Топологические структуры и их отображения

Министерство высшего и среднего специального
образования Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. П.Стучки
Кафедра математического анализа

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ
И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1987

УДК 515.12 ;519.6

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Топологические структуры и их отображения: Сборник научных трудов (межвузовский)/ Отв.ред. Е.Энгельсон - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1987. - 193с.

Сборник посвящен проблемам топологии и функционального анализа.

Сборник предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, работающих в области топологии, функционального анализа, теории вероятности, а также в смежных областях.

Т $\frac{20202-082у}{М812(11)-87}$ 34.87.1702050000

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Сборник посвящен проблемам топологии и функционального анализа.

В сборник включены работы, посвященные исследованию структур топологического типа, в частности, исследование топологических структур на группах и топосах, экспоненты топологического пространства, топологической и линейной структуры на пространствах непрерывных функций, а также нечетких структур топологического типа.

Ряд работ посвящен вопросам аппроксимации отображений, в частности, разработке теории сплайн-интерполяции, а также исследованию устойчивости свойств линейных операторов при аппроксимациях, соответствующих различным топологиям.

Основной объем сборника составляют работы, выполненные сотрудниками математических кафедр ЛГУ и представляющие собой результаты плановой научной работы, проводимой на кафедре математического анализа ЛГУ. В сборник включен также ряд работ, выполненных специалистами других вузов по этой тематике и при тесном сотрудничестве с кафедрой математического анализа ЛГУ.

Большинство из результатов, включенных в сборник статей докладывалось на 45-й и 46-й научных конференциях ЛГУ, а также на семинарах при кафедре математического анализа ЛГУ.

Сборник предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов, работающих в области топологии и функционального анализа, а также в смежных областях.

УДК 513.83

ПРОЕКТИВНЫЕ ОБЪЕКТЫ И НАКРЫТИЯ КАТЕГОРИИ G-ПРОСТРАНСТВ

С.М.Агеев

Брестский государственный педагогический институт им. А.С.Пушкина

Задача построения проективных объектов и накрытий в различных категориях представляет определенный интерес. Ее значимость была выявлена при построении гомологической алгебры. Позже ее решение было получено в категории топологических пространств [1,2]. В работе [3] изучены многие аспекты этой задачи для категорий топологических групп.

В.И.Пономаревым и Ю.М.Смирновым давно ставился вопрос о построении и описании свойств проективных объектов и накрытий в категории топологических групп преобразований (или G-пространств). Частичный ответ на него был дан в [4]. Здесь отправной точкой явилось следование категорному определению основных понятий. При этом полученные результаты несколько упрощали ситуацию: оказалось, что пространства эквивариантно соабсолютны в том и только в том случае, если их пространства орбит соабсолютны.

В предлагаемой работе дается иной подход. Определение проективных объектов тесно связывается со строением стабилизаторов точек исходных пространств, а существенными морфизмами становятся эквивариантные и в обычном смысле неприводимые отображения. При этом построение требуемых объектов стало возможным с помощью теории θ-близости [5], а их свойства оказалось возможным сопрячь с действием группы.

Содержание

ранств

Основные определения теории G-пространств изложены в [6]. Нами приняты следующие обозначения $St(t)$ - стабилизатор точки; T/G - пространство орбит, а $\mathcal{I}: T \twoheadrightarrow T/G$ - каноническое отображение (знак "$\twoheadrightarrow$" указывает на сюрьективность отображения).

1. На регулярном G-пространстве T рассмотрим отношение α между множествами T, удовлетворяющее следующим семи аксиомам:

1. $A\alpha B \Leftrightarrow B\alpha A$;
2. $A\bar{\alpha}B_i$, $i=1,2$ $\Leftrightarrow A\bar{\alpha}(B_1 \cup B_2)$;
3. $\emptyset\bar{\alpha}T$;
4. $\{t\}\alpha\{t'\} \Leftrightarrow t=t'$;
5. $A\bar{\alpha}B \Rightarrow$ существует такое каноническое открытое множество C, что $C\bar{\alpha}B$ и $A\bar{\alpha}(T\setminus clC)$;
6. $\{t\}\alpha A \Rightarrow t\in clA$;
7. $A\alpha B \Rightarrow (g\cdot A)\alpha(g\cdot B)$ для всех $g\in G$.

Здесь аксиомы θ-близости [5] дополнены еще одной - седьмой. В связи с этим α называется θ-близостью, согласованной с действием группы или эквивариантной θ-близостью.

Примером сильнейшей эквивариантной θ-близости служит отношение α множество A α-далеко от B, если $O\cdot A\cap B=\emptyset$ для некоторой окрестности O единицы e группы G; $A\bar{\alpha}B \Leftrightarrow$ существуют α-далекие открытые окрестности $U(A)$ и $U(B)$ множеств A и B.

Напомним основные конструкции теории θ-близостей и выделим новые моменты, связанные с седьмой аксиомой.

Центрированная система $\eta=\{H\}$ открытых множеств H называется α-системой, если для любого $H\in\eta$ найдется такое $H'\in\eta$, что $H'\bar{\alpha}(T\setminus clH)$ Каждая α-система содержится в некоторой максимальной α-системе, которую называют α-концом.

Множество $E(T)$ всех α-концов наделяют топологией, базу которой образуют множества вида $O_H=\{\tau\in E(T): H\in\tau\}$, H - произвольное открытое множество. $E_\alpha(T)=\{\tau=\{H\}$: $\cap clH$ - одноточечное множество$\}\subset E(T)$; $E_\alpha: E_\alpha(T)\to T$ $E_\alpha(T)=\cap clH$. В [9] показано, что $E(T)$ есть бикомпакт, $E_\alpha(T)$ - его плотное подмножество, E_α - сюръективное неприводимое совершенное непрерывное отображение.

Из эквивариантности θ-близости α следует

<u>Предложение 1</u>. (а) Формулой

$$g\cdot\tau=\{g\cdot H\}, \text{ где } g\in G \quad , \tau=\{H\}\in E(T)$$

определяется непрерывное действие группы G на $E(T)$

(б) $E_\alpha(T)$ есть инвариантное плотное подмножество в $E(T)$, а E_α - эквивариантное отображение.

(в) Если α - сильнейшая эквивариантная θ-близость, то $cl\,U\cap cl\,V=\emptyset$ для любых α-далеких открытых множеств $U,V\subset E(T)$.

<u>Предложение 2</u>. Соответствие

$$\alpha \longrightarrow E(T) \supset E_\alpha(T) \longrightarrow T$$

устанавливает биекцию между всеми эквивариантными θ-близостями α и эквивариантными бикомпактными расширениями совершенных неприводимых эквивариантных прообразов T. При этом соответствии сохраняется отношение порядка.

2. <u>Определение</u>. Эквивариантным абсолютом G-пространства T называется такое эквивариантное совершенное неприводимое отображение $p_G:p_GT\longrightarrow T$, что для любого другого эквивариантного совершенного неприводимого отображения q $T'\longrightarrow T$ найдется эквивариантное совершенное отображение $r:p_GT\longrightarrow T'$, $q\circ r=p_G$.

Пространство p_GT также называют эквивариантным абсолютом.

<u>Теорема 1</u>. (а) Эквивариантный абсолют регулярного пространства T существует и единственен с точностью до естественной эквивалентности.

(б) $E_{\hat\alpha}:E_{\hat\alpha}(T)\longrightarrow T$ является эквивариантным абсолютом для сильнейшей эквивариантной θ-близости $\hat\alpha$

Например, эквивариантное отображение $r:E_{\hat\alpha}(T)\to T'$, замыкающее диаграмму $q\circ r=E_{\hat\alpha}$, строится по формуле $r(\tau)=\cap\{cl\,q^{-1}(H):H\in\tau\}$

В случае тривиальной группы $G=\{e\}$ эквивариантный абсолют переходит в классический абсолют Глиссона-Пономарева. Для усиления аналогии между этими абсолютами введем следующее

<u>Определение</u>. Пространство T назовем эквивариантно

экстремально несвязным (кратко, $eq.e.d.$-пространством), если замыкания любых двух α-далеких открытых множеств не пересекаются.

С помощью введенного понятия эквивариантный абсолют может быть охарактеризован так

Предложение 3. Эквивариантное совершенное неприводимое отображение $q:S \to T$ является эквивариантным абсолютом в том и только в том случае, когда S есть $eq.e.d.$-пространство.

При доказательстве этого предложения и теоремы 1 использовалась

Лемма 1. Эквивариантное совершенное неприводимое отображение $q:S \to T$ на $eq.e.d.$-пространство T является эквиморфизмом.

Между эквивариантным абсолютом и максимальным эквивариантным бикомпактным расширением [6] существует соотношение, аналогичное формуле Илиадиса.

Предложение 4. (а) $\beta_G(E_\chi(T)) = E(T)$ для любого регулярног G-пространства T.

(б) $\beta_G(p_G T) = p_G(\beta_G T)$ для G- пространств T, имеющих максимальное эквивариантное бикомпактное расширение.

3. Для тривиальной группы понятие эквивариантной экстремальной несвязности совпадает с экстремальной несвязностью и играет аналогичную ей роль в теории абсолюта. При переходе к инвариантным плотным подмножествам и к бикомпактному расширению $\beta_G T$ эквивариантная экстремальная несвязность сохраняется. Отметим, что регулярное $eq.e.d.$-пространство T имеет $\beta_G T$ и, следовательно, является тихоновским.

Более детальное изучение свойств таких пространств удается осуществить для бикомпактной группы.

Теорема 2. Следующие свойства регулярного G-пространства T с действующей бикомпактной группой G эквивалентны

1. T является $eq.e.d.$-пространством

2. T/G является экстремально несвязным пространством, а отображение $\Lambda : T \to exp(G)$, сопоставляющее t ее стабилизатор $St(t) \in exp(G)$, является непрерывным $(exp(G)$

рассматривается в топологии Виеториса)

3. T/G является экстремально несвязным пространством и $O\cdot A$ открыто в T для любого среза $A\subset T$ и открытого множества $O\subset G$. Напомним, что замкнутое множество $A\subset T$ называется срезом, если его пересечение с каждой орбитой одноточечно.

4. T/G является экстремально несвязным пространством, а $O\cdot A$ открыто в T для некоторого среза $A\subset T$ и открытого множества $O\subset G$

Схема доказательства: 1.$\Rightarrow$2.$\Rightarrow$3.$\Rightarrow$4.$\Rightarrow$3.$\Rightarrow$1.

Пространство, удовлетворяющее одному из условий теоремы, имеет экстремально несвязное пространство орбит. Это приводит к тому, что любой срез A гомеоморфен T/G, а ограничение $\pi|_A : A \longrightarrow T/G$ - гомеоморфизм. Более того, любые два среза A и B гомеоморфны, а гомеоморфизм $T \hookleftarrow A \xrightarrow{\rho} B \hookrightarrow T$, $\rho = \pi|_B^{-1}\circ\pi|_A$ продолжается до эквиморфизма $\hat{\rho}: T\to T$, $\hat{\rho}(g\cdot a) = (h\cdot g^b)\cdot a$, где $h\cdot a = b\in B$. Это обстоятельство доказывает эквивалентность 3.$\Leftrightarrow$ 4.

Предварим остальным доказательствам леммы, представляющие самостоятельный интерес.

<u>Лемма 2</u>. Если открытое множество O содержит подгруппу $St(t)$ то существует такая окрестность U точки t, что

(а) $t'\in U \Rightarrow St(t')\subset O$

(б) если $t', t''\in U$ лежат на одной орбите $\pi t' = \pi t''$, то они переводятся друг в друга элементом из O: $t'' = g\cdot t'$, $g\in O$.

<u>Лемма 3</u>. Пусть окрестность U точки t и открытые множества O, O', O'' таковы, что $St(t')\subset O$ для всех $t'\in U$, $O\cdot O \cap O''\cdot O' = \emptyset$. Тогда существует такая меньшая окрестность V точки t, что V α-далека от $V' = O'\cdot V$ и $V\cap O''\cdot V' = \emptyset$.

<u>Лемма 4</u>. (а) Отображение $\Lambda: T\to \exp G$ полунепрерывно сверху [7].

(б) К любой окрестности $O\ni e$ можно так подобрать окрестность $O'\ni e$, что каждая точка t некоторого плотного инвариантного открытого множества $W\subset T$ будет иметь окрестность U, удовлетворяющую условию $t'\in U \Rightarrow O'\cdot St(t)\subset O\cdot St(t')$.

Если Λ есть непрерывное отображение, то в качестве W можно выбрать все T

1.$\Rightarrow$2. Пусть Λ разрывно в t_o, т.е. не является полунепрерывным снизу. Это приводит к существованию направленности $t_o = \lim t_\lambda$ и таких открытых множеств O, $O', O'' \subset G$, что $O \cdot O \cap O'' \cdot O' = \emptyset$, $St(t_o) \cap O' \neq \emptyset$, $St(t_\lambda) \subset O$.

Применяя лемму 3, найдем у каждой точки t_λ окрестность U_λ которая α-далека от $U'_\lambda = O' \cdot U_\lambda$ и $U_\lambda \cap O'' \cdot U'_\lambda = \emptyset$. Можно считать, что система $\{\mathcal{T} U_\lambda\}$ дизъюнктна и $\mathcal{T} t_o \in cl(U \mathcal{T} U_\lambda)$ (если это не так, то следует часть из них отбросить, а остальные ужать). Тогда $U = \cup U_\lambda$ и $U' = \cup U'_\lambda$ α-далекие открытые множества, причем $U \cap O'' \cdot U' = \emptyset$. Поэтому по условию $cl U \cap cl U' = \emptyset$.

Т.к. $t_o = \lim t_\lambda$, то $t_o = cl U$. Пусть $g \in St(t_o) \cap O'$. Тогда $t_o = g \cdot t_o = \lim g \cdot t_\lambda$, т.е. $t_o \in cl(O' \cdot U) = cl U'$, а значит $t_o \in cl U \cap cl U'$ - противоречие.

2.$\Rightarrow$3. В силу леммы 4(б) существует такая окрестность $O' \ni e$, что каждая точка $a \in A$ имеет окрестность $U : t' \in U \Rightarrow O' \cdot St(a) \subset O \cdot St(t')$. Уменьшим U до такой окрестности $V(a)$, что $t', t'' \in V$ & $\mathcal{T} t' = \mathcal{T} t'' \Rightarrow t'' = g \cdot t'$, $g \in O' \cdot St(a)$ (лемма 2).

Достаточно показать, что $OA \supset \cup V(a)$ или $Int(O \cdot A) \supset A$. Если $t \in V(a)$, то $t = g \cdot a'$, где $g \in O' \cdot St(a)$ Но $g \in O \cdot St(a')$ и, следовательно, $t \in O \cdot a'$ и $t \in O \cdot A$.

3.$\Rightarrow$1. Пусть $U \cap O \cdot V = \emptyset$, $O = O_1 \cdot O_1^{-1}$, но $t_o \in cl U \cap cl V$. Легко указать срез A, проходящий через t_o По условию $W = O_1 \cdot A$ есть открытое множество, $t_o \in W$ Поэтому $U' = U \cap W$, $V' = V \cap W$ открытые непустые множества и $t_o \in cl U' \cap cl V'$ Более того, $\mathcal{T} U' \cap \mathcal{T} V' = \emptyset$ - непересекающиеся открытые множества, $\mathcal{T} t_o \in cl \mathcal{T} U' \cap cl V'$. Это противоречит экстремальной несвязности T/G

4. Известно, что тихоновское G-пространство T с действующей локально-бикомпактной группой G допускает расширение $\beta_G T$. Множество функций $f \in C(T)$, продолжающихся на $\beta_G T$, обозначим через $C_\alpha(T)$ и назовем α-равномерными. Они характеризуются условием: для каж-

дого $\varepsilon>0$ норма $\|f-g\cdot f\|<\varepsilon$ для всех элементов g из достаточно малой окрестности $O\ni e$

В дальнейшем группа G всегда предполагается бикомпактной.

Теорема 3. Следующие три условия эквивалентны:

1. T является $eqcl$-пространством.

2. Отображение ограничения $C_\alpha(T)\to C_\alpha(A)$ есть изоморфизм для всех плотных инвариантных множеств A

3. Отображение ограничения $C_\alpha(T)\to C_\alpha(U)$ есть изоморфизм для всех плотных инвариантных открытых множеств U

1.$\Rightarrow$2. Рассмотрим следующие коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & A \xleftarrow{i} T & \\ \beta_G\swarrow & & \searrow\beta_G \\ \beta_G A & \xrightarrow{\beta_G i} & \beta_G T\end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & C_\alpha(T) \xrightarrow{i^c} C_\alpha(A) & \\ \beta_G^c\swarrow & & \searrow\beta_G^c \\ C_\alpha(\beta_G T) & \xrightarrow{(\beta_G i)^c} & C_\alpha(\beta_G A)\end{array}.$$

Заметим, что $\beta_G i$ является эквиморфизмом. Т.к. $(\beta_G i)^c$ и β_G^c - изоморфизмы, то и i^c также изоморфизм, что и требовалось.

3.$\Rightarrow$1. Пусть $A\subset T$ - срез, а O - открытое множество. Уточняя рассуждения, использованные в импликации $2\Rightarrow3$ теоремы 2, получаем существование открытого множества $O_1\subset G$ и инвариантного плотного открытого множества W, для которых

$$(**)\qquad \mathrm{Int}_W(O\cdot A')\supset O_1\cdot A' \qquad, \text{ где } A'=A\cap W.$$

Т.к. α-равномерные функции разделяют точки от замкнутых множеств, то для каждой точки $a\in A'$ существует $f_a\in C_\alpha(W)$, $f_a(a)=1$, $f_a(W\setminus O\cdot A')=0$ ..При этом условие $(**)$ позволяет выбрать семейство $\{f_a\}$ равностепенно непрерывным относительно G, т.е. выбрать таким образом, чтобы для всех $\varepsilon>0$ и $a\in A'$ $\|f_a-g\cdot f_a\|<\varepsilon$ для элементов g из достаточно малой окрестности $O''\ni e$

Пусть $a_0\in A$ Аналогично [9, с. 69] построим такое инвариантное открытое множество $W_1\subset W$ и $f\in C_\alpha(W_1)$, что $a_0\in \bar{cl}\,W$, $f(W_1\setminus O\cdot A')=0$, $\|f|_{A\cap W_1}\|\geq 0.5$ Доопределим f на $T\setminus cl\,W_1=W_2$ нулем, получим α-равномерную функцию на $W_1\cup W_2$ Пусть $\hat{f}$ - ее продолжение на T (следует из условия 3). Тогда $\hat{f}(a_0)\geq 0.5$, $\hat{f}(T\setminus O\cdot A)=0$, т.е. $a_0\in \mathrm{Int}(O\cdot A)$ и $O\cdot A$ -

открытое множество. Из теоремы 2 получаем эквивариантную экстремальную несвязность T

Пространство T называется проективным объектом категории G-пространств, если любая диаграмма,

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow \nu \\ T & \xrightarrow{\rho} & X \end{array}$$

составленная из совершенных G-отображений ρ и ν удовлетворяющая условию

(*) $\nu^{-1}(\rho(t)) \subset Y$ каждой точки $\rho(t)$ существует такая точка y, что $St(t) \subset St(y)$

допускает поднятие $\hat{\rho}: T \to Y$, $\nu \circ \hat{\rho} = \rho$

Условие (*) необходимо для существования поднятия, поскольку стабилизатор прообраза всегда содержится в стабилизаторе образа.

Теорема 4. Эквивариантные экстремально несвязные пространства и только они являются проективными объектами категории G-пространств.

Доказательство необходимости основывается на следующем факте

Лемма 5. Если $\rho: S \to T$ является совершенным G-отображением на $eq.e.d.$-пространство T и для каждой точки $t \in T$ найдется точка $s \in \rho^{-1}(t)$, удовлетворяющая условию $St(s) = St(t)$, то

(1) $S_0 = \{ s \in S : St(t) = St(s) \}$ есть непустое замкнутое инвариантное множество.

(2) существует правое обратное G-отображение $\theta: T \to S_0 \subset S$, $\rho \circ \theta = id_T$.

Рассмотрим веерное произведение $V = T_\rho \times_\nu Y$ и соответствующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\rho_1} & Y \\ \downarrow \nu_1 & & \downarrow \nu \\ T & \xrightarrow{\rho} & X \end{array}.$$

Отображение ν_1, параллельное ν, удовлетворяет условию леммы 5, т.к. для ρ и ν выполнено условие (*). Поэтому существует правое обратное отображение $\theta: T \to V$, а $\rho_1 \cdot \theta = \hat{\rho}$ является поднятием ρ. Необходимость доказана.

Пусть $U \subset T$ – открытое инвариантное множество, $F = T \setminus U \xhookrightarrow{i} T$ Рассмотрим топологическое объединение $S = F \sqcup \beta_G U$ и объединение отображений $\nu = i \sqcup \beta_G : S \to T$ Т.к. ν и $id : T \to T$ удовлетворяют свойству (*), то существует поднятие $\hat{\rho}$ $T \to S$, $\nu \circ \hat{\rho} = id$ это обстоятельство приводит к тому, что $\beta_G U = cl\, U$ для всех $U \subset T$, что равносильно тому, что T $eq.e.d.$-пространство (теорема 3). В итоге полностью доказана теорема 4.

6. Банахово пространство Z, на котором группа G действует посредством линейных гомеоморфизмов, называется банаховым G-пространством. Z называется инъективным объектом категории банаховых G-пространств (кратко, $G-BAN$), если любой эквивариантный линейный ограниченный оператор $\varphi : X_0 \to Z$, заданный на замкнутом инвариантном подпространстве $X_0 \subset X$, продолжается до эквивариантного линейного ограниченного оператора $X \xrightarrow{\tilde{\varphi}} Z$, $\tilde{\varphi} \circ i = \varphi$.

Наиболее просто устроенные инъективные объекты описывает

Предложение 5. (Эквивариантный аналог теоремы Хана-Банаха). Банахово G-пространство $C(G)$ непрерывных функций на группе G является инъективным объектом категории $G-BAN$

Следствие из предложения 5. Пусть N_τ – дискретное множество мощности τ Тогда $C(\beta N_\tau \times G)$ является инъективным объектом категории $G-BAN$.

Теорема 5. Банахово G-пространство $Z = C(T)$, T – бикомпактное G-пространство, является инъективным объектом категории $G-BAN$ в том и только в том случае, если T является $eq.e.d.$-пространством.

При доказательстве используется техника эквивариантных линейных усреднений [9]. Связь между этими понятиями устанавливает следующее

Предложение 6. Бикомпактное G-пространство T является эквивариантно экстремально несвязным тогда и только тогда, когда существует эквивариантная сюръекция

$r:\beta N_\tau \cdot G \to T$, допускающая G-опус (т.е. такой эквивариантный линейный оператор $u: C(\beta N_\tau \cdot G) \to C(T)$, что $u \circ r^\circ = 1_{C(T)}$).

Доказательство необходимости. Пусть $U \overset{i}{\subset} T$ плотное инвариантное открытое множество. Т.к. $C(T)$ - инъективный объект, то отображение $1_{C(T)} : C(T) \to C(T)$ продолжается на $C_d(U)$: $v : C_d(U) \to C(T)$. Легко проверяется, что v - изоморфизм и $\beta_G U = T$

Доказательство достаточности. Пусть $r:\beta N_\tau \cdot G \to T$ допускает G-опус. Тогда $C(T)$ является ретрактом $C(\beta N_\tau \cdot G)$ - инъективного объекта $G-BAN$ Следовательно, $C(T)$ - инъективный объект.

Замечание. Доказательство предложения 6 было сообщено автору С.Антоняном.

Список литературы

1. Gleason A.M. Projective topological spaces // Illinois. Math.Jour.- 1958.- V.2.- № 4a. - P.482-489.
2. Пономарев В.И. Паракомпакты, их проекционные спектры и непрерывные отображения // Матем. сб. - 1963. - Т.60. - № 1. - С.89-119.
3. Либер С.А. Абсолюты компактных групп // УМН. - 1985. - Т.40. - № 2. - С.183-184.
4. Кадиров А. Абсолюты топологических групп преобразований.- М., 1982.
5. Федорчук В.В. Совершенные неприводимые отображения и обобщенные близости // Матем. сб.-1968.-Т.76.-№4.-С.513-536.
6. Антонян С.А., Смирнов Ю.М. Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований // ДАН СССР. - 1981. - Т.257. - № 3. - С.521-526.
7. Пасынков Б.А. О размерности пространств с бикомпактной группой преобразований // УМН.- 1976.-Т.36.-№5.-С.111-120.
8. Агеев С.М. Функциональные методы в теории абсолюта.- М., 1988.
9. Пелчинский А. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения.- М., 1971.

Поступила 17 мая 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 519.6

ОЦЕНКА ОШИБКИ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИИ

С.В.Асмусс
ЛГУ им. П.Стучки

Содержащиеся в литературе методы оценки погрешности приближения функций сплайнами до недавнего прошлого не обладали большой общностью. Н.П.Корнейчук [3] исследовал аппарат сплайнов с точки зрения традиционных аспектов теории приближения. Им получены точные результаты в ряде конкретных ситуаций наилучшего приближения полиномиальными сплайнами на некоторых классах функций. Но точные оценки наилучшего приближения, указывая наилучшую возможность, не предлагают способа ее реализации. К тому же наилучший аппроксимирующий сплайн может не иметь многих свойств аппроксимируемой функции. Указанные два недостатка устраняют интерполяционные сплайны, которые эффективно строятся по конечной информации об интерполируемой функции. Но все известные результаты по оценке ошибки интерполяции сплайнами [4] - [8] и др. получены методами, существенно учитывающими специфику конкретных сплайнов и свойства интерполируемых функций.

В настоящей работе проблема оценки погрешности сплайн-интерполяции рассматривается с точки зрения общей теории сплайнов в гильбертовых пространствах. Исходными для предлагаемого подхода явились общее понятие интерполяционного сплайна и условия его существования и единственности, изложенные П.-Ж.Лораном [1]. Центральным результатом статьи является представление ошибки сплайн-интерполяции для общего случая в форме, удобной для получения оценки ошибки (предложение 2). Следует отметить, что идея такого представления навеяна работой А.Сарда [2]. Это представление конкретизируется для одного практически важного класса задач сплайн-интерполяции в теореме 1. На основании этой теоремы получены оценки ошибки интерполяции простыми сплайнами, эрмитовыми сплайнами и сплайнами для локальных средних на некоторых классах функций. Такие оценки выражены через значения базисных сплайнов соответствующих пространств, а в случаях интерполяции сплайнами малых степеней доказаны оценки, не содержащие базисных сплайнов.

Условимся все рассматриваемые пространства считать вещественными векторными, все операторы – линейными. Пусть $\|x\|_X$ – норма элемента x нормированного пространства X ; $\langle x_1, x_2\rangle$ – скалярное произведение элементов x_1, x_2 гильбертова пространства X ; $\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – линейная оболочка элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пространства X ; $LC(X,Y)$ – нормированное пространство всех непрерывных операторов, действующих из X в Y ; $\mathcal{N}(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ – ядро и область значений оператора A ; $A|_E$ – сужение оператора A на множество E ; A^{-1} – оператор, обратный к A ; $H^q[a,b]$ $(q \in \mathbb{N})$ – пространство Соболева ([1], с.150); $H^0[a,b] = L_2[a,b]$; $MH^q_\infty[a,b]$ – класс функций $x \in H^q[a,b]$, у которых $\sup\limits_{a<t<b} \operatorname{vrai} |x^{(q)}(t)| \le M$; $MH^q_2[a,b]$ – класс функций $x \in H^q[a,b]$, у которых $\|x^{(q)}\|_{H^0[a,b]} \le M$; δ_{ij} – символ Кронекера ; θ – функция Хевисайда ; $\varphi_q(t,\tau) = (t-\tau)^q \theta(t-\tau)$. Будем считать, что $\sum\limits_{i=n_1}^{n_2} c_i = 0$ при $n_1 > n_2$.

1. Оператор ошибки сплайн-интерполяции.

Пусть X , Y , Z – гильбертовы пространства, $T: X \to Y$, $A: X \to Z$. Операторы T и A определяют подпространство $S(T,A)$ элементов из X : $S(T,A) = \{s \in X \mid \forall x \in \mathcal{N}(A) \ \langle Ts, Tx\rangle_Y = 0\}$, которое называют пространством сплайнов. Интерполяционным сплайном, соответствующим элементу z из $\mathcal{R}(A)$ называется сплайн s , для которого $As = z$.

Потребуем, чтобы множество $T(\mathcal{N}(A))$ было замкнуто и $\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$ Тогда для каждого z из $\mathcal{R}(A)$ существует единственный интерполяционный сплайн. Определим оператор сплайн-интерполяции $S: X \to S(T,A)$, считая, что для $x \in X$ Sx – это интерполяционный сплайн, соответствующий элементу Ax .

Лемма 1. $S = \widetilde{A}^{-1} A$, где $\widetilde{A} = A|_{S(T,A)}$.

Доказательство. Из определения пространства сплайнов вытекает включение $\mathcal{N}(A) \cap S(T,A) \subset \mathcal{N}(T)$. Принимая во внимание условие $\mathcal{N}(T)\cap\mathcal{N}(A)=\{0\}$, отсюда получаем, что $\mathcal{N}(A)\cap S(T,A)=\{0\}$ Значит, оператор $\widetilde{A}$ обратим. В силу существования для каждого элемента из $\mathcal{R}(A)$ интерполяционного сплайна имеем $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(\widetilde{A})$. Остается убедиться, что $\forall x\in X\ A((\widetilde{A}^{-1}A)x)=Ax$. Последнее же следует из того, что $A\widetilde{A}^{-1}$ – единичный оператор в $\mathcal{R}(A)$.

Качество интерполяции элемента $x\in X$ характеризуется остаточным членом или ошибкой $x-Sx$. Введем в рассмотрение оператор ошибки сплайн-интерполяции $\mathcal{U}=I-S$, где I – единичный оператор в X.

Предложение 1. Пусть P – оператор проектирования пространства X на $\mathcal{N}(T)$, $\widetilde{T}=T|_{\mathcal{R}(I-P)}$. Тогда $\mathcal{U}=\mathcal{V}T$, где $\mathcal{V}=(I-\widetilde{A}^{-1}A)\widetilde{T}^{-1}$.

Доказательство. Проектор P определяет разложение пространства X в прямую сумму двух подпространств: $\mathcal{N}(T)$ и $\mathcal{R}(I-P)$. Так как $\mathcal{N}(T)\cap\mathcal{R}(I-P)=\{0\}$, то оператор $\widetilde{T}$ обратим.

Непосредственно из определения пространства сплайнов следует включение $\mathcal{N}(T)\subset S(T,A)$. Учитывая, что $\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(T)$ и $\mathcal{N}(\mathcal{U})=S(T,A)$, отсюда получаем $\mathcal{R}(P)\subset\mathcal{N}(\mathcal{U})$. Тогда

$$\mathcal{U}=\mathcal{U}(I-P)+\mathcal{U}P=\mathcal{U}(I-P)=\mathcal{U}\widetilde{T}^{-1}T(I-P)=\mathcal{U}\widetilde{T}^{-1}T.$$

Этим установлено, что $\mathcal{U}=\mathcal{V}T$, где $\mathcal{V}=(I-S)\widetilde{T}^{-1}$. Для завершения доказательства остается воспользоваться леммой 1.

Замечание 1. Если в предложении 1 считать, что $T\in LC(X,Y)$, $A\in LC(X,Z)$, $P\in LC(X,X)$, а множества $\mathcal{R}(T)$ и $\mathcal{R}(A)$ замкнуты, то из теоремы Банаха об обратном операторе следует непрерывность операторов $\widetilde{T}^{-1}$ и $\widetilde{A}^{-1}$ Тогда $\mathcal{V}$ – непрерывный оператор, и справедлива оценка $\sup\|\mathcal{U}x\|_X\leq M\|\mathcal{V}\|$.

Пусть X_0 – векторное пространство, содержащее X в качестве подпространства, и существует оператор $A_0:X_0\to Z$ такой, что $A_0|_X=A$ и $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(A)$. В этом случае можно говорить об интерполяции сплайнами из $S(T,A)$ элементов пространства X_0. Будем понимать под оператором сплайн-интерполяции $S_0:X_0\to S(T,A)$ следующее естественное продолжение оператора S: для каждого $x\in X_0$ S_0x – интерполяционный сплайн, соответствующий элементу A_0x из $\mathcal{R}(A)$. Как это будет в дальнейшем видно из конкретных примеров, такое обобщение постановки задачи сплайн-интерполяции полезно.

Лемма 2. $S_0 = \widetilde{A}^{-1} A_0$.

Эта лемма – естественное обобщение леммы 1. Доказательство ее проводится по той же схеме.

Следующее предложение обобщает предложение 1.

Предложение 2. Пусть Q_0 – оператор из X_0 в некоторое пространство Y_0, удовлетворяющий условию $\mathcal{N}(Q_0) \subset S(T,A)$, а P_0 – оператор проектирования пространства X_0 на $\mathcal{N}(Q_0)$. Тогда $\mathcal{U}_0 = \mathcal{V}_0 Q_0$, где $\mathcal{V}_0 = (I - \widetilde{A}^{-1} A_0) \widetilde{Q}_0^{-1}$ и $\widetilde{Q}_0 = Q_0|_{\mathcal{R}(I-P_0)}$

Доказательство проводится по той же схеме, что и для предложения 1.

Замечание 2. Если в предложении 2 считать, что пространства X_0 и Y_0 банаховы, $Q_0 \in LC(X_0, Y_0)$, $A_0 \in LC(X_0, Z)$, $P_0 \in LC(X_0, X_0)$, а множества $\mathcal{R}(A_0)$ и $\mathcal{R}(Q_0)$ замкнуты, то (см. замечание 1) операторы $\widetilde{A}^{-1}$ и $\widetilde{Q}_0^{-1}$ непрерывны, $\mathcal{V}_0$ – непрерывный оператор, и справедлива оценка $\sup\limits_{\|Q_0 x\|_{Y_0} \le M} \|\mathcal{U}_0 x\|_{X_0} \le M \|\mathcal{V}_0\|$.

Для приложений важен случай, когда Z – конечномерное пространство это соответствует конечному числу интерполяционных условий. Пусть $Z = \mathbb{R}^m (m \in \mathbb{N})$, $\mathcal{R}(A) = Z$ Обозначим через s_i интерполяционный сплайн, соответствующий вектору e_i $i = \overline{1,m}$ где $e_1, e_2, \dots, e_m$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^m$

Лемма 3. Сплайны $s_1, s_2, \dots, s_m$ образуют базис пространства $S(T,A)$ и $\forall\, \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ $\widetilde{A}^{-1} \alpha = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i s_i$.

Доказательство. В силу линейности оператора $\widetilde{A}^{-1}$ $\widetilde{A}^{-1} \alpha = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \widetilde{A}^{-1} e_i$. Из условий интерполяции $A s_i = e_i$, $i = \overline{1,m}$ вытекает $s_i = \widetilde{A}^{-1} e_i$, $i = \overline{1,m}$, а значит $\widetilde{A}^{-1} \alpha = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i s_i$.

Так как $\mathcal{R}(\widetilde{A}^{-1}) = S(T,A)$, то этим также доказано, что $S(T,A) = \mathcal{L}(s_1, s_2, \dots, s_m)$ Линейная независимость сплайнов $s_1, s_2, \dots, s_m$ следует из линейности оператора A и линейной независимости векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A s_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad i = \overline{1,m}.$$

2. Ошибка интерполяции сплайнами пространства $S(T,A)$ в случае, когда T – оператор дифференцирования.

Рассмотрим практически важный случай $S(T,A)$, когда $X=H^q[a,b]$, $Y=H^0[a,b]$, $Z=\mathbb{R}^m$ $(q,m\in\mathbb{N})$ и T – оператор дифференцирования q-ого порядка, т.е. $Tx=x^{(q)}$ для $x\in X$. Тогда $T\in LC(X,Y)$, $\mathcal{R}(T)=Y$, а $\mathcal{N}(T)=\mathcal{L}(1,t,\dots,t^{q-1})$. Оператор A строят в зависимости от интерполяционных условий. Предположим, что $\mathcal{R}(A)=Z$, $\mathcal{N}(T)\cap\mathcal{N}(A)=\{0\}$ и $\mathcal{N}(A)$ – замкнутое множество. При этих условиях для каждого вектора из $\mathbb{R}^m$ существует единственный интерполяционный сплайн.

Пусть для $1\leq \tau\leq q$ на $X_0=H^\tau[a,b]$ задан оператор $A_0:X_0\to Z$ такой, что $A_0|_X=A$. Следующая теорема дает интегральное представление ошибки U_0x интерполяции функции $x\in X_0$ сплайнами из $S(T,A)$.

<u>Теорема 1</u>. Пусть оператор A_0 удовлетворяет условию:

$$\forall y\in H^{q-\tau}[a,b]\quad (A_0(J_\tau y))_i=\frac{1}{(\tau-1)!}\int_a^b y(\tau)(A_0\varphi_{\tau-1}(\cdot,\tau))_i d\tau,\ i=\overline{1,m},\tag{1}$$

где $(J_\tau y)(t)=\frac{1}{(\tau-1)!}\int_a^t y(\tau)\varphi_{\tau-1}(t,\tau)d\tau$, $t\in[a,b]$, $y\in H^{q-\tau}[a,b]$.

Тогда

$$\forall x\in H^\tau[a,b]\quad (U_0x)(t)=\frac{1}{(\tau-1)!}\int_a^b x^{(\tau)}(\tau)K_{\tau-1}(t,\tau)d\tau,\quad t\in[a,b],\tag{2}$$

где

$$K_{\tau-1}(t,\tau)=(U_0\varphi_{\tau-1}(\cdot,\tau))(t),\quad \tau,t\in[a,b].\tag{3}$$

<u>Доказательство</u>. Положим $Y_0=H^{q-\tau}[a,b]$, $Q_0x=x^{(\tau)}$ для $x\in X_0$ и построим оператор $V_0:Y_0\to X_0$ такой, что $U_0=V_0Q_0$.

Зададим проектор P_0 пространства X_0 на $\mathcal{N}(Q_0)=\mathcal{L}(1,t,\dots,t^{\tau-1})$ равенством

$$(P_0x)(t)=x(a)+\frac{x'(a)}{1!}(t-a)+\dots+\frac{x^{(\tau-1)}(a)}{(\tau-1)!}(t-a)^{\tau-1},\ t\in[a,b],\ x\in X_0.\tag{4}$$

Покажем, что $J_\tau=\hat{Q}_0^{-1}$, где $\hat{Q}_0=Q_0|_{\mathcal{R}(I-P_0)}$. Для этого убедимся, что $J_\tau Q_0$ – единичный оператор в $\mathcal{R}(I-P_0)$. Пусть $x\in\mathcal{R}(I-P_0)$. Тогда существует функция $x_0\in X_0$ такая, что

$$x=x_0-P_0x_0.\tag{5}$$

Разложим функцию x_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$x_0(t)=x_0(a)+\frac{x_0'(a)}{1!}(t-a)+\dots+\frac{x_0^{(\tau-1)}(a)}{(\tau-1)!}(t-a)^{\tau-1}+\frac{1}{(\tau-1)!}\int_a^t x_0^{(\tau)}(\tau)(t-\tau)^{\tau-1}d\tau,\tag{6}$$

$t\in[a,b]$.

Из (4)–(6) получаем $x(t)=\frac{1}{(\tau-1)!}\int_a^t x_0^{(\tau)}(\tau)(t-\tau)^{\tau-1}d\tau$; $t\in[a,b]$, т.е. $x=(J_1Q_0)x_0$. Остается заметить, что поскольку $x-x_0\in N(Q_0)$ то $Q_0x=Q_0x_0$, а следовательно, $x=(J_1Q_0)x$.

Принимая во внимание равенство $J_1=\widetilde{Q}_0^{-1}$, на основании предложения 2 имеем $U_0=V_0Q_0$, где $V_0=(I-\widetilde{A}^{-1}A_0)J_r$. Преобразуем последнее выражение для V_0

Пусть $y\in Y$, $t\in[a,b]$. Применяя последовательно лемму 3 и условие (1), получаем

$$(V_0y)(t)=(J_ry)(t)-\sum_{i=1}^{m}(A_0(J_ry))_i\,s_i(t)=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b y(\tau)[\varphi_{r-1}(t,\tau)-\sum_{i=1}^{m}(A_0\varphi_{r-1}(\cdot,\tau))_i\cdot$$
$$\cdot s_i(t)]d\tau.$$

Но по леммам 2 и 3 $\sum_{i=1}^{m}(A_0\varphi_{r-1}(\cdot,\tau))_i\,s_i(t)=(S_0\varphi_{r-1}(\cdot,\tau))(t)$, $\tau\in[a,b]$.

Следовательно, $(V_0y)(t)=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b y(\tau)(U_0\varphi_{r-1}(\cdot,\tau))(t)\,d\tau$.

Замечание 3. Из доказанного вытекает, что в рассматриваемом случае погрешность сплайн-интерполяции функции x из X_0 полностью определяется ее производной $x^{(r)}$ и погрешностью приближения усеченных степенных функций $\varphi_{r-1}(\cdot,\tau)$ при $\tau\in[a,b]$.

3. Оценка погрешности приближения функций простыми сплайнами.

Пусть дано разбиение отрезка $[a,b]$

$$\Delta: a=t_0<t_1<\ldots<t_n<t_{n+1}=b\,,\quad n\in N. \tag{7}$$

Задачу интерполяции функции по известным значениям во внутренних узлах разбиения решают простые сплайны, т.е. элементы из $S(T,A)$, где $X=H^q[a,b]\,(1\leq q\leq n)$, $Y=H^0[a,b]$, $Z=R^n$, $Tx=x^{(q)}$, и $Ax=(x(t_1),x(t_2),\ldots,x(t_n))$ для $x\in X$ В этом случае $A\in LC(X,Z)$, $R(A)=Z$ и $N(T)\cap N(A)=\{0\}$.

Пусть $1\leq r\leq q$, A_0 – естественное продолжение оператора A на $H^r[a,b]$. Так как условие (1) для оператора A_0 выполняется:

$$(A_0(J_ry))_i=(J_ry)(t_i)=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^{t_i}y(\tau)\varphi_{r-1}(t_i,\tau)d\tau=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b y(\tau)(A_0\varphi_{r-1}(\cdot,\tau))_i\,d\tau,$$
$$i=\overline{1,n},$$

то по теореме 1 имеет место представление (2). Применяя последовательно леммы 2 и 3, получаем выражение ядра (3) для данного случая:

$$K_{r-1}(t,\tau)=\varphi_{r-1}(t,\tau)-\sum_{k=1}^{n}\varphi_{r-1}(t_k,\tau)s_k(t)=\begin{cases}(t-\tau)^{r-1}-\sum\limits_{k=i}^{n}(t_k-\tau)^{r-1}s_k(t), & \tau\in[t_{i-1},t_i]\cap[a,t],\\ \sum\limits_{k=i}^{n}(t_k-\tau)^{r-1}s_k(t), & \tau\in[t_{i-1},t_i]\cap[t,b],\end{cases}$$

$i=\overline{1,n+1}$, $t\in[a,b]$. Так как сплайн-интерполяция полиномов степени не выше $q-1$ является точной, то $(t-\tau)^{q-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}(t_k-\tau)^{q-1}s_k(t)$, $t\in[a,b]$, $\tau\in[a,b]$. Учитывая это тождество, находим

$$K_{q-1}(t,\tau)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{i-1}(t_k-\tau)^{q-1}s_k(t), & \tau\in[t_{i-1},t_i]\cap[a,t],\\ -\sum\limits_{k=i}^{n}(t_k-\tau)^{q-1}s_k(t), & \tau\in[t_{i-1},t_i]\cap]t,b],\ i=\overline{1,n+1},\ t\in[a,b].\end{cases}\qquad(8)$$

Тем самым доказано

<u>Предложение 3</u>. Для каждой функции $x\in H^q[a,b]$ справедливо (2), где ядро K_{q-1} определено равенством (8).

Пусть, далее, $h_i=t_i-t_{i-1}$, $i=\overline{1,n+1}$; $g_i(t)=\sum\limits_{k=1}^{i}s_k(t)$, $i=\overline{1,n}$; $f_{0i}(t)=\sum\limits_{k=1}^{i}h_k g_{k-1}(t)$, $i=\overline{0,n}$; $f_{1i}(t)=\sum\limits_{k=i+1}^{n}h_k(1-g_{k-1}(t))$, $i=\overline{1,n+1}$; $\mu_{0i}(t)=\theta(f_{0i-1}(t)f_{0i}(t))$, $i=\overline{1,n}$; $\mu_{1i}(t)=\theta(f_{1i-1}(t)f_{1i}(t))$, $i=\overline{2,n+1}$; $\nu_{0i}(t)=\theta(f_{0i-1}(t)(f_{0i-1}(t)+(t-t_{i-1})g_{i-1}(t)))$, $\nu_{1i}(t)=\theta(f_{1i}(t)(f_{1i}(t)+(t_i-t)(1-g_{i-1}(t))))$, $i=\overline{1,n+1}$.

<u>Следствие 3.1</u>. В каждой точке $t\in[t_{i-1},t_i]$ $(i\in\{1,2,\ldots,n+1\})$ имеют место оценки

$$\sup_{x\in MH^1_\infty[a,b]}|(U_0x)(t)|=M\Big[\sum_{k=1}^{i-1}h_k|g_{k-1}(t)|+(t-t_{i-1})|g_{i-1}(t)|+(t_i-t)|1-g_{i-1}(t)|+\sum_{k=i+1}^{n}h_k|1-g_{k-1}(t)|\Big],$$

$$\sup_{x\in MH^1_2[a,b]}|(U_0x)(t)|\le M\Big[\sum_{k=1}^{i-1}h_k g^2_{k-1}(t)+(t-t_{i-1})g^2_{i-1}(t)+(t_i-t)(1-g_{i-1}(t))^2+\sum_{k=i+1}^{n}h_k(1-g_{k-1}(t))^2\Big]^{\frac12}.$$

<u>Следствие 3.2</u>. Если $q\ge 2$, то в каждой точке $t\in[t_{i-1},t_i]$ $(i\in\{1,2,\ldots,n+1\})$ имеют место оценки

$$\sup_{x\in MH^2_\infty[a,b]}|(U_0x)(t)|=\frac12 M\Big\{\sum_{k=1}^{i-1}h_k\Big[|f_{0k-1}(t)+f_{0k}(t)|\mu_{0k}(t)+\frac{f^2_{0k-1}(t)+f^2_{0k}(t)}{|f_{0k-1}(t)|+|f_{0k}(t)|}(1-\mu_{0k}(t))\Big]+$$
$$+(t-t_{i-1})\Big[|2f_{0i-1}(t)+(t-t_{i-1})g_{i-1}(t)|\nu_{0i}(t)+\frac{f^2_{0i-1}(t)+(f_{0i-1}(t)+(t-t_{i-1})g_{i-1}(t))^2}{|f_{0i-1}(t)|+|f_{0i-1}(t)+(t-t_{i-1})g_{i-1}(t)|}(1-\nu_{0i}(t))\Big]+$$
$$+(t_i-t)\Big[|2f_{1i}(t)+(t_i-t)(1-g_{i-1}(t))|\nu_{1i}(t)+\frac{f^2_{1i}(t)+(f_{1i}(t)+(t_i-t)(1-g_{i-1}(t)))^2}{|f_{1i}(t)|+|f_{1i}(t)+(t_i-t)(1-g_{i-1}(t))|}(1-\nu_{1i}(t))\Big]+$$
$$+\sum_{k=i+1}^{n+1}h_k\Big[|f_{1k-1}(t)+f_{1k}(t)|\mu_{1k}(t)+\frac{f^2_{1k-1}(t)+f^2_{1k}(t)}{|f_{1k-1}(t)|+|f_{1k}(t)|}(1-\mu_{1k}(t))\Big]\Big\},$$

$$\sup_{x\in MH^2_2[a,b]}|(U_0x)(t)|\le M\Big\{\sum_{k=1}^{i-1}h_k\Big[f_{0k-1}(t)f_{0k}(t)+\frac13 h_k^2 g^2_{k-1}(t)\Big]+(t-t_{i-1})\Big[f_{0i-1}(t)(f_{0i-1}(t)+$$
$$+(t-t_{i-1})g_{i-1}(t))+\frac13(t-t_{i-1})^2g^2_{i-1}(t)\Big]+(t_i-t)\Big[f_{1i}(t)(f_{1i}(t)+(t_i-t)(1-g_{i-1}(t)))+$$
$$+\frac13(t_i-t)^2(1-g_{i-1}(t))^2\Big]+\sum_{k=i+1}^{n+1}h_k\Big[f_{1k-1}(t)f_{1k}(t)+\frac13 h_k^2(1-g_{k-1}(t))^2\Big]\Big\}^{\frac12}.$$

В случае $q=1$ имеем следующее аналитическое представление базисных сплайнов

$$s_1(t)=\begin{cases}1, & t\in[t_0,t_1],\\ \frac{t_2-t}{h_2}, & t\in]t_1,t_2],\\ 0, & t\in]t_2,t_{n+1}],\end{cases}\quad s_n(t)=\begin{cases}0, & t\in[t_0,t_{n-1}],\\ \frac{t-t_{n-1}}{h_n}, & t\in]t_{n-1},t_n],\\ 1, & t\in]t_n,t_{n+1}],\end{cases}\quad s_i(t)=\begin{cases}0, & t\in[t_0,t_{i-1}[\cup]t_{i+1},t_{n+1}],\\ \frac{t-t_{i-1}}{h_i}, & t\in[t_{i-1},t_i],\\ \frac{t_{i+1}-t}{h_{i+1}}, & t\in]t_i,t_{i+1}],\ i=\overline{2,n-1}.\end{cases}\qquad (9)'$$

Из (9) и следствия 3.1 вытекает

<u>Следствие 3.3</u>. Если $q=1$, то в каждой точке $t\in[t_{i-1},t_i]$ ($i\in\{1,2,\dots,n+1\}$) имеют место оценки

$$\sup_{x\in MH^1_2[a,b]}|((U_1x)(t)|=\begin{cases}MB_i(t) & \text{при } i\in\{1,n+1\},\\ \frac{1}{2}MB_i(t) & \text{при } i\in\{2,3,\dots,n\},\end{cases}$$

$$\sup_{x\in MH^1_2[a,b]}|(U_1x)(t)|\le M\sqrt{B_i(t)},\text{ где}$$

$$B_i(t)=\begin{cases}t_1-t & \text{при } i=1,\\ \frac{(t_i-t)(t-t_{i-1})}{h_i} & \text{при } i\in\{2,3,\dots,n\},\\ t-t_n & \text{при } i=n+1,\end{cases}\qquad t\in[a,b].$$

4. <u>Оценка погрешности приближения функций эрмитовыми сплайнами.</u>

Эрмитовы сплайны решают задачу интерполяции функции по заданным в узлах разбиения (7) значениям самой функции и ее производных: $x(t_i), x'(t_i), \dots, x^{(q-1)}(t_i)$, $i=\overline{1,n}$. Пространство эрмитовых сплайнов – это пространство $S(T,A)$ при $X=H^q[a,b]$, $Y=H^0[a,b]$, $Z=R^{nq}$, $Tx=x^{(q)}$ и $Ax=(x(t_1),x'(t_1),\dots,x^{(q-1)}(t_1),\dots,x(t_n),x'(t_n),\dots,x^{(q-1)}(t_n))$. Здесь $A\in L(X,Z)$, $\mathcal{R}(A)=Z$ и $\mathcal{N}(T)\cap\mathcal{N}(A)=\{0\}$.

В этом пункте обозначим базисные векторы в R^{nq} через $e_{10},e_{11},\dots,e_{1q-1},\dots,e_{n0},e_{n1},\dots,e_{nq-1}$. Тогда для $x\in X$ $Ax=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{q-1}(Ax)_{ij}e_{ij}$, где $(Ax)_{ij}=x^{(j)}(t_i)$, $j=\overline{0,q-1}$, $i=\overline{1,n}$.

Так как для оператора A выполняется условие (1) при $\tau=q$, т.к.

$$(A(J_qy))_{ij}=(J_qy)^{(j)}(t_i)=\frac{1}{(q-1)!}\int_a^b y(\tau)\frac{\partial^j}{\partial t^j}\varphi_{q-1}(t_i,\tau)d\tau=\frac{1}{(q-1)!}\int_a^b y(\tau)(A\varphi_{q-1}(\cdot,\tau))_{ij}d\tau,\ j=\overline{0,q-1},\ i=\overline{1,n},$$

то по теореме 1 имеет место (2). Анализ соответствующего ядра (3) использует следующее вспомогательное утверждение.

непосредственно вытекающее из известной характеризации эрмитовых сплайнов.

Лемма 4.

$$(S_0\varphi_{q,1}(\cdot,\tau))(t)=\begin{cases}(t-\tau)^{q-1} & \text{при } \tau\in]t_0,t_1[,\ t\in[a,b],\\ \varphi_{q,1}(t,\tau) & \text{при } \tau\in]t_{i-1},t_i[,\ t\in[a,t_{i-1}]\cup[t_i,b],\ i=\overline{2,n},\\ \sum\limits_{j=0}^{q-1}\frac{(-1)^j(q-1)!}{(q-1-j)!}(t_i-\tau)^{q-1-j}p_j(t_{i-1}+t_i-t) & \text{при } \tau\in]t_{i-1},t_i[,\ t\in[t_{i-1},t_i],\\ 0 & \text{при } \tau\in]t_n,t_{n+1}[,\ t\in[a,b],\end{cases}$$

где функция p_j **однозначно определяется как полином степени** $2q-1$**, удовлетворяющий на концах отрезка** $[t_{i-1},t_i]$ **условиям:** $p_j^{(k)}(t_{i-1})=\delta_{jk}$ **и** $p_j^{(k)}(t_i)=0$, $k=\overline{0,q-1}$.

Воспользовавшись леммой 4 и учитывая тождество

$$(t-\tau)^{q-1}=\sum_{j=0}^{q-1}\frac{(q-1)!}{(q-1-j)!}\left[(t_{i-1}-\tau)^{q-1-j}p_j(t)+(-1)^j(t_i-\tau)^{q-1-j}p_j(t_{i-1}+t_i-t)\right],\ t,\tau\in[a,b],$$

получаем

$$K_{q,1}(t,\tau)=\begin{cases}-(t-\tau)^{q-1} & \text{при } \tau\in]t_0,t_1[,\ t\in[t_0,\tau],\\ -\sum\limits_{j=0}^{q-1}\frac{(-1)^j(q-1)!}{(q-1-j)!}(t_i-\tau)^{q-1-j}p_j(t_{i-1}+t_i-t) & \text{при } \tau\in]t_{i-1},t_i[,\ t\in[t_{i-1},\tau],\ i=\overline{2,n},\\ \sum\limits_{j=0}^{q-1}\frac{(q-1)!}{(q-1-j)!}(t_{i-1}-\tau)^{q-1-j}p_j(t) & \text{при } \tau\in]t_{i-1},t_i[,\ t\in[\tau,t_i],\ i=\overline{2,n},\\ (t-\tau)^{q-1} & \text{при } \tau\in]t_n,t_{n+1}[,\ t\in[\tau,t_{n+1}],\\ 0 & \text{при всех остальных } t \text{ и } \tau\end{cases}\qquad(10)$$

Тем самым доказано

<u>Предложение 4</u>. Для каждой функции $x\in H^q[a,b]$ **справедливо (2) при** $r=q$**, где ядро** $K_{q,1}$ **определено равенством (10).**

<u>Следствие 4.1</u>. Имеют место оценки

$$\sup \|(Ix)^{(q)}\ [illegible]\| \le \frac{1}{(q-1)!}M_i\sqrt{B_i},\ i=\overline{1,n+1},$$ **где** $x\in H^q[a,b]\cap M_iH_2^q[t_{i-1},t_i]$,

$$B_i=\begin{cases}\frac{(t_1-t_0)^{2q}}{2q(2q-1)} & \text{при } i=1,\\ (t_i-t_{i-1})^{2q}\ [illegible] & \text{при } i=\overline{2,n},\\ \frac{(t_{n+1}-t_n)^{2q}}{2q(2q-1)} & \text{при } i=n+1.\end{cases}$$

<u>Следствие 4.2</u>. Если $q=2$**, то в каждой точке** $t\in[t_{i-1},t_i]$ $(i\in\{1,\ldots,n+1\})$ **имеют место оценки**

$\sup |(Ix)(t)| \le M_i B_i(t)$, $\sup |(Ix)(t)| \le M_i\sqrt{B_i(t)}$**, где** $x\in H^2[a,b]\cap M_iH_2^2[t_{i-1},t_i]$ [illegible]

$$B_i(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t_1-t)^2 \text{ при } i=1,\\ \frac{h_i\,(t_i-t)^2(t-t_{i-1})^2}{3(t_i-t_{i-1})+3(t_i-t)(t-t_{i-1})} \text{ при } i=\overline{2,n},\\ \frac{1}{2}(t-t_n)^2 \text{ при } i=n+1,\end{cases}\quad C_i(t)=\begin{cases}(t_1-t)^3 \text{ при } i=1,\\ \frac{(t_i-t)^3(t-t_{i-1})^3}{(t_i-t_{i-1})^3} \text{ при } i=\overline{2,n},\\ (t-t_n)^3 \text{ при } i=n+1.\end{cases}$$

5. Оценка погрешности приближения функций сплайнами для локальных средних.

Довольно часто, особенно в случае экспериментальных измерений, для функции известны лишь средние значения на малых интервалах – промежутках $[t_{i-1},t_i]$ разбиения (7). При решении задачи интерполяции функции по этим значениям используют сплайны для локальных средних. Пространство таких сплайнов есть $S(T,A)$ при $X=H^q[a,b]$ $(1\le q\le n+1)$, $Y=H^0[a,b]$, $Z=\mathbb{R}^{n+1}$ $Tx=x^{(q)}$, $Ax=\left(\frac{1}{h_1}\int_{t_0}^{t_1}x(t)dt,\frac{1}{h_2}\int_{t_1}^{t_2}x(t)dt,\ldots,\frac{1}{h_{n+1}}\int_{t_n}^{t_{n+1}}x(t)dt\right)$, где $h_i=t_i-t_{i-1}$, $i=\overline{1,n+1}$. В этом случае $A\in L(X,Z)$, $R(A)=Z$ и $N(T)\cap N(A)=\{0\}$.

Пусть $1\le r\le q$ и A_0 – естественное продолжение оператора A на $H^r[a,b]$. Так как условие (1) для оператора A_0 выполнено:

$$(A_0(J_r y))_i=\frac{1}{h_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(J_r y)(t)dt=\frac{1}{h_i(r-1)!}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_a^b y(\tau)\varphi_{r-1}(t,\tau)d\tau dt$$
$$=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b y(\tau)\frac{1}{h_i}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi_{r-1}(t,\tau)dtd\tau=\frac{1}{(r-1)!}\int_a^b y(\tau)(A_0\varphi_{r-1}(\cdot,\tau))_i d\tau,\ i=\overline{1,n+1},$$

то по теореме 1 имеет место (2).

Применяя последовательно леммы 2 и 3, получаем в рассматриваемом случае ядро (3):

$$K_{r-1}(t,\tau)=\varphi_{r-1}(t,\tau)-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{h_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi_{r-1}(u,\tau)du\cdot s_k(t)=\varphi_{r-1}(t,\tau)-\sum_{k=1}^{n+1}[\varphi_r(t_k,\tau)-\varphi_r(t_{k-1},\tau)]s_k(t)=$$
$$=\begin{cases}(t-\tau)^{r-1}-\frac{1}{r}\sum_{k=i+1}^{n+1}\frac{1}{h_k}[(t_k-\tau)^r-(t_{k-1}-\tau)^r]s_k(t)-\frac{1}{rh_i}(t_i-\tau)^r s_i(t),\ \tau\in[t_{i-1},t]\cup[a,t],\\ -\frac{1}{r}\sum_{k=i+1}^{n+1}\frac{1}{h_k}[(t_k-\tau)^r-(t_{k-1}-\tau)^r]s_k(t)-\frac{1}{rh_i}(t_i-\tau)^r s_i(t),\ \tau\in[t_{i-1},t_i]\cap]t,b],\ i=\overline{1,n+1},\ t\in[a,b].\end{cases}$$

Так как сплайн-интерполяция полиномов степени не выше $q-1$ является точной, то $(t-\tau)^{r-1}=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{h_k}[(t_k-\tau)^r-(t_{k-1}-\tau)^r]s_k(t)$ $t,\tau\in[a,b]$.

Учитывая это тождество, находим

$$K_{r-1}(t,\tau)=\begin{cases}\frac{1}{r}\left\{\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{h_k}[(t_k-\tau)^r-(t_{k-1}-\tau)^r]s_k(t)-\frac{1}{h_i}(t_{i-1}-\tau)^r s_i(t)\right\},\ \tau\in[t,\\ -\frac{1}{r}\left\{\sum_{k=i+1}^{n+1}\frac{1}{h_k}[(t_k-\tau)^r-(t_{k-1}-\tau)^r]\right.\end{cases}\quad(11)$$

Тем самым доказано

<u>Предложение 5</u>. Для каждой функции x из $H^2[a,b]$ справедливо (2), где ядро $K_{2,1}$ определено равенством (11)

Введем ряд обозначений: $g_i(t)=\sum_{k=1}^{i} s_k(t)$, $\mu_{0i}(t)=\theta(g_{i-1}(t)g_i(t))$,
$\mu_{1i}(t)=\theta((1-g_{i-1}(t))(1-g_i(t)))$, $\nu_{0i}(t)=\theta(g_{i-1}(t)(g_{i-1}(t)+\frac{t-t_{i-1}}{h_i}s_i(t)))$,
$\nu_{1i}(t)=\theta((1-g_i(t))(1-g_i(t)+\frac{t_i-t}{h_i}s_i(t)))$, $i=\overline{1,n+1}$, $t\in[a,b]$; $\alpha_1(u)=1-4u+3u^2$,
$\alpha_2(u)=1-3u+\frac{3}{2}u^2$, $\alpha(u)=\max\{|\alpha_1(u)|,|\alpha_2(u)|\}$, $\beta(u)=\max\{1,1-\alpha_2(u)\}$,

$$\gamma(u)=\begin{cases}1-\alpha_2(1-u) & \text{при } u\in[0,\frac{1}{3}],\\ 1-\alpha_1(u)-\alpha_1(1-u) & \text{при } u\in]\frac{1}{3},\frac{2}{3}[,\\ 1-\alpha_2(u) & \text{при } u\in[\frac{2}{3},1],\end{cases}\qquad u\in[0,1].$$

<u>Следствие 5.1</u>. В каждой точке $t\in[t_{i-1},t_i]$ $(i\in\{1,2,\dots,n+1\})$ имеют место оценки

$$\sup_{x\in MH^1_\infty[a,b]}|(U_0x)(t)|=\frac{1}{2}M\Big\{\sum_{k=1}^{i-1}h_k[|g_{k-1}(t)+g_k(t)|\mu_{0k}(t)+\frac{g^2_{k-1}(t)+g^2_k(t)}{|g_{k-1}(t)|+|g_k(t)|}(1-\mu_{0k}(t))]+$$
$$+(t-t_{i-1})[|2g_{i-1}(t)+\frac{t-t_{i-1}}{h_i}s_i(t)|\nu_{0i}(t)+\frac{g^2_{i-1}(t)+(g_{i-1}(t)+\frac{1}{h_i}(t-t_{i-1})s_i(t))^2}{|g_{i-1}(t)|+|g_{i-1}(t)+\frac{1}{h_i}(t-t_{i-1})s_i(t)|}(1-\nu_{0i}(t))]+$$
$$+(t_i-t)[|2(1-g_i(t))+\frac{t_i-t}{h_i}s_i(t)|\nu_{1i}(t)+\frac{(1-g_i(t))^2+(1-g_i(t)+\frac{1}{h_i}(t_i-t)s_i(t))^2}{|1-g_i(t)|+|1-g_i(t)+\frac{1}{h_i}(t_i-t)s_i(t)|}(1-\nu_{1i}(t))]+$$
$$+\sum_{k=i+1}^{n+1}h_k[|2-g_{k-1}(t)-g_k(t)|\mu_{1k}(t)+\frac{(1-g_{k-1}(t))^2+(1-g_k(t))^2}{|1-g_{k-1}(t)|+|1-g_k(t)|}(1-\mu_{1k}(t))]\Big\},$$

$$\sup_{x\in MH^1_2[a,b]}|(U_0x)(t)|\le M\Big\{\sum_{k=1}^{i-1}h_k[g_{k-1}(t)g_k(t)+\frac{1}{3}s_k^2(t)]+(t-t_{i-1})[g_{i-1}(t)(g_{i-1}(t)+\frac{t-t_{i-1}}{h_i}s_i(t))+\frac{1}{3}\frac{(t-t_{i-1})^2}{h_i^2}s_i^2(t)]+$$
$$+(t_i-t)[(1-g_i(t))(1-g_i(t)+\frac{t_i-t}{h_i}s_i(t))+\frac{1}{3}\frac{(t_i-t)^2}{h_i^2}s_i^2(t)]+\sum_{k=i+1}^{n+1}h_k[(1-g_{k-1}(t))(1-g_k(t))+\frac{1}{3}s_k^2(t)]\Big\}^{\frac{1}{2}}$$

<u>Следствие 5.2</u>. Если $q=1$, то в каждой точке $t\in[t_{i-1},t_i]$ ($i\in\{1,2,\dots,n+1\}$) имеет место оценка

$$\sup_{x\in MH^1_\infty[a,b]}|(U_0x)(t)|\le MB_i(t),$$ где

$$B_i(t)=\begin{cases}\beta(\frac{t_1-t}{h_1})\frac{(t-t_0)^2+(t_1-t)^2}{2h_1}+3\alpha(\frac{t-t_0}{h_1})\sum_{k=2}^{n+1}\frac{h_k}{2^k} & \text{при } i=1,\\ \gamma(\frac{t_i-t}{h_i})\frac{(t-t_{i-1})^2+(t_i-t)^2}{2h_i}+\alpha(\frac{t-t_{i-1}}{h_i})(3\sum_{k=i+1}^{n+1}\frac{h_k}{2^{k-i+1}}+(t_i-t)\theta(t_{i-1}+(1-\frac{\sqrt{3}}{3})h_i-t))+ & \\ \quad+\alpha(\frac{t_i-t}{h_i})(3\sum_{k=1}^{i-1}\frac{h_k}{2^{i-k+1}}+(t-t_{i-1})\theta(t-t_{i-1}-\frac{\sqrt{3}}{3}h_i)) & \text{при } i=\overline{2,n},\\ \beta(\frac{t-t_n}{h_{n+1}})\frac{(t-t_n)^2+(t_{n+1}-t)^2}{2h_{n+1}}+3\alpha(\frac{t_{n+1}-t}{h_{n+1}})\sum_{k=1}^{n}\frac{h_k}{2^{n+2-k}} & \text{при } i=n+1.\end{cases}$$

Доказательства конкретных формул оценки погрешности (следствий из предложений 3 – 5) требуют громоздких выкладок и поэтому в статье опущены.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему руководителю доценту М.А.Гольдману за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

1. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация.- М., 1975.
2. Sard A. Integral representation of remainders // Duke Math. J.- 1948.- V.15.- P.333-345.
3. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения.- М., 1984.
4. Великин В.Л. Точные значения приближения эрмитовыми сплайнами на классах дифференцируемых функций // Изв. АН СССР, Сер. матем.- 1973.- Т.37.- № 1.- С.165-185.
5. Женсыкбаев А.А. Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами r -ого порядка // Матем. заметки.- 1973.- Т.13.- № 2.- С.217-228.
6. Корнейчук Н.П., Личун А.А. Об оценке погрешности сплайн-интерполяции в интегральной метрике // Укр. матем. журнал.- 1981.- Т.33.- № 3.- С.391-394.
7. Cheney E.W., Schurer F. On interpolating by cubic splines with equally-spaces nodes // Indag. Math.- 1968.- V.30.- P.517-524.
8. Hall Ch.A., Meyer W.W. Optimal error bounds for cubic spline interpolation // J. Approx. Th. - 1976.- V.16.- P.105-122.

Поступила 10 ноября 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 517.988.52

О КОНЕЧНЫХ ПОКРЫТИЯХ n-МЕРНОЙ СФЕРЫ И ТЕОРЕМЕ ЛЮСТЕРНИКА

З.И.Баланов
РПИ им. А.Пельше

В работе [3] был получен следующий результат: если на $(n-1)$-мерной сфере задано действие конечной циклической группы порядка P, $\dim(\mathrm{Fix}\, G=\{x\in S^{n-1}\mid \exists g\in G, g\neq 1, gx=x\})=K$, то $\gamma(S^{n-1}\setminus \mathrm{Fix}\, G)\geqslant n-k-1$ (здесь и далее через γ обозначен род соответствующего множества). Настоящая статья посвящена обобщению этого результата на произвольные (вообще говоря, нециклические) конечные группы. Заметим, что в [3] при доказательстве упомянутого результата использовались специфические свойства группы когомологий циклической группы с коэффициентами в некотором поле. Полученный нами результат (теорема 2) позволяет распространить известную теорему Люстерника о существовании счетного числа различных критических точек слабо непрерывных равномерно дифференцируемых четных функционалов на функционалы, симметричные относительно конечных (вообще говоря, нециклических) групп гомеоморфизмов. По стандартной схеме наши результаты могут быть использованы при исследовании точек бифуркации нелинейных уравнений с потенциальными операторами с некоторыми условиями групповой инвариантности.

1. Пусть S^{n-1} -$(n-1)$-мерная сфера в $\mathbb{R}^n$, G - конечная группа, действующая на S^{n-1}, $\mathrm{Fix}\, G=\{x\in S^{n-1}: \exists g\in G, g\neq 1, gx=x\}$. Очевидно, что $S^{n-1}\setminus \mathrm{Fix}\, G$ инвариантно относительно G.

Определение 1. Пусть $A\subset(S^{n-1}\setminus \mathrm{Fix}\, G)$- компактное множество. Скажем, что род A равен 1, если:

1) $GA=A$;
2) всякая связная компонента A не содержит точек вида x и gx $(g\neq 1, g\in G)$.

Определение 2. Пусть $M\subset(S^{n-1}\setminus Fix\,G)$ – компактное множество. Скажем, что M имеет род S, если его можно покрыть S множествами рода 1 и нельзя покрыть $S-1$ множествами рода 1

Определение 3. Пусть F – произвольное (вообще говоря, некомпактное) подмножество $S^{n-1}\setminus Fix\,G$. Определим род F как $\sup\limits_{M\in\mathfrak{M}}\{\gamma(M)\}$, где $\mathfrak{M}$ – множество всех компактов из $S^{n-1}\setminus Fix\,G$, $M\subset F$.

Следующая лемма непосредственно следует из определения рода.

Лемма 1.

Пусть F – множество рода 1, $F\subset(S^{n-1}\setminus Fix\,G)$. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ род множества $F(\varepsilon)=$ $=\{x\in S^{n-1}\setminus Fix\,G,\ \rho(x,F)\leq\varepsilon\}$ также равен 1

(Здесь ρ – метрика на $\mathbb{R}^n$).

Следствие 1.

При достаточно малых $\varepsilon>0$ род множества $M(\varepsilon)=$ $=\{x\in S^{n-1}\setminus Fix\,G,\ \rho(x,M)\leq\varepsilon\}$ совпадает с родом M.

Замечание 1. При переходе к большим множествам род не уменьшается.

Все неопределенные здесь понятия см. в [1] и [3].

Лемма 2.

Пусть замкнутое множество $T\subset S^{n-1}$ не содержит точку $-y_0$. Пусть, далее, B – непрерывное отображение замкнутого множества $F\subset S^{n-1}$ в T

Тогда отображение B можно продолжить до определенного на всей S^{n-1} непрерывного отображения B_1 так, чтобы множество B_1S^{n-1} лежало в ε-окрестности $U(\varepsilon)$ следов деформации $d(x,t,y_0)$ множества T в точку y_0, где ε – любое положительное число.

Теорема 1.

Пусть на сфере S^{n-1} задано действие конечной группы G, $|G|=p$, поле Φ эквивариантно относительно G и полугомотопно тождественному.

Тогда $\mathcal{X}(\Phi,S^{n-1})\equiv 1\ (mod\,p)$.

Доказательство см. в [2].

Один из результатов статьи составляет

Теорема 2.

Пусть на S^{n-1} задано действие конечной группы G, $|G|=p$, причем $\dim(\mathrm{Fix}\,G)=K$.

Тогда $\tau(S^{n-1}\setminus \mathrm{Fix}\,G)\geqslant n-K-1$.

Так как в случае свободного действия род S^{n-1} не превосходит n [3 теорема 5], то из этой теоремы получаем

Следствие 2.

Род ($n-1$)- мерной сферы относительно свободного действия конечной группы равен n

2. Доказательство теоремы 2.

Предположим противное. Пусть M - произвольный компакт из $S^{n-1}\setminus \mathrm{Fix}\,G$, такой, что $\tau(M)=\tau(S^{n-1}\setminus \mathrm{Fix}\,G), s<n-K-1$. Это означает, что M может быть покрыто s множествами рода 1 Обозначим их через $F_1, F_2, \dots, F_s$. Так как компоненты связности всегда замкнуты и, следовательно, в нашем случае компактны, то с учетом леммы 1 без умаления общности можно считать, что каждое F_i $(i=1,\dots,s)$ является объединением p непересекающихся замкнутых множеств F_{i1}, $F_{i2}, \dots, F_{ip}$, причем, $g_1F_{i1}=F_{i2}, \dots, g_pF_{ip}=F_{i1}$ (здесь, естественно, предпологается, что элементы группы G соответственно занумерованы).

Положим $T_k=\mathrm{Fix}\,G$. Так как $\mathrm{Fix}\,G$ не покрывает всю S^{n-1}, то существует $y_k\in S^{n-1}$, что $-y_k\notin \mathrm{Fix}\,G$. Пусть K_{k+1} - след деформации $d(x,t,y_k)$ по большим окружностям множества $\mathrm{Fix}\,G$ в y_k. Обозначим через T_{k+1} объединение множеств $g_1K_{k+1}, \dots, g_pK_{k+1}$ Множество T_{k+1} будет ($K+1$)-мерно. Дальнейшее построение множеств T_τ $(\tau=K, K+1,\dots, K+s)$ будем проводить по индукции.

Пусть замкнутое множество $T_{\tau-1}$ (оно, очевидно, ($\tau-1$)-мерно) уже построено. Так как по предположению $K+s<n-1$, то множество $T_{\tau-1}$ не покрывает всю S^{n-1}. Следовательно, найдется такая точка $y_{\tau-1}\in S^{n-1}$, что $-y_{\tau-1}\notin T_{\tau-1}$. Пусть K_τ - след деформации $d(x,t,y_{\tau-1})$ множества $T_{\tau-1}$ в $y_{\tau-1}$, а T_τ - объединение множеств $g_1K_\tau, g_2K_\tau, \dots, g_pK_\tau$

Построенное множество T_{K+s} будет ($K+s$)-мерным и, следовательно, не покрывает всю ($n-1$)-мерную сферу S^{n-1}.

Поэтому найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что и замкнутая ε_0-окрестность $U(\varepsilon_0)$ множества T_{k+s} не покрывает S^{n-1}. Пусть точка $-u_0$ не принадлежит замыканию $\bar{U}(\varepsilon_0)$ окрестности $U(\varepsilon_0)$.

Ниже будет построено нормированное поле Φ, определенное на S^{n-1} и удовлетворяющее следующим условиям:

(1) все векторы Φ отличны от $-u_0$;

(2) $\Phi g x = g \Phi x \quad (g \in G)$;

(3) Φ – полугомотопно тождественному.

Тогда, с одной стороны, из (1) поле Φ гомотопно постоянному полю $\Psi x = u_0$ и, следовательно, $\gamma(\Phi) = 0$; а, с другой стороны, из (2) и (3) с учетом теоремы 1 $\gamma(\Phi) \neq 0$

Так как $Fix\, G$ инвариантно относительно G, а G конечна, то существует сколь угодно малая G-инвариантная окрестность множества $Fix\, G$, которую мы обозначим через $\mathcal{L}$. Ясно, что можно предполагать выполненным условие: $\mathcal{L} \cup F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_s$ покрывает всю S^{n-1}, так как в противном случае мы можем перейти от исходного множества M к большему множеству (см. замечание 1). При этом, очевидно, не умаляя общности можно считать, что $-y_k \in \mathcal{L}$.

Положим поле Φ равным на $\mathcal{L}$ тождественному. Так как $\mathcal{L}$ мало отличается от $Fix\, G$ и не содержит $-y_k$, то и $d(\mathcal{L}, t, y_k)$ попадет в малую окрестность $d(Fix\, G, t, y_k)$, в частности в ε_0-окрестность $d(Fix\, G, t, y_k)$.

Продолжим теперь поле Φ на F_1. С этой целью продолжим его в соответствии с леммой 2 на F_{11} так, чтобы значения продолженного поля лежали в малой окрестности множества $d(\mathcal{L}, t, y_k)$ После этого продолжим Φ на все множество F_1 по формуле

$$\Phi g x = g \Phi x \qquad (x \in F_{11},\ g \in G).$$

Здесь мы используем то, что F_1 инвариантно относительно G и то, что $F_{1m} \cap F_{1\ell} = \emptyset$ при $m \neq \ell$ Ясно, что значения продолженного поля будут лежать в малой окрестности множества T_{k+1}.

Дальнейшие рассуждения проводятся по индукции. Если на множестве $\mathcal{L} \cup F_1 \cup \ldots \cup F_\ell$ поле Φ уже построено, то по лемме 2 поле Φ можно продолжить на $F_{(\ell+1)1}$ так, чтобы значения продолженного поля лежали в малой окрестности множества $K_{k+\ell+1}$. После этого поле Φ продолжаем на все $F_{\ell+1}$ по эквивариантности. Значения поля Φ на $\mathcal{L}\cup F_1\cup F_2\cup \ldots \cup F_{\ell+1}$ будут, очевидно, лежать в малой окрестности множества $T_{k+\ell+1}$.

После конечного числа шагов поле Φ будет определено на $\mathcal{L}\cup F_1\cup\ldots\cup F_s$, которое совпадает со всей S^{n-1}. Значения построенного поля Φ будут лежать в малой окрестности множества T_{k+s}. Поэтому точка $-u_0$ не принадлежит значениям поля Φ. По построению поле Φ эквивариантно относительно G и полугомотопно (даже, более того, равно) тождественному.

Теорема доказана.

3. Пусть E - гильбертово пространство, T - единичный шар в E, S - единичная сфера в E, G - конечная группа гомеоморфизмов T на себя, оставляющая инвариантной S ($|G|=p$). Обозначим через $(E_{n_k})_{n\in N}$ такую последовательность вложенных друг в друга n_k-мерных подпространств E, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{n_k}=E$.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что при каждом k $T\cap E_{n_k}$ инвариантны относительно G, причем $P_{n_k} g x = g P_{n_k} x$ ($x\in S$, $k=1,2,\ldots$), где P_{n_k} - операторы ортогонального проектирования на соответствующие E_{n_k}.

Непосредственно из теоремы 2 вытекает

<u>Теорема 3.</u>

Пусть на S задано действие конечной группы G, множество $Fix\,G=\{x\in S: \exists g\in G,\ g\neq 1,\ gx=x\}$ конечномерно. Тогда на S существуют множества сколь угодно большого конечного рода.

В дальнейшем понадобится

<u>Лемма 3.</u>

Пусть на S задано действие конечной группы G, B - эквивариантное отображение компактного множества $F\subset(S\setminus Fix\,G)$ в S.

Тогда $\gamma(F)\leq\gamma(BF)$.

Доказательство см. в [3].

<u>Следствие 3.</u>

Пусть B - из леммы 3. Тогда род множества $B(S^{n-1}\setminus Fix\,G)$

не меньше $n-k$

(Мы предполагаем, что $\dim Fix\, G = k, n-1 > k$).
Следуя [1], через M_{n_k} будем обозначать класс таких компактных множеств из $S \setminus Fix\, G$, которые являются множествами вида $B(Fc(S^{n-1} \setminus Fix\, G))$, где B – эквивариантный оператор.

Будем рассматривать слабо непрерывные равномерно дифференцируемые функционалы $f(\varphi)$, определенные на T и удовлетворяющие дополнительным условиям:

(a) $f(g\varphi) = f(\varphi) \quad (G \ni g)$;

(в) если $\varphi \notin \widetilde{Fix}\, G$, то $f(\varphi) > 0$; $f(\widetilde{Fix}\, G) = 0$;

(c) если $\varphi \notin \widetilde{Fix}\, G$, то $\Gamma\varphi \neq \theta$; $\Gamma(\widetilde{Fix}\, G) = \theta$;

(здесь Γ – градиент f, $\widetilde{Fix}\, G = \theta \cup \{x \in T \quad x \neq \theta \quad \frac{x}{\|x\|} \subset Fix\, G\}$)
Положим $\hat{f}(N) = \inf\limits_{\varphi \in N} f(\varphi)$ на множествах класса M_{n_k}. Пусть, далее, $c_{n_k} = \sup\limits_{N \in M_{n_k}} \hat{f}(N)$. Числа типа c_{n_k} называют критическими.

<u>Лемма 4.</u>

Справедливо равенство $\lim\limits_{k \to \infty} c_{n_k} = 0$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 4.6 (из [4], с. 364); при этом в соответствующих местах необходимо сослаться на лемму 3 и теорему 3 настоящей статьи и теорему 5 из [3]

Из леммы 4 и положительности чисел c_{n_k} немедленно следует

<u>Теорема 4.</u>

Слабо непрерывный равномерно дифференцируемый функционал, заданный на T и удовлетворяющий условиям (а), (в), (с), имеет на S не менее счетного числа критических чисел.

Теорема 4 обобщает соответствующий результат из [5], где рассматривалась ситуация функционалов, симметричных относительно свободных действий конечных циклических групп. Мы же здесь и далее предполагаем, что G действует, вообще говоря, несвободно, $Fix\, G$ – конечномерно.

По схеме М.А.Красносельского [4] может быть доказана (

<u>Теорема 5.</u>

Пусть на T задано линейное действие группы G ($|G| = p$), $Fix\, G$ – конечномерно. Пусть далее f –

слабо непрерывный равномерно дифференцируемый функционал, заданный на T и удовлетворяющий условиям (а), (в), (с).

Тогда J имеет на сфере S не менее счетного числа различных критических точек, которым соответствуют различные критические значения.

Несколько видоизменяя построения из [5], может быть получено обобщение теоремы 5 на случай конечных групп диффеоморфизмов; при этом, как и в [5], необходимы некоторые предположения относительно гладкости оператора Γ

В заключение автор пользуется случаем выразить благодарность П.П.Забрейко и Р.С.Липянскому за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. - М., 1975.
2. Баланов З.И., Бродский С.Д. Функциональный анализ.- Ульяновск, 1984. - С.18.
3. Шварц А.С. Род расслоенного пространства // ДАН СССР. - 1961. - Т.10. - С.217.
4. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. - М., 1956.
5. Аносов В.И. О критических точках периодических функционалов // ДАН СССР. - 1960.- Т.131.- № 2.- С.132.

Поступила 2 января 1986 года.

УДК 519.3

К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СМЕШАННОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ

Я.П.Вуцан
ЛГУ им. П.Стучки

Пусть в евклидовом пространстве R^n, $n \geq 2$, задана ограниченная строго липшицева область Ω [3] с границей $\partial\Omega$ и ее подобласти D, G и Ω' с границами ∂D, ∂G, $\partial\Omega'$, соответственно, такие, что $D \subset G \subset \Omega' \subset \Omega$ и $\rho(\bar D, \partial G) \geq \rho_0$, $\rho(\bar G, \partial\Omega') \geq \rho_0$, $\rho(\bar\Omega', \partial\Omega) \geq \rho_0$, где ρ – расстояние в метрике R^n, а ρ_0 – фиксированная положительная константа. Заданы также фиксированные числовой интервал $T \equiv \{t \in R \mid t_0 < t < t_1\}$, множества $Q \subset R^{S_1}$ и $\Sigma \subset R^{S_2}$, вектор $y^* = (y_1^*, \ldots, y_{n+m}^*) \in R^{n+m}$ такой, что $\bar y^* \equiv (y_1^*, \ldots, y_n^*) \in D$, функции $\varphi: \Omega \to R\ (\varphi \in W_2^1(\Omega))$, a, a_i, b_i, a_{ij}, g_0, g_i : $: \Omega \times \Sigma \to R$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, $\Psi_k : V' \equiv (R^{n+m} \times R^{n+1}) \to R$ $(k = 0, 1, \ldots, s)$, $f_r : T \times V \to R$ $(V \equiv V' \times Q$, $r = -s, \ldots, 0, \ldots, n+m)$, векторфункция $f \equiv (f_1, \ldots, f_{n+m})$.

Определим множества Σ и U допустимых управляющих векторфункций:

$$\Sigma \equiv \{\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{S_2}) \mid \sigma_i \in L_\infty(\Omega), i = 1, \ldots, S_2, \forall x \in \Omega\ \sigma(x) \in \Sigma\}, \tag{1}$$

$$U \equiv \{u = (u_1, \ldots, u_{S_1}) \mid u_j \in L_\infty(T), j = 1, \ldots, S_1, \forall t \in T\ u(t) \in Q\}. \tag{2}$$

Кроме того, введем функционалы $I_k : (C(\bar T))^{n+m} \times (C(\bar D))^{n+1} \times U \to R$,

$I_k = I_k(y, w, u) \equiv \Psi_k(y(t_1), w(\bar y(t_1))) + \int_T f_{-k}(\tau, y(\tau), w(\bar y(\tau)), u(\tau))\, d\tau$,

где $\bar y$ определяется соотношением $\bar y = (y_1, \ldots, y_n)$, если $y = (y_1, \ldots, y_{n+m})$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

<u>Задача 1</u>. Найти точную нижнюю грань функционала $I_0 = I_0(y, w, u)$ по всем парам $(\sigma, u) \in \Sigma \times U$ при связях

$$\forall \eta \in W_2^1(\Omega) \quad L(\sigma; z, \eta) \equiv \int_\Omega \{[a_{ij}(x, \sigma(x)) \cdot z_{x_j} + a_i(x, \sigma(x)) \cdot z]\eta_{x_i} -$$

$$- [b_i(x, \sigma(x)) \cdot z_{x_i} + a(x, \sigma(x)) \cdot z]\eta\} dx = \int_\Omega [g_i(x, \sigma(x))\eta_{x_i} - g_0(x, \sigma(x))\eta]\, dx, \tag{3}$$

$$z - \varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \tag{4}$$

$$\forall t \in \bar{T} \quad y(t) = y^{*} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), w[\bar{y}(\tau)], u(\tau))\, d\tau, \tag{5}$$

где $w = (z, z_{x_1}, \ldots, z_{x_n})$, и при дополнительных ограничениях

$$\forall t \in \bar{T} \quad \bar{y}(t) \in D, \tag{6}$$

$$I_k(y, w, u) \leq 0, \; k = 1, \ldots, s. \tag{7}$$

Здесь и далее, если не указано иное, по парам одинаковых индексов подразумевается суммирование в пределах от 1 до n. Обозначения функциональных пространств и их норм понимаются в смысле работы [3]. Выражения (3) и (5) означают, что мы интересуемся обобщенными решениями эллиптического и обыкновенного дифференциальных уравнений, соответственно.

В работе [1] были получены необходимые условия оптимальности управления объектами, описываемыми системой уравнений вида (3) - (5) при дополнительном ограничении (6) в предположении выпуклости множеств допустимых управлений U и Σ и дифференцируемости подинтегральной функции f по аргументу u, а коэффициентов и свободных членов эллиптического уравнения (3) - по σ.

В натоящей статье при помощи методики, изложенной, например, в [6], в задачу оптимального управления добавлены также дополнительные ограничения (7), а необходимые условия оптимальности управления получены без предположения о выпуклости и дифференцируемости.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнены следующие условия (обозначения по возможности сохраняются такие же как в работе [1]):

Г1. Функции $a_{ij}(x,\xi)$, $a_i(x,\xi)$, $b_i(x,\xi)$, $a(x,\xi)$, $g_0(x,\xi)$, $g_i(x,\xi): \Omega \times \Sigma \to R$; $i,j = 1,\ldots,n$, удовлетворяют условиям Каратеодори.

Г2. В области Ω' коэффициенты a, b_i, a_i, a_{ij} и свободные члены g_0, g_i, $i,j = 1,\ldots,n$, уравнения (3) не зависят от управления $\sigma \in \Sigma$, т.е. $\forall x \in \Omega'$ $\forall \xi \in \Sigma$ $a(x,\xi) = a(x)$, $b_i(x,\xi) = b_i(x)$ и т.д.; кроме того, $a, g_0 \in C^{\alpha}(\bar{\Omega}')$, b_i, a_i, $a_{ij}, g_i \in C^{1+\alpha}(\bar{\Omega}')$ $(\alpha > 0)$ и их нормы в этих пространствах ограничены некоторой константой μ_2.

Г3. Для любых $\xi \in \Sigma$, $x \in \Omega$ и $\hat{x} \in \Omega'$ выполняются соотношения

$$\forall \psi\in R \quad \nu|\psi|^2\le a_{ij}(x,\xi)\psi_i\psi_j\le\mu|\psi|^2,\ a_{ij}=a_{ji},\ i,j=1,\dots,n,$$
$$\sum_{i=1}^{n}[a_i^2(x,\xi)+b_i^2(x,\xi)]+|a(x,\xi)|\le h_1(x),$$
$$\sum_{i=1}^{n}|g_i(x,\xi)|\le h_2(x), \qquad |g_0(x,\xi)|\le h_3(x),$$
$$|g_0(\hat{x})|+\sum_{i=1}^{n}g_i^2(\hat{x})\le h_4(x),$$

здесь q, q_1, ν, μ - фиксированные положительные константы, причем $q>n$ и $q_1=2q(q+2)^{-1}$, а $h_1\in L_{q/2}(\Omega)$, $h_2\in L_2(\Omega)$, $h_3\in L_{q_1}(\Omega)$ и $h_4\in L_{q/2}(\Omega')$ - фиксированные функции.

Г5. При произвольных функциях $\bar{\varphi}\in W_2^1(\Omega)$, $\bar{g}_0\in L_{q_1}(\Omega)$, $\bar{g}_i\in L_2(\Omega)$, $i=1,\dots,n$, и при произвольном управлении $\sigma\in\Sigma$ как задача Дирихле $\forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $L(\sigma;z,\eta)=\int_\Omega[\bar{g}_i(x)\eta_{x_i}-\bar{g}_0(x)\cdot\eta]dx$, $z-\bar{\varphi}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, так и задача Дирихле для сопряженного уравнения

$$\forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\ L^*(\sigma;z,\eta)\equiv\int_\Omega\{[a_{ij}(x,\sigma(x))\cdot z_{x_j}-b_i(x,\sigma(x))\cdot z]\eta_{x_i}+$$
$$+[a_i(x,\sigma(x))\cdot z_{x_i}-a(x,\sigma(x))\cdot z]\eta\}dx=\int_\Omega[\bar{g}_i(x)\eta_{x_i}-\bar{g}_0(x)\cdot\eta]dx,$$
$$z-\bar{\varphi}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

имеет единственное (каждое уравнение свое) обобщенное решение $z\in W_2^1(\Omega)$ и справедлива априорная оценка

$$\|z\|_{2,\Omega}^{(1)}\le C_0[\|\bar{g}_0\|_{q_1,\Omega}+\sum_{i=1}^{n}\|\bar{g}_i\|_{2,\Omega}+\|\bar{\varphi}\|_{2,\Omega}^{(1)}]$$

с константой C_0, независящей от $\sigma,\bar{\varphi},\bar{g}_0,\bar{g}_i$, $i=1,\dots,n$.

Г6. Существуют область $\hat{\Omega}\supset\bar{\Omega}$ и функции $\bar{b}_i,\bar{a}_{ij}\in C^{1+\alpha}(\hat{\Omega})$, $\bar{a}_{ij}=\bar{a}_{ji}$, $a_i,a\in C^{\alpha}(\hat{\Omega})$, а также бесконечно дифференцируемая скалярная функция ζ с носителем $\operatorname{supp}\zeta\subset G$, $\forall x\in G$ $0\le\zeta(x)\le 1$, $\forall x\in\bar{D}$ $\zeta(x)=1$, такие, что для оператора

$$\mathfrak{M}^*z\equiv\frac{\partial}{\partial x_i}(\tilde{a}_{ij}z_{x_j}-\tilde{b}_iz)-\tilde{a}_iz_{x_i}+\tilde{a}z,$$

где $\tilde{a}\equiv a\zeta+(1-\zeta)\bar{a}$, $\tilde{b}_i\equiv b_i\zeta+(1-\zeta)\bar{b}_i$, $\tilde{a}_i\equiv a_i\zeta+(1-\zeta)\bar{a}_i$,
$\tilde{a}_{ij}\equiv a_{ij}\zeta+(1-\zeta)\bar{a}_{ij}$, $i,j=1,\dots,n$,

в $\hat{\Omega}$ существует фундаментальное решение $F(x,x')$ (см. [4]), которое вместе со своими частными производными $\frac{\partial}{\partial x_i}F(x,x')$, $\frac{\partial}{\partial x_i'}F(x,x')$ и $\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j'}F(x,x')$, $i,j=1,\dots,n$, равномерно непрерывно на $(\hat{\Omega}\setminus D)\times\bar{D}'$ для любой области D' такой, что $\bar{D}'\subset D$.

Г9.* Функции $\Psi_k=\Psi_k(y,w)$, $k=0,\dots,s$, имеют непрерывные по $v'\equiv(y,w)\in V'$ частные производные $\Psi_y\equiv(\Psi_{y_1},\dots,\Psi_{y_{n+m}})$

и $\psi_w \equiv (\psi_{w_0}, \psi_{w_1}, \ldots, \psi_{w_n})$.

Г10*. Функции $f_r = f_r(\tau, y, w, u)$, $r = -s, \ldots, 0, \ldots, n+m$, для почти всех $\tau \in T$ обладают частными производными $f_{r_y} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y_1} f_r, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_{n+m}} f_r\right)$ и $f_{r_w} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial w_0} f_r, \frac{\partial}{\partial w_1} f_r, \ldots, \frac{\partial}{\partial w_n} f_r\right)$; все эти функции являются функциями Каратеодори и $\forall \tau \in T$, $\forall v \in V$ удовлетворяют оценкам $|f_r(\tau, v)| \le h(\tau) \cdot \gamma(v)$, $|f_{r_y}(\tau, v)| \le h(\tau) \cdot \gamma(v)$, $|f_{r_w}(\tau, v)| \le h(\tau) \cdot \gamma(v)$, где $h \in L_1(T)$ и $\gamma \in C(R)$ – фиксированные функции.

Определение. Пусть X – пространство, в котором определено понятие сходимости последовательности $(x^n)_{n \in N} \subset X$ к элементу $x^0 \in X$. Замкнутой (в смысле этой сходимости) выпуклой оболочкой $\overline{co} A$ множества $A \subset X$ назовем совокупность всех $a \in X$, для которых существуют последовательности выпуклых комбинаций элементов множества A, сходящиеся к a.

Натуральному числу N сопоставим множества

$$\mathcal{D}_N \equiv \{d = (d_1, \ldots, d_N) \mid d_i \in L_2(\Omega);\ \forall x \in \Omega\ \sum_{i=1}^{N} d_i(x) = 1,\ 0 \le d_j(x) \le 1,\ j = 1, \ldots, N\},$$

$$\mathcal{B}_N \equiv \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \mid \beta_i \in L_2(T);\ \forall t \in T\ \sum_{i=1}^{N} \beta_i(t) = 1,\ 0 \le \beta_j(t) \le 1,\ j = 1, \ldots, N\}$$

и их подмножества

$$\mathcal{D}_N^0 \equiv \{d = (d_1, \ldots, d_N) \in \mathcal{D}_N \mid \forall x \in \Omega\ \ d_i(x) = 0 \text{ или } 1,\ i = 1, \ldots, N\},$$

$$\mathcal{B}_N^0 \equiv \{\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_N) \in \mathcal{B}_N \mid \forall t \in T\ \ \beta_i(t) = 0 \text{ или } 1,\ i = 1, \ldots, N\}.$$

Замечание 1. Очевидно, что если $d \in \mathcal{D}_N^0$, то почти в каждой точке $x \in \Omega$ одна из функций набора d_i, $i = 1, \ldots, N$, равна единице, а остальные равны нулю. Аналогично – почти в каждой точке $t \in T$ одна из функций β_i, $i = 1, \ldots, N$, равна единице, а остальные функции – нулевые.

Замкнутые выпуклые оболочки $\overline{co}\, \mathcal{D}_N^c$ и $\overline{co}\, \mathcal{B}_N^c$ множеств $\mathcal{D}_N^0$ и $\mathcal{B}_N^0$ будем понимать в смысле сходимости по норме в пространствах $(L_2(\Omega))^N$ и $(L_2(T))^N$, соответственно.

Нетрудно показать, что $\overline{co}\, \mathcal{D}_N^c = \mathcal{D}_N$ и $\overline{co}\, \mathcal{B}_N^c = \mathcal{B}_N$.

При фиксированных $\sigma^1, \ldots, \sigma^N \in \Sigma$ и $d \in \mathcal{D}_N$ определим оператор $\mathcal{A}(d; \sigma^1, \ldots, \sigma^N)$, действующий на элементы $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ по следующему правилу: $\mathcal{A}(d; \sigma^1, \ldots, \sigma^N)\eta \equiv$

$$\equiv \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{N} d_k(x) \cdot [-b_i(x, \sigma^k(x)) \cdot (\eta_{x_i} + \varphi_{x_i}) - a(x, \sigma^k(x))(\eta + \varphi) + g(x, \sigma^k(x))] \\ \sum\limits_{k=1}^{N} d_k(x) \cdot [a_{i1}(x, \sigma^k(x)) \cdot (\eta_{x_i} + \varphi_{x_i}) + a_1(x, \sigma^k(x))(\eta + \varphi) - g_1(x, \sigma^k(x))] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum\limits_{k=1}^{N} d_k(x) \cdot [a_{in}(x, \sigma^k(x)) \cdot (\eta_{x_i} + \varphi_{x_i}) + a_n(x, \sigma^k(x))(\eta + \varphi) - g_n(x, \sigma^k(x))] \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Если $\sigma^1, \ldots, \sigma^N \in \Sigma$ и функции a_{ij}, a_i, b_i, a, g_0, g_i, φ $(i,j=1,\ldots,n)$ фиксированы и удовлетворяют условиям Г1 и Г3, то при помощи теорем вложения (см. [3, с. 77]) легко показать, что для любого набора $d=(d_1,\ldots,d_N)\in\mathcal{D}_N$ оператор $\mathcal{A}(d;\sigma^1,\ldots\sigma^N)$ отображает пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $W \equiv \equiv L_{\frac{2q}{q-2}}(\Omega)\times|L_2(\Omega)|^n$.

Для произвольных элементов $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $f\in W$ определим форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ при помощи следующего равенства:

$$\langle f,\eta\rangle \equiv \int_\Omega [f(x)\cdot\eta(x)+\sum_{i=1}^n f_i(x)\cdot\eta_{x_i}(x)]dx. \tag{9}$$

Введем также множества операторов

$$\mathcal{T}^c(\sigma^1,\ldots,\sigma^N)\equiv\{\mathcal{A}(d;\sigma^1,\ldots,\sigma^N)\mid d\in\mathcal{D}_N^c\}$$

и $\mathcal{T}(\sigma^1,\ldots,\sigma^N)\equiv\{\mathcal{A}(d;\sigma^1,\ldots,\sigma^N)\mid d\in\mathcal{D}_N\}$.

Замкнутую выпуклую оболочку $\overline{co}\,\mathcal{T}^c(\sigma^1,\ldots,\sigma^N)$ будем понимать в смысле сильной сходимости, т.е.

последовательность операторов $(\mathcal{A}^k)_{k\in N}$ сходится к некоторому оператору $\mathcal{A}^0$, если для любого $\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $(\mathcal{A}^k\eta)_{k\in N}$ сходится к $\mathcal{A}^0\eta$ по норме пространства W

Потребуем еще выполнения следующего условия:

Г5*. Для любых векторфункций $\tilde{g}\equiv(\tilde{g}_0,\tilde{g}_1,\ldots,\tilde{g}_n)\in W$, наборов $\sigma^1,\ldots,\sigma^N\in\Sigma$ и операторов $\mathcal{A}\in\overline{co}\,\mathcal{T}^c(\sigma^1,\ldots,\sigma^N)$ вариационные равенства

$$\forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\qquad\langle\mathcal{A}\hat{z}-\tilde{g},\eta\rangle=0$$

однозначно разрешимы относительно $\hat{z}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и имеют место априорные оценки

$$\|\hat{z}\|_{2,\Omega}^{(1)}\le C_1\cdot[\|\tilde{g}_0\|_{\frac{2q}{q-2},\Omega}+\sum_{i=1}^n\|\tilde{g}_i\|_{2,\Omega}]$$

с константой C_1, не зависящей от конкретных наборов $\sigma^1,\ldots,\sigma^N$, операторов $\mathcal{A}$ и функций $\tilde{g}$

Отметим, что выполнение этого условия в [1] не требовалось, однако в большинстве тех практически важных ситуаций, когда имеет место требование Г5, выполняется также Г5*.

Для любого оператора $\mathcal{A}\in\overline{co}\,\mathcal{T}^c(\sigma_1,\ldots,\sigma^N)$ соответствующее решение $\hat{z}$ вариационного равенства $\forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ $\langle\mathcal{A}\hat{z},\eta\rangle=0$ обозначим символом $\hat{z}(\mathcal{A})$, и для любого подмножества $\hat{\mathcal{T}}\subset\subset\overline{co}\,\mathcal{T}^c(\sigma^1,\ldots,\sigma^N)$ введем множество соответствующих решений

$$\hat{Z}(\hat{\mathcal{T}})\equiv\{\hat{z}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\mid\hat{z}=\hat{z}(\mathcal{A}),\mathcal{A}\in\hat{\mathcal{T}}\}.$$

Замечание 2. Из условий Г1 – Г3 и результатов работы [3, с. 229, 235, 240 и 250] следует, что для любого оператора $\mathcal{A}\in \overline{co}\,\mathcal{T}^c(\sigma^1,\dots,\sigma^N)$ соответствующая функция $z\equiv\hat{z}(\mathcal{A})+\varphi$ принадлежит пространствам $W_2^1(\Omega)$ и $C^{2,\alpha}(\bar G)$. Аналогичное утверждение справедливо также для любого решения z краевой задачи (3),(4).

Лемма 1. Пусть выполнены условия Г1, Г3, Г5*. Тогда для любых наборов $\sigma^1,\dots,\sigma^N\in\Sigma$ справедливы соотношения

$$\hat{Z}(\mathcal{T}(\sigma^1,\dots,\sigma^N))\subset \overline{\hat{Z}(\overline{co}\,\mathcal{T}^c(\sigma^1,\dots,\sigma^N))} \qquad (10)$$

и

$$\hat{Z}(\overline{co}\,\mathcal{T}^c(\sigma^1,\dots,\sigma^N)) = \overline{\hat{Z}(\mathcal{T}^c(\sigma^1,\dots,\sigma^N))} \text{ в } W_2^1(\Omega). \qquad (11)$$

Доказательство. Для доказательства соотношения (10) достаточно воспользоваться условиями Г1 и Г3, равенством $\overline{co}\,\mathcal{D}_N^c=\mathcal{D}_N$ и теоремой Егорова [2, с.166], из которых следует справедливость вложения $\mathcal{T}(\sigma^1,\dots,\sigma^N)\subset\overline{co}\,\mathcal{T}^c(\sigma^1,\dots,\sigma^N)$. В свою очередь, из условий Г1, Г3 и аффинности операторов $\mathcal{A}\in\mathcal{T}^c(\sigma^1,\dots,\sigma^N)$ по аргументу $\eta\in W_2^1(\Omega)$ (см. определение (8)) легко вывести условия, при которых в нашей ситуации для множества операторов $\mathcal{T}^c(\sigma^1,\dots,\sigma^N)$ применима теорема 1 из работы У.Е.Райтума [6], откуда вытекает равенство (11). Лемма доказана.

Переходим к основному результату данной статьи.

Теорема 1. Пусть выполнены условия Г1–Г3, Г5, Г5*, Г6, Г9*, Г10*. Пусть $(\sigma^0,u^0)\in\Sigma\times U$ – пара управлений доставляющая точную нижнюю грань функционалу I_0 в задаче 1, а $y^0\in(C(\bar T))^{n+m}$ и $z^0\in W_2^1(\Omega)\cap C^2(\bar D)$ – соответствующие ей решения уравнения (5) и краевой задачи (3), (4), соответственно; $w^0=(w_0^0, w_1^0,\dots,w_n^0)\equiv(z^0,z^0_{x_1},\dots,z^0_{x_n})$.

Тогда найдутся такие числа

$$\lambda_r\ge 0,\ r=0,1,\dots,s\ ,\ \sum_{j=0}^{s}\lambda_j^2>0, \qquad (12)$$

что для любых $(\sigma,u)\in\Sigma\times U$ справедливо неравенство

$$\sum_{r=0}^{s}\lambda_r\cdot\mathcal{F}_r(\sigma,u)\ge\sum_{r=0}^{s}\lambda_r\cdot\mathcal{F}_r(\sigma^0,u^0) \qquad (13)$$

и при любом $r\in\{1,\dots,s\}$

$$\lambda_r\cdot I_r(y^0,w^0,u^0)=0\ ; \qquad (14)$$

здесь для каждого $r\in\{0,1,\dots,s\}$:

$$\mathcal{F}_r(\sigma,u)\equiv\int\sum_{i=-s}^{n+m}\hat{\mathcal{X}}_i^r(\tau)\cdot f_i(\tau,y^0(\tau),w^0(\bar{y}^q\tau)),u(\tau))\,d\tau+$$

$$+\int_{\Omega\setminus D}\{[(g_i(x,\sigma(x))-a_{ij}(x,\sigma(x))\cdot z^0_{x_j}(x)-a_i(x,\sigma(x))\cdot z^0(x)]\frac{\partial}{\partial x_i}(W^{r,2}+\xi W^{r,1})+$$
$$+[b_i(x,\sigma(x))\cdot z^0_{x_i}(x)+a(x,\sigma(x))\cdot z^0(x)-g_0(x,\sigma(x))]\cdot(W^{r,2}+\xi W^{r,1})\}dx,$$

$$W^{r,1}(x)=\frac{\partial}{\partial w_0}\Psi_r(y^0(t_1),w^0(\bar y^0(t_1)))\cdot F(x,\bar y^0(t_1))+$$
$$+\frac{\partial}{\partial w_j}\Psi_r(y^0(t_1),w^0(\bar y^0(t_1)))\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}F(x,\bar y^0(t_1))+$$
$$+\int_T\sum_{i=-s}^{n+m}\hat{\mathcal{X}}^r_i(\tau)\cdot[\frac{\partial}{\partial w_0}f_i(\tau,y^0(\tau),w^0(\bar y^0(\tau)),u^0(\tau))\cdot F(x,\bar y^0(\tau))+$$
$$+\frac{\partial}{\partial w_j}f_i(\tau,y^0(\tau),w^0(\bar y^0(\tau)),u^0(\tau))\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}F(x,\bar y^0(\tau))]d\tau,$$

$$\hat{\mathcal{X}}^r_i(\tau)\equiv\begin{cases}\mathcal{X}^r_i(\tau) & \text{если } i\in\{1,\dots,n+m\},\\ 1, & \text{если } i=-r,\\ 0, & \text{если } i\in\{-s,\dots,0\}\setminus\{-r\},\end{cases}$$

$\mathcal{X}^r=(\mathcal{X}^r_1,\dots\mathcal{X}^r_{n+m})$ – решение из $(C(\bar T))^{n+m}$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathcal{X}^r_i}{d\tau}+\sum_{j=1}^{n+m}\mathcal{X}^r_j(\tau)\cdot æ_{ij}(\tau)+æ_{i,-r}(\tau)=0,\quad i=1,\dots,n+m,\ r=0,1,\dots,S,$$

где

$$æ_{ik}(\tau)=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial y_i}f_k(\tau,y^0(\tau),w^0(\bar y^0(\tau)),u^0(\tau)), & \text{если } i=n+1,\dots,n+m,\\ \frac{\partial}{\partial y_i}f_k(\tau,y^0(\tau),w^0(\bar y^0(\tau)),u^0(\tau))+\\ \quad+\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial w_j}f_k(\tau,y^0(\tau),w^0(\bar y^0(\tau)),u^0(\tau))\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}w^j_0(\bar y^0(\tau)), & \text{если } i=1,\dots,n,\end{cases}$$
$$k=-s,\dots,0,\dots,n+m,$$

при конечных условиях

$$\mathcal{X}^r_i(t_1)=\begin{cases}\frac{\partial}{\partial y_i}\Psi_r(y^0(t_1),w^0(\bar y^0(t_1))), & \text{если } i=n+1,\dots,n+m,\\ \frac{\partial}{\partial y_i}\Psi_r(y^0(t_1),w^0(\bar y^0(t_1)))+\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial w_j}\Psi_r(y^0(t_1),w^0(\bar y^0(t_1)))\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}w^j_0(\bar y^0(t_1)), & \text{если } i=1,\dots,n;\end{cases}$$

$W^{r,2}$ – решение из $\mathring{W}^1_2(\Omega)$ вариационного равенства (см. также условие Г5)

$$\forall\eta\in\mathring{W}^1_2(\Omega)\quad L^*(\sigma^0;W^{r,2},\eta)=-\int_{\Omega\setminus D}W^{r,1}\xi_{x_i}(a_{ij}\eta_{x_j}+a_i\eta)dx+$$
$$+\int_{\Omega\setminus D}(1-\xi)[(\bar a_{ij}W^{r,1}_{x_j}-\bar b_iW^{r,1})\eta_{x_i}+(\bar a_iW^{r,1}_{x_i}-\bar aW^{r,1})\eta]dx;$$

функции ξ, F, $\frac{\partial}{\partial x_i}F$, $\bar a_{ij}$, $\bar a_i$, $\bar b_i$, $\bar a$ $(i,j=1,\dots,n)$ определены условием Г6.

<u>Доказательство</u>. Зафиксируем натуральное число N и возьмем некоторый набор пар функций $\{(\sigma^1,u^1),\dots,(\sigma^N,u^N)\}$ такой, что $(\sigma^i,u^i)\in\Sigma\cdot U$, $i=1,\dots,N$, и $(\sigma^1,u^1)=(\sigma^0,u^0)$, где (σ^0,u^0) – пара управлений доставляющая точную нижнюю грань

функционалу I_c в задаче 1.

Введем функционалы

$$\mathcal{J}_r(y,w,\beta)=\Psi_r(y(t_1),w(\bar{y}(t_1)))+\int_T\sum_{k=1}^{N}\beta_k(\tau)\cdot f_{-r}(\tau,y(\tau),w(\bar{y}(\tau)),u^k(\tau))d\tau,$$
$$r=0,\dots,s,$$

и рассмотрим новую задачу оптимального управления:

Задача 2. Найти среди элементов множества $\mathcal{D}_N^o\times\mathcal{B}_N^c$ пару (d,β), доставляющую минимальное значение функционалу $\mathcal{I}=\mathcal{J}_0(y,w,\beta)$ при связях

$$\forall\eta\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\quad\langle\mathcal{A}(d;\sigma^1,\dots,\sigma^N)\hat{z},\eta\rangle=0,\quad\hat{z}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\tag{15}$$

$$\forall t\in\bar{T}\quad y(t)=y^o+\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{N}\beta_k(\tau)\cdot f(\tau,y(\tau),w(\bar{y}(\tau)),u^k(\tau))d\tau,\tag{16}$$

где $z=\hat{z}+\varphi$, $w=(z,z_{x_1},\dots,z_{x_n})$,

и дополнительных ограничениях

$$\forall t\in\bar{T}\qquad\bar{y}(t)\in D,\tag{17}$$

$$\mathcal{J}_r(y,w,\beta)\le 0,\quad r=1,\dots,s.\tag{18}$$

Из того, что множества U и Σ допустимых управлений в задаче 1 определены равенствами (1) и (2), в силу замечания 1 легко следует, что для любого элемента $(d,\beta)\in\mathcal{D}_N^o\times\mathcal{B}_N^o$ функции, определенные выражениями

$$^{\beta}u(t)=u^j(t),\ \text{если}\quad t\in\operatorname{supp}\beta_j,\tag{19}$$

$$^{d}\sigma(x)=\sigma^i(x),\ \text{если}\quad x\in\operatorname{supp}d_i\tag{20}$$

также принадлежат множествам U и Σ, соответственно. Отсюда и из определений (8) и (9) следует, что уравнение (15) относительно $\hat{z}=z-\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ эквивалентно краевой задаче (3), (4), выписанной при управлении $\sigma={}^{d}\sigma\in\Sigma$, а уравнение (16) эквивалентно (5) при $u={}^{\beta}u\in U$

Поскольку управлениями $(d,\beta)\in\mathcal{D}_N^c\times\mathcal{B}_N^o$ при помощи формул (19), (20) сопоставляется некоторое подмножество управлений $(\sigma,u)=({}^{d}\sigma,{}^{\beta}u)\in\Sigma\times U$, то задачу 2 можно рассматривать как сужение задачи 1. Таким образом, решением задачи 2 является набор $(d^c,\beta^o)\in\mathcal{D}_N^c\times\mathcal{B}_N^o$ такой, что $({}^{d^c}\sigma,{}^{\beta^c}u)=(\sigma^*,u^*)$, т.е.

$$\forall x\in\Omega\quad d_1^c(x)=1,\ d_2^c(x)=\dots=d_N^c(x)=0,\tag{21}$$

$$\forall t\in T\quad\beta_1^c(t)=1,\ \beta_2^c(t)=\dots=\beta_N^c(t)=0.\tag{22}$$

Обозначим теперь через $w^c \equiv (x^c, x^c_{x_1}, \ldots, x^c_{x_n})$ и y^c решения системы (15), (16), соответствующие этим управлениям $d^c = (1, 0, \ldots, 0)$ и $\beta^c = (1, 0, \ldots, 0)$, определим функционал

$$S(y, w, \beta) \equiv \int_{\Omega} \sum_{i=0}^{n} (w_i(x) - w_i^c(x))^2 dx + \int_T \sum_{i=1}^{m} (y_i(t) - y_i^c(t))^2 dt + \left[\int_T (1 - \beta_1(t)) dt\right]^2 + \sum_{i=2}^{N} \left[\int_T \beta_i(t) dt\right]^2$$

и рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Найти среди элементов множества $\mathcal{D}_N \times \mathcal{B}_N$ пару (d, β), доставляющую минимальное значение функционалу

$$\mathcal{J}_c^* = \mathcal{J}_c^*(y, w, \beta) \equiv \mathcal{J}_c(y, w, \beta) + S(y, w, \beta)$$

при связях (15) – (16) и дополнительных ограничениях (17) и

$$\mathcal{J}_r^*(y, w, \beta) \equiv \mathcal{J}_r(y, w, \beta) + S(y, w, \beta) \leq 0, \qquad r = 1, \ldots, s. \tag{23}$$

Покажем, что набор функций d^c, β^c, w^c, y^c доставляет решение также задаче 3.

Очевидно, что, ввиду справедливости равенства $S(y^c, w^c, \beta^c) = 0$, данная четверка функций удовлетворяет всем связям и дополнительным ограничениям задачи 3 и при этом $\mathcal{J}_c^*(y^c, w^c, \beta^c) = \mathcal{J}_c(y^c, w^c, \beta^c)$.

Допустим, что d^c, β^c, w^c, y^c не доставляет решение задаче 3. Это означает, что существует некоторая другая четверка функций $\tilde{d} \in \mathcal{D}_N$, $\tilde{\beta} \in \mathcal{B}_N$, $\tilde{y} \in (C(\bar{T}))^{n+m}$, $\tilde{w} \equiv (\tilde{x}, \tilde{x}_{x_1}, \ldots, \tilde{x}_{x_n})$, где $\tilde{x} \in W_2^1(\Omega) \cap C^2(\bar{D})$ (см. замечание 2), удовлетворяющая всем связям и дополнительным ограничениям задачи 3, такая, что

$$\mathcal{J}_c^*(\tilde{y}, \tilde{w}, \tilde{\beta}) < \mathcal{J}_c^*(y^c, w^c, \beta^c); \tag{24}$$

при этом будем предполагать, что $(\tilde{\beta}, \tilde{y}, \tilde{w}) \neq (\beta^c, y^c, w^c)$, ибо управление d в задачах 2 и 3 служит только для определения соответствующего решения $\hat{x} \in \hat{W}_2^1(\Omega)$ уравнения (15), и одному и тому же решению $\hat{x}$, вообще говоря, могут соответствовать различные управления d, но на величину функционалов $\mathcal{J}_0$ и $\mathcal{J}_0^*$ эти различия никак не влияют.

Поскольку $\tilde{d} \in \mathcal{D}_N$, то $\hat{x} = \tilde{x} - \varphi$ принадлежит множеству $\hat{Z}(\mathcal{K}(\sigma^1, \ldots, \sigma^N))$, а тогда, согласно лемме 1, $\hat{x} \in \hat{Z}(\overline{co}\,\mathcal{K}(\sigma^1, \ldots, \sigma^N))$ и существует такая последовательность $(d^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_N^c$, что соответствующая ей последовательность $(\hat{x}(d^k))_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к $\hat{x}$ по норме $W_2^1(\Omega)$. Тогда очевидна и сходимость

$$x^k \equiv \hat{x}(d^k) + \varphi \to \tilde{x} \text{ в } W_2^1(\Omega) \text{ при } k \to \infty. \tag{25}$$

Кроме того, следует отметить, что из условия Г3 в силу [3, с.240, 250] следует $\{x^k, k=1,2,\dots\} \subset C^{1,\hat\alpha}(\bar\Omega')$ при некотором $\hat\alpha>0$ и ограниченность этого множества в $C^{1,\hat\alpha}(\bar\Omega')$. Сейчас докажем, что из $\delta x^k \equiv x^k - x^0 \to 0$ в $W_2^1(\Omega)$ следует $\delta x^k \to 0$ в $C^{2+\alpha}(\bar D)$. Выберем некоторую область G' класса $C^{1,\alpha}$ [3, с.31] такую, что $G' \supset G$ и G' находится строго внутри Ω'. Нетрудно показать справедливость оценки [3, с. 79]

$$\int_{\partial G'} |\delta x^k|^2 ds \le \hat c \cdot \int_{\Omega} |\delta x^k|^2 dx, \tag{26}$$

в левой части которой стоит $(n-1)$ мерный поверхностный интеграл по границе $\partial G'$, а величина константы $\hat c$ конечна и зависит только от расстояния $\rho(G', \partial\Omega') > 0$. На границе $\partial G'$ определим функции $\varphi^k(x) \equiv \delta x^k(x)$, $x \in \partial G'$. Тогда при фиксированном k функция δx^k является классическим решением следующей краевой задачи

$$a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} x + \left[\frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij}(x) + a_i(x) + b_i(x)\right] \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} x + \left[\frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x) + a(x)\right] x = 0, \quad x \in G', \tag{27}$$

$$x(x) = \varphi^k(x), \qquad x \in \partial G'. \tag{28}$$

Сначала допустим, что $x = \delta x^k$ является единственным решением задачи (27), (28). Тогда, учитывая свойства гладкости коэффициентов, приведенные в условии Г2, из теоремы 21.У работы К.Миранды [4] следует, что для уравнения (27) существует функция Грина [4, с.26], позволяющая, согласно этой же теореме, выразить решение x задачи Дирихле (27), (28) в виде обобщенного потенциала двойного слоя [4, с.45] с плотностью $\varphi^k(x)$ по поверхности $\partial G'$. Из этого представления, свойств функции Грина и неравенства Коши следует справедливость оценки

$$\sup_{x \in G} |\delta x^k(x)| \le \check c \cdot \left[\int_{\partial G'} |\varphi^k|^2 ds\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

в которой константа $\check c$ зависит от функции Грина и областей G и G', но не зависит от φ^k, $k=1,2,\dots$

Аналогичную оценку (29), как это следует из [4, с.83], а также [8, с.71-77], можно получить и для случая, когда для краевой задачи (27), (28) существуют отличные от δx^k решения. В этом случае следует пользоваться функцией Грина

„в обобщенном смысле" [4, с.83] или [8, с.71]), существование которой доказывается по схеме, изложенной в [8].

Теперь из выражений (26), (29) и из [3, с.235] легко получается справедливость неравенства

$$|\delta x^k(x)|_D^{(2+\alpha)} \leq C\,\|\delta x^k\|_{2,\Omega}^{(1)}$$

с константой C, зависящей лишь от показателя α, областей D, G, G', Ω и расстояния между ними. Отсюда и из (25) заключаем, что

$$w^k \to \tilde{w} \quad \text{в} \quad (C(\bar{D}))^{n+1}, \tag{30}$$

где $w^k \equiv (x^k, x^k_{x_1}, \dots, x^k_{x_{n}})$, $k = 1, 2, \dots$

Далее, нетрудно показать, что для функции $\hat{\beta} \in \mathcal{B}_N$ существует последовательность $(\beta^k)_{k\in N} \subset \mathcal{B}^c_N$ такая, что

$$(\beta^k)_{k\in N} \text{ слабо сходится к } \tilde{\beta} \text{ в } (L_2(T))^N. \tag{31}$$

Если допустить, что при некотором k существует решение $y = y^{k,\lambda}_t \in (C(\bar{T}))^{n+m}$ уравнения

$$y(t) = y^* + \lambda \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \beta_j(\tau)\cdot f(\tau, y(\tau), w(\bar{y}(\tau)), u^j(\tau))\,d\tau,$$

соответствующее функциям $\beta = \beta^k$, $w = w^k$ и фиксированному параметру $\lambda \in [0,1]$, то из требования Г10* при помощи леммы Гронуолла можно доказать справедливость априорной оценки

$$|y^k - \tilde{y}|_{\bar{T}} \leq \lambda c^* \cdot \Big\{\sup_{t\in T} \Big|\int_{t_0}^{t} [\beta^k_j(\tau) - \tilde{\beta}_j(\tau)]\cdot f(\tau, y^0(\tau), w^0(\bar{y}^0(\tau)), u^j(\tau))\,d\tau\Big| + \tag{32}$$
$$+ |w^k - w^0|_{\bar{D}}\Big\}$$

с константой c^* не зависящей от β^k, w^k, y^k и λ. Отметим, что из слабой сходимости $(\beta^k)_{k\in N}$ к $\tilde{\beta}$, сепарабельности пространства $L_2(T)$ и возможности введения в $L_2(T)$ метрики, соответствующей слабой топологии этого пространства [2], следует, что первое слагаемое в фигурной скобке в (32) стремится к 0 при $k \to \infty$.

Существование при достаточно большом k решения $y^k \in (C(\bar{T}))^{n+m}$ уравнения (16) при $\beta = \beta^k$, $w = w^k$, удовлетворяющего условию (17), тогда доказывается из принципа Шаудера [7, с. 416-417] при помощи оценки (32).

Очевидно, что при $k \to \infty$

$$y^k \to y^0 \quad \text{в} \quad (C(\bar{T}))^{n+m}. \tag{33}$$

Из сходимостей (30), (31), (33) и неравенства (24) следует существование управлений $(\alpha^{\xi}, \beta^{\eta}) \in \mathcal{D}_N^{\xi} \times \mathcal{B}_N$ и соответствующих им функций y^n, w^n, удовлетворяющих всем связям и дополнительным огораничениям задачи 2 и неравенству $\mathcal{J}_c(y^n, w^n, \beta^k) < \mathcal{J}_c(y^c, w^c, \beta^c)$; но это противоречит факту, что набор $\alpha^c, \beta^c, y^c, w^c$ доставляет решение задаче 2. Значит, наше предположение было неверным, и набор $\alpha^c, \beta^c, y^c, w^c$ доставляет решение также задаче 3.

Задача 3 примечательна тем, что множества $\mathcal{D}_N$ и $\mathcal{B}_N$ допустимых управляющих функций являются выпуклыми и замкнутыми в $(L_2(\Omega))^N$ и $(L_2(T))^N$, соответственно, множествами. Учитывая сходство структур задач 1 и 3, необходимые условия локального экстремума в задаче 3 теперь легко выписываются из [1] и [5, с.66].

Из этих необходимых условий и равенств (19)-(22) в частности следует, что для любых $(\sigma, u) \in \{\sigma^1, \ldots, \sigma^N\} \times \{u^1, \ldots, u^N\}$ справедливы необходимые условия, приведенные в утверждении доказываемой теоремы с некоторым набором чисел $\lambda_c^N, \ldots, \lambda_s^N$. При этом используется выпуклость множеств $\mathcal{D}_N$ и $\mathcal{B}_N$ и то, что частные производные функционала $\mathcal{G}$ на тройке (y^c, w^c, β^c) равны нулю. Без умаления общности можно считать, что числа $\lambda_c^N, \ldots, \lambda_s^N$ нормированы так, чтобы наибольший модуль их был равен единице.

В Σ и U существуют счетные всюду плотные (в топологиях $L_2(\Omega)$ и $L_2(T)$) семейства управлений $(\sigma^j)_{j \in N}$ и $(u^j)_{j \in N}$, соответственно. Повторим предыдущие рассуждения с элементами $\sigma^1, \ldots, \sigma^N$, $u^1, \ldots, u^N$ из этих семейств и устремим $N \to \infty$. Из получившихся при этом последовательностей векторов $((\lambda_0^N, \lambda_1^N, \ldots, \lambda_s^N))_{N \in N}$ можно выделить такую подпоследовательность, которая в R^{s+1} сходится к некоторому вектору $(\lambda_c^c, \lambda_1^c, \ldots, \lambda_s^c)$.

Очевидно, что для набора $\lambda_c^c, \lambda_1^c, \ldots, \lambda_s^c$ выполняются соотношения (12) и (14), а также соотношение (13) при любых $\sigma = \sigma^j$, $u = u^i$, $i, j = 1, 2, \ldots$. По непрерывности (используя теорему Егорова и то, что функции a_{ij}, a_i, b_i, a, g_c, g_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ и f_r $(r = -s, \ldots, 0, \ldots, n+m)$ удовлетворяют условиям Каратеодори) доказывается, что неравенство (13) справедливо для любой пары $(\sigma, u) \in \Sigma \times U$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. Вуцан Я.П. Линеаризованный принцип минимума в одной задаче оптимального управления смешанной системой дифференциальных уравнений. - Рига, 1986. - Деп. в Лат. НИИНТИ 13.02.86. № 80-Ла.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория.- М., 1962.
3. Ладыженская О.А., Уральцева Н.И. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.- М.,1973.
4. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. - М., 1957.
5. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума.-М.,1982.
6. Райтум У.Е. Принцип максимума в задачах оптимального управления для эллиптического уравнения // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen.-1986.-Bd.5(4)-S.291-306
7. Треногин В.А. Функциональный анализ.- М.,1980.
8. Lichtenstein L. Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen. - Berlin, 1931.

Поступила 19 сентября 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 519.6

О СПЛАЙНАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ В СЛУЧАЕ, КОГДА ЯДРО ОПЕРАТОРА СГЛАЖИВАНИЯ СОДЕРЖИТСЯ В ЯДРЕ ОПЕРАТОРА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

М.А.Гольдман
ЛГУ им. П.Стучки

Пусть X, Y, Z - вещественные гильбертовы пространства, $T: X\to Y$ и $A: X\to Z$ - линейные непрерывные операторы. Пусть, далее, S - пространство сплайнов, соответствующее операторам T и A, т.е.

$$S := \{s\in X \mid T^*Ts \in \mathcal{N}(A)^\perp\}, \tag{1}$$

где $\mathcal{N}(A)$ - ядро оператора A, а T^* - оператор, сопряженный с T.

Из определения (1) следует, что

$$T^*T(S) \subset \mathcal{N}(A)^\perp \tag{2}$$

В данной статье изучается случай, когда включение (2) является равенством:

$$T^*T(S) = \mathcal{N}(A)^\perp \tag{3}$$

При каких условиях выполняется (3)?

Легко видеть, что для этого необходимо, чтобы ядро оператора сглаживания T содержалось в ядре оператора интерполяции A

$$\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(A). \tag{4}$$

Действительно, из (3) следует, что $\mathcal{N}(A)^\perp \subset \mathcal{R}(T^*)$, где $\mathcal{R}(T^*)$ - множество значений оператора T^*, а так как $\overline{\mathcal{R}(T^*)} = \mathcal{N}(T)^\perp$ (см., например, [1], с. 184), то $\mathcal{N}(A)^\perp \subset \mathcal{N}(T)^\perp$. Отсюда, ввиду замкнутости $\mathcal{N}(T)$ и $\mathcal{N}(A)$, вытекает (4).

Доказанная сейчас импликация (3) $\Rightarrow$ (4) не может быть обращена. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующий пример. Пусть $X = Z = H^1[a,b]$, $Y = H^0[a,b]$ (см. [1], с. 150) и $\forall x\in X$ $Tx = Ax = x$. В этом примере $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A) = \{\theta_x\}$, где θ_x - нулевой элемент пространства X. Как видим, условие (4) здесь выполняется. Но равенство (3) не имеет места, ибо $\mathcal{N}(A)^{\perp} = X$, а $T^*T(S) \subset \mathcal{R}(T^*) \neq X$. Последнее неравенство является следствием незамкнутости $\mathcal{R}(T^*)$ (которая объясняется незамкнутостью $\mathcal{R}(T)$: $\mathcal{R}(T)$ плотно в $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{R}(T) \neq \mathcal{Y}$).

Если же к условию (4) присоединить требование замкнутости $\mathcal{R}(T)$, то этого будет достаточно для того, чтобы равенство (3) выполнялось. В самом деле, пусть u - какой-либо элемент множества $\mathcal{N}(A)^{\perp}$; тогда $u \in \mathcal{N}(T)^{\perp}$, так как, в силу (4), $\mathcal{N}(A)^{\perp} \subset \mathcal{N}(T)^{\perp}$. Но $\mathcal{N}(T)^{\perp} = \mathcal{R}(T^*)$ (ввиду замкнутости $\mathcal{R}(T^*)$), значит $u \in \mathcal{R}(T^*)$, т.е. $u = T^*y$ для некоторого $y \in \mathcal{Y}$ Представив y в виде $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in \mathcal{N}(T^*)$, а $y_2 \in \mathcal{N}(T^*)^{\perp}$, будем иметь: $u = T^*(y_1 + y_2) = T^*y_2$ Так как $\mathcal{N}(T^*)^{\perp} = \mathcal{R}(T)$, то $y_2 \in \mathcal{R}(T)$, т.е. $y_2 = Ts$ для некоторого $s \in X$ Следовательно, $u = T^*Ts$. Отсюда, учитывая, что $u \in \mathcal{N}(A)^{\perp}$, получаем: $s \in S$ и $u \in T^*T(S)$ Поскольку u - произвольный элемент из $\mathcal{N}(A)^{\perp}$, имеем включение $\mathcal{N}(A)^{\perp} \subset T^*T(S)$ Вместе с (2) это дает (3).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. Для того чтобы имело место равенство (3) необходимо, а в случае, когда $\mathcal{R}(T)$ замкнуто, то и достаточно, чтобы выполнялось включение (4).

Заметим, что равенство (3) не влечет замкнутости $\mathcal{R}(T)$. Это видно из следующего примера. Пусть $X = H^1[a,b], \mathcal{Y} = H^0[a,b], Z = \mathbb{R}$ и $\forall x \in X \;\; Tx = x, \; Ax = \int_a^b x(t)\,dt$. Здесь $\mathcal{R}(T) \neq \overline{\mathcal{R}(T)}$ (см. предыдущий пример), однако $T^*T(S) = \mathcal{N}(A)^{\perp}$, ибо каждое из множеств $\mathcal{N}(A)^{\perp}$, $T^*T(S)$, как нетрудно проверить, является одномерным подпространством в $H^1[a,b]$, состоящим из функций-констант.

Приведем еще несколько фактов, относящихся к включению (4).

Теорема 2. При условии, что множества $\mathcal{R}(T)$ и $\mathcal{R}(A)$ замкнуты, свойство (4) эквивалентно любому из следующих трех свойств:

$$T^*T(S) = A^*(Z), \tag{5}$$

$$\forall z \in Z \;\; \exists y \in T(S) \;\; \forall x \in X \;\; \langle y, Tx\rangle = \langle z, Ax\rangle, \tag{6}$$

$$\forall z \in Z \;\; \exists y \in \mathcal{Y} \;\; \forall x \in X \;\; \langle y, Tx\rangle = \langle z, Ax\rangle, \tag{7}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ – знак скалярного произведения.

Доказательство. Установим, что $(4)\Rightarrow(5)\Rightarrow(6)\Rightarrow(7)\Rightarrow$ $\Rightarrow(4)$. То, что $(4)\Rightarrow(5)$, является непосредственным следствием теоремы 1; надо лишь учесть, что в силу замкнутости $\mathcal{R}(A)$, верно равенство $\mathcal{N}(A)^{\perp}=\mathcal{R}(A^*)\,(=A^*(Z))$. Пусть, далее имеет место (5); тогда $\forall z\in Z\ \exists s\in S:\ T^*Ts=A^*z$ Полагая $y=Ts$, будем иметь: $T^*y=A^*z$. Отсюда вытекает, что $\forall x\in X\ \langle T^*y,x\rangle=\langle A^*z,x\rangle$. Этим (с учетом равенств $\langle T^*y,x\rangle=$ $=\langle y,Tx\rangle$ и $\langle A^*z,x\rangle=\langle z,Ax\rangle$) доказано, что $(5)\Rightarrow(6)$. Импликация $(6)\Rightarrow(7)$ тривиальна. Наконец, если верно (7) и $x\in\mathcal{N}(T)$ то $\forall z\in Z\ \langle z,Ax\rangle=0$, откуда следует, что $x\in\mathcal{N}(A)$. Таким образом, $x\in\mathcal{N}(T)\Rightarrow x\in\mathcal{N}(A)$. Это доказывает, что $(7)\Rightarrow(4)$.

Заменим в теореме 2 условие $\mathcal{R}(T)=\overline{\mathcal{R}(T)}$ условием $\mathcal{R}(T)=Y$ (которое, как известно, эквивалентно непрерывной обратимости оператора T^*). Это приведет к некоторому усилению свойств (5), (6) и (7).

Теорема 3. При условии, что $\mathcal{R}(T)=Y$ и $\mathcal{R}(A)=\overline{\mathcal{R}(A)}$, свойство (4) эквивалентно любому из следующих трех свойств:

$$T(S)=T^{*-1}A^*(Z), \tag{8}$$

$$\forall z\in Z\quad \exists!\ y\in T(S):\ \forall x\in X\quad \langle y,Tx\rangle=\langle z,Ax\rangle, \tag{9}$$

$$\forall z\in Z\quad \exists!\ y\in Y:\ \forall x\in X\ \ \langle y,Tx\rangle=\langle z,Ax\rangle. \tag{10}$$

Доказательство. С помощью условия $\mathcal{R}(T)=Y$ легко устанавливается, что свойства (8), (9) и (10) эквивалентны, ответственно, свойствам (5), (6) и (7). Последние же, согласно теореме 2, эквивалентны свойству (4).

Замечание. Полагая $y=T^{*-1}A^*z$, будем иметь: $\forall x\in X\ \langle y,Tx\rangle=$ $=\langle T^{*-1}A^*z,Tx\rangle=\langle T^*T^{*-1}A^*z,x\rangle=\langle A^*z,x\rangle=\langle z,Ax\rangle$. Это показывает, что фигурирующий в (9) и (10) элемент y однозначно определяемый элементом z равен $T^{*-1}A^*z$

Рассмотрим теперь случай, когда $Z=\mathbb{R}^n$ (с обычным скалярным произведением). Пусть $e_1,\dots,e_n$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ (т.е. $e_i=(\delta_{1i},\dots,\delta_{ni}),\ i=\overline{1,n}$, где δ_{ij} – символ Кронекера)

Теорема 4. При условии, что $Z=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}(T)=Y$ и $\mathcal{N}(T)\subset\mathcal{N}(A)$, имеет место равенство

$$T(S)=\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i \mid \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}\}, \qquad (11)$$

где $y_1,\dots,y_n$ – элементы пространства $\mathcal{Y}$, однозначно определяемые соотношениями

$$\forall x\in X \quad \langle y_i,Tx\rangle=\langle e_i,\Lambda x\rangle,\ i=\overline{1,n}. \qquad (12)$$

Доказательство. Так как $\mathbb{R}^n=\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i \mid \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}\}$, $y_i=T^{*-1}\Lambda^* e_i$, $i=\overline{1,n}$ (см. замечание к теореме 3), то $T^{*-1}\Lambda^*(\mathbb{R}^n)=\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i \mid$ $\mid \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}\}$. Это вместе с (8) дает (11).

Следствие. При выполнении предпосылок теоремы 4 необходимым и достаточным условием для того, чтобы элемент s из X был сплайном, является существование таких чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, что $Ts=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i$

Необходимость этого условия непосредственно следует из (11). Докажем его достаточность. Пусть $s\in X$ и $Ts=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i y_i$. Тогда, согласно (11), $Ts\in T(S)$, т.е. $Ts=T\tilde{s}$ для некоторого $\tilde{s}\in S$; значит $s-\tilde{s}\in\mathcal{N}(T)$, $s\in\mathcal{N}(T)+\tilde{s}\subset\mathcal{N}(T)+S\subset S$ (последнее включение вытекает из того, что $\mathcal{N}(T)\subset S$).

Замечание. Если к условиям теоремы 4 добавить условие $\mathcal{R}(\Lambda)=\mathbb{R}^n$, то оператор $T^{*-1}\Lambda^*$ окажется обратимым, в силу чего будут линейно независимы элементы $y_i=T^{*-1}\Lambda^* e_i$, $i=\overline{1,n}$.

Рассмотрим вопрос об интерполяционных сплайнах пространства S в случае, когда $\mathcal{N}(T)\subset\mathcal{N}(A)$. Так как в этом случае $\mathcal{N}(T)+\mathcal{N}(A)$ замкнуто (ибо $\mathcal{N}(T)+\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(A)$), то, при условии замкнутости $\mathcal{R}(T)$, для каждого элемента $z\in\mathcal{R}(A)$ множество $\{s\in S \mid As=z\}$ соответствующих интерполяционных сплайнов непусто.

При $\mathcal{Z}=\mathbb{R}^n$ имеет место

Теорема 5. Пусть $\mathcal{Z}=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{R}(T)=\mathcal{Y}$, $\mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{N}(T)\subset\mathcal{N}(A)$ и $y_i=T^{*-1}A^* e_i$, $i=\overline{1,n}$. Тогда:

а) для каждого вектора $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$ система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n}\langle y_i,y_j\rangle\lambda_j=z_i \qquad i=\overline{1,n}, \qquad (13)$$

имеет единственное решение;

в) для того чтобы элемент s из X был интерполяционным сплайном, соответствующим вектору r, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$Ts = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \tag{14}$$

где $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – решение системы (13).

Доказательство. Так как элементы $y_1, \dots, y_n$ линейно независимы (см. замечание к теореме 4), то определитель системы (13), как определитель Грама, отличен от нуля. Отсюда следует а). Докажем в). Поскольку элемент s из X является сплайном тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ такие, что $Ts = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$ (см. следствие из теоремы 4), остается показать, что $As = r \Leftrightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – решение системы (13). Для этого воспользуемся соотношениями (12) применительно к элементу s. Они дают $\langle e_i, As\rangle = \langle y_i, Ts\rangle$, $i = \overline{1,n}$. Подставив сюда вместо Ts сумму $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$, получим равенства $\langle e_i, As\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle y_i, y_j\rangle \lambda_j$, $i = \overline{1,n}$. Из них следует, что $\langle e_i, As\rangle = r_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \langle y_i, y_j\rangle \lambda_j = r_i$, $i = \overline{1,n}$. Этим доказательство в) заканчивается.

Рассмотрим вопрос о сглаживающих сплайнах пространства S в случае, когда $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(A)$. Так как в этом случае $\mathcal{N}(T) + \mathcal{N}(A)$ замкнуто, то, при условии замкнутости $\mathcal{R}(T)$ и $\mathcal{R}(A)$, для каждого элемента $z \in \mathcal{R}(A)$ и каждого числа $\rho > 0$ множество соответствующих им сглаживающих сплайнов непусто.

При $Z = \mathbb{R}^n$ имеет место

Теорема 6. Пусть $Z = \mathbb{R}^n, \mathcal{R}(T) = Y, \mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^n, \mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(A), y_i = T^{*-1} A^* e_i$, $i = \overline{1,n}$. Тогда:

а) для каждого вектора $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ и каждого числа $\rho > 0$ система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\langle y_i, y_j\rangle + \frac{\delta_{ij}}{\rho}\right] \lambda_j = r_i \qquad i = \overline{1,n} \tag{15}$$

имеет единственное решение;

в) для того чтобы элемент s из X был сглаживающим сплайном, соответствующим r и ρ, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $Ts = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j$, где $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ решение системы (15).

Доказательство. Так как определитель системы (15) равен

$\det(\langle y_i,y_j\rangle)_{i,j=\overline{1,n}}+\rho^{-n}$, то он отличен от нуля (поскольку $\det(\langle y_i,y_j\rangle)_{i,j=\overline{1,n}}>0$ и $\rho>0$). Отсюда следует а).

Докажем в). Для этого сперва установим следующее вспомогательное утверждение. Элемент s из X , удовлетворяющий равенству $Ts=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j$ (при некотором $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$), удовлетворяет также равенству

$$\frac{1}{\rho}\lambda+As=z \tag{16}$$

в том и только в том случае, когда λ - решение системы (15).

Действительно, $\frac{1}{\rho}\lambda+As=z \Leftrightarrow \frac{1}{\rho}\lambda_i+\langle e_i,As\rangle=z_i,\ i=\overline{1,n}$. Отсюда, принимая во внимание равенства $\langle e_i,As\rangle=\sum_{j=1}^{n}\langle y_i,y_j\rangle\lambda_j, i=\overline{1,n}$ (см. доказательство теоремы 5), получаем $\frac{1}{\rho}\lambda+As=z \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{1}{\rho}\lambda_i+\sum_{j=1}^{n}\langle y_i,y_j\rangle\lambda_j=z_i,\ i=\overline{1,n}$ или $\frac{1}{\rho}\lambda+As=z\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{n}[\langle y_i,y_j\rangle+\frac{\delta_{ij}}{\rho}]=z_i$, $i=\overline{1,n}$. Это есть требуемый вспомогательный результат. Теперь воспользуемся следующим известным фактом: для того чтобы элемент s из X был сглаживающим сплайном, соответствующим z и ρ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\frac{1}{\rho}A^{*-1}T^*Ts+As=z$ [1 , следствие 4.6.2, с. 221]. В нашем случае $Ts=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_j$ (см. следствие из теоремы 4), поэтому $A^{*-1}T^*Ts=\sum_{j=1}^{n}A^{*-1}T^*y_j$, а так как $y_j=T^{*-1}A^*e_j, j=\overline{1,n}$, то $A^{*-1}T^*Ts=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j e_j=\lambda$. В силу этого выражение $\frac{1}{\rho}A^{*-1}T^*Ts+As=z$ принимает вид (16). Отсюда и из установленного выше вспомогательного утверждения следует в).

На этом изучение общих вопросов, относящихся к случаю, когда $N(T)\subset N(A)$, заканчивается. Дальнейшая часть статьи посвящена рассмотрению на основе изложенных результатов пространств сплайнов одного частного вида. Перейдем к их заданию.

Пусть $S_{m,\mu}(\Delta)$ обозначает совокупность всех определенных на отрезке $[a,b]$ полиномиальных сплайнов степени m, дефекта μ , с узлами на сетке $\Delta=\{t_0,t_1,\dots,t_n,t_{n+1}\}$, где $t_0=a$, $t_{n+1}=b$ и $t_0<t_1<\dots<t_n<t_{n+1}$ [2 , определение,

с. 15-16]. Положим $X=S_{m,\mu}(\Delta)$, где $1\le\mu\le m$; $Y=S_{\mu-1,\mu}(\Delta)$ и $Z=\mathbb{R}^n$. В пространствах $S_{m,\mu}(\Delta)$ и $S_{\mu-1,\mu}(\Delta)$ зададим скалярное произведение одной и той же формулой $\langle u,v\rangle = \int_a^b u(t)v(t)dt$; скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ - обычное. Пусть, далее, $\forall\, i=\overline{1,n}$ выбраны два μ-мерных вектора $\alpha_i=(\alpha_{i0},\dots,\alpha_{i,\mu-1})$ и $\beta_i=(\beta_{i0},\dots,\beta_{i,\mu-1})$.

Введя обозначение $q=m-\mu+1$, зададим операторы T и A, положив $\forall\, x\in X$ $Tx=x^{(q)}$ и

$$(Ax)_i=\sum_{p=0}^{\mu-1}\left[\alpha_{ip}x^{(q+p)}(t_i+0)+\beta_{ip}x^{(q+p)}(t_i-0)\right],\ i=\overline{1,n}, \qquad (17)$$

где $(Ax)_i$ - i-я координата вектора Ax. Соответствующее этим операторам T и A пространство сплайнов обозначим, как и ранее, через S.

Так как $Tx=x^{(q)}$, то $\mathcal{N}(T)$ состоит из полиномов, степень которых не превышает $q-1$. Отсюда ясно, что если $x\in\mathcal{N}(T)$, то $\forall\, i=\overline{1,n}$ $(Ax)_i=0$ (см. (17)), следовательно, $\mathcal{N}(T)\subset\mathcal{N}(A)$. Легко проверить, что $\mathcal{R}(T)=Y$. Что касается равенства $\mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^n$, то оно имеет место не всегда, т.е. не при любых α_i,β_i, $i=\overline{1,n}$. Достаточные условия для выполнения этого равенства даются в следующей теореме.

<u>Теорема 7</u>. Справедливы импликации:

$$\forall\, i=\overline{1,n}\quad \alpha_i\neq 0 \Rightarrow \mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^n;$$

$$\forall\, i=\overline{1,n}\quad \beta_i\neq 0 \Rightarrow \mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^n$$

<u>Доказательство</u>. Надо показать, что при условии $(\forall\, i=\overline{1,n}\ \alpha_i\neq 0)\vee(\forall\, i=\overline{1,n}\ \beta_i\neq 0)$ любому вектору $z=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{R}^n$ можно сопоставить элемент $x\in S_{m,\mu}(\Delta)$ так, чтобы выполнялись равенства $(Ax)_i=z_i$, $i=\overline{1,n}$. Предположим сперва, что $\forall\, i=\overline{1,n}$ $\alpha_i\neq 0$. В этом случае будем искать x в виде [2, с. 17, (4)]:

$$x(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\mu-1}a_{jk}(t-t_j)_+^{q+k} \qquad (18)$$

где a_{jk}, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,\mu-1}$ - пока неопределенные числа. Продифференцировав (18) $q+p$ раз, получим для $t\in[a,b]\setminus\{t_1,\dots,t_n\}$

$$x^{(q+p)}(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=p}^{\mu-1}\frac{(q+k)!}{(q+p)!}a_{jk}(t-t_j)_+^{k-p},\qquad p=\overline{0,\mu-1}. \tag{19}$$

Из (19) следует, что

$$x^{(q+p)}(t_1-0)=0,\ x^{(q+p)}(t_1+0)=a_{1p},\ p=\overline{0,\mu-1}; \tag{20}$$

$$x^{(q+p)}(t_i-0)=\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=p}^{\mu-1}\frac{(q+k)!}{(q+p)!}a_{jk}(t_i-t_j)^{k-p},\ i=\overline{2,n};\ p=\overline{0,\mu-1}; \tag{21}$$

$$x^{(q+p)}(t_i+0)=x^{(q+p)}(t_i-0)+\sum_{k=p}^{\mu-1}\frac{(q+k)!}{(q+p)!}a_{ik},\ i=\overline{2,n},\ p=\overline{0,\mu-1}. \tag{22}$$

С помощью равенств (17), (20), (21) и (22) получаем:

$$(Ax)_1=\sum_{p=0}^{\mu-1}\alpha_{1p}a_{1p}, \tag{23}$$

$$(Ax)_i=\sum_{p=0}^{\mu-1}\alpha_{ip}\Big[x^{(q+p)}(t_i-0)+\sum_{k=p}^{\mu-1}\frac{(q+k)!}{(q+p)!}a_{ik}\Big]+\sum_{p=0}^{\mu-1}\beta_{ip}x^{(q+p)}(t_i-0),\quad i=\overline{2,n}. \tag{24}$$

Отсюда и из формулы (21) легко усмотреть, что $\forall i=\overline{1,n}$ $(Ax)_i$ полностью определяется набором коэффициентов a_{jk}, где $j=\overline{1,i}$, $k=\overline{0,\mu-1}$. Это позволяет находить коэффициенты a_{jk}, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,\mu-1}$, построчно. При $j=1$ подобрать нужные коэффициенты не составляет труда: так как $\alpha_1\neq 0$, то $\alpha_{1p_1}\neq 0$ при некотором $p_1\in\{0,\dots,\mu-1\}$; полагая $a_{1p}=0$ при $p\neq p_1$ и $a_{1p_1}=\gamma_1\alpha_{1p_1}^{-1}$ получаем $(Ax)_1=\gamma_1$.

Покажем как найти a_{ik}, $k=\overline{0,\mu-1}$ когда уже найдены a_{jk} для $j=\overline{0,i-1}$, $k=\overline{0,\mu-1}$ ($2\le i\le n$). В силу (24) числа a_{ik}, $k=\overline{0,\mu-1}$, должны удовлетворять равенству

$$\sum_{p=0}^{\mu-1}\alpha_{ip}\Big[x^{(q+p)}(t_i-0)+\sum_{k=p}^{\mu-1}\frac{(q+k)!}{(q+p)!}a_{ik}\Big]=\gamma_i-\sum_{p=0}^{\mu-1}\beta_{ip}x^{(q+p)}(t_i-0), \tag{25}$$

в котором $x^{(q+p)}(t_i-0)$, $p=\overline{0,\mu-1}$ — числа, найденные по формуле (21). Так как $\alpha_i\neq 0$, то $\exists p_i\in\{0,\dots,\mu-1\}$ $\alpha_{ip_i}\neq 0$. Если подобрать числа a_{ik}, $k=\overline{0,\mu-1}$ так, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{k=p}^{\mu-1}\frac{(q+k)!}{(q+p)!}a_{ik}=-x^{(q+p)}(t_i-0),\quad p\in\{0,\dots,\mu-1\}\setminus\{p_i\}, \tag{26}$$

то (25) примет вид

$$\sum_{k=p_i}^{\mu-1}\frac{(q+k)!}{(q+p_i)!}a_{ik}=\Big[\gamma_i-\sum_{p=0}^{\mu-1}\beta_{ip}x^{(q+p)}(t_i-0)\Big]\alpha_{ip_i}^{-1}-x^{(q+p_i)}(t_i-0). \tag{27}$$

Если уравнения системы (26)-(27) выписать в порядке возрастания $p=\overline{0,\mu-1}$, то матрица коэффициентов при a_{ik}, $k=\overline{0,\mu-1}$, окажется верхней треугольной с единицами на главной диагонали. Следовательно, система (25)–(27) разрешима. Этим заканчивается доказательство импликации $\forall i=\overline{1,n}\ \alpha_i \neq 0 \Rightarrow \mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^n$. Доказательство другой импликации: $\forall i=\overline{1,n}$ $\beta_i \neq 0 \Rightarrow \mathcal{R}(A)=\mathbb{R}^n$ проводится сходным образом; различие состоит в том, что функцию $x\in S_{m,\mu}(a)$, для которой $Ax=z$ нужно искать теперь в виде $x(t)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\mu-1}a_{jk}(t_j-t)_+^{k}$ (ср. с (18))

Для дальнейшего изучения пространства S (например, для нахождения общего вида функций, принадлежащих S), а также для вычисления интерполяционных и сглаживающих сплайнов в S, необходимо знать элементы $y_i=T^{*-1}A^*e_i$, $i=\overline{1,n}$ (см. (11), (13), (14) и (15)). Однако найти их непосредственно по указанным формулам невозможно, поскольку мы не располагаем явным заданием оператора $T^{*-1}A^*$. Чтобы обойти эту трудность, прибегнем к соотношениям (12): $\forall x\in X$ $\langle y_i,Tx\rangle=(Ax)_i$, $i=\overline{1,n}$, которыми $y_1,\dots,y_n$ определяются однозначно (см. теорему 4). В применении к нашему случаю, (12) означает, что $\forall x\in S_{m,\mu}(A)$

$$\int_a^b y_i(t)x^{(q)}(t)\,dt=\sum_{p=0}^{\mu-1}\left[\alpha_i x^{(q+p)}(t_i+0)+\beta_i x^{(q+p)}(t_i-0)\right],\ i=\overline{1,n}. \quad (28)$$

Функции y_i, удовлетворяющие условиям (28), будут найдены с помощью двух лемм, приводимых ниже.

<u>Лемма 1</u>. <u>Условие</u>. $X_m[\alpha,\beta]$ – совокупность всех полиномов $x:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ степени не выше m ($m\geq 1$); q – какое-либо число из множества $\{0,\ldots,m\}$

<u>Утверждение</u>. Для каждого $p=\overline{0,m-q}$ [illegible]ествует полином ψ_p степени $m-q$, т[illegible] что [illegible] $x\in X_m[\alpha,\beta]$

$$x^{(q+p)}(\alpha)=\int_\alpha^\beta x^{(q)}(t)\psi_p(t)\,dt, \quad (29)$$

<u>Доказательство</u>. Полином ψ_p ищем в [illegible] $\psi_p(t)=\sum_{j=0}^{m-q}b_{pj}(t-\alpha)^j$, b_{pj} – пока неопределенные коэффициенты. Фиксируя какой-[illegible] x [illegible] $X_m[\alpha,\beta]$ [illegible]

в виде $x(t)=\sum_{k=0}^{m} a_k (t-\alpha)^k$. Так как $x^{(q)}(t)=\sum_{k=q}^{m}\frac{k!}{(k-q)!}a_k(t-\alpha)^{k-q}$,

$$\int_\alpha^\beta x^{(q)}(t)\psi_p(t)dt=\int_\alpha^\beta \sum_{k=q}^{m}\frac{k!}{(k-q)!}a_k\sum_{j=0}^{m-q}b_{pj}(t-\alpha)^{j+k-q}=\sum_{k=q}^{m}\frac{k!}{(k-q)!}a_k\sum_{j=0}^{m-q}\frac{(\beta-\alpha)^{j+1+k-q}}{j+1+k-q}b_{pj}$$

Заменяя интеграл в (29) последним выражением и учитывая, что $x^{(q+p)}(\alpha)=(q+p)!\,a_{q+p}$, приходим к равенству

$$(q+p)!\,a_{q+p}=\sum_{k=q}^{m}\frac{k!}{(k-q)!}a_k\sum_{j=0}^{m-q}\frac{(\beta-\alpha)^{j+1+k-q}}{j+1+k-q}b_{pj} \qquad (30)$$

Слагаемое в правой части (30), отвечающее значению $k=q+p$ равно $\frac{(q+p)!}{p!}a_{q+p}\sum_{j=0}^{m-q}\frac{(\beta-\alpha)^{j+1+p}}{j+1+p}b_{pj}$ и отличается от левой части (30) множителем $\frac{1}{p!}\sum_{j=0}^{m-j}\frac{(\beta-\alpha)^{j+1+p}}{j+1+p}b_{pj}$. Отсюда заключаем, что равенство (30) (а тем самым и равенство (29)) будет удовлетворено, если для каждого $p=\overline{0,m-q}$ подчинить числа b_{pj}, $j=\overline{0,m-q}$ следующему условию

$$\sum_{j=0}^{m-q}\frac{(\beta-\alpha)^{j+1+k-q}}{j+1+k-q}b_{pj}=p!\,\delta_{p,k-q} \qquad k=\overline{q,m}. \qquad (31)$$

Равенства (31) представляют собой для каждого $p=\overline{0,m-q}$ систему из $m-q+1$ линейных уравнений относительно b_{pj}, $j=\overline{0,m-q}$, определитель которой Δ_ψ равен $(\beta-\alpha)^{(m-q)^2}\Delta_{m-q+1}$, где $\Delta_{m-q+1}=\det\left(\frac{1}{p+j+1}\right)_{p,j=\overline{0,m-q}}$. Так как $\frac{1}{p+j+1}=\int_0^1 t^{p+j}dt$, то Δ_{m-q+1} является определителем Грама линейно независимой на $[0,1]$ системы функций $(t^k)_{k=\overline{0,m-q}}$. Следовательно, $\Delta_{m-q+1}\neq 0$ и $\Delta_\psi\neq 0$. Таким образом, система (31) разрешима. Этим доказательство леммы 1 заканчивается.

Лемма 2. Для каждого $p=\overline{0,m-q}$ существует полином ψ_p степени $m-q$ такой, что для любого $x\in X_m[\alpha,\beta]$

$$x^{(q+p)}(\beta)=\int_\alpha^\beta x^{(q)}(t)\psi_p(t)dt \qquad (32)$$

Доказательство. Полином ψ_p ищем в виде $\psi_p(t)=\sum_{j=0}^{m-q}c_{pj}(t-\beta)^j$.

Дальше следуем схеме доказательства леммы 1. При этом обнаружится, что равенство (32) будет иметь место, если коэффициенты c_{pj}, $j=\overline{0,m-q}$ взять так, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$\sum_{j=0}^{m-q}\frac{(-1)^{j+k-q}(\beta-\alpha)^{j+1+k-q}}{j+1+k-q}c_{pj}=p!\,\delta_{p,k-q}\ ,\ k=\overline{q,m}. \qquad (33)$$

Определитель этой системы Δ_ψ равен $(\beta-\alpha)^{(m-q)^2}\cdot\widetilde{\Delta}_{m-q+1}$, где $\widetilde{\Delta}_{m-q+1}=\det\left(\frac{(-1)^{p+j}}{p+j+1}\right)_{p,j=\overline{0,m-q}}$. Для завершения доказательства леммы 2 достаточно показать, что $\Delta_\psi\neq 0$. Но это следует из равенства $\widetilde{\Delta}_{m-q+1}=\Delta_{m-q+1}$ (которое устанавливается просто: $\widetilde{\Delta}_{m-q+1}$ преобразуется в Δ_{m-q+1}, если сперва умножить на (-1) каждую нечетную строку определителя $\widetilde{\Delta}_{m-q+1}$, а затем в полученном определителе умножить на (-1) каждый нечетный столбец).

Приведем формулы для вычисления коэффициентов b_{pj} и c_{pj}, $p,j=\overline{0,m-q}$. Пусть $B_{p+1,j+1}$ ($C_{p+1,j+1}$) – алгебраическое дополнение элемента определителя Δ_{m-q+1} (соответственно, $\widetilde{\Delta}_{m-q+1}$), расположенного в строке с номером $p+1$ и в столбце с номером $j+1$ ($p,j=\overline{0,m-q}$). Пусть, далее,

$$E_{pj}=p!\,B_{p+1,j+1}\,\Delta^{-1}_{m-q+1},\ F_{pj}=p!\,C_{p+1,j+1}\,\widetilde{\Delta}^{-1}_{m-q+1};\ p,j=\overline{0,m-q}. \qquad (34)$$

Тогда

$$b_{pj}=(\beta-\alpha)^{-(p+j+1)}E_{pj},\ c_{pj}=(\beta-\alpha)^{-(p+j+1)}F_{pj};\ p,j=\overline{0,m-q} \qquad (35)$$

Вернемся теперь к вопросу об отыскании функций y_i, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих условию (28). Пусть $x\in S_{m,\mu}(\Delta)$. Тогда сужение x на $[t_i,t_{i+1}]$, $i=\overline{0,n}$, является полиномом степени не выше m. Следовательно, к каждому такому сужению функции x можно применять леммы 1 и 2. Сделаем это, взяв $q=m-\mu+1$. Получится следующее: для любой пары (p,i), где $p=\overline{0,\mu-1}$, $i=\overline{1,n}$ существуют полиномы φ_{pi} и ψ_{pi} степени $\mu-1$ такие, что

$$x^{(q+p)}(t_i+0)=\int_{t_i}^{t_{i+1}}x^{(q)}(t)\psi_{pi}(t)dt\ ,\ x^{(q+p)}(t_i-0)=\int_{t_{i-1}}^{t_i}x^{(q)}(t)\varphi_{pi}(t)dt. \qquad (36)$$

Полиномы φ_{pi} и ψ_{pi} вычисляются по формулам:

$$\varphi_{pi}(t)=\sum_{j=0}^{\mu-1} b_{pj}(t-t_i)^j,\ \psi_{pi}(t)=\sum_{j=0}^{\mu-1} c_{pj}(t-t_i)^j;\ p,j=\overline{0,\mu-1},\ i=\overline{1,n}, \tag{37}$$

где

$$b_{pj}=(t_{i+1}-t_i)^{-(p+j+1)}E_{pj},\ c_{pj}=(t_i-t_{i-1})^{-(p+j+1)}F_{pj};\ p,j=\overline{0,\mu-1},\ i=\overline{1,n}. \tag{38}$$

(см. (34), (35) и леммы 1,2).

Формулы (38) можно записать, пользуясь единичной функцией Хевисайда θ в следующем виде:

$$x^{(q+p)}(t_i+0)=\int_a^b x^{(q)}(t)\varphi_{pi}(t)[\theta(t-t_i)-\theta(t-t_{i+1})]dt,$$

$$x^{(q+p)}(t_i-0)=\int_a^b x^{(q)}(t)\psi_{pi}(t)[\theta(t-t_{i-1})-\theta(t-t_i)]dt;\ p=\overline{0,\mu-1},\ i=\overline{1,n}. \tag{39}$$

В силу формул (39) имеет место равенство: $\sum_{p=0}^{\mu-1}[\alpha_{ip}x^{(q+p)}(t_i+0)+\beta_{ip}x^{(q+p)}(t_i-0)]=\int_a^b\sum_{p=0}^{\mu-1}\{\alpha_{ip}\varphi_{pi}(t)[\theta(t-t_i)-\theta(t-t_{i+1})]+\beta_{ip}\psi_{pi}[\theta(t-t_{i-1})-\theta(t-t_i)]\}x^{(q)}(t)dt$, $i=\overline{1,n}$.

Сопоставляя этот результат с равенством (28) и учитывая, что (28) определяет функции y_i однозначно (с точностью до значений в точках $t_1,\dots,t_n$), заключаем, что

$$y_i(t)=\sum_{p=0}^{\mu-1}\{\alpha_{ip}\varphi_{pi}(t)[\theta(t-t_i)-\theta(t-t_{i+1})]+\beta_{ip}\psi_{pi}(t)[\theta(t-t_{i-1})-\theta(t-t_i)]\},\ i=\overline{1,n}. \tag{40}$$

Формуле (40) можно придать более удобный для вычислений вид. Из (40) и (37) следует, что для каждого $i=\overline{1,n}$

$$y_i(t)=\sum_{j=0}^{\mu-1}\Big[\sum_{l=0}^{\mu-1}\alpha_{il}b_{lj}\Big](t-t_i)^j \quad \text{если } t_i<t<t_{i+1}, \quad (41)_1,$$

$$y_i(t)=\sum_{j=0}^{\mu-1}\Big[\sum_{l=0}^{\mu-1}\beta_{il}c_{lj}\Big](t-t_i)^j \quad \text{если } t_{i-1}<t<t_i \quad (41)_2, \tag{41}$$

$$y_i(t)=0 \quad , \text{ если } t\in(a,b)\setminus[t_{i-1},t_{i+1}]. \quad (41)_3.$$

Теперь займемся вычислением матрицы $(\langle y_i,y_j\rangle)_{i,j=\overline{1,n}}$, знание которой необходимо для нахождения интерполяционных и сглаживающих сплайнов в S (см. теоремы 5 и 6). Из (41) легко усмотреть, что $\langle y_i,y_j\rangle=0$, если $|i-j|>1$. Следовательно, матрица $(\langle y_i,y_j\rangle)_{i,j=\overline{1,n}}$ является трехдиагональной.

Поскольку эта матрица к тому же эрмитова, ее вычисление сводится к нахождению $\langle y_i,y_i\rangle$, $i=\overline{1,n}$ и $\langle y_i,y_{i+1}\rangle$, $i=\overline{1,n-1}$. Так как $y_i \in T(S)$ (см. (11)), то $y_i = Ts_i$ для некоторого $s_i \in S$

Отсюда получаем: $\langle y_i, y_j\rangle = \langle Ts_i, y_j\rangle$, а ввиду (12) и (17),

$\langle y_i,y_j\rangle = (As_i)_j = \sum_{p=0}^{\mu-1}[\alpha_{jp} s_i^{(q+p)}(t_j+0)+\beta_{jp}s_i^{(q+p)}(t_j-0)]$ Но $s_i^{(q+p)} = (Ts_i)^{(p)} = y_i^{(p)}$, следовательно,

$$\langle y_i,y_j\rangle = \sum_{p=0}^{\mu-1}[\alpha_{jp} y_i^{(p)}(t_j+0)+\beta_{jp} y_i^{(p)}(t_j-0)]. \qquad (42)$$

Так как, в силу (41), $y_i^{(p)}(t) = \sum_{l=0}^{\mu-1}\beta_{il}\sum_{j=p}^{\mu-1}\frac{j!}{(j-p)!}c_{lj}(t-t_i)^{j-p}$, если $t_{i-1}<t<t_i$; $y_i^{(p)}(t)=\sum_{l=0}^{\mu-1}\alpha_{il}\sum_{j=p}^{\mu-1}\frac{j!}{(j-p)!}b_{lj}(t-t_i)^{j-p}$, если $t_i<t<t_{i+1}$ и

$y_i^{(p)}(t)=0$, если $t\in(a,b)\setminus[t_{i-1},t_{i+1}]$, то $y_i^{(p)}(t_i+0)=p!\sum_{l=0}^{\mu-1}\alpha_{il}b_{lp}$, $y_i^{(p)}(t_i-0)=p!\sum_{l=0}^{\mu-1}\beta_{il}c_{lp}$, $y_i^{(p)}(t_{i+1}+0)=0$, $y_i^{(p)}(t_{i+1}-0)=$ $=\sum_{l=0}^{\mu-1}\alpha_{il}\sum_{j=p}^{\mu-1}\frac{j!}{(j-p)!}b_{lj}(t_{i+1}-t_i)^{j-p}$.

Подставив найденные выражения для $y_i^{(p)}(t_i+0), y_i^{(p)}(t_i-0), y_i^{(p)}(t_{i+1}+0)$ и $y_i^{(p)}(t_{i+1}-0)$ в формулу (42), получим:

$$\langle y_i,y_i\rangle = \sum_{p=0}^{\mu-1} p!\Big[\alpha_{ip}\sum_{l=0}^{\mu-1}\alpha_{il}b_{lp}+\beta_{ip}\sum_{l=0}^{\mu-1}\beta_{il}c_{lp}\Big], \quad i=\overline{1,n}, \qquad (43)$$

$$\langle y_i,y_{i+1}\rangle = \sum_{p=0}^{\mu-1}\beta_{i+1,p}\sum_{l=0}^{\mu-1}\alpha_{il}\sum_{j=p}^{\mu-1}\frac{j!}{(j-p)!}b_{lj}(t_{i+1}-t_i)^{j-p}, \quad i=\overline{1,n-1}. \qquad (44)$$

В заключение рассмотрим вопрос об общем виде сплайна пространства S. Согласно следствию из теоремы 4 пространство S состоит из элементов вида $s=s_0+\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$, где s_0 произвольный элемент ядра оператора T, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ – какие-либо вещественные числа, а s_i – некоторый прообраз элемента y_i при отображении $T: Ts_i=y_i$, $i=\overline{1,n}$. Так как в нашем случае $Tx=x^{(q)}$, то s_0 является произвольным полиномом степени не выше $q-1$. Для нахождения s_i, $i=\overline{1,n}$, воспользуемся формулами (41). Выполнив q-кратное неопределенное интегрирование функции $\sum_{j=0}^{\mu-1}\Big[\sum_{l=0}^{\mu-1}\alpha_{il}b_{lj}\Big](t-t_i)^j$ где $t_i<t<t_{i+1}$ (см. (41)$_1$), получим (пользуясь обозначением $\sigma_{ij}=\sum_{l=0}^{\mu-1}\alpha_{il}b_{lj}$): $s_i(t)=\sum_{j=0}^{\mu-1}\frac{j!}{(j+q)!}\sigma_{ij}(t-t_i)^{j+q}$. Обозначим

через u_i продолжение функции $\sum\limits_{j=0}^{\mu-1} \frac{j!}{(j+q)!} \sigma_{ij}(t-t_i)^{j+q}$, $t_i<t<t_{i+1}$, на весь промежуток $[a,b]$ по формуле $u_i(t)=\sum\limits_{j=0}^{\mu-1} \frac{j!}{(j+q)!} \sigma_{ij}(t-t_i)_+^{j+q}$. Ясно, что $u_i \in S_{m,\mu}(\Delta)$ и $u_i^{(q)}(t)=y_i(t)$ для $t\in(t_k,t_{k+1})$ при $k<i-1$ и при $k=i$. Подберем теперь функцию $\widetilde{u}_i \in S_{m,\mu}(\Delta)$ так, чтобы выполнялись равенства $\widetilde{u}_i(t)=0$ для $t\in[a,t_{i+1}]$ и $\widetilde{u}_i^{(q)}(t)=u_i^{(q)}(t)$ для $t\in(t_k,t_{k+1})$ при $k\geq i+1$. Будем искать $\widetilde{u}_i$ в виде $\widetilde{u}_i(t)=\sum\limits_{j=0}^{\mu-1} \frac{j!}{(j+q)!} \tau_{ij}(t-t_{i+1})_+^{j+q}$, где τ_{ij} – пока неопределенные коэффициенты. Первое из требуемых равенств выполняется в силу самого определения усеченной степенной функции $(t-c)_+$, а второе, означающее, что $\sum\limits_{j=0}^{\mu-1} \sigma_{ij}(t-t_i)^j=\sum\limits_{j=0}^{\mu-1} \tau_{ij}(t-t_{i+1})^j$ для $t\in(t_k,t_{k+1})$, $k\geq i+1$, будет выполняться, если $\tau_{ij}=\sum\limits_{k=j}^{\mu-1} \frac{k!}{j!(k-j)!} \sigma_{ik}(t_{i+1}-t_i)^{k-j}$, $j=\overline{0,\mu-1}$ (что легко получить, пользуясь формулой Тейлора для полиномов). Ясно, что $u_i-\widetilde{u}_i \in S_{m,\mu}(\Delta)$ и $(u_i(t)-\widetilde{u}_i(t))^{(q)}=y_i(t)$ для $t\in(t_i,t_{i+1})$, $(u_i(t)-\widetilde{u}_i(t))^{(q)}=0$ для $t\in(t_k,t_{k+1})$ при $k\neq i$. Далее, имея в виду формулу $(41)_2$, возьмем функцию $v_i\in S_{m,\mu}(\Delta)$: $v_i(t)=\sum\limits_{j=0}^{\mu-1}(-1)^{j+q}\frac{j!}{(j+q)!}\xi_{ij}(t_i-t)_+^{j+q}$, где $\xi_{ij}=\sum\limits_{l=0}^{\mu-1}\beta_{il}c_{lj}$ и "подправим" ее функцией $\widetilde{v}_i\in S_{m,\mu}(\Delta)$:
$\widetilde{v}_i(t)=\sum\limits_{j=0}^{\mu-1}(-1)^{j+q}\frac{j!}{(j+q)!}\eta_{ij}(t_{i-1}-t)_+^{j+q}$, где $\eta_{ij}=\sum\limits_{k=j}^{\mu-1}(-1)^{j+k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\xi_{ik}(t_i-t_{i-1})^{k-j}$.
Это обеспечит равенства $(v_i(t)-\widetilde{v}_i(t))^{(q)}=y_i(t)$ для $t\in(t_{i-1},t_i)$ и $(v_i(t)-\widetilde{v}_i(t))^{(q)}=0$ для $t\in(t_{k-1},t_k)$ при $k\neq i$. Легко видеть, что функция $(u_i-\widetilde{u}_i)+(v_i-\widetilde{v}_i)$ является искомым сплайном S_i. Таким образом, $\forall\, i=\overline{1,n}$ и $\forall\, t\in[a,b]$

$$
\begin{aligned}
s_i(t)=&\sum_{j=0}^{\mu-1}\frac{j!}{(j+q)!}\left[\sigma_{ij}(t-t_i)_+^{j+q}-\tau_{ij}(t-t_{i+1})_+^{j+q}\right]+\\
&+\sum_{j=0}^{\mu-1}(-1)^{j+q}\frac{j!}{(j+q)!}\left[\xi_{ij}(t_i-t)_+^{j+q}-\eta_{ij}(t_{i-1}-t)_+^{j+q}\right],
\end{aligned}
\tag{45}
$$

где $\sigma_{ij}=\sum\limits_{l=0}^{\mu-1}\alpha_{il}b_{lj}$, $\tau_{ij}=\sum\limits_{k=j}^{\mu-1}\frac{k!}{j!(k-j)!}\sigma_{ik}(t_{i+1}-t_i)^{k-j}$,
$\xi_{ij}=\sum\limits_{l=0}^{\mu-1}\beta_{il}c_{lj}$, $\eta_{ij}=\sum\limits_{k=j}^{\mu-1}\frac{k!}{j!(k-j)!}\xi_{ik}(t_i-t_{i-1})^{k-j}$, $j=\overline{0,\mu-1}$.

Заметим, что пользуясь формулами (45), нет необходимости вычислять τ_{nj} и η_{1j}, $j=\overline{0,\mu-1}$, так как τ_{nj} и η_{1j} умножаются, соответственно, на равные нулю величины $(t-t_{n+1})_+^{j+q}$ и $(t_i-t)_+^{j+q}$

Приведем номера формул и систем уравнений в той их последовательности, которая нужна для вычисления интерполяционных и сглаживающих сплайнов пространства S (34), (38), (43), (44), (45), (13); (15).

Литература

1. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М.,1980.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. - М.,1980.

Поступила 30 октября 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 515.1

ОБ ОПЕРАТОРАХ ВНУТРЕННОСТИ В ТОПОСЕ ПУЧКОВ

М.М.Заричный
Львовский государственный университет

Пусть $\mathcal{E}$ – элементарный топос [1],[2], $X \in Ob\mathcal{E}$.

Определение 1. Морфизм $i: \Omega^X \to \Omega^X$ называется оператором внутренности на объекте X, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) $i\ulcorner X \urcorner = \ulcorner X \urcorner$,
2) $i \leq 1_{\Omega^X}$,
3) $i\Lambda_X = \Lambda_X(i \times i)$,
4) $ii = i$.

В топосе множеств $\mathcal{S}et$ это определение превращается в определение оператора внутренности на множестве X.

Множество операторов внутренности на X обозначим $OI(X)$. Введем на множестве $OI(X)$ отношение "$\preccurlyeq$", положив $i \preccurlyeq i'$, если $i'i = i$.

Предложение. Отношение $\preccurlyeq$ является отношением частичного порядка на множестве $OI(X)$.

Доказательство. Рефлексивность и транзитивность устанавливаются тривиально. Если $i \preccurlyeq i' \preccurlyeq i$, то $\Lambda_X\langle i, i'\rangle =$ $= \Lambda_X\langle i'i, i'\rangle = \Lambda_X(i' \times i')\langle i, 1_{\Omega^X}\rangle = i'i = i$. Меняя местами i и i', получаем $\Lambda_X\langle i', i\rangle = i'$, откуда $i = i'$, что и доказывает симметричность.

Пусть $\mathcal{S}hv(A)$ – топос пучков множеств над топологическим пространством A. Каждый объект этого топоса мы будем изображать соответствующим ему этальным пространством. Через $\mathcal{A}$ будем обозначать накрывающее отображение в A.

Пусть $X \in Ob\,\mathcal{S}hv(A)$ и $\mathcal{T}$ – топология на X. Обозначим через $\mathcal{W}_\mathcal{T}(X)$ семейство топологий на множестве X более слабых, чем топология $\mathcal{T}$. Семейство $\mathcal{W}_\mathcal{T}(X)$ частично упорядочено отношением $\leq$.

<u>Теорема I</u>. Частично упорядоченные множества $(\mathcal{W}_\tau(X),\leq)$ и $(OI(X),\preccurlyeq)$ изоморфны.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, приведем описание некоторых объектов и морфизмов топоса пучков, необходимое для дальнейшего.

Пусть $a\in A$. В множестве τ введем отношение эквивалентности $\sim_a$, положив $U\sim_a V$, если существует открытое множество $W\subset A$ такое, что $U\cap\mathfrak{F}^{-1}(W)=V\cap\mathfrak{F}^{-1}(W)$. Класс эквивалентности отношения $\sim_a$, содержащий элемент $U\in\tau$, будем обозначать $[U]_a$. Объект Ω^X как множество равен $\{[U]_a|U\in\tau,a\in A\}$. Базу топологии на множестве Ω^X образуют множества вида $[U,W]=\{[U]_a|a\in W\}$, где $U\in\tau$, а W открыто в A. Теперь морфизм $\ulcorner X\urcorner:\mathbb{1}\to\Omega^X$ можно записать следующим образом: $\ulcorner X\urcorner(a)=[X]_a$ для любого $a\in A$; морфизм $\Lambda_X:\Omega^X\cdot\Omega^X\to\Omega^X$ задается формулой $\Lambda_X([U]_a,[V]_a)=[U\cap V]_a$, $U,V\in\tau, a\in A$.

Переходим к доказательству теоремы.

Для каждого $\rho\in\mathcal{W}_\tau(X)$ построим отображение $h(\rho):\Omega^X\to\Omega^X$, положив для каждого $U\in\tau$ и $a\in A$, $h(\rho)[U]_a=[\mathcal{I}nt_\rho(U)]_a$. Покажем, что $h(\rho)\in OI(X)$. Прежде всего, требуется показать, что отображение $h(\rho):\Omega^X\to\Omega^X$ непрерывно, т.е. является морфизмом категории $\mathcal{S}h(X)$. Пусть $h(\rho)[U]_a\in[V,W]$, где $V\in\tau$, W – открыто в A. Тогда $[\mathcal{I}nt_\rho(U)]_a=[V]_a$ и поэтому существует окрестность W' точки a такая, что $W'\subset W$ и $\mathfrak{F}^{-1}(W')\cap\mathcal{I}nt_\rho(U)=\mathfrak{F}^{-1}(W')\cap V$. Но тогда, очевидно, $[U]_a=[U,W']$ и $h(\rho)[U,W']\subset[V,W']\subset[V,W]$.

Проверим выполнение условий I) – 4) из определения I:

1) $h(\rho)\ulcorner X\urcorner(a)=h(\rho)[X]_a=[\mathcal{I}nt_\rho(X)]_a=[X]_a=\ulcorner X\urcorner(a)$, $a\in A$, т.е. $h(\rho)\ulcorner X\urcorner=\ulcorner X\urcorner$;

2) $\Lambda_X(h(\rho)[U]_a,[U]_a)=\Lambda_X([\mathcal{I}nt_\rho(U)]_a,[U]_a)=$ $=[\mathcal{I}nt_\rho(U)\cap U]_a=[\mathcal{I}nt_\rho(U)]_a$, $U\in\tau, a\in A$, откуда $h(\rho)\leq 1_{\Omega^X}$;

3) $h(\rho)\Lambda_X([U]_a,[V]_a)=h(\rho)[V\cap U]_a=[\mathcal{I}nt_\rho(U\cap V)]_a=$ $=[\mathcal{I}nt_\rho(U)\cap\mathcal{I}nt_\rho(V)]_a=\Lambda_X(h(\rho)[U]_a,h(\rho)[V]_a)$, $U,V\in\tau$, $a\in A$, т.е. $h(\rho)\Lambda_X=\Lambda_X(h(\rho)\times h(\rho))$;

4) $h(\rho)h(\rho)[U]_a=[\mathcal{I}nt_\rho(\mathcal{I}nt_\rho(U))]_a=[\mathcal{I}nt_\rho(U)]_a=$ $=h(\rho)[U]_a$, $U\in\tau, a\in A$ т.е. $h(\rho)h(\rho)=h(\rho)$.

Покажем, что $h:\mathcal{W}_\tau(X)\to OI(X)$ – инъективное отображение. Пусть $\rho,\rho'\in\mathcal{W}_\tau(X)$ и $\rho\neq\rho'$. Тогда существует

$U\in\tau$, для которого $\mathcal{J}nt_{p}(U)\neq \mathcal{J}nt_{p'}(U)$

Для каждого $i\in OJ(X)$ положим $g(i)=\{U\in\tau\,|$ для каждого $a\in A$ $i[U]_a=[U]_a\}$ и покажем, что $g(i)\in W_\tau(X)$. По определению $g(i)\subset\tau$, поэтому остается показать, что $g(i)$ – топология на X

а) очевидно, что $\emptyset\in g(i)$, $X\in g(i)$;

б) если $U,W\in g(i)$, то $i[U\cap W]_a=i\Lambda_X([U]_a,[V]_a)=$ $=\Lambda_X(i[U]_a,i[V]_a)=\Lambda_X([U]_a,[V]_a)=[U\cap W]_a$ для всех $a\in A$ и, значит, $U\cap V\in g(i)$;

в) если $\mathcal{U}\subset g(i)$, то для любого $U\in\mathcal{U}$ $\cup\mathcal{U}\supset U$ и, значит, для всех $a\in A$, $i[\cup\mathcal{U}]_a\geq i[U]_a=[U]_a$. Следовательно, $i[\cup\mathcal{U}]_a\geq[\cup\mathcal{U}]_a$. С другой стороны, $i[\cup\mathcal{U}]_a\leq[\cup\mathcal{U}]_a$ и поэтому $i[\cup\mathcal{U}]_a=[\cup\mathcal{U}]_a$ для всех $a\in A$, т.е. $\cup\mathcal{U}\in g(i)$.

Покажем, что отображения g и h взаимно обратны. Пусть $p\in W_\tau(X)$ Тогда $gh(p)=\{U\in\tau\mid$ для каждого $a\in A$ $h(p)[U]_a=[U]_a\}=\{U\in\tau\mid$ для каждого $a\in A$ $[\mathcal{J}nt_p(U)]_a=$ $=[U]_a\}=\{U\in\tau\,|\,\mathcal{J}nt_p(U)=U\}=p$, т.е. $gh=1_{W_\tau(X)}$
Из инъективности отображения g следует, что $hg=1_{OJ(X)}$

Осталось показать, что отображение h сохраняет порядок. Пусть $p,p'\in W_\tau(X)$ и $p\leq p'$. Тогда $h(p')h(p)[U]_a=h(p')$ $[\mathcal{J}nt_p(U)]_a=[\mathcal{J}nt_{p'}(\mathcal{J}nt_p(U))]_a=[\mathcal{J}nt_p(U)]_a=h(p)[U]_a$, $U\in\tau$, $a\in A$, т.е. $h(p')h(p)=h(p)$ и, значит, $h(p)\leq h(p')$. Теорема доказана.

В дальнейшем через $g_X: OJ(X)\to W_\tau(X)$ будем обозначать изоморфизм, построенный в доказательстве теоремы I, $g_X(i)=$ $=\{U\in\tau\mid$ для каждого $a\in A$ $i[U]_a=[U]_a\}$.

<u>Определение 2</u>. Пара (X,i), где X – объект элементарного топоса $\mathcal{E}$, а $i\in OJ(X)$, называется топологическим пространством в топосе $\mathcal{E}$.

По поводу других определений топологических пространств в топосах см., например, [3]

Пусть $P:\mathcal{E}\to\mathcal{E}^{op}$ – контравариантный функтор экспоненты [1].

<u>Определение 3</u>. Если (X,i), (Y,j) – топологические пространства в топосе $\mathcal{E}$, то морфизм $f:X\to Y$ называется непрерывным, если $P(f)j\leq iP(f)$.

Теорема 2. Пусть (X, i), (Y, j) - топологические пространства в топосе $Shv(A)$. Морфизм $f: X \to Y$ является непрерывным, если и только если непрерывно отображение $f: (X, g_X(i)) \to (Y, g_Y(j))$.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что $P(f)[U]_a = [f^{-1}(U)]_a$ для любого $[U]_a \in \Omega^Y$.

Если отображение $f: (X, g_X(i)) \to (Y, g_Y(j))$ непрерывно, то $P(f)j[U]_a \leq P(f)[U]_a = [f^{-1}(U)]_a = i[f^{-1}(U)]_a = iP(f)[U]_a$ и $P(f)j \leq iP(f)$, что доказывает необходимость. Обратно, если $U \in g(i)$, то $j[U]_a = [U]_a$ и $P(f)j[U]_a = [f^{-1}(U)]_a \leq iP(f)[U]_a = i[f^{-1}(U)]_a$. Отсюда следует, что $i[f^{-1}(U)]_a = [f^{-1}(U)]_a$ и, значит, $f^{-1}(U) \in g_X(i)$, т.е. отображение $f: (X, g_X(i)) \to (Y, g_Y(j))$ непрерывно. Теорема доказана.

Топологические пространства и непрерывные отображения в топосе $\mathcal{E}$ образуют категорию $\mathcal{T}op_{\mathcal{E}}$. Теоремы I и 2 дают описание категории $\mathcal{T}op_{Shv(X)}$.

Список литературы

1. Johnstone P.T. Topos Theory.- Academic Press.- London, New York, San Francisco, 1977.
2. Гольдблатт Р. Топосы: категорный анализ логики.- М.,1983.
3. Porta H.J., Wyler O. On compact space objects in topoi // Lect. Notes in Math.- 1982.- V.915.- P.375-385.

Поступила 10 декабря 1985 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 515.1

(M, I)-АБСОЛЮТЫ И ИХ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ

А.В.Колдунов
ЛГПИ им. А.И.Герцена

В разное время и с различными целями вводились прообразы специального вида (или со специальными свойствами) данного топологического пространства [1],[2],[3],[4] .

Нетрудно выделить два основные подхода к введению (и последующей характеризации) этих прообразов- в первом из них требуемый объект строился как предел некоторого семейства (спектра) прообразов исходного пространства T; в этом случае получившееся пространство T' обычно характеризуется как наименьший (в определенном смысле) прообраз $T(\tau: T' \to T)$ с некоторым (наперед известным) свойством. Причем это свойство может быть сформулировано в терминах пространства T и отображения τ ,либо быть свойством только пространства T' без какой-либо связи с пространством T и отображением τ Более сложно в этих случаях получить внутренние характеризации T' , то есть выделить конечный набор условий на (T', τ) , которые полностью описывали бы (T', τ) как прообраз T [1],[3]

Другой подход, в отличие от первого, ориентирован на получение прообразов, допускающих достаточно естественные внутренние описания. При этом искомый объект строится как семейство ультрафильтров некоторого решеточно упорядоченного семейства (или как стоуновское пространство некоторой решетки, в другой терминологии). Получившиеся в этом случае объекты, в общем то, не обязаны быть наименьшими или наибольшими прообразами относительно каких-либо свойств, но при определенных ("хороших") исходных условиях они действительно становятся наименьшими или наибольшими прообразами исходного пространства тех или иных свойств.

Именно так случилось с абсолютом Глисона-Пономарева, O-абсолютом ([5]), σ-абсолютом ([6]).

Изучение этих и других классов прообразов топологического пространства позволяет заметить некоторые общие конструкции и ситуации. Это обстоятельство и послужило основой для введения автором (M, I)-абсолютов и получения для них теорем- характеризаций, обобщающих известные результаты о конкретных прообразах топологических пространств.

1. Упорядоченные подмножества $\mathfrak{D}(S,I)$ и их стоуновские пространства.

Пусть T-топологическое пространство; пусть,далее S-некоторая решетка множеств в T и I -идеал в S. Через $\mathfrak{D}(S,I)$ будем обозначать семейство всевозможных наборов $V=(H)$, состоящих из элементов $H\in S$. Считаем, что в $\mathfrak{D}(S,I)$ введено отношение $(\leq)$: $V_1 \leq V_2 \Leftrightarrow$ если $H\subset H_1\in V_1$, $H\in S$, $H\cap H_2\in I$ для любого элемента H_2 набора V_2, то $H\in I$ Нетрудно заметить, что отношение $(\leq)$ является предпорядком (то есть из того,что $V_1 \leq V_2 \leq V_1$, не следует, в принципе, $V_1 = V_2$).

Будем говорить, что M является подрешеткой $\mathfrak{D}(S,I)$, если для $V_1, V_2 \in M$ наборы $(H_1\cap H_2)$, $(H_1\cup H_2)$ также принадлежат M. В дальнейшем всегда будем считать M подрешеткой $\mathfrak{D}(S, I)$.

Семейство элементов $\mathcal{B}\subset M$ будем называть (M,I)-фильтром, если выполнены следующие условия: 1) если $V\in\mathcal{B}$, то $H\bar{\in} I$ для некоторого $H\in V$; 2) если $V_1\in\mathcal{B}$, $V_2\in M$, $V_1\leq V_2$, то $V_2\in\mathcal{B}$; 3) если $V_1, V_2\in\mathcal{B}$, то найдется $V\leq V_1$, V_2, принадлежащее $\mathcal{B}$.

Каждый (M,I)-фильтр можно погрузить в максимальный (M,I)-фильтр ($\equiv$ (M, I)-ультрафильтр). Семейство всех (M,I)-ультрафильтров обозначим через $\Gamma(M,I)$ и будем называть стоуновским пространством для подрешетки M. Пусть $\langle V\rangle=(A\in\Gamma(M,I)|V\in A)$. Заметим, что если $V_1, V_2\in M$, то $V=(H_1\cup H_2 | H_1\in V_1, H_2\in V_2)\in M$ и $\langle V_1\rangle\cup\langle V_2\rangle=\langle V\rangle$.

Выберем в качестве базы замкнутых множеств в $\Gamma(M,I)$ всевозможные $(\langle V\rangle | V\in M)$. Тогда $\Gamma(M, I)$ превращается в T_1-бикомпактное пространство. Причем $\Gamma(M, I)$ не обязано быть хаусдорфным. Нетрудно указать необходимое и достаточное условие, при котором $\Gamma(M, I)$ хаусдорфово: пусть V_1, V_2 I-дизъюнктные элементы в M (то есть $H_1 \cap H_2 \in I$ для любых $H_1 \in V_1$, $H_2 \in V_2$); тогда существуют $U_1, U_2 \in M$, для которых U_1 I-дизъюнктен V_1, U_2 I-дизъюнктен V_2 и $U = (P_1 \cup P_2 \mid P_1 \in U_1, P_2 \in U_2)$ является I-полным элементом в M (то есть если $W \in M$ I-дизъюнктен U, то любой $H \in W$ принадлежит I).

Пусть $V \in \mathcal{D}(S, I)$. Положим $supp_I^M V = T \setminus \cup(int H \mid H \in U$, U I-дизъюнктен V). Множество $supp_I^M V$ замкнутое.

Пусть $A \in \Gamma(M, I)$. Пусть $\nabla(A) = \cap(supp_I^M V \mid V \in A)$, $AB_I^{MS}(T) = \{(t, A) \mid t \in \nabla(A)\} \subset T \times \Gamma(M, I)$. Докажем, что $AB_I^{MS}(T)$ является замкнутым подмножеством $T \times \Gamma(M, I)$, то есть естественная проекция $\tau_I^M : AB_I^{MS}(T) \to T$ является совершенным отображением. Пусть $(t, A) \bar{\in} \Gamma(M, I)$: это означает, что $t \bar{\in} supp_I^M V$ для некоторого $V \in A$; тогда $t \in int H$, $H \in U$, причем U I-дизъюнктен V. В этом случае $(t, A) \in int H \times (\Gamma(M, I) \setminus \langle U \rangle) = G$; проверим, что $G \cap AB_I^{MS}(T) = \emptyset$. Пусть $(p, A') \in G$; тогда $A' \bar{\in} \langle U \rangle$ и найдется элемент $U' \in A'$, I-дизъюнктный U; в этом случае $p \bar{\in} supp_I^M U'$ и $(p, A') \bar{\in} AB_I^{MS}(T)$.

<u>Лемма 1.</u> Пусть выполнено следующее условие: если $H \in I$, то $int H = \emptyset$. Тогда 1) если $t \in supp_I^M V$, то найдется $A \in \langle V \rangle$, $t \in \nabla(A)$; 2) если $(T) \in M$, то отображение τ_I^M сюръективное.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{B} \subset M$, состоящее из всевозможных $U \in M$, $t \in int H$ ($H \in U$). Пусть $\mathcal{B}_1 = \{W \in M \mid W \geq (P \cap H \mid P \in V, H \in U), U \in \mathcal{B}\}$. Докажем, что $\mathcal{B}_1$ является (M, I)-фильтром. Для этого сначала установим, что если $U \in \mathcal{B}$, то $(P \cap H \mid P \in V, H \subset U)$ содержит элементы, не принадлежащие I. Действительно, $t \in int H \cap supp_I^M V$, поэтому U не является I-дизъюнктным V. Теперь заметим, что если $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$, то $U_0 = (H_1 \cap H_2 \mid H_i \in U_i) \in \mathcal{B}$. Поэтому, если $W_1, W_2 \in \mathcal{B}_1$, то $W_i \geq (P \cap H_i \mid P \in V, H_i \in U_i)$, $W_i \geq W = (S_1 \cap S_2 \mid S_i \in W_i) \geq (P \cap H \mid P \in V$, $H \in U_0)$. Найдется (M, I)-ультрафильтр A, содержащий

$\mathcal{B}_1$. Докажем, что $t\in\nabla(A)$ Пусть $t\bar\in\nabla(A)$, то есть $t\bar\in supp_I^M W$, $W\in A$; это означает, что найдется $U\in M$ I -дизъюнктный W , причем $t\in int H$ для некоторого $H\in U$ Но тогда $U\in\mathcal{B}\subset A$, что противоречит определению (M , I)-фильтра.

Пункт 2) следует из 1), если учесть, что $T=supp_I^M(T)$

Лемма 2. Пусть S состоит из замкнутых множеств и для S, I выполнены следующие условия: а) пусть $t\in supp_I^M V$ и G есть окрестность точки t , тогда существует $b'\in S\setminus I$, $b'\subseteq b\in V$, $b'\setminus G\subset c\in I$; в) если $H_1\in S\setminus I$, $H_2\in I$, то $(supp_I^M H_1)\setminus H_2\neq\emptyset$; с) если $H\in S\setminus I$, то существует $V\in M$, не являющийся I -полным в M , но для которого $(H\cup P\mid P\in V)$ I -полный элемент в $\mathfrak{A}(S,I)$ В этом случае:

1) если $V\in M$, то $(T\cdot\langle V\rangle)\cap AB_I^{MS}(T)=\mathring{V}_t=cl\,U(int_{AB}\tau_I^{-1}H\mid H\in V)$;

2) если $H\in S$, то $int_{AB}(\tau_I^M)^{-1}(H)=\emptyset\Leftrightarrow H\in I$;

3) если $V_1,V_2\in M$, $V=(H_1\cap H_2\mid H_i\in V_i)$, то $(\mathring{V}_1)_t\cap(\mathring{V}_2)_t=\mathring{V}_t$.

Доказательство. Установим, что $int_{AB}(\tau_I^M)^{-1}(H)\subseteq T\cdot\langle V\rangle$ для любого $H\in V$ Пусть $(t,A)\in(G\times W)\cap AB_I^{MS}(T)\subseteq(\tau_I^M)^{-1}(H)$. Надо доказать, что $A\in\langle V\rangle$. В противном случае $A\in\langle U\rangle\subseteq$ $\subseteq(\Gamma(M,I)\setminus\langle V\rangle\cap W$ С другой стороны, $t\in\nabla(A)$, то есть $t\in supp_I^M U$ и по а) найдется $b'\subseteq b\in U$, $b'\setminus G\subseteq c\in I$. Получаем $b'\cap H\bar\in I$. По в) существует $t'\in(supp_I^M b')\setminus c\,U(b'\cap H)\subseteq supp_I^M U\setminus c\,U(b'\cap H)$. По лемме 1 найдется $A'\in\langle U\rangle$, $t'\in\nabla(A')$. Тогда $(t',A')\in$ $\in AB_I^{MS}(T)\cap(G\times W)\subseteq(\tau_I^M)^{-1}(H)$ но $t'\bar\in H$.

Теперь проверим, что если $c\in I$, то $int_{AB}(\tau_I^M)^{-1}c=\emptyset$. Пусть $(t,A)\in(G\times W)\cap AB_I^{MS}(T)\subseteq(\tau_I^M)^{-1}(c)$ Найдется $V\in M$, $A\in\langle V\rangle\subset W$ Тогда $t\in supp_I^M V$ и существует $b'\subseteq b\in V$ $b'\setminus G\subset c_1\in I$ Выберем $t'\in supp_I^M b'\setminus c\,U c_1\subseteq supp_I^M V$. По лемме 1 $t'\in\nabla(A')$, $A'\in\langle V\rangle$. Тогда $(t',A')\subseteq(G\times W)\cap$ $\cap AB_I^{MS}(T)\subseteq(\tau_I^M)^{-1}(c)$, но $t'\bar\in c$.

Докажем, что если $a\in S\setminus I$, $V\in M$, причем $\langle V\rangle\neq\Gamma(M,I)$, и $(a\cup d\mid d\in V)$ является I -полным элементом в $\mathfrak{A}(S,I)$, то $\emptyset\neq T\cdot[(M,I)\setminus\langle V\rangle]\cap AB_{\mathcal{I}}^{MS}(T)\subseteq(\tau_I^M)^{-1}(a)$. Сначала покажем, что это множество непустое. Выберем $U\in M$, I -дизъюнктное V . По условию в) найдется $p\in supp_I^M U$; по лемме 1 $p\in\nabla(A)$, $A\in\langle U\rangle$.

Тогда $(p, A) \in AB_I^{MS}(T) \cap (T \cdot (\Gamma(M,I) \setminus \langle V \rangle))$. Теперь проверим, что это множество лежит в $(\tau_I^M)^{-1}(a)$. Пусть $(t, A) \in AB_I^{MS}(T) \cap$ $\cap (T \cdot (\Gamma(M,I) \setminus \langle V \rangle)$ и предположим, что $t \bar{\in} a$. Поскольку $\Gamma(M, I) \setminus \langle V \rangle \neq \emptyset$, то существует $\emptyset \neq \langle V_1 \rangle \subseteq \Gamma(M,I) \setminus \langle V \rangle$; найдется $b \in V_1$, $b \bar{\in} I$; по выбору $b \cap a \in I$ и по условию в) существует $t_1 \in supp_I^M b \setminus a \cap b$; по условию а) найдется $c' \subset c \in V_1$, $c' \bar{\in} I$, для которого $c' \setminus (T \setminus a) = c' \cap a \in I$. По условию $(a \cup d \mid d \in V)$ I - полный элемент, поэтому для некоторого $d \in V$ выполнено $(a \cup d) \cap c' \bar{\in} I$, то есть $d \cap c' \bar{\in} I$. Но с другой стороны $c' \subset c \in V_1$ и V_1 I-дизъюнктон V.

Из доказанного свойства следует 2). Более того, из него следует и 1). Предположим, что $(t, A) \in (T \cdot \langle V \rangle) \cap AB_I^{MS}(T) \setminus \dot{V}_t$. Найдется окрестность точки (t, A), для которой $(G \cdot W) \cap$ $\cap int_{AB}(\tau_I^M)^{-1}(a) = \emptyset$ для любого $a \in V$. Пусть $U \in M$ и $A \in \langle U \rangle \subset W \cap \langle V \rangle$; это означает, что $U_1 = (b \cap c \mid b \in U, c \in V)$ и $A \in \langle U_1 \rangle \subset \langle U \rangle$. Тогда $t \in (supp_I^M U_1) \cap G$; по условию а) существует $c' \subseteq b \cap c \in U_1$, $c' \bar{\in} I$, $c' \setminus G \in I$. Для элемента c' по условию с) выберем $U_2 \in M$, для которого $\langle U_2 \rangle \neq \Gamma(M, I)$, $(c' \cup e \mid e \in U_2)$ является I-полным элементом в $\mathfrak{D}(S, I$. Тогда $\emptyset \neq K = T \cdot (\Gamma(M,I) \setminus \langle U_2 \rangle) \cap AB_I^{MS}(T) \subseteq (\tau_I^M)^{-1}(c')$. Найдется $(t', A') \in K \setminus (\tau_I^M)^{-1}(c' \setminus G)$. Тогда $t' \in c' \cap G$, $A' \bar{\in} \langle U_2 \rangle$; далее $\langle U_2 \rangle \cup \langle U_1 \rangle = \Gamma(M, I)$, то есть $A' \in \langle U_1 \rangle \subset \langle U \rangle \subset W$. Получаем $(t', A') \in (G \cdot W) \cap int_{AB}(\tau_I^M)^{-1}(c') \subseteq (G \cdot W) \cap int_{AB}(\tau_I^M)^{-1}(c) = \emptyset$.

Из 1) следует 3). Лемма доказана.

<u>Лемма 3.</u> Пусть S состоит из всех замкнутых множеств, $M \subset \mathfrak{D}(S, I)$. Причем 1) $(a) \in M$ для любого $a \subset S$; 2) если $V \in M$, то для него существует I-дополнительный элемент $V' \in M$ (то есть V' I-дизъюнктон V, $(a \cup b \mid a \in V, b \in V')$ I-полный элемент); 3) выполнены условия а) - с) леммы 2. В этом случае для G, открытого в T, и $V \in M$ найдется $U \in M$ такой, что $cl((G \cdot \langle V \rangle) \cap AB_I^{MS}(T)) = (T \cdot \langle U \rangle) \cap AB_I^{MS}(T)$.

Доказательство. Пусть V_1 является I-дополнительным элементом для $(T \setminus G)$. Пусть $U = (a \cap b \mid a \in V, b \in V_1)$. Докажем, что этот элемент искомый. Пусть $(t, A) \in (G \cdot \langle V \rangle) \cap$ $\cap AB_I^{MS}(T)$. Докажем, что $A \in \langle U \rangle$. Иначе $A \in \langle U' \rangle$, где U' есть I-дополнительный элемент для U. В этом случае

$V_2=(a\cap c \mid a\in V, c\in \mathcal{U}')\in A$ и $t\in(\mathrm{supp}_I^M V_2)\cap B$; тогда найдется $d\subseteq a\cap c$, $d\in I$, $d\setminus G\in I$. Поскольку $((T\setminus G)\cup b \mid b\in V_1)$ является I-полным элементом, то $d\cap((T\setminus G)\cup b)\in I$ для некоторого $b\in V_1$. Но тогда $b\cap d\subseteq a\cap b\in \mathcal{U}$, $b\cap d\subseteq c\in\mathcal{U}'$, то есть $b\cap d\in I$. Противоречие.

Пусть $(t, A)\in(T\cdot\langle\mathcal{U}\rangle)\cap AB_I^{MS}(T)$. Докажем, что $(t,A)\in cl(G\cdot\langle V\rangle)\cap AB_I^{MS}(T)$ Пусть $G'\cdot W'$ есть произвольная окрестность (t, A); при этом можно считать, что $W'=\langle\mathcal{U}_1\rangle\subseteq\langle\mathcal{U}\rangle$. Поскольку $t\in\mathrm{supp}_I^M\mathcal{U}_1$, то существует $c_1\subseteq c\in\mathcal{U}_1$, $c_1\in I$, $c_1\setminus G'\in I$. В этом случае $c_1\setminus G\subseteq a\cap b\setminus G$, где $a\in V$, $b\in V_1$; поскольку V_1 – I-дополнительный элемент для $(T\setminus G)$, то $c_1\setminus G\in I$. Пусть $p\in\mathrm{supp}_I^M c_1\setminus(c_1\setminus G\cup G')$; тогда найдется $A'\in\langle\mathcal{U}_1\rangle$, $p\in\nabla(A')$. Получаем $(p, A')\in AB_I^{MS}(T)\cap(G\cdot\langle V\rangle)\cap(G'\cdot\langle\mathcal{U}_1\rangle)$.

<u>П. (M, I) -абсолюты.</u>

Пару $(AB_I^{MS}(T), \tau_I^M)$ будем называть (M, I)-абсолютом пространства T с каноническим отображением τ_I^M

Результаты первого пункта позволяют получить характеризацию некоторого класса (M, I)-абсолютов.

<u>Теорема 4.</u> Пусть S состоит из всех замкнутых множеств, а I содержится в семействе I_0 замкнутых нигде не плотных множеств. Пусть M является подрешеткой $\mathcal{R}(S, I)$, причем выполнены условия 1) если $a\in S$, то $(a)\in M$; 2) если $V\in M$, то существует I-дополнительный V элемент V', также принадлежащий M ; 3) если $a\in S\setminus I$, $b\in I$, то $(\mathrm{supp}_I^M(a))\setminus b\neq\varnothing$; 4) если $t\in\mathrm{supp}_I^M V$, G есть окрестность точки t, то найдется $b\subseteq a\in V$, $b\in I$, $b\setminus G\in I$. В этом случае $(AB_I^{MS}(T), \tau_I^M)$ является совершенным сюръективным отделимым T_1-прообразом T, в котором : а) если $a\in S$, то $\mathrm{int}(\tau_I^M)^{-1}(a)=\varnothing\Leftrightarrow a\in I$; в) если $V_1, V_2\in M$, то $(\check V_1)_\tau\cap(\check V_2)_\tau=(a\cap b\mid a\in V_1, b\in V_2)_\tau$; с) существует база $\mathcal{B}$ открытых множеств в $AB_I^{MS}(T)$ такая, что если $G\in\mathcal{B}$, то $cl\, G=\check V_t$ для некоторого $V\in M$ (M, I)-абсолют $(AB_I^{MS}(T), \tau_I^M)$ полностью характеризуется как совершенный сюръективный отделимый прообраз T с условиями а), в), с).

Доказательство. Выполнение всех (кроме отделимости τ^M_I) условий доказано в первом пункте. Пусть (p, A_1), $(p, A_2) \in (\tau^M_I)(p)$ Найдется $V \in M$ и I-дополнительный $V' \in M$, для которых $A_1 \in \langle V \rangle$, $A_2 \in \langle V' \rangle$. Множества $(T \cdot \langle V \rangle) \cap AB^{MS}_I(T)$, $(T \cdot \langle V' \rangle) \cap AB^{MS}_I(T)$ являются непересекающимися окрестностями точек (p, A_1), (p, A_2).

Пусть (Q, τ) есть другой прообраз T с условиями а) - с), причем τ совершенное, сюръективное и отделимое.

Пусть $(t, A) \in AB^{MS}_I(T)$ Положим $\sigma(t,A) = \cap(\mathring{V}_t | (t,A) \in \mathring{V}_{\tau^M_I}) \cap \tau^{-1}\tau^M_I(t,A)$ Проверим, что $\sigma(t,A) \neq \emptyset$ Для этого заметим, что если $(t, A) \in (\mathring{V}_1)_{\tau^M_I} \cap (\mathring{V}_2)_{\tau^M_I}$, то по в) $(a \cap b \mid a \in V_1, b \in V_2)_{\tau^M_I}$ содержит точку (t, A). Поэтому, если $\sigma(t,A) = \emptyset$, то найдется $V \in M$, для которого $(t, A) \in \mathring{V}_{\tau^M_I}$ и $t \in T \setminus \tau(\mathring{V}_t) = G$; тогда $\tau^M_I(t,A) \in$ $\in supp^M_I V$ и существует $b \subseteq a \in V$, для которого $b \setminus G \in I$, $b \in I$. Получаем $int\, \tau^{-1}(b) \neq \emptyset$, но $int\, \tau^{-1}(b) \subseteq$ $\subseteq cl\, int\, \tau^{-1}(b \cap G) \cup cl\, int\, \tau^{-1}(b \setminus G) = \emptyset$.

Теперь проверим, что каждое $\sigma(t, A)$ содержит не более одной точки. Пусть $p_1, p_2 \in \sigma(t,A)$ Тогда $\tau(p_1) = \tau(p_2) = t$ и существуют непересекающиеся окрестности $G(p_1)$, $G(p_2)$; по условию с) подберем $V_1, V_2 \in M$, для которых $cl\, G(p_i) = (\mathring{V}_i)$ Если $(t, A) \in (\mathring{V}_1)_{\tau^M_I}$ то $p_2 \bar{\in} \sigma(t,A)$. Пусть $(t,A) \bar{\in} (\mathring{V}_1)_{\tau^M_I}$; тогда $(t,A) \in (\mathring{V}'_1)_{\tau^M_I}$, где V'_1 есть I-дополнительный к V_1 элемент - это следует из а) и с); тогда $p_1 \bar{\in} \sigma(t,A)$.

Докажем, что отображение $\sigma : (t, A) \to \sigma(t, A)$ непрерывно. Пусть F замкнуто в Q и $p \bar{\in} F$ По отделимости τ существует открытое G такое, что $p \in G$ $cl\, G \cap \tau^{-1}(\tau(p)) \cap F = \emptyset$. Существует $V \in M$, для которого $cl\, G = \mathring{V}_\tau$ Множество $\mathring{V}_{\tau^M_I}$ открыто-замкнуто. Докажем, что открытое $G_1 = (\tau^M_I)^{-1}(T \setminus \tau(cl\, G \cap F)) \cap \mathring{V}_{\tau^M_I}$ содержит $\sigma^{-1}(p)$ и не пересекается с $\sigma^{-1}(F)$. Если $s \in \sigma^{-1}(F) \cap G_1$, то $\sigma(s) \in F \cap \mathring{V}_\tau = F \cap cl\, G$, $\tau^M_I(s) = \tau\sigma(s) \in \tau(F \cap cl\, G)$; но, с другой стороны, $\tau^M_I(s) \bar{\in} \tau(cl\, G \cap F)$. Если $\imath \in \sigma^{-1}(p) \setminus G_1$, то, поскольку $p \in \mathring{V}_\tau$, имеем $\imath \in \mathring{V}_{\tau^M_I}$, $\imath \bar{\in} (\tau^M_I)^{-1}(T \setminus \tau(cl\, G \cap F))$.

Получаем $\tau^M_I(\imath) \in \tau(cl\, G \cap F)$, $\tau(p) = (\tau^M_I)(\imath) \in \tau(cl\, G \cap F) \subseteq T \setminus \tau(p)$.

Непосредственно проверяется инъективность отображения σ Сюръективность σ доказывается аналогично тому, как проверялась непустота $\sigma(t,A)$. Пусть $p \in Q$ $\delta(p) =$

$=\bigcap(\check{V}_{\tau^M_I} \mid p\in \check{V}_\tau)\cap(\tau^M_I)^{-1}(\tau(p))\neq\emptyset$; остается установить, что $p=\sigma(\delta(p))$; пусть $s\in\delta(p)$ и $\sigma(s)\neq p$; точки $\sigma(s)$ и $p\in\tau^{-1}(\tau^M_I(s))$ обладают непересекающимися окрестностями $G(\sigma(s))$, $G(p)$. Тогда $cl(G(p))=\check{V}_\tau$, $cl\,G(\sigma(s))\subseteq\check{V}'_\tau$, где V' – I-дополнительный элемент для V. Окончательно, $\sigma(s)\in\check{V}_\tau\cap\check{V}'_\tau=\emptyset$.

Докажем, что σ – замкнутое отображение. Пусть F замкнуто в $AB^{MS}_I(T)$. Пусть $t\bar{\in}\sigma(F)$. Тогда $p=\sigma^{-1}(t)\bar{\in}F$. Заметим, что $(\tau^M_I)^{-1}(\tau(t))\cap F$ не содержит p и бикомпакт $\sigma((\tau^M_I)^{-1}(\tau(t))\cap F)=\tau^{-1}(\tau(t))\cap\sigma(F)$ также не содержит точку t. Поэтому существует окрестность $G(t)$, для которой $cl\,G(t)\cap\tau^{-1}(\tau(t))\cap\sigma(F)=\emptyset$. Множество $\tau^M_I(\sigma^{-1}(cl\,G(t))\cap F)$ замкнуто и не содержит точку $\tau(t)$. Поэтому $G_1=G(t)\cap$ $\cap\tau^{-1}(T\setminus\tau^M_I(\sigma^{-1}(cl\,G(t))\cap F))$ является окрестностью точки t, причем $G_1\cap\sigma(F)=\emptyset$.

Доказано, что σ есть гомеоморфизм.

Следствие 1. Пусть M совпадает с $\mathfrak{A}(S,I)$, тогда $AB^{as}_I(T)$ является экстремально несвязным.

Следствие 2. Если I есть семейство I_0 всех нигде не плотных замкнутых множеств в T, то $\tau^M_{I_0}$ неприводимое. Поэтому $AB^{as}_{I_0}(T)$ является единственным совершенным отделимым неприводимым экстремально несвязным прообразом.

Таким образом, $AB^{as}_{I_0}(T)$ является абсолютом Глисона-Пономарева, изучение которого проведено в целом ряде работ (см., например, [1] - [4]).

В теореме 4 используются весьма "богатые" (по запасу элементов) решетки M; естественно было бы выяснить, можно ли получить (M , I)-абсолюты с интересными свойствами, исходя из "богатых" решеток. Более конкретно: рассмотрим решетку M_0, состоящую из всевозможных одноэлементных наборов $V(a)$, где $a\in S$.

(M_0 , I)-абсолюты.

Пусть S состоит из замкнутых множеств и выполнены условия: 1) $T\in S$; 2) если $a\in S\setminus I$, то $supp^{M_0}_I a\neq\emptyset$; 3) если F замкнуто в T и точка $p\bar{\in}F$, то существуют непересекающиеся $a,b\in S$ такие, что $F\subseteq int\,a$, $p\in int\,b$; 4) для I-дизъюнктных $a,b\in S$ найдутся I-дизъюнктные $a_1,b_1\in S$ такие, что $a\setminus b\subseteq int\,a_1$, $b\setminus a\subseteq int\,b_1$;

b) для I-дизъюнктных $a, b \in S$ найдутся $a_2, b_2 \in S$ такие, что $a \cap b_2$, $b \cap a_2 \in I$, $a_2 \cup b_2 = T$. В этом случае (M_0, I) абсолют ($AB_I^{M_0 S}(T)$, $\tau_I^{M_0}$) обладает свойствами: а) $\tau_I^{M_0}$ совершенное сюръективное, причем $int(\tau_I^{M_0})^{-1}(a) = \phi$ для $a \in I$; в) если $a, b \in S$ I-дизъюнктны, то $cl(\tau_I^{M_0})^{-1}(a \setminus b) \cap cl(\tau_I^{M_0})^{-1}(b \setminus a) = \phi$; с) если F замкнутое в $AB_I^{M_0 S}(T)$ множество и точка $p \notin F$, то существуют I-дизъюнктные $a, b \in S$, для которых $F \subseteq int(\tau_I^{M_0})^{-1}(a)$, $p \in int(\tau_I^{M_0})^{-1}(b)$.

Оказывается, ($AB_I^{M_0 S}(T)$, $\tau_I^{M_0}$) полностью характеризуется условиями а), в), с). Более того $AB_I^{M_0 S}(T)$ является наименьшим прообразом T с условиями а), в) и наибольшим прообразом T с условиями а), с). Это утверждение получается из следующего предложения.

Предложение 5. Пусть τ_1 $Q_1 \to T$ – отображение с условиями а), в); пусть $\tau_2 : Q_2 \to T$ отображение с условиями а), с). Тогда существует единственное совершенное отображение $\tau : Q_1 \to Q_2$, замыкающее диаграмму (Q_1, Q, Q_2).

Доказательство. Пусть $t \in Q_1$. Положим $\tau(t) = \tau_2^{-1}(\tau_1(t)) \cap \cap \bigcap \{cl\, \tau_2^{-1}(a \setminus c) \mid t \in int\, \tau_1^{-1} a, c \in I\}$. По бикомпактности τ_2 получаем, что $\tau(t) \neq \phi$. Более того $\tau(t)$ содержит не более одной точки: пусть $p_1, p_2 \in \tau(t)$, то $p_i \in int\, \tau_2^{-1}(a_i)$ для I-дизъюнктных $a_1, a_2 \in S$. Можно считать, что $t \notin cl\, \tau_1^{-1}(a_1 \setminus a_2)$. Выберем $b \in S$, $c \in I$, для которых $p_1 \notin cl\, \tau_2^{-1}(b \setminus c)$, $a_1 \cup b = T$. Тогда $t \in int\, \tau_1^{-1}(b)$, $p_1 \notin \tau(t)$. Затем проверяется, что τ искомое.

Замечание. Пусть T регулярное пространство, S совпадает с решеткой всех замкнутых множеств, $I = \{c \in S \mid int\, c = \phi\}$. Тогда $AB_I^{M_0 S}(T)$ совпадает с абсолютом Глисона-Пономарева. Если T вполне регулярно, S есть семейство всех нуль-множеств в T, а I содержит все нигде не плотные нуль-множества, то $AB_I^{M_0 S}(T)$ есть секвенциальный абсолют T [5]

Список литературы

1. Пономарев В.И. Нормальные пространства как образы нульмерных // ДАН СССР.- 1963.- Т.150.- № 1.- С.36-39.
2. Gleason A. Projective topological spaces// Illinois Journ. Math.- 1958.-V.2.-N4A.- P.482-489.
3. Ульянов В.М. О бикомпактных расширениях счетного характера и абсолютах // Мат. сборник.-Т.98.- № 2.- 1975. - С.223-255.
4. Шапиро Л.Б. Об абсолютах топологических пространств и непрерывных отображений // ДАН СССР.- 1976.- Т.226.- № 3.- С.523-526.
5. Колдунов А.В. σ-пополнение и O-пополнение $C(B)$.// Функц. анализ.- Ульяновск, 1976.- С.76-83.
6. Колдунов А.В. σ_δ-накрытие и σ_δ-абсолют регулярного пространства // ДАН УзССР.- 1984.- Т.6.- С.12-14.

Поступила 17 июня 1985 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.
УДК 513.88

О СВЯЗИ КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ С РЕГУЛЯРНОЙ И УСТОЙЧИВОЙ СХОДИМОСТЬЮ

В.И.Лабеев
ЛГУ им. П.Стучки

В работах Г.М.Вайникко [1], [2] наряду с компактной аппроксимацией линейных непрерывных отображений рассматриваются ещё две аппроксимационные схемы: регулярная сходимость и устойчивая сходимость. В предлагаемой статье будет изучаться взаимосвязь между этими сходимостями.

В предлагаемой работе мы ограничимся рассмотрением линейных непрерывных отображений в банаховых пространствах. Для линейных замкнутых отображений можно получить аналогичные результаты путем классической перенормировки области определения отображений нормой, определяемой аппроксимируемым отображением.

Напомним основные определения. Указанные выше аппроксимационные схемы удовлетворяют условию поточечной сходимости, что является естественным во многих прикладных задачах (в приближенных методах, например):

Пусть $A_n, A \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $\forall x \in X \ \lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$.

Тогда

1) $A_n \to A$ <u>компактно</u> ((A_n) компактно аппроксимирует A), если для любой ограниченной последовательности $(x_n) \subset X$ последовательность $(A_n x_n - Ax_n)$ относительно компактна в Y ;

2) $A_n \to A$ <u>регулярно</u>, если для любой ограниченной последовательности $(x_n) \subset X$ из относительной компактности последовательности $(A_n x_n) \subset Y$ следует относительная компактность последовательности $(x_n) \subset X$;

3) $A_n \to A$ <u>устойчиво</u>, если для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ отображения A_n непрерывно обратимы и нормы обратных отображений равномерно ограничены, т.е. $A_n^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ и $\exists M > 0 : \|A_n^{-1}\| \leq M$ ($n \geq n_0$).

Понятие компактной аппроксимации мы рассматриваем для произвольных непрерывных отображений и не ограничиваемся, как это в работах [1], [2], вполне непрерывными отображениями. В предыдущих работах автора компактная аппроксимация изучалась под названием секвенциально компактной аппроксимации, что во многом было обусловлено различием в общности самого определения. В работах Г.М.Вайникко указанные сходимости рассматриваются в рамках дискретной аппроксимационной схемы, т.е. области определения и множества значений отображений A_n и A не совпадают, а подчинены последовательностям связующих отображений.

Если $A_n \to A$ устойчиво, то отображение A - относительно открытая инъекция.

Действительно,

$$\forall x \in X \ (n \geq n_0) \quad \|A_n x\| \geq \frac{1}{\|A_n^{-1}\|} \cdot \|x\| \geq \frac{1}{\max \|A_n^{-1}\|} \cdot \|x\|,$$

отсюда $\|Ax\| \geq \frac{1}{\max \|A_n^{-1}\|} \|x\|.$

В то же время отображение A не обязательно является сюръекцией. Приведем соответствующий пример.

Пусть $X = Y = l_2$, (e_n) - стандартный базис в l_2. Отображение $A \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$ определим следующим образом:

$$\forall x \in X \qquad Ax = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) e_{k+1}$$

т.е. A является оператором сдвига вправо. Последовательность линейных отображений $(A_n) \subset \mathcal{L}(l_2, l_2)$ определяется следующим образом:

$$\forall n \in N \ \ \forall x \in X \quad A_n x = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k) e_{k+1} + (x|e_{n+1}) e_1 + \sum_{k=n+2}^{\infty} (x|e_{k+2}) e_{k+2}.$$

Покажем, что $A_n \to A$ устойчиво. Действительно,

$$\forall x \in X \quad \lim_{n\to\infty} A_n x = \lim_{n\to\infty} \Big[\sum_{k=1}^{n} (x|e_k) e_{k+1} + (x|e_{n+1}) + \sum_{k=n+2}^{\infty} (x|e_{k+2}) e_{k+2} \Big] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (x|e_k) e_{k+1} + \lim_{n\to\infty} (x|e_{n+1}) e_1 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+2}^{\infty} (x|e_{k+2}) e_{k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) e_{k+1} = Ax.$$

Абсолютная сходимость соответствующих рядов следует из определения нормы в l_2 .

Для всех $n \in \mathbb{N}$ отображения A_n непрерывно обратимы в l_2. Более того

$$A_n^{-1} y = \sum_{k=1}^{n} (y|e_{k+1}) e_k + (y|e_1) e_{n+1} + \sum_{n=n+2}^{\infty} (y|e_{n+2}) e_{n+2}.$$

В то же время $\ell_2 = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{L}(e_1)$; таким образом, отображение A не сюръективно.

Отметим справедливость следующего предложения, которое вытекает непосредственно из определения и из теоремы Банаха-Штейнгауза.

Предложение 1. Пусть $A_n \to A$ в одном из указанных смыслов и $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ Тогда $Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x_n$.

Предложение 2. Пусть $A_n \to A$ устойчиво и $\lim_{n\to\infty} A_n x_n = Ax$

Тогда $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

Доказательство. Отметим, что

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x_n - x) = \lim_{n\to\infty} A_n x_n - \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax - Ax = 0.$$

Поэтому из оценки

$$\|x_n - x\| \leq \|A_n^{-1}\| \cdot \|A_n(x_n - x)\| \leq \max_{n \geq n_0} \|A_n^{-1}\| \cdot \|A_n(x_n - x)\|$$

следует нужное нам равенство $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Заметим, что отсюда, в частности, следует одно из утверждений теоремы 4.1. из [1] - если $A_n \to A$ устойчиво и $AX = Y$, то $A_n \to A$ - регулярно. Вопрос об обратимости этого утверждения также рассматривается в указанной теореме.

Следующая теорема, устанавливающая взаимосвязь между сюръективностью отображения A и устойчивой сходимостью последовательности (A_n).

Теорема 1. Предположим, что $A_n \to A$ компактно. Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $A \in \mathrm{Isom}(X, Y)$;

2) $A_n \to A$ устойчиво.

Доказательство.

1) $\Rightarrow$ 2).

Покажем, что $\lim_{n\to\infty} \|(A_n - A) \circ A^{-1} \circ (A_n - A)\|$ Действительно, если это условие не справедливо, то существует такая последовательность векторов $(x_j) \subset X$ и такая подпоследовательность (A_{n_j}) последовательности отображений (A_n), что для некоторого числа $a > 0$

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \|(A_{n_j}-A)\circ A^{-1}\circ(A_{n_j}-A)x_j\| > a. \tag{1}$$

Так как последовательность векторов $(A_{n_j}x_j - Ax_j)$ относительно компактна в пространстве Y и отображение A^{-1} является изоморфизмом, то последовательность векторов $(A^{-1}(A_{n_j}x_j - Ax_j)) = (A^{-1}\circ A_{n_j}x_j - x_j)$ будет относительно компактной в пространстве X. Более того, не умаляя общности можно считать, что

$$\lim_{j\to\infty}(A^{-1}\circ A_{n_j}x_j - x_j) = x_0 \in X$$

Тогда, используя предложение 1, получим следующее, противоречащее неравенству (1), равенство:

$$\lim_{j\to\infty}(A_{n_j}-A)(A^{-1}\circ A_{n_j}x_j - x_j) = \lim_{j\to\infty} A_{n_j}(A^{-1}\circ A_{n_j}x_j - x_j) -$$
$$- \lim_{j\to\infty} A(A^{-1}\circ A_{n_j}x_j - x_j) = Ax_0 - Ax_0 = 0.$$

Рассмотрим теперь следующий операторный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[A^{-1}\circ(A_n-A)]^k\circ A^{-1}$$

и убедимся в его абсолютной сходимости для всех достаточно больших $n\in\mathbb{N}$

Из равенства

$$\lim_{n\to\infty}\|(A_n-A)\circ A^{-1}\circ(A_n-A)\| = 0.$$

следует равенство

$$\lim_{n\to\infty}\|A^{-1}\circ(A_n-A)\circ A^{-1}\circ(A_n-A)\| = 0.$$

Поэтому найдется такое число $n_0\in\mathbb{N}$, что для всех $n > n_0$

$$\|A^{-1}\circ(A_n-A)\circ A^{-1}\circ(A_n-A)\| < q < 1.$$

Тогда для $n > n_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|(-1)^k[A^{-1}\circ(A_n-A)]^k\circ A^{-1}\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\|[A^{-1}\circ(A_n-A)]^k\|\cdot\|A^{-1}\| = \|A^{-1}\|\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}\|[A^{-1}\circ$$
$$\circ(A_n-A)]^{2n}\| + \sum_{n=0}^{\infty}\|[A^{-1}\circ(A_n-A)]^{2n+1}\|) = \|A^{-1}\|\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}\|(A^{-1}\circ(A_n-A)^2)^n\| +$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\|([A^{-1}\circ(A_n-A)]^2)^n\circ[A^{-1}\circ(A_n-A)]\| \le \|A^{-1}\|\cdot(\sum_{n=0}^{\infty}\|[A^{-1}\circ(A_n-A)]^2\|^n +$$
$$+\|A^{-1}\circ(A_n-A)\|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\|[A^{-1}\circ(A_n-A)]^2\|^n) = \|A^{-1}\|\cdot(1+\|A^{-1}\circ(A_n-A)\|)\cdot$$
$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\|[A^{-1}\circ(A_n-A)]^2\|^n \le \|A^{-1}\|\cdot(1+\|A^{-1}\|\cdot\|A_n-A\|)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\|[A^{-1}\circ(A_n-A)]^2\|^n =$$
$$= \frac{\|A^{-1}\|\cdot(1+\|A^{-1}\|\cdot\|A_n-A\|)\cdot\|[A^{-1}\circ(A_n-A)]^2\|}{1-\|[A^{-1}\circ(A_n-A)]^2\|}$$

Таким образом, для $n > n_0$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|(-1)^k[A^{-1}\circ(A_n-A)]^k\circ A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot(1+\|A^{-1}\|\cdot\|A_n-A\|)q}{1-q} \le$$

$$\le \frac{\|A^{-1}\|\cdot q}{1-q}\cdot\left(1+\|A^{-1}\|\max_n\|A_n-A\|\right).$$

Значит, операторный ряд абсолютно сходится в пространстве $\mathcal{L}(Y,X)$, причём, если $(n > n_0)$

$$B_n = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[A^{-1}\circ(A_n-A)]^k\circ A^{-1}\quad, \text{ то}$$

$$\|B_n\| \le \frac{\|A^{-1}\|\cdot q}{1-q}\left(1+\|A^{-1}\|\cdot\max_n\|A_n-A\|\right).$$

Так как для $n > n_0$ $B_n\circ A_n = I_X$ и $A_n\circ B_n = I_Y$, то $B_n = A_n^{-1}$ т.е. $A_n \to A$ устойчиво.

$2 \Rightarrow 1$. Нам достаточно убедиться в сюръективности отображения A. Пусть $y \in Y$ – произвольно выбранный вектор. Тогда существует такая последовательность векторов $(x_n)\subset X$ что $A_n x_n = y$ $(n > n_0)$ Эта последовательность ограничена, т.к.

$$\|x_n\| = \|A_n^{-1}y\| \le \max_n\|A_n^{-1}\|\cdot\|y\|.$$

Поэтому и последовательность $(A_n x_n - Ax_n)$ относительно компактна в пространстве Y, т.е. существуют такая ее подпоследовательность $(A_{n_j}x_{n_j} - Ax_{n_j})$ и такой вектор $z \in Y$, что

$$\lim_{j\to\infty}(A_{n_j}x_{n_j} - Ax_{n_j}) = z.$$

Отсюда

$$\lim_{j\to\infty} Ax_{n_j} = \lim_{j\to\infty}(A_{n_j}x_{n_j} - A_{n_j}x_{n_j} + Ax_{n_j}) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} A_{n_j}x_{n_j} - \lim_{j\to\infty}(A_{n_j}x_{n_j} - Ax_{n_j}) = y - z$$

Так как отображение A является относительно открытой инъекцией, то $R(A) = \overline{R(A)}$, поэтому $y - z \in R(A)$. Следовательно, существует такой вектор $x \in X$, что $Ax = y - z$ Таким образом, $\lim_{j\to\infty} Ax_{n_j} = Ax$, что в силу относительно открытой инъективности приводит к равенству $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x$ Но тогда из предложения 1 заключаем, что $\lim_{j\to\infty} A_{n_j}x_{n_j} = Ax$, т.е. $Ax = y$ или $R(A) = Y$

<u>Предложение 9</u>. Если $A_n \to A$ компактно и A – относи-

тельно открытая инъекция, то $A_n \to A$ регулярно.

Доказательство. Пусть $(x_n) \subset X$ такая ограниченная последовательность векторов, что $(A_n x_n)$ относительно компактна в Y. Тогда из относительной компактности последовательности $(A_n x_n - Ax_n)$ следует, что последовательность (Ax_n) также относительно компактна. Отсюда и из относительной открытости отображения A следует, что (x_n) - относительно компактная последовательность векторов.

Следствие 1. Если $A_n \to A$ компактно и $A \in Isom(X,Y)$, то $A_n \to A$ устойчиво и регулярно.

Следствие 2. Если $A_n \to A$ устойчиво и компактно, то $A \in Isom(X,Y)$ и $A_n \to A$ регулярно.

Охарактеризуем теперь некоторые свойства устойчивой сходимости. Пусть $A_n \to A$ - устойчиво и $y \notin R(A)$. Далее, пусть $x_n = A_n^{-1}(y)$ для всех $n > n_0$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $n \neq m$ $\|x_n - x_m\| > \varepsilon$.

Действительно, в противном случае из последовательности (x_n) можно было бы выделить сходящуюся в X последовательность (x_{n_k}) $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ Но тогда, согласно предложению 1, $\lim_{k\to\infty} A_{n_k} x_{n_k} = Ax$ т.е. $y = Ax \in R(A)$ - противоречие.

Предложение 4. Пусть $\dim X = +\infty$ и $A_n \to A$ устойчиво. Тогда $\dim R(A) = +\infty$

Доказательство. Из инъективности отображения A следует, что $card\, X = card\, R(A)$ т.е. $\dim R(A) = \dim X$

Вопрос о структуре пространства $R(A)$ довольно сложный. Как следует из приведенного в начале статьи примера, отображение A не обязательно является сюръективным, поэтому возникает вопрос о коразмерности ядра отображения A Приведем следующее предложение, указывающее на возможность построения примеров отображений с бесконечной коразмерностью ядра.

Предложение 5. Пусть $\dim X = +\infty$, $A_n \to A$ устойчиво и $\dim coker A = +\infty$. Тогда существует такая не относительно компактная последовательность $(x_k) \subset X$, что последовательность (Ax_k) не относительно компактна и для всех достаточно больших $n \in N$ последовательность $(A_n x_k)$ не относительно компактна, причем $\|A_n x_n - A_m x_m\| > \frac{1}{2}$, $n \neq m$.

Доказательство. Из замкнутости множества $R(A)$ и из того, что $R(A)$ не имеет конечномерного дополнения до всего Y, следует существование такой последовательности (y_k), что для всех $k \in N$ $d(R(A), y_k) > \frac{1}{2}$ и $\|y_k - y_j\| > \frac{1}{2}$, $k \neq j$, причем $\|y_k\| = 1$. Учитывая то, что $A_n \in Isom(X, Y)$ для всех достаточно больших $n \in N$, определим последовательность (x_k) следующим образом: $\forall k \in N\ (k > n_0)$ $x_k = A_k^{-1} y_k$. Убедимся теперь, что эта последовательность удовлетворяет заключению предложения 5.

Если предположить относительную компактность последовательности (x_k), то найдутся такая ее подпоследовательность (x_{k_j}) и такой вектор $x \in X$, что $\lim\limits_{j \to \infty} x_{k_j} = x$. Следовательно, согласно предложению 1, $\lim\limits_{j \to \infty} A_{k_j} x_{k_j} = Ax$, откуда $\lim\limits_{j \to \infty} y_{n_j} = Ax$. Таким образом, для (y_{n_j}), как для сходящейся последовательности, справедливо равенство $\lim\limits_{j \to \infty} \|y_{n_j} - y_{n_{j+p}}\| = 0$ для любого $p \in N$, что противоречит построению последовательности векторов (y_n).

Далее, предположим, что последовательность (Ax_n) относительно компактна в Y. Тогда существует такая ее подпоследовательность (Ax_{n_j}) и существует такой вектор $y \in Y$, что $\lim\limits_{j \to \infty} Ax_{n_j} = y$. Следовательно, $y \in \overline{R}(A) = R(A)$. А это означает, что найдется такой вектор $x \in X$, что $\lim\limits_{j \to \infty} Ax_{n_j} = Ax$. Отсюда и из относительно открытой инъективности отображения A получаем, что $\lim\limits_{j \to \infty} x_{n_j} = x$, что противоречит доказанному выше утверждению.

Предположение об относительной компактности последовательности $(A_n x_k)$ для некоторого числа $n \in N$ ($n > n_0$) приводит к тому, что (x_k) – также относительно компактная последовательность, как непрерывный образ относительно компактной последовательности: $x_k = A_n^{-1}(A_n x_k)$. Но, как было показано выше, последовательность (x_n) не являются относительно компактной.

Список литературы

1. Вайникко Г.М. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Математический анализ. (Итоги науки и техники).- 1978.- Т. 16.-С.5-53.
2. Вайникко Г.М. Анализ дискретизационных методов. Спецкурс. - Тарту, 1976.

Поступила 9 октября 1985 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 513.88

О СВЯЗИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ С РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТЬЮ

Б.С.Левченков
ЛГУ им. П.Стучки

В этой статье обобщается теорема о связи секвенциально компактной аппроксимации со сходимостью по норме из статьи [1].

Пусть X и Y – топологические векторные пространства над полем $\mathbb{K}$ действительных или комплексных чисел и $LC(X,Y)$ – пространство всех линейных непрерывных отображений пространства X в пространство Y, $X'=LC(X,\mathbb{K})$, $Y'=LC(Y,\mathbb{K})$; $LC(Y',X')$ пространство всех сопряженных отображений к отображениям из пространства $LC(X,Y)$ определенных для каждого линейного непрерывного функционала $y'\in Y'$ равенством

$$f'(y')=y'\circ f,$$

где $f\in LC(X,Y)$, $f'\in LC(Y',X')$.

<u>Определение 1.</u> Будем говорить, что последовательность $(f_n)_{n\in N}\subset LC(X,Y)$ <u>равномерно сходится</u> к отображению $f\in LC(X,Y)$, если для любой ограниченной последовательности $(x_n)_{n\in N}\subset X$

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n x_n - f x_n)=0_Y .$$

В этом случае кратко будем писать

$$f_n \rightrightarrows f\in LC(X,Y).$$

<u>Определение 2.</u> Будем говорить, что последовательность $(f_n)_{n\in N}\subset LC(X,Y)$ <u>секвенциально компактно аппроксимирует</u> отображение $f\in LC(X,Y)$, если для каждого $x\in X$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n x = f x$$

и для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n)_{n\in N}\subset X$ последовательность $(f_n x_n - f x_n)_{n\in N}$

относительно компактна в пространстве Y

В этом случае будем писать

$$f_n \xrightarrow{с.к.а.} f \in LC(X,Y).$$

Теорема. Пусть X и Y – локально выпуклые пространства над полем K.

$$f_n \rightrightarrows f \in LC(X,Y) \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{с.к.а.} f \in LC(X,Y),$$
$$\forall y' \in Y' \quad f_n' y' \rightrightarrows f' y' \in X'.$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Так как $f_n \rightrightarrows f \in LC(X,Y)$, то для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n)_{n\in N}$ из пространства X

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n x_n - f x_n) = 0_Y,$$

и, следовательно,

$$(f_n x_n - f x_n)_{n\in N}$$

относительно компактная последовательность векторов в пространстве Y Если для каждого $n \in N$ $x_n = x$, где $x \in X$, то

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n x - f x) = 0_Y.$$

В силу этого $f_n \xrightarrow{с.к.а.} f \in LC(X,Y)$. Далее для $y' \in Y'$

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n' y' - f' y')(x_n) = \lim_{n\to+\infty} y'(f_n x_n - f x_n) =$$
$$= y'(\lim_{n\to+\infty} (f_n x_n - f x_n)) = y'(0_Y) = 0_K,$$

т.е. для каждого $y' \in Y'$

$$f_n' y' \rightrightarrows f' y' \in X$$

$\Leftarrow$ Так как

$$f_n \xrightarrow{с.к.а.} f \in LC(X,Y),$$

то для ограниченной последовательности векторов $(x_n)_{n\in N} \subset X$ последовательность

$$(f_n x_n - f x_n)_{n\in N}$$

относительно компактна в Y. К тому же для каждого $y' \in Y'$

$$\lim_{n\to+\infty} y'(f_n x_n - f x_n) = \lim_{n\to+\infty} (f_n' y' - f' y')(x_n) = 0_K$$

В силу этого

$$\lim_{n\to+\infty} (f_n x_n \ f x_n) = 0_Y,$$

т.е.

$$f_n \rightrightarrows f \in LC(X,Y).$$

Действительно, если это не так, то для некоторой подпоследовательности $(f_{n_k}x_{n_k} - f x_{n_k})_{k\in N}$ последовательности $(f_n x_n - f x_n)_{n\in N}$ и некоторой окрестности нулевого вектора $U(O_Y)$ в пространстве Y выполнялось бы соотношение $f_{n_k}x_{n_k} - f x_{n_k} \notin U(O_Y)$ для всех $k\in N$.

Так как $(f_n x_n - f x_n)_{n\in N}$ относительно компактная последовательность, то ее подпоследовательность $(f_{n_k}x_{n_k} - f x_{n_k})_{k\in N}$, содержит сходящуюся подпоследовательность $(f_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}} - f x_{n_{k_i}})_{i\in N}$, т.е. для некоторого $y\in Y$: $\lim\limits_{i\to\infty}(f_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}} - f x_{n_{k_i}} - y) = O_Y$.

Для любого $y'\in Y'$

$$y'(y) = \lim_{i\to+\infty} y'(y - f_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}} + f x_{n_{k_i}} + f_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}} - f x_{n_{k_i}}) =$$

$$= \lim_{i\to+\infty} y'(f_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}} - f x_{n_{k_i}}) - \lim_{i\to+\infty} y'(f_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}} - f x_{n_{k_i}} - y) =$$

$$= \lim_{i\to+\infty} (f'_{n_{k_i}}y' - f'y')(x_{n_{k_i}}) - y'(\lim_{i\to+\infty}(f_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}} - f x_{n_{k_i}} - y) =$$

$$= O_K .$$

Из произвольности $y'\in Y$ и локальной выпуклости пространства Y вытекает, что $y = O_Y$ и тогда для всех

$$i \geq i_0 \qquad f_{n_{k_i}}x_{n_{k_i}} - f x_{n_{k_i}} \in U(O_Y),$$

что противоречит предположению.

<u>Следствие</u>. Пусть X и Y – произвольные векторные пространства над полем K, $f_n, f \in LC(X,Y)$, $n\in N$.

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n - f\| = 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{c.n.a.} f\in LC(X,Y), \forall y'\in Y' \lim_{n\to+\infty}\|f'_n y' - f'y'\| = 0.$$

Список литературы

1. Левченков В.С. О связи секвенциально компактной аппроксимации со сходимостью по норме для последовательностей линейных непрерывных отображений в нормированных пространствах // Топологические пространства и отображения в них.- Рига, 1975. - С.103-107.

Поступила 3 января 1985 года.

УДК 517.98

ЭТА ТОЧКА - НЕПОДВИЖНА

А.Х.Лиепиньш
ЛГУ им. П.Стучки

Если в метрическом пространстве X, компактном в смысле некоторого оператора замыкания S, отображение $f: X \to X$ уменьшает диаметры S-замыканий орбит точек, то f имеет неподвижную точку.

Пусть X - непустое множество и $PX := \{A \mid A \subset X\}$.

Напомним, что отображение $T: PX \to PX$ называется оператором замыкания на X, если для любых $A, B \in PX$: 1) $A \subset B \Rightarrow T(A) \subset T(B)$; 2) $A \subset T(A)$; 3) $T(T(A)) = T(A)$. При этом $A \in PX$ называется T-замкнутым, если $A = T(A)$, а X - T-компактным, если для любой центрированной системы $\mathcal{A}$ T-замкнутых множеств $\bigcap\{A \mid A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset$.

Наряду с оператором T рассмотрим отображение $S: PX \to PX$ определяемое для любого $A \in PX$ равенством:

$$S(A) := \bigcap\{B \in PX \mid B = T(B) \,\&\, f(B) \subset B \,\&\, B \supset A\}.$$

Отметим, что S - оператор замыкания на X.

Для $f: X \to X$ и любого $x \in X$ орбита - это $\{f^n(x) \mid n = 0, 1, \ldots\} =: O(x)$.

<u>Теорема</u>. Пусть X - непустое множество и $f: X \to X$. Пусть существует такой оператор замыкания T и такая метрика d на X, что:

1) X - S-компактно;

2) $B(x,r) := \{y \in X \mid d(y,x) \leq r\}$ T-замкнуто для любого $x \in X$ и $r \in R_+$;

3) для любого $x \in X$ $(x \neq f(x))$ существует такое $y \in S(O(x))$, что $\operatorname{diam} f(S(O(y))) < \operatorname{diam} S(O(y))$.

Тогда f имеет неподвижную точку.

<u>Доказательство</u> выявляет близость теоремы к результатам работ [1,2].

Согласно аксиоме Цорна из условия 1) следует существование минимального непустого S-замкнутого множества M. Пусть $x \in M$ и $x \neq f(x)$. Тогда по условию 3) существует такое $y \in M$, что $diam\, f(S(O(y))) < diam\, S(O(y))$. Следовательно, $r := diam\, f(M) < diam\, M$, ибо в силу минимальности $M = S(O(y))$.

Рассмотрим множество $E := B(f(x), r) \cap M$. Оно непусто ($f(x) \in E$) и вследствие условия 2) T-замкнуто. Так как $d(f(x), f(y)) \leq r$ для любого $y \in M$, то $f(M) \subset E$. Следовательно, $f(E) \subset E$ и E – S-замкнуто. В силу минимальности $M = E$. Тем самым $M \subset B(f(x), r)$ и $f(x) \in B(y, r)$ для любого $y \in M$.

Рассмотрим множество $F := (\bigcap\{B(y,r) \mid y \in M\}) \cap M$. Так как $f(x) \in F$, то в силу произвольности $x \in M$ заключаем, что $f(M) \subset F$. Следовательно, $f(F) \subset F$. Таким образом, F – S-замкнуто, ибо T-замкнутость множества F следует из условия 2). В силу минимальности $M = F$. Но согласно определению F: $diam\, F \leq r < diam\, M$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Список литературы

1. Kannan R. Fixed point theorems in reflexive Banach spaces // Proc.Amer.Math.Soc.- 1974.- V.38.- P.111-118.
2. Лиепиньш А.Х. Колыбельная для маленького тигрёнка о неподвижных точках // Топологические пространства и их отображения.- Рига, 1983.- С.61-69.

Поступила 30 ноября 1986 года.

УДК 515.12

СВОЙСТВО БЭРА И ЛИНЕЙНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

О.Г.Окунев
Калининский государственный университет
Д.Б.Шахматов
МГУ им. М.В.Ломоносова

Напомним, что тихоновские пространства X и Y называются M-эквивалентными, если их свободные топологические группы $F(X)$ и $F(Y)$ изоморфны, и называются ℓ-эквивалентными, если пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ всех непрерывных вещественных функций, определенных на пространствах X и Y соответственно, наделенные топологиями поточечной сходимости, изоморфны как линейные топологические пространства [1]-[3]. Известно, что M-эквивалентные тихоновские пространства являются также ℓ-эквивалентными, но обратное неверно [2]. Если пространства X и Y ℓ-эквивалентны (тем более M-эквивалентны) и одно из них бикомпактно, то и другое также бикомпактно (А.В.Архангельский [4], Д.С.Павловский; см. также [5]). Однако, как показывает следующий пример, принадлежащий М.И.Граеву, локальная компактность не сохраняется M-эквивалентностью. Пусть X - свободная сумма счетного числа экземпляров обычной сходящейся последовательности, а Y фактор-пространство, получающееся стягиванием в одну точку пределов всех этих последовательностей. Тогда пространства X и Y M-эквивалентны [5]; см. также [3], пример 4.2, X локально компактно, а Y нет. Тем не менее С.П.Гулько и О.Г.Окунев недавно показали, что локальная компактность сохраняется ℓ-эквивалентностью в классе пространств со счетной базой [6]. В связи с изложенными результатами А.В.Архангельский поставил следующие вопросы. Сохраняется ли свойство Бэра отношением ℓ-эквивалентности? Каков ответ, если ограничиться только рассмотрением пространств со счетной базой? В ответ на эти вопросы авторами построен

Пример. Существуют пространства X и Z со следующими свойствами:

(i) X и Z - счетные метрические пространства;

(ii) пространства X и Z M-эквивалентны;

(iii) X содержит всюду плотное множество изолированных точек; тем более X псевдополно [7] и обладает свойством Бэра;

(iv) Z не обладает свойством Бэра;

( ) $Z = X \oplus \mathbb{Q}$, т.е. пространство Z является свободной суммой пространства X и пространства $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Следствие. Следующие топологические свойства не сохраняются отношением M-эквивалентности (и тем более отношением ℓ-эквивалентности) даже в классе пространств со счетной базой:

(i) свойство Бэра;

(ii) псевдополнота;

(iii) свойство содержать всюду плотное полное по Чеху подпространство.

Приступим теперь к построению примера. Пусть $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in N^+\}$ - обычная сходящаяся последовательность вместе со своим пределом. Подпространство $Q = \{(0, q) : q \in \mathbb{Q}\} \subset S \times \mathbb{Q}$ тихоновского произведения $S \times \mathbb{Q}$ последовательности S на пространство $\mathbb{Q}$ рациональных чисел гомеоморфно $\mathbb{Q}$ и является ретрактом пространства $S \times \mathbb{Q}$ (искомой ретракцией является отображение $(x, q) \to (0, q)$ проектирования на второй сомножитель). Тем более подпространство Q является ретрактом пространства X, полученного из пространства $S \times \mathbb{Q}$ путем усиления топологии за счет объявления всех точек множества $D = \{(\frac{1}{n}, q) : n \in N^+, q \in \mathbb{Q}\}$ изолированными и сохранения прежней системы окрестностей у точек множества Q. Пространство X счетно, регулярно и имеет счетную базу. Следовательно, X метризуемо. Множество D состоит из изолированных точек и плотно в X. Пусть X/Q - фактор-пространство пространства X, полученное стягиванием множества Q в одну точку, а $Y = (X/Q) \oplus \mathbb{Q}$ - свобод-

ная сумма фактор-пространства X/Q и пространства Q рациональных чисел. Поскольку пространство X гомеоморфно пространству $X \oplus \{x^*\}$, образованному добавлением к X одной новой изолированной точки, то по теореме О.Г.Окунева пространства X и Y M-эквивалентны ([8],[9]; для случая l-эквивалентности см. доказательство теоремы 11.6 в [10]). Следовательно, $F(X)=F(Y)$. Для любых пространств X и Y имеем $F(X\oplus Y)=F(X)\times F(Y)$. Используя гомеоморфность пространств Q и $Q\oplus Q$, заключаем отсюда, что пространства Y и $Y\oplus Q$ гомеоморфны. Следовательно, $F(X)=F(Y)=F(Y\oplus Q)=F(Y)\times F(Q)=$
$= F(X)\times F(Q)=F(X\oplus Q)$,
т.е. пространства X и $X\oplus Q$ M-эквивалентны. Осталось положить $Z=X\oplus Q$.

Авторы благодарны проф. А.В.Архангельскому за постановку задач и обсуждение полученных результатов.

Список литературы

1. Граев М.И. Свободные топологические группы // Изв. АН СССР. - Сер. матем.- 1948.- Т.12.- С.279-324.
2. Архангельский А.В. О соотношениях между инвариантами топологических групп и их подпространств // УМН.- 1980.- Т.35.- С.3-22.
3. Архангельский А.В. Пространства функций в топологии поточечной сходимости. Часть 1. // Общая топология. Пространства функций и размерность.- М., 1985.- С.3-66.
4. Архангельский А.В. О линейных гомеоморфизмах пространств функций // ДАН СССР.- 1982.- Т.264.- С.1289-1292.
5. Успенский В.В. Характеризация компактности в терминах равномерной структуры в пространстве функций // УМН.- 1982.- Т.37.- С.183-184.
6. Гулько С.П., Окунев О.Г. Локальная компактность и М-эквивалентность // Вопросы геометрии и топологии.- Петрозаводск, 1986.- С.14-23.
7. Aarts J.M., Lutzer D.J. Pseudocompleteness and the product of Baire spaces // Pacif. J. Math.- 1973.- V.48.- P.1-10.

8. Окунев О.Г. Метод построения М-эквивалентных пространств// У Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям.- Кишинев, 1985.- С.189.
9. Окунев О.Г. Об одном способе построения примеров М-эквивалентных пространств.- Москва, 1985. - Деп. в ВИНИТИ 08.01.85.- № 240-85.
10. Архангельский А.В., Ткачук В.В. Пространства функций и топологические инварианты.- М., 1985.

Поступила 9 октября 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 515.20+512.546

ЗАМЕЧАНИЕ О ТОПОЛОГИЗАЦИЯХ ГРУПП

В.Г.Пестов
Томский государственный университет
им. В.В.Куйбышева

Как известно, до сих пор не охарактеризованы группы, допускающие недискретную топологизацию (гипотеза имеется в [1]). В этой связи А.В.Архангельским был поставлен вопрос [2 , задача 1.3]: Верно ли, что на любой группе, допускающей недискретную топологизацию, существует недискретная метризуемая групповая топология? Ответ, как мы покажем ниже, отрицателен. Более того, как видно из следствия 2, класс недискретно топологизируемых групп значительно шире класса групп, допускающих недискретную метризуемую топологию.

Напомним, что подмножество A группы G, замкнутое в каждой отделимой групповой топологии на G, называется безусловно замкнутым [1].

Теорема. Пусть $\tau \geqslant \aleph_0$ – кардинал и G – произвольная группа. Тогда группа G вкладывается в качестве ретракта в некоторую группу G^*, допускающую недискретную топологизацию, и такую, что каждое подмножество $A \subset G^*$ мощности $\leqslant \tau$ безусловно замкнуто в G^*.

Следствие 1. Пусть $\tau \geqslant \aleph_0$ – кардинал, G – произвольная группа. Группа G вкладывается в качестве ретракта в некоторую группу G^*, допускающую недискретную групповую топологию, причем для каждой отделимой недискретной групповой топологии $\mathcal{T}$ на G^* имеет место неравенство $t(G^*,\mathcal{T}) > \tau$ ($t(X)$ – теснота пространства X ([3], стр. 57)).

Следствие 2. Каждая группа G вкладывается в качестве ретракта в недискретно топологизируемую группу G^*, не допускающую недискретной метризуемой групповой топологии.

В частности, уже группа $\{e\}^*$ доставляет нам ответ на упомянутый выше вопрос А.В.Архангельского. (Здесь $\{e\}$ – тривиальная группа.)

Лемма. Каждая группа G вкладывается в некоторую группу G^{Δ}, допускающую ретракцию $\tau : G^{\Delta} \to G$, ядро $\operatorname{Ker}\tau$ которой открыто в любой отделимой групповой топологии на группе G^{Δ}

Доказательство. Обозначим через δ вложение множества элементов группы G в свободную абелеву группу $A(G)$ в качестве множества свободных образующих, и пусть $H = \mathbb{Z} \wr G = A(G) \leftthreetimes G$ - сплетение групп $\mathbb{Z}$ и G (т.е. полупрямое произведение групп $A(G)$ и G относительно естественного действия группы G на $A(G)$ сдвигами). Пусть $F = gp(\delta(G \setminus \{e\}))$ - групповая оболочка множества $\delta(G \setminus \{e\})$ в H и γ - вложение множества H/F левых классов смежности в свободную абелеву группу $A(H/F)$ в качестве множества свободных образующих. Действие группы H левыми сдвигами на множестве H/F естественным образом поднимается до действия группы H на группе $A(H/F)$ изоморфизмами; обозначим получающееся полупрямое произведение $A(H/F) \leftthreetimes H$ через G^{Δ}. Группа G канонически вложена в G^{Δ} в качестве ретракта; обозначим ретракцию через τ Обозначим через ε левый класс смежности группы H по подгруппе F, содержащей единицу. Несложные вычисления с полупрямыми произведениями показывают, что

$$\tau^{-1}(G \setminus \{e\}) = \{x \in G^{\Delta} = \delta(e)\, x\, \delta(\varepsilon)^{-1} \gamma(\varepsilon) \delta(\varepsilon)\, x^{-1} \delta(e)^{-1} \gamma(\varepsilon)^{-1} = e\};$$

таким образом, множество $\tau^{-1}(G \setminus \{e\})$ оказывается алгебраическим подмножеством группы G^{Δ} в смысле А.А.Маркова [1] и, в частности, безусловно замкнуто. Поскольку дополнением этого множества в группе G^{Δ} является $\operatorname{Ker}\tau$, то лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пользуясь леммой, по трансфинитной индукции определим для каждого ординала $\alpha < \tau^{+}$ группу $G^{[\alpha]}$, полагая $G^{[0]} = G$ и $G^{[\beta+1]} = (G^{[\beta]})^{\Delta}$ для непредельных ординалов α вида $\beta + 1$, и $G^{[\alpha]} = \bigcup_{\beta<\alpha} G^{[\beta]}$ в предельном случае. Положим $G^{*} = \bigcup_{\alpha<\tau^{+}} G^{[\alpha]}$. Очевидным образом определены ретракции-гомоморфизмы τ_{α} группы G^{*} на ее подгруппы $G^{[\alpha]}$, $\alpha < \tau^{+}$. Считая группы $G^{[\alpha]}$, $\alpha < \tau^{+}$ дискретными, наделим группу G^{*} проективной топологией относительно семейства гомоморфизмов τ_{α}, $\alpha < \tau^{+}$ (т.е. слабейшей из топологий, относительно которых отображения

τ_α , $\alpha < \tau^+$, непрерывны). Эта топология, очевидно, является групповой отделимой и недискретной (поскольку базой окрестностей единицы служит семейство нетривиальных нормальных подгрупп вида $Ker\ \tau_\alpha$, $\alpha < \tau^+$, в пересечении дающих единичный элемент). Наконец, наделим группу G^* произвольной отделимой групповой топологией $\mathcal{T}$ Каждое подмножество $A \subset G$, имеющее мощность $\le \tau$, лежит в некоторой группе $G^{[\alpha]}$, $\alpha < \tau^+$ (в силу регулярности кардинала). Ясно, что $\mathcal{T}|G^{[\alpha]} = (\mathcal{T}|G^{[\alpha+1]})|G^{[\alpha]}$; поскольку $G^{[\alpha+1]} = (G^{[\alpha]})^\Delta$, то из леммы вытекает, что топология $\mathcal{T}|G^{[\alpha]}$ дискретна, и поэтому множество A замкнуто в содержащей его группе $G^{[\alpha]}$, которая, будучи дискретной и, следовательно, полной, замкнута в группе $(G^*,\mathcal{T})$ [4]. Следовательно, множество A $\mathcal{T}$-замкнуто в группе G^* , что и завершает доказательство.

Список литературы

1. Марков А.А. О безусловно замкнутых множествах // Мат. сб.- 1946.- Т.18.- № 1.- С.3-28.
2. Нерешенные задачи топологической алгебры (препринт).- Кишинев, 1985.
3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.- М.,1974.
4. Райков Д.А. О пополнении топологических групп // ИАН СССР. Сер.матем.- 1946.- Т.10.- № 6.- С.513-518.

Поступила 20 марта 1986 года.

УДК 515.12

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЭКСПОНЕНТЫ В ТОПОЛОГИИ ВИЕТОРИСА

Б.В.Попов
Волгоградский педагогический институт

Доказывается часть результатов, объявленных в [4]. Пространство $exp X$ замкнутых подмножеств топологического пространства X (предпологаемого в дальнейшем регулярным T_1 -прстранством) наделяется топологией Виеториса. Через $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ обозначаем элемент $\{F \in exp X : F \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$ и $F \cap U_i \neq \emptyset$ при всяком $i\}$ стандартной базы этой топологии (n - натуральное число, U_i открыты в X).

Часть результатов связана с понятием Q -пространства (= пространства Хьюитта). Напомним одну из характеристик этого класса пространств (см., например, [1 , с. 243, задача 83]).

Лемма 1. Вполне регулярное пространство Y является Q -пространством тогда и только тогда, когда существует бикомпактное расширение bY пространства Y такое, что для всякой точки $y \in bY \setminus Y$ найдется счетное семейство открытых в bY множеств, пересечение которых содержит точку y и лежит в $bY \setminus Y$

Теорема 1. Если X финально компактно, то $exp X$ - Q -пространство.

Доказательство. Пусть βX - расширение Стоуна-Чеха пространства X ; [ ] - оператор замыкания в βX . Ввиду нормальности финального компактного X отображение $j : exp X \to exp \beta X$, определенное формулой $j(F) = [F]$, является гомеоморфным вложением [3]. Поэтому $exp X$ в дальнейшем будем рассматривать как подпространство пространства $exp \beta X$ (состоящее из всех точек F , для которых $F = [F \cap X]$) , а $exp \beta X$ - как его бикомпактное расширение.

Пусть T - произвольная точка нароста $exp \beta X \setminus exp X$. Так как $T \notin exp X$, найдется точка $t \in T \setminus [T \cap X]$ Фиксируем открытую о[illegible] т[illegible] [illegible] точ[illegible] t , замыкание которой дизъюнктно с $T\cap X$. Ввиду финальной компактности X можно указать счетное семейство $\mathcal{T}$ открытых в βX множеств со следующими свойствами:

(1) $U\cap X\subset \bigcup\{V: V\in\mathcal{T}\}$;

(2) $[V]\cap T=\emptyset$ для любого элемента $V\in\mathcal{T}$.

Положим $\mathcal{H}=\langle\beta X, U\rangle\cap\bigcap\{\langle\beta X\setminus[V]\rangle: V\in\mathcal{T}\}$. Из (1) и (2) следует $T\in\mathcal{H}$. Пусть $L\in\mathcal{H}$. При всяком $V\in\mathcal{T}$ выполнено $L\in\langle\beta X\setminus[V]\rangle$, откуда $L\subset\beta X\setminus V$. С учетом (1) получаем:

(3) $L\cap U\cap X=\emptyset$.

Так как $L\in\langle\beta X, U\rangle$, найдется точка $a\in L\cap U$. С учетом (3) имеем $a\in\beta X\setminus X$ и $a\in L\setminus[L\cap X]$. Следовательно, $L\notin exp X$. Итак, $T\in\mathcal{H}\subset exp\,\beta X\setminus exp X$, причем $\mathcal{H}$ множество типа G_δ в $exp\,\beta X$. Ссылка на лемму 1 завершает доказательство теоремы.

<u>Вопрос 1</u>. Пусть $exp\,X$ Q-пространство, а X нормально. Обязано ли X быть финально компактным пространством?

Автору казалось, что найден положительный ответ на вопрос 1, однако впоследствии в доказательстве обнаружился пробел. Поэтому формулировку теоремы 1 из [4] до получения ответа на вопрос 1 следует изменить так, как это сделано в теореме 1 данной заметки.

Возможно, что контрпримером к вопросу 1 будет дискретное пространство мощности $\aleph_1$, так как для такого X бикомпактное расширение $exp\,\beta X$ пространства $exp\,X$ не удовлетворяет заключению леммы 1 (см. ниже пример 1). Если бы $exp\,\beta X$ было расширением Стоуна-Чеха для $exp\,X$ (при вложении j, описанном при доказательстве теоремы 1), можно было бы сделать вывод, что $exp\,X$ не является Q пространством. Удается, однако, указать непрерывную функцию на $exp\,X$ со значениями в отрезке числовой прямой, которую нельзя продолжить до непрерывной функции на $exp\,\beta X$. Поэтому вопрос 1 остается открытым.

<u>Пример 1</u>. Пусть X - несчетное дискретное пространство. Тогда нарост $\mathcal{J}=exp\,\beta X\setminus exp\,X$ не является пространством точечно-счетного типа (то есть не удовлетворяет свойству, указанному в лемме 1).

<u>Доказательство</u>. Положим $T=\beta X\setminus\bigcup\{[A]: A\subset X, A\text{-счетно}\}$,

где $[\ ]$ - оператор замыкания в βX. Несложно проверить, что $T\in \exp\beta X\setminus \exp X$. Пусть $\mathcal{H}$ - множество типа G_δ в $\exp\beta X$. Нам достаточно убедиться, что $T\in\mathcal{H}$ влечет

(а) $\mathcal{H}\cap\exp X=\emptyset$.

Докажем сначала, что справедливо

(б) если $T\subset U$ и U открыто в βX, то найдется $B\subset X$, для которого $T\subset[B]\subset U$ и множество $X\setminus B$ счетно.

В самом деле, для каждой точки $t\in T$, рассматриваемой как ультрафильтр на X, можно указать множество $A_t\subset X$, для которого $t\in[A_t]\subset U$ и, следовательно, $A_t\in t$. Из покрытия $\{[A_t] : t\in T\}$ бикомпакта T выделим конечное подпокрытие $\{[A_{t_i}]: i\leq n\}$. Множество $B=A_{t_1}\cup\ldots\cup A_{t_n}$ - искомое. Ясно, что $T\subset[B]\subset U$. Если предположить, что $X\setminus B$ несчетно, то найдется ультрафильтр $\xi\in[X\setminus B]\cap T$. Фиксируем j, для которого $\xi\in[A_{t_j}]$. Имеем $X\setminus B\in\xi$ и $A_{t_j}\in\xi$, откуда $\emptyset=(X\setminus B)\cap A_{t_j}\in\xi$, а поэтому ξ не является (даже) фильтром. Следовательно, $X\setminus B$ обязано быть счетным. Свойство (б) доказано. Применяя его счетное число раз к семейству окрестностей множества T, получим:

(в) если $T\subset G$ и G - множество типа G_δ в βX, то $T\subset[X\setminus M]\subset G$ для некоторого счетного множества $M\subset X$.

Вернемся к доказательству (а). Пусть $T\in\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}$ имеет вид $\mathcal{H}=\cap\{\mathcal{U}_n : n=1,2,\ldots\}$, где $\mathcal{U}_n=\langle U_n^1,\ldots,U_n^{k_n}\rangle$, U_n^k открыты в βX, а k_n - натуральные числа. Из $T\in\mathcal{H}$ получаем $T\subset V_n=U_n^1\cup\ldots\cup U_n^{k_n}$ при всяком n. Поэтому из (в) вытекает существование счетного $M\subset X$ такого, что справедливо

(г) $T\subset[X\setminus M]\subset V_n$ при всяком n.

Покажем, что $L=[X\setminus M]$ - точка из $\mathcal{H}$. Если это не так, то (г) дает $L\cap U_m^l=\emptyset$ при некоторых l и m. Но тогда $U_m^l\subset[M]$, что ввиду счетности M влечет дизъюнктность U_m^l и T, а это, в свою очередь,- соотношение $T\notin\mathcal{U}_m$, откуда $T\notin\mathcal{H}$. Полученное противоречие показывает, что $L\in\mathcal{H}$. Ясно, что $L=[L\cap X]$, поэтому $L\in\exp X$. Свойство (а), а вместе с ним и пример 1 доказаны.

Говорят, что семейство $\mathcal{E}$ подмножеств топологического пространства X разделяет точки множества $Y\subset X$, если элементы $\mathcal{E}$ попарно дизъюнктны и каждая точка $y\in Y$ лежит ровно в одном элементе семейства $\mathcal{E}$. Пространство X

называют $\aleph_0$-хаусдорфовым, если точки его произвольного счетного бесконечного замкнутого дискретного подмножества можно разделить дискретным семейством открытых в X множеств.

Лемма 2. Пусть X – бесконечное счетное дискретное пространство. Тогда $\exp X$ не $\aleph_0$-хаусдорфово.

Доказательство. Рассмотрим X как счетное плотное множество на числовой прямой R (с обычной метрикой) и наделим X дискретной топологией, а $\exp X$ – топологией Виеториса. Положим $\mathcal{F}=\{I_x \cap X : x\in X\}$, где I_x – интервал единичной длины с левым концом x. Проверим, что $\mathcal{F}$ дискретно и замкнуто в $\exp X$. Пусть $L\in \exp X$. Допустим, что окрестность $\langle L\rangle$ точки L содержит две различные точки $A=I_x\cap X$ и $B=I_y\cap X$ множества $\mathcal{F}$. Тогда $(I_x\cup I_y)\cap X\subset L$. Так как $x\neq y$, можно выбрать две точки a и b из множества $(I_x\cup I_y)\cap X$, расстояние между которыми больше единицы. Но тогда окрестность $\langle L,\{a\},\{b\}\rangle$ точки L не пересекает $\mathcal{F}$, так как никакой интервал единичной длины не может содержать точки a и b одновременно. Поэтому $|\mathcal{F}\cap\langle L\rangle|\leq 1$. Следовательно, $\mathcal{F}$ дискретно и замкнуто.

Пусть $\mathcal{E}$ – произвольное семейство открытых в $\exp X$ множеств, разделяющее точки $\mathcal{F}$. Покажем, что $\mathcal{E}$ не может быть дискретным. Для более компактной записи через $\{F,S\}$ будем обозначать подмножество $\{F' : S\subset F'\subset F\}$ пространства $\exp X$. Множества вида $\{F,S\}$, где $S\subset F\subset X$, а S конечно, образуют базу топологии Виеториса на $\exp X$ (при дискретном X).

Построим по индукции точки $x_n\in X$, конечные множества $P_n\subset X$ и элементы $\mathcal{U}_n\in\mathcal{E}$ такие, что при всех n выполняются условия:

(а) $P_n\in\mathcal{U}_n$;

(б) $x_i\neq x_n$ и $\mathcal{U}_i\neq\mathcal{U}_n$ при $i<n$;

(в) диаметр множества P_n меньше единицы (в метрике на R).

Точку $x_1\in X$ фиксируем произвольно. Точка $F_1=I_{x_1}\cap X$ множества $\mathcal{F}$ покрывается некоторым элементом $\mathcal{U}_1\in\mathcal{E}$. Поэтому найдется конечное множество $S_1\subset F_1$ такое, что базисная окрестность $\{F_1,S_1\}$ точки F_1 лежит в $\mathcal{U}_1$. Полагаем $P_1=S_1$. Ясно, что условия (а) – (в) будут выполшены при $n=1$

Опишем индуктивный шаг. Пусть P_{n-1}, $\mathcal{U}_{n-1}$ и $T=\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$ уже построены. Так как X плотно в R, множество $P_{n-1}\cup T$ конечно, а диаметр P_{n-1} меньше единицы, найдется точка $y\in X\setminus T$, для которой $P_{n-1}\subset J_y$. Пусть $\mathcal{U}_n$ - элемент $\mathcal{E}$, содержащий точку $F_n=J_y\cap X$. Фиксируем конечное множество $S_n\subset F_n$, для которого $F_n\in\{F_n,S_n\}\subset\mathcal{U}_n$. Полагаем $x_n=y$ и $P_n=P_{n-1}\cup S_n$. Проверка (а) - (в) тривиальна.

По построению семейство $\{P_n: n=1,2,\dots\}$ подмножеств множества X - возрастающее. Соответствующая ей последовательность точек в экспоненте сходится к точке $\cup\{P_n: n=1,2,\dots\}$. Следовательно, $\mathcal{E}$ не может быть дискретным семейством. Лемма доказана.

Так как $\aleph_0$-хаусдорфовость наследуется замкнутыми подпространствами, а из $N\underset{cl}{\subset}X$ вытекает $exp N\underset{cl}{\subset}exp X$ (здесь N - натуральный ряд с дискретной топологией), получаем:

<u>Теорема 2</u>. Если $exp X$ $\aleph_0$-хаусдорфово, то X счетно-компактно.

<u>Следствие 1</u>. Для слабо паракомпактного X эквивалентны условия : (а) $exp X$ $\aleph_0$-хаусдорфово; (б) X бикомпакт; (в) $exp X$ бикомпакт.

Предположение о слабой паракомпактности существенно: например, если X - Σ-произведение неодноточечных метризуемых компактов, то $exp X$ счетно- компактно, а потому $\aleph_0$-хаусдорфово.

<u>Вопрос 2</u>. Существует ли регулярное (или нормальное) пространство X, такое что $exp X$ $\aleph_0$-хаусдорфово, но не счетно- компактно ?

Как показано в лемме 2, пространство $exp N$ содержит бесконечное дискретное множество, точки которого нельзя разделить дискретной системой открытых множеств. Однако любое такое $\mathcal{F}$ содержит бесконечное подмножество, для которого это возможно. Справедливость этого легко проверяется с учетом такого факта:

<u>Предложение 1</u>. Пусть X финально-компактно. Тогда $Y=exp X$ удовлетворяет следующему условию (а): если $Z\subset X$ и замыкание Z в Y - не бикомпакт, то найдется

бесконечное дискретное семейство $\mathcal{E}$ открытых в Y множеств, каждый элемент которого пересекает Z

<u>Доказательство.</u> По теореме 1 Y является Q-пространством. Достаточно поэтому проверить, что всякое Q-пространство обладает свойством (а). Убедимся в этом. Пусть Y и Z удовлетворяют посылке из (а), а Y — Q-пространство. Так как $[Z]$ не бикомпактно, в расширении Стоуна-Чеха βY пространства Y найдется точка $x_0 \in [Z]_{\beta Y} \setminus Y$. Так как Y — Q-пространство, существует непрерывное отображение $h: \beta Y \to [0,1]$ в отрезок числовой прямой R такое, что $h(x_0)=0$ и $h(y)>0$ при всяком $y \in Y$ (см. [2], с. 274, Теорема 3.11.10). Определим отображение $\varphi: Y \to R$ формулой $\varphi(y) = \frac{1}{h(y)}$ Ясно, что φ непрерывно, а образ $\varphi(Z)$ неограничен сверху на R. Поэтому найдется бесконечное дискретное семейство $\mathcal{K}$ открытых в R множеств, каждый элемент которого пересекает $\varphi(Z)$, а сами элементы попарно дизъюнктны. Ясно, что $\mathcal{E}=\{\varphi^{-1}U : U \in \mathcal{K}\}$ удовлетворяет заключению из (а). Предложение доказано.

Отметим, что класс пространств, удовлетворяющих условию (а) предложения 1, наследственен по замкнутым множествам, мультипликативен (для любого числа сомножителей), содержит класс всех $\aleph_0$-хаусдорфовых пространств (и не совпадает с ним).

Список литературы

1. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях.- М., 1974.
2. Engelking R. General Topology.- Warszawa, 1977.
3. Keesling J. Normality and properties related to compactness in hyperspaces // Proc.Amer.Math.Soc.- 1970.- V.24.- P.760-766.
4. Попов В.В. Три теоремы об экспоненте // У Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям.- Кишинев, 1985.- С.210.

Поступила 18 октября 1985 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 517.95

СОХРАНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ПРИ G-СХОДИМОСТИ МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

У.Ё.Райтум

ЛГУ им. П.Стучки

Пусть V – вещественное банахово пространство с элементами x, y, z, V' – сопряженное к V пространство с элементами f, g и $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – билинейная форма, соответствующая двойственности между V и V'.

По определению, последовательность операторов $A_k : V \to V'$, $k \in \mathbb{N}$, <u>G-сходится</u> к оператору $A_0 : V \to V'$, когда

1. Существуют обратные операторы $A_0^{-1} : V' \to V$ и $A_k^{-1} : V' \to V$, $k \in \mathbb{N}$;
2. Для любого $f \in V'$ имеет место сходимость $A_k^{-1} f \rightharpoonup A_0^{-1} f$ когда $k \to \infty$.

Здесь и в дальнейшем через $\rightharpoonup$ обозначается слабая сходимость в банаховых пространствах.

Напомним, что оператор A называется <u>равномерно монотонным</u>, если существует непрерывная возрастающая функция ρ такая, что $\rho(0)=0$ и для любых $x, y \in V$ выполняется

$$\langle Ax - Ay, x-y \rangle \geq \rho(\|x-y\|).$$

Оператор A называется ограниченно равномерно непрерывным, если для каждого числа $c>0$ существует непрерывная возрастающая функция $\gamma(c;\cdot)$ такая, что $\gamma(c;0)=0$ и для любых $x, y \in V$ при $\|x\|<c$, $\|y\|<c$ справедливо неравенство

$$\|Ax - Ay\| < \gamma(c; \|x-y\|).$$

<u>**Теорема.**</u> Пусть задана последовательность операторов $A_k : V \to V'$, $k \in \mathbb{N}$, и оператор $A_0 : V \to V'$ такие, что

1. Последовательность $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ G-сходится к A_0.
2. Операторы A_k, $k \in \mathbb{N}$ потенциальны, равномерно монотонны и ограниченно равномерно непрерывны.

Тогда оператор A_0 также является потенциальным, равномерно монотонным и непрерывным.

Доказательство. Из определения G-сходимости, условия 2 и слабой полунепрерывности снизу нормы в банаховых пространствах непосредственно следует равномерная монотонность оператора A_0. В самом деле, для произвольных $x_0, y_0 \in V$ и $x_k = A_k^{-1}(A_0 x_0)$, $y_k = A_k^{-1}(A_0 y_0)$, $k = 1,2,\ldots$ справедлива цепочка неравенств

$$\langle A_0 x_0 - A_0 y_0, x_0 - y_0\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle A x_0 - A y_0, x_k - y_k\rangle =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \langle A_k x_k - A_k y_k, x_k - y_k\rangle \geq \varliminf_{k\to\infty} \rho(\|x_k - y_k\|) \geq \rho(\|x_0 - y_0\|). \quad (1)$$

Далее, для произвольных $f, g \in V'$ и $x_k = A_k^{-1} f$, $y_k = A_k^{-1} g$ имеем

$$\langle A_0^{-1} f - A_0^{-1} g, f - g\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle A_k^{-1} f - A_k^{-1} g, f - g\rangle =$$
$$= \lim_{k\to\infty} \langle x_k - y_k, A_k x_k - A_k y_k\rangle \geq \varliminf_{k\to\infty} \rho(\|x_k - y_k\|) \geq \rho(\gamma^{-1}(c_1; \|f - g\|)), \quad (2)$$

где $c_1 = \sup_k (\|x_k\| + \|y_k\|)$.

Здесь использовано возрастание функций ρ и γ и ограниченность слабо сходящейся последовательности в банаховом пространстве.

Из (2) следует непрерывность оператора A_0. В самом деле, в противном случае существовала бы последовательность $(x_k)_{k\in N} \subset V$, сходящаяся к некоторому элементу x_0 и такая, что для всех $k \in N$ $\|A_0 x_k - A_0 x_0\| \geq c_2 > 0$. Но тогда из (2) следовало бы, что

$$\rho(\gamma^{-1}(\|x_0\| + 1; c_2)) \leq c_2 \|x_k - x_0\| \to 0.$$

Это противоречит непрерывности функций $\rho(\gamma^{-1}(c;\cdot))$.

Согласно [4] потенциальность непрерывного оператора $A : V \to V'$ равносильна тому, что для любого конечного набора $\{x_1, \ldots, x_N \mid x_1 = x_N\} \subset V$ величина

$$J(A, x_1, \ldots, x_N) \equiv \sum_{i=1}^{N-1} \int_0^1 \langle A(x_i + t(x_{i+1} - x_i)), x_{i+1} - x_i\rangle dt$$

равна нулю.

Пусть задан некоторый набор $\{x_1, \ldots, x_N \mid x_1 = x_N\} \subset V$. Для любого непрерывного оператора A величина J не меняется при переходе к расширенному набору $\{x_1, \ldots, x_M \mid x_1 = x_M\} \subset V$

путем добавления новых элементов на каждом отрезке прямой, соединяющей элементы x_{i+1} и x_i, с соответствующим изменением нумерации и сохранением первоначального направления обхода контура.

Пусть задан $\varepsilon > 0$ и расширенный набор $\{x_1,\dots,x_M \mid x_1 = x_M\}$ построен так, чтобы

$$\|x_{i+1} - x_i\| \le \varepsilon, \quad i = 1,\dots,M-1. \tag{3}$$

Поскольку начальный набор принадлежит некоторому ограниченному шару радиуса c_3, то существует, не зависящая от ε и M, константа c_4 такая, что расширенный набор удовлетворяет условию (3) и $\varepsilon M \le c_4$.

Для дальнейшего удобно ввести обозначение

$$\mathcal{J}_1(A, x_1,\dots,x_M) \equiv \sum_{i=1}^{M-1} \langle A x_i, x_{i+1} - x_i \rangle.$$

Из непрерывности оператора A_0 следует, что

$$|\mathcal{J}(A_0, x_1,\dots,x_M) - \mathcal{J}_1(A_0, x_1,\dots,x_M)| \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{M-1} \sup_{0\le t\le 1} \|A_0(x_i + t(x_{i+1} - x_i)) - A_0(x_i)\| \varepsilon \le M\varepsilon\varphi(\varepsilon) \le c_4\varphi(\varepsilon), \tag{4}$$

где φ - непрерывная функция и $\varphi(0) = 0$, так как на контуре, натянутом на начальном наборе, оператор A_0 является равномерно непрерывным.

Пусть

$$f_i = A_0 x_i, \quad y_{ik} = A_k^{-1} f_i, \quad k = 0,1,2,\dots \quad i = 1,\dots,M.$$

Из определения G-сходимости следует, что

$$\langle A_k y_{ik}, y_{i+1k} - y_{ik} \rangle = \langle f_i, y_{i+1k} - y_{ik} \rangle \xrightarrow[k\to\infty]{}$$
$$\to \langle f_i, y_{i+1 0} - y_{i0} \rangle = \langle A_0 x_i, x_{i+1} - x_i \rangle$$

и что

$$\mathcal{J}_1(A_0, x_1,\dots,x_M) = \sum_{i=1}^{M-1} \langle A_k y_{ik}, y_{i+1k} - y_{ik} \rangle + \delta_k, \quad \delta_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \tag{5}$$

Но
$$\sum_{i=1}^{M-1} \langle A_k y_{ik}, y_{i+1k} - y_{ik} \rangle = \mathcal{J}(A_k, y_{1k},\dots,y_{Mk}) - \mathcal{J}_2 = -\mathcal{J}_2,$$
где $\mathcal{J}_2 \equiv \sum_{i=1}^{M-1} \int_0^1 \langle A_k(y_{ik} + t(y_{i+1k} - y_{ik})), y_{i+1k} - y_{ik} \rangle dt \ge 0$

в силу монотонности операторов A_k.

Отсюда и из условий (4) и(5) вытекает, что
$\mathcal{J}(A_0, x_1,\dots,x_M) = \mathcal{J}(A_0, x_1,\dots,x_M) \le c_4\varphi(\varepsilon)$.

Приведенные рассуждения не зависят от направления обхода контура, т.е. порядка нумерации элементов $x_1,\ldots,x_N$. Поскольку при изменении порядка нумерации элементов значение величины $\mathcal{J}$ меняет знак, то в итоге получена оценка $|\mathcal{J}(A_0,x_1,\ldots,x_N)|\leq C_4\Psi(\varepsilon)$, что совместно с произвольностью $\varepsilon>0$ обеспечивает равенство нулю величины $\mathcal{J}$ для оператора A_0.

Таким образом показано, что A_0 является также и потенциальным оператором.

В заключении необходимо отметить, что практически такой же результат, но при помощи других методов, получен в [2]. В случае абстрактных линейных операторов соответствующий результат имеется в [1], а в случае сильно монотонных эллиптических операторов второго порядка свойство потенциальности предельного оператора сформулировано в [3].

Список литературы

1. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А., Ха Тьен Нгоан. Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов // УМН.- 1979.- Т.34.- С.65-133.

2. Колпаков А.Г. О дифференцируемости G-предельных функционалов. Новосибирск, 1985. - Деп. в ВИНИТИ 22.11.85. - № 8093-В.

3. Райтум У.Ё. К G-сходимости квазилинейных эллиптических операторов с неограниченными коэффициентами // ДАН СССР.- 1981.- Т.261.- С.30-34.

4. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов.-М., 1972.

Поступила 10 ноября 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 515.12

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ И СЛАБАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ТЕСНОТА

Е.А. Резниченко
МГУ им. М.Ломоносова

При изучении пространств непрерывных функций в топологии поточечной сходимости над тихоновскими пространствами А.В.Архангельский ввел два новых кардинальных инварианта типа тесноты: t_0 – функциональная теснота, t_m – слабая функциональная теснота. Основные свойства этих кардинальных инвариантов можно найти в обзоре [1].

А.В.Архангельским была поставлена следующая задача [1, задача 5.14]: построить пространство, слабая функциональная теснота и функциональная теснота которого не равны. В данной работе дается ответ на этот вопрос.

<u>Определение</u> 1 [2]. Отображение $f: X \to Y$ называется τ-непрерывным (где τ – фиксированный кардинал), если для всякого подпространства $A \subset X$, $|A| \leq \tau$ сужение $f|_A: A \to Y$ отображения f на A непрерывно.

Функциональной теснотой $t_0(X)$ пространства X называется наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждая τ-непрерывная вещественная функция f на X непрерывна.

<u>Определение 2</u>.[3],[4]. Отображение $f: X \to Y$ называем строго τ-непрерывным, если для каждого множества $A \subset X$ такого, что $|A| \leq \tau$, найдется непрерывное отображение $g: X \to Y$, для которого $g|_A = f|_A$ (т.е. $f(x) = g(x)$ при всех $x \in A$).

Слабой функциональной теснотой (или минитеснотой) $t_m(X)$ пространства X называется наименьший бесконечный кардинал τ такой, что каждая строго τ-непрерывная вещественная функция на X непрерывна.

<u>Лемма 1</u>. Пусть X – тихоновское псевдокомпактное пространство, $\beta(X)$ – стоун-чеховское расширение пространства X и $X^* = \cup\{\bar{A} : A \subset X, |A| \leq \aleph_0\}$

замыкание берется в пространстве $\beta(X)$). Тогда для любой строго $\aleph_0$-непрерывной функции $f: X \to Y$ существует $\aleph_0$-непрерывная функция $f^*: X^* \to \mathbb{R}$ такая, что $f^*|_A = f|_A$.

Доказательство. Определим функцию f^*. Пусть $x \in X^*$. Тогда для некоторого очетного $A \subset X$ имеем $x \in \bar{A}$. Так как f - строго $\aleph_0$-непрерывная функция, то существует непрерывная функция $g: X \to \mathbb{R}$ такая, что $g|_A = f|_A$ функция g продолжается до некоторой непрерывной функции $h: \beta(X) \to \mathbb{R}$. Положим $f^*(x) = h(x)$. Несложно проверить корректность определения функции f^* и ее $\aleph_0$-непрерывность. Лемма 1 доказана.

Следующая тэорема является основным результатом этой работы.

Теорема 1. Пусть τ - неизмеримый (по Уламу) кардинал и $\tau^{\aleph_0} = \tau$ (таковым является, например, кардинал $2^{\aleph_0}$). Тогда существует тихоновское пространство X для которого $t_m(X) = \aleph_0$ и $t_0(X) = \tau$.

Доказательство. Пусть A - множество мощности τ Разобьем множество A на τ подмножеств мощности τ заиндексируем получившееся семейство ординалами, меньшими τ $A = \bigcup\{A_\alpha \quad \alpha < \tau\}$. Пусть B - множество и $C \subset B$ Обозначим через π^B_C естественную проекцию из I^B на I^C, где $I = [0,1]$

Пусть $y \in I^B$. Положим

$$\Sigma(B,y) = \{x \in I^B : |supp(y,x)| \le \aleph_0\},$$

$$\sigma(B,\tau,y) = \{x \in I^B : |supp(y,x)| < \tau\},$$

где $supp(x,y) = \{b \in B : \pi^B_{\{b\}}(x) \ne \pi^B_{\{b\}}(y)\}$.

Обозначим через $O(B)$ такой элемент множества I^B, что для каждого $b \in B$ $\pi^B_{\{b\}}(O(B)) = 0$. Для $\alpha < \tau$ положим $Y_\alpha = I^{A_\alpha} \setminus \sigma(A_\alpha, \tau, O(A_\alpha))$, $\Sigma_\alpha = \Sigma(A \setminus A_\alpha, O(A \setminus A_\alpha))$,

$\Sigma = \Sigma(A, O(A))$. Построим множество $\{h_\alpha \in \Sigma_\alpha : \alpha < \tau\}$ таким образом, что для любого счетного $B \subset A$ и любого $x \in I^B$ существует $\alpha < w_1$ такой, что $B \cap A_\alpha = \emptyset$ и $\pi^{A \setminus A_\alpha}_B (h_\alpha) = x$. Положим $Q = \bigcup\{I^B \quad B \subset A, |B| \le \aleph_0\}$ Так как $\tau^{\aleph_0} = \tau$, то $|Q| = \tau$ Заиндексируем множество Q ординалами до τ: $Q = \{q_\alpha \quad \alpha < \tau\}$. Для каждого $\alpha < \tau$ существует счетное множество $B_\alpha \subset A$ такое, что

$q_\alpha \in I^{B_\alpha}$. По трансфинитной индукции построим множество ординалов $\{\gamma(\alpha)<\tau : \alpha<\tau\}$ таким образом, что для $\alpha<\beta<\tau$ имеем $\gamma(\alpha)<\gamma(\beta)$ и $B_\alpha \cap A_{\gamma(\alpha)}=\emptyset$.

Множество $\{\gamma<\tau : B_0 \cap A_\gamma \neq \emptyset\}$ не более чем счетно и, так как $\tau > \aleph_0$ то существует $\gamma(0) \in \tau \setminus \setminus \{\gamma<\tau : B_0 \cap A_\gamma \neq \emptyset\}$. Получаем $A_{\gamma(0)} \cap B_0 = \emptyset$.

Предположим, что для произвольного $\beta<\alpha$ построен ординал $\gamma(\beta)$. Положим $\gamma^*(\alpha) = \sup\{\gamma(\beta) : \beta<\alpha\}$. Множество $\{\gamma<\tau : A_\gamma \cap B_\alpha \neq \emptyset\}$ не более чем счетно и поэтому существует $\gamma(\alpha) \in \tau\setminus(\{\gamma<\tau : A_\gamma \cap B_\alpha \neq \emptyset\} \cup \gamma^*(\alpha))$. Множество $\Omega = \{\gamma(\alpha) : \alpha<\tau\}$ построено.

Для $\alpha<\tau$ положим $h_{\gamma(\alpha)} = O(A\setminus(A_{\gamma(\alpha)} \cup B_\alpha)) \cdot q_\alpha$. Для $\beta \in \tau\setminus\Omega$ положим $h_\beta = O(A\setminus A_\beta)$. Множество $\{h_\alpha \in \Sigma_\alpha : \alpha<\tau\}$ построено.

Определим искомое пространство X. Для $\alpha<\tau$ положим $X_\alpha = \{h_\alpha\} \cdot y_\alpha$ и $X = \cup\{X_\alpha : \alpha<\tau\}$. На множестве X рассматривается топология, индуцированная топологией тихоновского куба I^A.

Докажем, что $t_m(X) \leq \aleph_0$ (то есть, что любая строго $\aleph_0$-непрерывная функция $f: X \to \mathbb{R}$ является непрерывной). Непосредственно из построения пространства X вытекает, что X заполняет все счетные грани тихоновского куба I^A, то есть для любого счетного $B \subset A$ имеем $\pi^A_B(X) = I^B$. Отсюда вытекает, что пространство X псевдокомпактно, всюду плотно в I^A и C-вложено в I^A. Таким образом, получаем $\beta(X) = I^A$. Положим $X^* = \cup\{\bar{Z} : Z \subset X$ и $|Z| \leq \aleph_0\}$, (замыкание берется в $\beta(X)$). В силу леммы 1 функция f продолжается до $\aleph_0$-непрерывной функции $f^*: X^* \to \mathbb{R}$. Из построения легко проверяется, что $\Sigma \subset X^*$, а так как $t(\Sigma) \leq \aleph_0$, то $\aleph_0$-непрерывная функция $g = f^*|_\Sigma$ непрерывна. Так как $\beta(\Sigma) = I^A$ и пространство Σ псевдокомпактно, то функция g продолжается до непрерывной функции $k: I^A \to \mathbb{R}$. Если показать, что $f = k|_X$, то непрерывность функции f будет доказана. Проверим, что для любого $\alpha<\tau$ $k|_{X_\alpha} = f|_{X_\alpha}$. Пространство X_α всюду плотно в тихоновском кубе $\{h_\alpha\} \cdot I^{A_\alpha}$ и заполняет все его счетные грани. Следовательно, пространство X_α

псевдокомпактно и $\beta(X_\alpha)=\{h_\alpha\}\times I^{A_\alpha}$. В силу леммы 1 строго $\aleph_0$-непрерывная функция $f|_{X_\alpha}$ продолжается до $\aleph_0$-непрерывной функции $g_\alpha: X_\alpha^* \to \mathbb{R}$, где $X_\alpha^* = \{\bar{M}: M\subset X_\alpha, |M|\leq \aleph_0\}$.

Замыкание множества M берется в $\{h_\alpha\}\cdot I^{A_\alpha}$, или, что то же самое, в I^A. Очевидно, $g_\alpha = g|_{X_\alpha^*}$. Покажем, что $X_\alpha^*=\{h_\alpha\}\times I^{A_\alpha}$. Пусть x – произвольная точка из $\{h_\alpha\}\times I^{A_\alpha}$. Разобьем множество A_α на счетное количество подмножеств мощности τ: $A_\alpha = \bigcup\{B_n: n\in N^+\}$. Для $n\in N^+$ определим точку $x_n\in I^A$

$$\mathcal{I}^A_{\{a\}}(x_n)=\begin{cases}\mathcal{I}^A_{\{a\}}(x), & \text{если } a\in A\setminus B_n\\ 1, & \text{если } a\in B_n.\end{cases}$$

Тогда для $n\in N^+$ $x_n\in X_\alpha$ и последовательность $\{x_n: n\in N^+\}$ сходится к точке x. Итак, показано, что $X_\alpha^*=\{h_\alpha\}\times I^{A_\alpha}$. В.В.Успенский [5] доказал, что если τ – неизмеримый кардинал, то $t_0(I^\tau)\leq\aleph_0$. Следовательно, функция g_α непрерывна. Две непрерывные функции $k_\alpha = k|_{\{h_\alpha\}\cdot I^{A_\alpha}}$ и g_α совпадают на всюду плотном (в $\{h_\alpha\}\times I^{A_\alpha}$) множестве $\Sigma\cap\{h_\alpha\}\times I^{A_\alpha}$ и поэтому совпадают всюду. Получаем $k|_{X_\alpha}=k_\alpha|_{X_\alpha}=g_\alpha|_{X_\alpha}=f_\alpha=f|_{X_\alpha}$, то есть $k|_{X_\alpha}=f|_{X_\alpha}$. Итак, $t_m(X)\leq\aleph_0$.

Докажем, что $t_0(X)\geq\tau$. Для этого достаточно построить разрывную функцию $\varphi: X\to\mathbb{R}$, λ-непрерывную для произвольного кардинала $\lambda<\tau$. Положим

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in X\setminus X_0\\ 1, & \text{если } x\in X_0.\end{cases}$$

Функция φ на всюду плотном множестве $X\setminus X_0$ равна 0, однако она не равна тождественно 0, поэтому φ не является непрерывной функцией. Покажем, что для произвольного кардинала $\lambda<\tau$ функция φ λ-непрерывна. Пусть $M\subset X$ и $|M|\leq\lambda$. Положим $M_0=M\cap(X\setminus X_0)$ и $M_1=M\cap X_0$. Непрерывность функции $\varphi|_M$ равносильна тому, что

а) $\bar{M}_0\cap M_1=\emptyset$,

б) $M_0\cap\bar{M}_1=\emptyset$.

Докажем а). Из того, что $M_0\subset X\setminus X_0$, $\mathcal{I}^A_{A_0}(X\setminus X_0)\subset\Sigma(A_0, O(A_0))$ и $|M|<\tau$ вытекает, что $\mathcal{I}^A_{A_0}(\bar{M}_0)\subset\subset\sigma(A_0, \tau, O(A_0)) = I^{A_0}\setminus Y_0$.

Осталось заметить, что $\mathscr{X}^{A}_{A_0}(M_1) \subset \mathscr{X}^{A}_{A_0}(X_0) = Y_c$.

Для доказательства б) достаточно заметить, что множество X_c замкнуто в X. Теорема 1 доказана.

Автор благодарен своему научному руководителю профессору А.В.Архангельскому за полезные замечания.

Список литературы

1. Архангельский А.В. Пространства функций в топологии поточечной сходимости. - Часть 1 // Пространства функций и размерность. - М., 1985. - С. 3 - 66.
2. Архангельский А.В. Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты // УМН. - 1978. - Т. 33. - С. 29 - 84.
3. Архангельский А.В. Топологические свойства пространств функций: теоремы двойственности // ДАН. - 1983. - Т. 269. - С.1289 - 1292.
4. Arhangel'skii A.V. Functional tightness, Q-spaces and τ-embeddings // Comm. Math. Univ. Carol. - 1983. - V.24. - P. 105-120.
5. Uspenskii V.V. A characterization of realcompactness in terms of the topology of pointwise convergence on the function space // Comm. Math. Univ. Carol. - 1983. - V. 24. - P.121-131.

Поступила 20 мая 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 519.652

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Э.А. Римша

ЛГУ им. П. Стучки

В данной работе изучаются рациональные кубические сплайны, причем используется подход, предложенный Квасовым в [I] для построения рациональных параболических сплайнов. По интерполяционным и другим условиям, которые будут указаны ниже, строится сплайн и устанавливается единственность сплайна, удовлетворяющего этим условиям.

Пусть на отрезке $[a,b]$ дана сетка $\Delta=\{x_i \mid i=\overline{0,N}\}$, где $x_0=a$, $x_N=b$ и $x_0<x_1<\ldots<x_N$. Сопоставим сетке Δ сетку $\bar{\Delta}=\{\bar{x}_{i+1} \mid i=\overline{0,N-1}\}$, где $x_i<\bar{x}_{i+1}<x_{i+1}$.

Введем следующие обозначения: $h_i=x_{i+1}-x_i$, $t=\frac{x-x_i}{h_i}$, $\alpha_i=\frac{\bar{x}_{i+1}-x_i}{h_i}$, $\beta_i=\frac{x_{i+1}-\bar{x}_{i+1}}{h_i}$, $i=\overline{0,N-1}$. Тогда $\alpha_i,\beta_i>0$ и $\alpha_i+\beta_i=1$.

Определение. Рациональным кубическим сплайном назовем функцию $S:[a,b]\to\mathbb{R}$, которая на каждом отрезке $[x_i,x_{i+1}]$ имеет вид

$$S(x)=\begin{cases} a_i+b_i(x-x_i)+e_i(x-x_i)^2+d_i\dfrac{(x-x_i)^3}{1+p_it}, & x\in[x_i,\bar{x}_{i+1}],\\ a_{i+1}+b_{i+1}(x-x_{i+1})+e_{i+1}(x-x_{i+1})^2+d_{i+1}\dfrac{(x-x_{i+1})^3}{1+q_i(1-t)}, & x\in(\bar{x}_{i+1},x_{i+1}], \end{cases} \quad (I)$$

где a_i,b_i,e_i,d_i, $i=\overline{0,N}$ – какие-либо числа, p_i,q_i – заданные числа, удовлетворяющие условиям: $1+p_it\neq 0$ при $t\in[0,\alpha_i]$ и $1+q_i(1-t)\neq 0$ при $t\in(\alpha_i,1]$, которые равносильны требованию $\alpha_ip_i,\beta_iq_i>-1$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что при $d_i=-e_i\frac{p_i}{h_i}$ получается рациональный параболический сплайн, рассмотренный Квасовым в [I].

Потребуем, чтобы сплайн S принадлежал классу $C^2[a,b]$. Это выполняется тогда и только тогда, когда числа a_i,b_i,e_i,d_i, $i=\overline{0,N}$, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} S(\bar{x}_{i+1}-0) = S(\bar{x}_{i+1}+0), \\ S'(\bar{x}_{i+1}-0) = S'(\bar{x}_{i+1}+0), \\ S''(\bar{x}_{i+1}-0) = S''(\bar{x}_{i+1}+0), \quad i=\overline{0,N-1} \end{cases} \tag{2}$$

Дифференцируя (I), получаем

$$S'(x)=\begin{cases} b_i + 2c_i(x-x_i) + d_i\dfrac{(x-x_i)^2(3+2p_i t)}{(1+p_i t)^2}, & x\in[x_i,\bar{x}_{i+1}], \\ b_{i+1} + 2c_{i+1}(x-x_{i+1}) + d_{i+1}\dfrac{(x-x_{i+1})^2[3+2q_i(1-t)]}{[1+q_i(1-t)]^2}, & x\in(\bar{x}_{i+1},x_{i+1}], \end{cases} \tag{3}$$

$$S''(x)=\begin{cases} 2c_i + d_i\dfrac{2(x-x_i)(3+3p_i t+p_i^2t^2)}{(1+p_i t)^3}, & x\in[x_i,\bar{x}_{i+1}], \\ 2c_{i+1}+d_{i+1}\dfrac{2(x-x_{i+1})[3+3q_i(1-t)+q_i^2(1-t)^2]}{[1+q_i(1-t)]^3} & x\in(\bar{x}_{i+1},x_{i+1}]. \end{cases} \tag{4}$$

Учитывая (3) и (4), систему уравнений (2) можно записать в следующем развернутом виде:

$$\begin{cases} a_i + b_i(\alpha_i h_i) + c_i(\alpha_i h_i)^2 + d_i\dfrac{(\alpha_i h_i)^3}{1+\alpha_i p_i} = \\ = a_{i+1} - b_{i+1}(\beta_i h_i) + c_{i+1}(\beta_i h_i)^2 - d_{i+1}\dfrac{(\beta_i h_i)^3}{1+\beta_i q_i}, \\ b_i + c_i(2\alpha_i h_i) + d_i\dfrac{(\alpha_i h_i)^2(3+2\alpha_i p_i)}{(1+\alpha_i p_i)^2} = \\ = b_{i+1} - c_{i+1}(2\beta_i h_i) + d_{i+1}\dfrac{(\beta_i h_i)^2(3+2\beta_i q_i)}{(1+\beta_i q_i)^2}, \\ 2c_i + d_i\dfrac{2\alpha_i h_i(3+3\alpha_i p_i+\alpha_i^2 p_i^2)}{(1+\alpha_i p_i)^3} = \\ = 2c_{i+1} - d_{i+1}\dfrac{2\beta_i h_i(3+3\beta_i q_i+\beta_i^2 q_i^2)}{(1+\beta_i q_i)^3}, \quad i=\overline{0,N-1}. \end{cases} \tag{5$_N$}$$

Система (5_N) состоит из $3N$ уравнений и содержит $4(N+1)$ неизвестных коэффициентов сплайна S : $a_i, b_i, c_i, d_i, i=\overline{0,N}$. Для определения этих коэффициентов необходимо присоединить к системе (5_N) еще $N+4$ условия. Пусть $N+1$ из них – интерполяционные условия, задающие значения $S(x_i)$, $i=\overline{0,N}$. Добавим еще два краевых условия, задающие значения $S'(x_0)$ и $S'(x_N)$, и одно условие в виде равенства $S'''(\bar{x}_l-0)=S'''(\bar{x}_l+0)$ при некотором фиксированном $l\in\{1,\dots,N\}$.

Так как $S(x_i) = a_i$, $i=\overline{0,N}$, $S'(x_0)=b_0$, $S'(x_N)=b_N$ то задание интерполяционных и краевых условий означает, что заданы числа a_i, $i=\overline{0,N}$, b_0, b_N. (6)

$$s'''(x)=\begin{cases} d_i\dfrac{6}{(1+\beta_i\tau)^4}, & x\in[x_i,\bar{x}_{i+1}], \\ d_{i+1}\dfrac{6}{[1+\xi_i(1-t)]^4}, & x\in(\bar{x}_{i+1},x_{i+1}], \end{cases}$$

требуемое равенство $s'''(\bar{x}_\ell-0)=s'''(\bar{x}_\ell+0)$ означает, что

$$d_\ell=d_{\ell+1}\left(\frac{1+\alpha_i\xi_i}{1+\beta_i\xi_i}\right)^4,\quad \ell\in\{1,\dots,N\}. \tag{7}$$

Для определенности будем считать, что $\ell=1$.

Обозначим через (5_N^*) систему, к которой приводится система (5_N) с учетом (6) и (7). Определитель системы (5_N^*) обозначим $\mathfrak{D}_N$, а коэффициенты при неизвестных b_i,c_i,d_i, $i=\overline{0,N}$ – соответственно через b_i^{kp}, c_i^{kp}, d_i^{kp}, где k – номер уравнения, содержащего этот коэффициент, а p равняется тому N, при котором коэффициент с указанными индексами i и k появляется впервые. Коэффициенты b_i^{kp}, c_i^{kp}, d_i^{kp}, $i=\overline{0,N}$, могут изменяться.

Например, $\mathfrak{D}_3$ имеет следующий вид:

$$\mathfrak{D}_3=\begin{vmatrix}
c_0^{11} & c_1^{11} & d_1^{11} & b_1^{12} & & & & & \\
c_0^{21} & c_1^{21} & d_1^{21} & b_1^{22} & & & & & \\
c_0^{31} & c_1^{31} & d_1^{31} & & & & & & \\
 & c_1^{42} & d_1^{42} & b_1^{42} & c_2^{42} & d_2^{42} & b_2^{43} & & \\
 & c_1^{52} & d_1^{52} & b_1^{52} & c_2^{52} & d_2^{52} & b_2^{53} & & \\
 & c_1^{62} & d_1^{62} & & c_2^{62} & d_2^{62} & & & \\
 & & & & c_2^{73} & d_2^{73} & b_2^{73} & c_3^{73} & d_3^{73} \\
 & & & & c_2^{83} & d_2^{83} & b_2^{83} & c_3^{83} & d_3^{83} \\
 & & & & c_2^{93} & d_2^{93} & & c_3^{93} & d_3^{93}
\end{vmatrix}$$

Элементы, расположенные в незаполненных местах определителя, равны нулю. По вторым верхним индексам видно, что главный минор 3-его порядка определителя $\mathfrak{D}_3$ образует определитель $\mathfrak{D}_1$, а главный минор 6-го порядка – определитель $\mathfrak{D}_2$. Аналогичное имеет место и при $N>3$.

Обозначим через $M\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_k\end{pmatrix}$ минор k-го порядка, который расположен в строках и столбцах определителя $\mathfrak{D}_N$ с номерами $i_1,\dots,i_k$ и $j_1,\dots,j_k$ соответственно.

Имеет место следующая

Лемма. Пусть $N \geqslant 3$. Тогда каждый из следующих трех миноров

$$M\begin{pmatrix}4+u, & 5+u, & 6+u\\ 4+u, & 5+u, & 7+u\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}4+u, & 5+u, & 6+u\\ 3+u, & 5+u, & 7+u\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}4+u, & 5+u, & 6+u\\ 2+u, & 5+u, & 7+u\end{pmatrix}$$

отрицателен, а любой из следующих девяти миноров

$$M\begin{pmatrix}4+u, & 5+u, & 6+u\\ 4+u, & 5+u, & 6+u\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}4+u, & 5+u, & 6+u\\ 3+u, & 5+u, & 6+u\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}4+u, & 5+u, & 6+u\\ 2+u, & 5+u, & 6+u\end{pmatrix},$$

$$M\begin{pmatrix}4+u, & 5+u, & 6+u\\ 4+u, & 6+u, & 7+u\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}4+u, & 5+u, & 6+u\\ 3+u, & 6+u, & 7+u\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}4+u, & 5+u, & 6+u\\ 2+u, & 6+u, & 7+u\end{pmatrix},$$

$$M\begin{pmatrix}4+v, & 5+v, & 6+v\\ 4+v, & 5+v, & 6+v\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}4+v, & 5+v, & 6+v\\ 3+v, & 5+v, & 6+v\end{pmatrix}, \quad M\begin{pmatrix}4+v, & 5+v, & 6+v\\ 2+v, & 5+v, & 6+v\end{pmatrix} -$$

положителен, где $u = 3(N-3)$ и $v = 3(N-2)$.

Доказательство опускается.

Теорема I. В классе функций $C^2[a,b]$ существует единственный сплайн (1), удовлетворяющий условиям (6) и (

Доказательство. Необходимо установить, что определитель $\mathfrak{D}_N$ системы (5_N^*) отличен от нуля при любом N

В случае, когда $N = 1$, непосредственным вычислением, а при $N = 2$ – с помощью теоремы Лапласа [2, с.51], получаем, что $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 > 0$. Чтобы показать, что $\mathfrak{D}_N \neq 0$ при $N \geqslant 3$ установим методом индукции по $N \geqslant 3$, что $\mathfrak{D}_N$ имеет следующий вид:

$$\mathfrak{D}_N = E_N\, M\begin{pmatrix}4+3(N-2), & 5+3(N-2), & 6+3(N-2)\\ 4+3(N-2), & 5+3(N-2), & 6+3(N-2)\end{pmatrix} - \quad (8$$

$$- F_N\, M\begin{pmatrix}4+3(N-2), & 5+3(N-2), & 6+3(N-2)\\ 3+3(N-2), & 5+3(N-2), & 6+3(N-2)\end{pmatrix} + G_N\, M\begin{pmatrix}4+3(N-2), & 5+3(N-2), & 6+3(N-2)\\ 2+3(N-2), & 5+3(N-2), & 6+3(N-2)\end{pmatrix},$$

где все три минора положительны, $E_N > 0$, $F_N < 0$, $G_N > 0$, откуда вытекает, что $\mathfrak{D}_N > 0$.

В случае, когда $N = 3$, теорема Лапласа дает следующее выражение для $\mathfrak{D}_3$:

$$\mathfrak{D}_3 = M\begin{pmatrix}123456\\123456\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}789\\789\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix}123456\\123457\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}789\\689\end{pmatrix} + M\begin{pmatrix}123456\\123467\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}789\\589\end{pmatrix}$$

Используя еще раз теорему Лапласа, получаем

$$M\begin{pmatrix}123456\\123456\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}456\\456\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix}123\\124\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}456\\356\end{pmatrix} + M\begin{pmatrix}123\\134\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}456\\256\end{pmatrix} =: E_3,$$

$$M\begin{pmatrix}123456\\123457\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}456\\457\end{pmatrix} - M\begin{pmatrix}123\\124\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}456\\357\end{pmatrix} + M\begin{pmatrix}123\\134\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}456\\257\end{pmatrix} =: F_3,$$

$$M\begin{pmatrix}123456\\123467\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}456\\467\end{pmatrix} \; M\begin{pmatrix}123\\124\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}456\\367\end{pmatrix} + M\begin{pmatrix}123\\134\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}456\\267\end{pmatrix} =: G_3.$$

ак как $M\binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}>0$, $M\binom{1\,2\,3}{1\,2\,4}<0$ $M\binom{1\,2\,3}{1\,3\,4}>0$, то согласно

емме имеем для $\mathcal{D}_3$ представление в требуемом виде (8).

Предположим, что $\mathcal{D}_n$ имеет вид (8) и докажем, что $\mathcal{D}_{n+1}$ также имеет вид (8), т.е. что

$$\mathcal{D}_{n+1}=E_{n+1}M\begin{pmatrix}4+3(n-1), & 5+3(n-1), & 6+3(n-1)\\ 4+3(n-1), & 5+3(n-1), & 6+3(n-1)\end{pmatrix}-$$
$$-F_{n+1}M\begin{pmatrix}4+3(n-1), & 5+3(n-1), & 6+3(n-1)\\ 3+3(n-1), & 5+3(n-1), & 6+3(n-1)\end{pmatrix}+G_{n+1}M\begin{pmatrix}4+3(n-1), & 5+3(n-1), & 6+3(n-1)\\ 2+3(n-1), & 5+3(n-1), & 6+3(n-1)\end{pmatrix}, \tag{9}$$

де все три минора положительны, $E_{n+1}>0$, $F_{n+1}<0$, $G_{n+1}>0$.

о теореме Лапласа для $\mathcal{D}_{n+1}$ имеем следующее выражение

$$\mathcal{D}_{n+1}=M\begin{pmatrix}1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n\\ 1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}3n+1, & 3n+2, & 3n+3\\ 3n+1, & 3n+2, & 3n+3\end{pmatrix}-M\begin{pmatrix}1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n\\ 1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n+1\end{pmatrix}\times$$
$$\times M\begin{pmatrix}3n+1, & 3n+2, & 3n+3\\ 3n, & 3n+2, & 3n+3\end{pmatrix}+M\begin{pmatrix}1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n\\ 1\cdots 3n-2, & 3n, & 3n+1\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}3n+1, & 3n+2, & 3n+3\\ 3n-1, & 3n+2, & 3n+3\end{pmatrix} \tag{10}$$

нова применяя теорему Лапласа, получаем

$$M\begin{pmatrix}1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n\\ 1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n\end{pmatrix}=E_nM\begin{pmatrix}4+z, & 5+z, & 6+z\\ 4+z, & 5+z, & 6+z\end{pmatrix}-$$
$$-F_nM\begin{pmatrix}4+z, & 5+z, & 6+z\\ 3+z, & 5+z, & 6+z\end{pmatrix}+G_nM\begin{pmatrix}4+z, & 5+z, & 6+z\\ 2+z, & 5+z, & 6+z\end{pmatrix}=:E_{n+1},$$

$$M\begin{pmatrix}1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n\\ 1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n+1\end{pmatrix}=E_nM\begin{pmatrix}4+z, & 5+z, & 6+z\\ 4+z, & 5+z, & 7+z\end{pmatrix}-$$
$$-F_nM\begin{pmatrix}4+z, & 5+z, & 6+z\\ 3+z, & 5+z, & 7+z\end{pmatrix}+G_nM\begin{pmatrix}4+z, & 5+z, & 6+z\\ 2+z, & 5+z, & 7+z\end{pmatrix}=:F_{n+1},$$

$$M\begin{pmatrix}1\cdots 3n-2, & 3n-1, & 3n\\ 1\cdots 3n-2, & 3n, & 3n+1\end{pmatrix}=E_nM\begin{pmatrix}4+z, & 5+z, & 6+z\\ 4+z, & 6+z, & 7+z\end{pmatrix}-$$
$$-F_nM\begin{pmatrix}4+z, & 5+z, & 6+z\\ 3+z, & 6+z, & 7+z\end{pmatrix}+G_nM\begin{pmatrix}4+z, & 5+z, & 6+z\\ 2+z, & 6+z, & 7+z\end{pmatrix}=:G_{n+1},$$

де $z=3(n-2)$.

ак как миноры 3-его порядка, входящие в выражение (10), акие же, как и соответствующие им миноры в выражении (9), о к ним может быть применена лемма. После этого остается спользовать предположение индукции, чтобы получить нужное редставление для $\mathcal{D}_{n+1}$

<u>Теорема 2.</u> Пусть заданы числа u_i, $i=\overline{1,N}$. Тогда классе функций $C^1[a,b]$ существует единственный сплайн (I), довлетворяющий условиям (6),(7) и условию $S(\bar{x}_i-0)-S(\bar{x}_i+0)=u_i$, $i=\overline{1,N}$.

<u>Доказательство.</u> Утверждение следует из того, что опре- делитель системы относительно неизвестных a_i, b_i, c_i, d_i, $i=\overline{0,N}$, рассматриваемом сейчас случае такой же, как в теореме I.

Список литературы

1. Квасов Б.И. Интерполяция рациональными параболическими сплайнами // Численные методы механики сплошной среды.- Новосибирск, 1984.- Т. 15.- С. 60-70.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М., 1975.

Поступила 17 ноября 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 517.52

ПРИМЕНЕНИЕ F-A МЕТОДА ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

А.Я.Смотровс
ЛГУ им. П.Стучки

1. Введение

Обращение интегрального преобразования Фурье - это задача отыскания решения f уравнения

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \tag{1.1}$$

где F - заданная функция, аналитическая в некоторой полосе $-\varepsilon_1 < Im\lambda < \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$

Данная статья посвящена построению алгоритмов приближенного обращения преобразования Фурье, в которых используются асимптотические разложения.

Для аналогичной задачи численного обращения Лапласа разработан так называемый $F-A$ метод [1 , 2 , 3 , 4].

Под $F-A$ (Фурье-асимптотическим) методом понимается всякий алгоритм обращения, в котором

1) оригинал ищется в форме обобщенного ряда Фурье по некоторым специальным функциям,

2) для определения коэффициентов Фурье существенно используются асимптотические формулы.

Идеи $F-A$ метода, разработанные для преобразования Лапласа, можно перенести для обращения преобразования Фурье, используя известную связь между преобразованием Фурье и преобразованием Лапласа:

$$\mathcal{F}\{f(x);\lambda\} = \mathcal{L}\{f(x); i\lambda\} + \mathcal{L}\{f(-x); -i\lambda\}.$$

2. F A метод для факторизованных изображений

Пусть дано изображение F преобразования Фурье (1.1). Тогда обращение f осуществляем по следующей схеме

1) Проводим факторизацию изображения $F(\lambda)$, т.е., представляем его в виде [5]:

$$F(\alpha) = F_+(\alpha) + F_-(\alpha), \qquad (2.1)$$

где функция F_+ :

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\tau)\,d\tau}{\tau-\alpha} \qquad \operatorname{Im}\alpha > 0, \qquad (2.2)$$

– аналитически продолжима в верхнюю полуплоскость, а F_-

$$F_-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\tau)\,d\tau}{\tau-\alpha} \qquad \operatorname{Im}\alpha < 0, \qquad (2.3)$$

– аналитически продолжима в нижнюю полуплоскость.

После факторизации можно считать $F_+(\alpha)$ преобразованием Лапласа функции $1/\sqrt{2\pi}\, f_-(-x)$ с параметром $(-i\alpha)$, а $F_-(\alpha)$ – преобразованием Лапласа функции $1/\sqrt{2\pi}\, f_+(x)$ с параметром $(i\alpha)$.

Очевидно, что для f имеем формулу:

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x). \qquad (2.4)$$

2) Применяя F–A метод отдельно к F_+ и F_- находим f_- и f_+.

При этом для расчетов f_- и f_+ полностью применимы результаты, полученные в работах [1 – 4]. Из-за громоздкости все формулы здесь не приводим, для иллюстрации приводим лишь разложения функций $f_\pm$ по многочленам Лежандра.

Пусть для оригинала $f = f_+ + f_-$ имеем разложения:

$$f_+(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n P_n(1-2e^{-\sigma x}), \quad x\in[0,+\infty[, \quad \sigma>0, \qquad (2.5а)$$

$$f_-(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^* P_n(1-2e^{\lambda x}), \quad x\in\,]-\infty,0], \quad \lambda>0, \qquad (2.5б)$$

где σ и λ – свободные параметры.

Тогда для коэффициентов c_n и c_n^*

$$c_n = \sigma(2n+1)\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k (n+k)!}{(n-k)!\,(k!)^2}\, F_-[\,i\sigma(k+1)], \qquad (2.6а)$$

$$c_n^* = \lambda(2n+1)\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k (n+k)!}{(n-k)!\,(k!)^2}\, F_+[\,i\lambda(k+1)] \qquad (2.6б)$$

По найденым формулам без сильной потери точности удается вычислить лишь несколько первых коэффициентов c_n и c_n^*, что обычно недостаточно для отыскания f.

Согласно F–A методу необходимо:

1) построить асимптотические представления коэффициентов c_n и c_n^* при $n\to+\infty$;

2) c_n и c_n^*, $n>N_0$, которые не удается найти из (2.6)

вычислить по построенным асимптотическим формулам. При этом N_0 выбирается так, чтобы счет по обоим алгоритмам хорошо "сшивался".

Для нахождения асимптотики коэффициентов предварительно найдем их интегральные представления. Из результатов [3] получаем, что

$$c_n = \frac{2n+1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty-i\varepsilon}^{+\infty-i\varepsilon} \frac{F_-(\alpha)\left(\frac{i\alpha}{\sigma}\right)_n}{\left(1-i\frac{\alpha}{\sigma}\right)_{n+1}}\, d\alpha \qquad 0<\varepsilon<\sigma, \tag{2.7а}$$

$$c_n^* = \frac{2n+1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\varepsilon}^{+\infty+i\varepsilon} \frac{F_+(\alpha)\left(-i\frac{\alpha}{\lambda}\right)_n}{\left(1+i\frac{\alpha}{\lambda}\right)_{n+1}}\, d\alpha \quad, \quad 0<\varepsilon<\lambda \tag{2.7б}$$

Теорема 1. Пусть соответственно в полуплоскостях $\operatorname{Im}\alpha>0$ и $\operatorname{Im}\alpha<0$ факторизованные изображения $F_-(\alpha)$ и $F_+(\alpha)$ имеют конечное число изолированных особых точек алгебраического характера $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\mu$, $\operatorname{Im}\xi>0, \operatorname{Im}\eta<0$, в окрестностях которых имеют место представления:

$$F_-(\alpha) = (\alpha-\xi_k)^{-\varkappa_k}\cdot g_k(\alpha) \qquad k=1,2,\dots,\nu \quad, \tag{2.8а}$$

$$F_+(\alpha) = (\alpha-\eta_\ell)^{-\gamma_\ell}\cdot h_\ell(\alpha) \qquad \ell=1,2,\dots,\mu \tag{2.8б}$$

где $g_k(\alpha)$ и $h_\ell(\alpha)$ аналитичны соответственно в точках $\alpha=\xi_k$ и $\alpha=\eta_\ell$. Тогда каждая из точек ξ_k, η_ℓ порождает следующий асимптотический вклад в интегралах (2.7а) и (2.7б) при $n\to+\infty$:

$$J_{\xi_k}(n) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{i\frac{\pi}{2}\varkappa_k}\cdot \frac{2n+1}{n^2}\left(\frac{2}{\sigma}\ln n\right)^{\varkappa_k-1} \exp\left(\frac{2i}{\sigma}\xi_k \ln n\right)\times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,n^j}\, D_{j,k}(n), \tag{2.9а}$$

$$J_{\eta_\ell}(n) \sim \sqrt{2\pi}\, e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma_\ell}\, \frac{2n+1}{n^2}\left(\frac{2}{\lambda}\ln n\right)^{\gamma_\ell-1} \exp\left(-\frac{2i\eta_\ell}{\lambda}\ln n\right)\times \\ \times \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!\,n^j}\, D_{j,\ell}^*(n). \tag{2.9б}$$

При этом функции $D_{j,k}(n)$ и $D_{j,\ell}^*(n)$ имеют следующие асимптотические разложения:

$$D_{j,k}(n) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,k,j}\, \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}m}}{\Gamma(\varkappa_k-m)}\left(\frac{2}{\sigma}\ln n\right)^{-m}, \tag{2.10а}$$

$$D^{*}_{j,l}(n) \sim \sum_{m=0}^{\infty} A^{*}_{m,l,j} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}m}}{\Gamma(\gamma e^{-m})} \left(\frac{2}{\lambda} \ln n\right)^{-m} \tag{2.10б}$$

где $A_{m,\kappa,j}$ и $A^{*}_{m,\kappa,j}$ – коэффициенты Тейлора в разложениях

$$Q_{2j}\left(\frac{i\lambda}{\sigma}\right) g_{\kappa}(\lambda) \frac{\Gamma\left(1-\frac{i\lambda}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\lambda}{\sigma}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_{m,\kappa,j} (\lambda - \xi_{\kappa})^{m}, \tag{2.11а}$$

$$Q_{2j}\left(\frac{-i\lambda}{\lambda}\right) h_{l}(\lambda) \frac{\Gamma\left(1+i\frac{\lambda}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(-\frac{i\lambda}{\lambda}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} A^{*}_{m,l,j} (\lambda - \eta_{l})^{m} \tag{2.11б}$$

Q_{2j} – многочлен степени $2j$

$$Q_{2j}(\tau) = (2-2\tau)_{j} B_{j}^{(-1+2\tau)}(\tau), \tag{2.12}$$

а $B_{j}^{(s)}(\lambda)$ – обобщенные многочлены Бернулли [8].

Доказательство теоремы аналогично [1], лишь вместо $F(p)$ учитывают соответствующие аналитические свойства изображений $F(\lambda)$ и $F_{r}(\lambda)$

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1 и при $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$ имеет место

$$F(\lambda) = e^{-is\lambda} \psi(i\lambda) = e^{-is\lambda} O\left(\lambda^{-t_1}\right), \quad t_1 > 0, \tag{2.13а}$$

а при $\lambda \to \infty$, $\operatorname{Im} \lambda < 0$

$$F_{r}(\lambda) = e^{i\tau\lambda} \psi^{*}(-i\lambda) = e^{i\tau\lambda} O\left(\lambda^{-t_2}\right), \quad t_2 > 0, \tag{2.13б}$$

то для $\theta = 0$ и $\tau = 0$ соответственно

$$c_n \sim \sum_{\kappa=1}^{\nu} I_{\xi_\kappa}(n) \qquad n \to +\infty, \tag{2.14а}$$

$$c_n^{*} \sim \sum_{l=1}^{\mu} I_{\eta_l}(n) \qquad n \to +\infty, \tag{2.14б}$$

а для $\theta > 0$ и $\tau > 0$ соответственно

$$c_n \sim \sum_{\kappa=1}^{\nu} I_{\xi_\kappa}(n) + I_{\infty}(n), \tag{2.15а}$$

$$c_n^{*} \sim \sum_{l=1}^{\mu} I_{\eta_l}(n) + I^{*}_{\infty}(n), \tag{2.15б}$$

где вклады конечных особых точек I_{ξ_k} и I_{η_l} определяются по формулам (2.9а,б), а вклады бесконечно удаленной точки $I_\infty(n)$ и $I_\infty^*(n)$ имеют асимптотические представления:

$$I_\infty(n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2n+1)\sigma e^{-\frac{s\sigma}{2}}(e^{s\sigma}-1)^{-\frac{1}{4}} Re\left\{\psi\left(\frac{i\sigma n}{\sqrt{e^{s\sigma}-1}}\right)\times \exp\left\{i\left[(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{e^{s\sigma}-1}}-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\right\}, \tag{2.16а}$$

$$I_\infty^*(n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2n+1)\lambda e^{-\frac{\tau\lambda}{2}}(e^{\tau\lambda}-1)^{-\frac{1}{4}} Re\left\{\psi^*\left(\frac{i\lambda n}{\sqrt{e^{\tau\lambda}-1}}\right)\times \exp\left\{i\left[(2n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{e^{\tau\lambda}-1}}-\frac{\pi}{4}\right]\right\}\right\}. \tag{2.16б}$$

Доказательство теоремы аналогично [1].

Как и для преобразования Лапласа [1] на асимптотику C_n и C_n^* при $n \to +\infty$ в основном влияют расположение и характер особых точек факторизованных изображений F_- и F_+. Таким образом $F-A$ метод требует знания одновременно как численных значений изображений $F_\pm(\lambda)$ в отдельных точках мнимой оси, так и информации об особенностях $F_\pm(\lambda)$.

Как известно, факторизацию изображения F (2.1) не всегда можно провести аналитически. В таком случае численные значения $F_\pm(\lambda)$ можно найти по формулам (2.2) и (2.3), используя квадратурные формулы, но это влечет за собой дополнительные вычислительные трудности. Поэтому наша дальнейшая задача – сформулировать алгоритмы расчета $f(x)$, используя не $F_+(\lambda)$ и $F_-(\lambda)$, а непосредственно данное изображение $F(\lambda)$.

3. $F-A$ метод для изображения $F(\lambda)$

Теорема 3. Пусть $V_n(x)$, $n=0,1,2,\ldots$ полная система функций, ортогональных с весом $\rho(x)$ на промежутке $[a,b]$.

Тогда, если оригинал $f(x)$ удовлетворяет формуле обращения

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{3.1}$$

при $x\in[a,b]$ разложим в ряд

$$f(x)=\theta(x)\sum_{n=0}^{+\infty}c_nV_n(x), \tag{3.2}$$

для коэффициентов C_n имеют место интегральные представления

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\varphi_n(\alpha)\,d\alpha \qquad n = 0, 1, 2, \tag{3.3}$$

где

$$\varphi_n(\alpha) = \frac{1}{\|V_n\|^2} \int_a^b e^{i\alpha x} \frac{\rho(x)}{\theta(x)} V_n(x)\,dx \tag{3.4}$$

При этом предполагается, что интеграл (3.3) сходится абсолютно или выполняются другие достаточные условия для замены порядка интегрирования.

Свободная функция θ выбирается так, чтобы с одной стороны имело место разложение (3.2), а с другой стороны - достаточно просто вычислялся бы интеграл (3.4).

Доказательство теоремы аналогично [3]: c_n, как коэффициент Фурье, записывается в виде интеграла, под знаком интеграла $f(x)$ заменяется по формуле (3.1) и затем меняется порядок интегрирования.

<u>Примечание</u>. Теорему можно модифицировать, рассмотрев сдвинутую систему функций $\{V_n(\chi(x))\}$ ортогональную с весом $\rho(\chi(x))\chi'(x)$ на интервале $[\chi^{-1}(a), \chi^{-1}(b)]$, где χ - функция, монотонная и непрерывная вместе с первой производной в этом интервале.

С помощью теоремы 3 можно найти интегральные представления коэффициентов c_n для различных систем $\{V_n\}$ свободных функций θ и промежутков разложения $[a, b]$

Соответствующие результаты приведены в таблице 1, где обозначения специальных функций такие же как в книге [7] и $\sigma > 0$ и $\tau > 0$.

Приведенные интегральные представления (3.3) коэффициентов c_n дают возможность для нахождения асимптотики c_n при $n \to +\infty$ применять хорошо разработанные методы асимптотического разложения интегралов, зависящих от большого параметра. Обзор таких методов см. в [6] для коэффициентов $c_n = c_n(T)$, определяемых из систем функций с номерами 3, 6, 8 и 10 табл. 1 можно строить асимптотические формулы $c_n(T) \sim g_n(T)$ при $T \to +\infty$ и фиксированном $n \in N \cup \{0\}$, а за приближенный оригинал принять

$$f(x) \approx \theta(x) \sum_{n=0}^{\infty} g_n(T) V_n(x). \tag{3.5}$$

Более подробно приведем расчетные формулы для случая $\{V_n(x)\}=\{\exp(-\frac{i\pi n x}{T})\}$, $T>0$, $n\in\mathbb{Z}$, т.е. формулы 10 табл.1.

Тогда для $x\in[-T,T]$, $T>0$

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(T)\,e^{-i\frac{\pi n x}{T}} \tag{3.6}$$

где

$$c_n(T)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\,\frac{(-1)^n\sin\alpha T}{\alpha T+\pi n}\,d\alpha \qquad n\in\mathbb{Z}. \tag{3.7}$$

Необходимые асимптотические формулы дает следующая

Теорема 4. Пусть выполнены условия:

1) F аналитична в полосе $-\varepsilon_1<\operatorname{Im}\alpha<\varepsilon_2$, $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$;

2) в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha>0$ F имеет конечное число изолированных особых точек $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m$ алгебраического характера (полюса или алгебраические точки ветвления), в окрестности которых

$$F(\alpha)=(\alpha-\xi_k)^{-\gamma_k}\sum_{\nu=0}^{+\infty}\alpha_{\nu,k}(\alpha-\xi_k)^{\nu} \qquad k=1,2,\ldots,m; \tag{3.8}$$

3) в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha<0$ F имеет аналогичные особые точки $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_l$, окрестности которых

$$F(\alpha)=(\alpha-\eta_s)^{-\varphi_s}\sum_{\mu=0}^{+\infty}\beta_{\mu,s}(\alpha-\eta_s)^{\mu} \qquad s=1,2,\ldots,l; \tag{3.9}$$

4) $F(\alpha)$ удовлетворяет при $\alpha\to\infty$ условию $F(\alpha)=O(\alpha^{\tau})$, $\tau<0$ равномерно относительно $\arg\alpha$, $0<|\arg\alpha|<\pi$. Тогда при $T\to+\infty$ для $c_n(T)$ имеют место представления:

$$c_n(T)=\frac{1}{T}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big[F\Big(-\frac{\pi n}{T}\Big)-\sum_{k=1}^{m}A_n(\xi_k,T)-\sum_{s=1}^{l}B_n(\eta_s,T)\Big],\quad n\in\mathbb{Z}, \tag{3.10}$$

где для $A_n(\xi_k,T)$, $B_n(\eta_s,T)$ при $T\to+\infty$ справедливы асимптотические разложения:

$$A_n(\xi_k,T)\sim\sum_{\nu=0}^{+\infty}\alpha_{\nu,k}\,e^{i\pi(\gamma_k-\nu)}\,\frac{(\xi_k T+\pi n)^{\nu-\gamma_k}\,\Gamma(\gamma_k-\nu,-i(\pi n+\xi_k T))}{T^{\nu-\gamma_k}\,\Gamma(\gamma_k-\nu)}, \tag{3.11}$$

$$B_n(\eta_s,T)\sim\sum_{\mu=0}^{+\infty}\beta_{\mu,s}\,e^{i\pi(\mu-\varphi_s)}\,\frac{(\eta_s T+\pi n)^{\mu-\varphi_s}\,\Gamma(\varphi_s-\mu,-i(\eta_s T+\pi n))}{T^{\mu-\varphi_s}\,\Gamma(\varphi_s-\mu)}, \tag{3.12}$$

где $\Gamma(\alpha,x)$ – [illegible]-функция.

Доказательство. [illegible] для $c_n(T)$ получаем:

$$c_n(T)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\,\frac{(-1)^n\sin\alpha T}{\alpha T+\pi n}\,d\alpha=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{2\pi}\,i}\,[J_1-J_2], \tag{3.13}$$

где
$$\mathcal{J}_1 = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\alpha)e^{i\alpha T}}{\alpha T+\pi n}\,d\alpha,\quad \mathcal{J}_2 = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\alpha)e^{-i\alpha T}}{\alpha T+\pi n}\,d\alpha$$

Для нахождения $\mathcal{J}_1$ рассмотрим интеграл по вспомогательному контуру C_+ (рис.1).

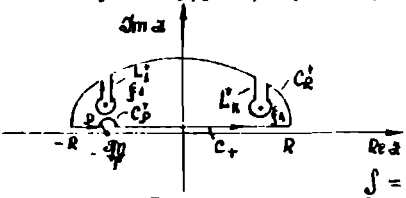

Рис.1

Очевидно, что
$$\int_{C_+} = \int_{-R}^{-\frac{\pi n}{T}-\rho} + \int_{C_\rho^+} + \int_{-\frac{\pi n}{T}+\rho}^{R} + \int_{C_R^+} + \sum_{k=1}^{m}\int_{L_k^+} = 0 .$$

Так как $\lim\limits_{\rho\to 0}\int\limits_{C_\rho^+} = -\frac{(-1)^n i\pi}{T}F\left(-\frac{\pi n}{T}\right)$, а $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R^+} = 0$

при выполнении условия 4 теоремы, то
$$\mathcal{J}_1 = \frac{i\pi(-1)^n}{T}F\left(-\frac{\pi n}{T}\right) - \sum_{k=1}^{m}\int_{L_k^+}\frac{F(\alpha)e^{i\alpha T}}{\alpha T+\pi n}\,d\alpha .$$

Используя в $\int\limits_{L_k^+}$ разложения (3.8) и известное представлени неполной гамма-функции [7] , получаем
$$\int_{L_k^+} = \sum_{\nu=0}^{+\infty}\alpha_{\nu,k}\left[2\pi i(-1)^n e^{-i\pi(\gamma_k-\nu)}\frac{(\xi_k T+\pi n)^{\nu-\gamma_k}}{T^{\nu-\gamma_k+1}}\;\frac{\Gamma(\gamma_k-\nu,-i(\pi n+\xi_k T))}{\Gamma(\gamma_k-\nu)}\right]$$

Аналогично, рассматривая вспомогательный контур в нижней полуплоскости, получаем представление для $\mathcal{J}_2$. Подставля полученные формулы в (3.13), получаем искомые представления для коэффициентов $C_n(T)$ – (3.10),(3.11),(3.12).

Примечания:

1) если ξ_k , η_s – полюса, то асимптотические ряды (3.11 – 12) обрываются и превращаются в точные суммы.

2) Полученные асимптотические разложения равномерны относительно n ,

3) Из формул (3.11), (3.12) и свойств неполной гамма-функции следует, что при $T\to+\infty$ $A_n(\xi_k,T) = O\left(\frac{1}{\xi_k T}\exp(i\xi_k T)\right)$ $B_n(\eta_s,T) = O\left(\frac{1}{\eta_s T}\exp(-i\eta_s T)\right)$, поэтому доминирующее влияние на асимптотику оказывают наиболее близкие к действительной оси особые точки изображения.

4) Если особых точек алгебраического характора счетное множество, то теорема остается верной, если суммы заменить асимптотическими рядами, а особые точки занумеровать в

порядке убывания модулей их мнимых частей.

5) Аналогичные теоремы можно получить и в случаях, если у изображения имеются особые точки более сложного вида.

6) Если оригинал f обладает некоторыми свойствами симметрии (четная или нечетная функция), то иногда выгодно перейти к соответствующему тригонометрическому ряду, используя известные соотношения:

$$a_0 = 2c_0 \qquad a_n = c_n + c_{-n}\,, \quad b_n = c_n - c_{-n}\,, \quad n \in N,$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{T} + b_n \sin\frac{\pi n x}{T}\right).$$

Список литературы

1. Цирулис Т.Т. О F-A методе обращения преобразования Лапласа с помощью полиномов Лежандра//Латв. матем. ежегодник, 1976- Т.19.-С. 63 - 70.
2. Белов М.А. О F-A методе численного обращения преобразования Лапласа//Латв.матем.ежегодник.-1976.-Т.20.-С.3-14.
3. Белов И.А.,Цирулис Т.Т. Интегральные представления типа Меллина-Барнса для коэффициентов Фурье разложения оригиналов в ряды по ортогональным системам функций//Латв.матем. ежегодник.-1976.-Т.20.-С.28-48.
4. Белов М.А.,Цирулис Т.Т. Асимптотические методы в приближенном обращении интегрального преобразования Лапласа I// Учен.зап.ЛГУ им.П.Стучки.-1976.-Т.252.-С.77-97.
5. Смотровс Я.А. Обращение преобразования Фурье методом асимптотического расширения интервала//Вопросы электродинамики и механики сплошных сред.-Рига.-1978.-С.128-142.
6. Риекстиньш Э. . Асимптотические разложения интегралов.- Рига,-1974.-Т.I; 1977-Т.2, 1981.-Т.3.
7. Бейтман, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции.- М.,1973.- Т.1,2.

Таблица 1

№	$V_n(x)$	$[a,b]$	$\theta(\lambda)$	$\rho(x)$	$\varphi_n(z)$
1.	$H_n(\sigma x)$	$]-\infty,+\infty[$	1	$\sigma e^{-\sigma^2 x^2}$	$\frac{i^n}{2^n n!}\left(\frac{z}{\sigma}\right)^n \exp\left(-\frac{z^2}{4\sigma^2}\right)$
1.*			$e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{2}}$	"	$\frac{\sqrt{2}\, i^n}{2^n n!} H_n\left(\frac{z}{\sigma}\right)\exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$
2.	$P_n(\mathrm{th}\,\sigma x)$	$]-\infty,+\infty[$	1	$\frac{\sigma}{\mathrm{ch}^2\sigma x}$	$(2n+1)\Gamma\left(1+i\frac{z}{2\sigma}\right)\Gamma\left(1-i\frac{z}{2\sigma}\right)\ {}_3F_2\left(-n,n+1,1-i\frac{z}{2\sigma};1,2;1\right)$
3.	$P_n\left(\frac{x}{T}\right)$	$[-T,T]$	1	$\frac{1}{T}$	$\left(n+\frac{1}{2}\right) i^n \sqrt{\frac{2\pi}{zT}}\ J_{n+\frac{1}{2}}(zT)$
4.	$L_n^{(\lambda)}(\sigma x)$	$[0,+\infty[$	1	$\sigma(\sigma x)^\lambda e^{-\sigma x}$	$(-i)^n \frac{(z/\sigma)^n}{(1-iz/\sigma)^{\lambda+n+1}}$
4.*			$e^{qx}, q>-\sigma$		$(q/\sigma - iz/\sigma)^n / (q/\sigma+1-iz/\sigma)^{\lambda+n+1}$
5.	$L_n^{(\lambda)}(e^{\sigma x})$	$]-\infty,+\infty[$	1	$\sigma \exp\left[-e^{\sigma x}+(\lambda+1)\sigma x\right]$	$\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}\ \Gamma(\lambda+1+iz/\sigma)(-iz/\sigma)_n$
5.*			$e^{qx}, q<\sigma(\lambda+1)$		$\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)}\ \Gamma(\lambda+1-q/\sigma+iz/\sigma)(q/\sigma-iz/\sigma)_n$
6.	$C_n^\lambda\left(\frac{x}{T}\right)$	$[-T,T]$	1	$\frac{1}{T}\left(1-\frac{x^2}{T^2}\right)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\pi}\, 2^{1-\lambda} i^n \frac{\Gamma(2\lambda)(n+\lambda)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}(zT)^{-\lambda}\ J_{\lambda+n}(zT)$
7.	$C_n^\lambda(\mathrm{th}\,\sigma x)$	$]-\infty,+\infty[$	1	$\frac{\sigma(1-\mathrm{th}^2\sigma x)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\mathrm{ch}^2\sigma x}$	$\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\ B\left(\lambda+\frac{1}{2}+iz/2\sigma;\lambda+\frac{1}{2}-iz/2\sigma\right)\times$ $\times\ {}_3F_2\left(-n,n+2\lambda,\lambda+\frac{1}{2}-iz/2\sigma;2\lambda+1,\lambda+\frac{1}{2};1\right)$

7.	$C_n^{\lambda}(\operatorname{th}\sigma x)$	$]-\infty,+\infty[$	$e^{qx}, \lvert q\rvert<\sigma(2\lambda+1)$	$\frac{\sigma(1-\operatorname{th}^2\sigma x)^{\lambda-\frac{1}{2}}}{\operatorname{ch}^2\sigma x}$	$\frac{2^{2\lambda}\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} B(\lambda+\tfrac{1}{2}-q/2\sigma+iz/2\sigma;\lambda+\tfrac{1}{2}+q/2\sigma-iz/2\sigma)\times$ $\times\,{}_3F_2(-n,n+2\lambda,\lambda+\tfrac{1}{2}+q/2\sigma-iz/2\sigma;2\lambda+1,\lambda+\tfrac{1}{2};1)$
8.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(\frac{x}{T})$	$[-T,T]$	1	$\frac{1}{T}(1-\frac{x}{T})^{\alpha}(1+\frac{x}{T})^{\beta}$	$\frac{(2i)^n\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}(zT)^{-n}e^{izT}\times$ $\times\,{}_1F_1(\alpha+n+1;2n+\alpha+\beta+2;-2izT)$
9.	$P_n^{(\alpha,\beta)}(\operatorname{th}\sigma x)$	$]-\infty,+\infty[$	1	$\frac{\sigma(1-\operatorname{th}\sigma x)^{\alpha}(1+\operatorname{th}\sigma x)^{\beta}}{\operatorname{ch}^2\sigma x}$	$\frac{(\alpha+1)_n(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}B(\beta+1+iz/2\sigma;\alpha+1-iz/2\sigma)\times$ $\times\,{}_3F_2(-n,\alpha+\beta+n+1,\alpha+1-iz/2\sigma;\alpha+1,\alpha+\beta+2;1)$
10.	$e^{-i\frac{\pi n x}{T}}, n\in\mathbb{Z}$	$[-T,T]$	1	$\frac{1}{T}$	$\frac{(-1)^n\sin zT}{zT+\pi n}$
11.	$e^{-i\pi n\operatorname{th}\sigma x}$ $n\in\mathbb{Z}$	$]-\infty,+\infty[$	1	$\frac{\sigma}{\operatorname{ch}^2\sigma x}$	$\frac{(-1)^n\pi z}{2\sigma\operatorname{sh}(\pi z/2\sigma)}\,{}_1F_1(1+iz/2\sigma;2;2i\pi n)$
12.	$e^{-i2n\operatorname{arctg}\sigma x}$, $n\in\mathbb{Z}$	$]-\infty,+\infty[$	1	$\frac{2\sigma}{\pi(1+\sigma^2x^2)}$	$\begin{cases}(-1)^{n-1}\frac{2\lvert z\rvert}{\sigma}e^{-\frac{\lvert z\rvert}{\sigma}}L^1_{\lvert n\rvert-1}(\frac{2\lvert z\rvert}{\sigma})\,\eta(-zn), & n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ e^{-\frac{\lvert z\rvert}{\sigma}} & n=0\end{cases}$, $\eta(a)=\begin{cases}1, & a>0,\\ 0, & a<0.\end{cases}$

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 515.12

СВОБОДНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ НЕ ДОПУСКАЮТ $\aleph$-МЕТРИЗАЦИИ

М.Г.Ткаченко
Балаковский филиал Саратовского политехнического института

В заглавие настоящей статьи вынесен ответ на вопрос А.В.Архангельского о том, являются ли $\aleph$-метризуемыми свободные топологические группы над компактами. Известно [1], что любая σ-компактная топологическая группа обладает свойством Суслина. Используя этот результат, А.В.Архангельский показал, что σ-компактная топологическая группа G является совершенно $\aleph$-нормальной, т.е. замыкание любого открытого в G множества имеет тип G_δ (см. теорему 1 из [2]). В.Б.Успенский усилил последнее утверждение, доказав, что для любого семейства $\mathcal{F}$ подмножеств типа G_δ в σ-компактной топологической группе G замыкание множества $\cup\mathcal{F}$ также имеет тип G_δ [3]. Эти результаты давали надежду на положительное решение сформулированного выше вопроса.

Другой вариант обсуждаемого вопроса состоит в том, чтобы выяснить, можно ли вложить свободную топологическую группу $F(X)$ или свободную абелеву топологическую группу $A(X)$ бесконечного компакта X в качестве всюду плотного подпространства в произведение пространств счетного веса. Из существования такого вложения немедленно вытекала бы $\aleph$-метризуемость этих групп, поскольку произведение метризуемых пространств является $\aleph$-метризуемым [4], а последнее свойство наследуется всюду плотными подпространствами. Частичное решение вопроса о вложении получил Д.Б.Шахматов [5], показавший методом форсинга, что существует некоторая модель теории множеств, в которой не всякая свободная топологическая группа над компактом допускает указанное вложение в произведение пространств счетного веса.

Здесь приводятся полные решения задач о $\aleph$-метриза-

ции свободных топологических групп и о вложении их в произведение пространств счетного веса, при этом не используются никакие дополнительные теоретико-множественные предположения. Мы показываем, что свободные топологические группы $F(X)$ и $A(X)$ $\aleph$-метризуемы лишь в том случае, когда пространство X дискретно (следствие 1). Аналогичное решение получает задача о вложении (следствие 3).
В дальнейшем все пространства предполагаются вполне регулярными. Через $F_a(X)$ обозначается свободная алгебраическая группа (без топологии) над множеством X

Основные результаты. Для формулировки основных утверждений в полной общности требуется следующее определение.

Определение 1. Пусть X - пространство. Топология $\mathcal{T}$ на группе $F_a(X)$ называется допустимой, если существует такое компактное расширение bX пространства X, что $\mathcal{T}_b \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_M$, где $\mathcal{T}_b$ - топология на $F_a(X)$, индуцированная из свободной топологической группы $F(bX)$, а $\mathcal{T}_M$ - топология свободной группы $F(X)$.

Ясно, что для компакта X на свободной группе $F_a(X)$ существует единственная допустимая топология, а именно, топология группы $F(X)$.

Группу $F_a(X)$, наделенную топологией $\mathcal{T}$ будем обозначать через $F_{\mathcal{T}}(X)$.

Теорема 1. Пусть X - недискретное пространство и $\mathcal{T}$ - допустимая топология на группе $F_a(X)$. Тогда никакое всюду плотное подпространство в $F_{\mathcal{T}}(X)$ не является $\aleph$-метризуемым. Тот же результат справедлив для абелевой группы $A(X)$.

Доказательство. Обозначим через i естественное непрерывное уплотнение $F_{\mathcal{T}}(X)$ в $F(bX)$, где bX - соответствующее компактное расширение пространства X для каждого $n \in \mathbb{N}$ через Φ_n обозначим множество всех элементов в $F(bX)$, имеющих длину $\leq n$ относительно bX Множество Φ_n замкнуто в $F(bX)$ при любом n. Для каждой точки $g \in F(bX) \setminus \Phi_n$ зафиксируем открытое $F(bX)$ множество $V(g) \ni g$ так, чтобы $[V(g)] \cap \Phi_n = \emptyset$, и положим $\gamma_n = \{V(g): g \in F(bX) \setminus \Phi_n\}$.

Предположим, что некоторое всюду плотное в $F_{\mathcal{T}}(X)$ подпространство S является $\aleph$-метризуемым. Пусть ρ - соответствующая $\aleph$-метрика на S. Обозначим через f_0 элемент из S, имеющий минимальную длину n_0 относительно X. Положим $T=i(S)$ и для каждого $n>n_0$ обозначим $\mu_n=\{i^{-1}(V\cap T): V\in\gamma_n\}$. Тогда $\bigcup\mu_n=F_{\mathcal{T}}(X)\setminus i^{-1}(\Phi_n)$ - всюду плотное в $F_{\mathcal{T}}(X)$ множество (ибо $\mathcal{T}\leq\mathcal{T}_M$), поэтому $f_0\in[\bigcup\mu_n]$ для каждого $n>n_0$. По лемме 1 на стр. 216 из [4] существует конечное подсемейство $\lambda_n\subseteq\mu_n$ такое, что $\rho(f_0,[\bigcup\lambda_n])<1/n$. Положим $\lambda=\bigcup\{\lambda_n: n>n_0\}$ и $O=\bigcup\lambda$. Ясно, что тогда $f_0\in[O]$. С другой стороны, из определения семейства λ следует, что при любом n лишь конечное число элементов семейства $\mathcal{T}=\{[i(\mathcal{U})]_{F(bX)}:\mathcal{U}\in\lambda\}$ пересекаются с Φ_n, поэтому множество $\bigcup\mathcal{T}$ замкнуто в $F(bX)$ ввиду теоремы 4 из [6]. Из непрерывности отображения i следует, что множество $K=\bigcup\{[\mathcal{U}]:\mathcal{U}\in\lambda\}$ замкнуто в $F_{\mathcal{T}}(X)$. Ясно также, что $f_0\notin K$. Однако $O\subseteq K$, поэтому $f_0\in[O]\subseteq K$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. Свободные топологические группы $F(X)$ и $A(X)$ $\aleph$-метризуемы если и только если пространство X дискретно.

Следствие 2. Пусть пространство X недискретно, $\mathcal{T}$ - допустимая топология на $F_a(X)$ и S всюду плотно в $F_{\mathcal{T}}(X)$. Тогда S нельзя вложить в качестве всюду плотного подпространства в произведение метризуемых пространств.

Следствие 3. Если пространство X недискретно, то свободные топологические группы $F(X)$ и $A(X)$ не допускают вложения в качестве всюду плотного подпространства в произведение метризуемых пространств.

Изложенный выше метод, приводящий к доказательству следствия 3, оставляет скрытыми истинные причины отсутствия нужного вложения групп $F(X)$ и $A(X)$. Приводимая ниже теорема 2 вскрывает эти причины и дает прямой (но более сложный) метод доказательства следствия 3.

Пусть $f:X\to Y$ и $g:X\to Z$ - непрерывные отображения.

Будем писать $f \leqslant g$, если существует такое непрерывное отображение $h: Y \to Z$, что $g = h \circ f$

Определение 2 см. [4]. Пусть $\mathcal{E}$ - некоторое семейство непрерывных отображений фиксированного пространства X в какие-то пространства.

1) Семейство $\mathcal{E}$ называется σ-решеткой для X , если для любого счетного подсемейства $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}$ диагональное произведение $\otimes \mathcal{T}$, рассматриваемое как отображение на свой образ, также принадлежит $\mathcal{E}$, и диагональное произведение $\otimes \mathcal{E}$ всех отображений из $\mathcal{E}$ является гомеоморфизмом (т.е. $\mathcal{E}$ порождает топологию на X);

2) Будем говорить, что семейство $\mathcal{E}$ обладает свойством факторизации, если для любого непрерывного отображения f из X на пространство Z счетного веса существует такой $\varphi \in \mathcal{E}$, что $\varphi \leqslant f$.

Отображение $\varphi: X \to Y$ называется d-открытым (см. определение 4 и лемму 5 из [7]), если $\varphi^{-1}[V] = [\varphi^{-1}V]$ для любого открытого в Y множества V . Пусть S всюду плотно в произведении $Z = \Pi\{Z_\alpha : \alpha \in A\}$ пространств Z_α счетного веса. Через p_B обозначим проекцию Z на грань $Z_B = \Pi\{Z_\alpha : \alpha \in B\}$, где $B \subseteq A$. Пусть π_B - сужение отображения p_B на S Тогда π_B является d -открытым отображением, ибо p_B открыто, а S всюду плотно в Z Кроме того, согласно теореме А.В.Архангельского [8] , семейство отображений $\mathcal{L} = \{\pi_B : B \subseteq A, |B| \leqslant \aleph_0\}$ обладает свойством факторизации. Ясно, что $\mathcal{L}$ является σ -решеткой. Таким образом, если свободная топологическая группа $F(X)$ вкладывается в качестве всюду плотного подпространства в произведение пространств счетного веса, то $F(X)$ обладает σ -решеткой из d -открытых отображений на пространства счетного веса.

Теорема 2. Пусть X - недискретное пространство. Тогда свободная топологическая группа $F(X)$ (а также свободная абелева группа $A(X)$) не имеет σ -решетки из непрерывных d -открытых отображений на пространства счетного веса.

Для доказательства теоремы 2 требуются некоторые понятия и вспомогательные результаты.

<u>Определение 3</u>. Последовательность $F(X) \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{i} F_{\mathcal{T}}(bY)$ назовем правильной, если φ и i – непрерывные гомоморфизмы, i – мономорфизм, G и $F = F_{\mathcal{T}}(bY)$ – группы счетного веса (где $\mathcal{T}$ – топология на F), $i\varphi(X) = Y$, bY – компактное метризуемое расширение пространства Y а группа F алгебраически свободно порождается своим подпространством bY

Несложное доказательство следующей леммы опускается.

<u>Лемма 1</u>. Пусть для каждого $n \in N$ задана правильная последовательность $F(X) \xrightarrow{\varphi_n} G_n \xrightarrow{i_n} F_{\mathcal{T}_n}(b_n Y_n)$.
Тогда существует правильная последовательность $F(X) \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{i} F_{\mathcal{T}}(bY)$ и для каждого $n \in N$ существуют непрерывные гомоморфизмы π_n и j_n такие, что коммутативны все диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi_n"'] & G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_n"] & F_{\mathcal{T}}(bY) \arrow[d, "j_n"] \\ & G_n \arrow[r, "i_n"] & F_{\mathcal{T}_n}(b_n Y_n) \end{tikzcd}.$$

Напомним, что семейство $\mathcal{E}$ отображений пространства X называется $\aleph_0$-направленным, если для любого счетного подсемейства $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{E}$ найдется такой элемент $\Psi \in \mathcal{E}$, что $\Psi \leq \varphi$ для всех $\varphi \in \mathcal{T}$

<u>Лемма 2</u>. Пусть свободная топологическая группа $F(X)$ над недискретным пространством X обладает свойством Суслина и $\mathcal{L}$ – некоторая σ-решетка из непрерывных отображений группы $F(X)$ на пространства счетного веса, обладающая свойством факторизации. Тогда существуют отображение $f \in \mathcal{L}$ группы $F(X)$ на недискретное пространство T счетного веса, правильная последовательность $F(X) \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{i} F_{\mathcal{T}}(bY)$ и непрерывное уплотнение $p: T \to H$ такие, что $\varphi = p \circ f$ и p – гомеоморфизм в точке $f(e)$, где e – единица в $F(X)$.

<u>Доказательство</u>. Обозначим через $\mathcal{E}$ семейство всех таких непрерывных гомоморфизмов $h: F(X) \to H_h$ на группы H_h счетного веса, что для некоторого мономорфизма j последовательность $F(X) \xrightarrow{h} H_h \xrightarrow{j} F_{\mathcal{T}}(bZ)$ является правильной. Нетрудно показать, что $\mathcal{E}$ конфинально в σ-решетке $\mathfrak{M}$ всех непрерывных гомоморфизмов

из $F(X)$ на группы счетного веса. Группа $F(X)$ недискретна, так как недискретно пространство X. Если псевдохарактер группы $F(X)$ счетен, то существует непрерывное уплотнение j_0 группы $F(X)$ на пространство T_0 счетного веса (см. [9]). Тогда T_0 недискретно и все возникающие в результате дальнейших построений группы и пространства также будут недискретны. Поэтому предположим, что псевдохарактер $F(X)$ несчетен.

Пусть $f_0 \in \mathcal{L}$ и $T_0 = f_0(F(X))$. Любая группа со свойством Суслина топологически и изоморфно вкладывается в произведение групп счетного веса см. [10] и [11], поэтому семейство $\mathfrak{M}$ порождает исходную топологию на $F(X)$. Так как $\mathcal{E}$ конфинально в $\mathfrak{M}$, этим свойством обладает и $\mathcal{E}$. Поскольку точка $f_0(e)$ имеет счетную базу в пространстве T_0 (e - единица в $F(X)$), а семейство $\mathcal{E}$ является $\aleph_0$-направленным (лемма 1), существует гомоморфизм $\varphi_0 \in \mathcal{E}$ со следующими свойствами:

($а_0$) для любого открытого в T_0 множества $V \ni f_0(e)$ существует такое открытое в $\varphi_0(F(X))$ множество $\mathcal{U} \ni \varphi_0(e)$, что $\varphi_0^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq f_0^{-1}(V)$;

($б_0$) для любых $x, y \in F(X)$ из равенства $\varphi_0(x) = \varphi_0(y)$ следует, что $f_0(x) = f_0(y)$.

Действительно, так как $F(X)$ обладает свойством Суслина, по теореме Е.В.Щепина [12] существуют замкнутый нормальный делитель N счетного псевдохарактера в $F(X)$ и непрерывная функция g на фактор-группе $K = F(X)/N$ такие, что $f_0 = g \circ \pi_N$, где π_N фактор-гомоморфизм $F(X)$ на K. Тогда K - суслинская группа счетного псевдохарактера, поэтому K допускает гомоморфное уплотнение j на группу K_0 со счетной базой [10]. Поэтому в качестве φ_0 нужно взять тот элемент из $\mathcal{E}$, для которого $\varphi_0 \leq j \circ \pi_N$ (это возможно ввиду конфинальности $\mathcal{E}$ в $\mathfrak{M}$).

Обозначим образ $F(X)$ при гомоморфизме φ_0 через H_0. Пусть $Y_0 = \varphi_0(X)$. Так как $\varphi_0 \in \mathcal{E}$, существуют компактное метризуемое расширение $b_0 Y_0$ пространства Y_0 и непрерывный мономорфизм $i_0 : H_0 \to F_{\mathcal{T}_0}(b_0 Y_0)$ в группу счетного веса $F_0 = F_{\mathcal{T}_0}(b_0 Y_0)$ с топологией $\mathcal{T}_0$ такие, что i_0 - тождественное отображение на [illegible]стве Y_0, а группа F_0 алгебраически свободно порождается своим подпространством $b_0 Y_0$.

Так как решетка $\mathcal{L}$ обладает свойством факторизации, существует такое непрерывное отображение $g_1 \in \mathcal{L}$, что $g_1 \le f_0$ и $g_1 \le \varphi_0$. Поскольку псевдохарактер группы $F(X)$ несчетен, существует точка $x_1 \in F(X)$ такая, что $x_1 \neq e$ и $g_1(x_1) = g_1(e)$. Пусть h_1 – непрерывная функция на $F(X)$, различающая точки x_1 и e. Тогда существует такой $f_1 \in \mathcal{L}$, что $f_1 \le g_1$ и $f_1 \le h_1$. Ясно, что $f_1(x_1) \neq f_1(e)$. При этом $f_0(x_1) = f_0(e)$, ибо $g_1 \le f_0$. Пусть $u_1 : T_1 \to T_0$ – такое непрерывное отображение, что $\varphi_0 = u_1 \circ f_1$, где $T_1 = f_1(F(X))$.

Далее, существует гомоморфизм $\varphi_1 \in \mathcal{E}$ группы $F(X)$ на группу H_1 счетного веса, обладающий свойствами

($а_1$) для любого открытого в T_1 множества $V \ni f_1(e)$ существует такое открытое в H_1 множество $\mathcal{U} \ni \varphi_1(e)$, что $\varphi_1^{-1}(\mathcal{U}) \subseteq f_1^{-1}(V)$;

($б_1$) для любых $x, y \in F(X)$ из равенства $\varphi_1(x) = \varphi_1(y)$ следует, что $f_1(x) = f_1(y)$.

Поскольку $\varphi_1 \le \varphi_0$, существует непрерывный гомоморфизм $\pi_{1,0} : H_1 \to H_0$, для которого $\varphi_0 = \pi_{1,0} \circ \varphi_1$. Пусть $i_1 : H_1 \to F_1 = F_{\mathcal{T}_1}(b_1 Y_1)$ – непрерывный мономорфизм, гарантирующий включение $\varphi_1 \in \mathcal{E}$, где $Y_1 = \varphi_1(X)$. При этом можно считать, что существует непрерывный гомоморфизм $\psi_{1,0} : F_1 \to F_0$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_1} & H_1 & \xrightarrow{i_1} & F_1 \\ \downarrow f_1 & \searrow^{\varphi_0} & \downarrow \pi_{1,0} & & \downarrow \psi_{1,0} \\ T_1 & \xrightarrow{u_1} & H_0 & \xrightarrow{i_0} & F_0 \end{array}$$

Действительно, в качестве φ_1 и i_1 можно взять гомоморфизмы φ и i, существование которых утверждается в лемме 1.

Продолжая построение, на $(n+1)$-м шаге аналогичным образом определяются непрерывные гомоморфизмы φ_{n+1}, i_{n+1}, $\pi_{n+1,n}$, $\psi_{n+1,n}$ и непрерывные отображения $f_{n+1} : F(X) \to T_{n+1}$, $f_{n+1} \in \mathcal{L}$, $u_{n+1} : T_{n+1} \to T_n$ и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & H_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & F_{n+1} \\ \downarrow id & & \downarrow \pi_{n+1,n} & & \downarrow \psi_{n+1,n} \\ F(X) & \xrightarrow{\varphi_n} & H_n & \xrightarrow{i_n} & F_n \end{array}$$

в которой каждая из двух горизонтальных последовательностей является правильной и $\varphi_n = u_{n+1} \circ f_{n+1}$. При этом должны выполняться условия (a_{n+1}) и $(б_{n+1})$, аналогичные условиям (a_1) и $(б_1)$. Кроме того, определяется точка x_{n+1} из $F(X)$ так, чтобы $f_n(x_{n+1}) = f_n(e)$ и $f_{n+1}(x_{n+1}) \neq f_{n+1}(e)$.

Из построения следует, что $f_0 \geqslant f_1 \geqslant \ldots$ и $\varphi_0 \geqslant \varphi_1 \geqslant \ldots$, поэтому $f = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\otimes}} f_n \in \mathcal{L}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $g_n = i_n \circ \varphi_n$. Пусть $\varphi = \overset{\infty}{\underset{n=0}{\otimes}} \varphi_n$, $g = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\otimes}} g_n$, $T = f(F(X))$, $H = \varphi(F(X))$ и $F = g(F(X))$. Так как $\varphi_n \leq g_n$ для любого $n \in \mathbb{N}^+$, существует такой непрерывный гомоморфизм $i: H \to F$, что $g = i \circ \varphi$. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют непрерывные гомоморфизмы $\pi_n: H \to H_n$, $\psi_n: F \to F_n$ и непрерывное отображение $\vartheta_{n+1}: T \to T_{n+1}$ такие, что коммутативна диаграмма

$$
\begin{array}{ccccccc}
T & \xleftarrow{f} & F(X) & \longrightarrow & H & \longrightarrow & F \\
 & \searrow^{\vartheta_{n+1}} & \downarrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_n} \\
 & & T_{n+1} & \longrightarrow & H_n & \longrightarrow & F_n
\end{array}
$$

Ясно, что i является мономорфизмом, так как таковыми являются гомоморфизмы i_n, $n \in \mathbb{N}^+$. Поскольку $f_{n+1} \leq \varphi_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$, существует непрерывное отображение $p: T \to H$ такое, что $\varphi = p \circ f$. Так как для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется условие (a_n), заключаем, что отображение p является гомеоморфным в точке $f(e)$. Кроме того, p – уплотнение, ибо при любом $n \in \mathbb{N}$ и для любых $x, y \in F(X)$ из $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$ следует, что $f_n(x) = f_n(y)$. Пусть $\hat{F}$ – предел обратного спектра из групп F_n и соответствующих гомоморфизмов $\psi_{n+1,n}$. Тогда группа $\hat{F}$ имеет счетную базу, алгебраически свободно порождается некоторым своим компактным подпространством $B = bY$ (являющимся пределом подспектра из метризуемых компактов $b_n Y_n$), в котором всюду плотно множество $Y = g(X)$, причем F естественно вкладывается в $\hat{F}$. Следовательно, последовательность $F(X) \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{i} \hat{F}$ является правильной. Наконец, пространство T недискретно. Действительно, $f_n(x_{n+1}) = f_n(e)$ и $f_{n+1}(x_{n+1}) \neq f_{n+1}(e)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, поэтому нетривиальная последовательность $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}^+\}$ сходится к точке $f(e)$.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что существует σ - решетка $\mathcal{L}$ непрерывных d-открытых отображений из $F(X)$ на пространства счетного веса. Согласно теореме 1 из [13] решетка $\mathcal{L}$ обладает свойством факторизации, а $F(X)$ удовлетворяет условию Суслина.

Применяя лемму 2, находим непрерывное отображение $f \in \mathcal{L}$ группы $F(X)$ на пространство T счетного веса, правильную последовательность $F(X) \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{i} F_{\mathcal{T}}(bY)$ и уплотнение $p: T \to H$ такие, что $\varphi = p \circ f$ и p - гомеоморфизм в точке $f(e)$. Пусть $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ - счетная база в единице e_H группы H. Группы H и $F = F_{\mathcal{T}}(bY)$ недискретны, так как недискретно пространство T, а p и i - уплотнения. Пусть $\{V_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ - база из окрестностей e_H в H такая, что $(V_n)^n \subseteq \mathcal{U}_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}^+$. Поскольку i - мономорфизм и bY алгебраически свободно порождает группу F, группа H алгебраически свободно порождается своим подпространством $\bar{X} = \varphi(X)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}^+$ зафиксируем элемент g_n из V_n, имеющий длину 2 относительно $\bar{X}$. Тогда элемент $h_n = (g_n)^n$ имеет длину $2n$ относительно $\bar{X}$ и $h_n \in \mathcal{U}_n$ ввиду выбора множества V_n. Таким образом, последовательность $\{h_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ сходится к единице группы H.

Пусть $g = i \circ \varphi|_X$ и $\bar{g}$ - продолжение g до непрерывного отображения стоун-чеховского расширения βX на bY. Тогда существует продолжение $\hat{g}$ отображения $\bar{g}$ до непрерывного гомоморфизма $F(\beta X)$ на $F = F_{\mathcal{T}}(bY)$. При этом $\hat{g}|_{F(X)} = i \circ \varphi$ (заметим, что топология свободной группы $F(X)$, вообще говоря, сильнее, чем индуцированная топология из $F(\beta X)$). Пусть $h_n^* = i(h_n)$, $n \in \mathbb{N}^+$. Так как длина h_n^* относительно bY равна $2n$ (i - мономорфизм) и множество F_n слов длины $\leq n$ замкнуто в F, существует открытое в F множество $O_n \ni h_n^*$ такое, что $F_n \cap [O_n] = \emptyset$. Положим $\gamma = \{(\hat{g})^{-1}[O_n] : n \in \mathbb{N}^+\}$. Пусть Φ_n - множество слов в $F(\beta X)$ длины $\leq n$ относительно βX. Ясно, что при любом $n \in \mathbb{N}^+$ не более чем n элементов семейства γ пересекаются с Φ_n, поэтому множество $K = \cup \gamma$ замкнуто в $F(\beta X)$ согласно теореме 4 из [6]. Очевидно, $e \notin K$. Далее, положим $W_n = i^{-1}(O_n)$ и $W = \cup\{W_n : n \in \mathbb{N}^+\}$.

Тогда $\{h_n : n\in\mathbb{N}^+\}\subseteq W$, поэтому e_H принадлежит замыканию открытого в H множества W. Так как уплотнение $p: T\to H$ является гомеоморфизмом в точке $f(e)$, то $f(e)$ принадлежит замыканию множества $\widetilde{W}=p^{-1}(W)$. Поскольку $f\in\mathcal{L}$, отображение f является d-открытым и поэтому $f^{-1}[\widetilde{W}]=[f^{-1}\widetilde{W}]$. Следовательно, $e\in[f^{-1}\widetilde{W}]$. Однако, $f^{-1}(\widetilde{W})=f^{-1}p^{-1}(W)=\varphi^{-1}(W)=\varphi^{-1}i^{-1}(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}=\bigcup\{\mathcal{O}_n : n\in\mathbb{N}^+\}$. Поэтому $f^{-1}(\widetilde{W})\subseteq(\hat{g})^{-1}(\mathcal{O})$, ибо $\hat{g}|_{F(X)}=i\circ\varphi$. Кроме того, $(\hat{g})^{-1}(\mathcal{O})$ содержится в замкнутом множестве K, откуда $e\in[f^{-1}(\widetilde{W})]\subseteq K$. Последнее противоречит тому, что $e\notin K$. Это завершает доказательство теоремы.

Список литературы

1. Ткаченко М.Г. О свойстве Суслина в свободных топологических группах над бикомпактами // Матем. зам. - 1983. - Т. 34. - С. 601 - 607.
2. Ткаченко М.Г. Об ограниченности и псевдокомпактности в топологических группах // Матем. зам. - 1987.- Т.42.- С. 132-144.
3. Успенский В.В. О непрерывных образах линделефовых топологических групп // ДАН СССР. - 1985. - Т.285. - С. 824-827.
4. Щепин Е.В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // УМН. - 1976. - Т.31. - С. 191-226.
5. Шахматов Д.Б. Прекалибры σ-компактных топологических групп // Матем. зам. - 1986. - Т. 39.- С.859-865.
6. Граев М.И. Свободные топологические группы // Известия АН СССР. - 1948. - Т.12. - С. 270-324.
7. Tkačenko M.G. Some results on inverse Spectra. II // Comm. Math. Univ. Carol. - 1981. - V.22. - P.819-841.
8. Архангельский А.В. Об отображениях всюду плотных подпространств топологических произведений // ДАН СССР. - 1971. - Т.197. - С.750-753.
9. Архангельский А.В. Кардинальные инварианты топологических групп. Вложения и уплотнения // ДАН СССР. - 1979. - Т. 247. - С.779-782.
10. Архангельский А.В. Классы топологических групп // УМН. - 1981. - Т.36. - С. 127-146.

11. Гуран И.И. О топологических группах, близких к финально компактным // ДАН СССР. - 1981. - Т.256. - С. 1035-1037.
12. Щепин Е.В. Вещественные функции и канонические множества в тихоновских произведениях и топологических группах // УМН. - 1976. - Т.31. - С.17-27.
13. Tkačenko M.G. Free topological groups and related topics // Proc. of the Collog. on Topology and its Appl., Eger (Hungary), 1983. - Coll. Math. - 1984. - V.41. - P.609-623.

Поступила 12 мая 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 513.88

КРИТЕРИИ УЛЬТРАПОЛНОТЫ РАВНОМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

В.П.Фёдорова
МГПИ им. В.И.Ленина

В этой заметке доказывается, что свойство ультраполноты отделимого равномерного пространства равносильно выполнению некоторой теоремы типа Стоуна-Вейерштрасса в пространстве равномерно непрерывных функций. Попутно получены и другие критерии ультраполноты.

Понятие ультраполного равномерного пространства введено впервые Исбеллом и Гинзбургом. Здесь рассматривается эквивалентное определение, принадлежащее Келли [1]. Пусть X - отделимое равномерное пространство с фундаментальной системой равномерных окружений $\mathcal{U}$. Для непустого множества $A \subset X$ и $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ через $\mathcal{U}(A)$ обозначается множество $\bigcup\{\mathcal{U}(x) \mid x \in A\}$

Семейство $\widetilde{A}$ непустых подмножеств пространства X называется фундаментальным, если 1) оно является базисом фильтра в X и 2) для каждого равномерного окружения $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ существует $A \in \widetilde{A}$ такое, что $A \subset \mathcal{U}(B)$ для всех $B \in \widetilde{A}$. Говорят, что фундаментальное семейство $\widetilde{A}$ сходится к множеству $C \subset X$, если для любого $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ существует $A \in \widetilde{A}$, содержащееся в $\mathcal{U}(C)$. Нетрудно проверить, что если фундаментальное семейство $\widetilde{A}$ сходится к множеству $C \subset X$, то $C = \bigcap\{\bar{A} \mid A \in \widetilde{A}\}$, где $\bar{A}$ означает замыкание A в X.

<u>Определение 1</u>. Отделимое равномерное пространство называется ультраполным, если каждое фундаментальное семейство в нем сходится.

Пусть $P(X)$ - векторная решетка всех вещественных равномерно непрерывных на X функций с поточечными линейными операциями и поточечным упорядочением, $P_b(X)$ ее подрешетка, составленная всеми ограниченными функциями, $\mathfrak{M}$ - множество всех равностепенно равномерно непрерывных подмножеств $P(X)$, ограниченных в каждой точке $x\in X$, а $\mathfrak{N}$ – всех равностепенно равномерно непрерывных равномерно ограниченных подмножеств. Через v будем обозначать топологию в $P(X)$ сходимости в каждой точке из X и называть ее слабой. В $P(X)$ будет рассматриваться также топология $v\mathfrak{M}$ – сильнейшая из всевозможных топологий в $P(X)$, совпадающих с v на каждом $H\in\mathfrak{M}$, а в $P_b(X)$ – ее аналог, получающийся заменой $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$. Замкнутыми относительно $v\mathfrak{M}$ (относительно $v\mathfrak{N}$) являются те и только те множества в $P(X)$ (соответственно в $P_b(X)$), пересечение которых с каждым $H\in\mathfrak{M}$ (соответственно $H\in\mathfrak{N}$) слабо замкнуто в H.

Напомним, что идеалом векторной решетки $\mathcal{L}$ называется всякое векторное подпространство Q в $\mathcal{L}$, обладающее свойством нормальности: если $f\in Q$, $g\in\mathcal{L}$ и $|g|\leqslant|f|$ то $g\in Q$ [2].

В работе [3] дан следующий дуальный критерий ультраполноты.

<u>Теорема 1</u>. Для того, чтобы равномерное пространство X было ультраполным, необходимо и достаточно, чтобы всякий $v\mathfrak{M}$-замкнутый ($v\mathfrak{N}$-замкнутый) идеал векторной решетки $P(X)$ (соответственно $P_b(X)$) был v-замкнут.

<u>Определение 2</u>. Пусть $\mathcal{L}$ – векторная решетка функций на множестве X, разделяющая точки из X и содержащая константы, t – некоторая топология в ней. Будем говорить, что в пространстве ($\mathcal{L}$, t) выполняется теорема Стоуна-Вейерштрасса, если всякая t – замкнутая векторная подрешетка в $\mathcal{L}$, содержащая константы и разделяющая точки из X, совпадает с $\mathcal{L}$

Как доказала Л.Н.Мохова, если X – ультраполное равномерное пространство, то в пространствах $(P_b(X), v\mathfrak{N})$ и $(P(X), v\mathfrak{M})$ выполняется теорема Стоуна-Вейерштрасса [4].

<u>Теорема 2</u>. Следующие свойства отделимого равномерного пространства X равносильны:

1) X ультраполно;

2) в $(P_b(X), v\mathfrak{N})$ выполняется теорема Стоуна-Вейерштрасса;

3) для всякого фундаментального семейства $\tilde{A}$ в X множество $\bigcap\{\bar{A} \mid A\in\tilde{A}\}$ непусто;

4) для всякого $v\mathcal{N}$-замкнутого собственного идеала Q векторной решетки $P_b(X)$ найдется точка $x\in X$ в которой все функции из Q равны нулю.

Доказательство. 1)$\Longrightarrow$2)$\Longrightarrow$3) доказано Л.Н.Шеховой [4]. Убедимся, что 3)$\Longleftrightarrow$4). Пусть выполнено 3) и Q $v\mathcal{N}$-замкнутый собственный идеал векторной решетки $P_b(X)$ Обозначим через $\mathcal{H}$ множество всех абсолютно выпуклых равностепенно равномерно непрерывных равномерно ограниченных подмножеств $P_b(X)$ и рассмотрим в X семейство множеств $A_H=\{x\in X \mid |f(x)|<1$ для всех $f\in H\cap Q\}$, где H пробегает $\mathcal{H}$ Как доказано в работе [3], (A_H , $H\in\mathcal{H}$) – фундаментальное семейство. Согласно свойству 3) найдется точка $x_0\in X$ такая, что $x_0\in\bigcap\{\bar{A}_H \mid H\in\mathcal{H}\}$. Пусть f – произвольный элемент Q . Тогда $f\in H\cap Q$ для некоторого $H\in\mathcal{H}$, и , следовательно, $|f(x)|<1$ для всех $x\in A_H$. Поскольку $x_0\in\bar{A}_H$, имеем $|f(x_0)|\leq 1$. Таким образом, $|f(x_0)|\leq 1$ для всех $f\in Q$. Но Q векторное пространство, и следовательно, $f(x_0)=0$ для всех $f\in Q$. Докажем, что 4)$\Longrightarrow$3). Пусть $\tilde{A}$ – фундаментальное семейство в X Положим $A^{\perp}=\{f\in P_b(X) \mid f(x)=0$ для всех $x\in A\}$, $\mathcal{P}=\bigcup\{A^{\perp} \mid A\in\tilde{A}\}$, Q – объединение слабых замыканий всевозможных множеств $H\in\mathcal{N}$, содержащихся в $\mathcal{P}$. Тогда Q – собственный $v\mathcal{N}$-замкнутый идеал векторной решетки $P_b(X)$ [3] . В силу 4) найдется точка $x_0\in X$, где все $f\in Q$ равны нулю. Отсюда следует, что $x_0\in\bigcap\{\bar{A} \mid A\in\tilde{A}\}$. Действительно, если бы $x_0\notin\bar{A}$ для некоторого $A\in\tilde{A}$, то существовала бы функция $g\in P_b(X)$ такая, что $g(x)=0$ для всех $x\in\bar{A}$ и $g(x_0)\neq 0$. Но тогда имели бы $g\in Q$ и $g(x_0)\neq 0$ в противоречие с выбором x_0 Итак, 4) выполнено и доказательство 3)$\Longleftrightarrow$4) завершено. Докажем, что 4)$\Longrightarrow$1). Согласно теореме 1 для установления свойства 1) достаточно убедиться, что всякий $v\mathcal{N}$-замкнутый идеал Q векторной решетки $P_b(X)$ слабо замкнут. Пусть $f\in P_b(X)$, $f\geq 0$ и $f\in\bar{Q}^{v}$. Для всякого натурального n положим $X_n=\{x\in X \mid |f(x)|\geq\frac{1}{n}\}$. Очевидно, что X_n замкнутое подпространство X . Если $X_n=\varnothing$ для всех n , то $f=0$, и следовательно, $f\in Q$ В противном случае найдется натуральное число N такое, то $X_n \neq \emptyset$ для всех $n \geq N$. Как уже доказано, 4) $\Longrightarrow$ 3), так что X обладает свойством 3), которое, очевидно, наследуется любым его замкнутым подпространством. В частности, 3) выполнено для всех X_n ($n \geq N$). Рассмотрим в $P_b(X_n)$ множество Q_n, образованное сужениями на X_n всевозможных функций из Q. Легко видеть, что Q_n – $v\mathfrak{N}$-замкнутый идеал векторной решетки $P_b(X_n)$. Предположим, что идеал Q_n собственный. Так как 3) $\Longleftrightarrow$ 4) для X_n, то существует $x_n \in X_n$ такой, что $\mathring{g}(x_n)=0$ для всех $g \in Q_n$. Но это противоречит тому, что $f(x_n) \geq \frac{1}{n}$, а сужение $f|_{X_n}$ функции f на множество X_n есть слабая точка прикосновения Q_n. Таким образом, идеал Q_n несобственный, т.е. $Q_n = P_b(X_n)$. В таком случае $f|_{X_n} \in Q_n$, и значит, в Q найдется функция $g_n \geq 0$ такая, что $g_n(x)=f(x)$ для всех $x \in X_n$. Положим $f_n = g_n \wedge f$ ($n \geq N$). Тогда $f_n \in Q$, так как Q – нормальное множество. Нетрудно видеть, что $\{f_n \mid n \geq N\} \in \mathfrak{N}$. В самом деле, $f_n(x)-f(x)=0$ для всех $x \in X_n$ и $0 \leq f(x)-f_n(x) \leq \frac{1}{n}$ для всех $x \notin X_n$, так что семейство (f_n, $n \geq N$) равномерно сходится к f. В силу $v\mathfrak{N}$-замкнутости множества Q получаем $f \in Q$. Если теперь $f \in P_b(X)$ и $f \in \bar{Q}^v$, то $f=f^+-f^-$ и $f^+ \in \bar{Q}^v$, $f^- \in \bar{Q}^v$. По доказанному $f^+, f^- \in Q$, и значит, $f \in Q$. Итак, Q слабо замкнут и доказательство теоремы завершено.

Замечание. Теорема 2 остается справедливой при замене $P_b(X)$ на $P(X)$, а топологии $v\mathfrak{N}$ на $v\mathfrak{M}$; так как все рассуждения с теми же ссылками сохраняют силу.

Пусть теперь X – вполне регулярное топологическое пространство, $C(X)$ – пространство всех вещественных непрерывных на X функций, $C_b(X)$ – всех ограниченных вещественных непрерывных функций, w – сильнейшая из топологий в $C(X)$, совпадающих на каждом равностепенно непрерывном поточечно ограниченном множестве с топологией v поточечной сходимости, w_b – сильнейшая из топологий в $C_b(X)$, совпадающих на каждом равномерно ограниченном равностепенно непрерывном множестве с топологией v.

Теорема 3. Следующие свойства вполне регулярного топологического пространства X равносильны:

1) X паракомпактно;

2) в $(C_b(X), \mathcal{W}_b)$ выполняется теорема Стоуна-Вейерштрасса;

3) в $(C(X), \mathcal{W})$ выполняется теорема Стоуна-Вейерштрасса;

4) для всякого собственного $\mathcal{W}_b$ -замкнутого идеала Q векторной решетки $C_b(X)$ найдется точка из X, в которой все $f \in Q$ равны нулю;

5) для всякого собственного $\mathcal{W}$ -замкнутого идеала Q векторной решетки $C(X)$ найдется точка из X, в которой все $f \in Q$ равны нулю.

Доказательство. Как доказал Исбелл [5], вполне регулярное пространство X паракомпактно тогда и только тогда, когда X ультраполно в сильнейшей из равномерных структур, согласующихся с топологией в X. Для этой равномерной структуры $C(X)$ - пространство всех вещественных равномерно непрерывных функций, а $\mathfrak{M}$ совпадает с множеством всех слабо ограниченных равностепенно непрерывных подмножеств. Остается применить теорему 2 и учесть замечание к ней.

Список литературы

1. Kelly J.L. Hypercomplete linear topological spaces // Michigan Math.J.-1985.- V.5.- P.235-246.
2. Шефер Х. Топологические векторные пространства.-М.,1971.
3. Фёдорова В.П. Дуальные эквиваленты ультраполноты и паракомпактности // Матем. сб.- Т.76.- С.566-572.
4. Мохова Л.Н. Теоремы Стоуна-Вейерштрасса для некоторых функциональных векторных решёток с топологией. - М., 1982.- Деп. в ВИНИТИ 5.05.1982 года, № 2191-82.

Isbell I.R. Supercomplete spaces // Pacific J.Math.- 1962.- V.12.- № 1.- P.287-290.

Поступила 19 мая 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 519.21

О СХОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИТЕРАЦИЙ

В.Н.Царькова, Ан.А.Матвеев
ЛГУ им.П.Стучки, РПИ

Рассмотрим на некотором вероятностном пространстве $\langle\Omega,\mathcal{F},P\rangle$ итерационную процедуру, определенную линейным разностным стохастическим уравнением

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + Bx_n\xi_{n+1} \\ x_0 = x \end{cases}, \qquad (1)$$

где A, B - матрицы размерности $m\times m$, $x\in\mathbb{R}^m$, ξ_n - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $E\xi_n=0$, $D\xi_n<\infty$. Введем в рассмотрение минимальную σ-алгебру $\mathcal{F}_k^n$, $n\geq k\geq 0$, относительно которой измеримы случайные величины $\xi_k,\dots,\xi_n$. Определим семейство линейных операторов $\{X_k^n\}_{n\geq k\geq 0}$ по правилу

$$X_k^n = \begin{cases} J & \text{при } n=k \\ \prod\limits_{j=k+1}^{n}(A+B\xi_j) & \text{при } n>k, \end{cases} \qquad (2)$$

где J - единичная матрица. Решение уравнения (1) $X_k^n x$ при $n>k$ по начальным данным $x_k=x$ $\mathcal{F}_{k+1}^n$-измеримо и определяет переходную вероятность

$$P(n,k,x,C)=P(X_k^n x\in C) \qquad (3)$$

однородной цепи Маркова (C - элемент σ-алгебры борелевских множеств в $\mathbb{R}^m$).

<u>Определение 1</u>. Тривиальное решение (1) называется асимптотически устойчивым почти наверное, если для любых $\delta>0$, $\gamma>0$ найдется $r>0$ такое, что при всех $x\in\{x\in\mathbb{R}^m: |x|\leq r\}$

$$P(\sup_{k\geq s}|X_s^k x|>\delta)<\gamma$$

и, кроме того, для любых $\varepsilon>0$, $x\in\mathbb{R}^m$ и $s\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} P(\sup_{k\geq n}|X_s^{s+k}x|>\varepsilon)=0.$$

<u>Определение 2</u>. Тривиальное решение (1) называется экспоненциально p-устойчивым($p>0$), если существуют постоянные $M>0$, $\gamma>0$ такие, что при $x\in\mathbb{R}^m$ и $n>0$

$$E|X_0^n x|^p \leq Me^{-\alpha n}|x|^p.$$

Обозначим V_p – класс непрерывных отображений $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}_+$, которые удовлетворяют условиям:

1. существуют постоянные $c_1>0$, $c_2>0$ такие, что для всех $x\in\mathbb{R}^m$

$$c_1|x|^p \leq v(x) \leq c_2|x|^p,$$

2. для всех $x\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^m$ $v(x+y)=v(x)+v(y)$.

С уравнением вида (1) свяжем оператор

$$(\mathcal{L}^{(1)}v)(x)=Ev(Ax+Bx\xi_n)-v(x),\ \forall n\in\mathbb{N}, \tag{4}$$

где индекс сверху у оператора указывает на то разностное уравнение, которым порожден данный оператор.

Теорема 1. При любом $p\in(0,1)$ для экспоненциальной p-устойчивости тривиального решения (1) необходимо и достаточно существование такого $v\in V_p$ что $-\mathcal{L}^{(1)}v\in V_p$.

Необходимость. Рассмотрим функцию

$$v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}E|X_0^n x|^p,\ p\in(0,1). \tag{5}$$

$v\in V_p$, т.к.

$$|x|^p \leq v(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty}Me^{-\alpha n}|x|^p=c|x|^p,\ \text{где}\ c=\frac{M}{1-e^{-\alpha}},$$

$$v(x+y)=\sum_{n=0}^{\infty}E(|X_0^n x|+|X_0^n y|)^p \leq v(x)+v(y).$$

Кроме того, учитывая что

$$\sum_{n=0}^{\infty}E|X_0^n(Ax+Bx\xi_{n+1})|^p=\sum_{n=0}^{\infty}E|X_0^{n+1}x|^p=v(x)-|x|^p, \tag{6}$$

получаем

$$-(\mathcal{L}^{(1)}v)(x)=-E\Big(\sum_{n=0}^{\infty}E|X_0^n(Ax+Bx\xi_{n+1})|^p\Big)+v(x)=|x|^p. \tag{7}$$

Достаточность. Пусть $v\in V_p$ и $-\mathcal{L}^{(1)}v=u\in V_p$, т.е. $\exists c_1>0$, $c_2>0$, $\tilde c_1>0$, $\tilde c_2>0$: $c_1|x|^p\leq v(x)\leq c_2|x|^p$ и $\tilde c_1|x|^p\leq u(x)\leq \tilde c_2|x|^p$. Тогда

$$E|x_n|^p \geq \frac{1}{c_2}Ev(x_n),\quad Eu(x_n)\geq\frac{\tilde c_1}{c_2}Ev(x_n), \tag{8}$$

поэтому

$$Ev(x_{n+1})=E[E(v(Ax_n+Bx_n\xi_{n+1})|\mathcal{F}_0^n)]=E[E(v(Ax+Bx\xi_{n+1}))|_{x=x_n}]=$$

$$=E[(\mathcal{L}^{(1)}v)(x_n)+v(x_n)]=-Eu(x_n)+Ev(x_n)\leq\Big(1-\frac{\tilde c_1}{c_2}\Big)Ev(x_n). \tag{9}$$

Поскольку, не [illegible] об[illegible], можно считать $\tilde c_1 < c_2$, то по индукции

$$E v(x_n) \leq \left(1-\frac{\widetilde{c}_1}{c_2}\right)^n v(x) \leq c_2\left(1-\frac{\widetilde{c}_1}{c_2}\right)^n |x|^p. \qquad (10)$$

Поэтому

$$E|x_n|^p \leq \frac{1}{c_1} E v(x_n) \leq M e^{-\gamma n}|x|^p, \qquad (11)$$

где $M=\frac{c_2}{c_1}$, $-\gamma = \ln\left(1-\frac{\widetilde{c}_1}{c_2}\right)$, $\gamma>0$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь наряду с (1) уравнение

$$\begin{cases} y_{n+1} = Ay_n + By_n\eta_{n+1} \\ y_0 = x \end{cases} \qquad (12)$$

где $E\eta_n = 0$, $D(\eta_n - \xi_n) = \alpha \quad \forall\, n\in \mathbb{N}$.

Следствие 1. Если $\alpha \in [0,\alpha_0)$, где α_0 - достаточно мало, то из экспоненциальной p-устойчивости тривиального решения одного из уравнений (1) или (12) следует экспоненциальная p-устойчивость тривиального решения другого.

Доказательство. Пусть тривиальное решение (1) экспоненциально p-устойчиво. Тогда $\exists\, v\in V_p$ и в обозначениях доказательства теоремы 1

$$(\mathcal{L}^{(12)}v)(x) = E\{v(Ax+Bx\xi_n+Bx(\eta_n-\xi_n))\} - v(x) \leq (\mathcal{L}^{(1)}v)(x) +$$
$$+E\, v(Bx(\eta_1-\xi_1)) \leq \widetilde{c}_1|x|^p + \|B\|^p c_2 E|\eta_1-\xi_1|^p \leq (-\widetilde{c}_1 + c_2\alpha^{\frac{p}{2}}\|B\|^p)|x|^p. \qquad (13)$$

Итак, для всех $\alpha < \left(\frac{\widetilde{c}_1}{c_2\|B\|^p}\right)^{\frac{2}{p}}$ получаем экспоненциальную p-устойчивость тривиального решения (12). Аналогично доказывается обратное утверждение.

Если теперь наряду с (1) рассматривать уравнение

$$z_{n+1} = Az_n + Bz_n\xi^{(N)}_{n+1}, \qquad (14)$$

где

$$\xi^{(N)}_n = \begin{cases} \xi_n & \text{при} \quad |\xi_n|<N \\ 0 & \text{при} \quad |\xi_n| \geq N,\ N\in R_+, \end{cases} \qquad (15)$$

а

$$D(\xi_1 - \xi^{(N)}_1) = \int\limits_{|\xi_1|\geq N} |\xi_1|^2 dP = \alpha \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \qquad (16)$$

то очевидно $\exists N_0 \in R^1_+$ такое, что при всех $N \geq N_0$ уравнения (1) и (14) ведут себя в смысле экспоненциальной p-

устойчивости одинаково.

Следствие 2. Если $D\xi_1<\infty$ и существуют такие N_0 и $v\in V_p$, что при всех $N\geq N_0$ $-\mathcal{L}^{(N)}v\in V_p$, то $-\mathcal{L}^{(1)}v\in V_p$.

Лемма 1. Из экспоненциальной p-устойчивости тривиального решения (1) при некотором $p>0$ следует асимптотическая устойчивость почти наверное.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из неравенств

$$P\left(\sup_{k\geq n}|X_s^k x|>\varepsilon\right)\leq\sum_{k=n}^{\infty}P\left(|X_s^k x|^p>\varepsilon^p\right)\leq\sum_{k=n}^{\infty}\frac{E|X_s^k x|^p}{\varepsilon^p}\leq\frac{M}{\varepsilon^p}|x|^p\frac{e^{-\gamma(n-s)}}{1-e^{-\gamma}},\quad(17)$$

где $M>0$ и $\gamma>0$ из определения 2.

Пример 1. Пусть в итерационном соотношении (1) $A=0$, $B=e^{-\frac{b^2}{2}}$, $\xi_n=e^{b\eta_n}$, где η_n – последовательность независимых нормально распределенных $N(0,1)$ случайных величин, $b\in R$, $b\neq 0$. Тогда

$$E|x_{n+1}|^p=E\left\{e^{-\frac{b^2p}{2}+pb\eta_{n+1}}\right\}E|x_n|^p=\ldots=\gamma^{n+1}|x|^p,$$

где

$$\gamma=\frac{e^{-\frac{b^2p}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{pbz-\frac{z^2}{2}}dz=e^{\frac{b^2}{2}p(p-1)}$$

Анализируя

$$E|x_n|^p\leq e^{p(p-1)\frac{b^2}{2}},\qquad(18)$$

получаем, что при всех $p\in(0,1)$ имеет место экспоненциальная p-устойчивость и поэтому, согласно лемме 1, и асимптотическая устойчивость почти наверное тривиального решения. Интересным в этом примере является тот факт, что $E|X_0^n x|=x$, т.е. в среднем все траектории остаются на месте, в то время как вторые моменты решения бесконечно растут, а все реализации стремятся к нулю при $n\to\infty$

Теорема 2. Если существует $c>0$ такое, что при любом $n\in N$ с вероятностью один выполняется неравенство $\|A+B\xi_n\|\leq c$, то из асимптотической устойчивости почти наверное тривиального решения следует его экспоненциальная p-устойчивость при всех достаточно малых $p>0$.

Доказательство. Согласно определению 1 при $\delta=1$ $\gamma=\frac{1}{2}$ существует α такое, что выполняется

$$\sup_{|y|\leq 2^{-\alpha}}P\left(\sup_{t\geq 0}|X_0^t x|>1\right)\leq\frac{1}{2}.\qquad(19)$$

Учитывая линейность оператора X_0^t легко убедиться в справедливости неравенства

$$\sup_{|y|\leq 2^{dk}} P\left(\sup_{t\geq 0}|X_0^t x|>2^{d(k+1)}\right)\leq \frac{1}{2} \tag{20}$$

Введем в рассмотрение последовательность шаров $S(0,2^{kd}), k\geq 0$ пространства R^m с центром в нуле и радиусом 2^{kd} и будем изучать вероятность выхода из этих шаров траекторий марковского процесса, определенного соотношением (1), начальные точки которых принадлежат $S(0,1)$

Обозначим

$$\gamma_k = \sup_{|x|\leq 1} P\left(\sup_{t\geq 0}|X_0^t x|>2^{dk}\right). \tag{21}$$

Заметим, что

$$\gamma_0\leq 1,\ \gamma_1=\sup_{|x|<2^{-d}} P\left(\sup_{t\geq 0}|X_0^t x|>1\right)\leq \frac{1}{2} \tag{22}$$

Пусть теперь d такое, что

$$\|A+B\xi_k\|\leq c<2^{\frac{d}{2}}. \tag{23}$$

Тогда если траектория марковского процесса, определенного соотношением (1), впервые покинула шар радиуса 2^{dk} в момент t, то за следующий один шаг она не сможет достичь границу шара $S(0,2^{d(k+1)})$. В случае $k\geq 2$ имеем

$$\gamma_k=\sup_{|x|\leq 1} P\left(\bigcup_{t=1}^{\infty}\left[(\tau_{(k-2)d}=t)\cap\left(\sup_{n>t+1}|X_0^n x|>2^{kd}\right)\right]\right), \tag{24}$$

где $\tau_{(k-2)d}$ – первый момент выхода траекторий за границу шара радиуса $2^{(k-2)d}$. Учитывая неравенство $|X_0^{t+1}x|<2^{(k-1)d}$ при всех w независимость $\tau_{(k-2)d}$ и $X_{t+1}^{t+1+n}x$ для любых $n>0$ а также однородность цепи Маркова, получаем

$$\begin{aligned}\gamma_k &\leq \sup_{|x|\leq 1}\sum_{t=1}^{\infty} P(\tau_{(k-2)d}=t)\left(\sup_{n>0}|X_{t+1}^{t+1+n}X_0^{t+1}x|>2^{kd}\right)\leq\\ &\leq \sup_{|x|\leq 1}\ \sup_{|y|<2^{(k-1)d}}\sum_{t=1}^{\infty} P(\tau_{(k-2)d}=t)P\left(\sup_{n>0}|X_0^n y|>2^{kd}\right)\leq\\ &\leq \sup_{|x|\leq 1}\sum_{t=1}^{\infty} P(\tau_{(k-2)d}=t)\sup_{|y|<2^{(k-1)d}} P\left(\sup_{n>0}|X_0^n y|>2^{kd}\right)\leq\\ &\leq \sup_{|x|\leq 1} P\left(\sup_{t\geq 1}|X_0^t x|>2^{(k-2)d}\right)\sup_{|y|\leq 1} P\left(\sup_{n\geq 0}|X_0^n y|>2^{d}\right)=\\ &=\gamma_{k-2}\cdot\gamma_1\leq\frac{1}{2^{?}}\quad, k\geq 2.\end{aligned} \tag{25}$$

Обозначив $\sup\limits_{t\geq 0}|X_0^t x| = \mathfrak{X}(w)$, оценим

$$\sup_{|x|\leq 1} E\{\sup_{t\geq 0}|X_0^t x|^p\} \leq \sup_{|x|\leq 1}\Big[\sum_{k=1}^{\infty} P(2^{(k-1)d} < \mathfrak{X}(w) \leq 2^{kd})2^{pkd} + \tag{26}$$

$$+P(\mathfrak{X}(w)\leq 1)\Big] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{k-1} 2^{pkd} + 1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{pkd - \frac{k-1}{2}} + 1 .$$

Ряд в правой части (26) сходится для всех $p\in(0, \frac{1}{2d})$. Т.к. $|X_0^t x|^p \leq \sup\limits_{t\geq 0}|X_0^t x|^p$, то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, можно записать

$$\lim_{t\to\infty} E|X_0^t x|^p = 0, \tag{27}$$

причем из (26) следует, что эта сходимость равномерна по $x\in S(0,1)$. Поэтому существует T такое, что для всех $t\geq T$

$$\sup_{|x|\leq 1} E|X_0^t x|^p \leq e^{-1}$$

Тогда для всех $y\in R^m$ при $t\geq T$ можно записать

$$E|X_0^t y|^p \leq e^{-1}|y|^p.$$

Учитывая неравенство

$$E|X_0^{2T} y|^p \leq E\big(E(|X_T^{2T} X_0^T y|^p | \mathfrak{F}_0^T)\big) \leq e^{-1} E|X_0^T y|^p,$$

по индукции для $t = nT + k$, где $n\in N, 0\leq k< T$, легко получить

$$E|X_0^t y|^p \leq e^{-n} E|X_0^k y|^p \leq M e^{-\frac{t}{T}}|y|^p,$$

где $M = \sup\limits_{|x|\leq 1}\ \sup\limits_{0\leq k\leq T} E|X_0^k x|^p\cdot e^{k/T}$ Теорема доказана.

Пример 2. В работе [2] приводится теорема о необходимом и достаточном условии асимптотической устойчивости почти наверное тривиального решения уравнения (1) в случае, когда все $\xi_n \sim N(0,1)$, а матрица A устойчива, т.е. все ее собственные значения по модулю меньше единицы. В обозначениях настоящей работы это условие можно сформулировать в следующем виде: для любой положительно определенной симметрической матрицы Q существует положительно определенная симметрическая матрица H такая, что

$$A^* H A + B^* H B - H = Q. \tag{28}$$

Приведенное выше условие является [1] необходимым и достаточным условием экспоненциальной 2-устойчивости тривиального решения (1). По-видимому в утверждении теоремы 2 работы [2] пропущены некоторые условия, т.к.

существование положительного решения ($\mathcal{B}$) уже в скалярном случае не является необходимым для асимптотической устойчивости почти наверное тривиального реш (1).

В скалярном случае уравн (относительно числа H) имеет положительное решение тогда и только тогда, когда $A^2+B^2<1$. Вместе с тем решения уравнения (1) в скалярном случае можно записать в форме

$$x_n = x\prod_{k=1}^{n}(A+\xi_k B)$$

и применить для анализа его асимптотики усиленный закон больших чисел:

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}|x_n|^{\frac{1}{n}} = e^{E\ln|A+\xi_1 B|}\Big) = P\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big[\sum_{k=1}^{n}\ln|A+\xi_k B| + \ln|x|\Big] = E\ln|A+\xi_1 B|\Big) = 1.$$

Из этого равенства можно заключить, что $P\big(\lim_{n\to\infty}\sup_{|x|\le 1}|x_n|=0\big)=1$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство:

$$\mathcal{J}(A,B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln(A+Bx)^2 e^{-x^2/2}\,dx < 0.$$

Легко убедиться, что

$$P\big(\sup_{n\ge 0}|X_0^n x|>\varepsilon\big) \le P\big(\sup_{n\ge m}|X_0^n x|>\varepsilon\big) + P\big(\sup_{0\le n\le m}|X_0^n x|>\varepsilon\big) \le$$

$$\le P\big(\sup_{n\ge m}|X_0^n x|>\varepsilon\big) + \frac{x^2 m}{\varepsilon^2}(A^2+B^2).$$

Поэтому в случае $\mathcal{J}(A,B)<0$ для $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ можно вначале выбрать m так, чтобы при всех $x\in S(0,1)$ выполнялось неравенство

$$P\big(\sup_{n\ge m}|X_0^n x|>\varepsilon\big) < \delta/2$$

а затем $r\in(0,1)$ так, чт при $x\in S(0,r)$ нялось неравенство

$$\frac{x^2 m}{\varepsilon^2}(A^2+B^2) < \frac{\delta}{2}$$

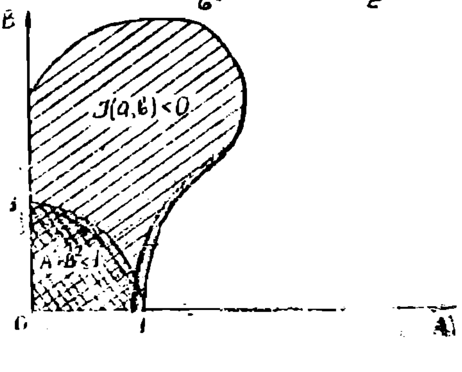

Рис. 1.

Итак, в скалярном случае необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости почти наверное тривиального решения (1) имеет вид $J(A,B)<0$. На рисунке 1 область асимптотической устойчивости в первой четверти плоскости параметров A и B заштрихована с наклоном вправо. На этом же рисунке область $A^2+B^2<1$, найденная по теореме 2 работы [2], заштрихована дважды. Как видно из рисунка, условие $|A|<1$ не является необходимым для асимптотической устойчивости почти наверное. Но даже в случае $|A|<1$ область асимптотической устойчивости почти наверное тривиального решения (1), найденная при помощи критерия работы [2], значительно меньше аналогичной области, найденной при помощи усиленного закона больших чисел. Если воспользоваться результатами настоящей статьи, то в качестве области асимптотической устойчивости почти наверное тривиального решения (1) в скалярном случае можно предложить неравенство

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{p\to 0}\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-N}^{N}|A+Bx|^{p}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-1\right)<0,$$

эквивалентное неравенству, найденному при помощи усиленного закона больших чисел.

В заключение заметим, что идею построения примера 1 и методику доказательства теоремы 2 авторы настоящей работы заимствовали из работы [3].

Список литературы

1. Царькова В.Н., Калныня Д.А. К вопросу об устойчивости решений линейных стохастических систем разностных уравнений // Топологические пространства и их отображения.- Рига, 1981.- С.137-142.
2. Кореневский Д.Г. Матричные критерии и достаточные условия асимптотической устойчивости и ограниченности с вероятностью единица решений линейных стохастических разностных уравнений// ДАН СССР.- 1986.- Т.290.- №6.- С.1994-1998.
3. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М., 1969.

Поступила 12 января 1987 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.
УДК 514.17 + 515.1

ВЫПУКЛОСТЬ В ПРОСТРАНСТВАХ МЕЖНОСТИ

Я.П.Цирулис
ЛГУ им. П. Стучки.

§ 1. Введение

Пространством межности в [ ] была названа пара (X, β), где X – множество, а β – межность на нем, т.е. тернарное отношение, удовлетворяющее аксиомам

$\beta 1$ βxyy,
$\beta 2$ $\beta xyx \Rightarrow x=y$,
$\beta 3$ $\beta xyz \Rightarrow \beta zyx$,
$\beta 4$ $\beta xuy, \beta xyv \Rightarrow \beta uyv$,
$\beta 5$ $\beta uxy, \beta xyv, x \neq y \Rightarrow \beta uxv$,
$\beta 6$ $\beta xuy, \beta xvy \Rightarrow \beta xuv \vee \beta xvu$.
$\beta 7$ $\beta xyu, \beta xyv, x \neq y \Rightarrow \beta xuv \vee \beta xvu$.

Здесь запись βxyz читается "y лежит между x и y ". Межность β называется линейной, если верно соотношение
$\beta 8$: $\beta xyz \vee \beta yzx \vee \beta zyx$.

Напомним некоторые из полученных в [2] следствия этих аксиом

$\beta 9$ $\beta xyz, \beta xzy \Rightarrow y=z$, [$\beta$ 4, β 2]
$\beta 10$: $\beta xuy, \beta xyv \Rightarrow \beta xuv$, [$\beta$ 4, β 5]
$\beta 14$: $\beta xuy, \beta xvy \Rightarrow \beta xuv \vee \beta vuy$, [β 6, β 4]

и добавим к ним еще два

$\beta 16$: $\beta xuy, \beta xvy, \beta uwv \Rightarrow \beta xwy$, [$\beta$ 14, β 3, β 10]
$\beta 17$: $\beta xuy, \beta xvy, \beta uvy \Rightarrow u=v$. [$\beta$ 4, β 3, β 9]

Напомним также, что в пространстве межности следующим образом можно определить T_1-топологию τ_β

$$\tau_\beta := \{U \subset X : \forall x \in U \ \forall z \neq x \ \exists y \neq x (\beta xyz \wedge \forall u \neq y (\beta xuy \Rightarrow u \in U))\}.$$

Выпуклостью на множестве X называют всякое семейство подмножеств X, содержащее само X и замкнутое относительно произвольных пересечений [1], [5]. Члены такого семейства называют выпуклыми множествами
Например, любое тернарное отношение β на X следующим образом порождает выпуклость

$$C_\beta := \{A \subset X : \forall x,y \in A \ \forall u \in X (\beta xuy \Rightarrow u \in A)\}. \qquad (1)$$

Если при этом β - межность, будем называть C_β естественной выпуклостью в пространстве (X, β). Всякую выпуклость, которую можно представить в виде (1) для подходящей межности β, будем называть межностной.

В работе показано, что естественная выпуклость пространства межности полностью определяет породившую ее межность, и дана характеристика межностных выпуклостей в терминах т.наз. интервальных функций. Одновременно установлено, что в терминах таких функций пространства межности, а также топология C_β были описаны в работе Войкулеску [6].

§ 2. Предварительные сведения

Интервальной функцией на X называют любую функцию типа $X^2 \to expX$ см. [3], [1] Если int - такая функция, для краткости обычно будем писать $[x,y]$ вместо $int(x,y)$ Например, любое тернарное отношение β на X определяет интервальную функцию посредством соотношения

$$[x,y] := \{u \in X : \beta xuy\}. \qquad (2)$$

Наоборот, каждая интервальная функция задает такое отношение:

$$\beta xyz :\Leftrightarrow y \in [x,z]. \qquad (2')$$

Очевидно, эти два соотношения устанавливают взаимно однозначное соответствие между тернарными отношениями и интервальными функциями. Для фиксированной интервальной функции множества вида $[x,y]$ называют интервалами, или промежутками.

Каждая интервальная функция определяет некоторую выпуклость

$$Conv := \{A \subset X : \forall x,y \in A \ [x,y] \subset A\} \qquad (3)$$

[3], [1]. Любая выпуклость, порожденная таким образом, также называется интервальной. Ясно, что при наличии (2), (2') определения (1) и (3) определяют одну и ту же выпуклость; в частности, всякая межностная выпуклость является интервальной.

Любой выпуклости $Conv$ соответствует ее оболочечный оператор $conv$, сопоставляющий каждому множеству его выпуклую оболочку $\mathrm{conv}\,A$:

$$\mathrm{conv}\,A := \bigcap\{B\subset X : A\subset B\in \mathcal{C}onv\};$$

при этом

$$\mathcal{C}onv = \{A\subset X : \mathrm{conv}\,A = A\}.$$

Естественно ожидаемое соотношение

$$[x,y] = \mathrm{conv}\{x,y\}, \qquad (4)$$

где conv - оболочечный оператор выпуклости (3), имеет место в том и только в том случае, когда исходная интервальная функция удовлетворяет условиям

$i1$ $\quad y\in[x,y]$,

$i2$ $\quad [x,y]=[y,x]$,

$i3$ $\quad u,v\in[x,y] \Rightarrow [u,v]\subset[x,y]$,

которые можно объединить в одно

$i4$: $\quad u,v\in[x,y] \Leftrightarrow [u,v]\subset[x,y]$.

Но согласно следствию 2.1 из [3] для каждой интервальной функции можно указать единственную такую, которая удовлетворяет этим условиям и порождает ту же выпуклость. Отметим, что другое естественное соотношение

$i5$ $\quad [x,x]=\{x\}$,

утверждающее, что все одноточечные множества выпуклы, не вытекает из $i1$ - $i3$.

Условиям $i1$, $i2$, $i3$ соответствуют свойства $\beta1$, $\beta3$, $\beta16$ отношения β. А так как $\beta16$, как мы видели, доказывается с помощью $\beta14$, $\beta3$ и $\beta10$, то из сказанного выше заключаем, что имеет место

<u>Теорема 1</u>. Разные отношения межности порождают и разные выпуклости. Иначе - межностное пространство полностью определяется своей естественной выпуклостью.

Наконец, для любого $p\in X$ определим на X бинарное отношение $\leqslant_p$, полагая

$$x\leqslant_p y \quad\Leftrightarrow\quad x\in[p,y].$$

Без труда проверяется, что из (2), (2') вытекает равносильность следующих утверждений

а) каждое отношение $\leqslant_p$ является предупорядоченностью,

б) имеют место условия $\beta1$, $\beta10$ или равносильный им частный случай $i4$

$i6$: $\quad u\in[x,y] \Leftrightarrow [x,u]\subset[x,y]$, в) для любого p

$$x \leqslant_p y \Leftrightarrow [p,x] \subset [p,y].$$

Последнее соотношение вместе с (4) показывает, что при определенных условиях отношение $\leqslant_p$ является т. наз. индуцированной упорядоченностью с базисом p – см. например, [5]

§ 3. Один вспомогательный результат

В [6] изучались свойства выпуклости, определяемой такой интервальной функцией, которая удовлетворяет аксиомам $i1$, $i2$, $i5$,

$i7$ $\quad u \in [x,y] \Rightarrow [x,u] \cup [u,y] = [x,y]$,

$i8$ $\quad u \in [x,y] \Rightarrow [x,u] \cap [u,y] = \{u\}$,

$i9$ $\quad u,v \in [x_1,x_2] \cap [x_3,x_4],\ u \neq v \Rightarrow \exists\, i,j\ \forall k\ x_k \in [x_i,x_j]$.

В действительности здесь $i5$ является очевидным следствием $i8$ (при $u=y=x$) и $i1$. Выпуклость такого типа будем называть V-выпуклостью.

Мы пока оставим в стороне весьма громоздкую аксиому $i9$ и изучим роль остальных аксиом V-выпуклости: Всюду в дальнейшем будем считать, что зафиксированы некоторая интервальная функция и соответствующее ей тернарное отношение β, так что выполняются оба соотношения (2), (2'). Тогда, например, из $i1$, $i2$ или равносильных им условий $\beta1$, $\beta3$ вытекает, что

$i5 \Leftrightarrow \beta2$, $\quad i7 \Leftrightarrow (\beta10, \beta14)$, $\quad i8 \Leftrightarrow \beta17$.

Но мы уже видели, что $i3 \Leftrightarrow \beta16$ и $\beta4$, $\beta10$, $\beta14 \Rightarrow \beta16$ так что из $i7$ и $i2$ вытекает и $i3$. Поэтому для V-выпуклости верно соотношение (4).

Теорема 2. Равносильны следующие утверждения:

а) выполняются $i1$, $i2$, $i7$, $i8$,

б) выполняются $\beta1$, $\beta2$, $\beta3$, $\beta4$, $\beta6$, $\beta10$,

в) каждое отношение $\leqslant_p$ является упорядоченностью с наименьшим элементом p ; она линейна на любом промежутке вида $[p,q]$, и на этом промежутке отношение $\leqslant_q$ обратно к $\leqslant_p$,

г) выполняется $\beta10$, и на каждом промежутке отношение β является линейной междуостью.

Доказ...

ность а) и б) означает, что

$$\beta 1,\ \beta 3 \Rightarrow ((\beta 10, \beta 14, \beta 17) \Leftrightarrow (\beta 2, \beta 4, \beta 6, \beta 10)).$$

Мы уже видели, что в скобках левая часть эквиваленции вытекает из правой. Проверим обратное; для этого допустим, что верны $\beta 1$, $\beta 3$, $\beta 10$. Тогда из $\beta 17$ вытекает $\beta 9$, а из $\beta 9$ - $\beta 2$. Далее, с помощью $\beta 9$, $\beta 10$ и $\beta 14$ получаем $\beta 4$:

$$\beta xuy, \beta xuv \Rightarrow \beta xuv, \qquad [\beta 10]$$
$$\beta xyv, \beta xuv \Rightarrow \beta xyu \vee \beta uyv, \qquad [\beta 14]$$
$$\beta xyu, \beta xuy \Rightarrow u = y, \qquad [\beta 9]$$
$$u = y \Rightarrow \beta uyv \qquad [\beta 1, \beta 3]$$

Наконец, из $\beta 14$ и $\beta 4$, $\beta 3$ вытекает $\beta 6$.

Теперь убедимся, что равносильны б) и в). Нам будут нужны еще два соотношения, содержащие β

$\beta 1'$: βxxy,

$\beta 18$: $\beta xuy, \beta xvy \Rightarrow (\beta xuv \Leftrightarrow \beta yvu)$.

Теперь очевидно, что четыре упомянутых в в) факта в терминах отношения β можно записать соответственно как ($\beta 1$, $\beta 10$, $\beta 9$), $\beta 1'$, $\beta 6$ и $\beta 18$. Положив в $\beta 18$ $u = x$, получим, что

$$\beta 1',\ \beta 18 \Rightarrow \beta 3.$$

Кроме того,

$$\beta 3 \Rightarrow (\beta 18 \Leftrightarrow \beta 4),$$

а в итоге

$$\beta 1' \Rightarrow (\beta 18 \Leftrightarrow (\beta 3, \beta 4)).$$

Остается лишь отметить, что с одной стороны, $\beta 1$, $\beta 3 \Rightarrow \beta 1'$ и $\beta 2$, $\beta 4 \Rightarrow \beta 9$, а с другой - что $\beta 2$ содержится в $\beta 9$.

Наконец, убедимся, что равносильны б) и г). В направлении б) и г) особой проверки требует лишь линейность β:

$$\beta pxq, \beta pyq, \beta pzq \Rightarrow \beta xyz \vee \beta yzx \vee \beta zxy.$$

Но это легко может быть сделано с помощью $\beta 6$ и $\beta 4$. А если верно г), то $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$ и $\beta 10$, очевидно, в X выполняются. Выполняется и $\beta 4$: если βxuv и βxyv, то ввиду $\beta 10$ βxuv, и остается сослаться на ограничение $\beta 4$ в $[x, v]$, чтобы получить βuyv.

А так как каждая линейная межность обладает свойствами $\beta 5$, $\beta 9$, в X выполняется и $\beta 6$. Действительно, если βxuy и βxvy, то $x, u, v \in [x,y]$, и поэтому имеет место βxuv, βxvu или βuxv. В последнем случае имеем (в $[x,y]$):

$$\beta uxv, \beta xvu \Rightarrow x=v \vee \beta uxy. \qquad [\beta 5]$$
$$x=v \Rightarrow \beta xvu, \qquad [\beta 3, \ \beta 4]$$
$$\beta uxy, \beta xuy \Rightarrow u=x, \qquad [\beta 3, \ \beta 9]$$
$$u=x \Rightarrow \beta uxv. \qquad [\beta 3, \ \beta 1]$$

Теорема доказана.

§ 4. Характеристика межностных выпуклостей

Из доказанной в предыдущем параграфе теоремы вытекает, что интервальная функция, порождающая межностную выпуклость, обладает свойствами $i7$, $i8$. Мы сейчас увидим, что она обладает и свойством $i9$, что это свойство фактически сводится к двум своим частным случаям и что свойства $i7$ - $i9$ (вместе с $i1$, $i2$) полностью характеризуют межностные выпуклости.

По-прежнему предполагается, что рассматриваемая функция и отношение β связаны посредством (2), (2').

Теорема 3. Если верны соотношения $i1$, $i2$, $i7$, $i8$ или, что то же, $\beta 1$ - $\beta 4$, $\beta 6$, $\beta 10$, то

$$i9 \Leftrightarrow (i5, \ i7).$$

Доказательство. Допустим, что условие теоремы выполнено. Пусть верно также $i9$; проверим $\beta 5$ и $\beta 7$.

Если βuxy, βxyv и $x \neq y$, то $x,y \in [u,y] \cap [x,v]$, и согласно $i9$ x,y,u,v принадлежат одному из промежутков $[u,y]$, $[x,v]$, $[u,x]$, $[y,v]$, $[x,y]$, $[u,v]$. Рассмотрим каждую из шести возможностей в отдельности.

1. Тогда βuvy, что вместе с βuxy по $\beta 14$ дает βuxv или βvxy. В первом случае получено требуемое, а во втором ввиду βxyv по $\beta 3$ и $\beta 9$ получаем $x=y$, что невозможно.

2. Тогда βxuv, что вместе с βxyv по $\beta 6$ дает βxuy или βxyu. В первом случае ввиду βuxy по $\beta 3$ и $\beta 9$ $u=x$ и далее по $\beta 1$ и $\beta 3$ получаем требуемое βuxv, а во втором ввиду βyxu по $\beta 3$ и $\beta 9$ получаем $x=y$.

3. Тогда βuyx, что вместе с βuxy по $\beta 9$ дает $x=y$.

4. Тогда βyxv, что вместе с βxyv по $\beta 3$ и $\beta 9$ дает $x=y$

5. Тогда βxvy, что вместе с βxyv по $\beta 9$ дает $x=y$.

6. Тогда βuxv, что и требуется.

Итак, $\beta 5$ имеет место. Если, далее, βxyu, βxyv и $x \neq y$, то $x,y \in [x,u] \cap [x,v]$ и согласно $i9$ x,u,v принадлежат одному из промежутков $[x,u]$, $[x,v]$, $[x,x]$. Рассмотрим каждую из четырех возможностей в отдельности.

1. Тогда βxvu

2. Тогда βxuv

3. Тогда βxux, βxvx и по $\beta 2$ $u=v$, откуда по $\beta 1$ получаем βxuv

4. Тогда βuxv, что вместе с βxyu по $\beta 4$ и $\beta 3$ дает βyxv, а это вместе с βxyv по $\beta 3$ и $\beta 9$ дает $x=y$.

Итак, $\beta 7$ тоже имеет место.

Пусть теперь, наоборот, верны $\beta 5$ и $\beta 7$: проверим $i9$. Предположим, что $u \neq v$ и что

$$\beta x_1 u x_2, \beta x_1 v x_2, \beta x_3 u x_4, \beta x_3 v x_4 ;$$

ввиду $\beta 1$ нам достаточно показать, что какие-либо две из точек x_1, x_2, x_3, x_4 лежат между двумя остальными.

Согласно $\beta 14$ и $\beta 3$ из четырех сделанных предположений получаем, что $\beta x_1 uv$ или $\beta x_2 uv$, а также что $\beta x_3 uv$ или $\beta x_4 uv$. Для определенности допустим, что

$$\beta x_1 uv, \beta x_3 uv ;$$

три остальных случая рассматриваются аналогично. В силу $\beta 4$ из $\beta x_1 uv$, $\beta x_1 v x_3$ и из $\beta x_3 uv$, $\beta x_3 v x_4$ следуют соответственно

$$\beta uv x_2, \beta uv x_4 .$$

Так как $u \neq v$, отсюда в силу $\beta 7$ $\beta u x_2 x_4$ или $\beta u x_4 x_2$, и в точности так же из $\beta x_1 uv$ и $\beta x_3 uv$ (с помощью $\beta 9$) вытекает $\beta x_1 x_3 v$ или $\beta x_3 x_1 v$. Рассмотрим отдельно четыре возможных здесь случая.

1) $\beta u x_2 x_4$ и $\beta x_1 x_3 v$. Тогда

$$\beta uv x_2, u \neq v \Rightarrow u \neq x_2, \qquad [\beta 2]$$

$\beta x_1 u x_2,\ \beta u x_2 x_4,\ u \neq x_2 \Rightarrow \beta x_1 x_2 x_4.$ [β3, β5]

$\beta x_1 x_3 v,\ \beta x_1 v x_2 \Rightarrow \beta x_1 x_3 x_2,$ [β10]

$\beta x_1 x_3 x_2,\ \beta x_1 x_2 x_4 \Rightarrow \beta x_1 x_3 x_4.$

2) $\beta u x_2 x_4$ и $\beta x_3 x_1 v$. Тогда

$\beta x_3 x_1 v,\ \beta x_3 v x_4 \Rightarrow \beta x_3 x_1 x_4,$ [β10]

$\beta x_3 u x_4,\ \beta u x_2 x_4 \Rightarrow \beta x_3 x_2 x_4.$ [β3, β10]

3) $\beta u x_4 x_2$ и $\beta x_1 x_3 v$ Аналогично 2).

4) $\beta u x_4 x_2$ и $\beta x_3 x_1 v$. Анологично 1).

Теорема доказана.

Так как β10 верно для межности, мы, подьедя некоторые итоги, из теорем 3 и 1 получаем

Следствие 4. Тернарное отношение β является межностью на X тогда и только тогда, когда соответствующая ему интервальная функция обладает свойствами i1, i2, i7, i8, i9. Поэтому произвольная выпуклость на X является межностной тогда и только тогда, когда она является V-выпуклостью.

§ 5. Замечания о двух топологиях на пространстве межности

В [6] были определены два типа топологий на рассматриваемых там пространствах V-выпуклости. Ввиду полученного в предыдущем параграфе следствия 4, такие топологии могут быть определены и на пространствах межности. Опишем эти топологии несколько отличным от [6], но равносильным образом.

Пусть имеется пространство межности (X, β) и зафиксирована соответствующая интервальная функция. Для краткости будем писать $[x,y[$, $]x,y]$ соответственно вместо $[x,y]\setminus\{y\}$, $[x,y]\setminus\{x\}$. Открытой звездой в точке p короче – p-звездой будем называть любое множество вида $\bigcup([p,x[: x\in A)$, где A – какое-либо (не содержащее p) множество точек, попарно несравнимых в смысле упорядоченности $\leq_p$, т.е. антицепь. Если при этом антицепь A максимальная, определяемую ею звезду будем называть полной. Пусть $st(p)$ – множество всех полных p-звезд, и пусть

$$\mathcal{B} = \{B\subset X : \forall p\in B\ \ B\cap st(p)\neq\emptyset\}$$

В [6] указано, что семейства $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}\cap C_\beta$ замкнуты относительно конечных пересечений и могут поэтому служить базисами топологий на X Обозначим эти топологии соответственно через τ_1 и τ_2

Теорема 5. Топологии τ_1 и τ_2 совпадают.

Доказательство. В [6] было указано также, что топология τ_1 совпадает со своей базой $\mathfrak{B}$. Перепишем еще определение топологии τ_β из § 1 следующим образом:

$$\tau_\beta = \{U\subset X : \forall x\in U\ \forall z\neq x\ \exists y\in]x,z]\ [x,y[\subset U\}.$$

Убедимся сперва, что $\tau_1\subset\tau_\beta$. Пусть $B\subset\mathfrak{B}$, $p\in B$, $z\neq p$ Должна существовать максимальная антицепь A в смысле $\leq_p$, которая определяет p-звезду M такую, что $M\subset B$. Тогда в A найдется сравнимый с z элемент v : $\beta pzv \vee \beta pvz$. Понятно, что $v\neq p$. Пусть $y:=z$, если βpzv, и $y:=v$ если βpvz. В любом случае $y\in]p,z]$, поэтому

$$[p,y[\subset[p,z[\subset M\subset B.$$

Следовательно, $B\in\tau_\beta$. Пусть теперь $U\in\tau_\beta$, $p\in U$ Выберем произвольную максимальную антицепь A в смысле $\leq_p$. Любой элемент z из A отличен от p, поэтому в $]p,z]$ можно указать такую точку y_z, что $[p,y_z[\subset U$ Множество всех таких точек y_z для $z\in A$ также образует антицепь A'. Действительно, допустим, что для $z_1,z_2\in A$, $y_{z_1}\leq_p y_{z_2}$ Так как $y_{z_2}\in]p,z_2]$, т.е. $y_{z_2}\leq_p z_2$, то в итоге $y_{z_1}\leq_p z_2$. В то же время $y_{z_1}\leq_p z_1$ и $y_{z_1}\neq p$. Тогда $\beta p y_{z_1} z_1$ и $\beta p y_{z_1} z_2$, и по $\beta 7$ z_1 и z_2 сравнимы, а значит - совпадают, поэтому совпадают y_{z_1} и y_{z_2}. Далее, антицепь A' максимальна: если u - произвольная точка, то она сравнима с какой-либо точкой y_z из A, а поэтому и с точкой y_z из A' Пусть M - p-звезда, определяемая антицепью A'. Выше уже было отмечено, что всегда $[p,y_z[\subset U$; следовательно $M\subset U$. В итоге заключаем, что $U\in\tau_1$ Теорема доказана.

Можно привести примеры, показывающие, что естественная выпуклость C_β пространства межности не является топологической, см. [5] относительно топологии τ_β: не всегда выпуклая оболочка конечного множества точек τ_β - замкнута. Аналогичный вопрос для τ_2 остается открытым. Отметим лишь, что, как указано (без доказательства) в [6], в случае евклидовых пространств с обычным понятием межности топология τ_2 совпадает с обычной.

Список литературы

1. Солтан В.П. Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. - Кишинев, 1984. - 223 с.
2. Цирулис Я.П. Пространства межности // Топологические пространства и их отображения. - Рига, 1983. - С.138-146.
3. Calder J.R. Some elementary properties of interval convexities // J.London Math. Soc. - 1971. - V.3,N3. - P.422 - 428.
4. Kay D.C., Womble E.W. Axiomatic convexity theory and relationships between the Carateodory, Helly and Radon numbers // Pacific J.Math. - 1971. - V.38, N 2. - P.471 - 485.
5. Van de Val M. Pseudo-boundaries and pseudo-interiors for topological convexities // Diss. Math. - 1983. - T.210. - P. 5 - 72.
6. Voiculescu D. Spatii cu convexitate (1) // Stud. Cerc. Math. - 1967. - T. 19, N 2. - P.295 - 301.

Поступила 31 октября 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.

УДК 517.57

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОГО ЧИСЛЕННОГО НЕРАВЕНСТВА

К.Х.Черанс

ЛГУ им. П. Стучки

В [I] в разделе Unsolved problems был поставлен вопрос:

"Справедливо ли неравенство

$$yx^y(y^x-(y-1)^x)-xy^x(x^y-(x-1)^y)>0 \qquad (I)$$

для всех $x,y\in N, x>y\geqslant 1$?"

Настоящая работа содержит утвердительный ответ на этот вопрос в случае $y>1$. (При $y=1$ очевиден отрицательный ответ, т.к. $1\cdot x^1(1^x-0^x)-x\cdot 1^x(x^1-(x-1)^1=0)$

Теорема. $\forall y\in N\setminus\{1\}, \forall x\in]y,+\infty[\subset\mathbb{R}$ имеет место (I).

Доказательство. Зафиксируем произвольно $y\in N\setminus\{1\}$.
Пусть для $x\in\mathbb{R}_+$ $f(x):=y(1-(\frac{y-1}{y})^x)-x(1-(\frac{x-1}{x})^y)$.

Легко видеть, что

$$(f(x)>0)\Leftrightarrow[yx^y(y^x-(y-1)^x)-xy^x(x^y-(x-1)^y)>0] \qquad (2)$$

Заметим, что

$$f(y)=0 \qquad (3)$$

и

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y-\lim_{x\to+\infty}\frac{1-(\frac{x-1}{x})^y}{\frac{1}{x}} = 0 \qquad (4)$$

Очевидно, $(f(x)>\lim\limits_{t\to+\infty} f(tx))\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left\{\lim_{t\to+\infty}\left[y(1-(\tfrac{y-1}{y})^x)-y(1-(\tfrac{y-1}{y})^{tx})\right]>\lim_{t\to+\infty}\left[x(1-(\tfrac{x-1}{x})^y)-tx(1-(\tfrac{tx-1}{tx})^y)\right]\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{y}{x}(\tfrac{y-1}{y})^x\left[1-(\tfrac{y-1}{y})^{(t-1)x}\right]<\lim_{t\to+\infty}\left[(t-1)-t(\tfrac{tx-1}{tx})^y+(\tfrac{x-1}{x})^y\right]\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\frac{y}{x}(\tfrac{y-1}{y})^x<\lim_{t\to+\infty}\left[(t-1)-t(\tfrac{tx-1}{tx})^y+(\tfrac{x-1}{x})^y\right]\right\} \qquad (5)$$

Пусть $\alpha(\xi)=\xi^y$ и $\xi_0=\frac{x-1}{x}$, тогда ввиду $y\in N\setminus\{1\}$ для $t>1$ имеем $(t-1)-t(\frac{tx-1}{tx})^y+(\frac{x-1}{x})^y=$

$$=(t-1)\sum_{k=0}^{y}\alpha^{(k)}(\xi_0)\frac{1}{k!}\frac{1}{x^k}-t\sum_{k=0}^{y}\alpha^{(k)}(\xi_0)(\tfrac{t-1}{t})^k\frac{1}{x^k}+\alpha(\xi_0)=$$

$$=\sum_{k=2}^{y}\alpha^{(k)}(\xi_0)\frac{1}{x^k}\frac{1}{k!}\left[(t-1)(1-(\tfrac{t-1}{t})^{k-1})\right]. \qquad (6)$$

Учитывая (4), (5) и (6), получаем

$$(f(x)>0)\Leftrightarrow\left(f(x)>\lim_{t\to+\infty}f(tx)\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\frac{y}{x}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x}<\sum_{k=2}^{y}\alpha^{(k)}(\xi_k)\frac{1}{x^k}\cdot\frac{1}{k!}\lim_{t\to+\infty}\left[(t-1)\left(1-\left(\frac{t-1}{t}\right)^{k-1}\right)\right]\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{y}{x}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x}<\sum_{k=2}^{y}\alpha^{(k)}(\xi_k)\frac{1}{x^k}\,\frac{(k-1)}{k!}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{y}{x}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x}<\sum_{k=2}^{y}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{y-k}\cdot\frac{y!}{(y-k)!}\,\frac{1}{x^k}\,\frac{(k-1)}{k!}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\frac{1}{x(y-1)}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{y}<\sum_{k=0}^{y-2}\frac{1}{(x-1)^{k+2}}\cdot\frac{1}{k+2}\cdot C_{y-2}^{k}\right].\qquad(7)$$

Обозначим $g(x):=\dfrac{1}{x(y-1)}\left(\dfrac{y-1}{y}\right)^{x}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{y}$,

$h(x):=\sum_{k=0}^{y-2}\dfrac{1}{(x-1)^{k+3}}\,\dfrac{1}{k+2}\,C_{y-2}^{k}$, где $x\in\,]1,+\infty[$.

Ввиду (7) имеем $(f(x)>0)\Leftrightarrow(g(x)<h(x))$. (8)

Рассуждая аналогичным образом, из (3) получаем равенство

$$g(y)=h(y).\qquad(9)$$

Для завершения доказательства потребуется следующая лемма:

<u>Лемма.</u> $\exists\, x_0\in\,]y,+\infty[$:

$\forall x\in\,]y,x_0[\quad g'(x)-h'(x)<0,$ (10)

$\forall x\in\,]x_0,+\infty[\quad g'(x)-h'(x)>0.$ (11)

Так как $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$, то с учетом условия (9) из леммы вытекает неравенство $g(x)<h(x)$ для всех $x\in\,]y,+\infty[$, откуда и следует утверждение теоремы (см.(2) и (8)).

<u>Доказательство леммы.</u> Имеем

$$g'(x)=-\frac{1}{(y-1)}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{y}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{y}{y-1}+\frac{y}{x^2(x-1)}\right],$$

$$h'(x)=-\sum_{k=0}^{y-2}\frac{1}{(x-1)^{k+3}}\,C_{y-2}^{k}=-\frac{1}{(x-1)^3}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{y-2}$$

Пусть $\lambda\in\{<,>,=\}$, тогда $(h'(x)\,\lambda\, g'(x))\Leftrightarrow(-g'(x)\,\lambda\,-h'(x))\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left\{\left(\frac{y-1}{y}\right)^{x}\left[(x-1)+(x^2-x)\ln\frac{y}{1-y}+y\right]\lambda\,(y-1)\right\}.\qquad(12)$$

Положим $\varphi(x)=\left(\dfrac{y-1}{y}\right)^{x}\left[(x-1)+(x^2-x)\ln\dfrac{y}{y-1}+y\right]$ для всех $x\in R$.

Заметим, что

$$\varphi(y)>y-1.\qquad(13)$$

Действительно, для $y\geqslant 8$ имеем

$$y>\frac{2}{3-e}\Leftrightarrow\frac{3y-2}{e}\cdot\frac{y-1}{y}>y-1\Rightarrow\varphi(y)>y-1.\qquad;$$

при $\xi \in \{2,\dots,7\}$ справедливость неравенства (I3) проверяется непосредственным вычислением.

Убедимся, что, если $\varphi'(\xi) < 0$, $\xi \in]y,+\infty[$, то

$$\forall \eta \in]\xi,+\infty[\quad \varphi'(\eta) < 0. \tag{I4}$$

С этой целью рассмотрим

$$\varphi'(x) = \left(\frac{y-1}{y}\right)^x \left[-x^2 \ln^2 \frac{y}{y-1} + x\left(\ln^2 \frac{y}{y-1} + \ln \frac{y}{y-1}\right) + \left(1 - y \ln \frac{y}{y-1}\right)\right].$$

Поскольку $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(\frac{y-1}{y}\right)^x > 0$, то $\operatorname{sgn} \varphi'(x) = \operatorname{sgn} \psi(x)$, где

$$\psi(x) = -x^2 \ln^2 \frac{y}{y-1} + x\left(\ln^2 \frac{y}{y-1} + \ln \frac{y}{y-1}\right) + \left(1 - y \ln \frac{y}{y-1}\right).$$

Принимая во внимание, что абсцисса вершины параболы $z = \psi(x)$ находится левее y на числовой оси, получаем (I4).

Пусть x_0 – первый корень уравнения $\varphi(x) = y-1$ в области $x \in]y,+\infty[$ (существование такого корня обусловлено условием (I3), непрерывностью φ и очевидным соотношением $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0 < y-1$)

Тогда $\forall x \in]y,+\infty[\ \varphi(x) > y-1$, что дает условие (I0); с другой стороны, на основании условий (I3), (I4), (I2) имеем $(\varphi(y) > \varphi(x_0) = y-1) \Rightarrow (\exists \xi \in]y,x_0[: \varphi'(\xi) < 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall \eta \in]x_0,+\infty[\ \varphi'(\eta) < 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall x \in]x_0,+\infty[\ \varphi(x) < \varphi(x_0) = y-1) \Leftrightarrow (11)$

Этим доказательство леммы, а тем самым, и теоремы, завершено.

Естественно возникает вопрос о справедливости неравенства (I) для $y \in]1,+\infty[\setminus \mathbb{N}$, однако он пока остается открытым.

Список литературы.

1. Amer. Math. Monthly. - 1986. - V.93., № 4. - P.279-281.

Поступила 25 ноября 1986 года.

Топологические структуры и их отображения. Рига, 1987.
УДК 515.12

ОТДЕЛИМОСТЬ В НЕЧЕТКИХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.П.Шостак
ЛГУ им. П.Стучки

Введение

При исследовании тех или иных свойств нечетких множеств в нечетких топологических пространствах на рассматриваемые пространства нередко приходится накладывать различные условия типа отделимости. Целью данной и последующей [23] работ является систематическое изучение свойств типа отделимости в нечетких топологических пространствах. Здесь мы рассматриваем "низшие аксиомы отделимости (т.е. свойства типа T_0-, T_1-отделимости, хаусдорфовости и регулярности); "высшие" аксиомы отделимости (т.е. свойства типа полной регулярности, нормальности и совершенной нормальности) изучаются в [23]

Для чтения работы желательно знакомство с терминологией, обозначениями и конструкциями, введенными в [16] - [22]. Однако для полноты изложения наиболее важные и часто используемые из них мы приводим в §0, носящем вспомогательный характер. Основное содержание работы представлено в последующих четырех параграфах. В §1 мы рассматриваем свойства типа хаусдорфовости для нечетких топологических пространств. Этим свойствам следует уделить особое внимание: как и следовало ожидать (по аналогии с теоретико-множественной топологией) в нечеткой топологии условия типа хаусдорфовости играют важную, качественную роль. В частности, большое значение они имеют при изучении свойств типа компактности в нечетких топологических пространствах (см. §5 в [20], §5 в [22]; см. также [6], [7]). В §2 изучаются свойства типа T_1-отделимости; эти свойства тесно связаны с т.н. спектром замкнутости нечеткого множества в нечетком топологическом пространстве [20],[22].

Свойства типа T_0-отделимости приведены в §3. В последнем, четвертом, параграфе изучаются свойства типа регулярности, также играющие важную роль в теории компактности в нечеткой топологии [20],[22].

Отделимость в нечетких топологических пространствах в той или иной форме рассматривалась ранее рядом авторов ([8] - [15],[6] и др.). Наиболее существенные отличия предлагаемой нами схемы от рассматриваемых ранее сводятся к следующему. Во-первых, данная схема применима к общим нечетким топологическим пространствам (определение 0.2), а не только к Чанговским нечетким топологическим пространствам (0.3.). Во-вторых, уже в случае Чанговских нечетких топологических пространств данная схема значительно отличается от предыдущих, поскольку в ее основу положено отношение нечеткого включения $\tilde{\subset}$ между нечеткими множествами, а не понятие нечеткой точки и отношение неравенства $\leq$ между нечеткими множествами, как это имеет место в предыдущих схемах. (см. по этому поводу также утверждения 1.17, 2.17).

§0. Предварительные сведения.

Следуя Л.А.Заде [25] , нечетким подмножеством данного множества X мы называем отображение $M : X \to I$, где $I = [0,1]$. Обычное подмножество M множества X при этом отождествляется со своей характеристической функцией, т.е. с отображением $\chi_M : X \to 2 \subset I$, где $2 = \{0,1\}$. Семейство всех нечетких подмножеств множества X обозначается I^X ; для семейства всех обычных подмножеств множества X используется обозначение 2^X . Через M^c обозначается дополнение нечеткого множества M , т.е. функция $M^c = 1 - M$ Объединение ($\bigvee_i M_i$) и пересечение ($\bigwedge_i M_i$) нечетких множеств определяется как и обычно (см. [26],[4],[1] и др.). Нечеткое включение " $\tilde{\subset}$ " мы, следуя [2] , определяем следующим образом:

(0.1.) <u>Определение</u> [2] . Для M , $N \in I^X$ положим $M \tilde{\subset} N := \inf_x (M^c \vee N)(x)$. При этом число $M \tilde{\subset} N$ понимается как степень того, насколько нечеткое множество M содержится в нечетком множестве N .

Основные свойства отношения нечеткого включения рассмотрены в [20]. Эти свойства постоянно будут использоваться в работе.

(0.2.) <u>Определение</u> [16] - [18] Нечеткой топологией на множестве X называется отображение $\mathcal{T} : I^X \to I$, удовлетворяющее следующим аксиомам (U, U_i, $V \in I^X$):

(1) $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1) = 1$;

(2) $\mathcal{T}(U \wedge V) \geqslant \mathcal{T}(U) \wedge \mathcal{T}(V)$

(3) $\mathcal{T}(\bigvee_i U_i) \geqslant \bigwedge_i \mathcal{T}(U_i)$

Пара (X, $\mathcal{T}$) называется нечетким топологическим пространством или, для краткости, просто нечетким пространством.

Неравенство $\mathcal{T}(U) \geqslant \alpha$, где $\alpha \in I$, мы трактуем как утверждение "степень открытости нечеткого множества $U \in I^X$ не меньше, чем α ". Положим $T_\alpha = \{U : \mathcal{T}(U) \geqslant \alpha\}$, T^*_α $\{M : \mathcal{T}(M^c) \geqslant \alpha\}$; при этом T^*_α мы трактуем как семейство всех нечетких подмножеств пространства (X, $\mathcal{T}$), степень замкнутости которых не меньше чем α .

(0.3.) <u>Замечание</u> [20], [22], [24]. Рассмотрим дополнительно следующие ограничения на нечеткую топологию $\mathcal{T} : I^X \to I$

(4) $\mathcal{T}(I^X) \subset 2$;

(5) $\mathcal{T}(c)$ 1 для каждой константы $c : I \to I$;

(6) $\mathcal{T}^{-1}(1) \subset 2^X$

Легко заметить, что задание отображения $\mathcal{T} : I^X \to I$ удовлетворяющего условиям (1) - (4), равносильно заданию нечеткой топологии в смысле Ц.Л.Чанга [1] (в дальнейшем такие нечеткие топологии и соответствующие нечеткие топологические пространства мы будем называть Чанговскими). Потребовав для отображения $\mathcal{T}$ выполнения условий (1)-(3) и (5), получаем определение ламинированной нечеткой топологии [22], [24] . Пусть (X, $\mathcal{T}$) - нечеткое пространство и $\mathcal{T}^\circ$ - минимальная (в смысле порядка $\leqslant$) ламинированная нечеткая топология на X, мажорирующая $\mathcal{T}$ (т.е. $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}^\circ$). Тогда нечеткое пространство (X, $\mathcal{T}^\circ$) называется ламинированной модификацией нечеткого пространства (X, $\mathcal{T}$) [22], [24]. Задание отображения $\mathcal{T}$, удовлетворяющего условиям (1) - (5), равносильно заданию нечеткой топологии в смысле

Р.Ловена [4] - [6]. Наконец, как нетрудно заметить, задание отображения $\mathcal{T}$, для которого выполнены условия (1) - (4) и (6), естественным образом эквивалентно заданию обычной топологии на множестве X.

(0.4.) Определение [16] - [18]. Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - нечеткие пространства. Отображение $f: X \to Y$ называется непрерывным, если $\mathcal{T}_X(f^{-1}(V)) \geq \mathcal{T}_Y(V)$ для каждого $V \in I^Y$.

Через α в тексте всюду обозначается произвольная фиксированная константа $\alpha \in I$. При этом достаточно содержательным мы считаем случай $\alpha > 0$; в "вырожденном" случае $\alpha = 0$ результаты работы, как правило, становятся тривиальными (см. по этому поводу утверждения 1.18, 2.18, 3.18 и 4.18).

§1. Степень хаусдорфовости нечетких топологических пространств.

(1.1.) Определение. Спектром хаусдорфовости нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ на уровне α называется множество $H_\alpha(X)$, образованное всеми константами $\beta \in I$ такими, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $U, V \in \mathcal{T}_\alpha$, удовлетворяющие условия $U(x) \geq \beta - \varepsilon$, $V(y) \geq \beta - \varepsilon$ и $U \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$.

(1.2.) Определение. Степенью хаусдорфовости нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ на уровне α называется число $h_\alpha(X) = \sup H_\alpha(X)$.

(1.3.) Предложение. Спектр хаусдорфовости нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$ на уровне α имеет вид $H_\alpha(X) = [0, h_\alpha(X)]$

Доказательство. Очевидно, что $0 \in H_\alpha(X)$ и, если $\beta \in H_\alpha(X)$ и $0 \leq \beta' < \beta$, то $\beta' \in H_\alpha(X)$. Поэтому для доказательства предложения достаточно проверить, что $\beta = h_\alpha(X) \in H_\alpha(X)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, выберем $\beta' \in (\beta - \varepsilon, \beta] \cap H_\alpha(X)$ и положим $\delta = \beta' + \varepsilon - \beta$. Тогда найдутся $U, V \in \mathcal{T}_\alpha$ такие, что $U(x) \geq \beta' - \delta = \beta - \varepsilon$, $V(y) \geq \beta' - \delta = \beta - \varepsilon$, и $U \tilde{\subset} V^c \geq \beta' - \delta = \beta - \varepsilon$. Но это и означает, что $\beta \in H_\alpha(X)$.

Доказательство следующих двух утверждений легко получить непосредственно из определений:

(1.4.) <u>Предложение</u>. Пусть (Y , $\mathcal{T}_Y$) – подпространство нечеткого пространства (X , $\mathcal{T}$). Тогда $H_\alpha(Y) \supset H_\alpha(X)$ и, следовательно, $h_\alpha(Y) \geq h_\alpha(X)$

(1.5.) <u>Предложение</u>. Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ – две нечеткие топологии на множестве X и $\mathcal{T}' \geq \mathcal{T}$ Тогда $H_\alpha(X,\mathcal{T}') \supset H_\alpha(X,\mathcal{T})$ и, следовательно, $h_\alpha(X,\mathcal{T}') \geq h_\alpha(X,\mathcal{T})$.

Предложение 1.5 можно усилить следующим образом:

(1.5'.) <u>Предложение</u>. Если нечеткое пространство (X $\mathcal{T}$) уплотняется на нечеткое пространство (Y , $\mathcal{T}'$), то $H_\alpha(X) \supset H_\alpha(Y)$ и, следовательно, $h_\alpha(X) \geq h_\alpha(Y)$

<u>Доказательство</u>. Пусть $f : X \to Y$ – уплотнение (т.е. взаимно однозначное непрерывное отображение) и $x_1 \neq x_2$. Тогда $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$ Зафиксируем $\beta \in H_\alpha(Y)$ и $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множества $V_1, V_2 \in T^Y_\alpha$ такие, что $V_1(y_1) \geq \beta - \varepsilon$, $V_2(y_2) \geq \beta - \varepsilon$ и $V_1 \tilde{\subset} V_2^c \geq \beta - \varepsilon$. Положим $U_1 = f^{-1}(V_1)$, $U_2 = f^{-1}(V_2)$. Тогда $U_1, U_2 \in T^X_\alpha$; $U_1(x_1) \geq \beta - \varepsilon$, $U_2(x_2) \geq \beta - \varepsilon$ и $U_1 \tilde{\subset} U_2^c \geq \beta - \varepsilon$ [20], а следовательно, $\beta \in H_\alpha(X)$.

В теории нечетких топологических пространств мы нередко пользуемся тем, что многие свойства сохраняются при переходе от нечеткого пространства к его ламинированной модификации [20], [22], [24]. Рассмотрим поведение спектра хаусдорфовости при замене нечеткого пространства его ламинированной модификацией.

(1.6.) <u>Предложение</u>. Пусть (X°, $\mathcal{T}^\circ$) – ламинированная модификация (0.3) нечеткого пространства (X , $\mathcal{T}$). Тогда $H_\alpha(X) \subset H_\alpha(X^\circ)$ и $H_\alpha(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] = H_\alpha(X^\circ) \cap (\frac{1}{2}, 1]$.

<u>Доказательство</u>. Включение $H_\alpha(X) \subset H_\alpha(X^\circ)$ следует из предложения 1.5. Обратно, пусть $\beta \in H_\alpha(X^\circ)$ и $\beta > \frac{1}{2}$ Зафиксируем $x, y \in X$, $x \neq y$, $\varepsilon > 0$ (при этом без ограничения общности можем считать, что $\beta - \varepsilon > \frac{1}{2}$) и выберем U , $V \in T^\circ_\alpha$ такие, что $U(x) \geq \beta - \varepsilon$, $V(y) \geq \beta - \varepsilon$ и $U \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ Из определения ламинированной модификации ясно, что без ограничения общности можно считать, что $U = U_1 \wedge a$, $V = V_1 \wedge b$, где $a, b \in I$ и $U_1, V_1 \in T_\alpha$. Поскольку $\beta - \varepsilon > \frac{1}{2}$, то $a, b > \frac{1}{2}$, а следовательно, $a^c, b^c < \frac{1}{2}$ Поскольку $\frac{1}{2} < \beta - \varepsilon \leq U \tilde{\subset} V^c \leq (U_1^c \vee a^c) \vee (V_1^c \vee b^c)$, можем заключить отсюда, что $\inf_x (U_1^c \vee V_1^c)(x) = U_1 \tilde{\subset} V_1^c \geq \beta - \varepsilon$. Но это и означает, что $\beta \in H_\alpha(X)$.

(1.7.) Замечание. Равенство $H_\alpha(X) = H_\alpha(X^\circ)$, вообще говоря, не имеет места. Действительно, пусть X произвольное непустое множество и нечеткая топология $\mathcal{T} : I^X \to I$ определена равенствами $\mathcal{T}(0) = \mathcal{T}(1)$ 1 и $\mathcal{T}(M) = 0$ при $M \neq 0$, $M \neq 1$. Тогда, очевидно, $H_\alpha(X) = \{0\}$, но $H_\alpha(X^\circ) = [0, \frac{1}{2}]$.

(1.8.) Предложение. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{J}\}$ - семейство нечетких топологических пространств и $(X, \mathcal{T})$ - их произведение [20], [22], [24]. Тогда $\bigcap_i H_\alpha(X_i) \subset H_\alpha(X)$ и, следовательно, $\bigwedge_i h_\alpha(X_i) \leq h_\alpha(X)$.

Доказательство. Пусть $\beta \in H_\alpha(X_i)$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим две различные точки $x = (x_i)_{i \in \mathcal{J}}$; $y = (y_i)_{i \in \mathcal{J}}$ и зафиксируем $j \in \mathcal{J}$ такое, что $x_j \neq y_j$ Поскольку $\beta \in H_\alpha(X_j)$, найдутся $U_j, V_j \in \mathcal{T}_j^\alpha$, удовлетворяющие неравенствам $U_j(x_j) \geq \beta - \varepsilon$, $V_j(y_j) \geq \beta - \varepsilon$ и $U_j \tilde{\subset} V_j^c \geq \beta - \varepsilon$. Положим $U = p_j^{-1}(U_j)$, $V = p_j^{-1}(V_j)$, где $p_j : X \to X_j$ отображение проектирования. Тогда, как легко заметить, $U(x) \geq \beta - \varepsilon$, $V(y) \geq \beta - \varepsilon$ и $U \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$, а значит $\beta \in H_\alpha(X)$

(1.9.) Предложение. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{J}\}$ семейство непустых ламинированных нечетких топологических пространств и $(X, \mathcal{T})$ - их произведение. Тогда $\bigcap_i H_\alpha(X_i) = H_\alpha(X)$ и, следовательно, $\bigwedge_i h_\alpha(X_i) = h_\alpha(X)$

Доказательство. Зафиксируем $j \in \mathcal{J}$ и некоторую точку $x^\circ \in X$ Тогда подпространство $\tilde{X}_j = X_j \times \{(x_i^\circ) : i \in \mathcal{J}, i \neq j\}$ произведения X ламинированных нечетких пространств гомеоморфно пространству X_j [22] и, следовательно, согласно предложению 1.4, $H_\alpha(X_j) = H_\alpha(\tilde{X}_j) \supset H_\alpha(X)$. Отсюда и из предложения 1.8 следует доказываемое утверждение.

(1.10.) Замечание. Требование ламинированности всех сомножителей в предыдущем предложении является существенным. Действительно, пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$ - произвольное ламинированное нечеткое пространство, а $(X_2, \mathcal{T}_2)$ - нехаусдорфово топологическое пространство. Тогда, как легко заметить, для всех $\alpha \in (0,1]$ $h_\alpha(X_1) \geq \frac{1}{2}$, $h_\alpha(X_2) = 0$, но $h_\alpha(X_1 \times X_2) = \frac{1}{2}$.

(1.11.) Предложение. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{J}\}$ - семейство непустых нечетких топологических пространств и $(X, \mathcal{T})$ - их произведение. Тогда $H_\alpha(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] = \bigcap_i H_\alpha(X_i) \cap (\frac{1}{2}, 1]$ и, следовательно, $h_\alpha(X) \vee \frac{1}{2} = (\bigwedge_i h_\alpha(X_i)) \vee \frac{1}{2}$.

Доказательство сводится к следующей цепочке равенств, обеспечиваемых предложениями 1.6 и 1.9:

$$(\bigcap_i H_\alpha(X_i)) \cap (\tfrac{1}{2},1] = \bigcap_i (H_\alpha(X_i) \cap (\tfrac{1}{2},1]) = \bigcap_i (H_\alpha(X_i^\circ)) \cap (\tfrac{1}{2},1] = H_\alpha(X^\circ) \cap (\tfrac{1}{2},1] = H_\alpha(X) \cap (\tfrac{1}{2},1].$$

Одной из важнейших характеристик хаусдорфовости топологического пространства является условие замкнутости диагонали Δ в квадрате $X \times X$ данного пространства (см., например, [3]). Нашей ближайшей целью является получение аналогичной характеристики для нечетких пространств. Эта характеристика установлена в теореме 1.14; в ней используется понятие спектра замкнутости $cl_\alpha(M,X)$ нечеткого множества M в нечетком пространстве X [20], [22]. В случае, когда множество M - четкое, как это имеет место в нашей ситуации, спектр его замкнутости может быть определен следующим эквивалентным (но более простым по сравнению с [20].[22]) образом:

(1.12.) $cl_\alpha(M,X)$ состоит из всех $\beta \in I$ таких, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $V \in T_\alpha$, удовлетворяющее неравенствам $V^c(x) \geqslant \beta - \varepsilon$ для всех $x \in M$ и $V(x) \geqslant \beta$ для всех $x \notin M$

Легко также проверить, что $\beta \in cl_\alpha(M,X)$ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $V \in T_\alpha$ такое, что $V^c(x) \geqslant \beta - \varepsilon$ для всех $x \in M$ и $V(x) \geqslant \beta - \varepsilon$ для всех $x \notin M$

Отметим также следующий факт. Пусть M - четкое подмножество обычного топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ и $\alpha \in (0,1]$. Если M замкнуто, то $cl_\alpha(M,X) = [0,1]$ (в качестве V в этом случае можно взять множество $V = M^c$); если же M незамкнуто, то $cl_\alpha(M,X) = 0$.

(1.13.) Теорема. Пусть X - нечеткое пространство и Δ - диагональ квадрата $X \times X$. Тогда $H_\alpha(X) = cl_\alpha(\Delta, X \times X)$.

Доказательство. Пусть $\beta \in H_\alpha(X)$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим точки $x, y \in X$, $x \neq y$ и выберем $U_x, V_x \in T_\alpha^X$ так, чтобы $U_x(x) \geqslant \beta - \varepsilon$, $V_y(y) \geqslant \beta - \varepsilon$ и $U_x \subseteq V_y^c \geqslant \beta - \varepsilon$ '. Тогда, очевидно, $(U_x \times V_y)(x,y) \geqslant \beta - \varepsilon$ и для каждой точки $(a,a) \in \Delta$ $(U_x \times V_y)^c(a,a) = U_x^c(a) \vee V_y^c(a) \geqslant \beta - \varepsilon$.

Положим $W = \vee\{U_x \times V_y : (x,y) \in X \times X \setminus \Delta\}$. Тогда $W \in T_\alpha^{X \times X}$ и

$W(x,y) \geq \beta - \varepsilon$ для всех $(x,y) \notin \Delta$. С другой стороны, $W^c(a,a) = \wedge \{U_x^c(a) \vee V_y^c(a) : (x,y) \notin \Delta\} \geq \beta - \varepsilon$ для всех $(a,a) \in \Delta$. Но это и означает, что $\beta \in cl_\alpha(\Delta, X \times X)$.

Обратно, пусть $\beta \in cl_\alpha(\Delta, X \times X)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $W \in T_\alpha^{X \times X}$ такое, что $W^c(a,a) \geq \beta - \varepsilon$ для $(a,a) \in \Delta$ и $W(x,y) \geq \beta$ при $(x,y) \notin \Delta$. Согласно определению топологии произведения, для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, найдутся $U_x, V_y \in T_\alpha$ такие, что $U_x \times V_y \leq W$ и $(U_x \times V_y)(x,y) \geq \beta - \varepsilon$. Второе неравенство означает, что $U_x(x) \geq \beta - \varepsilon$, $V_y(y) \geq \beta - \varepsilon$. Из первого же неравенства следует, что для каждого $a \in X$ $(U_x^c \vee V_y^c)(a) = (U_x \times V_y)^c(a,a) \geq W^c(a,a) \geq \beta - \varepsilon$, т.е. $U_x \tilde{\subset} V_y^c \geq \beta - \varepsilon$. Но это и означает, что $\beta \in H_\alpha(X)$.

(1.14.) Теорема. Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ – нечеткие топологические пространства, $f, g : X \to Y$ – непрерывные отображения и $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Тогда $cl_\alpha(E, X) \supset H_\alpha(X)$.

Доказательство. Пусть $\varphi : X \to Y \times Y$ – отображение, заданное формулой $\varphi(x) = (f(x), g(x))$. Тогда φ непрерывно [19]. Ясно, что множество E является прообразом диагонали Δ_Y пространства $Y \times Y$ при отображении φ. Для завершения доказательства теперь достаточно воспользоваться предложением 1.13, согласно которому $cl_\alpha(\Delta_Y, Y \times Y) = H_\alpha(Y)$ и леммой 1.15, доказательство которой сводится к непосредственной проверке.

(1.15.) Лемма. Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ – нечеткие пространства, $f : X \to Y$ – непрерывное отображение и $N \in I^Y$. Тогда $cl_\alpha(f^{-1}(N), X) \supset cl_\alpha(N, Y)$.

(1.16.) Пример. (Случай топологического пространства) Пусть $(X, \mathcal{T})$ – обычное топологическое пространство. Ясно, что для любых $\alpha, \alpha' \in (0,1]$ имеет место равенство $H_\alpha(X) = H_{\alpha'}(X)$ и при этом $H_\alpha(X) = [0,1]$ в том и только в том случае, когда пространство X хаусдорфово; если же пространство X не является хаусдорфовым, то $H_\alpha(X) = \{0\}$.

(1.17.) Пример. (Случай Чанговского нечеткого пространства). Пусть $(X, \mathcal{T})$ – Чанговское нечеткое пространство (0.3.). Ясно, что и в этом случае $H_\alpha(X) = H_{\alpha'}(X)$ для любых $\alpha, \alpha' \in (0,1]$

Для Чанговских нечетких пространств рядом авторов предлагались различные определения хаусдорфовости (см. [8] - [15], а также обзор [24]). Как уже отмечалось во введении, рассмотренные здесь понятия спектра и степени хаусдорфовости основаны на отношении нечеткого включения весьма слабо связаны с определениями из [8] - [15]. Отметим, однако, следующие факты, справедливость которых нетрудно установить непосредственно из определений (X, $\mathcal{T}$) - нечеткое Чанговское пространство):

(1.17.1.) Если пространство (X, $\mathcal{T}$) β-хаусдорфово или β^*-хаусдорфово в смысле С.Е.Родабауха [9],[10], то $\beta \in H_\alpha(X)$ для всех $\alpha \in I$

(1.17.2.) Если пространство (X, $\mathcal{T}$) хаусдорфово в смысле Р.Сриваставы, С.Лала и А.Сриваставы [13], [15], то $h_\alpha(X) = 1$ для всех $\alpha \in I$

(1.17.3.) Если пространство (X, $\mathcal{T}$) хаусдорфово в смысле Цу и Лиу [8], то $h_\alpha(X) = 1$ для всех $\alpha \in I$

Нетрудно заметить, что утверждения, обратные к (1.17.1.), (1.17.2.) и (1.17.3.) не имеют места.

(1.18.) Замечание. Отметим, что в "вырожденном" случае $\alpha = 0$ $H_\alpha(X) = [0,1]$ для произвольного нечеткого пространства X - в качестве U и V из определения .1 в этом случае достаточно взять $U = \{x\}$ $V = \{y\}$.

§2. Степень T_1-отделимости нечетких топологических пространств

(2.1.) Определение. Спектром T_1-отделимости нечеткого пространства (X, $\mathcal{T}$) на уровне α называется множество $S^1_\alpha(X)$, образованное всеми константами $\beta \in I$ такими, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $U \in T_\alpha$ удовлетворяющее неравенствам $U(x) \geq \beta$ $U^c(y) \geq \beta - \varepsilon$

(2.1'.) Как нетрудно заметить, $\beta \in S^1_\alpha(X)$ (где $\beta \in I$) тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $U \in T_\alpha$ такое, что $U(x) \geq \beta - \varepsilon$ и $U^c(y) \geq \beta - \varepsilon$.

(2.2.) Определение. Степенью T_1-отделимости нечеткого пространства (X, $\mathcal{T}$) на уровне α называется число $h^1_\alpha(X) = \sup S^1_\alpha(X)$.

(2.3.) Предложение. Спектр T_1-отделимости нечеткого пространства X на уровне α имеет вид $S^1_\alpha(X)=[0, J^1_\alpha(X)]$.

Доказательство. Ясно, что $0 \in S^1_\alpha(X)$ и, если $0 \leq \beta' < \beta$ и $\beta \in S^1_\alpha(X)$, то $\beta' \in S^1_\alpha(X)$ Поэтому для доказательства предложения достаточно проверить, что $\beta = \sup S^1_\alpha(X) \in S^1_\alpha(X)$.

Пусть $x, y \in X$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\beta' \in (\beta-\varepsilon, \beta] \cap H_\alpha(X)$ Положим $\delta = \beta' - \beta + \varepsilon$ Тогда найдется $U \in T_\alpha$ такое, что $U(x) \geq \beta' - \delta = \beta - \varepsilon$ и $U^c(y) \geq \beta' - \delta = \beta - \varepsilon$ Но это (согласно 2.1) и означает, что $\beta \in S^1_\alpha(X)$.

В справедливости следующих двух утверждений легко убедиться непосредственно из определений:

(2.4.) Предложение. Пусть $(Y, \mathcal{T}_Y)$ – подпространство нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$. Тогда $S^1_\alpha(Y) \supset S^1_\alpha(X)$ и, следовательно, $J^1_\alpha(Y) \geq J^1_\alpha(X)$.

(2.5.) Предложение. Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ – две нечеткие топологии на множестве X и $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ Тогда $S^1_\alpha(X, \mathcal{T}') \supset S^1_\alpha(X, \mathcal{T})$ и, следовательно, $J^1_\alpha(X, \mathcal{T}') = J^1_\alpha(X, \mathcal{T})$.

Предложение 2.5 можно усилить следующим образом:

(2.5'.) Предложение. Если нечеткое пространство $(X, \mathcal{T})$ уплотняется на нечеткое пространство $(Y, \mathcal{T}_Y)$, то $S^1_\alpha(X) \supset S^1_\alpha(Y)$ и, следовательно, $J^1_\alpha(X) \geq J^1_\alpha(Y)$.

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ – уплотнение и $x_1 \neq x_2$ Тогда $y_1 = f(x_1) \neq f(x_2) = y_2$. Зафиксируем $\beta \in H_\alpha(Y)$ и $\varepsilon > 0$ и найдем множество $V \in T^Y_\alpha$ такое, что $V(y_1) \geq \beta$ и $V^c(y_2) \geq \beta - \varepsilon$. Положим $U = f^{-1}(V)$ Тогда, очевидно, $U(x_1) \geq \beta$ и $U^c(x_2) \geq \beta - \varepsilon$, что и завершает доказательство.

Как и в случае спектра хаусдорфовости, спектр T_1-отделимости нечеткого пространства тесно связан со спектром T_1-отделимости его ламинированной модификации:

(2.6.) Предложение. Пусть $(X^\circ, \mathcal{T}^\circ)$ – ламинированная модификация нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$. Тогда $S^1_\alpha(X) \subset S^1_\alpha(X_\circ)$ и $S^1_\alpha(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] = S^1_\alpha(X^\circ) \cap (\frac{1}{2}, 1]$.

Доказательство. Первое включение следует из предложения 2.5. Пусть теперь $\beta \in S^1_\alpha(X^\circ)$ и $\beta > \frac{1}{2}$ Зафиксируем $x \in X$, $y \in X$ и $\varepsilon > 0$; при этом без ограничения общности можем считать, что $\beta - \varepsilon > \frac{1}{2}$ Выберем $U \in T_\alpha$ таким образом, чтобы $U(x) \geq \beta$, $U^c(y) \geq \beta - \varepsilon$. Поскольку

$\beta-\varepsilon>\frac{1}{2}$, то, как легко заметить, $u\in T_\alpha\ (\subset T_\alpha^c)$ и, следовательно, $\beta\in S_\alpha^1(X)$.

(2.7.) Замечание. Равенство $S_\alpha^1(X)=S_\alpha^1(X^c)$, вообще говоря, не имеет места (см. пример 1.7).

(2.8.) Предложение. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i\in\mathcal{J}\}$ - семейство нечетких пространств и (X , $\mathcal{T}$) - их произведение. Тогда $\bigcap\limits_i S_\alpha^1(X_i)\subset S_\alpha^1(X)$ и, следовательно, $\bigwedge\limits_i \mathcal{S}_\alpha^1(X_i)\leq \mathcal{S}_\alpha^1(X)$

Доказательство. Пусть $\beta\in\bigcap\limits_i S_\alpha^1(X_i)$, $\varepsilon>0$. Рассмотрим две различные точки $x=(x_i)_{i\in\mathcal{J}}$, $y=(y_i)_{i\in\mathcal{J}}$ и зафиксируем $j\in\mathcal{J}$ такое, что $x_j\neq y_j$ Поскольку $\beta\in S_\alpha^1(X_j)$, найдется $u_j\in T_\alpha^j$, для которого $u_j(x_j)\geq\beta$ и $u_j^c(y_j)\geq\beta-\varepsilon$. Положим $u=p_j^{-1}(u_j)$, где p_j $X\to X_j$ - отображение проектирования. Но тогда, как легко заметить, $u(x)\geq\beta$, $u^c(y)\geq\beta-\varepsilon$ а следовательно, $\beta\in S_\alpha^1(X)$.

(2.9.) Предложение. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i\in\mathcal{J}\}$ - семейство непустых ламинированных нечетких пространств и (X , $\mathcal{T}$) - их произведение. Тогда $\bigcap\limits_i S_\alpha^1(X_i)=S_\alpha^1(X)$ и, следовательно, $\bigwedge\limits_i \mathcal{S}_\alpha^1(X_i)=\mathcal{S}_\alpha^1(X)$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.9.

(2.10.) Замечание. Требование ламинированности всех сомножителей в 2.9 является существенным (ср. пример 1.10).

(2.11.) Предложение. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i\in\mathcal{J}\}$ семейство непустых нечетких пространств и (X , $\mathcal{T}$) - их произведение. Тогда $S_\alpha^1(X)\cap(\frac{1}{2},1]=\bigcap\limits_i S_\alpha^1(X_i)\cap(\frac{1}{2},1]$ и, следовательно, $\mathcal{S}_\alpha^1(X)\vee\frac{1}{2}=(\bigwedge\limits_i \mathcal{S}_\alpha^1(X_i))\vee\frac{1}{2}$.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.11.

Важнейшим характеристическим свойством топологических пространств, удовлетворяющих T_1-аксиоме отделимости, является замкнутость всех одноточечных подмножеств в этих пространствах. Ниже (в 2.13) мы устанавливаем нечеткий аналог этого утверждения. Предварительно, однако, удобно ввести следующее определение:

(2.12.) Определение. Спектром замкнутости нечеткого пространства (X , $\mathcal{T}$) называется пересечение спектров замкнутости всех его одноточечных подмножеств (см. 1.1
$cl_\alpha(X)=\bigcap cl(x, X)$.

Из определений ясно, что $\beta \in cl_\alpha(X)$ в том и только в том случае, когда для каждого $x \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $U \in T_\alpha$ такое, что $U^c(x) \geq \beta - \varepsilon$ и $U(y) \geq \beta$ для всех $y \neq x$.

(2.13.) Теорема. $S_\alpha^1(X) = cl_\alpha(X)$ для произвольного нечеткого пространства X.

Доказательство. Пусть $\beta \in S_\alpha^1(X)$. Зафиксируем $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и для каждого $y \in X$, $y \neq x$, построим $U_y \in T_\alpha$ такое, что $U_y(y) \geq \beta$ и $U_y^c(x) \geq \beta - \varepsilon$. Положим $U = \vee\{U_y : y \in X, y \neq x\}$. Ясно, что $U(y) \geq \beta$ и $U^c(x) \geq \beta - \varepsilon$, а следовательно, $\beta \in cl_\alpha(X)$

Обратно, пусть $\beta \in cl_\alpha(X)$. Зафиксируем $x, y \in X$ и выберем $U \in T_\alpha$ таким образом, чтобы $U^c(x) \geq \beta - \varepsilon$ и $U(z) \geq \beta$ для всех $z \neq x$ и, в частности, $U(y) \geq \beta$. Но это и означает, что $\beta \in S_\alpha^1(X)$.

В заключение параграфа рассмотрим связь между спектрами хаусдорфовости и T_1-отделимости.

(2.14.) Теорема. Для каждого нечеткого пространства имеет место включение $S_\alpha^1(X) \supset H_\alpha(X) \cap (\frac{1}{2}, 1]$.

Доказательство. Пусть $\beta \in H_\alpha(X)$, $\beta > \frac{1}{2}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, при этом без ограничения общности можем считать, что $\beta - \varepsilon > \frac{1}{2}$. Для точек $x, y \in X$, $x \neq y$, выберем $U, V \in T_\alpha$ таким образом, чтобы $U(x) \geq \beta - \varepsilon$, $V(y) \geq \beta - \varepsilon$ и $U^c \vee V^c \geq \beta - \varepsilon$. Поскольку $U^c(y) \vee V^c(y) \geq \beta - \varepsilon$ и $V^c(y) \leq \beta^c + \varepsilon < \beta - \varepsilon$, заключаем, что $U^c(y) \geq \beta - \varepsilon$, а следовательно, $\beta \in S_\alpha^1(X)$.

(2.15.) Замечание. Для того, чтобы убедиться в существенности требования $\beta > \frac{1}{2}$, рассмотрим следующий пример. Пусть $X = \{x, y\}$ и определим множества $U, V \in I^X$ равенствами $U(x) = \frac{1}{8}$, $U(y) = \frac{1}{4}$, $V(x) = \frac{1}{4}$, $V(y) = 1$. Зададим нечеткую топологию $\mathcal{T}: I^X \to I$ равенствами $\mathcal{T}(U) = \mathcal{T}(V) = \mathcal{T}(1) = \mathcal{T}(0) = 1$ и $\mathcal{T}(M)$ 0 для всех остальных $M \in I^X$. Тогда, как нетрудно заметить, для всех $\alpha \in (0,1]$ $H_\alpha(X) = [0, \frac{1}{4}]$, но $S_\alpha^1(X) = [0, \frac{1}{8}]$

(2.16.) Пример. (Случай топологического пространства). Пусть $(X, \mathcal{T})$ – обычное топологическое пространство. Ясно, что при $\alpha, \alpha' \in (0,1]$ $S_\alpha^1(X) = S_{\alpha'}^1(X)$ и $S_\alpha^1(X) = [0,1]$ тогда и только тогда, когда пространство X удовлетворяет T_1-аксиоме отделимости; в противном случае $S_\alpha^1(X) = \{0\}$.

(2.17.) Пример. (Случай Чанговского нечеткого пространства). Пусть $(X, \mathcal{T})$ – Чанговское нечеткое пространство.

Непосредственно из определений легко убедиться в справедливости следующих утверждений:

(2.17.1.) Если (X, $\mathcal{T}$) – β -T_1-пространство или β^* -T_1-пространство в смысле С.Е.Родабауха [10], то $\beta \in S_\alpha^1(X)$.

(2.17.2.) Если (X, $\mathcal{T}$) – T_1- пространство в смысле Р.Сриваставы, С.Лала и А.Сриваставы [14], то $s_\alpha^1(X) = 1$

(2.17.3.) Если (X, $\mathcal{T}$) – T_1-пространство в смысле Пу и Лиу [8], то $s_\alpha^1(X) = 1$

Как нетрудно заметить, утверждения, обратные к (2.17.1) (2.17.2) и (2.17.3) не имеют места.

(2.18.) Замечание. Ясно, что $S_0^1(X) = [0,1]$ для каждого нечеткого пространства X

§3. Степень T_0-отделимости нечетких топологических пространств

(3.1.) Определение. Спектром T_0-отделимости нечеткого пространства (X, $\mathcal{T}$) на уровне α называется множество $S_\alpha^0(X)$, образованное всеми константами $\beta \in I$ такими, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $U \in T_\alpha$ такое, что либо $U(x) \geqslant \beta$ и $U^c(y) \geqslant \beta - \varepsilon$ либо $U(y) \geqslant \beta$ и $U^c(x) \geqslant \beta - \varepsilon$

Нетрудно заметить, что это определение эквивалентно следующему:

(3.1.′) $\beta \in S_\alpha^0(X)$ (где $\beta \in I$) тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, и каждого $\varepsilon > 0$ найдется $U \in T_\alpha$ такое, что либо $U(x) \geqslant \beta - \varepsilon$ и $U^c(y) \geqslant \beta - \varepsilon$ либо $U(y) \geqslant \beta - \varepsilon$ и $U^c(x) \geqslant \beta - \varepsilon$.

(3.2.) Определение. Степенью T_0-отделимости нечеткого пространства (X, $\mathcal{T}$) на уровне α называется число $s_\alpha^0(X) = \sup S_\alpha^0(X)$.

Ниже мы приводим основные утверждения о свойствах спектра и степени T_0-отделимости; как и следовало ожидать, в большинстве своем они совершенно аналогичны соответствующим утверждениям о свойствах спектра и степени T_1-отделимости. Доказательства утверждений (3.3) – (3.11) опущены, поскольку они легко могут быть получены с помощью незначительных изменений в доказательствах соответствующих утверждений из предыдущего параграфа.

(3.3.) Предложение. Спектр T_0-отделимости нечеткого пространства X на уровне α имеет вид $S_\alpha^0(X) = [0, s_\alpha^0(X)]$.

(3.4.) Предложение. Пусть (Y , $\mathcal{T}_Y$) – подпространство нечеткого пространства (X , $\mathcal{T}$). Тогда $S_\alpha^0(Y) \supset S_\alpha^0(X)$ и, следовательно, $s_\alpha^0(Y) \geqslant s_\alpha^0(X)$.

(3.5.) Предложение. Пусть $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ – две нечеткие топологии на множестве X и $\mathcal{T} \leqslant \mathcal{T}'$ Тогда $S_\alpha^0(X,\mathcal{T}') \supset S_\alpha^0(X,\mathcal{T})$ и, следовательно, $s_\alpha^0(X,\mathcal{T}') \geqslant s_\alpha^0(X,\mathcal{T})$.

(3.5.) Предложение. Если нечеткое пространство (X , $\mathcal{T}$) уплотняется на нечеткое пространство (Y , $\mathcal{T}_Y$), то $S_\alpha^0(X) \supset S_\alpha^0(Y)$ и, следовательно, $s_\alpha^0(X) \geqslant s_\alpha^0(Y)$.

(3.6.) Предложение. $S_\alpha^0(X) \subset S_\alpha^0(X^0)$ и $S_\alpha^0(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] = S_\alpha^0(X^0) \cap (\frac{1}{2}, 1]$, где X^0 ламинированная модификация нечеткого пространства X .

(3.7.) Замечание. Равенство $S_\alpha^0(X) = S_\alpha^0(X^0)$ вообще говоря, не имеет места.

(3.8.) Предложение. Пусть $\{ (X_i , \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{J} \}$ семейство нечетких пространств и (X , $\mathcal{T}$) – их произведение. Тогда $\bigcap_i S_\alpha^0(X_i) \subset S_\alpha^0(X)$ и, следовательно, $\bigwedge_i s_\alpha^0(X_i) \leqslant s_\alpha^0(X)$.

(3.9) Предложение. Если все пространства (X_i . $\mathcal{T}_i$) в условии предыдущего предложения являются непустыми и ламинированными, то $\bigcap_i S_\alpha^0(X_i) = S_\alpha^0(X)$ и, следовательно, $\bigwedge_i s_\alpha^0(X_i) = s_\alpha^0(X)$.

(3.10.) Замечание. Требование ламинированности всех сомножителей в предложении 3.9 является существенным.

(3.11.) Предложение. Пусть $\{ (X_i , \mathcal{T}_i) : i \in \mathcal{J} \}$ семейство непустых нечетких пространств и (X , $\mathcal{T}$) – их произведение. Тогда $S_\alpha^0(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] = \bigcap_i S_\alpha^0(X_i) \cap (\frac{1}{2}, 1]$ и, следовательно, $s_\alpha^0(X) \vee \frac{1}{2} = (\bigwedge_i s_\alpha^0(X_i)) \vee \frac{1}{2}$.

(3.12.) Предложение. $S_\alpha^0(X) \supset S_\alpha^1(X)$ для каждого нечеткого пространства X .

Доказательство очевидно.

(3.13.) Предложение. $S_\alpha^0(X) \supset H_\alpha(X)$ для каждого нечеткого пространства X .

Доказательство. Пусть $\beta \in H_\alpha(X)$. Если $\beta > \frac{1}{2}$ то $\beta \in S_\alpha^1(X)$ (см. 2.14), а следовательно, $\beta \in S_\alpha^0(X)$. Расомотрим поэтому случай, когда $\beta \leqslant \frac{1}{2}$ Пусть $x, y \in X$, $x \neq y$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $U, V \in T_\alpha$ таким образом, чтобы $U(x) \geqslant \beta - \varepsilon$, $V(y) \geqslant \beta - \varepsilon$ и $U \tilde{\subset} V^c \geqslant \beta - \varepsilon$.

Последнее условие, в частности, означает, что $U^c(x) \vee V^c(y) \geq \beta - \varepsilon$ и $U^c(y) \vee V^c(y) \geq \beta - \varepsilon$

Если $U^c(y) \geq \beta - \varepsilon$, то множество $U \in T_\alpha$ удовлетворяет требованию (3.1.$'$). Предположим поэтому, что $U^c(y) < \beta - \varepsilon$. Тогда $V^c(y) \geq \beta - \varepsilon$ В случае, если при этом $V(x) \geq \beta$, то множество $V \in T_\alpha$ удовлетворяет требованиям определения 3.1. Если же $V(x) < \beta - \varepsilon$, то $V^c(x) \geq \beta^c > \beta$ и при этом $V(y) \geq \beta - \varepsilon$ – и снова множество $V \in T_\alpha$ удовлетворяет требованию (3.1.$'$). Тем самым доказательство завершено.

(3.14.) <u>Пример</u>. (Случай топологического пространства). Пусть $(X, \mathcal{T})$ – топологическое пространство и $\alpha, \alpha' \in (0,1]$ Ясно, что $S_\alpha^0(X) = S_{\alpha'}^0(X)$ и при этом $S_\alpha^c(X) = [0,1]$ тогда и только тогда, когда пространство X удовлетворяет T_0-аксиоме отделимости; в противном случае $S_\alpha^c(X) = \{0\}$

§4. <u>Степень регулярности нечетких топологических пространств</u>

(4.1.) <u>Определение</u>. Спектром регулярности нечеткого пространства X на уровне α называется множество $R_\alpha(X)$, образованное всеми $\beta \in I$ такими, что для любых $x \in X$ и $F \in T_\alpha^*$, удовлетворяющих условию $\{x\} \tilde{\subset} F^c \geq \beta$, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся V, $W \in T_\alpha$ такие, что $\{x\} \tilde{\subset} V \geq \beta - \varepsilon$ $W \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ и $F \tilde{\subset} W \geq \beta - \varepsilon$

Это определение, очевидно, может быть переформулировано также следующим образом:

(4.1.$'$) $\beta \in R_\alpha(X)$ (где $\beta \in I$) тогда и только тогда, когда для любых $x \in X$ и $F \in T_\alpha^*$, удовлетворяющих условию $F^c(x) \geq \beta$, найдутся $V, W \in T_\alpha$ такие, что $V(x) \geq \beta - \varepsilon$, $W \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ и $F \tilde{\subset} W \geq \beta - \varepsilon$.

(4.2.) <u>Определение</u>. Степенью регулярности нечеткого пространства X на уровне α называется число $r_\alpha(X) = \inf(I \setminus R_\alpha(X))$, если $I \setminus R_\alpha(X) \neq \emptyset$ и $r_\alpha(X) = 1$ в противном случае.

(4.3.) <u>Предложение</u>. Если $\beta \notin R_\alpha(X)$, то $(\beta - \delta, \beta] \cap R_\alpha(X) = \emptyset$ для некоторого $\delta > 0$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\beta \notin R_\alpha(X)$ Тогда найдутся $x \in X$, $F \in T_\alpha^*$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $F^c(x) \geq \beta$ и

при этом не существует $V, W \in T_\alpha$ таких, которые удовлетворяли бы неравенствам $V(x) > \beta - \varepsilon$, $W \tilde{\subset} V^c > \beta - \varepsilon$ и $F \tilde{\subset} W > \beta - \varepsilon$. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для каждого $\beta' \in (\beta - \delta, \beta]$ не существует $V, W \in T_\alpha$ таких, которые удовлетворяли бы неравенствам $V(x) > \beta' - \frac{\varepsilon}{2}$, $W \tilde{\subset} V^c > \beta' - \frac{\varepsilon}{2}$ и $F \tilde{\subset} W > \beta' - \frac{\varepsilon}{2}$, а значит $\beta' \notin R_\alpha(X)$

(4.4.) <u>Следствие</u>. Для каждого нечеткого пространства X $r_\alpha(X) \in R_\alpha(X)$.

(4.5.) <u>Пример</u>. Пусть X - множество, T_1 и T_2 - две обычные топологии на нем, причем T_1 регулярна, а T_2 нерегулярна и $T_1 \subset T_2$. Зафиксируем $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ и рассмотрим минимальную нечеткую топологию $\mathcal{T} : I^X \to 2$ такую, что $\mathcal{T}(U) = \mathcal{T}(aU') = \mathcal{T}(a^c) = 1$ для всех $U \in T_1$ и $U' \in T_2$. Тогда, как нетрудно заметить, при $\alpha \in (0,1]$ $R_\alpha(X) = [0, a^c] \cup (a, 1]$.

(4.6.) <u>Предложение</u>. Пусть $(Y, \mathcal{T}_Y)$ - подпространство нечеткого пространства $(X, \mathcal{T})$. Тогда $R_\alpha(Y) \supset R_\alpha(X)$, а следовательно, $r_\alpha(Y) \geq r_\alpha(X)$.

<u>Доказательство</u> очевидно.

(4.7.) <u>Предложение</u>. $\beta \in R_\alpha(X)$ (где $\beta \in I$) тогда и только тогда, когда для любых $x \in X$ и $U \in T_\alpha$, удовлетворяющих условию $U(x) > \beta$, и для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $N \in T_\alpha^*$ и $V \in T_\alpha$ такие, что $V(x) > \beta - \varepsilon$, $V \tilde{\subset} N > \beta - \varepsilon$ и $N \tilde{\subset} U > \beta - \varepsilon$.

<u>Доказательство</u>. Обозначим через $R_\alpha^1(X)$ множество всех $\beta \in I$ таких, что для любых $x \in X$, $U \in T_\alpha$, удовлетворяющих условию $U(x) > \beta$ и для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся $N \in T_\alpha^*$, $V \in T_\alpha$ такие, что $V(x) > \beta - \varepsilon$, $V \tilde{\subset} N > \beta - \varepsilon$, $N \tilde{\subset} U > \beta - \varepsilon$, и покажем, что $R_\alpha(X) = R_\alpha^1(X)$. Пусть $\beta \in R_\alpha(X)$, $x \in X$, $U \in T_\alpha$ и $U(x) > \beta$. Положим $F = U^c$; поскольку, очевидно, $F(x) \leq \beta^c$ и $F \in T_\alpha^*$, можем найти $V, W \in T_\alpha$ такие, что $V(x) > \beta - \varepsilon$, $W \tilde{\subset} V^c > \beta - \varepsilon$ и $F \tilde{\subset} W > \beta - \varepsilon$. Положим $N = W^c$; тогда $N \in T_\alpha^*$, $V \tilde{\subset} N = W \tilde{\subset} V^c > \beta - \varepsilon$ и $N \tilde{\subset} U = F \tilde{\subset} W > \beta - \varepsilon$, а значит, $\beta \in R_\alpha^1(X)$. Обратно, пусть $\beta \in R_\alpha^1(X)$ и пусть $F \in T_\alpha^*$ таково, что $F(x) < \beta^c$. Положим $U = F^c$. Тогда $U(x) > \beta$, $U \in T_\alpha$, а следовательно найдутся $N \in T_\alpha^*$, $V \in T^\alpha$ такие, что $V(x) > \beta - \varepsilon$, $V \tilde{\subset} N > \beta - \varepsilon$ и $N \tilde{\subset} U > \beta - \varepsilon$. Обозначим $W = N^c$; тогда $W \in T_\alpha$, $W \tilde{\subset} V^c = V \tilde{\subset} N > \beta - \varepsilon$ и $F \tilde{\subset} W = N \tilde{\subset} U > \beta - \varepsilon$, а следовательно $\beta \in R_\alpha(X)$.

Известно, что уже в случае обычных топологических пространств усиление топологии может привести к потере свойства регулярности. Поэтому было бы безнадежно ожидать справедливости утверждений типа 1.5 , и 3.5 для спектра регулярности. В этой связи интересно отметить, что при переходе к ламинированной модификации (X° , $\mathcal{T}^\circ$) нечеткого пространства (X , $\mathcal{T}$) спектр его регулярности не уменьшается:

(4.8.) Предложение. $R_\alpha(X) \subset R_\alpha(X^\circ)$ для каждого нечеткого пространства X .

Доказательство. Пусть $\beta \in R_\alpha(X)$ и $x \in X$, $F \in T_\alpha^{\circ *}$ таковы, что $F^c(x) \geq \beta$ Не ограничивая общности, в этой ситуации можно считать, что $F = F_1 \vee a$, где $a \in I$, $F_1 \in T_\alpha^*$ При этом ясно, что $a^c \geq \beta$ и $F_1^c(x) \geq \beta$, а следовательно, найдутся $V, W \in T_\alpha \subset T_\alpha^\circ$ такие, что $V(x) \geq \beta - \varepsilon$, $W \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ и $F_1 \tilde{\subset} W \geq \beta - \varepsilon$ Для завершения доказательства осталось заметить, что в этом случае и $F \tilde{\subset} W \geq \beta - \varepsilon$

(4.9.) Предложение. $R_\alpha(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] = R_\alpha(X^\circ) \cap (\frac{1}{2}, 1]$ для каждого нечеткого пространства X

Доказательство. Согласно предыдущему утверждению для доказательства этого равенства достаточно проверить, что если $\beta \in R_\alpha(X^\circ)$ и $\beta > \frac{1}{2}$, то $\beta \in R_\alpha(X)$.

Пусть $x \in X$ $F \in T_\alpha^*$ $F(x) \leq \beta^c$. Поскольку $F \in T_\alpha^{\circ *}$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся V_ε , $W_\varepsilon \in T_\alpha^\circ$ такие, что $V_0(x) \geq \beta - \varepsilon$, $W_\varepsilon \tilde{\subset} V_\varepsilon^c \geq \beta - \varepsilon$ $F \tilde{\subset} W_\varepsilon \geq \beta - \varepsilon$ (как и обычно в таких [illegible] что $\beta - \varepsilon > \frac{1}{2}$). [illegible] определения ла[illegible] моди[illegible] и роли, которую играют множест[illegible] V_ε , W_ε [illegible] ясно, что без ограничения общности можно [illegible] считать, что V_ε [illegible] $V \wedge b$, где $V \in T_\alpha$ $b \in I$, и W_0 [illegible] $\bigvee_n (W_n \wedge a_n)$ [illegible] $W_n \in T_\alpha$ и $a_n \in I$ [illegible] всех $n \in N$. [illegible] заметим, [illegible] условия $V_\varepsilon(x) \geq \beta - \varepsilon$ следует, что $b \geq \beta - \varepsilon$, а [illegible] $b^c < \beta - \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $W_0 \tilde{\subset} V_0^c \geq \beta - \varepsilon$ [illegible] ем, что $W_0 \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$.

Обозначим через P множество всех $n \in N$ таких, что $a_n \geq \beta - \varepsilon$ [illegible] ложим $W_* = \bigvee_{n \in P} (W_n \wedge a_n)$ [illegible] что из условия $F \tilde{\subset} W_\varepsilon \geq \beta - \varepsilon$ следует справед[illegible] [illegible] ь [illegible] раве[illegible] на $F \tilde{\subset} W_* \geq \beta - \varepsilon$ и [illegible] и этом $W_* \tilde{\subset} V^c \geq W_0 \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$.

Положим $W_* = \bigvee_{n\in P} W_n$. Ясно, что $W\in T_\alpha, F\tilde{\subset} W \geq F\tilde{\subset} W_n > \beta-\varepsilon$ и при этом, поскольку $\alpha_n^c \leq \beta^c+\varepsilon < \beta-\varepsilon$ для всех $n\in P$ то неравенство $W_* \tilde{\subset} V^c \geq \beta-\varepsilon$ равносильно неравенству $W\tilde{\subset} V^c \geq \beta-\varepsilon$. Существование таких множеств W, $V\in T_\alpha$ и завершает доказательство.

(4.10.) Предложение. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i): i\in \mathcal{J}\}$ – семейство нечетких топологических пространств и $(X, \mathcal{T})$ – их произведение. Тогда $\bigcap_i R_\alpha(X_i)\subset R_\alpha(X)$ и, следовательно, $\bigwedge_i r_\alpha(X_i)\leq r_\alpha(X)$.

Доказательство. Пусть $\beta\in\bigcap_i R_\alpha(X_i)$. Рассмотрим $x=(x_i)_{i\in\mathcal{J}}\in X$ и $U\in T_\alpha$ такие, что $U(x)\geq\beta$. Из определения топологии произведения ясно, что без ограничения общности можно предполагать, что U имеет вид $U = \tilde{U}_{i_1}\wedge\ldots\wedge\tilde{U}_{i_n}$ для некоторых индексов $i_1, \ldots, i_n$, где $U_{i_k}\in T_\alpha^{i_k}$ и $\tilde{U}_{i_k}=P_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ ($P_{i_k}: X\to X_{i_k}$ – отображение проектирования); при этом очевидно, что $U_{i_k}(x_{i_k})\geq\beta$ для всех i_k.

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и, воспользовавшись тем, что $\beta\in R_\alpha(X_{i_k})$ для всех i_k, выберем $V_{i_k}\in T_\alpha^{i_k}$ и $N_{i_k}\in T_\alpha^{i_k*}$ таким образом, чтобы $V_{i_k}(x_{i_k})\geq\beta-\varepsilon$, $V_{i_k}\tilde{\subset} N_{i_k}\geq\beta-\varepsilon$ и $N_{i_k}\tilde{\subset} U_{i_k}\geq\beta-\varepsilon$. Тогда, как нетрудно заметить, $\tilde{V}_{i_k}(x_{i_k})\geq\beta-\varepsilon$, $\tilde{V}_{i_k}\tilde{\subset}\tilde{N}_{i_k}\geq\beta-\varepsilon$ и $\tilde{N}_{i_k}\tilde{\subset}\tilde{U}_{i_k}\geq\beta-\varepsilon$, где $\tilde{V}_{i_k}=P_{i_k}^{-1}(V_{i_k})$ и $\tilde{N}_{i_k}=P_{i_k}^{-1}(N_{i_k})$. Для завершения доказательства остается определить множества V, $N\in I^X$ равенствами $V=\bigwedge_{k=1}^n V_{i_k}$, $N=\bigwedge_{k=1}^n N_{i_k}$.

(4.11.) Предложение. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i): i\in\mathcal{J}\}$ – семейство непустых ламинированных нечетких пространств и $(X, \mathcal{T})$ – их произведение. Тогда $\bigcap_i R_\alpha(X_i) = R_\alpha(X)$ и, следовательно, $\bigwedge_i r_\alpha(X_i) = r_\alpha(X)$.

Доказательство. Зафиксируем $j\in\mathcal{J}$ и произвольную точку $x^c=(x_i^c)_{i\in\mathcal{J}}\in X$. Тогда подпространство $\tilde{X}_j = X_j\times\{(x_i^c): i\in\mathcal{J}, i\neq j\}$ произведения X ламинированных нечетких пространств гомеоморфно пространству X_j [22], а следовательно, согласно предложению 4.6, $R_\alpha(X_j) = R_\alpha(\tilde{X}_j)\supset R_\alpha(X)$. Отсюда и из предложения 4.10 и следует доказываемое равенство.

(4.12.) Замечание. Пусть $(X_1, \mathcal{T}_1)$ – ламинированное нечеткое пространство, а $(X_2, \mathcal{T}_2)$ – нерегулярное топогическое пространство. Тогда, к[ак] нетрудно видеть, для всех $\alpha \in (0,1]$ $r_\alpha(X_1) \geq \frac{1}{2}$, $r_\alpha(X_2)=0$, но $r_\alpha(X_1 \times X_2) = \frac{1}{2}$. Этот пример показывает, что требование ламинированности всех сомножителей в предыдущем предложении является существенным.

(4.13.) Предложение. Пусть $\{(X_i, \mathcal{T}_i): i \in \mathcal{J}\}$ семейство непустых нечетких пространств и $(X, \mathcal{T})$ – их произведение. Тогда $R_\alpha(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] = \bigcap\limits_i R_\alpha(X_i) \cap (\frac{1}{2}, 1]$ и, следовательно, $r_\alpha(X) \vee \frac{1}{2} = (\bigwedge\limits_i r_\alpha(X_i)) \vee \frac{1}{2}$.

Доказательство совершенно аналогично доказательству предложения 1.11.

Известно, что каждое регулярное топологическое T_1-пространство является хаусдорфовым. Следующее утверждение можно рассматривать как нечеткий аналог этого факта.

(4.14.) Теорема. Для каждого нечеткого пространства

(1) $S_\alpha^1(X) \cap R_\alpha(X) \cap (\frac{1}{2}, 1] \subset H_\alpha(X)$,

(2) если $s_\alpha^1(X)$ [=] 1, то $R_\alpha(X) \subset H_\alpha(X)$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения зафиксируем $\beta \in S_\alpha^1(X) \cap R_\alpha(X)$, $\beta > \frac{1}{2}$ и покажем, что $\beta \in H_\alpha(X)$.

Пусть $x, y \in X$ и $\varepsilon > 0$ таково, что $\beta - \varepsilon > \frac{1}{2}$. Выберем $U \in T_\alpha$, удовлетворяющее неравенствам $U(x) \geq \beta$ и $U^c(y) \geq \beta - \varepsilon$. Положим F [=] U^c. Тогда $F^c(x) \geq \beta$, а следовательно, найдутся $V, W \in T_\alpha$ такие, что $V(x) \geq \beta - \varepsilon$, $W \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ и $F \tilde{\subset} W \geq \beta - \varepsilon$. Из последнего неравенства, учитывая, что $F^c(y) = U(y) \leq \beta^c + \varepsilon < \beta - \varepsilon$, заключаем, что $W(y) \geq \beta - \varepsilon$. Существование таких V и W и доказывает, что $\beta \in H_\alpha(X)$.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим $\beta \in R_\alpha(X)$ и пусть $x, y \in X$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\beta - \varepsilon > \varepsilon$, и выберем $U \in T_\alpha$, удовлетворяющее условиям $U(x)$ [=] 1, $U^c(y) \geq 1 - \varepsilon$. Положим $F = U^c$; тогда $F^c(x) = 1$, а следовательно, найдутся $V, W \in T_\alpha$ такие, что $V(x) \geq \beta - \varepsilon$, $W \tilde{\subset} V^c \geq \beta - \varepsilon$ и $F \tilde{\subset} W \geq \beta - \varepsilon$. Из последнего неравенства и условия $F^c(y) = U(y) \leq \varepsilon$ заключаем, что $W(y) \geq \beta - \varepsilon$. Но это и означает, что $\beta \in H_\alpha(X)$.

Учитывая, что $H_\alpha(X) = [0, h_\alpha(X)]$ из предыдущей теоремы получаем

(4.15.) Следствие. Если $s^{1}_{\alpha}(X) \wedge r_{\alpha}(X) > \frac{1}{2}$, то $S^{1}_{\alpha}(X) \cap R_{\alpha}(X) \subset H_{\alpha}(X)$.

(4.16.) Следствие. Пусть для каждого $x \in X$ $\{x\} \in T^{*}_{\alpha}$. Тогда $R_{\alpha}(X) \subset H_{\alpha}(X)$.

(4.17.) Замечание. В "вырожденном" случае $\alpha = 0$ для каждого нечеткого пространства X $R_0(X)$ $[0,1]$ В самом деле, в этом случае в определении 4.1 можно положить $V = \{x\}$ W $1 - \{x\}$

Заключение

Все результаты данной (а также последующей [23]) работы могут быть условно разделены на две группы по следующему принципу. Одну (большую) группу составляют утверждения, справедливые для всего спектра рассматриваемого свойства (предложения 1.4, 1.5, 1.9, 4.10 и многие другие). Во вторую группу входят утверждения, справедливые только для тех значений β, принадлежащих спектру рассматриваемого свойства, которые больше, чем $\frac{1}{2}$ (таковы, например, предложения 1.6, 2.14 и др.). Такое положение вещей, по-видимому, следует считать естественным. Дело в том, что первую группу составляют, в основном, результаты, характеризующие поведение того или иного свойства по отношению к самому себе (например, связь между спектрами хаусдорфовости нечеткого пространства и его подпространства), а такие результаты имеют "абсолютный" характер. Вторую же группу составляют результаты, устанавливающие взаимосвязь либо между различными свойствами (например, связь между спектром регулярности и спектром хаусдорфовости нечеткого пространства), либо между одним свойством, но у разнородных объектов (например, связь между спектром хаусдорфовости нечеткого пространства и спектром хаусдорфовости его ламинированной модификации). Поэтому, для того, чтобы проявиться в достаточной степени и тем самым оказать влияние на нечеткую топологию в целом (а не только на свойства того же вида), рассматриваемое свойство должно "накопиться в достаточной степени", т.е. по крайней мере "превысить уровень неопределенности $\beta = \frac{1}{2}$".

Список литературы

1. Chang C.L. Fuzzy topological spaces// J.Math.Anal.Appl. - - 1968. - V. 24. - P. 182 - 190.
2. Дискин З.Б. О нечетких предикатах на нечетких множествах (на примере нечеткого пространства)//Топологические пространства и их отображения. - Рига,1985. - С. 59-70.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. - М., 1986.
4. Lowen R. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness// J.Math.Anal.Appl. - 1976. - V. 56.- P. 621 - 633.
5. Lowen R. A comparison of different compactness notions in fuzzy topology// J.Math.Anal.Appl. - 1978.-V.64.-P.446-454.
6. Lowen R. Compact Hausdorff fuzzy topological spaces are topological//Topology and Appl.-1981.-V.12.-P. 65 - 74.
7. Martin H.W. Weakly induced fuzzy topological spaces // J.Math.Anal.Appl. - 1980. - V.78. - P. 634 - 639.
8. Pu Pao-Ming, Liu Ying-Ming. Fuzzy topology I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence// J.Math.Anal.Appl. - 1980. - V. 77. - P. 20-37.
9. Rodabaugh S. The Hausdorff separation axiom for fuzzy topological spaces//Topology and Appl.-1980.-V.11.-P.319-334.
10. Rodabaugh S. Separation axioms and the fuzzy real lines // Fuzzy Sets and Syst. - 1983.-V.11.-P.163-183.
11. Sarkar M. On fuzzy topological spaces // J.Math.Anal.Appl.- 1981.- V.79.-P. 384-394.
12. Sarkar M. On L-fuzzy topological spaces // J.Math.Anal.Appl. - 1981.-V.84. - P. 431-442.
13. Srivastava R., Lal S.N., Srivastava A.K. Fuzzy Hausdorff topological spaces J.Math.Anal.Appl.-1981.-V.81.-P.497-506.
14. Srivastava R., Lal S.N., Srivastava A.K. Fuzzy T_1-topological spaces // J.Math.Anal.Appl.-1984.-V.102.-P. 442-448.
15. Srivastava R., Lal S.N., Srivastava A.K. On fuzzy Hausdorffness concepts// Fuzzy Sets and Syst.- 1985.-V.17.-P.67-71.
16. Šostak A.P., On fuzzy topological structures//Proc.13th Winter School on Abstract Analysis. - Srni.-1985.
17. Шостак А.П. Корефлексивные подкатегории нечетких топологических пространств//V Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям.-Кишинев, 1985. - С. 266 - 268.

18. Шостак А.П. О корефлексивных подкатегориях в категории нечетких топологических пространств // Теор. и прикладные вопросы математики 111.- Тарту, 1985.- С.44-50.
19. Шостак А.П. Корефлексивность в категориях нечетких топологических пространств // Непрерывные функции на топологических пространствах.- Рига, 1986.- С.159-165.
20. Шостак А.П. Степень компактности нечетких подмножеств в нечетких топологических пространствах // Латв. Матем. Ежегодник.- 1988.- Т.31.- С.181-198.
21. Šostak A.P. On Lindelofness and Countable Compactness degrees of fuzzy sets in fuzzy topological spaces // Congress Preprints of the Second IFSA Congress, IFSA'87.- Tokio, 1987.- P.324-327.
22. Šostak A.P. On compactness and connectedness degrees of fuzzy sets in fuzzy topological spaces // Proc.VI Prague Topol. Symp.-Heldermann Verlag.- Berlin, 1987.
23. Шостак А.П. Отделимость в нечетких топологических пространствах 11 // Латв. Матем. Ежегодник.- 1989.- Т.32.
24. Šostak A.P. Two decades of fuzzy topology.- Sofia, 1988.
25. Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Inform. and Control.- 1965.- V.8.- P.338-353.

Поступила 30 декабря 1986 года.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ПОЛИНОМОВ ДВУХ АРГУМЕНТОВ

Г.К.Энгелис
ЛГУ им. П.Стучки

В статье рассматриваются полиномиальные решения уравнения

$$yz''_{xx}+2z''_{xy}+xz'_x+yz'_y-Nz=0. \tag{1}$$

Это уравнение встречалось уже в [1] -случай VIII теоремы 18 - и к нему применимы некоторые теоремы из этой статьи. Но главные результаты статьи [1](теоремы 14 и 15) в этом случае не применимы, потому что коэффициент при z''_{xx} зависит от y. Основное содержание настоящей статьи составляют теоремы 7 и 10 - аналоги упомянутых теорем из [1] для уравнения (1). Попутно выясняются еще некоторые свойства изучаемых полиномов.

Отметим, что впервые уравнение (1) и его полиномиальные решения упоминались в статье [2], где доказано (в наших обозначениях) существование и единственность системы полиномов P_{mn}.

Теорема 1. При любом целом неотрицательном N для каждой пары (m,n) целых неотрицательных чисел таких, что $m+n=N$, уравнение (1) имеет единственное полиномиальное решение вида

$$P_{mn}(x,y)=x^m y^n+\sum z(m,n,k,l)x^k y^l \tag{2}$$

где суммирование распространяется на те пары (k,l) целых неотрицательных чисел, для которых выполняются неравенства

$$k-l\le m-n, \tag{3}$$

$$k+2l\le m+2n, \tag{4}$$

$$2k+l<2m+n. \tag{5}$$

Действительно, из теоремы 10 статьи [1] следует существование решения вида (2), где суммирование происходит по тем (k,l), для которых $k+l<m+n$. Рекурентная формула для коэффициентов $z(m,n,k,l)$, которые сокращенно

обозначим через $\mathfrak{z}_{kl}$, имеет вид

$$(N-k-l)\mathfrak{z}_{kl}+(k+2)(k+1)\mathfrak{z}_{k+2,l-1}+2(k+1)(l+1)\mathfrak{z}_{k+1,l+1}=0,$$

откуда и следует, что отличными от 0 могут быть только те $\mathfrak{z}_{kl}$, для которых выполняются условия (3) и (4). При этом хотя бы в одном условии должно быть строгое неравенство, и это обеспечивается неравенством (5).

Теорема 2. Полиномы P_{mn} удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial}{\partial x}P_{mn}=mP_{m-1,n},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)P_{mn}=nP_{m,n-1}.$$

Для доказательства достаточно проверить, что, если $\mathfrak{z}$ решение уравнения (1), то $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}$ и $\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\mathfrak{z}$ - решения этого же уравнения, где N заменено на $N-1$.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{J}$ - линейный функционал на множестве всех полиномов двух аргументов, определенный равенствами

$$\mathfrak{J}(x^k y^l)=\mu_{kl} \qquad (k,l=0,1,2,\dots),$$

где

$$\mu_{k0}=(-1)^k k!\,, \tag{6}$$

$$\mu_{l,k-3m}=\frac{(-1)^{k-3m}\,k!}{(3m-3)!\,3m} \qquad (m=1,2,\dots), \tag{7}$$

$$\mu_{kl}=0 \qquad для\ l\neq k-3m; \tag{8}$$

пусть

$$(p\,,q)=\mathfrak{J}(pq)\,;$$

тогда из $k+l\neq m+n$ следует

$$(P_{kl}\,,P_{mn})=0.$$

Существование такого линейного функционала $\mathfrak{J}$ обеспечивается теоремами 1 и 11 из [1]. В доказательстве теоремы 11 указано, что моменты μ_{kl} должны удовлетворять некоторой системе уравнений, которая для уравнения (1) имеет вид

$$l\mu_{k,l-1}+k\mu_{k-1,l+1}+\mu_{k+1,l}=0$$

$$k\mu_{k-1,l}+\mu_{k,l+1}=0.$$

Остается проверить, что (6),(7),(8) дают решение этой системы при начальном условии $\mu_{00}=1$.

Теорема 4. Пусть

$$\Delta_1 p=p_x'+yp,$$

$$\Delta_2 p = p'_y + (x - y^2)p;$$

тогда для каждого полинома p

$$\mathcal{H}(\Delta_1 p) = \mathcal{H}(\Delta_2 p) = 0.$$

Это следует из теоремы 5 статьи [1], если заметить, что для уравнения (1) имеем $\delta = \varepsilon = 1$, $\varkappa = y$, $\lambda = x - y^2$ и вместо $\mathcal{D}_5$, $\mathcal{D}_6$ писать Δ_1, Δ_2

Теорема 5. Пусть

$$p(x,y) = exp(xy - y^3/3);$$

тогда функция

$$Q_{mn}(x,y) = p^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n p \qquad (m,n = 0,1,2,\ldots)$$

– полином степени $m+n$ со старшим членом $x^n y^m$

Легко доказывается индукцией.

Теорема 6. Если $k<m$ или $k+2l<m+2n$, то

$$(x^k y^l, Q_{mn}) = 0.$$

Легко убедиться, что для каждого полинома p

$$p^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(pp) = p'_x + yp = \Delta_1 p,$$

$$p^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)(pp) = p''_{xx} + 2yp'_x + p'_y + xp = (\Delta_1^2 + \Delta_2)p$$

и $\quad \Delta_1\Delta_2 p = \Delta_2\Delta_1 p.$

Потому

$$Q_{mn} = \Delta_1^m(\Delta_1^2 + \Delta_2)^n 1 = \sum_{j=0}^{n} C_n^j(\Delta_1^{m+2j}\,\Delta_2^{n-j}1)$$

и достаточно доказать, что для каждого целого j, $0 \le j \le n$

$$\mathcal{H}(x^k y^l \Delta_1^{m+2j}\Delta_2^{n-j}1) = 0, \tag{9}$$

если $k<m$ или $k+2l<m+2n$.

Предварительно отметим, что для каждого натурального s

$$x\Delta_1^{s+1}p = \Delta_1^s(x\Delta_1 p - sp),$$

$$y\Delta_2^{s+1}p = \Delta_2^s(y\Delta_2 p - sp).$$

Пусть $k<m+2j$. Тогда существуют такие полиномы $q, q_1, \ldots, q_k$, что

$$x^k y^l \Delta_1^{m+2j}\Delta_2^{n-j}1 = x^k\Delta_1^{m+2j}(y^l\Delta_2^{n-j}1) = x^k\Delta_1^{m+2j}q =$$
$$= x^{k-1}\Delta_1^{m+2j-1}(x\Delta_1 q - (m+2j-1)q) = x^{k-1}\Delta_1^{m+2j-1}q_1 =$$
$$= \ldots = \Delta_1^{m+2j-k}q_k,$$

и (9) следует из теоремы 4.

Пусть теперь $k \ge m+2j$; так как $k+2l<m+2j+2n-2j$, то $l<n-j$, и существуют такие полиномы $r, r_1, \ldots r_l$ что

$$x^k y^l \Delta_1^{m+2j}\Delta_2^{n-j}1 = y^l\Delta_2^{n-j}(x^k\Delta_1^{m+2j}1) = y^l\Delta_2^{n-j}r =$$

$$=y^{l-1}\Delta_2^{n-j-1}(y\Delta_2 \tau-(n-j-1)\tau)=y^{l-1}\Delta_2^{n-j-1}\tau_1=\ldots=$$
$$=\Delta_2^{n-j-l}\tau_l.$$

Отсюда опять по теореме 4 следует (9). Теорема доказана.

Теоремы 5 и 6 вместе – аналог теоремы 6 из [1] Последняя теорема верна и для уравнения (1), но для определенных в [1] полиномов не верна следующая теорема:

Теорема 7. Последовательности функций P_{mn} и Q_{mn} связаны равенством

$$Q_{mn}(x,y)=P_{nm}(x,y).$$

Для доказательства теоремы строим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции

$$p \quad u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m p,\ v=\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^n u,\ z=p^{-1}u=Q_{mn}.$$

Легко подсчитать, что

$$yp''_{xx}+2p''_{xy}-xp'_x-yp'_y-2p=0.$$

Дифференцируя обе части этого равенства m раз по x, получаем

$$yu''_{xx}+2u''_{xy}-xu'_x-yu'_y-(m+2)u=0.$$

Действуя на обе части последнего равенства n раз оператором $\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, убеждаемся, что

$$yv''_{xx}+2v''_{xy}-xv'_x-yv'_y-(m+n+2)v=0,$$

и получаем

$$yz'_{xx}+2z''_{xy}+xz'_x+yz'_y-(m+n)z=0.$$

Итак, Q_{mn} удовлетворяет уравнению (1) с $N=m+n$ Отсюда, учитывая теорему 5, получаем нужное.

Теорема 8. Для полиномов P_{mn} верны рекуррентные соотношения

$$P_{mn}=yP_{m,n-1}+mP_{m-1,n+1} \quad (n>0), \qquad (10)$$

$$P_{mn}=xP_{m-1,n}+2(m-1)P_{m-2,n+1}+nP_{m-1,n+1} \quad (m>0). \qquad (11)$$

Для доказательства равенства (10) используем теоремы 7 и 2: $P_{mn}=Q_{nm}=\Delta_1^n(\Delta_1^2+\Delta_2)^m 1=\Delta_1 Q_{n-1,m}=\Delta_1 P_{m,n-1}=$

$$=\frac{\partial}{\partial x}P_{m,n-1}+yP_{m,n-1}=yP_{m,n-1}+mP_{m-1,n-1}.$$

Аналогично доказывается (11), только здесь учитывается и (10):

$$P_{mn} = (\Delta_1^2+\Delta_2)P_{m-1,n} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}P_{m-1,n} + 2y\frac{\partial}{\partial x}P_{m-1,n} + \frac{\partial}{\partial y}P_{m-1,n} +$$
$$+ xP_{m-1,n} = xP_{m-1,n} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}P_{m-1,n} + yP_{m-1,n}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}P_{m-1,n} +$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}P_{m-1,n} = xP_{m-1,n} + 2\frac{\partial}{\partial x}P_{m-1,n+1} + nP_{m-1,n-1} =$$
$$= xP_{m-1,n} + 2(m-1)P_{m-1,n+1} + nP_{m-1,n-1}.$$

Теорема 9. Пусть $\widehat{P}_{mn}$ обозначает полином, который получается, если в полиноме P_{mn} отбросить те мономы, в которых $k-l<m-n$; тогда

$$\widehat{P}_{mn} = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{m!n!}{(m-k)!(n-k)!k!} x^{m-k} y^{n-k} \qquad (12)$$

где $\nu = \min\{m,n\}$.

В случае $m=n=0$ справедливость утверждения очевидна. Если $m+n>0$, $m\le n$, то из (10) следует

$$\widehat{P}_{mn} = (\widehat{y P_{m,n-1}}) + m\widehat{P}_{m-1,n-1},$$

а если $m+n>0$, $n\le m$ то из (11)

$$\widehat{P}_{mn} = (\widehat{xP_{m-1,n}}) + n\widehat{P}_{m-1,n-1}.$$

Теперь (12) доказывается индукцией по $m+n$.

Лемма. Если $m\ge 0$, $n\ge 0$ и

$$\binom{k}{l} = \frac{k(k-1)\dots(k-l+1)}{l!},$$

то

$$\sum_{j=0}^{\nu} (-1)^j \binom{m}{j}\binom{m+n-j}{n-j} = 1. \qquad (13)$$

Утверждение леммы вытекает из равенства коэффициентов при x^n в обеих частях равенства

$$(1+x)^m(1+x)^{-m-1} = (1+x)^{-1}.$$

Теорема 10. Для всех целых неотрицательных i, j, m, n

$$(P_{ij}, P_{mn}) = (-1)^{m+n} m!n!\,\delta_{in}\delta_{jm} \qquad (14)$$

где δ_{in} - символ Кронекера.

Если $i+j\ne m+n$, то (14) следует из теоремы 3. Если же $i+j=m+n$, но $i\ne n$, то либо $i<n$, либо $i+2j<n+2m$ По теореме 1 P_{ij} содержит только такие мономы $x^k y^l$, для которых либо $k\le i$ (что легко следует из (3)-(5)), либо $k+2l\le i+2j$. На основании теорем 7 и 6 можно писать

$$(P_{ij}, P_{mn}) = (P_{ij}, Q_{mn}) = 0,$$

и (14) опять верно. Наконец, пусть $i=n$, $j=m$. Тогда полином P_{nm} можно написать и в виде

$$P_{nm}(x,y) = x^n y^m + \sum_{k+l<m+n} \alpha(m,n,k,l) P_{kl}(x,y),$$

потому

$$(P_{nm}, P_{mn}) = (x^n y^m, P_{mn}) = \mathcal{J}(x^n y^m \widetilde{P}_{mn}) + \mathcal{J}(x^n y^m (P_{mn} - \widetilde{P}_{mn})).$$

Но разность $P_{mn} - \widetilde{P}_{mn}$ содержит только такие мономы $x^k y^l$, для которых $k-l<m-n$, потому произведение $x^n y^m (P_{mn} - \widetilde{P}_{mn})$ содержит только такие мономы $x^k y^l$, для которых $k-l<0$, но тогда по (8) $\mu_{kl} = 0$.

Итак, используя (12) и (13), получим

$$(P_{nm}, P_{mn}) = \mathcal{J}\left(\sum_{k=0}^{\nu} \frac{m!\,n!}{(m-k)!(n-k)!k!} (xy)^{m+n-k}\right) =$$

$$= m!\,n! \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(-1)^{m+n-k}(m+n-k)!}{(m-k)!(n-k)!k!} = (-1)^{m+n} m!\,n! \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{m}{k}\binom{m+n-k}{n-k} =$$

$$= (-1)^{m+n} m!\,n!\,,$$

что опять равносильно (14).

Список литературы

1. Энгелис Г.К. О некоторых двумерных аналогах классических ортогональных полиномов // Латвийский математический ежегодник.- 1974.- Т.15.- С.169-202.
2. Krall H.L., Sheffer I.M. Orthogonal polynomials in two variables // Annali di matematica pura ed applicata. - 1967.- V.76.- P.325-376.

Поступила 12 марта 1986 года.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все результаты, изложенные в статьях сборника, имеют теоретический характер. Области их возможного применения - общая топология (прежде всего топологическая алгебра, исследование пространств непрерывных функций, теория равномерных пространств, теория нечетких топологических структур, эквивариантная топология), функциональный анализ (теория сплайнов, теория линейных операторов, метод неподвижной точки), теория вероятностей, а также другие разделы теоретико-множественной математики. За пределами теоретической математики результаты сборника могут представить определенный интерес для специалистов, работающих в области теоретической физики, биологии, психологии и в других областях современной науки, в которых используются топологические методы исследования объектов и применяются топологические модели изучаемых процессов.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ
И ИХ ОТОБРАЖЕНИЕ

Сборник научных трудов

Рецензенты: Е.Ф.Царьков, зав.каф.прикладной мат. РПИ, доктор физ.мат.наук;
Л.Кацнельсон, зав.отд. ВЦ ЛГУ им. П.Стучки, ст.науч.сотр.;
Я.Цепитис, ст.преп. каф. дифференц. уравн., ЛГУ им. П.Стучки

Редакторы: Е.Энгельсон, Р.Павлова

Технический редактор С.Алпиня

Корректор И.Балоде

Подписано к печати 4.02.87 ЯТ 05304 Ф/б 60х84/16.
Бумага №1. 13,0 физ.печ.л. 12,1 усл.печ.л. 8,5 уч.-изд.л.
Тираж 400 экз. Зак. №1062 Цена 1 р. 30 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, 226050 Рига, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 513.83

Проективные объекты и накрытия категории G-простанств.
Агеев С.М.–С., 5-14.

Проблема исследования проективных объектов и накрытий в категории топологических групп преобразований (или G-пространств) неоднократно ставилась В.И.Пономаревым и Ю.М. Смирновым. Частичное ее решение было дано А.Кадыровым. Отправной точкой Кадырова явилось следование категорному определению основных понятий; при этом полученные результаты несколько упрощают ситуацию: оказалось, что пространства эквивариантно соабсолютны в том и только в том случае, когда их пространства орбит соабсолютны.

В данной работе предлагается иной подход к этой проблеме. Определение проективных объектов тесно связывается со строением стабилизаторов точек исходных пространств, а существенными модификациями становятся эквивариантные и в обычном смысле неприводимые отображения. При этом построение требуемых объектов стало возможным с помощью теории θ-близости, а их свойства оказалось возможным сопрячь с действием группы. Библ. - 9 назв.

УДК 519.6

Оценка ошибки сплайн-интерполяции
Асмусс С.В. –С. 15-26.

В статье предлагается метод оценки ошибки сплайн-интерполяции элементов гильбертова пространства. На его основе изучается погрешность приближения функций сплайнами пространства $S(T,A)$ в случае, когда T - оператор дифференцирования. Получено интегральное представление ошибки и установлено, что ошибка интерполяции функции пространства Соболева полностью определяется ее дифференциальными свойствами и погрешностью приближения усечённых степенных функций.

Этот метод реализован в статье для простых, эрмитовых сплайнов и сплайнов для локальных средних. Библ. - 8 назв.

УДК 517.988.52

О конечных покрытиях n-мерной сферы и теореме Люстерника
Баланов З.И.- С. 27-33.

Известно, (А.С.Шварц) что, если на $(n-1)$-мерной сфере задано действие конечной циклической группы G порядка p $\dim(Fix\,G)=k$, то $\tau(S^{n-1}\setminus Fix\,G)\geqslant n-k-1$, ($\tau$ - род соответствующего множества; $Fix\,G=\{x\in S^{n-1}\ \exists g\in G\setminus\{1\},\ gx=x\}$).

В данной работе эта теорема обобщается на произвольные конечные группы. Полученный результат позволяет распространить известную теорему Люстерника о существовании счетного числа различных критических точек слабо непрерывных равномерно дифференцируемых четных функционалов на функционалы, симметричные относительно конечных групп гомоморфизмов. Библ. - 5 назв.

УДК 519.3

К одной задаче оптимального управления смешанной системой уравнений.
Вушан Я.П. - С.34-46.

В работе получены необходимые условия оптимальности в виде принципа максимума для одного класса задач оптимального управления обьектами, описываемыми смешанными системами дифференциальных уравнений, состоящими из линейного уравнения эллиптического типа и системы обыкновенных дифференциальных уравнений, функциональный вид которых задается при помощи решения и первых производных решения эллиптического уравнения. Библ. - 8 назв.

УДК 519.6

О сплайнах в гильбертовом пространстве в случае, когда ядро оператора сглаживания содержится в ядре оператора интерполяции
Гольдман М.А.- С. 47-61.

В статье изучается пространство сплайнов S в случае, когда $\mathcal{N}(T)\subset\mathcal{N}(A)$ Решена задача построения базиса пространства $T(S)$ и для интерполяционного сплайна s получено выражение Ts через элементы этого базиса. Рассматривается также вопрос о сглаживающих сплайнах.

Результаты применяются к исследованию пространства сплайнов для односторонних производных. Получены формулы для базисных элементов пространства $T(S)$ Приводится описание построения интерполяционного сплайна. Библ. - 2 назв.

УДК 515.1

Об операторах внутренности в топосе пучков.
Заричный М.М.- С. 62-65.

Дается описание категории топологических пространств в топосе пучков над топологическим пространством. Топологические пространства в топосе определяются при помощи оператора внутренности. Библ. - 3 назв.

УДК 515.1

(M,I)-абсолюты и их характеризация.
Колдунов А.В. - С.66-75.

В разное время и с различными целями вводились прообразы специального вида данного топологического пространства. Нетрудно выделить два основных подхода к введению этих прообразов - в первом из них требуемый объект строился как предел некоторого семейства (спектра) прообразов исходного пространства T , в этом случае получившееся пространство T' обычно характеризуется как наименьший (в определенном смысле) прообраз T ($\tau: T' \to T$) с некоторым (наперед известным) свойством.

Другой подход, в отличие от первого, ориентирован на получение прообразов, допускающих достаточно естественные внутренние описания. При этом искомый объект строится как семейство ультрафильтров некоторого решетчато-упорядоченного семейства.

Изучение этих и других классов прообразов топологического пространства позволяет заметить некоторые общие конструкции и ситуации. Это обстоятельство и послужило основой для введения автором в данной работе (M,I)-абсолютов и получении для них теорем-характеризаций, обобщающих известные результаты [illegible] конкретных прообразах топологических пространств. [illegible] назв.

УДК 513.88

О связи компактной аппроксимации с регулярной и устойчивой сходимостью.
Лабеев В.И.- С 76-83.

В работах Г.М.Вайникко наряду с компактной аппроксимацией линейных непрерывных отображений рассматриваются еще две аппроксимационные схемы: регулярная сходимость и устойчивая сходимость. В данной статье изучается взаимосвязь между этими сходимостями. Библ. - 2 назв.

УДК 513.88

О связи секвенциально компактной аппроксимации с равномерной сходимостью.
Левченков В.С.- С. 84-8?

Получено одно обобщение теоремы о связи секвенциально компактной аппроксимации со сходимостью по норме из предыдущей работы автора. Библ. - 1 назв.

УДК 517.98

Эта точка - неподвижна.
Лиепиньш А.Х.- С. 87-88.

Показано, что если в метрическом пространстве X, компактном в смысле некоторого оператора замыкания S, отображение $f: X \to X$ уменьшает диаметры S-замыканий орбит точек, то f имеет неподвижную точку. Библ. - 2 назв.

УДК 515.12

Свойства Бэра и линейные изоморфизмы пространств непрерывных функций.
Окунев О.Г., Шахматов Д.Б.- С. 89 - 92.

Построен пример, из которого следует, что следующие свойства не сохраняются отношением M-эквивалентности (и тем более отношением ℓ-эквивалентности) даже в классе пространств со счетной базой (1) свойство Бэра; (2) псевдополнота; (3) свойство содержать всюду плотное по Чеху подпространство. Тем самым получен ответ на вопрос А.В.Архангельского. Библ. - 10 назв.

У

УДК 515.12 + 512.546

Замечание о топологизации групп.
Пестов В.Г.– С. 93–95.

Недавно А.В.Архангельским был поставлен вопрос Верно ли, что на любой группе, допускающей недискретную топологизацию, существует недискретная метризуемая групповая топология? В данной заметке получен отрицательный ответ на этот вопрос. Более того, показано, что класс недискретно топологизируемых групп значительно шире класса групп, допускающих недискретную метризуемую топологию. Библ. – 4 назв.

УДК 515.12

О некоторых свойствах экспоненты в топологии Виеториса.
Попов В.Б. –С. 96–101.

Основные результаты работы Если пространство X финально компактно, то его экспонента $\exp X$ является Q - пространством. Если $\exp X$ $\aleph_0$-хаусдорфово, то X счетно компактно (а следовательно, для слабо паракомпактного пространства X следующие условия эквивалентны : (а) $\exp X$ $\aleph_0$-хаусдорфово; (б) X – бикомпакт; (в) $\exp X$ бикомпакт). Библ. – 4 назв.

УДК 517.95

Сохранение потенциальности при G-сходимости монотонных операторов.
Райтум У.Ё.– С. 102–105.

Основной результат Пусть V – вещественное банахово пространство, V' – сопряженное с ним пространство. Доказано, что если последовательность A_k $V \to V'$ потенциальных равномерно монотонных и ограниченно равномерно непрерывных операторов G-сходится к оператору A_0 $V \to V'$, то оператор A_0 также является потенциальным, равномерно монотонным и непрерывным. Библ. – 4 назв.

УДК 515.12

Функциональная и слабая функциональная теснота.
Резниченко Е.А.– С. 106–110.

Основной результат. Пусть τ - неизмеримый (по Уламу) кардинал и $\tau^{\aleph_0} = \tau$. Тогда существует тихоновское пространство X, у которого функциональная теснота равна τ, а слабая функциональная теснота счетна. (Тем самым получаем ответ на известный вопрос А.В.Архангельского.) Библ. - 5 назв.

УДК 519.652

Интерполяционные рациональные кубические сплайны.
Римша Э.А.- С. 111-116.

Изучаются рациональные кубические сплайны, причем используется подход, предложенный Б.И.Квасовым для построения рациональных параболических сплайнов. По интерполяционным и некоторым другим условиям строится сплайн; устанавливается единственность сплайна, удовлетворяющего этим условиям. Библ. - 2 назв.

УДК 517.52

Применение F-A-метода для обращения интегрального преобразования Фурье.
Смотрова Я.А.- С. 117-127.

Обращение интегрального преобразования Фурье - это задача отыскания решения f уравнения $\mathcal{F}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixz} dx$,

где $\mathcal{F}$ - заданная функция, аналитическая в некоторой полосе $-\varepsilon_1 < \operatorname{Im} z < \varepsilon_2$. Данная статья посвящена построению алгоритмов приближенного обращения преобразования Фурье, в которых используются асимптотические разложения. Библ. - 7 назв.

УДК 515.12

Свободные топологические группы не допускают $\varkappa$-метризации.
Ткаченко М.Г.- С. 128-138.

Показано, что свободные топологические группы $F(X)$ и $A(X)$ $\varkappa$-метризуемы, если и только если пространство X дискретно. В частности, пространства групп $F(X)$ и $A(X)$ вкладываются в произведение метризуемых пространств в качестве всюду плотных подпространств только для дискретного пространства X . Доказано, что для недискретного X свободная топологическая группа $F(X)$ не имеет σ-решетки (в смысле Е.В.Щепина) из d-открытых отображений на пространства счетного веса. Библ. - 13 назв.

УДК 513.88

Критерии ультраполноты равномерного пространства.
Федорова В.П. -С. 139-143.

Доказано, что свойство ультраполноты отделимого равномерного пространства равносильно выполнению некоторой теоремы типа Стоуна-Вейерштрасса в пространстве равномерно непрерывных функций. Попутно получены и другие критерии полноты. Библ. - 5 назв.

УДК 519.21

О сходимости линейных стохастических итераций.
Царькова В.Н., Матвеев Ан.А.- С.144-151.

На вероятностном пространстве рассматривается итерационная процедура, определенная линейным разностным стохастическим уравнением $\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + Bx_n \xi_{n+1} \\ x_0 = x \end{cases}$,

где A , B - матрицы размерности $m \times m$, $x \in R^m$, ξ_n - последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин, $E\xi_n = 0$, $D\xi_n < \infty$ Изучается устойчивость (в том или ином смысле) тривиального решения этого уравнения. Найден критерий экспоненциальной p-устойчивости ($p>0$) тривиального решения. Показано, что из экспоненциальной p-устойчивости тривиального решения при некотором $p>0$ следует, что оно и асимптотически устойчиво почти наверное. Указаны также некоторые условия, достаточные для того, чтобы из асимптотической устойчивости почти наверное тривиального решения следовала бы его экспоненциальная p-устойчивость при всех достаточно малых $p>0$
Библ. - 3 назв.

УДК 514.17 + 515.1

Выпуклость в пространствах межности.
Цирулис Я.П.- С. 152-161.

Понятие пространства межности (X, ρ) введено автором в предыдущей работе (РЖмат, 1983, 11А660). Там же рассматривалась естественная T_1-топология τ_ρ на пространстве межности. В данной работе для каждого пространства межности (X, ρ) естественным образом определяется выпуклость C_ρ; показано, что эта выпуклость полностью определяет породившую ее межность. Дана также характеристика межностных выпуклостей в терминах т.н. интервальных функций. Одновременно установлено, что в терминах таких функций пространства межности, а также топология τ_ρ были описаны ранее Бойкулеску (РЖмат, 1968, 7А425). Библ. - 6 назв.

УДК 517.57

Доказательство одного численного неравенства.
Черанс К.Х.- С. 162-164.

Показано, что для каждого натурального $y > 1$ и каждого $x \in]y, +\infty[$ имеет место неравенство

$$y x^y (y^x - (y-1)^x) - x y^x (x^y - (x-1)^y) > 0$$

Тем самым дан ответ на вопрос, сформулированный в разделе нерешенных проблем журнала "American Mathematical Monthly". Библ. - 1 назв.

УДК 515.12

Отделимость в нечетких топологических пространствах.
Шостак А.П. - С. 165-186.

При исследовании тех или иных свойств нечетких множеств в нечетких пространствах на рассматриваемые пространства нередко приходится накладывать различные условия типа отделимости. Целью данной работы является систематическое изучение свойств типа T_0-, T_1-, T_2- и T_3-отделимости в нечетких пространствах. Основное внимание уделяется свойствам типа хаусдорфовости в нечетких пространствах. Как и следовало ожидать (по аналогии с общей топологией), в нечеткой топологии условия типа хаусдорфовости играют важную роль. В частности, большое значение они имеют при изучении свойств типа компактности.

Отделимость в нечетких пространствах в той или иной форме рассматривались ранее рядом авторов (Родабаух. Сривастава, Саркар и др). Наиболее существенные отличия предлагаемой здесь схемы от рассматриваемых ранее сводятся к следующему. Во-первых, данная схема применима к общим нечетким топологическим пространствам, а не только к Чанговским пространствам. Во-вторых, уже в случае Чанговских пространств данная схема значительно отличается от предыдущих, поскольку в ее основу положено отношение нечеткого включения, а не понятие нечеткой точки и отношение неравенства $\leq$ между нечеткими множествами, как это имеет место в предыдущих схемах. Библ. - 25 назв.

УДК 517.5

Об одном семействе полиномов двух аргументов.
Энгелис Г.К.- С. 187-192.

Изучаются полиномиальные решения уравнения $yz''_{xx}+2z''_{xy}+ + xz'_x+yz'_y-Nz=0$. Это уравнение встречалось в предыдущей работе автора (Ржмат, 1974, 10Б405), однако основные результаты - теоремы 14 и 15 из (Ржмат, 1974, 10Б405), в этом случае неприменимы, т.к. коэффициент при z''_{xx} зависит от y Основное содержание настоящей статьи составляют аналоги вышеупомянутых теорем для данной ситуации. Библ. - 2 назв.