М.эт.

1986

КК

Непрерывные функции на топологических пространствах

LVU izdevuma arhīvs

Рига 1986

LUB: Frz. & matem. fak. bibl. x 7

Министерство высшего и среднего специального
образования Латвийской ССР
Даугавпилсский педагогический институт
Кафедра математического анализа

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Latvijas
Universitātes
BIBLIOTĒKA

LVU izdevuma
arhīvs

Латвийский государственный университет им.П.Стучки
Рига 1986

1

УДК 513.83 + 513 + 517

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Непрерывные функции на топологических пространствах: Сборник научных трудов (межвузовский) /Отв.ред. В.Старцев. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1986. - 191с.

Сборник посвящен проблемам топологии и функционального анализа.

Сборник предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, работающих в области топологии, геометрии и функционального анализа, а также в смежных областях.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
В.Старцев (отв. редактор)
Е.Энгельсон, А.Шостак, Я.Лапиньш

Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

Н $\frac{20203-114\text{у}}{\text{М}812(11)-86}$ 18.86.1702040000.1702050000

© Латвийский государственный университет им. П.Стучки, 1986

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Сборник посвящен проблемам топологии и функционального анализа.

В сборник включены работы, посвященные исследованию непрерывных функций на топологических и нечетких топологических, а также структуры топологических пространств. В ряде работ рассматриваются непрерывные функции, заданные на специальных топологических пространствах - метрическом, нормированном и др.

Основной объем сборника составляют работы, выполненные сотрудниками математических кафедр Даугавпилского педагогического института и кафедры математического анализа Латвийского государственного университета им.П.Стучки и представляют собой результаты плановой научной работы, проводимой на этих кафедрах. В сборник включен также ряд работ, выполненных специалистами Московского государственного университета и других вузов по этой тематике при тесном сотрудничестве с математическими кафедрами ДПИ и ЛГУ.

Большинство из результатов включенных в сборник статей докладывалось на 43- й и 44- й научных конференциях ЛГУ, а также на семинарах при кафедрах математического анализа ДПИ и ЛГУ.

Сборник предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, работающих в области топологии, геометрии и функционального анализа, а также в смежных областях.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига .1986.

УДК 515.12

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.В.Архангельский
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Обозначения и терминология в статье в целом такие, как в [2], [7] и [18]; отдельные исключения отмечаются. Компактами называются бикомпактные хаусдорфовы пространства. Пространство σ-компактно, если оно - объединение счетного семейства компактов. Замыкание обозначается чертой сверху, $N^+ = \{1,2,\dots,n,\dots\}$, $\mathbb{R}$ - вещественная прямая с обычной топологией. Символ τ служит для обозначения бесконечных кардиналов. Через X, Y, Z обозначаются только топологические пространства; все они заранее предполагаются T_1-пространствами. Рассматриваются только непрерывные отображения.

Статья эта не является обзором. В ней указываются и развиваются некоторые новые подходы к взаимной классификации пространств и отображений, наметившиеся в самое последнее время. Вводится ряд новых и, как представляется, перспективных понятий; ставятся задачи, привлекающие своей естественностью.

В рассматриваемых конструкциях существенную роль играют кардинальные инварианты.

§ 1. Некоторые проективные свойства

A°. В [5] введено следующее определение. Пространство называется проективно полным по Чеху, если каждое регулярное пространство со счетной базой, являющееся его образом при открытом отображении, полно по Чеху. К числу проективно полных по Чеху пространств относится произведение любого множества полных сепарабельных метрических пространств, равно как и любое Σ-произведение таких пространств [5],-

в частности, таково R^{τ} при любом τ .

Понятие проективной полноты по Чеху допускает естественное обобщение, которое позволяет широко применить понятие полноты по Чеху для исследования самых разных классов пространств.

Пусть $\mathcal{P}$ - некоторый класс топологических пространств. Назовем пространство X <u>проективно полным по Чеху относительно класса</u> $\mathcal{P}$, или <u>проективно $\mathcal{P}$-полным по Чеху</u>, если каждое пространство из класса $\mathcal{P}$, на которое X можно открыто отобразить, полно по Чеху. Следует отметить, что не каждое полное по Чеху пространство проективно полно по отношению к классу всех тихоновских пространств: полнота по Чеху не сохраняется в классе тихоновских пространств открытыми отображениями [4] , [9] . Назовем пространство X <u>абсолютно полным по Чеху</u>, если каждое тихоновское пространство, являющееся его открытым образом, полно по Чеху. Таково каждое сепарабельное полное метрическое пространство, любое локально компактное пространство и каждое полное по Чеху линделёфово пространство.

I.I. <u>Задача</u>. Охарактеризовать абсолютно полные по Чеху тихоновские пространства (в терминах топологии самого пространства).

Переформулировкой известной теоремы Б.А.Пасынкова (см. [13] , [9]) является следующий результат:

I.2. <u>Теорема</u>. Каждое полное по Чеху пространство проективно полно по Чеху относительно класса всех паракомпактов.

<u>Замечание</u>. Если $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ - два класса пространств и $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$, то каждое пространство X , проективно полное по Чеху относительно класса $\mathcal{P}_2$, очевидно, является проективно полным и относительно класса $\mathcal{P}_1$.

Б^{0}. В [6] был введен следующий класс пространств. Пусть τ - некоторый бесконечный кардинал. Пространство X называется <u>τ-простым</u>, если для всякого непрерывного отображения $f: X \longrightarrow Y$ пространства X на произвольное тихоновское пространство Y веса $\leq \tau$ мощность Y не превосходит τ . В частности, пространство X $\aleph_0$-просто, если при каждом непрерывном отображении в $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ его образ счетен. В [6] показано, что к числу $\aleph_0$-простых пространств относятся все линделёфовы P-пространства и все линделёфовы разреженные пространства. Имеет место следующая любопытная характеристика [6] : пространство X $\aleph_0$-просто в том и только том случае, если в пространстве $C_p(X)$ замыкание всякого счетного множества обладает счетной базой. Конечно, несчетное дискретное пространство не $\aleph_0$-просто. Однако если сузить класс отображений до открытых отображений, ситуация меняется.

В°. Назовем проективной мощностью пространства X точную верхнюю грань мощностей всех сепарабельных метризуемых пространств, являющихся образами пространства X при открытых отображениях. Вообще, проективной мощностью пространства X относительно класса $\mathcal{P}$ топологических пространств (или проективной $\mathcal{P}$-мощностью X ; обозначение: $|X|_{\mathcal{P}}$) будем называть супремум мощностей тех пространств из класса $\mathcal{P}$, на которые X можно отобразить открыто.

При открытом отображении образ разреженного пространства является разреженным пространством. Кроме того, мощность разреженного пространства не превосходит его веса. Следовательно, имеет место

I.3. Теорема. Каждое разреженное пространство проективно счетно.

I.4. Задача. Охарактеризовать класс проективно счетных (тихоновских) пространств.

Если φ - какой-либо кардинальный инвариант и $\mathcal{P}$ - некоторый класс топологических пространств, то проективным отражением инварианта φ относительно класса $\mathcal{P}$ называется кардинальный инвариант $\varphi^{\circ}_{\mathcal{P}}$, определяемый следующей формулой:

$$\varphi^{\circ}_{\mathcal{P}}(X)=\sup\{\varphi(Y): Y\in\mathcal{P} \text{ и } Y \text{ - представимо как образ пространства } X \text{ при открытом отображении}\}.$$

Г°. Как легко видеть, образ пространства X при каждом непрерывном отображении в $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ является компактом в том и только том случае, если каждая непрерывная вещественная функция на X ограничена. Назовем пространство X <u>проективно компактным (проективно σ-компактным)</u>, если при каждом открытом отображении пространства X на регулярное пространство со счетной базой образ является компактом (σ-компактен).

I.5. <u>Задача</u>. Охарактеризовать, в терминах самой топологии, проективно-компактные и проективно-σ-компактные пространства.

Скажем, что пространство X <u>k_σ-просто</u>, если при каждом непрерывном отображении $f: X \to R^{\aleph_0}$ образ $f(X)$ σ-компактен.

I.6. <u>Задача</u>. Исследовать класс k_σ-простых пространств; выяснить, в частности, какие теоремы о псевдокомпактных пространствах распространяются на k_σ-простые пространства.

Д$^{\text{О}}$. Пространство X назовем <u>долинделёфовым</u>, если всякий паракомпакт, на который X можно открыто отобразить, является линделёфовым пространством.

I.7.<u>Предложение</u>. К числу долинделёфовых пространств относятся:

а) все пространства со счетным числом Суслина;

б) все пространства, слабое число Линделёфа которых счетно, - так называются пространства X , для которых из каждого открытого покрытия γ можно выделить счетное подсемейство λ такое, что $\cup\lambda$ всюду плотно в X .

в) все пространства, являющиеся объединением счетного семейства псевдокомпактных пространств.

<u>Доказательство</u>. Слабое число Линделефа не увеличивается непрерывными отображениями и каждый паракомпакт со счетным слабым числом Линделёфа является линделефовым пространством - это доказывается без труда. Пункты а) и б) этим проверены.

Докажем в). Достаточно установить, что, если пространство X покрыто счетным семейством псевдокомпактных пространств X_i , то каждое локально-конечное открытое покрытие γ пространства X счетно. Но если γ несчетно, то несчетно и семейство $\gamma_i = \{U \cap X_i : U \in \gamma\}$ при некотором i. Так как γ_i локально конечно в X_i и состоит из открытых в X_i множеств, это противоречит псевдокомпактности X_i.

I.8. Задача. Охарактеризовать "внутренним" образом тихоновские долинделёфовы пространства.

I.9. Задача. Описать долинделёфовы локально-компактные тихоновские пространства.

E^o. Если в тихоновском пространстве X есть бесконечное семейство попарно не пересекающихся непустых открытых множеств, то на X есть и непрерывная вещественная функция, которая принимает бесконечное число значений. Следовательно, для произвольного тихоновского пространства X следующие условия равносильны: а) каждая непрерывная вещественная функция на X принимает лишь конечное множество значений; б) образ пространства X при каждом непрерывном отображении в $R^{\aleph_0}$ конечен; в) множество X конечно. Однако следующее понятие оказывается уже не тривиальным.

Пространство X называется проективно конечным (или проконечным), если при каждом открытом отображении пространства X на регулярное пространство со счетной базой образ является конечным множеством. Разумеется, все дискретные пространства проконечны. Нетривиальный класс проконечных пространств дает

I.10. Теорема. Экстремально несвязное пространство проконечно в том и только том случае, если оно псевдокомпактно.

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ - открытое отображение, X - псевдокомпактное экстремально несвязное пространство и $Y = f(X)$ - метризуемое пространство. Тогда Y экстремально несвязно, так как последнее свойство сохраняется открытыми отображениями. Экстремально несвязное пространство Фреше-Урысона дискретно. Значит, Y дискретно. Но Y - компакт. Заключаем, что Y конечно.

Обратно, пусть X - экстремально несвязное не псевдокомпактное пространство. Найдется тогда дискретное в X

семейство $\{U_i\}_{i\in N^+}$ открытых, попарно не пересекающихся непустых множеств. Тогда и $\{V_i\}_{i\in N^+}$, где $V_i = \overline{U}_i$, – дискретное семейство не пересекающихся, открытых в X множеств (учитывая, что X экстремально несвязно). Множество $F = \cup\{V_i : i\in N^+\}$ замкнуто и открыто в X; поэтому и множество $V_0 = X\setminus F$ открыто и замкнуто в X. Тогда фактор-пространство, отвечающее разбиению пространства X на множества $V_0, V_1, \ldots$, является дискретным пространством мощности $\aleph_0$ – противоречие.

Проведенное рассуждение подсказывает следующее определение.

Ж^0. Назовем пространство X <u>проективно-дискретным</u> (<u>продискретным</u>), если при каждом открытом отображении его на регулярное пространство со счетной базой образ дискретен. Теорема I.I0 немедленно обобщается, в первой своей части, до такого утверждения:

I.II. <u>Теорема</u>. Каждое экстремально несвязное пространство проективно-дискретно.

Так как каждое дискретное пространство со счетной базой счетно, из теоремы I.II вытекает

I.I2. <u>Следствие</u>. Произвольное экстремально несвязное пространство проективно-счетно.

Чтобы выяснить, насколько близко подходит проективная дискретность к экстремальной несвязности, полезно рассмотреть следующую задачу.

I.I3. <u>Задача</u>. Может ли в проективно-дискретном тихоновском пространстве существовать нетривиальная сходящаяся последовательность?

I.I4. <u>Общая задача</u>. Какие из введенных выше классов пространств (конечно) мультипликативны?

I.I5. <u>Общая задача</u>. При каких условиях введенные выше проективные свойства наследуются подпространствами?

Проективная полнота по Чеху не наследуется замкнутыми подпространствами. Это видно, например, из того, что в R^{τ}, при $\tau = 2^{\aleph_0}$, можно вложить в качестве замкнутого подпространства обычное пространство Q рациональных чисел (R^{τ} проективно полно по Чеху, а Q - нет).

I.16. Задача. Верно ли, что произведение проективно-полного по Чеху пространства на компакт (на обычный отрезок) является проективно-полным по Чеху пространством? Верно ли, что произведение проективно-полных по Чеху пространств всегда является проективно-полным по Чеху пространством? Сохраняется ли проективная полнота по Чеху при возведении в квадрат?

I.17. Задача. Верно ли, что квадрат "стрелки" проективно полон по Чеху? Будет ли проективно-полным по Чеху произведение "стрелки" на отрезок, на прямую, на любой компакт?

I.18. Задача. Наследуется ли замкнутыми подпространствами абсолютная полнота по Чеху? Что если дополнительно предположить все пространство тихоновским, нормальным, паракомпактом?

Заметим, что все введенные выше свойства сохраняются операцией конечной свободной суммы и что все они наследуются открыто-замкнутыми подпространствами.

§ 2. Общая схема построения проективных и копроективных классов пространств (топологических свойств)

Рассмотренные в предыдущем параграфе новые классы пространств были все определены по одной схеме. Представляется целесообразным выделить эту схему здесь - что явится существенным шагом в сторону систематизации, в духе теории категорий, изучения разнообразных конкретных проективных свойств.

Далее $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ - некоторые классы топологических пространств и $\mathcal{M}$ - произвольный класс непрерывных отображений. Будем считать, что классы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ вместе с каждым входящим в них пространством содержат и все пространства, гомеоморфные последнему. Класс $\mathcal{M}$ предположим замкнутым относительно композиций с гомеоморфизмами (слева и справа).

<u>Схема I</u>. Обозначим через $[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]$ класс всех топологических пространств X, удовлетворяющих условию:

(*) каково бы ни было отображение $f: X \to Y$, принадлежащее классу $\mathcal{M}$, если $f(X) = Y \in \mathcal{Q}$, то $Y \in \mathcal{R}$.

Класс $[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]$ назовем <u>проективным классом пространств (проективным топологическим свойством), порожденным тройкой $\mathcal{M}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$</u>.

Все рассмотренные в параграфе I примеры укладываются в эту схему. Схема I допускает полезное уточнение. Естественно наряду с тройкой $\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ фиксировать еще один класс $\mathcal{P}$ топологических пространств и рассматривать пересечение

$$\mathcal{P} \cap [\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]$$

двух классов; обозначать это пересечение мы будем через

$$[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]_{\mathcal{P}}.$$

Работая с данным общим определением, следует прежде всего выяснить, как те или иные категорные свойства классов $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$ (и $\mathcal{P}$) сказываются на категорных свойствах класса $[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]$ (класса $[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]_{\mathcal{P}}$).

2.I. <u>Задача</u>. При каких ограничениях (в терминах операций) на классы $\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$ класс $[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]_{\mathcal{P}}$ (конечно) мультипликативен? Наследственен по замкнутым подпространствам? Замкнут относительно умножения на компакты? На отрезок?

<u>Замечание</u>. Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ - классы отображений, и $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ и $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ - классы топологических пространств. Предположим, что $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}_1$, $\mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{Q}_1$ и $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$. Тогда, очевидно,

$$[\mathcal{M}_1, \mathcal{Q}_1, \mathcal{R}_1]_{\mathcal{P}_1} \subset [\mathcal{M}_2, \mathcal{Q}_2, \mathcal{R}_2]_{\mathcal{P}_2}.$$

Например, если $\mathcal{M}$ - класс всех открытых отображений, $\mathcal{Q}$ - класс всех паракомпактов, а $\mathcal{R}$ - класс всех линделёфовых пространств, то $[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]$ - класс всех долинделёфовых пространств.

Заметим, что $[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}]$ - класс всех топологических пространств, каковы бы ни были класс $\mathfrak{M}$ отображений и класс $\mathfrak{Q}$ пространств. То же можно сказать и о $[\mathfrak{M}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}]$, когда $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{R}$.

Приведем некоторые конкретные результаты, связанные со схемой I.

2.2. Теорема. Пусть $\mathfrak{M}$ - класс всех открытых (индуктивно открытых - см. [6]) отображений, $\mathfrak{Q}$ - класс всех тихоновских пространств с первой аксиомой счетности (всех бисеквенциальных тихоновских пространств) и $\mathfrak{R}$ - класс всех пространств со счетной базой. Тогда каждое пространство, гомеоморфное всюду плотному подпространству произведения сепарабельных метрических пространств, принадлежит классу $[\mathfrak{M}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}]$.

Это вытекает из следствия 6 работы [6], с. 10.

2.3. Теорема. Пусть $\mathfrak{M}$ - класс всех открытых отображений, $\mathfrak{Q}$ - класс всех пространств с первой аксиомой счетности и $\mathfrak{R}$ - класс всех сепарабельных пространств, метризуемых полной метрикой. Тогда произведение и Σ-произведение любого множества сепарабельных полных метрических пространств принадлежат классу $[\mathfrak{M}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}]$.

Это также легко следует из теоремы 6 работы [6].

Очевидно, результаты, относящиеся к схеме I, полезны, когда выясняется, можно ли пространства из некоторого класса $\mathfrak{P}$ отобразить на пространства из некоторого класса $\mathfrak{Q}$ посредством отображения, принадлежащего классу $\mathfrak{M}$ (классическая постановка одного из главных вопросов, относящихся к взаимной классификации пространств и отображений, восходящая к П.С.Александрову).

2.4. Теорема. Пусть $\mathfrak{Q}$ - класс всех хаусдорфовых пространств с первой аксиомой счетности, $\mathfrak{R}$ - класс всех пространств мощности $\leq 2^{\aleph_0}$, а $\mathfrak{M}$ - класс всех непрерывных отображений. Тогда: а) каждое пространство со счетным числом Суслина принадлежит классу $[\mathfrak{M}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}]$; б) каждое линделёфово пространство принадлежит $[\mathfrak{M}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}]$.

Утверждение а) - переформулировка известного результата Хайнала и Юхаса [21], утверждение б) - переформулировка теоремы Архангельского [2].

2.5. Задача. Существует ли хорошее "внутреннее" описание пространств из класса $[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]$ в ограничениях на $\mathcal{M}$, $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$ из теоремы 2.4?

Заметим, что в связи с результатами, относящимися к схеме I, каждый раз возникает задача точного описания соответствующего класса $[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]_{\mathcal{P}}$ во внутренних терминах.

Укажем теперь схему 2, двойственную схеме I.

Схема 2. Обозначим через $\langle \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{M} \rangle$ класс всех топологических пространств Y, удовлетворяющих условию:

(* *) каково бы ни было отображение $f: X \to Y$, принадлежащее классу $\mathcal{M}$, где $f(X) = Y$, если $X \in \mathcal{R}$, то $X \in \mathcal{Q}$.

Класс $\langle \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{M} \rangle$ назовем копроективным классом, порожденным тройкой $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$.

Если нас интересует еще некоторый класс $\mathcal{P}$ топологических пространств, естественно рассмотреть пересечение

$$\mathcal{P} \cap \langle \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{M} \rangle$$

двух классов; обозначать это пересечение мы будем через $\langle \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{M} \rangle_{\mathcal{P}}$.

По-видимому, результаты, которые можно отнести к схеме 2, не столь распространены в общей топологии, как результаты, умещающиеся в рамках схемы I. Тем не менее, в принципе схема 2 представляется столь же естественной, как схема I. Например, к ней относятся следующие известные утверждения (см. [3], [I4], [9]).

2.6. Теорема. Пусть $\mathcal{M}$ - класс совершенных отображений, $\mathcal{R}$ - класс всех пространств, уплотняемых на метризуемые, и $\mathcal{Q}$ - класс всех метризуемых пространств. Тогда каждое метризуемое пространство Y принадлежит классу $\langle \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{M} \rangle$.

2.7. Теорема. Пусть $\mathcal{M}$ - класс всех совершенных отображений, $\mathcal{R}$ - класс всех тихоновских пространств с точечно счетной базой и $\mathcal{Q}$ - класс всех метризуемых пространств. Тогда каждое метризуемое пространство Y принадлежит классу $\langle \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{M} \rangle$.

2.8. Задача. Выяснить (во внутренних терминах) объем классов $\langle \mathcal{Q}, \mathfrak{R}, \mathfrak{M} \rangle$ при ограничениях на $\mathcal{Q}$, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{M}$, наложенных в теоремах 2.6 и 2.7.

§ 3. Новые кардинальные инварианты, определяемые с помощью классов отображений

Действуя, по существу, в духе схемы I, мы определяем новые кардинальные инварианты топологических пространств (впрочем, одна конструкция этого ряда уже была рассмотрена в § I).

Пусть $\mathcal{Q}$ - некоторый класс пространств, φ - кардинальный инвариант - т.е. кардинальнозначная функция, определенная на классе всех T_1-пространств, и $\mathfrak{M}$ - некоторый класс отображений. Для произвольного пространства X обозначим через $\mathfrak{M}(X)$ совокупность всех тихоновских пространств, являющихся образами пространства X при отображениях из класса $\mathfrak{M}$ (этим обозначением мы пользуемся и в дальнейшем) и положим

$$\varphi_{\mathfrak{M},\mathcal{Q}}(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathcal{Q} \cap (\mathfrak{M}(X))\}.$$

Этим определен новый кардинальный инвариант $\varphi_{\mathfrak{M},\mathcal{Q}}$.

Если φ' и φ'' - два кардинально-значных инварианта, $\mathfrak{M}$ - класс отображений и τ - кардинал, то кардинальный инвариант $\varphi = (\varphi', \varphi'', \tau, \mathfrak{M})$ определяется следующим образом:

$$\varphi(X) = \sup\{\varphi'(Y) : Y \in \mathfrak{M}(X) \text{ и } \varphi''(Y) < \tau\}.$$

Разумеется, роли φ' и φ'' в этом определении различны, и, как правило, $(\varphi', \varphi'', \tau, \mathfrak{M}) \neq (\varphi'', \varphi', \tau, \mathfrak{M})$.

Пусть $\mathcal{Q}$ - класс всех пространств Y, для которых $\varphi''(Y) < \tau$, и $\mathfrak{R}$ - класс всех пространств Y, для которых $\varphi'(Y) < \lambda$, где λ - некоторый фиксированный кардинал. Для кардинальной функции $\varphi = (\varphi', \varphi'', \tau, \mathfrak{M})$, тогда, как легко видеть, имеем: класс всех пространств X, для которых $\varphi(X) < \lambda$, совпадает с классом $[\mathfrak{M}, \mathcal{Q}, \mathfrak{R}]$.

Если $\mathfrak{N}$ - класс всех непрерывных отображений, то вместо $(\varphi', \varphi'', \tau, \mathfrak{M})$ для конкретных функций φ' и φ'' мы обычно пишем $(\varphi', \varphi'', \tau)$ или $\varphi'_{\varphi'',\tau}$, - не боясь

Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

путаницы с обозначением $\varphi_{\mathcal{M},\mathcal{Q}}$, введенным ранее. Кардинальная функция $\varphi'_{\varphi',\tau}$ называется так: "кардинальная функция φ', τ -приведенная по функции φ'' ".

В частности, представляет интерес изучить следующие кардинальные инварианты, получаемые по этой схеме:

$l_{w,\tau} = (l, w, \tau)$ - число Линделёфа, τ -приведенное по весу;

$t_{w,\tau} = (t, w, \tau)$ - теснота, τ -приведенная по весу;

$c_{w,\tau} = (c, w, \tau)$ - число Суслина, τ -приведенное по весу.

Очевидно, всегда $t_{w,\tau}(X) \leq \min\{\tau, |X|\}$.

3.1. Предложение. Если X - компакт, то

$$t_{w,\tau}(X) = \min\{\tau, t(X)\}.$$

Это следует из того, что в классе компактов теснота не возрастает при непрерывных отображениях и что она характеризуется в этом классе как точная верхняя грань длин свободных последовательностей.

3.2. Пример. Для дискретного пространства X мощности $\aleph_1$ имеем: $t_{w,\tau}(X) = \aleph_1$ при $\aleph_1 \leq \tau$. Действительно, X непрерывно отображается на подпространство пространства D^{τ}, теснота которого равна $\aleph_1$.

Назовем тихоновское пространство X Δ -пространством, если при каждом непрерывном отображении его в $R^{\aleph_1}$ образ является компактом счетной тесноты. Таким образом, класс Δ -пространств есть в точности класс

$[\mathcal{M}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}]_{\mathcal{P}}$,

где $\mathcal{P}$ - класс всех тихоновских пространств, $\mathcal{M}$ - класс всех непрерывных отображений, $\mathcal{Q}$ - класс всех тихоновских пространств веса $\leq \aleph_1$ и $\mathcal{R}$ - класс всех компактов счетной тесноты. Из определения Δ -пространства легко вытекают следующие простые утверждения:

3.3. Предложение. Каждый компакт счетной тесноты является Δ -пространством.

Для доказательства достаточно заметить, что в классе хаусдорфовых пространств непрерывный образ компакта счетной тесноты является компактом счетной тесноты (см. [2], [9]).

3.4. <u>Предложение</u>. Тихоновское пространство, являющееся непрерывным образом Δ-пространства, само является Δ-пространством.

3.5. <u>Предложение</u>. Если $w(X) < \aleph_1$, то X - Δ-пространство в том и только том случае, если X - компакт счетной тесноты.

При всех непрерывных отображениях Δ-пространства в $R^{\aleph_0} \subset R^{\aleph_1}$ образ является компактом. Значит, имеет место

3.6. <u>Предложение</u>. Каждое Δ-пространство псевдокомпактно.

Прямым следствием определения Δ-пространства является

3.7. <u>Предложение</u>. Если X - Δ-пространство, то $t_{w,\aleph_1}(X) \leq \aleph_0$.

Оказывается, на Δ-пространства распространяются многие интересные теоремы о компактах счетной тесноты, которые перестают быть верными уже для счетно-компактных пространств счетной тесноты. Полезно, в связи с дальнейшим, иметь в виду следующий пример.

3.8. <u>Пример</u>. Пусть X - Σ-произведение $\aleph_1$ экземпляров обычного отрезка I (см. [2], [17]). Тогда $t(X)=\aleph_0$, X счетно-компактно и даже замыкание каждого счетного множества в X обладает счетной базой, но X не является Δ-пространством. Более того, $t_{w,\aleph_1}(X)=\aleph_1$.

<u>Доказательство</u>. Пространство X лежит в $R^{\aleph_1}$, но не является компактом. Значит, X - не Δ-пространство. В X есть замкнутое дискретное подпространство A мощности $\aleph_1$. Отобразим A на некоторое пространство $Y \subset R^{\aleph_1}$ несчетной тесноты посредством некоторого отображения f. Пространство X нормально (см. [17]), поэтому f продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f}: X \to R^{\aleph_1}$. Ясно, что $t(\tilde{f}(X)) \geq t(Y) \geq \aleph_1$, т.е. $t_{w,\aleph_1}(X)=\aleph_1$.

Проведенное рассуждение, с незначительными модификациями, является также доказательством следующего утверждения:

Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

3.9. Теорема. Пусть X - нормальное пространство, и $t_{\omega,\aleph_1}(X) < \aleph_0$. Тогда каждое замкнутое дискретное подпространство пространства X счетно (т.е. $e(X) < \aleph_0$).

3.10. Следствие. Если X - нормальное пространство с диагональю G_δ и $t_{\omega,\aleph_1}(X) \leq \aleph_0$, то $|X| \leq 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Достаточно, в силу теоремы 3.9, сослаться на результат Гинзбурга и Вудса, которые показали [19], что каждое тихоновское пространство с диагональю G_δ, в котором все замкнутые дискретные множества счетны, имеет мощность $\leq 2^{\aleph_0}$.

Существенную роль понятие Δ-пространства играет в следующих результатах.

3.11. Предложение. Если X - Δ-пространство, то в X не существует свободной последовательности длины $\aleph_1$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда легко строится (с помощью диагональных произведений отображений) непрерывное отображение $f: X \longrightarrow R^{\aleph_1}$ такое, что в образе $f(X)$ тоже есть свободная последовательность длины $\aleph_1$. Но последнее невозможно, так как $f(X)$ - компакт счетной тесноты.

Так же, как в случае компактов счетной тесноты (см. [2]), из предложения 3.11 выводится

3.12. Предложение. Пусть X - Δ-пространство и U - непустое открытое множество в X. Найдутся тогда счетное множество $A \subset X$ и непустое замкнутое множество F типа G_δ в X такие, что $F \subset U \cap \bar{A}$.

В доказательстве предложения 3.12 используется, в частности, тот факт, что в псевдокомпактном пространстве пересечение произвольной счетной центрированной системы нуль-множеств не пусто (см. [9], [18]).

3.13. Теорема. Каждое $\aleph_0$-монолитное Δ-пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности во всюду плотном множестве точек.

Доказательство. Пусть U - произвольное непустое открытое в X множество. Возьмем, на основании предложения 3.12, счетное множество A и непустое замкнутое множество $F \subset U$ типа G_δ в X такие, что $\bar{A} \supset F$. По оп-

Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

ределению $\aleph_0$ -монолитности [8], $\bar{A}$ - пространство со счетной сетью. Следовательно, и пространство F обладает счетной сетью. Тем более, каждая точка множества F имеет тип G_δ в F и, значит, также имеет тип G_δ в X. Но X - регулярное псевдокомпактное пространство (см. предложение 3.6). Следовательно, пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности в каждой точке непустого множества $F \subset U$.

Замечание. Теорема 3.13 остается, очевидно, верной, если ослабить требования $\aleph_0$ -монолитности до предположения, что замыкание каждого счетного множества в X является пространством счетного псевдохарактера.

3.14. Теорема. Предположим, что выполняются аксиома Мартина и отрицание континуум-гипотезы (МА + CH). Тогда каждое Δ -пространство, число Суслина которого счетно, сепарабельно.

Доказательство следует схеме доказательства аналогичного утверждения (принадлежащего Б.Э.Шапировскому) о компактах счетной тесноты со счетным числом Суслина (см.[2]). Понятие Δ -пространства автоматически влечет необходимую (небольшую) модификацию этого доказательства.

Как показывает пример 3.8 Σ -произведения, теорема 3.14 не распространяется на произвольные счетно-компактные пространства счетной тесноты.

3.15. Следствие. Пусть имеет место МА + CH. Тогда каждое $\aleph_0$-монолитное Δ-пространство X, число Суслина которого счетно, является компактом со счетной базой.

Доказательство. По теореме 3.14, пространство X сепарабельно. В силу $\aleph_0$ -монолитности X это означает, что в X есть счетная сеть. Но X псевдокомпактно (предложение 3.6), а каждое псевдокомпактное пространство со счетной сетью является метризуемым компактом (см. [9], [18], [7]).

3.16. Задача. а) Каждое ли Δ-пространство счетно-компактно? б) Имеет счетную тесноту?

3.17. Задача. Верно ли, что мощность каждого Δ-пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, не превосходит $2^{\aleph_0}$?

3.18. <u>Задача</u>. Предположим, что $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ (гипотеза Лузина). Верно ли тогда, что каждое непустое секвенциальное (Фреше-Урысона) Δ-пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности в некоторой точке? Верно ли это, если отбросить предположение, что $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$?

Для секвенциальных компактов в предположении, что $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ ответ положителен (см. [2], [9]).

§ 4. Расщепляемые и $\mathcal{P}$-расщепляемые пространства

Пусть τ - фиксированный кардинал, $\tau \geq \aleph_0$. Тихоновское пространство X назовем <u>τ-расщепляемым</u>, если для каждой пары не пересекающихся множеств $A, B \subset X$ найдется непрерывное отображение $f: X \longrightarrow R^{\tau}$ такое, что $f(A) \cap f(B) = \emptyset$. <u>Расщепляемыми</u> будут именоваться $\aleph_0$-расщепляемые пространства.

Удобно введенному понятию сразу придать более общий характер, а затем уже обсудить конкретные примеры и основные общие факты, относящиеся к понятию расщепляемости.

4.1. <u>Определение</u>. Пусть $\mathcal{P}$ - некоторый класс топологических пространств. Топологическое пространство X называется <u>$\mathcal{P}$-расщепляемым</u> или <u>расщепляемым над классом $\mathcal{P}$</u>, если для каждой пары не пересекающихся множеств $A, B \subset X$ найдется непрерывное отображение $f: X \to Y$ пространства X на некоторое пространство Y из класса $\mathcal{P}$ такое, что $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Очевидно, тихоновское пространство X τ-расщепляемо в том и только том случае, если оно $\mathcal{P}_{\tau}$-расщепляемо, где $\mathcal{P}_{\tau}$ - класс всех тихоновских пространств веса $\leq \tau$.

Определению расщепляемости можно придать чуть иной вид. Далее всюду $\mathcal{P}$ - некоторый класс топологических пространств.

4.2. <u>Предложение</u>. Пространство X $\mathcal{P}$-расщепляемо в том и только том случае, если для каждого $A \subset X$ найдется непрерывное отображение f пространства X на некоторое пространство $Y \in \mathcal{P}$ такое, что $A = f^{-1}f(A)$. Такое отображение f будет называться расщепляющим (или, точнее, $\mathcal{P}$ -расщепляющим) пространство X вдоль A.

Для доказательства достаточно принять за B множество $X \setminus A$.

4.3. <u>Примеры</u>. Каждое дискретное пространство расщепляемо и даже $\mathfrak{A}$ -расщепляемо, где $\mathfrak{A}$ - класс, элементами которого являются только дискретное двоеточие $D = D(2) = \{0,1\}$ и его подпространства. Действительно, пусть X дискретно и $A \subset X$. Все точки из A отобразим в 0, а все точки из $X \setminus A$ отобразим в 1. Это отображение $\mathfrak{A}$-расщепляет X вдоль A. Конечно, только дискретные пространства расщепляемы над классом конечных пространств.

Пусть X - тихоновское пространство счетного i-веса - т.е. существует уплотнение $g: X \to Y$ пространства X на тихоновское пространство Y веса $\aleph_0$. Очевидно, отображение g расщепляет пространство X одновременно вдоль всех подмножеств $A \subset X$ - по отношению к классу $\mathcal{P}_{\aleph_0}$ всех сепарабельных метризуемых пространств. Таким образом, мы имеем простое

4.4. <u>Предложение</u>. Каждое тихоновское пространство счетного i-веса расщепляемо.

Очевиден и более общий результат:

4.5. <u>Предложение</u>. Если пространство X уплотняется на пространство из класса $\mathcal{P}$, то X - $\mathcal{P}$ -расщепляемо.

Одна из общих интересных задач, связанных с $\mathcal{P}$ -расщепляемостью, состоит в отыскании ограничений на X и на $\mathcal{P}$, при которых верно обратное: из $\mathcal{P}$-расщепляемости пространства X следует, что его можно уплотнить на пространство из класса $\mathcal{P}$.

В связи со сказанным ясно, что возможность уплотнить пространство на пространство из класса $\mathcal{P}$ можно воспринимать как абсолютную расщепляемость. Вопрос о существовании уплотнений прямо связан с оценками на мощность пространства. Поэтому мы имеем на самом деле две тесно связанные между собой общие задачи.

4.6. <u>Задача</u>. (а) Найти оценки на мощность $\mathcal{P}$-расщепляемого пространства X при дополнительных ограничениях на $\mathcal{P}$ и X.

(б) Найти условия, при которых $\mathcal{P}$-расщепляемые пространства оказываются <u>абсолютно $\mathcal{P}$-расщепляемыми</u> - т.е. допускают уплотнение на пространство из класса $\mathcal{P}$.

Конечно, центральной является задача нахождения внутренних признаков $\mathcal{P}$-расщепляемости, в зависимости от класса $\mathcal{P}$.

Ниже приводятся некоторые необходимые и некоторые достаточные признаки $\mathcal{P}$-расщепляемости. Многие из них оказываются чрезвычайно удобными в техническом отношении при дальнейшем исследовании $\mathcal{P}$-расщепляемых пространств.

Полезно иметь в виду следующие простые факты.

4.7. <u>Предложение</u>. Если пространство X $\mathcal{P}$-расщепляемо, то оно и $\mathcal{P}'$-расщепляемо для любого более широкого, чем $\mathcal{P}$, класса $\mathcal{P}'$ пространств.

<u>Замечание</u>. Если $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}''$ - два класса пространств, и каждое пространство из класса $\mathcal{P}'$ расщепляемо над $\mathcal{P}''$, то каждое $\mathcal{P}'$-расщепляемое пространство будет и $\mathcal{P}''$-расщепляемым.

Для произвольного класса $\mathcal{P}$ пространств условимся через $(\mathcal{P})^{\#}$ (или короче - через $\mathcal{P}^{\#}$) обозначать класс всех пространств, расщепляемых над $\mathcal{P}$. Ясно, что $\mathcal{P}^{\#} \supset \mathcal{P}$. Из предшествующего замечания следует, что всегда $\mathcal{P}^{\#\#} = \mathcal{P}^{\#}$. Если $\mathcal{P}^{\#} = \mathcal{P}$, то будем говорить, что класс $\mathcal{P}$ <u>замкнут относительно расщеплений</u>.

Заслуживает внимания общий вопрос: для каких классов $\mathcal{P}$ имеет место $\mathcal{P}^{\#} = \mathcal{P}$? Какие ограничения категорного типа на $\mathcal{P}$ обеспечивают равенство $\mathcal{P}^{\#} = \mathcal{P}$?

4.8. <u>Предложение</u>. Если класс $\mathcal{P}$ наследственен (т.е. каждое подпространство произвольного пространства из класса $\mathcal{P}$ принадлежит $\mathcal{P}$), то и $\mathcal{P}$-расщепляемость наследуется любыми подпространствами: если пространство X $\mathcal{P}$-расщепляемо, то и каждое подпространство Y пространства X $\mathcal{P}$-расщепляемо.

Следующие утверждения вытекают из определения $\mathcal{P}$-расщепляемости и того, что во всех рассмотрениях мы ограничиваемся классом T_1 -пространств.

4.9. <u>Предложение</u>. Если мощность каждого пространства из класса $\mathcal{P}$ не превосходит кардинала τ, то из $\mathcal{P}$-расщепляемости пространства X следует, что каждое множество $A \subset X$ является объединением $\leq \tau$ замкнутых множеств.

<u>Доказательство</u>. Пусть X - $\mathcal{P}$-расщепляемо и $A \subset X$. По условию найдется непрерывное отображение $f: X \to Y$, для которого $A = f^{-1}f(A)$ и $|Y| \leq \tau$. Тем более, $|f(A)| \leq \tau$, и из непрерывности отображения f и того, что все одноточечные множества замкнуты в Y, следует, что $A = \bigcup\{f^{-1}(y): y \in f(A)\}$ - искомое представление.

4.10. <u>Предложение</u>. Если мощность каждого подпространства из $\mathcal{P}$ не превосходит кардинала τ и все точки в пространствах класса $\mathcal{P}$ имеют тип G_δ, то в каждом $\mathcal{P}$-расщепляемом пространстве X любое множество A является объединением $\leq \tau$ замкнутых G_δ - множеств. Тем более, в таком пространстве X каждая точка имеет тип G_δ.

<u>Доказательство</u>. Достаточно дополнить предыдущее рассуждение замечанием, что прообраз множества типа G_δ при непрерывном отображении является множеством типа G_δ и рассмотреть отдельно случай одноточечного множества A (для последнего заключения).

<u>Замечание</u>. Откажемся на минуту от предположения, что все рассматриваемые пространства являются T_1 -пространствами. Тогда последнее рассуждение доставляет нам доказательство того, что каждое пространство, расщепляемое над классом T_1 -пространств, само является T_1 -пространством.

4.11. <u>Предложение</u>. Если все пространства из класса $\mathcal{P}$ хаусдорфовы, то и каждое $\mathcal{P}$ -расщепляемое пространство X хаусдорфово.

<u>Доказательство</u>. Пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Так как X $\mathcal{P}$-расщепляемо, найдется непрерывное отображение $f: X \to Y$, где $Y \in \mathcal{P}$ такое, что $f(x) \neq f(y)$. Пространство Y хаусдорфово, поэтому существуют непересекающиеся открытые множества V_1 и V_2 в Y такие, что $f(x) \in V_1$ и

$f(y)\in V_2$. Тогда $U_1=f^{-1}(V_1)$ и $U_2=f^{-1}(V_2)$ - непересекающиеся окрестности точек x и y .

Существуют примеры пространств, не являющихся регулярными, но уплотняемых на регулярные пространства. Каждое такое пространство X расщепляемо над классом всех регулярных пространств. Таким образом, из регулярности всех пространств класса $\mathcal{P}$ не следует, что каждое $\mathcal{P}$ -расщепляемое пространство регулярно. Аналогичные замечания относятся к нормальности и паракомпактности.

4.I2. <u>Замечание</u>. Нетрудно показать, что пространства, расщепляемые над классом всех регулярных пространств, являются абсолютно расщепляемыми над этим классом. Аналогично, расщепляемость над классом тихоновских пространств эквивалентна абсолютной расщепляемости над ним.

4.I3. <u>Задача</u>. Исследовать (если возможно, то охарактеризовать) пространства, расщепляемые над следующими классами:

а) нормальных пространств;

б) паракомпактов;

в) метризуемых пространств.

Заслуживает особого внимания следующая задача, естественно расширяющая проблему описания тех пространств, которые допускают уплотнение на компакт.

4.I4. <u>Задача</u>. Каковы (тихоновские) пространства, расщепляемые над классом всех компактов? Такие пространства мы далее называем <u>компактно расщепляемыми</u>.

Приведем некоторые конкретные результаты, связанные с указанными задачами.

4.I5. <u>Предложение</u>. Пусть во всех пространствах из класса $\mathcal{P}$ каждое компактное множество (каждая точка) является пересечением счетного семейства открытых множеств. Тогда и в любом $\mathcal{P}$ -расщепляемом пространстве каждое компактное множество (каждая точка) имеет тип G_δ .

<u>Доказательство</u>. Пусть X - $\mathcal{P}$ -расщепляемое пространство и $F\subset X$, F -компакно (случай, когда F одноточечна рассматривается аналогично). Возьмем непрерывное отображение $f:X\longrightarrow Y$, где $Y\in\mathcal{P}$, для которого

$f^{-1}f(F)=F$. Так как $f(F)$ - компактное подмножество пространства Y , то $f(F)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} V_i$, где V_i - открытые в Y множества. Тогда $F=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i=f^{-1}(V_i)$ - открытое в X множество.

Напомним, что регулярное пространство называется <u>совершенным</u>, если в нем каждое замкнутое множество - типа G_δ . Существует не совершенное линделёфово пространство, уплотняющееся на сепарабельное метрическое пространство. Следовательно, не во всех даже абсолютно расщепляемых пространствах любое замкнутое множество имеет тип G_δ - это замечание особенно уместно в связи с предложением 4.15.

Назовем пространство X <u>метризуемо расщепляемым</u>, (или m -расщепляемым), если оно расщепляемо над классом всех метризуемых пространств. Очевидно, для линделефовых пространств и пространств со счетным числом Суслина расщепляемость равносильна m -расщепляемости. Из предложения 4.8 прямо следует

4.16. <u>Предложение</u>. Расщепляемость и m-расщепляемость наследуются любыми подпространствами.

Будем именовать пространство X <u>линделёфово расщепляемым (паракомпактно расщепляемым)</u>, если оно расщепляемо над классом всех линделефовых (всех паракомпактных хаусдорфовых) пространств. Для таких пространств аналог утверждения 4.16 уже не имеет места (см.пример 4.26 ниже). Очевидно, для пространств со счетным числом Суслина (тем более, для сепарабельных пространств) паракомпактная расщепляемость равносильна линделефовой расщепляемости. Подобным же образом, для псевдокомпактных пространств компактная расщепляемость равносильна паракомпактной расщепляемости. Это соображение поможет нам указать в примере 4.26 не паракомпактно расщепляемое нормальное пространство. Понадобится для этого также следующая лемма, полезная во многих ситуациях.

4.17. <u>Фундаментальная лемма</u>. Пусть τ - кардинал, $\tau>\aleph_0$, $\mathcal{P}$ - класс пространств, X - $\mathcal{P}$-расщепляемое пространство и $\{A_\alpha : \alpha\in C\}$ семейство подмножеств пространства X такое, что: а) $A_{\alpha'}\cap A_{\alpha''}=\emptyset$ при $\alpha'\neq\alpha''$,

$\alpha', \alpha'' \in C$; б) $|C| \leq 2^{\tau}$.

Тогда найдутся семейство $\{Y_\beta : \beta \in B\}$ пространств из класса $\mathcal{P}$ и непрерывное отображение f пространства X в произведение $Y = \prod_{\beta \in B} Y_\beta$ такие, что $|B| \leq \tau$ и

$f^{-1} f(A_\alpha) = A_\alpha$ при всех $\alpha \in C$.

Доказательство. Так как $|C| \leq 2^{\tau}$, то существует семейство $\{C_\beta : \beta \in B\}$ подмножеств множества C , где $|B| \leq \tau$, такое, что для любых различных $\alpha', \alpha'' \in C$ найдется $\beta \in B$, при котором $\alpha' \in C_\beta$ и $\alpha'' \notin C_\beta$. Положим $X_\beta = \cup\{A_\alpha : \alpha \in C_\beta\}$ при $\beta \in B$ и зафиксируем непрерывное отображение f_β пространства X в некоторое пространство Y из класса $\mathcal{P}$, расщепляющее X вдоль X_β - т.е. такое, что $X_\beta = f_\beta^{-1} f_\beta(X_\beta)$. Заметим, что тогда $f_\beta(A_{\alpha'}) \cap f_\beta(A_{\alpha''}) = \emptyset$ при любых $\alpha', \alpha'' \in C$ таких, что $\alpha' \in C_\beta$ и $\alpha'' \notin C_\beta$. Отсюда и из определения семейства $\{C_\beta : \beta \in B\}$ следует, что диагональное произведение $f = \Delta_{\beta \in B} f_\beta : X \to \prod_{\beta \in B} Y$ является искомым отображением.

4.18. Теорема. Пусть класс $\mathcal{P}$ пространств замкнут относительно счетных произведений и перехода к (любому) подпространству. Тогда каждое $\mathcal{P}$-расщепляемое пространство X мощности $\leq 2^{\aleph_0}$ абсолютно $\mathcal{P}$-расщепляемо - т.е. уплотняется на пространство из класса $\mathcal{P}$.

Доказательство. Применим лемму 4.17 к семейству $\{A_x : x \in X\}$, где $|A_x| = \{x\}$ и $\tau = \aleph_0$. Заключаем: существует уплотнение f пространства X в произведение счетного множества пространств из $\mathcal{P}$. Но в силу предположений о классе $\mathcal{P}$, пространство $Y = f(X)$ принадлежит $\mathcal{P}$. Следовательно, $f_Y : X \to Y$ - искомое уплотнение.

Класс всех метризуемых пространств удовлетворяет ограничениям, наложенным на $\mathcal{P}$ в формулировке теоремы 4.18. Значит, имеет место

4.19. Следствие. Каждое пространство мощности $\leq 2^{\aleph_0}$, расщепляемое над классом метрических пространств, уплотняется на метрическое пространство.

Каждое паракомпактное перистое пространство, уплотняемое на метрическое пространство, само метризуемо (см. [3], [9], [12]). Отсюда и из 4.19 вытекает

4.20. Теорема. Каждое метризуемо расщепляемое паракомпактное перистое пространство мощности $\leq 2^{\aleph_0}$ метризуемо.

Представляется весьма интересной

4.21. Задача. Каждое ли метризуемо расщепляемое паракомпактное перистое пространство метризуемо?

Еще более общий вопрос:

4.22. Задача. Верно ли, что для каждого метризуемо расщепляемого тихоновского пространства X диагональ является множеством типа G_δ в $X \times X$?

Не каждое расщепляемое перистое пространство метризуемо (пример - плоскость Немыцкого). Но, будучи пространствами точечно счетного типа, перистые пространства попадают под действие следующего простого следствия из предложения 4.15.

4.23. Теорема. Если все пространства из класса $\mathcal{P}$ - счетного псевдохарактера, то каждое $\mathcal{P}$-расщепляемое пространство точечно-счетного типа удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Из 4.15 вытекает также

4.24. Теорема. Если все пространства из класса $\mathcal{P}$ совершенны, то каждый $\mathcal{P}$-расщепляемый компакт совершенно нормален.

Из теоремы 4.24 с помощью леммы 4.17 легко получается

4.25. Следствие. Пусть $\mathcal{P}$ - какой-нибудь класс пространств, каждое компактное подпространство которых метризуемо.

Тогда каждое компактное пространство X, расщепляемое над $\mathcal{P}$, метризуемо.

Доказательство. Из сделанных предположений вытекает, что пространство X расщепляемо и над классом $\mathcal{K}$ всех метризуемых компактов. Тогда, по предложению 4.11, X - хаусдорфово пространство и в силу теоремы 4.24, X - совершенно нормальный компакт. Следовательно, $|X| \leq 2^{\aleph_0}$. Вернемся теперь к классу $\mathcal{P}$. Этот класс замкнут относительно счетных произведений и перехода к любому подпространству. Поэтому можно применить теорему 4.18. Получаем: X уплотняется на некоторое пространство Y из $\mathcal{P}$. Но тогда Y - метризуемый компакт, и X гомеоморфно Y.

Утверждение 4.25 применимо, в частности, к следующим классам $\mathcal{P}$: всех метризуемых пространств, всех пространств с диагональю G_δ, всех симметризуемых хаусдорфовых пространств и т.д.

4.26. <u>Пример</u>. Пусть X - Σ-произведение $2^{\aleph_0}$ экземпляров обычного отрезка I (см. [9], [17], [18]). Пространство X счетно-компактно и $|X| = 2^{\aleph_0}$. Покажем, что пространство X не расщепляемо ни над классом всех метакомпактных пространств, ни над классом всех полных по Дьедонне пространств, ни над классом пространств с диагональю G_δ. Для этого достаточно доказать следующие два утверждения, из которых первое носит общий характер и совершенно очевидно.

А. Пусть $\mathcal{P}$ - произвольный класс пространств, пересечение которого с классом всех счетно-компактных пространств содержит только компакты. Тогда каждое счетно-компактное $\mathcal{P}$-расщепляемое пространство расщепляемо и над классом всех компактов.

Б. Пространство X не является компактно расщепляемым.

Докажем Б. Предположим, что X компактно расщепляемо. Известно, что каждый компакт, являющийся непрерывным образом пространства X, метризуем (см. [11], [9], [18]). Значит, пространство X расщепляемо (над классом сепарабельных метризуемых пространств). Но $|X| \leq 2^{\aleph_0}$. Применяя лемму 4.17, приходим к выводу, что X уплотняется на сепарабельное метризуемое пространство. Но уплотнение счетно-компактного пространства на метрическое пространство является гомеоморфизмом. Следовательно, само X метризуемо и является компактом - противоречие.

§ 5. Расщепляемость и кардинальные инварианты

Эта тема была уже затронута в предыдущем параграфе. Здесь мы получим некоторые общие оценки мощности $\mathcal{P}$-расщепляемых пространств и докажем одну специальную теорему о расщепляемости компактов.

Напомним, что <u>экстент пространства</u> X не превосходит кардинала τ (обозначение: $e(X)\leqslant\tau$), если мощность каждого замкнутого дискретного подпространтсва пространства X не превосходит τ. Спред $s(X)$ пространства X определяется как точная верхняя грань мощностей его дискретных (не обязательно замкнутых) подпространств. Очевидно, $e(X)\leqslant\aleph_0$ для каждого линделёфова пространства X и для каждого счетно компактного пространства X.

5.1. <u>Теорема</u>. Пусть мощность каждого пространства из класса $\mathcal{P}$ не превосходит τ и X - $\mathcal{P}$-расщепляемое пространство, экстент которого не превосходит τ. Тогда:

а) $s(X)\leqslant\tau$; б) $\Psi(X)\leqslant\tau$ и в) $|X|\leqslant\tau$.

<u>Доказательство</u>. Соотношение а) следует из 4.9. Соотношение б) доказывается по аналогии с 4.10 - надо учесть только, что $\Psi(Y)\leqslant|Y|$, для каждого пространства Y из $\mathcal{P}$. Теперь в) следует из известной теоремы (см. [21], [2]): для всякого T_1-пространства X имеет место неравенство $|Y|\leqslant 2^{S(Y)\cdot\Psi(Y)}$.

По предложению 4.15, если компакт расщепляем над классом пространств с первой аксиомой счетности, то он сам удовлетворяет первой аксиоме счетности. А что можно сказать о компактах, расщепляемых над пространствами счетной тесноты? Заметим, что такие компакты расщепляемы над компактами счетной тесноты, и что класс компактов счетной тесноты замкнут относительно операций счетного произведения и перехода к замкнутому подпространству.

5.2. <u>Теорема</u>. Если компакт X расщепляем над классом $\mathcal{P}$ всех хаусдорфовых пространств счетной тесноты, то теснота компакта X счетна.

<u>Доказательство</u>. По сказанному выше можно считать, что класс $\mathcal{P}$ состоит из всех компактов счетной тесноты. Предположим, что теснота X несчетна. Найдутся тогда множест-

во $A \subset X$ мощности $\aleph_1$ и точка $x \in X$ такие, что $x \in \bar{A}$ и x не принадлежит замыканию никакого счетного подмножества множества A. Положим $B = A \cup \{x\}$. Теперь нужна следующая лемма, получающаяся модификацией доказательства леммы 4.17.

5.3. Лемма. Если $\mathfrak{K}$ - класс компактов, замкнутый относительно счетных произведений и относительно перехода к замкнутому подпространству, и X - $\mathfrak{K}$-расщепляемый компакт, то для каждого множества $A \subset X$ мощности $\leq 2^{\aleph_0}$ найдется непрерывное отображение f пространства X на некоторое пространство из класса $\mathfrak{K}$, при котором подпространство $A \subset X$ гомеоморфно отображается на подпространство $f(A) \subset Y$.

Доказательство. При любом непрерывном отображении компакта X в произведение пространств из $\mathfrak{K}$ образ является замкнутым множеством в этом произведении. Добавляя это соображение к доказательству леммы 4.17, мы получаем следующий вывод: существует непрерывное отображение f компакта X на некоторый компакт $Y \in \mathfrak{K}$ такое, что $f^{-1}f(A) = A$ и $f(x) \neq f(y)$ при любых различных x, y из A. Тогда сужение $f|A : A \to f(A)$ является замкнутым непрерывным взаимнооднозначным отображением - т.е. гомеоморфизмом. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 5.2. Из леммы 5.3 следует, что подпространство $B = A \cup \{x\}$ пространства X гомеоморфно подпространству некоторого компакта счетной тесноты $Y \in \mathcal{P}$. Но это невозможно, так как теснота пространства B несчетна (в точке x).

Получим с помощью леммы 5.3 еще один любопытный результат.

Напомним, что пространство X называется $\aleph_0$-монолитным, если замыкание каждого счетного множества в X является пространством со счетной сетью (см. [8], [2], [6]). Класс всех $\aleph_0$-монолитных пространств замкнут относительно счетных произведений и относительно перехода к (любому) подпространству.

5.4. Теорема. Каждый компакт X, расщепляемый относительно класса $\mathcal{P}$ всех $\aleph_0$-монолитных пространств, сам $\aleph_0$-монолитен.

Доказательство. Возьмем любое счетное множество $A\subset X$. Так как X - компакт, найдется счетно-компактное подпространство B пространства X такое, что $A\subset B\subset \bar{A}$ и $|B|\leq 2^{\aleph_0}$ (см., например [9], [18]). Мы покажем, что $B=\bar{A}$ и что B - пространство со счетной сетью, чем доказательство будет завершено. Применяя лемму 5.3, заключаем, что B является подпространством некоторого $\aleph_0$-монолитного компакта Y. Но B сепарабельно, так как счетное множество A всюду плотно в B. Из $\aleph_0$-монолитности пространства Y следует теперь, что пространство B обладает счетной сетью. Но из счетной компактности B вытекает тогда, что B - компакт со счетной базой (см. [2], [9]). Значит, B равно замыканию множества A в X, так как X - хаусдорфово пространство.

Из теорем 5.2 и 5.4 вытекает

5.5. Теорема. Если компакт X расщепляем над некоторым классом хаусдорфовых $\aleph_0$-монолитных пространств счетной тесноты, то он является ($\aleph_0$-монолитным) компактом Фреше-Урысона.

Доказательство. Достаточно дополнить теоремы 5.2 и 5.4 замечанием, что каждый $\aleph_0$-монолитный компакт счетной тесноты является пространством Фреше-Урысона (см. [2], [8]).

5.6. Следствие. Каждый компакт, расщепляемый над классом всех компактов Эберлейна (см. [8], [2]), является $\aleph_0$-монолитным компактом Фреше-Урысона.

В связи с полученными в этом параграфе результатами возникают следующие задачи:

5.7. Задача. Верно ли, что каждый компакт, $\aleph_0$-расщепляемый над классом всех компактов Фреше-Урысона (всех секвенциальных компактов) сам является компактом Фреше-Урысона (секвенциальным компактом)?

5.8. Задача. Следует ли из расщепляемости компакта над классом всех бисеквенциальных компактов, что этот компакт бисеквенциален?

5.9. Задача. Пусть компакт X расщепляем над классом всех компактов Эберлейна (Корсона). Является ли и сам X тогда компактом Эберлейна (Корсона)?

Рассмотрения этого и предыдущих параграфов подсказывают и мотивируют введение следующей операции над произвольными кардинальными инвариантами.

Пусть φ - произвольная кардинальнозначная функция, определенная на классе всех пространств. Через $\mathcal{P}_{\varphi,\tau}$, для любого кардинала τ, обозначим класс всех тихоновских пространств Y, для которых $\varphi(Y) \leq \tau$. Кардинальнозначная функция φ_{τ}, называемая "расщепленной (расщепленным) φ" определяется так:

$$\varphi_{\tau}(X) = \min\{\tau \geq \aleph_0 : X \text{ расщепляемо над } \mathcal{P}_{\varphi\tau}\}.$$

В частности, мы получаем расщепленный вес w_{τ}, расщепленную плотность d_{τ}, расщепленный характер χ_{τ}, расщепленную мощность $|\ |_{\tau}$, расщепленное число Суслина c_{τ}, расщепленную тесноту t_{τ} и другие новые кардинальные инварианты. Они ждут еще своего исследования. Целесообразно отдельно рассмотреть расщепленно-счетные пространства. Несомненно, особенно интересно будет исследовать расщепленные инварианты и сравнить их с исходными инвариантами в классе компактов.

Доказательства теорем 5.2 и 5.4 показывают, что полезно рассмотреть суженные варианты расщепляемости, отнесенные к тому или иному "хорошему" классу отображений. Мы ограничиваемся ниже только определением именно потому, что вводимые понятия заслуживают обстоятельного исследования, на которое здесь уже нет места.

5.10. Определение. Пусть $\mathcal{M}$ - некоторый класс непрерывных отображений и $\mathcal{P}$ - некоторый класс топологических пространств. Пространство X назовем $(\mathcal{M},\mathcal{P})$ - расщепляемым, или $\mathcal{M}$ -расщепляемым над классом $\mathcal{P}$, если для каждого $A \subset X$ найдется принадлежащее классу $\mathcal{M}$ отображение f пространства X на некоторое пространство Y из класса $\mathcal{P}$ такое, что $f^{-1}f(A) = A$.

Если $\mathcal{M}$ - класс всех открытых (замкнутых, совершенных, факторных) отображений, и пространтсво X $(\mathcal{M},\mathcal{P})$ -

расщепляемо, то мы будем говорить также, что X <u>открыто (замкнуто, совершенно, факторно) расщепляемо над классом</u> $\mathfrak{P}$.

Условимся обозначать класс всех $(\mathfrak{M}, \mathfrak{P})$ -расщепляемых пространств через $(\mathfrak{P})^{\#}_{\mathfrak{M}}$. О классе $\mathfrak{M}$ отображений мы будем всегда предполагать, что он замкнут относительно композиций и содержит все гомеоморфизмы. Это позволяет установить полезные простые формулы:

$$\mathfrak{P} \subset (\mathfrak{P})^{\#}_{\mathfrak{M}} \quad \text{и} \quad ((\mathfrak{P})^{\#}_{\mathfrak{M}})^{\#}_{\mathfrak{M}} = (\mathfrak{P})^{\#}_{\mathfrak{M}} -$$

для любых $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{M}$. Естественно возникает при этом задача "категорного" описания тех классов $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{M}$, для которых $(\mathfrak{P})^{\#}_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{P}$ (такие классы $\mathfrak{P}$ мы будем называть $\mathfrak{M}$ -замкнутыми относительно расщеплений).

Особенно важным, повидимому, окажется класс факторно расщепляемых над $\mathfrak{P}$ пространств. Для таких пространств мы фиксируем специальный термин: <u>сильно расщепляемые над $\mathfrak{P}$ пространства</u>.

Приведем пример, хорошо демонстрирующий специфику сильной расщепляемости по сравнению с обычной расщепляемостью.

5.11. <u>Теорема</u>. Если пространство X сильно $\mathfrak{P}$ -расщепляемо, и все пространства из класса $\mathfrak{P}$ совершенны, то в X - каждое замкнутое множество A типа G_δ.

<u>Доказательство</u>. Фиксируем факторное отображение $f: X \to Y$ пространства X на пространство Y из класса $\mathfrak{P}$, при котором $f^{-1}f(A) = A$. Из последнего равенства, факторности f и замкнутости множества A следует, что $f(A)$ замкнуто в Y. Но тогда $f(A)$ имеет тип G_δ в Y и, значит, множество $A = f^{-1}f(A)$ имеет тип G_δ в X.

Для замкнутой расщепляемости характерен такой результат:

5.12. <u>Теорема</u>. Если пространство X замкнуто расщепляемо над классом $\mathfrak{P}$, и все пространства из $\mathfrak{P}$ удовлетворяют первой аксиоме счетности, то и X удовлетворяет первой аксиоме счетности.

<u>Доказательство</u>. Зафиксируем точку $x \in X$ и возьмем

замкнутое отображение $f: X \to Y \in \mathcal{P}$, такое, что $\{x\} = f^{-1} f(x)$. Тогда если $\{V_n\}_{n \in N^+}$ - счетная база пространства Y в точке $f(x)$, то $\{f^{-1}(V_n)\}_{n \in N^+}$ - (счетная) база пространства X в точке x, в силу замкнутости f.

Замечание. Важность замкнутой расщепляемости связана, в частности, с тем, что для компактов расщепляемость над каким-либо классом хаусдорфовых пространств равносильна замкнутой расщепляемости над этим классом.

Список литературы

1. Александров П.С., Урысон П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах - М., 1971.
2. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // УМН.- 1978.- Т.33.- Вып.6.- С.29-84.
3. Архангельский А.В. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства // Матем. Сб.- 1965.- Т.67.- Вып.1.- С.55-85.
4. Архангельский А.В. О топологических пространствах, полных в смысле Чеха // Вестник МГУ. Сер.мат. - 1961.- № 2.- С.37-40.
5. Архангельский А.В. Пространства функций и условия типа полноты // Вестн. МГУ. Сер.1 мат. - 1983.- № 6.- С.4-9.
6. Архангельский А.В. Непрерывные отображения, факторизационные теоремы и пространства функций // Труды ММО.- 1984.- Т.47.- С.3-21.
7. Архангельский А.В. Пространства функций в топологии поточечной сходимости и компакты // УМН.- 1984.- Т.39.- Вып.5.- С.11-50.
8. Архангельский А.В. О некоторых топологических пространствах, встречающихся в функциональном анализе // УМН.- 1976.- Т.31.- № 5.- С.17-32.
9. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М., 1974.
10. Гулько С.П. О свойствах множеств, лежащих в Σ-произведениях // ДАН СССР.- 1977.- Т.237.- № 3.- С.505-508.

II. Ефимов Б.А. Диадические бикомпакты // Труды ММО.- 1965.- Т.14.- С.211-247.
I2. Келли Дж.Л. Общая топология.- М., 1980.- 2-е изд.
I3. Пасынков Б.А. Об открытых отображениях // ДАН СССР.- 1967.- Т.175.- № 2.- С.292-295.
I4. Филиппов В.В. О перистых паракомпактах // ДАН СССР.- 1968.- Т.178.- № 3.- С.555-558.
I5. Хаусдорф Ф. Теория множеств // ОНТИ.- 1937.
I6. Чобан М.М., Додон Н.К. Теория $\mathcal{P}$-разреженных пространств. - Кишинев, 1979.
17. Corson H.H. Normality in subsets of product spaces // Amer. J.Math.- 1959.- Vol. 81.- P.785-796.
18. Engelking R. General Topology.- Warszawa : PWN, 1977.
19. Ginsburg J., Woods R.G. A cardinal inequality for topological spaces, involving closed discrete sets // Proc.Amer.Math.Soc. - 1977.- Vol.64.- N2.- P.357-360.
20. Michael E. A quintuple quotient quest // Gen.Top. and Appl.- 1972.- Vol.2.- P.91-98.
21. Juhasz I. Cardinal functions in Topology // Math.Centre Tracts.- N34.- Amsterdam, 1971.

Поступила 9 апреля 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига.1986.

УДК 515.12

СПЕКТРАЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КРУЖЕВНЫХ И M_1-ПРОСТРАНСТВ

Ю.Х.Брегман, А.П.Шостак
Латвийский государственный университет им.П.Стучки
Х.Юннила
Университет Хельсинки,Финляндия[1)]

Обратные спектры из метризуемых пространств, проекциями в которых являются совершенные отображения, широко применяются для исследования паракомпактных p-пространств (см., напр., [10]). Поскольку класс паракомпактных σ-пространств является в известном смысле "двойственным" классу паракомпактных p-пространств (см. по этому поводу, например, [14]), для его исследования представляется естественным использовать обратные спектры из метризуемых пространств, проекциями в которых служат уплотнения (т.е. взаимно-однозначные непрерывные отображения). Однако, по сравнению с совершенными отображениями, уплотнения могут очень сильно менять свойства топологических пространств (см., напр., [14]). Значительно лучше в этом смысле ведут себя т.н. "слабые уплотнения", введенные в работе А.В.Архангельского [3] . Основываясь на идее А.В.Архангельского, первый из авторов данной заметки ввел понятие "жесткого спектра", проекциями в котором являются уплотнения специального вида [5] , [6] . Жесткие спектры из метризуемых пространств были применены для характеризации паракомпактных σ-пространств и исследования некоторых их свойств [5] , [6] .

В данной заметке определяются жесткие спектры специального вида - супержесткие спектры 1-го и 11-го рода. Эти спектры применены для характеризации, соответственно, M_1-

1. Основные результаты статьи получены во время пребывания проф. Х.Юннилы в Латвийском госуниверситете в марте 1985г.

-пространств (теорема 2) и кружевных или M_2-пространств (теорема 3), принадлежащих к числу наиболее важных из тех обобщений метризуемых пространств, которые не выходят за пределы класса паракомпактных σ-пространств. (Отметим, кстати, что до сих пор остается открытой проблема Дж.Сидера [12] о совпадении классов кружевных и M_1-пространств). Получены характеризации M_1-пространств и кружевных пространств размерности $\dim$, не превосходящей n как пределов супержестких спектров, соответственно, 1-го и 11-го рода из метрических пространств той же размерности (теоремы 4,5).

Мы приводим также пример жесткого спектра из полных метризуемых пространств, предел которого не является кружевным, а следовательно, и M_1-пространством.

Напомним, что квазибазой пространства X называется семейство $\mathcal{K}$ его подмножеств такое, что $\{\operatorname{Int} K : K \in \mathcal{K}\}$ - база топологии пространства X. Регулярное пространство называется: σ-пространством, если в нем существует σ-дискретная сеть [11] ; M_1-пространством, если в нем существует σ-консервативная база [12] ; кружевным, или M_2-пространством, если в нем существует σ-консервативная квазибаза [12], [15], [8].

$\mathbb{N}$ обозначает дискретное пространство натуральных чисел; $\mathbb{R}$ - вещественная прямая; $[A]_X$ обозначает замыкание множества A в пространстве X. Если $\{(f_\alpha : X \to Y_\alpha) : \alpha \in A\}$ - семейство отображений пространства X, то $\Delta\{f_\alpha : \alpha \in A\} : X \to \Pi\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ обозначает диагональное произведение этого семейства. Если все пространства X_α заданы на одном и том же множестве X, то $\Delta\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ обозначает диагональ в произведении $\Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Пусть $f : X \to Y$ - отображение и $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ - семейства множеств в X и Y соответственно. Тогда $f(\mathcal{K})$ и $f^{-1}(\mathcal{F})$ обозначают, соответственно, семейства $\{f(K) : K \in \mathcal{K}\}$ и $\{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$.

<u>Определение 1</u>. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется замкнутым относительно семейства $\mathcal{K}$ подмножеств пространства X либо $\mathcal{K}$-замкнутым, если для каждого $K \in \mathcal{K}$

имеет место равенство $f([K]_X)=[f(K)]_Y$.

Легко заметить, что замкнутые отображения - это в точности отображения, замкнутые относительно семейства всех подмножеств. Слабо замкнутые отображения, определенные Н.В.Величко, - это в точности отображения, замкнутые относительно семейства всех дискретных подмножеств. (Напомним, что отображение называется слабо замкнутым [7], если образ каждого дискретного подмножества дискретен).

Предложение 1 (Ср. [4]). Для каждого σ-консервативного семейства $\mathfrak{K}$ подмножеств в паракомпактном σ-пространстве X существует $\mathfrak{K}$-замкнутое уплотнение X на некоторое метрическое пространство Y.

В работе [4] с помощью предложения 1 доказано, что регулярное пространство X является M_1-пространством тогда и только тогда, когда существует уплотнение f пространства X на метрическое пространство Y и σ-консервативная сеть $\mathfrak{K}$ в X такие, что семейство $f^{-1}(\mathfrak{K})$ является σ-консервативной базой в X. По аналогии с этим результатом можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Регулярное пространство X является кружевным тогда и только тогда, когда существует уплотнение пространства X на метрическое пространство Y и σ-консервативная сеть $\mathfrak{K}$ в Y такие, что $f^{-1}(\mathfrak{K})$ является σ-консервативной квазибазой в X.

Определение 2. Обратный спектр $\{X_\alpha, \mathfrak{K}_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha, \beta\in A\}$ называется супержестким спектром 1 рода (соответственно 11 рода), если 1) все пространства X_α- паракомпакты; 2) $\mathfrak{K}_\alpha$- σ-консервативная сеть в X_α для всякого $\alpha\in A$; 3) все проекции π^α_β - $\mathfrak{K}_\alpha$-замкнутые уплотнения; 4) $\pi^\alpha_\beta(\mathfrak{K}_\alpha)=$ $=\mathfrak{K}_\beta$ для любых $\beta\leq\alpha$; 5_1) для всякого $\alpha\in A$ и всякого $K\in\mathfrak{K}_\alpha$ существует такой индекс $\gamma>\alpha$, что множество $(\pi^\gamma_\alpha)^{-1}(K)$ открыто в X_γ (соответственно, 5_2)для любой точки $x\in X_\alpha$ и любой ее окрестности $\mathcal{U}$ в X_α существует индекс $\gamma>\alpha$ и множество $K\in\mathfrak{K}_\gamma$ такие, что $(\pi^\gamma_\alpha)^{-1}(x)\in \operatorname{Int} K\subset(\pi^\gamma_\alpha)^{-1}(\mathcal{U})$).

Теорема 2. Топологическое пространство является M_1-пространством тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно пределу супержесткого спектра 1 рода из метрических пространств.

Доказательство. Пусть X есть предел супержесткого спектра $\{X_\alpha, \mathcal{K}_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha,\beta \in A\}$, π_α - предельные проекции и все пространства X_α метризуемы. Пусть $\mathcal{K} = \pi_\alpha^{-1}(\mathcal{K}_\alpha)$ для некоторого $\alpha \in A$. В силу условия 5_1) определения супержесткого спектра 1 рода семейство $\mathcal{K}$ является базой топологии X. Поскольку все проекции спектра π^α_β являются $\mathcal{K}_\alpha$-замкнутыми, то нетрудно заметить, что предельные проекции π_α являются $\mathcal{K}$-замкнутыми. Следовательно, $\mathcal{K}$ - σ-консервативная база в X.

Пусть теперь X - M_1-пространство, $\mathcal{B}$ - некоторая σ-консервативная база в нем. Для каждого $V \in \mathcal{B}$ положим $\mathcal{K}_V = \mathcal{B} \cup \{X \setminus V\}$. В силу предложения 1 существует метрическое пространство Y_V и $\mathcal{K}_V$-замкнутое уплотнение $\pi_V : X \to Y_V$. Множество $\pi_V(V)$ открыто в Y_V, так как $Y_V \setminus \pi_V(V) = [\pi_V(X \setminus V)]_{Y_V} = \pi_V(X \setminus V)$. Пусть теперь A - множество всех конечных подмножеств семейства $\mathcal{B}$. Если $\alpha \in A$ и $\alpha = \{V_1, \ldots, V_n\}$, то в качестве Y_α возьмем множество $Y_{V_1} \Delta \ldots \Delta Y_{V_n}$. Пусть $\pi_\alpha = \pi_{V_1} \Delta \ldots \Delta \pi_{V_n}$, тогда для $\beta < \alpha$ в качестве π^α_β возьмем проекцию диагонали $Y_{V_1} \Delta \ldots \Delta Y_{V_n}$ на $\Delta\{Y_u : u \in \beta\}$. Положим $\mathcal{K}_\alpha = (\pi^\alpha_{V_1})^{-1}(\mathcal{K}_{V_1}) = \ldots = (\pi^\alpha_{V_n})^{-1}(\mathcal{K}_{V_n})$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{K}_\alpha$ - σ-консервативная сеть в Y_α, все проекции π^α_β $\mathcal{K}_\alpha$-замкнуты, а множества $\pi_\alpha(V_1), \ldots, \pi_\alpha(V_n)$ открыты в Y_α. Поэтому обратный спектр $S = \{Y_\alpha, \mathcal{K}_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha, \beta \in A\}$ будет супержестким спектром 1 рода и нетрудно заметить, что $\varprojlim S = X$.

Аналогично теореме 2 с использованием теоремы 1 доказывается

Теорема 3. Топологическое пространство является кружевным тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно пределу супержесткого спектра 11 рода из метрических пространств.

Предложение 2. Если $S=\{X_\alpha, \mathcal{H}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha,\beta\in A\}$ – супержесткий спектр 1 либо 11 рода, то в каждом пространстве X_α существует такая σ-дискретная сеть $\mathcal{F}_\alpha$, состоящая из замкнутых множест., что $S'=\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi_\beta^\alpha, \alpha,\beta\in A\}$ – жесткий спектр.

Доказательство. Для доказательства мы используем одну конструкцию Сивеца и Нагаты [13].

Семейство $\mathcal{H}_\alpha$ является σ-консервативной сетью в X_α для каждого $\alpha\in A$. Пусть $X=\varprojlim S$, π_α – предельные проекции и $\mathcal{H}=\pi_\alpha^{-1}(\mathcal{H}_\alpha)$. Тогда $\mathcal{H}$ – σ-консервативная сеть в X, поэтому $\mathcal{H}=\cup\{\mathcal{H}_n : n\in\mathbb{N}\}$, где каждое семейство $\mathcal{H}_n$ консервативно. Пусть $\tilde{\mathcal{H}}_n=\{[K] : K\in\mathcal{H}_n\}$. Для каждого семейства $\tilde{\mathcal{H}}_n$ построим σ-дискретное семейство $\mathcal{F}_n$, состоящее из замкнутых множеств, и такое, что 1) для каждого $\alpha\in A$ семейство $\pi_\alpha(\mathcal{F}_n)$ σ-дискретно и замкнуто в X_α; 2) для каждого $K\in\tilde{\mathcal{H}}_n$ имеет место равенство $K=\cup\{F\in\mathcal{F}_n : F\subset K\}$.

Для каждого $m\in\mathbb{N}$ пусть $\mathcal{L}_m=\{\cap\tilde{\mathcal{H}} : \tilde{\mathcal{H}}\subset\tilde{\mathcal{H}}_m\cup\tilde{\mathcal{H}}_n\}$. Очевидно, что $\mathcal{L}_m$ – замкнутое консервативное семейство. Поскольку для каждого $\alpha\in A$ уплотнение π_α является $\mathcal{H}_i$-замкнутым $(i\in\mathbb{N})$, а следовательно, и $\tilde{\mathcal{H}}_i$-замкнутым, то семейство $\pi_\alpha(\mathcal{L}_m)$ является замкнутым и консервативным в X_α и уплотнение π_α является $\mathcal{L}_m$-замкнутым.

Для каждого подсемейства $\mathcal{K}'\subset\tilde{\mathcal{H}}_n$ и каждого $m\in\mathbb{N}$ определим множество $S_m(\mathcal{K}')=\cup\{L\in\mathcal{L}_m : L\subset\cap\mathcal{K}'\setminus\cup(\tilde{\mathcal{H}}_n\setminus\mathcal{K}')\}$. Пусть $\mathcal{F}_n^m=\{S_m(\mathcal{K}') : \mathcal{K}'\in\tilde{\mathcal{H}}_n\}$ и $\mathcal{F}_n=\cup\{\mathcal{F}_n^m : m\in\mathbb{N}\}$. Поскольку семейство $\pi_\alpha(\mathcal{L}_m)$ замкнуто и консервативно в X_α и уплотнение π_α – $\mathcal{L}_m$-замкнуто, то семейство $\pi_\alpha(\mathcal{F}_n^m)$ также является замкнутым и консервативным в пространстве X_α. Покажем, что семейство $\mathcal{F}_n^m$ дизъюнктно. Действительно, если $\mathcal{K}', \mathcal{K}''\in\tilde{\mathcal{H}}_n$ и $K\in\mathcal{K}'\setminus\mathcal{K}''$, то $S_m(\mathcal{K}')\subset\mathcal{K}$ и $S_m(\mathcal{K}'')\cap\mathcal{K}=\emptyset$, поэтому $S_m(\mathcal{K}')\cap S_m(\mathcal{K}'')=\emptyset$. Поскольку π_α – уплотнение, то $\pi_\alpha(\mathcal{F}_n^m)$ является дизъюнктным консервативным замкнутым семейством в X_α, а следовательно, и дискретным семейством. Таким образом, для произвольных $n\in\mathbb{N}$ и $\alpha\in A$ семейство $\pi_\alpha(\mathcal{F}_n)$ является σ-дискретным и замкнутым.

Пусть $K\in\tilde{\mathfrak{K}}_n$ и $x\in\mathfrak{K}$. Тогда $G=X\setminus\bigcup\{K'\in\tilde{\mathfrak{K}}_n : x\notin K'\}$ – открытая окрестность точки x. Существуют $m\in\mathbb{N}$ и $C\in\tilde{\mathfrak{K}}_m$ такие, что $x\in C\subset G$. Пусть $\mathfrak{K}'=\{K'\in\tilde{\mathfrak{K}}_n : x\in K'\}$. Тогда $x\in S_m(\mathfrak{K}')$, так как $x\in C\cap(\cap\mathfrak{K}')\in\mathcal{L}_m$ и $C\cap(\cap\mathfrak{K}')\subset(\cap\mathfrak{K}')\setminus\bigcup(\tilde{\mathfrak{K}}_n\setminus\mathfrak{K}')$. Таким образом, свойство 2) также выполняется.

Пусть $\mathcal{F}=\bigcup\{\mathcal{F}_n : n\in\mathbb{N}\}$ и $\mathcal{F}_\alpha=\pi_\alpha(\mathcal{F})$ для каждого $\alpha\in A$. Тогда $\mathcal{F}$ – σ-дискретная сеть в X, $\mathcal{F}_\alpha$ – σ-дискретная сеть в X_α и обратный спектр $S'=\{X_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha,\beta\in A\}$ является жестким.

Теорема 4. Следующие условия эквивалентны:

1) X – M_1-пространство и $\dim X\leq n$,

2) X гомеоморфно пределу супержесткого спектра 1 рода из метрических пространств размерности $\dim$ не более n.

Доказательство. Если X – M_1-пространство, то в силу теоремы 4 X гомеоморфно пределу супержесткого спектра 1 рода из метрических пространств. Поскольку $\dim X\leq n$, то, применяя факторизационную теорему по весу и размерности (Б.А.Пасынков [1]), можно построить супержесткий спектр 1 рода из метрических пространств размерности $\dim$ не более n, предел которого гомеоморфен X.

Если же X гомеоморфно пределу супержесткого спектра 1 рода из метрических пространств размерности $\dim$ не более n, то в силу предложения 2 пространство X гомеоморфно пределу жесткого спектра из тех же пространств. Но при переходе к пределу в жестком спектре размерность не повышается [6]. Поэтому $\dim X\leq n$.

Аналогично теореме 4 доказывается

Теорема 5. Следующие условия эквивалентны:

1) X – кружевное пространство и $\dim X\leq n$,

2) X гомеоморфно пределу супержесткого спектра 11 рода из метрических пространств размерности $\dim$ не более n.

Пример жесткого спектра из полных метризуемых пространств, предел которого не является кружевным.

Пусть $\mathfrak{J}$ – множество иррациональных точек и $\mathcal{Y}=\mathfrak{J}\times\{0\}\subset\mathbb{R}^2$; отождествляя множества $\mathfrak{J}$ и $\mathcal{Y}$, для обозначения их элементов будем как равноправные использовать символы y и $(0,y)$.

Для каждого $p\in\mathbb{N}$ рассмотрим подмножества плоскости

$Z_p^1=\{(\frac{n}{p},\frac{1}{p}):n\in\mathbb{Z}\}$, $Z_p^2=\{(\frac{n}{p}+\frac{1}{kp},\frac{1}{p}):k\in\mathbb{Z},|k|\geq 2,n\in\mathbb{Z}\}$.

Положим $Z_p=Z_p^1\cup Z_p^2$, $Z=\cup\{Z_p:p\in\mathbb{N}\}$ и рассмотрим множество $X=\mathcal{Y}\cup Z$.

Пусть $\mathcal{T}_0$ - топология, индуцированная на X топологией плоскости; соответствующее пространство обозначим X_0. Ясно, что X_0 - G_δ-множество в $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, X_0 - полное в смысле Чеха пространство.

Положим $\mathfrak{R}=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$ и пусть $(\mathcal{Y}\times\mathfrak{R})^{<\omega_0}$ - множество конечных подмножеств произведения $\mathcal{Y}\times\mathfrak{R}$. Введем частичный порядок на множестве A, полагая $\alpha>\alpha'$ для $\alpha,\alpha'\in A$ в том и только в том случае, когда $\alpha\supset\alpha'$. Ясно, что тем самым A превращается в направленное множество.

Для того, чтобы построить пространства X_α для всех $\alpha\in A$, рассмотрим сначала пару $(y,r)\in\mathcal{Y}\times\mathfrak{R}$ и пусть

$$\mathcal{U}_y^r=\{(y',z):|y'-y|<r,\ 0<z\leq|y'-y|\}\cap X,$$

$$C_y^r=\{(y',z):|y'-y|<r,\ |y-y'|\leq z<r\}\cap X,\quad P_y^r=X\setminus\mathcal{U}_y^r.$$

Легко видеть, что $\mathcal{U}_y^r$ замкнуто в X_0, и в частности, $\mathcal{U}_y^r$ и P_y^r, рассматриваемые как подпространства в X_0, являются полными в смысле Чеха [9].

Пусть $\alpha\in A$ и $\alpha=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, где $\alpha_1=(y_1,r_1),\dots,\alpha_n=(y_n,r_n)\in\mathcal{Y}\times\mathfrak{R}$. Определим на множестве X топологию $\mathcal{T}_\alpha$, взяв в качестве ее предбазы семейство множеств $\mathcal{P}_\alpha=\mathcal{T}_0\cup\{\mathcal{U}_{y_1}^{r_1},\dots,\mathcal{U}_{y_n}^{r_n}\}$; соответствующее пространство обозначаем X_α. Легко видеть, что каждое $\mathcal{U}_{y_i}^{r_i}$, где $i=1,\dots,n$, является открыто-замкнутым подмножеством X_α. Ясно также, что топология $\mathcal{T}_\alpha$ регулярна и имеет счетную базу и, следовательно, пространство X_α метризуемо.

Покажем, что каждое X_α полно в смысле Чеха. Предположим сначала, что $\alpha=(y,r)\in\mathcal{Y}\times\mathfrak{R}$. Тогда X_α представимо в виде дискретной суммы полных в смысле Чеха подпространств $\mathcal{U}_y^r$ и P_y^r и, следовательно, X_α полно в смысле Чеха.

Пусть теперь $\alpha=\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$; рассмотрим для каждого $i=1,\dots,n$ тождественное отображение $j_{\alpha_i}:X_\alpha\to X_{\alpha_i}$.

Ясно, что f_{α_i} непрерывно и семейство $\{f_{\alpha_i} : i=1,\dots,n\}$ разделяет точки и замкнутые множества пространства X_α. Следовательно, диагональное отображение $\Delta\{f_{\alpha_i} : i=1,\dots,n\}$: $X_\alpha \to \prod_i X_{\alpha_i}$ является вложением. При этом, как легко заметить, X_α гомеоморфно замкнутому подмножеству диагонали $\Delta\{X_{\alpha_i} : i=1,\dots,n\}$ пространства $\Pi\{X_{\alpha_i} : i=1,\dots,n\}$, а потому полно.

Рассмотрим спектр $\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha, \beta \in A\}$, где $\pi^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ при $\beta \leq \alpha$ определяется как тождественное отображение на множестве X. Ясно, что π^α_β является уплотнением. Пусть $X_* = \varprojlim X_\alpha$ – предел обратного спектра $\{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha, \beta \in A\}$. Ясно, что топология $\mathcal{T}_*$ пространства X_* определяется предбазой $\mathcal{P}_* = \mathcal{T}_0 \cup \{\mathcal{U}^r_y : y \in \mathcal{Y}, r \in \mathcal{R}\}$.

Легко видеть, что в пространстве X_* существует счетная сеть $\mathcal{S}$ (Достаточно взять замкнутую сеть пространства $\mathcal{Y} \subset X_*$, гомеоморфного пространству иррациональных чисел и объединить ее со счетным семейством множеств $\tilde{Z} = \{\{z\} : z \in Z\}$). Ясно, что $\pi_\alpha(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_\alpha$ будет также счетной сетью в каждом X_α. Следовательно, спектр $\{X_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \pi^\alpha_\beta, \alpha, \beta \in A\}$ является жестким.

Покажем, что пространство X_* не является кружевным. В самом деле, предположим, что $\mathcal{V} = \cup\{\mathcal{V}_n : n \in N\}$ – σ-консервативная квазибаза пространства X_* и каждое $\mathcal{V}_n$ консервативно. Пусть $\mathcal{V}'$ – семейство таких множеств $V \in \mathcal{V}$, для каждого из которых найдется пара $(y, r) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{R}$ такая, что $\mathcal{U}^r_y \subset V$, $C^r_y \cap V = \emptyset$. (При этом y определяется этим условием однозначно и для каждого $y \in \mathcal{Y}$ найдется $V \in \mathcal{V}'$ с таким свойством). Поскольку множество иррациональных чисел имеет вторую категорию, то найдутся $r \in \mathcal{R}$ и $m \in N$ такие, что $T = \{y : V^r_y \in \mathcal{V}' \cap \mathcal{V}_m\}$ не является нигде не плотным в $\mathcal{Y}$. Тогда найдется последовательность $\{y_1, \dots, y_n, \dots\} \subset T$, сходящаяся к некоторой точке y_0 вида $\frac{q}{p}$, где $q \in Z$. Без ограничения общности можем считать, что $\frac{1}{p} < r$, а последовательность $y_1, \dots, y_n, \dots$ – монотонная (для определенности – убывающая) и $|y_1 - y_0| < \frac{1}{p}$. Тогда ясно, что точка $z = (\frac{q+1}{p}, \frac{1}{p})$ лежит на прямой $y = x - \frac{q}{p}$ и $z \in Z^1_p$. При этом легко заметить, что $z \in [\cup \mathcal{U}^r_{y_n}]$, но $z \notin \cup[\mathcal{U}^r_{y_n}]$. Отсюда можем заключить, что $z \in [\cup V^r_{y_n}]$, но $z \notin \cup[V^r_{y_n}]$, а следовательно, ϑ_m не является консервативным семейством. Полученное противоречие и доказывает, что X_* не является кружевным.

Список литературы

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. - М., 1973.
2. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. - М., 1974.
3. Архангельский А.В. Классы топологических групп// УМН.- 1981.- Т.36.- Вып.3.- С.127-146.
4. Bregman Ju.H. A note about M_1-spaces and stratifiable spaces // Comm.Math.Univ.Carol. - 1983.- V.23.- N1.- P.23-3
5. Bregman Ju.H. Paracompact σ-spaces: inverse systems and dimension// Colloquium on topology. Abstracts., Eger, Hungary, 1983.- P.13.
6. Брегман Ю.Х. Метод жестких спектров в теории паракомпактных σ-пространств// Топологические пространства и их отображения.- Рига, 1985.- С.18-32.
7. Величко Н.В. О периферически бикомпактных отображениях// Современная топология и теория множеств.- Ижевск, 1979.- Вып. 2.- С.18-24.
8. Gruenhage G. Stratifiable spaces are M_2//Topology Proc.- 1976.- V.1.- P.221-226.
9. Engelking R. General topology. - Warszawa : PWN,1977.
10. Клюшин В.Л. О совершенных отображениях паракомпактных пространств// ДАН СССР.- 1964.- Т.159.- № 4.- С.734-737.
11. Okuyama A. Some generalizations of metric spaces // Sci. Rep.Tokyo Kyoiku Daigaku Sect.A.9.- 1967.- P.236-254.
12. Ceder J. Some generalizations of metric spaces//Pacific J.Math.- 1961.- V.11.- P.105-126.
13. Siwiec F.,Nagata J. A note on nets and metrization // Proc.Japan Acad.- 1968.- V.44.- P.623-627.
14. Šostak A.P. Some remarks about bijections onto metric spaces//Czech.Math.J.- 1984.- V.34.- P.227-238.
15. Junnila H.J.K. Neighbornets //Pacific J.Math.- 1978.- V.76.- N1.- P.83-108.

Поступила 24 мая 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига.1986.

УДК 517.98

МЕРЫ В СИСТЕМАХ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Н.А.Врублевска

Латвийский государственный университет им. П. Стучки

В работе исследуется проблема продолжения меры, заданной на полукольце нечетких множеств. Получено обобщение соответствующих классических теорем.

Пусть X - непустое множество, $I := [0,1]$, $I^X := \{h \mid h : X \to I\}$, т.е. I^X - множество всех нечетких подмножеств множества X.

Пусть $h_A, h_B \in I^X$. Объединение $h_A \cup h_B$, пересечение $h_A \cap h_B$ и разности $h_A \setminus h_B$, $h_A \,\text{⦣}\, h_B$, $h_A \,\text{⦥}\, h_B$ для любого $x \in X$ определим равенствами:

$$(h_A \cup h_B)(x) := \max\{h_A(x); h_B(x)\},$$
$$(h_A \cap h_B)(x) := \min\{h_A(x); h_B(x)\},$$
$$(h_A \setminus h_B)(x) := h_A(x) - h_B(x),$$

если $h_A(x) \geqslant h_B(x)$, и $(h_A \setminus h_B)(x) := 0$ в противном случае;

$$(h_A \,\text{⦣}\, h_B)(x) := h_A(x),$$

если $h_A(x) \geqslant h_B(x)$, и $(h_A \,\text{⦣}\, h_B)(x) := 0$ в противном случае;

$$(h_A \,\text{⦥}\, h_B)(x) := h_A(x),$$

если $h_A(x) > h_B(x)$, и $(h_A \,\text{⦥}\, h_B)(x) := 0$ в противном случае.

Пусть $h_{A_i} \in I^X$ $(i = 1, \dots, n)$.

Запись $\biguplus_{i=1}^{n} h_{A_i}$ вместо $\bigcup_{i=1}^{n} h_{A_i}$ (где $\bigcup_{i=1}^{n} h_{A_i}(x) = \max\{h_{A_i}(x) \mid i \in \{1,\dots,n\}\}$ для любого $x \in X$) будет означать, что нечеткие множества h_{A_i} $(i = 1,\dots,n)$ попарно не пересекаются, т.е. $h_{A_i} \cap h_{A_j} = h_\emptyset$, где $h_\emptyset(x) = 0$ для любого $x \in X$, для любых $i,j \in \{1,\dots,n\}$: $i \neq j$.

Пусть $\mathcal{P} \subset I^X$. Назовем $\mathcal{P}$ полукольцом, если $h_\emptyset \in \mathcal{P}$ и для любых $h_A, h_B \in \mathcal{P}$:

I) $h_A \cap h_B \in \mathcal{P}$;

2) найдутся такие $h_{C_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,n)$, что
$$h_A \mathbin{\urcorner} h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_{C_i};$$

3) найдутся такие $h_{B_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,m)$, что
$$h_A \mathbin{\backslash\!\!\!\flat} h_B = \bigsqcup_{i=1}^{m} h_{B_i}.$$

Скажем, что полукольцо $\mathcal{P}$ является ультраполукольцом, если для любых $h_A, h_B \in \mathcal{P}$ найдутся такие $h_{E_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,k)$, что $h_A \setminus h_B = \bigsqcup_{i=1}^{k} h_{E_i}$.

Пусть $R \subset I^X$. Назовем R кольцом, если $h_A \cup h_B$, $h_A \cap h_B$, $h_A \mathbin{\urcorner} h_B$, $h_A \mathbin{\backslash\!\!\!\flat} h_B \in R$ для любых $h_A, h_B \in R$. Скажем, что кольцо R является ультракольцом, если $h_A \setminus h_B \in R$ для любых $h_A, h_B \in R$.

Кольцо $R(\mathcal{P}) \subset I^X$ назовем минимальным кольцом, порожденным $\mathcal{P}$, если $R(\mathcal{P}) \supset \mathcal{P}$ и любое кольцо $R \subset I^X$, содержащее $\mathcal{P}$, содержит $R(\mathcal{P})$.

Мерой назовем неотрицательную аддитивную функцию, заданную на полукольце, т.е. если $\mathcal{P}$ полукольцо, то отображение $m : \mathcal{P} \mapsto R^+$, где R^+ – множество всех неотрицательных действительных чисел, называется мерой, если
$$m(h_A \sqcup h_B) = m(h_A) + m(h_B)$$
для любых $h_A, h_B \in \mathcal{P}$ (при предположении, конечно, что $h_A \cup h_B \in \mathcal{P}$ и, как указано $h_A \cap h_B = h_\emptyset$).

<u>Замечание I</u>. Пусть $h_A, h_B \in I^X$, $x \in X$ и $h_A(x) = 0$. Тогда
$$(h_A \mathbin{\urcorner} h_B)(x) = 0;$$
$$(h_A \mathbin{\backslash\!\!\!\flat} h_B)(x) = 0;$$
$$(h_A \setminus h_B)(x) = 0.$$

<u>Доказательство</u>. Утверждение верно, если $h_A(x) < h_B(x)$. Если же $h_A(x) \geq h_B(x)$, то $h_B(x) = 0$, т.е. $h_A(x) = h_B(x)$, поэтому: $(h_A \mathbin{\urcorner} h_B)(x) = h_A(x) = 0$, $(h_A \mathbin{\backslash\!\!\!\flat} h_B)(x) = 0$, $(h_A \setminus h_B)(x) = h_A(x) - h_B(x) = 0$.

<u>Замечание 2</u>. Пусть $h_A, h_B \in I^X$, $x \in X$ и

$h_B(x)=0$. Тогда

$$(h_A \cap h_B)(x) = h_A(x);$$
$$(h_A \cup h_B)(x) = h_A(x);$$
$$(h_A \setminus h_B)(x) = h_A(x).$$

Доказательство. Имеем: $h_A(x) \geq h_B(x)$.
Поэтому: $(h_A \cap h_B)(x) = h_A(x)$, $(h_A \setminus h_B)(x) = h_A(x) - h_B(x) = h_A(x)$. Проверку того, что $(h_A \cup h_B)(x) = h_A(x)$, достаточно провести для случая: $h_A(x) = h_B(x)$. Но тогда $h_A(x) = 0 = (h_A \cup h_B)(x)$.

Замечание 3. Пусть $h_A, h_B, h_C \in I^X$, $x \in X$ и $h_A(x) = h_B(x)$. Тогда

$$(h_A \cap h_C)(x) = (h_B \cap h_C)(x);$$
$$(h_A \cup h_C)(x) = (h_B \cup h_C)(x);$$
$$(h_A \setminus h_C)(x) = (h_B \setminus h_C)(x).$$

Доказательство. Если $h_C(x) > h_A(x)$ $(= h_B(x))$,
то $(h_A \cap h_C)(x) = 0 = (h_B \cap h_C)(x)$;
$(h_A \cup h_C)(x) = 0 = (h_B \cup h_C)(x)$;
$(h_A \setminus h_C)(x) = 0 = (h_B \setminus h_C)(x)$.

Если же $h_C(x) \leq h_A(x)$ $(= h_B(x))$, то
$(h_A \cap h_C)(x) = h_A(x) = h_B(x) = (h_B \cap h_C)(x)$;
$(h_A \setminus h_C)(x) = h_A(x) - h_C(x) = h_B(x) - h_C(x) = (h_B \setminus h_C)(x)$.

В этом случае также: $(h_A \cup h_C)(x) = (h_B \cup h_C)(x)$.
Действительно, если $h_C(x) = h_A(x)$ $(= h_B(x))$,
то $(h_A \cup h_C)(x) = 0 = (h_B \cup h_C)(x)$,
если же $h_C(x) < h_A(x)$ $(= h_B(x))$, то
$(h_A \cup h_C)(x) = h_A(x) = h_B(x) = (h_B \cup h_C)(x)$.

Замечание 4. Пусть $h_A, h_B, h_C \in I^X$, $x \in X$ и $h_B(x) = h_C(x)$.
Тогда

$$(h_A \cap h_B)(x) = (h_A \cap h_C)(x);$$
$$(h_A \cup h_B)(x) = (h_A \cup h_C)(x);$$
$$(h_A \setminus h_B)(x) = (h_A \setminus h_C)(x).$$

Доказательство. Если $h_A(x) < h_B(x)$ $(= h_C(x))$,
то $(h_A \cap h_B)(x) = 0 = (h_A \cap h_C)(x)$,

$(h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B)(x) = 0 = (h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_C)(x)$,
$(h_A \setminus h_B)(x) = 0 = (h_A \setminus h_C)(x)$.
Если же $h_A(x) \geq h_B(x)\ (= h_C(x))$, то
$(h_A \wedge h_B)(x) = h_A(x) = (h_A \wedge h_C)(x)$,
$(h_A \setminus h_B)(x) = h_A(x) - h_B(x) = h_A(x) - h_C(x) = (h_A \setminus h_C)(x)$.
В этом случае также: $(h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B)(x) = (h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_C)(x)$.
Действительно, если $h_A(x) = h_B(x)\ (= h_C(x))$,
то $(h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B)(x) = 0 = (h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_C)(x)$,
если же $h_A(x) > h_B(x)\ (= h_C(x))$, то
$(h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B)(x) = h_A(x) = (h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_C)(x)$.

Лемма I. Пусть $h_{A_i} \in I^X$ $(i = 1, \dots, n)$ попарно не пересекаются, $h_B \in I^X$.

Тогда
$$\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}\Big) \wedge h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} (h_{A_i} \wedge h_B);$$
$$\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}\Big) \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} (h_{A_i} \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B);$$
$$\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}\Big) \setminus h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} (h_{A_i} \setminus h_B).$$

Доказательство. Пусть $x \in X$. Выберем $j \in \{1, \dots, n\}$ таким образом, что $h_{A_j}(x) = max\{h_{A_i}(x) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$.
Тогда $h_{A_i}(x) = 0$ для любого $i \in \{1, \dots, n\} : i \neq j$.
Согласно замечанию I $(h_{A_i} \wedge h_B)(x) = 0$, $(h_{A_i} \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B)(x) = 0$, $(h_{A_i} \setminus h_B)(x) = 0$ для любого $i \in \{1, \dots, n\} : i \neq j$.
Таким образом, $h_{A_i} \wedge h_B$ $(i = 1, \dots, n)$ попарно не пересекаются, то же верно относительно $h_{A_i} \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B$ $(i = 1, \dots, n)$ и $h_{A_i} \setminus h_B$ $(i = 1, \dots, n)$,

$$\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} (h_{A_i} \wedge h_B)\Big)(x) = max\{(h_{A_i} \wedge h_B)(x) \mid i \in \{1, \dots, n\}\} = (h_{A_j} \wedge h_B)(x),$$
$$\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} (h_{A_i} \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B)\Big)(x) = (h_{A_j} \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B)(x),$$
$$\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} (h_{A_i} \setminus h_B)\Big)(x) = (h_{A_j} \setminus h_B)(x).$$

Утверждение леммы следует согласно замечанию 3.

Лемма 2. Пусть $h_A, h_B, h_C \in I^X$, h_B и h_C не пересекаются.

Тогда
$$h_A \wedge (h_B \sqcup h_C) = (h_A \wedge h_B) \wedge h_C;$$
$$h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; (h_B \sqcup h_C) = (h_A \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_B) \smallsetminus\!\!\!\!\cdot\; h_C;$$
$$h_A \setminus (h_B \sqcup h_C) = (h_A \setminus h_B) \setminus h_C.$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $x \in X$. Если $\max\{h_B(x); h_C(x)\} = h_B(x)$, то тогда $h_C(x)=0$ и в силу замечаний 2 и 4 имеем:

$$(h_A \sqcap (h_B \sqcup h_C))(x) = (h_A \sqcap h_B)(x) = ((h_A \sqcap h_B) \sqcap h_C)(x),$$

$$(h_A \flat (h_B \sqcup h_C))(x) = (h_A \flat h_B)(x) = ((h_A \flat h_B) \flat h_C)(x),$$

$$(h_A \setminus (h_B \sqcup h_C))(x) = (h_A \setminus h_B)(x) = ((h_A \setminus h_B) \setminus h_C)(x).$$

Если же $\max\{h_B(x); h_C(x)\} = h_C(x)$, то тогда $h_B(x)=0$ и, следовательно:

$$(h_A \sqcap (h_B \sqcup h_C))(x) = (h_A \sqcap h_C)(x) = ((h_A \sqcap h_B) \sqcap h_C)(x),$$

$$(h_A \flat (h_B \sqcup h_C))(x) = (h_A \flat h_C)(x) = ((h_A \flat h_B) \flat h_C)(x),$$

$$(h_A \setminus (h_B \sqcup h_C))(x) = (h_A \setminus h_C)(x) = ((h_A \setminus h_B) \setminus h_C)(x).$$

<u>Лемма 3</u>. Предположим, что $\mathcal{P} \subset I^X$ – полукольцо, $h_{B_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,n)$ попарно не пересекаются, $h_A \in \mathcal{P}$. Тогда существуют такие $h_{C_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,m)$ и $h_{D_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,k)$, что

$$h_A \sqcap \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} h_{B_i}\right) = \bigsqcup_{i=1}^{m} h_{C_i};$$

$$h_A \flat \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} h_{B_i}\right) = \bigsqcup_{i=1}^{k} h_{D_i}.$$

Если к тому же $\mathcal{P}$ – ультраполукольцо, то существуют такие $h_{E_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,l)$, что

$$h_A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} h_{B_i}\right) = \bigsqcup_{i=1}^{l} h_{E_i}.$$

<u>Доказательство</u>. Доказательство проведем методом математической индукции.

Если $n=1$, то утверждение леммы справедливо в силу определений полукольца и ультраполукольца.

Предположим, что утверждение леммы верно, если $n=s$.

Пусть $n = s+1$. В силу леммы 2 тогда:

$$h_A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i}\right) = \left(h_A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{s} h_{B_i}\right)\right) \cap h_{B_{s+1}},$$

$$h_A \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i}\right) = \left(h_A \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^{s} h_{B_i}\right)\right) \cup h_{B_{s+1}},$$

$$h_A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i}\right) = \left(h_A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{s} h_{B_i}\right)\right) \setminus h_{B_{s+1}}.$$

Согласно предположению найдутся такие $h_{C_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,m)$ и $h_{D_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,k)$, что

$$h_A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{s} h_{B_i}\right) = \bigsqcup_{i=1}^{m} h_{C_i},$$

$$h_A \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^{s} h_{B_i}\right) = \bigsqcup_{i=1}^{k} h_{D_i},$$

и, если $\mathcal{P}$ - ультраполукольцо, такие $h_{E_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,\ell)$, что $h_A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{s} h_{B_i}\right) = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} h_{E_i}$.

Следовательно,

$$h_A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i}\right) = \left(\bigsqcup_{i=1}^{m} h_{C_i}\right) \cap h_{B_{s+1}}$$

$$h_A \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i}\right) = \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} h_{D_i}\right) \cup h_{B_{s+1}}$$

$$h_A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i}\right) = \left(\bigsqcup_{i=1}^{\ell} h_{E_i}\right) \setminus h_{B_{s+1}}.$$

В силу леммы I тогда:

$$h_A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i}\right) = \bigsqcup_{i=1}^{m} \left(h_{C_i} \cap h_{B_{s+1}}\right),$$

$$h_A \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i}\right) = \bigsqcup_{i=1}^{k} \left(h_{D_i} \cup h_{B_{s+1}}\right),$$

$$h_A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i}\right) = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} \left(h_{E_i} \setminus h_{B_{s+1}}\right).$$

Согласно определению полукольца и определению ультраполукольца, найдутся такие $h_{C_{ij}} \in \mathcal{P}$ $(j=1,\dots,m_i;\ i=1,\dots,m)$ и $h_{D_{ij}}^{\circ} \in \mathcal{P}$ $(j=1,\dots,k_i;\ i=1,\dots,k)$, что $h_{C_i} \cap h_{B_{s+1}} = \bigsqcup_{j=1}^{m_i} h_{C_{ij}}$ $(i=1,\dots,m)$,

$$h_{D_i} \setminus h_{B_{s+1}} = \bigsqcup_{j=1}^{k_i} h_{D_{ij}} \quad (i = 1, \dots, k),$$

и, если $\mathcal{P}$ - ультраполукольцо, такие $h_{E_{ij}} \in \mathcal{P}$ $(j = 1, \dots, \ell_i;\ i = 1, \dots, \ell)$, что

$$h_{E_i} \setminus h_{B_{s+1}} = \bigsqcup_{j=1}^{\ell_i} h_{E_{ij}} \quad (i = 1, \dots, \ell).$$

Заключаем, что

$$h_A \cap \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i} \right) = \bigsqcup_{i=1}^{m} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} h_{C_{ij}},$$

$$h_A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i} \right) = \bigsqcup_{i=1}^{k} \bigsqcup_{j=1}^{k_i} h_{D_{ij}},$$

$$h_A \setminus \left(\bigsqcup_{i=1}^{s+1} h_{B_i} \right) = \bigsqcup_{i=1}^{\ell} \bigsqcup_{j=1}^{\ell_i} h_{E_{ij}}.$$

<u>Лемма 4</u>. Пусть $h_A, h_B \in I^X$. Тогда $h_A \cup h_B = (h_A \cap h_B) \sqcup (h_B \setminus h_A)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $x \in X$. Если $h_A(x) \geq h_B(x)$, то $(h_A \cup h_B)(x) = h_A(x) = \max\{h_A(x), 0\} =$

$= \max\{(h_A \cap h_B)(x), (h_B \setminus h_A)(x)\} = ((h_A \cap h_B) \sqcup (h_B \setminus h_A))(x).$

Если же $h_A(x) < h_B(x)$, то $(h_A \cup h_B)(x) =$ $= h_B(x) = \max\{0, h_B(x)\} = \max\{(h_A \cap h_B)(x), (h_B \setminus h_A)(x)\} =$

$= ((h_A \cap h_B) \sqcup (h_B \setminus h_A))(x).$

<u>Лемма 5</u>. Пусть $h_A, h_B \in I^X$. Пусть $h_A = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}$, $h_B = \bigsqcup_{j=1}^{m} h_{B_j}$, где $h_{A_i} \in I^X$ $(i = 1, \dots, n)$ и $h_{B_j} \in I^X$ $(j = 1, \dots, m)$. Пусть

$$h_{C_{ij}} = h_{A_i} \cap h_{B_j} \quad (i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m).$$

Тогда $h_A \cap h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} h_{C_{ij}}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $x \in X$. Выберем $k \in \{1, \dots, n\}$ и $\ell \in \{1, \dots, m\}$ таким образом, что $h_{A_k}(x) = \max\{h_{A_i}(x) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ и $h_{B_\ell}(x) = \max\{h_{B_j}(x) \mid j \in \{1, \dots, m\}\}$. Тогда $h_{A_i}(x) = 0$ для любого $i \in \{1, \dots, n\} : i \neq k$; $h_{B_j}(x) = 0$ для любого $j \in \{1, \dots, m\} : j \neq \ell$. Следовательно,

$h_{C_{ij}}$ $(i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m)$ не пересекаются. Кроме того, $h_{A_k}(x)=h_A(x)$ и $h_{B_\ell}(x)=h_B(x)$. Следовательно, $(h_A\cap h_B)(x)=\min\{h_A(x),h_B(x)\}=$

$$=\min\{h_{A_k}(x),\ h_{B_\ell}(x)\}=(h_{A_k}\cap h_{B_\ell})(x)=h_{C_{k\ell}}(x)=$$

$$=\max\{h_{C_{ij}}(x)\mid i\in\{1,\dots,n\}\ \&\ j\in\{1,\dots m\}\}=$$

$$=\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{j=1}^{m}h_{C_{ij}}\Big)(x).$$

<u>Лемма 6</u>. Пусть $h_A\in I^X$. Пусть $h_A=\bigsqcup_{i=1}^{n}h_{A_i}$, $h_A=\bigsqcup_{j=1}^{m}h_{B_j}$, где $h_{A_i}\in I^X$ $(i=1,\dots,n)$ и $h_{B_j}\in I^X$ $(j=1,\dots,m)$. Пусть $h_{C_{ij}}=h_{A_i}\cap h_{B_j}$ $(i=1,\dots,n);(j=1,\dots,n)$.

Тогда $h_{A_i}=\bigsqcup_{j=1}^{m}h_{C_{ij}}$ $(i=1,\dots,n)$;

$$h_{B_j}=\bigsqcup_{i=1}^{n}h_{C_{ij}}\qquad (j=1,\dots,m).$$

<u>Доказательство</u>. Согласно лемме 5: $\bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{j=1}^{m}h_{C_{ij}}=$ $=h_A\cap h_A=h_A$. Пусть $k\in\{1,\dots,n\},\ell\in\{1,\dots,m\}$. Имеем: $h_{A_k}=h_{A_k}\cap h_A=h_{A_k}\cap\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{j=1}^{m}h_{C_{ij}}\Big)=$ $=h_{A_k}\cap\Big(\bigsqcup_{j=1}^{m}h_{C_{kj}}\Big)$ (ибо h_{A_k} не пересекается с $h_{C_{ij}}$ для $i\in\{1,\dots,n\}$ и $j\in\{1,\dots,m\}$, если $i\neq k$) и $h_{B_\ell}=h_{B_\ell}\cap h_A=h_{B_\ell}\cap\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n}\bigsqcup_{j=1}^{m}h_{C_{ij}}\Big)=$ $=h_{B_\ell}\cap\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n}h_{C_{i\ell}}\Big)$ (ибо h_{B_ℓ} не пересекается с $h_{C_{ij}}$ для $j\in\{1,\dots,m\}$ и $i\in\{1,\dots,n\}$, если $j\neq\ell$). Следовательно, $h_{A_k}(x)\le\Big(\bigsqcup_{j=1}^{m}h_{C_{kj}}\Big)(x)$ и

$$h_{B_\ell}(x)\le\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n}h_{C_{i\ell}}\Big)(x)$$

для любого $x\in X$. Так как для любого $x\in X$:

$$\Big(\bigsqcup_{j=1}^{m}h_{C_{kj}}\Big)(x)\le h_{A_k}(x)\quad\text{и}$$

$$\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n}h_{C_{i\ell}}\Big)(x)\le h_{B_\ell}(x),$$

то заключаем требуемое.

<u>Следствие</u>. Предположим, что $\mathcal{P} \subset I^X$ - полукольцо и $m: \mathcal{P} \to R^+$ - мера. Пусть $h_A \in I^X$. Пусть

$h_A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} h_{A_i}$, $h_A = \bigsqcup\limits_{j=1}^{m} h_{B_j}$, где

$h_{A_i} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,n)$ и $h_{B_j} \in \mathcal{P}$ $(j=1,\dots,m)$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} m(h_{A_i}) = \sum\limits_{j=1}^{m} m(h_{B_j})$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $h_{C_{ij}} := h_{A_i} \cap h_{B_j}$ $(i=1,\dots,n;$ $j=1,\dots,m)$. Согласно лемме 6:

$$h_{A_i} = \bigsqcup_{j=1}^{m} h_{C_{ij}} \quad (i=1,\dots,n);$$

$$h_{B_j} = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_{C_{ij}} \quad (j=1,\dots,m).$$

Имеем: $h_{C_{ij}} \in \mathcal{P}$ $(i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m)$.

Следовательно,

$$m(h_{A_i}) = \sum_{j=1}^{m} m(h_{C_{ij}}) \quad (i=1,\dots,n);$$

$$m(h_{B_j}) = \sum_{i=1}^{n} m(h_{C_{ij}}) \quad (j=1,\dots,m).$$

Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^{n} m(h_{A_i}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} m(h_{C_{ij}}) =$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} m(h_{C_{ij}}) = \sum_{j=1}^{m} m(h_{B_j}).$$

<u>Теорема I</u>. Предположим, что $\mathcal{P} \subset I^X$ - полукольцо. Пусть $\mathcal{R}(\mathcal{P})$ - минимальное кольцо, порожденное $\mathcal{P}$.

Тогда

$$\mathcal{R}(\mathcal{P}) = \{h_A \in I^X \mid \exists h_{A_i} \in \mathcal{P}\,(i=1,\dots,n):\ h_A = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}\},$$

т.е. минимальное кольцс, порожденное полукольцом нечетких множеств, является системой объединений нечетких множеств из полукольца, образующих конечные дизъюнктные системы.

Кроме того, минимальное кольцо, порожденное ультраполукольцом нечетких множеств, является ультракольцом.

<u>Доказательство</u>. Систему $\{ h_A \in I^X \mid$

$\exists\, h_{A_i} \in \mathcal{P}\ \ (i = 1, \ldots, n)\ :\ \ h_A = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i} \}$
нечетких множеств обозначим через Q. Установим, что $Q = \mathcal{R}(\mathcal{P})$.

Имеем: $Q \subset \mathcal{R}(\mathcal{P})^c$. Если Q является кольцом, то в силу того, что $Q \supset \mathcal{P}$, верно и обратное: $Q \supset \mathcal{R}(\mathcal{P})$. Таким образом, достаточно доказать, что Q является кольцом.

Пусть $h_A, h_B \in Q$. Имеем: $h_A = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}$ и $h_B = \bigsqcup_{j=1}^{m} h_{B_j}$, где $h_{A_i}, h_{B_j} \in \mathcal{P}$ $(i=1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$. Таким образом:

$$h_A \wedge h_B = \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}\Big) \wedge \Big(\bigsqcup_{j=1}^{m} h_{B_j}\Big),$$

$$h_A \vee h_B = \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}\Big) \vee \Big(\bigsqcup_{j=1}^{m} h_{B_j}\Big) \quad \text{и}$$

$$h_A \setminus h_B = \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}\Big) \setminus \Big(\bigsqcup_{j=1}^{m} h_{B_j}\Big).$$

Согласно лемме I:

$$h_A \wedge h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \Big(h_{A_i} \wedge \bigsqcup_{j=1}^{m} h_{B_j}\Big),$$

$$h_A \vee h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \Big(h_{A_i} \vee \bigsqcup_{j=1}^{m} h_{B_j}\Big) \quad \text{и}$$

$$h_A \setminus h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \Big(h_{A_i} \setminus \bigsqcup_{j=1}^{m} h_{B_j}\Big).$$

В силу леммы 3, найдутся такие $h_{C_{ij}} \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m_i)$ и такие $h_{D_{ij}} \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k_i)$, что

$$h_A \wedge h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m_i} h_{C_{ij}} \quad \text{и}$$

$$h_A \vee h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{k_i} h_{D_{ij}}.$$

Заключаем, что $h_A \wedge h_B,\ h_A \vee h_B \in Q$.

Отметим, что если $\mathcal{P}$ - ультраполукольцо, то по лемме 3 найдется такие $h_{E_{ij}} \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, l_i)$, что

$h_A \setminus h_B = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{l_i} h_{E_{ij}}$ и, следовательно, $h_A \setminus h_B \in Q$.

В силу леммы 4: $h_A \cup h_B = (h_A \cap h_B) \sqcup (h_B \setminus h_A)$.
Следовательно, $h_A \cup h_B \in Q$. Пользуясь леммой 5, заключаем, что $h_A \cap h_B \in Q$. Таким образом, Q, действительно, является кольцом и, если $\mathcal{P}$ - ультраполукольцо, то Q - ультракольцо.

<u>Теорема 2</u>. Предположим, что $\mathcal{P} \subset I^X$ - полукольцо и $m : \mathcal{P} \mapsto R^+$ - мера.

Тогда существует единственное продолжение $\bar{m}$ меры m на минимальное кольцо $\mathcal{R}(\mathcal{P})$, порожденное полукольцом $\mathcal{P}$.

<u>Доказательство</u>. Существование продолжения $\bar{m}$ меры m докажем стандартной конструкцией ниже.

Пусть $h_A \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$. В силу теоремы I найдется такие $h_{A_i} \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \dots, n)$, что $h_A = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}$.
По определению положим: $\bar{m}(h_A) = \sum_{i=1}^{n} m(h_{A_i})$.

Согласно следствию леммы 6 наше определение отображения $\bar{m} : \mathcal{R}(\mathcal{P}) \to R^+$ корректно. То, что $\bar{m}$ аддитивно, проверяется непосредственно. По построению сужение $\bar{m}$ на $\mathcal{P}$ - мера m.

Установим обычным способом единственность продолжения $\bar{m}$.

Пусть m' - некоторое другое продолжение меры m. Пусть $h_A \in \mathcal{R}(\mathcal{P})$. Найдется также $h_{A_i} \in \mathcal{P}$ $(i = 1, \dots, n)$, что $h_A = \bigsqcup_{i=1}^{n} h_{A_i}$. Имеем:

$m'(h_A) = \sum_{i=1}^{n} m'(h_{A_i})$. Так как m' - продолжение меры m, то $m'(h_{A_i}) = m(h_{A_i})$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$.
Следовательно, $m'(h_A) = \sum_{i=1}^{n} m(h_{A_i})$, т.е.

$m'(h_A) = m(h_A)$.

Поступила 30 июня 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 515.12

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ С КОМПАКТНЫМ НОСИТЕЛЕМ В ВОПРОСЕ О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ

М.А.Гольдман, С.В.Асмусс

Латвийский государственный университет им. П. Стучки

Понятие нормальной разрешимости уравнений было введено Ф.Хаусдорфом [5] . Оно относилось к уравнению с непрерывным линейным оператором, действующим из одного банахова пространства в другое. В статье [I] хаусдорфово понятие нормальной разрешимости было распространено на произвольные уравнения. Напомним определение.

Пусть S , T и Φ - множества, $f: S \to T$, $X \subset \{x : S \to \Phi\}$, $Y \subset \{y : T \to \Phi\}$. В предположении, что $\{y : y \in Y \,\&\, y \circ f \in X\} \neq \emptyset$, определим отображение A_f , полагая $A_f(y) = y \circ f$ для каждого $y \in \mathcal{D}(A_f) \stackrel{def}{=} \{y : y \in Y \,\&\, y \circ f \in X\}$.
Уравнение $f(s) = t$ называется нормально разрешимым, если $\mathcal{R}(f) = T_f$, где $T_f \stackrel{def}{=} \{t : t \in T \,\&\, \forall y_1; y_2 \in \mathcal{D}(A_f)\, (A_f(y_1) = A_f(y_2) \Rightarrow y_1(t) = y_2(t))\}$.
Уравнение $A_f(y) = x$, называется нормально разрешимым, если $\mathcal{R}(A_f) = X_f$, где $X_f \stackrel{def}{=} \{x : x \in X \,\&\, \forall s_1, s_2 \in S\, (f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow x(s_1) = x(s_2))\}$.

Легко видеть, что понятие нормальной разрешимости зависит от выбора множества Φ и классов отображений X и Y . В работе [I] изучена нормальная разрешимость уравнений $f(s) = t$ и $A_f(y) = x$ в случае, когда S и T - топологические пространства, Φ - поле вещественных или комплексных чисел, а X и Y - семейства всех непрерывных функций, определенных на S и T соответственно, со значениями в Φ . В настоящей статье в качестве X и Y рассматриваются совокупности всех непрерывных функций с компактным носителем со значениями в $\Phi = R$.

Условимся относительно некоторых обозначений. Пусть $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{T}_{lc}$, $\mathcal{T}_r$, $\mathcal{T}_{Cr}$, $\mathcal{T}_{norm}$ - классы соответственно всех хаусдорфовых, компактных, локально-компактных, регулярных, вполне регулярных, нормальных топологических пространств. Положим $\mathcal{T}_{2,lc} = \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_{lc}$, $\mathcal{T}_{r,lc} = \mathcal{T}_r \cap \mathcal{T}_{lc}$. Отметим известные включения $\mathcal{T}_{2,lc} \subset \mathcal{T}_{r,lc} \subset \mathcal{T}_{cr}$ (см. [2], с.197) и $\mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_c \subset \mathcal{T}_{norm}$ (см. [2], с.190).

Пусть (S,σ), (T,τ) – топологические пространства. Положим

$RO(S,T) = \{f : S \to T \mid \mathcal{U} \in \sigma \Rightarrow \exists \mathcal{V} \in \tau : f(\mathcal{U}) = \mathcal{V} \cap \mathcal{R}(f)\}$,

$QO(S,T) = \{f : S \to T \mid \mathcal{U} \in \sigma \ \& \ f^{-1}(f(\mathcal{U})) = \mathcal{U} \Rightarrow f(\mathcal{U}) \in \tau\}$,

$RQO(S,T) = \{f : S \to T \mid \mathcal{U} \in \sigma \ \& \ f^{-1}(f(\mathcal{U})) = \mathcal{U} \Rightarrow \exists \mathcal{V} \in \tau : f(\mathcal{U}) = \mathcal{V} \cap \mathcal{R}(f)\}$,

$C(S,T) = \{f : S \to T \mid \mathcal{V} \in \tau \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{V}) \in \sigma\}$,

$P(S,T) = \{f : S \to T \mid$ B компактно в $T \Rightarrow f^{-1}(B)$ компактен в $S\} \cap C(S,T)$,

$K(S,\mathbb{R}) = \{f : S \to T \mid \operatorname{supp} f$ – компактное множество в $S\} \cap$
$\cap\, C(S,\mathbb{R})$, где $\operatorname{supp} f = \overline{\{s \in S \mid f(s) \neq 0\}}$.

Теорема I. Если $T \in \mathcal{T}_{r,lc}$, то $\mathcal{R}(f) = T_f \Leftrightarrow \mathcal{R}(f) = \overline{\mathcal{R}(f)}$

Доказательство. Импликация $\mathcal{R}(f) = T_f \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \overline{\mathcal{R}(f)}$ следует из равенства $T_f = \cap\{y^{-1}(0) : y \in Y \ \& \ y \circ f = \theta_X\}$ (см. [I]) в силу непрерывности $y \in Y$. Установим обратную импликацию $\mathcal{R}(f) = \overline{\mathcal{R}(f)} \Rightarrow \mathcal{R}(f) = T_f$. Включение $\mathcal{R}(f) \subset T_f$ очевидно. Покажем, что $T_f \subset \mathcal{R}(f)$. Пусть $t_0 \notin \mathcal{R}(f)$. Так как $T \subset \mathcal{T}_{lc}$, то найдется открытая окрестность $\mathcal{V}$ точки t_0 такая, что $\overline{\mathcal{V}}$ компактно. Рассмотрим точку t_0 и её открытую окрестность $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap (T \setminus \mathcal{R}(f))$. Поскольку $T \in \mathcal{T}_{cr}$, то $\exists y_0 \in C(T,[0,1]) : (y_0(t_0) = 1) \ \&$ $\& \ (\forall t \notin \mathcal{U} \ \ y_0(t) = 0)$. Ясно, что $y_0 \in K(T,\mathbb{R})$ (так как $\operatorname{supp} y_0 \subset \overline{\mathcal{U}} \subset \overline{\mathcal{V}}$). Принимая во внимание, что $\forall t \in \mathcal{R}(f)$ $y_0(t) = 0$, получаем $y_0 \circ f = \theta_X$. В то же время, $t_0 \notin y_0^{-1}(0)$. Значит, $t_0 \notin \cap\{y^{-1}(0) : y \in Y \ \& \ y \circ f = \theta_X\}$.

Следствие I. Если $S \in \mathcal{T}_c$, $T \in \mathcal{T}_{2,lc}$ и $f \in C(S,T)$, то уравнение $f(s) = t$ нормально разрешимо.

Поставим вопрос о нормальной разрешимости при этих же условиях уравнения $A_f(y) = x$. Ответ на него вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $T \in \mathcal{T}_2$, $f \in C(S,T) \cap RQO(S,T)$. Если $\forall y_0 \in K(\mathcal{R}(f),\mathbb{R}) \ \exists y \in K(T,\mathbb{R}) : y|_{\mathcal{R}(f)} = y_0$, то уравнение $A_f(y) = x$ нормально разрешимо.

<u>Доказательство</u>. Пусть $x \in X_f$. Установим, что $\exists y \in Y : y \circ f = x$. Этим будет доказано включение $X_f \subset \mathcal{R}(A_f)$, а тем самым и утверждение теоремы, поскольку обратное включение очевидно.

Определим $y_0 : \mathcal{R}(f) \to \mathbb{R}$ следующим образом: для каждого $t \in \mathcal{R}(f)$ положим $y_0(t) = x(s)$, где $s \in f^{-1}(t)$ ($y_0(t)$ определено однозначно, так как $x \in X_f$). Так как $x = y_0 \circ f$, $x \in C(S, \mathbb{R})$ и $f \in RQO(S, T)$, то $y_0 \in C(\mathcal{R}(f), \mathbb{R})$. Поскольку $\operatorname{supp} x$ компактен, $\operatorname{supp} y_0 \subset f(\operatorname{supp} x)$, $f \in C(S, T)$ и $T \in \mathcal{T}_2$ множество $\operatorname{supp} y_0$ компактно, а следовательно, $y_0 \in K(\mathcal{R}(f), \mathbb{R})$. По условию теоремы $\exists y \in K(T, \mathbb{R}) : y|_{\mathcal{R}(f)} = y_0$. Остается заметить, что $y \circ f = x$.

<u>Следствие 2</u>. Если $T \in \mathcal{T}_2$, $f \in C(S, T) \cap GO(S, T)$ и $\mathcal{R}(f) = T$, то уравнение $A_f(y) = x$ нормально разрешимо.

<u>Следствие 3</u>. Если $S \in \mathcal{T}_c$, $T \in \mathcal{T}_{2, lc}$ и $f \in C(S, T)$, то уравнение $A_f(y) = x$ нормально разрешимо.

<u>Доказательство</u>. Проверим, что выполнены условия теоремы 2.

I) Так как $S \in \mathcal{T}_c$, $f \in C(S, T)$, $T \in \mathcal{T}_2$, то f - замкнутое отображение и, тем более, $f \in RQO(S, T)$.

2) Пусть $y_0 \in K(\mathcal{R}(f), \mathbb{R})$. С целью построить функцию $y_1 \in C(T, \mathbb{R})$ такую, что $y_1|_{\mathcal{R}(f)} = y_0$, введем в рассмотрение одноточечное компактное расширение T^* пространства T. По теореме Александрова (см., например, [2], с.20I) $T \in \mathcal{T}_{2, lc} \Rightarrow T^* \in \mathcal{T}_2$. Значит, $T^* \in \mathcal{T}_{norm}$. Так как $\mathcal{R}(f)$ замкнуто в T^*, то по теореме Титце (см., например, [3], с.I34) $\exists y_2 \in C(T^*, \mathbb{R}) : y_2|_{\mathcal{R}(f)} = y_0$. Полагая $y_1 = y_2|_T$, получаем непрерывное продолжение на T функции y_0, с помощью которого построим непрерывное продолжение с компактным носителем. В силу локальной компактности T у компактного множества $\mathcal{R}(f)$ найдется такая открытая окрестность $\mathcal{U}$, что $\bar{\mathcal{U}}$ компактно. Так как $T \in \mathcal{T}_{2, lc}$, то $\exists \varphi \in C(T, [0,1]) : (\varphi|_{\mathcal{R}(f)} = 1) \& (\varphi|_{T \setminus \mathcal{U}} = 0)$ (см. [4], с.48, теорема 2). Положим $y(t) = \varphi(t) \cdot y_1(t)$,

$t \in T$. Ясно, что $y \in K(T, \mathbb{R})_5$ и $y|_{\mathcal{R}(f)} = y_0$.

В следующих далее теоремах 3–5 будем считать, что $T \in \mathcal{T}_{2,\ell c}$ и $f \in P(S, T)$. Формулировке и доказательству этих теорем предпошлем несколько вспомогательных утверждений (предложения I–3), доказательство которых опускается.

Пусть $f: S \to T$, $\hat{f}$ – каноническое отображение на фактор-пространство $\hat{S} = S/_{\rho_f}$, где ρ_f – отношение эквивалентности в S, порожденное отображением f, и $\bar{f}$ – инъекция, ассоциированная с f.

<u>Предложение I</u>. Если $f \in P(S, T)$, то $\bar{f} \in P(\hat{S}, T)$ и $\hat{f} \in P(S, \hat{S})$.

<u>Предложение 2</u>. Если $f \in C(S, T) \cap RQO(S, T)$, $\mathcal{R}(f) = \overline{\mathcal{R}(f)}$, то $\bar{f} \in P(\hat{S}, T)$.

<u>Предложение 3</u>. Если $T \in \mathcal{T}_{2,\ell c}$ и $f \in P(S, T)$, то $\hat{S} \in \mathcal{T}_{2,\ell c}$.

<u>Теорема 3</u>. $\mathcal{R}(A_f) = X_f \Rightarrow f \in RQO(S, T)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть верна предпосылка. Покажем, что в этом случае $\bar{f} \in RO(\hat{S}, T)$.

Предположим обратное. Тогда в $\hat{S}$ найдется открытое множество $\mathcal{U}$ такое, что $\bar{f}(\mathcal{U})$ не открыто в $\mathcal{R}(f)$. Рассмотрим $\mathcal{U}' = \hat{S} \setminus \mathcal{U}$. Так как $\bar{f}$ – инъекция, то $\bar{f}(\mathcal{U}') = \mathcal{R}(f) \setminus \bar{f}(\mathcal{U})$. Зафиксируем некоторый элемент $t_0 \in (\overline{\bar{f}(\mathcal{U}')} \setminus \bar{f}(\mathcal{U}')) \cap \mathcal{R}(f)$. Пусть $t_0 = \bar{f}(u_0)$, $u_0 \in \mathcal{U}$. Возьмем открытую окрестность $\mathcal{V}$ точки u_0 так, чтобы выполнялось следующее: $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ и множество $\overline{\mathcal{V}}$ компактно (это возможно, так как по предложению 3 $\hat{S} \in \mathcal{T}_{2,\ell c}$). Ввиду полной регулярности пространства $\hat{S}$ найдется функция z в классе $C(\hat{S}, [0,1])$ такая, что $z(u_0) = 1$ и $\forall u \notin \mathcal{V}$ $z(u) = 0$. Поскольку $\operatorname{supp} z \subset \overline{\mathcal{V}}$, имеем $z \in K(\hat{S}, \mathbb{R})$. Положим $x = z \circ \hat{f}$. Ясно, что $x \in C(S, \mathbb{R})$. Согласно предложению I $\hat{f} \in P(S, \hat{S})$, поэтому $x \in K(S, \mathbb{R})$ (учитываем включение $\operatorname{supp} x \subset \hat{f}^{-1}(\operatorname{supp} z)$). Легко видеть, что $x \in X_f$. В силу предпосылки отсюда следует, что $x \in \mathcal{R}(A_f)$, а значит, $\exists y \in Y: y \circ f = x$. Из равенства $z \circ \hat{f} = y \circ f$ вытекает $z = y \circ \bar{f}$.

Этим установлено существование функции $y \in Y$ такой, что $y(t_0)=1$ и $\forall t\in \bar{f}(\mathcal{U}')$ $y(t)=0$. Так как при этом $t_0 \in \overline{\bar{f}(\mathcal{U}')}$, то получено противоречие, которое доказывает, что $\bar{f}_\circ \in RO(\hat{S},T)$, а следовательно, $f\in RQO(S,T)$.

Замечание. В ходе доказательства теоремы 3 установлено, что $\mathcal{R}(A_{\bar{f}}) = K(\hat{S},\mathbb{R})$ в случае, когда $f\in P(S,T)$ и $\mathcal{R}(A_f)=X_f$. Этот факт будет использован в дальнейшем.

Следствие 4. Если $\mathcal{R}(f)=T$, то $\mathcal{R}(A_f)=X_f \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f\in QO(S,T)$.

Доказательство вытекает из теоремы 3 и следствия 2.

Теорема 4. Если T - пространство Фреше-Урысона, то

$$\mathcal{R}(A_f)=X_f \Rightarrow \mathcal{R}(f)=\overline{\mathcal{R}(f)}.$$

Доказательство. Предполагая, что $\mathcal{R}(A_f)=X_f$, а $\mathcal{R}(f)\neq\overline{\mathcal{R}(f)}$, придем к противоречию. Зафиксируем некоторую точку $t_0\in\overline{\mathcal{R}(f)}\setminus\mathcal{R}(f)$ и возьмем ее открытую окрестность $\mathcal{V}$, замыкание которой компактно. Так как T - пространство Фреше-Урысона, то в $\mathcal{R}(f)\cap\mathcal{V}$ найдется последовательность $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к t_0. Она определяэт множества $F_0=\{t_{2k} : k\in\mathbb{N}\}\cup\{t_0\}$ и $F_1=\{t_{2k-1}: k\in\mathbb{N}\}\cup\{t_0\}$. Обозначим $E=\bar{f}^{-1}(\mathcal{V})$, $E_0=\bar{f}^{-1}(F_0)$, $E_1=\bar{f}^{-1}(F_1)$. Покажем, что E_0 и E_1 - непересекающиеся компактные подмножества открытого множества E. Точки последовательности $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно считать различными, а поэтому $F_0\cap F_1=\{t_0\}$, откуда $E_0\cap E_1=\varnothing$. Хаусдорфовость пространства T обеспечивает замкнутость множеств F_0 и F_1. Так как при этом $F_0, F_1\subset\overline{\mathcal{V}}$, то F_0 и F_1 компактны, что влечет компактность E_0 и E_1 (следует принять во внимание, что по предложению I $\bar{f}\in P(\hat{S},S)$). Ясно, что E открыто и $E_0\cup E_1\subset E$.

Согласно предложению 3, $\hat{S}\in\mathcal{T}_{2,k}$. Следовательно, в классе $C(\hat{S},[0,1])$ найдется функция z_0 такая, что $z_0|_{E_0}\equiv 0$ и $z_0|_{E_1}\equiv 1$, и функция z_1 такая, что $z_1|_{\hat{S}\setminus E}\equiv 0$ и $z_1|_{E_1}\equiv 0$ (см. [4], с.48, теорема 2). Положим $z(u)=z_0(u)\cdot z_1(u)$, $u\in\hat{S}$. Учитывая включение

$\operatorname{supp} z \subset \bar{f}^{-1}(\bar{\tau})$, легко убедится, что $z \in K(\hat{S}, R)$. Значит, $\exists y \in Y : z = y \circ f$ (см. замечание к теореме 3). Заметим, что $y(t_{2k}) = 0$ и $y(t_{2k-1}) = 1$, $k \in N$. Так как существует $\lim_{n \to \infty} t_n$ и функция y непрерывна, то это ведет к противоречию, которое доказывает теорему.

Следствие 5. Если T - пространство Фреше-Урысона, то нормальная разрешимость уравнения $A_f(y) = x$ влечет нормальную разрешимость уравнения $f(s) = t$.

Это утверждение вытекает непосредственно из теорем I и 4.

Теорема 5. $\mathcal{R}(A_f) = X_f \Leftrightarrow \mathcal{R}(A_f) = \overline{\mathcal{R}(A_f)}^{\,f}$, где f - топология поточечной сходимости в X (то есть топология, индуцированная в X тихоновской топологией в R^S).

Доказательство. Импликация $\mathcal{R}(A_f) = X_f \Rightarrow \mathcal{R}(A_f) = \overline{\mathcal{R}(A_f)}^{\,f}$ равносильна равенству $X_f = \overline{X_f}^{\,f}$, которое имеет место при любых S, T и f (см. лемму I в [I]). Остановимся на доказательстве обратной импликации. Предполагая, что верна предпосылка $\mathcal{R}(A_f) = \overline{\mathcal{R}(A_f)}^{\,f}$, установим нормальную разрешимость уравнения $A_f(y) = x$.

Пусть $x_0 \in X_f$. Возьмем произвольную окрестность элемента x_0 вида $N(x_0; s_1, s_2, \ldots, s_n; \varepsilon) = \{x \in X : |x(s_k) - x_0(s_k)| < \varepsilon, k = 1, 2, \ldots, n\}$ где $\varepsilon > 0$, $n \in N$, $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S$ (будем считать точки $s_1, s_2, \ldots, s_n$ различными) и покажем, что $N(x_0; s_1, s_2, \ldots, s_n; \varepsilon) \cap \cap \mathcal{R}(A_f) \neq \emptyset$. Этим будет установлено включение $X_f \subset \overline{\mathcal{R}(A_f)}^{\,f}$, а тем самым и утверждение теоремы, поскольку включение $\mathcal{R}(A_f) \subset X_f$ очевидно.

Положим $a_k = x_0(s_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть m - число различных среди точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Обозначим их через $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Введем в рассмотрение множества $S_i = \{s_k : a_k = b_i, k = 1, 2, \ldots, n\}$ и $T_i = f(S_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Отметим, что $T_i \cap T_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Построим функцию $y : T \to R$ так, чтобы $y \in Y$ и $y|_{T_i} = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Пусть $\bigcup_{i=1}^{m} T_i = \{t_1, t_2, \ldots, t_p\}$. Возьмем непересекающиеся открытые относительно компактные окрестности V_j точек t_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ (это возможно, так как $T \in \mathfrak{T}_{2,lc}$). Ввиду полной регулярности пространства T в классе $C(T, [0,1])$

найдутся функции y_j такие, что $y_j(t_j)=1$ и $\forall t \notin V_j$ $y_j(t)=0$, $j=1,2,\dots,p$. Положим $y(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p}{}' b_i\cdot y_j(t)$ (в этой записи символ $\sum_{j=1}^{p}{}'$ означает, что суммирование ведется только по тем j, для которых $t_j\in T_i$), $t\in T$. Учитывая включение $\operatorname{supp} y\subset\bigcup_{j=1}^{p}\overline{V_j}$, получим $y\in Y$. Нетрудно заметить, что $y|_{T_i}=b_i$, $i=1,2,\dots,m$. При помощи построенной функции y зададим $x:S\to\mathbb{R}$, полагая $x=y\circ f$. Принимая во внимание включение $\operatorname{supp}\dot x\subset f^{-1}(\operatorname{supp} y)$, легко вывести, что $x\in X$ (для этого следует воспользоваться условием $f\in P(S,T)$). Значит, $x\in\mathcal{R}(A_f)$. При этом $x(s_k)=a_k$, $k=1,2,\dots,n$. Следовательно, $x\in\mathcal{N}(x_0; s_1,s_2,\dots,s_n;\varepsilon)\cap\mathcal{R}(A_f)$.

Теорема 6. Если $T\in T_{2,lc}$ и $f\in C(S,T)\cap RQO(S,T)$, $\mathcal{R}(f)=\overline{\mathcal{R}(f)}$, то $\mathcal{R}(A_f)=X_f \Leftrightarrow \mathcal{R}(A_f)=\overline{\mathcal{R}(A_f)}^{\mathfrak{I}}$.

Доказательство. Установим импликацию $\mathcal{R}(A_f)=\overline{\mathcal{R}(A_f)}^{\mathfrak{I}}\Rightarrow \mathcal{R}(A_f)=X_f$ (по поводу обратной импликации см. в доказательстве теоремы 5). Пусть верна предпосылка. Покажем, что в этом случае $\mathcal{R}(A_{\bar f})=\overline{\mathcal{R}(A_{\bar f})}^{\mathfrak{I}}$ (здесь $\mathfrak{I}$ – топология поточечной сходимости в $K(\hat S,\mathbb{R})$). Тогда, принимая во внимание, что $\bar f\in P(\hat S,T)$ (см. предложение 2), требуемое равенство $\mathcal{R}(A_f)=X_f$ получим как следствие теоремы 5.

Доказательство импликации $\mathcal{R}(A_f)=\overline{\mathcal{R}(A_f)}^{\mathfrak{I}}\Rightarrow\mathcal{R}(A_{\bar f})=\overline{\mathcal{R}(A_{\bar f})}^{\mathfrak{I}}$ с использованием следствия 2 и равенства $A_f=A_{\hat f}\circ A_{\bar f}$, которое нуждается в проверке для рассматриваемого случая, по форме ничем не отличается от доказательства пункта а) леммы 8 в [1] и поэтому опускается. Остановимся на проверке равенства $A_f=A_{\hat f}\circ A_{\bar f}$.

Покажем, что $\mathcal{D}(A_f)=\mathcal{D}(A_{\hat f}\circ A_{\bar f})$ и $\forall y\in\mathcal{D}(A_f)$ $A_f(y)=A_{\hat f}(A_{\bar f}(y))$. Пусть $y\in\mathcal{D}(A_f)$. Это означает, что $y\in Y$ и $x\in X$, где $x=y\circ f$. Положим $z=y\circ\bar f$. Функция z непрерывна как композиция двух непрерывных функций. Поскольку $\operatorname{supp} x$ компактен, $\operatorname{supp} z\subset\hat f(\operatorname{supp} x)$, отображение $\hat f$ непрерывно и $\hat S\in\mathcal{T}_2$ множество $\operatorname{supp} z$ компактно. Следовательно, $z\in K(\hat S,\mathbb{R})$. А так как при этом

$z \circ \hat{\xi} \in X$, то $z \in \mathcal{D}(A_{\hat{\xi}})$. Учитывая $z = y \circ \xi$, отсюда получаем $y \in \mathcal{D}(A_{\hat{\xi}} \circ A_{\bar{\xi}})$. Доказано включение $\mathcal{D}(A_{\xi}) \subset \mathcal{D}(A_{\hat{\xi}} \circ A_{\bar{\xi}})$ и вместе с тем установлено, что $A_{\xi}(y) = A_{\hat{\xi}}(A_{\bar{\xi}}(y))$ для каждого y из $\mathcal{D}(A_{\xi})$. Осталось убедится, что имеет место включение $\mathcal{D}(A_{\hat{\xi}} \circ A_{\bar{\xi}}) \subset \mathcal{D}(A_{\xi})$. Пусть $y \in \mathcal{D}(A_{\hat{\xi}} \circ A_{\bar{\xi}})$. Тогда $y \in Y$, $y \circ \bar{\xi} \in K(\hat{S}, \mathbb{R})$ и $(y \circ \bar{\xi}) \circ \hat{\xi} \in X$. Ввиду равенства $(y \circ \bar{\xi}) \circ \hat{\xi} = y \circ \xi$ последнее обеспечивает принадлежность y области определения отображения A_{ξ}.

В заключение отметим, что все полученные здесь результаты без труда переносятся на случай, когда $\Phi = \mathbb{R}^n$.

Список литературы

1. Гольдман М.А. О нормальной разрешимости уравнений // Латвийский математический ежегодник.- Рига, 1973.- Т.13.- С.52-63.
2. Келли Дж.Л. Общая топология.-М., 1968.
3. Куратовский К. Топология.-М., 1966.-Т.1.
4. Куратовский К. Топология.-М., 1969.- Т.2.
5. Хаусдорф Ф. Теория множеств.-М., 1937.

Поступила 20 мая 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 517.91; 517.98

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ $\frac{dx}{dt}=Ax$ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.С.Грицанс
Даугавпилсский педагогический институт
им.Я.Калнберзина

В статье рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt}=Ax$ в банаховом пространстве, если A - плоский или k-плоский оператор. Случай конечномерного пространства, когда A - линейный оператор, хорошо изучен (см., например, [1], [2], [3]). Если A - непрерывный оператор в банаховом пространстве, то решение уравнения $\frac{dx}{dt}=Ax$ выражается через ряд экспоненты (см., например, [3], [4]), практическое нахождение которого может оказаться очень сложным. Поэтому возникает вопрос, когда решение уравнения $\frac{dx}{dt}=Ax$ можно получить как результат конечного числа операций над оператором A. Оказывается, что в случае плоского и k-плоского операторов решение уравнения получается с помощью некоторого многочлена от оператора A т.е. с помощью конечного числа операций над A. В статье также показывается, что функцию непрерывного k-плоского оператора, определенную как сумму степенного ряда, можно выразить в виде некоторого многочлена от оператора A.

Прежде чем непосредственно перейти к дифференциальному уравнению, кратко напомним понятия плоского и k-плоского операторов, которые введены в работе [5].

Линейный оператор A, действующий в векторном пространстве X, называется плоским, если для каждого $x\in X$ последовательность векторов

$$x, Ax, \dots, A^k x \tag{1}$$

линейно зависима при некотором k (k, вообще говоря, зависит от x).

Линейный оператор A называется k-плоским, если существует k такое, что для каждого $x\in X$ система (I) линейно зависима и существует $y\in X^0$ такой, что последовательность $y, Ay, \dots, A^{k-1}y$ линейно независима. В этом случае существует единственный, с точностью до числового множителя, многочлен $\varphi(\lambda)$ степени k такой, что

$$\varphi(A)x=0 \quad \forall x\in X. \tag{2}$$

§I. Плоский оператор в банаховом пространстве

Пусть E - банахово пространство и A - плоский оператор в нем. Найдем решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{3}$$

с начальным условием

$$x(0)=x_0. \tag{4}$$

По условию существует такое k, что векторы $x_0, Ax_0, \dots, A^{k-1}x_0$ линейно независимы, а $x_0, Ax_0, \dots, A^k x_0$ — линейно зависимы. Следовательно, существует такой многочлен $P(\lambda)$ степени k, что

$$P(A)x_0=0. \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда $P(\lambda)$ имеет простые корни $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Построим многочлены

$$\omega_i(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_{i-1})\widehat{(\lambda-\lambda_i)}(\lambda-\lambda_{i+1})\dots(\lambda-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_1)\dots(\lambda_i-\lambda_{i-1})\widehat{(\lambda_i-\lambda_i)}(\lambda_i-\lambda_{i+1})\dots(\lambda_i-\lambda_k)} \quad i=1,2,\dots,k,$$

где значок $\wedge$ обозначает то, что соответствующий множитель опущен. Если введем обозначения $x_i=\omega_i(A)x_0\neq 0$, то в силу (5) имеем $(A-\lambda_i I)x_i=0$ и, следовательно,

$$Ax_i=\lambda_i x_i. \tag{6}$$

Покажем теперь, что

$$\sum_{j=1}^{k}\omega_j(\lambda)\equiv 1. \tag{7}$$

Рассмотрим $\Delta(\lambda)=\sum_{j=1}^{k}\omega_j(\lambda)-1$, $\deg\Delta(\lambda)\leq k-1$ и $\Delta(\lambda_i)=0$ при $i=1,2,\dots,k$. Следовательно, $\Delta(\lambda)\equiv 0$, т.е. имеет место (7). Покажем, что

$$x(t)=\sum_{i=1}^{k}\omega_i(A)\exp(\lambda_i t)x_0=\sum_{i=1}^{k}x_i\exp(\lambda_i t)$$

является решением задачи (3)-(4). Действительно,

$$x'(t)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\exp(\lambda_i t)x_0 \quad \text{и} \quad Ax(t)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i\exp(\lambda_i t)$$

в силу (6). Кроме того, $x(0)=\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i(A)\right)x_0$ в силу (7).

В общем случае, когда $P(\lambda)$ имеет кратные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ с кратностями $m_1, m_2, \ldots, m_s$ соответственно, решение задачи (3)-(4) имеет вид

$$x(t)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} x_{ij}(A)t^{j-1}\exp(\lambda_i t)=H(A)x_0, \qquad (8)$$

где

$$x_{ij}=\frac{(A-\lambda_i I)^{j-1}}{(j-1)!}\,\frac{(A-\lambda_1 I)^{m_1}\ldots\widehat{(A-\lambda_i I)^{m_i}}\ldots(A-\lambda_s I)^{m_s}}{(\lambda_i-\lambda_1)^{m_1}\ldots\widehat{(\lambda_i-\lambda_i)^{m_i}}\ldots(\lambda_i-\lambda_s)^{m_s}}\sum_{p=0}^{m_i-j}\alpha_{ij}^{p}(A-\lambda_i I)^{p}x_0=$$

$$=y_{ij}(A)x_0 \text{ и } \alpha_{ij}^{p}=\frac{1}{p!}\left[\frac{(\lambda_i-\lambda_1)^{m_1}\ldots\widehat{(\lambda_i-\lambda_i)^{m_i}}\ldots(\lambda_i-\lambda_s)^{m_s}}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\ldots\widehat{(\lambda-\lambda_i)^{m_i}}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}}\right]^{(p)}_{\lambda=\lambda_i}$$

Функция $H(A)$ в решении (8) задачи (3)-(4), вообще говоря, зависит от начального условия (4).

§2. k-плоский оператор в банаховом пространстве

Пусть E - банахово пространство и A - k-плоский оператор в E. Найдем решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}=Ax \qquad (9)$$

с начальным условием

$$x(0)=x_0. \qquad (10)$$

В этом случае существует многочлен $\varphi(\lambda)$ степени k такой, что $\varphi(A)x=0$ для каждого $x\in E$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ - корни многочлена $\varphi(\lambda)$. Аналогично случаю плоского оператора, если корни простые, то можно показать, что $x(t)=\sum_{i=1}^{k}x_i\exp(\lambda_i t)$ является решением задачи (9)-(10). Нельзя только утверждать, что для каждого $i=1,2,\ldots,k$ имеет место $x_i=\omega_i(A)x_0\neq 0$.

В общем случае решение задачи (9)-(10) можно записать в виде

$$x(t)=H(A)x_0. \qquad (11)$$

В отличие от случая плоского оператора, решение (11) справедливо для любых начальных условий (10).

§3. Экспонента непрерывного k-плоского оператора

Полученное решение задачи (9)-(10) позволяет найти выражение экспоненты непрерывного k-плоского оператора через конечное число операций над оператором. Пусть A - непрерывный k-плоский оператор в банаховом пространстве. Решение задачи (9)-(10) в силу k-плоскости оператора A имеет вид $x(t)=H(A)x_0$. С другой стороны, в силу непрерывности оператора A имеет место равенство $x(t)=\exp(At)x_0$, где экспонента $\exp A$ определена как сумма сходящегося ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$. В силу единственности решения задачи (9)-(10) получаем, что $H(A)x_0=\exp(At)x_0$ при любом x_0. По определению два оператора отождествляются, если их образы при любых одинаковых прообразах совпадают. Следовательно, при $t=1$ имеем

$$\exp A=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}(A)\exp\lambda_i.$$

§4. Функции непрерывного k-плоского оператора

В случае непрерывного k-плоского оператора можно определить понятие функции оператора, следуя схеме, изложенной в [I]. Пусть A - непрерывный k-плоский оператор в банаховом пространстве и $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ - корни характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$ оператора A с кратностями $m_1,m_2,\ldots,m_s$ соответственно. k чисел $f(\lambda_i),\ldots,f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$, $i=1,2,\ldots,s$ называются значениями функции $f(\lambda)$ на спектре оператора A. Пусть $f(\lambda)$ определена на спектре оператора A. Функцией оператора A называется следующий многочлен от A:

$$f(A)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i}y_{ij}(A)f^{(j-1)}(\lambda_i). \tag{13}$$

Отсюда следует, что две функции оператора A совпадают, если они совпадают на спектре оператора A.

<u>Теорема I</u>. Если последовательность функций $f_k(\lambda)$ сходится на спектре оператора A к функции $f(\lambda)$, то сходится и последовательность $f_k(A)$. При этом из существования пределов

$$\lim_{k\to\infty}f_k(\lambda_i)=f(\lambda_i),\ldots,\lim_{k\to\infty}f_k^{(m_i-1)}(\lambda_i)=f^{(m_i-1)}(\lambda_i),\quad i=1,\ldots,s \tag{14}$$

следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} f_k(A)=f(A). \qquad (15)$$

Доказательство немедленно следует из формулы

$$f_k(A)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}(A) f_k^{(j-1)}(\lambda_i). \qquad (16)$$

Из формул (16) и (13) из (14) следует (15).

Теорема 2. Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\lambda)$ сходится на спектре оператора A , то сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(A)$. При этом из равенств $f(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(\lambda_i), \ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k^{(m_i-1)}(\lambda_i),\ i=1,2,\ldots,s$

следует равенство $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(A)$.

Доказательство вытекает из теоремы 1.

Пусть $f(\lambda)$ - аналитическая в круге $L: |\lambda-\lambda_0|<R$ функция, т.е. $f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\lambda-\lambda_0)^k$ для каждого $\lambda\in L$. Из теоремы 2 следует

Теорема 3. Если характеристические числа оператора A лежат в L , то имеет место следующее разложение $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(A-\lambda_0 I)^k$ (характеристические числа оператора A - это корни характеристического многочлена $\varphi(\lambda)$).

Используя (14) и теорему 3, получаем, что функцию оператора A , определенную некоторым степенным рядом, можно выразить как многочлен от оператора A , т.е.

$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(A-\lambda_0 I)^k=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}(A) f^{(j-1)}(\lambda_i)$ как только $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_s$ лежат в круге сходимости ряда L .

Список литературы

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М., 1971.- С.103-126.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М., 1982.- С.93-102.
3. Шварц Л. Анализ.- М., 1972.- Т.2.- С.58-66.
4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.- М., 1967.- С.134-135, 150-151.
5. Лопшиц А.М.,Секацкий В.В. О плоском операторе в безразмерном пространстве// Учен.зап. Ярославского ГПИ.- 1969.- Вып.64:Геометрия, 4.2.

Поступила 10 октября 1984 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 513.881

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВА НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ С БЕСКОНЕЧНОЙ (n,d) -ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Б.Ф.Иванов
Даугавпилсский педагогический институт
им. Я.Калнберзина

Условимся предварительно о некоторых обозначениях и терминах, а затем напомним ряд известных предложений. Пусть X - банахово пространство, A - некоторый линейный непрерывный оператор, действующий в нем. Оператор A, как известно, называется нормально разрешимым, если для $y\in X$ уравнение $Ax=y$ разрешимо в том и только том случае, когда $f(y)=0$ для всех $f\in X^*$, ортогональных к $R(A)$ (т.е. таких, что $f(y)=0$ для всех $y\in R(A)$). Здесь X^* обозначает сопряженное с X банахово пространство, $R(A)$ - область значений оператора A. Пусть $\mathrm{Ker}\,A$ - ядро оператора A, а A^* - сопряженный с A оператор. Размерности $\mathrm{Ker}\,A$ и $\mathrm{Ker}\,A^*=R(A)^\perp$ будем обозначать через n и d : $n=\dim \mathrm{Ker}\,A$, $d=\dim \mathrm{Ker}\,A^*$. Упорядоченную пару чисел (n,d) будем называть (n,d) -характеристикой оператора A. Если оба числа n и d конечны, то будем говорить, что (n,d) -характеристика оператора A конечна. Если только одно из чисел n или d конечно, то (n,d) -характеристику оператора будем называть полубесконечной и, если $n=\infty$, $d=\infty$, то (n,d) -характеристику будем называть бесконечной. Всякий линейный непрерывный нормально разрешимый оператор с конечной (n,d)-характеристикой называют Φ-оператором. В случае полубесконечности (n,d)-характеристики непрерывный линейный нормально разрешимый оператор называют Φ_+ $(n<\infty)$ либо Φ_- $(d<\infty)$ оператором. Известно, что Φ -операторы обладают устойчивостью свойства нормальной разрешимости при возмущении их линейными непрерывными операторами, достаточно малыми по операторной норме или вполне непрерывными.

Этот результат был получен Ф.В.Аткинсоном [I].

Как показал М.А.Гольдман [2], аналогичным свойством обладают также Φ_+ и Φ_- -операторы, т.е. они обладают устойчивостью свойства нормальной разрешимости и ряда других свойств при возмущении их достаточно малыми по операторной норме линейными непрерывными или вполне непрерывными операторами. В этой же статье М.А.Гольдман показал, что ситуация принципиально меняется, когда (n,d)-характеристика становится бесконечной, а именно: если A - нормально разрешимый оператор и оба числа n и d бесконечны, то всегда возможно нарушить его нормальную разрешимость и даже бесконечность его (n,d)-характеристики прибавлением к нему оператора, сколь угодно малого по норме или вполне непрерывного. Если допустить, что (n,d)-характеристика оператора A является бесконечной, т.е. не накладывать на линейный непрерывный оператор никаких ограничений, то нормальная разрешимость оператора A устойчива лишь при возмущении оператора A операторами конечного ранга. В настоящей работе будет рассмотрен некоторый промежуточный случай для одного класса операторов, когда n и d произвольны, но множество $\operatorname{Ker} A$ подчинено известным ограничениям, позволяющим выделить определенный класс возмущений, сохраняющих нормальную разрешимость и некоторые другие свойства оператора.

В статье И.Ц.Гохберга и М.Г.Крейна [3] утверждается, что результат об устойчивости свойства нормальной разрешимости операторов с полубесконечной (n,d)-характеристикой опубликован в [3] впервые. Это утверждение неверно. Данный результат получен и опубликован М.А.Гольдманом ранее [2].

Пусть $\mathcal{M}$ - конечное множество попарно дизъюнктных простых замкнутых кривых типа Ляпунова на комплексной плоскости $\Gamma = \bigcup\limits_{M \in \mathcal{M}} M$.

Кривая Γ определяет разбиение расширенной комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$ на дизъюнктные открытые множества $\mathcal{F}^+$ и $\mathcal{F}^-$

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathcal{F}^+ \cup \mathcal{F}^- \cup \Gamma, \quad \infty \in \mathcal{F}^-.$$

В пространстве $L^p(\Gamma)$ рассмотрим ограниченный линейный оператор A, определяемый сингулярным уравнением

$$(A\varphi)t = c(t)\varphi(t) + \frac{d(t)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(z)}{z-t}dz, \quad (t\in\Gamma) \qquad (I)$$

с непрерывными коэффициентами c и d. В наших целях оператор A удобно представить в виде $A = aP + bQ$, где $a = c+d$, $b = c-d$, $(P\varphi)t = \frac{\varphi(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(z)}{z-t}dz$, $(t\in\Gamma)$ и $Q = J-P$.

Оператор P есть проектор, область значений которого есть множество всех тех функций φ из $L^p(\Gamma)$, для которых интеграл $\int_{\Gamma}\frac{\varphi(z)}{z-t}dz$ обращается в нуль при всех $t\in\mathcal{F}^-$, а ядро, соответственно, - множество тех функций φ из $L^p(\Gamma)$ для которых $\int_{\Gamma}\frac{\varphi(z)}{z-t}dz=0$ для всех $t\in\mathcal{F}^+$.

Из теории ЛСИУ (линейных сингулярных интегральных уравнений) известно, что оператор $A=aP+bQ$ тогда и только тогда является Φ-оператором, когда $a(t)\cdot b(t) \neq 0$ всюду на Γ. Если же функция $a(t)b(t)$ обращается в нуль где-либо на Γ, то A не является ни Φ_+ - ни Φ_--оператором. Вместе с тем из соотношения $a(t_0)b(t_0)=0$ для одной точки $t_0\in\Gamma$, вообще говоря, не следует, что оператор A не является нормально разрешимым. Действительно, в тривиальных случаях, например, когда $a(t)\equiv 1$ и $b(t)\equiv 0$, оператор A нормально разрешим. В другом случае, а именно, когда функция ab имеет конечное число нулей целого порядка, оператор A допускает неограниченную регуляризацию и, следовательно, не является нормально разрешимым.

Определение. Непрерывную функцию $f(t)$, определенную на Γ, будем называть нормальной, если для каждой кривой $M\in\mathcal{M}$ выполняется следующее условие: либо $f(t)\neq 0$ для всех $t\in M$, либо функция $f(t)$ есть тождественный ноль на M.

Следующая теорема дает необходимые условия нормальной разрешимости ЛСИУ вида (I).

Теорема I [4]. Если a и b - непрерывные функции на Γ, то для нормальной разрешимости оператора $A = aP + bQ$ в пространстве $L^p(\Gamma)$ необходимо, чтобы функции a и b были нормальными.

Нормальность функций a и b сама по себе еще недостаточна для нормальной разрешимости оператора A. Рассмотрим дополнительные условия, которые вместе с нормальностью функций a и b являются необходимыми и достаточными для нормальной разрешимости оператора A.

Теорема 2 [4]. Если множество $\mathcal{F}^-$ связно, то оператор $aP+bQ=A$ тогда и только тогда нормально разрешим, когда выполняется одно из следующих условий:

I. $a(t)\neq 0$ всюду на Γ.

2. $b(t)\neq 0$ всюду на Γ.

3. Имеется подмножество $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}$ такое, что $a(t)=b(t)=0$ для всех $t\in\mathcal{N}$ и $b(t)\neq 0$ для всех $t\in\bigcup\{M: M\in\mathcal{M}\setminus\mathcal{N}\}$.

В дальнейшем контур Γ выберем так, чтобы он состоял из двух замкнутых кривых типа Ляпунова, расположенных так, что множество $\mathcal{F}^-$ связно.

Полагая $a(t)\neq 0\ (t\in\Gamma)$, $b(t)\neq 0\ (t\in M)$ и $b(t)=0\ (t\in\mathcal{N})$, получим нормально разрешимый оператор $A=aP+bQ$. Причем в этих предположениях оператор A имеет бесконечную (n,d)-характеристику, т.к., будучи нормально разрешимым, оператор A одновременно не является ни Φ^+-, ни Φ^--оператором.

Рассмотрим уравнение $(A\varphi)t=0$ или, другими словами,

$$(aP\varphi)t+(bQ\varphi)t=0\quad,\quad t\in\Gamma, \tag{2}$$

полагая, как и ранее, $A=aP+bQ$. Решениями уравнения (2) будут элементы ядра оператора A. Пусть $H^\mu(M)$ обозначает совокупность всех комплексных функций, определенных на M и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\mu\ (0<\mu<1)$, т.е. таких, что имеет место неравенство $|\varphi(t)-\varphi(t')|\leqslant c|t-t'|^\mu$ для любых точек $t,t'\in M$, где c – некоторая зависящая от φ константа.

Если a и b принадлежат множеству $H^\mu(M)\ (0<\mu<1)$, то мы можем сделать вывод о разрешимости уравнения (2) [4]. Заметим, что в силу выбора контура Γ, состоящего из двух непересекающихся замкнутых кривых типа Ляпунова M и N, уравнение (2) распадается на два уравнения. Когда t пробегает N, т.е. $t\in N$, то $b(t)=0$ и уравнение (2) запишется в виде

$$(aP\varphi)t=0\quad,\quad t\in N. \tag{2'}$$

Если $t \in M$, то уравнение (2) запишется в виде

$$(aP\varphi)t + (bQ\varphi)t = 0 \ ? \ t \in M, \qquad (2'')$$

причем в уравнении (2") $a(t)\cdot b(t) \neq 0,\ t \in M$. Из теории ЛСИУ [4] известно, что в случае, когда $\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{a(t)}{b(t)}\right]_M < 0$, однородное уравнение (2") имеет $m = -\varkappa$ линейно независимых решений $\varphi_k(t) = t^k(C_+ - C_- t^{\varkappa})$ $(k = 0,1,\dots,m-1)$, где

$$C_-(t)\, t^{\varkappa} C_+(t) = \frac{a(t)}{b(t)}\ (t \in M),\ C_\pm(t) \in H^{\mu}_{\pm}(M)\ \ (0 < \mu < 1).$$

Функции C_+ и C_- получены следующим образом: каждая функция $a(t) \in H^{\mu}(M)\,(0<\mu<1)$, нигде не обращающаяся в 0 на M, допускает факторизацию $a(t) = a_-(t)\, t^{\varkappa} a_+(t)$, где $a_\pm(t) \in H^{\mu}_{\pm}(M)$, $H^{\mu}_{+}(M)$ – проекция $H^{\mu}(M)$, полученная с помощью оператора проектирования P, а $H^{\mu}_{-}(M)$, соответственно – с помощью Q. $a_\pm(t) \neq 0$, $\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln a(t)\right]_M$.
Очевидно, что на контуре N решением уравнения (2) будут функции из ядра оператора $P|_N$. Т.к. наше изложение не претендует на общность, а именно, рассматривается лишь пример оператора с бесконечной (n,d)-характеристикой, обладающий устойчивостью свойства нормальной разрешимости, то для простоты изложения положим, что N – единичная окружность, $p=2$. Пусть $\varphi(t) \in L^2(N)$ – произвольная функция и $\varphi(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k t^k$ $(|t|=1)$ – ее ряд Фурье. Так как этот ряд сходится по норме пространства $L^2(N)$ и оператор P непрерывен, то

$$P\varphi = \lim_{n\to\infty} P\Big(\sum_{k=-n}^{n} c_k t^k\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k.$$

Аналогично находим $Q\varphi = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k t^k$

Следовательно, $S\varphi = (P-Q)\varphi = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k - \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k t^k.$

Таким образом, уравнение (2) в предположениях, что $a(t), b(t) \in H^{\mu}(M)\,(0<\mu<1)$, $P=2$, N – единичная окружность, имеет линейно независимые решения, представимые в виде

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k t^k, & |t| = 1,\ t \in N \\ t^k(C_+ - C_- t^k), & (k = 0,1,\dots,\varkappa-1),\ \varkappa<0,\ t \in M. \end{cases}$$

Введем для оператора A понятие риссовского ядра. Риссовским ядром оператора A мы будем называть $\mathfrak{M}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} R(A^n)$. Подробно свойства риссовского ядра исследованы в статьях М.А.Гольдмана и С.Н.Крачковского [5], [6] и др. Мы же здесь выясним, при каких условиях оператор A обладает тем свойством, что $\mathcal{K}er\, A \in \mathfrak{M}(A)$.

В качестве первого шага рассмотрим включение $\mathcal{K}er\, A \subset R(A)$. Это включение имеет место, если разрешимо уравнение

$$a(t)(Pf)t + b(t)(Qf)t = \psi(t), \qquad (3)$$

где

$$\psi(t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k t^k, & |t|=1,\ t \in N \\ t^k (C_+^{-1} - C_- t^{\varkappa}), & (k=0,1,\dots,-\varkappa),\ \varkappa<0,\ t \in M. \end{cases}$$

I) Пусть $t \in M$. В этом случае уравнение (3) имеет такой же вид с той лишь разницей, что $t \in M$, а $\psi = t^k(C_+^{-1} - C_- t^{\varkappa})$, $(k=0,1,\dots,-\varkappa)$, $\varkappa<0$, $t \in M$. Как известно из теории ЛСИУ, решением этого уравнения будет

$$f(t) = A^{-1} t^k (C_+^{-1} - C_- t^{\varkappa}),\ (k=0,1,\dots,-\varkappa),\ \varkappa<0,\ t \in M.$$

На кривой N уравнение (3) примет вид

$$a(t)(Pf)t = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k t^k,\quad t \in N.$$

Последнее уравнение разрешимо только в том случае, когда

$$\varphi(t) = \frac{\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k t^k}{a(t)} \in R(P),\quad t \in N,$$ т.е. когда

$\varphi(t)$ имеет вид: $\varphi(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k t^k$. Для этого достаточно положить $a(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1} c_k t^{k+1}$. Заметим, что в этом случае $a(t)$ может и не принадлежать классу $H^{\mu}(N)$ $(0<\mu<1)$. Это не противоречит тому, что $a(t) \in H^{\mu}(M)$ $(0<\mu<1)$. После того, как мы показали, что имеет место включение $\mathcal{K}er\, A \subset R(A)$, не встречает принципиальных затруднений доказательство включения $\mathcal{K}er\, A \subset R(A^n)$ при любом n. Для этого достаточно, как и в предыдущем случае, решить вопрос о разрешимости уравнения $((aP + bQ)^n f)t = \psi(t)$, $t \in \Gamma$ при любом n, где ψ – произвольный элемент $\mathcal{K}er\, A$.

Поскольку это уравнение разрешимо при $n=1$, то, не уменьшая общности рассуждения, мы можем предположить, что оно справедливо и при $n=m$. То есть существует такая функция $f_m(t)$ в $L_2(\Gamma)$, которая удовлетворяет равенству

$$((aP+bQ)^m f_m)t = \psi(t), \quad t\in\Gamma. \tag{4}$$

Если $t\in M$, то имеем

$$((aP+bQ)^m f_m)\, t = \psi_1(t), \quad t\in M. \tag{5}$$

Если $t\in N$, то

$$((aP)^m f_m)t = \psi_2(t), \quad t\in N. \tag{6}$$

Под $\psi_1(t)\,(t\in M)$ мы понимаем $\psi_1(t) = t^k(C_+^{-1}-C_-t^{\varkappa})$, $(k=0,1,\dots,-\varkappa)$, $\varkappa<0$, $t\in M$.

Под $\psi_2(t)\,(t\in N)$ соответственно

$$\psi_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k t^k, \quad |t|=1,\ t\in N.$$

Покажем, что из разрешимости (4) следует разрешимость уравнения

$$((aP+bQ)^{m+1} f)t = \psi(t), \quad t\in\Gamma, \psi(t)\in \mathrm{Ker}\,A. \tag{7}$$

Пусть $t\in M$. Уравнение (7) перепишется в виде

$$((aP+bQ)^{m+1} f)\,t = \psi_1(t), \quad t\in M. \tag{8}$$

Преобразуем его $((aP+bQ)^m(aP+bQ)f)t = \psi_1(t)$, $t\in M$. Введем обозначение $((aP+bQ)f)t = g(t)$. Тогда в силу разрешимости (5) мы определим $g(t)$, а следовательно, решая уравнение $((aP+bQ)f)t = g(t)$, $t\in M$, разрешимое при любой правой части, найдем и $f(t)$, т.е. ответим положительно на вопрос о разрешимости уравнения (8).

Пусть $t\in N$. В этом случае уравнение (7) перепишется в виде $((aP)^{m+1}f)t = \psi_2(t)$, $t\in N$

$$\text{или}\quad (\underbrace{aP\,aP\dots aP}_{m+1}f)t = \psi_2(t), \quad t\in N. \tag{9}$$

Поскольку разрешимо уравнение $(aPf_1)t = \psi_2(t)$, $t\in N$, то

$\dfrac{\psi_2(t)}{a(t)} \in R(P)$, как это показано выше.

Следовательно, разрешимо и уравнение

$$(P(aP)f_2)\,t = \frac{\psi_2(t)}{a(t)}, \quad t\in N.$$

В качестве его решения можно взять $\dfrac{\psi_2(t)}{a^2(t)}$, т.е.

$$\left(PaP\frac{\psi_2(t)}{a^2(t)}\right)t=\frac{\psi_2(t)}{a(t)},\ t\in N.$$

Продолжая этот процесс и далее, мы получим с точностью до элементов ядра оператора P решение уравнения (9)

$$f_{m+1}(t)=\frac{\psi_2(t)}{a^{m+1}(t)},\ t\in N.$$

Методом полной математической индукции мы доказали включение $\mathcal{K}er\ A\in\mathfrak{M}(A)$

Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующее

<u>Утверждение I</u>. Пусть оператор A определяется равенством $(A\varphi)t=c(t)\varphi(t)+\dfrac{d(t)}{\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{\varphi(z)}{z-t}dz,(t\in\Gamma)$, где Γ - сложный контур, состоящий из двух дизъюнктных (M и N) кривых типа Ляпунова, причем N - единичная окружность $|t|=1$, с непрерывными коэффициентами $c(t)$ и $d(t)$ такими, что $c(t)+d(t)\neq 0.\ (t\in\Gamma)$, $c(t)-d(t)\neq 0\ (t\in M)$ и $c(t)-d(t)=0$ $(t\in N)$. На контуре M $c(t)$ и $d(t)$ являются элементами $H^\mu(M)\ (0<\mu<1)$. При выполнении этих условий оператор A является нормально разрешимым и имеет бесконечную (n,d) -характеристику. При этом $c(t)$ и $d(t)$ могут быть выбраны так, что оператор A допускает возмущение линейными непрерывными операторами, перестановочными с A с сохранением свойства нормальной разрешимости.

Действительно, во-первых, поскольку оператор A действует в $L_2(\Gamma)$, существует непрерывный оператор проектирования на ядро оператора A . Во-вторых, с и d , как это было показано, могут быть выбраны так, что $\mathcal{K}er\ A\in\mathfrak{M}(A)$. Как показали М.А.Гольдман и С.Н.Крачковский [5] , [6] эти условия являются достаточными для нашего утверждения.

Список литературы

I. Аткинсон Ф.В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах// Матем. сб.- 1951.- Т.28.- Вып.I.- С.3-14.

2. Гольдман М.А. Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных уравнений // ДАН СССР.-1955.- Т.100.- № 2.- С.201-204.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // УМН. 1957.- Т.18.- Вып.2.- С.44-118.
4. Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. - М., 1979.
5. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Об одном классе возмущений линейного замкнутого оператора с замкнутой областью значений // ДАН СССР.-1971.- Т.197.- № 6.- С.532-534.
6. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Операторы, нули которых образуют конечномерный выступ на рассовском ядре // ДАН СССР.-1974.- Т.215.- № 6.- С.25-27.
7. Гольдман М.А. О нормальной разрешимости уравнений // Латв. матем. ежегодник.-1973.- Т.13.- С.52-63.
8. Гольдман М.А. Замечание о замкнутых линейных операторах с бесконечномерным ядром.// Топологические пространства и их отображения.- Рига, 1976.- Вып.2.- С.7-10.

Поступила 5 апреля 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига.1986.

УДК 515.12

НЕПРЕРЫВНЫЕ СЕЧЕНИЯ

О.Н.Колесников
Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

В настоящей статье рассматриваются непрерывные сечения непрерывных многозначных отображений.

Всюду под нульмерным (соответственно индуктивно нульмерным) пространством понимается пространство, нульмерное в смысле $\dim$ (соответственно ind). Через 2^Y (соответственно $C(Y)$, $K(Y)$) будет обозначаться пространство непустых замкнутых (соответственно бикомпактных, конечных) подмножеств топологического пространства Y в топологии Виеториса. Отображение $F: X \to 2^Y$ непрерывно, если оно полунепрерывно снизу и полунепрерывно сверху, т.е. если для любого открытого в Y подмножества V множества
$F^{-1}(V)=\{x\in X: Fx\cap V\neq\phi\}$ и $F^{\leftarrow}(V)=\{x\in X: Fx\subset V\}$
открыты в пространстве X . Отображение $f: X\to Y$ называется сечением отображения $F: X\to 2^Y$, если $fx\in Fx$ для любого $x\in X$. Отображение $f: 2^X\to X$ называется сечением пространства X , если $f(A)\in A$ для любого $A\in 2^X$.

Пространство Y имеет G_δ-диагональ тогда и только тогда, когда существует счетная последовательность $\gamma=\{\gamma_n, n\in N\}$ открытых покрытий Y такая, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} st(y,\gamma_n)=\{y\}$ для любого $y\in Y$. Положим также $\gamma_0=\{Y\}$.

Пространство с G_δ-диагональю (Y,γ) полно, если для любой невозрастающей последовательности $\{A_n, n\in N\}$ замкнутых в Y множеств, такой, что каждое A_n содержится в некотором элементе γ_n , имеем $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\neq\phi$.

Подмножество A пространства с G_δ-диагональю (Y,γ) полно, если пространство $(A,\gamma|_A)$ полно.

Обозначим через $CM_L(Y)$ пространство полных подмножеств пространства Y с G_δ-диагональю. Очевидно,

$C(Y) \subset CML(Y)$.

Следующая лемма является небольшим видоизменением леммы 6.2 работы [I].

Лемма. Пусть f - непрерывное сечение пространства X, $A \in 2^X$ и U - окрестность fA в X. Тогда существует конечное $F \subset A$ такое, что $fS \in U$, если $S \in 2^X$ и $F \subset S \subset A$; при этом для любого нигде не плотного в A множества M можно выбрать F так, что $F \cap M = \phi$.

Теорема I. Пусть X - регулярное пространство, имеющее непрерывное сечение. Тогда X - наследственно бэровское по замкнутым подмножествам пространство.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть существует замкнутое подпространство $Z \subset X$, не являющееся бэровским. Так как X регулярно, существует замкнутое подпространство $M \subset Z$, являющееся множеством первой категории в себе. Если g - непрерывное сечение X, то $f = g|_{2^X}$ - непрерывное сечение M. Пусть $M = \bigcup_{n=1} M$, где M_n замкнуто и нигде не плотно в M, $M_n \subset M_{n+1}$, $n \in N$. По индукции для любого $n \geq 0$ построим непустые подмножества F_n и A_n пространства M, где F_n конечно, а A_n замкнуто, удовлетворяющие следующим условиям: I) $F_{n-1} \subset F_n \subset A_n \subset A_{n-1}$, $n \in N$, 2) $fS \notin M_n$, если $F_n \subset S \subset A_n$, $n \in N$, 3) $fA_n \notin F_n$, $n \in N$. Предположим, что это сделано. Положим $B = \bigcap_{n=1} A_n$. Тогда по условию I $\phi \neq F_n \subset B \subset A_n$, $n \in N$, и fB пусто по условию 2; получили противоречие. Будем теперь строить множества A_n и F_n для всех $n \geq 0$. Положим $A_0 = M$, $F_0 = \{x_0\}$ для некоторого $x_0 \neq fM$. Далее, считая, что определены A_n и F_n, построим A_{n+1} и F_{n+1}. Если $fA_n \notin M_{n+1}$, то по лемме существует такое конечное $F \subset (M_{n+1} \cup \{fA_n\}) \cup F_n$, что $fS \notin M_{n+1}$, если $F \subset S \subset A_n$. Положим $F_{n+1} = F_n \cup F$, $A_{n+1} = A_n$. Условие I выполняется очевидно. Условие 2 следует из того, что $F_{n+1} \supset F$. Условие 3 следует из условия 3 для n и того, что $F \not\ni fA_n = fA_{n+1}$. Пусть теперь $fA_n \in M_{n+1}$. Тогда по лемме существует такое конечное $F \subset (A_n - M_{n+1}) \cup F_n$, что $fS \notin F_n$, если $F \subset S \subset A_n$. Положим $F_{n+1} = F_n \cup F$, и пусть A_{n+1} есть объединение

$F_{n+1} \cap M_{n+1}$ и канонического замкнутого множества, содержащего $F_{n+1} - M_{n+1}$ и содержащегося в $A_n - M_{n+1}$. При этом можно считать, что $\xi A_{n+1} \notin F_{n+1}$, так как если $\xi A_{n+1} \in F_{n+1}$ то $\xi A_{n+1} \in F - M_{n+1}$ и точку ξA_{n+1} можно заменить в F близкой точкой, не нарушающей того свойства, что $\xi S \notin F_n$ если $F \subset S \subset A_n$. Условия 1, 2 и 3 выполняются по построению.

Следствие. Пусть X - метрическое абсолютное CA-множество, имеющее непрерывное сечение. Тогда X полно по Чеху.

Доказательство. По теореме I X - наследственно бэровское по замкнутым множествам пространство. Но метрическое абсолютное CA-множество, являющееся наследственно бэровское по замкнутым множествам пространством, есть абсолютное G_δ-множество (см. следствие работы [2].).

Теорема 2. Пусть X - F_σ-дискретный паракомпакт. Тогда X имеет непрерывное сечение тогда и только тогда, когда X разреженно.

Доказательство. Пусть X имеет непрерывное сечение. По теореме I каждое замкнутое подпространство A пространства X является бэровским. Так как A F_σ-дискретно, имеет изолированную точку. Следовательно, X разреженно. Пусть теперь X разреженно. Тогда X имеет непрерывное сечение по теореме I работы [3].

Предложение I. Пусть X - нульмерно, Y - паракомпакт, $F: X \to 2^Y$ - непрерывно. Тогда для любого открытого покрытия γ пространства Y в покрытие $F^{-1}(\gamma)$ пространства X можно вписать комбинаторно-дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие.

Доказательство. В покрытие γ впишем комбинаторно-локально-конечное покрытие $\{V_\alpha, \alpha < \tau\}$ из открытых F_σ-множеств, и пусть $V_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{\alpha n}$, где $V_{\alpha n}$ замкнуто $n \in N$. Положим $P_{\alpha n} = V_{\alpha n} \cap (Y - \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta)$, $\alpha < \tau$, $n \in N$. Очевидно, для каждого $n \in N$ $\{P_{\alpha n}, \alpha < \tau\}$ - дискретное семейство замкнутых множеств. Так как Y нормально, для любых $\alpha < \tau$ и $n \in N$ существует такое открытое множество $G_{\alpha n}$, что $P_{\alpha n} \subset G_{\alpha n} \subset \overline{G}_{\alpha n} \subset V_\alpha$, причем можно считать, что $\overline{G}_{\alpha n} \subset G_{\alpha, n+1}$, $n \in N$.

Положим $\Phi_{\alpha n} = F^{-1}(P_{\alpha n}) - F^{-1}(\bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta)$, $W_{\alpha n} = F^{-1}(G_{\alpha n}) - F^{-1}(\bigcup_{\beta<\alpha} \overline{G}_{\beta n})$. Пусть $\varphi_n = \{\Phi_{\alpha n}, \alpha<\tau\}$, $\omega_n = \{W_{\alpha n}, \alpha<\tau\}$. Очевидно, для каждого $n \in N$, ω_n - дизъюнктная система открытых множеств X, а φ_n - дискретная система замкнутых множеств X, комбинаторно вписанная в ω_n. Так как X нульмерно, существует дискретная система открыто-замкнутых в X множеств $\{\Gamma_{\alpha n}, \alpha<\tau\}$ такая, что $\Phi_{\alpha n} \subset \Gamma_{\alpha n} \subset W_{\alpha n}$. Положим $H_{\alpha n} = \Gamma_{\alpha n} - \bigcup\{\Gamma_{\alpha k}, \alpha<\tau, k<n\}$. Тогда $\{U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\alpha n}, \alpha<\tau\}$ - дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие X, вписанное в $F^{-1}(\gamma)$.

Следующая теорема обобщает теорему М.М.Чобана ([4], теорема 3.4), доказанную им для полного метрического пространства Y.

Теорема 3. Пусть X - нульмерно, Y - паракомпакт с G_δ-диагональю, $F: X \to CML(Y)$ - непрерывно. Тогда F имеет непрерывное сечение.

Доказательство. Построим по индукции последовательность непрерывных отображений $F_n : X \to CML(Y)$, $n = 0, 1, \ldots$, таких, что $F_n x$ содержится в Fx и в некотором элементе γ_n, $x \in X$. Положим $F_0 = F$ и, считая, что определено F_{n-1}, построим F_n, $n \geq 1$. В покрытие γ_n впишем с замыканием открытое покрытие $\xi_n = \{V_\alpha, \alpha \in A\}$. По предложению I в покрытие $F_{n-1}^{-1}(\xi_n)$ пространства X впишем комбинаторно-дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие $\omega_n = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$. Определим $F_n : X \to CML(Y)$, где $F_n x = F_{n-1} x \cap \overline{V}_\alpha$, $x \in U_\alpha$. Очевидно, F_n непрерывно и удовлетворяет требуемым условиям. Определим $f: X \to Y$, где $fx = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n x$. Множество fx непусто и одноточечно, так как Fx полно и fx содержится в некотором элементе γ_n для любого $n \in N$. Пусть V открыто в Y. Покажем, что $f^{-1}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^{\leftarrow}(V)$. Очевидно, $F_n^{\leftarrow}(V) \subset f^{-1}(V)$ для любого $n \in N$. Пусть $fx \in V$. Если $F_n x \cap (X - V) \neq \emptyset$ для всех $n \in N$, то в силу полноты Fx, имеем $\bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n x \cap (X - V)) \neq \emptyset$, что противоречит тому, что $fx = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n x \in V$. Следовательно, существует такое $n \in N$, что $F_n x \subset V$. Из непрерывности F_n вытекает, что $F_n^{\leftarrow}(V)$

открыто для каждого $n \in N$, откуда следует открытость множества $f^{-1}(V)$. Таким образом, f - непрерывное сечение отображения F .

<u>Теорема 4</u>. Пусть X - нульмерно, Y - уплотняется на метрическое пространство, $F: X \to C(Y)$ - непрерывно. Тогда F имеет непрерывное сечение.

<u>Доказательство</u>. Сечение f строится так же, как в доказательстве теоремы 3, при этом Y рассматривается в слабой метрической топологии. Непрерывность отображения f следует из формулы $f^{-1}(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^{\leftarrow}(V)$, где V открыто в Y . При доказательстве этой формулы используется бикомпактнозначность F .

<u>Предложение 2</u>. Пусть X - сильно паракомпактно, Y - индуктивно нульмерно, $F: X \to 2^Y$ - непрерывно. Тогда для любого открытого покрытия γ пространства Y существует непрерывное отображение $\Phi: X \to 2^Y$, такое, что Φx является замкнутым подмножеством Fx и содержится в некотором элементе γ, $x \in X$.

<u>Доказательство</u>. В покрытие γ впишем открыто-замкнутое покрытие $\xi = \{V_\alpha, \alpha \in A\}$. Так как X сильно паракомпактно, в открыто-замкнутое покрытие $F^{-1}(\xi)$ пространства X впишем комбинаторно-дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ (см. [5], с.274). Определим отображение $\Phi: X \to 2^Y$, где $\Phi x = Fx \cap V_\alpha$, $x \in U_\alpha$. Отображение Φ непрерывно и удовлетворяет условиям предложения.

<u>Теорема 5</u>. Пусть X - сильно паракомпактно, Y - индуктивно нульмерно, локально уплотняется на упорядоченное пространство, $F: X \to C(Y)$ - непрерывно. Тогда F имеет непрерывное сечение.

<u>Доказательство</u>. Теорема следует из предложения 2 и леммы 7.5.I работы [6].

<u>Теорема 5'</u>. Пусть X - сильно паракомпактно, Y - индуктивно нульмерное локально бикомпактное локально упорядоченное пространство, $F: X \to 2^Y$ - непрерывно. Тогда F имеет непрерывное сечение.

<u>Доказательство</u>. Теорема следует из предложения 2 и леммы 7.5.I работы [6].

Следующая теорема является новой и в случае метрического пространства Y.

Теорема 6. Пусть X - сильно паракомпактно, Y - индуктивно нульмерное пространство с G_δ-диагональю, $F: X \to CML(Y)$ - непрерывно. Тогда F имеет непрерывное сечение.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. Вместо предложения I используется предложение 2.

Теорема 7. Пусть X - нульмерный паракомпакт, Y - регулярное пространство с G_δ-диагональю, $F: X \to CML(Y)$ - непрерывно. Тогда F имеет непрерывное сечение.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. Вместо предложения I используется то, что в любое открытое покрытие нульмерного паракомпакта можно вписать дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие.

Теорема 8. Пусть X - нульмерно, коллективно нормально, Y - регулярное метакомпактное пространство с G_δ-диагональю, $F: X \to K(Y)$ - непрерывно. Тогда F имеет непрерывное сечение.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3. Используется то, что в любое открытое покрытие τ пространства Y можно вписать с замыканием точечно-конечное открытое покрытие ξ, а в точечно-конечное открытое покрытие $F^{-1}(\xi)$ нульмерного коллективно нормального пространства X можно вписать дизъюнктное открыто-замкнутое покрытие ω.

Автор выражает благодарность В.И.Пономареву, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Список литературы

I. Engelking R., Heath R.W., Michael E. Topological well-ordering and continuous selections // Invent. math.- 1968.- V.6.- P.150-158.

2. Островский А.В. О несепарабельных τ-А-множествах и их отображениях // ДАН СССР.-1976.- Т.226.- № 2 - С.269-272.

3. Колесников О.Н. Сечения многозначных отображений со значениями в разреженных пространствах // Сиб. мат. ж.- 1986.- Т.27.- № I.- С.70-78.
4. Чобан М.М. Многозначные отображения и борелевские множества. I // Труды Моск. матем. о-ва.-1970.- Т.22.- С.229-250.
5. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности.- М., 1973.
6. Michael E. Topologies on spaces of subsets//Trans. Amer. Math. Soc.- 1951.- V.71.- P.152-182.

Поступила 20 декабря 1984 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 517.941

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СЕКВЕНЦИАЛЬНО-КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.С.Левченков

Латвийский государственный университет им. П. Стучки

В статье вводится понятие V-аппроксимации линейных непрерывных отображений в банаховых пространствах, которое оказывается достаточным для секвенциально-компактной аппроксимации (см., напр. [I]). Приведен пример, показывающий, что V-аппроксимация не является необходимым условием для секвенциально-компактной аппроксимации.

Определение. Пусть X и Y - банаховы пространства над полем действительных или комплексных чисел K. Будем говорить, что последовательность отображений $(f_n)_{n\in N}$ из пространства линейных непрерывных отображений $LC(X,Y)$ V-аппроксимирует отображение $f\in LC(X,Y)$, если выполнены следующие условия:

I) $\forall x\in X \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n x = fx$,

2) для любой ограниченной последовательности векторов из X существует конечномерное векторное подпространство V из Y такое, что $\{ f_n x_n - f x_n \mid n\in N \} \subset V$.
В этом случае кратко будем писать $f_n \xrightarrow{V} f\in LC(X,Y)$.

Теорема. Если $f_n \xrightarrow{V} f\in LC(X,Y)$, то $f_n \xrightarrow{ск а} f\in LC(X,Y)$ (см., напр. [I]).

Доказательство. Для каждой ограниченной последовательности векторов (x_n) из X из неравенств $\| f_n x_n - f x_n \| \leq \leq \| f_n x_n\| + \| f x_n\| \leq \| f_n\| \| x_n\| + \| f\| \| x_n\| \leq (\| f_n\| + \| f\|)\| x_n\|$ и условия I) V-аппроксимации следует ограниченность последовательности векторов $(f_n x_n - f x_n)$ в Y. Отсюда и из условия 2) V-аппроксимации следует, что последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в Y, т.е., $f_n \xrightarrow{ск а} f\in LC(X,Y)$.

Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно.

Пример. Пусть $X = Y = \ell_2$. Для каждого $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2$ и каждого $n \in N$ определим отображение $f_n : \ell_2 \to \ell_2$ равенством

$$f_n x = \frac{1}{n} x + x_n e_1,$$

где $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \ell_2$. Тогда $f_n \xrightarrow{c.k.a.} 0 \in LC(\ell_2, \ell_2)$ и $f_n \overset{V}{\not\to} 0 \in LC(\ell_2, \ell_2)$.

Список литературы

1. Левченков В.С. О некоторых условиях секвенциально-компактной аппроксимации линейных отображений // Тезисы докладов VIII школы по теории операторов в функциональных пространствах .- Рига, 1983.- Т.2.- С.12-13.

Поступила 25 марта 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 517.98

X - МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО, $f: X \not\to X$ - РАЗЫСКИВАЮТСЯ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

А.Х.Лиепиньш

Латвийский государственный университет им. П. Стучки

Приводимая теорема, примыкающая к [1, теорема 4, с.67] и [2, теорема 3, с.145] и развивающая идеи из [1], [2], является результатом применения при исследовании нерастягивающих отображений методов, разработанных в [3], [4] при рассмотрении отображений, удовлетворяющих неравенству Кэннэна (R.Kannan, [3]).

Пусть X - метрическое пространство с расстоянием d. Полагая $PX := \{A \mid A \subset X\}$, напомним, что отображение $S: PX \longrightarrow PX$ называется оператором замыкания на X, если для любых $A, B \in PX$: 1) $A \subset B \Rightarrow S(A) \subset S(B)$; 2) $A \subset S(A)$; 3) $S(S(A)) = S(A)$.

Пусть S - оператор замыкания на X. Называя $A \in PX$ S-замкнутым, если $A = S(A)$, скажем, что X S-компактно, если $\bigcap\{A \mid A \in \mathfrak{A}\} \neq \emptyset$ для любой центрированной системы $\mathfrak{A}$ S-замкнутых множеств. Напомним также, что оператор замыкания S называется алгебраическим, если для любого $A \in PX$ и любого $x \in S(A)$ существует такое конечное $B \subset A$, что $x \in S(B)$.

Наряду с оператором S рассмотрим отображение $T: PX \longrightarrow PX$, для любого $A \in PX$ определяемое равенством: $T(A) := \overline{S(A)}$. Отметим, что T - оператор замыкания на X, если $S(\overline{S(A)}) = \overline{S(A)}$ для любого $A \in PX$, т.е., топологическое замыкание любого S-замкнутого множества S-замкнуто.

Для любого $x \in X$ и $r \in \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ - множество всех вещественных положительных чисел) замкнутый шар радиуса r с центром в x обозначим через $B(x, r)$.

Пусть $Y \subset X$ непусто. Напомним, что отображение

$f: Y \longmapsto X$ называется нерастягивающим, если $d(f(x), f(y)) \leqslant d(x,y)$ для любых $x, y \in Y$.

Скажем, что $x \in Y$ орбитально, если орбита точки x при отображении f определена, т.е., полагая $x_0 := x$, для любого $n \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ - множество всех натуральных чисел) найдется такое $x_n \in Y$, что $x_n = f(x_{n-1})$.

Теорема. Пусть X - метрическое пространство, $Y \subset X$ замкнуто и непусто, отображение $f: Y \longmapsto X$ - нерастягивающее.

Пусть существует такой алгебраический оператор замыкания S на X, что выполнены условия:

I) Y S-замкнуто;

2) любой замкнутый шар S-замкнут;

3) топологическое замыкание любого S-замкнутого множества S-замкнуто;

4) X T-компактно.

Наконец, в любом содержащем более одной точки T-замкнутом множестве $A \subset Y$ предположим существование такого орбитального x, что $\sup\{d(x,y) \mid y \in A\} < \operatorname{diam} A$ и $\bar{B} \cap Y = \overline{B \cap Y}$ для любого содержащего x S-замкнутого множества $B \subset X$, для которого $f(B \cap Y) \subset B$.

Тогда отображение f имеет неподвижную точку.

Доказательство. Основываясь на лемме Цорна, построим множество $M \subset X$, минимальное по отношению к T-замкнутости и свойствам: $M \cap Y \neq \emptyset$ и $f(M \cap Y) \subset M$.

Допустим, что $f(M \cap Y) \not\subset Y$.

Тогда $M \cap Y$ содержит более одной точки. Поэтому существует такое орбитальное $a \in M \cap Y$, что $\sup\{d(a,x) \mid x \in M \cap Y\} =: r < \operatorname{diam} M \cap Y$.

Положим $A := \bigcup\{\bigcap\{B(f^m(a), r) \cap M \mid m \in \mathbb{Z}^+ \,\&\, m \geqslant n\} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ ($\mathbb{Z}^+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$) . Отметим, что:

I) A - S-замкнуто (вследствие условия 2 и алгебраичности оператора S);

2) $A \cap Y \neq \emptyset$ $(a \in A \cap Y)$;

3) $f(A \cap Y) \subset A$ (пользуемся тем, что отображение нерастягивающее).

Следовательно:

I) $\bar{A}$ - T-замкнуто (условие 3);

2) $\bar{A} \cap Y \neq \phi$;

3) $f(\bar{A} \cap Y) \subset \bar{A}$.

В силу минимальности M заключаем, что $\bar{A} = M$.

Пусть $x \in M$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Имеем: $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \phi$. Пусть $y \in B(x,\varepsilon) \cap A$. Имеем: $y \in \cap\{B(f^m(a), r) \cap M \mid m \in \mathbb{Z}^+ \& m \geqslant n\}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}^+$. Следовательно, $(\cap\{T(\{f^m(a) \mid m \in \mathbb{Z}^+ \& m \geqslant n\}) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}) \cap Y =: B \subset B(y,r)$. Тем самым, $B \subset B(x, r+\varepsilon)$. В силу произвольности $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$: $B \subset B(x,r)$.

Вследствие условия 4 $B \neq \phi$. Пусть $z \in B$. Тогда $z \in B(x,r)$. В силу произвольности $x \in M$ $z \in \cap\{B(x,r) \mid x \in M\}$. Следовательно, $z \in (\cap\{B(x,r) \mid x \in M\}) \cap M =: C$.

Таким образом:

I) C - T-замкнуто;

2) $C \cap Y \neq \phi$.

Установим, что $f(C \cap Y) \subset C$.

Допустим существование такого $x \in C \cap Y$, что $f(x) \notin C$.

Тогда найдется такое $y \in M$, что $f(x) \notin B(y,r)$ т.е., $y \notin B(f(x),r)$. Тем самым, $\mathfrak{A} := B(f(x),r) \cap M$ — собственное подмножество множества M, что противоречит минимальности M, ибо:

I) $\mathfrak{A}$ - T-замкнуто;

2) $\mathfrak{A} \cap Y \neq \phi$ $(x \in \mathfrak{A} \cap Y)$;

3) $f(\mathfrak{A} \cap Y) \subset \mathfrak{A}$ (ещё раз пользуемся тем, что f - нерастягивающее).

Заключаем, что $f(C \cap M) \subset C$. Тогда в силу минимальности M $C = M$. Одновременно $\operatorname{diam} C \leqslant r < \operatorname{diam} M \cap Y \leqslant \operatorname{diam} M$. Заключаем, что $f(M \cap Y) \subset Y$.

Следовательно, $f(M \cap Y) \subset M \cap Y$.

Еще раз пользуясь минимальностью M, заключаем, что $M \cap Y = M$.

Следовательно, $f(M) \subset M$.

Согласно доказанному предположение, что M содержит более одной точки, приводит к противоречию. Впрочем, доказательство можно завершить также ссылкой на [I, теорема 4, с. 67].

Список литературы

I. Лиепиньш А.Х. Колыбельная для маленького тигрёнка о неподвижных точках // Топологические пространства и их отображения.- Рига, I983.- С.6I-69.

2. Belluce L.P., Kirk W.A. Fixed point theorems for certain classes of nonexpansive mappings//Proc. Amer. Math. Soc.- 1969.- V.20.- P.141-146.

3. Kannan R. Fixed point theorems in reflexive Banach spaces//Proc. Amer. Math. Soc.- 1973.- V.38.- P.111-118.

4. Лиепиня И.Т., Лиепиньш А.Х. Разрешимость уравнения Кэннэна для процессов в сплошных средах // Моделирование физических процессов в сплошных средах. - Рига, I985.- С.I44-I48.

Поступила 29 апреля I985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 515.12

ОСЛАБЛЕННЫЕ ФОРМЫ АКСИОМЫ МАРТИНА

В.И.Малыхин
Московский институт управления им. С.Орджоникидзе

В заметке рассматриваются несколько теоретико-множественных предположений, последовательно более слабых, начиная с аксиомы Мартина. Важнейшие из них – сама аксиома Мартина MA, лемма Буса LB, аксиома Мартина для счетных множеств MAC. Даются эквивалентные характеристики этих утверждений на языке частично упорядоченных (ч.у.) множеств и на топологическом языке.

А. Приведем необходимую для дальнейшего информацию.

Пусть $\mathcal{P}$ – ч.у. множество. Элементы $p, q \in \mathcal{P}$ называются совместными, если существует $r \in \mathcal{P}$ такой, что $r \leq p$, $r \leq q$, и несовместными в противном случае. Говорят, что ч.у. множество удовлетворяет условию Суслина, если всякое его подмножество, состоящее из попарно несовместных элементов, счетно, в этом случае пишут: $c(\mathcal{P}) = \aleph_0$. Подмножество D из $\mathcal{P}$ называется плотным в $\mathcal{P}$, если для всякого $p \in \mathcal{P}$ найдется $d \in D$, такой что $d \leq p$.

Пусть, далее, $\mathcal{F}$ – семейство подмножеств из $\mathcal{P}$, тогда подмножество G из $\mathcal{P}$ называется $\mathcal{F}$-генерическим, если выполняются все три утверждения:

I) если $q \in G$ и $p \geq q$, то $p \in G$;

2) для любых $p, q \in G$ найдется $r \in G$, такой что $r \leq p$, $r \leq q$;

3) $G \cap D \neq \emptyset$ для всякого плотного в $\mathcal{P}$ подмножества $D \in \mathcal{F}$.

Б. Теперь все готово для формулировок.

Аксиома Мартина MA. Пусть $\mathcal{P}$ – ч.у. множество, $c(\mathcal{P}) = \aleph_0$ и $\mathcal{F}$ – семейство плотных подмножеств $\mathcal{P}$, $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$, тогда существует $\mathcal{F}$-генерическое подмножество $G \subset \mathcal{P}$.

Легко доказать, что континуум-гипотеза CH влечет выполнимость MA, так что нетривиальным является совместность MA с отрицанием CH.

В 1971 г. Р.Соловэй и С.Тенненбаум [1] доказали совместность с ZFC конъюнкции (MA + " $\mathfrak{c}$ - произвольный регулярный кардинал").

Вскоре после открытия MA, а именно, в 1971 г. И.Юхас [2] доказал, что MA эквивалентна следующему утверждению, которое обозначим через

<u>Irr (Sousl.)</u>. Никакой бикомпакт, удовлетворяющий условию Суслина, не является суммой менее $\mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств.

В 1977 г. мной [3] доказана эквивалентность MA еще одному, также чисто топологическому утверждению

<u>ТОЗ (Сусл.)</u>. Всякое неприводимое отображение бикомпакта, веса менее $\mathfrak{c}$ и удовлетворяющего условию Суслина, в хаусдорфово пространство имеет плотное множество точек взаимной однозначности. (Здесь и далее все рассматриваемые отображения предполагаются непрерывными.)

В 1970 г. Д.Бус [4] доказал, что MA влечет следующее утверждение, за которым закрепилось название <u>леммы Буса LB</u>.

LB. Если ξ - семейство подмножество ω, $|\xi| < \mathfrak{c}$ и $|\cap \xi'| = \aleph_0$ для любого конечного подсемейства $\xi' \subseteq \xi$ то существует $B \subseteq \omega$, $|B| = \aleph_0$ такое, что $|B \setminus A| < \aleph_0$ для любого $A \in \xi$.

В 1979 г. Ю.Ройтман [5] ввела ослабленную форму аксиомы Мартина, обозначив ее

<u>$MA_{\Sigma\text{-ц.}}$</u>. Пусть $\mathcal{P}$ - ч.у. множество, являющееся суммой счетного числа своих центрированных подмножеств, и $\mathcal{F}$ - семейство мощности меньше $\mathfrak{c}$ плотных подмножеств $\mathcal{P}$, тогда существует $\mathcal{F}$ -генерическое подмножество $G \subset \mathcal{P}$.

Примерно в это же время К.Кунен и Ф.Толл [6] заметили, что $MA_{\Sigma\text{-ц.}}$ эквивалентно следующему утверждению, которое обозначим через

Irr (Sep.). Никакой сеперабельный бикомпакт не является суммой менее $\mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств.

В 1981 г. М.Белл [7] доказал, что $MA_{\Sigma\text{-ц.}}$ и LB эквивалентны.

Ниже доказывается, что LB, $MA_{\Sigma\text{-ц.}}$ и Irr (Sep.) эквивалентны каждое следующему чисто топологическому утверждению.

ТОЗ (Сеп.). Всякое неприводимое отображение сепарабельного бикомпакта веса меньше $\mathfrak{c}$ в хаусдорфово пространство имеет плотное множество точек взаимной однозначности.

В 1980 г. М.Белл [8] упомянул об утверждении, которое обозначим здесь через MAC и назовем аксиомой Мартина для счетных множеств.

MAC. Пусть $\mathcal{P}$ - счетное ч.у. множество, $\mathcal{F}$ - семейство плотных подмножеств $\mathcal{P}$, $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$, тогда существует $\mathcal{F}$ -генерическое подмножество $G \subset \mathcal{P}$.

Ниже доказывается, что MAC эквивалентно каждому из следующих двух утверждений.

Irr (π-base). Никакой бикомпакт (компакт) со счетной π -базой не является суммой менее $\mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств.

ТОЗ (π-база). Всякое неприводимое отображение бикомпакта со счетной π -базой и веса менее $\mathfrak{c}$ в хаусдорфово пространство имеет плотное множество точек взаимной однозначности.

Как видно из вышеперечисленного, получаются серии эквивалентных друг другу утверждений: на языке ч.у. множеств, утверждений о неразложимости в сумму нигде не плотных подмножеств, и о наличии точек взаимной однозначности для неприводимых отображений.

Характерно, что если еще ослабить эти утверждения, то получим верные в ZFC утверждения, которые эквивалентны приводимым ниже.

I.0. Пусть $\mathcal{P}$ - ч.у. множество, $\mathcal{F}$ - счетное семейство плотных подмножеств $\mathcal{P}$, тогда существует $\mathcal{F}$ - -генерическое подмножество.

2.0. Никакой компакт (бикомпакт) не является суммой счетного числа нигде не плотных подмножеств.

3.0. Всякое неприводимое отображение компакта в хаусдорфово пространство имеет плотное множество точек взаимной однозначности.

Наоборот, снимая ограничение "удовлетворять условию Суслина" в формулировках MA и эквивалентных, получаем недоказуемые в ZFC утверждения.

0.I. Пусть $\mathcal{P}$ - ч.у. множество, $\mathcal{F}$ - семейство плотных подмножеств $\mathcal{P}$, $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$, тогда существует $\mathcal{F}$-генерическое подмножество $G \subset \mathcal{P}$.

0.2. Никакой бикомпакт не разлагается в сумму менее $\mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств.

0.3. Всякое неприводимое отображение бикомпакта веса меньше $\mathfrak{c}$ в хаусдорфово пространство имеет плотное множество точек взаимной однозначности.

Эти три утверждения эквивалентны друг другу и CH (в рамках ZFC). Они, очевидно, выполняются в предположении CH и неверны при отрицании CH, ибо, например, бикомпакт $(\omega_1+1)^\omega$, имеющий вес $\aleph_1$, разлагается в сумму $\aleph_1$ нигде не плотных подмножеств; отсюда вытекает, что утверждение 0.2 неверно в предположении отрицания CH.

Итак, получается следующая стройная схема:

0 $\quad$ 0.I $\longleftrightarrow$ 0.2 $\longleftrightarrow$ 0.3

I $\quad$ MA $\longleftrightarrow$ Irr (Sousl.) $\longleftrightarrow$ TO3 (Сусл.)

II $\quad$ $\mathrm{MA}_{\text{z-ц.}}$ $\longleftrightarrow$ Irr (Sep.) $\longleftrightarrow$ TO3 (Сеп.) $\longleftrightarrow$ LB

III $\quad$ MAC $\longleftrightarrow$ Irr (π-base) $\longleftrightarrow$ TO3 (π-база)

IУ $\quad$ I.0 $\longleftrightarrow$ 2.0 $\longleftrightarrow$ 3.0

$$0 \longrightarrow \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{II} \longrightarrow \mathrm{III} \longrightarrow \mathrm{IУ} \longleftarrow \mathrm{ZFC}.$$

(Разумеется, при доказательстве каждой из указанных импликаций надо вместе с посылкой использовать и систему ZFC аксиом).

Б. Напомним, как доказываются основные типы импликаций в приведенной схеме

MA $\longrightarrow$ Irr (Sousl.) $\qquad$ (И.Юхас [2]).

Пусть MA выполняется, а (B,τ) – бикомпакт, $c(B)=\aleph_0$ и $\mathcal{W}$ – семейство мощности меньше $\mathfrak{c}$ плотных открытых подмножеств B. Достаточно доказать, что $\cap\mathcal{W}\neq\emptyset$. За ч.у. множество $\mathcal{P}$ возьмем τ^* (т.е. τ без пустого множества), и пусть $U\leq V$ для $U,V\in\tau^*$ если и только если $U\subseteq V$; тогда $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию Суслина. Для $W\in\mathcal{W}$ пусть $F_W=\{V\in\tau^*:[V]\subseteq W\}$, тогда F_W плотно в $\mathcal{P}$. Итак, семейство $\mathcal{F}=\{F_W:W\in\mathcal{W}\}$ имеет мощность меньше $\mathfrak{c}$ и состоит из плотных подмножеств $\mathcal{P}$. Значит по MA существует $\mathcal{F}$-генерическое подмножество $G\subset\mathcal{P}$. Как легко видеть, G -центрированное семейство непустых открытых подмножеств бикомпакта, значит $\cap\{[V]:V\in G\}\neq\emptyset$. Пусть W – произвольный элемент из $\mathcal{W}$. Так как $G\cap F_W\neq\emptyset$, то в G есть V' такое, что $[V']\subseteq W$ значит $\cap\{[V]:V\in G\}\subseteq[V']\subseteq W$, тем самым, $\cap\{[V]:V\in G\}\subseteq\mathcal{W}$, следовательно $\cap\mathcal{W}\neq\emptyset$.

$MAC\rightarrow TO3$ (π-база) (В.И.Малыхин, см. [3]).

Пусть MAC выполняется, а B – бикомпакт со счетной π-базой, φ -неприводимое отображение на какое-нибудь хаусдорфово пространство X. Пусть Π – какая-нибудь счетная π-база в X, существующая в силу неприводимости φ, $\mathcal{W}$ – база в B, $|\mathcal{W}|<\mathfrak{c}$, существующая по предположению. Пусть E – произвольное непустое открытое подмножество B и $\Pi_E=\{V\in\Pi:\varphi^{-1}(V)\subseteq E\}$. В силу неприводимости φ $\Pi_E\neq\emptyset$. Введем на Π_E частичный порядок, положив $U\leq V$, если и только если $[U]\subseteq V$. Для всякого $W\in\mathcal{W}$ положим $F_W=\{V\in\Pi_E:[\varphi^{-1}(V)]\subseteq W$ или $\varphi^{-1}(V)\cap W=\emptyset\}$. Докажем, что каждое F_W плотно в $(\Pi_E,\leq)$. Пусть V -любой элемент Π_E. Если $\varphi^{-1}(V)\cap W\neq\emptyset$, то в силу неприводимости φ (и регулярности X, ибо X -бикомпакт) найдется $U\in\Pi_E$, $[U]\subseteq V$ и $\varphi^{-1}([U])\subseteq\varphi^{-1}(V)\cap W$, а тогда и $[\varphi^{-1}(U)]\subseteq W$, тем самым, $U\in F_W$. Если же $\varphi^{-1}(V)\cap W=\emptyset$, то $V\in F_W$. Плотность F_W доказана. Семейство $\mathcal{F}=\{F_W:W\in\mathcal{W}\}$ имеет мощность меньше $\mathfrak{c}$ и состоит из плотных подмножеств. Значит, по МАС существует $\mathfrak{T}$ -генерическое подмножество $G \subset \mathcal{P}$. Как семейство подмножеств X, G центрировано, а в силу его строения и бикомпактности X $\cap G \neq \emptyset$. Пусть b - произвольная точка из $\cap G$; докажем, что $|\varphi^{-1}(b)| = 1$ Предположим, что существуют две различные точки в $\varphi^{-1}(b)$. Тогда найдется какой-то элемент $W \in \mathcal{W}$, содержащий только одну из этих точек. Так как $G \cap F_W \neq \emptyset$, то в G есть V такое, что $[\varphi^{-1}(V)] \subseteq W$ или $\varphi^{-1}(V) \cap W = \emptyset$, т.е. $\varphi^{-1}(V)$ не содержит одну из этих точек. Доказано, что в E есть точка взаимной однозначности.

Для доказательства импликаций вида $\mathrm{TO3} \to \mathrm{I}_{\tau\tau}$ используем следующее построение. (Автор благодарен Л.Б.Шапиро, указавшему на это построение.)

Напомним сначала, что такое веерное произведение (см., например, [9, с. 152-156]).

Пусть дана система непрерывных отображений $f_\alpha : B_\alpha \to B$, $\alpha \in \mathcal{A}$ топологических пространств B_α в топологическое пространство B. Через $X(B, \mathcal{A})$ обозначим множество тех точек $\bar{b} = (b_\alpha) \in \Pi\{B_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, для каждой из которых существует такая точка $b \in B$, что $f_\alpha(b_\alpha) = b$. Множество $X(B, \mathcal{A})$, снабженное топологией подпространства из $\Pi\{B_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, и называется веерным произведением семейства пространств B_α относительно отображений $f_\alpha : B_\alpha \to B$.

Нетрудно доказать следующие утверждения о веерных произведениях.

I. $w(X(B, \mathcal{A})) = w(B) \cdot |\mathcal{A}|$.

(Через $w(Z)$ обозначается вес пространства Z).

2. Если B и все B_α бикомпакты, то отображение $f : X(B, \mathcal{A}) \to B$, определенное естественным образом: $f(\bar{b}) = b$ (см. выше) совершенно. Пусть $f_c : F(B, \mathcal{A}) \to B$ - его неприводимое сужение. Тогда, если для всякой точки $b \in B$ найдется $\alpha \in \mathcal{A}$ такое, что $|f_\alpha^{-1}(b)| > 1$, то f_c не имеет точек взаимной однозначности.

Пусть теперь бикомпакт B есть сумма семейства $\mathcal{A}$

своих замкнутых и нигде не плотных подмножеств C_α. Предположим, что B удовлетворяет условию Суслина, тогда каждое C_α содержится в замкнутом и нигде не плотном подмножестве B_α типа G_δ. Для каждого B_α проделаем следующее.

Найдем убывающую последовательность замкнутых канонических подмножеств: $B = B_\alpha^0 \supset B_\alpha^1 \supset \ldots B_\alpha^n \supset \ldots$ таких, что $\operatorname{Int} B_\alpha^n \supset B_\alpha^{n+1}$ для всякого $n \in \omega$ и $B_\alpha = \cap\{B_\alpha^n : n \in \omega\}$. Положим $Y_\alpha^0 = (\cup\{B_\alpha^{2n} \setminus \operatorname{Int} B_\alpha^{2n+1} : n \in \omega\} \cup B_\alpha) \times \{0\}$, $Y_\alpha^1 = (\cup\{B_\alpha^{2n+1} \setminus \operatorname{Int} B_\alpha^{2n+2} : n \in \omega\} \cup B_\alpha) \times \{1\}$ и пусть $Y_\alpha = Y_\alpha^0 \cup Y_\alpha^1$. Пусть f_α - естественная проекция на B. Заметим, что f_α неприводимо и $|f_\alpha^{-1}(b)| \geq 2$ для любой точки $b \in B_\alpha$.

Пусть $X(B, \mathcal{A})$ - веерное произведение семейства пространств Y_α относительно отображений $f_\alpha : Y_\alpha \to B$. Из указанных выше утверждений I-3) вытекает, что отображение $f_c : F(B, \mathcal{A}) \to B$ неприводимо и не имеет точек взаимной однозначности и $w(F(B, \mathcal{A})) \leq w(B) \cdot |\mathcal{A}|$.

Поскольку при неприводимом отображении π-вес, плотность и число Суслина одинаковы для образа и прообраза, из рассмотренной конструкции вытекают сразу все три импликации:

TO3 (Sousl.) $\to$ Irr (Sousl.) ; TO3 (Sep.) $\to$ Irr (Sep.) ;

TO3 (π-база) $\to$ Irr (π-base).

Осталось пояснить еще импликации вида Irr $\to$ MA. Поясним эти импликации на примере импликации

Irr (Sousl.) $\to$ MA (И.Юхас [2]).

Пусть Irr (Sousl.) выполняется, надо доказать выполнимость MA. Как показано в [IO, стр. IO5] для выполнимости MA (в полном объеме) достаточно ее выполнения для ч.у. множеств мощности меньше $\mathfrak{c}$. Итак, пусть $\mathcal{P}$ - ч.у. множество и $|\mathcal{P}| < \mathfrak{c}$, а $\mathcal{F}$ - семейство мощности меньше $\mathfrak{c}$ плотных подмножеств $\mathcal{P}$. Напомним, что для каждого ч.у. множества $\mathcal{P}$ существует единственное (с точностью до изоморфизма) отделимое ч.у. множество Q и такой гомоморфизм h, отображающий $\mathcal{P}$ на Q, что для всех $p, q \in \mathcal{P}$.

p, q совместны в $\mathcal{P} \longleftrightarrow h(p), h(q)$ совместны в Q (см. [10, с. 52]). Ч.у. множество называется отделимым, если из $q \nleq p$ следует существование элемента $r \leq q$ такого, что r несовместимо с p). Как легко видеть, выполнение MA для ч.у. множества Q влечет выполнение MA для $\mathcal{P}$. Таким образом, достаточно доказать выполнимость MA для любого отделимого ч.у. множества Q мощности меньше $\mathfrak{c}$. Но каждое такое ч.у. множество можно реализовать как π-базу экстремально несвязного бикомпакта - Стоуновского пространства полной булевой алгебры, в которую Q вкладывается в качестве плотного подмножества. Обозначим этот бикомпакт через $St(Q)$. Так как $\mathcal{P}, Q$ удовлетворяют условию Суслина, то и $St(Q)$ тоже удовлетворяет условию Суслина. Нетрудно доказать, что неразложимость $St(Q)$ в сумму менее $\mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств эквивалентна выполнению MA для Q.

B. Все аналоги аксиомы Мартина можно разделить на две большие группы.

В I-ю группу входят утверждения о неразложимости в сумму менее $\mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств бикомпактов, обладающих свойствами типа свойства Суслина или сепарабельности, а также утверждения, эквивалентные этим.

Во II-ю группу входят утверждения, относящиеся к строению семейств подмножеств ω или ч.у. множества функций ω^{ω}.

Даже самые слабые утверждения I-ой группы влекут ограничения на кардинальную арифметику, например, LB влечет $2^{\aleph_0} = 2^{m}$ для всякого бесконечного кардинала $m < \mathfrak{c}$ - это доказал еще Ф.Русбергер [II] в 1948 г.

Наоборот, любое утверждение II-ой группы совместно с любой кардинальной арифметикой.

Утверждения I-ой группы таковы:

k. Не разлагается в сумму менее $\mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств бикомпакт B со свойством, указанным ниже в п. k.

0. Любой бикомпакт.

Как уже указывалось, это утверждение неопровержимо и недоказуемо в ZFC; в предположении CH оно выполняется, при отрицании CH оно ложно, т.е. это утверждение эквивалентно CH.

1. $c(B) = \aleph_0$.

Это и есть MA.

2. Если B таков, что $c(B \times K) = \aleph_0$ для любого бикомпакта K такого, что $c(K) = \aleph_0$. Это утверждение иногда обозначают $MA(Prod.)$.

3. B имеет свойство K, т.е. из любого несчетного семейства его открытых подмножеств выделяется несчетное же подсемейство, любые два элемента в котором пересекаются. Это утверждение иногда обозначают $MA(K)$.

4. B имеет $\aleph_1$ своим калибром, т.е. из любого несчетного семейства открытых подмножеств можно выделить несчетное центрированное подсемейство.

5. Если топология B (без пустого множества) распадается в счетное число семейств, в каждом из которых любые два элемента пересекаются. Это утверждение Ю.Ройтман [5] обозначает $MA_{\Sigma-cl}$.

6. $d(B) \le \aleph_0$, т.е. B - сепарабельный бикомпакт.

Как уже указывалось, это утверждение эквивалентно лемме Буса, а также $MA_{\Sigma-c}$.

Так как свойства бикомпактов, сформулированные в пп. 0-4,6, последовательно усиливаются, то соответствующие формы аксиомы Мартина ослабляются.

II-я группа.

Эквивалентные утверждения обозначаются одним и тем же номером со штрихами.

Частичный порядок во множестве функций ω^ω определяется как следующий: $f \le g$ если и только если найдется $n \in \omega$ такое, что $f(k) \le g(k)$ для всякого $k \in \omega \setminus n$.

7. В ω^ω нет неограниченного подмножества мощности меньше $\mathfrak{c}$.

8. $L(\mathfrak{c}) =$ " В D^ω есть плотное лузинское подмножество мощности $\mathfrak{c}$ ".

9. MAC, т.е. аксиома Мартина для счетных множеств.

Очевидно, что 9 следует из 8.

9'. $K(\mathfrak{c})$ = "Никакой компакт не является суммой менее $\mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств".

10. Всякая база фильтра на ω мощности меньше $\mathfrak{c}$ продолжается до селективного ультрафильтра.

11. В ω^ω нет шкал (т.е. конфинальных или плотных по частичному порядку подмножеств) мощности меньше $\mathfrak{c}$.

11'. Всякая база фильтра на ω мощности меньше $\mathfrak{c}$ продолжается до P-точки.

Эквивалентность 10 и 11' доказана Ю.Кетоненом [12]. Он же доказал, что из 9' следует 10.

12. Нет ультрафильтра на ω с базой мощности меньше $\mathfrak{c}$.

13. Существуют селективные ультрафильтры на ω.

14. Существуют P-точки на ω.

15. В ω^ω нет лестниц (т.е. шкал, частичный порядок на которых есть вполне упорядочение) мощности меньше $\mathfrak{c}$.

16. ω^* и m^* не гомеоморфны для любого несчетного регулярного кардинала m.

В 1978 г. Б.Бальцар и Р.Франкиевич [13] доказали, что из гомеоморфизма $\omega^* = \beta\omega\setminus\omega$ и $m^* = \beta m\setminus m$, где m - дискретное пространство регулярной несчетной мощности, вытекает, что в ω^ω есть лестница длины m.

Из этого результата следует импликация ($15 \to 16$).

17. Нет максимального почти дизъюнктного семейства мощности меньше $\mathfrak{c}$ подмножеств ω.

18. На ω нет башен мощности меньше $\mathfrak{c}$.

Под башней можно понимать убывающую вполне упорядоченную систему непустых открыто-замкнутых подмножеств $\beta\omega\setminus\omega$, пересечение которой имеет пустую внутренность.

19. На ω нет расщепляющего семейства мощности меньше $\mathfrak{c}$.

Семейство S подмножеств ω называется расщепляющим, если для всякого $a \subseteq \omega$, $|a| = \aleph_0$ найдется $s \in S$ такое, что $|s \cap a| = |a \setminus s| = \aleph_0$.

Доказано нами [14], что из существования расщеплящего семейства мощности m следует существование башни мощности не более m. Значит, справедлива импликация (I8 $\longrightarrow$ I9).

I9'. Для любого $m < \mathfrak{c}$ D^m секвенциально компактно.

Эквивалентность I9 и I9' доказана нами [I4].

Г. В каких моделях выполняются или не выполняются те или иные формы аксиомы Мартина?

Для выполнения утверждений I-ой группы необходимо строить специальные модели. Известен следующий важный результат, (см. о нем в работе Ю.Ройтман [5]).

Пусть $\mathfrak{M}$ - произвольная модель, тогда

если $MA_{\Sigma-ц.}$ верно в $\mathfrak{M}$, то $MA_{\Sigma-ц.}$ остается верной и при добавлении к $\mathfrak{M}$ одного коэновского подмножества ω.

Очень интересно, что при добавлении одного коэновского или случайного подмножества ω некоторые следствия MA продолжают выполняться, другие перестают выполняться (см. об этом работу Ю.Ройтман [5] или обзор [I5]). Это помогает понять большое различие между MA и LB.

Что же касается утверждений II-ой группы, то здесь ситуация совсем другая. Имеет место следующее утверждение, ставшее, в сущности, уже частью теоретико-множественного фольклора.

При добавлении $k = \mathfrak{c}$ коэновских подмножеств ω в расширенной модели выполняются утверждения 8-I6 II-ой группы, но при $k > \aleph_1$ не выполняются утверждения 7, I7, I8, I9, I9' II-ой группы. Остается заметить, что при добавлении не более $\mathfrak{c}$ коэновских подмножеств ω кардинальная арифметика остается неизменной.

Список литературы

1. Solovay R., Tennenbaum S. Iterated Cohen extensions and Souslin's problem//Ann. of Math.-1971.- V.94.- P.201-245.

2. Juhasz.I. Cardinal functions in topology// Math.Centre Tracts.- 34.- Amsterdam, 1971.
3. Малыхин В.И. Эквивалентность аксиомы Мартина и одного чисто топологического утверждения// Бюлл.Польск.Акад. Наук. Сер.мат.- 1977.- Т.25.- №9.- С.895-900.
4. Booth D. Ultrafilters on countable sets// Proc. Amer. Math. Soc.- 1976.- V.55.- N1.- P.119-124.
5. Roitman J. Adding a random or a Cohen real: topological consequences.and effect on Martin's axiom// Fund. math.- 1979.- V.103.- N1.- P.47-60.
6. Kunen K., Tall F.D. Between Martin's axiom and Souslin's hypothesis// Fund. math.- 1979.- V.102.- N3.- P.173-181.
7. Bell.M.G. On the combinatorial principle $P(c)$ // Fund. math.-.1981.- V.114.- N2.- P.149-157.
8. Bell M.G. Compact CCC nonseparable spaces.of small weight// Top. Proc.- 1980.- V.5.- P.11-25.
9. Александров П.С.,Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности.- М., 1973.
10. Иех Т. Теория множеств и метод форсинга.- М., 1973.
11. Rothberger.F. On.some problem of Hausdorff and Sierpinski// Fund. math.- 1948.- V.35.- P.29-46.
12. Ketonen J. On the existence of P-points in the Stone-Čech compactification of integers// Fund. math.- 1976.- V.92.- N2.- P.91-94.
13. Balcar B., Frankiewicz R. To distinguish topologically the spaces m^*..II// Bull.Acad.Pol.sci. Ser.math.- 1978.- V.26.- N6.- P.521-523.
14. Малыхин В.И. Существование топологических объектов при произвольной кардинальной арифметике// ДАН СССР.- 1985.- Т.286.- №3.- С.542-546.
15. Малыхин В.И. Топология и форсинг// УМН.- 1983.- Т.38.- №1.- С.69-118.

Поступила 25 марта 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига.1986.

УДК 515.12

О СУЩЕСТВОВАНИИ НАСЛЕДСТВЕННО СЕПАРАБЕЛЬНОГО НЕСЕКВЕНЦИАЛЬНОГО БИКОМПАКТА

В.И.Малыхин
Московский институт управления им. С.Орджоникидзе

Проблема существования в ZFC и даже в предположении CH несеквенциального бикомпакта счетной тесноты широко известна (см., например, [I]). В настоящей статье эта проблема не решена, однако полученные результаты близки, в некотором смысле, к желаемым.

Теорема I. При добавлении $\aleph_1$ коэновских подмножеств ω в расширенной модели возникает наследственно сепарабельный несеквенциальный бикомпакт мощности $\aleph_1$.

Теорема 2. При добавлении одного коэновского подмножества ω к модели, в которой выполняется CH, в расширенной модели возникает наследственно сепарабельный несеквенциальный бикомпакт мощности $\aleph_1$.

Прокомментируем эти результаты.

I. Первые примеры наследственно сепарабельных несеквенциальных бикомпактов построили Б.В.Федорчук [2] в 1975г. и А.Осташевский [3] в 1976 г., используя для этой цели так называемый принцип Йенсена $\Diamond$ - одно из следствий аксиомы конструктивности. Напомним, что аксиома конструктивности влечет выполнение обобщенной континуум-гипотезы.

2. З.Сент-Миклоши доказал, что в предположении $[MA + \neg CH]$ всякий бикомпакт счетного спрэда совершенно нормален (см. об этом в [I]). Следовательно, в ZFC нет примера наследственно сепарабельного несеквенциального бикомпакта.

3. Добавление одного коэновского подмножества ω - это, в некотором смысле, минимальное возмущение исходной модели, так что посылки в теореме 2 весьма близки просто к предположению CH.

4. При добавлении не более $\mathfrak{c}$ коэновских подмножеств ω кардинальная арифметика в расширенной модели точно такая же как в исходной, поэтому из теоремы I вытекает

Следствие. Утверждение о существовании наследственно сепарабельного несеквенциального бикомпакта совместно с любой кардинальной арифметикой.

5. Получить аналог теоремы 2 без упоминания CH невозможно. В самом деле, добавим одно коэновское подмножество ω к модели, в которой выполняется $[MA + \neg CH]$, тогда в расширенной модели кардинальная арифметика та же самая, что и в исходной, и в ней выполняется лемма Буса LB (согласно результатам Ю.Ройтман [4] и М.Белла [5]), следовательно, в расширенной модели выполняется $[LB + \neg CH]$. Но в этом предположении всякая точка счетной тесноты и характера меньше $\mathfrak{c}$ есть точка Фреше-Урысона (см., например, [6]). Значит всякий наследственно сепарабельный бикомпакт мощности $\aleph_1$ в этой модели есть бикомпакт Фреше-Урысона.

Перейдем к доказательству объявленных теорем. Для их понимания требуется знание форсинга, например, в объеме с. 109-113 из [7].

Доказательство теоремы I. Обозначим через $\mathcal{F}_{\omega\times m}$ частично упорядоченное (сокращенно, ч.у.) множество функций f с $\operatorname{rng} f \subseteq \{0,1\}$, $\operatorname{dom} f \subset \omega\times m$, $|\operatorname{dom} f| < \aleph_0$ с частичным порядком $f \leq g$, если и только если $f \supseteq g$. Добавлением m новых коэновских подмножеств ω к модели $\mathfrak{M}$ называется переход к ее генерическому расширению $\mathfrak{M}[G]$, где G - какое-нибудь $\mathfrak{M}$ -генерическое подмножество $\mathcal{F}_{\omega\times m}$. (Под моделью понимается счетная стандартная транзитивная модель для системы ZFC аксиом теории множеств.) Итак, одно коэновское подмножество ω добавляется с помощью ч.у. множества $\mathcal{F}_{\omega}$, при этом само "новое" коэновское подмножество ω есть $c = \{n\in\omega :$ существует $f\in G$, для которого $f(n)=1\}$. Саму расширенную модель, содержащую c, будем обозначать через $\mathfrak{M}[c]$. Несложно убедиться, что в $\mathfrak{M}[c]$ новое коэновское подмножество c обладает следующим свойством:

(*). $|a\cap c| = |a\setminus c| = \aleph_0$ для любого $a\subseteq\omega$, $a\in\mathfrak{M}$, $|a| = \aleph_0$.

Основное рассуждение. Пусть $\mathfrak{M}$ - произвольная модель, α - счетный бесконечный ординал, τ - хаусдорфова локально-компактная некомпактная топология на α. Пусть $\{B_n : n \in \omega\}$ - какое-нибудь бесконечное дизъюнктное покрытие пространства (α, τ) непустыми открыто-замкнутыми компактами. Пусть c есть $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество ω. В $\mathfrak{M}[c]$ определим топологию τ' на $\alpha+1$, взяв за базу окрестностей α семейство множеств $\{\{\alpha\} \cup (\cup\{B_n : n \in c \setminus \Delta\}) : \Delta \subset \omega, |\Delta| < \aleph_0\}$; в точках же из α базу топологии τ' пусть образует прежняя топология τ. Ясно, что в $\mathfrak{M}[c]$ на $\alpha+1$ задана хаусдорфова локально-компактная топология τ'. Для нас главнейшим ее свойством является следующее:

($*_\alpha$). Пусть $A \subseteq \alpha$, $A \in \mathfrak{M}$ и A не содержится в сумме никакого конечного семейства компактов из (α, τ), тогда в $\mathfrak{M}[c]$ $\alpha \in [A]_{\tau'}$ и A по-прежнему не содержится в сумме никакого конечного семейства компактов из $(\alpha+1, \tau')$.

Это легко следует из свойства ($*$), которым обладает $\mathfrak{M}$-генерическое подмножество c. Следовательно, τ' - некомпактная топология.

Пусть теперь $\mathfrak{M}_0$ - произвольная исходная модель. В $\mathfrak{M}_0$ рассмотрим ч.у. множество $\mathcal{F}_{\omega \times \omega_1}$ (с помощью которого добавляется $\aleph_1$ коэновских подмножеств ω), пусть G_{ω_1} - какое-нибудь $\mathfrak{M}_0$-генерическое подмножество $\mathcal{F}_{\omega \times \omega_1}$, а $\mathfrak{M}_{\omega_1} = \mathfrak{M}[G_{\omega_1}]$ - соответствующее генерическое расширение $\mathfrak{M}_0$. Для каждого $\alpha \in \omega_1$ $\mathcal{F}_{\omega \times \alpha}$ будем считать естественно вложенным в $\mathcal{F}_{\omega \times \beta}$ для любого $\beta \in \omega_1 \setminus \alpha$. Тогда по теореме о произведении вынуждений (см., например, [7], с. 140) $G_\alpha = G_{\omega_1} \cap \mathcal{F}_{\omega \times \alpha}$ есть $\mathfrak{M}_0$-генерическое подмножество $\mathcal{F}_{\omega \times \alpha}$; обозначим $\mathfrak{M}_0[G_\alpha]$ через $\mathfrak{M}_\alpha$.

Получаем трансфинитную возрастающую последовательность моделей $\{\mathfrak{M}_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, причем для всякого $\alpha \in \omega_1$ $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ получается добавлением к $\mathfrak{M}_\alpha$ одного $\mathfrak{M}_\alpha$-генерического подмножества $c_\alpha \subset \omega$ - это следует из того, что $\mathcal{F}_{\omega \times (\alpha+1)} = \mathcal{F}_{\omega \times \alpha} \times \mathcal{F}_\omega$ (см. ту же теорему о произведении вынуждений). По трансфинитной же индукции, используя указанную последовательность моделей и основное рассуждение, определяем топологию τ_α на каждом $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ так, что $\tau_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$, каждая топология является хаусдорфовой, локально-компактной, некомпактной, и при $\beta > \alpha$ в $\mathfrak{M}_\beta$ (α, τ_α) есть открытое подпространство в (β, τ_β). При этом в $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ топология $\tau_{\alpha+1}$ на $\alpha+1$ имеет следующее свойство (в согласии с основным рассуждением).

$(*_\alpha)$. Если $A \subseteq \alpha$, $A \in \mathfrak{M}_\alpha$ и A не содержится в сумме никакого конечного семейства компактов из (α, τ), то в $\mathfrak{M}_{\alpha+1}$ $\alpha \in [A]_{\tau_{\alpha+1}}$ и A по-прежнему не содержится в сумме никакого конечного семейства компактов из $(\alpha+1, \tau_{\alpha+1})$.

В $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ на ω_1 зададим топологию τ, взяв за ее базу семейство $\cup\{\tau_\alpha : \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$. Ясно, что τ хаусдорфова, локально-счетна, локально-компактна. Кроме того, она имеет следующее свойство для любого $\alpha \in \omega_1 \setminus \omega$:

$(**_\alpha)$. Если $A \subseteq \alpha$, $A \in \mathfrak{M}_\alpha$ и A не содержится в сумме никакого конечного числа компактов из (α, τ), то в $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ $[A]_\tau \supseteq \omega_1 \setminus \alpha$ (отсюда вытекает, учитывая локальную счетность и локальную компактность τ, что A не содержится в сумме никакого конечного семейства компактов из (ω_1, τ)).

Учитывая строение ч.у. множества $\mathcal{F}_{\omega \times \omega_1}$, имеем (в символической записи) $\mathcal{P}(\omega) \cap \mathfrak{M}_{\omega_1} = \cup\{\mathcal{P}(\omega) \cap \mathfrak{M}_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ (через $\mathcal{P}(\omega)$ обозначено множество всех подмножеств ω).

Отсюда и из $(**_\alpha)$ вытекает, что τ имеет следующее свойство:

$(**)$. Если $A \subset \omega_1$, $|A| = \aleph_0$ и A не содержится в сумме никакого конечного семейства компактов из (ω_1, τ), то $[A]_\tau \supseteq (\omega_1 \setminus \alpha(A))$, где $\alpha(A)$ - некоторый счетный ординал. Следовательно, (ω_1, τ) счетно-компактно.

Из следующей леммы, доказательство которой несложно и опускается, вытекает наследственная сепарабельность пространства (ω_1, τ).

<u>Лемма</u>. В $\mathfrak{M}_{\omega_1}$ для всякого $B \subseteq \omega_1$, $|B| = \aleph_1$ найдется $A \subset B$ такое, что $|A| = \aleph_0$ и A не содержится

в сумме никакого конечного семейства компактов из (ω_1, τ) .

Из свойств пространства (ω_1, τ) вытеакает, что его одноточечная бикомпактификация и есть наследственно сепарабельный несеквенциальный бикомпакт.

Доказательство теоремы 2. Основным является следующее

Предложение. Пусть $\mathfrak{M}'$ получена из $\mathfrak{M}$ добавлением одного коэновского подмножества ω , тогда в $\mathfrak{M}'$ для всякого предельного ординала $\lambda \in \omega_1 \setminus \omega$ существуют последовательность ординалов $C^\lambda \subseteq \lambda$, сходящаяся к λ в порядковой топологии, и дизъюнктное семейство $\{C^\lambda_n : n \in \omega\}$ подмножеств этой последовательности такие, что

(V) если $a \in \mathfrak{M}$, $a \subseteq \lambda$ и a конфинально λ, то для каждого $n \in \omega$ множество $a \cap C^\lambda_n$ бесконечно.

Очертим доказательство этого предложения. В $\mathfrak{M}$ для всякого предельного ординала $\lambda \in \omega_1 \setminus \omega$ зафиксируем какую-нибудь последовательность $\{t^\lambda_n : n \in \omega\}$, сходящуюся к λ в порядковой топологии. Пусть $\mathcal{P}(\{t^\lambda\})$ - ч.у. множество функций p с $\operatorname{rng} p \subseteq \{0,1\}$, $\operatorname{dom} p \subset \omega \times \lambda$, $|\operatorname{dom} p| < \aleph_0$. Положим $p \leq q$ если и только если $p \supseteq q$ и $(p \setminus q)^{-1}(1) \cap t^\lambda_n = \emptyset$, где $n = |\operatorname{dom} p|$. Ясно, что $\mathcal{P}(\{t^\lambda\})$ счетно и безатомно, т.е. для любого $p \in \mathcal{P}(\{t^\lambda\})$ найдутся несовместные $q_1, q_2 \leq p$. Теперь нужна следующая

Лемма о взаимозаменяемости. Пусть $\mathfrak{M}'$ получена из $\mathfrak{M}$ добавлением одного коэновского подмножества ω , тогда для любого счетного безатомного ч.у. множества $Q \in \mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}'$ есть некоторое $\mathfrak{M}$ -генерическое подмножество $G_Q \subset Q$.

Эта лемма, в сущности, есть у К. Кунена [8, с. 212] .

Согласно этой лемме в $\mathfrak{M}'$ для всякого предельного ординала $\lambda \in \omega_1 \setminus \omega$ есть $\mathfrak{M}$ -генерическое подмножество $G_\lambda \subset \mathcal{P}(\{t^\lambda\})$. Для всякого $n \in \omega$ пусть $d^\lambda_n = \{\gamma \in \lambda :$ найдется $p \in G_\lambda$, для которого $p(n,\gamma) = 1\}$. Теперь можно проверить, что $C^\lambda = \cup\{d^\lambda_n : n \in \omega\}$ и $C^\lambda_n = d^\lambda_n \setminus (\cup\{d^\lambda_i : i < n\})$, $n \in \omega$ удовлетворяют заключению предложения.

Пусть $\mathfrak{M}$ - произвольная исходная модель / потом только предположим выполнение в ней CH /. Построим в $\mathfrak{M}'$ на ω_1 наследственно сепарабельную локально-счетную и локально-компактную топологию / напомним, что $\mathfrak{M}'$ получена из $\mathfrak{M}$ добавлением одного коэновского подмножества ω /.

Опишем общий этап индуктивного трансфинитного по типу ω_1 процесса построения этой топологии. Начальный этап малосуществен.

Пусть λ – произвольный счетный предельный ординал. Предположим, что на λ построена топология τ_λ – хаусдорфова, локально-компактная, каждый начальный отрезок $[0,\delta)$ при $\delta<\lambda$ открыт в этой топологии. Рассмотрим семейство $\{C_n^\lambda : n\in\omega\}$ и заметим, что его сумма – последовательность C^λ – есть дискретное замкнутое подпространство в (λ,τ_λ), поэтому точки из C^λ можно разделить дискретным во всем пространстве семейством открыто-замкнутых компактов $\{V_\alpha : \alpha\in C^\lambda, \alpha\in V_\alpha\}$. В точке $\lambda+n$, $n\in\omega$ определим базу окрестностей как семейство множеств вида $\{\lambda+n\}\cup(\cup\{V_\alpha : \alpha\in C_n^\lambda\setminus\Delta\})$, где $\Delta\subset C_n^\lambda$, $|\Delta|<\aleph_0$. Таким образом сформирована хаусдорфова локально-компактная топология $\tau_{\lambda+\omega}$ на $\lambda+\omega$. Ее главное свойство состоит в следующем:

(W). Если $a\in\mathfrak{M}$, $a\subseteq\lambda$ и конфинально λ, то $[a]_{\tau_{\lambda+\omega}}\supseteq(\lambda+\omega)\setminus\lambda$.

В $\mathfrak{M}'$ обозначим через τ топологию на ω_1, базу которой образует семейство $\cup\{\tau_\lambda : \lambda$ – предельный ординал из $\omega_1\setminus\omega\}$. Ясно, что τ – хаусдорфова локально-счетная локально-компактная топология. Для нас главным является такое ее свойство:

(WW). Если $a\in\mathfrak{M}$, $a\subseteq\lambda$ и конфинально λ, то $[a]_\tau\supseteq\omega_1\setminus\lambda$.

В самом деле, это свойство вытекает из того, что $[a]_\tau\supseteq(\lambda+\omega)\setminus\lambda$, а отсюда по трансфинитной индукции нетрудно доказать, что $[a]_\tau\supseteq(\lambda+\omega\cdot\delta)\setminus\lambda$ для любого $\delta\in\omega_1$, тем самым, $[a]_\tau\supseteq\omega_1\setminus\lambda$.

Теперь нужна лемма Ройтман из ее работы [4] :

Пусть $\mathfrak{M}'$ получена из $\mathfrak{M}$ добавлением одного коэновского подмножества ω и в $\mathfrak{M}'$ $A' \subseteq \omega_1, |A'| = \aleph_1$, тогда найдется $A \in \mathfrak{M}, A \subseteq A', |A| \geq \aleph_1$.

Из этой леммы и из свойства ($\mathbb{W}$) вытекает наследственная сепарабельность пространства (ω_1, τ) . В самом деле, пусть $A' \subseteq \omega_1, |A'| = \aleph_1$, тогда по лемме Ройтман найдется $A \in \mathfrak{M}, A \subseteq A', |A| = \aleph_1$. Но тогда найдется ординал $\lambda \in \omega_1$, предельный и такой, что $a = A \cap \lambda$ конфинально λ , $a \in \mathfrak{M}$, а это повлечет за собой: $[a]_\tau \supseteq \omega_1 \setminus \lambda$.

Итак, если $\mathfrak{M}$ - произвольная исходная модель, то при добавлении к ней одного коэновского подмножества ω на ω_1 возникает хаусдорфова локально-компактная локально-счетная наследственно-сепарабельная топология τ . Бикомпактифицируем (ω_1, τ) одной точкой - получим наследственно сепарабельный бикомпакт. Но это будет пространством Фреше-Урысона, если, например, в исходной модели выполняется [MA + ┐CH] ! (см. п. 5 в начале статьи). Чтобы сделать его несеквенциальным, предположим, что в исходной модели выполняется CH . При добавлении одного (и даже не более $\mathfrak{c}$) коэновского подмножества ω кардинальная арифметика в расширенной модели точно такая же, как в исходной модели, следовательно, в этом случае в расширенной модели $\mathfrak{M}'$ также выполняется CH . Прежде чем строить топологию τ на ω_1 , занумеруем все счетные бесконечные подмножества ω_1 счетными ординалами, это позволит построить τ счетно-компактной и, в конечном итоге, бикомпакт - несеквенциальным.

Дополним немного общий этап индуктивного трансфинитного процесса построения τ на ω_1 , описанный ранее. Пусть b - бесконечное подмножество в λ , не имеющее в (λ, τ_λ) предельной точки. Предположим, что $|b \cap c^\lambda_n| < \aleph_0$ для любого $n \in \omega$ /иначе все происходит по-старому/. Заметим: $b \cup c^\lambda$ также дискретно и замкнуто, поэтому его точки можно разделить дискретным во всем пространстве семейством открыто-замкнутых компактов V_ξ , $\xi \in b \cup c^\lambda, \xi \in V_\xi$. Во всех точках множества $(\lambda + \omega) \setminus \lambda$, кроме λ , базу окрестностей определим точно так же, как раньше, а в точке λ определим ее как семейство множеств

$\{\{\lambda\} \cup (\cup\{B_\xi : \xi \in (b \cup C_0^\lambda \setminus \Delta)\}) : \Delta \subset b \cup C_0^\lambda, |\Delta| < \aleph_0\}$.

Ясно, что в пространстве $(\lambda+\omega, \tau_{\lambda+\omega})$ точка λ является предельной для b.

Список литературы

I. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты//УМН.-1978.-Т.33.- № 6.- С.29-84.

2. Федорчук В.В. Вполне замкнутые отображения и совместность некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств//Матем. сб.- 1976.- Т.99.- № I.- С.3-33.

3. Ostaszewski A., On countably compact, perfectly normal spaces//J.London Math.Soc.Ser.2.-1976.-Vol.14.-N3.-P.505-516.

4. Roitman J. Adding a random or a Cohen real: topological consequences and effect on Martin's axiom//Fund. Math.-1979.- Vol.103.- N1.- P.47-60.

5. Bell M.G. On the combinatorial principle $P(\mathfrak{c})$ // Fund. Math.- 1981.- Vol.114.- N2.-P.149-157.

6. Малыхин В.И., Шапировский Б.Э. Аксиома Мартина и свойства топологических пространств//ДАН СССР.-1973.- Т.213.-№ 3.- С.532-535.

7. Справочная книга по математической логике в 4-х частях. Часть 2. Теория множеств.-М., 1982.

8. Kunen K. Set Theory.-Amsterdam-New York-Oxford, North-Holland Publ.Co., 1980.

Поступила 30 апреля 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.
УДК 515.12

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ СЕЛЕКЦИЙ

Г.М.Непомнящий
Государственный НИИ земельных ресурсов

Введение

Для топологического пространства Y обозначим через $\mathcal{F}(Y)$ семейство всех непустых замкнутых подмножеств Y, наделенное топологией Вьеториса. Целью настоящей работы является решение следующей задачи (Q_1):

(Q_1) Когда для пары многозначных отображений $\varphi, \psi : X \to \mathcal{F}(Y)$, в которой ψ является селекцией для φ, существует промежуточное непрерывное отображение $\theta : X \to \mathcal{F}(Y)$ (т.е. $\psi(x) \subset \theta(x) \subset \varphi(x)$ для всех $x \in X$)?

Естественно, при этом сами отображения φ и ψ не предполагаются непрерывными. Вопрос (Q_1) может быть следующим образом переформулирован для обычных (однозначных) отображений:

(Q_1') Какими должны быть пространства X, Y, отображение $f : X \to Y$ и подмножество $A \subset X$, чтобы нашлось такое большее подмножество $A' \supset A$ в X, что ограничение $f|_{A'}$ открыто-замкнуто (и "на")?

Задача (Q_1) естественным образом связана со следующим вопросом (Q_2), ответ на который получен в [I] (см. также [2]):

(Q_2) Когда многозначное отображение $\varphi : X \to \mathcal{F}(Y)$ имеет непрерывную многозначную селекцию $\theta : X \to \mathcal{F}(Y)$?

В дальнейшем мы будем предполагать, что ψ полунепрерывно сверху (п.н.св.) и компакто-значно, а φ является отображением Майкла (см. ниже). Поскольку известно (см. [3]), что всякое отображение Майкла имеет п.н.св. компакто-значную селекцию, то вопрос (Q_1) в указанном классе отображений является усилением вопроса (Q_2). В действительности верно и обратное: решение задачи (Q_2), найденное в [I], являетея решением и для (Q_1). Перед тем, как сформулировать соответствующий результат, приведем определение и основную теорему из [I] (теорема А). В дальнейшем вместо "многозначное отображение" будем писать "м.о.".

<u>Определение</u> [I] . М.о. $\varphi: X \to \mathcal{F}(Y)$ называется <u>отображением Майкла</u>, если выполнены следующие условия: а) X - паракомпакт; б) Y - полное метризуемое пространство; в) φ полунепрерывно снизу (п.н.сн.).

<u>Теорема А</u> [I] . Если м.о. φ является отображением Майкла, то для существования решения задачи (Q_2) достаточно выполнения следующих условий: а) семейство $\mathcal{S} = \{\varphi(x) \mid x \in X\}$ равностепенно локальносвязно (см. §I) и б) множества $\varphi(x)$ связны для всех $x \in X$. При этом м.о. θ может быть выбрано континуум-значным и продолжающим любую наперед заданную частичную непрерывную селекцию для φ .

Основным результатом настоящей работы является следующая

<u>Теорема Б.</u> Если м.о. φ является отображением Майкла, ψ п.н.св. и компакто-значно, то для решения задачи (Q_1) достаточно выполнения условий а) и б) теоремы А. При этом промежуточное отображение θ может быть выбрано континуум-значным.

Необходимость условий а) и б) для справедливости теоремы Б в классе отображений Майкла может быть установлена так же, как и для теоремы А (см. [I]). Сделаем лишь два замечания, касающихся ограничений на ψ .

I. Требовачие компакто-значности ψ объясняется, с одной стороны, известными недостатками пространства $\mathcal{F}(Y)$ (<u>всех</u> непустых замкнутых подмножеств), которые сказываются при решении задач селекции, а с другой стороны, тем, что в предположении "малости мн[illegible]тв $\theta(x_1) \cap \theta(x_2)$" непрерывная селекция θ для φ , а [illegible], и ψ , будет компакто-значной (см. §6, Предложение I).

2. Требование полунепрерывности сверху м.о. φ нельзя отбросить или заменить на полунепрерывность снизу. Действительно, в этом случае было бы возможно совпадение

$\psi = \varphi$, что повлекло бы и совпадение $\theta = \varphi$, т.е. непрерывность самого φ . Однако последняя может не иметь места при выполнении всех других предположений теоремы Б.

Для нульмерного пространства X требования теоремы Б могут быть существенно ослаблены. А именно, имеет место следующая

Теорема $Б_0$. Пусть φ является отображением Майкла, ψ п.н.св. и компакто-значно и, кроме того, $\dim X \leq 0$. Тогда существует промежуточное непрерывное компакто-значное отображение.

Доказательство теоремы $Б_0$ может быть проведено с использованием соответствующего варианта леммы I (§2), справедливость которого устанавливается непосредственно.

Для случая, когда Y есть вещественная прямая, утверждение теоремы Б может быть выведено из одного результата Э.Майкла ([5] , Теорема 3.2", (a)→ (b)). В его основе лежит теорема Даукера ([6] , Теорема 4), утверждающая, что между любыми двумя вещественнозначными функциями, полунепрерывными в классическом смысле, можно вставить непрерывную. Теорема Б известным образом обобщает этот результат Даукера на случай произвольного пространства Y .

Отметим следствие из теорем А и Б, решающее задачу (Q_1').

Следствие В (ср. [I] , следствие I.3). Пусть $f: X \to Y$ - открытое и монотонное отображение полного метризуемого пространства X на паракомпакт Y , причем семейство $\{f^{-1}(y) \mid y \in Y\}$ равностепенно локальносвязно. Если множество $K \subset X$ таково, что $f(K)$ замкнуто в Y , и отображение $f|_K : K \to f(K)$ совершенно, то можно найти такое замкнутое $L \supset K$, что ограничение $f|_L$ является открытым, монотонным и совершенным отображением L на Y .

Отметим, что все предположения о множестве K автоматически выполняются в случае компактного K . Частным случаем следствия В является следствие Г:

Следствие Г (ср. [I] , следствие I.4). Пусть X - метризуемая топологическая группа, G - связная и локально - связная подгруппа, полная как топологическая группа. Тогда для естественного проектирования $f: X \to Y = X/G$ справедливо заключение следствия В.

§I. Предварительные замечания

Ниже через X обозначается паракомпакт, на котором заданы п.н.сн. $\varphi: X \to \mathcal{F}(Y)$ и п.н.св. $\psi: X \to \mathcal{S}(Y)$, при этом $\mathcal{S}(Y) = \{F \in \mathcal{F}(Y) \mid F$ - компакт$\}$, и, кроме того, $\mathcal{C}(Y) = \{F \in \mathcal{S}(Y) \mid F$ - связно$\}$. Через (Y, ρ) обозначаем полное ограниченное равномерно локально-линейносвязное метрическое пространство Y (см. ниже) с метрикой ρ. Для подмножества $B \subset Y$ через $N_\varepsilon(B)$ обозначается ε-окрестность множества B в Y. Через $\tilde{\rho}$ и ρ^* обозначаются метрика Хаусдорфа в $\mathcal{S}(Y)$ и sup-метрика в пространстве всех отображений из X в $\mathcal{S}(Y)$ соответственно. Через $\operatorname{cov}(X)$ обозначается множество всех открытых локально-конечных покрытий X; через $N(\mathcal{U})$ - нерв покрытия $\mathcal{U} \in \operatorname{cov}(X)$; через $N^{(k)}(\mathcal{U})$ - k-остов нерва. При этом и симплициальные комплексы и соответствующие полиэдры обозначаются одинаково. Если $\sigma \in N(\mathcal{U})$ - произвольный симплекс с вершинами $U_1, \ldots, U_s$, то через $\cap\sigma$ обозначается множество $\cap\{U_i \mid i = 1, \ldots, s\}$, а через $\sigma^{(k)}$ - множество $\sigma \cap N^{(k)}(\mathcal{U})$.

Семейство подмножеств $\mathcal{S} = \{S\}$ пространства Y называется равностепенно локальносвязным, если для любой точки $y \in \cup\mathcal{S}$ и любой ее окрестности U в Y существует такая окрестность $V = V(U)$ в Y, что любую пару точек $a, b \in V \cap S$, $S \in \mathcal{S}$, можно соединить в $U \cap S$ связным множеством C. Если при этом считать C дугой, а множества U и V заменить на ε- и δ-окрестности точки y, потребовав, чтобы δ не зависило от y, то получим определение равномерной равностепенной локальной линейной связности (сокращенно, $\mathcal{S} \in UELC^0$ [4]). Функцию $\delta(\varepsilon)$ в определении свойства $UELC^0$ будем называть для краткости модулем. Если одноэлементное семейство $\{Y\} \in UELC^0$, то будем называть Y равномерно- LC^0-пространством ($Y \in ULC^0$). Соответствующий модуль будем обозначать $\delta_Y(\varepsilon)$. Основанием для рассмотрения этих равномерных метрических свойств является то, что теорема Б вытекает из следующего своего "метрического равномерного" частного случая.

Теорема Б'. То же, что и теорема Б, но, дополнительно, для некоторой метрики ρ на Y выполнены следующие условия:

а) (Y, ρ) ограничено; б) $(Y, \rho) \in ULC^0$ с модулем $\delta_Y(\varepsilon) = \varepsilon$ и в) $\mathcal{S} \in UELC^0$.

Действительно, рассуждая, как в [I], можно так вложить множество $\cup \mathcal{S}$ в некоторое банахово пространство Y', что выполнены все предположения теоремы Б' (с заменой Y на Y), кроме ограниченности ρ. Введем новую метрику ρ на Y', положив $\rho(x, y) = \|x - y\| / (1 + \|x-y\|)$. Легко видеть, что эта метрика равномерно эквивалентна исходной и превращает Y в ограниченное ULC^0-пространство с нужным модулем. В дальнейшем метрику ρ на Y и модуль $\delta(\varepsilon)$ также фиксируем. Приведем еще два определения, носящих технический характер.

Определение I. Пусть $A \subset B \subset Y$, $\mu > 0$. Назовем континуум $C \in \mathcal{C}(B)$ μ-промежуточным между A и B, если

$$C \subset \mathcal{N}_\mu(B) \quad \text{и} \quad A \subset \mathcal{N}_\mu(C).$$

Семейство таких континуумов будем обозначать $[A, \mu, B]$. Непрерывное континуум-значное м.о. $\theta: X \to \mathcal{C}(Y)$ назовем μ-промежуточным (между ψ и φ), если $\theta(x) \in [\psi(x), \mu, \varphi(x)]$ для всех $x \in X$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{U} \in cov(X)$, $u: N^{(k)}(\mathcal{U}) \to \mathcal{C}(Y)$ – непрерывное отображение, ε и $\mu > 0$. Скажем, что пара $(\mathcal{U}, u)$ является k-парой типа $\langle \varepsilon, \mu \rangle$, если для любых симплекса $\sigma \in N(\mathcal{U})$, точек $x \in \cap\sigma$ и $t \in \sigma^{(k)}$ выполнены следующие условия:

а) $diam\ \tilde{\rho}(u(\sigma^{(k)})) < \varepsilon$ и б) $u(t) \in [\psi(x), \mu, \varphi(x)]$.

При доказательстве теоремы Б будем следовать идее доказательства теоремы I.2 из [4].

§2. Три основные леммы

С помощью рассуждений, использованных при доказательстве импликации 5.I $\to$ 4.I в [4], нетрудно доказать, что теорема Б' вытекает из следующей леммы I.

Лемма I. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\eta(\varepsilon)>0$, что для всякого $\eta(\varepsilon)$-промежуточного м.о. θ и для любого $\mu>0$ найдется такое μ-промежуточное м.о. $\mathcal{T}$, что $\hat{\rho}^{*}(\mathcal{T},\theta)<\varepsilon$ и $\eta(+\infty)=+\infty$.

Для доказательства леммы I нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 2. Для любых положительных ε и μ найдутся такие положительные $\alpha(\varepsilon)$ ($\alpha(+\infty)=+\infty$) и $\lambda(\varepsilon,\mu)$, что для любой o-пары $(\mathcal{U},u)$ типа $\langle\alpha(\varepsilon),\lambda(\varepsilon,\mu)\rangle$ существует такая I-пара $(\mathcal{V},v)$ типа $\langle\varepsilon,\mu\rangle$, что всякое $V\in\mathcal{V}$ лежит в таком $U(V)\in\mathcal{U}$, что $u(U(V))=v(V)$.

(I)

Лемма 3. Для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\pi(\varepsilon)>0$, ($\pi(+\infty)=+\infty$), что для всякого $\pi(\varepsilon)$-промежуточного м.о. θ и любого $\mu>0$ существует такая o-пара $(\mathcal{U},u)$ типа $\langle 2\varepsilon,\mu\rangle$, что

$\tilde{\rho}(u(U),\theta(x))<\varepsilon$ для любых $x\in U\in\mathcal{U}$. (2)

Доказательство импликации: Лемма 2 + Лемма 3 $\to$ Лемма I аналогично доказательству импликации: 4.4 $\to$ 4.I из [I], где вместо леммы 7.I из [4] надо использовать лемму 3.

§3. Доказательство леммы 3

Предварительно нам понадобится следующая лемма 4, доказательство которой, опирающееся на лемму I.2 из [7], мы опускаем.

Лемма 4. Пусть $B\in ULC^{0}$-подмножество метрического пространства (Z,d), $\delta_B(\varepsilon)$ - соответствующий модуль (см. §I) и $\varepsilon>0$. Положим $\pi(\varepsilon)=\frac{1}{2}\min\{\varepsilon,\delta_B(\varepsilon/2)\}$. Тогда выполняется следующее условие:

если $A\in\mathcal{F}(B)$ и $C\in\mathcal{C}(Z)$ таковы, что $C\in[A,\pi(\varepsilon),B]$, то найдется такое $C'\in\mathcal{C}(B)$, что $C'\supset A$ и $\partial(C',C)<\varepsilon$. (3)

Доказательство импликации: Лемма 4 $\to$ Лемма 3.

Пусть $\varepsilon>0$. Возьмем $\pi(\varepsilon)$ из утверждения леммы 4, примененной к $(Z,d)=(Y,\rho)$ и $\delta_B(\varepsilon)=\delta(\varepsilon)$. Проверим, что функция π нам подходит. Пусть м.о. θ будет, как в лемме 3. Для произвольного $D \in \mathcal{C}(Y)$ положим

$$V(D)=\{x\in X \mid \varphi(x)\subset \mathcal{N}_{\mu}(D)\}\cap\{x\in X \mid D\subset \mathcal{N}_{\mu\varepsilon}(\varphi(x))\}\cap\{x\in X \mid \tilde{\varsigma}(D,\theta(x))<\varepsilon\} \quad (4).$$

Множество $V(D)$ открыто для любого $D\in \mathcal{C}(Y)$. Действительно, первое множество в (4) открыто в силу п.н.св. отображения ψ, второе – в силу п.н.сн. отображения φ и компактности D (см. [4], лемма II.3), третье – в силу непрерывности θ. Покажем, что семейство $\mathcal{V}=\{V(D) \mid D\in \mathcal{C}(Y)\}$ покрывает Y. Пусть $x\in X$, применим лемму 4 к $B=\varphi(x)$, $C=\theta(x)$, $A=\psi(x)$; $(Z,d)=(Y,\varsigma)$. Пусть континуум C' удовлетворяет (3). Очевидно, что $x\in V(C')$. Пусть покрытие $\mathcal{U}\in cov(X)$ вписано в $\mathcal{V}$. Определим отображение $u: N^{(0)}(\mathcal{U})\equiv\mathcal{U}\longrightarrow \mathcal{C}(Y)$ таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$U\subset V(u(U)) \qquad \forall U\in\mathcal{U}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) автоматически следует, что 0-пара $(\mathcal{U},u)$ удовлетворяет условию (2) и имеет тип $\langle 2\varepsilon,\mu\rangle$. Кроме того, поскольку множества $\varphi(x)$ связны, то можно считать, что $\delta(+\infty)=+\infty$, откуда и $\tilde{\pi}(+\infty)=+\infty$.

§4. Три вспомогательные леммы

Здесь мы докажем леммы 5-7, необходимые для доказательства леммы 2.

Лемма 5. Пусть (B,ς) – связное ULC^{0}-пространство с модулем $\delta_{B}(\varepsilon)$ и $A\in\mathcal{S}(B)$. Пусть $\mathcal{C}_{A}(B)=\{C\in\mathcal{C}(B) \mid C\supset A\}$. Тогда пространство $(\mathcal{C}_{A}(B),\tilde{\varsigma})$ также являются связным ULC^{ν}-пространством с модулем $\delta_{B}(\frac{1}{2}\varepsilon)$.

Доказательство. Это утверждение фактически доказано в ([7], лемма I.4) для так называемых растущих (growth) гиперпространств. Но легко видеть, что $\mathcal{C}_{A}(B)$ является таковым. Заметим, что при $A=\varnothing$ $\mathcal{C}_{A}(B)=\mathcal{C}(B)$.

Лемма 6. Пусть $\mathcal{R}\subset\mathcal{S}(Y)$ – компакт, $\mu>0$. Положим $L=\cap\{\mathcal{N}_{\mu}(R) \mid R\in\mathcal{R}\}$. Тогда множество $V=\{x\in X \mid \psi(x)\in L\}$ открыто.

Пусть $x_0\in V$ – не внутренняя точка. Тогда найдется такая направленность $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в X, сходящаяся к x_0, что при любом $\gamma\in\Gamma$.

$$\psi(x_\gamma) \text{ не лежит в } \mathcal{N}_{\mu}(R_\gamma) \text{ для некоторого } R_\gamma(\mathcal{R}) \quad (6)$$

В силу компактности $\mathcal{R}$ найдется такое множество $R_0 \in \mathcal{R}$, что

$$\text{для любых } \varepsilon > 0 \text{ и } \gamma \in \Gamma \text{ найдется такое } \gamma' = \gamma'(\varepsilon, \gamma) \in \Gamma \quad \gamma' \geqslant \gamma, \text{ что } \tilde{\rho}(R_0, R_\gamma) < \varepsilon. \tag{7}$$

Так как $x_0 \in V$, то $\psi(x_0) \subset \mathcal{N}_\mu(R_0)$, откуда, в силу компактности множества $\psi(x_0)$, найдется такое $\varepsilon > 0$, что

$$\psi(x_0) \subset \mathcal{N}_{\mu-\varepsilon}(R_0). \tag{8}$$

Так как множество $W = \{x \in X \mid \psi(x) \subset \mathcal{N}_{\varepsilon/2}(\psi(x_0))\}$ является окрестностью точки x_0, то найдется такое $\gamma_0 \in \Gamma$, что

$$x_\gamma \in W \qquad \text{для всех } \gamma \geqslant \gamma_0. \tag{9}$$

В силу (7) найдется такой индекс $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, что $\tilde{\rho}(R_0, R_{\gamma_1}) < \varepsilon/2$, откуда в силу (9) и (8) имеем:

$$\psi(x_{\gamma_1}) \subset \mathcal{N}_{\varepsilon/2}(\psi(x_0)) \subset \mathcal{N}_{\mu-\varepsilon/2}(R_0) \subset \mathcal{N}_\mu(R_{\gamma_1}).$$

Это противоречит условию (6), что и доказывает лемму 6.

<u>Лемма 7</u>. Пусть B –связное ULC^0-подмножество метрического пространства $(Z, d) \in ULC^0$, $\delta_B(\varepsilon)$ и $\delta_Z(\varepsilon)$ – модули B и Z соответственно. Тогда для любых положительных ε и μ найдутся такие положительные $\varkappa(\varepsilon)$ ($\varkappa(+\infty) = +\infty$) и $\tau(\varepsilon, \mu)$, зависящие только от модуля $\delta_B(\varepsilon)$, что выполнено следующее условие:

если компакты $C_0, C_1 \in \mathcal{C}(Z)$ и $A \in \mathcal{S}(B)$ таковы, что

$$\tilde{\rho}(C_0, C_1) < \varkappa(\varepsilon) \quad \text{и} \quad C_i \in [A, \tau(\varepsilon, \mu), B] \ (i = 0, 1), \tag{10}$$

то найдется такой непрерывный путь $u : [0,1] \to \mathcal{C}(Z)$, что

$$\begin{aligned} &u(i) = C_i \quad \text{для } i = 0, 1; \quad \operatorname{diam}_{\tilde{d}}(u([0,1])) < \varepsilon \\ &\text{и } u(t) \in [A, \mu, B] \quad \text{для всех } t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{11}$$

<u>Доказательство</u>. Можно считать, что $\delta_B(\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ и $\delta_B(+\infty) = +\infty$. Положим $\varkappa(\varepsilon) = \frac{1}{2}\delta_B(\frac{1}{4}\varepsilon)$, $\pi(\varepsilon) = \frac{1}{2}\delta_B(\varepsilon/2)$, $k(\varepsilon, \mu) = \min\{\frac{1}{4}\delta_B(\varepsilon/4), \frac{1}{3}\mu\}$ и $\tau(\varepsilon, \mu) = \pi(k(\varepsilon, \mu))$. Легко видеть, что $\varkappa$ и τ определены только модулем $\delta_B(\varepsilon)$ и $\varkappa(+\infty) = +\infty$. Пусть множества C_0, C_1 и A удовлетворяют условию (10). По лемме 4 для $i = 0, 1$ найдутся такие $C_i' \in \mathcal{C}(B)$, что

$$C_i' \supset A \quad \text{и} \quad \tilde{d}(C_i', C_i) < k(\varepsilon, \mu) \tag{12}$$

Из (10) и (12) следует, что $\tilde{d}(C_0', C_1') < \delta_B(\varepsilon/4)$, поэтому в силу леммы 5 найдется такой путь $\ell : [0,1] \to \mathcal{C}(B)$, что

$$\left\| \begin{array}{l} \ell(0) = C_0', \ \ell(1) = C_1'; \ diam_{\tilde d}(\ell([0,1])) < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{и} \\ \ell(t) \supset A \quad \text{для любого} \quad t \in [0,1] \ . \end{array} \right. \qquad (13)$$

Вторично применив лемму 5 к $(B, \rho) = (Z, d)$ и $A = \emptyset$, учитывая условия (12) и равенство $\delta_Z(\varepsilon) = \varepsilon$, мы найдем такие пути $m_i : [0,1] \to \mathcal{C}(Z)$ $(i = 0,1)$, что

$$m_i(0) = C_i, \ m_i(1) = C_i'; \quad diam_{\tilde d}(m_i([0,1])) < 2\varkappa(\varepsilon, \mu). \quad (14)$$

Комбинируя пути m_0, ℓ и путь, обратный к m_1, мы получим результирующий путь $u : [0,1] \to \mathcal{C}(Z)$. Используя (10), (13) и (14), нетрудно показать, что путь u удовлетворяет условиям (11).

§5. Доказательство леммы 2

Возьмем функции $\varkappa(\varepsilon)$ и $\tau(\varepsilon, \mu)$, существование которых утверждается леммой 7, примененной к $(Z, d) = (Y, \rho)$ и $\delta_B = \delta$. Можно считать, что $\varkappa(\varepsilon) \le \varepsilon$, $\tau(\varepsilon,\mu) \le \mu$ для всех $\varepsilon, \mu > 0$. Положим $\alpha(\varepsilon) = \varkappa(\varepsilon/3)$, $\lambda(\varepsilon,\mu) = \tau(\varepsilon/3, \mu)$ и проверим, что эти функции – искомые.

Пусть 0-пара $(\mathcal{U}, u)$ имеет тип $\langle \alpha(\varepsilon), \lambda(\varepsilon,\mu) \rangle$. Рассмотрим множество Ω всех таких пар (x, σ), что $x \in X$, $\sigma \in N(\mathcal{U})$, $dim\, \sigma \le 1$ и $x \in \cap \sigma$. Из определения типа пары $(\mathcal{U}, u)$ следует, что $diam(u(\sigma^{(0)})) < \alpha(\varepsilon)$. Отсюда по лемме 7, примененной к $B = \varphi(x)$ и $A = \psi(x)$, в случае, когда $dim\, \sigma = 1$, найдется такое непрерывное $u_{x,\sigma} : \sigma \to \mathcal{C}(Y)$, что

$$u_{x,\sigma} = u \quad \text{на вершинах симплекса } \sigma; \quad (15)$$

$$diam(u_{x,\sigma}(\sigma)) < \varepsilon/3 \quad \text{и} \quad (16)$$

$$u_{x,\sigma}(t) \in [\psi(x), \mu, \varphi(x)] \ \text{для любого} \ t \in \sigma. \quad (17)$$

Если же $dim\, \sigma = 0$, т.е. $\sigma = \langle U \rangle$, $U \in \mathcal{U}$, положим $u_{x,\sigma}(U) = u(U)$. Легко видеть, что условия (15)-(17) выполнены и для этого случая. Положим теперь

$$K_{x,\sigma} = \cup\{u_{x,\sigma}(t) \mid t \in \sigma\}, \ L_{x,\sigma} = \cap\{N_\mu(u_{x,\sigma}(t)) \mid t \in \sigma\}; \quad (18)$$

$$W_{x,\sigma} = \{x' \in X \mid K_{x,\sigma} \subset N_\mu(\varphi(x'))\} \cap \{x' \in X \mid \psi(x') \subset L_{x,\sigma}\}. \quad (19)$$

Из (17) следует, что $x \in W_{x,\sigma}$. Первое множество в (19) открыто в силу п.н.сн. φ и компакто-значности $u_{x,\sigma}$ (см. [4], лемма II.3), второе – в силу леммы 6, где мы считаем $\mathcal{R} = u_{x,\sigma}(\sigma)$. Итак, $W_{x,\sigma}$ является окрестностью точки x для любого такого σ, что $x \in \cap \sigma$. Далее нам понадобится следующее утверждение, доказанное фактически в [4], (см. стр.572-573).

<u>Лемма 8 [4]</u>. Пусть X -паракомпакт, $\mathcal{U} \in cov(X)$ и для каждой точки $x \in X$ задано семейство множеств $\{W_{x,\gamma} \mid \gamma \in \Gamma(x)\}$, удовлетворяющее следующим условиям: а) $W_{x,\gamma}$ является окрестностью точки x для любого $\gamma \in \Gamma(x)$; б) множество $\Gamma(x)$ конечно для любого $x \in X$. Тогда найдутся такие покрытие $\mathcal{V} \in cov(X)$, отображение $\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ и отображение $x : \mathcal{V} \to X$, что выполнены следующие условия:

$$V \subset \pi(V) \quad \text{для любого} \quad V \in \mathcal{V}, \tag{20}$$

$$\text{если } \sigma \in N(\mathcal{V}) \text{ и } \sigma = \langle V_1, V_2 \rangle, \text{то } x(V_1) \in \pi(V_1) \cap \pi(V_2); \tag{21}$$

$$V \subset W_{x(V),\sigma} \quad \text{для любого} \quad V \in \mathcal{V} \text{ и пары } (x(V), \sigma) \in \Omega. \tag{22}$$

Мы применим лемму 8 к семействам множеств $\{W_{x,\sigma}\}$, таких, что $(x,\sigma) \in \Omega$, и покрытию $\mathcal{U}$. В силу (20) π порождает симплициальное отображение $\pi : N^{(1)}(\mathcal{V}) \to N^{(1)}(\mathcal{U})$ (даже $N(\mathcal{V}) \to N(\mathcal{U})$). Для любой вершины $V \in \mathcal{V}$ положим $U(V) = \pi(V)$ и зададим отображение v на $N^{(0)}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ формулой "$v(V) = u(U(V))$". Очевидно, условие (I) выполнено. Нам осталось определить v на I-остове нерва $N(\mathcal{V})$.

Пусть $\sigma = \langle V_1, V_2 \rangle$ -одномерный симплекс из $N(\mathcal{V})$. Положим $x_\sigma = x(V_1)$ и заметим, что в силу (2I), $x_\sigma \in \cap \pi(\sigma)$ и пара $(x_\sigma, \pi(\sigma)) \in \Omega$. Положим теперь $v_\sigma = u_{x_\sigma, \pi(\sigma)} \circ \pi|_\sigma$ и определим отображение $v : N^{(1)}(\mathcal{V}) \to C(Y)$ формулой "$v|_\sigma = v_\sigma$ для любого $\sigma \in N^{(1)}(\mathcal{V})$, $\dim \sigma = 1$". Легко видеть, что v непрерывно; покажем, что тип пары $(\mathcal{V}, v)$ равен $\langle \varepsilon, \mu \rangle$.

Пусть $\sigma \in N(\mathcal{V})$. Рассмотрение случая $\dim \sigma = 0$ как наиболее простого мы опускаем. Итак, пусть $\dim \sigma \geq 1$. В этом случае $\sigma^{(1)}$ есть объединение I-мерных граней симплекса σ. Так как любые две такие грани пересекаются третьей, то для выполнения а) и б) определения 2 достаточно установить, что для любой I-мерной грани $\tau \in \sigma^{(1)}$ выполнены условия:

$$diam_{\xi}(v(\tau)) < \varepsilon/3 \quad \text{и} \tag{23}$$

$$v(t) \in [\psi(x) \cdot \mu, \varphi(x)] \quad \text{для любых } x \in \cap\tau \text{ и } t \in \tau. \tag{24}$$

Пусть теперь $\tau = \langle V_1, V_2 \rangle$; положим, как и выше, $x_\tau = x(V_1)$. Так как $v_\tau = u_{x_\tau, \pi(\tau)}(\pi(\tau))$, то справедливость условия (23) следует из (16). С другой стороны, если $x \in \cap \tau = V_1 \cap V_2$ и $t \in \tau$, то в силу (22) $x \in V_1 \cap V_2 \subset V_1 \subset W_{x_\tau, \pi(\tau)}$, откуда из (18), (19) и очевидного включения $\pi(t) \in \pi(\sigma)$ вытекает справедливость (24). Лемма 2, а с ней и теорема Б$'$ полностью доказаны.

§6. Докажем следующее <u>предложение, проясняющее необходимость условия компакто-значности Ψ в теореме Б.</u>

<u>Предложение I</u>. Пусть $\theta : X \to \mathcal{F}(Y)$ - непрерывное м.о.; X - пространства с I-ой аксиомой счетности и без изолированных точек, а Y - метрическое пространство. Пусть, кроме того, выполнено следующее условие "малости $\theta(x_1) \cap \theta(x_2)$ ":

пересечение $\theta(x_1) \cap \theta(x_2)$ нигде не плотно в $\theta(x_1)$ и $\theta(x_2)$ для любых различных x_1 и x_2 . (25)

Тогда θ компакто-значно.

<u>Доказательство</u>. Пусть $x_0 \in X$ - произвольная точка, $R = \{y_n\}$ - произвольная последовательность в $\theta(x_0)$. Покажем, что R имеет предельную точку. Предположим противное. Зафиксируем счетную базу окрестностей $\{U_n\}$ в точке x_0 ; можно считать, что $U_{n+1} \subset U_n$ для всех n . Положим $V_n = \{ x \in X \mid \theta(x) \cap \mathcal{N}_{\frac{1}{n}}(y_n) \neq \emptyset \}$. Так как θ п.н.сн., то множество V_n , а значит, и $U_n \cap V_n$, открыты и содержат x_0 . Так как x_0 - не изолированная точка, то для любого $n = 1, 2, \ldots$ найдется точка $x_n \in U_n \cap V_n$, отличная от x_0 . Поскольку множество $\theta(x_n) \cap \mathcal{N}_{\frac{1}{n}}(y_n)$ непусто и открыто в $\theta(x_n)$, то в силу (25) найдется точка $z_n \in (\theta(x_n) \cap \mathcal{N}_{\frac{1}{n}}(y_n)) \setminus \theta(x_0)$. Положим $Z = \{ z_n \mid n = 1, 2, \ldots \}$. Отметим следующие свойства множества Z : а) $z_n \in \theta(x_n) \cap Z \neq \emptyset$ и б) $Z \cap \theta(x_0) = \emptyset$.
Так как R не имеет предельных точек, а $\rho(y_n, z_n) \to 0$, то множество Z также не имеет предельных точек, и поэтому замкнуто в Y . В силу п.н.св. θ множество

$F = \{x \in X \mid \theta(x) \cap Z \neq \emptyset\}$ замкнуто в X. В силу а) и б) $\{x_n\} \subset F$, а $x_0 \notin F$. Но по построению $x_n \to x_0$, что противоречит замкнутости F. Утверждение доказано.

Список литературы

I. Непомнящий Г.М. Непрерывные многозначные селекции полунепрерывных снизу отображений // Сиб.мат.ж. – 1985.– Т.26.– № 4.– С.70-78.
2. Непомнящий Г.М. О многозначных непрерывных селекциях // УМН.–1984.– Т.39.– Вып.3.– С.241-242.
3. Michael E. A theorem on semi-continuous set-valued functions // Duke Math.J.–1959.– V.26.– N4.– P.547-656.
4. Michael E. Continuous selections II // Ann. of Math.– 1956.– V.64.– N3.– P.562-580.
5. Michael E. Continuous selections I// Ann. of Math.– 1956.– V.63.– N2.– P.361-382.
6. Dowker C.H. On countably paracompact spaces // Canadian J. Math. –1951.– V.3.– P.219-224.
7. Curtis D.W. Hyperspaces of noncompact metric spaces // Comp.Math.– 1980.– V.40.–N2.– P.139-152.

Поступила 25 февраля 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига, 1986.

УДК 515.126

О НЕСОХРАНЕНИИ ОДНОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО СВОЙСТВА ОТНОШЕНИЕМ M-ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

О.Г.Окунев
Волгоградский государственный университет

В настоящей заметке построен пример пары M-эквивалентных тихоновских пространств со счетной базой, ровно одно из которых допускает уплотнение на компакт. Напомним, что два тихоновских пространства Y_1, Y_2 называются M-эквивалентными, если их свободные топологические группы в смысле А.А.Маркова [I] топологически изоморфны. Отметим, что из M-эквивалентности пространств Y_1, Y_2 следует, что пространства $C_p(Y_1)$, $C_p(Y_2)$ непрерывных вещественных функций в топологии поточечной сходимости изоморфны как линейные топологические пространства [2].

Рассмотрим следующее подпространство X вещественной плоскости R^2: $X = \{(x,y) : y = \sin 1/x,\ 0 < x \le 1\} \cup \{(0,1), (-1,0)\} \cup \cup \{(-1,y) : 0 \le y < 1\}$.

Множества $F_1 = \{(0,1), (-1,0)\}$ и $F_2 = \{(1, \sin 1), (-1,0)\}$ очевидно являются ретрактами пространства X, причем для ретракций $r_1 : X \to F_1$, $r_2 : X \to F_2$ (они, очевидно, определены однозначно) выполнены соотношения $r_1 \circ r_2 = r_1$, $r_2 \circ r_1 = r_2$. Такие ретракции называются в [3] параллельными, а их образы – параллельными ретрактами пространства X. Теперь можно воспользоваться следующим утверждением [3]:

Теорема. Пусть X – тихоновское пространство, F_1, F_2 – параллельные ретракты пространства X. Тогда пространства $Y_1 = X/F_1$, $Y_2 = X/F_2$ M-эквивалентны.

Здесь X/F_1, X/F_2 – пространства соответственно F_1- и F_2-тривиального разбиений пространства X, наделенные сильнейшими вполне регулярными топологиями, относительно которых непрерывны канонические проекции $X \to X/F_1$, $X \to X/F_2$. В нашем случае пространство X нормально, так что топологии пространств X/F_1, X/F_2 совпадают с фактор-топологиями.

Итак, фактор-пространства $Y_1 = X/F_1$, $Y_2 = X/F_2$ M-эквивалентны. Очевидно, что пространства Y_1 и Y_2 гомеоморфны соответственно подпространствам $\{(x,y): y = \sin 1/x,\ 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,1)\} \cup \{(0,y): -2 < y \leq -1\}$ и $\{(x,y): y = \sin 1/x,\ x > 0\} \cup \{(0,1),(0,-1)\}$ плоскости R^2. Пространство Y_1 допускает уплотнение на компактное подпространство плоскости $\{(x,y): y = \sin 1/x,\ 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,y): -1 \leq y \leq 1\}$ (отрезок $\{(0,y): -2 < y \leq 1\}$ "поворачивается" на 180° вокруг точки $(0,-1)$). Проверим, что пространство Y_2 нельзя уплотнить ни на какое хаусдорфово компактное пространство. Действительно, допустим, что существует уплотнение $h: Y_2 \to K$ на некоторый компакт K. Так как пространство Y_2 связно, K – континуум.

Удобно рассматривать пространство Y_2 как расширение с помощью точек $y_1 = (0,1)$, $y_2 = (0,-1)$ вещественной прямой R. Для дальнейшего будет существенно только следующее свойство этого расширения: обе точки y_1, y_2 принадлежат замыканию каждого левого луча $(-\infty, a)$, $a \in R$.

Пусть U_1, U_2 – окрестности точек $h(y_1)$, $h(y_2)$ в K, и $[U_1]_K \cap [U_2]_K = \phi$. Обозначим $F_i = h^{-1}([U_i]_K)$, $i = 1,2$. Множества F_1 и F_2 замкнуты и дизъюнктны в Y_2, причем $y_1 \in F_1$, $y_2 \in F_2$. Ни одно из множеств F_1, F_2 не может содержать целиком никакой левый луч в R. В силу дизъюнктности одно из этих множеств – пусть, для определенности, множество F_1 – не содержит никакой правый луч. Значит, множество F_1 не содержит целиком никакой луч в R, и можно выбрать последовательность $\{a_k,\ k \in Z\}$ (индекс k пробегает все целочисленные значения) такую, что $a_k \in R \setminus F_1$, $a_{k+1} > a_k$ для каждого $k \in Z$, и $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = +\infty$, $\lim\limits_{k \to -\infty} a_k = -\infty$.

Тогда множества $\Phi_k = [a_k, a_{k+1}] \cap F_1$, $k \in Z$, компактны и покрывают множество F_1. Рассмотрим компоненту C точки $h(y_1)$ в множестве $[U_1]_k$. Имеем $C = \bigcup\{h(\Phi_k \cap h^{-1}(C)) : k \in Z\} \cup \{h(y_1)\}$. Так как C - континуум, и каждое множество $\Phi_k \cap h^{-1}(C)$ компактно, получаем $C = \{h(y_1)\}$ (см. [4], III.359). Но тогда $\{h(y_1)\}$ - компонента множества U_1 - в противоречие с тем, что K - континуум, а U_1 открыто в K (см. [4], III.358). Доказательство закончено.

Автор благодарен профессору А.В.Архангельскому, под руководством которого выполнена данная работа.

Список литературы

1. Марков А.А. О свободных топологических группах // ДАН СССР.- 1941.- Т.31.- № 4.- С.299-302.
2. Архангельский А.В. О соотношении между инвариантами топологических групп и их подпространств // Успехи матем. наук.- 1980.- Т.35.- Вып.3.- С.3-22.
3. Окунев О.Г. Об одном способе построения примеров М-эквивалентных пространств // Рукопись депонирована в ВИНИТИ АН СССР 8 янв. 1985 г.- Деп. № 241-85.
4. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.- М., 1974.

Поступила 10 июня 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 515.12

О ФАКТОРНЫХ КОНЕЧНОКРАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

А.В.Островский
Ленинградский кораблестроительный институт

I. Известна следующая задача, неоднократно ставившаяся в различных вариантах [8]. Пусть $f: X \to Y$ - компактное отображение подмножества X отрезка I на этот отрезок. Пусть при этом для любого не более чем счетного компакта $S \subset Y$ найдется компакт $B_S \subset X$, для которого $fB_S = S$ (или $fB_S \supset S$). Спрашивается, существует ли в X компакт B, для которого $fB = I$? Ниже будет приведено положительное решение этой задачи в случае двухкратного отображения f. (Здесь и далее все пространства предполагаются метрическими, а отображения непрерывными и "на". Отображение $f: X \to Y$ называется: а) компактным, б) конечнократным, в) к-кратным, если все прообразы $f^{-1}(y)$, соответственно: а) компактны, б) конечны, в) состоят не более чем из к точек.)

Чтобы сформулировать основную теорему, нам понадобятся следующие понятия:

Обозначим через $(X)^1$ результат отбрасывания изолированных точек из X. Компактом нулевого порядка S_0 назовем любую точку из Y. Счетное компактное множество $S_1 \subset Y$ ($S_2 \subset Y$) назовем компактом первого (второго) порядка, если $(S_1)^1 \cong S_0$ ($(S_2)^1 \cong S_1$). Аналогично определяются компакты S_α порядка $\alpha < \omega$.

<u>Определение</u>. Отображение $f: X \to Y$ называется S_α-накрывающим, если для любого компакта $S_\alpha \subset Y$ порядка $\le \alpha$ найдется компакт $B \subset X$ (зависящий от S_α) для которого $fB = S_\alpha$.

<u>Определение</u>. Отображение $f: X \to Y$ называется индуктивно совершенным, если существует замкнутое в X подпространство X_0 на котором ограничение $f|X_0$ отображения f совершенно и $fX_0 = Y$.

Теорема I. Двухкратное отображение $f:X\to Y$ метрических пространств X и Y индуктивно совершенно тогда и только тогда, когда f есть S_2-накрывающее отображение.

Замечание I. Пусть $f:X\to Y$ есть компактное отображение метрических пространств X и Y. Тогда следующие условия равносильны: а) f есть факторное отображение, б) f есть бифакторное отображение, в) f есть псевдооткрытое отображение, г) f есть S_1-накрывающее отображение. Эквивалентность а), б), в) - хорошо известна [I] и ниже не используется. Докажем эквивалентность в) и г). Напомним следующее

Определение. Отображение $f:X\to Y$ называется псевдооткрытым, если для любой точки $y\in Y$ и любого открытого множества $O\supset f^{-1}y$ всегда $y\in \operatorname{Int} fO$.

в) $\Longrightarrow$ г). Пусть $S_1=\{y\}\cup\bigcup\{y_i : y_i\to y, i\in N\}$. Рассмотрим открытые множества $O^i\supset O^{i+1}\supset f^{-1}y$, образующие базу компакта $f^{-1}y$. Без ограничения общности можно считать, что $y_i\in fO^i\setminus fO^{i+1}$. Выберем $x_i\in O^i\cap f^{-1}y_i$. Ясно, что $B=\bigcup\{x_i : i\in N\}\cup f^{-1}y$ - компакт и $fB=S_1$.

г) $\Longrightarrow$ в). Пусть $O\supset f^{-1}y$ - открыто. Если $y\notin \operatorname{Int} fO$, то в $Y\setminus fO$ найдется последовательность, сходящаяся к y. Для компакта $S_1=\bigcup\{y_i : i\in N\}\cup\{y\}$ найдется компакт $B\subset X$, для которого $fB=S_1$. Легко видеть, что тогда $B\setminus O$ - замкнутое множество в B, но не компакт - противоречие. Следующее замечание используется в примере I.

Замечание 2. Пусть $f:X\to Y$ - компактное отображение метрических пространств. Тогда следующие условия эквивалентны: а) f есть S_2-накрывающее отображение; б) для любой точки $y\in Y$ и любых открытых множеств $O\supset f^{-1}y$, $V\ni y$ найдется открытое множество $V'\subset V$ такое, что ограничение $f|M$, где $M=O\cap f^{-1}V'$ есть псевдооткрытое отображение.

а) $\Longrightarrow$ б). В противном случае найдутся открытое множество $O\supset f^{-1}y$ и база в точке y из открытых множеств V_i такие, что ограничение $f|M_i$ на каждом $M_i=O\cap f^{-1}V_i$ не псевдооткрыто. Из замечания I следует, что найдутся компакты первого порядка $S_1^i\subset V_i$, для которых нет компактов $B_i\subset M_i$, удовлетворяющих условию $fB_i=S_1^i$.

Согласно а) для компакта $S_2 - \{y\} \cup \cup \{S_1^i : i \in N\}$ найдется компакт $B \subset X$ такой, что $fB = S_2$. Легко проверить, что найдется V_i, для которого $O \cap f^{-1}V_i \supset B \cap f^{-1}V_i$. Но тогда, вопреки предложению, для компакта $B_i = B \cap f^{-1}S_1^i \subset O \cap f^{-1}V_i$, $fB_i = S_1^i$.

б) $\Longrightarrow$ а). Пусть $S_2 - \{y\} \cup \cup \{y_i : y_i \to y, i \in N\} \cup \cup \{y_{ij} : y_{ij} \to y_i, i,j \in N\}$. Рассмотрим открытые базы: $O^i \supset f^{-1}y$ и $V_i \ni y$ такие, что $f|(O^i \cap f^{-1}V_i)$ есть S_1-накрывающее отображение. Такие множества существуют согласно замечанию I и при этом, очевидно, можно считать $[V_{i+1}] \subset V_i \subset fO^i$. Для компактов $S_1^i = (S_2 \cap [V_i]) \setminus V_{i+1}$ найдутся компакты $B_i \subset O^i \cap f^{-1}V_i$ такие, что $fB_i = S_1^i$. Легко видеть, что тогда $B = \cup\{B_i : i \in N\} \cup f^{-1}y$ – компакт и $fB = S_2$.

Пример I. Для каждого из следующих случаев I. и 2. существует польское счетное пространство X, компакт Y и отображение $f: X \to Y$ такие, что:

I. f есть S_1-накрывающее двухкратное не индуктивно совершенное отображение.

2. f есть S_2-накрывающее трехкратное не индуктивно совершенное отображение.

I. Рассмотрим компакт второго порядка $S_2 \subset R$. В R рассмотрим множества: $X_i - S_2 \setminus ((S_2)^{i-1} \setminus (S_2)^i)$, $i - 1,2,3$. ($(\ )^i$ означает операцию отбрасывания изолированных точек, примененную последовательно i раз). В $R \times R$ рассмотрим множество $X = \cup\{X_i \times \{i\} : i = 1,2,3.\}$. Пусть $\pi: R \times R \to R$ – проектирование плоскости на первый сомножитель. Искомым отображением является $f = \pi | X : X \to S_2 = Y$. Легко видеть, что f – псевдооткрытое и, по замечанию I, S_1-накрывающее отображение.

Замечание 3. Пусть $f: X \to Y$ есть индуктивно совершенное отображение. Тогда для любого компакта $S \subset Y$ найдется компакт $B \subset X$ такой, что $fB = S$. Это следует из известного аналогичного свойства для совершенных отображений [I].

Теперь, если в построенном X нашелся бы компакт $B \subset X$, для которого $fB = S_2$, то в силу легко проверяемых включений $f(B)^i \supset (S_2)^i$; $(B)^2 \subset (X)^2 - \phi$; $(S_2)^2 \neq \phi$

получили бы противоречие. На основании замечания 3 видно, что f не индуктивно совершенно.

2. Рассмотрим компакт третьего порядка $S_3 \subset R$. Положим: $X_i = S_3 \setminus ((S_3)^{i-1} \setminus (S_3)^i)$; $X = \cup\{X_i \times \{i\} : i \in N\}$. Также, как и в I., используя замечание 2, убеждаемся, что f есть S_2-накрывающее не индуктивно совершенное отображение.

Пример 2 [5]. Существует почти открытое конечнократное (следовательно псевдооткрытое, S_1-накрывающее) отображение польского пространства X на пространство рациональных чисел Q, которое не является S_2-накрывающим отображением. (Напомним, что отображение $f: X \to Y$ называется почти открытым, если для любого $f^{-1}y$ найдется точка $x \in f^{-1}y$, обладающая базой из открытых множеств, образы которых открыты.)

Действительно, рассмотрим, как и в примере I, компакт второго порядка S_2 и $X_2 = S_2 \setminus ((S_2)^1 \setminus (S_2)^2)$. В каждой точке $q_n \in Q$ рассмотрим базу $\mathcal{U}^i_{q_n} \supset \mathcal{U}^{i+1}_{q_n}$, $(n \in N)$. Пусть $O^i \supset O^{i+1}$, $(i \in N)$ - база в точке $(X_2)^1$ пространства X_2. Определим $f: X = X_2 \times N \to Q$ так: $f(\{(X_2)^1\} \times \{n\}) = q_n$, а каждое $(O^i \setminus O^{i+1}) \times \{n\}$ (которое, очевидно, можно считать бесконечным) произвольно, но взаимно однозначно отобразим на $\mathcal{U}^i_{q_n} \setminus \cup\{q_k : k \leq n\}$. Из $(X_2)^2 = \phi$ следует, что f не S_2-накрывающее. По построению, $\{(X_2)^1\} \times \{n\} \in f^{-1} q_n$ и образы окрестностей $O^i \times \{n\}$ точек $\{(X_2)^1\} \times \{n\}$ открыты в Q.

Следствие I. $Q^{\aleph_0}$ является образом пространства иррациональных чисел P при некотором компактном почти открытом отображении.

Действительно, взяв произведение отображений $f: X \to Q$ [I] из примера 2., получим почти открытое отображение $g: X^{\aleph_0} \longrightarrow Q^{\aleph_0}$. Последнее, как и компактность g, проверяется стандартно. Из известной характеристики иррациональных чисел [I] следует, что $X^{\aleph_0} \cong P$. Так как всякое $F_{\sigma\delta}$-множество Z из P вкладывается замкнуто в $Q^{\aleph_0}$ [3], то, взяв в следствии I $g|g^{-1}Z$, мы получаем:

Следствие 2. Всякое $F_{\sigma\delta}$-множество $Z \subset P$ является образом некоторого польского пространства при компактном почти открытом отображении.

Как мы сейчас увидим, в примере 2 конечнократность нельзя заменить на к-кратность. Это вытекает из следующей теоремы Н.Г.Окромешко:

Теорема [2]. Счетное польское пространство нельзя отобразить посредством псевдооткрытого к-кратного отображения на Q .

Назовем F_{I} -пространствами метрические пространства, не содержащие замкнутых подпространств, гомеоморфных Q .

Следствие 3. Пусть $f:X\to Y$ — псевдооткрытое к-кратное отображение F_{I} -пространства X на Y . Тогда Y есть F_{I} -пространство.

Действительно, если $Y\supset[Q_1]\cong Q$, то $f|f^{-1}[Q_1]$ - псевдооткрытое отображение. По теореме Окромешко счетное пространство $f^{-1}[Q_1]$ не может быть польским, а тогда, например, из теоремы Гуревича [6] , следует, что $X\supset[Q_2]\cong Q$.

Следствие 4. Пусть $f:X\to Y$ - псевдооткрытое к-кратное отображение польского пространства X . Тогда Y - польское пространство.

Это следует из того, что Y как конечнократный образ польского пространства есть абсолютное борелевское множество [4 с.508]; так как Y есть F_{II} -пространство, то в силу теоремы Гуревича Y - польское пространство.

Доказательство теоремы I. Нам понадобятся следующие понятия и леммы.

Определение. Скажем, что точка $x\in X$ - существенная для S_1 -накрывающего отображения $f:X\to Y$, если найдется компакт первого порядка $S_1\subset Y$ с вершиной в точке fx (т.е. $(S_1)^1=fx$) такой, что для любого компакта $B\subset X$, удовлетворяющего условию $fB=S_1$, непременно $x\in B$.

Лемма I. Пусть T - множество существенных точек компактного, S_2 -накрывающего отображения $f:X\to Y$ и $X_0=[T]_X$. Тогда $f|X_0$ есть совершенное отображение.

Доказателвство. Пусть $\tilde{f}:\beta X\to\beta Y$ - продолжение на Чех-Стоуновские расширения пространств X и Y . Положим $X^* = \tilde{f}^{-1}Y$; тогда, очевидно, $f^* = \tilde{f}|X^*$ есть совершенное отображение. Нам, очевидно, достаточно показать, что $[X_0]_{X^*} = X_0$. Предположим противное: пусть любая окрестность некоторой точки $p \in X^* \setminus X_0$ пересекается с X_0. Ясно, что $p \in X^* \setminus X$. Так как $f^{-1}f^*p$ компакт, то можно выбрать открытые в X^* множества $O \ni p$, $\mathcal{U} \supset f^{-1}f^*p$, для которых $[O]_{X^*} \cap [\mathcal{U}]_{X^*} = \phi$. Ясно, что $y = f^*p \in [f^*(O \cap X_0)] = [f(O \cap X_0)]$, $y \notin f(O \cap X_0)$. Так как $[T]_X = X_0$ и f — непрерывно, то, очевидно, имеем: $y \in [f(O \cap T)]$, $y \notin f(O \cap T)$. Следовательно, найдутся $y_i \in f(O \cap T)$, для которых $y_i \to y$ и $O \cap T \cap f^{-1}y_i = \phi$. Выберем произвольные $x_i \in O \cap T \cap f^{-1}y_i$. Так как x_i — существенные точки, то для них найдутся компакты первого порядка S_1^i с вершинами в точках y_i: $S_1^i \subset Y$, $(S_1^i)' = y_i$, такие, что для любого компакта $B_i \subset X$, $fB_i = S_1^i$, непременно $x_i \in B_i$. Можно считать, что $\operatorname{diam} S_1^i < 1/i$ и тогда $S_2 = \{y\} \cup \bigcup \{S_1^i : i \in N\}$ — компакт второго порядка с вершиной в y. По условию для S_2 найдется компакт $B \subset X$ такой, что $fB = S_2$. Точки x_i обязаны иметь в B предельную точку x. Легко видеть, что тогда $x \in f^{-1}y$. Вспомним, что $x_i \in O \cap T \subset [O \cap T]_{X^*}$, следовательно, $x \in [O \cap T]_{X^*}$. Но это противоречит выбору O, т.к. $[O]_{X^*} \cap f^{-1}y = \phi$. Лемма доказана.

<u>Лемма 2</u>. Пусть $f : X \to Y$ — двухкратное S_1-накрывающее отображение и $f^{-1}y = \{x_1, x_2\}$ не содержит существенных точек. Тогда найдутся открытые множества $O_1 \ni x_1$, $O_2 \ni x_2$, $V \ni y$ такие, что $f|O_1 : O_1 \to V$ и $f|O_2 : O_2 \to V$ — гомеоморфизмы.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим непересекающиеся открытые множества $\mathcal{U}_1 \ni x_1$ и $\mathcal{U}_2 \ni x_2$. Если $\{O^i\}_{i \in N}$ — база, например, в x_1, $O^i \subset \mathcal{U}_1$ и любое O^i содержит полный прообраз некоторой точки $p \neq y$, то x_1 — существенная точка. Если же $y \notin \operatorname{Int} fO_1$, то x_2 — существенная точка. Поэтому x_1 и x_2 имеют окрестности $\tilde{O}_1$ и $\tilde{O}_2$ такие, что $y \in \operatorname{Int} f\tilde{O}_1$, $y \in \operatorname{Int} f\tilde{O}_2$; и отношения $f|\tilde{O}_1$ и $f|\tilde{O}_2$ — взаимно однозначные отображения. Осталось положить $V = \operatorname{Int} f\tilde{O}_1 \cap \operatorname{Int} f\tilde{O}_2$, $O_i = \tilde{O}_i \cap f^{-1}V$ $(i = 1,2)$.

<u>Следствие 5</u>. Пусть в условиях леммы 2 T — множество существенных точек и $X_0 = [T]_X$. Тогда fX_0 замкнуто

в Y.

Действительно, если $y \in [fX_0] \setminus fX_0$, то в силу непрерывности f и условия $[T]_X = X_0$ непременно $y \in [fT]$. Выберем, согласно предыдущей лемме, окрестность V для y. Ясно, что V не содержит образов существенных точек, поэтому V не пересекается с $[fT]$ и $y \notin [fT]$ - противоречие.

Лемма 3. Пусть T - множество существенных точек двухкратного S_1-накрывающего отображения $f: X \to Y$. Пусть O - открытое множество, содержащее $X_0 = [T]_X$. Тогда fO открыто в Y.

Доказательство. В противном случае найдутся $y_i \to y \in fO$, $y_i \notin fO$. Покажем, что тогда $f^{-1}y \subset O$. Если найдется $x \in f^{-1}y \setminus O$ (x - единственная, т.к. f двухкратно и $y \in fO$), то x - существенная точка, т.к. $f^{-1}y_i \cap O = \phi$. Но тогда $x \in T \subset O$. Итак, $f^{-1}y \subset O$. По замечанию I, f - псевдооткрытое отображение, и тогда почти для всех y_i, $y_i \in fO$, а это противоречит предположению.

Приступим непосредственно к доказательству теоремы I. Пусть $\{\gamma_i\}_{i \in N}$ - открытые покрытия пространства X, $\gamma_i = \{O_i^\alpha : \alpha \in A\}$. В силу непрерывности f можно считать:

$$(*) \quad \operatorname{diam} O_i^\alpha < 1/i, \quad \operatorname{diam} f O_i^\alpha < 1/i.$$

Пусть T - множество существенных точек и $X_0 = [T]_X$. Положим $O^i = \cup\{O_i^\alpha : O_i^\alpha \cap X_0 \neq \phi\}$. Согласно (*) и следствию 5 $fX_0 = \cap\{fO^i : i \in N\}$. По лемме 3 $\mathcal{U}^i = fO^i$ - открытые множества, содержащие fX_0. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{U}^i \supset [\mathcal{U}^{i+1}]$. Положим $F_i = [\mathcal{U}^i] \setminus \mathcal{U}^{i+1}$ и $R_i = O^{i-1} \cap f^{-1} F_i$. Так как $F_i \cap fX_0 = \phi$, то каждое $f_i = f|R_i : R_i \to F_i$ есть открытое двухкратное отображение (в силу леммы 2 и в силу того, что ограничение открытого отображения на полный прообраз множества задает открытое отображение). В силу теоремы Майкла [7] каждое f_i индуктивно совершенно, т.е. в R_i найдутся замкнутые подпространства X_i, для которых $fX_i = F_i$ и $f|X_i$ - совершенное отображение. Положим $Z = \cup\{X_i : i \in N\} \cup X_0$ и покажем, что $f|Z$ - совершенное отображение. Для этого нам достаточно показать, что если $y_i \to y$, $x_i \in f^{-1}y_i \cap Z$, то $\{x_i\}$ имеет предельную точку в $f^{-1}y \cap Z$. По леммам I, 2 и следствию 5 нужно рассмотреть лишь случай, когда $y_i \notin fX_0$, а $y \in fX_0$. Можно считать, что $y_i \in F_i$. Из определения 0^i следует, что найдутся $0_i^i \in \Gamma_i$ и $\tilde{x}_i \in X_0$, для которых $x_i, \tilde{x}_i \in 0_i^i$. Из $(*)$ следует, что $f\tilde{x}_i \to y$, а т.к. $f|X_0$ - совершенно, то $\{\tilde{x}_i\}_{i\in N}$ имеет в $f^{-1}y \cap X_0$ предельную точку x. В силу $(*)$ непременно $x_i \to x$, что и требовалось установить.

Заметим, что в условии теоремы I вместо " X- метрическое пространство" можно предполагать лишь, что " X есть p -пространство". Дальнейшее ослабление невозможно в силу известного примера Произволова.

Список литературы

I. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.- М., 1974.
2. Окромешко Н.Г. Псевдооткрытые отображения разреженных пространств // Вестник Моск. унив. Сер. мат.,мех.- 1981.-№2.- С.32-35.
3. Островский А.В. К вопросу о структуре борелевских множеств // Топология и теория множеств.- Ижевск, 1982.- С.75-84.
4. Куратовский К. Топология. М., 1966.- Т.I.
5. Чобан М.М., Додон Н.К. О свойствах топологических пространств, связанных с понятием разреженности // Тезисы IУ Тираспольского симпозиума по общей топологии и ее приложениям.- Кишинев, 1979.
6. Hurewicz W. Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A) // Fund. Math. 1928.- V.12.- P.78-109.
7. Michael E. A theorem on semi-continuous set-valued functions // Math. I.- 1959.- V.26.- P.647-652.
8. Michael E. A problem. - In: Math. centre tracts, 115 Topological structures. II part 1 Amsterdam 1979, p. 165-166.

Поступила II октября 1984 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 515.12

О БИКОМПАКТАХ, НУЛЬМЕРНО ОТОБРАЖАЮЩИХСЯ НА КОМПАКТЫ

П.Г.Парфенов
Ярославский государственный университет

В настоящей работе изучается вопрос о том, как наличие некоторого тестового отображения бикомпакта X на компакт отражается на свойствах произвольного непрерывного образа бикомпакта X. Основным результатом работы является теорема, утверждающая, что если бикомпакт X обладает вполне замкнутым счетнократным отображением на компакт, то любой T_2-отделимый непрерывный образ Y этого бикомпакта нульмерно отображается на компакт. Для таких непрерывных образов оказывается верным равенство

$$\dim Y = \operatorname{ind} Y = \operatorname{Ind} Y = \Delta Y.$$

Приведена конструкция, дающая некоторую информацию о широте класса вполне замкнутых счетнократных прообразов компактов.

Непрерывное отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется вполне замкнутым [1], [2], если для всякой точки $y \in Y$ и всякого конечного покрытия $\{O_1, \ldots, O_s\}$ прообраза $f^{-1}y$ множествами, открытыми в X, множество $\{y\} \cup (\bigcup_{i=1}^{s} f^{\#} O_i)$ открыто. Отображение f называем счетнократным, если для любого $y \in Y$ верно $|f^{-1}y| \leq \aleph_0$. Компактами называются бикомпакты со счетной базой.

Пусть существует отображение $\lambda: X \to K$ пространства X на пространство K и дано отображение $f: X \to Y$ пространства X на пространство Y. Пусть $R = \{F = f^{-1}y : y \in Y\}$ — разбиение пространства X, полученное по отображению f. Точку $a \in K$ будем называть точкой соприкосновения элементов $F_1, F_2 \in R$, $F_1 \neq F_2$ тогда и только тогда, когда $a \in \lambda F_1 \cap \lambda F_2$. Точку $a \in K$ будем называть особой точкой соприкосновения для отображения f по отношению к отображению λ, если су-

ществуют элементы $F_1, F_2 \in R$, $F_1 \neq F_2$, такие, что $a \in \lambda F_1 \cap \lambda F_2$ и для некоторых точек $x_1 \in F_1$ и $x_2 \in F_2$, не существует элемента $F_0 \in R$ такого, что
1) $F_0 \cap \lambda^{-1} a \neq \phi$; 2) $F_0 \cap \lambda^{-1} \lambda x_1 \neq \phi$ и 3) $F_0 \cap \lambda^{-1} \lambda x_2 \neq \phi$.

Предложение I. Пусть дано вполне замкнутое отображение $\lambda : X \longrightarrow K$ регулярного пространства X на пространство K и пусть последовательность $P = \{p^i : i \in \omega\} \subset K$ сходится к точке $p^0 \in K$, $p^0 \notin P$. Далее, пусть последовательность $Q_1 = \{x^i : i \in \omega\}$, $x^i \in \lambda^{-1} p^i$, $i \in \omega$, сходится к точке $x^0 \in \lambda^{-1} p^0$. Тогда для любого выбора $y^i \in \lambda^{-1} p^i$, $i \in \omega$, последовательность $Q_2 = \{y^i : i \in \omega\}$ сходится к точке x^0.

Доказательство. Пусть V - произвольная окрестность точки x^0, тогда существует такая окрестность V_1 точки x^0, что $x^0 \in V_1 \subset [V_1] \subset V$ и, следовательно, семейство $\{V, X \setminus [V_1]\}$ является открытым покрытием множества $\lambda^{-1} p^0$. В силу вполне замкнутости отображения λ, множество $W = \lambda^{\#} V \cup \lambda^{\#}(X \setminus [V_1]) \cup \{p^0\}$ является окрестностью точки p^0, т.е., начиная с некоторого момента, последовательность P лежит в W. Так как V_1 является окрестностью точки x^0, то во множестве $X \setminus [V_1]$ лежит лишь конечное число точек последовательности Q_1, а это значит, что во множестве $\lambda^{\#}(X \setminus [V_1])$ лежит лишь конечное число точек последовательности P, т.е. за исключением конечного числа точек, вся последовательность P лежит во множестве $\lambda^{\#} V$. Отсюда получаем, что во множестве V лежат все, за исключением конечного числа, элементы семейства $\{\lambda^{-1} p^i : i \in \omega\}$, а так как $y^i \in \lambda^{-1} p^i$ для $i \in \omega$, то последовательность Q_2 сходится к точке x^0. Предложение I доказано.

Лемма. Пусть даны непрерывное отображение $f : X \to Y$ бикомпакта с первой аксиомой счетности X на бикомпакт Y и вполне замкнутое отображение $\lambda : X \longrightarrow K$ бикомпакта X на компакт K. Пусть S - множество особых точек соприкосновения для отображения f по отношению к отображению λ. Тогда $|S| \leq \aleph_0$.

Доказательство. Предположим, что $|S| > \aleph_0$, т.е.

$S=\{a^\alpha : \alpha\in A\}\subset K$ и $|A|>\aleph_0$. Тогда каждой точке $a^\alpha\in S$ сопоставим тройку $t^\alpha\in(\lambda x_1^\alpha, a^\alpha, \lambda x_2^\alpha)\in K^3$, где, согласно определению особой точки соприкосновения a^α, точки $x_1^\alpha\in F_1^\alpha\in R$, $x_2^\alpha\in F_2^\alpha\in R$ таковы, что $a^\alpha\in\lambda F_1^\alpha\cap\lambda F_2^\alpha$ и не существует элемента $F_0\in R$, такого, что верны соотношения: 1) $F_0\cap\lambda^{-1}a^\alpha\neq\phi$; 2) $F_0\cap\lambda^{-1}\lambda x_1^\alpha\neq\phi$; 3) $F_0\cap\lambda^{-1}\lambda x_2^\alpha\neq\phi$. Ясно, что $t^{\alpha_1}\neq t^{\alpha_2}$ при $\alpha_1\neq\alpha_2$, т.е. $T=\{t^\alpha:\alpha\in A\}$ - несчетное подмножество компакта K^S, а следовательно, существует точка $t^0\in T$ и последовательность $\{t^i: i\in\omega\}\subset T\setminus\{t^0\}$, которая сходится к точке t^0. Так как бикомпакт X удовлетворяет первой аксиоме счетности, то, переходя, если потребуется, к подпоследовательностям, получаем, что последовательность $\{x_1^i: i\in\omega\}$ сходится к точке $u_1\in\lambda^{-1}\lambda x_1^0$, последовательность $\{x_2^i: i\in\omega\}$ сходится к точке $u_2\in\lambda^{-1}\lambda x_2^0$, а кроме того, существует последовательность $\{v_1^i: i\in\omega\}$, $v_1^i\in F_1^i\cap\lambda^{-1}a^i$, $i\in\omega$, которая сходится к некоторой точке $v\in\lambda^{-1}a^0$. Тогда, выбрав точки $v_2^i\in F_2^i\cap\lambda^{-1}a^i$, $i\in\omega$, по предложению I получаем, что последовательность $\{v_2^i: i\in\omega\}$ сходится к точке v. Так как разбиение непрерывно, а точки x_1^i и v_1^i принадлежат одному элементу разбиения F_1^i для любого $i\in\omega$, то точки u_1 и v принадлежат одному элементу $F_0\in R$; аналогично, точки v и u_2 принадлежат одному элементу разбиения R, а следовательно, тому же F_0. Таким образом, для этого элемента $F_0\in R$ верно: 1) $u_1\in F_0\cap\lambda^{-1}\lambda x_1$; 2) $v\in F_0\cap\lambda^{-1}a^0$; 3) $u_2\in F_0\cap\lambda^{-1}\lambda x_2^0$; то есть точка $a^0\in S$ не является особой точкой соприкосновения. Противоречие. Лемма доказана.

Теорема. Пусть существует вполне замкнутое счетнократное отображение $\lambda: X\longrightarrow K$ бикомпакта X на компакт K, и пусть $f: X\rightarrow Y$ - произвольное непрерывное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y. Тогда существует нульмерное отображение бикомпакта Y на некоторый компакт.

Доказательство. Нетрудно видеть, что бикомпакт X удовлетворяет первой аксиоме счетности. Тогда, если S - множество особых точек соприкосновения для отображения f по отношению к отображению λ, по лемме имеем $|S|\leq\aleph_0$.

Так же, как в [2], по множеству $S \subset K$ определяем семейство $S^{\lambda} = \{\lambda^{-1}y : y \in K \setminus S\} \cup \{\{x\} : x \in \lambda^{-1}S\}$, которое является разбиением пространства X. Фактор-пространство по этому разбиению обозначим через K^S, а соответствующее отображение X на K^S - через Λ. Отображение $\Lambda : X \longrightarrow K^S$ вполне замкнуто, для него существует вполне замкнутое отображение $\pi^S : K^S \longrightarrow K$, такое, что $\lambda = \pi^S \Lambda$. Ясно, что отображение π^S счетнократно, а так как $|S| \leqslant \aleph_0$, то K^S является компактом. Отметим еще, что для любого $a \in K \setminus S$ верно $\Lambda^{-1}a = \lambda^{-1}a$.

Предложение 2. Пусть $F \in R = \{F = f^{-1}y : y \in Y\}$ и $B = \Lambda^{-1}\Lambda f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F$, $C = f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F$. Тогда $B = C$.

Доказательство. Предположим, что $B \neq C$. Тогда для множества F существует точки $a_1, a_2, a_3 \in K \setminus S$ и множества $F_1, F_2 \in R$ такие, что выполняются условия:

a) $\Lambda^{-1}a_1 \cap F \neq \phi$, $\Lambda^{-1}a_1 \cap F_1 \neq \phi$;

в) $\Lambda^{-1}a_2 \cap F = \phi$, $\Lambda^{-1}a_2 \cap F_1 \neq \phi$, $\Lambda^{-1}a_2 \cap F_2 \neq \phi$;

c) $\Lambda^{-1}a_3 \cap F_3 \neq \phi$;

d) $\Lambda^{-1}a_3 \cap (\Lambda^{-1}\Lambda f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F) = \phi$.

Поэтому не существует элемента $F_0 \in R$ такого, что выполняются условия: 1) $F_0 \cap \lambda^{-1}a_1 \neq \phi$; 2) $F_0 \cap \lambda^{-1}a_2 \neq \phi$; 3) $F_0 \cap \lambda^{-1}a_3 \neq \phi$. Действительно, предположив, что такое F_0 существует, имеем $F_0 \subset f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F$, а это противоречит условию d). Далее, так как $a_2 \in \lambda F_1 \cap \lambda F_2$, $\lambda^{-1}a_1 \cap F_1 \neq \phi$ и $\lambda^{-1}a_3 \cap F_2 \neq \phi$, то точка a_2 является особой точкой соприкосновения для отображения f по отношению к отображению λ, но $a_2 \in K \setminus S$. Противоречие. Предложение 2 доказано.

Определим теперь семейство $\widetilde{R} = \{\Lambda^{-1}\Lambda f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F : F \in R\}$ подмножеств бикомпакта X. Нетрудно видеть, что $\widetilde{R}$ есть разбиение бикомпакта X на непересекающиеся замкнутые множества.

Предложение 3. Пусть дано открытое множество $\mathcal{U} \subset X$, тогда $\widetilde{\mathcal{U}} = \cup\{\widetilde{F} \subset \mathcal{U} : \widetilde{F} \in \widetilde{R}\}$ открыто в X.

Доказательство. Легко видеть, что $\widetilde{\mathcal{U}} = X \setminus (\Lambda^{-1}\Lambda f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda f^{-1} f (X \setminus \mathcal{U}))$, и, следовательно, множество $\widetilde{\mathfrak{U}}$ открыто в X .

Из предложения 3 следует, что разбиения $\widetilde{R}$ бикомпакта X непрерывно, поэтому фактор-пространство Z пространства X по разбиению $\widetilde{R}$ является бикомпактом. Так как разбиение R измельчает разбиение $\widetilde{R}$, то существует непрерывное отображение $g: Y \longrightarrow Z$ бикомпакта Y на бикомпакт Z .

Определим в компакте K^S семейство $\widetilde{\widetilde{R}} = \{\Lambda\widetilde{F} : \widetilde{F} \in \widetilde{R}\}$; оно является разбиением на непересекающиеся замкнутые множества. Так как для любого $\widetilde{F} \in \widetilde{R}$ верно $\Lambda^{-1}\Lambda\widetilde{F} = \widetilde{F}$, то нетрудно проверить, что фактор-пространство пространства K^S по разбиению $\widetilde{\widetilde{R}}$ гомеоморфно Z , то есть существует непрерывное отображение $h: K^S \to Z$ компакта K^S на бикомпакт Z . Следовательно, бикомпакт Z является компактом. Имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[dr, "\Lambda"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\ K & K^S \arrow[l, "\pi^S"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}.$$

<u>Предложение 4</u>. Для любого $F \in R$ существует $F_0 \in R$ такое, что $B = \Lambda^{-1}\Lambda f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F = \Lambda^{-1}\Lambda F_0$.

<u>Доказательство</u>. Если $\Lambda^{-1}\Lambda F = B$, то в качестве F_0 берем F . Если $\Lambda^{-1}\Lambda F \neq B$, то существует $F_0 \subset f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F$, $F_0 \in R$ такое, что $F_0 \not\subset \Lambda^{-1}\Lambda F$. Следовательно, существует точки a_1 и $a_2 \in K \setminus S$ такие, что выполняются условия: I) $\pi^{-1}a_1 \cap F_0 \neq \phi$, $\pi^{-1}a_1 \cap F = \phi$ и 2) $\pi^{-1}a_2 \cap F_0 \neq \phi$, $\pi^{-1}a_2 \cap F \neq \phi$. Если $F \not\subset \Lambda^{-1}\Lambda F_0$, то существует точка $a_3 \in K \setminus S$ такая, что верно: 3) $\pi^{-1}a_3 \cap F \neq \phi$, $\pi^{-1}a_3 \cap F_0 = \phi$, а следовательно, точка a_3 - особая точка соприкосновения. Противоречие. Итак, $F \subset \Lambda^{-1}\Lambda F_0$ и, значит, $\Lambda^{-1}\Lambda F \subset \Lambda^{-1}\Lambda F_0$. Далее, $F_0 \subset f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F \subset f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F_0$, откуда $\Lambda^{-1}\Lambda F_0 \subset \Lambda^{-1}\Lambda f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F \subset \Lambda^{-1}\Lambda f^{-1} f \Lambda^{-1}\Lambda F_0 \subset \Lambda^{-1}\Lambda F_0$, что и означает $\Lambda^{-1}\Lambda F_0 \subset B \subset \Lambda^{-1}\Lambda F_0$. Предложение 4 доказано.

Покажем, что отображение $g: Y \to Z$ бикомпакта Y на компакт Z нульмерно. Для произвольного $z \in Z$ пространство $g^{-1}z$ гомеоморфно фактор-пространству некоторого элемента $\tilde{F} \in \tilde{R}$ по разбиению $R \wedge \{\tilde{F}\}$, индуцированному разбиением R на этом элементе. Точки пространства $g^{-1}z$ будем обозначать далее через (F), где $F \subset \tilde{F}$, $F \in R$. По предложению 4 существует элемент $F_0 \in R$, такой, что $\lambda^{-1}\lambda F_0 = \tilde{F}$.

Предложение 5. Пусть G - произвольное замкнутое подмножество пространства $g^{-1}z$, не содержащее точки (F_0). Тогда $|G| \leq \aleph_0$.

Доказательство. Покажем, что множество точек соприкосновения множеств $f^{-1}G$ и F_0 конечно. Предположим противное, т.е. пусть существует последовательность различных точек $a_i \in K$, $i \in \omega$, таких, что $\lambda^{-1}a_i \cap f^{-1}G \neq \emptyset$ и $\lambda^{-1}a_i \cap F_0 \neq \emptyset$ для любого $i \in \omega$. Выберем последовательность точек $x_i \in \lambda^{-1}a_i \cap F_0$, $i \in \omega$, сходящуюся к точке $x_0 \in F_0$, причем такую, что $x_0 \neq x_i$ для любого $i \in \omega$, и выберем последовательность $y_i \in \lambda^{-1}a_i \cap f^{-1}G$, $i \in \omega$. Тогда по предложению I последовательность $\{y_i : i \in \omega\}$ сходится к точке x_0, и, следовательно, $(F_0) \in G$ - противоречие.

Пусть $\{a_1, \dots, a_k\}$ - множество точек соприкосновения множеств $f^{-1}G$ и F_0, тогда $f^{-1}G \subset M = \cup\{\lambda^{-1}a_i : i = 1, \dots, k\}$. Так как отображение λ счетнократного, то множество M счетно, тогда счетно и множество $f^{-1}G$ и, тем более, счетно G. Предложение 5 доказано.

Из предложения 5 следует, что бикомпакт $g^{-1}z$ локально-счетен во всех точках, за исключением (F_0), то есть в этих точках размерность ind равна нулю. Пусть $\mathcal{U}$ - произвольная окрестность точки (F_0) в бикомпакте $g^{-1}z$, тогда $(F_0) \notin g^{-1}z \setminus \mathcal{U} = G$ - замкнуто. Пусть O - такая окрестность множества G, что $G \subset O \subset [O]$ и $(F_0) \notin [O]$; по предложению 5 множество $[O]$ счетно, и следовательно, существует окрестность O_1 множества G такая, что $G \subset O_1 \subset [O_1] \subset O$ и $\operatorname{Fr} O_1 = \emptyset$. Тогда, очевидно, открытое множество $g^{-1}z \setminus O_1 = \mathcal{U}_1$ содержит точку (F_0), $[\mathcal{U}_1] \subset \mathcal{U}$ и $\operatorname{Fr} \mathcal{U}_1 = \emptyset$. Поэтому в точке $(F_0) \in g^{-1}z$

размерность ind также равна нулю. Следовательно, бикомпакт $g^{-1}z$ нульмерен. Теорема доказана.

Следствие. Пусть для бикомпакта X существует вполне замкнутое счетнократное отображение $\lambda: X \to K$ на некоторый компакт K. Тогда для любого T_2-отделимого непрерывного образа $Y = f(X)$ бикомпакта X верно равенство

$$\dim Y = \mathrm{ind}\, Y = \mathrm{Ind}\, Y = \Delta Y.$$

Доказательство. По доказанной теореме бикомпакт Y нульмерно отображается на компакт. Применяя результаты работ [3], [4], [5], [6], получаем требуемое равенство. Если при этом $\dim Y = n$, то бикомпакт Y является совершенно n-мерным [7]. Следствие доказано.

Нетрудно видеть, что условия теоремы выполняются для пространства X^{**} - "две стрелки" и для дубликата Александрова произвольного компакта [8]. Ниже изложена одна общая конструкция,приводящая к такого рода бикомпактам.

Пример. Пусть K- нульмерный компакт, $P = \{p_i : i \in \omega\} \cup \{p_0\}$ - сходящаяся к p_0 последовательность. Разобьем ω на бесконечное число бесконечных непересекающихся подпоследовательностей A_j, $j \in \omega$, $\omega = \cup\{A_j : j \in \omega\}$. В каждой точке $x \in K$ зафиксируем базу $\{\mathcal{U}_k^x : k \in \omega\}$ такую, что $\mathcal{U}_{k+1}^x \subset [\mathcal{U}_{k+1}^x] \subset \mathcal{U}_k^x$ и $\mathrm{Fr}\, \mathcal{U}_k^x = \emptyset$ для любого $k \in \omega$. Обозначим через $V_k^x = \mathcal{U}_k^x \setminus \mathcal{U}_{k+1}^x$ для любого $k \in \omega$. Зададим на произведении $X = K \times P$ топологию базами окрестностей точек следующим образом:

I. Если $(x, p) \in X$ и $p = p_m \neq p_0$, то пусть $W(x, p_m) = \cup\{V_k^x : k \in A_m\}$. За базу окрестностей точки (x, p_m) берем множества вида $O(x, p_m, Ox) = \{(x, p_m)\} \cup (W(x, p_m) \cap Ox) \times P$, где Ox - произвольная окрестность точки x в компакте K.

II. Если $(x, p) \in X$ и $p = p_0$, то пусть $W(x, p_0, n) = \cup\{V_k^x : k \in A_j, j \geq n\}$, а базу окрестностей точки (x, p_0) образуют множества вида $O(x, p_0, n, Ox) = \{(x, p_0)\} \cup \{(x, p_j) : j \geq n\} \cup (W(x, p_0, n) \cap Ox) \times P$, где Ox- произвольная окрестность точки x в компакте K, $n \in \omega$.

Нетрудно проверить, что пространство X с такой топологией хаусдорфово. Пусть γ - произвольное покрытие пространства X окрестностями типа I и II. Для любого $x \in K$ множество $\{x\} \times P \subset X$ будет покрыто конечным числом окрестностей типа I и II, эти окрестности будут покрывать множество $\{x\} \times P$ вместе с некоторой окрестностью вида $Ox \times P$; отсюда ясно, что X - бикомпакт. Отображение $\pi_K : X \longrightarrow K$ проектирования $\pi_K(x, p) = x$ является вполне замкнутым и счетнократным.

Заметим, в заключение, что π_K будет обладать теми же свойствами, если приведенную конструкцию применить к нульмерному бикомпакту K с первой аксиомой счетности.

Список литературы

1. Федорчук В.В. Об отображениях, не понижающих размерность // ДАН СССР.-1968.-Т.185.-№1.-С.54-57.
2. Федорчук В.В. Метод развертываемых спектров и вполне замкнутых отображений в общей топологии // УМН.-1980.-Т.35.-Вып.3.-С.112-121.
3. M.Katetov. A theorem on the Lebesgue dimension // Časop. pestov. mat.-1950.-75.-N 2.-p.79-87.
4. Зарелуа А.В. О равенстве размерностей. // Мат. сб.-1963.-Т.62.-№3.-С.295-319.
5. Пасынков Б.А. Об одном классе отображений и о размерности нормальных пространств // Сиб. мат. журн., 1964, Т.5.-№2.-С.356-376.
6. Пасынков Б.А. Частичные топологические произведения // Труды Моск. мат. об-ва.-1965.-Т.13.-С.136-245.
7. Александров П.С., Пономарев В.И. О некоторых классах n-мерных пространств //Сиб. мат. журн.- 1960.-Т.1.-№1.-С.3-13.
8. Александров П.С., Урысон П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах.-М., 1971.

Поступила 20 марта 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 515.12

К ТЕОРЕМЕ М.М.ЧОБАНА О ПРОДОЛЖЕНИИ ПСЕВДОМЕТРИК НА СВОБОДНЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ

В.Г.Пестов
Томский государственный университет им.В.В.Куйбышева

Псевдометрика ρ на топологической группе G называется инвариантной (= двусторонне инвариантной), если для любых $x, y, z \in G$ имеют место равенства $\rho(xz, yz) = \rho(zx, zy) = \rho(x, y)$. В 1948 г. М.И.Граев доказал следующую теорему [1] : если ρ - псевдометрика на множестве X, то на свободной группе $F(X)$ с множеством свободных образующих X существует инвариантная псевдометрика $\bar{\rho}$, сужение которой на X совпадает с ρ. Хорошо известна фундаментальная роль, которую играет теорема Граева в теории свободных топологических групп (см., напр., обзор [2]). Развитие общей теории свободных топологических универсальных алгебр, начало которому было положено в основополагающей работе А.И.Мальцева [3] , в значительной мере тормозилось отсутствием аналога теоремы М.И.Граева о продолжении псевдометрик. До последнего времени было неясно, можно ли обобщить понятие инвариантной псевдометрики на группе до понятия инвариантной псевдометрики на универсальной алгебре. Недавно это удалось сделать М.М.Чобану. Им же был получен аналог теоремы М.И.Граева о продолжении псевдометрик для свободных универсальных алгебр. (Проф. М.М.Чобан докладывал эти результаты на I Тираспольском семинаре по топологической алгебре в августе 1984 г. Они будут опубликованы в его монографии "Топологические универсальные алгебры".) Настоящая заметка посвящена новому доказательству теоремы Чобана.

Определение (М.М.Чобан). Пусть A - универсальная алгебра сигнатуры Ω. Псевдометрика ρ на алгебре A называется инвариантной, если для каждой операции $\omega \in \Omega$ и любых $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$ (где n - арность операции

ω) имеет место:

$$\rho(\omega(x_1,\dots,x_n),\omega(y_1,\dots,y_n)) \le \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i,y_i). \qquad (I)$$

Нетрудно видеть, что в случае, когда G - группа, неравенство (I) влечет выполнение условия $\rho(ab,cd) \le \rho(a,c)+\rho(b,d)$ при всех $a,b,c,d \in G$, что обеспечивает инвариантность псевдометрики ρ в обычном смысле.

Будем называть псевдометрику ρ нормированной, если $\rho \le 1$.

Теорема (М.М.Чобан). Пусть $\mathcal{K}$ - предмногообразие универсальных алгебр (т.е., класс, замкнутый относительно перехода к подалгебрам, фактор-алгебрам и декартовым произведениям произвольных семейств), X - множество, ρ - псевдометрика на X и $F(X,\mathcal{K})$ - свободная универсальная алгебра в предмногообразии $\mathcal{K}$ с множеством свободных образующих X. Пусть псевдометрика ρ нормирована. Тогда на алгебре $F(X,\mathcal{K})$ существует нормированная инвариантная псевдометрика $\hat{\rho}$, сужение которой на X совпадает с ρ.

Оригинальное доказательство М.М.Чобана заключается в конструктивном построении максимальной инвариантной псевдометрики $\bar{\rho}$ в духе работы М.И.Граева; при этом приходится преодолевать значительные технические трудности. Ниже мы предлагаем доказательство хотя и менее конструктивное, но зато чрезвычайно простое.

Для топологической универсальной алгебры A через $\tilde{A}$ мы обозначаем её линейносвязное расширение Хартмана-Мыцельского, т.е. множество всех полунепрерывных справа кусочно-постоянных отображений полуинтервала $[0,1)$ в алгебру A, наделённое поточечно определенными операциями и топологией сходимости по мере. Хартман и Мыцельский предложили эту конструкцию для топологических групп [4], и впоследствии она была обобщена на топологические универсальные алгебры [5].

Нам понадобится следующая лемма, являющаяся обобщением результата Морриса и Николаса [6] для топологических групп.

Лемма I. Пусть ρ - нормированная инвариантная псевдометрика на универсальной алгебре A. Определим на $\tilde{A}$

псевдометрику ρ^*, полагая $\rho^*(f,g) = \int\limits_0^1 \rho(f(t),g(t))\,dt$ для всех $f,g \in \widetilde{A}$. Тогда ρ^* - нормированная инвариантная псевдометрика на A^*.

<u>Доказательство</u>. Из основных свойств интеграла Лебега следует, что ρ^* - нормированная псевдометрика. Пусть Ω - сигнатура универсальной алгебры A. Пусть $\omega \in \Omega$, $f_1,\dots,f_n, g_1,\dots,g_n \in \widetilde{A}$, где n - арность операции ω. Для каждого $t\in[0,1)$ в силу инвариантности псевдометрики ρ на A имеем:

$$\rho(\omega(f_1(t),\dots,f_n(t)),\omega(g_1(t),\dots,g_n(t))) \le \sum_{i=1}^n \rho(f_i(t),g_i(t)).$$

Обе части неравенства - неотрицательные функции от t; интегрируя и учитывая, что в силу поточечности определения операций на алгебре $\widetilde{A}$ имеет место равенство $\omega(f_1,\dots,f_n)(t) = \omega(f_1(t),\dots,f_n(t))$, получаем:

$$\rho^*(\omega(f_1,\dots,f_n),\omega(g_1,\dots,g_n)) \le \sum_{i=1}^n \rho(f_i,g_i),$$

что и означает инвариантность псевдометрики ρ^*.

Следующее утверждение очевидно.

<u>Лемма 2</u>. Пусть Ξ - непустое семейство нормированных инвариантных псевдометрик на универсальной алгебре A. Положим для всех $x,y\in A$ $\rho_\Xi(x,y) = \sup\{\rho(x,y) : \rho\in\Xi\}$. Тогда ρ_Ξ - нормированная инвариантная псевдометрика на A.

<u>Доказательство теоремы М.М.Чобана</u>. Пусть $A = \widetilde{F(X,\mathcal{K})}$ - расширение Хартмана-Мыцельского универсальной алгебры $F(X,\mathcal{K})$, наделённой дискретной топологией. Обозначим через σ тривиальную метрику на $F(X,\mathcal{K})$: $\sigma(x,y)=1$, если $x\ne y$. Очевидно, она нормирована и инвариантна. Пусть $\mathcal{F}$ - семейство всех нерастягивающих отображений псевдометрического пространства (X,ρ) в метрическое пространство (A,σ^*), т.е. таких отображений $f: X\to A$, что при всех $x,y\in X$: $\rho(x,y) \geqslant \sigma^*(f(x),f(y))$. Для каждого $f\in\mathcal{F}$ определим псевдометрику ρ_f на алгебре $F(X,\mathcal{K})$, полагая $\rho_f(x,y) = \sigma^*(\bar f(x),\bar f(y))$ как только $x,y\in F(X,\mathcal{K})$ (здесь $\bar f: F(X,\mathcal{K})\to A$ -гомоморфизм универсальных алгебр, сужение которого на X совпадает с f; такой гомоморфизм существует в силу того, что алгебра $F(X,\mathcal{K})$ свободна в предмногообразии $\mathcal{K}$, а алгебра A принадлежит $\mathcal{K}$ ввиду замкнутости предмногообразия относительно перехода к декартовым произведениям и подал-

гебрам). Положим $\Xi = \{ \rho_f : f \in \mathfrak{F} \}$. В силу леммы 2, отображение $\tilde{\rho} = \rho_\Xi$ является нормированной инвариантной псевдометрикой на свободной универсальной алгебре $F(X, \mathcal{K})$. Так как при любых $f \in \mathfrak{F}$ и $x, y \in X$ $\rho_f(x,y) \le \rho(x,y)$, то и $\tilde{\rho}(x,y) \le \rho(x,y)$, т.е., сужение $\tilde{\rho}|_X$ псевдометрики $\tilde{\rho}$ на множество X не превосходит ρ. Покажем, что $\tilde{\rho}|_X \geq \rho$, что завершит доказательство. Фиксируем произвольные элементы $a, b \in F(X, \mathcal{K})$; пусть $a \neq b$. Для каждого $s \in [0,1]$ положим $\varphi_s(t) = a$, если $t < s$, и $\varphi_s(t) = b$, если $t \geq s$. Очевидно, отображение $\varphi : s \to \varphi_s$ отрезка $[0,1]$, наделённого обычной метрикой, в пространство (A, σ^*) является изометрическим вложением. Пусть теперь $x_0, y_0 \in X$. Определим отображение $f : X \to [0,1]$, полагая $f(x) = \rho(x, x_0)$; очевидно, оно - нерастягивающее. Такова же и композиция $\varphi f : (X, \rho) \to (A, \sigma^*)$, т.е. $\varphi f \in \mathfrak{F}$, откуда $\rho_{\varphi f} \in \Xi$. Наконец $\tilde{\rho}(x_0, y_0) \geq \rho_{\varphi f}(x_0, y_0) = \sigma^*(\varphi f(x_0), \varphi f(y_0)) = |f(x_0) - f(y_0)| = \rho(x_0, y_0)$.

<u>Замечание</u>. В связи с результатами М.М.Чобана возникает естественная задача: ввести понятие левоинвариантной псевдометрики на универсальной алгебре так, чтобы семейство всех левоинвариантных непрерывных псевдометрик на произвольной топологической универсальной алгебре описывало её топологию подобно тому, как это имеет место в случае топологических групп. Если бы это удалось сделать, то стало бы возможным говорить о полноте топологических универсальных алгебр.

Пользуясь случаем, автор выражает свою признательность М.М.Чобану за обсуждение вопросов, затронутых в данной заметке.

Список литературы

1. Граев М.И. Свободные топологические группы // Известия АН СССР. Сер.мат. - 1948 - Т.12 - № 3 - С. 279-324.
2. Архангельский А.В. Классы топологических групп. // УМН - 1981 - Т.36 - № 3 - С.127-146.
3. Мальцев А.И. Свободные топологические алгебры //Извес-

тия АН СССР.- Сер. мат.- 1957.-Т. 2I.-№ 2.-С.171-198.
4. Hartman S., Mycielsky J. On the embedding of topological groups into connected topological groups // Collog. Math.,- 1958,- V.5,- P. 167-169.
5. Чобан М.М., Думитрашку С.С. Об универсальных алгебрах с непрерывной сигнатурой // УМН.-1981.-Т. 36.-№ 5.-С. 201-202.
6. Morris S.A., Nickolas P. Locally invariant topologies on free groups // Pacif. J. Math.,- 1982,- V.103,- N 2,- P. 523-537.

Поступила I2 января 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 515.12

О КОЛИЧЕСТВЕ СЧЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ-УРЫСОНА

Е.А.Резниченко
Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Пусть $\mathcal{P}$ есть некоторый класс пространств. Будем говорить, что число пространств из класса $\mathcal{P}$ равно τ , если существует семейство мощности τ попарно негомеоморфных пространств из класса $\mathcal{P}$ и не существует такого семейства мощности большей, чем τ .

В настоящей статье рассматривается вопрос о количестве пространств из класса $\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ есть некоторый подкласс класса счетных пространств Фреше-Урысона. Будет доказано, что число счетных бисеквенциальных тихоновских пространств равно $2^{2^{\aleph_0}}$ и число счетных $\aleph_0$- пространств Фреше-Урысона также равно $2^{2^{\aleph_0}}$. Кроме того, построен пример бисеквенциального компакта, который не принадлежит классам $\langle 1\text{-}FU\rangle$, $\langle 2\text{-}FU\rangle$ и $\langle 5\text{-}FU\rangle$. Этот пример дает отрицательный ответ на вопросы (5.22.2), (5.22.3) и (5.22.4) из статьи [1].

<u>Определение 1</u> [2]. Пространство X называется бисеквенциальным, если для каждой точки $x\in X$ и каждого предфильтра ξ на X такого, что $x\in\bigcap\{\bar{A}: A\in\xi\}$, существует счетный предфильтр $\{B_n: n\in N^+\}$, сходящийся к x и $B_n\cap A\neq\emptyset$ для любых $n\in N^+$, $A\in\xi$.

А.В.Архангельский предложил следующую классификацию пространств Фреше-Урысона.

<u>Определение 2</u> [1]. Пусть X - пространство Фреше-Урысона. Будем говорить, что X является $\langle i\text{-}FU\rangle$ - пространством, если и только если для любого $x\in X$ и для произвольного семейства последовательностей $\{\xi_n: n\in N^+\}$, сходящихся к точке x , существует такая последовательность ξ , сходящаяся к точке x , что выполняется условие (i)

$(i\in\{1,2,3,4,5\})$.

(1) Для любого $n\in N^+$ $|\xi_n\setminus\xi|<\aleph_0$.

(2) Существует такое бесконечное $M\subset N^+$, что для любого $n\in M$ $|\xi_n\setminus\xi|<\aleph_0$.

(3) Существует такое бесконечное $M\subset N^+$, что для любого $n\in M$ $|\xi_n\cap\xi|=\aleph_0$.

(4) Существует такое бесконечное $M\subset N^+$, что для любого $n\in M$ $\xi_n\cap\xi\neq\phi$.

(5) Для любого $n\in N^+$ $\xi_n\cap\xi\neq\phi$.

<u>Определение 3</u> [3]. Пространство X называется $\aleph_0$-пространством, если существует такая счетная сеть B пространства X, что для любого компакта $K\subset X$ и для любого открытого $\mathcal{U}\supset K$ существует конечное $B'\subset B$ такое, что $K\subset\bigcup B'\subset\mathcal{U}$.

<u>Определение 4</u>. Пусть X и Y - топологические пространства. Непрерывное отображение f из X на Y назовем простым, если f - факторное отображение, и существует максимум одна точка $y\in Y$ такая, что $|f^{-1}(y)|>1$. Если $Y=f(X)$ для некоторого простого отображения f, то будем говорить, что Y есть простой образ X.

Очевидно, простое отображение является замкнутым. Следующее утверждение носит технический характер.

<u>Лемма I</u>. Пусть X - хаусдорфово пространство с первой аксиомой счетности, множество D всех изолированных точек пространства X счетно и всюду плотно в X. Далее, пусть задано семейство $\mathcal{F}$ мощности $2^{2^{\aleph_0}}$, состоящее из непустых подмножеств множества $X\setminus D$. Для каждого $F\in\mathcal{F}$ определим пространство X_F как фактор-пространство $D\cup F/\eta_F$, где η_F есть разбиение пространства $D\cup F$, единственным неодноточечным элементом которого является множество F. Тогда семейство $\{X_F : F\in\mathcal{F}\}$ состоит из счетных нульмерных пространств Фреше-Урысона и существует семейство $\mathcal{F}^*\subset\mathcal{F}$ мощности $2^{2^{\aleph_0}}$ такое, что для различных $F,Q\in\mathcal{F}^*$ пространство X_F не гомеоморфно пространству X_Q.

<u>Доказательство</u>. То, что для $F\in\mathcal{F}$ пространство X_F счетно и нульмерно, очевидно. Пространство X_F есть простой, а значит, и замкнутый, образ пространства с первой аксиомой счетности $D\cup F$. Поэтому X_F - пространство Фре-

ше-Урысона. Для произвольной пары $Q, F \in \mathcal{F}$ зафиксируем биекцию f_F^Q из X_Q на X_F. Как множество X_Q совпадает с $D \cup \{Q\}$ и X_F – с $D \cup \{F\}$. Если $x \in D$, положим $f_F^Q(x) = x$, а если $x = \{Q\}$, то $f_F^Q(x) = \{F\}$. Очевидно, что $f_F^Q \circ f_Q^R = f_F^R$ и $f_F^Q \circ f_Q^F = id_{X_F}$. Докажем, что если $F \neq Q$, то отображение f_F^Q не является гомеоморфизмом. Так как $f_F^Q \circ f_Q^F = f_F^F = id_{X_F}$, то достаточно показать, что f_F^Q или f_Q^F не непрерывно. Из того, что $F \neq Q$ следует, что существует $x \in (F \setminus Q) \cup (Q \setminus F)$. Для определенности пусть $x \in Q \setminus F$. В пространстве X имеет место первая аксиома счетности и D всюду плотно в X, поэтому существует последовательность $\xi \subset D$, сходящаяся к точке x. Последовательность ξ в пространстве X_Q будет сходиться к точке $\{Q\}$, а в X_F последовательность ξ дискретна и замкнута, поэтому f_F^Q не непрерывно. Введем на семействе $\mathcal{F}$ отношение эквивалентности, положив $F \sim Q$ для $F, Q \in \mathcal{F}$, если X_F гомеоморфно X_Q. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество классов эквивалентности. Докажем, что если $\mathcal{F}' \in \mathcal{H}$, то $|\mathcal{F}'| \leq 2^{\aleph_0}$. Предположим противное, то есть $|\mathcal{F}'| > 2^{\aleph_0}$. Можно полагать, что для каждой пары $Q, R \in \mathcal{F}'$ задан гомеоморфизм h_R^Q из X_Q в X_R так, что для каждой тройки множеств $P, Q, R \in \mathcal{F}'$ выполняется $h_Q^P \circ h_P^R = h_Q^R$ и для $P \in \mathcal{F}'$ $h_P^P = id_{X_P}$. Пусть $F \in \mathcal{F}'$. Так как множество всех перестановок множества X_F имеет мощность $2^{\aleph_0}$ и $|\mathcal{F}'| > 2^{\aleph_0}$, то существуют такие различные $P, Q \in \mathcal{F}'$, что $h_F^P \circ f_P^F = h_F^Q \circ f_Q^F$. Тогда получаем, что $h_Q^P = h_Q^F \circ h_F^P \circ f_P^F \circ f_F^P = h_Q^F \circ h_F^Q \circ f_Q^F \circ f_F^P = f_Q^P$, то есть $h_Q^P = f_Q^P$. Противоречение с тем, что f_Q^P – не гомеоморфизм. Итак, мы доказали, что для произвольного $\mathcal{F}' \in \mathcal{H}$ мощность $\mathcal{F}'$ не больше, чем $2^{\aleph_0}$. Из этого и того, что $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{H}$ и $|\mathcal{F}| = 2^{2^{\aleph_0}}$, следует, что $|\mathcal{H}| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Существует такое множество $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$, что для любого $\mathcal{F}' \in \mathcal{H}$ $|\mathcal{F}^* \cap \mathcal{F}'| = 1$. Очевидно, $|\mathcal{F}^*| = 2^{2^{\aleph_0}}$ и для любых различных $F, Q \in \mathcal{F}^*$ пространство X_F не гомеоморфно пространству X_Q. Лемма I доказана.

Следующие две теоремы являются основным результатом этой работы.

Теорема I. Число счетных тихоновских $\aleph_0$-пространств Фреше-Урысона равно $2^{2^{\aleph_0}}$.

Доказательство. Несложно показать, что существует метрическое сепарабельное пространство X мощности $2^{\aleph_0}$, у которого множество D изолированных точек счетно и всюду плотно в X. Положим $\mathcal{F}=\{F\subset X\setminus D: F\neq\emptyset\}$. Очевидно, $|\mathcal{F}|=2^{2^{\aleph_0}}$. Возьмем семейство пространств $\{X_F: F\in\mathcal{F}\}$ как в лемме I. Для любого $F\in\mathcal{F}$ пространство X_F - простой (а значит и замкнутый) образ метрического сепарабельного пространства $D\cup F$. Как доказано в [3], замкнутый образ метрического сепарабельного пространства является $\aleph_0$-пространством, поэтому для любого $F\in\mathcal{F}$ X_F является $\aleph_0$-пространством. В лемме I доказано, что существует такое семейство $\mathcal{F}^*\subset\mathcal{F}$ мощности $2^{2^{\aleph_0}}$, что для различных $F,Q\in\mathcal{F}^*$ пространство X_F не гомеоморфно пространству X_Q. Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что число счетных пространств равно $2^{2^{\aleph_0}}$. Теорема I доказана.

В связи с теоремой I отметим следующее простое утверждение.

Предложение I. Число счетных тихоновских $\aleph_0$-пространств, принадлежащих классу $\langle 4\text{-}FU\rangle$, равно $2^{\aleph_0}$.

Доказательство. В [I] показано, что класс $\langle 4\text{-}FU\rangle$ - пространств совпадает с классом сильных Фреше-пространств. Предложение становится очевидным, если заметить, что сильно Фреше $\aleph_0$-пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности [3]. Предложение I доказано.

Теорема 2. Число счетных тихоновских бисеквенциальных пространств равно $2^{2^{\aleph_0}}$.

Доказательство. Рассмотрим пространство X из примера I. Пространство X хаусдорфово и с первой аксиомой счетности. Пусть D есть множество изолированных точек пространства X, тогда D всюду плотно в X и $|D|=\aleph_0$. Так как пространство $X\setminus D$ гомеоморфно удвоению Александрова отрезка $[0,1]$, то $c(X\setminus D)=2^{\aleph_0}$. Зафиксируем дизъюнктное семейство $\mathcal{O}$ открытых в $X\setminus D$ множеств такое, что $|\mathcal{O}|=2^{\aleph_0}$. Положим $\mathcal{F}=\{(X\setminus D)\setminus\bigcup\mathcal{O}': \mathcal{O}'\subset\mathcal{O}\}$. Очевидно, любое $F\in\mathcal{F}$ компактно и $|\mathcal{F}|=2^{2^{\aleph_0}}$. Возьмем семейство пространств $\{X_F: F\in\mathcal{F}\}$, как в лемме I. Так как любое $F \in \mathcal{F}$ компактно, то для произвольного $F \in \mathcal{F}$ пространство X_F является простым совершенным образом пространства $D \cup F$ с первой аксиомой счетности. Как доказано в [2], бифакторный (а значит, и совершенный) образ пространства с первой аксиомой счетности является бисеквенциальным пространством. Далее рассуждения завершаются так же, как в теореме I. Теорема 2 доказана.

Э.Майкл [2] охарактеризовал бисеквенциальные пространства как бифакторные образы пространств с первой аксиомой счетности. Поскольку совершенные отображения составляют подкласс класса бифакторных отображений, то имеет смысл сформулировать, по существу доказанное при доказательстве теоремы 2 утверждение:

Предложение 2. Число счетных тихоновских пространств, являющихся простыми совершенными образами пространств с первой аксиомой счетности, равно $2^{2^{\aleph_0}}$.

А.В.Архангельский [I] доказал, что из бисеквенциальности пространства следует его принадлежность классу $\langle 3 - FU \rangle$. Из этого факта и теоремы 2 получаем

Предложение 3. Число счетных тихоновских $\langle 3 - FU \rangle$ - пространств равно $2^{2^{\aleph_0}}$.

Пример I. Будет построен бисеквенциальный компакт Y, который не принадлежит классам $\langle 1 - FU \rangle$, $\langle 2 - FU \rangle$ и $\langle 5 - FU \rangle$. Более точно, компакт Y есть простой образ компакта с первой аксиомой счетности.

Пусть I - отрезок $[0,1]$, I^* - какое-нибудь множество мощности $2^{\aleph_0}$. Зафиксируем биекцию π из I на I^*. Пусть d - обычная метрика на отрезке $[0,1]$. Несложно показать, что существует счетное семейство конечных множеств, для которого выполняются следующие условия.

I) Для любого $n \in N^+$ K_n есть $\frac{1}{2n}$ -сеть в I.

II) Для $n \neq m$ $K_n \cap K_m = \emptyset$.

Положим $K = \cup\{K_n : n \in N^+\}$. Возьмем какое-нибудь счетное множество D, не пересекающееся с ранее построенными множествами, и зафиксируем биекцию d из K на D. Для $n \in N^+$ и для $x \in I$ положим $\mathcal{U}_n(x) = \{y \in I : d(x,y) < \frac{1}{n}\}$. Пусть $\eta_x = \cup\{\mathcal{U}_n(x) \cap K_n : n \in N^+\}$. Для любой точки $x \in I$

множество η_x образует последовательность, сходящуюся к точке x. На множестве $X = I \cup I^* \cup D$ зададим топологию. Для этого в каждой точке $x \in X$ определим базу $\mathcal{B}_x$ по следующему правилу:

а) Если $x \in I$, то
$$\mathcal{B}_x = \{\mathcal{U}_n(x) \cup \pi(\mathcal{U}_n(x) \setminus \{x\}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{U}_n(x) \setminus (\eta_x \cup \{x\}) \cap K) : n \in N^+\}.$$

б) Если $x \in I^*$, то
$$\mathcal{B}_x = \{\{x\} \cup \mathcal{L}(\mathcal{U}_n(y) \cap \eta_y \setminus \{y\}) : n \in N^+\},$$
где $y = \pi^{-1}(x)$.

в) Если $x \in D$, то $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что пространство X является хаусдорфовым компактным пространством с первой аксиомой счетности, множество D состоит из изолированных точек пространства X и D всюду плотно в X.

Лемма 2. Пусть $Q \subset K$ и Q всюду плотно в I. Тогда существует такая последовательность $\eta \subset Q$, что последовательность $\mathcal{L}(\eta)$ сходится к некоторой точке $x \in I^*$ в пространстве X.

Доказательство. Из определения топологии на пространстве X следует, что достаточно показать, что существует такая точка $y \in I$ и такая последовательность $\eta \subset Q$, что $\eta \subset \eta_y$. Обозначим через ℓ функцию из K в N^+, которая точке $z \in D$ ставит в соответствие то единственное $\ell(z)$, для которого $z \in K_{\ell(z)}$. Проведем построение последовательности $\eta = \{z_n : n \in N^+\}$ по индукции так, чтобы выполнялись следующие условия:

а) для $n \in N^+$ $\ell(z_n) < \ell(z_{n+1})$;

в) для $n \in N^+$ $z_{n+1} \in \mathcal{U}_{2^n \ell(z_n)}(z_n)$;

с) для $n \in N^+$ $z_n \in Q$.

Точку z_1 из множества Q выберем произвольно. Предположим, что построено множество $\{z_i : i \leq n\}$. Так как множество $\cup\{K_i : i \leq \ell(z_n)\}$ конечно, а Q всюду плотно в I, то множество

$\mathcal{U}_{2^n \ell(z_n)}(z_n) \cap Q \setminus \cup\{K_i : i \leq \ell(z_n)\}$ не пусто.

Выберем z_{n+1} из множества $\mathcal{U}_{2^n \ell(z_n)}(z_n) \cap Q \setminus \cup\{K_i : i \leq \ell(z_n)\}$.

Построение последовательности $\eta = \{z_n : n \in N^+\}$ завершено. Из а), в), с) следует, что для последовательности η выполняются условия

a') для $m<n$ $\ell(z_m)<\ell(z_n)$;

в') для $m<n$ $z_n\in\mathcal{U}_{2\ell(z_m)}(z_m)$;

c') для $n\in N^+$ $z_n\in\mathcal{Q}$.

Из a') и в') следует, что η образует фундаментальную последовательность. Пусть y есть предел η. Из в') следует, что для любого $m\in N^+$ $y\in\mathcal{U}_{2\ell(z_m)}(z_m)$ и $z_m\in\mathcal{U}_{\ell(z_m)}(y)$.

Так как $\eta_y=\bigcup\{K_n\cap\mathcal{U}_n(y):n\in N^+\}=\{z\in K: z\in\mathcal{U}_{\ell(z)}(y)\}$, то для любого $m\in N^+$ $z_m\in\eta_y$, а значит, $\eta\subset\eta_y$. Лемма 2 доказана.

Занумеруем множество K натуральными числами, $K=\{v_n: n\in N^+\}$. Для каждого $n\in N^+$ зафиксируем такую последовательность ξ_n, чтобы выполнялись условия:

A. Последовательность ξ_n сходится к точке v_n.

B. $\xi_n\cap\eta_{v_n}=\emptyset$.

C. $\xi_n\subset\mathcal{U}_{2\ell(v_n)}(v_n)$, где функция ℓ определена как в лемме 2.

Если $x\in K$ и для некоторого $k\in N^+$ $x=v_k$, то обозначим через $\xi(x)$ последовательность ξ_k. Для $n\in N^+$ положим $\theta_n=\bigcup\{\xi(x): x\in K_n\}$.

Определим пространство Y. Пусть η_I есть разбиение пространства X, единственный неодноточечный элемент которого есть множество I. Определим пространство Y как фактор-пространство X/η_I. Пространство Y есть простой образ компакта X с первой аксиомой счетности. Поэтому Y - бисеквенциальный компакт.

Докажем, что Y не является $\langle 2\text{-}FU\rangle$ - пространством. Рассмотрим семейство последовательностей $\{\alpha(\theta_n): n\in N^+\}$. По построению для $n\in N^+$ последовательность $\alpha(\theta_n)$ сходится к точке $\{I\}$ пространства Y. Предположим, что Y есть $\langle 2\text{-}FU\rangle$ -пространство. Тогда должна существовать последовательность $\theta\subset K$ и бесконечное множество $M\subset N^+$ такие, что последовательность $\alpha(\theta)$ сходится к точке $\{I\}$ и для любого $n\in M$ $|\theta_n\setminus\theta|<\aleph_0$. Построение было проведено таким образом, что для любого конечного $P\subset\theta_n$ множество $\theta_n\setminus P$

образует $\frac{1}{n}$ -сеть в I . Поэтому для $n\in M$ $\theta\cap\theta_n$ образует $\frac{1}{n}$ -сеть в I и множество θ всюду плотно в I . Воспользовавшись леммой 2, выберем такую последовательность $\eta\subset\theta$, что $\mathcal{L}(\eta)$ сходится к некоторой точке $x\in I^*$ в пространстве X . Последовательность η будет сходиться к точке $x\in I^*$ и в пространстве Y . Противоречие тем, что $\eta\subset\theta$ и $\mathcal{L}(\theta)$ сходится к $\{I\}$.

Докажем, что Y не является $\langle 5-FU\rangle$ -пространством. Рассмотрим последовательность $\{\mathcal{L}(\xi_n): n\in N^+\}$. По построению $\mathcal{L}(\xi_n)$ сходится к точке $\{I\}$. Предположим, что Y - $\langle 5-FU\rangle$ -пространство. Тогда существует такая последовательность $\xi\subset K$, что для любого $n\in N^+$ $\xi_n\cap\xi\neq\emptyset$. По построению, если $z\in\xi_n$, то $z\in\mathcal{U}_{L(\vartheta_n)}(\vartheta_n)$. Отсюда и из того, что для $n\in N^+$ $\xi_n\cap\xi\neq\emptyset$, вытекает, что ξ всюду плотно в I . Воспользовавшись леммой 2, выберем такую последовательность $\eta\subset\xi$, что $\mathcal{L}(\eta)$ сходится к некоторой точке $x\in I^*$ в пространстве X . Последовательность $\mathcal{L}(\eta)$ будет сходиться к точке $x\in I^*$ и в пространстве Y . Противоречие с тем, что $\eta\subset\xi$ и $\mathcal{L}(\xi)$ сходится к $\{I\}$. Построение примера закончено.

Вопрос. Верно ли, что число счетных (бисеквенциальных) $\langle i-FU\rangle$ -пространств равно $2^{2^{\aleph_0}}$ $(i\in\{1,2,5\})$?

Автор благодарен научному руководителю профессору А.В.Архангельскому за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

I. Архангельский А.В. Спектр частот топологического пространства и операция произведения.// Труды Московского матем.о-ва.-1979.-Т.40.-С.171-206.

2. Michael E. A quintuple quotient quest. - Gen. Top. Appl., 1972.-V. 2.-P. 99-138.

3. Michael E. $\aleph_0$ - spaces // J. Math. and Mech.- 1966 .- V. 15- N. 6-P. 983-1002.

Поступила 8 апреля 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах. Рига. 1986.

УДК 519.6

КОМБИНИРОВАННЫЕ СПЛАЙНЫ

Э.А.Римша
Латвийский государственный университет им.П.Стучки

В настоящей статье дается один способ построения по двум заданным пространствам сплайнов нового пространства, которое мы назвали комбинированным пространством сплайнов. Подробно рассмотрен конкретный пример комбинированного пространства сплайнов и получена их характеризация.

Мы пользуемся следующим определением пространства сплайнов. Пусть X, Y, Z – вещественные гильбертовы пространства, $T \in LC(X,Y)$, $A \in LC(X,Z)$, $N(A) = \operatorname{Ker} A$.

Определение. Пространством сплайнов, соответствующим пространствам X, Y, Z и операторам T, A, называется множество $\{s \in X \mid \forall x \in N(A)\ \langle Ts, Tx\rangle = 0\}$, которое будем обозначать $S(X,Y,Z,T,A)$ или, короче, $S(T,A)$.

В отличие от общепринятого определения, мы не требуем замкнутости $R(T)$ и $R(A)$, тем более не полагаем $R(T) = Y$ и $R(A) = Z$.

Пусть заданы два пространства сплайнов: $S(X,Y,Z_1,T,A_1)$ и $S(X,Y,Z_2,T,A_2)$. Построим комбинированное пространство сплайнов $S(X,Y,Z,T,A)$, полагая $Z = Z_1 \times Z_2$ и $A = A_1 \times A_2$. Отметим, что $A \in LC(X,Z)$ и имеет место равенство $N(A) = N(A_1) \cap N(A_2)$, из которого следует включение $S(T,A_1) + S(T,A_2) \subset S(T,A)$.

Так как $A_1 \times A_2 : X \to Z_1 \times Z_2$, то $R(A) \subset Z$. При этом равенство $R(A) = Z$ может не иметь места, даже если $R(A_1) = Z_1$ и $R(A_2) = Z_2$.

Докажем замкнутость множества $R(A)$ в случае, когда замкнуты $R(A_1)$, $R(A_2)$ и $N(A_1) + N(A_2)$. Для этого рассмотрим оператор A^*, топологически сопряженный к оператору A. Нетрудно видеть, что $A^*(z_1,z_2) = A_1^* z_1 + A_2^* z_2$, $\forall z_1 \in Z_1$ и $\forall z_2 \in Z_2$. Отсюда следует, что $R(A^*) = R(A_1^*) + R(A_2^*)$.

Применяя теорему 4.3.9 из [I] получаем, что $R(A^*)=N(A_1)^{\perp}+N(A_2)^{\perp}$. Но множество $R(A^*)$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто $N(A_1)+N(A_2)$ (см. [I], с.190), что нами предполагается. Следовательно, по теореме 4.3.9 множество $R(A)$ – замкнуто.

Перейдем к рассмотрению конкретного примера комбинированного пространства сплайнов, образованного с помощью пространства эрмитовых сплайнов и пространства сплайнов для локальных средних. Пусть $[a,b]\subset R$;
$\Delta=\{t_0,t_1,\ldots,t_{s},t_{s+1}\}$, где $t_0=a$, $t_{s+1}=b$,
$t_0<t_1<\ldots<t_s\le t_{s+1}$; $k_1,\ldots,k_s\in N$;
$a\le a_1<b_1\le a_2<b_2\le\ldots\le a_n<b_n\le b$;
$X=H^q([a,b])$ $(q=\max\{k_i \mid i=\overline{1,s}\})$ – пространство Соболева, $Y=H^0([a,b])$ (см. [I], с.150), $Z_1=R^m$, где $m=\sum_{i=1}^{s}k_i$, $Z_2=R^n$. Пусть, далее,

$$Tx=x^{(q)},\ A_1x=(x(t_1),\ldots,x^{(k_1-1)}(t_1),\ldots,x(t_s),\ldots,x^{(k_s-1)}(t_s)),$$

$$A_2x=\left(\frac{1}{b_1-a_1}\int_{a_1}^{b_1}x(t)\,dt,\ldots,\frac{1}{b_n-a_n}\int_{a_n}^{b_n}x(t)\,dt\right),\ \forall x\in H^q([a,b]).$$

Очевидно, $\dim N(T)=q$. Построим комбинированное пространство сплайнов, полагая

$$Ax=\left(x(t_1),\ldots,x^{(k_1-1)}(t_1),\ldots,x(t_s),\ldots,x^{(k_s-1)}(t_s),\frac{1}{b_1-a_1}\int_{a_1}^{b_1}x(t)\,dt,\ldots,\frac{1}{b_n-a_n}\int_{a_n}^{b_n}x(t)\,dt\right)$$

и $Z=R^{m+n}$.

Покажем, что $N(T)+N(A)$ – замкнутое множество и $N(T)\cap N(A)=\{0\}$, а следовательно, для любого $z\in R(A)$ существует единственный интерполяционный сплайн, соответствующий элементу z . Множество $N(T)+N(A)$ замкнуто, поскольку сумма конечномерного подпространства и замкнутого подпространства замкнута. Так как $N(T)\cap N(A_1)=\{0\}$ и $N(T)\cap N(A_2)=\{0\}$, то $N(T)\cap N(A)=N(T)\cap(N(A_1)\cap N(A_2))=\{0\}$.

Теперь докажем, что $R(A)=R^{m+n}$.
Пусть $z=(z_{10},\ldots,z_{1,k_1-1},\ldots,z_{s0},\ldots,z_{s,k_s-1},z_1,\ldots,z_n)$ – произвольный вектор из R^{m+n} . Необходимо найти такую функцию $x\in H^q([a,b])$, для которой выполнилось бы равенство $Ax=z$, т.е. искомая функция x должна удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} x^{(j)}(t_i)=z_{ij}, \ i=\overline{1,s}, \ j=\overline{0,k_i-1}, \\ \int\limits_{a_k}^{b_k} x(t)dt=(b_k-a_k)z_k=:c_k, \ k=\overline{1,n}. \end{cases} \qquad (1)$$

Если при всех i числа t_i, $i=\overline{1,s}$ отличны от чисел a_k и b_k, $k=\overline{1,n}$, то функцию x можно построить с помощью интерполяционного полинома Эрмита p, удовлетворяющего следующим равенствам:

$$\begin{cases} p^{(j)}(t_i)=z_{i,j-1}, \ i=\overline{1,s}, \ j=\overline{0,k_i}, \\ p(a_1)=0, \\ p(a_k)=c_1+\ldots+c_{k-1}, \ k=\overline{2,n}, \\ p(b_k)=c_1+\ldots+c_k, \ k=\overline{1,n}, \end{cases}$$

в которых считаем, что $z_{i,-1}=0$, $i=\overline{1,s}$. Если при некоторых i и k имеет место равенство $t_i=b_k$ $(t_i=a_k)$, $i=\overline{1,s}$, $k=\overline{1,n}$, то надо положить $z_{i,-1}=c_1+\ldots+c_k$ $(z_{i,-1}=c_1+\ldots c_{k-1}$, $i=\overline{1,s}$, $k=\overline{2,n}$; $z_{i,-1}=0$, если $t_i=a_1$).

Прежде, чем перейти к характеризации сплайнов рассматриваемого нами комбинированного пространства, приведем две формулы, доказанные на лекциях доцента М.А.Гольдмана по спецкурсу "Сплайны и конечные элементы", относящиеся к общему определению пространства сплайнов $S(X,Y,Z,T,A)$ в случае, когда пространство $Z=\mathbb{R}^l$, $l\in N$. Пусть $P: X\to N(T)$ - какой-либо оператор. Для того, чтобы элемент $s\in X$ был сплайном пространства $S(T,A)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа λ_i, $i=\overline{1,l}$, для которых выполняются следующие равенства:

$$\langle Ts,Tx\rangle=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(A(x-Px))_i, \ \forall x\in X, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(Ax)_i=0, \ \forall x\in N(T). \qquad (3)$$

Применим эти формулы для характеризации сплайнов комбинированного пространства $S(X,Y,Z_1\times Z_2,T,A_1\times A_2)$ в случае, когда $Z_1\times Z_2=\mathbb{R}^{m+n}$. Пусть $P: X\to N(T)$ - какой-либо оператор.

Для того, чтобы элемент $s\in X$ был сплайном комбинированного пространства $S(T,A_1\times A_2)$, необходимо и достаточно но, чтобы существовали числа λ_i, $i=\overline{1,m}$ и μ_j, $j=\overline{1,n}$, для которых выполняются следующие равенства:

$$\langle Ts, Tx\rangle = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i (A_1(x-Px))_i + \sum_{j=1}^{n}\mu_j (A_2(x-Px))_j, \quad \forall x\in X, \qquad (2')$$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i (A_1 x)_i + \sum_{j=1}^{n}\mu_j (A_2 x)_j = 0, \quad \forall x \in N(T). \qquad (3')$$

Далее будем считать, что P - это оператор, определенный равенством $(Px)(t) = x(t) - \frac{1}{(q-1)!}\int_a^b x^{(q)}(\tau)(t-\tau)_+^{q-1}\,d\tau.$

Используя формулы (2') и (3') для рассматриваемого нами конкретного примера, получаем для сплайна s комбинированного пространства, образованного с помощью пространства эрмитовых сплайнов и пространства сплайнов для локальных средних, следующее выражение:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{q-1}\alpha_k t^k + \sum_{l=0}^{k_i-1}\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{(-1)^{q-l}\lambda_{il}}{(2q-l-1)!}(t-t_i)_+^{2q-l-1} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^q\mu_j}{(2q)!\,(b_i-a_i)}\left[(t-a_i)_+^{2q} - (t-b_i)_+^{2q}\right], \qquad (4)$$

где α_k, $k=\overline{0,q-1}$ - произвольные числа, а числа λ_{il} и μ_j ($i=\overline{1,\alpha}$, $l=\overline{0,k_i-1}$, $j=\overline{1,n}$) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\sum_{l=0}^{k_i-1}\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_{il}(t_i^k)^{(l)} + \sum_{j=1}^{n}\mu_j\frac{b_i^{k+1}-a_i^{k+1}}{b_i-a_i} = 0, \quad k=\overline{0,q-1}. \qquad (5)$$

Нетрудно видеть, что полученные формулы (4), (5) представляют собой некоторую комбинацию известных формул для эрмитовых сплайнов и сплайнов для локальных средних.

В заключение отметим, что рассмотренный нами способ построения комбинированного пространства сплайнов не является единственным возможным.

Автор выражает благодарность доценту М.А.Гольдману за руководство и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Лоран П.Ж. Аппроксимация и оптимизация.–М., 1975.

Поступила 21 марта 1985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 515.12

КОРЕФЛЕКСИВНОСТЬ В КАТЕГОРИЯХ НЕЧЕТКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А.П.Шостак
Латвийский государственный университет
им.П.Стучки

Напомним прежде всего, что нечетким подмножеством данного множества X называется отображение $\mu: X \to \mathfrak{I}$, где $\mathfrak{I} = [0,1]$ [4]. Семейство всех нечетких подмножеств из X обозначаем $\mathfrak{I}^X$.

Определение 1. Нечеткой топологией на множестве X называем отображение $\tau: \mathfrak{I}^X \longrightarrow \mathfrak{I}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для каждого семейства $\{\mu_\alpha : \alpha \in A\} \subset \mathfrak{I}^X$ имеет место неравенство $\tau(\bigvee_{\alpha\in A} \mu_\alpha) \geqslant \bigwedge_{\alpha\in A} \tau(\mu_\alpha)$;

(2) если $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{I}^X$, то $\tau(\mu_1 \wedge \mu_2) \geqslant \tau(\mu_1) \wedge \tau(\mu_2)$;

(3) $\tau(0) = \tau(1) = 1$.

Пара (X,τ), где X - множество, а τ - нечеткая топология на нем, называется нечетким топологическим пространством.

Если τ_1 и τ_2 - две нечеткие топологии на множестве X, то будем говорить, что τ_1 мажорирует τ_2 $(\tau_1 \geqslant \tau_2)$, если $\tau_1(\mu) \geqslant \tau_2(\mu)$ для каждого $\mu \in \mathfrak{I}^X$.

Определение 2. Отображение $f: (X,\tau) \to (Y,\sigma)$, где (X,τ) и (Y,σ) - нечеткие топологические пространства, называется нечетко непрерывным, если $\tau(f^{-1}(\nu)) \geqslant \sigma(\nu)$ для каждого $\nu \in \mathfrak{I}^Y$.

Обозначим через FT категорию, объектами которой служат нечеткие топологические пространства, а морфизмами - нечетко непрерывные отображения.

Замечание 1. Обозначим через Fuz полную подкатегорию категории FT, образованную всеми такими нечеткими топологическими пространствами (X,τ), для которых $\tau: \mathfrak{I}^X \to \{0,1\}$. Если при этом равенство $\tau(\mu) = 1$ трактовать как отношение принадлежности нечеткого множества μ нечеткой топологии τ (т.е. как $\mu \in \tau$), то, как легко заметить, мы придем к определению нечеткого топологического пространства в смысле Ц.Чанга [I] . Итак, Fuz можно понимать как категорию всех нечетких топологических пространств и нечетко непрерывных отображений в смысле Ц.Чанга. В дальнейшем, говоря о категории Fuz , мы будем в зависимости от контекста трактовать τ в паре (X,τ) либо как отображение $\tau: \mathfrak{I}^X \longrightarrow \{0,1\}$, либо как подмножество $\tau \subset \mathfrak{I}^X$, определяемое отображением τ в указанном выше смысле.

Далее. пусть Fuz_k – полная подкатегория категории Fuz, образованная теми пространствами $(X,\tau) \in \mathrm{Fuz}$, нечеткая топология которых удовлетворяет следующему условию

(3') $\tau(\mu)=1$ для каждого постоянного отображения $\mu: X \longrightarrow \mathfrak{I}$. Ясно, что Fuz_k – это, по-существу, категория нечетких топологических пространств в смысле Р.Ловена [3] .

<u>Определение 3</u>. Пусть $\{(X_\alpha,\tau_\alpha): \alpha \in A\}$ – семейство нечетких топологических пространств и $X_\alpha \cap X_{\alpha'} = \emptyset$ при $\alpha \neq \alpha'$. Дискретной суммой этого семейства называется нечеткое топологическое пространство (X,τ) , где $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ а $\tau: \mathfrak{I}^X \to \mathfrak{I}$ определяется равенством $\tau(\mu) = \bigwedge\limits_{\alpha} \tau_\alpha(\mu_\alpha)$, здесь μ_α – ограничение μ на множество X_α .

<u>Определение 4</u>. Пусть $(X,\tau) \in FT$, ρ – отношение эквивалентности на множестве X и $\mathcal{Y} = X/\rho$. Нечеткой фактор-топологией на множестве $\mathcal{Y}$ называется самая слабая нечеткая топология σ на $\mathcal{Y}$, при которой проекция $p: X \longrightarrow \mathcal{Y}$ нечетко непрерывна.

Нетрудно убедится в справедливости следующих двух предложений:

<u>Предложение I</u>. Операция взятия дискретной суммы является копроизведением в категории FT .

<u>Предложение 2</u>. Отображение $p:(X,\tau) \to (\mathcal{Y},\sigma)$, в категории FT является фактор-отображением тогда и только тогда, когда p – коуравнитель в категории FT .

Напомним, что подкатегория $\mathcal{O}\!\iota$ категории $\mathcal{C}$ называется корефлексивной [2] , если для каждого $X \in \mathcal{C}$ существует объект $X^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$ и морфизм $c^{\mathfrak{A}} : X^{\mathfrak{A}} \to X$ (называемый корефлексией) такие, что для каждого морфизма $f : Y \to X$, где $Y \in \mathfrak{A}$, существует единственный морфизм $f' : Y \to X^{\mathfrak{A}}$, замыкающий следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} X^{\mathfrak{A}} \arrow[rr, "c^{\mathfrak{A}}"] & & X \\ & Y \arrow[ul, dashed, "f'"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}.$$

В дальнейшем через $\mathfrak{C}$ будет обозначаться произвольная из категорий FT, Fuz и Fuz_k.

Обозначим через $*$ одноточечное множество, и пусть $\tau^* : I^* \to I$ определено равенством $\tau^*(\mu) = 1$ для всех $\mu : * \to I$.

Предложение 3. Если $\mathfrak{A}$ - корефлексивная подкатегория категории $\mathfrak{C}$, то $(*, \tau^*) \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $*^{\mathfrak{A}} = (Y, \sigma)$ и $c^{\mathfrak{A}} : (Y, \sigma) \to (*, \tau^*)$ - соответствующая корефлексия. Ясно, что $\sigma(\nu) = 1$ для всех $\nu \in I^Y$. Если Y содержит по крайней мере два различных элемента y_1 и y_2, то для отображения $f : (Y, \sigma) \to (*, \tau^*)$ имеют место равенства $c^{\mathfrak{A}} f_1 = c^{\mathfrak{A}} f_2 = f$, где $f_1 : Y \to \{y_1\} \subset Y$, $f_2 : Y \to \{y_2\} \subset Y$, что противоречит определению корефлексии.

Теорема I. Если $\mathfrak{A}$ - корефлексивная подкатегория категории $\mathfrak{C}$, то каждая корефлексия является биекцией.

Доказательство. Пусть $(X, \tau) \in \mathfrak{C}$ и $c^{\mathfrak{A}} : (X^{\mathfrak{A}}, \tau^{\mathfrak{A}}) \to (X, \tau)$ - корефлексия. Легко видеть, что отображение $f : (*, \tau^*) \to (X, \tau)$ является морфизмом категории $\mathfrak{C}$, а следовательно, $c^{\mathfrak{A}}$ - сюрьекция. Далее, если $c^{\mathfrak{A}}(y_1) = c^{\mathfrak{A}}(y_2) = x$ для некоторых точек $y_1, y_2 \in X^{\mathfrak{A}}$, то рассмотрим отображения $f : * \to \{x\}$, $f_1 : * \to \{y_1\}$ и $f_2 : * \to \{y_2\}$. Легко видеть, что f является морфизмом категории $\mathfrak{C}$ из $(*, \tau^*)$ в (X, τ), а f_1 и f_2 - морфизмами категории $\mathfrak{C}$ из $(*, \tau^*)$ в $(X^{\mathfrak{A}}, \tau^{\mathfrak{A}})$ и при этом $c^{\mathfrak{A}} f_1 = c^{\mathfrak{A}} f_2 = f$, что противоречит определению корефлексии. Отсюда следует иньективность отображения $c^{\mathfrak{A}}$.

Следствие I. Если подкатегория $\mathfrak{A}$ корефлексивна в $\mathfrak{C}$ и $(X^{\mathfrak{A}}, \tau^{\mathfrak{A}})$ - $\mathfrak{A}$-модификация пространства $(X, \tau) \in \mathfrak{C}$, то без ограничения общности можно считать, что $X^{\mathfrak{A}} = X$.

Следствие 2. Пусть подкатегория $\mathfrak{A}$ корефлексивна в

$\mathscr{C}$. Если $(X,\tau)\in\mathscr{C}$ и $\tau(\mu)=1$ для всех $\mu\in\mathfrak{I}^X$, то $(X,\tau)\in\mathfrak{A}$.

<u>Следствие 3</u>. Каждая корефлексивная подкатегория $\mathfrak{A}$ категории $\mathscr{C}$ является эпи-моно-корефлексивной.

<u>Теорема 2</u>. Подкатегория $\mathfrak{A}$ категории $\mathscr{C}$ корефлексивна тогда и только тогда, когда для каждого $(X,\tau)\in\mathscr{C}$ существует нечеткая топология $\tau^{\mathfrak{A}}$ на X такая, что (I) $\tau^{\mathfrak{A}}\geqslant\tau$; (2) $(X,\tau^{\mathfrak{A}})\in\mathfrak{A}$; (3) $\tau^{\mathfrak{A}}$ - самая слабая нечеткая топология, удовлетворяющая условиям (I) и (2), (4) для каждого пространства $(Y,\sigma)\in\mathscr{C}$ и каждого морфизма $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ категории $\mathscr{C}$ отображение $f:(X,\tau^{\mathfrak{A}})\to(Y,\sigma^{\mathfrak{A}})$ является морфизмом категории $\mathfrak{A}$.

<u>Доказательство</u> основывается на теореме I и может быть проведено аналогично доказательству теоремы 5 из [2]. Отсюда, по аналогии с доказательством теоремы 6 из [2] получаем следующий результат (через $\mathscr{C}\mathfrak{T}(X)$ обозначается множество всех нечетких топологий τ на X таких, что $(X,\tau)\in\mathscr{C}$):

<u>Теорема 3</u>. Подкатегория $\mathfrak{A}$ категории $\mathscr{C}$ корефлексивна тогда и только тогда, когда для каждого множества X существует монотонно возрастающее отображение $\gamma_X:\mathscr{C}\mathfrak{T}(X)\longrightarrow\mathscr{C}\mathfrak{T}(X)$ такое, что

(I) $\gamma_X(\tau)=\tau$ тогда и только тогда, когда $(X,\tau)\in\mathfrak{A}$;

(2) если $f:(X,\tau)\longrightarrow(Y,\sigma)$ является морфизмом категории $\mathscr{C}$, то $f:(X,\gamma_X(\tau))\longrightarrow(Y,\sigma_Y(\sigma))$ - морфизм категории $\mathfrak{A}$.

Учитывая предложения I,2 и следствие 3, по аналогии с доказательством теоремы 7 из [2] можно получить также следующую характеристику корефлексивных подкатегорий категории $\mathscr{C}$:

<u>Теорема 4</u>. Подкатегория $\mathfrak{A}$ категории $\mathscr{C}$ корефлексивна тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно взятия дискретных сумм и перехода к фактор-пространству.

<u>Теорема 5</u>. Каждая корефлексивная подкатегория $\mathfrak{A}$ категории $\mathscr{C}$ кополна.

<u>Доказательство</u>. Кополнота категорий $\mathscr{C}$-Fuz и $\mathscr{C}$-Fuz$_k$

известна [3]; кополнота категории $\mathcal{B} = FT$ проверяется непосредственно. Отсюда и из общего категорного факта (см., например, [2], теорема I(I)) следует утверждение теоремы.

<u>Теорема 6</u>. Для каждой подкатегории $\mathfrak{A}$ категории $\mathcal{B}$ существует минимальная корефлексивная подкатегория $\mathcal{B}(\mathfrak{A})$ категории $\mathcal{B}$, содержащая $\mathfrak{A}$. При этом $\mathcal{B}(\mathfrak{A})$ состоит в точности из всех факторных образов дискретных сумм объектов категории $\mathfrak{A}$.

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству теоремы I2 из [2] с учетом предложений I,2 и следствия 3.

<u>Теорема 7</u>. а) Категория Fuz корефлексивна в FT.
в) Категория Fuz_k корефлексивна в Fuz.

<u>Доказательство</u>. а) Пусть $(X,\tau) \in FT$ и определим отображение $\tilde{\tau}: \mathcal{I}^X \to \{0,1\}$ равенством $\tilde{\tau}(\mu) = 1$, если $\tau(\mu) > 0$ и $\tilde{\tau}(\mu) = 0$ при $\tau(\mu) = 0$. Непосредственно проверяется, что $(X,\tilde{\tau}) \in Fuz$ и тождественное отображение $c: (X,\tilde{\tau}) \to (X,\tau)$ является морфизмом категории FT. При этом для каждого $(Y,\sigma) \in Fuz$ и каждого морфизма $f: (Y,\sigma) \to (X,\tau)$ существует единственный морфизм $f': (Y,\sigma) \to (X,\tilde{\tau})$ такой, что $f = c \circ f'$. Но это и означает, что так определенное отображение $c = c^{Fuz}$ является корефлексией из подкатегории Fuz в категорию FT.

в) Пусть $(X,\tau) \in Fuz$. Определим нечеткую топологию τ_k на X, взяв в качестве ее предбазы семейство нечетких множеств $\varphi = \tau \cup A$, где A - совокупность всех постоянных отображений из X в $\mathcal{I}$. Очевидно, что $(X,\tau_k) \in Fuz_k$ и тождественное отображение $c: (X,\tau_k) \to (X,\tau)$ является морфизмом в Fuz. Непосредственно проверяется, что это отображение $c = c^{Fuz_k}$ является корефлексией из подкатегории Fuz_k в категорию Fuz.

<u>Следствие</u>. а) Каждая корефлексивная подкатегория $\mathfrak{A}$ категории Fuz является корефлексивной и в FT.

в) Каждая корефлексивная подкатегория $\mathfrak{A}$ категории Fuz_k является корефлексивной также в Fuz и в FT.

<u>Замечание 2</u>. Пусть M - некоторое подмножество в $\mathcal{I}$, содержащее 0, I, и инвариантное относительно перехода к супремуму. Обозначим через $FT(M)$ полную подкатегорию

категории FT, образованную всеми такими объектами $(X,\tau)\in FT$, что $\tau(\mathfrak{I}^X)\subset M$. (В частности, $FT(\mathfrak{I})=FT$, $FT(\{0,1\})=Fuz$). По аналогии с доказательством п. а) теоремы 7 легко проверить, что $FT(M)$ - корефлексивная подкатегория в FT. При этом, если $M_1\subset M_2$ то $FT(M_1)$ - корефлексивная подкатегория в FT, и если $M_1\neq M_2$, то $FT(M_1)\neq FT(M_2)$.

Пусть теперь $Fuz(M)$ - полная подкатегория категории Fuz, объектами которой служат такие $(X,\tau)\in Fuz$, что $\tau(\mu)=1$ для каждого постоянного отображения $\mu: X\to M$. (В частности, $Fuz(\{0,1\})=Fuz$, $Fuz(\mathfrak{I})=Fuz_k$.) По аналогии с доказательством п. в) теоремы 7 легко проверить, что $Fuz(M)$ - корефлексивная подкатегория в Fuz. При этом, если $M_1\subset M_2$, то $Fuz(M_1)\supset Fuz(M_2)$, и если $M_1\neq M_2$, то $Fuz(M_1)\neq Fuz(M_2)$.

Обратимся теперь к вопросу о связи категории Top топологических пространств и ее корефлексивных подкатегорий с корефлексивными подкатегориями в FT. Пусть $\omega: Top\to Fuz_k$ и $i: Fuz\to Top$ - функторы, определенные Р.Ловеном [3]. Известно, что $\omega(Top)$ - подкатегория в Fuz_k, изоморфная Top.

<u>Теорема 8</u>. $\omega(Top)$ является корефлексивной подкатегорией категории Fuz_k.

<u>Доказательство</u>. Для каждого $(X,\tau)\in Fuz_k$ положим $\tilde{\tau}=\omega i(\tau)$. Ясно, что $(X,\tilde{\tau})\in\omega(Top)$. Непосредственно проверяется, что тождественное отображение $c:(X,\tilde{\tau})\to(X,\tau)$ является корефлексией из $\omega(Top)$ в Fuz_k.

<u>Следствие</u>. Если $\mathfrak{N}$ - корефлексивная подкатегория в Top, то $\omega(\mathfrak{N})$ - корефлексивная подкатегория в Fuz_k, а следовательно, - в Fuz и в FT.

<u>Теорема 9</u>. Пусть $\mathfrak{N}$ - корефлексивная подкатегория категории Top. Тогда $\Psi(\mathfrak{N})=\{\omega((iX)^{\mathfrak{N}}): X\in Fuz\}$ является корефлексивной подкатегорией в Fuz_k (а следовательно, и в категориях Fuz и FT).

<u>Доказательство</u>. Пусть $X(=(X,\tau))\in Fuz_k$; тогда $iX(=(X,i\tau))\in Top$ и следовательно существуют $(iX)^{\mathfrak{N}}(=(X,(i\tau)^{\mathfrak{N}})\in\mathfrak{N}$ и корефлексия $c^{\mathfrak{N}}:(iX)^{\mathfrak{N}}\to iX$ в Top. При этом можем считать, что $c^{\mathfrak{N}}$ - тождественно на X.

Пусть $\omega(iX)^{\mathfrak{A}} = (X, \omega(i\tau)^{\mathfrak{A}})$ и $\omega iX = (X, \omega i\tau)$. Тогда $c^{\mathfrak{A}}: \omega(iX)^{\mathfrak{A}} \to \omega iX$ также является морфизмом категории Fuz_k и, поскольку $\tau \leqslant \omega i\tau$, то и $c^{\Psi(\mathfrak{A})} = c^{\mathfrak{A}}: \omega(iX)^{\mathfrak{A}} \to X$ - морфизм категории Fuz_k. Покажем, что $c^{\Psi(\mathfrak{A})}$ - корефлексия из $\Psi(\mathfrak{A})$ в категорию Fuz_k.

Пусть $\mathcal{Y} = (Y, \sigma) \in \Psi(\mathfrak{A})$. Тогда $\mathcal{Y} = \omega(i\mathcal{Z})^{\mathfrak{A}}$ для некоторого $\mathcal{Z} \in \mathrm{Fuz}_k$. Рассмотрим морфизм $f: (Y, \sigma) \to (X, \tau)$ категории Fuz_k, тогда $f: i\mathcal{Y} = (Y, i\sigma) \to iX = (X, i\tau)$ - морфизм категории Top. Но $i \circ \omega: \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ - тождественный функтор, а следовательно, $i\mathcal{Y} = i\omega(i\mathcal{Z})^{\mathfrak{A}} = (i\mathcal{Z})^{\mathfrak{A}} \in \mathfrak{A}$, т.е. $f: (i\mathcal{Z})^{\mathfrak{A}} \to iX$ - морфизм категории Top. Поэтому существует единственный морфизм $f^{\mathfrak{A}}$, замыкающий диаграмму (I). Из коммутативности диаграммы (I) следует коммутативность диаграммы (2), а значит, с учетом неравенства $\tau \leqslant \omega i\tau$, и коммутативность диаграммы (3):

$$\begin{tikzcd} (iX)^{\mathfrak{A}} \arrow[r, "c^{\mathfrak{A}}"] & iX \\ & i\mathcal{Y} \arrow[ul, dashed, "f^{\mathfrak{A}}"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \quad (1) \qquad \begin{tikzcd} \omega(iX)^{\mathfrak{A}} \arrow[r, "c^{\mathfrak{A}}"] & \omega(iX) \\ & \omega i\mathcal{Y} = \mathcal{Y} \arrow[ul, dashed, "f^{\mathfrak{A}}"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \quad (2)$$

$$\begin{tikzcd} \omega(iX)^{\mathfrak{A}} \arrow[r, "c^{\Psi(\mathfrak{A})}"] & X \\ & \mathcal{Y} \arrow[ul, dashed, "f^{\mathfrak{A}}"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \quad (3)$$

Для завершения доказательства осталось показать, что морфизм $f^{\mathfrak{A}}$, замыкающий диаграмму (3), - единственный. Пусть $f_1^{\mathfrak{A}}$ и $f_2^{\mathfrak{A}}$ - два различных морфизма, замыкающих диаграмму (3). Тогда, очевидно, $f_1^{\mathfrak{A}}, f_2^{\mathfrak{A}}: i(\mathcal{Y}) \to \omega(iX)^{\mathfrak{A}} = (iX)^{\mathfrak{A}}$ - два различных морфизма, замыкающих диаграмму (I), что противоречит определению $c^{\mathfrak{A}}$ как корефлексии.

Список литературы

1. Chang S. Fuzzy topological spaces//J. Math. Anal. Appl.,- 1968,-V.24,-P.182-190.
2. Herrlich H., Strecker G.E. Coreflective subcategories in general topology//Fund.Math.-1972,V.73,-P.199-210.
3. Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness// J. Math. Anal. Appl.,-1976-V.56,-P.621-633.
4. Zadeh L.A. Fuzzy sets//Inform.&Control;1965;V.8;P.338-353.

Поступила IO мая I985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига, 1986.

УДК 517.5

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРАХ С ОРТОГОНАЛЬНЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Г.К.Энгелис
Латвийский государственный университет
им.П.Стучки

Известно, что классические ортогональные полиномы являются собственными функциями оператора

$$a\frac{d^2}{dx^2}+b\frac{d}{dx}$$

где a, b полиномы, $\deg a\le 2$, $\deg b\le 1$. Естественным двумерным аналогом этого оператора является

$$L(z)=\left(a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2}{\partial y^2}+d\frac{\partial}{\partial x}+e\frac{\partial}{\partial y}\right)z, \qquad (1)$$

где все коэффициенты – полиномы от x и y, $\deg a\le 2$, $\deg b\le 2$, $\deg c\le 2$, $\deg d\le 1$, $\deg e\le 1$. В §2 нашей статьи [2] показан некоторый метод исследования полиномиальных собственных функций такого оператора. В настоящей заметке используются методы и обозначения этой статьи, в частности, Π обозначает множество всех полиномов от двух аргументов над полем комплексных чисел, Π_k – множество полиномов, степень которых не выше k, a_{mn} – коэффициент при $x^m y^n$ в полиноме a. В §§ 3,4 упомянутой статьи изучен случай, когда выполняются условия

$$a_{11}=a_{02}=b_{20}=b_{02}=c_{20}=c_{11}=d_{01}=e_{10}=0 \qquad (2)$$

и

$$a_{20}=b_{11}=c_{02},\ d_{10}=e_{01}. \qquad (3)$$

В настоящей статье, так же, как в [3], рассматривается случай, когда коэффициенты оператора удовлетворяют только условию (2), но основное внимание обращается на отличия, возникающие из-за отбрасывания условия (3).

Прежде всего отметим два интересных частных случая, не упомянутых в [3]. Нам неизвестен перечень возможных нормальных форм (эквивалентных относительно аффинной замены аргументов) оператора L при условии (2), так что не исключено существование еще других подобных случаев.

Теорема I. Полиномиальные решения уравнения

$$z''_{xx}+4xz''_{xy}+4yz''_{yy}-2\beta xz'_x+(-4\beta y+4\alpha+6)z'_y+2\beta(m+2n)z=0$$

(где $\beta>0$, $\alpha>-1$), соответствующие различным значениям чисел $m+2n$, ортогональны на множестве $\{(x,y)|x^2\le y\}$ с весом $e^{-\beta y}(y-x^2)^{\alpha}$.

Этот факт указан в [I] . Доказательство легко следует из теорем I–4 статьи [2] , так как в этом случае $ac-b^2=4(y-x^2)$, на параболе $y=x^2$ имеем $a\,dy-b\,dx=$ $=b\,dy-c\,dx=0$, и решение системы

$$\begin{cases} dp-(ap)'_x-(bp)'_y=0 \\ \ell p-(bp)'_x-(cp)'_y=0 \end{cases}$$

имеет вид $p(x,y)=e^{-\beta y}(y-x^2)^{\alpha}$.

Теорема 2. Полиномиальные решения уравнения

$$(x^2-1)z''_{xx}+4(xy-x)z''_{xy}+4(y^2-y)z''_{yy}+(2\beta+4)xz'_x+((4\beta+10)y-4\alpha-6)z'_y-$$
$$-(m+2n)(m+2n+\beta+3)z=0$$

(где $\alpha>-1$, $\beta>\alpha-1$), соответствующие различным значениям чисел $m+2n$, ортогональны на множестве $\{(x,y)|x^2\le y\le 1\}$ с весом $(y-x^2)^{\alpha}(1-y)^{\beta-\alpha}$.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы I.

Отметим, что, если в предыдущих теоремах α и β не удовлетворяют указанным условиям, то ортогональность решений уравнения все же может иметь место относительно другого, более общего скалярного произведения. Пусть

$$\mathcal{D}_1p=ap'_x+bp'_y+dp,\qquad \mathcal{D}_2p=bp'_x+cp'_y+ep.$$

Если существует определенный на Π ненулевой линейный функционал $\mathcal{F}$ такой, что для каждого $p\in\Pi$

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}_1p)=\mathcal{F}(\mathcal{D}_2p)=0, \tag{4}$$

то упомянутое скалярное произведение определяется равенством

$$(p,q)=\mathcal{F}(pq).$$

Функционал $\mathcal{F}$ определяется также двойной последовательностью чисел $\mu_{mn}=\mathcal{F}(x^m y^n)$. Если ввести обозначения

$$\Lambda_1(k,\ell)=a_{20}k+b_{11}\ell+d_{10},\quad \Lambda_2(k,\ell)=b_{11}k+c_{02}\ell+\ell_{01},$$

то из (4) следует, что для всех $(k,\ell)\in N\times N$ выполняются равенства

$$
\begin{cases}
a_{00}k\mu_{k-1,l}+b_{00}\mu_{k,l-1}+a_{01}k\mu_{k-1,l+1}+(a_{10}k+b_{01}l+d_{00})\mu_{kl}+\\
+b_{10}l\mu_{k+1,l-1}+\Lambda_1(k,l)\mu_{k+1,l}=0\\
b_{00}k\mu_{k-1,l}+c_{00}l\mu_{k,l-1}+b_{01}k\mu_{k-1,l+1}+(b_{10}k+c_{01}l+e_{00})\mu_{kl}\\
+c_{10}l\mu_{k+1,l-1}+\Lambda_2(k,l)\mu_{k,l+1}=0\,.
\end{cases}
\qquad (5)
$$

Из этой бесконечной однородной системы уравнений можно индуктивно вычислить все μ_{mn} (полагая, например, $\mu_{00}=1$, так как для ненулевого функционала всегда $\mu_{00}\neq 0$) и тем самым определить функционал $\mathfrak{F}$, если такой вообще существует. Единственность решения обеспечена, если для всех (k,l) верно, что $\Lambda_1(k,l)\neq 0$ и $\Lambda_2(k,l)\neq 0$. Но ненулевой функционал $\mathfrak{F}$ может и не существовать, так как при $kl\neq 0$ число μ_{kl} вычисляется из двух уравнений, и эти уравнения могут быть противоречивыми.

Теорема 3. Если коэффициенты оператора (I) удовлетворяют условию (2), то ненулевой функционал $\mathfrak{F}$, связанный с оператором соотношениями (4), существует тогда и только тогда, если для каждой пары $(k,l)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ существуют такие p и q из Π_{k+l-1}, что

$$[\Lambda_1(k,l)\Lambda_2(k+1,l)\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2-\Lambda_1(k,l+1)\Lambda_2(k,l)\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1]x^k y^l=\mathfrak{D}_1 p+\mathfrak{D}_2 q.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы II из [2]. В условиях теоремы II всегда $\Lambda_1(k,l)=\Lambda_2(k,l)=\Lambda_1(k+1,l-1)=\Lambda_2(k-1,l+1)$, поэтому эти множители можно опустить; но они существенны, если условие (3) не выполняется.

Наконец, отметим, что класс операторов (I), для которых выполнены условия (2) и (3), инвариантен относительно аффинного преобразования

$$
\begin{cases}
x=t_{11}x'+t_{12}y'+t_{10}\\
y=t_{21}x'+t_{22}y'+t_{20}\,.
\end{cases}
\qquad (6)
$$

Но если выполняется только условие (2), то инвариантности уже нет. Отсюда возникает задача: как узнать, можно ли заданный оператор (I) получить при помощи замены переменных (6) из оператора, коэффициенты которого удовлетворяют условию (2). Решение этой задачи связано со следующей теоремой.

<u>Теорема 4.</u> Пусть оператор (I) получен преобразованием (6) из другого оператора, для которого выполняется условие (2) и, кроме того, $a_{20}=A$, $b_{11}=B$, $c_{02}=C$, $d_{10}=D$, $l_{01}=E$ и пусть $r=t_{11}t_{22}$, $s=t_{12}t_{21}$, $u=t_{11}t_{21}$, $v=t_{21}t_{22}$ (так что $rs=uv$, $\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}=r-s$); тогда

$$\begin{pmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{02} \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} \\ c_{20} & c_{11} & c_{02} \end{pmatrix}(r-s)^2=\begin{pmatrix} r^2A-2rsB+s^2C & 2v(-rA+(r+s)B+sC) & v^2(A-2B+C) \\ u(-rA+(r+s)B-sC) & -2rsA+(r^2+s^2)B-2rsC & v(-sA+(r+s)B-rC) \\ u^2(A-2B+C) & 2u(sA-(r+s)B+uC) & s^2A-2rsB+r^2C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_{10} & d_{01} \\ l_{10} & l_{01} \end{pmatrix}(r-s)=\begin{pmatrix} rD-sE & v(D-E) \\ u(-D+E) & -sD+rE \end{pmatrix}.$$

Доказательство сводится к несложным, но громоздким вычислениям, которые можно несколько упростить, используя теорему 9 из [2] .

Если теперь задан конкретный оператор (I), то решение упомянутой задачи сводится к решению системы I3 уравнений с 8 неизвестными (A, B, C, D, E, r, s, u , причем $r \neq s$). Некоторые необходимые условия разрешимости системы формулируются просто. Например, если деление коэффициентов законно, то

$$\frac{a_{11}}{2b_{20}}=\frac{c_{11}}{2b_{02}}=\frac{d_{11}}{l_{10}}, \quad \frac{c_{20}}{a_{02}}=\left(\frac{d_{11}}{l_{10}}\right)^2,$$

однако необходимое и достаточное условие получается довольно громоздким.

Список литературы

I. Агаханов С.А. Метод построения ортогональных полиномов двух переменных для одного класса весовых функций // Вестник Ленинградского университета.-I965.-Т.I9.-С.5-I0.

2. Энгелис Г.К. О некоторых двумерных аналогах классических ортогональных полиномов // Латвийский математический ежегодник.-I974.-Т.I5.-С.I69-202.

3. Энгелис Г.К. О некоторых семействах полиномов двух аргументов // "Топологические пространства и их отображения" .-Рига.I985.-С.I84-I89.

Поступила 20 февраля I985 года.

Непрерывные функции на топологических пространствах.
Рига. 1986.

УДК 517.91; 517.93

ОРБИТАЛЬНАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ПОТОКОВ С ЗАМКНУТЫМИ ТРАЕКТОРИЯМИ

Г.Г. Окунева
Московский государственный университет
им.М.В.Ломоносова

§ 1. Постановка задачи

Изучению гладких потоков на двумерных многообразиях посвящена обширная литература (см.[1]). При этом, как правило, рассматриваются потоки "общего положения", удовлетворяющие тем или иным условиям транзитивности. Однако в некоторых задачах, в том числе возникающих в механике [2], появляются потоки, все неособые траектории которых замкнуты. Настоящая работа посвящена топологической орбитальной классификации таких потоков на замкнутых двумерных поверхностях.

Напомним, что два потока g_1^t и g_2^t на топологическом пространстве M называются топологически орбитально эквивалентными (ТОЭ) [1], если существует гомеоморфизм M на себя, при котором образ каждой траектории потока g_1^t является траекторией потока g_2^t.

Определение. Пусть M - двумерное компактное ориентируемое многообразие с краем ∂M (возможно пустым). Будем говорить, что гладкий поток g^t на M - простой, если: 1) все особые точки потока невырождены и являются седлами либо центрами, 2) α и ω - предельные множества сепаратрис потока совпадают, 3) все неособые траектории потока замкнуты, 4) каждая компонента ∂M является неособой траекторией потока g^t.

§2. Склеивание простых потоков.

Определение. Пусть N', N'' - компактные поверхности, g'^t, g''^t простые потоки на них, $C'\subset \partial N'$, $C''\subset \partial N''$ - подмногообразия краев, составленные из целых компонент, $\varphi: C'\to C''$ - диффеоморфизм такой, что $\varphi\circ g'^t = g''^t\circ\varphi$ для каждого $t\in\mathbb{R}$.

Пусть N - поверхность, получаемая из N' и N'' склеиванием по φ [3]. Поток g^t на N называется склеенным по φ из потоков g'^t и g''^t, если $g^t \circ i' = g'^t$, $g^t \circ i'' = g''^t$, где $i' : N' \to N$, $i'' : N'' \to N$ - вложения.

Очевидно, что в условиях определения поток g^t существует, единственен и является простым.

Так как нас интересует лишь топологический орбитальный тип потоков, процедуру склеивания можно упростить. Прежде всего, из условия $\varphi \circ g'^t = g''^t \circ \varphi$ ясно, что для задания диффеоморфизма φ достаточно указать образ при φ одной точки из каждой компоненты множества C'. Из следующей очевидной леммы вытекает, что для наших целей достаточно указать лишь компоненту множества C'', в которую попадает при диффеоморфизме φ образ точки из данной компоненты C'.

<u>Лемма 1</u>. Пусть N', N'' - поверхности с краем, g'^t, g''^t - простые потоки на них, C', C'' - подмножества краев N' и N'', составленные из их целых компонент, $\varphi_1, \varphi_2 : C' \to C''$ - диффеоморфизмы, причем $\varphi_i \circ g'^t = g''^t \circ \varphi_i$, $i = 1, 2$, и для любой точки $c \in C'$ $\varphi_1(c)$ и $\varphi_2(c)$ принадлежат одной компоненте C''; g_1^t и g_2^t - потоки, получающиеся из g'^t и g''^t склеиванием соответственно по φ_1 и φ_2. Тогда g_1^t и g_2^t топологически орбитально эквивалентны.

Таким образом, топологический орбитальный тип результата склеивания двух потоков определяется тем, какая компонента множества C' склеивается с какой компонентой множества C'', т.е. разбиением множества компонент множества $C' \cup C''$ на пары, в каждой из которых один элемент является компонентой C', а другой - компонентой C''. Будем называть такие разбиения схемами склеивания.

<u>Лемма 2</u>. Если g_1^t, g_2^t - ТОЭ потоки на поверхности N, то существует гомеоморфизм $h : N \to N$, переводящий траектории потока g_1^t в траектории потока g_2^t, тождественный на ∂N.

<u>Лемма 3.</u> Пусть N', N'' - компактные поверхности с краем, $g_1'^t$, $g_2'^t$ - простые ТОЭ потоки на N'; $g_1''^t$, $g_2''^t$ - простые ТОЭ потоки на N'' и S - схема склеивания. Тогда потоки, получающиеся склеиванием по S потоков $g_1'^t$, $g_1''^t$ и $g_2'^t$, $g_2''^t$, являются ТОЭ.

Итак, орбитальный топологический тип склеенного потока определяется топологическими типами склеиваемых потоков и схемой склеивания. Ясно, что, вообще говоря, две различные схемы склеивания S_1 и S_2 могут привести к топологически орбитально эквивалентным склеенным потокам. В частности, это, очевидно, произойдет, если найдется сохраняющий траектории гомеоморфизм $N'\cup N'' \to N'\cup N''$, переводящий S_1 в S_2. Такие схемы склеивания будем называть топологически неразличимыми. Соответственно, две компоненты C_1 и C_2 края ∂N с простым потоком g^t будем называть топологически неразличимыми (относительно потока g^t), если найдется гомеоморфизм N на себя, отображающий C_1 на C_2, C_2 на C_1, а остальные компоненты ∂N - каждую на себя. Ясно, что любая схема склеивания, получающаяся из S перестановкой топологически неразличимых компонент, топологически неразличима с S.

Определения и результаты этого параграфа очевидным образом распространяются на случай склеивания $n \geqslant 2$ потоков.

§ 3. Классификация простых потоков

Пусть M - связная замкнутая ориентируемая поверхность рода p, g^t - простой поток на M, имеющий k седловых особых точек. В силу теоремы об индексе $k \geqslant 2p-2$, при этом g^t имеет $2p-2-k$ центров. При $k=0$ классификация исчерпывается следующим утверждением.

Лемма 4. а) Если простой поток g^t не имеет особенностей, то M - тор. Любые два таких потока являются ТОЭ.
б) Если простой поток g^t имеет хотя бы один центр и не имеет седел, то M - сфера, и g^t имеет два центра. Любые два таких потока являются ТОЭ.

Далее будем считать, что $k \geqslant 1$.

Из определения простого потока следует, что объединение каждой седловой точки с выходящими из нее сепаратрисами гомеоморфно восьмерке. Из ориентируемости поверхности M очевидно следует, что всякая достаточно малая инвариантная относительно g^t окрестность этого объединения имеет замыкание, не содержащее других особых точек и гомеоморфное сфере с тремя дырками - полукренделю. Выберем такие окрестности $U_1,\ldots,U_k$ для каждой седловой точки. Тогда $M' = M\setminus(U_1\cup\ldots\cup U_k)$ - подмногообразие M с краем, инвариантное относительно g^t. Ясно, что ограничение $\tilde{g}^t$ потока g^t на M' - простой поток на M', не имеющий седловых точек.

Выясним структуру поверхности M. На удвоении $\mathrm{dopp}\,M'$ поверхности M' [3] естественно возникает удвоение $\mathrm{dopp}\,\tilde{g}^t$ потока $\tilde{g}^t$. Ясно, что $\mathrm{dopp}\,\tilde{g}^t$ - простой поток без седловых точек. Очевидно, что $\mathrm{dopp}\,M'$ - сумма сфер и торов, причем на каждой сфере $\mathrm{dopp}\,\tilde{g}^t$ имеет два центра, а на торах $\mathrm{dopp}\,\tilde{g}^t$ не имеет особых точек. Так как сферы и торы могут получаться только удвоение дисков и колец, и ни сфера, ни тор не могут быть собственным подмногообразием связной поверхности M, заключаем, что M' - сумма дисков и колец, причем ограничение $\tilde{g}^t$ на каждый диск имеет ровно один центр, а ограничение $\tilde{g}^t$ на каждое кольцо не имеет особых точек. Так как поток g^t имеет всего $2p-2-k$ центров, M' содержит $2p-2-k$ дисков. Учитывая, что каждый полукрендель имеет 3 компоненты края, каждое кольцо - 2, и каждый диск - 1, причем каждая компонента края M' является одновременно компонентой края одного из полукренделей, нетрудно подсчитать, что M' содержит $2k-p+1$ кольцо.

Итак, поток g^t представляет собой результат оклеивания своих ограничений на k полукренделей, $2p-2-k$ дисков и $2k-p+1$ кольцо. В соответствии с результатами § 2, топологический орбитальный тип g^t определяется топологическими орбитальными типами этих ограничений и схемой оклеивания.

Покажем, что фактически имеет значение только схема оклеивания.

<u>Лемма 5</u>. Любые два простых потока с единственным центром на двумерном диске являются ТОЭ.

<u>Лемма 6</u>. Любые два простых потока без особых точек на кольце являются ТОЭ. При этом компоненты края кольца топологически неразличимы.

<u>Лемма 7</u>. Любые два простых потока на полукренделе с единственной седловой точкой являются ТОЭ. При этом две их трех компонент края полукренделя топологически неразличимы,

а третья топологически различима с первыми двумя.

Компоненту края полукренделя, топологически отличимую от остальных двух, будем называть компонентой типа W, остальные две – компонентами типа V. Критерий, различающий компоненты V и W, таков: компонента C края полукренделя с потоком g^t имеет тип V, если одна из сепаратрис потока разбивает полукрендель между C и остальными компонентами края.

Итак, топологический тип g^t определяется только схемой склеивания g^t из простейших потоков. Это приводит нас к следующему определению: пусть $A=\{W_1, V_1, V_1', \dots, W_k, V_k, V_k'\}$ – множество символов. Перестановку $\pi: A \to A$ назовем допустимой, если она представима как композиция следующих перестановок: а) $\pi_i: A \to A$, π_i переставляет V_i и V_i', остальные символы остаются неподвижными. б) $\pi_\rho: A \to A$, где ρ – перестановка множества $\{1, \dots, k\}$; $\pi_\rho: V_i \to V_{\rho(i)}$, $V_i' \to V_{\rho(i)}'$, $W_i \to W_{\rho(i)}$.

Пусть T – множество всех разбиений множества A на $2k-p+1$ двухэлементных и $2p-2-k$ одноэлементных множества. Два разбиения $t, t' \in T$ будем считать эквивалентными, если t переводится в t' некоторой допустимой перестановкой множества T. Класс эквивалентности множества относительно такого отношения эквивалентности будем называть (p,k) схемами.

Сопоставим каждому простому потоку g^t (с $k \geq 1$) на M некоторую (p,k) схему.

Пусть $p_1, \dots, p_k$ – седловые точки g^t на M, и пусть точка p_i имеет сепаратрисы ℓ_i, ℓ_i'. Выберем, как выше, инвариантные малые окрестности $\ell_i \cup \ell_i' \cup \{p_i\}$ и сопоставим каждой компоненте C края дополнения M' объединения этих окрестностей символ W_i, если C имеет тип W в i-м полукренделе, и символ V_i, если C имеет тип V и полукрендель разбивается между C и дополнением своего края до C сепаратрисой ℓ_i; аналогично сопоставляется символ V_i'. Объединим символы, соответствующие одному и тому же кольцу в пары; символы, соответствующие дискам, образуют одноэлементные множества. Таким образом, каждому потоку мы сопоставили некоторый элемент множества T.

Лемма 8. Построенный элемент множества T не зависит от выбора достаточно малых инвариантных окрестностей множеств $l_i \cup l'_i \cup \{p_i\}$.

Таким образом, при определении разбиения множества A, соответствующего потоку g^t, остается лишь произвол в выборе нумераций особых точек и сепаратрис. С учетом топологической неразличимости компонент краев колец и компонент краев полукренделей типа V, этот произвол уничтожается факторизацией группы допустимых перестановок множества A. В итоге получаем:

Теорема. Два простых потока с $k>1$ седловыми точками на замкнутой ориентируемой поверхности рода p являются ТОЭ тогда и только тогда, когда их (p,k) - схемы совпадают.

Следствие. На замкнутой ориентируемой поверхности рода p имеется не более
$$\frac{(3k)!}{(2p-2-k)!\,(2k-p+1)!\,2^{2k-p+1}}$$
орбитальных топологических типов простых потоков.

Действительно, именно такова мощность множества T.

Пример. На поверхности рода 2 (крендель) имеется 5 типов простых потоков с двумя седлами. (p,k) - схему удобно задавать своим представителем, игнорируя при этом штрихи в обозначении V'_i. В таком представлении типы потоков следующие:

1) $(W_1,W_2),(V_1,V_2),(V_1,V_2)$; 2) $(W_1,W_2),(V_1,V_1),(V_2,V_2)$;
3) $(W_1,V_1),(W_2,V_2),(V_1,V_2)$; 4) $(W_1,V_1),(W_2,V_1),(V_2,V_2)$;
5) $(W_1,V_2),(W_2,V_1),(V_1,V_2)$.

Автор благодарен Я.В.Татаринову за помощь в работе.

Список литературы

1. Арансон С.Х., Гринес В.З. Потоки на двумерных многообразиях. // Современные проблемы математики. Динамические системы. Т.1: Итоги науки и техники.- М.,1985.- С. 229-237.
2. Окунева Г.Г. Движение в ньютоновом поле сил твердого тела, имеющего неподвижную точку и подчиненного неголономной связи//Механика твердого тела.-1986.-Вып. 18.-С. 40-43.
3. Рохлин В.А., Фукс Д.В. Начальный курс топологии.-М , 1977.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все результаты, изложенные в статьях сборника, носят теоретический характер. Области их возможного применения - общая топология (прежде всего исследование пространств функций, исследование паракомпактных пространств и вопросы нечеткой топологии), функциональный анализ (исследование проблемы нормальной разрешимости операторных уравнений, дифференциальные уравнения в нормированных пространствах, метод сплайнов), а также в других областях теоретико-множественной математики. За пределами теоретической математики результаты сборника могут представить определенный интерес для специалистов, работающих в области теоретической физики, биологии, психологии и в других областях современной науки, в которых используются топологические методы исследования объектов и применяются топологические модели изучаемых процессов.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ
НА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Сборник научных трудов

Рецензенты: В.Пономарев, д-р физ.-мат. наук, проф.общей топологии и геометрии МГУ им. М.В.Ломоносова;
Л.Кацнельсон, канд.физ.-мат.наук, зав.отделом ВЦ ЛГУ им. П.Стучки;
Я.Цепитис, канд.физ.-мат. наук, ст.преп. кафедры диференциальных уравнений

Редакторы: В.Старцев, Н.Терентьева
Техн.редактор С.Лининя
Корректор И.Балоде

Подписано к печати 28.II.86. ЯТ 09782 Ф/б 60x84/I6.
Бумага №I.I2,3 физ.печ.л.II,4 усл.печ.л. 8,6 уч.-изд.л.
Тираж 400 экз. Зак. №1545 Цена I р. 40 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, I9
Отпечатано в типографии, 226050 Рига,ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 515.12

Некоторые новые направления в теории непрерывных отображений.

Архангельский А.В. - С. 5-35.

В работе рассматриваются некоторые новые подходы к взаимной классификации пространств и отображений, наметившиеся в последнее время. Вводится ряд новых, перспективных, по нашему мнению, понятий; ставятся задачи, привлекающие своей естественностью.

Работа содержит пять параграфов: §1 некоторые проективные свойства; §2 общая схема построения проективных и копроективных классов пространств; §3 новые кардинальные инварианты, определенные с помощью классов отображений; §4 расщепляемые и $\mathcal{P}$-расщепляемые пространства; §5 расщепляемость и кардинальные инварианты.

Остановимся подробнее на понятии $\mathcal{P}$-расщепляемости. Пространство X называется расщепляемым над классом пространств $\mathcal{P}$ или $\mathcal{P}$-расщепляемым, если для каждой пары непересекающихся множеств $A, B \subset X$ существуют $Y \in \mathcal{P}$ и отображение $f: X \to Y$ такое, что $f(A) \cap f(B) = \varnothing$. Показано, например, что если класс $\mathcal{P}$ счетно-мультипликативен и наследственен, то каждое $\mathcal{P}$-расщепляемое пространство мощности $\leqslant \mathfrak{c}$ уплотняется на некоторое $Y \in \mathcal{P}$. Отсюда, в частности, следует, что перистый паракомпакт, расщепляемый над классом метризуемых пространств, метризуем. Метризуемыми являются также компакты, расщепляемые над классом всех пространств с G_δ-диагональю или над классом всех симметризуемых T_2-пространств.

Значительное внимание уделяется изучению кардинальных инвариантов пространств, расщепляемых над тем или иным классом. Если компакт X расщепляем над классом всех T_2-пространств счетной тесноты, то $t(X) \leqslant \aleph_0$; если компакт X расщепляем над классом $\aleph_0$-монолитных T_2-пространств счетной тесноты, то он является $\aleph_0$-монотонным компактом Фреше-Урысона. Библ. - 21 назв.

УДК 515.12

Спектральная характеристика кружевных и M_1-пространств.
Брегман Ю.Х., Шостак А.П., Юнила Х.- С. 36-44.

Жёсткие спектры, т.е. обратные спектры, проекциями в которых служат специального вида уплотнения, были использованы первым из авторов для изучения паракомпактных σ-пространств. В данной заметке рассматриваются жесткие спектры, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям - т.н. супержёсткие спектры I и II рода. Показано, что M_1-пространства (кружевные пространства) - это в точности пределы супержёстких спектров I рода (соотв. II рода) из метризуемых пространств. Получена также характеризация M_1- и кружевных пространств данной размерности (dim) как пределов супержёстких спектров соотв. I и II рода из метризуемых пространств той же размерности. Приведен пример жёсткого спектра из полных метризуемых пространств, предел которого не является кружевным. Библ. - 14 назв.

УДК 517.98

Меры в системах нечётких множеств.
Врублевска Н.А.- С. 45-55.

Теорема о существовании однозначно определенного продолжения меры на минимальное кольцо, порождённое полукольцом нечетких множеств, и теорема, характеризующая минимальное кольцо, порождённое полукольцом нечетких множеств, являются основными результатами работы.

УДК 515.12

Непрерывные функции с компактным носителем в вопросе о нормальной разрешимости уравнений.
Гольдман М.А., Асмусс С.В.- С. 56-63.

В работе изучается нормальная разрешимость уравнения с оператором, действующим в топологических пространствах, и сопряженного с ним уравнения. При этом в качестве сопряженных рассматриваются пространства непрерывных функций с компактным носителем. Получен ряд теорем об условиях необходимых или достаточных для нормальной разрешимости уравнений. Библ. - 5 назв.

УДК 517.91; 517.98

Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.
Грицанс А.С. - С. 64-68.

Рассматривается задача Коши для дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = Ax$ в банаховом пространстве E, где A - плоский или k-плоский оператор в E. Решение уравнения в этом случае получается с помощью некоторого многочлена от оператора A. В статье также определяется понятие функции непрерывного k-плоского оператора.
Библ. - 5 назв.

УДК 518.517

К вопросу об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных операторов с бесконечной (n,d)-характеристикой.
Иванов Б.Ф. - С. 69-77.

В работе выделен класс возмущений, сохраняющих нормальную разрешимость и некоторые другие свойства линейного оператора A, удовлетворяющего определенным условиям.
Библ. - 6 назв.

УДК 513.83

Непрерывные сечения.
Колесников О.Н. - С. 78-84.

В работе получены следующие результаты:

1. Регулярное пространство, имеющее непрерывное сечение, является бэровским наследственно по замкнутым множествам пространством.

2. Непрерывное отображение пространства X в пространство полных подмножеств Y имеет непрерывное сечение в сле-

дующих случаях: а) X - нульмерно, Y - паракомпакт с G_δ-диагональю, б) X - сильно паракомпактно, Y - индуктивно нульмерное пространство с G_δ-диагональю, в) X - нульмерный паракомпакт, Y - регулярное пространство с G_δ-диагональю. Библ. - 6 назв.

УДК 517.941

Достаточное условие секвенциально-компактной аппроксимации.
Левченков В.С.- С. 85-86.

Введено понятие V-аппроксимации линейных отображений в банаховом пространстве. Показано, что V-аппроксимация влечет секвенциально-компактную аппроксимацию. Библ. - 1 назв.

УДК 517.98

X - метрическое пространство, $f: X \to X$; разыскивается неподвижная точка.
Лиепиньш А.Х.- С. 87-90.

Исследуется проблема неподвижной точки для нерастягивающих отображений, заданных на подмножестве метрического пространства с оператором замыкания. Библ. - 4 назв.

УДК 513.83

Ослабленные формы аксиомы Мартина.
Малыхин В.И.- С. 91-102.

Рассматриваются несколько теоретико-множественных предположений, последовательно более слабых, начиная с аксиомы Мартина. Важнейшие из них - сама аксиома Мартина, лемма Буса, аксиома Мартина для счетных множеств MAC. Даются эквивалентные характеристики этих утверждений на языке частично упорядоченных (ч.у.) множеств и на топологическом языке. Например,

MAC. Если $\mathcal{P}$-счетное ч.у. множество и $\mathcal{F}$ - семейство плотных подмножеств $\mathcal{P}$ и $|\mathfrak{F}|<\mathfrak{c}$, то существует $\mathfrak{F}$-генерическое подмножество $\mathcal{P}$.

Доказывается, что $MA\mathfrak{c}$ эквивалентно утверждению о неразложимости любого бикомпакта со счетной π-базой в сумму менее $\mathfrak{c}$ нигде не плотных подмножеств, а также утверждению о наличии точек взаимной однозначности при неприводимом отображении любого бикомпакта со счетной π-базой и веса менее $\mathfrak{c}$ в хаусдорфово пространство. Библ. - 15 назв.

УДК 513.83

О существовании наследственно сепарабельного несеквенциального бикомпакта.
Малыхин В.И. - С. 103-110.

Проблема существования в ZFC и даже в предположении CH несеквенциального бикомпакта счетной тесноты широко известна. В направлении решения этой проблемы получены следующие результаты.

Теорема 1. При добавлении $\aleph_1$ коэновских подмножеств ω в расширенной модели возникает наследственно сепарабельный несеквенциальный бикомпакт мощности $\aleph_1$. Следовательно, утверждение о существовании такого бикомпакта совместно с любой кардинальной арифметикой.

Теорема 2. При добавлении одного коэновского подмножества ω к модели, в которой выполняется CH, в расширенной модели возникает наследственно сепарабельный бикомпакт мощности $\aleph_1$. Библ. - 8 назв.

УДК 513.83

О существовании промежуточных непрерывных многозначных селекций.
Непомнящий Г.М. - С. 111-122.

Указываются достаточные условия для того, чтобы у пары многозначных полунепрерывных отображений существовала многозначная непрерывная промежуточная селекция. Библ. - 7 назв.

УДК 515.126

О несохранении одного топологического свойства отношением M-эквивалентности.

Окунев О.Г.- С. 123-125.

Построен пример двух M-эквивалентных подпространств вещественной плоскости, ровно одно из которых допускает уплотнение на компакт. Библ. - 4 назв.

УДК 515.12

О факторных конечнократных отображениях.

Островский А.В. - С. 126-133.

Получено условие, при котором двухкратное отображение метрических пространств индуктивно совершенно. В частности оказывается, что всякое к-накрывающее отображение, в случае, когда отображение двухкратно, индуктивно совершенно. Библ. - 8 назв.

УДК 513.83

О бикомпактах, нульмерно отображающихся на компакты.

Парфёнов П.Г.- С. 134-141.

В работе изучаются T_2-отделимые непрерывные образы Y бикомпактов X, допускающих вполне замкнутое счетнократное отображение на компакт. Показано, что такие бикомпакты Y нульмерно отображаются на компакт, и, следовательно, для них верно равенство $\dim Y = \operatorname{ind} Y = \operatorname{Ind} Y = \Delta Y$. Приведена конструкция, дающая возможность оценить широту класса вполне замкнутых счетнократных прообразов компактов. Библ. - 8 назв.

УДК 513.83

К теореме М.М.Чобана о продолжении псевдометрик на свободные универсальные алгебры.

Пестов В.Г. - С. 142-146.

Приводится новое доказательство результата М.М.Чобана о возможности продолжения произвольной ограниченной псевдометрики на множестве X до инвариантной ограниченной псевдометрики на свободной универсальной алгебре $F(X,\mathfrak{K})$ в произвольном предмногообразии $\mathfrak{K}$. Библ. - 6 назв.

УДК 515.12

О количестве счётных пространств Фреше-Урысона.
Резниченко Е.А.- С. 147-154.

Показано, что число различных счётных бисеквенциальных пространств равно 2^{c} ; различных счетных $\aleph_0$-пространств Фреше-Урысона и тем более различных счётных $\aleph_0$-пространств Фреше-Урысона существует также ровно 2^{c} . Построен бисеквенциальный компакт, не принадлежащий классам $\langle 1\text{-}Fu\rangle$, $\langle 2\text{-}Fu\rangle$ и $\langle 5\text{-}Fu\rangle$. Библ. - 3 назв.

УДК 519.6

Комбинированные сплайны.
Рижша Э.А.- С. 155-158.

В статье даётся способ построения по двум заданным пространствам сплайнов нового пространства, называемого комбинированным пространством сплайнов. Рассмотрен конкретный пример такого пространства, образованного с помощью пространства эрмитовых сплайнов и пространства сплайнов для локальных средних. Получена характеризация сплайнов этого пространства. Библ. - 1 назв.

УДК 515.12

Корефлексивность в категориях нечётких топологических пространств.
Шостак А.П.- С. 159-165.

Изучаются корефлексивные подкатегории категории нечётких топологических пространств. Некоторые из полученных утверждений имеют хорошо известные "чёткие" прототипы, другие являются специфически нечёткими. Показано, например, что корефлексивная оболочка подкатегории $\mathfrak{A}$ в FT состоит в точности из всех факторных образов дискретных сумм объектов категории $\mathfrak{A}$. С помощью ловановских функторов установлены некоторые соотношения между корефлексивными подкатегориями в категориях FT и Top. Библ. - 4 назв.

УДК 517.5

О некоторых операторах с ортогональными собственными значениями.
Энгелис Г.К. - С. 166-169.

В статье изучен дифференциальный оператор в частных производных, обобщающий оператор, собственными функциями которого являются классические ортогональные полиномы. Указаны два случая, когда полиномиальные собственные функции оператора ортогональны в области ограниченной параболой. Даны условия на коэффициенты, необходимые и достаточные для ортогональности собственных функций относительно некоторого обобщенного скалярного произведения.

УДК 517.91; 517.93

Орбитальная топологическая классификация потоков с замкнутыми траекториями.
Окунева Г.Г. - С. 170-175.

В статье предлагается способ классификации потоков с замкнутыми траекториями общего положения на ориентируемых замкнутых поверхностях с точки зрения топологической орбитальной эквивалентности. Библ. - 3 назв.

ANNOTATIONS

Some new trends in the theory of continuous mappings.
Arhangelskii A.V. - P. 5-35.

We consider some new approaches to mutual classification of spaces and mappings which emerged in the last time. A series of new and having, probably, good prospects notions is introduced in the paper; some problems atracting with their naturalness are posed.

The paper contains five sections. These are:
1. Some projective properties; 2. General construction scheme of projective and coprojective classes of spaces; 3. New cardinal functions defined by means of some classes of mappings; 4. Splittable and P-splittable spaces; 5. Splittability and cardinal functions.

Here we dwell upon the notion of P-splittability. Let P be a class of topological spaces. A space X is called P-splittable or splittable over P if for every pair of disjoint subsets $A, B \subset X$ there exist $Y \in P$ and a mapping $f: X \to Y$ such that $f(A) \cap f(B) = \emptyset$. Among others it is shown that if P is multiplicative and hereditary, then for every P-splittable space X of cardinality c there exists a continuous bijection $f: X \to Y \in P$. Hence a p-paracompactum of cardinality $\leq c$ which is splittable over the class of metric spaces is metrizable. Compacta splittable over the class of spaces with G_δ-diagonals or splittable over the class of symmetrizable Hausdorff spaces are metrizable, too.

A special attention is paid on studying of cardinal functions of spaces which are splittable over some classes. For example, if a compactum X is splittable over the class of Hausdorff spaces of countable tightness, then $t(X) \leq \aleph_0$; if a compactum X is splittable over the class of Hausdorff $\aleph_0$-monolitic spaces of countable tightness then X is Freshe-Uryson and $\aleph_0$-monolitic.
Bibl. - 21 names.

A description of stratifiable and M_1-spaces by means of inverse systems.
Bregman Ju.H., Šostak A.P., Junnila H.- P. 36-44.

Basing on A. Arhangelskij's idea of a weak bijection, the first author introduced rigid systems, i.e. inverse systems all projections in which are bijections of a special kind, and used them in the study of paracompact σ-spaces. In this note rigid systems consisting of metrizable spaces and satisfying some additional conditions are considered (the s.c. superrigid systems of types I and II). It is shown that M_1-spaces (stratifiable spaces) are exactly the limits of superrigid systems of type I (resp. type II). Besides, M_1- and stratifiable spaces of a given dimension (dim) are characterized as limits of superrigid systems of types I and II respectively, all spaces in which have the same dimension. An example of a rigid system containing only complete metric spaces, the limit of which fails to be stratifiable is constructed. Bibl. - 14 names.

Measures in systems of fuzzy sets.
Vrublevska N.A. - P. 45-55.

A theorem about the existence and the uniqueness of the extension of a measure from a semiring of fuzzy sets to its generated minimal ring and a theorem, characterizing the minimal ring, generated by a given semiring of fuzzy sets, are the main results of the paper.

Continuous functions with compact supports in the problem of normal solvability of equations.
Goldman M.A., Asmuss S.V. - P. 56-63.

Normal solvability of equations in topological spaces and equations conjugate to these is studied in the paper. Spaces of continuous functions with compact supports are considered as conjugates. A series of theorems about conditions necessary or sufficient for normal solvability of equations is obtained. Bibl. - 5 names.

A differential equation in a Banach space.
Gricans A.S. - P. 64-63.

Koshy problem for a differential equation $\frac{dx}{dt} = Ax$ in a Banach space E is considered, where A is a plane or a k-plane operator in E. In this case the solution of the equation is obtained with the help of a polynome from the operator A. The notion of a function of a continuous k-plane operator is introduced, too. Bibl. - 5 names.

On the stab_lity of normal solvability of linear operator with an infinite (n,d)-characteristics.
Ivanov B.F. - P. 69-77.

A class of perturbation preserving normal solvability and some other properties of a linear operator A, satisfying special conditions is introduced and studied in the paper. Bibl. - 6 names.

Continuous selections.
Kolesnikov O.N. - P. 78-84.

The main results of the paper are the next ones:

1. A regular space admitting a continuous selection is hereditarily Baire with respect to closed subspaces.

2. A continuous mapping of a space X into the exponent 2^Y of complete subsets of a space Y has a continuous selection in every one of the following cases: a) dimX=0 and Y is a paracompactum with a G_δ-diagonal, b) X is strongly paracompact, IndY=0 and Y has a G_δ-diagonal, c) dimX=0 X is a paracompactum and Y is a regular space with a G_δ-diagonal. Bibl. - 6 names.

A sufficient condition for a sequentially compact approximation.
Levchenkov V.S. - P. 85-86.

The author defines the notion of V-approximation of a linear mapping in a Banach space. It is shown that V-approximation implies sequentially compact approximation. Bibl. 1 name.

X is a metric space, $f;X \not\to X$; a fixed point is being sought.
Liepiņš A.H. - P. 87-90.

The fixed point problem for nonexpansive mappings, defined on a subset of a metric space with a closure operator, is investigated. Bibl. - 4 names.

Weakened forms of Martin axiom.
Malyhin V.I.- P. 91-102.

Some set-theoretic statements are considered. Martin Axiom, Booth Lemma and Martin Axiom for Countable Sets (MAC) are among them. We find equivalent formulations of these statements by means of p.o. sets and by means of topological language. For example

MAC. If P is a countable p.o. set and F is a family of dense subsets and $|F| < c$, then there is a F-generic subset of P.

It is shown that MAC is equivalent to the statement that a bicompactum of a countable π-weight can't be represented as a union of less than C nowhere dense subsets. Besides, MAC is equivalent to the statement that an irreducible mapping of a bicompactum, having a countable π-base and a weight less then C, into a Hausdorff space has one-to-one points. Bibl. - 15 names.

On the existence of a nonsequential hereditarily separable bicompactum.
Malyhin V.I. - P. 103-110.

The problem, whether a "real" example of a nonsequential bicompactum of countable tightness exists, is well known. The paper contains the following results obtained in this direction.

Theorem 1. By adding $\aleph_1$ new Cohen reals to a model a hereditarily separable nonsequential bicompactum of power $\aleph_1$ appears in the new model. Hence, the existence of such a bicompactum is consistent with any cardinal arithmetics.

Theorem 2. By adding one new Cohen real to a model in which CH is valid, a hereditarily separable nonsequential bicompactum of power X_1 appears in the new model. Bibl. - 8 names.

On the existence of intermediate multivalued selections.
Nepomnjaščii G.M. - P. 111-122.

Sufficient conditions for two multivalued semicontinuous mappings to have an intermediate continuous multivalued selection are given. Bibl. - 7 names.

On a topological property which is not preserved by the relation of M-equivalence.
Okunev O.G. - P. 123-125.

An example of two M-equivalent subspaces of the real plane one and only one of which admits a bijection onto a compactum, is constructed. Bibl. - 4 names.

On quotient finite-to-one mappings.
Ostrovskij A.V.- P.126-133.

The paper presents a condition under which a two-to-one mapping of a metric space is inductively perfect.
Bibl. - 8 names.

On bicompacta having zero-dimensional mappings onto metric compacta.
Parfenov P.G. - P.134-141.

T_2-separated continuous images Y of bicompacta, which admit fully closed countable-to-one mappings onto metric compacta, are investigated in the paper. It is proved, that such bicompacta Y admit zero-dimensional mappings onto compacta and, thus, the equality $\dim Y = \operatorname{ind} Y = \operatorname{Ind} Y = \Delta Y$ holds for them. A construction, which gives some information about a class of fully closed countable-to-one inverse images of compacta, is described. Bibl. - 8 names.

On M.Čoban's theorem on extension of pseudometrics to free universal algebras.
Pestov V.G.- P.142-146.

The paper contains a new proof of Čoban's theorem about the possibility to extend a bounded pseudometric on a set X to an invariant bounded pseudometric on a free universal algebra F(X,K) where K is an arbitrary semi-manifold. Bibl. - 6 names.

On the number of countable Frechet spaces.
Reznichenko E.A. - P. 147-154.

It is proved, that there exist exactly 2^c countable bi-sequential spaces and 2^c countable Frechet $\aleph_0$-spaces. In particular, there exist exactly 2^c countable Frechet spaces. A bi-sequential compactum which does not belong to the classes <1-FU>, <2-FU> and <5-FU> is constructed. Bibl. - 3 names.

Combined splines.
Rimša E.A. - P. 155-158.

A method how to construct, starting from two given spaces of splines, a new space called the combined space of splines, is presented. A concrete example of such a space, formed from the space of Hermite space and the space of splines for local means is considered. A characterization of the splines of this space is obtained, too.
Bibl. - 1 name.

Coreflexions in categories of fuzzy topological spaces.
Šostak A.P. - P. 159-165.

Coreflexive subcategories of the category FT of fuzzy topological spaces are studied. Some of the obtained results have well-known crisp prototypes while others are of a specifically fuzzy nature. For example, it is proved that the coreflexive hull of a subcategory $\mathfrak{A}$ in FT consists exactly of all quotients of discrete unions of $\mathfrak{A}$-objects. Using Lowen's functors some relations between coreflexive subcategories in Top and FT are established, too.
Bibl. - 4 names.

On some operators with orthogonal eigenfunctions.
Engelis G.K. - P. 166-169.

The paper deals with an operator in partial derivatives generalizing the operator whose eigenfunctions are the classical orthogonal polynomials. Two concrete cases are pointed out where the polynomial eigenfunctions of this operator are orthogonal in a domain bounded with a parabola. Necessary and sufficient conditions for the orthogonality of the eigenfunctions with respect to a generalized scalar product are given. Bibl. - 3 names.

An orbital topological classification of flows with closed trajectories.
Okuneva G.G. - P. 170-175.

The paper presents a method how to classify flows with closed trajectories of a general position on orientable closed surfaces from the view point of topological orbital equivalence. Bibl. - 3 names.

80513

488

0.70

1 р. 40 к.

44 / 1092

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA
0508043487