Топологические пространства и их отображения

Министерство народного образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. П.Стучки
Кафедра математического анализа

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

[8]

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1989

УДК 515.12; 519.6

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Топологические пространства и их отображения: Сборник научных трудов (межвузовский)/ Отв.ред. Е.Энгельсон - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1989. - 193 с.

Сборник посвящен проблемам топологии и функционального анализа.

Сборник предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, работающих в области топологии, функционального анализа, теории вероятности, а также в смежных областях.

Т $\frac{1702040000-050у}{М812(11)-89}$ 89

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Сборник посвящен проблемам топологии и функционального анализа.

В сборник включены работы, посвященные исследованию структуры топологических пространств и их отображений, исследованию специальных классов топологических пространств и пространств непрерывных функций, построению бикомпактификаций, исследованию $\mathfrak{G}$ -пространств, а также нечетких структур топологического типа на пространствах вероятностных мер. Изучаются также структуры топологического типа на алгебраических объектах.

Ряд работ сборника посвящен разработке теории сплайн-интерполяции и теории марковских процессов.

Основной объем сборника составляют работы, выполненные сотрудниками математических кафедр ЛГУ и представляющие собой результаты плановой научной работы, проводимой на кафедре математического анализа ЛГУ. В сборник включен также ряд работ, выполненных специалистами других вузов по этой тематике и при тесном сотрудничестве с кафедрой математического анализа ЛГУ.

Большинство результатов, включенных в сборник статей докладывалось на 46-й и 47-й научных конференциях ЛГУ, а также на семинарах при кафедре математического анализа ЛГУ.

Сборник предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, работающих в области топологии и функционального анализа, а также в смежных областях.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 515.20

МЕТОД ДВОЙСТВЕННОСТИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Л.В.Апарина
Волгоградский государственный университет

В работе с единой точки зрения описаны пространства счетного и точечно-счетного типа, линделефовы и вещественно-компактные. При этом получен ряд новых характеризаций этих классов пространств.

В рамках предложенной конструкции можно получить описания других классов пространств, если их определение связано с выбором некоторого семейства бикомпактных подмножеств в X или в $\beta X \setminus X$, где βX - стоун чеховская компактификация пространства X. Все пространства предполагаются тихоновскими.

Сначала приведем простые леммы.

Лемма 1. Пусть T - бикомпакт в тихоновском пространстве Y, F - множество типа F_σ в Y, не пересекающееся с T. Тогда существует функция $f \in C(Y)$ такая, что $f(y)=0$ $\forall y \in T$, $f(y)>0$ $\forall y \in F$ (F и T не пусты).

Доказательство. Пусть $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, где все F_n замкнуты в Y. Для каждого F_n построим функцию $f_n \in C(Y)$ так, что $f_n(y)=0$ $\forall y \in T$, $f_n(y) = \frac{1}{2^n}$ $\forall y \in F_n$, $0 \leq f_n \leq \frac{1}{2^n}$ ([1], стр. 42). Тогда $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ - требуемая функция.

В дальнейшем будем писать $f(T)=0$ вместо $f(y)=0$ $\forall y \in T$. Аналогичный смысл $f(F)>0$.

Следствие. Пусть G - множество типа G_δ в тихоновском пространстве Y, содержащее непустой бикомпакт T. Тогда существует функция $f \in C(Y)$ такая, что $f(T)=0$, $f(Y \setminus G)>0$, $0 \leq f \leq 1$.

Лемма 2. Пусть $\{F_\alpha\}$ - некоторое семейство замкнутых подмножеств бикомпакта $\mathfrak{B}$, такое, что $\bigcap_\alpha F_\alpha$ содержится в некотором множестве G типа G_δ в $\mathfrak{B}$. Тогда существует не более чем счетное подсемейство $\{F_n\}_{n\in K}$ такое, что $\bigcap_{n\in K} F_n \subset G$.

Доказательство. Пусть $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, где все G_n открыты в $\mathfrak{B}$. По условию $\bigcap_\alpha F_\alpha \subset G$, тогда $\mathfrak{B}\setminus G \subset \mathfrak{B}\setminus\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcup_\alpha(\mathfrak{B}\setminus F_\alpha)$. Так как $\mathfrak{B}\setminus G$ счетно-бикомпактно и $\{\mathfrak{B}\setminus F_\alpha\}_\alpha$ его открытое покрытие, то существует не более чем счетное подпокрытие $\{\mathfrak{B}\setminus F_n\}_{n\in K}$ (K конечно или счетно). Тогда $\mathfrak{B}\setminus G \subset \bigcup_{n\in K}(\mathfrak{B}\setminus F_n)$ или $\bigcap_{n\in K} F_n \subset G$.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{B}$ - бикомпакт, A - его незамкнутое подмножество, $A' = \mathfrak{B}\setminus A$, $\mathfrak{M}$ - некоторое семейство замкнутых подмножеств из $\mathfrak{B}$, содержащихся в A' .

Следующие условия равносильны:

1. Всякое $T\in\mathfrak{M}$ содержится в некотором множестве G типа G_δ в $\mathfrak{B}$ так, что $T\subset G\subset \mathfrak{B}\setminus A = A'$.

2. Из любого семейства $\{F_\alpha\}$ замкнутых подмножеств $\mathfrak{B}$ с $\bigcap_\alpha F_\alpha$, содержащимся в некотором $T\in\mathfrak{M}$, можно выделить не более чем счетное подсемейство $\{F_n\}_{n\in K}$ такое, что $\bigcap_{n\in K} F_n \subset \mathfrak{B}\setminus A = A'$ (K конечно или счетно).

3. Каково бы ни было $T\in\mathfrak{M}$, из всякого открытого покрытия $\{\mathfrak{U}_\alpha\}$ множества $\mathfrak{B}\setminus T$ ($\mathfrak{U}_\alpha$ открыты в $\mathfrak{B}$) можно выделить не более чем счетное семейство, покрывающее A .

4. Для любого $T\in\mathfrak{M}, T\neq\emptyset$ существует функция $g\in C(\mathfrak{B})$ такая, что $g(T)=0$, $g(A)>0$, $0\leq g\leq 1$.

5. Для любого $T\in\mathfrak{M}$ существует бикомпакт Q счетного характера в $\mathfrak{B}$ такой, что $T\subset Q\subset A' = \mathfrak{B}\setminus A$.

Доказательство. $1\Longrightarrow 2$. Пусть $\{F_\alpha\}$ семейство замкнутых множеств в $\mathfrak{B}$ и существует $T\in\mathfrak{M}$ такое, что $\bigcap_\alpha F_\alpha \subset T$. В силу условия 1 существует G типа G_δ в $\mathfrak{B}$

такое, что $T \subset G \subset \mathfrak{B} \setminus A = A'$. Тогда $\bigcap_\alpha F_\alpha \subset G$. В силу леммы 2 существует не более чем счетное подсемейство $\{F_n\}_{n \in K}$ такое, что $\bigcap_{n \in K} F_n \subset G$, и значит, 2 выполнено.

$2 \Leftrightarrow 3$. Очевидно.

$2 \Rightarrow 4$. Пусть $T \in \mathcal{M}$, $T \neq \phi$. Известно, что всевозможные нульмножества непрерывных функций образуют базу замкнутых множеств тихоновского пространства [1]. Пусть $T = \bigcap_\alpha Z(f_\alpha)$, где $\{f_\alpha\}$ - некоторое семейство функций из $C(\mathfrak{B})$, $Z(f_\alpha) = \{y \in \mathfrak{B} : f_\alpha(y) = 0\}$. В силу условия 2 существует не более чем счетное подсемейство $\{f_\alpha\}_{\alpha \in K}$ (K - конечно или счетно) такое, что $\bigcap_{\alpha \in K} Z(f_\alpha) \subset \mathfrak{B} \setminus A = A'$. Так как $Z(f_\alpha)$ - типа G_δ в $\mathfrak{B}$, то $G = \bigcap_{\alpha \in K} Z(f_\alpha)$ - тоже типа G_δ в $\mathfrak{B}$. Таким образом, $T \subset G \subset \mathfrak{B} \setminus A$. В силу следствия леммы 1 существует функция $g \in C(\mathfrak{B})$ такая, что $g(T) = 0$, $g(\mathfrak{B} \setminus G) > 0$, $0 \leqslant g \leqslant 1$. Так как $\mathfrak{B} \setminus G \supset A$, то $g(A) > 0$.

$4 \Rightarrow 5$. Пусть $T \in \mathcal{M}$, $T \neq \phi$. В силу 4 существует функция $g \in C(\mathfrak{B})$ такая, что $g(T) = 0$, $g(A) > 0$, $0 \leqslant g \leqslant 1$. Тогда $T \subset Z(g) \subset \mathfrak{B} \setminus A$. При этом $Z(g)$ бикомпакт типа G_δ в бикомпакте $\mathfrak{B}$, следовательно, $Z(g)$ - бикомпакт счетного характера в $\mathfrak{B}$. Таким образом, можно положить $Q = Z(g)$. Случай $T = \phi$ тривиален.

$5 \Rightarrow 1$. Для $T \in \mathcal{M}$ в силу условия существует бикомпакт Q счетного характера в $\mathfrak{B}$ такой, что $T \subset Q \subset \mathfrak{B} \setminus A = A'$. Так как $\mathfrak{B}$ - бикомпакт, то Q типа G_δ в $\mathfrak{B}$. Доказательство завершено.

С помощью теоремы 1 получаем различные описания пространств счетного и точечно-счетного типа, линделефовых и вещественно-компактных.

X называется пространством счетного (соответственно точечно-счетного) типа, если каждое бикомпактное (соответственно одноточечное) множество в X содержится в некотором бикомпакте счетного характера.

Пусть X - тихоновское пространство (небикомпактное). Положим $\mathfrak{B}=\beta X$, $A=X$, $A'=\beta X\setminus X$, μ - семейство всех бикомпактных подмножеств в $\beta X\setminus X$. Тогда выполнение условия 3 теоремы 1 означает, что X линделефово. Теорема 1 дает различные описания линделефова тихоновского пространства. Условие 1 теоремы 1 установлено в [2], условие 5 в [3] (для линделефовых пространств).

Если в качестве μ принять совокупность всех одноточечных подмножеств в $\beta X\setminus X$, то условие 4 (или 1) означает, что X вещественно-компактно [4]. Условие 5 доставляет новое описание этих пространств.

Пусть X - тихоновское, не локально бикомпактное пространство. Положим $\mathfrak{B}=\beta X$, $A=\beta X\setminus X$, $A'=X$, μ - семейство всех бикомпактных подмножеств в X. Тогда выполнение условия 5 теоремы 1 означает, что X - пространство счетного типа и, таким образом, получаем различные описания их. Если же принять за μ совокупность всех одноточечных подмножеств в X, то теорема 1 доставляет различные описания пространств точечно-счетного типа. Свойство 1 отмечено в [5], остальные, видимо, не отмечались. Например, свойство 4 для пространств точечно-счетного типа: тихоновское не локально-бикомпактное пространство X является пространством точечно-счетного типа, тогда и только тогда, когда для любого $x\in X$ существует функция $g\in C(\beta X)$ такая, что $g(x)=0$, $g(\beta X\setminus X)>0$, $0\leqslant g\leqslant 1$.

<u>Определение</u>. Если $X\subset Y$, Y - топологическое пространство, то назовем периферией X в Y множество

$$\mathrm{Per}_Y X=X\setminus\overset{\circ}{X}=\overline{Y\setminus X}\setminus(Y\setminus X).$$

<u>Теорема 2</u>. Пусть Φ - бикомпакт, X неоткрытое подмножество Φ, μ^* - некоторое семейство бикомпактов в $\mathrm{Per}_\Phi X$, $\mathfrak{B}=\overline{\Phi\setminus X}_\Phi$.

Следующие условия равносильны:

1. Для любого $T^*\in\mu^*$ существует множество G типа G_δ в $\mathfrak{B}$ такое, что $T^*\subset G\subset \mathrm{Per}_\Phi X$.

2. Из любого семейства $\{F_\alpha\}$ - замкнутых множеств в

$\mathfrak{B}$ с $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$, содержащимся в некотором $T^* \in \mathfrak{N}^*$, можно выделить не более чем счетное подсемейство $\{F_n\}_{n\in K}$ такое, что $\bigcap\limits_{n\in K} F_n \subset Per_\Phi X$.

3. Для любого $T^* \in \mathfrak{N}^*$ существует такая функция $g \in C(\Phi)$, что $g(T^*)=0$, $g(\Phi\setminus X)>0$, $0 \leq g \leq 1$.

4. Для любого $T^* \in \mathfrak{N}^*$ существует бикомпакт Q счетного характера в $\mathfrak{B}$ такой, что $T^* \subset Q \subset Per_\Phi X$.

<u>Доказательство</u>. Так как X не открыто, то $Per_\Phi X \neq \emptyset$; множество $\mathfrak{B} = \overline{\Phi\setminus X}_\Phi$ - бикомпакт. Обозначим

$$A = \Phi\setminus X,\ A' = \mathfrak{B}\setminus A = \overline{\Phi\setminus X}_\Phi \setminus (\Phi\setminus X) = X \setminus Int_\Phi X = Per_\Phi X.$$

Тогда A и A' не пусты (ибо X не замкнуто в Φ); $\mathfrak{N}^*$ - некоторое семейство бикомпактов в A'. Остается применить теорему 1.

Покажем теперь, что в теореме 1 существенно рассматривать лишь бикомпакты в $Per_{\mathfrak{B}} A'$.

<u>Теорема 3</u>. Пусть Y - тихоновское пространство, A - его незамкнутое подмножество, $A' = Y\setminus A$, $\mathfrak{N}$ - некоторое семейство замкнутых подмножеств Y, содержащихся в A', $\mathfrak{N}_1 = \{T\in\mathfrak{N} : T\cap Per_Y A' \neq 0\}$, $\mathfrak{N}^* = \{T\cap Per_Y A' : T\in\mathfrak{N}\} = \{T\cap \bar{A}_Y : T\in\mathfrak{N}\}$.

Следующие условия равносильны:

1. Для любого $T\in\mathfrak{N}$ существует G типа G_δ в Y такое, что $T\subset G\subset Y\setminus A = A'$.

2. Для любого $T\in\mathfrak{N}_1$ существует G типа G_δ в Y такое, что $T\subset G\subset Y\setminus A = A'$.

3. Для любого $T^*\in\mathfrak{N}^*$ существует G типа G_δ в Y такое, что $T^*\subset G\subset Y\setminus A = A'$.

4. Для любого $T^*\in\mathfrak{N}^*$ существует G_1 типа G_δ в $\bar{A}_Y$ такое, что $T^*\subset G_1\subset \bar{A}_Y\setminus A$.

<u>Доказательство</u>. Так как A не замкнуто, то $Per_Y A' \neq \phi$; если T - бикомпакт в A', то $T^* = T\cap Per_Y A' = T\cap\bar{A}_Y$ - бикомпакт в $\bar{A}_Y\setminus A = Per_Y A'$.

Докажем, что $3 \Longrightarrow 4$ ($1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3$ очевидно).

Пусть $T^* \in \mathfrak{M}^*$. По условию существует G типа G_δ в Y такое, что $T^* \subset G \subset Y \setminus A$. Тогда $T^* \subset G \cap \bar{A}_Y \subset$ $\subset (Y \setminus A) \cap \bar{A}_Y = \bar{A}_Y \setminus A$. При этом $G_1 = G \cap \bar{A}_Y$ множество типа G_δ в $\bar{A}_Y$.

$4 \Longrightarrow 1$. Пусть $T \in \mathfrak{M}$, $T^* = T \cap \bar{A}_Y$, тогда $T \setminus T^* \subset Y \setminus \bar{A}_Y = \mathring{A}'_Y$. В силу 4 существует G_1 типа G_δ в $\bar{A}_Y$ такое, что $T^* \subset G_1 \subset \bar{A}_Y \setminus A$. Пусть $G_1 = G \cap \bar{A}_Y$, где G типа G_δ в Y. Так как $G_1 \subset \bar{A}_Y \setminus A \subset A'$ и $G \setminus G_1 = G \setminus \bar{A}_Y \subset A'$, то $G \subset A'$. Тогда $T = T^* \cup (T \setminus T^*) \subset G \cup \mathring{A}'_Y \subset A'$, причем $G \cup \mathring{A}'_Y$ типа G_δ в Y.

Из теорем 1, 2, 3 получаем в качестве следствий новые характеризации не локально бикомпактных пространств счетного и точечно-счетного типа.

<u>Теорема 4</u>. Пусть X не локально бикомпактное тихоновское пространство, $\mathring{X} = \mathrm{Int}_{\beta X} X$. Следующие условия равносильны.

1. X счетного типа.

2. Каждый бикомпакт $T \subset X$ содержится в некотором множестве G типа G_δ в βX так, что $T \subset G \subset X$.

3. Каждый бикомпакт $T^* \subset \mathrm{Per}_{\beta X} X$ содержится в некотором множестве G типа G_δ в βX так, что $T^* \subset G \subset X$.

4. Каждый бикомпакт $T^* \subset \mathrm{Per}_{\beta X} X$ содержится в некотором множестве G_1 типа G_δ в $\overline{\beta X \setminus X}_{\beta X} = \beta X \setminus \mathring{X}$ так, что $T^* \subset G_1 \subset \mathrm{Per}_{\beta X} X$.

5. Каждый бикомпакт $T^* \subset \mathrm{Per}_{\beta X} X$ содержится в некотором бикомпакте Q счетного характера в βX так, что $T^* \subset Q \subset X$.

6. Каждый бикомпакт $T^* \subset \mathrm{Per}_{\beta X} X$ содержится в некотором бикомпакте Q_1 счетного характера в $\overline{\beta X \setminus X}_{\beta X}$ так, что $T^* \subset Q_1 \subset \mathrm{Per}_{\beta X} X$.

<u>Доказательство</u>. X не локально бикомпактно, следова-

тельно, X не открыто в βX, тогда $\mathrm{Per}_{\beta X} X = X \setminus \mathrm{Int}_{\beta X} X = \overline{\beta X \setminus X}_{\beta X} \setminus (\beta X \setminus X) \neq \phi$.

Равносильность 1 и 2 вытекает из теоремы 1 (принять $\mathfrak{B} = \beta X$, $A' = X$, $A = \beta X \setminus X$, μ - семейство всех бикомпактов в X).

2 $\Longleftrightarrow$ 3 $\Longleftrightarrow$ 4 в силу теоремы 3 (принять $Y = \beta X$, $A' = X$, $A = \beta X \setminus X$, μ - семейство всех бикомпактов в X, μ^* - семейство всех бикомпактов в $\mathrm{Per}_{\beta X} X$).

4 $\Longleftrightarrow$ 6 в силу теоремы 2 ($\Phi = \beta X$, $\mathfrak{B} = \overline{\beta X \setminus X}_{\beta X}$, μ^* - семейство всех бикомпактов в $\mathrm{Per}_{\beta X} X$).

3 $\Longleftrightarrow$ 5 в силу теоремы 1 ($\mathfrak{B} = \beta X$, $A' = X$, μ - семейство всех бикомпактов в $\mathrm{Per}_{\beta X} X \subset X$).

Аналогичная характеризация получается для пространств точечно-счетного типа (вместо произвольных бикомпактов в X и $\mathrm{Per}_{\beta X} X$ берем соответственно одноточечные подмножества в X или $\mathrm{Per}_{\beta X} X$).

В частности, имеем: не локально бикомпактное тихоновское пространство X тогда и только тогда точечно-счетного типа, когда любое $x \in \mathrm{Per}_{\beta X} X$ содержится в некотором бикомпакте Q счетного характера в βX так, что $x \in Q \subset X$.

Заметим, что следствием теоремы 4 является известная теорема: тихоновское пространство X счетного типа тогда и только тогда, когда $\beta X \setminus X$ линделефово [6] .

Действительно, в силу условия 5 теоремы 4 X счетного типа тогда и только тогда, когда каждый бикомпакт $T^* \subset \mathrm{Per}_{\beta X} X$ содержится в некотором множестве G_1 типа G_δ в $\overline{\beta X \setminus X}_{\beta X}$ так, что $T^* \subset G_1 \subset \mathrm{Per}_{\beta X} X$. Но $\mathrm{Per}_{\beta X} X = \overline{\beta X \setminus X}_{\beta X} \setminus (\beta X \setminus X)$, а $\overline{\beta X \setminus X}_{\beta X}$ - бикомпактное расширение $\beta X \setminus X$. Следовательно, X счетного типа тогда и только тогда, когда $\beta X \setminus X$ нормально вложено в свое бикомпактное расширение $\overline{\beta X \setminus X}_{\beta X}$, а это равносильно линделефовости $\beta X \setminus X$ [2] .

Библиографический список

1. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. New York, D. van Nostrand Comp., 1960.
2. Смирнов Ю.М. О нормально расположенных множествах нормальных пространств // Мат. сб. 1951. Т.29(71). № 1. С.173-176.
3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., 1974.
4. Mrowka S. Some properties of Q-spaces // Bull. Acad. Polon. Sci. 1957. V.5. P.947-950.
5. Архангельский А.В. Бикомпактные множества и топология пространств // Труды ММО. 1965. Т.13. С.3-55.
6. Henriksen M., Isbell J.R. Some properties of compactifications // Duke Math. J. 1957. V.25. P.83-105.

Поступила 30 июня 1987 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 519.6

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И СГЛАЖИВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СРЕДНИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

С.В.Асмусс
ЛГУ им. П.Стучки

Зафиксируем на отрезке $[a,b]$ разбиение $\Delta=\{t_0,t_1,\dots,t_{n+1}: a=t_0<t_1<\dots<t_{n+1}=b\}$. Пусть для $x:[a,b]\to\mathbb{R}$ известны интегральные средние: $z_i=\frac{1}{h_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}x(t)dt$, $h_i=t_i-t_{i-1}$, $i=\overline{1,n+1}$. Задачу интерполяции функции по z_i, $i=\overline{1,n+1}$, решают так называемые сплайны для локальных средних (см., например [1], с. 213, [2], с. 36), т.е. элементы пространства $S(T,A)=\{s\in X\mid\forall x\in\mathcal{N}(A)\ \langle Ts,Tx\rangle=0\}$ при $X=H^q_{[a,b]}$ $(1\le q\le n+1)$, $Y=H^0_{[a,b]}$, $Z=\mathbb{R}^{n+1}$, $Tx=x^{(q)}\in Y$ и $Ax=\left(\frac{1}{h_1}\int_{t_0}^{t_1}x(t)dt,\dots,\frac{1}{h_{n+1}}\int_{t_n}^{t_{n+1}}x(t)dt\right)\in Z$, для $x\in X$.

В [3] дана оценка ошибки интерполяции функций класса $H^1_{[a,b]}$ параболическими (случай $q=1$) сплайнами для локальных средних. В настоящей работе эта оценка существенно уточняется для разбиения с постоянным шагом (теорема 1). Рассматривается также задача сглаживания. При этом общая теория ошибки приближения, развитая в [3] для сплайн-интерполяции, распространяется на случай сглаживания (предложение 1, теорема 3). С ее помощью получены оценки погрешности сглаживания функций класса $H^1_{[a,b]}$ параболическими сплайнами для локальных средних (теоремы 5, 6). Предложены также способы вычисления интерполяционного и сглаживающего сплайнов, соответствующих произвольному вектору интегральных средних (теоремы 2 и 4).

В статье много ссылок на работу автора [3]. Мы будем пользоваться принятыми в ней обозначениями.

В дальнейшем рассматривается случай разбиения с постоянным шагом $h_i=h$, $i=\overline{1,n+1}$.

Теорема 1. Для ошибки $\mathcal{U}x$ интерполяции функции $x \in MH^1_\infty[a,b]$ при помощи параболических сплайнов для локальных средних имеет место оценка

$$\sup_{x\in MH^1_\infty[a,b]} \max_{t\in[t_{i-1},t_i]} |(\mathcal{U}x)(t)| = \frac{1}{2} K_i Mh, \quad i=\overline{1,n+1},$$

где

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[1-(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^n\right] \leqslant K_1, \quad K_{n+1} \leqslant \frac{7}{5}\left[1-\frac{2}{21}\frac{1-\delta_{1,n}}{5^{n-2}}\right]-\frac{3}{10}\delta_{1,n}$$

(здесь $\delta_{1,n}$ – символ Кронекера),

$$\frac{136}{15}(7\sqrt{3}-12)\left[1-\frac{35}{68}(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^{n-2}\right] \leqslant K_2, \quad K_n \leqslant \frac{38}{25}\left[1-\frac{7}{114}\frac{1}{5^{n-3}}\right], \; n \geqslant 2,$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[1-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\left((2-\sqrt{3})^{i^*-1}+(2-\sqrt{3})^{n-i^*}\right)\right] \leqslant K_i \leqslant$$

$$\leqslant \frac{6076}{3971}\left[1-\frac{247}{3038}\left(\frac{1}{5^{i^*-2}}+\frac{7}{26}\frac{1}{5^{n-2-i^*}}\right)\right], \; i^*=\max\{i-1,n+1-i\}, \; 3\leqslant i\leqslant n-1, \; n\geqslant 4.$$

Доказательство теоремы использует следствие 5.1 из [3], согласно которому в каждой точке $t\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,n+1}$,

$$\sup_{x\in MH^1_\infty[a,b]} |(\mathcal{U}x)(t)| = \frac{1}{2}Mh\left(A_i^\infty(t)+B_i^\infty(t)+C_i^\infty(t)\right) \tag{3}$$

и

$$\sup_{x\in MH^1_2[a,b]} |(\mathcal{U}x)(t)| \leqslant M\sqrt{h}\left(A_i^2(t)+B_i^2(t)+C_i^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

где для $p\in\{2,\infty\}$

$$A_i^p(t)=\sum_{j=1}^{i-1}\gamma^p(g_{j-1}(t),g_j(t)), \quad C_i^p(t)=\sum_{j=i+1}^{n+1}\gamma^p(1-g_{j-1}(t),1-g_j(t)), \tag{5}$$

$$B_i^p(t)=\gamma^p\left(g_{i-1}(t),g_{i-1}(t)+\frac{t-t_{i-1}}{h}s_i(t)\right)\frac{t-t_{i-1}}{h}+\gamma^p\left(1-g_i(t),1-g_i(t)+\frac{t_i-t}{h}s_i(t)\right)\frac{t_i-t}{h}$$

и $\gamma^2(u,v)=uv+\frac{1}{3}(u-v)^2$, $\gamma^\infty(u,v)=|u+v|\theta(uv)+\frac{u^2+v^2}{|u|+|v|}(1-\theta(uv))$, $u,v\in\mathbb{R}$

(здесь s_j, $j=\overline{1,n+1}$ – сплайн канонического базиса пространства $S(T,A)$, $g_j=\sum_{k=1}^{j}s_k$, $j=\overline{1,n+1}$, θ – единичная функция Хевисайда: при $u=v=0$ условимся считать $\frac{u^2+v^2}{|u|+|v|}(1-\theta(uv))$ равным нулю).

Собственно доказательству предпошлем анализ поведения сплайнов s_i и g_i, $i=\overline{1,n+1}$. Предварительно отметим, что сплайны из $S(T,A)$ в случае $q=1$ имеют вид

$$s(t)=\lambda_0-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda_i}{2h}[(t-t_{i-1})_+^2-(t-t_i)_+^2],\ t\in[a,b], \tag{6}$$

где коэффициенты λ_i, $i=\overline{1,n+1}$, удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=0 \tag{7}$$

([1], с. 214). Хорошо известна и следующая характеризация: для того чтобы функция s из $H^1[a,b]$ была параболическим сплайном для локальных средних необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$s|_{[t_{i-1},t_i]}$ – полином второй степени, $i=\overline{1,n+1}$; (8)

$s\in C^1[a,b]$; (9)

$s'(a)=s'(b)=0$ (10)

(там же).

При оценке ошибки важную роль будет играть последовательность $(\tau_i)_{i\geq 0}$:

$$\tau_0=0,\ \tau_i=4\frac{3+\tau_{i-1}}{4+\tau_{i-1}}\ \text{для}\ i\geq 1 \tag{11}$$

($\tau_1=3$, $\tau_2=3\frac{3}{7}$, $\tau_3=3\frac{6}{13}$, $\tau_4=3\frac{45}{97}$,...). Сразу заметим простые ее свойства.

1. $\tau_i<2\sqrt{3}$, $i\geq 0$. (12)

Это проверяется методом математической индукции:

неравенство $\tau_{i-1}<2\sqrt{3}$ влечет $\tau_i=4-\frac{4}{4+\tau_{i-1}}<4-\frac{4}{4+2\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$, $i\geq 1$.

2. $\tau_i>\tau_{i-1}$, $i\geq 1$.

Неравенство $4\frac{3+\tau_{i-1}}{4+\tau_{i-1}}>\tau_{i-1}$ эквивалентно $\tau_{i-1}^2-12<0$,

которое всегда выполняется в силу (12).

Введем также в рассмотрение функцию

$\varkappa(\tau;\tau)=1+\tau\tau-3(1+\frac{1}{2}\tau)\tau^2$, $\tau\in[0,1]$ (здесь τ – параметр, который мы будем задавать при помощи элементов последовательности $(\tau_i)_{i\geq 0}$).

В дальнейшем существенно используется следующая

Лемма 1. Сплайн s, удовлетворяющий при некотором $i\in\{1,2,\dots,n+1\}$ условию

$$(As)_k=0,\ k\le i, \tag{13}$$

на отрезке $[t_{j-1},t_j]$, $j=\overline{1,i}$, представим в виде

$$s(t)=s(t_i)\frac{(-1)^{i-j}}{2^{i-j}}\prod_{k=j+1}^{i}(4-\tau_k)\alpha\left(\frac{t_j-t}{h};-\tau_j\right). \tag{14}$$

Аналогично, для сплайна s такого, что при некотором $i\in\{1,2,\dots,n+1\}$:

$$(As)_k=0,\ k\ge i, \tag{15}$$

имеет место представление

$$s(t)=s(t_{i-1})\frac{(-1)^{j-i}}{2^{j-i}}\prod_{k=i-1}^{j-2}(4-\tau_{n+1-k})\alpha\left(\frac{t-t_{j-1}}{h};-\tau_{n+2-j}\right), \tag{16}$$

$$t\in[t_{j-1},t_j],\ j=\overline{i,n+1}.$$

Доказательство. Пусть для s выполняется (13). Сначала рассмотрим случай $s(t_i)=0$. Определим вспомогательную функцию x, полагая $x(t)=s(t)\theta(t-t_i)$, $t\in[a,b]$. Так как $x\in H^1[a,b]$ и $As=Ax$, то в силу экстремального свойства интерполяционного сплайна ([1], с. 204) $\int_a^b s'(t)^2dt\le\int_a^b x'(t)^2dt$, откуда согласно определению x следует $\int_a^{t_i} s'(t)^2dt\le\int_a^{t_i} x'(t)^2dt=0$, а значит, $s'(t)=0$ для $t\in[a,t_i]$. Это доказывает импликацию

$$s(t_i)=0 \Longrightarrow s(t)=0,\ t\in[a,t_i]. \tag{17}$$

Теперь предположим, что $s(t_j)\ne0$ при некотором $j\in\{1,2,\dots,i\}$. Учитывая (8), представим сплайн s на отрезке $[t_{j-1},t_j]$ в виде $s(t)=a_j+b_j(t-t_j)+c_j(t-t_j)^2$. Воспользовавшись интерполяционным условием $(As)_j=0$, получим уравнение $a_j-\frac12 b_jh+\frac13 c_jh^2=0$, откуда $c_j=-\frac{3}{h^2}(a_j-\frac12 b_jh)$. Заметим, что $a_j=s(t_j)$, $b_j=s'(t_j)$ и обозначим $d_j=\dfrac{s'(t_j)h}{s(t_j)}$.

Тогда

$$s(t)=s(t_j)[1+d_j\frac{t-t_j}{h}-3\left(1-\frac{1}{2}d_j\right)\frac{(t-t_j)^2}{h^2}],\ t\in[t_{j-1},t_j]. \tag{18}$$

По этой формуле находим

$$s(t_{j-1})=\frac{1}{2}(d_j-4)\,s(t_j), \tag{19}$$

$$s'(t_{j-1})=\frac{2}{h}(3-d_j)\,s(t_j). \tag{20}$$

Очевидно, $s(t_{j-1})$ и $s'(t_{j-1})$ не могут одновременно равняться нулю, а значит, $s(t_{j-1})\neq 0$ (так как ситуация $s(t_{j-1})=0,\ s'(t_{j-1})\neq 0$ противоречит (17)).

Этим установлено, что в предположении $s(t_i)\neq 0$ и при $j<i$ $s(t_j)\neq 0$. А следовательно, (18) - (20) верно при $j\leq i$. Из (19) и (20) получим рекурентное соотношение $d_{j-1}=4\frac{d_j-3}{4-d_j},\ j\leq i$, которое влечет $d_j=r_j,\ j\leq i$, ибо ввиду (10) $d_0=0$. Остается учесть, что в силу (19)

$$s(t_j)=s(t_{j+1})\frac{(-1)}{2}(4-r_{j+1})=s(t_{j+2})\frac{1}{4}(4-r_{j+2})(4-r_{j+1})=\ldots=s(t_i)\frac{(-1)^{i-j}}{2^{i-j}}\prod_{k=j+1}^{i}(4-r_k).$$

Представление (16) может быть получено по этой же схеме.

<u>Замечание</u>. Нетрудно усмотреть, что все сплайны, удовлетворяющие условию (13) (условию (15)) на интервале $[a,t_i]$ (соответственно $[t_{i-1},b]$) совпадают с точностью до постоянного множителя.

<u>Следствие 1</u>.

$$g_i(t)=\begin{cases}1-\dfrac{r_{n+1-i}}{r_i+r_{n+1-i}}\dfrac{(-1)^{i-j}}{2^{i-j}}\displaystyle\prod_{k=j+1}^{i}(4-r_k)\,\alpha\left(\frac{t_j-t}{h};-r_j\right),\ t\in[t_{j-1},t_j],\ j=\overline{1,i},\\ \dfrac{r_i}{r_i+r_{n+1-i}}\dfrac{(-1)^{j-i-1}}{2^{j-i-1}}\displaystyle\prod_{k=i}^{j-2}(4-r_{n+1-k})\,\alpha\left(\frac{t-t_{j-1}}{h};-r_{n+2-j}\right),\ t\in[t_{j-1},t_j],\\ \qquad j=\overline{i+1,n+1},\quad i=\overline{1,n+1}.\end{cases}$$

<u>Доказательство</u>. Применяя лемму 1 к сплайнам g_i и $1-g_i$ ($(Ag_i)_k=0$ при $k\geq i+1$; $(A(1-g_i))_k=0$ при $k<i$), $i=\overline{1,n}$, получаем

$$g_i(t)=1-(1-g_i(t_i))\frac{(-1)^{i-j}}{2^{i-j}}\prod_{k=j+1}^{i}(4-r_k)\,\alpha\left(\frac{t_j-t}{h};-r_j\right),\ t\in[t_{j-1},t_j],\quad j=\overline{1,i}, \tag{21}$$

$$g_i(t)=g_i(t_i)\frac{(-1)^{j-i-1}}{2^{j-i-1}}\prod_{k=i}^{j-2}(4-r_{n+1-k})\alpha\left(\frac{t-t_{j-1}}{h};-r_{n+2-j}\right),\ t\in[t_{j-1},t_j],\ j=\overline{i+1,n+1}. \quad (22)$$

Дифференцируя (21), находим $g_i'(t_i)=\frac{1-g_i(t_i)}{h}r_i$. С другой стороны, дифференцирование (22) влечет $g_i'(t_i)=$ $=-\frac{g_i(t_i)}{h}r_{n+1-i}$. Приравнивая правые части двух последних соотношений, получаем $g_i(t_i)=\frac{r_i}{r_i+r_{n+1-i}}$. Отсюда и из (21), (22) следует требуемое.

Так как сплайн g_{n+1} тождественно равен 1 (как сплайн, интерполирующий единичный вектор), то и при $i=n+1$ представление будет верно. Чтобы в этом убедиться, достаточно формально подставить $i=n+1$ в доказываемое соотношение.

Следствие 2.

$$S_i(t)=\begin{cases} 3\frac{r_{n+2-i}-2}{r_{i-1}+r_{n+2-i}}\frac{(-1)^{i-j-1}}{2^{i-j-1}}\prod_{k=j+1}^{i-1}(4-r_k)\alpha\left(\frac{t_j-t}{h};-r_j\right),\ t\in[t_{j-1},t_j],\ j=\overline{1,i-1}, & (23)\\ 3\frac{r_{n+2-i}-2}{r_{i-1}+r_{n+2-i}}\alpha\left(\frac{t-t_{i-1}}{h};r_{i-1}\right)+3\frac{(t-t_{i-1})^2}{h^2}= & (24)\\ =3\frac{r_i-2}{r_i+r_{n+1-i}}\alpha\left(\frac{t_i-t}{h};r_{n+1-i}\right)+3\frac{(t_i-t)^2}{h^2},\ t\in[t_{i-1},t_i], & (25)\\ 3\frac{r_i-2}{r_i+r_{n+1-i}}\frac{(-1)^{j-i-1}}{2^{j-i-1}}\prod_{k=i}^{j-2}(4-r_{n+1-k})\alpha\left(\frac{t-t_{j-1}}{h};-r_{n+2-j}\right),\ t\in[t_{j-1},t_j], & (26)\\ j=\overline{i+1,n+1},\quad i=\overline{1,n+1}. \end{cases}$$

Доказательство. В применении к s_i, $i=\overline{2,n}$, лемма 1 означает, что

$$S_i(t)=\begin{cases} s_i(t_{i-1})\frac{(-1)^{i-j-1}}{2^{i-j-1}}\prod_{k=j+1}^{i-1}(4-r_k)\alpha\left(\frac{t_j-t}{h};-r_j\right),\ t\in[t_{j-1},t_j],\ j=\overline{1,i-1}, & (27)\\ s_i(t_i)\frac{(-1)^{j-i-1}}{2^{j-i-1}}\prod_{k=i}^{j-2}(4-r_{n+1-k})\alpha\left(\frac{t-t_{j-1}}{h};-r_{n+2-j}\right),\ t\in[t_{j-1},t_j],\ j=\overline{i+1,n+1}. & (28)\end{cases}$$

Найдем $s_i(t)$ для $t\in[t_{i-1},t_i]$. В силу (8) $s_i(t)=a_{i-1}+b_{i-1}(t-t_{i-1})+$ $+c_{i-1}(t-t_{i-1})^2$, $t\in[t_{i-1},t_i]$ (так мы получим (24), а чтобы доказать (25), следует $s_i(t)$ разложить по степеням t_i-t). Из интерполяционного условия $(As_i)_i=1$ следует

$a_{i-1}+\frac{1}{2}b_{i-1}h+\frac{1}{3}c_{i-1}h^2=1$, откуда $c_{i-1}=\frac{3}{h^2}[1-(a_{i-1}+\frac{1}{2}b_{i-1}h)]$.

Ясно, что $a_{i-1}=s_i(t_{i-1})$, $b_{i-1}=s_i'(t_{i-1})$. Дифференцируя (27), получаем

$$s_i'(t_{i-1})=\frac{s_i(t_{i-1})}{h}z_{i-1}. \tag{29}$$

Тогда

$$s_i(t)=s_i(t_{i-1})[1+z_{i-1}\frac{t-t_{i-1}}{h}-3(1+\frac{1}{2}z_{i-1})\frac{(t-t_{i-1})^2}{h^2}]+3\frac{(t-t_{i-1})^2}{h^2}, \quad t\in[t_{i-1},t_i]. \tag{30}$$

Чтобы найти $s_i(t_{i-1})$, воспользуемся соотношением

$$s_i'(t_i)=-\frac{s_i(t_i)}{h}z_{n+1-i}, \tag{31}$$

полученным дифференцированием (28). Выразив $s_i(t_i)$ и $s_i'(t_i)$ из (30): $s_i(t_i)=s_i(t_{i-1})\frac{(-1)}{2}(4+z_{i-1})+3$, $hs_i'(t_i)=s_i(t_{i-1})(-2)(3+z_{i-1})+6$, — приходим к уравнению $\frac{1}{2}s_i(t_{i-1})(4+z_{i-1})z_{n+1-i}-3z_{n+1-i}=6-2s_i(t_{i-1})(3+z_{i-1})$, откуда

$$s_i(t_{i-1})=6\frac{2+z_{n+1-i}}{4z_{i-1}+4z_{n+1-i}+z_{i-1}z_{n+1-i}+12}=3\frac{z_{n+2-i}-2}{z_{i-1}+z_{n+2-i}}. \tag{32}$$

Тогда

$$s_i(t_i)=6\frac{2+z_{i-1}}{4z_{i-1}+4z_{n+1-i}+z_{i-1}z_{n+1-i}+12}=3\frac{z_i-2}{z_i+z_{n+1-i}}. \tag{33}$$

Для завершения доказательства осталось (32) и (33) подставить в (27), (28) и (30).

Исследование сплайна s_1 (сплайна s_{n+1}) отличается лишь тем, что для вывода соотношения (29) (соответственно (31)) мы не можем воспользоваться (27) ((28)), но оно и в этом случае будет иметь место, ибо $z_0=0$, а $s_1'(t_0)=0$ ($s_{n+1}'(t_{n+1})=0$) в силу (10).

<u>Замечание</u>. С помощью (11) нетрудно установить, что

$$\frac{z_{n+2-i}-2}{z_{i-1}+z_{n+2-i}}\frac{1}{2^{i-j-1}}\prod_{k=j+1}^{i-1}(4-z_k)=\frac{z_{n+1-j}-2}{z_{n+1-j}+z_j}\prod_{k=j+1}^{i-1}\frac{z_{n+1-k}-2}{z_{n+1-k}+2}, \quad j=\overline{1,i-1},\ i=\overline{2,n+1}, \tag{34}$$

$$\frac{z_i-2}{z_i+z_{n+1-i}}\frac{1}{2^{j-i-1}}\prod_{k=i}^{j-2}(4-z_{n+1-k})=\frac{z_{j-1}-2}{z_{j-1}+z_{n+2-j}}\prod_{k=i}^{j-2}\frac{z_k-2}{z_k+2}, \quad j=\overline{i+1,n+1},\ i=\overline{1,n}. \tag{35}$$

В дальнейшем для s_i, $i=\overline{1,n+1}$, наряду с представлением (23) – (26) мы будем пользоваться и таким, которое получается из него заменой соответствующих множителей при помощи (34) - (35).

<u>Теорема 2</u>. Сплайн s, интерполирующий вектор интегральных средних $\mathfrak{z}=(\mathfrak{z}_1,\mathfrak{z}_2,\ldots,\mathfrak{z}_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$, представим на отрезке $[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,n+1}$, в виде

$$s(t)=\sum_{j=1}^{i-1}\mathfrak{z}_j A_{ij}\, d\left(\frac{t-t_{i-1}}{h};-z_{n+2-i}\right)+\mathfrak{z}_i\left(B_i\, d\left(\frac{t-t_{i-1}}{h};z_{i-1}\right)+3\frac{(t-t_{i-1})^2}{h^2}\right)+\sum_{j=i+1}^{n+1}\mathfrak{z}_j C_{ij}\, d\left(\frac{t_i-t}{h};-z_i\right),$$

где

$$A_{ij}=3\frac{z_j-2}{z_j^2+z_{n+1-j}}\,\frac{(-1)^{i-j-1}}{2^{i-j-1}}\prod_{k=j}^{i-2}(4-z_{n+1-k}),\quad j=\overline{1,i-1},$$

$$B_i=3\frac{z_{n+2-i}-2}{z_{i-1}+z_{n+2-i}},$$

$$C_{ij}=3\frac{z_{n+2-j}-2}{z_{j-1}+z_{n+2-j}}\,\frac{(-1)^{j-i-1}}{2^{j-i-1}}\prod_{k=i+1}^{j-1}(4-z_k),\quad j=\overline{i+1,n+1}.$$

Этот факт немедленно вытекает из следствия 2, если учесть, что $s=\sum_{j=1}^{n+1}\mathfrak{z}_j s_j$ (лемма 3 в [3]).

<u>Замечание</u>. Теорема 2 дает способ вычисления интерполяционного сплайна для произвольного вектора $\mathfrak{z}$, эффективный в том случае, когда нас интересует поведение s на отдельном интервале $[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,n+1}$. Поскольку коэффициенты A_{ij},B_i,C_{ij} не зависят ни от $\mathfrak{z}$, ни от разбиения Δ и, следовательно, могут быть подсчитаны заранее, то вычислительные затраты (без учета этих предварительных вычислений) составляют $2n$ арифметических операций.

<u>Лемма 2</u>.

$$5s_1(t)+s_2(t)=0,\quad t\in[t_2,b];$$

$$s_{i-1}(t)+4s_i(t)+s_{i+1}(t)=0,\quad t\in[a,t_{i-2}]\cup[t_{i+1},b],\quad i=\overline{2,n};$$

$$s_n(t)+5s_{n+1}(t)=0,\quad t\in[a,t_{n-1}].$$

С целью ее доказательства введем в рассмотрение параболические B-сплайны (по поводу B-сплайнов см., например, [4], с. 18):

$$
B_i(t)=\begin{cases} \frac{1}{2h}\frac{(t-t_{i-2})^2}{h^2}, & t\in[t_{i-2},t_{i-1}[,\\ \frac{1}{2h}\left[1+2\frac{t-t_{i-1}}{h}-2\frac{(t-t_{i-1})^2}{h^2}\right], & t\in[t_{i-1},t_i],\\ \frac{1}{2h}\frac{(t_{i+1}-t)^2}{h^2}, & t\in]t_i,t_{i+1}],\\ 0 & \text{при всех остальных } t, \end{cases} \quad i=\overline{0,n+2} \qquad (36)
$$

(здесь $t_{-2}, t_{-1}, t_{n+2}, t_{n+3}$ – дополнительные узлы: $t_j=a+jh$, $j\in\{-2,-1,n+2,n+3\}$). Хорошо известно, что эти сплайны образуют базис пространства $S_{2,1}(\Delta)$ параболических сплайнов дефекта 1 (последние могут быть охарактеризованы при помощи (8) – (9)). А так как $S(T,A)\subset S_{2,1}(\Delta)$, то каждый сплайн $s\in S(T,A)$ линейно выражается через B-сплайны. Однако $B_0, B_1, B_{n+1}, B_{n+2}\notin S(T,A)$, ибо они не удовлетворяют условию (10). Поэтому оказывается удобным перейти к несколько "подправленным" B-сплайнам – назовем их $\tilde{B}$-сплайнами:

$$
\tilde{B}_1=h(B_0+B_1),\ \tilde{B}_i=hB_i,\ i=\overline{2,n},\ \tilde{B}_{n+1}=h(B_{n+1}+B_{n+2}) \qquad (37)
$$

(множитель h введен с целью исключить зависимость $\tilde{B}$-сплайнов от h). Элементарно проверяется, что для $\tilde{B}_1$ и $\tilde{B}_{n+1}$ условие (10) выполняется, а значит, $\tilde{B}_i\in S(T,A)$, $i=\overline{1,n+1}$. Более того, $\tilde{B}$-сплайны образуют базис пространства $S(T,A)$: их линейная независимость вытекает из линейной независимости B-сплайнов, а количество совпадает с $\dim S(T,A)$. Этот базис обладает также тем достоинством B-сплайнов, которое обеспечило им их исключительную роль в решении вычислительных задач сплайн-интерполяции – $\tilde{B}$-сплайны имеют носители минимальной длины.

Коэффициенты β_j, $j=\overline{1,n+1}$, в разложении $s=\sum_{j=1}^{n+1}\beta_j\tilde{B}_j$, сплайна s, интерполирующего вектор $z=(z_1,z_2,\dots,z_{n+1})$ интегральных средних, можно найти из системы уравнений $\sum_{j=1}^{n+1}\beta_j(A\tilde{B}_j)_i=z_i$, $i=\overline{1,n+1}$. Матрицу этой системы

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

находим, учитывая, что

$$(A\tilde{B}_j)_i = \begin{cases} \frac{1}{6}, & i \in \{j-1, j+1\} \cap \{1, 2, \dots, n+1\}, \\ \frac{2}{3}, & i = j \in \{2, 3, \dots, n\}, \\ \frac{5}{6}, & i = j \in \{1, n+1\}, \\ 0, & i \in \{1, 2, \dots, n+1\} \setminus \{j-1, j, j+1\}. \end{cases} \tag{38}$$

Доказательство леммы 2 теперь сводится к проверке равенств $\tilde{B}_1 = \frac{5}{6}s_1 + \frac{1}{6}s_2$, $\tilde{B}_i = \frac{1}{6}s_{i-1} + \frac{2}{3}s_i + \frac{1}{6}s_{i+1}$, $i = \overline{2,n}$, $\tilde{B}_{n+1} = \frac{1}{6}s_n + \frac{5}{6}s_{n+1}$.

Согласно (38) сплайн $\tilde{B}_i$, $i = \overline{2,n}$, интерполирует вектор $\frac{1}{6}e_{i-1} + \frac{2}{3}e_i + \frac{1}{6}e_{i+1}$. А поскольку для каждого вектора интегральных средних интерполяционный сплайн определяется однозначно, то $\tilde{B}_i$ совпадает с $\frac{1}{6}s_{i-1} + \frac{2}{3}s_i + \frac{1}{6}s_{i+1}$, интерполирующим тот же вектор. По этой же причине совпадают сплайны $\tilde{B}_1$ и $\frac{5}{6}s_1 + \frac{1}{6}s_2$, $\tilde{B}_{n+1}$ и $\frac{1}{6}s_n + \frac{5}{6}s_{n+1}$, интерполяционные для векторов $\frac{5}{6}e_1 + \frac{1}{6}e_2$ и $\frac{1}{6}e_n + \frac{5}{6}e_{n+1}$ соответственно.

Замечание. Лемму 2 можно доказать и не прибегая к B -сплайнам (вывести из следствия 2). Но приведенное доказательство очень просто и наглядно. К тому же сказанное о $\tilde{B}$ -сплайнах представляет и самостоятельный интерес как с точки зрения практического решения задачи интерполяции, так и в применении к сглаживающим сплайнам (см. лемму 6).

Следствие 3.

$$\sum_{j=1}^{i} |s_j(t)| = \frac{1}{2}(3|s_i(t)| - |s_{i-1}(t)| - 2|s_1(t)|), \; t \geq t_i, \; i = \overline{2, n+1}, \tag{39}$$

$$\sum_{j=i}^{n+1} |s_j(t)| = \frac{1}{2}(3|s_i(t)| - |s_{i+1}(t)| - 2|s_{n+1}(t)|), \; t \leq t_{i-1}, \; i = \overline{1, n}. \tag{40}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $t > t_i$, $i=\overline{2,n+1}$. Так как по следствию 2 при $j=\overline{1,i-1}$ $\operatorname{sign} s_j(t) = -\operatorname{sign} s_{j+1}(t)$, то лемма 2 влечет $|s_2(t)| = 5|s_1(t)|$ и $|s_{j-1}(t)|+|s_j(t)|+|s_{j+1}(t)|=5|s_j(t)|$, $j=\overline{2,i-1}$. Поэтому $3\sum\limits_{j=1}^{i}|s_j(t)| = 2|s_1(t)|+|s_2(t)|+\sum\limits_{j=2}^{i-1}[|s_{j-1}(t)|+|s_j(t)|\cdot|s_{j+1}(t)|]+$ $+|s_{i-1}(t)|+2|s_i(t)| = 7|s_1(t)|+5\sum\limits_{j=2}^{i-1}|s_j(t)|+|s_{i-1}(t)|+2|s_i(t)| = 5\sum\limits_{j=1}^{i}|s_j(t)|+$ $+2|s_1(t)|+|s_{i-1}(t)|-3|s_i(t)|$, что и доказывает (39). (40) доказывается аналогично.

<u>Лемма 3</u>. Функции $A_i^\infty, B_i^\infty, C_i^\infty$, $i=\overline{1,n+1}$, участвующие в (3), выражаются через z_j, $j=\overline{0,n+1}$, следующим образом:

$$A_i^\infty(t) = \mathcal{A}_i^\infty \left|\alpha\left(\frac{t-t_{i-1}}{h}; -z_{n+2-i}\right)\right|, \tag{41}$$

$$B_i^\infty(t) = \mathcal{B}^\infty\left(\frac{t-t_{i-1}}{h}; z_{n+2-i}, z_{i-1}\right) + \mathcal{B}^\infty\left(\frac{t_i-t}{h}; z_i, z_{n+1-i}\right), \tag{42}$$

$$C_i^\infty(t) = \mathcal{C}_i^\infty\left|\alpha\left(\frac{t_i-t}{h}; -z_i\right)\right|, \quad t\in[t_{i-1}, t_i], \tag{43}$$

где

$$\mathcal{A}_i^\infty = 3\,\frac{z_{i-1}-2}{z_{i-1}+z_{n+2-i}} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{5z_j^2-24z_j+36}{9(z_j-2)^2} \prod_{k=j}^{i-2}\frac{z_k-2}{z_k+2},$$

$$\mathcal{C}_i^\infty = 3\,\frac{z_{n+1-i}-2}{z_i+z_{n+1-i}} \sum_{j=i}^{n} \frac{5z_{n+1-j}^2-24z_{n+1-j}+36}{9(z_{n+1-j}-2)^2} \prod_{k=i+1}^{j}\frac{z_{n+1-k}-2}{z_{n+1-k}+2},$$

$$\mathcal{B}^\infty(\tau; z, \tilde z) = 2\,\frac{\tilde z}{z+\tilde z}\,\alpha(\tau;-z)\tau + 3\,\frac{z-2}{z+\tilde z}\,\alpha(\tau;\tilde z)\tau^2 + 3\tau^4 +$$
$$+\frac{2\tilde z^2\alpha^2(\tau;-z)}{3(z+\tilde z)[(z-2)\alpha(\tau;\tilde z)+(z+\tilde z)\tau^2]}\,\theta(\tau-\tau^*(-z)), \quad \tau\in[0,1],\ z,\tilde z\in[0,2\sqrt{3}]$$

(здесь $\tau^*(z) = \frac{1}{3(z+2)}\left(z+\sqrt{z^2+6z+12}\right)$ – ноль функции $\alpha(\cdot; z)$).

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим A_i^∞, $i=\overline{1,n+1}$. Сразу заметим, что в точке $t^* = t_{i-1}+\tau^*(-z_{n+2-i})h$ (41) верно, так как по следствию 1 $g_j(t^*)=0$, $j=\overline{1,i-1}$. Пусть теперь $t\in[t_{i-1},t_i]\setminus\{t^*\}$. Согласно тому же следствию

$$\frac{g_{j-1}(t)}{g_j(t)} = -\frac{z_{j-1}(4-z_{n+2-j})}{2(z_{j-1}+z_{n+2-j})} : \frac{z_j}{z_j+z_{n+1-j}} = -2\,\frac{z_j-3}{z_j}, \quad j=\overline{2,i-1}.$$

Значит, $\operatorname{sign} g_{j-1}(t) = -\operatorname{sign} g_j(t)$, $j=\overline{2,i-1}$, и следовательно,

$$A_i^\infty(t) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{g_{j-1}^2(t) + g_j^2(t)}{|s_j(t)|} = \sum_{j=1}^{i-1} \left[4\frac{(\tau_j-3)^2}{\tau_j^2} + 1\right] \frac{g_j^2(t)}{|s_j(t)|}.$$

На основании следствий 1 и 2 получаем $\dfrac{g_j(t)}{s_j(t)} = \dfrac{\tau_j}{3(\tau_j-2)}$, $j=\overline{1,i-1}$, что дает нам возможность продолжить преобразования

$$A_i^\infty(t) = \sum_{j=1}^{i-1} \left[4\frac{(\tau_j-3)^2}{\tau_j^2} + 1\right] \frac{\tau_j^2}{9(\tau_j-2)^2} |s_j(t)| = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{5\tau_j^2 - 24\tau_j + 36}{9(\tau_j-2)^2} |s_j(t)|.$$

Остается учесть, что согласно (26) и (35)

$$|s_j(t)| = 3\frac{\tau_{i-1}-2}{\tau_{i-1}+\tau_{n+2-i}} \prod_{k=j}^{i-2} \frac{\tau_k - 2}{\tau_k+2} \left| d\left(\frac{t-t_{i-1}}{h}; -\tau_{n+2-i}\right)\right|, \quad j=\overline{1,i-1}.$$

Доказательство (43) проводится сходным образом, а для доказательства (42) надо установить, что

$$\gamma^\infty\left(g_{i-1}(t), g_{i-1}(t) + \frac{t-t_{i-1}}{h} s_i(t)\right) \frac{t-t_{i-1}}{h} = \mathcal{B}^\infty\left(\frac{t-t_{i-1}}{h}; \tau_{n+2-i}, \tau_{i-1}\right)$$ и

$$\gamma^\infty\left(1-g_i(t), 1-g_i(t) + \frac{t_i-t}{h} s_i(t)\right) \frac{t_i-t}{h} = \mathcal{B}^\infty\left(\frac{t_i-t}{h}; \tau_i, \tau_{n+1-i}\right).$$ Мы получим

первое из этих равенств (второе доказывается аналогично). С этой целью установим, что $f(\tau) := g_{i-1}(t_{i-1}+\tau h) + \tau s_i(t_{i-1}+\tau h) > 0$ при $\tau \in [0,1]$. Воспользовавшись равенством $s_i = g_i - g_{i-1}$ и следствием 1, получаем

$$f(\tau) = \frac{\tau_{i-1}}{\tau_{i-1}+\tau_{n+2-i}} d(\tau; -\tau_{n+2-i})(1-\tau) + \left(1 - \frac{\tau_{n+1-i}}{\tau_i+\tau_{n+1-i}} d(1-\tau; -\tau_i)\right)\tau.$$

Тогда $f'(\tau) = -18\dfrac{\tau_{i-1}\tau_{n+1-i} + \tau_{i-1} + \tau_{n+1-i}}{\tau_{i-1}\tau_{n+1-i} + 4\tau_{i-1} + 4\tau_{n+1-i} + 12}(\tau-\tau_1)(\tau-\tau_2)$, где

$$\tau_{1,2} = \frac{3\tau_{i-1}(\tau_{n+1-i}+2) \mp \sqrt{\tau_{i-1}^2\tau_{n+1-i}^2 + 4\tau_{i-1}^2\tau_{n+1-i} + 4\tau_{i-1}\tau_{n+1-i}^2 + 12\tau_{i-1}\tau_{n+1-i} + 24\tau_{i-1} + 24\tau_{n+1-i} + 12\tau_{i-1}^2 + 12\tau_{n+1-i}^2}}{6(\tau_{i-1}\tau_{n+1-i} + \tau_{i-1} + \tau_{n+1-i})},$$

откуда $\min\limits_{\tau\in[0,1]} f(\tau) = \min\{f(\tau_1), f(1)\}$. Поскольку $\tau_1 < \frac{1}{3}$, то $d(\tau_1; -\tau_{n+2-i}) > 0$ и $d(1-\tau_1; -\tau_i) < 0$, а следовательно, $f(\tau_1) > 0$. Остается заметить, что $f(1) = g_i(t_i) > 0$.

Итак, $\theta\left(g_{i-1}(t)\left(g_{i-1}(t) + \frac{t-t_{i-1}}{h} s_i(t)\right)\right) = \theta(g_{i-1}(t)) = \theta(t^*(-\tau_{n+2-i}) - t)$.

Для завершения доказательства остается подставить в формулу, определяющую $\gamma^\infty\left(g_{i-1}(t), g_{i-1}(t) + \frac{t-t_{i-1}}{h} s_i(t)\right)$, выражения для $g_{i-1}(t)$ и $s_i(t)$ (см. следствия 1 и 2) и выполнить несложные преобразования, которые мы опускаем.

<u>Доказательство теоремы 1</u>. Введем в рассмотрение функции $\mu(r)=\frac{r-2}{r+2}$, $\nu(r)=\frac{5r^2-24r+36}{9(r-2)^2}$, $\xi(r,\tilde r)=\frac{r-2}{r+\tilde r}$, $r,\tilde r\in[3,2\sqrt3]$. Отметим, что $\mu'(r)>0$, $\nu'(r)<0$, $\frac{\partial\xi}{\partial r}(r,\tilde r)>0$, $\frac{\partial\xi}{\partial\tilde r}(r,\tilde r)<0$,
$\mu(r_1)=\frac15$, $\mu(2\sqrt3)=2-\sqrt3$, $\nu(r_1)=1$, $\nu(2\sqrt3)=\frac23$, $\xi(r_1,r_2)=\frac{7}{45}$, $\xi(r_2,r_1)=\frac29$,
$\xi(r_2,r_3)=\frac{130}{627}$, $\xi(2\sqrt3,r_1)=\frac23(9-5\sqrt3)$, $\xi(2\sqrt3,r_2)=\frac73(9-5\sqrt3)$, $\xi(2\sqrt3,2\sqrt3)=\frac16(3-\sqrt3)$.

Тогда по лемме 3 $\mathfrak{A}_i^\infty=3\xi(r_{i-1},r_{n+2-i})\sum\limits_{j=1}^{i-1}\nu(r_j)\prod\limits_{k=j}^{i-2}\mu(r_k)$.

Оценим $\mathfrak{A}_i^\infty$ $(i\geq3)$ сверху

$$\mathfrak{A}_i^\infty\leq3\nu(r_1)\xi(r_{i-1},r_{n+2-i})\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j}^{i-2}\mu(r_k)=3\xi(r_{i-1},r_{n+2-i})\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j}^{i-2}\mu(r_k).$$

Прежде, чем продолжить оценку, преобразуем полученное выражение на основании следствия 2 с учетом (35) и следствия 3

$$3\xi(r_{i-1},r_{n+2-i})\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j}^{i-2}\mu(r_k)=\sum_{j=1}^{i-1}|s_j(t_{i-1})|=\frac12(3|s_{i-1}(t_{i-1})|-|s_{i-2}(t_{i-1})|-2|s_1(t_{i-1})|)=\frac32(3-\mu(r_{i-2})-$$
$$-2\prod_{k=1}^{i-2}\mu(r_k))\xi(r_{i-1},r_{n+2-i})=3\Big(\frac{2}{r_{i-1}-2}-\prod_{k=1}^{i-2}\mu(r_k)\Big)\xi(r_{i-1},r_{n+2-i})\leq3\Big(\frac{2}{r_{i-1}-2}-\mu(r_1)^{i-2}\Big)\xi(r_{i-1},r_{n+2-i}).$$

Итак, $\mathfrak{A}_i^\infty\leq3\Big(\frac{2}{r_2-2}-\mu(r_1)^{i-2}\Big)\xi(r_2,r_3)=\frac{26}{209}\Big(7-\frac{1}{5^{i-3}}\Big)$, $3\leq i\leq n-1$,

$$\mathfrak{A}_n^\infty\leq3\Big(\frac{2}{r_1-2}-\mu(r_1)^{n-2}\Big)\xi(r_1,r_2)=\frac{7}{15}\Big(2-\frac{1}{5^{n-2}}\Big),\quad \mathfrak{A}_{n+1}^\infty\leq3\Big(\frac{2}{r_2-2}-\mu(r_1)^{n-1}\Big)\xi(r_2,r_1)=1-\frac{1}{2\cdot5^{n-1}}.$$

Аналогично получаем оценку $\mathfrak{A}_i^\infty$ $(i\geq3)$ снизу

$$\mathfrak{A}_i^\infty\geq3\nu(2\sqrt3)\xi(r_{i-1},r_{n+2-i})\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j}^{i-2}\mu(r_k)=2\xi(r_{i-1},r_{n+2-i})\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j}^{i-2}\mu(r_k)=$$
$$=2\Big(\frac{2}{r_{i-1}-2}-\prod_{k=1}^{i-2}\mu(r_k)\Big)\cdot\xi(r_{i-1},r_{n+2-i})\geq2\Big(\frac{2}{r_{i-1}-2}-\mu(2\sqrt3)^{i-2}\Big)\xi(r_{i-1},r_{n+2-i}),$$

откуда $\mathfrak{A}_i^\infty\geq2\Big(\frac{2}{2\sqrt3-2}-\mu(2\sqrt3)^{i-2}\Big)\xi(2\sqrt3,2\sqrt3)=\frac{\sqrt3}{3}(1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{i-2})$, $3\leq i\leq n-1$,

$$\mathfrak{A}_n^\infty\geq2\Big(\frac{2}{2\sqrt3-2}-\mu(2\sqrt3)^{n-2}\Big)\xi(2\sqrt3,r_2)=\frac{14}{3}(7\sqrt3-12)(1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{n-2}),\quad \mathfrak{A}_{n+1}^\infty\geq2\Big(\frac{2}{2\sqrt3-2}-\mu(2\sqrt3)^{n-1}\Big)\xi(2\sqrt3,r_1)=$$
$$=\frac43(2\sqrt3-3)(1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{n-1}).$$

По этой же схеме можно установить, что $\mathfrak{C}_i^\infty$ $(3\leq i\leq n-1)$ удовлетворяет системе неравенств, полученных для $\mathfrak{A}_{n+2-i}^\infty$. Непосредственно из определения следует, что $\mathfrak{A}_1^\infty=\mathfrak{C}_{n+1}^\infty=0$.

Осталось оценить $\mathfrak{A}_2^\infty$ и $\mathfrak{C}_n^\infty$: так как $\mathfrak{A}_2^\infty=\mathfrak{C}_n^\infty=3\xi(r_1,r_n)$, то $2\sqrt3-3\leq\mathfrak{A}_2^\infty,\ \mathfrak{C}_n^\infty\leq\frac{7}{15}$, $n\geq2$. Теперь поскольку

$$K_i=\max\Big\{\mathfrak{A}_i^\infty+\frac12(4-r_i)\mathfrak{C}_i^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;r_i,r_{n+1-i}),\ \frac12(4-r_{n+2-i})\mathfrak{A}_i^\infty+\mathfrak{C}_i^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;r_{n+2-i},r_{i-1})\Big\}$$

и $\frac{\partial\mathfrak{B}^\infty}{\partial\tau}(1;\tau,\tilde\tau)<0$, $\frac{\partial\mathfrak{B}^\infty}{\partial\tilde\tau}(1;\tau,\tilde\tau)<0$, $\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_1,\tau_1)=\frac{17}{20}$, $\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_1,\tau_2)=\frac{241}{225}$,

$\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_2,0)=\frac{1}{2}$, $\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_2,\tau_1)=\frac{34}{45}$, $\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_3,0)=\frac{7}{15}$, $\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_3,\tau_2)=\frac{1687}{3971}$, $\mathfrak{B}^\infty(1,2\sqrt3,0)=2\sqrt3-3$,

$\mathfrak{B}^\infty(1;2\sqrt3,\tau_1)=\frac{17}{3}(7\sqrt3-12)$, $\mathfrak{B}^\infty(1;2\sqrt3,2\sqrt3)=\frac{1}{3}(3-\sqrt3)$, $\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_1,2\sqrt3)=\frac{2}{3}(3-\sqrt3)$, $\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_2,2\sqrt3)=\frac{4}{3}(9-5\sqrt3)$,

то

$$K_1,K_{n+1}\geqslant\max\{\tfrac12(4-\tau_1)\mathfrak{C}_1^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_1,2\sqrt3),\ \mathfrak{C}_1^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;2\sqrt3,0)\}\geqslant\tfrac13\max\{4(2\sqrt3-3)(1-(\sqrt3-1)\cdot$$
$$\cdot(2-\sqrt3)^{n-1})+3(2\sqrt3-3),\ 2(2\sqrt3-3)(1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{n-1})+2(3-\sqrt3)\}=\frac{2\sqrt3}{3}[1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^n],$$

$$K_1,K_{n+1}\leqslant\max\{\tfrac12(4-\tau_1)\mathfrak{C}_1^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_1,\tau_1),\ \mathfrak{C}_1^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_2,0)\}\leqslant\max\{1,\tfrac{11}{10}\}=\tfrac{11}{10},\ n=1,$$

$$K_1,K_{n+1}\leqslant\max\{\tfrac12(4-\tau_1)\mathfrak{C}_1^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_1,\tau_2),\ \mathfrak{C}_1^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_3,0)\}\leqslant\tfrac{1}{15}\max\{\tfrac{394}{19}-\tfrac{1}{5^{n-2}},$$
$$21-\frac{2}{5^{n-2}}\}=\frac75[1-\frac{2}{21}\,\frac{1}{5^{n-2}}],\ n\geqslant2,$$

$$K_2,K_n\geqslant\max\{\mathfrak{A}_2^\infty+\tfrac12(4-\tau_2)\mathfrak{C}_2^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_2,2\sqrt3),\ (2-\sqrt3)\mathfrak{A}_2^\infty+\mathfrak{C}_2^\infty+\mathfrak{B}^\infty(1;2\sqrt3,\tau_1)\}\geqslant\tfrac13(7\sqrt3-12)\cdot$$
$$\cdot\max\{10+7\sqrt3+4(1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{n-2}),\ 13\tfrac13+14(1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{n-2})\}=\frac{136}{15}(7\sqrt3-12)[1-\frac{35}{68}(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{n-2}],$$

$$K_2,K_n\leqslant\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_2,\tau_1)+\max\{\mathfrak{A}_2^\infty+\tfrac12(4-\tau_2)\mathfrak{C}_2^\infty,\ \tfrac12(4-\tau_2)\mathfrak{A}_2^\infty+\mathfrak{C}_2^\infty\}\leqslant\tfrac{34}{75}+\tfrac{1}{15}\max\{7+$$
$$+2(2-\frac{1}{5^{n-2}}),\ 2+7(2-\frac{1}{5^{n-2}})\}=\frac{38}{25}[1-\frac{7}{114}\,\frac{1}{5^{n-3}}],\ n>2,$$

$$K_i\geqslant\mathfrak{B}^\infty(1;2\sqrt3,2\sqrt3)+\max\{\mathfrak{A}_i^\infty+(2-\sqrt3)\mathfrak{C}_i^\infty,\ (2-\sqrt3)\mathfrak{A}_i^\infty+\mathfrak{C}_i^\infty\}\geqslant\tfrac13(3-\sqrt3)+\tfrac{\sqrt3}{3}\max\{1-(\sqrt3-1)\cdot$$
$$\cdot(2-\sqrt3)^{i-2}+(1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{n-i})(2-\sqrt3),\ (1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{i-2})(2-\sqrt3)+1-(\sqrt3-1)(2-\sqrt3)^{n-i}\}=$$
$$=\frac{2\sqrt3}{3}[1-\tfrac12(\sqrt3-1)((2-\sqrt3)^{i^*-1}+(2-\sqrt3)^{n-i^*})],\ i^*=\max_0\{i-1,n+1-i\},\ 3\leqslant i\leqslant n-1,$$

$$K_i\leqslant\mathfrak{B}^\infty(1;\tau_3,\tau_2)+\max\{\mathfrak{A}_i^\infty+\tfrac12(4-\tau_3)\mathfrak{C}_i^\infty,\ \tfrac12(4-\tau_3)\mathfrak{A}_i^\infty+\mathfrak{C}_i^\infty\}\leqslant\tfrac{1687}{3971}+\tfrac{26}{209}\max\{7-$$
$$-\frac{1}{5^{i-3}}+\frac{7}{26}(7-\frac{1}{5^{n-1-i}}),\ \frac{7}{26}(7-\frac{1}{5^{i-3}})+7-\frac{1}{5^{n-1-i}}\}=$$
$$=\frac{6076}{3971}[1-\frac{247}{3038}(\frac{1}{5^{i^*-2}}+\frac{7}{26}\,\frac{1}{5^{n-2-i^*}})],\ i^*=\max\{i-1,n+1-i\},$$
$$3\leqslant i\leqslant n-1.$$

Доказательство завершено.

Результату (3) - (5) в [3] предшествовало исследование ошибки сплайн-интерполяции с точки зрения общей теории сплайнов в гильбертовых пространствах. По той же схеме мы рассмотрим сглаживающие сплайны.

Пусть X, Y, Z - вещественные гильбертовы пространства,

$S(T,A)$ – пространство сплайнов, определяемое линейными непрерывными операторами $T: X \to Y$, $A: X \to Z$ такими, что $\mathcal{R}(T) = Y$, $\mathcal{R}(A) = Z$. Напомним, что сглаживающим сплайном пространства $S(T,A)$, соответствующим числу $\varrho > 0$ и элементу $z \in Z$ называется сплайн $s \in S(T,A)$, доставляющий минимум функционалу F : $Fu = \|Tu\|^2 + \varrho\|Au - z\|^2$, $u \in X$ (см., например, [1], с. 220). Потребуем, чтобы $\mathcal{N}(T) + \mathcal{N}(A)$ было замкнуто и $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$. Тогда для каждого элемента $z \in Z$ и числа $\varrho > 0$ существует единственный сглаживающий сплайн (там же, с. 222).

Зафиксируем параметр сглаживания $\varrho > 0$ и определим оператор сглаживания $S_\varrho : X \to S(T,A)$, переводящий элемент $x \in X$ в сглаживающий сплайн, соответствующий $Ax \in Z$, и оператор ошибки сглаживания $\mathcal{U}_\varrho = I - S_\varrho$, где I – единичный оператор в X.

Предложение 1. Пусть P – проектор пространства X на $\mathcal{N}(T)$, $\widetilde{T} = T|_{\mathcal{R}(I-P)}$, $A_\varrho = \frac{1}{\varrho} A^{*-1} T^* T + A$, $\widetilde{A}_\varrho = A_\varrho|_{S(T,A)}$.
Тогда $\mathcal{U}_\varrho = \vartheta_\varrho T$, где $\vartheta_\varrho = (I - \widetilde{A}_\varrho^{-1} A)\widetilde{T}^{-1}$.

Доказательство аналогичного предложения в случае сплайн-интерполяции (предложение 1 в [3]) опиралось на тот факт, что $\mathcal{N}(\mathcal{U}) = S(T,A)$. Для задачи сглаживания равенство $\mathcal{N}(\mathcal{U}_\varrho) = S(T,A)$ в общем случае не выполняется, т.е. построенный для сплайна из $S(T,A)$ сглаживающий сплайн может не совпадать с исходным (по лемме 6 $S_{\varrho_k} s_i = \widetilde{B}_i$, $i = \overline{1, n+1}$, но $\widetilde{B}_i \neq s_i$, $i = \overline{1, n+1}$ – ср. (23) – (26) с (36) – (37)). Но для элементов ядра $\mathcal{N}(T)$ такое совпадение можно гарантировать: каждый $x \in \mathcal{N}(T)$ является сплайном и он доставляет минимум функционалу F, ибо $Fx = 0$. Итак, $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U}_\varrho)$, а следовательно, $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{N}(\mathcal{U}_\varrho)$. Тогда

$$\mathcal{U}_\varrho = \mathcal{U}_\varrho (I-P) = \mathcal{U}_\varrho \widetilde{T}^{-1} T (I-P) = \mathcal{U}_\varrho \widetilde{T}^{-1} T = (I - S_\varrho)\widetilde{T}^{-1} T.$$

Известно, что сглаживающий для $z \in Z$ сплайн удовлетворяет условию $\frac{1}{\varrho} A^{*-1} T^* T s + A s = z$ ([1], с. 221).
Отсюда $S_\varrho = \widetilde{A}_\varrho^{-1} A$ (оператор $\widetilde{A}_\varrho$ обратим в силу существования и единственности сглаживающего сплайна для каждого

элемента пространства Z). Доказательство завершено.

Замечание. Постановка задачи сглаживания допускает то же обобщение, что и в случае интерполяции (см. [3]).

Лемма 4. Если $Z=\mathbb{R}^m$, то сплайны $s_1^\rho, s_2^\rho, \ldots, s_m^\rho$, где s_i^ρ - сглаживающий сплайн, соответствующий вектору e_i ($e_1, e_2, \ldots, e_m$ - стандартный базис в $\mathbb{R}^m$), $i=\overline{1,m}$, образуют базис пространства $S(T,A)$. При этом сплайн $\tilde{A}_\rho^{-1} z=\sum_{i=1}^m z_i s_i^\rho$ сглаживает вектор $z=(z_1, z_2, \ldots, z_m)\in\mathbb{R}^m$.

Доказательство элементарно и поэтому опускается.

Теперь вывод интегрального представления погрешности сглаживания сплайнами пространства $S(T,A)$ в случае, когда T - оператор дифференцирования, почти дословно повторяет доказательство аналогичного результата для задачи интерполяции (теорема 1 в [3]). Ограничимся формулировкой результата.

Теорема 3. Пусть $X=H^q[a,b]\,(q\in\mathbb{N}), Y=H^0[a,b], Z=\mathbb{R}^m, Tx=x^{(q)}$ для $x\in X$, а оператор $A:X\to Z$ удовлетворяет всем ранее высказанным условиям, и линейно продолжен на $H^r[a,b]$ при некотором $r\in\{1,2,\ldots,q\}$. Если

$$\forall y\in H^{q-r}[a,b]\ \ (AJ_r y)_i=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b y(\tau)(A\varphi_{r-1}(\cdot,\tau))_i\,d\tau,\ i=\overline{1,m},$$

где $(J_r y)(t)=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b y(\tau)\varphi_{r-1}(t,\tau)\,d\tau,\ t\in[a,b],$

то

$$\forall x\in H^r[a,b]\ \ (\mathcal{U}_\rho x)(t)=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b x^{(r)}(\tau)(\mathcal{U}_\rho\varphi_{r-1}(\cdot,\tau))(t)\,d\tau,\ t\in[a,b]$$

(здесь $\varphi_{r-1}(t,\tau)=(t-\tau)^{r-1}\theta(t-\tau),\ t,\tau\in[a,b]$).

Оценка (3) - (5) остается верна и ее доказательство (см. предложение 5 и следствие 5.1 в [3]) полностью сохраняется, если вместо оператора $\mathcal{U}$ рассмотреть $\mathcal{U}_\rho$, а сплайны $s_1, s_2, \ldots, s_m$ канонического базиса заменить на $s_1^\rho, s_2^\rho, \ldots, s_m^\rho$ соответственно. Обозначим так полученные формулы через (3_ρ) - (5_ρ), не переписывая их повторно.

Как известно, параболический сплайн, сглаживающий вектор локальных средних $z=(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ – это функция вида (6) с коэффициентами λ_i, $i=\overline{0,n+1}$, удовлетворяющими (7) и условиям сглаживания

$$\frac{\lambda_i}{\rho} + \frac{1}{h}\int_{t_{i-1}}^{t_i} s(t)\,dt = z_i, \quad i=\overline{1,n+1} \tag{44}$$

([1], с. 231). Так как $\lambda_i = s'(t_{i-1}) - s'(t_i)$, $i=\overline{1,n+1}$, (в силу равенства $s'(t_i) = -\sum_{j=1}^{i}\lambda_j$, $i=\overline{1,n+1}$, устанавливаемого дифференцированием (6)), то (44) можно записать в виде

$$\frac{s'(t_{i-1}) - s'(t_i)}{\rho} + \frac{1}{h}\int_{t_{i-1}}^{t_i} s(t)\,dt = z_i, \quad i=\overline{1,n+1}. \tag{45}$$

Поскольку (6) – (7) эквивалентно (8) – (10), то сплайн, сглаживающий вектор z, однозначно определяется при помощи (8) – (10) и (45).

В случае $\rho \neq \frac{6}{h}$ оценка ошибки сглаживания функций класса $H^1[a,b]$ (теорема 5) проводится по той же схеме, что и в случае интерполяции (теорема 1). Роль последовательности $(\tau_i)_{i\geq 0}$ и функции α здесь играют $(\tau_i^R)_{i\geq 0}$: $\tau_0^R = 0$,

$$\tau_i^R = 2\,\frac{2R + (1+R)\tau_{i-1}^R}{2(1+R) + (2+R)\tau_{i-1}^R} \quad \text{для } i \geq 1, \quad \text{где } R = \frac{3\rho h}{6-\rho h}$$

$\left(R \in]-\infty, -3[\, \cup\,]0; +\infty[;\ \tau_{i-1}^R < \tau_i^R < 2\sqrt{\frac{R}{2+R}},\ i \geq 1\right)$, – и функция $\alpha_R(\tau;\tau) = 1 + \tau\tau + R(1+\frac{1}{2}\tau)\tau^2$, $\tau \in [0,1]$. Доказательства сформулированных далее лемм 5 – 7, теорем 4 – 5 и следствий 4 – 6 отличаются от соответствующих доказательств лемм 1 – 3, теорем 1 – 2 и следствий 1 – 3 лишь тем, что вместо интерполяционных условий используются условия сглаживания (45), а вместо экстремального свойства интерполяционного сплайна – определение сглаживающего. Поэтому за исключением доказательства леммы 5, которое приводится в качестве иллюстрации, они опущены.

Лемма 5. Сплайн s, сглаживающий вектор $z = (0,\dots,0, z_{i+1},\dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, представим на отрезке $[t_{j-1}, t_j]$,

$j=\overline{1,i}$, в виде

$$s(t)=s(t_i)\frac{(-1)^{i-j}}{2^{i-j}}\prod_{k=j+1}^{i}(\tau_k^R(2+R)-2(1+R))\mathscr{L}_R\left(\frac{t_j-t}{h};-\tau_j^R\right). \quad (46)$$

Если $z=(z_1,\dots,z_{i-1},0,\dots,0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, то имеет место представление

$$s(t)=s(t_{i-1})\frac{(-1)^{j-i}}{2^{j-i}}\prod_{k=i-1}^{j-2}(\tau_{n+1-k}^R(2+R)-2(1+R))\mathscr{L}_R\left(\frac{t-t_{j-1}}{h};-\tau_{n+2-j}^R\right), t\in[t_{j-1},t_j], \quad (47)$$
$$j=\overline{i,n+1}.$$

<u>Доказательство</u>. Установим (46) ((47) доказывается аналогично). Предположим, что $s(t_i)=0$, и рассмотрим вспомогательную функцию $x(t)=s(t)\theta(t-t_i)$, $t\in[a,b]$. Так как $x\in H^1[a,b]$, то по определению сглаживающего сплайна

$$\int_a^b s'(t)^2dt+\rho\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{1}{h}\int_{t_{j-1}}^{t_j}s(t)dt-z_j\right)^2\leqslant\int_a^b x'(t)^2dt+\rho\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{1}{h}\int_{t_{j-1}}^{t_j}x(t)dt-z_j\right)^2,\ z_j=0,\ j=\overline{1,i},$$

откуда в силу определения функции x

$$\int_a^{t_i}s'(t)^2dt+\frac{\rho}{h^2}\sum_{j=1}^{i}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}s(t)dt\right)^2\leqslant\int_a^{t_i}x'(t)^2dt+\frac{\rho}{h^2}\sum_{j=1}^{i}\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j}x(t)dt\right)^2=0.$$

Равенство $\int_a^{t_i}s'(t)^2dt=0$ доказывает импликацию $s(t_i)=0\Rightarrow s(t)=0,\ t\in[a,t_i]$, а тем самым и (46) при высказанном предположении.

Далее считаем $s(t_i)\neq0$. Допустим, что $s(t_j)\neq0$ при некотором $j\in\{1,2,\dots,i\}$. В силу (8) представим $s(t)=a_j+b_j(t-t_j)+c_j(t-t_j)^2,\ t\in[t_{j-1},t_j]$. Воспользовавшись условием сглаживания $\frac{s'(t_{j-1})-s'(t_j)}{\rho}+\frac{1}{h}\int_{t_{j-1}}^{t_j}s(t)dt=0$, получим $-\frac{2c_jh}{\rho}+a_j-\frac{1}{2}b_jh+\frac{1}{3}c_jh^2=0$, откуда $c_j=\frac{R}{h^2}(a_j-\frac{1}{2}b_jh)$. Так как $a_j=s(t_j)$ и $b_j=s'(t_j)$, то

$$s(t)=s(t_j)\left[1+d_j\frac{t-t_j}{h}+R(1-\tfrac{1}{2}d_j)\frac{(t-t_j)^2}{h^2}\right],\ t\in[t_{j-1},t_j], \quad (48).$$

где $d_j=\frac{s'(t_j)h}{s(t_j)}$. Из (46) находим

$$s(t_{j-1})=\frac{1}{2}[2(1+R)-d_j(2+R)]s(t_j), \quad (49)$$

$$s'(t_{j-1})=\frac{1}{h}[d_j(1+R)-2R]s(t_j). \quad (50)$$

Легко видеть, что $s(t_{j-1})$ и $s'(t_{j-1})$ не могут одновременно равняться нулю, а значит $s(t_{j-1})\neq 0$. Импликация $s(t_j)\neq 0 \Rightarrow s(t_{j-1})\neq 0,\ j=\overline{1,i}$, в предположении $s(t_i)\neq 0$ гарантирует $s(t_j)\neq 0,\ j=\overline{1,i}$. Из (49) – (50) получаем рекурентное соотношение $d_{j-1}=-2\dfrac{2R-(1+R)d_j}{2(1+R)-(2+R)d_j},\ j=\overline{1,i}$, которое ввиду равенства $d_0=0$ доказывает, что $d_j=\tau_j^R,\ j=\overline{0,i}$. Остается заметить, что в силу (49) $s(t_j)=s(t_{j+1})\dfrac{(-1)}{2}(\tau_{j+1}^R(2+R)-2(1+R))=$

$$=s(t_{j+2})\frac{1}{4}(\tau_{j+2}^R(2+R)-2(1+R))(\tau_{j+1}^R(2+R)-2(1+R))=\ldots=s(t_i)\frac{(-1)^{i-j}}{2^{i-j}}\prod_{k=j+1}^{i}(\tau_k^{\rho}(2+R)-2(1+R)),$$
$$j=\overline{1,i}.$$

Следствие 4.

$$g_i^{\rho}(t)=\begin{cases}1-\dfrac{\tau_{n+1-i}^R}{\tau_i^R+\tau_{n+1-i}^R}\dfrac{(-1)^{i-j}}{2^{i-j}}\prod\limits_{k=j+1}^{i}(\tau_k^R(2+R)-2(1+R))d_R\left(\dfrac{t_j-t}{h};-\tau_j^R\right), t\in[t_{j-1},t_j], j=\overline{1,i},\\[2ex] \dfrac{\tau_i^R}{\tau_i^R+\tau_{n+1-i}^R}\dfrac{(-1)^{j-i-1}}{2^{j-i-1}}\prod\limits_{k=i}^{j-2}(\tau_{n+1-k}^R(2+R)-2(1+R))d_R\left(\dfrac{t-t_{j-1}}{h};-\tau_{n+2-j}^R\right), t\in[t_{j-1},t_j],\\ \qquad j=\overline{i+1,n+1},\ i=\overline{1,n+1}.\end{cases}$$

Следствие 5.

$$S_i^{\rho}(t)=\begin{cases}R\dfrac{2-\tau_{n+2-i}^R}{\tau_{i-1}^R+\tau_{n+2-i}^R}\dfrac{(-1)^{i-j-1}}{2^{i-j-1}}\prod\limits_{k=j+1}^{i-1}(\tau_k^R(2+R)-2(1+R))d_R\left(\dfrac{t_j-t}{h};-\tau_j^R\right), t\in[t_{j-1},t_j], j=\overline{1,i-1},\\[2ex] R\dfrac{2-\tau_{n+2-i}^R}{\tau_{i-1}^R+\tau_{n+2-i}^R}d_R\left(\dfrac{t-t_{i-1}}{h};\tau_{i-1}^R\right)-R\dfrac{(t-t_{i-1})^2}{h^2}=R\dfrac{2-\tau_i^R}{\tau_i^R+\tau_{n+1-i}^R}d_R\left(\dfrac{t_i-t}{h};\tau_{n+1-i}^R\right)-R\dfrac{(t_i-t)^2}{h^2},\\ \qquad t\in[t_{i-1},t_i],\\[2ex] R\dfrac{2-\tau_i^R}{\tau_i^R+\tau_{n+1-i}^R}\dfrac{(-1)^{j-i-1}}{2^{j-i-1}}\prod\limits_{k=i}^{j-2}(\tau_{n+1-k}^R(2+R)-2(1+R))d_R\left(\dfrac{t-t_{j-1}}{h};-\tau_{n+2-j}^R\right), t\in[t_{j-1},t_j],\\ \qquad j=\overline{i+1,n+1},\ i=\overline{1,n+1}.\end{cases}$$

Теорема 4. Сплайн s, сглаживающий вектор локальных средних $z=(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1})$ на отрезке $[t_{i-1},t_i],\ i=\overline{1,n+1}$, представим в виде

$$s(t)=\sum_{j=1}^{i-1}z_jA_{ij}^R d_R\left(\frac{t-t_{i-1}}{h};-\tau_{n+2-i}^R\right)+z_i\left(B_i^R d_R\left(\frac{t-t_{i-1}}{h};\tau_{i-1}^{\rho}\right)-R\frac{(t-t_{i-1})^2}{h^2}\right)+\sum_{j=i+1}^{n+1}z_jC_{ij}^R d_R\left(\frac{t_i-t}{h};-\tau_i^R\right),$$

где

$$A_{ij}^R=R\frac{2-\tau_j^R}{\tau_j^R+\tau_{n+1-j}^R}\frac{(-1)^{i-j-1}}{2^{i-j-1}}\prod_{k=j}^{i-2}(\tau_{n+1-k}^R(2+R)-2(1+R)),\ j=\overline{1,i-1},$$

$$B_i^R=R\frac{2-\tau_{n+2-i}^R}{\tau_{i-1}^R+\tau_{n+2-i}^R},$$

$$C_{ij}^R=R\frac{2-\tau_{n+2-j}^R}{\tau_{j-1}^R+\tau_{n+2-j}^R}\frac{(-1)^{j-i-1}}{2^{j-i-1}}\prod_{k=i+1}^{j-1}(\tau_k^R(2+R)-2(1+R)),\ j=\overline{i+1,n+1}.$$

Лемма 6.

$$(2R+1)\, s_1^{\rho}(t) - s_2^{\rho}(t) = 0,\ t \in [t_2, b];$$

$$s_{i-1}^{\rho}(t) - 2(R+1)\, s_i^{\rho}(t) + s_{i+1}^{\rho}(t) = 0,\ t \in [a, t_{i-2}] \cup [t_{i+1}, b],\ i = \overline{2,n};$$

$$s_n^{\rho}(t) - (2R+1)\, s_{n+1}^{\rho}(t) = 0,\ t \in [a, t_{n-1}].$$

Следствие 6.

$$\sum_{j=1}^{i} |s_j^{\rho}(t)| = \begin{cases} \dfrac{1}{2R}\left((2R+1)|s_i^{\rho}(t)| - |s_{i-1}^{\rho}(t)|\right), & \rho < \frac{6}{h}, \\ \dfrac{1}{2(R+2)}\left((2R+3)|s_i^{\rho}(t)| + |s_{i-1}^{\rho}(t)| + 2|s_1^{\rho}(t)|\right), & \rho > \frac{6}{h}, \end{cases} \quad t \geq t_i,\ i = \overline{2, n+1},$$

$$\sum_{j=i}^{n+1} |s_j^{\rho}(t)| = \begin{cases} \dfrac{1}{2R}\left((2R+1)|s_i^{\rho}(t)| - |s_{i+1}^{\rho}(t)|\right), & \rho < \frac{6}{h}, \\ \dfrac{1}{2(R+2)}\left((2R+3)|s_i^{\rho}(t)| + |s_{i+1}^{\rho}(t)| + 2|s_{n+1}^{\rho}(t)|\right), & \rho > \frac{6}{h}, \end{cases} \quad t \leq t_{i-1},\ i = \overline{1, n}.$$

Лемма 7. Функции $A_i^{\infty}, B_i^{\infty}, C_i^{\infty}$, участвующие в ($3_\rho$), выражаются через τ_j^R, $j = \overline{0, n+1}$, следующим образом

$$A_i^{\infty}(t) = \mathcal{A}_i^{\infty} \left|\alpha_R\left(\frac{t - t_{i-1}}{h}; -\tau_{n+2-i}^R\right)\right|,$$

$$B_i^{\infty}(t) = \mathcal{B}^{\infty}\left(\frac{t - t_{i-1}}{h}; \tau_{n+2-i}^R, \tau_{i-1}^R\right) + \mathcal{B}^{\infty}\left(\frac{t_i - t}{h}; \tau_i^R, \tau_{n+1-i}^R\right),$$

$$C_i^{\infty}(t) = \mathcal{C}_i^{\infty} \left|\alpha_R\left(\frac{t_i - t}{h}; -\tau_i^R\right)\right|,$$

где

$$\mathcal{A}_i^{\infty} = \begin{cases} R\dfrac{2 - \tau_{i-1}^R}{\tau_{i-1}^R + \tau_{n+2-i}^R} \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{\tau_j^R(2+R) - 2R}{R(2 - \tau_j^R)} \prod_{k=j}^{i-2} \dfrac{2 - \tau_k^R}{2 + \tau_k^R}, & \rho < \frac{6}{h}, \\ R\dfrac{2 - \tau_{i-1}^R}{\tau_{i-1}^R + \tau_{n+2-i}^R} \displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} \dfrac{(\tau_j^R(1+R) - 2R)^2 + (\tau_j^R)^2}{R^2(2 - \tau_j^R)^2} \prod_{k=j}^{i-2} \dfrac{\tau_k^R - 2}{\tau_k^R + 2}, & \rho > \frac{6}{h}, \end{cases}$$

$$\mathcal{C}_i^{\infty} = \begin{cases} R\dfrac{2 - \tau_{n+1-i}^R}{\tau_i^R + \tau_{n+1-i}^R} \displaystyle\sum_{j=i}^{n} \dfrac{\tau_{n+1-j}^R(2+R) - 2R}{R(2 - \tau_{n+1-j}^R)} \prod_{k=i+1}^{j} \dfrac{2 - \tau_{n+1-k}^R}{2 + \tau_{n+1-k}^R}, & \rho < \frac{6}{h}, \\ R\dfrac{2 - \tau_{n+1-i}^R}{\tau_i^R + \tau_{n+1-i}^R} \displaystyle\sum_{j=i}^{n} \dfrac{(\tau_{n+1-j}^R(1+R) - 2R)^2 + (\tau_{n+1-j}^R)^2}{R^2(2 - \tau_{n+1-j}^R)^2} \prod_{k=i+1}^{j} \dfrac{\tau_{n+1-k}^R - 2}{\tau_{n+1-k}^R + 2}, & \rho > \frac{6}{h}, \end{cases}$$

$$\mathcal{B}^{\infty}(\tau; \eta, \tilde{\eta}) = 2\frac{\tilde{\eta}}{\eta + \tilde{\eta}}\alpha_R(\tau; -\eta)\tau + R\frac{2 - \eta}{\eta + \tilde{\eta}}\alpha_R(\tau; \tilde{\eta})\tau^2 - R\tau^4 +$$

$$+ 2\frac{\tilde{\eta}^2 \alpha_R^2(\tau; -\eta)}{R(\eta + \tilde{\eta})((2 - \eta)\alpha_R(\tau; \tilde{\eta}) - (\eta + \tilde{\eta})\tau^2)}\,\theta(\tau - \tau_R^*(-\eta))\,\theta(\rho h - 6)$$

(здесь $\tau_R^*(\eta) = -\dfrac{1}{R(2+\eta)}\left(\eta + \sqrt{\eta^2 - 2R(\eta+2)}\right)$ — ноль функции $\alpha_R(\cdot; \eta)$).

Теорема 5. Для ошибки $\mathcal{U}_\rho x$ сглаживания функции $x \in MH^1_\infty[a,b]$ при помощи параболических сплайнов для локальных средних имеет место оценка

$$\sup_{x\in MH^1_\infty[a,b]} \max_{t\in[t_{i-1},t_i]} |(\mathcal{U}_\rho x)(t)| = \frac{1}{2}K_i(R)Mh, \quad i=\overline{1,n+1},$$

где в случае $h\rho<6$

$$1+\frac{1}{R+1} \le K_1(R), K_{n+1}(R) \le \sqrt{\frac{R+2}{R}} \le \sqrt{\frac{6}{\rho h}}; \quad 1+2\frac{R+1}{4(R+1)^2-1} \le K_2(R), K_n(R) \le \sqrt{\frac{R+2}{R}}\,\frac{2R+1}{R+1+\sqrt{R(R+2)}} \le \sqrt{\frac{6}{\rho h}},$$

$$1+4\frac{(R+1)\sqrt{R(R+2)}}{(R+1+\sqrt{R(R+2)})^3} \le K_i(R) \le \sqrt{\frac{R+2}{R}}\,\frac{(R+1)(6(R+1)^2-5)+R(2(R+1)^2-1)+2(R+1)\sqrt{R(R+2)}}{(R+1+\sqrt{R(R+2)})^3} \le \sqrt{\frac{6}{\rho h}}, \quad 3\le i\le n-1;$$

а в случае $h\rho>6$

$$K_1(R), K_{n+1}(R) \ge -\frac{R+1}{\sqrt{R(R+2)}}\left[1-\left(\sqrt{\frac{R}{R+2}}-1\right)\left(-R-1-\sqrt{R(R+2)}\right)^n\right] \ge 1-(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^n;$$

$$K_1(R), K_{n+1}(R) \le 1+\frac{1}{(R+1)(2R+1)} \le \frac{11}{10}, \ n=1; \quad K_1(R), K_{n+1}(R) \le \frac{2(R+1)^2-1}{4(R+1)^2-1}\,\frac{2R+3}{R+2}\left[1-\frac{R+1}{2R+3}\,\frac{1}{(2(R+1)^2-1)}\left(-\frac{1}{2R+1}\right)^{n-2}\right] \le \frac{7}{5};$$

$$K_2(R), K_n(R) \ge -\frac{(R+1)\sqrt{R(R+2)}}{(R+1-\sqrt{R(R+2)})^2}\left[4+\frac{2}{(R+1)(2R+1)}+\frac{1}{R(R+2)}-\left(2+\frac{1}{R(R+2)}\right)\left(\sqrt{\frac{R}{R+2}}-1\right)\left(-R-1-\sqrt{R(R+2)}\right)^{n-2}\right] \ge$$
$$\ge 8(7\sqrt{3}-12)\left(1-\frac{7}{12}(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^{n-2}\right),$$

$$K_2(R), K_n(R) \le 2\frac{(R+1)^2}{4(R+1)^2-1}\left(1+\frac{1}{(R+1)(2R+1)}\right)+\frac{R+1}{R+2}\,\frac{2(R+1)^2-1}{4(R+1)^2-1}+\frac{1}{R+2}\,\frac{2(R+1)^2-1}{4(R+1)^2-1}\left(-\frac{1}{2R+1}\right)^{n-2} \le \frac{38}{25}, \quad n\ge 2;$$

$$K_i(R) \ge -\frac{R+1}{\sqrt{R(R+2)}}\left[1-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{R}{R+2}}-1\right)\left(\left(-R-1-\sqrt{R(R+2)}\right)^{i-1}+\left(-R-1-\sqrt{R(R+2)}\right)^{n-i^*}\right)\right] \ge 1-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\left((2-\sqrt{3})^{i-1}+(2-\sqrt{3})^{n-i^*}\right),$$

$$K_i(R) \le \frac{(2(R+1)^2-1)(4(R+1)^2-3)}{16(R+1)^4-12(R+1)^2+1}\left\{\frac{2R+3}{R+2}-\frac{1}{R+2}\,\frac{2(R+1)^2-1}{4(R+1)^2-3}+\frac{2}{4(R+1)^2-3}\left(R+2+\frac{4(R+1)^2}{4(R+1)^2-3-2R}\right)-\frac{R+1}{R+2}\,\frac{1}{2(R+1)^2-1}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left[\left(-\frac{1}{2R+1}\right)^{i^*-2}+\left(-\frac{1}{2R+1}\right)^{n-2-i^*}\frac{2(R+1)^2-1}{4(R+1)^2-3}\right]\right\} \le \frac{6076}{3971}, \quad i^*=\max\{i-1, n+1-i\}, \ 3\le i\le n-1, \ n\ge 4.$$

Рассмотрим теперь случай $h\rho=6$.

Лемма 8. $s_i^{6/h}=\widetilde{B}_i, \ i=\overline{1,n+1}$.

Доказательство. Так как задача сглаживания любого вектора интегральных средних имеет единственное решение, то достаточно убедиться, что $\widetilde{B}_i$ при $\rho=\frac{6}{h}$ сглаживает e_i, т.е. $\frac{1}{6}(\widetilde{B}_i'(t_{j-1})-\widetilde{B}_i'(t_j))h+\frac{1}{h}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\widetilde{B}_i(t)dt=\delta_{ij}, \ j=\overline{1,n+1}$, (δ_{ij} - символ Кронекера). Последнее равенство действительно имеет место в силу (38) и того факта, что

$$\widetilde{B}_i'(t_j)=\begin{cases} \frac{1}{h}, & i=j+1\ne 1,\\ -\frac{1}{h}, & i=j\ne n+1,\\ 0, & \text{при всех остальных } i \text{ и } j.\end{cases}$$

Теорема 6. В каждой точке $t\in[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,n+1}$, имеют место оценки

$$\sup_{x\in MH^1_\infty[a,b]} |(\mathcal{U}_{6/h}x)(t)| = \frac{1}{2} M h \beta_i^\infty\left(\frac{t-t_{i-1}}{h}\right),$$

$$\sup_{x\in M^{\top}\!H^1_2[a,b]} |(\mathcal{U}_{6/h}x)(t)| \le M\sqrt{h}\, \beta_i^2\left(\frac{t-t_{i-1}}{h}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\beta_i^\infty(\tau)=\begin{cases}1-\tau^2(1-\tau)^2-2\tau(1-\tau)^2, & i=1,\\ 1-2\tau^2(1-\tau)^2, & i=\overline{2,n},\\ 1-\tau^2(1-\tau)^2-2(1-\tau)\tau^2, & i=n+1,\end{cases}$$

$$\beta_i^2(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{6}(2-5\tau(1-\tau)-2\tau^2(1-\tau)^2-\tau(1-4\tau(1-\tau))), & i=1,\\ \frac{1}{12}(2-9\tau^2(1-\tau)^2), & i=\overline{2,n},\\ \frac{1}{6}(2-5\tau(1-\tau)-2\tau^2(1-\tau)^2-(1-\tau)(1-4\tau(1-\tau))), & i=n+1.\end{cases}$$

Доказательство. Принимая во внимание (36)-(37) и лемму 8, получаем $S_j^{6/h}(t)=0$, $j\in\{1,2,\dots,n+1\}\setminus\{i-1,i,i+1\}$,

$$g_j^{6/h}(t)=\begin{cases}0, & j=\overline{0,i-2},\ i\ge 2,\\ S_{i-1}^{6/h}(t), & j=i-1\ge 1,\\ 1-S_{i+1}^{6/h}(t), & j=i\le n,\\ 1, & j=\overline{i+1,n+1},\ i\le n.\end{cases}$$

Тогда по (5_g) с учетом той же леммы находим

$$A_i^\infty(t)=\widetilde{B}_{i-1}(t),\quad C_i^\infty(t)=\widetilde{B}_{i+1}(t),$$

$$B_i^\infty(t)=2\widetilde{B}_{i-1}(t)\frac{t-t_{i-1}}{h}+\widetilde{B}_i(t)\left(\frac{(t-t_{i-1})^2}{h^2}+\frac{(t_i-t)^2}{h^2}\right)+2\widetilde{B}_{i+1}(t)\frac{t_i-t}{h},$$

$$A_i^2(t)=\frac{1}{3}\widetilde{B}_{i-1}^2(t),\quad C_i^2(t)=\frac{1}{3}\widetilde{B}_{i+1}^2(t),$$

$$B_i^2(t)=\widetilde{B}_{i-1}^2(t)\frac{t-t_{i-1}}{h}+\widetilde{B}_{i-1}(t)\widetilde{B}_i(t)\frac{(t-t_{i-1})^2}{h^2}+\frac{1}{3}\widetilde{B}_i^2(t)\left(\frac{(t-t_{i-1})^3}{h^3}+\frac{(t_i-t)^3}{h^3}\right)+$$
$$+\widetilde{B}_i(t)\widetilde{B}_{i+1}(t)\frac{(t_i-t)^2}{h^2}+\widetilde{B}_{i+1}^2(t)\frac{t_i-t}{h}$$

(здесь следует считать $\tilde{B}_0(t)=\tilde{B}_{n+2}(t)\equiv 0$). Теперь для доказательства равенств $A_i^p(t)+B_i^p(t)+C_i^p(t)=\rho_i^p\left(\frac{t-t_{i-1}}{h}\right)$, $p\in\{2,\infty\}$, осталось подставить в полученные соотношения выражения для $\tilde{B}$ - сплайнов и выполнить несложные преобразования.

Следствие 7.

$$\sup_{x\in MH^1_\infty[a,b]}\ \max_{t\in[t_{i-1},t_i]}|(\mathcal{U}_{6/h}x)(t)|=\frac{1}{2}Mh,\quad i=\overline{1,n+1},$$

$$\sup_{x\in MH^1_2[a,b]}\ \max_{t\in[t_{i-1},t_i]}|(\mathcal{U}_{6/h}x)(t)|\le d_iM\sqrt{h},\quad d_i=\begin{cases}\frac{\sqrt{6}}{6}, & i=\overline{2,n},\\ \frac{\sqrt{3}}{3}, & i\in\{1,n+1\}.\end{cases}$$

Доказательство заключается в исследовании на максимум функций ρ_i^∞, ρ_i^2.

Автор благодарит своего научного руководителя доц. М.А.Гольдмана за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Библиографический список

1. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М., 1980.
2. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, програмы. Новосибирск, 1983.
3. Асмусс С.В. Оценка ошибки сплайн-интерполяции // Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987. С. 15-26.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М., 1980.

Поступила 7 мая 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 519.21

КРИТЕРИЙ ФЕЛЛЕРОВОСТИ ОПЕРАТОРОВ МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

К.И.Беляков

РПИ

Пусть X - метрическое пространство, $\mathfrak{B}$ - борелевская σ - алгебра его подмножеств.

$B(X,\mathfrak{B})$; $C(X)$ - банаховы пространства вещественных ограниченных функций на X с равномерной нормой, соответственно $\mathfrak{B}$-измеримых и непрерывных.

$ba(X,\mathfrak{B})$, $ca(X,\mathfrak{B})$ - банаховы пространства вещественных ограниченных мер на $(X,\mathfrak{B})$ с нормой, равной полной вариации, соответственно конечно аддитивных и счетно-аддитивных.

$rba(X,\mathfrak{B})$, $rca(X,\mathfrak{B})$ - банаховы пространства - подпространства регулярных мер соответственно в $ba(X,\mathfrak{B})$ и $ca(X,\mathfrak{B})$.

Однородные марковские процессы с дискретным временем (МП) на фазовом пространстве $(X,\mathfrak{B})$ задаются переходной функцией (вероятностью) $p(x,E)$, удовлетворяющей обычным условиям. Переходная функция МП определяет пару операторов:

$$T: B(X,\mathfrak{B}) \to B(X,\mathfrak{B}),\ Tf(x)=\int_X f(y)p(x,dy);$$

$$A: ca(X,\mathfrak{B}) \to ca(X,\mathfrak{B}),\ A\mu(E)=\int_X p(x,E)\mu(dx).$$

Оператор A может быть продолжен с сохранением его аналитического вида на пространство конечно аддитивных мер [1]. Для него сохраним то же обозначение

$$A: ba(X,\mathfrak{B}) \to ba(X,\mathfrak{B}),\ A\mu(E)=\int_X p(x,E)\mu(dx).$$

Напомним, что феллеровским называется МП, для которого

$$T: C(X) \to C(X).$$

Для сильно феллеровского МП

$$T: B(X,\mathfrak{B}) \to C(X).$$

Эквивалентное определение сильно феллеровского МП:

$$\forall E\in\mathfrak{B}\ \ p(\cdot,E)\in C(X).$$

Для произвольной меры μ_i обозначим

$$\mathfrak{F}_i = \{E \in \mathfrak{B} \mid \mu_i(X \setminus E) = 0\}.$$

Вывод формулируемого ниже критерия феллеровости основывается на следующих леммах, могущих представлять самостоятельный интерес.

<u>Лемма 1</u>. На метрическом компакте X задан МП. Пусть μ_1, μ_2 - инвариантные конечно аддитивные меры ($\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_1, \mu_2 \geq 0$; $\|\mu_i\| = 1$) такие, что $\forall E_1 \in \mathfrak{F}_1$, $E_2 \in \mathfrak{F}_2$ выполняется $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \neq \phi$.

Тогда

$$A = \bigcap_{\substack{E_1 \in \mathfrak{F}_1 \\ E_2 \in \mathfrak{F}_2}} (\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) \neq \phi.$$

<u>Доказательство</u>. Предположим, что $A = \phi$. Тогда для любого $x \in X$ существуют $E_{1(x)} \in \mathfrak{F}_1$, $E_{2(x)} \in \mathfrak{F}_2$ и открытая окрестность $O_{(x)}$ точки x такие, что

$$(\bar{E}_{1(x)} \cap \bar{E}_{2(x)}) \cap O_{(x)} = \phi.$$

Множества $O_{(x)}$ образуют открытое покрытие X . Поскольку X - компакт, мы можем выбрать конечную систему множеств $O_i = O_{(x_i)}$, $i = 1, \dots, k$, которые покроют все X . При этом каждому $x \in \{x_1, \dots, x_k\}$ соответствуют свои $E_{1i} \in \mathfrak{F}_1$, $E_{2i} \in \mathfrak{F}_2$ такие, что

$$(\bar{E}_{1i} \cap \bar{E}_{2i}) \cap O_i = \phi, \quad i = 1, \dots, k.$$

Тогда стандартным методом проверяется, что

$$\phi = \bigcup_{i=1}^{k} [(\bar{E}_{1i} \cap \bar{E}_{2i}) \cap O_i] \supset [\bigcap_{i=1}^{k} (\bar{E}_{1i} \cap \bar{E}_{2i})] \cap [\bigcup_{i=1}^{k} O_i].$$

Учитывая, что $[\bigcup_{i=1}^{k} O_i] = X$, имеем

$$\phi = \bigcap_{i=1}^{k} (\bar{E}_{1i} \cap \bar{E}_{2i}) = (\bigcap_{i=1}^{k} \bar{E}_{1i}) \cap (\bigcap_{i=1}^{k} \bar{E}_{2i}) \supseteq \overline{(\bigcap_{i=1}^{k} E_{1i})} \cap \overline{(\bigcap_{i=1}^{k} E_{2i})}.$$

С другой стороны очевидно, что для любых конечных наборов $\{E_i\} \in \mathfrak{F}_1$, $\{E_j\} \in \mathfrak{F}_2$

$$\bigcap_{i=1}^{l} E_i \in \mathfrak{F}_1 \text{ и } \bigcap_{j=1}^{m} E_j \in \mathfrak{F}_2.$$

Следовательно, по условию $\overline{(\bigcap_{i=1}^{k} E_{1i})} \cap \overline{(\bigcap_{i=1}^{k} E_{2i})} \neq \phi$.

Лемма доказана.

<u>Лемма 2</u>. Пусть в условиях Леммы 1 μ_1 и μ_2 сингулярны. Тогда существуют $E_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $E_2 \in \mathfrak{F}_2$ такие, что $p(\cdot, E_1)$ и $p(\cdot, E_2)$ разрывны в каждой точке множества A ,

определенного в Лемме 1.

Доказательство. По построению множества A любая точка $x_0 \in A$ принадлежит замыканию любых $E_1 \in \mathfrak{F}_1$, $E_2 \in \mathfrak{F}_2$.

Для любых сингулярных конечно аддитивных мер μ_1 и μ_2 можно выбрать $E_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $E_2 \in \mathfrak{F}_2$ такие, что $E_1 \cap E_2 = \phi$.

Пусть $p(\cdot, E_1)$ непрерывна в точке x_0. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mathcal{U}(x_0)$ – окрестность x_0 такая, что для любого $x \in \mathcal{U}(x_0)$

$$|p(x, E_1) - p(x_0, E_1)| < \varepsilon.$$

С другой стороны, так как μ_1 инвариантна, то

$$0 = \mu_1(X \setminus E_1) = A\mu_1(X \setminus E_1) = \int_X p(x, X \setminus E_1)\mu_1(dx) =$$

$$= \int_{E_1'} p(x, X \setminus E_1)\mu_1(dx) \quad \forall E_1' \in \mathfrak{F}_1.$$

Отсюда видно, что существует хотя бы один x из $E_1' \cap \mathcal{U}(x_0)$ такой, что $p(x, X \setminus E_1) < \varepsilon$.

В самом деле, пусть это не так. То есть для любого x из $E_1' \cap \mathcal{U}(x_0)$ $p(x, X \setminus E_1) > \varepsilon$ тогда из того, что

$$0 = \int_{E_1' \cap \mathcal{U}(x_0)} p(x, X \setminus E_1)\mu_1(dx),$$

следует, что $\mu_1(E_1' \cap \mathcal{U}_{(x_0)}) = 0$. Значит существует $E_1'' \in \mathfrak{F}_1$ такое, что $E_1'' = E_1' \setminus \mathcal{U}_{(x_0)}$, то есть $x_0 \notin \overline{E_1''}$, что противоречит выбору x_0.

Итак, существует $x \in E_1' \cap \mathcal{U}_{(x_0)}$ такой, что

$$p(x, E_1) > 1 - \varepsilon.$$

Тогда

$$p(x_0, E_1) > 1 - 2\varepsilon,$$

и так как ε произвольно, имеем $p(x_0, E_1) = 1$.

Аналогично можно показать, что $p(x_0, E_2) = 1$. Это противоречит тому, что $E_1 \cap E_2 = \phi$. Лемма доказана.

Очевидно, что такой МП не будет сильно феллеровским.

Если инвариантные меры μ_1 и μ_2 счетно аддитивны, то они имеют носители. В этом частном случае утверждение Леммы 2 приобретает более простой вид.

Следствие. На компакте X задан МП. Пусть существуют инвариантные сингулярные счетно аддитивные меры μ_1, μ_2 ($\mu_i > 0$, $\|\mu_i\| = 1$) и носители этих мер E_1 и E_2 соответственно таковы, что $\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 \neq \phi$.

Тогда $p(\cdot, E_1)$ и $p(\cdot, E_2)$ разрывны в каждой точке множества $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2$.

Предположим, что в условиях Леммы 2 выполняется:

$$A : ba(X, \mathfrak{B}) \to rba(X, \mathfrak{B}).$$

Поскольку X - компакт, то $rba(X,\mathfrak{B}) = rca(X,\mathfrak{B})$, тогда μ_1 и μ_2 счетно аддитивны и автоматически выполняются условия следствия. В [2] была анонсирована

Теорема 1. МП, заданный на метрическом пространстве, является сильно феллеровским тогда и только тогда, когда он феллеровский и $A : ba(X,\mathfrak{B}) \to rba(X,\mathfrak{B})$.

После всего вышесказанного нетрудно заметить, что верна

Теорема 2. Пусть на компакте X задан МП такой, что

$$A : ba(X,\mathfrak{B}) \to rba(X,\mathfrak{B}),$$

и при этом существуют сингулярные инвариантные меры μ_1, μ_2 такие, что для носителей этих мер E_1 и E_2 соответственно выполняется $\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \neq \phi$.

Тогда данный МП не является феллеровским.

Библиографический список

1. Жданок А.И. Конечно аддитивные меры и метод расширения в эргодической теории цепей Маркова // Распределения на функциональных структурах. Киев, 1987. С.19-37.
2. Беляков К.И. Сильно феллеровские операторы и конечно аддитивные меры // Эргодическая теория марковских процессов. Всесоюзная школа-семинар: Тезисы докладов. Кызыл, 1987. С. 8.

Поступила 20 декабря 1987 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 515.12

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИДЕАЛОВ КОЛЕЦ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е.М.Вечтомов
Кировский государственный педагогический институт им. В.И.Ленина

Введение

В работе исследуются свойства идеалов типа разложимости в кольцах непрерывных функций. Предварительные результаты, касающиеся разложимости и связи топологических пространств и первичных спектров соответствующих колец функций изложены в §1. §2 содержит основные результаты статьи - теоремы 1-3. Их следствия и пример УР-идеала, не являющегося АУР-идеалом, приведены в заключительном §3. Большинство результатов работы анонсировано в [1].

Дадим необходимые определения и обозначения. Кольца предполагаются ассоциативными. Под идеалом понимается двусторонний идеал. Пусть K - отделимое топологическое кольцо, X - произвольное топологическое пространство. Рассматривается кольцо $C=C(X,K)$ всех K-значных непрерывных функций на пространстве X с поточечно определенными операциями. Нуль-множеством и конуль-множеством множества $A\subseteq C$ назовем множества $\Delta A=\{x\in X \mid f(x)=0$ для всех $f\in A\}$ и $\operatorname{coz} A=X\setminus\Delta A$ соответственно. В частности, если $f\in C$, то $Z(f)=\Delta\{f\}$ и $\operatorname{coz} f=X-Z(f)$ - это нуль-множество и конуль-множество функции f. Если $\Delta\subseteq X$, то определим идеал $M_\Delta=\{f\in C \mid \Delta\subseteq Z(f)\}$ в C. В частности, $M_x=\{f\in C \mid f(x)=0\}$ для $x\in X$. Идеал A кольца C называется z-идеалом, если $Z(f)\subseteq Z(g)$ и $f\in A$ влекут $g\in A$ для любых $f,g\in C$. Идеал P кольца называется первичным, если $JI\subseteq P$ влечет $J\subseteq P$ или $I\subseteq P$ для любых идеалов J и I этого кольца. Пространство $\mathcal{P}=\mathcal{P}(C)$ всех первичных z-идеалов кольца C с топологией Стоуна-Зарисского называется первичным спектром кольца C.

Открытыми (замкнутыми) множествами в $\mathfrak{P}$ являются в точности множества $\mathfrak{P}(\mathfrak{I})=\{P\in\mathfrak{P}\mid \mathfrak{I}\nsubseteq P\}$ $(\mathfrak{Z}(\mathfrak{I})=\{P\in\mathfrak{P}\mid \mathfrak{I}\subseteq P\})$ для произвольных идеалов $\mathfrak{I}$ в C. Замыкание $\bar{\mathfrak{F}}$ множества $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{P}$ определяется как $\bar{\mathfrak{F}}=\{P\in\mathfrak{P}\mid P\supseteq\bigcap\mathfrak{F}\}$, где $\bigcap\mathfrak{F}=\bigcap_{P\in\mathfrak{F}}P$. Главные замкнутые (открытые) множества

$$\mathfrak{Z}(f)=\{P\in\mathfrak{P}\mid f\in P\}\quad(\mathfrak{P}(f)=\{P\in\mathfrak{P}\mid f\notin P\}),\ f\in C,$$

образуют замкнутую (открытую) базу пространства $\mathfrak{P}$. Отделимое пространство X называется K-регулярным, если для любых его замкнутого множества Δ и точки $x\notin\Delta$ существует такая функция $f\in C$, что $\Delta\subseteq Z(f)$ и $f(x)\neq 0$, т.е. нуль-множества функций из C образуют замкнутую базу в X. Правый идеал кольца называется разложимым, если он является прямой суммой двух ненулевых правых идеалов этого кольца. Правый идеал A кольца C называется универсально разложимым (УР-идеалом), если для любого открытого разбиения $\{\Delta_1,\Delta_2\}$ конуль-множества $\operatorname{coz}A$ имеет место разложение $A=(A\cap M_{\Delta_1})\oplus(A\cap M_{\Delta_2})$. Наконец, правый идеал A кольца назовем алгебраически универсально разложимым (АУР-идеалом), если для любых элементов f и g этого кольца $f+g\in A$ и $fg=0$ влекут $f\in A$.

§1. Общие замечания о кольцах непрерывных функций

Для каждого $x\in X$ положим $\varphi(x)=M_x$. Мы хотим, чтобы φ отображало пространство X в первичный спектр $\mathfrak{P}$. Это значит, что z-идеалы M_x, $x\in X$, должны быть первичными. Следовательно, первичным должно быть и кольцо K, поскольку M_x служит ядром гомоморфизма $\pi: C\longrightarrow K$, $\pi(f)=f(x)$ для $f\in C$, индуцирующего изоморфизм колец C/M_x и K [2, лемма 1.1.7]. Это же означает, что для первичного кольца K все идеалы M_x первичны. Напомним, что кольцо называется первичным (полупервичным), если его нулевой идеал 0 является первичным (пересечением первичных идеалов этого кольца). Кольцо C полупервично, ибо $\bigcap_{x\in X}M_x=0$. Отметим, что для известных топологических тел K максимальные идеалы колец C являются первичными $\mathfrak{k}$-идеалами, т.е. элементами $\mathfrak{P}$.

Рассмотрим отображение $\varphi: X \longrightarrow \mathfrak{P}$. Легко видеть, что φ непрерывно и $\varphi(X)$ плотно в $\mathfrak{P}$. Действительно, для любой $f \in C$, в силу

$$\mathfrak{Z}(f) \cap \varphi(X) = \{M_x \mid x \in X \,\&\, f \in M_x\} = \{M_x \mid x \in Z(f)\},$$

имеем: $\varphi^{-1}[\mathfrak{Z}(f) \cap \varphi(X)] = Z(f)$ и $\varphi(X) \subseteq \mathfrak{Z}(f)$ равносильно $f = 0$, т.е. $\mathfrak{Z}(f) = \mathfrak{P}$. Ясно также, что φ - гомеоморфизм в $\mathfrak{P}$ тогда и только тогда, когда X является K-регулярным пространством.

Лемма 1. $\mathfrak{Z}(f) = \overline{\{M_x \mid x \in Z(f)\}}$ для любой $f \in C$.

Доказательство. В самом деле,

$$\overline{\{M_x \mid x \in Z(f)\}} = \{P \in \mathfrak{P} \mid P \supseteq \bigcap_{x \in Z(f)} M_x\} = \{P \in \mathfrak{P} \mid P \supseteq M_{Z(f)}\} =$$

$$= \{P \in \mathfrak{P} \mid f \in P\} = \mathfrak{Z}(f) \text{ ибо } f \in M_{Z(f)}.$$

С каждым пространством X свяжем отделимое пространство τX с тем же кольцом непрерывных функций, что и у X. Для точек $x, y \in X$ положим $x \sim y$, если они не разделяются C, т.е. $f(x) = f(y)$ для любой $f \in C$. Тогда $\sim$ - эквивалентность на X, $\tau: X \longrightarrow X/\!\sim$ - каноническое отображение и $\tau X = X/\!\sim$ - соответствующее фактор-множество. Функции из C фактически определены и на τX и разделяют его точки. На τX определяется слабейшая топология, относительно которой все функции из C непрерывны на τX. Как и в [3, п. 3.9], τ непрерывно и индуцирует изоморфизм колец $C(\tau X, K)$ и C. Отождествим $\tau X \equiv \varphi(X)$ как множества. Тогда для любой $f \in C(\tau X, K)$ $\{M_x \mid x \in Z(f)\} = Z(f)$ и $\overline{Z(f)} = \mathfrak{Z}(f)$ по лемме 1, ибо $x \equiv M_x$ для $x \in X$.

Лемма 2. Для K эквивалентны следующие условия:

1) τX K-регулярно для любого пространства X;

2) τX - подпространство в $\mathfrak{P}$ для любого пространства X;

3) пространство K K-регулярно.

Доказательство. Эквивалентность 1) и 2) доказана выше.

1) $\to$ 3). Тождественное отображение $\tau: K \to \tau K$ непрерывно. Поскольку на K и на τK непрерывны одни и те же K-значные функции, то $\tau \in C(\tau K, K)$. Следовательно, $K = \tau K$ как пространства и, стало быть, K K-регулярно вместе с τK.

3) $\to$ 1). Пусть B - замкнутое множество в τX и $x \in \tau X \setminus B$. Существуют конечное число замкнутых множеств $B_1, \ldots, B_n$ в K и конечное число функций $f_1, \ldots, f_n \in C(\tau X, K)$, таких, что

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(B_i) \not\ni x.$$

В силу K-регулярности K для каждого $i = 1, \ldots, n$ найдется функция $g_i \in C(K, K)$, такая, что $B_i \subseteq Z(g_i) \not\ni f_i(x)$. Положим $h_i = g_i \circ f_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} Z(h_i) \not\ni x$.

Пусть (h_i) - наименьший идеал кольца $C(\tau X, K)$, содержащий h_i. Поскольку $(h_i) \not\subseteq M_x$ для $i = 1, \ldots, n$, то в силу первичности идеала M_x, $(h_1) \cdot \ldots \cdot (h_n) \not\subseteq M_x$. Возьмем произвольную $f \in (h_1) \cdot \ldots \cdot (h_n) \setminus M_x$. Для этой функции имеем $B \subseteq Z(f)$ и $f(x) \neq 0$. Лемма доказана.

<u>Лемма 3</u>. Пусть K - кольцо без делителей нуля и ненулевые множества $A, J, I \subseteq C$ таковы, что $A = J + I$, $0 \in J \cap I$ и $JI = 0$. Тогда $\Delta A = \Delta J \cap \Delta I$, $\Delta J \cup \Delta I = X$, $J = A \cap M_{\Delta_1}$ и $I = A \cap M_{\Delta_2}$, где $\Delta_1 = \Delta J \setminus \Delta A$ и $\Delta_2 = \Delta I \setminus \Delta$ образуют открытое разбиение $\mathrm{co}\,z\,A$.

Доказательство проведено в [4, лемма 11].

<u>Лемма 4</u>. Если топологическое тело K несвязно или K-регулярно и $A = J \oplus I$ для ненулевых правых идеалов A, J, I кольца C, то $JI = 0$ и, следовательно, выполняется заключение леммы 3.

<u>Доказательство</u>. Предположим от противного, что $(fg)(x) \neq 0$ для некоторых $f \in J$, $g \in I$ и $x \in X$. В силу отделимости пространства K существует такое замкнутое множество B в X, что $x \notin B$ и $Z(fg) \subseteq B^\circ$, где B° обозначает внутренность множества B. Если K несвязно, то B можно считать открыто-замкнутым. Если же K K-регулярно, то по лемме 2 пространство τX K-регулярно и его берем в качестве X. В каждом из двух случаев най-

дется такая функция $h \in C$, что $h(x) \neq 0$ и $Z(fg) \subseteq Z(h)^{\circ}$. Следовательно, $Z(f) \subseteq Z(h)^{\circ}$ и $Z(g) \subseteq Z(h)^{\circ}$. Откуда, как и упр. 1Д.1 [3], получаем $h \in fC \cap gC \subseteq \mathfrak{J} \cap I$. Противоречие с $\mathfrak{J} \cap I = 0$, так как $\mathfrak{J} \oplus I$.

§2. Разложимые идеалы и УР-идеалы

Если $A \subseteq C$, то определим идеал $\tilde{A} = \bigcap\limits_{A \subseteq P \in \mathfrak{P}} P = \bigcap \mathfrak{Z}(\mathfrak{J})$.

Теорема 1.[1] Пусть K - отделимое топологическое первичное кольцо и ненулевые идеалы $\mathfrak{J}$ и I кольца C таковы, что $\mathfrak{J} I = 0$. Тогда идеал $\widetilde{\mathfrak{J}+I}$ разложим и $\widetilde{\mathfrak{J}+I} = \tilde{\mathfrak{J}} \oplus \tilde{I}$.

Доказательство. Поскольку кольца C и $C(\tau X, K)$ изоморфны и в силу отождествления $\tau X = \varphi(X)$, считаем: $X = \tau X \subseteq \mathfrak{P}$. Так как $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}+I) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{J}) \cap \mathfrak{Z}(I)$, то $\tilde{\mathfrak{J}} + \tilde{I} \subseteq \widetilde{\mathfrak{J}+I}$. В полупервичном C ($\bigcap \mathfrak{P} = 0$) $\mathfrak{J} I = 0$ равносильно $\mathfrak{Z}(\mathfrak{J}) \cup \mathfrak{Z}(I) = \mathfrak{P}$. Далее

$$\mathfrak{Z}(\tilde{\mathfrak{J}}) = \{P \in \mathfrak{P} \mid P \supseteq \bigcap \mathfrak{Z}(\mathfrak{J})\} = \overline{\mathfrak{Z}(\mathfrak{J})} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{J})$$

и, аналогично, $\mathfrak{Z}(\tilde{I}) = \mathfrak{Z}(I)$. Откуда, в силу полупервичности C, $\tilde{\mathfrak{J}} \cdot \tilde{I} = 0$ и $\tilde{\mathfrak{J}} \cap \tilde{I} = 0$, т.е. $\tilde{\mathfrak{J}} \oplus \tilde{I}$. Пусть теперь $f \in \widetilde{\mathfrak{J}+I}$. Тогда $\mathfrak{P}(f) \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{J}+I) = \mathfrak{P}(\mathfrak{J}) \cup \mathfrak{P}(I)$, причем, $\mathfrak{P}(\mathfrak{J})$ и $\mathfrak{P}(I)$ не пересекаются. Множества $\mathfrak{P}(\mathfrak{J}) \cap X$ и $\mathfrak{P}(I) \cap X$ индуцируют открытое разбиение $\operatorname{coz} f$ в X. Определим $f_1 \in C$, положив

$$f_1 = \begin{cases} f \text{ на } \operatorname{coz} f \cap \mathfrak{P}(\mathfrak{J}), \\ 0 \text{ вне } \operatorname{coz} f \cap \mathfrak{P}(\mathfrak{J}). \end{cases}$$

Пусть $f_2 = f - f_1$. Тогда $\operatorname{coz} f_1 \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{J})$, $\operatorname{coz} f_2 \subseteq \mathfrak{P}(I)$ и $f_1 C f_2 = 0$. Покажем, что $f_1 \in \tilde{\mathfrak{J}}$. Для этого возьмем произвольный $P \in \mathfrak{P}$, содержащий $\mathfrak{J}$, и докажем, что $f_1 \in P$. По лемме 1.1.7 [2] $f_1 \in P$ или $f_2 \in P$. Если $f \in P$, то и $f_1 \in P$. Поэтому допустим, что $f \notin P$. Тогда $P \in \mathfrak{P}(f) \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{J}) \cup \mathfrak{P}(I)$, но $P \notin \mathfrak{P}(\mathfrak{J})$. Следовательно, $P \in \mathfrak{P}(I)$. На основании определения f_1

---

[1] Заметим, что в теореме 1 в качестве $\mathfrak{P}$ можно взять пространство всех первичных идеалов кольца C, а в ряде случаев - и максимальный спектр кольца C. Это касается и теоремы 3.

$\mathfrak{k}(I)\cup\mathfrak{k}(f_1)\supseteq\overline{\mathrm{coz}\, f_1}\cup\overline{Z(f_1)}=\overline{\mathrm{coz}\, f_1\cup Z(f_1)}=\overline{X}_{\mathfrak{P}}=\mathfrak{P}$.
Следовательно, $\mathfrak{P}(J)\subseteq\mathfrak{k}(f_1)$ и $P\in\mathfrak{k}(f_1)$, т.е. $f_1\in P$. Таким образом, $f_1\in\tilde{J}$. Аналогично, $f_2\in\tilde{I}$. Тем самым доказано включение $\widetilde{J+I}\subseteq\tilde{J}\oplus\tilde{I}$, чем и завершается доказательство теоремы 1.

Пусть $\{\Delta_1,\Delta_2\}$ – открытое разбиение конуль-множества $\mathrm{coz}\, A$ множества $A\subseteq C$. Для каждой функции $f\in M_{\Delta A}$ положим

$$f^{(1)}=\begin{cases}0 \text{ на } \Delta_1\cup Z(f),\\ f \text{ на } \Delta_2,\end{cases}$$

и $f^{(2)}=f-f^{(1)}$. Функция $f^{(1)}$ непрерывна на замкнутых множествах $\Delta_1\cup Z(f)$ и $\Delta_2\cup Z(f)$, значит, она непрерывна и на их объединении X. Функции $f^{(1)}, f^{(2)}\in C$ таковы, что $\mathrm{coz}\, f^{(1)}\cap\mathrm{coz}\, f^{(2)}=\emptyset$ и $f^{(1)}\cdot f^{(2)}=0$.

Предложение 1. Правый идеал A кольца C разложим (является УР-идеалом) тогда и только тогда, когда для некоторого (для любого) открытого разбиения $\{\Delta_1,\Delta_2\}$ его конуль-множества имеем: $f^{(1)}\in A$ для каждой функции $f\in A$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость. Пусть $A\subseteq(A\cap M_{\Delta_1})+(A\cap M_{\Delta_2})$ и $f\in A$. Тогда $f=f_1+f_2$, где $f_1\in A\cap M_{\Delta_1}$ и $f_2\in A\cap M_{\Delta_2}$. Поэтому $f_1=0$ на $\Delta_1\cup\Delta A$ и $f_1=f$ на $\Delta_2\cup\Delta A$. Следовательно, $f^{(1)}=f_1\in A$.

Заметим, что в предложении 1 и теореме 2 можно считать K произвольным топологическим кольцом.

Теорема 2. Если правый идеал A кольца C имеет вид $A=A\cdot M_{\Delta A}$, то A – УР-идеал.

Доказательство. Пусть дано открытое разбиение $\{\Delta_1,\Delta_2\}$ конуль-множества $\mathrm{coz}\, A$ правого идеала A вида $A=A\cdot M_{\Delta A}$ кольца C. Возьмем $f\in A$. По предложению 1 достаточно показать, что $f^{(1)}\in A$. По условию $f=\sum_{i=1}^{n} f_i g_i$ для некоторых $f_1,\dots,f_n\in A$ и $g_1,\dots,g_n\in M_{\Delta A}$. Рассмотрим функцию $h=\sum_{i=1}^{n} f_i g_i^{(1)}\in A$. Если $x\in\Delta_1$, то все $g_i^{(1)}(x)=0$. Откуда $\Delta_1\subseteq Z(h)$. Если же $x\in\Delta_2$, то все $g_i^{(1)}(x)=g_i(x)$. Поэтому $h=f$ на Δ_2. Итак, $f^{(1)}=h\in A$.

Пусть теперь K содержит $1\neq 0$. Разбиение $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ в пространстве X называется K-отделимым, если существует такая функция $g\in C$, что $g(\Delta_1)=\{0\}$ и $g(\Delta_2)=\{1\}$.

Предложение 2. Если конуль-множество правого идеала A кольца C обладает K-отделимым открытым разбиением $\{\Delta_1, \Delta_2\}$, то A разложим и $A=(A\cap M_{\Delta_1})\oplus(A\cap M_{\Delta_2})$.

Доказательство. Выберем по условию такую функцию $g\in C$, что $\Delta_1\subseteq Z(g)$ и $g(\Delta_2)=\{1\}$. Если $f\in A$, то $fg\in A\cap M_{\Delta_1}$ и $f(1-g)\in A\cap M_{\Delta_2}$, откуда $f=fg+f(1-g)\in(A\cap M_{\Delta_1})+(A\cap M_{\Delta_2})$.

Предложение 3. Пусть K - отделимое топологическое кольцо с единицей $1\neq 0$ и без делителей нуля и $f\in C$. Универсальная разложимость главного правого идеала fC кольца C эквивалентна тому, что любое открытое разбиение $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ конуль-множества $\mathrm{coz}\, f$ K-отделимо.

Доказательство. Достаточность вытекает из предложения 2. Обратно, пусть дано открытое разбиение $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ подпространства $\mathrm{coz}\, f$, а правый идеал fC является УР-идеалом. По предложению 1 $f^{(1)}\in fC$, т.е. $f^{(1)}=fg$ для некоторой функции $g\in C$. Поскольку K не имеет делителей нуля, то $g=0$ на Δ_1 и $g=1$ на Δ_2, т.е. функция g K-отделяет Δ_1 и Δ_2.

Предложение 4. Пусть K - отделимое топологическое целостное кольцо (т.е. коммутативное, без делителей нуля и с $1\neq 0$) или топологическое тело, которое несвязно или K-регулярно. Разложимость главного правого идеала fC кольца C равносильна K-отделимости некоторого открытого разбиения $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ конуль-множества $\mathrm{coz}\, f$.

Доказательство. Если правый идеал кольца $C=C(X,K)$ разложим, то в силу лемм 3 и 4 его конуль-множество несвязно, т.е. обладает открытым двухэлементным разбиением. Остается воспользоваться доказательством предложения 3.

Теорема 3. Пусть K - отделимое топологическое кольцо без делителей нуля и с $1\neq 0$, X - произвольное топологическое пространство. Тогда эквивалентны следующие утверждения:

1) все правые (главные правые) идеалы кольца C являются АУР-идеалами;

2) все правые (главные правые) идеалы в C суть УР-идеалы;

3) K-отделимы непересекающиеся конуль-множества любых двух ненулевых функций из C;

4) $\mathcal{P}(f)\cap\mathcal{P}(g)=\phi$ влечет $\overline{\mathcal{P}(f)}\cap\overline{\mathcal{P}(g)}=\phi$ для любых $f,g\in C$.

Доказательство. Поскольку по предложению 1 всякий АУР-идеал является УР-идеалом, то 1) $\longrightarrow$ 2).

2) $\longrightarrow$ 3). Пусть ненулевые функции $f,g\in C$ таковы, что $\mathrm{coz}\,f$ и $\mathrm{coz}\,g$ не пересекаются, т.е. $fg=0$. Тогда открытое разбиение $\{\mathrm{coz}\,f,\mathrm{coz}\,g\}$ конуль-множества главного правого идеала $(f+g)C$, являющегося по условию УР-идеалом, K-отделимо по предложению 3.

3) $\longrightarrow$ 4). Пусть ненулевые функции $f,g\in C$ таковы, что $\mathcal{P}(f)$ и $\mathcal{P}(g)$ не пересекаются. Это значит, что $fg\in\cap\mathcal{P}=0$, т.е. $fg=0$. Но тогда $\mathrm{coz}\,f\cap\mathrm{coz}\,g=\phi$ и по условию найдется такая $h\in C$, что $h(\mathrm{coz}\,f)=\{0\}$ и $h(\mathrm{coz}\,g)=\{1\}$, т.е. $fh=0$ и $gh=g$. Откуда $fCh=0$ и $gC(1-h)=0$. Если $P\in\mathcal{P}(f)$, т.е. $f\notin P$, то по лемме 1.1.7 [2] $h\in P$, т.е. $P\in Z(h)$. Следовательно, $\mathcal{P}(f)\subseteq Z(h)$. Аналогично, $\mathcal{P}(g)\subseteq Z(1-h)$. Множества $Z(h)$ и $Z(1-h)$ замкнуты в $\mathcal{P}$ и не пересекаются.

4) $\longrightarrow$ 1). Пусть A - произвольный правый идеал кольца C и функции $f,g\in C$ таковы, что $f+g\in A$ и $fg=0$. Тогда $\mathcal{P}(f)\cap\mathcal{P}(g)=\phi$, как и выше. По условию $\overline{\mathcal{P}(f)}\cap\overline{\mathcal{P}(g)}=\phi$. Возьмем такие идеалы J и I кольца C, чтобы $\overline{\mathcal{P}(f)}=Z(J)$ и $\overline{\mathcal{P}(g)}=Z(I)$. Поскольку $Z(J+I)=$ $=Z(J)\cap Z(I)=\phi$, то $J+I=C$, т.е. $h+e=1$ для некоторых $h\in J$ и $e\in I$. Далее, $\mathcal{P}(fJ)=\mathcal{P}(f)\cap\mathcal{P}(J)=\phi$. Откуда $fJ=0$. Аналогично, $gI=0$. В частности, $fh=0$ и $ge=0$. Следовательно, $f=f(h+e)=fe=(f+g)e\in A$.

Отметим, что имеется целый ряд других условий, эквивалентных утверждениям теоремы 3 (см., например, [5, теорема 4]).

§3. Примечания

В следствиях 1-4 предполагается, что K - топологическое целостное кольцо, K - регулярное топологическое тело или несвязное топологическое тело, а в следствиях 5 и 7 K - произвольное топологическое кольцо.

Следствие 1. Конуль-множество любого разложимого правого идеала кольца C несвязно. Значит, УР-идеал в C разложим тогда и только тогда, когда его конуль-множество несвязно.

Следствие 2. Семейство правых идеалов кольца C образует прямую сумму тогда и только тогда, когда их конуль-множества попарно не пересекаются.

Следствие 3. K-регулярное пространство X удовлетворяет условию Суслина тогда и только тогда, когда кольцо C не содержит несчетных прямых сумм своих ненулевых правых идеалов.

Следствия 1-3 вытекают из лемм 3 и 4.

Следствие 4. Если X связно и $f \in C$ такова, что $Z(f)^0 = \phi$, то главный правый идеал fC кольца C не разложим.

Вытекает из предложения 4.

Следствие 5. Любой нефиксированный ($\Delta A = \phi$) или идемпотентный ($A^2 = A$) правый идеал A кольца C является УР-идеалом.

Вытекает из теоремы 2.

Следствие 6. Пусть K - локально компактное тело. Тогда каждое из утверждений 1) - 4) теоремы 3 эквивалентно тому, что X является KF-пространством [6, теорема 1 и замечание 1].

Следствие 7. Любой правый АУР-идеал кольца C есть УР-идеал.

Вытекает из предложения 1.

В заключение приведем пример выпуклого неразложимого УР-идеала, не являющегося АУР-идеалом, в кольце $C]0,1]$ всех непрерывных действительнозначных функций на полуинтервале $]0,1]$.

Пример. Для каждого натурального числа n определим функцию $f_n \in C(0,1]$ по формуле

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^k (x - 1/2^{k-1}), & \text{если } 3/2^{k+1} \le x \le 3/2^k \text{ и } k > 2n+1, \\ x - 1/2^{2n-1}, & \text{если } 3/2^{2n+1} \le x \le 1. \end{cases}$$

Рассмотрим счетно-порожденный нефиксированный идеал $A = (f_1, \ldots, f_n, \ldots)$ кольца $C(0,1]$, являющийся объединением возрастающей цепочки идеалов (f_n). По следствиям 1 и 5 A - неразложимый УР-идеал. Нетрудно показать, что идеалы (f_n), а вместе с ними и A, выпуклы (о выпуклых идеалах в $C(X)$ см. [3, глава 5]). Докажем, что A не является АУР-идеалом. Предположим от противного, что A - АУР-идеал. Положим $f = f_1$, $N(f) = \{x \mid f(x) < 0\}$ и $P(f) = \{x \mid f(x) > 0\}$. Для открытого разбиения $\{N(f), P(f)\}$ $\operatorname{coz} f$ возьмем соответствующие функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$. Тогда $|f| = f^{(1)} - f^{(2)} \in A$ в силу предложения 1. Поэтому $|f| = f_k g$ для некоторых натурального k и функции $g \in C(0,1]$. Поскольку $f = f_1 = f_k$ на $(0, 3/2^{2k}]$ и принимают здесь значения разных знаков и $Z(f_k) = \{1/2^m \mid m \geq 2k-1\}$, то функция g разрывна. Получено противоречие.

Библиографический список

1. Вечтомов Е.М. Универсально разложимые идеалы в кольцах непрерывных функций // У Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям. Кишинев, 1985. С. 54-56.
2. Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. Радикалы алгебр и структурная теория. М., 1979.
3. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. N.Y., Springer-Verlag, 1976.
4. Вечтомов Е.М. О кольцах непрерывных функций со значениями в локально бикомпактных полях // Абелевы группы и модули. Вып. 4. Томск, 1986. С. 20-35.
5. Вечтомов Е.М. К теории колец непрерывных функций. II. Тобольск,1985. 27с. Рукопись деп.в ВИНИТИ 17.10.85, № 7351 - В 85.
6. Вечтомов Е.М. Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F-пространства// Матем.заметки. 1983. Т.34. №3. С.321.

Поступила 29 января 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 515.1

ЗАДАЧА О ТРЕХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ УГЛА

М.А.Гольдман
ЛГУ им. П.Стучки

В статье рассматривается задача об отыскании в пространстве $\mathbb{R}^3$ плоского угла, три ортогональные проекции которого на координатные плоскости $x_1 0 x_2$, $x_1 0 x_3$ и $x_2 0 x_3$ имеют наперед заданные значения. Эта задача сводится к решению системы трех уравнений относительно координат направляющих векторов сторон искомого угла.

Введем несколько обозначений, необходимых для аналитической формулировки поставленной задачи. Пусть $\vec{u}=\{u_1,u_2,u_3\}$ и $\vec{v}=\{v_1,v_2,v_3\}$ - какие-либо два вектора. Положим $\vec{u}_{12}=\{u_1,u_2,0\}$, $\vec{u}_{13}=\{u_1,0,u_3\}$, $\vec{u}_{23}=\{0,u_2,u_3\}$ и $\vec{v}_{12}=\{v_1,v_2,0\}$, $\vec{v}_{13}=\{v_1,0,v_3\}$, $\vec{v}_{23}=\{0,v_2,v_3\}$. Вектор $\vec{u}_{ij}$ ($\vec{v}_{ij}$) - это проекция вектора $\vec{u}$ (соответственно, $\vec{v}$) на координатную плоскость $x_i 0 x_j$. Пара векторов $\vec{u}_{ij}$, $\vec{v}_{ij}$ определяет угол, если оба они ненулевые. Для того чтобы все шесть векторов $\vec{u}_{ij}$, $\vec{v}_{ij}$ $((i,j)=(1,2),(1,3),(2,3))$ были ненулевыми необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

каждый из векторов $\vec{u}$, $\vec{v}$ имеет не более одной равной нулю координаты. (1)

Пользуясь введенными обозначениями, сформулируем рассматриваемую задачу следующим образом. Пусть заданы три числа $c_{12}, c_{13}, c_{23} \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$; требуется найти два вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, удовлетворяющие условию (1), для которых $\operatorname{tg}\varphi_{ij}=c_{ij}$, где φ_{ij} - угол между векторами $\vec{u}_{ij}$ и $\vec{v}_{ij}$. Так как $\cos\varphi_{ij}=(u_i v_i+u_j v_j)|\vec{u}_{ij}|^{-1}|\vec{v}_{ij}|^{-1}$, $\sin\varphi_{ij}=|u_i v_j-u_j v_i||\vec{u}_{ij}|^{-1}|\vec{v}_{ij}|^{-1}$, то для отыскания $\vec{u}$ и $\vec{v}$ имеем следующую систему уравнений:

$$|u_i v_j-u_j v_i|=c_{ij}(u_i v_i+u_j v_j) \quad ((i,j)=(1,2),(1,3),(2,3)), \qquad (2)$$

подчиненную условию (1).

Заметим, что в случае, когда $c_{ij}=\infty$ ($\varphi_{ij}=\frac{\pi}{2}$), соответствующее уравнение системы (2) превращается в уравнение $u_i v_i + u_j v_j = 0$.

Задача (2)-(1) не всегда разрешима, например, если $C_{12} = C_{13} = C_{23} = \infty$ (т.е. если $\varphi_{12} = \varphi_{13} = \varphi_{23} = \frac{\pi}{2}$). Действительно, будь она при этих данных разрешима, мы имели бы для некоторых векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$, удовлетворяющих условию (1), равенства $u_i v_i + u_j v_j = 0$ ($i,j = \overline{1,3}$; $i<j$), из которых следует, что $u_1 v_1 = u_2 v_2 = u_3 v_3 = 0$. Отсюда легко заключить, что две координаты хотя бы одного вектора, $\vec{u}$ или $\vec{v}$, равны нулю. Но это противоречит условию (1).

Система (2), в уравнения которой входят абсолютные значения величин $u_i v_j - u_j v_i$, может быть заменена восемью системами вида

$$\pm(u_i v_j - u_j v_i) = C_{ij}(u_i v_i + u_j v_j) \qquad (i,j = \overline{1,3};\ i<j) \qquad (3)$$

при условиях $C_{ij}(u_i v_i + u_j v_j) \geq 0 \qquad (i,j = \overline{1,3};\ i<j)$. $\qquad (3')$

Поскольку все эти восемь систем однотипны, остановимся на рассмотрении одной из них, а именно на системе

$$\begin{cases} u_2 v_1 - u_1 v_2 = C_{12}(u_1 v_1 + u_2 v_2), \\ u_1 v_3 - u_3 v_1 = C_{13}(u_1 v_1 + u_3 v_3), \\ u_3 v_2 - u_2 v_3 = C_{23}(u_2 v_2 + u_3 v_3) \end{cases} \qquad (4)$$

при условиях (3'). Она соответствует выбору в (3) знаков −, +, −.

Легко видеть, что если $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3)$ – некоторое решение задачи (4)-(3')-(1) (т.е. решение системы (4), удовлетворяющее условиям (3) и (1)), то ее решением будет также $(\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3, \beta v_1, \beta v_2, \beta v_3)$, где α и β – какие-либо положительные числа. Это позволяет вместо задачи (4)-(3')-(1) рассмотреть двенадцать более простых задач, каждая относительно лишь некоторых четырех из шести неизвестных. Например, положив в (4) и (3') $u_1 = \pm 1$, $v_1 = \pm 1$, получим четыре такие задачи относительно неизвестных u_2, v_2, u_3, v_3. Остальные восемь задач получатся, если поступить таким же образом с другими парами неизвестных (u_2, v_2) и (u_3, v_3). Остановимся на рассмотрении задачи, в которую превращается (4)-(3')-(1) при $u_1 = v_1 = 1$:

$$\begin{cases} u_2 - \vartheta_2 = c_{12}(1 + u_2\vartheta_2), \\ \vartheta_3 - u_3 = c_{13}(1 + u_3\vartheta_3), \\ u_3\vartheta_2 - u_2\vartheta_3 = c_{23}(u_2\vartheta_2 + u_3\vartheta_3). \end{cases}$$

$$u_2 - \vartheta_2 \geqslant 0,\ \vartheta_3 - u_3 \geqslant 0,\ u_3\vartheta_2 - u_2\vartheta_3 \geqslant 0,$$

$$(u_2 \neq 0 \vee u_3 \neq 0) \,\&\, (\vartheta_2 \neq 0 \vee \vartheta_3 \neq 0).$$

Для упрощения дальнейших записей введем следующие обозначения: $k = c_{12}$, $l = c_{13}$, $m = c_{23}$, $\lambda = u_2$, $\mu = u_3$, $\xi = \vartheta_2$, $\eta = \vartheta_3$. В этих обозначениях наша задача приобретает вид:

$$\begin{cases} \lambda - \xi = k(1 + \lambda\xi), \\ \eta - \mu = l(1 + \mu\eta), \\ \mu\xi - \lambda\eta = m(\lambda\xi + \mu\eta), \end{cases} \tag{5}$$

$$\lambda - \xi \geqslant 0,\ \eta - \mu \geqslant 0,\ \mu\xi - \lambda\eta \geqslant 0, \tag{5'}$$

$$(\lambda \neq 0 \vee \mu \neq 0) \,\&\, (\xi \neq 0 \vee \eta \neq 0). \tag{1}$$

Система (5) является неопределенной (в ней три уравнения и четыре неизвестных). Если потребовать, чтобы искомые вектора $\vec{u} = \{1, \lambda, \mu\}$ и $\vec{\vartheta} = \{1, \xi, \eta\}$ находились в заданной плоскости $\mathfrak{A}x_1 + \mathfrak{B}x_2 + \mathfrak{C}x_3 = 0$ (числа $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ берутся с точностью до отличного от нуля множителя), то получим еще два уравнения: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C}\mu = 0$ и $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\xi + \mathfrak{C}\eta = 0$. В результате будем иметь систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda - \xi = k(1 + \lambda\xi), \\ \eta - \mu = l(1 + \mu\eta), \\ \mu\xi - \lambda\eta = m(\lambda\xi + \mu\eta), \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C}\mu = 0, \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\xi + \mathfrak{C}\eta = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Эта система может оказаться несовместной (если числа $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ не подчинить определенной связи с заданными k, l, m).

С целью сокращения дальнейших выкладок введем следующие обозначения:

$$P = \mathfrak{A}kl - \mathfrak{B}km - \mathfrak{C}lm, \tag{7}$$

$$Q = \mathfrak{A}kl - \mathfrak{B}km + \mathfrak{C}lm, \tag{8}$$

$$R = \mathfrak{A}kl + \mathfrak{B}km - \mathfrak{C}lm, \tag{9}$$

$$\mathfrak{D}_{\lambda\xi} = -\mathfrak{A}^2 P + \mathfrak{B}^2 Q - \mathfrak{C}^2 R. \tag{10}$$

<u>Теорема 1</u>. Если $k, l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то для разрешимос-

ти системы (6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие три требования:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}C \neq 0, \tag{11}$$

$$P \neq 0, \tag{12}$$

$$\mathfrak{D}^2_{\lambda\xi} = 4\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(C^2k^2l^2m^2 - PQ). \tag{13}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть система (6) разрешима. Тогда требование (11) выполнено, ибо, как легко видеть, $\mathfrak{A}=0 \Rightarrow k=l=0$, $\mathfrak{B}=0 \Rightarrow k=m=0$, $C=0 \Rightarrow l=m=0$, а согласно условию теоремы $klm \neq 0$.

Перейдем к доказательству (12). Из двух последних уравнений системы (6) получаем: $\mu\eta = -\frac{\mathfrak{A}}{C} - \frac{\mathfrak{B}}{C}\lambda, \eta = -\frac{\mathfrak{A}}{C} - \frac{\mathfrak{B}}{C}\xi$, откуда следует, что $\mu\eta = \frac{\mathfrak{A}^2}{C^2} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{C^2}\xi + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{C^2}\lambda + \frac{\mathfrak{B}^2}{C^2}\lambda\xi$, $\mu\xi - \lambda\eta = \frac{\mathfrak{A}}{C}(\lambda-\xi)$ $\quad \lambda\xi + \mu\eta = \frac{\mathfrak{A}^2}{C^2} + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{C^2}\lambda + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{C^2}\xi + \frac{\mathfrak{B}^2 + C^2}{C^2}\lambda\xi$. Подставив эти выражения для $\mu\eta$, $\mu\xi - \lambda\eta$ и $\lambda\xi + \mu\eta$ во второе и третье уравнения системы (6) и введя обозначение $\nu = \lambda\xi$, придем к следующему виду первых трех уравнений системы (6):

$$\begin{cases} k\nu - \lambda - \xi = -k, \\ \mathfrak{B}^2 l\nu + (\mathfrak{A}\mathfrak{B}l - \mathfrak{B}l)\lambda + (\mathfrak{A}\mathfrak{B}l + \mathfrak{B}C)\xi = -\mathfrak{A}^2 l - C^2 l, \\ (\mathfrak{B}^2 + C^2)m\nu + (\mathfrak{A}\mathfrak{B}m - \mathfrak{A}C)\lambda + (\mathfrak{A}\mathfrak{B}m + \mathfrak{A}C)\xi = -\mathfrak{A}^2 m. \end{cases} \tag{14}$$

Это линейная система уравнений относительно ν, λ, ξ . Для ее определителя Δ получаем выражение

$$\Delta = 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}CP. \tag{15}$$

Если предположить, что $\Delta = 0$, то ввиду разрешимости системы (14) должны обращаться в нуль определители $\Delta_\nu, \Delta_\lambda, \Delta_\xi$ (смысл последних обозначений не нуждается в пояснении). Вычисления дают следующие выражения для Δ_ν, Δ_λ, Δ_ξ :

$$\Delta_\nu = -2\mathfrak{A}\mathfrak{B}CQ, \tag{16}$$

$$\Delta_\lambda = C(\mathfrak{D}_{\lambda\xi} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}Cklm), \tag{17}$$

$$\Delta_\xi = C(\mathfrak{D}_{\lambda\xi} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}Cklm). \tag{18}$$

Из равенств $\Delta = \Delta_\nu = 0$ следует, что $P = Q = 0$, откуда вытекает противоречивое равенство $Clm=0$. Этим доказано, что $\Delta \neq 0$ и, значит, $P \neq 0$ (требование (12)).

Установим теперь, что выполняется (13). Так как

$\nu = \frac{\Delta_\nu}{\Delta}$, $\lambda = \frac{\Delta_\lambda}{\Delta}$ и $\xi = \frac{\Delta_\xi}{\Delta}$, то имеем равенство $\frac{\Delta_\nu}{\Delta} = \frac{\Delta_\lambda \cdot \Delta_\xi}{\Delta^2}$,

т.е. $\Delta \cdot \Delta_\nu = \Delta_\lambda \cdot \Delta_\xi$. Отсюда, принимая во внимание (15)-(18), получаем: $-4\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2PQ = \mathfrak{D}^2_{\lambda\xi} - 4\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2C^2k^2l^2m^2$,
т.е. $\mathfrak{D}^2_{\lambda\xi} = 4\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2(C^2k^2l^2m^2 - PQ)$.

Достаточность. Зададим величины λ, ξ, μ, η следующими формулами:

$$\lambda = \frac{\mathfrak{D}_{\lambda\xi} - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}Cklm}{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}P}, \tag{19}$$

$$\xi = \frac{\mathfrak{D}_{\lambda\xi} + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}Cklm}{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}P}, \tag{20}$$

$$\mu = -\frac{\mathfrak{A}}{C} - \frac{\mathfrak{B}}{C}\lambda, \tag{21}$$

$$\eta = -\frac{\mathfrak{A}}{C} - \frac{\mathfrak{B}}{C}\xi. \tag{22}$$

В силу требований (11) и (12) формулы (19)-(22) имеют смысл. Покажем, что так заданная четверка λ, ξ, μ, η является решением системы (6), т.е. удовлетворяет каждому ее уравнению. Нуждаются в проверке лишь первые три уравнения (для четвертого и пятого уравнения - это факт тривиальный). Пользуясь (19)-(22), (7)-(10) и (13), получаем:

$$\lambda - \xi = -\frac{2Cklm}{P}, \quad \lambda\xi = -\frac{Q}{P}, \quad 1 + \lambda\xi = \frac{P-Q}{P} = -\frac{2Clm}{P},$$

$$\eta - \mu = \frac{\mathfrak{B}}{C}(\lambda - \xi) = -\frac{2\mathfrak{B}klm}{P}, \quad \mu\eta = \frac{1}{C^2}[\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{B}(\lambda+\xi) + \mathfrak{B}^2\lambda\xi] =$$

$$= \frac{1}{C^2}\left(\mathfrak{A}^2 + \frac{\mathfrak{D}_{\lambda\xi}}{P} - \mathfrak{B}^2\frac{Q}{P}\right) = \frac{1}{C^2P}(\mathfrak{A}^2P + \mathfrak{D}_{\lambda\xi} - \mathfrak{B}^2Q) = -\frac{R}{P},$$

$$1 + \mu\eta = \frac{P-R}{P} = -\frac{2\mathfrak{B}km}{P}, \quad \mu\xi - \lambda\eta = -\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda}{C}\xi + \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\xi}{C}\lambda =$$

$$= \frac{\mathfrak{A}}{C}(\lambda - \xi) = -\frac{2\mathfrak{A}klm}{P}, \quad \lambda\xi + \mu\eta = -\frac{Q+R}{P} = -\frac{2\mathfrak{A}kl}{P}.$$

Остается сопоставить найденные выражения для $\lambda - \xi$ и $1 + \lambda\xi$, $\mu - \eta$ и $1 + \mu\eta$, $\mu\xi - \lambda\eta$ и $\lambda\xi + \mu\eta$.

Теорема 2. Система (6) разрешима при любых $k, l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Согласно теореме 1 нужно установить, что для каждой тройки $k, l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ существуют числа $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in \mathbb{R}$, для которых выполняются условия (11)-(13). Положим $\mathfrak{C} = 1$ и попытаемся найти в $\mathbb{R}$ такие $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, чтобы имело место равенство $\mathfrak{D}_{\lambda_\xi} = 0$ (не забывая при этом об условиях (11)-(13)). В силу (13) будем иметь $\mathfrak{D}_{\lambda_\xi} = 0$, если подчиним $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ условию

$$k^2 l^2 m^2 - PQ = 0. \tag{23}$$

Так как $PQ = (\mathfrak{A}kl - \mathfrak{B}km)^2 - l^2 m^2$ (см. (7) и (8)), то (23) приобретает вид: $l^2 m^2 (k^2+1) - (\mathfrak{A}kl - \mathfrak{B}km)^2 = 0$, откуда следует, что

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\frac{m}{l} \mp \frac{m}{k}\sqrt{k^2+1}. \tag{24}$$

Подставив (24) в равенство $\mathfrak{D}_{\lambda_\xi} = 0$, т.е. в равенство $-\mathfrak{A}^2 P + \mathfrak{B}^2 Q - R = 0$ (см. (10)), будем иметь

$$a\mathfrak{B}^2 - 2b\mathfrak{B} + c = 0, \tag{25}$$

где

$$a = l\left[1 + \frac{m^2}{l^2} \mp \left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)\sqrt{k^2+1}\right], \tag{26}$$

$$b = k\left[1 + \frac{m^2}{k^2}\sqrt{k^2+1}\left(\sqrt{k^2+1} - 1\right)\right], \tag{27}$$

$$c = l\left(1 \pm \sqrt{k^2+1}\right)\left[1 + \frac{m^2}{k^2}(k^2+1)\right]. \tag{28}$$

Подсчеты показывают, что

$$b^2 - ac = k^2 + k^2 l^2 + k^2 m^2 + l^2 m^2 + k^2 l^2 m^2, \tag{29}$$

следовательно, уравнение (25) имеет вещественные корни

$$\mathfrak{B} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \qquad \text{при } a \neq 0 \tag{30}$$

и

$$\mathfrak{B} = \frac{c}{2b} \qquad \text{при } a = 0. \tag{31}$$

(Заметим, что $b \neq 0$, как это видно из формулы (27)). По найденным значениям $\mathfrak{B}$ вычисляем $\mathfrak{A}$ (формула (24)). Так как $c \neq 0$ (см. формулу (28)), то любое из значений $\mathfrak{B}$, вычисленных по формулам (30) и (31), отлично от нуля, а формула (24) показывает, что хотя бы одно из определяемых ею значений $\mathfrak{A}$ также отлично от нуля. Взяв именно такое $\mathfrak{A}$, получаем $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq 0$ (условие (11)). Остается проверить, что выполняется условие (12): $P \neq 0$. Формула (24) дает $\mathfrak{A}kl - \mathfrak{B}km = \mp lm\sqrt{k^2+1}$, откуда следует, что $\mathfrak{A}kl - \mathfrak{B}km - lm = -lm(1 \pm \sqrt{k^2+1}) \neq 0$, т.е. $P \neq 0$ (см. (7)).

Этим доказательство теоремы 2 завершается.

Замечание 1. Рассмотрим систему уравнений, получающуюся из системы (6) заменой в ней m на $-m$:

$$\begin{cases} \lambda - \xi = k(1+\lambda\xi), \\ \eta - \mu = l(1+\mu\eta), \\ \lambda\eta - \mu\xi = m(\lambda\xi + \mu\eta), \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda + \mathfrak{C}\mu = 0, \\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\xi + \mathfrak{C}\eta = 0. \end{cases} \tag{6'}$$

Так как величины a, b, c, вычисленные по формулам (26)-(28), одинаковы для m и $-m$ (при одних и тех же k и l), то будет одним и тем же для систем (6) и (6') уравнение (25). Сохранит поэтому свои значения (при переходе от системы (6) к системе (6')) величина $\mathfrak{B}$, вычисленная по формулам (30), (31). Что касается величины $\mathfrak{A}$, то она при таком переходе поменяет знак (см. формулу (24)).

Теорема 3. Для любых $k, l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ найдется хотя бы одна такая пара векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$, что $\operatorname{tg}\varphi_{12} = k$, $\operatorname{tg}\varphi_{13} = l$, $\operatorname{tg}\varphi_{23} = m$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2 о разрешимости системы (6) при любых $k, l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а также теоремой 1, в которой даны формулы (19) - (22) для вычисления искомых величин λ, ξ, μ, η. Полагая в этих формулах $\mathfrak{D}_{\lambda\xi} = 0$ и $\mathfrak{C} = 1$, получаем:

$$\lambda = -\frac{klm}{P}, \tag{32}$$

$$\xi = \frac{klm}{P} = -\lambda, \tag{33}$$

$$\mu = -\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\lambda, \tag{34}$$

$$\eta = -\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\lambda. \tag{35}$$

Здесь $\mathfrak{B}$ - какой-либо корень уравнения (25), а $\mathfrak{A}$ - соответствующая этому корню величина, вычисленная по формуле (24), которая дает для $\mathfrak{A}$ два значения:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}\frac{m}{l} - \frac{m}{k}\sqrt{k^2+1} \tag{36}$$

и

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}\frac{m}{l} + \frac{m}{k}\sqrt{k^2+1}. \tag{37}$$

В зависимости от того, какая из двух формул, (36) или (37), используется в дальнейших рассмотрениях, будем различать два случая.

Случай 1. Коэффициенты a, b, c уравнения (25), соответствующие формуле (36), обозначим через a_1, b_1, c_1. Для их вычисления имеем формулы:

$$a_1 = l\left[1 + \frac{m^2}{l^2} - \left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)\sqrt{k^2+1}\right], \tag{38}$$

$$b_1 = k\left[1 + \frac{m^2}{k^2}\sqrt{k^2+1}\left(\sqrt{k^2+1}+1\right)\right], \tag{39}$$

$$c_1 = l\left(1+\sqrt{k^2+1}\right)\left[1 + \frac{m^2}{k^2}(k^2+1)\right]. \tag{40}$$

Искомые величины λ, ξ, μ, η обозначим в этом случае через $\lambda_1, \xi_1, \mu_1, \eta_1$. Вычислять их следует по формулам:

$$\lambda_1 = \frac{k}{1+\sqrt{k^2+1}}, \tag{41}$$

$$\xi_1 = -\frac{k}{1+\sqrt{k^2+1}} = -\lambda_1, \tag{42}$$

$$\mu_1 = -\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}\lambda_1, \tag{43}$$

$$\eta_1 = -\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}\lambda_1, \tag{44}$$

которые (непосредственно) получаются из формул (32) - (35) при учете равенства $P_1 := \mathfrak{A}_1 kl - \mathfrak{B}km - lm = -lm(1+\sqrt{k^2+1})$ (см. конец доказательства теоремы 2).

Имея в виду нашу задачу (6) - (5') - (1), необходимо потребовать, чтобы выполнялись неравенства $\lambda_1 - \xi_1 > 0$, $\eta_1 - \mu_1 > 0$ и $\mu_1\xi_1 - \lambda_1\eta_1 > 0$. Так как в силу (41) и (42) $\lambda_1 - \xi_1 = 2\lambda_1 = \dfrac{2k}{1+\sqrt{k^2+1}}$, то $\lambda_1 - \xi_1 > 0$, если $k > 0$.

Далее, из (43) и (44) получаем: $\eta_1 - \mu_1 = 2\mathfrak{B}\lambda_1$, следовательно, $\eta_1 - \mu_1 > 0$, если $\mathfrak{B} > 0$. Из формул (41) - (44) следует, что $\mu_1 \xi_1 - \lambda_1 \eta_1 = -\lambda_1(\mu_1 + \eta_1) = 2\mathfrak{A}_1 \lambda_1$, значит $\mu_1 \xi_1 - \lambda_1 \eta_1 > 0$, если $\mathfrak{A}_1 > 0$. Поскольку условие (1) здесь выполняется ($\lambda_1, \xi_1 \neq 0$), то $\lambda_1, \xi_1, \mu_1, \eta_1$, найденные по формулам (41)-- (44), дают решение задачи (6) - (5') - (1), если $k > 0$, $\mathfrak{B} > 0$ и $\mathfrak{A}_1 > 0$.

Исходя из формул (38) - (40) и из формулы $\mathfrak{B} = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - a_1 c_1}}{a_1}$ (см. (30)) легко показать, что $\mathfrak{B} > 0$ при $k > 0$, если: 1) $l > 0$, $a_1 > 0$ (в этом случае положительны оба значения $\frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - a_1 c_1}}{a_1}$); 2) $l > 0$, $a_1 < 0$ (в этом случае положительно лишь одно значение $\frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - a_1 c_1}}{a_1}$); 3) $l < 0$, $a_1 > 0$ (в этом случае положительно лишь одно значение $\frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - a_1 b_1}}{a_1}$).

Если $a_1 = 0$, то имеется лишь одно положительное значение $\mathfrak{B} = \frac{c_1}{2b_1}$ при $l > 0$.

В случае, когда $l < 0$, $a_1 < 0$, соответствующие значения $\mathfrak{B}$ отрицательны.

Аналогичные рассуждения проводятся при использовании формулы (37).

<u>Случай 2</u>. Коэффициенты a, b, c уравнения (25), соответствующие формуле (37), обозначим через a_2, b_2, c_2. Для их вычисления имеем формулы:

$$a_2 = l\left[1 + \frac{m^2}{l^2} + \left(1 - \frac{m^2}{l^2}\right)\sqrt{k^2+1}\right], \tag{45}$$

$$b_2 = k\left[1 + \frac{m^2}{k^2}\sqrt{k^2+1}\left(\sqrt{k^2+1} - 1\right)\right], \tag{46}$$

$$c_3 = l\left(1 - \sqrt{k^2+1}\right)\left[1 + \frac{m^2}{k^2}(k^2+1)\right]. \tag{47}$$

Искомые величины λ, ξ, μ, η обозначим в этом случае через $\lambda_2, \xi_2, \mu_2, \eta_2$. Вычислять их следует по формулам:

$$\lambda_2 = -\frac{k}{\sqrt{k^2+1} - 1}, \tag{48}$$

$$\xi_2 = \frac{k}{\sqrt{k^2+1} - 1} = -\lambda_2, \tag{49}$$

$$\mu_2 = -\mathcal{A}_2 - \mathcal{B}\lambda_2, \qquad (50)$$

$$\eta_2 = -\mathcal{A}_2 + \mathcal{B}\lambda_2. \qquad (51)$$

При получении этих формул учитывается равенство $P := \mathcal{A}_2 kl - \mathcal{B}km - lm = lm(\sqrt{k^2+1} - 1)$. Следуя тем же выкладкам, которые проводились в случае 1, можно заключить, что числа λ_2, ξ_2, μ_2, η_2, найденные по формулам (48) - (51), дают решение задачи (6) - (5') - (11), если $k<0$, $\mathcal{B}>0$ и $\mathcal{A}_2>0$. Легко показать, что $\mathcal{B}>0$ при $k<0$, если: 1) $l>0$, $a_2<0$ (в этом случае положительны оба значения $\frac{b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - a_2 c_2}}{a_2}$); 2) $l>0$, $a_2>0$ (в этом случае положительно лишь одно значение $\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 - a_2 c_2}}{a_2}$); 3) $l<0$, $a_2<0$ (в этом случае положительно лишь одно значение $\frac{b^2 - \sqrt{b_2^2 - a_2 c_2}}{a_2}$). Если $a_2=0$, то имеется лишь одно положительное значение $\mathcal{B} = \frac{c_2}{2b_2}$ при $l>0$. В случае, когда $l<0$, $a_2>0$, соответствующие значения $\mathcal{B}$ отрицательны.

Соберем отличные при разборе обоих случаев выводы о знаке $\mathcal{B}$ и представим их в виде двух таблиц.

Таблица 1.

$k>0$	$l>0$, $a_1>0$	$l>0$, $a_1<0$	$l>0$, $a_1=0$	$l<0$, $a_1>0$	$l<0$, $a_1<0$	$l<0$, $a_1=0$
	2	1	1	1	0	0

Таблица 2.

$k<0$	$l>0$, $a_2>0$	$l>0$, $a_2<0$	$l>0$, $a_2=0$	$l<0$, $a_2>0$	$l<0$, $a_2<0$	$l<0$, $a_2=0$
	1	2	1	0	1	0

Цифры в нижней строке таблицы означают количество положительных значений $\mathcal{B}$ при условиях, указанных в верхней строке.

Мы подошли к завершающей части доказательства теоремы 3.

Если $k>0$, то вычисляем по формуле (38) число a_1. Пусть l и a_1 таковы, что они содержатся в одном из первых четырех столбцов таблицы 1, так что им соответствует положительный корень $\mathfrak{B}$ (один или два - это видно из таблицы). Вычисляем $\mathfrak{B}$, пользуясь формулой (30) (если $a_1 \neq 0$) или (31) (если $a_1 = 0$), в которых под a, b, c надо понимать a_1, b_1, c_1. Так как a_1 уже вычислено, то вычисляем b_1 и c_1 по формулам (39) и (40). По найденному $\mathfrak{B}$ (если их два, то берем любое из них) вычисляем $\mathfrak{K}_1$, пользуясь формулой (36). Если $\mathfrak{K}_1$ положительно, то для решения задачи (6) - (5') - (1) остается вычислить $\lambda_1, \xi_1, \mu_1, \eta_1$ по формулам (41) - (44). Если же $\mathfrak{K}_1$ оказалось отрицательным, то в силу замечания 1, сделанного после доказательства теоремы 2, следует в формулах (43) и (44) заменить $\mathfrak{K}_1$ на $-\mathfrak{K}_1$, т.е. положить $\mu_1 = \mathfrak{K}_1 - \mathfrak{B}\lambda_1$, $\eta_1 = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{B}\lambda_1$. Этим будет получено решение задачи (6') - (5') - (1).

Таким же образом следует поступить, если $k<0$ и l, a_2 таковы, что им соответствует положительное $\mathfrak{B}$, т.е. l, a_2 содержатся в одном из первых трех столбцов таблицы 2 или в пятом столбце этой таблицы.

В случае, когда l и a_1 содержатся в пятом или шестом столбце таблицы 1 (так что им соответствует отрицательное $\mathfrak{B}$), нужно все три числа k, l, m заменить противоположными: $-k$, $-l$, $-m$. Так мы перейдем к случаю 2, причем, ввиду того, что $-l>0$, пара $-l, a_2$ окажется в одном из первых трех столбцов таблицы 2. Дальше нужно поступать так, как изложено выше: найти a_2, b_2, c_2 и т.д. В полученном результате, представляющем собой два вектора, следует в каком-либо одном из них поменять все три координаты на противоположные по знаку. Этим будет решена наша задача при $k>0$. Подобным же образом поступаем, если $k<0$ и l, a_2 оказываются в четвертом или шестом столбце таблицы 2.

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Преобразуя в системе (6) три первых его уравнения, мы исключили из них μ и η, пользуясь четвертым и пятым уравнениями системы (6). При этом получилась система (14) относительно λ, ξ и $\lambda\xi = \vartheta$. Можно было бы поступить иначе: из четвертого и пятого уравнений системы (6) выразить λ и ξ через μ и η и получить вместо системы (14) аналогичную систему, только относительно μ, η и $\mu\eta$. Продолжая этот путь исследования задачи (6) - (5') - (1), мы опять доказали бы ее разрешимость, но решение оказалось бы не тем, что получено при первом подходе, подробно изложенном в статье.

В заключение отметим, что здесь не изложены случаи, когда среди чисел k, l, m имеются 0 или ∞ в разных сочетаниях $(k, l, m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Их рассмотрение не вызывает большего труда, чем в случае $k, l, m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а при некоторых вариантах, например, когда $k = l = 0$, а $m \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, решение тривиально.

Заметим еще, что некоторые частные случаи решенной в данной статье задачи, рассмотрены О.А.Вигранд [1].

Библиографический список

1. О.А.Вигранд. Теория проецирования плоских углов. Рига: РВВККУ им. С.С.Бирюзова, 1976.

Поступила 10 мая 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 515.12

ЭКВИВАРИАНТНЫЕ БИКОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕННОСТИ

В.Г.Евстигнеев

Московский институт управления им. Орджоникидзе

Основные свойства эквивариантных бикомпактных расширений установлены в работе С.А.Антоняна и Ю.М.Смирнова методом вложений в тихоновские произведения [1]. Известно, что бикомпактные расширения можно строить методом направленностей [2]. В данной работе автор показывает, что этим методом можно строить также эквивариантные бикомпактные расширения и дает их новую характеризацию посредством направленностей. Отсюда вытекает новое доказательство теоремы Ю.М.Смирнова, характеризующей эквивариантные бикомпактные расширения.

Теорема. Если на пространстве X непрерывно действует группа G и бикомпактное расширение bX порождается алгеброй функций $A \subset C(X)$, то bX эквивариантно тогда и только тогда, когда выполняются условия:

(1) Эквивалентные функциональные направленности $\{x_\alpha\}$ и $\{x_\beta\}$ в X посредством любого $g \in G$ переводятся также в эквивалентные функциональные направленности $\{gx_\alpha\}$ и $\{gx_\beta\}$ в X.

(2) Если направленность $\{g_\alpha\} \subset G$ сходится к единице $e \in G$, то для любой функции $f \in A$ направленность $\{fg_\alpha - f\}$ сходится к нулю /по норме $\sup$ в $C(X)$/ т.е. $\lim \| f g_\alpha - f \| = 0$.

Теорема Ю.М.Смирнова. При тех же предположениях бикомпактное расширение bX эквивариантно тогда и только тогда, когда выполняются условия:

(1) Алгебра A инвариантна относительно G, т.е. $fg \in A$ для любых $f \in A$ и $g \in G$.

(2) Любая функция $f \in A$ является G-равномерной, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность Θ едини-

ницы $e \in G$ такая, что $|fgx - fx| < \varepsilon$ для любых $x \in X$ и $g \in \theta$.

При доказательстве теоремы будем считать, что точками bX являются /функциональные/ направленности в X, по которым существуют пределы для всех функций из A. Две такие направленности эквивалентны, если взятые по ним пределы для всех функций из A совпадают. Эквивалентные направленности отождествляются и, тем самым, точки X отождествляются с направленностями, которые к ним сходятся. Топология bX задается условием, что направленность $\{y_\alpha\} \subset bX$ сходится к точке тогда и только тогда, когда $\forall f \in A \ \exists \lim\limits_{\alpha} \lim\limits_{\beta} f x_{\alpha,\beta} = \lim f x_\gamma$,

где $y_\alpha = \{x_{\alpha,\beta}\}$, $y = \{x_\gamma\}$ [2]. Отметим, что между алгебрами функций и бикомпактными расширениями X можно установить взаимно однозначное соответствие, полагая $A = \{f|X : f \in C(bX)\}$ /теорема И.М.Гельфанда-Г.Е.Шилова/. По определению, алгебра функций содержит все константы на X, замкнута относительно операций сложения и умножения, разделяет точки от замкнутых множеств в X и замкнута в топологии равномерной сходимости на X [2].

Предполагается, что на X непрерывно действует группа G, т.е. задано непрерывное отображение $G \times X \longrightarrow X$ со свойствами $ex = x$, $h(gx) = hg(x)$, где $x \in X$, $h, g \in G$ и e - единица G. Эквивариантность бикомпактного расширения $bX \supset X$ означает, что заданное отображение можно продолжить по непрерывности до отображения $G \times bX \longrightarrow bX$ с сохранением указанных свойств [3].

Докажем, что сформулированные в теореме условия являются достаточными. Для этого покажем, что из (1) вытекает инвариантность A относительно G. Пусть $f \in A$ и $g \in G$. Функцию fg продолжим по непрерывности на bX, полагая $fg(y) = \lim f(gx_\gamma)$, $y = \{x_\gamma\} \in bX$. Проверим, что это продолжение непрерывно. Пусть $\lim y_\alpha = y$, где $y_\alpha = \{x_{\alpha,\beta}\}$, $y = \{x_\gamma\} \in bX$. Из семейства направленностей $\{x_{\alpha,\beta}\}$, $\beta \in I_\alpha$ образуем диагональную направленность $\{x_{\alpha,\psi(\alpha)}\}$ /где $\psi \in \prod I_\alpha$, $(\alpha_2, \psi_2) > (\alpha_1, \psi_1) \Leftrightarrow \alpha_2 > \alpha_1$

и $\psi_2(\alpha)>\psi_1(\alpha)$ для любого α /. Из соотношения $\lim y_\alpha = y$ вытекает, что направленности $\{x_{\alpha,\psi(\alpha)}\}$ и $\{x_\gamma\}$ эквивалентны. По условию теоремы, тогда эквивалентны и направленности $\{gx_{\alpha,\psi(\alpha)}\}$ и $\{gx_\gamma\}$. Следовательно, $\lim\limits_{(\alpha,\psi)} f(gx_{\alpha,\psi(\alpha)}) = \lim f(gx_\gamma) = fg(y)$. Учитывая, что

$\lim\limits_{(\alpha,\psi)} f(gx_{\alpha,\psi(\alpha)}) = \lim\limits_{\alpha}\lim\limits_{\beta} f(gx_{\alpha,\beta}) = \lim\limits_{\alpha} fg(y_\alpha)$, получаем:

$\lim fg(y_\alpha) = fg(y)$. Остается доказать, что непрерывно отображение $(g,\{x_\gamma\}) \to \{gx_\gamma\}, \{x_\gamma\}\in bX,\ g\in G$. Для этого покажем сначала, что из соотношений $\lim g_\alpha = e, \lim y_\alpha = y$ вытекает равенство $\lim g_\alpha y_\alpha = ey = y$. Так как $y_\alpha = \{x_{\alpha,\beta}\}$, $y=\{x_\gamma\}$, предыдущее равенство означает, что $\forall f\in A\ \exists \lim\limits_{\alpha}\lim\limits_{\beta} fg_\alpha x_{\alpha,\beta} = \lim f x_\gamma$. Обозначим $\lim f x_\gamma = C$.

Из семейства направленностей $\{x_{\alpha,\beta}\}, \beta\in I_\alpha$ образуем диагональную направленность $\{x_{\alpha,\psi(\alpha)}\}$. Так как $\lim y_\alpha = y$, то $\lim\limits_{\alpha}\lim\limits_{\beta} f x_{\alpha,\beta} = \lim\limits_{(\alpha,\psi)} f x_{\alpha,\psi(\alpha)} = C$. Следовательно,

$\forall(\alpha,\psi)>(\alpha_0,\psi_0): |fx_{\alpha,\psi(\alpha)} - C| < \varepsilon$. Из условия (2) находим $\forall\alpha>\alpha_1: \|fg_\alpha - f\|_X < \varepsilon$. Откуда $\forall\alpha>\alpha_1$ и $\forall(\alpha,\psi)>(\alpha_0,\psi_0)$:

$|fg_\alpha x_{\alpha,\psi(\alpha)} - C| < 2\varepsilon$. В этом неравенстве при фиксированном α переходим к пределу по β и находим $\forall\alpha>\alpha_2$: $|\lim\limits_{\beta} fg_\alpha x_{\alpha,\beta} - C| \leq 2\varepsilon$. Остается проверить, что из соотношений $\lim g_\alpha = g, \lim y_\alpha = y$ вытекает равенство $\lim\limits_{\alpha}\lim\limits_{\beta} fg_\alpha x_{\alpha,\beta} = \lim fgx_\gamma$. Для этого обозначим $fg = \varphi\in A$.

Тогда предыдущее равенство перепишется в виде $\lim\limits_{\alpha}\lim\limits_{\beta} \varphi g^{-1}g_\alpha x_{\alpha,\beta} = \lim \varphi x_\gamma$. Учитывая соотношение $\lim g^{-1}g_\alpha = e$, находим, что рассматриваемый случай сводится к доказанному.

<u>Доказательство</u> необходимости. Из эквивариантности bX следует, что отображение $y\to gy,\ y\in bX$ является гомеоморфизмом при любом фиксированном $g\in G$. Отсюда, очевидно, вытекает первое условие теоремы. Проверим, что выполняется и второе условие. Допуская противное, найдем функцию $f\in A$ и направленность $\{g_\alpha\}\subset G$ такие, что $\lim g_\alpha = e$, но $\|fg_\alpha - f\|_X \not\to 0$. Поэтому

существуют поднаправленность $\{g_\beta\} \subset \{g_\alpha\}$ и направленность $\{x_\beta\} \subset X$ такие, что $|(fg_\beta - f)x_\beta| > \varepsilon > 0$. В силу бикомпактности bX можно считать, что $\{x_\beta\}$ сходится к некоторой точке $y \in bX$. Следовательно, $\lim g_\beta x_\beta = ey = y$ и существуют пределы $\lim f g_\beta x_\beta = fy$, $\lim f x_\beta = fy$. Получили противоречие.

Доказанная теорема равносильна теореме Ю.М.Смирнова. Действительно, первое условие теоремы эквивалентно условию инвариантности кольца A относительно G. В одну сторону это было проверено при доказательстве достаточности, в другую очевидно. Второе условие, очевидно, эквивалентно, G - равномерности любой функции $f \in A$.

Учитывая теорему И.М.Гельфанда-Г.Е.Шилова, находим, что между всеми эквивариантными бикомпактными расширениями и алгебрами функций на X указанного вида существует взаимно однозначное соответствие.

Автор пользуется случаем и выражает благодарность Ю.М.Смирнову за его лекции по группам преобразований, которые пробудили интерес автора к этому предмету.

Библиографический список

1. Антонян С.А., Смирнов Ю.М. Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп// ДАН СССР. 1981. Т.257. №3.
2. Евстигнеев В.Г. Бикомпактность и меры // Функциональный анализ и его приложения. 1970. Т.4. Вып.3.
3. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М., 1980.

Поступила 9 февраля 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 513.88+519.21

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГЕЛЬФАНДОВСКОЙ КОМПАКТИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВОМ УЛЬТРАФИЛЬТРОВ И ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

А.И.Жданок, Р.Т.Самданчап
РПИ

В методе расширения любого марковского процесса до феллеровского процесса используется так называемая гельфандовская компактификация γX исходного фазового пространства X [1].

В работе предлагается описание гельфандовской компактификации измеримого пространства как пространства ультрафильтров с некоторой топологией. Показывается, что между замкнутыми множествами γX и фильтрами в X существует естественное взаимно-однозначное соответствие. Одна из первых работ, по существу использующая такой подход, принадлежит П.С.Александрову [2]. Для построения традиционных компактификаций, отличающихся от гельфандовской, аппарат ультрафильтров используется например, в [3].

Предлагается явная формула для вычисления переходной функции марковского оператора на компактификации. На основе этой формулы выводится критерий существования инвариантной чисто конечно-аддитивной меры.

§1. S-фильтры и S-ультрафильтры в X.

Пусть X - произвольное множество. Множество всех подмножеств обозначим $\mathcal{P}(X)$.

Пусть $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ - некоторое семейство подмножеств X. Для произвольных $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ и $A \in \mathcal{P}(X)$ введем обозначения для следующих множеств в S:

$$\mathcal{X}_S(A) \overset{def}{=} \{B \in S \mid B \supset A\},$$

$$\mathcal{X}_S(\mathfrak{A}) \overset{def}{=} \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} \mathcal{X}_S(A),$$

$\Pi_n(\mathfrak{A}) \overset{def}{=} \{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \mid A_i \in \mathfrak{A} \}$,

$\Pi_f(\mathfrak{A}) = \bigcup_{n \in N} \Pi_n(\mathfrak{A})$.

Последнее множество - множество всех конечных пересечений множеств из $\mathfrak{A}$.

Эти множества обладают следующими очевидными свойствами:

Свойства 1.1.

a) $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S} \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A})), \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{K}_S(\mathfrak{A})$.

b) $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \Rightarrow \mathfrak{K}_S(\mathfrak{A}_1) \subseteq \mathfrak{K}_S(\mathfrak{A}_2)$.

c) $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \Rightarrow \Pi_f(\mathfrak{A}_1) \subseteq \Pi_f(\mathfrak{A}_2)$.

d) $\mathfrak{K}_S(\mathfrak{K}_S(\mathfrak{A})) = \mathfrak{K}_S(\mathfrak{A}), \Pi_f(\Pi_f(\mathfrak{A})) = \Pi_f(\mathfrak{A})$.

e) $\mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{K}_S(\mathfrak{A}))) \subseteq \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A}))$.

f) $\mathfrak{K}_S(\phi) = S$.

Определение 1.1. Множество $\mathfrak{F} \subseteq S$ будем называть S-фильтром, если выполнено условие

$$\mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{F})) \subseteq \mathfrak{F}. \qquad (F)$$

S-фильтр $\mathfrak{F}$ будем называть собственным S-фильтром если $\mathfrak{F}$ - центрировано, в противном случае $\mathfrak{F}$ будем называть несобственным S-фильтром. Если S - центрировано, то все фильтры в S - собственные, если S - нецентрировано, то существует единственный несобственный фильтр - S .

Множество всех S-фильтров обозначим F_S .

В случае $S = \mathfrak{P}(X)$ определение собственного S-фильтра совпадает с классическим определением фильтра. При $S \neq \mathfrak{P}(X)$ S-фильтр $\mathfrak{F}$ в общем случае не является фильтром, так как должен содержать множества только из S .

В множестве F_S существует естественный частичный порядок по теоретико множественному включению.

Нетрудно показать, что пересечение произвольного семейства S-фильтров является S-фильтром.

Для произвольных $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ и $A \in \mathfrak{P}(X)$ введем обозначения для следующих множеств:

a) $F_S(\mathfrak{A}) \overset{def}{=} \{\mathfrak{F} \in F_S \mid \mathfrak{F} \geq \mathfrak{K}_S(\mathfrak{A})\}$,

b) $F_S(A) \overset{def}{=} \{\mathfrak{F} \in F_S \mid \mathfrak{F} \geq \mathfrak{K}_S(A)\}$,

c) $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) \overset{def}{=} \bigcap\limits_{\mathfrak{F}_\alpha \in F_S(\mathfrak{A})} \mathfrak{F}_\alpha$,

d) $\mathfrak{F}(A) \overset{def}{=} \bigcap\limits_{\mathfrak{F}_\alpha \in F_S(A)} \mathfrak{F}_\alpha$.

Очевидно, что S-фильтр $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ – минимальный S-фильтр, содержащий $\mathfrak{K}_S(\mathfrak{A})$, т.е. наименьший элемент в $F_S(\mathfrak{A})$. Это же верно для $\mathfrak{F}(A)$.

Теорема 1. . Пусть $\mathfrak{A} \subseteq S$, тогда

1) $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A}))$,

2) $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ – собственный $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{A}$ – центрировано.

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A}))$. Если $\mathfrak{F}$ – S-фильтр и $\mathfrak{F} \geq \mathfrak{K}_S(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{F} \geq \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{F})) \geq$

$\geq \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{K}_S(\mathfrak{A}))) \geq \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A})) = \mathfrak{G}$.

Покажем теперь, что $\mathfrak{G}$ – S-фильтр.

$$\mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{G})) = \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A})))) \subseteq$$

$$\subseteq \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\Pi_f(\mathfrak{A}))) = \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A})) = \mathfrak{G}.$$

Для доказательства условия (F) использовались свойства 1.1.

Из условия минимальности $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ имеем:

$\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A}))$.

2) Если $\mathfrak{A}$ – центрировано, $\Pi_f(\mathfrak{A})$ – тоже центрировано и $\mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A})) = \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ – центрировано, т.е. $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ – собственный S-фильтр.

Если $\mathfrak{A}$ – нецентрировано, то $\Pi_f(\mathfrak{A}) \ni \emptyset$. Тогда $\mathfrak{K}_S(\Pi_f(\mathfrak{A})) = S$ и S-фильтр $\mathfrak{F}(\mathfrak{A}) = S$ – несобственный.

Теорема доказана.

Определение 1.2. Максимальный собственный S-фильтр $\mathfrak{X} \in F_S$ будем называть S-ультрафильтром в X. Множество всех S-ультрафильтров обозначим H_S.

Теорема 1.2.

1) Пусть $\mathfrak{F}$ - некоторый собственный S-фильтр в X. Тогда существует S-ультрафильтр $\mathfrak{H}$, содержащий $\mathfrak{F}$.

2) Пусть $\mathfrak{H}$ - S-ультрафильтр, $A,B,C\in S$, $A\cap B=\emptyset$, $A\cup B=C$. Если $C\in\mathfrak{H}$, то либо $A\in\mathfrak{H}$, $B\in\mathfrak{H}$, либо $B\in\mathfrak{H}$, $A\notin\mathfrak{H}$.

Доказательство.

1) Рассмотрим $F_S(\mathfrak{F})$. Пусть $\{\mathfrak{F}_\alpha\}$, $\alpha\in I$ - линейная цепь в $F_S(\mathfrak{F})$. S-фильтр $\mathfrak{F}_m=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\mathfrak{F}_\alpha$ - максимальный в цепи. Следовательно, по лемме Цорна существует максимальный элемент $\mathfrak{H}$ в $F_S(\mathfrak{F})$.

2) Либо $\mathfrak{H}\cup\{A\}$, либо $\mathfrak{H}\cup\{B\}$ - центрировано. Пусть верно первое. Тогда $\mathfrak{F}(\mathfrak{H}\cup\{A\})$ - несобственный фильтр, содержащий $\mathfrak{H}$. Таким образом, $A\in\mathfrak{H}$.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть Σ - алгебра подмножеств в X. Тогда, если $\mathfrak{H}$ - Σ-ультрафильтр, то для любого $A\in\Sigma$, либо $A\in\mathfrak{H}$, либо $X\setminus A\in\mathfrak{H}$.

Для произвольных $\mathfrak{A}\subseteq S$ и $A\in S$ введем обозначения для следующих S-ультрафильтров:

a) $H(\mathfrak{A})\overset{\text{def}}{=}\{\mathfrak{H}\in H_S\mid \mathfrak{H}\supseteq\mathfrak{A}\}$,

b) $H(A)\overset{\text{def}}{=}\{\mathfrak{H}\in H_S\mid \mathfrak{H}\ni A\}$.

Заметим, что по теореме 1.2 множество $H(\mathfrak{A})$ пусто тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ - нецентрировано.

Теорема 1.3.

1) Пусть $\mathfrak{A}\subseteq S$, тогда $H(\mathfrak{A})=H(\mathfrak{F}(\mathfrak{A}))$.

2) Пусть $\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2\in F_S$, $\mathfrak{F}_1\neq\mathfrak{F}_2$. Тогда $H(\mathfrak{F}_1)\neq H(\mathfrak{F}_2)$.

3) Пусть $\mathfrak{F}_1,\mathfrak{F}_2\in F_S$, $\mathfrak{F}_1\subseteq\mathfrak{F}_2$. Тогда $H(\mathfrak{F}_1)\supseteq H(\mathfrak{F}_2)$.

Доказательство.

1) Вложение $H(\mathfrak{A})\supseteq H(\mathfrak{F}(\mathfrak{A}))$ - очевидно. Пусть $\mathfrak{H}\in H(\mathfrak{A})$. Тогда $\mathfrak{H}\in F(\mathfrak{A})$ и, так как $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ - наименьший элемент в $F(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})\subseteq\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}\in H(\mathfrak{A})$. Поэтому $H(\mathfrak{A})\subseteq H(\mathfrak{F}(\mathfrak{A}))$. Следовательно, $H(\mathfrak{A})=H(\mathfrak{F}(\mathfrak{A}))$.

2) Пусть $\mathfrak{F}_1\nsubseteq\mathfrak{F}_2$, тогда существует $A\in S$, такой

что $\mathfrak{F}_1 \cup \{A\}$ - нецентрировано, а $\mathfrak{F}_2 \cup \{A\}$ - центрировано. Пусть $\mathcal{H} \in H(\mathfrak{F}_1 \cup \{A\})$, тогда $\mathcal{H} \in H(\mathfrak{F}_1)$ и $\mathcal{H} \in H(\mathfrak{F}_2)$.

3) Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Если $\mathcal{H} \in H(\mathfrak{F}_2)$, то $\mathcal{H} \supseteq \mathfrak{F}_2 \supseteq \mathfrak{F}_1$, поэтому $\mathcal{H} \in H(\mathfrak{F}_1)$. Отсюда следует, что $H(\mathfrak{F}_2) \subseteq H(\mathfrak{F}_1)$.

Теорема доказана.

Таким образом, мы видим, что между множествами $\mathfrak{F} \in F_\Sigma$ и множествами $H(\mathfrak{F}) \subseteq H_\Sigma$ существует взаимно-однозначное антимонотонное в смысле упорядочения по включению соответствие.

Пусть Σ - алгебра подмножеств в X, содержащая все одноточечные подмножества.

Сформулируем очевидные свойства Σ-фильтров и Σ-ультрафильтров:

1) $\mathfrak{F}(X) = \{X\}$ - наменьший элемент в F_Σ.
2) $\mathfrak{F}(\phi) = \Sigma$ - наибольший элемент в F_Σ.
3) $F_\Sigma(X) = F_\Sigma$, $F_\Sigma(\phi) = \{\Sigma\}$.
4) $H_\Sigma(X) = H_\Sigma$, $H_\Sigma(\phi) = \phi$.
5) $H(\{x\}) = \mathcal{H}_x = \{B \in \Sigma \mid B \ni x\}$.

§2. F-топология на $H(X)$.

Пусть X - произвольное множество, Σ - некоторая алгебра подмножеств X, содержащая все одноточечные множества.

Введем на множестве Σ -ультрафильтров $H_\Sigma(X)$ топологию τ_F, которую будем называть F-топологией. Полученное топологическое пространство, как будет показано ниже, изоморфно гельфандовской компактификации γX пространства X.

В дальнейшем индекс Σ при H и F будем опускать.

<u>Определение 2.1</u>. Множество E назовем открытым в топологии τ_F тогда и только тогда, когда его дополнение $D = H(X) \setminus E$ является множеством вида $H(\mathfrak{F})$ для некоторого фильтра $\mathfrak{F} \in F(X)$.

Иными словами, множества вида $H(\mathfrak{F})$ и только они являются замкнутыми в топологии τ_F.

Покажем, что определение 2.1 корректно, и множества в τ_F действительно образуют топологию.

Теорема 2.1. Для множеств вида $H(\mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F}\in F(X)$, выполняются следующие соотношения:

а) $\bigcap\limits_{\alpha\in I} H(\mathfrak{F}_\alpha)=H(\mathfrak{F}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}\mathfrak{F}_\alpha))$, I - произвольное множество.

b) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H(\mathfrak{F}_i)=H(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_i)$.

Доказательство.

а) Выпишем цепочку эквивалентных условий:

$$\mathcal{H}\in\bigcap_{\alpha\in I} H(\mathfrak{F}_\alpha)\Leftrightarrow \mathcal{H}\in H(\mathfrak{F}_\alpha),\ \forall\alpha\in I\Leftrightarrow \mathcal{H}\supseteq\mathfrak{F}_\alpha,\ \forall\alpha\in I\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{H}\supseteq\bigcup_{\alpha\in I}\mathfrak{F}_\alpha\Leftrightarrow \mathcal{H}\in H(\bigcup_{\alpha\in I}\mathfrak{F}_\alpha)\Leftrightarrow \mathcal{H}\in H(\mathfrak{F}(\bigcup_{\alpha\in I}\mathfrak{F}_\alpha)).$$

Последняя эквивалентность следует из теоремы 1.3. Следовательно, $\bigcap\limits_{\alpha\in I} H(\mathfrak{F}_\alpha)=H(\mathfrak{F}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}\mathfrak{F}_\alpha))$.

b) Очевидно, достаточно показать, что $H(\mathfrak{F}_1)\cup H(\mathfrak{F}_2)=$ $=H(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2)$. Пусть $\mathcal{H}\in H(\mathfrak{F}_1)\cup H(\mathfrak{F}_2)$. Предположим, что $\mathcal{H}\in H(\mathfrak{F}_1)$. Тогда $\mathcal{H}\supseteq\mathfrak{F}_1$. Из того, что $\mathfrak{F}_1\supseteq\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2$, имеем $\mathcal{H}\supseteq\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2$. Аналогично, если $\mathcal{H}\in H(\mathfrak{F}_2)$. Поэтому $\mathcal{H}\in H(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2)$.

Включение $H(\mathfrak{F}_1)\cup H(\mathfrak{F}_2)\subseteq H(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2)$ доказано.

Докажем включение $H(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2)\subseteq H(\mathfrak{F}_1)\cup H(\mathfrak{F}_2)$ от противного. Пусть $\mathcal{H}\in H(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2)$, но $\mathcal{H}\notin H(\mathfrak{F}_1)$ и $\mathcal{H}\notin H(\mathfrak{F}_2)$. Существуют множества $A\in\mathfrak{F}_1$, $B\in\mathfrak{F}_2$ и $A\notin\mathcal{H}$, $B\notin\mathcal{H}$. Тогда $C=A\cup B\notin\mathcal{H}$. Но так как $C\in\mathfrak{F}_1$ и $C\in\mathfrak{F}_2$, то $C\in\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2$. В этом случае $C\in\mathcal{H}$. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{H}(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2)\subseteq H(\mathfrak{F}_1)\cup H(\mathfrak{F}_2)$.

Так как обе включения доказаны, то $H(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{F}_2)=H(\mathfrak{F}_1)\cup H(\mathfrak{F}_2)$.

Теорема доказана.

Теорема 2.2. Топология τ_F определением 2.1 задана корректно.

Доказательство. Докажем, что пустое множество и все пространство замкнуты, произвольное пересечение и конечное объединение замкнутых множеств замкнуто.

Первая часть утверждения очевидна, так как $H(\Sigma)=\emptyset$,

$H(\{X\})=H(X)$.

Пусть $\{H(\mathfrak{F}_\alpha)\}$, $\alpha\in I$ - произвольное семейство замкнутых множеств в $H(X)$. $\mathfrak{F}_1,\dots,\mathfrak{F}_n$ - конечное семейство замкнутых множеств. По теореме 2.1, имеем

$$\bigcap_{\alpha\in I} H(\mathfrak{F}_\alpha)=H(\mathfrak{F}(\bigcup_{\alpha\in I}\mathfrak{F}_\alpha)),\quad \bigcup_{i=1}^{n} H(\mathfrak{F}_i)=H(\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_i).$$

Следовательно, произвольное пересечение и конечное объединение замкнутых множеств замкнуто.

Теорема доказана.

Следующая теорема описывает свойства F-топологии.

Теорема 2.3. Топологическое пространство $H(X)$ в топологии τ_F является нормальным экстремально-несвязным пространством.

Доказательство.

а) компактность.

Докажем, что если пересечение произвольного семейства замкнутых множеств пусто, то из этого семейства можно выбрать конечное подсемейство, пересечение которого пусто.

Пусть $\bigcap_{\alpha\in I} H(\mathfrak{F}_\alpha)=\varnothing$. Тогда $\bigcap_{\alpha\in I} H(\mathfrak{F}_\alpha)=H(\bigcup_{\alpha\in I}\mathfrak{F}_\alpha)=\varnothing$.

Последнее равенство показывает, что $\bigcup_{\alpha\in I}\mathfrak{F}_\alpha$ - нецентрированное семейство множеств. Существуют множества $A_1\in\mathfrak{F}_{\alpha_1},\dots,A_n\in\mathfrak{F}_{\alpha_n}$, такие что $\bigcap_{i=1}^{n} A_i=\varnothing$. Поэтому $\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_{\alpha_i}$ - нецентрировано.

Тогда $\bigcap_{i=1}^{n} H(\mathfrak{F}_{\alpha_i})=H(\bigcup_{i=1}^{n}\mathfrak{F}_{\alpha_i})$.

b) экстремальная несвязность.

Сначала докажем, что множества вида $H(A)$, $A\in\Sigma$, и только они являются открыто-замкнутыми в τ_F.

Пусть $B=X\setminus A$. Так как $A\cap B=\varnothing$ и $A\cup B=X$, имеем $H(A)\cap H(B)=\varnothing$, $H(A)\cup H(B)=H(X)$.

Так как дополнение к замкнутому множеству $H(A)$ тоже замкнуто, то $H(A)$ - открыто-замкнуто.

Пусть теперь $H(\mathfrak{F}_1)$ - открыто-замкнуто, то есть существует $H(\mathfrak{F}_2)$, такой что $H(\mathfrak{F}_1)\cap H(\mathfrak{F}_2)=\varnothing$ и

$H(\mathfrak{F}_1) \cup H(\mathfrak{F}_2) = H(X)$. Следовательно, $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2 = \{X\}$, $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$ – нецентрировано. Существуют $A_1 \in \mathfrak{F}_1$ и $A_2 \in \mathfrak{F}_2$, такие что $A_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cup A_2 = X$.

Пусть $B_1 \in \mathfrak{F}_1$, тогда $B_1 \cup A_2 = X$.

$$B_1 \cap A_1 = (A_2 \cap A_1) \cup (B_1 \cap A_1) = (A_2 \cup B_1) \cap A_1 = X \cap A_1 = A_1.$$

Отсюда следует, что $B_1 \supseteq A_1$, откуда $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}(A_1)$. Таким образом, любое открыто-замкнутое множество есть множество вида $H(A)$, $A \in \Sigma$.

Докажем, что эти множества образуют базу топологии. Для этого покажем, что любое замкнутое множество содержится в открыто-замкнутом. Пусть $H(\mathfrak{F})$ – любое замкнутое множество. Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда любой Σ -ультрафильтр $\mathcal{H}$, принадлежащий $H(\mathfrak{F})$, содержит A , поэтому $H(\mathfrak{F}) \subseteq H(A)$.

с) нормальность.

Для доказательства нормальности компакта достаточно доказать его хаусдорфовость.

Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in H(X)$, $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$. Из максимальности Σ -ультрафильтра получаем, что $\mathcal{H}_1 \notin \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_2 \notin \mathcal{H}_1$. Существует $A_1 \in \mathcal{H}_1$ и $A_1 \notin \mathcal{H}_2$, $A_2 \in \mathcal{H}_2$ и $A_2 \notin \mathcal{H}_1$. Тогда $X \setminus A_1 \in \mathcal{H}_2$ и $X \setminus A_2 \in \mathcal{H}_1$. Пусть $B_1 = A_1 \setminus A_2$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$. Тогда $B_1 = A_1 \setminus A_2 = A_1 \cap (X \setminus A_2) \in \mathcal{H}_1$. Аналогично, $B_2 \in \mathcal{H}_2$. Таким образом $\mathcal{H}_1 \in H(B_1)$, $\mathcal{H}_2 \in H(B_2)$ и $H(B_1) \cap H(B_2) = \phi$.

Любые две точки разделяются открытыми окрестностями.

Теорема доказана.

В работе [4] было показано, что гельфандовская компактификация γX произвольного измеримого пространства X изоморфна множеству двузначных конечно-аддитивных мер $m(X,\Sigma)$ в τ_b -топологии, т. есть в $*$-слабой топологии в пространстве конечно-аддитивных мер, порожденной некоторым пространством функций $B(X,\Sigma)$, как предсопряженным пространством. $B(X,\Sigma)$ – пространство вещественных функций на X , являющихся равномерным пределом линейных комбинаций характеристических функций множеств из Σ .

<u>Теорема 2.4</u>. Пространство Σ-ультрафильтров $H(X)$, в F-топологии τ_F изоморфно пространству двузначных конечно-аддитивных мер в τ_B-топологии.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим отображение

$M: H(X) \to m(X,\Sigma)$,

такое что $$M(\mathcal{H})(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \in \mathcal{H}, \\ 0, & \text{если } A \notin \mathcal{H}. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой определений можно показать, что $M(\mathcal{H})$ - двузначная конечно-аддитивная мера. Отображение M - взаимно-однозначно, что следует из определения Σ-ультрафильтра и двузначной конечно-аддитивной меры на Σ.

Пусть $E \in \Sigma$ - некоторое множество. Рассмотрим характеристическую функцию этого множества χ_E, как непрерывный функционал на $m(X,\Sigma)$.

$$\chi_E : m(X,\Sigma) \to R,$$

$$\chi_E(\mu) = \int \chi_E \, \mu(dx) = \mu(E).$$

Так как множество значений этого функционала $D = \{0,1\}$, прообразы точек $\{0\}$ и $\{1\}$ - открыто-замкнуты.

$$\chi_E^{-1}(1) = \{\mu \in m(X,\Sigma) \mid \mu(E) = 1\}.$$

Рассмотрим прообраз этого множества при отображении M.

$$M^{-1}(\chi_E^{-1}(1)) = \{\mathcal{H} \in H(X) \mid M(\mathcal{H})(E) = 1\} =$$

$$= \{\mathcal{H} \in H(X) \mid \mathcal{H} \ni E\} = H(E).$$

Это множество - открыто-замкнуто в $H(X)$. Так как множество характеристических функций $\{\chi_E\}$, $E \in \Sigma$, всюду плотно в $B(X,\Sigma)$, множества вида $\chi_E^{-1}(1)$ образуют базу топологии из открыто-замкнутых множеств топологии τ_B. Отображение M устанавливает взаимно-однозначное соответствие между базой топологии τ_B в $m(X,\Sigma)$ и базой топологии τ_F в $H(X)$. Следовательно, как топологические пространства, они изоморфны.

<u>Следствие</u>. Пространство $H(X)$ в топологии τ_F является одной из реализаций компактификации Гельфанда γX произвольного измеримого пространства (X,Σ).

Отображение $h: X \to \mathcal{H}_x$, где $x \in X$, $\mathcal{H}_x = \{B \in \Sigma, B \ni x\}$, является вложением X в $H(X)$. Образ любой точки x из X является открытым множеством $H(\{x\}) = \{\mathcal{H}_x\}$. Отсюда видно, что любое подмножество X при отображении h переходит в открытое множество в $H(X)$.

Если X - топологическое пространство, и алгебра Σ совпадает с σ-алгеброй борелевских множеств $\mathcal{B}(X)$, то вложение h, кроме дискретного случая, всегда разрывно.

Изоморфизм между алгеброй Σ и алгеброй всех открыто-замкнутых множеств в $H(X)$ осуществляется отображением $H: A \to H(A)$, где $A \in \Sigma, H(A) \in \tau_F$.

Отображения h и H соответствуют отображениям s' и t в работе [4].

§3. Продолжение функций и мер на $H(X)$.

Любая функция из $B(X, \Sigma)$ может быть продолжена до непрерывной функции на гельфандовской компактификации. Используя реализацию гельфандовской компактификации в $H(X)$, дадим непосредственную конструкцию продолжения функций.

Сначала определим продолжение характеристических функций $\chi_E, E \in \Sigma$.

<u>Определение 3.1</u>. Пусть $\chi_E: X \to R$ - характеристическая функция множества E из Σ. Определим функцию $\tilde{\chi}_E: H(X) \to R$ следующим образом:

$$\tilde{\chi}_E(\mathcal{H}) = \begin{cases} 1, & E \in \mathcal{H}, \\ 0, & E \notin \mathcal{H}. \end{cases}$$

Функция $\tilde{\chi}_E$ является характеристической функцией множества $H(E)$ в $H(X)$. Так как множество $H(E)$ - открыто-замкнуто, функция $\tilde{\chi}_E$ - непрерывна в топологии τ_F.

Пусть теперь $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}(x)$.

Определим функцию $\tilde{f}: H(X) \to R$ следующим образом:

$$\tilde{f}(\mathcal{H})=\sum_{i=1}^{n}a_i\tilde{\chi}_{E_i}(\mathcal{H}).$$

Очевидно, функция $\tilde{f}$ непрерывна в топологии τ_F.

Перейдем к общему случаю. Пусть $f\in B(X,\Sigma)$,
$f=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$, где $\lim$ - равномерный предел функций, φ_i - линейные комбинации характеристических функций.

Положим $\tilde{f}=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n$.

Функция $\tilde{f}$ является равномерным пределом непрерывных функций $\tilde{\varphi}_i$ и, следовательно, сама является непрерывной.

Теорема 3.1. Значение функции $\tilde{f}$ на Σ-ультрафильтре $\mathcal{H}$ можно вычислить по формуле:

$$\{\tilde{f}(\mathcal{H})\}=\bigcap_{A\in\mathcal{H}}\overline{f(A)}.$$

Доказательство. Так как функция $\tilde{f}$ непрерывна в точке $\mathcal{H}$, то справедлива следующая формула:

$\{\tilde{f}(\mathcal{H})\}=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\overline{\tilde{f}(\mathcal{D}_\alpha)}$, где $\mathcal{D}_\alpha$, $\alpha\in I$ - множество всех открытых окрестностей $\mathcal{H}$. Так как открыто-замкнутые множества $H(A)$, $A\in\Sigma$, образуют базу топологии, формула упрощается: $\{\tilde{f}(\mathcal{H})\}=\bigcap\limits_{A\in\mathcal{H}}\overline{\tilde{f}(H(A))}$, так как семейство $H(A)$, $A\in\mathcal{H}$ - база окрестностей $\mathcal{H}$ из открыто-замкнутых множеств.

Рассмотрим множество $\overline{\tilde{f}(H(A))}$. Так как множество $A\subseteq X$ всюду плотно во множестве $H(A)\subseteq H(X)$ и функция $\tilde{f}$ - непрерывна на $H(X)$, имеем: $\overline{\tilde{f}(H(A))}=\overline{\tilde{f}(A)}=\overline{f(A)}$.

Последнее равенство следует из того, что $\tilde{f}|_X=f$.

Следовательно, получаем формулу:

$$\{\tilde{f}(\mathcal{H})\}=\bigcap_{A\in\mathcal{H}}\overline{f(A)}.$$

Теорема доказана.

Примечание. Допуская некоторую нестрогость в обозначениях, будем записывать: $\tilde{f}(\mathcal{H})=\bigcap\limits_{A\in\mathcal{H}}\overline{f(A)}$,

хотя с левой стороны выражения подразумевается число, а с правой - множество чисел.

Рассмотрим теперь вопрос о продолжении конечно-аддитивной меры μ на X до счетно-аддитивной регулярной меры $\tilde{\mu}$ на $H(X)$.

Пусть μ - конечно-аддитивная мера на X. Меру μ можно отождествить с непрерывным линейным функционалом μ на пространстве функций $B(X,\Sigma)$. Пространство $B(X,\Sigma)$ изоморфно пространству непрерывных функций $C(H(X))$ на компакте $H(X)$.

Определение 3.2. Определим функционал $\tilde{\mu}$ на $C(H(X))$ следующим образом:

$$(\tilde{\mu},\tilde{f}) \stackrel{def}{=} (\mu,f).$$

Очевидно, что $\tilde{\mu}$, определенный таким образом, является непрерывным линейным функционалом на $C(H(X))$. Следовательно, его можно отождествить с регулярной счетно-аддитивной мерой на компакте $H(X)$.

Рассмотрим значение этой меры на некоторых множествах.

Теорема 3.2.

1) $\tilde{\mu}(H(A))=\mu(A),\ A\in\Sigma$;

2) $\tilde{\mu}(H(\mathfrak{F}))=\inf\limits_{A\in\mathfrak{F}}\mu(A),\ \mathfrak{F}\in F(X)$.

Доказательство.

1) $\tilde{\mu}(H(A))=(\tilde{\mu},\chi_{H(A)})=(\tilde{\mu},\tilde{\chi}_A)=(\mu,\chi_A)=\mu(A)$.

2) $H(\mathfrak{F})$ - замкнутое множество в $H(X)$. Пусть E - открытое множество, $E\supseteq H(\mathfrak{F})$. Тогда $H(X)\setminus E=$ $=H(\mathfrak{F}_1)$ и $H(\mathfrak{F}_1)\cap H(\mathfrak{F})=\varnothing$. Значит, $\mathfrak{F}\cup\mathfrak{F}_1$ - нецентрировано. Существует $A\in\mathfrak{F}$, такой что $\{A\}\cup\mathfrak{F}_1$ - нецентрировано. Тогда $H(\mathfrak{F})\subseteq H(A)$ и $H(A)\cap H(\mathfrak{F}_1)=\varnothing$, т.е. $H(A)\subseteq E$.

Из того, что для любого открытого множества $E\supseteq H(\mathfrak{F})$, существует открыто-замкнутое $H(A)$, такое что

$$H(\mathfrak{F})\subseteq H(A)\subseteq E,$$

и регулярности меры $\tilde{\mu}$ имеем: $\tilde{\mu}(H(\mathfrak{F}))=\inf\limits_{A\in\mathfrak{F}}\tilde{\mu}(H(A))=\inf\limits_{A\in\mathfrak{F}}\mu(A)$.

Теорема доказана.

§4. Продолжение переходной функции марковского процесса на гельфандовскую компактификацию. Критерий существования чисто конечно-аддитивной меры.

Рассмотрим однородный марковский процесс с дискретным временем, заданный на (X,Σ) с переходной функцией $p(x,E)$. Переходная функция определяет пару интегральных марковских операторов, действующих в соответствующих пространствах мер и функций. Переходная функция удовлетворяет условиям:

$$\forall x\in X \;\; p(x,\cdot)\in ca(X,\Sigma);\; \forall E\in\Sigma \;\; p(\cdot,E)\in \mathcal{B}(X,\Sigma),$$

где $ca(X,\Sigma)$ - множество счетно-аддитивных мер на X.

В работе [1] строится расширение марковского процесса (МП) до изоморфного ему феллеровского МП на гельфандовской компактификации. При этом переходная функция $p(x,E)$ продолжается до соответствующей переходной функции $q(x,E)$ изоморфного МП. Здесь мы рассмотрим аналогичное продолжение в рамках рассматриваемой конструкции ультрафильтров.

Пусть $p(x,E)$ - переходная функция марковского оператора. Сначала продолжим $p(x,E)$ как функцию. Пусть $\mathcal{H}\in H(X)$.

По теореме 3.1 имеем:

$$\tilde{p}(\mathcal{H},E)=\bigcap_{A\in\mathcal{H}}\overline{p(A,E)}.$$

Затем продолжим $\tilde{p}(\mathcal{H},E)$ как меру и рассмотрим ее значение на замкнутом множестве $H(\mathcal{F})$.

$$q(\mathcal{H},H(\mathcal{F}))=\inf_{B\in\mathcal{F}}\bigcap_{A\in\mathcal{H}}\overline{p(A,B)}.$$

Этот результат анонсирован в [5].

Используя конструкцию продолжения переходной функции, докажем следующий критерий существования инвариантной чисто конечно-аддитивной меры. Теорема является усилением и обращением теоремы 2.1.2 [6].

<u>Теорема 4.1</u>. Пусть на (X,Σ) задан МП с переходной функцией $p(x,E)$. МП имеет инвариантную чисто конечно-аддитивную меру $\mu\in\Delta_{pf}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\exists E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots, \ \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \varnothing, \ \exists \varepsilon_i > 0, \varepsilon_i \to 0,$$

$$p(x, E_i) \geq 1 - \varepsilon_i \quad \text{при} \quad x \in E_{i+1}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть μ -чисто конечно-аддитивная инвариантная мера. Тогда существует последовательность множеств

$L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots \supseteq L_k \supseteq \ldots, \ \mu(L_k) = 1, \ \bigcap_{k=1}^{\infty} L_k = \varnothing.$

Пусть $\varepsilon_i \to 0, \ \varepsilon_i > 0$ - произвольная последовательность.

$$E_1 = L_1, \ K_2 = \{x \in E_1 : p(x, E_1) \geq 1 - \varepsilon_1\},$$

$$\mu(K_2) = 1; \ E_2 = K_2 \cap L_2, \ \mu(E_2) = 1; \ldots$$

Аналогично можно построить множества $K_3, E_3, \ldots$

Построенная последовательность удовлетворяет $(\mathcal{U})$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{F} = \{E_i\}$ - Σ -фильтр, $\mathcal{H} \geq \mathcal{F}$ Σ -ультрафильтр. Тогда

$$\{p^k(\mathcal{H}, E_m)\} = \bigcap_{A \in \mathcal{H}} \overline{p^k(A, E_m)} \subseteq$$

$$\subseteq \overline{p^k(E_{m+k}, E_m)} \subseteq [(1-\varepsilon_m)^k, 1].$$

Отсюда получаем, что $p^k(\mathcal{H}, H(\mathcal{F})) = 1$. Следовательно, $p^k(\mathcal{H}, E_m) = 1$ для всех m .

Пусть $\operatorname{Lim}_{n \to \infty} a_n$ - банахов предел последовательности.

$$p^*(\mathcal{H}, E_m) \stackrel{def}{=} \operatorname{Lim}_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p^k(\mathcal{H}, E_m) = 1,$$

для любого m . Мера $\mu(E) = p^*(\mathcal{H}, E)$ - инвариантна для любого Σ -ультрафильтра $\mathcal{H}$.

Из того, что $\mu(E_m) = 1$, но $\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m = \varnothing$ получаем, что мера μ чисто конечно-аддитивна.

Библиографический список

1. Жданок А.И. Эргодические теоремы для негладких марковских процессов // Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981. С. 18-33.
2. Александров П.С. О бикомпактных расширениях топологических пространств // Мат.сб. 5(1939). С.403-424.

3. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., 1968.
4. Жданок А.И. Гельфандовская компактификация и двузначные меры // Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981. С. 161-164.
5. Жданок А.И., Самданчап Р.Т. Марковский процесс на гельфандовской компактификации, представленной пространством ультрафильтров // Эргодическая теория марковских процессов. Всесоюзная школа-семинар: Тезисы докладов. Кызыл, 1987. С. 27.
6. Жданок А.И. Асимптотика поведения цепей Маркова и инвариантные конечно-аддитивные меры. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Рига, 1981.

Поступила 18 февраля 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 514.7, 514.82

ПРИЧИННАЯ СТРУКТУРА ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МЕТРИК НА ОДНОЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ГРУППЕ ЛИ

М.П.Красильников
Новосибирский государственный университет

В работе изучается причинная структура геодезически неполных левоинвариантных лоренцевых метрик на четырехмерной группе Ли M , алгебра Ли L которой задается следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_4,e_1]=e_1;\ [e_4,e_2]=e_1+e_2;\ [e_4,e_3]=e_3.$$

L обычным образом отождествляется с касательным пространством к M в единице. Задавая в L лоренцеву метрику G и разнося ее по M левыми сдвигами, мы превращаем M в однородное лоренцево пространство с метрикой g (лоренцеву группу Ли). Матрица G допускает упрощение до некоторого канонического вида автоморфизмами алгебры L . В основу классификации метрик положено расположение идеалов $V_1=\{e_1\}$, $V_2=\{e_1,e_3\}$, $V_3=\{e_1,e_2,e_3\}$ по отношению к световому конусу. Канонический вид метрик на данной алгебре приводится в [1]. Для удобства формулировки основного результата приведем принятую в [1] классификацию метрик:

Таблица 1.

пространство / идеалы	1	2а	2б	2в	3	4а	4б	5а	5б	6
V_1	П	В	В	В	В	В	В	И	И	И
V_2	П	В	В	В	П	И	И	И	И	П
V_3	П	П	В	И	П	П	И	И	П	П

В таблице 1 указано обозначение пространств и расположение идеалов. П означает, что соответствующий идеал пространственноподобен, В - времениподобен, И - изотропен. Причинная структура изучается в терминах четырех условий со следующей иерархией: однородная глобальная гиперболичность $\Longrightarrow$ равномерная устойчивая причинность $\Longrightarrow$ причинность $\Longrightarrow$ хронологичность. Последние два условия общеприняты, а первые введены Л.вичевым А.В. [2] и означают следующее:

Экспоненциальная лоренцева группа Ли M называется однородно глобально гиперболичной, если лоренцево многообразие M глобально гиперболично и существует проходящая через $\mathbb{1}$ поверхность Коши, содержащая коммутант группы M.

Однородное лоренцево многообразие M называется равномерно устойчиво причинным, если для некоторой метрики $\hat{g}$ с конусом будущего $\hat{K}^+$, содержащим K^+ (за исключением нуля) внутри себя, лоренцево многообразие $\hat{M}$ хронологично.

При изучении причинной структуры мы опираемся на следующие теоремы, сформулированные в [2].

<u>Теорема 1</u>. I^+ совпадает с полугруппой S^+, порожденной всеми направленными в будущее однопараметрическими временными полугруппами.

<u>Теорема 2</u>. Пусть L - алгебра Ли экспоненциальной группы Ли M. Если $[L,L]\cap K^+ = \{0\}$, то пространство M является равномерно устойчиво причинным.

<u>Теорема 3</u>. Пусть N коммутативный идеал коразмерности 1 алгебры L. Если N касается конуса K^+, то в M выполняется условие причинности.

Перейдем к доказательству основного результата.

<u>Теорема</u>. Пространство 3 хронологично; пространства 4б и 5а причинны, но не равномерно устойчиво причинны; пространства 1, 2а, 4а, 5б, 6 равномерно устойчиво причинны.

<u>Доказательство</u>. Для пространства 1 достаточно заметить, что $[L,L]=V_3$, а V_3 - пространственноподобен, следовательно $[L,L]\cap K^+ = \{0\}$. Тогда по теореме 2 пространство является равномерно устойчиво причинным.

В случае 2а метрика имеет вид: $G=\mathrm{diag}(1,p,-1,q)$.
Выберем конус будущего следующим образом:

$$K^+=\{\vec{a}\in L : \vec{a}^2<0,\ a_3>0\}.$$

Групповая операция $z = x\cdot y$ в данной группе может быть задана формулами:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 e^{x_4} + y_2 x_4 e^{x_4}, \\ z_2 = x_2 + y_2 e^{x_4}, \\ z_3 = x_3 + y_3 e^{x_4}, \\ z_4 = x_3 + y_4, \end{cases} \tag{1}$$

а уравнения геодезических, проходящих через $\mathbb{1}$, имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{a_1}{p} x_4^2 e^{2x_4} + a_2 x_4 e^{2x_4} + a_1 e^{2x_4}, \\ \dot{x}_2 = \frac{a_1}{p} x_4 e^{2x_4} + a_2 e^{2x_4}, \\ \dot{x}_3 = a_3 e^{2x_4}, \\ \dot{x}_4 = -a_1 \frac{x_1 + x_2}{q} - \frac{p a_2}{q} x_2 + \frac{a_3}{q} x_3 + a_4. \end{cases} \tag{2}$$

Из выбора метрики и выбора ориентации следует, что любое звено исходящего из $\mathbb{1}$ в будущее причинного геопути соответствует начальному касательному вектору $\vec{a}$ с $a_3 > 0$. Отсюда и из (1) и (2) следует, что все точки x такого геопути имеют $x_3 > 0$. Таким образом $J^+ \subset Q = \{x \in M : x_3 > 0\}$. Тогда $J^+ \cap J^- \subset Q \cap Q^{-1} = \{\mathbb{1}\}$, т.е. пространство 2а причинно. Конус K^+ может быть расширен без нарушения типа M, т.е. пространство 2а является равномерно устойчиво причинным.

В случае 4а метрика имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad q > 0.$$

Выберем конус будущего следующим образом:

$$K^+ = \{\vec{a} \in L : \vec{a}^2 \leq 0, a_2 > 0\}.$$

Из уравнений геодезических:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_2 x_4 e^{2x_4} + a_1 e^{2x_4}, \\ \dot{x}_2 = a_2 e^{2x_4}, \\ \dot{x}_3 = a_1 x_4 e^{2x_4} + a_3 e^{2x_4}, \\ \dot{x}_4 = -\frac{a_1}{q}(x_1 + x_2) - \frac{a_3}{q} x_2 - \frac{a_2}{q} x_3 + a_4, \end{cases} \tag{3}$$

и вида групповой операции (1) следует, что если исходящий из $\mathbb{1}$ причинный геопуть имеет хотя бы одно звено с $a_2 \neq 0$ ($a_2 > 0$), то $x_2 > 0$. Если $\vec{a} \in K^+$ и $a_2 = 0$, то $\vec{a} = \lambda e_3$, где $\lambda < 0$. Для такого вектора система (3) имеет решение $x(t) = (0, 0, \lambda t, 0)$. Обозначим через δ направленный в будущее луч $\{(0,0,t,0), t \leq 0\}$. Пусть $Q = \delta \cup \{x \in M : x_2 > 0\}$. Это полугруппа. Нами доказано, что $J^+ \subset Q$. Тогда

$$J^+ \cap J^- \subset Q \cap Q^{-1} = \{\mathbb{1}\},$$

т.е. в случае 4а выполняется условие причинности. Расширяя K^+ так, чтобы все световые вектора стали времениподобными, мы получим метрику случая 2а. Пространство 2а равномерно устойчиво причинно, следовательно метрика 4а также равномерно устойчиво причинна.

Аналогичным образом доказывается выполнение условия причинности для случая 4б. Расширение K^+ приводит к случаю 2б. Пространство 2б является полностью искаженным, значит в случае 4б не выполняется условие равномерной устойчивой причинности.

В случае 3 уравнение для временной координаты геодезических имеет сложный вид, поэтому рассуждения аналогичные приведенным выше не проходят. Для выяснения причинной структуры пространства 3 воспользуемся теоремой 1. Для этого нам понадобится уравнение однопараметрических подгрупп:

$$x = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_4}(e^{a_4 t} - 1) + a_2 t e^{a_4 t}; \frac{a_2}{a_4}(e^{a_4 t} - 1); \frac{a_3}{a_4}(e^{a_4 t} - 1); a_4 t\right). \qquad (4)$$

Метрика в данном случае такая: $G = \mathrm{diag}(1, p, 1, q)$, $p < 0$, $q > 0$. Выберем конус будущего следующим образом:

$$K^+ = \{\vec{a} \in L : \vec{a}^2 < 0,\ a_2 > 0\}.$$

Из вида метрики и выбора ориентации следует, что любое звено исходящего из $\mathbb{1}$ в будущее временного группопути соответствует начальному касательному вектору $\vec{a}$ с $a_2 > 0$. (Группопуть - это такая составленная из кривых $\gamma_1 = \tilde{\gamma}_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ ломаная γ, что $\tilde{\gamma}_i$ - исходящие из $\mathbb{1}$ в будущее отрезки временных однопараметрических полугрупп, а каждый γ_i получен из $\tilde{\gamma}_i$ соответствующим левым сдвигом). Из (1) и (4) следует, что каждая точка x такого группопути имеет $x_2>0$. В силу теоремы 1 $I^+=S^+$, тогда $I^+\subset Q=\{x\in M: x_2>0\}$. Отсюда следует, что пространство 3 хронологично.

Для случаев 5а, 5б, 6 достаточно заметить, что $N=V_3$ изотропен (см. таблицу 1), тогда по теореме 3 соответствующие пространства причинны. Далее обычным образом расширяем конус будущего. В случае 5а это приводит к метрике 2б, в случае 5б - к 2а, в случае 6 - к 3. Пространство 2а равномерно устойчиво причинно, а 3 - хронологично, значит пространства 5б и 6 равномерно устойчиво причинны. Пространство 2б полностью искажено, значит в случае 5а условие равномерной устойчивой причинности не выполняется. Теорема доказана.

Замечание. Причинная структура геодезически полных пространств (случаи 2б и 2в) изучена автором ранее. Соответствующая работа сдана в печать. В той же работе приводятся: уравнение однопараметрических подгрупп; формулы групповой операции; уравнения геодезических проходящих через единицу группы.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить свою благодарность Левичеву А.В. за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

Библиографический список

1. Астраков С.Н., Левичев А.В., Репин А.Е. Канонический вид левоинвариантных лоренцевых метрик на одной четырехмерной группе Ли // Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1987. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 05.12.86, № 8341-В.
2. Левичев А.В. Некоторые методы исследования причинной структуры однородных лоренцевых многообразий. Новосибирск, 1986. 40 с. Препринт / СО АН СССР; ИМ; № 20.
3. Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. М: Мир, 1985. 400 с.

Поступила 20 декабря 1987 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 517.98

НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ В ОТБЛЕСКАХ ПРОСТРАНСТВ И ОТОБРАЖЕНИЙ *)

А.Х.Лиепиньш

ЛГУ им. П.Стучки

В отблесках очертания мысленных структур, слов и, быть может, даже чисел становятся нечеткими, приобретая, что несомненно и крайне существенно, цвет морской волны.

Понятие оператора замыкания рождается в отблесках топологических пространств, выпуклых оболочек, нежных и таинственных математических конструкций, манящих своей разноликостью. Напомним, что отображение $S: PX \to PX$, где X - непустое множество и PX - множество всех подмножеств множества X, называется оператором замыкания на X, если для любых $A, B \in PX$ оно удовлетворяет условиям:

1) $A \subset B \Rightarrow S(A) \subset S(B)$;
2) $A \subset S(A)$;
3) $S(S(A)) = S(A)$.

S - компактность множества X определяется таким же образом, как в случае топологического оператора замыкания.

Отблеск множества $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел - множество $F\mathbb{R}$ всех нечетких вещественных чисел [1], подобно тревожному стуку первого трамвая на рассвете пронзительной тишины утра в метрическом пространстве, прерывает размеренное дыхание многих известных теорем о неподвижных точках. Однако в теореме отблеска [2], световой нитью обобщения связанной с [3], существенно лишь то, что $F\mathbb{R}$ можно частично упорядочить, продолжая упорядочение множества $\mathbb{R}$.

Теорема отблеска. Пусть X - непустое множество, S - оператор замыкания на X, $f: X \to X$ и $g: X \to Y$

*) Статья без литературного редактирования

где Y - непустое множество с определенным на нем частичным упорядочением $\leqslant$.

Предположим, что:

1) X - S-компактно;

2) $g(f(x)) \leqslant g(x)$ для любого $x \in X$;

3) для любого $x \in X$ ($x \neq f(x)$) существуют $y, z \in S(\{f^n(x) \mid n=0,1,2,\ldots\})$, удовлетворяющие условиям:

а) $g(y) < g(z)$;

б) множество $A_y := \{a \in X \mid g(a) \leqslant g(y)\}$ - S-замкнуто, т.е. $S(A_y) = A_y$.

Тогда f имеет неподвижную точку.

Доказательство. Пользуясь S-компактностью множества X (условие 1), построим согласно аксиоме Цорна минимальное непустое, S-замкнутое, инвариантное относительно f множество $M \subset X$. Пусть $x \in M$ и $\{f^n(x) \mid n=0,1,2,\ldots\} =: \theta(x)$. Если $x \neq f(x)$, то согласно условию 3 существуют $y, z \in S(\theta(x))$, для которых имеет место а) и б). При этом в силу условия 2 множество A_y инвариантно относительно f.

Рассмотрим множество $M_0 := M \cap A$. Оно непусто, ибо $y \in M_0$. Как пересечение двух S-замкнутых, инвариантных относительно f множеств M_0 инвариантно относительно f и S-замкнуто. В силу минимальности множества M, заключаем, что $M_0 = M$, т.е. $M \subset A$. Следовательно, $g(z) \leqslant g(y)$, что невозможно. Таким образом, $f(x) = x$.

Библиографический список

1. Поспелов Д.А. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М., 1986.
2. Liepiņš A.H. Fuzzy metrics and fixed points of mappings // Topol. Conf. Baku, 1987. P. 165.
3. Liepiņš A.H. A fixed point exsists if and only if ... // Coll. Gen. Topol. Eger, 1983. P. 62.

Поступила 13 апреля 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 517.98

ЗЕРКАЛА ДЛЯ ЛОВЛИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Д.Я.Забаровска
А.Х.Лиепиньш
ЛГУ им. П. Стучки

Пусть Y - метрическое пространство с расстоянием d, $X \subset Y$ и $f: X \to Y$.

Определение 1. Назовем $A \subset X$ зеркалом, если:
1) $f(A) \subset X$;
2) $\forall x \in X$ такого, что $f(x) \notin X$, $\exists a \in A$:
$d(x, f(x)) = d(x,a) + d(a, f(x))$.

Напомним, что отображение f называется строго нерастягивающим, если $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ для любых $x, y \in X$: $x \neq y$.

Теорема 1. Предположим, что X компактно и f строго нерастягивающее отображение.

Тогда из существования зеркала вытекает существование и единственность неподвижной точки отображения f.

Доказательство. Пусть $s(x) := d(x, f(x))$ для любого $x \in X$. Согласно теореме Вейерштрасса существует такое $m \in X$, что для любого $x \in X$: $s(x) \geq s(m)$.

Пусть $A \subset X$ - зеркало. Предположим, что $f(m) \notin X$. Тогда найдется такое $a \in A$, что $d(m, f(m)) =$
$= d(m,a) + d(a, f(m))$.
При этом: $f(a) \in X$. Следовательно, $f(a) \neq f(m)$
$a \neq m$ и $s(a) = d(a, f(a)) \leq d(a, f(m)) + d(f(m), f(a)) <$
$< d(a, f(m)) + d(m,a) = d(m, f(m)) = s(m)$.
Это невозможно: $f(m) \in X$.

Но тогда $s(f(m)) = d(f(m), f(f(m))) < d(m, f(m)) =$
$= s(m)$, если $f(m) \neq m$. Следовательно, $f(m) = m$.

Единственность неподвижной точки отображения f очевидна.

Пространство Y называется выпуклым, если для любых $x, y \in Y$ $(x \neq y)$ существует такое $z \in Y$ $(z \neq x$, $z \neq y)$, что $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$.

Через $B_Y X$ обозначим границу множества X в Y.

Следствие. Предположим, что Y выпукло и полно, X компактно, f - строго нерастягивающее и $f(B_Y X)\subset X$.

Тогда f имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Согласно замечанию в [1], $B_Y X$ - зеркало.

В дальнейшем используются две небольшие модификации лемм из [2] и следующие свойства множества G отображений $g: Y \to Y$:

(1) для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $g\in G$, что для любого $y\in Y$; $d(g(y),y)<\varepsilon$.

(2) отображение $g\circ f$ имеет неподвижную точку для любого $g\in G$.

Лемма 1. Пусть X компактно, $f: X\to Y$ непрерывно и существует множество G, обладающее свойствами (1) и (2). Тогда f имеет неподвижную точку.

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1, рассмотрим отображение s и такое $m\in X$, что $s(m)\leq s(x)$ для любого $x\in X$.

Пусть $\varepsilon>0$. В силу (1) и $f(X)\subset Y$ существует такое $g\in G$, что для любого $x\in X: d(g(f(x)),f(x))<\varepsilon$.
В силу (2) существует такое $k\in X$, что $g(f(k))=k$.
Таким образом, $s(m)\leq s(k)=d(k,f(k))=d(g(f(k)),f(k))<\varepsilon$.

Заключаем, что $s(m)=0$, т.е. $f(m)=m$.

Пусть Z - линейное пространство над полем K вещественных или комплексных чисел, d - расстояние на Z, $Y\subset Z$.

Подмножество Y называется звездно-выпуклым, если существует такое $c\in Y$ (центр звезды Y), что

$\{ty+(1-t)c \mid t\in]0;1[\}\subset Y$ для любого $y\in Y$.

Расстояние d впредь будем предполагать инвариантным относительно переносов.

Лемма 2. Пусть Y - звезда.

Предположим, что в топологии, порождаемой на Z расстоянием d, Z - линейное топологическое пространство, а Y - ограничено.

Для каждого $t \in]0;1[$ и $y \in Y$ определим

$g_t(y) := ty + (1-t)c$, где c - центр звезды Y.

Тогда при любом $\alpha \in]0;1[$ множество

$G := \{g_t : Y \to Y \mid t \in]\alpha,1[\}$ удовлетворяет (1).

<u>Доказательство.</u> Пусть $\alpha \in]0;1[$ и $\varepsilon > 0$. Вследствие ограниченности множества Y существует такое $t \in]\alpha,1[$, что $(1-t)y \subset \mathcal{U}(0;\frac{\varepsilon}{2}) := \{z \in Z \mid d(z,0) < \frac{\varepsilon}{2}\}$ для любого $y \in Y$. Таким образом, для любого $y \in Y$:

$$d(g_t(y),y) = d(ty+(1-t)c, y) = d((1-t)y,(1-t)c) \leq$$

$$\leq d((1-t)y,0) + d(0,(1-t)c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Напомним, что:

1) расстояние d называется строго монотонным, если $d(tz,0) < d(z,0)$ для любых $z \in Z$ $(z \neq 0)$ и $t \in]0,1[$;

2) отображение f называется нерастягивающим, если $d(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$ для любых $x,y \in X$.

Через $I_Y X$ обозначим внутренность множества X в Y.

<u>Теорема 2.</u> Пусть d строго монотонно, Y полно, звездно-выпукло и выпукло (метрически), X компактно, f нерастягивающее отображение и $f(B_Y X) \subset I_Y X$.

Кроме того, пусть в топологии, порождаемой на Z расстоянием d, Z - линейное топологическое пространство, а Y - ограничено.

Тогда f имеет неподвижную точку.

<u>Доказательство.</u> Определим для всех $t \in]0;1[$ отображения g_t как в лемме 2.

Пусть при любом $\alpha \in]0;1[$ существует такое $t \in]\alpha,1[$, что $(g_t \circ f)(B_Y X) \not\subset X$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие $t_n \in]1-\frac{1}{n};1[$ и $x_n \in B_Y X$, что $(g_{t_n} \circ f)(x_n) \notin X$. Можно считать, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ вследствие компактности множества X сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ через x. При этом $x \in B_Y X$ и одновременно: $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} (g_{t_n} \circ f)(x_n) \notin I_Y X$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, существует такое $\alpha \in]0;1[$, что $(g_t \circ f)(B_Y X) \subset X$ для любого $t \in]\alpha;1[$.

Пусть $t \in]\alpha;1[$, $x, y \in X$: $x \neq y$. Если $f(x) = f(y)$, то $d((g_t \circ f)(x), (g_t \circ f)(y)) = 0 < d(x,y)$. Если же $f(x) \neq f(y)$, то также: $d((g_t \circ f)(x), (g_t \circ f)(y)) =$

$$= d(tf(x)+(1-t)c, tf(y)+(1-t)c) = d(t(f(x)-f(y)),0) <$$

$$< d(f(x)-f(y),0) = d(f(x),f(y)) \leq d(x,y).$$

Таким образом отображение $g_t \circ f$ строго нерастягивающее. Согласно следствию теоремы 1 оно имеет неподвижную точку. Следовательно, множество $G := \{g_t \mid t \in]\alpha;1[\}$ обладает свойством (2), а в силу леммы 2 - также свойством (1). Поэтому в силу леммы 1 получаем утверждение данной теоремы.

Теорема 2 обобщает соответствующий результат из [3].

Библиографический список

1. Assad N.A., Kirk W.A. Fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type // Pacific J. Math. 1972. V.43. P.553-562.
2. Liepiņš A. Edelstein's fixed point theorem in topological spaces // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1980. V.2. P.387-396.
3. Kirk W.A. Remarks on fixed points and boundaries // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V.87. P.62-64.

Поступила 17 мая 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 519.4

МНОГООБРАЗИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ АЛГЕБР ЛИ

Р.С.Липянский
ЛГУ им. П.Стучки

В работе рассматриваются представления алгебр Ли относительно векторных пространств над полем нулевой характеристики.

Пусть $\mathfrak{X}$ - некоторый класс таких пар. Следуя [1], определим следующие операторы на классах пар.

S : $(V,L)\in S\mathfrak{X}$, если (V,L) есть подпара некоторой пары из $\mathfrak{X}$.

Q : $(V,L)\in Q\mathfrak{X}$, если (V,L) есть эпиморфный образ некоторой пары из $\mathfrak{X}$.

C : $(V,L)\in V\mathfrak{X}$, если (V,L) есть полное прямое произведение пар из $\mathfrak{X}$.

V : $(V,L)\in V\mathfrak{X}$, если $(V,L/\mathfrak{z})\in\mathfrak{X}$, где $\mathfrak{z}$ - ядро пары (V,L).

Класс пар является многообразием пар, если он замкнут относительно этих операторов, т.е. $\{S,Q,C,V\}\mathfrak{X}=\mathfrak{X}$ (1).

Пусть $\mathfrak{X}$ - многообразие представлений алгебр Ли (лиевых пар) над полем K, θ - многообразие алгебр Ли над тем же полем и $\varphi(x)\in K[x]$. Определим класс лиевых пар $\mathfrak{X}\overset{\varphi}{\times}\theta$ по правилу: $(V,L)\in\mathfrak{X}\overset{\varphi}{\times}\theta$, если $y\circ\varphi(x)=0$ - тождество пары (V,L) и $(V,\theta^*(L))\in\mathfrak{X}$ ($\theta^*(L)$ - вербальная подалгебра алгебры L по многообразию θ). Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{X}\overset{\varphi}{\times}\theta$ - многообразие лиевских пар.

Многообразие представлений алгебраических алгебр Ли - это такое многообразие, для каждой лиевой пары которого действующая алгебра состоит из алгебраических элементов. Задача данной работы охарактеризовать многообразие представлений алгебраических алгебр Ли. Основное утверждение сводит изучение алгебраических многообразий лиевских пар к рассмотрению локально стабильных многообразий и многообразий, порожденных конечномерными алгебрами, допускающими точное неприводимое представление в $\mathfrak{X}$.

Лемма 1. Если $\mathfrak{X}$ - многообразие алгебраических представлений лиевских пар, то существует многочлен $\varphi(x)\in K[x]$ такой, что $y\circ\varphi(x)=0$ - тождество для любой пары $(V,L)\in\mathfrak{X}$.

Доказательство. Пусть $(U(F)/W, F)$ - свободная циклическая пара данного многообразия. Так как $\mathfrak{X}$ - алгебраическое многообразие, то для элемента $\ell\in F$ имеется минимальный полином $\varphi(x)$, аннулирующий ℓ . Возьмём произвольную пару $(V,L)\in\mathfrak{X}$. Так как любой элемент из L - алгебраический, то для $m\in L$ $\exists\, f_m(x)\in K[x]$ аннулирующий этот m . Покажем, что $f_m(x)$ делится на $\varphi(x)$. Для этого достаточно показать, что $\forall v\in V,\ v\circ\varphi(m)=0$. Рассмотрим отображение $\ell\longrightarrow m,\ w\longrightarrow v$, где $\ell\in F$, $m\in L,\ v\in V,\ w\in U(F)/W$. Так как $(U(F)/W, F)$ - свободная пара многообразия , данное отображение можно продолжить до гомоморфизма: $\mu:(U(F)/W,F)\to(V,L)$. Пусть $\varphi(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i x^i$. Тогда $(w\circ\varphi(\ell))^{\mu}=(\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i(w\circ\ell^i))^{\mu}=\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i(v\circ m^i)=$ $=v\circ\varphi(m)$. Так как $w\circ\varphi(\ell)=0$, то $v\circ\varphi(m)=0$ для $\forall v\in V$. Значит, $f_m(x)$ делится на $\varphi(x)$. Таким образом доказано, что $\varphi(x)$ аннулирует любой элемент из действующей алгебры Ли L , т.е. $y\circ\varphi(x)=0$ - тождество пары (V,L) .

Предложение 1. Если (V,L) - конечнопорожденная пара из многообразия алгебраических представлений алгебр Ли, то V и алгебра L - конечномерны над полем K .

Доказательство. Напомним, что пара (V,L) - конечнопорождена, если существуют такие конечные множества X и Y , $X\subset V$ и $Y\subset L$, что L порождается множеством Y , а V - минимальное L-инвариантное подпространство содержащее X . Так как L состоит из алгебраических линейных преобразований ограниченной степени (это следует из леммы 1), то каждый элемент вида $\mathrm{ad}\,\ell,\ \ell\in L$ является алгебраическим ограниченной степени ([2]). Однако, известно [2], что алгебра Ли над полем нулевой характеристики, присоединенное представление которой алгебраично ограниченной степени, локально конечномерна. Так как алгебра L порождается конечным числом образующих, то, следовательно, она конечномерна. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_m$ - базис L. Покажем, что $A(L)$ - ассоциативная оболочка алгебры L, действующей в векторном пространстве V - является конечномерной.

Действительно, $A(L) \cong \mathfrak{U}(L)/N$. Если $\varphi(x)$ - аннулирующий многочлен многообразия $\mathfrak{X}$ и $\deg\varphi(x) = m$, то элементы $e_i^k \in A(L)$ выражаются через линейные комбинации элементов $e_i, e_i^2, \dots, e_i$. Известно [4], что множество стандартных одночленов $e_1^{k_1}, e_2^{k_2}, \dots, e_n^{k_n}$; $k_i \geq 0$ образуют базис $\mathfrak{U}(L)$ и, следовательно, $e_1^{\lambda_1}, e_2^{\lambda_2}, \dots, e_n^{\lambda_n}$ при $0 \leq \lambda_i < n$ образуют базис $A(L)$. Следовательно, $A(L)$ - конечномерна.

Пусть $u_1, u_2, \dots, u_d$ - базис $A(L)$ и $x_1, x_2, \dots, x_l \in X$. Тогда пространство V пары (V, L) совпадает с линейной оболочкой $x_i \circ u_j$, $i = 1, 2, \dots, l$, $j = 1, 2, \dots, d$; т.е. $V = \langle x_i \circ u_j \rangle$. Значит, V - конечномерное пространство.

<u>Лемма 2</u>. Если $\mathfrak{X}$ - многообразие представлений алгебраических алгебр Ли, то лиевское многообразие θ, порожденное всеми конечномерными алгебрами, допускающими точные представления в классе $\mathfrak{X}$, локально конечномерно.

<u>Доказательство</u>. Обозначим через θ_0 множество алгебр с указанным в условии свойством. Тогда $\theta = \mathrm{var}\,\theta_0 = QSC\theta_0$, где C - оператор взятия полного прямого произведения алгебр, S - оператор взятия подалгебр, Q - оператор взятия гомоморфных образов. Поскольку подалгебры и гомоморфные образы локально конечномерных алгебр снова локально конечномерны, для доказательства леммы достаточно проверить, что $C\theta_0$ есть класс локально конечномерных алгебр. Пусть L_α, $\alpha \in I$ - множество алгебр из θ_0, (V_α, L_α) - соответствующие точные пары из $\mathfrak{X}$, $L = \prod_{\alpha \in I} L_\alpha$ - полное прямое произведение

алгебр L_α, Σ - конечно порожденная подалгебра из L. Надо показать, что алгебра Σ - конечномерна.

Рассмотрим для каждого $\alpha \in I$ пару $(A_\alpha, L_\alpha) = (V_\alpha^{L_\alpha}, L_\alpha)$. Возьмем в A_α элемент a_α такой, что $a_\alpha \circ l_\alpha \neq 0$ для $\forall l_\alpha \in L_\alpha$. Обозначим через (A, L) полное прямое произведение пар (A_α, V_α): $(A, L) = (\sum_{\alpha \in I} A_\alpha, \prod_{\alpha \in I} L_\alpha)$ и пусть a - элемент из A компонентами которого являются выделенные ранее элементы a_α. Для всех $l \in L$ $a \circ l \neq 0$ $(l \neq 0)$. Поэтому конечно порожденная подпара (H, Σ) из (A, L), у которой H есть минимальное Σ-допустимое подпространство из A, содержащее элемент a, является точной. Но тогда, согласно предложению 1, алгебра Σ - конечномерна (ведь по построению пара $(H, \Sigma) \in \mathfrak{X}$ - многообразию представлений алгебраических алгебр Ли).

Лемма 3. Класс $\mathfrak{X}_0$ всех локально стабильных пар из произвольного многообразия представлений алгебраических алгебр Ли $\mathfrak{X}$ есть многообразие пар.

Доказательство. Замкнутость класса $\mathfrak{X}_0$ относительно операторов S, Q, V очевидна. Проверим замкнутость $\mathfrak{X}_0$ относительно оператора C. Пусть (V_α, L_α), $\alpha \in I$ - множество локально стабильных пар из многообразия $\mathfrak{X}$ и пусть (V, L) есть полное прямое произведение пар (V_α, L_α). Покажем, что (V, L) также локально стабильна. Возьмем конечнопорожденную подпару (H, Σ) пары (V, L). Покажем, что (H, Σ) - стабильная пара. Для этого рассмотрим гомоморфизм, проектирующий (V, L) на (V_α, L_α). Он индуцирует гомоморфизм (H, Σ) на (V_α, L_α). Пусть $(H_\alpha, \Sigma_\alpha)$ - ядро этого гомоморфизма. Тогда пара $(H/H_\alpha, \Sigma/\Sigma_\alpha)$ изоморфна паре (V_α, L_α). Следовательно, пара $(H/H_\alpha, \Sigma/\Sigma_\alpha)$ и, значит, пара $(H/H_\alpha, \Sigma)$ стабильны. Ясно, что $\bigcap_{\alpha \in I} H_\alpha = 0$. Так как пара (H, Σ) - конечнопорожденная пара из многообразия представлений алгебраических алгебр, то H и Σ - конечномерна (предложение 1). Значит, существует конечное подмножество $I_0 \subset I$, что $\bigcap_{\alpha \in I_0} H_\alpha = 0$.

Далее, для каждого $\alpha \in I_0$ пара $(H/H_\alpha, \Sigma)$ финитно стабильна, и пусть n_α - длина стабильного ряда в H/H_α. Обозначим через $n = \max_{\alpha \in I_0} n_\alpha$. Тогда $[H,\Sigma,n] \subset H_\alpha$ для $\forall \alpha \in I_0$ и, значит, $[H,\Sigma,n] \subset \bigcap_{\alpha \in I_0} H_\alpha = 0$, т.е. пара (H,Σ) - финитно стабильна.

Основная теорема. Многообразие лиевских пар $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда является многообразием алгебраических представлений алгебр Ли над K ($\mathrm{char}\, K = 0$), если оно принадлежит многообразию $\mathfrak{X}_0 \overset{f}{\times} \theta$, где $\mathfrak{X}_0$ - локально стабильное многообразие лиевских пар, θ - локально конечномерное многообразие алгебр Ли, $f(x)$ - некоторый многочлен из $K[x]$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ - многообразие алгебраических представлений алгебр Ли над K, $\mathfrak{X}_0$ - класс всех локально стабильных пар из многообразия $\mathfrak{X}$, по лемме 3 являющийся многообразием, θ - локально конечномерное многообразие алгебр Ли, определенное в лемме 2. Покажем, что $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_0 \times \theta$. Возьмем конечнопорожденную пару $(V,L) \in \mathfrak{X}$ В силу алгебраичности многообразия $\mathfrak{X}$ эта пара конечномерна, т.е. V и L - конечномерны над K. Возьмем в V конечный L-композиционный ряд: $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{i-1} \subset \subset V_i \subset \ldots \subset V_n = V$. Обозначим через $\mathfrak{J}_i$ ядро пары $(V_i/V_{i-1}, L)$ $i = 1,2,\ldots,n$. Тогда $(V_i/V_{i-1}, L/\mathfrak{J}_i)$ - точная неприводимая пара из $\mathfrak{X}$. Так как $L/\mathfrak{J}_i$ - конечномерная алгебра, то вербальная подалгебра $\theta^*(L)$ алгебры L по многообразию θ принадлежит $\mathfrak{J}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, а значит и алгебре $\mathfrak{J} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{J}_i$, $\mathfrak{J}$ действует нулевым образом в каждом факторе взятого L-композиционного ряда, значит пара $(V, \theta^*(L))$ - финитно стабильна, т.е. принадлежит $\mathfrak{X}_0$. По определению это означает, что $(V,L) \in \mathfrak{X}_0 \overset{f}{\times} \theta$. Так как $\mathfrak{X}_0 \overset{f}{\times} \theta$ есть многообразие и так как правильная конечно порожденная пара из $\mathfrak{X}$ принадлежит $\mathfrak{X}_0 \overset{f}{\times} \theta$, то и все многообразие $\mathfrak{X}$ принадлежит $\mathfrak{X}_0 \overset{f}{\times} \theta$.

Обратное утверждение, т.е. $\mathfrak{X}_0 \overset{f}{\times} \theta$ является многообразием алгебраических представлений алгебр Ли, следует из определения операции $\overset{\circ}{\times}$. Отметим в заключение, что подобные результаты в случае поля характеристики p ,по-видимому,неверны. Неизвестно также справедливо ли основное утверждение работы в случае рассмотрения многообразия представления алгебраических групп. Однако для локально ограниченных многообразий групповых пар результаты данной работы остаются справедливыми [3].

Библиографический список

1. Плоткин Е.И. Групповые многообразия и многообразия пар, связанных с представлением групп.// Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13. № 5. С. 1030-1053.
2. Зельманов Е.И. Алгебры Ли с алгебраическим присоединенным представлением.// Мат. сб. 1963. 121. № 4. С. 545-561.
3. Гринглаз Л.Я. О локально ограниченных многообразиях пар // Некоторые вопросы теории групп. Рига, 1971. С. 19-26.
4. Джекобсон И. Алгебры Ли. М.: ИЛ, 1967.

Поступила 5 мая 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 519.21

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ УБЫВАНИЕ МАРКОВСКИХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СЕМЕЙСТВ НА ПОЛУКОМПАКТЕ

С.Л.Роголь, Е.Ф.Царьков
РПИ

Пусть $\{y(t)=y(t,\omega), t\in\mathbb{R}_+, \omega\in\Omega\}$ - однородный феллеровский стохастически непрерывный консервативный необрывающийся марковский процесс на пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, принимающий значения из метрического фазового пространства $(\mathcal{Y}, \Sigma_{\mathcal{Y}})$ с переходной функцией $P(t,y,\Gamma)$, $t\in\mathbb{R}_+$, $y\in\mathcal{Y}$, $\Gamma\in\Sigma_{\mathcal{Y}}$ [1].

Рассмотрим дифференциальное уравнение в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(y(t))x(t), \tag{1}$$

где $\{A(y), y\in\mathcal{Y}\}$ - непрерывная матричная функция, принимающая значения из $M_n(\mathbb{R})$.

Обозначим $B_n(\mathcal{Y})$ пространство бэровских n-мерных вектор-функций с нормой $\|\sigma\|=\sup\limits_{y\in\mathcal{Y}}|\sigma(y)|$, $C_n(\mathcal{Y})$ - подпространство непрерывных ограниченных элементов пространства $B_n(\mathcal{Y})$. Случай, когда $\mathcal{Y}$ - компакт, а марковский процесс $y(t)$ феллеровский, то есть такой, что соответствующая ему сжимающая полугруппа линейных операторов в $B_1(\mathcal{Y})$

$$T_t g(y)=\int_{\mathcal{Y}} P(t,y,dz)g(z), \quad g\in B_1(\mathcal{Y}) \tag{2}$$

оставляет инвариантным подпространство $C_1(\mathcal{Y})$, рассмотрен в [2]. В [2] описаны алгоритмы нахождения k-моментных показателей Ляпунова для уравнений вида (1), а также метод исследования этих уравнений на устойчивость в среднем квадратичном. Целью данной работы является получение аналогичных результатов для случая, когда $\mathcal{Y}$ - полукомпакт.

Говорят, что функция $v \in C_n(\mathcal{Y})$ "имеет предел 0 на бесконечности" и пишут $\lim\limits_{y\to\infty} v(y)=0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется компакт $K_\varepsilon \subset \mathcal{Y}$ такой, что $|v(y)|<\varepsilon$ для всех $y \in \mathcal{Y}\setminus K_\varepsilon$. Обозначим $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$ - подпространство таких элементов из $C_n(\mathcal{Y})$.

В дополнение к феллеровости марковского процесса $y(t)$ будем требовать также, чтобы соответствующая ему сжимающая полугруппа T_t, определенная в (2), оставляла инвариантным и подпространство $\hat{C}_1(\mathcal{Y})$.

При всех $t \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathcal{Y}$ и $v \in B_n(\mathcal{Y})$ определим операторы

$$(S_t v)(y)=E_y\{X^T(t)v(y(t))\}, \tag{3}$$

где $X(t)$ -- матричное решение уравнения (1) по начальным условиям $X(0)=I$ (матрицант), а $E_y\{\cdot\}$ - операция математического ожидания при условии, что $y(0)=y$.

<u>Теорема</u>. Семейство операторов $\{S_t,\ t\in\mathbb{R}_+\}$ образует полугруппу на $B_n(\mathcal{Y})$, оставляющую инвариантным $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$. Сужения этих операторов на $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$ образуют полугруппу класса (C_0) с генератором $\mathcal{L}$, задаваемым равенством

$$(\mathcal{L}v)(y)=A^T(y)v(y)+(\hat{A}v)(y), \tag{4}$$

где $\hat{A}$ - $\hat{C}$-инфинитезимальный оператор марковского процесса $y(t)$ [1], применяемый к вектору $v(y)$ покоординатно.

<u>Доказательство</u>. Доказательство полугруппового свойства семейства $\{S_t\}$ аналогично доказательству этого свойства, когда $\mathcal{Y}$ - компакт, приведенному в [2].

В силу равномерной по $y\in\mathcal{Y}$ ограниченности $\|A(y)\|$ для $X(t)$ имеет место оценка $\|X(t)\| \leqslant e^{kt}$, где k - некоторая постоянная, и справедливо неравенство

$$|E_y\{X(t)v(y(t))\}| \leqslant e^{kt}E_y\{|v(y(t))|\}$$

при каждом $t \geqslant 0$. Обозначим $\omega(y)=E_y\{|v(y(t))|\}$. В силу налагаемых на $y(t)$ ограничений функция $\omega=\{\omega(y),\ y\in\mathcal{Y}\}$ является элементом $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$. Отсюда следует инвариантность подпространства $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$ относительно операторов S_t.

Так как $X(t)v(y(t))$ для каждого $t \geq 0$ ограничено равномерно по $y \in \mathcal{Y}$, то для всех $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{y \in \mathcal{Y}} |x^T E_y \{x(t) v(y(t))\} - x^T I v(y)| = 0$$

(здесь использовалась стохастическая непрерывность процесса $\{y(t), x(t)\}$). Таким образом, доказана принадлежность сужения полугруппы $\{S_t\}$ на $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$ классу (C_0).

Из [1] известно, что для того чтобы линейный оператор $\mathcal{L}$ был инфинитезимальным оператором некоторой непрерывной в банаховом пространстве B сжимающей полугруппы S_t, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

(А) область определения оператора $\mathcal{L}$ всюду плотна в B (в сильной топологии);

(Б) уравнение $\mathcal{L}f - \lambda f = g$ имеет решение $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$ для всех $g \in B$ и всякого $\lambda > 0$;

(В) $\|\lambda f - \mathcal{L}f\| \geq \|\lambda f\|$ для любых $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{L})$ и $\lambda > 0$.

В силу того, что $\hat{A}$ замкнут [1], а умножение на непрерывную ограниченную равномерно по y матрицу $A(y)$ элементов $C_n(\mathcal{Y})$ является линейным непрерывным оператором, условие (А) выполнено. При всех действительных $\lambda > \sup_{y \in \mathcal{Y}} \|A(y)\| \triangleq a$ и любом $g \in \hat{C}_n(\mathcal{Y})$ уравнение $\mathcal{L}f - \lambda f = g$ имеет решение, потому что спектр оператора $\hat{A}$ расположен в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$ [1]. То, что (Б) выполняется при $\lambda > a$, а не при $\lambda > 0$ не существенно, так как вместо полугруппы $\{S_t\}$ можно рассматривать полугруппу $\{e^{-at} S_t\}$. Аналогичное замечание можно сделать относительно условия (В). Таким образом, $\mathcal{L}$ является генератором непрерывной полугруппы $e^{t\mathcal{L}}$ на $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$.

При каждом $v \in \mathfrak{D}(\hat{A})$ и всех $t \in [0, \Delta]$ равномерно по $y \in \mathcal{Y}$

$$(S_t v)(y) = (I + \int_0^t E_y (A^T(y(\tau)) d\tau\, v(y)) + t(\hat{A} v)(y) + o(\Delta).$$

Следовательно, производящие операторы полугрупп S_t и $e^{t\mathcal{L}}$ совпадают на плотном в $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$ множестве $\mathfrak{D}(\hat{A})$, а тогда при всех $t \geq 0$ сужение S_t на $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$ совпадает с $e^{t\mathcal{L}}$. Теорема доказана.

Обозначим $P_t(\Gamma, G)$ вероятностную меру на $\mathcal{Y}\times\mathbb{R}^n$, заданную парой случайных величин $(y(t), x(t))$ и определим на множествах $\Gamma\in\Sigma_{\mathcal{Y}}$ векторно-значную меру

$$\varphi_t(\Gamma)=\int_{\mathbb{R}^n} x P_t(\Gamma, dx). \tag{6}$$

для случая, когда $\mathcal{Y}$ - полукомпакт, приведенные в [2] леммы и следствия переформулируются в следующем виде.

Лемма 1. При всех $x\in\mathbb{R}^n$, $\phi\in\hat{C}_n(\mathcal{Y})$ и $t\in\mathbb{R}_+$ выполняется равенство

$$\int_{\mathcal{Y}}\varphi_t^T(dy)\phi(y)=x^T\int_{\mathcal{Y}}(S_t\phi)(y)\hat{\varphi}_0(dy), \tag{7}$$

где $\hat{\varphi}_0(\Gamma)=P(y(0)\in\Gamma)$.

Следствие 1. Семейство векторно-значных мер (6) задается при помощи непрерывной в (*)-слабой топологии пространства $\hat{C}_n(\mathcal{Y})$ полугруппы со слабым производящим оператором $\mathcal{L}^*$, который задается равенством

$$\int_{\mathcal{Y}}(\mathcal{L}^*\varphi^T)(dy)\phi(y)\triangleq\int_{\mathcal{Y}}\varphi^T(dy)A^T(y)\phi(y)+\int_{\mathcal{Y}}(\hat{A}^*\varphi^T)(dy)\phi(y). \tag{8}$$

Следствие 2. Для первого момента $M_1(t)$ решения задачи Коши $x(0)=x$ уравнения (1) при начальном распределении марковского процесса $\hat{\varphi}_0(\Gamma)=P(y(0)\in\Gamma)$ можно записать:

$$M_1(t)\triangleq E\{x(t)\}=\int_{\mathcal{Y}}(S_t^*\varphi_0)(dy), \tag{9}$$

где $\varphi_0(dy)=x\hat{\varphi}_0(dy)$.

Следствие 3. Матрица вторых моментов $M_2(t)$ решения задачи Коши $x(0)=x$ уравнения (1) при начальном распределении марковского процесса $\hat{\varphi}_0(\Gamma)=P(y(0)\in\Gamma)$ задается равенством

$$M_2(t)\triangleq E\{x(t)x^T(t)\}=\int_{\mathcal{Y}}(V_t^*\Phi_0)(dy), \tag{10}$$

где $\Phi_0(dy)=xx^T\hat{\varphi}_0(dy)$, а полугруппа $\{V_t^*, t\in\mathbb{R}_+\}$ линейных непрерывных операторов на $\hat{C}^*(\mathcal{Y}\to M_n(\mathbb{R}))$ (*)-слабо непрерывна и задается своим (*)-слабым производящим оператором $\mathcal{L}_2^*$. Оператор $\mathcal{L}_2$ определяется соотношением

$$(\mathcal{L}_2 v)(y) \triangleq A^T(y)v(y)+v(y)A(y)+(\hat{A}v)(y) \tag{11}$$

при условии, что $v \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_2) \subset \hat{C}(\mathcal{Y} \to M_n(\mathbb{R}))$.

Аналогично можно определить полугруппы, задающие моменты $M_k(t)$ более высоких порядков.

Определение. Тривиальное решение (1) называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном, если для всех $y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ существуют такие положительные числа K и γ, что

$$E_{y,x}\{|x(t)|^2\} \leq K e^{-\gamma t}.$$

Следствие 4. Тривиальное решение (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда для спектра $\sigma(\mathcal{L}_2)$ оператора $\mathcal{L}_2$ справедливо включение $\sigma(\mathcal{L}_2) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$.

Назовем

$$\Lambda_k = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{1}{t} \ln \|M_k(t)\|$$

верхним k-моментным показателем Ляпунова для (1). Ясно, что "средний" верхний показатель Ляпунова ($k=1$) определяется равенством

$$\Lambda_1 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \|S_t\|$$

а "среднеквадратичный" ($k=2$) - равенством

$$\Lambda_2 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \|V_t\|.$$

Используя положительность [2] операторов V_t, можно показать, что $\Lambda_2 = \sup\limits_{z \in \sigma(\mathcal{L}_2)} \operatorname{Re} z$.

Описанный в [2] вариант метода теории возмущений (в случае $A(y)=A_0+\varepsilon A_1(y)$, где $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, ε_0 - достаточно малое положительное число) для анализа спектра производящих операторов соответствующих полугрупп применим и для ситуации, когда $\mathcal{Y}$ - полукомпакт.

Оператор $\mathcal{L}$, определенный в (4), представляется в виде $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 + \varepsilon \mathcal{L}^1$, где линейный непрерывный оператор $\mathcal{L}^1 : \hat{C}_n(\mathcal{Y}) \to \hat{C}_n(\mathcal{Y})$ определяется равенством $(\mathcal{L}^1 v)(y) = A_1^T(y)v(y)$, а оператор $\mathcal{L}^0 : \mathfrak{D}(\mathcal{L}_0) \to \hat{C}_n(\mathcal{Y})$ - равенством $(\mathcal{L}^0 v)(y) = A_0^T v(y) + (\hat{A} v)(y)$.

Лемма 2. Пусть спектр оператора $\hat{A}$ допускает представление $\sigma(\hat{A})=\{0\}\cup\hat{\sigma}(\hat{A})$, причем нуль является простой точкой спектра, а $\hat{\sigma}(\hat{A})\subset\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\lambda<-\rho<0\}$. Если $\lambda\in\sigma(A_0)\setminus\hat{\sigma}(\hat{A})$, то $\lambda\in\sigma(\mathcal{L}^0)$ и отвечающее этому собственному значению корневое подпространство W_λ оператора A_0^T в $\mathbb{C}^n$ является корневым подпространством продолжения оператора $\mathcal{L}^0$ в $C(\mathcal{Y}\to\mathbb{C}^n)$, отвечающим тому же собственному значению.

Лемма 3. В условиях леммы 2 существует положительное число ε_0 такое, что при всех $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ пространство $C(\mathcal{Y}\to\mathbb{C}^n)$ разлагается в прямую сумму инвариантных относительно $\{S_t,t\in R_+\}$ подпространств

$$C(\mathcal{Y}\longrightarrow\mathbb{C}^n)=W_\lambda(\varepsilon)\oplus\check{W}_\lambda(\varepsilon). \tag{12}$$

Проектор $P_\lambda(\varepsilon)$ в W_λ разлагается в ряд Маклорена по ε, причем $P_\lambda(0)C(\mathcal{Y}\to\mathbb{C}^n)=W_\lambda$, где W_λ из леммы 2.

В подпространстве $\tilde{W}_\lambda(\varepsilon)=\bigcup\limits_{\lambda\in\sigma(A_0)}W_\lambda(\varepsilon)$ пространства $C(\mathcal{Y}\longrightarrow\mathbb{C}^n)$ всегда можно выделить действительный базис, и затем, взяв его оболочку, перейти к действительному конечномерному пространству $W(\varepsilon)$, соответствующему всем собственным значениям матрицы A_0^T. Это подпространство действительно и инвариантно относительно полугруппы $\{S_t,t\in R_t\}$. Отсюда

Следствие 5. Если выполнены условия леммы 2 и $\sigma(A_0)\cap\hat{\sigma}(\hat{A})=\emptyset$, то существуют $\varepsilon_0>0$ и разложение $\hat{C}_n(\mathcal{Y})=W(\varepsilon)\oplus\check{W}(\varepsilon)$ такие, что при всех $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ $W(\varepsilon)$ инвариантно относительно $\{S_t,t\in R_+\}$ и проектор $P(\varepsilon)$ в $W(\varepsilon)\subset\hat{C}_n(\mathcal{Y})$ разлагается в ряд Маклорена по ε.

Поскольку $W(0)=R^n$, то следствие 5 позволяет при всех $x\in R^n$, $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ первый момент решения (1) представить в форме $M_1(t)=m(t)+\hat{M}(t)$, где $\{\hat{M}(t),t\in R_+\}$ допускает оценку

$$|\hat{M}(t)|<Ne^{-\rho t}|x|,$$

а $\{m(t),t\in R_+\}$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению в R^n:

$$\frac{dm}{dt}=\bar{A}(\varepsilon)m, \tag{13}$$

причем $\bar{A}(\varepsilon)=\bar{A}_0+\varepsilon\bar{A}_1+\varepsilon^2\bar{A}_2+\ldots$. Опишем алгоритм отыскания матриц $\bar{A}_j$. При достаточно малом ε_0 базис $\{f_1^\varepsilon(y), f_2^\varepsilon(y),\ldots,f_n^\varepsilon(y)\}=\vec{F}^\varepsilon(y)$ в $W(\varepsilon)$ задается равенством $\vec{F}^\varepsilon=P(\varepsilon)I$ и поэтому его можно представить в виде ряда $\vec{F}^\varepsilon(y)=I+\varepsilon\vec{F}_1(y)+\varepsilon^2\vec{F}_2(y)+\ldots$. Поскольку при всех $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ пространство $W(\varepsilon)$ инвариантно относительно $\mathcal{L}(\varepsilon)\triangleq\mathcal{L}^0+\varepsilon\mathcal{L}^1$, то при всех $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ должно выполняться равенство

$$(A_0^T+\hat{A}+\varepsilon\mathcal{L}^1)(I+\varepsilon\vec{F}_1+\varepsilon^2\vec{F}_2+\ldots)=(I+\varepsilon\vec{F}_1+\varepsilon^2\vec{F}_2+\ldots)(\bar{A}_0^T+\varepsilon\bar{A}_1^T+\varepsilon^2\bar{A}_2^T+\ldots).$$

Отсюда получаем $\bar{A}_0=A_0$ и уравнения

$$A_0^T\vec{F}_1(y)-\vec{F}_1(y)A_0^T+\hat{A}\vec{F}_1(y)=\bar{A}_1^T-A_1^T(y), \tag{14}$$

$$A_0^T\vec{F}_2(y)-\vec{F}_2(y)A_0^T+\hat{A}\vec{F}_2(y)=\bar{A}_2^T+\vec{F}_1(y)\bar{A}_1^T-\bar{A}_1^T(y)\vec{F}_1(y) \tag{15}$$

и т.д. При проверке условия нормальной разрешимости можно пользоваться базисом $\vec{F}^*=Ip(dy)$ в подпространстве $P^*(0)\hat{C}_n^*(\mathcal{Y})$, где $p(dy)$ - единственная инвариантная мера оператора $\hat{A}^*$. Отсюда находим

$$\bar{A}_1=\int_{\mathcal{Y}}A_1(y)p(dy),$$

а затем $\vec{F}_1(y)$ из уравнения (14). Анализ (15) дает

$$\bar{A}_2^T=\int_{\mathcal{Y}}(A_1^T(y)\vec{F}_1(y)-\vec{F}_1(y)\bar{A}_1^T)p(dy)$$

и тогда можно найти $\vec{F}_2(y)$ из (15) и т.д. Этот алгоритм близок к результатам работы [3] . Он позволяет уравнение с марковскими коэффициентами (1) в некотором смысле привести к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{dm}{dt}=\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\bar{A}_k\Big)m. \tag{16}$$

Если матрица в правой части (1) может быть представлена в форме равномерно сходящегося ряда

$$A(y)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(y),$$

то описанная выше методика также пригодна. Следует только внести очевидные уточнения в формулы для вычисления матриц $\bar{A}_k$. Например, при $k=2$:

$$\bar{A}_2^T=\int_{\mathcal{Y}}(A_1^T(y)\vec{F}_1(y)-\vec{F}_1(y)\bar{A}_1^T+A_2(y))p(dy). \tag{17}$$

Из приведенных выше построений следует, что для уравнений, близких к стационарным, можно записать:

$$\Lambda_1 \triangleq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} |M_1(t)| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} |m(t)| = \sup\{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(\bar{A}(\varepsilon))\}. \quad (18)$$

Аналогично можно выписать верхний показатель Ляпунова Λ_2 для вторых моментов.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + (1 + \varepsilon\cos y(t))x = 0, \quad (19)$$

где $\{y(t), t \in \mathbb{R}_+\}$ - марковский процесс на прямой $\mathcal{Y} = (-\infty, +\infty)$ $\hat{C}$ -инфинитезимальный оператор которого задается равенством

$$\hat{A}v = \omega\frac{dv}{dy} + \sigma^2\frac{d^2v}{dy^2}. \quad (20)$$

Оператор $\mathcal{L}_2$, определенный в (11) в нашем случае является дифференциальным оператором с периодическими коэффициентами. Поэтому, как и в случае $\mathcal{Y} = [0, 2\pi]$ [2],

$$\Lambda_2 = \varepsilon^2 \frac{\sigma^2(4 + \omega^2 + \sigma^4)}{(4 - \omega^2 + \sigma^4)^2 + 4\omega^2\sigma^4} + o(\varepsilon^2).$$

Библиографический список

1. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М., 1963.
2. Царьков Е.Ф. Марковские возмущения параметров линейных дифференциальных уравнений // Эргодические теоремы и марковские процессы. Киев, 1987. С. 25-42.
3. Хрисанов С.М. Моментные методы в дифференциальных уравнениях. Киев, 1981. Рукопись деп. в ВИНИТИ 19.03.81, № 1245.

Поступила 25 апреля 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 517.934

МЕТОД ВАЖЕВСКОГО И ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Ф.Ж.Садырбаев
ЛГУ им. П.Стучки

1. Рассматривается краевая задача

$$x'' = f(t,x), \quad x \in R^2, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &(x_1(0), x_2(0), x_1'(0), x_2'(0)) \in Z_0, \\ &(x_1(1), x_2(1), x_1'(1), x_2'(1)) \in Z_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где функции $f: R^3 \to R^2$ однократно дифференцируемы в пространстве R^3. Краевым задачам вида (1), (2) посвящена обширная литература в случае одного уравнения - скалярной задачи (см. [1] и приведенную там библиографию). Значительно хуже изучены краевые задачи для систем высших порядков.

Основной вопрос, возникающий при исследовании краевых задач - это вопрос о существовании решения. Для доказательства разрешимости используются различные методы, в основном топологического характера. Метод Важевского использовался при доказательстве разрешимости краевых задач в скалярном случае в [2], гл. 3.

Цель настоящей статьи - рассмотрение вопроса о применимости метода Важевского к доказательству теорем существования в случае задачи (1), (2).

2. Основные определения и факты, относящиеся к методу Важевского, приводятся по книге [2], гл. 3.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$

где $f \in C(\Omega, R^n)$, Ω - открытое множество в R^{n+1}. Пусть Ω_0 - открытое в Ω множество с границей $\partial\Omega_0$ и замыканием $\overline{\Omega}_0$.

Определение 1. Точка $(t_0, x_0) \in \Omega \cap \partial\Omega_0$ называется точкой выхода из Ω_0 относительно системы (3), если для любого решения x системы (3) существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(t, x(t)) \in \Omega_0$ при $t_0 - \varepsilon \leq t < t_0$.

Точка выхода называется точкой строгого выхода, если $(t, x(t)) \notin \overline{\Omega}_0$ при $t_0 < t \leq t_0 + \varepsilon$ для малых $\varepsilon > 0$.

Будем обозначать множество точек выхода (строгого выхода) символом S (S^*).

Определение 2. Пусть $A \subset B$ - некоторое множество топологического пространства. Пусть $\varphi : B \to A$ - непрерывное отображение, при котором $\varphi(y) = y$ для любого $y \in A$.

Тогда φ называется ретракцией B на A . Если существует ретракция B на A , A называется ретрактом B .

Теорема 1 (Важевского). Пусть f, Ω, Ω_0 - описанные выше функции и множества и выполняются условия:

1) Через любую точку Ω проходит единственное решение системы (3).

2) Все точки выхода из Ω_0 являются точками строгого выхода.

3) Множество $Z \subset \Omega_0 \cup S$ таково, что $Z \cap S$ является ретрактом S , но не является ретрактом Z .

Тогда существует по крайней мере одна точка $(t_0, x_0) \in Z \cap \Omega_0$ такая, что соответствующее решение системы (3) остается в Ω_0 на своем максимальном интервале существования вправо от t_0 .

3. Пусть функция $f : R^5 \to R^4$ удовлетворяет условиям однозначной разрешимости задачи Коши, например, имеет непрерывные частные производные по всем своим переменным. Пусть $\Omega = R^5 \cap \{t > 0\} \setminus Z_1$. Множество Ω является относительно открытым в 5-мерном полупространстве $t > 0$. Пусть множество Ω_0 имеет вид $\Omega_0 = \omega \times R^2$, где ω - ограниченное открытое множество в $[0,1] \times R^2$, сечение которого ω_t плоскостью $\tau = t$ непусто при каждом $t \in (0,1)$. Обозначим символом S (S^*) множество точек выхода (точек стогого выхода) из Ω_0 относительно системы (1).

Теорема 2. Пусть, кроме перечисленных выше условий,

$S = S^*$, $\Xi_0 \subset \Omega_0 \cap \{t=0\}$ и множество $\Xi_0 \cap S$ является ретрактом S, но не является ретрактом Ξ_0.

Тогда существует решение задачи (1), (2), график которого принадлежит $\overline{\omega}$.

<u>Доказательство</u>. Все условия теоремы Важевского относительно системы (1) и множеств Ω, Ω_0, Ξ_0 выполнены. Следовательно, существует решение системы (1) с начальными данными в Ξ_0, остающееся в Ω_0 на максимальном интервале существования. Под решением здесь понимается 4-мерный вектор $k(t) = (x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t))$.

Предположим, что данное решение не удовлетворяет второму из краевых условий (2). Тогда либо $t_{max} < 1$, либо $t_{max} = 1$, но $k(1) \notin \Xi_1$.

Первое возможно лишь в случае, когда $x_1'^2 + x_2'^2 \to \infty$ при $t \to t_{max}$. Это означало бы, что величина $x_1''^2 + x_2''^2$ также становится неограниченной при $t \to t_{max}$, так как $x_1'' = f_1(t, x_1, x_2)$, $x_2'' = f_2(t, x_1, x_2)$ остаются ограниченными при ограниченных (x_1, x_2). Но график решения (x_1, x_2) остается в ω при $0 < t < t_{max}$.

Невозможен также второй случай, поскольку аналогично предыдущему устанавливается, что производные x_1', x_2' конечны в $t = 1$ и, следовательно, решение можно продолжить в Ω, что противоречит максимальности интервала существования решения.

Остается единственная возможность $k(1) \in \Xi_1$.

Доказательство завершено.

4. Приведем пример применения результатов и методики предыдущего параграфа.

<u>Теорема 3</u>. Пусть функции $\alpha, \beta \in C^2_2([0,1], R)$ таковы, что

1) $\alpha_i < \beta_i$, $i = 1, 2$, $t \in [0,1]$;

2) $\alpha_1'' > f_1(t, \alpha_1, x_2)$, $\beta_1'' < f_1(t, \beta_1, x_2)$,

$\alpha_2'' > f_2(t, x_1, \alpha_2)$, $\beta_2'' < f_2(t, x_1, \beta_2)$,

где $(t, x) \in \omega = \{(t,x) : 0 < t < 1,\ \alpha_i \le x_i \le \beta_i,\ i = 1, 2\}$;

3) $\Xi_0 = \{x'(0) = A\}$, $\Xi_1 = \{x'(1) = B\}$,

причем

$$\beta_1'(0)\leq x_1'(0)=A_1\leq\alpha_1'(0),\ \beta_2'(0)\leq x_2'(0)=A_2\leq\alpha_2'(0),$$
$$\beta_1'(1)\geq x_1'(1)=B_1\geq\alpha_1'(1),\ \beta_2'(1)\geq x_2'(1)=B_2\geq\alpha_2'(1).$$

Тогда существует решение задачи (1), (2), удовлетворяющее условию $(t,x(t))\in\omega\ \ \forall t\in[0,1]$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что касание изнутри графика решения $(t,x(t))$ поверхностей ограничивающих область ω невозможно. Пусть например, $x_1(t_0)=\beta_1(t_0)$,
$x(t)\leq\beta_1(t),\ \alpha_2(t)\leq x_2(t)\leq\beta_2(t),\ |t-t_0|<\varepsilon$,
где ε - малое число. Поскольку $x_1''(t)=g(t,x(t))=f_1(t,x_1(t_1),x_2(t))$, имеет место касание $x_1(t)$ к $\beta_1(t)$ изнутри плоской области $\{x<\beta_1\}$, что невозможно для скалярных уравнений второго порядка, обладающих свойством однозначной разрешимости задачи Коши [4]. Здесь использованы условия 2) теоремы.

Наряду с фактом ограниченности x_1'', x_2'' при ограниченных x_1, x_2 это означает, что $S=S^*$.

Множество точек выхода S состоит из следующих составляющих:

$\{0\leq t\leq 1,\ x=\alpha,\ x'\leq\alpha'\}$,

$\{0\leq t\leq 1,\ x=\beta,\ x'\geq\beta'\}$,

$\{t=1,\ x\in \mathrm{Int}\,\omega_1,\ x'\in R^2\}\setminus Z_1$.

Положим $\Omega=\{(t,x,y):t\geq 0\}\setminus Z_1,\ \Omega_0=\omega\times R^2$,
$Z_0\cap S=\{t=0;\ x=\alpha(0),\ x'=A\}\cup\{t=0,\ x=\beta(0),\ x'=A\}$.

В силу условий 3 множество $Z_0\cap S$ является ретрактом S, но не является ретрактом множества Z_0, поскольку невозможно непрерывное отображение прямоугольника ω_0 на его границу.

Следовательно, существует решение, остающееся в Ω_0 на максимальном интервале существования. Учитывая, что производные x_1', x_2' не могут бесконечно возрастать при ограниченных x_1, x_2, заключаем, что существует решение x с $x_2'=B$, что и требовалось доказать.

5. В более общих ситуациях множество ω может задаваться с помощью скалярной функции $\varphi:[0,1]\times R^n\to R$, имеющей непрерывные частные производные до второго порядка включительно,

$\omega = \{(t, x, y) : \psi < 0\}$.

Для функций f, не зависящих от производных x', особое значение приобретает описание "боковых" точек выхода, т.е. точек выхода, лежащих на поверхности $\partial\omega$, удовлетворяющей уравнению $\psi = 0$. Легко видеть, что множество таких точек должно удовлетворять соотношениям $\psi(t,x,y) = 0$, $\psi'_t(t,x,y) > 0$, где $\psi'_t(t,x,y)$ – полная формальная производная первого порядка функции ψ в силу системы (1). При этом все точки выхода из Ω_0 должны быть точками строгого выхода. Это будет иметь место, если выполняется следующий геометрический факт: касание границы множества ω траекториями системы (1) может происходить только изнутри области ω.

Это является обобщением соответствующего свойства плоских областей, образованных так называемыми нижней и верхней функциями, хорошо известными в теории скалярных краевых задач ([1]).

Указанный геометрический факт имеет место для области ω и системы (1), если из $\psi(t_0, x_0, y) = 0$, $\psi'(t_0, x_0, y) = 0$ следует $\psi''(t_0, x_0, y) > 0$, где ψ', ψ'' – полные формальные производные функции ψ в силу системы (1) соответственно первого и второго порядков.

Функции ψ, обладающие указанным свойством, являются естественным обобщением на случай $n > 1$ понятий нижней и верхней функций для скалярной задачи. На этот факт впервые обратил внимание Х.Кноблох [3].

6. В заключение рассмотрим скалярную задачу

$$x'' = f(t, x), \quad t \in [0,1], \tag{4}$$

$$(t_1, x(t_1), x'(t_1)) \in S_1, \quad (t_2, x(t_2), x'(t_2)) \in S_2, \tag{5}$$

где $f \in C^1(R^3, R)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть выполняются условия:

1) существуют нижняя и верхняя функции
$\alpha, \beta \in C^2([0,1], R)$, $\alpha < \beta$,
$\alpha'' > f(t, \alpha, \alpha')$, $\beta'' < f(t, \beta, \beta')$;

2) S_1, S_2 – связные замкнутые множества в $\omega \times R$ такие, что

$\sup\{t: \exists (t,x,y)\in S_1\}<1,$

$S_1\cap\{t,\ x=\beta,\ x'>\beta'\}\neq\phi,\quad S_1\cap\{t,\ x=\alpha,\ x'\leqslant\alpha'\}\neq\phi,$

$S_2\cap\{1,\ x=\beta,\ x'<\beta'\}\neq\phi,\ S_2\cap\{1,\ x=\alpha,\ x'>\beta'\}\neq\phi,$

$\omega=\{(t,x): 0<t\leqslant 1,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta\}.$

Тогда существует решение задачи (4), (5).

<u>Доказательство</u>. Пусть $\Omega_1=\{(t,x,y): t\geqslant 0\}\setminus S_2$, $\Omega_0=\{(t,x,y): 0<t\leqslant 1, \alpha<x<\beta, |y|<R\}$.

В данном случае в силу результатов из [4] и независимости функции f от x' множество точек выхода из Ω_0 совпадает со множеством точек строгого выхода S. Множество S состоит из

$\{(t,\beta,y): 0<t\leqslant 1,\ y\geqslant\beta'\},$

$\{(t,\alpha,y): 0<t\leqslant 1,\ y\leqslant\alpha'\},$

$\{t=1,\ \alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ |y|<R\}\setminus S_2.$

Легко видеть, что множество $S\cap S_1$ является ретрактом S, но не является ретрактом S_1, так как состоит более чем из одной компоненты.

Библиографический список

1. Клоков Ю.А., Васильев Н.И. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига: Зинатне, 1978. 183 с.
2. Bernfeld S.R., Lakshmikantham V. On Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems. New Yorke & London: Academic Press. 1974. 386 p.
3. Knobloch H.W. Boundary value problems for systems of nonlinear differential equations. "Lect. Notes Math.", 1979. N 703. p. 197-204.
4. Jackson L., Schrader K. Comparison Theorems for Nonlinear Diff. Equations. 1967. v. 3. N 2. p. 248-255.

Поступила 26 февраля 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 515.12

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.М.Ульянов
Московский химико-технологический институт

Пусть K – недискретное нормированное поле, E_1 и E_2 – нормированные линейные пространства над полем K, $L_1(E_1; E_2)$ – множество непрерывных линейных операторов $A: E_1 \to E_2$ с топологией сходимости по норме $\|A\| = \sup\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}: x \in E_1 \setminus \{0\}\}$ (для упрощения записи будем использовать одни и те же символы для обозначения всех нулевых и всех единичных элементов, а также всех норм). По определению базу топологии пространства $L_1(E_1; E_2)$ образуют ε-шары $\mathcal{U}_\varepsilon(A_0) = \{A \in L_1(E_1; E_2): \|A - A_0\| < \varepsilon\}$, где $A_0 \in L_1(E_1; E_2)$ и $\varepsilon > 0$. Для натурального $n > 1$ по индукции определяем $L_n(E_1; E_2) = L_1(E_1; L_{n-1}(E_1; E_2))$.

Предположим, что существует такое число $C \geq 1$, что для каждого ненулевого вектора $x \in E_1$ можно найти такой линейный функционал $\varphi_x \in L_1(E_1; K)$, что

$$\varphi_x x = 1 \text{ и } \|\varphi_x\| \leq \frac{C}{\|x\|}; \tag{1}$$

из теоремы Хана-Банаха ([2], глава IV, § 1, пункт 3) следует, например, что для полей действительных и комплексных чисел $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ [illegible] взять $C = 1$).

Для множества $X \subseteq E_1$ обозначим X^d множество предельных точек множества X в E_1, $i_X: X \to E_1$ – тождественное вложение. Для произвольного отображения $f: X \to Y$ в топологическое пространство Y и точек $x_0 \in X^d$ и $y_0 \in Y$ будем писать $\lim_{x \to x_0} fx = y_0$, если для каждой окрестности $\mathcal{U}y_0 \subseteq Y$ существует такая окрестность $\mathcal{U}x_0 \subseteq E_1$, что $f(X \cap \mathcal{U}x_0 \setminus \{x_0\}) \subseteq \mathcal{U}y_0$.

Как обычно, отображение $f: X \to E_2$, $X \subseteq E_1$, называется дифференцируемым в точке $x_0 \in X \cap X^d$ (в смысле Фреше), если существуют такие линейный оператор $A_{x_0} \in L_1(E_1; E_2)$ (вообще говоря, не единственный) и отображение $\alpha: X \to E_2$, что для всех $x \in X$ выполняется $fx - fx_0 = A_{x_0}(x - x_0) + \alpha x$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\|\alpha x\|}{\|x - x_0\|} = 0$. Оператор A_{x_0} называется также производной отображения f в точке x_0. Если отображение f дифференцируемо во всех точках множества $M_1 \subseteq X \cap X^d$, то можно определить отображение $f^{(1)}: M_1 \to L_1(E_1; E_2)$, положив $f^{(1)}x = Ax$ для всех $x \in M_1$. Это отображение $f^{(1)}$ будем называть (первой) производной отображения f на множестве M_1 (вообще говоря, отображение $f^{(1)}$ не единственно).

Для натурального $n > 1$ отображение $f: X \to E_2, X \subseteq E_1$, называется n раз дифференцируемым на множестве $M_n \subseteq X \cap X^d$, если существуют такие множества $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ и отображения $f^{(k)}: M_k \to L_k(E_1; E_2)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, что $M_1 \subseteq X \cap X^d$, $f^{(1)}$ – производная f на множестве M_1, $M_k \subseteq \operatorname{Int}_X M_{k-1}$ и $f^{(k)}$ – производная $f^{(k-1)}$ на множестве M_k для всех $k = 2, 3, \ldots, n$. При этом $f^{(n)}$ называется n-ой производной отображения f на множестве M_n.

Отображение $f: X \to E_2, X \subseteq E_1$, будем называть бесконечно дифференцируемым на множестве $M_\infty \subseteq X \cap X^d$, если для всех натуральных n существуют такие множества $M_n \supseteq M_\infty$ и отображения $f^{(n)}: M_n \to L_n(E_1; E_2)$, что $M_1 \subseteq X \cap X^d$, $f^{(1)}$ – производная f на множестве M_1, $M_n \subseteq \operatorname{Int}_X M_{n-1}$ и $f^{(n)}$ – производная $f^{(n-1)}$ на множестве M_n для всех $n > 1$ (заметим, что это условие, по всей видимости, сильнее, чем условие существования n-ой производной отображения f на некотором множестве $M_n \subseteq X \cap X^d$, удовлетворяющем условию $M_\infty \subseteq \operatorname{Int}_X M_n$, для всех натуральных n; оба условия эквивалентны, если n-я производная $f^{(n)}$ отображения f единственна на указанном множестве M_n для всех n).

Для линейного оператора $A \in L_1(E_1; E_2)$ положим $\Gamma_A = \{(x, y) \in E_1 \times E_2 : Ax = y\}$ (график оператора A). Для множества $\mathcal{U} \subseteq L_1(E_1; E_2)$ положим $\mathcal{V}(\mathcal{U}) = \bigcup\limits_{A \in \mathcal{U}} \Gamma_A \setminus \{(0,0)\}$. Заметим, что $(0, y) \notin \mathcal{V}(\mathcal{U})$ ни для какого $y \in E_2$.

<u>Лемма 1</u>. Если множество $\mathcal{U} \subseteq L_1(E_1; E_2)$ открыто, то множество $\mathcal{V}(\mathcal{U})$ открыто в топологии произведения $E_1 \times E_2$.

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in \vartheta(\mathcal{U})$. По определению $\vartheta(\mathcal{U})$ существует такой линейный оператор $A_0 \in \mathcal{U}$, что $A_0 x_0 = y_0$. Пусть $\varepsilon > 0$ – такое число, что $Ш_\varepsilon(A_0) \subseteq \mathcal{U}$. Выберем числа δ_1 и δ_2 так, чтобы выполнялись неравенства

$$0 < \delta_1 < \frac{\varepsilon \|x\|}{C \cdot \|A_0\| + \varepsilon} \quad \text{и} \quad 0 < \delta_2 < \frac{\varepsilon}{C} \cdot \|x_0\| - \delta_1 \cdot \left(\|A_0\| + \frac{\varepsilon}{C}\right) \tag{2}$$

(число C берется из неравенства (1)). Так как

$\dfrac{\varepsilon \cdot \|x\|}{C \cdot \|A_0\| + \varepsilon} \leqslant \|x_0\|$, обязательно $\delta_1 < \|x_0\|$. Покажем, что

любой вектор $(x, y) \in E_1 \times E_2$, удовлетворяющий условиям

$$\|x - x_0\| < \delta_1 \quad \text{и} \quad \|y - y_0\| < \delta_2, \tag{3}$$

содержится в $\vartheta(\mathcal{U})$, из чего и следует открытость $\vartheta(\mathcal{U})$. А для этого достаточно найти линейный оператор $A \in Ш_\varepsilon(A_0)$, удовлетворяющий условию $Ax = y$ (естественно, A зависит от x и y).

Заметим прежде всего, что из неравенств (3) следует, что

$$\|x\| \geqslant \|x_0\| - \|x - x_0\| > \|x_0\| - \delta_1 > 0. \tag{4}$$

Определим линейный оператор $B : E_1 \to E_2$, положив для $z \in E_1$ $Bz = (\varphi_x z) \cdot (y - A_0 x)$, где линейный функционал φ_x взят из (1). Тогда $Bx = (\varphi_x x) \cdot (y - A_0 x) = 1 \cdot (y - A_0 x) = y - A_0 x$,

$$\|Bz\| = \|\varphi_x z\| \cdot \|y - A_0 x\| \leqslant \|\varphi_x\| \cdot \|z\| \cdot \|y - A_0 x\| \leqslant \frac{C \cdot \|z\| \cdot \|y - A_0 x\|}{\|x\|},$$

откуда следует, что

$$\|B\| \leqslant \frac{C \cdot \|y - A_0 x\|}{\|x\|}. \tag{5}$$

Так как в силу неравенств (3)

$\|y - A_0 x\| = \|(y - y_0) - A_0(x - x_0)\| \leqslant \|y - y_0\| + \|A_0\| \cdot \|x - x_0\| < \delta_2 + \|A_0\| \cdot \delta_1$

из неравенств (5), (4) и (2) получаем

$$\|B\| < \frac{C(\delta_2 + \|A_0\| \cdot \delta_1)}{\|x\|} < \frac{C(\delta_2 + \|A_0\| \cdot \delta_1)}{\|x_0\| - \delta_1} < \varepsilon.$$

Из последнего неравенства следует, что оператор $A = A_0 + B$ является искомым, так как $\|A - A_0\| = \|B\| < \varepsilon$, то есть, $A \in Ш_\varepsilon(A_0)$, и $Ax = A_0 x + Bx = A_0 x + (y - A_0 x) = y$.

Лемма доказана.

Для открытого множества $\mathcal{U} \subseteq L_1(E_1; E_2)$ и точки $(x_0, y_0) \in E_1 \times E_2$ положим $\mathcal{V}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{U}) = \{(x,y) \in E_1 \times E_2 : (x - x_0, y - y_0) \in \mathcal{V}(\mathcal{U})\}$.

Пусть $Z_1(E_1; E_2) = E_1 \times E_2 \times L_1(E_1; E_2)$, а базу топологии $Z_1(E_1; E_2)$ зададим множествами вида

$$\mathcal{W}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = (\{(x_0,y_0)\} \times \mathcal{U}_2) \cup ((\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{V}_{(x_0,y_0)}(\mathcal{U}_2)) \times L_1(E_1; E_2)),$$

где $\mathcal{U}_1 \subseteq E_1 \times E_2$ (в топологии произведения) и $\mathcal{U}_2 \subseteq L_1(E_1; E_2)$ - открытые множества, $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}_1$.

Для натурального $n > 1$ определим $Z_n(E_1; E_2) =$
$= \{(x, (y_1, y_2, \dots, y_n), (y_1', y_2', \dots, y_n')) \in Z_1(E_1; E_2 \times L_1(E_1; E_2) \times$
$\times L_2(E_1; E_2) \times \dots \times L_{n-1}(E_1; E_2)) : y_1' = y_2,\ y_2' = y_3, \dots, y_{n-1}' = y_n\}$
с топологией подпространства. Для сокращения записи точки множества $Z_n(E_1; E_2)$ будем записывать в виде $(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$ вместо $(x, (y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)}), (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}))$.
В определении $Z_n(E_1; E_2)$ существенно заметить, что $L_1(E_1; E_2 \times L_1(E_1; E_2) \times \dots \times L_{n-1}(E_1; E_2)) = L_1(E_1; E_2) \times L_2(E_1; E_2) \times \dots \times L_n(E_1; E_2)$,
поэтому для $(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}) \in Z_n(E_1; E_2)$ имеем $x \in E_1$, $y \in E_2$ и $y^{(k)} \in L_k(E_1; E_2)$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.

Для натурального n определим отображения
$p_{n,0} : Z_n(E_1; E_2) \longrightarrow E_1 \times E_2$, $\pi_n : Z_n(E_1; E_2) \longrightarrow L_n(E_1; E_2)$
и (для натурального $m < n$) $p_{n,m} : Z_n(E_1; E_2) \longrightarrow Z_m(E_1; E_2)$
равенствами $p_{n,0}(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = (x, y)$,
$\pi_n(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = y^{(n)}$, $p_{n,m}(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = (x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$
для всех $(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \in Z_n(E_1; E_2)$.

<u>Лемма 2</u>. Для всех натуральных m, n, $m < n$, отображения $p_{n,0}$, $p_{n,m}$ и $\pi_m p_{n,m}$ непрерывны.

<u>Доказательство</u>. Непрерывность $p_{1,0}$ следует непосредственно из определения топологии $Z_1(E_1; E_2)$.

Для натурального $n > 1$ непрерывность $p_{n,n-1}$ следует из того, что при этом отображении полный прообраз базисного открытого множества $Z_{n-1}(E_1; E_2)$ является базисным открытым множеством $Z_n(E_1; E_2)$.

Так как при натуральных m, n, $m < n$, имеем $p_{n,m} = p_{m+1,m} p_{m+2,m+1} \cdots p_{n,n-1}$, непрерывность $p_{n,m}$ следует из непрерывности $p_{k+1,k}$ для всех натуральных k.

Аналогично для натурального $n > 1$ отображение $p_{n,0}$

непрерывно, так как $p_{n,0}=p_{1,0}\,p_{2,1}\cdots p_{n,n-1}$.

Непрерывность отображения $\pi_m\, p_{n,m}$ при натуральных m, n, $m<n$, следует из того, что в силу определения $Z_n(E_1;E_2)$ отображение $\pi_n\, p_{n,m}$ можно представить также в виде суперпозиции отображений

$Z_n(E_1;E_2)\to E_1\times(E_2\times L_1(E_1;E_2)\times\ldots\times L_{n-1}(E_1;E_2))\to L_m(E_1;E_2)$,

причем, непрерывность первого доказывается аналогично непрерывности отображения $p_{1,0}$ (с заменой E_2 на $E_2\times L_1(E_1;E_2)\times\ldots\times L_{n-1}(E_1;E_2)$, а второе является проекцией произведения на сомножитель и потому тоже непрерывно. Лемма доказана.

Заметим, что отображение π_n для всех натуральных n является разрывным во всех точках.

Для упрощения обозначений положим $Z_0(E_1;E_2)=E_1\times E_2$ с топологией произведения, и пусть $p_1: Z_0(E_1;E_2)\to E_1$ и $\pi_0=p_2: Z_0(E_1;E_2)\to E_2$ – проекции произведения на сомножители. Кроме того, будем считать, что $f^{(0)}=f$ и $M_0=X$.

Пусть $S=\{Z_m(E_1;E_2);\ p_{n,m}:\ m,n$ – целые, $0\le m<n\}$ – обратный спектр ([1], Прибавление к главе первой, § 1), $Z_\infty(E_1;E_2)=\varprojlim S$ и $p_{\infty,m}: Z_\infty(E_1;E_2)\to Z_m(E_1;E_2)$, $m\ge 0$ – целое, – проекции предела спектра в его элементы; эти проекции, как известно, непрерывны.

<u>Теорема 1</u>. Отображение $f: X\to E_2$, где $X\subseteq E_1$, является дифференцируемым на множестве $M_1\subseteq X\cap X^d$ тогда и только тогда, когда существует отображение $f^1: X\to Z_1(E_1;E_2)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $p_1\,p_{1,0}\,f^1=i_X$; 2) $p_2\,p_{1,0}\,f^1=f$; 3) отображение f^1 непрерывно на множестве M_1. При этом отображение $f^{(1)}=\pi_1 f^1/M_1$ является производной отображения f на множестве M_1.

<u>Доказательство</u>. Необходимость. Предположим, что отображение f дифференцируемо в точке $x_0\in X\cap X^d$. Покажем, что отображение f^1 можно определить в точке x_0 так, чтобы оно было непрерывно в этой точке независимо от значений в других точках множества X.

Так как f дифференцируемо в точке x_0, существуют такие линейный оператор $A_{x_0}\in L_1(E_1;E_2)$ и отображение $\alpha: X\to E_2$, что для всех $x\in X$ выполняется равенство

$fx - fx_0 = A_{x_0}(x - x_0) + \alpha x$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\|\alpha x\|}{\|x - x_0\|} = 0$. Заметим, что из этого следует непрерывность f в точке x_0. Определим отображение $f^1 : X \longrightarrow Z_1(E_1; E_2)$, положив $f^1 x_0 = (x_0, fx_0, Ax_0)$ и $f^1 x = (x, fx, A_x)$, где $A_x \in L_1(E_1, E_2)$ для $x \in X \setminus \{x_0\}$ выбирается произвольно. Докажем, что определенное таким образом отображение f^1 непрерывно в точке x_0.

Пусть $W_{(x_0, fx_0)}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ – базисная окрестность точки (x_0, fx_0, Ax_0). Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы было $\mathrm{Ш}_\varepsilon(A_{x_0}) \subseteq \mathcal{U}_2$. Выберем число $\delta > 0$ так, чтобы для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < \|x - x_0\| < \delta$, выполнялись следующие условия: а) $(x, fx) \in \mathcal{U}_1$ (это возможно в силу непрерывности f в точке x_0); б) $\frac{\|\alpha x\|}{\|x - x_0\|} < \frac{\varepsilon}{C}$ (C берется из (1)).

Чтобы доказать, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < \|x - x_0\| < \delta$, выполняется $(x, fx, A_x) \in W_{(x_0, fx_0)}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ (из чего следует непрерывность f^1 в точке x_0), достаточно найти линейный оператор $A \in \mathrm{Ш}_\varepsilon(A_{x_0})$, удовлетворяющий условию $A(x - x_0) = fx - fx_0$. Для этого определим оператор $B \in L_1(E_1; E_2)$ равенством $Bh = (\varphi_{x - x_0} h) \cdot \alpha x$ для всех $h \in E_1$, где $\varphi_{x - x_0}$ взято из (1). Тогда $\|Bh\| = \|\varphi_{x - x_0} h\| \cdot \|\alpha x\| \leq \|\varphi_{x - x_0}\| \cdot \|h\| \cdot \|\alpha x\| \leq \frac{C \cdot \|h\| \cdot \|\alpha x\|}{\|x - x_0\|}$, откуда в силу условия б) следует, что $\|B\| \leq \frac{C \cdot \|\alpha x\|}{\|x - x_0\|} < \varepsilon$.

Поэтому оператор $A = A_{x_0} + B$ является искомым, так как $\|A - A_{x_0}\| = \|B\| < \varepsilon$ и, следовательно, $A \in \mathrm{Ш}_\varepsilon(A_{x_0})$, и

$$A(x - x_0) = A_{x_0}(x - x_0) + B(x - x_0) = A_{x_0}(x - x_0) + (\varphi_{x - x_0}(x - x_0)) \cdot \alpha x = \\ = A_{x_0}(x - x_0) + \alpha x = fx - fx_0.$$

Очевидно также, что условия 1) и 2) выполнены.

Достаточность. Пусть отображение f^1 непрерывно в некоторой точке $x_0 \in X \cap X^d$. Докажем, что отображение f дифференцируемо в точке x_0. Пусть $f^1 x_0 = (x_0, fx_0, Ax_0)$ (такой вид $f^1 x_0$ следует из условий 1) и 2)). Определим отображение $\alpha : X \longrightarrow E_2$, положив $\alpha x = fx - fx_0 - A_{x_0}(x - x_0)$ для всех $x \in X$.

Пусть $\varepsilon>0$. Найдем такое $\delta>0$, чтобы для всех $x\in X$, удовлетворяющих условию $0<\|x-x_0\|<\delta$, выполнялось условие $\frac{\|\Delta x\|}{\|x-x_0\|}<\varepsilon$, из чего будет следовать, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\|\Delta x\|}{\|x-x_0\|}=0$ и, следовательно, отображение f дифференцируемо в точке x_0 .

Так как отображение f^1 непрерывно в точке x_0 , существует такое $\delta>0$, что для всех $x\in X$, удовлетворяющих условию $0<\|x-x_0\|<\delta$, имеем $f^1 x\in$ $\in \mathcal{W}_{(x_0,fx_0)}(E_1\times E_2, Ш_\varepsilon(A_{x_0}))$, т.е. $(x,fx)\in \mathcal{V}_{(x_0,fx_0)}(Ш_\varepsilon(A_{x_0}))$, поэтому существует такой оператор $A\in Ш_\varepsilon(A_{x_0})$, что $A(x-x_0)=fx-fx_0$. Тогда $\Delta x=(fx-fx_0)-A_{x_0}(x-x_0)=$ $=A(x-x_0)-A_{x_0}(x-x_0)=(A-A_{x_0})(x-x_0)$, и поэтому

$\frac{\|\Delta x\|}{\|x-x_0\|}<\|A-A_{x_0}\|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Для натурального $n>1$ отображение $f: X\to E_2$, где $X\subseteq E_1$, является n раз дифференцируемым на множестве $M_n\subseteq X\cap X^d$ тогда и только тогда, когда существует отображение $f^n: X\to Z_n(E_1;E_2)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $p_1 p_{n,0} f^n = i_X$; 2) $p_2 p_{n,0} f^n = f$; 3) отображение f^n непрерывно на множестве M_n ; 4) отображение $f^{n-1}=p_{n,n-1}f^n$ непрерывно на некотором множестве $M_{n-1}\subseteq X\cap X^d$, удовлетворяющем условию $M_n\subseteq \operatorname{Int}_X M_{n-1}$. При этом отображение $f^{(n)}=\pi_n f^n/M_n$ является n-ой производной отображения f на множестве M_n.

Доказательство следует из теоремы 1 и определения пространства $Z_n(E_1;E_2)$.

Заметим, что в силу леммы 2 для всех целых m,n, $0\leq m<n$, из существования n-ой производной $f^{(n)}$ отображения f на множестве $M_n\subseteq X\cap X^d$ следует непрерывность $f^{(m)}=\pi_m p_{n,m} f^n/M_m$ на множестве M_n ($M_m\subseteq X\cap X^d$ при $m>0$, $M_n\subseteq \operatorname{Int}_X M_m$).

Теорема 3. Отображение $f: X\to E_2$, где $X\subseteq E_1$, бесконечно дифференцируемо на множестве $M_\infty\subseteq X\cap X^d$ тогда и только тогда, когда существует отображение

$f^{\infty}: X \to Z_{\infty}(E_1; E_2)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $p_1 p_{\infty,0} f^{\infty} = i_X$; 2) $p_2 p_{\infty,0} f^{\infty} = f$; 3) отображение $f^n = p_{\infty,n} f^{\infty}$ непрерывно на некотором множестве $M_n \subseteq X \cap X^d$, удовлетворяющем условию $M_{\infty} \subseteq \mathrm{Int}_X M_n$, для всех натуральных n. При этом отображение f^{∞} непрерывно на множестве M_{∞}.

Доказательство следует из теоремы 2 и предложения 5 из § 1 Прибавления к главе первой книги [1].

Следствие 1. Для натурального n отображение $f^{(n)}: M_n \longrightarrow L_n(E_1; E_2)$, где $M_n \subseteq X \cap X^d$, $X \subseteq E_1$, является n-ой производной некоторого отображения $f: X \to E_2$ на множестве M_n тогда и только тогда, когда существует отображение $f^n: X \to Z_n(E_1; E_2)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $p_1 p_{n,0} f^n = i_X$; 2) $\pi_n f^n = f^{(n)}$; 3) отображение f^n непрерывно на множестве M_n; 4) если $n>1$, то отображение $f^{n-1} = p_{n,n-1} f^n$ непрерывно на некотором множестве $M_{n-1} \subseteq X \cap X^d$, удовлетворяющем условию $M_n \subseteq \mathrm{Int}_X M_{n-1}$. При этом искомое отображение f определяется равенством $f = p_2 p_{n,0} f^n$.

Каждому отображению $F: E_1 \times E_2 \times L_1(E_1; E_2) \times \ldots \times L_{n-1}(E_1; E_2) \to 2^{L_n(E_1; E_2)}$ соответствует дифференциальное включение $y^{(n)} \in F(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})$. Положим

$$Z_n^F(E_1; E_2) = \{(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) \in Z_n(E_1; E_2) : y^{(n)} \in F(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})\}.$$

В случае необходимости различные дополнительные ограничение типа начальных или граничных условий можно включить в определение $Z_n^F(E_1; E_2)$.

Следствие 2. Отображение $f: X \to E_2$, где $X \subseteq E_1$, является решением дифференциального включения $y^{(n)} \in F(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})$ на множестве $M_n \subseteq X \cap X^d$ тогда и только тогда, когда существует отображение $f^n: X \longrightarrow Z_n^F(E_1; E_2)$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) $p_1 p_{n,0}|_{Z_n^F(E_1; E_2)} f^n = i_X$; 2) $p_2 p_{n,0}|_{Z_n^F(E_1; E_2)} f^n = f$; 3) отображение f^n непрерывно на множестве M_n; 4) если $n>1$, то отображение $f^{n-1} = p_{n,n-1}|_{Z_n^F(E_1; E_2)} f^n$ непрерывно на некотором множестве M_{n-1} $X \cap X^d$, удовлетворяющем условию $M_n \subseteq \mathrm{Int}_X M_{n-1}$.

Следствие 3. Для дифференциального включения

$y^{(n)} \in F(x, y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})$ сущеструет отображение $f: X \to E_2$, где $X \subseteq E_2$, являющееся решением на множестве $M_n \subseteq X \cap X^d$, тогда и только тогда, когда существует отображение $f^n: X \to \Gamma_n^F(E_1, E_2)$, удовлетворяющее условиям 1), 3) и 4) следствия 4. При этом искомое отображение f определяется равенством

$$f = P_2 P_{n,0} \big|_{Z_n^F(E_1, E_2)} f^n .$$

Теорема 2 опубликована в заметке [3].

Библиографический список

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М., 1973.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.
3. Ульянов В.М. Топологическая характеристика дифференцируемых отображений нормированных пространств // Бакинская международная топологическая конференция: Тезисы. Баку, 1987. Ч. 2. С. 304.

Поступила 7 января 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 519.21

МОМЕНТЫ ПЕРВОГО ДОСТИЖЕНИЯ НЕКОТОРОГО УРОВНЯ СУММОЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А.К.Хурума
Кызылский ПИИ

В работе [1] найдено распределение момента первого достижения некоторого уровня суммой независимых равномерно распределенных на $]0;1[$ случайных величин и вычислены ее математическое ожидание и дисперсия. В настоящей заметке дается общая формула вычисления моментов любого порядка, приводятся простые выражения для третьего и четвертого моментов. Выводится также в явном виде совместная функция распределения момента первого достижения суммой заданного уровня и величины ее перескока за этот уровень.

Рассмотрим $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых равномерно распределенных на $]0;1[$ случайных величин.

Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Определим $N(a)$ как момент первого достижения уровня a, где a – некоторая положительная константа, т.е.

$N(a) = \min\{n \geq 1 : S_n > a\}$.

Заметим, что $N(a) \geq [a]+1$, где $[a]$ – целая часть числа a.

<u>Утверждение 1</u>. Пусть $k \geq 1$, тогда

$$E(N(a))^k = \sum_{j=0}^{[a]} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,m!} (a-j)^{j+m} \left((1+j+m)^k - (j+m)^k\right).$$

<u>Доказательство</u>. Пусть $G_{N(a)}(z)$ – производящая функция для случайной величины $N(a)$, т.е. $G_{N(a)}(z) = E z^{N(a)}$.

Положим $z = e^t$, $t \in R$. Тогда

$$G_{N(a)}(e^t)=Ee^{tN(a)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}E(N(a))^k \qquad (\text{т.к. } e^t=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}).$$

В правой части этого равенства $G_{N(a)}(e^t)$ также разложим в ряд по степеням t.

Из [1] известно, что производящая функция $N(a)$ имеет вид

$$G_{N(a)}(z)=1+(z-1)\sum_{j=0}^{[a]}\frac{(-1)^j}{j!}(z(a-j))^j e^{z(a-j)}.$$

Рассмотрим

$$G_{N(a)}(e^t)=1+(e^t-1)\sum_{j=0}^{[a]}\frac{(-1)^j}{j!}(e^t(a-j))^j e^{e^t(a-j)}=$$

$$=1+(e^t-1)\sum_{j=0}^{[a]}\frac{(-1)^j}{j!}e^{tj}(a-j)^j\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(e^t)^m(a-j)^m}{m!}=$$

$$=1+\sum_{j=0}^{[a]}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,m!}(a-j)^{j+m}\sum_{k=0}^{\infty}((1+j+m)^k-(j+m)^k)\frac{t^k}{k!}.$$

Отсюда для $k\geqslant 1$ получаем, что

$$E(N(a))^k=\sum_{j=0}^{[a]}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,m!}(a-j)^{j+m}((1+j+m)^k-(j+m)^k).$$

Для вычисления моментов третьего и четвертого порядков можно, продифференцировав производящую функцию в точке $z=1$, получить рекуррентные соотношения для моментов $N(a)$

$$E(N(a)(N(a)-1)(N(a)-2)\dots(N(a)-k+1))=G^{(k)}_{N(a)}(1).$$

Из этого выражения после вычислений соответствующих производных видно, что

$$E(N(a))=G'_{N(a)}(1)=\sum_{j=0}^{[a]}\frac{(-1)^j}{j!}(a-j)^j e^{(a-j)}=\mu,$$

$$E(N(a))^2=(2a+1)\mu,$$

$$E(N(a))^3=(3a^2+6a+1)\mu-3\nu, \quad \text{где} \quad \nu=\sum_{j=1}^{[a]}\frac{(-1)^j}{(j-1)!}(a-j)^j e^{a-j},$$

$$E(N(a))^4=(4a^3+18a^2+14a+1)\mu-(12a+10)\nu.$$

Теперь рассмотрим совместное распределение $N(a)$ и величины перескока.

Пусть δ - величина перескока суммы S_n за уровень a, $0 \le \delta \le 1$.

<u>Утверждение 2</u>. $P\{N(a)=n, \delta > z\} = \frac{(1-z)}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{[a]-1} (-1)^j C_{n-1}^j (a-j)^{n-1} -$

$$-\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{[a]-1} (-1)^j C_{n-1}^j (a-j)^n + \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{[a]-1} (-1)^j C_{n-1}^j (a-1+z-j)^n.$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим $P\{N(a)=n, \delta \ge z\} =$

$= P\{S_n \ge a+z$ и $(a-1) < S_{n-1} \le a\} =$

$= P\{S_n \ge a+z \mid (a-1) < S_{n-1} \le a\} \times m(a)$,

где $m(a) = P\{(a-1) < S_{n-1} \le a\} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{[a]} (-1)^j C_n^j (a-j)^{n-1}$ (см. в [1]).

Пусть S_{n-1} лежит в интервале $]a-1, a]$. Ее плотность приводится в [2, с. 27] в следующем виде

$$f_{n-1}^*(x) = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j C_{n-1}^j (x-j)_+^{n-2} \cdot \frac{1}{m(a)} =$$

$$= \frac{1}{m(a)} \cdot \frac{1}{(n-2)!} \sum_{j=0}^{[x]} (-1)^j C_{n-1}^j (x-j)^{n-2}, \quad a-1 < x \le a,$$

где $x_+ = \frac{1}{2}(x + |x|)$. Верхним пределом суммирования является $[x]$, т.к. $x-j \ge 0$, т.е. $j \le x$ или $j \le [x]$.

Однако $S_n = S_{n-1} + X_n$, где X_n и S_{n-1} - независимы и X_n равномерно распределена на $]0, 1[$, ее плотность - $f_X(u) = 1$, $0 < u < 1$.

Тогда $P\{S_n \ge a+z \mid (a-1) < S_{n-1} \le a\} \times m(a) =$

$$= \iint_{\mathcal{D}_z} f_{n-1}^*(x) f_X(u)\, dx\, du,$$

где $\mathcal{D}_z = \{(x,u) : a-1 \le x < a,\ 0 < u < 1,\ x+u \ge a+z\}$.

Следовательно, $P\{N(a)=n, \delta \ge z\} = \int_{a-1+z}^{a} f_{n-1}^*(x)(1-(a+z-x))\,dx =$

$$= (1-a-z) \int_{a-1+z}^{a} \frac{1}{m(a)} \cdot \frac{1}{(n-2)!} \sum_{j=0}^{[x]} (-1)^j C_{n-1}^j (x-j)^{n-2} dx + \int_{a-1+z}^{a} x f_{n-1}^*(x)\,dx.$$

Пусть a - целое, тогда, учитывая, что верхний предел суммирования будет равен $[a]-1$, получим

$$P\{N(a)=n,\ \delta \geq k\}=(1-a-k)\int\limits_{a-1+k}^{a}\frac{1}{m(a)}\cdot\frac{1}{(n-2)!}\sum_{j=0}^{[a]-1}(-1)^{j}C_{n-1}^{j}(x-j)^{n-2}dx+$$

$$+\int\limits_{a-1+k}^{a}x\, f_{n-1}^{*}(x)dx=\frac{(1-a-k)}{m(a)(n-2)!}\sum_{j=0}^{[a]-1}(-1)^{j}C_{n-1}^{j}\int\limits_{a-1+k}^{a}(x-j)^{n-2}dx+$$

$$+\frac{1}{m(a)\ (n-2)!}\sum_{j=0}^{[a]-1}(-1)^{j}C_{n-1}^{j}\int\limits_{a-1+k}^{a}x\,(x-j)^{n-2}dx.$$

Непосредственные вычисления интегралов и последующие несложные преобразования приводят к следующему выражению совместного распределения

$$P\{N(a)=n,\ \delta \geq k\}=\frac{1-k}{(n-1)!}\sum_{j=0}^{[a]-1}(-1)^{j}C_{n-1}^{j}(a-j)^{n-1}-$$

$$-\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{[a]-1}(-1)^{j}C_{n-1}^{j}(a-j)^{n}+\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{[a]-1}(-1)^{j}C_{n-1}^{j}(a-1+k-j)^{n}.$$

Библиографический список

1. Russell K.G. On the number of uniform random variables which must be added to exceed a given level.// J.Appl. Probl. 1983. V. 20. P. 172-177.
2. Феллер В. Теория вероятностей и ее приложения. М., Т. 1. 1971.

Поступила 18 февраля 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 515.12

НЕЧЕТКИЕ ТОПОЛОГИИ НА ПРОСТРАНСТВАХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

А.П.Шостак
ЛГУ им.П.Стучки

У каждого, кто работает в области нечеткой топологии, возникает необходимость ответить, по крайней мере для себя, на следующие два тесно связанных друг с другом фундаментальных вопроса:

1. Какими функторами из категории Top топологических пространств в категорию FT нечетких топологических пространств устанавливаются наиболее важные, существенные взаимосвязи между обеими категориями?

2. Что следует считать "адекватными" (в том или ином смысле) аналогами объектов (всех, или, по крайней мере, наиболее важных) категории Top в категории FT ?

Непосредственно из определений ясно, что каждое обычное топологическое пространство может естественным образом трактоваться и как чанговское нечеткое топологическое пространство (0.2) и тем самым категория Top оказывается (полной) подкатегорией категории FT чанговских нечетких топологических пространств, а следовательно (0.2) и (полной) подкатегорией категории FT ; функтор, осуществляющий это "тривиальное" вложение Top в FT обозначим e .

Несмотря на всю свою простоту и "прозрачность", этот функтор, однако, далеко не всегда является наиболее предпочтительным. Более того, для некоторых авторов он даже оказывается a priori неприемлемым. Так, например, Р.Ловен, работающий в подкатегории LCFT ламинированных чанговских нечетких топологических пространств (0.3), не может трактовать топологическое пространство $(X,\mathcal{T})$ как <u>объект</u> категории LCFT и заменяет пространство $(X,\mathcal{T})$ его ламинированной нечеткой копией $(X,\Lambda\mathcal{T})$, где через

$\Lambda\mathfrak{T}$ мы обозначаем совокупность всех полунепрерывных снизу отображений φ пространства $(X, \mathfrak{T})$ в отрезок $I=[0,1]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$. Тем самым возникает важный функтор из категории Top в категорию LCFT [17],[18] (а следовательно, и в категорию FT), для которого мы также будем использовать обозначение Λ.

Ясно, что образами топологических пространств относительно функторов e и Λ являются чанговские нечеткие топологические пространства. С другой стороны, в работах [5], [31], [35] рассматривались некоторые функторы Φ из Top в FT, сопоставляющие топологическому пространству $(X, \mathfrak{T})$ нечеткое топологическое пространство $(X, \Phi\mathfrak{T})$, в котором $\Phi\mathfrak{T}$ является уже существенно нечеткой (т.е. нечанговской) топологией.

Отметим два существенных момента, присущих каждому из упомянутых выше подходов (функторов). Во-первых, во всех этих случаях происходит изменение только топологической структуры, в то время как "базовое" множество X у объекта и его образа одно и то же. Во-вторых, все эти преобразования сохраняют морфизмы неизменными (и, как следствие этого, образом Top оказывается полная подкатегория в FT). Не следует, однако, рассматривать эти две общие для всех вышеупомянутых функторов особенности как обязательные, предопределенные условия, которым должен удовлетворять каждый функтор, устанавливающий те или иные естественные взаимосвязи и соответствия между Top и категориями нечетких топологических пространств FT, CFT и LCFT. Еще в 1974 году Б.Хаттон [15] построил так называемый нечеткий интервал $\mathfrak{T}(I)$, взяв за основу множество $\mathfrak{Z}$, образованное всеми невозрастающими (не обязательно непрерывными) отображениями $a: \mathbb{R} \to I$ такими, что $a(t)=1$ при $t<0$ и $a(t)=0$ при $t>1$ [1)], и наделив его некоторой чанговской нечеткой топологией $\mathfrak{G}$. Нечеткий интервал $\mathfrak{T}(I)$ обладает рядом важных (нечетких) топологических свойств, аналогичных соответствующим топологическим свойс-

---

1) Здесь мы допускаем некоторую неточность. Строгое определение см. в [15], а также в §6 данной работы.

твам обычного отрезка I (так, например, для $\mathfrak{F}(I)$ имеет место "нечеткая лемма Урысона" и "нечеткая теорема Титце-Урысона"), в то время как нечеткие аналоги отрезка I из числа рассмотренных в предыдущих абзацах (т.е. на основе множества I) такого рода свойствами не обладают - говоря образно, они слишком "бедны", чтобы отразить данное топологическое свойство во всем многообразии его нечетких проявлений. В последствии, по аналогии с нечетким интервалом была определена т.н. нечеткая прямая $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ [14], обладающая наряду с важными топологическими свойствами ([14], [26], [27] и др.) и рядом интересных алгебраических свойств [28].

Дальнейшее развитие конструкция Б.Хаттона получила в трех направлениях. В [6], [29], [30] для каждого линейно-упорядоченного пространства X построено нечеткое топологическое пространство $\mathfrak{F}(X)$, которое в известном смысле может рассматриваться как нечеткий аналог пространства X. Отметим, что эта конструкция $\mathfrak{F}$ имеет характер функтора из категории Ord линейно-упорядоченных пространств в категорию CFT и в случае, когда $X=I$ и $X=\mathbb{R}$ приводит, соответственно, к нечеткому интервалу $\mathfrak{F}(I)$ и нечеткой прямой $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$. Идея второго направления, принадлежащего Р.Ловену, состоит в возможности замены убывающих функций $z\colon \mathbb{R} \to I$, участвующих в определении $\mathfrak{F}(I)$, естественным образом определяемыми ими вероятностными мерами. Реализуя эту идею, Р.Ловен каждому сепарабельному пространству X сопоставляет некоторое нечеткое топологическое пространство $\mathfrak{M}(X)$, элементами которого служат вероятностные меры на исходном пространстве X. Наконец, в [20], обобщая конструкцию Б.Хаттона, автор каждому связному топологическому пространству сопоставляет нечеткое топологическое пространство $\mathfrak{K}(X)$; элементами $\mathfrak{K}(X)$ служат специальные классы монотонных отображений $z\colon X \to I$ таких, что $\sup z(x) = 1$ и $\inf z(x) = 0$.

Основной целью данной работы является описание и изучение одной (функториальной) конструкции $\mathfrak{N}_f$, позволяющей, в частности, каждому топологическому пространству X

и каждому семейству ξ полунепрерывных снизу отображений из X в I сопоставить нечеткое топологическое пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$, где $\mathcal{M}(X)$ - совокупность всех вероятностных (борелевских) мер на исходном пространстве X. (В действительности, в работе конструкция $\mathcal{M}_\xi$ описывается и изучается в значительно более общей ситуации - когда исходное пространство X - произвольное нечеткое. Здесь, во введении, мы ограничиваемся, однако, случаем, когда X - топологическое пространство, и делаем это, в основном, по следующим двум причинам. Во-первых, именно, этот случай, является, по нашему мнению, наиболее важным и интересным (см., в частности, вопросы 1 и 2, сформулированные в начале работы). Во-вторых, ограничиваясь случаем, когда исходное пространство X - топологическое, мы можем существенно упростить формулировки, не искажая при этом основной идеи конструкции).

В случае, когда X -сепарабельное метрическое пространство, наша конструкция $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ аналогично конструкции Р.Ловена [19]; (кстати, прототипами ряда утверждений, доказываемых в данной работе, в т.ч. (1.3), (1.10), (4.5), и послужили установленные ранее Р.Ловеном для метрических сепарабельных пространств факты [19]. Если же X - линейно упорядоченное пространство и ξ - стандартная предбаза его топологии, то, как будет показано в §6, конструкция $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ оказывается каноническим образом гомеоморфна конструкции $\mathfrak{F}(X)$ [6], [29], [30].

Изложим вкратце основные результаты работы, ограничиваясь, как уже было сказано, случаем, когда исходное пространство X - топологическое.

Первый параграф содержит описание конструкции $\mathcal{M}_\xi$. Здесь изучаются основные свойства этой конструкции, в том числе и свойства функториального характера (1.3), (1.4). Найдены условия на ξ, при которых исходное пространство X гомеоморфно подпространству $\mathfrak{D}$ всех дираковских (т.е. вырожденных) мер нечеткого топологического пространства $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ (1.7). Отметим также теорему (1.10), характеризующую "степень близости" гладкой меры μ к множеству $\mathfrak{D}$ в пространстве $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$.

Во втором параграфе рассматриваются некоторые специальные (обычные) топологии на множестве $\mathcal{M}(X)$. Эти топологии определенным образом связаны с интересующими нас нечеткими топологиями на $\mathcal{M}(X)$ (2.7), (2.8), (2.9) и нередко оказываются полезными при изучении последних.

В третьем параграфе рассматриваются два важных подпространства в $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ - пространство $P(X)$ всех вероятностных мер с конечными носителями и пространство $K(X)$ всех двузначных мер, и некоторые их подмножества. Показано, что $P(X)$ и некоторые его подпространства плотны в $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ (3.6); на основе этих результатов доказано, что функтор $\mathcal{M}_\xi$ не повышает плотности пространства (3.7). Отметим также теорему (3.15), в которой характеризуется замыкание $K(X)$ в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$.

Параграф 4 посвящен исследованию поведения свойств типа компактности при действии функтора $\mathcal{M}_\xi$. Здесь показано, в частности, что счетная компактность исходного пространства X равносильна компактности пространства $(\mathcal{M}(X),\tau_{\Lambda\xi})$; в свою очередь для $(\mathcal{M}(X),\tau_{\Lambda\xi})$ свойства компактности и счетной компактности эквивалентны (4.8).

Свойства типа отделимости для $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ исследуются в §5. Наиболее интересный вывод из полученных в этом направлении результатов состоит по нашему мнению в том, что отделимость пространства $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ очень чувствительна к выбору уровня. Так, например, при $\beta>0$ пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ (β,β)-хаусдорфово для любого совершенно нормального пространства X (5.3), но заведомо перестает быть даже $(\beta,\gamma)-T_0$-пространством как только $\gamma<\beta$ (5.7) или $\beta=\gamma=0$ (5.6).

В последнем, шестом параграфе рассматривается случай, когда исходное пространство X линейно-упорядочено, а ξ - его стандартная предбаза. Основной результат здесь - теорема (6.3), устанавливающая связь между конструкциями $\mathfrak{F}(X)$ и $\mathcal{M}_\xi(X)$. Из этой теоремы, в частности, следует, что если вес пространства X счетен, то конструкции $\mathfrak{F}(X)$ и $\mathcal{M}_\xi(X)$ канонически изоморфны. Предварительно мы приводим альтернативное описание конструкции $\mathfrak{F}(X)$ (6.1).

§0. Предварительные сведения: нечеткие топологические пространства.

В этом параграфе мы приводим минимум определений и фактов из общей теории нечетких топологических пространств, необходимый для чтения основного текста работы. Подробнее о нечетких топологических пространствах см. в [6] - [11], [31] - [34].

(0.1) Нечеткая топология. Нечеткой топологией на множестве X называется отображение $\mathcal{T}: I^X \to I$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\mathcal{T}(\mathcal{U} \wedge V) \geq \mathcal{T}(\mathcal{U}) \wedge \mathcal{T}(V)$ для любых $\mathcal{U}, V \in I^X$;

(2) $\mathcal{T}(\vee_i \mathcal{U}_i) \geq \wedge_i \mathcal{T}(\mathcal{U}_i)$ для каждого семейства $\{\mathcal{U}_i : i \in \mathcal{I}\} \subset I^X$;

(3) $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$.

Пара $(X, \mathcal{T})$ называется нечетким топологическим пространством. (При этом слово "топологическое" нередко будет опускаться).

Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - пара нечетких пространств. Отображение $f: X \to Y$ называется непрерывным, если $\mathcal{T}_X(f^{-1}(V)) \geq \mathcal{T}_Y(V)$ для каждого $V \in I^Y$.

Категорию нечетких топологических пространств и непрерывных отображений между ними обозначаем FT.

(0.2) Чанговская нечеткая топология. Нечеткую топологию $\mathcal{T}: I^X \to I$ будем называть чанговской, а соответствующее нечеткое пространство - чанговским, если $\mathcal{T}(I^X) \subset 2 = \{0, 1\}$.

Ясно, что каждое нечеткое топологическое пространство в смысле определения Чанга [14] (т.е. пара (X, T), где $T \subset I^X$ удовлетворяет аксиомам (1) $\mathcal{U}, V \in T \Rightarrow \mathcal{U} \wedge V \in T$; (2) $\mathcal{U}_i \in T \ \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \vee_i \mathcal{U}_i \in T$; (3) $0, 1 \in T$ [14]) естественным образом интерпретируется как чанговское (в смысле (0.2)) нечеткое топологическое пространство и наоборот. При этом отображение f между двумя чанговскими пространствами непрерывно в смысле Чанга [14] тогда и только тогда, когда оно непрерывно в смысле (0.1). Категорию чанговских нечетких пространств и непрерывных отображений между ними будем обозначать CFT (такое обозначение удобнее для наших целей, чем стандартное применяемое в этой ситуации обозначение Fuz).

Отождествляя обычное подмножество A множества Z с его характеристической функцией χ_A, получаем возможность трактовать обычное топологическое пространство $(X,\mathcal{T})$ как такое чанговское нечеткое пространство $(X,\mathcal{T})$, чанговская топология $\mathcal{T}: I^X \to 2$ в котором удовлетворяет дополнительному условию

$$(top)\ \mathcal{T}^{-1}(1) \subset 2^X$$

(т.е. открытыми могут быть только обычные подмножества множества X).

(0.3) Ламинированная нечеткая топология. Нечеткую топологию $\mathcal{T}$ на X будем называть ламинированной, а соответствующее нечеткое пространство $(X,\mathcal{T})$ – ламинированным, если

(3^1) $\mathcal{T}(c) = 1$ для каждой константы $c: X \to I$

В случае чанговских пространств ламинированные пространства были впервые выделены Р.Ловеном [17], [18]. (Более того, Р.Ловен включает аксиому (3^1) в само определение нечеткого топологического пространства [17], [18]). Ламинированные нечеткие пространства (как чанговские, так и общие) обладают рядом важных свойств, на наиболее существенные из которых первым (в случае чанговских нечетких пространств) обратил внимание Р.Ловен([17], [18] и др.)

(0.4) Чанговские топологии α-уровня. Пусть $(X,\mathcal{T})$ - нечеткое пространство и $\alpha \in (0,1]$. Положим $\mathcal{T}_\alpha = \{\mathcal{U} \in I^X : \mathcal{T}(\mathcal{U}) \geq \alpha\}$. Ясно, что $\mathcal{T}_\alpha$ является чанговской топологией на X. По отношению к исходной нечеткой топологии $\mathcal{T}$ мы будем называть $\mathcal{T}_\alpha$ чанговской топологией α-уровня. Положим $\mathcal{T}_\alpha^* = \{\mathcal{U} \in I^X : \mathcal{T}(\mathcal{U}^c) \geq \alpha\}$, где $\mathcal{U}^c = 1 - \mathcal{U}$. Ясно, что $\mathcal{T}_\alpha^*$ - это совокупность всех замкнутых нечетких множеств в чанговском пространстве $(X, \mathcal{T}_\alpha)$.

(0.5) iota -функтор и ультра-свойства нечетких топологических пространств. Пусть $(X,\mathcal{T})$ - чанговское пространство; следуя Р.Ловену [17], [18] через $\iota\mathcal{T}$ обозначаем самую слабую (обычную) топологию на X, относительно которой все нечеткие множества $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ полунепрерывны снизу как отображения в I. В результате получаем функтор $\iota: CFT \to Top$ [17], [18]. В [35] посредством формулы

$\iota\mathcal{T}(\mathcal{U})=\vee_\alpha((\iota\mathcal{T}_\alpha)(\mathcal{U})\wedge\alpha)$ этот функтор был распространен до функтора $\iota: FT \to FT$; там же рассматривались свойства этого функтора.

Ясно, что для каждой нечеткой топологии $\mathcal{T}$ на множестве X и для каждого $\alpha \in (0,1]$ $(\iota\mathcal{T})_\alpha$ является обычной топологией на множестве X.

Следуя традиции (см., напр., [22], [23]), будем говорить, что чанговское нечеткое пространство $(X,\mathcal{T})$ является ультра- $\mathcal{P}$ -пространством, где $\mathcal{P}$ - некоторое топологическое свойство, если топологическое пространство $(X,\iota\mathcal{T})$ обладает свойством $\mathcal{P}$. Нечеткое пространство $(X,\mathcal{T})$ будем называть α -ультра- $\mathcal{P}$ -пространством, где $\alpha \in (0,1]$, если топологическое пространство $(X,(\iota\mathcal{T})_\alpha)$ обладает свойством $\mathcal{P}$ (например, α-ультракомпактное нечеткое пространство, α -ультра совершенно нормальное нечеткое пространство и др.).

(0.6) <u>Предбаза</u>. Пусть $(X,\mathcal{T})$ - нечеткое пространство. Семейство $\xi=\{\xi_\alpha : \alpha\in(0,1]\}$, где $\xi_\alpha \subset I^X$, называется предбазой нечеткой топологии $\mathcal{T}$, если для каждого $\alpha \in (0,1]$ семейство ξ_α является предбазой чанговской топологии $\mathcal{T}_\alpha$ (т.е. $\mathcal{T}_\alpha$ - наименьшая чанговская топология на X , содержащая ξ_α). Легко заметить, что ξ является предбазой нечеткой топологии $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда для каждого $\alpha\in(0,1]$ и произвольных $\mathcal{U}\in\mathcal{T}_\alpha$, $x\in X$ и $\varepsilon>0$ найдутся $V_1,\dots,V_n \in \xi_\alpha$ такие, что $\bigwedge_{i=1}^n V_i \le \mathcal{U}$ и $\bigwedge_{i=1}^n V_i(x) \ge \mathcal{U}(x)-\varepsilon$

Семейство $\xi=\{\xi_\alpha : \alpha\in(0,1]\}$ назовем слабой предбазой нечеткой топологии $\mathcal{T}$, если для каждого $\alpha\in(0,1]$ и произвольных $\mathcal{U}\in\mathcal{T}_\alpha$, $x\in X$, $\varepsilon>0$ и $\alpha'<\alpha$ найдутся $V_1,\dots,V_n \in \xi_{\alpha'}$ такие, что $\bigwedge_{i=1}^n V_i \le \mathcal{U}$ и $\bigwedge_{i=1}^n V_i(x) \ge \mathcal{U}(x)-\varepsilon$

Ясно, что каждая предбаза ξ нечеткой топологии $\mathcal{T}$ заведомо является и ее слабой предбазой. В случае чанговских топологий, очевидно, верно и обратное, т.е. для чанговских топологий понятия предбазы и слабой предбазы совпадают.

§1. Конструкция и основные свойства нечетких топологий на пространствах вероятностных мер.

Пусть $(X,\mathfrak{T})$ – нечеткое топологическое пространство и $\alpha\in(0,1]$. Обозначим через $\mathfrak{B}_\alpha$ борелевскую σ-алгебру, порожденную топологией $(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ (0.5), и пусть $\mathcal{M}_\alpha$ – множество всех вероятностных мер на $\mathfrak{B}_\alpha$ (σ-аддитивное отображение $p:\mathfrak{B}_\alpha\to I$ называется вероятностной (борелевской) мерой, если $p(X)=1$ (см., например, [1], [2] и др.)). Ясно, что $\mathfrak{B}_\alpha\subset\mathfrak{B}_{\alpha'}$ при $0<\alpha'\leq\alpha\leq 1$. Положим $\mathfrak{B}=\bigcup\limits_\alpha\mathfrak{B}_\alpha$ и пусть $\mathcal{M}$ – множество всех вероятностных мер на σ-алгебре $\mathfrak{B}$.

В теории меры большую роль играет понятие т.н. регулярной меры ([2], [3] и др.). В нашей ситуации меру p естественно назвать α-регулярной, если для каждого $\varepsilon>0$ и каждого $E\in\mathfrak{B}_\alpha$ найдутся $\mathcal{U}\in(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ и $F\in(\iota\mathfrak{T})^*_\alpha$ такие, что $F\subset E\subset\mathcal{U}$ и $p(\mathcal{U}\setminus F)$. Меру $p\in\mathcal{M}$ будем называть регулярной, ес. и она регулярна для каждого $\alpha\in(0,1]$. Совокупность всех регулярных (α-регулярных) мер обозначим $\mathfrak{R}$ (соотв. $\mathfrak{R}_\alpha$). Меру $p\in\mathcal{M}$ назовем α-нормальной, если для каждого $\varepsilon>0$ и каждого $\mathcal{U}\in(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ найдется $G\in(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ такое, что $\bar{G}\subset\mathcal{U}$ и $p(\mathcal{U}\setminus G)<\varepsilon$, где $\bar{G}$ – замыкание множества G в топологии $(\iota\mathfrak{T})_\alpha$. Меру $p\in\mathcal{M}$ назовем нормальной, если она α-нормальна для всех $\alpha\in(0,1]$. Совокупность всех нормальных (α-нормальных) мер обозначим $\mathcal{N}$ (соотв. $\mathcal{N}_\alpha$). Легко заметить, что, если топология $(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ нормальна, то каждая α-регулярная мера является α-нормальной, т.е. $\mathfrak{R}_\alpha\subset\mathcal{N}_\alpha$. Если же топология $(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ совершенно нормальна, то по аналогии с доказательством теоремы 1.1 из [2] легко убедиться, что $\mathcal{M}_\alpha=\mathfrak{R}_\alpha$, а следовательно, и $\mathcal{M}_\alpha=\mathcal{N}_\alpha$.

(В необходимых случаях наряду с обозначениями $\mathfrak{B}$, $\mathcal{M}$, $\mathfrak{R}$ и т.п. мы будем использовать также, соответственно, обозначения $\mathfrak{B}(X)$, $\mathcal{M}(X)$, $\mathfrak{R}(X)$ и т.п.).

(1.1) Конструкция $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ – нечеткое пространство и $\xi=\{\xi_\alpha:\alpha\in(0,1]\}$, где ξ_α – некоторое семейство полунепрерывных снизу отображений пространства $(X,(\iota\mathfrak{T})_\alpha)$ в I и при этом, если $\alpha'<\alpha$, то $\xi_\alpha\subset\xi_{\alpha'}$. Для каждого $\alpha\in(0,1]$ и каждого $u\in\xi_\alpha$ равенством $\delta_{\mathcal{U}}(p) = \int \mathcal{U} dp$, где $p \in \mathcal{M}$, определим нечеткое множество $\delta_{\mathcal{U}} \in I^{\mathcal{M}}$. (Интеграл, в котором не указывается область интегрирования, предполагается распространенным на все пространство X). Обозначим через τ_ξ^α чанговскую топологию на $\mathcal{M}(X)$, порожденную предбазой $\{\delta_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \in \xi_\alpha\}$. Ясно, что при $\alpha' \leq \alpha$ имеет место включение $\tau_\xi^\alpha \subset \tau_\xi^{\alpha'}$ и потому к семейству $\{\tau_\xi^\alpha : \alpha \in (0,1]\}$ чанговских топологий применимо предложение (1.1) из [35], согласно которому отображение $\tau_\xi : I^{\mathcal{M}} \to I$, заданное равенством $\tau_\xi(E) = \vee_\alpha (\tau_\xi^\alpha(E) \wedge \alpha)$, где $E \in I^{\mathcal{M}}$, является нечеткой топологией на $\mathcal{M}$. Получаемая таким образом нечеткая топология τ_ξ и соответствующее ей нечеткое пространство вероятностных мер $(\mathcal{M}, \tau_\xi)$ и являются основным объектом исследования в данной работе.

(1.2) <u>Основные частные случаи</u>. Рассмотрим следующие три частных случая, которые будут в дальнейшем играть роль основных:

(1.2.1) Пусть $(X, \mathcal{T})$ - нечеткое пространство и $\xi = \{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$. В этом случае мы будем отождествлять систему ξ с нечеткой топологией $\mathcal{T}$ и обозначать соответствующее нечеткое пространство вероятностных мер $(\mathcal{M}(X), \tau_{\mathcal{T}})$ или просто $(\mathcal{M}, \tau)$; это пространство будем называть <u>нечетко-вероятностной модификацией</u> пространства $(X, \mathcal{T})$.

(1.2.2) Пусть $(X, \mathcal{T})$ - нечеткое пространство и $\xi = \{\Lambda(\iota\mathcal{T})_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$. Ясно, что этот случай легко может быть сведен к предыдущему, если исходное пространство $(X, \mathcal{T})$ заменить на $(X, \Lambda\iota\mathcal{T})$ и заметить, что $(\Lambda\iota\mathcal{T})_\alpha = \Lambda(\iota\mathcal{T})_\alpha$. Соответствующее нечеткое пространство вероятностных мер будем обозначать $(\mathcal{M}(X), \tau_{\Lambda\iota\mathcal{T}})$ или просто $(\mathcal{M}, \tau_\Lambda)$. Ясно, что $(\mathcal{M}, \tau_\Lambda)$ является ламинированным пространством; мы будем называть его <u>ламинированной нечетко-вероятностной модификацией</u> пространства $(X, \mathcal{T})$.

(1.2.3) Пусть $(X, \mathcal{T})$ - чанговское (в частности, обычное) топологическое пространство и $\xi = \{\xi_\alpha : \alpha \in (0,1]\}$, где $\xi_\alpha = \xi_{\alpha'}$ для всех $\alpha, \alpha' \in (0,1]$. В этом случае мы будем отождествлять систему ξ с ее представителем ξ_α и говорить о всей системе ξ как о семействе полунепрерывных снизу отображений пространства $(X, \iota\mathcal{T})$ в I; соответствующее пространство вероятностных мер обозначаем, естественно $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$.

Подчеркнем, что нечеткое пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\xi)$ является чанговским только в следующих двух тривиальных случаях - когда $|X| \leq 1$ и когда $\xi \subset \{0,1\}$.

(1.3) Теорема. Пусть $(X, \mathfrak{T}^X)$, $(Y, \mathfrak{T}^Y)$ - нечеткие пространства и отображение $f:(X,\mathfrak{T}^X) \longrightarrow (Y,\mathfrak{T}^Y)$ непрерывно. Тогда отображение $\hat{f}:(\mathcal{M}(X),\tau^X) \longrightarrow (\mathcal{M}(Y),\tau^Y)$, определяемое равенством $\hat{f}(p)(E) = p(f^{-1}(E))$, где $p \in \mathcal{M}(X)$ и $E \in \mathfrak{B}(Y)$, также является непрерывным.

Доказательство. Покажем прежде всего, что для каждой измеримой (относительно $\mathfrak{B}$) функции $u \in I^Y$ и для каждого $p \in \mathcal{M}(X)$ имеет место равенство

$$(*) \int u\, d\hat{f}(p) = \int f^{-1}(u)\, dp.$$

Если $u \in \mathfrak{B}(Y)$, то $\int u\, d\hat{f}(p) = \hat{f}(p)(u) = p(f^{-1}(u)) = \int f^{-1}(u)\, dp$. Случай, когда $u \in I^Y$ - простая (измеримая) функция, легко сводится к предыдущему. Пусть, наконец, $u \in I^Y$ - произвольная измеримая функция. Аппроксимируем ее равномерно сходящейся возрастающей последовательностью простых измеримых функций $u_n : Y \longrightarrow I$. Тогда, как нетрудно заметить, $f^{-1}(u_n): X \to I$ - возрастающая последовательность отображений, равномерно сходящаяся к $f^{-1}(u)$. Воспользовавшись теоремой Лебега о предельном переходе [4], отсюда получаем $\int u\, d\hat{f}(p) = \int (\lim\limits_{n\to\infty} u_n)\, d\hat{f}(p) = \lim\limits_{n\to\infty} \int u_n\, d\hat{f}(p) = \lim\limits_{n\to\infty} \int f^{-1}(u_n)\, dp = \int \lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(u_n)\, dp = \int f^{-1}(u)\, dp$, что и доказывает равенство (*).

Пусть теперь $\alpha \in (0,1]$ и $u \in \mathfrak{T}^X_\alpha$. Тогда для каждого $p \in \mathcal{M}(X)$ имеет место равенство $f^{-1}(\delta_u)(p) = \delta_u \hat{f}(p) = \int u\, d\hat{f}(p)$. С другой стороны $\delta_{f^{-1}(u)}(p) = \int f^{-1}(u)\, dp$, откуда, согласно равенству (*), имеем $\hat{f}^{-1}(\delta_u) = \delta_{f^{-1}(u)}$ для каждого $u \in \mathfrak{T}^X_\alpha$.

Из непрерывности отображения f следует, что $f^{-1}(u) \in \mathfrak{T}^X_\alpha$, а значит $\delta_{f^{-1}(u)} \in \tau^\alpha_X$. Так как $\{\delta_u : u \in \mathfrak{T}^Y_\alpha\}$ является предбазой для τ^α_Y , отсюда следует, что отображение $\hat{f}:(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_X) \to (\mathcal{M}(Y),\tau^\alpha_Y)$ непрерывно. Но тогда, в силу [35, предложение (1.4)], отображение $\hat{f}:(\mathcal{M}(X),\tau^X) \longrightarrow (\mathcal{M}(Y),\tau^Y)$ также непрерывно.

Поскольку, согласно [35, предложения (4.2), (3.4)], непрерывность отображения $f:(X,\mathfrak{T}^X)\to(Y,\mathfrak{T}^Y)$ обеспечивает непрерывность отображения $f:(X,\Lambda\iota\mathfrak{T}^X)\to(Y,\Lambda\iota\mathfrak{T}^Y)$, из теоремы (1.3) вытекает следующая

(1.3′) Теорема. Пусть $(X,\mathfrak{T}^X)$, $(Y,\mathfrak{T}^Y)$ - нечеткие пространства и отображение $f:(X,\mathfrak{T}^X)\to(Y,\mathfrak{T}^Y)$ непрерывно. Тогда и отображение $\hat{f}:(\mathcal{M}(X),\tau^X_\Lambda)\to(\mathcal{M}(Y),\tau^Y_\Lambda)$ является непрерывным.

(1.4) Замечание. Из теоремы (1.3) следует, что нечетко-вероятностную модификацию нечеткого пространства можно рассматривать как функтор $\mu: FT\to FT$, переводящий каждое нечеткое пространство $(X,\mathfrak{T})$ в соответствующее пространство вероятностных мер $(\mathcal{M}(X),\tau)$ и сопоставляющий каждому непрерывному отображению $f:(X,\mathfrak{T}^X)\to$ $\to(Y,\mathfrak{T}^Y)$ непрерывное отображение $\hat{f}:(\mathcal{M}(X),\tau^X_\Lambda)\to(\mathcal{M}(Y),\tau^Y_\Lambda)$. Аналогично, теорема (1.3′) означает, что ламинированная нечетко-вероятностная модификация также может рассматриваться как функтор $\mu_\Lambda: FT\to LFT$, переводящий каждое нечеткое пространство $(X,\mathfrak{T})$ в пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda)$ и сопоставляющий каждому непрерывному отображению $f:(X,\mathfrak{T}^X)\to(Y,\mathfrak{T}^Y)$ непрерывное отображение $\hat{f}:(\mathcal{M}(X),\tau^X_\Lambda)\to(\mathcal{M}(Y),\tau^Y_\Lambda)$.

Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство, Y - его борелевское подмножество, т.е. $Y\in\mathfrak{B}(X)$, и $\mathfrak{T}^Y$ - нечеткая топология на Y, индуцированная нечеткой топологией $\mathfrak{T}$. Рассмотрим соответствующие пространства вероятностных мер $(\mathcal{M}(X),\tau)$ и $(\mathcal{M}(Y),\tau^Y)$. С другой стороны, обозначим через $\mathcal{M}^Y(X)$ подмножество пространства $\mathcal{M}(X)$, образованное всеми $p\in\mathcal{M}(X)$ такими, что $p(Y)=1$ и пусть $\tilde{\tau}$ - нечеткая топология на $\mathcal{M}^Y(X)$, индуцированная нечеткой топологией τ. Следующая теорема устанавливает, что пространства $(\mathcal{M}^Y(X),\tilde{\tau})$ и $(\mathcal{M}(Y),\tau^Y)$ гомеоморфны:

(1.5) Теорема. Отображение $\varphi:(\mathcal{M}(Y),\tau^Y)\to(\mathcal{M}^Y(X),\tilde{\tau})$, определяемое равенством $\varphi(p)(E)=p(E\cap Y)$, где $p\in\mathcal{M}(Y)$ и $E\in\mathfrak{B}(X)$, является гомеоморфизмом.

Доказательство. Ясно, что отображение φ является биекцией. Пусть $\alpha\in(0,1]$ и $\mathcal{U}\in\mathfrak{T}^X_\alpha$; тогда $\mathcal{U}\wedge Y\in\mathfrak{T}^Y_\alpha$, $\delta_\mathcal{U}\in\tau^\alpha_X$ и $\delta^Y_\mathcal{U}=\delta_{\mathcal{U}\wedge Y}\in\tau^\alpha_Y$ (см. обозначения в (1.1)).

Далее, легко понять, что для каждого $p \in \mathcal{M}(Y)_Y$ имеют место равенства $\varphi^{-1}(\delta_u)(p) = \delta_u(\varphi(p)) = \int u\, d\varphi(p)$ и $\delta_u^Y(p) = \int_Y (u \wedge Y)\, dp = \int (u \wedge Y)\, dp$, а следовательно, $\varphi^{-1}(\delta_u) = \delta_u^Y$. Поскольку $\{\delta_u : u \in \mathfrak{T}_\alpha^X\}$ служит предбазой чанговской нечеткой топологии τ^α , а $\{\delta_u^Y : u \in \mathfrak{T}_\alpha^X\}$ - предбазой чанговской нечеткой топологии τ_Y^α , отсюда вытекает, что отображение $\varphi : (\mathcal{M}(Y), \tau_Y^\alpha) \to (\mathcal{M}^Y(X), \tilde{\tau}^\alpha)$ для каждого $\alpha \in (0,1]$ является гомеоморфизмом, а следовательно, в силу [35 , предложения (1.4), (1.4')], и отображение $\varphi : (\mathcal{M}(Y), \tau_Y) \to (\mathcal{M}^Y(X), \tilde{\tau})$ является гомеоморфизмом.

Из теоремы (1.5) (или по аналогии с ее доказательством) легко убедиться в справедливости следующего утверждения

(1.5') Теорема. Отображение $\varphi : (\mathcal{M}(Y), \tau_\Lambda^Y) \to (\mathcal{M}^Y(X), \tilde{\tau}_\Lambda)$ является гомеоморфизмом.

Для каждого $x \in X$ рассмотрим меру $p_x \in \mathcal{M}$, вырожденную в точке x (т.е. $p_x(E) = 1$, где $E \in \mathfrak{B}$, тогда и только тогда, когда $x \in E$; в противном случае $p_x(E) = 0$). Заметим, что из $x_1 \neq x_2$ вообще говоря, не следует, что $px_1 \neq px_2$; необходимым и достаточным условием того, чтобы из $x_1 \neq x_2$ следовало $px_1 \neq px_2$ является наличие нечеткого множества $u \in \bigcup\{\mathfrak{T}_\alpha : \alpha > 0\} := \mathfrak{T}_0$ такого, что $u(x_1) \neq u(x_2)$. Пусть $\mathfrak{D} := \{p_x : x \in X\}$ - совокупность всех вырожденных мер.

Исследуем свойства отображения $h : X \to \mathcal{M}(X)$, определяемого равенством $h(x) = p_x$. Основной здесь является приведенная ниже теорема (1.7). Однако предварительно мы отметим следующий используемый в доказательстве теоремы (1.7) и в дальнейшем простой (и, по-видимому, хорошо известный) факт:

(1.6) Для каждой измеримой функции $u \in I^X$ имеет место равенство $\int u\, dp_x = u(x)$.
(Действительно, если $u(x) = a$ и $\varepsilon > 0$, то, положив $E_\varepsilon = u^{-1}(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, очевидно, имеем $a - \varepsilon = p(E_\varepsilon)(a-\varepsilon) \leq \int u\, dp_x \leq p(E_\varepsilon)(a+\varepsilon) = a + \varepsilon$, что, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$, и доказывает нужное равенство).

(1.7) Теорема. Пусть нечеткое пространство $(X, \mathfrak{T})$ таково, что для любых $x_1, x_2 \in X$ найдется нечеткое множество $\mathcal{U}\in\mathfrak{T}_0$, для которого $\mathcal{U}(x_1)\neq\mathcal{U}(x_2)$. Тогда, если ξ есть предбаза нечеткой топологии $\mathfrak{T}$, то отображение $h:(X,\mathfrak{T})\to(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ является гомеоморфным вложением. Обратно, если h - гомеоморфное вложение, то ξ является слабой предбазой нечеткой топологии $\mathfrak{T}$.

<u>Доказательство</u>. Заметим прежде всего, что, в силу (1.6), для каждого $u\in\mathfrak{T}_\alpha$, где $\alpha\in(0,1]$, и каждого $x\in X$ имеет место равенство $h^{-1}(\delta_u)(x)=\delta_u(p)(x)=\int u\,dp_x=u(x)$, а следовательно, $h^{-1}(\delta_u)=u$. С другой стороны, поскольку из условия ясно, что h инъективно, то $h(u)(p_x)=u(x)=\delta_u(p_x)$ и $h(u)(p)=0$ при $p\notin\mathfrak{A}$, а значит, $h(u)=\delta_u\wedge\mathfrak{A}$.

Предположим, что ξ - предбаза нечеткой топологии $\mathfrak{T}$, и покажем, что $h:(X,\mathfrak{T})\to(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ - гомеоморфное вложение. Поскольку, очевидно, $(\tau_\xi)_\alpha=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\tau_\xi^{\alpha'}$ и

$\mathfrak{T}_\alpha=\bigcap_{\alpha'<\alpha}\mathfrak{T}_{\alpha'}$, для этого достаточно установить, что $h:(X,\mathfrak{T}_\alpha)\to(\mathcal{M}(X),\tau_\xi^\alpha)$ является гомеоморфным вложением для каждого $\alpha\in(0,1]$.

Непрерывность отображения $h:(X,\mathfrak{T}_\alpha)\to(\mathcal{M}(X),\tau_\xi^\alpha)$ следует из того, что $h^{-1}(\delta_u)=u$ для каждого $u\in\xi_\alpha$, а семейство $\{\delta_u:u\in\xi_\alpha\}$ является предбазой чанговской нечеткой топологии τ_ξ^α . Для доказательства открытости отображения h рассмотрим $V\in\mathfrak{T}_\alpha$, $x\in X$, и пусть $V(x)=a$ и $\varepsilon>0$. Воспользовавшись тем, что ξ_α - предбаза для $\mathfrak{T}_\alpha$, выберем $u_1,\dots,u_n\in\xi_\alpha$ так, чтобы $\bigwedge_{i=1}^n u_i\le V$ и $a-\varepsilon\le\bigwedge_{i=1}^n u_i(x)$. Но тогда, как легко заметить, $(\bigwedge_{i=1}^n\delta_{u_i})\wedge\mathfrak{A}\le h(V)$ и $a-\varepsilon\le(\bigwedge_{i=1}^n\delta u_i)(p_x)\wedge\mathfrak{A}(p_x)$, что и означает открытость нечеткого множества $h(V)$ в подпространстве $\mathfrak{A}$ чанговского пространства $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi^\alpha)$.

Обратно, предположим, что $h:(X,\mathfrak{T})\to(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ является гомеоморфным вложением. Пусть $V\in\mathfrak{T}_\alpha$, $x\in X$ и $V(x)=a>0$. Тогда $h(V)(p_x)=\delta_V(p_x)=V(x)$ и, поскольку $h(V)\in(\tau_\xi)_\alpha\wedge\mathfrak{A}=(\bigcap_{\alpha'<\alpha}\tau_\xi^{\alpha'})\wedge\mathfrak{A}$, то для каждого $\alpha'<\alpha$ найдутся $u_1,\dots,u_n\in\xi_{\alpha'}$ такие, что $(\bigwedge_{i=1}^n\delta_{u_i})\wedge\mathfrak{A}\le h(V)$

и $a-\varepsilon\leqslant(\bigwedge_{i=1}^{n}\delta_{u_i})(p_x)\wedge\mathfrak{D}(p_x)$. Из этих неравенств легко следует, что $\bigwedge_{i=1}^{n}u_i\leqslant V$ и $a-\varepsilon\leqslant\bigwedge_{i=1}^{n}u_i(x)$, а значит, ξ - слабая предбаза нечеткой топологии $\mathfrak{T}$.

(1.8) <u>Замечание</u>. Итак, если мы желаем, чтобы нечеткое пространство вероятностных мер $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ содержало (с точностью до естественного вложения) исходное пространство $(X,\mathfrak{T})$, необходимо требовать, чтобы, во-первых, точки пространства X различались семейством $\mathfrak{T}_0$, и, во-вторых, чтобы система ξ была предбазой (или, по крайней мере, слабой предбазой) нечеткой топологии $\mathfrak{T}$. При этом, как нетрудно заметить, даже в простейших случаях возможны неравенства $\wedge\delta_{u_i}\neq\delta_{\wedge u_i}$ и $\vee\delta_{u_i}\neq\delta_{\vee u_i}$, а следовательно, нечеткая топология τ_ξ будет существенно зависить от выбора предбазы ξ . Поскольку наиболее естественной (по крайней мере, в случае произвольного пространства $(X,\mathfrak{T})$) предбазой является вся (нечеткая) топология $\mathfrak{T}$, именно этот случай мы рассматриваем, как один из основных (см. (1.2.1)).

Множество $\mathfrak{D}$ всех вырожденных мер, в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ обладает рядом интересных, специфически нечетких свойств, из которых важнейшие из известных нам отражены в утверждениях (1.10), (1.10$'$) и (1.12), (1.12$'$). Предварительно мы докажем следующую полезную лемму, характеризующую замыкание $\bar{\mathfrak{D}}^{\alpha\xi}$ множества $\mathfrak{D}$ и его подмножеств в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi^\alpha)$.

(1.9) <u>Лемма</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство, точки которого различаются семейством $\mathfrak{T}_0$, $A\subset X$, $\mathfrak{D}_A:=\{p_x: x\in A\}$ и $p\in\mathcal{M}(X)$. Тогда
$$\bar{\mathfrak{D}}_A^{\alpha\xi}(p)=\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int c_i\,dp: c_i\in\xi_\alpha^*,\ \bigvee_{i=1}^{n}c_i\geqslant A_i\}$$, где $\xi_\alpha^*=\{u^c: u\in\xi_\alpha\}$

Действительно, непосредственно из определений ясно, что $\bar{\mathfrak{D}}_A^{\alpha\xi}(p)=\inf\{1-\bigwedge_{i=1}^{n}\delta_{u_i}(p): u_i\in\xi_\alpha,\ 1-\bigwedge_{i=1}^{n}\delta_{u_i}\geqslant\mathfrak{D}_A\}=$

$=\inf\{1-\bigwedge_{i=1}^{n}\delta_{u_i}(p): u_i\in\xi_\alpha, \forall x\in A \wedge \delta_{u_i}(p_x)=0\}=\inf\{1-\bigwedge_{i=1}^{n}\int u_i\,dp:$
$u_i\in\xi_\alpha, (\bigwedge_{i=1}^{n}u_i)\wedge A=0\}=\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int c_i\,dp: c_i\in\xi_\alpha^*, \bigvee_{i=1}^{n}c_i\geq A\}.$

(1.10) Теорема. Пусть $(X,\mathcal{T})$ – нечеткое α-ультра-T_0-пространство. Тогда для каждой α-нормальной гладкой[1)] меры p имеет место равенство

$$\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\iota}(p)=\sup\{p\{x\}: x\in X\},$$

где $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\iota}$ – замыкание множества $\mathfrak{A}$ в чанговском пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau^{\alpha}_{\iota\mathcal{T}})$.

Доказательство. Пусть семейство $\{c_i: i=1,2,\dots,n\}\subset\hat{\mathcal{T}}^*_\alpha$ удовлетворяет условию $\bigvee_{i=1}^{n}c_i=1$. Положим $X_i=c_i^{-1}(1)$. Тогда $\int c_i\,dp\geq\int X_i\,dp\geq\sup\{p(x): x\in X\}$, а следовательно и $\bigvee_{i=1}^{n}\int c_i\,dp\geq\sup\{p\{x\}: x\in X\}$. В силу леммы (1.9) отсюда получаем $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha}(p)\geq\sup\{p\{x\}: x\in X\}$.

Для доказательства обратного включения положим $\hat{X}=\{\{x\}: x\in X\}$. Заметим, что, очевидно, $|p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}|\leq\aleph_0$, и рассмотрим в отдельности каждый из трех случаев, которые могут здесь представиться.

1. $|p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}|=\aleph_0$. Представим это пересечение в виде $p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}=\{a_1,\dots,a_n,\dots\}$, где $a_n\in\{x_n\}, x_n\in X$, причем $p(a_1)\geq p(a_2)\geq\dots$. Обозначим $\beta:=p(a_1)$ и, зафиксировав $\varepsilon>0$, выберем $m\in\mathbb{N}$ так, чтобы $\sum_{n>m}p(a_n)<\frac{\varepsilon}{2}$. Поскольку мера p α-нормальна, для каждого a_n, где $n=1,\dots,m$, найдется $U_n\in(\iota\mathcal{T})_\alpha$ такое, что $p(\bar{U}_n^{\alpha\iota})<p(a_n)+\varepsilon<\beta+\varepsilon$. Ясно, что мера p не имеет атомов на множестве $Y=X\setminus\{x_1,\dots,x_n,\dots\}$, а следовательно, согласно теореме Сакса (см. (1.12)), это множество можем представить в виде конечного дизъюнктного объединения $Y=\bigcup_{j=1}^{k}Y_j$, где все Y_j – борелевские, и $p(Y_j)<\beta$

[1)] Мера $p: \mathfrak{B}\to I$, называется гладкой, если $\lim_{\gamma\in\Gamma}p(Z_\gamma)=0$ для каждого направленного семейства $\{Z_\gamma:\gamma\in\Gamma\}\subset\mathfrak{B}$ такого, что $\bigcap Z_\gamma=\emptyset$. (ср. [, с.48]).

Воспользовавшись еще раз α-нормальностью меры p и тем, что $(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ – T_1-топология, для каждого $j=1,\dots,k$ выберем множества $W_j, Z_j \in (\iota\mathfrak{T})_\alpha$ так, чтобы $\bar{Z}_j^{\alpha\iota}\subset W_j$, $Y_j\subset W_j$, $\{a_1,\dots,a_n\}\cap Z_i=\phi$, $p(W_j\setminus Y_j)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ и $p(W_j\setminus Z_j)<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Из последних двух неравенств легко заключить, что

$$(*)\ |p(\bar{Z}_j^{\alpha\iota})-p(Y_j)|<\frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Установим еще одно нужное для дальнейшего неравенство:

$$(**)\ |p(Y_1\cup\dots\cup Y_k)-p(Z_1\cup\dots\cup Z_k)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В самом деле, из условий $W_j\supset Y_j$, $W_j\supset Z_j$, $|p(Z_j)-p(Y_j)|<\delta$ $(j=1,2)$ и $Y_1\cap Y_2=\phi$, легко устанавливаем, что $p(Z_1\cap Z_2)\le p(W_1\cap W_2)<2\delta$ и, далее, $|p(Y_1\cup Y_2)-p(Z_1\cup Z_2)|\le|p(Y_1)-p(Z_1)|+|p(Y_2)-p(Z_2)|+p(Z_1\cap Z_2)<2^2\delta$.

Предположим, что $|p(Y_1\cup\dots\cup Y_i)-p(Z_1\cup\dots\cup Z_i)|\le 2^i\delta$ и покажем, что $|p(Y_1\cup\dots\cup Y_{i+1})-p(Z_1\cup\dots\cup Z_{i+1})|\le 2^{i+1}\delta$. В самом деле, положив $\tilde{W}_i=W_1\cup\dots\cup W_i$, $\tilde{Y}_i=Y_1\cup\dots\cup Y_i$, $\tilde{Z}_i=Z_1\cup\dots\cup Z_i$, имеем $\tilde{W}_i\supset\tilde{Y}_i$, $W_{i+1}\supset Y_{i+1}$, $p(\tilde{W}_i)-p(\tilde{Y}_i)\le i\delta$, $p(W_{i+1}-Y_{i+1})<\delta$, $\tilde{Y}_i\cap Y_{i+1}=\phi$. Рассуждая как и выше, отсюда получаем $p(\tilde{Z}_i\cap Z_{i+1})\le p(\tilde{W}_i\cap W_{i+1})<(i+1)\delta$, а значит, $|p(\tilde{Y}_i\cup Y_{i+1})-p(\tilde{Z}_i\cup Z_{i+1})|\le p(\tilde{Y}_i)-p(\tilde{Z}_i)+p(Y_{i+1})-p(Z_{i+1})+$ $+p(\tilde{Z}_i\cap Z_{i+1})<2^i\delta+\delta+(i+1)\delta<2^{i+1}\delta$.
Отсюда по индукции заключаем, что $|p(Y_1\cup\dots\cup Y_k)-$ $-p(Z_1\cup\dots\cup Z_k)|<\frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\cdot 2^k=\frac{\varepsilon}{2}$.

Для завершения доказательства в первом случае положим $A=(\bigcup_{j=1}^k \bar{Z}_j^{\alpha\iota})\cup(\bigcup_{n=1}^m \bar{O}_n^{\alpha\iota})$ и $B=X\setminus(\bigcup_{j=1}^k Z_j)\cup(\bigcup_{n=1}^m O_n)$. Тогда, очевидно, $A\cup B=X$ и, следовательно $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_A\cup\mathfrak{A}_B$ и $\bar{\mathfrak{A}}^\alpha=\bar{\mathfrak{A}}_A^\alpha\cup\bar{\mathfrak{A}}_B^\alpha$. В силу леммы (1.9) и неравенства $(*)$ имеем $\bar{\mathfrak{A}}_A^{\alpha\iota}(p)\le(\bigvee_{j=1}^k\int\bar{Z}_j^{\alpha\iota}dp)\vee(\bigvee_{n=1}^m\int\bar{O}_n^{\alpha\iota}dp)=$ $=(\bigvee_{j=1}^k p(\bar{Z}_j^{\alpha\iota}))\vee(\bigvee_{n=1}^m p(\bar{O}_n^{\alpha\iota}))<\bigvee_{j=1}^k(p(Y_j)+\frac{\varepsilon}{2^{k+1}})\vee(\bigvee_{n=1}^m p(a_n)+\varepsilon)\le\rho+\varepsilon$, а в силу $(**)$ –
$\bar{\mathfrak{A}}_B^{\alpha\iota}(p)\le\int B\,dp=p(B)=1-p(\bigcup_{j=1}^k Z_j)\cup(\bigcup_{n=1}^m O_n)\le 1-p(\bigcup_{j=1}^k Z_j)-$ $-\sum_{n=1}^m p(a_n)=p(Y)+\sum_{n=m+1}^{\infty}p(a_n)-p(\bigcup_{j=1}^k Z_j)<p(Y)-p(\bigcup_{j=1}^k Z_j)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.
Отсюда вытекает, что $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\iota}(p)\le(\rho+\varepsilon)\vee\varepsilon$, а следовательно, ввиду произвольности $\varepsilon>0$, $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\iota}(p)\le\rho$.

2. <u>$0<|p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}|<\aleph_0$</u>. Пусть $p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}=\{a_1,\dots,a_m\}$.

Положив $p(a_n)=0$ при $n>m$ и рассуждая как и в первом случае, но с очевидными упрощениями, легко устанавливаем неравенство $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\iota}(p)\leq \rho$.

3. $\underline{p^{-1}(0,1]\cap\hat{X}=\varnothing}$. Зафиксируем некоторое $\rho>0$ и, рассуждая, как и в доказательстве первого случая, представим X в виде конечного дизъюнктного объединения

$X=Y=\bigcup_{j=1}^{k}Y_j$, где все Y_j борелевские и $p(Y_j)<\rho$. Далее, пусть W_j и Z_j определены так же, как и в доказательстве первого случая. Положим $A=\bigcup_{j=1}^{k}\bar{Z}_j^{\alpha\iota}$,

$B=X\setminus\bigcup_{j=1}^{k}Z_j$. Тогда, рассуждая, как и в доказательстве 1-го случая, но с очевидными упрощениями, устанавливаем, что $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\iota}(p)=\bar{\mathfrak{A}}_A^{\alpha\iota}(p)\vee\bar{\mathfrak{A}}_B^{\alpha\iota}(p)<\rho$, откуда, ввиду произвольности $\rho>0$, получаем, что $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\iota}(p)=0$.

Аналогичный результат справедлив и для замыкания $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\Lambda}$ множества $\mathfrak{A}$ в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda^\alpha)$:

(1.10') <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое α-ультра-T_1-пространство. Тогда для каждой α-нормальной гладкой меры p имеет место равенство

$$\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\Lambda}(p)=\sup\{p\{x\}:x\in X\}.$$

<u>Доказательство</u>. Поскольку $\Lambda\iota\mathfrak{T}\geq\mathfrak{T}$, то, очевидно, $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\Lambda}\leq\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\iota}$. С другой стороны, воспользовавшись леммой (1.9), как и в доказательстве теоремы (1.10) легко устанавливаем неравенство $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha\Lambda}(p)\geq\sup\{p\{x\}:x\in X\}$.
Из этих двух неравенств и теоремы (1.10) сразу вытекает доказываемое утверждение.

Из теоремы (1.10) и (1.10') немедленно вытекает следующая

(1.10'') <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое α-ультранормальное-T_1-пространство и $\iota\mathfrak{T}\leq\mathfrak{T}\leq\Lambda\mathfrak{T}$. Тогда для каждой α-нормальной гладкой меры p имеет место равенство $\bar{\mathfrak{A}}^{\alpha}(p)=\sup\{p\{x\}:x\in X\}$.

(1.11) <u>Следствие</u>. Если $(X,\mathfrak{T})$ - нормальное T_1-топологическое пространство, то $\bar{\mathfrak{A}}(p)=\sup\{p\{x\}:x\in X\}$ для каждой регулярной гладкой меры p.

Следующее утверждение немедленно вытекает из известной леммы Сакса [4, с.335].

(1.12) <u>Лемма</u>. Пусть $(Y,\mathfrak{T})$ - топологическое T_1-пространство и p - мера, не имеющая атомов (т.е. $p(\{a\})=0$ для каждой точки $a\in X$). Тогда для каждого $\varepsilon>0$ существует дизъюнктное разложение $Y=\bigcup_{i=1}^{n} Y_i$, где все Y_i - борелевские и $p(Y_i)<\varepsilon$ для всех $i=1,\dots,n$.

(1.13) <u>Предложение</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство, $\alpha\in(0,1]$ и $k\in[0,1]$. Тогда

(1) если $\mathfrak{T}(k^c\mathcal{U})\geq\mathfrak{T}(\mathcal{U})$ для каждого $\mathcal{U}\in I^X$, то $\overline{(k\mathfrak{A})}^{\alpha}\leq k\overline{\mathfrak{A}}^{\alpha}$;

(2) если $\mathfrak{T}(k^c\mathcal{U})=\mathfrak{T}(\mathcal{U})$ для каждого $\mathcal{U}\in I^X$, то $\overline{(k\mathfrak{A})}^{\alpha}=k\overline{\mathfrak{A}}^{\alpha}$.

<u>Доказательство</u>. В силу лемм (1.9) и (1.9') имеем следующую цепочку, из которой и следует доказываемое утверждение: $k\overline{\mathfrak{A}}^{\alpha}(p)=k\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int B_i\,dp: B_i\in\mathfrak{T}_{\alpha}^{*}, \bigvee_{i=1}^{n}B_i=1\}=$

$$=\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int(kB_i)dp: B_i\in\mathfrak{T}_{\alpha}^{*}, \bigvee_{i=1}^{n}B_i=1\}\geq\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int c_i\,dp: c_i\in\mathfrak{T}_{\alpha}^{*},$$

$$\bigvee_{i=1}^{n}c_i=k\}=\inf\{\bigvee_{i=1}^{n}\int c_i\,dp: c_i\in\mathfrak{T}_{\alpha}^{*}, \bigvee_{i=1}^{n}c_i\geq k\}=\overline{(k\mathfrak{A})}^{\alpha}.$$

(Неравенство в этой цепочке обеспечивается тем, что согласно условию (1), если $B_i\in\mathfrak{T}_{\alpha}^{*}$, то и $c_i=kB_i\in\mathfrak{T}_{\alpha}^{*}$. Если же выполнено условие (2), то верно и обратное, и, следовательно, неравенство в этой цепочке может быть заменено на равенство. Предпоследнее равенство в цепочке обеспечивается тем, что, в силу условия (1) $\mathfrak{T}^{*}(k)=1$, а значит $\mathfrak{T}^{*}(c)=\mathfrak{T}^{*}(c\wedge k)$ для каждого $c\in I^X$.

Поскольку для каждого нечеткого пространства $(X,\mathfrak{T})$ и каждого $\mathcal{U}\in I^X$, справедливо, как нетрудно заметить, равенство $(\Lambda\iota\mathfrak{T})(\mathcal{U})=(\Lambda\iota\mathfrak{T})(k^c\mathcal{U})$, из предложения (1.12) вытекает

(1.13') <u>Предложение</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство, $\alpha\in(0,1]$ и $k\in[0,1]$. Тогда $\overline{(k\mathfrak{A})}^{\alpha\Lambda}=k\overline{\mathfrak{A}}^{\alpha\Lambda}$.

Отметим также следующее простое утверждение, в справедливости которого легко убедиться непосредственно:

(1.14) <u>Предложение</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство

ранство, $p, q \in \mathcal{M}(X)$, $\alpha \in (0,1]$ и $k \in [0,1]$. Тогда

$$\overline{k\{p\}}^{\alpha}(q) = \inf\{\int c\,dq : c \in \mathcal{T}_{\alpha}^{*}, \int c\,dp \geq k\}$$ и

$$\overline{k\{p\}}^{\alpha\Lambda}(q) = \inf\{\int c\,dq : c \in \Lambda_{\alpha}, \int c\,dp \geq k\}.$$

§2. $R\Lambda_{\alpha}$-топология и ее связь с нечеткой топологией на пространстве вероятностных мер.

В данном параграфе мы рассматриваем две конструкции, позволяющие на пространстве $\mathcal{M}(X)$ вероятностных мер нечеткого пространства $(X,\mathcal{T})$ ввести некоторые обычные топологии (важнейшая из них для нас – т.н. $R\Lambda_{\alpha}$-топология), которые весьма тесно связаны с описанными в предыдущем параграфе нечеткими топологиями τ_{ξ}. Изучение этих топологий зачастую оказывается проще, чем непосредственное изучение интересующих нас нечетких топологий, и при этом нередко позволяет сделать определенные выводы о свойствах последних. Отметим также сразу, что в случае, когда исходное пространство $(X,\mathcal{T})$ – обычное топологическое, рассматриваемые в этом параграфе топологии в известном смысле аналогичны (а в случае совершенно нормального пространства равны) так называемой слабой топологии на пространстве вероятностных мер, играющей большую роль в абстрактной теории меры, а также в некоторых вопросах теории вероятностей (см., напр., [1], [2], [3], [13], [21] и др.).

Пусть $(X,\mathcal{T})$ – нечеткое топологическое пространство и $\mathcal{B} \subset I^X$ – некоторое семейство отображений, измеримых относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$. (Здесь, как и в дальнейшем, мы продолжаем использовать обозначения, введенные в предыдущем параграфе.)

(2.1) Определение. Для каждого $p \in \mathcal{M}(X)$, каждого $u \in \mathcal{B}$ и каждого $\varepsilon > 0$ положим $N^{+}(p,u,\varepsilon) := \{q \in \mathcal{M} : \int u\,dq > \int u\,dp - \varepsilon\}$, $N^{-}(p,u,\varepsilon) := \{q \in \mathcal{M} : \int u\,dq < \int u\,dp + \varepsilon\}$. Топологию на $\mathcal{M}(X)$, порожденную предбазой $\{N^{+}(p,u,\varepsilon) : p \in \mathcal{M}, u \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0\}$, будем называть $R\mathcal{B}$-топологией и обозначать $R(\mathcal{B})$. Топологию на $\mathcal{M}(X)$, порожденную предбазой $\{N^{+}(p,u,\varepsilon), N^{-}(p,u,\varepsilon) :$

$p \in \mathcal{M}, u \in \mathcal{C}, \varepsilon > 0\}$,
будем называть $S\mathcal{C}$-топологией и обозначать $S(\mathcal{C})$.

Нетрудно заметить, что базой $S\mathcal{C}$-топологии служит семейство всевозможных множеств вида $V(p; u_1, \ldots, u_n; \varepsilon) = \{q \in \mathcal{M} : |\int u_i d(p-q)| < \varepsilon \ \forall u_1, \ldots, u_n\}$, где $u_1, \ldots, u_n \in \mathcal{C}$, $p \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$.

(2.2) Замечание. Нетрудно понять, что направленность мер $(p_\lambda)_\lambda$ сходится в пространстве $(\mathcal{M}, S(\mathcal{C}))$ к мере $p \in \mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда для каждого $u \in \mathcal{C}$ числовая направленность $(\int u dp_\lambda)_\lambda$ сходится к $\int u dp$. Сходимость направленности $(p_\lambda)_\lambda$ в пространстве $(\mathcal{M}, \mathcal{R}(\mathcal{C}))$ к мере $p \in \mathcal{M}$ равносильна сходимости к $\int u dp$ числовой направленности $(\int u dp_\lambda)_\lambda$ в топологии $\sigma = \{(a,1] : a \in I\} \cup \{I\}$ (ср. [1], [3, стр. 56]).

(2.3) Конструкции $R\Lambda_\alpha$-, $S\Lambda_\alpha$-, RC_α- и SC_α-топологий.

Пусть $(X, \mathcal{T})$ - нечеткое пространство, $\Lambda := \Lambda(\iota\mathcal{T})_\alpha$ - семейство всех полунепрерывных снизу отображений топологического пространства $(X, (\iota\mathcal{T})_\alpha)$ в I и $C_\alpha := C(\iota\mathcal{T})_\alpha$ - семейство всех непрерывных отображений пространства $(X, (\iota\mathcal{T})_\alpha)$ в I . Основной интерес для нас будут представлять топологии $R(\Lambda_\alpha)$, $S(\Lambda_\alpha)$, $R(C_\alpha)$ и $S(C_\alpha)$ на $\mathcal{M}_\alpha(X)$, а также следующим образом порождаемые ими топологии на $\mathcal{M}(X)$.

Рассмотрим отображение $\pi_\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_\alpha$, где $\alpha \in (0,1]$, сопоставляющее каждой мере $p \in \mathcal{M}$ ее ограничение p' на σ-алгебру $\mathcal{B}_\alpha$. (Отображение π_α не является, вообще говоря, ни сюръективным, ни инъективным; при этом сюръективность отображения π_α означает, что каждая вероятностная мера $p' : \mathcal{B}_\alpha \to I$ имеет σ-аддитивное продолжение $\tilde{p}' : \mathcal{B} \to I$; условие инъективности отображения π_α означает, что некая мера $p' : \mathcal{B}_\alpha \to I$ не имеет двух различных продолжений на $\mathcal{B}$.) Отображение $\pi_\alpha : \mathcal{M} \to (\mathcal{M}_\alpha, R(\Lambda_\alpha))$. порождает на $\mathcal{M}$ инициальную топологию, для которой мы используем то же обозначение $R(\Lambda_\alpha)$. Аналогично, для инициальных топологий, порождаемых отображениями $\pi_\alpha : \mathcal{M} \to (\mathcal{M}_\alpha, S(\Lambda_\alpha))$, $\pi_\alpha : \mathcal{M} \to (\mathcal{M}_\alpha, R(C_\alpha))$ и $\pi_\alpha : \mathcal{M} \to (\mathcal{M}_\alpha, S(C_\alpha))$

также будем использовать обозначения $S(\Lambda_\alpha)$, $R(C_\alpha)$ и $S(C_\alpha)$ соответственно. (Полагаем, что это не должно вызвать недоразумения, поскольку из контекста всегда будет ясно (а нередко и безразлично) о каком именно пространстве идет речь.)

Отметим, что в случае, когда $(X,\mathfrak{T})$ - обычное топологическое пространство, топология $S(C)$, очевидно, индуцирует на подпространстве $\mathfrak{M}(X)$ всех бэровских мер т.н. слабую топологию [1], [2], [3]. В частности, если топологическое пространство совершенно нормально, то $S(C)$ совпадает на $\mathcal{M}(X) = \mathfrak{M}(X)$ со слабой топологией.

(2.4) <u>Предложение</u>. Для каждого нечеткого пространства $(X,\mathfrak{T})$ и каждого $\alpha \in (0,1]$ справедливы равенства $R((\iota\mathfrak{T})_\alpha) = R(\Lambda_\alpha)$ и $S((\iota\mathfrak{T})_\alpha) = S(\Lambda_\alpha)$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку $(\iota\mathfrak{T})_\alpha \subset \Lambda_\alpha$, включения $R((\iota\mathfrak{T})_\alpha) \subset R(\Lambda_\alpha)$ и $S((\iota\mathfrak{T})_\alpha) \subset S(\Lambda_\alpha)$ очевидны. Для доказательства включения $R(\Lambda_\alpha) \subset R((\iota\mathfrak{T})_\alpha)$ достаточно установить, что для произвольных $p \in \mathcal{M}_\alpha(X)$, $u \in \Lambda_\alpha$ и $\varepsilon > 0$ найдутся $u_i \in (\iota\mathfrak{T})_\alpha$, где $i = 0,\dots,k-1$, такие, что
$$\bigcap_{i=0}^{k-1} \mathcal{N}^+(p,u_i,\varepsilon/2) \subset \mathcal{N}^+(p,u,\varepsilon).$$
Зафиксировав $u \in \Lambda_\alpha$ и $\varepsilon > 0$, выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $1/k < \varepsilon/2$ и положим $u_i = u^{-1}(i/k, 1]$, где $i = 0,1,\dots,k-1$. Тогда, как легко заметить,
$$a := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} \int u_i\,dp \leqslant \int u\,dp \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \int u_i\,dp =: a',$$
и, аналогично, $b := \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1} \int u_i\,dq \leqslant \int u\,dq \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \int u_i\,dq =: b'$ для произвольной меры $q \in \mathcal{M}_\alpha(X)$.

Теперь, если $q \in \bigcap_{i=0}^{k-1} \mathcal{N}^+(p,u_i,\varepsilon/2)$, то $\int u_i\,dq > \int u_i\,dp - \varepsilon/2$ для всех $i = 0,1,\dots,k-1$, а значит, $b > a - \varepsilon/2$. В силу очевидного неравенства $a' - a \leqslant \frac{1}{k} < \varepsilon/2$, отсюда получаем $\int u\,dq \geqslant b > a - \varepsilon/2 \geqslant a' - \varepsilon \geqslant \int u\,dp - \varepsilon$, т.е. $q \in \mathcal{N}^+(p,u,\varepsilon)$ и, значит $R((\iota\mathfrak{T})_\alpha) \supset R(\Lambda_\alpha)$.

Совершенно аналогично, если $q \in \bigcap_{i=0}^{k-1} \mathcal{N}^-(p,u_i,\varepsilon/2)$, то

$\int u_i\,dq < \int u_i\,dp + \varepsilon/2$ при $i=0,1,\dots,k-1$ и, следовательно, $\int u\,dq \leq b' < a' + \varepsilon/2 < a+\varepsilon \leq \int u\,dp+\varepsilon$ т.е. $q \in N^-(p,u,\varepsilon)$. Из полученных соотношений легко заключаем, что $S((\iota\mathcal{T})_\alpha) = S(\Lambda_\alpha)$.

(2.5) Предложение. Для каждого нечеткого пространства $(X,\mathcal{T})$ имеет место включение $R(\Lambda_\alpha) \subset S(C_\alpha)$. При этом, если пространство $(X,\mathcal{T})$ α-ультранормально, то на подпространстве α-нормальных вероятностных мер топологии $R(\Lambda_\alpha)$ и $S(C_\alpha)$ совпадают.

Доказательство. Рассмотрим элемент $V(p,f,\varepsilon)$ стандартной предбазы топологии $S(C_\alpha)$, где $p \in \mathcal{M}_\alpha(X)$, $f \in C_\alpha$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $1/k < \varepsilon/3$, и положим $H_i = f^{-1}(i/k, 1]$, где $i = 1,\dots,k$. Тогда $1/k \sum_{i=1}^{k} p(H_i) \leq \int f\,dp < \varepsilon/3 + 1/k \sum_{i=1}^{k} p(H_i)$, и аналогично, $1/k \sum_{i=1}^{k} q(H_i) \leq \int f\,dq < \varepsilon/3 + 1/k \sum_{i=1}^{k} q(H_i)$ для каждого $q \in \mathcal{M}_\alpha(X)$. Отсюда легко следует, что $\int f\,dq < \int f\,dp + \varepsilon$ как только $q \in \bigcap_{i=1}^{k} N^+(p,H_i,\varepsilon/3)$.

Аналогично, положив $G_i = g^{-1}(i/k, 1]$, где $g = 1-f$, получаем, что при $q \in \bigcap_{i=1}^{k} N^+(p,G_i,\varepsilon/3)$ имеет место неравенство $\int g\,dq < \int g\,dp + \varepsilon$. Тем самым, $\int f\,dq > \int f\,dp - \varepsilon$. Отсюда легко заметить, что $(\bigcap_{i=1}^{k} N^+(p,H_i,\varepsilon/3)) \cap (\bigcap_{i=1}^{k} N^+(p,G_i,\varepsilon/3)) \subset V(p,f,\varepsilon)$, а следовательно, $R(\Lambda_\alpha) \subset S(C_\alpha)$.

Пусть теперь $p \in \mathcal{N}_\alpha(X)$, рассмотрим стандартную окрестность $N^+(p,u,\varepsilon)$ этой меры в $R((\iota\mathcal{T})_\alpha) = R(\Lambda_\alpha)$. Выберем $f \in C_\alpha$ так, чтобы $G \subset u$, $p(u \setminus G) < \varepsilon/2$, и, воспользовавшись нормальностью пространства $(X,(c\mathcal{T})_\alpha)$ выберем $f \in C_\alpha$ так, чтобы $G \subset f^{-1}(\{1\})$ и $u^c \subset f^{-1}(\{0\})$. Тогда, если $q \in V(p,f,\varepsilon/2)$, то $q(u) > \int f\,dq > \int f\,dp - \varepsilon/2 > p(G) - \varepsilon/2 > p(u) - \varepsilon$, т.е. $q \in N^+(p,u,\varepsilon)$, а следовательно $V(p,f,\varepsilon/2) \subset N^+(p,u,\varepsilon)$, что и доказывает совпадение топологий $R(\Lambda_\alpha)$ и $S(C_\alpha)$ на подпространстве α-нормальных мер.

Если пространство $(X,\mathcal{T})$ α-ультра совершенно нормально, то, воспользовавшись свойством непрерывности меры, легко установить, что $\mathcal{M}_\alpha(X)=\mathcal{N}_\alpha(X)$. Поэтому из предыдущего предложения вытекает такое

(2.6) <u>Следствие</u>. Если пространство $(X,\mathcal{T})$ α-ультра совершенно нормально, то $\mathcal{R}(\Lambda_\alpha)=S(C_\alpha)$.

В следующей теореме устанавливается взаимосвязь между нечеткими топологиями на множестве $\mathcal{M}_0(X)$ и конструкциями, описанными в (2.3). Напомним, что именно из-за этой взаимосвязи и возможности благодаря ней извлечь информацию об интересующих нас нечетких топологиях, мы и рассматривали здесь конструкцию $\mathcal{R}(\Lambda_\alpha)$-топологии и другие аналогичные конструкции.

(2.7) <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathcal{T})$ - нечеткое пространство, $\mathcal{B}\subset I^X$ и $\alpha\in(0,1]$. Тогда $\mathcal{R}(\xi_\alpha)=\iota\tau_\xi^\alpha$, где $\xi_\alpha:=\mathcal{B}\cap\mathcal{T}_\alpha$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $p\in\mathcal{M}(X)$ и $u\in\xi_\alpha$. Тогда, как легко заметить, $\mathcal{N}^+(p,u,\varepsilon)=\delta_u^{-1}(\int u\,dp-\varepsilon,1]$. Поскольку $\delta_u\in\tau_\xi^\alpha$, отсюда следует, что $\mathcal{N}^+(p,u,\varepsilon)\in\iota\tau_\xi^\alpha$, а значит, $\mathcal{R}(\xi_\alpha)\subset\iota\tau_\xi^\alpha$.

Для доказательства обратного включения достаточно, очевидно, проверить, что все отображения $\delta_u:(\mathcal{M}(X),\mathcal{R}(\xi_\alpha))\to I$, где $u\in\xi_\alpha$, являются полунепрерывными снизу. Пусть $a\in I$; выбрав $p\in\delta_u^{-1}(0,1]$, заметим, что при $\varepsilon=\int u\,dp-a$ имеет место равенство $\delta_u^{-1}(a,1]=\mathcal{N}^+(p,u,\varepsilon)\in\mathcal{R}(\xi_\alpha)$ - но это и означает полунепрерывность отображения δ_u.

(2.8) <u>Следствие</u>. Для каждого нечеткого пространства $(X,\mathcal{T})$ имеют место равенства $\mathcal{R}(\Lambda_\alpha)=\iota\tau_\Lambda^\alpha$ и $\mathcal{R}(C_\alpha)=\iota\tau_C^\alpha$.

Отсюда и из предложения (2.4) немедленно вытекает

(2.9) <u>Следствие</u>. Для каждого нечеткого пространства $(X,\mathcal{T})$ справедливы равенства $\mathcal{R}((\iota\mathcal{T})_\alpha)=\iota\tau_\Lambda^\alpha$ и $\iota\tau_\Lambda^\alpha=\iota\tau_{\iota\mathcal{T}}^\alpha$.

В случае, когда исходное пространство - топологическое, предыдущему предложению можем придать такую форму:

(2.9') <u>Следствие</u>. Для каждого топологического пространства $(X,\mathcal{T})$ имеют место равенства $\mathcal{R}(\mathcal{T})=\iota\tau$ и

$\iota\tau = \iota\tau_\Delta$.

Наконец, сформулируем следующее утверждение, вытекающее немедленно из утверждений (2.9') и (2.6):

(2.9'') Следствие. Если $(X,\mathcal{T})$ – совершенно нормальное топологическое пространство, то топологии $\iota\tau$ и $\iota\tau_\Lambda$ совпадают со слабой топологией на пространстве вероятностных мер $\mathcal{M}(X)$.

§3. Некоторые специальные подмножества пространства вероятностных мер.

Меры с конечным носителем. Пусть, как и обычно, $(X,\mathcal{T})$ – нечеткое пространство, $\alpha \in (0,1]$. Рассмотрим, прежде всего, подмножество $F(X)$ пространства $\mathcal{M}(X)$, образованное всеми теми мерами, носитель которых конечен. (Мы говорим, что носитель меры $p \in \mathcal{M}(X)$ конечен, если существует такое конечное множество $A \subset X$, что $p(E)=1$ как только $A \subset E$ и $E \in \mathcal{B}(X)$. Некоторое (незначительное) отличие данного определения от общепринятого (см., напр., [2], [3]) вызвано тем, что мы не накладываем на рассматриваемые пространства никаких условий отделимости и поэтому конечные множества не обязаны принадлежать σ-алгебре $\mathcal{B}$).

(3.1) Предложение. (ср.[2, стр.326], [3, стр.61]). Множество $F(X)$ плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X), S(\Lambda_\alpha))$ (а следовательно, и в пространствах $(\mathcal{M}(X), S(C_\alpha))$, $(\mathcal{M}(X), R(\Lambda_\alpha))$ $(\mathcal{M}(X), R(C_\alpha))$.

Доказательство. Согласно (2.4) достаточно проверить плотность множества $F(X)$ в топологии $S((\iota\mathcal{T})_\alpha)$. Рассмотрим меру $p \in \mathcal{M}(X)$ и ее окрестность вида $\bigcap_{i=1}^{n} V(p, u_i, \varepsilon)$,

где $u_i \in (\iota\mathcal{T})_\alpha$. Положим $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} \{1,\dots,n\}^k \cup \{0\}$ и пусть $\Gamma' \subset \Gamma$ состоит из всех таких $\gamma \in \Gamma$, все координаты которых различны. Определим для каждого $\gamma = (i_1,\dots,i_k) \in \Gamma' \setminus \{0\}$ множество $E_\gamma = (u_{i_1} \cap \dots \cap u_{i_k}) \setminus \bigcup \{u_i : i \neq i_1, \dots, i \neq i_k\}$ и пусть $E_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} u_i$. (Другими словами, E_0 образовано всеми теми точками $x \in X$, которые не принадлежат ни одному $\mathcal{U}_i$; E_i состоит из тех точек, которые принадлежат $\mathcal{U}_i$ и не принадлежат $\mathcal{U}_j$, при $i \neq j$; $E_{(i_1,i_2)}$ состоит из тех точек, которые принадлежат $\mathcal{U}_{i_1}$ и $\mathcal{U}_{i_2}$ и не принадлежат $\mathcal{U}_j$ при $j \neq i_1, i_2$ и т.д.) Ясно, что $\bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma'} E_\gamma = X$ и $E_{\gamma_1} \cap E_{\gamma_2} = \phi$ при $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Выберем из каждого непустого E_γ по точке x_γ и определим меру $p_0 : \mathcal{B} \to I$ равенством $p_0(E) = \Sigma\{p(E_\gamma) : x_\gamma \in E\}$, если $E \cap \{x_\gamma : \gamma \in \Gamma'\} \neq \phi$ и $p_0(E) = 0$ в противном случае. Ясно, что определенное таким образом отображение p_0 действительно является мерой с конечным носителем, т.е. $p_0 \in F(X)$ и при этом $p_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} V(p, \mathcal{U}_i, \varepsilon)$, так как значения p_0 и p равны на каждом $\mathcal{U}_i$. Но это и доказывает плотность множества $F(X)$ в топологии $S((\iota\mathcal{T})_\alpha)$.

(3.2) <u>Предложение</u>. Множество $FQ(X)$, образованное всеми вероятностными мерами, носители которых конечны и которые принимают только рациональные значения, плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X), S(\Lambda_\alpha))$ (а следовательно, и в пространствах $(\mathcal{M}(X), S(C_\alpha))$, $(\mathcal{M}(X), R(\Lambda_\alpha))$ и $(\mathcal{M}(X), R(C_\alpha))$).

<u>Доказательство</u> совершенно аналогично доказательству предложения (3.1); единственное отличие состоит в том, что мера p_0 определяется равенством $p_0(E) = \Sigma\{p_0(E_\gamma) : x_\gamma \in E\}$, где для каждого $\gamma \in \Gamma'$ значение $p_0(E_\gamma)$ выбирается рациональным и удовлетворяющим неравенству $|p(E_\gamma) - p_0(E_\gamma)| < \varepsilon$.

Для α-ультра-T_1-пространств предыдущее утверждение может быть усилено следующим образом:

(3.3) <u>Предложение</u>. Пусть $(X, \mathcal{T})$ - нечеткое α-ультра-T_1-пространство и $B \subset X$ - его α-ультраплотное подмножество. Тогда множество $FQB(X)$, образованное мерами, носители которых лежат в B, а значения рациональны, плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X), S(\Lambda_\alpha))$ (а следовательно, и в пространствах $(\mathcal{M}(X), S(C_\alpha))$, $(\mathcal{M}(X), R(\Lambda_\alpha))$ и $(\mathcal{M}(X), R(C_\alpha))$).

<u>Доказательство</u>. В силу утверждений (3.2) и (2.4) достаточно проверить плотность множества $FQB(X)$ в подпространстве $FQ(X)$. Зафиксируем меру $p \in FQ(X)$

и пусть $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ - ее носитель. Рассмотрим некоторую окрестность вида $\bigcap_{i=1}^{n} V(p,\mathcal{U}_i,\varepsilon)$, где $\mathcal{U}_i\in(\iota\mathcal{T})_\alpha$; при этом без ограничения общности можем считать, что $\mathcal{U}_i\cap A=\{a_i\}$ для каждого $i=1,\dots,n$. Поскольку $\mathcal{U}_i\cap B\neq\varnothing$, можем выбрать для каждого i точку $x_i\in\mathcal{U}_i\cap B$ причем так, чтобы $x_i\neq x_j$ при $i\neq j$. Положим $p_0\{x_i\}=p\{a_i\}$ и определим меру $p_0:\mathcal{B}\xrightarrow{\delta} I$ равенством $p_0(E)=$ $=\Sigma\{p_0\{x_i\}:x_i\in E\}$, если $E\cap\{x_1,\dots,x_n\}\neq\varnothing$, и $p_0(E)=0$ в противном случае. Для завершения доказательства остается только заметить, что $p_0\in(\bigcap_{i=1}^{n}V(p,\mathcal{U}_i,\varepsilon))\cap FQB(X)$.

(3.4) <u>Следствие</u>. (ср. [2 стр. 329]) Пусть $(X,\mathcal{T})$ - топологическое T_1-пространство и $B\subset X$ - его плотное подмножество. Тогда $FQB(X)$ плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X),S(\Lambda_\alpha))$, а следовательно, и в пространствах $(\mathcal{M}(X),S(C_\alpha))$, $(\mathcal{M}(X),R(\Lambda_\alpha))$ и $(\mathcal{M}(X),R(C_\alpha))$.

Для вывода из предложения (3.3) основных результатов данного раздела - утверждений (3.6) и (3.7), докажем предварительно следующую простую лемму:

(3.5) <u>Лемма</u>. Каждое ультраплотное подмножество $A\subset X$ чанговского нечеткого пространства $(X,\mathcal{T})$ является плотным в этом пространстве.

<u>Доказательство</u>. Обозначив через $\bar{A}$ - замыкание множества A в $(X,\mathcal{T})$, а через $\tilde{A}$ - его замыкание в $(X,\iota\mathcal{T})$, имеем следующую цепочку неравенств, из которой сразу вытекает доказываемое утверждение: $\bar{A}=\wedge\{B:B\geqslant A,\ B\in\mathcal{T}^*\}\geqslant$
$\geqslant\{B^{-1}\{1\}:B\geqslant A,\ B\in\mathcal{T}^*\}\geqslant\{C:C\supset A,\ C\in(\iota\mathcal{T})^*\}=\tilde{A}$.

(3.6) <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathcal{T})$ - нечеткое α-ультра-T_1-пространство и $B\subset X$ - его α-ультраплотное подмножество. Тогда $FQB(X)$ плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda)$ (а следовательно и в каждом пространстве вида $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\xi)$ (см. (1.1)).

<u>Доказательство</u>. Согласно предложению (2.8) $\iota\tau^\alpha_\Lambda=R(\Lambda_\alpha)$ а следовательно, в силу (3.3) $FQB(X)$ плотно в пространстве $(\mathcal{M}(X),\iota\tau^\alpha_\Lambda)$. Ссылкой на лемму (3.5) завершаем доказательство.

Назовем плотностью чанговского пространства $(X,\mathcal{T})$ кардинал $d(X)=\min\{|B|: B\subset X, \bar{B}=X\}$ и приведем следующее очевидное следствие из теоремы (3.6):

(3.7) <u>Следствие</u>. Если $(X,\mathcal{T})$ - нечеткое α-ультра- T_1 -пространство, то $d(X,(\iota\mathcal{T})_\alpha)\geqslant d(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda)$.

(3.7') <u>Следствие</u>. Если $(X,\mathcal{T})$ - нечеткое α-ультра- T_1 -пространство, то для каждой системы ξ (см. (1.1)) справедливо неравенство $d(X,(\iota\mathcal{T})_\alpha)\geqslant d(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\xi)$.

(3.8) <u>Замечание</u>. В неравенствах утверждений (3.7) и (3.7') первый член нельзя заменить на $d(X,\mathcal{T}_\alpha)$ - для каждого кардинала k нетрудно построить чанговское пространство $(X,\mathcal{T})$ такое, что $d(X,\mathcal{T})=1$, но $d(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda)=k$. С другой стороны, мы не знаем, существует ли нечеткое пространство $(X,\mathcal{T})$ для которого неравенство в (3.7) является строгим.

<u>Двузначные меры</u>. Пусть $k(X)$ - подмножество множества $\mathcal{M}(X)$, образованное всеми двузначными мерами. (Вероятностная мера $p:\mathfrak{B}\to I$ называется двузначной, если для каждого $E\in\mathfrak{B}$ либо $p(E)=0$, либо $p(E)=1$.)

Докажем прежде всего два утверждения о подпространстве $k(X)$ топологического пространства $(\mathcal{M}(X),S(\Lambda_\alpha))$. (Аналогичные утверждения о подпространстве $k(X)$ пространства вероятностных (беровских) мер, наделенном слабой топологией, хорошо известны, см., напр., [3, стр. 61]).

(3.9) <u>Предложение</u>. Множество $\mathfrak{D}(X)$ плотно в пространстве $(k(X),S(\Lambda_\alpha))$ (а следовательно, и в пространствах $(k(X),S(\mathcal{L}_\alpha))$, $(k(X),\mathcal{R}(\Lambda_\alpha))$ и $(k(X),\mathcal{R}(\mathcal{L}_\alpha))$).

<u>Доказательство</u>. Пусть $p\in k(X)$. Превратим семейство множеств $\Gamma=\{\gamma:\gamma\subset X,\gamma\in\mathfrak{B}, p(\gamma)=1\}$ в направленное, положив $\gamma_1>\gamma_2$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1<\gamma_2$. Выберем по точке $x_\gamma\in\gamma$ и рассмотрим меру $p_\gamma:=px_\gamma$, вырожденную в точке x_γ. Покажем, что получившаяся таким образом направленность $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ сходится к p в топологии $S(\Lambda_\alpha)$. Согласно (2.2) и (2.4) для этого

достаточно установить, что для каждого $\mathcal{U} \in (\iota\mathfrak{T})_\alpha$ числовая направленность $p_\gamma(\mathcal{U})$ сходится к $p(\mathcal{U})$. Но в этом легко убедиться непосредственно, рассмотрев два возможных случая: Если $p(\mathcal{U}) = 1$, то $\mathcal{U} \in \Gamma$ и, следовательно, для каждого $\gamma > \mathcal{U}$ имеем $x_\gamma \in \mathcal{U}$, а значит $p_\gamma(\mathcal{U}) = 1$. Если же $p(\mathcal{U}) = 0$, то $p(X \setminus \mathcal{U}) = 1$ и $X \setminus \mathcal{U} \in \Gamma$, а следовательно для каждого $\gamma > X \setminus \mathcal{U}$ имеем $x_\gamma \notin \mathcal{U}$, а значит, $p_\gamma(\mathcal{U}) = 0$.

(3.10) <u>Предложение</u>. Множество $K(X)$ замкнуто в пространстве $(\mathcal{M}(X), S(\Lambda_\alpha))$.

Действительно, если $p \notin K(X)$, то $0 < p(\mathcal{U}) < 1$ для некоторого $\mathcal{U} \in (\iota\mathfrak{T})_\alpha$. Но тогда, выбрав $\varepsilon < \min\{p(\mathcal{U}), 1 - p(\mathcal{U})\}$, получим $V(p, \mathcal{U}, \varepsilon) \cap K(X) = \emptyset$.

Из предложения (3.9), леммы (3.5) и предложения (2.8) немедленно вытекает

(3.11) <u>Теорема</u>. Множество $\mathfrak{D}(X)$ плотно в пространстве $(k(X), \tau_\Lambda^\alpha)$ (а следовательно и в каждом пространстве вида $(k(X, \tau_\xi^\alpha))$.

Воспользовавшись теоремой (1.7), из предыдущей теоремы легко получаем такое

(3.12) <u>Следствие</u>. Если ξ_α - предбава нечеткой топологии $\mathfrak{T}_\alpha$, то $d(k(X), \tau_\xi^\alpha) \leq d(X, \mathfrak{T}_\alpha)$.
В частности, $d(k(X), \tau_\Lambda^\alpha) \leq d(X, \Lambda_\alpha)$.

Поскольку для топологического пространства $(X, \mathfrak{T})$, как нетрудно заметить, $d(X, \mathfrak{T}) = d(X, \Lambda\mathfrak{T})$, отсюда вытекает

(3.12') <u>Следствие</u>. Если $(X, \mathfrak{T})$ - топологическое пространство и ξ - предбаза топологии $\mathfrak{T}$, то $d(k(X), \tau_\Lambda) \leq d(X, \mathfrak{T})$.

Согласно предложению (3.10), множество $K(X)$ замкнуто в топологии $S(\Lambda_\alpha)$. Значительно тоньше нам представляется доказываемая ниже теорема (3.15), характеризующая замыкание этого множества в нечеткой топологии. Предварительно, однако нам удобно с каждой мерой p связать некоторое множество G_p^α:

Пусть $p \in \mathcal{M}(X)$, $\alpha \in (0, 1]$ и $G_p^\alpha = \{t$: если $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n \in (\iota\mathfrak{T})_\alpha$ и $p(\mathcal{U}_i) > 1 - t$, $i = 1, \ldots, n$, то $\mathcal{U}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset\}$;

положим $t_p^\alpha = \sup G_p^\alpha$. Легко убедиться в справедливости следующего простого факта:

(3.13) Предложение. Для каждой меры p и каждого $\alpha \in (0,1]$

(а) $0 \in G_p^\alpha$;

(в) если $t' < t$ и $t \in G_p^\alpha$, то $t' \in G_p^\alpha$;

(с) $t_p^\alpha \in G_p^\alpha$.

(3.14) Лемма. Пусть $(X, \mathcal{T})$ -чанговское нечеткое пространство, $p \in \mathcal{M}(X)$, $t > 0$ и $\bar{K}$ - замыкание множества $K = K(X)$ в $(\mathcal{M}(X), \tau_{\iota\mathcal{T}})$. Тогда неравенство $\bar{K}(p) \geq t$ имеет место в том и только в том случае, когда существует направленность $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subset K$ такая, что для каждого $V \in \iota\mathcal{T}$, удовлетворяющего неравенству $p(V) + t > 1$ найдется $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что $p_\gamma(V) = 1$ для всех $\gamma > \gamma_0$.

Доказательство, приводимое ниже, состоит, по-существу, в последовательной "расшифровке" соответствующих определений.

Пусть z_p^t - нечеткая точка с носителем $p \in \mathcal{M}(X)$ и значением $t \in (0,1]$ [24],[25]. Согласно [24] $z_p^t \tilde{\in} \bar{K}$ (т.е. $\bar{K}(p) \geq t$) в том и только в том случае, когда существует направленность $(z_{p_\gamma}^{t_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$, лежащая [24] в K, которая Q-сходится [24] к z_p^t. Поскольку K - обычное множество, направленность $(z_{p_\gamma}^{t_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ лежит в K тогда и только тогда, когда $p_\gamma \in K$ для всех $\gamma \in \Gamma$, т.е., можем считать, что $t_\gamma = 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Условие Q-сходимости направленности $(z_{p_\gamma}^{t_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ к нечеткой точке z_p^t означает, что эта направленность Q-финальна [24] с каждым таким открытым множеством $\mathcal{O}$, с которым z_p^t квазисовпадает [24]. При этом без ограничения общности можем считать, что $\mathcal{O}$ выбрано из предбазы, т.е. $\mathcal{O} = \delta_V$ для некоторого $V \in \iota\mathcal{T}$. Тем самым условие квазисовпадения z_p^t и $\mathcal{O}$ может быть переписано в виде $\delta_V(p) + t > 1$ или $p(V) + t > 1$. Далее, поскольку $t_\gamma = 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$, условие Q-финальности направленности $(z_{p_\gamma}^1)_{\gamma\in\Gamma}$ с множеством $\mathcal{O}$ эквивалентно тому, что: существует $\gamma_0 \in \Gamma$ такое, что $\delta_V(p_\gamma) = p_\gamma(V) > 0$, или, что эквивалентно, $p_\gamma(V) = 1$, для всех $\gamma > \gamma_0$; это и завершает доказательство леммы.

(3.15) <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство, и $p\in\mathcal{M}(X)$. Тогда $\bar{K}^{\alpha\iota}(p)=t_p^\alpha$, где $\bar{K}^{\alpha\iota}$ - замыкание множества K в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_{\iota\mathfrak{T}})$.

<u>Доказательство</u>. Покажем сначала, что $\bar{K}^{\alpha\iota}(p)\geq t_p^\alpha$. Рассмотрим семейство множеств $\mathcal{U}=\{U\in(\iota\mathfrak{T})_\alpha : p(U)>1-t_p^\alpha\}$ и положим $\Gamma=\{U_1\cap\ldots\cap U_n : U_i\in\mathcal{U}, n\in\mathbb{N}\}$. Упорядочим семейство множеств Γ по включению, положив $\gamma_1>\gamma_2$ тогда и только тогда, когда $\gamma_1<\gamma_2$, и для каждого $\gamma\in\Gamma$ рассмотрим некоторую двузначную меру p_γ такую, что $p_\gamma(\gamma)=1$ (это возможно, т.к. $\gamma\neq\emptyset$). В результате получаем направленность $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$, причем для каждого $V\in(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ такого, что $p(V)+t_p^\alpha>1$ и для каждого $\gamma>V$ (ясно, что $V\in\Gamma$!) имеет место равенство $p_\gamma(V)=1$, что, согласно лемме (3.14) и доказывает неравенство $\bar{K}^{\alpha\iota}(p)\geq t_p^\alpha$.

Обратно, предположим, что $\bar{K}^{\alpha\iota}(p)=s>t_p^\alpha$. Тогда, согласно лемме, существует направленность $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в K такая, что для каждого $V\in(\iota\mathfrak{T})_\alpha$, удовлетворяющего условию $p(V)+s>1$, найдется γ_0 такое, что $p_\gamma(V)=1$ для всех $\gamma>\gamma_0$. С другой стороны, поскольку $s>t_p$, найдутся $U_1,\ldots,U_n\in(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ такие, что $p(U_i)>1-s$, для каждого $i=1,\ldots,n$, но при этом $U_1\cap\ldots\cap U_n=\emptyset$. Выберем γ_i, $i=1,\ldots,n$, так, чтобы $p_\gamma(U_i)=1$ при $\gamma>\gamma_i$ и пусть γ_0 таково, что $\gamma_0>\gamma_1,\ldots,\gamma_0>\gamma_n$. Ясно, что $p_\gamma(U_i)=1$ для всех $i=1,\ldots,n$ как только $\gamma>\gamma_0$. Но это противоречит условию $U_1\cap\ldots\cap U_n=\emptyset$, согласно которому $U_1\subset(X\setminus U_2)\cup\ldots\cup(X\setminus U_n)$, а значит,
$p_\gamma(U_1)\leq p_\gamma(X\setminus U_2)+\ldots+p_\gamma(X\setminus U_n)=0$.

Аналогичный результат справедлив и для пространства $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda)$.

(3.15') <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство и $p\in\mathcal{M}(X)$. Тогда $\bar{K}^{\alpha\Lambda}(p)=t_p^\alpha$, где $\bar{K}^{\alpha\Lambda}$ - замыкание множества K в пространстве $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda)$.

Утверждение теоремы (3.15') легко следует из теоремы (3.15) и доказываемой ниже леммы:

(3.16) <u>Лемма</u>. Пусть (X,T) - топологическое пространство и $F\in(\Lambda T)^*$ таково, что $\int F\,dp=1$ для каждой меры $p \in K(X)$. Тогда существует множество $C \in T^*$ такое, что $C \leq F$ и при этом $p(C) = 1$ для каждой меры $p \in K(X)$.

Доказательство. Поскольку отображение F полунепрерывно сверху, то для каждого $\varepsilon > 0$ $F^{\varepsilon} = F^{-1}[1-\varepsilon, 1] \in T^*$ и при этом $p(F^{\varepsilon}) = 1$ для каждого $p \in K$ (поскольку $\int F dp = 1$ для каждого $p \in K$). Отсюда, воспользовавшись непрерывностью меры p, заключаем, что $p(C) = 1$, где $C = \bigcap_{\varepsilon > 0} F^{\varepsilon}$ и при этом, очевидно, $C \leq F$.

Из теорем (3.15) и (3.15') непосредственно вытекает

(3.17) Следствие. Пусть $(X, \mathcal{T})$ – нечеткое пространство, такое, что $\iota\mathcal{T} \leq \mathcal{T} \leq \Lambda\iota\mathcal{T}$. Тогда $\bar{K}^{\alpha}(p) = t^{\alpha}_{p}$, где $\bar{K}^{\alpha}$ замыкание множества K в пространстве $(X, \mathcal{T}_{\alpha})$.

§4. Свойства типа компактности пространства вероятностных мер.

В этом параграфе мы исследуем связь свойств типа компактности исходного нечеткого пространства и его нечетко-вероятностных модификаций. Приведем сначала следующее вспомогательное утверждение, доказательство которого легко свести к результатам из классической теории меры:

(4.1) Предложение. Если нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ α-ультранормально и α-ультра счетно компактно, то пространство $(\mathcal{M}_{\alpha}(X), S(C_{\alpha}))$ компактно.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_{\alpha}$ – σ-алгебра бэровских множеств топологического пространства $(X, (\iota\mathcal{T})_{\alpha})$ и пусть $\mathfrak{M}_{\alpha}(X)$ – множество всех вероятностных бэровских мер $p: \mathcal{B}_{\alpha} \to I$. Тогда, поскольку $S(C_{\alpha})$ на $\mathcal{B}_{\alpha}$ совпадает со слабой топологией (2.3) и $(X, (\iota\mathcal{T})_{\alpha})$ – счетно компактно, можем воспользоваться теоремой [3, с. 78] и заключить, что $(\mathfrak{M}_{\alpha}(X), S(C_{\alpha}))$ компактно.

Рассмотрим отображение $\varphi: \mathcal{M}_{\alpha}(X) \to \mathfrak{M}_{\alpha}(X)$, сопоставляющее каждой мере $p \in \mathcal{M}_{\alpha}(X)$ ее ограничение $\varphi_{\alpha}(p) = p|_{\mathcal{B}_{\alpha}}$ на σ-алгебру бэровских мер множеств. Заметим, что это отображение сюръективно. Действительно, поскольку топология $(\mathcal{T})_\alpha$ нормальна и счетно компактна, из теоремы Я. Марека [21] легко следует, что каждая мера $p \in \mathfrak{M}_\alpha(X)$ имеет продолжение до меры $\tilde{p} \in \mathcal{M}_\alpha(X)$, а следовательно, $\varphi(\tilde{p}) = p$. Далее, поскольку пространство $(\mathfrak{M}_\alpha(X), S(C_\alpha))$ компактно, а отображение $\varphi : (\mathcal{M}_\alpha(X), S(C_\alpha)) \to (\mathfrak{M}_\alpha(X), S(C_\alpha))$, очевидно, непрерывно и при этом прообраз каждой точки $p \in \mathfrak{M}_\alpha(X)$ антидискретен, то, как нетрудно заметить, пространство $(\mathcal{M}_\alpha(X), S(C_\alpha))$ также является компактным.

Как и на протяжении всей работы, основной интерес для нас здесь представляют свойства пространства $\mathcal{M}(X)$, а не свойства пространств $\mathcal{M}_\alpha(X)$ вероятностных мер, заданных на "частичных" σ-алгебрах $\mathcal{M}_\alpha(X)$. Для того, чтобы перенести предыдущий результат на пространство нам потребуется следующее понятие:

(4.2) Определение. Нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ назовем α-экстальным, если каждая вероятностная мера $p : \mathcal{B}_\alpha \to I$ имеет продолжение до вероятностной меры $\tilde{p} : \mathcal{B} \to I$. Нечеткое пространство, α-экстальное для всех $\alpha \in (0,1]$ называем экстальным.

Ясно, что каждое чанговское нечеткое пространство является экстальным. Легко привести также примеры экстальных нечанговских нечетких пространств.

Легко заметить, что, если пространство $(X, \mathcal{T})$ α-экстально, то отображение $\pi_\alpha : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}_\alpha(X)$, определенное в (2.3), является сюръективным. С другой стороны, поскольку в силу (4.1) пространство $(\mathcal{M}_\alpha(X), S(C_\alpha))$ компактно, а отображение $\pi_\alpha : (\mathcal{M}(X), S(C_\alpha)) \to (\mathcal{M}_\alpha(X), S(C_\alpha))$ непрерывно, и прообраз каждой меры $p \in \mathcal{M}_\alpha(X)$ антидискретен в $\mathcal{M}(X)$ (ср. доказательство (4.1)), отсюда непосредственно следует

(4.3) Предложение. Если нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ α-экстально, α-ультранормально и α-ультра счетно компактно, то пространство $(\mathcal{M}(X), S(C_\alpha))$ компактно, а следовательно (см. (2.5)), и пространство $(\mathcal{M}(X), R(\Lambda_\alpha))$ компактно.

Отсюда и из предложения (2.7) заключаем, что пространство $(\mathcal{M}(X), \tau^\alpha_\Lambda)$ ультракомпактно. Воспользовавшись теоремой Р.Ловена [17], приходим к следующему результату:

(4.4) Теорема. Если нечеткое пространство $(X,\mathfrak{T})$ α-экстально, α-ультранормально и α-ультра счетно компактно, то нечеткое пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda^\alpha)$ компактно (а следовательно, и каждое пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi^\alpha)$ (см. (1.1)) компактно).

Воспользовавшись понятием спектра компактности [32], [9] и спектра счетной компактности [33], [10], [36], этому результату можем придать следующий вид:

(4.4') Теорема. Если нечеткое пространство $(X,\mathfrak{T})$ α-экстально, α-ультранормально, то

$$CC(X,(\iota\mathfrak{T})_\alpha) \subset C(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda^\alpha) \subset C(\mathcal{M}(X),\tau_\xi^\alpha).$$

(4.5) Следствие. Если топологическое пространство $(X,\mathfrak{T})$ нормально и счетно компактно, то нечеткое пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda)$ компактно (а следовательно, и каждое нечеткое пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\xi)$ компактно).

(4.5') Следствие. Если топологическое пространство $(X,\mathfrak{T})$ нормально, то

$$CC(X,\mathfrak{T}) \subset C(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda) \subset C(\mathcal{M}(X),\tau_\xi).$$

Перейдём теперь к рассмотрению обратной задачи: в какой степени свойства типа компактности, имеющие место для пространства вероятностных мер, обеспечивают наличие аналогичных свойств для исходного пространства. Здесь нам удобно будет основываться на уже упоминавшихся понятиях спектра компактности и спектра счетной компактности нечеткого пространства введенных и изучавшихся в [9], [10], [32], [33], [36].

(4.6) Теорема. Для каждого нечеткого пространства $(X,\mathfrak{T})$ и каждого $\alpha\in(0,1]$ имеет место включение $CC(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha) \subset CC(X,\mathfrak{T}_\alpha)$.

При доказательстве этой теоремы мы воспользуемся следующей леммой, в справедливости которой легко убедиться на основе [10, предложение 4] или [33], [36]:

(4.7) Лемма. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство, $\alpha\in(0,1]$. Тогда $\beta\in CC(X,\mathfrak{T}_\alpha)$ в том и только в том случае, когда для каждого $\mathcal{F}=\{F_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathfrak{T}_\alpha^*$ такого, что

(*) $\sup\bigwedge_{i=1}^{n} F_i(x) > \beta^c+\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$ и каждого $n\in\mathbb{N}$,

имеет место неравенство $\sup \bigwedge_{n=1}^{\infty} F_n(x) \geq \beta^c$.
При этом без ограничения общности можем считать, что семейство $\mathfrak{F}$ убывающее, т.е. $F_1 \geq F_2 \geq \ldots$

Приступая к доказательству теоремы, зафиксируем $\beta \in CC(\mathcal{M}(X), \tau^{\alpha})$ и пусть $\mathfrak{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{T}_{\alpha}^{*}$ таково, что $F_1 \geq F_2 \geq \ldots$. Предположим, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\sup \bigwedge_{i=1}^{n} F_i(x) \geq \beta^c + \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $h : X \to \mathcal{M}(X)$ определено так же как в (1.7); рассмотрим последовательность замкнутых в $(\mathcal{M}(X), \tau^{\alpha})$ нечетких множеств $\overline{h(F_1)} \geq \overline{h(F_2)} \geq \ldots$. Очевидно, что для каждого $\varepsilon' < \varepsilon$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется точка $x_n \in X$ такая, что $F_i(x_n) \geq \beta^c + \varepsilon'$ для всех $i = 1, \ldots, n$, а следовательно, как нетрудно заметить, $\sup_{p \in \mathcal{M}} \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{h(F_i)}(p) \geq \sup_{x \in X} \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{h(F_i)}(p_x) \geq \bigwedge_{i=1}^{n} h(F_i)(p_{x_n}) \geq \bigwedge_{i=1}^{n} F_i(x_n) \geq \beta^c + \varepsilon'$. Ввиду произвольности $\varepsilon' < \varepsilon$ отсюда вытекает, что $\sup_{p \in \mathcal{M}} \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{h(F_i)}(p) \geq \beta^c + \varepsilon$, а следовательно, в силу (4.7), $\sup_{p \in \mathcal{M}} \bigwedge_{n=1}^{\infty} \overline{h(F_n)}(p) \geq \beta^c$. Зафиксировав $\alpha < \beta^c$, выберем $p_0 \in \mathcal{M}$ так, чтобы $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \overline{h(F_n)}(p_0) > \alpha$.

Далее, поскольку, очевидно, $F_n \in \mathfrak{T}_{\alpha}^{*}$ и $\delta_{F_n} \geq h(F_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\overline{h(F_n)}(p_0) = \inf\{1 - \bigwedge_{i=1}^{k} \delta_{U_i}(p) : U_i \in \mathfrak{T}_{\alpha}, 1 - \bigwedge_{i=1}^{n} \delta_{U_i} \geq h(F_n)\} = \inf\{\bigvee_{i=1}^{n} \int C_i \, dp_0 : C_i \in \mathfrak{T}_{\alpha}^{c}, \bigvee_{i=1}^{n} \delta_{C_i} \geq h(F_n)\} \leq \int F_n \, dp_0$ и, значит, $\int F_n \, dp_0 > \alpha$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно теореме Лебега (см., напр., [4, стр. 168]) получаем $\int (\bigwedge_n F_n) \, dp_0 \geq \alpha$, а следовательно, $\sup_x (\wedge F_n)(x) \geq \alpha$, откуда, ввиду произвольности выбора $\alpha < \beta^c$, получаем $\sup_x (\wedge F_n)(x) \geq \beta^c$. Воспользовавшись вновь леммой (4.7), заключаем, что $\beta \in CC(X, \mathfrak{T}_{\alpha})$.

Поскольку, очевидно, $(\tau_{\mathfrak{f}})_{\alpha} \supset \tau_{\mathfrak{f}}^{\alpha}$ и, в частности, $\tau_{\alpha} \supset \tau^{\alpha}$, из теоремы (4.6) немедленно вытекает

(4.6') <u>Теорема</u>. Для каждого нечеткого пространства $(X, \mathfrak{T})$ и каждого $\alpha \in (0, 1]$ имеет место включение $CC_{\alpha}(\mathcal{M}(X), \tau) \subset CC_{\alpha}(X, \mathfrak{T})$.

Из теорем (4.4) и (4.6) и очевидного включения

$(\iota\mathfrak{T})_\alpha \subset \Lambda_\alpha$ получаем, что для каждого α-экстального α-ультранормального пространства $(X,\mathfrak{T})$ имеет место цепочка $CC(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda) \subset CC(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_{\iota\mathfrak{T}}) \subset CC(X,(\iota\mathfrak{T})_\alpha) \subset C(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda)$; $C(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda) \subset C(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha) \subset CC(X,(\iota\mathfrak{T})_\alpha)$.

С другой стороны, если $(\iota\mathfrak{T})_\alpha \subset \mathfrak{T}_\alpha$, то, в силу равенства $CC(X,(\iota\mathfrak{T})_\alpha) = CC(X,\Lambda_\alpha)$ имеем $CC(X,\mathfrak{T}_\alpha) = CC(X,(\iota\mathfrak{T})_\alpha)$. Тем самым мы приходим к следующему результату:

(4.8) Теорема. Для каждого α-экстального α-ультранормального пространства $(X,\mathfrak{T})$ имеет место цепочка равенств: $CC(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda) =$

$= CC(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_{\iota\mathfrak{T}}) = C(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda) = CC(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_{\iota\mathfrak{T}}) = CC(X,(\iota\mathfrak{T})_\alpha)$.

Если же при этом $(\iota\mathfrak{T})_\alpha \subset \mathfrak{T}_\alpha$, то в эту цепочку дополнительно могут быть включены также равенства:

$CC(X,\mathfrak{T}_\alpha) = C(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha) = CC(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha) = C(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda)$.

Напомним, что чанговское нечеткое пространство $(X,\mathfrak{T})$ является компактным [17] (счетно компактным) в том и только в том случае, когда $C(X,\mathfrak{T}) = [0,1]$, (соответственно, когда $CC(X,\mathfrak{T}) = [0,1]$) ([9], [10], [32], [33]), а следовательно, из теоремы (4.8) немедленно вытекает

(4.8') Теорема. Для каждого α-экстального α-ультранормального пространства эквивалентны условия (а) - (в). Если же при этом $(\iota\mathfrak{T})_\alpha \subset \mathfrak{T}_\alpha$, то все условия (а) - (ж) эквивалентны:

(а) пространство $(X,\mathfrak{T})$ α-ультра счетно компактно;
(б) пространство $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda)$ счетно компактно;
(в) пространство $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_{\iota\mathfrak{T}})$ счетно компактно;
(г) пространство $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_\Lambda)$ компактно;
(д) пространство $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha_{\iota\mathfrak{T}})$ компактно;
(е) пространство $(X,\mathfrak{T}_\alpha)$ счетно компактно;
(ж) пространство $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha)$ компактно;
(з) пространство $(\mathcal{M}(X),\tau^\alpha)$ счетно компактно.

В случае, когда исходное пространство $(X,\mathfrak{T})$ - топологическое, предыдущая теорема приобретает особенно простой вид:

(4.8") Теорема. Для каждого нормального топологического пространства следующие условия эквивалентны:

(а) пространство $(X, \mathcal{T})$ счетно компактно;
(б) пространство $(\mathcal{M}(X), \tau)$ счетно компактно;
(в) пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda)$ счетно компактно;
(г) пространство $(\mathcal{M}(X), \tau)$ компактно;
(д) пространство $(\mathcal{M}(X), \tau_\Lambda)$ компактно.

Любопытно отметить, что, как следует из предыдущих теорем, для пространств вероятностных мер, наделенных "хорошими" нечеткими топологиями, свойства счетной компактности и компактности оказываются равносильными.

§5. Свойства отделимости пространств вероятностных мер.

Изучаемые нами нечеткие топологии на пространствах вероятностных мер обладают весьма интересными специфическими свойствами отделимости; некоторые из этих свойств будут описаны в данном разделе. Для их описания нам удобно будет воспользоваться приведенной ниже терминологической схемой. (Эта схема, позволяет описать более тонкие нюансы отделимости, чем это возможно сделать на основе "традиционных" схем (см., напр., [24], [26] и др.)).

Пусть $\beta \in [0,1)$, $\gamma \in [0,1]$.

(5.1) Определение. Чанговское нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ назовем (β, γ) -хаусдорфовым, если для любых различных точек $x, y \in X$ найдутся $\mathcal{U}, V \in \mathcal{T}$ такие, что $\mathcal{U}(x) > \beta$, $V(y) > \beta$ и $\mathcal{U} \wedge V \leq \gamma$.

Ясно, что каждое чанговское нечеткое пространство $(0,1)$-хаусдорфово. Если чанговское нечеткое пространство (β, γ) -хаусдорфово и $\beta' \leq \beta$, $\gamma' \geq \gamma$, то оно и (β', γ') -хаусдорфово.

(5.2) Определение. Чанговское нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ назовем (β, γ) - T_1-пространством, если для любых различных точек $x, y \in X$ найдется $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ такое, что $\mathcal{U}(x) > \beta$ и $\mathcal{U}(y) \leq \gamma$.

Чанговское нечеткое пространство $(X,\mathfrak{T})$ назовем (β,γ) -T_0-пространством, если для любых различных точек $x,y\in X$ найдется $\mathcal{U}\in\mathfrak{T}$ такое, что либо $\mathcal{U}(x)>\beta$ и $\mathcal{U}(y)\leq\gamma$, либо $\mathcal{U}(y)>\beta$ и $\mathcal{U}(x)\leq\gamma$.

Ясно, что каждое (β,γ) -T_i-пространство заведомо является и (β',γ') -T_i-пространством при $\beta'\leq\beta$ и $\gamma'\geq\gamma$ $(i=0,1)$. Если пространство $(X,\mathfrak{T})$ является (β,γ) -хаусдорфовым и $\beta\geq\gamma$, то $(X,\mathfrak{T})$ и (β,γ) -T_1-пространство; в свою очередь, каждое (β,γ) -T_1-пространство заведомо является и (β,γ) -T_0- пространством.

Изложенная здесь (вкратце) схема аксиом позволяет следующим образом описать свойства отделимости нечетких топологий на пространствах вероятностных мер:

(5.3) Теорема. Для каждого нечеткого пространства $(X,\mathfrak{T})$ и каждого $\alpha\in(0,1]$ нечеткое пространство нормальных вероятностных мер $(\mathcal{N}(X),\tau_\Lambda^+)$ является (β,β) -хаусдорфовым при всех $\beta>0$.

Доказательство. Пусть $p,q\in\mathcal{N}(X)$, $p\neq q$ и $G\in(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ таково, что $p(G)\neq q(G)$. Положим для определенности $p(G)>q(G)$ и пусть $\varepsilon<\frac{1}{2}(p(G)-q(G))$. Воспользовавшись нормальностью меры p, выберем $H\in(\iota\mathfrak{T})_\alpha$ так, чтобы $\bar H\subset G$ и $p(H)>p(G)-\varepsilon$ (где $\bar H=\bar H^{\iota\Lambda}$ - замыкание в $(\mathcal{N}(X),\tau_\Lambda^+)$). Рассмотрим нечеткие множества вида $\mathcal{U}=a_1H+a_2H^c$ и $V=b_1\bar H^c+b_2\bar H$, где a_1,a_2,b_1,b_2 выбраны так, чтобы $0\leq a_2<a_1\leq 1$, $0\leq b_2<b_1\leq 1$, $\beta-a_2=(p(G)-\varepsilon)(a_1-a_2)$ и $\beta-b_2=(q(\bar H^c)-\varepsilon)(b_1-b_2)$ (в возможности такого выбора легко убедиться непосредственно). Нетрудно заметить, что определенные таким образом функции $\mathcal{U}$, V полунепрерывны снизу (т.е. $\mathcal{U},V\in\Lambda_\alpha$) и при этом

$$\delta_{\mathcal{U}}(p)=a_1p(H)+a_2p(H^c)=p(H)(a_1-a_2)+a_2>(p(G)-\varepsilon)(a_1-a_2)+a_2=\beta$$

$$\delta_V(q)=b_1q(\bar H^c)+b_2q(\bar H)=q(\bar H^c)(b_1-b_2)+b_2>(q(\bar H^c)-\varepsilon)(b_1-b_2)+b_2=\beta.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $(\delta_{\mathcal{U}}\wedge\delta_V)(r)\leq\beta$ для каждой меры $r\in\mathcal{M}(X)$. Действительно, если бы $\int\mathcal{U}dr=r(H)(a_1-a_2)+a_2>\beta$ и $\int Vdr=r(\bar H^c)(b_1-b_2)+b_2$, то $r(H)(a_1-a_2)>(p(G)-\varepsilon)(a_1-a_2)$

$r(\bar{H}^c)(b_1-b_2)>(q(\bar{H}^c)-\varepsilon)(b_1-b_2)>(q(G^c)-\varepsilon)(b_1-b_2)$, откуда
$r(H)+r(\bar{H}^c)>p(G)+q(G^c)-2\varepsilon \geq p(G)+1-q(G)-2\varepsilon>1.$
Но это невозможно, поскольку $H\cap\bar{H}^c=\varnothing$

(5.4) <u>Следствие</u>. Для каждого α-ультра совершенно нормального пространства $(X,\mathfrak{T})$ нечеткое пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda^\alpha)$ является (β,β) -хаусдорфовым при всех $\beta>0$.

(5.5) <u>Замечание</u>. Из анализа доказательства предыдущей теоремы ясно, что фактически мы установили более сильное утверждение: для каждого $\beta>0$ и любых $p,q\in\mathcal{M}_\alpha(X)$ существуют $\mathcal{U},V\in\Lambda_\alpha$ такие, что $\delta_{\mathcal{U}}(p)\geq\beta$, $\delta_V(q)>\beta$ и $(\delta_{\mathcal{U}}\wedge\delta_V)(r)\leq\beta$ для каждого $r\in\mathcal{M}_\alpha(X)$.

Условие $\beta>0$ в формулировках теоремы (5.3) и следствия (5.4) является существенным. Об этом свидетельствует следующий результат:

(5.6) <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство, $|X|>1$ и $\alpha\in(0,1]$. Пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda^\alpha)$ не является $(0,0)$-T_0-пространством (и, следовательно, тем более не является $(0,0)$-хаусдорфовым пространством).

В случае, если исходное пространство $(X,\mathfrak{T})$ не является α-ультра-T_0-пространством, доказываемое утверждение очевидно. Предположим поэтому, что $(X,\mathfrak{T})$ - α-ультра-T_0-пространство и пусть $x,y\in X$. Определим меры $p,q\in\mathcal{M}(X)$ равенствами ($E\in\mathfrak{B}$):

$p(E)=t$ при $x\in E, y\notin E$; $p(E)=1-t$ при $x\notin E, y\in E$;
$q(E)=s$ при $x\notin E, y\in E$; $q(E)=1-s$ при $x\in E, y\notin E$,
(и, естественно, $p(E)=q(E)=0$ при $x,y\notin E$; $p(E)=q(E)=1$ при $x,y\in E$), где $s,t\in(0,1]$.

Ясно, что, если $\delta_{\mathcal{U}}(p)>0$ для некоторого $\mathcal{U}\in\Lambda_\alpha$, то либо $\mathcal{U}(x)>0$, либо $\mathcal{U}(y)>0$, но тогда и $\delta_{\mathcal{U}}(q)>0$. Аналогично, если $\delta_{\mathcal{U}}(q)>0$, то и $\delta_{\mathcal{U}}(p)>0$.

(5.7) <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - нечеткое пространство, $|X|>1$, $\alpha\in(0,1]$ и $\gamma<\beta$. Тогда пространство $(\mathcal{M}(X),\tau_\Lambda^\alpha)$ не является (β,γ)-T_0-пространством (и, следовательно, тем более не является (β,γ) -хаусдорфовым).

<u>Доказательство</u>. Представим γ в виде $\gamma=\beta k$, где $0<k<1$. Зафиксируем некоторое $t>\frac{1-\beta}{1-\beta k}$, $\frac{1}{2}<t<1$,

и выберем s так, чтобы $\frac{1}{2} < s < t$, $s \geq \frac{1-\beta}{1-\beta k}$ и $s \geq \frac{t-\beta+\beta k t^c}{1-\beta}$. (Такой выбор возможен поскольку, как непосредственно проверяется, $\frac{t-\beta+\beta k t^c}{1-\beta} < t$).

Как и в доказательстве предыдущей теоремы можем без ограничения общности считать, что $(X,\mathcal{T})$ является α-ультра-T_0-пространством. Зафиксировав две точки $x, y \in X$ определим меры $p, q \in \mathcal{M}(X)$ так же, как и в доказательстве теоремы (5.6).

Предположим, что $\mathcal{U} \in \Lambda_\alpha$ таково, что $\delta_{\mathcal{U}}(p) > \beta$ и $\delta_{\mathcal{U}}(q) \leq k\beta$. Пусть $\mathcal{U}(x) = a$, $\mathcal{U}(y) = b$, тогда $\int \mathcal{U}\,dp = ta+(1-t)b > \beta$ и $\int \mathcal{U}\,dq = sa+(1-s)b \leq k\beta$ (см., напр., (1.6)). Из этих двух неравенств легко выводим

$a > \beta\frac{1-s-k+kt}{t-s}$. Но с другой стороны в силу выбора s получаем, что $\beta\frac{1-s-k+kt}{t-s} \geq 1$, т.е. $a > 1$. Полученное противоречие позволяет заключить, что, если $\delta_{\mathcal{U}}(p) > \beta$, то $\delta_{\mathcal{U}}(q) > \gamma$.

Предположим теперь, что $\mathcal{U} \in \Lambda_\alpha$ таково, что $\delta_{\mathcal{U}}(q) > \beta$ и $\delta_{\mathcal{U}}(p) < k\beta$. Тогда $\int \mathcal{U}\,dq = sa+s^c b > \beta$, $\int \mathcal{U}\,dp = ta+t^c b < k\beta$.

Из этих неравенств выводим, что $b > \beta\frac{t-ks}{t-s} \geq \frac{1-s}{1-sk}\,\frac{t-sk}{t-s} > 1$,

что вновь приводит к противоречию, а значит, если $\delta_{\mathcal{U}}(q) > \beta$, то $\delta_{\mathcal{U}}(p) > \gamma$. Тем самым установлено, что $(\mathcal{M}(X), \tau^*_\Lambda)$ не является (β,γ) - T_0-пространством.

Нетрудно заметить, что, если $(X,\mathcal{T})$ α-ультранормальное пространство, то построенные в доказательстве теоремы (5.7) меры являются нормальными. Это позволяет сформулировать следующий вариант предыдущей теоремы:

(5.7') <u>Теорема</u>. Пусть $(X,\mathcal{T})$ - нечеткое α-ультранормальное пространство $|X|>1$ и $\gamma<\beta$. Тогда пространство $(\mathcal{N}_\alpha(X), \tau^*_\Lambda)$ не является (β,γ) - T_0-пространством (и, тем более, не является (β,γ) -хаусдорфовым).

§6. Случай линейно-упорядоченного пространства

Мы рассмотрим здесь нечеткие топологии на пространствах вероятностных мер $\mathcal{M}(X)$ в случае, когда топология исходного пространства $(X, \mathcal{T})$ порождена отношением линейного порядка " $<$ ". Основной в данном направлении является теорема (6.3), в которой устанавливается тесная взаимосвязь между конструкцией нечетко-вероятностной модификации $\mathcal{M}_\xi(X)$ линейно-упорядоченного пространства X и описанной в [6], [29], [30] конструкцией $\mathcal{G}(X)$. (Отметим, что на возможность охарактеризовать нечеткую прямую $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ [14] как пространство $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ вероятностных мер на $\mathbb{R}$ с соответствующей нечеткой топологией первым обратил внимание Р. Ловен [18]).

Прежде всего приведем конструкцию $\mathcal{G}(X)$ в удобный для наших целей форме:

(6.1) Конструкция $\mathcal{G}(X)$ (ср. [6], [29]). Пусть X - линейно-упорядоченное пространство и $Z(X)$ - совокупность всех убывающих[1] функций $z: X \to I$ таких, что $\sup_x z(x) = 1$ и $\inf_x z(x) = 0$. Для каждого $x \in X$ положим

$$z(x^-) = \begin{cases} \inf_{t<x} z(t), & \text{если } x \neq \min X \\ z(x) = 1, & \text{если } x = \min X \end{cases};$$

$$z(x^+) = \begin{cases} \sup_{t>x} z(t), & \text{если } x \neq \max X \\ z(x) = 0, & \text{если } x = \max X. \end{cases}$$

Введем отношение эквивалентности $\sim$ на $Z(X)$, положив $z \sim z'$, где $z, z' \in Z(X)$, тогда и только тогда, когда $z(x^-) = z'(x^-)$ и $z(x^+) = z'(x^+)$ для всех $x \in X$. Пусть $[z] = \{z' \in Z(X) : z' \sim z\}$ и $Z_\sim(X) = \{[z] : z \in Z(X)\}$.

Покажем, что в каждом классе $[z]$ найдется полунепрерывная слева функция $z' \in Z(X)$. Если $x \in X$ изолирована слева (т.е. $(t, x) = \phi$) для некоторого $t \in X$, $t < x$),

---

[1] т.е. если $x_1 \leq x_2$, то $z(x_1) \geq z(x_2)$.

положим $\mathfrak{z}'(x)=\mathfrak{z}(x)$; в противном случае положим $\mathfrak{z}'(x)=\mathfrak{z}(x^-)$. Ясно, что $\mathfrak{z}'\in \mathfrak{Z}(X)$. Докажем, что $\mathfrak{z}'$ полунепрерывна слева в каждой точке $x\in X$. В случае, когда x изолирована слева, это очевидно. Предположим поэтому, что x неизолирована слева. Тогда, как легко заметить, $\mathfrak{z}'(x)=\mathfrak{z}(x^-)=\lim\limits_{t\to x-0}\mathfrak{z}(t)=\lim\limits_{t\to x-0}\mathfrak{z}(t^-)=\lim\limits_{t\to x-0}\mathfrak{z}'(t)$, что и доказывает полунепрерывность слева функции $\mathfrak{z}'$.

Остается проверить, что $\mathfrak{z}'\sim\mathfrak{z}$. Поскольку, очевидно, $\mathfrak{z}'\geqslant\mathfrak{z}$, то $\mathfrak{z}'(x^+)\geqslant\mathfrak{z}(x^+)$ и $\mathfrak{z}'(x^-)\geqslant\mathfrak{z}(x^-)$ для всех $x\in X$. Для доказательства обратных неравенств предположим, что $\mathfrak{z}'(x^+)>\mathfrak{z}(x^+)$ для некоторого $x\in X$. Если изолирована справа, т.е. существует точка $t>x$, такая, что $(x,t)=\phi$, то $\mathfrak{z}(x^+)=\mathfrak{z}(t)=\mathfrak{z}'(t)$ (ибо t при этом, очевидно, оказывается изолированной слева), а значит, $\mathfrak{z}'(x^+)=\mathfrak{z}'(t)=\mathfrak{z}(x^+)$. Если же x неизолирована справа, то, поскольку $(x,t)\neq\phi$ для каждого $t>x$ имеем неравенство $\mathfrak{z}'(t)\leqslant\mathfrak{z}(x^+)$, откуда, очевидно, и следует $\mathfrak{z}'(x^+)\leqslant\mathfrak{z}(x^+)$. Предположим теперь, что $\mathfrak{z}'(x^-)>\mathfrak{z}(x^-)$. Если x изолирована слева, то $\mathfrak{z}(t)=\mathfrak{z}(x^-)>\mathfrak{z}'(x^-)=\mathfrak{z}'(t)$, где t выбрано так, чтобы $t<x$ и $(t,x)=\phi$. При этом, поскольку t неизолирована слева (ибо иначе $\mathfrak{z}(t)=\mathfrak{z}'(t)$), то $\mathfrak{z}'(t)=\mathfrak{z}(t^-)$, а следовательно $\mathfrak{z}(x)>\mathfrak{z}(t^-)$, что невозможно. Если же x неизолирована слева, то выбрав $t<x$ так, чтобы $\mathfrak{z}(x^-)\leqslant\mathfrak{z}(t)<\mathfrak{z}'(x^-)$, приходим к противоречию, поскольку $(t,x)\neq\phi$, а следовательно, $\mathfrak{z}'(x^-)\leqslant\mathfrak{z}(t)$.

Отметим, что нельзя утверждать единственность полунепрерывной снизу функции в классе $[\mathfrak{z}]$. Действительно, если $\mathfrak{z}'$ – полунепрерывна слева, $x\in X$ – изолированная слева точка и $\mathfrak{z}'(x^-)<\mathfrak{z}'(x^+)$, то каждая функция $\mathfrak{z}''\in\mathfrak{Z}(X)$ совпадающая с $\mathfrak{z}'$ на $X\setminus\{x\}$ и принимающая любое значение $\mathfrak{z}''(x)\in[\mathfrak{z}'(x^-),\mathfrak{z}'(x^+)]$ в точке x , является также полунепрерывной слева и при этом $\mathfrak{z}'\sim\mathfrak{z}''$.

(Естественно, что аналогичным образом можно доказать и существование полунепрерывной справа функции в каждом классе $[\mathfrak{z}]$. Нам однако, этот факт не потребуется.)

Выберем, как показано выше, по одной полунепрерывной слева функции $\mathfrak{z}'$ из каждого класса $[\mathfrak{z}]$ и обозначим полученное множество $\mathfrak{F}(X)$. (В предыдущих работах в этом направлении [6], [29], [30] через $\mathfrak{F}(X)$ обозначалось множество самих классов $[\mathfrak{k}]$, а не их представителей, т.е. то, что здесь мы обозначаем $Z_{\sim}(X)$). Далее, пусть $\mathfrak{F}^*(X)$ - множество всех полунепрерывных слева убывающих функций $\mathfrak{k}: X \longrightarrow I$. Ясно, что $\mathfrak{F}(X) \subset \mathfrak{F}^*(X) \subset Z(X)$.

Введем чанговскую нечеткую топологию σ на пространстве $Z(X)$ (и, тем самым, на его подпространствах $\mathfrak{F}^*(X)$ и $\mathfrak{F}(X)$), взяв в качестве предбазы семейство нечетких множеств $\mathcal{P}=\{L_a : a \in X\} \cup \{R_b : b \in X\} \subset I^{Z(X)}$ определенных равенствами $R_a(\mathfrak{k}) = \mathfrak{k}(a^+)$ и $L_b(\mathfrak{k}) = 1-\mathfrak{k}(b^-)$, где $\mathfrak{k} \in Z(X)$. Ясно, что если $\mathfrak{k} \sim \mathfrak{k}'$, то $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{k}'$ не различаются топологией, т.е. $\mathfrak{U}(\mathfrak{k}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{k}')$ для каждого $\mathfrak{U} \in \sigma$.

Очевидно, рассмотренная в [6], [29], [30] конструкция естественным образом изоморфна описанной здесь конструкции $\mathfrak{F}(X)$.)

(6.2) <u>Конструкция $(\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}(X), \tau_{\mathfrak{N}})$</u>. Пусть $\mathfrak{N} := \{(\leftarrow, b), (a, \rightarrow) : a, b \in X\}$ - стандартная предбаза топологии линейно-упорядоченного пространства X. Обозначим через $\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}$ σ-алгебру, порожденную семейством $\mathfrak{N}$ и пусть $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}(X)$ - множество всех вероятностных мер на $\mathcal{B}_{\mathfrak{N}}$. Ясно, что $\mathcal{B}_{\mathfrak{N}} \supset \mathcal{B}$, а следовательно $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}} \subset \mathcal{M}$ ($\mathcal{B}$ и $\mathcal{M}$ имеют тот же смысл, что и на протяжении всей работы, т.е. соответственно, борелевская σ-алгебра пространства X и множество всех вероятностных борелевских мер). При этом в случае, когда X имеет счетную базу, очевидно, $\mathcal{B}_{\mathfrak{N}} = \mathcal{B}$ и, значит, $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}} = \mathcal{M}$. Конструкция τ_{ξ}, рассмотренная в (1.1), при соответствующем выборе семейства ξ, естественно, может быть использована и для задания нечетких топологий на $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}$. В частности, при $\xi = \mathfrak{N}$ получаем нечеткую топологию $\tau_{\mathfrak{N}}$ на множестве $\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}(X)$.

Как установлено в доказываемой ниже теореме, получаемая таким образом конструкция $(\mathcal{M}_{\mathfrak{N}}(X), \tau_{\mathfrak{N}})$ для пространств счетного характера оказывается изоморфной конструкции $(\mathfrak{F}^*(X), \sigma)$, описанной в (6.1):

(6.3) <u>Теорема</u>. Если X - линейно-упорядоченное пространство счетного характера, то нечеткие пространства $(\mathfrak{F}^*(X),\sigma)$ и $(\mathcal{M}_{\mathfrak{T}}(X),\tau_{\mathfrak{T}})$ канонически гомеоморфны.

<u>Доказательство</u>. Определим отображение $\varphi: \mathcal{M}_{\mathfrak{T}}(X)\to\mathfrak{F}^*(X)$, положив $\varphi(p)=z_p$, где $z_p: X\to I$ - функция заданная равенством $z_p(x)=p\,[x,\to)$ для каждого $x\in X$. Ясно, что $z_p\in Z(X)$. Пусть t_n - последовательность в X, сходящаяся к точке x слева; тогда из свойств меры ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_p(t_n)=\lim\limits_{n\to\infty} p[t_n,\to)=p(\bigcap\limits_n [t_n,\to))=p\,[x,\to)=z_p(x)$.

Поскольку X удовлетворяет первой аксиоме счетности, отсюда можно сделать вывод, что $z_p\in\mathfrak{F}^*(X)$.

Определим теперь обратное к φ отображение $\psi:\mathfrak{F}^*(X)\to\mathcal{M}_{\mathfrak{T}}(X)$. Для каждого $z\in\mathfrak{F}^*(X)$ рассмотрим отображение $p_z:\{[x,\to): x\in X\}\to I$ заданное равенством $p_z[x,\to)=z(x)$. Если $[x,\to)=\bigcap\limits_n [t_n,\to)$, где t_n - возрастающая последовательность, сходящаяся к x, то, ввиду полунепрерывности слева функции z, имеем $p_z[x,\to)=z(x)=\lim\limits_{n\to\infty} z(t_n)=\lim\limits_{n\to\infty} p_z[t_n,\to)$, а следовательно, функция множества p_z непрерывна на $\{[x,\to): x\in X\}$. Из общей теории меры следует, что p_z единственным образом продолжается на σ-алгебру $\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$, порожденную $\{[x,\to): x\in X\}$ (а следовательно, порожденную предбазой $\mathfrak{T}$, что в частности, оправдывает обозначение $\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$). Для этой продолженной меры мы также будем использовать обозначение p_z, (таким образом, $p_z:\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}\to I$). Отображение ψ может быть определено теперь равенством $\psi(z)=p_z$. Из определений ясно, что отображения φ и ψ взаимнообратны. Для доказательства теоремы, таким образом, остается проверить непрерывность отображений φ и ψ. Для этого рассмотрим следующие равенства, справедливые для каждой меры .

$$\varphi^{-1}(R_a)(p)=R_{a\varphi}(p)=R_a(z_p)=z_p(a^+)=\lim_{t_n\to a+0} z_p(t_n)=\lim_{n\to\infty} p[t_n,\to)=$$
$$=p(\bigcup_n [t_n,\to))=p\,(a,\to)=\delta_{(a,\to)}(p),$$

если точка a неизолирована справа;

$\varphi^{-1}(R_a)(p)=z_p(a^+)=p\,(a,\to)=\delta_{(a,\to)}(p)$, если точка изолирована справа; $\varphi^{-1}(R_a)(p)=0$, если $a=\max X$;

$$\varphi^{-1}(L_b)(p)=L_b(\varphi(p))=L_b(r_p)=1-r_p(b^-)=1-\lim_{t_n\to b-0} r_p(t_n)=$$
$$=1-\lim_{n\to\infty} p[t_n,\to)=1-p(\bigcap_n [t_n,\to))=1-p[b,\to)=p(\leftarrow,b)=\delta_{(\leftarrow,b)}(p),$$
если точка b неизолирована слева;
$\varphi^{-1}(L_b)(p)=1-r_p(b^-)=1-p[t,\to)=p(\leftarrow,t)=\delta_{(\leftarrow,t)}(p)$, если точка b изолирована слева, $t<b$ и $(t,b)=\varnothing$ и $\varphi^{-1}(L_b)(p)=1-r_p(b^-)=0$, если $b=\min X$.

Итак, прообразы элементов предбазы нечеткой топологии σ на $\mathfrak{F}(X)$ при отображении φ составляют предбазу нечеткой топологии $\tau_{\mathfrak{F}}$ на $\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}$, а следовательно, $\varphi:\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}(X)\longrightarrow\mathfrak{F}^*(X)$ действительно является гомеоморфизмом.

Поскольку в случае, когда исходное пространство X имеет счетный вес, очевидно, $\mathfrak{M}(X)=\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}(X)$, из (6.3) немедленно вытекает такое

(6.4) <u>Следствие</u>. Если X - линейно упорядоченное пространство счетного веса, то нечеткие пространства $(\mathfrak{F}^*(X),\sigma)$ и $(\mathfrak{M}(X),\tau_{\mathfrak{F}})$ канонически гомеоморфны.

(6.5) <u>Замечание</u>. Пространство $(\mathfrak{F}^*(X),\sigma)$ может естественным образом интерпретироваться как образ пространства $(\mathfrak{F}(X),\sigma)$ при фактор отображении $q:\mathfrak{F}(X)\longrightarrow\mathfrak{F}^*(X)$, отождествляющем $\sim$ -эквивалентные функции из $\mathfrak{F}(X)$ (см. (6.1)). При этом, очевидно, прообраз $q^{-1}(r)$ каждой точки $r\in\mathfrak{F}^*(X)$ является антидискретным подмножеством пространства $(\mathfrak{F}(X),\sigma)$. Это наблюдение дает возможность посредством теоремы (6.3) и следствия (6.4) перенести многие результаты данной работы на конструкцию $\mathfrak{F}(X)$ [6], [29], [30]. В частности, поскольку в силу [29] пространство $(\mathfrak{F}(X),\sigma)$ при $X=\mathbb{R}$ гомеоморфно нечеткой прямой $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ [15], а при $X=I$ - нечеткому интервалу $\mathfrak{F}(I)$ [16], получаем возможность получить новую информацию об этих важнейших для нечеткой топологии конструкциях. Применению результатов данной работы для изучения нечеткой прямой $\mathfrak{F}(\mathbb{R})$ и нечеткого интервала $\mathfrak{F}(I)$ мы предполагаем посвятить отдельную заметку.

Библиографический список

1. Александров А.Д. Аддитивные функции множеств в абстрактных пространствах // Матем. сб. 1940. Т.8. С.307-348. 1941. Т.9. С.563-628. 1943. Т.13. С.169-238.

2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.,1977.

3. Варадарайн В.С. Меры на топологических пространствах// Матем. сб. 1961. Т.55. С.35-100.

4. Данфорд И., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.,1962.

5. Дискин З.Б. О нечетких предикатах на нечетких множествах// Топологические пространства и их отображения. Рига, 1985. С.59-70.

6. Шостак А.П. Нечеткая модификация линейно упорядоченного пространства: Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа". Тарту,1983. С.76-77.

7. Шостак А.П. Отделимость в нечетких топологических пространствах // Топологические пространства и их отображения. Рига,1987. С.165-186.

8. Шостак А.П. О спектре связности нечетких множеств в нечетких топологических пространствах // Матем. Вестник. Т.40. С.159-171.

9. Шостак А.П. Степень компактности нечетких подмножеств в нечетких топологических пространствах // Латв. матем. ежегодник. 1988. Т.32. С.208-228.

10. Шостак А.П. О степенях линделефовости и счетной компактности нечетких множеств в нечетких топологических пространствах // Латв. матем. ежегодник. 1989. Т.33. С.207-212.

11. Шостак А.П. О спектре и степени наследственной линделефовости нечетких топологических пространств // Латв. матем. ежегодник. 1989. Т.33. С.213-220.

12. Шостак А.П. О нечетких топологиях на пространствах вероятностных мер // Эргодическая теория Марковских процессов (Всесоюзная школа-семинар). Кызыл, 1987. С.57.

13. Bartoszynski R. A characterization of weak convergence of measures. Ann.Math.Statist. 1961. V.32. P.561-576.

14. Chang C.L. Fuzzy topological spaces // J. Math. Anal. Appl. 1968. V.24. P.182-190.
15. Gantner T.E., Steinlage R.C., Warren R.H. Compactness in fuzzy topological spaces// J.Math.Anal.Appl. 1979. V.62. P.547-562.
16. Hutton B. Normality in fuzzy topological spaces // J. Math. Anal. Appl. 1975. V.50. P.74-79.
17. Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness // J. Math. Anal. Appl. 1976. V.56. P.621-633.
18. Lowen R. A comparison of different compactness notions in fuzzy topological spaces // J. Math. Anal. Appl. 1978. V.64. P.446-454.
19. Lowen R. On the existence of natural fuzzy topologies of probability measures // Math. Nachr. 1984. V.115. P.33-57.
20. Klein A.J. Generalizing the L-fuzzy unit interval // Fuzzy Sets and Syst. 1984. V.12. P.271-279.
21. Marik Jan. The Baire and Borel measure// Czechoslovak Math. Journal. 1957. V.7. P.248-253.
22. Martin H.W. A Stone-Čech ultrafuzzy compactification/' J.Math.Anal.Appl. 1980. V.73. P.453-456.
23. Martin H.W. All T_2-compactifications for a T_2-space// Conference on Fuzzy Sets and Fuzzy Topology.- Ohio, Youngstown State University, Youngstown. Ohio,1983. P.30-42.
24. Pu Pao Ming, Liu Ying Ming. Fuzzy topology 1. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence // J. Math. Anal. Appl. 1980. V.76. P.571-599.
25. Pu Pao Ming, Liu Ying Ming. Fuzzy topology II. Product and quotient spaces // J.Math.Anal.Appl. 1980. V.77. P.20-37.
26. Rodabaugh S.E. Separation axioms and the fuzzy real lines // Fuzzy Sets and Syst. 1983. V.9. P.241-265.
27. Rodabaugh S.E. Complete fuzzy topological hyperfields and fuzzy multiplication in the L-fuzzy real lines // Fuzzy Sets and Syst. 1985. V.15. P.285-310.

28. Rodabaugh S.E. A theory of fuzzy Uniformities with Applications to the fuzzy real lines. 1988. V.129. P.37-70.
29. Šostak A. A fuzzy modification of a linearly ordered space // Coll. Math.Soc. Janos Bolyai. Topology and Appl. 1983. V.41. P.581-604.
30. Šostak A. A fuzzy modification of the category of linearly ordered spaces// Comment Math.Univ.Carol. 1985. V.26. P.421-442.
31. Šostak A. On a fuzzy topological structure // Suppl. ai Rend. del Circolo Matem. Palermo. Ser.II. 1985. N11. P.89-104.
32. Šostak A. On compactness and connectedness degrees of fuzzy sets in fuzzy topological spaces//Proc. VI Prague topological Symp. Helderman Verlag. 1988. P.519-532.
33. Šostak A. On lindelöfness and countable compactness degrees of fuzzy sets in fuzzy topological spaces // Interim Report of the Prague topological symposium. 1987. N 2. P.11.
34. Šostak A. A note on Lindelöfness and countable compactness in fuzzy topological spaces // Proc. II IFSA, Tokyo, 1987. P.180-184.
35. Šostak A. On some modifications of fuzzy topologies// Mater. Vesnik. 1989. Vol.41.

Поступила 28 апреля 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 512.534

О ПОЛУГРУППАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПАР ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В.Б.Штейнбук
РПИ

Пары топологических пространств неоднократно изучались с помощью различных алгебраических объектов (полугрупп, тернарных полугрупп) некоторым образом связанных с множествами отображений одного пространства в другое (см., напр., [1] - [3]). Каждой паре объектов A , B произвольной категории $\mathbb{K}$ можно сопоставить [5] полугруппу $\mathrm{End}(A,B)$ на декартовом произведении $\mathrm{End}\,A\times \mathrm{Hom}(A,B)$ с операцией $(\sigma_1,\varphi_1)(\sigma_2,\varphi_2)=(\sigma_1\sigma_2,\sigma_1\varphi_2)$, $(\sigma_1,\sigma_2\in \mathrm{End}\,A;\ \varphi_1\varphi_2\in \mathrm{Hom}(A,B))$. Если $\mathbb{K}$ - категория топологических пространств с непрерывными отображениями в качестве морфизмов, $A,B\in \mathrm{Ob}\,\mathbb{K}$, то обозначим $C(A,B)=\mathrm{End}(A,B)$. В данной заметке рассматриваются некоторые возможности использования полугрупп $C(A,B)$ в вопросе характеризации пар топологических пространств при помощи этих полугрупп. Часть результатов анонсирована в [6].

Топологическое T_1-пространство X называется [4] регулярно отделимым, если у него существует замкнутая база, каждое из множеств которой является прообразом точки при некотором непрерывном преобразовании X . Полугруппы непрерывных преобразований регулярно отделимых и близких к ним пространств рассматривались неоднократно [7]. Пусть X_1, X_2 - T_1-пространства. Назовем пространство X_1 регулярно отделимым относительно X_2 , если у X_1 существует замкнутая предбаза, каждое из множеств которой может служить прообразом точки при некотором непрерывном отображении X_1 в X_2 . Очевидно, что если множество непрерывных отображений X_1 в X_2 является регулярным (т.е. отделяет точки пространства X_1 от замкнутых в X_1 множеств), то пространство X_1 регулярно отделимо относительно X_2 .

Заметим, что в [3] пространство X_1 , регулярно отделимое относительно T_1-пространства X_2 , называется C-связанным с пространством X_2 . Для пар C-связанных пространств и сопоставленных им полугруд непрерывных отображений в [3] получен результат аналогичный по формулировке нижеприведенной теореме 1. Конечно, ход исследований и техника доказательств данной работы существенно отличаются от исследований полугруд непрерывных отображений пар топологических пространств.

Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ - классы T_1 пространств. Назовем класс $\mathfrak{A}_1$ регулярно отделимым относительно $\mathfrak{A}_2$, если любое пространство X_1 из $\mathfrak{A}_1$ регулярно отделимо относительно любого пространства X_2 из $\mathfrak{A}_2$. Легко видеть, что класс вполне регулярных пространств регулярно отделим относительно класса пространств, содержащих гомеоморфный образ отрезка.

В произвольной полугруппе S определим бинарное отношение τ : $s_1 \tau s_2 \Leftrightarrow (\forall y \in S)(s_1 y = s_2 y)$. Очевидно, τ - конгруэнция на S . Через $P(S)$ обозначим множество всех правых нулей полугруппы S .

Пусть A , B - непустые множества. Для всякого $\alpha \in A$ обозначим c_α преобразование A , согласно которому $Ac_\alpha = \alpha$. Такие преобразования называются константными. Для всякого $\beta \in B$ обозначим через b_β отображение A в B такое, что $Ab_\beta = \beta$. Множество пар $\{(c_\alpha, b_\beta) | \alpha \in A, \beta \in B\}$ обозначим через $\mathfrak{I}(A,B)$. Для всякого $\alpha \in A$ обозначим
$K_\alpha = \{(c_\alpha, b_\beta) | \beta \in B\}$.

Теорема 1. Пусть X_i , X'_i ($i = 1,2$) - T_1-пространства и X_1 (соответственно X'_1) регулярно отделимо относительно X_2 (соответственно X'_2). Если полугруппы $C(X_1,X_2)$ и $C(X'_1,X'_2)$ изоморфны, то пространства X_1 и X'_1 гомеоморфны.

Доказательство. Пусть пространство X_1 регулярно отделимо относительно X_2 . Обозначим через $\mathfrak{F}$ замкнутую предбазу пространства X_1 , состоящую из прообразов точек при всевозможных непрерывных отображениях X_1 в X_2 .

Положим $\mathfrak{M}=C(X_1,X_2)$, $\mathfrak{I}=\mathfrak{I}(X_1,X_2)$. Заметим, что $\mathfrak{I}$ есть множество всех правых нулей полугруппы $\mathfrak{M}$. Легко видеть, что для любого $\alpha\in X_1$ выполняется $K_\alpha\in\mathfrak{I}/\tau$, причем других элементов множество $\mathfrak{I}/\tau$ не имеет.

Через $Hom(X_1,X_2)$ обозначим множество всех непрерывных отображений X_1 в X_2. Для всякого $\alpha\in X_1$ определим подмножество $\mathfrak{D}_\alpha=\{(c_\alpha,\varphi)\mid\varphi\in Hom(X_1,X_2)\}$ полугруппы $\mathfrak{M}$. Очевидно, $s\in\mathfrak{M}$ тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{D}_\alpha$, когда $\mathfrak{I}s\subset K_\alpha$.

Фиксируем элемент ρ из X_1. Для любых $\xi\in X_2$, $\varphi\in Hom(X_1,X_2)$ обозначим через $M_{\varphi,\xi}$ подмножество фактормножества $\mathfrak{I}/\tau$ вида $\{K_\alpha\mid K_\alpha(c_\rho,\varphi)=(c_\rho,b_\xi)\}$. Пусть $\mathfrak{U}$ - семейство всех подмножеств множества $\mathfrak{I}/\tau$ вида $M_{\varphi,\xi}$. Легко видеть, что $M_{\varphi,\xi}=\{K_\alpha\mid\alpha\in\xi\varphi^{-1}\}$.

Убедимся, что системы подмножеств $(X_1,\mathfrak{F})$ и $(\mathfrak{I}/\tau,\mathfrak{U})$ изоморфны, т.е. существует биекция множества X_1 на $\mathfrak{I}/\tau$, которая переводит $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{U}$. Обозначим через $\mathfrak{f}$ отображение X_1 в $\mathfrak{I}/\tau$, согласно которому для $\alpha\in X_1$ имеет место $\alpha\mathfrak{f}=K_\alpha$. Из описания множества $\mathfrak{I}/\tau$ следует, что $\mathfrak{f}$ является биекцией X_1 на $\mathfrak{I}/\tau$. Возьмем произвольный элемент H из $\mathfrak{F}$. Согласно определению $\mathfrak{F}$, H есть прообраз некоторой точки $\xi\in X_2$ при некотором непрерывном отображении φ из X_1 в X_2. Пусть $\alpha\in H$. Тогда $\alpha\in\xi\varphi^{-1}$. Поэтому из задания $M_{\varphi,\xi}$ следует $\alpha\mathfrak{f}=K_\alpha\in M_{\varphi,\xi}$. Таким образом, $H\mathfrak{f}\subset M_{\varphi,\xi}\in\mathfrak{U}$. Аналогично доказывается, что $M_{\varphi,\xi}\mathfrak{f}^{-1}\subset H$. Мы получили, что $H\mathfrak{f}$ является элементом из $\mathfrak{U}$. Легко понять, что верно и обратное: $M\mathfrak{f}^{-1}\in\mathfrak{F}$ для всякого M из $\mathfrak{U}$.

Пусть пространство X_1' регулярно отделимо относительно X_2' и χ - изоморфизм полугруппы $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{M}'=C(X_1',X_2')$. Так как $\mathfrak{I}$ есть множество всех правых нулей полугруппы $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{I}\chi=P(\mathfrak{M}')$ и следовательно $\mathfrak{I}\chi=\mathfrak{I}(X_1',X_2')=\mathfrak{I}'$. Согласно определению τ, если $s_1\sim s_2(\tau)$ в $\mathfrak{M}$ $(s_1,s_2\in\mathfrak{M})$, то $s_1\chi\sim s_2\chi(\tau)$ в $\mathfrak{M}'$, и наоборот. Поэтому χ индуцирует биекцию $\bar{\chi}$ множества классов $\mathfrak{I}/\tau$ на $\mathfrak{I}'/\tau$. А именно, если $K_\alpha\in\mathfrak{I}/\tau$ $(\alpha\in X_1)$ и $K_\alpha\chi=K_{\bar{\alpha}}\in\mathfrak{I}'/\tau$ $(\bar{\alpha}\in X_2)$, то $K_\alpha \bar{x} = K_{\bar{\alpha}}$.

Заметим, что если $K_\alpha x = K_{\bar{\alpha}}$, то $\mathfrak{D}_\alpha x = \mathfrak{D}_{\bar{\alpha}}$. Действительно, для $s \in \mathfrak{D}_\alpha$ выполняется $\mathfrak{I}_s \subset K_\alpha$. Тогда $\mathfrak{I}'_s x = \mathfrak{I}_s x \subset K_\alpha x = K_{\bar{\alpha}}$. Отсюда следует, что $s x \in \mathfrak{D}_{\bar{\alpha}}$ т.е. $\mathfrak{D}_\alpha x \subset \mathfrak{D}_{\bar{\alpha}}$. Включение в другую сторону доказывается аналогично.

Напомним, что элемент $\beta \in X_1$ зафиксирован. Положим $K_\beta x = K_{\bar{\beta}}$ $(\bar{\beta} \in X'_1)$. Определим для фиксированного $\bar{\beta}$ и любых $\xi' \in X'_2$, $\varphi' \in \mathrm{Hom}(X'_1, X'_2)$ подмножество $M_{\varphi', \xi'}$ множества $\mathfrak{I}'/\tau$ аналогично тому, как это было сделано для $M_{\varphi, \xi}$. Обозначим $\mathfrak{U}'$ семейство всех подмножеств множества $\mathfrak{I}'/\tau$ вида $M_{\varphi', \xi'}$.

Возьмем произвольные элементы (c_β, b_ξ) из K_β и (c_β, φ) из $\mathfrak{D}_\beta$. Тогда $(c_\beta, b_\xi) x \in K_{\bar{\beta}}$ и $(c_\beta, \varphi) x \in \mathfrak{D}_{\bar{\beta}}$. Обозначим $(c_\beta, b_\xi) x = (c_{\bar{\beta}}, b_{\xi'})$, $(c_\beta, \varphi) x = (c_{\bar{\beta}}, \varphi')$, где $\xi' \in X'_2$, $\varphi' \in \mathrm{Hom}(X'_1, X'_2)$. Пусть $K_\alpha \in M_{\varphi, \xi}$ $(\alpha \in X_1)$. Согласно определению $M_{\varphi, \xi}$ получаем $K_\alpha(c_\beta, \varphi) = (c_\beta, b_\xi)$. Применив к обеим частям последнего равенства изоморфизм x, получим $K_{\bar{\alpha}}(c_{\bar{\beta}}, \varphi') = (c_{\bar{\beta}}, b_{\xi'})$, где $K_{\bar{\alpha}} = K_\alpha x$. Это означает, с учетом определения $\bar{x}$, что $K_\alpha \bar{x} \in M_{\varphi', \xi'}$. Итак, $M_{\varphi, \xi} \bar{x} \subset M_{\varphi', \xi'}$, и легко понять, что $M_{\varphi, \xi} \bar{x} = M_{\varphi', \xi'}$.

Мы убедились, что для всякого $M_{\varphi, \xi}$ из $\mathfrak{U}$ выполняется $M_{\varphi, \xi} \bar{x} \in \mathfrak{U}'$. Аналогично можно получить, что если $M_{\psi', \gamma'} \in \mathfrak{U}'$, то $M_{\psi', \gamma'} \bar{x}^{-1} \in \mathfrak{U}$. Таким образом, биекция $\bar{x}$ множества классов $\mathfrak{I}/\tau$ на $\mathfrak{I}'/\tau$ переводит $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{U}'$, т.е. системы подмножеств $(\mathfrak{I}/\tau, \mathfrak{U})$ и $(\mathfrak{I}'/\tau, \mathfrak{U}')$ изоморфны. Ввиду доказанной ранее изоморфности систем подмножеств $(X_1, \mathfrak{F})$ и $(\mathfrak{I}/\tau, \mathfrak{U})$, отсюда вытекает, что изоморфны системы подмножеств $(X_1, \mathfrak{F})$ и $(X'_1, \mathfrak{F}')$, где $\mathfrak{F}'$ – замкнутая предбаза пространства X'_1, состоящая из прообразов точек при всевозможных непрерывных отображениях X'_1 в X'_2. Следовательно, пространства X_1 и X'_1 гомеоморфны. Теорема доказана.

Поскольку всякое вполне регулярное пространство регулярно отделимо относительно числовой прямой, то из теоремы 1 вытекает

Следствие. Пусть X и X' - вполне регулярные пространства, R - числовая прямая. Если полугруппы $C(X,R)$ и $C(X',R)$ изоморфны, то пространства X и X' гомеоморфны.

Из теоремы 1 также следует

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{A}_i$ - классы T_1-пространств, $X_i, X_i' \in \mathfrak{A}_i$ ($i = 1,2$), $\mathfrak{A}_1$ регулярно отделим относительно $\mathfrak{A}_2$. Если полугруппы $C(X_1,X_2)$ и $C(X_1',X_2')$ изоморфны, то пространства X_1 и X_1' гомеоморфны.

Предложение 1. Пусть X_1, X_2 - хаусдорфовы пространства, причем X_1 бикомпактно. Пространства X_1 и X_2 гомеоморфны тогда и только тогда, когда в полугруппе $\mathfrak{M} = C(X_1,X_2)$ существует элемент s такой, что $P(\mathfrak{M})s \in P(\mathfrak{M})/\tau$ и для различных K_1, K_2 из $P(\mathfrak{M})/\tau$ выполняется $K_1 s \neq K_2 s$.

Доказательство. Достаточность. Как уже отмечалось, $P(\mathfrak{M}) = \mathfrak{I}(X_1,X_2) = \mathfrak{I}$ и для всякого $\alpha \in X_1$ выполняется $K_\alpha \in \mathfrak{I}/\tau$, причем других элементов в $\mathfrak{I}/\tau$ нет.

Пусть элемент $s \in \mathfrak{M}$ удовлетворяет условию $s=(\sigma,\varphi)$. Так как $\mathfrak{I}s \in \mathfrak{I}/\tau$, то $\mathfrak{I}s = K_\alpha$ для некоторого $\alpha \in X_1$. Легко проверить, что $\mathfrak{I}(\omega,\psi) \subset K_\beta$ (где $(\omega,\psi) \in \mathfrak{M}, \beta \in X_1$) тогда и только тогда, когда $\omega = c_\beta$. Следовательно, $s = (c_\alpha,\varphi)$. Далее, заметим, что $\mathfrak{I}(c_\beta,\psi) = \{(c_\beta, b_{\xi\psi}) \mid \xi \in X_1\}$. Поэтому из $\mathfrak{I}(c_\alpha,\varphi) = K_\alpha$ следует, что $X_1\varphi = X_2$.

Покажем теперь, что отображение φ инъективно. Возьмем два произвольных элемента $\beta,\gamma \in X_1$. Согласно условию, $K_\beta s \neq K_\gamma s$. Поэтому $(c_\alpha, b_{\beta\varphi}) = K_\beta(c_\alpha,\varphi) \neq K_\gamma(c_\alpha,\varphi) = (c_\alpha, b_{\gamma\varphi})$, а значит, $\beta\varphi \neq \gamma\varphi$.

Таким образом, непрерывное отображение φ является биекцией X_1 на X_2. Так как при этом X_1 бикомпактно, а X_2 хаусдорфово, то φ есть гомеоморфизм X_1 на X_2.

Необходимость доказывается аналогично.

Предложение 2. Для того, чтобы T_1-пространство X_2 являлось непрерывным образом T_1-пространства X_1 необходимо и достаточно, чтобы в полугруппе $\mathfrak{M} = C(X_1,X_2)$ существовал элемент s такой, что $P(\mathfrak{M})s \in P(\mathfrak{M})/\tau$.

Доказательство этого предложения по существу содержится в вышеприведенных рассуждениях.

Библиографический список

1. Гасанов А.М. Тернарные полугруппы топологических отображений // Изв. АН Аз.ССР. № 1. С. 18-23.
2. Мустафаев Л.Г. Полугруды топологических отображений // Докл. АН СССР. 1976. Т.230. №6. С. 1279-1281.
3. Мустафаев Л.Г., Бабаев Э.А. Топологические пространства и полугруды непрерывных отображений // Изв. АН Аз.ССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1984. Т.5. № 1. С. 3-5.
4. Мальцев А.А. Об одном классе топологических пространств // Междунар. конгр. математиков: Тез. крат. науч. сообщ. М., 1966. С. 23.
5. Плоткин Б.И., Штейнбук В.Б., Перанидзе И.Н. Автоматы, представления и полугруппы // Латв. мат. ежегодник. 1981. Вып. 25. С. 222-236.
6. Штейнбук В.Б. Полугруппы непрерывных преобразований пар топологических пространств // III Всесоюзный симпозиум по теории полугрупп: Тезисы сообщ. Свердловск, 1988. С. 108.
7. Magill K.D. A survey of semigroups of continuous selfmaps // Semigroup Forum. 1975/76. V.11. N 3. P. 189-282.

Поступила 27 января 1988 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1989.

УДК 515.12

НЕЙТ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

А.М.Юровецкий
ЛГУ им.П.Стучки

1. Нейт топологического пространства.

Пусть $(X,\mathfrak{T})$ - топологическое пространство, τ - кардинальное число.

Будем говорить, что н е й т (обр. от англ. nested weight - гнездовой вес) пространства X не превосходит τ и писать $\alpha(X)\leq\tau$, если существует семейство $\{\mathfrak{T}_s : s\in S\}\subset 2^{2^X}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(C1) $|S|=\tau$.

(C2) $\mathfrak{T}_s$ - топология на X, линейно упорядоченная отношением $\subset$ для каждого $s\in S$.

(C3) $\bigcup\limits_{s\in S}\mathfrak{T}_s$ - предбаза топологии $\mathfrak{T}$.

Будем говорить, что нейт пространства X равен τ и писать $\alpha(X)=\tau$, если $\tau=\inf\{\mu : \alpha(X)\leq\mu\}$.

Элементы топологии $\mathfrak{T}_s$ будем обозначать заглавными латинскими буквами с индексом s вверху: $\mathcal{U}^s$, V^s и т.п.

1.1. Простейшие свойства.

(I) Если X гомеоморфно Y, то $\alpha(X)=\alpha(Y)$.

(II) Если $M\subset X$, то $\alpha(M)\leq\alpha(X)$.

(III) Для любого пространства X $\alpha(X)\geq 1$.

(IV) Если X - T_1-пространство, то либо $|X|\leq 1$, либо $\alpha(X)\geq 2$.

1.2. Пример. Пусть X - множество вещественных чисел, $\mathfrak{T}=\{(-\infty,x): x\in X\}\cup\{\emptyset,X\}$. Если $x<x'$, то $(-\infty,x)\subset(-\infty,x')$. Значит, $\alpha(X)=1$.

1.3. Пример. Пусть $\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел, наделенное естественной топологией вещественной прямой [1]. Положим $\mathfrak{S}_1=\{(-\infty,y):y\in\mathbb{R}\}\cup\{\phi,\mathbb{R}\}$, $\mathfrak{S}_2=\{(x,\infty):x\in\mathbb{R}\}\cup\{\phi,\mathbb{R}\}$. Так как $(x,y)=(-\infty,y)\cap(x,\infty)$ для любых $x,y\in\mathbb{R}$, то, учитывая 1.1, $a(\mathbb{R})=2$.

1.4. Пример. Пусть X – бесконечное множество, $\mathfrak{S}=\{X\setminus E: E\subset X$ и $|E|<\aleph_0\}\cup\{\phi\}$ [1]. Так как семейство $\{\{\phi,X\setminus\{x\},X\}:x\in X\}$ удовлетворяет условиям (C1)-(C3) для кардинального числа $|X|$, то $a(X)\leqslant|X|$. Если X и Y – бесконечные множества одинаковой мощности, наделенные топологией, описанной выше, то, очевидно, каждое взаимно однозначное отображение X на Y есть гомеоморфизм. Пространство мощности τ, наделенное такой топологией, будем обозначать через $Co(\tau)$.

1.5. Теорема. $a(Co(\tau))=\tau$ для каждого $\tau\geqslant\aleph_0$.

Доказательство. Из примера 1.4 следует $a(Co(\tau))\leqslant\tau$. Допустим $a(Co(\tau))<\tau$.

Если $\tau=\aleph_0$, то найдется $n\in\mathbb{N}$, такой, что $a(Co(\aleph_0))=n$. Для любой пары $x\in Co(\aleph_0)$, $i\leqslant n$ положим $\Psi_x^i=\cup\{W^i:x\notin W^i\}$ и $A_i=\{x\in Co(\aleph_0):\Psi_x^i=\phi\}$. Очевидно, $a(A_i)\leqslant n-1$. Так как $Co(\aleph_0)$ – T_1-пространство, то по теореме 2.4 (см. ниже) $\bigcap_{i=1}^{n}\Psi_x^i=\phi$ для каждого $x\in Co(\aleph_0)$. Так как всякие два непустые открытые в $Co(\aleph_0)$ множества пересекаются, то $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=Co(\aleph_0)$, откуда следует, что $|A_{i^*}|=\aleph_0$ для некоторого $i^*\leqslant n$. Но тогда A_{i^*} гомеоморфно $Co(\aleph_0)$, и $a(Co(\aleph_0))=a(A_{i^*})\leqslant n-1$, что невозможно. Таким образом, $a(Co(\aleph_0))=\aleph_0$.

Если $\tau>\aleph_0$, то положим $E_s=\cup\{E:Co(\tau)\setminus E\in\mathfrak{S}_s$ и $|E|<\aleph_0\}$ для каждого $s\in S$, где $|S|=a(Co(\tau))\geqslant\aleph_0$, и $E^*=\bigcup_{s\in S}E_s$.

Так как $|E_s|\leqslant\aleph_0$ для каждого $s\in S$, то $|E^*|=|S|$. Из $|S|<\tau$ следует $Co(\tau)\setminus E^*\neq\phi$. Так как $Co(\tau)\setminus E^*=$ $=\cap\{\mathcal{U}:\mathcal{U}\in\mathfrak{S}\setminus\{\phi\}\}$, то $Co(\tau)\setminus\{z\}\notin\mathfrak{S}$ для каждого $z\in Co(\tau)\setminus E^*$, что невозможно. Следовательно, $a(Co(\tau))=\tau$.

Через $w(X)$, как обычно, обозначаем вес пространства X.

1.6. Предложение. $a(X)\leqslant w(X)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}=\{G_s:s\in S\}$ – база пространства X и $|\mathcal{B}|=w(X)$. Положим $\mathcal{T}_s=\{\varnothing, U_s, X\}$ для каждого $s\in S$. Значит, $a(X)\leq w(X)$.

1.7. Теорема. Если X - пространство с σ-дизъюнктной базой, то $a(X)\leq\aleph_0$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{B}_i$ - σ-дизъюнктная база пространства X, $\mathcal{B}_i=\{V_{\xi,i}:\xi_i<\alpha_i\}$ - дизъюнктное семейство открытых в X множеств, α_i - некоторый ординал (такое представление $\mathcal{B}_i$ не нарушает общности в силу теоремы Цермело [1]), $i\in\mathbb{N}$.

Фиксируем $i\in\mathbb{N}$ и $\xi<\alpha_i$. Положим $\mathcal{U}^1_{\xi,i}=\bigcup\{V_{\delta,i}:\delta\leq\xi\}$, $\mathcal{U}^2_{\xi,i}=\bigcup\{V_{\gamma,i}:\gamma\geq\xi\}$, $\mathcal{T}_{i,k}=\{\mathcal{U}^k_{\xi,i}:\xi<\alpha_i\}$ для каждого $k\in\{1,2\}$. Так как $\mathcal{B}_i$ дизъюнктно, то $V_{\xi,i}=\mathcal{U}^1_{\xi,i}\cap\mathcal{U}^2_{\xi,i}$. $\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathcal{B}_i$ - база пространства X, следовательно, семейство $\{\mathcal{T}_{i,k}:i\in\mathbb{N}, k\in\{1,2\}\}$ удовлетворяет условиям (C1)-(C3) для кардинального числа $\aleph_0$, и $a(X)\leq\aleph_0$.

1.8. Следствие. Если X метризуемо, то $a(X)\leq\aleph_0$.

1.9. Теорема. $a(\prod_{t\in T} X_t)\leq\sum_{t\in T} a(X_t)$.

Доказательство. Фиксируем $t\in T$. Пусть $\mathcal{T}_t$ - топология пространства X_t, и $\{\mathcal{T}_{t,s}:s\in S_t\}\subset 2^{2^{X_t}}$ удовлетворяет условиям (C1)-(C3) для кардинального числа $a(X_t)$. Фиксируем $s\in S_t$ и положим $\lambda(\mathcal{U}^s_t)=\prod_{t'\in T} V^s_{t'}$, где $V^s_t=\mathcal{U}^s_t$, и $V^s_{t'}=X_{t'}$ для каждого $t'\neq t$; $\mathcal{L}_{t,s}=\{\lambda(\mathcal{U}^s_t):\mathcal{U}^s_t\in\mathcal{T}_{t,s}\}$. Очевидно, семейство $L=\{\mathcal{L}_{t,s}:s\in S_t, t\in T\}$ удовлетворяет условиям (C1)-(C3) для кардинального числа $|L|=\sum_{t\in T}|S_t|=\sum_{t\in T} a(X_t)$.

Пусть $\{X_t:t\in T\}$ - дизъюнктное семейство непустых пространств, $\bigoplus_{t\in T} X_t$ - их сумма [1].

1.10. Теорема.

(I) Если $a(X_{t'})>1$ для некоторого $t'\in T$ или $|T|=1$, то $a(\bigoplus_{t\in T} X_t)=\sup\{a(X_t):t\in T\}$.

(II) В противном случае $a(\bigoplus_{t\in T} X_t)=2$.

Доказательство. Обозначим $X=\bigoplus_{t\in T} X_t$, $\tau=\sup\{a(X_t):t\in T\}$.

Из 1.1 следует $a(X)\geq\tau$.

Так как X не зависит от природы множества T, то в силу теоремы Цермело [1] $T=\{\xi:\xi<\alpha\}$, где α - некоторый ординал. Пусть $\mathcal{T}_\xi$ - топология пространства X_ξ, и $\{\mathcal{T}_{\xi,s}:s\in S_\xi\}\subset 2^{2^{X_\xi}}$ - семейство, удовлетворяющее условиям (C1)-(C3) для кардинального числа $a(X_\xi)$ для каждого $\xi<\alpha$; $S=\bigcup\limits_{\xi<\alpha}S_\xi$.

Фиксируем $\xi<\alpha$, $s_0\in S$. Пусть $\mathcal{T}_{\xi,s}=\{\phi,X_\xi\}$ для каждого $s\in S\setminus S_\xi$. Положим $\varphi(\mathcal{U}^s_\xi)=(\bigcup\limits_{\delta<\xi}X_\delta)\cup\mathcal{U}_\xi$, если $s\neq s_0$, и $\varphi(\mathcal{U}^{s_0}_\xi)=\mathcal{U}^{s_0}_\xi\cup(\bigcup\limits_{\xi<\gamma<\alpha}X_\gamma)$ для каждого $\mathcal{U}^s_\xi\in\mathcal{T}_{\xi,s}$.

$\mathcal{G}_s=\{\varphi(\mathcal{U}^s_\xi):\xi<\alpha\}$ для каждого $s\in S$.

(1) Если $\tau\geq 2$ или $\alpha=1$, то семейство $\{\mathcal{G}_s:s\in S\}\subset 2^{2^X}$ удовлетворяет условиям (C1)-(C3) для кардинального числа τ, следовательно, $a(X)=\tau$.

(11) В противном случае $\tau=1$ и $\alpha>1$. Тогда в X существуют непустые открытые непересекающиеся множества (например, X_0 и X_1), следовательно, $a(X)\geq 2$. Тогда в качестве S надо взять двухэлементное множество и построить $\{\mathcal{G}_s:s\in S\}$ согласно процедуре, описанной выше. Значит, $a(X)=2$.

2. Пространства конечного нейта.

Пусть $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел, $i,n\in\mathbb{N}$. Для $A\subset X$ $\bar{A}$, $\mathrm{Fr}A$, $\mathrm{Int}A$ - замыкание, граница и внутренность A в X.

Если $a(X)\leq n$, то через $\mathcal{B}C_n(X)$ будем обозначать базу пространства X, порожденную предбазой $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathcal{T}_i$ (см. (C1)-(C3)).

2.1. Теорема. Если X - T_1-пространство и $a(X)\leq n$, то из $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathcal{U}^i\neq\phi$ следует $\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathcal{U}^i=X$.

Доказательство. Положим $\mathcal{U}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathcal{U}^i$ и $A=X\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}\mathcal{U}^i$. Если $A\neq\phi$, то фиксируем $x\in A$, $y\in\mathcal{U}$. Так как $x\neq y$, то найдется $V\in\mathcal{B}C_n(X)$, такое, что $V=\bigcap\limits_{i=1}^{n}V^i$ и $x\in V$, $y\notin V$.

Следовательно, $y \notin V^{i^*}$ для некоторого $i^* \leq n$. Но $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}^i$, значит, и $x \notin \mathcal{U}^{i^*}$, что ведет к противоречию.

2.2. Следствие. Если X – T_1-пространство и $a(X) \leq n$, то из $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}^i \neq \emptyset$ следует $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Fr}\, \mathcal{U}^i = \emptyset$.

Доказательство. $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Fr}\, \mathcal{U}^i = \bigcap_{i=1}^{n} (\overline{\mathcal{U}}^i \cap (X \setminus \mathcal{U}^i)) = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{\mathcal{U}}^i \cap (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}^i) = \emptyset$.

T_1-отделимость пространства X, требуемая условием теоремы 2.1, существенна:

2.3. Пример. Пусть X – множество вещественных чисел, $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 < x_2$. Топология $\mathcal{T}$ порождена предбазой $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, где $\mathcal{T}_i = \{(x_i - \delta, x_i + \delta) : \delta > 0\} \cup \{\emptyset, X\}$ для каждого $i \leq 2$. X – связное T_0-пространство со счетной базой, $a(X) = 2$, множество $[x_1, x_2]$ всюду плотно в X и гомеоморфно $[0,1]$ (в топологии, индуцированной из $\mathbb{R}$). Если $\mathcal{U}^i \in \mathcal{T}_i \setminus \{X\}$, то найдется $\delta^* > 0$, такое, что $\mathcal{U}^1 \cup \mathcal{U}^2 \subset (x_1 - \delta^*, x_2 + \delta^*)$, следовательно, $\mathcal{U}^1 \cup \mathcal{U}^2 = X$ в том и только том случае, когда $\mathcal{U}^1 = X$ или $\mathcal{U}^2 = X$.

Пусть X – T_1-пространство и $a(X) \leq n$. Для всякой пары $x \in X, i \leq n$ положим

(E1) $\Psi_x^i = \cup \{W^i : x \notin W^i\}$.

(E2) $Z_i = \bigcup_{x \in X} \mathrm{Fr}\, \Psi_x^i$.

2.4. Теорема. Если X – T_1-пространство, $a(X) \leq n$, $x \in X$ и X^d – множество всех неизолированных точек пространства X, то

(1) $\bigcap_{i=1}^{n} \Psi_x^i = \emptyset \qquad \bigcup_{i=1}^{n} \Psi_x^i = X \setminus \{x\}$.

(11) $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i = X^d$.

Доказательство. (1) Фиксируем $x \in X$ и положим $G = \bigcup_{i=1}^{n} \Psi_x^i$. Так как $x \notin G$, то по теореме 2.1 $\bigcap_{i=1}^{n} \Psi_x^i = \emptyset$. Если существует $y \in X \setminus (G \cup \{x\})$, то найдется $V \in BC_n(X)$, такое, что $V = \bigcap_{i=1}^{n} V^i$ и $y \in V$, $x \notin V$. Следовательно, $x \notin V^{i^*}$ для некоторого $i^* \leq n$. Значит, $y \in V^{i^*} \subset \Psi_x^{i^*} \subset G$, что невозможно.

(ii) Фиксируем $z \in X^d$. Согласно (1) $\bigcup_{i=1}^{n} \Psi_z^i = X \setminus \{z\}$. Так как $X = \overline{X \setminus \{z\}} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} \Psi_z^i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Psi_z^i}$, то существует $i' \leq n$, такой, что $z \in \overline{\Psi_z^{i'}}$. Но $z \notin \Psi_z^{i'}$, значит, $z \in \operatorname{Fr} \Psi_z^{i'} \subset Z_{i'} \subset \bigcup_{i=1}^{n} Z_i$. Включение $\bigcup_{i=1}^{n} Z_i \subset X^d$ очевидно.

Следующий результат, по-видимому, известен, однако автор не встречал упоминание о нем, и поэтому приводит его с доказательством.

2.5. Лемма. Для любого пространства X и $A, B \subset X$ $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cap B} \cup (\operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B)$.

Доказательство. Фиксируем $x \in A \cap \operatorname{Fr} B$. Если $x \in \operatorname{Fr} A$, то $x \in \operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B$. Если $x \in \operatorname{Int} A$, то найдется окрестность V точки x, такая, что $V \subset A$. Так как $x \in \operatorname{Fr} B$, то $V \cap B \neq \phi$ и $V \setminus B \neq \phi$, следовательно, $V \cap (A \cap B) \neq \phi$ и $V \setminus (A \cap B) \neq \phi$. В силу произвольности выбора окрестности V точки x заключаем, что $x \in \operatorname{Fr}(A \cap B)$. Значит,

$A \cap \operatorname{Fr} B \subset \operatorname{Fr}(A \cap B) \cup (\operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B) = \operatorname{Fr}(B \cap A) \cup (\operatorname{Fr} B \cap \operatorname{Fr} A) \supset$
$\supset B \cap \operatorname{Fr} A$.

$\bar{A} \cap \bar{B} = (A \cup \operatorname{Fr} A) \cap (B \cup \operatorname{Fr} B) = (A \cap B) \cup (A \cap \operatorname{Fr} B) \cup (B \cap \operatorname{Fr} A) \cup (\operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B) \subset$
$\subset (A \cap B) \cup (\operatorname{Fr}(A \cap B)) \cup (\operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B) = \overline{A \cap B} \cup (\operatorname{Fr} A \cap \operatorname{Fr} B) \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

2.6. Теорема. Если X регулярно, $a(X) \leq n$ и существует $j \leq n$, такой, что $\overline{\mathcal{U}^j} = X$ для каждого $\mathcal{U}^j \in \mathfrak{S}_j \setminus \{\phi\}$, то $a(X) \leq n-1$.

Доказательство. Фиксируем $x \in X$ и положим $\{\mathcal{U}_s : s \in S_x\}$ – семейство всех открытых в X множеств, содержащих точку x и являющихся элементами базы $\mathcal{B}C_n(X)$. Положим $W_s = \bigcap_{i \neq j} \mathcal{U}_s^i$ для каждого $s \in S_x$. Тогда $\overline{W_s} = \overline{W_s} \cap X = \overline{W_s} \cap \overline{\mathcal{U}_s^j} =$ /по лемме 2.5/ $= \overline{W_s \cap \mathcal{U}_s^j} \cup (\operatorname{Fr} W_s \cap \operatorname{Fr} \mathcal{U}_s^j) = \overline{\mathcal{U}}_s \cup (\operatorname{Fr} W_s \cap \operatorname{Fr} \mathcal{U}_s^j) \subset \overline{\mathcal{U}}_s \cup \operatorname{Fr} W_s$. Но W_s открыто, следовательно, $W_s \subset \overline{\mathcal{U}}_s \subset \overline{W_s}$. Значит, $\overline{\mathcal{U}}_s = \overline{W_s}$. В силу регулярности X для любой окрестности G точки x существует $s^* \in S_x$, такой, что $x \in \mathcal{U}_{s^*} \subset \overline{\mathcal{U}}_{s^*} \subset G$. Следовательно, $x \in W_{s^*} \subset \overline{W}_{s^*} = \overline{\mathcal{U}}_{s^*} \subset G$, и семейство $\bigcup_{x \in X} \{W_s : s \in S_x\}$ является базой пространства X. Значит, $a(X) \leq n-1$.

Регулярность пространства X, требуемая условием теоремы 2.6, существенна:

2.7. Пример. Пусть X - множество вещественных чисел, топология $\mathcal{T}$ порождена предбазой $\bigcup_{i=1}^{3}\mathcal{T}_i$, где $\mathcal{T}_1=\{(-\infty,a):a\in X\}\cup\{\phi,X\}$, $\mathcal{T}_2=\{(a,\infty):a\in X\}\cup\{\phi,X\}$ и $\mathcal{T}_3=\{\phi,Q,X\}$ (Q - множество рациональных чисел). X - связное хаусдорфово пространство со счетной базой, не являющееся регулярным и локально связным. Ниже (см. следствие 3.2) будет доказано, что каждое T_1-пространство нейта ≤ 2 вполне регулярно. Следовательно, $a(X)=3$. Осталось заметить, что $\bar{Q}=X$.

2.8. Теорема. $a(\mathbb{R}^n)\leq n+1$.

Доказательство. Пусть $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}^n$. Положим $\mathcal{U}^i_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^n:x_i>\alpha\}$, если $i\leq n$, и $\mathcal{U}^{n+1}_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^n:x_1+x_2+\ldots+x_n<\alpha\}$. $\mathcal{T}_i=\{\mathcal{U}^i_\alpha:\alpha\in\mathbb{R}\}\cup\{\phi,\mathbb{R}^n\}$ для каждого $i\leq n+1$. Если $\alpha<\alpha'$, то $\mathcal{U}^{n+1}_\alpha\subset\mathcal{U}^{n+1}_{\alpha'}$, и $\mathcal{U}^i_\alpha\supset\mathcal{U}^i_{\alpha'}$ для каждого $i\leq n$.

Легко видеть, что $\bigcup_{i=1}^{n}\mathcal{T}_i$ - предбаза топологии n-мерного евклидова пространства. База $BC_{n+1}(\mathbb{R}^n)$ состоит из множеств, гомеоморфных $\operatorname{Int}T$, где T - n-мерный симплекс в $\mathbb{R}^n$, натянутый на точки $(0,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$.

2.9. Следствие. $a(S^1)=a(\mathbb{R}^2)=3$ (S^1 - окружность).

Доказательство. Из 1.1 следует $a(S^1)>2$. Предположим, что $a(S^1)=2$ и фиксируем $x\in S^1$. По теореме 2.4 $\Psi^1_x\cap\Psi^2_x=\phi$ и $\Psi^1_x\cup\Psi^2_x=S^1\setminus\{x\}$, что невозможно, так как $S^1\setminus\{x\}$ связно. По теореме 2.8 $a(\mathbb{R}^2)\leq 3$, следовательно, $a(S^1)=a(\mathbb{R}^2)=3$.

3. Пространства нейта ≤ 2.

3.1. Теорема. Если X - T_1-пространство, $a(X)\leq 2$, $i\in\{1,2\}$ и $\mathcal{U}^i,V^i\in\mathcal{T}_i$, то

(I) $|\operatorname{Fr}\mathcal{U}^i|\leq 1$.

(II) Если $\mathcal{U}^i\subset V^i$ и $\mathcal{U}^i\neq V^i$, то $\bar{\mathcal{U}}^i\subset V^i$.

Доказательство. Пусть $i=1$.

(1) Предположим, что существуют две различные точки $x, y \in \operatorname{Fr} \mathcal{U}^1$. Без ограничения общности $\Psi_x^1 \subset \Psi_y^1$. Так как $y \notin \Psi_y^1$, и по теореме 2.4 $\Psi_x^1 \cup \Psi_x^2 = X \setminus \{x\}$, то $y \in \Psi_x^2$. Значит, $\Psi_y^2 \subset \Psi_x^2$ и $x \in \Psi_y^1$. Так как $y \in \operatorname{Fr} \mathcal{U}^1$, то $\mathcal{U}^1 \cap \Psi_x^2 \neq \phi$, и по теореме 2.1 $\mathcal{U}^1 \cup \Psi_x^2 = X$, что невозможно в-виду $x \notin \mathcal{U}^1 \cup \Psi_x^2$. Следовательно, $|\operatorname{Fr} \mathcal{U}^1| \leq 1$.

(11) Согласно (1) либо $\operatorname{Fr} \mathcal{U}^1 = \phi$, и тогда $\bar{\mathcal{U}}^1 \subset V^1$, либо $\operatorname{Fr} \mathcal{U}^1 = \{x\}$ для некоторого $x \in X$. Если $x \in V^1$, то $\bar{\mathcal{U}}^1 = \mathcal{U}^1 \cup \{x\} \subset V^1$. Предположим, что $x \notin V^1$. Так как $\mathcal{U}^1 \neq V^1$, то фиксируем $y \in V^1 \setminus \mathcal{U}^1$. $\Psi_y^1 \subset V^1 \subset \Psi_x^1$, следовательно, по теореме 2.4 $\Psi_x^2 \subset \Psi_y^2$ и $x \in \Psi_y^2$. Но $x \in \operatorname{Fr} \mathcal{U}^1$, значит, $\mathcal{U}^1 \cap \Psi_y^2 \neq \phi$, и по теореме 2.1 $\mathcal{U}^1 \cup \Psi_y^2 = X$, что невозможно в-виду $y \notin \mathcal{U}^1 \cup \Psi_y^2$.

Для случая $i = 2$ доказательство аналогично.

3.2. <u>Следствие</u>. Каждое T_1-пространство X нейта ≤ 2 вполне регулярно, и $\operatorname{ind} X \leq 1$.

<u>Доказательство</u>. Фиксируем две различные точки $x, y \in X$. Без ограничения общности можем считать, что найдется $\mathcal{U}^1 \in \mathcal{T}_1$, такое, что $x \in \mathcal{U}^1$ и $y \notin \mathcal{U}^1$ (иначе переобозначим точки). Если $\Psi_z^1 \subset \Psi_x^1$ для каждого $z \in \mathcal{U}^1 \setminus \{x\}$, то $\mathcal{U}^1 \in \Psi_x^1 \cup \{x\}$, следовательно, $\mathcal{U}^1$ и Ψ_x^2 - непересекающиеся окрестности точек x и y. Если же найдется $z' \in \mathcal{U}^1 \setminus \{x\}$, такая что $\Psi_x^1 \subset \Psi_{z'}^1$ и $\Psi_x^1 \neq \Psi_{z'}^1$, то $x \in \Psi_{z'}^1$. Так как $z' \in \mathcal{U}^1 \setminus \Psi_{z'}^1$, то по теореме 3.1 $\bar{\Psi}_{z'}^1 \subset \mathcal{U}^1$, и значит, $\Psi_{z'}^1$ и $X \setminus \bar{\Psi}_{z'}^1$ - непересекающиеся окрестности точек x и y. В силу произвольности выбора $x, y \in X$ заключаем, что X хаусдорфово.

Согласно пункту (1) теоремы 3.1 $BC_2(X)$ - база пространства X, такая, что $|\operatorname{Fr} \mathcal{U}| \leq |\operatorname{Fr} \mathcal{U}^1| + |\operatorname{Fr} \mathcal{U}^2| \leq 2$ для всякого $\mathcal{U} \in BC_2(X)$. Таким образом, X периферически компактно (пространство называется периферически компактным, если оно обладает базой, каждый элемент которой имеет компактную границу), а всякое хаусдорфово периферически компактное пространство вполне регулярно [2].

Так как X регулярно, то определена размерность $\operatorname{ind} X$. Из рассуждений, приведенных выше следует, что $\operatorname{ind} X \leq 1$.

Пусть X - множество, линейно упорядоченное отношением $<$. Интервалами в X называют множества вида

$(x,y)=\{z\in X: x<z<y\}$, $(\leftarrow,x)=\{z\in X: z<x\}$, $(x,\rightarrow)=\{z\in X: x<z\}$,
где $x,y\in X$. Топология, индуцированная линейным упорядочением $<$, есть топология, порожденная семейством всех интервалов в X [3].

Пространство называют линейно упорядоченным (LOTS), если существует линейное упорядочение, индуцирующее топологию пространства [3].

Пространство называют обобщенно упорядоченным (GO-пространством), если оно является подпространством некоторого LOTS [3].

Ю.Х.Брегман задал вопрос: верно ли, что X - GO-пространство, если и только если X - T_1-пространство нейта ≤ 2? Автору удалось дать положительный ответ на этот вопрос, однако, как ему впоследствии стало известно, аналогичный результат был получен в [4] (см. также [6]). Тем не менее автор считает целесообразным привести свое решение вышеуказанной проблемы, так как ему удалось каждому T_1-пространству X нейта ≤ 2 сопоставить линейно упорядоченное пространство $\hat{X}$, содержащее X и обладающее рядом интересных свойств.

Пусть X - T_1-пространство нейта ≤ 2, и $x,y\in X$. Положим (LO) $x<y$, если и только если $\Psi^1_x\subset\Psi^1_y$ и $\Psi^1_x\neq\Psi^1_y$.

Легко видеть, что отношение $<$ линейно упорядочивает X, и что $x<y$, если и только если $\Psi^2_x\supset\Psi^2_y$ и $\Psi^2_x\neq\Psi^2_x$.

3.3. <u>Предложение</u>. Если X - T_1-пространство, $a(X)\leq 2$, и $x\in X$, то

(i) $\Psi^1_x=(\leftarrow,x)$, $\Psi^2_x=(x,\rightarrow)$.

(ii) Либо $\mathrm{Fr}\,\Psi^i_x=\phi$, либо $\mathrm{Fr}\,\Psi^i_x=\{x\}$, $i=\overline{1,2}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $i=1$.

(i) Так как $z\notin\Psi^1_z$ для каждого $z\in X$, то из $z\in\Psi^1_x$ следует $z<x$ и наоборот.

(ii) Фиксируем $y\in X$, такой, что $x<y$. По теореме 2.4 $\Psi^1_x\cap\Psi^2_x=\phi$ и $\Psi^1_x\cup\Psi^2_x=X\setminus\{x\}$. Следовательно, $y\in\Psi^2_x$ и $y\notin\mathrm{Fr}\,\Psi^1_x$.

По теореме 3.1 $|\mathrm{Fr}\,\Psi^1_x|\leq 1$, следовательно, либо $\mathrm{Fr}\,\Psi^1_x=\phi$, либо $\mathrm{Fr}\,\Psi^1_x=\{x\}$.

Аналогично рассматривается случай $i=2$.

3.4. Теорема. Если X - T_1-пространство, $a(X)<2$, и A, B открыты в X, то

(i) $((\forall x\in A)(\Psi^1_x\subset A))\leftrightarrow(A\in\mathcal{T}_1)$.

(ii) $((\forall y\in B)(\Psi^2_y\subset B))\leftrightarrow(B\in\mathcal{T}_2)$.

(iii) $X\setminus\overline{\mathcal{U}}^1\in\mathcal{T}_2$, $X\setminus\overline{\mathcal{U}}^2\in\mathcal{T}_1$.

Доказательство. (i) Достаточность. Если $z\in X\setminus A$, то $x<z$ для каждого $x\in A$, следовательно, $\Psi^1_x\subset A$. Необходимость. Обозначим $V^1=\bigcup_{x\in A}\Psi^1_x$. Если $x_1,x_2\in A\setminus V^1$ и $x_1<x_2$, то $x_1\in\Psi^1_{x_2}\subset V^1$, что невозможно. Значит, $|A\setminus V^1|\le 1$. Если $|A\setminus V^1|=0$, то $A=V^1\in\mathcal{T}_1$. В противном случае $A\setminus V^1=\{z\}$ для некоторого $z\in X$. Так как A открыто в X, то найдется $W\in\mathcal{BC}_2(X)$, такое, что $z\in W=W^1\cap W^2\subset A$. Так как $z<y$ для любого $y\in X\setminus A$, то из $W^1\setminus A\neq\emptyset$ следует $W^1\setminus A\subset\Psi^2_z\subset W^2$, и $W\not\subset A$. Значит, $A=W^1\in\mathcal{T}_1$.

(ii) Доказательство аналогично.

(iii) Фиксируем $y\in X\setminus\overline{\mathcal{U}}^1$, $x\in\mathcal{U}^1$. Так как $\Psi^1_x\subset\mathcal{U}^1$ и $y\notin\Psi^1_x\cup\{x\}$, то $x<y$ и $\Psi^2_y\subset X\setminus\mathcal{U}^1$. Значит, $\Psi^2_y\subset X\setminus\overline{\mathcal{U}}^1$ для каждого $y\in X\setminus\overline{\mathcal{U}}^1$, и согласно (ii) $X\setminus\overline{\mathcal{U}}^1\in\mathcal{T}_2$. Аналогично проверяется, что $X\setminus\overline{\mathcal{U}}^2\in\mathcal{T}_1$.

3.5. Теорема. Для любого топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

(i) X - GO-пространство.

(ii) X - T_1-пространство нейта ≤ 2.

Доказательство. Импликация (i) $\longrightarrow$ (ii) очевидна. Пусть $\mathcal{T}_1=\{\mathcal{U}^1_\alpha:\alpha\in A\}$, $\mathcal{T}_2=\{\mathcal{U}^2_\beta:\beta\in B\}$. Без ограничения общности $(A\cup B)\cap X=\emptyset$. Положим $A^*=\{\alpha\in A:\operatorname{Fr}\mathcal{U}^1_\alpha=\emptyset\}$, $B^*=\{\beta\in B:\operatorname{Fr}\mathcal{U}^2_\beta=\emptyset\}$, $\hat{X}=X\cup A^*$. Пусть $x,y\in X$ и $\alpha,\alpha'\in A^*$. Положим

(a) $x\prec y$, если и только если $x<y$;

(в) $x\prec\alpha$, если и только если $x\in\mathcal{U}^1_\alpha$;

(c) $\alpha\prec\alpha'$, если и только если $\mathcal{U}^1_\alpha\subsetneqq\mathcal{U}^1_{\alpha'}$. Легко проверить, что отношение $\prec$ линейно упорядочивает $\hat{X}$. Через $\mathcal{S}$ обозначим топологию на $\hat{X}$, индуцированную линейным упорядочением $\prec$. Интервалы в $\hat{X}$ будем обозначать через $]z,v[$, $\hat{\Psi}^1_z$ и $\hat{\Psi}^2_z$ (см. предложение 3.3), где $z,v\in\hat{X}$

и $z \prec \sigma$; $\mathcal{S}_i = \{\hat{\Psi}^i_z : z \in \hat{X}\} \cup \{\hat{X}\}$, $i = \overline{1,2}$.

Пусть $\alpha \in A$. Если $\alpha \in A^*$, то $\mathcal{U}^1_\alpha = \hat{\Psi}^1_\alpha \cap X$. Если $\alpha \notin A^*$, то по теореме 3.1 $\mathrm{Fr}\,\mathcal{U}^1_\alpha = \{x\}$ для некоторого $x \in X$, и по теореме 3.4 $\mathcal{U}^1_\alpha = \Psi^1_x = \hat{\Psi}^1_x \cap X$.

Пусть $\beta \in B$. Если $\beta \in B^*$, то по теореме 3.4 найдется $\alpha \in A^*$, такое, что $\mathcal{U}^2_\beta = X \setminus \mathcal{U}^1_\alpha$, следовательно,
$\mathcal{U}^2_\beta = (\hat{X} \setminus \hat{\Psi}^1_\alpha) \cap X = (\hat{X} \setminus (\hat{\Psi}^1_\alpha \cup \{\alpha\})) \cap X = \hat{\Psi}^2_\alpha \cap X$.
Если $\beta \notin B^*$, то по теореме 3.1 $\mathrm{Fr}\,\mathcal{U}^2_\beta = \{y\}$, и по теореме 3.4 $\mathcal{U}^2_\beta = \Psi^2_y = \hat{\Psi}^2_y \cap X$.

Так как семейство $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ – предбаза пространства X, то X – подпространство пространства $\hat{X}$, что доказывает импликацию (11) $\longrightarrow$ (1).

3.6. Теорема. Если X – SO-пространство, то $\hat{X}$ компактно.

Доказательство. Пусть ϑ – открытое покрытие пространства $\hat{X}$ элементами предбазы $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. ϑ представимо в виде $\vartheta = \{V^1_s : s \in S\} \cup \{V^2_t : t \in T\}$. Положим $W^1 = \bigcup_{s \in S} V^1_s$,

$W^2 = \bigcup_{t \in T} V^2_t$. Очевидно, $W^1 \cup W^2 = \hat{X}$.

Фиксируем $\alpha^-, \alpha^+ \in A^*$, такие, что $\mathcal{U}^1_{\alpha^-} = \phi$, $\mathcal{U}^1_{\alpha^+} = X$. Если $W^2 = \phi$, то $\alpha^+ \in W^1$, следовательно, $\alpha^+ \in V^1_{s'}$ для некоторого $s' \in S$. По теореме 3.4 $V^1_{s'} \supset \Psi^1_{\alpha^+} \cup \{\alpha^+\} = \hat{X}$. Аналогично рассматривается случай $W^1 = \phi$.

Далее будем предполагать, что $W^1, W^2 \notin \{\phi, X\}$. Тогда $W^1 = \Psi^1_z$ и $W^2 = \Psi^2_\sigma$ для некоторых $z, \sigma \in \hat{X}$. Значит, $z \in W^2$ и $\sigma \in W^1$, следовательно, $\sigma \in V^1_{s''}$ и $z \in V^2_{t'}$ для некоторых $s'' \in S$, $t' \in T$.

Если $W^1 \cap W^2 = \phi$, то по теореме 3.4 $V^1_{s''} \cup V^2_{t'} = \Psi^1_\sigma \cup \{\sigma\} \cup \Psi^2_z \cup \{z\} = (\hat{X} \setminus \Psi^2_\sigma) \cup (\hat{X} \setminus \Psi^1_z) = \hat{X} \setminus (\Psi^1_z \cap \Psi^2_\sigma) = \hat{X} \setminus (W^1 \cap W^2) = \hat{X}$.

Если $W^1 \cap W^2 \neq \phi$, то $V^1_{s^*} \cap V^2_{t^*} \neq \phi$ для некоторых $s^* \in S$, $t^* \in T$, и по теореме 2.1 $V^1_{s^*} \cup V^2_{t^*} = \hat{X}$.

Таким образом, из любого открытого покрытия пространства $\hat{X}$ элементами предбазы $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ можно выбрать подпокрытие, состоящее не более, чем из двух элементов. По теореме Александера о предбазе [1] $\hat{X}$ компактно.

Пусть X - GO-пространство, $E \subset X$. Будем говорить, что E н а с ы щ а е т X, если для любых двух точек $x, y \in X \setminus E$, таких, что $x < y$, множество $(x, y) \cap E$ непусто.

3.7. Лемма. Если X - GO-пространство, то X насыщает $\hat{X}$.

Доказательство. $\hat{X} \setminus X = A^*$. Если $\alpha, \alpha' \in A^*$ и $\alpha \prec \alpha'$, то $\mathcal{U}^1_{\alpha} \subset \mathcal{U}^1_{\alpha'} \subset X$ и $\mathcal{U}^1_{\alpha} \neq \mathcal{U}^1_{\alpha'}$. Значит, $]\alpha, \alpha'[\cap X \neq \phi$.

3.8. Лемма. Если $\mathcal{B} = \{V_s : s \in S\} \subset BC_2(X)$ - база GO-пространства X, $i = \{1, 2\}$ и $\mathcal{B}_i = \{V^i_s : s \in S\}$, то

(1) $\mathcal{B}_i$ - база топологии $\mathcal{T}_i$.

(11) Если $x \in X$ и $\Psi^i_x \cup \{x\}$ открыто в X, то $\Psi^i_x \cup \{x\} \in \mathcal{B}_i$.

Доказательство. (1) Фиксируем $\mathcal{U}^i \in \mathcal{T}_i$. Найдется $S' \subset S$, такое, что $\mathcal{U}^i = \bigcup_{s \in S'} V_s \subset \bigcup_{s \in S'} V^i_s$. Если $V^i_{s_0} \setminus \mathcal{U}^i \neq \phi$ для некоторого $s_0 \in S'$, то по теореме 2.1 $\mathcal{U}^i \cup V^j_{s_0} = X$, и $V^i_{s_0} \setminus \mathcal{U}^i \subset V^j_{s_0}$, где $i \neq j$. Следовательно, $V_{s_0} = V^1_{s_0} \cap V^2_{s_0} \not\subset \mathcal{U}^i$, что невозможно. Значит, $\mathcal{U}^i = \bigcup_{s \in S'} V^i_s$.

(11) Если $\Psi^i_x \cup \{x\}$ открыто в X, то по теореме 3.4 $\Psi^i_x \cup \{x\} \in \mathcal{T}_i$, а согласно (1) $\Psi^i_x \cup \{x\} = \bigcup_{s \in S'} V^i_s$ для некоторого $S' \subset S$. Значит, найдется $s^* \in S'$, такой, что $x \in V^i_{s^*}$, а по теореме 3.4 $\Psi^i_x \cup \{x\} = V^i_{s^*}$.

3.9. Теорема. Для каждого бесконечного GO-пространства X $w(X) = w(\hat{X})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}_s : s \in S\} \subset BC_2(X)$ - база пространства X и $|\mathcal{B}| = w(X)$; $\mathcal{B}_i = \{\mathcal{U}^i_s : s \in S\}$, $i = \overline{1,2}$; $D \subset X$, $\bar{D} = X$ $|D| \leqslant w(X)$.

Фиксируем $V^1 \in \mathcal{S}_1 \setminus \{\phi, \hat{X}\}$. По теореме 3.6 $\hat{X}$ компактно, следовательно, в $\hat{X} \setminus V^1$ существует минимальный элемент z, и $V^1 = \Psi^1_z$.

Если $Fr_{\hat{X}} V^1 \neq \phi$, то $Fr_{\hat{X}} V^1 = \{z\}$, и для всякого $v \in V^1$ найдется $v' \in V^1$, такой, что $v \prec v' \prec z$. Так как $\bar{D} = X$, и по лемме 3.7 X насыщает $\hat{X}$, то для всякого $v \in V^1$ найдется $x \in D$, такой, что $v \prec x \prec z$. Значит,

$V^1 = \cup\{\hat{\Psi}^1_x : x \in D \cap V^1\}$.

Если $Fr_{\hat{X}} V^1 = \emptyset$, то V^1 замкнуто, и по теореме 3.6 в V^1 существует максимальный элемент σ. Так как $]\sigma, \varepsilon[= \emptyset$, и по лемме 3.7 X насыщает $\hat{X}$, то либо $\sigma \in X$, либо $\varepsilon \in X$, а по лемме 3.8 либо $V^1 \cap X = \Psi^1_\sigma \cup \{\sigma\} \in \mathfrak{B}_1$, либо $(\hat{X} \setminus V^1) \cap X = \Psi^1_\varepsilon \cup \{\varepsilon\} \in \mathfrak{B}_2$.

Аналогичные результаты справедливы и для каждого $V^2 \in \mathcal{S}_2 \setminus \{\emptyset, \hat{X}\}$. Значит, семейство $\mathcal{E}_i = \{\hat{\Psi}^i_x : x \in D\} \cup \{V^i : Fr_{\hat{X}} V^i = \emptyset\}$ – база топологии $\mathcal{S}_i$, и $|\mathcal{E}_i| \leq |D| + |\mathfrak{B}_1| + |\mathfrak{B}_2| + 2 = w(X)$, $i = \overline{1,2}$. Следовательно, $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ – предбаза топологии $\mathcal{S}$, и $w(X) = w(\hat{X})$.

3.10. Следствие. Для любого топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

(i) X гомеоморфно вкладывается в $\mathbb{R}$.

(ii) X сепарабельно, метризуемо, $a(X) \leq 2$.

(iii) X – GO-пространство и $\hat{X}$ метризуемо.

Доказательство. Импликация (i) $\Longrightarrow$ (ii) очевидна. Пусть X сепарабельно, метризуемо, $a(X) \leq 2$. По следствию 3.2 $\hat{X}$ регулярно, а по теореме 3.9 $w(\hat{X}) \leq \aleph_0$, следовательно, $\hat{X}$ – сепарабельное метризуемое LOTS, и потому [1] $\hat{X}$ гомеоморфно вкладывается в $\mathbb{R}$, что доказывает импликации (ii) $\Longrightarrow$ (i) и (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Осталось заметить, что всякое компактное метризуемое пространство сепарабельно [1].

4. Нерешенные проблемы.

4.1. Пусть X – сепарабельное метризуемое пространство и $a(X) \leq n$ ($n \geq 3$). Верно ли, что X гомеоморфно вкладывается в $\mathbb{R}^{n-1}$? (Возможно, это удастся доказать при дополнительном предположении $\bar{\mathcal{U}}^i \subset V^i$ или $\bar{V}^i \subset \mathcal{U}^i$ для любых различных $\mathcal{U}^i, V^i \in \mathcal{S}_i$, $i = \overline{1,n}$).

4.2. Для каких классов пространств справедливы неравенства $\operatorname{ind} X < a(X)$, $\operatorname{Ind} X < a(X)$, $\dim X < a(X)$?

4.3. Существует ли компактификация cX T_1-пространства X, такая, что $w(cX)=w(X)$ и $a(cX)=a(X)$ ($a(X)\geq 3$)? Существует ли хаусдорфова компактификация cX вполне регулярного пространства X, обладающая вышеуказанным свойством?

Библиографический список

1. Энгелькинг Р. Общая топология. М.,1986.
2. Brouwer A.E. On the topological characterization of the real line // Math. Centrum, Dep. of Pure Math., 1971. Vol.8.
3. Čech E. Topological spaces. New York, 1966.
4. van Dalen J., Wattel E. A topological characterization of ordered spaces // Gen. Top. and Appl., 1973. V. 3. N 4. P. 347-354.
5. Lutzer D.J. On generalised ordered spaces // Dissertationes Math., 1971. V. 89.
6. Lutzer D.J. Ordered Topological Spaces. // Surveys in General Topology. New York, 1980. P.247-295.

Поступила 25 мая 1988 года.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все результаты, изложенные в статьях сборника, имеют теоретический характер. Области их возможного применения - общая топология (прежде всего, исследование пространств непрерывных функций, теория G-пространств, теория компактификаций, теория нечетких топологических структур, эквивариантная топология), функциональный анализ (теория сплайнов, метод неподвижной точки), теория марковских процессов, алгебра (алгебры Ли, группы преобразований), а также другие разделы теоретико-множественной математики. За пределами теоретической математики результаты сборника могут представить определенный интерес для специалистов, работающих в области теоретической физики, биологии, психологии и в других областях современной науки, в которых используются топологические методы исследования объектов и применяются топологические модели изучаемых процессов.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сборник научных трудов

Рецензенты: Л.Кацнельсон, канд.физ.-мат.наук, ст.науч.сотр. ВЦ при ЛГУ им. П.Стучки;

Ю.Бергман, канд.физ.-мат.наук, ст.преп.РПИ.

Редакторы: Е.Энгельсон, Р.Павлова
Технический редактор С.Лининя
Корректор И.Балоде

Подписано к печати ЯТ 07204 Ф/б 60x84/16.
Бумага №1. 12,8 физ.печ.л. 11,9 усл.печ.л. 9,5 уч.-изд.л.
Тираж 400 экз. Зак. № 565 Цена 1 р. 95 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано на ротапринте, 226050 Рига, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 515.20

Метод двойственности при изучении некоторых классов топологических пространств

Апарина Л.В. - С. 5-12.

В работе с единой точки зрения описаны пространства счетного и точечно-счетного типа, линделефовы и вещественно-компактные. При этом получен ряд новых характеризаций этих классов пространств.

В рамках предложенной конструкции можно получить описания и других классов пространств, определение которых связано с выбором семейства бикомпактных подмножеств в самих пространствах или в их Стоун-Чеховских наростах. Библ. - 6 назв.

УДК 519.6

Об интерполяции и сглаживании интегральных средних параболическими сплайнами

Асмусс С.В. - С. 13-35.

Рассматриваются параболические сплайны для локальных средних. Приводится метод построения интерполяционного и сглаживающего сплайнов. Установлены нижняя и верхняя оценки погрешности интерполяции и сглаживания функций класса $H^1[a,b]$. При этом предложенная ранее техника оценки ошибки сплайн-интерполяции, основанная на исследовании поведения сплайнов канонического базиса, распространяется на случай сглаживания. Библ. - 4 назв.

УДК 519.21

Критерий феллеровости операторов марковского процесса

Беляков К.И. - С. 36-39.

Показано, что марковский процесс с дискретным временем, заданный на компакте и регуляризующий конечно аддитивные меры, не является феллеровским при некоторых дополнительных условиях. Библ.- 2 назв.

УДК 513.83

О некоторых свойствах идеалов колец непрерывных функций
Вечтомов Е.М. - С. 40-49.

Рассматриваются кольца $C(X,\varphi)$ всех непрерывных функций на топологическом пространстве X со значениями в топологическом пространстве φ. Исследуются такие свойства идеалов колец $C(X,\varphi)$, как разложимость, универсальная разложимость, другие свойства и связи между ними; в этих терминах характеризуются соответствующие свойства X. Библ. - 6 назв.

УДК 515.1

Задача о трех ортогональных проекциях угла
Гольдман М.А. - С. 50-61.

В статье исследуется вопрос о существовании в пространстве $\mathbb{R}^3$ плоского угла, три ортогональные проекции которого на координатные плоскости имеют произвольно заданные значения. Доказано, что такой угол, и не один, всегда существует, за исключением того лишь случая, когда все три проекции - прямые углы. Даются формулы для вычисления координат направляющих векторов сторон искомого угла. Библ. - 1 назв.

УДК 515.12

Эквивариантные бикомпактные расширения и функциональные направленности
Евстигнеев В.Г. - С. 62-65.

Разработан метод построения эквивариантных бикомпактных расширений G-пространств с помощью направленностей. Отсюда, в частности, вытекает новое доказательство теоремы Ю.М.Смирнова, характеризующей эквивариантные бикомпактные расширения во множестве всех бикомпактных расширений данного G-пространства. Библ. - 3 назв.

УДК 513.88+519.21

Представление гельфандовской компактификации пространством ультрафильтров и инвариантные меры цепей Маркова
Жданок А.И., Самданчап Р.Т. - С. 66-80.

В работе предлагается описание гельфандовской компактификации измеримого пространства как пространства ультрафильтров с некоторой топологией. Показывается, что между замкнутыми множествами γX и фильтрами в X существует естественное взаимно-однозначное соответствие.

Гельфандовская компактификация использовалась ранее одним из авторов для продолжения произвольной цепи Маркова до изоморфной ему феллеровской цепи. В настоящей работе предлагается явная формула для вычисления переходной функции марковского оператора на компактификации. На основе этой формулы выводится критерий существования инвариантной чисто конечно-аддитивной меры. Библ. - 6 назв.

УДК 514.7,514.82

Причинная структура левоинвариантных лоренцевых метрик на одной четырехмерной группе Ли
Красильников М.П. - С. 81-85.

В работе изучается причинная структура геодезически неполных левоинвариантных лоренцевых метрик на четырехмерной группе Ли, алгебра Ли которой задается следующими коммутационными соотношениями:

$$[e_4,e_1]=e_1;\quad [e_4,e_2]=e_1+e_2;\quad [e_4,e_3]=e_3$$

в терминах четырех условий со следующей иерархией: однородная глобальная гиперболичность $\Longrightarrow$ равномерная устойчивая причинность $\Longrightarrow$ причинность $\Longrightarrow$ хронологичность. Библ. - 3 назв.

УДК 517.98

Неподвижные точки в отблесках пространств и отображений
Лиепиньш А.Х. - С. 86-87.

Доказывается общий принцип неподвижной точки в пространствах нечеткого характера. Библ. - 3 назв.

УДК 517.98

Зеркала для ловли неподвижных точек
Забаровска Д.Я., Лиепиньш А.Х. - С. 88-91.

Изучается существование неподвижных точек для отображений, множество определения которых не является инвариантным. Библ. - 3 назв.

УДК 519.4

Многообразие представлений алгебраических алгебр Ли
Липянский Р.С. - С. 92-97.

В статье доказывается теорема: многообразие лиевских пар $\mathfrak{X}$ т. и т.т. является многообразием алгебраических представлений алгебр Ли над K $(\mathrm{char}\, K=0)$, если оно принадлежит многообразию $\mathfrak{X}_0 \overset{\varphi}{\times} \theta$, где $\mathfrak{X}_0$ - локально стабильное многообразие пар, θ - локально-конечное многообразие алгебр Ли, $\varphi(x)$ - некоторый многочлен из $K[x]$. Библ. - 4 назв.

УДК 519.21

Экспоненциальное убывание марковских эволюционных семейств на полукомпакте
Рогаль С.Л., Царьков Е.Ф. - С. 98-105.

В работе получены необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения дифференциального уравнения в $\mathbb{R}^n$ $dx(t)/dt = A(y(t))x(t)$, где $\{A(y), y\in \mathcal{Y}\}$ непрерывная матричная функция со значениями из $M_n(\mathbb{R})$, а $y(t)$ - однородный феллеровский стохастически непрерывный необрывающийся марковский процесс, принимающий значения из полукомпакта $\mathcal{Y}$, такой, что соответствующая ему сжимающая полугруппа линейных операторов в пространстве бэровских функций оставляет инвариантным множество функций с компактным носителем. Библ. - 3 назв.

УДК 517.934

Метод Важевского и двухточечная краевая задача для дифференциальной системы четвертого порядка
Садырбаев Ф.Ж. С. 106-111 .

Исследуется двухточечная краевая задача для дифференциальной системы четвертого порядка. Метод Важевского используется для доказательства теорем существования решения. Библ. - 4 назв.

УДК 515.12

Топологическая характеристика дифференцируемых отображений нормированных пространств
Ульянов В.М. - С. 112-120.

Получены топологические характеристики свойств дифференцируемости, n-кратной дифференцируемости и бесконечной дифференцируемости для отображений вида $f:X\to E_2$ где $X\subset E_1$ и E_1, E_2 - нормированные линейные пространства над недискретным нормированным полем K.
Библ. - 3 назв.

УДК 519.21

Моменты первого достижения некоторого уровня суммой случайных величин
Хурума А.К. - С. 121-124.

Получена формула для вычисления моментов первого достижения любого порядка для суммы равномерно распределенных на $[0,1]$ случайных величин, найдено совместное распределение момента первого достижения и величины перескока суммы за данный уровень. Библ. - 2 назв.

УДК 515.12

Нечеткие топологии на пространствах вероятностных мер
Шостак А.П. - С. 125-172.

В работе изучается одна функциональная конструкция μ, позволяющая, в частности, каждому топологическому пространству X и каждому семейству ξ полунепрерывных снизу отображений из X в отрезок I сопоставить нечеткое топологическое пространство $M_\xi(X)$ на основе множества $M(X)$ всех вероятностных борелевских мер, заданных на исходном пространстве X . В случае, когда X - -сепарабельное метрическое пространство, конструкция $M_\xi(X)$ при подходящем выборе ξ оказывается эквивалентной конструкции, рассматриваемой ранее Ловеном; если же X - линейно упорядоченное пространство, то конструкция $M_\xi(X)$ при соответствующем выборе ξ эквивалентна т.н. нечеткой модификации $\mathcal{G}(X)$ пространства X , описанной автором ранее.

В работе исследуется зависимость важнейших топологических свойств нечеткого пространства $M_\xi(X)$ и некоторых его подмножеств от свойств исходного пространства X . В частности, показано, что функтор μ_ξ не повышает плотности пространств. Счетная компактность исходного пространства X равносильна компактности (по Ловену) пространства $M_\Lambda(X)$, где Λ - семейство всех полунепрерывных снизу отображений X в I . Исследуются также свойства отделимости пространства $M_\xi(X)$. Показано, например, что для любого совершенно нормального пространства X пространство $M_\xi(X)$ (ρ,ρ) -хаусдорфово при любом $\rho \in [0,1]$, но заведомо не является даже (ρ,γ) - T_0-пространством как при $\gamma < \rho$ и при $\rho = \gamma = 0$.
Библ. - 35 назв.

УДК 512.534

О полугруппах непрерывных преобразований пар топологических пространств
Штейнбук В.Б. - С. 173-178.

Каждой паре объектов A , B категории топологических пространств с непрерывными отображениями сопоставляется полугруппа $C(A,B)$ на декартовом произведении $\mathrm{End}\,A \times \mathrm{Hom}(A,B)$ с операцией $(\sigma_1,\varphi_1)(\sigma_2,\varphi_2)=(\sigma_1\sigma_2,\sigma_1\varphi_2)$. Приводятся некоторые характеризации пар топологических пространств полугруппами $C(A,B)$. Библ. - 6 назв.

УДК 515.12

Нейт топологического пространства
Юровецкий А.М. - С. 179-192.

Введен топологический инвариант - нейт пространства. Установлена некоторая зависимость нейта от топологических свойств (метризуемость, упорядочиваемость). Исследовано поведение нейта при операциях произведения и суммы. Библ. - 6 назв.

1 р. 95 к.