ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР
ЛАТВИЙСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени П. СТУЧКИ

Эвалдс Алексович
И К А У Н И Е К С

И Н Ф О Р М А Ц И О Н Н Ы Е С В О Й С Т В А
С О Т О О Б Р А З Н Ы Х С Т Р У К Т У Р

(01.01.09 - математическая кибернетика)

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук

Р И Г А
1 9 7 2

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию информационных свойств сотообразных структур. Сотообразные структуры, введенные фон Нейманом [57] в связи с изучением возможностей самовоспроизведения автоматов, в последнее время привлекают все большее внимание математиков. Сотообразные структуры (в других терминах - клеточные автоматы, однородные среды) могут служить при моделировании различных процессов, происходящих в больших системах с локальным взаимодействием. Однако, еще важнее то, что сотообразные структуры представляют собой удобную абстрактную модель вычислительных устройств. Большие перспективы имеет также непосредственное использование технических реализаций блоков сотообразных структур в вычислительных машинах. Эти применения требуют разработки основ абстрактной теории сотообразных структур. Из работ этого направления отметим, например, работы Ямады и Аморозо [74-76], Смита [62-66] и Бэнкса [35].

В главе I дается обзор абстрактной теории бесконечных сотообразных структур. (Обширная литература по конечным итеративным сетям не рассматривается). В § I-2 главы I приводятся определения сотообразных структур, а также основных информационных понятий - взаимно стираемых конфигураций (ВСК) и "райских садов" (РС). В § 3-5 дается обзор основных работ по теории детерминированных сотообразных структур, а в § 6 рассматриваются работы по стохастическим структурам.

В главе I также показано, какое место в общей картине теории сотообразных структур занимают результаты автора, изложенные в последующих главах.

Глава 2 посвящена теории детерминированных структур. В § I доказывается обобщение теоремы Мура-Майхилла (см. [54] , [56])и исследуется взаимосвязь между различными конечными и глобальными понятиями РС и ВСК. В § 2 рассматривается самовоспроизведение в структурах специального типа. Аналогичными вопросами одновременно и независимо занимались также американские математики (см. [3I] и [59]). § 2 содержит окончательное решение рассмотренных ими вопросов. В § 3-4 при помощи вероятностных методов доказывается, что в почти всех структурах имеются ВСК и РС специальных видов. Этим решается проблема, поставленная Муром [54] . В § 5 сформулированы некоторые нерешенные проблемы и недоказанные гипотезы из теории сотообразных структур.

В главе 3 рассматривается одна стохастическая модель хранения информации, которая связана с задачей о голосовании со случайной ошибкой [IO] . В § I это голосование обобщается сначала на случай к состояний и m голосующих. В модели главы 3 применяются еще более общие преобразования, в которых сохранены лишь самые существенные свойства голосования со случайной ошибкой. В § 2 определена сама модель, которая характеризуется глобальным взаимодействием в системах, состоящих из конечного, но изменяющегося во времени числа автоматов. В § 3-4 найдены достаточные условия эргодичности и сохранения информации в таких системах.

Глава I

ОБЗОР СОСТОЯНИЯ ТЕОРИИ СОТООБРАЗНЫХ СТРУКТУР

§ I. Определение сотообразной структуры

Сотообразной структурой будем называть пятерку $(Z^n, S, s_0, \mathcal{J}, \sigma)$, где

Z^n – n – мерная целочисленная решетка (сотообразное пространство);

$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}\}$ – конечное множество (множество состояний);

s_0 – выделенный элемент множества S (состояние покоя);

$\mathcal{J} = (\vec{\mathcal{J}}_1, \vec{\mathcal{J}}_2, \ldots, \vec{\mathcal{J}}_m)$ – конечный упорядоченный набор различных n – мерных векторов с целочисленными координатами (индекс соседства);

$\sigma : S^m \to S$ – функция, определенная на всех m -ках $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \in S$, и принимающая значения из S, при чем

$$\sigma(s_0, s_0, \ldots, s_0) = s_0 \qquad (I.I)$$

(функция перехода или локальное преобразование).

Элементы сотообразного пространства (n – мерные векторы с целочисленными координатами) будем называть ячейками. Соседями ячейки $\vec{J}$ будем называть ячейки $\vec{J} + \vec{\mathcal{J}}_1, \ldots, \vec{J} + \vec{\mathcal{J}}_m$.

Глобальной конфигурацией с будем называть функцию $c: Z^n \to S$, которая каждой ячейке $\vec{J}$ сопоставляет состояние $c(\vec{J}) \in S$. Множество всех глобальных конфигураций обозначим через C.

Сужение глобальной конфигурации с на конечный блок $X \subset Z^n$ будем обозначать через $(c)_X$ и называть конфигурацией блока X.

Локальное преобразование σ определяет глобальное преобразование

$$\tau : C \to C :$$

для любой ячейки $\vec{J} \in Z^n$

$$\tau(c)(\vec{J}) = \sigma\left(c(\vec{J}+\vec{\mathcal{J}}_1), \ldots, c(\vec{J}+\vec{\mathcal{J}}_m)\right). \qquad (I.2)$$

Введем теперь дискретное время $t = 0, 1, 2, \ldots$ Каждому моменту времени t сопоставим глобальную конфигурацию c_t (состояние сотообразного пространства) по следующему закону: пусть произвольно фиксировано $c_0 \in C$, тогда

$$\begin{aligned} &c_1 = \tau(c_0),\ c_2 = \tau(c_1) = \tau^2(c_0), \ldots, \\ &c_t = \tau(c_{t-1}) = \tau^t(c_0). \end{aligned} \qquad (I.3)$$

Таким образом, состояние ячейки $\vec{J}$ в момент времени $t+1$, согласно (I.2), определяется состояниями всех ее соседей в момент t.

Отметим, что сотообразную структуру можно рассматривать как автономный автомат без выхода с бесконечным множеством состояний C.

Часто ограничиваются конфигурациями, в которых только конечное число ячеек находится в состояниях, отличных от состояния покоя s_0. Такие конфигурации будем называть конечными глобальными конфигурациями, а множество всех конечных глобальных конфигураций обозначим через C_F. Таким образом, $c \in C_F$ тогда и только тогда, если

$$sup\ c = \{\vec{J} \mid c(\vec{J}) \neq s_0\} \tag{I.4}$$

конечно.

Из (I.I) следует, что $\tau(c) \in C_F$, если только $c \in C_F$, т.е. множество C_F замкнуто относительно глобального преобразования τ.

Попутно отметим, что Бэркс [37] конфигурации класса C_F называет алгорифмическими конфигурациями. На наш взгляд было бы естественное называть алгорифмическими конфигурации более широкого класса, а именно, те конфигурации c, для которых функция $c : Z^n \to S$ является рекурсивной. Очевидно, этот класс тоже замкнут относительно τ.

	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
t = 0																	1																
1																1	1	1															
2															1		1		1														
3														1	1		1		1	1													
4													1				1				1												
5												1	1	1		1	1	1		1	1	1											
6											1		1				1				1		1										
7										1	1		1	1		1	1	1		1	1		1	1									
8									1								1								1								
9								1	1	1						1	1	1						1	1	1							
10							1		1		1				1		1		1				1		1		1						
11						1	1		1		1	1		1	1		1		1	1		1	1		1		1	1					
12					1				1								1								1				1				
13				1	1	1		1	1	1						1	1	1						1	1	1		1	1	1			
14			1		1				1		1				1		1		1				1		1				1		1		
15		1	1		1	1		1	1		1	1		1	1		1		1	1		1	1		1	1		1	1		1	1	
16	1																1																1

Рис. 1

Структуры с k состояниями, $|S| = k$, будем сокращенно называть k – структурами.

Рассмотрим подробнее функцию перехода σ. Очевидно, σ можно рассматривать как функцию k – значной логики. Пусть фиксировано Z^n, $\exists = (\vec{\exists}_1, \dots, \vec{\exists}_m)$ и $S = \{s_0, s_1, \dots, s_{k-1}\}$. Тогда σ можно выбрать

$$M_k = k^{k^m - 1} \qquad (I.5)$$

различными способами. Действительно, σ можно задать таблицей с k^m наборами значений аргументов, причем на одном из них значение функции уже определено условием (I.I). Таким образом, число различных k – структур с фиксированным $\exists$, $|\exists| = m$, равно $k^{k^m - 1}$.

<u>Пример сотообразной структуры</u>. Рассмотрим одномерную 2 – структуру с $\exists = (-1, 0, 1)$. Ради удобства обозначим $s_0 = 0$, $s_1 = 1$. Функцию перехода зададим формулой

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = [x_1 + x_2 + x_3]_{mod\,2}. \qquad (I.6)$$

Выберем начальную конфигурацию c_0 : $c_0(0) = 1$, $c_0(i) = 0$, $i \neq 0$.

Развитие этой конфигурации до $t = 16$ изображено на Рис. I (пустая ячейка соответствует состоянию покоя 0).

Отметим, что обобщения этой структуры рассматриваются в § 2 главы 2.

Около 1950 года Дж. фон Нейман [57] начал исследовать способность автоматов к самовоспроизведению. С этой целью он рассматривал кинематическую модель самовоспроизведения: автомат движется по складу запасных частей и собирает точную копию самого себя. Следуя совету С. Улама, Дж. фон Нейман перешел к более абстрактной модели - сотообразным структурам, которая уже допускает математическое описание. Роль самовоспроизводящихся автоматов здесь играют подходящие конфигурации.
Дж. фон Нейман предложил двумерную структуру с 29 состояниями и естественным индексом соседства

$$\mathcal{E} = (\{0,0\}, \{-1,0\}, \{0,-1\}, \{1,0\}, \{0,1\}), \qquad (1.7)$$

в которой возможно самовоспроизведение. К сожалению, работа фон Неймана осталась незаконченной.*

Разработкой и улучшением модели фон Неймана занимались Беркс [38-40], Тэчер [68-69] и др.

Первой работой, посвященной общей теории сотообразных структур, является популярная статья Мура [54], опубликованная в 1962 г. Около 1970 года теория сотообразных структур начинает бурное развитие, ей посвящены работы Ямады и Аморозо [74-76], Смита [62-66], Бэнкса [35] и др. авторов.

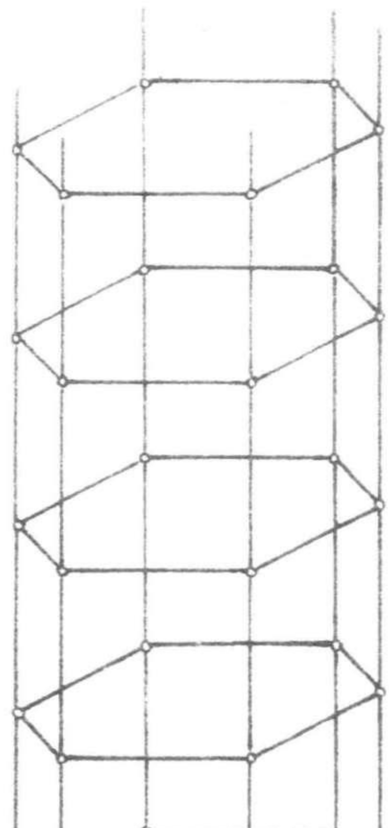


Рис. 2

В некоторых из этих работ (см. напр. [74]) предлагаются обобщения приведенного выше определения сотообразной структуры.

Так, роль сотообразного пространства может играть любая аддитивная абелева группа G с конечным числом образующих. Соседями ячейки g являются ячейки $g+g_1, g+g_2, \ldots, g+g_m$, где $(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ - фиксированный конечный набор различных элементов группы G (индекс соседства). Это обобщение позволяет рассматривать пространства различной топологии. Пусть, например, абелева группа G имеет две образующих a и b и одно определяющее соотношение $6a=0$. Тогда пространство можно интерпретировать как дискретный цилиндр (см. Рис. 2). Если добавить еще одно определяющее соотношение (напр., $8b=0$), получим конечное пространство - дискретный тор. Свойства таких обобщенных структур еще не исследовались.

Далее, Ямада и Аморозо [74-75] рассматривают обобщенные структуры, в которых вместо одного локального преобразования σ дается множество $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_c\}$ локальных преобразований. В каждый момент времени может применяться глобальное преобразование, соответствующее одному локальному преобразованию из Σ. При интерпретации структуры автоматом Σ играет роль входного алфавита (автомат выбирает преобразование под воздействием внешней среды).

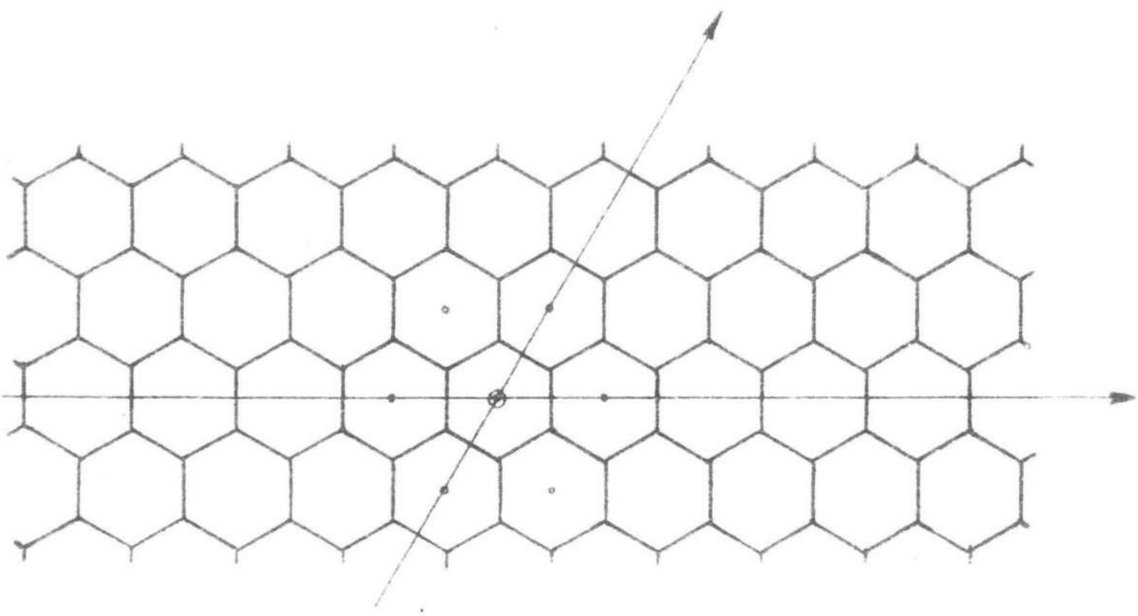


Рис.3

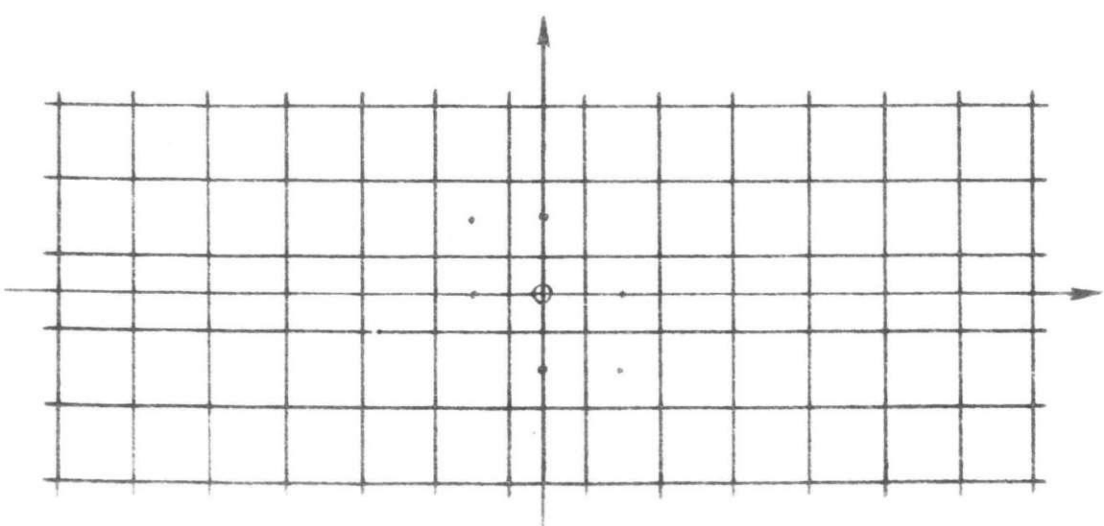


Рис. 4

Отметим, что Глушков [12] вводит понятия микропрограммы и периодически определенных преобразований бесконечного регистра, а Цейтлин (см. напр. [26]) исследует вопросы функциональной полноты соответствующих алгебр. Эти исследования непосредственно связаны с упомянутым выше обобщением сотообразных структур.

Можно также рассматривать структуры, в которых на различных подмножествах пространства применяются различные локальные преобразования. Отметим, что такие структуры легко моделируются на обычных структурах (достаточно ввести специальные состояния для ячеек из различных подмножеств пространства).

Наконец отметим, что различные на первый взгляд сотообразные пространства не обязательно различны по существу. Пусть, например, сотообразное пространство состоит из шестиугольных сот, причем соседями соты являются шесть сот, имеющих с ней общую сторону, а также сама сота, $|\mathcal{E}| = 7$ (см. Рис. 3). Очевидным образом шестиугольную решетку можно заменить на квадратную (см. Рис. 4) с индексом соседства $\mathcal{E} = (\{0,0\}, \{-1,0\}, \{-1,1\}, \{0,1\}, \{1,0\}, \{1,-1\}, \{0,-1\})$.

§ 2. Основные информационные понятия

Центральными понятиями общей теории сотообразных структур являются райские сады и взаимно стираемые конфигурации, введенные Муром [54].

Конфигурацию $(c)_X$ блока X будем называть райским садом (PC), если для любой $c_1 \in C$

$$(\tau(c_1))_X \neq (c)_X .$$

Будем говорить, что конфигурация $(c)_Y$ содержит копию конфигурации $(c_1)_X$, если существует такой сдвиг $\vec{J}_1$, что для любой ячейки $\vec{J} \in X$ ячейка $\vec{J}+\vec{J}_1 \in Y$ и $c(\vec{J}+\vec{J}_1) = c_1(\vec{J})$.

Тогда очевидно, что любая конфигурация, содержащая копию PC, сама тоже является PC.

<u>Пример.</u> Рассмотрим одномерную 2 – структуру с $\exists = (-1, 0, 1)$ и с таблицей функции перехода:

x_1	x_2	x_3	$\sigma(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(1.8)

Легко проверить, что тогда конфигурация

010

блока, состоящего из трех ячеек, является РС. (Здесь и в дальнейшем сдвиг часто несущественен, поэтому, например, конфигурации конечных связных одномерных блоков будем изображать просто последовательностями символов из S).

Для любой одномерной структуры множество всех РС является регулярным множеством, и автомат, представляющий это множество, можно эффективно построить по данной структуре (см. § 5 главы 2).

Аладьев [I] приводит без доказательства теорему: Если одномерная k - структура, в которой ячейка имеет m плотно размещенных соседей, имеет РС , то она имеет и РС длины не более

$$(2^k - 1)^{m-1} + 1.$$

Переходим к понятию взаимно стираемых конфигураций.

Две различные конфигурации конечного блока X $(c_1)_X$ и $(c_2)_X$ будем называть взаимно стираемыми конфигурациями (ВСК), если для любой конфигурации d блока $\overline{X} = Z^n \setminus X$

$$\tau(c_1 \cup d) = \tau(c_2 \cup d), \tag{I.9}$$

где $c_i \cup d$ $(i = 1,2)$ означает глобальную конфигурацию, совпадающую с c_i на блоке X и с d на блоке $\overline{X}$.

Согласно этому определению взаимно стираемые конфигурации (в любом окружении) неразличимы после применения глобального преобразования, т.е. по конфигурации $\tau(c_i \cup d)$ момента t невозможно однозначно восстановить конфигурацию момента $t-1$, информация о том, какая из конфигураций $c_1 \cup d$, $c_2 \cup d$ применялась в предыдущий момент, стерлась.

Пусть дан произвольный блок A. Введем обозначение $N(A)$ для блока ячеек, каждая из которых является соседом хотя бы одной ячейки блока A:

$$N(A) = \{ \vec{J} + \vec{\exists} \mid \vec{J} \in A, \vec{\exists} \in \exists \}. \qquad (I.10)$$

Аналогично, обозначим через $N^-(A)$ блок ячеек, каждая из которых имеет хотя бы одного соседа в A:

$$N^-(A) = \{ \vec{J} - \vec{\exists} \mid \vec{J} \in A, \vec{\exists} \in \exists \}. \qquad (I.11)$$

Пусть теперь даны две ВСК $(c_1)_X$ и $(c_2)_X$. Рассмотрим блок

$$B = \{ \vec{J} \mid c_1(\vec{J}) \neq c_2(\vec{J}), \vec{J} \in X \} \qquad (I.12)$$

ячеек, в которых отличаются c_1 и c_2. Условие (I.9) требует совпадения $\tau(c_1 \cup d)$ и $\tau(c_2 \cup d)$ во всем пространстве Z^n. Однако это условие выполняется автоматически на всех ячейках, которые не имеют соседей в блоке B. Поэтому достаточно требовать выполнения этого условия на ячейках блока $N^-(B)$.

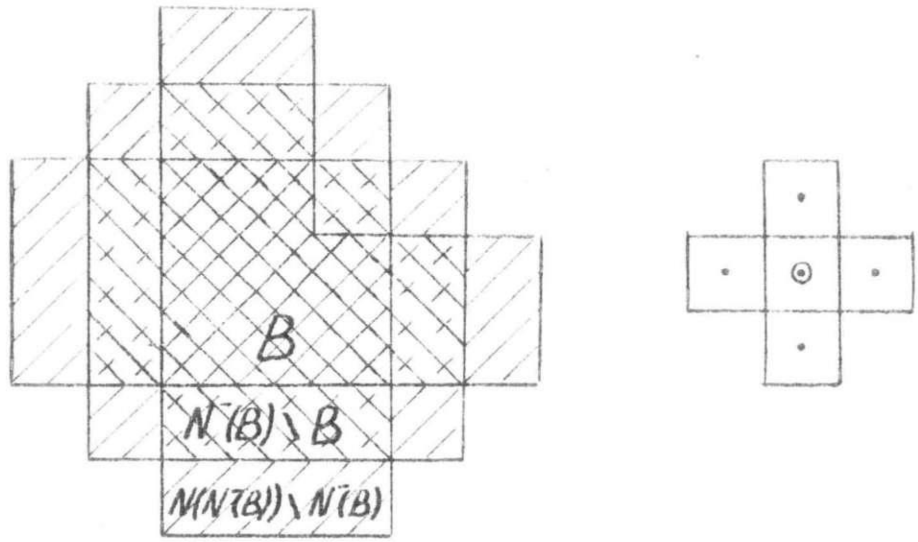

B
$N^-(B) \setminus B$
$N(N^-(B)) \setminus N^-(B)$

Рис. 5а

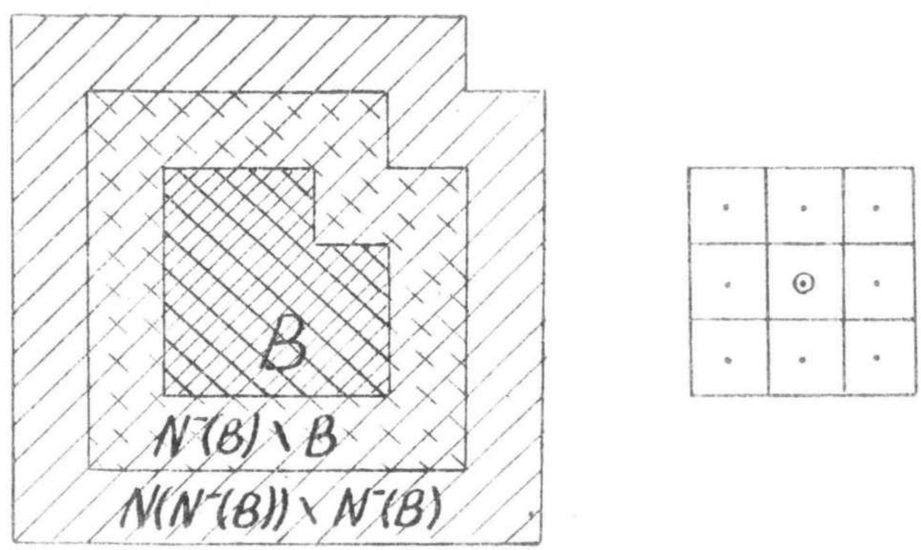

B
$N^-(B) \setminus B$
$N(N^-(B)) \setminus N^-(B)$

Рис. 5б

На Рис. 5а изображен шаблон соседства фон Неймана (I.7) и соответствующий пример блока ВСК, а на Рис. 5б – то же самое для соседтва Мура

$$\mathcal{E} = (\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle -1,1\rangle, \langle -1,0\rangle, \langle -1,-1\rangle, \langle 0,-1\rangle, \langle 1,-1\rangle). \qquad (I.15)$$

ВСК именно такого вида рассматривает Мур [54]. В § 4 главы 2 будет доказано, что почти все k – структуры имеют ВСК минимальных размеров – с внутренним блоком B, состоящим из одной ячейки (при $k \to \infty$ доля k – структур, имеющих такие ВСК, стремится к I).

Отметим, что соседство фон Неймана и соседство Мура являются симметрическими: из $\vec{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$ следует $-\vec{\mathcal{E}} \in \mathcal{E}$. Только для симметричных соседств $N^{-}(A) \equiv N(A)$, в общем же случае $N^{-}(A)$ отлично от $N(A)$. Поэтому определения ВСК из [I] и [37], использующие блок $N(N(B))$, верны только для структур с симметрическим соседством.

Мур [54] доказал, что из существования в структуре ВСК следует существование РС. Майхилл [56] доказал обратную теорему. Заметим, что Мур и Майхилл рассматривали дву мерные структуры с соседством Мура (I.15). В § I главы 2 эти теоремы будут обобщены на произвольные сотообразные структуры.

Аладьев [1] строит контрпримеры для обоих этих теорем в случаях, когда множество состояний S совпадает с множеством натуральных чисел или с множеством вещественных чисел.

Рассмотрим теперь глобальные аналоги РС и ВСК.

Глобальную конфигурацию c будем называть глобальным райским садом ($ГРС$), если для любой $c_1 \in C$

$$\tau(c_1) \neq c \qquad (I.16)$$

(т.е. c не принадлежит области значений преобразования τ). Очевидно, любая c , содержащая РС, является $ГРС$, поэтому из существования в структуре РС следует существование $ГРС$. В § I главы 2 будет доказано обратное утверждение. Таким образом, $ГРС$ существуют тогда и только тогда, когда существуют РС.

Две различные глобальные конфигурации c_1 и c_2 $(c_1 \in C,\ c_2 \in C)$ будем называть глобальными взаимно стираемыми конфигурациями ($ГВСК$), если

$$\tau(c_1) = \tau(c_2). \qquad (I.17)$$

Непосредствено из определения ВСК следует, что существование ВСК влечет за собой существование $ГВСК$. Обратное неверно. Например, структура (I.6) имеет $ГВСК$

$$c_1 = \ldots.\ 000000\ \ldots \quad \text{и}$$

$$c_2 = \ldots.\ 110110110\ \ldots. ,$$

$\tau(c_1) = \tau(c_2) = c_1$, не имея при этом ВСК.

Рассмотрим теперь случай, когда допускаются лишь конечные глобальные конфигурации.

Конфигурацию $c \in C_F$ будем называть конечным глобальным райским садом (КГРС), если для любой $c_1 \in C_F$

$$\tau(c_1) \neq c, \tag{I.18}$$

т.е. c не имеет предшественника в C_F. Очевидно, из существования РС следует существование КГРС. Обратное неверно (см. [30]) так как, например, структура (I.6) имеет КГРС

$$c = \ldots 00010000 \ldots\ldots\ldots, \tag{I.19}$$

не имея при этом РС.

Глобальную конфигурацию c будем называть примитивной, если в ней все ячейки, кроме одной, находятся в состоянии покоя т.е. $sup\ c$ состоит из одной ячейки (примитивна, например, конфигурация (I.19)). В §3 главы 2 будет доказано, что почти все одномерные k - структуры имеют примитивные КГРС.

Наконец, две различные конфигурации $c_1 \in C_F$ и $c_2 \in C_F$ будем называть конечными глобальными взаимно стираемыми конфигурациями (КГВСК), если

$$\tau(c_1) = \tau(c_2).$$

Легко доказать, что КГВСК существуют тогда и только тогда, если существуют ВСК. Систематическому изложению взаимосвязи между всеми введенными только что понятиями посвящен §I главы 2.

§ 3. Моделирование структур в структурах

Моделирование работы одной структуры в другой структуре исследовали Коул [42], Кодд [41], Макаревский [18-19], Коганов [14-15], Ямада и Аморозо [76] и Смит [65].

Пусть даны две структуры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ с множествами конфигураций C_1 и C_2 и глобальными преобразованиями τ_1 и τ_2, соответственно. Пусть r_1 и r_2 - натуральные числа. Будем говорить, что структура $\mathcal{A}_2$ моделирует структуру $\mathcal{A}_1$ в r_2/r_1 реальное время, если существует такое вычислимое и инъективное x) отображение $G : C_1 \to C_2$, что для любой $c \in C_1$

$$G^{-1}(\tau_2^{r_2}(G(c))) = \tau_1^{r_1}(c). \tag{I.20}$$

Особенно интересны следующие три случая:

1) $r_1 = 1,\ r_2 = r > 1$ - замедление в r раз;

2) $r_1 = r > 1,\ r_2 = 1$ - ускорение в r раз;

3) $r_1 = r_2 = 1$ - реальное время.

(Отметим, что, например, моделирование в 2/4 реальное время дает меньше информации, чем моделирование с ускорением в 2 раза).

---

x) Отображение $G : A \to B$ называется инъективным, если $G(a_1) \neq G(a_2)$ при любых $a_1 \in A,\ a_2 \in A,\ a_1 \neq a_2$.

При моделировании можно преследовать две различные цели: заменить структуру со сложным индексом соседства структурой с более простым индексом соседства или же заменить структуру с большим числом состояний структурой с меньшим числом состояний. В общем случае достичь обе эти цели одновременно невозможно. Можно лишь упростить соседство за счет увеличения числа состояний или наоборот-уменьшить число состояний, увеличивая число соседей. Оказывается однако, что в обоих случаях возможно достичь ускорения во времени.

Обозначим через $K^{(n)}$ "минимальный" n-мерный индекс соседства состоящий из $n+1$ вектора:

$$\{0,0,0,\ldots,0\},\{1,0,0,\ldots,0\},\{0,1,0,\ldots,0\},$$
$$\{0,0,1,\ldots,0\},\ldots,\{0,0,0,\ldots,1\}. \qquad (I.21)$$

Смит [65] показывает, как для любой структуры $\mathcal{A}=(Z^n,S,s_0,\mathcal{I},\sigma)$ и для любого τ построить структуру $\mathcal{A}'=(Z^n,S',s_0',K^{(n)},\sigma')$, которая моделирует $\mathcal{A}$ с ускорением в τ раз. (Число состояний $|S'|$ структуры $\mathcal{A}'$ зависит от $|S|$, $\mathcal{I}$ и τ).

Основные идеи метода построения моделирующей структуры весьма просты и естественны. Ради наглядности ограничимся двумерным случаем.

Если вместо $K^{(2)}=(\{0,0\},\{1,0\},\{0,1\})$ разрешать для моделирующих структур соседство Мура,

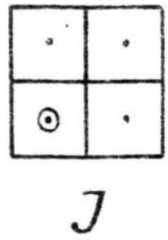


Рис. 6а

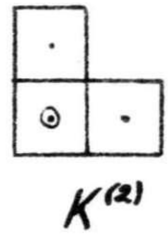


Рис. 6б

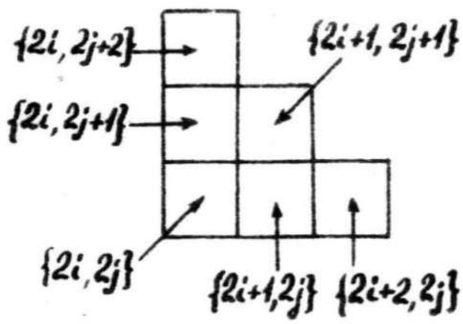


Рис. 6в

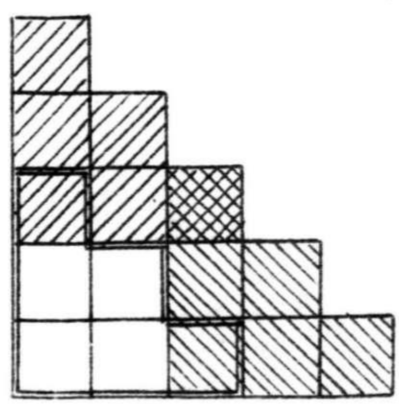


Рис. 6г

построение становится очевидным (достаточно "укрупнить" структуру $\mathcal{A}$: пространство структуры $\mathcal{A}$ разделить на одинаковые прямоугольные блоки, в каждой ячейке структуры $\mathcal{A}'$ помещать информацию о конфигурации соответствующего блока).

Моделирование структурами с соседством $K^{(2)}$ менее тривиально. Во-первых, в моделируемой структуре, вообще говоря, информация распространяется во всех направлениях, в то время как индекс соседства $K^{(2)}$ не позволяет информации распространяться ни вверх, ни направо. Этого затруднения можно избежать, рассматривая "свободные" глобальные конфигурации ("свободная" конфигурация – это класс конфигураций, которые получаются друг из друга сдвигами).

Во-вторых, моделирование затрудняется отсутствием в $K^{(2)}$ "углового" вектора $\{1,1\}$. Рассмотрим идею моделирования на наипростейшем возможном примере. Пусть структуру $\mathcal{A}$ с соседством

$$\text{Э} = (\{0,0\},\{0,1\},\{1,0\},\{1,1\}) \tag{I.22}$$

надо моделировать в реальное время в подходящей структуре $\mathcal{A}'$ с соседством $K^{(2)}$. Выберем множество состояний $S'=S^6$. В каждой ячейке $\{i,j\}$ структуры $\mathcal{A}'$ в 6 регистрах будем хранить информацию о состояниях 6 ячеек

$$\{2i,2j\},\{2i,2j+1\},\{2i,2j+2\},\{2i+1,2j\},\\ \{2i+1,2j+1\},\{2i+2,2j\} \tag{I.23}$$

структуры $\mathcal{A}$ (см.рис. 6в).Таким образом,информация о состояниях ячеек структуры $\mathfrak{A}$ вида $\{2i,2j\}$ будет параллельно храниться в трех ячейках структуры $\mathfrak{A}'$. Легко видеть, что состояния трех ячеек

$$\{i,j\},\ \{i+1,j\},\ \{i,j+1\} \tag{I.24}$$

структуры $\mathfrak{A}'$ содержат полную информацию о состояниях всех 6 ячеек (I.23) структуры $\mathfrak{A}$ и о состояниях всех соседей этих ячеек согласно индексу соседства (I.22), т.е. соседство $K^{(2)}$ в $\mathfrak{A}'$ позволяет вычислить, используя функцию перехода структуры $\mathfrak{A}$, следующее состояние для каждой ячейки (см. рис. 6г, в котором изображены ячейки структуры $\mathfrak{A}$, информация о которых хранится в трех ячейках (I.24) структуры $\mathfrak{A}'$).

Наконец отметим, что моделирование с ускорением легко сводится к моделированию в реальное время. Действительно, пусть надо моделировать структуру $\mathfrak{A}$ (глобальное преобразование τ) с ускорением в τ раз. Вместо этого можно моделировать в реальное время структуру $\mathfrak{B}$, которая реализует глобальное преобразование τ^{τ} (разумеется, ячейка структуры $\mathfrak{B}$ имеет больше соседей, чем ячейка структуры $\mathfrak{A}$).

Рассмотрим теперь моделирование в структурах с меньшим числом состояний. Легко видеть, что любую структуру можно моделировать (в реальное время) в подходящей структуре, имеющей лишь два состояния 0 (состояние покоя) и 1.

Однако информацию о состоянии одной старой ячейки можно записать лишь в нескольких новых ячейках и поэтому приходится увеличить число соседей.

Кодд [41] моделирует двумерную структуру с соседством фон Неймана и 8 состояниями бинарной структурой с 85 соседями. Смит [65] предлагает общий метод моделирования. Часть новых ячеек отводится для кодировки состояний старых ячеек, остальные ячейки используются для кодировки положения в кодах состояний.

Макаревский [19] и Ямада и Аморозо [76] используют для кодирования состояний коды без запятой. Это позволяет определить место в коде состояния по самим кодовым словам.

Бэнкс [35] строит простые универсальные двумерные структуры, в которых можно с замедлением во времени моделировать любую двумерную структуру. Одной ячейке моделируемой структуры здесь соответствует целый блок новых ячеек, в котором моделируется работа старой функции перехода. Эти вопросы рассмотрены подробнее в следующем § 4.

Ямада и Аморозо [74, 76] исследуют понятия структурного и поведенческого изоморфизмов. Второе понятие соответствует взаимному моделированию структур в реальное время, первое же накладывает более строгие условия (например, условие взаимно однозначного соответствия между состояниями ячеек обоих структур в соответствующих конфигурациях). Кроме того они исследуют случаи распадения сотообразного пространства на отдельные подпространства такие, что ячейки из разных подпространств не обмениваются информацией. Так, например, одномерное пространство с индексом соседства $\mathcal{Э} = (0, 2)$ распадается на два подпространства (четные ячейки и нечетные ячейки), конфигурации на которых развиваются независимо.

Коганов [15] рассматривает сотообразные структуры с двумя выделенными ячейками, на одну из них подается входная последовательность, а с другой считывается выходная последовательность. Таким образом, выходная последовательность зависит от глобальной конфигурации при $t = 0$ (начальное состояние структуры) и от входной последовательности. Будем говорить, что структура $\mathcal{A}_2$ моделирует структуру $\mathcal{A}_1$ с замедлением $f(t)$, если для любого начального состояния c_1 структуры $\mathcal{A}_1$ существует такое начальное состояние c_2 структуры $\mathcal{A}_2$, что для любой входной последовательности выход структуры $\mathcal{A}_2$ в момент $f(t)$ совпадает с выходом $\mathcal{A}_1$ в момент t при любом t. Коганов доказывает, что любую n-мерную структуру можно моделировать на m-мерной структуре ($m < n$) с замедлением, не превосходящим $Ct^{]n/m[}$, при чем эту оценку нельзя улучшить по порядку.

§ 4. Вычисления на сотообразных структурах, универсальность и самовоспроизведение

Сотообразные структуры отличаются от других абстрактных моделей вычислений (например, машин Тьюринга и систем Поста) широкими возможностями параллельной работы. В сотообразных структурах зона одновременного возбуждения может неограниченно возрастать.

В настоящее время широко исследуются и находят практические применения однородные среды (итеративные сети), в которых, грубо говоря, используются лишь конечные, фиксированные блоки сотообразного пространства, причем граничные ячейки, отличные от внутренних, служат для подачи входных и считывания выходных данных. Обширную литературу по теории однородных сред здесь рассматривать не будем.

Перейдем теперь к понятию вычислений на сотообразных структурах. В сотообразных структурах обрабатываются конфигурации, поэтому будем рассматривать вычисление функций, аргументами и значениями которых будут конфигурации. Очевидно, эффективной нумерацией конфигураций эти функции можно свести к обычным арифметическим функциям и тем самым определить рекурсивность этих функций.

Рассмотрим определение вычисления, данное Смитом [64], которое является некоторым обобщением определения Кодда [41] . Для задания аргументов и считывания значений функций будем использовать эффективно заданную последовательность $\{d_i\}$ конфигураций из C_F (d_i будем отождествлять с натуральным числом i). Определим теперь процедуру узнавания конца вычислений: пусть дан рекурсивный предикат π, определенный на m - ках конфигураций. Будем считать, что результат получен в момент t_0, если t_0 является минимальным значением t, при котором

$$\pi(c_t, c_{t+1}, \ldots, c_{t+m-1}) = 1,$$

где $c_t, c_{t+1}, \ldots, c_{t+m-1}$ - конфигурации моментов $t, t+1, \ldots, t+m-1$, соответственно. Наконец, введем рекурсивную функцию h, которая декодирует результат, конфигурацию момента t_0. Обе функции π и h предполагаются простыми. Например, $\pi(c_t, \ldots, c_{t+m-1}) = 1$, если конфигурации $c_t, \ldots, c_{t+m-1}$ совпадают, за исключением, может быть границ $sup\, c_t$, т.е. вычисления считаются законченными, когда прекращается существенная переработка конфигураций. Функция h, в свою очередь, только указывает, с какого блока считывать результат.

Пусть дана сотообразная структура $\mathcal{A}$ с глобальным преобразованием τ и рекурсивная функция g. Будем говорить, что конфигурация <u>c вычисляет функцию g</u>, если выполняется следующее: $g(n)$ определено тогда и только тогда, если существует такое t_0, что

$$\pi(c_{t_0}, c_{t_0+1}, \ldots, c_{t_0+m-1}) = 1, \tag{I.25}$$

где

$$c_0 = c \cup d_n,$$
$$c_t = \tau^t(c_0). \tag{I.26}$$

При этом для минимального t_0, удовлетворяющего (I.25), должно быть

$$h(c_{t_0}) = d_{g(n)}. \tag{I.27}$$

Сотообразную структуру $\mathfrak{A}$ будем называть <u>универсальной вычисляющей структурой</u>, если для любой рекурсивной функции g можно эффективно найти конфигурацию c, которая вычисляет g.

Смит [64] строит простые универсальные вычисляющие структуры, моделируя универсальные машины Тьюринга. Самый естественный метод моделирования состоит в том, что в каждой ячейке структуры записывается не только содержимое соответствующей ячейки ленты, но и состояние головки, если головка обозревает данную ячейку.

Используя наиболее простые из известных универсальных машин Тьюринга и более экономное (но зато уже не такое естественное) кодирование моментальных описаний, Смит строит, например, одномерную универсальную вычисляющую структуру с тремя соседями и 18 состояниями. Однако следует заметить, что эти структуры, моделируя работу машины Тьюринга шаг за шагом, не используют возможностей параллельной работы.

В то же время известны сотообразные структуры, построенные для специальных целей, которые, используя параллельную работу, вычисляют гораздо быстрее машин Тьюринга. Например, в [45] приведена одномерная сотообразная структура Смита, узнающая симметрию слова длины $2n$ за n шагов - минимальное время за которое информация с одного конца слова может встретиться с информацией с другого конца слова. На сотообразных структурах возможно также умножение за число шагов, равное половине длины произведения [63] . Как доказал Барздинь [2] , машине Тьюринга для разпознавания симметрии требуется число шагов порядка n^2, а для умножения - порядка произведения длин сомножителей. Таким образом, в обоих этих случаях время работы сотообразной структуры существенно меньше времени работы машины Тьюринга. Отметим, что здесь шла речь об обычных структурах и машинах Тьюринга без входа.

Смит [66] использует одномерные сотообразные структуры и различные их модификации для распознавания слов данного языка. Опять оказывается, что структуры работают существенно быстрее других моделей.

Отметим здесь также известную задачу о синхронизации цепи стрелков, сформулированную Муром [55] , в которой рассматривается только конечный блок одномерной структуры, состоящий из n ячеек (n -произвольное натуральное число). Требуется построить такую структуру (независимую от n) с соседством $\mathcal{E} = (-1, 0, 1)$, чтобы для выделенных состояний S_1 ("исходное" состояние), S_2 ("сигнал старта") и S_3 ("выстрел") выполнялись условия:

1) $\tau(S_1 S_1 \ldots S_1) = S_1 S_1 \ldots S_1$,

2) существует такое t_n , что $\tau^{t_n}(S_2 S_1 \ldots S_1) = S_3 S_3 \ldots S_3$, при чем ни одна из ячеек не приходит в состояние S_3 раньше момента t_n .

Можно доказать, что $t_n \geqslant 2n-2$. Из обширной литературы, посвященной этой задаче, отметим лишь работу Левенштейна [17] , в которой построена структура с 9 состояниями и $t_n = 2n-2$, и работу Варшавского и др. [5] , в которой решается обобщенная задача ("сигнал старта" может подаваться на произвольную ячейку блока).

Перейдем теперь к рассмотрению самовоспроизведения по Муру [54].

Пусть дана конфигурация $c \in C_F$ и конечный блок X , $\sup c \subseteq X$. Будем говорить, что конфигурация $(c)_X$ <u>самовоспроизводится</u>, если для любого натурального r существует такой момент t_r , что конфигурация $\tau^{t_r}(c)$ содержит не менее r непересекающихся копий конфигурации $(c)_X$.

Пусть в n - мерной сотообразной структуре $\mathfrak{A}$ конфигурация $(c)_X$ самовоспроизводится. Легко видеть (см. [54]), что существует такая постоянная A , что число копий конфигурации $(c)_X$ в момент времени t

$$N_t < At^n. \qquad (I.28)$$

Рассмотрим n- мерную сотообразную структуру с произвольным определением соседей и k состояниями $0, 1, \ldots, k-1$. Пусть функция перехода

$$\sigma(x_1, \ldots, x_m) = [x_1 + x_2 + \ldots + x_m]_{mod\, k}. \qquad (I.29)$$

В § 2 главы 2 будет доказано, что в такой структуре любая конфигурация любого конечного блока самовоспроизводится.

Кроме автора настоящей работы (см. [78]) структуры с функцией перехода (I.29) независимо введены и другими авторами. Так, Аморозо и Купер [31] рассматривают частный случай одно- и двумерных структур, а Острэнд [59] показывает, как результаты [31] обобщать на n - мерные структуры. В обоих этих работах рассматривается только простейший индекс соседства (I.21), состоящий из $n+1$ вектора. Кроме того, в [35] и [45] упоминаются работы Фредкина и Т. Винограда, посвященные тем же структурам (I.29). Эти работы, повидимому, нигде не опубликованы, так как ни в [31], ни в [59] на них нет ссылок.

Кроме того, в §2 главы 2 будет доказано, что для одномерных структур с тремя соседями (-I, 0, I), числом состояний k (k - простое число) и функцией перехода (I.29) любая конфигурация самовоспроизводится с линейной скоростью (т.е., в этом случае оценку (I.28) невозможно улучшить по порядку ни для одной конфигурации).

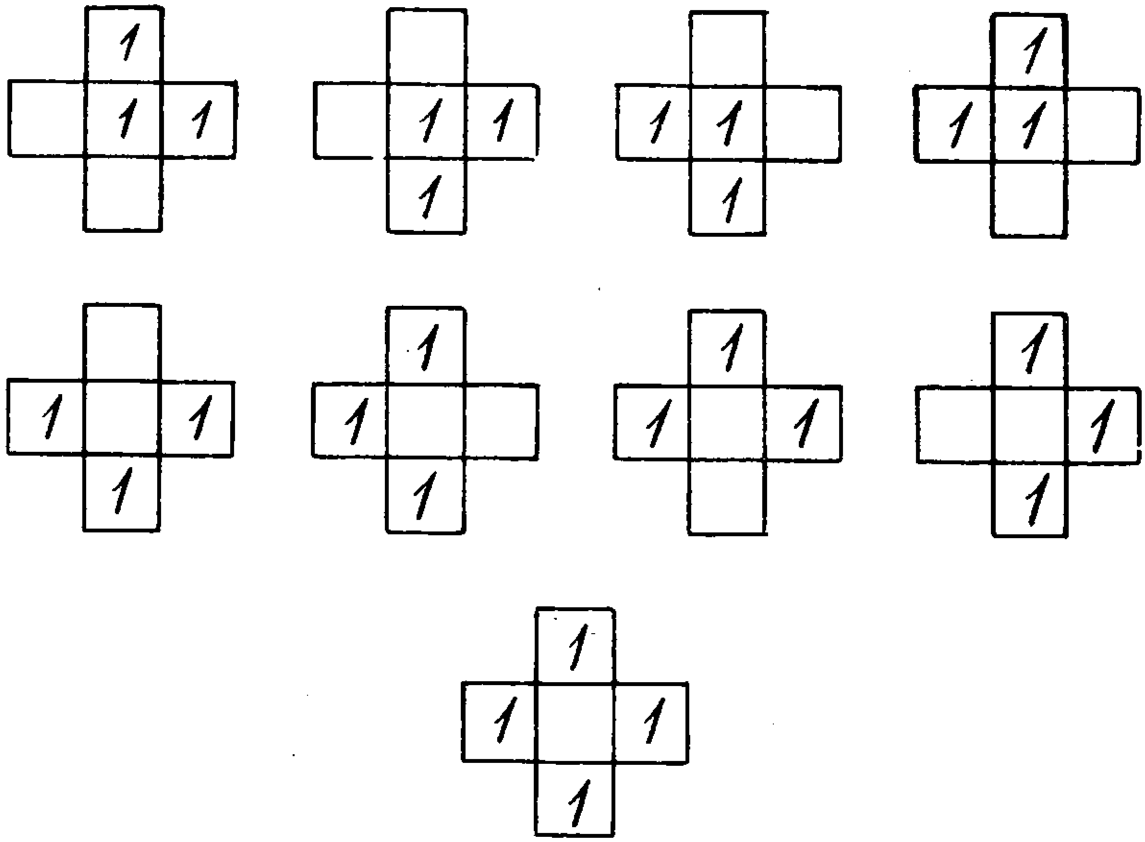


Рис. 7

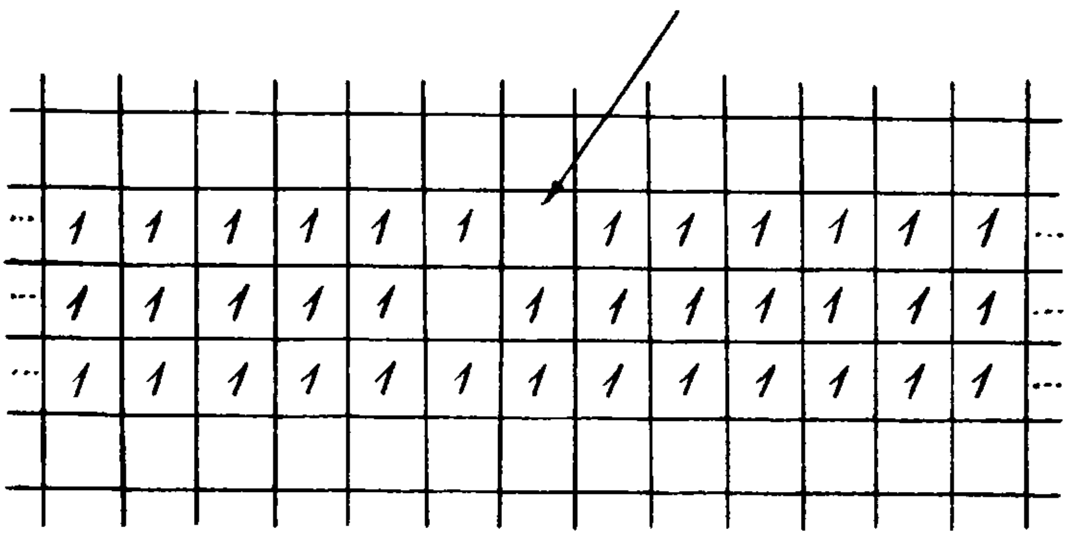


Рис. 8

Как уже было отмечено в § I, фон Нейман ввел сотообразные структуры именно с целью исследования самовоспроизведения. Не входя в детали, здесь только отметим, что в [57] рассматривается структура, в которой "умная" конфигурация "строит" свои точные копии. Под "умной" конфигурацией, грубо говоря, понимается конфигурация, которая при добавлении соответствующей информации может вычислить любую частично рекурсивную функцию и воспроизвести любую конфигурацию из достаточно широкого класса. Кодд [41] решает ту же задачу на более простой структуре, имеющей соседство фон Неймана и 8 состояний (вместо 29 состояний модели фон Неймана).

Наконец, Бэнкс [35] доказывает, что любую двумерную структуру можно моделировать в тривиальной с первого взгляда структуре, имеющей соседство фон Неймана и только два состояния. Закон перехода в структуре Бэнкса меняет состояние ячейки только в девяти случаях, изображенных на рис. 7.

Легко видеть, что этот закон перехода симметричен, т.е. не имеет ни выделенных направлений, ни выделенного направления вращения. Бэнкс строит конфигурации, которые могут играть роль элементов реализации конечных автоматов: проводов, разветвлений, пересечений и поворотов проводов, логических элементов. Так, например, реализация провода показана на рис. 8.

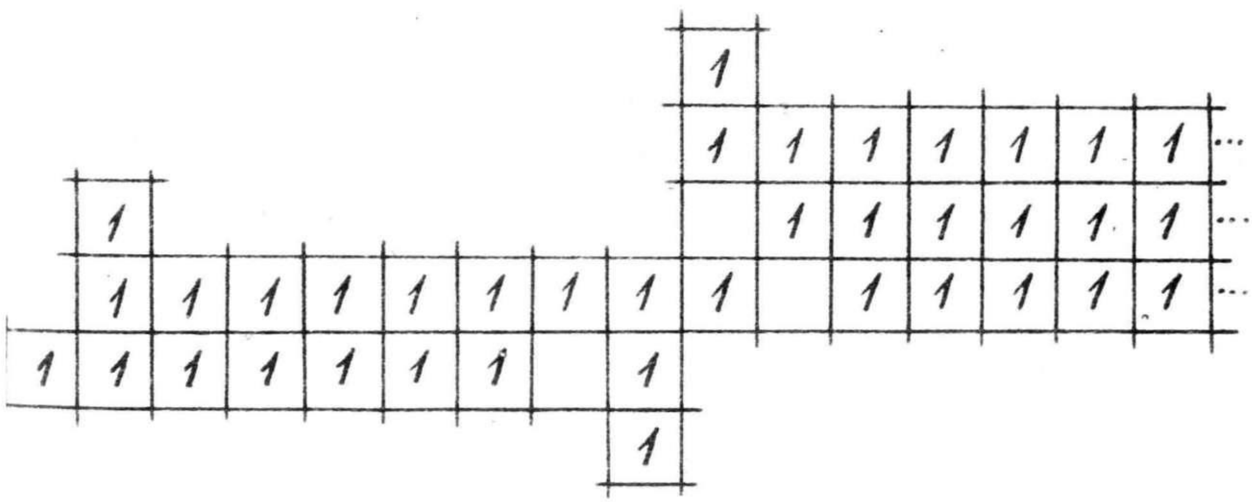


Рис. 9

Легко проверить, что "сигнал" за каждый такт передвигается на одну ячейку направо. Аналогично можно построить конфигурации и для других элементов, например, конъюнкции (сигнал на проводе выхода появляется лишь при одновременном поступлении сигналов по обоим входным проводам). Синхронизацию можно обеспечить при помощи "часов" - конфигураций, которые генерируют сигналы с определенной частотой. На рис. 9 изображены часы с периодом 16.

Система элементов, построенных Бэнксом, является универсальной: при помощи этих элементов можно реализовать любой конечный автомат. Разумеется, один такт работы автомата моделируется за конечное, фиксированное число шагов структуры. Далее, отметим, что сотообразную структуру можно интерпретировать следующим образом: пусть в каждой ячейке пространства помещена копия конечного автомата, на входы которой подаются состояния соседних автоматов. Автомат меняет состояния согласно функции перехода структуры. Поэтому на структуре Бэнкса можно моделировать любую структуру (в том числе и структуру фон Неймана). Это моделирование, конечно, не может быть практически реализовано так как каждая ячейка моделируемой структуры требует огромного блока ячеек структуры Бэнкса. Кроме того, начальная глобальная конфигурация должна содержать встроенные "схемы" для всех ячеек моделируемой структуры, т.е. невозможно ограничиваться конечными глобальными конфигурациями.

Далее Бэнкс строит универсальную вычисляющую структуру с соседством фон Неймана и 3 состояниями, которая не требует бесконечных конфигураций. Эта структура моделирует работу универсальной программной машины с двумя регистрами Минского [53] . Наконец, четыре состояния позволяют Бэнксу строить универсальный вычислитель-конструктор. Это последнее построение Бэнкса, как и построения фон Неймана а Кодда, очень сложны.

С другой стороны, Арбиб [32] решает ту же задачу фон Неймана просто, зато ячейка его структуры имеет очень много состояний.

§ 5. Различные вопросы теории сотообразных структур

Здесь рассмотрим проблему полноты, исследованную Ямадой и Аморозо [75], а также работы Улама [70, 61] по различным модификациям сотообразных структур.

Как уже отмечалось в § I, Ямада и Аморозо рассматривают обобщенные структуры, в которых в различные моменты могут применяться различные глобальные преобразования τ из данного множества I. Обобщенную структуру $(Z^n, S, s_0, \mathcal{J}, I)$ будем называть <u>полной</u>, если для любой конфигурации $c \in C_F$ существует такая последовательность

$$c_0, c_1, \ldots, c_\ell, \tag{I.28}$$

что c_0 примитивна, $c_\ell = c$ и для любого i, $0 \le i \le \ell - 1$, существует такое $\tau \in I$, что $c_{i+1} = \tau(c_i)$. (Напомним, что примитивными называются конфигурации c, для которых $\sup c$ состоит из одной ячейки). Другими словами, структура полна, если любую конечную глобальную конфигурацию можно получить из примитивной конфигурации, применяя подходящую последовательность глобальных преобразований.

Одномерные структуры, в которых все m ($m \geqslant 2$) соседи размещены плотно, т.е.,

$$\mathcal{J} = (i, i+1, \ldots, i+m-1), \tag{I.29}$$

будем называть структурами размаха m.

Ямада и Аморозо рассматривают самый простой частный случай одномерных бинарных структур размаха m, причем, не ограничивая общности, берет индекс соседства

$$\exists = (-1, 0, 1, \ldots, m-2). \tag{I.30}$$

Роль I играет множество T всех $2^{2^{m}-1}$ возможных глобальных преобразований. Авторы доказывают, что при $m=2$ обобщенная структура не полная, а при $m \geq 4$ полна. Вопрос о полноте структуры размаха 3 остался открытым.

Рассмотрим результаты [75] подробнее. В следующей таблице собраны функции перехода всех 8 глобальных преобразований бинарной обобщенной структуры размаха 2.

	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	σ_7
00	0	0	0	0	0	0	0	0
0I	0	0	0	0	I	I	I	I
I0	0	0	I	I	0	0	I	I
II	0	I	0	I	0	I	0	I

Легко проверить, что конфигурация 0I0II является райским садом для структур с функциями перехода σ_0, σ_1, σ_2, σ_4 и σ_7. Далее, в структуре с функцией перехода

σ_6 конфигурация c

$$\ldots 001011\,(011)^n 00 \ldots \qquad (I.31)$$

является конечным глобальным райским садом при любом n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Глобальные преобразования с законами перехода σ_5 (тождественное преобразование) и σ_3 (сдвиг влево) можно исключить, так как они ... не меняют вида конфигураций. Поэтому любая из конфигураций (I.31) может быть получена лишь из самой себя. Таким образом, бинарная обобщенная структура размаха 2 не полна.

Эту проблему можно сформулировать и на языке формальных систем. Допустимые исходные конфигурации играют роль аксиом, а глобальные преобразования - законов вывода. Предыдущий результат значит, что невозможна конечная аксиоматизация множества C_F.

Последовательность (I.28) будем называть монотонным выводом конфигурации c, если

$$\ell(c_{i+1}) \geq \ell(c_i),$$

где $\ell(c)$ - длина конфигурации c,

$$\ell(c) = \max_{c(i)\neq 0} i - \min_{c(i)\neq 0} i + 1.$$

В [75] доказано, что бинарная обобщенная структура размаха 3 при монотонном выводе не полна.

Доказано, что структура размаха 4 полна (отсюда сразу следует полнота при любом размахе $m \geq 4$, так как любое глобальное преобразование размаха 4 входит в множество глобальных преобразований размаха m, если $m > 4$). Наконец, Ямада и Аморозо доказывают, что бинарная двумерная структура с шаблоном соседства из 3 x 10 ячеек полна.

Переходим теперь к работам Улама [70] и Шрандта и Улама [61] по рекурсивно заданным геометрическим фигурам.

Модели Улама используют сотообразное пространство. Здесь ограничимся лишь случаем двумерной квадратической решетки. Каждая ячейка будет иметь четыре соседа (соседство фон Неймана (I.7)). Время дискретное: $t = 0, 1, 2, \dots$ Множество состояний ячеек $S = \{\Lambda, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ради наглядности вместо фразы "ячейка находится в состоянии i" $(i = 0, 1, 2, \dots)$ часто будем употреблять фразу "ячейка занята организмом i-того поколения." Ячейки в состоянии Λ (состояние покоя) будем называть свободными. Глобальная конфигурация начального момента $t=0$ может содержать только конечное число организмов нулевого поколения, все остальные ячейки - свободны. Опишем теперь локальные преобразования для перехода с конфигурации момента t к конфигурации момента $t+1$. Состояния ячеек, занятых организмами поколений $0, 1, 2, \dots, t$, не меняются, только некоторые свободные ячейки занимаются

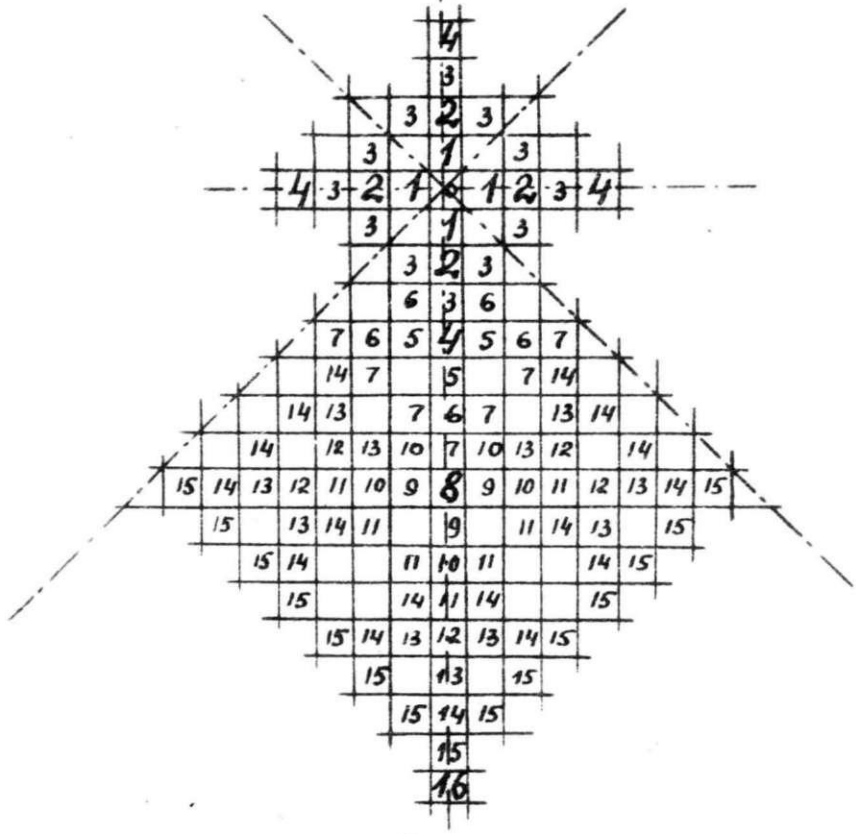


Рис. 10

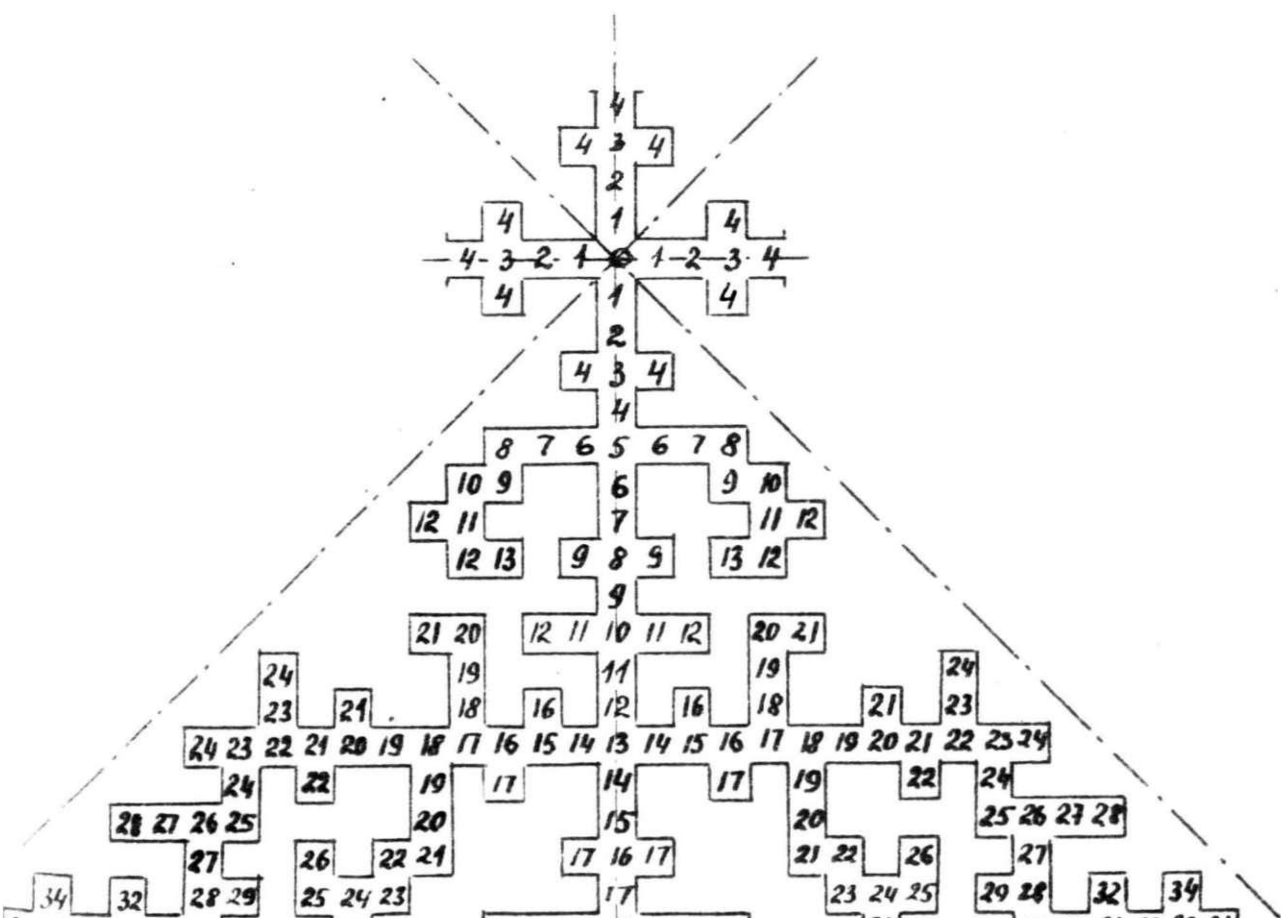


Рис. 11

поколением $t+1$. Все свободные ячейки, имеющие точно один сосед поколения t, будем называть кандидатами на поколение $t+1$. Рассмотрим два варианта законов рождения.

Вариант I. Поколение $t+1$ занимает все ячейки - кандидаты.

Вариант 2. Оставляем только те кандидаты, которые ни одной точкой не касаются ни одной ячейки поколений $0, 1, \ldots, t$ -разумеется, за исключением своего "родителя" поколения t, а также "дедушки" поколения $t-1$. Поколение $t+1$ занимает все те ячейки - оставленные кандидаты, которые не касаются ни одного другого оставленного кандидата (разрешается касание лишь кандидатов, имеющих общий "родитель" поколения t).

На Рис. 10 и Рис. 11 изображено развитие начальной конфигурации, состоящей из одной ячейки поколения 0, для варианта 1 и варианта 2, соответственно. Оба закона перехода симметричны, поэтому фигуры сохраняют симметрии исходной конфигурации (так, для нашего случая достаточно рассматривать развитие в секторе - $1/8$ части всей плоскости).

Несмотря на простоту исходных конфигураций и законов роста, эти фигуры трудно поддаются исследованию. Для ва-

Рис. 12

рианта I Холладей доказал, что поколение 2^n $(n=0,1,\ldots)$ содержит точно четыре организма - по одному на каждом из четырех "стволов" (см. рис. I0).

Рост фигуры варианта 2 моделировался на ЭВМ (см. [61]), но, к сожалению, это не позволило даже высказать гипотез об его поведении. Неизвестно, например, существуют ли бесконечные боковые "отростки" или же каждый из них рано или поздно вытесняется другим отростком, появившемся позднее.

Можно рассматривать также рост с законом рождения варианта 2 в неограниченной в одну сторону полосе. На Рис. I2 изображен рост фигуры в полосе ширины $l=8$. Исходная конфигурация - один организм поколения 0 - в левом верхнем углу полосы. Оказывается, что при любом l рост "зацикливается", т.е., полоса, начиная с некоторого места, заполняется, повторяясь с определенным периодом. При $l=8$ период $T=13$.
Период при $l \le 17$ найден моделированием на ЭВМ:

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
T	1	2	3	5	5	8	13	13	13	26	13	19	13	106	106	75	93

Далее, Улам [70] рассматривает рост фигур со "смертными" организмами: ячейка, занимаемая организмом, освобождается ровно через τ шагов времени - позже в этой ячейке опять могут появляться организмы. Легко видеть, что этот случай сводится к сотообразным структурам с $r+1$ состоянием ячейки и локальным преобразованием весьма специального типа.

Рассматривался также рост фигур на треугольной решетке с аналогичными законами перехода. Моделировалась на конечном блоке пространства "борьба" организмов двух типов.

Все результаты работ [70] и [61] носят чисто эмпирический характер. Модели Улама несомненно заслуживают теоретического изучения .

§ 6. Стохастические сотообразные структуры

Определение стохастической сотообразной структуры естественным образом получается из определения сотообразной структуры заменой детерминированной функции перехода на вероятностную. Кроме того, в общем случае нет уже смысла выделять специальное состояние покоя. Таким образом, стохастической сотообразной структурой называется четверка $(Z^n, S, \exists, f)$, где сотообразное пространство Z^n, множество S состояний ячейки и индекс соседства $\exists$ определяется точно так же, как в детерминированном случае, а локальное преобразование f дает распределение вероятностей перехода ,

$$f : S^m \to P_k ,$$

где P_k - пространство k - мерных стохастических векторов. Если $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = (p_0, \dots, p_{k-1})$, где $p_j = p_j(x_1, \dots, x_m)$, то ячейка $\vec{J}$, у которой каждый из соседей $\vec{J} + \vec{\exists}_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ находится соответственно в состоянии x_i, в следующий момент с вероятностью p_j переходит в состояние s_j $(j = 0, 1, \dots, k-1)$, причем состояния различных ячеек для момента времени t выбираются независимо друг от друга.

Заметим, что большие системы с локальным взаимодействием (каждый элемент системы имеет конечное число различных состояний, которые меняются в зависимости от состояний "соседних" элементов, причем законы перехода носят вероятностный характер) встречаются в биологии, кибернетике, статистической физике и др. областьях науки. Поэтому естественно рассмотреть аналогичные бесконечные системы, которые здесь названы стохастическими сотообразными структурами.

Комбинаторные методы исследования, которые преимущественно применяются в теории детерминированных сотообразных структур, мало пригодны для стохастического случая. Под названием марковских процессов с дискретным временем на бесконечном произведении дискретных пространств стохастические сотообразные структуры изучаются при помощи мощного аппарата функционального анализа (см. [9]).

Пусть $(d)_X$ – произвольная конфигурация конечного блока X. Множество

$$\{ c \mid (c)_X = (d)_X \}$$

всех глобальных конфигураций, которые являются расширениями $(d)_X$ на все пространство, будем называть цилиндрическим множеством. Эти цилиндрические множества порождают σ – алгебру $\mathcal{B}$ подмножеств множества C. Локальное преобразование f естественным образом задает переходную функцию – вероятность перехода конфигурации $c \in C$ в любое цилиндрическое множество, и тем самым вероятность перехода в любое множество конфигураций $B \in \mathcal{B}$. Далее, эта функция

$P(c, B)$ определяет марковский оператор P, который любую вероятностную меру μ на $(C, \mathcal{B})$ переводит в новую вероятностную меру $P\mu$. Меру μ будем называть стационарной, если $P\mu = \mu$. Можно доказать, что в нашем случае всегда существует хотя бы одна стационарная мера.

Вопросы единственности стационарной меры и предельного поведения структуры при $t \to \infty$ исследовали Васерштейн, Васильев, Пятецкий-Шапиро, Тоом и др. авторы (см. [3], [6 ÷ 11], [23 - 24]). В основном изучались одномерные структуры с двумя состояниями $0, 1$ ячейки и двумя соседями. В этом случае функция перехода f полностью определяется четырьмя числами $p_0(0, 0)$, $p_0(0, 1)$, $p_0(1, 0)$ и $p_0(1, 1)$, т.е. точкой единичного четырехмерного куба. До сих пор для некоторых областей этого куба теоретические исследования не дали результатов. Однако многочисленные машинные эксперименты позволяют высказать гипотезу о том, что для любой структуры, соответствующей внутренней точке куба, существует точно одна непрерывная стационарная мера (см. [11]). Эта гипотеза распространяется также на произвольные одномерные структуры, у которых

$$p_i(x_1, \ldots, x_m) > 0 \qquad (I.32)$$

при любом наборе состояний $(x_1, \ldots, x_m)$ и любом $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Результаты экспериментов показывают, что в двумерном случае выполнения условия (I.32) уже недостаточно для эргодичности.

Рассмотрим теперь стохастические структуры, в которых следующее состояние ячейки определяется голосованием со случайной ошибкой по состояниям всех её соседей [10]. Пусть дана одномерная сотообразная структура с двумя состояниями ячеек 1 и -1 и тремя соседями: $\exists=(-1,0,1)$. Функция перехода определяется следующим образом: ячейка с вероятностью $1-\varepsilon$ переходит в состояние, в котором находится большинство ее соседей, и с вероятностью ε – в противоположное состояние $(0<\varepsilon<1/2)$. Васерштейном доказано, что при $1/4<\varepsilon<1/2$ структура эргодична, т.е. $\lim\limits_{t\to\infty} P^t\mu_0$ не зависит от начального распределения вероятностей, соответствующего мере μ_0. Для двумерного случая с $\exists=(10,0\mathcal{y}, 11,0\mathcal{y}, 10,1\mathcal{y})$ аналогично доказывается эргодичность при $5/14<\varepsilon<1/2$. Согласно гипотезе, подтвержденной моделированием, одномерные структуры эргодичны при всех ε, $0<\varepsilon<1/2$, а двумерные при достаточно малых ε неэргодичны.

Шнукмер [29] рассматривает вариант голосования со случайной ошибкой на конечном пространстве (ячейки размещены по окружности). Используя идеи и методы статистической физики, она находит финальное распределение вероятностей (при $0<\varepsilon<1/2$ система эргодична).

В главе 3 настоящей работы рассматривается более простая модель, которую в терминах [21] можно назвать марковской модификацией случая аналогичного рассмотренному в [10].

Число элементов пространства (будем их называть уже не ячейками, а автоматами) предполагается конечным и равным N_t в момент времени t. Соседи каждого автомата в каждый момент времени t заново выбираются наугад и независимо друг от друга из множества всех N_t автоматов. Эта замена локального взаимодействия глобальным позволяет полностью характеризовать состояние системы долями автоматов в каждом из k состояний (голосование со случайной ошибкой естественным образом обобщается на случай k состояний ячейки-автомата).

Доказано, что при некоторых дополнительных условиях информация о начальном распределении в системе сохраняется, если N_t возрастают достаточно быстро ($N_t > A + B \ln t$, где A и B – соответствующим образом выбранные постоянные). С другой стороны, если N_t возрастают медленно ($N_t < C \ln t$, C – некоторая другая постоянная), то система эргодична.

Для сравнения отметим, что в n -мерных детерминированных сотообразных структурах число активных ячеек (т.е. ячеек из $\sup C_t$) возрастает как t^n.

Глава 2

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ СОТООБРАЗНЫЕ СТРУКТУРЫ

§ I. Взаимосвязи между различными информационными свойствами

В этом параграфе будут рассмотрены взаимосвязи между обычными и глобальными понятиями райских садов и взаимно стираемых конфигураций (определения этих понятий см. в §2 главы I).

Докажем сначала теорему, которая является прямым обобщением теорем Мура [54] и Майхилла [56] .

Теорема 2.I В произвольной n-мерной сотообразной структуре райские сады существуют тогда и только тогда, когда существуют взаимно стираемые конфигурации.

Доказательство.

I) Пусть в k-структуре $\mathcal{A}$ существуют РС. Докажем, что в $\mathcal{A}$ существуют ВСК.

Выберем l так, чтобы в n-мерном кубе с длиной стороны l можно было разместить райский сад. Тогда в момент $t \neq 0$ возможно не более, чем $k^{l^n}-1$ различных конфигураций этого куба. Отсюда следует, что для блока A, имеющего вид n-мерного куба со стороной ls, в момент $t \neq 0$ возможно не более, чем $(k^{l^n}-1)^{s^n}$ различных конфигураций.

Положим

$$p = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq r \leq n}} |j_r^i|, \tag{2.I}$$

где j_r^i -координаты векторов $\vec{\jmath}_i$, определяющих соседей ячейки в структуре $\mathcal{O}$. Обозначим через B n-мерный куб со стороной $ls-4p$, полученный из A удалением оболочки глубины $2p$. Тогда $N(N^-(B)) \subset A$ (см. определения (I.IO) и (I.II)). Рассмотрим теперь всевозможные конфигурации $(c_i)_A$ с фиксированной конфигурацией оболочки $A \setminus B$: $(c_i)_{A \setminus B} = (c_j)_{A \setminus B}$. Тем самым для любой пары различных конфигураций $(c_i)_A$, $(c_j)_A$ выполнено первое условие (I.I3) ВСК. Число различных таких конфигураций равно $k^{(ls-4p)^n}$. С другой стороны, блок $N^-(B) \subset A$, поэтому число различных $(\tau(c_i))_{N^-(B)}$ меньше $(k^{l^n}-1)^{s^n}$.

Докажем, что при достаточно больших s

$$(k^{l^n}-1)^{s^n} < k^{(ls-4p)^n}. \tag{2.2}$$

Это будет означать, что для всех $(c_i)_A$ не хватает различных $(\tau(c_i))_{N^-(B)}$, т.е., существуют такие $(c_{i_0})_A \neq (c_{j_0})_A$, что выполняется второе условие (I.I4) ВСК : $(\tau(c_{i_0}))_{N^-(B)} = (\tau(c_{j_0}))_{N^-(B)}$. Эти конфигурации $(c_{i_0})_A$ и $(c_{j_0})_A$ являются ВСК. Таким образом, остается доказать неравенство (2.2).

Вместо (2.2) докажем более сильное утверждение

$$\lim_{s\to\infty} \frac{(k^{l^n}-1)^{s^n}}{k^{(ls-4p)^n}} = 0. \tag{2.3}$$

Преобразуем

$$\frac{(k^{l^n}-1)^{s^n}}{k^{(ls-4p)^n}} = \left(\frac{k^{l^n}-1}{k^{(l-\frac{4p}{s})^n}}\right)^{s^n}.$$

Для конкретной структуры $\mathfrak{A}$ параметры k, l, n и p фиксированы. Поэтому

$$\lim_{s\to\infty} \frac{k^{l^n}-1}{k^{(l-\frac{4p}{s})^n}} = \frac{k^{l^n}-1}{k^{l^n}} < 1.$$

Соотношение (2.3) и тем самым первая часть теоремы доказаны.

2) Пусть в структуре $\mathfrak{A}$ существуют ВСК. Докажем, что в $\mathfrak{A}$ существуют РС.

Пусть p определен формулой (2.I). Выберем l так, чтобы в n - мерном кубе K_l со стороной l можно было разместить пару взаимно стираемых конфигураций, которые совпадают на оболочке глубины $2p$ этого куба. Определим отношение эквивалентности R для конфигураций блока K_l. $(c_1)_{K_l} R (c_2)_{K_l}$ тогда и только тогда, когда $(c_1)_{M_l} = (c_2)_{M_l}$, где M_l - оболочка глубины $2p$ для куба K_l, и $(c_1)_{K_l}$ и $(c_2)_{K_l}$ являются ВСК. Тогда число классов эквивалентности R не больше $k^{l^n}-1$. Отметим, что R -эквивалентные конфигурации неотличимы (после применения преобразования τ) ни в каком окружении.

Составим теперь из s^n кубов со стороной l куб K_{ls} со стороной ls. Определим отношение эквивалентности R^* для конфигураций куба K_{ls}: $(d_1)_{K_{ls}} R^* (d_2)_{K_{ls}}$, если для любого из s^n кубов $K_l^{(i)}$, составляющих куб K_{ls}, $(d_1)_{K_l^{(i)}} R (d_2)_{K_l^{(i)}}$. Легко видеть, что R^* -эквивалентные конфигурации $(d_1)_{K_{ls}}$ и $(d_2)_{K_{ls}}$ являются ВСК, и для куба K_{ls-2p}, полученного из K_{ls} удалением оболочки глубины p,

$$(\tau(d_1))_{K_{ls-2p}} = (\tau(d_2))_{K_{ls-2p}} .$$

Поэтому в момент времени $t>0$ куб K_{ls-2p} может иметь не более $(k^{l^n}-1)^{s^n}$ различных конфигураций. Число различных конфигураций куба K_{ls-2p} равно $k^{(ls-2p)^n}$. Если

$$(k^{l^n}-1)^{s^n} < k^{(ls-2p)^n}, \qquad (2.4)$$

то некоторые из конфигураций куба K_{ls-2p} не имеют предшественников, т.е. являются РС. Но из справедливости неравенства (2.2) следует справедливость (2.4). Значит, при достаточно больших s (2.4) выполняется.

Теорема 2.I доказана.

Докажем теперь теорему, которая на первый взгляд может показаться неожиданной.

<u>Теорема 2.2.</u> В произвольной n - мерной сотообразной

структуре глобальные райские сады существуют тогда и только тогда, когда существуют райские сады.

Доказательство. Как уже отмечалось в § 2 главы I, любая глобальная конфигурация, содержащая РС, является ГРС, поэтому из существования РС очевидно следует существование ГРС. Остается доказать обратное утверждение. Пусть в структуре $\mathfrak{A}$ не существует РС. Докажем, что для любой глобальной конфигурации c существует конфигурация d такая, что $\tau(d) = c$. Этим завершится доказательство теоремы 2.2.

Фиксируем произвольную глобальную конфигурацию c.

Обозначим через X_i n - мерный куб со стороной $2i+1$ и центром в ячейке $\{0,0,\ldots,0\}$:

$$X_i = \{\vec{J} = \{i_1,\ldots,i_n\} / -i \le i_j \le i \quad (j=1,\ldots,n)\}. \qquad (2.5)$$

Конфигурация $(c)_{X_i}$ не является РС, поэтому для нее существует конечное число предшественников $(d_1^{(i)})_{N(X_i)},\ldots,$ $(d_{N_i}^{(i)})_{N(X_i)}$ на блоке $N(X_i)$. Некоторые из $(d_j^{(i)})_{N(X_i)}$ обязательно можно дополнить до предшественника конфигурации $(c)_{X_{i+1}}$ на блоке $N(X_{i+1})$. Легко видеть, что любой предшественник конфигурации $(c)_{X_{i+1}}$ можно получить таким образом.

Рассмотрим теперь дерево предшественников, где каждая вершина уровня i - это предшественник конфигурации $(c)_{X_i}$ на блоке $N(X_i)$, причем вершина уровня i

соединена дугами со всеми вершинами уровня $i+1$, которые соответствуют конфигурациям, получаемым расширением конфигурации этой вершины. Это дерево имеет конечное ветвление, но бесконечное число вершин. Согласно Лемме о бесконечности (см. напр. [72]), в таком дереве существует бесконечный путь. Этот бесконечный путь определяет глобальную конфигурацию d, так как переходя по пути с вершины уровня i на вершину уровня $i+1$, состояния ячеек блока $N(X_i)$ не меняются. (Отметим, что это доказательство существования d неконструктивно). Таким образом, для произвольной конфигурации c существует предшественник $: \tau(d) = c$.

Теорема 2.2 доказана.

Пусть даны две ВСК $(c_1)_X$ и $(c_2)_X$. Определим глобальные конфигурации c_1 и c_2 : $c_1(\vec{j}) = c_2(\vec{j}) = s_0$ для любой ячейки $\vec{j} \bar{\in} X$. Тогда c_1 и c_2 являются КГВСК. Пусть, наоборот, c_1 и c_2 являются КГВСК. Обозначим $B = \{\vec{j} \mid c_1(\vec{j}) \neq c_2(\vec{j})\}$ и $X = N(N^-(B))$. Тогда $(c_1)_X$ и $(c_2)_X$ являются ВСК. Поэтому из Теорем 2.I и 2.2 получаем

<u>Следствие 2.3</u> Для произвольной сотообразной структуры $\mathcal{A}$ равносильны следующие четыре утверждения:

I) в $\mathcal{A}$ существуют РС,

2) в $\mathcal{A}$ существуют ВСК,

3) в $\mathcal{A}$ существуют ГРС,

4) в $\mathfrak{A}$ существуют КГВСК.

Докажем теперь

<u>Теорему 2.4.</u> В любой сотообразной структуре из существования конечных глобальных райских садов (КГРС) следует существование глобальных взаимно стираемых конфигураций (ГВСК).

Доказательство. Если в структуре существуют РС, то очевидно существуют и КГРС и ГВСК. Поэтому остается случай, когда РС не существуют. Итак, допустим, что в структуре не существуют РС, но существуют КГРС, и докажем существование ГВСК. Обозначим через c_0 нулевую конфигурацию: $c_0(\vec{J}) = s_0$ для всех $\vec{J} \in Z^n$. Тогда очевидно $\tau(c_0) = c_0$. Докажем, что существует ненулевая конфигурация a такая, что $\tau(a) = c_0$. Тогда c_0 и a будут ГВСК.

Действительно, рассмотрим произвольный КГРС d , $d \in C_F$. Так как в структуре не существуют РС (и тем самым ГРС), то существует глобальная конфигурация $b \bar{\in} C_F$, $\tau(b) = d$. Блок $\sup b$ в бесконечен. Поэтому существует такое состояние $s_j \neq s_0$, что $b(\vec{J}) = s_j$ для бесконечно многих $\vec{J}$. Пусть i - произвольное натуральное число. Рассмотрим нулевую конфигурацию $(c_0)_{X_i}$, где X_i определено формулой (2.5). Для нее существует хотя бы один предшественник

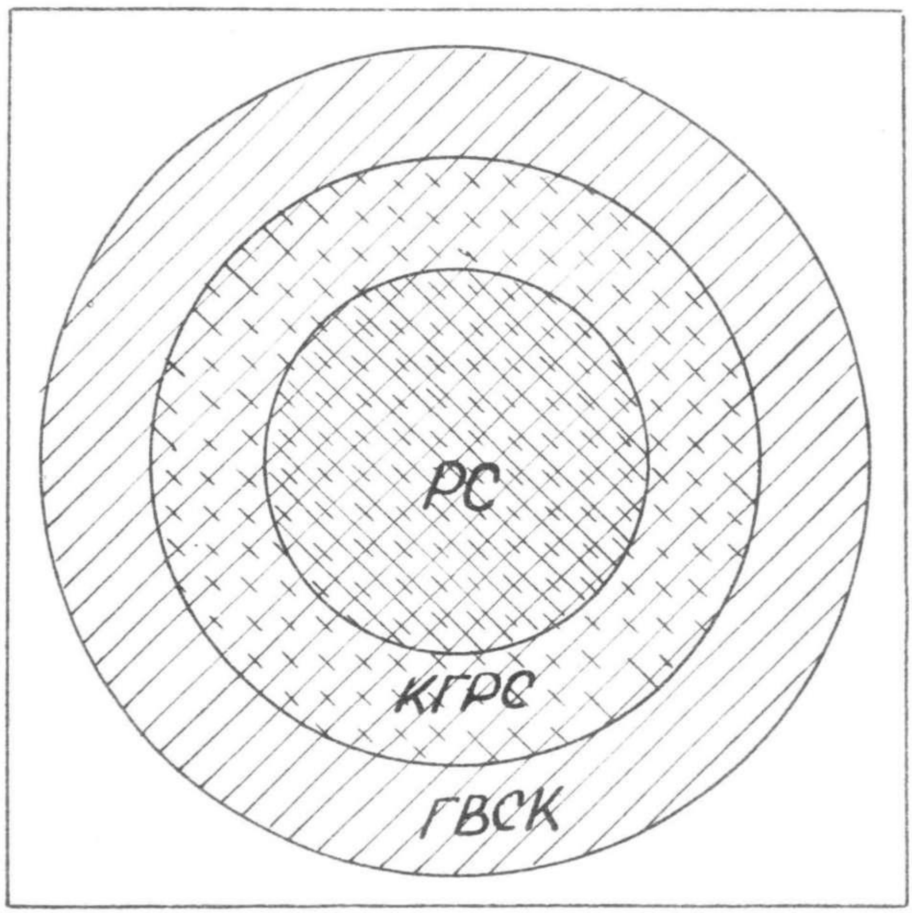


Рис. 13

$(a_i)_{N(X_i)}$ такой, что $a_i(\{0,\dots,0\}) = s_j$ (возьмем ячейку $\vec{J_i}$, $b(\vec{J_i}) = s_j$, размещенную достаточно далеко от блока $\sup d$, тогда конфигурацию $(a_i)_{N(X_i)}$ можно получить, например, сдвигом конфигурации b на $-\vec{J_i}$). Теперь остается, как и при доказательстве Теоремы 2.2, построить дерево предшественников (включаем только предшественники конфигураций $(c_0)_{X_i}$, в которых ячейка $\{0,0,\dots,0\}$ имеет состояние s_j). Бесконечный путь в этом дереве дает конфигурацию a, $a \neq c_0$, такую, что $\tau(a) = c_0$. Теорема 2.4 доказана.

Доказательство
Теоремы 2.6, которое будет приведено в этом параграфе, предоставит нам пример структуры, в которой существуют ГВСК, но не КГРС. Поэтому, учитывая
Теорему 2.4 и замечания в §2 главы I, получаем

<u>Следствие 2.5.</u> В произвольной сотообразной структуре из существования РС следует существование КГРС, а из существования КГРС следует существование ГВСК. Оба обратные утверждения неверны.

Утверждения следствий 2.3 и 2.5 графически изображены на рис. 13, где показана взаимосвязь множеств структур, в которых существуют соответствующие конфигурации.

Переходим теперь к выводу Теоремы 2.6.

Рассмотрим одномерную 2 - структуру с

$$\mathcal{E} = (-2, -1, 0)$$

и таблицей функции перехода:

x_1	x_2	x_3	$\sigma(x_1, x_2, x_3)$
S_0	S_0	S_0	S_0
S_0	S_0	S_1	S_1
S_0	S_1	S_0	S_1
S_0	S_1	S_1	S_0
S_1	S_0	S_0	S_0
S_1	S_0	S_1	S_1
S_1	S_1	S_0	S_0
S_1	S_1	S_1	S_1

(2.6)

Для примера рассмотрим действие глобального преобразования τ на конфигурации $\bar{c} \in C_F$:

$$\bar{c} = \leftarrow S_0\, S_1\, S_0\, S_1\, S_1\, S_1\, S_1\, S_0 \rightarrow ,$$

где стрелки указывают на то, что все остальные ячейки находятся в состоянии покоя S_0 .

	...	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$t=0$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_0	S_1	S_1	S_1	S_1	S_0	$\rightarrow$
$t=1$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_1	S_1	S_0	S_1	S_1	S_0	$\rightarrow$
$t=2$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_0	S_1	S_0	S_1	S_0	S_0	$\rightarrow$
$t=3$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_0	$\rightarrow$
$t=4$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_0	S_1	S_1	S_1	S_1	S_0	$\rightarrow$

Итак, $\tau^4(\bar{c}) = \bar{c}$, т.е. конфигурация $\bar{c}$ содержится в цикле длины $T=4$. Докажем, что в структуре (2.6) любая конечная глобальная конфигурация содержится в некотором цикле, состоящим из конечных глобальных конфигураций. Поэтому в структуре (2.6) любая $c \in C_F$ имеет предшественника из C_F, т.е. КГРС не существуют. С другой стороны, очевидно, что $\tau(c_1) = \tau(c_2) = c_1$, где

$$c_1 = \ldots s_1\ s_1\ s_1\ s_1\ s_1\ s_1\ s_1 \ldots,$$
$$c_2 = \ldots s_1\ s_0\ s_1\ s_0\ s_1\ s_0\ s_1 \ldots .$$

Поэтому структура (2.6) может служить примером структуры, необходимым для Следствия 2.5.

Рассмотрим теперь произвольную конечную глобальную конфигурацию c, "активная" часть которой составлена из ℓ рядом стоящих фрагментов $s_1 s_0$ и $s_1 s_1$:

$$c(i) = s_0 \quad \text{при} \quad i \leq 0, \tag{2.7}$$
$$c(i) = s_0 \quad \text{при} \quad i \geq 2\ell+1, \tag{2.8}$$
$$c(1) = c(3) = \ldots = c(2\ell-1) = s_1, \tag{2.9}$$
$$c(2), c(4), \ldots, c(2\ell) \quad \text{- произвольны.}$$

Класс всех 2^ℓ конфигураций, удовлетворяющих условиям (2.7) - (2.9), обозначим через C_ℓ. Докажем, что из $c \in C_\ell$ следует $\tau(c) \in C_\ell$. Действительно, пусть $c \in C_\ell$. Тогда из $\sigma(s_0, s_0, s_0) = s_0$ следует, что $\tau(c)$ удовлетворяет (2.7), из $\sigma(s_1, s_1, s_0) = \sigma(s_1, s_0, s_0) = s_0$ следует, что $\tau(c)$ удовлетворяет (2.8), а из $\sigma(s_0, s_0, s_1) = \sigma(s_1, s_0, s_1) = \sigma(s_1, s_1, s_1) = s_1$ следует, что $\tau(c)$ удовлетворяет (2.9).

В структуре (2.6) не существуют КГВСК. Действительно, допустим противное. Пусть c_1 и c_2 являются КГВСК. Пусть i – самая левая из ячеек, для которых $c_1(i) \neq c_2(i)$. Тогда $c_1(i-1) = c_2(i-1)$ и $c_1(i-2) = c_2(i-2)$. Легко видеть, что из этих трех условий и функции перехода (2.6) следует $\tau(c_1)(i) \neq \tau(c_2)(i)$, т.е. c_1 и c_2 не являются КГВСК.

Тем самым доказано, что любая $c \in C_\ell$ содержится в цикле длины $T \leq 2^\ell$. Докажем индукцией по ℓ, что длина цикла $T = 2^j$, $j \leq \ell$. При $\ell = 1$ обе конфигурации из C_1 входят в один цикл длины $T = 2$. Пусть теперь каждая конфигурация из C_r входит в некоторый цикл длины 2^j, $j \leq r$. Рассмотрим произвольную конфигурацию $c \in C_{r+1}$. Состояния ячеек i, $i \geq 2r+1$, не влияют на состояния ячеек i, $i \leq 2r$, поэтому начало конфигурации $c(1)c(2)\ldots c(2r)$ повторяется впервые через $T = 2^j$, $j \leq r$. Если при этом также $\tau^{2^j}(c)(2r+2) = c(2r+2)$, то конфигурация c содержится в цикле длины 2^j. Если же $\tau^{2^j}(c)(2r+2) \neq c(2r+2)$, то обязательно $\tau^{2^{j+1}}(c)(2r+2) = c(2r+2)$, т.е. c содержится в цикле длины $T = 2^{j+1}$ (в противоположном случае $\tau^{2^j}(c(1)c(2)\ldots c(2r)s_1 s_0) = \tau^{2^j}(c(1)\ldots c(2r)s_1 s_1)$, что влечет за собой существование КГВСК). Итак, доказано, что каждая конфигурация $c \in C_\ell$ содержится в некотором цикле длины $T = 2^j$, $j \leq \ell$.

Переходим теперь к определению j, т.е. точной длины циклов. Для этого нам будет удобно ввести обозначения

$$S_1 S_0 = 1, \quad S_1 S_1 = 0. \tag{2.10}$$

Тогда любая $c \in C_\ell$ изображается последовательностью длины ℓ из 0 и 1. Так, конфигурации $\bar{c}$ соответствует последовательность 100. Пусть последовательность $a^{(0)}(1) \dots a^{(0)}(\ell)$ соответствует конфигурации c. Тогда последовательность, соответствующую $\tau^t(c)$ обозначим через $a^{(t)}(1) \dots a^{(t)}(\ell)$.

Легко найти закон, по которому из последовательности $a^{(t)}(1) \dots a^{(t)}(\ell)$ получается последовательность $a^{(t+1)}(1) \dots a^{(t+1)}(\ell)$. А именно, из (2.6) следует, что $a^{(t+1)}(i) = \sigma'(a^{(t)}(i-1), a^{(t)}(i))$, где $\sigma'(x_1, x_2)$ задается таблицей

x_1	x_2	$\sigma'(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

При вычислении $a^{(t+1)}(1)$ надо учитывать "граничные условия"

$$a^{(t)}(0) \equiv 1. \tag{2.11}$$

Функцию $\sigma'(x_1, x_2)$ можно записать и аналитически

$$\sigma'(x_1, x_2) = [x_1 + x_2]_{mod\, 2} \tag{2.12}$$

(этим и объясняются обозначения (2.10)). Индукцией по t легко доказать, что при всех $1 \le i \le \ell$ и всех $t \ge 0$ справедливо соотношение

$$a^{(t)}(i) = \Big[\sum_{j=0}^{i} \binom{t}{j} a^{(0)}(i-j) \Big]_{mod 2}, \qquad (2.13)$$

где $\binom{t}{j} \equiv 0$ при $j > t$.

Будем теперь искать длину цикла для произвольной последовательности длины ℓ $a^{(0)}(1) a^{(0)}(2) \dots a^{(0)}(\ell)$. Длина цикла - это минимальное t, при котором для всех i, $1 \le i \le \ell$,

$$a^{(t)}(i) = a^{(0)}(i).$$

Используя (2.13) и учитывая (2.11), отсюда получаем

$$\Big[\binom{t}{1} \Big]_{mod 2} = 0,$$

$$\Big[\binom{t}{1} a^{(0)}(1) + \binom{t}{2} \Big]_{mod 2} = 0,$$

$$\Big[\binom{t}{1} a^{(0)}(2) + \binom{t}{2} a^{(0)}(1) + \binom{t}{3} \Big]_{mod 2} = 0,$$

$$- \; - \; - \; - \; -$$

$$\Big[\binom{t}{1} a^{(0)}(\ell-1) + \binom{t}{2} a^{(0)}(\ell-2) + \dots + \binom{t}{\ell} \Big]_{mod 2} = 0.$$

Эта система эквивалентна системе

$$\Big[\binom{t}{1} \Big]_{mod 2} = \Big[\binom{t}{2} \Big]_{mod 2} = \dots = \Big[\binom{t}{\ell} \Big]_{mod 2} = 0.$$

Отсюда следует $t > \ell$, так, как $\binom{\ell}{\ell} = 1$. По ранее доказанному, t имеет вид 2^j. Из Леммы 2.9 (§ 2 главы 2) следует, что

$$\left[\binom{2^j}{i}\right]_{mod 2} = 0$$

при всех i , $1 \leq i \leq 2^j - 1$.

Таким образом доказано, что любая $c \in C_\ell$ содержится в цикле длины

$$T(\ell) = 2^{1+[\log_2 \ell]} \tag{2.14}$$

($T(\ell)$ - наименьшая степень числа 2, бо́льшая ℓ).

Переходим к исследованию конфигураций $c \in C_F$, не содержащихся ни в одном C_ℓ . Легко убедиться, что любую конфигурацию $c \in C_F$ можно представить в виде

$$\leftarrow S_0 \bar{C}_1 \underbrace{S_0 \ldots S_0}_{m_1} \bar{C}_2 \underbrace{S_0 \ldots S_0}_{m_2} \bar{C}_3 \ldots \bar{C}_{k-1} \underbrace{S_0 \ldots S_0}_{m_{k-1}} \bar{C}_k S_0 \rightarrow \tag{2.15}$$

где конфигурация $\leftarrow S_0 \bar{C}_i S_0 \rightarrow$ является сдвигом подходящей конфигурации из C_{ℓ_i} $(i = 1, \ldots, k)$, и $m_i \geq 1$ $(i = 1, \ldots, k-1)$. Докажем, что все компоненты $\bar{C}_i$ перерабатываются глобальным преобразованием τ независимо друг от друга. На компоненту $\bar{C}_i$ может влиять лишь компоненты, находящиеся влево от нее. Однако компонента $\bar{C}_{i-1}$ по ранее доказанному не распространяется вправо, т.е., "изоляция" $\underbrace{S_0 \ldots S_0}_{m_{i-1}}$ сохраняется, а из $\sigma(S_0, S_0, S_1) = \sigma(S_1, S_0, S_1) = S_1$ следует, что и в случае $m_{i-1} = 1$ компонента $\bar{C}_i$ развивается независимо от $\bar{C}_{i-1}$.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение. Пусть дана произвольная конфигурация $c \in C_F$. Пусть в представлении (2.15) конфигурации c входит компонента из

C_l, но не входят компоненты из C_j, $j > l$. Тогда в структуре (2.6)

$$\tau^{T(l)}(c) = c\,,$$

где $T(l) = 2^{1+[\log_2 l]}$, а $\tau^t(c) \neq c$ при всех $0 < t < T(l)$.

Отсюда следует, что в структуре (2.6) все конфигурации $c \in C_F$ распределены по конечным циклам с длинами вида 2^j, причем имеются циклы всевозможных длин 2^j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Кроме того, отсюда следует, что в структуре (2.6) не существуют КГРС. Таким образом нами доказана

<u>Теорема 2.6.</u> Существуют структуры, не имеющие конечных глобальных райских садов, но имеющие глобальные взаимно стираемые конфигурации.

§ 2. Структуры, в которых все конфигурации самовоспроизводящиеся

В этом параграфе рассмотрим структуры, в которых все конфигурации самовоспроизводящиеся (определения см. в § 4 главы I). Основным результатом параграфа является Теорема 2.7, которая полностью решает вопросы, рассмотренные в [31] и [59].

Теорема 2.7. Пусть n-мерная сотообразная структура с произвольным индексом соседства $\exists = (\vec{\exists}_1, \ldots, \vec{\exists}_m)$ и множеством состояний $S = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ ($k \geq 2$ произвольное натуральное число, состояние покоя - 0) имеет функцию перехода

$$\sigma(x_1, \ldots, x_m) = [x_1 + x_2 + \ldots + x_m] \bmod k \tag{2.16}$$

Тогда в этой структуре любая конфигурация является самовоспроизводящейся.

Доказательство. Пусть структура $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда из (2.16) получаем

$$\tau(c)(\vec{J}) = \Big[\sum_{i_1=1}^{m} c(\vec{J} + \vec{\exists}_{i_1})\Big] \bmod k,$$

$$\tau^2(c)(\vec{J}) = \Big[\sum_{i_2=1}^{m} \tau(c)(\vec{J} + \vec{\exists}_{i_2})\Big] \bmod k =$$

$$= \Big[\sum_{i_2=1}^{m}\Big[\sum_{i_1=1}^{m} c(\vec{J} + \vec{\exists}_{i_1} + \vec{\exists}_{i_2})\Big] \bmod k\Big] \bmod k =$$

$$= \Big[\sum_{i_2=1}^{m}\sum_{i_1=1}^{m} c(\vec{J} + \vec{\exists}_{i_1} + \vec{\exists}_{i_2})\Big] \bmod k.$$

По индукции получаем

$$\tau^T(c)(\vec{J}) = \Big[\sum_{i_T=1}^{m} \ldots \sum_{i_1=1}^{m} c(\vec{J} + \vec{\mathcal{J}}_{i_1} + \ldots + \vec{\mathcal{J}}_{i_T})\Big]_{\mathrm{mod}\,k}. \qquad (2.17)$$

Пусть $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = T$, $r_1 \geq 0, \ldots, r_m \geq 0$.
Тогда выражение

$$\vec{J} + r_1 \vec{\mathcal{J}}_1 + \ldots + r_m \vec{\mathcal{J}}_m \qquad (2.18)$$

встречается в сумме (2.17) точно

$$\frac{T!}{r_1! \ldots r_m!} \qquad (2.19)$$

раз. Отметим, что векторы $\vec{\mathcal{J}}_1, \ldots, \vec{\mathcal{J}}_m$ могут быть линейно зависимыми и поэтому не исключена возможность представить один и тот же вектор в виде (2.18) несколькими различными способами.

Те ячейки конфигурации c, которые встречаются в сумме (2.17) число раз, кратное k, на $\tau^T(c)(\vec{J})$ не влияют. Поэтому рассмотрим подробнее полиномиальные коэффициенты (2.19).

Лемма 2.8. Пусть k - произвольное натуральное число,

$$k = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s},$$

где $p_1, \ldots, p_s$ - различные простые числа, $\alpha_i \geq 1$, $s \geq 1$. Обозначим

$$M = \min_{1 \leq i \leq s} p_i^{\alpha_i}. \qquad (2.20)$$

Тогда при любых $l \geq 1$, $m \geq 2$ и любых $r_1, \ldots, r_m$ таких, что

$$1 \leq r_i \leq M^{l-1} \quad (i = 2, 3, \ldots, m), \qquad (2.21)$$

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = k^l,$$

справедливо равенство

$$\left[\frac{k^l!}{r_1!\,r_2!\,\dots\,r_m!}\right]_{\bmod k}=0. \qquad (2.22)$$

Доказательство Леммы 2.8 проведем индукцией по m. Рассмотрим сначала случай $m=2$. Тогда

$$\frac{k^l!}{r_1!\,r_2!}=\frac{k^l(k^l-1)\dots(k^l-r_2+1)}{1\cdot 2\ \dots\ r_2}=\frac{k^l}{r_2}\prod_{j=1}^{r_2-1}\frac{k^l-j}{j}. \qquad (2.23)$$

Рассмотрим произвольное p_i из разложения числа k и докажем, что (2.23) делится на $p_i^{\alpha_i}$. Пусть

$$k^l=Bp_i^{\beta_i},$$
$$j=Cp_i^{\gamma_i},$$
$$k^l-j=\mathcal{D}p_i^{\delta_i},$$

где B, C, $\mathcal{D}$ не делятся на p_i. Тогда $\beta_i=l\alpha_i$, а $\gamma_i<\alpha_i(l-1)<\beta_i$, так как $j<r_2\leq M^{l-1}$. Допустим, что $\gamma_i\neq\delta_i$. Разделим обе части тождества $Bp_i^{\beta_i}=Cp_i^{\gamma_i}+\mathcal{D}p_i^{\delta_i}$ на $p_i^{\varepsilon_i}$, где $\varepsilon_i=\min(\gamma_i,\delta_i)<\beta_i$. Левая часть полученного тождества делится на p_i, а правая часть нет. Поэтому $\gamma_i=\delta_i$, т.е., при произвольном j, $1\leq j\leq r_2-1$, разложения чисел k^l-j и j содержат одну и ту же степень p_i.

Далее, k^l/r_2 содержит степень p_i, не ниже чем α_i, так как в числителе содержится $p_i^{\alpha_i l}$, а в знаменателе не более $(p_i^{\alpha_i})^{l-1}$. Значит, доказано, что (2.23) делится на каждое из $p_i^{\alpha_i}$ и тем самым на k.

Пусть теперь утверждение Леммы 2.8 верно при $m = m_0$. Тогда

$$\frac{k^l!}{r_1!\,r_2!\ldots r_{m_0}!\,r_{m_0+1}!} = \frac{k^l!}{(r_1+r_{m_0+1})!\,r_2!\ldots r_{m_0}!}\cdot\frac{(r_1+r_{m_0+1})!}{r_1!\,r_{m_0+1}!}.$$

Первый сомножитель правой части по индуктивному предположению делится на k, второй же является целым числом. Лемма 2.8 доказана.

Для случая, когда k - простое число, аналогично доказывается более сильная

Лемма 2.9. Пусть k - произвольное простое число. Тогда при любых $l \geq 1$, $m \geq 2$ и любых $r_1, r_2, \ldots, r_m$ таких, что

$$r_i \geq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.24}$$

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = k^l,$$

справедливо равенство (2.22).

Эта лемма уже использовалась при доказательстве Теоремы 2.6.

Рассмотрим теперь индекс соседства $\mathcal{J} = (\vec{\mathcal{J}}_1, \ldots, \vec{\mathcal{J}}_m)$. Вектор $\vec{\mathcal{J}}_i \in \mathcal{J}$ будем называть крайним вектором множества $\mathcal{J}$, если он не является выпуклой комбинацией *) остальных векторов множества $\mathcal{J}$. Число различных крайних векторов множества $\mathcal{J}$ обозначим через m_1. Очевидно

---

*) Выпуклой комбинацией векторов $\vec{\mathcal{J}}_1, \ldots, \vec{\mathcal{J}}_m$ называется любой вектор $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \vec{\mathcal{J}}_i$, где $\gamma_i \geq 0, \gamma_1 + \ldots + \gamma_m = 1$.

$$m_1 \geqslant 2 . \qquad (2.25)$$

Далее, существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого крайнего вектора $\vec{\exists}_i$ и для любой выпуклой комбинации $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \gamma_j \vec{\exists}_j$ справедливо неравенство

$$\left| \vec{\exists}_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \gamma_j \vec{\exists}_j \right| \geqslant \varepsilon . \qquad (2.26)$$

Пусть c - произвольная глобальная конфигурация, $c \in C_F$, и A - произвольный блок, $A \supseteq \operatorname{sup} c$. Пусть

$$d(A) = \max_{\vec{J}_1, \vec{J}_2 \in A} |\vec{J}_1 - \vec{J}_2| - \qquad (2.27)$$

диаметр блока A.

<u>Лемма 2.10.</u> Пусть структура $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию (2.16) Теоремы 2.7. Пусть $(c)_A$ произвольная конфигурация, $\operatorname{sup} c \leq A$. Пусть M, ε и m_1 определяются соответственно формулам (2.20), (2.26) и (2.25). Пусть ℓ - произвольное натуральное число такое, что

$$M^{\ell-1} > \frac{d(A)}{\varepsilon} . \qquad (2.28)$$

Тогда для любого крайнего вектора $\vec{\exists}_i$ множества $\exists$ и для любой ячейки $\vec{J} \in A$ выполняется равенство

$$\tau^{k^\ell}(c)(\vec{J} - k^\ell \vec{\exists}_i) = c(\vec{J}), \qquad (2.29)$$

т.е., $\tau^{k^\ell}(c)$ содержит не менее m_1 копий конфигурации $(c)_A$.

Доказательство. Пусть $\vec{J} \in A$. Согласно (2.17),

$$\tau^{k^\ell}(c)(\vec{J} - k^\ell \vec{\exists}_i) = \left[\sum_{i_{k^\ell}=1}^{m} \dots \sum_{i_1=1}^{m} c(\vec{J} - k^\ell \vec{\exists}_i + \vec{\exists}_{i_1} + \dots + \vec{\exists}_{i_{k^\ell}}) \right]_{\mathrm{mod}\, k} \qquad (2.30)$$

$\vec{\exists}_i$ – крайний вектор, поэтому член $c(\vec{\exists})$ в сумме (2.30) встречается точно один раз, при $i_1 = i_2 = \ldots = i_{k^l} = i$. Докажем теперь, что $c(\vec{\exists})$, где $\vec{\exists}$ – любая другая ячейка блока A, встречается в (2.30) число раз, кратное k, и тем самым не влияет на $\tau^{k^l}(c)(\vec{J} - k^l\vec{\exists}_i)$. Далее, $c(\vec{\exists}) = 0$ для любой ячейки $\vec{\exists} \bar{\in} A$, поэтому отсюда уже будет непосредственно следовать утверждение (2.29) Леммы 2.10.

Пусть теперь

$$\vec{\exists} = \vec{J} - k^l\vec{\exists}_i + r_1\vec{\exists}_1 + \ldots + r_m\vec{\exists}_m, \tag{2.31}$$

где $r_1 + \ldots + r_m = k^l$, но нарушается условие (2.21) Леммы 2.8, т.е. по меньшей мере два из $r_1, \ldots, r_m$ больше M^{l-1}. Пусть $r_j > M^{l-1}$, $j \neq i$. Докажем, что тогда $\vec{\exists} \bar{\in} A$. Действительно,

$$|\vec{J} - \vec{\exists}| = |k^l\vec{\exists}_i - r_1\vec{\exists}_1 - \ldots - r_m\vec{\exists}_m| =$$

$$= \Big|\Big(\sum_{s\neq i} r_s\Big)\vec{\exists}_i - \sum_{s\neq i} r_s\vec{\exists}_s\Big| =$$

$$= \Big(\sum_{s\neq i} r_s\Big)\Big|\vec{\exists}_i - \sum_{s\neq i}\frac{r_s}{\sum\limits_{s\neq i} r_s}\vec{\exists}_s\Big|.$$

Отсюда, учитывая (2.26) и (2.28), получаем

$$|\vec{J} - \vec{\exists}| \geq r_j\varepsilon \geq M^{l-1}\varepsilon > d(A).$$

$\vec{J} \in A$, поэтому $\vec{\exists} \bar{\in} A$. Значит, для любого $\vec{\exists}$ в форме (2.31), $\vec{\exists} \in A$, выполнены условия Леммы 2.8, т.е., $c(\vec{\exists})$ входит в (2.30) число раз, кратное k. Лемма 2.10 доказана.

Аналогично, используя вместо Леммы 2.8 Лемму 2.9, доказывается

Лемма 2.II. Пусть структура $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ удовлетворяет условию (2.16) Теоремы 2.7, причем k - простое число. Пусть $(c)_A$ - произвольная конфигурация, $\sup c \subseteq A$. Пусть l - произвольное натуральное число такое, что

$$k^l > d(A). \qquad (2.32)$$

Тогда для любой ячейки $\vec{J}$

$$\tau^{k^l}(c)(\vec{J}) = \left[\sum_{i=1}^{m} c(\vec{J} + k^l \vec{J}_i)\right]_{\mathrm{mod}\, k}, \qquad (2.33)$$

т.е., $\tau^{k^l}(c)$ содержит точно m копий конфигурации $(c)_A$ на блоках $A - k^l\vec{J}_1, \dots, A - k^l\vec{J}_m$, вне же объединения этих блоков все ячейки в состоянии покоя 0.

Эта лемма нам понадобится при доказательстве Теоремы 2.12.

Из Леммы 2.10 уже нетрудно получить Теорему 2.7. Действительно, пусть $(c)_A$ - произвольная конфигурация, $\sup c \subseteq A$. Тогда при подходящем l_1 конфигурация $c_1 = \tau^{k^{l_1}}(c)$ содержит не менее m_1 копий конфигурации $(c)_A$. Вводим конечный блок A_1, содержащий блоки указанных копий, такой, что $\sup \tau^{k^{l_1}}(c) \subseteq A_1$. Тогда для конфигурации $(c_1)_{A_1}$ существует такое l_2, что $c_2 = \tau^{k^{l_2}}(c_1)$ содержит не менее m_1 копий конфигурации $(c_1)_{A_1}$. Это, в свою очередь, значит, что $\tau^{k^{l_1}+k^{l_2}}(c)$ содержит не менее m_1^2 копий $(c)_A$. Продолжая это построение, получаем последовательность натуральных чисел $l_1, l_2, l_3, \ldots$ такую, что при любом $r \geq 1$

$$\tau^{k^{l_1}+k^{l_2}+\ldots+k^{l_r}}(c) \tag{2.34}$$

содержит не менее m_1^r копий конфигурации $(c)_A$, а это значит, что $(c)_A$ самовоспроизводится. Теорема 2.7 доказана.

Переходим теперь к вопросу о скорости самовоспроизведения. Оценку (I.28) числа N_t копий конфигурации $(c)_A$ в момент времени t можно переписать в форме

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{N_t}{t^n} < \infty. \tag{2.35}$$

Будем говорить, что достигается максимальная скорость самовоспроизведения, если

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{N_t}{t^n} > 0. \tag{2.36}$$

Использование моментов времени $t_r = k^{l_1}+\ldots+k^{l_r}$ из (2.34) не дает доказательства неравенства (2.36). Однако для некоторого частного случая неравенство (2.36) удается доказать.

<u>Теорема 2.12.</u> Пусть дана одномерная k - структура $\mathfrak{A}$ (k - простое число) с индексом соседства $\mathfrak{I}=(-1, 0, 1)$ и функцией перехода (2.16):

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = [x_1+x_2+x_3]_{\mathrm{mod}\,k}. \tag{2.37}$$

Тогда максимальная (линейная) скорость самовоспроизведения достигается при любой исходной конфигурации $(c)_A$.

Доказательство. Сначала сведем рассмотрение произвольной конфигурации c к рассмотрению примитивной конфигурации $c^{(0)}$:

$$c^{(0)}(0) = 1,$$
$$c^{(0)}(i) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq 0.$$

Из (2.37) легко получаем, что $\tau^t(c)(i)$ имеет вид

$$\tau^t(c)(i) = \Big[\sum_{j=-t}^{t} \gamma_t(j)\, c(i+j)\Big]_{mod\, k}, \tag{2.38}$$

где $\gamma_t(j)$ – некоторые коэффициенти, независящие от конфигурации c и сдвига i. Докажем теперь, что

$$\gamma_t(j) = \tau^t(c^{(0)})(j). \tag{2.39}$$

Действительно, подставляя в (2.38) вместо c конфигурацию $c^{(j)}$:

$$c^{(j)}(j) = 1, \; c^{(j)}(i) = 0 \quad при \quad i \neq j,$$

получаем $\tau^t(c^{(j)})(0) = \gamma_t(j)$. С другой стороны, $\tau^t(c^{(j)})$ получается сдвигом $\tau^t(c^{(0)})$ на j, т.е., $\tau^t(c^{(j)})(0) = \tau^t(c^{(0)})(-j)$. Поэтому из симметричности конфигурации $c^{(0)}$ и закона перехода (2.37) получаем требуемое равенство (2.39). Итак, нами доказано, что для любой конфигурации c, для любого t, $t \geq 0$, и для любой ячейки i

$$\tau^t(c)(i) = \Big[\sum_{j=-t}^{t} \tau^t(c^{(0)})(j)\, c(i+j)\Big]_{mod\, k}. \tag{2.40}$$

Отметим, что формула (2.40) легко обобщается и для случая произвольной n - мерной структуры (2.16).

Пусть c - произвольная конфигурация, $c \in C_F$ и пусть блок $A \supseteq \sup c$. Не ограничивая общности, можем допустить, что

$$A = \{0, 1, \ldots, \ell\},$$

если только диаметр $d(\sup c) \le \ell$. Пусть t и s выбраны так, что

$$\tau^t(c^{(0)})(i) = \begin{cases} 1 & \text{, если } i = s, \\ 0 & \text{, если } i = s \pm 1, s \pm 2, \ldots, s \pm \ell. \end{cases} \tag{2.41}$$

Тогда из (2.40) следует, что для всех $i \in A$

$$\tau^t(c)(i - s) = c(i). \tag{2.42}$$

Таким образом, конфигурация $\tau^t(c)$ содержит копию конфигурации $(c)_A$ на блоке $A - s = \{-s, -s+1, \ldots, -s+\ell\}$ (блоки копий, соответствующих различным s, не пересекаются).

Обозначим через M_t число различных s таких, что выполняется (2.41). Тогда доказательство неравенства (2.36) сводится к доказательству того, что

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{M_t}{t} > 0. \tag{2.43}$$

При доказательстве неравенства (2.43) будем использовать следующее свойство структуры (2.37) (K - простое число):

при всех t, $t \ge 0$, и всех j

$$\tau^{kt}(c^{(0)})(j) = \begin{cases} \tau^t(i) & \text{, если } j = ki, \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } k, \end{cases} \qquad (2.44)$$

(т.е., конфигурация $\tau^{kt}(c^{(0)})$ получается "разрежением" конфигурации $\tau^t(c^{(0)})$).

Докажем теперь соотношение (2.44). Из Леммы 2.II следует, что

$$\tau^k(c^{(0)})(j) = \begin{cases} 1 & \text{, если } j = 0, \pm k, \\ 0 & \text{в остальных случаях}. \end{cases} \qquad (2.45)$$

Это доказывает (2.44) при $t = 1$. Применяя (2.40), из (2.45) получаем

$$\tau^k(c)(j) = [c(j-k) + c(j) + c(j+k)]_{mod\, k}. \qquad (2.46)$$

Заметим, что формула (2.46) является "разреженным" вариантом функции перехода (2.37). Поэтому, используя (2.46), формула (2.44) легко доказывается индукцией по t.

Формула (2.44) позволяет свести доказательство неравенства (2.43) (а тем самым и Теоремы 2.I2) к доказательству того, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{L_t}{t} > 0, \qquad (2.47)$$

где L_t - число ячеек, имеющих состояние 1 в конфигурации $\tau^t(c^{(0)})$. Действительно, выберем r так, чтобы $k^r > l$ (напомним, что $A = \{0, 1, \dots, l\}$). Тогда, применяя (2.44) r раз, получаем

$$M_{k^r t} = L_t \text{, т.е., } \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{M_t}{t} \geq \frac{1}{k^r} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{L_t}{t}.$$

Теперь переходим к доказательству неравенства (2.47). Из Леммы 2.11 следует, что при произвольном $s \geq 0$

$$\tau^{k^s}(c^{(0)})(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0, \pm k^s, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

т.е.,

$$\tau^{k^s}(c^{(0)}) = \leftarrow 01\underbrace{0\ldots}_{k^s-1}01\underbrace{0\ldots}_{k^s-1}010 \rightarrow . \qquad (2.48)$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $[k^s]_{mod 3} = 0, 1, 2$. Легко видеть, что предшественником конфигурации (2.48) может служить конфигурация

$$\leftarrow 0\, 1_{k-1}\, 0\, 1_{k-1}\, 0 \ldots 1_{k-1}\, 0_{k-1}\, 1 \ldots 0_{k-1}\, 1\, 0_{k-1}\, 1\, 1\, 0 \rightarrow$$

в первом случае, конфигурация

$$\leftarrow 0\, 1_{k-1}\, 0\, 1_{k-1}\, 0 \ldots 1_{k-1}\, 0\, 1\, 0_{k-1}\, 1 \ldots 0_{k-1}\, 1\, 0_{k-1}\, 1\, 1\, 0 \rightarrow$$

во втором случае и конфигурация

$$\leftarrow 0\, 1_{k-1}\, 0\, 1_{k-1}\, 0 \ldots 1_{k-1}\, 1 \ldots 0_{k-1}\, 1\, 0_{k-1}\, 1\, 1\, 0 \rightarrow$$

в третьем случае.

В структуре (2.37) все конфигурации самовоспроизводящиеся, поэтому не существуют РС, а тем самым не существуют и КГВСК. Значит, $\tau^{k^s-1}(c^{(0)})$ совпадает с той из рассмотренных выше трех конфигураций, которая соответствует значению $[k^s]_{mod 3}$. Таким образом, число состояний 1 в конфигурации $\tau^{k^s-1}(c^{(0)})$ не менее $2/3\, k^s$. Поэтому, рассматривая подпоследовательность $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_s = k^s - 1$, получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{L_t}{t} \geq \frac{2}{3}.$$

Неравенство (2.47) доказано. Тем самым закончено доказательство Теоремы 2.12.

§ 3. Почти все одномерные структуры имеют примитивные КГРС

Пусть фиксирован индекс соседства $\exists = (\vec{\exists}_1, \ldots, \vec{\exists}_m)$ n-мерных сотообразных структур. Число всех k-структур с индексом соседства $\exists$ равно $M_k = k^{k^m - 1}$. Пусть A - произвольное свойство сотообразных структур. Обозначим через M_k^A число тех k-структур с индексом $\exists$, которые обладают свойством A. Будем говорить, что почти все k-структуры с индексом соседства $\exists$ обладают свойством A, если

$$\lim_{k \to \infty} \frac{M_k^A}{M_k} = 1. \tag{2.49}$$

Если же (2.49) имеет место при любом $\exists$, то будем просто говорить, что почти все k-структуры обладают свойством A.

Напомним, что примитивными называются глобальные конфигурации, в которых все ячейки, кроме одной, имеют состояние покоя S_0, а структурами размаха m называются одномерные структуры, в которых все m $(m \geq 2)$ соседей ячейки размещены плотно.

В этом параграфе будет доказана

<u>Теорема 2.13.</u> При любом $m \geqslant 2$ почти все K -структуры размаха m имеют примитивные КГРС.

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что для структуры размаха m

$$\exists = (0, 1, \ldots, m-1). \tag{2.50}$$

Пусть фиксирована одномерная структура размаха m с локальным преобразованием σ и глобальным преобразованием τ.

Любую последовательность $U = u_1 \ldots u_{m-1}$, где $u_i \in S$, будем называть фрагментом. Очевидно, множество V всех фрагментов состоит из K^{m-1} фрагментов. Будем говорить, что фрагмент U' следует за фрагментом $U = u_1 \ldots u_{m-1}$ (сокращенно - $U \to U'$, если U' можно получить из U, отбросив первый символ u_1 и добавив в конце некоторый $u_m \in S$. Очевидно, существует точно K различных фрагментов, следующих за данным. Пусть $U = u_1 \ldots u_{m-1}$, $U' = u_2 \ldots u_{m-1} u_m$. Тогда вместо $\sigma(u_1, \ldots, u_m)$ иногда будем писать короче $\sigma(UU')$. Будем говорить, что фрагмент $U^{(2)}$ s_j - следует за $U^{(1)}$ (сокращенно - $U^{(1)} \xrightarrow[s_j]{} U^{(2)}$, если

$$\begin{gathered} U^{(1)} \to U^{(2)}, \\ \sigma(U^{(1)} U^{(2)}) = s_j . \end{gathered} \tag{2.51}$$

Очевидно, если $U^{(1)} \to U^{(2)}$, то существует точно одно s_j такое, что $U^{(1)} \xrightarrow[s_j]{} U^{(2)}$.

Рассмотрим примитивную конфигурацию c :

$$c(0) = s_j \quad (j \neq 0)$$

$$c(i) = s_0 \,, \quad i \neq 0 .$$

Пусть $c_1 \in C_F$ - прообраз конфигурации c , т.е.

$$\tau(c_1) = c .$$

Тогда

$$\sigma\big(c_1(i), \ldots, c_1(i+m-1)\big) = s_0$$

при всех $i<0$ и существует $\ell<0$, что

$$c_1(i) = s_0 \quad \text{при всех} \quad i<\ell .$$

Поэтому для фрагмента

$$U' = c_1(0)\, c_1(1) \ldots c_1(m-2)$$

существует такая конечная последовательность фрагментов

$$U_0, U_1, \ldots, U_n = U', \tag{2.52}$$

что

$$U_0 = s_0 s_0 \ldots s_0 \,, \tag{2.53}$$

$$U_r \underset{s_0}{\rightarrow} U_{r+1} \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2.54}$$

Фрагмент U' будем называть слева s_0 - достижимым, если существует конечная последовательность (2.52), удовлетворяющая условиям (2.53) - (2.54).

Значит, фрагмент U может служить в качестве конфигурации

$$c_1(0)\, c_1(1) \ldots c_1(m-2)$$

только тогда, если U слева s_0 - достижим.

Аналогично, фрагмент U'' будем называть справа

s_0 - достижима, если существует конечная последовательность

$$U_0, U_1, \ldots, U_n = U''$$

такая, что

$$U_0 = s_0 s_0 \ldots s_0 \quad \text{и}$$

$$U_{r+1} \xrightarrow[s_0]{} U_r \quad (r = 0, 1, \ldots, n-1).$$

В качестве конфигурации

$$c_1(1)\, c_1(2) \ldots c_1(m-1)$$

могут служить лишь справа s_0 - достижимые фрагменты.

Наконец, в структуре не существует примитивных КГРС тогда и только тогда, если для любого $s_i \in S$ существует такая пара фрагментов U', U'', что

1) U' слева s_0 - достижим,
2) U'' справа s_0 - достижим и
3) $U' \xrightarrow[s_i]{} U''$.

Рассмотрим теперь подробнее случайные величины φ (φ') числа слева (справа) s_0 - достижимых фрагментов в случайной k - структуре размаха m. Структура определяется таблицей функции σ. Значение

$$\sigma(s_0, s_0, \ldots, s_0) = s_0$$

уже определено. Поэтому число различных структур равно

$$k^{k^m - 1}.$$

Будем строить случайную таблицу функции σ, определяя независимо друг от друга значения функции на k^m-1 наборах аргументов, причем для каждого набора значение функции с вероятностью $1/k$ равно s_i $(i=0,1,\ldots,k-1)$. Тогда, очевидно, все различные k - структуры равновероятны, и оценить долю структур с данным свойством можно при помощи оценки соответствующей вероятности.

Рассмотрим следующую вероятностную процедуру $\mathcal{A}$ получения множества слева s_0 - достижимых фрагментов для случайной структуры. Фрагмент $U_0=s_0\ldots s_0$ достижим по определению в любой структуре; будем называть его фрагментом нулевого поколения. Нахождение следующих поколений определим индуктивно: пусть найдены все фрагменты поколений $0,1,\ldots,r$ и среди них не имеется одинаковых. Для каждого фрагмента U r - того поколения рассмотрим все k следующих за ним фрагментов $U^{(1)},\ldots,U^{(k)}$. Каждый из них с вероятностью $1/k$ независимо от других включаем в кандидаты на $(r+1)$ -ое поколение (содержательно - $U^{(i)}$ включаем, если $\sigma(UU^{(i)})=s_0$.

$(r+1)$ -ое поколение - это множество кандидатов - фрагментов, не встречающихся в предыдущих поколениях. Процесс продолжаем, пока очередное поколение не оказывается пустым (общее число фрагментов k^{m-1}, поэтому k^{m-1} -ое поколение заведомо пусто). Полученное случайное множество фрагментов всех поколений и является множеством слева s_0 - достижимых фрагментов для случайной структуры, так как при формировании кандидатов на I, 2, 3, ... поколения для любого набора аргументов $(u_1, \dots, u_m)$ $(u_i \in S)$ мы определяем, выполняется ли условие $\sigma(u_1, \dots, u_m) = s_0$, не более одного раза.

Из соображений симметрии ясно, что случайные величины ξ и ξ' (числа слева и соответственно справа s_0-достижимых фрагментов в случайной структуре) имеют одинаковые распределения. Разумеется, ξ и ξ' - зависимые случайные величины).

Переходим к оценке $P\{\xi \geq l\}$. Для этого рассмотрим ветвящийся случайный процесс $\mathcal{B}$, который получается из вышеописанной процедуры, если все кандидаты на $(r+1)$-ое поколение включаются в $(r+1)$ - ое поколение в качестве отдельных индивидуумов (один и тот же фрагмент может соответствовать нескольким индивидуумам). Точнее, пусть нулевое поколение состоит из одного индивидуума (фрагмента $U_0 = s_0 \dots s_0$). Каждый индивидуум r - того поколения (фрагмент U) дает случайное число индивидуумов $(r+1)$-го поколения по следующему вероятностному закону: каждый из k фрагментов, следующих за U, входит в непосредственное потомство фрагмента U с вероятностью $1/k$ (если данный фрагмент встречается в качестве индивидуума повторно, потомство определяется заново, независимо от предыдущего). Таким образом, вероятность того, что непосредственное потомство индивидуума состоит из i индивидуумов

$$p_i = \binom{k}{i}\left(\frac{1}{k}\right)^i\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-i}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k).$$

Поэтому производящая функция

$$f(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i = \left(1 + \frac{s-1}{k}\right)^k.$$

Математическое ожидание числа непосредственных потомков индивидуума равно I, поэтому процесс конечен с вероятностью I (см. [47]). Обозначим через χ случайную величину - общее число индивидуумов во всех поколениях. Вычислим теперь

$$P_j = P\{\chi = j\}$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Согласно [47], производящая функция

$$F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j s^j \tag{2.55}$$

удовлетворяет уравнению

$$F(s) = s f(F(s)).$$

Обозначим $F(s) = u$. Тогда

$$s = \frac{u}{f(u)}.$$

Учитывая (2.55), по формуле обращения Лагранжа (см. напр. [73] получаем

$$P_j = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^{j-1}}{du^{j-1}}\left(f(u)\right)^j\right\}\Big|_{u=0} =$$

$$= \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^{j-1}}{du^{j-1}}\left(1-\frac{1}{k}+\frac{u}{k}\right)^{kj}\right\}\Big|_{u=0} =$$

$$= \frac{1}{j!}\;\frac{kj\,(kj-1)\ldots(kj-j+2)}{k^{j-1}}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{kj-j+1} =$$

$$= \frac{(kj)!\,(k-1)^{kj-j+1}}{j!\,(j(k-1))!\,(kj-j+1)\,k^{kj}}\,.$$

Используя формулу Стирлинга, получаем оценку

$$P_j < \frac{\sqrt{k}\;e^{\frac{1}{12kj}}}{j\sqrt{2\pi j\,(k-1)}} < 0{,}52\,j^{-3/2},$$

равномерную по $k = 2, 3, \ldots$

Теперь мы можем оценить и

$$P\{\chi \geq l\} < 0{,}52\sum_{i=l}^{\infty} i^{-3/2} <$$

$$< 0{,}52\int_{l-1}^{\infty} x^{-3/2}\,dx = \frac{1{,}04}{\sqrt{l-1}} < \qquad (2.56)$$

$$< \frac{1{,}48}{\sqrt{l}}\,.$$

$$(l \geq 2)$$

Рассмотрим теперь связь между случайными величинами φ и χ. Пусть дана реализация ветвящегося процесса $\mathcal{B}$, для которой $\chi = \chi_0$ (χ всегда конечна). Тогда просматривая подряд индивидуумы всех поколений, начиная с первого, и вычеркивая каждый повторяющийся фрагмент (и всю ветвь, порожденную им), мы получаем некоторую реализацию процедуры $\mathcal{A}$. Соответствующее значение $\xi_0 \leq \chi_0$. С другой стороны, легко видеть, что сумма вероятностей бесконечного числа реализаций процесса $\mathcal{B}$, соответствующих данной реализации процедуры $\mathcal{A}$, равна вероятности этой реализации (заметим, что здесь сравниваются значения из двух различных пространств вероятностей). Отсюда получаем, что

$$P\{\xi \geq l\} \leq P\{\chi \geq l\}$$

при любом $l \geq 1$ (равенство достигается только при $l = 1$: $P\{\xi \geq 1\} = P\{\chi \geq 1\} = 1$).

Учитывая (2.56), получаем

$$P\{\xi \geq l\} < \frac{1,48}{\sqrt{l}} \qquad (l \geq 2)$$

Рассмотрим случайное число η - число пар фрагментов (U, U') таких, что U слева S_0 - достижим, U' справа S_0 - достижим и $U \to U'$. Если в структуре $\xi = \xi_0$ и $\xi' = \xi_0'$, то число пар (U, U') ни в коем случае не превышает $\xi_0 \cdot \xi_0'$.

Поэтому

$$P\{\eta \geq p\} < P\{\xi\xi' \geq p\} <$$
$$< P\{(\xi \geq \sqrt{p}) \vee (\xi' \geq \sqrt{p})\} <$$
$$< P\{\xi \geq \sqrt{p}\} + P\{\xi' \geq \sqrt{p}\} =$$
$$= 2P\{\xi \geq \sqrt{p}\} <$$
$$< 3p^{-1/4}.$$

Обозначим случайную величину - число различных примитивных глобальных конфигураций (ПГК), которые не являются КГРС в случайной k - структуре через $\xi^{(k)}$. Очевидно всегда $\xi^{(k)} \leq k-1$.

Если для фиксированной k - структуры $\eta = \eta_0 = k$, то структура заведомо имеет не более η_0 различных ПГК, не являющихся КГРС, так как каждая из η_0 пар (U, U') может дать только одну ПГК c, для которой $c(0) = \sigma(U, U')$, но разные пары могут дать и одну и ту же c.

Пусть $\varphi(k)$ - произвольно медленно возрастающая функция натурального аргумента такая, что

$$\varphi(k) \to \infty \quad \text{при } k \to \infty \text{ и } \varphi(k) < k. \qquad (2.57)$$

Из предыдущего следует

$$P\{\xi^{(k)} \geq \varphi(k)\} < P\{\eta \leq \varphi(k)\} < 3(\varphi(k))^{-1/4},$$

т.е., вероятность того, что случайная k - структура размаха m имеет не менее $\varphi(k)$ примитивных глобальных конфигураций, не являющихся глобальными райскими садами,

$$P\{\xi^{(k)} \geq \varphi(k)\} \leq 3(\varphi(k))^{-1/4}. \qquad (2.58)$$

Выражаясь неточно, в почти всех k -структурах почти все ПГК являются КГРС. Тем самым Теорема 2.13 доказана.

Из (2.58) легко получить оценки некоторых других вероятностей. Пусть фиксированы k и i, $1 \leq i \leq k-1$. Оценим вероятность q_k того, что ПГК $c^{(i)}$ $(c^{(i)}(0)=s_i)$ не является КГРС. Из соображений симметрии ясно, что эта вероятность не зависит от выбора i. Число тех k -структур, в которых $c^{(i)}$ не является КГРС, равно $q_k M_k$, где $M_k = k^{k^m-1}$. Разобъем все k - структуры на две группы: к первой отнесем те,которые имеют более $\varphi(k)$ различных $c^{(i)}$, не являющихся КГРС (согласно (2.58), таких структур не более $3(\varphi(k))^{-1/4}M_k$), ко второй - остальные.Будем пересчитывать все k - структуры,считая каждую из них столько раз, сколько различных $c^{(i)}$ в ней не являются КГРС.Тогда общее число структур меньше чем $3(k-1)(\varphi(k))^{-1/4}M_k + \varphi(k)M_k$. С другой стороны, это число равно $(k-1)q_k M_k$. Поэтому

$$(k-1)q_k M_k < 3(k-1)(\varphi(k))^{-1/4}M_k + \varphi(k)M_k.$$

Отсюда $q_k < 3(\varphi(k))^{-1/4} + \frac{\varphi(k)}{k-1} <$

$$< 3(\varphi(k))^{-1/4} + \frac{2\varphi(k)}{k}.$$

Подставив $\varphi(k) = k^{4/5}$, получаем

$$q_k < 5k^{-1/5}. \quad (2.59)$$

Подставляя в (2.58) $\varphi(k) = k-1$, получаем оценку вероятности того, что в случайной k - структуре не имеется примитивных КГРС:

$$P\{\xi^{(k)} \geq k-1\} < 3(k-1)^{-1/4}. \quad (2.60)$$

Оценки (2.58) - (2.60) очень грубы. Так, правая часть (2.60) становится меньше единицы только при $k > 82$. На самом деле оцениваемые вероятности стремятся к нулю быстро.

В таблице 2.I представлены эмпирические распределения -структур размаха 3 по числам s различных примитивных КГРС, полученные с помощью ЭВМ. Для каждого k $(2 \leq k \leq 8)$ было исследовано 1000 случайных k - структур.

Таблица 2.I

k \ s	0	I	2	3	4	5	6	7
2	0,522	0,478						
3	0,250	0,322	0,428					
4	0,I54	0,I70	0,244	0,432				
5	0,I24	0,I00	0,I44	0,I92	0,440			
6	0,07I	0,058	0,085	0,I24	0,I88	0,474		
7	0,063	0,042	0,052	0,074	0,I24	0,I88	0,457	
8	0,060	0,040	0,04I	0,054	0,083	0,097	0,I86	0,437

§ 4. Почти все структуры имеют ВСК наименьшего размера

В этом параграфе будет доказано, что почти все K - структуры имеют ВСК с внутренним блоком, состоящим из одной ячейки. Тем самым будет решена проблема, поставленная Муром [54].

Не ограничивая общности, можем считать, что векторы соседства упорядочены так, чтобы

$$|\vec{\exists}_1| \leqslant |\vec{\exists}_2| \leqslant \ldots \leqslant |\vec{\exists}_m|. \qquad (2.61)$$

ВСК, которые отличаются лишь в одной ячейке, будем обозначать через ВСК-I. В дальнейшем будем использовать ВСК-I вида (I.13)-(I.14). Внутренний блок ВСК-I состоит из одной ячейки $\vec{J}$. Примем для простоты

$$\vec{J} = \vec{O} = \{0, 0, \ldots, 0\}.$$

Рассмотрим подробнее блок $A = N(N^-(\vec{O}))$.

Очевидно

$$N^-(\vec{O}) = \{-\vec{\exists}_1, -\vec{\exists}_2, \ldots, -\vec{\exists}_m\}.$$

Далее, $A = N(N^-(\vec{O}))$ является объединением множеств

$$N(-\vec{\exists}_1) = \{\vec{O}, -\vec{\exists}_1 + \vec{\exists}_2, \ldots, -\vec{\exists}_1 + \vec{\exists}_m\},$$

$$N(-\vec{\exists}_2) = \{-\vec{\exists}_2 + \vec{\exists}_1, \vec{O}, \ldots, -\vec{\exists}_2 + \vec{\exists}_m\},$$

— — — — —

$$N(-\vec{\exists}_m) = \{-\vec{\exists}_m + \vec{\exists}_1, -\vec{\exists}_m + \vec{\exists}_2, \ldots, \vec{O}\}.$$

Все $N(-\vec{\exists}_i)$ содержат ячейку $\vec{0}$. Кроме того, не исключено, что при некоторых i_1, j_1, i_2, j_2 ($i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$, $i_1 \neq j_1$, $i_2 \neq j_2$)

$$-\vec{\exists}_{i_1} + \vec{\exists}_{j_1} = -\vec{\exists}_{i_2} + \vec{\exists}_{j_2}.$$

Поэтому A содержит не более $m^2 - m + 1$ различных ячеек.

Перепишем условия (I.13)-(I.14) применительно к ВСК-I в виде, более удобном для дальнейших рассуждений. Пусть даны две конфигурации $(C_1)_A$ и $(C_2)_A$, $A = N(N^-(\vec{0}))$ такие, что

$$C_1(\vec{0}) = x,\ C_2(\vec{0}) = y,\ x \neq y; \tag{2.62}$$

$$C_1(-\vec{\exists}_i + \vec{\exists}_j) = C_2(-\vec{\exists}_i + \vec{\exists}_j) = a_{ij} \tag{2.63}$$

при всех i, j, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$;

$$\begin{aligned} \sigma(x, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1m}) &= \sigma(y, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1m}),\\ \sigma(a_{21}, x, a_{23}, \ldots, a_{2m}) &= \sigma(a_{21}, y, a_{23}, \ldots, a_{2m}),\\ &\ldots\ldots\\ \sigma(a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, x) &= \sigma(a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \ldots, y). \end{aligned} \tag{2.64}$$

Тогда $(C_1)_A$ и $(C_2)_A$ являются ВСК-I.

Состояния a_{ij} некоторых ячеек блока A заранее зафиксируем. Эти ячейки впредь будем называть фиксированными, а остальные ячейки блока A – свободными. Цель этого параграфа – доказать, что почти все K -структуры имеют даже ВСК-I с заранее фиксированной конфигурацией α на блоке фиксированных ячеек. Для краткости такие конфигурации будем называть ВС$^{\text{К}}$-I α .

При разделении блока A на блоки фиксированных и свободных ячеек нам понадобится интуитивно очевидная

Лемма 2.14. Если $\vec{Q}$ не содержится в выпуклой оболочке векторов $\vec{J}_1, \vec{J}_2, \ldots, \vec{J}_j$, то среди соседей ячейки $\vec{Q}$ найдется по крайней мере одна ячейка, не являющаяся соседом ни для одной из ячеек $\vec{J}_1, \vec{J}_2, \ldots, \vec{J}_j$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда при любом i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ существует такая пара индексов $g(i)$ и $h(i)$, $(g(i) = 1, 2, \ldots, j$; $h(i) = 1, 2, \ldots, m)$, что

$$\vec{Q} + \vec{\mathcal{J}}_i = \vec{\mathcal{J}}_{g(i)} + \vec{\mathcal{J}}_{h(i)} . \qquad (2.65)$$

Функция $h(i)$ отображает множество $1, 2, \ldots, m$ в себя. Поэтому существует такой цикл $p_1, p_2, \ldots, p_s$, что $h(p_1) = p_2, h(p_2) = p_3, \ldots, h(p_s) = p_1$.

Выпишем равенства (2.65), соответствующие этому циклу:

$$\vec{Q} + \vec{\mathcal{J}}_{p_1} = \vec{\mathcal{J}}_{g(p_1)} + \vec{\mathcal{J}}_{p_2} ,$$

$$\vec{Q} + \vec{\mathcal{J}}_{p_2} = \vec{\mathcal{J}}_{g(p_2)} + \vec{\mathcal{J}}_{p_3} ,$$

— — —

$$\vec{Q} + \vec{\mathcal{J}}_{p_s} = \vec{\mathcal{J}}_{g(p_s)} + \vec{\mathcal{J}}_{p_1} .$$

Сложив эти равенства, получаем

$$s\vec{Q} = \sum \vec{\mathcal{J}}_{p_i} = \sum \vec{\mathcal{J}}_{g(p_i)} + \sum \vec{\mathcal{J}}_{p_i}.$$

Значит, $\vec{Q} = \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{s} \vec{\mathcal{J}}_{g(p_i)}$, т.е. $\vec{Q}$ является выпуклой комбинацией векторов $\vec{\mathcal{J}}_1, \ldots, \vec{\mathcal{J}}_j$. Это противоречит условию леммы. Лемма 2.14 доказана.

Из (2.61) и того, что все векторы $\vec{\mathcal{J}}_1, \ldots, \vec{\mathcal{J}}_m$ различны, следует, что $-\vec{\mathcal{J}}_{j+1}$ не содержится в выпуклой оболочке векторов $-\vec{\mathcal{J}}_1, -\vec{\mathcal{J}}_2, \ldots, -\vec{\mathcal{J}}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$. Поэтому $\vec{Q} = -\vec{\mathcal{J}}_{j+1}$ и $\vec{\mathcal{J}}_i = -\vec{\mathcal{J}}_i$ удовлетворяют условию леммы 2.14.

Сейчас распределим ячейки блока A на свободные и фиксированные. Начнем с $N(-\vec{\mathcal{J}}_1)$. Ячейку $\vec{O}$ оставим свободной, остальные зафиксируем. Если ячейки блоков $N(-\vec{\mathcal{J}}_1), \ldots, N(-\vec{\mathcal{J}}_j)$ уже распределены, то по Лемме 2.14 среди ячеек блока $N(-\vec{\mathcal{J}}_{j+1})$ найдется хотя бы одна нераспределенная ячейка $-\vec{\mathcal{J}}_{j+1} + \vec{\mathcal{J}}_{\tau_{j+1}}$. Эту ячейку оставим свободной, остальные не распределенные еще ячейки блока $N(-\vec{\mathcal{J}}_{j+1})$ (если такие имеются) зафиксируем. Таким образом, свободными оставим ячейки

$$\vec{O},\ -\vec{\mathcal{J}}_2 + \vec{\mathcal{J}}_{\tau_2},\ -\vec{\mathcal{J}}_3 + \vec{\mathcal{J}}_{\tau_3},\ \ldots,\ -\vec{\mathcal{J}}_m + \vec{\mathcal{J}}_{\tau_m},$$

остальные ячейки блока A зафиксируем. Число фиксированных ячеек не превосходит $(m^2 - m + 1) - m = (m-1)^2$. Нас интересует случай $k \to \infty$, поэтому состояния фиксированных ячеек можем зафиксировать так, чтобы все они были различными (например, используя состояния $S_1, S_2, \ldots, S_{(m-1)^2}$ или часть из них). В дальнейшем под α будем понимать конфигурацию блока фиксированных выше ячеек с различными состояниями ячеек.

Теорема 2.15. В почти всех k -структурах существует по меньшей мере γk,

$$\gamma = \frac{1}{2e}\left(1-\frac{1}{e}\right)^{m-1} - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0),$$

различных пар ВСК-Iα с данной конфигурацией α.

Доказательство. Рассмотрим вероятностную процедуру построения таблицы функции k - структуры. По формуле (I.I) $\sigma(S_0, S_0, \ldots, S_0) = S_0$. Значения функции на других наборах аргументов выбираем независимо друг от друга; каждое из них с одной и той же вероятностью $\frac{1}{k}$ принимает значения $S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}$. Тогда все $k^{k^{n}-1}$ различные k- структуры равновероятны. Обозначим через P_k вероятность того, что в выбранной наугад k - структуре с данным $\mathcal{F}$ будет существовать по меньшей мере γk различных пар ВСК - Iα. Тогда наша задача состоит в доказательстве того, что

$$\lim_{k\to\infty} P_k = 1. \tag{2.66}$$

Пара ВСК - Iα соответствует набору $(x, y, a_{12}, \ldots, a_{m,m-1})$, для которого выполнены условия (2.62)-(2.64), причем состояния a_{ij} фиксированных ячеек $-\vec{\mathcal{F}}_i + \vec{\mathcal{F}}_j$ заранее даны конфигурацией α.

Теорема 2.16 утверждает, что для почти всех функций k - структур существует не менее γk различных наборов $(x^{(l)}, y^{(l)}, a_{12}^{(l)}, \dots, a_{m,m-1}^{(l)})$, удовлетворяющих условиям (2.64).

Начнем с первого из условий (2.64). Все ячейки $-\vec{\exists}_1+\vec{\exists}_2, \dots, -\vec{\exists}_1+\vec{\exists}_m$ фиксированы, поэтому a_{1j} уже заданы конфигурацией d. Рассмотрим часть таблицы значений функции

$$\begin{aligned}
&\sigma(s_0, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1m}) \\
&\sigma(s_1, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1m}) \qquad\qquad (2.67) \\
&\quad - \; - \; - \\
&\sigma(s_{k-1}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1m}).
\end{aligned}$$

Каждое из $\sigma(s_i, a_{12}, \dots, a_{1m})$ независимо от других с вероятностью $1/k$ принимает каждое из значений $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$. Эту модель можно рассматривать как случайное бросание k дробинок (соответствующих значениям функции $\sigma(s_i, a_{12}, \dots, a_{1m})$) в k ящиков (соответствующих состояниям $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$). Обозначим через $\mu_0(k)$ случайную величину, равную числу пустых ящиков (т.е. числу символов $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$, не встречающихся в таблице (2.67)). Из результатов статьи [22] в частности следует, что при $k \to \infty$ распределение $\mu_0(k)$ стремится к нормальному со средним значением $\frac{1}{e} k$

и дисперсией $\frac{e-2}{e^2}k$. Из теоремы 5 [22] следует, что для любого $\varepsilon_1 > 0$

$$\lim_{k\to\infty} P\{\varphi_0(k) > (\tfrac{1}{e}-\varepsilon_1)k\} = 1. \tag{2.68}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$ и рассмотрим одну функцию структуры, для которой в таблице (2.67) отсутствуют более чем $(\frac{1}{e}-\varepsilon_1)k$ из символов $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$. Оценим число непересекающихся пар $x^{(1)}, y^{(1)}; x^{(2)}, y^{(2)}; \ldots; x^{(p)}, y^{(p)}$, при которых верно первое из условий (2.64). Состоянию α, которое в таблице (2.67) встречается 2ℓ или $2\ell+1$ раз, можно поставить в соответствие ℓ непересекающихся пар $x^{(i)}, y^{(i)}$, таких, что

$$\sigma(x^{(i)}, a_{12}, \ldots, a_{1m}) = \sigma(y^{(i)}, a_{12}, \ldots, a_{1m}) = \alpha.$$

Значит, наименьшее число непересекающихся пар получится в случае, когда все состояния представленные в таблице (2.67) (таких для данной функции меньше чем $k-(\frac{1}{e}-\varepsilon_1)k$), встречаются там нечетное число раз. Таким образом, для данной функции можно выбрать по меньшей мере $\frac{1}{2}(k-k+(\frac{1}{e}-\varepsilon_1)k) = \frac{1}{2}(\frac{1}{e}-\varepsilon_1)k$ непересекающихся пар $x^{(i)}, y^{(i)}$, удовлетворяющих первому из условий (2.64). Удалим те пары, в которых встречаются состояния $s_0, s_1, \ldots, s_{(m-1)^2}$, резервированные для фиксированных ячеек - таких пар не более $(m-1)^2+1$. Тогда останется не менее $\frac{1}{2}(\frac{1}{e}-\varepsilon_1)k-(m-1)^2-1$ пар. При достаточно больших k это число пар больше чем $\left(\frac{1}{2e}-\varepsilon_1\right)k$.

Обозначим через Q_k вероятность того, что для наугад выбранной k - структуры найдется по меньшей мере $\gamma_1 k$ $\left(\gamma_1=\frac{1}{2e}-\varepsilon_1\right)$ непересекающихся пар $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, удовлетворяющих условию

$$\sigma(x^{(i)}, a_{12}, \ldots, a_{1m}) = \sigma(y^{(i)}, a_{12}, \ldots, a_{1m}). \quad (2.69)$$

Тогда

$$Q_k > P\left\{ \psi_0(k) > \left(\frac{1}{e}-\varepsilon_1\right)k \right\}.$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty} Q_k = 1.$$

Резюмируя полученное выше, можем сказать, что с вероятностью Q_k в k -структуре найдется $\gamma_1 k$ пар состояний для ячейки $\vec{0}$ в ВСК-I α.

Переходим ко второму из условий (2.64):

$$\sigma(a_{21}, x, a_{23}, \ldots, a_{2m}) = \sigma(a_{21}, y, a_{23}, \ldots, a_{2m}).$$

Здесь все a_{2j}, кроме одного a_{2,r_2}, зафиксированы конфигурацией α. Для удобства записи допустим, что $r_2=1$, т.е. свободной является ячейка $-\vec{\mathcal{E}}_2+\vec{\mathcal{E}}_1$ (дальнейшие рассуждения не зависят от r_2). Возьмем одну из пар $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ и найдем вероятность p_k того, что существует такое $a_{21}=u_2^{(i)}$, что

$$\sigma(u_2^{(i)}, x^{(i)}, a_{23}, \ldots, a_{2m}) = \sigma(u_2^{(i)}, y^{(i)}, a_{23}, \ldots, a_{2m}). \quad (2.70)$$

Опять будем требовать, чтобы $a_2^{(i)}$ отличалось от состояний фиксированных ячеек $S_1, S_2, \ldots, S_{(m-1)^2}$. Вероятность того, что при одном фиксированном a_1, выполняется (2.70), равна $\frac{1}{k}$.

Поэтому

$$p_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-(m-1)^2}.$$

Для достаточно больших k

$$p_k > p = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 .$$

Пусть значения функции, входящие в (2.69), фиксированы так, что существует t, $t > \gamma' k$, пар $(x^{(i)}, y^{(i)})$. Оценим теперь снизу условную вероятность $R_k(t)$ того, что значения функции, входящие в (2.70), будут выбраны так, что среди упомянутых выше пар найдется не менее $\gamma_2 \gamma' k$ $\left(\gamma_2 = p - \frac{1}{2}\varepsilon_1 = 1 - \frac{1}{e} - \varepsilon_1\right)$ пар, которые можно дополнить до троек $(x^{(i)}, y^{(i)}, a_2^{(i)})$ так, чтобы выполнилось условие (2.70).

Комплекты аргументов, входящие в (2.70) и соответствующие разным парам $(x^{(i)}, y^{(i)})$, различны, поэтому значения функции в (2.70) могут выбираться независимо друг от друга. Легко видеть что $R_k(t) \geq R_k(\gamma' k)$.

Обозначим

$$R_k^{(2)} = R_k(\gamma' k).$$

Среднее число тех из $\gamma' k$ пар, которые можно дополнить до троек, равно $p_k \gamma' k$. Поэтому по закону больших чисел

$$\lim_{k \to \infty} R_k^{(2)} = 1.$$

Наборы аргументов, входящие в (2.69), не пересекаются с наборами аргументов в (2.70), поэтому можем утверждать, что с вероятностью большей чем $R_k^{(2)} Q_k$ для наугад выбранной k - структуры существует по крайней мере $\gamma_2 \gamma_1 k$ таких троек $(x^{(i)}, y^{(i)}, u_2^{(i)})$, что выполнены условия (2.69) и (2.70), т.е. два первых условия из (2.64).

Докажем, что наборы аргументов, входящие в различные равенства условий (2.64), не пересекаются. Действительно, рассмотрим i - тое равенство из (2.64) $(i<m)$. Из состояний свободных ячеек в нем могут встречаться только состояния ячеек $\vec{O}, -\vec{\exists}_2 + \vec{\exists}_{t_2}, \ldots, \vec{\exists}_i + \vec{\exists}_{t_i}$. Поэтому в нем обязательно найдется хотя бы одно состояние фиксированной ячейки $-\vec{\exists}_i + \vec{\exists}_s$. Тогда любой набор аргументов i -того равенства в s - том месте отличается от любого набора аргументов другого, i' - того равенства (состояния фиксированных ячеек различны, состояния свободных ячеек выбираем отличными от $s_1, s_2, \ldots, s_{(m-1)^2}$, используемых для фиксированных ячеек).

Теперь будем рассматривать последовательно все остальные равенства из (2.64). В $(j+1)$ -ое равенство обязательно входит состояние одной свободной ячейки, не встречавшейся ранее. Данный комплект $x^{(i)}, y^{(i)}, u_2^{(i)}, \ldots, u_j^{(i)}$ с вероятностью p_k можно дополнить состоянием $u_{j+1}^{(i)}$ этой свободной ячейки так, чтобы выполнилось $(j+1)$ -ое равенство (2.64). Если в структуре с вероятностью большей чем $R_k^{(j)} \dots R_k^{(2)} Q_k$ существует по крайней мере $\gamma_2^{j-1}\gamma_1 k$ комплектов $x^{(i)}, y^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_j^{(i)}$, то получаем, что с вероятностью бо́льшей чем $R_k^{(j+1)} R_k^{(j)} \dots R_k^{(2)} Q_k$ будет существовать по крайней мере $\gamma_2^{j}\gamma_1 k$ комплектов $x^{(i)}, y^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_{j+1}^{(i)}$, таких, что выполняются первые $j+1$ условия (2.64), причем $\lim\limits_{k\to\infty} R_k^{(j+1)} = 1$.

По индукции получаем, что с вероятностью бо́льшей чем $R_k^{(m)} \dots R_k^{(2)} Q_k$ в случайной k - структуре существует не менее $\gamma_2^{m-1}\gamma_1$, различных ВСК - Iα. Но для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать ε_1 так, чтобы

$$\gamma_2^{m-1}\gamma_1 = \left(1 - \frac{1}{e} - \varepsilon_1\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2e} - \varepsilon_1\right) > \frac{1}{2e}\left(1 - \frac{1}{e}\right)^{m-1} - \varepsilon .$$

Наконец, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k^{(m)} \dots R_k^{(2)} Q_k = 1$. Теорема 2.15 доказана.

§ 5. Нерешенные проблемы

В этом параграфе приведем несколько недоказанных гипотез и нерешенных проблем из теории сотообразных структур (часть из них уже упоминалась в главах I и 2).

I. Проблема об эргодичности структур голосования со случайной ошибкой (см. §6 главы I).

2. Проблема полноты для одномерных 2 - структур размаха 3, рассмотренная Ямадой и Аморозо [75] (см. § 5 главы I).

3. Ограничимся рассмотрением только конечных глобальных конфигураций $c \in C_F$. Тогда структуры, не имеющие РС, можно назвать структурами без потери информации: в них конфигурация $\tau(c)$ однозначно определяет конфигурацию c . Другими словами, знание настоящего позволяет однозначно восстановить прошлое.

По мнению Мура [54], сотообразные структуры, в которых не существуют РС, в некотором смысле тривиальны. Было бы интересно исследовать вычислительные возможности таких структур. Существует ли универсальная вычисляющая структура (определение см. в § 4 главы I), не имеющая РС ?

4. В § 3 главы 2 было доказано, что почти все одномерные структуры имеют примитивные КГРС. В §4 главы 2

было доказано, что почти все n - мерные структуры имеют ВСК, которые отличаются лишь в одной ячейке. Естественно поставить также вопрос о размерах минимальных РС для почти всех структур. Теоретические исследования пока не дали результатов.

Однако нами с помощью ЭВМ были проделаны эксперименты по определению длины минимальных РС для случайных одномерных структур размаха 2. В Таблице 2.2 представлены числа структур с длиной l минимальных РС среди случайно выбранных k - структур $(3 \leq k \leq 15)$ размаха 2, отнесенные к 1000. В предпоследнем столбце собраны эмпирические средние значения $\bar{l}$ длин минимальных РС, а в последнем столбце указаны числа N использованных случайных структур.

Таблица 2.2

k \ l	1	2	3	4	5	РС не сущ.	$\bar{l}$	N
3	80	494	355	44	4	23	-	2000
4	43	552	379	25	1	-	2,39	2000
5	17	558	413	12	-	-	2,42	2000
6	7	516	472	5	-	-	2,48	2000
7	3	476	515	6	-	-	2,53	2000
8	3	403	589	5	-	-	2,60	2000
9	-	309	687	4	-	-	2,69	1000
10	-	218	775	7	-	-	2,79	1000
11	1	185	809	5	-	-	2,82	1000
12	1	136	846	17	-	-	2.89	1000
13	-	98	878	24	-	-	2,93	500
14	-	82	906	12	-	-	2,93	500
15	-	54	846	100	-	-	3,05	500

Эти данные позволяют высказать гипотезу о том, что почти все k -структуры размаха 2 имеют РС длины $\ell < \alpha k$, где α - некоторая постоянная.

5. Функцию перехода структуры можно задать таблицей: указать значения $\sigma(x_1,\dots,x_m)$ на всех k^m наборах аргументов. Было бы интересно доказать (или опровергнуть контрпримером) следующее простое достаточное условие существования РС в структуре: РС могут не существовать лишь для структур, у которых каждое из состояний $s_0,\dots,s_{k-1}$ представлено в таблице значений функции σ точно k^{m-1} раз (другими словами, неравные частоты состояний среди значений функции σ влекут за собой существование РС).

6. Пусть дана одномерная структура $\mathcal{O}$ размаха m (заметим, что любую одномерную структуру можно считать структурой размаха m при подходящем m: доопределив фиктивные соседи, блок соседей можно сделать связным). Построим теперь конечный автомат A, соответствующий структуре $\mathcal{O}$. Пусть входной и выходной алфавиты автомата A совпадают с множеством S состояний структуры. Каждому фрагменту $U = u_1 u_2 \dots u_{m-1}$ $(u_i \in S)$ сопоставим состояние U автомата A. Работу автомата определим следующим образом: пусть автомат находится в состоянии $u_1 \dots u_{m-1}$ и получает на входе символ u_m. Тогда

автомат A переходит в состояние $u_2 \dots u_{m-1}, u_m$ и выдает символ $\sigma(u_1, u_2, \dots, u_m)$, где σ – функция перехода структуры $\mathfrak{A}$. Легко видеть, что такой автомат с начальным состоянием $c(1) \dots c(m-1)$ на входную последовательность

$$c(m), c(m+1), \dots, c(N)$$

отвечает последовательностью

$$\tau(c)(1), \tau(c)(2), \dots, \tau(c)(N-m+1).$$

Конфигурацию c одномерного связного блока $X = \{1, 2, \dots, N\}$ будем отождествлять с последовательностью $c(1), c(2), \dots, c(N)$. Тогда РС структуры $\mathfrak{A}$ – это конечная последовательность, которую невозможно получить на выходе автомата A ни при каком выборе начального состояния и входной последовательности. Поэтому множество связных РС является дополнением объединения множеств, перечисляемых автоматом A при всевозможных начальных состояниях. Но множество, перечисляемое конечным автоматом, представимо в другом, подходящем конечном автомате (см. напр. [25]), т.е. является регулярным множеством. Таким образом, множество всех связных РС одномерной структуры является регулярным множеством.

Легко также непосредственно построить автомат B, представляющий множество всех РС структуры $\mathfrak{A}$. Поэтому существует алгорифм, который для произвольной одномерной структуры выясняет, существуют ли в ней РС.

Однако вопрос об алгорифмической разрешимости массовой проблемы существования РС в двумерных сотообразных структурах остается открытым. Некоторая аналогия с проблемой домино Ван Хао (см. напр. [72], [36], [60]) заставляет ожидать неразрешимости этой проблемы.

Глава 3

ОБ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ХРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ

§ I. Голосование со случайной ошибкой и его обобщения

В этой главе рассмотрим одну модель, которая является аналогом задачи голосования со случайной ошибкой на сотообразных структурах. А именно, сначала само голосование обобщается на случай k состояний и m соседей. В модели применяется еще более общие преобразования, сохраняющие только существенные свойства голосования со случайной ошибкой. Далее, вместо фиксированных соседей ячейки вводятся случайные соседи. Тем самым топология пространства уничтожается и локальное взаимодействие заменяется на глобальное. При этом рассмотрим конечные системы с изменяющимся числом автоматов: в момент t система состоит из N_t автоматов.

В этом параграфе рассмотрим ближе вероятности, связанные с голосованием.

Начнем со случая $k=2$ (множество состояний $S=\{s_0, s_1\}$) . Число голосующих равно m , $m \geq 2$. Рассмотрим следующую процедуру голосования. Пусть дан двумерный стохастический вектор $\vec{x} = \{x_0, x_1\}$ (содержательно : x_i - вероятность того, что в момент t случайно выбранный автомат находится в состоянии S_i). Проведем m независимых испытаний Бернулли (m раз выберем случайный автомат). Пусть $m_0 \geq 0$, $m_1 \geq 0$, $m_0 + m_1 = m$. Тогда вероятность того, что точно m_i из выбранных автоматов находятся в состоянии S_i $(i = 0, 1)$ равна

$$P(m_0, m_1) = \frac{m!}{m_0!\, m_1!} x_0^{m_0} x_1^{m_1} = \binom{m}{m_0} x_0^{m_0} (1-x_0)^{m-m_0}. \tag{3.I}$$

Рассмотрим сначала случай нечетного числа голосующих:

$$m = 2\ell + 1.$$

Тогда вероятность того, что

$$m_0 > m_1$$

(т.е., большинство из выбранных автоматов имеет состояние S_0)

$$g_{2\ell+1,0}(\vec{x}) = \sum_{i=\ell+1}^{2\ell+1} \binom{2\ell+1}{i} x_0^i (1-x_0)^{2\ell+1-i}. \tag{3.2}$$

Если же $m = 2\ell$ - четное число, то условимся в "ничейном" случае $m_0 = m_1 = \ell$ с вероятностью $1/2$ считать, что большинство автоматов имело состояние S_0, и с вероятностью $1/2$ - состояние S_1 :

$$g_{2\ell,0}(\vec{x}) = \sum_{i=\ell+1}^{2\ell} \binom{2\ell}{i} x_0^i (1-x_0)^{2\ell-i} + \frac{1}{2}\binom{2\ell}{\ell} x_0^\ell (1-x_0)^\ell. \tag{3.3}$$

Нетрудно доказать, что при всех $l \geq 0$

$$g_{2l+2,0}(\vec{x}) \equiv g_{2l+1,0}(\vec{x}). \tag{3.4}$$

Таким образом, в случае четного числа голосующих можно уменьшить число голосующих на один, не изменяя при этом вероятностей результатов голосования. Поэтому в дальнейшем можем ограничиться случаем $m = 2l+1$.

Введем теперь случайную ошибку. Пусть фиксировано ε, $0 < \varepsilon < 1/2$. Пусть проведено m испытаний Бернулли и оказалось, что большинство выбранных автоматов имеет состояние s_i. Тогда с вероятностью $1-\varepsilon$ будем считать, что в голосовании победило состояние s_i, а с вероятностью ε - второе состояние s_j, $j \neq i$. Поэтому при фиксированном $\vec{x}$ вероятность победы состояния s_0 (содержательно: вероятность того, что фиксированный автомат в момент $t+1$ имеет состояние s_0)

$$\begin{aligned} f_{m,0}(\vec{x}) &= (1-\varepsilon)\, g_{m,0}(\vec{x}) + \varepsilon\,(1-g_{m,0}(\vec{x})) = \\ &= \varepsilon + (1-2\varepsilon)\, g_{m,0}(\vec{x}). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Переходим теперь к обобщению голосования на случай k состояний, $k > 2$. Тогда $S = \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$. Пусть в голосовании принимают участие m $(m \geq 3)$ автоматов. Пусть в момент времени t состояние системы характеризуется стохастическим вектором $\vec{x} = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$, где x_i - доля автоматов в состоянии S_i. Каждый из m голосующих с вероятностью x_i находится в состоянии S_i, поэтому вероятность того, что точно m_i голосов будет за S_i $(i=0,1,\dots,k-1)$ равна

$$P(m_0, m_1,\dots,m_{k-1}) = \frac{m!}{m_0!\,m_1!\dots m_{k-1}!}\, x_0^{m_0} x_1^{m_1}\dots x_{k-1}^{m_{k-1}}, \qquad (3.6)$$

$$(m_i \geq 0,\ m_0+m_1+\dots+m_{k-1}=m).$$

Пусть распределение голосов задается набором $(m_0,\dots,m_{k-1})$. Состояние S_i будем называть ведущим, если $m_i \geq m_j$ при всех $j=0,1,\dots,k-1$. Пусть имеется точно r $(r=1,2,\dots,k)$ ведущих состояний. Каждое из них с вероятностью $1/r$ (независимо от состояния $\vec{x}$) становится главным состоянием. Таким образом, вероятность того, что S_i станет главным состоянием

$$g_{m,i}(\vec{x}) = \sum_{(m_0,\dots,m_{k-1})} c_i(m_0,\dots,m_{k-1})\,\frac{m!}{m_0!\dots m_{k-1}!}\, x_0^{m_0}\dots x_{k-1}^{m_{k-1}}, \qquad (3.7)$$

где $c_i(m_0,\dots,m_{k-1}) = 1/r$, если S_i является одним из точно r ведущих состояний и $c_i(m_0,\dots,m_{k-1})=0$, если S_i не ведущее состояние. Суммирование можно ограничить наборами $(m_0,\dots,m_{k-1})$, в которых S_i является ведущим состоянием.

Введем теперь случайную ошибку. Пусть фиксировано ε,

$$0<\varepsilon<\frac{1}{k}. \qquad (3.8)$$

В предположении, что уже известно распределение $(m_0, \ldots, m_{k-1})$ и главное состояние S_i, условная вероятность победы S_j в голосовании равна $1-(k-1)\varepsilon$, если $j=i$, и ε, если $j \neq i$. Значит, безусловная вероятность того, что в голосовании победит состояние S_i

$$f_{m,i}(\vec{x}) = \varepsilon + (1-k\varepsilon) g_{m,i}(\vec{x}). \qquad (3.9)$$

Состояния всех N_{t+1} автоматов системы в момент $t+1$ определяются независимо друг от друга голосованием со случайной ошибкой, т.е., состояние системы определяется N_{t+1} испытаниями полиномиальной схемы с вероятностями $p_i = f_{m,i}(\vec{x})$. Поэтому $f_{m,i}(\vec{x})$ является средним значением доли состояния S_i среди автоматов в момент $t+1$. Голосование задает преобразование

$$\vec{y} = F_{m,\varepsilon}(\vec{x}), \qquad (3.10)$$

где $\vec{y} = \{y_0, \ldots, y_{k-1}\}$, $y_i = f_{m,i}(\vec{x})$. Естественно вместо (3.10) рассматривать более общие преобразования

$$\vec{y} = F(\vec{x}) \qquad (3.11)$$

пространства k - мерных стохастических векторов в себя, сохраняя при этом следующие существенные свойства голосования.

1) Симметричность:

$$y_i = f_i(x_0, \ldots, x_{k-1}) = f(x_i; x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}), \qquad (3.12)$$

где $f(z_0; z_1, \ldots, z_{k-1})$ не зависит от порядка расположения аргументов $z_1, \ldots, z_{k-1}$ (только начальные условия могут выделять некоторое состояние).

2) Монотонность: если $z_0 \geq z_1$, то

$$f(z_0; z_1, z_2, \ldots, z_{k-1}) \geq f(z_1; z_0, z_2, \ldots, z_{k-1}). \quad (3.13)$$

(состояние с бо́льшей долей имеет бо́льшую вероятность победы).

3) Достижимость: существует такое ε, $0 < \varepsilon < 1/k$, что при любом стохастическом векторе $\vec{z}$

$$f(z_0; z_1, \ldots, z_{k-1}) \geq \varepsilon . \quad (3.14)$$

(каждое состояние всегда имеет положительную вероятность победы, т.е. достижимо).

Легко видеть, что эти условия выполнены для функции голосования со случайной ошибкой (3.10) при любом m .

При большом N_{t+1} доля автоматов в состоянии в момент $t+1$ близка к y_i , поэтому важны итеративные свойства преобразования (3.11). Отметим, что случай голосования при $k=2$, $m=3$ рассмотрен фон Нейманом в [58] . Работа [67] посвящена экспериментальному изучению неподвижных точек и циклов преобразований (3.11), полученных при различных способах распределения всех членов (3.6) разложения $(x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1})^m$

по координатам вектора $\vec{y}$ ($k = 2, 3, 4$; $m = 2, 3$).
В качестве примера приводим одно такое преобразование:

$$y_1 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2,$$
$$y_2 = 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$
$$y_3 = x_1^2.$$

При доказательстве утверждений о сохранении информации о начальном состоянии системы будем накладывать на преобразование (3.II) следующее условие:

Существуют такие $\delta, \delta', \; 0 < \delta < \delta' < \frac{1}{k}$,

что из $x_0 \geq \frac{1}{k} + (k-1)\delta, \; x_i \leq \frac{1}{k} - \delta \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$ (3.I5)

следует $y_0 \geq \frac{1}{k} + (k-1)\delta', \; y_i \leq \frac{1}{k} - \delta' \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$

Это условие обеспечивает то, что при итерациях $\vec{x}^{t+1} = F(\vec{x}^t), \; \vec{x}^0 = \{1, 0, \dots, 0\}$ сохраняется "убедительное превосходство" состояния S_0 .

Интуитивно ясно, что условие (3.I5) для голосования со случайной ошибкой выполняется, если только вероятность ошибки ε достаточно мала или же число голосующих достаточно большое. Сформулируем это утверждение точно.

__Лемма 3.I.__ Для любого $k \geq 2$ и для любого $m \geq 3$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ преобразование (3.I0) удовлетворяет условию (3.I5).

<u>Лемма 3.2.</u> Для любого $k \geq 2$ и для любого ε, $0 < \varepsilon < 1/k$, при достаточно больших m преобразование (3.10) удовлетворяет условию (3.15).

Здесь приведем доказательства этих лемм только для $k=2$, так как в общем случае доказательства технически довольно сложны.

Итак, рассмотрим опять случай $k=2$. Согласно (3.4), можно ограничиться не четными m, $m=2\ell+1$. Стохастический вектор $\vec{x}$ (соответственно, $\vec{y}$) полностью задается первой координатой x_0 (y_0), причем ради удобства индексы опустим. Вместо преобразования стохастических векторов (3.10) можно рассматривать просто функцию

$$h_{2\ell+1,\varepsilon}(x) = \varepsilon + (1-2\varepsilon)\sum_{i=\ell+1}^{2\ell+1}\binom{2\ell+1}{i}x^i(1-x)^{2\ell+1-i} \quad (3.16)$$

(см. (3.2) и (3.5)).

Легко видеть, что условие (3.15) теперь можно перефразировать следующим образом:

существуют такие $\delta, \delta', 0<\delta<\delta'<1/2$, что из $x > 1/2+\delta$ следует

$$h_{2\ell+1,\varepsilon}(x) > \frac{1}{2}+\delta'. \quad (3.17)$$

Рассмотрим "хвост" биномиального распределения

$$P_{r,s}(x) = \sum_{i=s}^{r}\binom{r}{i}x^i(1-x)^{r-i}.$$

Дифференцируя по x и упрощая, получаем

$$P'_{r,s}(x) = s\binom{r}{s} x^{s-1}(1-x)^{r-s}.$$

Поэтому

$$h'_{2\ell+1,\varepsilon}(x) = (1-2\varepsilon)\,\frac{(2\ell+1)!}{(\ell!)^2}\,x^{\ell}(1-x)^{\ell}. \qquad (3.18)$$

Отсюда следует, что при всех x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ $h_{2\ell+1,\varepsilon}(x)$ является возрастающей функцией от x. Далее, исследуя $h''_{2\ell+1,\varepsilon}(x)$, можно выяснить, что при $0<x<1/2$ график $h_{2\ell+1,\varepsilon}(x)$ является вогнутым, а при $1/2<x<1$ выпуклым. Отметим частные значения

$$h_{2\ell+1,\varepsilon}(0) = \varepsilon,\; h_{2\ell+1,\varepsilon}(1/2) = 1/2,\; h_{2\ell+1,\varepsilon}(1) = 1-\varepsilon.$$

Из (3.16) следует, что

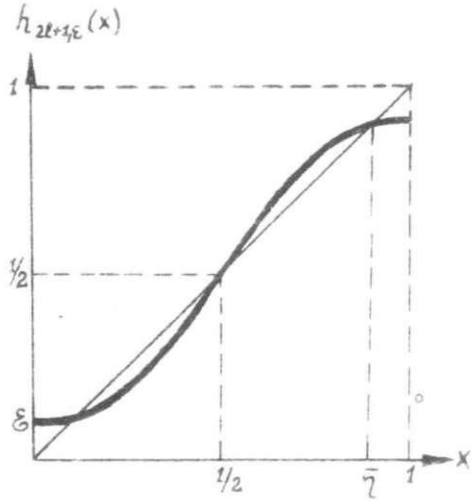
$$h_{2\ell+1,\varepsilon}(1-x) = 1 - h_{2\ell+1,\varepsilon}(x),$$

т.е. график функции $h_{2\ell+1,\varepsilon}(x)$ имеет центр симметрии в точке $(1/2,\, 1/2)$.

Теперь очевидно, что условие (3.17) (а тем самым и (3.15)) равносильно условию

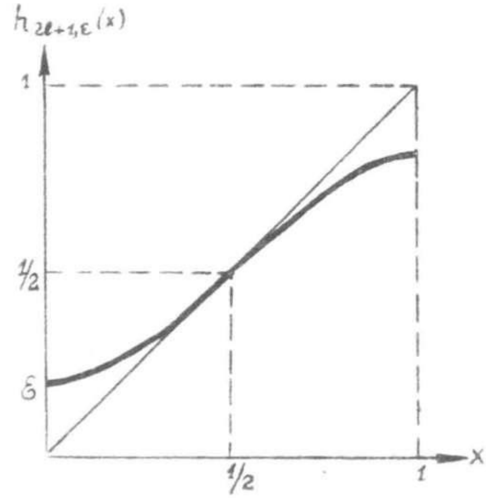
$$h'_{2\ell+1,\varepsilon}(1/2) > 1. \qquad (3.19)$$

Как уже отмечалось ранее, в дальнейшем важны итеративные свойства преобразования (3.11). Рассмотрим поэтому



$h'_{2l+1,\varepsilon}(1/2) > 1$

Рис. 14а



$h'_{2l+1,\varepsilon}(1/2) \leq 1$

Рис. 14б

итерационную последовательность $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$, где η_0 $(1/2 < \eta_0 < 1)$ произвольно и

$$\eta_{t+1} = h_{2l+1,\varepsilon}(\eta_t).$$

Из рассмотренных выше свойств функции $h_{2l+1,\varepsilon}(x)$ следует, что при выполнении условия (3.19)

$$\lim_{t\to\infty} \eta_t = \bar{\eta},$$

где $\bar{\eta}$ является решением уравнения

$$x = h_{2l+1,\varepsilon}(x)$$

из интервала $(1/2, 1)$ (см. рис. 14 а).

Если же $h'_{2l+1,\varepsilon}(1/2) \leq 1$, то

$$\lim_{t\to\infty} \eta_t = 1/2.$$

(см. рис. 14 б).

Интуиция подсказывает, что сохранение информации возможно только в первом случае, т.е., при выполнении условия (3.19).

Используя (3.18), условие (3.19) можно переписать в форме

$$(1-2\varepsilon)\frac{(2l+1)!}{(l!)^2\, 2^{2l}} > 1. \tag{3.20}$$

Применяя формулу Стирлинга, можно получить, что

$$\frac{(2l+1)!}{(l!)^2\, 2^{2l}} > \frac{2\sqrt{l}}{\sqrt{\pi}}$$

(при $l \to \infty$ обе части этого неравенства эквивалентны). Поэтому из

$$(1-2\varepsilon)\sqrt{l} > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

следует (3.20) и тем самым (3.15). Значит, при произвольном $m = 2l+1$ (3.15) выполняется, если $\varepsilon < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{l}}\right)$. Обратно, при произвольном ε, $0 < \varepsilon < 1/2$, (3.15) выполняется, если $l > \frac{\pi}{4(1-2\varepsilon)^2}$. Тем самым Леммы 3.1 и 3.2 для случая $k = 2$ доказаны.

§ 2. Определение модели

В этом параграфе дадим определение нашей стохастической модели хранения информации, исследование которой является главной целью данной главы. При этом будем использовать обобщение голосования со случайной ошибкой, введенное в предыдущем параграфе.

Пусть дано преобразование (3.II) $\vec{y} = F(\vec{x})$, удовлетворяющее условиям (3.I2) - (3.I4), и последовательность натуральных чисел $N_1, N_2, \ldots$. Системой $E(F, \{N_t\})$ будем называть следующую индуктивно определенную ниже последовательность вероятностных экспериментов $E_1, E_2, E_3, \ldots$. Каждый из экспериментов E_t состоит из N_t независимых испытаний полиномиальной схемы с k возможными исходами $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$. Обозначим через $N_{t,i}$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ число исходов s_i в эксперименте E_t. В качестве начальных условий примем

$$N_{0,0} = 1, \; N_{0,j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1). \tag{3.21}$$

Пусть эксперимент E_t уже проведен, т.е. известны значения случайных величин $N_{t,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$. Обозначим

$$x_i = \frac{N_{t,i}}{N_t} \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{3.22}$$

Опишем теперь эксперимент E_{t+1}. Исход каждого из N_{t+1} независимых испытаний, составляющих эксперимент E_{t+1}, с вероятностью y_i равен s_i $(i=0,1,\dots,k-1)$, где

$$\{y_0,\dots y_{k-1}\}=\vec{y}=F(\vec{x})=F(\{x_0,\dots,x_{k-1}\}). \qquad (3.23)$$

Таким образом, вероятность того, что $N_{t+1,i}=n_i$, $i=0,1,\dots,k-1$, $(n_i\geq 0,\ n_0+n_1+\dots+n_{k-1}=N_{t+1})$

$$P(n_0,\dots,n_{k-1})=\frac{N_{t+1}!}{n_0!\dots n_{k-1}!}\,y_0^{n_0}\dots y_{k-1}^{n_{k-1}}. \qquad (3.24)$$

Будем говорить, что состояние s_i – главное состояние эксперимента E_t, если s_i является главным для набора $(N_{t,0},\dots,N_{t,k-1})$. Процедура нахождения главного состояния такая же как в предыдущем параграфе: если $N_{t,i}$ является одним из точно r наибольших чисел набора, то s_i с вероятностью $1/r$ становится главным состоянием (в "ничейных" случаях главное состояние выбирается равновероятно из всех состояний, имеющих наибольшую частоту). Обозначим через $P_{t,i}$ вероятность того, что состояние s_i является главным состоянием эксперимента E_t системы $E(F,\{N_t\})$ при начальных условиях (3.21). Очевидно

$$P_{0,0}=1,\ P_{t,0}+P_{t,1}+\dots+P_{t,k-1}=1.$$

Будем говорить, что в системе E информация γ- сохраняется, если при всех t

$$P_{t,0} > \gamma > \frac{1}{k} . \qquad (3.25)$$

Если же при всех i $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$

$$\lim_{t \to \infty} P_{t,i} = \frac{1}{k} , \qquad (3.26)$$

то будем называть систему эргодичной (в такой системе информация о начальном состоянии теряется).

Используя свойства (3.12) - (3.14) преобразования F, можно доказать, что при всех t

$$P_{t,0} > P_{t,1} = P_{t,2} = \ldots = P_{t,k-1} , \; P_{t+1,0} < P_{t,0} . \qquad (3.27)$$

Поэтому для каждой системы E верно одно из двух: или E эргодична, или же существует такое $\gamma > \frac{1}{k}$, что в E информация γ - сохраняется.

Оправданием этих определений может служить следующее построение. Пусть вместо начальных условий (3.21) с вероятностями $1/k$ выбираются каждые из условий

$$N_{0,i} = 1 , \; N_{0,j} = 0 , \; j \neq i . \qquad (3.28)$$

$$(i = 0, 1, \ldots, k-1)$$

Пусть, зная только результат $(N_{t,0}, \ldots, N_{t,k-1})$ эксперимента E_t, надо угадать, какие из начальных условий (3.28) были выбраны.

При любом t можем гарантировать вероятность успеха, бóльшую чем $\gamma > \frac{1}{k}$, только в случае, если в системе с условиями (3.21) информация γ - сохраняется.

Интересен также частный случай постоянного числа автоматов в системе , $N_t \equiv N$. Тогда система описывается эргодической цепью Маркова и можно исследовать лишь скорость, с какой информация теряется. Поэтому допустим, что система, состоящая из $N = N(T)$ автоматов, действует до момента времени T . Заметим, что раньше рассматривалось поведение одной и той же системы при всех t , здесь же при различных T системы будут различными.

Пусть дано преобразование F и функция $N(T)$.

Рассмотрим комплекс систем $\bar{E}(F, N(T))$, состоящий из систем

$$E_1(F, \{N_t^{(1)}\}), E_2(F, \{N_t^{(2)}\}), \ldots,$$

где последовательность $N_t^{(j)}$ постоянна,

[illegible] $N_t^{(j)} \equiv N(j)$.

$P_{T,i}$ для системы $E_T(F, \{N_t^{(T)}\})$ обозначим через $\bar{P}_{T,i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Будем говорить, что в комплексе $\bar{E}(F, N(T))$ информация γ- сохраняется, если

$$\lim_{T \to \infty} \bar{P}_{T,0} \geq \gamma > \frac{1}{k}. \qquad (3.29)$$

Если же

$$\lim_{T \to \infty} \bar{P}_{T,0} = \frac{1}{k}, \qquad (3.30)$$

то комплекс $\bar{E}(F, N(T))$ будем называть эргодичным.

§ 3. Условия эргодичности

В этом параграфе найдем достаточные условия эргодичности для систем $E(F, \{N_t\})$ и комплексов $\bar{E}(F, N(T))$.

Теорема 3.3. Пусть дана система $E(F, \{N_t\})$, где преобразование F удовлетворяет условиям (3.12)–(3.14). Если при достаточно больших t

$$N_t < C \ln t, \tag{3.31}$$

где

$$C = \frac{1}{\ln \frac{1}{k\varepsilon}},$$

то система E эргодична.

Доказательство. Обозначим через $p_t(n_0, \ldots, n_{k-1})$ $(n_i \geq 0, n_0 + \ldots + n_{k-1} = N_t)$ вероятность того, что $N_{t,i} = n_i$ $(i = 0, \ldots, k-1)$. Из симметрии по отношению к $s_1, \ldots, s_{k-1}$ переходов и начальных условий следует, что для произвольной перестановки τ множества $\{1, 2, \ldots, k-1\}$

$$p_t(n_0, n_{\tau(1)}, \ldots, n_{\tau(k-1)}) = p_t(n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}). \tag{3.32}$$

Выразим теперь $p_{t+1}(l_0, \ldots, l_{k-1})$ $(l_i \geq 0, l_0 + \ldots + l_{k-1} = N_{t+1})$ через вероятности $p_t(n_0, \ldots, n_{k-1})$.

$$p_{t+1}(l_0, \ldots, l_{k-1}) = \sum_{(n_0, \ldots, n_{k-1})} p_t(n_0, \ldots, n_{k-1}) \frac{N_{t+1}!}{l_0! \ldots l_{k-1}!} f_0^{l_0} \ldots f_{k-1}^{l_{k-1}}, \tag{3.33}$$

где ради краткости опущены аргументы:

$$f_i = f_i\left(\frac{n_0}{N_t}, \frac{n_1}{N_t}, \dots, \frac{n_{k-1}}{N_t}\right).$$

Используя условия (3.12) - (3.14) и (3.21), при помощи индукции по t можно доказать интуитивно очевидное утверждение: если $n_0 > n_1$, то

$$p_t(n_0, n_1, \dots, n_{k-1}) > p_t(n_1, n_0, n_2, \dots, n_{k-1}). \tag{3.34}$$

Действительно, $p_0(1,0,\dots,0) = 1$, поэтому (3.34) верно при $t=0$. С другой стороны, при $l_0 > l_1$

$$p_{t+1}(l_0, l_1, \dots, l_{k-1}) - p_{t+1}(l_1, l_0, l_2, \dots, l_{k-1}) =$$

$$= \frac{N_{t+1}!}{l_0! \dots l_{k-1}!} \sum_{(n_0,\dots,n_{k-1})} p_t(n_0, \dots, n_{k-1}) \left(f_0^{l_0} f_1^{l_1} -\right.$$

$$\left. - f_0^{l_1} f_1^{l_0}\right) f_2^{l_2} \dots f_{k-1}^{l_{k-1}} =$$

$$= \frac{N_{t+1}!}{l_0! \dots l_{k-1}!} \sum_{n_0 > n_1} \left(p_t(n_0, n_1, \dots, n_{k-1}) - \right.$$

$$\left. - p_t(n_1, n_0, \dots, n_{k-1})\right) \left[f^{l_0}\left(\frac{n_0}{N_t}; \dots\right) f^{l_1}\left(\frac{n_1}{N_t}; \dots\right) - \right. \tag{3.35}$$

$$\left. - f^{l_1}\left(\frac{n_0}{N_t}; \dots\right) f^{l_0}\left(\frac{n_1}{N_t}; \dots\right)\right] f^{l_2}\left(\frac{n_2}{N_t}; \dots\right) \dots f^{l_{k-1}}\left(\frac{n_{k-1}}{N_t}; \dots\right).$$

Учитывая индуктивное предположение и условие монотонности (3.13), получаем, что правая часть (3.35) положительна. Тем самым (3.34) доказано.

Согласно (3.27), система эргодична, если

$$P_{t,0} - P_{t,1} \to 0 \qquad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{3.36}$$

Но

$$P_{t,i} = \sum_{\substack{(n_0,\ldots,n_{k-1}) \\ n_0+\ldots+n_{k-1}=N_t}} c_i(n_0,\ldots,n_{k-1})\, p_t(n_0,\ldots,n_{k-1})$$

(определение c_i дано в связи с формулой (3.7)).

Поэтому легко убедиться, что $P_{t,0} - P_{t,1} =$

$$= \sum_{\substack{(n_0,\ldots,n_{k-1}) \\ n_0>n_1}} c_0(n_0,\ldots,n_{k-1}) \big(p_t(n_0,n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}) - p_t(n_1,n_0,n_2,\ldots,n_{k-1}) \big).$$

Учитывая (3.34) и то, что всегда $c_0(n_0,\ldots,n_{k-1}) \leq 1$, получаем

$$0 < P_{t,0} - P_{t,1} \leq Q_t , \tag{3.37}$$

где

$$Q_t = \sum_{\substack{(n_0,\ldots,n_{k-1}) \\ n_0>n_1}} \big(p_t(n_0,n_1,\ldots,n_{k-1}) - p_t(n_1,n_0,n_2,\ldots,n_{k-1}) \big).$$

Получим теперь оценку для Q_{t+1} при помощи Q_t . Подставляя в выражении

$$Q_{t+1} = \sum_{\substack{l_0+\ldots+l_{k-1}=N_{t+1} \\ l_0>l_1}} \big(p_{t+1}(l_0,l_1,\ldots,l_{k-1}) - p_{t+1}(l_1,l_0,l_2,\ldots,l_{k-1}) \big)$$

формулу (3.35) и меняя порядок суммирования, получаем

$$Q_{t+1} = \sum_{n_0>n_1} \Big(p_t(n_0, n_1, \dots, n_{k-1}) -$$

$$- p_t(n_1, n_0, \dots) \Big) \Big[\sum_{l_0>l_1} \frac{N_{t+1}!}{l_0! \dots l_{k-1}!} f^{l_0}\Big(\frac{n_0}{N_t}; \dots\Big) \dots f^{l_{k-1}}\Big(\frac{n_{k-1}}{N_t}; \dots\Big) -$$

$$- \sum_{l_0>l_1} \frac{N_{t+1}!}{l_0! \dots l_{k-1}!} f^{l_1}\Big(\frac{n_0}{N_t}; \dots\Big) f^{l_0}\Big(\frac{n_1}{N_t}; \dots\Big) \dots f^{l_{k-1}}\Big(\frac{n_{k-1}}{N_t}; \dots\Big) \Big] \le$$

$$\le \sum_{n_0>n_1} \Big(p_t(n_0, n_1, \dots, n_{k-1}) -$$

$$- p_t(n_1, n_0, \dots, n_{k-1}) \Big) \sum_{l_0>l_1} \frac{N_{t+1}!}{l_0! \dots l_{k-1}!} f^{l_0}\Big(\frac{n_0}{N_t}; \dots\Big) \dots f^{l_{k-1}}\Big(\frac{n_{k-1}}{N_t}; \dots\Big) =$$

$$= \sum_{n_0>n_1} \Big(p_t(n_0, n_1, \dots) - p_t(n_1, n_0, \dots) \Big) \Big(1 -$$

$$- \sum_{l_0 \le l_1} \frac{N_{t+1}!}{l_0! \dots l_{k-1}!} f^{l_0}\Big(\frac{n_0}{N_t}; \dots\Big) \dots f^{l_{k-1}}\Big(\frac{n_{k-1}}{N_t}; \dots\Big) \Big) \le$$

$$\le \sum_{n_0>n_1} \Big(p_t(n_0, n_1, \dots) - p_t(n_1, n_0, \dots) \Big) \Big(1 -$$

$$- \varepsilon^{N_{t+1}} \sum_{l_0 \le l_1} \frac{N_{t+1}!}{l_0! \dots l_{k-1}!} \Big) <$$

$$< \Big(1 - (k\varepsilon)^{N_{t+1}} \Big) Q_t .$$

$Q_0 = 1$, поэтому

$$Q_t < \prod_{j=1}^{t} \left(1 - (\kappa\varepsilon)^{N_j} \right). \tag{3.38}$$

Учитывая (3.37) и переходя к пределу, получаем

$$0 \leq \lim_{t \to \infty} \left(P_{t,0} - P_{t,1} \right) \leq \prod_{t=1}^{\infty} \left(1 - (\kappa\varepsilon)^{N_t} \right). \tag{3.39}$$

Бесконечное произведение в (3.39) расходится к нулю, если расходится ряд

$$\sum_{t=1}^{\infty} (\kappa\varepsilon)^{N_t}. \tag{3.40}$$

Пусть для достаточно больших t (т.е., при всех $t > T$) выполняется (3.31). Тогда

$$(\kappa\varepsilon)^{N_t} > (\kappa\varepsilon)^{C\ln t} = e^{C\ln\kappa\varepsilon \cdot \ln t} = t^{-C\ln\frac{1}{\kappa\varepsilon}} = \frac{1}{t}.$$

Значит, ряд (3.40) расходится. Отсюда последовательно следует расходимость к нулю бесконечного произведения (3.39) и выполнение условия (3.36). Теорема 3.3 доказана.

Теперь легко найти достаточные условия эргодичности и для комплекса $\bar{E}(F, N(T))$. Из (3.37) и (3.38) получаем

$$0 < \bar{P}_{T,0} - \bar{P}_{T,1} < \left(1 - (\kappa\varepsilon)^{N(T)} \right)^{T}. \tag{3.41}$$

Поэтому из

$$\lim_{T\to\infty}\left(1-(k\varepsilon)^{N(T)}\right)^{T}=0 \qquad (3.42)$$

следует эргодичность комплекса. Но (3.42) выполняется, если

$$\lim_{T\to\infty} T\cdot(k\varepsilon)^{N(T)}=+\infty .$$

Это условие в свою очередь эквивалентно условию

$$N(T)=\frac{1}{\ln\frac{1}{k\varepsilon}}\ln T-R(T), \qquad (3.43)$$

где $R(T)\to+\infty$ при $T\to\infty$.

Заметим, что условие (3.43) немногим жестче условия (3.31).

Таким образом, нами доказана

<u>Теорема 3.4.</u> Пусть дан комплекс $\bar{E}(F, N(T))$, где преобразование F удовлетворяет условиям (3.12) - (3.14). Если выполняется условие (3.43), то комплекс эргодичен.

§ 4. Условия сохранения информации

В этом параграфе найдем достаточные условия γ - сохранения информации для систем $E(F, \{N_t\})$ и комплексов $\bar{E}(F, N(T))$.

Теорема 3.5. Пусть дана система $E(F, \{N_t\})$, где преобразование F удовлетворяет условиям (3.12) - (3.15). Тогда для любого γ, $\frac{1}{K} < \gamma < 1$, существуют такие константы A и B, что в системе E информация γ - сохраняется, если только для всех t

$$N_t > A + B \ln t . \tag{3.44}$$

Доказательство. Рассмотрим реализацию эксперимента E_t, в которой

$$\frac{N_{t,0}}{N_t} \geq \frac{1}{K} + (K-1)\delta, \tag{3.45}$$

$$\frac{N_{t,i}}{N_t} \leq \frac{1}{K} - \delta \qquad (i = 1, 2, \dots, K-1).$$

Отметим, что согласно (3.15)

$$f_0\left(\frac{N_{t,0}}{N_t}, \dots, \frac{N_{t,K-1}}{N_t}\right) \geq \frac{1}{K} + (K-1)\delta',$$

$$f_i\left(\frac{N_{t,0}}{N_t}, \dots, \frac{N_{t,K-1}}{N_t}\right) \leq \frac{1}{K} - \delta',$$

$$(i = 1, \dots, K-1)$$

т.е. в среднем частоты $\frac{N_{t+1,0}}{N_{t+1}}, \dots, \frac{N_{t+1,k-1}}{N_{t+1}}$ "лучше" оценок (3.45) соответствующих частот , $\frac{N_{t,0}}{N_t}, \dots, \frac{N_{t,k-1}}{N_t}$.

Оценим теперь условную вероятность R того, что в следующем эксперименте E_{t+1} нарушится хотя бы одно из неравенств

$$\frac{N_{t+1,0}}{N_{t+1}} \geqslant \frac{1}{k} + (k-1)\delta, \qquad (3.46)$$
$$\frac{N_{t+1,i}}{N_{t+1}} \leq \frac{1}{k} - \delta \quad (i = 1, 2, \dots, k-1),$$

аналогичных неравенствам (3.45). Для наших целей вполне достаточно грубой оценки

$$R < R_0 + R_1 + \dots + R_{k-1},$$

где R_i - вероятность нарушения i-того неравенства в (3.46). Но

$$R_0 = \sum_{i=\left(\frac{k-1}{k} - (k-1)\delta\right)N_{t+1}}^{N_{t+1}} \binom{N_{t+1}}{i} \left(1 - f_0\left(\frac{N_{t,0}}{N_t}, \dots, \frac{N_{t,k-1}}{N_t}\right)\right)^i \left(f_0\left(\frac{N_{t,0}}{N_t}, \dots\right)\right)^{N_{t+1}-i}.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=j}^{N} \binom{N}{i} x^i (1-x)^{N-i}$$

является возрастающей функцией от x .

Поэтому

$$R_0 < \sum_{i=\lambda N_{t+1}}^{N_{t+1}} \binom{N_{t+1}}{i} (\lambda')^i (1-\lambda')^{N_{t+1}-i},$$

где $\quad \lambda = \frac{k-1}{k} - (k-1)\delta \;, \quad \lambda' = \frac{k-1}{k} - (k-1)\delta' < \lambda .$

Для оценки "хвоста" биномиального распределения используем например, лемму 4.7.2 из [33]:

$$R_0 < \left(h(\lambda, \lambda') \right)^{N_{t+1}},$$

где

$$h(\lambda, \lambda') = \left(\frac{\lambda'}{\lambda} \right)^{\lambda} \left(\frac{1-\lambda'}{1-\lambda} \right)^{1-\lambda} < 1$$

при всех $\quad 0 < \lambda' < \lambda < 1 .$

Аналогично получаем

$$R_i < \left(h(\mu, \mu') \right)^{N_{t+1}},$$

где

$$\mu = \frac{1}{k} - \delta, \quad \mu' = \frac{1}{k} - \delta' < \mu .$$

Обозначим

$$h = \max\left(h(\lambda, \lambda'), h(\mu, \mu') \right).$$

Тогда

$$R < k \cdot h^{N_{t+1}}, \tag{3.47}$$

где $\quad 0 < h < 1 .$

Пусть S_T - вероятность того, что во всех экспериментах E_t $(t = 0, 1, \ldots, T)$ частоты удовлетворяют всем неравенствам (3.45). Из начальных условий следует $S_0 = 1$. Учитывая то, что оценка (3.47) верна для любой реализации эксперимента E_t, в которой выполнены условия (3.45), получаем рекуррентную оценку

$$S_{T+1} > S_T(1 - k h^{N_{T+1}}) \geq S_T - k h^{N_{T+1}},$$

откуда получаем

$$S_T > 1 - k \sum_{t=1}^{T} h^{N_t}. \qquad (3.48)$$

Таким образом, вероятность S того, что во всех экспериментах $E_1, E_2, \ldots$ S_0 является главным состоянием

$$S \geqslant 1 - k \sum_{t=1}^{\infty} h^{N_t}. \qquad (3.49)$$

Легко доказать, что ряд в (3.49) сходится, если $N_t > B \ln t$, где $B = \frac{1}{\ln \frac{1}{h}}$.

Поэтому, выбирая константу A в (3.44) достаточно большой, можно правую часть (3.49) сделать бо́льшей чем γ. Очевидно $P_{t,0} > S_t > S$. Поэтому доказано даже утверждение, более сильное чем Теорема 3.5.

Заметим, что согласно Теореме 3.3 начальный отрезок последовательности $\{N_t\}$ не влияет на эргодичность - важно только, как ведет себя N_t при больших t. Подобный результат имеет место и для сохранения информации - какими бы не были $N_1, \ldots, N_T$, выбором достаточно больших $N_{T+1}, N_{T+2}, \ldots$ можно достичь сохранения информации с подходящим (уже не произвольным!) $\gamma > \frac{1}{k}$.

Опять легко получить аналог Теоремы 3.5 для комплексов $\bar{E}(F, N(T))$. Из (3.48) следует, что для γ - сохранения информации достаточно, чтобы

$$1 - kTh^{N(T)} > \gamma. \qquad (3.50)$$

Решая это неравенство относительно $N(T)$, получаем

$$N(T) > \frac{1}{\ln\frac{1}{h}} \ln T + \frac{\ln\frac{k}{1-\gamma}}{\ln\frac{1}{h}}.$$

Таким образом, нами доказана

<u>Теорема 3.6.</u> Пусть дан комплекс $\bar{E}(F, N(T))$, где преобразование F удовлетворяет условиям (3.I2) - (3.I5). Тогда для любого γ, $\frac{1}{k} < \gamma < 1$, существуют такие константы A и B, что в комплексе $\bar{E}$ информация γ -сохраняется, если только для достаточно больших T

$$N(T) > A + B \ln T.$$

В заключении еще одно замечание.

Решая неравенство (3.50) относительно T, получаем

$$T < \frac{1-\gamma}{k} \left(\frac{1}{h}\right)^{N(T)}.$$

Поэтому в конечной цепи Маркова с N состояниями, соответствующей системе $(F, \{N_t\})$ с $N_t \equiv N$, можем гарантировать γ - сохранение информации в течение ab^N шагов $\left(a = \frac{1-\gamma}{k},\ b = \frac{1}{h}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аладьев В.З. К теории однородных структур. Таллин, АН ЭССР, 1972.
2. Барздинь Я.М. Сложность распознавания симметрии на машинах Тьюринга. Проблемы кибернетики, 1965, 15, 245-248.
3. Беляев Ю.К., Громак Ю.И., Малышев В.А. Об инвариантных случайных булевских полях. Мат. заметки, 1969, 6, № 5, 555-566.
4. Варшавский В.И. Синхронизация коллектива автоматов при случайном парном взаимодействии. Автоматика и телемеханика, 1969, № 2, 71-76.
5. Варшавский В.И., Мараховский В.Б., Песчанский В.А. Некоторые варианты задачи о синхронизации цепи автоматов. Пробл. передачи информ., 1968, 4, 3, 73-83.
6. Васерштейн Л.Н. Марковские процессы на счетном произведении пространств, описывающие большие системы автоматов. Пробл. передачи информ., 1969, 5, № 3, 64-72.
7. Васильев Н.Б. О предельном поведении одной случайной среды. Пробл. передачи информ., 1969, 5, № 4, 68-74.

8. Васильев Н.Б. Корреляционные уравнения для стационарной меры одной марковской цепи. Теория вероятностей и ее применения, 1970, 15, № 3, 536-540.

9. Васильев Н.Б., Добрушин Р.Л., Пятецкий-Шапиро И.И. Марковские процессы на бесконечном произведении дискретных пространств. Сов.-яп. симп. по теор. вер., Хабаровск, 1969; Новосиб., 1969; ч.I, 3-30.

10. Васильев Н.Б., Петровская М.Б., Пятецкий-Шапиро И.И. Моделирование голосования со случайной ошибкой. Автоматика и телемеханика, 1969, № 10, 103-107.

11. Васильев Н.Б., Пятецкий-Шапиро И.И. О классификации одномерных однородных сетей. Пробл. передачи информ., 1971, 7, № 4, 82-90.

12. Глушков В.М. Теория автоматов и вопросы проектирования структур вычислительных машин. Кибернетика, 1965, № 1, 3-11.

13. Джансеитов К.К. О стираемых и самовоспроизводящихся конфигурациях. Изв. АН Каз. ССР, сер. физ.-мат., 1969, № 5, 58-63.

14. Коганов А.В. Однородные среды. Пробл. кибернетики, 1968, 20, 107-113.

15. Коганов А.В. Скорость моделирования вычислительных сред на решетке с понижением размерности. Пробл. передачи информ., 1971, 7, № 2, 97-105.

16. Котов Ю.Б. Об устойчивых состояниях в однородных сетях из формальных нейронов. Автоматика и телемеханика, 1969, № 10, 124-131.

17. Левенштейн В.И. Об одном методе решения задачи синхронизации цепи автоматов за минимальное время. Пробл. передачи информ., 1965, I, № 4, 20-32.

18. Макаревский А.Я. О моделировании в однородных средах. Кибернетика, 1970, № 3, 139.

19. Макаревский А.Я. Моделирование в обобщенных клеточных автоматах. Автоматика и телемеханика, 1971, № 10, 115-119.

20. Пятецкий-Шапиро И.И., Ставская О.Н., Тоом А.Л. О некоторых однородных нейронных сетях. Автоматика и телемеханика, 1969, № 9, 123-128.

21. Розоноэр Л.И. О случайных логических сетях. Автоматика и телемеханика, 1969, № 5, 137-147;
№ 6, 99-109;
№ 7, 127-136.

22. Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Асимптотическая нормальность в классической задаче о дробинках. Теория вероятностей и ее применения, 1964, 9, № 2, 223-237.

23. Ставская О.Н., Пятецкий-Шапиро И.И. Об однородных сетях из спонтанно активных элементов. Пробл. кибернетики, 1968, 20, 91-106.

24. Тоом А.Л. Об одном семействе однородных сетей из формальных нейронов. Докл. АН СССР, 1968, 183, № 1, 49-52.

25. Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М. Конечные автоматы (поведение и синтез). М., "Наука", 1970.

26. Цейтлин Г.Е. О бесконечно порожденных подалгебрах модифицированной алгебры Поста. Кибернетика, 1971, № 2, 43-53.

27. Чадеев В.М. Самовоспроизведение автоматов на однородных средах. Автоматика и телемеханика, 1969, № 11, 186-188.

28. Чадеев В.М. Оценка сложности автоматов, самовоспроизводящихся на однородной среде. Автоматика и телемеханика, 1971, № 8, 94-101.

29. Шмуклер Ю. Задача голосования со случайной ошибкой. Докл. АН СССР, 1971, 196, 4, 789-792.

30. Amoroso S., Cooper G. The Garden - of - Eden Theorem for Finite Configurations. Proc. Amer. Math. Soc., 1970, 26, № 1, 158-164.

31. Amoroso S., Cooper G. Tessellation Structures for Reproduction of Arbitrary Patterns. J. Comput. System Sci., 1971, 5, № 5, 455-464.

32. Arbib M.A. Theories of Abstract Automata. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1969.

33. Ash R. Information Theory. New York, Interscience Publishers, 1965.

34. Atrubin A.J. A One - Dimensional Real - Time Iterative Multiplier. IEEE Trans. Electron. Computers, 1965, 14, № 3, 394–399.
(Русский перевод: Кибернетический сборник, Новая серия, 1968, 5, 81–94).

35. Banks E.R. Universality in Cellular Automata. "IEEE Conf. Record. 11th Annual Symp. Switch. and Automata Theory, Santa Monica, Calif. 1970", New York, 1970, 194–215.

36. Berger R. The Undecidability of the Domino Problem. Memoirs of the AMS, 1966, 66.

37. Burks A.W. On Backwards - Deterministic, Erasable, and Garden - of - Eden Automata. The University of Michigan, Technical Report 1971.

38. Burks A.W. Von Neumann's Self- Reproducing Automata. In "Essays on Cellular Automata," 3–64.

39. Burks A.W. Programming and the Theory of Automata. Ibid., 65–83.

40. Burks A.W. Toward a Theory of Automata Based on More Realistic Primitive Elements. Ibid., 84–102.

41. Codd E.F. Cellular Automata. New York, Academic Press, 1968.

42. Cole S.N. Real-Time Computation by n - Dimensional Iterative Arrays of Finite-State Machines. IEEE. Trans. Computers, 1969, 18, 349-365.

43. Essays on Cellular Automata. Ed. by A.W. Burks. Urbana and London, University of Illinois Press, 1970.

44. Fischer P.C. Generation of Primes by a One-Dimensional Real-Time Iterative Array. J. Assoc. Comput. Mach., 1965, 12, 388-394.
(Русский перевод: Кибернетический сборник, Новая серия, 1968, 5, 95-102).

45. Gardner M. On Cellular Automata, Self-Reproduction, the Garden - of - Eden and the Game "Life". Scientific American, 1971, 224, № 2, 112-117.

46. Gill A. Introduction to the Theory of Finite-State Machines. New York, Mc Graw-Hill, 1962.
(Русский перевод: А. Гилл. Введение в теорию конечных автоматов, М., "Наука", 1966).

47. Harris T.E. The Theory of Branching Processes. Springer Verlag, 1963.
(Русский перевод: Т. Харрис. Теория ветвящихся случайных процессов, М., "Мир", 1966).

48. Holland J.H. A, Universal Computer Capable of Executing an Arbitrary Number of Subprogramms Simultaneously. In "Essays on Cellular Automata", 264-276.

49. Holland J.H. Iterative Circuit Computers. Ibid., 277-296.

50. Holland J.H. Outline for a Logical Theory of Adaptive Systems. Ibid., 297-319.

51. Holland J.H. Hierarchical Descriptions, Universal Spaces and Adaptive Systems. Ibid., 320-353.

52. Lee C. Synthesis of a Cellular Computer. Applied Automata Theory. Ed. by J.T. Tou. New York - London, Acad. Press, 1968, 217-234.

53. Minsky M.L. Computation: Finite and Infinite Machines Englewood cliffs, Prentice-Hall, 1967.
(Русский перевод: М. Минский. Вычисления и автоматы, М., "Мир", 1971).

54. Moore E.F. Machine Models of Self-Reproduction. Proc. Symp. Appl. Math., 1962, 14, 17-33.
(Русский перевод в Сб. "Математические проблемы в биологии". М., "Мир", 1966, 36-62).

55. Moore E.F. The Firing Squad Synchronization Problem. In "Sequential Machines", Addison-Wesley, 1964, 213-214.
(Русский перевод: Кибернетический сборник, Новая серия, 1965, I, 76-77).

56. Myhill J. A Converse to Moore's Garden- of- Eden Theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, 685-686.

57. Neumann, J. von, Theory of Self - Reproducing Automata, Urbana and London, University of Illinois Press, 1966.
(Русский перевод: Дж. фон Нейман. Теория самовоспроизводящихся автоматов, М., "Мир", 1971).

58. Neumann, J. von, Probabilistic Logics. California Institute of Technology Lectures, 1951.
(Русский перевод: в Сб. "Автоматы". М., "ИЛ", 1956, 68-139).

59. Ostrand, J. Pattern Reproduction in Tessellation Automata of Arbitrary Dimension. J. Comput. System. Sci., 1971, 5, № 6, 623-628.

60. Robinson R.M. Undecidability and Nonperiodicity for Tilings of the Plane. Invent. Math., 1971, 12, № 3, 177-209.

61. Schrandt R.G., Ulam S.M. Recursively Defined Geometrical Objects and Patterns of Growth. In "Essays on Cellular Automata", 232-243.

62. Smith, A.R, III. Simple Computation-Universal Cellular Spaces and Self-Reproduction. IEEE Conf. Record of 1968 Ninth Annual Symp. on Switch. and Automata Theory, 269-277.

63. Smith, A.R., III. Cellular Automata Theory, Stanford University Technical Report № 2, 1970.

64. Smith, A.R., III. Simple Computation-Universal Cellular Spaces. J. Assoc. Comput. Mach., 1971, 18, № 3, 339-353.

65. Smith, A.R., III. Cellular Automata Complexity Trade - Offs. Information and Control, 1971, 18, № 5, 466-482.

66. Smith, A.R., III. Real Time Language Recognition by One - Dimensional Cellular Automata. J. Comput. System Sci., 1972, 6, № 3, 233-253.

67. Stein P.R., Ulam S.M. Nonlinear Transformation Studies on Electronic Computers. Rozprawy Matematyczne, 1964, 39.

68. Thatcher J.W. Self- Describing Turing Machines and Self- Reproducing Cellular Automata. In "Essays on Cellular Automata", 103-131.

69. Thatcher J.W. Universality in the von Neumann Cellular Model. Ibid., 132-186.

70. Ulam S.M. On Some Mathematical Problems Connected with Patterns of Growth of Figures. Proc. Symp. Appl. Math., 1962, 14, 215-224.

(Русский перевод в сб. "Математические проблемы в биологии", М, Мир, 1966, 63-77.

71. Waksman A. A Model of Replication. J. Assoc. Comput. Mach., 1969, 16, № 1, 178-188.

72. Wang Hao. Games, Logic and Computers. Scientific American, 1965, 213, № 5, 98-106.
(Русский перевод: Кибернетический сборник, Новая серия, 1968, 5, 195-207).

73. Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis 1, Cambridge, 1927.
(Русский перевод: Уиттекер Э.Т. и Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч.I. М., Физматгиз, 1962).

74. Yamada H., Amoroso S. Tessellation Automata. Information and Control, 1969, 14, 299-317.

75. Yamada H., Amoroso S. A Completeness Problem for Pattern Generation in Tessellation Automata. J. Comput. System Sci., 1970, 4, 137-176.

76. Yamada, H. Amoroso, S. Structural and Behavioral Equivalences of Tessellation Automata. Information and Control, 1971, 18, № 1, 1-31.

77. Якушенко Э.А. Об информационных свойствах сотообразных структур. Пробл. передачи информ., 1970, 6, № 4, 49-55.

78. Икауниекс Э.А. Пример сотообразных структур, в которых все конфигурации самовоспроизводящиеся. Латв. Мат. ежегодник, 1971, 9, 73-78.

79. Икауниекс Э.А. Некоторые свойства сотообразных структур. Логический синтез в дискретных однородных средах. Второе Всесоюзное совещание, декабрь 1971 г. (Тезисы докладов), М., 1971, 60-61.

80. Икауниекс Э.А. Об одной стохастической модели хранения информации. Пробл. передачи информ., 1972, 8, № 3, 80-88.