КАФЕДРА ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Электродинамика и механика сплошных сред

Методы решения нелинейных задач

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра электродинамики и механики сплошных сред

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(межвузовский)

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1987

УДК 517,518,536,537,538,539,611,621,678

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач: Сборник научных трудов (межвузовский)/ Под ред. Ю.Я.Микельсона. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки. - 1987. - 151 с.

Предлагаемый сборник содержит 10 статей, в которых излагаются методы и алгоритмы, предназначенные для решения сложных нелинейных задач электродинамики, магнитной гидродинамики, механики полимеров.

Сборник научных трудов предназначен для научных работников, занимающихся исследованиями конкретных МГД-устройств и конструкций из композитных материалов, а также для исследователей, в том числе, аспирантов и студентов, желающих ознакомиться с реализацией тех или иных численных методов с целью их применения для решения задач из других областей физики и техники.

Рис. 69, табл. 3, библиогр. 78 назв.

Э $\frac{20305-078у}{М812(11)-87}$ 29.87. 1703040000

ВВЕДЕНИЕ

Издание в ЛГУ им.П.Стучки сборников научных трудов, посвященных различным проблемам электродинамики и механики сплошных сред, является традицией пятнадцатилетней давности. В течение этого времени вышло в свет 10 сборников. Основу их содержания составляют результаты исследований электромагнитных полей, магнитогидродинамических (МГД) течений и напряженно-деформированного состояния композитных материалов, полученные при выполнении госбюджетных и хоздоговорных тем научно-исследовательских работ на кафедре электродинамики и механики сплошных сред физико-математического факультета ЛГУ им.П.Стучки. При этом широко используются математические методы с последующим решением полученных задач на ЭВМ.

Настоящий сборник в основном посвящен решению нелинейных задач, в том числе, исследованию электромагнитного, температурного и скоростного полей в МГД-машинах, индукционных и руднотермических печах; исследованию деформирования пластин и механических свойств армированных композитов. Нелинейность исследуемых процессов определяется наличием конвективного переноса количества движения и тепла, зависимостью характеристик среды от индукции магнитного поля и температуры, а также пластичностью среды.

Учет физической нелинейности процессов практически исключает возможность аналитического решения полученных задач математической физики и определяет необходимость использования тех или иных численных методов. В частности, в работах, представленных в настоящем сборнике, используются методы конечных разностей, конечных элементов, пограничных функций, вариационный метод и др. Несмотря на то, что в каждой из работ численный метод нацелен на решение конкретной актуальной для практики задачи, предложенная методика и алгоритм могут найти применение для решения других, математически родственных задач. С этой точки зрения предлагаемый сборник может представить интерес не только для научных работников, занимающихся исследованиями конкретных МГД-устройств и конструкций из композитных материалов, но и для исследователей, в том числе, аспирантов и студентов, желающих ознакомиться с реализацией указанных ранее численных методов с целью их применения для решения задач из других областей физики и техники.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 5-23

УДК 621.313.333 : 538.4

Э.А.Завицкий, С.П.Лацис, В.Г.Смирнов
ЛГУ им. П.Стучки

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАСЧЁТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОКАНАЛЬНОГО ИНДУКЦИОННОГО МГД-НАСОСА И ПЛИН: СЛУЧАЙ МАЛЫХ МАГНИТНЫХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

Ранее [I] была поставлена и решена двухмерная задача теории поля, в электродинамическом приближении описывающая установившийся режим многоканального индукционного МГД-насоса с объединённой магнитной системой (МИН) [2]. Математическая модель [I] (см. рис. I, а) отражает основное отличие МИН от ПЛИН - замыкание магнитного потока по координате, нормальной к плоскости канала насоса.

Согласно алгоритмам [I] были проведены расчёты локальных и интегральных электромагнитных характеристик МИН для множества значений параметров модели. Параллельно рассчитывались характеристики ПЛИН с двухслойной обмоткой, имеющего такие же основные геометрические и электромагнитные параметры; для этого была использована математическая модель работы [3] (см. рис. I, б).

В настоящей работе приводятся электромагнитные характеристики МИН и эквивалентного ПЛИН при малых магнитных числах Рейнольдса (ε = 0.I), качественно отличающиеся от случаев средних и больших значений этого параметра (например, $\varepsilon \approx$ I и $\varepsilon \approx 5$).

Безразмерные характеристики насосов зависят от следующих общих для МИН и ПЛИН физических параметров моделей:

$$\delta/\tau,\ h/\delta,\ k_z,\ L_{en}/\tau,\ L_{ex}/\tau,\ \beta,\ q,\ N,\ \varepsilon,\ s.$$

Здесь обозначено: δ - половина высоты немагнитного зазора, τ - полюсное деление, h - половина высоты металли-

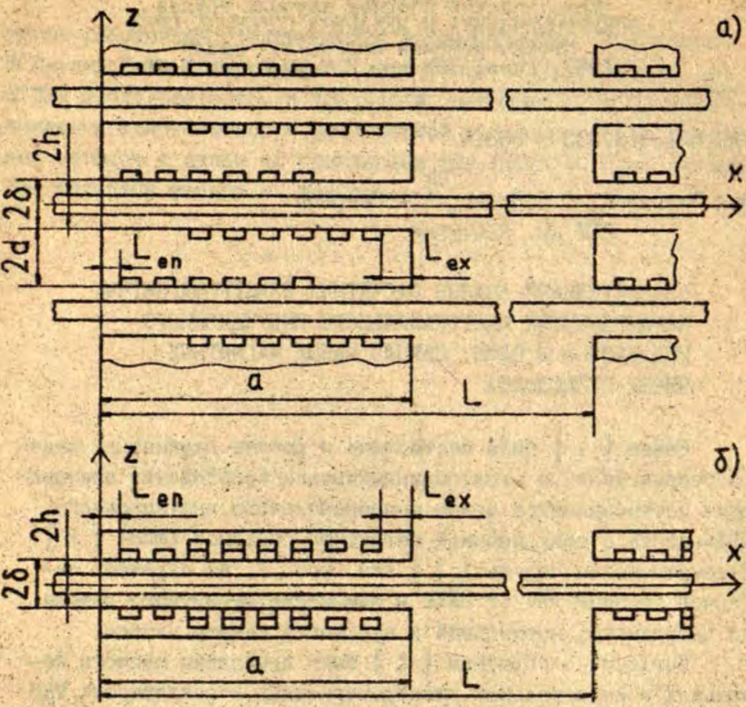


Рис. I. К математическим моделям МИН (а) и ПЛИН (б).

ческого слоя, движущегося со скоростью v в направлении оси x, $k_z = b_n / t_z$ - зубцовый коэффициент, где b_n - ширина токовой пластинки, t_z - зубцовое деление; L_{en}, L_{ex} - длины входного и выходного необмотанных концов магнитопроводов, β - относительный шаг обмотки, q - число пазов на полюс и фазу, N - число полюсов, $\varepsilon = \mu_0 \sigma \omega \tau^2 / \pi^2$ - магнитное число Рейнольдса, где σ - электропроводность рабочего тела, ω - циклическая частота тока питания; s - скольжение.

Магнитопровод секции МИН моделируется прямоугольной областью размеров $a \times 2d$ с магнитными проницаемостями μ_x, μ_z ($\mu_x \ll \mu_z$); магнитопровод ПЛИН описывается тонкими пластинками длиной a с поверхностной магнитной проницаемостью M [4, 3]. Соответственно, безразмерные характеристики МИН определяются также величинами d/τ, μ_x, μ_z, а характеристики ПЛИН - величиной M/τ.

К перечисленным следует добавить параметры, характеризующие математическое (численное) решение задачи.

Так, общими для МИН и ПЛИН являются следующие величины: отношение L/a, где L - полупериод изменения локальных величин по координате x ($L-a$ - расстояние между индукторами, периодически размещёнными по x); N_{eq} - число удерживаемых гармоник фурье-разложений поля в зоне немагнитного зазора, равное числу разрешаемых линейных уравнений относительно фурье-коэффициентов.

В случае МИН решение зависит также от N_{su} - числа удерживаемых гармоник поля в зоне магнитопровода, равного числу слагаемых сумм, входящих в коэффициенты систем уравнений относительно фурье-коэффициентов поля [I].

В настоящей работе рассматриваются следующие локальные характеристики насосов, вычисленные в зависимости от x/τ в срединной плоскости рабочего тела ($z = 0$): B_z - комплексная амплитуда z-составляющей магнитной индукции, j - комплексная амплитуда плотности индуктированных токов, $\cos\Delta\psi$ - косинус разности аргументов функций B_z и j, f_x - x-составляющая усреднённой по времени плотности силы; при этом $f_x = 1/2\,|j|\cdot|B_z|\cdot\cos\Delta\psi$.

Рассчитаны также следующие интегральные величины как функции скольжения: P_a - потребляемая насосом активная мощность на единицу ширины модели (в случае МИН это мощность одной секции насоса), p - электромагнитное давление, $\eta = 2hpv/P_a$ - коэффициент полезного действия.

Характеристики насосов приведены к безразмерному виду делением на соответствующие базисные величины:

$$B_б = \frac{3\sqrt{2}}{\pi}\mu_0\frac{I_б w}{\delta}q, \quad j_б = \frac{1}{\mu_0}\frac{\pi}{\tau}B_б, \qquad (I), (2)$$

$$f_б = \frac{1}{2}j_б B_б, \quad p_б = \frac{\pi}{2\mu_0}B_б^2 N, \qquad (3), (4)$$

$$P_{aб} = p_б\, 2\delta\frac{1}{\pi}\omega\tau. \qquad (5)$$

В формуле (I) w - число витков в катушке; $I_Б$ зависит от типа насоса: для МИН $I_Б = I$, для ПЛИН $I_Б = 2I$, где I - эффективное значение тока в проводниках обмотки; этим согласуются линейные токовые нагрузки индукторов МИН и ПЛИН.

Численные расчёты проводились для следующих фиксированных значений параметров:

$\delta/\tau = 0.05$, $h/\delta = 0.5$, $k_z = 0.5$, $L_{en}/\tau = L_{ex}/\tau = I/3$, $\beta = I$, $q = I$; $d/\tau = I$, $\mu_x = I$, $\mu_z = I000$; $M/\tau = I000$; $L/a = 2$, $N_{eq} = 80$, $N_{su} = 40$; как было сказано, $\varepsilon = 0.I$.

Скольжение изменялось в интервале $0 \leq s \leq I$, число полюсов принимало значения $N = 2,3,4,6,8$.

Результаты расчётов изображены на рис. 2-I0. На рис. 2-5 показаны выше перечисленные локальные характеристики трёхполюсных МИН и ПЛИН. Для четырёхполюсных насосов приводятся лишь распределения $|\bar{j}|$ и $\bar{f}_x$ (рис. 6,7). На рис. 8-I0 представлены интегральные характеристики.

Анализ результатов вычислений приводит к следующим заключениям.

I. Для режима холостого хода ($\varepsilon = 0$) характерно следующее. При чётных N магнитные поля МИН и ПЛИН (амплитуда и фаза при $z = 0$) полностью совпадают. Для МИН независимо от N в зоне полностью заполненных пазов $|\bar{B}_z|$ постоянен с точностью до зубцовых пульсаций (аналогичный вывод делается в [5] для случая пятиполюсного насоса). При нечётных N в распределении $|\bar{B}_z|$ у ПЛИН наблюдаются максимумы, расположенные на расстоянии 2τ друг от друга; при $N = 3$ посередине индуктора имеется один такой максимум (см. рис. 2, б). В пределах обмотанной зоны индукторов фазы z-составляющей индукции у МИН и ПЛИН практически совпадают при любых N.

2. Отклонение магнитного поля рабочего режима от поля холостого хода значительно более выражено у МИН (см. рис. 2).

3. Распределение индуктированных токов по продольной координате существенно зависит от N.

Для чётных N кривые $\|\bar{j}\|$ МИН и ПЛИН качественно не отличаются (см. рис. 6): при $s \geq 0.5$ по длине насоса наблюдаются $N/2$ выраженных максимума, разделённые зонами, в которых $\|\bar{j}\|$ убывает почти до нуля; этому соответствуют минимумы $\bar{f}_x$ в средней части индуктора (см. рис. 7).

Для нечётных N за пределами индуктора МИН протекают вихревые токи, большие ($\varepsilon = 0$) или примерно равные ($\varepsilon = 1$) токам в рабочей зоне насоса; на выходном конце индуктора МИН при $s > 0$ в распределении $\|\bar{j}\|$ наблюдается характерный провал шириной $\approx \tau$, что сказывается на распределении плотности силы (см. рис. 5, а). Такое поведение $\|\bar{j}\|$ вызвано ненулевым потоком магнитной индукции через плоскость $z = 0$ в пределах индуктора, обусловленным конструкцией МИН (см. также [5]). Подчеркнём, что определяющим в этом случае является условие $\varepsilon \ll 1$; по мере возрастания ε (а также s) распределения $\|\bar{j}\|$ МИН и ПЛИН становятся всё менее различимыми.

4. Несмотря на заметные различия в распределениях вихревых токов, кривые плотности силы МИН и ПЛИН в целом отличаются несущественно. В результате это приводит к практически совпадающим перепадам давления (см. рис. 9).

Укажем на отсутствие у МИН области с отрицательными $\bar{f}_x$ на выходном конце индуктора при малых скольжениях (это имеет место при любом ε, но особенно характерно при больших значениях этого параметра).

Для случая $N = 4$ (см. рис. 7) распределение плотности силы у МИН более регулярное: можно заметить, что кривые $\bar{f}_x$ МИН получаются выравниванием (растяжением по x и сжатием по вертикальной оси) соответствующих кривых ПЛИН; при этом для $s \geq 0.5$ у МИН отсутствует область с $\bar{f}_x < 0$ в срединной зоне индуктора.

5. Потребляемая МИН активная мощность меньше потребляемой мощности ПЛИН на величину, не зависящую от скольжения (см. рис. 8). По мере возрастания числа полюсов эта разность стремится к нулю. Поскольку МИН и ПЛИН развивают одинаковую механическую мощность, на ту же постоянную отличаются джоулевы потери в рабочем теле. В результате МИН имеет более высокий КПД (см. рис. 10).

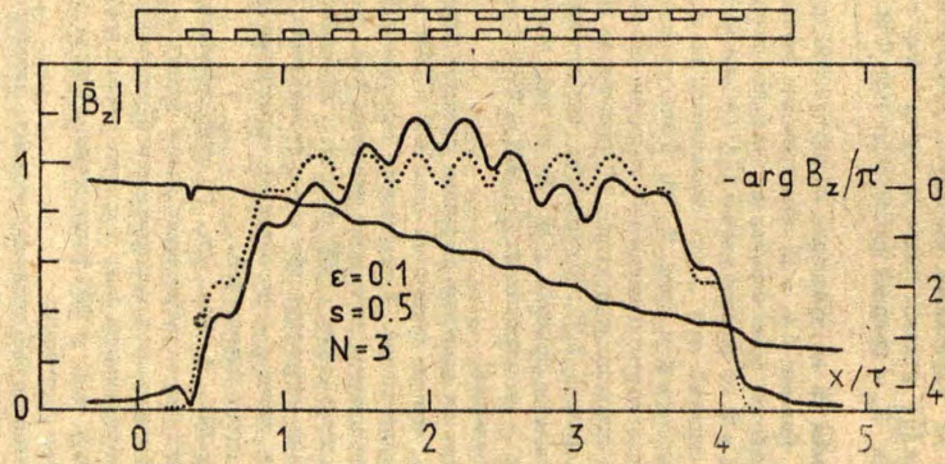


Рис. 2, а. Распределение z-составляющей магнитной индукции в срединной плоскости рабочего зазора 3-полюсного МИН. Пунктир - распределение $|\bar{B}_z|$ в режиме холостого хода ($\varepsilon = 0$).

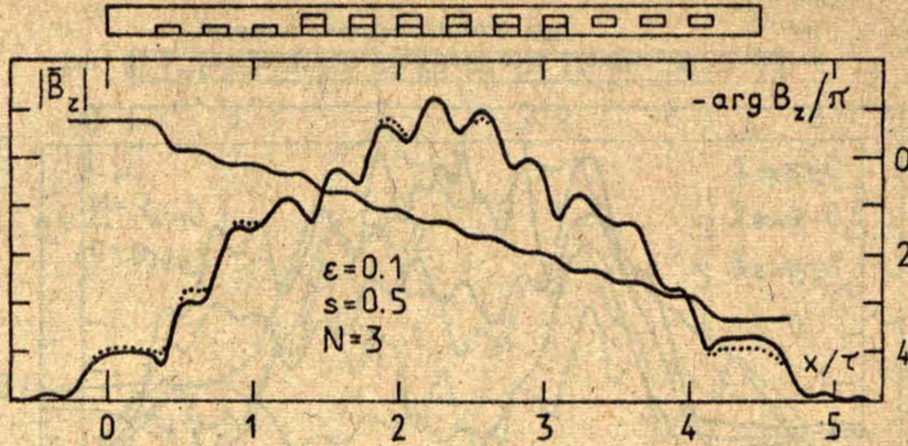


Рис. 2, б. То же в случае ПЛИН.

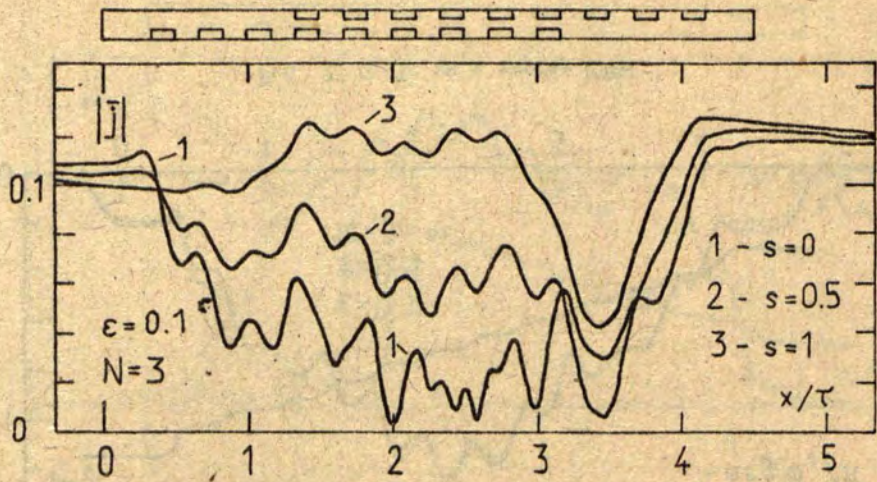


Рис. 3, а. Распределение плотности тока в срединной плоскости рабочего тела 3-полюсного МИН.

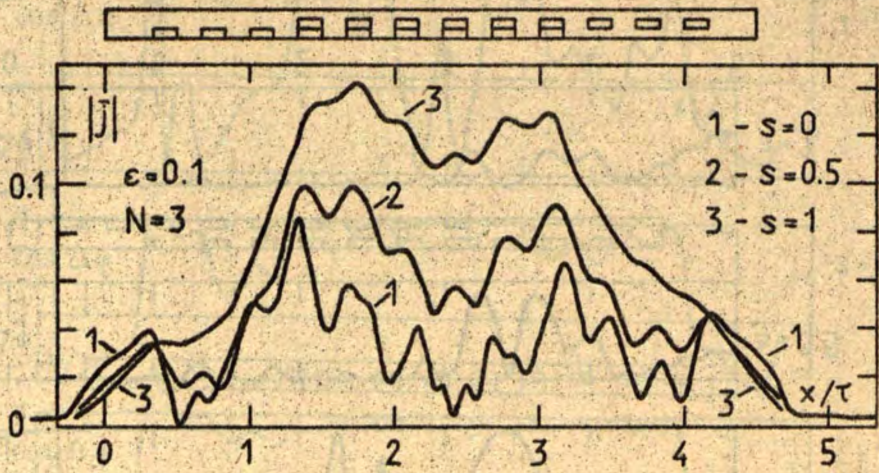


Рис. 3, б. То же в случае ПЛИН.

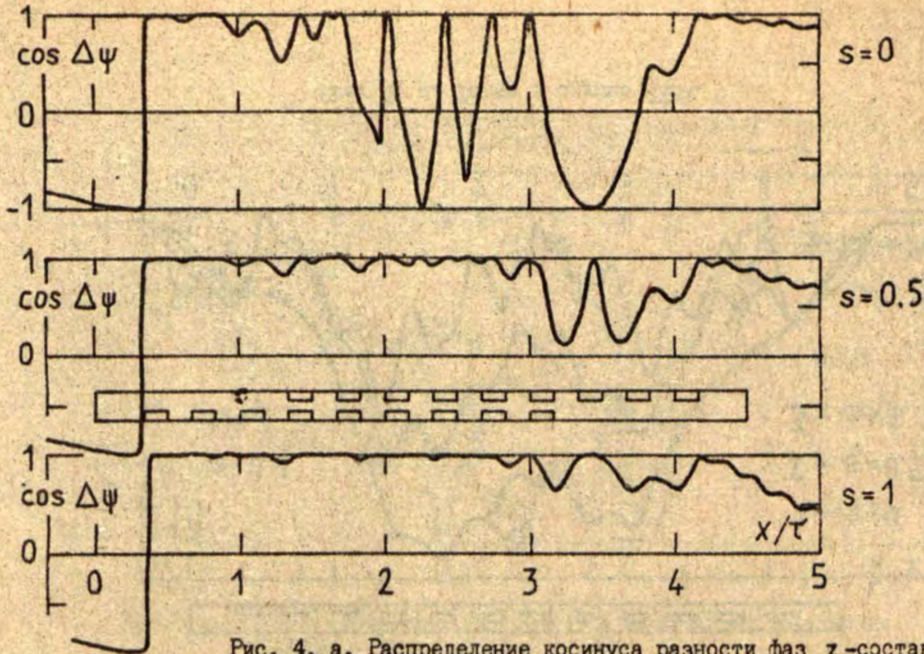


Рис. 4, а. Распределение косинуса разности фаз z-составляющей магнитной индукции и плотности тока в срединной плоскости рабочего тела 3-полюсного МИН.

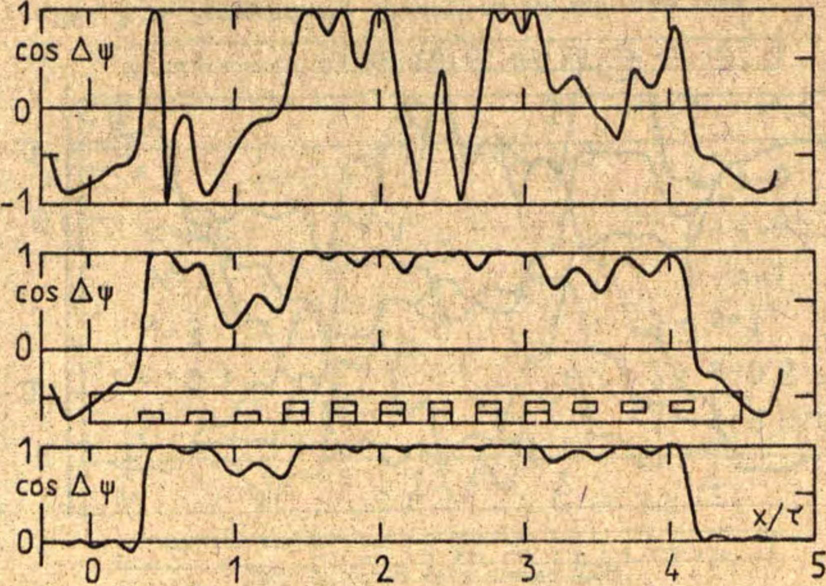


Рис. 4, б. То же в случае ПЛИН.

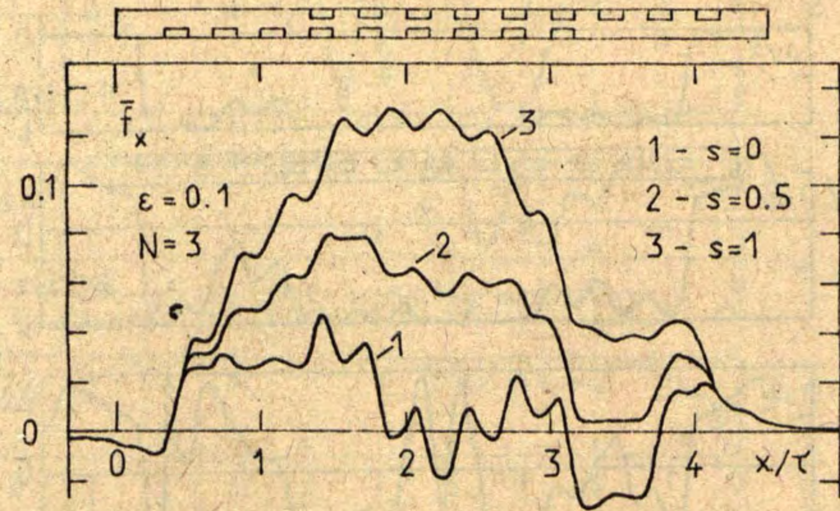


Рис. 5, а. Распределение x-составляющей плотности силы в срединной плоскости рабочего тела 3-полюсного МИН.

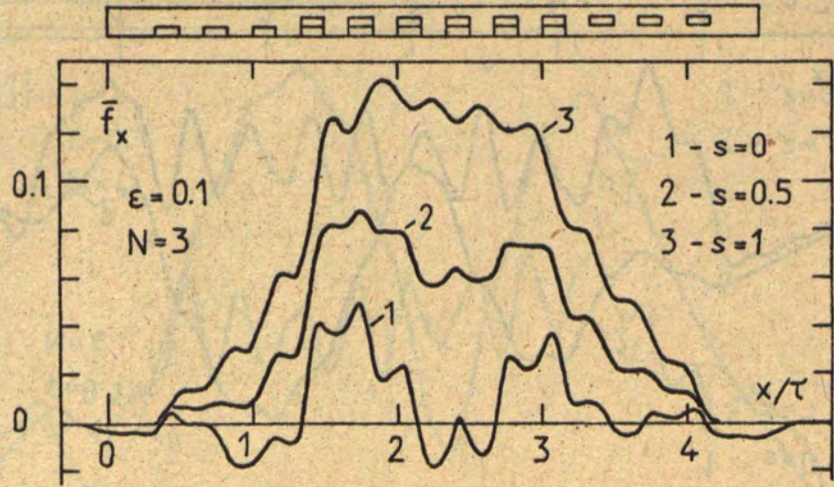


Рис. 5, б. То же в случае ПЛИН.

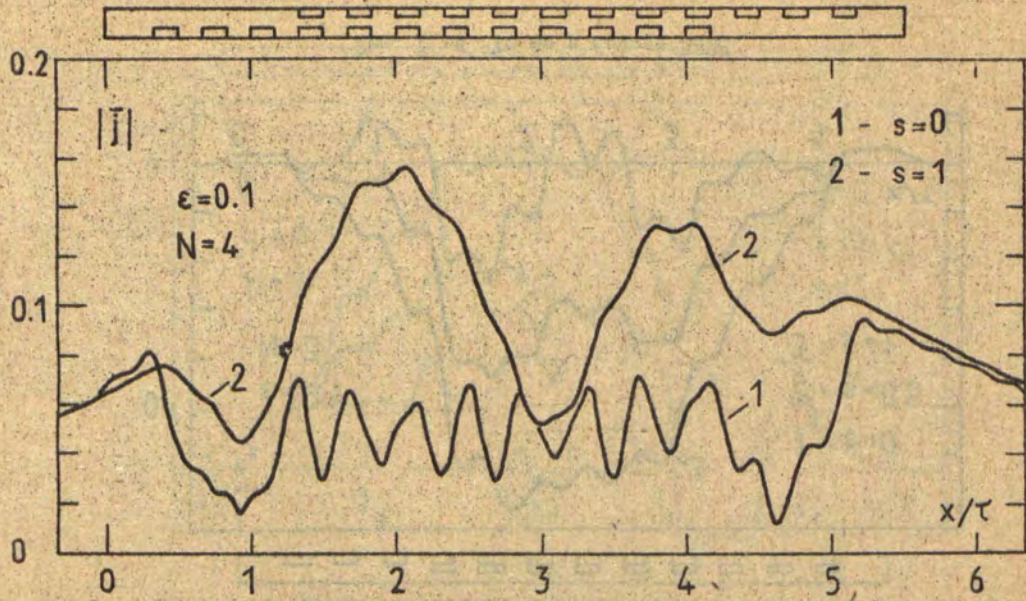


Рис. 6, а. Распределение плотности тока в срединной плоскости рабочего тела 4-полюсного МИН.

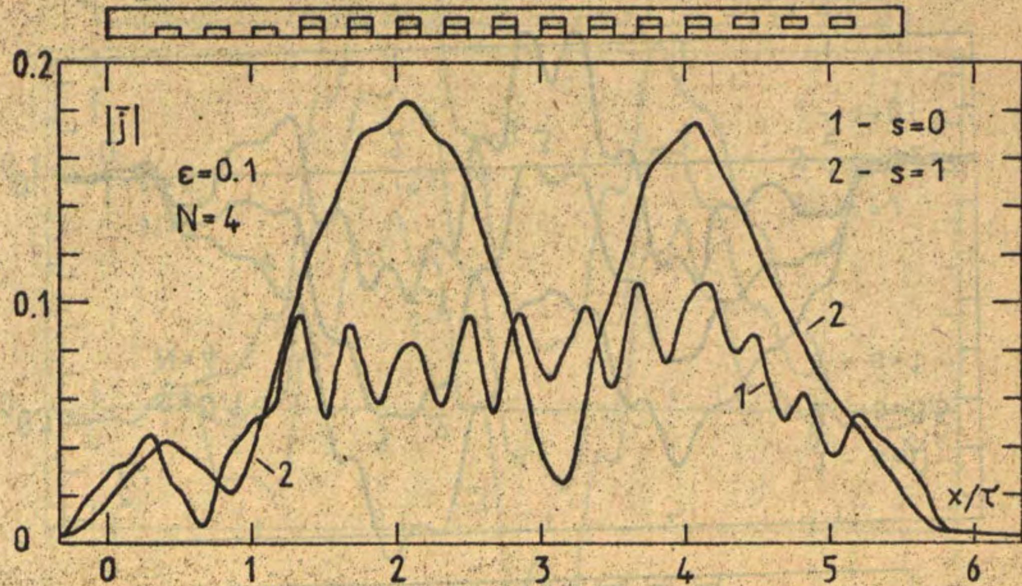


Рис. 6, б. То же в случае ПЛИН.

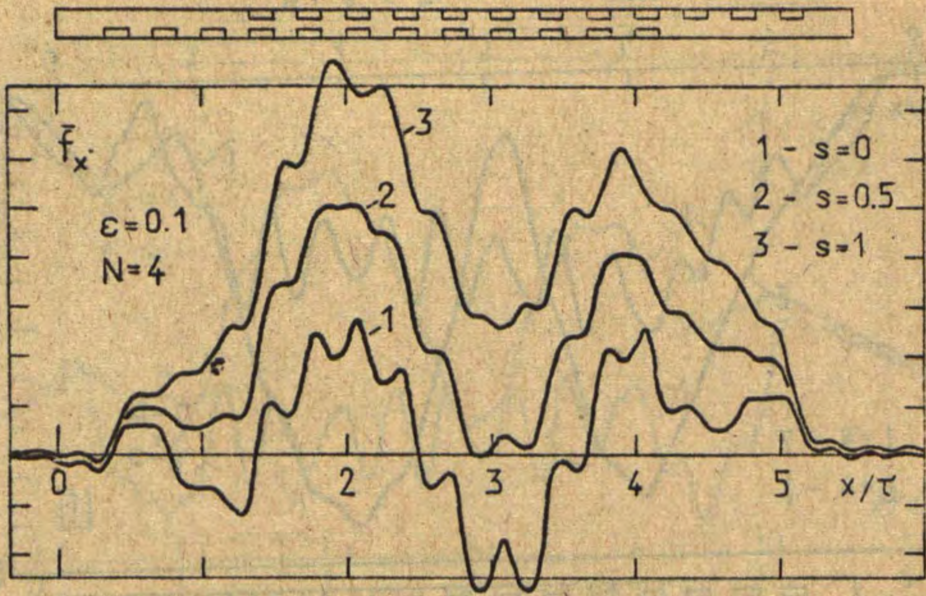


Рис. 7, а. Распределение x-составляющей плотности силы в срединной плоскости рабочего тела 4-полюсного МИН.

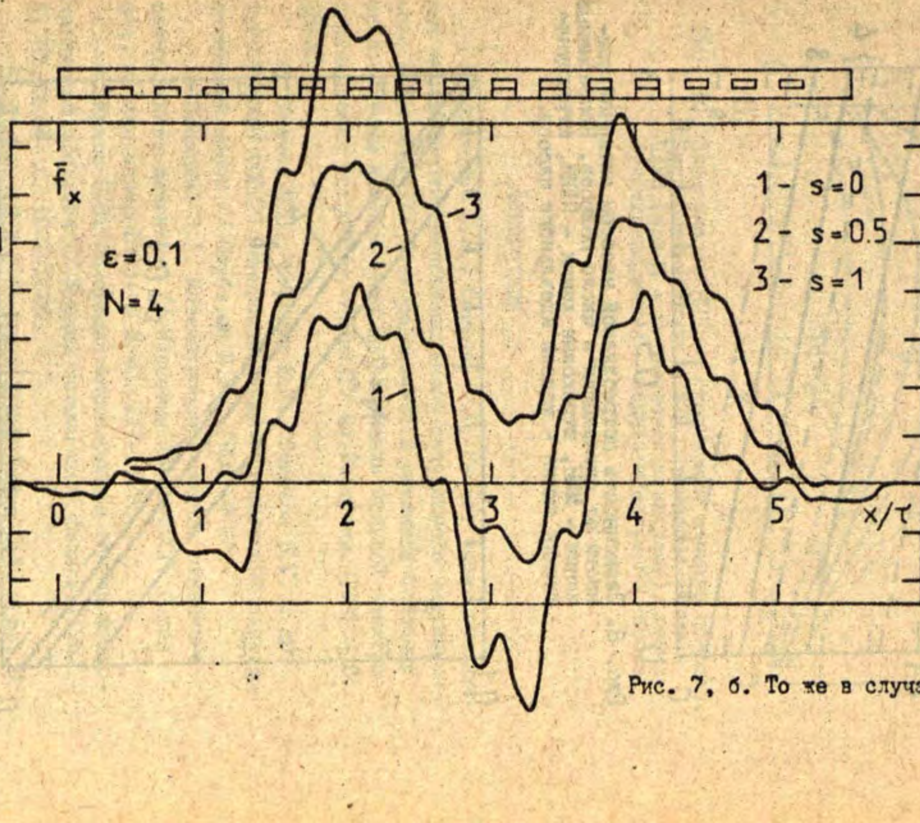


Рис. 7, б. То же в случае ПЛИН.

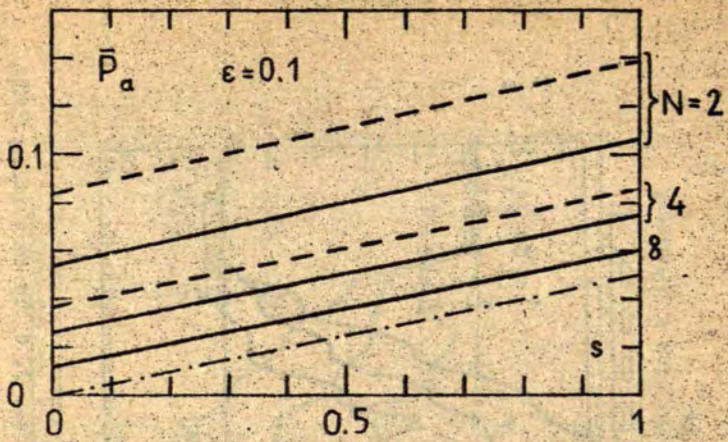


Рис. 8. Зависимость потребляемой насосом активной мощности от скольжения и числа полюсов. Непрерывные линии - МИН, штриховые линии - ПЛИН, штрихпунктирная линия - модель идеального насоса.

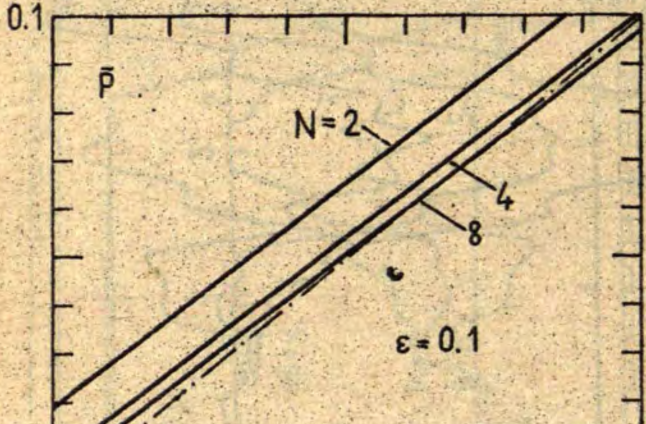


Рис. 9. Зависимость электромагнитного давления от скольжения и числа полюсов. Непрерывные линии - МИН, ПЛИН (значения совпадают), штрихпунктирная линия - модель идеального насоса.

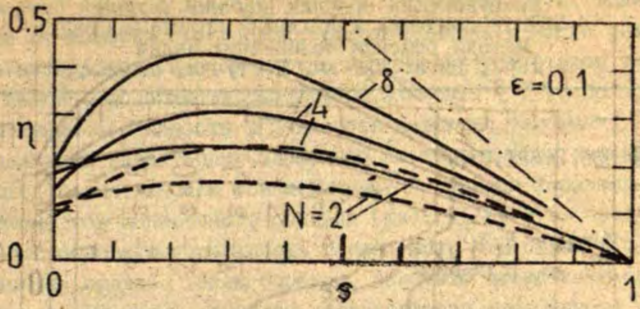


Рис. 10. Зависимость КПД от скольжения и числа полюсов. Непрерывные линии - МИН, штриховые линии - ПЛИН (при N = 8 значения совпадают), штрихпунктирная линия - модель идеального насоса.

Литература

1. Завицкий Э.А., Смирнов В.Г. Расчет электромагнитных характеристик многоканального радиального индукционного МГД-насоса // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1985.- С. 25-35.

2. Ушаков Ю.П., Кирисик Е.М., Смирнов В.Г. и др. А.С. 748749 (СССР). Многоканальный индукционный электромагнитный насос // Опубл. в Б.И..-1980.-№ 26.

3. Завицкий Э.А. Математическая модель линейного асинхронного двигателя // Известия АН ЛатвССР. Серия физ. и техн.наук.-1985.-№ 2.-С. 111-118.

4. Жуков С.В. Однородно экранирующие тонкие ферромагнитные оболочки // Журнал технической физики.-1967.- Т. 37.-№ 6.- С. 1021-1024.

5. Дронник Л.М., Кирисик Е.М., Лифиц С.А. и др. Исследование холостого хода многоканальной индукционной машины с объединенной магнитной системой // XI Рижское совещание по магнитной гидродинамике.-Рига:Зинатне.-1984.- Т. 2.-С. 23-26.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 24-43

УДК 536.2:621.313

Шнидере Л.Я.
ЛГУ им. П.Стучки

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ХАРАКТЕРНОМ ЭЛЕМЕНТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ МГД-МАШИН

I. Введение

Энергонапряжённые режимы работы электрических машин характеризуются предельными допустимыми температурами активных элементов. Рабочие показатели и надёжность машины определяют следующие характеристики теплового состояния:

- средние температуры активных элементов;
- максимальный уровень локальных температур;
- перепады температур в изоляционных материалах;
- скорости изменения температур;
- продолжительность режимов с предельно допустимыми температурами.

Учитывая перечисленные особенности, а также необходимость наиболее адекватного моделирования теплового состояния электрических машин, самым подходящим для теплового расчёта является метод температурного поля. Традиционным подходом в тепловых расчётах электрических машин является моделирование теплового состояния в пазово-зубцовой зоне [I, 2, 3]. Для МГД-машин (рис. I, 2, 3) это сводится к решению задачи теплопроводности в характерном элементе продольного сечения установки [4, 5, 6, 7]. Реальный трёхмерный процесс теплопереноса в МГД-машине, т.е. теплоотдача от поверхности лобовых частей обмотки и части спинки магнитопровода в этом случае представляется стоком тепла в пазовой подобласти расчётного элемента [7]. Но конструктивные особенности МГД-насосов являются таковыми, что величины характерных элементов альтернативных сечений являются геометрически соизмеримыми, а границы характерных элементов поперечного сечения (рис. 1, 2, 3.в) представляют основную поверхность теплообмена МГД-насосов с окружающей средой. Таким образом, наиболее адекватным способом моделирования является представление трёхмерного процесса теплопереноса в МГД-машинах двумя взаимно дополняющими двухмерными моделями в альтернативных сечениях машины [8] и требование совпадения решений в общих элементах расчётных областей. В [9] рассмотрена постановка и метод решения задачи теплопроводности в характерном элементе продольного сечения плосколинейного индукционного МГД-насоса (ПЛИН). В настоящей работе представляется численное решение задачи теплопроводности в характерном элементе поперечного сечения ПЛИН.

На рис. 3 представлена конструктивная схема (а) и характерные элементы продольного (б) и поперечного (в) сечений ПЛИН. Здесь выделены следующие основные элементы насоса: I - канал с жидким металлом, 2 - теплоизоляция канала, 3 - обмотка возбуждения, 4 - зубец магнитопровода, 5 - пазовая изоляция, 6 - спинка магнитопровода. Физическая модель процесса теплопереноса (система допущений) в ПЛИНе и определение каждой из двухмерных математических моделей приведены в [8]. Здесь кратко поясняются применяемые обозначения:

I) область расчёта температурного поля (рис. 3.в) является составной и анизотропной, каждый элемент области характеризуется объёмной теплоёмкостью c_v и теплопроводностью λ_y, λ_z, а также наличием или отсутствием источника тепла, представляющим тепловыделение согласно закону Джоуля-Ленца - $W = k_з j^2 \rho_0 (1+\alpha t)$, где $k_з$ - коэффициент заполнения медью, j - плотность тока возбуждения, ρ_0 - удельное электрическое сопротивление при $0^\circ C$, α - температурный коэффициент сопротивления;

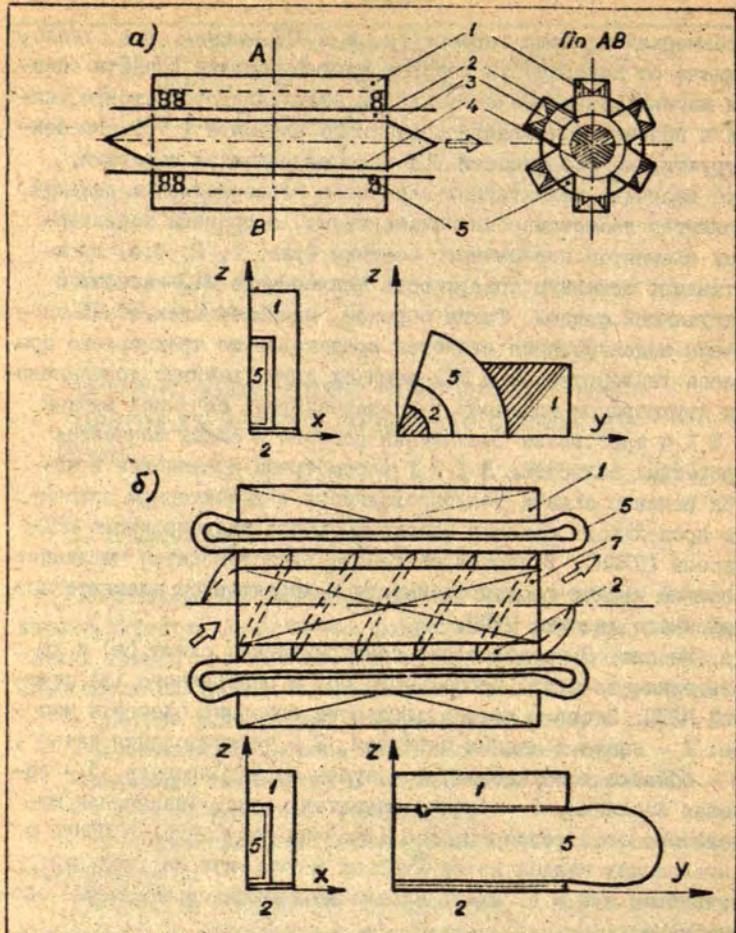


Рис. I. Конструктивные схемы и характерные элементы продольного и поперечного сечений ЦЛИН (а)и ВИН (б). I - магнитопровод индуктора, 2 - канал с жидким металлом, 3,4 - стенки канала, 5 - обмотка, 6 - замыкающие шины, 7 - сердечник.

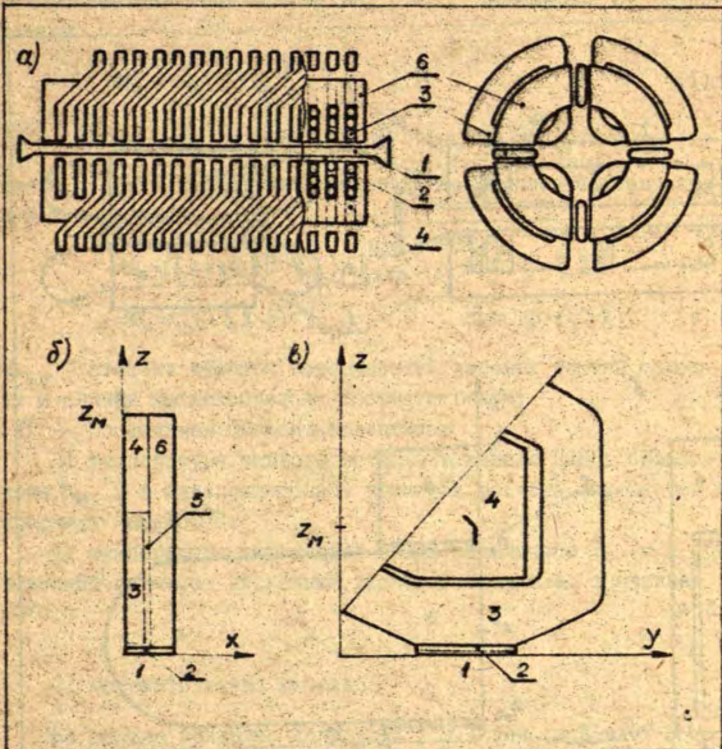


Рис. 2. Конструктивная схема (А) и характерные элементы продольного (б) и поперечного (в) сечений многоканального индукционного насоса (МИН). I - канал с жидким металлом, 2 - теплоизоляция канала, 3 - обмотка, 4 - магнитопровод, 5 - пазовая изоляция, 6 - прокладка.

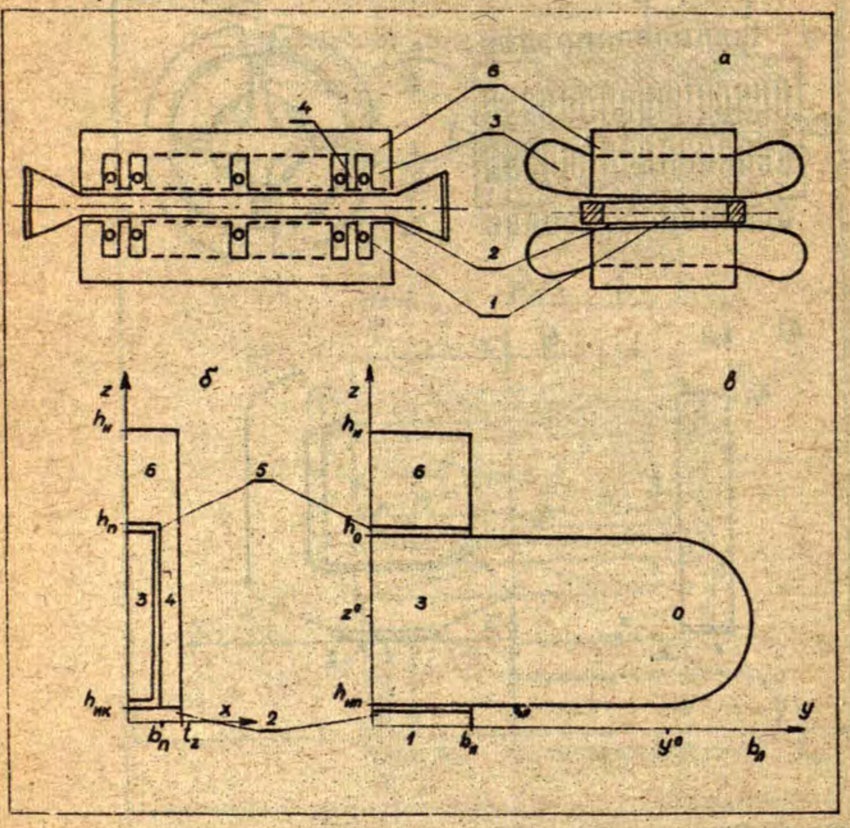


Рис. 3. Конструктивная схема (а) и характерные элементы продольного (б) и поперечного (в) сечений ПЛИН. I - канал с жидким металлом, 2 - теплоизоляция канала, 3 - обмотка, 4 - зубец магнитопровода, 5 - пазовая изоляция, 6 - спинка магнитопровода.

2) теплообмен поверхности ПЛИН с окружающей средой описывается отдельно конвекцией и излучением и представляется коэффициентами теплоотдачи $\varkappa_к$, $\varkappa_и$, зависящими от температуры

$$\varkappa_к = \varkappa_0(t-t_0)^{\beta}, \qquad (1)$$

$$\varkappa_и = \varepsilon_{\lambda,м}\,\sigma[(t+273,16)^4-(t_0+273,16)^4]/(t-t_0), \qquad (2)$$

где $\varkappa_0$, β - параметры локального коэффициента конвективной теплоотдачи

$$\varkappa_0=(1,4+1,5\cdot10^{-3}t_{ср})/l_{хар}^{0,25} \quad \text{при } \beta=0,25 \qquad (3)$$

$$\varkappa_0=(1,6+3,8\cdot10^{-3}t_{ср}) \quad \text{при } \beta=0,33 \qquad (4)$$

$\varepsilon_{\lambda,м}$ - степени черноты поверхностей лобовых частей обмотки и спинки магнитопровода соответственно;

σ - постоянная Стефана-Больцмана;

3) температура жидкого металла в канале ПЛИНа обозначена $t_м$ и в нижеприведённых примерах расчёта изменяется в пределах 200-800°С;

4) температура окружающей среды обозначена t_0 и в приведённых примерах численных расчётов принимает значение 20°С.

2. Математическая модель

На основе принятых допущений [8] для расчётной области характерного элемента поперечного сечения ПЛИН (рис. 3,в) ставится задача теплопроводности с разрывными коэффициентами, отдельно для прямоугольных подобластей и для полукруга:

$$c_v\frac{\partial t}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\frac{\partial t}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z\frac{\partial t}{\partial z}\right)+K_з j\rho_0(1+\alpha t),$$

$$t=t(y,z,\tau);\ 0\le y\le y^0;\ 0\le z\le h_и;\ 0\le\tau\le\tau_{стац},$$

$$t\big|_{\tau=0}=t_н(y,z);\ t\big|_{\substack{z=0\\0\le y\le b_и}}=t_м,$$

$$\lambda_y \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{\substack{y=0\\ z>0}} = 0, \quad \lambda_y \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{\substack{y=b_{и}\\ 0<z\leq h_{ип}}} = 0,$$

$$\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{\substack{z=h_{ип}\\ b_{и}<y<y_0}} = \varkappa_0 (t\Big|_{\substack{z=h_{ип}\\ b_{и}<y<y^0}} - t_0)^{1+\beta} +$$

$$+ \varepsilon\sigma[(t\Big|_{\substack{z=h_{ип}\\ b_{и}<y<y^0}} + 273{,}16)^4 - (t_0 + 273{,}16)^4], \tag{5}$$

$$-\lambda_y \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{\substack{y=b_{и}\\ h_0<z<h_{и}}} = \varkappa_0 (t\Big|_{\substack{y=b_{и}\\ h_0<z<h_{и}}} - t_0)^{1+\beta} +$$

$$+ \varepsilon\sigma[(t\Big|_{\substack{y=b_{и}\\ h_0<z<h_{и}}} + 273{,}16)^4 - (t_0 + 273{,}16)^4],$$

$$-\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{\substack{z=h_0\\ b_{и}\leq y<y^0}} = \varkappa_0 (t\Big|_{\substack{z=h_0\\ b_{и}\leq y<y^0}} - t_0)^{1+\beta} +$$

$$+ \varepsilon\sigma[(t\Big|_{\substack{z=h_0\\ b_{и}\leq y<y^0}} + 273{,}16)^4 - (t_0 + 273{,}16)^4],$$

$$-\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{\substack{z=h_{и}\\ 0\leq y\leq b_{и}}} = \varkappa_0 (t\Big|_{\substack{z=h_{и}\\ 0\leq y\leq b_{и}}} - t_0)^{1+\beta} +$$

$$+ \varepsilon\sigma[(t\Big|_{\substack{z=h_{и}\\ 0\leq y\leq b_{и}}} + 273{,}16)^4 - (t_0 + 273{,}16)^4].$$

Задача теплопроводности в полярной системе координат для области полукруга с центром в точке $O(y^0, z^0)$ (рис. 3.в) имеет следующий вид:

$$C_v \frac{\partial t_k}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda_r \cdot r \frac{\partial t_k}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}(\lambda_\varphi \frac{\partial t_k}{\partial \varphi}) +$$

$$+ K_{\partial} j^2 \rho_0 (1 + \alpha t_k) - K_p \varkappa_0 (t_k - t_0)^{1+\beta},$$

$$t_k = t_k(r, \varphi, \tau), \quad 0 \leq r \leq h_{л} - y^0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \tag{6}$$

$$0 \leq \tau \leq \tau_{стац}, \quad t_k\big|_{\tau=0} = t_{н}(r, \varphi),$$

$$-\lambda_r \frac{\partial t_k}{\partial r}\Big|_{r=h\lambda-y^0} = \varkappa\left(t_k\big|_{r=h\lambda-y^0} - t_0\right)^{1+\beta} +$$

$$+\varepsilon\sigma\left[\left(t_k\big|_{r=h\lambda-y^0} + 273{,}16\right)^4 - \left(t_0 + 273{,}16\right)^4\right].$$

На границе соприкосновения двух подобластей (y^0 , $h_{un} < z < h_0$), разделение которых имеет чисто геометрический характер, а физические свойства не изменяются и тепловой контакт является идеальным, ставятся условия сопряжения:

$$t\Big|_{\substack{y=y^0 \\ h_{un}\le z<z^0}} = t_k\Big|_{\substack{\varphi=-\frac{\pi}{2} \\ r>0}}, \quad \lambda_y \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{\substack{y=y^0 \\ h_{un}\le z<z^0}} = \lambda_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial t_k}{\partial \varphi}\Big|_{\substack{\varphi=-\frac{\pi}{2} \\ r>0}};$$

$$t\Big|_{\substack{y=y^0 \\ z=z^0}} = t_k\Big|_{r=0}, \quad \lambda_y \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{\substack{y=y^0 \\ z=z^0}} = \lambda_r \frac{\partial t_k}{\partial r}\Big|_{r=0}, \tag{7}$$

$$t\Big|_{\substack{y=y^0 \\ z^0<z\le h_0}} = t_k\Big|_{\substack{\varphi=\frac{\pi}{2} \\ r>0}}, \quad \lambda_y \frac{\partial t}{\partial y}\Big|_{\substack{y=y^0 \\ z^0<z\le h_0}} = \lambda_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial t_k}{\partial \varphi}\Big|_{\substack{\varphi=\frac{\pi}{2} \\ r>0}}.$$

Представленные задачи теплопроводности (5)-(7) являются нелинейными по всем признакам или классам нелинейных задач [10]: от температуры зависят коэффициенты c_v, λ функции плотности источника тепла и параметры граничных условий. Так как задача (5)-(7) может быть решена только численно, то для обеспечения сходимости итерационного процесса необходимо линеаризовать функции плотности источника тепла и плотности потоков теплоотдачи. Согласно результатам теоретических исследований [10] нелинейная задача приведённого типа имеет единственное решение, если выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \le 0, \quad \frac{\partial q_\varkappa}{\partial t} \ge 0 \tag{8}$$

для всех значений температур из области решения задач (5)-(7), где $f = K_3 j^2 \varrho_0 (1+\alpha t) - K_p \varkappa_0 (t-t_0)^{1+\beta}$,

f - плотность источника тепла,

$q_{\varkappa} = \varkappa_0 (t-t_0)^{1+\beta} + \varepsilon\sigma[(t+273,16)^4 - (t_0+273,16)^4]$,

$q_{\varkappa}$ - плотность потока теплоотдачи на границах области.

В [II, I2] приведено несколько способов линеаризации граничных условий радиационно-конвективного теплообмена, но преимущественно для значений температур поверхности t_n, близких к температуре окружающей среды $t_n \geqslant t_0$.

Для значений температур поверхности $t_n \geqslant 2t_0$ в настоящей работе предлагается линеаризация функции f и $q_{\varkappa}$ разложением в ряд Тейлора вблизи точки $t^{(n+1)} - t^{(n)} = 0$, где $t^{(n)}$ значения температуры в предыдущей итерации.

Функция плотности источника тепла $f(t)$ линеаризуется следующим образом $(t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t^{(n+1)})$

$$f(t^{(n+1)}) = f(t^{(n)}) - \frac{d f(t^{(n)})}{dt} \Delta t^{(n+1)} = \tag{9}$$

$$= \gamma^{(n)} - \eta^{(n)} \cdot t^{(n+1)},$$

где $\gamma^{(n)} = K_3 j^2 \varrho_0 (1+\alpha t^{(n)}) - K_p [\varkappa_0 (t^{(n)} - t_0)^{1+\beta} +$

$$+ [K_3 j^2 \alpha \varrho_0 - K_p (1+\beta)(t^{(n)} - t_0)^{\beta}] \cdot t^{(n)},$$

$$\eta^{(n)} = K_3 j^2 \varrho_0 \alpha - K_p [(1+\beta)\varkappa_0 (t^{(n)} - t_0)^{\beta}].$$

Для частного случая решения стационарной задачи (6) при $\eta^{(n)}$ или принимается, что $\eta^{(*)} = 0$, или стабилизируется знак $\eta^{(*)}$ аналогично [9].

Аналогичным образом линеаризуется функция плотности потока теплоотдачи $q_{\varkappa} = (t^{(n+1)} = t^{(n)} + \Delta t^{(n+1)})$ при значении

$$q_{\varkappa}(t^{(n+1)}) = q_{\varkappa}(t^{(n)}) + \frac{d q_{\varkappa}(t^{(n)})}{dt} (t^{(n+1)} - t^{(n)}) =$$

$$= \mu^{(n)} + \nu^{(n)} \cdot t^{(n+1)}, \tag{10}$$

где

$$\mu^{(n)} = \varkappa_0 (t^{(n)} - t_0)^{1+\beta} + \varepsilon\sigma [(t^{(n)} + 273{,}16)^4 -$$

$$-(t_0 + 273{,}16)^4] - [(1+\beta)\varkappa_0 (t^{(n)} - t_0)^{\beta} +$$

$$+ 4\varepsilon\sigma (t^{(n)} + 273{,}16)^3] t^{(n)},$$

$$\vartheta^{(n)} = (1+\beta)\varkappa_0 (t^{(n)} - t_0)^{\beta} + 4\varepsilon\sigma (t^{(n)} + 273{,}16)^3.$$

Задачи теплопроводности (5)-(7) в линеаризованной форме для расчётной области характерного элемента поперечного сечения ПЛИН представляются следующим образом (n - номер итерации):

$$c_v^{(n)} \frac{\partial t^{(n+1)}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y^{(n)} \frac{\partial t^{(n+1)}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z^{(n)} \frac{\partial t^{(n+1)}}{\partial z}\right) -$$

$$- \eta^{(n)} \cdot t^{(n+1)} + \gamma^{(n)},$$

$$t^{(n+1)} = t^{(n+1)}(y, z, \tau), \; 0 \le z \le h_ш, \; 0 \le y \le y^0, \; 0 \le \tau \le \tau_{стац}, \qquad (II)$$

$$t^{(0)}\Big|_{\tau=0} = t_н(y, z), \; t^{(n+1)}\Big|_{z=0} = t_н,$$

$$\lambda_y^{(n)} \frac{\partial t^{(n+1)}}{\partial y}\Big|_{\substack{y=0 \\ z>0}} = 0, \; \lambda_y^{(n)} \frac{\partial t^{(n+1)}}{\partial y}\Big|_{\substack{y=b_ш \\ 0 \le z \le h_{шп}}} = 0,$$

$$-\lambda_y^{(n)} \frac{\partial t^{(n+1)}}{\partial y}\Big|_{\substack{y=b_ш \\ 0 \le z \le h_ш}} = \vartheta^{(n)} t^{(n+1)} + \mu^{(n)},$$

$$+\lambda_z^{(n)} \frac{\partial t^{(n+1)}}{\partial z}\Big|_{\substack{z=h_{шп} \\ b_ш < y < y^0}} = \vartheta^{(n)} t^{(n+1)} + \mu^{(n)},$$

$$-\lambda_z \frac{\partial t^{(n+1)}}{\partial z}\Big|_{\substack{z=h_ш \\ 0 \le y \le b_ш}} = \vartheta^{(n)} t^{(n+1)} + \mu^{(n)};$$

$$-\lambda_z \frac{\partial t}{\partial z}\Big|_{\substack{z=h_0 \\ b_ш \le y < y^0}} = \vartheta^{(n)} t^{(n+1)} + \mu^{(n)};$$

$$c_v^{(n)} \frac{\partial t_k^{(n+1)}}{\partial \tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_r^{(n)} \frac{\partial t_k^{(n+1)}}{\partial r} r\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda_\varphi^{(n)} \frac{\partial t_k^{(n+1)}}{\partial \varphi}\right) - \eta^{(n)} \cdot t_k^{(n+1)} + \gamma^{(n)}, \qquad (12)$$

$$t_k^{(n+1)} = t_k^{n+1}(r,\varphi,\tau),\ 0 \le r \le h_\lambda - y^0,\ -\frac{\varphi}{2} \le \varphi \le \frac{\varphi}{2},$$

$$0 \le \tau \le \tau_{стац},\ t_k^{(0)}\Big|_{\tau=0} = t_H(r,\varphi),$$

$$-\lambda_r \frac{\partial t_k^{(n+1)}}{\partial r}\Big|_{r=h_\lambda - y^0} = \vartheta^{(n)} t_k^{(n+1)} + \mu^{(n)};$$

Условия сопряжения в линеаризованном виде представляются следующим образом:

$$t^{(n)}\Big|_{\substack{y=y^0 \\ h_{шл} \le z < z^0}} = t_k^{(n)}\Big|_{\substack{\varphi=-\frac{\varphi}{2} \\ r>0}},\ \lambda_y^{(n)} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial y}\Big|_{\substack{y=y^0 \\ h_{шл} \le z < z^0}} = \lambda_\varphi^{(n)} \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial t_k^{(n)}}{\partial \varphi}\Big|_{\substack{\varphi=-\frac{\varphi}{2} \\ r>0}}, \qquad (13)$$

$$t^{(n)}\Big|_{\substack{y=y^0 \\ z=z^0}} = t_k^{(n)}\Big|_{r=0},\ \lambda_y^{(n)} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial y}\Big|_{\substack{y=y^0 \\ z=z^0}} = \lambda_r^{(n)} \frac{\partial t_k^{(n)}}{\partial r}\Big|_{r=0},$$

$$t^{(n)}\Big|_{\substack{y=y^0 \\ z^0 < z \le h_0}} = t_k^{(n)}\Big|_{\varphi=\frac{\varphi}{2}},\ \lambda_y^{(n)} \frac{\partial t^{(n)}}{\partial y}\Big|_{\substack{y=y^0 \\ z^0 < z \le h_0}} = \lambda_\varphi^{(n)} \frac{1}{r}\frac{\partial t_k^{(n)}}{\partial \varphi}\Big|_{\substack{\varphi=\frac{\varphi}{2} \\ r>0}}.$$

3. Численное решение задачи теплопроводности

Для областей расчёта распределёния температуры в характерных элементах поперечного сечения МГД-насосов (рис. I, 2, 3) свойственны составные границы с окружающей средой. На основании этого для численного решения задач теплопроводности (II)-(I3) выбран метод конечных элементов [I3, I4]. В области расчёта температурного поля вводится конечно-элементная сетка (рис. 4.а). В качестве двухмерного симплекс-элемента здесь выбран треугольник с вершинами i, j, k (рис. 4.б). Используются следующие обозначения, применяемые в [I3, I4]:

$t_i, t_j, t_k, \{t\}$ – значения температур в вершинах e-го треугольника и вектор значений температур в узлах сетки,

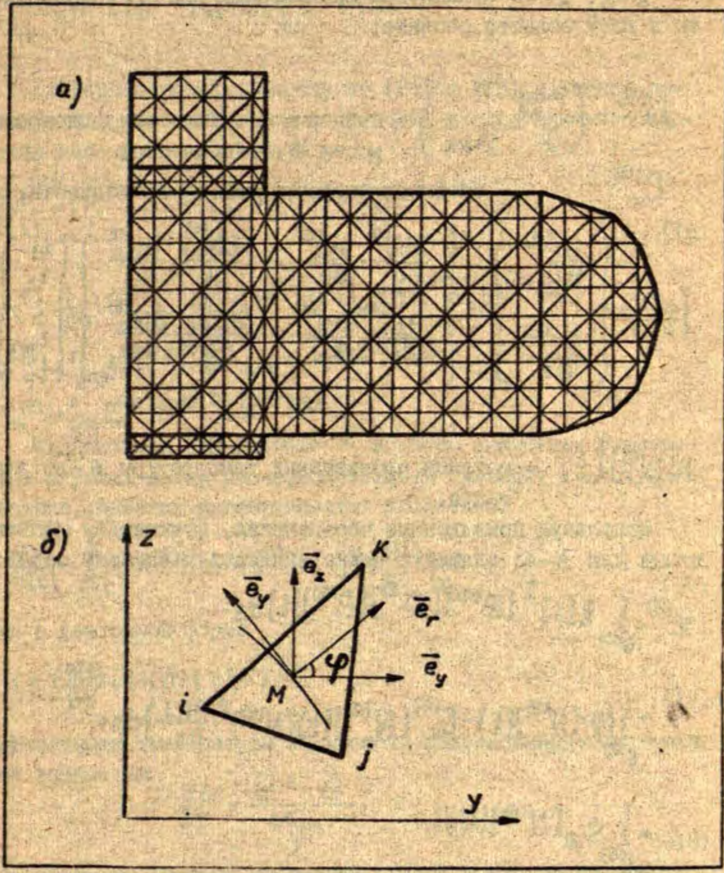


Рис. 4. Конечно-элементная сетка расчётной области (а) и пример введения локальной системы координат для элементов подобластей с полярной симметрией (б).

N_i, N_j, N_k - функции формы e -го элемента,

$\chi^{(e)}, \chi$ - функционал минимизации для e -го элемента и всей области расчёта,

$D^{(e)} = \begin{pmatrix} \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & \lambda_{zz} \end{pmatrix}$ - тензор коэффициентов теплопроводности e -го элемента,

$C_v^{(e)}$ - объёмная теплоёмкость e -го элемента,

$$\{g^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial t^{(e)}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial t^{(e)}}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{\partial y}, \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial N_{p-1}^{(e)}}{\partial y}, \dfrac{\partial N_p^{(e)}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{\partial z}, \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{\partial z}, \ldots, \dfrac{\partial N_{p-1}^{(e)}}{\partial z}, \dfrac{\partial N_p^{(e)}}{\partial z} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{p-1} \\ t_p \end{Bmatrix} =$$

$= [B^{(e)}]\{t\}$ - матрица производных температуры e -го элемента.

Используя приведённые обозначения, функционал минимизации для e -го элемента можно записать следующим образом:

$$\chi^{(e)} = \int\limits_{S^{(e)}} \tfrac{1}{2}\{t\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}][B^{(e)}]\{t\}\, ds -$$

$$- \int\limits_{S^{(e)}} [f \cdot [N^{(e)}]\{t\} - C_v^{(e)} [N^{(e)}]\{t\}[N^{(e)}]^T \cdot \frac{\partial\{t\}}{\partial\tau}]\, ds + \tag{14}$$

$$+ \int\limits_{L^{(e)}} q_{\varkappa} [N^{(e)}]\{t\}\, dl,$$

где в случае радиационно-конвективного теплообмена (граничные условия третьего рода) последний слагаемый выражения (14) имеет вид:

$$\int\limits_{L^{(e)}} q_{\varkappa} [N^{(e)}]\{t\}\, dl =$$

$$= \int\limits_{L^{(e)}} \frac{1}{2}\varkappa_c\{t\}^T[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]\{t\}\,dl - \qquad (15)$$

$$- \int\limits_{L^{(e)}} \varkappa_c \cdot t_0 [N^{(e)}]\{t\}\,dl + \int\limits_{L^{(e)}} \frac{1}{2}\varkappa_c t_0^2\,dl.$$

Дифференцирование выражений (I4) и (I5) и запись результата в компактной форме приводит к следующему соотношению для e-го элемента

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial\{t\}} = [K^{(e)}]\{t\} + \{f^{(e)}\} - [C_v^{(e)}]\frac{\partial\{t\}}{\partial\tau}, \qquad (16)$$

где

$$[K^e] = \int_{S^{(e)}} [B^{(e)}]^T[D^{(e)}][B^{(e)}]\,ds + \int_{L^{(e)}} \varkappa_c [N^{(e)}]^T[N^{(e)}]\,dl,$$

$$[f^{(e)}] = \int_{S^{(e)}} f [N^{(e)}]^T ds - \int_{L^{(e)}} \varkappa_c t_0 [N^{(e)}]^T dl,$$

$$[C_v^{(e)}] = \int_{S^{(e)}} C_v^{(e)} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}]\,ds.$$

Минимизация функционала χ по всем значениям температуры в узлах сетки расчётной области приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial \chi}{\partial\{t\}} = \sum_{e=1}^{E}\left([K^{(e)}]\{t\} + [f^{(e)}] + [C_v^{(e)}]\frac{\partial\{t\}}{\partial\tau}\right) = 0 \qquad (17)$$

или в векторной форме

$$[C]\frac{\partial\{t\}}{\partial\tau} + [K]\{t\} + \{F\} = 0. \qquad (17.a)$$

Производная температуры по времени аппроксимируется конечной разностью

$$\frac{\partial t}{\partial\tau} = \frac{t^{j+1} - t^j}{\Delta\tau_{j+1}}, \qquad (18)$$

что приводит систему уравнений (I7.а) к следующему виду:

$$\left\{[C]\cdot\frac{1}{\Delta\tau_{j+1}} + \sigma_0([K] + \{F\})\right\}\{t\}^{j+1} = \qquad (19)$$

$$= (1 - \sigma_0)\left\{[K] + \{F\} + [C]\frac{1}{\Delta\tau_{j+1}}\right\}\cdot\{t\}^j,$$

где σ_0 - параметр разностной схемы [I3].

Область расчёта температурного поля в характерных элементах поперечных сечений МГД-машин содержит элементы с сильно выраженной анизотропией теплопроводности, которая сохраняется и в подобластях с полярной симметрией. В этих подобластях вводятся локальные системы координат, совпадающие с полярной системой координат. В локальной системе координат тензор теплопроводности e -го элемента имеет только главные составляющие $\lambda_{rr}, \lambda_{\varphi\varphi}$. В глобальной системе координат, совпадающей с системой координат Декарта, для каждого рассматриваемого треугольного элемента находятся главные составляющие тензора теплопроводности $\lambda_{yy}, \lambda_{zz}$.

В качестве примера рассмотрим соотношения для расчёта $\lambda_{yy}, \lambda_{zz}$ некоторого треугольного элемента подобласти полукруга (рис. 4.б):

$$\lambda_{yy} = \lambda_{rr} \cos\varphi - \lambda_{\varphi\varphi} \sin\varphi$$

$$\lambda_{zz} = \lambda_{rr} \sin\varphi + \lambda_{\varphi\varphi} \cos\varphi \qquad (20)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{y} - y^0}{\bar{z} - z_0}\right),$$

$$\bar{y} = \frac{y_i + y_j + y_k}{3}, \quad \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_k}{3},$$

где $\bar{y}, \bar{z}$ - координаты центра тяжести рассматриваемого элемента.

Система линейных алгебраических уравнений (I9) в временном слое решается методом Гаусса-Зейделя и представляет решение линеаризованной задачи теплопроводности (II)-(I3). Система нелинейных алгебраических уравнений решается итерационным методом нижней релаксации (значение итерационного параметра $\omega_н$ =0,73).

Критерием сходимости для каждого итерационного этапа выбрано следующее соотношение

$$\max_{i,j} \frac{t_{i,j}^{(n+1)} - t_{i,j}^{(n)}}{t_{i,j}^{n+1}} \leq \varepsilon^0, \qquad (21)$$

где n - номер итерации, ε° - заданный параметр.

4. Примеры численного расчёта и анализ погрешности аппроксимации

Для случая аппроксимации уравнений с частными производными конечными разностями доказано, что погрешность при измельчении сетки убывает как некоторая степень шага сетки. Чтобы применить этот процесс на практике в ситуации, когда точное решение неизвестно , необходимо изучить сходимость решения задачи при измельчении сеток. Погрешность аппроксимации решения с вторым порядком приближённо оценивается экстраполяционным соотношением Ричардсона [I5]

$$\frac{\varphi-\varphi_1}{\varphi-\varphi_2} = \frac{(\Delta x_1)^2}{(\Delta x_2)^2}, \tag{22}$$

где φ - точное решение задачи,

φ_1 - конечно-разностное решение на сетке с шагом Δx_1,

φ_2 - конечно-разностное решение на сетке с шагом Δx_2.

При конечно-элементной аппроксимации уравнений с частными производными измельчение количественно характеризуется введением понятия диаметра e -того элемента [I6]:

$$\delta_e = \max_{i,j} |\bar{x}_i^{(e)} - \bar{x}_j^{(e)}|, \tag{23}$$

где $\bar{x}_i^{(e)}, \bar{x}_j^{(e)}$ - любые точки e -того элемента.

Если измельчение конечно-элементной сетки регулярно и равномерно, то последовательность решений $\{\varphi^{(n)}\}$ сходится и справедлива оценка [I6] .

$$\|\varphi - \varphi_e^{(n)}\|_L \leqslant M \cdot \delta_e, \tag{24}$$

$$\|\varphi - \varphi^{(n)}\|_L = \int_a^b \frac{d(u-v)}{dx} \leqslant (b-a) \cdot \max \left|\frac{d(u-v)}{dx}\right|.$$

Если в качестве симплекс-элемента выбран треугольник, то частная производная $\partial\varphi/\partial x$ является постоянной [I3] и выражается через узловые значения решения φ_i, φ_j, φ_k. Следовательно аналог экстраполяционного соотношения Ричардсона для конечно-элементной аппроксимации может быть представлен в следующем виде:

$$\frac{\varphi^{(e)}-\varphi_1^{(e)}}{\varphi^{(e)}-\varphi_2^{(e)}}=\frac{\delta e^1}{\delta e^2}. \qquad (25)$$

Величина погрешности аппроксимации для решения предложенной задачи теплопроводности определена согласно (25) на основе результатов решения задачи (II)-(I3) на двух конечно-элементных сетках N_1 = I76 точек (278 элементов) и N_2 = 32I (544 элементов), где $\delta_{max1} \approx 2\,\delta_{max2}$.

На рис. 5 представлены результаты в трёх тепловых режимах для обоих значений точек сетки N_1 и N_2. Приближённый анализ согласно (25) показывает, что погрешность аппроксимации для конечно-элементной сетки с меньшим N_1 для рассмотренных режимов находится в пределах 2-3% от значения теоретически точного решения $\varphi^{(e)}$.

Численные расчёты представленных примеров (рис. 5) выполнены для следующих конструктивных и теплофизических параметров ПЛИН:

- высота индуктора $h_и$ = I00 мм, высота паза $h_п$ = 54 мм, зубцовый шаг t_z = 25 мм, ширина зубца b_z = I2 мм, полуширина индуктора $b_и$ = 45 мм, высота вылета лобовых частей обмотки $b_л$ = I87 мм, толщина теплоизоляции канала $h_{ик}$ = 3 мм, толщина изоляции $h_{ип}$ = 2 мм;

- теплопроводность кремнийорганической изоляции канала и паза $\lambda_{ик}=\lambda_{ип}$ = 0,2 Вт/м·К, теплопроводность стали пакета спинки λ_{cz} = 30 Вт/м·К, теплопроводность магнитопровода поперёк листа стали λ_{cy} = 3 Вт/м·К, теплопроводность меди провода обмотки $\lambda_{ов}=\lambda_{оу}=\lambda_{оф}$ = 390 Вт/м·К, поперечная теплопроводность обмотки $\lambda_{ол}=\lambda_{оz}=\lambda_{оr}=\lambda_1+\lambda_2\cdot t$, где λ_1 = = 0,8 Вт/м·К, λ_2 = 0,0005 Вт/м·К^2;

- параметры конвективной теплоотдачи (3)-(4) $\varkappa_0$ = 2,7, β = 0,25, средняя степень черноты поверхности (2) ε = = 0,6.

В качестве начального приближения для расчёта стационарного распределения температуры принимается температура жидкого металла $t_{мет.}$ соответствующего режима. Время счёта на ЭВМ ЕС-I022 для варианта конечно-элементной сетки с N_1 = I76 приближённо I мин (20-25 итераций для решения си-

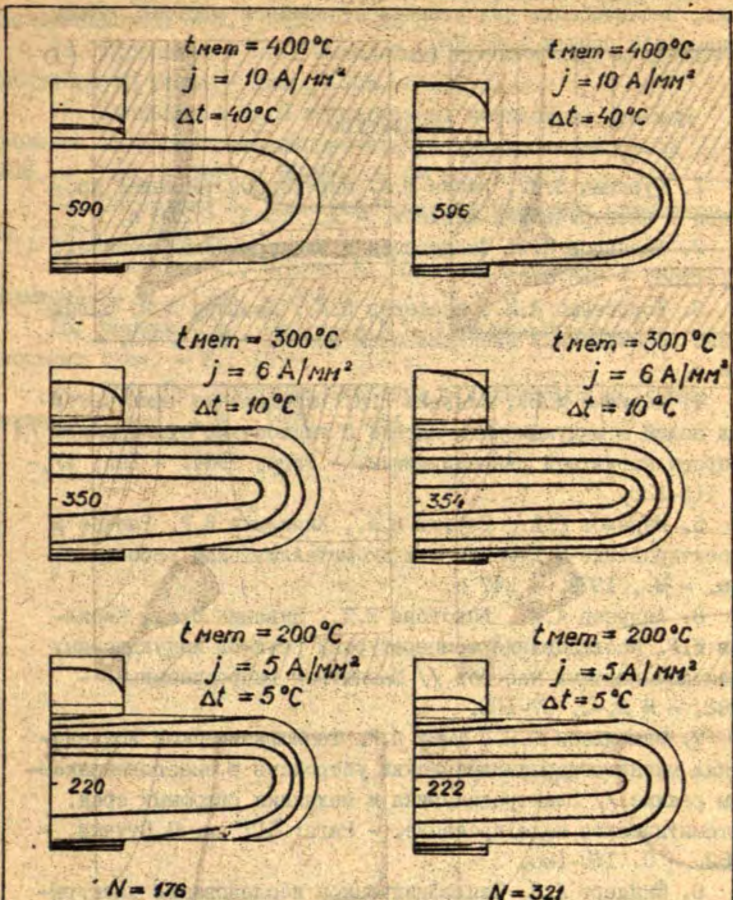


Рис. 5. Результаты расчёта тепловых режимов в характерном элементе поперечного сечения ПЛИН для двух значений числа точек конечно-элементной сетки $N = 176$ и $N = 321$.

стемы линейных алгебраических уравнений методом Гауса-Зейделя, 3-4 итерации для решения нелинейной задачи), объём занимаемой памяти - 90 Кб.

Литература

I. Гуревич Э.И., Рыбин Ю.Л. Переходные тепловые процессы в электрических машинах. - Л., I983. - 2I6 с.

2. Филиппов И.Ф. Теплообмен в электрических машинах. - Л., I986. - 256 с.

3. Борисенко А.И., Костиков О.Н., Яковлев А.И. Охлаждение промышленных электрических машин. - М., I983. - 296 с.

4. Абрицка М.Ю., Клявинь Я.Я. Определение температурных полей в индукционном насосе с жидкостным охлаждением // Вопросы магнитной гидродинамики. - Рига, I964. - Вып. IУ.- С. II5-I20.

5. Баранов Г.А., Глухих В.А., Кириллов И.Р. Расчёт и проектирование МГД-машин с жидкометаллическим рабочим телом. - М., I978. - 247 с.

6. Андреев А.М., Болотова Е.Д., Диванин В.А., Кириллов И.Р. Исследование температурных режимов индукционных электромагнитных насосов // Магнитная гидродинамика. - I982. - № 2.-С. 97-I02.

7. Микельсон Ю.Я., Шмит Я.Р. Теплофизическое исследование магнитогидродинамических устройств в энергонапряжённом режиме // Электродинамика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки. - I982. - С. I68-I80.

8. Шнидере Л.Я. Теплофизическое исследование электрических машин в энергонапряжённых режимах работы // Техническая электродинамика. - I986. - № 4. - С. 77-82.

9. Шнидере Л.Я. Численное моделирование стационарных температурных полей в плосколинейном индукционном МГД-насосе // Моделирование физических процессов в сплошных средах. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки. - I985. - С. 83-94.

10. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. - М., 1983. - 328 с.

11. Березовский А.А. Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. - Киев, 1986. - 165 с.

12. Галканов А.И. О линеаризации нелинейных краевых условий в теории радиационно-кондуктивного теплообмена // ИФЖ. - 1985. - Деп. в ВИНИТИ 21.08.85, № 6201.

13. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М., 1979. - 392 с.

14. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. - М., 1986. - 318 с.

15. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности разностных схем. - М., 1979. - 315 с.

16. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. - М., 1976. - 464 с.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 44-67

УДК 517.93:621.313.53

Р.А.Валдмане, Л.Я.Улманис
Ин-т физики АН ЛССР

ИССЛЕДОВАНИЯ СКОРОСТНЫХ СТРУКТУР В КАНАЛАХ ИНДУКЦИОННЫХ МГД-МАШИН

<u>Введение</u>. Структура турбулентного скоростного потока в канале индукционных МГД-машин и явления, связанные с такой структурой, имеют важное значение в работе таких машин. Эти явления пока ещё недостаточно исследованы. Это объясняется тем, что уравнения для турбулентного потока нелинейны и их решение представляет большие трудности не только аналитически, но даже численно.

Опубликован ряд работ, авторы которых решали эту задачу в приближении ламинарного потока жидкости в каналах индукционных МГД-машин. Однако эти работы не отражают существенные черты турбулентных потоков. К тому же, аналитические решения громоздки и требуют дополнительных расчётов на ЭВМ, которые подчас сложнее, чем прямой расчёт дифференциальных уравнений на ЭВМ.

Сложность точного решения задачи требует создания по возможности простых математических моделей, решение которых было бы относительно просто и которые учитывали бы существенные черты турбулентных МГД-потоков.

Одной из таких моделей является одномерная турбулентная модель (ОТМ) [1-3], которая рассматривается в настоящей статье. Исследования ОТМ проводились многими авторами. Однако в настоящей статье будут рассматриваться в основном расчёты, выполненные в Институте физики АН ЛатвССР.

Методика расчёта. ОТМ можно вывести из хорошо известной системы основных уравнений магнитной гидродинамики с учётом следующих допущений:

I) МГД-машина является бесконечно длинной (координата x, рис. I).

2) Все физические величины постоянны по толщине слоя металла (координата z).

3) Электромагнитные величины меняются синусоидально по координате x.

4) Турбулентные пульсации усредняются в пространстве и времени.

5) Поток жидкого металла в канале разделён на n полос, причём локальные характеристики потока рассчитываются по отдельным полосам, а интегральные характеристики суммируются по полосам.

6) Давление по ширине канала постоянно.

7) В каждой полосе выполняется баланс давлений

$$p_э = p_н + p + \sum_{i=1}^{N} p_i, \qquad (I)$$

где $p_э$ - давление, развиваемое электромагнитной силой, $p_н$ - гидравлические потери в канале, p - внешнее давление, p_i - добавочные давления от концевых эффектов.

8) Гидравлические потери $p_н$ пропорциональны квадрату скорости в каждой полосе и рассчитываются по формуле Блазиуса

$$p_н = \frac{\lambda \rho l v^2}{2 D_н}, \qquad (2)$$

где λ - коэффициент гидравлического сопротивления, ρ - плотность жидкого металла, l - длина канала МГД-машины, $D_н$ - гидравлический радиус, v - скорость жидкого металла.

Баланс давлений в формуле (I) записан в наиболее общей форме.

При помощи p_i можно и в ОТМ приближённо учитывать эффекты, возникающие от конечной длины МГД-машины. Для этого, однако, необходимы формулы для расчёта p_i, создаваемого соответствующим эффектом, и этот p_i необходимо распределить равномерно по длине канала. Учёт соответствующего концевого эффекта может улучшать результаты расчёта. При этом, однако, необходимо дополнительно оценить влияние такого учёта как на интегральные, так и на локальные характеристики МГД-машины, сравнивая результаты расчёта с экспериментом.

В расчётах некоторых МГД-машин, приведённых в данной работе, учитывалась перестройка профиля по длине канала. При этом принималось, что у входа в канал профиль скорости v_0 однородный и энергия, используемая при перестройке профиля, переходит в тепло как при вязком ударе. Такой вязкий удар фактически осуществляется при выходе жидкого металла из канала.

Силы, противодействующие перестройке, инерционны и в разных полосах имеют разные знаки в зависимости от того, ускоряется жидкость или замедляется. Для давления p_u, создаваемого инерционными силами перестройки, имеем [I]

$$p_u = \kappa_1 \frac{\rho}{2} \left(|v| v - v_0^2 \right) \tag{3}$$

$v_0 \geq 0$. $v_0 = 0$ означает, что жидкий металл поступает в канал из большого резервуара. Вообще $0 < \kappa_1 < 1$. $\kappa_1 = 1$ означает вязкий удар (вся энергия превращается в тепло), а $\kappa_1 = 0$ - упругий удар. При $\kappa_1 = 0$ p_u не влияет на расчёт.

Преобразуя систему уравнений Максвелла-Навье-Стокса с учётом вышеупомянутых допущений, получаем уравнения для ОТМ:

$$d^2 j / dy^2 - \alpha^2 (1 + i \varepsilon_e s(y)) j = - \frac{\alpha^3 \varepsilon s(y) B_n}{\mu}, \tag{4}$$

где j - плотность индуцированного в жидком металле электрического тока, $\alpha = \pi/\tau$, τ - полюсный шаг, $s(y)$ - локальное скольжение в полосе жидкого металла, $\varepsilon = \frac{\omega \mu \sigma}{\alpha^2}$, $\varepsilon_e = \varepsilon \frac{b}{\delta \kappa_\delta \kappa_\mu}$

$\varepsilon_e \cdot s_c = \varepsilon_e'$ - магнитное число Рейнольдса, B_n - первичная магнитная индукция, μ - магнитная проницаемость жидкого металла, ω - круговая частота, σ - электропроводность жидкого металла, $2b$ - толщина слоя жидкого металла, 2δ - высота немагнитного зазора, κ_δ - коэффициент Картера, κ_μ - коэффициент размагничивания, $i = \sqrt{-1}$.

Решая уравнение (4), получаем плотность тока j. Далее для плотности электромагнитной силы $F_э$ имеем

$$F_э = \frac{1}{2} Re(j B_n^*) \quad и \quad p_э = F_э \cdot l. \tag{5}$$

Профиль скорости определяется из баланса давлений (I) в полосе, используя соотношение Блазиуса (2)

$$v = sign\left(p_э - p - \sum_{i=1}^{N} p_i\right) \cdot \sqrt{\frac{2D_u}{\lambda \rho l} \left| p_э - p - \sum_{i=1}^{N} p_i \right|}. \tag{6}$$

Для локального скольжения $s(y)$ имеем

$$s(y) = 1 - v(y)/v_n, \tag{7}$$

где $v_n = 2\tau f$ - скорость магнитного поля, f - частота.

Уравнение (4) вместе с выражениями (5-7) в принципе можно записать в виде

$$d^2 j/dy^2 + f_1(j,y) j = f_2(j,y). \tag{8}$$

Коэффициенты f_1 и f_2 имеют вид

$$f_1(j,y) = -\alpha^2 [1 + i \varepsilon_e s(j,y)] \tag{9}$$

$$f_2(j,y) = -\frac{\alpha^3 \varepsilon B_n}{\mu} s(j,y). \tag{I0}$$

Уравнение (8) сугубо нелинейно. Нелинейность вносится скольжением s, которое определяется соотношениями (5-7) и является функцией от j и y. При этом величины j и B_n комплексны.

Нелинейные уравнения вида (8) могут решаться на ЭВМ итерационными методами. При вычислении n-той итерации в функциях f_1 и f_2 значение j берётся из n-I-вой итерации. Можно также при решении поставить дополнительные условия, например, интеграл от какой-то функции, входящей в коэффициенты f_1 и f_2, постоянный. Но тогда необходимо по ходу решения соответствующим образом менять один из параметров. Об этом будет конкретно говориться при описании способов решения уравнения (4).

Уравнение (4) вместе с выражениями (5-7) использовалось для расчёта потоков в плоских, а также в цилиндрических индукционных МГД-машинах, когда $R \gg b$ (R - радиус канала цилиндрической МГД-машины) и кривизной канала можно пренебречь.

Для уравнения (4) в общем виде можно написать смешанные граничные условия

$$A_{1,n}\, dj/dy + B_{1,n}\, j = C_{1,n}\,. \tag{II}$$

Индексы I и n означают соответственно боковые стороны канала. Можно расчёт делать также до середины канала, используя симметрию, однако это в отдельных случаях может быть ограничением. На краю плоского канала $A_{1,n}=0$, $B_{1,n}=I$, и $C_{1,n}=0$ (если нет короткозамыкающих шин). В середине плоского канала $A_n=I$ и $B_n=C_n=0$. В цилиндрическом канале $A_{1,n}=I$ и $B_{1,n}=C_{1,n}=0$.

Возможно несколько способов решения уравнений (4-7).

I) Задаётся первичная индукция B_n и внешнее давление p на МГД-машине. Получаем величину потока жидкого металла Q и соответствующую точку на $p(Q)$характеристике. Меняя p, можно рассчитать всю $p(Q)$ характеристику МГД-машины. Такой расчёт эффективен при $\varepsilon'_e < I$, где зависимость монотонна. Однако, при $\varepsilon'_e \gg I$, когда $p(Q)$ характеристика при заданном B_n имеет выраженные экстремумы, подобным способом не удаётся вычислить часть тех районов $p(Q)$ характеристик, где при одном значении p может быть несколько (обычно 3) значений Q.

2) Задаётся B_n и Q, получаем значение p на $p(Q)$ характеристике. Чтобы при расчёте Q не ускользнул от заданного значения в процессе итерации, необходимо его корригировать на ΔQ

$$\Delta Q = Q - 4b\int_c^a v\,dy\,. \tag{I2}$$

Меняя Q, можно рассчитать всю $p(Q)$ характеристику МГД-машины при постоянном значении первичной индукции. Этот способ является более общим.

Такой расчёт необходим для исследования некоторых свойств МГД-машины при постоянном токе. Однако практически МГД-машина работает при постоянном напряжении. Это означает, что при изменении Q магнитный поток Φ не меняется, но меняется B_n.

Оценим приближённо изменение B_n и p_v/p_I в индукционном насосе при изменении Q от синхронного значения до $Q = 0$. Тогда имеем

$$B_{no} / B_{nc} = \sqrt{1 + \varepsilon_e^2} \tag{13}$$

и при

$$s_c = 1 \qquad p_v / p_I = 1 + \varepsilon_e^2 . \tag{14}$$

Здесь индексы o и c означают значения соответствующих величин при $Q = 0$ и синхронной скорости, а индексы v и I при постоянном напряжении и токе. Выражения (13-14) являются точными при однородном профиле скорости. Из них видно, что при малых ε'_e разница между расчётами при постоянном токе и постоянном напряжении незначительна, но при больших ε'_e становится существенной. Так, например, при $\varepsilon'_e = 0,1$ $B_{no}/B_{nc} = 1,005$ и $p_v/p_I = 1,01$, а при $\varepsilon'_e = 5$, $B_{no}/B_{nc} = 5,1$ и $p_v/p_I = 26$.

При практическом расчёте надо учесть, что на эти соотношения влияет также и профиль скорости.

3) Задаются Φ и Q, а получаем p и B_n в соответствующей точке $p(Q)$ характеристики. При этом в процессе итераций необходимо делать коррекции на производительность ΔQ (12) и магнитный поток $\Delta\Phi$

$$\Delta\Phi = \Phi - 2b\int_{-a}^{a} B_c\, dy \text{, где } B_c = \tag{15}$$

$= B_n + B_u$, B_c, B_u - суммарная и вторичная индукция.

Меняя Q, можно рассчитывать всю $p(Q)$, а также $B_n(Q)$ характеристики МГД-машины. Для сравнения $p(Q)$ характеристики, рассчитанные при постоянном напряжении и токе, можно для B_n избрать любую точку на $B_n(Q)$ характеристике. Лучше, пожалуй, выбрать рабочую точку МГД-машины.

Этот способ расчёта позволяет приближённо рассчитать $p(Q)$ характеристики МГД-машины при $v = const$ независимо от значений ε'_e.

4) Задаётся магнитный поток Φ и p, а получаем Q и B_n на соответствующей точке $p(Q)$ характеристики. Меняя p, можно рассчитать всю $p(Q)$, а также $B_n(Q)$ характеристику МГД-машины. Всё же при $\varepsilon'_e \gg 1$ $p(Q)$ характеристика может быть не монотонной и тогда этим способом невозможно рассчитать $p(Q)$ в районах её экстремумов.

Третий и четвёртый способ расчёта ещё требуют практической проверки.

Для расчёта уравнения (4) применяются итерационные методы, например, метод Ньютона. В настоящей работе использовались итерации Пикара. Приведём ход расчёта согласно второму способу. Для этого запишем уравнение (4) и другие выражения для расчёта k-той итерации.

$$d^2 j_k/dy^2 - \alpha^2(1+i\varepsilon_e s_{k-1}(y))j_k = -\frac{\alpha^3 \varepsilon s_{k-1}(y)}{\mu} B_n \quad (16)$$

$$F_{эk} = 1/2\, \mathrm{Re}(j_k B_n^*) \quad (17)$$

$$p_k = p_{эk} - \frac{\lambda \varrho l}{2D_н}\int_c^a |v_{k-1}| v_{k-1}\, dy - \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{N}\int_0^a p_{i,k-1}\, dy \quad (18)$$

$$v'_k = \sqrt{2D_н/\lambda\varrho l\left(p_{эk} - p_k - \sum_{i=1}^{N} p_{i,k}\right)}\ \mathrm{sign}\left(p_{эk} - p_k - \sum_{i=1}^{N} p_{i,k}\right) \quad (19)$$

$$QF_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|v'_{k,i} - v_{k-1,i}\right| \quad (20)$$

QF - функция качества.

Если $QF_k > QF_{k-1}$, тогда $\tau_k = \tau_{k-1}/K_\tau$ (21)

K_τ - коэффициент, τ - параметр релаксации. Если k делится на K_i, тогда

$$\tau_k = \tau_{k-1}\cdot K_\tau . \quad (22)$$

Если $\tau_k < \tau_m$, тогда

$$\tau_k = \tau_{k-1}\cdot K_m , \quad (23)$$

τ_m - минимальное допустимое значение параметра релаксации, K_m - коэффициент.

Коэффициенты в выражениях (2I-23) выбираются и меняются с пульта машины в процессе итераций согласно опыту, приобретённому в расчётах таких уравнений. Таким образом, в процессе расчёта параметр релаксации автоматически устанавливается на величину, соответствующую условиям расчёта.

$$v''_K = v_{K-1} + (v'_K - v_{K-1}) \cdot \tau_K . \tag{24}$$

Далее делается коррекция на производительность Q , не допуская ухода с заданной величины:

$$v_K = v''_K + v_c - 1/a \int_0^a v''_K \, dy , \tag{25}$$

$$s_K = 1 - v_K / v_n . \tag{26}$$

Все K -тые величины рассчитаны и цикл начинается сначала для $K+1$ -ой итерации.

В поисках простой модели для развития турбулентного течения была найдена очень простая рекурентная формула для отображения пути к хаосу (6-7)

$$x_{K+1} = \lambda_\tau x_K (1 - x_K) . \tag{27}$$

Здесь K – номер "итерации" $0 \leq x_K \leq 1$. Формула (27) даёт два основных решения: $x = 0$ и $x = 1 - 1/\lambda_\tau$, при которых $x_{K+1} = x_K$. В зависимости от значения λ_τ процесс итераций может сходиться к одному из этих основных решений или вести себя по-другому. При $\lambda_\tau = 1$ формула (27) даёт $x = 0$, а при $1 \leq \lambda_\tau < 3$, $x = 1 - 1/\lambda_\tau$ (рис. 2). С дальнейшим увеличением λ_τ при $\lambda_\tau = 3$ решение начинает ветвиться. Оно сначала сдваивается, потом каждая из ветвей сдваивается и т.д. Тогда процесс итерации формулы (27) сходится к циклу, проходящему через все ветви решения. При приближении λ_τ к 4 ветвей становится бесконечно много и значения x_K распределяются равномерно в интервале (0,I), т.е. получается хаос. При $\lambda_\tau > 4$ $x = -\infty$. Ход итерации рекурентной формулы (27) похож на ход расчёта уравнения (4). Параметру λ_τ здесь соответствует магнитное число Рейнольдса ε'_e.

Уравнения (4-7) учитывают влияние профиля скорости жидкого металла на суммарную магнитную индукцию в канале. При $\varepsilon'_e < 1$ это влияние мало, расчёт быстро сходится и получаем одно решение. При $\varepsilon_e' >> 1$ и больших $\bar{a}(\bar{a} = a/\tau)$ влияние становится существенным, что приводит к ветвлению решений уравнений (4-7), а также ухудшает сходимость итераций. Могут появиться несколько зон течения противоположных направлению основного потока жидкого металла в канале. Число точек ветвления M_ℓ можно определить по формуле [5]

$$M_\ell = 2\,entier\left[(\varepsilon_e^2 - 1)/\varkappa_p\right]^{1/2},$$

где $\varkappa_p = 1/\alpha^2 R^2$.

В настоящей статье применили аппарат сходимости (20-23) для итераций по формуле (27) и получили основное решение $\lambda = 1 - 1/\lambda_\tau$ при любых значениях λ_τ. Расчёт был проделан при $1 < \lambda_\tau \leq 100$. Таким образом, основное решение было "вытащено" из хаоса.

Результаты. Малые значения магнитного числа Рейнольдса. Малыми значениями магнитного числа Рейнольдса $\varepsilon_e < 1$ характеризуются МГД-машины, работающие с относительно слабо проводящими рабочими жидкостями. Такими в основном бывают индукционные насосы для перекачки ртути и других слабо проводящих жидких металлов, а также дозаторы, вентили и другие устройства, применяемые в металлургии.

Приведём некоторые результаты исследования подобных машин.

На рис.3 приведена $p(Q)$ характеристика экспериментального ртутного насоса [2]. На оси ординат отложено давление, развиваемое насосом, к давлению при $s_c = 1$, рассчитанному в электродинамическом приближении: кривая 1 - расчёт по ОТМ, 2 - в электродинамическом приближении, 3 - в одномерном приближении, рассчитывая электромагнитную силу при $s = 1$ по всему сечению канала. На рис. 3 видно, что расчёт по ОТМ лучше всего совпадает с экспериментальными точками. Вблизи $s_c = 1$ расчёт по ОТМ даёт p выше, но в остальной части $p(Q)$ характеристики ниже, чем по обычным формулам. На рис. 4 приведены $p(Q)$ характеристики другого экспериментального насоса [8], рассчитанные по ОТМ. Они довольно хорошо согласуются с экспериментальными точками. Приведённые примеры показывают, что при малых значениях магнитного числа Рейнольдса можно с точностью, достаточной для инженерного расчёта $p(Q)$ характеристики насоса аппроксимировать прямой, рассчитанной по двум точкам по ОТМ, например, при $s_c = 1$ и значении p, близком к нулю.

На рис. 5 и рис. 6 приведены соответственно профили скоростей и электромагнитной силы в канале машины при разных значениях среднего скольжения s_c [9]. Кривые на рис. 5 по порядку нумерации соответствуют средним скольжениям $s_c = 2{,}6;\ 2{,}25;\ 1{,}76;\ 1{,}44;\ 0{,}83;\ 0{,}46;\ 0{,}19;\ -0{,}1;\ -0{,}46;\ -1{,}1;\ -1{,}44;\ -1{,}81$; а кривые рис. 6 – средним скольжениям $s_c = -0{,}46;\ -1{,}81;\ -0{,}13;\ -0{,}1;\ 0{,}19;\ 2{,}25;\ 1{,}44;\ 0{,}83$. Наибольшие градиенты скоростей наблюдаются вблизи перехода от насосного режима к тормозному. Дальнейшее увеличение противодавления вызывает уплощение профиля скорости. В генераторном режиме скорость у стенок канала становится больше скорости в середине потока. Противотечения ввиду положительного приложенного градиента давления отсутствуют (противотоки исчезают уже при $s_c > 0$, где меняет знак приложенное давление), и с продвижением в сторону отрицательных средних скольжений профиль скорости становится более пологим.

Распределение электромагнитного давления (рис. 6) при синхронной скорости однородно (электромагнитное давление равно нулю по всему сечению канала). Неоднородность увеличивается при удалении от синхронной скорости.

Все вышеописанные результаты были получены при расчёте по ОТМ без учёта перестройки профиля, т.е. при $\kappa_1 = 0$ [3].

На рис. 7 приведены распределения скорости в канале другого экспериментального насоса [4]. Кривые 1 и 2 рассчитаны соответственно с учётом и без учёта перестройки профиля скорости. Экспериментально профили скорости были измерены в разных сечениях канала по его длине. Все они занимают заштрихованную полосу. Видно, что профиль скорости, рассчитанный с учётом его перестройки, лучше согласуется с экспериментом, чем без учёта. Однако, учёт перестройки профиля при $\varepsilon_e' < 0$ мало влияет на $p(Q)$ характеристику насоса. На рис. 8 приведено КПД η, рассчитанное по формуле

$$\eta = pQ/(pQ + P_j + P_H + P_{\text{ц}}). \tag{28}$$

Здесь P_j - джоулевые потери, P_H - гидравлические потери и $P_{\text{ц}}$ - потери на перестройке профиля скорости.

$$P_j = 2bl \int_{-a}^{a} 1/\sigma \, j j^* \, dy \tag{29}$$

j - содержит как нормальные, так и тангенциальные компоненты плотности тока.

$$P_H = 2bl \int_{-a}^{a} |p(y) \, v(y)| \, dy \tag{30}$$

$$P_{\text{ц}} = 2bl \int_{-a}^{a} |p_{\text{ц}}(y) \, v(y)| \, dy. \tag{31}$$

Кривые I и 2 рассчитаны по ОТМ, кривая 3 в электродинамическом приближении. Кривая 2 рассчитана при $p_{\text{ц}} = 0$. Видно, что расчёт по ОТМ даёт КПД ниже, чем в электродинамическом приближении. Такое понижение КПД объясняется большими гидравлическими потерями из-за профиля скоростей. Учёт перестройки профиля в данном случае мало влияет на значение КПД.

Большие значения магнитного числа Рейнольдса.

Индукционными МГД-машинами с большим значением магнитного числа Рейнольдса $\varepsilon'_e \gg 1$ являются насосы, генераторы, тормозы и дросселя, в которых рабочий металл, как правило, имеет большую электропроводность (натрий, калий, литий и др.). Расчёты физических явлений в каналах таких машин намного сложнее и требуют больших методических ухищрений.

На рис. 9 приведены $p(Q)$ характеристики плоской экспериментальной МГД-машины без боковых шин, охватывающие тормозной, насосный и генераторный режимы [3, 10-11]. Штрихпунктирные кривые рассчитаны по ОТМ, а сплошные - в электродинамическом приближении с вычетом гидравлических потерь, пропорциональных квадрату средней скорости. Видно, что в насосном и генераторном режимах имеются ярко выраженные экстремумы. Резкие экстремумы наблюдаются на кривой, рассчитанной по ОТМ, а в электродинамическом приближении они более пологие.

На рис. 10 приведены рассчитанные по ОТМ профили "электромагнитных давлений" на одно полюсное деление τ и распределения скоростей при разных линейных токовых нагрузках и скольжениях. Сплошными линиями показаны распределения скоростей, а прерывистыми линиями - распределения "электромагнитных давлений" по полуширине канала. Видно, что с увеличением линейной токовой нагрузки и скольжения профили скоростей приобретают более сложный вид. В интервале скольжения от максимума на $p(Q)$ характеристике в насосном режиме до минимума в генераторном режиме профиль скорости в середине канала близок к однородному, а у краёв канала имеются обратные потоки в насосном режиме или течение вперёд с большей скоростью в генераторном режиме. Вне этого интервала такого рода потоки появляются и в середине канала. Здесь может иметь место также несколько решений уравнения (4) с несколькими зонами обратного течения в насосном или тормозном режиме или более быстрого течения вперёд в генераторном режиме.

При дальнейшем увеличении $|s_c|$ профили скоростей постепенно выпрямляются. На рис. 10 показаны также профили электромагнитной силы с прерывистыми линиями, они похожи на профили скоростей.

На рис. 11 приведено качественное сравнение экспериментальных точек распределения скорости с расчётными по ширине канала. Сплошная линия соответствует расчёту с учётом перестройки профиля скорости, а прерывистая - без учёта. Видно, что учёт перестройки профиля даёт лучшее совпадение расчёта с экспериментом.

На рис. 12 сравниваются расчётные $p(Q)$ характеристики с экспериментальными точками. Кривые обозначены соответственно 1 и $1'$ — расчёт по ОТМ с учётом и без учёта перестройки профиля скоростей, 2 - расчёт в электродинамическом приближении. Лучше всего согласуется с экспериментом расчёт по ОТМ с учётом перестройки профиля.

На рис. 13 приведено КПД канала насоса. Обозначения такие же, как на предыдущем рисунке. Видно, что наименьший КПД даёт расчёт по ОТМ с учётом перестройки профиля скорости. Это объясняется тем, что в данном случае на перестройку приходятся существенные потери.

Переход через точку максимума $p(Q)$ характеристики связан с резким перестроением структуры потока. На рис. I4 показана часть $p(Q)$ характеристики из рис. 9. Видно, что в районе скачка имеется область, где при одном и том же среднем расходе могут существовать по крайней мере два различных распределения скоростей.

Работа насоса на верхней ветви $p(Q)$ характеристики связана с движением жидкости в одном направлении. Скачкообразный переход на нижнюю ветвь сопровождается появлением противотечения по середине канала. Плотность электромагнитной силы при этом скачкообразно изменяется, однако конфигурация распределения плотности силы по ширине канала не нарушается.

В отдельных режимах было получено большее число решений с разными профилями скоростей. Так, например, в цилиндрическом насосе с параметрами вышеописанного насоса были получены решения с одной, двумя и тремя зонами обратного течения. Здесь более вероятным было решение с одной зоной, а решения с двумя и тремя зонами обратного течения можно было получить, пользуясь исходным профилем, близким к соответствующим решениям. Для плоского насоса с параметром $\bar{a} = a/\tau \approx 15$ были получены решения с 6-тью зонами обратного течения. Они получались случайно независимо от исходного профиля. Эти результаты показывают, что работа МГД-машины в таких областях может быть неустойчивой, т.е. профиль скорости в канале под воздействием внешних и внутренних факторов может переходить с одного вида на другой, вызывая колебания давления и другие явления.

С целью оценки влияния конструктивных особенностей МГД-машин, нарушающих симметрию, принятую ОТМ, было проведено исследование цилиндрического насоса [I2], принимая следующее распределение первичной индукции $B_п$ по периметру канала

$$B_п = B_{п0} + B_{п1} \cdot \cos \frac{2\pi}{T} \hat{y} .$$

Здесь $\bar{T} = T/2\pi R$, T - шаг возмущения.

На рис. I5 показано влияние неоднородности на профиль скорости. Кривые I и 2 соответствуют однородной скорости без возмущений ΔB и со слабыми возмущениями B_n, а кривые 3,4 и 5 - профиль скорости с зоной обратного потока без возмущений и со слабыми и сильными возмущениями B_n. По определению $\Delta B = \frac{B_{n1}}{B_{n0}}$ I00% индукция B_n для кривых 2,4 и 5 имеет соответственно ΔB =3,85%, ΔB = 3,85% и $\Delta B \approx$ 30%. Видно, что при слабых возмущениях B_n зоны обратного потока определяются взаимодействием между профилем скоростей и вторичной индукцией, а при сильном возмущении B_n зоны обратного течения полностью определяются характером возмущений B_n. Надо полагать, что при слабых возмущениях могут существовать много решений уравнения (4) с разным числом зон обратного течения, а сильное возмущение определяет единственное его решение. Однако последнее утверждение пока не доказано.

На рис. I6 приведены $p(Q)$ характеристики мощного цилиндрического индукционного насоса [I3], рассчитанные при разных значениях $\bar{a}$ ($\bar{a} \ll 1$ кривая I, $\bar{a}$ = I - кривая 2, $\bar{a}$ = 8,I - кривая 3). При $\bar{a} \ll$ I получаем однородный профиль скорости во всём интервале скольжений. С увеличением $\bar{a}$ появляются профили с несколькими зонами обратного течения, кривая 3 при $\bar{a}$ = 8,I как будто не имеет характерный максимум. Однако этот максимум имеется. Он очень острый и находится близко к синхронной скорости.

При $\bar{a}$ = 8,I была рассчитана $p(Q)$ характеристика также при постоянном напряжении (рис. I7), частично учитывая влияние профиля скорости. Профиль скорости учитывался при расчёте вторичной индукции, но B_n рассчитывался без его учёта по формуле $B_n = B_{n0}\sqrt{1+(\varepsilon_e')^2}$. Индекс B означает электродинамическое приближение, а его отсутствие - расчёт по ОТМ. При синхронной скорости кривые совпадают, однако при s_c =I $p_{B,v}/p_{B,1}$ = 20,7I и p_v/p_1 = II,I9. Эта разница очень большая, но надо полагать, что расчёт при постоянной суммарной индукции (3-й способ расчёта) даст меньшую разницу между ними. Однако это ещё требует проверки.

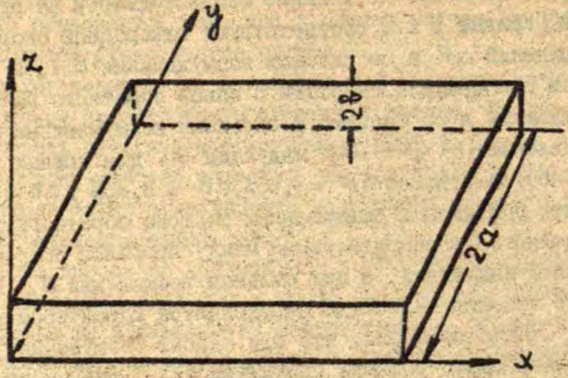


Рис. I.

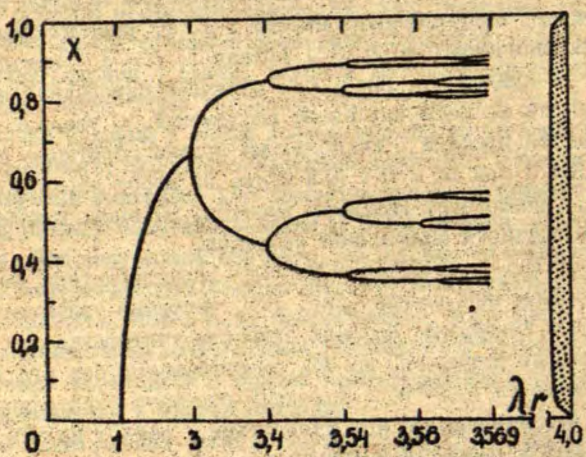


Рис. 2.

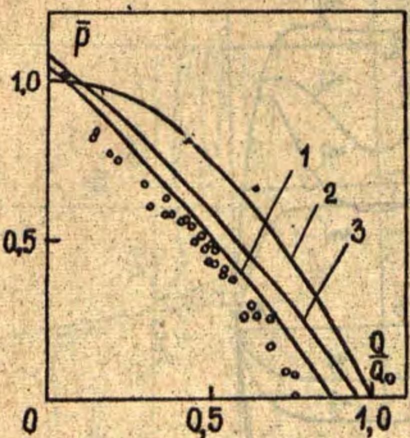

p̄
1,0
0,5
0
0,5
1,0
1
2
3
Q/Q₀

Рис. 3.

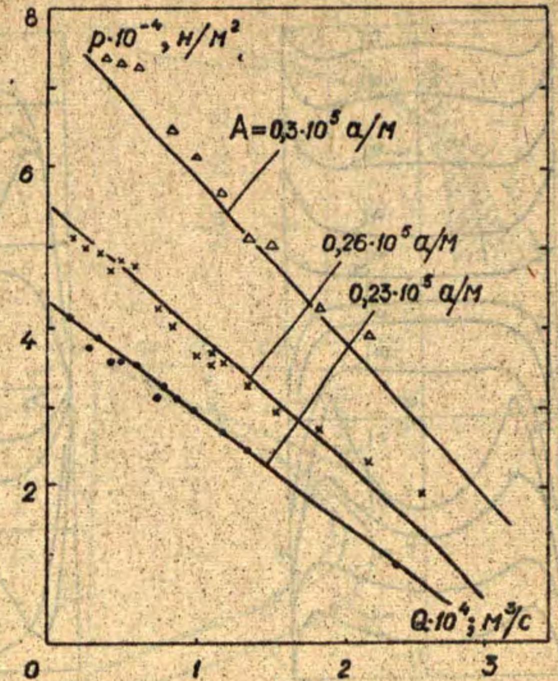

p·10⁻⁴, н/м²
A=0,3·10⁵ а/м
0,26·10⁵ а/м
0,23·10⁵ а/м
Q·10⁴; м³/с
8
6
4
2
0
1
2
3

Рис. 4.

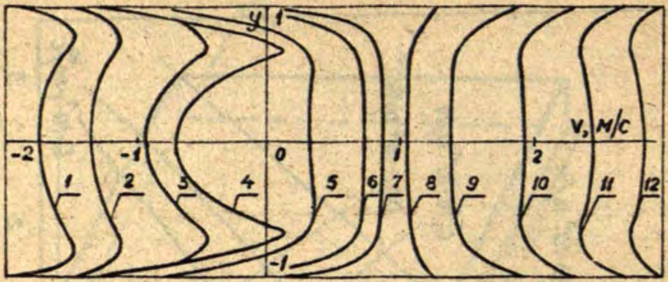


Рис. 5.

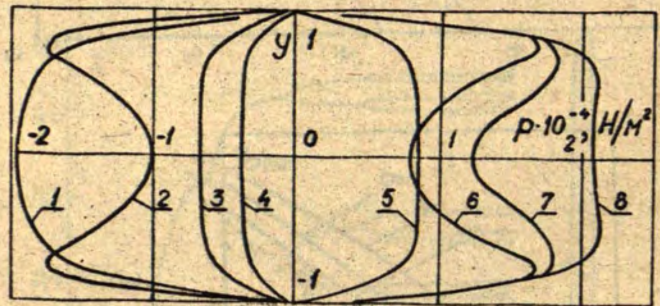


Рис. 6.

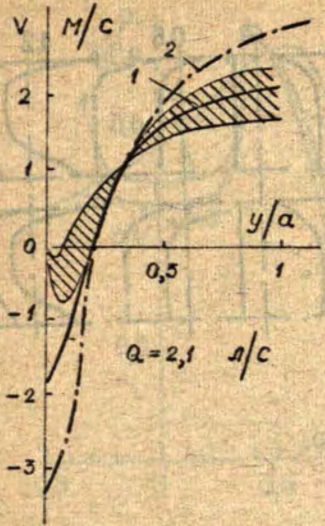


Рис. 7.

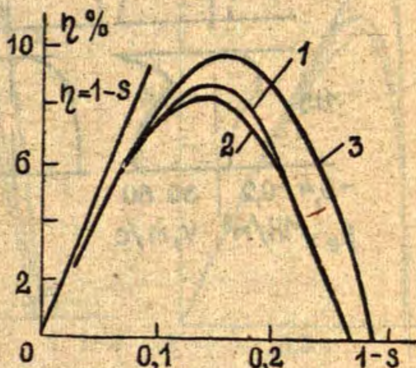


Рис. 8.

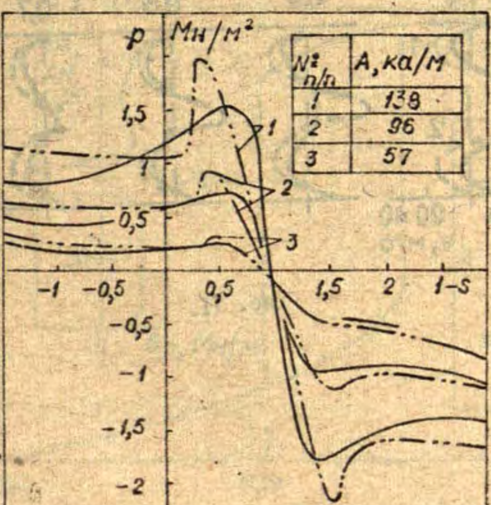


Рис. 9.

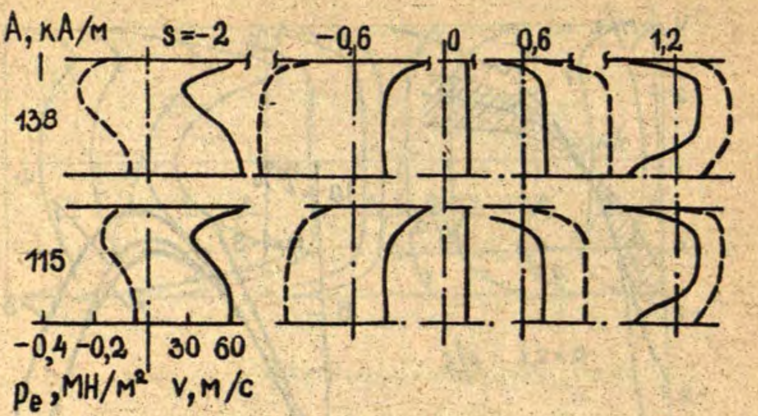

A, кА/м
s=-2
-0,6
0
0,6
1,2
138
115
-0,4 -0,2
30 60
p_e, МН/м²
v, м/с

Рис. 10.

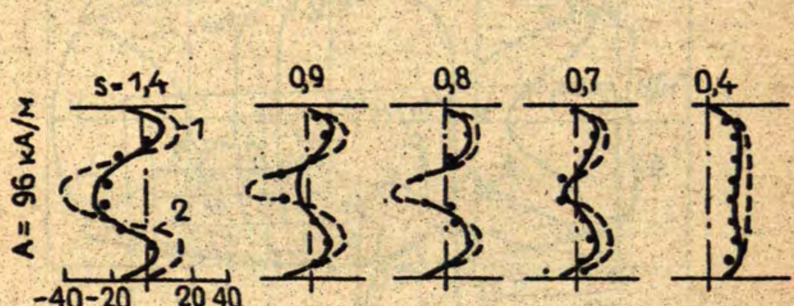

s=1,4
0,9
0,8
0,7
0,4
A= 96 кА/м
1
2
-40-20
20 40
v, м/с

Рис. 11.

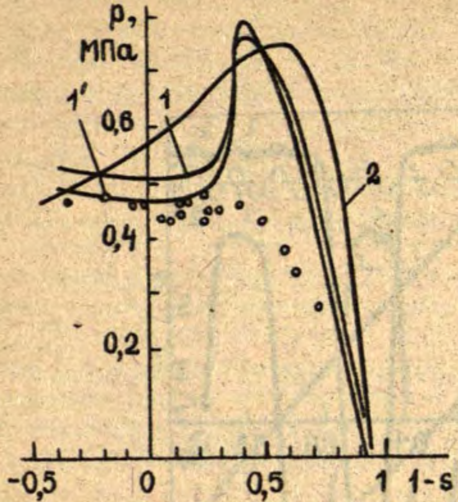


Рис. I2.

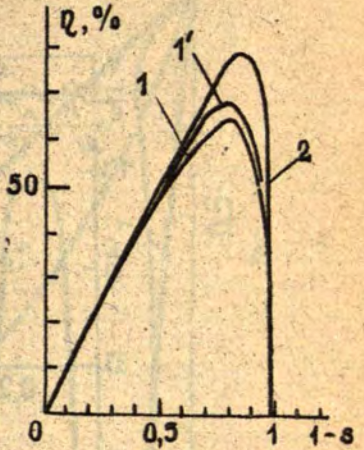


Рис. I3.

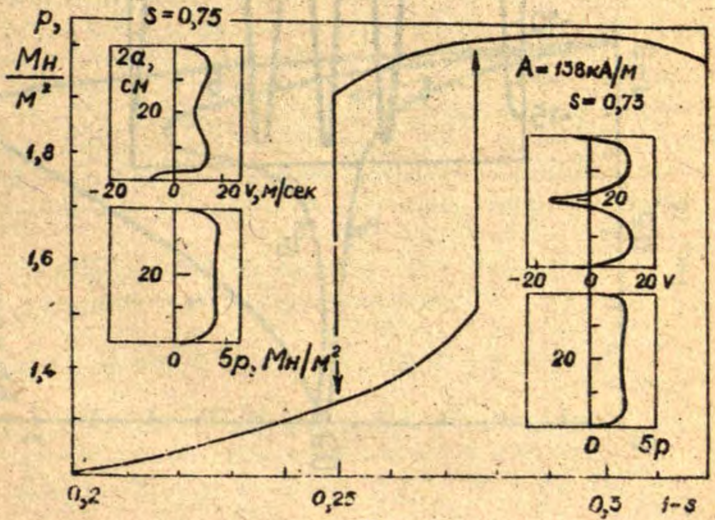


Рис. I4.

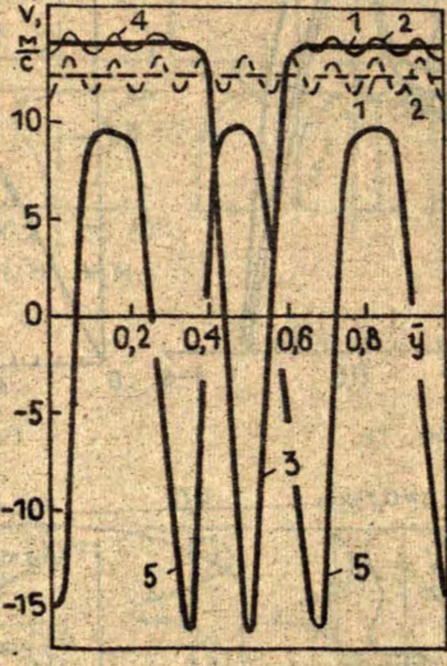


Рис. I5.

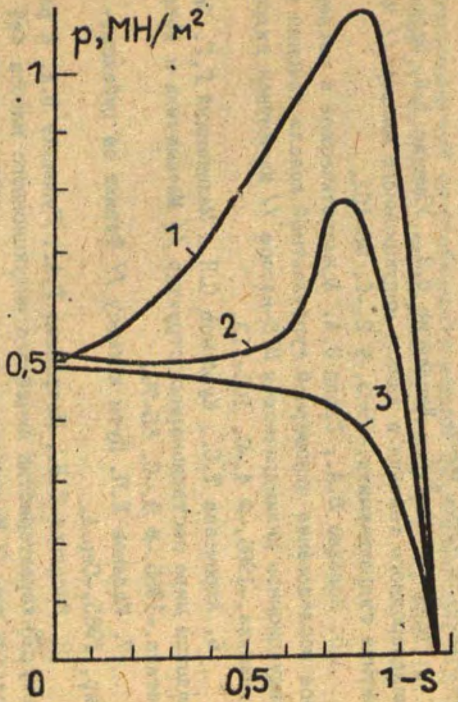


Рис. I6.

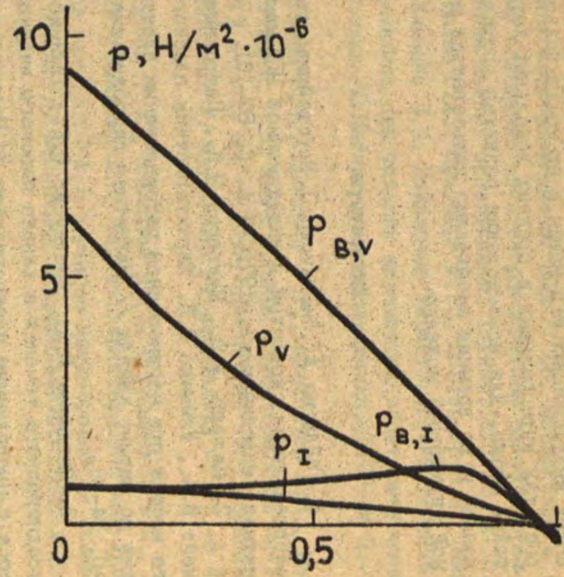


Рис. I7.

Из приведённых результатов следует, что ОТМ довольно хорошо отражает главные черты турбулентного потока в каналах индукционных МГД-машин и ею можно пользоваться при расчётах интегральных и средних локальных характеристик таких машин. Для исследования развития профилей по длине канала и во времени необходимо пользоваться нестационарной двухмерной моделью.

Литература

I. Гайлитис А.,Лиелаусис О. Неустойчивость однородного распределения скоростей в индукционной МГД-машине // Магнитная гидродинамика.-1975.-№ I.-С. 87-101.

2. Калнынь А.Я., Микрюков Ч.К., Петровича Р.А., Рупенейт В.А., Улманис Л.Я. Характеристики плоского индукционного насоса при неоднородном распределении электромагнитных сил по ширине канала // Магнитная гидродинамика.-1971.-№ 4.-С. 94-98.

3. Валдмане Р.А., Лиелаусис О.Я., Улманис Л.Я. Расчёт неоднородного течения в канале плоского индукционного насоса с продольными перегородками // Магнитная гидродинамика.-1985.-№ 4.-С. 85-92.

4. Валдмане Р.А., Лиелаусис О.Я., Улманис Л.Я. Модель неоднородного течения в канале индукционного насоса // Магнитная гидродинамика.-1983.-№ 2.-С. 98-102.

5. Половко Ю.А., Тропп Э.А. Асимптотическое и численное исследование одномерной турбулентной модели течения в индукционном цилиндрическом МГД-насосе // Магнитная гидродинамика.-1986.-№ 4.-С. 106-113.

6. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Парадоксы мира нестационарных структур // Математика и кибернетика.-1985.-№ 5.-С. 65-79.

7. Каданов Л.П. Пути к хаосу // Физика за рубежом.- М.: Мир, 1985.-Сер.А.

8. Васильев С.В., Петровича Р.А., Рупенейт В.А. К расчету $p(Q)$-характеристик линейного индукционного насоса без боковых шин // Магнитная гидродинамика.-1973.-№ 4.-С. 150-151.

9. Кришберг Р.Р., Петровича Р.А., Улманис Л.Я. Расчёт характеристик МГД-преобразователя в разных режимах при неоднородном поле электромагнитных сил // Сб. материалов к УI Таллинскому совещанию по электромагнитным расходомерам и электротехнике жидких проводников.-Таллин,1973.-С. 4-10.

10. Валдмане Р.А., Кришберг Р.Р., Лиелпетер Я.Я., Микрюков Ч.К., Улманис Л.Я. Локальные характеристики течения в канале МГД-машины при больших параметрах электромагнитного взаимодействия // Магнитная гидродинамика.-1977.-№ 3.-С. 99-104.

11. Валдмане Р.А., Кришберг Р.Р., Лиелпетер Я.Я., Микрюков Ч.К., Улманис Л.Я. Интегральные характеристики индукционной МГД-машины при больших параметрах электромагнитного взаимодействия // Магнитная гидродинамика.-1977.-№ 4.-С. 107-110.

12. Валдмане Р.А., Кириллов И.Р., Огородников А.П., Остапенко В.Т., Улманис Л.Я. Расчёт характеристик индукционного насоса при $R_{ms} > 1,1$ с учётом неоднородности внешнего магнитного поля // Магнитная гидродинамика.-1982.-№ 3.-С. 98-104.

13. Валдмане Р.А., Валдманис Я.Я., Улманис Л.Я. О гидродинамической неустойчивости мощных цилиндрических МГД-насосов // Магнитная гидродинамика.-1984.-№ 1.-С. 109-112.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.68-75

УДК 517.632:537.811

В.Я.Ауза, Я.Р.Круминьш
ЛГУ им. П.Стучки

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ НА СИЛУ ВТЯГИВАНИЯ

Введение

В некоторых электротехнических устройствах (например, в электрокарах) для замыкания контактов используются цилиндрические электромагниты специальной формы. Аналитические методы мало приспособлены для расчёта таких сложных электромагнитов, особенно, если необходимо учесть нелинейный характер магнитной проницаемости. В работе используются численные методы расчёта двухмерного магнитного поля и проводится сравнение с экспериментальными результатами.

На рис. I отображена половина аксиального сечения электромагнита.

Принцип действия замыкателя следующий: при пропускании тока в обмотке стержень замыкателя втягивается внутрь и замыкает к нему прикреплённые контакты (на рис. не отображены). При прекращении действия тока стержень возвращается под действием пружины (не показано на рис. I).

Математическая модель

Электромагнит имеет выраженную осевую симметрию, поэтому будем пользоваться двухмерной моделью (не учитывается зависимость от угла в цилиндрической системе координат). Так как обмотка состоит из более чем 1000 витков, то не будем учитывать её дискретную структуру.

Для расчёта силы втягивания стержня замыкателя $\vec{F}$ необходимо знать магнитную индукцию $\vec{B}$. Силу $\vec{F}$ определим из следующего выражения:

$$\vec{F} = \frac{1}{\mu_0} \oint \left(\vec{B}(\vec{n}\vec{B}) - \frac{1}{2} B^2 \vec{n} \right) dS,$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали поверхности. Учитывая симметрию, от нуля отлична только z компонента.

Индукцию магнитного поля $\vec{B}$ находим из численных расчётов векторного потенциала магнитного поля $\vec{A}$, считая, что магнитная индукция в пределах каждой расчётной ячейки постоянна:

$$(B_r)_{jk} = \frac{A_{jk} - A_{j,k+1} + A_{j+1,k} - A_{j+1,k+1}}{2h_k}$$

$$(B_z)_{jk} = \frac{2}{r_j + r_{j+1}} - \frac{A_{j+1,k+1} + A_{j+1,k} + A_{j,k+1} + A_{jk}}{4} +$$

$$+ \frac{A_{j+1,k+1} - A_{j,k+1} + A_{j+1,k} - A_{jk}}{2h_j},$$

где h_j, $j = 1, 2, \ldots, L$ шаги по оси r, r_j - значения координаты r, h_k, $k = 1, 2, \ldots N$ шаги по оси z.

Векторный потенциал получаем из теоремы о циркуляции напряжённости $\vec{H}$ магнитного поля

$$\oint_L \vec{H} d\vec{L} = \iint_S \vec{I} d\vec{S},$$

где $\vec{I}$ - усреднённая плотность тока в обмотке.

Учитывая, что $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B} = \nu\vec{B}$, а $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$, получаем

$$\oint_L \left(\nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rA) dz - \nu \frac{\partial A}{\partial z} dr \right) = \iint_S \vec{I} d\vec{S}.$$

После интегрирования получаем конечно-разностное уравнение

$$A_{jk} = (r_{j-1} C_{j-1,k} A_{j-1,k} + r_{j+1} C_{jk} A_{j+1,k} + \ell_{j,k-1} A_{j,k-1} +$$
$$+ \ell_{jk} A_{j,k+1} + 0{,}5(S_{jk} + S_{j-1,k} + S_{j,k+1} + S_{j-1,k-1})) /$$
$$/ r_j C_{ij} + r_j C_{ij} + r_j C_{j-1,k} + \ell_{j,k} + \ell_{j,k-1}),$$

где $$C_{jk} = \frac{2(h_{k-1} \nu_{j,k-1} + h_k \nu_{jk})}{h_j (r_j + r_{j+1})},$$

$$l_{jk} = \frac{h_j \nu_{jk} + h_{j-1} \nu_{j-1,k}}{h_k},$$

$$S_{jk} = I_{jk} h_j h_k .$$

Система конечно-разностных уравнений решается методом последовательной верхней релаксации.

Обратная величина магнитной проницаемости ν_{jk} вычисляется для каждой расчётной ячейки в виде кусочно-гладкого полинома от $(B_{jk})^2$.

Сравнение расчётных и электромагнитных результатов

На экспериментальной установке, изготовленной для снятия силовых характеристик электромагнита, получены зависимости силы замыкания контактов F от величины намагничивающей силы Jw и зазора h_{12} (см. рис. I). Величина h_{12} определяется по показаниям индуктора типа ПЧ с точностью до 0,05 мм.

Основной проблемой при сравнении экспериментальных и численных результатов является определение бокового воздушного зазора d_g между стержнем замыкателя и магнитопроводом. Это связано с тем, что в математической модели зазор d_g не меняется по оси z , а реально зазор в разных местах меняется до 20%. Поэтому зазор для расчётов брался как средняя величина от измерений реального зазора в нескольких местах.

Для определения магнитных свойств магнитопровода, который сделан из спечённого порошка, были проведены измерения магнитной проницаемости от индукции магнитного поля.

Сравнение численных и экспериментальных данных показывает, что расчёты дают завышение значения силы на 5-7%.

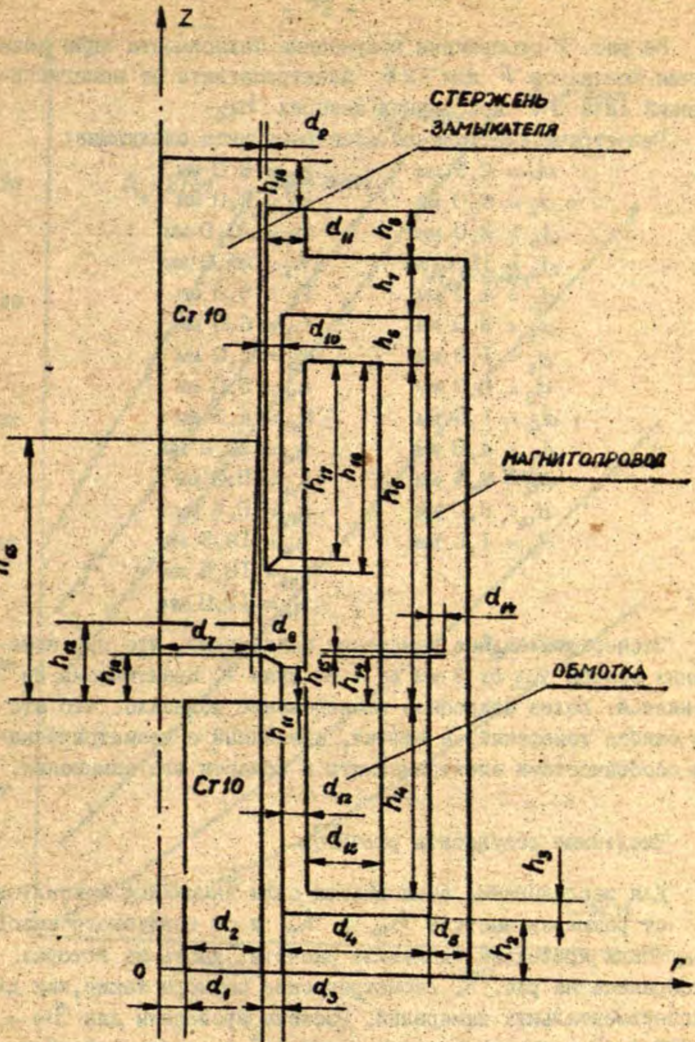


Рис. I. Аксиальное сечение электромагнита.

Экспериментальные данные

На рис. 2 отображены полученные зависимости силы замыкания контактов F для 12 В электромагнита от намагничивающей силы Jw при разных зазорах h_{12}.

Геометрические размеры электромагнита следующие:

d_1 = 2,5 мм	h_2 = 6,0 мм
d_2 = 8,0 мм	h_3 = 2,0 мм
d_3 = 2,0 мм	h_4 = 20,0 мм
d_4 = 15,0 мм	h_5 = 35,0 мм
d_5 = 4,0 мм	h_6 = 5,0 мм
d_7 = 9,0 мм	h_7 = 6,0 мм
d_8 = 1,3 мм	h_8 = 5,0 мм
d_9 = 0,7 мм	h_{10} = 5,0 мм
d_{10} = 1,5 мм	h_{11} = 4,3 мм
d_{11} = 4,0 мм	h_{13} = 22,0 мм
d_{12} = 2,5 мм	h_{14} = 5,0 мм
d_{13} = 8,0 мм	h_{15} = 0,4 мм
d_{14} = 1,5 мм	h_{16} = 19,5 мм
	h_{17} = 18,0 мм
	h_{18} = 12,0 мм

Экспериментальные измерения показывают, что при изменении зазора h_{12} от 3 мм до 4 мм сила F практически не меняется. Более подробное исследование показало, что это не ошибка измерений, а эффект, связанный с геометрическими особенностями электромагнита в области его замыкания.

Численные результаты расчётов

Для исследования зависимости силы замыкания контактов F от размеров выступа h_{10} и h_{11} и от воздушного зазора h_{12} были проведены численные расчёты, часть из которых отображена на рис. 3. Геометрические размеры такие, как для экспериментальных измерений. Расчёты проведены для Jw = =1500 А. При высоте вектора более 4,5 мм наблюдается локальный максимум силы замыкания.

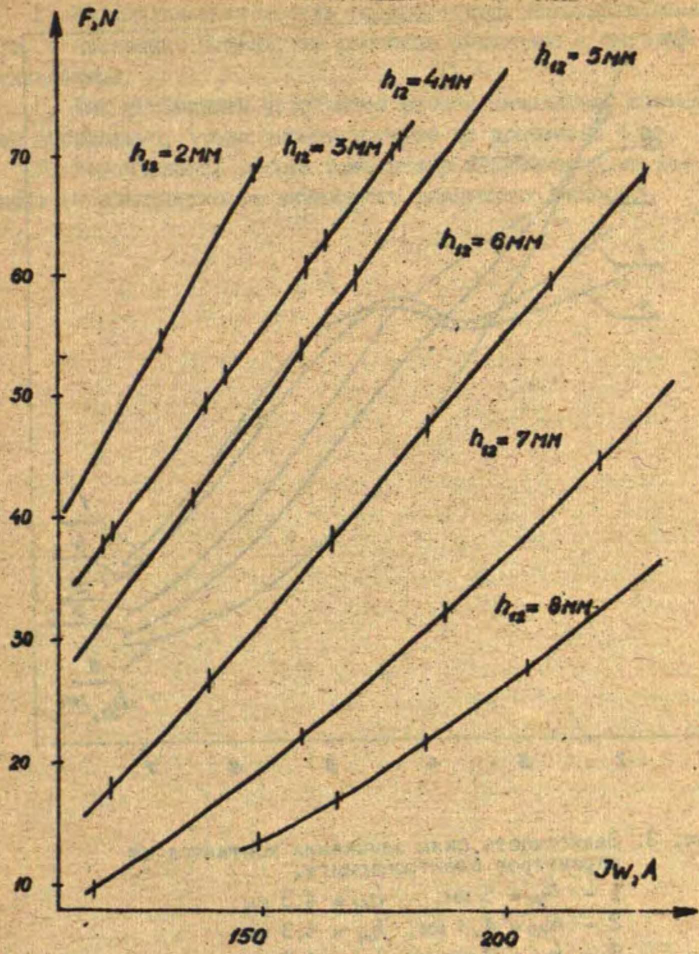


Рис. 2. Экспериментальная зависимость силы F от воздушного зазора δ и ампервитков.

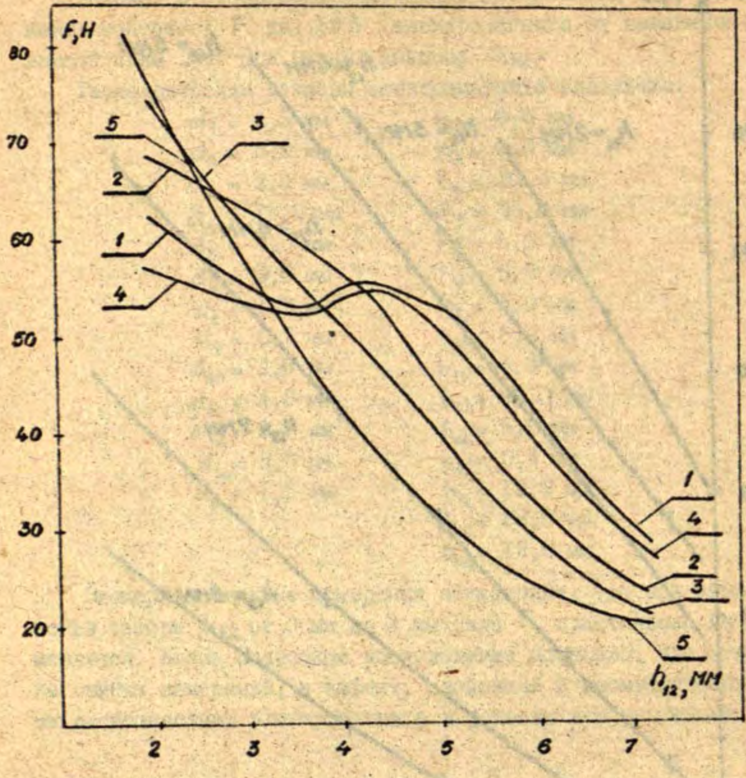


Рис. 3. Зависимость силы замыкания контактов от параметров электромагнита.

I - h_{10} = 5 мм, h_{11} = 4,3 мм
2 - h_{10} = 4,3 мм, h_{11} = 4,3 мм
3 - h_{10} = 2 мм, h_{11} = 4,3 мм
4 - h_{10}=4,3 мм, h_{11} = 5 мм
5 - h_{10} = 4,3 мм, h_{11} = 4,3 мм

Выводы

I. Математическая модель соответствует действительности, и численные результаты расчётов совпадают с экспериментальными.

2. Для достижения устойчивой работы замыкателя контактов необходимо, чтобы высота выступа не превышала 4 мм.

3. Устойчивость работы замыкателя практически не зависит от ампервитков и начального воздушного зазора.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.76-83

УДК 518.12:538.4+621.365.5

Л.Л.Тир, А.П.Губченко, Н.В.Никифорова
ВНИИ электротермического оборудования, Москва

ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ РАСПЛАВА НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И СИЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНДУКЦИОННЫХ ТИГЕЛЬНЫХ ПЕЧЕЙ

При работе индукционной тигельной печи (ИТП) с высоким мениском во многих случаях сказывается магнитогидродинамическая неустойчивость расплава, проявляющаяся в возникновении нестационарных вертикальных складок его поверхности (так называемые "рифы").

В индукционных печах с холодным тиглем для плавки металлов (ИПХТ-М) тигель рассечен вдоль периметра своего горизонтального сечения сквозными вертикальными разрезами, прерывающими путь тока в азимутальном направлении.

В обоих случаях нарушается осевая симметрия электромагнитной системы индуктор-тигель-расплав. Разрезы тигля ИПХТ-М расположены по его окружности периодически (равномерно). Для рифов в тигле любого типа характерна нестационарность конфигурации и расположения. Однако усреднённые по времени характеристики печи при наличии рифов могут быть получены путём рассмотрения её модели с периодическим расположением рифов по азимутальной координате. Таким образом, в обоих случаях можно рассматривать электромагнитную систему с симметрией поворота порядка m, где m - число разрезов тигля или усреднённое число рифов на цилиндрическом расплаве.

Замена осевой симметрии объекта на симметрию поворота существенно влияет на его электродинамические, силовые, а в некоторых случаях и гидродинамические характеристики. Для выявления особенностей полей плотности тока $\vec{j}$ и электромагнитных сил (ЭМС) $\vec{F}$ в таких системах выполнено математическое моделирование. Рассмотрены два характерных случая: а) плотностью, отжатой от тигля, расплав с m периодическими вертикальными складками поверхности (ИТП или ИПХТ-М - безразлично); б) расплав в проводящем разрезном тигле ИПХТ-М, полностью прилегающий к тиглю.

Использованы двумерные модели, воспроизводящие реальное горизонтальное сечение объекта, но рассматривающие слой единичной высоты системы, принимаемой неограниченной и однородной по высоте (координата z).

Эта модель удовлетворительно отражает поле токов и ЭМС в изучаемом сечении, однако не выявляет z- компоненту ротора сил, возникающую только в связи с неоднородностью поля по z. Соответственно, не представлено и движение металла в плоскости r, φ, вызываемое z-компонентой $\mathrm{rot}\,\vec{F}$.

Программы расчёта разработаны на языке "ФОРТРАН" С.И. Павловым и А.Т.Яковичем (ЛГУ им. П.Стучки). Расчёты осуществлены на ЭВМ ЕС-1033.

Нарушения осевой симметрии предопределяет появление радиальной составляющей тока, отсутствующей в обычной модели ИТП. Соответственно в рассматриваемой двумерной модели наблюдаются радиальная и азимутальная компоненты электромагнитной силы (в обычной модели ИТП - только радиальная компонента).

Основные факторы, влияющие на исследуемые поля: порядок симметрии поворота m, относительная частота поля $\omega = \mu \gamma_э \omega l_0$, электрическое контактное сопротивление на границе расплав-тигель $R_к$, соотношение проводимостей материалов тигля ($\gamma_{э.г.}$) и расплава ($\gamma_{э.р.}$) (последние два фактора - при рассмотрении зоны контакта расплава с тиглем). Здесь ω - круговая частота, μ - абсолютная проницаемость, $\gamma_э$ - электрическая проводимость, l_0 - характерный размер.

Исследование выявило наличие периодических по азимутальной координате концентраций тока и соответствующую периодическую неоднородность электромагнитной силы. Наибольшие значения плотности тока (j) и соответственно - объёмной плотности электромагнитных сил ($\vec{F}$), а также - источников теплоты Джоуля ($P_{дж}$) в расплаве в случае контакта его со стенкой холодного тигля наблюдаются в местах огибания током разрезов тигля, а в модели с полным отжатием расплава от стенок тигля и образованием "рифов" - в промежутке между рифами.

Все нарушения симметрии полей j, $\vec{F}$ и $P_{дж}$ на каждом секторе расплава, ограниченном геометрической симметрией поворота с углом $2\pi/m$, наблюдаются дважды (в зеркальном отражении).

Упрощённая схема протекания в контактной зоне ИПХТ-М представлена на рис. I. Здесь I - расплав, 2 - секции тигля. Путь тока при малом контактном сопротивлении ($R_к < 10^{-9}$ Ом·м^2) изображён сплошной линией. При большем значении $R_к$ ($R_к > 10^{-9}$ Ом·м^2), в расплаве и секциях тигля появляются ответвления тока, условно показанные на рис. I пунктиром. При $R_к > 10^{-5}$ Ом·м^2 токи в секциях тигля и в расплаве практически разделяются, замыкаясь по независимым траекториям.

По мере уменьшения $\gamma_{э.т.}/\gamma_{э.р.}$, увеличения m и снижения ω, что повышает степень прозрачности тигля для магнитного поля, всё меньшее число токовых линий из расплава заходит в секции тигля и, соответственно, концентрация тока под изолирующими промежутками тигля снижается. Ухудшение проводимости расплава и увеличение относительной ширины секций повышает роль локальных концентраций тока в расплаве, причём в диапазоне реальных значений переменных относительное влияние второго фактора в несколько раз сильнее первого. Увеличение ширины изолирующих промежутков тигля снижает локальные концентрации тока. На рис. 2 и 3 представлена картина распределения электрического тока для предельных значений контактного сопротивления. Рис. 2 иллюстрирует перетекание токов из тигля в расплав при отсутствии контактного сопротивления, а рис. 3 иллюстрирует раздельное протекание токов в расплаве и в секции тигля при наличии больлого контактного сопротивления ($R_к = 10^{-3}$ Ом·м^2). В расчётной модели радиус расплава равен 0,3 м; внешний радиус холодного тигля - 0,34 м. Относительная частота соответственно расплава и тигля $\hat{\omega}_р$=703; $\hat{\omega}_т$ =45000 (отношение радиуса расплава к глубине проникновения электромагнитного поля в расплав примерно 18, а отношение толщины секции тигля к глубине проникновения ЭМ-поля в материал тигля 8). Угловой размер секции равен 6^0.

Особенности полей в зоне отжатия при наличии рифов иллюстрируются рис. 4 и 5. На рис. 4 представлены линии электрического тока в расплаве при различной ширине рифа δ, определяемой на половине высоты рифа. Высота рифа равна двум глубинам проникновения тока в расплав. Безразмерная частота равна 50 (отношение радиуса к глубине проникновения тока равно 5).

Сравнение этих рисунков показывает, что при узком рифе ток почти не затекает в него, замыкаясь почти по концентрическим окружностям, тогда как в случае широкого рифа линии тока почти повторяют профиль поверхности рифа.

На рис. 5 показано распределение ЭМС в поверхностном слое отжатой части металла при образовании "рифов" (в условном масштабе).

Как видно из рис. 5, ЭМС максимальны во впадинах поверхности, причём они направлены по $-r$. Такое распределение ЭМС снижает устойчивость конфигурации отжатого полем столба металла, поскольку при появлении рифов способствует дальнейшему заглублению промежутков между рифами, то есть увеличению высоты рифов. Этот процесс может быть приостановлен только действием сил поверхностного натяжения на вершинах рифов или за счёт специальных, стабилизирующих поверхность мениска, свойств поля индуктора.

Наличие нестационарных складок поверхности расплава оказывает существенное влияние на энерговыделение в расплаве ИПХТ-М (см. рис. 6, рассчитанный для случая нулевого контактного сопротивления при высоте рифа, равной глубине проникновения тока в расплав и постоянстве среднего радиуса. Средний радиус принят по окружности, проходящей через середину высоты "рифа"). На рис. 6 P - мощность, выделяющаяся в расплаве в относительных единицах. При полном контакте расплава с секциями холодного тигля с ростом числа этих секций значение P увеличивается (так как возрастает число зон перетекания тока с тигля на расплав, а в ряде случаев - также и концентрация тока в этих зонах). В случае полного отжатия расплава от стенок тигля при наличии рифов, зависимость выделения мощности от порядка поворотной симметрии носит более сложный характер. При очень малом числе рифов мощность, выделяющаяся в расплаве, равна мощности, выделяющейся при полностью отжатом гладком мениске. Затем - с увеличением числа рифов - она возрастает, однако далее - с уменьшением ширины рифа и возникновением прозрачности его для ЭМ-поля - опять становится равной мощности полностью отжатого гладкого мениска. Таким образом, выявлено, что при наличии нестационарных вертикальных складок, мощность, поглощаемая отжатым расплавом, увеличивается, причём имеется максимум её зависимости от числа этих складок. В исследованном характерном случае этот максимум достиг 125%.

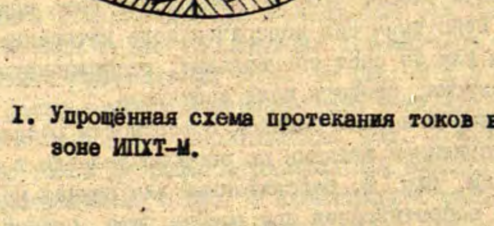
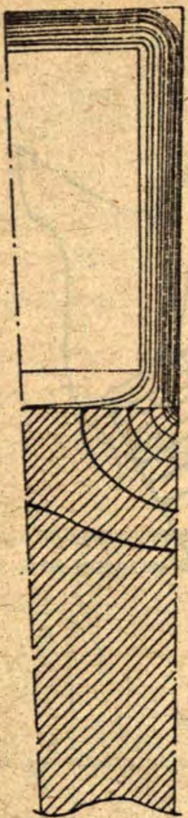


Рис. I. Упрощённая схема протекания токов в контактной зоне ИПХТ-М.



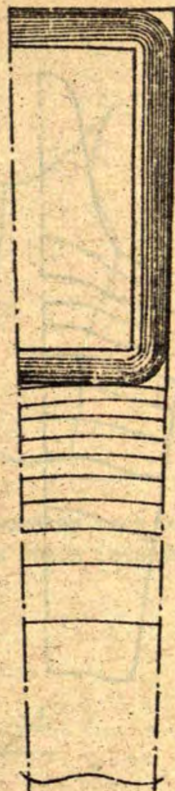


Рис. 2. Линии электрического тока при отсутствии контактного сопротивления на границе расплав-тигель ($R_к$ =0).

Рис. 3. Линии электрического тока при $R_к$ =10^{-3} Ом·м^2

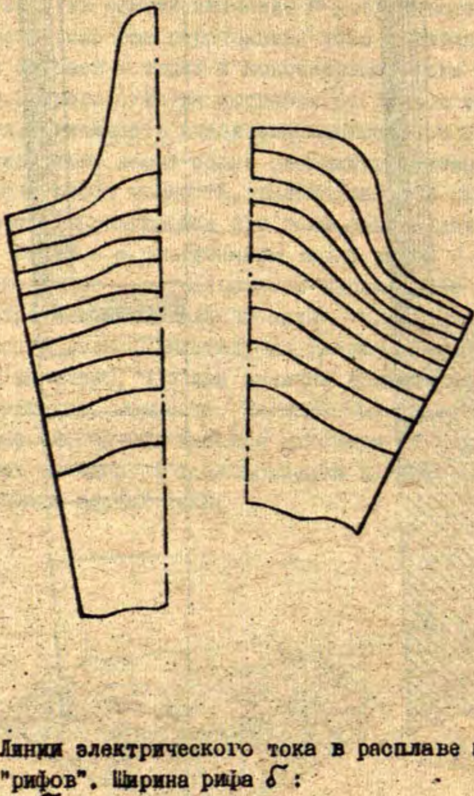


Рис. 4. Линии электрического тока в расплаве при наличии "рифов". Ширина рифа δ:

а) $\delta = \Delta_э$,

б) $\delta = 4\Delta_э$,

где $\Delta_э$ - глубина проникновения ЭМ-поля в расплав.

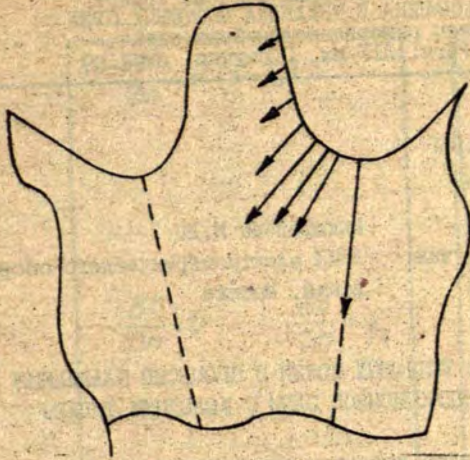


Рис. 5. Распределение ЭМС в поверхностном слое отжатой части металла при образовании рифов (стрелки).

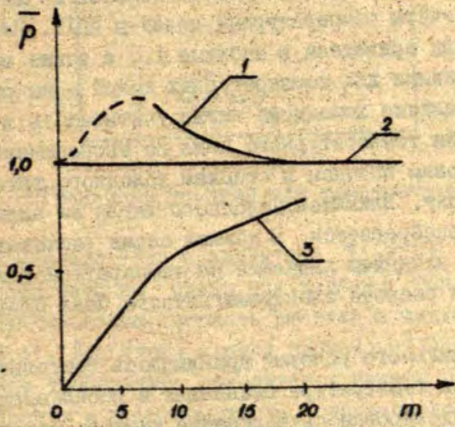


Рис. 6. Энерговыделение в расплаве ИПХТ-М при наличии нестационарных складок поверхности расплава.

I - зона отжатия с рифами;

2 - зона отжатия без рифов

3 - контактная зона ($R_K = 0$).

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.84-89

УДК 538.4:621.365

Булыгин Л.Л., ЛГУ им. П.Стучки

Никифорова Н.В. ВНИИ электротермического оборудования, Москва

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ В ПРОЦЕССЕ ПЛАВЛЕНИЯ МЕТАЛЛОВ В ИНДУКЦИОННОЙ ПЕЧИ С ХОЛОДНЫМ ТИГЛЕМ

Методика расчёта процесса кристаллизации при наличии электромагнитного воздействия на жидкий металл была предложена в работе [I]. Там же были представлены результаты пробных расчётов. В настоящей работе по этой же методике проводились расчёты температурных полей в ИПХТ. Параметры расчётной модели приведены в таблице I., а эскиз модели с граничными условиями для температурных полей - на рис.I. На данном этапе наличие холодного тигля учитывалось в граничных условиях для температурного поля по экспериментально известным тепловым потокам к стенкам холодного тигля и охлаждаемому поддону. Влиянием холодного тигля на электромагнитное поле пренебрегается. В данной серии расчётов пренебрегается также влиянием движения на температурное поле расплава. Методика расчёта электромагнитного поля приведена в [2].

В качестве начального условия принималось состояние жидкого металла при температуре плавления в расплавленном состоянии, т.е. моделировалось заливание жидкого металла в ИПХТ.

Температурные поля для четырёх значений настила тока в индукторе представлены на рис. 2 для интервала времени 4 минуты после заливки в ИПХТ. Мощности, выделяемой в распла-

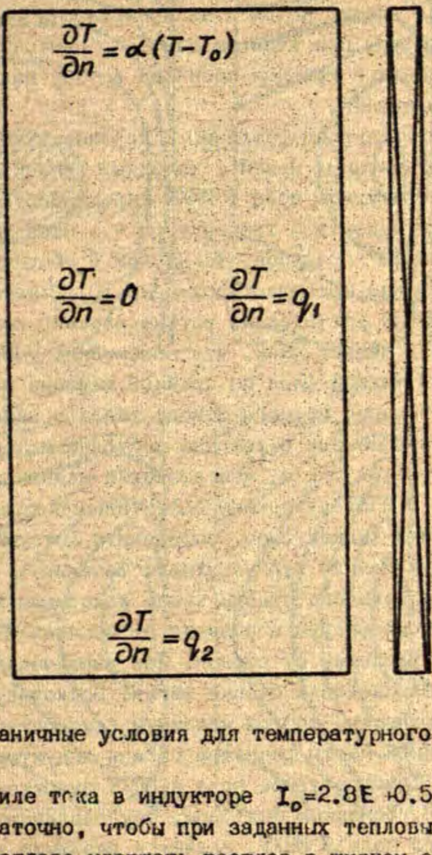


Рис. I. Граничные условия для температурного поля.

ве при настиле тока в индукторе I_0=2.8E +0.5 А/м оказалось недостаточно, чтобы при заданных тепловых условиях на границах расплава удержать расплав в жидком состоянии (см. рис. 2.а). Для этого случая происходит остывание металла, максимум температуры находится в центре расплава, и эта зона является источником тепла, отдаваемого в холодный тигель. При настиле I_0=3.22E +0.5 А/м (рис. 2.б) часть расплава находится в жидком, часть в твердом состоянии. При заданных тепловых условиях имеются три зоны, где металл находится в твердом состоянии - в центре, в углах дна холодного тигля и на поверхности металла. При увеличении настила (рис.2.в и г) зоны с твердым состоянием металла постепенно пропадают, вначале внизу, потом и на поверхности расплава. Максимум температуры при этом смещается с центральной области расплава к внешней границе расплава в зону максимума джоулева тепловыделения.

Отметим следующие различия в картине температурного поля для индукционных печей с холодным тиглем и обычных ИТП.

I) Температурное поле в ИПХТ характеризуется значительно большими градиентами температуры – в настоящей серии расчетов порядка 10^3 градусов, тогда как в обычных ИЭП градиенты температуры не превышают примерно 10. Отметим, однако, что в представленных расчетах не учтено влияние конвективного переноса тепла в жидкой фазе, что несомненно уменьшит градиенты температуры в жидкой фазе по крайней мере на порядок. В целом из-за существования мощного отвода тепла в виде холодного тигля и при появлении зон с твердым состоянием этот вывод сохраняет силу. Отметим также, что возможно моделирование температурного поля в ИПХТ введением эффективного коэффициента теплопроводности в жидкой фазе, определить который можно, например, используя модели турбулентного течения.

2) Из-за сильного отвода тепла холодными стенками тигля максимум температуры в отличие от обычных ИТП достигается на некотором удалении от стенок. При увеличении настила этот максимум приближается к стенке тигля. Поскольку в ИТП излучение с поверхности, то там максимум температуры обычно находится в нижней части расплава вблизи индуктора.

Выводы. Температурное поле в ИПХТ значительно отличается от поля в ИТП. Основным фактором, обуславливающим особенности температурного поля в ИПХТ, является различие в условиях теплоотвода на границе расплава.

Вторым фактором является перераспределение вихревых токов из-за наличия секционированного тигля, однако для модели, рассмотренной выше, этот фактор, по-видимому, является второстепенным.

Пути усовершенствования моделирования температурных полей в ИПХТ состоят в следующем:

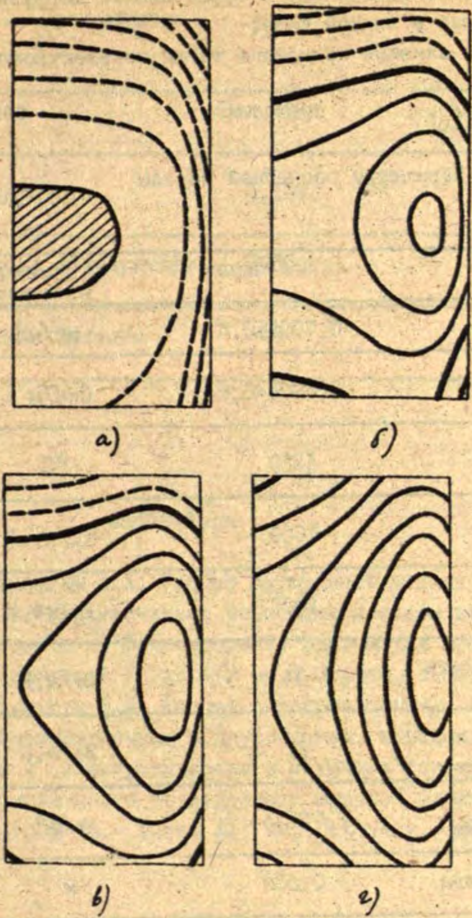


Рис. 2. Температурные поля в ИПХТ (прерывистые линии - твердая фаза, непрерывные - жидкая, выделена изотерма, соответствующая температуре плавления):

а) I_0 =2.8E+05, $T_{\text{мах}}$ =1380, $T_{\text{мин}}$ =380, ΔT =143,

б) I_0 =3.22E+05, $T_{\text{мах}}$ =1788, $T_{\text{мин}}$ =780, ΔT =144,

в) I_0 =3.50E+05, $T_{\text{мах}}$ =1960, $T_{\text{мин}}$ =950, ΔT =145,

г) I_0 =4.20E+05, $T_{\text{мах}}$ =2860, $T_{\text{мин}}$ =1330, ΔT =219.

1) учет конвективного и эффективного диффузионного переноса тепла в жидкой фазе;

2) учет влияния холодного тигля на электромагнитное поле.

Таблица I. Параметры расчетной модели

Свойство	Величина	Единицы измерений
Плотность	0,795E+0,4	кг/м^3
Электропроводность	0,690E+0,6	Сим/м
Температура плавления	1380	^oC
Теплоемкость жидкой фазы	1000	дж/кг.К
Теплоемкость твердой фазы	1000	дж/кг.К
Теплопроводность жидкой фазы	34	Вт/м.К
Теплоемкость твердой фазы	21	Вт/м.К
Теплота кристаллизации	2,72E+5	дж/м^3
Радиус расплава	0,068	м
Высота расплава	0,136	м
Радиус индуктора	0,078	м

Таблица I. Продолжение

Свойство	Величина	Единицы измерений
Высота индуктора	0,136	м
Частота тока в индукторе	2400	Гц
Безразмерная частота	60	-

Литература

1. Булыгин Л.Л. Расчет двухфазной задачи Стефана в случае электромагнитной конвекции методом вариационных неравенств // Моделирование физических процессов в сплошных средах.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки,-1985.- С.3-23.

2. Булыгин Л.Л. Расчет электромагнитных полей в аксиально-симметричных МГД-установках методом конечных элементов // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы комплексного исследования моделей электродинамических устройств.- Рига: ЛГУ им. П.Стучки,-1985. - С. 3-14.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.90-103

УДК 537.84+517.962.8

У.А.Бетхерс, С.И.Павлов, А.Т.Якович
ЛГУ им. П.Стучки

В.И.Дятлов
ВНИИ электротермического оборудования, г.Москва

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ РАСПЛАВА В МОДЕЛИ РУДНОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЕЧИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИЛ

Одним из этапов производства минеральных удобрений из фосфоросодержащего сырья является их переплавка в руднотермических электропечах, осуществляемая пропусканием через шихту электрического тока. Для оптимизации технологических режимов плавки и конструкции печей, необходимо изучение электромагнитных, тепловых и гидродинамических процессов в них. Так как экспериментальные исследования в реальных печах трудоёмки и зачастую невозможны из-за высокой химической агрессивности исследуемой среды при высоких температурах (1500°С), то целесообразно привлечение методов математического моделирования.

Для исследования процессов в руднотермических печах широко используется метод подобия [1], на основе которого проводятся инженерно-оценочные расчёты [2, 3, 4]. В [5] исследовано электрическое поле в одноэлектродной печи. Комплексные исследования МГД-полей [6] или сопряжённых МГД- и тепловых характеристик [7, 8] проводились только для промышленных установок электрошлакового переплава металлов, и математические модели процессов в электрошлаковой печи [7, 8] только частично применимы для описания процессов тепло- и массообмена в руднотермической электропечи.

В настоящей работе предложена комплексная математическая модель процессов, протекающих в руднотермической электропечи; методика численного решения соответствующей нелинейной задачи математической физики и проведены исследования МГД- и тепловых полей в ванне руднотермической печи.

I. Физическая модель руднотермической печи

Схема-разрез осесимметричной, одноэлектродной печи представлена на рис. I. Расплав (обл. I) располагается в плавильной ванне-выемке графитового блока (обл. 7). Плавление фосфоросодержащего сырья (шихты) (обл. 2) происходит в результате пропускания через расплав переменного тока промышленной частоты, который подаётся в расплав через погруженный графитовый электрод (обл. 5), а снимается через донный электрод (обл. 6).

Восполнение расплава, количество которого постепенно или периодически уменьшается за счёт отвода и кристаллизации готового продукта, осуществляется путём подачи шихты (обл. 2), засыпаемой на расплав сверху.

Снаружи печь орошается водой. Наиболее эффективное охлаждение осуществляется сбоку, где на уровне расплава находится лишь один теплоизоляционный слой - графитовая засыпка (обл. 8). Донная и верхняя часть печи теплоизолированы хромомагнезитом (обл. 9) и шамотом (обл. I0), тепловые потери через которые малы.

В расплаве (обл. I) происходят следующие основные физические процессы:

I) в результате протекания электрического тока в расплаве выделяется джоулево тепло, плавящее фосфоросодержащее сырьё;

2) неоднородность растекания электрического тока приводит к его взаимодействию с собственным магнитным полем,

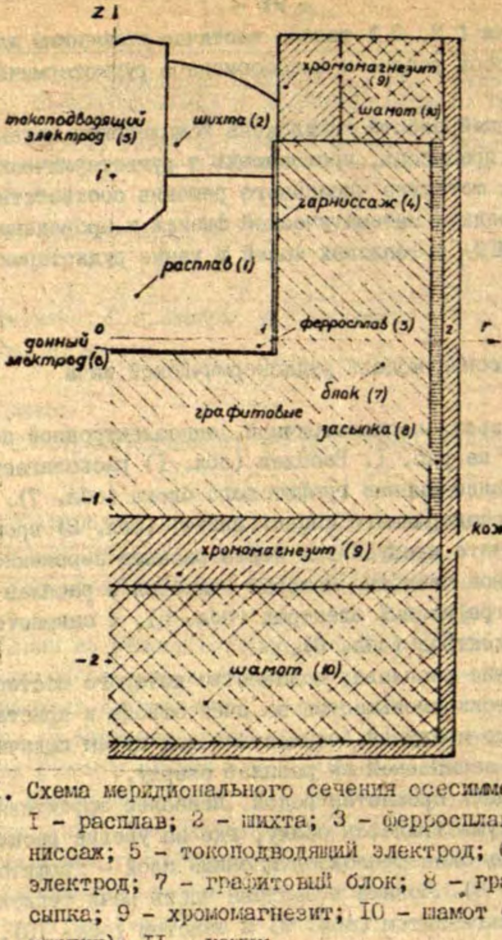


Рис. I. Схема меридионального сечения осесимметричной РТП
I - расплав; 2 - шихта; 3 - ферросплав; 4 - гарниссаж; 5 - токоподводящий электрод; 6 - донный электрод; 7 - графитовый блок; 8 - графитовая засыпка; 9 - хромомагнезит; I0 - шамот (шамотный кирпич); II - кожух.

в результате чего на расплав действует электровихревая сила, создающая вынужденную циркуляцию расплава - электровихревое течение (ЭВТ);

3) в результате тепловыделения и циркуляции расплава при заданных условиях теплоотвода формируется неоднородное температурное поле;

4) неоднородное температурное поле ввиду зависимости плотности расплава от температуры приводит к возникновению естественной термогравитационной конвекции (ТГК).

Указанные физические процессы развиваются на фоне зависимости характеристик расплава и других элементов конструкции РТП от температуры.

Данные физические представления о процессах в ванне рудотермической печи, на базе которых развита математическая модель МГД-процессов в расплаве, не включают в себя наличие химических реакций в расплаве, а также процессов плавления и кристаллизации. Названные упрощения вызваны недостаточностью информации о характеристиках этих явлений в РТП и нежелательной для начальной стадии исследований громоздкостью математического аппарата для их описания.

2. Математическая модель МГД-процессов в рабочем объёме РТП

Основой для проведения исследования МГД-процессов в РТП являются уравнения Максвелла, уравнения движения жидкой фазы и уравнение сохранения энергии.

Учитывая синусоидальный характер пропускаемого через расплав тока ($I = I_0 e^{i\omega t}$), из уравнений Максвелла в безиндукционном приближении, при постоянной электропроводности в каждой из подобластей модели (рис. I), получаем следующее квазистационарное уравнение для комплексной магнитной индукции $\vec{B} = B_0 e^{i\omega t}$ в безразмерном виде

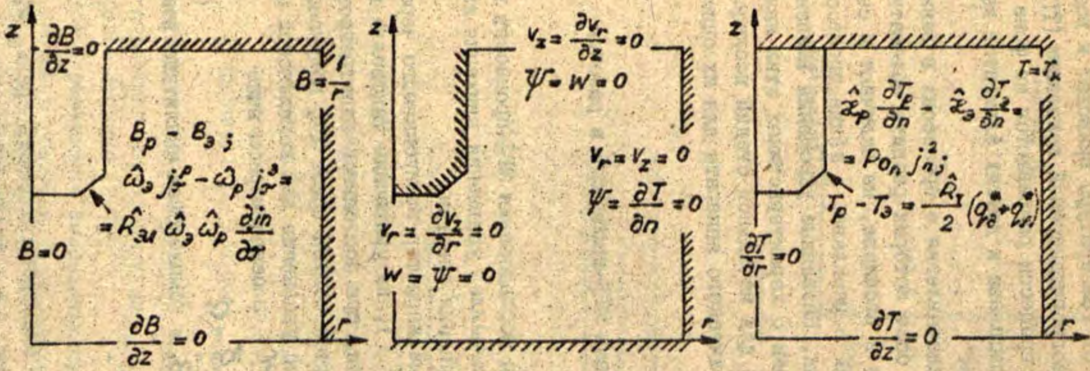
$$rot\,rot\,\vec{B} + i\hat{\omega}\vec{B} = 0, \tag{2.I}$$

где i - мнимая единица, $\vec{B}_0$ - комплексная амплитуда вектора индукции и

$$\hat{\omega} = \sigma \mu_0 \mu \omega r_0^2 - \tag{2.2}$$

безразмерная частота.

В выражении (2.2) σ - электропроводность среды, μ_0 - магнитная постоянная вакуума, ω - циклическая частота поля, r_0 - характерный линейный размер области. Оценка зна-



а) б) в)

Рис.2.а Граничные условия для азимутальной составляющей магнитного поля.
Рис.2.б Граничные условия для гидродинамической части задачи.
Рис.2.в Граничные условия для определения температурного поля в РТП.

чений безразмерной частоты в расплаве и электроде РГП следующая:

$$10^{-3} \lesssim \hat{\omega}_p \lesssim 5 \cdot 10^{-3}; \quad 1 \lesssim \hat{\omega}_э \lesssim 10. \qquad (2.3)$$

При аксиально-симметричном растекании тока $\vec{B} = B_\alpha \vec{e}_\alpha$. Граничные условия для B_α, дополняющие (2.I), а также условия сопряжения поля и тока на границе "электрод-расплав" с учётом наличия на этой границе электрического переходного сопротивления ($\hat{R}_{эл} = R_{эл} / \mu_0 \mu \omega r_0^3$), представлены на рис. 2.а.

Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска, учитывая переменность по объёму вязкости, в переменных "ротор скорости" ($\vec{W}$) и "функция тока" ($\vec{\Psi}$) описывает следующая система уравнений в безразмерном виде

$$rot[(grad\,\hat{\nu} - \vec{V}) \times \vec{W}] + 2\,rot[(\vec{V}\nabla)\,grad\,\hat{\nu}] =$$

$$= -rot(\hat{\nu}\,rot\,\vec{W}) + N\,rot\,\vec{f}_э + Gr\,rot\,\vec{f}_T; \qquad (2.4)$$

$$\vec{W} = -rot\,rot(\vec{\Psi}/r). \qquad (2.5)$$

В (2.4-2.5) использованы следующие обозначения (для векторов в скобках указаны их компоненты в аксиально-симметричном случае):

$\hat{\nu}$ – безразмерная кинематическая вязкость

$$[grad\,\hat{\nu} = (\frac{\partial \hat{\nu}}{\partial r}; 0; \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial z})];$$

$\vec{V}(V_r; 0; V_z)$ – безразмерная скорость движения расплава, нормирована в единицах числа Рейнольдса $V_0 = \nu_0 / r_0$, где ν_0 – характерная кинематическая вязкость расплава;

$\vec{W}(0; W; 0)$ – ротор скорости;

$\vec{\Psi}(0; \Psi; 0)$ – функция тока, введена таким образом, что

$$V_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}; \quad V_z = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}; \qquad (2.6)$$

$$rot\,\vec{f}_э = -\frac{1}{2r} Real(B_\alpha^* \frac{\partial B_\alpha}{\partial z})\,\vec{e}_\alpha - \qquad (2.7)$$

ротор электровихревой силы при $\mu = const$;

$$rot\,\vec{f}_T = -\frac{\partial \hat{T}}{\partial r}\vec{e}_\alpha - \tag{2.8}$$

ротор термогравитационной силы в безразмерной форме, $\hat{T}$ - безразмерная температура расплава $\hat{T} = T/T_\kappa$; T_κ - температура кристаллизации расплава;

$$N = j_0^2 \mu_0 \mu r_0^4 / \rho \nu_0^2 - \tag{2.9}$$

число Стюарта, где $j_0 = I/2\pi r_0^2$ - характерная плотность тока, ρ - плотность расплава;

$$Gr = g\beta_T T_\kappa r_0^3/\nu_0^2 - \tag{2.10}$$

число Грасгофа, где g - ускорение свободного падения, β_T - коэффициент объёмного расширения.

Оценка чисел Стюарта и Грасгофа для модели РТП

$$10^4 \lessapprox N \lessapprox 10^6;\; 5\cdot 10^6 \lessapprox Gr \lessapprox 5\cdot 10^7 \tag{2.11}$$

не позволяет однозначно отдать предпочтение термогравитационной конвекции (ТГК) в формировании течения расплава, поэтому в модели учитывается также наличие электровихревого течения (ЭВТ). Граничные условия для уравнений (2.4-2.5) представлены на рис. 2.6.

Из уравнения баланса энергии при допущении несжимаемости среды следует стационарное уравнение для температуры в безразмерном виде

$$Pr\,\vec{v}\,grad\,\hat{T} = div(\hat{\varkappa}\,grad\,\hat{T}) + \frac{Po}{2}\vec{j}^2, \tag{2.12}$$

где $\hat{\varkappa} = \varkappa/\varkappa_0$ - безразмерная теплопроводность среды, $\varkappa_0$ - характерная теплопроводность расплава;

$$Pr = \nu_0 \rho c_p/\varkappa_0 - \tag{2.13}$$

число Прандтля, c_p - теплоёмкость среды при постоянном давлении;

$$Po = j_0^2 r_0^2/\sigma \varkappa_0 T_0 - \tag{2.14}$$

число Померанцева.

Оценки значений Pr и Po для РТП следующие:

$$500 \lesssim Pr \lesssim 1000$$
$$10 \lesssim Po_p \lesssim 100 \qquad (2.15)$$
$$0,1 \lesssim Po_э \lesssim 0,5$$

В случае включения электрода в расчётную область, в этой подобласти левая часть уравнения (2.12) равна нулю, а на границе "расплав-электрод" ставятся условия сопряжения тепловых полей и потоков (рис. 2.в), с учётом наличия на этой границе тонкого слоя, обладающего термическим сопротивлением. Безразмерные параметры, входящие в эти условия, следующие:

$$Po_n = j_o^2 R_{эл} r_o / \varkappa_o T_o; \qquad (2.16)$$
$$\hat{R}_T = q_o R_T / T_o,$$

где q_o - характерный поток тепла.

Условие $T = T_k$ на поверхности расплава приближённо моделирует наличие плавящейся шихты над расплавом (рис. I, обл. 2), а на боковой поверхности области - наличие на боковой стенке ванны слоя гарнисажа (рис. I, обл. 4). Кроме указанных на рис. 2.в, в данной работе использовались также другие варианты граничных условий:

I) Теплообмен излучением на свободной поверхности расплава

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} = - Po_u (\hat{T}^4 - \hat{T}_{ex}^4); \; Po_u = k_r \sigma' T_k^3 r_o / \varkappa_o, \qquad (2.17)$$

где k_r - степень черноты поверхности, σ' - постоянная Стефана-Больцмана, $\hat{T}_{ex}$ - температура окружающей среды. Оценка Po_u для РТП :

$$50 \lesssim Po_u \lesssim 250. \qquad (2.18)$$

Условием (2.17) моделируется отсутствие шихты на поверхности расплава.

2) Заданная температура на электроде

$$\hat{T} = \hat{T}_э \qquad (2.19)$$

или известный тепловой поток (q) из электрода

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial n} = - Po_c ; \; Po_c = q r_o / \varkappa_o T_k, \qquad (2.20)$$

позволяют приближённо учесть выделение тепла на электрическом сопротивлении контакта "расплав-электрод", без включения последнего в расчётную область.

3. Численная реализация математической модели

Для численного решения системы уравнений (2.I, 2.4, 2.5, 2.I2) с соответствующими граничными условиями используется конечно-разностный подход. Для аппроксимации (2.I) используется схема сквозного счёта, предложенная в [9]. Гидродинамическая часть задачи решается в переменных "вихрь скорости" и "функция тока" с использованием направленных разностей при аппроксимации конвективных членов (2.4).

На твёрдых стенках области для ротора скорости используются граничные условия типа условий Полежаева [I0, II]. Между приграничной и граничной линиями равномерной разностной сетки вводится дополнительная линия, значения ротора на которой находятся из уравнения связи (2.5). С учётом равенства нулю нормальной производной функции тока значения ротора скорости на границе определяются по формуле:

$$W_N = \frac{8}{3} W_{N-1/2} - 2 W_{N-1} + \frac{1}{3} W_{N-2}. \qquad (3.I)$$

Конвективные члены в уравнении (2.I3) также аппроксимируются направленными разностями.

Решение полученной системы алгебраических уравнений методом итераций реализовано в виде комплекса программ для ЭВМ на языке ФОРТРАН. Время расчёта одного варианта с I600 узловыми точками на ЭВМ ЕС-I022 для магнитной индукции составляет 30-60 минут, а время сопряжённого решения гидродинамической и тепловой частей задачи составляет в зависимости от значений параметров модели 2-5 часов.

4. Анализ результатов

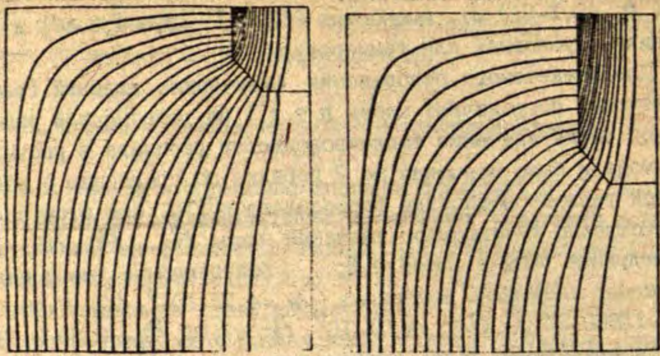
Комплексное исследование МГД- и тепловых процессов проводилось для РТП с радиусом r_0 = 0,4 м, радиусом электрода 0,I м, высотой h =0,4 м при различных погружениях электрода ($h_э$ =0,I-0,2 м), мощностях РТП (I =3,0-4,5 $кА$) и граничных условиях для температуры.

Для адекватного отображения физических явлений (температурных пограничных слоёв и т.д.) на равномерной расчётной сетке значение теплопроводности расплава в расчётной модели было повышено на 2 порядка по сравнению с реальной теплопроводностью ферросплава в РТП. При этом соответственно уменьшаются значения чисел $Po_р$, Pr, $Po_ω$, приведенные выше в разделе 2; безразмерные числа подобия имеют следующие значения: $\hat{\omega}_р$ =4,7I·I0^{-3}, $\hat{\omega}_э$ =7,86, N =I5600-35I00, Gr =4,7I·I0^{7}, Pr =7,I6, $Po_р$ =0,39-0,87.

Распределение тока, протекающего через ванну печи, показано на рис. 3. Наибольшая неоднородность тока наблюдается вблизи среза электрода, в результате чего там имеет место наибольшее вихревое ЭМ-воздействие на расплав. В приэлектродной зоне максимальна также мощность джоулева тепловыделения и происходит наиболее интенсивное плавление шихты. При изменении заглубления электрода от 0,I до 0,2 м интегральная мощность джоулевых источников тепла в расплаве уменьшается в I,5 раза.

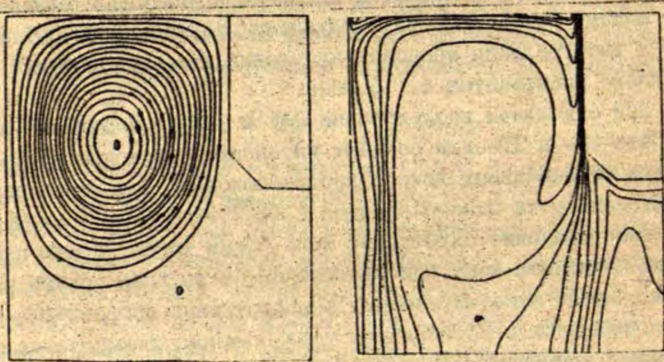
При отдельном исследовании ЭВТ и ТГК установлено (рис. 4), что ЭМ- и ТГ-силы создают интенсивное течение жидкости в виде тороидальных вихрей противоположной направленности и интенсивности одного порядка ($Re^{ЭВТ}$ =I60; $Re^{ТГК}$ =530). Вихревое движение охватывает весь объём ванны, кроме некоторой застойной зоны под электродом, и во всём объёме расплава, кроме ярко выраженных температурных пограничных слоёв на границах с интенсивным теплообменом, формируется однородное температурное поле. ТГК приводит к более эффективному охлаждению, так как выносит разогретую вблизи электрода массу расплава к поверхности, где происходит интенсивный теплообмен или плавление шихты. Температура в большей части расплава для ТГК и ЭВТ соответственно 1400°С и 1490°С, и доля теплоотвода через верхнюю границу в общем теплообмене составляет соответственно 72% и 58%.

Картины течения и температурного поля при взаимодействии ЭМ- и ТГ-сил качественно не отличаются от наблюдаемых при ТГК (рис. 4.в). ТГК доминирует во всём вышеуказанном интервале изменений подводимого тока и заглубления электро-



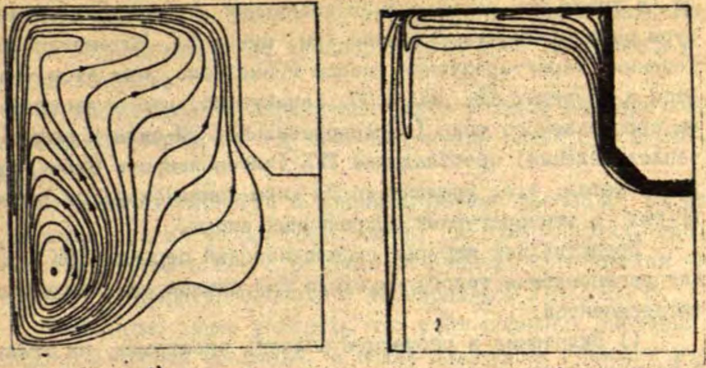
а)   б)

Рис.3.а Линии тока в РТП при $h_э$=10см
Рис.3.б Линии тока в РТП при $h_э$=20см



а)   б)

Рис.4.а Изолинии функции тока при ЭВТ
$\Psi_{min} = -0,3$, $\Psi_{max} = 18,2$, $\Delta\Psi = 1,0$, Re=180
Рис.4.б Изотермы в расплаве при ЭВТ :
T_{min}=1260°C, T_{max}=1700°C, ΔT=23°C



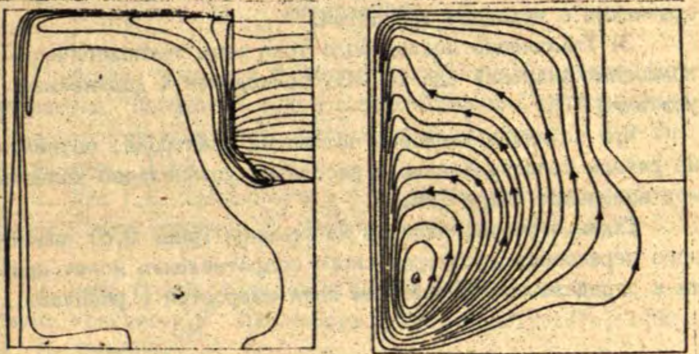
в) г)

Рис.4.в Изолинии функции тока при ТГК

$\psi_{min} = -37{,}1$, $\psi_{max} = 0$, $\Delta\psi = 2{,}1$ $Re = 530$

Рис.4.г Изотермы в расплаве при ТГК

$T_{min} = 1285\,°C$, $T_{max} = 1600\,°C$, $\Delta T = 17.5\,°C$



а) б)

Рис.5.а Изотермы в РТП при включении электрода в расчетную область

$T_{min} = 1350\,°C$, $T_{max} = 1600\,°C$, $\Delta T = 13.5\,°C$

Рис.5.б Изолинии функции тока при заданном тепловом потоке из электрода

$\psi_{min} = -63{,}5$, $\psi_{max} = 0{,}2$, $\Delta\psi = 3{,}6$, $Re = 1070$

да, а также при варьировании граничных условий для температуры на поверхности расплава (см. пункт 2). Интенсивность течения, характеризуемая числом Рейнольдса, при этом меняется в пределах Re =400-500. Характерно, что с увеличением пропускаемого тока (и,следовательно, ЭМ-силы и мощности тепловыделения) преобладание ТГК (интенсивность циркуляции) усиливается, т.е. увеличение ЭМ-силы компенсируется ростом ТГ-сил в температурных пограничных слоях.

Представляет интерес гипотетический переход ТГК в ЭВТ. Для установления такого перехода был сделан ряд численных экспериментов:

I) Включение в расчетную область электрода, на границе с расплавом которого задано тепловое сопротивление (R_T = =5,3·10^{-3} $W^{-1}Km^2$), что приводит к ослаблению ТГ-воздействия приэлектродной зоны на расплав (температурное поле рис.5.а). Однако это приводит лишь к незначительному уменьшению интенсивности циркуляции расплава.

2) Снижение в 10 раз числа Грасгоффа, что приводит к снижению числа Рейнольдса до Re = III, т.е. в 4-5 раз по сравнению с исходным вариантом.

3) Увеличение подводимого тока выше технологически возможных значений (до 14 кА), приводящее к дальнейшему усилению ТГК.

При заданном тепловом потоке из электрода, по величине равном тепловыделению в расплаве, установлено качественное изменение вихря ТГК.

Таким образом, наличие на границе (рис. 5.б) значительного переходного электрического сопротивления может привести к определенным изменениям поля скоростей в расплаве.

Выводы

В результате исследований, проведенных с использованием разработанной методики расчета МГД- и тепловых процессов в расплаве РТП, установлено, что

1) характер циркуляции расплава в ванне и её интенсивность в основном определяется термогравитационной конвекцией, возникающей из-за неоднородности поля температур у границ области;

2) интенсивность циркуляции слабо зависит от величины подводимой мощности и глубины погружения электрода в расплав;

3) в результате ТГК в основном объёме расплава, за исключением тонких пограничных слоёв, на поверхностях, где происходит теплообмен с окружающей средой, формируется однородное температурное поле с температурой $T \approx 1400^{\circ}C$.

Необходимо также указать, что учёт реальных значений теплопроводности расплава, а также повышение точности учёта тепловых пограничных слоёв (в расчётах на равномерной сетке дисбаланс достигал 25%) сопряжено с дальнейшим усовершенствованием методики расчёта, в частности, с использованием неравномерной конечно-разностной сетки и специальных разностных схем.

Литература

1. Тезисы докладов III Всесоюзного научно-технического симпозиума "Параметры рудовосстановительных электропечей и совершенствование конструктивных элементов." - М.: Информэлектро, 1982. - 79 с.

2. Нус Г.С. Теплообмен в рабочем пространстве руднотермических электропечей // Цветные металлы.-1981.- № 7.- С.21-27.

3. Radu Dorel, Caracas Mihai. Modelaria fizica a cuptoarelor elektrice // Ind.usoara. Piel. conf. piele.-1982.-29.-Nr. 7.-320-324.

4. Schill P. Matematicky model taveni umene v elektrickych oecich. - Silinaty.-1982.-Nr.2.-S. 155-163.

5. Heiss W.D. Modelling and simulation of electric smelling furnaces // Ironmak & Stelmak.-1982.-Nr.5.-p.217-221.

6. Dilawari A., Szekely J. A Mathematical Model of Hag and Metal Flow in the ESR Process // Metallurgical Transactions B.-1977.-Vol. 8B.-I.-p. 227-236.

7. Szekely J. On heat and fluid flow phenomena in electric melting and smelting operations. Metallurgical applications of magnetohydrodinamics // Proc. IUTAM, Metals Society,- London,-1984,-p. 93-107.

8. Сандлер В.Ю. Численное исследование полей температуры и скорости в шлаковой ванне // Магнитная гидродинамика,- 1982,-№ 2,- С. II3-II9.

9. Павлов С.И. Конечно-разностный расчёт магнитного поля токов, пересекающих границу раздела однородных проводников // Моделирование физических процессов в сплошных средах.-Рига: ЛГУ им. П.Стучки,-1985,- С. 37-46.

I0. Павлов С.И. О выборе метода численного расчёта движения расплава в индукционной тигельной печи // Электродинамика и механика сплошных сред.-Рига,-1983,- С. 3-2I.

II. Полежаев В.И , Грязнов В.Л. Метод расчёта граничных условий для уравнений Навье-Стокса в переменных "вихрь,функция тока" // Доклады АН СССР,-1974,- Т.2I9.-№ 2.- С. 30I-304.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 105-118

УДК 539.374:534.13

А.И.Шведе
ЛГУ им. П.Стучки

РАСЧЁТ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КВАДРАТНОЙ ЖЁСТКОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Для расчёта деформирования металлических конструкций при интенсивных динамических нагрузках часто используется модель идеально жёсткопластического материала (см., например, [1], [2]). В таких процессах обычно проявляется значительная чувствительность материала к скоростям деформирования, но жёсткопластическая теория пренебрегает этим явлением. Ближе к действительности модель жёстковязкопластического тела. Используя эту модель, разными авторами решены некоторые задачи статического и динамического деформирования стержней и пластин (см. обзор в [2]).

В работе представлено численное решение задачи динамического деформирования квадратной жёстковязкопластической пластины. Данная работа является развитием [3], где аналогичная задача решалась в жёсткопластической постановке.

1. Постановка задачи

Рассматривается свободно опертая тонкая жёстковязкопластическая пластина, занимающая область пространства $\omega = (0 \le x_1 \le L) \times (0 \le x_2 \le L) \times (-h \le x_3 \le h)$, $h \ll L$. На поверхности $x_3 = -h$ она нагружена прямоугольным импульсом равномерно распределённого давления p длительностью τ. Задаются также свойства материала - масса единицы поверхности m, предел текучести при статическом растяжении σ_0 и коэффициент динамической вязкости η.

Задача решается в приближении малых деформаций и используются гипотезы Кирхгофа-Лява с учётом поперечного обжатия

$$U_1(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

$$U_2(x_1, x_2, x_3) = -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2} \qquad (I)$$

$$U_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) + \frac{x_3^2}{2}\left(\frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w(x_1, x_2)}{\partial x_2^2}\right),$$

где $U_i(x_1, x_2, x_3)$ - скорости точек пластины;

$w(x_1, x_2)$ - скорость прогиба срединной поверхности пластины.

Заметим, что U_i удовлетворяют условию несжимаемости $U_{i,i} = 0$

Для формулировки математической модели проблемы воспользуемся вариационным принципом, предложенным в [I]. Согласно [I] время движения жёстковязкопластического тела объёмом ω разделяется на конечное число интервалов Δt_e, $e = 1, \ldots, M$. Скорости $U_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1,2,3$ и скорости деформации $e_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, $i,j = 1,2,3$ в каждом Δt_e находятся посредством минимизации функционала

$$\mathcal{H}(U_i, \Delta t_e) = \frac{1}{2\Delta t_e}\int_\omega \rho (U_i - U_i^{\Delta t_{e-1}})^2 d\omega + \int_\omega \varphi(e)\, d\omega - \int_{S_p} p_i U_i\, dS \qquad (2)$$

при $$U_i|_{t=0} = U_i^0\,;\; U_i|_{S_u} = 0\,;\; e_{ii} = 0, \qquad (3)$$

где $e_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$;

ρ - плотность материала;

$U_i^{\Delta t_{e-1}}$ - скорость в интервале времени Δt_{e-1};

p_i - поверхностная нагрузка, действующая в области S_p;

$\varphi(e)$ - диссипативный потенциал жёстковязкопластического тела.

При условии текучести Мизеса тело остаётся жёстким, пока

$$s_{ij} s_{ij} < \frac{2}{3}\sigma_0^2, \qquad (4)$$

где s_{ij} – девиатор тензора напряжений σ_{ij}, и тогда [I]

$$\varphi(e) = \sigma_0 \sqrt{2/3\, e_{ij} e_{ij}} + \eta/2\, e_{ij} e_{ij} \tag{5}$$

Этому потенциалу соответствует следующий закон поведения

$$s_{ij} = \left(\frac{\sigma_0}{\sqrt{3/2\, e_{ij} e_{ij}}} + \eta \right) e_{ij} \tag{6}$$

Видно, что если где-то в ω $e_{ij} e_{ij} = 0$, то там s_{ij} остаются неопределёнными, но удовлетворяют слабому неравенству (4).

В случае нагружения пластины выражение функционала получаем, подставляя (I) в (2) и интегрируя (2) по толщине пластины. После отброса слагаемых порядка $\theta(h^2)$ и перехода к безразмерным величинам, имеем

$$J(w, \Delta\bar{t}_e) = \int_0^1\!\!\int_0^1 \left[\frac{(w - w^{\Delta t_{e-1}})^2}{2\Delta\bar{t}_e} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3} K_{ij}(w) K_{ij}(w)} + \frac{1}{R} K_{ij}(w) K_{ij}(w) - Pw \right] d\bar{x}_1\, d\bar{x}_2 \tag{7}$$

$$\bar{x}_1 = x_1/L;\ \bar{x}_2 = x_2/L;\ \bar{t} = t/\tau,$$

где $W = \dfrac{m L^2 w}{4\sigma_0 h^2 \tau}$; $P = \dfrac{p L^2}{4\sigma_0 h^2}$;

$$K_{ij}(w) = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} & -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} & 0 \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} & -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$ – тензор скоростей изгиба;

$\nu = \dfrac{\eta}{g}$ – коэффициент кинематической вязкости;

$R = \dfrac{3L^4}{2h^2\tau\nu}$ – безразмерный параметр.

Представляя параметр R в виде $R = 6\left(\dfrac{L}{2h}\right)^2 \dfrac{L/\tau\, L}{\nu}$

и принимая L/τ за характерную скорость процесса, сомножитель $\frac{L/\tau \cdot L}{\nu}$ приобретает смысл числа Рейнольдса. Таким образом, R характеризует относительную толщину пластины и соотношение инерционных и вязких сил в ней.

Граничные условия в случае свободного опирания следующие

$$W\Big|_{\substack{\bar{x}_1=0\\ \bar{x}_1=1}} = W\Big|_{\substack{\bar{x}_2=0\\ \bar{x}_2=1}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}_1^2}\Big|_{\substack{\bar{x}_1=0\\ \bar{x}_1=1}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \bar{x}_2^2}\Big|_{\substack{\bar{x}_2=0\\ \bar{x}_2=1}} = 0$$

Чёрточки над безразмерными величинами далее опускаем.

2. Алгоритм численного решения

Функционалы (7) являются недифференцируемыми при $K_{ij}(W)\cdot K_{ij}(W)=0$, и это существенно ограничивает класс методов, пригодных для их минимизации.

Воспользуемся в [4] предложенной методикой, которая основана на принципе двойственности. Этот принцип гласит, что всякий выпуклый собственный полунепрерывный снизу функционал совпадает с верхней гранью всех не превосходящих его непрерывных функционалов. Рассмотрим второй член функционала (7). Можно показать, что он удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям. Тогда будет справедливым следующее представление

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \sqrt{2/3\, K_{ij}(W) K_{ij}(W)}\, dx_1 dx_2 = \sup_{T_{ij}\in Q} \int_0^1\!\!\int_0^1 T_{ij} K_{ij}^{\bullet}(W)\, dx_1 dx_2 , \tag{8}$$

где $T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11}(x_1,x_2) & T_{12}(x_1,x_2) & 0 \\ T_{12}(x_1,x_2) & T_{22}(x_1,x_2) & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}(x_1,x_2) \end{bmatrix}$ – произвольные

функции, принадлежащие множеству Q;

$$Q = \left\{ T_{ij} \,\middle|\, T_{ij} T_{ij} \leqslant 2/3 \right\}$$

Заметим, что для T_{ij}^{0}, реализующих максимум в (8),

$$S_{ij} = T_{ij}^{0} + \eta K_{ij}(W),$$

где S_{ij} - девиатор тензора изгибающих моментов M_{ij}

Задача таким образом сведена к нахождению седловых точек лагранжианов

$$\inf_{W} \sup_{T_{ij} \in Q} L(W, T_{ij}, \Delta t_{\ell});$$

$$L = \int_0^1\int_0^1 \left[\frac{(W - W^{\Delta\ell-1})^2}{2\Delta t_\ell} + \frac{1}{4} T_{ij} K_{ij}(W) + \frac{1}{R} K_{ij}(W) K_{ij}(W) - PW \right] dx_1 dx_2 \quad (9)$$

Для этого применим двухшаговый итерационный алгоритм типа Удзавы [4].

I шаг. Зная T_{ij}^{n}, определяем W^{n}, как элемент, минимизирующий $L(W^n, T_{ij}^n, \Delta t_\ell)$ при известных T_{ij}^{n}

2 шаг. Строим T_{ij}^{n+1} следующим образом:

$$T_{ij}^{n+1} = \Pi_Q\left(T_{ij}^{n} + \alpha K_{ij}(W^n)\right), \quad (10)$$

где $\Pi_Q(B_{ij}) = B_{ij} / max\left(1, \sqrt{2/3\, B_{ij} B_{ij}}\right)$ - оператор проектирования на область Q,

$\alpha \in]\alpha_1, \alpha_2]$ - численный параметр, позволяющий оптимизировать скорость сходимости алгоритма.

Счёт продолжается пока

$$\frac{\|W^{k+1} - W^{k}\|}{\|W^{k+1}\|} \leq \varepsilon, \quad (11)$$

где $\|A\| = \int_0^1\int_0^1 |A(x_1, x_2)| dx_1 dx_2$;

ε - заданная точность.

После несложных преобразований по аналогии с [3] I шаг алгоритма Удзавы сводится к граничной задаче с бигармоническим оператором

$$\frac{W^n - W^{\Delta t_{l-1}}}{2\Delta t_l} + \frac{1}{R}\Delta\Delta W^n = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2(T_{11}^n - T_{33}^n)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(T_{22}^n - T_{33}^n)}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 T_{12}^n}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + P \qquad (12)$$

$$W^n\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=1}} = W^n\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=1}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 W^n}{\partial x_1^2}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=1}} = \frac{\partial^2 W^n}{\partial x_2^2}\Big|_{\substack{x_2=0\\x_2=1}} = 0 \qquad (13)$$

Для удобств численного решения запишем (12) в виде системы

$$\frac{W^n - W^{\Delta t_{l-1}}}{2\Delta t_l} + \frac{1}{R}\Delta U^n = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2(T_{11}^n - T_{33}^n)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(T_{22}^n - T_{33}^n)}{\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^2 T_{12}^n}{\partial x_1 \partial x_2}\right] + P \qquad (14)$$

$$\Delta W^n = U^n$$

Из-за симметрии можно рассматривать одну четвёртую часть пластины. На границах $x_1=0,5$ и $x_2=0,5$ тогда ставятся условия симметрии для U и W, и граничные условия для системы (14) имеют следующий вид

$$W^n\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} = U^n\Big|_{\substack{x_2=0\\x_1=0}} = 0$$

$$\frac{\partial W^n}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0,5} = \frac{\partial W^n}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0,5} = \frac{\partial U^n}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0,5} = \frac{\partial U^n}{\partial x_2}\Big|_{x_2=0,5} = 0 \qquad (15)$$

Таким образом, I шаг алгоритма нахождения седловых точек (W^n, T_{ij}^n) лагранжианов (9) сведён к проблеме (14)+(15). Для её численного решения область $(0 \le x_1 \le 0,5) \times (0 \le x_2 \le 0,5)$ покрывается равномерной разностной сеткой с шагом H, что соответствует числу разбиения сторон области $N = \frac{0,5}{H} + 1$ и (14) и (15) аппроксимируется на ней с точностью $O(H^2)$. Далее, считая (14) соответствующую систему разностных уравнений системой двух уравнений относительно W_{km}^n и U_{km}^n, $k,m = 1,\dots,N$ решаем её и получаем

$$W_{km}^{n}=C\left(\frac{\overset{\Delta t_{e-1}}{W_{km}}}{2\Delta t_e}+V_{km}^{n}-A_{km}^{n}+\frac{4B_{km}^{n}}{RH^4}\right);\qquad k,m=2,\dots,N-1 \tag{I7}$$
$$U_{ke}^{n}=\mathcal{D}\left(-\frac{\overset{\Delta t_{e-1}}{W_{km}}}{2\Delta t_e}-V_{km}^{n}+A_{km}^{n}+\frac{B_{km}^{n}}{8\Delta t_e}\right),$$

где

$$A_{km}^{n}=\left(U_{km-1}^{n}+U_{km+1}^{n}+U_{k-1m}^{n}+U_{k+1m}^{n}\right)/(RH^2);$$
$$B_{km}^{n}=W_{km-1}^{n}+W_{km+1}^{n}+W_{k-1m}^{n}+W_{k+1m}^{n};$$
$$C=\frac{2RH^4\Delta t_e}{RH^4+32\Delta t_e};$$
$$\mathcal{D}=\frac{8RH^2\Delta t_e}{RH^4+32\Delta t_e};$$

V_{km}^{n} - разностная аппроксимация правой части (I2).

Добавляем к (I7) аппроксимации (I5) и решаем полученную систему линейных уравнений методом верхней релаксации [5]. Сходимость фиксируем по аналогии с (II) для обоих W_{km}^{n} и U_{km}^{n}.

Для расчёта T_{ij}^{n+1} во 2 шаге алгоритма Удзавы производные в (I0) также заменяются конечными разностями. Сразу видно (это следует из (I5)), что

$$T_{11}^{n+1}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=T_{22}^{n+1}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}=T_{12}^{n+1}\Big|_{\substack{x_1=0.5\\x_2=0.5}}=0 \tag{I8}$$

Для нахождения разностных аналогов $T_{12}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}$ (см. в [3]), $T_{11}\big|_{x_1=0.5}$, $T_{22}\big|_{x_2=0.5}$ также используются (I5).

3. Некоторые численные результаты

Переходим к анализу полученных численных результатов. Задача решалась на сетке 2I×2I. Оптимальное значение α зависит от R и приближённо выбиралось $\alpha \approx 10/R$. Параметр релаксации метода верхней релаксации ω_R =I.4. Точность в алгоритме Удзавы ε =5·I0^{-6}, а при решении задачи (I4)+(I5) ε =I0^{-4}.

На рис. I представлены распределения скорости прогиба в сечении X_2 =0.5 в момент времени t =I снятия импульса давления интенсивности P=72 для разных R . Видно, что при R =$I0^6$, как и в жесткопластическом варианте [3], имеет место заметно выраженная концентрация изгиба у $X_1 \simeq 0.125$. При уменьшении R форма распределения прогибов становится пологой, и зона концентрации деформаций размывается и перемещается к центру пластины.

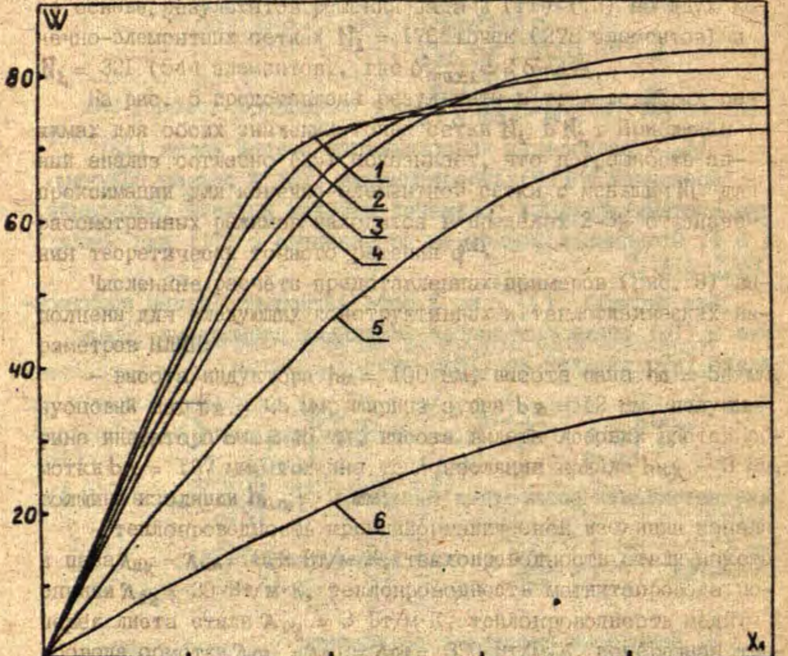


Рис. I. Распределения скоростей прогиба в сечении X_2 =0.5 при P=72 , t =I,I - R=$I0^6$; 2 - R=$I0^5$; 3 - R=2·$I0^4$; 4 - R=$I0^4$; 5 - R=$I0^3$; 6 - R=2·$I0^2$

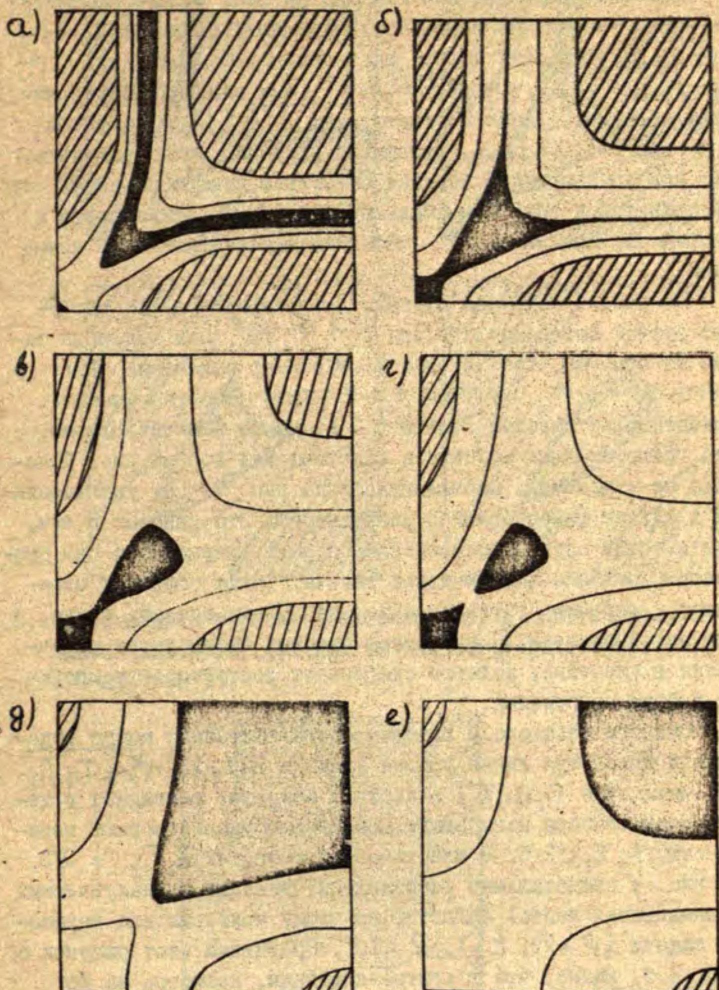


Рис. 2. Линии уровня интенсивности скоростей деформации $I=I(x,y)$ при $P=72$, $R=I$. а) $R=10^6$; б) $R=10^5$; в) $R=2\cdot 10^4$; г) $R=10^4$; д) $R=10^3$; е) $R=2\cdot 10^2$. Здесь и далее в заштрихованной области $I \leq 0{,}1\, I_{max}$ и пластина считается жесткой, в темной части $I > 0{,}8\, I_{max}$ на линии $I = 0{,}5\, I_{max}$. Центр пластины в правом верхнем углу рисунка.

Особенно наглядно это заметно на рис. 2, где приведены линии уровня интенсивности деформаций сдвига $I(X_1, X_2) = \sqrt{2 e_{ij} e_{ij}}$ для этих шести значений R. Области, где $I < 0{,}1 I_{max}$, $I_{max} = \max_{X_1, X_2} I(X_1, X_2)$ (они заштрихованы) считаем жёсткими. Линия соответствует $I = 0{,}5 I_{max}$, а в тёмной зоне $I \geqslant 0.8 I_{max}$. Сравнивая рисунки, можно заметить, что при уменьшении R жёсткая область в центре пластины уменьшается и зона максимальных деформаций стягивается к диагонали. При $R \leq 10^4$ жёсткая центральная зона исчезает.

На рис. 3 показаны картины деформирования для нагрузок разной интенсивности при $t = 1$, $R = 10^5$. Они получены таким же образом, как на рис. 2. Характер изменений при уменьшении P такой же и для соответствующей идеальножёсткопластической задачи [3]. Можно заметить также, что трансформация жёстких и пластических зон на рис. 3 похожа на изменения, проявляющиеся на рис. 2, при уменьшении R в случае фиксированной нагрузки P. Это связано с тем, что в обоих случаях относительная роль инерционных сил снижается, решение динамической задачи, таким образом, стремится к решению статической задачи. Можно сказать также, что при уменьшении R нарастает степень скоростного упрочнения в пластине, которое сдерживает рост скорости прогиба в фазе нагружения.

Области жёсткого и пластического состояния можно выделить и используя линии уровня функции $Z(X_1, X_2) = \sqrt{2/3\, T_{ij} T_{ij}}$. Напомним, что $T_{ij}(X_1, X_2)$ в жёстких областях совпадает с девиатором тензора изгибающих моментов и удовлетворяют неравенству $T_{ij} T_{ij} < 2/3$. В пластических областях $T_{ij} T_{ij} = 2/3$. На рис. 4 представлено расположение жёстких и пластических (заполненная часть) областей по этому критерию для варианта задачи с $P = 72$, $t = 1$, $R = 10^5$. Сравнивая этот рисунок с рис. 2.б, видно, что в центре пластины, несмотря на то, что там $Z(X_1, X_2) = 1$, деформирование всё-таки не происходит.

На рис. 5 показано развитие областей пластичности, определённых по интенсивности скоростей деформации, во времени в инерционной фазе движения для $P = 72$, $R = 10^5$. Как и в случае идеально жёсткопластической модели материала, зона мак-

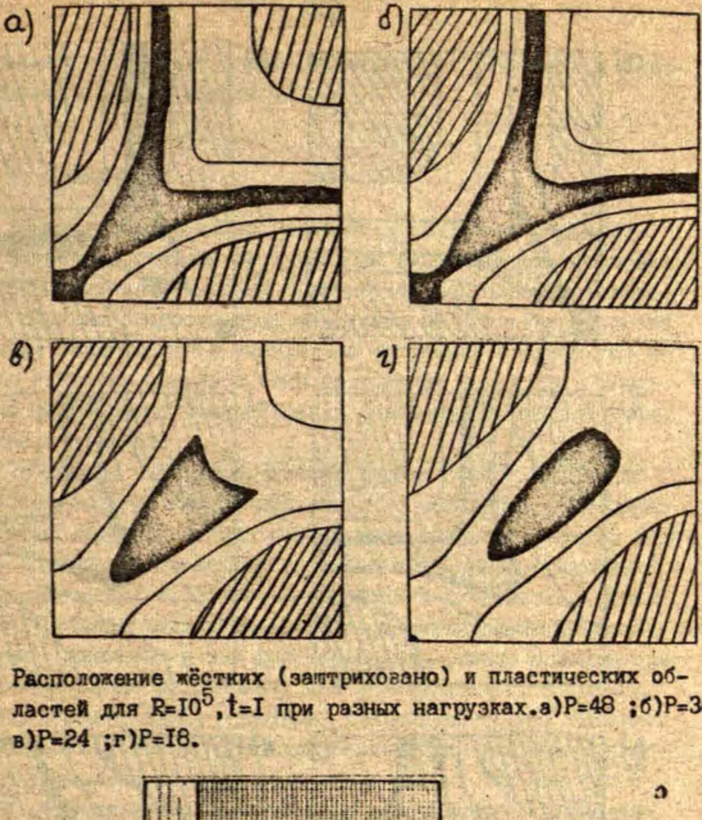


Рис.3. Расположение жёстких (заштриховано) и пластических областей для $R=10^5$, $t=1$ при разных нагрузках. а) $P=48$; б) $P=36$; в) $P=24$; г) $P=18$.

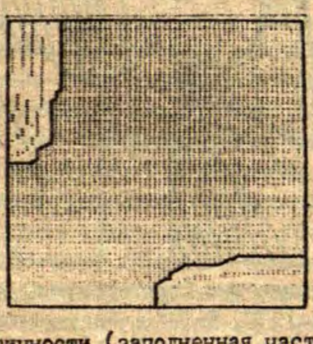


Рис.4. Зона пластичности (заполненная часть), определенная из условия $\sqrt{2/3\, T_{ij} T_{ij}} = 1$ для $P=72$, $t=1$, $R=10^5$.

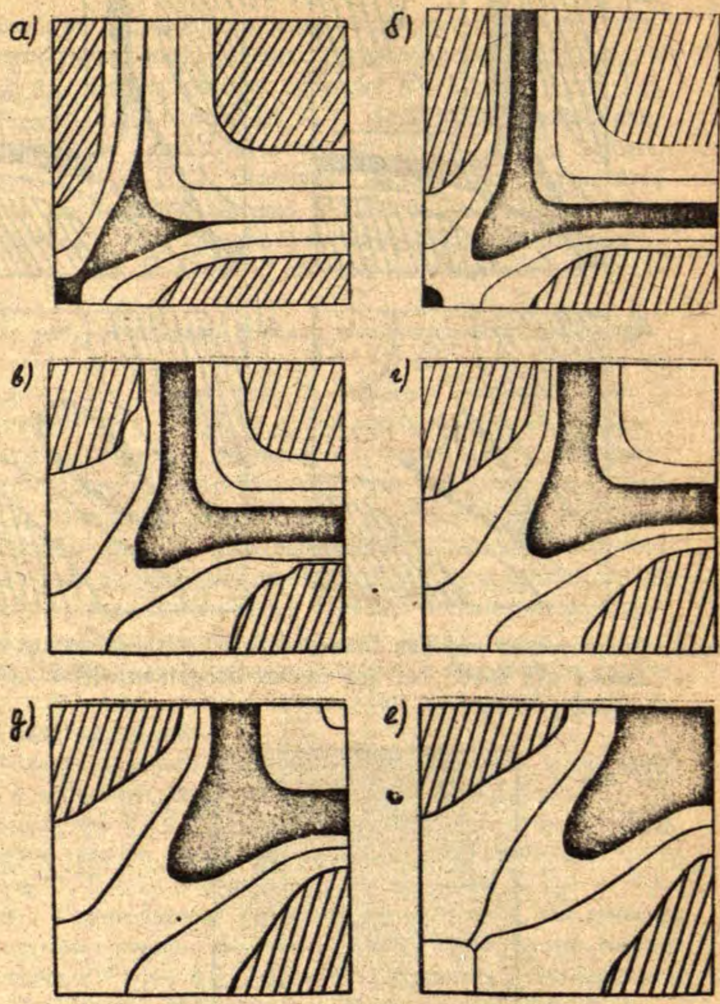


Рис. 5. Расположение жестких (заштриховано) и пластических областей для P=72, R=10^5 в инерционной фазе движения. а) t=1 ; б) t=1,05 ; в) t=1,45 ; г) t=1,95 ; д) t=2,45 ; е) t=2,95 .

симальных деформаций опять стягивается к диагонали и перемещается к центру пластины.

4. Заключение

Вышеизложенное можно подытожить следующим образом.

1. Разработан алгоритм расчёта динамического деформирования вязкопластических пластин. Он позволяет моделировать влияние скорости деформирования на поведение пластин, которое заключается в уменьшении ускорений прогиба уже во время действия импульса силы постоянной амплитуды. В идеально жёсткопластической модели ускорения прогиба в таком случае постоянны.

Проведено численное решение задачи о воздействии на свободно опёртую квадратную пластину импульсов равномерно распределённого давления разной интенсивности. Задача решалась при разных значениях параметра R, характеризующего роль вязкостных эффектов, приводящих к скоростному упрочнению. Решение задачи заключается в определении скоростей прогиба, прогибов и зон пластичности в разные моменты времени как в фазе нагружения, так и инерционного движения.

2. Следует также отметить, что разработанный алгоритм при $R \to \infty$ с успехом можно применить и для решения динамических идеально жёсткопластических задач. Так уже при $R = 10^6$ отличие вязкопластического и известного жёсткопластического решения [3] меньше 1-2% (при $P = 72$). Целесообразность этого заключается в том, что небольшая вязкость, незначительно сглаживая решение, существенно (почти на порядок при $R = 10^5$) увеличивает скорость сходимости по сравнению с алгоритмом без вязкости [3]. Для расчёта одного варианта задачи теперь в зависимости от R и P необходимо 30-120 минут машинного времени на ЭВМ ЕС-1020. Это позволит в дальнейшем провести решение рассмотренной и более сложных задач в геометрически нелинейной постановке.

Представляется, что только при учёте больших деформаций появится возможность моделирования скоростного упрочнения в реальных процессах.

Литература

1. Мосолов П.П., Мясников В.П. Механика жёсткопластических сред. - М., 1981. - 208 с.

2. Мазалов В.Н., Немировский Ю.В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упругопластических сред.-М.,1975.-С. 155-247.

3. Шведе А.И. Применение вариационного принципа для численного расчёта процесса динамического деформирования квадратной жёсткопластической пластины // Моделирование физических процессов в сплошных средах.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки. - 1985.- С. 122-131.

4. Гловински Р., Лионс Ж., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств,-М., 1979. - 574 с.

5. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. - М., 1978. - 592 с.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с.II9-I29

УДК 539.4:678.067

Н.Н.Блумберг
ЛГУ им. П.Стучки

НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С УЧЁТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ СВЯЗУЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ

Многослойные и особенно трёхслойные пластины широко используются в инженерном деле. В частности, стёкла для целого ряда транспортных средств изготавливаются путём склеивания листов силикатного или органического стекла синтетическим полимерным связующим. Поперечное сечение составной прямоугольной пластины, внешние нагрузки и внутренние силы, а также напряжения показаны на рис. I.

Одним из основных факторов, влияющих на напряжённо-деформированное состояние составного пакета пластин, является изменение температурного режима конструкции в процессе её эксплуатации. Имеет место значительное расхождение величин коэффициента линейного температурного расширения для материалов несущих и связующих слоёв. Несогласованность физико-механических характеристик материалов составного композита является причиной возникновения высоких уровней напряжений, локализованных преимущественно у гранично-опорного контура пластины. Эта особенность,известная как "кромочный" или "краевой" эффект [I], вызывает целый ряд дефектов, встречающихся при эксплуатации многослойных составных конструкций. Наиболее часто наблюдается растрескивание жёстких несущих слоёв и нарушение целостности составного пакета пластин из-за недостаточной адгезионной и когезионной прочности связующих материалов. При повышенных температурах напряжения, возникающие в склейке, соизмеримы с допускаемыми, а в самих материалах отчётливо проявляются нелинейные свойства, сопряжённые с их пластичностью. Стремление наиболее полно использовать несущую способность материала и желание глубже познать механизм взаимодействия смежных слоёв многослойного композита побудило рассмотреть в данной статье простейший вариант учёта нелинейной связи между напряжениями и деформациями. Эту связь можно представить известной диаграммой Прандтля или аналитически описать зависимостью [2]:

$$\sigma = E\varepsilon(1-\omega). \tag{I}$$

Для идеально упруго-пластического материала с модулем упругости E и пределом текучести σ_T параметр пластичности ω определяется следующим образом:

$$\omega = \begin{cases} 0 & \text{при } \varepsilon < \varepsilon_{упр} \\ \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_{упр}}{\varepsilon} & \text{при } \varepsilon \geqslant \varepsilon_{упр}, \end{cases} \tag{2}$$

где наибольшая упругая деформация $\varepsilon_{упр} = \sigma_T / E$.

Для учёта упрочнения материала дополнительно вводится параметр упрочнения α . В этом случае зависимость между напряжениями и деформациями принимает вид:

$$\sigma = E\varepsilon(1-\beta\omega); \quad \beta = 1-\alpha.$$

I. В основу многих методов расчёта распределения напряжений в однородных пластинах или оболочках положены некоторые априорно принятые гипотезы [3, 4]. В данной работе расчётная математическая модель задачи строится с учётом слабой сопротивляемости на сдвиг и обжатие мягких связующих слоёв. Аппроксимация напряжений производится в пределах каждого отдельного слоя пластины, являющегося естественным структурным элементом композита. Для жёстких слоёв считаем справедливой классическую гипотезу Кирхгофа-Лява, а для мягких слоёв принимаем уточнённую теорию типа Амбарцумяна:

а) касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} по толщине мягкого слоя меняются по заданному закону:

$$\tau_{xz}^{k}(x,y,z)=\tau_{xz}^{ks}(x,y)f_1^k(z)+\tau_{xz}^{ka}(x,y)f_2^k(z)+\tau_{xz}^{kv}(x,y)f_3^k(z); \quad x\to y. \tag{3}$$

Вторая аналогичная формула для τ_{yz} получается заменой индекса x на y; $f_m^k(z)$ - априорно заданная функция, причём координата z отсчитывается от срединной поверхности слоя; m =I,2,3; K - чётный номер мягкого связующего слоя композита;

б) нормальные поперечные напряжения σ_z по толщине мягкого слоя также подчиняются заранее принятому закону:

$$\sigma_z(x,y,z)=\sigma_z^{ks}(x,y)f_4^k(z)+\sigma_z^{ka}(x,y)f_5^k(z)+\tau_{q\imath}^{ka}(x,y)f_6^k(z)+\tau_{q\imath}^{ks}(x,y)f_7^k(z); \tag{4}$$

Здесь смысл обозначений аналогичен приведённому выше и, кроме того, введено обозначение

$$\tau_{q\imath}^{k\delta}(x,y)=S_k\left(\frac{\partial\tau_{xz}^{ks}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}^{ks}}{\partial y}\right); \quad s\to a. \tag{5}$$

Приведённая аппроксимация уточняет и обобщает ранее предложенные в литературе [5 - 7]. Во-первых, в большинстве случаев гипотеза Кирхгофа-Лява или один из вариантов уточнённых теорий принимается для всего многослойного пакета в целом. Во-вторых, здесь не используется упрощающее предположение, пренебрегающее напряжениями в плоскостях, параллельных срединной поверхности слоя для мягкого заполнителя. В-третьих, уточнённая теория Амбарцумяна модифицируется; учитывается поперечное обжатие слоя, которое ставится в зависимость от скорости изменения касательных напряжений. Перечисленные видоизменения усложняют теорию, но, как показывают численные расчёты, они приводят к существенным поправкам решения прочностных задач, которые позволяют более точно оценить так называемые второстепенные по классическим представлениям напряжения τ_{xz}, τ_{yz} и

σ_z. Благодаря последним, обеспечивается совместная работа всего многослойного пакета составной пластины. Решая поставленную задачу в упругом приближении, имеют место выбросы касательных и нормальных поперечных напряжений в краевой зоне за пределы текучести. Это обуславливает необходимость уточнения результатов расчёта, которые должны отражать реальное поведение материалов за пределом упругости согласно той или иной модели теории нелинейной упругости или пластичности. Как упомянуто выше, в данном случае используется модель Прандтля идеально упруго-пластического материала.

2. Опираясь на принятую математическую модель и предполагая, что деформации малы по сравнению с их произведением, составляем разрешающую систему дифференциальных уравнений [8] для определения всех неизвестных, характеризующих напряжённо-деформированное состояние многослойного композита. При выводе разрешающей системы уравнений удовлетворяются все условия контакта на поверхностях раздела двух смежных слоёв как по перемещениям, так и по напряжениям. После разделения переменных удобно использовать компактные матричные обозначения:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{d\xi} = A_{11}\vec{y} + A_{12}\vec{z} + \vec{\psi}_1 \\ \mu\,\dfrac{d\vec{z}}{d\xi} = A_{21}\vec{y} + A_{22}\vec{z} + \vec{\psi}_2\,; \end{cases} \tag{6}$$

где $\vec{y}$ - вектор-столбец всех искомых неизвестных жёстких слоёв; $\vec{z}$ - то же для мягких слоёв; $A_{ij}\,(i,j=1,2)$ - подблоки матриц коэффициентов разрешающей системы уравнений; $\vec{\psi}_i\,(i=1,2)$ - вектор-столбец заданных функций, содержащий информацию о механическом и тепловом воздействии на пластину, а также характеризующий геометрию многослойного пакета; $\mu = s/\ell$ - малый параметр, являющийся отношением средней толщины мягких слоёв и характерного размера пластины в плане. Следует заметить, что ранее в работе [8], где задача решалась в чисто упругой постановке, элементы подматриц A_{ij} не зависели от достигнутого уровня напряжений или деформаций. Разрешающая система уравнений (6) в этом случае представляет собой линейную систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, поскольку физико-механические параметры материалов зависят от температуры, которая определяется из решения несвязанной тепловой задачи или получается в результате экспериментальных наблюдений. В настоящей статье при учёте пластических свойств связующих материалов модули упругости и сдвига мягких слоёв домножаются на выражения, содержащие параметр пластичности ω (см. форм. I), а разрешающая система уравнений (6), следовательно, оказывается нелинейной. Кроме того, для системы (6) характерно наличие малого множителя μ при производных неизвестных функций мягких слоёв. Найти её решение даже в линейном приближении, полагая ω тождественно равным нулю, стандартными методами не удаётся, поскольку соответствующий алгоритм решения краевой задачи оказывается неустойчивым к ошибкам округления на ЭВМ [9]. Систему (6) следует считать сингулярно возмущённой. Подобная терминология введена в работе [I0], идеи которой положены нами в основу методики нахождения напряжений в многослойном композите.

Выясним асимптотические свойства решения и вместе с исходной системой рассмотрим вырожденную, полагая малый параметр μ равным нулю. Решения вырожденной и сингулярно возмущённой систем, как показано в [I0], мало отличаются на всём отрезке интегрирования за исключением малых окрестностей, примыкающих к опорному контуру пластины. Совокупность всех точек, где имеет место значительное расхождение решений, называют областями пограничного слоя. Существование пограничного слоя в случае сингулярного возмущения обусловлено тем, что для вырожденной задачи не могут быть удовлетворены все граничные условия, ибо часть дифференциальных уравнений, в которых пренебрегается малым параметром μ , становятся уравнениями алгебраическими. Таким образом, разница между решениями вырожденной и возмущённой систем может быть значительной и называется пограничной функцией.

Учитывая изложенные качественные особенности решения сингулярно возмущённой системы, целесообразно в численных расчётах применять метод пограничных функций (МПФ). Суть МПФ состоит в том, что любая искомая функция представляется в виде суммы трёх слагаемых и разлагается в асимптотический ряд по малому параметру:

$$\vec{x}(\xi,\mu)=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^{r}\left[\vec{x}_r(\xi)+\tilde{x}_r(\chi_0)+\tilde{\tilde{x}}_r(\chi_1)\right], \tag{7}$$

где $\vec{x}$ - по совокупности векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$; $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ - правая и левая погранфункции; $\chi_0=\xi/\mu$; $\chi_1=(\xi-1)/\mu$ - замена независимой переменной в погранслоях, которая может трактоваться как растяжение масштаба краевой зоны. Подставляя разложение (7) в исходную систему (6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ для каждого из аргументов ξ,χ_0,χ_1 раздельно, получаем рекуррентную последовательность уравнений для вычисления неизвестных r -го приближения:

$$\frac{d\tilde{y}_r}{d\chi_0}=A_{11}\tilde{y}_{r-1}+A_{12}\tilde{z}_{r-1}\,;\quad \frac{d\tilde{\tilde{y}}_r}{d\chi_1}=A_{11}\tilde{\tilde{y}}_{r-1}+A_{12}\tilde{\tilde{z}}_{r-1}\,; \tag{8}$$

$$\frac{d\vec{z}_{r-1}}{d\xi}=A_{21}\vec{y}_r+A_{22}\vec{z}_r+\vec{\Psi}_{2r}\,; \tag{9}$$

$$\frac{d\vec{y}_r}{d\xi}=A_{11}\vec{y}_r+A_{12}\vec{z}_r+\vec{\Psi}_{1r}\,; \tag{10}$$

$$\frac{d\tilde{z}_r}{d\chi_0}=A_{21}\tilde{y}_r+A_{22}\tilde{z}_r\,;\quad \frac{d\tilde{\tilde{z}}_r}{d\chi_1}=A_{21}\tilde{\tilde{y}}_r+A_{22}\tilde{\tilde{z}}_r\,. \tag{11}$$

Граничные условия систем уравнений (8-II) следующие:

$$\tilde{y}(\infty)=0\,;\quad \tilde{\tilde{y}}_r(-\infty)=0\,; \tag{12}$$

$$\vec{y}_r(0)+\tilde{y}_r(0)=\vec{y}_r^{\,*}\,;\quad \vec{y}_r(1)+\tilde{\tilde{y}}_r(0)=\vec{y}_r^{\,**}\,; \tag{13}$$

$$\tilde{z}_r(0)+\vec{z}(0)=\vec{z}_r^{\,*}\,;\quad \tilde{\tilde{z}}_r(0)+\vec{z}(1)=\vec{z}_r^{\,**}\,; \tag{14}$$

$$\tilde{z}(\infty)=0\,;\quad \tilde{\tilde{z}}_r(-\infty)=0. \tag{15}$$

Здесь звёздочкой отмечены заданные значения неизвестных на торцах.

Решение задачи осуществляется в той последовательности, в которой она записана. Сперва простым интегрированием по известным правым частям находятся погранфункции жёстких слоёв (8). Погранфункции экспоненциально убывают при удалении от торцевой точки, что отражено в дополнительных условиях (I2). Далее решается нелинейная алгебраическая система уравнений (9), с помощью которой исключаются неизвестные мягких слоёв ξ_i в дифференциальной системе уравнений (I0). Интегрируя последнюю численно при граничных условиях (I3), находим неизвестные жёстких слоёв. Вычислением погранфункций мягких слоёв (II, I4, I5) завершается ν -е приближение.

Точность построенной рекуррентной процедуры вычислений неизвестных оценивается теоремой, доказанной в работе [I0]. Отсылая за подробностями к первоисточнику, отметим, что условия, налагаемые на дифференциальную систему при доказательстве теоремы, в нашем случае выполняются и проверяются в ходе самих вычислений, поскольку они сводятся к вопросу о существовании решений систем уравнений (8–II). В линейной постановке, когда не учитываются пластические свойства связующих материалов, т.е. параметр ω полагается равным нулю, решение задачи однозначно определяется через матрицу обратную к матрице A_{22}. В рассматриваемом здесь случае нелинейной задачи путём последовательного подбора параметров пластичности ω для каждого отдельного мягкого слоя строится итерационный процесс, обеспечивающий однозначное решение требуемой точности.

3. Для иллюстрации вышеизложенного подхода рассмотрим пример расчёта напряжений в трёхслойном композите при цилиндрическом изгибе. Образец выполнен путём склеивания листов силикатного стекла длиной 200 мм и толщиной I0 мм. Толщина прослойки связующего материала составляет 3 мм. В расчёте физико-механические характеристики приняты следующими: модуль упругости силикатного стекла–60000 МПа; полимерного связующего слоя – I790 МПа; соответствующие коэффициенты линейного температурного расширения 0,85.

$\cdot 10^{-5}$ и 10^{-4} единиц на один градус изменения температуры. Принято, что образец находится в однородном температурном поле, превышающем температуру ненапряженного состояния композита на 50°С. Предел текучести связующего принят 2,5 МПа.

На рис. 2-4 изображены графики касательных напряжений τ_{xz}, максимальных касательных напряжений τ_{max} и продольных нормальных напряжений σ_x вдоль шва, т.е. на поверхности контакта стекла и полимера (l , мм - расстояние от торца пластины). Кривые, помеченные " I " получены в предположении, что деформации чисто упругие, а индекс "2" указывает, что принимаются во внимание пластические свойства связующего. В обоих случаях чётко выражена концентрация касательных напряжений около торца трёхслойной пластины. При учёте пластических свойств связующего наибольшее значение τ_{xz} уменьшается, а протяжённость пограничного слоя несколько увеличивается. На расстоянии I/25 длины образца или примерно на расстоянии трёх толщин склеивающего материала касательные напряжения практически обращаются в нуль в обоих случаях. Принимая во внимание, что предел текучести принят равным 2,5 МПа, максимальные касательные напряжения при учёте пластических свойств связующего ограничены этой величиной, что отражено горизонтальным отрезком кривой "2" на рис. 3. Обе кривые на рис. 3 будут близко совпадать после некоторого сжатия первой из них вдоль оси ординат и растяжения вдоль оси абсцисс. Указанные преобразования подобия показывают, что эффекты концентрации напряжений при пластических деформациях несколько сглаживаются. Как следствие композит, обладающий пластичностью связующих материалов, оказывается более податливым. Уровень нормальных продольных напряжений в средней части пластины, возникающий из-за ограничений свободного температурного расширения снижается, что отражено на рис. 4. Наибольшее значение σ_x в погранслое остаётся практически без изменений.

Подводя итоги представленного исследования, сформулируем следующие выводы.

I. Уточнённая методика расчёта напряжённо-деформированного состояния многослойных пластин выявляет чётко выраженную концентрацию напряжений в пограничной зоне у торцов пластины как с учётом, так и без учёта пластических свойств связующих полимерных материалов.

2. Численные расчёты показывают, что "второстепенные" по классическим представлениям компоненты тензора напряжений $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$ в мягких слоях являются величинами одного порядка с "основными" σ_x, σ_y действующими вдоль продольных размеров пластины.

3. При учёте пластических свойств связующих полимерных материалов концентрация напряжений в композите снижается, т.е. увеличивается протяжённость пограничного слоя и уменьшается величина наибольших значений всех компонент тензора напряжений.

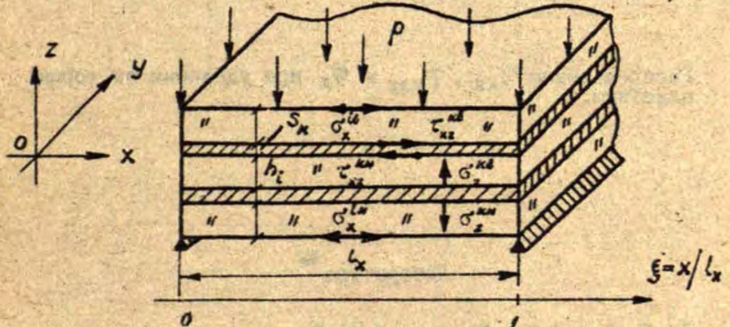


Рис. I. Схема прямоугольной многослойной пластины.

р - внешнее давление; σ, τ - нормальные и касательные напряжения; i - нечетный номер жесткого слоя; к - четный номер мягкого слоя; в - верх слоя; н - низ слоя.

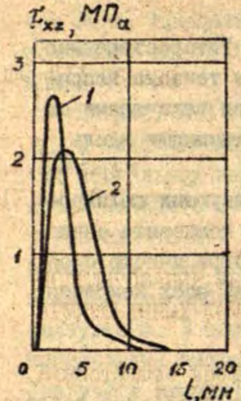


Рис. 2.

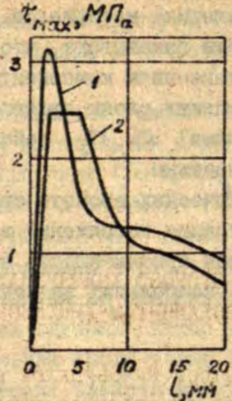


Рис. 3.

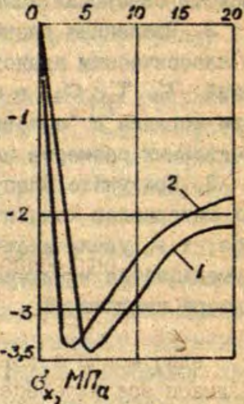


Рис. 4.

Распределение τ_{xz}, τ_{max} и σ_x при удалении от торца пластины.

Литература

1. Граймс Г.К., Грейман Л.Ф. Расчёт концентратов, кромочных эффектов и соединений // Композиционные материалы. - М.: Машиностроение, 1978.-Т.8.-Ч.2.-С.139-213.

2. Безухов Н.И., Лужин О.В. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. - М.: Высшая школа, 1974. - 200 с.

3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. - М.: Наука, 1966. - 635 с.

4. Амбарцумян О.А. Теория анизотропных пластин. - М.: Наука, 1967. - 266 с.

5. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жёсткости. - Киев: Наукова думка, 1973. - 288 с.

6. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. - М.: Машиностроение, 1980. - 376 с.

7. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек.- М.: Наука, 1974. - 448 с.

8. Блумберг Н.Н., Тамуж В.П. Краевые эффекты и концентрация напряжений в многослойных композитных пластинах // Механика композитных материалов. - 1980.-№3. - С. 424-435.

9. Бахвалов Н.С. Численные методы. - М.: Наука, 1973. - 632 с.

I0. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений. - М.: Наука, 1973. - 272 с.

Межвузовский сборник научных трудов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
Методы решения нелинейных задач
1987, Рига: ЛГУ им. П.Стучки, с. 130-145

УДК 611.08:539

К.К.Виллеруш
ЛГУ им. П.Стучки

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СПИРАЛЬНО АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В настоящее время технический прогресс в целом ряде отраслей создаёт большую потребность разработки всё новых материалов с различными комплексами заданных физико-механических свойств. Ведутся поиски новых способов армирования композитных материалов, исследуются пространственные схемы армирования [1]. Следует отметить, что в этой области пока ещё недостаточно проверены те принципы армирования, которые использованы природой в естественных биологических материалах, хотя такие разработки перспективны и интересны.

Наличие спиральных симметрий (т.е. расположение элементов армирования вдоль винтовых и синусоидальных траекторий, закрученность, волнистость, гофрированность) в разных биологических объектах является одним из самых общих принципов их строения. Так, спиральность наблюдается в каждом из пяти структурных уровней компактной костной ткани человека - жёсткого физически нелинейного анизотропного материала, на долю которого приходятся наибольшие механические нагрузки опорно-двигательной системы [2]. Не вдаваясь в подробности, отметим, что механическая роль этих спиральных элементов в биокомпозитах раскрыта не полностью.

В литературе очень мало работ посвящено искусственным спирально армированным материалам. В [3,4,5] изучались образцы из меди, армированные одной спиралью из вольфрамовой проволоки. Показано, что тип разрушения существенно зависит от угла подъёма спирали. В [6] испытаны образцы металлического композита с надрезом. Установлено, что вязкость образцов со спиральной арматурой выше данной величины для образцов с прямыми волокнами. В [7] и [8] расчётным путём определены упругие характеристики спирально армированных композитов - компактной костной ткани и её аналогов.

Теоретический расчёт упругих характеристик пространственно-спирально армированных материалов в принципе можно получить по [9-10], как это и сделано в [7], путём численного интегрирования вдоль спиральной винтовой траектории по алгоритму программы ЭВМ [11]. Однако при этом практически отсутствует описание аналитических решений конкретных схем армирования с пространственно-спиральными волокнами. В то же время именно аналитический анализ зависимостей свойств композита от механических характеристик его структурных составляющих обладал бы рядом преимуществ: такой метод позволял бы иметь прямой, более краткий вариант решения, проводить расчёты без помощи ЭВМ, оптимизировать материал путём математического анализа и, наконец, решить т.н. обратную задачу - получить значения механических характеристик отдельного компонента материала по известным характеристикам других его составляющих и всего композита в целом. Отметим лишь работы [12-13], в которых методом комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили исследовано напряжённо-деформированное состояние в материале, в котором спиральная арматура в качестве вспомогательной намотана на основные армирующие волокна.

В настоящей работе в качестве модели пространственно-спирального армирования будет принят композитный материал, в котором упрочнение достигается периодически расположенными спиральными волокнами N типов. Каждый тип различается структурными или геометрическими параметрами, но имеет одинаковое направление осей их винтовых линий. Механические свойства материалов матрицы и армирующих волокон принимаются за известные. Принимается также, что матрица принадлежит к изотропному, а арматура - к изотропному или монотропному классу симметрии свойств.

Главную ось композита x выберем вдоль направления оси винтовых линий спиралей, а оси y и z тогда будут лежать в плоскости поперечных сечений спиральных витков (рис. I). Геометрические параметры армирующих волокон задаём в форме

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ - углы подъёма винтовых траекторий к плоскости yz ;

$R_1, R_2, \ldots, R_N$ - радиусы их круговых сечений (в плоскости yz).

Известными считаем также объёмные коэффициенты армирования $\mu_n = V_{f(n)}/V$; $n = 1, 2, \ldots, N$, где $V_{f(n)}$ - объём волокон n -ого типа в этом элементе.
Тогда общий коэффициент армирования

$$\mu_z = \sum_{n=1}^{N} \mu_n = \frac{1}{V}\sum_{n=1}^{N} V_{f(n)}. \tag{I}$$

В качестве повторяющегося объёма выбираем параллелепипед с длинами рёбер P_x, P_y и P_z . Зададим следующие условия на геометрию параллелепипеда:

I) в длине P_x повторяющегося объёма помещается целое число витков винтовых линий всех типов (это выполняется, если отношению между длинами витков разных типов волокон t_n соответствует отношение целых чисел m_n , т.е. $t_1 : t_2 : \ldots : t_N = m_1 : m_2 : \ldots : m_N$, что всегда удовлетворяет техническим решениям задачи);

2) длину P_y определим как $P_y = \mathcal{L}_{y\,max}$, где $\mathcal{L}_{y\,max}$ - максимальное (но не являющееся многочленом расстояний меньшего размера), периодически повторяющееся расстояние по оси y между осями винтовых линий подъёма с максимальными радиусами $R_{max} = \sup_{n=1}^{N} R_n$, если $R_{max} \leq \mathcal{L}_{y\,max}$. Если $R_{max} > \mathcal{L}_{y\,max}$, то $P_y = R_{max}$.

3) $P_z = \mathcal{L}_{z\,max}$, если $R_{max} \leq \mathcal{L}_{z\,max}$;

$P_z = R_{max}$, если $R_{max} > \mathcal{L}_{z\,max}$ (все определения идентичны пункту 2).

Такой выбор повторяющегося объёма даёт возможность описать широкий диапазон пространственно-спирально армированных материалов одной моделью. Макроскопически композит считаем трансверсально изотропным. Эффекты, представляющие более высокий класс симметрии, исключаются расположением по объёму всех спиралей (или их групп) одинакового типа, но отличающихся право- и лево-винтовой ориентацией витков в порядке "шахматной доски" (рис. 2), а также гексагональным их расположением. В расчёте механических свойств криволинейно армированного композита используется методика расчётных стержней [9, 14], в которой связующее вещество распределено по отдельным расчётным стержням пропорционально к количеству арматуры данной траектории. Характеристики деформативности монотропных прямолинейных элементов для каждого из расчётных стержней в отдельности определены по [15].

Для получения компонент тензоров податливости и жёсткости прямолинейных элементов расчётных стержней в осях композита необходим переход

$$a_{\alpha\beta(n)} = a_{ij(n)}\, q_{\alpha i(n)}\, q_{\beta j(n)};$$
$$A_{\alpha\beta(n)} = A_{ij(n)}\, q_{\alpha i(n)}\, q_{\beta j(n)}, \tag{2}$$

где $i,j = 1,2,\ldots,6$; $\alpha,\beta = x,y,z,\langle 4\rangle,\langle 5\rangle,\langle 6\rangle^{*}$;

$q_{\alpha i(n)}$ и $q_{\alpha i(n)}$ – коэффициенты перехода, которые определяются через косинусы между соответствующими осями $l_{\alpha i} = \cos(\widehat{\alpha,i})$; ось 1 совмещена с главной продольной осью расчётного стержня, а оси 2 и 3 лежат в его плоскости изотропии.

Характеристики упругости композита определяются интегрированием вдоль траекторий армирования двумя независимыми способами:

а) усредняя тензор податливости (по Рейссу)

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^{N} \frac{V_{f(n)}}{V_f} \int_{L_{(n)}} a_{\alpha\beta(n)} \frac{dl_{(n)}}{L_{(n)}}, \tag{3}$$

---

* $\langle 4\rangle, \langle 5\rangle, \langle 6\rangle$ – аналог индексов 4, 5, 6 в осях композита.

б) усредняя тензор жёсткости (по Фойгту)

$$A_{ip} = \sum_{n=1}^{N} \frac{V_{f(n)}}{V_f} \int_{L_{(n)}} A_{ip(n)} \frac{dl_{(n)}}{L_{(n)}};$$

где $dl_{(n)} = \sqrt{\dot{x}_{(n)}^2 + \dot{y}_{(n)}^2 + \dot{z}_{(n)}^2}\, dt_{(n)};\quad L_{(n)} = \int_{l_{1(n)}}^{l_{2(n)}} dl_{(n)}.$

Уравнения траекторий спирально-винтовых волокон представляем в форме:

$$\begin{cases} x_{(n)} = R_{(n)} \operatorname{tg}\theta_{(n)} t_{(n)} + x_{o(n)} \\ y_{(n)} = R_{(n)} \cos t_{(n)} + y_{o(n)} \\ z_{(n)} = R_{(n)} \sin t_{(n)} + z_{o(n)} \end{cases}, \qquad (5)$$

где $t_{(n)}$ – меняющийся параметр n –той спирали; $x_{o(n)}$, $y_{o(n)}$, $z_{o(n)}$, – значения координат при $t_{(n)}=0$. Пронормируем радиусы витков для всех типов волокон $R_{(n)}=1$. Такое допущение не влияет на результат, поскольку геометрические характеристики и коэффициенты армирования взаимосвязаны.

Значения косинусов l_{ki} для каждой из траекторий в отдельности:

$$\begin{aligned} &l_{x1(n)} = S_{(n)}; && l_{x2(n)} = 0; && l_{x3(n)} = C_{(n)}; \\ &l_{y1(n)} = C_{(n)} \sin t_{(n)}; && l_{y2(n)} = \cos t_{(n)}; && l_{y3(n)} = -S_{(n)} \sin t_{(n)}; \qquad (6) \\ &l_{z1(n)} = -C_{(n)} \cos t_{(n)}; && l_{z2(n)} = \sin t_{(n)}; && l_{z3(n)} = S_{(n)} \cos t_{(n)}, \end{aligned}$$

где $C_{(n)} = \cos\theta_{(n)}$; $S_{(n)} = \sin\theta_{(n)}$.

Матрица коэффициентов q_{kl} в (2) тогда приобретает форму:

$$q_{kl} = \begin{pmatrix} S^2 & 0 & C^2 & 0 & -CS & 0 \\ C^2\sin^2 t & \cos^2 t & S^2\sin^2 t & -S\sin t \times \cos t & CS\sin^2 t & -C\sin t \times \cos t \\ C^2\cos^2 t & \sin^2 t & S^2\cos^2 t & S\sin t\cos t & CS\cos^2 t & C\sin t\cos t \\ -2C^2 \times \sin t\cos t & 2\sin t\cos t & -2S^2 \times \sin t\cos t & S(\cos^2 t - \sin^2 t) & -2CS \times \sin t\cos t & C(\cos^2 t - \sin^2 t) \\ 2CS\cos t & 0 & -2CS\cos t & -C\sin t & (S^2-C^2) \times \cos t & S\sin t \\ -2CS\sin t & 0 & 2CS\sin t & -C\cos t & (C^2-S^2) \times \sin t & S\cos t \end{pmatrix} \qquad (7)$$

элемента длины траекторий $dl_{(n)}=\sqrt{tg^2\theta_{(n)}+1}\,dt_{(n)}$, общая длина в повторяющемся объёме $L_{(n)}=\sqrt{tg^2\theta_{(n)}+1}\;T_{(n)}$, где $T_{(n)}=\int_{t_{1(n)}}^{t_{2(n)}}dt_{(n)}$ представляет собой длину траектории интегрирования по параметру $t_{(n)}$ в пределах повторяющегося объёма.

Интегрирование формул (3) сводится к следующим типам интегралов [16]:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \int_{t_{1(n)}}^{t_{2(n)}} \sin^2 t_{(n)}\,dt_{(n)} = \frac{T_{(n)}}{2} - \frac{\sin 2T_{(n)}}{4};\\
&2)\ \int_{t_{1(n)}}^{t_{2(n)}} \cos^2 t_{(n)}\,dt_{(n)} = \frac{T_{(n)}}{2} + \frac{\sin 2T_{(n)}}{4};\\
&3)\ \int_{t_{1(n)}}^{t_{2(n)}} \sin^2 t_{(n)}\cos^2 t_{(n)}\,dt_{(n)} = \frac{1}{8}T_{(n)} - \frac{\sin 4T_{(n)}}{32};\\
&4)\ \int_{t_{1(n)}}^{t_{2(n)}} \sin^4 t_{(n)}\,dt_{(n)} = \frac{3}{8}T_{(n)} - \frac{\sin 2T_{(n)}}{4} + \frac{\sin 4T_{(n)}}{32};\\
&5)\ \int_{t_{1(n)}}^{t_{2(n)}} \cos^4 t_{(n)}\,dt_{(n)} = \frac{3}{8}T_{(n)} + \frac{\sin 2T_{(n)}}{4} + \frac{\sin 4T_{(n)}}{32}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Но так как повторяющийся объём был нами выбран таки образом, чтобы в его длине P_x поместилось целое число спиральных витков всех траекторий армирования, то $t_{2(n)}=2\pi m_{(n)}$, где $m_{(n)}$ – целое число, если $t_{1(n)}=0$. Тогда все члены в (8), содержащие $\sin 2T_{(n)}$ или $\sin 4T_{(n)}$, будут равны нулю.

В итоге по (3) получаем сравнительно простые аналитические зависимости, связывающие пять независимых усреднённых по объёму компонент тензора податливости композита a_{ij} и компоненты того же тензора расчётных стержней материала $a_{ij(n)}$:

$$
a_{xx}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{V_f}\left(S^4_{(n)}a_{11(n)}+C^4_{(n)}a_{22(n)}+S^2_{(n)}C^2_{(n)}\left(a_{66(n)}+2a_{12(n)}\right)\right);
\tag{9}
$$

$$a_{xy}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{2V_f}\Big(S^2_{(n)}C^2_{(n)}\big(a_{11(n)}+a_{22(n)}-a_{66(n)}\big)+C^2_{(n)}a_{23(n)}+\big(2S^4_{(n)}+C^2_{(n)}\big)a_{12(n)}\Big); \tag{10}$$

$$a_{yy}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{8V_f}\Big(\big(3S^4_{(n)}+2S^2_{(n)}+3\big)a_{22(n)}+3C^4_{(n)}a_{11(n)}+C^2_{(n)}\big(1+3S^2_{(n)}\big)\big(a_{66(n)}+2a_{12(n)}\big)\Big); \tag{11}$$

$$a_{yz}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{V_f}\Big(\frac{C^4_{(n)}}{8}\big(a_{11(n)}+a_{22(n)}-a_{66(n)}-2a_{12(n)}\big)+S^2_{(n)}a_{23(n)}+C^2_{(n)}a_{12(n)}\Big); \tag{12}$$

$$a_{(6)(6)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{2V_f}\Big(4S^2_{(n)}C^2_{(n)}\big(a_{11(n)}+a_{22(n)}-a_{66(n)}-2a_{12(n)}\big)+C^2_{(n)}a_{44(n)}+\big(S^2_{(n)}+1\big)a_{66(n)}\Big). \tag{13}$$

Аналогичным образом находим также значения пяти независимых компонент усреднённого по объёму тензора жёсткости (по Фойгту):

$$A_{xx}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{V_f}\Big(S^4_{(n)}A_{11(n)}+C^4_{(n)}A_{22(n)}+2S^2_{(n)}C^2_{(n)}\big(A_{12(n)}+2A_{66(n)}\big)\Big); \tag{14}$$

$$A_{xy}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{2\cdot V_f}\Big(S^2_{(n)}C^2_{(n)}\big(A_{11(n)}+A_{22(n)}-4A_{66(n)}\big)+C^2_{(n)}A_{23(n)}+\big(2S^4_{(n)}+C^2_{(n)}\big)A_{12(n)}\Big); \tag{15}$$

$$A_{yy}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{8\cdot V_f}\Big(\big(3S^4_{(n)}+2S^2_{(n)}+3\big)A_{22(n)}+3C^4_{(n)}A_{11(n)}+2C^2_{(n)}\big(1+3S^2_{(n)}\big)\big(A_{12(n)}+2A_{66(n)}\big)\Big); \tag{16}$$

$$A_{yz}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{V_f}\Big(\frac{C^4_{(n)}}{8}\big(A_{11(n)}+A_{22(n)}-2A_{12(n)}-4A_{66(n)}\big)+S^2_{(n)}A_{23(n)}+C^2_{(n)}A_{12(n)}\Big); \tag{17}$$

$$A_{(6)(6)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{2V_f}\Big(S^2_{(n)}C^2_{(n)}\big(A_{11(n)}+A_{22(n)}-2A_{12(n)}-4A_{66(n)}\big)+ \\ +C^2_{(n)}A_{44(n)}+\big(S^2_{(n)}+1\big)A_{66(n)}\Big). \qquad (18)$$

Теперь легко найти технические характеристики K (модули упругости E_x и E_y, модуль сдвига G_{xy} и коэффициенты поперечных деформаций ν_{yx} и ν_{zy} по Рейссу и по Фойгту в отдельности).

Кратко покажем, что согласно (9)-(18) можно получить также значения компонент тензоров податливости и жёсткости вязкоупругого материала, если известны их значения для отдельных расчётных стержней. В таком случае получаем их начальные значения $a^{\circ}_{\alpha\beta}$, $A^{\circ}_{\alpha\beta}$ и длительные $a^{\infty}_{\alpha\beta}$, $A^{\infty}_{\alpha\beta}$ в отдельности, поставив соответствующие (начальные $a^{\circ}_{ij(n)}$, $A^{\circ}_{ij(n)}$ или длительные $a^{\infty}_{ij(n)}$, $A^{\infty}_{ij(n)}$) в правой части указанных формул.

Например, для a_{xx} получаем:

$$a^{\circ}_{xx}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{V_f}\Big(S^4_{(n)}a^{\circ}_{11(n)}+C^4_{(n)}a^{\circ}_{12(n)}+S^2_{(n)}C^2_{(n)}\big(a^{\circ}_{66(n)}+2a^{\circ}_{12(n)}\big)\Big);$$

$$a^{\infty}_{xx}=\sum_{n=1}^{N}\frac{V_{f(n)}}{V_f}\Big(S^4_{(n)}a^{\infty}_{11(n)}+C^4_{(n)}a^{\infty}_{22(n)}+S^2_{(n)}C^2_{(n)}\big(a^{\infty}_{66(n)}+ \\ +2a^{\infty}_{12(n)}\big)\Big); \qquad (19)$$

Тогда при нагружении вязкоупругого спирально-винтово армированного материала вдоль продольной оси x (значение напряжения σ_x не зависит от времени) определяются мгновенная деформация ε°_x и деформация ползучести $\varepsilon^{п}_x$:

$$\varepsilon^{\circ}_x=a^{\circ}_{xx}\sigma_x; \qquad \varepsilon^{п}_x=\big(a^{\infty}_{xx}-a^{\circ}_{xx}\big)\sigma_x\int_0^t R(t-\tau)\,d\tau, \qquad (20)$$

где $R(t-\tau)$ - ядро релаксации (при условии, что одного ядра достаточно).

Для общей деформации по времени $\varepsilon_x(t)$ получаем

$$\varepsilon_x(t)=\varepsilon^{\circ}_x+\varepsilon^{п}_x=\Big(1+\frac{a^{\infty}_{xx}-a^{\circ}_{xx}}{a^{\circ}_{xx}}\int_0^t R(t-\tau)\,d\tau\Big)a^{\circ}_{xx}\sigma_x. \qquad (21)$$

Экспериментальная проверка данной модели спирально-винтово армированных материалов была проведена с модельным композитным материалом, который был изготовлен для исследования на основе эпоксидной смолы ЭДТ-10. В качестве арматуры (N =1) были использованы спирали из проволоки пружинной стали марки 65 диаметром 0,5 мм. Угол подъёма спирали θ изменялся в диапазоне от 15° до 90° (см. рис. 1). Коэффициент армирования μ составил 0,07. Образцы в виде пластинок прямоугольного сечения с размерами 120х10х4 мм испытывали в условиях равномерного растяжения на разрывной машине 1231У-10. Скорость подвижного захвата при деформировании составляла $17 \cdot 10^{-5}$ м/с. Измерение деформации ε_{xx} и ε_{yy} осуществляли при помощи фольговых тензорезисторов. Диаграмму деформирования записывали на двухкоординатном самопишущем потенциометре ПДС-021. Модуль упругости E_x определяли по касательной на начальном линейном участке кривой деформирования.

Для расчёта приняли, что для арматуры E_f =208,5 ГП, ν_f =0,3, а для матрицы - E_m =3,7 ГП, ν_m =0,4. Расчёт проводили двумя независимыми путями - по Фойгту K_F и по Рейссу K_R. Физические значения K получали по зависимости

$$K = K_F \omega + K_R (1-\omega) \quad \text{, где} \quad 0 \leq \omega \leq 1.$$

Экспериментальные и расчётные значения упругих характеристик спирально армированного композитного материала при исследованных значениях θ приведены в табл. 1. На рис. 3 и 4 показан характер изменения модулей упругости E_x, E_y и модуля сдвига в зависимости от угла подъёма спирали θ. Как видно из приведённых характеристик, расчётные величины удовлетворительно совпадают с аналогичными экспериментальными значениями. При этом необходимо отметить, что расчётные значения характеристик получены при ω =0, т.е. параметры материала, рассчитанные по Рейссу, наиболее соответствуют величинам, полученным в эксперименте.

Проведённые исследования показывают, что геометрия композита сильно влияет на его механические свойства. Модуль упругости E_x постепенно увеличивается по мере возрастания угла армирования: от $E_x = 37 \cdot 10^{-2}$ МПа при $\theta = 30°$ до значения прямолинейно армированного материала (θ =90°) E_x = $186 \cdot 10^{-2}$ МПа (по эксперименту). Расчётный поперечный модуль E_y изменяется не в столь широких пределах. Это и понятно, так как при спиральной структуре армирующих волокон происходит перераспределение механических характеристик по направлениям в материале, обусловленным углом наклона главной поперечной оси элемента винтовой траектории к поперечному сечению композита, т.е. углом подъёма спирали. Из табл. I видно, что до $\theta = 45^\circ$ $E_y > E_x$, а при $\theta > 45^\circ$ - наоборот. Это является хорошим подтверждением сказанного, так как именно при $\theta \approx 45^\circ$ для расчётного стержня при изотропной матрице и изотропном материале арматуры направления x и y как бы равноправны. Модуль сдвига также достигает максимальное значение ($G_{xy} = 21{,}1 \cdot 10^{-2}$ МПа) при данном значении угла подъёма $\theta = 45^\circ$.

На рис. 5 представлены результаты расчёта упругих характеристик композита при значительно большем значении коэффициента армирования $\mu_z = 0{,}4$. Видно, что характер кривых зависимостей E_x, E_y и G_{xy} от θ сохраняется. Дополнительные расчёты показывают, что характеристики упругости возрастают по мере увеличения количества арматуры в материале по зависимостям, которые близки к линейным.

Биохимические возможности пространственного спирально-винтового армирования (II тип в табл. 2) проявляются при моделировании механических свойств аналога, образованного волокнами дюралюминия ($E_f = 73{,}9$ ГПа; $\nu_f = 0{,}3$) и эпоксидной смолы как матрицы ($E_m = 3{,}6$ ГПа; $\nu_m = 0{,}3$). В табл. 2 проведено также сравнение такого аналога с расчётными значениями прямолинейно армированного материала и композитом, в котором спиральные волокна расположены в плоскости, т.е. имеют синусоидальную форму (I тип), а также компактной костной тканью [2]. Проведённый анализ показывает, что наибольшее сходство с компактной костной тканью достигается II типом волокон ($\theta = 60^\circ$, $\mu_z = 0{,}4$) с дополнительным введением прямых волокон более мягкой арматуры (нейлон, $E_f = 4{,}9$ ГПа, $\nu_f = 0{,}45$, $\mu_z = 0{,}1$).

Результаты проведённого математического моделирования и экспериментальной проверки свойств спирально армированных композитных материалов показывают, что применение таких схем армирования, их сочетаний даёт возможность получить как трансверсально изотропные, так и ортотропные композиты с широким спектром механических свойств, в частности позволяющие в достаточно хорошем приближении повторить деформационные качества естественных биологических материалов.

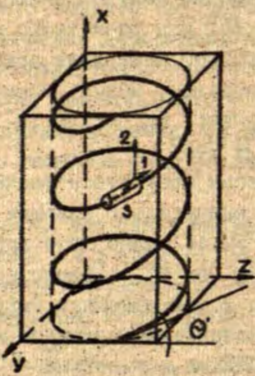
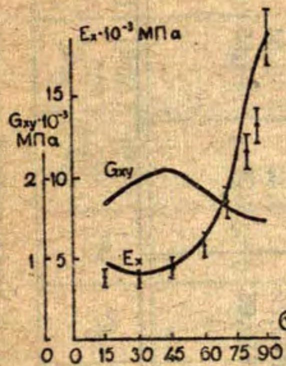


Рис. I. Повторяющийся объем композита.

Рис. 2. Использование принципа "шахматной доски" в ориентации витков спиралей одинакового типа по поперечному сечению композита (направления витков указаны стрелками).



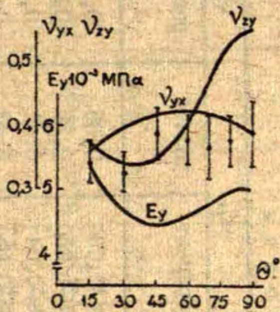


Рис. 3. Зависимость модулей E_x и G_{xy} от Θ.

Рис. 4. Изменение модуля E_y, ν_{yx}, ν_{zy} в зависимости от Θ.

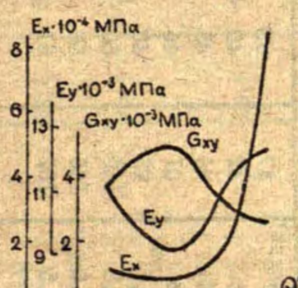


Рис. 5. Зависимость модулей E_x, E_y, G_{xy} от Θ при $\mu = 0{,}4$.

Таблица I. Упругие характеристики модельного композитного материала в зависимости от угла подъёма спирали

Угол подъёма спирали θ	Характеристики						
	E_x		E_y	G_{xy}	ν_{yx}		ν_{zy}
	эксперимент	расчёт	расчёт	расчёт	эксперимент	расчёт	расчёт
	$\times 10^{-3}$, МПа						
I5°	38±3,7	47	53	I6,5	0,34±0,03	0,35	0,38
30°	37±4,6	42	48	I9,5	0,33±0,03	0,39	0,34
45°	44±6,4	44	45	2I,I	0,39±0,04	0,4I	0,35
60°	58±7,8	6I	46	I8,7	0,38±0,05	0,42	0,4I
70°	85±I0,5	86	48	I6,4	0,37±0,05	0,42	0,45
80°	II6±I0,0	I40	50	I4,9	0,38±0,04	0,4I	0,53
85°	I3I±I2,0	I66	50	I4,5	0,30±0,02	0,40	0,54
90°	I86±I6,5	I82	5I	I4,4	0,39±0,05	0,39	0,55

Таблица 2. Упругие характеристики компактной костной ткани и её искусственных аналогов

Материал, вид армирующих волокон	μ_z	$E_x \cdot 10^{-3}$ (МПа)	$E_y \cdot 10^{-3}$ (МПа)	$E_z \cdot 10^{-3}$ (МПа)	ν_{yx}	ν_{zx}	ν_{zy}	$G_{xy} \cdot 10^{-3}$ (МПа)	$G_{xz} \cdot 10^{-3}$ (МПа)	$G_{yz} \cdot 10^{-3}$ (МПа)
I. Искусственный материал с а) прямолинейными волокнами	0,4	39,6	9,82	9,82	0,30	0,30	0,25	3,I5	3,I5	3,92
б) волокнами I типа, $\theta = 77^0$ (в плоскости xOz)	0,4	29,4	7,98	7,76	0,26	0,40	0,27	2,58	3,I9	3,I4
в) волокнами I типа, $\theta = 77^0$ (50% волокон в плоскости yOz, 50% – в xOz)	0,4	29,5	7,83	7,83	0,33	0,33	0,26	2,89	2,89	3,II
г) волокнами II типа, $\theta = 70^0$	0,4	26,3	7,8I	7,8I	0,36	0,36	0,25	3,28	3,28	3,I2
д) волокнами II типа, $\theta = 60^0$ (с дополнительными прямыми волокнами нейлона, $\mu_2 = 0,I$)	0,5 ($\mu_1 = 0,4$)	I6,5	8,29	8,29	0,43	0,43	0,23	4,86	4,86	3,36
2. Компактная костная ткань, ортотропная		I8,7	8,67	7,04	0,3I	0,32	0,62	5,0I	3,63	2,46
3. Компактная костная ткань		I8,7	7,83	7,83	0,3I	0,3I	0,55	4,30	4,30	2,52

Примечание: для сравнения углы подъёма спиралей выбраны так, чтобы угол для аналога I типа (θ =77о) соответствовал проекции на плоскость волокон II типа (θ = 70о)

Литература

I. Жигун И.Г., Поляков В.А. Свойства пространственно армированных пластиков. - Рига: Зинатне, 1978. - 215 с.

2. Кнетс И.В., Пфафрод Г.О., Саулгозис Ю.Ж. Деформирование и разрушение твёрдых биологических тканей. - Рига: Зинатне, 1980. - 319 с.

3. Kagawa Y., Okuhara H., Watanabe Y., Nakata E., Yoshida S. Some properties of composite metals reinforced with helical fiber // Composite Materials: Mechanics, mechanical properties and fabrication.-Tokio.-1981.-P.213.

4. Kagawa Y., Oishi Y., Yoshida S., Nakata E. Workability of helical fiber reinforced composite metal // J.Jap. Soc.Comp.Mat.-1981.-Vol.7.-Nr. 4.-P.140-146.

5. Kagawa Y., Okuhara H., Nakata E.,Yoshida S. Tensile properties of helical fiber reinforced composite metals // J.Jap.Inst.Metals.-1982.-Vol.46.- Nr. 3.-P.313-322.

6. Kagawa Y., Nakata E., Yoshida S. Fracture behaviour and toughness of helical fiber reinforced composite metals// Progress in science and engineering of composites:Proc.of ICCM-IV.-Tokio.-1982.-P. 1457-1464.

7. Добелис М.А., Саулгозис Ю.Ж. Роль структурных компонентов компактной костной ткани в её деформативности и несущей способности //Современные проблемы биомеханики.-1986.-Вып.2.-С.70-102.

8. Виллеруш К.К. Моделирование механических свойств компактной костной ткани композитом, армированным пространственно-спиральными волокнами //Тезисы докладов третьей Всесоюзной конференции по проблемам биомеханики.-Рига,1983.-Т.I.-С.168-170.

9. Крегерс А.Ф. Определение деформативных свойств композитного материала, армированного пространственно-криволинейной арматурой//Мех.композитных материалов.-1979.-№ 5.-С. 790-793.

10. Крегерс А.Ф., Тетерс Г.А. Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // Мех.композитных материалов.-1982.-№ 1.-С. 14-22.

11. Крегерс А.Ф. Алгоритм определения деформативных свойств гибридного композита, армированного пространственно-криволинейной арматурой // Алгоритмы и программы.-1980.-Т.38.-№ 6.- С.32.

12. Фрегер Г.Е. Исследование композитных материалов на основе спирально армированных наполнителей // Мех.композитных материалов.-1984.-№ 4.-С. 630-634.

13. Фрегер Г.Е. Напряженно-деформированное состояние спирально армированных композитов при трансверсальном нагружении // Мех.композитных материалов.-1983.-№ 6.-С. 989-995.

14. Крегерс А.Ф., Мелбардис Ю.Г. Определение деформативности пространственно армированных композитов методом усреднения жесткостей // Мех.полимеров.-1978.-№ 1.-С.3-8.

15. Максимов Р.Д., Плуме Э.З., Пономарев В.М. Характеристики упругости однонаправленно армированных гибридных композитов // Мех.композитных материалов.-1983.-№ 1.-С.13-19.

16. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. - М.:Наука, 1964. - 228 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты представленных в настоящем сборнике исследований еще раз подтверждают целесообразность использования методов математического моделирования при решении сложных нелинейных задач электродинамики, магнитной гидродинамики и механики композитных материалов. Разработанные методики, алгоритмы и программы исследования электромагнитных, гидродинамических, тепловых и других полей в конкретных установках (например, многоканальный и плоский индукционный насосы, установка электромагнитного замыкания контактов, индукционная тигельная печь с холодным тиглем, руднотермическая электропечь) позволяют с применением вычислительных экспериментов прогнозировать процессы в них, а также создавать новые конструкции этих установок с целью улучшения их технических показателей. В свою очередь, математические модели и методики расчета композитных материалов позволяют прогнозировать и моделировать механические свойства изделий из них.

Большинство из разработанных методик уже сейчас применяются для проведения опорных расчетов, необходимых при конструировании новой МГД и металлургической техники, и в будущем могут стать составными элементами соответствующих систем автоматизированного проектирования (САПР).

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(межвузовский)

Рецензенты: А.Цеберс, ст.науч.сотр. Ин-та физики АН ЛатвССР, канд.физ.-мат. наук;
Э.Шилтер, доц. ЛГУ им.П.Стучки, канд.физ.-мат. наук

Редакторы: Ю.Микельсон, С.Рязанцева
Технический редактор С.Лининя
Корректор И.Балоде

Подписано к печати 28.07.87. ЯТ 09212. Ф/б 60х84/16.
Бумага №1. 9,8 физ.печ.л. 9,1 усл.печ.л. 7,5 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Зак.№ 1151 Цена 1 р. 20 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, 226050 Рига,ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 538.4:621.313.333

Завицкий Э.А., Лацис С.П., Смирнов В.Г. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАСЧЕТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОКАНАЛЬНОГО ИНДУКЦИОННОГО МГД-НАСОСА И ПЛИН: СЛУЧАЙ МАЛЫХ МАГНИТНЫХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987.-С. 5-23.

Сравниваются локальные и интегральные электромагнитные характеристики двух конструктивных разновидностей МГД-насосов: I)многоканального с плоскими каналами и объединенной магнитной системой (МИН), 2)плосколинейного (ПЛИН). Используются ранее разработанные двухмерные математические модели, в электродинамическом приближении описывающие установившийся режим работы МИН и ПЛИН. Расчеты проведены для одинаковых безразмерных параметров моделей (магнитного числа Рейнольдса, равного 0.I, числа полюсов N , скольжения и др.). Рассчитаны распределения физических полей в срединной плоскости рабочего тела (канала), а также потребляемая активная мощность, электромагнитное давление и КПД в зависимости от скольжения при различных N . Показано, что, несмотря на различия в распределениях локальных величин, давления отличаются незначительно. ПЛИН потребляет бо́льшую активную мощность, чем МИН, что приводит к более высоким КПД последнего. Ил. I0, библиогр. 5 назв.

УДК 536.2:621.313

Шнидере Л.Я. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ХАРАКТЕРНОМ ЭЛЕМЕНТЕ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ МГД-МАШИН // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987.-С. 24-43.

Реальный температурный процесс теплообмена в МГД-машинах моделируется двумя двухмерными моделями теплообмена в альтернативных сечениях установки. Определяется математическая модель теплопереноса в характерном элементе поперечного сечения МГД-машин, которая сводится к решению нелинейной задачи теплопроводности в анизотропной активной области. Линеаризованная задача для теплопроводности для характерного элемента поперечного сечения ПЛИН решается методом конечных элементов. На основе результатов расчета при измельчении конечно-элементной сетки анализируется погрешность аппроксимации задачи. Ил. 5, библиогр. I6 назв.

УДК 517.93:621.313.53

Валдмане Р.А., Улманис Л.Я. ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТНЫХ СТРУКТУР В КАНАЛАХ ИНДУКЦИОННЫХ МГД-МАШИН // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987.-С. 44-67.

Рассматривается нелинейная задача для структуры потока жидкого металла в каналах индукционных МГД-машин. Описывается алгоритм численного расчета обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Сопоставляются теоретические и экспериментальные результаты. Ил. 17, библиогр. 13 назв.

УДК 517.632:537.811

Ауза В.Я., Круминьш Я.Р. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ НА СИЛУ ВТЯГИВАНИЯ // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987.-С. 68-75.

Исследуется электромагнит цилиндрической формы для замыкания контактов. Получены экспериментальные и численные результаты. Численно методом верхней релаксации решаются конечно-разностные уравнения для двухмерного векторного потенциала магнитного поля. Учитывается нелинейный характер зависимости магнитной проницаемости от магнитной индукции. Ил. 3.

УДК 518.12:538.4+621.365.5

Тир Л.Л., Губченко А.П., Никифорова Н.В. ВЛИЯНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ФОРМЫ ПОВЕРХНОСТИ РАСПЛАВА НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ И СИЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИНДУКЦИОННЫХ ТИГЕЛЬНЫХ ПЕЧЕЙ // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987.-С. 76-83.

Проведено численное исследование влияния нарушений осевой симметрии в ИПХТ-М на электромагнитные и силовые поля и рабочие характеристики печи. Исследованы наиболее характерные для ИПХТ-М виды нарушений осевой симметрии: осесимметричный расплав в проводящем тигле с вертикальными разрезами при полном прилегании расплава к стенке тигля; отжатый от стенок тигля расплав в виде вертикального цилиндра с m вертикальными складками ("рифами") - как для ИТП, так и для ИПХТ-М. Ил. 6.

УДК 539.374:534.13

Шведе А.И. РАСЧЕТ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КВАДРАТНОЙ ЖЕСТКОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач. - Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987.-С. 105-118.

Предлагается методика решения задач динамического нагружения конструкций в пластической области. Применяется жестковязкопластическая модель материала, позволяющая моделировать влияние скорости деформирования. Используется вариационная постановка. Приводится численное решение задачи о нагружении квадратной пластины прямоугольным импульсом равномерно распределенного давления. Ил. 5, библиогр. 5 назв.

УДК 539.4:678.067

Блумберг Н.Н. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ СВЯЗУЮЩИХ МАТЕРИАЛОВ // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987.-С. 119-129.

Представлен алгоритм нахождения напряжений в многослойных пластинах с учетом пластических свойств связующих материалов. Вычисления напряжений осуществляются с применением метода пограничных функций (МПФ), сводящим решение поставленной задачи к итерационной процедуре последовательных приближений. Приведен численный пример расчета трехслойной пластины, в котором выявляется резкая концентрация напряжений в краевой зоне с учетом и без учета пластических свойств материалов, и дано сравнение обоих подходов. Ил. 4, библиогр. 10 назв.

УДК 611.08:539

Виллерут К.К. МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СПИРАЛЬНО АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач. -Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987.-С. 130-145.

Представлена математическая модель механического поведения спирально-винтово армированных композитных материалов, моделирующих структурных элементов компактной костной ткани - физически нелинейного и анизотропного материала. Получены результаты расчета характеристик упругости конкретных схем армирования. Приведенные результаты экспериментального исследования материала, изготовленного на основе эпоксидной смолы ЭДТ-10, показывают, что при помощи выбранной математической модели удается удовлетворительно описать поведение спирально армированного композита. Ил. 5, табл.2, библиогр. 16 назв.

УДК 538.4:621.365

Бушгин Л.Л., Никифорова Н.В. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ В ПРОЦЕССЕ ПЛАВЛЕНИЯ МЕТАЛЛОВ В ИНДУКЦИОННОЙ ПЕЧИ С ХОЛОДНЫМ ТИГЛЕМ // Электродинамика и механика сплошных сред.Методы решения нелинейных задач.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987. -С. 84-89.

Представлены результаты численного моделирования температурных полей в индукционной печи с холодным тиглем (ИПХТ). Влияние холодного тигля учитывается в граничных условиях для температурного поля, влиянием холодного тигля на электромагнитное поле пренебрегается. Конвективный перенос в жидкой фазе не учитывается. Обсуждаются различия температурных полей в индукционной тигельной печи (ИТП) и ИПХТ. Качественно исследована зависимость температурного поля и геометрии жидкой и твердой фаз от линейной плотности тока в индукторе. Ил.2, табл. I, библиогр. 2 назв.

УДК 537.84+517.962.8

Бетхерс У.А., Дятлов В.И., Павлов С.И., Якович А.Т. ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ РАСПЛАВА В МОДЕЛИ РУДНОТЕРМИЧЕСКОЙ ПЕЧИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СИЛ // Электродинамика и механика сплошных сред. Методы решения нелинейных задач.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки.-1987.-С. 90-103.

Предложена осесимметричная математическая модель для описания электромагнитных, гидродинамических и тепловых процессов в руднотермических электропечах с учетом зависимости характеристик среды от температуры. Полученная нелинейная задача математической физики решается в конечно-разностной постановке на ЕС ЭВМ с использованием переменных вихрь скорости и функция тока в гидродинамической части. Исследована роль электромагнитных и термогравитационных сил в формировании результирующего течения и температурного поля в расплаве. В широком интервале изменения параметров модели установлено преобладание термогравитационной конвекции и наличие выраженных температурных пограничных слоев на границах интенсивного теплообмена. Ил.12, библиогр. II назв.

1 р. 20 к.