КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Министерство высшего и среднего специального
образования Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. П.Стучки
Вычислительный центр

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1987

УДК 517.927

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений: Сборник научных трудов (межвузовский) /Отв.ред. Ю.А.Клоков. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1987. - 151 с.

Сборник содержит 15 научных статей, написанных представителями четырех вузов страны и одного академического института. В статьях изучаются актуальные задачи теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуются вопросы существования, единственности и априорной ограниченности решения. Разрабатываются методы эффективного численного решения прикладных задач.

Сборник предназначен для специалистов по краевым задачам обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для студентов и аспирантов специальности прикладная математика, занимающихся исследованиями практических задач, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Печатается по решению Издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

К $\frac{20204-020у}{М812(11)-87}$ 33.87.1702070000

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1987.-С 3-II

УДК 517.9II

М. М. Адьютов

ВЦ ЛГУ им. П. Стучки, ВЦ ЛГУ им. П. Стучки

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как известно [I,2] для единственности решения задачи Коши $x''=f(t,x,x')$, $x(t_0)=x_0$, $x'(t_0)=x'_0$ одной непрерывности функции f недостаточно. Так, например, задача $x''=x^{\alpha}$, $x(0)=x'(0)=0, 0<\alpha<1$ кроме тривиального решения $x(t)\equiv 0$ имеет еще решение

$$x_{\alpha}(t)=\left(\frac{(1-\alpha)^2}{2(1+\alpha)}\right)^r t^{2r}, \text{ где } r=(1-\alpha)^{-1} \qquad (I)$$

Эта ситуация достаточно типична для задач математической физики, где обычно требуется найти положительное (нетривиальное) решение [3-5]. В этой статье рассмотрены вопросы существования и единственности положительного решения следующей задачи

$$x''=x^{\alpha}f(t,x,x'), \qquad (2)$$

$$x(0)=x'(0)=0, \qquad (3)$$

где $|\alpha|<1$, $f(t,x,y)>0$ - непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по x, y для $(t,x,y)\in[0,a]^3$. Задача (2), (3) охватывает два случая, которые не рассматривает классическая теория. При $\alpha\in(0,1)$ получается случай, когда нарушено условие Липшица по искомой функции, а если

$\alpha \in (-1,0)$, то получается сингулярная задача Коши, т.к. правая часть (2) имеет особенность при $x=0$. В последнем случае, т.е. для $\alpha \in (-1,0)$, под решением задачи (2), (3) понимается функция $x(t) \in C^1([0,a_0]) \cap C^2((0,a_0])$, $0 < a_0 \leq a$, удовлетворяющая условиям (3) и при $t \in (0,a_0]$ уравнению (2). При $\alpha=0$ существование и единственность решения задачи (2), (3) следует из классических результатов [I,2].

Всюду в дальнейшем мы будем использовать формулу (I), считая $\alpha \in (-1,1)$.

Т е о р е м а I. Если положительное решение задачи (2), (3) существует ($0 < t \leq a_0 \leq a$), то для него справедливы неравенства

$$M_1^r x_\alpha(t) \leq x(t) \leq M_2^r x_\alpha(t), \qquad (4)$$

где M_1, $M_2 > 0$ таковы, что

$$M_1 \leq f(t,x,y) \leq M_2, \quad (t,x,y) \in [0,a]^3,$$

а $r > 0$ и $x_\alpha(t)$ определены формулой (I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что задача (2), (3) имеет положительное решение $x(t), (0 < t \leq a_0)$. Докажем справедливость неравенства

$$M_1^r x_\alpha(t) \leq x(t), \quad 0 < t \leq a_0 .$$

Второе неравенство из (4) доказывается аналогично. Умножим (2) на $x'(t)$ и проинтегрируем от $t=0$ до $t \leq a_0$. Тогда получим

$$\frac{x'^2}{2} = \int_0^t x^\alpha(s) x'(s) f(s,x(s),x'(s))\,ds .$$

Из (2) видно, что положительного решения $x''(t) > 0$, $t \in (0,a_0]$ и поэтому $x'(t) > 0$ для $t \in (0,a_0]$. Следовательно, интеграл можно оценить как

$$\int_0^t x^\alpha(s) x'(s) f(s,x(s),x'(s))\,ds \geq \int_0^t x^\alpha(s) x'(s) M_1\,ds = \frac{M_1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}.$$

Таким образом находим

$$\frac{x'^2}{2} \geqslant \frac{M_1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \quad \text{или} \quad x^{-\frac{\alpha+1}{2}} x' \geqslant \sqrt{\frac{2M_1}{\alpha+1}},$$

откуда интегрированием получаем требуемое неравенство.

Теорема 2. Положительное решение задачи (2), (3) существует.

Доказательство. Обозначим

$$u(t) = M_1^r x_\alpha(t), \quad v(t) = M_2^r x_\alpha(t)$$

и пусть a_0 есть точка, где $v(a_0) = a$.
Возьмем последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, монотонно стремящуюся к нулю и определим функции $\varphi_n(t)$, $(n=1,2,\ldots)$ соответственно на отрезках $[a_n, a_0]$ следующим образом

$$\varphi_n'' = \varphi_n^\alpha f(t, \varphi_n, \varphi_n'),$$

$$\varphi_n(a_n) = v(a_n), \quad \varphi_n'(a_n) = v'(a_n).$$

Легко проверить, что $u(t) \leqslant \varphi_n(t) \leqslant v(t)$ при $t \in [a_n, a_0]$ и любого $(n=1,2,\ldots)$. Для каждого фиксированного $n = n_0$ последовательность $(\varphi_{n_0+k}, \varphi_{n_0+k}')$, $t \in [a_{n_0}, a_0]$, $(k=0,1,2,\ldots)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Следовательно, существует равномерно сходящаяся подпоследовательность, которую обозначим $(\varphi_{n_0,\nu}, \varphi_{n_0,\nu}')$, $(n_0, \nu = 1,2,\ldots)$.
Возьмем теперь диагональную последовательность $(\varphi_{n,n}, \varphi_{n,n}')$, $(n=1,2,\ldots)$, которая на любом отрезке $[t_1, a_0]$, $t_1 > 0$ будет равномерно сходиться к некоторой функции $\varphi(t)$. Очевидно, что $u(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant v(t)$, $t \in (0, a_0]$ и что φ при $t \in (0, a_0]$ есть решение (2). Доопределим функцию $\varphi(t)$ в нуле по непрерывности, полагая $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$. Тогда получим функцию, удовлетворяющую (3) и при $t \in (0, a_0]$ уравнению (2). Тем самым теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Для любого положительного решения задачи (2), (3) при $t \to 0$ справедливы равенства

$$x(t) = M^r x_\alpha(t)(1+\varepsilon_0(t)), \tag{5}$$

$$x'(t) = M^r x'_\alpha(t)(1+\varepsilon_1(t)), \tag{6}$$

где $M = f(0,0,0)$, и $\varepsilon_K(t)$ - непрерывные функции, удовлетворяющие условию $\varepsilon_K(0) = 0$, $(K = 0,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В окрестности точки $t=0$, $x=0$, $y=0$ функцию $f(t,x,y)$ можно представить в виде $f(t,x,y) = M(1+v(1))$. Пусть $x(t)$ есть положительное решение задачи (2), (3). Тогда имеем равенство

$$x'' = x^\alpha M(1+\varepsilon_2(t)),$$

где $\varepsilon_2(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Умножим последнее уравнение на $x'(t)$ и проинтегрируем от $t=0$ до $t \geqslant 0$. Тогда получим

$$\frac{x'^2}{2} = \int_0^t M(1+\varepsilon_2(s))x^\alpha(s)x'(s)ds = \frac{M}{\alpha+1}x^{\alpha+1}(1+\varepsilon_3(t)),$$

где $\varepsilon_3(t)$ непрерывна и $\varepsilon_3(0) = 0$. Следовательно

$$x' = \sqrt{\frac{2M}{\alpha+1}}\, x^{\frac{\alpha+1}{2}}(1+\varepsilon_4(t)), \tag{7}$$

где $\varepsilon_4(t)$ непрерывна и $\varepsilon_4(0) = 0$.

Интегрируя уравнение (7), получаем формулы (5), (6).

С л е д с т в и е. Пусть $x(t)$ есть любое положительное решение задачи (2), (3). Тогда

$$x^{1+\alpha}(t)x'^{-1}(t) \to 0 \quad \text{при } t \to 0.$$

Это прямо следует из формул (1), (5), (6).

Теорема 4. Положительное решение задачи (2), (3) единственно.

Доказательство. Предположим, что найдутся два различных решения $x(t), y(t),\ 0\le t\le a_0\le a$ задачи (2), (3). Если на некотором отрезке $[t_1,t_2]\subset[0,a_0]$, $x(t)\equiv y(t),\ \forall t\in[t_1,t_2]$, то из классических теорем единственности [1-2] следует $x(t)\equiv y(t),\ \forall t\in$ $\in[0,a_0]$. Поэтому, если $x(t)$, $y(t)$ два различных решения задачи (2), (3), то в любой правой полуокрестности нуля найдутся точки t, где $x(t)\ne y(t)$. Из теоремы 3 следует, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{y'(t)}{x'(t)}=1. \tag{8}$$

Для любого $\tau>0$ обозначим через $\theta,(\theta>1)$, наименьшее число, такое, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\frac{y'}{x'}\le\theta\ ,\quad \frac{x'}{y'}\le\theta \qquad \text{при } t\in[0,\tau]. \tag{9}$$

Не уменьшая общности мы можем считать, что в (9) равенство достигается при некотором τ для первого отношения, т.е.

$$\frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}=\theta\ , \tag{10}$$

(в противном случае мы поменяли бы местами x и y и в случае необходимости уменьшили бы τ). Из (8) следует, что τ всегда найдется, причем его можно взять сколь угодно малым.

Из уравнения (2) находим

$$\frac{y''}{y^{\alpha}}-\frac{x''}{x^{\alpha}}=f(t,y,y')-f(t,x,x')\le K(|y-x|+|y'-x'|),$$

откуда следует

$$y''=\left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}x''+Ky^{\alpha}\left(x\left|\frac{y}{x}-1\right|+x'\left|\frac{y'}{x'}-1\right|\right). \qquad (11)$$

Теперь заметим, что если $(y'(t))(x'(t))^{-1}\leqslant\theta$, $t\in[0,\tau]$, то для этих же t

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\left(\int_0^t y'(s)ds\right)\left(\int_0^t x'(s)ds\right)^{-1}\leqslant\left(\int_0^t\theta x'(s)ds\right)\left(\int_0^t x'(s)ds\right)^{-1}\leqslant\theta$$

и поэтому $y^{\alpha}=(yx^{-1})^{\alpha}x^{\alpha}\leqslant\theta^{|\alpha|}x^{\alpha}$.

Теперь из (11) находим, полагая $K_0=K\theta^{|\alpha|}$,

$$y''\leqslant\theta^{|\alpha|}x''+K_0(x^{1+\alpha}+x'x^{\alpha})(\theta-1). \qquad (12)$$

Интегрируя (12) от $t=0$ до $t\leqslant\tau$, получим

$$y'\leqslant\theta^{|\alpha|}x'+K_0\left(x^{1+\alpha}t+\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\right)(\theta-1)$$

или при $t=\tau$

$$\frac{y'(\tau)}{x'(\tau)}\leqslant\theta^{|\alpha|}+K_0\left(\frac{x^{1+\alpha}(\tau)\tau}{x'(\tau)}+\frac{x^{1+\alpha}(\tau)}{(1+\alpha)x'(\tau)}\right)(\theta-1),$$

откуда находим

$$\theta\leqslant\theta^{|\alpha|}+\nu(\tau)(\theta-1), \qquad (13)$$

где $\nu(\tau)=K_0\left(\frac{x^{1+\alpha}(\tau)\tau}{x'(\tau)}+\frac{x^{1+\alpha}(\tau)}{(1+\alpha)x'(\tau)}\right)$.

Согласно следствию к теореме 3 $\nu(\tau)\to 0$ при $\tau\to 0$. Выберем $\tau>0$ столь малым, чтобы $\nu(\tau)+|\alpha|<1$. Тогда легко проверить, что прав... часть (13) будет строго меньше θ, т.е. из (13) следует

$$\theta \leqslant \theta^{|\alpha|} + \vartheta(\tau)(\theta - 1) < \theta .$$

Полученное противоречие доказывает невозможность существования двух различных решений. Тем самым теорема 4 доказана.

Впервые подобный результат для уравнения $x'' = \varphi(t)x^{-1/\gamma}$, $\gamma > 1$ был получен в работе [3] при изучении одной задачи газовой динамики.

С л е д с т в и е. Из теоремы о единственности решения следует теорема о непрерывной зависимости положительного решения от правой части и от начальных данных. Это легко доказать аналогично тому, как это сделано в [I].

З а м е ч а н и е I. При доказательстве теоремы 4 было использовано условие Липшица. Приведем пример, показывающий, что без этого условия задача (2), (3) может иметь несколько положительных решений.

Пример. Задача (3) для уравнения

$$x'' = x^{\alpha}\left(1 + \left(\frac{(1-\alpha)^2}{2(1+\alpha)}\right)^{-\frac{p}{1-\alpha}} a(t)\, \varphi^{p}(t,x)\right),$$

$$0 < p < 1 , \quad -1 < \alpha < 1 ,$$

где

$$a(t) = \begin{cases} -\alpha + \dfrac{1}{1-p} + \dfrac{2p}{(1-p)^2(1+\alpha)} > 0, & t = 0, \\[2ex] (1+t^{q})^{-\alpha}\left(\dfrac{1-(1+t^{q})^{\alpha}}{t^{q}} + \dfrac{1}{1-p} + \dfrac{2p}{(1-p)^2(1+\alpha)}\right), & t > 0, \end{cases}$$

$$q = \frac{2p}{(1-p)(1-\alpha)} ,$$

$$\varphi(t,x)=\frac{1}{2}\left(|x-x_\alpha(t)|+x-x_\alpha(t)\right),$$

имеет два решения $x_1(t)=x_\alpha(t)$ и $x_2(t)=$
$=x_\alpha(t)+x_\alpha(t)\,t^q$.

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства теорем видно, что аналогичные результаты тем же способом можно доказать и для более общих уравнений. В частности, все результаты останутся справедливыми и для задачи

$$x^{(n)}=(x^{(k)})^\alpha f(t,x,x',\dots,x^{(n-1)}),$$

$$x(0)=x'(0)=\dots=x^{(n-1)}(0)=0,\ k<n,\ |\alpha|<1,$$

если f непрерывна, положительна и удовлетворяет условию Липшица по $x,x',\dots,x^{(n-1)}$.

З а м е ч а н и е 3. Условие $f(t,x,y)>0$ требовалось для доказательства теорем I и 3, т.е. для получения асимптотики и априорных оценок решения. Если же удается получить асимптотику положительного решения вблизи точки $t=0$ какими-нибудь другими способами, то от этого условия можно отказаться.

З а м е ч а н и е 4. Точка $t=0$ выбрана авторами для большей наглядности результатов. Очевидно, что теоремы останутся справедливыми и для любой другой начальной точки $t=t_0\in R$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.:Наука, 1970. - 289 с.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.: Мир, 1970. - 720 с.
3. Демидов М.А., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Безударное сжатие конечной массы газа плоским поршнем при произвольном распределении энтропии/Ин-т прикл.мат.АН СССР. Препринт

№ I5I. М., I984. - 27 с.
4. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде //Журнал вычисл.мат. и мат.физики. - I983. - Т.23, № 2. - С.380-389.
5. Адьютов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной//Дифф. уравнения. - I983. - Т.I9, № 7. - С.II07-III4.

Поступила I0.02.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.-С.I2-I8

УДК 517.5

А.И.Звягинцев
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

При получении априорных оценок производных ограниченного решения дифференциального уравнения или дифференциального неравенства возникает необходимоть решения следующей экстремальной задачи

$$\mu_K = \sup\{\|f^{(K)}\|_I : f \in W^n_\infty(I), \|f\|_I \le M_0, \|f^{(n)}\|_I \le M_n\}, \quad (I)$$

где $n \in \{2,3,...\}, K \in \{1,...,n-1\}$, $I=[0,\ell]$, $0<\ell<\infty, M_0>0, M_n \geq 0$, $W^n_\infty(I)$ - пространство функций, у которых $(n-1)$ -ая производная абсолютно непрерывна на I, а n -ая производная из пространства $L_\infty(I)$, и для $f \in W^n_\infty(I)$ норма

$$\|f^{(i)}\|_I = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in I} |f^{(i)}(t)|, \quad i=0,1,...,n.$$

В настоящей работе рассматривается вопрос о количестве в задаче (I) экстремальных функций, то есть функций, на которых максимизируемый функционал достигает верхней грани. Так как очевидно, что в задаче (I) наряду с экстремальной функцией $f_0(t)$ функции $-f_0(t), f_0(\ell-t), -f_0(\ell-t)$ также являются экстремальными, то, говоря о единственности экстремальной функции, будем подразумевать единственность с точностью до симметрии. Существование экстремальной функции в задаче (I) следует из работы В.Н.Габушина [I].

Т е о р е м а . Если $a_n = 2^{2n-1} n! \cos^{2n} \frac{\pi}{2n}$, $b_n = 2^{2n-1} n!$, то в задаче (I)

1) для $\ell^n M_0^{-1} M_n \le a_n$ существует единственная экстремальная функция $2^{n-1} b_n^{-1} \ell^n M_n Z_n (2\ell^{-1} t - 1)$, где $Z_n(t)$ - полином Золотарева [4] такой, что $\| Z_n \|_{[-1,1]} = 2^n n! \ell^{-n} M_0 M_n^{-1}$;

2) для $a_n < \ell^n M_0^{-1} M_n \le b_n$ существует бесконечно много экстремальных функций, каждая из которых на отрезке $[0, (a_n M_0 M_n^{-1})^{\frac{1}{n}}]$ совпадает с $M_0 T_n ((2^{n-1} n! M_0 M_n^{-1})^{-\frac{1}{n}} t - 1)$, где $T_n(t)$ - полином Чебышева первого рода.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как задача (I) эквивалентна [3] задаче

$$\sup\{ |f^{(k)}(0)| : f \in W_\infty^n(I), \|f\|_I \le M_0, \|f^{(n)}\|_I \le M_n \}, \tag{2}$$

то из результатов С.Карлина [5] следует, что в задаче (2), а значит и в задаче (I), функция

$$f_0(t) = \frac{\ell^n M_n}{2^n n!} Z_n \left(\frac{2}{\ell} t - 1 \right),$$

где $Z_n(t)$ - полином Золотарева, является экстремальной, если выполнены условия

$$\| Z_n \|_{[-1,1]} = 2^n n! \ell^{-n} M_0 M_n^{-1},$$

$$\ell^n M_0^{-1} M_n \le a_n. \tag{3}$$

Покажем, что при ограничении (3) $f_0(t)$ является единственной экстремальной функцией в (2). Предположив, что в задаче (2) существует еще экстремальная функция $f_1(t)$, отличная от $f_0(t)$, рассмотрим функцию

$$u(t) = f_0(t) - f_1(t).$$

В силу свойств полинома Золотарева [4]

$$f_0^{(n)}(t) = M_n, \ t \in I,$$

$$f_0(\tau_i) = (-1)^{n+i} M_0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_{n-2}<\tau_{n-1}=\ell$.

Если существует $t_0\in I$ такое, что

$$u^{(j)}(t_0)=0,\quad j=0,1,\ldots,n-1, \tag{4}$$

то из

$$u^{(n)}(t)=M_n-f_1^{(n)}(t)\geq 0,\ t\in I,$$

и (4) следует, что $u^{(k)}(t)$ на $[0,t_0]$ монотонная функция, а $u(t)$ на $[t_0,\ell]$ не убывает. Так как $u^{(k)}(0)=0$, то получаем $u(t)=0$ для $t\in[0,t_0]$. Из

$$u(\ell)=(-1)^{2n-1}M_0-f_1(\ell)\leq 0$$

получаем $u(t)=0$ для $t\in[t_0,\ell]$. Таким образом, $u(t)=0$ для всех $t\in I$.

Предполагая, что (4) не выполняется, докажем, что $u'(t)$ на I имеет, по крайней мере, $n-2$ перемены знака. Для этого достаточно показать, что для любого $i\in\{0,1,\ldots,n-2\}$ на интервале (τ_i,τ_{i+1}) найдется s_i такое, что

$$0<(-1)^{n+i-1}u'(s_i).$$

Для определенности рассмотрим интервал $\mathcal{J}=(\tau_{n-2},\tau_{n-1})$. Если найдется $t\in\mathcal{J}$ такое, что $u(t)<0$, то из $u(\tau_{n-2})\geq 0$ по теореме Лагранжа следует существование $s_{n-2}\in\mathcal{J}$ такого, что $u'(s_{n-2})<0$. Если найдется $t\in\mathcal{J}$ такое, что $u(t)>0$, то из $u(\tau_{n-1})\leq 0$ по теореме Лагранжа следует существование $s_{n-2}\in\mathcal{J}$ такого, что $u'(s_{n-2})<0$. Если $u(t)=0$ для любого $t\in\mathcal{J}$, то получается случай (4). Отсюда вытекает, что $u'(t)$, по крайней мере, $n-2$ раз изменяет знак на I, причем точно $n-2$ перемен знака возможно только в случае $u'(\ell)\leq 0$.

Так как $u^{(n)}(t)\geq 0$ для $t\in I$ и $u^{(k)}(0)=0$, то $u^{(k)}(t)$ имеет на I не более $n-k-1$ перемен знака. Отсюда следует, что $u'(\ )$ на I изменяет знак не более $n-2$ раз, причем точно $n-2$ перемен знака возможно только в случае $u'(\ell)>0$. Полученное противоречие доказывает, что $u(t)=0$ для всех $t\in I$. Остроумная идея применения теоремы Лагранжа для доказательства единственности экстремальной функции принадлежит А.Я.Лепину.

Рассмотрим теперь случай

$$a_n \le \ell^n M_0^{-1} M_n \le b_n .$$

Если $f(t)$ - экстремальная функция в задаче (I), то, полагая $\alpha=1$ и $\beta=(a_n \ell^{-n} M_0 M_n^{-1})^{\frac{1}{n}}$, на основании леммы 3 работы [2] от задачи (I) переходим к эквивалентной задаче

$$\sup\{\|h^{(k)}\|_J : h\in W_\infty^n(J),\ \|h\|_J \le M_0,\ \|h^{(n)}\|_J \le a_n \ell^{-n} M_0\},$$

в которой $J=[0,\beta^{-1}\ell]\supset I$ и экстремальная функция

$$h_0(t)=f(\beta t).$$

Так как $\|f^{(k)}\|_I = |f^{(k)}(0)|$, то $\|h_0^{(k)}\|_J = |h_0^{(k)}(0)|$. Очевидно, что

$$\|h_0\|_I \le M_0,\ \|h_0^{(k)}\|_I = \beta^k |f^{(k)}(0)|,\ \|h_0^{(n)}\|_I \le a_n \ell^{-n} M_0 .$$

Из результатов С.Карлина [5] следует, что можно взять

$$f(t)=M_0 T_n((2^{n-1} n!\, M_0 M_n^{-1})^{-\frac{1}{n}} t-1).$$

Отсюда $\|h_0^{(k)}\|_I = 2^k \cos^{2k}\frac{\pi}{2n}\cdot |T_n^{(k)}(-1)| \ell^{-k} M_0$.

Если

$$M_n = a_n \ell^{-n} M_0 , \tag{5}$$

то полином Золотарева имеет вид

$$Z_n(t)=2^{1-n}\cos^{-2n}\frac{\pi}{2n}\, T_n(\cos^2\frac{\pi}{2n}\, t-\sin^2\frac{\pi}{2n})$$

и экстремальной функцией в задаче (I) в силу вышедоказанного первого утверждения является единственно

$$f_0(t)=M_0 T_n(2\ell^{-1}\cos^2\frac{\pi}{2n}\, t-1).$$

Так как $\|h_0^{(\kappa)}\|_I = \|f_0^{(\kappa)}\|_I$, то $h_0(t)$ является экстремальной функцией в задаче (I) при условии (5) и, следовательно, $h_0(t) = f_0(t)$ для $t \in I$. Отсюда получаем для $t \in [0, \beta\ell]$

$$f(t) = M_0 T_n (2\ell^{-1}\beta^{-1}\cos^2\frac{\pi}{2n}t - 1).$$

Учитывая теперь, что $f(\beta\ell) = -M_0$, $f'(\beta\ell) = 0$ и $f^{(i)}(\beta\ell) > 0$ при $i = 2, \ldots, n$, можно для $t \in [\beta\ell, \ell]$ изменять $f^{(n)}(t)$ в пределах от $-M_n$ до $+M_n$ так, чтобы $|f(t)| \leq M_0$ для $t \in [\beta\ell, \ell]$. Таким образом, получили второе утверждение. Теорема доказана.

Определим функцию

$$S(t) = -1 + \frac{27}{2}t - 27t^2 + \frac{27}{2}t^2 - 27\sum_{i=1}^{\infty}\left(t - \frac{2i+1}{3}\right)_+^3,$$

где, как обычно, x_+^n равно нулю при $x < 0$ и равно x^n при $x \geq 0$.

С л е д с т в и е . В случае $\ell^n M_0^{-1} M_n > 2^{2n-1} n!$ в задаче (I)

1) при $n = 2$ существует бесконечно много экстремальных функций, каждая из которых на отрезке $[0, 2(M_0 M_2^{-1})^{\frac{1}{2}}]$ совпадает с $M_0 T_2 (2^{-1}(M_0 M_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} t - 1)$;

2) при $n = 3$ и $j \in \{1, 2, \ldots\}$

   а) для $3(2j+1)^3 < \ell^3 M_0^{-1} M_3 < 3(2j+3)^3$ существует бесконечно много экстремальных функций, каждая из которых на отрезке $[0, 3^{\frac{1}{3}}(2j+1)M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{-\frac{1}{3}}]$ совпадает с $M_0 S(3^{-\frac{4}{3}} M_0^{-\frac{1}{3}} M_3^{\frac{1}{3}} t)$;

   б) для $\ell^3 M_0^{-1} M_3 = 3(2j+3)^3$ существует единственная экстремальная функция $M_0 S(3^{-\frac{4}{3}} M_0^{-\frac{1}{3}} M_3^{\frac{1}{3}} t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 2$ можно взять в качестве экстремальной функции задачи (I) функцию

$$f_0(t) = \begin{cases} M_0 T_2 (2^{-1}(M_0 M_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} t - 1), & t \in [0, 2(M_0 M_2^{-1})^{\frac{1}{2}}], \\ -M_0, & t \in [2(M_0 M_2^{-1})^{\frac{1}{2}}, \ell]. \end{cases}$$

Из теоремы будет следовать, что на отрезке $[0, 2(M_0 M_2^{-1})^{\frac{1}{2}}]$ может быть только функция $M_0 T_2(2^{-1}(M_0 M_2^{-1})^{-\frac{1}{2}} t - 1)$, а на отрезке $[2(M_0 M_2^{-1})^{\frac{1}{2}}, \ell]$ деформацией функции $f_0(t)$ можно получить бесконечное множество функций.

При $n=3$ экстремальной функцией в задаче (I) является функция $M_0 S(3^{-\frac{4}{3}} M_0^{-\frac{1}{3}} M_3^{\frac{1}{3}} t)$. Из теоремы получаем общий вид экстремальной функции при $j=1$

$$f_0(t) = \begin{cases} M_0 S(3^{-\frac{4}{3}} M_0^{-\frac{1}{3}} M_3^{\frac{1}{3}} t), & t \in [0, 3^{\frac{4}{3}} M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{-\frac{1}{3}}], \\ F(t), & t \in [3^{\frac{4}{3}} M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{-\frac{1}{3}}, \ell], \end{cases}$$

где $|F(t)| \le M_0$, $|F'''(t)| \le M_3$ для $t \in [3^{\frac{4}{3}} M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{-\frac{1}{3}}, \ell]$. В случае $81 < \ell^3 M_0^{-1} M_3 < 375$, изменяя $F'''(t)$ в пределах от $-M_3$ до $+M_3$ так, чтобы $|F(t)| \le M_0$ для $t \in [3^{\frac{4}{3}} M_0^{\frac{1}{3}} M_3^{-\frac{1}{3}}, \ell]$, получим бесконечное множество экстремальных функций. Если же $\ell^3 M_0^{-1} M_3 = 375$, то $F(t) \equiv$ $\equiv M_0 S(3^{-\frac{4}{3}} M_0^{-\frac{1}{3}} M_3^{\frac{1}{3}} t)$. Действительно, предположив противное, по формуле Тейлора получаем

$$f_0(\ell) - M_0 S\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{5}\ell}^{\ell} (1-s)^2 (F'''(s) + M_3)\, ds > 0.$$

Отсюда $f_0(\ell) > M_0 S(\frac{5}{3}) = M_0$, что противоречит $\|f_0\|_I \le$ $\le M_0$.

Аналогично рассуждая, индукцией по j доказывается второе утверждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габушин В.Н. Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Матем.заметки.-1970.-Т.8, № 5.- С.551-562.
2. Звягинцев А.И. О вариационных задачах для норм функции и ее производных // Нелинейные краевые задачи

обыкн.дифф.уравнений.-Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985. - С.I5-28.

3. Звягинцев А.И. Об одной экстремальной задаче // X всесоюзная школа "Теор. и прикладн.проблемы вычисл.математики и мат.физики".-Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985. - С. 47-48.
4. Золотарев Е.И. Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля // Собр.соч.-Л.:Изд-во АН СССР, 1932.-Т. 2.- С.I-58.
5. Karlin S. Interpolation properties of generalized perfect splines and the solution of certain extremal problems // Trans.Amer.Math.Soc. - 1975.- N 206. - P.25-66.

Поступила 08.04.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987 .-С.19-30

УДК 517.927

М.А.Армане, А.И.Звягинцев
ЛГУ им.П.Стучки, ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

О ФУНКЦИИ ГРИНА МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

I. Для трехточечной краевой задачи

$$y''' = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y(\alpha) = y(1) = 0, \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$ функция Грина [3,4] имеет вид

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(x-\alpha)(x-1)}{2\alpha} t^2, & t \le x,\ t \le \alpha, \\[2ex] \dfrac{(x-\alpha)(x-1)}{2\alpha} t^2 - \dfrac{(x-t)^2}{2}, & x \le t,\ t \le \alpha, \\[2ex] \dfrac{x(x-\alpha)}{2\alpha-2} (t-1)^2 + \dfrac{(x-t)^2}{2}, & \alpha \le t,\ t \le x, \\[2ex] \dfrac{x(x-\alpha)}{2\alpha-2} (t-1)^2, & x \le t,\ \alpha \le t. \end{cases}$$

Обозначив через

$$I_i(x,\alpha) = \int_0^1 \left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} G(x,t) \right| dt, \quad i = 1,2,$$

нетрудно проверить, что

$$I_1(0,\alpha)=\frac{\alpha}{6}, \qquad I_1(1,\alpha)=\frac{1-\alpha}{6},$$

$$I_2(0,\alpha)=\frac{1+\alpha}{3}, \qquad I_2(1,\alpha)=\frac{2-\alpha}{3}.$$

Для i =I,2 определим функции

$$\varphi_i(\alpha)=\begin{cases} I_i(1,\alpha), & \text{если } 0<\alpha\leq\frac{1}{2}, \\ I_i(0,\alpha), & \text{если } \frac{1}{2}\leq\alpha<1. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_i(\alpha)=max\{I_i(1,\alpha),\ I_i(0,\alpha)\}$.

Теорема I. Функция Грина краевой задачи (I),(2) при $0\leq x\leq 1$, $i=1,2$ удовлетворяет неравенству

$$I_i(x,\alpha)\leq\varphi_i(\alpha). \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть $i=2$. Тогда для $0\leq x\leq\alpha$

$$I_2(x,\alpha)=\frac{2x^3-3\alpha x+\alpha+\alpha^2}{3\alpha}\leq I_2(0,\alpha), \quad (4)$$

а для $\alpha\leq x\leq 1$

$$I_2(x,\alpha)=\frac{-2x^3+6x^2-3(1+\alpha)x+\alpha^2+1}{3(1-\alpha)}\leq I_2(1,\alpha). \quad (5)$$

Так как неравенства (4),(5) эквивалентны очевидным неравенствам

$$\frac{x(2x^2-3\alpha)}{3\alpha}\leq 0,$$

$$\frac{(1-x)[(x-1)(2x+1)+3(\alpha-x)]}{3(1-\alpha)}\leq 0,$$

то из (4),(5) сразу вытекает (3).

При $i=1$ рассмотрим четыре случая: $x\in[0,\frac{\alpha}{2}]$, $x\in[\frac{\alpha}{2},\alpha]$, $x\in[\alpha,\frac{1+\alpha}{2}]$, $x\in[\frac{1+\alpha}{2},1]$.

В первом случае имеем

$$I_1(x,\alpha)=\frac{1}{6}(-3x^2+2(4\tau-1-\alpha)x-2\tau^2+\alpha),$$

где τ меньший корень уравнения $(2x-\alpha-1)\tau^2+2\alpha\tau-2\alpha x=0$. Для доказательства (3) достаточно показать, что $I_1(x,\alpha)\leq I_1(0,\alpha)$ или

$$\frac{1}{6}[(-2\tau^2+8\tau x)-3x^2-2x(1+\alpha)]\leq 0.$$

Если взять максимум по τ, то получим неравенство $\frac{x}{6}(5x-2-2\alpha)\leq 0$, справедливость которого проверяется элементарно.

Во втором и третьем случаях

$$I_1(x,\alpha)=\frac{1}{6}(-3x^2+2(1+\alpha)x-\alpha).$$

Доказательство (3) сводится к легко проверяемым неравенствам $I_1(x,\alpha)\leq I_1(0,\alpha)$ во втором случае и $I_1(x,\alpha)\leq I_1(1,\alpha)$ в третьем случае, которые соответственно эквивалентны неравенствам

$$\frac{1}{6}\left(2(x-\alpha)(1-x)-\alpha^2\right)\leq 0,$$

$$\frac{1}{6}\left(-3x^2+2(1+\alpha)x-1\right)\leq 0.$$

В четвертом случае

$$I_1(x,\alpha)=\frac{1}{6(1-\alpha)}\left[3(\alpha-1)x^2+2(1+\alpha^2-4\alpha\tau+2\tau^2)x-\right.$$
$$\left.-\alpha-\alpha^2+4\alpha\tau-2\tau^2\right],$$

где τ больший корень уравнения $(2x-\alpha)\tau^2-2(2x-1)\tau+$ $+\alpha(2x-1)=0$. Доказательство (3) сводится к неравенству $I_1(x,\alpha)\leq I_1(1,\alpha)$, которое эквивалентно очевидному неравенству

$$\frac{1}{6(1-\alpha)(2x-\alpha)}\left[4\tau(2x-1)(\alpha-1)-2x(2x-1)+\right.$$

$$\left.+(1-\alpha)\left(2(x-1)(\alpha^2+x)-\alpha(1-x)^2-2x(1+3x^2)\right)\right]\leq 0.$$

Теорема доказана.

Замечание I. Известно, что

$$I_0(x,\alpha)=\int_0^1|G(x,t)|\,dt=\frac{1}{6}|x(x-\alpha)(x-1)|.$$

Вычислив точки экстремумов, получаем для $0\leq x\leq 1$ оценку

$$I_0(x,\alpha)\leq\varphi_0(\alpha),$$

где

$$\varphi_0(\alpha)=\begin{cases}\frac{1}{162}\left[(1+\alpha)(2\alpha-1)(\alpha-2)+2\sqrt{(1-\alpha+\alpha^2)^3}\right], & \text{если } 0<\alpha\leq\frac{1}{2},\\ \frac{1}{162}\left[(1+\alpha)(2\alpha-1)(2-\alpha)+2\sqrt{(1-\alpha+\alpha^2)^3}\right], & \text{если } \frac{1}{2}\leq\alpha<1.\end{cases}$$

2. Для однородной четырехточечной краевой задачи

$$y^{IV}=0, \tag{6}$$

$$y(0)=y(\alpha)=y(\beta)=y(1)=0, \tag{7}$$

где $0<\alpha<\beta<1$, функция Грина [3] имеет вид

$$G(x,t)=\begin{cases} \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)}{6\alpha\beta}t^3, & t\le x,\ t\le\alpha, \\[2ex] \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)}{6\alpha\beta}t^3+\dfrac{(t-x)^3}{6}, & x\le t,\ t\le\alpha, \\[2ex] \dfrac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{6(1-\alpha)(1-\beta)}(t-1)^3-\dfrac{(t-x)^3}{6}- & \\ \quad -\dfrac{x(x-\alpha)(x-1)}{6\beta(\beta-\alpha)(1-\beta)}(t-\beta)^3, & t\le x,\ \alpha\le t\le\beta, \\[2ex] \dfrac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{6(1-\alpha)(1-\beta)}(t-1)^3- & \\ \quad -\dfrac{x(x-\alpha)(x-1)}{6\beta(\beta-\alpha)(1-\beta)}(t-\beta)^3, & x\le t,\ \alpha\le t\le\beta, \\[2ex] \dfrac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{6(1-\alpha)(1-\beta)}(t-1)^3-\dfrac{(t-x)^3}{6}, & t\le x,\ \beta\le t, \\[2ex] \dfrac{x(x-\alpha)(x-\beta)}{6(1-\alpha)(1-\beta)}(t-1)^3, & x\le t,\ \beta\le t. \end{cases}$$

Обозначив через

$$\mathcal{J}_i(x,\alpha,\beta)=\int\limits_0^1\left|\frac{\partial^i}{\partial x^i}G(x,t)\right|dt, \quad i=1,2,3,$$

непосредственным вычислением получаем

$$\mathcal{J}_1(0,\alpha,\beta)=\frac{\alpha\beta}{24}, \quad \mathcal{J}_1(1,\alpha,\beta)=\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{24},$$

$$\mathcal{J}_2(0,\alpha,\beta)=\frac{\alpha+\alpha\beta+\beta}{12}, \quad \mathcal{J}_2(1,\alpha,\beta)=\frac{3-2\alpha-2\beta+\alpha\beta}{12},$$

$$\mathcal{J}_3(0,\alpha,\beta)=\frac{1+\alpha+\beta}{4}, \quad \mathcal{J}_3(1,\alpha,\beta)=\frac{3-\alpha-\beta}{4}.$$

Для $i=1,2,3$ определим функции

$$\Psi_i(\alpha,\beta)=\begin{cases}\mathcal{J}_i(1,\alpha,\beta), & \text{если } \alpha+\beta\le 1,\\ \mathcal{J}_i(0,\alpha,\beta), & \text{если } \alpha+\beta\ge 1.\end{cases}$$

Ясно, что $\Psi_i(\alpha,\beta)=max\{\mathcal{J}_i(1,\alpha,\beta),\ \mathcal{J}_i(0,\alpha,\beta)\}$.

Т е о р е м а 2. Функция Грина краевой задачи (6), (7) при $0\le x\le 1$, $i=1,2,3$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{J}_i(x,\alpha,\beta)\le\Psi_i(\alpha,\beta). \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $i=3$ рассмотрим три случая: $x\in[0,\alpha]$, $x\in[\alpha,\beta]$, $x\in[\beta,1]$.

В первом случае имеем

$$\mathcal{J}_3(x,\alpha,\beta)=\frac{x^4}{2\alpha\beta}-x-\frac{1+\alpha+\beta}{4}$$

и для доказательства (8) достаточно показать, что $\mathcal{F}_3(x,\alpha,\beta) \leqslant \mathcal{F}_3(0,\alpha,\beta)$. Последнее неравенство эквивалентно очевидному неравенству $\dfrac{x(x^3-2\alpha\beta)}{2\alpha\beta} \leqslant 0$.

Во втором случае

$$\mathcal{F}_3(x,\alpha,\beta)=x+\frac{(x-1)^4}{2(1-\alpha)(1-\beta)}-\frac{(x-\beta)^4}{2\beta(1-\beta)(\beta-\alpha)}-\frac{1+\alpha+\beta}{4},$$

а в третьем случае

$$\mathcal{F}_3(x,\alpha,\beta)=x+\frac{(x-1)^4}{2(1-\alpha)(1-\beta)}-\frac{1+\alpha+\beta}{4}.$$

Доказательство (8) сводится к доказательству $\mathcal{F}_3(x,\alpha,\beta) \leqslant \mathcal{F}_3(1,\alpha,\beta)$, что эквивалентно соответственно элементарным неравенствам

$$x-1+\frac{(1-x)^4}{2(1-\alpha)(1-\beta)}-\frac{(\beta-x)^4}{2\beta(1-\beta)(\beta-\alpha)} \leqslant 0,$$

$$\frac{1-x}{2(1-\alpha)(1-\beta)}\left[(1-x)^3-2(1-\alpha)(1-\beta)\right] \leqslant 0.$$

Для доказательства (8) при $i=2$ рассмотрим пять случаев:
$x\in\left[0,\dfrac{\alpha(3\beta-\alpha^2-\alpha\beta-\alpha)}{3(\beta-\alpha^2)}\right]$, $x\in\left[\dfrac{\alpha(3\beta-\alpha^2-\alpha\beta-\alpha)}{3(\beta-\alpha^2)},\right.$ $\left.\dfrac{\alpha+\beta}{3}\right]$, $x\in\left[\dfrac{\alpha+\beta}{3},\dfrac{1+\alpha+\beta}{3}\right]$, $x\in\left[\dfrac{1+\alpha+\beta}{3},\right.$ $\left.\dfrac{2\beta^2+2\beta-\beta^3-\alpha\beta^2-2\beta-\alpha}{3(2\beta-\beta^2-\alpha)}\right]$, $x\in\left[\dfrac{2\beta^2-2\beta-\beta^3-\alpha\beta^2-\alpha\beta-\alpha}{3(2\beta-\beta^2-\alpha)},1\right]$.

В первом случае

$$\mathcal{J}_2(x,\alpha,\beta)=\frac{1}{12}(-6\tau_1^2+18x\tau_1-6x^2-3x(1+\alpha+\beta)+\alpha+\alpha\beta+\beta),$$

где $\tau_1\in[x,\alpha]$, $(3x-1-\alpha-\beta)\tau_1^3+3\alpha\beta\tau_1-3\alpha\beta x=0$.

Доказательство (8) сводится к доказательству неравенства $\mathcal{J}_2(x,\alpha,\beta)\leq\mathcal{J}_2(0,\alpha,\beta)$, которое эквивалентно очевидному неравенству $-\frac{1}{2}(\tau_1-x)^2-\frac{x}{4}(1+\alpha+\beta-2\tau_1)\leq 0$.

Во втором случае

$$\mathcal{J}_2(x,\alpha,\beta)=\frac{(3x-\alpha-\beta)(\tau_2-1)^3}{6(1-\alpha)}+\frac{-6x^2+3(1+\alpha+\beta)x-\alpha-\alpha\beta-\beta}{12},$$

где $\max\{\alpha,x\}\leq\tau_2\leq\beta$ и $(3x-\alpha-\beta)(1-\alpha)^{-1}(\tau_2-1)^3-$ $-(3x-1-\alpha)\beta^{-1}(\beta-\alpha)^{-1}(\tau_2-\beta)^3=0$. Для доказательства (8) достаточно доказать неравенство $\mathcal{J}_2(x,\alpha,\beta)\leq$ $\leq\mathcal{J}_2(0,\alpha,\beta)$, которое эквивалентно

$$\frac{(3x-\alpha-\beta)}{6(1-\alpha)}(\tau_2-1)^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1+\alpha+\beta}{4}x-\frac{\alpha+\alpha\beta+\beta}{6}\leq 0.$$

Учитывая $(1-\tau_2)^3\leq 1-\alpha$, получаем простое неравенство $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1-\alpha-\beta}{4}x-\frac{\alpha\beta}{6}\leq 0$.

В третьем случае

$$\mathcal{J}_2(x,\alpha,\beta)=-\frac{x^2}{2}+\frac{1+\alpha+\beta}{4}x-\frac{\alpha+\alpha\beta+\beta}{12}$$

и неравенство (8) доказывается элементарно.

В четвертом случае

$$\mathcal{J}_2(x,\alpha,\beta)=\frac{3x-\alpha-\beta}{6(1-\alpha)}(\tau_3-1)^3-\frac{(\tau_3-x)^2}{2}+$$

$$+\frac{\tau_3 x+\beta x-\tau_3\beta}{2}-\frac{1+\alpha+\beta}{4}x+\frac{\alpha+\alpha\beta+\beta}{12},$$

где $\alpha\leqslant\tau_3\leqslant\min\{x,\beta\}$ и

$$\frac{3x-\alpha-\beta}{3(1-\alpha)(1-\beta)}(\tau_3-1)^3-\frac{3x-1-\alpha}{3\beta(\beta-\alpha)(1-\beta)}(\tau_3-\beta)^3+x-\tau_3=0.$$

Неравенство $\mathcal{F}_2(x,\alpha,\beta)\leqslant\mathcal{F}_2(0,\alpha,\beta)$ в этом случае эквивалентно

$$\frac{3x-\alpha-\beta}{6(1-\alpha)}(\tau_3-1)^3-\frac{(\tau_3-x)^2}{2}+\frac{\tau_3 x+\beta x-\tau_3\beta}{2}-\frac{1+\alpha+\beta}{4}x\leqslant 0.$$

Учитывая $(1-\tau_3)^3\leqslant 1-\alpha$, получаем элементарное неравенство

$$\frac{2\tau_3+\beta-\alpha-1}{4}x-\frac{\tau_3\beta}{2}\leqslant 0.$$

В пятом случае

$$\mathcal{F}_2(x,\alpha,\beta)=\frac{3x-\alpha-\beta}{6(1-\alpha)(1-\beta)}(1-\tau_4)^4-(x-\tau_4)^2+\frac{x^2}{2}-$$

$$-\frac{1+\alpha+\beta}{4}x-\frac{\alpha+\alpha\beta+\beta}{12},$$

где $\tau_4\in[\beta,x]$, $(3x-\alpha-\beta)(\tau_4-1)^3+3(1-\alpha)(1-\beta)(x-\tau_4)=0.$

Неравенства $\mathcal{F}_2(x,\alpha,\beta)\leqslant\mathcal{F}_2(0,\alpha,\beta)$,

$\mathcal{F}_2(x,\alpha,\beta)\leqslant\mathcal{F}_2(1,\alpha,\beta)$ имеют соответственно вид

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(x-\tau_4)(1-x)-\frac{1+\alpha+\beta}{4}x\leqslant 0,$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}(x-\tau_4)(1-x)-\frac{1+\alpha+\beta}{4}x-\frac{1-\alpha-\beta}{4}\leq 0,$$

и легко доказываются. Отсюда сразу следует (8).

В случае $i=1$ справедливость неравенства (8) в силу сложности аналитических выражений была проверена на ЭВМ. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Из равенства

$$\mathcal{J}_0(x,\alpha,\beta)=\int_0^1 |G(x,t)|dt=\frac{1}{24}|x(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)|,$$

вычислив на $[0,1]$ точки экстремумов, нетрудно получить оценку для $\mathcal{J}_0(x,\alpha,\beta)$.

3. Теоремы I и 2 уточняют результаты работ [I,2,4]. Кроме того, теорема I позволяет получить следующие две теоремы, которые уточняют результаты В.Шеды [4].

Т е о р е м а 3. Пусть $q, M, N, P, R_0, R_1, R_2$ - положительные числа, $0<\alpha<1$, b_1, b_2, b_3 - действительные числа и

$$|b_1|\leq M,\ |b_3-b_1|\leq N,\ \left|\frac{b_1(1-\alpha)-b_2+\alpha b_3}{\alpha(1-\alpha)}\right|\leq P,$$

$$M+N+\frac{1}{2}P+q\varphi_0(\alpha)\leq R_0,$$

$$N+P+q\varphi_1(\alpha)\leq R_1,\quad 2P+q\varphi_2(\alpha)\leq R_2.$$

Если на множестве $B=\{(x,y,z,v):0\leq x\leq 1,\ |y|\leq R_0,\ |z|\leq R_1,\ |v|\leq R_2\}$ функция $f=f(x,y,z,v)$ непрерывна и ограничена $|f(x,y,z,v)|\leq q$, то трехточечная краевая задача

$$y'''=f(x,y,y',y''), \tag{9}$$

$$y(0)=b_1\,,\ y(\alpha)=b_2\,,\ y(1)=b_3 \qquad (10)$$

имеет по крайней мере одно решение.

Т е о р е м а 4. Пусть все предположения теоремы 3 выполнены и дополнительно функция $f(x,y,z,v)$ удовлетворяет на множестве B условию Липшица

$$|f(x,y_1,x_1,v_1)-f(x,y_2,z_2,v_2)|\leq$$
$$\leq w_0|y_1-y_2|+w_1|z_1-z_2|+w_2|v_1-v_2|,$$

где константы Липшица такие, что

$$w_0\varphi_0(\alpha)+w_1\varphi_1(\alpha)+w_2\varphi_2(\alpha)<1.$$

Тогда трехточечная краевая задача (9),(10) имеет единст - венное решение.

Доказательство теоремы 3 и 4 проводится методами, приведенными в работе [4]. На основании теоремы 2 могут быть получены утверждения, аналогичные теоремам 3 и 4, для четырехточечной краевой задачи

$$y^{IV}=f(x,y,y',y'',y'''),$$
$$y(0)=b_1,\ y(\alpha)=b_2,\ y(\beta)=b_3,\ y(1)=b_4,$$

когда $0<\alpha<\beta<1$.

Точные интегральные оценки производных функции Грина необходимы также при получении неравенств типа Колмогорова [1,2]. Действительно, если $f\in C_n[0,1]$ и $L_n(x)$ - интерполяционный многочлен Лагранжа такой, что $f(x_i)=L_n(x_i)$ для точек $0=x_1<x_2<\ldots<x_n=1$,

$$f(x)=L_n(x)+\int_0^1 G(x,t)f^{(n)}(t)\,dt, \qquad (11)$$

где $G(x,t)$ - функция Грина многоточечной краевой задачи

$$y^{(n)}=0,$$
$$y(x_1)=y(x_2)=\ldots=y(x_n)=0.$$

Формула (II) позволяет получать оценки промежуточных производных функции $f(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Звягинцев А.И., Лепин А.Я. О неравенствах Колмогорова между верхними гранями производных функции для $n=3$ // Латв.мат.ежегодник.-Рига:Зинатне,1982.-Вып. 26.-С. 176-181.

2. Звягинцев А.И. Неравенства Колмогорова для $n=4$//Латв. мат. ежегодник.-Рига:Зинатне, 1982.-Вып. 26.-С. 165-175.

3. Das K.M., Vatsala A.S. On Green's function of an n-point boundary value problem//Trans.Amer.Math.Soc.-1973. - Vol.182. - P.469-480.

4. Šeda V. On the three-point boundary-value problem for a non-linear third order ordinary differential equation//Archivum mathematicum. - 1972. - Vol.8, No.2. - P.85-98.

Поступила 22.05.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.-С.31-40

УДК 517.927

А.И.Колосов
Харьковский институт инженеров
коммунального строительства

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda \cdot f(t,x) \tag{I}$$

$$F_j(x_l(0), x_z(1)) = 0$$

$$F(x_p(0), x_p(1)) = 0,$$

где $\Lambda = (\lambda_{is})$, $\lambda_{is} \in R; f: R^+ \times R^n \to R^k; F_j: R^{2n} \to R;$
$F: R^2 \to R, (l,p,r \in \{\overline{1,n}\}; i=\overline{1,n}; j=\overline{1,n-1}; s=\overline{1,k}).$

При заданных матрице Λ и функции $f(t,x)$ имеем прямую задачу определения функции $x(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению к краевым условиям.

Эта задача часто бывает некорректно поставленной (по Адамару). Так, в химической кинетике [1] рассматривается задача

$$x'' + \frac{x'}{t} + \lambda e^x = 0 \quad \left(' = \frac{d}{dt},\ \lambda \geqslant 0\right) \tag{2}$$

$$x'(0) = x(1) = 0.$$

При $\lambda=0$, $\lambda=2$ задача (2) имеет единственное решение, при $0<\lambda<2$ задача имеет два решения, при $\lambda=2+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ задача решений не имеет.

Поэтому для задачи (I) оправдано рассмотрение обратной задачи, в которой требуется определить элементы матрицы Λ (все или часть элементов), при которых задача имеет решение. Для многих прикладных задач такая обратная задача поставлена корректно (по Адамару). Это верно, в частности, и для задачи (2).

Впредь под решением задачи (I) будем понимать пару $(\Lambda, x_\Lambda(t))$.

Пусть найдутся такие $\alpha>0$ и $\mu_i\in R$, что для любых $\beta>0$

$$f_s\left(\frac{t}{\beta},\dots,\alpha\beta^{\mu_i}x_i,\dots\right)=\beta^{\delta_s}\cdot g_s(t,\dots,x_i,\dots;\alpha)$$

$$F_j(\alpha\beta^{\mu_\ell}x_\ell(0),\alpha\beta^{\mu_r}x_r(1))=\beta^{\gamma_j}G_j(x_\ell(0),x_r(1);\alpha)$$

$$F(\alpha\beta^{\mu_p}x_p(0),\alpha\beta^{\mu_p}x_p(1))=\beta^{\nu}G(x_p(0),x_p(1);\alpha)$$

$$(\delta_s,\gamma_j,\nu\in R;\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,n-1};\ s=\overline{1,k}).$$

Подобные функции будем называть однородными.

Дифференциальное уравнение (I) - однородное, если его правая часть однородная функция в указанном здесь смысле.

Будем предполагать, что среди искомых элементов λ_{is} матрицы Λ находятся все те ненулевые элементы, для которых $1+\mu_i-\delta_s\neq 0$.

Сделаем в задаче (I) замену переменных

$$\tau=\beta t,\quad x_i(t)=\alpha\beta^{\mu_i}y_i(\tau) \qquad (3)$$

и полагаем, что

$$\lambda_{is} = b_{is} \cdot \alpha \cdot \beta^{1+\mu_i-\delta_s} \qquad (i=\overline{1,n};\ s=\overline{1,K}),$$

где $b_{is} = b_{is}(\alpha)$ - заданы.

В результате от задачи (I) перейдем к следующей задаче

$$\frac{dy}{d\tau} = B \cdot g(\tau, y; \alpha)$$

$$G_j(y_\ell(0), y_r(\beta); \alpha) = 0 \tag{4}$$

$$G(y_p(0), y_p(\beta); \alpha) = 0$$

$$(\ell, p, r \in \{\overline{1,n}\},\ j=\overline{1,n-1}),$$

где матрица $B=(b_{is})$ задана, $\beta>0$ подлежит определению.

Положим

$$y_p(0) = a \qquad (p \in \{1,n\}). \tag{5}$$

Из соотношения $G(y_p(0), y_p(\beta); \alpha) = 0$ находим

$$y_p(\beta) = d(a, \alpha). \tag{6}$$

Задачу

$$\frac{dy}{d\tau} = B \cdot g(\tau, y; \alpha)$$

$$y_p(0) = a, \quad y_p(\beta) = d(a; \alpha) \tag{7}$$

$$G_j(y_\ell(0), y_r(\beta); \alpha) = 0$$

$$(\ell, p, r \in \{\overline{1,n}\};\ j=\overline{1,n-1})$$

в дальнейшем будем называть сопутствующей задаче (I).

Мы, таким образом, пришли к обратной задаче определения параметра β , т.н. задаче на незакрепленном отрезке (7). Под решением этой задачи будем понимать пару $(\beta, y_\beta(\tau))$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\frac{dx_p}{dt} > 0\,(<0) \qquad (0 < t < \infty),$$

или, что то же самое,

$$\frac{dy_p}{d\tau} > 0\,(<0) \qquad (0 < \tau < \infty). \tag{8}$$

Дело в том, что для многих краевых задач априори известно, что некоторая компонента искомого решения изменяется монотонно (возрастает или убывает) на всем интервале исследования, либо что такая ситуация возможна.

Иными словами, будем рассматривать задачу (7),(8).

Введем множества

$$S = \{ y(\tau) \in C_n[0,\infty[\,\cap\, C_n^{(1)}]0,\infty[\;|$$

$$\frac{dy_p}{d\tau} > 0\,(<0)\ (0<\tau<\infty),\ G_j(y_\ell(0), y_r(\beta);\alpha) = 0,$$

$$y_p(0) = a,\ y_p(\beta) = d(a,\alpha),\ (\ell, p, r \in \{1,n\},$$

$$j = \overline{1,n-1})\}$$

$$Q = \{ \varphi(z) \in C_n[a,d] \cap C_n^{(1)}]a,d[\;|$$

$$\varphi_0(z) > 0,\ \frac{d\varphi_0}{dz} > 0\,(<0)\ (z \in]a,d[),$$

$$\varphi_0(a) = 0,\ G_j(\varphi_\ell(a), \varphi_r(d);\alpha) = 0,$$

$$(\ell, r \in \{\overline{1,n}\},\ j = \overline{1,n-1})\}.$$

Здесь $]a,d[\equiv\{z \mid z=\gamma a+(1-\gamma)d,\ 0<\gamma<1\}$.

Рассмотрим отображение $\Phi: S \xrightarrow{\text{на}} Q$:

$$\Phi y(\tau)=\varphi(z), \quad \varphi=(\varphi_0,\dots,\varphi_n),$$

где

$$\varphi_0(z)\equiv\tau(z),$$
$$\varphi_m(z)\equiv y_m(\chi(z)), \qquad (m=\overline{1,n},\ m\neq p). \tag{9}$$

Здесь $\chi:[a,d]\to[0,\beta]$ - отображение, обратное $z=y_p:[0,\beta]\to[a,d]$.

Существует обратное отображение $\Phi^{-1}: Q \xrightarrow{\text{на}} S$:

$$\Phi^{-1}\varphi(z)=y(\tau),$$

где

$$y_m(\tau)\equiv\varphi_m(z(\tau)), \quad (m=\overline{1,n},\ m\neq p) \tag{10}$$
$$y_p(\tau)\equiv z(\tau)$$

Отображение Φ позволяет преобразовать задачу (7), (8) в следующую задачу

$$\frac{d\varphi}{dz}=\frac{h(z,\varphi;\alpha)}{h_p(z,\varphi;\alpha)} \tag{11}$$

$$\varphi_0(a)=0,\ \ G_j(\varphi_l(a),\varphi_r(d);\alpha)=0,$$
$$(l,r\in\{\overline{1,n}\},\ j=\overline{1,n-1}),$$

где

$$h(z,\varphi;\alpha)\equiv B\cdot g(\tau(z),\Phi^{-1}\varphi;\alpha),$$
$$h_0(z,\varphi;\alpha)\equiv 1.$$

Т е о р е м а I. Задача (II) на множестве Q топологически эквивалентна задаче (7),(8) на множестве S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Два операторные уравнения топологически эквивалентны, если между множествами, на которых они определены, установлен гомеоморфизм.

Легко проверить, что если $y^1\neq y^2$ $(y^1,y^2\in S)$, то и $\Phi y^1\neq\Phi y^2$.

Кроме того, т.к. $y_p(\tau)$ - непрерывная на $[0,\beta]$ функция, то и $\tau(y_p)$ или $\tau(z)$ непрерывная на $[a,d]$ функция. В силу непрерывности функций $y_j(\tau)$ отображение Φ непрерывно на множестве S.

Подобным же образом устанавливается непрерывность отображения Φ^{-1} на множестве Q.

Если $\frac{\partial h_p}{\partial \varphi_0} = 0$, то возможно разложение задачи (II) на задачу

$$\frac{d\varphi_m}{dz} = \frac{h_m(z,\varphi;\alpha)}{h_p(z,\varphi;\alpha)}$$

$$G_j(\varphi_\ell(a), \varphi_r(d); \alpha) = 0 \quad (\ell, m, r \in \{\overline{1,n}\}, m \neq p)$$

и отдельное соотношение

$$\varphi_0(z) = \int_a^z \frac{ds}{h_p(s,\varphi(s);\alpha)} .$$

Такое разложение всегда возможно, если система уравнений в задаче (I) - скалярное дифференциальное уравнение П-го порядка.

Таким образом, исследование задачи (I) в конечном итоге преобразований свелось к исследованию задачи (II). Переход к задаче (II) оправдан по следующим соображениям:

I) Задача (II) не зависит явным образом ни от неизвестных λ_{is}, ни от искомого параметра β. Задавая параметр a, будем определять $\beta = \beta(a)$.

2) Краевой задаче (I) может соответствовать начальная задача (II).

3) Если функции $f_s(t,\ldots,x_i,\ldots)$ $(i=\overline{1,n};\ s=\overline{1,k})$ при почти всех x_p определены и непрерывны по $t,\ldots,$ $x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n$) и измеримы по x_p при каждом $t,\ldots,x_{p-1}, x_{p+1}, \ldots, x_n$, то задача (I) может быть исследована как система Каратеодори [2] и ее реше-

ние будем понимать как $x_i(t)=\alpha\cdot\beta^{\mu_i}\varphi_i[z(\beta t)]$, где φ_i -решение задачи (I1), $(i=\overline{1,n})$

4) Если x_m $(m=\overline{1,n};\, m\neq p)$ могут сохранять знак на всем интервале исследования, то в результате преобразований приходим к рассмотрению положительных решений операторного уравнения в пространстве с конусом [3,4]. В этом случае возможно конструктивное решение исходной краевой задачи [5] и получение двусторонних приближений ее решения.

В качестве приложения рассмотрим одну неоднородную краевую задачу, исследуемую в гидродинамике [6]

$$x'''=\lambda_1 x x''-\lambda_1 x'^2-\lambda_2 \qquad (\lambda_1,\lambda_2>0,\ x''<0), \tag{I2}$$

$$x(0)=x''(0)=x'(1)=0, \tag{I3}$$

$$x(1)=1. \tag{I4}$$

Здесь $\lambda_1=Re$ - число Рейнольдса.

Сначала будем рассматривать задачу (I2), (I3). Условие (I4) будет учтено позднее.

Задача (I2),(I3) может быть представлена в виде задачи (I) и в данном случае $f: R^+\times R^3\to R$.

Непосредственная проверка показывает, что правая часть уравнения (I2) однородная функция при любом $\alpha>0$. В данном случае

$$\mu_1=0,\ \mu_2=1,\ \lambda_1=\alpha^{-1}\cdot\beta,\ \lambda_2=\alpha\cdot\beta^3.$$

Особенностью краевой задачи (I2),(I3) является то, что она приводится к начальной задаче вида (I1).

Справедливо следующее утверждение

Т е о р е м а 2. Задача, сопутствующая задаче (I2), (I3) имеет единственное решение при любом $\alpha>0$. Это решение может быть получено методом последовательных приближений с двусторонними приближениями, сходящимися к решению.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задаче (I2),(I3) отвечает следующая начальная задача

$$\varphi_3 \frac{d\varphi_1}{dz} = z$$

$$\varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dz} = \varphi_1 \varphi_3 - z^2 - 1, \qquad (I5)$$

$$\varphi_1(\alpha) = \varphi_3(\alpha) = 0.$$

Условие $y_2'(\tau) < 0$ равносильно условию $\varphi_3(z) < 0$, $(0 < z < \alpha)$. . Но тогда задача (I5) будет непротиворечивой в случае, когда $\varphi_1(z) > 0 \quad (0 < z < \alpha)$.

Положив $\varphi_3^2 = \Psi$, задача (I5) может быть приведена к интегральному уравнению

$$\Psi(z) = (\Gamma\psi)(z) \equiv 2\int_z^a (1+s^2)ds + 2\int_z^a \psi^{1/2}(s)\int_s^a \frac{\omega d\omega}{\psi^{1/2}(\omega)}\, ds \qquad (I6)$$

с гетеротонным, u_0 - псевдовогнутым в смысле работы [4] оператором Γ , имеющим сильно инвариантный конусный отрезок. Для операторных уравнений с такими операторами доказано существование единственного решения, которое может быть получено с двусторонними приближениями [4].

Двусторонние приближения, по норме сходящиеся к решению ψ уравнения (I6), получаем по следующей схеме

$$u_{m+1} = \hat{\Gamma}(u_m, v_m),\ v_{m+1} = \hat{\Gamma}(v_m, u_m) \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

$$u_0 \leq \ldots \leq u_m \leq \ldots \leq \psi \leq \ldots \leq v_m \leq \ldots \leq v_0,$$

$$\lim_{m\to\infty} u_m(z) = \lim_{m\to\infty} v_m(z) = \psi(z).$$

Здесь

$$\hat{\Gamma}(u,v) \equiv 2\int_z^a (1+s^2)ds + 2\int_z^a u^{1/2}(s)\int_s^a \frac{\omega d\omega}{v^{1/2}(\omega)}\, ds,$$

$$u_0(z)=2\int_z^a (1+s^2)\,ds, \qquad v_0(z)=A^2\cdot(a-z),$$

где постоянная $A>0$ - меньшее из чисел, удовлетворяющих неравенству

$$2^{1/2}a^2A+2(1+a^2)\left(1+\frac{a^2}{3}\right)^{1/2}\leq A^2\left(1+\frac{a}{3}\right)^{1/2}.$$

т.к. $\beta=\tau(0)$, то

$$\beta=\int_0^a\frac{ds}{\psi^{1/2}(s)}.$$

До сих пор $\alpha>0$ было произвольным. Условие $x(1)=1$ в задаче (I2)-(I4) позволяет указать конкретное , отвечающее этой задаче.

$$x(1)=\alpha\varphi_1(0),$$

где

$$\varphi_1(0)=\int_0^a\frac{s\,ds}{\psi^{1/2}(s)}.$$

Откуда

$$\alpha=\left[\int_0^a\frac{s\,ds}{\psi^{1/2}(s)}\right]^{-1}.$$

Таким образом,

$$\lambda_1=Re=\int_0^a\frac{s\,ds}{\psi^{1/2}(s)}:\int_0^a\frac{ds}{\psi^{1/2}(s)},$$

$$\lambda_2=\left[\int_0^a\frac{s\,ds}{\psi^{1/2}(s)}\right]^{-1}\cdot\left[\int_0^a\frac{ds}{\psi^{1/2}(s)}\right]^{3}.$$

Следствие из теоремы 2. Задача, обратная задаче (I2)-(I4) поставлена корректно.

Соотношения (I0), (3) позволяют выразить x, x' и x'' в задаче (I2)-(I4) через $\psi(z)$:

$$x(z)=\alpha\cdot\int_z^a \frac{s\,ds}{\psi^{1/2}(s)},$$

$$x'(z)=\alpha\cdot\beta\cdot z,$$

$$x''(z)=-\alpha\beta^2\cdot\psi^{1/2}(z),$$

$$t(z)=\frac{1}{\beta}\int_z^a \frac{ds}{\psi^{1/2}(s)} \qquad (0\leqslant z\leqslant a).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. - М.: Наука, I967. - 49I с.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.: Наука, I985. - 223 с.
3. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматгиз, I962. - 394 с.
4. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом.-Тбилиси.: Изд-во ТГУ, I984. - 269 с.
5. Колосов А.И. Об одном классе краевых задач, приводимых к уравнению с гетеротонным оператором // Дифференц. уравнения. - I985. - Т.2I, № II. - С.I884-I89I.
6. Беспалова С.А. Об одной нелинейной задаче на собственные значения // ЖВМ и МФ. - I984. - Т.24, № 5. - С.763-767.

Поступила I5.06.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1987.-С.41-52

УДК 517.927

В.П.Столяр
Одесский государственный университет им.И.И.Мечникова

О СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей статье линейная часть системы дифференциальных уравнений предполагается близкой к треугольной. Методы сведения матрицы линейной части к виду, близкому к треугольному (в частности, близкому к диагональному), указаны, например, в [1,2].

В настоящей статье развиваются результаты работы [3], в которой матрица линейной части системы предполагается близкой к диагональной и дополняются результаты по сингулярным краевым задачам работ [4-8].

Обозначим:

$$\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[\,;\quad \mathbb{C}=\{x+iy\},\ x,y\in\mathbb{R};$$

$$\Delta=]t_-,t_+[\,,\ -\infty\leqslant t_-<t_+\leqslant\infty;\ \bar\Delta=[t_-,t_+];$$

$$x=x(t),\ x=colon(x_1,\dots,x_n),\ x(t):\Delta\to\mathbb{C}^n;$$

$$\|x\|=\max_{i=\overline{1,n}}\ \sup_{t\in\Delta}|x_i(t)|;$$

$$\mathbb{C}_\Delta=\{\varphi(t)\,|\,\varphi(t):\Delta\to\mathbb{C}\},\ \mathbb{R}_\Delta=\{\varphi(t)\,|\,\varphi(t):\Delta\to\mathbb{R}\},\tag{1}$$

причем здесь и дальше величины, зависящие от t, считаем непрерывными по t при $t \in \Delta$.

Рассмотрим краевую задачу

$$x' = P(t)x + f(t, x), \tag{2}$$

$$\sum_{m=0}^{l} A_m x(t_m) = b(x), \tag{3}$$

где $t_- \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_l \leq t_+$;

матрица-функция $P(t)$, $P = (p_{ij})_n^n$, $P(t): \Delta \to C^{n^2}$, $p_{ij}(t) \equiv 0$, при $i \leq j$

вектор-оператор $f(t,x)$, $f = colon(f_1, \cdots, f_n)$, $f(t,x): \Delta \times \Lambda \to C^n$, причем $\forall i = \overline{1,n}$, $\exists f_i^*(t) \in R_\Delta$ такие, что $\forall (x, \tilde{x}) \in \Lambda$

$$|f_i(t,x) - f_i(t,\tilde{x})| \leq f_i^*(t) \| x - \tilde{x} \|; \tag{4}$$

матрицы $A_m = (a_{mrj})_\kappa^n$, $a_{mrj} \in C$, причем $1 \leq \kappa \leq n$;

вектор-оператор $b(x)$, $b = colon(b_1, \ldots, b_\kappa)$, $b(x): \Lambda \to C^\kappa$, причем $\forall r = \overline{1,\kappa}$, $\exists b_r^* \in R$ такие, что $\forall (x, \tilde{x}) \in \Lambda$

$$|b_r(x) - b_r(\tilde{x})| \leq b_r^* \| x - \tilde{x} \|.$$

Докажем вспомогательные утверждения. Обозначим:

$$\chi(\alpha,\beta) = \chi(\alpha,\beta,\psi) = \int_\alpha^\beta \psi(\tau)\, d\tau,$$

$$\Phi(\alpha,\beta) = \Phi(\alpha,\beta,\gamma,\varphi,\psi) = \int_\alpha^\beta \varphi(\tau) e^{-\chi(\gamma,\tau)}\, d\tau,$$

$$I(\alpha,\beta) = I(\alpha,\beta,\varphi,\psi) = \int_\alpha^\beta \varphi(\tau) e^{\chi(\tau,\beta)}\, d\tau,$$

$$\tilde{\chi}(\alpha,\beta) = \chi(\alpha,\beta,Re\psi), \quad \tilde{\Phi}(\alpha,\beta) = \Phi(\alpha,\beta,\gamma,\tilde{\varphi},Re\psi),$$

$\tilde{I}(\alpha,\beta) = I(\alpha,\beta,\tilde{\varphi}\, Re\,\psi)$,

где $\alpha,\beta,\gamma\in\bar{\Delta}$; $\varphi\in C_\Delta$, $\tilde{\varphi}\in R_\Delta$, $|\varphi(t)|\leqslant\tilde{\varphi}(t)$;
$I(\alpha,\alpha) = \lim\limits_{t\to\infty} I(\alpha,t)$.

Лемма I. Интеграл $I(\alpha,a)$, $a\in\Delta$ сходится, если сходится интеграл $\tilde{I}(\alpha,a)$.

Доказательство. Представим

$$I(\alpha,a)=e^{\chi(\gamma,a)}\Phi(\alpha,a),\ \tilde{I}(\alpha,a)=e^{\tilde{\chi}(\gamma,a)}\tilde{\Phi}(\alpha,a),\ \gamma\in\Delta \quad (5)$$

Сравнивая сходимости интегралов, получим требуемое.

Лемма 2. Если при $t\in\Delta$ справедливо

$$(\alpha<a\wedge Re\,\psi(t)<0)\vee(\alpha>a\wedge Re\,\psi(t)>0),$$

существует и конечна какая-либо из величин

$Z_1=\int\limits_\alpha^a|\varphi(\tau)|\,d\tau$ (случай (*)) или $Z_2=\sup\limits_{t\in\Delta}\left|\dfrac{\varphi(t)}{Re\,\psi(t)}\right|$

(случай (**)), то $I(\alpha,a)$ сходится и $I(\alpha,a)\leqslant\min(Z_1, Z_2)$.

Доказательство. Запишем первое равенство из (5) с $\gamma=\alpha$. В случае (*) доказательство очевидно. В случае (**) в интеграле $\Phi(\alpha,a)$ применяем замену переменной $y=\chi(\alpha,\tau)$.

Лемма 3. Пусть $\tilde{I}(\alpha,a)$ сходится, тогда

а) если $\tilde{\chi}(a,\beta)=-\infty$, $\lim\limits_{t\to\beta}\dfrac{\varphi(t)}{Re\,\psi(t)}=0$, $\alpha\neq\beta$, то $I(\alpha,\beta)=0$;

б) если $\tilde{\chi}(a,\alpha)=+\infty$, $\lim\limits_{t\to\alpha}\dfrac{\varphi(t)}{Re\,\psi(t)}=0$, то $I(\alpha,\alpha)=0$.

Доказательство. Рассмотрим случай а). Справедливо

$$|I(\alpha,t)|\leqslant|e^{\tilde{\chi}(\gamma,t)}\tilde{\Phi}(\alpha,t)|,\ \gamma,t\in\Delta,$$

причем сходимость интегралов следует из сходимости $\tilde{I}(\alpha,a)$

и леммы I. Из определения следует, что либо $\widetilde{\Phi}(\alpha,\beta)=+\infty$ либо $\Phi(\alpha,t)$ ограничено. Устремляя t к β, в первом случае, применяя правило Лопиталя, получим требуемое. Случай б) рассматривается аналогично.

Обозначим:

множество $V^+\subset\{1,\dots,n\}$, состоит из n^+ элементов таких, что $\widetilde{\chi}(\alpha,t,P_{hh})$ не ограничен сверху при $t\in[\alpha,\xi_h[$; множество $V\subset\{1,\dots,n\}/V^+$, состоит из k элементов $s\in V$ и упорядочено по возрастанию своих элементов;

множество $V_i=V\cap\{i,\dots,n\}$;

$$T_i(t,x)=\frac{1}{\det G}\sum_{d\in V_i}\eta_{id}(t)\zeta_d(x)+\theta_i(t,x),$$

где

$$G=(g_{re})_k^k,\quad g_{re}=\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{j=s_e}^{n}a_{mrj}\eta_{j,s_e}(t_m)$$

s_e - элемент множества V, стоящий на e месте;

$$\eta_{ss}(t)=e^{\chi(v_s,t,p_{ss})},$$

$$\eta_{iw}(t)=\sum_{b=i+1}^{n}I(u_i,t,p_{ib}\cdot\eta_{bw},p_{ii}),$$

где $w\in V_{i+1}$, $u_h=\xi_h$, $u_s\in\bar{\Delta}$;

$$\zeta_d(x)=\sum_{r=1}^{k}{}_r(x)G_{re_d},$$

где $H_r(x)=b_r(x)+\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{j=1}^{n}a_{mrj}\theta_j(t_m,x)$,

$$\theta_j(t,x)=I(u_j,t,f_j(\cdot,x)-\sum_{b=j+1}^{n}p_{jb}\quad\theta_b(\cdot,x),p_{jj}),$$

G_{re_d} - дополнение r, e_d элемента матрицы G, причем e_d -номер элемента d множества V при $K>1$,
$G_{11}=1$ при $K=1$;

$$q=\max_{i=\overline{1,n}}\sup_{t\in\Delta} q_i(t),$$

где

$$q_i(t)=\frac{1}{|\det G|}\sum_{d\in V_i}|\eta_{id}(t)|\zeta_d^*+\theta_i^*(t),$$

$$\zeta_d^*=\sum_{r=1}^{K}\omega_r^*|G_{re_d}|,$$

$$\omega_r^*=b_r^*+\sum_{m=0}^{\ell}\sum_{j=1}^{n}|a_{mrj}|\theta_j^*(t_m),$$

$$\theta_j^*(t)=I(u_j,t,f_j^*+\sum_{b=j+1}^{n}|p_{jb}|\theta_b^*,Re p_{jj});$$

область $M=\{x\,/\,\|x\|\leq r\}$, $r=D/(1-q)$,

$$D=\max_{i=1,n}\sup_{t\in\Delta}|T_i(t,0)|.$$

П р е д п о л о ж е н и е I. Пусть:
а) существуют величины q, D, причем $q<1$;
б) область $M\subset\Lambda$;
в) если $a_{mrj}\neq 0$, то $\forall x\in M$ существует $\theta_j(t_m,x)$.

Т е о р е м а I. Если выполнено предположение I, то краевая задача (2), (3) имеет ограниченное решение, которое можно получить методом последовательных приближений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система дифференциальных уравнений (2) эквивалентна следующей системе интег -

ральных уравнений

$$x_i = e^{\chi(v_i,t,p_{ii})}(C_i(x) + \Phi(z_i,t,v_i,\tilde{f}_i(\cdot,x),p_{ii})), \qquad (6)$$

где $C_i(x)\colon \Lambda \to \mathbb{C}$, $v_i, z_i \in \Delta$, $\tilde{f}_i(t,x) = f_i(t,x) - \sum_{\beta=i+1}^{n} p_{i\beta}(t)x_\beta$, что проверяется дифференцированием (6) и интегрированием (2). Положим v_i , $z_i \in \bar{\Delta}$, если при этом сходятся интегралы из (6). Этот случай сводится к случаю, когда v_i, $z_i \in \Delta$, , очевидными алгебраическими преобразованиями в правой части системы (6).

Для того, чтобы решение (6) было ограниченным, необходимо положить

$$C_h(x) = -\Phi(z_h, \xi_h, v_h, \tilde{f}_i(\cdot,x), p_{ii}), \qquad (7)$$

при условии, что интегралы, входящие в (7), сходятся. Если $\kappa < n - n^+$, положим $C_i(x) \equiv 0$ при $i \in V^+ \cup V$. Таким образом, (6) можно записать в виде

$$x_i = e^{\chi(v_i,t,p_{ii})} C_i(x) + I(u_i,t,\tilde{f}_i(\cdot,x),p_{ii}), \qquad (8)$$

где $C_i(x) \equiv 0$ при $i \in V$, причем сходимость интегралов из (6) и (7) следует из сходимости интегралов из (8).

Преобразуем последовательно $n-1$, $n-2$ и т.д. строки из (8) заменой величин x_β в линейной части на правые части β строк. Получим

$$x_i = \sum_{d \in V_i} \eta_{id}(t) C_d(x) + \theta_i(t,x) \qquad (9)$$

Подставляя (9) в краевые условия (2), найдем $C_d(x)$. Таким образом,

$$x_i = T_i(t,x). \qquad (10)$$

Вводя пространство непрерывных вектор-функций, определенных на интервале Δ , с нормой (1), применяя принцип сжатых отображений, получим теорему I при условии, что сходятся интегралы из (8).

Покажем сходимость интегралов из (8). Для этого разобьем $T_i(t,x)$ на два слагаемых соответственно записи $\tilde{f}_i(t,x)=(\tilde{f}_i(t,x)-\tilde{f}_i(t,0))+\tilde{f}_i(t,0)$. Применяя неравенство из (4), предположение I, лемму I, получим требуемое.

Замечание I. В случае $\kappa=n-n^+$ полученное решение единственно в классе ограниченных вектор-функций, а если, к тому же, $n^+=0$, то решение единственно. Справедливость замечания очевидно следует из доказательства.

Введем краевые условия

$$\sum_{\omega=0,\ell} A^o_\omega x(t_\omega)=0, \tag{II}$$

где матрицы $A^o_\omega=(a_{\omega æ j})^n_{\kappa^o}$, $a^o_{\omega æ j}\in C$.

Введем величины $g^o_{æe}$, которые получаются, если в формулах для g_{re} заменить a_{mrj} на $a^o_{\omega æ j}$.

Предположение 2. Пусть $g^o_{æe}=0$ и если $a^o_{m æ j}\neq 0$, то $\forall æ\in M$ $\theta_i(t_m,x)=0$.

Теорема 2. Если выполнены предположения I, 2, то решение краевой задачи (2), (3), полученное в теореме I, удовлетворяет краевым условиям (II).

Доказательство. Решение краевой задачи (2), (3), полученное в теореме I, удовлетворяет системе (I0). Подставляя (I0) в краевые условия (II), получим требуемое.

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим следующую краевую задачу

$$y''-\lambda^2 q(t)y=\sum_{\nu=1}^{2} h_\nu(t,y,y',\lambda), \tag{A}$$

$$y(t_o,\lambda)=b,$$

где $\lambda\in L$, $L\subset\,]0,+\infty[$, $\Delta=\,]t_o,t_1[$, $-\infty\leq t_o<t_1\leq+\infty$,

$b \in \mathbb{R}$; функция $q(t)>0$, при $t\in\Delta$ дважды непрерывно дифференцируема; $h_\nu(t,s,\lambda):\Delta\times S(t,\lambda)\times L\to\mathbb{R}$, где $s=(s_1,s_2)$, $s=s(t,\lambda):\Delta\times L\to\mathbb{R}^2$, причем $\exists h_{\nu i}(t,\lambda):\Delta\times L\to\mathbb{R},\ i=1,2$ такие, что $\forall(s,\tilde{s})\in \in S(t,\lambda)$

$$|h_1(t,s,\lambda)-h_1(t,\tilde{s},\lambda)|\le\sum_{i=1}^{2}h_{1i}(t,\lambda)|s_i-\tilde{s}_i|, \tag{12}$$

$$|h_2(t,s,\lambda)-h_2(t,\tilde{s},\lambda)|\le\sum_{i=1}^{2}h_{2i}(t,\lambda)\sup_{t\in\Delta}|s_i(t,\lambda)-\tilde{s}_i(t,\lambda)|.$$

Обозначим:

$$\Gamma_i(\lambda)=I_i(\lambda)\min\left(2,1+\frac{I_i(\lambda)}{1-I_i(\lambda)}\right),$$

где $I_i(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda}\min\left(\max\limits_{j=1,2}\dfrac{\varphi_i(t,\lambda)}{|\mu_j(t,\lambda)|},\ \int\limits_{t_0}^{t_1}\varphi_i(r,\lambda)dr\right),$

$$\varphi_1(t,\lambda)=H(t,\lambda)+|\xi(t)|,$$

$$H(t,\lambda)=\Big(\sum_{\nu=1}^{2}h_{\nu 1}(t,\lambda)+h_{12}(t,\lambda)Q(t,\lambda)+h_{22}(t,\lambda)\sup_{t\in\Delta}Q(t,\lambda)\Big)\Big/\sqrt{q(t)},$$

$$Q(t,\lambda)=\frac{1}{2}\left(\left|\lambda\sqrt{q(t)}+q'(t)/4\sqrt{q(t)}\right|+\left|\lambda\sqrt{q(t)}-q'(t)/4\sqrt{q(t)}\right|\right)$$

причем, если $h_{22}(t,\lambda)\equiv 0$, то соответствующее слагаемое равно нулю,

$$\xi(t)=\frac{1}{2\sqrt{q(t)}}\left(\frac{q''(t)}{4q(t)}-\frac{5}{16}\left(\frac{q'(t)}{q(t)}\right)^2\right),$$

$$\mu_j(t,\lambda)=(-1)^j\lambda\sqrt{q(t)}-\frac{q'(t)}{4q(t)}+(-1)^j\frac{\xi(t)}{\lambda},$$

$$\varphi_2(t,\lambda)=\sum_{\nu=1}^{2}|h_\nu(t,0,0,\lambda)|/\sqrt{q(t)};$$

$$\rho(\lambda)=(|b|+\Gamma_2(\lambda))/(1-\Gamma_1(\lambda));$$

$$S^*(t,\lambda)=\{s^*|s^*=(s_1^*,s_2^*),\ s^*=s^*(t,\lambda):\Delta\times L\to R^2,$$

$$|s_1^*(t,\lambda)|\le\rho(\lambda),\ |s_2^*(t,\lambda)|\le\rho(\lambda)Q(t,\lambda)\}.$$

П р е д п о л о ж е н и е 3. Пусть при $\lambda\in L_0\subset L$:

а) сходятся $\int_a^{t_0}\mu_j(r,\lambda)dr,\ \Phi(a,t_0,a,\varphi_i(\cdot,\lambda),\mu_j(\cdot,\lambda))$, $a\in\Delta$;

б) $\mu_1(t,\lambda)\geqslant 0,\ \mu_2(t,\lambda)\leqslant 0$;

в) существуют $\Gamma_i(\lambda),\ \Gamma_1(\lambda)<1$;

г) $S^*(t,\lambda)\subset S(t,\lambda)$;

Т е о р е м а 3. Если выполнено предположение 3, то краевая задача (А) $\forall\lambda\in L_0$ имеет ограниченное решение, которое можно получить методом последовательных приближений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью подстановки

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ q_1(t,\lambda) & q_2(t,\lambda) & x_2 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

где $q_i(t,\lambda)=(-1)^i\lambda\sqrt{q(t)}-q'(t)/4q(t)$ краевой задаче (А) ставим в соответствие краевую задачу

$$\begin{aligned} x_i' &= \mu_i(t,\lambda)x_i+U_i(t,x,\lambda),\\ x_1(t_0,\lambda)&+x_2(t_0,\lambda)=b, \end{aligned} \qquad (Б)$$

где $x=(x_1,x_2)$, $U_i(t,x,\lambda)=(-1)^{i+1}(\xi(t)x_{3-i}/\lambda+$
$+\sum_{\nu=1}^{2}\tilde{h}_\nu(t,x,\lambda)$, $\tilde{h}_\nu(t,x,\lambda)=h_\nu(t,y,y',\lambda)$.
Используя условие (I2) и подстановку (I3), получим условие (4) для $U_i(t,x,\lambda)$. Применим теорему I, выбирая $V=$ $=2$; $V^+=\{1\}$, если $\chi(a,t_1,\mu_1)=+\infty$, $V^+=\emptyset$ в противном случае; $v_1=u_1=t_1$, $v_2=u_2=t_0$, доказывая сходимость и оценивая интегралы $I(u_j,t,\varphi_i(\cdot,\lambda),$ $\mu_j(\cdot,\lambda))$, $t\in\bar{\Delta}$ с помощью леммы 2, используя для удовлетворения условия в) предположения I разбиение, как при доказательстве сходимости интегралов из (8) в доказательстве теоремы I. Получим, что в предположении 3 с $\Gamma_i(\lambda)=2I_i(\lambda)$ задача (Б) имеет ограниченное решение. Относя слагаемое $\xi(t)x_2/\lambda$ в первом уравнении системы из (Б) к линейной части, получим то же утверждение в предположении 3 с $\Gamma_i(\lambda)=I_i(\lambda)(1+I_i(\lambda)/(1-I_i(\lambda))$.

Ввиду (I3), всякому ограниченному решению задачи (Б) соответствует единственное ограниченное решение задачи (А). Теорема доказана.

Введем краевое условие

$$y(t_1-0)=0. \tag{I4}$$

П р е д п о л о ж е н и е 4. Пусть при $\lambda\in L_0$:

а) $\int_a^{t_1}\mu_1(r,\lambda)dr=+\infty$, $\int_a^{t_1}\mu_2(r,\lambda)=-\infty$;

б) $\lim\limits_{t\to t_1}\dfrac{\varphi_i(t,\lambda)}{\mu_j(t,\lambda)}=0$.

Т е о р е м а 4. Если выполнены предположения 3,4, то решение краевой задачи (А), полученное в теореме 3, удовлетворяет краевому условию (I4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (I3) следует, что для удовлетворения краевого условия (I4) достаточно удовлетворить краевому условию

$$x_1(t_1,\lambda)+x_2(t_1,\lambda)=0. \tag{I5}$$

Проверяя предположение 2 для краевой задачи (Б) с краевым условием (I5) с помощью леммы 3 и применяя теорему 2, получим требуемое.

Краевая задача, сходная с краевой задачей (А), (I4), рассмотрена в [8]. В настоящей работе, в отличие от [8]: правая часть уравнения может зависеть от y', являться оператором по y (при $\nu=2$); возможно $t_0=-\infty$; не требуется существований частных решений соответствующего однородного уравнения вида $\tilde{q}_1(t)e^{\lambda t}$, $\tilde{q}_2(t)e^{-\lambda t}$, где $\tilde{q}_i(t)$, $i=1,2$ - непрерывны и ограничены, что при известных условиях существования частных решений, см.[I, 2], означает, что $q(t_1-0)=const\neq 0$ не требуется сходимости $\int_{t_0}^{t_1} h_1(t,y,y',\lambda',\lambda)e^t dt$, указаны точные оценки для области задания правой части и параметра λ, все результаты выражены непосредственно через коэффициенты краевой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. - Киев: Изд-во АН УССР, 1954. - 290 с.

2. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1983. - 352 с.

3. Костин А.В., Столяр В.П. О многоточечной краевой задаче для системы квазилинейных дифференциальных уравнений // ОГУ. - Одесса, 1986. - I7 с. - Деп. в УкрНИИНТИ I0.01.86, № 253 Ук86.

4. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Тбилиси: ТГУ, 1975. - 352 с.

5. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. - 183 с.

6. Цепитис Я.В. Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с несуммируемой особенностью // Дифференц.уравнения. - 1983. - Т.19, № 12. - С.2071-2075.
7. Лепин Л.А. Разрешимость нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с особенностью // Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.-Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985. - С.29-34.
8. Залогова Л.А., Рекка Р.А. Теорема существования и единственности решения интегро-дифференциального уравнения второго порядка // ПГУ. - Пермь, 1980. - 5 с. - Деп. в ВИНИТИ 24.10.80, № 60-81 Деп.

Поступила 19.08.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига:ЛГУ им.П.Стучки,1987.-С. 53-68

УДК 517.927.4

Я.В.Виржбицкий
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Настоящая статья является продолжением исследований [1-3]. Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t)=f(t,x,x'), \tag{1}$$

$$Gx=G(x(a),x(b),x'(a),x'(b))=g, \tag{2}$$

$$Hx=H(x(a),x(b),x'(a),x'(b))=h, \tag{3}$$

$$\alpha\leq x\leq\beta, \tag{4}$$

где $t\in I=[a,b], -\infty<a<b<+\infty$, $f\in Car(I\times R^2,R)$, $G,H\in C(R^2\times R^2,\bar{R})$, $g,h\in\bar{R}$, $\alpha\in AG(I,R)$, $\beta\in BG(I,R)$, $x\in SG(I,R)$, $AG(I,R)$, $BG(I,R)$, $SG(I,R)$ -множества обобщенных нижних функций, обобщенных верхних функций и обобщенных решений уравнения (1) соответственно (см.[4]), и условия:

1. $\alpha(a)=\beta(a)$, 2. $\alpha'(a)<\beta'(a)$ 3. $\alpha'(a)=\beta'(a)$,
4. $\alpha'(a)>\beta'(a)$, 5. $\alpha(b)=\beta(b)$ 6. $\alpha'(b)<\beta'(b)$,
7. $\alpha'(b)=\beta'(b)$ 8. $\alpha'(b)>\beta'(b)$.

В статье рассмотрены для подмножества U дополнительных условий 1-8 случаи U=12, U=13, U=15, U=18 в предположении, что функция G фиксирована.

Введем необходимые обозначения. Будем говорить, что функция $H: R^2\times\bar{R}^2\to\bar{R}$ имеет тип монотонности ($\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$), где $\sigma_i\in\{0,-,+,1\}$, если функция H при $\sigma_i=0$

не зависит от i-го аргумента, при $\sigma_i = -(\sigma_i = +)$ не возрастает (не убывает) по i-му аргументу, а при $\sigma_i = 1$ ограничения не накладываются, =I,2,3,4. Класс монотонности $M(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$ состоит из функций $H \in C(R^2 \times \bar{R}^2, \bar{R})$, имеющих тип монотонности $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$.

Для описания функции G понадобятся обобщенные классы монотонности $MG(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0,-,+,1, X,Y,A,C,D,E,F,K,L\}$. Определим поведение G для различных σ_1. Для остальных σ_i определения аналогичны. Для $\sigma_1 \in \{0,-,+,1\}$ определения не отличаются от определения в случае классов монотонности. При $\sigma_1 = X$ $(\sigma_1 = Y)$ функция $G \in MG(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$ строго убывает (возрастает) по первому аргументу. Для остальных σ_1 определим равенствами:

$$MG(A\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(1\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(C\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(D\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(+\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

$$MG(E\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(X\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(F\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(+\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(Y\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

$$MG(K\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(E\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$
$$MG(L\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(F\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(0\sigma_2\sigma_3\sigma_4).$$

В дальнейшем обобщенные классы монотонности будут разделены в случае необходимости.

Введем определение класса разрешимости.

Определение. Набор (G, M, U), состоящий из заданной функции $G \in C(R^2 \times \bar{R}^2, R$, класса монотонности M и подмножества U дополнительных условий I–8, является классом разрешимости $((G, M, U) \in \mathcal{E})$, если для любых $a \in R$, $b \in (a, +\infty)$, $f \in Car([a,b] \times R^2, R)$,

$\alpha \in AG(I,R)$, $\beta \in BG(I,R)$, $H \in M$, $g, h \in \bar{R}$ таких, что $\alpha \leq \beta$, $G\alpha \leq g \leq G\beta$, $H\alpha \leq h \leq H\beta$ и выполнены условия U, существует обобщенное решение краевой задачи (I)-(4).

Приведем вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства теорем. Везде далее M - некоторый класс монотонности.

Лемма I. Если $(G,M,U) \in \mathcal{C}$, $U \in \{12, 15, 18\}$, то $G \in MG(11-+)$.

Доказательство. Предположим, что $(G, M, U) \in \mathcal{C}$, но $G \overline{\in} MG(11-+)$. Это означает, что либо существуют $u_1, u_2 \in R$, $u_{31}, u_{32}, u_4 \in \bar{R}$ такие, что $u_{31} < u_{32}$ и $G(u_1, u_2, u_{31}, u_4) < G(u_1, u_2, u_{32}, u_4)$, либо существуют $v_1, v_2 \in R$, $v_3, v_{41}, v_{42} \in \bar{R}$ такие, что $v_{41} > v_{42}$ $G(v_1, v_2, v_3, v_{41}) < G(v_1, v_2, v_3, v_{42})$. Рассмотрим лишь первый случай, так как второй рассматривается так же, если применить к первому случаю замену $t = b + a - \tau$. В силу непрерывности функции G без ограничения общности будем считать $u_{31}, u_{32}, u_4 \in R$. Покажем, что при сделанных предположениях (G, M, U) не является классом разрешимости. Для этого построим пример конкретной краевой задачи вида (I)-(4) такой, что выполнены неравенства $\alpha \leq \beta$, $G\alpha \leq g \leq G\beta$, $H\alpha \leq h \leq H\beta$ и условия, входящие в U, но обобщенного решения краевой задачи не существует. Без ограничения общности будем считать $u_1 = u_2 = u_{31} = u_4 = 0$, $u_{32} = 1$.
Иначе в краевой задаче (I)-(4) сделаем замену $y = k(x+p)$, где $k \in (0, +\infty)$, p - полином 3-й степени, $p(a) = r_1$, $p(b) = r_2$, $p'(a) = r_3$, $p'(b) = r_4$. Тогда уравнение $x'' = f(t, x, x')$ переходит в уравнение

$$y'' = kf(t, k^{-1}y - p, k^{-1}y' - p') - kp'',$$

обобщенные нижняя функция, верхняя функция и решение переходят в соответствующие обобщенные функции или решения нового уравнения. Если $x(a) = x(b) = x'(a) = x'(b) = 0$, то $y(a) = u_1$, $y(b) = u_2$, $y'(a) = u_{31}$, $y'(b) = u_4$. Если же $x'(a) = 1$, то $y'(a) = u_{32}$, $r_1 = u_1 k^{-1}$,

$r_2 = u_2 K^{-1}$, $r_3 = u_{31} K^{-1}$, $r_4 = u_4 K^{-1}$, $K = u_{32} - u_{31}$.
По этим r_i полином p находится однозначно.

Приведем пример требуемой краевой задачи. Пусть

$$I = [0,1], \quad f = 0, \quad \alpha(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1],$$

$$\beta(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, \varepsilon(\varepsilon+1)^{-1}), \\ \varepsilon(1-t), & t \in [\varepsilon(\varepsilon+1)^{-1}, 1], \quad \varepsilon \in (0,1). \end{cases}$$

Возьмем ε достаточно малым. Тогда в силу непрерывности G имеем $G\alpha < G\beta$. Положим $g = G\beta$, $H: x \to 0$, $h = 0$. Пример краевой задачи построен. Единственное решение (I), удовлетворяющее неравенству $\alpha \le x \le \beta$, есть α. Но $G\alpha < g = G\beta$, следовательно, граничное условие $Gx = g$ не выполнено, краевая задача решения не имеет. Так как все требования определения класса разрешимости для приведенной краевой задачи выполнены, то получено противоречие с тем, что (G, M, U) является классом разрешимости. Итак, $G \in MG(11-+)$.

З а м е ч а н и е I. Приведенный пример краевой задачи удовлетворяет условиям U=I258, следовательно, также условиям U=I2, U=I5, U=I8. При замене $t = b + a - \tau$ эти условия переходят сами в себя.

Л е м м а 2. Если $(G, M, U) \in \mathcal{C}$, U=I3, то $G \in MG(111+)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству второго случая в лемме I с использованием α и β с необходимыми для их определения I и функцией f (в дальнейшем называемых пара (α, β)):

$$I = [0,1] \qquad f = 12|x|^{1/2}$$

$$\alpha(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

$$\beta(t) = \begin{cases} t^4, & t \in [0, \tau), \\ 1-t, & t \in [\tau, 1], \end{cases}$$

где $\tau \in (0,1)$, $\tau^4 + \tau - 1 = 0$.

Лемма 3. Если $(G,M,U) \in \mathcal{E}$, $u \in \{12,18\}$, то

$$G \in MG(1A11) \Rightarrow M \subset M(1--0).$$

Доказательство. Рассмотрим случай $U = $ =I28. Тогда U =I2 и U =I8 выполнено. Пусть $G \in MG(1A11)$ и $(G,M,128) \in \mathcal{E}$. Для включения $M \subset M(1--0)$ достаточно показать, что невозможны включения $M(0+00) \subset M$, $M(00+0) \subset M$, $M(000-) \subset M$, $M(000+) \subset M$. Для этого построим примеры конкретных краевых задач вида (I)-(4) с $H \in M(0+00)$, $H \in M(00+0)$, $H \in M(000-)$, $H \in M(000+)$ таких, что выполнены неравенства $\alpha \le \beta$, $G\alpha \le g \le G\beta$, $H\alpha \le h \le H\beta$ и условия U, но обобщенного решения краевых задач не существует.

$G \in MG(1A11)$ означает, что $\exists u_1, u_{21}, u_{22} \in R$, $\exists u_3, u_4 \in \bar{R}$ такие, что $u_{21} < u_{22}$ и $G(u_1,u_{21},u_3,u_4) < G(u_1,u_{22},u_3,u_4)$. В силу непрерывности G можно считать $u_3, u_4 \in R$. Без ограничения общности можно положить $u_1 = u_{21} = u_3 = u_4 = 0$, $u_{22} = 1 - \varepsilon$ (см. док-во леммы I). Приведем 4 примера краевых задач на паре (α,β):

$$I = [0,2] \qquad f(t,x) = \varepsilon^{-2} x$$

$$\alpha(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$

$$\beta(t) = \begin{cases} (sh\,\varepsilon^{-1})^{-1}\, sh\,\varepsilon^{-1} t, & t \in [0,1), \\ 1 + \varepsilon - \varepsilon t, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Получены краевые задачи с граничными условиями $Gx = g$, $H_i x = h_i$, $i = 1,2$, где $H_2 x = x(b)$, $H_2 x = x(a)$, $H_{3,4} x = \pm\varphi(x'(b))$, $h_i = 0$,

$$\varphi(s) = \begin{cases} s, & t \in [-\infty, 0), \\ 0, & t \in [0, +\infty]. \end{cases}$$

Л е м м а 4. Если $(G,M,U)\in\mathcal{C}$, U = I3, то

$$G\in MG(1A11)\Rightarrow M\subset M(1\text{-}10).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится на паре (α,β):

$$I=[0,2]$$

$$f(t,x)=\begin{cases}12\,|x|^{1/2}\operatorname{sign}x, & t\in[0,1),\\ 0, & t\in[1,2],\end{cases}$$

$$\alpha(t)=0 \quad \forall t\in I,$$

$$\beta(t)=\begin{cases}t^4, & t\in[0,1),\\ 1, & t\in[1,2],\end{cases}$$

аналогично доказательству леммы 3.

Л е м м а 5. Если $(G,M,U)\in\mathcal{C}$, U =I2, то

$$G\in MG(111D)\Rightarrow M\subset M(1\text{---}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем по схеме доказательства леммы 3. Пусть U =I26, $G\in MG(111D)$ и $(G,M,126)\in\mathcal{C}$. Для включения $M\subset M(1\text{---})$ достаточно показать, что невозможны включения $M(0+00)\subset M$, $M(00+0)\subset M$, $M(000+)\subset M$. Для этого построим краевые задачи с $H\in M(0+00)$, $H\in M(00+0)$ и $H\in M(000+)$ такие, что выполнены соотношения $\alpha\leqslant\beta$, $G\alpha\leqslant g\leqslant G\beta$, $H\alpha<h\leqslant H\beta, U$, но обобщенного решения краевой задачи не существует.

$G\in MG(111D)$ означает, что $\exists\, u_1, u_2\in R$, $\exists\, u_3, u_{41}, u_{42}\in\bar{R}$ такие, что $u_{41}<u_{42}$ и $G(u_1,u_2,u_3,u_{41})<G(u_1,u_2,u_3,u_{42})$. Ввиду непрерывности G будем считать $u_3, u_{41}, u_{42}\in R$. Без ограничения общности будем полагать $u_1=u_2=u_3=u_{41}$ =0, и $u_{42}=sh\,\varepsilon^{-1}(ch\,\varepsilon^{-1})^{-1}$. Приведем примеры трех краевых задач на паре (α,β):

$$I=[0,1], \quad f(t,x)=\varepsilon^{-2}x,$$
$$\alpha(t)=0 \quad \forall t\in I,$$
$$\beta(t)=(\operatorname{ch}\varepsilon^{-1})^{-1}\operatorname{sh}\varepsilon^{-1}t.$$

Положим $H_1x=x(b)$, $H_2x=x'(a)$, $H_3x=x'(b)$, $h_1=h_2=h_3=0$, $g=G\beta$. Дальнейшая часть доказательства аналогична доказательству леммы 3 и опускается.

Лемма 6. Если $(G,M,U)\in\mathscr{C}$, $U=13$, то $G\in MG(111D)\Rightarrow M\subset M(1-1-)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 5 на паре (α,β):

$$I=[0,1], \quad f(t,x)=12|x|^{1/2}\operatorname{sign}x,$$
$$\alpha(t)=0 \quad \forall t\in I, \quad \beta(t)=t^4.$$

Лемма 7. Если $(G,M,U)\in\mathscr{C}$, $U\in\{13,15,18\}$, то

$$G\in MG(111F)\Rightarrow M\subset M(111+).$$

Доказательство. Пусть U=1358. Тогда $13\subset 1358$, $15\subset 1358$, $18\subset 1358$. Для включения $M\subset M(111+)$ достаточно показать, что невозможно включение $M(000-)\subset M$. Для этого по схеме доказательства леммы 3 построим пример краевой задачи с $H\in M(000-)$, не имеющей решения.

$G\in MG(111F)$ означает, что $\exists u_1, u_2\in R$, $\exists u_3, u_{41}, u_{42}\in\bar{R}$ такие, что $u_{41}>u_{42}$ и $G(u_1,u_2,u_3,u_{41})=G(u_1,u_2,u_3,u_{42})$. Так как $MG(111F)\subset M(111+)$, то можно считать $u_{41}, u_{42}\in R$. Без ограничения общности можно считать, что $u_1=u_2=u_3=u_{41}=0$, $u_{42}=-1$. Рассмотрим случай $u_3\in R$. Приведем пример требуемой краевой задачи на паре (α,β):

$$I=[0,2]$$

$$f(t,x)=\begin{cases}12^{2}|x|^{1/2}\,\mathrm{sign}\,x, & t\in[0,1),\\ 0, & t\in[1,2],\end{cases}$$

$$\alpha(t)=0 \quad \forall t\in I,$$

$$\beta(t)=\begin{cases}t^{4}, & t\in[0,1),\\ 2-t, & t\in[1,2].\end{cases}$$

Положим $g=G\alpha=G\beta$, $Hx=-x'(b)$, $h=1$. Дальнейшее доказательство аналогично концу доказательства леммы 3.

Если $u_3=-\infty$ или $u_3=+\infty$, то доказательство проводится по паре (α,β):

$$I=[-4^{-1},\,2],$$

$$f(t,x,x')=\begin{cases}12^{-2}|x|^{1/2}, & t\in[0,2],\\ 2(x'+1)^{3}, & t\in[-4^{-1},0),\end{cases}$$

$$\alpha(t)=\begin{cases}2^{-1}+t+(4^{-1}+t)^{1/2}, & t\in[-4^{-1},0),\\ t^{4}, & t\in[0,1),\\ 2-t, & t\in[1,2],\end{cases}$$

$$\beta(t)=\begin{cases}2^{-1}+t+(4^{-1}+t)^{1/2}, & t\in[-4^{-1},0),\\ t^{4}, & t\in[0,1),\\ 2-t, & t\in[1,2],\end{cases}$$

или паре (α,β):

$$I=[-4^{-1},2]$$

$$f(t,x,x')=\begin{cases}2(x'-1)^3, & t\in[-4^{-1},0),\\ 12\,|x|^{1/2}, & t\in[0,2],\end{cases}$$

$$\alpha(t)=\begin{cases}-2^{-1}-t+(4^{-1}+t)^{1/2}, & t\in[-4^{-1},0),\\ 0, & t\in[0,2],\end{cases}$$

$$\beta(t)=\begin{cases}-2^{-1}-t+(4^{-1}+t)^{1/2}, & t\in[-4^{-1},0),\\ t^4, & t\in[0,1),\\ 2-t, & t\in[1,2].\end{cases}$$

Л е м м а 8. Если $(G,M,U)\in\mathcal{C}$, $U=15$, то $G\in MG(11E+)\Rightarrow M\subset M(11-1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проводится по схеме доказательства леммы 3.

$G\in MG(11E+)$ означает, что $\exists\, u_1,u_2\in R$, $\exists\, u_{31},u_{32},u_4\in\bar{R}$ такие, что $u_{31}<u_{32}$ и $G(u_1,u_2,u_{31},u_4)=G(u_1,u_2,u_{32},u_4)$. В силу $MG(11E1)\subset M(11-1)$ можно считать $u_{31},u_{32}\in R$. Без ограничения общности будем полагать $u_1=u_2=u_{31}=u_4=0$, $u_{32}=1$. Пусть $u_4\in R$. Необходимо построить краевую задачу с выполнением всех требуемых соотношений и $H\in M(00+0)$. Приведем этот пример на паре (α,β):

$$I=[0,2]$$

$$f(t,x)=\begin{cases}0, & t\in[0,1),\\ 12\,|x|^{1/2}\operatorname{sign}x, & t\in[1,2],\end{cases}$$

$$\alpha(t)=0\quad \forall t\in I,$$

$$\beta(t)=\begin{cases}t, & t\in[0,1),\\ (t-2)^4, & t\in[1,2].\end{cases}$$

Положим $Hx = x'(a)$, $h=1$, $g=G\alpha$.

Переход к случаю $|u_4|=\infty$ осуществляется как в доказательстве леммы 7.

Л е м м а 9. Если $(G,M,U)\in \mathscr{C}$, $U=\{12,18\}$, то
$G\in MG(11E0) \Rightarrow M\subset M(11-+)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем по схеме доказательства леммы 3. Достаточно показать, что невозможны включения $M(00+0)\subset M$ и $M(000-)\subset M$. Для этого построим краевые задачи с $H\in M(00+0)$ и $H\in M(000-)$ с соответствующими свойствами на паре (α,β):

$$I=[0,2]$$

$$f=0$$

$$\alpha(t)=0 \quad \forall t\in I$$

$$\beta(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,1), \\ 2t, & t\in[1,2]. \end{cases}$$

Положим $g=G\alpha$, $H_1x=x'(a)$, $h_2=\beta'(a)$, $H_2x=-x'(b)$, $h_2=-\beta'(b)$. Получены краевые задачи с краевыми условиями $Gx=g$, $H_ix=h_i$, $i=1,2$. Дальнейшее по аналогии.

Л е м м а 10. Если $(G,M,U)\in\mathscr{C}$, $U=12$, то
$G\in MG_1(1--D) \Rightarrow M\subset M(111+)$,

где $MG_1(1--D)=\{G\in MG(1--D): (\exists u_1,u_2\in R)(\exists u_{31},u_{32}, u_{41},u_{42}\in\bar{R})(u_{31}<u_{32}, u_{41}>u_{42})(G(u_1,u_2,u_{31},u_{41}) = G(u_1,u_2,u_{32},u_{42}))\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем аналогично доказательству леммы 3. Достаточно показать, что невозможно включение $M(000-)\subset M$. Для этого построим пример краевой задачи с $H\in M(000-)$ и соответствующими свойствами. Без ограничения общности в силу монотонности по 3-му и 4-му аргументу считаем $u_{31},u_{32},u_{41},u_{42}\in R$,

а также $u_1 = u_2 = u_{31} = u_{41} = 0$, $u_{32} = 1$, $u_{42} < 0$.
Возьмем пару (α, β):

$$I = [0,2],$$
$$f = 0,$$
$$\alpha(t) = 0 \quad \forall t \in I,$$
$$\beta(t) = \begin{cases} t, & t \in [0, 2c(1+c)^{-1}), \\ c(2-t), & t \in [2c(1+c)^{-1}, 2], \quad c = -u_{42}, \end{cases}$$

где u_{42} из определения $G \in MG_1(1--D)$.
Положим $g = G\alpha$, $Hx = -x'(b)$, $h = -u_{42}$.
Дальнейшее по аналогии.

Л е м м а II. Если $(G, M, U) \in \mathcal{C}$, $U = 18$, то

$$G \in MG_1(1--L) \Rightarrow M \subset M(1--1),$$

где $MG_1(1--L) = \{G \in MG(1--L) : (\exists u_1, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in R)$ $(\exists u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \bar{R})(u_{21} < u_{22}, u_{23} \in [u_{21}, u_{22}],$ $u_{31} < u_{32}$, $u_{33} \in [u_{31}, u_{32}]$, $u_{42} < u_{41}$, $u_{43} \in [u_{42}, u_{41}])(G(u_1, u_{21}, u_{31}, u_{41}) = G(u_1, u_{22},$ $u_{32}, u_{42}) \neq G(u_1, u_{23}, u_{33}, u_{43}))\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем по схеме доказательства леммы 3. Достаточно показать, что невозможны включения $M(0+00) \subset M$ и $M(00+0) \subset M$. Для этого построим краевые задачи с $H \in M(0+00)$ и $H \in M(00+0)$ с соответствующими свойствами.
Возьмем пару (α, β):

$$I = [0,1], \quad f = 0,$$
$$\alpha(t) = \max\{u_{31} t, \ u_{41}(t-1) + u_{21}\},$$
$$\beta(t) = \min\{u_{32} t, \ u_{42}(t-1) + u_{22}\},$$

где u_{ij} из определения $G \in MG_1(1--L)$. Без ограничения общности будем считать $u_1 = u_{23} = 0$, $u_{21} < 0$, $u_{22} > 0$, $u_{31}, u_{32}, u_{41}, u_{42} \in R$, $u_{33} = u_{43} = 0$ (в силу монотонности G). Положим $g = G\alpha$, $H_1 x = x(\beta)$, $H_2 x = x'(\alpha)$, $h_1 = h_2 = 0$. Получены требуемые краевые задачи с краевыми условиями $Gx = g$, $H_i x = h_i$, $i = 1,2$.

Т е о р е м а I. Пусть U =13. $(G,M,U) \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, если G и M представляют собой альтернативу из следующего списка наборов

1) $G \in MG(1A1+)$, $M \subset M(1-10)$,
2) $G \in MG(1-10)$, $M \subset M(111+)$,
3) $G \in MG(1-1Y)$, $M \subset M(1-1-)$,
4) $G \in MG(1-1L)$, $M \subset M(1-10)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. В силу леммы 2 имеем $MG(111+)$. Возьмем следующее разбиение: $MG(111+) = MG(1A1+) \cup MG(1-10) \cup MG(1-1Y) \cup MG(1-1L)$.

Пусть $G \in MG(1A1+)$ и $(G,M,U) \in \mathcal{C}$. Тогда в силу леммы 4 и в силу леммы 7 получаем $M \subset M(1-10)$. 2) - 4) доказываются с применением леммы 6 и лемм 6,7.

Необходимость. Для 1), 2), 4) $(G,M,13) \in \mathcal{C}$ в силу теорем [5]. Рассмотрим 3). Если для α, β выполнено $\alpha'(\beta) \leq \beta'(\beta)$, то выполнено $G\alpha \leq G\beta$, иначе $G\alpha > G\beta$. Но тогда можно считать, что при выполнении $\alpha'(\beta) > \beta'(\beta)$ для $G \in MG(1-1Y)$ имеем $(G, M(1111), 138) \in \mathcal{C}$. Так как $(G, M(1-1-), 136) \in \mathcal{C}$ и $(G, M(1-1-), 137) \in \mathcal{C}$ в силу теорем [5], то в силу соотношения $M(1-1-) = M(1-1-) \cap M(1111)$ для $G \in MG(1-1Y)$ имеем $(G, M(1-1-), 13) \in \mathcal{C}$.

Т е о р е м а 2. Пусть U =15. $(G,M,U) \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, если G и M представляют собой альтернативу из следующего списка сочетаний (G,M):

1) $G \in MG(11EF)$, $M \subset M(11-+)$,
2) $G \in MG(11EY)$, $M \subset M(11-1)$,
3) $G \in MG(11XF)$, $M \subset M(111+)$,
4) $G \in MG(11XY)$, $M \subset M(1111)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность доказывается аналогично теореме I с использованием лемм 7,8. Необходимость доказывается аналогично теореме I и базируется в конечном итоге на теоремах работы [5].

Теорема 3. Пусть $U=12$. $(G,M,U)\in\mathcal{C}$ тогда и только тогда, если G и M представляют собой альтернативу из следующего списка сочетаний (G,M):

I) $G\in MG(1A-+)$, $M\subset M(1--0)$,

2) $G\in MG(1-X0)$, $M\subset M(1111)$,

3) $G\in MG(1-E0)$, $M\subset M(11-+)$,

4) $G\in MG_1(1--D)$, $M\subset M(1--0)$,

5) $G\in MG_2(1--D)$, $M\subset M(1---)$.

Доказательство. Достаточность. В силу леммы I и $(G,M,U)\in\mathcal{C}$ имеем $G\in MG(11-+)$. Сделаем разбиение:

$$MG(11-+)=MG(1A-+)\cup MG(1-X0)\cup MG(1-E0)\cup MG_1(1--D)\cup MG_2(1--D),$$

где $MG_1(1--D)\cap MG_2(1--D)=\emptyset$,

$MG_1(1--D)\cup MG_2(1--D)=MG(1--D)$ и $MG_1(1--D)$ определено в лемме IO. Дальнейшее аналогично доказательству предыдущих теорем. Необходимость. I)-3) рассматриваются как в предыдущих теоремах. Рассмотрим 4). Так как $MG_1(1--D)\subset\subset MG(1--D)\subset MG(11-+)$, то для $G\in MG_1(1--D)$ $(G,M(1--0),12)\in\mathcal{C}$ в силу теоремы работы [5]. Рассмотрим 5). В силу U=I2 выполняется либо U=I26, либо U==I27, либо U=I28. Если U=I26 или U=I27, то $MG_2(1--D)\subset M(1--1)$, и для $G\in MG_2(1--D)$ имеем $(G,M(1---),12)\in\in\mathcal{C}$ (см. [5]). Если же U=I28, то в силу определения $MG_2(1--D)$ выполнено $G\alpha>G\beta$, поэтому $(G,M(1111),128)\in\mathcal{C}$. Так как $M(1---)=M(1---)\cap M(1111)$, то для $G\in MG_2(1--D)$ имеем $(G,M(1---),12)\in\mathcal{C}$.

Теорема 4. Пусть U=I8, $(G,M,U)\in\mathcal{C}$ тогда и только тогда, если G и M представляют собой альтернативу из следующего списка сочетаний (G,M):

1) $G \in MG(1A-+)$, $M \subset M(1--0)$,
2) $G \in MG(1-E0)$, $M \subset M(11-+)$,
3) $G \in MG(1-X0)$, $M \subset M(111+)$,
4) $G \in MG(1--Y)$, $M \subset M(1111)$,
5) $G \in MG_1(1--L)$, $M \subset M(1--+)$,
6) $G \in MG_{21}(1--L)$, $M \subset M(11-+)$,
7) $G \in MG_{22}(1--L)$, $M \subset M(111+)$.

Доказательство. Достаточность. В силу $(G,M,U) \in \mathcal{C}$ и леммы I имеем $G \in MG(11-+)$. Сделаем разбиение

$$MG(11-+)=MG(1A-+) \cup MG(1-E0) \cup MG(1-X0) \cup$$
$$MG(1--Y) \cup MG_1(1--L) \cup MG_{21}(1--L) \cup MG_{22}(1--L),$$

где $MG_1(1--L)$ определено в лемме II, $MG_2(1--L)=$
$MG(1--L) \setminus MG_1(1--L)$, $MG_2(1--L)=\{G \in MG(1--L):$
$(\forall u_1, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in R)(\forall u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \bar{R})$
$(u_{21}<u_{22}, u_{23} \in [u_{21}, u_{22}], u_{31}<u_{32}, u_{33} \in [u_{31}, u_{32}],$
$u_{42}<u_{41}, u_{43} \bar{\in} [u_{42}, u_{41}])(G(u_1, u_{21}, u_{31}, u_{41})>$
$>G(u_1, u_{22}, u_{32}, u_{42}) \vee G(u_1, u_{21}, u_{31}, u_{41})=G(u_1, u_{23}, u_{33}, u_{43}))\}$.
$MG_{22}(1--L)=\{G \in MG_2(1--L):(\forall u_1, u_{21}, u_{22} \in R)$
$(\forall u_{31}, u_{32}, u_{41}, u_{42} \in \bar{R})(u_{21}<u_{22}, u_{31}<u_{32}, u_{41}>u_{42})$
$(G(u_1, u_{21}, u_{31}, u_{41})>G(u_1, u_{22}, u_{32}, u_{42}))\}$,
$MG_{21}(1--L)=\{G \in MG_2(1--L):(\forall u_1, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in R)$
$(\forall u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \bar{R})(u_{21}<u_{22}, u_{23} \in [u_{21}, u_{22}],$
$u_{31}<u_{32}, u_{33} \in [u_{31}, u_{32}], u_{41}>u_{42}, u_{43} \bar{\in} [u_{42}, u_{41}])\cdot$
$\cdot(G(u_1, u_{21}, u_{31}, u_{41})=G(u_1, u_{22}, u_{32}, u_{42})=$
$=G(u_1, u_{23}, u_{33}, u_{43}))\}$.

1)-5) доказывается аналогично предыдущим теоремам с применением лемм 3, 7, 9, II.

Рассмотрим 6). Включение $M \subset M(11-+)$ доказывается аналогично как в лемме 7.

Необходимость. 1)-5) следует из теорем [5]. Для 6) и 7) докажем. Доказывается методом доказательства теоремы $T801$ работы [5], в качестве вспомогательного решения u используя решение с краевыми условиями $u(a)=\alpha(a)$, $u(b)=(\alpha(b)+\beta(b))2^{-1}$.

Для 7) результат также не следует из теорем работы [5]. Укажем схему доказательства. Прежде всего необходимо отметить, что неравенство $G\alpha \leqslant G\beta$ может выполняться лишь при выполнении условий I,3,8. Существование решения доказывается методом доказательства теоремы $TB\ 01$ работы [5], в качестве вспомогательного решения u используя решение с краевыми условиями $u(a)=\alpha(a)$, $u(b)=(\alpha(b)+\beta(b))2^{-1}$.

С помощью замены независимой переменной $t=b+a-\tau$ из теорем I,3,4 получаются результаты для $u=57$, $u=58$, $u=25$.

Т е о р е м а 5. Пусть $u=57$. $(G,M,U)\in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, если G и M представляют собой альтернативу из следующего списка наборов

I) $G\in MG(A1-1)$, $M\subset M(-101)$,

2) $G\in MG(-101)$, $M\subset M(11-1)$,

3) $G\in MG(-1X1)$, $M\subset M(-1+1)$,

4) $G\in MG(-1K1)$, $M\subset M(-101)$.

Т е о р е м а 6. Пусть $U=58$. $(G,M,U)\in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, если G и M представляют собой альтернативу из следующего списка наборов

I) $G\in MG(A1-+)$, $M\subset M(-10+)$,

2) $G\in MG(-10Y)$, $M\subset M(1111)$,

3) $G\in MG(-10F)$, $M\subset M(11-+)$,

4) $G\in MG_1(-1C+)$, $M\subset M(-10+)$,

5) $G\in MG_2(-1C+)$, $M\subset M(-1++)$,

где $MG_1(-1C+)\subset MG(-1C+)$ определяется как $MG_1(1--D)$, $MG_2(-1C+)=MG(-1C+)\setminus MG_1(-1C+)$.

Т е о р е м а 7. Пусть $U=25$. $(G,M,U)\in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, если G и M представляют собой альтернативу из следующего списка:

I) $G\in MG(A1-+)$, $M\subset M(-10+)$,

2) $G \in MG(-10F)$, $M \subset M(11-+)$,

3) $G \in MG(-10Y)$, $M \subset M(11-1)$,

4) $G \in MG(-1X+)$, $M \subset M(1111)$,

5) $G \in MG_1(-1K+)$, $M \subset M(-1-+)$,

6) $G \in MG_2(-1K+)$, $M \subset M(11-+)$,

7) $G \in MG_{22}(-1K+)$, $M \subset M(11-1)$.

где определения классов $MG_1(-1K+)$, $MG_{21}(-1K+)$, $MG_{22}(-1K+)$ легко построить по аналогии из определений $MG_1(1--L)$, $MG_{21}(1--L)$, $MG_{22}(1--L)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Виржбицкий Я.В. Обобщенная разрешимость нелинейной краевой задачи с фиксированной граничной функцией // Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985.- С.84-92.

2. Виржбицкий Я.В. Обобщенная разрешимость двухточечной краевой задачи с фиксированным граничным условием // Латв.мат.ежегодник, -Рига : Зинатне, 1985-Вып. 29.-С. 3-7.

3. Виржбицкий Я.В. К вопросу о разрешимости двухточечной краевой задачи // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов.- Махачкала: ДГУ им.В.И.Ленина, 1986.- С.56-5.

4. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц.уравнения.- 1982.- Т.18, № 8.- С.1323-1330.

5. Лепин А.Я. Существование обобщенного решения нелинейных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // ЛГУ им.П.Стучки.-Рига, 1986.- 94 с.- Деп. в ЛатНИИНТИ 13.02.86, № 76 Ла-Д86.

Поступила 09.09.86.

Межвузорский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.-С.69-72

УДК 517.927

Л.А.Лепин
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

При изучении движения вязкой жидкости между двумя бесконечными, вращающимися вокруг одной оси дисками возникает задача фон Кармана-Бетчелора [I]

$$x^{IV} + xx''' + yy' = 0,$$
$$y'' + xy' - x'y = 0, \qquad (I)$$

$$x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0,$$
$$y(0) = q_0, \quad y(1) = q_1, \qquad (2)$$

где $q_0, q_1 \in R$. Теоретическое изучение этой задачи встречает серьезные трудности, особенно при больших значениях q_0 и q_1. Если предположить, что функция $y \in C_1([0,1], R)$ известна, то задача (I)-(2) сводится к задаче четвертого порядка

$$x^{IV} + xx''' + g(t) = 0, \qquad (3)$$

$$x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0, \qquad (4)$$

где $g(t) = y(t) \cdot y'(t)$ - непрерывная при $t \in [0,1]$ функция. Если $q_0 \geq 0$, $q_1 > q_0$ и функция y монотонна, то $g(t) \geq 0$ при всех $t \in [0,1]$. Данная работа и посвящена изучению разрешимости задачи (3)-(4) в случае, когда

Т е о р е м а . Пусть $g \in C([0,1],R)$ и $g \geqslant 0$. Тогда краевая задача разрешима.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Доказательство проведем методом априорных оценок.

Предположим, что существует решение $x:[0,1]\to R$ задачи (3)-(4). Тогда из краевых условий следует, что найдутся точка $t_1 \in (0,1)$, в которой $x'(t_1)=0$, $t_2 \in (0,t_1)$, $t_3 \in (t_1,1)$, в которых $x''(t_2)= =x''(t_3)=0$ и $t_4 \in (t_2,t_3)$, в которой $x'''(t_4)=0$. Из уравнения (3) видно, что функция x'' не может иметь минимума, а, следовательно, $x''(t)<0$ при $t\in[0,t_2)$ и $t \in (t_3,1]$ и $x''(t)>0$ при $t \in (t_2,t_3)$. Отсюда следует, что функция x' достигает своего минимума в точке t_2, а максимума - в точке t_3. Из этого заключаем, что функция x отрицательна на интервале $(0,1)$ и достигает своего минимума в точке t_1.

Так как в точке t_4 $x'''(t_4)=0$ и $g(t_4)\geqslant 0$, то $x^{IV}(t_4)\leqslant 0$. Из уравнения (3) видно, что $x'''(t)$ не может принимать отрицательных значений при $t\in[0,t_4]$. Поэтому на интервале $[0,t_4]$ справедливо неравенство

$$x^{IV}+g(t)\geqslant 0.$$

Интегрируя это неравенство от $t\in[0,t_4)$ до t_4, получим

$$-x'''(t)+\int_t^{t_4} g(t)\,dt \geqslant 0,$$

или

$$x'''(t)\leqslant \int_t^{t_4} g(t)\,dt \leqslant \int_0^1 g(t)\,dt = M.$$

Проинтегрировав это неравенство от t_2 до t_4, получим

$$x''(t_4) \le M\,(t_4 - t_2) \le M.$$

Так как в точке t_4 функция x'' достигает своего максимума, то неравенство

$$x''(t) \le M$$

справедливо при всех $t \in [0,1]$. интегрируя это неравенство от t_2 до t_1 и от t_1 до t_3 , получаем

$$-x'(t_2) \le M\,(t_1 - t_2) \le M,$$

$$x'(t_3) \le M\,(t_3 - t_1) \le M.$$

Так как x' достигает в точке t_2 своего минимума, а в точке t_3 - максимума, то оценка

$$|x'(t)| \le M$$

справедлива при всех $t \in [0,1]$. Отсюда, еще одним интегрированием получаем оценку для x :

$$-M \le x \le 0 \tag{5}$$

при всех $t \in [0,1]$. Их этой оценки и уравнения (3) легко получается априорная оценка третьей производной

$$|x'''(t)| \le M_0\,, \tag{6}$$

где $M_0 = e^M \int\limits_0^1 g(t)\,dt$.

Рассмотрим уравнение

$$x^{IV} + \delta(-M, x, 0)\cdot\delta(-M_0, x''', M_0) + g(t) = 0, \tag{7}$$

где

$$\delta(u, v, w) = (u + |u - v| - |v - w| + w)/z\,.$$

Согласно [2, с .25] краевая задача (7)-(4) имеет решение $x : [0,1] \to R$. Нетрудно убедиться, повторив выкладки, приведенные выше, что для этого решения справедливы оценки (5) и (6). Но при этих значениях x и x''' уравнения (3) и (7) полностью совпадают. Поэтому x является также решением задачи (3)-(4). Теорема доказана.

В заключение выскажем относительно задачи (3)-(4) несколько предположений.

I. Решение задачи (3)-(4) существует для любой непрерывной функции $g: [0,1] \to R$.

2. Решение задачи (3)-(4) единственно.

3. Решение задачи (3)-(4) непрерывно в метрике C зависит от функции g.

Доказательство этих предположений может облегчить теоретическое исследование задачи (I)-(2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Batchelor G.K. Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow.// Quart.Journ.Mech.Appl.Math.- 1951.- Vol.4,N 1. - P.29-41.

2. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. - 183 с.

Поступила II.09.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1987.-С.73-82

УДК 517.911.7

А.Я.Лепин
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

АПРИОРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В работе изучается априорная оценка производных для неравенств

$$F_-(x) \leq x^{(n)} \leq F_+(x), \quad \|x\|_p < M_0, \tag{I}$$

где $n \in \{2,3,\dots\}$, $F_-, F_+ : AC_{n-1}(I,R) \to L(I,R)$, $I=[a,b]$, $a \in R$, $b \in (a,\infty)$, $p \in [1,\infty]$, $M_0 \in (0,\infty)$ и $AC_{n-1}(I,R)$ - множество функций с абсолютно непрерывными производными до $n-1$ -ой включительно.

Пусть для $m \in \{1,2,\dots\}$

$$c_{mp} = \inf\{\|t^m (m!)^{-1} + \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i\|_{L_p([0,1],R)} :$$

$$a_i \in R, \;\; i \in \{0,\dots,m-1\}\},$$

для $M \in (0,\infty)$

$$\mu(M) = (2c_{n-1p}^{-1} M_0 M^{-1})^{(n-1+p^{-1})^{-1}},$$

множество S состоит из функций $x \in AC_{n-1}(I,R)$, которые удовлетворяют неравенствам (I).

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма:

Л е м м а I. (см. [I]). Пусть $m \in \{1,2,\dots\}$,

$M_m \in (0,\infty)$, $x \in AC_{m-1}(I,R)$ и $M_m \leq x^{(m)}(t)$ для почти всех $t \in I$.

Тогда

$$c_{mp}(b-a)^{m+p^{-1}} M_m \leq \|x\|_p .$$

Следствие I. Пусть $x \in S$, $M_{n-1} = \|x^{(n-1)}\|_\infty$, $t_1 \in [a,b)$, $t_2 \in (t_1, b]$ и $2^{-1} M_{n-1} \leq |x^{(n-1)}(t)|$ для $t \in [t_1, t_2]$.

Тогда $t_2 - t_1 < \mu(M_{n-1})$.

Доказательство. Предполагая противное $\mu(M_{n-1}) \leq t_2 - t_1$ и применяя лемму I, имеем

$$M_0 > \|x\|_p \geq c_{n-1p}(t_2-t_1)^{n-1+p^{-1}} 2^{-1} M_{n-1} \geq$$

$$\geq c_{n-1p}(\mu(M_{n-1}))^{n-1+p^{-1}} 2^{-1} M_{n-1} = M_0 ,$$

что доказывает следствие.

Теорема I. Пусть $M_* \in (0,\infty)$, $k \in \{1,2,\ldots\}$, $a_i, b_i \in I$, $i = 1,\ldots,k$,

$$a = a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_{k-1} < a_k < b_k = b,$$

$$\mu(M_*) \leq \min\{b_1 - a_1, \ldots, b_k - a_k\}$$

и для любых $x \in S$ из $\|x^{(n-1)}\|_\infty = M_{n-1} \in [M_*, \infty)$ следует, что для любых $i \in \{1,\ldots,k\}$ и $t_1, t_2 \in [a_i, b_i]$ из $0 < t_2 - t_1 \leq \mu(M_{n-1})$ следует

$$-0,5 \leq M_{n-1}^{-1} \int_{t_1}^{t_2} F_-(x)\,dt, \qquad (2)$$

$$M_{n-1}^{-1} \int_{t_1}^{t_2} F_+(x)\,dt \leq 0,5 \qquad (3)$$

и для любого $i \in \{1,\ldots,k-1\}$ существует $j \in \{2,3\}$

такое, что для любых

$$t_1, t_2 \in [b_i - \mu(M_{n-1}),\ a_{i+1} + \mu(M_{n-1})]$$

из $0 < t_2 - t_1 \leqslant \mu(M_{n-1})$ следует справедливость формулы (j).

Тогда для любого $x \in S$ справедлива оценка $\|x^{(n-1)}\|_\infty < M_*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in S$, $t_0 \in I$ и $M_{n-1} = \|x^{(n-1)}\|_\infty = |x^{(n-1)}(t_0)|$. Покажем, что $M_{n-1} < M_*$. Предположим противное. Рассмотрим случай, когда $0 < x^{(n-1)}(t_0)$ и $t_0 \in [a_i, b_i]$. Выберем $t_1, t_2 \in [a_i, b_i]$ так, чтобы $t_2 = t_1 + \mu(M_{n-1})$ и $t_0 \in [t_1, t_2]$. Тогда для $t \in [t_1, t_0]$

$$x^{(n-1)}(t) = x^{(n-1)}(t_0) - \int_t^{t_0} x^{(n)}(\tau)\,d\tau \geqslant \tag{I*}$$

$$\geqslant M_{n-1} - \int_t^{t_0} F_+(x)\,d\tau \geqslant 2^{-1} M_{n-1},$$

а для $t \in [t_0, t_2]$

$$x^{(n-1)}(t) = x^{(n-1)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} x^{(n)}(\tau)\,d\tau \geqslant$$

$$\geqslant M_{n-1} + \int_{t_0}^{t} F_-(x)\,d\tau \geqslant 2^{-1} M_{n-1}.$$

Следовательно, $2^{-1} M_{n-1} \leqslant x^{(n-1)}(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$. Из следствия I получаем противоречие.

Рассмотрим случай, когда $0 < x^{(n-1)}(t_0)$, $t_0 \in [b_i, a_{i+1}]$ и $j = 2$. Тогда для $t \in [t_0 - \mu(M_{n-1}), t_0]$ справедлива формула (I*). Аналогично предыдущему получаем противоречие.

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

З а м е ч а н и е I. Покажем, что в теореме I константу 0,5 в неравенствах (2-3) нельзя заменить на I. Рассмотрим случай, когда $p<\infty$ и $I=[0,1]$. Пусть для $M_{n-1}\in[0,\infty)$ и $x\in AC_{n-1}(I,R)$

$$r=(M_{n-1}M_0^{-1}p^{-p^{-1}})^{(n-1+p^{-1})^{-1}},$$

$$f(M_{n-1})=re^{-rt}M_{n-1},$$

$$x_{M_{n-1}}(t)=M_0(rp)^{p^{-1}}e^{-rt},$$

$$F_+(x)=f(\|x^{(n-1)}\|_\infty),\quad F_-(x)=-F_+(x).$$

Тогда $\|x_{M_{n-1}}\|_p<M_0$,

$$\|x^{(n-1)}_{M_{n-1}}\|_\infty=M_0p^{p^{-1}}r^{n-1+p^{-1}}=M_{n-1},$$

$$|x^{(n)}_{M_{n-1}}(t)|=M_0p^{p^{-1}}r^{n+p^{-1}}e^{-rt},$$

$$F_-(x_{M_{n-1}})\leq x^{(n)}_{M_{n-1}}\leq F_+(x_{M_{n-1}}).$$

Если $x\in S$, $\|x^{(n-1)}\|_\infty=M_{n-1}$ и $t_1,t_2\in[0,1]$ такие, что $0<t_2-t_1\leq\mu(M_{n-1})$, то

$$M_{n-1}^{-1}\int_{t_1}^{t_2}F_+(x)dt\leq M_{n-1}^{-1}\int_0^{\mu(M_{n-1})}M_{n-1}re^{-rt}dt=$$

$$=1-e^{-r\mu(M_{n-1})}<1.$$

З а м е ч а н и е 2. Если $F_+(x)=g\|x^{(n-1)}\|_\infty^\alpha$, где $g,\alpha\in[0,\infty)$, то при $\alpha<1+(n-1+p^{-1})^{-1}$ найдется $M_*\in(0,\infty)$ такое, что для любых $t_1,t_2\in I$ из $x\in S$, $\|x^{(n-1)}\|_\infty=M_{n-1}\in[M_*,\infty)$ и $0<t_2-t_1\leq\mu(M_{n-1})$ следует справедливость оценки (3), а при

$$\alpha = 1 + (n-1+p^{-1})^{-1}, \quad g \leq 2^{-1}(c_{n-1p} M_0)^{-1,(n-1+p^{-1})^{-1}}$$

оценка (3) справедлива для любых $x \in S$.

Т е о р е м а 2. Пусть $i, m_1 \in \{1,2,\dots\}$, $j \in \{i, i+1, \dots\}$, для $m = 1, \dots, m_1$ $\alpha_m, \beta_m \in [0,\infty)$, $\gamma_m \in (0,\infty)$, $\varepsilon_m : [0,\infty) \to [0,\infty)$,

$$\delta_m = -p(n-1+p^{-1})(\gamma_m + \beta_m(n-1+p^{-1}))^{-1},$$
$$c_m = (2m_1)^{\delta_m}(2^{-1}c_{n-1p})^{p(1+\beta_m\gamma_m^{-1}(n-1+p^{-1}))^{-1}},$$

для $M \in [0,\infty)$

$$\varepsilon(M) = \min\{c_m \varepsilon_m^{\delta_m}(M) : m \in \{1,\dots,m_1\}\}$$

и выполняются следующие условия: $p < \infty$, $\mu(2^i) \leq b - a$,

$$\gamma_m = (\alpha_m - 1)(n-1+p^{-1}), \quad m = 1, \dots, m_1,$$

$$M_0^p \leq \sum_{k=i}^{j} \varepsilon(2^k), \tag{4}$$

для любых $x \in S$, $t_1 \in [a,b)$, $t_2 \in (t_1, b]$ из

$$2^i \leq M_{n-1} = \|x^{(n-1)}\|_{L_\infty([t_1,t_2]R)}$$

следует

$$-\sum_{m=1}^{m_1} \varepsilon_m(M_{n-1}) M_{n-1}^{\alpha_m} M_{0p}^{\beta_m}(t_2-t_1)^{\gamma_m} \leq \int_{t_1}^{t_2} F_-(x)\,dt, \tag{5}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_+(x)\,dt \leq \sum_{m=1}^{m_1} \varepsilon_m(M_{n-1}) M_{n-1}^{\alpha_m} M_{0p}^{\beta_m}(t_2-t_1)^{\gamma_m}, \tag{6}$$

где $M_{op} = \|x\|_{L_p([t_1,t_2],R)}$.

Тогда для любого $x \in S$ справедлива оценка $\|x^{(n-1)}\|_\infty < 2^j$.

Доказательство. Пусть $x \in S$. Покажем, что найдется $t_o \in I$, для которого

$$|x^{(n-1)}(t_o)| < 2^{i-1}. \qquad (1^*)$$

Предположим противное;

$$2^{i-1} \leq |x^{(n-1)}(t)|, \ t \in I. \qquad (2^*)$$

Из (2*) и леммы 1 следует

$$M_o > \|x\|_p \geqslant c_{n-1p}(b-a)^{n-1+p^{-1}} 2^{i-1} \geqslant$$

$$\geqslant c_{n-1p}(\mu(2^i))^{n-1+p^{-1}} 2^{i-1} = c_{n-1p} 2 c^{-1}_{n-1p} M_o 2^{-i} 2^{i-1} = M_o.$$

Полученное противоречие доказывает (1*).

Покажем, что $\|x^{(n-1)}\|_\infty < 2^j$. Предположим противное. Тогда найдутся $t_1, t_2 \in I$ такие, что

$$|x^{(n-1)}(t_1)| = 2^{i-1}, \quad |x^{(n-1)}(t_2)| = 2^j.$$

Рассмотрим случай, когда $t_1 < t_2$, $x^{(n-1)}(t_1) = 2^{i-1}$ и $x^{(n-1)}(t_2) = 2^j$. Пусть для $k = i, \dots, j$

$$a_k = \sup\{t \in [t_1, t_2] : x^{(n-1)}(t) = 2^{k-1}\},$$
$$b_k = \inf\{t \in [a_k, t_2] : x^{(n-1)}(t) = 2^k\}.$$

Тогда $2^{k-1} \leq x^{(n-1)}(t) \leq 2^k$ для $t \in [a_k, b_k]$ и

$$2^{k-1} = x^{(n-1)}(b_k) - x^{(n-1)}(a_k) = \int_{a_k}^{b_k} x^{(n)}(t)\,dt \leq \qquad (3^*)$$
$$\int_{a_k}^{b_k} F_+(x)\,dt \leq \sum_{m=1}^{m_1} \varepsilon_m(2^k) 2^{k\alpha_m} (b_k - a_k)^{1/m} M_{*k}^{\beta_m},$$

где $M_{*k}=\|x\|_{L_p}([a_k,b_k],R)$. Если максимальное слагаемое в сумме имеет индекс m_*, то из (3*) следует

$$2^{k-1}\le m_1\varepsilon_{m_*}(2^k)2^{k\alpha_{m_*}}(b_k-a_k)^{\gamma_{m_*}}M_{*k}^{\beta_{m_*}},$$

$$(2m_1 2^{k(\alpha_{m_*}-1)}\varepsilon_{m_*}(2^k)M_{*k}^{\beta_{m_*}})^{-\gamma_{m_*}^{-1}}\le b_k-a_k.$$

Применяя лемму I на интервале $[a_k,b_k]$ получим

$$c_{n-1p}(b_k-a_k)^{n-1+p^{-1}}2^{k-1}\le M_{*k},$$

$$2^{-1}c_{n-1p}(2m_1\varepsilon_{m_*}(2^k))^{-\gamma_{m_*}^{-1}(n-1+p^{-1})}\le M_{*k}^{1+\beta_{m_*}\gamma_{m_*}^{-1}(n-1+p^{-1})},$$

$$c_{m_*}\varepsilon_{m_*}^{\delta_{m_*}}(2^k)\le M_{*k}^{p},\quad \varepsilon(2^k)\le M_{*k}^{p}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=i}^{j}\varepsilon(2^k)\le\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|^p dt<M_0^p,$$

что противоречит (4).

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Замечание 3. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon(2^k)=\infty, \tag{7}$$

то при фиксированном i всегда найдется j , для которого условие (4) выполняется. Если функция ε монотонна, то условие (7) можно заменить на

$$\int_1^{\infty}y^{-1}\varepsilon(y)dy=\infty. \tag{8}$$

З а м е ч а н и е 4. Аналогично теореме I в теореме 2 можно требовать справедливость неравенств (5) и (6) не всюду, а на соответствующих системах интервалов.

Покажем как теорему 2 можно применить для неравенств

$$|x^{(n)}(t)|\leq \varepsilon_0(|x^{(n-1)}(t)|)|x^{(n-1)}(t)|^{\varkappa_{n-1}}\dots|x(t)|^{\varkappa_0};$$

$$\|x\|_p < M_0, \tag{9}$$

где функция $\varepsilon_0:[0,\infty)\to(0,\infty)$ монотонно не убывает, $\varkappa_{n-1},\dots,\varkappa_0\in[0,\infty)$ и

$$n+p^{-1}=\varkappa_{n-1}(n-1+p^{-1})+\dots+\varkappa_0 p^{-1}.$$

Т е о р е м а 3. Пусть $p<\infty$, $\delta=p(1-\varkappa_{n-1}-\dots-\varkappa_0)^{-1}$ и

$$\int_1^\infty y^{-1}\varepsilon_0^\delta(y)\,dy=\infty. \tag{I0}$$

Тогда найдется $N\in(0,\infty)$ такое, что для любого x, удовлетворяющего неравенствам (9), справедлива оценка $\|x^{(n-1)}\|_\infty<N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Посмотрим какой вид будут иметь условия (5) и (6) в данном случае. Пусть x удовлетворяет неравенствам (9), $t_1\in[a,b)$, $t_2\in(t_1,b]$,

$$M_{n-1}=\|x^{(n-1)}\|_{L_\infty([t_1,t_2],R)},$$

$$M_{0p}=\|x\|_{L_p([t_1,t_2],R)}.$$

Если $M_{n-1}(t_2-t_1)^{n-1+p^{-1}}\leq M_{0p}$, то для $k=0,\dots,n-2$ из [2] следует оценка

$$|x^{(k)}(t)|\leq c_{n-1kp}M_{0p}(t_2-t_1)^{-k-p^{-1}},$$

$$t\in[t_1,t_2],$$

где c_{n-1kp} при фиксированных n, k, p - константа. Если $M_{0p}<M_{n-1}(t_2-t_1)^{n-1+p^{-1}}$, то для $k=0,\dots,n-2$ из [2] следует оценка

$$|x^{(k)}(t)| \leq c_{n-1kp} M_{op}^{(n-1-k)(n-1+p^{-1})^{-1}} M_{n-1}^{(k+p^{-1})(n-1+p^{-1})^{-1}},$$

$$t \in [t_1, t_2].$$

Пусть $c = \prod_{k=0}^{n-1} c_{n-1kp}$ и $\sigma = \text{æ}_{n-1} + \ldots + \text{æ}_0$. Тогда

$$\int_{t_2}^{t_1} |x^{(n)}(t)| dt \leq c\varepsilon_0(M_{n-1})(M_{op}^{\sigma}(t_2-t_1)^{1-n-p^{-1}} +$$

$$+ M_{n-1}^{(n+p^{-1})(n-1+p^{-1})^{-1}} M^{\sigma-(n+p^{-1})(n-1+p^{-1})^{-1}}(t_2-t_1)).$$

Теперь из теоремы 2 и замечания 3 следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 5. Для неравенств

$$|x^{(n)}(t)| \leq \varepsilon_0(|x^{(n-1)}(t)|)\, |x^{(n-1)}(t)|\, |x(t)|^p, \; \|x\|_p < M_0,$$

где $p < \infty$, а функция ε_0 непрерывна и монотонно не убывает, условие (I0) имеет вид

$$\int_1^{\infty} y^{-1}\varepsilon_0^{-1}(y)\, dy = \infty .$$

Ясно, что из этого условия следует априорная оценка для $\|x^{(n-1)}\|_\infty$.

Если

$$\int_1^{\infty} y^{-1}\varepsilon_0^{-1}(y)\, dy < \infty ,$$

то для решения задачи Коши

$$u^{(n)}(t)=\varepsilon_0(u^{(n-1)}(t))\,u^{(n-1)}(t)\,u^p(t),$$

$$u(0)=u'(0)=\ldots=u^{(n-1)}(0)=1$$

на интервале $[0,\tau]$ имеем

$$\int_0^{\tau} u^p(t)\,dt=\int_1^{u^{(n-1)}(\tau)} y^{-1}\varepsilon_0^{-1}(y)\,dy.$$

Ясно, что в этом случае нет априорной оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Звягинцев А.И. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля//Латв.мат.ежегодник (в печати).
2. Звягинцев А.И. О вариационных задачах для норм функции и ее производных//Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1985. - С.15-28.

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.-С.83-90

УДК 517.929.7

Ю.А.Быкадоров
Минский государственный педагогический институт
им.А.М.Горького

О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ ГРИНА

Пусть R^n - линейное пространство n-мерных вещественных векторов; L_p^n - пространство вектор-функций $y:[a,b]\to R^n$, компоненты которых при $1\leq p<\infty$ суммируемы на $[a,b]$ в степени p и ограничены в существенном при $p=\infty$; D_p^n - пространство абсолютно непрерывных вектор-функций $x:[a,b]\to R^n$, таких, что $\dot{x}\in L_p^n$.

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-интегрального уравнения

$$(\mathcal{L}x)(t)\equiv\frac{d}{dt}\int_a^b K(t,s)\dot{x}(s)ds+A(t)x(0)=f(t),\quad t\in[a,b], \tag{1}$$

$$\ell x\equiv\int_a^b \Phi(s)\dot{x}(s)ds+\psi x(0)=0. \tag{2}$$

Здесь матричная $(n\times n)$ функция $K(t,s)$ /дифференциально-интегральное ядро/ такова, что оператор

$$(Qy)(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b K(t,s)y(s)ds,\quad t\in[a,b],$$

непрерывно действует в L_p^n, $K(0,s)\equiv 0$ при $s\in[a,b]$; $n\times n$ -матрица A имеет столбцами элементы из L_p^n;

$n\times n$ -матрица Φ имеет столбцами элементы из L_q^n / $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ /; Ψ - постоянная $n\times n$ -матрица.

К уравнению (I) сводятся обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения со всевозможными видами запаздываний, интегро-дифференциальные уравнения, уравнения нейтрального типа, не разрешенные относительно производной [I].

Известно [2, 3], что если краевая задача (I), (2) однозначно разрешима в L_p^n, то ее решение x имеет представление

$$x(t)=(Gf)(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)ds,\quad t\in[a,b].$$

Оператор G называют оператором Грина краевой задачи (I), (2), а $n\times n$ -матричную функцию $G(t,s)$ - функцией Грина этой задачи.

Оператор T, равный произведению оператора дифференцирования $\frac{d}{dt}$ на оператор Грина,

$$(Ty)(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b G(t,s)y(s)ds,\quad t\in[a,b],$$

непрерывен в пространстве L_p^n, причем функция Грина есть его дифференциально-интегральное ядро.

Сопряженный оператор T^* действует в L_q^n и имеет вид [4]

$$(T^*z)(t)=\frac{d}{dt}\int_a^b\left(\frac{\partial}{\partial s}\int_a^t G'(s,\tau)d\tau\right)z(s)ds,\ t\in[a,b],$$

где штрих означает операцию транспонирования матрицы. Дифференциально-интегральное ядро оператора T^* обозначим $G_*(t,s)$. Пару сопряженных дифференциально-интегральных операторов T и T^* можно характеризовать матричной функцией

$$\Omega(t,s)=\int_a^s G(t,\tau)d\tau,\qquad s,t\in[a,b],$$

которая абсолютно непрерывна по каждому аргументу, причем

$$\frac{\partial}{\partial s}\Omega(t,s)=G(t,s),\quad \frac{\partial}{\partial t}\Omega(t,s)=G_*'(s,t).$$

Пусть E - единичная $n\times n$ -матрица, а $\chi(t)$ - единичная функция $/\chi(t)=0$ при $t<0$ и $\chi(t)=1$ при $t\geqslant 0$ /. Подставим в уравнение (I) и краевые условия (2) выражение $x=Gf$, а затем вместо $f(t)$ подставим матрицу $\chi(s-t)E$ при фиксированном $s\in[a,b]$. В результате получаем систему

$$\frac{d}{dt}\int_a^b K(t,\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_a^s G(\tau,\theta)d\theta\Big)d\tau+A(t)\int_a^s G(a,\theta)d\theta = \chi(s-t)E, \tag{3}$$

$$\int_a^b \Phi(\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_a^s G(\tau,\theta)d\tau+\Psi\cdot\int_a^s G(a,\theta)d\theta=0, \tag{4}$$

или в других обозначениях

$$\left.\begin{aligned}[\mathcal{L}\Omega(\cdot,s)](t)&=\chi(s-t)E,\\ \ell\Omega(\cdot,s)&=0.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Таким образом, имеет место

Т е о р е м а I. Связанная с функцией Грина матричная функция $\Omega(t,s)$ как функция первого аргумента при фиксированном $s\in[a,b]$ удовлетворяет дифференциально-интегральному уравнению (I) с правой частью $\chi(s-t)E$ и краевым условиям (2).

Заметим, что если краевые условия (2) являются начальными условиями для задачи Коши, то из (4) сразу следует

$$\Omega(a,s)=G(a,s)=0,\qquad s\in[a,b].$$

Хорошо известно, что в случае краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$(\mathcal{L}, x)(t) \equiv \dot{x}(t) + A(t)x(t) = f(t), \qquad (6)$$

$$l_1 x \equiv Px(a) + R\,x(b) = 0 \qquad (7)$$

/здесь R и P - постоянные $n\times n$-матрицы/ функцию Грина можно рассматривать, как решение краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} [\mathcal{L}, G(\cdot,s)](t) = \delta(t-s)E, \\ lG(\cdot,s) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака /равенства понимаются в обобщенном смысле/. Очевидно, что система (8) может быть получена из системы (5) для этой задачи путем дифференцирования по s на $[a,b]$ и формальным внесением знака производной под знаки оператора $\mathcal{L}_1$ и функционала l_1. В рассматриваемом общем случае такое внесение может быть обосновано далеко не всегда и существенно связано со свойствами дифференциально-интегрального ядра $K(t,s)$ и функции $\Phi(s)$.

Чтобы показать это, преобразуем задачу (3), (4), для чего уравнение (3) интегрируем по t на отрезке $[a,t]$ а затем дифференцируем по s полученное уравнение и уравнение (4):

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_a^b K(t,s)\Big(\frac{\partial}{\partial \tau}\int_a^s G(\tau,\theta)d\theta\Big)d\tau + \int_a^t A(\tau)d\tau\cdot G(a,s) = \chi(t-s)E,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_a^b \Phi(\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial \tau}\int_a^s G(\tau,\theta)d\tau + \psi G(a,s) = 0 .$$

В первых слагаемых уравнений нетрудно заметить выражение для дифференциально-интегрального ядра оператора T^*. Тогда

$$(T^*K'(t,\cdot))'(s)+\int_a^t A(\tau)d\tau\cdot G(a,s)=\chi(t-s)E,$$

$$(T^*\Phi'(\cdot))'(s)+\psi G(a,s)=0.$$

T^* - при существовании функции Грина есть непрерывный в оператор и изменение положения производной $\frac{d}{ds}$ равносильно изменению области определения оператора T^* с последующим изменением формы его представления /в стилтьесовскую/. Нужно либо ограничиваться функциями $K(t,\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ с непрерывными компонентами, либо вводить другие понятия интеграла /интеграл Перрона-Стилтьеса/ [5].

В задаче (6), (7)

$$K(t,s)=\chi(t-s)E+\int_a^t A(\tau)\chi(\tau-s)d\tau,\quad \Phi(s)=R.$$

Система типа (3), (4) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_a^s G(t,\theta)d\theta+A(t)\int_a^s G(t,\theta)d\theta=\chi(s-t)E,$$

$$\int_a^b \Phi(\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\int_a^s G(\tau,\theta)d\theta\Big)d\tau+\psi\int_a^s G(a,\theta)d\theta=0,$$

с последующим

$$G(t,s)+\int_a^t A(\tau)G(\tau,s)d\tau=\chi(t-s)E,$$

$$\int_a^s R\Big(\int_a^b \partial_\tau G(\tau,\theta)\Big)d\theta+\psi\int_a^s G(a,\theta)d\theta=0.$$

и внесение знака производной оправдано.

В работе [6] рассмотрены свойства функции Грина краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения

$$(\mathcal{L}_2 x)(t) \equiv \dot{x}(t) - \int_a^b N(t,s)\dot{x}(s)ds + A(t)x(a) = f(t), \quad (9)$$

где $n \times n$ -матрица $N(t,s)$ обеспечивает полную /слабую полную в случае $p=1$ или $p=\infty$ / непрерывность соответствующего интегрального оператора, с краевыми условиями (2).

Дифференциально-интегральное ядро в этом случае имеет вид

$$K(t,s) = \chi(t-s)E - \int_a^t N(\tau,s)d\tau,$$

а функцию Грина можно представить в виде

$$G(t,s) = \chi(t-s)E + M(t,s),$$

где компоненты $n \times n$ -матрицы $M(t,s)$ абсолютно непрерывны по первому аргументу. Проделав уже известные преобразования, получаем

$$\chi(t-s)E + M(t,s) - \int_a^t N(\tau,s)d\tau - \int_a^b \left(\int_a^t N(\tau,\theta)d\tau\right)\frac{\partial}{\partial\theta}M(\theta,s)d\theta + \int_a^t A(\tau)d\tau M(a,s) = \chi(t-s)E,$$

$$\Phi(s) + \int_a^b \Phi(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}M(\theta,s)d\theta + \Psi M(a,s) = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned} &[\mathcal{L}_2 M(\cdot,s)](t) = N(t,s), \\ &\ell M(\cdot,s) = -\Phi(s). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Тогда имеет место

Т е о р е м а 2. Если матричная функция $M(t,s)$ есть решение краевой задачи (10), то функция Грина краевой задачи (9), (2) имеет вид

$$G(t,s) = \chi(t-s)E + M(t,s).$$

В заключение рассмотрим краевую задачу /задачу Коши/ для уравнения нейтрального типа

$$(\mathcal{L}_3 x)(t) \equiv \dot{x}(t) + B(t)\dot{x}(t-h) + A(t)x(a) = f(t),$$

где $B(t)$ - $n \times n$ -матрица со столбцами из L_∞^n, $y(\xi) = z(s,\xi) = \chi(s-\xi) = 0$ при $\xi \notin [a,b]$.

Уравнение типа (3) имеет вид

$$G'_*(s,t) + B(t)G'_*(s,t-h) = \chi(s-t)E.$$

В соответствии с замечением после теоремы I уравнение (4) выписывать нет необходимости. Перейдя к формуле

$$G'_*(s,t) = -B(t)G'_*(s,t-h) + \chi(s-t)E,$$

можно получить выражение для разрывной в треугольнике функции $G'_*(s,t)$:

$$G'_*(s,t) = \chi(s-t)E - \chi(s-t+h)B(t) + \chi(s-t+2h)B(t)B(t-h) - \ldots$$

А после дифференциально-интегральной операции, и выражение для функции Грина

$$G(t,s) = \chi(t-s)E - \chi(t-s-h)B(s+h) + \chi(t-s-2h)B(s+2h)B(s+h) - \ldots$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быкадоров Ю.А. О дифференциально-интегральном операторе // Дифференц.уравнения. - 1980. - Т.16, № 5. - С.901-907.
2. Азбелев Н.В., Исламов Г.Г. Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц.уравнения. - 1976. - Т.12, № 3. - С.417-427.
3. Рахматуллина Л.Ф. Оператор Грина и регуляризация линейных краевых задач // Дифференц.уравнения. - 1979. -

Т.15, № 3. - С.425-435.
4. Быкадоров Ю.А. Сопряженные дифференциально-интегральные операторы // Линейные функционально-дифференциальные соответствия. -Минск: Изд-во МГПИ, 1984.-С.3-8.
5. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - М.: Наука, 1985. - 224 с.
6. Рахметуллина Л.Ф. К вопросу о свойствах матрицы Грина // Краевые задачи.-Пермь: Изд-во Пермского ун-та, 1983. - С.6-11.

Поступила 23.09.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1987.-С. 91-100.

УДК 517.927

Я.В.Цепитис
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕСУММИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Пусть имеем дифференциальное уравнение

$$x''=f(t,x,x'), \tag{I}$$

$T>0$, либо $T=+\infty$, для любых $\delta\in(0,T)$, $\tau\in(\delta,T)$ $f:[\delta,\tau]\times R^2\to R$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори, а при $t=0$ функция f имеет, быть может, несуммируемую особенность. В настоящей заметке исследуется вопрос о существовании ограниченного вместе с производной решения $x:[0,T)\to R$ уравнения (I), удовлетворяющего при некотором $c\in R$ условию

$$x'(0)=c\,x(0), \tag{2}$$

тем самым обобщая результаты нашей работы [2], в которой предполагалось $c=0$. Примером применения полученных результатов укажем задачу возникшую в теории химического реактора (см. [3]) для уравнения вида

$$(x'-cx)'=f(t,x,x'),$$

в которой одно из краевых условий является (2).

Отметим, что под решением уравнения (I) на $(0,T)$

будем понимать функцию $z:(0,T)\to R$ с абсолютно непрерывной на $(0,T)$ первой производной, которая почти всюду на $(0,T)$ удовлетворяет уравнению (I). Относительно решения $x:[0,T)\to R$ задачи (I), (2) будет предполагаться непрерывная дифференцируемость на $[0,T)$ и то, что сужение x на $(0,T)$ является решением уравнения (I).

В дальнейшем предположим существование функций $\alpha,\beta:(0,T)\to R$ такие, что

$$\alpha(t)\leq\beta(t),\quad t\in(0,T) \tag{3}$$

и обозначим

$$\alpha_0=\overline{\lim_{t\to 0+}}\,\alpha(t),\quad \beta_0=\underline{\lim_{t\to 0+}}\,\beta(t).$$

Определение I. Будем говорить, что выполняется условие (ε,γ), если существует число $\sigma\in(0,T)$ и непрерывные функции $\varepsilon:(0,\sigma]\to[0,+\infty)$, $\gamma:(0,\sigma]\to R$ такие, что

$$\lim_{t\to 0+}\varepsilon(t)=0,\quad \lim_{t\to 0+}\gamma(t)=c \tag{4}$$

и любых $t_0\in(0,\sigma)$, $t_1\in(t_0,\sigma]$ и решения $x:[t_0,t_1]\to R$ уравнения (I) удовлетворяющего на области определения оценке

$$\alpha(t)\leq x(t)\leq\beta(t) \tag{5}$$

из неравенства

$$|x'(t_0)-\gamma(t_0)x(t_0)|\leq\varepsilon(t_0)$$

следует выполнение для $t\in(t_0,t_1]$ неравенства

$$|x'(t)-\gamma(t)x(t)|\leq\varepsilon(t). \tag{6}$$

Лемма I. Пусть $a \in R$, выполняется условие (ε, γ) и для некоторого $s_1 \in (0, \sigma]$

$$\alpha(t) < a < \beta(t), \quad t \in (0, s_1]. \tag{7}$$

Тогда существует $s \in (0, T)$ такое, что уравнение (I) имеет решение $x : [0, s] \to R$, удовлетворяющее условиям

$$x(0) = a, \qquad x'(0) = ac,$$

при этом для этого решения на области определения справедливы оценки (5),(6).

Доказательство. Выберем последовательности $k \to s_k$, $k \to t_k$ чисел такие, что

$$s_1 > s_2 > \ldots > s_k > \ldots, \ \lim_{k \to +\infty} s_k = 0, \ t_k \in (s_k, \sigma]$$

и решения уравнения (I) $x_k : [s_k, t_k] \to R$, удовлетворяющие условиям

$$x_k(s_k) = a, \qquad x'_k(s_k) = a\gamma(s_k),$$
$$\alpha(t) < x_k(t) < \beta(t), \quad t \in [s_k, t_k).$$

Имеем $x'_k(s_k) = \gamma(s_k)\, x_k(s_k)$, следовательно согласно условию (ε, γ)

$$|x'_k(t) - \gamma(t) x_k(t)| \leq \varepsilon(t), \quad t \in [s_k, t_k] \tag{8}$$

Если t_k выбрано максимально правым, выполняется по крайней мере одно из следующих соотношений

$$x_k(t_k) \leq \alpha(t_k), \ x_k(t_k) \geq \beta(t_k), \ t_k = \sigma,$$

положим $s = \inf\limits_k \{t_k\}$. В силу соотношений (7), (8) следует, что $s \in (0, \sigma]$ и последовательности функций $k \to x_k$, $k \to x_k$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Следовательно, из последовательности решений $k \to x_k$ можно выделить для любого $\delta \in (0, s]$ на $[\delta, s]$ сходящуюся к решению уравнения подпоследовательность $n \to k_n \to x_{k_n}$.

функция $x:(0,s]\to R$ определенная следующим образом $t\to\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}(t)$

обеспечивает утверждение леммы. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что выполняется условие А, если функции α,β являются соответственно для любых $\delta\in(0,T)$, $\tau\in(\delta,T)$ обобщенными нижней и верхней функциями (определение и соответствующие свойства этих функций см. в [I] уравнения (I) на $[\delta,\tau]$.

В дальнейшем, если $u:(0,T)\to R$, то $D_r u(\tau)$ обозначит правую производную функции u в точке Напомним, что если является обобщенной нижней (верхней) функцией, то правая производная всегда существует.

Л е м м а 2. Пусть выполняются условия А, (ε,γ) и для некоторого $t_0\in(0,\sigma)$ неравенство

$$D_r\alpha(t_0)-\gamma(t_0)\alpha(t_0)\geqslant-\varepsilon(t_0)$$

$$(D_r\beta(t_0)-\gamma(t_0)\beta(t_0)\leqslant\varepsilon(t_0)),$$

тогда для $t\in(t_0,\sigma]$ имеем

$$D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t)\geqslant-\varepsilon(t),$$

$$(D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t)\leqslant\varepsilon(t)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем лишь соответствующее свойство функции α, так как для функции β доказательство аналогично. Пусть утверждение леммы неверно, тогда найдется $t_1\in(t_0,\sigma]$ такое, что

$$D_r\alpha(t_1)-\gamma(t_1)\alpha(t_1)<-\varepsilon(t_1).$$

Согласно свойству обобщенной нижней функции найдется обобщенное решение (см. [I]) $x:[t_0,t_1]\to R$ уравнения (I), такое что $x(t_0)=\alpha(t_0)$, $x(t_1)=\alpha(t_1)$, выполняется оценка (5), для некоторого $t_2\in[t_0,t_1)$

$$|x'(t_2)-\gamma(t_2)x(t_2)| \leqslant \varepsilon(t_2)$$

и $x'(t_1)-\gamma(t_1)x(t_1) < -\varepsilon(t_1)$, что противоречит условию (ε,γ). Лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть $-\infty \neq \alpha_0 = \beta_0 \neq +\infty$ выполняются условия А, (ε,γ) и

$$\underline{\lim}_{t\to 0+} (D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t)) \geqslant 0 \geqslant \overline{\lim}_{t\to 0+} (D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t)), \tag{9}$$

тогда

$$\lim_{t\to 0+} (D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t)) = 0 = \lim_{t\to 0+} (D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t)) \tag{10}$$

и правые производные функций α, β имеют конечные пределы при $t\to 0+$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для некоторого $s\in(0,T)$ $\alpha(t)=\beta(t)$, $t\in(0,s]$, то выполнение утверждения леммы очевидно. Пусть это не так, тогда в силу леммы 2 для некоторого $s\in(0,\ \ )$ при $t\in(0,s]$ имеет место один из четырех случаев:

1) $D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t) < -\varepsilon(t)$,
$D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t) > \varepsilon(t)$,

2) $D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t) \geqslant -\varepsilon(t)$,
$D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t) \leqslant \varepsilon(t)$,

3) $D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t) < -\varepsilon(t)$,
$D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t) \leqslant \varepsilon(t)$,

4) $D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t) \geqslant -\varepsilon(t)$,
$D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t) > \varepsilon(t)$.

В первом из этих случаев имеем

$$\overline{\lim_{t\to 0+}}\,(D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t))\le 0, \tag{11}$$

$$\underline{\lim_{t\to 0+}}\,(D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t))\ge 0, \tag{12}$$

во втором случае для $t\in(0,s]$

$$D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t)-(D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t))\le 2\varepsilon(t),$$

в третьем случае имеем (11) и для $t\in(0,s]$

$$D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t)+D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t)<0,$$

наконец, в четвертом случае имеем (12) и для $t\in(0,s]$

$$D_r\alpha(t)-\gamma(t)\alpha(t)+D_r\beta(t)-\gamma(t)\beta(t)>0.$$

Из полученных соотношений, (3) и (9) следует справедливость равенств (10). Последнее утверждение леммы получаем из (10), учитывая соотношение (4). Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть выполняются условия А, (ε,γ) и имеет место соотношения (9). Тогда найдутся функции $\bar\alpha,\bar\beta:[0,T)\to R$, имеющие конечные правые производные при $t=0$ такие, что $\bar\alpha(0)=\bar\beta(0)$,

$$\lim_{t\to 0+}(D_r\bar\alpha(t)-\gamma(t)\bar\alpha(t))=0=$$

$$=\lim_{t\to 0+}(D_r\bar\beta(t)-\gamma(t)\bar\beta(t)),$$

$$\alpha(t)\le\bar\alpha(t)\le\bar\beta(t)\le\beta(t),\quad t\in(0,T) \tag{13}$$

и являющиеся для любых $\delta\in(0,T)$, $\tau\in(\delta,T)$ соответственно обобщенными нижней и верхней функциями уравнения (1) на $[\delta,\tau]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $-\infty \neq \alpha_0 = \beta_0 \neq +\infty$, то утверждение леммы сразу следует из леммы 3. Случаи $-\infty = \alpha_0 = \beta_0$, $+\infty = \alpha_0 = \beta_0$ несовместимы с соотношениями (4),(9). Допустим, что выполняется $\alpha_0 < \beta_0$. Построим последовательности функций $i \to \alpha_i$, $i \to \beta_i$, $i = 1,2,\ldots$ следующим образом. Пусть

$$\alpha_1(t) = \alpha(t), \quad \beta_1(t) = \beta(t), \quad t \in (0,T),$$

и при $i = 1,2,\ldots,n$ уже определены функции α_i, $\beta_i : (0,T) \to R$, которые соответственно являются обобщенными нижними и верхними функциями уравнения (I) на $[\delta,\tau]$ при любых $\delta \in (0,T)$, $\tau \in (\delta,T)$,

$$a_i = 2^{-1}\Big(\overline{\lim_{t\to 0+}}\, \alpha_i(t) + \underline{\lim_{t\to 0+}}\, \beta_i(t)\Big).$$

Согласно свойствам обобщенных нижних и верхних функций и лемме I существуют $t_i \in (0,\sigma]$ и решения $x_i : [0, t_i] \to R$ уравнения (I), удовлетворяющие условиям

$$x_i(0) = a_i, \quad x_i'(0) = a_i c,$$

и для $t \in (0, t_i]$ оценкам

$$\begin{aligned} &\alpha_i(t) \le x_i(t) \le \beta_i(t), \\ &|x_i'(t) - \gamma(t) x_i(t)| \le \varepsilon(t). \end{aligned} \tag{I4}$$

Пусть, наконец, $s_i \in [t_i, T)$ такие, что интервал $(0, s_i]$ максимальный, на котором справедлива оценка (I4). Тогда, если $s_n < T$ и $x_n(s_n) = \alpha_n(s_n)$, либо $\lim_{t\to s_n} x_n'(t) = -\infty$, положим

$$\alpha_{n+1}(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \in (0, s_n), \\ \alpha_n(t), & t \in [s_n, T), \end{cases}$$

$$\beta_{n+1}(t) = \beta_n(t), \quad t \in (0;T),$$

если $s_n < T$ и $x_n(s_n) = \beta_n(s_n)$, либо $\lim\limits_{t \to s_n -} x_n'(t) = +\infty$,
положим

$$\alpha_{n+1}(t) = \alpha_n(t), \qquad t \in (0,T),$$

$$\beta_{n+1}(t) = \begin{cases} x_n(t), & t \in (0, s_n), \\ \beta_n(t), & t \in [s_n, T). \end{cases}$$

Если $s_n = T$, то заменим одну из функций α_n, β_n на x_n произвольным образом. Заметим, что построенные нами функции α_{n+1}, β_{n+1} также для любых $\delta \in (0,T)$ являются обобщенными нижней и верхней функциями уравнения (I) на $[\delta, \tau]$.

Функции $\bar{\alpha}, \bar{\beta}: (0,T) \to R$ определим следующим образом

$$\bar{\alpha}: t \to \sup\{\alpha_i(t): i \in \{1,2,\dots\}\},$$
$$\bar{\beta}: t \to \inf\{\beta_i(t): i \in \{1,2,\dots\}\}.$$

Эти функции также являются для любых $\delta \in (0,T)$, $\tau \in (\delta, T)$ обобщенными нижней и верхней функциями уравнения (I) на $[\delta, \tau]$, кроме того по построению выполняются (I3),

$$-\infty \neq \overline{\lim_{t \to 0+}} \bar{\alpha}(t) = \underline{\lim_{t \to 0+}} \bar{\beta}(t) \neq +\infty,$$

$$\underline{\lim_{t \to 0+}} (D_r \bar{\alpha}(t) - \gamma(t)\bar{\alpha}(t)) \geq 0 \geq$$
$$\geq \overline{\lim_{t \to 0+}} (D_r \bar{\beta}(t) - \gamma(t)\bar{\beta}(t)).$$

Следовательно, применением леммы 3 доказательство завершается.

О п р е д е л е н и е 3. Будем говорить, что выполняется условие Б, если выполняется условие (ε,γ) и для любых $t_1 \in (\delta,T)$ и решения $x:(0,t_1)\to R$ уравнения (I) удовлетворяющего оценке (5) и равенству

$$\lim_{t\to 0+}(x'(t)-\gamma(t)x(t))=0$$

имеет место

$$\sup\{|x'(t)|: t\in(0,t_1)\}<+\infty .$$

Т е о р е м а. Пусть выполняются условия А,Б и соотношения (9), тогда уравнение (I) имеет решение $x:[0,T)\to R$, которое удовлетворяет условию (2) и оценке (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 4 и свойству обобщенных нижних и верхних функций существует обобщенное решение $x:[0,T)\to R$ уравнения (I), удовлетворяющее оценке (5) и в силу (4) условию (2). Согласно условию Б x является и решением в обычном смысле. Теорема доказана.

Наконец отметим, что пользуясь методикой изложенной в работе [2] нетрудно убедится в выполнении условия (ε,γ) для широкого класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

В частности, если $\gamma:(0,T)\to R$ абсолютно непрерывная функция удовлетворяющее (4) и для правой части уравнения

$$(x'-\gamma(t)x)'=f(t,x,x') \qquad (I5)$$

имеет место оценка

$$f(t,x,y)\,\mathrm{sign}(y-\gamma(t)x)\le$$

$$\le -g(t)|y-\gamma(t)x| + h(t,x,y),$$

$$t\in I,\quad x\in[\alpha(t),\beta(t)],\ y\in R,$$

где для любых $\delta \in (0,T)$, $\tau \in (\delta, T)$
$h: [0,\tau] \times R^2 \to R$ удовлетворяет условию Каратеодори, $g: [\delta, \tau] \to R$ суммируема и для некоторого $k \in [0,1)$ отрицательная часть функции $t \to (g(t) + \frac{k}{t})$ суммируема на $[0,\tau]$, тогда для уравнения (I5) выполняется условие (ε, γ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. - 1982. - Т.18, № 8, С.1323-1330.
2. Цепитис Я.В. Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с несуммируемой особенностью // Дифференц.уравнения. - Т.19, С.2071-2075.
3. Williams L.R., Legget R.W. Unique and multiple solutions of a family of a differential equations modelling chemical reactions // SIAM Journ. Math Anal. 1982. - Vol.13, N 1, - P. 122-133.

Поступила 24.09.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.-С.101-110

УДК 517.927

С.А.Беспалова
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} x'&=f(t,x,y,z)\\ y'&=\varphi(t,x,y,z)\\ z'&=\psi(t,x,y,z)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ y(\tau)=y_\tau, \tag{2}$$

где $f,\varphi,\psi\in C(I\times R^3)$, $t\in I=[0,\tau]$.

Теорема. Пусть существуют функции $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ $(i=1,2)$ такие, что:

$$\alpha_2'(t)\geq f(t,\alpha_2(t),\delta(\beta_1,y,\beta_2),\delta(-N,z,N)), \tag{3}$$

$$\alpha_1'(t)\leq f(t,\alpha_1(t),\delta(\beta_1,y,\beta_2),\delta(-N,z,N)), \tag{4}$$

$$\forall t\in I,\ \alpha_1(0)\leq x_0\leq\alpha_2(0);$$

$$\beta_2'(t)=\varphi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\beta_2(t),\gamma_2(t)), \tag{5}$$

$$\beta_1'(t)=\varphi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\beta_1(t),\gamma_1(t)), \tag{6}$$

$$\forall t\in I,\ \beta_1(0)\leq y_0\leq\beta_2(0),\ \beta_1(\tau)\leq y_\tau\leq\beta_2(\tau);$$

$$\gamma_2'(t)\leq\psi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\beta_2(t),\gamma_2(t)), \tag{7}$$

$$\gamma_1'(t) \geq \psi(t, \delta(\alpha_1, x, \alpha_2), \beta_1(t), \gamma_1(t)), \quad (8)$$
$$\gamma_1(t) \leq \gamma_2(t), \quad \forall t \in I.$$

Предложим далее, что φ - монотонно возрастающая функция по z и для $\alpha_1(t) \leq x \leq \alpha_2(t)$, $\beta_1(t) \leq y \leq \beta_2(t)$

$$\varphi(t,x,y,z) \to \pm\infty \quad \text{при} \quad z \to \pm\infty. \quad (9)$$

Предположим также, что существуют числа ,
такие, что

$$\begin{gathered} |\varphi(t,x,y,z)| \geq \varphi_0(|z|) > 0, \\ |\psi(t,x,y,z)| \leq \psi_0(|z|) \end{gathered} \quad (10)$$

при $\alpha_1(t) \leq x \leq \alpha_2(t)$, $\beta_1(t) \leq y \leq \beta_2(t)$, $|z| > \lambda$;

$$\int_{z_0}^{N} \frac{\varphi_0(|z|)}{\psi_0(|z|)} dz > \max_{t \in I} \beta_2(t) - \min_{t \in I} \beta_1(t) \quad (11)$$

(во всяком случае $N > \max_{t \in I}(|\gamma_1|, |\gamma_2|)$,

где $z_0 = \max(\lambda, z_*)$ и $z_* > 0$ таково, что

$$\left| \frac{y_\tau - y_0}{\tau} - \varphi(t,x,y,z) \right| > 0 \quad (12)$$

при $|z| > z_*$, $x \in [\alpha_1(t), \alpha_2(t)]$, $y \in [\beta_1(t), \beta_2(t)]$.

Тогда решение задачи (1),(2) существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(t, \delta(\alpha_1, x, \alpha_2), \delta(\beta_1, y, \beta_2), \delta(-N, z, N)) \\ y' &= z - \delta(-N, z, N) + \varphi(t, \delta(\alpha_1, x, \alpha_2), \delta(\beta_1, y, \beta_2), \delta(-N, z, N)) \\ z' &= \psi(t, \delta(\alpha_1, x, \alpha_2), \delta(\beta_1, y, \beta_2), \delta(-N, z, N)) + y - \delta(\beta_1, y, \beta_2) \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Соответствующая ей однородная система

$$\left.\begin{array}{l} x'=0 \\ y'=z \\ z'=y \end{array}\right\} \qquad (14)$$

с однородными краевыми условиями

$$x(0)=y(0)=y(\tau)=0 \qquad (15)$$

имеет только нулевое решение $x(t)=y(t)=z(t)\equiv 0$. Следовательно, краевая задача (13), (2) имеет решение, [1]. Обозначим его через $x(t), y(t)$, $z(t)$, $t\in I$. Легко показать, что

$$\alpha_1(t)\leq x(t)\leq \alpha_2(t) \quad \forall t\in I. \qquad (16)$$

Докажем правую часть этого неравенства (левая доказывается аналогично). С этой целью введем функцию $u(t)=x(t)-\alpha_2(t)$, $t\in I$. Утверждается, что $u(t)\leq 0 \ \forall t\in I$. Предположим противное, т.е. пусть для некоторого $u(t_1)>0$. Тогда существует такое значение $t=t_0<t_1$, что $u(t_0)>0$ и $u'(t_0)>0$. Из (3) следует, что

$$\alpha_2'(t)=f(t,\alpha_2(t),\delta(\beta_1,y,\beta_2),\delta(-N,z,N))+\varepsilon(t),\ \varepsilon(t)\geq 0\ \forall t\in I.$$

В частности и для $t=t_0$. Для этого значения t из первого уравнения системы (3) имеем

$$x'(t_0)=f(t_0,\alpha_2(t_0),\delta(\beta_1,y(t_0),\beta_2),\ \delta(-N,z(t_0),N)).$$

Вычтем теперь из последнего равенства предпоследнее, заменив в нем t на t_0:

$$x'(t_0)-\alpha_2'(t_0)=u'(t_0)=$$
$$=f(t_0,\alpha_2(t_0),\ \delta(\beta_1(t_0),y(t_0),\beta_2(t_0)),\ \delta(-N,z(t_0),N))-$$
$$-f(t_0,\alpha_2(t_0),\delta(\beta_1(t_0),y(t_0),\beta_2(t_0)),\ \delta(-N,z(t_0),N))-$$
$$-\varepsilon(t_0)\leq 0.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения, что

$$x(t)\leq \alpha_2(t),\quad t\in I.$$

Теперь докажем неравенство

$$\beta_1(t)\leq y(t)\leq \beta_2(t),\quad t\in I. \tag{17}$$

Как и в случае доказательства неравенств (16), введем функцию $u(t)=y(t)-\beta_2(t),\ t\in I$ Докажем правую часть неравенства (17). Утверждается, что $u(t)\leq 0\ \forall t\in I$. Предположим противное. Тогда, учитывая краевые условия (2), делаем вывод о существовании таких значений $t_i\in I$, $i=0,1,2,\ t_0<t_1<t_2$, что

$$\begin{aligned} &u(t_0)\geq 0,\quad u'(t_0)>0,\\ &u(t_1)>0,\quad u'(t_1)=0,\\ &u(t_2)\geq 0,\quad u'(t_2)<0, \end{aligned} \tag{18}$$

и пусть эти точки являются ближайшими справа к точке $t=0$ из множества всех точек с указанным свойством.

Из второго уравнения системы (13) и (5) имеем

$$u'(t)=z-\delta(-N,z,N)+\varphi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\delta(\beta_1,y,\beta_2),$$
$$\delta(-N,z,N))-\varphi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\beta_2(t),\gamma_2(t)),\ t\in I. \tag{19}$$

Из (18),(19) следует, что $z(t_0)>\gamma_2(t_0)$ и $z(t_1)=\gamma_2(t_1)$. Обозначим $v(t)=z(t)-\gamma_2(t)$, $t\in[t_0,t_1]$. Тогда $v'(t_1)\leq 0$. Из третьего уравнения системы (13) и неравенства (7) получаем

$$v'(t)=\psi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\delta(\beta_1,y,\beta_2),\delta(-N,z,N))+$$
$$+y(t)-\delta(\beta_1,y,\beta_2)-\psi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\beta_2(t),\gamma_2(t))+\varepsilon_1(t),$$
$$\varepsilon_1(t)\geq 0,\ t\in I,$$

откуда для $t=t_1$ имеем

$$v'(t_1)=\psi(t_1,\delta(\alpha_1(t_1),x(t_1),\alpha_2(t_1)),\beta_2(t_1),\gamma_2(t_1))+$$

$$+y(t_1)-\beta_2(t_1)-\psi(t_1,\delta(\alpha_1(t_1),x(t_1),\alpha_2(t_1)),$$
$$\beta_2(t_1),\gamma_2(t_1))+\varepsilon(t_1)=y(t_1)-\beta_2(t_1)+\varepsilon(t_1)>0.$$

Пришли к противоречию. Следовательно, $y(t)\leq\beta_2(t)\ \forall t\in I$. Аналогично доказывается левая часть неравенства (I7).

Теперь докажем, что $|z(t)|\leq N,\ t\in I$. Для этого достаточно показать справедливость этой оценки в одну сторону. Докажем, что $z(t)<N\ \forall t\in I$. Предположим противное. Пусть найдется точка $t=t_1\in I$, где $z(t_1)=N$. Так как $y(0)=y_0$, $y(\tau)=y_\tau$, то необходимо существует точка $t=t_*\in I$, где

$$y'(t_*)=\frac{y_\tau-y_0}{\tau}. \tag{20}$$

Определим теперь z_* согласно (I2) и возьмем $z_0=max(\lambda,z_*)$. Очевидно, что $z(t_*)\leq z_*$. Соответствующее значение t, при котором $z(t)=z_0\geq z_*$, обозначим через t_0. Тогда для $z\in[z_0,N]$, $t\in[t_0,t_1]$ из второго и третьего уравнений системы (I3) с учетом доказанных оценок для $y(t)$, $x(t)$ получаем

$$y'(t)=\varphi(t,x(t),y(t),z(t)),$$
$$z'(t)=\psi(t,x(t),y(t),z(t)),$$

откуда, принимая во внимание (I0), имеем

$$\frac{dz}{dy}\leq\frac{\Psi_0(z)}{\varphi_0(z)}.$$

Теперь имеем

$$\int_{z_0}^{N}\frac{\varphi_0(z)}{\Psi_0(z)}\,dz\leq y(t_1)-y(t_0)\leq\beta_2(t_1)-\beta_1(t_0)\leq$$

$$\leq \max_{t\in I} \beta_2(t) - \min_{t\in I} \beta_1(t)$$

Так как это противоречит выбору числа N, то оценка $|z(t)|\leq N$, $t\in I$ доказана.

Следовательно, решение задачи (13),(2) является решением задачи (1),(2).

Замечание. Равенства (5),(6) накладывают сильные ограничения на зависимость функции φ от x. В то же время, если определять β_1, β_2 с помощью неравенств типа $\beta_2' \geq \varphi$, $\beta_1' \leq \varphi$ или $\beta_2' \geq \varphi$, $\beta_1' \geq \varphi$ и аналогичных им, то полученные при этом условия уже не будут достаточными при сохранении остальных условий теоремы. Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. Пусть β_1 и β_2 определяются с помощью неравенств:

$$\beta_2'(t)\leq \varphi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\beta_2(t),\gamma_2(t)), \quad (5')$$

$$\beta_1'(t)\leq \varphi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\beta_1(t),\gamma_1(t)). \quad (6')$$

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{aligned} x'&=0\\ y'&=z\\ z'&=z \end{aligned}\right\}, \quad x(0)=y(0)=y(\tau)=0,\ \tau>0. \quad (21)$$

Очевидно, $y(t)\equiv 0$ является единственным решением этой задачи. Вместе с тем, если взять

$$\alpha_1(t)=\alpha_2(t)\equiv 0,$$
$$\beta_1(t)=At-B,\ A,B<0,$$
$$\beta_2(t)=a(t-t_1)(t-t_2),$$
$$a>0,\ 0<t_1<t_2<\tau>0, \quad (22)$$

$$\gamma_1(t) \equiv 0,$$
$$\gamma_2(t) \equiv const > 0, \qquad (22)$$

то всегда можно коэффициенты a , A , B и γ_2 подобрать такими, чтобы выполнялись неравенства (5'),(6'), но при этом не будет существовать решения $y(t)$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = y(\tau) = 0$ и неравенствам

$$\beta_1(t) \leq y(t) \leq \beta_2(t) \quad \forall t \in [0,\tau].$$

В частности, для $a=1$, $t_1=\tau/4$, $t_2=3\tau/4$, $A=B=-1$, $\gamma_2(t) \equiv 2\tau$.

Пример 2. Сказанное относительно случая (5'), (6') справедливо и тогда, когда β_1 , β_2 определяются неравенствами.

$$\beta_2'(t) \leq \varphi(t, \delta(\alpha_1, x, \alpha_2), \beta_2(t), \gamma_2(t)), \qquad (5'')$$

$$\beta_1'(t) \geq \varphi(t, \delta(\alpha_1, x, \alpha_2), \beta_1(t), \gamma_1(t)) \qquad (6'')$$

с той лишь разницей, что будем в (22) полагать $A=1$, $B=-1$.

Пример 3. Если β_1 и β_2 определить неравенствами

$$\beta_2'(t) \geq \varphi(t, \delta(\alpha_1, x, \alpha_2), \beta_2(t), \gamma_2(t)), \qquad (5''')$$

$$\beta_1'(t) \leq \varphi(t, \delta(\alpha_1, x, \alpha_2), \beta_1(t), \gamma_1(t)), \qquad (6''')$$

то легко показать, что для функций:

$$\alpha_1(t) = \alpha_2(t) \equiv 0,$$
$$\beta_1(t) = a(t-t_1)(t-t_2), \quad a>0, \; 0<t_1<t_2<\tau,$$
$$\beta_2(t) = At+B, \quad A,B>0,$$
$$\gamma_1(t) = c_1 e^t,$$

$\gamma_2(t)=c_2e^t, \quad c_1>c_2$

коэффициенты a, A, B, c_1, c_2 можно подобрать такими, что неравенства (5'''), (6''') будут выполняться, а решения $y(t)$ краевой задачи (21), удовлетворяющего краевым условиям $y(0)=y(\tau)=0$ и неравенствам

$$\beta_1(t)\leq y(t)\leq \beta_2(t) \quad \forall t\in[0,\tau]$$

не будет существовать. Достаточно, например, взять $a=-1$, $A>c_2e^{\tau}$ ($c_2>0$ - произвольно), $c_1>\tau$, $B>0$ - произвольно.

Пример 4. Пусть β_1 и β_2 определяются неравенствами

$$\beta_2'(t)\geq\varphi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\beta_2(t),\gamma_2(t)), \quad (5^{IV})$$

$$\beta_1'(t)\geq\varphi(t,\delta(\alpha_1,x,\alpha_2),\beta_1(t),\gamma_1(t) \quad (6^{IV})$$

Тогда при

$$\alpha_1(t)=\alpha_2(t)\equiv 0,$$
$$\beta_1(t)=a(t-t_1)(t-t_2), \quad a<0, 0<t_1<t_2<\tau>0,$$
$$\beta_2(t)=At+B, \quad A,B>0$$
$$\gamma_1(t)\equiv const>0,$$
$$\gamma_2(t)\equiv 0,$$

где $a=-1, t_1=\tau/4, t_2=3\tau/4, A>\tau/8, B>0$ - произвольно, $\gamma_1(t)\equiv-2\tau$, как и в предыдущих случаях, неравенства (5^{IV}), (6^{IV}) выполняются, а решения $y(t)$ краевой задачи (21) с указанным свойством нет.

Пример 5. Рассмотрим краевую задачу

$$\left.\begin{array}{l} x'=0 \\ y'=t(1+y^2)+z \\ z'=z \end{array}\right\}, \quad t\in I=[-\sqrt{2\pi},\sqrt{2\pi}] \quad (23)$$

$$x(-\sqrt{2\pi}) = 0, \quad y(-\sqrt{2\pi}) = y(\sqrt{2\pi}) = 0. \tag{24}$$

Если взять

$$\alpha_1(t) = \alpha_2(t) \equiv 0, \quad t \in I,$$
$$\beta_2(t) \equiv \sqrt{2\pi},$$
$$\beta_1(t) \equiv -\sqrt{2\pi},$$
$$\gamma_2(t) \equiv (1+3\pi)\sqrt{2\pi},$$
$$\gamma_1(t) \equiv (1+2\pi)\sqrt{2\pi},$$

то легко видеть, что все условия теоремы выполняются за исключением условий на функцию φ, для которой имеют место неравенства

$$\beta_2'(t) < t(1+\beta_2^2(t)) + \gamma_2(t)$$
$$\beta_1'(t) < t(1+\beta_1^2(t)) + \gamma_1(t).$$

В этом случае можно показать, что краевая задача (23), (24) вообще не имеет решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. -189 с.
2. Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я. Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1973. -135 с.

3. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Тбилиси: ТГУ, I975. -352 с.
4. Лепин Л.А. Обобщенные нижние ти верхние функции и их свойства // Латв.мат.ежегодник - Рига: Зинатне, I980, - Вып.24. - С.II3-I23.

Поступила 25.09.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига; ЛГУ им. П. Стучки, 1987.-С. III-II4.

УДК 517.927

Ф.Ж.Садырбаев
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Рассмотрим задачу

$$x''=f(t,x,x'), \tag{1}$$

$$x'(0)=x'(1)=0, \tag{2}$$

где $f\in C^1([0,1]\times R^2; R)$.

Каждому решению ξ данной задачи можно поставить в соответствие задачу Коши для уравнения в вариациях

$$h''=f_x(t,\xi,\xi')h+f_{x'}(t,\xi,\xi')h', \tag{3}$$

$$h(0)=1,\ \ h'(0)=0. \tag{4}$$

Определение. Решение ξ задачи (I),(2) будем называть решением m-го порядка, если решение задачи (3),(4) имеет ровно $m-1$ нуль в $[0,1]$ и $h(1)\,h'(1)<0$.

Теорема. Пусть

I) любое решение (I) с нулевой начальной производной продолжимо на $[0,1]$;

2) существуют решения ξ и η задачи (I),(2) такие, что $\xi(t)\neq\eta(t)\ \ \forall t\in[0,1]$ и ξ является решением m-го порядка.

Тогда существует еще не менее $m-1$ решения рас -

сматриваемой задачи.

Доказательство. Рассмотрим однопараметрическое семейство S решений уравнения (I), удовлетворяющих начальным условиям $x(0)=\mu$, $x'(0)=0$, где параметр μ изменяется от $\xi(0)$ до $\eta(0)$ (не ограничивая общности, считаем, что $\xi(0)<\eta(0)$). Равенства быть не может вследствие однозначной разрешимости задачи Коши.

Вследствие условия I это семейство компактно в $C'([0,1],R)$ (I , теорема I5.I). Отсюда вытекает, что любые две точки пересечения графиков любых двух решений из S лежат не ближе, чем на расстоянии δ друг от друга, где δ зависит только от S, но не от выбора решений. Пусть y_1, y_2 - два таких решения. Их разность $y=y_1-y_2$ удовлетворяет некоторому линейному уравнению $y''=g_1(t)y+g_2(t)y'$, где непрерывные функции g_1 и g_2 ограничены по модулю величинами, зависящими лишь от S. Таким образом ([2], с. I22), число δ с указанным свойство существует.

Для значений параметра μ, близких к $\xi(0)$, графики соответствующих решений x_μ пересекают кривую $(t,\xi(t))$ $m-1$ раз, причем $(x_\mu(1)-\xi(1))\times x'_\mu(1)<0$.

Пусть $t_k(\mu)$ - k-ая точка пересечения графиков решений x_μ и ξ, $t_0=0$. Значения $t_k(\mu)$ зависят от μ непрерывным образом вследствие непрерывной зависимости решений от начальных данных.

Пусть $\mu_k=\sup\{\mu: t_k(\mu)<1\}$.

Значения μ_k определены, т.к. η не имеет пересечений с ξ в [0,I], и образуют монотонную последовательность, $t_k(\mu_k)=1$. Знаки производных $x'_\mu(t_k)$ чередуются при изменении k и фиксированном μ. На каждом из интервалов $(\xi(0),\mu_{m-1}),(\mu_{m-1},\mu_{m-2}),\dots(\mu_2,\mu_1)$ производная $x'_\mu(1)$ меняет знак и, следовательно, обращается в нуль для некоторого μ'_k. Каждому такому значению μ соответствует решение задачи (I),(2).

Легко заметить, что в условиях теоремы достаточно потребовать, чтобы были продолжимы на интервал 0,I лишь те решения x с нулевой начальной производной, для которых $\xi(0)\le x(0)\le\eta(0)$. С учетом данного замечания сформулируем

Следствие. Пусть

I) существуют функции $\alpha,\beta\in C^2([0,1],R)$ такие, что

$$\alpha''\geq f(t,\alpha,\alpha'),\quad \beta''\leq f(t,\beta,\beta'),\quad \alpha<\beta$$

на интервале $[0,1]$,

$$\alpha'(0)\geq 0\geq\beta'(0),\quad \alpha'(1)\leq 0\leq\beta'(1);$$

2) решения уравнения (I) с начальными данными $x'(0)=0, x(0)\in[\alpha(0),\beta(0)]$ продолжимы на интервал $[0,1]$;

3) существует решение m-го порядка ξ задачи (I), (2), причем $\alpha(t)<\xi(t)<\beta(t)\quad \forall t\in[0,1]$.

Тогда существует еще не менее $2m$ решений задачи (I), (2).

Доказательство. Функции α,β, описанные в условии (I), принято называть соответственно нижней и верхней функциями задачи (I), (2). Любое решение этой задачи, в частности ξ, является одновременно и нижней функцией. Для пары функций (β,ξ), где ξ играет роль нижней функции, выполняются условия теоремы 4.2 из [3], в которой утверждается, что существует решение η_1 краевой задачи (I), (2) такое, что

$$\xi(t)\leq\eta_1(t)\leq\beta(t)\qquad\forall t\in[0,1]$$

и решение h линейной задачи Коши

$$h''=f_x(t,\eta_1,\eta_1')h+f_{x'}(t,\eta_1,\eta_1')h',$$

$$h(0)=1,\quad h'(0)=0$$

положительно в $[0,1]$.

Решение η_1 может совпадать с β, но не совпадает с ξ, т.к. решение h соответствующей линейной задачи Коши (3), (4) обращается в нуль в рассматриваемом интервале. Более того, в силу однозначной разрешимости задачи Коши для (I), $\eta_1(t)$ и $\xi(t)$ не могут быть равны ни в одной точке интервала $[0,1]$. Применяя ранее доказанную теорему к паре (η_1,ξ) убеждаемся в существовании не менее $m-1$ решений задачи (I), (2), начальные значения которых лежат в интревале $(\xi(0),\eta_1(0))$. Таким образом, парой (ξ,β) определяется не менее решений задачи (I), (2), отличных от ξ.

Проводя аналогичные рассмотрения для пары $(\alpha,\xi$, где ξ играет роль верхней функции, убеждаемся в справедливости требуемого утверждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости.- М.: Физматгиз, 1963.- 246 с.
2. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. - М.: ИЛ, 1962.- 352 с.
3. Knohloch H. Second Order Differential Jnequalities and a Nonlihear Boundary Value Problem// J. Diff. Equations.- 1969.- Vol.5, N 1.- P.55-71.

Поступила 29.09.86.

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1987. - С. 115-122

УДК 517.925

А.Я. Каневский
Институт физики АН ЛатвССР

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ, МОНОТОННЫЕ ВДОЛЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ

1. Настоящая статья продолжает исследования начатые в [1].

1.1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = P(x,t), \tag{1}$$

$x \in R^n$, $P: U(0,H) \times J \to R^n$, $P \in C$. Здесь $J =]0, +\infty[$, а $U(0,H)$ означает H-окрестность точки $x = 0$ в R^n. Решение уравнения (1) обозначается через $x(\cdot)$, а множество непрерывных функций с кусочно-непрерывными производными $y(\cdot): [\lambda_y, +\infty[\to R^n$ через C', график функции $y(\cdot)$ - через Γ_y.

1.2. О п р е д е л е н и е. Функцию $\psi: Cl\,U(0,s) \times J \to R^+$, $s < H$ назовем допустимой, если она непрерывна и положительна для $0 < |x| < s$, а для $|x| = 0$ и $|x| = s$ $\psi(x,t) = 0$

Для допустимой функции ψ введем семейство $I(\psi) \subset C'$. Считается, что $y(\cdot) \in I(\psi)$, если из $|y(t')| = s$ или $|y(t')| = 0$ для некоторого $t' \in J$ следует $y(t) = y(t')$ для всех $t \in [t', +\infty[$ и

$$\int_{\lambda_y}^{+\infty} \psi(y(\tau),\tau)\,|\dot{y}(\tau) - P(y(\tau),\tau)|\,d\tau < 1 \tag{2}$$

Каждую из четырех производных Дини вдоль решения локально липшицевой функции $V(x,t)$ будем обозначать через $\dot V_{(1)}(x,t)$. Применение в высказывании символа $\dot V_{(1)}$ означает, что это высказывание истинно с любой из четырех производных.

1.3. У с л о в и е CO. Для любого $s<H$ существует допустимая функция $\psi: Cl\,U(0,s)\times J\to R^+$, для которой $\forall r,h\in\,]0,s[\ \exists T$ такое, что $\forall y(\cdot)\in I(\psi)$

$$\mu\{t\in J:\ r\le |y(t)|\le h\}<T,$$

где μ - мера Лебега.

У с л о в и е CI. Для любого $s<H$ существует допустимая функция $\psi: Cl\,U(0,s)\times J\to R^+$, последовательность $\{r_i\}$, $i\in N$, $r_i\downarrow 0$, $r_1<s$ и счетная система открытых множеств $\{G_i\}$ таких, что

$$\{0\}\times J\subset G_i\subset U(0,r_i)\times J,$$

$$Cl\,G_{i+1}\subset G_i$$

а из $y(\cdot)\in I(\psi)$, $(y(t_1),t_1),(y(t_2),t_2)\in G_i$ следует

$$y([t_1,t_2])\subset U(0,r_i)$$

У с л о в и е MO. Для любого $d<H$ существует ограниченная локально липшицевая функция $V:(U(0,d)\setminus\{0\})\times J\to R$ с отрицательно определенной производной $\dot V_{(1)}$

2. Сформулируем основной результат.

Т е о р е м а. Если для уравнения (I) выполнено условие $CO\,\&\,C1$, то для любого $d<H$ существует непрерывная функция $V: U(0,d)\times J\to R$, удовлетворяющая вне $|x|=0$ условию MO.

Доказательство разобьем на ряд подпунктов.

2.I. Выберем $s\in\,]d,H[$. Пусть $\{\varkappa_i\}$ разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{G_i\setminus Cl\,G_{i+2}\}$, $i=0,1,\dots$, где $G_0=U(0,H)\times J$. Положим $r_0=H$. Зададим функцию на $U(0,H)\times J$

$$r(x,t)=\sum_{i=0}^{\infty} x_i(x,t)r_i \quad \text{для } x\neq 0$$

$$r(0,t)=0$$

Она класса C^{∞} для $x\neq 0$. Кроме того,

$$r(x,t)\leq r_i \Rightarrow (x,t)\in G_i \tag{3}$$

Пусть функция φ выбрана такой же, как в теореме 3.7 из [1] с функцией ψ из $C0\&C1$, т.е.

$$\varphi(x,t)\geq max\{\psi(x,t), \frac{2}{|x|}+1, \frac{2}{s-|x|}+1\}$$

Рассмотрим семейство $\{f_y\}$, $y(\cdot)\in I(\varphi)$, $f_y : \Gamma_y \to R$,

$$f_y(x_o,t_o)=4H-inf\{r(y(t),t): t\geq t_o\}$$

С помощью функций $\Phi_y : \Gamma_y \to [0,1]$

$$\Phi_y(x_o,t_o)=\int_{t_o}^{+\infty}\varphi(y(\tau),\tau)|\dot y(\tau)-P(y(\tau),\tau)|d\tau \tag{4}$$

зададим $V_{1y} : \Gamma_y \to R$

$$V_{1y}(x_o,t_o)=(1-\Phi_y(x_o,t_o))f_y(x_o,t_o) \tag{5}$$

и, наконец, $V_1 : (U(0,s)\setminus\{0\})\times J \to R^+$

$$V_1(x_o,t_o)=sup\{V_y(x_o,t_o): y(\cdot)\in I(\varphi), \lambda_y=t_o\} \tag{6}$$

2.2. Докажем ряд свойств функций f_y.

Во-первых, понятно, что

$$4H-r(x_o,t_o)\leq f_y(x_o,t_o)\leq 4H \tag{7}$$

т.е.

$$3H \leq f_y(x_0, t_0) \leq 4H \tag{8}$$

Во-вторых, покажем, что для каждого $K = \{(x,t): r \leq |x| \leq h, \quad r, h \in]0, s[, \ t', t'' \in J$ существует число L_K, обеспечивающее выполнение неравенства (10), для любых $u(\cdot), v(\cdot), z(\cdot) \in I(\varphi)$ таких, что

$$\Gamma_u \cap \Gamma_v = \Gamma_z, \quad \Gamma_u \setminus \Gamma_z \subset K, \quad \Gamma_v \setminus \Gamma_z \subset K,$$

$$\alpha(\Gamma_u \setminus \Gamma_z, \Gamma_v \setminus \Gamma_z) < |(u(\lambda_u), \lambda_u) - (v(\lambda_v), \lambda_v)| \tag{9}$$

Здесь $\alpha(X, Y) = max\{sup\{dist(x, Y): x \in X\}, sup\{dist(y, X): y \in Y\}$ метрика Хаусдорфа. Обозначим $|(u(\lambda_u), \lambda_u) - (v(\lambda_v), \lambda_v)| = \Delta_{uv}$.

Из (9) следует, что для каждого $t \in [\lambda_v, \lambda_z]$ существует $\sigma(t) \in [\lambda_u, \lambda_z]$, для которого

$$|u(\sigma(t), \sigma(t)) - (v(t), t)| < \Delta_{uv}.$$

Так как функция $r(\cdot, \cdot)$ удовлетворяет на К условию Липшица (как функция класса C^∞) с некоторой константой L_K, то из предыдущего неравенства получаем

$$|r(u(\sigma(t), \sigma(t)) - r(v(t), t)| \leq L \ \Delta_{uv}$$

для всех $t \in [\lambda_v, \lambda_z]$.

Пусть для произвольного $\varepsilon > 0$ число $t_0 \geq \lambda_v$ таково, что

$$r(v(t_0), t_0) \leq inf\{r(v(t), t): t \geq \lambda_v\} + \varepsilon$$

Если $t_0 \in [\lambda_v, \lambda_z]$, то

$$r(u(\sigma(t_0), \sigma(t_0)) \leq r(v(t_0), t_0) + L_K \Delta_{uv} \leq$$

$$\leq inf\{r(v(t), t): t \geq \lambda_v\} + L_K \Delta_{uv} + \varepsilon$$

Если $t_0 \in [\lambda_z, +\infty[$, то

$$r(u(t_o),t_o)= r(v(t_o),t_o)\leq \inf\{r(v(t),t): t\geq\lambda_v\}+\varepsilon$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$

$$\inf\{r(u(t),t): t\geq\lambda_u\}\leq \inf\{r(v(t),t): t\geq\lambda_v\}+L_\kappa\Delta_{uv}$$

Аналогично может быть получено неравенство

$$\inf\{r(v(t),t): t\geq\lambda_v\}\leq \inf\{r(u(t),t): t\geq\lambda_u\}+L_\kappa\Delta_{uv}$$

Значит,

$$|f_u(u(\lambda_u),\lambda_u)-f_v(v(\lambda_v),\lambda_v)|\leq L_\kappa\Delta_{uv}\leq \leq L_\kappa(|u(\lambda_u)-v(\lambda_v)|+|\lambda_u-\lambda_z|+|\lambda_v-\lambda_z|) \tag{10}$$

Следующие свойства функций f_y вполне очевидны: функции f_y невозрастающие; (11)

$$\frac{d}{dt}f_y(y(t),t)\leq 0 \quad \text{для почти всех } t\in[\lambda_y,+\infty[\tag{12}$$

$\forall u(\cdot),v(\cdot)\in I(\varphi)$ из $\Gamma_u\subset\Gamma_v$ следует

$$f_v|\Gamma_u=f_u \tag{13}$$

2.3. Согласно леммам 3.2, 3.5, 3.6 из [1] функция V_1, полученная согласно (6) для $\{f_y\}$ со свойствами (7)-(13), является ограниченной, локально липшицевой. Кроме того, $\dot V_{1(1)}(x,t)\leq 0$ и

$$4H-r(x,t)\leq V_1(x,t)\leq 4H \tag{14}$$

По построению $r(x,t)\to 0$ при $|x|\to 0$ для фиксированного t. Поэтому

$$|V_1|=4H \tag{15}$$

2.4. Рассмотрим уравнение

$$\dot x=\tilde P(x,t) \tag{16}$$

полученное из (I) обращением времени $\tilde{P}(x,t)=-P(x,t)$, $t\in\tilde{J}=]-\infty,0[$. Как показано в [I] для уравнения (I6) также выполнено условие $CO\,\&\,C1$. Положим $\tilde{r}(x,t)=$ $=r(x,-t)$, $\tilde{\varphi}(x,t)=\varphi(x,-t)$, а для $\forall\tilde{y}(\cdot)\in\tilde{I}(\tilde{\varphi})$

$$\tilde{f}_{\tilde{y}}(x_o,t_o)=4H-\inf\{\tilde{r}(\tilde{y}(t),t):t\geq t_o\}$$

Заметим, что аналогом неравенства (2) является

$$\int\limits_{\lambda_{\tilde{y}}}^{0}\tilde{\varphi}(\tilde{y}(\tau),\tau)|\dot{\tilde{y}}(\tau)-\tilde{P}(\tilde{y}(\tau),\tau)|d\tau<1$$

Понятно, что семейство $\{\tilde{f}_{\tilde{y}}\}$ удовлетворяет свойствам (7)-(I3). Пусть $\tilde{V}_2:(U(0,S)\setminus\{0\}\times\tilde{J}\to R^+$ функция аналогичная функции V_1. Следовательно, функция $V_2:(U(0,S)\setminus\{0\})\times J\to R^-$, заданная равенством $V_2(x,t)=-\tilde{V}_2(x,-t)$ ограничена, локально липшицева. Кроме того, $\dot{V}_{2(1)}(x,t)\leq 0$ и

$$-4H\leq V_2(x,t)\leq r(x,t)-4H,$$
$$|V_2|=4H$$

2.5. Докажем существование последовательности $\{\varepsilon_i\}$, $i\in N$ с $\varepsilon_i>0$ такой, что при $r_i<|x|<d$

$$|V_1|-V_1(x,t)>\varepsilon_i \quad\text{или}\quad |V_2|+V_2(x,t)>\varepsilon_i$$

Пусть, напротив, существует i, для которого для любого $\varepsilon>0$, например, для $\varepsilon=r_i/2$ найдется точка (x_o,t_o), $r_i<|x_o|<d$, обеспечивающая выполнение неравенств

$$|V_1|-V_1(x_o,t_o)<\varepsilon \quad\text{и}\quad |V_2|+V_2(x_o,t_o)<\varepsilon \qquad (I7)$$

Так как $3H\leq V_1(x,t)\leq 4H$ на всей своей области определения, то согласно лемме 3.3 из [I] найдется такая функция $y(\cdot)\in I(\varphi)$ с $\lambda_y=t_o$, $y(t_o)=x_o$, $\Phi_y(x_o,t_o)<\frac{1}{2}$, что

$$V_1(x_0,t_0)-V_{1y}(x_0,t_0)<\varepsilon$$

Из (I5), (I7), (5) теперь получаем

$$4H-(1-\Phi_y(x_0,t_0))(4H-\inf\{r(y(t),t):t\geq t_0\}<2\varepsilon$$

Так как $1-\Phi_y(x_0,t_0)<1$, то

$$\inf\{r(y(t),t):t\geq t_0\}<2\varepsilon$$

Следовательно, для некоторого $t_2\geq t_0$ имеем

$$r(y(t_2),t_2)<2\varepsilon=r_i$$

Из (3) получаем $(y(t_2),t_2)\in G_i$. Так как, с одной стороны, $G_i\subset U(0,s)\times J$, то $|y(t)|<s$ на $[t_0,t_2]$. С другой стороны, из $|x_0|>r_i$ следует, что можно считать $|y(t)|>0$ на $[t_0,t_2]$. Окончательно,

$$0<|y(t)|<s \qquad \text{на } [t_0,t_2]$$

Из (I7) следует, что

$$|\tilde V_2|-\tilde V_2(x_0,\tilde t_0)<\varepsilon,$$

где $\tilde t_0=-t_0$. Поэтому, аналогично вышесказанному, для уравнения (I6) найдутся такие функция $\tilde z(\cdot)\in\tilde I(\tilde\varphi)$, $\lambda_{\tilde z}=\tilde t_0$, $\tilde z(\tilde t_0)=x_0$, $\tilde\Phi_{\tilde z}(x_0,\tilde t_0)<\frac{1}{2}$ и число $\tilde t_1\geq\tilde t_0$, что

$$(\tilde z(\tilde t_1),\tilde t_1)\in\tilde G_i \quad \text{и} \quad 0<|\tilde z(t)|<s \qquad \text{на } [\tilde t_0,\tilde t_1]$$

Здесь $\tilde G_i=\{(x,t):(x,-t)\in G_i\}$,

$$\tilde\Phi_{\tilde z}(x_0,\tilde t_0)=\int_{\tilde t_0}^{0}\tilde\varphi(\tilde z(\tau),\tau)\,|\dot{\tilde z}(\tau)-\tilde P(\tilde z(\tau),\tau)|\,d\tau$$

Понятно, что существует функция $z(\cdot)\in I(\varphi)$ с $\lambda_z=t_1=-\tilde t_1$, для которой $z(t)=\tilde z(-t)$ на $[t_1,t_0]$ и $\Phi_z(z(t_1),t_1)<\frac{1}{2}$. Получаем $(z(t_1),t_1)\in G_i$.

Рассмотрим функцию $u(\cdot):[t_1,+\infty[\to R^n$, $u(t)=z(t)$ на $[t_1,t_0]$ и $u(t)=y(t)$ на $[t_0,+\infty[$. Так как $\Phi_y(x_0,t_0)<\frac{1}{2}$ и $\Phi_z(z(t_1),t_1)<\frac{1}{2}$, то $u(\cdot)\in I(\varphi)$ Однако, $(u(t_1),t_1)$, $(u(t_2),t_2)\in G_i$, $|u(t_0)|=|x_0|>r_i$, $t_0\in[t_1,t_2]$, что противоречит условию СI.

2.6. По теореме I.7, [I] из СО следует МО. Обозначим функцию из МО через V_3. Не нарушая общности, можно считать, что функция V_3 принимает только положительные значения. Для этого к ней можно прибавить нужную константу.

Положим для $(x,t)\in(U(0,d)\setminus\{0\})\times J$

$$V(x,t)=(V_3(x,t)-|V_3|)(|V_1|-V_1(x,t))+V_3(x,t)(|V_2|+V_2(x,t)) \qquad (18)$$

и $V(0,t)=0$ для всех $t\in J$. Покажем, что эта функция искомая.

Понятно, что она локально липшицева вне $|x|=0$. Так как $|V_1|-V_1(x,t)\le r(x,t)$, $|V_2|+V_2(x,t)\le r(x,t)$, то

$$|V(x,t)|\le 3|V_3|r(x,t).$$

Следовательно, при $(x,t)\to(0,t_0)$ имеем $V(x,t)\to 0$, т.е. функция $V: U(0,d)\times J\to R$ непрерывна.

Докажем отрицательную определенность $\dot V_{(1)}$ вне $|x|=0$. Из $\dot V_{1(1)}(x,t)\le 0$, $\dot V_{2(1)}(x,t)\le 0$, $V_3(x,t)\ge 0$ и (I8) следует

$$\dot V_{(1)}(x,t)\le \dot V_{3(1)}(x,t)(|V_1|-V_1(x,t)+|V_2|+V_2(x,t)).$$

Воспользуемся последовательностью $\{\varepsilon_i\}$ из 2.5. Если $r_i<|x|<d$, то, как указано в 2.5,

$$|V_1|-V_1(x,t)+|V_2|+V_2(x,t)>\varepsilon_i$$

Тогда из отрицательной определенности $\dot V_{3(1)}$ и неравенства

$$\dot V_{(1)}(x,t)\le \dot V_{3(1)}(x,t)\varepsilon_i .$$

следует отрицательная определенность $\dot V_{(1)}|(U(0,d)\setminus\{0\})\times J$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Каневский А.Я. Локальные функции, монотонные вдоль интегральных кривых, I/Ин-т физики АН ЛатвССР. Препринт ЛАФИ-095; Саласпилс, 1986. - 28 с.

Поступила 7.I0.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987, с.123-132

УДК 517.938.4

А.А.Рейнфелд
Институт физики АН ЛатвССР

ГЛАДКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

$$\dot{x} = g(x). \tag{2}$$

Без ограничения общности предполагаем, что $f:[0,a[\to R_+$, $g:[0,b[\to R_+$ непрерывны, $f(0)=g(0)=0$, $f(x)>0$, если $0<x<a$, $g(x)>0$, если $0<x<b$ и интегралы $\int_{+0}\frac{dx}{f(x)}$, $\int_{+0}\frac{dx}{g(x)}$ расходится. Обозначим через $\psi(\cdot,x):I(x)\to R_+$ и $\varphi(\cdot,x):J(x)\to R_+$ решения уравнений (1) и (2) соответственно удовлетворяющие начальным условиям $\psi(0,x)=x$, $\varphi(0,x)=x$.

Определение. Дифференциальные уравнения (1) и (2) локально динамически эквивалентны в окрестности начала координат, если существует гомеоморфизм $h:[0,c[\to R_+$, $0<c<a$ такой, что

$$h\varphi(t,x)=\psi(t,h(x)) \tag{3}$$

для $t\in I(x)\cap J(h(x))$.

Если $h\in C^k$ диффеоморфизм, то (1) и (2) C^k гладко эквивалентны.

В одномерном случае требование, чтобы h был гомеоморфизмом завышено. Достаточно требовать лишь, чтобы в равенстве (3) h была непрерывной и не тождественно равной нулю функцией.

Сперва отметим, что $h(0)=h(\varphi(t,0))=\psi(t,h(x))$.

Но так как единственной неподвижной точкой уравнения (2) является $x=0$, то имеем $h(0)=0$. Покажем, что для $x>0$ выполняется неравенство $h(x)>0$. Предполагаем противное, т.е. существует $x'>0$, но $h(x')=0$. Тогда в силу (3) имеем $h\varphi(t,x')=0$ для $t\in \mathcal{J}(x')$. Отсюда следует, что $h(x)\equiv 0$. Следовательно, $h(x)>0$ если $x>0$.

Правая часть равенства (3) имеет производную по t, т.е.

$$\frac{d}{dt}\psi(t,h(x))\Big|_{t=0}=f(h(x))$$

Следовательно, и левая часть равенства имеет производную. Пусть $x\neq 0$. Имеем

$$h'(x)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{h(x+\Delta)-h(x)}{\Delta}=\lim_{t\to 0}\frac{h(\varphi(t,x))-h(x)}{\varphi(t,x)-x}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{h(\varphi(t,x)-h(x)}{t}:\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t,x)-x}{t}=\frac{f(h(x))}{g(x)}>0.$$

Получаем, что h является строго монотонно возростающей функцией и, следовательно, гомеоморфизмом.

Из выше доказанного получаем еще следующие следствия. Любой гомеоморфизм, устанавливающий динамическую эквивалентность дифференциальных уравнений (I) и (2) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dh}{dx}=\frac{f(h)}{g(x)} \qquad (4)$$

и вопрос о гладкой эквивалентности сводится к вопросу о существовании положительного решения, для которого $h(0)=0$, существует $h'(0)\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to +0}h'(x)=h'(0)$.

Рассмотрим подробнее частные случаи.

I°. Пусть

$$\dot{x} = f(x) = \lambda x, \tag{5}$$

$$\dot{x} = g(x) = \lambda x + G(x), \tag{6}$$

где $\lambda > 0$ и $G(x) = o(x)$ при $x \to +0$.
Решая уравнение (4), получаем

$$h(x) = \frac{h_0}{x_0} x \exp\left[-\int_{x_0}^{x} \frac{G(t)\,dt}{t(\lambda t + G(t))}\right]$$

где $h_0 > 0$, $x_0 > 0$. Кроме того, из уравнения (4) получаем

$$\lim_{x \to +0} h'(x) = \lim_{x \to +0} \frac{\lambda h(x)}{\lambda x + G(x)} = \lim_{x \to +0} \frac{h(x)}{x} = h'(0).$$

Очевидно, что требование существования $h'(0) \neq 0$ равносильно требованию сходимости интеграла

$$\int_{+0}^{x} \frac{G(t)\,dt}{t(\lambda t + G(t))}. \tag{7}$$

Итак, доказана теорема о линеаризации.

Дифференциальные уравнения (I) и (2) гладко эквивалентны тогда и только тогда, когда интеграл (7) сходится. Соответствующий диффеоморфизм равен

$$h(x) = x \exp\left[-\int_{+0}^{x} \frac{G(t)\,dt}{t(\lambda t + G(t))}\right], \tag{8}$$

с точностью до произвольного положительного постоянного сомножителя.

Отметим, что дифференциальные уравнения $\dot{x} = \lambda x$ и $\dot{x} = \lambda x + x \ln^{-1} x$ не C^1 гладко эквивалентны. Обозначим через $C^k(\omega)$ класс функций, имеющих непрерывную производную k-ого порядка, модуль непрерывности которой равен $m\,\omega(x)$, m - положительная постоянная, зависящая от конкретной функции.

Пусть $G \in C^{\kappa}(\omega)$, $\kappa \geqslant 2$. Тогда

$$h'(x)=\frac{\lambda}{\lambda+\frac{G(x)}{x}}\cdot \exp\left[-\int\limits_{+0}^{x}\frac{G(t)dt}{t(\lambda t+G(t))}\right],$$

$$h''(x)=-\frac{\lambda\cdot\frac{G'(x)}{x}}{(\lambda+\frac{G(x)}{x})^2}\cdot \exp\left[-\int\limits_{+0}^{x}\frac{G(t)dt}{t(\lambda t+G(t))}\right].$$

Замечаем, что $G'(0)=0,\ G(x)=x\int\limits_0^1 G'(tx)dt,$

$$xG'(x)=\int\limits_0^1 G''(tx)dt,\ G(x)=x^2\int\limits_0^1 G''(tx)(1-t)dt.$$

Получаем, что $h\in C^{\kappa}(\omega)$. Если $G\in C^{\infty}$ или G аналитическая, то и $h\in C^{\infty}$ или h аналитическая функция.

Пусть $G\in C^1(\omega)$ и интеграл $\int\limits_{+0}\frac{\omega(t)dt}{t}$ сходится. Обозначим через ω_1 модуль непрерывности функции, задаваемой интегралом (7). В этом случае $h\in C^1(\omega)\cap C^1(\omega_1)$.

И, наконец, пусть $G\in C(\omega)$ и интеграл (7) сходится. Обозначим через ω_2 модуль непрерывности функции, задаваемой формулой $x^{-1}G(x)$. Тогда имеем $h\in C^1(\omega_1)\cap C^1(\omega_2)$.

То что h аналитическая функция, если G аналитическая, было известно еще Пуанкаре [I]. Стернберг [2,3,4] показал, что $h\in C^{\kappa},\ 2\leqslant\kappa\leqslant\infty$ если $G\in C^{\kappa}$. Исе и Нагумо [5] и А.А.Рейнфелд [6] получили достаточные условия существования C^1 диффеоморфизма, если $G\in C^1$ И, наконец, Венти [7] доказал, что если $G\in C^{\kappa}$ и $G^{(\kappa)}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $0<\delta\leqslant 1$ то и h принадлежит тому же классу гладкости, что G.

2^0. Пусть

$$\dot{x} = x^n, \tag{9}$$

$$\dot{x} = x^n + G(x), \tag{10}$$

где $n>1$ и $G(x)=o(x^n)$ при $x \to +0$.
Решаем уравнение (4), получаем

$$h(x)=x\left[1+(h_0^{1-n}-x_0^{1-n})x^{n-1}+(n-1)x^{n-1}\int_{x_0}^{x}\frac{G(t)dt}{t^n(t^n+G(t))}\right]^{\frac{1}{1-n}}, \tag{11}$$

где $x_0>0$, $h_0>0$.

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to+0} x^{n-1}\int\limits_{x_0}^{x}\frac{G(t)dt}{t^n(t^n+G(t))}=0$ получаем

$$h'(0)=\lim_{x\to+0}\frac{h(x)}{x}=1$$

Кроме того, из уравнения (4) следует

$$\lim_{x\to+0}h'(x)=\lim_{x\to+0}\frac{h^n(x)}{x^n+G(x)}=1=h'(0).$$

Следовательно, дифференциальные уравнения (9) и (10) C^1 гладко эквивалентны. Кроме того,

$$h'(x)=\left(1+\frac{G(x)}{x^n}\right)^{-1}\left[1+(h_0^{1-n}-x_0^{1-n})x^{n-1}+(n-1)x^{n-1}\int_{x_0}^{x}\frac{G(t)dt}{t^n(t^n+G(t))}\right]^{\frac{n}{1-n}}. \tag{12}$$

Перед исследованием гладкости функции h рассмотрим гладкую эквивалентность уравнений (9) и

$$\dot{x}=x^n+\alpha x^{2n-1}, \tag{13}$$

где $\alpha\in R$. По формуле (12) имеем

$$h'(x)=(1+\alpha x^{n-1})^{-1}\left[1+x^{n-1}(A-\alpha\ln(1+\alpha x^{n-1})+\alpha(n-1)\ln x)\right]^{\frac{n}{n-1}},$$

где А - постоянная. Получаем, то в этом случае $h \in C^{n-1}$, но $h \not\subset C^n$, хотя правые части уравнений (9) и (13) аналитические. Из формулы (12) следует, что класс гладкости функции h определяют классы гладкости функций ψ и η_0, где

$$\psi(x)=\frac{G(x)}{x^n}, \quad \eta_0(x)=x^{n-1}\int_{x_0}^{x}\frac{G(t)dt}{t^n(t^n+G(t))}.$$

Пусть $\varphi \in C^k$, $1 \leq k \leq n-2$. Рассмотрим функцию

$$F(x)=x^{n-1}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(t)dt}{t^n}=-\frac{x^{n-1}}{n-1}\int_{x_0}^{x}\varphi(t)d\left(\frac{1}{t^{n-1}}\right)=$$

$$=-\frac{\varphi(x)}{n-1}+\frac{\varphi(x_0)}{x_0^{n-1}}\cdot\frac{x^{n-1}}{n-1}+\frac{x^{n-1}}{n-1}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi'(t)dt}{t^{n-1}}.$$

Отсюда

$$F'(x)=B_1x^{n-2}+x^{n-2}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi'(t)dt}{t^{n-1}}, \quad \text{где } B_1=\frac{\varphi(x_0)}{x_0^{n-1}}.$$

Аналогично,

$$F^{(k)}(x)=B_kx^{n-k-1}+x^{n-k-1}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi^{(k)}(t)dt}{t^{n-k}},$$

где B_k некоторая вполне определенная постоянная. Отсюда видно и то, что F в точке $x=0$ имеет $n-1$ производную лишь только интеграл

$$\int_{+0}^{x}\frac{\varphi^{(n-1)}(t)}{t}dt \quad \text{сходится.}$$

Пусть $\psi \in C^k(\omega)$, где $0 \leq k \leq n-2$.

Класс гладкости интеграла η_0 определяет функция η_κ, где

$$\eta_\kappa(x) = x^{n-\kappa-1}\int_{x_0}^{x} t^{\kappa-n}\left(\frac{G(t)}{t^n+G(t)}\right)^{(\kappa)} dt .$$

Обозначим через ω_κ модуль непрерывности функции η_κ. Тогда получаем, что $h \in C_1^{\kappa+1}(\omega) \cap C^{\kappa+1}(\omega_\kappa)$.

Пусть $G \in C^{n+\kappa}(\omega)$, $0 \leq \kappa \leq n-2$. По формуле Тейлора

$$G(x) = \frac{x^n}{(n-1)!}\int_0^1 G^{(n)}(tx)(1-t)^{n-1} dt .$$

Получаем

$$\left(\frac{G(x)}{x^n}\right)^{(\kappa)} = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 G^{(n+\kappa)}(tx)t^\kappa(1-t)^{n-1} dt .$$

В этом случае $h \in C^{\kappa+1}(\omega) \cap C^{\kappa+1}(\omega_\kappa)$.

Случай более гладкой функции G будет рассмотрен в пункте 3°.

Ю.С.Шакирова [8] доказала, что если $G \in C^\infty$, то $h \in C^{n-1}$. Близкие вопросы рассмотрены также в работах С.П.Токарева [9] и В.С. Самовола [10].

3°. Рассмотрим вопрос о гладкой эквивалентности дифференциальных уравнений (13) и

$$\dot{x} = g(x) = x^n + \alpha x^{2n-1} + G(x), \tag{14}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $G(x) = o(x^{2n-1})$ при $x \to +0$. К виду (14) полиномиальным преобразованием приводится уравнение (10), если $G \in C^{2n-1}$.

Решая дифференциальное уравнение (4), получаем

$$h(x)=x\Big[1+x^{n-1}\Big(A+\alpha\ln\frac{(1+\alpha h^{n-1})x^{n-1}}{(1+\alpha x^{n-1})h^{n-1}}+$$
$$+(n-1)\int_{x_0}^{x}\frac{G(t)dt}{(t^n+\alpha t^{2n-1})(t^n+\alpha t^{2n-1}+G(t))}\Big)\Big]^{\frac{1}{n-1}},$$

где $x_0>0$ и A произвольная постоянная. Функция h задана в неявном виде. В силу пункта $2^0 h$ является композицией функции (II) и ей обратной. Поэтому $h\in C^1$, $\lim\limits_{x\to+0}h'(x)=h'(0)=1$. Следовательно, $h(x)=z(x).x$, где $\lim\limits_{x\to+0}z(x)=1$. Отсюда относительно z получаем уравнение

$$z-\Big[1+x^{n-1}\Big(A+\alpha\ln\frac{1+\alpha(xz)^{n-1}}{z^{n-1}+\alpha(xz)^{n-1}}+(n-$$
$$-1)\int_{x_0}^{x}\frac{G(t)dt}{(t^n+\alpha t^{2n-1})(t^n+\alpha t^{2n-1}+G(t)}\Big]^{\frac{1}{n-1}}=0.$$

В силу теоремы о неявной функции класс гладкости функции z в окрестности точки $z=1$, $x=0$ определяет интеграл

$$\xi_0(x)=x^{n-1}\int_{x_0}^{x}\frac{G(t)dt}{(t^n+\alpha t^{2n-1})(t^n+\alpha t^{2n-1}+G(t))}$$

Отметим еще, что

$$h'(x)=\frac{h^n+\alpha h^{2n-1}}{x^n+\alpha x^{2n-1}+G(x)}=\frac{z^n+\alpha z^{2n-1}\cdot x^{n-1}}{1+\alpha x^{n-1}+\psi(x)}.$$

Пусть $\psi\in C^K(\omega)$, где $0\leq K\leq n-2$ и пусть ω_K модуль непрерывности функции ξ_K, где

$$\xi_K(x)=x^{n-K-1}\int_{x_0}^{x}t^{K-n}\Big(\frac{G(t)}{(1+\alpha t^{n-1})(t^n+\alpha t^{2n-1}+G(t))}\Big)^{(K)}dt.$$

Так же, как в пункте 2^o получаем, что $h \in C^{k+1}(\omega) \cap C^{k+1}(\omega_k)$. Пусть $G \in C^{n+k}(\omega)$ и $0 \leq k \leq n-2$, тогда и $h \in C^{k+1}(\omega) \cap C^{k+1}(\omega_k)$. Пусть $G \in C^{2n-1}$.
Если интеграл

$$\xi_{n-1}(x) = \int_{+0}^{x} t^{-1} \left[\frac{G(t)}{(1+\alpha t^{n-1})(t^n+\alpha t^{2n-1}+G(t))} \right]^{(n-1)} dt$$

сходится, то $h \in C^n(\omega) \cap C^n(\omega_{n-1})$,
где ω_{n-1} модуль непрерывности интеграла $\xi_{n-1}(x)$. Пусть $G \in C^{2n-1+k}(\omega)$ и $k \geq 1$. Тогда $h \in C^{n+k}(\omega)$. Если $G \in C^\infty$ или G аналитическая функция, то и h обладает теми же свойствами гладкости.

Теорема в случае $G \in C^\infty$ принадлежит Тейкенсу [II]. Сопряженные результаты изложены и в статьях Брюно [I2] и Белицкого [I3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Poincaré H. Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles // Oeuvres de Henri Poincaré. -Paris, Gauthier-Villars et C^{ie},1928.-Tome 1.-P.ILIX-CXXIX.
2. Sternberg S. Local C^n transformations of the real line // Duke Math.J. - 1957. - Vol.24, N°1. - P.97-102.
3. Sternberg S. Local Contractions and a theorem of Poincaré // Amer J. Math.-1957. - Vol.79, N°4. - P.809-824.
4. Sternberg S. On the structure of local homeomorphisms of Euclidean r-Space. II // Amer. J. Math. - 1958. - Vol.80, N°3. - P. 623-631.
5. Nagumo M., Ise K. On the normal forms of differential equations in the neighborhood of an equilibrium point // Osaka Math. J. - 1957. -Vol.9, N°2. - P.221-234.

6. Рейнфелд А.А. Гладкая линеаризация "узла". // Дифференц. уравнения. - 1977. - Т.13, № 10. - С.1885-1887.
7. Venti R. Linear normal forms of differential equations. // J. Different. Equat. - 1966.- Vol.2, N°2.- P.182-194.
8. Шакирова Ю.С. Эквивалентность уравнений с периодическими коэффициентами в окрестности вырожденной особой точки. // Дифференц. уравнения (в частн.производных). Рязань, 1980. - С.94-104.
9. Токарев С.П. Гладкая сопряженность систем дифференциальных уравнений в окрестности асимптотически устойчивой сложной особой точки // - Дифференц. уравнения. - 1977. - Т.13. № 4. - С.766-769.
10. Самовол В.С. Об эквивалентности систем дифференциальных уравнений с распадающимся укорочением // Дифференц. уравнения. - 1978. - Т.14, № 8. - С.1400-1413.
11. Takens F. Normal forms for certain singularitis of vector fields. // Ann. Inst. Fourier.- 1973.- Vol.23, N°2.- P. 163-195.
12. Брюно А.Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр.Моск.мат. о-ва. - 1971.- Т.25. - С.119-262.
13. Белицкий Г.Р. Эквивалентность и нормальные формы ростков гладких отображений. // УМН.- 1978.- Т.33 .- Вып.1.- С.95-155.

Поступила 13.10.86

Межвузовский сборник научных трудов
КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.-С.133-149.

УДК 517.927

В.В.Гудков
ВЦ ЛГУ им.П.Стучки

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

1. Постановка задачи

В статье предлагается методика и приводятся результаты численного решения автомодельной задачи, полученной из системы уравнений газовой динамики и имеющей прямое отношение к задаче о сжатии идеального теплопроводного газа поршнем, давление на котором растет в режиме с обострением (см. [1] и библиогр. к [1]).

Требуется найти численное решение g , v , w , θ системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
& m\xi g' + g^2 v' = kg, \\
& g'\theta + g\theta' + m\xi v' = lv, \\
& m\xi g\theta' + (1-\gamma)m\xi g'\theta - (1-\gamma)gw' = (n-\gamma k)g\theta, \\
& \theta' = -w\theta^{-\beta}g^{-1-\alpha},
\end{aligned}
\qquad (1.1)
$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$
\begin{aligned}
& g(0)\theta(0) = 1, \\
& \lim_{\xi\to-\infty} g(\xi) = \lim_{\xi\to-\infty} v(\xi) = \lim_{\xi\to-\infty} w(\xi) = 0 .
\end{aligned}
\qquad (1.2)
$$

Здесь $\xi \in [0,\infty)$ - автомодельная переменная; функции g, v, θ, w - являются автомодельными функциями плотности, скорости, температуры и теплового потока соответственно и предполагаются неотрицательными; k, l, m, n, α, β, γ -действительные параметры, причем

$$\gamma>1,\ \beta>0,\ n<0,\ m\neq 0,\ k=\frac{(\beta-1)n-1}{\beta-\alpha},$$
$$l=\frac{(1-\alpha)n+1}{2(\beta-\alpha)},\ m=\frac{(2\beta-\alpha-1)n+2\beta-2\alpha-1}{2(\beta-\alpha)}. \tag{I.3}$$

Физический интерес представляет случай $k<0$ и $l<0$, который, как показано в работе [I], влечет за собой условие $m>0$. Более того, при $\alpha<\beta$ между параметрами α, β, n в этом случае возможны лишь такие соотношения:

$$\alpha<1\leq\beta,\qquad n<\frac{1}{\alpha-1},$$
$$\alpha<\beta<1,\quad \frac{1}{\beta-1}<n<\frac{1}{\alpha-1}. \tag{I.4}$$

Численные расчеты проводились для нескольких значений параметров α, β, n и одного значения $\gamma=5/3$, при этом k, l, m вычислялись по формулам (I.3). В расчетах существенно использовалась асимптотика решений системы (I.I) на бесконечности, которая подробно рассмотрена в работе [I].

Система (I.I) может быть разрешена относительно производных функций g, v, w, θ и приведена к нормальному виду

$$g'=g\,\frac{km\xi-lgv-w\theta^{-\beta}g^{1-\alpha}}{m^2\xi^2-g^2\theta},$$

$$v'=\frac{lm\xi v-kg\theta+m\xi w\theta^{-\beta}g^{-\alpha}}{m^2\xi^2-g^2\theta}, \tag{I.5}$$

$$w'=\frac{n-\gamma k}{\gamma-1}\theta+\frac{m\xi w}{\gamma-1}\theta^{-\beta}g^{-1-\alpha}+\frac{m\xi\theta(km\xi-lgv-w\theta^{-\beta}g^{-1-\alpha})}{m^2\xi^2-g^2\theta},$$

$$\theta'=-w\theta^{-\beta}g^{-1-\alpha}.$$

Знаменатель $D=m^2\xi^2-g^2\theta$ в первых трех уравнениях системы (I.5) может обращаться в ноль. Та кривая в пространстве (ξ, g, θ), на которой $D=0$ будем называть особой линией. В правых частях уравнений (I.5) можно выделить общее для трех первых уравнений выражение, содержащее знаменатель D

$$F=\frac{km\xi-g(lv+wg^{-\alpha}\theta^{-\beta})}{m^2\xi^2-g^2\theta}. \tag{I.6}$$

Обозначение (I.6) позволяет упростить запись системы (I.5)

$$g'=gF;$$

$$v'=\frac{k-m\xi F}{g},$$

$$w'=\left(\frac{n-\gamma k}{\gamma-1}+m\xi F\right)\theta+\frac{m\xi w}{\gamma-1}\theta^{-\beta}g^{-1-\alpha}, \tag{I.7}$$

$$\theta'=-wg^{-1-\alpha}\theta^{-\beta}.$$

Прежде чем приступить к численному расчету, необходимо исследовать поведение решения вблизи особой линии. В следующем разделе приводится асимптотика решения системы (I.7) в окрестности особой линии. Знание этой асимптотики и специфика уравнений (I.7) позволили установить существование классического решения краевой задачи (I.I), (I.2). Вычислялось решение способом сквозного прохода по аргументу, начиная от больших значений ξ , где хорошо работает асимптотика на бесконечности, и до $\xi = 0$, путем спрямления решения при переходе через особую линию. Такой подход для данной задачи с 3-мя краевыми условиями на бесконечности оказался более естественным и менее трудоемким, чем традиционный подход, основанный на сшивании решений, вычисляемых влево и вправо от особой линии.

2. Асимптотика решений на особой линии

Пусть ξ_*, g_*, θ_* таковы, что $m^2\xi_*^2 - g_*^2\theta_* = 0$. Будем искать решение системы (I.I) в виде:

$$\begin{aligned}
g &= g_* + g_1(\xi-\xi_*) + g_2(\xi-\xi_*)^2 + \ldots \\
v &= v_* + v_1(\xi-\xi_*) + v_2(\xi-\xi_*)^2 + \ldots \\
\theta &= \theta_* + \theta_1(\xi-\xi_*) + \theta_2(\xi-\xi_*)^2 + \ldots \\
w &= w_* + w_1(\xi-\xi_*) + w_2(\xi-\xi_*)^2 + \ldots
\end{aligned} \qquad (2.I)$$

Здесь предполагается положительность коэффициентов g_*, v_* , w_*, θ_* и произвольность коэффициентов g_i , v_i , w_i , θ_i при i =I,2,...

Подставим выражение (2.I) в систему (I.I), где для упрощения записи положим $x=\xi-\xi_*$, в результате получим систему равенств:

$$m\xi g_1 + m\xi 2g_2 x - kg_* - kg_1 x + g_*^2 v_1 +$$

$$+g_*^2 v_2 x + 2g_* g_1 v_1 x + \ldots = 0,$$

$$g_*\theta_1 + g_* 2\theta_2 x + g_1\theta_1 x + \theta_* g_1 + \theta_* 2g_2 x +$$

$$+\theta_1 g_1 x + m\xi v_1 + m\xi 2v_2 x - \ell v_* - \ell v_1 x - \ldots = 0, \tag{2.2}$$

$$m\xi g_*\theta_1 + m\xi x(2g_*\theta_2 + g_1\theta_1) + m\xi(1-\gamma)\theta_* g_1 +$$

$$+m\xi(1-\gamma)(2g_2\theta_* + g_1\theta_1) + (\gamma k - n)g_*\theta_* + (\gamma k - n)x$$

$$(g_*\theta_1 + g_1\theta_*) + (\gamma-1)g_* w_1 + (\gamma-1)x(2g_* w_2 + g_1 w_1) + \ldots = 0,$$

$$\theta_*^\beta\theta_1 + \theta_*^\beta 2\theta_2 x + \beta\theta_*^{\beta-1}\theta_1^2 x + w_* g_*^{-(1+\alpha)} -$$

$$-(1+\alpha)w_* g_*^{-(2+\alpha)} g_1 x + w_1 g_*^{-(1+\alpha)} x + \ldots = 0.$$

В равенствах (2.2) сгруппируем члены с нулевой степенью x и приравняем их нулю, положив при этом $\xi = \xi_*$. В результате получится четыре соотношения для определения коэффициентов g_1, v_1, w_1, θ_1 :

$$g_1 = \frac{k g_* - v_1 g_*^2}{m\xi_*},$$

$$v_1 = \frac{\ell v_* - g_*\theta_1 - g_1\theta_*}{m\xi_*}, \tag{2.3}$$

$$w_1 = \frac{(n-\gamma k) g_* \theta_* - m\xi_* g_* \theta_1 + (\gamma-1) m \xi_* g_1 \theta_*}{(\gamma-1) g_*},$$

$$\theta_1 = -w_* g_*^{-1-\alpha} \theta_*^{-\beta}$$

Если сгруппировать в равенствах (2.2) члены при x и приравнять их нулю, то найдем коэффициенты g_2, v_2, w_2, θ_2. Но для дальнейшего нам достаточно лишь знание коэффициентов с индексами $*$ и I. Соотношения (2.3) позволяют получить формулы для коэффициентов g_1, v_1, w_1, не содержащие в правых частях членов с индексом I, а лишь с индексом $*$. Неопределенными пока остаются члены g_*, v_*, w_*, θ_*. Что касается величины ξ_*, то из условия $m^2\xi_*^2 - g_*^2\theta_* = 0$ следует

$$\xi_* = \frac{g_*}{m}\theta_*^{1/2} \tag{2.4}$$

Один из нулевых коэффициентов можно определить воспользовавшись тем, что мы ищем классическое решение, т.е. решение с конечными первыми производными. Поскольку системы (I.I) и (I.7) эквивалентны, то необходимым условием существования конечных значений g', v', w' на особой линии является равенство нулю числителя выражения F (I.6) в точке ξ_*, откуда находим

$$w_* = g_*^{\alpha}\theta_*^{\beta}(\kappa\theta_*^{1/2} - \ell v_*) . \tag{2.5}$$

Таким образом, получена асимптотика решения системы (I.I) на особой линии, которая имеет вид (2.I), где g_*, v_*, θ_* являются неопределенными параметрами, а ξ_*, w_*, g_1, v_1, w_1, θ_1 выражаются через g_*, v_*, θ_* по формулам (2.3)-(2.5). Более того, асимптотический вид решения g позволяет из первого уравнения (I.7) сразу же найти предельное значение выражения F

$$\lim_{\xi \to \xi_*} F = g_1/g_* \tag{2.6}$$

Система (I.7), если в ней заменить F на $F_* = g_1/g_*$, превращается в систему без особенности и существование решения которой, проходящего через точку ξ_* со значениями g_*, v_*, w_*, θ_*, гарантировано общей теорией. На этом факте и построен метод сквозного прохода через особую линию.

Для ξ достаточно близких к ξ_*, когда формула (I.6) (в силу ее неопределенности в точке ξ_*) становится непригодной для вычисления значения F, заменяем выражение F его предельным значением и переход через особую линию обеспечен. При расчетах в качестве предельного можно брать последнее значение F, вычисленное на границе ε - окрестности особой линии. После прохождения этой окрестности F снова считается по формуле (I.6). Можно пытаться экстраполировать значение F, используя факт существования предельного значения вида (2.6). Диаметр ε -окрестности особой линии зависит от длины интервала переменной, на котором

$$|m^2\xi^2 - g^2\theta| < \varepsilon .$$

После нескольких пробных расчетов удавалось подобрать так параметры в асимптотике и величину ε, что значение F при переходе через особую линию изменялось настолько, насколько оно менялось между смежными узлами интегрирования. Интервал, на котором вычислялось решение составлял несколько единиц, а окрестность особой линии, в которой приводилось определенное выше спрямление, была порядка одной сотой.

3. Численные расчеты

В этом разделе приведены результаты расчетов трех вариантов, отличающихся друг от друга не только значениями параметров α , β , n ,но и тем, что в них используются разные группы асимптотик на бесконечности. В работе [I] приведены три группы асимптотик на бесконечности с разным количеством неопределенных параметров, от I до 3.

Процедура расчетов следующая: фиксируются неопределенные параметры, выбирается приемлемое значение $\xi > 1$ и решается задача Коши от ξ влево; если решение не доходит до границы $\xi = 0$, либо при $\xi = 0$ оно не удовлетворяет условию $g(0)\,\theta(0) = 1$, то изменяем неопределенные параметры и повторяем расчеты; так продолжаем пока не подберем комбинацию параметров, при которой убеждаемся в существовании решения искомой задачи. Во всех трех вариантах $\gamma = 5/3$.

Вариант I. $\alpha = 0$, $\beta = 0.4$, $n = -1.5$. Эти значения параметров α , β , n , как следует из работы [I], попадают в область, где существует первая группа асимптотик на бесконечности. Именно, для достаточно больших ξ , решение краевой задачи (I.I), (I.2) представимо в виде:

$$
\begin{aligned}
g &= g_0 \xi^{\frac{k}{m}} + \frac{\ell}{m} g_0^2 v_0 \xi^{\frac{k-1}{m}} + \dots \\
v &= v_0 \xi^{\frac{\ell}{m}} + \frac{n}{m} g_0 \theta_0 \xi^{\frac{\ell-1}{m}} + \dots \\
\theta &= \theta_0 \xi^{\frac{2\ell}{m}} + \frac{\ell}{m}(\gamma-1) g_0 \theta_0 \left(v_0 - 2\frac{n+\ell}{m} g_0^{\alpha} \theta_0^{\beta}\right) \xi^{\frac{2\ell-1}{m}} + \dots \\
w &= -\frac{2\ell}{m} g_0^{1+\alpha} \theta_0^{1+\beta} \xi^{\frac{n+\ell}{m}} - \dots
\end{aligned}
\tag{3.I}
$$

В данном варианте $m = 0.125$, а значения показателей главных членов разложения (3.1) следующие:

$$\frac{k}{m} = -2, \ \frac{\ell}{m} = -5, \ \frac{2\ell}{m} = -10, \ \frac{n+\ell}{m} = -17 .$$

Показатели вторых членов разложения (3.1) на $1/m$ меньше, т.е. на 8 единиц меньше. Значение $\xi = 10$ можно считать достаточно большим значением аргумента для того, чтобы воспользоваться асимптотикой (3.1).

Расчеты показывают, что с успехом можно решать задачу Коши и от $\xi = 5$ и даже от меньших значений ξ, но следует постоянно контролировать себя. Дело в том, что разброс показателей от -2 до -17 означает крайне неравномерную сходимость. Эта неравномерность наталкивает на мысль, что при обращении к асимптотике (3.1), для разных функций g, v, w, θ надо брать разные значения аргумента ξ. Можно, например, для θ и w взять $\xi = 2$, а для g и v взять $\xi = 20$; на интервале $[2,20]$ считать лишь два первых уравнения в (1.7), занулив остальные выражения; от точки $\xi = 2$ влево решать всю систему (1.7), взяв в качестве начальных условий для функций g и v вычисленные значения $g(2)$ и $v(2)$, а для функций θ и w их значения из асимптотики. Такой контрольный расчет был проведен и он дал хорошее совпадение с результатами решения задачи Коши для системы (1.7) от $\xi = 5$ до нуля.

Первый этап расчетов варианта 1 заключался в следующем: фиксировались $v_0 = 1$, $g_0 = 1$ и решались задачи Коши влево от точки $\xi = 5$ при $\theta_0 = 1,2,3,4$. При переходе от $\theta_0 = 3$ к $\theta_0 = 4$ произошел качественный скачок в характере поведения решений задач Коши. На рис.1 отчетливо видны 2 типа решений задач Коши: первый тип - решения продолжимые до нуля и при $\xi \to 0$ такие, что $g \to 0$, $\theta \to +\infty$, $D \to 0$, $F \to +\infty$, решения не доходят до особой линии, но как бы асимптотически к ней приближаются; второй тип - решения обрываются, не дойдя ни до особой линии ни до нуля, точнее при $\xi \to \xi_*$ функция g

стремится к конечному пределу, а ее производная к бесконечности, $D \to 0$, $F \to -\infty$. Классическое решение может быть только на границе, разделяющей эти два типа решений.

При уточнении параметра θ_0 оказалось, во-первых, при $\theta_0 \leq 3.6$ получаются решения первого типа, во-вторых, при $\theta_0 \geq 3.8$ получаются решения второго типа, в-третьих, при $\theta_0 = 3.72$ удалось пройти ε -окрестность особой линии и получить решение на всем интервале [0,5], но со значением $g(0)\,\theta(0) = 0.21...$

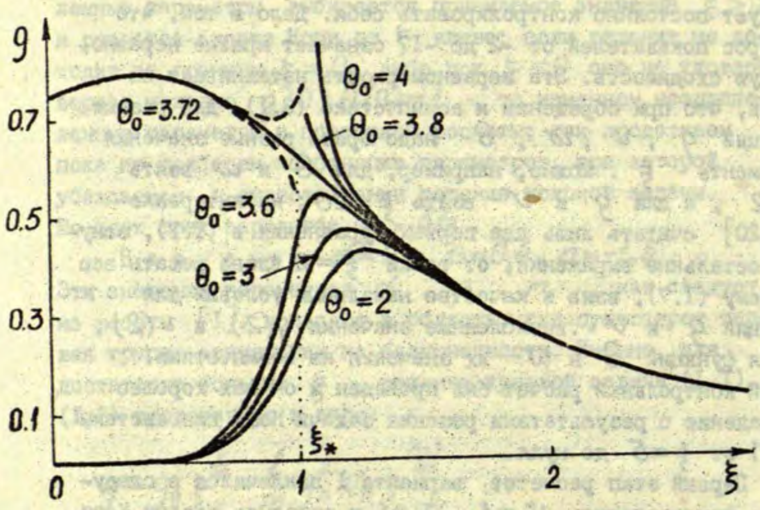

Рис.I. Решение g задачи Коши при v_0 =I и g_0 =I для разных θ_0

Если провести расчет слева от $\xi = 0$, используя в качестве начальных данных значения полученного при θ_0= 3.72 решения, то, в зависимости от того с недостатком или избытком взять значение $g(0)$, получится картина, как показано пунктиром на рис.I.

Характерный рисунок седловины является дополнительным подтверждением существования классического решения.

Второй этап расчетов сводится к выбору параметра g_0. Оказалось, что при уменьшении g_0 увеличивается Благодаря этому удалось найти $g_0 = 0{,}0469$ и уточнить $\theta_0 = 3{,}716$, не изменяя $v_0 = 1$, при которых существует решение исходной задачи (I.I), (I.2), удовлетворяющее начальному условию с точностью до 4-х знаков, точнее $g(0)\theta(0) = 1.0001...$ Поведение функций v, w, θ вычисленного решения воспроизведено на рис.2, а поведение функции g - на рис.3, на котором приведено 3 решения g искомой задачи, соответствующие трем различным значениям параметра v_0.

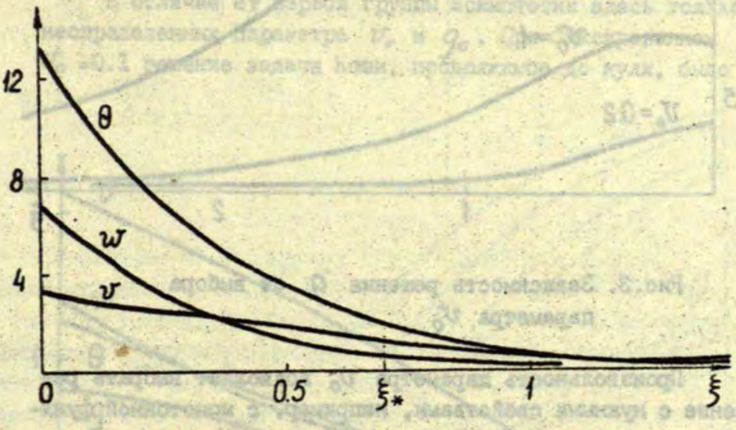

Рис. 2. Поведение функций v, w, θ при $v_0 = 1$, $g_0 = 0.0469$, $\theta_0 = 3.716$

Изменение параметра v_0 влечет за собой изменение параметров g_0 и θ_0, а также смещение точки спрямления

ξ_* Отметим при каких параметрах были получены 2 других решения:

v_o =0,2, g_o =0.00698, θ_o=0.2248;
v_o =5, g_o =0.3223, θ_o =63.1877

Начальное условие удовлетворялось с точностью до 4-х знаков.

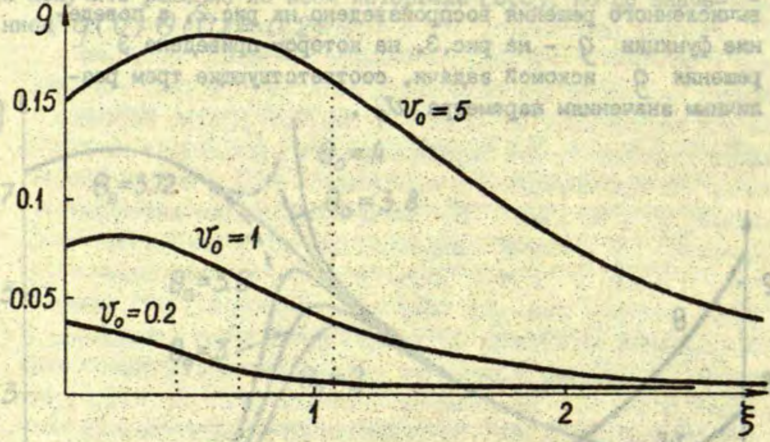

Рис.3. Зависимость решения g от выбора параметра v_o

Произвольность параметра v_o позволяет выбрать решение с нужными свойствами, например, с монотонной функцией g , как при v_o =0,2, либо с заданным значением в нуле и т.д.

Вариант 2. α = -2, β =1.5, n =-1.35

Из работы [I] следует, что эти значения параметров попадают в область, где существует I- я и 2- я группы асимптотик на бесконечности. Выпишем 2- ю группу асимптотик

$$
\begin{aligned}
g &= g_0 \xi^{\frac{k}{m}} + \frac{\ell}{m} g_0^2 v_0 \xi^{\frac{k-1}{m}} + \ldots \\
v &= v_0 \xi^{\frac{\ell}{m}} - \frac{1+\beta n}{m(1-\beta)} g_0 \theta_0 \xi^{\frac{\ell-1}{m}+\frac{1}{\beta m}} + \ldots \\
\theta &= \left(\frac{1+2\ell\beta}{\beta m^2}(1+\beta(2\ell+m))(\gamma-1) g_0^{1+\alpha}\right)^{-\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{2\ell}{m}+\frac{1}{\beta m}} + \ldots \\
w &= -\frac{1+2\ell\beta}{\beta m} g_0^{1+\alpha} \theta_0^{1+\beta} \xi^{\frac{2\ell+m}{m}+\frac{1}{\beta m}} + \ldots
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

В отличие от первой группы асимптотик здесь только 2 неопределенных параметра v_0 и g_0. При фиксированном v_0 =0.I решение задачи Коши, продолжимое до нуля, было

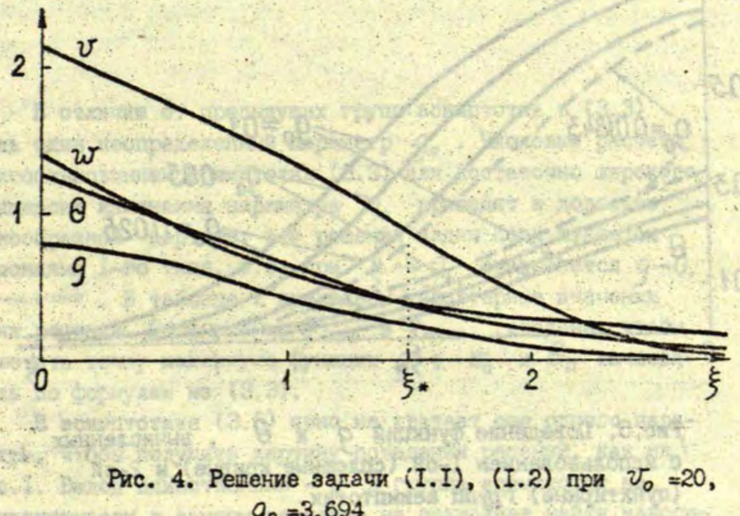

Рис. 4. Решение задачи (I.I), (I.2) при v_0 =20, g_0 =3.694

найдено при g_0 =0,01843, но со значением $g(0)\theta(0)=0.2$ С увеличением v_0 увеличивается и $g(0)$ $\theta(0)$. Благодаря этому, при v_0 =20 и g_0 =3.694 было найдено решение такое, что $g(0)\theta(0)$=1.01... Это решение приведено на рис.4.

Численное решение задачи Коши с использованием первой группы асимптотик (3.1) приводит к следующему результату:
для v_0 =0.1 при $g_0 \to$ 0.01843 решения задачи Коши на интервале [0,1] стремятся к решению задачи Коши, полученному с использованием 2-ой группы асимптотик (3.2).

Для наглядности это свойство решений продемонстрировано на рис. 5. В этом варианте, в отличие от варианта 1, изменение параметра g_0 в 1-ой группе асимптотик влечет за собой изменение параметра θ_0. Возможно это является следствием того, что здесь $\alpha \neq 0$.

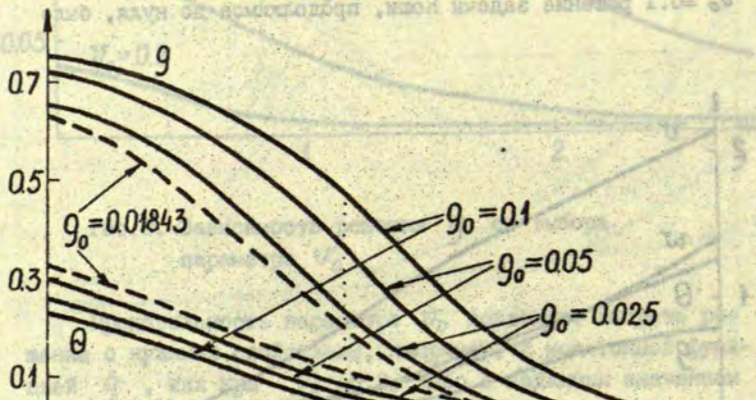

Рис.5. Поведение функций g и θ , вычисленных с использованием 1-ой (сплошные кривые) и 2-ой (пунктирные) групп асимптотик.

Таким образом, для вычисления решения искомой задачи в данном варианте удобнее воспользоваться 2-ой группой асимптотик - на I параметр меньше.

Вариант 3. $\alpha = -4$, $\beta = 0.75$, $n = -1.7$

Эти значения параметров попадают в область, где существует I- я и 3- я группы асимптотик на бесконечности (см. [I]). Выпишем 3- ю группу асимптотик

$$g = g_0 \xi^{\frac{k}{m}} - g_0^2 v_0 \frac{1+\beta(\ell-1)}{m(1-2\beta)} \xi^{\frac{k-2}{m} + \frac{1}{\beta m}} + \ldots$$

$$v = g_0 \theta_0 \frac{1+\beta n}{m(\beta-1)} \xi^{\frac{\ell-1}{m} + \frac{1}{\beta m}} + \ldots$$

$$\theta = \left(\frac{1+2\ell\beta}{\beta m^2} (1+\beta(2\ell+m))(\gamma-1) g_0^{1+\alpha} \right)^{-\frac{1}{\beta}} \xi^{\frac{2\ell}{m} + \frac{1}{\beta m}} + \ldots \qquad (3.3)$$

$$w = -\frac{1+2\ell\beta}{\beta m} g_0^{1+\alpha} \theta_0^{1+\beta} \xi^{\frac{2\ell+m}{m} + \frac{1}{\beta m}} + \ldots$$

В отличие от предыдущих групп асимптотик в (3.3) лишь один неопределенный параметр g_0 . Числовые расчеты с использованием асимптотик (3.3) для достаточно широкого диапазона изменения параметра g_0 приводят к довольно однообразной картине: все решения задач Коши являются решениями I-го типа, т.е. при $\xi \to 0$ оказывается $g \to 0$, $\theta \to +\infty$. В таблице I приведены характерные значения этих решений. Обозначения ξ_{max} и g_{max} введены, чтобы отметить точку максимума функции g ; v_0 и θ_0 вычислялись по формулам из (3.3).

В асимптотике (3.3) явно не хватает еще одного параметра, чтобы получить картину поведения решений, как на рис.I. Вывод единственный - 3- я группа асимптотик на бесконечности в данном варианте не позволяет найти классическое решение искомой задачи. Численные расчеты с использованием I-ой группы асимптотик дают возможность найти решение задачи (I.I),(I.2).

Таблица I

g_0	v_0	θ_0	ξ_{max}	g_{max}
0,I	0,00003836	0,0000312	0,35	0,373
0,5	0,119881	0,0195022	I,2	0,322
I	3,83619	0,312035	2,2	0,305
5	II 988.I	I95,022	8,0	0,264
I2	954568	6470.35	I6	0,244

На рис.6 показано поведение функции g для решений задач Коши при g_0 =I, 5, I2.

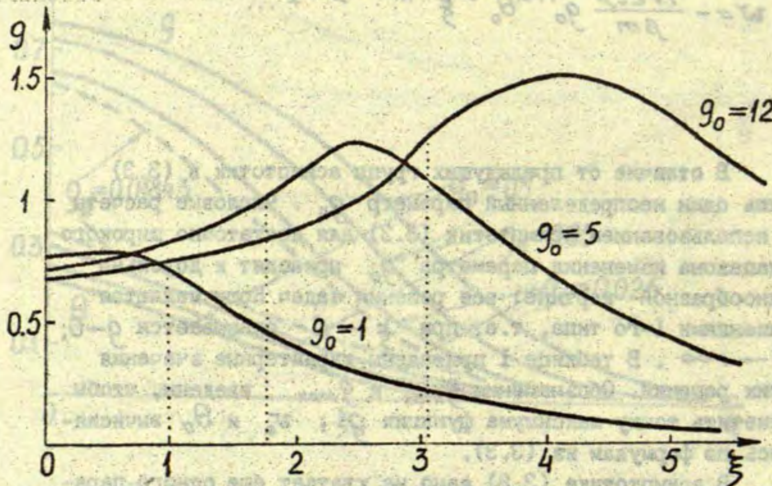

Рис. 6. Поведение функции g при g_0 = I,5,I2.

Из таблицы 2 (последний столбец) видно, что наиболее близко к решению задачи (I.I), (I.2) находится решение задачи Коши при g_0=I2, v_0=I6407, θ_0=10^8.

Таблица 2

g_0	v_0	θ_0	ξ_*	$g(0)\,\theta(0)$
0,5	0,076064	I0	0,65	0,04814
I	I,4587	10^2	0,93	0,II397
5	I39,0I	10^4	I,80	0,42457
I2	I6407	10^8	3,05	I,2I585

Убедившись в принципиальной возможности найти решение искомой задачи, мы не стали уточнять параметры g_0, v_0, θ_0 с целью более точно удовлетворить начальное условие в (I.2). Не стали уточнять еще и из-за большой потери точности, связанной со значительным разбросом порядков величин. Вероятно для расчетов подобных вариантов, когда в асимптотике слишком большой разброс порядков, следует прибегать к помощи и традиционного подхода - расчета от особой линии. Наилучшие результаты в таких случаях, очевидно, следует ждать от комбинированного использования этих подходов.

В заключение следует отметить, что настоящая работа выполнена в рамках совместных исследований газодинамической задачи с сотрудниками ИПМ им. М.В.Келдыша А.П.Михайловым и Б.В.Степановой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Гудков В.В., Михайлов А.П., Степанова В.В. Об асимптотиках решений одной автомодельной задачи газовой динамики с нелинейной теплопроводностью // Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985.- С.I33-I56.

Поступила I5.I0.86

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В связи с потребностями прикладных дисциплин возникает необходимость в изучении новых классов математических задач, в частности, существенно нелинейных, а также задач, в которых правые части дифференциальных уравнений разрывны не только по независимой переменной, но и по искомой функции. Общих методов их исследования пока не разработано, идет лишь поиск в этом направлении. Необходимость исследования таких задач нашла свое отражение в том факте, что АН СССР сконцентрировала усилия для их решения в целевой комплексной программе, в рамках которой и проводилось большинство исследований, публикуемых в сборнике.

В сборник вошли работы математиков ВЦ ЛГУ им.П.Стучки, выполненные по госбюджетной теме "Исследование прикладных краевых задач с существенными нелинейностями для обыкновенных дифференциальных уравнений", координируемой АН СССР, и работы наших научных коллег из других научных учреждений, выполненные по близкой тематике.

В статьях сборника в основном изучаются существенно нелинейные краевые задачи, и главное место здесь занимают вопросы существования, единственности, априорной ограниченности решений. Ряд авторов посвятил свои работы исследованиям дифференциальных неравенств - вопросам, имеющим важное значение в общей теории краевых задач. Часть работ посвящена изучению динамических систем. Изучены и конкретные прикладные задачи, в том числе и с применением численных методов анализа.

Получен ряд новых важных результатов по теории и приложениям нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые представляют интерес для специалистов по математической физике для студентов и аспирантов специальности прикладная математика, занимающихся исследованиями практических задач, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Адьютов М.М.,Клоков Ю.А. О единственности положительного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка 3
2. Звягинцев А.И. О единственности экстремальной функции I2
3. Арманс М.А.,Звягинцев А.И. О функции Грина многоточечной краевой задачи I9
4. Колосов А.И. Об одной обратной краевой задаче для однородных дифференциальных уравнений 3I
5. Столяр В.П. О сингулярной краевой задаче для системы квазилинейных дифференциальных уравнений... 4I
6. Виржбицкий Я.В. Необходимые и достаточные условия разрешимости двухточечной краевой задачи........ 53
7. Лепин Л.А. Разрешимость одной нелинейной краевой задачи четвертого порядка 69
8. Лепин А.Я. Априорная ограниченность производных для дифференциальных неравенств 73
9. Быкадоров Ю.А. О свойствах функции Грина 83
I0.Цепитис Я.В. К вопросу о существовании ограниченного решения уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью 9I
II.Беспалова С.А. Об одной краевой задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка I0I
I2.Садырбаев Ф.Ж. О решениях задачи Неймана...........III
I3.Каневский А.Я. Непрерывные функции, монотонные вдоль интегральных кривых II5
I4.Рейнфелд А.А. Гладкая эквивалентность дифференциальных уравнений в одномерном случае I23
I5.Гудков В.В. О численном решении одной автомодельной задачи газовой динамики с нелинейной теплопроводностью I33
Заключение I50

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сборник научных трудов

Рецензенты: Н.И.Васильев, канд. физ.-мат. наук, ст.науч.сотр. ВЦ ЛГУ им. П.Стучки;

Л.Э.Рейзинь, доктор физ.-мат.наук профессор Института физики ЛатвССР;

Е.Ф.Царьков, доктор физ.-мат.наук, профессор РПИ им.А.Пельше

Редакторы: В.Гудков, Р.Павлова

Технический редактор С.Жогот

Корректор Н.Гулькова

Подписано к печати 02.02.1987. ЯТ 09047 Ф/б 60x84/16.
Бумага №1. 10,3 физ.печ.л. 9,4 усл.печ.л. 7,5 уч.-изд.л.
Тираж 350 экз. Зак. № 315 Цена 1 р 10 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, 226050 Рига, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 519.927

Альютов М.М., Клоков Ю.А. О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА // Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.3-II.

Доказано, что задача Коши

$$x''=x^{\alpha}f(t,x,x'),\ |\alpha|<1,$$

$$x(0)=x'(0)=0$$

имеет единственное положительное решение, если функция f положительна, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по второму и третьему аргументам. Приведен пример, показывающий существенность затребованных ограничений на функцию f. Указаны направления возможных обобщений этого результата.
Библиогр.5 назв.

УДК 517.5

Звягинцев А.И. О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ // Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.12-18.

Показывается зависимость количества экстремальных функций от величины $\ell^n M_0^{-1} M_n$ в задаче

$$\mu_k = \sup\{\|f^{(k)}\| : f\in W^n_\infty(I),\ \|f\|\leq M_0,\ \|f^{(n)}\|\leq M_n\},$$

где $n\geq 2,\ 1\leq k\leq n-1,\ I=[0,\ell],\ 0<\ell<\infty,$ $M_0>0,\ M_n\geq 0,\ W^n_\infty(I)$ - пространство Соболева, $\|\cdot\|$ - обычная норма в метрике $L_\infty(I)$.
Библиогр.5 назв.

УДК 517.927

Армане М.А., Звягинцев А.И. О ФУНКЦИИ ГРИНА МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ // Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.19-30.

Приводятся точные интегральные оценки для производных функций Грина трехточечной и четырехточечной краевых задач. Библиогр.4 назв.

УДК 517.927

Колосов А.И. ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ // Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.31-40.

Расматривается краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = \Lambda f(t,x),$$

$$F_j\,(x_\ell(0), x_r(1)) = 0,$$

$$F\,(x_p(0), x_p(1)) = 0,$$

где $\Lambda = (\lambda_{is}),\ \lambda_{is} \in R;\ f: R^{+} \times R^{n} \to R^{\kappa};\ F_j: R^{2n} \to R;$ $F: R^{2} \to R,\ (\ell, p, r \in \{\overline{1,n}\},\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1, n-1};$ $s = \overline{1,\kappa}).$

f, F_j, F удовлетворяют определенному условию однородности.

Под решением задачи понимается пара $(\Lambda, x_\Lambda(t))$ и решение ищется на множестве функций $x(t)$, одна определенная компонента которых изменяется монотонно на всем интервале исследования.

Исходная задача приводится к эквивалентной ей задаче, не зависящей явным образом от λ_{is} , и которая может быть исследована методами нелинейного анализа. Библиогр.6 назв.

УДК 517.927

Столяр В.П. О СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П. Стучки, 1987.- С.41-52.

Приводится ряд теорем о свойствах решений краевых задач для дифференциальных систем вида

$$x' = p(t)x + f(t,x),$$

где матрица линейной части предполагается приведенной к виду, близкому к треугольному.
Библиогр.8 назв.

УДК 517.927.4

Виржбицкий Я.В. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.53-68.

Для краевой задачи

$$\begin{cases} x''(t) = f(t,x,x'), \\ G(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = g, \\ H(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h, \\ \alpha \le x \le \beta, \end{cases}$$

где $f \in Car(I \times R^2, R)$, $G, H \in C(R^2 \times \bar{R}^2, \bar{R})$, α и β - обобщенные нижняя и верхняя функции, найдены необходимые и достаточные условия разрешимости при фиксированной G.
Библиогр.5 назв.

УДК 517.927

Лепин Л.А. РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.69-72.

Доказана разрешимость краевой задачи

$$x'''' + xx''' + g(t) = 0,$$

$$x(0) = x'(0) = x(1) = x'(1) = 0$$

в случае непрерывной, положительнсй функции $g:[0,1] \to R$
Библиогр.2 назв.

УДК 517.911.7

Лепин А.Я. АПРИОРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.73-82.

Для дифференциальных неравенств

$$F_-(x) \leqslant x^{(n)} \leqslant F_+(x), \quad \|x\|_p < M_0,$$

где $n \in \{2,3,\dots\}$, $F_-, F_+ : AC_{n-1}([a,b],R) \to L([a,b],R)$, $p \in [1,\infty]$ и $M_0 \in (0,\infty)$, даются условия для априорной оценки производных.
Библиогр.2 назв.

У

УДК 517.927

Выкадоров Ю.А. О СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ ГРИНА// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П. Стучки, 1987.- С.83-90.

В статье рассматриваются свойства функции Грина краевой задачи для достаточно общего дифференциально-интегрального уравнения. Получено уравнение для функции, связанной с функцией Грина. В качестве примеров рассмотрены задачи для дифференциального и интегро-дифференциального уравнений, для дифференциального уравнения нейтрального типа. Библиогр.6 назв.

УДК 517.927

Цепитис Я.В. К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕСУММИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.91-100.

Для уравнения

$$x'' = f(t, x, x'),$$

при предположении, что $T>0$, либо $T=+\infty$, для любых $\delta \in (0,T)$, $\tau \in (\delta, T)$ $f \in Car([\delta,\tau] \times R^2, R)$ сформулированы в терминах обобщенных нижних и верхних функций условия существования ограниченного вместе с производной решения $x:[0,T) \to R$ удовлетворяющего при некотором $c \in R$ условию $x'(0) = cx(0)$. Библиогр.3 назв.

УДК 517.927

Беспалова С.А. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ОДУ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.101-110.

Для краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} x' &= f(t,x,y,z) \\ y' &= \varphi(t,x,y,z) \\ z' &= \psi(t,x,y,z) \end{aligned}\right\}$$

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ y(\tau)=y_\tau,\ \tau>0,$$

где $f,\varphi,\psi\in C(I\times R^3),\ t\in I=[0,\tau]$, доказывается существование решения на основе теории верхних и нижних функций.
Библиогр.4 назв.

УДК 517.927

Садырбаев Ф.Ж. О РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1987.- С.111-114.

Приводятся оценки снизу числа решений краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\quad x'(0)=x'(1)=0, \tag{I}$$

где $f\in C'([0,1]\times R^2,R)$. В частности утверждается что, если существуют α,β - нижняя и верхняя функции задачи (I), решения с начальными данными $x'(0)=0$, $x(0)\in[\alpha(0),\beta(0)]$ продолжимы на [0,1] и существует решение ξ задачи (I) такое, что $\alpha(t)<\xi(t)<\beta(t)\ \forall t\in$ [0,1] и решение h линейной задачи $h''=f_{x'}(t,\xi,\xi',h'+$ $+f_x(t,\xi,\xi',h,\ h(0)=1,\ h'(0)=0$ имеет ровно $m-1$ нуль в [0,1] причем $h(1)\,h'(1)<0$, то существует еще не менее $2m$ решений задачи (I).

УДК 517.925

Каневский А.Я. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ, МОНОТОННЫЕ ВДОЛЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.115-122.

Для уравнения без единственности решений приведены достаточные условия существования непрерывной функции, производная в силу уравнения которой является отрицательно определенной. Сама функция определена в некоторой окрестности оси времени.
Библиограф.1 назв.

УДК 517.938.4

Рейнфелд А.А. ГЛАДКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.123-132.

В работе рассматривается дифференциальное уравнение $\dot{x}=g(x)$ в окресности начала координат. Проведен полный анализ приводимости к нормальной форме.
Библиограф.13 назв.

УДК 517.927

Гудков В.В. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВДНОСТЬЮ// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.133-149.

Предполагается методика и приводятся результаты численного решения автомодельной задачи газовой динамики

$$m\xi g' + g^2 v' = kg,$$
$$g'\theta + g\theta' + m\xi v' = \ell v,$$
$$m\xi g\theta' + (1-\gamma)m\xi g'\theta - (1-\gamma)gw' = (n-\gamma k)g\theta,$$
$$\theta' = -w\theta^{-\beta} g^{-1-\alpha}$$

с краевыми условиями

$$g(0)\theta(0) = 1,$$
$$\lim_{\xi\to-\infty} g(\xi) = \lim_{\xi\to-\infty} v(\xi) = \lim_{\xi\to-\infty} w(\xi) = 0.$$

Представлены три варианта расчетов. Дана асимптотика решения в окрестности особой линии.
Библиогр.1 назв.

УДК 517.927

Гудков В.В. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ АВТОМОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВДНОСТЬЮ// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987.- С.133-149.

Предполагается методика и приводятся результаты численного решения автомодельной задачи газовой динамики

$$
\begin{aligned}
&m\xi g' + g^2 v' = kg,\\
&g'\theta + g\theta' + m\xi v' = \ell v,\\
&m\xi g\theta' + (1-\gamma)m\xi g'\theta - (1-\gamma)gw' = (n-\gamma k)g\theta,\\
&\theta' = -w\theta^{-\beta}g^{-1-\alpha}
\end{aligned}
$$

с краевыми условиями

$$
\begin{aligned}
&g(0)\theta(0) = 1,\\
&\lim_{\xi\to\infty} g(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} v(\xi) = \lim_{\xi\to\infty} w(\xi) = 0.
\end{aligned}
$$

Представлены три варианта расчетов. Дана асимптотика решения в окрестности особой линии.
Библиогр.1 назв.

80515

1 р. 10 к.