Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte
Matemātikas nodaļa

Disertācijas kopsavilkums

Nestriktas matricas un vispārinātie agregācijas operatori: teorētiskie pamati un iespējamie pielietojumi

Disertācijas nosaukums angļu valodā

Fuzzy matrices and generalized aggregation operators: theoretical foundations and possible applications

Jūlija Lebedinska

Zinātniskais vadītājs: profesors, Dr. habil. math. Aleksandrs Šostaks

Rīga, 2010

Promocijas darbs izstrādāts Latvijas Universitātes Fizikas un matemātikas fakultātes Matemātikas nodaļā laika posmā no 2005. gada līdz 2010. gadam.

Darba forma: Disertācija

Zinātniskais vadītājs: profesors, Dr. habil. math. Aleksandrs Šostaks

Darba recenzenti:

1. Profesors RNDr, Radko Mesiar, DrSc. (Slovākijas Tehnoloģiskā Universitāte, Bratislava, Slovākija),

2. Dr. math. Michal Baczynski (Silēzijas Universitāte, Katovice, Polija),

3. Profesors, Dr. habil. math. Andrejs Reinfelds (Latvijas Universitāte, Rīga, Latvija).

Darba aizstāvēšana notiks Latvijas Universitātes Matemātikas zinātnes nozares promocijas padomes atklātā sēdē 2010. gada 27. oktobrī, pulksten 14:30, Rīgā, Zeļļu ielā 8, Latvijas Universitātes Fizikas un matemātikas fakultātes Matemātikas nodaļā, 241. auditorijā.

Ar darbu un tā kopsavilkumu var iepazīties Latvijas Universitātes Bibliotēkā, Rīgā, Kalpaka bulvārī 4, un Akadēmiskajā bibliotēkā.

LU Matemātikas zinātnes nozares promocijas padomes priekšsēdētājs: profesors, Dr. habil. math. Andris Buiķis

©Latvijas Universitāte, 2010
©Jūlija Lebedinska, 2010

ISBN 978-9984-45-240-1

Anotācija

Pēc autores domām nestriktu kopu teorijas (NKT) attīstībā var iezīmēt divus konceptuāli dažādus virzienus:
1. jau zināmo jēdzienu un koncepciju fazifikācija un
2. jēdzienu attīstība, kas radušies NKT kontekstā vai arī ir saistīti ar NKT.
Daudzi topoloģijas, algebras, finanšu matemātikas un citu nozaru jēdzieni ir vispārināti, izmantojot nestriktas kopas. Pie otrā virziena mēs nosacīti varam pieskaitīt turpinājuma principu, t-normas, iespējamību sadalījumu un citus jēdzienus.
Disertācijas mērķis ir sniegt ieguldījumu abu virzienu attīstībā. Darbā ir realizēts sekojošs uzdevums: attīstītas nestriktu matricu un vispārināto agregācijas operatoru teorijas un iezīmētas praktisko lietojumu sfēras.
Gadu pēc gada arvien jauni rezultāti paaugstina NKT jaunā attīstības līmenī. Jauno un interesanto rezultātu izstrāde ir apsveicams uzdevums, bet tas nav viegls. Darbā iegūtie rezultāti ir prezentēti starptautiskās zinātniskās konferencēs, kur tos atzinīgi novērtēja nozares speciālisti, kā arī publicēti recenzējamos žurnālos, tāpēc autore uzskata, ka izvirzītais mērķis ir sasniegts.

MSC: 15A09, 65G30, 94D05, 03E72, 91B99, 62P20, 62P99

Atslēgas vārdi: intervālmatrica, intervālmatricas inversā matrica, nestrikta matrica, nestrikta inversā matrica, lineāro intervālo vienādojumu sistēma, lineāro nestrikto vienādojumu sistēma, nestriktais input-output modelis, agregācijas operators, vispārinātais agregācijas operators, punktveida turpinājums, t-norma, T-turpinājums.

Saturs

1. Ievads

Līdz 20. gadsimta vidum varbūtību teorija bija pamatlīdzeklis, apstrādājot reālās dabas nenoteiktību. Taču lietojot varbūtību teorijas metodes, nepieciešams, lai nenoteiktībai būtu speciālā īpašība, un, proti, nejaušība (randomness), un ne vienmēr mēs varam likt vienādības zīmi starp "nedeterminēts" un "nejaušs". Tādēļ jau sen matemātiķiem bija skaidrs, ka nepieciešams jauns aparāts, kas palīdzēs apstrādāt nenoteiktību. Pie līdzīga secinājuma nonāca filozofi, kas saskarās ar problēmām, mēģinot ielikt reālus procesus striktajos bivalentās loģikas rāmjos.
1965. gadā L. A. Zadē savā darbā [40] noformulējā nestriktu kopu teorijas pamatus. Nestrikta kopa ir parastas kopas vispārinājums, kur katrs elements pieder kopai ar zināmu pakāpi, kuras vērtība ir no nulles līdz viens. Divus gadus vēlāk J. A. Gogēns ([8]) vipārināja Zadē rezultātus, izmantojot ierobežotu, bezgalīgi distributīvu režģi. Pēdējo 45 gadu laikā nestriktu kopu teorija kļuva par nopietnu teoriju ar iespaidīgu teorētisko bāzi un garu praktisko lietojumu sarakstu. Tā pierādīja savu lietderību reālo procesu modelēšanā. Gadu pēc gada arvien jauni rezultāti palīdz nestriktu kopu teorijai nostiprināt savas pozīcijas. Arī autorei nestriktu kopu teorija šķita pievilcīga ar teorētisko rezultātu bagātību un praktisko lietderību, tāpēc promocijas darbs tika izstrādāts nestriktu kopu jomā.
Strādājot pie disertācijas, tika izvirzīts šāds uzdevums: sniegt ieguldījumu nestriktu kopu teorijas attīstībā, izstrādājot jaunus jēdzienus un koncepcijas. Ņemot vērā teorijas piemērotību reālo procesu modelēšanā, ieskicēt iegūto rezultātu praktisko lietojumu sfēras.
Šajā darbā ir izklāstīti disertācijas galvenie rezultāti, kas ir ievietoti trijās nodaļās, neieskaitot šo ievadu. Pirmajā nodaļā sniegti nestriktu kopu teorijas pamatjēdzieni un fakti, kas ir izmantoti darbā. Otrajā nodaļā attīstīta nestriktu matricu teorija. Šo nodaļu var nosacīti nosaukt par ieguldījumu nestriktu kopu teorijas pirmajā attīstības virzienā. Trešajā nodaļā attīstīta vispārināto agregācijas operatoru teorija un dots ieguldījums otrajā nestriktu kopu teorijas attīstības virzienā. Darbā izstrādātajiem teorētiskajiem rezultātiem ieskicētas praktiskā lietojuma sfēras.

2. Teorētiskā ievadnodaļa

Šajā nodaļā īsi apskatām nestriktu kopu teorijas jēdzienus un rezultātus, kas ir lietoti darbā. Lai iegūtu pilnīgāku informāciju, ieinteresēts lasītājs papildu informāciju var meklēt avotos [35] un [6, 19].

1. Definīcija ([35]). *Attēlojumu $M : X \to [0, 1]$ sauc par kopas X nestriktu apakškopu vai vienkārši nestriktu kopu.*

Visu kopas X nestriktu apakškopu kopu apzīmēsim ar $F(X)$.
Ja nestrikta kopa M ir dota, un nofiksējam $\alpha \in [0, 1]$, tad:

2. Definīcija ([35]). *Kopu $M^\alpha = \{x : M(x) \geq \alpha\}$ sauc par nestriktas kopas M α-līmeni.*

3. Definīcija ([35]). *Kopu $M_\alpha = \{x : M(x) > \alpha\}$ sauc par nestriktas kopas M strikto α-līmeni.*

Turpinājuma princips palīdz pārnest klasiskajā matemātikā zināmus rezultātus uz nestriktām kopām. Ja attēlojums $\varphi : X \times Y \to Z$ ir dots, tad:

4. Definīcija ([35]). *Attēlojumu $\tilde{\varphi} : F(X) \times F(Y) \to F(Z)$*

$$\tilde{\varphi}(M, N)(z) = \sup\{\min(M(x), N(y))|x \in X, y \in Y, \varphi(x, y) = z\},$$

kur $M \in F(X)$, $N \in F(Y)$ sauc par funkcijas $\varphi(x, y)$ turpinājumu uz nestriktu kopu klasēm $F(X), F(Y)$.

Visas aritmētiskās operācijas ar nestriktām kopām ir definētas, izmantojot turpinājuma principu.
Tālāk tiek aplūkotas dažas nestriktu kopu īpašības, kas būs nepieciešamas turpmākajā darba izklāstā.

5. Definīcija ([35]). *Attēlojumu $f : X \to \mathbb{R}$ sauc par pusnepārtrauktu no augšas, ja katram $t \in \mathbb{R}$ kopa $\{x|f(x) \geq t\}$ ir slēgta.*

Nestrikti lielumi ir speciāla nestriktu kopu klase:

6. Definīcija ([35]). *Par nestriktu lielumu sauc reālas taisnes izliektu pusnepārtrauktu no augšas nestriktu kopu, kurai α-līmeņi visiem $\alpha > 0$ ir ierobežotas kopas.*

Nestriktu lielumu klasi apzīmēsim ar $FQ(\mathbb{R})$. Nestrikti intervāli ($FI(\mathbb{R})$) un nestrikti skaitļi ($FN(\mathbb{R})$) ir nestriktu lielumu apakšklases:

7. Definīcija ([35]). *Par nestriktu intervālu sauc nestriktu lielumu P, kuram atradīsies reālie skaitļi $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ tādi, ka $P(x) = 1$ tad un tikai tad, ja $a \leq x \leq b$.*

8. Definīcija ([35]). *Par nestriktu skaitli sauc nestriktu lielumu P, kuram eksistē viens vienīgs punkts x tāds, ka $P(x) = 1$.*

T-normas jēdziens ([15, 35]) ir fundamentāls nestriktu kopu teorijā, tam arī ir svarīga loma mūsu darbā:

9. Definīcija ([35]). *Par t-normu režģī (ar dabīgo sakārtojumu)* $[0, 1]$ *sauc attēlojumu* $T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$, *kas apmierina sekojošus nosacījumus:*
(1) $T(x, y) = T(y, x)$ $-$ *(simetrijas nosacījums)*
(2) $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ $-$ *(asociativitāte)*
(3) $x_1 \leq x_2 \Rightarrow T(x_1, y) \leq T(x_2, y)$ $-$ *(monotonitāte)*
(4) $T(x, 1) = x$

Svarīgākie t-normu piemēri:
Min t-norma:

$$T_M(x, y) = \min(x, y)$$

Vāja t-norma:

$$T_W(x, y) = \begin{cases} \min(x, y), \text{ ja } \max(x, y) = 1 \\ 0, \text{ citos gadījumos} \end{cases}$$

Reizinājuma t-norma:

$$T_P(x, y) = x \cdot y$$

Lukasieviča t-norma:

$$T_L(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}.$$

3. Nestriktu matricu teorija: teorētiskie pamati un lietojumi

Šī nodaļa ir īss un koncentrēts nestriktu matricu teorijas izklāsts. Nodaļas sākumā ieviešam nestriktas matricas jēdzienu un arī definējam operācijas ar nestriktām matricām. Pēc tam pievēršamies nestriktas inversās matricas jēdzienam, kuras definīciju balstām uz inverso intervālmatricu ([26, 27, 30]). Tālāk aplūkojam nestriktu inverso matricu speciālos gadījumos. Ja inversās matricas aprēķins ir apgrūtināts, mēs piedāvājam tās novērtējumu. Nobeidzam nodaļu, ieskicējot iegūto teorētisko rezultātu praktiskos lietojumus.

3.1. Nestrikta matrica: pamatjēdzieni

Šajā apakšnodaļā ieviešam nestriktas matricas jēdzienu un definējam operācijas ar nestriktām matricām.

10. Definīcija. *Matricu $A_F = (A_{ij})_{m\times n}$, kuras elementi A_{ij} $\forall i, j \in \overline{1, n}$ ir nestrikti skaitļi, sauc par nestriktu matricu.*

Nestriktas matricas augšējā un apakšējā dominante tiek definēta šādi:

11. Definīcija. *Nestrikta matrica $A_F^U = (A_{ij}^U)_{n\times n}$ ir nestriktas matricas A_F augšējā dominante, ja $A_{ij}(x) \leq A_{ij}^U(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \overline{1, n}$.*

12. Definīcija. *Nestrikta matrica $A_F^L = (A_{ij}^L)_{n\times n}$ ir nestriktas matricas A_F apakšējā dominante, ja $A_{ij}(x) \geq A_{ij}^L(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \overline{1, n}$.*

Operācijas ar nestriktām matricām ir definētas līdzīgi kā klasiskajā gadījumā. Operācijas ar nestriktiem skaitļiem (matricu elementiem) ir attiecīgo operāciju turpinājums uz nestriktu kopu klasi ar T_M palīdzību.

Nestriktu matricu $A_F = (A_{ij})_{m\times n}$, $B_F = (B_{ij})_{m\times n}$ saskaitīšana:

$$C_F = A_F + B_F,$$

kur $C_F = (C_{ij})_{m\times n} = (A_{ij} + B_{ij})_{m\times n}$.

Reizināšana ar $C \in FN(\mathbb{R})$:

$$B_F = CA_F,$$

kur $B_F = (B_{ij})_{m\times n} = (CA_{ij})_{m\times n}$.

Nestriktu matricu $A_F = (A_{ij})_{m\times n}$, $B_F = (B_{ij})_{n\times l}$ reizināšana:

$$C_F = A_F B_F,$$

kur $C_F = (C_{ij})_{m\times l} = (\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj})_{m\times l}$.

3.1. Apgalvojums. *Nestriktu matricu kopa ir slēgta attiecībā pret nestriktu matricu saskaitīšanu, reizināšanu un reizināšanu ar $C \in FN(\mathbb{R})$.*

3.2. Nestriktas matricas inversā matrica

3.2.1. Intrvālmatricas inversā matrica

Darbā nestriktas matricas inverso matricu konstruējam no speciālam intervālmatricām. Izmantotos jēdzienus un rezultātus par intervālmatricām var atrast [18], [26], [27] un [30]. Mores darbs par intervālaritmētiku [23] arī atviegIo lasīšanu.
Matricu A_I sauc par intervālmatricu, ja tās elementi ir slēgti intervāli. A_I var prezentēt ar apakšējo un augšējo robežu matricu palīdzību:

$$A_I = [\underline{A}, \overline{A}].$$

Intervālmatricu sauc par regulāru, ja katra $A \in A_I$ ir nesingulāra. Katrai regulārai intervālmatricai var noteikt inverso matricu, t.i., šaurāko intervālmatricu, kura satur visas attiecīgās inversās matricas:

$$(A_I)^{-1} = \{A^{-1} : A \in A_I\}.$$

Intervālmatricas apvēršanu veicam, izmantojot algoritmu, kuru piedāvāja J. Rohn ([27], [30]). Algoritma būtība ir šāda: apvērš 2^{2n-1} virsotņu (vertex) matricas, un paņem katra elementa minimālo un maksimālo elementu no visām virsotņu matricām, tādā veidā uzkonstruējot attiecīgo intervālu. Virsotņu matricas ir definētas speciālā veidā, un to elementi ir $\underline{A}$ un $\overline{A}$ elementi.

3.2.2. Nestriktas matricas inversā matrica

Pieņemsim, ka ir dota nestrikta kvadrātiska matrica $A_F = (A_{ij})_{n\times n}$. To dekompozēsim uz intervālmatricu $A_F^0, A_F^{\alpha_1}, ..., A_F^{\alpha_n}, ...A_F^1$ spektru. Patvaļīgas intervālmatricas $A_F^\alpha, \alpha \in (0,1]$ elementi ir attiecīgo nestrikto skaitļu α-līmeņi. Kad $\alpha = 0$, ņemam striktu α-līmeņu slēgumus A_F^0 elementu lomā.
Apvēršam intervālmatricas A_F^α un iegūstam citu intervālmatricu spektru:

$$B_F^0, B_F^{\alpha_1}, ..., B_F^{\alpha_n}, ...B_F^1,$$

kur $B_F^\alpha = (A_F^\alpha)^{-1}$ un to ij elements ir $[(\underline{b})_{ij}^\alpha; (\bar{b})_{ij}^\alpha)]$.
Teiksim, ka nestrikta matrica A_F ir regulāra, ja katram $\alpha \in [0;1]$ intervālmatica A_F^α ir regulāra.
Nestriktas regulāras matricas inversā matrica ir definēta šādi:

13. Definīcija. *Matricu $B_F = (B_{ij})_{n\times n}$, kuras elementi $B_{ij} : \mathbb{R} \to [0,1]$ ir definēti kā*

$$B_{ij}(x) = \max\{\alpha : x \in [(\underline{b})_{ij}^\alpha; (\bar{b})_{ij}^\alpha]\}\ \forall x \in \mathbb{R},$$

sauc par regulāras nestriktas matricas $A_F = (A_{ij})_{n\times n}$ inverso matricu.

B_F ir nestrikta matrica, un turpmāk darbā aplūkosim to noteikšanas veidus, novērtējumus un iespējamo lietojumu sfēras.

3.2.3. Nestriktas inversās matricas noteikšana speciālajos gadījumos un nestriktas inversās matricas novērtējumi

Šajā apakšnodaļā pievēršamies jautājumiem, kas ir saistīti ar nestriktas inversās matricas aprēķinu konkrētos gadījumos un to novērtējumu.
Darbā ir parādīts, ka gadījumā, ja A_F ir 2×2 nestrikta matrica ar vienādas zīmes elementiem (visi pozitīvi vai visi negatīvi), tad tikai 2 virsotņu matricas (pie tam ir skaidri zināms kuras) ir jāapvērš, lai noteiktu jebkuras intervālmatricas $A_F^\alpha, \alpha \in [0,1)$ inverso matricu.
Inversās matricas noteikšana ir atvieglota arī gadījumā, ja A_F ir M-nestrikta matrica. Nestriktu matricu mēs sauksim par M-nestriktu matricu, ja $\forall A \in A_F^0$ ir M-matrica. M-matricu raksturojumu un īpašības var sameklēt, piemēram, [1]. Līdzīgi kā iepriekšējā gadījumā tikai 2 virsotņu matricas ir jāapvērš (šajā gadījumā augšējo un apakšejo robežu matricas), lai noteiktu attiecīgās intevālmatricas inverso matricu.
Nestriktas inversās matricas novērtējumu lietderīgi izmantot, kad aprēķins ir tehniski sarežģīts. Piemēram, aprēķinam ir nepieciešams daudz laika (liels n), bet praktiskiem nolūkiem pietiek ar matricu, kas ir pietuvināta inversai.
Novērtējumu mēs konstruējam šādi: vispirms katrai $A_F^\alpha, \alpha \in [0,1)$ nosakām intervālmatricas, kurās attiecīgās A_F^α būs iekļautas, un arī intervālmatricas, kas tiks iekļautas attiecīgajās A_F^α; pēc tam ar speciālo konstrukciju mēs no intervālmatricām veidojam nestriktas matricas. Ir skaidrs, ka pirmajā gadījumā mēs iegūsim nestriktu matricu, kas būs inversās matricas augšējā dominante, bet otrajā $-$ apakšējā. Nākamā lemma ir pierādīta darbā:

3.2. Lemma. *Ja $A_I = ([\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}])_{n\times n}$ ir patvaļīga intervālmatrica, un $B_I = ([\underline{b}_{ij}, \bar{b}_{ij}])_{n\times n}$ ir tās inversā matrica, tad visiem intervāliem $[\underline{b}_{ij}, \bar{b}_{ij}]$*

ir spēkā novērtējums:

$$[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}] \subseteq \left[\underline{a}_{ij}^{-1} - 2\frac{\Delta_2^{n-1}}{\Delta}, \underline{a}_{ij}^{-1} + 2\frac{\Delta_2^{n-1}}{\Delta}\right] \bigcap \left[\overline{a}_{ij}^{-1} - 2\frac{\Delta_2^{n-1}}{\Delta}, \overline{a}_{ij}^{-1} + 2\frac{\Delta_2^{n-1}}{\Delta}\right],$$

kur
$\underline{A}^{-1} = (\underline{a}_{ij}^{-1})_{n\times n}$, $\overline{A}^{-1} = (\overline{a}_{ij}^{-1})_{n\times n}$,
Δ – *visu virsotņu matricu pēc moduļa minimālais determinants,*
Δ_2^{n-1} *ir speciāls novērtējums, kas ir noteikts darbā.*

Izmantojot faktu, ka $\underline{A}^{-1}, \overline{A}^{-1} \in B_I$, iegūstam šādu novērtējumu:

$$[\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}] \supseteq [\min\{(\underline{a}_{ij})^{-1}, (\overline{a}_{ij})^{-1}\}, \max\{(\underline{a}_{ij})^{-1}, (\overline{a}_{ij})^{-1}\}]. \quad (1)$$

Tagad aprakstīsim konstrukciju:

1. Konstrukcija. *Pieņemsim, ka ir dota patvaļīga nestrikta matrica* A_F *un attiecīgais intervālmatricu spektrs:*

$$A_F^0, ..., A_F^\alpha = [\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha] = ([\underline{a}_{ij}^\alpha, \overline{a}_{ij}^\alpha])_{n\times n}, ..., A_F^1.$$

Pēc lemmas 3.2 patvaļīgam intervālmatricas $(A_F^\alpha)^{-1} = B_F^\alpha = ([\underline{b}_{ij}^\alpha, \overline{b}_{ij}^\alpha])_{n\times n}$ $\alpha \in [0,1)$ *elementam ir spēkā novērtējums:*

$$[\underline{b}_{ij}^\alpha, \overline{b}_{ij}^\alpha] \subseteq \left[(\underline{a}_{ij}^\alpha)^{-1} - 2\frac{\Delta_2^{n-1}}{\Delta}, (\underline{a}_{ij}^\alpha)^{-1} + 2\frac{\Delta_2^{n-1}}{\Delta}\right] \bigcap$$
$$\bigcap \left[(\overline{a}_{ij}^\alpha)^{-1} - 2\frac{\Delta_2^{n-1}}{\Delta}, (\overline{a}_{ij}^\alpha)^{-1} + 2\frac{\Delta_2^{n-1}}{\Delta}\right] \quad (2)$$

Kad $\alpha = 1$ $B_F^1 = (A_F^1)^{-1}$.
Apzīmēsim ar I_α, $\alpha \in [0,1]$ *intervālu, kas satur* $[\underline{b}_{ij}^\alpha, \overline{b}_{ij}^\alpha]$.
Katram $x \in \mathbb{R}$ *piekārtojam indeksu kopu* N_x *šādā veidā:*

$$\alpha \in N_x \Leftrightarrow x \in I_\alpha \quad (3)$$

Nestriktas matricas $B_F = (B_{ij})_{n\times n}$ *augšējā dominante* $B_F^U = (B_{ij}^U)_{n\times n}$ *ir noteikta kā*

$$B_{ij}^U(x) = \max_{\alpha\in N_x} \alpha, \ \forall i,j = 1,...,n \quad (4)$$

Acīmredzami $B_{ij}(x) \leq B_{ij}^U(x)$ $\forall x$ $\forall i,j = 1,...,n$.

Apakšējo dominanti konstruējam, izmantojot novērtējumu (1) un iepriekš aprakstīto konstrukciju.

3.3. Nestriktas inversās matricas lietojumi

Šajā apakšnodaļā īsi ieskicēsim nestriktas inversās matricas lietojumus. Vispirms apskatām tās lietojumu nestrikto lineāro vienādojumu sistēmās (NLVS) risinājuma novērtējumam, pēc tam ieskicējam iespējamos eknomiskos lietojumus. Vairāk par NLVS un to risināšanas metodēm var uzzināt, piemēram [7], [25], [33], [38].
Vienādojumu sistēmu

$$A_F x = c_F, \tag{5}$$

kur A_F ir $n \times n$ nestrikta matrica un c_F ir vienas kolonnas nestrikta matrica, sauksim par NLVS.
Ieviešam tuvināta nestrikta atrisinājuma (TNA) jēdzienu:

14. Definīcija. *Nestriktu vektoru*

$$x = A_F^{-1} c_F = B_F c_F$$

sauksim par (5) tuvinātu nestriktu atrisinājumu.

Izmantojot A_F^{-1} definīciju varam parādīt, ka x elementi ir nestrikti skaitļi. Gadījumā, ja A_F^{-1} nav noteikta, mēs varam izmantot tās augšējo dominanti (lemma 3.2 un konstrukcija 1).
Darbā ir parādīts, ka TNA ir augšējā dominante NLVS nestriktiem atrisinājumiem, kas ir saskaņoti ar sekojošiem intervālatrisinājumiem: čaulas atrisinājumu (hull solution), tolerances atrisinājumu (tolerable solution) un intervālatrisinājumu (interval solution). Vairāk par nestriktu un intervālatrisinājumu saskaņotību var atrast [34], bet vairāk informācijas par intervālatrisinājumiem var sameklēt, piemēram, [20], [27],[28], [29].
Izmantojot TNA, varam iegūt tuvinātos atrisinājumus dažām ekonomiskām problēmām. Pieņemsim, ka ir dots ekonomiskais input-output modelis ([22], input-output analīze nedeterminētā vidē: [13], [14], [31] un [2]) nestriktajā formā:

$$(E - A_F)X_F = Y_F, \tag{6}$$

kur E ir vienības matrica.
Parasti divu tipu problēmas ir saistītas ar vienādojumu (6):
(P_1) Atrast bruto izlaidi X_F, kas nodrošina doto neto izlaidi Y_F.
(P_2) Atrast netto izlaidi Y_F, kas atbilst dotajai bruto izlaidei X_F.
Saskaņā ar definīciju TNA un arī tās augšējā dominante būs (P_1) atrisinājuma novērtējums.
Līdzīgā veidā nestriktu inverso matricu var lietot ekonomisko multiplikatoru novērtējumā ([22],[24]). Multiplikatora matemātiskais modelis ir sekojošs:

$$M = (L^{-1})'(1, 1, ..., 1), \tag{7}$$

kur L ir savstarpējo atkarību matrica, kas raksturo ekonomisko vidi. Gadījumā, kad L ir nestrikta matrica, ekonomiskā multiplikatora aprēķins ir saistīts ar nestriktās matricas apvēršanu, un šie jautājumi ir apskatīti promocijas darbā.

3.4. Nobeiguma piezīmes

Nestrikas inversās matricas jēdziens ir centrālais otrajā nodaļā, jo tam ir vislielākā praktiskā vērtība. Šis jēdziens ir pietiekami nozīmīgs, lai to pētītu dziļāk, un tādēļ mēs ieskicējam svarīgākos pētījumu virzienus:

- vienkāršāko algoritmu izveide nestriktās inversās matricas noteikšanai;
- konstruēt nestriktas inversās matricas novērtējumu ar augstāku precizitāti.

Nākotnē būtu lietderīgi veikt pētījumus nestrikto matricu teorijā gadījumiem, kad operācijas ar matricām ir definētas ar kādu citu no T_M atšķirīgu t-normu.

4. Vispārinātā agregācija: teorētiskie pamati un praktiskie lietojumi

Vairāk nekā puse no disertācijas satur rezultātus, kas attiecas uz vispārināto agregāciju. Sniedzam īsu pārskatu par iegūtajiem rezultātiem.
Pētam vispārinātā agregācijas operatora (turpmāk agops) jēdzienu, kuru savā darbā [36] ieviesa Takači. Atzīmēsim, ka literatūrā [21, 32, 39] ir atrodamas arī citas pieejas agregācijas problēmas vispārinājumam. Darbā aplūkotā vispārinātā agopa ieejas vērtību kopa ir nestriktu kopu klase. Apskatām divas konstruēšanas metodes, proti, punktveida turpinājumu un T-turpinājumu, un pētam šo vispārinājumu īpašības dažādos gadījumos.
Nodaļu sākam ar pamtdefinīcijām un rezultātiem no agopu teorijas, pēc tam ieviešam γ-agopu klasi un vēlāk pievēršamies vispārinātājai agregācijas problemātikai. Nodaļu nobeidzam, ieskicējot praktiskos lietojumus un arī nākotnes pētījumu virzienus.

4.1. Agregācijas operatoru pamatjēdzieni

Sniedzam īsu teorētisko kursu par agregācijas operatoriem ([3, 4, 15]).

15. Definīcija ([3]). *Attēlojumu* $A : \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \to [0,1]$ *sauksim par agregācijas operatoru vienības intervālā* $I = [0,1]$*, ja katram* $n \in \mathbb{N}$ *ir spēkā šādi nosacījumi :*
(A1) $A(0,...,0) = 0$
(A2) $A(1,...,1) = 1$
(A3) $(\forall i = \overline{1,n})\ (x_i \le y_i) \Rightarrow A(x_1,x_2,...,x_n) \le A(y_1,y_2,...,y_n)$

Nosacījumus $(A1), (A2)$ sauc par robežnosacījumiem, un $(A3)$ ir monotonitātes nosacījums. Vispārīgā gadījumā ienākošo vērtību skaits ir nezināms, tāpēc agopu var reprezentēt kā saimi $A = (A_{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, kur $A_{(n)} = A|_{[0,1]^n}$. Operatori $A_{(n)}$ un $A_{(m)}$ dažādiem n un m var būt nesaistīti. Izmantojam nosacījumu $A_{(1)}(x) = x\ \forall x \in [0,1]$.
Agregācijas problēma vispārīgā gadījumā ir ļoti plaša, tādēļ darbā izmantojam sekojošus ierobežojumus: ienākošo vērtību skaits ir galīgs, un $I = [0,1]$ ir ienākošo un izejošo vērtību kopa. Otrais ierobežojums nav globāls, to var vienkārši pārvarēt un pāriet pie patvaļīga intervāla $[a,b]$, taču pirmais ierobežojums ir globāls, un tas sadala visu agopu teoriju vismaz divās daļās.
Sekojoši attēlojumi ir agopi definīcijas 15 nozīmē:

$$\Pi(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i,$$

$$M(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$max(x_1, ..., x_n) = \max(x_1, ..., x_n),$$

$$min(x_1, ..., x_n) = \min(x_1, ..., x_n)$$

$$P_F(x_1, ..., x_n) = x_1,\ P_L(x_1, ..., x_n) = x_n.$$

Tālāk aplūkosim agopu īpašības, kas ir apskatītas vispārināto agopu kontekstā.

16. Definīcija ([3]). *Elementu $x \in [0;1]$ sauc par A-idempotentu elementu, ja $A_{(n)}(x, ..., x) = x, \forall n \in \mathbb{N}$. A ir idempotents agops, ja katrs $x \in [0;1]$ ir A-idempotents elements.*

17. Definīcija ([3]). *Agops $A : \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \to [0,1]$ ir nepārtraukts, ja katram $n \in \mathbb{N}$ operatori $A_{(n)} : [0,1]^n \to [0,1]$ ir nepārtraukti, tas ir,*

$$\forall x_1, ..., x_n \in [0,1], \forall (x_{1j})_{j\in\mathbb{N}}, ..., (x_{nj})_{j\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \lim_{j\to\infty} x_{ij} = x_i$$

$i = 1, ..., n$ tad

$$\lim_{j\to\infty} A_{(n)}(x_{1j}, ..., x_{nj}) = A_{(n)}(x_1, ..., x_n).$$

18. Definīcija ([3]). *Agops $A : \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \to [0,1]$ ir simetrisks, ja*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, ..., x_n \in [0;1] : A(x_1, ..., x_n) = A(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(n)})$$

visām kopas $(1, ..., n)$ permutācijām $\pi = (\pi(1), ..., \pi(n))$.

19. Definīcija ([3]). *Agops $A : \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \to [0,1]$ ir asociatīvs, ja*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m \in [0;1] :$$

$$A(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = A(A(x_1, ..., x_n), A(y_1, ..., y_m))$$

20. Definīcija ([3]). *Agops $A : \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \to [0,1]$ ir bisimetrisks, ja*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \forall x_{11}, ..., x_{mn} \in [0;1] :$$

$$A_{(mn)}(x_{11}, ..., x_{mn}) = A_{(m)}(A_{(n)}(x_{11}, ..., x_{1n}), ..., A_{(n)}(x_{m1}, ..., x_{mn})) =$$
$$= A_{(n)}(A_{(m)}(x_{11}, ..., x_{m1}), ..., A_{(m)}(x_{1n}, ..., x_{mn}))$$

21. Definīcija ([3]). *Elementu* $e \in [0;1]$ *sauc par agopa* A *neitrālo elementu, ja* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, ..., x_n, \in [0;1]$ *un turklāt ja* $x_i = e$ *kādam* $i \in \{1, ..., n\}$*, tad*

$$A(x_1, ..., x_n) = A(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).$$

22. Definīcija ([3]). *Elementu* $a \in [0;1]$ *sauc par agopa* A *absorbējošo elementu, ja*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, ..., x_n, \in [0;1] : a \in \{x_1, ..., x_n\} \Rightarrow A(x_1, ..., x_n) = a$$

23. Definīcija ([3]). *Agops* $A : \cup_{n \in \mathbb{N}} [0,1]^n \to [0,1]$ *ir:*
(1) invariants pret nobīdēm, ja

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall b \in (0,1), \forall x_1, ..., x_n \in [0, 1-b] :$$

$$A(x_1 + b, ..., x_n + b) = A(x_1, ..., x_n) + b;$$

(2) homogēns, ja

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall b \in (0,1), \forall x_1, ..., x_n \in [0,1] :$$

$$A(bx_1, ..., bx_n) = bA(x_1, ..., x_n);$$

(3) lineārs, ja tas ir homogēns un invariants pret nobīdēm;
(4) aditīvs, ja

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in [0,1] \text{ tādiem, ka } x_1 + y_1, ..., x_n + y_n \in [0,1] :$$

$$A(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = A(x_1, ..., x_n) + A(y_1, ..., y_n).$$

Dažādiem agopiem ir atšķirīgas īpašības, apjoma ierobežojumu dēļ neapskatām tās detaļās. Vairāk par īpašībām un konkrētiem agopiem var atrast, piemēram [3].

4.2. Jaunā agregācijas operatoru klase: γ-agopi

Šajā apakšnodaļā ieviešam γ-agopu klasi un apskatām tās īpašības. Pieņemsim, ka $\gamma \in [0;1]$ un attēlojums $\varphi_\gamma : [0,1] \to \{0\} \cup [\gamma, 1]$ ir definēts šādi:

$$\varphi_\gamma(x) = \begin{cases} 0, \text{ ja } x < \gamma, \\ x, \text{ ja } x \geq \gamma \end{cases}$$

24. Definīcija. *Attēlojums* $A : \cup_{n\in\mathbb{N}}[0,1]^n \to [0,1]$ *ir* γ*-agops vienības intervālā, ja ir spēkā šādi nosacījumi:*
(A1) $A(0,...,0) = 0,$
(A2) $A(1,...,1) = 1,$
(A_γ*)* $(\forall i = \overline{1,n}, \gamma \in [0,1])\ (\varphi_\gamma(x_i) \leq \varphi_\gamma(y_i)) \Rightarrow A(x_1,...x_n) \leq A(y_1,...,y_n).$

Gadījumā, ja $\gamma = 0$, $\varphi_0(x) = x$ un nosacījums (A_γ) reducējas uz (A3) (definīcija 15).
Darbā mēs parādām, ka katrs γ-agops ir agops.

4.1. Piemērs. *Agops*

$$A(x_1,...,x_n) = \min(w_1x_1,...,w_nx_n),$$

kur
$w_i = \begin{cases} 0, & ja\ x_i < \gamma, \\ 1, & ja\ x_i \geq \gamma \end{cases}$
ir arī γ*-agops.*

Kopā $[0,1]^n$ ieviešam attiecību $\equiv_{\varphi_\gamma}$ šādi:

$$(x_1,...,x_n) \equiv_{\varphi_\gamma} (y_1,...,y_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\varphi_\gamma(x_1),...,\varphi_\gamma(x_n)) = (\varphi_\gamma(y_1),...,\varphi_\gamma(y_n)). \tag{8}$$

Attiecība $\equiv_{\varphi_\gamma}$ ir refleksīva, simetriska un tranzitīva, līdz ar to tā ir ekvivalences attiecība.
Ekvivalences klases, kurās sadalās $[0,1]^n$, apzīmējam ar X_k, $k = 1,2,...$

4.2. Apgalvojums. *Ja* $(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n) \in X_k$*,* A *ir* γ*-agops, tad* $A(x_1,...,x_n) = A(y_1,..,y_n)$*.*

γ - agopiem piemīt šādas īpašības:

- γ-agops $\forall\gamma > 0$ nav idempotents;
- γ-agops $\forall\gamma > 0$ nav invariants pret nobīdēm, nav homogēns un līdz ar to nav lineārs;
- ja A_γ, $\gamma \in (0,1]$ ir γ-agops un a ir tā absorbējošais elements, tad $a = 0$ vai $a > \gamma$.

Kaut arī γ-agopiem trūkst dažu svarīgu īpašību, tie ir noderīgi vispārinātās agregācijas kontekstā, ko mēs parādām vienā no nākamajām apakšnodaļām.

4.3. Sakārtojumi

Vispārinātā agopa jēdziens ir ieviests kontekstā ar kādu sakārtojumu agregējamo elementu klasē. Šajā apakšnodaļā ieviesīsim sakārtojumus agregējamo elementu klasē, kā arī definēsim atbilstošo vismazāko un vislielāko elementu.

Vertikāls sakārtojums $\subseteq^{\alpha}_{F_1}$:

25. Definīcija. *Pieņemsim* $\alpha \in [0,1]$, $P, Q \in F(\mathbb{R})$

$$P \subseteq^{\alpha}_{F1} Q \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(P(x) \geq \alpha \Rightarrow P(x) \leq Q(x)).$$

Vislielākais elements attiecībā pret $\subseteq^{\alpha}_{F1}$ ir definēts sekojoši:

$$\tilde{1}(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Pieņemsim

$$\Theta = \{\tilde{0}(x) | \tilde{0}(x) \leq \alpha, \forall x \in \mathbb{R}\}. \tag{10}$$

Θ definē objektu klasi, kurā vismazākais objekts ir $\tilde{0}(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Ņemot vērā parametra α būtību (tas ignorē vērtības mazākas parα) uzskatām, ka visi Θ elementi ir ekvivalenti.

Izmantojot šo sakārtojumu vispārinātajā agregācijā, prasām, lai jebkura šīs klases elementu n-arā agregācija būtu vienāda ar kādu elementu no šīs klases, t.i., tā neizved ārpus klases, un tad uzskatām, ka robežnosacījums ir izpildīts. Turpmāk mēs sauksim Θ minimālo elementu klasi.

Horizontāls sakārtojums $\subseteq^{\alpha}_{F_2}$:

26. Definīcija. *Pieņemsim* $\alpha \in (0,1]$, $P, Q \in F([a,b])$

$$P \subseteq^{\alpha}_{F_2} Q \Leftrightarrow \overline{P}^{\alpha} \leq \underline{Q}^{\alpha},$$

kur

$$P^{\alpha} = \{x : P(x) \geq \alpha\}, \qquad \min P^{\alpha} = \underline{P}^{\alpha}, \qquad \max P^{\alpha} = \overline{P}^{\alpha}$$
$$Q^{\alpha} = \{x : Q(x) \geq \alpha\}, \qquad \min Q^{\alpha} = \underline{Q}^{\alpha}, \qquad \max Q^{\alpha} = \overline{Q}^{\alpha}.$$

Klases

$$\Theta = \{\tilde{0}(x) | \tilde{0}(x) = 1, \text{ ja } x = a \text{ un } \tilde{0}(x) < \alpha \text{ ja } x \in (a,b]\},$$

$$\Sigma = \{\tilde{1}(x) | \tilde{1}(x) = 1, \text{ ja } x = b \text{ un } \tilde{1}(x) < \alpha \text{ ja } x \in [a,b)\}$$

attiecīgi sauksim par minimālo un maksimālo elementu klasēm. Vismazākais elements ir definēts sekojoši:

$$\tilde{0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x = a \\ 0, & \text{citos gadījumos} \end{cases}$$

bet vislielākais elements neeksistē.
Izmantojot šo sakārtojumu vispārinātajā agregācijā, prasām, lai jebkura klases Θ (Σ) elementu n-arā agregācija būtu vienāda ar kādu elementu no šīs klases, t.i., tā neizved ārpus klases, un tad uzskatām, ka robežnosacījums ir izpildīts.

1. Piezīme. *Sakārtojumi* $\subseteq_{F_1}^{\alpha}$ *and* $\subseteq_{F_2}^{\alpha}$ *ir transitīvi un asimetriski.*

4.4. Palīgrezultāti

Runājot par vispārināto agregācijas problēmu, saskaramies ar nepārtrauktu t-normu. Turpmāk formulētās teorēmas 4.3, 4.4 un 4.5 disertācijā ir pierādītas patvaļīgas nepārtrauktas t-normas gadījumā un ir uzskatāmas par avotā [35] 75-77. lpp. aprakstīto rezultātu vispārinājumu.

4.3. Teorēma. *Pieņemsim, ka* $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ir nepārtraukta operācija,* T *ir nepārtraukta t-norma un* $P, Q \in F(\mathbb{R})$ *ir pusnepārtrauktas no augšas nestriktas kopas, kurām visi* α*-līmeņi pie* $\alpha > 0$ *ir ierobežotas kopas. Tad katram* $z \in \mathbb{R}$*, kuru var iegūt izskatā* $z = x \circ y$ *vispār, var arī piemeklēt* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ *tādus, ka* $z = x_0 \circ y_0$ *un pie tam* $(P \circ Q)(z) = T(P(x_0), Q(y_0))$.

4.4. Teorēma. *Pieņemsim, ka* $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ir nepārtraukta operācija,* T *ir nepārtraukta t-norma un* $P, Q \in F(\mathbb{R})$ *ir pusnepārtrauktas no augšas nestriktas kopas, kurām visi* α*-līmeņi pie* $\alpha > 0$ *ir ierobežotas kopas. Tad*

$$(P \circ Q)^{T(\alpha,\beta)} = P^{\alpha} \circ Q^{\beta}$$

visiem $\alpha > 0$.

4.5. Teorēma. *Pieņemsim, ka* $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ir nepārtraukta operācija,* T *ir nepārtraukta t-norma un* $P, Q \in FQ(\mathbb{R})$*, tad* $P \circ Q \in FQ(\mathbb{R})$

4.5. Vispārinātā agregācija: ievaddaļa

Pieņemsim, ka $\prec$ ir visu to nestriktu kopu sakārtojums, kas ir definētas reālajā taisnē, saimē $F(\mathbb{R})$ ar minimālo elementu $\tilde{0} \in F(\mathbb{R})$ un maksimālo elementu $\tilde{1} \in F(\mathbb{R})$, tad:

27. Definīcija. *[36] Attēlojums $\tilde{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} F(\mathbb{R})^n \to F(\mathbb{R})$ ir vispārinātais agregācijas operators attiecībā pret sakārtojumu $\prec$, ja katram $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā šādi nosacījumi:*
$(\tilde{A}1)$ $\tilde{A}(\tilde{0}, ..., \tilde{0}) = \tilde{0}$
$(\tilde{A}2)$ $\tilde{A}(\tilde{1}, ..., \tilde{1}) = \tilde{1}$
$(\tilde{A}3)$ $(\forall i = \overline{1, n})$ $(P_i \prec Q_i) \Rightarrow \tilde{A}(P_1, ..., P_n) \prec \tilde{A}(Q_1, ..., Q_n)$,
kur $P_1, ..., P_n, Q_1, ..., Q_n \in F(\mathbb{R})$.

Izmantosim nosacījumu $\tilde{A}_{(1)}(P(x)) = P(x)\ \forall P(x) \in F(\mathbb{R})$.
Vispārināto agopu ieejas vērtības ir nestriktas kopas, kas ir pusnepārtrauktas no augšas un ar ierobežotiem α-līmeņiem, $\alpha > 0$, tāpēc turpmāk darbā $F(\mathbb{R})$ ir kopa, kuras elementiem piemīt aprakstītās īpašības. Kopas $FQ(\mathbb{R}), FI(\mathbb{R}), FN(\mathbb{R}), FTI(\mathbb{R})$ un $FTN(\mathbb{R})$ apzīmē attiecīgi nestriktu lielumu, nestriktu intervālu, nestriktu skaitļu, nestriktu trapecoizoidālo intervālu un nestriktu trīsstūra skaitļu klases.
Vispārinātu agopu īpašības definējam līdzīgi kā parasto agopu gadījumā, ņemot vērā, ka ieejas un izejas vērtības ir nestriktas kopas. Operācijas ar nestriktām kopām, kas parādas, piemēram, invariances pret nobīdēm gadījumā, ir izpildītas, izmantojot patvaļīgu nepārtrauktu t-normu (skat. turpinājuma principu).
Darbā ir parādīts, ka gadījumā, ja vispārinātajam agopam eksistē neitrālais vai absorbējošais elements, tad tas ir viens vienīgs.

4.6. Punktveida turpinājums

Sāksim patvaļīga agopa punktveida turpinājuma izpēti.

$$\tilde{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} F(\mathbb{R})^n \to F(\mathbb{R})$$

ir patvaļīga agopa A punktveida turpinājums, ja

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \tilde{A}(P_1, ..., P_n)(x) = A(P_1(x), ..., P_n(x)) \tag{11}$$

Ja ieejas vērtību kopa ir $F(\mathbb{R})$, tad izejas vērtībai arī ir ierobežoti α-līmeņi pie $\alpha > 0$, jo ieejas vērtību skaits ir galīgs. Izmantojot pārtrauktus agopus, varam pazaudēt pusnepārtrauktību no augšas, un tādos gadījumos izmantojam speciālo konstrukciju, kas ir aprakstīta darbā. Šī konstrukcija katru funkciju pārveido par punepārtrauktu no augšas, līdz ar to uzskatām, ka punktveida turpinājums saglabā arī pusnepārtrauktību no augšas. Ja ņemam ieejas vērtības no $FQ(\mathbb{R})$, tad izejas vērtība ne vienmēr ir nestrikts lielums. Citiem vārdiem, $\tilde{A}$ nesaglabā ieejas vērtību izliekumu. Ja aplūkojam $FI(\mathbb{R})$ un

$FN(\mathbb{R})$, tad arī ieejas vērtību virsotņu unikalitāte nesaglabājas izejas vērtībā.

Pētot punktveida turpinājumu robežnosacījumu un monotonitātes saglabāšanas kontekstā, konstatējām, ka tās respektē vertikālo sakārtojumu $\subseteq^{\alpha}_{F1}$. Arī γ-agopa punktveida turpinājums respektē šo sakārtojumu:

4.6. Teorēma. *Ja $\tilde{A}$ ir γ-agopa A punktveida turpinājums, un $\gamma > \alpha$, tad $\tilde{A}$ ir vispārinātais agops attiecībā pret sakārtojumu $\subseteq^{\alpha}_{F1}$.*

Runājot par patvaļīga agopa punktveida turpinājumu, idempotences īpašība ir kritiska:

4.7. Teorēma. *Ja $\tilde{A}$ ir idempotenta agopa A punktveida turpinājums, tad tas ir vispārinātais agops attiecībā pret sakārtojumu $\subseteq^{\alpha}_{F1}$.*

γ-agopi nav idempotenti, bet īpašība (A_γ) kompensē idempotenci šajā gadījumā.

Attiecībā pret horizontālo sakārtojumu $\subseteq^{\alpha}_{F2}$ patvaļīga agopa (γ-agopa) punktveida turpinājums nav vispārinātais agops. Nesaskaņotība rodas no tā, ka $\tilde{A}$ ir definēts uz y ass, bet $\subseteq^{\alpha}_{F2}$ darbojas uz x ass.

Punktveida turpinājumam ir pierādītas šādas īpašības:

4.8. Apgalvojums. *Ja $\tilde{A}$ ir vispārinātais agops, kas ir patvaļīga agopa A punktveida turpinājums, tad:*
(1) ja A ir simetrisks, tad arī $\tilde{A}$ ir simetrisks;
(2) ja A ir asociatīvs, tad arī $\tilde{A}$ ir asociatīvs;
(3) ja A ir bisimetrisks, tad arī $\tilde{A}$ ir bisimetrisks;
(4) ja A ir idempotents, tad arī $\tilde{A}$ ir idempotents.

4.9. Apgalvojums. *Ja $\tilde{A}$ ir vispārinātais agops, kas ir agopa A punktveida turpinājums, turklāt a un e ir attiecīgi A absorbējošais un neitrālais elements, tad:*
(1) $R(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ir $\tilde{A}$ absorbējošais elements,
(2) $E(x) = e$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ir $\tilde{A}$ neitrālais elements.

4.10. Apgalvojums. *Ja $\tilde{A}$ ir vispārinātais agops, un tas ir agopa $A = max$ punktveida turpinājums, un T ir patvaļīga nepārtraukta t-norma,*[1] *tad $\tilde{A}$ ir invariants pret nobīdēm.*

Apgalvojums 4.10 ir spēkā jebkurai citai nepārtrauktai operācijai, tāpēc $\tilde{A}$ ir homogēns un lineārs, ja spēkā ir attiecīgie nosacījumi.

[1] Izmanto saskaitīšanas operācijas turpinājumam uz $F(\mathbb{R})$.

4.7. T-turpinājums

Šajā nodaļā pētām citu vispārinātā agopa konstrukcijas metodi, proti, T-turpinājumu. Tālāk to apzīmējam ar $\widehat{A}$. Pieņemsim, ka T ir patvaļīga nepārtraukta t-norma. Tad

$$\widehat{A}(P_1, ..., P_n)(x) = \sup\{T(P_1(x_1), ..., P_n(x_n))| \\ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : A(x_1, ..., x_n) = x\} \quad (12)$$

ir patvaļīga agopa A T-turpinājums.
Tā kā mēs apskatām agopus, kas ir definēti vienības intervālā, tad attiecīgi arī $\widehat{A}$ ieejas vērtību kopa ir $F([0,1])$ – visas pusnepārtrauktas no augšas nestriktas kopas, kas ir definētas intervālā $[0,1]$.
Atšķirībā no punktveida turpinājuma T-turpinājums saglabā ieejas vērtību izliekumu, virsotņu unikalitāti un pat taisnas šķautnes (ja runājam par trīsstūra nestriktiem skaitļiem), ja A un T ir izvēlēti pareizi. Līdz ar to $\widehat{A}$ var būt definēts arī kopās $FQ([0,1]), FI([0,1]), FN([0,1])$ un atsevišķos gadījumos arī $FTI([0,1])$ un $FTN([0,1])$.
T-turpinājums ir vispārinātais agops attiecībā pret sakārtojumiem, kas ir definēti iepriekš:

4.11. Teorēma. *Ja $\widehat{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} F([0,1])^n \to F([0,1])$ ir patvaļīga nepārtraukta agopa T-turpinājums, tad tas ir vispārinātais agops attiecībā pret sakārtojumu $\subseteq^{\alpha}_{F_1}$.*

4.12. Teorēma. *Ja $\widehat{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} F([0,1])^n \to F([0,1])$ ir patvaļīga nepārtraukta agopa T-turpinājums, tad tas ir vispārinātais agops attiecībā pret sakārtojumu $\subseteq^{\alpha}_{F_2}$.*

Atšķirībā no punktveida turpinājuma T-turpinājums uzvedas "labi" gan attiecībā pret vertikālo, gan attiecībā pret horizontālo sakārtojumu.
Tālāk apskatām T-turpinājuma īpašības. Ja A ir nepārtraukts agops, tad $\widehat{A}$ saglabā simetriskumu, asociativitāti un bisimetriskumu:

4.13. Apgalvojums. *Ja A ir nepārtraukts un simetrisks agops, tad*

$$\widehat{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} F([0,1])^n \to F([0,1])$$

ir simetrisks vispārinātais agops.

4.14. Apgalvojums. *Ja A ir nepārtraukts un asociatīvs agops, tad*

$$\widehat{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} F([0,1])^n \to F([0,1])$$

ir asociatīvs vispārinātais agops.

4.15. Apgalvojums. *Ja A ir nepārtraukts un bisimetrisks agops, tad*

$$\widehat{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} F([0,1])^n \to F([0,1])$$

ir bisimetrisks vispārinātais agops.

Vispārīgā gadījumā $\widehat{A}$ nav idempotents un ieejas vērtību izliektība ir kritiska:

4.16. Apgalvojums. *Ja $\widehat{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} FQ([0,1])^n \to FQ([0,1])$ ir patvaļīga nepārtraukta, idempotenta agopa T_M-turpinājums, tad $\widehat{A}$ ir idempotents vispārinātais agops.*

T_M ir vienīgā idempotentā t-norma, tāpēc var parādīt, ka apgalvojums 4.16 nav spēkā citām t-normām.
Neitrālais elements un absorbējošais elements ir speciāla veida nestriktas kopas:

4.17. Apgalvojums. *Ja $\widehat{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} F([0,1])^n \to F([0,1])$ ir patvaļīga agopa A T-turpinājums, un e ir A neitrālais elements, tad*

$$E(x) = \begin{cases} 1, & ja\ x = e \\ 0, & ja\ x \neq e \end{cases}$$

ir $\widehat{A}$ neitrālais elements.

4.18. Apgalvojums. *Ja $\widehat{A} : \cup_{n\in\mathbb{N}} F([0,1])^n \to F([0,1])$ ir patvaļīga agopa A T-turpinājums, tad*

$$R(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$$

ir $\widehat{A}$ absorbējošais elements.

Redzams, ka $\widehat{A}$ neitrālais elements ir reāla skaitļa harakteristiskā funkcija, un absorbējošais elements ir vienāds ar nulli katrā punktā. Abi šie elementi nav klasiski kopas $F([0,1])$ pārstāvji.
Runājot par T-turpinājuma invarianci pret nobīdēm, mēs pieņemam, ka visas nepieciešamās saskaitīšanas ir definētas (skat. definīciju 23). Ar T_1 apzīmējam t-normu, kas ir izmantota saskaitīšanas operācijas turpinājumam un attiecīgi ar T_2 – t-normu, kas izmantota agopa A turpinājumam. Abas T_1 un T_2 ir nepārtrauktas. Konstatējam, ka vispārīgā gadījumā T-turpinājums nav invariants pret nobīdēm, bet sekojoši rezultāti raksturo $\widehat{A}$ attiecībā pret šo īpašību:

4.19. Apgalvojums. *Ja* $T_1 = T_2 = T_M$*, A ir nepārtraukts, pret nobīdēm invariants agops, kura definīcijā ir izmantotas tikai saskaitīšanas un reizināšanas ar konstanti* $c \in \mathbb{R}$ *operācijas, tad*

$$\widehat{A} : \cup_{n \in \mathbb{N}} FTN([0,1])^n \to FTN([0,1]),$$

ir pret nobīdēm invariants vispārinātais agops.

4.20. Apgalvojums. *Ja* $T_1 = T_2 = T$ *ir patvaļīgas t-normas un A ir nepārtraukts aditīvs agops, B ir intervāls un* $\widehat{A} : \cup_{n \in \mathbb{N}} F([0,1])^n \to F([0,1])$*, tad*

$$\widehat{A}(P_1, ..., P_n) + B = \widehat{A}(P_1 + B, ..., P_n + B)$$

4.21. Apgalvojums. *Ja* $T_1 = T_2 = T$ *ir patvaļīgas t-normas, A ir nepārtraukts un aditīvs agops,* $\widehat{A} : \cup_{n \in \mathbb{N}} FQ([0,1])^n \to FQ([0,1])$ *ir idempotents vispārinātais agops, tad* $\widehat{A}$ *ir invariants pret nobīdēm.*

Kā jau iepriekš tika minēts, tikai T_M nodrošina $\widehat{A}$ idempotenci, tāpēc apgalvojums 4.21 ir spēkā tikai gadījumā, kad $T_1 = T_2 = T_M$.

4.8. Vispārināto agopu praktiskie lietojumi

Šajā apakšnodaļā īsi ieskicēsim vispārināto agopu lietojumu jomas. Vispārināto agopu lietošanas sfēras var būt tādas pašas kā parastiem agopiem: lēmumu pieņemšana daudzkritēriju situācijās (piemēram finansēs [21]), klasifikācijas problēmas ar vairākiem kritērijiem, kas savstarpēji mijiedarbojas ([9, 10]), lietošana inteliģentās sistēmās ([32]) un citi.
Ja reprezentējam objektu īpašības un kritēriju vērtības nestriktu kopu veidā, tad vispārinātos agopus var veiksmīgi lietot lēmumu pieņemšanā un klasifikācijas problēmu risināšanā.
Arī nestriktu attiecību agregācijā var izmantot darbā aprakstītos agopus ([5, 11]).
Nestriktas kognitīvas kartes ([16, 17, 37]) arī ir vispārināto agopu lietošanas iespējamā joma.

4.9. Nobeiguma piezīmes

Vispārināto agopu teorija ir saturīga, bagāta ar rezultātiem un ļoti noderīga.
Šīs teorijas ietvaros var iezīmēt šādus nākotnes izpētes virzienus, kas netika pētīti darbā:

- citas vispārināto agopu īpašības,
- citas vispārināto agopu konstrukciju metodes.

Pētot T-turpinājumu, konstatējām, ka mainot t-normas varam manipulēt ar agopa īpašībām. Vispārīgā gadījumā, aizvietojot t-normu ar patvaļīgu agopu A^*, iegūstam elastīgāku objektu:

$$\widehat{A}(P_1, ..., P_n)(x) = \sup\{A^*(P_1(x_1), ..., P_n(x_n)) : A(x_1, ..., x_n) = x\}.$$

Nākotnē plānojam pētīt A^*- turpinājumu, kā arī γ-agopu, kas šajā darbā vēl nav pietiekami dziļi izpētīts.

5. Bibliogrāfija

Literatūra

[1] A. Berman, R. J. Plemmons. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences (Classics in applied mathematics). SIAM, the Society for Industrial and Applied mathematics, USA, 1994

[2] J.J.Buckley. *Fuzzy eigenvalues and input-output analysis.* Fuzzy sets and systems, **34**: 187–195, 1990

[3] T. Calvo, A. Kolesarova, M. Komornikova and R. Mesiar. *Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction methods.* In: Aggregation Operators: New Trends and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing, T.Calvo, G. Mayor, R.Mesiar (eds.), pp. 3 – 104, Physica - Verlag, New York, 2002

[4] M. Detyniecki. Fundamentals on aggregation operators. [online] http://www.spatial.maine.edu/ worboys/SIE565/papers/aggregation%20operators.pdf , 2001

[5] U. Dudziak. *Weak properties of fuzzy relations in the context of aggregation process.* In: Abstracts of Ninth International Conference on Fuzzy Set Theory and Applications, FSTA, p. 38, 2008

[6] D.Dubois, W.Ostasiewicz and H.Prade. Fuzzy Sets: History and Basic Notions: Fundamentals of Fuzzy Sets. Kluwer Academic Publ., Boston, Dodrecht, London, 1999

[7] M. Friedman, Ma. Ming and A. Kandel. *Fuzzy Linear System.* Fuzzy Sets and Systems, **96**:201–209, 1998

[8] J.A.Goguen. *L-Fuzzy Sets.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, **18**:145–174, 1967

[9] M. Grabisch. *Fuzzy integral for classification and feature extraction.* In: Fuzzy Measures and Integrals. Theory and Applications, M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno, and J. Kacprzyk (eds), pp. 415–434, Physica - Verlag, Berlin, 2000

[10] M. Grabisch. *The application of fuzzy integrals in multicriteria decision making.* Journal of Operational Research, **89**:445–456, 1996

[11] O. Grigorenko. *Fuzzy POS Category and aggregation of fuzzy order relations.* In Abstracts of 14th International Conference on Mathematical Modeling and Analysis, p. 30, 2009

[12] R.Horn and Ch.Dzonson. Matrichnij analiz (in Russian). "Mir", Moscow, 1989

[13] Max E. Jerrell. *Interval Arithmetic for Input-output Models with Inexact Data.* Computational Economics **10**:89–100, 1997

[14] Max E. Jerrell. *Economic Input-Output Models.* In: Applications of interval computations, R.Baker Kearfott, V. Kreinovich (eds.) pp. 133–144, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1996

[15] E. Klement, R. Mesiar and E. Pap. Triangular Norms. Series: Trends in Logic, Vol. 8, Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, 2000

[16] B. Kosko. *Fuzzy cognitive maps.* International Journal Man-Machine Studies, **24**:65–75, 1986

[17] B. Kosko. Fuzzy thinking: the new science of fuzzy logic. Hyperion, New York, 1993

[18] V. Kreinovich. *Optimal Finite Characterization of Linear Problems with Inexact Data.* Reliable Computing, **11** (6):479–489, 2005

[19] R. Kruse, J.Gebhardt and F.Klawon. Foundations of Fuzzy Systems. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Birsbane, Toronto, Singapore, 1998

[20] A.V. Lakeyev. *Computational complexity of estimation of generalized solution sets for interval linear systems.* Vicisliteljnije tehnologiji, **8** (1), 2003

[21] J.M. Merigo and M.C. Ramon. *The induced generalized hybrid averaging operator and its application in financial decision making.* International Journal of Business, Economics, Finance and Management Sciences, **1**(2): 95–101, 2009

[22] W. H. Miernyk. Input-Output Analysis. Random House, New York, 1965

[23] R.E. Moore. *Interval arithmetic and automatic error analysis in digital computing.* Stanford University, Technical report No. 25, Stanford, CA, 1962

[24] W.L.Peterson. Principles of Economics. Macro. 8th Edition, Richard D. Irwin, Inc, Boston, 1991

[25] H. Reynaerts and S. Muzzioli. *Solving fuzzy systems of linear equations by a nonlinear programming method.*

[26] J.Rohn. *Regularity of Interval Matrices and Theorems of the Alternatives.* Reliable computing, **12**:99–105, 2006

[27] J. Rohn. A Handbook of Results on Interval Linear Problems. [online] http://www.cs.cas.cz/rohn/handbook, 2005

[28] J. Rohn. *Solvability of systems of linear interval equations.* SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, **25**(1): 237–245, 2003

[29] J. Rohn. *Enclosing Solutions of Overdetermined Systems of Linear Interval Equations.* Reliable Computing, **2**:167–171, 1996

[30] J.Rohn. *Inverse interval matrix.* SIAM Journal on Numerical Analysis, **30**:864–870, 1993

[31] J. Rohn. *Input-Output Model with Interval Data.* Econometrica, **48**(3):767–769, 1980

[32] I. J. Rudas and J. Fodor. *Information Aggregation in Intelligent Systems Using Generalized Operators.* International Journal of Computers, Communications and Control, **1**(1):47–57, 2006

[33] P. Senthilkumar and G. Rajendran. *Solution of Fuzzy Linear Systems by Using Fuzzy Centre.* Applied Mathematical Sciences, **3**(49):2411 – 2419, 2009

[34] I. Skalna, M.V. Rama Rao and A. Pownuk. *Systems of fuzzy equations in structural mechanics.* Research Report No. 2007-01, 2007

[35] A.Šostaks. L-kopas un L-vērtīgas struktūras (in Latvian). Rīga, Latvijas Universitāte, Mācību grāmata, 2003

[36] A. Takači. *General aggregation operators acting on fuzzy numbers induced by ordinary aggregation operators.* Novi Sad J. Math., **33**(2): 67–76, 2003

[37] W.B. Vasantha Kandasamy and F. Smarandache. Fuzzy cognitive maps and neutrosophic cognitive maps.
[online] http://fs.gallup.unm.edu//NCMs.pdf, 2003

[38] A. Vroman G. Deschrijver and E. E. Kerrel. *Using Parametric Functions to Solve Systems of Linear Fuzzy Equations with a Symmetric Matrix.* International Journal of Computational Intelligence Systems **1**(3):248–261, 2008

[39] R. Yager. *Generalized OWA Aggregation Operators.* Fuzzy Optimization and Decision Making, **3**(1):93–107, 2004

[40] L.A.Zadeh. *Fuzzy Sets.* Information and Control, **8**:338–353, 1965

Autora publikācijas

[41] J.Lebedinska. *γ-aggregation operators and some aspects of generalized aggregation problem.* Math. Model. Anal., **15**(1) :83-96, 2010

[42] J.Lebedinska. *On another view of an inverse of an interval matrix.* Soft Computing, 2009, DOI 10.1007/s00500-009-0482-5

[43] J.Lebedinska. *On the inverse matrix of a fuzzy matrix.* ICTAA 2008 Proceedings, pp. 60–64, 2008