J. Barzdins, K. Podnieks. Towards a theory of inductive inference. P*roceedings of 2nd Symposium and Summer School on Mathematical Foundations of Computer Science, Strbske Pleso, High Tatras, Czechoslovakia, September 3–8,* 1973, pp. 9–15.

К ТЕОРИИ ИНДУКТИВНОГО ВЫВОДА

Я.М.Барздинь, К.М.Подниекс
Вычислительный центр Латвийского государственного университета
Рига, С С С Р

I. ВВЕДЕНИЕ.

Дальнейшее развитие автоматизации программирования связано также и со соедующей проблемой: может ли машина сама руководить процессом создания программы, т.е. после ввода в машину некоторой предварительной информации о составляемой программе, может ли дальше уже сама машина задавать заказчику достаточно однотипные вопросы и, в конечном итоге, по результатам ответов на эти вопросы синтезировать искомую программу. Наиболее простые и однотипные вопросы, которые может задавать машина заказчику: как данная программа должна работать на тех или иных конкретных примерах. В этой постановке проблема синтеза была рассмотрена одним из авторов в работе [I]. Некоторым более конкретным аспектом этой проблемы посвящены также работы [6 – 8]. В этих работах рассматривается ситуация, когда наряду с результатом работы программы сообщается также и история ее работы. В случае, когда машине сообщается только конечный результат работы программы, проблема синтеза фактически сводится к поиску геделевского номера рекурсивной функции по полной последовательности ее значений:

$$f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots \qquad \text{(I)}$$

Настоящий доклад будет посвящен исследованию принципиальных возможностей синтеза именно в этой постановке. По существу, он будет являться продолжением исследований, начатых в работах [2 – 5] (см. также работы по индуктивному выводу грамматик, например, [9 – II]).

В случае, когда f – автоматная функция (т.е. реализуема на конечном автомате), проблема синтеза была исследована одним из авторов в работе [I2]. Было показано, что большинство конечных автоматов может быть расшифровано, используя только последовательность (I).

Однако, в более сложных случаях безошибочное решение упомянутой проблемы синтеза невозможно. Речь тогда может идти только о предельном решении, т.е. сначала мы выдаем одну гипотезу, потом вторую, потом третью и т.д. и говорим, что данная проблема разрешима в пределе, если начиная с некоторого места все гипотезы верны. Если число различных гипотез, которые при этом надо перебирать, небольшое, то для практики такое предельное решение может оказаться вполне приемлимым. Ведь в программах, которые составляются традиционными методами, тоже бывают ошибки и они устраняются только в результате некоторого "предельного" процесса эксплуатации программы, при этом иногда перебирается весьма значительное число программ-вариантов.

Мы будем рассматривать предельный синтез I-местных общерекурсивных функций; класс всех таких функций обозначим через $\mathcal{R}$.

2. АППАРАТ ПРЕДЕЛЬНОГО СИНТЕЗА

Мы уточним средства, которыми будем пользоваться в процессе предельного синтеза. Эти средства будем называть стратегиями. Формально под стратегиями, если не оговорено противное, мы будем понимать I-местные общерекурсивные функции. Фиксируем некоторую эффективную нумерацию всех конечных последовательностей натуральных чисел; номер последовательности $\{z_1, \ldots, z_s\}$ обозначим через $<z_1, \ldots, z_s>$. Процесс предельного синтеза функции f с помощью стратегии Σ мы будем рассматривать как последовательное вычисление значений:

$$\Sigma(<f(1)>),\ \Sigma(<f(1), f(2)>), \ldots, \Sigma(<f(1), \ldots, f(n)>), \ldots \quad (2)$$

Если все члены этой последовательности начиная с некоторого места равны некоторому числу a, будем говорить, что $\lim_n \Sigma(<f(1), \ldots, f(n)>) = a$; в противном случае будем считать, что $\lim_n \Sigma(<f(1), \ldots, f(n)>)$ неопределен.

Таким образом каждая стратегия Σ задает некоторый функционал Φ_Σ на $\mathcal{R}$:

$$\Phi_\Sigma(f) = \lim_n \Sigma(<f(1), \ldots, f(n)>).$$

Такие функционалы называются предельными [13].
Согласно [2], это определение равносильно следующему: предельный функционал на $\mathcal{R}$ – это функционал, который представлен в виде:

$$\Phi(f) = \lim_n \Psi(f, n),$$

где $\Psi(f, n)$ – общерекурсивный функционал на $\mathcal{R} \times N$, N - множество натуральных чисел. Аппарат предельных функционалов уже был предложен Гольдом [2] для точной постановки проблемы предельного синтеза общерекурсивных функций. В [2] также введено понятие предельных функций: это функции, которые представимы в виде

$$h(x) = \lim_n g(x, n),$$

где $g(x, n)$ – общерекурсивная функция. (В [2] показано, что это – в точности Σ_2– функции).

Рассмотрим одно свойство предельных функционалов, которое существенно отличает их от обычных рекурсивных функционалов. Зафиксируем некоторую геделевскую нумерацию φ I-местных частично-рекурсивных функций. Функционал Ψ назовем предельной операцией на $\mathcal{R}$, если существует такая предельная функция ψ, что для любого n такого, что $\varphi_n \in \mathcal{R}$:

$$\Psi(\varphi_n) = \psi(n).$$

Для обычных функционалов имеет место теорема Крейсела–Лакомба–Шёнфильда (см. например, [13]): класс всюду определенных на $\mathcal{R}$ эффективных операций совпадает с классом всюду определенных рекурсивных функционалов на $\mathcal{R}$. Однако для предельных функционалов имеет место:

Теорема I (Барздинь). Существует всюду определенная на $\mathcal{R}$ предельная операция, которая не является предельным функционалом на $\mathcal{R}$.

Соответствующим образом уточняя необходимые понятия, можно показать, что для предельных функционалов не имеет место также и аналог теоремы Майхилла-Шепердсона.

3. РАЗЛИЧНЫЕ ПОСТАНОВКИ ПРЕДЕЛЬНОГО СИНТЕЗА

Пусть заранее фиксирована некоторая геделевская нумерация φ I-местных частично рекурсивных функций.

Будем говорить, что стратегия Σ предельно синтезирует функцию f в смысле GN, если значение $\Phi_\Sigma(f)$ принадлежит множеству геделевских номеров функции f, т.е. последовательность (2) сходится к некоторому геделевскому номеру функции f. В этом случае число различных членов последовательности (2) (до стабилизации) обозначим через $\Sigma^{GN}(f)$; в противном случае положим $\Sigma^{GN}(f)=\infty$.

Будем говорить, что стратегия Σ предельно синтезирует функцию f в смысле GN^c, если все члены последовательности (2), начиная с некоторого места являются геделевскими номерами функции f, и число различных членов конечно.

Если в последнем определении отбросить требование конечности числа различных членов, то будем говорить, что стратегия Σ предельно синтезирует функцию f в смысле GN^∞.

Будем говорить, что стратегия Σ предельно синтезирует функцию f в смысле $GN(\varepsilon)$ $(0<\varepsilon\leq 1)$, если в последовательности (2) нижняя частота (т.е. $\underline{\lim}$) геделевских номеров функции f не меньше ε.

Понятие предельного синтеза в смысле GN введено в [2] (identification in the limit); аналог понятия предельного синтеза в смысле GN^∞ встречается в [IO] (matching in the limit).

Далее, будем говорить, что класс $\mathcal{U}$ общерекурсивных функций предельно синтезируем в смысле α $(\alpha = GN, GN^c, \ldots)$, если существует стратегия Σ, которая предельно синтезирует в указанном смысле любую функцию из класса $\mathcal{U}$.

Обозначим через GN (соответственно, $GN^c, \ldots$) семейство всех классов общерекурсивных функций, которые предельно синтезируемы в смысле GN (соответственно, $GN^c, \ldots$). Очевидно:

$$GN \subseteq GN^c \subseteq GN^\infty \subseteq GN(\varepsilon).$$

Уже Голд [2] показал, что $\mathcal{R} \bar{\in} GN$. Можно доказать более сильную теорему:

<u>Теорема 2</u> (Подниекс). При любом $\varepsilon>0$: $\mathcal{R} \bar{\in} GN(\varepsilon)$.

Следующая теорема уточняет соотношения между различными понятиями предельного синтеза.

<u>Теорема 3</u> (Подниекс).

$$GN = GN^c \subseteq GN^\infty = GN\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right) \subset GN\left(\tfrac{1}{2}\right) \subseteq GN\left(\tfrac{1}{2}-\varepsilon\right).$$

(Здесь $\varepsilon>0$, $\subset$ -строгое включение, $\subseteq$ -нестрогое, указывающее на нерешенную проблему).

Весьма вероятно, что все нестрогие включения в теореме 3 следует заменить на строгие.

В заключение рассмотрим еще одну постановку, называемую в дальнейшем прогнозированием следующего значения: дан начальный кусок $\langle f(0), \ldots, f(n)\rangle$; требуется предсказать следующий член последовательности $f(n+1)$.

Будем говорить, что стратегия Σ прогнозирует функцию f, если при прогнозировании следующего значения последовательности (I) она ошибается только конечное число раз, т.е. число различных n, при которых

$$\Sigma(\langle f(1),\dots,f(n)\rangle) \neq f(n+1),$$

конечное. Это число обозначим через $\Sigma^{NV}(f)$.

Аналогично, класс $\mathcal{U}$ общерекурсивных функций прогнозируем, если существует стратегия Σ, которая прогнозирует каждую функцию класса $\mathcal{U}$. Семейство всех прогнозируемых классов общерекурсивных функций обозначим через NV.

Нетрудно убедиться (Барздинь [5]), что класс $\mathcal{U}$ прогнозируем тогда и только тогда, когда он содержится в некотором эффективно перечислимом классе общерекурсивных функций. (Класс $\mathcal{V}$ мы называем эффективно перечислимым, если для него существует вычислимая нумерация). Как отмечено в [2], любой такой класс также и предельно синтезируем в смысле GN. Однако в данном случае это условие не является необходимым (Барздинь 5). Поэтому: $NV \subset GN$.

Очевидно, семейство NV замкнуто относительно пересечения и объединения классов. Также очевидно, что семейства GN и GN^{∞} замкнуты относительно пересечения. Однако для объединения имеет место:

<u>Теорема 4</u> (Барздинь). Существуют $A, B \in GN$ такие, что $A \cup B \notin GN^{\infty}$.

Аналогичный вопрос для семейств $GN(\frac{1}{2}-\varepsilon)$ остается открытым.

4. ОЦЕНКА ЧИСЛА ОШИБОК

В дальнейшем под предельным синтезом мы будем понимать предельный синтез в смысле GN. Мы будем рассматривать прогнозирование и предельный синтез эффективно перечислимых классов.

Пусть $\mathcal{U}$ — эффективно перечислимый класс общерекурсивных функций и τ — некоторая вычислимая нумерация этого класса. Пусть Σ — некоторая стратегия. Введем функции ошибок

$$\Sigma^{GN}_{\mathcal{U},\tau}(n) = \max_{1 \le i \le n} \Sigma^{GN}(\tau_i),$$

$$\Sigma^{NV}_{\mathcal{U},\tau}(n) = \max_{1 \le i \le n} \Sigma^{NV}(\tau_i).$$

Простой перебор функций τ_i по порядку дает верхнюю оценку величин $\Sigma^{GN}_{\mathcal{U},\tau}(n)$ и $\Sigma^{NV}_{\mathcal{U},\tau}(n)$ порядка n. Более точные оценки этих величин дают следующие теоремы.

<u>Теорема 5</u> (Фрейвалд, Барздинь [5]). Для любого эффективно перечислимого класса $\mathcal{U}$ общерекурсивных функций и любой вычислимой нумерации τ этого класса существует стратегия Σ такая, что

$$\Sigma^{GN}_{\mathcal{U},\tau}(n) \le \log_2 n + o(\log_2 n).$$

Существуют $\mathcal{U}$ и τ такие, что для любой стратегии Σ:

$$\Sigma^{GN}_{\mathcal{U},\tau}(n) \ge \log_2 n - O(1).$$

Теорема 6 (Фрейвалд, Барздинь [5]). Для любого эффективно перечислимого класса $\mathcal{U}$ общерекурсивных функций и любой вычислимой нумерации τ этого класса существует стратегия Σ такая, что:

$$\Sigma^{NV}_{\mathcal{U},\tau}(n) \le \log_2 n + o(\log_2 n).$$

Существуют $\mathcal{U}, \tau$ такие, что для любой стратегии Σ :

$$\Sigma^{NV}_{\mathcal{U},\tau}(n) > \log_2 n - 1.$$

Верхние оценки обеих теорем вытекают из следующего более общего результата, представляющего также и самостоятельный интерес (теорема 7).

Пусть $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ - бесконечная последовательность натуральных чисел. Через ω^n обозначим начальный кусок $(x_1, \ldots, x_n)$, а через $\Sigma^{NV}(\omega^n)$ - число ошибок, допускаемых стратегией Σ при прогнозировании членов ω^n (таким образом $\Sigma^{NV}(\omega) = \lim\limits_n \Sigma^{NV}(\omega^n)$).

А.Н.Колмогоровым (см., например, [14]) было введено понятие сложности конечных объектов. Применительно к ω^n это означает следующее. Пусть $A(p,i)$ - некоторая рекурсивная функция, называемая методом программирования. Под сложностью куска ω^n при методе программирования A понимается:

$$K_A(\omega^n) = \min \ell(p),$$

где $\min$ берется по всем p таким, что для $i \le n$: $A(p,i) = x_i$; $\ell(p)$ - длина двоичной записи числа p .

Теорема 7 (Барздинь). Для любого общерекурсивного метода программирования A существует стратегия Σ такая, что для любой последовательности ω :

$$\Sigma^{NV}(\omega^n) \le K_A(\omega^n) + \log_2 K_A(\omega^n) + o(\log_2 K_A(\omega^n)).$$

Из теоремы Мартин-Лёфа [15] (см. также [14]), в частности, вытекает: можно построить такой общерекурсивный метод программирования A_0 , что для любой бесконечной двоичной последовательности ω существует бесконечно много n при которых $K_{A_0}(\omega^n) < n - \log_2 n$.

Отсюда следует, что в оценке теоремы 7 остаточный член $o(\log_2 K_A(\omega^n))$ нельзя отбросить.

5. ТЕОРЕМЫ ОБ УСКОРЕНИИ

Из теоремы 5 следует, что существует эффективно перечислимый класс $\mathcal{U}$ и вычислимая нумерация τ этого класса (это $\mathcal{U}$ и τ из второй половины теоремы 5), для которых имеется асимптотически наилучшая стратегия предельного синтеза (в смысле величины $\Sigma^{GN}_{\mathcal{U},\tau}(n)$). Из теоремы 6 следует аналогичный факт для прогнозирования. Возникает вопрос: выполняется ли аналогичное свойство для любого эффективно перечислимого класса $\mathcal{U}$ и любой вычислимой нумерации τ ? Теоремы 8 и 10 показывают, что ответ на этот вопрос отрицательный, т.е. здесь имеет место ситуация, аналогичная той, которая была обнаружена Блюмом [16] для сложностей вычислений.

Будем говорить, что для синтеза пары $\mathcal{U}, \tau$ (соответственно, для прогнозирования пары $\mathcal{U},\tau$) имеет место абсолютная теорема ускорения, если для любой общерекурсивной функции $\tau(x)$ и любой стратегии Σ найдется стратегия $\tilde{\Sigma}$ такая, что:

$$\forall_n^\infty \; \tau(\tilde{\Sigma}^{GN}_{\mathcal{U},\tau}(n)) \le \Sigma^{GN}_{\mathcal{U},\tau}(n).$$

(соответственно, Σ^{NV} вместо Σ^{GN}).

<u>Теорема 8</u> (Барздинь). Если предикат $P(x,y) \equiv \tau_x = \tau_y$ рекурсивен, то для синтеза пары $\mathcal{U},\tau$ имеет место абсолютная теорема ускорения.

Отсюда, в частности, следует, что абсолютная теорема для синтеза пары $\mathcal{U},\tau$ выполняется, если τ – однозначная нумерация. Согласно [17], каждый бесконечный эффективно перечислимый класс общерекурсивных функций имеет однозначную вычислимую нумерацию. Поэтому для каждого $\mathcal{U}$ существует нумерация τ такая, что для синтеза пары $\mathcal{U},\tau$ выполняется абсолютная теорема ускорения.

В случае прогнозирования следующего значения вопрос о существовании абсолютной теоремы ускорения оказывается более сложным. Следующая теорема локализует возможные случаи выполнения этой теоремы.

<u>Теорема 9</u> (Подниекс, Кинбер). Если для прогнозирования пары $\mathcal{U},\tau$ имеет место абсолютная теорема ускорения, то существует стратегия Π (вообще говоря, нерекурсивная) такая, что $\Pi^{NV}_{\mathcal{U},\tau}(n) = O(1)$.

Используя теорему 9, доказывается

<u>Теорема 10</u> (Подниекс, Кинбер). Существует такой эффективно перечислимый класс $\mathcal{U}$ общерекурсивных функций, что, какую бы вычислимую нумерацию τ этого класса мы не взяли, для прогнозирования пары $\mathcal{U},\tau$ выполняется абсолютная теорема ускорения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барздинь Я.М., О синтезе программ по отдельным примерам. <u>Теория программирования</u>, Труды симпозиума, Новосибирск, 1972.
2. Gold M., Limiting Recursion. <u>J.Symbolic Logic</u>, <u>30</u>,1965.
3. Barzdin J.M., Prognostications of Automata and Functions. <u>Information Processing 71</u>, North – Holland.
4. Барздинь Я.М., Сложность и частотное решение некоторых алгоритмически неразрешимых массовых проблем. Докторская диссертация, 1971.
5. Барздинь Я.М., Фрейвалд Р.В., О прогнозировании общерекурсивных функций. <u>ДАН СССР</u>, <u>206</u>, 3, 1972.
6. Bierman A.W., On the Inference of Turing Machines from Sample Computations. <u>Artificial Intelligence</u> <u>3</u>, 1972.
7. Bierman A.W., Computer Program Synthesis from Computation Traces. <u>Symposium on Fundamental Theory of Programming</u>, Kyoto University, Kyoto, Japan,1972.
8. Manna Z., Waldinger R.J., Toward Automatic Program Synthesis. <u>Communications of the ACM</u>, <u>14</u>, 3, 1971.
9. Gold M., Language Identification in the Limit. <u>Information and Control</u>,<u>10</u>,1967.

10. Feldman J.A., Some Decidability Results on Grammatical Inference and Complexity. Information and Control, 20, 1972.
11. Bierman A.W., Feldman J.A., A Survey of Results in Grammatical Inference. Frontiers of Pattern Recognition, Academic Press, New York, 1972.
I2. Трахтенброт Б.А., Барздинь Я.М., Конечные автоматы (поведение и синтез). Наука, Москва, I970.
I3. Rogers H., Theory of Recursive Functions and Effective Computability. Mcgraw-Hill, New York, 1967.
I4. Звонкин А.К., Левин Л.А., Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов. Успехи математических наук, 25, 6, I970.
I5. Мартин-Лёф П., О понятии случайной последовательности. Теория вероятностей и ее применения, II, I, I966.
16. Friedberg R.M., Three Theorems on Recursive Enumeration. J.Symbolic Logic, 23, 1958.