcal{V}$ в V). Таким образом, H_α есть инъекция и, как непосредственно проверяется, ε-гомоморфизм. Убедимся, что H_α - биекция $V_{1\alpha}$ на $V_{2F(\alpha)}$.

Так как F есть $<_\varepsilon$-изоморфизм, то $F(\alpha) = F(\alpha^-) +_2 1 \Rightarrow \hat{y} \subset V_{2F(\alpha)}$ и, значит, определено $\in$-множество ($\mathcal{V}_1$-класс) $H_{\alpha^-}^{-1}(\hat{y}) \subset V_{1\alpha^-}$, которое входит в $\mathcal{V}_1$, и, следовательно, существует $x = (H_{\alpha^-}^{-1}(\hat{y}))^\vee \in V_{1\alpha}$, причем понятно, что $H_\alpha(x) = y$. Непосредственно проверяется, что H_α^{-1} также является ε-гомоморфизмом.

Если α - предельный, т.е. $\alpha = U_1(\alpha) = (\bigcup\{\hat{\beta} : \beta \in \hat{\alpha}\})^\vee$, то определим $H_\alpha = \bigcup\{H_\beta : \beta \in \hat{\alpha}\}$. Поскольку $F(\alpha) = (\bigcup\{F(\hat{\beta}) : \beta \in \hat{\alpha}\})^\vee$, то H_α отображает $V_{1\alpha}$ на все $V_{2F(\alpha)}$. Его биективность и ε-изоморфность очевидны в силу $(*_\alpha)$.

Наконец, полагая $H = \bigcup\{H_\alpha : \alpha \in \hat{\lambda}\}$, получим требуемый изоморфизм $V_{1\lambda}$ на $V_{2F(\lambda)}$. Совершенно очевидно, что в зависимости от того, какая из 3 возможностей теоремы 4.4. имеет место, только что указанная конструкция H в силу $\mathcal{V}$-аксиомы регулярности позволит получить изоморфизм либо V_1 на V_2, либо $V_{1\varkappa}$ на V_2, либо V_1 на $V_{2\varkappa}$.

Осталось лишь добавить, что поскольку в двух последних случаях $V_{1\varkappa}$ или $V_{2\varkappa}$ есть модели SU, то $\varkappa$ является сильно недостижимым кардиналом в V_1 или V_2 (в $\mathcal{V}$-смысле, тем более в смысле теории ZF, если ее интерпретировать в SU). Теорема 4.2 доказана.

5. ZF в качестве внешней теории множеств.

5.1. Хотя принятие ZF в качестве внешней теории множеств плохо согласуется с изложенным в начале п.3 соображениями методологического характера, оно все же позволяет прояснить место теории SU в ряду общепринятых теорий множеств, а именно: SU интерпретируется в $ZF + \exists \varkappa \, InA(\varkappa)$. Более конкретно, справедлива

<u>Теорема</u>. В $ZF_\in$ выводимы формулы

(i) $InA(\varkappa) \rightarrow SU(R_\varkappa, \in \restriction R_\varkappa)$,

(ii) $SU(V, \varepsilon) \rightarrow \exists h \exists \varkappa (h$ есть изоморфизм $\langle V, \varepsilon \rangle$ на $\langle R_\varkappa, \in \rangle \,\&\, InA(\varkappa))$.

Здесь $R_\varkappa$ - этажи универсума фон Неймана в $ZF_\in$.

<u>Следствие</u>. $ZF_\in \vdash \exists V \exists \varepsilon \, SU(V, \varepsilon) \leftrightarrow \exists \varkappa \, InA(\varkappa)$.

5.2. Для доказательства теоремы уже имеются практически все необходимые конструкции. Прежде всего, в ZF_ϵ утверждение (ii) теоремы 4.3 может быть сформулировано таким образом (жирные буквы $\mathbb{G}$, $\mathbb{F}$, $\mathbb{V}$ обозначают ZF_ϵ-классы, т.е. ϵ-формулы, через $\mathbb{V}$ будем обозначать универсум всех ϵ-множеств): для произвольной функции $\mathbb{G}$ на $\mathbb{V}$ существует единственная функция F на On_V, такая что $\forall\alpha\in On_V\, \mathbb{F}(\alpha)=\mathbb{G}(\mathbb{F}\restriction\hat{\alpha})$. В силу ZF_ϵ-аксиомы подстановки F будет ϵ-множеством, так что последняя формулировка практически равносильна 4.3(ii). Теперь, заменив $\langle V_2, \epsilon_2\rangle$ на $(\mathbb{V}, \epsilon)$ и пользуясь ZF_ϵ-аксиомой подстановки, можно осуществить такие же конструкции F и H, как в доказательствах 4.4, 4.5. Поскольку возможности (i), (ii) альтернатив теорем 4.4, 4.2 очевидным образом отпадают, получаем утверждение (ii) теоремы 5.1. Утверждение (i) проверяется непосредственно (то, что $\langle R_{\varkappa+1}, \epsilon\restriction R_{\varkappa+1}\rangle$ есть модель теории M - факт известный, однако, как видим, $In A(\varkappa)$ означает нечто большее).

6. Категоричность и независимость.

Во избежание недоразумений в этом вопросе следует, по-видимому, отметить, что категоричность теории $\overline{SU}(V,\epsilon) := SU(V,\epsilon) \& \neg\exists\varkappa\, In A_V(\varkappa)$ отнюдь не означает выводимость либо опровержимость в $\overline{SU}(V,\epsilon)$ (вместе с Z_ϵ) любой ϵ-формулы $\varphi(V,\epsilon)$, "говорящей" о $\langle V,\epsilon\rangle$, а влечет лишь следующую схему ϵ-теорем

$$Z_\epsilon \vdash [\overline{SU}(V,\epsilon) \& \varphi(V,\epsilon)] \to \forall V'\forall\epsilon'[\overline{SU}(V',\epsilon') \to \varphi(V',\epsilon')].$$

Так, например, в отношении континуум-гипотезы CH из теоремы 5.1(ii) следует

$$ZF_\epsilon + CH_\epsilon \vdash \overline{SU}(V,\epsilon) \to CH_V(V,\epsilon),$$
$$ZF_\epsilon + \neg CH_\epsilon \vdash \overline{SU}(V,\epsilon) \to \neg CH_V(V,\epsilon).$$

Если $ZF + \exists V\exists\epsilon\, SU(V,\epsilon)$ непротиворечива, то непротиворечивы также $ZF_\epsilon + \exists V\exists\epsilon(SU(V,\epsilon) \& CH_V(V,\epsilon))$ и $ZF_\epsilon + \exists V\exists\epsilon(SU(V,\epsilon) \& \neg CH_V(V,\epsilon))$ (в силу независимости CH_ϵ от $\exists\varkappa\, In A_\epsilon(\varkappa)$).

7. Заключительные замечания - "математические структуры против формальных теорий"

Погружение теории универсума $\langle V, \varepsilon \rangle$ в некоторую внешнюю формальную теорию множеств не следует, видимо, считать обязательным шагом, необходимость которого диктуется соображениями строгости рассмотрения (подразумевается не само осуществление процедуры погружения, а его принципиальная возможность). Ведь само понятие формальной системы вводится на обычном математическом интуитивном языке в рамках некоторого интуитивного теоретико-множественного и логического базиса (в дальнейшем обозначаемого ИБ), и как бы далеко не тянулась цепочка формализмов - теории, метатеории, мета-метатеории..., верхним уровнем все равно останется обычный математический язык и формулируемый в нем ИБ, в которых рассматривается вся цепочка. Единственное, что можно сделать - по возможности сократить объем ИБ.

Идущее от гильбертовского формализма введение теорий множеств в формальных логических языках позволяет изгнать из ИБ трансфинитные конструкции, рассматривая их как чисто символьные - синтаксические - объекты.

Но при этом возникает ряд трудностей - сколемовский релятивизм для языков первого порядка, неадекватность семантики и синтаксиса для языков высших порядков (семантика в смысле Генкина адекватна, но несколько искусственна).

В то же время, оставаясь в рамках того же самого ИБ, можно ввести универсум множеств как структуру Бурбаки (п.2) и, таким образом, иным, не синтаксическим способом представить трансфинитные конструкции как формальные объекты. Представляется, что подобный подход обладает рядом преимуществ. Работа с универсумом множеств непосредственно как структурой Бурбаки, а не в терминах теорий моделей, более привычна для математика, а естественность введения аксиом высших порядков при таком подходе позволит, возможно, пролить свет на некоторые проблемы теории множеств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурбаки Н. Теория множеств. - М.: Мир, 1965. - 455с.
2. Мостовский А. Конструктивные множества и их приложения. - М.: Мир, 1973. - 256с.
3. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. - М.: Мир, 1973. - 147с.
4. Weston T. Kreisel, the continuum-hypothesis and second order set theory // J.Phil. Logic. - 1976, Vol. 5. - P. 281-298.

ЛГУ им. П.Стучки Поступила 20.12.1984
12.03.1985

Vavilov, N.A., On solution of systems of homogeneous linear equations, 37-41.

Let a be an m×n matrix (where m<n) over a commutative ring R which is right-unimodular, Then any solution $x \in R^n$ of the linear system ax=0 is a linear combination of some standard solutions which have at most m+1 non-zero coordinates each (an explicit formula for coefficients of such linear combination is given). For m=1 this was proved earlier by A.A.Suslin and for m=2 by M.S.Tulenbaev. This question is of interest in view of the known problem, whether the elementary subgroup is normal in the corresponding Chevalley group.

Volkov, N.D., Transition from a relation algebra to a Halmos algebra, 43-53.

By a Halmos algebra we mean a locally finite polyadic equality algebra. We deal with non-homogeneous Halmos algebras. In the paper, a functor from the category of relation algebras to that of Halmos algebras is constructed.

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 519.21:57

А.П.Карташов

КОМБИНАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ АКТИВНОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ФОРМАЛЬНЫХ НЕЙРОНОВ

Мы рассмотрим две комбинаторные задачи, естественно возникающие при анализе динамики функционирования стохастически организованной сети нейронов Мак Каллока - Питтса. Понятие формального нейрона, введенное в [4] , оказалось весьма плодотворным как для моделирования различных биологических объектов - мозга, отделов мозга и нейронных структур отдельных органов, так и для развития многих проблем теоретической кибернетики, в частности, оно фактически положило начало теории конечных автоматов.

Проводимое ниже определение формального нейрона эквивалентно исходному определению [4] . Пусть задана система

$$\mathcal{N} = (\mathcal{A}, S, \mathcal{B}, \varphi, \psi),$$

где $\mathcal{A}, S, \mathcal{B}$ - конечные алфавиты, причем $\mathcal{B} = \{0,1\}$, буква алфавита $\mathcal{A}$ содержательно интерпретируется как слово фиксированной длины в бинарном алфавите, а множество S конечно и непусто. (Заметим, что мы не исключаем случая, когда $\mathcal{A}$ состоит из слов нулевой длины). Пусть функция переходов $\varphi: S \times \mathcal{A} \to S$ определена так (здесь $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_k\}$, $a \in \mathcal{A}$):

$$\varphi(s_0, a) = \begin{cases} s_k, & \text{если число единиц в } a \text{, рассматриваемой как слово в алфавите } \{0,1\} \text{, не меньше } \vartheta \text{, где } \vartheta \text{ - целое число, называемое порогом;} \\ s_0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\varphi(s_i,a)=s_{i-1}\ , \text{ если } i\neq 0 .$$

Функция выходов ψ зависит только от S (автомат Мура):

$$\psi(s_\kappa)=1\ ,$$
$$\psi(s_i)=0\ , \text{ если } i\neq\kappa .$$

Эта простая схема обладает, однако, набором важнейших свойств реального нейрона. Представим себе ячейку с n входами и одним выходом (см. рис.I).

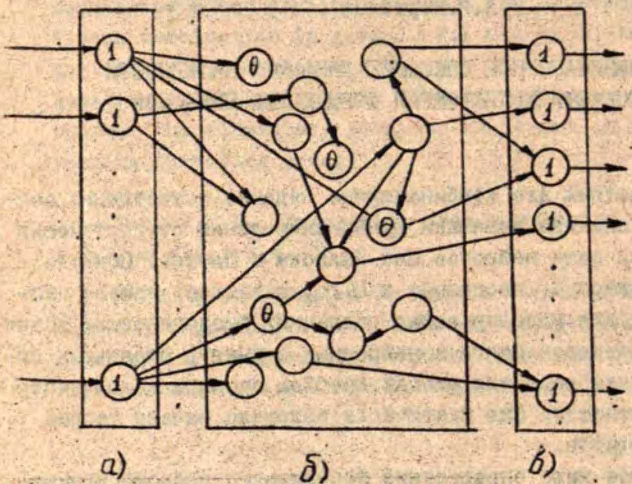


Рис. I . Трехслойная сеть формальных нейронов

а) Входной слой (рецепторы)

б) Серединные нейроны (ассоциативный слой)

в) Выходной слой (эффекторы)

По каждому из n входов в моменты времени $0, \delta, 2\delta, \ldots,$ $m\delta, \ldots,$ называемые тактовыми моментами, поступают сигналы 0 или I, в совокупности образующие слово в алфавите, $\{0,1\}$, которое можно рассматривать как букву алфавита A.

Аналогами этих сигналов являются для реального нейрона нервные импульсы (потенциалы действия -ПД), поступающие на него от других нейронов или из внешней среды.

Если ячейка находится в состоянии S_0 ("готов к работе"), и количество пришедших на данном такте импульсов превосходит некоторую критическую величину ϑ, называемую порогом, то состояние ячейки меняется на S_k, и на выход посылается единица. Эти свойства являются весьма точным отражением характеристических свойств реального нейрона - способности к пороговой обработке сигнала и изменения внутреннего состояния клетки после прохождения сигнала.

После того как на выходе появилась единица рассматриваемый автомат в течение фиксированного числа тактов не реагирует на поступающие сигналы. Соответствующее свойство реального нейрона называется абсолютной рефрактерностью.

Сетью формальных нейронов называется ориентированный граф S, в котором каждой вершине поставлен в соответствие некоторый автомат описанного вида, причем полустепень захода вершины равна длине слова $a \in A$ в бинарном алфавите - каждое входящее ребро определяет одну из его позиций,- а полустепень исхода не связана со структурой $N=(A,S,B,\psi,+)$ (мы полагаем все выходы данного нейрона тождественными экземплярами выхода B, определенного выше). Каждое ребро, соединяющее два нейрона, может теперь быть проинтерпретировано очевидным образом как результат отождествления входа одного и экземпляра выхода другого.

Таким образом, сеть можно характеризовать структурой ориентированного графа, порогами ϑ_i, $1 \le i \le N$, где N - число нейронов, продолжительностью каждого периода рефрактерности δ (в дальнейшем мы всюду опускаем тактовый множитель δ, общий для всех нейронов сети, нумеруя тактовые моменты времени просто натуральными числами) и начальным состоянием каждого нейрона $\bar{S}=(S^1_{i1}, S^2_{i2}, \dots, S^N_{iN})$.

По аналогии с биологическими нейронными сетями переход нейрона в состояние S_k называется его возбуждением, а сеть называется возбужденной, если она содержит возбужденные нейроны. Сеть называется элементно-однородной, если пороги всех нейронов и длины их рефрактерных периодов совпадают. Рассматриваются также несколько типов структурно-однородных сетей, например, сети с равным числом входов n_a или (и) выходов n_b у каждого нейрона.

Заметим, что состояние сети в любой момент времени полностью определяется ее начальным состоянием, т.е. сеть в целом представляет собой детерминированный автомат. Некоторые состояния сети представляют особый интерес, например, $\bar{S}_0 = (S_0^1, \ldots S_0^N)$, т.е. затухание возбуждения. Поскольку число состояний сети ограничено, в принципе всегда можно установить, имеется ли на сети циклический режим, не содержащий $\bar{S}_0$, достигается ли $\bar{S}_0$ из данного состояния и т.д.

Однако число состояний, которые при этом в принципе необходимо рассмотреть, часто бывает весьма велико ($N = \prod_i (k_i + 1)$), поэтому синтез эффективных алгоритмов, позволяющих быстро решать для данной сети проблему циклов, является весьма важной задачей.

Этому вопросу посвящена весьма обширная литература (см. например, [2,3,5]).

Сеть формальных нейронов, также как и отдельный нейрон, можно считать автоматом Мура, если определить сетевой вход как набор входов некоторых нейронов сети, не отождествляемых с выходами других нейронов, и аналогичным образом - сетевой выход. Как и для нейрона, входной алфавит представляет собой множество слов фиксированной длины в алфавите $\{0, I\}$; выходной алфавит имеет тот же вид. Обычно задачи моделирования в нейробионике (и, в частности, важнейшая задача моделирования условного и безусловного рефлексов) формулируются для следующего класса сетей формальных нейронов.

Все нейроны сети разбиваются на три класса: входные нейроны (или, исходя из нейрофизиологической аналогии, рецепторы), серединные, или промежуточные нейроны и выходные нейроны (эффекторы). Сетевые входы инцидентны лишь нейронам I класса, причем вход каждого из этих нейронов имеет алфавит $\{0, I\}$ (на геометрическом языке полустепень захода всех этих нейронов равна I), аналогично сетевые выходы инцидентны лишь нейронам Ш класса (с тем же условием на выходной алфавит каждого нейрона).

Три класса нейронов составляют в ориентированном графе сети линейную систему подграфов (т.е. существует лишь ребра из I в П и из П в Ш, но не наоборот, и нет ребер между I и Ш), а внутри набора входных и выходных нейронов нет никаких связей. Структура сети описанного типа представлена на рис. 2.

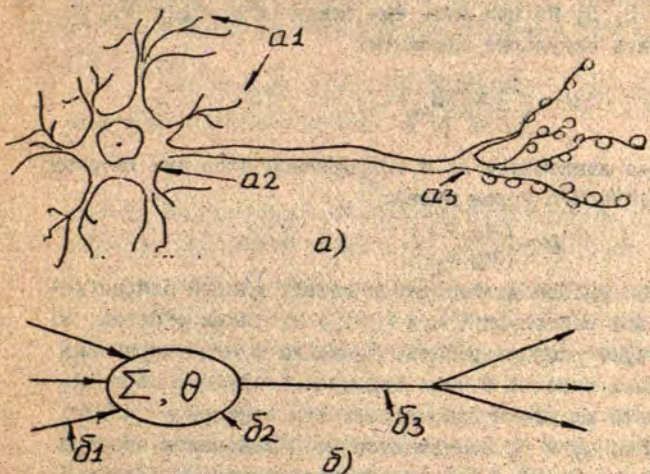


Рис. 2 . Схематическое изображение а)реального и б)формального нейрона. аI) дендриты; а2) сома; а3) аксон; бI) входы; б2) переходный элемент; б3) выход.

Пороги всех нейронов I и Ш классов полагаются равными I, а число состояний - 2 (отсутствие рефрактерности).

Ввиду отсутствия обратных связей между различными классами нейронов они обычно называются слоями, а сама сеть - трехслойной сетью формальных нейронов.

Как и всякий ориентированный граф, трехслойная сеть формальных нейронов (вернее, ее геометрическая структура) может быть задана матрицей связности. Мы полагаем элемент $m_{ij}=1$, если от нейрона i к нейрону j ведет ребро с нужной ориентацией, и 0 - в противном случае. Если число нейронов в каждом из слоев равно N_1, N_2 и N_3 соответственно, то матрица имеет размеры $N\times N$, где $N=N_1+N_2+N_3$ -общее число нейронов в сети . Соответственно слоистой структуре сети, матрица связности может быть разбита на 9 блоков $\mathcal{M}_{ij}$ размера $N_i\times N_j$, i,j=I, 2, 3. Из них лишь три блока ($\mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{22}$ и $\mathcal{M}_{23}$) могут содержать ненулевые элементы:

$$\mathcal{M}=\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \mathcal{M}_{12} & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ,$$

поэтому удобно записывать ее в сокращенном виде как матрицу размера $(N_1+N_2)\times(N_2+N_3)$ с углом нулей:

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{12} & 0 \\ \mathcal{M}_{22} & \mathcal{M}_{23} \end{pmatrix}.$$

Этот язык удобен для описания сетей, каждый нейрон которых имеет два состояния (S_0 и $S_\kappa=S_1$) и, таким образом, в сети отсутствует рефрактерность. Динамика функционирования сети может быть описана в этих терминах следующим образом. На каждом такте мы можем рассмотреть три вектора η^l, ξ^l, ζ^l размерности N_1, N_2 и N_3 соответственно. Компонента вектора η_i^l (соответственно ξ_i^l и ζ_i^l) полагается равной 0, если i-й нейрон соответствущего слоя находится в момент $T=l$ в состоянии S_0 ("не горит"), и I в противном случае. Состояние сети на следущем шаге $\Xi^{l+1}=(\xi^{l+1},\eta^{l+1},\zeta^{l+1})$ может быть выражено через Ξ^l и $\mathcal{M}$ так: ξ^{l+1} - вектор входов - задается априорно, а η^{l+1} и ζ^{l+1} вычисляются в виде

$$\xi^{l+1}=\bar{H}^\vartheta(\vartheta\mathcal{M}_{12}\eta^l+\mathcal{M}_{22}\xi^l),$$
$$\zeta^{l+1}=\bar{H}^1(\mathcal{M}_{23}\xi^l),$$

где $\bar{H}^\vartheta$ и $\bar{H}^1$ - вектор-функции Хевисайда соответствующей размерности (N_2 и N_3 соответственно):

$$H_i^\vartheta(\eta)=\begin{cases}1 & \text{если } \eta_i>\vartheta,\\ 0 & \text{если } \eta_i<\vartheta,\end{cases}$$

и аналогично для $\bar{H}_i^1(\vartheta)$.

Если последовательность векторов $\eta^0, \eta^1, \ldots, \eta^k, \ldots$ сходится к нулю (что равносильно, ввиду целочисленности всех их компонент, обращению всех векторов в нуль, начиная с некоторого), то возбуждение в сети в некоторый момент затухает. В дальнейшем нас будут интересовать лишь такие режимы работы сети, для которых только η^0 отличен от 0, а ξ^0 и ζ^0 равны нулю (активность под влиянием однократного возбуждения).

В этом случае одной из важнейших характеристик сети является суммарный выход

$$\zeta^+ = \sum_{i=1}^{T} \zeta^i ,$$

причем суммирование ведется до того момента времени T, в который состоянием нейронов II слоя сети будет $\bar{S}_0 = (S_1^0, S_2^0, \ldots, S_{N_2}^0)$, т.е. до полного затухания первоначального возбуждения.

Существуют два класса проблем, связанных с динамикой активности трехслойных сетей формальных нейронов, описанных выше. Первый класс задач, аналогичный задачам о сетях общего вида, состоит в отыскании наиболее эффективных вычислительных алгоритмов, позволяющих определить те или иные динамические характеристики, число тактов до затухания при данном начальном возбуждении, суммарный выход, доказательство того, что данное возбуждение порождает циклический (незатухающий) режим.

С другой стороны, при задании некоторых макроскопических характеристик сети (числа нейронов в каждом слое, числа связей между слоями и т.д.) встает проблема определения тех же параметров, что и для задач I класса, но не для индивидуальной сети, а в среднем по всему классу сетей с данными характеристиками. Наиболее распространенной содержательной интерпретацией этого подхода является концепция стохастического порождения: мы считаем, что исследуемые сети порождаются некоторым случайным процессом. Так,сети с фиксированным числом связей в $\mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{22}$ и $\mathcal{M}_{23}$ (n_1, n_2 и n_3) можно представлять как возникающие при случайном размещении n_1 объектов по N_1N_2 ячейкам, n_2 объектов по N_2^2 ячейкам и n_3 объектов по N_2N_3 ячейкам.

Часто бывает разумно рассматривать сеть, для которой известны лишь средняя плотность связей в $\mathcal{M}_{12}$, $\mathcal{M}_{22}$ и $\mathcal{M}_{23}$ обозначаемая через p_1, p_2 и p_3 соответственно, а наличие некоторой связи не зависит от всех остальных. Эта конструкция может быть осуществлена с помощью независимых последовательных реализаций стандартной (т.е. равномерно распределенной на отрезке [0,I] случайной величины ξ, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, ..., $\xi^{(n)}$, ...; очередной элемент матрицы $\mathcal{M}_{ij}$ полагается равным I, если соответствующая реализация $\xi^{(n)} > 1-p$. Мы рассмотрим несколько задач на сетях этого последнего типа.

Нашим объектом будет трехслойная сеть формальных нейронов с числом нейронов в слоях, равным N_1, N_2 и N_3 соответственно. Вероятность наличия связи между нейроном I и П слоев обозначим через p_1, внутри П слоя - p_2, а между нейронами П и Ш слоев - через p_3.

Пусть входы сети обозначены через R_1, R_2, ..., R_{N_1}, нейроны П слоя - через S_1, S_2, ..., S_{N_2}, а нейроны Ш - через T_1, T_2, ..., T_{N_3}. Будем рассматривать лишь такие сети, которые затухают после однократной активации любого из входов R_i. Тогда каждому из входов соответствует свой суммарный вектор выходов $\gamma^+(R_i)$. Если одна из его компонент j строго больше всех остальных, скажем, что вход R_i связан с выходом T_j. Будем говорить, что R_i связан с T_j однозначно, если ни один другой вход с T_j не связан. Иначе говоря, сеть задает отображение множества своих входов во множество своих выходов. Назовем числом однозначностей данной сети количество выходов, обладающих при этом отображении ровно одним прообразом. Одной из важнейших задач в моделировании безусловного рефлекса является определение вероятности появления данного числа однозначностей на сети с параметрами (N_1, N_2, N_3, p_1, p_2, p_3). Эта задача рассматривается в различных предположениях относительно порогов нейронов II слоя и их рефрактерностей.

В наиболее простом случае, когда пороги всех нейронов равны, а число состояний равно двум (нет рефрактерности), ниже будут получены решения этой задачи.

К сожалению, даже в этом случае найти точные решения не удается (и вряд ли это вообще возможно; основания для подобного предположения будут видны из дальнейшего). Мы вынуждены прибегать к обычной статистической идеализации, заменив некоторые случайные величины их средними значениями и предположив, что другие нескоррелированны.

Применяемый метод отчасти напоминает метод корреляционных функций Боголюбова; он позволяет находить последовательные приближения к искомой величине, используя результаты предыдущих шагов. Каждое следующее уточнение вызывает значительное возрастание объема вычислений и сложности получаемых формул. Точность решения оценивается путем сравнения с экспериментальными данными - результатом машинного моделирования сетей формальных нейронов и их работы.

Нулевое приближение. Наиболее грубое предположение состоит в том, что отображение $f: R \to T$ является случайным отображением конечных множеств. Действительно, каждый вход *a priori* отображается в любой из выходов с равной вероятностью. Мы, однако, пренебрегаем тем, что, во-первых, не все входы куда-то отображаются, и, во-вторых, тем, что

$$p(f(r_i) = t_j \mid f(r_k) = t_j) > p(f(r_i) = t_j).$$

Последнее обстоятельство вызывается прежде всего тем, что число входов нейронов III слоя не фиксировано, а является биномиально распределенной случайной величиной, т.е. в большинстве сетей есть "слабые" и "сильные" выходы. Тем не менее, уже это приближение позволяет получить интересные результаты.

Рассмотрим произвольное отображение f множества A_m из m элементов во множество A_n из n элементов. Существует ровно

n^m таких отображений. Если $F(m,n,k)$ отображений обладают k однозначностями, то вероятность получить k однозначностей при случайном отображении равна $p=F(m,n,k)/n^m$. Вычислим $F(m,n,k)$.

Прежде всего, очевидно, что при $k>m$ (или $k>n$) $F=0$. Некоторые k элементов из A_m отображаются в k элементов A_n. Те и другие могут быть выбраны $C_m^k C_n^k$ способами, а число взаимнооднозначных отображений между ними равняется $k!$. Остальные $(m-k)$ элементов A_m должны быть отображены в $(n-k)$ элементов A_n так, чтобы всякий элемент - образ имел хотя бы два прообраза. Любое отображение рассматриваемого класса задает разбиение множества прообразов на подмножества неединичного объема. Подсчитаем число этих (неуединяющих) разбиений $W(r,s)$, где $W(r,s)$ обозначает число указанных разбиений множества из r элементов на S частей.

Очевидно, что $W(1,*)=0$ и $W(*,0)=0$, а $W(0,*)=1$ (причем $W(0,0)$ также равно I).

Понятно, что

$$W(r,s)+C_r^1W(r-1,s-1)+C_r^2W(r-2,s-2)+\ldots+C_r^{r-s+1}W(r-s+1,1)=S(r,s),$$

где через $S(r,s)$ обозначено число Стирлинга II рода - число (произвольных) разбиений множества из r элементов на s частей.

Записав это тождество для $S(r,s), S(r-1,s-1),\ldots,S(r-s+1,1)$, получим систему линейных уравнений с треугольной матрицей:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & C_1^r & \ldots\ \ldots & C_{s-1}^r & S_s^r \\ & 1 & C_1^{r-1}\ \ldots & C_{s-2}^{r-1} & S_{s-1}^{r-1} \\ & & 1\ \ \ldots & \ldots & \\ 0 & & & 1 & S_1^{r-s+1} \end{array}\right),$$

где числа Стирлинга снабжены вертикальной индексацией, а на последнем месте в правом столбце стоит S_1^{r-s+1}, если $r-s+1\neq 1$ и 0 в противном случае. Поскольку главный определитель системы равен I, имеем, что

$$W_s^r = \begin{pmatrix} S_s^r & C_1^r & \dots & C_{s-1}^r \\ S_{s-1}^{r-1} & 1 & \dots & \dots C \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1^{r-s+1} & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$W_s^r = S_s^r - S_{s-1}^{r-1}\cdot C_1^r + S_{s-2}^{r-2}\cdot C_1^{r-1} + \dots + (-1)^l S_{s-l}^{r-l}\mathcal{D}_l , \qquad (I)$$

где через $\mathcal{D}_l$ обозначен определитель

$$\begin{vmatrix} C_1^r & \dots & \dots & C_l^r \\ 1 & C_1^{r-1} & \dots & \dots \\ & 1 & \dots & \dots \\ & & \dots & \dots \\ 0 & & 1 & C_1^{r-l} \end{vmatrix}$$

Преобразуем его следующим образом: разделим первую строку на $r!$, вторую – на $(r-1)!$ и т.д. Затем домножим столбцы в обратном порядке на дополнительные к r факториалы и получим равенство

$$\mathcal{D}_l = \frac{r!}{(r-l)!}\begin{vmatrix} 1 & 1/2! & \dots & \dots & 1/l! \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1/(l-1)! \\ & 1 & 1 & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \\ & & & 1 & 1/2! \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{r!}{(r-l)!}\tilde{\mathcal{D}}_l .$$

Раскладывая этот определитель по первой строке получим, что

$$\tilde{\mathcal{D}}_l = \tilde{\mathcal{D}}_{l-1} - \frac{1}{2!}\tilde{\mathcal{D}}_{l-2} + \frac{1}{3!}\tilde{\mathcal{D}}_{l-3} - \dots + \frac{(-1)^{l-1}}{l!}\tilde{\mathcal{D}}_1 .$$

Первые определители могут быть вычислены: $\tilde{\mathcal{D}}_1 = 1$, $\tilde{\mathcal{D}}_2 = 1/2$. Докажем по индукции, что $\tilde{\mathcal{D}}_l = \frac{1}{l!}$. Действительно, подставив в рекуррентное соотношение для $\tilde{\mathcal{D}}_l$ выражения $\tilde{\mathcal{D}}_{l-i}$, получим

$$\tilde{\mathcal{D}}_l = \frac{l}{(l-1)!} - \frac{1}{2!(l-2)!} + \dots + \frac{(-1)^l}{l!} ,$$

а, домножив обе части на $l!$, –

$$l!\,\tilde{\mathcal{D}}_l = C_l^1 - C_l^2 + \dots + (-1)^{l-1} .$$

Исходя из тождества

$$0 = (1-1)^{\ell} = 1 - C_{\ell}^{1} + \ldots + (-1)^{\ell},$$

находим, что $\ell! \mathcal{D}_{\ell} = 1$, что и требовалось.

Таким образом, $\mathcal{D}_{\ell} = C_{r}^{\ell}$, причем суммирование ведется в обратном по сравнению с (I) порядке.

Итак,

$$W_{s}^{r} = \sum_{i=0}^{\ell} (-1)^{i} C_{s-i}^{r} s^{r-i}, \qquad (2)$$

а F может быть выражено через числа Стирлинга, исходя из (2). Полученный результат может рассматриваться как линейная часть разложения для истинного значения вероятности наличия K однозначных связей. Последующие члены разложения, вывод которых не приводится здесь из-за чрезмерной громоздкости формул, позволяет получить значения, близкие к экспериментальным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г.П.Егорычев. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм.-Новосибирск: Наука, 1977.- 282 с.
2. Б.Г.Сушков. Моделирование нейронной сети, генерирующей устойчивую ритмическую импульсацию//Космическая биология и медицина.-1970.-Т.4, №4.-С.58-63.
3. Lopes da Silva F.H. et al. Models of neuronal populations. The basic mechanisms of rhythmicity//Progress in brain research.-1976.-Vol.45.-P.281-308.
4. Mc Culloch W.S., Pitts W.A logical calculs of ideas immanent in nervous activity//Bull. Math. Biol.-1943.-Vol. 5.-P.115-133.
5. Ventriglia F. Kinetic theory of neural systems. Analysis of the activity of the two-dimensional model//Biol. Cyb. -1983.-Vol.46.-P.93-100.

МИРЭА

Поступила 10.04.1984

20.11.1985

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 519.48

Р.С. Липянский

О ТРИАНГУЛИРУЕМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБР ЛИ

1. В статье даётся описание конечномерных алгебр Ли (p-алгебр Ли), допускающих представление треугольными матрицами над алгебраически замкнутыми или конечными полями.

Основные обозначения:

$var\ L$ - многообразие, порождённое алгеброй Ли,
$var(V,L)$ - многообразие, порождённое лиевской парой (V,L),
$\mathfrak{A}$ - многообразие абелевых алгебр Ли (p-алгебр Ли),
$\mathfrak{A}_p$ - многообразие абелевых p-алгебр Ли над K с тождеством $x^{p^m}-x=0$, где $|K|=p^m$,
$\mathfrak{S}_n$ - многообразие n-стабильных лиевских пар (p-пар),
$\mathfrak{M}_{n,p}$ - многообразие p-алгебр Ли, обладающих $\mathfrak{M}$-рядом, у которого $(n+1)$ член равен 0 (см.[3]),
$\mathfrak{N}_n$ - многообразие n-нильпотентных алгебр Ли,
$T(n,K)$ - алгебра Ли треугольных матриц n-ого порядка над полем K,
$T_p(n,K)$ - соответствующая ей p-алгебра Ли,
$U(L)$ - универсальная обёртывающая алгебра алгебры L
$\overline{U}(L)$ - u-алгебра p-алгебры Ли L.
Если $\mathfrak{X}$ - многообразие представлений алгебр Ли, то $\overrightarrow{\mathfrak{X}}$ - квазимногообразие, состоящее из всех алгебр Ли, допускающих точное представление в $\mathfrak{X}$.
Если Θ - многообразие алгебр Ли, то $\mathfrak{X}\times\Theta$ - класс всех

представлений (V, L), у которых в L имеется идеал H, такой, что $L/H \in \Theta$, и $(V, H) \in \mathfrak{X}$.

Соответствующие обозначения и операции над многообразиями мы будем без специальных оговорок использовать также в категории p-алгебр Ли.

В работах [2], [3] приводятся тождества, задающие многообразия $\operatorname{var} T(n, K)$ и $\operatorname{var} T_p(n, K)$, а также многообразия $\operatorname{var}(K^n, T(n,K))$ и $\operatorname{var}(K^n, T_p(n,K))$, порожденные естественными представлениями алгебр $T(n, K)$ и $T_p(n, K)$ над полем K. Приведем соответствующие формулировки в удобном для дальнейшего изложения виде.

<u>Теорема I.I.</u> а) Если поле K бесконечно, то $\operatorname{var} T(n, K)$ задается тождеством

$$[\dots[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]] = 0. \qquad \text{(I)}$$

б) Если поле K конечно ($|K| = p^m$), то $\operatorname{var} T(n, K)$ задается тождеством

$$[\dots[x_1, x_2] \dots x_n] = 0, \qquad (2)$$

где вместо x_i стоят слова вида $x_i^{p^m} - x_i$ или $[x_i, y_i]$.

<u>Теорема I.2.</u> а) Если поле K бесконечно, то $\operatorname{var} T_p(n, K)$ задается тождествами

$$[\dots[x_1, x_2] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}]] = 0,$$
$$[\dots[x_1, x_2] \dots [x_{2n/p-1}, x_{2n/p}]]^p = 0,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$[x_1, x_2]^{p^k} = 0 \qquad (3)$$

если $p^{k-1} \leq n < p^k$.

б) Если поле K конечно ($|K| = p^m$), то $\operatorname{var} T_p(n, K)$ задается тождествами вида

$$[\dots[v_1, v_2] \dots v_n] = 0,$$
$$[\dots[v_1, v_2] \dots v_{n/p}]^p = 0,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$v_i^{p^k} = 0, \qquad (4)$$

если $p^{k-1} \leq n < p^k$, где вместо v_i стоят слова вида $x_{1i}^{p^m} - x_{1i}$ или $[y_1, y_2]$.

<u>Теорема I.3.</u> а) Если поле K бесконечно, то $\operatorname{var}(K^n, T_p(n,K))$ задается тождеством

$$[x_1, x_2] \cdot [x_3, x_4] \dots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0 \qquad (5)$$

б) Если поле K конечно ($|K| = p^m$), то $\operatorname{var}(K^n, T_p(n,K))$ задается тождествами вида

$$v_1 v_2 \ldots v_n = 0 \quad . \tag{6}$$

где вместо v_i стоят слова вида $x_{1i}^{p^m} - x_{1i}$ или $[y_{1i}, y_{2i}]$. Иными словами, верны следующие равенства

$$var(K^n, T_p(n,K)) = \begin{cases} \mathfrak{S}^n \times \mathfrak{A}, & \text{если } |K| = \infty, \\ \mathfrak{S}^n \times \mathfrak{A}_p, & \text{если } |K| = p^m. \end{cases}$$

В работе [3] доказаны также следующие равенства

$$\overrightarrow{\mathfrak{S}^n \times \Theta} = \begin{cases} \mathfrak{N}_{n-1}\mathfrak{A}, & \text{если } |K| = \infty, \\ \mathfrak{M}_{n-1,p}\mathfrak{A}_p, & \text{если } |K| = p^m. \end{cases}$$

2. Рассмотрим теперь вопрос о существовании триангулируемых представлений для р-алгебр Ли.

Теорема 2.1. Конечномерная р-алгебра Ли L над алгебраически замкнутым полем допускает точное конечномерное триангулируемое представление тогда и только тогда, когда оно принадлежит $var\,T_p(n,K)$ для некоторого n , т.е. удовлетворяет тождествам (3) теоремы 1.2.

Доказательство . Необходимость сформулированных условий очевидна. Докажем их достаточность.

Пусть $L \in var\,T_p(n,K)$. Так как

$var(K^n, T_p(n,K)) = \overrightarrow{\mathfrak{S}^n \times \mathfrak{A}_p} = \mathfrak{S}^n \cdot \mathfrak{A}_p = \mathfrak{M}_{n-1,p}\mathfrak{A}_p = var\,T_p(n,K)$,

то любая алгебра из $var\,T_p(n,K)$ допускает точное представление в $var(K^n, T_p(n,K))$. Воспользуемся тем, что если р-алгебра Ли L допускает точное представление в классе $\mathfrak{X}$, то все её свободные представления в этом классе являются точными. Следовательно, свободное циклическое представление

$$(U(L)/W, L) \in var(K^n, T_p(n,K)),$$

где W - вербальный идеал, отвечающий тождествам (5). является точным р-представлением р-алгебры Ли L . Это представление конечномерно, т.к. $\bar{U}(L)$ - конечномерная алгебра [1]. Ясно, что коммутант в этом представлении действует n-стабильно. Покажем, наконец, что р-алгебра Ли L триангулируема.

Так как в рассмариваемом представлениии алгебры выполняется тождество $[x_1,x_2]\ldots[x_{2n-1},x_{2n}] = 0$, то $[x,y]^n = 0$ для всех

$x,y \in L$. Из теоремы Энгеля заключаем, что существует $[L,L]$-инвариантный ряд

$$0 = V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V \qquad (*)$$

такой, что V_1 – множество всех векторов, аннулируемых алгеброй $[L,L]$, V_2 – множество всех векторов, аннулируемых алгеброй $[L,L]$ в факторе V/V_1, и т.д. Очевидно, ряд $(*)$ является также L-инвариантным рядом. Уплотним этот ряд до композиционного L-инвариантного ряда. Если рассмотреть действие р-алгебры L, в факторах последнего ряда, то ясно, что ядра возникающих представлений содержат коммутант $[L,L]$, т.е. в каждом неприводимом факторе действует абелева р-алгебра Ли. Так как основное поле алгебраически замкнуто, то по известной теореме линейной алгебры из предыдущего следует, что эти факторы одномерны. Теорема доказана.

<u>Теорема 2.2.</u> Конечная р-алгебра Ли L над конечным полем К ($|K| = p^m$) допускает точное конечномерное триангулируемое представление тогда и только тогда, когда она принадлежит $\mathrm{var}\, T_p(n,K)$ для некоторого n, т.е. удовлетворяет тождествам (4) теоремы I.2.

<u>Доказательство</u>. Также как и в предыдущей теореме необходимость сформулированного условия очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что существует точное свободное циклическое представление $(\bar{U}(L)/W, L) \in \mathrm{var}(K^n, T_p(n,K))$, где W – вербальный идеал, отвечающий тождествам (5) (ср. с доказательством предыдущей теоремы). В этом конечномерном представлении выполняется, в частности, тождество $(x^{p^m} - x)^n = 0$. Приводя в представлении $(\bar{U}(L)/W, L)$ каждую матрицу, отвечающую элементами из L, к нормальной жордановой форме и учитывая выполнение в L тождества $(x^{p^m} - x)^n = 0$, приходим к условию расщепляемости р-алгебры Ли L. Далее доказательство проводится по той же схеме, что и в предыдущей теореме.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании триангулируемых представлений абстрактных алгебр Ли.

<u>Теорема 2.3.</u> Конечномерная алгебра Ли L над конечным полем К характеристики р допускает точное конечномерное триангулируемое представление тогда и только тогда, когда она принадлежит многообразию $\mathrm{var}\,T(n,K)$, т.е. удовлетворяет тождествам (2) теоремы I.I.

<u>Доказательство</u>. Необходимость сформулированных условий очевидна. Переходим к доказательству достаточности. Пусть $L\in \mathrm{var}\,T(n,K)$ и пусть $d_1,d_2,\dots,d_k$ - базис L. Рассмотрим алгебру Ли Е с базисом $d_1,d_2,\dots,d_k,d_1^{p^m},\dots,d_k^{p^m}$ таким, что таблица умножения базисных элементов d_i, $i=1,2,\dots,k$, совпадает с таблицей для алгебры L. Ясно, что алгебра Ли Е является разрешимой, а подалгебра D, порожденная коммутантом $[L,L]$ и элементами вида $l^{p^m}-l$, $l\in L$, является нильпотентной (см, тождество (2)).

Пусть $D^c\neq 0$ и $D^{c+1}=0$, т.е. в D имеется нижний центральный ряд

$$D=D^1\supset D^2\supset\dots\supset D^c\supset D^{c+1}=0,$$

обрывающийся на $c+1$ шаге. Через этот ряд проводим упорядоченный базис, который продолжается до базиса алгебры E с сохранением порядка. Пусть $e_1,e_2,\dots,e_n$ - построенный таким образом базис. Далее для всякого набора целых неотрицательных чисел $m_1,m_2,\dots,m_l$ положим $x^M=\prod_{i=1}^{l} e_i^{m_i} U(E)$. Теперь введем понятие веса для элементов из $U(E)$, следуя [4]. Если $e_i\in D^s\setminus D^{s+1}$, то весом $s(e_i)$ элемента e_i считаем число s. Вес элемента $e_k\in E\setminus D$ считаем равным 0. Вес стандартного одночлена x^M есть $\sum_{i=1}^{n} m_i s_i$ где s_i - вес e_i. Вес любого элемента из $U(E)$ - минимум весов стандартных одночленов, в линейную комбинацию которых он раскладывается.

Обозначим через V - вербальный идеал в $U(E)$ соответствующий словам виде $v_1\cdot v_2\cdot\ldots\cdot v_n$, где вместо v_i стоят слова вида $x_{1i}^{p^m}-x_{1i}$ или $[y_{1i},y_{2i}]$. Ясно, что веса элементов идеала больше, либо равны . Отсюда следует, что $V\cap E=0$. Для дальнейших рассуждений нам понадобится также другой базис в $U(E)$ (см. [I]). Напомним его построение. Известно, что если E - конечномерная алгебра над полем характеристики $p \neq 0$, то для элемента $a \in E$ существует такой p-многочлен $m_a(\lambda)$, что $m_a(a)$ принадлежит центру Z алгебры $U(E)$. Если теперь $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - построенный выше базис L и $m_i(\lambda)$ - p-многочлен, для которого $m_i(e_i) = z_i \in Z$, причем $deg(m_i(d)) = p^{m_i}$, то $z_i = e_i^{p^{m_i}} + w_i$, где $w_i \in U^{p^{m_i}-1}$. Тогда в силу леммы 5.4. из [I] элементы

$$z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots z_2^{n_2} e_1^{\alpha_1} e_2^{\alpha_2} \ldots e_2^{\alpha_2}, \; n_i \geq 0, \; 0 < \alpha_i < p^{m_i} \quad (7)$$

образуют базис $U(E)$. Отсюда следует, что идеал B в $U(L)$, порожденный элементами $z_1, z_2, \ldots, z_n$, имеет с E нулевое пересечение.

Покажем теперь, что $(B+V) \cap E = 0$. Действительно, пусть ненулевой элемент $l \in E$ представим в виде $l = b + v$, $b \in B$, $v \in V$. Запишем элемент b в виде

$$b = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i + \sum_{j \in J} \beta_j b_j,$$

где b_i, b_j - элементы из базиса (7), в записи которых участвует по крайней мере один из элементов z_i, и $s(b_i) \geq n$ для всех $i \in I$; $s(b_j) < n$ для всех $j \in J$. Тогда $l - \sum_{j \in J} \beta_j b_j = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i + V$. Но вес правой части последнего равенства $\geq n$, а левой $< n$. Значит, $\sum_{i \in I} \alpha_i b_i + v = 0$ т.е. $l - \sum_{j \in J} \beta_j b_j \in B$ - противоречие.

Так как $(B+V) \cap E = 0$, то имеется каноническое вложение E и, значит, L в ассоциативную алгебру $U(E)/(B+V)$. Согласно теореме Ивасава U/B - конечномерная алгебра, и поэтому регулярное представление $(U/(B+V), L)$ определяет точное конечномерное представление алгебры L с n-стабильно действующим коммутантом. Так как в этом представлении выполняется тождество $(x^{p^m} - x)^n = 0$, то приходим к условию расщепляемости алгебры Ли L. Далее доказательство проводится по схеме теоремы 2.I.

<u>Теорема 2.4.</u> Конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 0$ допускает точное конечномерное триангулируемое представление тогда и только тогда, когда она принадлежит многообразию $var\, T(n, K)$, т.е. удов-

летворяет тождеству (I) теоремы I.I.

Доказательство проводится аналогично предыдущей теореме (без участия элементов вида $x^{p^m} - x$).

Отметим, что аналогичная теорема справедлива и над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Это является непосредственным следствием теоремы Адо и теоремы Ли (см. [I]).

ЛИТЕРАТУРА

I. Джекобсон Н. Алгебры Ли. - М.: Мир, 1964.-356.с.
2. Липянский Р.С. О тождествах многообразия, порожденного треугольными матрицами // Топологические пространства и их отображения. - Рига, 1979.-С. 147-149.
3. Липянский Р.С. О триангулируемости p-алгебр Ли // Алгебра и дискретная математика. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1984.-С. 65-80.
4. Birkhoff G. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices. - Ann. Math. 1937. - P. 433-454.

ЛГУ им. П.Стучки

Поступила 09.12.85

СПИСОК СОКРАЩЕННЫХ НАЗВАНИЙ МЕСТА РАБОТЫ АВТОРОВ

ВШПД ВЦСПС - Высшая школа профсоюзного движения Всесоюзного Центрального Совета Профессиональных Союзов (Москва).

ЛГУ им. А.Жданова - Ленинградский государственный университет им.А.А.Жданова.

ЛГУ им. П.Стучки - Латвийский государственный университет им. П.Стучки (Рига).

МАИ - Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе.

МИРЭА - Московский институт радиотехники, электроники и автоматики.

РКИИГА им. Ленинского комсомола - Рижский Краснознаменный институт инженеров гражданской авиации им.Ленинского комсомола.

РМТТПП - Рижский механико-технологический техникум пищевой промышленности.

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 590.4

Г.В.Пивоварова

ЗАМЕЧАНИЕ О РЕШЕТОЧНЫХ ПАРАХ

Пусть S_1 и S_2 - два множества, на которых определены по две операции + и ., относительно которых S_1 и S_2 являются решетками. Пусть, кроме того, определено действие $\circ$ элементов из S_2 на элементы из S_1, а именно для любых $a \in S_1$ и $b \in S_2$ определен элемент $a\circ b \in S_1$. Если для действия S_2 на S_1 выполнены следующие аксиомы:

1. $a \subset a\circ b$,
2. $(a\circ b)\circ b = a\circ b$,
3. $(a_1+a_2)\circ b = a_1\circ b + a_2\circ b$,
4. $b_1 \subset b_2 \Rightarrow a\circ b_1 \subset a\circ b_2$,
5. $(a\circ b_1 = a)\ \&\ (a\circ b_2 = a) \Rightarrow a\circ(b_1+b_2) = a$,

то пару (S_1, S_2) мы назовем решеточной парой (см. [2]). Заметка посвящена анализу аксиом решеточной пары.

Аксиомы I и 4 можно записать в виде тождества, и тогда аксиомы I-5 определяют квазимногообразие решеточных пар (S_1, S_2).

Этому квазимногообразию принадлежат решеточные пары, полученные следующим образом. Возьмём представление (A, Γ), где A - множество, линейное пространство или группа, а Γ - множество или группа, или полугруппа, или ассоциативная алгебра, или алгебра Ли. В качестве S_1 берется $S(A)$ - решетка всех подмножеств, (подпространств, подгрупп) в A, а в качестве S_2 берется $S(\Gamma)$ - решетка всех подмножеств в Γ, полугрупп в Γ и т.д. Действие элементов из S_2 на элементы из S_1 определим так. Если $a \in S_1$ и $b \in S_2$ - произвольные элементы, то $a \circ b$ есть замыкание a до b-инвариантного элемента в S_1. Тогда (S_1, S_2) - решеточная пара.

Можно вместо аксиом 4 и 5 рассмотреть аксиому

$4'$. $\quad a \circ (b_1 + b_2) = (a \circ b_1) \circ b_2$.

Эта аксиома является более сильной, чем 4 и 5, которые из нее следуют. Множество решеточных пар с аксиомами I-4$'$ является многообразием. Этому многообразию принадлежат пары (S_1, S_2) для представления (A, Γ) с абелевой группой Γ.

Можно привести еще такой пример решеточной пары, принадлежащей многообразию с аксиомами I-4 (ср. [3]). Пусть A - булева алгебра. Отображение $\exists : A \to A$ называется квантором существования, если для него выполнены следующие условия, где a, a_1, $a_2 \in A$:

a) $\exists(0) = 0$,

b) $a \cdot \exists(a) = a$,

c) $\exists(a_1 \cdot \exists(a_2)) = \exists(a_1) \cdot \exists(a_2)$.

Возьмем теперь некоторое множество I, и пусть $S(I)$ - множество всех подмножеств I. Для любого $b \in S(I)$ определим квантор $\exists^b : A \to A$ так, чтобы соблюдались условия

d) $\exists^{\emptyset}$ - тождественное отображение,

e) $\exists^{b_1 + b_2}(a) = \exists^{b_1}(\exists^{b_2}(a))$.

Тогда (S_1, S_2), где $S_1 = A$, $S_2 = S(I)$ есть решеточная пара, если

$a \circ b = \exists^b(a)$ для любых $a \in S_1$ и $b \in S_2$.

Проверим для нее выполнение аксиом I-4$'$. По условию b) имеем

$a \cdot (a \circ b) = a \cdot \exists^b(a) = a$, т.е. $a < a \circ b$ и аксиома (I) выполнена.

Аксиома 2 следует из условия (c). Покажем сперва, что $(a \circ b) \circ b \subset a \circ b$:

$$(a \circ b) \circ b = \exists^b(\exists^b(a)) = \exists^b(\exists^b(0) \cdot \exists^b(a)) = (\exists^b(\exists^b(a))) \cdot \exists^b(a) =$$
$$= ((a \circ b) \circ b) \cdot (a \circ b), \quad \text{т.е.} \quad (a \circ b) \circ b < a \circ b.$$

Обратное включение следует из аксиомы I и, значит, имеем равенство $\quad (a \circ b) \circ b = (a \circ b)$.

Справедливость аксиомы 3 сразу очевидна, если верно такое свойство для квантора существования:

$$\exists(a_1+a_2) = \exists(a_1) + \exists(a_2)$$

А то, что такое свойство верно, есть известный результат, который мы приведем для полноты изложения.

Если для $a \in A$ $\exists(a) = a$, то a называется $\exists$-замкнутым элементом. Известно, что для каждого квантора существования булевой алгебры A все $\exists$-замкнутые элементы составляют подалгебру в A. В самом деле,

1) $\exists(a_1 \cdot a_2) = \exists(a_1 \cdot \exists a_2) = \exists(a_1) \cdot \exists(a_2) = a_1 \cdot a_2$.

2) $1 = a + \bar{a} \subset \exists(a) + \exists(\bar{a}) = a + \exists(\bar{a}) = 1$, и $\exists(\bar{a}) = \bar{a}$.

Отсюда следует, что сумма $\exists$-замкнутых элементов $\exists$-замкнута. Действительно, пусть это не так; тогда $a_1 + a_2 \subset \exists(a_1 + a_2)$, причём включение строгое, то есть существует $a \in \exists(a_1+a_2)$ и $a \notin a_1 + a_2$. Но тогда $a \in \overline{a_1 + a_2} = \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2$. По предыдущему $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2$ - $\exists$-замкнутый элемент, т.е. $\overline{a_1 + a_2}$ - $\exists$-замкнутый элемент, но тогда и $a_1 + a_2$ - его дополнение $\exists$-замкнуто.

Теперь покажем, что справедливо равенство

$$\exists(a_1+a_2) = \exists(a_1) + \exists(a_2).$$

<u>Доказательство</u>. Для квантора существования справедлива монотонность действия $a < b \Rightarrow \exists(a) < \exists(b)$, так как $a < \exists(b)$ и $a = a \cdot \exists(b)$, следовательно, $\exists(a) = \exists(a \cdot \exists b) = \exists(a) \cdot \exists(b)$, т.е. $\exists(a) < \exists(b)$. Тогда из $\exists(a_1) < \exists(a_1 + a_2)$ и $\exists(a_2) < \exists(a_1 + a_2)$ следует $\exists(a_1) + \exists(a_2) \subset \exists(a_1 + a_2)$. Обратное включение получаем так: $a_1 + a_2 \subset \exists(a_1) + \exists(a_2)$ влечёт, что $\exists(a_1 + a_2) \subset \exists(\exists(a_1) + \exists(a_2)) = \exists(a_1) + \exists(a_2)$, т.к. сумма $\exists$-замкнутых элементов $\exists(a_1)$ и $\exists(a_2)$ является $\exists$-замкнутой. Таким образом, нужное равенство имеет место.

Теперь $(a_1 + a_2) \circ b = \exists^b(a_1 + a_2) = \exists^b(a_1) + \exists^b(a_2) = a_1 \circ b + a_2 \circ b$, т.е аксиома (3) для рассмотренной пары выполнена. Аксиома (4) является очевидным следствием условия e).

Рассмотрим сейчас такие аксиомы:

I. $0\circ b = 0$,

II. $a < a\circ b$,

III. $(a_1 + a_2)\circ b = a_1\circ b + a_2\circ b$,

IУ. $(a_1\cdot(a_2\circ b))\circ b = (a_1\circ b)\cdot(a_2\circ b)$,

У. $a\circ(b_1 + b_2) = (a\circ b_1)\circ b_2$.

Ясно, что все эти пять аксиом выполняются для пары $(A, S(I))$, рассмотренной выше. Вообще, пару (S_1, S_2), где S_1 и S_2 – булевы алгебры и для действия $\circ$ алгебры S_2 на S_1 выполнены аксиомы I–У, мы назовём булево бпарой.

В случае булевой пары аксиома III, как было видно выше, следует из аксиомы IУ. Этот же набор аксиом будет выполнен и для решеточной пары (S_1, S_2), построенной для чистой пары (A, Γ), где A – просто множество, а Γ – абелева группа. Для такой пары (S_1, S_2) аксиомы I–III,У сразу следуют из того, что она решеточная пара и проверить нужно только аксиому IУ.

Пусть $A_1, A_2 \in S_1$, $H \in S_2$, и проверим равенство
$$(A_1\cdot(A_2\circ H))\circ H = (A_1\circ H)\cdot(A_2\circ H).$$
Включение $(A_1\cdot(A_2\circ H))\circ H \subset (A_1\circ H)\cdot(A_2\circ H)$ следует из того, что $A_1 \subset A_1\circ H$ и пересечение H-замкнутых множеств является H-замкнутым. Для доказательства обратного включения рассмотрим элемент $a \in (A_1\circ H)\cdot(A_2\circ H)$. Ясно, что $a = a_1 h_1 = a_2 h_2$, откуда следует $a_1 = a_2 h_2 h_1^{-1}$, т.е. $a_1 \in A_1$ и $a_1 \in A_2\circ H$, значит $a_1 \in A_1\cdot(A_2\circ H)$, но тогда $a \in (A_1\cdot(A_2\circ H))\circ H$.

Заметим, что аксиома III всегда выполнена, если сумма b-замкнутых элементов является b-замкнутой. Если S_1 – булевая алгебра, то из аксиом I, II, III отмеченное свойство b-замкнутости следует, в противном случае может оказатся, что аксиомы I, II, IУ выполнены, а аксиома III не имеет места.

Проведем соответствующий пример. Пусть G – нильпотентная группа без кручения. Пусть H – произвольная подгруппа в G. Множество $\sqrt{H}$ называется изолятором группы H, если для $\forall x \in \sqrt{H}$ найдется такой n, что $x^n \in H$. Ясно, что $H \subset \sqrt{H}$. Известно, кроме того, что $\sqrt{H}$ – подгруппа в G (см. [I]).

Рассмотрим теперь такую решеточную пару (S_1, S_2), где $S_1 = S(G)$, $S_2 = \{b\}$; здесь b – оператор, сопоставляющий каждой группе ее изолятор. Для нее выполнены аксиомы I, II, IУ.

Проверим справедливость аксиомы IУ, показав более сильное равенство

$$\sqrt{A \cap B} = \sqrt{A} \cap \sqrt{B}.$$

Так как $A \cap B < \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$ и пересечение изолированных подгрупп есть изолированная подгруппа, то $\sqrt{A \cap B} < \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$. Пусть наоборот $h \in \sqrt{A} \cap \sqrt{B}$, т.е. $h \in \sqrt{A}$ и $h \in \sqrt{B}$. Отсюда следует, что найдутся такие n и m, что $h^n \in A$ и $h^m \in B$. Но тогда $h^{nm} \in A$ и $h^{nm} \in B$, т.е. $h^{nm} \in A \cap B$, т.е. $h \in \sqrt{A \cap B}$, значит, имеет место и обратное включение.

Таким образом, для рассматриваемой пары (S_1, S_2) аксиомы I, II, IУ выполнены. Однако известно, что эсиома III для такой пары не выполняется. Покажем это, выбрав G специальным образом. Приведем простой пример.

Возьмем в качестве G прямую сумму $A \oplus B$ бесконечных циклических групп; в G возьмем циклическую подгруппу $\{2a+b\}$. Проверим, что она будет изолированной, т.е. если $nx \in \{2a+b\}$, то и $x \in \{2a+b\}$. Возьмем произвольный $x \in G$: $x = \alpha a + \beta b$. Если $nx \in \{2a+b\}$, то для некоторого m $nx = m \cdot 2a + m \cdot b$, т.е. $n(\alpha a + \beta b) = m \cdot 2a + m \cdot b$. Так как $G = A \oplus B$ – прямая сумма, то $n\alpha a = 2ma$ и $n\beta b = mb$. Но G – группа без кручения, следовательно $n\alpha = 2m$ и $n\beta = m$, т.е. имеем $n\alpha = 2n\beta$ и $\alpha = 2\beta$, т.е.

$$x = 2\beta a + \beta b = \beta(2a+b) \Rightarrow x \in \{2a+b\}.$$

Теперь возьмем сумму двух таких подгрупп $\{2a+b\} + \{b\}$ и заметим, что она совпадает с $\{2a\} + \{b\}$. Здесь $2a \in \{2a\} + \{b\}$, но $a \notin \{2a\} + \{b\}$. Значит, $\{2a\} + \{b\}$ не является изолированной подгруппой, т.е.

$$\sqrt{\{2a+b\}} + \sqrt{\{b\}} \neq \sqrt{\{2a+b\} + \{b\}}.$$

Таким образом, аксиома III не следует из аксиомы I, II, IУ.

Покажем теперь, что аксиома IУ не следует из аксиомы I, II, III. Для этого рассмотрим решеточную пару (S_1, S_2), построенную для такой линейной пары (A, Γ), где $A = A_1 \oplus A_2 = \{e_1\} \oplus \{e_2\}$, а Γ – группа матриц 2-го порядка. Возьмем в Γ подгруппу $H = \{\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0, \alpha \in R\}$. Тогда $A_2 \cdot H = A_2$, $A_1 \cdot (A_2 : H) = 0$,

значит $(A_1\cdot(A_2\circ H))\circ H = O$. Но $(A_1\circ H)\cdot(A_2\circ H) = A_2$.
Таким образом,

$$(A_1\cdot(A_2\circ H))\circ H \neq (A_1\circ H)\cdot(A_2\circ H),$$

хотя аксиомы I, II, III выполнены.

Независимость аксиомы У от аксиом I-IУ следует из того, что аксиомы I-IУ выполнены для пары (S_1, S_2) , построенной для чистой пары (A, Γ) с неабелевой группой, а аксиома У для неабелевой группы Γ может не выполняться.

Заметим, что аксиомы I-У выделяют собственное подмногообразие, задаваемое аксиомами 1-4', о чём говорит последний пример

ЛИТЕРАТУРА

I. Курош А.Г. Теория групп. - М.: Наука, 1967.

2. Пивоварова Г.В. Решеточные пары // Алгебра и дискретная математика. - Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1984. -С. 81- 95.

3. Halmos P.R. Algebraic logic. N.Y.:Chelsa, 1962.- 187 p.

Поступила 3. 06. 83.
15. 12. 84.

МАИ

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 512.8:681.3

Я.П.Цирулис

АБСТРАКТНОЕ ОПИСАНИЕ ТИПОВ ДАННЫХ И МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ДАННЫХ

Эта работа представляет собой теоретическое исследование в рамках т.наз. алгебраического подхода к абстракции данных [1]. Алгебры данных понимаются в смысле [7], и §1 работы почти целиком посвящен изложению этой концепции - с некоторыми модификациями, в том числе в обозначениях и терминологии. Под типом данных мы понимаем алгебру из какого-либо многообразия алгебр данных, свободно порожденную множеством используемых атрибутов. Таким образом, когда атрибуты не принимаются во внимание, это просто инициальная алгебра многообразия. Мы даем характеристики многообразий алгебр данных (в теоретико-категорных терминах), порождаемых тем или иным типом, а также полугрупп эндоморфизмов типов данных. Один из результатов показывает, что с точностью до клона действия тип данных восстанавливается по своей полугруппе эндоморфизмов.

Необходимые сведения по общей теории многосортных алгебр можно найти, например, в [6], а по теории категорий - в [2].

§1. Алгебры данных и типы данных.

Пусть S фиксированное в дальнейшем конечное множество; его элементы будем называть идентификаторами областей или сортами. Будем считать, что оно разбито на два непересекающихся подмножества S_b и S_d, элементы которых называются идентификаторами основных и, соответственно, производных областей, короче - основными и производными сортами. В простейшем случае часть S_b может быть и пустой. Зафиксируем также некоторое S_b-сортное множество B (т.е. семейство множеств $B := \{B_s : s \in S_b\}$) и обозначим через Set_S^B класс всех таких S-сортных множеств A, которые содержат B (т.е. $A_s = B_s$ для $s \in S_b$). Будем рассматривать лишь те (многосортные) отображения между множествами из Set_S^B, которые тождественны на B; назовем их (SB)-отображениями. Точнее, (SB)-отображение $\lambda : A_1 \to A_2$ - это семейство функций $\{\lambda_s : s \in S\}$, где $\lambda_s : A_{1s} \to A_{2s}$ и все λ_s для $s \in S_b$ тождественны. Для (SB)-отображений естественно (посортно) отображается композиция и класс Set_S^B вместе со всеми (SB)-отображениями может рассматриваться как категория. Множество всех (SB)-отображений $A_1 \to A_2$ обозначим через $Map(A_1, A_2)$.

Далее, пусть Σ - какая-либо (S-сортная) сигнатура, т.е. семейство символов операций (операторов) с приписанными каждому из них наборами сортов аргументов и результата. Пусть еще Σ_b - часть Σ, содержащая все те операторы, которые предполагают лишь основные сорта, а $\underline{B}$ - фиксированная (S_b-сортная) алгебра сигнатуры Σ_b с носителем B. Алгебра данных сигнатуры Σ с базисом $\underline{B}$ - это любая Σ-алгебра, являющаяся обогащением (с присоединением недостающих областей) алгебры $\underline{B}$. Таким образом, если $\underline{A}$ - алгебра данных, то ее носителем служит какое-то множество из Set_S^B; этот носитель будем обозначать через A. Обозначим через Alg_S^B или просто Alg всех алгебр описанного вида. Мы будем допускать лишь такие гомоморфизмы алгебр данных, которые тождественны на B, т.е. являются (SB)-отображениями. (Это формально более сильное ограничение, чем в [7], но это несущественно для наших целей). Понятия подалгебры и фактороалгебры без труда модифицируются таким образом, чтобы подалгебра и (или) фактороалгебра алгебры данных тоже оказались членами Alg.

Еще зафиксируем S_d-сортное множество X переменных (атрибутов), требуя при этом, чтобы каждая переменная имела в точности один сорт. Можно X считать и S-сортным множеством с несколькими пустыми областями. Пока будем считать, что имеется по крайней мере одна переменная каждого производного сорта, однако большая часть результатов следующего параграфа верна лишь при условии, что переменных каждого сорта бесконечно много.

Множество $T=T_S^B(X)$ всех термов сигнатуры Σ (Σ-слов) над алфавитом $B\cup X$ обычным образом может быть превращено в Σ-алгебру $\underline{T}$; это пример алгебры данных. Если задана некоторая система Eq Σ-тождеств над X, то обозначим через $\mathcal{A}lg_{Eq}$ многообразие всех алгебр из $\mathcal{A}lg$, удовлетворяющих этой системе (оно совпадает с $\mathcal{A}lg$, когда Eq пусто), а через $\underline{T}_{Eq}$ - фактор-алгебру алгебры $\underline{T}$ по наименьшей конгруенции, содержащей все тождества из Eq. Эта алгебра свободна над X в $\mathcal{A}lg_{Eq}$ в следующем смысле: если имеется произвольная алгебра $\underline{A}$ из $\mathcal{A}lg_{Eq}$ и задано некоторое приписывание φ в A, т.е. (SB)-отображение $B\cup X \to A$, то оно (однозначно) продолжается до гомоморфизма $\underline{T}_{Eq}$ в $\underline{A}$. В частности, она свободна в себе; любое приписывание в T продолжается до эндоморфизма алгебры $\underline{T}$. Непосредственно из определений вытекает, что многообразие $\mathcal{A}lg_{Eq}$ порождается алгеброй $\underline{T}_{Eq}$ (т.е. всякое тождество, выполняющееся в $\underline{T}_{Eq}$, выполняется и в любой алгебре этого многообразия).

Можно было бы считать алгебру $\underline{T}_{Eq}$ типом данных, определяемым спецификацией $(S,\Sigma,\underline{B},X,Eq)$. У нас $S,\Sigma,\underline{B},X$ предполагаются фиксированными, поэтому можно говорить, что тип данных определяется системой тождеств Eq. Но разные системы тождеств могут определить один и тот же тип. Нас здесь не будет интересовать связь между типом $\underline{T}_{Eq}$ и определяющей его, а также многообразие $\mathcal{A}lg_{Eq}$ системой Eq, поэтому мы придадим большую степень абстрактности нашим определениям. Именно, (для заданных $S,\Sigma,\underline{B},X$) будем называть типом данных любую свободную в себе над X алгебру $\underline{W}$ из $\mathcal{A}lg$, а алгеброй данных этого типа - любую алгебру из порождаемого им многообразия $\hat{\underline{W}}$. Всегда можно подобрать систему Eq так, чтобы $\underline{W}$ оказалась изоморфной алгебре $\underline{T}_{Eq}$ и, следовательно, $\hat{\underline{W}}$ совпало с $\mathcal{A}lg_{Eq}$. Эта система может оказаться и бесконечной.

С определенной точки зрения полученное понятие типа данных все еще недостаточно абстрактное. Мы имеем в виду тот факт, что важно, какие операции можно выполнить над элементами алгебры данных, и не столь важно, какие из этих операций выбраны в качестве основных, а какие являются производными. (Напомним, напр., хорошо известную эквивалентность понятий булевой алгебры и булева кольца). Здесь напрашивается мысль, что вместо конкретного набора основных операций алгебры следовало бы рассматривать ее клон действия, поскольку он не зависит от выбора сигнатуры. Надлежащее уточнение привело бы нас к многосортному варианту понятия абсолютной алгебры в смысле [5]. Тогда "абстрактными" алгебрами данных служили бы определенного вида абсолютные алгебры, а "абстрактными" типами данных - свободные в себе алгебры данных. Однако разумное для абсолютных алгебр понятие гомоморфизма оказывается весьма громоздким (см. определение 6 на стр.29 в [5]), поэтому поступим иначе. Мы увидим, что равнозначной задаче характеризации клонов действия типов данных является задача о характеризации их множеств эндоморфизмов, и решим эту вторую задачу.

Несколько слов о клонах. (Расширенным) клоном операций на (S-сортном) множестве A будем называть любое множество операций на A, замкнутое относительно суперпозиции, отождествлений и перемены местами аргументов, добавления, а также удаления (см. ниже) фиктивных аргументов. Клон действия алгебры $\underline{A}=(A,\dots)$ - это наименьший клон на A, содержащий все основные операции этой алгебры. Иначе, клон действия содержит, кроме т.наз. производных операций [3] алгебры, также операции, которые получаются из них путем удаления фиктивных аргументов. Наше определение клона отличается от принятого (см.[3],[5]) именно этим последним замечанием. Этим устраняется, например, такой нежелательный факт, что если булева алгебра определяется в сигнатуре $(\vee,\wedge,-)$, то булева единица, рассматриваемая как нульместная операция, не принадлежит клону действия алгебры (см. по этому поводу также замечание после леммы 3.1). Кроме того, приводимые в §3 результаты получают более короткую формулировку. Но, разумеется, такие "лишние" операции не являются уже, вообще говоря, полиномами алгебры [4] (по другой терминалогии [6] – терм-функциями).

§2. Категорная характеристика многообразий алгебр данных.

Пусть $\mathcal{K}$ – какая-либо (малая) категория, F – пренебрегающий функтор $\mathcal{K} \to Set^{\theta}_{S}$, а $\underline{W}$ – $\mathcal{K}$-объект, свободный над X в $\mathcal{K}$ относительно F. Без ограничения общности можно считать, что это означает следующее (для удобства мы пишем просто A вместо $F(\underline{A})$ и $H(\underline{A})$ вместо $Mor(\underline{W}, \underline{A})$):

(а) для любых $\mathcal{K}$-объектов $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ $Mor(\underline{A}_1, \underline{A}_2) \subset Map(A_1, A_2)$, и F осуществляет это вложение,

(б) $X \subset W$, и для любого $\mathcal{K}$-объекта $\underline{A}$ множество $H(\underline{A})$ обладает тем свойством, что содержит в точности одно продолжение до (SB)-отображения $W \to A$ каждого приписывания в A.

Вообще, произвольное множество H (SB)-отображений $W \to A$, обладающее указанным в (б) свойством, будем называть связкой, (точнее A-связкой). Категорию $\mathcal{K}$, для которой указаны такие F и W будем называть нормализованной.

Прототипом нормализованной категории служит любое многообразие $\mathcal{K}$ алгебр данных, в котором F – естественный пренебрегающий функтор, сопоставляющий каждой алгебре ее носитель, а $\underline{W}$ – порождающий это многообразие тип данных. Будем говорить, что две нормализованные категории $(\mathcal{K}, F, \underline{W})$ и $(\mathcal{K}', F', \underline{W}')$ неразличимы, если $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ изоморфны, причем соответствующий функтор-изоморфизм $\Phi : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ тождественен на всех морфизмах (тогда $F = F'\Phi$) и переводит $\underline{W}$ в $\underline{W}'$. Наконец, будем называть нормализованную категорию алгебраической, если она неотличима от какого-либо многообразия алгебр данных. Ниже мы найдем необходимое и достаточное для этого условие.

Пусть $\mathcal{H}=(\mathcal{X},F,\underline{W})$ - какая-либо нормализованная категория. Обозначим в ней множество $H(\underline{W})$ эндоморфизмов объекта $\underline{W}$ через E, и назовем пару (W,E) зародышем этой категории. Будем говорить, что категория $\mathcal{H}$ регулярна, если она подчиняется еще следующим требованиям:

(в) для каждой связки H

$$\forall \mu\in H\ \forall \gamma\in E\ \mu\gamma\in H \to \exists \underline{A}\ H=H(\underline{A}),$$

(г) для любых $\underline{A}_1, \underline{A}_2$

$$\underline{A}_1 \neq \underline{A}_2 \to H(\underline{A}_1)\neq H(\underline{A}_2)$$

(д) для любых $\underline{A}_1$ и $\underline{A}_2$ и всех $\lambda\in Map(A_1,A_2)$

$$\forall \mu\in H(\underline{A}_1)\ \lambda\mu\in H(\underline{A}_2) \to \lambda\in Mor(\underline{A}_1,\underline{A}_2).$$

Мы вскоре увидим, что каждая алгебраическая категория регулярна. Из (б)-(г) вытекает, что в регулярной категории имеется взаимно однозначное соответствие между ее объектами и всевозможными связками, удовлетворяющими левой части импликации в (в). Очевидно, импликация в (д) обратима, так что множество $Mor(\underline{A}_1,\underline{A}_2)$ полностью определяется связками $H(\underline{A}_1)$ и $H(\underline{A}_2)$. Таким образом, если нас не интересует природа объектов регулярной категории, достаточно задать только свободный объект и его множество эндоморфизмов. Более точно эта мысль формулируется во втором утверждении приводимой ниже теоремы.

Теорема 2.1. (i) Пара (W,E), где $W\in Set^B_S$ и $E\subset Map(W,W)$, т.т.т. является зародышем регулярной категории, когда E - замкнутая относительно композиций W-связка.

(ii) Две регулярные категории т.т.т. неразличимы, когда они имеют один и тот же зародыш.

Доказательство. (i) Особого рассмотрения требует лишь достаточность условия. Допустим, что W и E ему удовлетворяют, и построим соответствующую регулярную категорию.

Рассмотрим всевозможные пары вида (A,H), где A - множество из Set^B_S, а H - A-связка такая, что $\gamma\mu\in H$ для всех $\mu\in H$ и $\gamma\in E$. Примером такой пары служит сама пара $\underline{W}:=(W,E)$.

Назовем гомоморфизмом пары (A_1,H_1) в (A_2,H_2) такое (SB)-отображение $\lambda: A_1 \to A_2$, что $\lambda\mu \in H_2$ для всех $\mu \in H_1$. Тогда класс всех пар вместе со всеми гомоморфизмами между ними образует категорию; обозначим ее через $\underline{W}^*$. Если $|\ |$ - пренебрегающий функтор $W^* \to Set_S^B$, определяемый условием $\underline{W}^* \to Set_S^B$, то $\underline{W}$ оказывается свободным относительно его объектом над X. Итак, имеем уже нормализованную категорию. Ее регулярность очевидна.

(ii) Если регулярные категории $(\mathcal{K},F,\underline{W})$ и $(\mathcal{K}',F',\underline{W}')$ имеют один и тот же зародыш, то можно построить функтор $\Phi: \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, определяя $\Phi(\underline{A})$ как тот единственный $\mathcal{K}'$-объект $\underline{A}'$, для которого $H_{\mathcal{K}}(\underline{A}) = H_{\mathcal{K}'}(\underline{A}')$, и считая Φ тождественным на морфизмах. Без труда проверяется, что этот функтор и устанавливает неразличимость обеих категорий. Этим доказана достаточность условия; его необходимость легко вытекает из определений. Теорема доказана.

Допустим, что W и E удовлетворяют условию теоремы 2.I (i), и обозначим через E_0 подмножество тех отображений из E, которые на X принимают значения также в X. Будем говорить, что множество $Y \subset X$ является опорным множеством для элемента $w \in W$, и писать в этом случае $Y spp\, w$, если

$$\forall \gamma \in E_0 \,(\gamma | Y = id_Y \to \gamma w = w).$$

<u>Лемма 2.2.</u> Пусть H - произвольная связка и пусть X содержит по крайней мере две переменные каждого сорта. Для любого элемента w и любого его опорного множества Y

$$\forall \mu_1,\mu_2 \in H \,(\mu_1 | Y = \mu_2 | Y \to \mu_1 w = \mu_2 w).$$

<u>Доказательство</u>. Допустим, что $Y spp\, w$ и что μ_1, μ_2 - два отображения из H, совпадающие на Y, и покажем, что тогда $\mu_1 w = \mu_2 w$. Обозначим через X^+ подмножество тех переменных из X, сорта которых представлены в Y (так что $Y \subset X^+$), а через X^- - разность $X \setminus X^+$. Далее, выберем три отображения $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ из E_0 и отображение $\mu \in H$ так, чтобы выполнялись условия

$$\gamma|Y = id_Y, \ \gamma X^+ \subset Y, \ \gamma|X^+ = id_{X^-},$$
$$\gamma_1 X^- \cap \gamma_2 X^- = \phi, \ \gamma_1 X^- \subset X^-, \ \gamma_2 X^- \subset X^-, \ \gamma_1|X^+ = \gamma_2|X^+ = id_{X^+},$$
$$\mu|Y = \mu_1|Y = \mu_2|Y, \ \mu|\gamma_1 X^- = \mu_1|\gamma_1 X^-, \ \mu|\gamma_2 X^- = \mu_2|\gamma_2 X^-.$$

Два последних из них можно переписать в виде

$$\mu\gamma_1|X^- = \mu_1\gamma_1|X^-, \quad \mu\gamma_2|X^- = \mu_2\gamma_2|X^-.$$

Тогда ввиду определения опорного множества $\gamma w = \gamma_1 w = \gamma_2 w$. Кроме того, $\mu_1\gamma\gamma_1 = \mu\gamma\gamma_1$. Действительно,

если $x \in X^+$, то $\mu_1\gamma\gamma_1 x = \mu_1\gamma x = \mu\gamma x = \mu\gamma\gamma_1 x$,

если $x \in X^-$, то $\mu_1\gamma\gamma_1 x = \mu_1\gamma_1 x = \mu\gamma_1 x = \mu\gamma\gamma_1 x$.

Таким образом, $\mu_1\gamma\gamma_1$ и $\mu\gamma\gamma_1$ совпадают на X. Но оба эти отображения принадлежат связке H, поэтому они совпадают всюду на W. Теперь

$$\mu_1 w = \mu_1(\gamma w) = (\mu_1\gamma)w = (\mu_1\gamma)(\gamma_1 w) = (\mu_1\gamma\gamma_1)w = (\mu\gamma\gamma_1)w =$$
$$= (\mu\gamma)(\gamma_1 w) = (\mu\gamma)w = \mu(\gamma w) = \mu w.$$

Аналогично $\mu_2 w = \mu w$ и, следовательно, на самом деле $\mu_1 w = \mu_2 w$.

Будем называть нормализованную категорию финитарной, если каждый элемент ее выделенного свободного объекта имеет конечные опорные множества. Мы теперь можем сформулировать и доказать основной результат статьи.

Теорема 2.3. Допустим, что $|X_s| = \infty$ для всех $s \in S_\beta$. Тогда для любой нормализованной категории $\mathcal{K}$ равносильны следующие условия:

(α) $\mathcal{K}$ - алгебраическая категория,

(β) $\mathcal{K}$ -регулярна и финитарна.

Доказательство. Сперва покажем, что из (α) вытекает (β). Нам достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{K}$ - многообразие алгебр данных некоторого типа $\underline{W}$ из $\mathcal{A}lg$. Такая категория $\mathcal{K}$ финитарна: так как X порождает $\underline{W}$, каждый элемент w из $\underline{W}$ содержится в подалгебре $\underline{W}$, порождаемой достаточно большим конечным подмножеством X, и нетрудно видеть, что оно является опорным для w. Проверим теперь, что для $\mathcal{K}$ выполняются условия (в)-(д).

Определение операции σ_A корректно. Действительно, ввиду допустимости H она не зависит от выбора μ, так как, очевидно, $\{x_1,\dots,x_m\}$ - опорное множество для $\sigma_W(x_1,\dots,x_m)$. Она не зависит и от выбора $x_1,\dots,x_m$: если $y_1,\dots,y_m$ - другой набор переменных такой, что $\mu y_i = a_i$ для $i=1,\dots,m$, то пусть γ - эндоморфизм $\underline{W}$, переводящий каждую переменную x_i в y_i; тогда

$$\mu\gamma \mid \{x_1,\dots,x_m\} = \mu \mid \{x_1,\dots,x_m\},$$

и в силу леммы 2.2. (и уже доказанного)

$$\mu\sigma_W(y_1,\dots,y_m) = \mu\sigma_W(\gamma x_1,\dots,\gamma x_m) = \mu(\gamma\sigma_W(x_1,\dots,x_m)) =$$
$$= (\mu\gamma)\sigma_W(x_1,\dots,x_m) = \mu\sigma_W(x_1,\dots,x_m).$$

Допустим, далее, что $w_1,\dots,w_m$ - набор элементов, к которому применима операция σ_W и что γ - эндоморфизм $\underline{W}$ такой, что $w_1=\gamma x_1,\dots,w_m=\gamma x_m$ для некоторых попарно различных переменных $x_1,\dots,x_m$. Тогда с учетом выбора H получаем, что для любого $\mu\in H$

$$\mu\sigma_W(w_1,\dots,w_m) = \mu\sigma_W(\gamma x_1,\dots,\gamma x_m) = \mu(\gamma\sigma_W(x_1,\dots,x_m)) =$$
$$= (\mu\gamma)\sigma_W(x_1,\dots,x_m) = \sigma_A((\mu\gamma)x_1,\dots,(\mu\gamma)x_m) =$$
$$= \sigma_A(\mu(\gamma x_1),\dots,\mu(\gamma x_m)) = \sigma_A(\mu w_1,\dots,\mu w_m).$$

(в) Пусть H - A-связка, удовлетворяющая левой части импликации в (в). Покажем, что A можно превратить в алгебру $\underline{A}$ из $\hat{\underline{W}}$ так, что H оказывается множеством всех эндоморфизмов $\underline{W}\to\underline{A}$.

Допустим, что σ - m-местный оператор из Σ. Ему следующим образом можно поставить в соответствие операцию σ_A подходящего типа на A:

$$\sigma_A(a_1,\dots,a_m) := \mu\sigma_W(x_1,\dots,x_m),$$

где σ_W -операция в $\underline{W}$, соответствующая оператору σ, $x_1,\dots,x_m$ - попарно различные переменные надлежащих сортов, а μ - отображение из H, переводящее каждое x_i в a_i. Это условие удобно переписать в виде

$$\sigma_A(\mu x_1,\dots,\mu x_m) = \mu\sigma_W(x_1,\dots,x_m).$$

Итак, мы можем считать, что построили алгебру $\underline{A}$ из $\mathcal{Alg}$ и что при этом $H\subset Hom(\underline{W},\underline{A})$, т.е. алгебра $\underline{W}$ свободна относительно $\{\underline{A}\}$. Общеалгебраические соображения, которые мы здесь опустим, показывают, что тогда $\underline{A}\in\hat{\underline{W}}$ и что в действительности $H = Hom(\underline{W},\underline{A})$ (ср.с.[4], §24).

(г) Пусть $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ - две разные алгебры из $\hat{\underline{W}}$. Интерес представляет лишь случай, когда у них общий носитель: $A_1 = A_2 = A$. Тогда для некоторых $\sigma \in \Sigma$ и $a_1, \ldots, a_m$ должно быть

$$\sigma_1(a_1, \ldots, a_m) \neq \sigma_2(a_1, \ldots, a_m),$$

где σ_1, σ_2 - операции в $\underline{A}_1$ и, соответственно, в $\underline{A}_2$, соответствующие оператору σ. Допустим, что $\mu_1 \in H(A_1), \mu_2 \in H(A_2)$ и что для некоторых $x_1, \ldots, x_m \in X$ $\mu_1 x_i = \mu_2 x_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. Тогда, очевидно,

$$\mu_1 \sigma_W(x_1, \ldots, x_m) \neq \mu_2 \sigma_W(x_1, \ldots, x_m),$$

где σ_W - операция в $\underline{W}$, соответствующая σ. Итак, $\mu_1 \neq \mu_2$ и, значит, $H(\underline{A}_1) \neq H(\underline{A}_2)$.

(д) Пусть $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ - две алгебры данных типа $\underline{W}$, и пусть λ - (SB)-отображение, для которого выполняется левая часть импликации в (д). Пусть, кроме того, $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, w$ имеют тот же смысл, что и в предыдущем рассуждении. Допустим, что $a_1, \ldots, a_m$ - набор элементов из A_1, к которому применима операция σ_1, и что μ - гомоморфизм $\underline{W} \to \underline{A}$ такой, что $\mu x_1 = a_1, \ldots, \mu x_m = a_m$ для некоторых попарно различных переменных $x_1, \ldots, x_m$. Тогда

$$\lambda \sigma_1(a_1, \ldots, a_m) = \lambda \sigma_1(\mu x_1, \ldots, \mu x_m) = \lambda(\mu \sigma_W(x_1, \ldots, x_m)) =$$

$$= (\lambda\mu)\sigma_W(x_1, \ldots, x_m) = \sigma_2(\lambda\mu x_1, \ldots, \lambda\mu x_m) = \sigma_2(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_m).$$

Таким образом, λ действительно гомоморфизм. Этим доказано, что первое из условий $(\alpha), (\beta)$ влечет второе.

Теперь покажем, что из (β) вытекает (α). Для этого мы должны убедиться, что финитарная регулярная категория $(\mathcal{X}, E, W)$ неотличима от некоторого многообразия алгебр данных. Но в силу только что доказанного такое многообразие само является регулярной категорией, поэтому мы можем воспользоваться теоремой 2.1 (ii). Итак, нам достаточно построить на множестве W какой-либо тип данных, для которого E служит множеством эндоморфизмов.

Пусть Ω - множество всех операций на W, перестановочных со всеми отображениями из E. Всегда можно подобрать сигнатуру Σ так, чтобы в классе $\mathcal{Alg}$ нашлась алгебра $\underline{W}'$ с носителем W, множество основных операций которой совпадает с Ω. Нам остается показать, что X порождает $\underline{W}'$: так как $E \subset End(\underline{W}')$ алгебра $\underline{W}'$ окажется свободной в себе над X, а тогда это включение превратится в равенство, и мы получим требуемое.

Итак, пусть w - произвольный элемент W. Ввиду финитарности $\mathcal{K}$ он имеет конечное опорное множество $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Определим на W m-местную операцию ω, полагая, что

$$\omega(w_1, \ldots, w_m) := \gamma w,$$

где γ морфизм из E, переводящий каждое x_i в w_i. Иначе,

$$\omega(\gamma x_1, \ldots, \gamma x_m) = \gamma w,$$

где γ уже произволен. Это определение корректно: согласно лемме 2.2. (с $H = E$) левая часть равенства не зависит от выбора γ. Легко видеть, что $\omega \in \Omega$: если $\gamma' \in E$, то

$$\gamma'\omega(w_1, \ldots, w_m) = \gamma'(\gamma w) = (\gamma'\gamma)w = \omega((\gamma'\gamma)x_1, \ldots, (\gamma'\gamma)x_m) = \omega(\gamma' w_1, \ldots, \gamma' w_m).$$

Так как очевидно, $w = \omega(x_1, \ldots, x_m)$, элемент w принадлежит подалгебре $\underline{W}'$, порождаемой множеством $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Итак, X действительно порождает $\underline{W}'$. Теорема доказана.

§3. Абстрактные типы данных

Вернемся к начатому в §I обсуждению степени абстрактности понятия типа. Прежде всего убедимся, что множество эндоморфизмов типа данных полностью определяет его клон действия.

<u>Лемма 3.I.</u> Клон действия типа данных состоит в точности из всех операций, перестановочных со всеми его эндоморфизмами.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\underline{W}$ - тип данных из $\mathcal{Alg}$, и пусть Ω - его клон действия. Понятно, что любая производная операция $\underline{W}$, а значит, и любая операция из Ω действительно перестановочна с эндоморфизмами. Пусть, наоборот ω - m-местная операция на W $(m \geqslant 0)$ перестановочная со всеми эндомор-

физмами алгебры $\underline{W}$. Выберем произвольные переменные $x_1,\dots,x_m$ подходящих сортов и положим $w = \omega(x_1,\dots,x_m)$, в частности, при $m=0$ w просто совпадает с ω. Тогда $\gamma w = w$ для любого эндоморфизма $\underline{W}$, тождественного на $\{x_1,\dots,x_m\}$. Пусть, например, γ отображает X в некоторое множество $\{x_1,\dots,x_n\} \subset X$, где $n \geqslant m$. Так как γw принадлежит подалгебре алгебры $\underline{W}$, порождаемой этим множеством, то той же подалгебре принадлежит и w. Следовательно, найдется такая производная операция ω_1, что $w = \omega_1(x_1,\dots,x_n)$. Теперь, если для произвольных $w_1,\dots,w_n$ надлежащих сортов γ' - эндоморфизм, переводящий каждую переменную x_i в w_i, то

$$\omega(w_1,\dots,w_m) = \omega(\gamma' x_1,\dots,\gamma' x_m) = \gamma'\omega(x_1,\dots,x_m) = \gamma' w =$$
$$= \gamma'\omega_1(x_1,\dots,x_n) = \omega_1(\gamma' x_1,\dots,\gamma' x_n) = \omega_1(w_1,\dots,w_n).$$

Ввиду произвольности $w_1,\dots,w_n$ заключаем, что последние $n-m$ аргумента операции ω_1 фиктивные. Таким образом, операция ω получается из производной операции алгебры $\underline{W}$ удалением фиктивных аргументов, т.е. сама она принадлежит Ω. Лемма доказана.

Отметим, что на заключительном шаге доказательства мы существенно пользуемся нашим измененным понятием клона. На самом деле, операция ω иногда может быть получена из ω_1, и отождествлением аргументов: $\omega(w_1,\dots,w_m) = \omega_1(w_1,\dots,w_m,w_m,\dots,w_m)$, если переменные $x_{m+1},\dots,x_n$ и w_m одного сорта. Но это невозможно, если не все сорта переменных $x_{m+1},\dots,x_n$ представлены в $\{x_1,\dots,x_m\}$ (это так даже в односортном случае, если $m=0$). Отметим также, что нам впервые пришлось существенно использовать и конечность множества сортов: в противном случае нельзя найти конечное множество $\{x_1,\dots,x_n\}$, указанное в доказательстве.

Следствие 3.2. Два типа данных (с одним и тем же носителем, но возможно, разной сигнатуры) т.т.т. имеют один и тот же клон действия, когда у них одно и то же множество эндоморфизмов.

Итак, если мы согласны считать, что два типа данных, имеющих один и тот же клон действия, дают нам одинаковую информацию, то вся эта информация содержится уже в полугруппе эндоморфизмов типа данных. Теорема 2.I.(i) вместе с теоремой 2.3. дает нам следующий критерий для распознавания тех множеств отображений, которые могут служить такими множествами эндоморфизмов.

<u>Следствие 3.3.</u> Если все компоненты X_S множества переменных бесконечны, то множество $E \subset Map(W,W)$ т.т.т. является множеством эндоморфизмов некоторого типа данных (подходящей сигнатуры) с носителем W, когда выполняются условия

(α) E замкнуто относительно композиций,

(β) каждое приписывание $X \to W$ имеет в E в точности одно продолжение,

(γ) для каждого $w \in W$ имеется такое конечное множество $Y \subset X$, что $\gamma w = w$ для любого γ из E, тождественного на Y и принимающего значения в X на X.

Теперь, пользуясь уже имеющимся многозначным термином в еще одном, новом смысле, назовем абстрактным типом данных произвольную пару (W,E), где W и E удовлетворяют условиям (α), (β), (γ). Это отступление от высказанной в §I точки зрения выдвигает на первый план другую идею: абстрактный тип определяется не столько операциями, которые можно выполнить над его объектами (элементами W), сколько преобразованиями, сохраняющими его структуру.

Так как каждому типу данных соответсвует свой абстрактный тип, мы вправе считать, что всякая спецификация $(S,\Sigma,\underline{B},E_1)$ определяет какой-то абстрактный тип данных. Рассуждения второй половины доказательства теоремы 2.3. показывают, что и, наоборот, любой абстрактный тип является "абстракцией" от подходящего типа данных.

ЛИТЕРАТУРА

I. Агафонов В.Н. Типы и абстракция данных в языках програм-

мирования // Данные в языках программирования. - М, 1982. - С.265-327.
2. Гольдблатт Р. Топосы. Категорный анализ логики. - М, 1983. - 486 с.
3. Кон П. Универсальная алгебра.-М, 1968. - 351 с.
4. Grätzer G. Universal algebra. - Berlin: Springer Verlag, 1979. - 581 p.
5. Hatcher W.S., Whitney S. Absolute algebra. - Leipzig: Teubner, 1978. - 126 p.
6. Reichel H. Structural induction on partial algebras. - Berlin: Akademie Verlag, 1984. - 205 p.
7. Zilles S.N. An introduction to data algebras // Abstract Software specifications. - Berlin, 1982. - C. 248-272.

ЛГУ им. П.Стучки

Поступила 15.10.1985
20.01. 1986

Алгебра и дискретная математика:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.
Рига, ЛГУ, 1986

УДК 512. 534

В.Б. Штейнбук

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ

I. В ряде работ изучались связи между фильтрами и сопоставляемыми им теми или иными производными объектами (см., напр., [4 - 8]). При этом фильтр рассматривался и как система подмножеств, и как решётка относительно естественных операций, и как упорядоченное множество. Использовались и различные виды морфизмов фильтров. Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ - фильтры на множествах Ω_1 и Ω_2 соответственно. Отображение φ множества Ω_1 в Ω_2 называется гомоморфизмом (соответственно непрерывным отображением) $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$, если $\varphi(M)\in\mathcal{F}_2$ для всякого $M\in\mathcal{F}_1$ (соответственно $\varphi^{-1}(M)\in\mathcal{F}_1$ для всякого $M\in\mathcal{F}_2$). Изоморфизм фильтра $\mathcal{F}_1$ на $\mathcal{F}_2$ - это биекция множества Ω_1 на Ω_2, являющаяся непрерывным гомоморфизмом $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$. Множество всех эндоморфизмов (соответственно непрерывных преобразований) фильтра $\mathcal{F}$ относительно операции суперпозиции образует полугруппу, которую обозначаем $End\,\mathcal{F}$ (соответственно $Cn\,\mathcal{F}$). Известно [6], что нетривиальный фильтр $\mathcal{F}$ полностью определяется с точностью до изоморфизма как полугруппой $End\,\mathcal{F}$, так и полугруппой $Cn\,\mathcal{F}$. Для ультрафильтров понятие гомоморфизма и непрерывного отображения эквивалентны. Легко убедиться также [4] , что два неглавных ультрафильтра изоморфны как решётки тогда и только тогда, когда они изоморфны в указанном выше смысле (т.е. как системы подмножеств).

В данной работе получена картина строения эндоморфизмов ультрафильтров. С помощью этого результата даётся описание эквивалентностей Грина, идеалов полугрупп эндоморфизмов. Приводится конкретная характеристика полугрупп эндоморфизмов ультрафильтров. Отмечаются некоторые свойства этих полугрупп. Группы автоморфизмов ультрафильтров подробно рассматривались в [7] ; [10].

2. Всюду в дальнейшем, говоря о фильтре $\mathcal{F}$, предполагаем, что $\mathcal{F}$ определен на неодноэлементном множестве Ω . Для каждого преобразования φ множества Ω через π_φ обозначим соответствующую φ ядерную эквивалентность на Ω , через H_φ - множество всех неподвижных точек преобразования φ .

3. <u>Предложение</u>. Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ - фильтры на множествах Ω_1 и Ω_2 соответственно. Отображение φ множества Ω_1 в Ω_2 является гомоморфизмом $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$ тогда и только тогда, когда φ - непрерывное отображение $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$.

<u>Доказательство</u>. Пусть φ - гомоморфизм $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$. Предположим, что φ не является непрерывным отображением, т.е. $\varphi^{-1}(M)\notin\mathcal{F}_1$ для некоторого $M\in\mathcal{F}_2$. Поскольку $\mathcal{F}_1$ - ультрафильтр, $\Omega_1\setminus\varphi^{-1}(M)\in\mathcal{F}_1$. Следовательно, $\varphi(\Omega_1\setminus\varphi^{-1}(M))\in\mathcal{F}_2$. Но $\varphi(\Omega_1\setminus\varphi^{-1}(M))\subset\Omega_2\setminus M$ и, значит, $\Omega_2\setminus M\in\mathcal{F}_2$. А это противоречит тому, что $M\in\mathcal{F}_2$. Полученное противоречие означает, что φ - непрерывное отображение $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$. Аналогично доказывается обратное.

4. <u>Лемма I</u>. Всякое преобразование φ множества Ω , удовлетворяющее условию $H_\varphi\in\mathcal{F}$, является эндоморфизмом фильтра $\mathcal{F}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $H_\varphi\in\mathcal{F}$. Возьмем $M\in\mathcal{F}$. Очевидно, $\varphi(M\cap H_\varphi)=M\cap H_\varphi\in\mathcal{F}$, а поэтому и $\varphi(M)\in\mathcal{F}$.

Как заметил Ю.Л.Ершов ([I], с. II0), для всякого автоморфизма φ ультрафильтра $\mathcal{F}$ выполняется $H_\varphi\in\mathcal{F}$. Доказательство этого факта имеется, например, в [9]. Оказывается, что для эндоморфизмов ультрафильтров имеет место аналогичное утверждение.

5. <u>Теорема I</u>. Преобразование φ множества Ω является эндоморфизмом ультрафильтра $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда

$H_\varphi \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Достаточность следует из леммы I. Докажем необходимость.

Пусть φ – эндоморфизм $\mathcal{F}$. Обозначим $M = M_\varphi = \{\alpha \in \Omega \mid \varphi^n(\alpha) = \alpha$ для некоторого натурального $n\}$. Очевидно, что $H_\varphi \subset M$.

Ограничение φ на подмножестве M есть биекция M на себя. Действительно, возьмем произвольный $\alpha \in M$, $\varphi^n(\alpha) = \alpha$ для некоторого n. Тогда $\varphi^n(\varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha)$, т.е. $\varphi(\alpha) \in M$. Убедимся теперь в сюръективности φ. Если $n = 1$, то очевидно, $\alpha \in \varphi(M)$. Если $n \neq 1$, то выполняется $\varphi^n(\varphi^{n-1}(\alpha)) = \varphi^{n-1}(\varphi^n(\alpha)) = \varphi^{n-1}(\alpha)$, т.е. $\varphi^{n-1}(\alpha) \in M$. Но $\varphi(\varphi^{n-1}(\alpha)) = \alpha$, поэтому $\alpha \in \varphi(M)$ и в случае $n > 1$. Осталось проверить инъективность. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in M$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$. Найдутся m, n такие, что $\varphi^n(\alpha_1) = \alpha_1$, $\varphi^m(\alpha_2) = \alpha_2$. Заметим, что $\varphi^{mn}(\alpha_1) = \varphi^{(m-1)n}\varphi^n(\alpha_1) = \varphi^{(m-1)n}(\alpha_1) = \ldots = \alpha_1$. Аналогично $\varphi^{mn}(\alpha_2) = \alpha_2$. С другой стороны, $\varphi^{mn}(\alpha_1) = \varphi^{mn}(\alpha_2)$, т.к. $\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2)$. Следовательно, $\alpha_1 = \alpha_2$. Итак φ/M – биекция M на себя.

Если $M \in \mathcal{F}$, то след $\mathcal{F}$ на M есть ультрафильтр на M, который обозначим $\mathcal{F}'$. При этом нетрудно убедитвся в том, что ограничение φ на M есть автоморфизм ультрафильтра $\mathcal{F}'$. Поскольку множество неподвижных точек автоморфизма ультрафильтра есть элемент ультрафильтра и $H_\varphi \subset M$, то $H_\varphi \in \mathcal{F}'$. Отсюда вытекает, что $H_\varphi \in \mathcal{F}$.

Рассмотрим теперь случай $M \notin \mathcal{F}$. Тогда $\Omega \setminus M \in \mathcal{F}$. Определим отношение σ на $\Omega \setminus M$ следующим образом: $x \sigma y$ тогда и только тогда, когда $\varphi^m(x) = \varphi^n(y)$ для некоторых натуральных m, n. Рефлексивность и симметричность отношения σ очевидны. Убедимся в транзитивности σ. Пусть $x \sigma y$, $y \sigma z$. По определению, найдутся m, n, k, ℓ такие, что $\varphi^m(x) = \varphi^n(y)$, $\varphi^k(y) = \varphi^\ell(z)$. Тогда выполняются следующие соотношения

$$\varphi^{k+m}(x) = \varphi^k\varphi^m(x) = \varphi^k\varphi^n(y) = \varphi^{k+n}(y) = \varphi^n\varphi^k(y) = \\ = \varphi^n\varphi^\ell(z) = \varphi^{n+\ell}(z).$$

Следовательно $x \in z$. Таким образом, σ —эквивалентность на множестве $\Omega \setminus M$.

Для всякого $x \in \Omega \setminus M$ обозначим через $\bar{x}$ соответствующий смежный класс по эквивалентности σ. Фиксируем полную систему представителей A множества смежных классов по σ. Пусть $a \in A$ и $x \in \bar{a}$. Тогда существуют $m, k \geq 1$ такие, что $\varphi^m(x) = \varphi^k(a)$. Обозначим через k_0 минимальное число, для которого найдется n такое, что $\varphi^n(x) = \varphi^{k_0}(a)$. Далее, через n_0 обозначим минимальное число со свойством $\varphi^{n_0}(x) = \varphi^{k_0}(a)$. Пару натуральных чисел (n_0, k_0) назовем типом элемента x относительно эндоморфизма φ и системы представителей A (или просто типом). Тип элемента назовем четным, если $n_0 + k_0$ – четное число, и нечетным в противном случае.

Возьмем $x \in \Omega \setminus M$ такой, что $\varphi(x) \in \Omega \setminus M$. Тип элемента x обозначим (n_0, k_0). Заметим, что если $n_0 > 1$, то тип элемента $\varphi(x)$ есть ($n_0 - 1$, k_0). Действительно, $\varphi^{n_0-1}(\varphi(x)) = \varphi^{k_0}(a)$, $n_0 - 1 \geq 1$. Следовательно, $\varphi(x) \in \bar{a}$. Легко видеть, что k_0 – минимальное число, для которого найдется n такое, что $\varphi^n(\varphi(x)) = \varphi^{k_0}(a)$. Для такого числа n выполняется $n+1 \geq n_0$, т.к. (n_0, k_0) – тип элемента x. Рассмотрим теперь случай $n_0 = 1$. тогда $\varphi(x) = \varphi^{k_0}(a)$ и потому $\varphi(\varphi(x)) = \varphi^{k_0+1}(a)$. Следовательно, $\varphi(x) \in \bar{a}$. Пусть для некоторых $m, k \geq 1$ выполняется $\varphi^k(a) = \varphi^m(\varphi(x))$. По определению типа это означает, что $k \geq k_0$ (т.к. (1, k_0) – тип элемента x). Если предположить $k = k_0$, то получаем $\varphi^m(\varphi(x)) = \varphi^{k_0}(a) = \varphi(x)$, т.е. $\varphi(x) \in M$, что противоречит условиям, наложенным на x. Значит, $k > k_0$ и с учетом соотношения $\varphi(\varphi(x)) = \varphi^{k_0+1}(a)$ получаем, что $k = k_0 + 1$ – минимальное число, для которого найдется $m \geq 1$ со свойством $\varphi^m(\varphi(x)) = \varphi^k(a)$. Из сказанного следует, что тип элемента $\varphi(x)$ равен (1, $k_0 + 1$).

Таким образом, если $x \in \Omega \setminus M$ и $\varphi(x) \in \Omega \setminus M$, то элементы x и $\varphi(x)$ имеют типы разной четности. Обозначим через B_1 множество всех элементов из $\Omega \setminus M$ нечетного типа, через B_2 – четного типа. Ввиду доказанного выше $\varphi(B_1) \cap B_1 = \varnothing$, $\varphi(B_2) \cap B_2 = \varnothing$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. В рассматриваемой ситуации

$\Omega \setminus M \in \mathcal{F}$. Поэтому, либо $B_1 \in \mathcal{F}$, либо $B_2 \in \mathcal{F}$. Если $B_1 \in \mathcal{F}$, то и $\varphi(B_1) \in \mathcal{F}$, т.к. φ - эндоморфизм. Ввиду отмеченного соотношения $\varphi(B_1) \cap B_1 = \varnothing$ получаем противоречие. Аналогично, если $B_2 \in \mathcal{F}$. Полученное противоречие означает, что случай $M \notin \mathcal{F}$ невозможен, и это завершает доказательство теоремы.

6. Следствие. Полугруппа эндоморфизмов ультрафильтра регулярна.

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ - ультрафильтр, $\varphi \in End\,\mathcal{F}$. Согласно теореме I, $H_\varphi \in \mathcal{F}$. Определим преобразование f множества Ω следующим образом: $f(\alpha) = \alpha$, если $\alpha \in H_\varphi$; $f(\alpha) = \beta$ для некоторого $\beta \in \varphi^{-1}(\alpha)$, если $\alpha \in \varphi(\Omega) \setminus H_\varphi$; на $\Omega \setminus \varphi(\Omega)$ действие f определяется произвольно. Тогда, как легко видеть, $\varphi f \varphi = \varphi$. При этом $H_f \supset H_\varphi$, и потому $H_f \in \mathcal{F}$. В силу леммы I, $f \in End\,\mathcal{F}$. Таким образом, $End\,\mathcal{F}$ - регулярная полугруппа.

7. Легко видеть, что если $\mathcal{F}$ - ультрафильтр на бесконечном множестве, то полугруппа $End\,\mathcal{F}$ не имеет нетривиальных тождеств.

Фильтр $\mathcal{F}$, рассматриваемый как решетка относительно операций пересечения и объединения, обозначим $(\mathcal{F}, \subset)$. Некоторые элементы полугруппы $End\,\mathcal{F}$ (и для свободного фильтра) могут индуцировать одинаковые преобразования решетки $(\mathcal{F}, \subset)$. Однако нетрудно убедится, что для неглавного ультрафильтра $\mathcal{F}$ полугруппа $End\,\mathcal{F}$ действует точно на решетке $(\mathcal{F}, \subset)$.

8. Через $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{J}$ обозначаем, следуя [2], отношения Грина.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{F}$ - ультрафильтр и $f, \varphi \in End\,\mathcal{F}$. Тогда для отношений Грина на полугруппе $End\,\mathcal{F}$ имеют место следующие утверждения:

1) $f \mathcal{L} \varphi$ тогда и только тогда, когда $\pi_f = \pi_\varphi$;
2) $f \mathcal{R} \varphi$ тогда и только тогда, когда $f(\Omega) = \varphi(\Omega)$;
3) $f \mathcal{D} \varphi$ тогда и только тогда, когда $|f(\Omega)| = |\varphi(\Omega)|$;
4) отношения $\mathcal{D}$ и $\mathcal{J}$ совпадают.

<u>Доказательство</u>. I) Пусть выполняется $f\mathcal{L}\varphi$. Существуют такие $g_1, g_2 \in End\,\mathcal{F}$, что $f = g_1\varphi$, $\varphi = g_2 f$. Если $\alpha\pi_f\beta$, то $\varphi(\alpha) = g_2 f(\alpha) = g_2 f(\beta) = \varphi(\beta)$, т.е. $\pi_f \subset \pi_\varphi$. Аналогично, $\pi_\varphi \subset \pi_f$ и потому $\pi_f = \pi_\varphi$.

Обратно, пусть $\pi_f = \pi_\varphi$. По теореме I, $H_\varphi \in \mathcal{F}$, $H_f \in \mathcal{F}$. Обозначим $M = H_\varphi \cap H_f$. Тогда $M \in \mathcal{F}$. Определим преобразование ψ множества Ω, полагая $\psi(\varphi(\alpha)) = f(\alpha)$ для всякого $\varphi(\alpha) \in \varphi(\Omega)$ и $\psi(\xi) = \xi$ для всякого $\xi \in \Omega \setminus \varphi(\Omega)$. Это определение корректно ввиду условия $\pi_f = \pi_\varphi$. Заметим, что для $\alpha \in M$ выполняется $\psi(\alpha) = \psi(\varphi(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$, т.е. $M \subset H_\psi$. Следовательно $H_\psi \in \mathcal{F}$ и, согласно лемме I, $\psi \in End\,\mathcal{F}$. При этом $\psi\varphi = f$. Отсюда следует, что $f\mathcal{L}\varphi$.

2) Предположим, что $f\mathcal{R}\varphi$. Найдутся $g_1, g_2 \in End\,\mathcal{F}$ такие, что $f = \varphi g_1$, $\varphi = f g_2$. Тогда, очевидно, $f(\Omega) = \varphi(\Omega)$.

Обратно, пусть $f(\Omega) = \varphi(\Omega)$. Обозначим $M = H_\varphi \cap H_f$, $M \in \mathcal{F}$. Определим преобразование g множества Ω следующим образом: $g(\alpha) = \alpha$ для всякого $\alpha \in M$; $g(\alpha) = \beta \in \varphi^{-1}(f(\alpha))$ для $\alpha \in \Omega \setminus M$. Согласно лемме I, $g \in End\,\mathcal{F}$. Легко убедиться, что $\varphi g = f$. Отсюда следует, что $f\mathcal{R}\varphi$.

3) Пусть $f\mathcal{D}\varphi$. По определению $\mathcal{D}$, найдется ψ такой, что $f\mathcal{L}\psi$, $\psi\mathcal{R}\varphi$. По доказанному в первых пунктах теоремы $\pi_f = \pi_\psi$, $\psi(\Omega) = \varphi(\Omega)$. Следовательно, $|f(\Omega)| = |\varphi(\Omega)|$.

Предположим, что $|f(\Omega)| = |\varphi(\Omega)|$. Как и выше, обозначим $M = H_f \cap H_\varphi$, $M \in \mathcal{F}$. В частности, $M \subset f(\Omega) \cap \varphi(\Omega)$. Пусть μ - произвольное биективное отображение множества $f(\Omega)$ на $\varphi(\Omega)$, удовлетворяющее условию: ограничение μ на M есть тождественное преобразование. Положим $\psi = \mu f$. Очевидно, для всякого $\alpha \in M$: $\psi(\alpha) = \alpha$ и потому $\psi \in End\,\mathcal{F}$. Далее, $\psi(\Omega) = \mu f(\Omega) = \varphi(\Omega)$. Следовательно, $\psi\mathcal{R}\varphi$. Если $\alpha\pi_\psi\beta$ $(\alpha, \beta \in \Omega)$ то в силу инъективности отображения μ получаем $\alpha\pi_f\beta$. Аналогично в другую сторону, т.е. $\pi_\psi = \pi_f$, а потому $f\mathcal{L}\psi$. Таким образом, $f\mathcal{D}\varphi$.

4) Включение $\mathcal{D} \subset \mathcal{J}$ имеет место для любой полугруппы. Предположим, что $f\mathcal{J}\varphi$. Найдутся $g_1, g_2, h_1, h_2 \in End\,\mathcal{F}$ такие, что $f = g_1\varphi h_1$, $\varphi = g_2 f h_2$. Из этих соотношений следует, что $|f(\Omega)| = |\varphi(\Omega)|$. Согласно доказанному выше это оз-

начает, что $f \mathcal{D} \varphi$. Итак, $\mathcal{D} = \mathcal{J}$. Теорема доказана.

9. Пусть $\mathcal{F}$ - неглавный ультрафильтр на Ω. Для всякой мощности $m > 1$, не превосходящей $|\Omega|$, обозначим через I_m совокупность всех преобразований $\varphi \in End\,\mathcal{F}$ таких, что мощность $\varphi(\Omega)$ меньше m. Доказательство следующего утверждения получается с учетом теорем I, 2 несложной модификацией доказательства соответствующего утверждения для симметрических полугрупп [3].

Теорема 3. Пусть $\mathcal{F}$ - неглавный ультрафильтр на Ω, n - наименьшая из мощностей подмножеств, являющихся элементами $\mathcal{F}$. Тогда I_m, где $n < m \leq |\Omega|$, является двусторонним идеалом полугруппы $End\,\mathcal{F}$, причем других собственных двусторонних идеалов $End\,\mathcal{F}$ не имеет.

Нетрудно получить сходное описание двусторонних идеалов полугрупп эндоморфизмов главных ультрафильтров. Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие. Ультрафильтр $\mathcal{F}$ является однородным тогда и только тогда, когда полугруппа $End\,\mathcal{F}$ проста.

10. Следующая лемма представляет и некоторый самостоятельный интерес. Преобразование φ множества Ω называется константным, если $|\varphi(\Omega)| = 1$.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{F}$ - неглавный ультрафильтр на Ω. Полугруппа $End\,\mathcal{F}$ является максимальной среди таких полугрупп неконстантных преобразований Ω, в которых каждый элемент имеет неподвижную точку.

Доказательство. Пусть ψ - произвольное неконстантное преобразование Ω, не принадлежащее $End\,\mathcal{F}$. По лемме I, $H_\psi \notin \mathcal{F}$, а потому $\Omega \setminus H_\psi \in \mathcal{F}$. Обозначим через φ преобразование Ω такое, что $H_\varphi = \Omega \setminus H_\psi$ и $\varphi(\alpha) = \gamma \notin \psi^{-1}(\alpha)$ для всякого $\alpha \in H_\psi$. Это можно сделать, т.к. ψ - неконстантное преобразование. Тогда, очевидно, $\varphi \in End\,\mathcal{F}$ и $\psi\varphi$ не имеет неподвижных точек. Значит, полугруппа преобразований, порожденная $End\,\mathcal{F}$ и ψ, не лежит в рассматриваемом классе. Таким образом, $End\,\mathcal{F}$ является максимальной в указанном классе полугрупп.

Упомянем в этой связи, что группа автоморфизмов ультрафильтра $\mathcal{F}$ на бесконечном множестве Ω является максимальной подгруппой симметрической группы на Ω [9].

11. Для всякого множества $M\subset\Omega$ обозначим через $T(\Omega,M)$ (соответственно $G(\Omega,M)$) совокупность всех преобразований (соответственно обратимых преобразований) φ множества Ω таких, что $M\subset H_\varphi$. Группу всех автоморфизмов фильтра $\mathcal{F}$ обозначим $Aut\,\mathcal{F}$. Заметим, что согласно п.3, для ультрафильтра $\mathcal{F}$ всякая биекция из $End\,\mathcal{F}$ лежит в $Aut\,\mathcal{F}$ (для произвольного фильтра это не так.)

Конкретная характеристика полугрупп эндоморфизмов главных фильтров получается очевидным образом, и мы не будем ее здесь формулировать. Дадим конкретную характеристику полугрупп эндоморфизмов неглавных ультрафильтров, используя для ее получения конкретную характеристику групп автоморфизмов ультрафильтров, найденную в [7].

<u>Теорема 4</u>. Пусть $\mathfrak{A}$ - полугруппа преобразований множества Ω. Полугруппа $\mathfrak{A}$ совпадает с полугруппой всех эндоморфизмов некоторого неглавного ультрафильтра $\mathcal{F}$ на Ω тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ не содержит константных преобразований, каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку и для любого подмножества $M\subset\Omega$ либо $T(\Omega,M)\subset\mathfrak{A}$, либо $T(\Omega,\Omega\setminus M)\subset\mathfrak{A}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathfrak{A}=End\,\mathcal{F}$ для неглавного ультрафильтра $\mathcal{F}$. По определению эндоморфизма фильтра, $\mathfrak{A}$ не содержит константных преобразований. Согласно теореме 1 каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку. Поскольку для любого подмножества $M\subset\Omega$ либо $M\in\mathcal{F}$, либо $\Omega\setminus M\in\mathcal{F}$, то из леммы 1 следует, что либо $T(\Omega,M)\subset\mathfrak{A}$, либо $T(\Omega,\Omega\setminus M)\subset\mathfrak{A}$.

Обратно, предположим, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям, перечисленным в теореме. Очевидно, что тождественное преобразование принадлежит $\mathfrak{A}$. Убедимся, что Ω - бесконечное множество. Возьмем $\alpha\in\Omega$. Тогда либо $T(\Omega,\{\alpha\})\subset\mathfrak{A}$, либо $T(\Omega,\Omega\setminus\{\alpha\})\subset\mathfrak{A}$. Первый случай невозможен, ввиду отсутствия константных преобразований в $\mathfrak{A}$. Значит, $T(\Omega,\Omega\setminus\{\alpha\})\subset\mathfrak{A}$

для всякого $\alpha \in \Omega$. Для $\alpha, \beta \in \Omega$ $(\alpha \neq \beta)$ определим преобразование $\varphi_{\beta\alpha}$ множества Ω: $\varphi_{\beta\alpha}(\alpha) = \beta$, $\varphi_{\beta\alpha}(\xi) = \xi$ $(\xi \in \Omega, \xi \neq \alpha)$. Тогда $\varphi_{\beta\alpha} \in T(\Omega, \Omega \setminus \{\alpha\})$ для всякого $\beta \neq \alpha$. Таким образом, $\varphi_{\beta\alpha} \in \mathfrak{A}$ для любой пары различных элементов $\alpha, \beta \in \Omega$. Легко видеть, что если множество Ω конечное, то, перемножив соответствующим образом подобранные преобразования вида $\varphi_{\beta\alpha}$, получим константное преобразование. Отсюда следует бесконечность множества Ω.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ группу обратимых элементов полугруппы $\mathfrak{A}$. Заметим, что группа $\mathfrak{N}$ является собственной подгруппой симметрической группы на Ω. Действительно, предположим противное, и пусть M - подмножество Ω такое, что M и его дополнение равномощны Ω. По условию, либо $T(\Omega, M) \subset \mathfrak{A}$, либо $T(\Omega, \Omega \setminus M) \subset \mathfrak{A}$. Рассмотрим для определенности случай $T(\Omega, M) \subset \mathfrak{A}$. Фиксируем $\alpha \in M$ и обозначим через f следующее преобразование Ω:

$$f(\xi) = \xi \ (\xi \in M), \quad f(\xi) = \alpha \ (\xi \in \Omega \setminus M).$$

Тогда $f \in \mathfrak{A}$. Обозначим через g обратимое преобразование Ω, отображающее биективно M на $\Omega \setminus M$, а $\Omega \setminus M$ на M. Согласно предположению, $g \in \mathfrak{A}$, поэтому преобразование fgf принадлежит $\mathfrak{A}$. С другой стороны, легко проверить, что это преобразование является константным. Полученное противоречие означает, что $\mathfrak{N}$ - собственная подгруппа симметрической группы.

Обозначим через $\mathcal{F}^*$ совокупность подмножеств Ω вида $\mathcal{F}^* = \{M \subset \Omega : G(\Omega, M) \subset \mathfrak{N}, |\Omega \setminus M| \geq \aleph_0\}$. Далее, положим $\mathcal{F} = \{N \subset \Omega : N \supset M$ для некоторого $M \in \mathcal{F}^*\}$. Очевидно, группа $\mathfrak{N}$ удовлетворяет условию: для всякого $M \subset \Omega$ либо $G(\Omega, M) \subset \mathfrak{N}$, либо $G(\Omega, \Omega \setminus M) \subset \mathfrak{N}$. В [7] (теор. 2.4) доказано, что для удовлетворяющей этому условию собственной подгруппы $\mathfrak{N}$ симметрической группы на бесконечном множестве Ω выполняется следующее: $\mathcal{F}$ - ультрафильтр на Ω, причем $\mathfrak{N} = \mathrm{Aut}\, \mathcal{F}$.

Заметим, что для $M \subset \Omega$ включение $T(\Omega, M) \subset \mathfrak{A}$ имеет место в том и только в том случае, когда $G(\Omega, M) \subset \mathfrak{N}$. Действительно, пусть $G(\Omega, M) \subset \mathfrak{N}$. Значит, $M \in \mathcal{F}$. Поэтому

$\Omega\setminus M\notin\mathcal{F}$, и ввиду $\mathcal{H}=\mathrm{Aut}\,\mathcal{F}$ из теоремы I следует, что множество $G(\Omega,\Omega\setminus M)$ не лежит целиком в $\mathcal{H}$. Тогда подавно $T(\Omega,\Omega\setminus M)\notin\mathfrak{A}$, и поэтому согласно условию $T(\Omega,M)\subset\mathfrak{A}$. Очевидно, если $T(\Omega,M)\subset\mathfrak{A}$, то $G(\Omega,M)\subset\mathcal{H}$.

Из доказанного вытекает, что $\mathcal{F}^*$ и $\mathcal{F}$ можно определить, исходя из полугруппы $\mathfrak{A}$ в целом. А именно, $\mathcal{F}^*=\{M\subset\Omega : T(\Omega,M)\subset\mathfrak{A}, |\Omega\setminus M|\geqslant\mathcal{X}\}$; определение $\mathcal{F}$ переносится без изменений.

Построенный ультрафильтр $\mathcal{F}$ является неглавным. Действительно, если $\mathcal{F}$ - главный ультрафильтр, то найдется $\alpha\in\Omega$ такой, что $\{\alpha\}\in\mathcal{F}$. По построению $\mathcal{F}$, $T(\Omega,\{\alpha\})\subset\mathcal{F}$. Но тогда константное преобразование, отображающее все Ω в α, принадлежит $\mathfrak{A}$. А это противоречит ограничениям наложенным на $\mathfrak{A}$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{A}=\mathrm{End}\,\mathcal{F}$. Возьмем $\varphi\in\mathrm{End}\,\mathcal{F}$. По теореме I, $H_\varphi\in\mathcal{F}$. Найдется $M\in\mathcal{F}^*$, для которого $M\subset H_\varphi$. Следовательно, $\varphi\in T(\Omega,M)\subset\mathfrak{A}$ и, значит, $\mathrm{End}\,\mathcal{F}\subset\mathfrak{A}$. С другой стороны, ввиду максимальности (лемма 2) полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}\,\mathcal{F}$ неглавного ультрафильтра $\mathcal{F}$ в указанном классе полугрупп преобразований, получаем $\mathrm{End}\,\mathcal{F}=\mathfrak{A}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем.-М.:Наука, 1966.-603 с.
2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп.-М.:Мир, 1972.-Т.I.-285 с.
3. Мальцев А.И. Симметрические группоиды // Мат.сб.-1952.-Т.31.-С. 136-151.
4. Сирота С.М. К проблеме классификации фильтров // Докл. АН СССР.-1970.-Т.191, № 3.-С.533-536.
5. Штейнбук В.Б. Полугруппы эндоморфизмов фильтров // Изв. вузов. Математика.-1982.-Т.23, № 1.-С.71-74.
6. Штейнбук В.Б. Изоморфизмы полугрупп преобразований фильтров // Латв. мат. ежегодник.-1983.-Вып.27.-С.260-269.

7. Sanerib R. Automorphism groups of ultrafilters // Algebra Univ., 1974.- Vol. 4, Nr. 2. - P. 141-150.
8. Blass A. Two closed categories of filters // Fund.Math., 1977. - V. 94, Nr. 2. - P. 129-143.
9. Richman F. Maximal subgroups of infinite symmetric groups // Canad. Math. Bull. - 1967. - V. 10, Nr. 3. - P. 375-381.
10. Sanerib R. Ultraproducts and elementary types of some groups related to infinite symmetric groups // Algebra Univ., 1975. - V. 5, Nr. 1, - P. 24-37.

РМТТПП

Поступила 30.10.84
Исправленный вариант 5.03.85

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подведя итоги, можно считать, что в сборнике отражены возможности применения алгебраических и дискретных методов исследования - в первую очередь - при разработке теоретических основ математического и программного обеспечения ЭВМ. Как уже отмечалось во введении в сборник включены работы теоретического характера. Некоторые из них могут быть использованы в активно развивающейся сейчас алгебраической теории реляционных баз данных, другие при математическом моделировании структуры существующих или разрабатываемых дискретных вычислительных и управляющих систем или же как основа для разработки конкретных алгоритмов.

Выполненные ранее работы по соответствующей тематике авторами публиковались в виде тезисов, а также в различных периодических изданиях и в республиканских сборниках научных трудов. Депонированных работ нет.

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА И ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА:
Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(межвузовский)

Рецензенты: Б.Плоткин, проф., зав.каф. высшей математики РКИИГА им. Ленинского комсомола:
И.Страздинь, канд. физ.-мат. наук РПИ им. Я.Пельше;
Я.Бичевский, канд. физ.-мат. наук ЛГУ им. П.Стучки

Редакторы: Я.Цирулис, Р.Павлова
Технический редактор А.Яковича
Корректор Р.Экмане

Подписано к печати I7.07.86. ЯТ 09554. Ф/б 60x84/I6.
Бумага №3.10,5 физ.печ.л. 9,8 усл.печ.л. 7,8 уч.-изд.л.
Тираж 350 экз. Зак.№ 965 Цена I р. 20 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, I9
Отпечатано в типографии, 226050 Рига, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 519.95

Албертс М.Я. Распознавание контекстно-свободных языков на альтернирующих машинах Тьюринга //Алгебра и дискретная математика:Теоретические основы математического обеспечения. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - С. 5 - 12.

В статье рассматривается альтернирующая модель машины Тьюринга с записью на ленте. Временная сложность $t(n)$ определяется как глубина наилучшего принимающего поддерева дерева вычислений на слове длины n. Пусть $ATIME^{fin}(t(n))$ - класс языков, распознаваемых альтернирующими машинами Тьюринга, которые альтернируют ограниченное число раз за время $O(t(n))$. Доказано, что множество всех контекстно-свободных языков принадлежит классу $ATIME^{fin}(n)$.
Библиогр. 3 назв.

УДК 512.7

Бойко С.Н. Автоморфизмы треугольных произведений биавтоматов // Алгебра и дискретная математика:Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1986. - С. 13 - 23.

В статье дается описание автоморфизмов треугольного произведения линейных биавтоматов. Если $(\sigma_A, \alpha, \sigma_B)$ - автоморфизм биавтомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, то α однозначно определяется автоморфизмами σ_A и σ_B линейных пространств A и B соответственно. Найти все автоморфизмы $\mathfrak{A}$ - это значит описать в тех или иных терминах нормализатор $N_{\Sigma_A \times \Sigma_B}(\Gamma)$ полугруппы $\Gamma \in End(A,B)$ в представлении $(End(A,B), \Sigma_A \times \Sigma_B)$. Приводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы элемент $(\sigma_A, \sigma_B) \in \Sigma_A \times \Sigma_B$ определял автоморфизм треугольного произведения $\mathfrak{A}_1 \triangledown \mathfrak{A}_2$.
Библиогр. 3 назв.

УДК 519.95

Булс Я.А. Некоторые понятия моделирования конечных детерминированных автоматов //Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.- Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - С. 25 - 35.

Пусть $\mathfrak{A}$ - автомат $\langle P,Q,R,\Gamma,\vartheta\rangle$, $\mathfrak{B}$ - $\langle X,Y,Z,\Delta,\lambda\rangle$, $x\in X$, $y\in Y$ $z\in Z$, $u\in W(X)$, $v\in W(Y)$, где $W(X)$ - множество слов в алфавите X. Вводятся следующие обозначения. Если $(\varphi,\psi,\chi):(X,Y,Z)\to(P,Q,R)$, φ,ψ,χ - иньекции и

$$\chi(\Delta(z,x)) = \Gamma(\chi(z),\varphi(x)),\ \psi(\lambda(z,x)) = \vartheta(\chi(z),\varphi(x)),$$

то $\mathfrak{A}_1 \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}$. Если $(\varphi,\psi,\chi):(X,Y,Z)\to(P,Q,R)$, φ,ψ - иньекции, продолженные равенствами

$$\varphi(ux) = \varphi(u)\varphi(x),\quad \psi(vy) = \psi(v)\psi(y),$$

на $W(X)$, $W(Y)$ соответственно, и если $\psi(\lambda(z,u)) = \vartheta(\chi(z),\varphi(u))$, то $\mathfrak{A} \geqslant_1 \mathfrak{B}$. Если $(\varphi,\psi,\chi):(X,Y,Z)\to(W(P),W(Q),R)$, ψ - инъекция и выполняются все четыре тождества, то $\mathfrak{A} \trianglerighteq \mathfrak{B}$. Доказывается, что $\mathfrak{A} \geqslant_1 \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда найдется автомат $\mathfrak{B}'$, эквивалентный $\mathfrak{B}$ и такой, что $\mathfrak{A} \trianglerighteq_1 \mathfrak{B}'$. Дана оценка длины слов сверху и снизу, при которой осуществимо $\trianglerighteq$ -моделирование.

Библиогр. 3 назв.

УДК 519. 46 : 512.8

Вавилов Н.А. О решении систем однородных линейных уравнений //Алгебра и дискретная математика: Теоретичеcкие основы математического обеспечения ЭВМ.- Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1986. - С. 37 - 42.

В работе доказывается, что каждое решение системы из m однородных линейных уравнений с унимодулярной матрицей коэффициентов над коммутативным кольцом представляется в виде линейной комбинации некоторых стандартных решений, в каждом из которых не более $m+1$ ненулевой координаты. Этот вопрос представляет интерес в связи с задачей о нормальности элементарной подгруппы в группе Шевалле. Случай одного уравнения был рассмотрен ранее А.А.Суслиным (РЖМат, 1977, 9А462) при доказательстве нормальности элементарной подгруппы в полной линейной группе, а случай двух уравнений М.С.Туленбаевым (РЖМат, 1982, 4А434) при изучении группы Стейнберга. Высказано также связанное с гипотезами в РЖМат, 1984, 10А176 предположение, что в некоммутативном случае аналогичный результат справедлив для вполне слабоконеч-

ных колец и только для них.
Библиогр. 10 назв.

УДК 512.563.6

Волков Н.Д. Переход от реляционной алгебры к алгебре Халмоша //Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - С. 43 - 53.

В работе под алгеброй Халмоша понимается полиадическая локально-конечная алгебра с равенством. Рассматриваются многосортные алгебры Халмоша, т.е. алгебры Халмоша задаются над схемой. Схемой является набор $I=(I_i, i\in\Gamma)$, где каждое I_i, $i\in\Gamma$ - счетное множество переменных.

Схеме алгебр Халмоша соответствует категория-схема реляционных алгебр. В работе строится функтор из категории реляционных алгебр над схемой K_I в категорию алгебр Халмоша в схеме I.
Библиогр. 5 назв.

УДК 512.548.7

Гварамия А.А., Карасев Г.А. Моноассоциативные n-нильпотентные лупы // Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - С. 55 - 66.

В статье понятие n-нильпотентности, играющее заметную роль в теории групп, обобщается на случай моноассоциативных луп, т.е. луп, в которых каждый элемент порождает подгруппу. Изучаются простейшие свойства n-центра такой лупы, взаимных n-коммутантов в лупе, а также самых n-нильпотентных луп.
Библиогр. 8 назв.

УДК 519.76

Детловс В.К. Лад и мелодическая линия. // Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.-Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1986. - С. 67-87.

Проводится статистический анализ мелодического рисунка вблизи каждой из семи диатонических ступеней. Обработан массив вокальных мелодий Баха, Моцарта, Бетховена, Шуберта, Брамса, а также латышских народных песен общим объемом 65,6 тыс. интервалов. Установлено ладофункциональное своеобразие каждой ступени в смысле подьемов и спусков мелодии, а также в смысле изгибов мелодической линии. На материале классической музыки подтверждено существование двух областей лада - центральной (УII, I, II) и периферийной (III, IУ, У, УI), которые были замечены в фольклорных мелодиях. Библиогр. 5 назв., рис.8

УДК 510

Дискин З.Б. Синтаксические модели теории множеств высшего порядка //Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.- Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - С. 89-103.

Предлагается рассмотрение моделей теории множеств высшего порядка как математических структур в смысле Бурбаки, в формальном варианте, как синтаксических моделей, т.е. структур, метатеория которых формализована некоторым специальным образом. В этом формализме доказан изоморфизм таких структур и показано, что истинность или ложность СН во всех структурах определяется соответственно, истинностью или ложностью СН в метатеории.
Библиогр. 4 назв.

УДК 519.21 : 57

Карташов А.П. Комбинаторное описание динамики активности стохастических сетей формальных нейронов // Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ.- Рига:ЛГУ им.П.Стучки,1986.- С.105-116.

Рассматривается вероятностная модель рефлекса, реализованная на стохастически организованной сети формальных нейронов. Вопрос о вероятности самопроизвольного возникновения заданной системы безусловных рефлексов сведен к некоторой задаче о структуре компонент случайного отображения конечных множеств, решаемой комбинаторными методами. Библиогр. 5 назв., рис.2

УДК 519.48
Липянский Р.С. О триангулируемых представлениях алгебр Ли //Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - С. 117-123.

В статье дается описание конечномерных алгебр Ли (р-алгебр Ли), допускающих представление треугольными матрицами над алгебраически замкнутыми или конечными полями. Библиогр. 4 назв.

УДК 590.4
Пивоварова Г.В. Замечание о решеточных парах // Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - С. 125-130.

Статья посвящена анализу аксиом решеточных пар, рассматриваемых в (РЖМат., 1984, 10А201). Библиогр. 3 назв.

УДК 512.8 : 681.3
Цирулис Я.П. Абстрактное описание типов данных многообразий алгебр данных // Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - С. 131-144.

Работа представляет собой теоретическое исследование в рамках т.наз. алгебраического подхода к абстракции данных. Алгебры данных понимаются в смысле Зиллеса (РЖМат., 1981. 2В798). Под типом данных понимается алгебра из какого-либо многообразия алгебр данных, свободно порождаемая множеством используемых атрибутов. Дается характеристика (в теорикс-категорных терминах) многообразий алгебр данных, порождаемых тем или иным типом, а также полугруп эн-

доморфизмов типов данных. Один из результатов показывает, что с точностью до клона действия тип данных восстанавливается по своей полугруппе эндоморфизмов.
Библиогр. 7 назв.

УДК 512.534
Штейнбук В.Б. Полугруппы эндоморфизмов ультрафильтров // Алгебра и дискретная математика: Теоретические основы математического обеспечения ЭВМ. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - С. 145-155.

Преобразование φ множества Ω называется эндоморфизмом фильтра $\mathcal{F}$ на множестве Ω, если $\varphi(M)\in\mathcal{F}$ для всякого $M\in\mathcal{F}$. Для ультрафильтра $\mathcal{F}$ преобразование φ является эндоморфизмом тогда и только тогда, когда $\varphi^{-1}(M)\in\mathcal{F}$ для любого $M\in\mathcal{F}$. Доказано, что множество всех неподвижных точек эндоморфизма ультрафильтра принадлежит этому ультрафильтру. Описаны эквивалентности Грина и идеалы полугрупп эндоморфизмов ультрафильтров. Получена конкретная характеристика полугрупп эндоморфизмов ультрафильтров.
Библиогр. 10 назв.

1 р. 20 к.