

Академия наук Латвийской ССР

Институт физики

На правах рукописи

УДК 537.84

ЦЕБЕР Андрей Освальдович

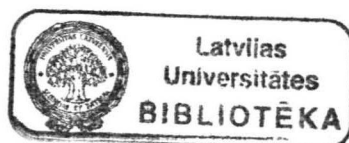
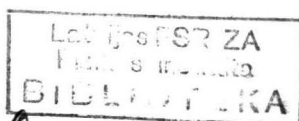
МАГНИТНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ
В ГИДРОДИНАМИКЕ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

Специальность 01.02.05 – механика жидкостей, газа и плазмы

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени доктора

физико-математических наук



Саласпилс – 1985

СО Д Е Р Ж А Н И Е

| | Стр. |
|---|------|
| Глава I. В В Е Д Е Н И Е | 6 |
| Глава 2. МАГНИТНЫЕ МЕЖЧАСТИЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КОЛЛОИДАХ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ | 26 |
| 2.1. Фазовое расслоение коллоидов ферро- магнетиков. Краткий обзор состояния вопроса | 26 |
| 2.2. Термодинамическая модель МЖ с учетом межчастичных магнитных взаимодействий. . . | 34 |
| 2.3. Распад однородного состояния коллоида ферромагнетика в плоское слое и поверхностное натяжение границ раздела фаз коллоида | 63 |
| 2.4. Вириальный метод в гидродинамике капли намагничивающейся жидкости | 76 |
| В ы в о д ы | 94 |
| Глава 3. ГИДРОСТАТИКА НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ С УЧЕТОМ ПОНДЕРОМОТОРНОГО ДЕЙСТВИЯ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ | 96 |
| 3.1. Равновесные фигуры НЖ в плоских слоях и их устойчивость. Краткий обзор состояния вопроса | 96 |
| 3.2. Свободная энергия капли НЖ в плоском слое | 102 |
| 3.3. Устойчивость капель и пузырьков в плоских слоях | 106 |
| 3.4. Устойчивость конфигураций НЖ с прямолинейными границами | 120 |

| | |
|---|-----|
| 3.5. Устойчивость свободной поверхности НЖ в вертикальных щелях | I33 |
| 3.6. Гребенчатая неустойчивость в плоской щели мягкого ферромагнетика | I42 |
| 3.7. Бифуркации равновесных конфигураций намагничивающейся жидкости в вертикальной щели | I50 |
| В ы в о д ы | I60 |

| | |
|---|-----|
| Глава 4. ГИДРОДИНАМИКА НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ С УЧЕТОМ ПОНДЕРОМОТОРНОГО ДЕЙСТВИЯ СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ | I62 |
| 4.1. Уравнения движения намагничивающейся жидкости в тонкой щели и инкременты роста деформационных мод равновесных конфигураций . . | I62 |
| 4.2. Неустойчивость Тейлора-Саффмена в гидродинамике намагничивающихся сред | I74 |
| 4.3. Некоторые свойства лабиринтных структур намагничивающихся жидкостей в плоских щелях . . | I84 |
| 4.4. Неустойчивость в поле диффузионного фронта и кооперативный характер магнитодиффузионных явлений | I93 |
| В ы в о д ы | 2II |

| | |
|---|-----|
| Глава 5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МГД-НЕУСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ | 2I3 |
| 5.1. Метод граничных интегральных уравнений и динамика свободных поверхностей в течениях Хеле-Шоу | 2I3 |

| | |
|---|-----|
| 5.2. Алгоритм реализации численных экспериментов и результаты некоторых тестовых расчетов | 217 |
| 5.3. Численные эксперименты по моделированию развития МГД-неустойчивости капель в плоских щелях и их равновесные конфигурации в поле | 229 |
| В ы в о д ы | 272 |
| Глава 6. ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕД | 274 |
| 6.1. Модели и задачи гидродинамики НЖ с учетом ориентационных процессов. Краткий обзор состояния вопроса | 274 |
| 6.2. Численное моделирование процесса намагничивания коллоида ферромагнетика и модели МЖ с учетом необратимых ориентационных процессов. | 286 |
| 6.3. Численное моделирование реологии разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц в магнитном поле | 317 |
| 6.4. Кинетика намагничивания коллоида ферромагнетика при конечном значении константы магнитной анизотропии | 341 |
| 6.5. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей с внутренними вращениями при наличии подвижных границ. | 350 |
| 6.6. Неустойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости во вращающемся магнитном поле | 362 |

| | |
|---|-----|
| В ы в о д ы | 378 |
| Глава 7. ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ АНИЗОТРОПНЫХ И ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ | 383 |
| 7.1. Межчастичные ориентационные взаимодействия и гидродинамика анизотропных намагничиваю- щихся жидкостей. | 383 |
| 7.2. Ориентационные эффекты в электрогидродина- мике слабопроводящих суспензий анизотропных частиц | 407 |
| 7.3. Электровязкий эффект в гидродинамике поляризуемых жидкостей | 421 |
| В ы в о д ы | 435 |
| Глава 8. З А К Л Ю Ч Е Н И Е | 437 |
| Приложение I | 444 |
| Приложение 2 | 449 |
| Приложение 3 | 450 |
| Приложение 4 | 454 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | 456 |

Глава I. В В Е Д Е Н И Е

Актуальность проблемы. Исследование взаимодействия материальных сред с электромагнитным полем является важнейшим направлением в современной механике сплошных сред [1] .

В настоящее время, в связи с распространением нового класса намагничивающихся жидкостей (НЖ) с сильными магнитными свойствами - магнитных жидкостей (МЖ), становится актуальным исследование гидродинамических явлений, обусловленных намагничиванием. МЖ являются коллоидными растворами высокодисперсного ферромагнетика в некоторой жидкости - носителе и среди в настоящее время известных жидких сред обладают наиболее сильными магнитными свойствами, в десятки тысяч раз превышающими магнитные свойства наиболее сильных естественных жидких парамагнетиков.

Уникальное сочетание текучести и сильных магнитных свойств МЖ дает возможность по-новому эффективно решать задачи техники. Важность развития научных и прикладных исследований в области МЖ, имеющих существенное практическое значение, было подчеркнуто в постановлении ГК СМ СССР по науке и технике № 678 от 21 декабря 1983 года.

Так как специфика данных сред в основном связана с необратимыми ориентационными процессами, сопровождающими намагничивание среды и требующих рассмотрения уравнения моментов, а также наличием межчастичных магнитных взаимодействий, то изучение закономерностей движения МЖ с учетом этих эффектов выступают на первый план. Вследствие этого среди всего многообразия процессов, определяющих поведение МЖ при взаимодействии с электромагнитным полем, мы выделим и рассмотрим именно эти процессы.

Для успешного применения МЖ в различных технических уст-

ройствах первостепенное значение имеет ее устойчивость в условиях действия магнитного поля. При этом существенной особенностью данных систем является возможность поступательного перемещения носителей магнитного момента — коллоидальных частиц ферромагнетика в жидкости-носителе. В результате этого в данном случае могут иметь место явления, связанные с одновременным изменением магнитного порядка и пространственного расположения частиц. Построение термодинамических моделей данных новых явлений и описание на их основе имеющихся экспериментальных данных является необходимым для понимания характерных особенностей взаимодействия МЖ с полем и успешном ее применении в различных технических устройствах.

Другой аспект проявления сил магнитодипольного межчастичного взаимодействия в МЖ, имеющий важное значение, связан с их далекодействующим характером. Зависимость напряженности макроскопического поля в МЖ от формы занимаемой ею области пространства приводит к зависимости от нее и ponderomotorных сил, действующих на жидкость. С этим связано возникновение нового класса задач о фигурах равновесия МЖ, определяемых действием сил магнитного межчастичного взаимодействия и поверхностного натяжения, и их устойчивости.

Действие далекодействующих сил магнитного межчастичного взаимодействия приводит к образованию сильно разветвленных, лабиринтных структур МЖ. Значительное увеличение межфазной поверхности раздела, имеющее место при образовании МЖ в плоских слоях лабиринтных структур, важно с практической точки зрения для интенсификации процессов переноса. Это, а также и возможность развития сильно разветвленных структур в устройствах с использованием МЖ, определяет необходимость исследования гидродинамических процессов образования отмеченных структур.

Исследование специфических закономерностей формирования структур МЖ, связанных с действием дальнедействующих сил магнитного межчастичного взаимодействия, представляет интерес также и с точки зрения проводимых широким фронтом в настоящее время исследований закономерностей образования структур в различных самоорганизующихся системах, возникновения хаоса.

Так как возникающие при исследовании отмеченных вопросов задачи являются нелинейными и не поддаются эффективному решению при помощи аналитических средств, необходимо развитие численных моделей данных явлений.

В настоящее время установлено, что для описания целого ряда явлений в МЖ, наблюдаемых в эксперименте и имеющих практическое значение, необходимы модели, описывающие процессы изменения структуры жидкости, в частности, необратимые ориентационные процессы. В настоящее время на феноменологической основе развито довольно много вариантов подобных моделей, которые, однако, в определенных случаях приводят даже к качественно различным выводам.

В этой ситуации необходимо проведение обоснованного отбора и апробации имеющихся моделей. Проверка адекватности предположений, лежащих в основе данных феноменологических моделей, в эксперименте затруднены наличием в имеющихся МЖ ряда трудно контролируемых факторов, связанных с полидисперсностью и агрегацией частиц и т.д. В этих условиях естественным путем отбора и апробации имеющихся моделей является численный эксперимент. Для этого необходимо развитие численных моделей вращательного броуновского движения однодоменной частицы ферромагнетика в поле при наличии течения со сдвигом.

Следует добавить, что рассматриваемые вопросы физики и гид-

родинамики МЖ существенны также для описания целого ряда явлений в смежной области гидродинамики, связанной с исследованием эффектов, обусловленных поляризацией.

Настоящая работа выполнена согласно теме "Явления переноса и теплообмен в многофазных намагничивающихся системах с учетом процессов релаксации" (№ гос.регистрации 81025889), которая выполняется в соответствии с координационным планом по комплексной программе "Теплофизика" на 1981-1985 гг., раздел I.9.I.4, пункт г и Программой исследований по важнейшим фундаментальным проблемам на период 1978-1990 гг. "Разработка научных основ создания новых процессов и аппаратов химической технологии и методов интенсификации существующих процессов", подраздел 3.3, пункт "а" и в соответствии с Координационным планом научно-исследовательских работ по направлению I.3 "Физика твердого тела" на 1981-1985 гг., раздел I.3.5.9.

Состояние вопроса. Общие принципы построения моделей сред, взаимодействующих с электромагнитным полем, развиты Л.И.Седовым [2], [3]. Эти принципы основываются на ряде положений, которые мы рассмотрим с точки зрения нашей цели описания эффектов взаимодействия МЖ с электромагнитным полем, обусловленных намагничиванием.

Так как уравнения Максвелла при переходе от одной инерциальной системы координат к другой являются инвариантными относительно преобразований Лоренца, то вообще построение моделей сред, взаимодействующих с электромагнитным полем, следует проводить на релятивистской основе [3]. Основопологающее положение, используемое при подобном подходе, связано с разделением тензора энергии-импульса на тензоры энергии-импульса среды и поля. При этом в настоящее время используемых моделях в качестве плотности

энергии электромагнитного поля e_n в рассматриваемой точке материальной среды принимается величина

$$e_n = \frac{1}{8\pi} (\vec{H}'\vec{B}' + \vec{E}'\vec{D}'), \quad (I.1)$$

где векторы поля определены в собственной для данного элемента материальной среды системе координат. В качестве тензора энергии-импульса поля можно принять тензор Минковского [3]

$$S_{\beta}^{\alpha} = -\frac{1}{4\pi} (F_{\gamma\beta} H^{\gamma\alpha} - \frac{1}{4} \delta_{\beta}^{\alpha} F_{\gamma\delta} H^{\gamma\delta}), \quad (I.2)$$

где F и H - антисимметричные тензоры поля в среде.

Для большинства представляющих интерес на сегодняшний день ситуаций при описании взаимодействия электромагнитного поля с МЖ наличием свободных зарядов и токов проводимости можно пренебречь, кроме того для малых скоростей движения среды можно ограничиться нерелятивистским приближением, справедливым с точностью до членов первого порядка по v/c включительно. На подобной основе сделано большинство работ в области механики МЖ, в том числе работы [4] - [24], в которых рассматриваются различные эффекты, связанные с действием на МЖ ponderomotorной силы магнитного поля.

Так как из уравнений Максвелла и граничных условий на разрывах при учете преобразований Лоренца следует, что векторы электрического поля в нерелятивистском приближении имеют порядок v/c , то членами квадратичными по этим величинам в указанном приближении можно пренебречь. В этих условиях векторы напряженности и индукции магнитного поля, а также энергия электромагнитного поля, остаются инвариантными при переходе от собственной системы координат к неподвижной системе наблюдателя. В этом случае (I.2) и преобразования Лоренца $X^{\alpha} = a_{\beta}^{\alpha} X'^{\beta}$ для по-

тока \vec{j}^n электромагнитной энергии в лабораторной системе координат с точностью до членов первого порядка по v/c дают

$$\vec{j}_k^n = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}' \times \vec{H}]_k + v_k e_n - v_i T_{ik}^{(M)}, \quad (I.3)$$

где $T_{ik}^{(M)} = \frac{1}{4\pi} (H_i B_k - \frac{1}{2} (\vec{H}\vec{B}) \delta_{ik})$ - тензор магнитных натяжения Максвелла.

Уравнение притока энергии для элемента материальной среды в нерелятивистском приближении, когда влиянием притока энергии на его массу можно пренебречь, имеет вид

$$\rho d(\tilde{u}_1 + \tilde{e}_k) \Delta V = \delta A^e + \delta Q^e - \left(\frac{\partial e_n}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_n \right) \Delta V \delta t + \delta Q^{**}, \quad (I.4)$$

где $\delta A^e = \int v_i \delta'_{ik} n_k dS \delta t$ - работа поверхностных сил, описывающих взаимодействие рассматриваемого элемента с окружающей средой, δQ^e - приток тепла, δQ^{**} дополнительный к δA^e приток энергии, который в частности, для рассматриваемого нами случая НЖ может включать работу поверхностных пар сил и др.

Уравнение (I.4), вводя $\tilde{u} = \tilde{u}_1 + \frac{1}{2} \vec{H} \vec{M}$, можно преобразовать к форме ($p_{ik} = \delta'_{ik} + T_{ik}^{(M)}$)

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\tilde{u} + \tilde{e}_k + \frac{\vec{H}^2}{8\pi\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i p_{ik}) + \frac{\delta Q^e}{\Delta V \delta t} - \frac{c}{4\pi} \text{div} [\vec{E}' \times \vec{H}] + \delta Q^{**} / \Delta V \delta t, \quad (I.5)$$

которая удобна при получении для НЖ в нерелятивистском приближении базисного вариационного уравнения механики сплошной среды Л.И.Седова [3]. Базисное вариационное соотношение, соответствующее (I.5), при этом можно записать в виде

$$\delta \int dt \int \left(\frac{\rho \vec{V}^2}{2} - \rho \tilde{u} - \frac{\vec{H}^2}{8\pi} \right) dV + \delta W^* + \delta W = 0, \quad (I.6)$$

где \vec{H} удовлетворяет уравнениям магнитостатики, с учетом II закона термодинамики δW^* можно представить в виде

$$\delta W^* = \int dt \left(\int \rho T \delta \tilde{S} dV - \int \delta Q' \right),$$

$\delta Q'$ - некомпенсированное тепло ($\delta Q' \geq 0$).

При необходимости в (I.6) могут быть учтены гироскопические силы, непроизводящие работу на действительных перемещениях.

Уравнение притока энергии (I.5) и теорема живых сил позволяют получить уравнение притока тепла в виде ($p_{ik} = \phi_{ik} + T_{ik}$, $T_{ik} = 1/4\pi(H_i B_k - 1/2 H^2 \delta_{ik})$)

$$\rho d\tilde{u} \Delta V = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \phi_{ik} \Delta V \delta t + \rho T d\tilde{S} \Delta V - \delta Q + \rho \vec{H} d\vec{M} \Delta V. \quad (I.7)$$

Уравнение притока тепла (I.7) и теорема живых сил при учете работы поверхностных сил $[\mathcal{V}_i p_{ik}] n_k$ на свободных поверхностях НЖ, затрачиваемой на изменение ее поверхностной энергии, позволяет при постоянных источниках внешнего поля и температуры получить важное для анализа целого ряда конкретных ситуаций интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int \rho \left(\vec{F} + \frac{\vec{V}^2}{2} \right) dV - \int \frac{\vec{H}^2}{8\pi} dV + \int \phi dS \right\} = - \int \frac{\delta Q'}{\delta t} \leq 0, \quad (I.8)$$

где $\vec{F} = \vec{E} - T\vec{S}$, а $\vec{E} = \vec{U} - \vec{M}\vec{H}$.

Соотношение (I.8) позволяет получать достаточные условия неустойчивости фигур равновесия НЖ, термодинамической неустойчивости и др.

В отношении проблемы гидродинамической устойчивости НЖ следует отметить ряд принципиальных моментов, связанных с существом дела. Основной особенностью ситуации является дальнедействующий характер сил магнитного межчастичного взаимодействия, с которым связана зависимость собственного поля НЖ и, следовательно-

но, пондеромоторных сил, действующих на среду, от формы занимаемой ею области. С этим связано возникновение нового класса задач о фигурах равновесия, обусловленных действием пондеромоторных сил собственного поля, задач гидродинамики, в которых уравнения движения и поля взаимосвязаны.

В настоящее время эти вопросы, за исключением ряда простейших ситуаций [17] - [24], мало изучены. Численные модели решения данных сложных, нелинейных задач отсутствовали.

В ряде случаев ценные заключения о гидродинамической неустойчивости, используя неравенство (1.8), могут быть получены на основе исследования второй вариации функционала $\int (\rho \tilde{F} - \tilde{H}^2 / 8\pi) dV$, однако для целого ряда случаев этого оказывается недостаточным и необходимо изучение динамики процесса. Имеющая место здесь ситуация в некотором смысле аналогична положению в теории упругих тел, где вводятся понятия статической и динамической потери устойчивости [253]. Для МЖ эти вопросы изучены мало.

Для получения на основе вариационного соотношения Л.И.Седова (1.6) уравнения движения МЖ, а также уравнений для внутренних параметров, если такие имеются, необходимо задание \tilde{U} как функции параметров состояния МЖ и $\delta Q'$, описывающего необратимые процессы.

Одной из наиболее актуальных задач на нынешнем этапе исследования МЖ, в связи с наблюдением в эксперименте обратимых структурных превращений коллоидов ферромагнетиков при их взаимодействии с внешним полем [25] - [38], является установление вида \tilde{U} , позволяющего описать эти явления. Работ в этом направлении не имелось.

Кроме предположений, связанных с представлением тензора энергии-импульса, при описании взаимодействия электромагнитного

поля со средой необходимо делать независимые предположения относительно уравнения момента количества движения. Уравнение момента количества движения электромагнитного поля, вводя тензор собственного момента количества движения поля $Q^{\alpha\beta\gamma}$ [3], можно представить в виде $(\frac{\partial}{\partial x^\beta} S^{\alpha\beta} = -F^\alpha)$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} (x^\gamma S^{\alpha\beta} - x^\alpha S^{\gamma\beta}) + \frac{\partial}{\partial x^\beta} Q^{\alpha\gamma\beta} = -K^{\alpha\gamma} = -h^{\alpha\gamma} - (x^\gamma F^\alpha - x^\alpha F^\gamma) \quad (1.9)$$

При выборе тензора энергии-импульса электромагнитного поля по Минковскому делается предположение о равенстве нулю тензора $Q^{\alpha\beta\gamma}$ [3]. В этом случае для момента сил, действующего на единицу объема МЖ , в нерелятивистском приближении получается $h_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} h^{kl} = [\vec{M} \times \vec{H}]$, что является аргументом в пользу выбора тензора энергии-импульса поля по Минковскому. Аналогично может рассматриваться также собственный момент количества движения среды. Для введения последнего в случае МЖ имеется достаточно много оснований. Во-первых, собственный момент может быть связан с вращением коллоидальных частиц ферромагнетика, составляющих МЖ , во-вторых, сам факт наличия магнитного момента частиц \vec{m} связан с наличием спинового момента количества движения \vec{m} / γ (γ - гиромагнитное отношение).

Анализ принципиальной возможности проявления эффектов спинового момента количества движения в МЖ можно провести на основе полученных автором [56] уравнений совместного движения магнитного момента и однодоменной частицы ферромагнетика, которые с учетом существенных вследствие малого размера частиц случайных тепловых возмущений дают

$$\frac{d\langle \vec{m} \rangle}{dt} = \gamma \langle [\vec{m} \times \vec{H}] \rangle + \frac{1}{\alpha + \alpha_m} (\gamma \alpha \langle [\vec{m} \times \vec{H}_a] \rangle - \alpha / \gamma \langle [\vec{m} \times [\vec{m} \times \vec{\Omega}_0]] \rangle - \frac{\alpha}{c} \langle [\vec{m} \times [\vec{m} \times (\vec{H} + \vec{H}_a)]] \rangle - \quad (1.10)$$

$$- \frac{2kT\alpha}{\zeta} \langle \vec{m} \rangle),$$

$$\langle \vec{\Omega} \rangle - \vec{\Omega}_0 = \alpha^{-1} \langle [\vec{m} \times \vec{H}] \rangle - (\alpha\gamma)^{-1} \frac{d\langle \vec{m} \rangle}{dt},$$

Здесь скобки $\langle \rangle$ обозначают усреднение с функцией плотности вероятности совместного распределения направлений магнитного момента $\vec{e} = \vec{m} / m$ и оси магнитной анизотропии одноосной частицы \vec{n} , ζ - константа в уравнении движения магнитного момента подвижной частицы ферромагнетика:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \gamma [\vec{m} \times (\vec{H} + \vec{H}_a)] + \zeta^{-1} [[\vec{m} \times (\vec{H} + \vec{H}_a + \vec{\Omega}/\gamma)] \times \vec{m}],$$

α - коэффициент вращательного трения частиц,

$$\vec{H}_a = KV (\vec{e} \vec{n}) \vec{n} / m, \quad \alpha_m = m^2 / \zeta \gamma^2.$$

Последний член во втором из уравнений (I.10) описывает эффект Эйнштейна-де Гааза в однодоменной частице ферромагнетика.

При анализе порядка различных членов в уравнении (I.10) воспользуемся значениями безразмерных параметров α_m / α и $\beta = m / \zeta \gamma$, характеризующих движение магнитного момента и частицы в вязкой среде, для которых с учетом известных значений материальных констант ферромагнетиков и свойств коллоидальных частиц МЖ получаются значения 10^{-5} и 10^{-2} соответственно. В таком случае, пренебрегая в первом из уравнений (I.10) малыми членами α_m / α и β , в магнитных полях H порядка kT / m получается уравнение

$$\langle \vec{\Omega} \rangle - \vec{\Omega}_0 = -\alpha^{-1} \langle [\vec{m} \times \vec{H}_a] \rangle, \quad (I.11)$$

описывающее вращательное движение частицы в вязкой среде вследствие взаимодействия магнитного момента с ее осью магнитной анизотропии. Уравнение (I.11) представляет собою обобщение уравне-

ния для безинерциального движения однодоменной частицы ферромагнетика на случай произвольного соотношения \vec{H} и \vec{H}_a . При $H \ll H_a$, когда магнитный момент можно считать жестко связанным с частицей, $-\vec{m} \times \vec{H} = -\vec{m} \times \vec{H}_a$ и уравнение (I.11) при учете вращательной инерции совпадает с обычным уравнением для внутреннего момента при отсутствии поверхностных пар и спинового момента количества движения. Сделанные замечания показывают допустимость при описании МЭ в первом приближении пренебречь наличием спинового момента количества движения.

На подобных предпосылках основаны используемые в большинстве работ по МЭ модели с учетом внутреннего момента количества движения и процессов магнитной релаксации [39] - [73]. При этом необходимо отметить, что получение подобных моделей происходит в рамках ряда феноменологических предположений, адекватность которых остается неясной, более того, в ряде ситуаций имеющиеся модели приводят к качественно различным выводам. Вследствие этого актуальной задачей является отбор и апробация имеющихся моделей, причем вследствие действия в МЭ ряда трудно контролируемых факторов с методологической точки зрения наиболее пригодным представляется метод численного эксперимента. Подобных работ не имелось.

Учет внутреннего момента количества движения среды связан с отказом от традиционно используемого в механике сплошных сред предположения о симметрии тензора напряжений. Вводя тензор внутренних моментов количества движения среды $Q_c^{\alpha\beta\gamma}$, закон сохранения полного момента количества движения ($Q_c^{\alpha\beta\gamma} = 0$) в случае отсутствия внешних к среде и полю моментов дает

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} Q_c^{\alpha\gamma\beta} + T_c^{\alpha\gamma} - T_c^{\gamma\alpha} + S^{\alpha\gamma} - S^{\gamma\alpha} = 0, \quad (I.12)$$

откуда видно, что в общем случае полный тензор энергии-импульса

несимметричен. В нерелятивистском приближении (I.12) показывает, что несимметрия полного тензора напряжений p_{ik} может быть связана:

1) с наличием внутренних моментов количества движения среды. Для случая МЖ эта ситуация рассматривалась в работах [51], [52], [61], [62] и др.;

2) с действием поверхностных пар и при отсутствии внутреннего момента количества движения. Подобная ситуация реализуется в случае, когда внутренняя энергия НЖ зависит помимо других параметров состояния и от градиентов намагниченности $\vec{M}, \kappa - \tilde{u} = \tilde{u}(\rho, \tilde{S}, \vec{M}, \vec{M}, \kappa)$. Эти ситуации для МЖ в настоящее время практически не рассматривались.

В отношении сделанных замечаний отметим, что большинство известных на сегодняшний день экспериментальных фактов относительно проявления в МЖ пондеромоторного действия моментов сил (работы [39] - [50]) могут быть описаны в рамках предположения $Q_c^{\alpha\beta\gamma} = 0$. Однако при этом в общем случае, когда $[\vec{M} \times \vec{H}] \neq 0$ необходимо учитывать, что тензор поверхностных напряжений σ_{ik} несимметричен.

В соответствии со сказанным удовлетворительная модель МЖ в рамках базисного вариационного уравнения (I.6) может быть получена путем задания внутренней энергии $\tilde{u} = \tilde{u}(\rho, \tilde{S}, \vec{M}, \vec{M}, \kappa)$ и некомпенсированного тепла в виде

$$\frac{\delta Q'}{\delta V} = \tau_{ik} (\delta X^i)_{,k} - \rho \delta \vec{M} (\vec{H}_z - \vec{H}),$$

где согласно сделанным замечаниям тензор вязких напряжений τ_{ik} несимметричен, а второй член в $\delta Q'$ описывает необратимые процессы магнитной релаксации. Варьируя в (I.6) закон движения $\vec{X} = \vec{X}(\vec{\xi}, t)$ и независимые параметры состояния, получается урав-

нение движения НЖ

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial}{\partial x^e} \left(\rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{M}_{,e}} \tilde{M}_{,i} \right) + \frac{\partial}{\partial x^e} T^{ie} + \frac{\partial \tau^{ie}}{\partial x^e} = 0$$

и определяющие соотношения

$$T = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{S}} ; \quad \rho \vec{H}_\alpha = \rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{M}} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{M}_{,k}} \right).$$

Условие инвариантности относительно совместного поворота среды и источников поля для антисимметричной части тензора полных напряжений дает

$$e_{kij} \rho_{ij} = \frac{\partial \pi_{kl}}{\partial x^e}$$

где $\pi_{kl} = \left[\tilde{M} \times \rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{M}_{,e}} \right]_{,k}$ - тензор поверхностных пар.

В результате соотношение для некомпенсированного тепла может быть преобразовано к виду

$$\frac{\delta Q'}{\delta V \delta t} = \tau_{ik}^s \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right) - \left(\rho \frac{d\tilde{M}}{dt} - \left[\frac{1}{2} \text{rot } \vec{V} \times \vec{M} \right] \right) \times (\vec{H}_\alpha - \vec{H}). \quad (I.13)$$

Отсюда видно, что получение замкнутой системы уравнений модели связано с использованием определенных феноменологических гипотез относительно τ_{ik}^s и $\left(\rho \frac{d\tilde{M}}{dt} - \left[\frac{1}{2} \text{rot } \vec{V} \times \vec{M} \right] \right)$.

Вариационное соотношение (I.6) для действительных перемещений дает уравнение притока энергии в виде, где член δQ^{**} , включающий работу поверхностных пар, имеет вид

$$\int \rho \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{M}_{,k}} \frac{d\tilde{M}}{dt} n_k dS \delta t.$$

В настоящей работе члены, обуславливающие появление поверхностных пар не учитываются, т.е. полагается $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{M}_{,e}} = 0$, а справедливость различных феноменологических предположений относительно связи $\left(\rho \frac{d\tilde{M}}{dt} - \left[\frac{1}{2} \text{rot } \vec{V} \times \vec{M} \right] \right)$ с $\vec{H}_\alpha - \vec{H}$ является пред-

метом исследования.

Уравнение движения НЖ в этом случае имеет вид

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{V} + (\vec{M} \nabla) \vec{H} + \frac{1}{2} \text{rot} [\vec{M} \times \vec{H}], \quad (\text{I.I4})$$

где последний член обусловлен действием пондеромоторного момента сил.

В настоящее время большое внимание привлекают анизотропные НЖ - жидкие кристаллы (ЖК). Для получения модели Лесли-Эриксона [77] описания нематических ЖК необходимо задание \tilde{u} как функции $\tilde{u}(\rho, \tilde{S}, \vec{M}, \vec{n}, \vec{n}_k)$, где единичный вектор \vec{n} - директор, характеризует выделенное направление анизотропной жидкости. В связи с особенностями структуры ЖК процессы магнитной релаксации при этом не учитываются.

Для исследования целого ряда ситуаций подобное описание ориентационного состояния ЖК оказывается недостаточным и необходима более полная его характеристика на основе введения в качестве внутреннего параметра состояния функции распределения частиц по ориентациям. Такие модели не были развиты. На подобной основе должны описываться и некоторые вопросы, связанные с необратимыми процессами намагничивания МК, в том числе при жесткой связи магнитного момента с частицей.

Рассматриваемые модели ввиду глубокой аналогии между электрическими и магнитными явлениями представляют интерес и для описания движения ПЖ в электрическом поле.

Цель работы заключалась в построении моделей НЖ и МК с учетом сил магнитного межчастичного взаимодействия и ориентационных процессов и описании на их основе новых, характерных для этих сред особенностей взаимодействия с полем.

Научную новизну работы составляет:

1. Нахождение условий развития гидродинамических неустойчивос-

тей нового класса в плоских слоях, обусловленных дальнедействующими силами магнитного межчастичного взаимодействия, их подтверждение в натурном и численном экспериментах; постановка нового класса задач о фигурах равновесия НЖ в плоских слоях, определяемых балансом сил поверхностного натяжения и магнитного межчастичного взаимодействия, и их нахождение методом численного эксперимента; описание новых специфических для НЖ закономерностей формирования структур.

2. Построение термодинамической модели коллоида ферромагнетика с учетом магнитного межчастичного взаимодействия, позволяющей предсказывать и описывать явления, связанные с образованием крупных конгломератов частиц ферромагнетика во внешнем магнитном поле и теоретическое исследование их физических свойств.

3. Отбор и апробация существующих моделей МЖ с внутренними вращениями путем численного моделирования вращательного броуновского движения частицы ферромагнетика при наличии поля и течения со сдвигом и установление области и степени их пригодности для описания движений коллоидов ферромагнетика в магнитном поле, в том числе и в ситуациях, далеких от термодинамического равновесия; определение характеристик неньютоновского поведения разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц ферромагнетика в поле.

4. Построение модели НЖ с функцией распределения частиц в ориентационном пространстве в качестве внутреннего параметра состояния и получение на ее основе в результате сокращения описания ряда частных моделей (модели Лесли-Эриксона анизотропной жидкости, модели НЖ с намагниченностью в качестве внутреннего параметра состояния, модели МЖ для случая нежесткой связи магнитного момента с частицей); построение модели слабопроводящей суспензии с учетом ориентационных процессов, обусловленных накоплением свободного

заряда на поверхности гетерофазных включений.

5. Описание на основе моделей с внутренними вращениями новых гидродинамических явлений, обусловленных необратимыми ориентационными процессами (течений НЖ с подвижными границами во вращающихся магнитных полях, неустойчивость свободной поверхности во вращающемся магнитном поле, электрогидродинамическая неустойчивость слабопроводящей суспензии анизотропных частиц и др.).

Найденные на основе проведенного комплекса исследований закономерности формирования и свойств структур НЖ в магнитном поле составляют основу нового направления - гидродинамика процессов образования структур НЖ с учетом магнитных взаимодействий, влияния формы жидкого тела, явлений неустойчивости и ориентационных процессов.

Основные защищаемые научные положения.

1. Дальнодействующие силы магнитного межчастичного взаимодействия в плоских слоях при наличии поля, поперечного слою, приводят: к неустойчивости симметричных фигур равновесия НЖ относительно нарушающих симметрию возмущений; к развитию разветвленных лабиринтных структур НЖ; к образованию структур в неравновесных ситуациях при наличии концентрационной или температурной стратификации.

2. Существует одно или несколько семейств фигур равновесия НЖ в плоских слоях, определяемых балансом сил поверхностного натяжения и магнитного межчастичного взаимодействия; эти фигуры могут быть найдены путем численного моделирования течения Хеле-Шоу при их установлении.

3. Магнитные силы межчастичного взаимодействия приводят к потере термодинамической устойчивости коллоида ферромагнетика в магнитном поле при значениях параметра магнитодипольного взаимодействия выше критического.

4. Отбор и апробация имеющихся моделей МЖ с внутренними вращениями возможны на основе численных экспериментов по моделированию вращательного броуновского движения частиц ферромагнетика в течении со сдвигом при наличии поля.

5. Путем сокращения описания на основе общей модели с функцией распределения частиц в ориентационном пространстве в качестве внутреннего параметра состояния получают частные модели (модель Лесли-Эриксона анизотропной НЖ, модель МЖ для случая не жесткой связи магнитного момента с частицей и др.).

6. Внутренние вращения приводят: к возникновению макроскопического движения НЖ со свободными границами, к образованию поверхностных и пространственных структур, проявляются, вследствие конечности максвелловского времени релаксации свободного заряда, в слабопроводящих суспензиях при наличии электрического поля.

Практическая ценность. Развитые модели НЖ и коллоидов ферромагнетиков могут быть использованы при описании новых, характерных для данных сред гидродинамических явлений, связанных с действием далекодействующих сил магнитного межчастичного взаимодействия, ориентационными процессами и пространственным расслоением коллоидов ферромагнетиков, обусловленным магнитным межчастичным взаимодействием.

Найденные закономерности процессов образования структур МЖ в плоских щелях существенны при разработке устройств с использованием МЖ и имеют перспективу использования для интенсификации явлений переноса, так как показывают возможность многократного изменения в поле поверхности межфазной границы раздела.

Найденное и исследованное в работе новое явление - образование сильноразветвленных, лабиринтных структур НЖ в плоских щелях - представляет интерес для механики сплошных сред в целом. Это подтверждается нахождением в результате развития исследований

настоящей работы подобного вида структур и для диэлектрических жидкостей в электрическом поле. Полученные при исследовании данных явлений результаты представляют интерес с точки зрения изучения процессов образования структур в самоорганизующихся системах, так как они раскрывают специфические для случая взаимодействующих с полем систем особенности механизмов развития структур.

Данный класс явлений может быть использован в демонстрационном эксперименте, в частности, для иллюстрации структур полосовых доменов в пленках ферромагнетиков и др.

Развитый в работе метод численного моделирования динамики свободной поверхности НЖ, основанный на решении граничных интегральных уравнений, представляет интерес с точки зрения возможности решения на его основе широкого спектра важных вопросов гидродинамики НЖ со свободной поверхностью. Отметим, что полученные в работе путем численного моделирования фигуры равновесия НЖ представляют интерес и с точки зрения физики магнитных явлений, так как позволяют определять вид равновесных конфигураций цилиндрических доменов, которые интенсивно исследуются в связи с созданием устройств внешней памяти ЭВМ.

Развитая термодинамическая модель коллоида ферромагнетика с учетом сил магнитного межчастичного взаимодействия показывает возможность существования ряда новых физических явлений - возникновения термодинамической неустойчивости системы с увеличением напряженности магнитного поля, структурных превращений, связанных с одновременным изменением магнитного порядка и пространственного расположения частиц и др. и дает основу для прогнозирования поведения МЖ в случаях, когда существенны эффекты межчастичных магнитных взаимодействий.

Проведенный на основе численного моделирования отбор и апробация моделей МЖ с учетом необратимых ориентационных процессов позволяет определить их применимость для описания конкретных движений МЖ в нестационарных полях, представляющих практический интерес, а также интерпретации эксперимента. Ряд развитых на их основе представлений: механизм превращения скрытого внутреннего вращения в макроскопическое движение жидкости — используется при создании различных устройств на основе МЖ.

На основе развитого метода статистического моделирования реологических свойств коллоидов анизотропных частиц возможно создание подробных таблиц реологического поведения разбавленного коллоида ферромагнетика в поле, которые имеют важное значение для исследования их структуры, а также расчете различных устройств на основе МЖ.

На основе развитых моделей НЖ с учетом необратимых ориентационных процессов возможно понимание характера влияния межчастичных взаимодействий на реологические свойства анизотропных жидкостей — ЖК, могут быть описаны гидродинамические явления, обусловленные ориентационными процессами, в ПЖ и слабопроводящих суспензиях, что важно при интерпретации имеющихся экспериментальных данных.

Апробация работы. Результаты исследований, изложенных в диссертации, докладывались и обсуждались на: Рижских совещаниях по магнитной гидродинамике (1972, 1975, 1978, 1981, 1984 гг.); Пятом Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Алма-Ата, 1981 г.); УП конференции по поверхностным силам (Москва, 1980 г.); УI Всесоюзной конференции по тепло-массообмену (Минск, 1980 г.); У Всесоюзной школе по моделям механики сплошной среды (Рига, 1979 г.); Всесоюзном симпозиуме по гидродинами-

ке и теплофизике магнитных жидкостей (Саласпилс, 1980 г.); Всесоюзных школах-семинарах по магнитным жидкостям (Плес, 1978, 1981, 1983 гг.); семинарах секции "Физика магнитных жидкостей" Научного совета по физике магнитных явлений (Ставрополь, 1982 г., Харьков; 1983 г.); Украинском республиканском совещании-семинаре "Исследование теплофизических и гидродинамических свойств магнитных жидкостей для новой промышленной технологии и холодильной техники" (Николаев, 1979 г.); Уральской конференции по применению магнитной гидродинамики в металлургии (Пермь, 1974 г.); II Всесоюзном семинаре по гидромеханике и тепломассообмену в невесомости (Пермь, 1981 г.); Координационном совещании по физике магнитных жидкостей (Пермь, 1980 г.); Всесоюзной конференции по магнитным жидкостям (Плес, 1985 г.), а также неоднократно на семинарах НИИ механики МГУ, Института тепломассообмена им. А.В.Лыкова АН БССР, кафедры теоретической механики Харьковского государственного университета, Латвийского государственного университета им. П.Стучки, по прикладной магнитной гидродинамике (г. Пермь), Института математики им. А.В.Стеклова АН СССР.

Объем и структура. Диссертация состоит из введения - главы I, шести глав, содержащих оригинальные результаты, заключения - глава 8, списка литературы, содержащего 253 наименования, а также четырех приложений. Материал диссертации содержит 481 страницу машинописного текста, в том числе 296 страниц основного текста, списка литературы на 26 страницах, приложений на 12 страницах, а также 147 рисунков и 1 таблицу.

Глава 2. МАГНИТНЫЕ МЕЖЧАСТИЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В КОЛЛОИДАХ ФЕРРОМАГНЕТИКОВ

2.1. Фазовое расслоение коллоидов ферромагнетиков.

Краткий обзор состояния вопроса

Проблема адекватного учета магнитного межчастичного взаимодействия является одной из центральных в физике и гидродинамике МЖ.

Учет отличия напряженности макроскопического магнитного поля, действующего в МЖ, от напряженности внешнего поля описывает эффекты, обусловленные далекодействующим характером сил магнитного межчастичного взаимодействия. Однако этим не исчерпывается класс явлений, обусловленный силами магнитного межчастичного взаимодействия, так как действующее на выделенную частицу поле, вообще говоря, не равно макроскопическому.

Создание последовательной теории систем с магнитодипольным межчастичным взаимодействием возможно на основе статистической теории. Однако, в настоящее время это направление развито недостаточно. Другой возможный путь исследования данных явлений состоит в формулировке термодинамических моделей, отражающих общие свойства рассматриваемых систем, которые, аналогично, например, классической модели газа Ван-дер-Ваальса, позволяют описать поведение системы в широкой области ее параметров состояния. Формулировка подобных моделей и исследование получаемых на их основе следствий составляет предмет настоящей главы.

Существенным отличием коллоидов ферромагнетиков от большинства систем, рассматриваемых в термодинамике, является необходимость включения в число параметров состояния, наряду с темпера-

турой, концентрацией частиц, и напряженности магнитного поля. На это, в частности, указывают результаты целого ряда экспериментальных работ, в которых наблюдается обратимое расслоение коллоидов ферромагнетиков при наложении поля, приводящее к образованию макроскопических областей, концентрированных частицами [25], [26], [28], [32]. Следует отметить, что интерпретировать возникновение подобных структур на основе представлений об образовании цепочечных агрегатов феррочастиц [84] - [87] вследствие магнитодипольного взаимодействия не представляется возможным, так как их размеры гораздо больше размеров цепочек одиночных частиц ферромагнетика.

Это показывает, что образование крупных конгломератов частиц следует интерпретировать как кооперативное явление, аналогичное конденсации газа. При этом поле существенно влияет на характер фазовых диаграмм равновесия. Эти заключения подтверждаются целым рядом экспериментальных фактов.

В работе [28] показано, что коллоид ферромагнетика определенной концентрации расслаивается при некоторой критической напряженности поля с образованием областей с высокой концентрацией частиц. После его выключения происходит медленное растворение конгломератов, что указывает на обратимый характер явления. Необходимо отметить, что характерные времена растворения конгломератов являются достаточно большими - порядка нескольких дней, что связано с малостью коэффициента диффузии коллоидальных частиц ферромагнетика. На обратимый характер образования конгломератов указывают также результаты работ [26], [32] и др. В работе [27] найдена сильная температурная зависимость критического поля расслоения коллоида ферромагнетика.

В работе [29] путем исследования деформации конгломерата феррочастиц в слабом внешнем поле показано, что поверхность

конгломерата обладает малым поверхностным натяжением. На существование поверхностного натяжения границы конгломерата с окружающим его разбавленным коллоидальным раствором указывают и результаты работы [25], в которой описывается процесс распада вытянутого, крупного конгломерата, аналогичный процессу распада цилиндрического столба жидкости на отдельные капли, обусловленный действием капиллярных сил.

Представление о крупном конгломерате как гетерофазном включении неоднократно предлагалось в литературе. Аналогия образования крупных конгломератов с процессом конденсации газа отмечается в работе [25], позже также в работе [28]. Однако, кроме констатации самого факта аналогии, дальнейшего развития это представление в данных работах не получило. Образование конгломератов с точки зрения теории гетерофазных флуктуаций Френкеля рассматривается в работах [33], [38]. При этом само существование двухфазного состояния коллоида ферромагнетика в работах [33], [37], [38] постулируется, в связи с чем физические причины его образования остаются нераскрытыми.

Кроме того, образование крупных конгломератов в данных работах трактуется с позиций равновесия "насыщенный раствор - растворимое вещество". В рамках термодинамики это соответствует неполному использованию условий равновесия фаз [88] для двухкомпонентной среды (существенное число компонент возможно и больше) - коллоидальные частицы и растворитель (несушая жидкость), согласно которым химические потенциалы коллоидальных частиц и растворителя в фазах равны. В работах [33], [37] используется лишь первое из них, что допустимо, если растворитель находится лишь в одной из фаз. Это не соответствует результатам эксперимента, так, например, в работе [28] сообщается о большом, примерно в два раза, уменьшении объема конгломератов при увеличении поля,

что связано с вытеснением заключенного в них растворителя.

Так как в модели работ [33] , [37] существование двух фаз коллоида ферромагнетика постулируется вне зависимости от величины напряженности магнитного поля, то эта модель фактически предполагает, что их образование обусловлено силами немагнитного происхождения. Поле при этом может являться лишь фактором, который приводит к сдвигу равновесия фаз.

Термодинамическая модель, показывающая возможность возникновения расслоения на фазы под действием одних магнитных сил межчастичного взаимодействия, предложена нами в работе 89 . При этом магнитное межчастичное взаимодействие описывается в рамках среднего действующего поля. Позже основные положения нашей модели [89] для случая неупорядоченной решеточной системы магнитных диполей были подтверждены статистическими методами в работе [90] , а также другим методом в работе [65] .

Необходимо отметить, что метод среднего действующего поля при исследовании магнитных фазовых переходов в упорядоченной решетке магнитных диполей ранее использовался также в работе [91] . Однако случай коллоида ферромагнетика, рассматриваемый в нашей работе [89] , более сложен, так как помимо фазовых переходов с образованием магнитоупорядоченных состояний, рассматриваемых в работе [91] , в данном случае, вследствие свободы поступательного перемещения коллоидальных частиц, возможно пространственное расслоение системы. При этом в известном смысле ситуация аналогична ситуации возникновения магнитных фазовых переходов I рода в системах с сильно зависящим от расстояния между спинами обменном взаимодействии, рассмотренной в работе [92] .

Наша модель [89] показывает возможность потери термодинамической устойчивости коллоида ферромагнетика с наложением поля. Данный вывод подтверждается результатами экспериментальных исс-

ледований [27] , [28] , [32] , [34] , [35] , указанных выше. Особенности фазовых диаграмм коллоида ферромагнетика, найденные нами [89] , позже были подтверждены также в теоретической работе [90] .

В работе [36] сообщается о наблюдении особенностей кривых намагничивания некоторых коллоидов ферромагнетиков, которые хорошо коррелируют с пороговым характером возникновения у данных образцов анизотропии рассеяния света при увеличении поля. Наша модель [89] позволяет описать эти явления на основе представления о фазовом расслоении коллоида при наложении поля.

В работе [36] приводятся термодинамические соотношения

$$\frac{dH_{*}}{dT} = \frac{Q}{T(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)} ; \quad \chi_{2g} - \chi_{1g} = \frac{n(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)^2}{kT},$$

которые по температурной зависимости напряженности порогового поля возникновения анизотропии рассеяния света H_{*} и разности дифференциальных восприимчивостей $\chi_{2g} - \chi_{1g}$ после и до излома кривой намагничивания позволяют определить теплоту фазового перехода Q . Отметим, что наша модель [89] показывает, что эти соотношения справедливы лишь приближенно, в частности, если концентрация разбавленной фазы намного меньше концентрированной. Оцененная по указанным данным в работе [36] теплота фазового перехода Q имеет порядок 3 кТ , что близко к значениям, определенным нами [89] . Позже подобный порядок величины для теплоты фазового перехода коллоида ферромагнетика был получен на основе физических соображений также в работе [93] . Интересно, что полученное в этой работе критическое значение параметра магнитодипольного взаимодействия - 4,8, при котором имеет место фазовый переход коллоида в концентрированную фазу в сильном поле, также весьма близко к полученному ранее нами [94] значению 3,4. Следует отметить, что в работе [93] фазовый переход рассмат-

ривается как плавление. Экспериментальные результаты показывают, что ситуация, однако, ближе к конденсации. Так в работе [31] показано, что крупные конгломераты - жидкие, но их вязкость весьма большая и имеет порядок пуаза.

Явления, связанные с потерей устойчивости коллоида в поле относительно малых возмущений концентрации, описаны в ряде работ [27] , [30] , [32] , где показано, что плоский слой однородного коллоида в поперечном слое поле распадается на периодическую решетку областей с высокой концентрацией частиц. При этом следует обратить внимание на отмеченный в работе [32] факт, что критическая напряженность поля, при которой в плоском слое происходит развитие одиночных включений (доменов) концентрированных частицами, ниже критической напряженности поля, при которой происходит образование их решетки. В рамках нашей модели [89] это находит объяснение в достижении в первом случае значения соответствующего бинадали, а во втором - спинодали для коллоида данной концентрации.

Распад плоского слоя коллоида в поперечном слое поле теоретически рассматривается нами в работе [94] , где показано, что наблюдаемые на эксперименте особенности этого распада качественно и количественно могут быть описаны на основе представления о потере термодинамической устойчивости коллоида в поле. Период образуемой структуры при этом связан с коэффициентом поверхностного натяжения фаз коллоида. Проведенная нами [94] оценка этого коэффициента экспериментально подтверждена в работах [28] , [29] .

Особенностью модели с учетом магнитного межчастичного взаимодействия в приближении среднего действующего поля является то, что она показывает возможность существования спонтанно намагниченных конгломератов при отсутствии поля. Тут можно указать, что

подобные конгломераты наблюдаются и на эксперименте [38] , однако, при этом отмечается существование и конгломератов другого типа, по терминологии работы [38] каплеобразных, которые спонтанной намагниченностью не обладают.

Возможность фазового расслоения коллоида сильновытянутых частиц с образованием конгломератов с отсутствующей спонтанной намагниченностью исследуется нами в работе [95] .

Для начальной магнитной восприимчивости коллоида ферромагнетика наша модель [89] показывает выполнение классического закона Кюри-Вейсса $\chi = a/(T - T_K)$. Справедливость этого закона для коллоидов ферромагнетиков подтверждается результатами экспериментальных работ [96] .

Перспективным методом исследования систем магнитных диполей представляется метод статистического моделирования Монте-Карло. В настоящее время, однако, подобные исследования находятся на начальной стадии развития. Статистическое моделирование двухмерной системы магнитных диполей проводится в работе [97] . Следует, однако, отметить, что поскольку для двухмерной системы диполей при этом используется взаимодействие, соответствующее диполям в трехмерном пространстве, то численная модель работы [97] адекватно не отражает реальные особенности магнитодипольного взаимодействия, имеющего дальнедействующий характер.

Имеется ряд интересных работ, в которых проводится статистическое моделирование упорядоченных решеточных систем магнитных диполей [98] , [99] , которые, однако, непосредственного отношения к рассматриваемой проблеме фазовых переходов в коллоидах ферромагнетиков не имеют, так как возможность пространственного перемещения диполей при этом исключена. Можно отметить, что наблюдаемые в численных экспериментах характеристики магнитного состояния существенно зависят от типа используемой решетки. В

работе [99] сообщается о наблюдении в численных экспериментах для достаточно крупных образцов в виде сферы в случае объемно-центрированной кубической решетки магнитных диполей разбиение образца на упорядоченные ферромагнитным образом домены. Намагничивание образца при этом происходит за счет роста доменов, намагниченных по направлению поля. Эти результаты могут представлять интерес с точки зрения интерпретации магнитных свойств конгломератов феррочастиц.

В заключение можно указать на работы [100] , [101] , где рассматривается статистическая механика модельных неупорядоченных одномерных и двумерных решеточных систем с дальнедействующими магнитными силами межчастичного взаимодействия при отсутствии внешнего магнитного поля. Полученные в этих работах результаты подтверждают наш вывод [89] о возникновении фазового перехода I рода в магнитоупорядоченное состояние при достаточно больших значениях параметра магнитного взаимодействия. В этих работах производится учет также сил взаимодействия немагнитного характера. Полученные результаты показывают, что в этом случае число возникающих фазовых переходов, в зависимости от параметров системы, может быть больше. В частности, при достаточно больших значениях параметра немагнитного взаимодействия возможна следующая последовательность фазовых переходов I рода - "немагнитный газ - немагнитная жидкость" и "немагнитная жидкость - магнитная жидкость".

Представление о крупных конгломератах коллоида ферромагнетика как включениях концентрированной фазы получило дальнейшее развитие в наших работах [102] , [103] . В работе [102] введено понятие магнитного переохлаждения и рассчитана форма критического зародыша концентрированной фазы, определяемая поверхностным натяжением границ раздела и действием размагничивающего поля

конгломерата. В работе [103] рассмотрено влияние двухфазного состояния коллоида ферромагнетика на начальную магнитную динамическую восприимчивость и показана возможность наблюдения в этом случае низкочастотной дисперсии мнимой части комплексной магнитной восприимчивости.

Фазовое расслоение коллоидов ферромагнетиков, как это показывает ряд экспериментальных работ [31], [32], приводит к возможности наблюдения новых явлений гидродинамики, недоступных в обычных условиях. Так, большие значения магнитной проницаемости концентрированной фазы коллоида приводят к развитию своеобразной гидродинамической неустойчивости крупных конгломератов [31], аналогу МГД-неустойчивостей капель МЖ в плоских слоях у крупных конгломератов [32]. В будущем следует ожидать дальнейшего развития исследований в данном направлении. В частности, в связи с возможностью существования коллоида в двухфазном состоянии актуальной является задача о капле МЖ при действии магнитного и сдвигового полей и др.

2.2. Термодинамическая модель МЖ с учетом межчастичных магнитных взаимодействий

В настоящем разделе развивается термодинамическая модель МЖ, в которой учтены эффекты межчастичных магнитных взаимодействий. Подобная модель, развитая нами в работе [89], необходима для описания обратимых структурных превращений, имеющих место при ее взаимодействии с магнитным полем.

В рамках приближения среднего действующего поля действующее на данную частицу эффективное поле полагается равным $\vec{H}_э = \vec{H} + \lambda \vec{M}$, где \vec{H} - напряженность макроскопического поля в системе, \vec{M} - намагниченность. При определении \vec{H} соответствующим

шим образом может быть учтен размагничивающий фактор объема, содержащий коллоид ферромагнетика. Однако влияние рассматриваемого в настоящем разделе перераспределения частиц коллоида на размагничивающий фактор объема мало. Кроме того, поскольку образуемые в результате перераспределения частиц включения сильно вытянуты в направлении поля, его изменением при этом в настоящем разделе пренебрегается.

В отношении коэффициента λ , который для классического случая поля Лоренца равен $4\pi/3$ и является, вообще говоря, структурно чувствительным, предполагается независимость от термодинамических параметров системы - концентрации, температуры, напряженности поля.

Для части свободной энергии коллоида F_m , обусловленной межчастичным магнитным взаимодействием, взаимодействием с внешним полем и распределением частиц в ориентационном пространстве, имеет место ($f = z^{-1} \exp(\vec{m} \vec{H}_z / kT)$) $\vec{H}_\Lambda = \lambda \vec{M}$

$$F_m = -N \langle \vec{m} \vec{H} \rangle - N \frac{1}{2} \langle \vec{m} \vec{H}_\Lambda \rangle + kTN \int f \ln f d^2 \vec{e}, \quad (2.2.1)$$

где N - число частиц в системе, $d^2 \vec{e}$ - элемент телесного угла, а $\langle \rangle$ обозначает усреднение с функцией распределения f .

Отметим, что множитель $1/2$ во втором члене правой части выражения (2.2.1), описывающего вклад в свободную энергию межчастичных магнитных взаимодействий, необходим для того, чтобы энергию магнитного взаимодействия данной частицы с любой другой не учитывать дважды, а именно, так как $\langle \vec{m} \vec{H}_\Lambda \rangle$ представляет собою энергию магнитного взаимодействия данной частицы со всеми остальными, то в выражении $-N \langle \vec{m} \vec{H}_\Lambda \rangle$ взаимодействие любых двух частиц учтено дважды. Третий член в выражении (2.2.1) описывает вклад в свободную энергию энтропии распределения частиц в ориентационном пространстве, которая в расчете на одну частицу равняется

$$-k \int \ln f f d^2 \vec{e}.$$

Выражение f для намагниченности коллоида дает $\vec{M} = n m \times L(\xi_{\text{э}}) \vec{h}_{\text{э}}$ ($\vec{h}_{\text{э}} = \vec{H}_{\text{э}} / H_{\text{э}}$), где параметр Ланжевена эффективно-го поля $\xi_{\text{э}}$ определяется из условия самосогласования

$$\xi_{\text{э}} = \xi + \frac{n m^2 \lambda}{k T} L(\xi_{\text{э}}). \quad (2.2.2)$$

Полная свободная энергия коллоида получается в результате добавления к F_m вклада, обусловленного тепловым движением частиц и их распределением в пространстве. Определение энтропийно-го вклада в свободную энергию распределения частиц в пространстве, аналогично тому, как это делается для случая газа Ван-дер-Ваальса [88], производится путем учета исключенного объема, т.е. в результате замены в выражении свободной энергии идеального газа полного объема V на свободный $V - N v_0$, где $v_0 = 4V$, V - объем феррочастицы с сольватным слоем, который в данном случае предполагается несжимаемым. В результате свободная энергия коллоида ферромагнетика может быть представлена в следующем виде

$$F = N f_0'(T) + k T N \ln \frac{N v_0}{V - N v_0} - N \langle \vec{m} \vec{H} \rangle - \frac{N}{2} \langle \vec{m} \vec{H}_{\Lambda} \rangle + k T N \int f \ln f d^2 \vec{e}.$$

Последнее соотношение для свободной энергии единицы объема коллоида $f_{0\delta}$ дает

$$f_{0\delta} = n f_0(T) + k T n \ln \frac{n v_0}{1 - n v_0} - k T n \ln \frac{\text{sh } \xi_{\text{э}}}{\xi_{\text{э}}} + \frac{1}{2} \lambda (n m)^2 L^2(\xi_{\text{э}}). \quad (2.2.3)$$

Выражение (2.2.3) позволяет определить химический потенциал феррочастиц φ и осмотическое давление коллоида p . Для них выражения $\varphi = \left(\frac{\partial f_{0\delta}}{\partial n} \right)_{T, \vec{H}}$ и $p = \varphi n - f_{0\delta}$, при учете следующего из условия самосогласования соотношения $\left(\frac{\partial \xi_{\text{э}}}{\partial n} \right)_{T, \vec{H}} = \lambda_0 L / \left(1 - n \lambda_0 \frac{\partial L}{\partial \xi_{\text{э}}} \right)$ дают

$$\varphi = f_0 + kT \ln \frac{n v_0}{1 - n v_0} + \frac{kT}{1 - n v_0} - kT \ln \frac{\text{sh } \xi_3}{\xi_3} \quad (2.2.4)$$

и

$$p = \frac{kT n}{1 - n v_0} - \frac{1}{2} \lambda (n m)^2 L^2(\xi_3) . \quad (2.2.5)$$

В отношении соотношений (2.2.4) и (2.2.5) следует сделать ряд замечаний. Во-первых, выражение (2.2.4) для химического потенциала согласуется с общим термодинамическим соотношением, приведенным для случая сред намагничивающихся по закону $\vec{M} = (\mu - 1) \vec{H} / 4\pi$ в [104] :

$$\varphi = \varphi_0(n, T) - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \mu}{\partial n} \right)_T H^2 . \quad (2.2.6)$$

Действительно, в случае слабых полей $\xi \ll 1$, когда $\xi_3 = \frac{\xi}{1 - n \lambda_0 / 3}$ и $-\frac{\mu - 1}{4\pi} = \frac{n m^2}{3 k T (1 - n \lambda_0 / 3)}$, разложение (2.2.4) с точностью до членов второго порядка малости по H дает

$$\varphi = \varphi_0(n, T) - \frac{m^2 H^2}{6 k T (1 - n \lambda_0 / 3)} ,$$

что при учете выражения для восприимчивости в приближении само-согласованного поля совпадает с (2.2.6). Во-вторых, выражение (2.2.5) для осмотического давления коллоида аналогично выражению давления газа Ван-дер-Ваальса, за исключением множителя $L^2(\xi_3)$ во втором слагаемом. Так как последний зависит от напряженности внешнего магнитного поля, то рассматриваемая модель может быть охарактеризована как своеобразный газ Ван-дер-Ваальса, параметр межчастичного взаимодействия которого зависит от напряженности внешнего магнитного поля. Это дает возможность управления при помощи внешнего магнитного поля термодинамической устойчивостью коллоида. Конкретные примеры этого будут приведены ниже. В-третьих, полученные нами соотношения намагниченности и осмотического давления коллоида могут быть сопоставлены с соответствующими со-

отношениями, обоснованными методами статистической механики в более поздней работе [90]. В данной работе получены уравнения состояния и самосогласования в виде

$$\xi_{\text{э}} = \xi + n\lambda_0 L(\xi_{\text{э}});$$

$$p = -kTv_0^{-1} \ln(1-nv_0) - \frac{1}{2} \lambda (nm)^2 L^2(\xi_{\text{э}}). \quad (2.2.7)$$

Данные уравнения, за исключением первого члена в выражении для осмотического давления, совпадают с приведенными выше. Отличие состоит в незначительном и, с точки зрения получаемых выводов, непринципиальном различии формы записи давления идеального газа с учетом исключенного объема частиц. При этом отношение данных величин, равное $-(1-nv_0)\ln(1-nv_0)/nv_0$ в области малых nv_0 , близко к единице. Таким образом, результаты рассмотрения методами статистической механики подтверждают основные предположения нашей термодинамической модели [89].

Рассматриваемая модель дает ряд интересных выводов физического характера. Во-первых, уравнение (2.2.2) для случая $\xi = 0$ показывает существование решения $\xi_{\text{э}} \neq 0$, соответствующего спонтанно намагниченному состоянию при $n\lambda_0 > 3$. Во-вторых, как показывает исследование концентрационной зависимости химического потенциала (2.2.4), она показывает неустойчивость пространственно однородного состояния коллоида относительно расслоения. Точка потери термодинамической устойчивости определяется условием $(\partial\varphi/\partial n)_{T, \vec{H}} = 0$. При этом коллоид неустойчив относительно расслоения, если параметр магнитодипольного взаимодействия превосходит критическое значение, которое зависит от напряженности внешнего магнитного поля. Критические значения параметра магнитодипольного взаимодействия были рассчитаны нами в работе [94]. Их значения определяются из условий $(\partial\varphi/\partial n)_{T, \vec{H}} = 0$

$$\text{и } (\partial^2 \psi / \partial n^2)_{T, \vec{H}} = 0, \text{ которые дают следующую систему уравнений}$$

$$\frac{1}{(1 - n v_0)^2} = \frac{n \lambda_0 L^2}{(1 - n \lambda_0 \partial L / \partial \xi)},$$

$$\frac{2 n v_0}{(1 - n v_0)^3} = \frac{n \lambda_0 L^2}{(1 - n \lambda_0 \partial L / \partial \xi)^2} \left(1 + 2 n \lambda_0 \frac{\partial L}{\partial \xi} + \frac{(n \lambda_0)^2 L \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2}}{(1 - n \lambda_0 \partial L / \partial \xi)} \right) \cdot 2.8$$

Рассчитанные критические значения параметра магнитодипольного взаимодействия $\gamma = n \lambda_0 / 2 n v_0$ приведены на рис. 2.2.1а. На рис. 2.2.1б начальная область зависимости дана при большем разрешении. Представленные результаты показывают существование в некотором небольшом диапазоне значений γ нижней и верхней критических напряженностей поля расслоения МЖ, т.е. неустойчивый относительно расслоения коллоид при увеличении поля, вследствие показанного на рис. 2.2.1б небольшого увеличения с полем критического значения параметра магнитодипольного взаимодействия, может становиться устойчивым при некоторой напряженности поля (верхняя критическая напряженность поля). При дальнейшем увеличении поля коллоид при некоторой его напряженности (нижняя критическая напряженность поля) теряет устойчивость вторично. Данный результат нашей работы [89] позже был подтвержден также и для случая модифицированной модели (2.2.7). Таким образом, он не связан с конкретным способом учета исключенного объема коллоидальных частиц, а обусловлен магнитными взаимодействиями.

Физически [90] его появление обусловлено тем, что восприимчивость упорядоченной в магнитном отношении фазы вблизи точки Кюри ($n \lambda_0 = 3$) $\chi = a / 2 (T_K - T)$ меньше восприимчивости неупорядоченной $\chi = a / (T - T_K)$, вследствие чего при наложении поля в окрестности точки Кюри химический потенциал неупорядоченной фазы уменьшается более сильно, чем упорядоченной. Это приводит к восстановлению термодинамической устойчивости неупорядоченной

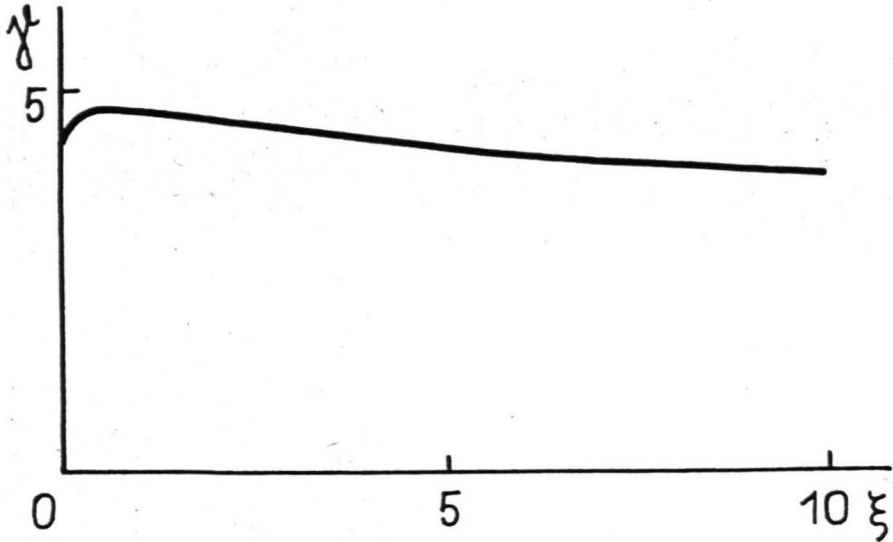


Рис. 2.2.1а. Зависимость критического значения параметра магнитодипольного взаимодействия от параметра Ланжевена.

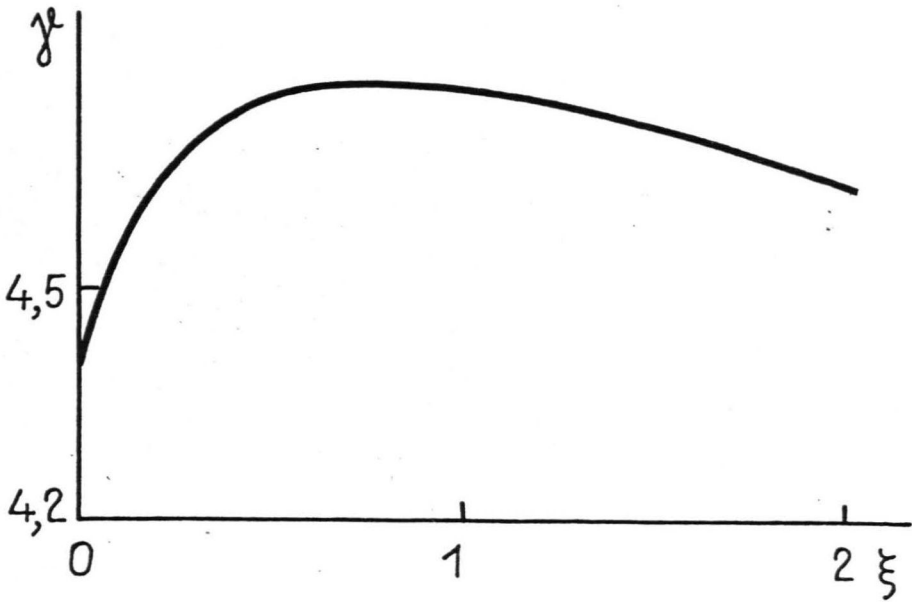


Рис. 2.2.1б. Начальная область зависимости критического значения параметра магнитодипольного взаимодействия от параметра Ланжевена.

фазы. Графически это явление иллюстрируется на рис. 2.2.2, где показаны концентрационные зависимости химического потенциала коллоидальных частиц при параметре магнитодипольного взаимодействия, равном 4,25 (кривая 1 - $\xi = 0$, 2 - $\xi = 0,1$). Из рис. 2.2.2 видно, что слабо немонотонная зависимость химического потенциала при отсутствии поля переходит в монотонную при его наложении. Отметим при этом, что определенное нами в работе [94] критическое значение параметра магнитодипольного взаимодействия, выше которого упорядоченная фаза образуется путем перехода I рода, равно 4,08.

При больших значениях γ немонотонная зависимость химического потенциала сохраняется и с наложением поля (рис. 2.2.3, кривая 1 - $\xi = 0$, 2 - $\xi = 0,1$).

Отмеченный эффект существования двух критических напряженностей, как показывает рис. 2.2.1, имеет место в довольно узкой области значений параметра $\gamma \in [4,08 + 4,77]$ и возможно трудно доступен для экспериментальной проверки, однако, указанный эффект термодинамической стабилизации полем неупорядоченной фазы позволяет качественно понять особенности зависимости бинодалей (концентрации сосуществующих фаз) и спинодалей (границы области термодинамической устойчивости), а также теплоты фазового перехода от напряженности поля, которые приведены ниже.

Параметр магнитодипольного взаимодействия $\gamma = n\lambda_0/2nV_0$ выражается в виде $\frac{m^2}{kT(2r)^3} \frac{\lambda}{4\pi/3}$ и совпадает с параметром магнитодипольного взаимодействия, определенного по расстоянию наибольшего сближения центров коллоидальных частиц $2r$ при $\lambda = 4\pi/3$. При больших значениях λ критические значения $m^2/kT(2r)^3$ уменьшаются. Объемная доля коллоидальных частиц в критической точке (2.2.8) в зависимости от напряженности поля приводится на рис. 2.2.4.

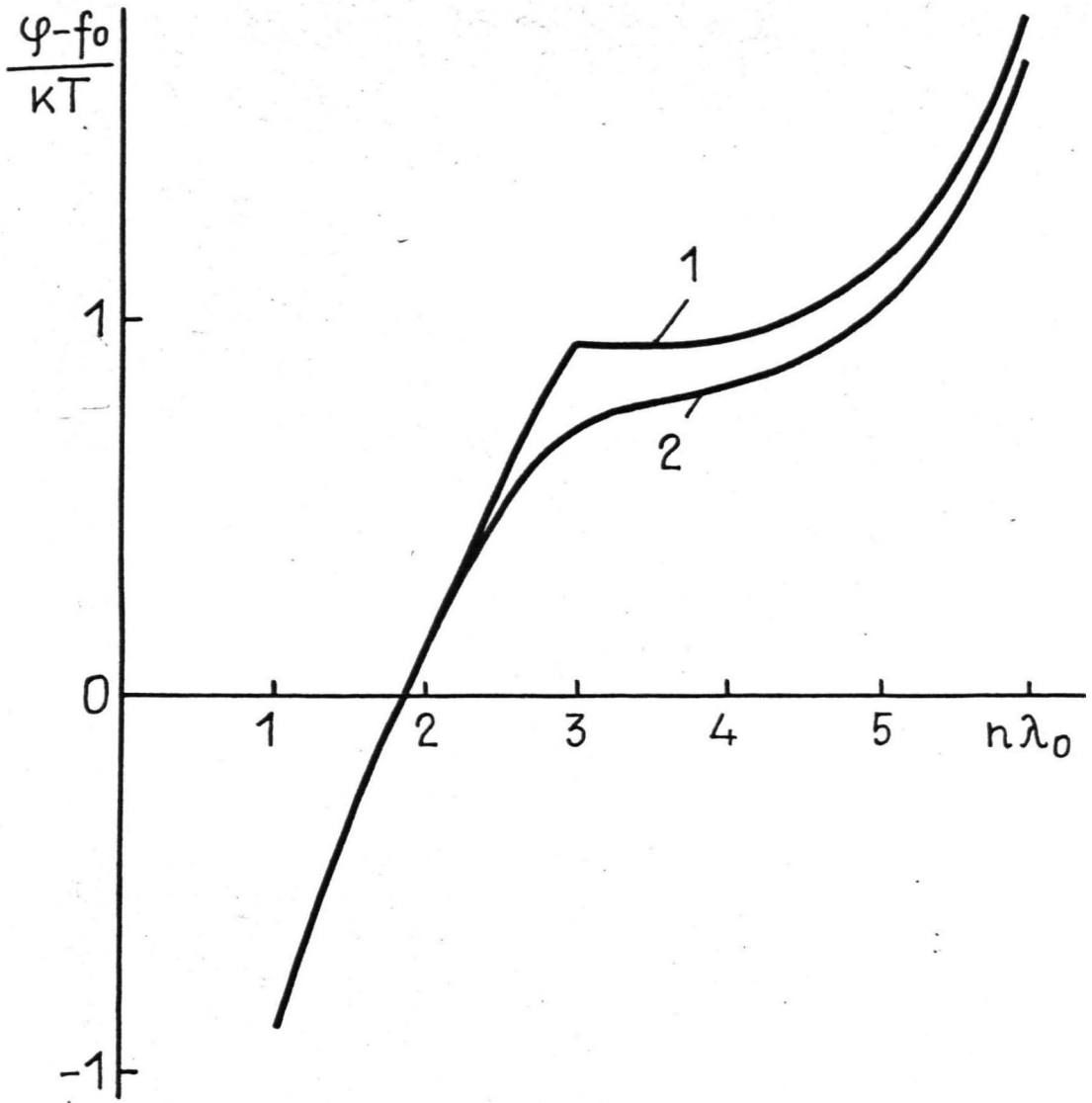


Рис. 2.2.2. Зависимость химического потенциала феррочастиц от концентрации при $\gamma = 4,25$.
1 - $\xi = 0$; 2 - $\xi = 0,1$.

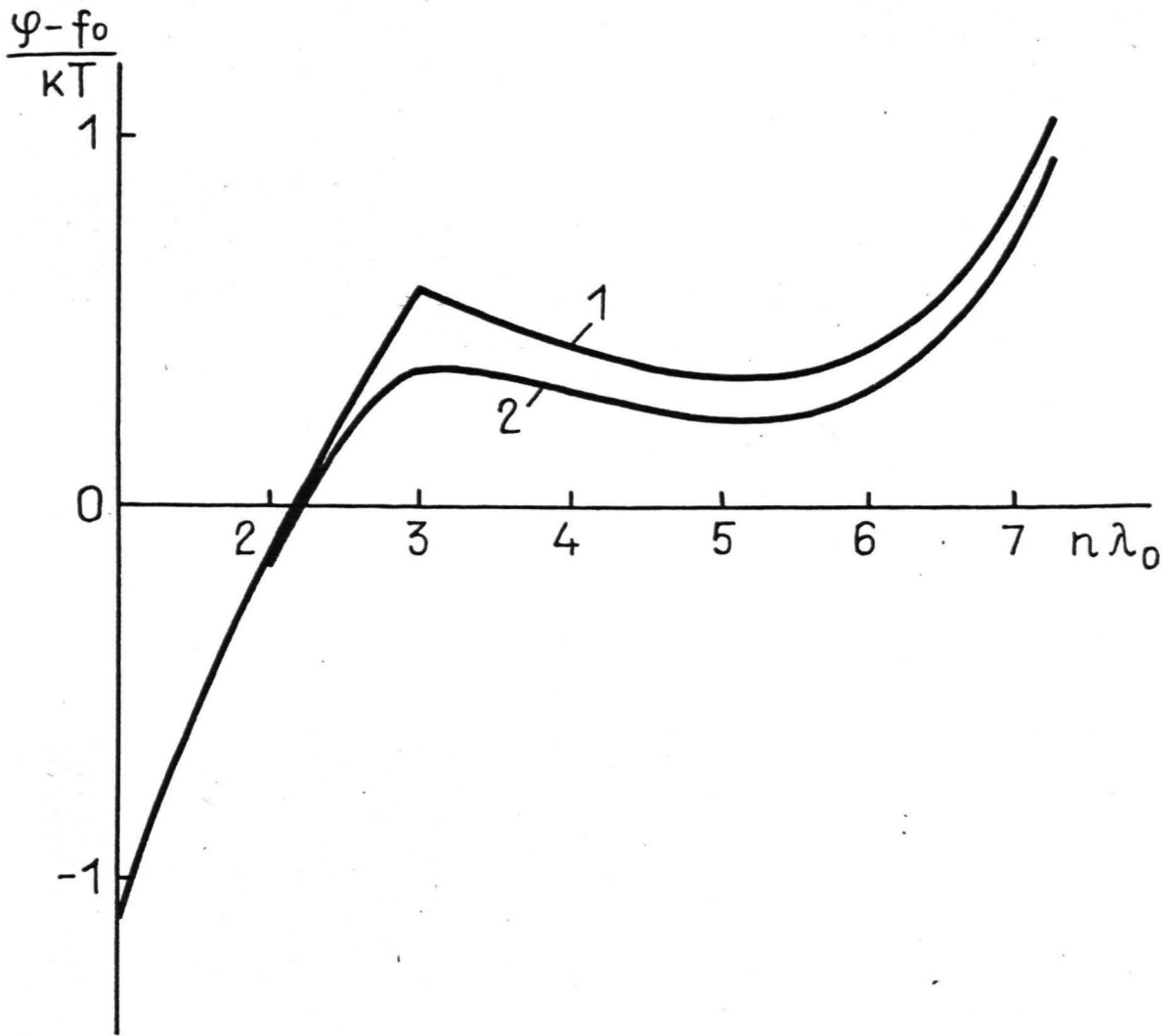


Рис. 2.2.3. Зависимость химического потенциала феррочастиц от концентрации при $\mu = 5$.
1 - $\xi = 0$; 2 - $\xi = 0,1$.

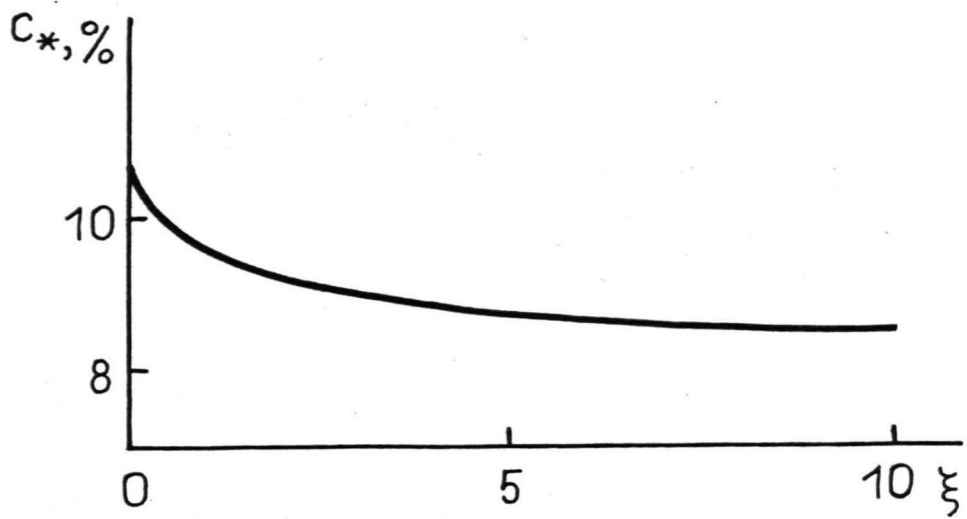


Рис. 2.2.4. Зависимость объемной доли коллоидальных частиц в критической точке расслоения коллоида от параметра Ланжевена.

При больших напряженностях поля критические значения параметра магнитодипольного взаимодействия могут быть рассчитаны аналитически по формуле

$$\gamma_c = \frac{27}{8} \left(1 + \frac{2}{\xi} \right).$$

В надкритических условиях значения параметров состояния коллоида ферромагнетика, при которых он становится термодинамически неустойчивым, определяются из уравнения

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{T, \vec{H}} = 0. \quad (2.2.9)$$

Рассчитанные по уравнению (2.2.9) зависимости критических значений объемной доли коллоида от напряженности магнитного поля при некоторых значениях параметра магнитодипольного взаимодействия показаны на рис. 2.2.5 (кривая 1 - $\gamma = 4,7$, 2 - $\gamma = 5$, 3 - $\gamma = 6$). В области, заключенной между правой и левой ветвями показанных кривых, коллоид неустойчив относительно расслоения.

Спинодали "I" иллюстрируют отмеченный выше факт существования в некоторой области значений параметра магнитодипольного взаимодействия верхней и нижней критической напряженности поля. При этом при данном значении γ коллоид термодинамически устойчив в области напряженностей поля $\xi \in [0,35 \div 1,45]$ при всех объемных концентрациях.

Рис. 2.2.5 также показывает, что при достаточно больших γ коллоид может быть неустойчив относительно пространственного расслоения и при отсутствии поля. Например, при $\gamma = 6$ коллоид с объемной концентрацией в пределах 6% - 15% расслаивается с образованием спонтанно намагниченных конгломератов. Можно отметить, что на существование подобных конгломератов в МЖ указывается в работе [38].

Из представленных на рис. 2.2.5 данных следует важный для физики и гидродинамики МЖ вывод о том, что устойчивый относитель-

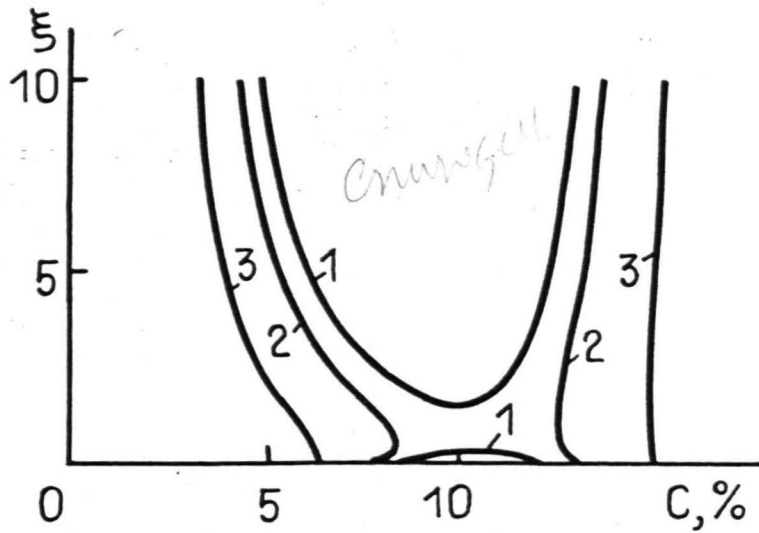


Рис. 2.2.5. Область термодинамической неустойчивости коллоида ферромагнетика в зависимости от напряженности магнитного поля.

1 - $\gamma = 4,7$; 2 - $\gamma = 5$; 3 - $\gamma = 6$.

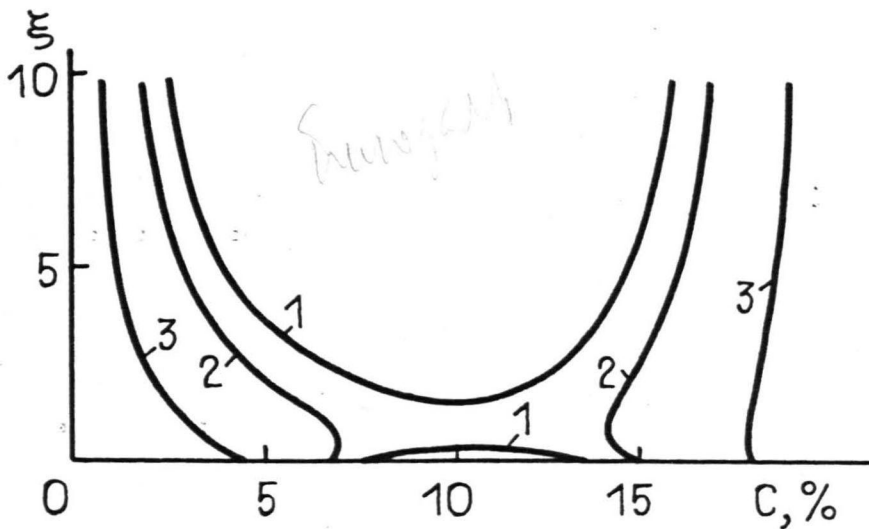


Рис. 2.2.6. Зависимость равновесных объемных концентраций коллоидальных частиц в фазах коллоида ферромагнетика от напряженности магнитного поля.

1 - $\gamma = 4,7$; 2 - $\gamma = 5$; 3 - $\gamma = 6$.

но пространственного расслоения коллоид может терять устойчивость при наложении поля, так как критическая концентрация потери термодинамической устойчивости с увеличением напряженности поля, как видно из рис. 2.2.5, понижается.

Спинодали ограничивают область термодинамических параметров системы, в которой последняя неустойчива. Для показанной на рис. 2.2.3 концентрационной зависимости химического потенциала эта область соответствует области, в которой химический потенциал феррочастиц с возрастанием концентрации убывает. В этой области существование коллоида в однофазном состоянии невозможно и коллоид разделяется на фазы, соответствующие термодинамически устойчивым ветвям концентрационной зависимости химического потенциала. Концентрации находящихся в равновесии фаз, аналогично тому как это делается в теории газа Ван-дер Ваальса, могут быть найдены согласно правилу Максвелла, заключающемуся в равенстве площадей фигур, ограниченных кривыми $\varphi = \varphi(n)$ и $\varphi = \varphi_* = \text{const}$ и прямыми $n = n_1$ и $n = n_2$, где $\varphi(n_1) = \varphi_*$ и $\varphi(n_2) = \varphi_*$.

Правило Максвелла дает

$$\int_{n_1}^{n_2} \varphi dn = \varphi_*(n_2 - n_1),$$

откуда, интегрируя выражение в левой части по частям, получается $p(n_1) = p(n_2)$, т.е. равенство осмотических давлений в фазах коллоида. Таким образом, условия равновесия сосуществующих фаз коллоида заключаются в равенстве химических потенциалов феррочастиц и осмотических давлений фаз. Отметим, что из связи химического потенциала растворителя с осмотическим давлением $p_0 \varphi_p = \varphi_0(p, T) - V_p p_0$, где φ_0 - химический потенциал чистого растворителя, а V_p его удельный объем, следует, что последнее условие эквивалентно равенству химических потенциалов феррочастиц и растворителя в фазах коллоида ферромагнетика, как этого и требует условие равновесия фаз для случая двухкомпонентной среды.

Рассчитанные на их основе зависимости объемных концентраций C , находящихся в равновесии фаз коллоида (бинодали), от напряженности поля при тех же значениях параметра магнитодипольного взаимодействия, что и на рис. 2.2.5, приводятся на рис. 2.2.6.

Нахождение бинодалей, требующее решения системы нелинейных алгебраических уравнений $f_1(n_1, n_2) = \varphi(n_1) - \varphi(n_2) = 0$ и $f_2(n_1, n_2) = p(n_1) - p(n_2) = 0$, осуществлялось согласно следующему алгоритму. В плоскости переменных n_1 и n_2 выделяется прямоугольник $[n_{10}, n_{1*}] \times [n_{2*}, n_{20}]$, содержащий искомые корни, где $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{n=n_{1*}, n_{2*}} = 0$ и $\varphi(n_{1*}) = \varphi(n_{20})$, $\varphi(n_{10}) = \varphi(n_{2*})$. Функция f_1 в вершинах прямоугольника с координатами (n_{10}, n_{2*}) и (n_{1*}, n_{20}) по определению равна нулю. Дифференцируя уравнения $f_1(n_1, n_2) = 0$ и $f_2(n_1, n_2) = 0$ по n_1 и пользуясь термодинамическим соотношением $\partial p / \partial n = n \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, получается равенство

$$\left(\frac{dn_2}{dn_1} \right)_{f_2=0} = \frac{n_1}{n_2} \left(\frac{dn_2}{dn_1} \right)_{f_1=0}$$

откуда неравенство $n_1 < n_2$ дает $\left(\frac{dn_2}{dn_1} \right)_{f_2=0} < \left(\frac{dn_2}{dn_1} \right)_{f_1=0}$. Последнее неравенство геометрически означает, что наклон кривой $f_2 = 0$ в координатах n_1, n_2 меньше наклона кривой $f_1 = 0$. Отсюда следует, что кривая $f_2 = 0$ пересекает сторону прямоугольника $n_1 = n_{1*}$ ниже, а сторону прямоугольника $n_1 = n_{10}$ выше кривой $f_1 = 0$.

Это позволяет реализовать алгоритм нахождения бинодали в виде следующих последовательных шагов: 1) в нахождении методом дихотомии координат $n_2(n_{2*}^1, n_{20}^1)$ точек пересечения сторон прямоугольника $n_1 = n_{1*}, n_1 = n_{10}$ кривой $f_2 = 0$; 2) сужении области локализации корней до $[n_{10}, n_{1*}] \times [n_{2*}^1, n_{20}^1]$; 3) нахождении координат точек пересечения сторон нового прямоугольника $n_2 =$

$= n_{2*}^1; n_2 = n_{20}^1$ и кривой $f_1 = 0$; 4) сужение области локализации корней до $[n_{10}^1, n_{1*}^1] \times [n_{2*}^1, n_{20}^1]$ и т.д. Расчет прекращается, когда длина сторон прямоугольника становится меньше наперед заданной величины, в данном конкретном случае равной 10^{-2} . Алгоритм был реализован в виде BASIC программы для компьютера TRS -80.

Приведенные на рис. 2.2.6 бинодали позволяют делать заключения об устойчивости коллоидов ферромагнетиков с наложением поля. В настоящее время следующий из результатов расчета бинодалей и спинодалей, приведенных на рис. 2.2.5 и 2.2.6, вывод о возможности расслоения коллоида ферромагнетика с наложением поля, полученный нами в работах [89], [94], подтвержден на эксперименте. Так, в работе [28] наблюдается расслоение коллоида на концентрированную и разбавленную частицами фазы с наложением поля напряженностью порядка 1 кГ. При этом использовался коллоид магнетита в воде со средним размером частиц порядка $2r = 100 \text{ \AA}$, стабилизированный электростатическим образом без применения ПАВ. Для параметра магнитодипольного взаимодействия частиц данного коллоида $m^2/(2r)^3 \text{ кТ}$ получается значение 1,7, а параметр Ланжевена в поле 1 кГ равен примерно 6,5. Объемная концентрация использованного коллоида в работе [28] не указана, однако, судя по приведенному там значению среднего расстояния между частицами 200 \AA , она может составлять примерно 1,5%, что соответствует весьма умеренным значениям намагниченности насыщения порядка 8 гаусс. Рис. 2.2.6 показывает, что коллоид подобной концентрации в поле $\xi = 6,5$ может становиться термодинамически неустойчивым относительно роста крупных зародышей концентрированной фазы при параметрах магнитодипольного взаимодействия порядка 5-6. Это показывает, что рассматриваемая модель позволяет интерпретировать результаты работы [28] потерей термодинамической устойчи-

ности коллоида в поле, если предположить, что частицы объединены в агрегаты, содержащие в среднем 3-4 частицы, что представляется вполне правдоподобным.

Рассчитанные бинадали позволяют получить и ряд других физически интересных характеристик фазового расслоения коллоида. В качестве подобной укажем на теплоту фазового перехода, которая оказывается зависящей от напряженности внешнего магнитного поля. Теплота фазового перехода Q в расчете на одну частицу выражается по формуле $q = T(\tilde{S}_1 - \tilde{S}_2)$, где \tilde{S}_1 и \tilde{S}_2 удельные энтропии фаз, равные $-\frac{1}{N} \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_{V, N, \vec{H}}$, что с учетом соотношения (2.2.3) позволяет получить (индекс "1" - разбавленная фаза, "2" - концентрированная)

$$q = kT \left[\ln \frac{\text{sh } \xi_{\text{э}}}{\xi_{\text{э}}} - \xi_{\text{э}} L(\xi_{\text{э}}) - \ln \frac{n v_0}{1 - n v_0} \right]_2^1 \cdot \quad (2.2.10)$$

Рассчитанная согласно формуле (2.2.10) зависимость теплоты фазового перехода от напряженности магнитного поля при указанных на рис. 2.2.5 и 2.2.6 значениях параметра магнитодипольного взаимодействия приводится на рис. 2.2.7. Немонотонные зависимости теплоты фазового перехода от напряженности поля, представленные на рис. 2.2.7 кривыми 1 и 2, связаны с вышеуказанным эффектом стабилизации полем разбавленной фазы коллоида при достаточно малых значениях параметра γ . Кривая 1 показывает, что при верхней и нижней критических напряженностях поля, как и следует ожидать, теплота фазового перехода 1 рода обращается в нуль.

Экспериментальное определение теплоты фазового перехода Q в коллоидах и ее зависимость от напряженности поля является трудной задачей, требующей привлечения весьма сложных экспериментальных методик.

В данном плане представляет интерес возможность определения теплоты фазового перехода в коллоиде ферромагнетика на осно-

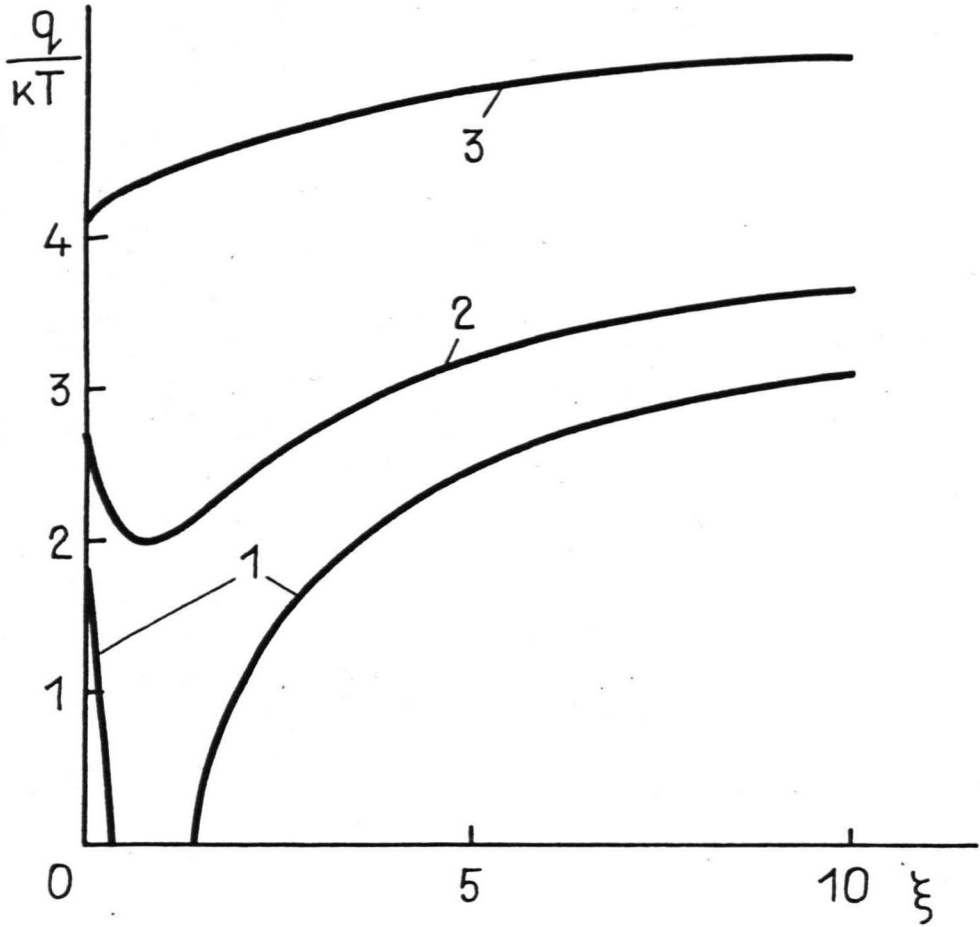


Рис. 2.2.7. Зависимость теплоты фазового перехода от напряженности магнитного поля.

I - $\mu = 4,7$; 2 - $\mu = 5$; 3 - $\mu = 6$.

ве косвенных данных. Подобная попытка была предпринята в работе [33], в которой предлагается использовать для определения Q температурную зависимость напряженности поля, при которой в коллоиде ферромагнетика появляется анизотропия рассеяния света. Интерпретируя последнюю как напряженность поля, при которой коллоидальный раствор становится насыщенным относительно растворения крупных агрегатов, в указанной работе для определения Q предлагается использовать соотношение

$$\frac{dH}{dT} = - \frac{Q}{T(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)}, \quad (2.2.II)$$

где \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 удельные намагниченности коллоидального раствора и крупных агрегатов соответственно ($\tilde{m} = \vec{M}/n$). С точки зрения развиваемой в настоящем разделе термодинамической модели существование подобного соотношения не очевидно.

Согласно рассматриваемой модели напряженность поля, при которой у коллоида появляется анизотропия рассеяния света, следует интерпретировать как напряженность поля, при которой разбавленная фаза коллоидального раствора становится насыщенной относительно роста зародышей концентрированной фазы. В таком случае условия равновесия фаз

$$\varphi_1(n_1, T, \vec{H}) = \varphi_2(n_2, T, \vec{H}); \quad (2.2.I2)$$

$$p_1(n_1, T, \vec{H}) = p_2(n_2, T, \vec{H}), \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T}\right)_{n, \vec{H}} = - \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T, \vec{H}};$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{n, \vec{H}} = S - n \left(\frac{\partial S}{\partial n}\right)_{T, \vec{H}}; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{H}}\right)_{n, T} = - \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial n}\right)_{T, \vec{H}}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \vec{H}}\right)_{T, n} = \vec{M} - n \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial n}\right)_{T, \vec{H}}$$

в результате дифференцирования (2.2.I2) по напряженности поля при постоянной концентрации разбавленной фазы $n_1 = \text{const}$ позволяют получить соотношение типа Клаузиуса-Клапейрона для температурной зависимости напряженности поля насыщения разбавленной фазы в следующем виде

$$\frac{dH}{dT} = - \frac{(q - \frac{n_1}{n_2}(n_1 - n_2)) T \frac{\partial \tilde{S}_1}{\partial n_1}}{T(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2 - \frac{n_1}{n_2}(n_1 - n_2) \frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial n_1})} \quad (2.2.I3)$$

Для случая, когда разбавленную фазу можно считать идеальной $\partial \tilde{m}_1 / \partial n_1 \approx 0$, а концентрация $n_2 \gg n_1$, соотношение (2.2.I3) может быть преобразовано к виду, близкому к (2.2.II)

$$dH/dT = - (q - kT) / T(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2) \cdot$$

Соотношения (2.2.II) и (2.2.I3) сопоставляются на рис. 2.2.8, где прерывистыми линиями показаны $d\xi_0/d(T/T_0)$ ($\xi_0 = \frac{mH}{kT_0}$), рассчитанные по формуле (2.2.II) с учетом полученных выше бинодалей (рис. 2.2.6) и теплот фазового перехода q (рис. 2.2.7), а сплошной линией $d\xi_0/d(T/T_0)$, рассчитанные согласно точной формуле (2.2.I3). Видно, что соотношение (2.2.II) в области монотонного увеличения q с ростом напряженности поля может быть использовано для оценки теплоты фазового перехода. Ошибка для указанных значений γ не превышает 10% - 15%. Существенно отметить при этом, что теплота фазового перехода зависит от напряженности поля.

Представленные на рис. 2.2.8 результаты представляют интерес также при интерпретации экспериментальных данных по температурной зависимости реологических характеристик МЖ в поле, полученные в работе [105]. Если интерпретировать наблюдаемое в данной работе наличие предела текучести коллоида в магнитном поле как обусловленного включениями концентрированной фазы, то предел текучести коллоида в тонком зазоре исчезает, если температура выше температуры, при которой разбавленная фаза насыщена. При этом, как показывают данные, приведенные на рис. 2.2.8, температура насыщения разбавленной фазы с увеличением напряженности поля повышается. Это находится в согласии с экспериментальными результатами рабо-

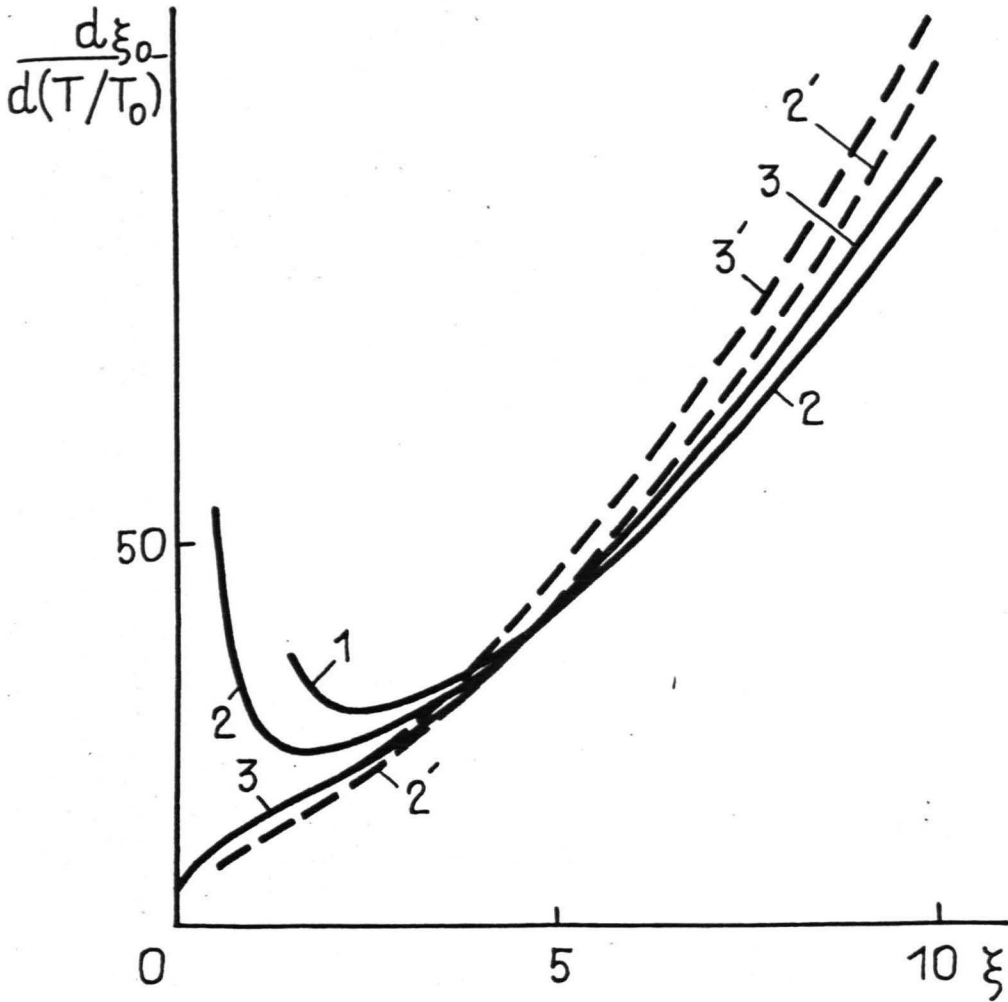


Рис. 2.2.8. Зависимость температуры насыщения разбавленной фазы коллоида ферромагнетика от напряженности магнитного поля. Непрерывные кривые - точные зависимости (2.2.I3), прерывистые - приближенные зависимости (2.2.II).

I - $\gamma = 4,7$; 2, 2' - $\gamma = 5$; 3, 3' - $\gamma = 6$.

ты [105] , в которой показано, что температура, при которой исчезает предел текучести коллоида, с увеличением напряженности поля повышается. Количественно данное повышение соответствует данным, представленным на рис. 2.2.8, а именно, при увеличении напряженности поля на 5 Гс, чему соответствует для большинства МЖ $\Delta \xi_0$ порядка 0,025 - 0,05, температура исчезновения предела текучести повышается на 3 К, что соответствует $\Delta T / T_0 \cong 10^{-3}$. Соотношение (2.2.13) в начальной области напряженностей поля для $\Delta T / T_0$ при $\Delta \xi_0 = 0,05$ и $\gamma = 6$, дает 2,75 К, т.е. величину того же порядка, что и в эксперименте.

Рассматриваемая термодинамическая модель коллоида ферромагнетика позволяет описать также наблюдаемые на эксперименте особенности магнитных свойств коллоидов ферромагнетиков.

Во-первых, данная модель показывает, что для начальной магнитной восприимчивости χ выполняется закон Кюри-Вейсса $\chi = a / (T - T_K)$, где $a = nm^2 / 3k$, $T_K = \lambda nm^2 / 3k$. В настоящее время справедливость этого закона для коллоидов ферромагнетиков установлена в ряде экспериментальных работ [96] , [104] . Тут можно добавить, что в работе [96] указывается на наличие изломов в температурной зависимости магнитной восприимчивости коллоида ферромагнетика, что согласно данной модели может быть связано с образованием при понижении температуры включений концентрированной фазы.

Во-вторых, в работах [35] , [36] сообщается о наблюдении излома на кривой намагничивания коллоида ферромагнетика, причем это явление обладает гистерезисом, зависящим от времени нахождения коллоида в сильном намагничивающем поле. Согласно развиваемым соображениям это явление может быть интерпретировано на основе представления о потере термодинамической устойчивости коллоида при увеличении напряженности магнитного поля.

В качестве иллюстрации этого на рис. 2.2.9 приводится кривая намагничивания коллоида ферромагнетика с объемной концентрацией 4,5 % при значении параметра магнитодипольного взаимодействия, равном 6. Для указанных значений параметров коллоид теряет термодинамическую устойчивость в магнитном поле с напряженностью, соответствующей ξ равном 3 (спинодаль). При этом построение кривой намагничивания, показанной на рис. 2.2.9, произведено в предположении, что вследствие малой скорости роста зародышей концентрированной фазы последние не успевают образовываться при прохождении напряженностью поля в процессе снятия кривой намагничивания значения, соответствующего бинодали. Объемные доли концентрированной и слабоконцентрированной фаз после потери устойчивости однородного состояния относительно малых возмущений находятся согласно правилу рычага. Последнее для долей объема коллоида, занятых соответственно слабо- и сильноконцентрированными фазами, соответственно дает $(n-n_1)/(n_2-n_1)$ и $(n_2-n)/(n_2-n_1)$, где n_1 и n_2 - концентрации частиц в сосуществующих фазах коллоида, определяемые бинодалями (рис. 2.2.6). Намагниченность в области двухфазного состояния коллоида определяется согласно соотношению

$$\frac{M}{M_H} = \frac{n_1 (n_2 - n)}{n (n_2 - n_1)} L(\xi_1) + \frac{n_2 (n - n_1)}{n (n_2 - n_1)} L(\xi_2), \quad (2.2.14)$$

где параметры Ланжевена эффективного поля в фазах определяются на основе соотношения (2.2.2). Возможное изменение намагниченности в прямом и обратном ходе намагничивания на рис. 2.2.9 показано стрелками.

На рис. 2.2.10 построена кривая намагничивания коллоида при $\gamma = 5$ и $C = 4,1$ %, которая соответствует точке на бинодали при напряженности поля $\xi = 3$. При этом показанная на рис. 2.2.10

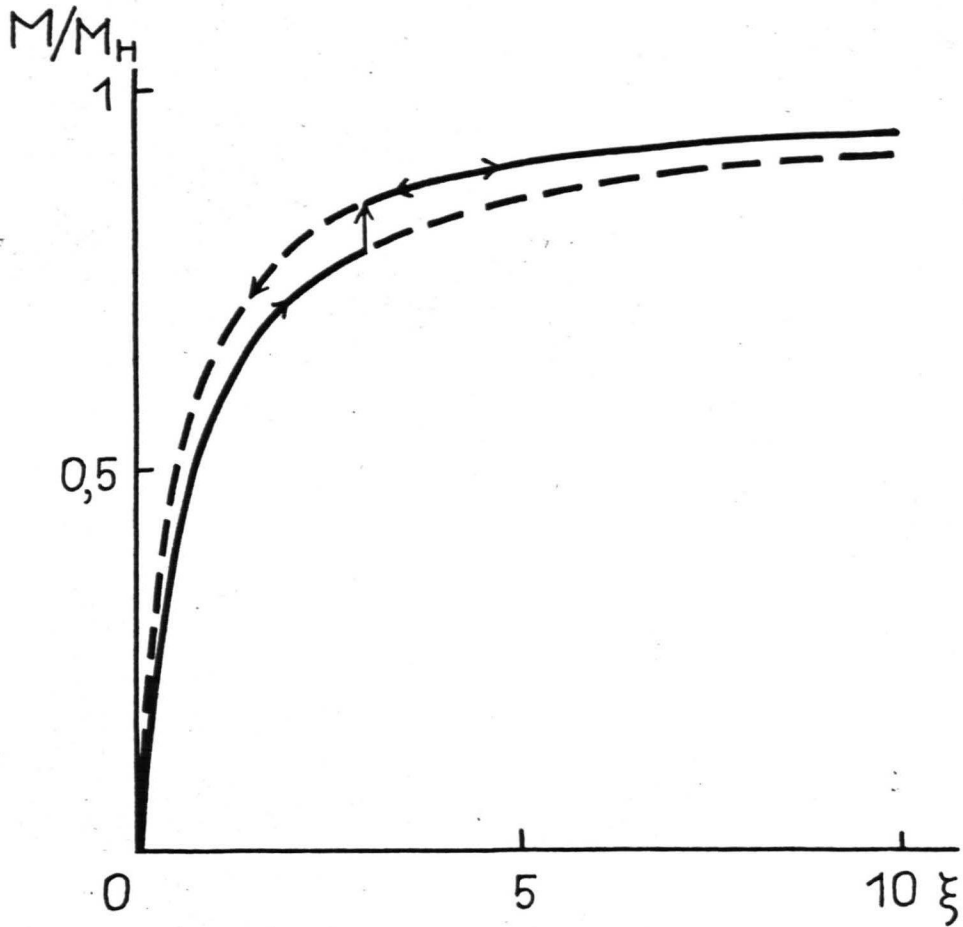


Рис. 2.2.9. Кривая намагничивания коллоида ферромагнетика при потере термодинамической устойчивости относительно расслоения. Нижняя прерывистая кривая – кривая намагничивания однофазного коллоида. Верхняя прерывистая кривая – намагниченность коллоида в двухфазном состоянии при уменьшении напряженности поля.

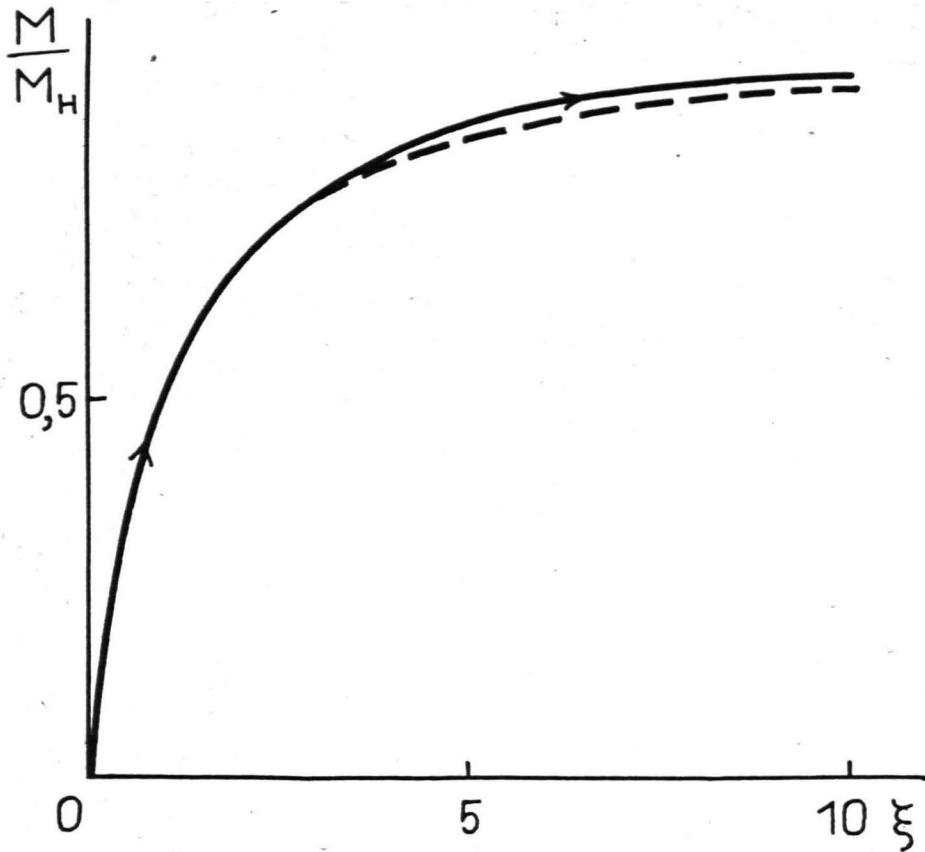


Рис. 2.2.10. Кривая намагничивания при расслоении коллоида ферромагнетика. Переохлаждения разбавленной фазы нет. Прерывистая кривая - кривая намагничивания однофазного коллоида.

кривая намагничивания построена в предположении, что явление, подобный переохлаждению, не происходит и концентрированная фаза начинает появляться при достижении полем значения, соответствующего бинодали. Рис. 2.2.10 показывает, что вследствие образования концентрированной фазы на кривой намагничивания образуется излом. На практике возможна реализация поведения промежуточного между ситуациями, показанными на рис. 2.2.9 и 2.2.10. Сопоставление хода кривых намагничивания, приведенных на рис. 2.2.9 и 2.2.10, с экспериментом [35], [36] показывает, что наблюдаемые для ряда коллоидов особенности могут быть интерпретированы на основе представления о фазовом расслоении во внешнем поле.

В работе [36] предлагается использовать наблюдаемый излом на кривой намагничивания для определения разности удельных намагниченностей, что с учетом соотношения (2.2.II) совместно с использованием экспериментальных данных для температурной зависимости пороговой напряженности поля появления анизотропии рассеяния света позволяет определить теплоту фазового перехода Q .

На основе соотношения (2.2.I4) получим формулу для статической дифференциальной магнитной восприимчивости в точке перехода коллоида в двухфазное состояние. Дифференцирование соотношения (2.2.I4) по напряженности поля в точке $n = n_1$ дает

$$\chi_{gv} = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{n_2(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)}{n_2 - n_1} \frac{\partial n_1}{\partial H} + \chi_{og},$$

что для разности магнитных восприимчивостей одно- и двухфазных состояний в точке насыщения дает

$$\chi_{gv} - \chi_{og} = \frac{n_2(\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)}{n_2 - n_1} \frac{\partial n_1}{\partial H}.$$

Изменение концентрации насыщенной разбавленной фазы с полем находится на основе уравнений типа Клаузиуса-Клайперона, полученных нами в работе [89]:

$$\frac{\partial n_1}{\partial H} = \left(\frac{\partial M_1}{\partial n_1} + \frac{M_1 - M_2}{n_2 - n_1} \right) / \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1}. \quad (2.2.15)$$

В случае, когда разбавленную фазу можно считать идеальной, а $n_2 \gg n_1$, соотношение (2.2.15) дает $\frac{\partial n_1}{\partial H} \approx \frac{n_1}{kT} (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)$.

В результате для разности дифференциальных восприимчивостей получается формула

$$\chi_{gv} - \chi_{og} = n_1 (\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2)^2 / kT, \quad (2.2.16)$$

приводимая в работе [36]. Таким образом видно, что соотношение (2.2.16), используемое в работе [36] для определения разности удельных намагниченностей фаз справедлива вдали от критической точки расслоения коллоидов, когда разбавленную фазу можно считать идеальной.

Данная модель коллоида ферромагнетика показывает, что причиной потери устойчивости коллоида в поле является повышение энергии межчастичного взаимодействия с увеличением напряженности магнитного поля. Она позволяет рассчитывать кривые сосуществования фаз, условия потери их устойчивости, магнитные характеристики, теплоту фазового перехода и др. Актуальной задачей экспериментального исследования данных явлений является установление фазовых диаграмм коллоида ферромагнетика во внешнем поле, так как в настоящее время имеющиеся данные весьма разрознены и неполны.

Рассмотренные в рамках приближения среднего действующего поля фазовые диаграммы коллоида ферромагнетика показывают возможность его расслоения и при отсутствии поля с образованием спонтанно намагниченных конгломератов. Такие образования экспериментально наблюдались в работах [33], [38]. Однако там же указывается на существование конгломератов и другого типа - каплеобразных,

которые намагничиваются во внешнем поле.

Это показывает, что не следует исключать из рассмотрения и возможность магнитного упорядочения коллоидов ферромагнетиков вида, отличного от ферромагнитного. Так, например, из энергетических соображений [107] следует ожидать ориентационное упорядочение анизотропных частиц ферромагнетика с образованием состояния с отсутствующей спонтанной намагниченностью.

Термодинамическая устойчивость суспензии анизотропных частиц ферромагнетика относительно их ориентационного упорядочения при отсутствии поля рассмотрена нами в работе [95] . При этом рассмотрение проводится на основе анализа свободной энергии подобной системы, вычисленной методом коллективных переменных, который применяется при исследовании термодинамических свойств различных систем с дальнедействующими силами [108] . В работах [109] , [110] этот метод используется при исследовании ориентационного упорядочения в системе заряженных стержней.

Расчет свободной энергии системы иглообразных магнитов длиной ℓ с магнитным моментом $m\ell$ приводится в приложении I. Рассмотрение термодинамической устойчивости изотропного состояния относительно ориентационного упорядочения частиц в некотором направлении дает необходимое условие устойчивости в следующем виде

$$\frac{\lambda}{\gamma} - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz F^2(z)/z^2}{(1 + \lambda(1 - \sin z/z)/z^2)^2} = \frac{\lambda}{\gamma} - f(\lambda) > 0$$

где $F(z) = (3 \sin z - 3z \cos z - z^2 \sin z)/z^3$, $\lambda = 8\pi n(m\ell)^2/kT$

- параметр магнитодипольного взаимодействия, определенный по среднему расстоянию между частицами, а $\gamma = 2(m\ell)^2/\ell^3 kT$ - параметр магнитодипольного взаимодействия, определенный по длине иглообразного магнита. Функция $f(\lambda)$ в зависимости от параметра λ изображена на рис. 2.2. II, откуда видно, что при значениях γ

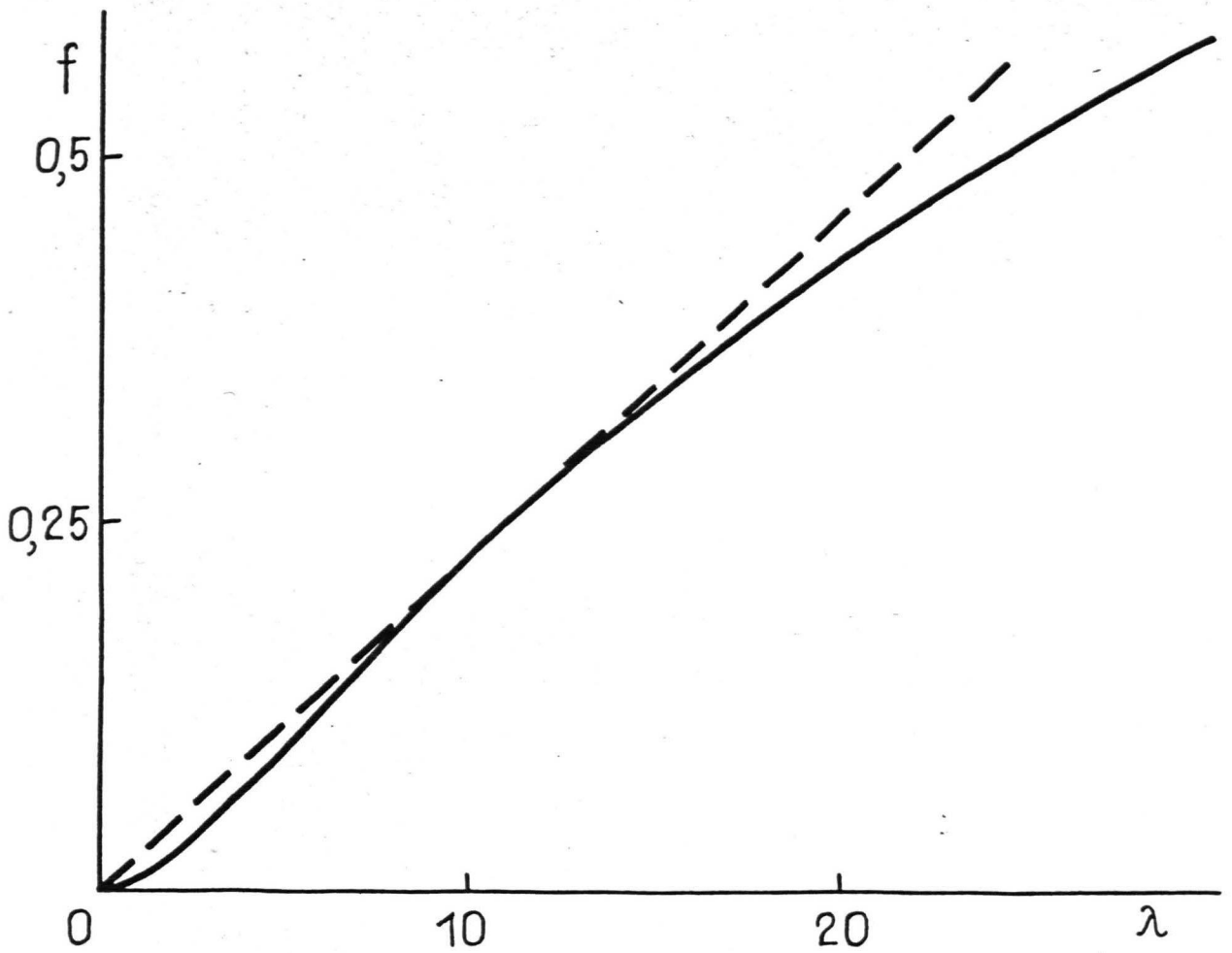


Рис. 2.2.II. Критическое значение параметра магнитодипольного взаимодействия, при котором наступает ориентационное упорядочение коллоида анизотропных феррочастиц. Непрерывная линия — зависимость $f(\lambda)$.

больших $\chi_{кр}$ равном 43,6 коллоид термодинамически неустойчив относительно упорядочения частиц в ориентационном пространстве с образованием состояния с равной нулю спонтанной намагниченностью.

Полученное значение $\chi_{кр}$ позволяет провести ряд оценок. Так, в случае частиц магнетита длиной $l = 5 \cdot 10^3$ А и радиусом r поперечного сечения 200 \AA данное значение $\chi_{кр}$ для критической температуры ориентационного упорядочения дает значение 262 K , т.е. температуру, близкую к комнатной. Объемная доля магнитной фазы в точке потери устойчивости при этом весьма мала и имеет порядок $10^{-2} \%$. При уменьшении анизотропии частиц критическая объемная концентрация увеличивается согласно закону $(l/r)^{-2}$.

Объемная доля сфер перекрытия коллоидных частиц $\pi n l^3 / 6$ в критической точке в рассмотренном случае при этом гораздо выше и имеет порядок 1% , что иллюстрирует коллективный характер явления.

Таким образом рассмотренная ситуация показывает возможность существования в коллоидах ферромагнетиков магнитного упорядочения и других видов, отличных от ферромагнитного. Отметим, что, ввиду возможности образования в МЖ цепочечных агрегатов [84] - [87], не исключена возможность образования концентрированной фазы, в которой цепочечные агрегаты ориентационно упорядочены.

2.3. Распад однородного состояния коллоида ферромагнетика в плоском слое и поверхностное натяжение границ раздела фаз коллоида

Наиболее отчетливо влияние магнитных взаимодействий на термодинамическую устойчивость проявляется при помещении плоской пелли с МЖ в поперечное ей магнитное поле. Эта ситуация в настоящее время и наиболее полно исследована экспериментально [27],

[30] , [32] , [34] . При этом установлено, что при напряженностях поля выше пороговой происходит распад однородного состояния коллоида с образованием периодической структуры областей с высокой концентрацией частиц.

Далее на основе нашей модели, развитой в разделе 2.2, описывается это явление и дается теоретическая интерпретация имеющихся экспериментальных результатов.

В работе [27] экспериментально была определена зависимость пороговой напряженности магнитного поля расслоения коллоида в плоской щели (толщина щели порядка 20 м м) от температуры. Полученные результаты показывают резкое возрастание пороговой напряженности поля с температурой. Это находится в качественном согласии с данными, представленными на рис. 2.2.5, — уменьшение параметра магнитодипольного взаимодействия, связанное с повышением температуры, приводит к повышению критической напряженности поля, при которой коллоид данной концентрации становится неустойчивым.

Количественно зависимость, наблюдаемая на эксперименте [27], может быть описана на основе следующего из данных эксперимента предположения, что термодинамическая неустойчивость данного коллоида имеет место в области больших напряженностей поля $\xi \gg 1$

Выражение для $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{T, \vec{H}}$ при $\xi \rightarrow \infty$ упрощается и согласно (2.2.4) принимает следующий вид

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_{T, \vec{H}} = \frac{kT}{n} \left(\frac{1}{(1 - n v_0)^2} - n \lambda_0 \left(1 - \frac{2}{\xi}\right) \right).$$

Отсюда для значения параметра магнитодипольного взаимодействия, при котором коллоид данной концентрации становится неустойчивым относительно расслоения, получается

$$2\gamma = \frac{1 + 2/\xi}{n v_0 (1 - n v_0)^2} \quad (2.3.1)$$

Так как $2\gamma_{\infty} = 1/nv_0(1-nv_0)^2$ минимально необходимое значение параметра 2γ расслоения коллоида в предельно сильном магнитном поле и $\gamma \sim 1/T$, то соотношение (2.3.1) позволяет получить температурную зависимость критической напряженности магнитного поля спиnodального распада коллоида в виде $(\gamma - \gamma_{\infty})/\gamma_{\infty} = 2/\xi$, что дает зависимость (t - температура в шкале Цельсия)

$$\frac{1}{H} = \frac{m}{2kT_{\infty}^2} (t_{\infty} - t). \quad (2.3.2)$$

Если перестроить температурную зависимость критического поля расслоения коллоида, приведенную в работе [27], в координатах $1/H$ и t , то из рис. 2.3.1 видно, что экспериментальные значения (крестики) соответствуют зависимости (2.3.2). Экстраполяция для температуры t_{∞} , выше которой использованный в работе [27] коллоид устойчив в магнитном поле произвольной напряженности, дает $t_{\infty} = 32,5$ °C. По наклону линейной зависимости на рис. 2.3.1 может быть определен магнитный момент m частиц коллоида, который оказывается равным $5,8 \cdot 10^{-15}$ Гс·см³, что соответствует вполне разумному значению радиуса частицы магнетита порядка 140 А. Это подтверждает возможность интерпретации наблюдаемого на эксперименте распада плоского слоя нарушением термодинамической устойчивости коллоида в магнитном поле.

Это подтверждается и полученными в работе [32] температурными зависимостями напряженностей магнитного поля, при которых в плоском слое наблюдается образование одиночных областей с высокой концентрацией частиц и происходит образование гексагональной структуры. Эти зависимости показывают, что критическая напряженность поля в первом случае примерно в два раза ниже. Интерпретируя указанные напряженности поля как напряженности поля, при которых коллоид становится насыщенным относительно концентрированной фазы (бинодаль) и термодинамически неустойчивым относительно

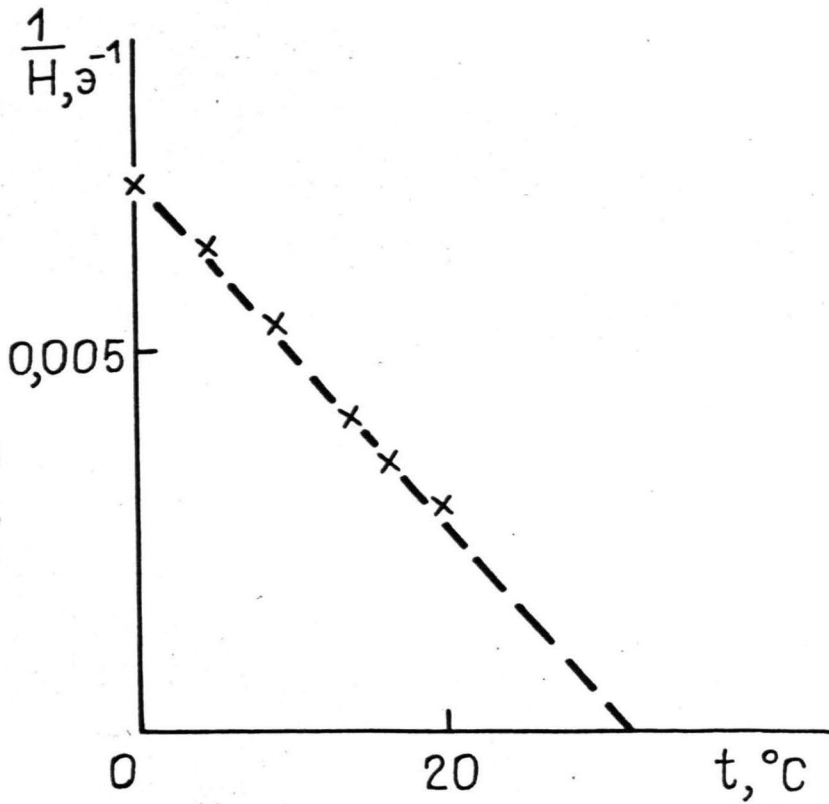


Рис. 2.3.1. Зависимость критической напряженности поля расслоения коллоида ферромагнетика от температуры. Крестики - экспериментальные данные работы [27] .

расслоения (спинодаль), из рис. 2.2.5 и 2.2.6 видно, что подобное отношение данных величин с точки зрения рассматриваемого механизма явления является вполне правдоподобным.

Возможность интерпретации распада плоского слоя как следствия нарушения термодинамической устойчивости коллоида во внешнем поле подтверждает также рассмотрение зависимости плотности распределения N_K включений концентрированной фазы от напряженности поля, которое проводится далее.

Естественно предположить, что масштаб структуры, образуемый коллоидом при нарушении его термодинамической устойчивости в плоском слое, определяется поверхностным натяжением границы раздела возникающих фаз коллоида, которое ограничивает рост мелкомасштабных структур.

Вклад в свободную энергию, обусловленный неоднородностью распределения частиц и определяющий также поверхностное натяжение границ раздела фаз, может быть найден в результате ее разложения по степеням градиента концентрации частиц. Вблизи критической точки или в начальной области спинодального распада, когда неоднородности концентрации частиц малы, достаточно ограничиться первым исчезающим членом. В таком случае свободная энергия коллоида может быть записана в виде, аналогичном использованному при описании кинетики распада на фазы немагнитных сред в [III]

$$F = \int (f_0 \delta(n) + 1/2 \beta (\nabla n)^2) dV, \quad \Delta n. \quad (2.3.3)$$

здесь $f_0 \delta(n)$ - свободная энергия на единицу объема пространственно однородного состояния коллоида с концентрацией n . Вычисление точного значения коэффициента β возможно в рамках статистической механики. В настоящем случае вследствие магнитного характера взаимодействий, определяющих распад коллоида на фазы, коэффициент β оценивается как $\lambda m^2 l_*^2$, где l_* - некоторая

характерная длина порядка среднего расстояния между частицами.

На основе термодинамики необратимых процессов далее находится закон переноса частиц. В изотермических условиях при постоянных источниках поля изменение полной энтропии S_n (системы и термостата), обусловленное необратимыми процессами, выражается через термодинамический потенциал $\tilde{F} - \tilde{F} = F - \frac{1}{8}\pi \int \vec{H}^2 dV$

в следующем виде

$$T \frac{dS_n}{dt} = - \frac{d\tilde{F}}{dt},$$

откуда с учетом закона сохранения количества частиц

$$\frac{\partial n}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{j} \quad (2.3.4)$$

для необратимого производства энтропии получается (на границах системы $\vec{j} = 0, \nabla n = 0$)

$$T \frac{dS_n}{dt} = - \int \vec{j} \nabla (\varphi - \beta \Delta n) dV. \quad (2.3.5)$$

Линейный феноменологический закон переноса частиц, соответствующий необратимому приросту энтропии (2.3.5), может быть записан в виде

$$\vec{j} = - \alpha^{-1} n \nabla (\varphi - \beta \Delta n), \quad (2.3.6)$$

где α - коэффициент поступательного трения частиц.

Далее на основе (2.3.4) и (2.3.6) рассматривается развитие периодических вдоль границ слоя возмущений концентрации коллоида при наличии поля, поперечного слою. В целях упрощения рассматривается развитие усредненных $\langle n' \rangle$ по толщине слоя возмущений вида $\langle n' \rangle = \langle n' \rangle_0 \exp(ikx)$. Так как $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial H}\right)_{T,n} = - \left(\frac{\partial M}{\partial n}\right)_{T,H}$ то для $\langle n' \rangle$ получается уравнение ($Z = \pm \ell$ - уравнения границ слоя, $j_z|_{z=\pm\ell} = 0$ вследствие их непроницаемости)

$$\frac{\partial \langle n' \rangle}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \langle j_x \rangle, \quad (2.3.7)$$

$$\text{где } \langle j_x \rangle = \alpha^{-1} (n_0 \beta \frac{\partial \langle n' \rangle}{\partial x^3} - n_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \langle n' \rangle}{\partial x} + \ell^{-1} n_0 \frac{\partial M}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} \delta \psi_\ell)$$

а $\delta \psi_\ell$ - значение возмущения магнитостатического потенциала на границе плоского слоя $z = \ell$. $\delta \psi_\ell$ находится в предположении однородности возмущений концентрации поперек слоя на основе решения уравнений Лапласа $\Delta \psi_{1,2,3} = 0$ (индекс "1" - область МЖ, индексы "2" и "3" - области $z > \ell$ и $z < -\ell$) при граничных условиях на границах слоя $\delta \psi_{2,3} = \delta \psi_1$,

$$\frac{\partial}{\partial z} \delta \psi_{2,3} = 4\pi \frac{\partial M}{\partial n} \langle n' \rangle + \mu_d \frac{\partial \delta \psi_1}{\partial z},$$

где μ_d - дифференциальная восприимчивость МЖ $\mu_d = 1 + 4\pi \frac{\partial M}{\partial H}$.
В результате для $\delta \psi_\ell$ получается

$$\delta \psi_\ell = - \frac{4\pi \frac{\partial M}{\partial n} \langle n' \rangle}{k(1 + \mu_d \operatorname{cth} k\ell)},$$

откуда (2.3.7) для инкремента роста малых возмущений дает

$$\lambda(k) = \frac{n_0 \lambda m^2}{\alpha \ell_*^2} \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{(k\ell_*)^2}{\lambda m^2} - \frac{4\pi \left(\frac{\partial M}{\partial n}\right)^2 k\ell_*}{\ell/\ell_* \lambda m^2 (1 + \mu_d \operatorname{cth}(k\ell_*/\ell_*^2))} - \frac{(k\ell_*)^4}{3.8} \right)$$

Из соотношения (2.3.8) следует ряд принципиальных выводов. Во-первых, как показывает соотношение (2.3.8), вопреки предположению работы [27] возмущения размагничивающего поля оказывают стабилизирующее влияние на устойчивость плоского слоя. Отличие от случая образования доменной структуры в пленках ферромагнетиков связано с тем, что в рассматриваемом случае не происходит изменение направления намагниченности, а происходит перераспределение концентрации частиц, в результате чего энергия магнитостатического поля при образовании периодической структуры не убывает, а возрастает.

Во-вторых, из соотношения (2.3.8) следует, что распад плоского слоя с образованием периодического распределения частиц возможен лишь в области термодинамической неустойчивости коллоид-

чим значение порядка 500 А, что представляется вполне разумным значением. Тут необходимо отметить, что в имеющихся экспериментальных работах по распаду плоского слоя коллоида ферромагнетика в однородном магнитном поле [27] , [30] , [32] , [34] не приводятся существенные физические характеристики - кривая намагничивания, толщина сольватного слоя ПАВ, которые позволяют определить необходимые для количественного сопоставления с экспериментом характеристики коллоида - магнитный момент коллоидальной частицы, параметр магнитодипольного взаимодействия, объемную концентрацию.

Гексагональный характер структуры, образуемой при распаде плоского слоя, объясняется на основе представления об областях с высокой концентрацией частиц как параллельных магнитных диполях, между которыми действуют отталкивающие силы магнитных межчастичных взаимодействий. В этом случае, как показано в работах [II2] , [II3] , энергетически выгодным является упорядочение в виде гексагональной решетки. Можно добавить, что упорядочение в виде гексагональной решетки наблюдается и в аналогичном случае полистироловых сфер в плоском слое МЖ [II4] .

Интерпретируя распад коллоида в плоском слое с точки зрения образования новой фазы, включения последней могут являться, как это показано в главе 3, гидродинамически неустойчивыми относительно растяжения в направлениях, поперечных полю. Вследствие этого можно ожидать, что двумерные структуры, образуемые в результате распада плоского слоя коллоида, в принципе, могут иметь характер структур, подобных решетке цилиндрических доменов [II2] или подобных лабиринтным структурам МЖ в плоских щелях [II5] . Отметим, что структуры второго типа наблюдаются экспериментально при расслоении коллоида ферромагнетика в поле [32] . Условия образования лабиринтных структур каплями НЖ показывают, что су-

щественной характеристикой, определяющей их развитие, является поверхностное натяжение границы раздела фаз.

Далее на основе соотношения (2.3.3) для свободной энергии неоднородного коллоида и представления о границе раздела фаз как о переходном слое, на котором концентрация частиц изменяется от значений, соответствующих концентрированной фазе, к значениям, соответствующим разбавленной, определим поверхностное натяжение границы раздела. Направление напряженности магнитного поля при этом считается параллельным границе раздела фаз, нормаль к которой совпадает с направлением оси X . Обобщение рассмотрения на случай, когда поле составляет угол с направлением границы раздела, проведено нами в работе [102], где показано, что поверхностное натяжение границ раздела фаз коллоида ферромагнетика, вообще говоря, зависит от ее ориентации относительно поля. Это показывает, что задачи капиллярной гидродинамики для фаз коллоида ферромагнетика могут являться весьма сложными.

Варьирование функционала свободной энергии, который в рассматриваемом случае может быть записан в виде

$$F = S \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_{0\delta}(n) + \frac{1}{2} \beta \left(\frac{dn}{dx} \right)^2 \right) dx,$$

относительно распределения частиц в переходном слое при условии $S \int_{-\infty}^{\infty} n dx = \text{const}$ дает условие равновесия в виде

$$\frac{\partial f_{0\delta}}{\partial n} - \beta \frac{d^2 n}{dx^2} = \alpha = \text{const}. \quad (2.3.II)$$

Умножение (2.3.II) на $\partial n / \partial x$ и интегрирование дает

$$f_{0\delta} - \alpha n - \frac{1}{2} \beta \left(\frac{dn}{dx} \right)^2 = \alpha_1 = \text{const}. \quad (2.3.I2)$$

Вдали от переходного слоя концентрации частиц стремятся к значениям, соответствующим равновесным для сосуществующих фаз n_1 и

n_2 . Тогда уравнения (2.3.II) и (2.3.I2) при учете граничных условий вдали от переходного слоя дают

$$1/2 \beta \left(\frac{dn}{dx} \right)^2 = n(\psi - \psi_e) - (p - p_e), \quad (2.3.I3)$$

где ψ_e и p_e - значения химического потенциала и осмотического давления сосуществующих фаз.

Вводя границу раздела фаз таким образом, что

$$\int_0^{\infty} (n_2 - n) dx = \int_{-\infty}^0 (n - n_1) dx, \quad (2.3.I4)$$

можно выразить избыток свободной энергии, связанный с существованием границы раздела, через ее поверхностное натяжение $F = F_1 + F_2 + \sigma S$, где F_1 и F_2 - свободные энергии однородных фаз, занимающих части пространства, ограниченные поверхностью раздела фаз (2.3.I4). Если воспользоваться уравнением (2.3.I3), то отсюда поверхностное натяжение σ может быть выражено в следующем виде

$$\sigma = \sqrt{2\beta} \int_{n_1}^{n_2} (n(\psi - \psi_e) - (p - p_e))^{1/2} dn. \quad (2.3.I5)$$

Расчет интеграла в соотношении (2.3.I5) возможен на основе функциональных зависимостей $\psi(n)$ и $p(n)$, приведенных в предыдущем разделе. Его упрощение возможно вблизи критической точки T_c расслоения для которой $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = 0$. Условия равновесия сосуществующих фаз для концентраций n_1 и n_2 вблизи дают

$$n_{2,1} = n_c \pm \sqrt{\frac{6 \frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial T} \Big|_c}{\frac{\partial^3 \psi}{\partial n^3} \Big|_c}} \sqrt{T_c - T}.$$

Отсюда для интеграла в выражении (2.3.I5) в наимизшем по $T_c - T$ приближении получается

$$\sigma = 4\sqrt{2\beta} \frac{\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial n \partial T} \Big|_c \right)^{3/2}}{\frac{\partial^3 \psi}{\partial n^3} \Big|_c} (T_c - T)^{3/2}. \quad (2.3.I6)$$

Полученное соотношение позволяет оценить коэффициент поверхностного натяжения между фазами коллоида ферромагнетика.

Находя $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial T} \Big|_c$ и $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial n^3} \Big|_c$ согласно уравнению состояния (2.2.4) в виде

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial n^3} \Big|_c = \frac{\kappa T_c \lambda_0^2}{n_c} \left(\frac{6(v_0/\lambda_0)^2}{(1-nv_0)^4} - \frac{2L^2 \frac{\partial L}{\partial \xi}}{(1-n\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial \xi})^2} - \frac{1}{(1-n\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial \xi})^3} \times \right. \\ \left. \times (4n\lambda_0 L^3 \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2} + 8n\lambda_0 L^2 \left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)^2 + 4L^2 \frac{\partial L}{\partial \xi}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{(1-n\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial \xi})^4} \left(10(n\lambda_0)^2 L^3 \frac{\partial L}{\partial \xi} \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2} + 2n\lambda_0 L^3 \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + (n\lambda_0)^2 L^4 \frac{\partial^3 L}{\partial \xi^3} \right) - \frac{1}{(1-n\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial \xi})^5} 3(n\lambda_0)^3 L^4 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2}\right)^2 \right) = \frac{\kappa T_c \lambda_0^2}{n_c} F_2;$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial T} \Big|_c = \frac{\kappa T_c}{n_c} \cdot \frac{1}{T_c} \left(\frac{n\lambda_0 L^2}{(1-n\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial \xi})^2} + \xi \left(\frac{(n\lambda_0)^2 L^2 \frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2}}{(1-n\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial \xi})^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2n\lambda_0 L \frac{\partial L}{\partial \xi}}{(1-n\lambda_0 \frac{\partial L}{\partial \xi})^2} \right) \right) = \frac{\kappa T_c}{n_c T_c} F_1.$$

и представляя β как $\delta \lambda m^2 / n_c^{2/3}$, где $1/n_c^{1/3}$ - характерное расстояние между частицами, а δ - коэффициент порядка I, можно записать формулу (2.3.16) в виде

$$\sigma = 4\sqrt{2\delta} \kappa T_c n_c^{2/3} (1-T/T_c)^{3/2} f(\xi),$$

где $f(\xi) = (F_1/n\lambda_0)^{3/2} / F_2$ и имеет порядок I. Зависимость представлена на рис. 2.3.2.

Приведем иллюстративную численную оценку поверхностного натяжения границы раздела фаз ферроколлоида. Концентрации коллоида в критической точке расслоения приведены на рис. 2.2.4. Полагая для последней некоторое промежуточное значение 7,5 % для поверх-

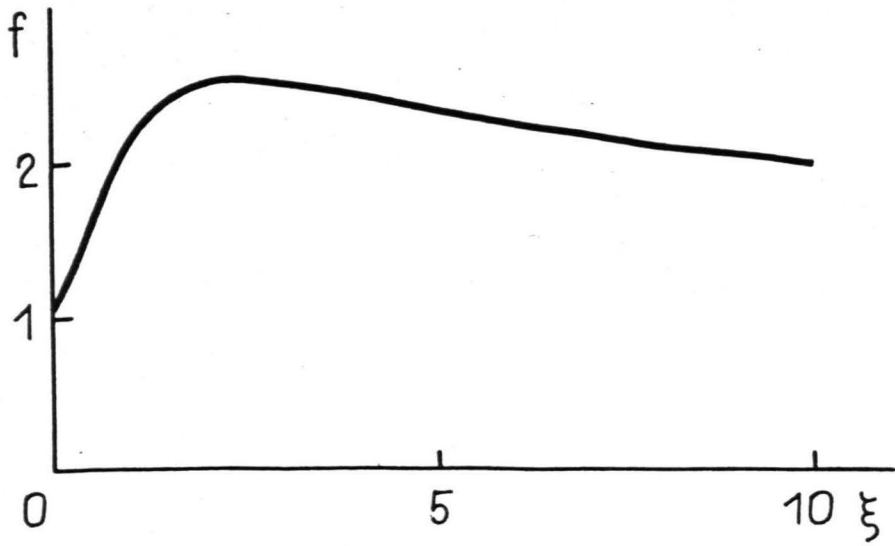


Рис. 2.3.2. Зависимость коэффициента f от параметра Ланжевена.

ностного натяжения коллоида с размером частиц 100 \AA и $T / T_C = 0,95$ при температуре T_C порядка комнатной, получаем значение порядка 10^{-3} эрг/см² [94]. Эта оценка подтверждается экспериментальным ее значением, полученным в работах [28], [29] в результате исследования гидростатики крупных конгломератов ферро-частиц - $0,6 \cdot 10^{-3}$ эрг/см².

Полученная оценка поверхностного натяжения может быть использована при определении условий потери гидродинамической устойчивости включений концентрированной фазы в плоских слоях, которая рассматривается в следующих главах.

2.4. Вириальный метод в гидродинамике капли намагничивающейся жидкости

В настоящее время практически единственным способом получения информации о физических свойствах фаз, образуемых при расслоении МЖ, является изучение включений ее концентрированной фазы, рассматриваемых как капли НЖ [28], [29], [31].

В связи с этим исследование статики и динамики капель НЖ становится особенно важным.

В настоящее время известен целый ряд экспериментальных и теоретических работ, в которых исследуется поведение капель МЖ в магнитном поле [13], [22] - [24], [28]. Имеющие место теоретические подходы описания поведения капли МЖ в поле опираются на ее представление в виде вытянутого эллипсоида вращения и определении его параметров из условия равенства давлений на вершине и экваторе эллипсоида [13] или энергетических соображений [28]. Рассматривается также аналогичный вопрос о статических конфигурациях диэлектрических и проводящих капель в электрическом поле [II6], [II7].

Весьма перспективным в данном направлении представляется вириальный метод, развитый нами применительно к капле НЖ в поле в работе [118]. Данный метод, отличие от использованных ранее, позволяет единым образом получить приближенные решения статических и динамических задач, что существенно, например, при рассмотрении динамики развития неустойчивостей равновесных фигур, явлений в переменных магнитных полях и др.

Вириальный метод ранее с успехом применялся для решения целого ряда задач гидродинамики и математической физики. Тут в первую очередь следует отметить исследования классической задачи о фигурах равновесия вращающихся, самогравитирующих жидких масс, где, как оказывается, вириальный метод дает точные решения. Это направление применения вириального метода изложено в монографии [119]. Вириальный метод применялся также при исследовании вращающихся [120] и вращающихся заряженных капель [121].

В вириальном методе происходит составление вириальных уравнений различного порядка в результате умножения уравнений движения на произведения декартовых координат точки X_i , $X_i X_j$, $X_i X_j X_k$ и т.д. с последующим интегрированием по объему, занятым жидкостью. В настоящем случае при исследовании капли НЖ ограничиваемся рассмотрением вириальных соотношений наименьшего порядка, получаемых в результате умножения уравнений движения на X_k и интегрирования по объему капли, которая представляется в виде вытянутого эллипсоида вращения. Параметры последнего находятся на основе полученных вириальных соотношений. Приближенный характер метода при этом обусловлен выбором формы капли в виде эллипсоида и интегральным удовлетворением уравнений движения. Точность метода контролируется путем сопоставления с экспериментом и с известными решениями, полученными другими методами.

Уравнения движения НЖ в стоксовом приближении имеют вид

$$-\nabla p + M \nabla H + \frac{\partial \phi_{ik}^v}{\partial x_k} = 0; \quad \text{div } \vec{v} = 0. \quad (2.4.1)$$

На свободной поверхности капли имеют место динамические граничные условия

$$-p + \phi_{nn}^v = -\phi \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + 2\pi (\vec{M} \vec{n})^2, \quad \phi_{tn}^v = 0 \quad (2.4.2)$$

Сумма $1/R_1 + 1/R_2$, где R_1 и R_2 - главные радиусы кривизны поверхности, может быть выражена в виде [20]

$$1/R_1 + 1/R_2 = \text{div } \vec{n},$$

здесь \vec{n} - вектор нормали к поверхности капли.

Так как, согласно предположению, капля НМ в поле представляет собою эллипсоид, то напряженность поля \vec{H} внутри капли является однородной и может быть выражена через напряженность внешнего поля \vec{H}_0 в виде $H_i = H_{0i} - N_{ik} M_k$, где N_{ik} - тензор коэффициентов деполаризации эллипсоида. В таком случае второй член в уравнении движения (2.4.1) из рассмотрения выпадает, а намагниченность НМ в приближении среднего действующего поля определяется согласно соотношению $M_i = M_0 L(H_{\text{э}}) h_{\text{э}i} (h_{\text{э}} = \vec{H}_{\text{э}} / H_{\text{э}})$, где $H_{\text{э}i} = H_{0i} + \lambda M_i - N_{ik} M_k$

В таком случае умножение уравнения движения НМ на x_k и интегрирование по объему капли, в результате применения формулы Остроградского-Гаусса и граничных условий (2.4.2), дает вириальное уравнение следующего вида

$$\phi_{ik} \int p dV - \phi \int x_k n_i \text{div } \vec{n} dS + 2\pi \int x_k n_i (\vec{M} \vec{n})^2 dS - \int \phi_{ik}^v dV = 0.$$

Второй член в последнем равенстве может быть преобразован согласно формуле $\int x_k n_i \text{div } \vec{n} dS = \int (\delta_{ik} - n_i n_k) dS$, откуда вириальное уравнение может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} \delta_{ik} \int p dV + V_{ik} &= \delta_{ik} \int p dV - \phi \int (\delta_{ik} - n_i n_k) dS + \\ + 2\pi \int x_k n_i (\vec{M} \vec{n})^2 dS - \int \phi_{ik}^v dV &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

В равновесии $\psi_{iK}^V = 0$, поэтому условие равновесия после исключения давления может быть записано в следующем виде: $V_{33} - \frac{1}{2}(V_{11} + V_{22}) = 0$ (ось X_3 декартовой системы координат направлена в направлении вектора напряженности внешнего магнитного поля, совпадающего и с направлением длинной оси капли).

Если воспользоваться значениями моментов, указанных в приложении (П.2.1-4) ($\ell = (1 - a^2/b^2)^{1/2}$ - эксцентриситет эллипсоида, a , b - его короткая и длинная полуоси, V - объем капли), то условие равновесия дает зависимость эксцентриситета вытянутого эллипсоида вращения от магнитного числа Бонда $Bm = \frac{M^2}{\sigma} \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}$ в следующем виде

$$Bm = \frac{1}{2\pi} \frac{\left(\frac{(3 - 2e^2)(1 - e^2)^{1/2}}{e^2} - \frac{(3 - 4e^2) \arcsin e}{e^3} \right)}{\left(1 - e^2 \right)^{1/6} \left(\frac{(3 - e^2)}{e^5} \ln \frac{1 + e}{1 - e} - \frac{6}{e^4} \right)}. \quad (2.4.4)$$

Соотношение (2.4.4) в предельном случае малых чисел Бонда дает $Bm = e^2/\pi$, что совпадает с решением, получаемом в результате рассмотрения малых возмущений сферической формы капли поляризуемой или намагничиваемой жидкости в постоянном поле [III6].

Вириальное соотношение (2.4.3) позволяет исследовать также устойчивость равновесных конфигураций капель НЖ относительно малых возмущений. Проиллюстрируем это на примере гидродинамической неустойчивости, экспериментально обнаруженной и описанной на основе энергетического подхода в работе [29], которая заключается в скачкообразном увеличении растяжения капли при некоторой критической напряженности поля.

Физический механизм развития неустойчивости можно пояснить следующим образом. Растяжение капли НЖ в поле, как показывает граничные условия (2.4.2), связано с действием растягивающих

магнитных напряжений $2\pi(\vec{M}\vec{n})^2$ на свободной поверхности капли, которые компенсируются силами поверхностного натяжения. Так как намагниченность \vec{M} , а тем самым и растягивающие магнитные натяжения, определяются внутренним полем в капле, которое меньше внешнего вследствие действия размагничивающего поля, а размагничивающее поле уменьшается по мере растяжения капли, то при достаточно высоких магнитных проницаемостях жидкости μ рост намагниченности, обусловленный уменьшением размагничивающего поля при растяжении капли, приводит к такому росту растягивающих магнитных напряжений, которые не могут быть скомпенсированы силами поверхностного натяжения, в результате чего растяжение капли скачкообразно возрастает.

Для описания развития этой неустойчивости рассмотрим вириальное соотношение (2.4.3) с точностью до членов первого порядка по лагранжевому смещению $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ материальных частиц капли от положения равновесия, определяемого соотношением (2.4.4). При этом вследствие несжимаемости $\text{div } \vec{\xi} = 0$. Тогда, если воспользоваться выражениями для лагранжевой вариации нормали к свободной поверхности и площади ее элемента

$$\Delta_L n_i = -\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} n_j + n_i n_j n_e \frac{\partial \xi_j}{\partial x_e};$$

$$\Delta_L(n_i dS) = -\frac{\partial \xi_e}{\partial x_i} n_e dS; \quad \Delta_L(dS) = -n_i n_k \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} dS.$$

а также $\Delta_L \int f dV = \int \Delta_L f dV$, то вириальное соотношение (2.4.3) в случае малых возмущений принимает вид

$$0 = \delta_{ik} \int \Delta_L p dV + \Delta_L V_{ik} = \delta_{ik} \int \Delta_L p dV + \delta_{ik} \int n_e n_m \frac{\partial \xi_m}{\partial x_e} dS -$$

$$- \delta \int (n_i n_e \frac{\partial \xi_e}{\partial x_k} + n_k n_e \frac{\partial \xi_e}{\partial x_i}) dS + \delta \int n_i n_k n_j n_e \frac{\partial \xi_j}{\partial x_e} dS +$$

$$+ 2\pi \int \xi_k n_i (\vec{M}\vec{n})^2 dS - 2\pi \int x_k \frac{\partial \xi_e}{\partial x_i} n_e (\vec{M}\vec{n})^2 dS -$$

$$- 4\pi \int x_k n_i (\vec{M}\vec{n}) M_e \frac{\partial \xi_j}{\partial x_e} n_j dS + 4\pi \int x_k n_i (\vec{M}\vec{n})^2 n_j n_e \frac{\partial \xi_j}{\partial x_e} dS +$$

$$+4\pi \int x_k n_i (\vec{M} \vec{n}) \Delta_L \vec{M} \vec{n} dS - \int \Delta_L \mathcal{G}_{ik}^v dV = 0. \quad (2.4.5)$$

Лагранжева вариация тензора вязких напряжений при этом выражается согласно формуле

$$\Delta_L \mathcal{G}_{ik}^v = \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_k}{\partial t} \right).$$

Можно показать, что для моды деформации капли, определяемой лагранжевыми смещениями вида $\xi_3 = L_{33} X_3$; $\xi_1 = -1/2 L_{33} X_1$; $\xi_2 = -1/2 L_{33} X_2$ (пульсационная мода), направление вектора намагниченности остается неизменным, а изменение намагниченности выражается в виде (вектор $\vec{h}_3^0 = (0, 0, 1)$ определяет направление намагниченности в равновесном состоянии)

$$\Delta_L \vec{M} = - \frac{M_0^2 \frac{\partial L}{\partial H_3} L(H_3^0) \Delta_L (N_{33}) \vec{h}_3^0}{(1 - (\lambda - N_{33}^0) M_0 \frac{\partial L}{\partial H_3})}$$

Исключим вариацию давления и найдем вариацию коэффициента размагничивающего поля $N_{33} = \frac{4\pi(1-e^2)}{2e^3} \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right)$ в виде

$$\Delta_L (N_{33}) = 3\pi(1-e^2) \left(\frac{(e^2-3)}{e^5} \ln \frac{1+e}{1-e} + \frac{6}{e^4} \right) L_{33}.$$

Если теперь использовать формулы для моментов (П.2.1-6) и ввести характерный масштаб времени $\tau_0 = 2\eta \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3} / \sigma$, то для данной моды деформации эллипсоида получим релаксационное уравнение

$$L_{33} + \tau_\pi^{-1} L_{33} = 0,$$

где для времени релаксации τ_π справедливо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_\pi} = & -\frac{9\pi}{2} \text{Bm} (\mu_n - 1) \frac{\partial L}{\partial \xi} (1-e^2)^2 \left(\frac{(e^2-3)}{e^5} \ln \frac{1+e}{1-e} + \frac{6}{e^4} \right)^2 / \\ & / \left(1 - \frac{(\lambda - N_{33}) 3(\mu_n - 1)}{4\pi} \frac{\partial L}{\partial \xi} \right) - 3\pi \text{Bm} (1-e^2) \left(\frac{(15-7e^2)}{e^6} - \right. \\ & - \frac{(e^4-12e^2+15)}{2e^7} \ln \frac{1+e}{1-e} \left. \right) - (1-e^2)^{1/3} \left(\frac{(27-24e^2-4e^4)}{4e^4} - \right. \\ & \left. - \frac{(8e^2-9)(2e^2-3) \text{arc sin } e}{4(1-e^2)^{1/2} e^5} \right). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

а $\mu_n = 1 + 4\pi M_0 m / 3kT$ - начальная магнитная проницаемость идеальной НЖ.

Соотношения (2.4.4), (2.4.6) показывают, что в случае слабого эффективного действующего поля, когда $\partial L / \partial \xi = 1/3$, единственной магнитной характеристикой, определяющей равновесную конфигурацию капли и ее устойчивость, является магнитная проницаемость НЖ μ , связанная с μ_n соотношением $(\mu - 1) = (\mu_n - 1) / (1 - \lambda(\mu_n - 1)4\pi)$. Зависимость отношения полуосей эллипсоида от напряженности внешнего магнитного поля, определяемая соотношением (2.4.4) и законом намагничивания $M = M_0 L(H_3)$, $H_3 = H + \lambda M - N_{33} M$ ($\frac{m H_3}{kT} \ll 1$), при разных значениях μ показана на рис. 2.4.1 ($\xi_0 = m H / kT$, $V m_0 = \frac{M_0^2 (3V)}{6(4\pi)}^{1/3}$). Из рис. 2.4.1 видно, что при достаточно больших значениях μ имеет место монотонная зависимость относительного удлинения капли от напряженности магнитного поля. Подобный вывод на основе рассмотрения зависимости отношения полуосей эллипсоида от напряженности поля, при котором энергия эллипсоидальной капли минимальна, был получен в работе [29]. Таким образом, вириальный метод в данном отношении дает результаты, эквивалентные получаемым на основе энергетического подхода, однако последний не дает возможности рассмотрения переходных явлений. Вириальный метод, в частности, показывает, что состояния капли, которые соответствуют части зависимостей, представленных на рис. 2.4.1, при которых напряженность поля с возрастанием отношения полуосей убывает, являются гидродинамически неустойчивыми. Это иллюстрируют данные, представленные на рис. 2.4.2, которые показывают, что для указанных частей зависимости относительного удлинения капли от напряженности поля, τ_{Π} отрицательно, что соответствует гидродинамической неустойчивости капли.

Сопоставление зависимостей, получаемых на основе вириально-

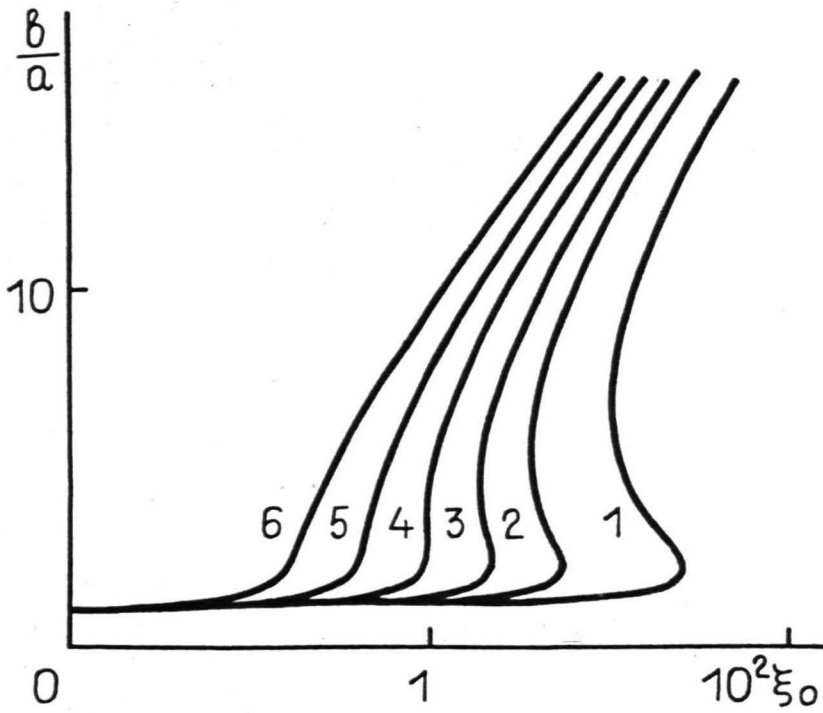


Рис. 2.4.1. Зависимость деформации конгломерата
феррочастиц от напряженности магнитного
поля ($Bm_0 = 10^6$).

1 - $\mu = 40$; 2 - $\mu = 31$; 3 - $\mu = 26$;
4 - $\mu = 21$; 5 - $\mu = 16$; 6 - $\mu = 11$.

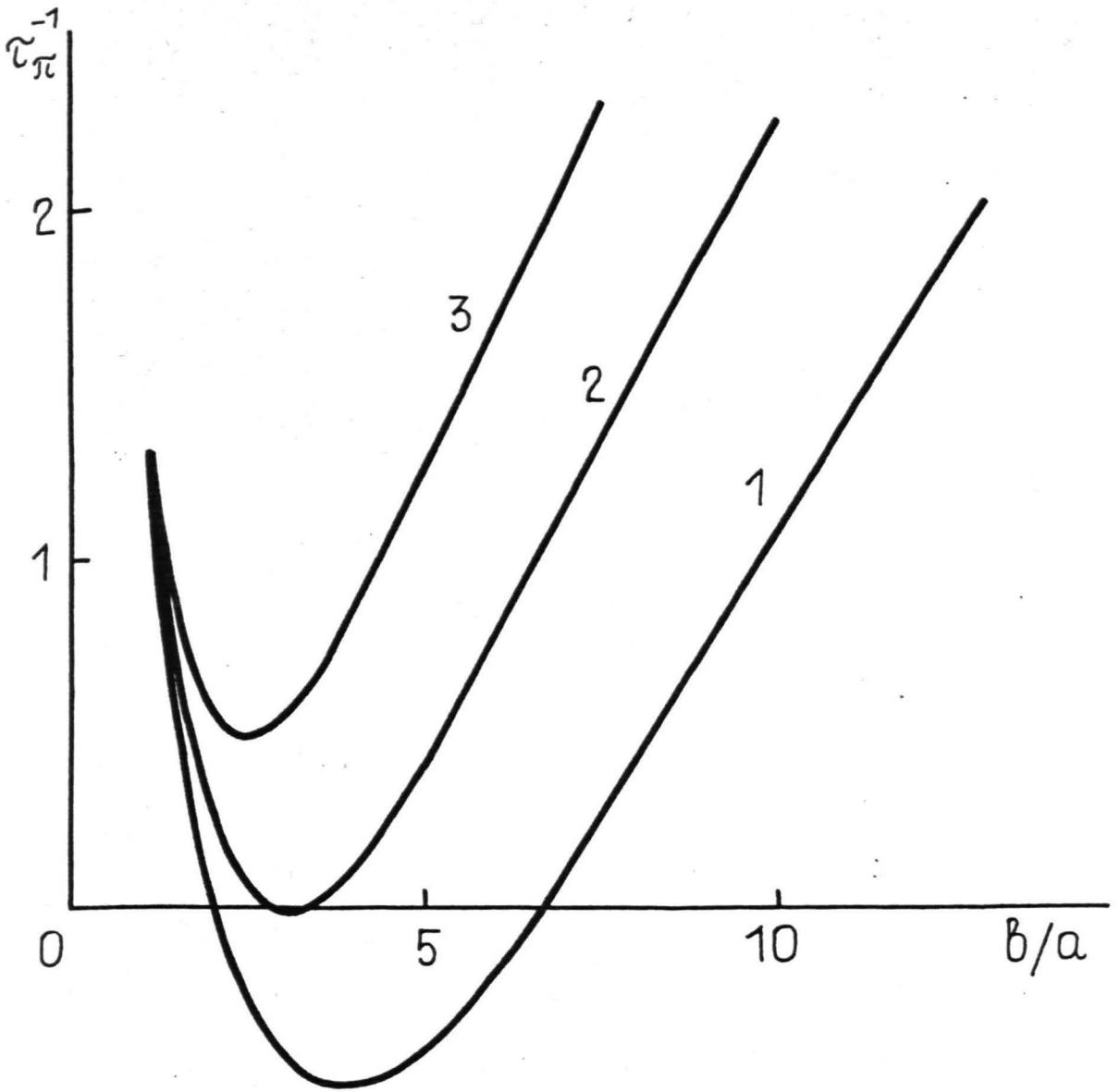


Рис. 2.4.2. Время релаксации пульсационной моды деформации равновесных конфигураций конгломерата МЖ в магнитном поле $Bm_0 = 10^6$. Область отрицательных τ_{π}^{-1} соответствует неустойчивости конгломерата относительно растяжения в направлении поля.
1 - $\mu = 40$; 2 - $\mu = 21$; 3 - $\mu = 11$.

го метода, с экспериментом проводится на рис. 2.4.3, на котором показана зависимость относительного удлинения капли от напряженности поля при $\mu = 40$. На этом же рисунке крестиками (возрастающее поле) и кружочками (убывающее поле) показаны экспериментальные значения работы [29]. При этом для поверхностного натяжения конгломерата и его размера используются значения $6,4 \cdot 10^{-4}$ эрг/см² и $\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} = 15 \mu$ м. Рис. 2.4.3 показывает, что вириальный метод дает зависимости, хорошо согласующиеся с экспериментом. Расхождение теоретических и экспериментальных зависимостей при больших растяжениях капли может быть обусловлено рядом причин. В первую очередь, это может быть связано с неадекватностью представления капли эллипсоидом при больших растяжениях. Не исключено также, что это связано с насыщением магнитных свойств конгломерата, которые могут иметь место уже в слабых магнитных полях. Для сопоставления последнего предположения с экспериментом необходима информация о магнитном моменте коллоидальных частиц в каплеобразном конгломерате, которая в настоящее время отсутствует.

Отметим, что наблюдаемая в работе [29] гидродинамическая неустойчивость каплеобразного конгломерата, выражающаяся в скачкообразном увеличении его растяжения при увеличении поля, имеет место лишь при достаточно высоких значениях μ ($\mu \gtrsim 20$). Это является причиной того, что подобное явление не было обнаружено при исследовании макроскопических капель МЖ, значения магнитной проницаемости которых ниже. Данное замечание показывает, что описанное в 2.2 расслоение коллоида в поле на фазы позволяет наблюдать новые гидродинамические явления, недоступные в обычных условиях.

Как было отмечено выше, вириальный метод позволяет исследовать и нестационарные явления. Так, например, небольшая модификация вириального уравнения (2.4.3), связанная с включением в

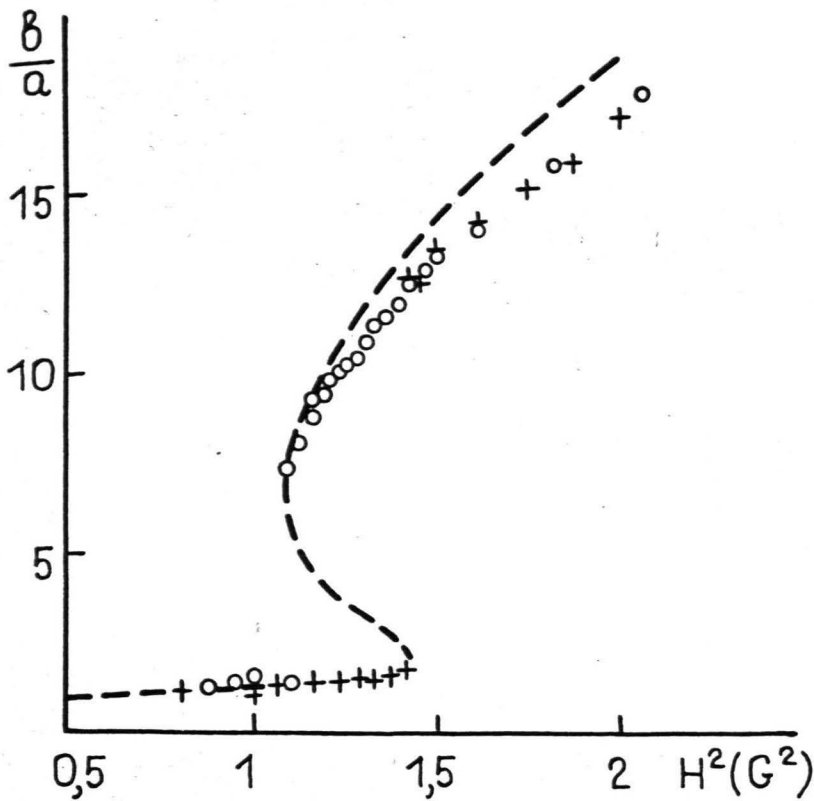


Рис. 2.4.3. Сопоставление зависимости деформации конгломерата МЖ от напряженности поля, полученной вириальным методом, с экспериментом. Прерывистая кривая - теоретическая зависимость (2.4.4) при $\mu = 40$, $\phi = 6,4 \cdot 10^{-4}$ эрг/см², $(3V/4\pi)^{1/3} = 15 \mu$ м. Крестики - экспериментальные значения деформации конгломерата работы [29] при увеличении напряженности поля, кружки - при ее уменьшении.

рассмотрение инерциальных эффектов, позволяет описывать параметрические колебания капель, возбуждаемые внешним магнитным полем. Экспериментальные работы подобного рода в настоящее время известны [122] .

Вириальный метод позволяет получать уравнения, описывающие переходные процессы установления равновесных конфигураций капель. Переходный процесс, связанный с потерей устойчивости конгломерата относительно скачкообразного его удлинения во внешнем поле, использовался для определения вязкости η концентрированной фазы коллоида ферромагнетика [31] . Для η была получена оценка вида $\eta f(e) = 1,06 \text{ Пз}$, где зависимость фактора $f(e)$ от эксцентриситета капли остается неопределенной. Вириальный метод позволяет рассчитать численные значения коэффициентов переходного уравнения, и тем самым определить при привлечении экспериментальных данных работы [31] вязкость концентрированной фазы коллоида ферромагнетика.

Если исключить давление и обезразмерить время указанным выше образом, то для пульсационной моды вириальное уравнение

(2.4.3) дает

$$2\pi(1-e^2) \left(\frac{(3-e^2)}{2e^5} \ln \frac{1+e}{1-e} - \frac{3}{e^4} \right) \left(Bm - \left(\frac{(3-2e^2)}{e^2} - \frac{(3-4e^2)\arcsin e}{e^3(1-e^2)^{1/2}} \right) \right) /$$

$$/ 2\pi(1-e^2)^{2/3} \left(\frac{(3-e^2)}{e^5} \ln \frac{1+e}{1-e} - \frac{6}{e^4} \right) - \dot{L}_{33} = 0 \quad (2.4.7)$$

Можно показать, что уравнение (2.4.7) в случае малых отклонений e от e_c , соответствующего капле в точке потери ее устойчивости при возрастании поля, приводится к виду, рассмотренному в работе [31]

$$\dot{e} = Ah + B(e - e_c)^2, \quad (2.4.8)$$

где $h = (H - H_c) / H_c$, а $B = - \frac{d}{de} \left(\tau_{\pi}^{-1} \right) \Big|_{e=e_c}$. Находя производную при определении коэффициента B численным дифференцированием со-

отношения (2.4.6), для коэффициентов A и B при $\mu = 40$ получаем следующие значения $A = 0,52$; $B = 5,98$.

В результате исследования при $H > H_c$ динамики скачкообразного увеличения растяжения конгломерата с $(3V/4\pi)^{1/3} = 10,5 \mu\text{м}$ в начальной стадии, описываемой решением дифференциального уравнения (2.4.8) - $e - e_c = \sqrt{Ah/B} \times \text{tg}(\sqrt{ABh} t / \tau_0)$, в работе [31] для \sqrt{AB}/τ_0 получено $\sqrt{AB}/\tau_0 = 0,9 \pm 0,1$. Это, пользуясь значениями постоянных A и B , позволяет получить для вязкости η концентрированной фазы МЖ значение $0,5$ Пз, если ее поверхностное натяжение считать равным вышеуказанной величине $0,64 \cdot 10^{-3}$ эрг/см². Полученное значение вязкости подтверждает представление о конгломерате как концентрированной фазе коллоида.

Вириальный метод позволяет рассмотреть и ряд других вопросов гидродинамики капель НЖ. На основании вириального уравнения (2.4.3) может быть рассмотрена устойчивость капли относительно возмущений, приводящих к образованию конфигурации капли в виде трехосного эллипсоида. Подобная постановка представляет интерес в связи с наблюдаемой на эксперименте [123] неустойчивости лежащей капли относительно растяжения в направлении, поперечном полю. Не исключая аналогии этого явления с наблюдаемыми в плоских слоях, которые описываются в главе 3, заметим, что определенную роль в этом явлении может играть и действие растягивающих магнитных напряжений $2\pi (\vec{M}\vec{n})^2$ на свободной поверхности капли.

Лагранжевы смещения материальных точек в этом случае могут быть выражены следующим образом $\xi_1 = L_{11} X_1$; $\xi_2 = -L_{11} X_1$. Уравнение (2.4.3) в результате исключения давления дает

$$4\eta V L_{11} + L_{11} (2\sigma \int (n_1^2 + n_2^2) dS - \sigma \int (n_1^2 - n_2^2)^2 dS - 4\pi M^2 \int (x_1 n_1 - x_2 n_2) (n_1^2 - n_2^2) n_2^3 dS) = 0.$$

Если воспользоваться выражениями моментов (П.2.2), (П.2.6-8), то релаксационное уравнение для данной моды деформации принимает следующий вид $L_{11} + \tau_T^{-1} L_{11} = 0$,

$$\text{где } \tau_T^{-1} = 4\pi V m (1-e^2) \left(\frac{(1-e^2)(5-e^2)}{2e^7} \ln \frac{1+e}{1-e} - \frac{(15-13e^2)}{3e^6} \right) - \\ - (1-e^2)^{1/3} \left(\frac{3(1-2e^2)}{e^4} + \frac{(8e^2(1-e^2)-3)}{e^5(1-e^2)^{1/2}} \arcsin e \right).$$

а время обезразмерено по характерному масштабу $\tilde{\tau}_1 = \frac{16\eta}{3\sigma} \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}$.

Область неустойчивости относительно деформации в трехосный эллипсоид соответствует отрицательным $\tilde{\tau}_T$. Нейтральная кривая данной моды деформации эллипсоида приводится на рис. 2.4.4 (кривая 2). Кривой I на этом рисунке показана зависимость относительного удлинения капли в направлении поля при равновесии, определяемая соотношением (2.4.4). Видно, что неустойчивость капли относительно деформации в трехосный эллипсоид возможна, если сильно ограничена возможность растяжения капли в направлении поля.

В последнее время наблюдается повышение интереса к исследованию гидродинамических явлений в МЖ при совместном действии магнитного и электрического полей. На основании этого принципа в работе [I24] показана возможность создания высокоскоростного печатающего устройства. Явление образования струек МЖ при одновременном действии коллинеарных электрического и магнитного полей, подобное используемому в [I24], наблюдалось в работе [I25].

Явление образования струек жидкости при действии на проводящую каплю электрического поля известно довольно давно [II7]. Физически оно обусловлено перераспределением свободного заряда по поверхности проводящей капли в электрическом поле. Так как поверхностная плотность накапливаемого свободного заряда с увеличением кривизны поверхности увеличивается, то при этом увеличиваются и электрические напряжения, растягивающие каплю. В резуль-

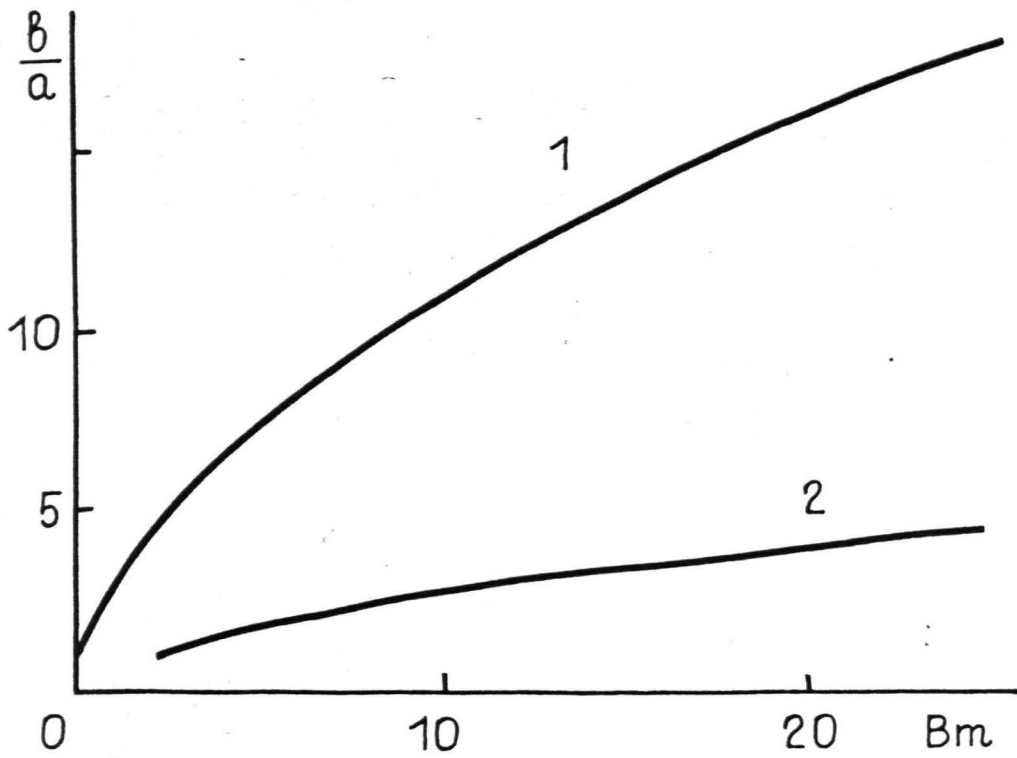


Рис. 2.4.4. Нейтральная кривая неустойчивости капли НЖ относительно деформации в трехосный эллипсоид (2). I - деформация капли НЖ в поле, определяемая зависимостью (2.4.4).

тате этого при напряженностях поля выше некоторой критической равновесие капли оказывается невозможным и происходит образование струй.

Так как магнитное поле коллинеарное электрическому, создает дополнительные усилия, растягивающие каплю, то критическая напряженность электрического поля, при которой происходит образование струек проводящей жидкости, в магнитном поле будет понижаться.

Рассмотрение на основе вириального метода подтверждает это заключение. Пусть на проводящую каплю НК действуют коллинеарные электрическое и магнитное поля. Проводимость среды, окружающей каплю, считается равной нулю. Капля, как и выше, представляется эллипсоидом вращения.

В таком случае для потенциала электрического поля вне капли справедливо

$$\Psi = -E_0 X_3 + X_3 E_0 F(v)/F(v_1). \quad (2.4.9)$$

Здесь E_0 - напряженность электрического поля вдали от капли, v, u, φ - координаты вытянутого эллипсоида вращения, которые связаны с декартовыми X_1, X_2, X_3 соотношениями $X_1 = \alpha \cos u \operatorname{sh} v \times \cos \varphi$; $X_2 = \alpha \cos u \operatorname{sh} v \sin \varphi$; $X_3 = \alpha \sin u \operatorname{ch} v$ причем $v = v_1$ на поверхности капли. Функция $F(v)$ определена соотношением $F(v) = \int \frac{dv}{\operatorname{sh} v' \operatorname{ch}^2 v'}$. Решение (2.4.9) для плотности свободного заряда на поверхности капли дает $\sigma_e = \varepsilon E_0 n_3 / N_{33}$ (ε - диэлектрическая проницаемость окружающей каплю среды).

В состоянии равновесия граничное условие для давления при совместном действии на каплю электрического и магнитного полей имеет следующий вид

$$p = \text{const} + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - 2\pi (\vec{M} \vec{n})^2 - 2\pi \sigma_e^2 / \varepsilon$$

Отсюда вириальное соотношение (2.4.3) в состоянии равновесия в этом случае принимает следующий вид

$$\delta_{ik} \int p dV + V_{ik} = \delta_{ik} \int p dV - \sigma \int (\delta_{ik} - n_i n_k) dS + 2\pi \int x_k n_i (\vec{M} \vec{n}) dS + \frac{2\pi}{\varepsilon} \int x_k n_i \sigma_e^2 dS = 0. \quad (2.4.10)$$

Если исключить давление и ввести электрическое число Бонда $\frac{Ve}{\varepsilon E_0^2} = = (3V/4\pi)^{1/3}/\sigma$, то вириальное соотношение (2.4.10) дает условие равновесия капли в следующем виде

$$Ve = N_{33}^2(e) \left(\frac{\left(\frac{(3-2e^2)(1-e^2)^{1/2}}{e^2} - \frac{(3-4e^2)\arcsin e}{e^3} \right)}{(1-e^2)^{7/6} \left(\frac{(3-e^2)}{e^5} \ln \frac{1+e}{1-e} - \frac{6}{e^4} \right)} - B_{\text{пр}} \right). \quad (2.4.11)$$

Зависимость (2.4.11) при некоторых значениях магнитного числа Бонда показана на рис. 2.4.5. Представленные на рис. 2.4.5 данные показывают, что магнитное поле существенно снижает область значений напряженности электрического поля, в которой возможно существование равновесной конфигурации капли. Это и лежит в основе использования МЖ при создании высокоскоростного печатающего устройства.

Результаты относительно поведения капли в частном случае чисто электрического поля, полученные на основе вириального метода, могут быть сопоставлены в известными теоретическими решениями других работ. Так, вириальный метод для максимального электрического числа Бонда, при котором еще существует равновесная конфигурация капли, дает значение 2,56, а для максимального растяжения капли при этом имеет место 1,898. Эти значения находятся в согласии со значениями, полученными в работе [117] 2,64 и 1,898. а также с полученными энергетическим методом в работе [126] 2,56 и 1,85 и результатами эксперимента [126]. Это указывает на хорошую точность вириального метода.

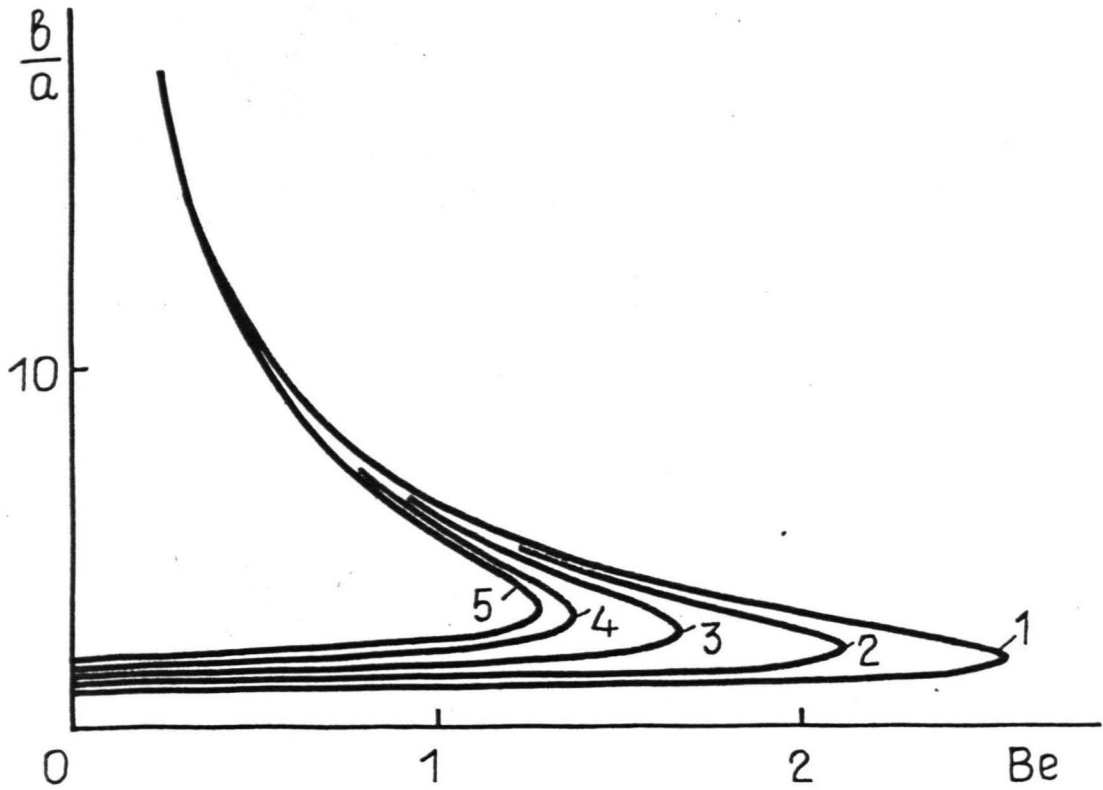


Рис. 2.4.5. Деформация проводящей капли НЖ при совместном действии коллинеарных электрического и магнитного полей. В области значений Ve , в которой равновесных конфигураций нет, происходит образование струек жидкости.

1 - $B_m = 0$; 2 - $B_m = 0,09$; 3 - $B_m = 0,23$;
4 - $B_m = 0,36$; 5 - $B_m = 0,42$.

ВЫВОДЫ

1. Построена термодинамическая модель коллоида ферромагнетика с учетом магнитного межчастичного взаимодействия, показывающая возможность его фазового расслоения. На ее основе найдена область значений термодинамических параметров - температуры, концентрации, напряженности поля, при которых коллоид ферромагнетика является неустойчивым относительно пространственного расслоения. Показано, что термодинамическая неустойчивость коллоида имеет место, если параметр магнитодипольного взаимодействия больше определенного критического значения, зависящего от напряженности магнитного поля.

2. На основе предложенной модели рассчитаны фазовые диаграммы коллоида ферромагнетика в зависимости от напряженности магнитного поля, из которых следует, что коллоид, устойчивый относительно пространственного расслоения при отсутствии поля, может терять устойчивость с его наложением. Эти результаты позволяют качественно и количественно описать имеющиеся экспериментальные данные, которые показывают обратимое образование в некоторых коллоидах с наложением магнитного поля крупных конгломератов феррочастиц. Рассчитана зависимость теплоты фазового расслоения коллоидов от напряженности поля, которая в условиях, близких к критическим, имеет немонотонный характер. Рассчитана кривая намагничивания коллоида, теряющего устойчивость во внешнем поле и показана возможность описания на основе предложенной модели особенностей намагничивания ряда МЖ, наблюдаемых на эксперименте. Для начальной магнитной восприимчивости коллоида рассматриваемая модель показывает выполнение закона Кюри-Вейсса, который подтвержден на эксперименте. Проведена оценка поверхностного натяже-

ния фаз коллоида, которая хорошо согласуется с результатами эксперимента.

3. Рассмотрена термодинамическая устойчивость коллоида анизотропных частиц ферромагнетика при отсутствии поля и показана возможность его ориентационного упорядочения вследствие действия сил магнитного межчастичного взаимодействия и образования конгломератов с отсутствующей спонтанной намагниченностью.

4. Фазовое расслоение коллоида ферромагнетика приводит к возможности проявления новых гидродинамических явлений. Описание статике и динамики крупных конгломератов, аналогично как и капель НЖ, возможно на основе вириального метода. Рассчитанная на основе этого метода зависимость меры растяжения крупного конгломерата от напряженности поля хорошо согласуется с экспериментом и данными, полученными на основе других методов. Описание вириальным методом динамики развития неустойчивости конгломерата относительно скачкообразного увеличения его растяжения при некоторой критической напряженности поля позволяет на основе имеющихся экспериментальных данных определить вязкость концентрированной фазы коллоида. Вириальным методом рассмотрено поведение капли проводящей НЖ в непроводящей среде при одновременном действии коллинеарных электрического и магнитного полей и показано, что наложение магнитного поля приводит к уменьшению критической напряженности электрического поля, при которой происходит образование струек жидкости. Результаты рассмотрения вириальным методом поведения проводящей капли в электрическом поле хорошо согласуются с данными, полученными другими методами, а также на эксперименте.

Глава 3. ГИДРОСТАТИКА НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ
С УЧЕТОМ ПОНДЕРОМОТОРНОГО ДЕЙСТВИЯ
СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Равновесные фигуры НЖ в плоских слоях и их
устойчивость. Краткий обзор состояния вопроса

В качестве объемной силы уравнение движения НЖ содержит член $(\vec{M}\nabla)\vec{H}$. Напряженность поля \vec{H} при этом является напряженностью макроскопического поля, действующего в объеме НЖ, которая отличается от напряженности внешнего поля, обусловленного сторонними источниками, на величину напряженности собственного поля НЖ. Уравнения магнитостатики $\text{rot } \vec{H} = 0$ и $\text{div } \vec{B} = 0$ показывают, что напряженность собственного поля зависит от формы области, занимаемой НЖ. Таким образом, учет отличия макроскопической напряженности поля от напряженности поля, создаваемого внешними источниками, описывает явления, обусловленные дальнедействующим характером магнитных межчастичных взаимодействий.

Так как объемная сила $(\vec{M}\nabla)\vec{H}$ в случае однородной НЖ является потенциальной, то возникает новый класс задач гидродинамики об определении равновесных конфигураций жидкости с учетом дальнедействующих сил магнитного взаимодействия. Тут можно указать на класс задач для дальнедействующих сил другой природы - гравитационных, который в постановке об определении равновесных фигур вращающихся самогравитирующих масс интенсивно изучается с середины XVIII века [119].

Во многих случаях представляет интерес постановка задачи об определении равновесных фигур НЖ с учетом дальнедействующих сил магнитного взаимодействия при наличии сил поверхностного натяжения. В подобной постановке, в отличие от случая самогра-

витирующих масс, точных решений в настоящее время неизвестно. Отметим, что в ряде специальных случаев, когда собственное поле НЖ отсутствует или действием капиллярных сил можно пренебречь, точные решения для ее фигур равновесия в магнитном поле известны и рассматриваются в ряде работ [3] - [6]. Общая формулировка задачи об определении равновесных фигур НЖ в магнитном поле дана в [7]. Однако данные специальные случаи в рамках исследования вопроса о равновесных фигурах, обусловленных действием дальнедействующих сил магнитного межчастичного взаимодействия, интереса не представляет и в настоящей работе не рассматриваются.

Постановка задачи об определении равновесных конфигураций НЖ в плоских слоях с учетом дальнедействующих сил магнитного межчастичного взаимодействия и капиллярных сил была дана нами в работах [127] - [129]. Подобная постановка возникла при интерпретации ряда экспериментальных результатов работы [130], в которой рассматривалась возможность создания дисплеев, основанных на перемещении неоднородным полем малых капелек МЖ в плоском слое. При этом в работе [130] для использованной при создании дисплея эмульсии МЖ в немагнитной жидкости в поле, перпендикулярном границам плоского слоя толщиной 400 мкм, наблюдается характерная структура, напоминающая лабиринтные структуры полосовых доменов в тонких пленках высокоанизотропных ферромагнетиков.

Образование подобных структур, как это хорошо известно из основополагающей работы [131], обусловлено тенденцией понижения энергии размагничивающего (собственного) поля ферромагнетика. Образование лабиринтных структур МЖ в плоских слоях в работе [130], по аналогии со случаем ферромагнетиков, связывается с тенденцией понижения энергии размагничивающего поля МЖ. Однако этим общим принципом и ограничивается аналогия. Например, если возникновение лабиринтной структуры полосовых доменов,

вследствие того, что объем доменов не является постоянным, носит объемный характер и связан с зарождением в объеме ферромагнетика зародышей обратной намагниченности, то образование лабиринтных структур МЖ, как показано нами [115], обусловлено гидродинамическими явлениями на поверхности раздела МЖ с несмешивающейся с ней немагнитной средой, которая в настоящем случае является аналогом доменов с противоположным намагничивающему полю направлением намагниченности, и образуется в результате проникновения в последнюю языков МЖ.

В данном плане весьма отделанной является также подчеркиваемая в работе [130]; а также в обзорной работе [132] аналогия между каплями МЖ круглой формы и доменами с обратным внешнему полю направлением намагниченности цилиндрической формы (ЦМД, "бублы"). Если относительно ЦМД известно, что они исчезают в полях достаточно высокой напряженности (поле коллапса) и разбегаются в полосовой домен при достаточно малых напряженностях поля, причем существование одиночного ЦМД в нулевом поле невозможно [133], то, как показывают результаты работ [115], [127], необходимым условием сохранения капель цилиндрической формы является условие того, что напряженность поля меньше критической напряженности поля развития эллиптической неустойчивости. При отсутствии внешнего поля круглая форма капли МЖ обусловлена действием сил поверхностного натяжения по ее периметру.

Таким образом, считать, как это предполагается в работах [130], [132], что вследствие отсутствия поля коллапса для несжимаемых капель МЖ последние будут сохранять круглую форму и при высоких напряженностях поля, вообще говоря, нельзя. Критические напряженности поля потери устойчивости круглой формы капли МЖ в зависимости от толщины щели, ее размеров и поверхностного натяжения рассчитаны нами [115], [127], [134].

Эти результаты, в частности, показывают, что одной из причин образования сильно разветвленных структур МЖ в плоских слоях, наряду с описанным выше механизмом, является потеря устойчивости круглой формы капли. Что же касается замечания в работе [132] об образовании круглых капелек МЖ при больших напряжениях поля, то, как показано нами [135], подобное явление может быть связано с гидродинамическими процессами в плоском слое при резком увеличении напряженности поля, когда происходит разбиение немагнитной среды струйками МЖ и образуется весьма полидисперсная эмульсия немагнитной среды в МЖ.

В работе [136] нами было рассмотрено влияние гравитационного поля на особенности развития гидродинамической неустойчивости поверхности раздела МЖ и немагнитной жидкости в вертикальной плоской щели при наличии поля поперечного границам щели, и было показано, что, также как и в настоящее время ставшим классическим случае неустойчивости бесконечной горизонтальной свободной поверхности в вертикальном магнитном поле [17], в этом случае наиболее опасными являются периодические возмущения конечной длины волны. Позже теоретические и экспериментальные результаты, полученные в работах [115], [136], были подтверждены экспериментально в работе [137].

Условия существования МЖ в плоском слое естественным образом приводят к способу описания ее динамики, основанному на использовании приближения Хеле-Шоу [138], которое применимо, если толщина щели мала по сравнению с характерными размерами вдоль слоя. Обобщение уравнения Дарси для жидкости в плоской щели на предмет включения сил межчастичного магнитного взаимодействия было проведено нами в работах [128], [134], где, в частности, показано, что результаты, получаемые на основе статического и динамического подходов исследования устойчивости равновесных

фигур, согласуются. Отметим, что раньше уравнение типа Дарси для описания движений МЖ в плоской щели было использовано в работе [139], в которой рассматривается возможность стабилизации неустойчивости Тейлора-Стаффамена процесса вытеснения при помощи магнитного поля с вектором напряженности, лежащего в плоскости границ щели параллельно поверхности раздела сред. Однако описание возмущений поля в данной работе проводится непоследовательно, также как и для случая неограниченного полупространства НЖ в внешнем поле, тангенциальной границе раздела.

Ввиду сложного характера межчастичных сил магнитного взаимодействия важное значение при исследовании равновесных фигур НЖ имеет создание адекватных численных моделей. Так, например, задача об определении равновесных конфигураций НЖ в плоском слое приводит к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению, нахождение решения которого аналитическими средствами представляется весьма затруднительным. Создание адекватных численных моделей исследования гидродинамики и гидростатики НЖ со свободной поверхностью в настоящее время находится в весьма зачаточном состоянии. Тут, пожалуй, можно отметить развитый в работе [6] численный метод исследования стационарной формы свободной поверхности НЖ вблизи вертикального проводника с током. Однако рассмотренный в работе [6] случай является весьма специальным, так как возмущения внешнего поля НЖ при этом отсутствуют.

Численный метод исследования процесса установления равновесных конфигураций НЖ в плоском слое при наличии сил ее собственного поля был развит нами в работах [129], [140], [141]. Функция тока поля скоростей НЖ при произвольной форме контура капли или пузырька, определяемого силами поверхностного натяжения и межчастичных магнитных взаимодействий, находится при этом в результате решения задачи Неймана для уравнения Лапласа мето-

дом граничных интегральных уравнений [142]. Равновесная конфигурация капли МЖ находится путем установления. Результаты численного моделирования позволяют найти равновесные фигуры капли МЖ в плоском слое, которые качественно согласуются с наблюдаемыми в эксперименте [115], [127].

Полученные нами результаты [115], [127], [128], [134], [135], [143] и др. в настоящее время получили развитие в ряде работ советских и зарубежных авторов.

В работе [32] наблюдаются характерные для капель МЖ в плоском слое равновесные конфигурации и в случае включений концентрированной фазы коллоида ферромагнетика, образованных в результате процесса его фазового расслоения в плоском слое при наличии магнитного поля. Характерным для этого случая является то, что структуры наблюдаются при гораздо меньших, чем для случая капель МЖ, размерах конгломератов порядка $1 \mu\text{м}$. Это согласуется с проведенной в предыдущей главе оценкой поверхностного натяжения границы раздела фаз коллоида ферромагнетика, которая дает величину $10^{-2} - 10^{-3}$ эрг/см².

В результате развития в работе [144] на случай электрического поля наших представлений [115] о механизме формирования лабиринтной структуры МЖ в плоском слое, было экспериментально продемонстрировано новое явление электрогидродинамики - образование лабиринтных структур диэлектрическими жидкостями в плоских щелях. В целях исключения влияния свободного заряда использовалось переменное электрическое поле. В работе [144] формулируется ряд характерных для случая электрического поля особенностей процесса образования лабиринтных структур. В частности, отмечается, что образование лабиринтных структур не происходит, если электроды, на которых поддерживается заданная разность потенциалов, находятся в непосредственном контакте с диэлектри-

ческой жидкостью. Подобное явление, как это теоретически показано нами [145], имеет место также и для случая НЖ, если последняя находится в непосредственном контакте с магнитопроводом бесконечно большой магнитной проницаемости. Для возможности образования лабиринтных структур в этом случае необходимо введение немагнитных прокладок между НЖ и магнитопроводом. Подобный прием использовался в работе [144] при наблюдении образования лабиринтных структур в электрическом поле в результате применения диэлектрических прокладок между электродами и диэлектрической жидкостью.

В работе [146] обнаружено, что описанный выше класс МГД-неустойчивостей может создавать определенные трудности при использовании МЖ в качестве контакта в устройствах ультразвуковой диагностики. Определенные в работе [146] по падению интенсивности вводимого в испытываемый объект ультразвука критические напряженности поля, удерживающего МЖ в зоне контакта, хорошо согласуется с рассчитанными нами [115].

3.2. Свободная энергия капли НЖ в плоском слое

Понимание многих закономерностей образования структур НЖ возможно путем анализа устойчивости ее конфигураций, соответствующих локальным экстремумам функционала энергии.

В настоящем разделе получено приближенное выражение для функционала энергии капли НЖ в плоском слое, с учетом энергии межчастичного магнитного взаимодействия и поверхности.

Затрачиваемая при намагничивании НЖ работа δA согласно [104] может быть представлена в виде

$$\delta A = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} \delta \vec{B} dV.$$

Так как неравенство Клаузиуса для изотермического процесса намагничивания дает $dF \leq \delta A$, а $\int \delta \vec{H} \vec{B} dV = 0$ при постоянных источниках поля, то вводя потенциал $\tilde{F} = F - \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} \vec{B} dV$ получаем, что $d\tilde{F} \leq 0$. Отсюда следует, что потенциал \tilde{F} в состоянии равновесия при заданных источниках поля имеет минимальное значение.

Так как в случае изотермического обратимого процесса $d\tilde{F} = -\frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \delta \vec{H} dV$, то следующие равенства, которые выполняются тождественно $\int \vec{B} (\delta \vec{H} - \delta \vec{H}_0) dV = 0$ и $\int (\vec{H} - \vec{H}_0) \delta \vec{H}_0 dV = 0$,

вводя $\tilde{\vec{F}} = \tilde{F} + \frac{1}{8\pi} \int \vec{H}_0^2 dV$, позволяют получить $(\vec{M} = (\vec{B} - \vec{H})/4\pi$, \vec{H}_0 - напряженность поля, создаваемая сторонними источниками при отсутствии НЖ

$$d\tilde{\vec{F}} = - \int \vec{M} \delta \vec{H}_0 dV,$$

откуда

$$\tilde{\vec{F}}(\vec{H}_0) = \tilde{\vec{F}}(0) - \int dV \int_0^{\vec{H}_0} \vec{M} d\vec{H}_0. \quad (3.2.I)$$

Очевидно сказанное выше о $\tilde{\vec{F}}$ справедливо и относительно потенциала $\tilde{\vec{F}}$.

Намагниченность \vec{M} является функцией напряженности поля \vec{H} , действующего в НЖ. Действуя методом последовательных приближений, можно представить \vec{H} в виде $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_p + \dots$, где \vec{H}_p определяется системой уравнений магнитостатики $\text{rot } \vec{H}_p = 0$; $\text{div } \vec{H}_p = -4\pi \text{div } \vec{M}(\vec{H}_0)$ при соответствующих граничных условиях на поверхности области, занятой НЖ.

Отсюда для \vec{H}_p получается $\vec{H}_p = -\nabla \int (\vec{M}(\vec{H}_0(\vec{r}')) \nabla') / |\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} dV'$. Пользуясь тем, что $\tilde{\vec{F}}$ является функцией состояния, $\delta \vec{H}_0$ можно представить в виде $\delta \vec{H}_0 = \vec{h}_0 \delta H_0$. Тогда, разлагая $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H}_0 + \vec{H}_p)$ с точностью до членом I порядка по \vec{H}_p , выражение (3.2.I) можно записать в следующем виде $(\vec{M}(\vec{H}_0) = M(H_0) \vec{h}_0)$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\vec{H}_0) = & \tilde{F}(0) - \int \int_0^{\vec{H}_0} \vec{M}(\vec{H}_0) \delta \vec{H}_0 dV + \\ & + \int \int_0^{H_0} dV \delta H_0(\vec{r}) \frac{\partial M(H_0(\vec{r}))}{\partial H_0} \left((\vec{M}_0 \nabla) \left(\vec{M}(\vec{H}(\vec{r})) \nabla' \right) \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Так как подынтегральное выражение в третьем члене (3.2.2) можно представить в виде вариации по $H_0(\vec{r})$ функционала

$$\frac{1}{2} \int dV \int dV' (\vec{M}(\vec{H}_0(\vec{r})) \nabla) (\vec{M}(\vec{H}_0(\vec{r}')) \nabla') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

то свободную энергию НЖ, с учетом энергии межчастичных взаимодействий в первом исчезающем приближении, можно представить в следующем окончательном виде

$$\tilde{F}(\vec{H}_0) = \tilde{F}(0) - \int dV \int_0^{\vec{H}_0} \vec{M}(\vec{H}_0) \delta \vec{H}_0 - \frac{1}{2} \int \vec{M} \vec{H}_p dV, \quad (3.2.3)$$

где \vec{H}_p напряженность собственного магнитного поля НЖ с намагниченностью $\vec{M}(\vec{H}_0)$

Второй член выражения (3.2.3) вследствие несжимаемости существенен лишь в неоднородных внешних полях. Сопоставление этого члена с членом, описывающим потенциальную энергию НЖ в гравитационном поле $-\int \rho \vec{g} \vec{r} dV$, показывает, что неоднородность магнитного поля можно приближенно учесть в результате введения эффективного ускорения свободного падения $\vec{g}_\text{э} = \vec{g} + \rho^{-1} M \nabla H_0$ определяемого градиентом напряженности внешнего поля H_0 .

Соотношение, аналогичное (3.2.3), можно получить также для энергии НЖ в случае окружения ее намагничивающимися телами. Отметим при этом, что в большинстве технических приложений МЖ последняя находится именно в подобных условиях, роль окружающих ее магнитных тел при этом играет магнитопровод магнитной системы.

Пусть окружающая НЖ магнитная среда намагничивается по линейному закону $\vec{B} = \mu \vec{H}$ и занимает объем V_2 . Пусть \vec{B}_1 и \vec{H}_1 значения магнитной индукции и напряженности поля до внесения в

объем V_1 НЖ. Термодинамический потенциал \tilde{F} в этом состоянии равен

$$\tilde{F} = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \vec{H}_1^2 dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_2} \mu \vec{H}_1^2 dV.$$

Изменение \tilde{F} в результате внесения в V_1 НЖ выражается в виде

$$\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_1} dV \int_0^{\vec{H}} \vec{B} d\vec{H} + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \vec{H}_1^2 dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \vec{B} \vec{H} dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_2} \vec{B}_1 \vec{H}_1 dV \quad (3.2.4)$$

Пользуясь равенством $\int_{V_1+V_2} (\vec{B} + \vec{B}_1) (\vec{H} - \vec{H}_1) dV = 0$, следующим из потенциальности возмущения поля при внесении НЖ, выражение (3.2.4) можно записать в виде

$$\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_1} dV \int_0^{\vec{H}} \vec{B} d\vec{H} + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \vec{B} \vec{H} dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \vec{B}_1 \vec{H} dV - \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \vec{B} \vec{H}_1 dV \quad (3.2.5)$$

Соотношение (3.2.5) упрощается в результате рассмотрения возмущений поля, вносимых НЖ, в первом исчезающем приближении. Вводя $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_p$, $\Delta \tilde{F}$ можно записать в виде

$$\Delta \tilde{F} = -\frac{1}{8\pi} \int_{V_1} dV \vec{H}^2 - \int_{V_1} dV \int_0^{\vec{H}} \vec{M} d\vec{H} + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \vec{B} \vec{H}_p dV + \frac{1}{8\pi} \int_{V_1} \vec{B}_1 \vec{H} dV. \quad (3.2.6)$$

Производя в (3.2.6) разложение с точностью до \vec{H}_p^2 ($\vec{H}_p \sim \vec{M}(\vec{H}_1)$), соотношение (3.2.6) приводим к окончательному виду

$$\Delta \tilde{F} = - \int_{V_1} dV \int_0^{\vec{H}_1} \vec{M}(\vec{H}) d\vec{H} - \frac{1}{2} \int_{V_1} \vec{M}(\vec{H}_1) \vec{H}_p dV,$$

что по форме совпадает с (3.2.3).

Напряженность поля \vec{H}_p находится на основе решения задачи о магнитоэстатическом поле, создаваемом НЖ с намагниченностью $\vec{M}(\vec{H}_1)$ при заданном окружении намагничивающихся тел с магнитной проницаемостью μ .

Поверхностная энергия НЖ в плоских щелях может быть приближенно описана формулой $F_s = \sigma h L$, где L периметр контура ее конфигурации. Изменением формы мениска НЖ в направлении, перпендикулярном границам щели, при этом пренебрегается. Следует отметить, что в силу физических особенностей НЖ это, по-видимому,

является неплохим приближением в случае поля, поперечного границам щели, так как ее свободная поверхность во внешнем поле стремится принимать конфигурацию, в которой вектор напряженности поля ей параллелен. Мениск НЖ в поперечном щели направлении при этом будет прямым с узкой переходной областью вблизи границ щели. Качественные наблюдения поведения МЖ в плоских слоях подтверждают эти соображения.

В заключение данного раздела сделаем ряд замечаний относительно учета потенциальной энергии в гравитационном поле. Для случая вертикальной щели эта энергия учитывается членом $\rho g h \int z dS$. Оценки гравитационного числа Бонда $\rho g h^2 / \sigma$ для случая горизонтальных щелей толщиной 1-2 мм, показывают, что для реальных значений физических параметров оно не больше 1. Это дает возможность пренебрежения энергией гравитационного взаимодействия при описании конфигураций НЖ в горизонтальных плоских щелях [147].

3.3. Устойчивость капель и пузырьков в плоских слоях

В своей первоначальной постановке вопрос устойчивости капель НЖ в плоских слоях возник в связи с необходимостью интерпретации экспериментальных результатов работы [130], из которых следует, что в случае НЖ равновесной фигурой при наличии поперечного слоя поля может являться и неосесимметричная.

В настоящем разделе рассматривается потеря устойчивости в поле осесимметричных равновесных конфигураций капель и пузырьков в плоском слое. Так как при отсутствии поля равновесной в плоском слое является осесимметричная форма капель и пузырьков, то нами [127] было высказано предположение о том, что образование структур, подобных лабиринтным, связано с потерей при наложении поля устойчивости капли относительно неосесимметричных

возмущений.

Далее докажем, что в рамках модели (3.2.3) поведение капли эквивалентно поведению пузырька в безграничном слое НЖ. Это следует из теоремы взаимности электростатики, согласно которой для двух распределений зарядов с плотностями σ_1 и σ_2 на поверхностях S_1 и S_2 для создаваемых ими потенциалов справедливо равенство $\int_{S_1} \psi_2 \sigma_1 dS = \int_{S_2} \psi_1 \sigma_2 dS$. Выражение энергии размагничивающего поля НЖ (3.2.3) может быть записано в виде

$$E_p = -\frac{1}{2} \int \vec{M} \vec{H}_p dV = \frac{1}{2} \int \sigma \psi dS,$$

где σ - фиктивная плотность магнитного заряда на границах плоского слоя $z = h$ и $z = 0$, равная $-M$ и M соответственно.

Распределение заряда σ , соответствующее наличию пузырька в безграничном слое НЖ, может быть представлено в виде суммы $\sigma_1 = \sigma$ на всей границе плоского слоя и $\sigma_2 = -\sigma$ на границах плоского слоя контактирующих с газом. Энергия этого распределения зарядов выражается в виде

$$E_p = \frac{1}{2} \int (\sigma_1 + \sigma_2) (\psi_1 + \psi_2) dS,$$

что воспользуясь теоремой взаимности дает

$$E_p = \frac{1}{2} \int_S \sigma_1 \psi_1 dS + \int_{S_n} \sigma_2 \psi_1 dS + \frac{1}{2} \int_{S_n} \sigma_2 \psi_2 dS.$$

Первый и второй член данного равенства могут быть выражены явно. Так как для случая безграничного слоя $\psi(h) = -2\pi Mh$ и $\psi(0) = 2\pi Mh$, то для энергии E_p получается

$$E_p = 2\pi M^2 h (S - 2S_n) + \frac{1}{2} \int \sigma_2 \psi_2 dS.$$

Член $\frac{1}{2} \int \sigma_2 \psi_2 dS$ равен энергии размагничивающего поля капли, имеющей конфигурацию пузырька. Таким образом, энергия размагничивающего поля пузырька, за исключением несущественной ввиду условия несжимаемости $hS_n = \text{const}$ постоянной $2\pi M^2 h (S - 2S_n)$,

равна энергии размагничивающего поля капли НЖ, имеющей конфигурацию пузырька. Это доказывает высказанное утверждение.

Достаточные условия неустойчивости капли НЖ относительно неосесимметричных возмущений получаются на основе рассмотрения знака второй вариации функционала энергии.

Пусть уравнение границы капли в полярной системе координат имеет вид $r = r(\varphi)$. Тогда функционал энергии (3.2.3) может быть записан в следующем виде

$$E = \delta h \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi + M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{r(\varphi')} r' dr' G(r, \varphi; r', \varphi') \quad (3.3.1)$$

здесь

$$G(r, \varphi; r', \varphi') = (r^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi') + r'^2)^{-1/2} (r^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi') + r'^2 + h^2)^{-1/2}$$

Представляя уравнение границы возмущенной осесимметричной конфигурации в виде $r(\varphi) = R + \zeta(\varphi)$ где $\zeta(\varphi)$ малая величина, получим значение функционала (3.3.1) с точностью до величин второго порядка малости по $\zeta(\varphi)$ включительно. Для этого второй член выражения (3.3.1) преобразуется следующим образом

$$M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{r(\varphi')} r' dr' G(r, \varphi; r', \varphi') + M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{r(\varphi')} r' dr' G(r, \varphi; r', \varphi'). \quad (3.3.2)$$

Функция $G(r, \varphi; r', \varphi')$ является четной относительно перестановки φ и φ' , а $\int_0^{r(\varphi)} r dr \int_0^{r(\varphi')} r' dr' G(r, \varphi; r', \varphi')$ нечетной.

Так как интеграл по r может быть разложен в виде

$$\int_0^{r(\varphi)} r dr = \frac{1}{2} \left(\int_0^{r(\varphi)} r dr + \int_0^{r(\varphi')} r dr \right) + \frac{1}{2} \left(\int_0^{r(\varphi)} r dr - \int_0^{r(\varphi')} r dr \right),$$

первый член которого четный относительно перестановки φ и φ' , откуда следует, что выражение (3.3.2) может быть записано следующим образом

$$M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{r(\varphi')} r' dr' G(r, \varphi; r', \varphi') -$$

$$- M^2/2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{r(\varphi)}^R r dr \int_{r(\varphi')}^R r' dr' G(r, \varphi; r', \varphi')$$

Первый член последнего выражения может быть выражен через энергию, размагничивающего поля осесимметричной капли радиуса R , которая имеет вид $(G(r, \varphi; r', \varphi') = G(r; r'; \varphi' - \varphi))$

$$E_{op}(R) = 2\pi M^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R r' dr' G(r; r'; \varphi') \quad (3.3.3)$$

В результате функционал энергии капли НЖ записывается в виде

$$E = \delta h \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi E(r(\varphi)) - \frac{M^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{r(\varphi)}^R r dr \int_{r(\varphi')}^R r' dr' \times G(r; r'; \varphi' - \varphi), \quad (3.3.4)$$

который при учете членов до второго порядка малости по $\zeta(\varphi)$ дает

$$E = \delta h R \int_0^{2\pi} d\varphi \left(1 + \frac{\zeta}{R} + \frac{\zeta'^2}{2R^2}\right) + E_p(R) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi E'_{op} \zeta(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi E''_{op} \frac{1}{2} \zeta^2(\varphi) - \frac{M^2 R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' (\zeta(\varphi') - \zeta(\varphi))^2 G(R; R; \varphi' - \varphi).$$

Равновесные конфигурации капли соответствуют локальному минимуму функционала (3.3.4) при условии постоянства ее объема $V = \frac{1}{2} h \int_0^{2\pi} d\varphi r^2(\varphi)$. Если представить возмущение конфигурации $\zeta(\varphi)$ капли в виде ряда Фурье $\zeta(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos n\varphi$ то условие постоянства объема капли дает соотношение

$$2Rr_0 + r_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 = 0,$$

которое позволяет выразить r_0 с точностью до величин второго порядка малости $r_0 = -1/4R \sum_{n=1}^{\infty} r_n^2$.

В результате функционал энергии с точностью до величин второго порядка малости по r_n имеет вид

$$\frac{1}{2} \delta^2 E = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(E''_{op} - \frac{1}{R} E'_{op} - 4\pi M^2 R I_n + \frac{2\pi \delta h}{R} (n^2 - 1) \right) r_n^2,$$

здесь I_n интегралы следующего вида ($\tilde{h} = h/2R$)

$$I_n = \int_0^{2\pi} dt \sin^2 \frac{nt}{2} \left(1/\sqrt{\sin^2 t/2} - 1/\sqrt{\sin^2 t/2 + \tilde{h}^2} \right).$$

Отсюда следует, что достаточное условие неустойчивости капли относительно n -ой моды возмущений можно представить в виде неравенства следующего вида

$$E_{op}'' - \frac{1}{R} E_{op}' - 4\pi M^2 R I_n + \frac{2\pi \phi h}{R} (n^2 - 1) < 0 \quad (3.3.5)$$

Расчет интегралов I_n дает

$$I_1 = 4 \left(\frac{(1-k^2)K}{k} - \frac{E}{k} + 1 \right); \quad (3.3.6)$$

$$I_2 = \frac{16}{3} + \frac{32(1-k^2)K}{3k^3} + \frac{16(k^2-2)E}{3k^3}; \quad (3.3.7)$$

$$I_3 = \frac{92}{15} - 2k \left(\frac{2(k^2-1)K}{k^2} + \frac{2E}{k^2} - 16 \left(\frac{(5k^2-8)E}{5k^4} + \frac{8(2-k^2)(2k^2-1)E}{15k^6} + \frac{8(2-k^2)(1-k^2)K}{15k^6} \right) \right). \quad (3.3.8)$$

Здесь $k^2 = (2R/h)^2 / (1 + (2R/h)^2)$, а E и K — полные эллиптические интегралы I и II рода соответственно.

Энергия размагничивающего поля круглой капли (3.3.3), пользуясь соотношением $\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt) dt = 1/\sqrt{a^2 + b^2}$ и теоремой сложения цилиндрических функций, может быть записана в виде

$$E_{op} = 2\pi M^2 (T(0) - T(h)), \text{ где } T(\alpha) = 2\pi R^2 \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{J_1^2(Rt) dt}{t^2}.$$

Представляя квадрат функции Бесселя согласно формуле [148]

$$J_1^2(Rt) = \frac{2Rt}{\sqrt{\pi} \Gamma(3/2)} \int_0^{\pi/2} J_1(2Rt \sin \vartheta) \sin \vartheta \cos^2 \vartheta d\vartheta$$

и интегрируя разложение функций Бесселя в ряд почленно для энергии размагничивающего поля круглой капли, получаем выражение

$$E_{op} = 2\pi M^2 \left(\pi h R^2 + \frac{8R^3}{3} \left(1 - \frac{(2k^2-1)E}{k^3} - \frac{(1-k^2)K}{k^3} \right) \right).$$

Непосредственным дифференцированием можно проверить справедливость формулы

$$\frac{d^2 E_{op}}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d E_{op}}{dR} = 4\pi M^2 R I_1, \quad (3.3.9)$$

которая является следствием трансляционной инвариантности энергии капли.

Пользуясь соотношениями (3.3.6 - 9), из неравенства (3.3.5) можно получить достаточные условия неустойчивости осесимметричной формы капли относительно мод возмущений $n = 2$ и $n = 3$ в следующем виде

$$n = 2$$

$$\frac{\sigma}{2M^2 h} \leq \frac{1}{9} \frac{k^2}{1-k^2} \left(1 + \frac{(8-3k^2)(1-k^2)K}{k^3} + \frac{(7k^2-8)E}{k^3} \right); \quad (3.3.I0)$$

$$n = 3$$

$$\frac{\sigma}{2M^2 h} \leq \frac{k^2}{15(1-k^2)} \left(1 + \frac{3(5k^2-8)E}{k^3} + \frac{8(2-k^2)(2k^2-1)E}{k^5} + \frac{8(2-k^2)(1-k^2)K}{k^5} \right). \quad (3.3.II)$$

Графически нейтральные кривые неустойчивости (3.3.I0) и (3.3.II) изображены на рис. 3.3.I, откуда видно, что пороговое значение магнитного числа Бонда развития эллиптических деформаций является более низким, чем для случая деформации капли в трехлепестковый цветок.

Из соотношений (3.3.I0) и (3.3.II) может быть получен и ряд простых асимптотических зависимостей. В случае $K^2 \rightarrow 1$, что соответствует большой капле или пузырьку, пользуясь асимптотическими формулами для эллиптических интегралов, получается

$$n = 2 \quad \frac{\sigma}{2M^2 h} \cong \frac{10}{9} \ln \frac{2R}{h};$$

$$n = 3 \quad \frac{\sigma}{2M^2 h} \cong \frac{16}{15} \ln \frac{2R}{h}.$$

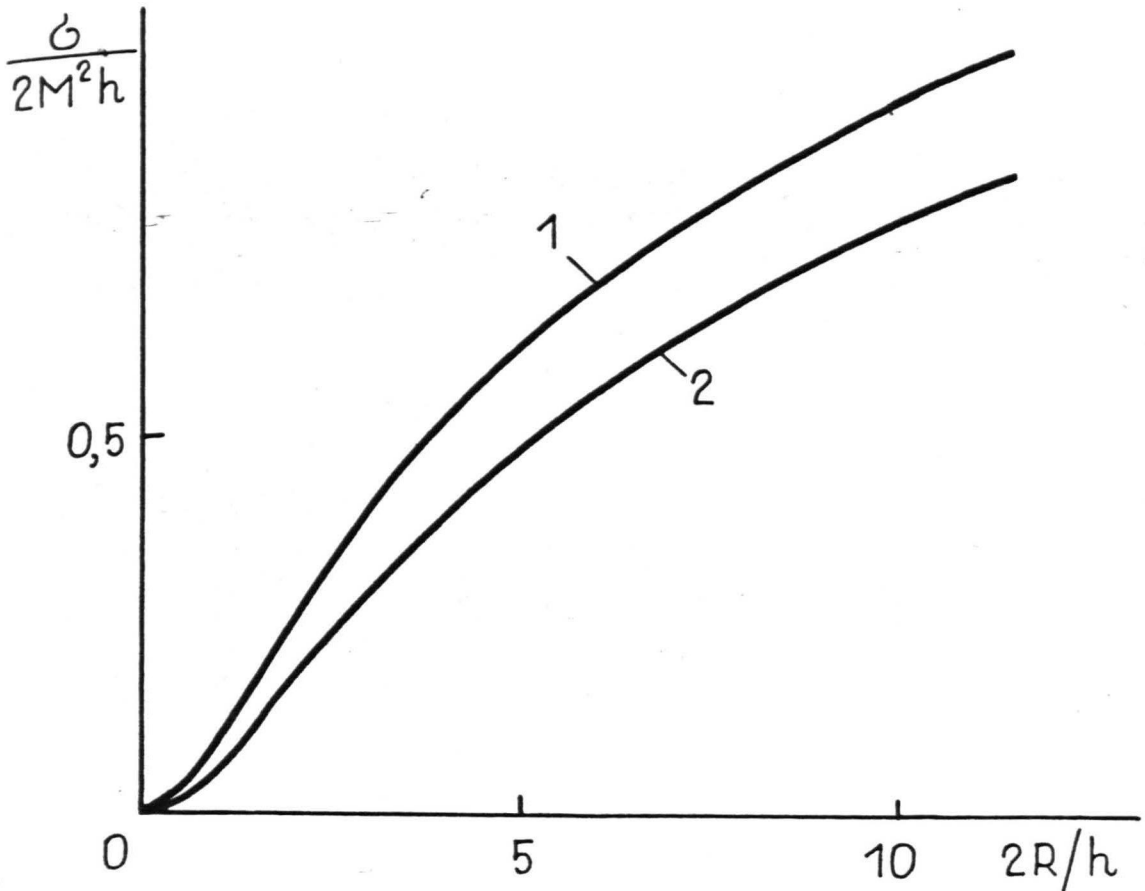


Рис. 3.3.1. Нейтральные кривые неустойчивости осесимметричной фигуры равновесия НЖ в плоском слое, относительно эллиптических деформаций (1) и деформаций в трехлепестковый цветок (2).

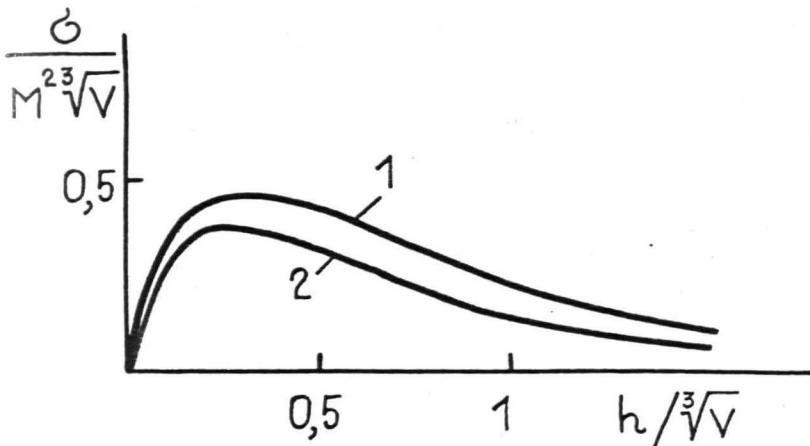


Рис. 3.3.2. Зависимость критических значений $M^2\sqrt[3]{V}/\sigma$ неустойчивости осесимметричной фигуры равновесия капли НЖ относительно эллиптических деформаций (1) и деформаций в трехлепестковый цветок (2) от толщины плоского слоя.

Видно, что в пределе $R \rightarrow \infty$ отношение порогов развития данных мод стремится к постоянной величине, равной $Vm_3/Vm_2 = 25/24$, которая незначительно отличается от единицы. Отсюда следует вывод, что надежное фиксирование на эксперименте развития эллиптической неустойчивости возможно для достаточно малых капель или пузырьков, так как в случае больших R малые значения критического магнитного числа Бонда для рассматриваемых мод отличаются незначительно, что дает возможность потери устойчивости на реальном эксперименте одновременно относительно нескольких мод. Характер развивающихся в этом случае структур будет определяться динамикой развития неустойчивости.

В предельном случае малых капель ($R \rightarrow 0$) асимптотические зависимости принимают вид

$$\frac{\sigma}{2M^2h} \approx \frac{1}{9} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \quad n=2; \quad \frac{\sigma}{2M^2h} \approx \frac{1}{15} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \quad n=3.$$

Отсюда видно, что в случае малых капелек или пузырьков критические значения Vm для мод $n=2$ и $n=3$ различаются более чем в 1,5 раза.

Для эксперимента представляет интерес оптимальное соотношение геометрических параметров R и h для капли заданного объема, при котором рассматриваемые неустойчивости будут проявляться при наименьших напряженностях поля.

Если воспользоваться выражением объема капли $V = \pi R^2 h$ и следующим отсюда соотношением $h/\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4} \left(\frac{2R}{h}\right)^2}$, то нейтральные кривые неустойчивости можно описать следующими выражениями:

$$\frac{\sigma}{2M^2\sqrt[3]{V}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4} \frac{k^2}{1-k^2}}} \cdot \frac{1}{9} \frac{k^2}{1-k^2} \left(1 + \frac{(8-3k^2)(1-k^2)K}{k^3} + \frac{(7k^2-8)E}{k^3} \right); \quad (3.3.12)$$

$$\frac{\sigma}{2M\sqrt[3]{V}} = \frac{1}{3\sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{k^2}{1-k^2}}} \frac{k^2}{15(1-k^2)} \left(1 + \frac{3(5k^2-8)E}{k^3} + \frac{8(2-k^2)(2k^2-1)E}{k^5} + \frac{8(2-k^2)(1-k^2)k}{k^5(3.3.I3)} \right) /$$

Из приведенных выше асимптотических формул следует, что правые части равенств (3.3.I2) и (3.3.I3) стремятся к нулю при $h/\sqrt[3]{V} \rightarrow 0$ и $h/\sqrt[3]{V} \rightarrow \infty$, т.е. капля фиксированного объема остается устойчивой относительно неосесимметричных возмущений в предельных случаях узкой и широкой щелей. Оптимальные значения относительных толщин слоя можно найти из графического представления зависимостей (3.3.I2) и (3.3.I3) на рис. 3.3.2, которые приближенно равны $h/\sqrt[3]{V} = 0,34$ ($n = 2$) и $h/\sqrt[3]{V} = 0,27$ ($n = 3$). Отношение диаметра капли к толщине слоя в этих случаях соответственно равно $2R/h = 5,7$ и $8,1$.

Для минимально возможных критических значений магнитного числа Бонда $M\sqrt[3]{V}/\sigma$ данные, приведенные на рис. 3.3.2, дают значения 2,18 и 2,71 соответственно.

Далее дается краткое описание результатов качественных экспериментов, подтверждающих основные теоретические выводы.

Факт потери устойчивости в поле осесимметричной конфигурации МЖ относительно неосесимметричных возмущений показан на рис. 3.3.3. В этом случае использовалась МЖ на основе воды с объемной концентрацией магнитной фазы в виде магнетита 7% при среднем размере частиц порядка 100 А. Толщина плоского слоя в данном и аналогичных случаях заключалась в пределах 0,5 - 2 мм. В целях улучшения прозрачности слоя для фотографирования стенки слоя были обработаны гидрофобным веществом.

При помешении капли МЖ в плоскую щель, толщина которой могла изменяться, качественно был подтвержден теоретический вывод о существовании для капли данного объема ограниченной области толщин слоя, в которой имеет место эллиптическая неустой-



Рис. 3.3.3. Потеря устойчивости осесимметричной фигуры равновесия МЖ относительно эллиптических деформаций. а - поле отсутствует, б - в поле с напряженностью выше пороговой.



Рис. 3.3.4. Спектр равновесных фигур капелек МЖ различных размеров в магнитном поле.
а - поле отсутствует, б - в поле.

чивость. В постоянном магнитном поле капля в узкой щели, имеющая круглую форму, по мере увеличения толщины слоя деформируется в неосесимметричную конфигурацию в виде гантели, которая снова стягивается в круглую форму при дальнейшем увеличении толщины щели.

Качественная иллюстрация зависимости порогового значения развития эллиптической неустойчивости от размеров капли дается на рис. 3.3.4, где видно развитие эллиптической неустойчивости для совокупности капель, имеющих разные размеры. Видно развитие неустойчивости в поле для больших капель, в то время как малые сохраняют круглую форму. Следует обратить внимание на гантелеобразный характер равновесных конфигураций капель в поле.

Подобный вид конфигураций связан с тем, что собственное поле неосесимметричной капли МЖ в ее центре выше, чем на концах, так как расстояния частиц ферромагнетика от ее центра в среднем меньше, чем до концов. Так как напряженность собственного поля направлена в сторону, противоположную направлению напряженности внешнего поля, то возникает градиент напряженности результирующего поля, под действием которого МЖ перетекает в концы капли. Подтверждение данного механизма образования равновесных конфигураций на численных экспериментах дается в главе 5.

Результаты качественных экспериментов, иллюстрирующих вывод о тождественности поведения капель МЖ и пузырьков в безграничном слое МЖ, показаны на следующей серии рисунков. При этом МЖ на основе керосина с намагниченностью насыщения 30 Гс заполняла щель толщиной 2 мм в форме диска. В центре ячейки создавался пузырек с размерами гораздо меньшими размеров ячейки.

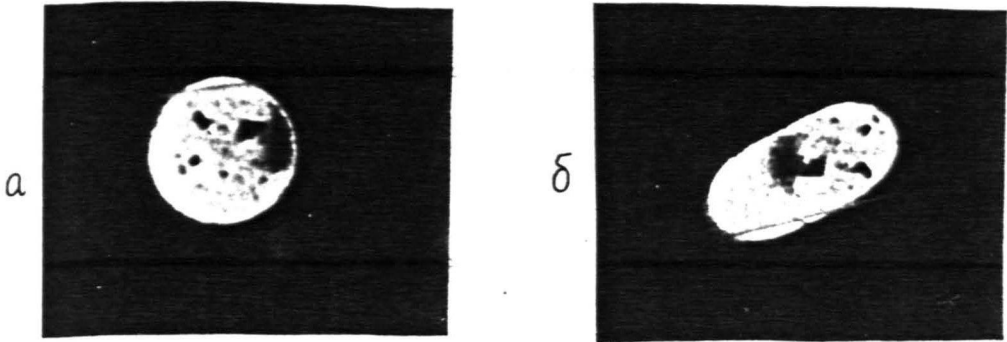


Рис. 3.3.5. Потеря устойчивости осесимметричной формы пузырька относительно эллиптических деформаций. а - поле отсутствует, б - поле с напряженностью выше пороговой.



Рис. 3.3.6. Спектр равновесных фигур пузырьков различных размеров. Для малых пузырьков устойчивой остается осесимметричная конфигурация, средних - прямолинейная гантелеобразная конфигурация, а конфигурации достаточно больших пузырьков изогнуты.

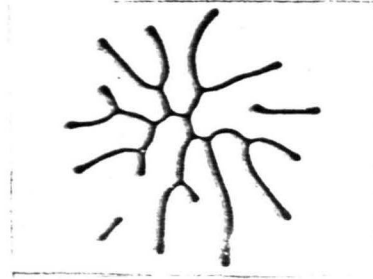


Рис. 3.3.7. Равновесная конфигурация капли МЖ. Две гантелеобразные конфигурации образованы в результате развития эллиптической неустойчивости малых капелек МЖ.



Рис. 3.3.8. Равновесная конфигурация пузырька в МЖ, образуемая при скачкообразном увеличении поля.

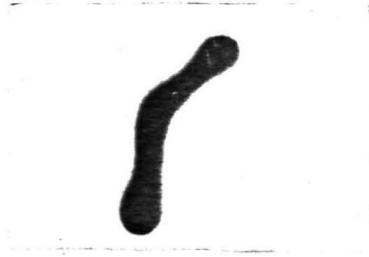


Рис. 3.3.9. Изгиб гантелеобразной конфигурации капли МЖ с увеличением напряженности магнитного поля.

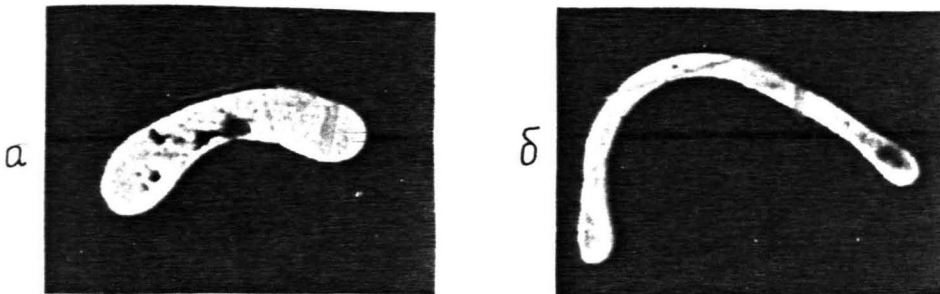


Рис. 3.3.10. Развитие изгибных деформаций пузырька с увеличением напряженности поля (исходная конфигурация на рис. 2.3.5). Напряженность поля увеличивается при переходе от конфигурации "а" к конфигурации "б".

Рис. 3.3.5 показывает, что в поле с напряженностью, большей критической, развивается деформация пузырька в эллипс, аналогичная случаю капли. Возможный спектр форм пузырьков в поле виден на рис. 3.3.6. Аналогично с описанным выше поведением капель видно образование гантелеобразных конфигураций, а также проявление зависимости критической напряженности поля от размеров пузырьков - малые пузырьки сохраняют круглую форму, большие вытягиваются в направлении, поперечном направлению напряженности магнитного поля.

Можно отметить, что в согласии с теоретическими результатами для достаточно больших капелек и пузырьков наблюдается образование разветвленных структур (рис. 3.3.7 и рис. 3.3.8). Это может быть связано с проявлением неустойчивости относительно моды деформации в трехлепестковый цветок.

На рис. 3.3.9 и рис. 3.3.10 приводятся равновесные конфигурации капли (рис. 3.3.9) и пузырька (рис. 3.3.10), получаемые при дальнейшем увеличении напряженности поля над пороговым значением развития эллиптической неустойчивости. Видно развитие изгиба гантелеобразных конфигураций, что может быть связано с потерей устойчивости их прямолинейной формы.

3.4. Устойчивость конфигураций НЖ с прямолинейными границами

Результаты эксперимента, приведенные в конце предыдущего раздела, показывают, что прямолинейная форма фигур равновесия НЖ может терять устойчивость относительно изгиба.

В настоящем разделе проводится исследование устойчивости идеализированной модели в виде бесконечно длинной полоски НЖ, находящейся в плоской щели, относительно изгиба. Выбор подоб-

ной модели оправдывается тем, что, как показывают данные экспериментов, приведенные на рис. 3.3.9-10, изгиб характерен для капель или пузырьков с большим отношением длины к ширине.

Пусть прямолинейная полоска НЖ имеет ширину $2d$. Введем декартову систему координат так, что оси X, Y лежат в плоскости слоя и уравнения границ прямолинейной полоски имеют вид $y = d$ и $y = -d$. Задача об исследовании устойчивости подобной конфигурации распадается на два в рамках линейной теории независимых случаев. Первый случай соответствует четным в направлении поперечном полоске возмущениям ее свободной поверхности, когда уравнения границ полоски в возмущенном состоянии имеют вид $y = d + \zeta(x)$ и $y = -d + \zeta(x)$. Этот случай соответствует изгибу полоски и, образно говоря, может быть назван змеевидной неустойчивостью.

Второй случай соответствует нечетным возмущениям свободной границы, когда ее уравнения имеют вид $y = d + \zeta(x)$ и $y = -(d + \zeta(x))$. Этот случай, пользуясь аналогией с известной неустойчивостью плазменного токового шнура [149], может быть назван неустойчивостью относительно перетяжек.

Рассмотрим случай змеевидной неустойчивости. Функционал энергии в этом случае выразится следующим образом

$$G(x, x'; y, y') = ((x-x')^2 + (y-y')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2 + (y-y')^2 + h^2)^{-1/2};$$

$$E = 2\phi h \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + \zeta'^2(x)} dx + M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-d+\zeta(x)}^{d+\zeta(x)} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-d+\zeta(x')}^{d+\zeta(x')} dy' G(x, x'; y, y')$$

Выражение энергии размагничивающего поля может быть преобразовано следующим образом

$$E_p = M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-d+\zeta(x)}^{d+\zeta(x)} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(\int_{-d+\zeta(x')}^{d+\zeta(x')} dy' + \int_{-d+\zeta(x')}^{-d+\zeta(x')} dy' \right) G(x, x'; y, y') \quad (3.4.1)$$

Так как интеграл $\int_{-d+\zeta(x)}^{d+\zeta(x)} dy$ может быть разбит следующим образом

$$\int_{-d+\zeta(x)}^{d+\zeta(x)} dy = \frac{1}{2} \left(\int_{-d+\zeta(x)}^{d+\zeta(x)} dy + \int_{-d+\zeta(x')}^{d+\zeta(x')} dy \right) - \frac{1}{2} \left(\int_{d+\zeta(x)}^{d+\zeta(x')} dy + \int_{-d+\zeta(x')}^{-d+\zeta(x)} dy \right)$$

а функция $G(x, x'; y, y')$ является четной относительно перестановки x и x' , и, соответственно $\left(\int_{d+\zeta(x)}^{d+\zeta(x')} dy + \int_{-d+\zeta(x')}^{-d+\zeta(x)} dy \right) G(x, x'; y, y')$ нечетной, то выражение (3.4.1) может быть записано в следующем эквивалентном виде

$$E_p = M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-d}^d dy \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-d}^d dy' G - \frac{M^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(\int_{d+\zeta(x)}^{d+\zeta(x')} dy + \int_{-d+\zeta(x')}^{-d+\zeta(x)} dy \right) \left(\int_{d+\zeta(x)}^{d+\zeta(x')} dy' + \int_{-d+\zeta(x')}^{-d+\zeta(x)} dy' \right) G.$$

Это для второй вариации функционала энергии позволяет получить

$$\delta^2 E = \mathcal{O}h \int_{-\infty}^{\infty} \zeta'^2(x) dx - M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' (G(x, x'; d, d) - G(x, x'; d, -d)) (\zeta(x') - \zeta(x))^2.$$

Представляя возмущение $\zeta(x)$ интегралом Фурье $\zeta(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ikx} dk$ в виде разложения по модам деформации различной длины волны выражение для второй вариации функционала энергии преобразуем к следующему виду

$$\delta^2 E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 dk \left(\mathcal{O}h k^2 - 2M^2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos kt) dt \left(\frac{1}{\sqrt{t^2}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4d^2}} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + h^2 + 4d^2}} \right) \right).$$

Отсюда достаточное условие неустойчивости относительно изгибных деформаций имеет вид

$$\mathcal{O}h k^2 - 4M^2 \int_0^{\infty} (1 - \cos kt) dt \left(\frac{1}{\sqrt{t^2}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + 4d^2}} + \frac{1}{\sqrt{t^2 + h^2 + 4d^2}} \right) < 0.$$

Воспользовавшись формулой теории цилиндрических функций

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos kt \, dt}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}} = K_0(\alpha k) \quad \text{для нейтральной кривой змеевидной}$$

неустойчивости получаем ($\delta =$
 $= 2d/h$)

$$\frac{G}{2M^2h} = \frac{2(\gamma + \ln \frac{kh}{2} + \ln \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} + K_0(kh) + K_0(\delta kh) - K_0(\sqrt{1+\delta^2}kh))}{(kh)^2} =$$

$$= \frac{F_1(kh)}{(kh)^2} \quad (3.4.2)$$

При $kh \rightarrow \infty$ для критического значения $G/2M^2h$ получается $\frac{G}{2M^2h} \approx \frac{2 \ln(kh/2)}{(kh)^2}$, откуда видно, что полоска относительно коротковолновых возмущений является устойчивой.

При $kh \rightarrow 0$ для критического значения $G/2M^2h$ получается предельное значение

$$G/2M^2h = ((1+\delta^2) \ln \sqrt{1+\delta^2} - \delta^2 \ln \delta) / 2 \quad (3.4.3)$$

Так как нейтральные кривые (3.4.2), как это графически показано на рис. 3.4.1, являются монотонно убывающими, то соотношение (3.4.3) определяет минимально необходимое для развития изгибных деформаций значение магнитного числа Бонда. При этом наиболее опасными являются длинноволновые возмущения. С увеличением толщины полоски критическое значение магнитного числа Бонда развития изгибных деформаций убывает обратно пропорционально $\ln \delta$.

Аналогичным образом может быть рассмотрена устойчивость полоски относительно перетяжек. В этом случае, действуя подобно тому как и ранее при рассмотрении змеевидной неустойчивости и вводя энергию размагничивающего поля прямолинейной полоски e_p на единицу ее длины, энергия размагничивающего поля в возмущенной конфигурации может быть выражена в виде

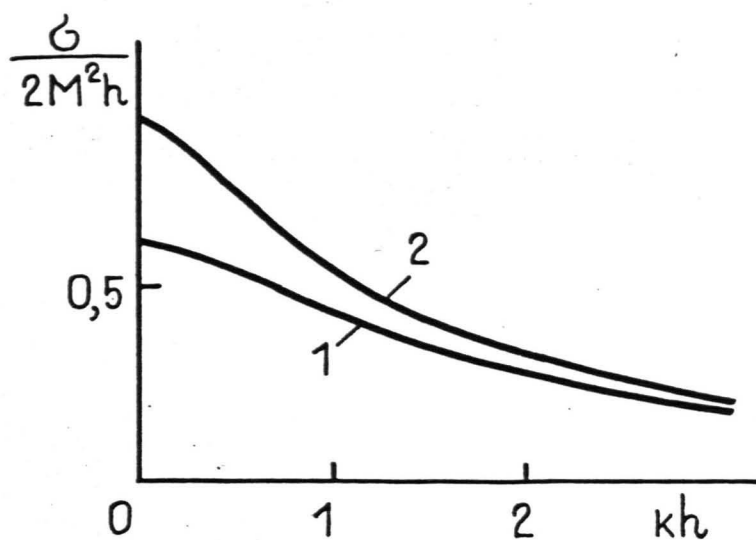


Рис. 3.4.1. Нейтральные кривые змеевидной неустойчивости.

1 - $\delta = 2$; 2 - $\delta = 4$.

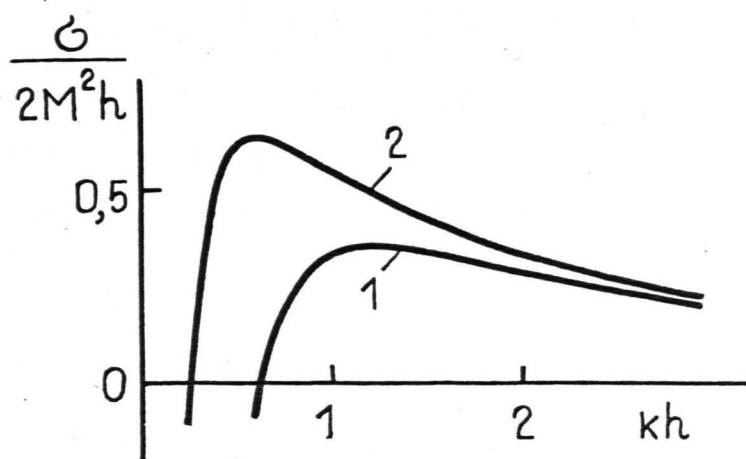


Рис. 3.4.2. Нейтральные кривые неустойчивости полосы НЖ относительно перетяжек.

1 - $\delta = 2$; 2 - $\delta = 4$.

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} dx e_p(2d+2\zeta(x)) + \frac{1}{2} M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy + \int_{-\infty}^{\infty} dy' \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy + \int_{-\infty}^{\infty} dy' \right) G(x, x'; y, y').$$

$e_p(2\ell)$ выражается в виде интеграла

$$e_p(2\ell) = M^2 \int_{-\ell}^{\ell} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\ell}^{\ell} dy' \left((x-x')^2 + (y-y')^2 \right)^{-1/2} \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + h^2 \right)^{-1/2},$$

в результате расчета которого получается

$$e_p(2\ell) = M^2 (2\ell)^2 \ln(1+(h/2\ell)^2) - h^2 \ln(1+(2\ell/h)^2) + 8\ell h \operatorname{arctg} \frac{2\ell}{h}$$

и $e_p''(2\ell) = 2M^2 \ln(1+(h/2\ell)^2).$

С точностью до членов второго порядка малости по $\zeta(x)$

для функционала энергии получается

$$E = E(2d) + 6h \int_{-\infty}^{\infty} \zeta'^2(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} dx e_p'(2d) 2\zeta(x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx e_p''(2d) 2\zeta^2(x) -$$

$$- M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' (\zeta(x') - \zeta(x))^2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + h^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + 4d^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + h^2 + 4d^2}} \right),$$

где линейный по $\zeta(x)$ член исчезает вследствие условия несжимаемости.

Представляя $\zeta(x)$ в виде интеграла Фурье, достаточное условие неустойчивости относительно перетяжек получаем в следующем виде (γ - постоянная Эйлера)

$$\frac{6}{2M^2 h} \leq \frac{2(\gamma + \ln(kh/2) + K_0(kh) - K_0(\delta kh) + K_0(\sqrt{1+\delta^2} kh) - \ln \frac{\sqrt{1+\delta^2}}{\delta})}{(kh^2)} = F_2(kh) / (kh)^2 \quad (3.4.4)$$

Зависимость критического значения магнитного числа Бонда развития неустойчивости типа перетяжек от волнового числа возмущений, определяемое при выборе знака равенства в (3.4.4), показана на рис. 3.4.2. Рис. 3.4.2 показывает, что наиболее опасными с точки зрения развития неустойчивости типа перетяжек

являются возмущения конечной длины волны. При этом пороговые значения магнитного числа Бонда в этом случае являются более высокими, чем в случае змеевидной неустойчивости.

Рассмотрим предельные случаи коротко- и длинноволновых возмущений перетяжек. Критическое магнитное число Бонда коротковолновых возмущений возрастает согласно закону $2M^2 h / \delta \cong \cong (kh)^2 / 2 \ln kh$. Для предельного случая длинноволновых возмущений (3.4.4) дает асимптотическую зависимость $\frac{\delta}{2M^2 h} \cong -4 \ln(\sqrt{1 + \delta^2 / \delta}) / (kh)^2$, которая показывает наличие устойчивости прямолинейной полоски относительно длинноволновых возмущений типа перетяжек.

С точки зрения описания механизма образования лабиринтных структур НЖ в плоских слоях представляет интерес рассмотрение устойчивости прямолинейной полоски НЖ с одной свободной границей.

Пусть граница $y = 0$ прямолинейной полоски толщиной l граничит с твердой стенкой, а уравнение ее свободной границы в возмущенном состоянии имеет вид $y = l + \zeta(x)$. Тогда энергия размагничивающего поля полоски выражается в виде интеграла

$$E_p = M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{l+\zeta(x)} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{l+\zeta(x')} dy' G(x, x'; y, y').$$

который, как и выше, может быть записан в следующем эквивалентном виде

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} e_p(l + \zeta(x)) dx + \frac{1}{2} M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{l+\zeta(x)}^{l+\zeta(x')} dy \int_{l+\zeta(x')}^{l+\zeta(x)} dy' G(x, x'; y, y'),$$

В результате функционал энергии полоски с точностью до членов II порядка малости по $\zeta(x)$ выразится следующим образом

$$E = \frac{1}{2} \delta h \int_{-\infty}^{\infty} \zeta'^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e_p''(l) \zeta^2(x) dx - \frac{1}{2} M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' (\zeta(x') - \zeta(x))^2 G(x, x'; l, l).$$

Отсюда, представляя $\zeta(x)$ в виде интеграла Фурье, достаточное условие неустойчивости полоски относительно возмущений с волновым числом K получается в виде

$$\omega/2M^2h < (2(\ln(kh/2) + \mu + K_0(kh)) - \ln(1 + (h/\ell)^2)) / (kh)^2.$$

Нейтральная кривая неустойчивости полоски с одной свободной поверхностью приводится на рис. 3.4.3. Из рис. 3.4.3 видно, что энергетически наиболее опасными в этом случае являются возмущения конечной длины волны. Длина волны $\lambda_{кр}$ наиболее опасных возмущений в области $\ell/h \leq 5$ может быть определена согласно соотношению $\lambda_{кр} \cong 3\ell$.

В результате учета энергии взаимодействия НЖ с внешним полем может быть рассмотрено и влияние его неоднородности на устойчивость прямолинейных границ. Пусть компонента напряженности поля $H_z = H_0$ неоднородна в направлении оси y , т.е. $\partial H_z / \partial y \neq 0$. Если следовать предположение о том, что плоская щель находится в плоскости симметрии поля, где $H_y = 0$, то в щели компонентой напряженности поля, направленной поперечно прямолинейной границе полоски, можно пренебречь. В таком случае функционал энергии полоски НЖ может быть записан в следующем виде

$$E = \omega h \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + \zeta'^2(x)} dx - h \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\ell + \zeta(x)} dy M_0(y) H_0(y) + \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\ell + \zeta(x)} M(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\ell + \zeta(x')} dy' M(y') \left(((x-x')^2 + (y-y')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2 + (y-y')^2 + h^2)^{-1/2} \right).$$

Достаточно простой анализ устойчивости в данном случае возможен в предположении магнитного состояния НЖ, близком к насыщению. В таком случае функционал энергии с точностью до квадратичных по $\zeta(x)$ членов выразится следующим образом

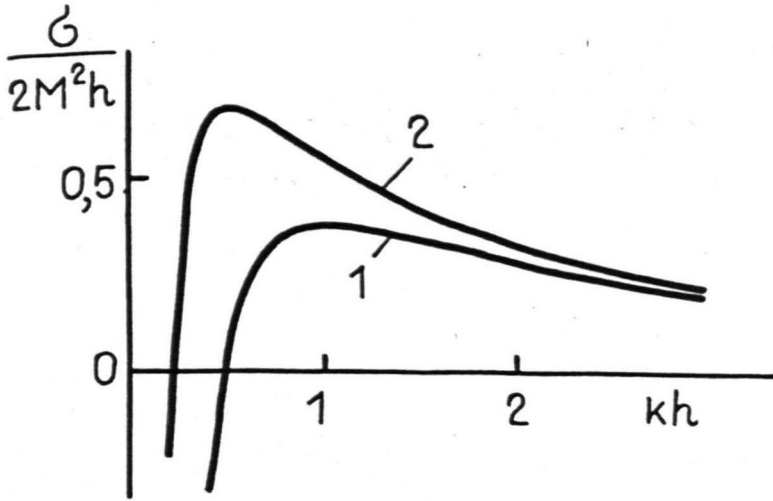


Рис. 3.4.3. Нейтральные кривые неустойчивости свободной поверхности полоски НЖ. 1 - $l/h = 2$; 2 - $l/h = 4$.

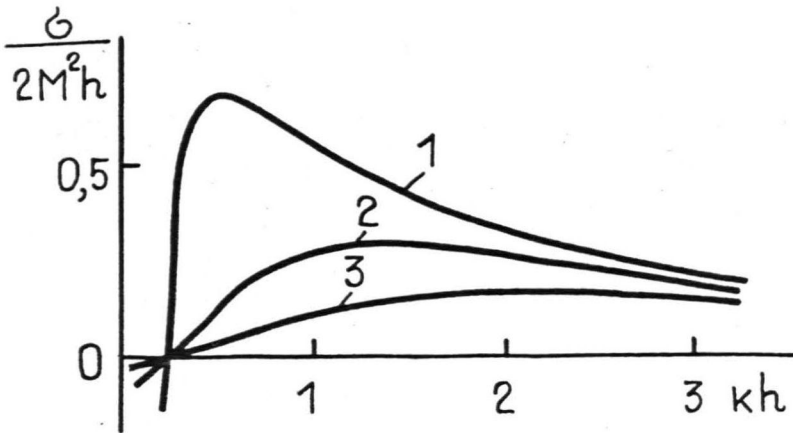


Рис. 3.4.4. Нейтральные кривые неустойчивости свободной поверхности полоски НЖ при $l/h = 4$ в неоднородном магнитном поле. 1 - $k_0h = 0$; 2 - $k_0h = 1$; 3 - $k_0h = 2$.

$$E = \sigma h \int_{-\infty}^{\infty} dx + \frac{1}{2} \sigma h \int_{-\infty}^{\infty} \zeta'^2(x) dx - \frac{1}{2} h \int_{-\infty}^{\infty} M_0 \frac{dH_0}{dy} \zeta^2(x) dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e_p''(\ell) \zeta^2(x) dx - \frac{1}{2} M_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' (\zeta(x') - \zeta(x))^2 G(x, x'; \ell, \ell'),$$

что для нейтральной кривой устойчивости полоски дает ($K_0^2 = -\frac{M_0}{\sigma} \frac{dH}{dy}$)

$$\sigma / 2M_0^2 h = 2(\ln(kh/2) + \gamma + K_0(kh)) - \ln(1 + (h/\ell)^2) / (kh)^2 + (k_0 h)^2 \quad (3.4.5)$$

$(k_0 h)^2$ имеет смысл магнитного числа Бонда, определяемого действием пондеромоторной силы неоднородного внешнего поля $H_0(y)$.

Нейтральные кривые, соответствующие зависимости (3.4.5), изображены на рис. 3.4.4. Видно, что действие неоднородного поля при $dH_0/dy < 0$, что соответствует случаю отсутствия магнитного аналога обычной неустойчивости Рэлея-Тейлора, приводит к уменьшению длины волны наиболее опасных возмущений и повышению порогового значения $\frac{2M^2 h}{\sigma}$. Этот вывод показывает возможность перестройки структуры возмущенной поверхности во внешнем неоднородном магнитном поле.

В заключение настоящего раздела проводится сопоставление полученных теоретических выводов с результатами некоторых качественных экспериментов.

Неустойчивость вытянутых капель и пузырьков относительно изгиба иллюстрируется на рис. 3.3.9-10. В согласии с теоретическим заключением о превышении порогом развития неустойчивости типа перетяжек порога змеевидной неустойчивости на опыте наблюдается лишь изгиб капель и пузырьков, а случаи развития неустойчивости типа перетяжек зарегистрированы не были.

Случай неустойчивости полоски с одной свободной поверхностью экспериментально моделировался в плоской щели толщиной 2 мм в ви-

де диска, на внутренней границе которого создавался кольцевой слой МЖ шириной порядка сантиметра. На серии рисунков - рис. 3.4.5а - в показано развитие в этом случае неустойчивости в поле большем порогового. На первом рисунке данной серии (рис. 3.4.5а) заметно образование периодической структуры, которая при дальнейшем увеличении напряженности поля приводит к развитию языков МЖ, пронизывающих все пространство щели. Конечная конфигурация, показанная на рис. 3.4.5е, аналогична лабиринтным структурам полосовых доменов в тонких пленках высокоанизотропных ферромагнетиков [133]. Эта аналогия не является удивительной, так как образование доменных структур ферромагнетиков, как и структур НЖ в плоских слоях, определяется конкуренцией поверхностной энергии доменных границ и энергии размагничивающего поля. Существенное отличие заключается в механизме образования этих структур, который в случае НЖ, как показано в настоящем разделе, связан с развитием гидродинамической неустойчивости свободной поверхности.

В отношении серии рисунков рис. 3.4.5а - е следует обратить внимание также на наглядную иллюстрацию развития змеевидной неустойчивости у языка МЖ в верхней части рис. 3.4.5б - в. Процесс перестройки структур МЖ при действии неоднородного поля показан на следующей серии рисунков рис. 3.4.6а - д. В этом случае плоская щель располагается в торцевой части соленоида. Число языков МЖ, как видно из рис. 3.4.6а - д с ростом напряженности поля и соответственно его градиента увеличивается. Это коррелирует с нейтральной кривой (3.4.5), которая показывает, что с ростом градиента напряженности поля длина волны энергетически наиболее опасных возмущений уменьшается.

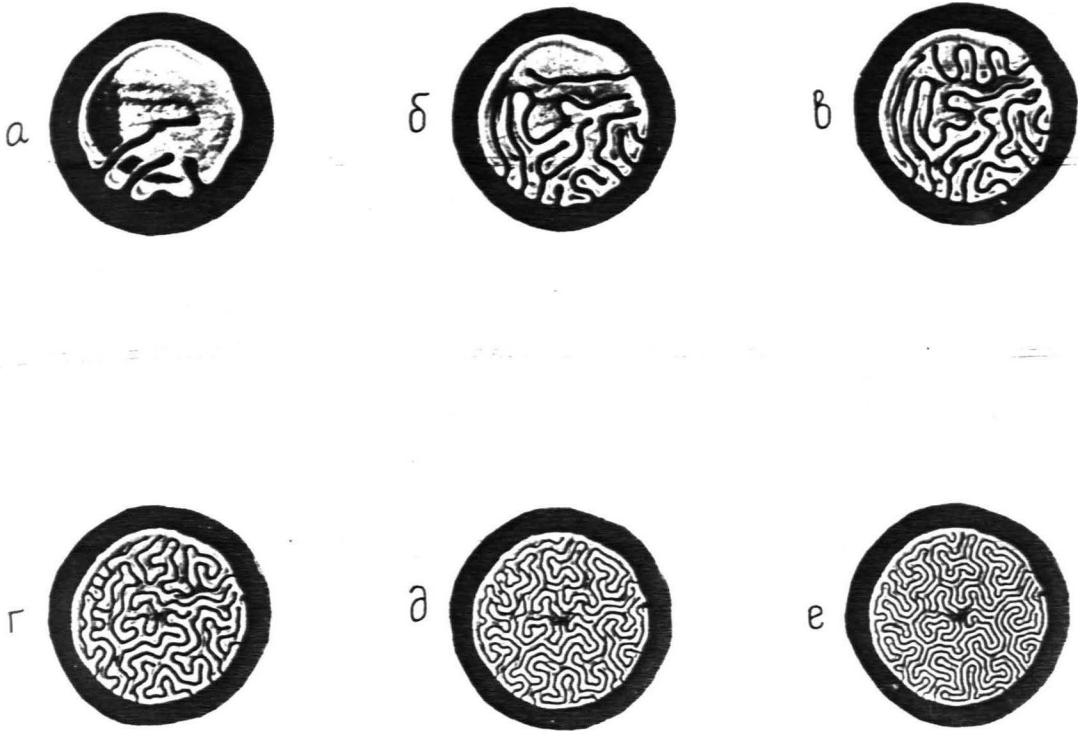


Рис. 3.4.5. Неустойчивость свободной поверхности полоски МЖ и последовательность равновесных конфигураций при квазистатическом увеличении поля, приводящая к образованию лабиринтной структуры МЖ. Напряженность поля увеличивается в направлении от "а" к "е".

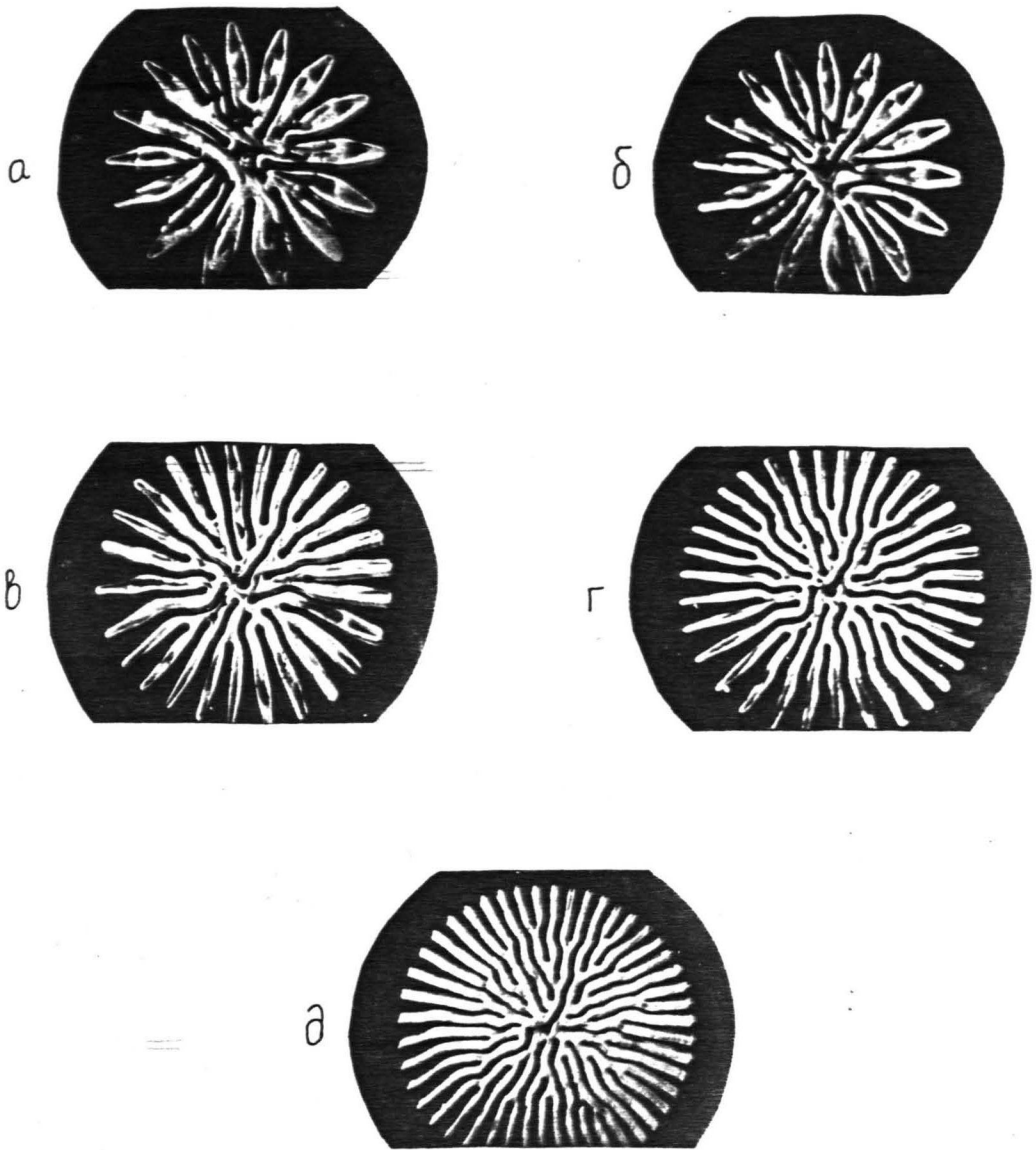


Рис. 3.4.6. Неустойчивость свободной поверхности полоски МЖ в неоднородном магнитном поле. С увеличением напряженности поля и его градиента число языков МЖ растет. Напряженность поля увеличивается в направлении от "а" к "д".

3.5. Устойчивость свободной поверхности НЖ в вертикальных щелях

Представляет интерес рассмотрение влияния действия гравитационного поля на гидродинамические неустойчивости, обусловленные далекодействующими силами магнитного межчастичного взаимодействия. Для этого в настоящем разделе рассматриваются случаи прямолинейной горизонтальной свободной поверхности НЖ в вертикальной щели.

Пусть ось y декартовой системы координат направлена вертикально вверх, причем уравнение невозмущенной свободной поверхности имеет вид $y = 0$, а ось Z направлена поперечно щели. Пусть уравнение свободной поверхности в возмущенном состоянии имеет вид $y = \zeta(x)$, а слой НЖ бесконечно глубок. Тогда функционал энергии с точностью до постоянной может быть записан в виде

$$E = \omega h \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + \zeta'^2(x)} dx + \frac{1}{2} \rho g h \int_{-\infty}^{\infty} dx \zeta^2(x) + M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\zeta(x)} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\zeta(x')} dy' \times \\ \times \left(\left((x-x')^2 + (y-y')^2 \right)^{-1/2} - \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + h^2 \right)^{-1/2} \right). \quad (3.5.I)$$

Преобразуя выражение (3.5.I) аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, с точностью до членов II порядка малости по $\zeta(x)$ получается

$$E = \frac{1}{2} \omega h \int_{-\infty}^{\infty} \zeta'^2(x) dx + \frac{1}{2} \rho g h \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2(x) dx - \frac{1}{2} M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' (\zeta(x') - \zeta(x))^2 \times \\ \times \left(\left((x-x')^2 + (y-y')^2 \right)^{-1/2} - \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + h^2 \right)^{-1/2} \right).$$

Представляя возмущение свободной поверхности в виде интеграла Фурье, достаточное условие ее неустойчивости относительно

возмущений с волновым числом k получается в виде

$$\frac{1}{2} \sigma h k^2 + \frac{1}{2} \rho g h - 2M^2 \int_0^{\infty} (1 - \cos kt) (1/\sqrt{t^2} - 1/\sqrt{t^2+h^2}) dt < 0,$$

что для нейтральной кривой неустойчивости дает ($k_0^2 = \rho g / \sigma$)

$$\frac{\sigma}{2M^2 h} = \frac{2(\gamma + \ln(kh/2) + K_0(kh))}{(kh)^2 + (k_0 h)^2} \quad (3.5.2)$$

Неустойчивость данного вида, как это видно из представленных ниже фотографий, образно можно назвать гребенчатой.

При $kh \rightarrow \infty$ критическое магнитное число Бонда возрастает согласно закону $\sigma / 2M^2 h = 2 \ln kh / (kh)^2$, а при $kh \rightarrow 0$ согласно закону $\sigma / 2M^2 h = (kh)^2 \ln kh / 2(k_0 h)^2$. Таким образом, прямолинейная граница НЖ в вертикальной щели устойчива относительно коротко- и длинноволновых возмущений.

Нейтральные кривые, определяемые зависимостью (3.5.2), при некоторых значениях $k_0 h$ приведены на рис. 3.5.1. Рис. 3.5.1 показывает, что энергетически наиболее опасными в данном случае являются возмущения конечной длины волны, которая с увеличением $k_0 h$ уменьшается. Зависимость длины волны наиболее опасных возмущений от параметра $k_0 h$ графически представлена на рис. 3.5.2. Из данных, представленных на рис. 3.5.1 также видно, что с увеличением $k_0 h$ критическое магнитное число Бонда $M^2 h / \sigma$ развития неустойчивости увеличивается. Зависимость $M^2 h / \sigma$ от $k_0 h$ представлена на рис. 3.5.3.

Полученные выше асимптотические зависимости порогового магнитного числа Бонда от волнового числа моды возмущений показывают, что аналогично случаю неустойчивости капель и пузырьков существует ограниченная область толщин плоского слоя, в которой имеет место гребенчатая неустойчивость. Это иллюстрируется рис. 3.5.4, на котором показана зависимость критического значения параметра $\sqrt{\rho g \sigma} / M^2$ от толщины щели. Из данных, представленных на

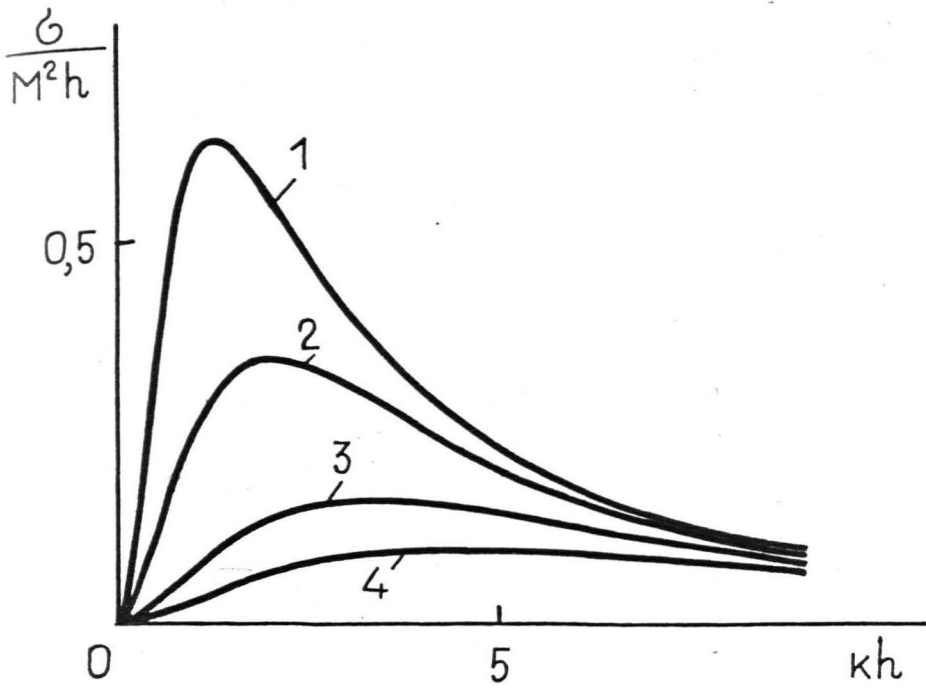


Рис. 3.5.1. Нейтральные кривые гребенчатой неустойчивости НЖ.

1 - $\kappa_0 h = 1$; 2 - $\kappa_0 h = 2$;

3 - $\kappa_0 h = 4$; 4 - $\kappa_0 h = 6$.

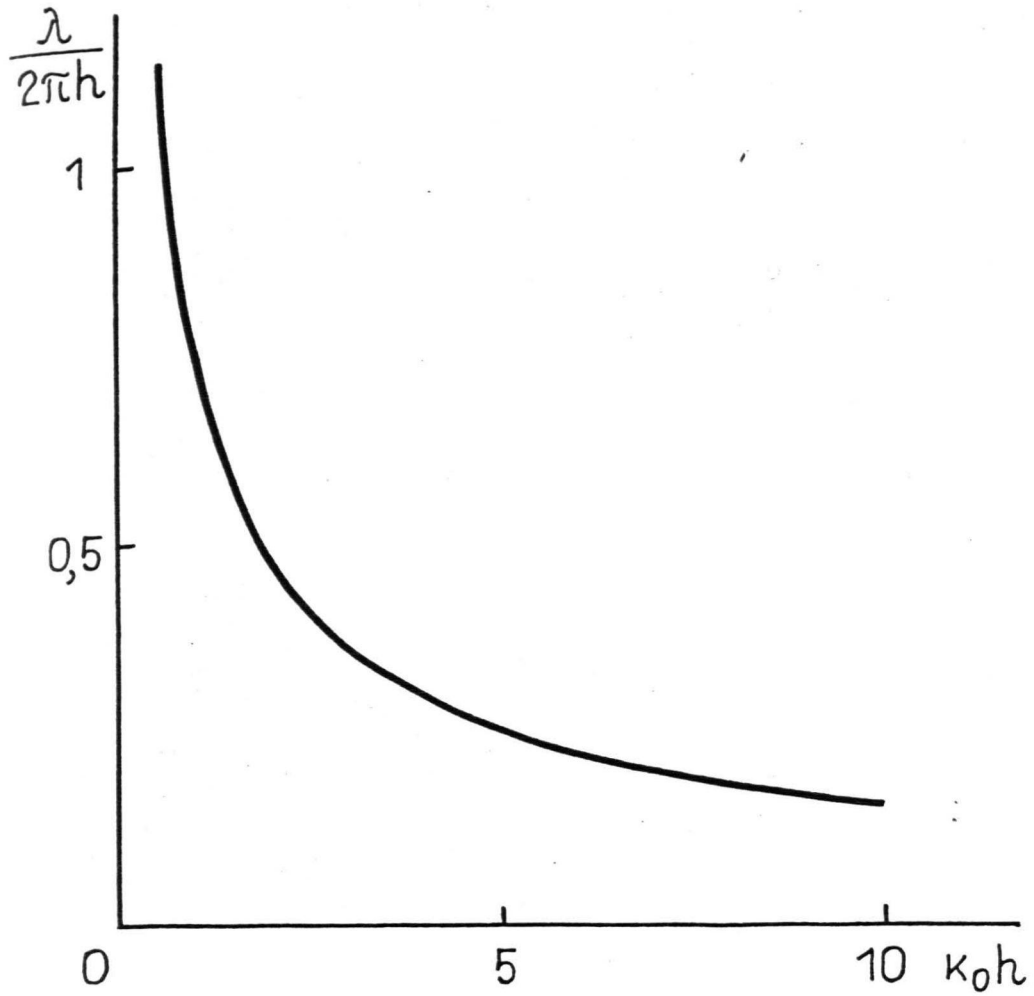


Рис. 3.5.2. Зависимость длины волны энергетически наиболее опасной моды возмущений свободной поверхности НЖ в вертикальной щели от гравитационного числа Бонда.

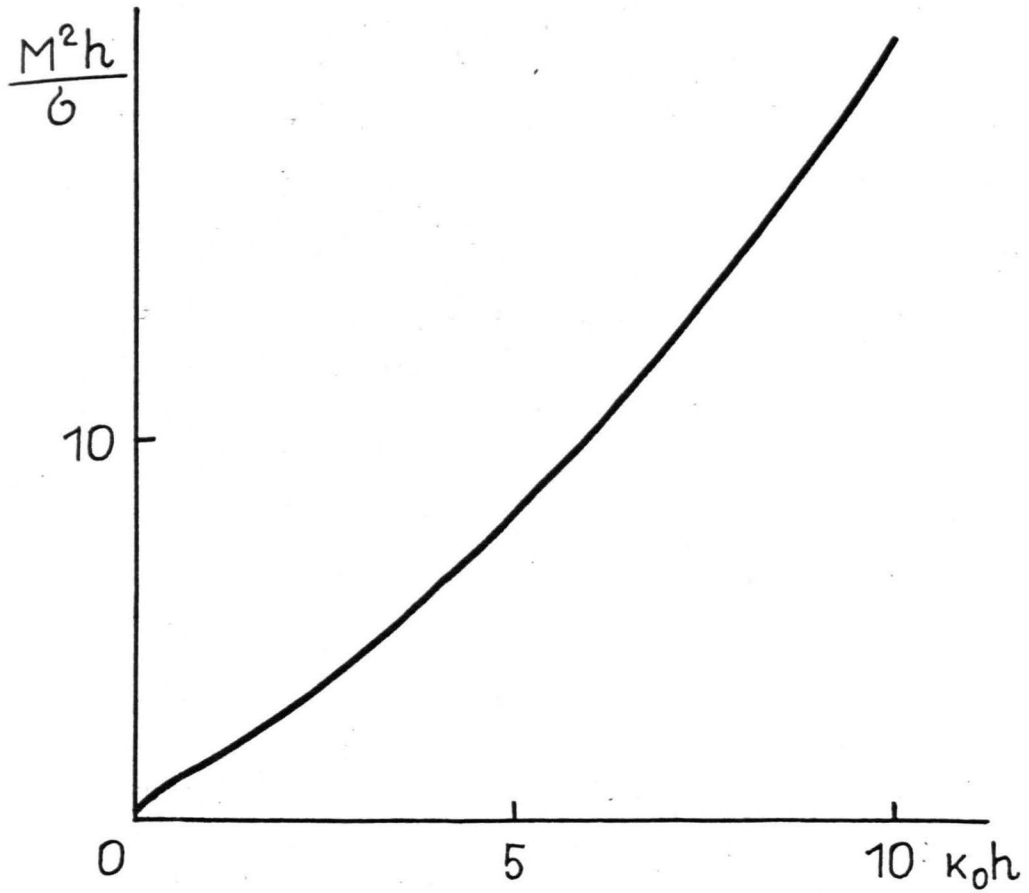


Рис. 3.5.3. Зависимость критического значения магнитного числа Бонда от гравитационного числа Бонда.

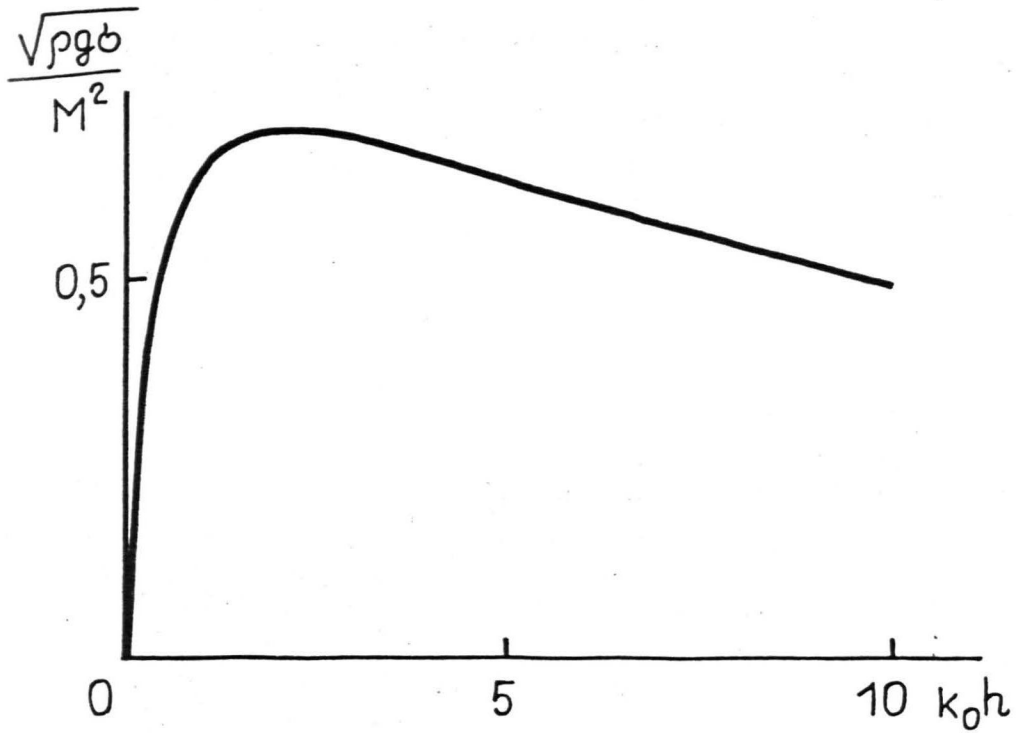


Рис. 3.5.4. Зависимость критического значения намагниченности НЖ, при которой развивается гребенчатая неустойчивость, от толщины щели.

рис. 3.5.4, следует, что минимально необходимая для развития гребенчатой неустойчивости намагниченность M удовлетворяет равенству $M^2 = 1,43 \sqrt{\rho g \sigma}$. Оценка ее величины для случая $\rho = 1 \text{ г/см}^3$ и $\sigma = 30 \text{ эрг/см}^2$ дает $M \cong 16 \text{ Гс}$, что меньше намагниченности насыщения имеющихся в настоящее время МЖ. Данные, представленные на рис. 3.5.4, существенны при определении толщин щели, в которых реально наблюдение гребенчатой неустойчивости на эксперименте.

Далее приводятся результаты ряда качественных экспериментов, подтверждающих основные теоретические выводы.

Для экспериментальной демонстрации развития гребенчатой неустойчивости используется МЖ на основе магнетита в воде с намагниченностью насыщения 25 Гс, которая в виде слоя толщиной порядка сантиметра заполняла щель длиной 90 мм и толщиной 2 мм. Поверх слоя МЖ с целью уменьшения разности плотностей и поверхностного натяжения наливается несмешивающийся с ней слой керосина.

Развитие периодической структуры при надкритических значениях напряженности поля показано на рис. 3.5.5 и 3.5.6. Стационарная конфигурация, показанная на рис. 3.5.6, развивается из конфигурации, показанной на рис. 3.5.5, при дальнейшем увеличении напряженности поля.

Относительно развития гребенчатой структуры, показанной на рис. 3.5.5, можно привести ряд численных оценок. Так зависимость, показанная на рис. 3.5.2, пользуясь значением периода гребенчатой структуры, показанной на рис. 3.5.5, порядка 3,9 мм, для отношения толщины щели к капиллярной длине дает значение порядка 4. Отсюда, считая разность плотностей МЖ и керосина равной $0,4 \text{ г/см}^3$, для поверхностного натяжения границы раздела керосина и МЖ получается значение около 1 эрг/см^2 . Столь малое значе-

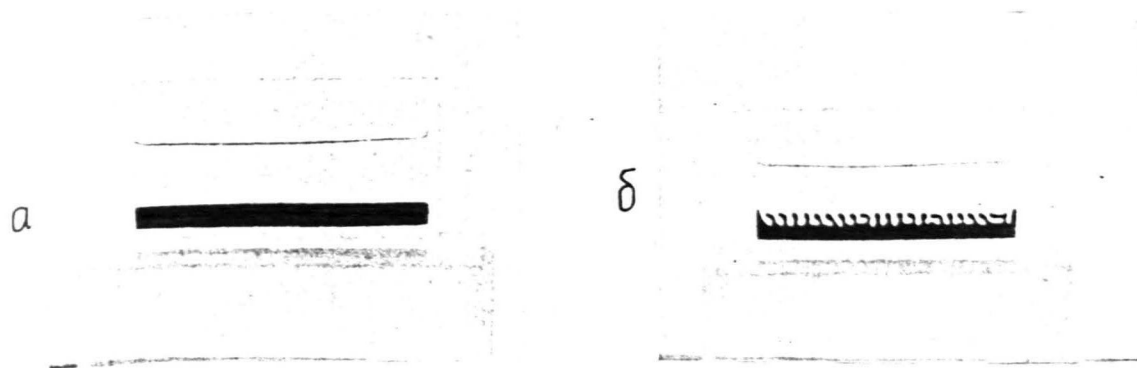


Рис. 3.5.5. Развитие периодических возмущений свободной поверхности МЖ в вертикальной щели. а – поле отсутствует; б – структура свободной поверхности в поле с напряженностью выше пороговой.

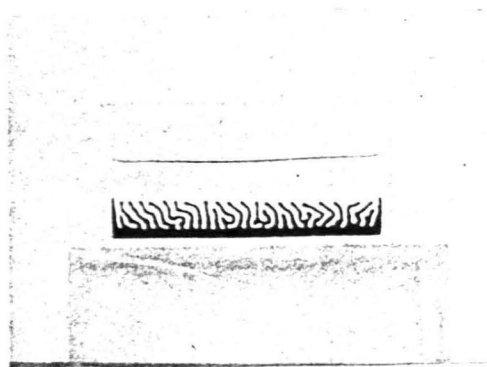


Рис. 3.5.6. Развитие конфигурации свободной поверхности МЖ при дальнейшем увеличении напряженности поля.



Рис. 3.5.7. Периодическая структура свободной поверхности МЖ в вертикальной щели при наличии неоднородного поля с градиентом напряженности, направленным вертикально вниз.



Рис. 3.5.8. Гребенчатая неустойчивость в сильно неоднородном поле. Заметно значительное уменьшение периода и амплитуды структуры.

ние поверхностного натяжения следует связывать с наличием ПАВ в коллоидальном растворе магнетита в воде. В качестве подкрепления полученного значения можно указать на работу [150], где поверхностное натяжение границы раздела МЖ и водных растворов ПАВ исследуется путем изучения колебаний капель и где получено значение, близкое к указанному выше.

Полученное значение капиллярной постоянной и зависимость критического магнитного числа Бонда (3.5.2) позволяет оценить значение намагниченности МЖ в момент зарождения гребенчатой структуры как 5,5 Гс, что является вполне приемлемым ее значением в поле возникновения гребенчатой неустойчивости.

На рис. 3.5.7-8 наглядно показано, что при помещении кюветы в неоднородном поле с градиентом, направленным вниз, период гребенчатой структуры уменьшается по сравнению со случаем однородного поля. Рост напряженности неоднородного поля, как это наглядно иллюстрируется рис. 3.5.7-8, приводит к уменьшению амплитуды гребенчатой структуры и ее периода. При больших напряженностях поля гребенчатая структура исчезает вообще. Это находится в качественном согласии с показанным на рис. 3.5.2 уменьшением длины волны критических возмущений и ростом критического значения B_m (рис. 3.5.3) при увеличении эффективного ускорения свободного падения.

3.6. Гребенчатая неустойчивость в плоской щели мягкого ферромагнетика

В настоящем разделе рассматривается влияние магнитной проницаемости окружающего вертикальную щель материала на развитие гребенчатой неустойчивости. Подобная постановка вопроса представляет и определенный практический интерес, так как в ряде

устройств на основе МЖ (герметизаторы, громкоговорители и др.) последняя находится в окружении магнитных тел. При этом результаты предыдущих разделов показывают, что проблема удержания МЖ в рабочей зоне при градиентах внешнего поля меньших M/h не представляется тривиальной вследствие развития МГД-неустойчивости свободной поверхности. На это, в частности, указывают и ряд трудностей, возникающих при создании жидких контактов на основе МЖ для средств ультразвуковой диагностики [146].

Как показано в разделе 3.1, функционал энергии НЖ в вертикальной щели магнитного материала с магнитной проницаемостью μ , опуская несущественные постоянные, может быть выражен в следующем виде:

$$E = \rho h \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + \zeta'^2(x)} dx + M(H_1) \int_S \psi dS + \rho g h \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\zeta(x)} y dy, \quad (3.6.1)$$

здесь H_1 — напряженность поля в зазоре при отсутствии в нем НЖ, ψ — потенциал собственного поля \vec{H}_p ($\vec{H}_p = -\nabla \psi$) НЖ при $z = h$.

Последний может быть выражен через функцию Грина G_j ($j = 1, 2, 3$) — потенциал единичного точечного заряда в плоской щели материала с проницаемостью μ в следующем виде (область 1 — НЖ, 2 — $z < 0$, 3 — $z > h$)

$$\psi_j = M \int_S G_j(x, y, z; x', y', z' = h) dx' dy' - M \int_S G_j(x, y, z; x', y', z' = 0) dx' dy',$$

где интегрирование происходит по участку границы щели, смоченному НЖ.

Найдем функцию Грина G_j . Пусть единичный точечный заряд имеет координаты (x', y', z') , где $0 < z' < h$. Плоскостью $z = z'$ область I разделяется на части a, b . Тогда, вводя новую декартову систему координат с началом координат в точке $(x', y', 0)$, функцию Грина находим как решение уравнения

Лапласа в областях 3, а, б, 2 при следующих граничных условиях

$$z = h \quad G_3 = G_a; \quad \mu \frac{\partial G_3}{\partial z} = \frac{\partial G_a}{\partial z};$$

$$z = z' \quad G_a = G_b; \quad -\frac{\partial G_a}{\partial z} + \frac{\partial G_b}{\partial z} = 4\pi \delta(x) \delta(y);$$

$$z = 0 \quad G_b = G_2; \quad \frac{\partial G_b}{\partial z} = \mu \frac{\partial G_2}{\partial z}.$$

Находя решение уравнений Лапласа в виде

$$G_j = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \tilde{G}_j(z, z'; \kappa; p) \exp(i\kappa x) \exp(ip y) d\kappa dp \quad (j=2, 3, a, b)$$

для \tilde{G}_j получаем ($\gamma = \sqrt{\kappa^2 + p^2}$)

$$\tilde{G}_3 = C_1(z') \exp(-\gamma z); \quad \tilde{G}_a = A_1(z') \exp(\gamma(z-z')) + A_2(z') \exp(-\gamma(z-z'));$$

$$\tilde{G}_b = B_1(z') \exp(\gamma(z-z')) + B_2(z') \exp(-\gamma(z-z')); \quad (3.6.2)$$

$$\tilde{G}_2 = C_2(z') \exp \gamma z.$$

Для функций $A_i(z')$, $B_i(z')$ ($i = 1, 2$) из системы граничных условий получается

$$A_1 = -\frac{2\pi(\mu-1) e^{-2\gamma(h-z')} \left(1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right) e^{-2\gamma z'}\right)}{\gamma(\mu+1) \left(1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^2 e^{-2\gamma h}\right)};$$

$$A_2 = \frac{2\pi \left(1 - \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2\gamma z'}\right)}{\gamma \left(1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^2 e^{-2\gamma h}\right)};$$

(3.6.3)

$$B_1 = \frac{2\pi \left(1 - \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2\gamma(h-z')}\right)}{\gamma \left(1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right) e^{-2\gamma h}\right)};$$

$$B_2 = -\frac{2\pi(\mu-1) e^{-2\gamma z'} \left(1 - \frac{\mu-1}{\mu+1} e^{-2\gamma(h-z')}\right)}{\gamma(\mu+1) \left(1 - \left(\frac{\mu-1}{\mu+1}\right)^2 e^{-2\gamma h}\right)};$$

Полученное выражение для функции Грина используем для получения второй вариации функционала энергии. Энергия размагничивающего поля выражается в виде

$$E_p = M^2(H_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' (G(x, y, h; x', y', h) - G(x, y, h; x', y', 0)).$$

Отсюда, выполняя преобразования, аналогичные 3.4 для второй вариации функционала (3.6.1) $\delta^2 E$ получим

$$\delta^2 E = \frac{1}{2} \sigma h \int_{-\infty}^{\infty} \zeta'^2(x) dx + \frac{1}{2} \rho g h \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2(x) dx - \frac{1}{2} M^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' (\zeta(x') - \zeta(x))^2 (G(x, 0, h; x', 0, h) - G(x, 0, h; x', 0, 0)).$$

Если представить возмущение свободной поверхности в виде интеграла Фурье, то для условия устойчивости свободной поверхности относительно возмущений с волновым числом K получаем ($K_0^2 = \rho g / \sigma$, $G(x, y, z; x', y', z') = G(x - x'; y, z; y', z')$)

$$\frac{\sigma}{M^2 h} > \frac{2 \int_{-\infty}^{\infty} dt (1 - \cos kt) (G(t; 0, h; 0, h) - G(t; 0, h; 0, 0))}{(kh)^2 + (K_0 h)^2}$$

Пользуясь полученными выражениями для функции Грина (3.6.2) и (3.6.3) для нейтральной кривой гребенчатой неустойчивости отсюда имеем ($\lambda = (\mu - 1) / (\mu + 1)$)

$$\frac{\sigma}{2M^2 h} = \frac{4}{\mu + 1} \int_0^{\infty} dp \left(\frac{(1 - e^{-pkh})}{p(1 - \lambda e^{-pkh})} - \frac{(1 - e^{-\sqrt{p^2 + 1} kh})}{\sqrt{p^2 + 1} (1 - \lambda e^{-\sqrt{p^2 + 1} kh})} \right) \quad (3.6.4)$$

При $\lambda = 0$, что соответствует случаю рассмотренному в 3.4, используя соотношение $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2 + 1} kh} / \sqrt{p^2 + 1} dp = K_0(kh)$

(3.6.4) дает $\sigma / 2M^2 h = 2(K_0(kh) + \ln(kh/2) + \gamma) / ((kh)^2 + (K_0 h)^2)$ т.е. результат (3.5.2).

Полученная формула (3.6.4) позволяет рассмотреть влияние магнитной проницаемости, окружающего вертикальную щель материа-

ла, на развитие гребенчатой неустойчивости. Интеграл в соотношении (3.6.4) при этом рассчитывается численно.

На рис. 3.6.1 показан ряд нейтральных кривых гребенчатой неустойчивости в магнитном материале при $K_0 h = 2$. Из рис. 3.6.1 видно, что наличие магнитного окружения приводит к стабилизации неустойчивости. Зависимость критического значения параметра $\phi / M^2 h$ от магнитной проницаемости μ представлена на рис. 3.6.2. Рис. 3.6.1 также показывает, что одновременно с ростом критического магнитного числа Бонда происходит смещение длины волны наиболее опасной моды в длинноволновую область. Зависимость длины волны наиболее опасных возмущений от магнитной проницаемости μ представлена на рис. 3.6.2.

Интересный вывод о характере влияния магнитной проницаемости окружения вертикальной щели получается в случае, когда магнитный материал расположен по одну сторону вертикальной щели. Метод отражений для функции Грина в области щели дает

$$G(x, y, z; x', y', z') = \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right)^{-1/2} - \frac{\mu-1}{\mu+1} \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'-2h)^2 \right)^{-1/2},$$

что в предельном случае $\mu \rightarrow \infty$ для энергии размагничивающего поля позволяет получить

$$E_p = \frac{1}{2} M^2 \int dS \int dS' \left(\left((x-x')^2 + (y-y')^2 \right)^{-1/2} - \left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (2h)^2 \right)^{-1/2} \right).$$

Нейтральная кривая гребенчатой неустойчивости в этом случае получается в виде

$$\frac{\phi}{2M^2 2h} = \frac{2 \left(\gamma + \ln \frac{2kh}{2} + K_0(2kh) \right)}{(k2h)^2 + (K_0 2h)^2}, \quad (3.6.5)$$

что соответствует результату (3.5.2) при увеличении толщины слоя вдвое. Это обусловлено экранизацией фиктивных магнитных зарядов на границе щели с магнитным материалом, в результате чего энергия собственного поля определяется энергией взаимодействия маг-

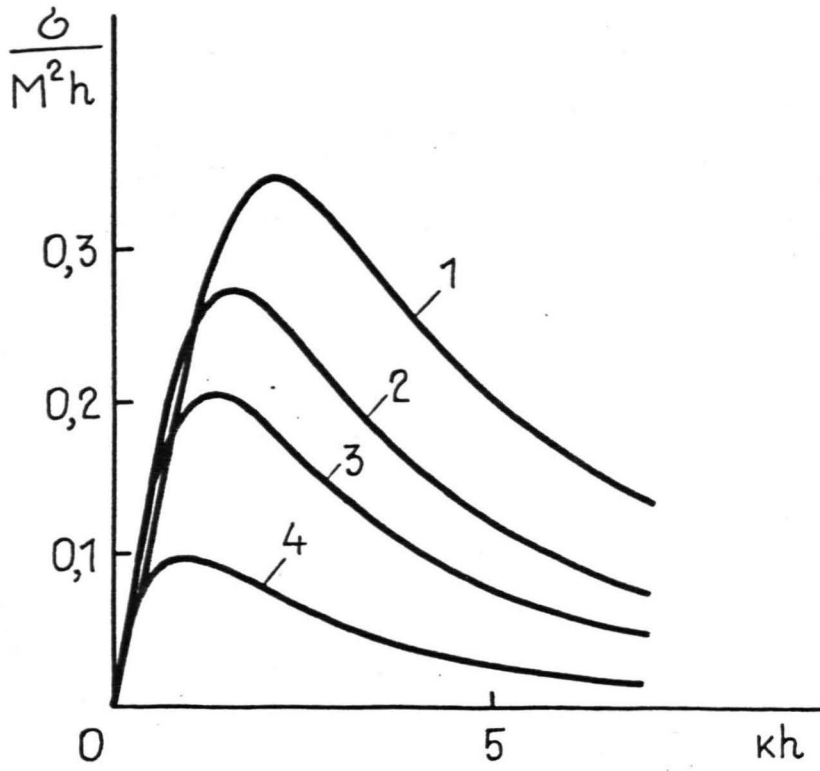


Рис. 3.6.1. Нейтральные кривые гребенчатой неустойчивости НЖ в вертикальной щели мягкого ферромагнетика.

1 - $\lambda = 0$; 2 - $\lambda = 0,6$;

3 - $\lambda = 0,8$; 4 - $\lambda = 0,95$.

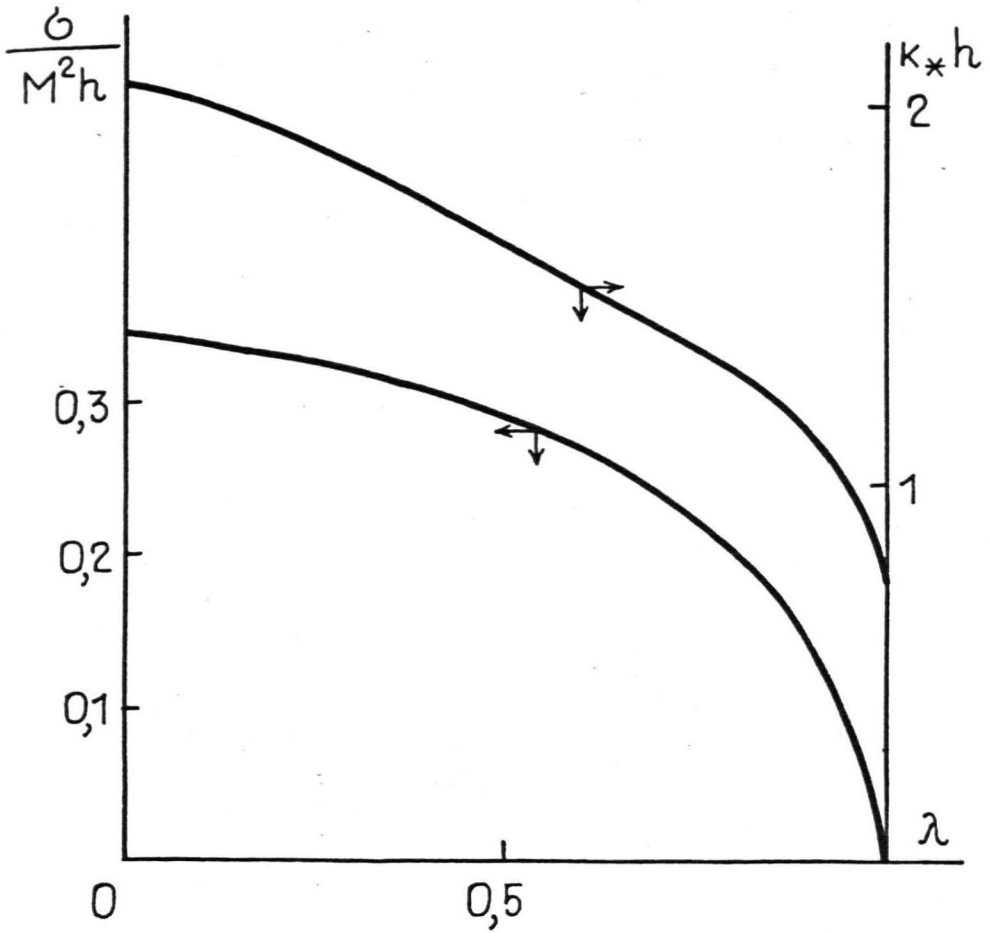


Рис. 3.6.2. Зависимость порогового значения магнитного числа Бонда и длины волны критической моды гребенчатой неустойчивости в вертикальной щели мягкого ферромагнетика от его магнитной проницаемости ($\lambda = (\mu - 1) / (\mu + 1)$).

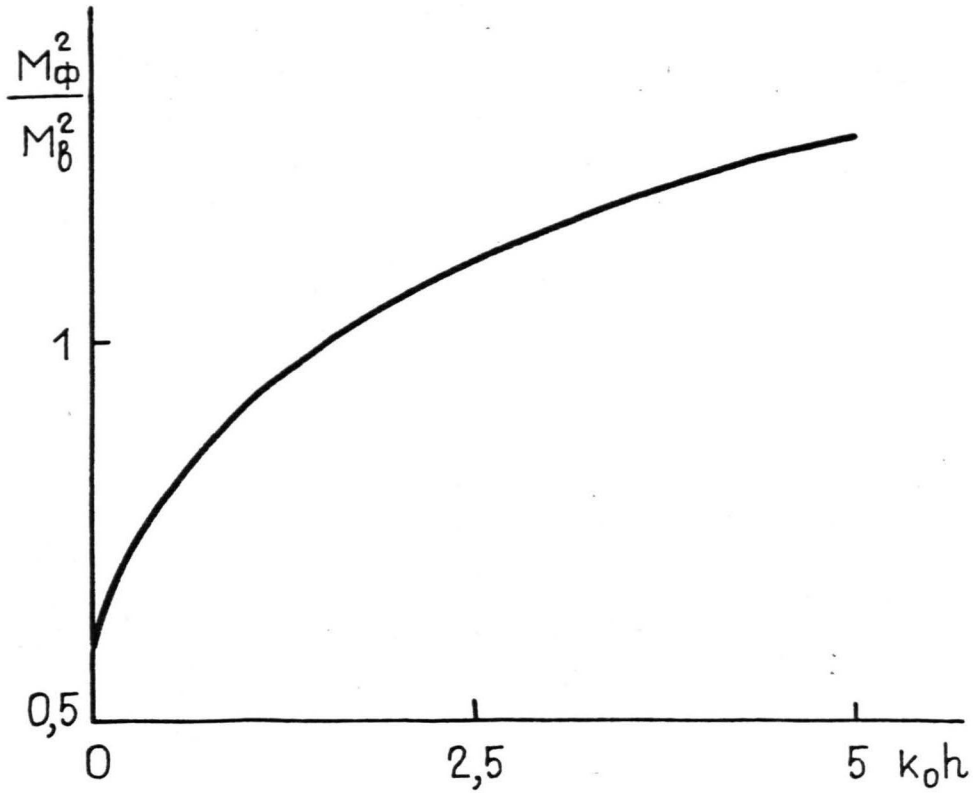


Рис. 3.6.3. Пороговое значение намагниченности M_ϕ , при котором развивается гребенчатая неустойчивость в вертикальной щели с одной стороны окруженной мягким ферромагнетиком ($\mu \rightarrow \infty$) M_β - то же для щели в немагнитном материале.

нитных зарядов на границе щели, граничащей с вакуумом, и их отражения относительно границы мягкого ферромагнетика. Так как расстояние между данными магнитными зарядами равняется $2h$, то отсюда и виден смысл полученного результата.

Выражение (3.6.5) для отношения критической намагниченности M_{ϕ} НЖ развития гребенчатой неустойчивости при одностороннем окружении щели мягким ферромагнетиком к значению M_{β} , соответствующему случаю нахождения щели в немагнитном окружении позволяет получить $M_{\phi}^2 / M_{\beta}^2 = Bm_{*}(k_0 h) / 2Bm_{*}(2k_0 h)$

Графически зависимость M_{ϕ}^2 / M_{β}^2 представлена на рис. 3.6.3, из которого видно, что влияние ферромагнетика, расположенного с одной стороны вертикальной щели, на развитие гребенчатой неустойчивости может быть двояким. При достаточно малых $k_0 h (k_0 h < 1,5)$ он дестабилизирует НЖ, а при больших, наоборот, стабилизирует. Подобное влияние ферромагнетика связано с немонотонной зависимостью порога развития гребенчатой неустойчивости от толщины щели, которая показана на рис. 3.5.4.

3.7. Бифуркации равновесных конфигураций

намагничивающейся жидкости в вертикальной щели

В разделе 3.5 показано, что прямолинейная горизонтальная граница НЖ в вертикальной щели в поперечном ей поле становится неустойчивой относительно развития периодических возмущений. Принципиальным является вопрос о существовании и характере возникновения нового равновесного состояния свободной поверхности НЖ. В настоящем разделе исследование этого вопроса производится путем изучения характера ветвления решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения свободной поверхности НЖ в вертикальной щели.

Условие равновесия свободной поверхности НЖ выражается в виде равенства нулю первой вариации функционала энергии относительно смещений свободной поверхности. Оно, производя обезмеривание координат по толщине щели h , дает нелинейное интегро-дифференциальное уравнение следующего вида ($K_{0*}^2 = \rho g h^2 / \sigma$; $Bm = 2M^2 h / \sigma$)

$$-\frac{\zeta''}{(1+\zeta'^2)^{3/2}} + K_{0*}^2 \zeta + Bm \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\zeta(x')-\zeta(x)} dt \left(((x-x')^2+t^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+t^2+1)^{-1/2} \right) = \text{const.} \quad (3.7.1)$$

Для случая малых возмущений ζ уравнение (3.7.1) приводится к линейному интегро-дифференциальному уравнению

$$-\zeta'' + K_{0*}^2 \zeta + Bm \int_{-\infty}^{\infty} dx' (\zeta(x') - \zeta(x)) \left(((x-x')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+1)^{-1/2} \right) = \text{const},$$

которое обладает нетривиальными решениями $\cos kx$ и $\sin kx$ при выполнении условия $1/Bm = 2J(k)/(k^2 + K_{0*}^2)$;

$$J(k) = \gamma + \ln(k/2) + K_0(k).$$

В 3.5 показано, что нейтральная кривая гребенчатой неустойчивости (3.5.2) обладает максимумом, который соответствует волновому числу наиболее опасных возмущений K_0 . Для последнего справедливо равенство

$$1/(K_0^2 + K_{0*}^2) = J'(K_0)/2K_0 J(K_0).$$

Критическое значение магнитного числа Бонда, соответствующее волновому числу K_0 , обозначим как Bm_* .

Отвечающее при Bm_* решение находится в результате его разложения по малому параметру a - амплитуде критической моды возмущений с волновым вектором K_0 , в следующем виде

$$\zeta = ay_1 + a^2y_2 + a^3y_3 + a^4y_4 + a^5y_5 + \dots,$$

Аналогично в ряд разлагается функция, обратная функции $a = F(Bm)$

$$Bm = Bm_* + \alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \alpha_3 a^3 + \alpha_4 a^4 + \dots$$

Неизвестные постоянные α_i определяются из условий разрешимости уравнений для последовательных приближений y_i .

Разлагая подынтегральную функцию в уравнении (3.7.1) в ряд Маклорена и интегрируя его почленно, интегро-дифференциальное уравнение (3.7.1), с учетом членов до 5 порядка по ζ включительно, принимает следующий вид

$$\begin{aligned} & -\zeta'' + \frac{3}{2}\zeta''\zeta'^2 - \frac{15}{8}\zeta''\zeta'^4 + K_{0*}^2 \zeta + Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(((x-x')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+1)^{-1/2} \right) \times \\ & \times (\zeta(x') - \zeta(x)) + \frac{1}{6} Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(-((x-x')^2)^{-3/2} + ((x-x')^2+1)^{-3/2} \right) (\zeta(x') - \zeta(x))^3 + \\ & + \frac{3}{40} Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(((x-x')^2)^{-5/2} - ((x-x')^2+1)^{-5/2} \right) (\zeta(x') - \zeta(x))^5. \end{aligned}$$

Далее последовательно рассматриваются члены уравнения с первого по пятый порядок относительно a включительно.

1 порядок

$$-y_1'' + K_{0*}^2 y_1 + Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(((x-x')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+1)^{-1/2} \right) (y_1(x') - y_1(x)) = const,$$

что дает $y_1 = b_1 \cos k_0 x + b_2 \sin k_0 x$.

Вследствие трансляционной инвариантности можно ограничиться рассмотрением случая $b_2 = 0$. Постоянную b_1 полагаем равной 1 по соглашению.

2 порядок

$$\begin{aligned} & -y_2'' + K_{0*}^2 y_2 + Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(((x-x')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+1)^{-1/2} \right) (y_2(x') - y_2(x)) + \\ & + \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(((x-x')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+1)^{-1/2} \right) (y_1(x') - y_1(x)) = const. \end{aligned}$$

Коэффициент α_1 определяется из требований разрешимости линейного интегро-дифференциального уравнения для y_2 , которое дает $\alpha_1 = 0$.

$$\begin{aligned}
 & \text{3 порядок} \\
 & -y_3'' + \frac{3}{2}y_1''y_1'^2 + k_0^2 y_3 + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(((x-x')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+1)^{-1/2} \right) \times (y_1(x') - \\
 & - y_1(x)) + Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(((x-x')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+1)^{-1/2} \right) (y_3(x') - y_3(x)) - \\
 & - \frac{1}{6} Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' \left(((x-x')^2)^{-3/2} - ((x-x')^2+1)^{-3/2} \right) (y_1(x') - y_1(x))^3 \neq 3.7.2 \\
 & = \text{const.}
 \end{aligned}$$

α_2 находится из условия отсутствия в неоднородной части уравнения (3.7.2) членов, пропорциональных $\cos k_0 x$. В результате для α_2 получается $\alpha_2 = -Bm_* g(k_0)$,

где

$$g(k_0) = \left(\frac{3}{2} k_0^3 \mathcal{E}(k_0) + 3 - 2k_0^2 \ln 2 - 4k_0 K_1(k_0) + 2k_0 K_1(2k_0) \right) / 8\mathcal{E}(k_0).$$

График зависимости $g(k_0)$ показан на рис. 3.7.1, откуда видно, что $\alpha_2 < 0$. Это показывает существование нетривальной конфигурации в докритической области, которая, однако, как показывают простые аргументы, основанные на анализе энергии, является неустойчивой. Для нахождения устойчивой в докритической области ветви решения необходимо обратиться к вычислению дальнейших коэффициентов разложения α_3 и α_4 .

Уравнение (3.7.2) для y_3 дает $y_3 = A_3 \cos 3k_0 x$, где $A_3 = -\left(3\mathcal{E}'(k_0)k_0^3 + p(k_0) \right) / 8q(k_0)$;

$$p(k_0) = \left(k_0^2 (4 \ln 2 - 3 \ln 3) - \frac{2}{3} - 4k_0 K_1(2k_0) + 2k_0 K_1(3k_0) + 2k_0 K_1(k_0) \right)$$

$$q(k_0) = 8k_0 \mathcal{E}'(k_0) + 2\mathcal{E}(k_0) - 2\mathcal{E}(3k_0).$$

4 порядок

Условие разрешимости дает $\alpha_3 = 0$ и $y_4 = 0$.

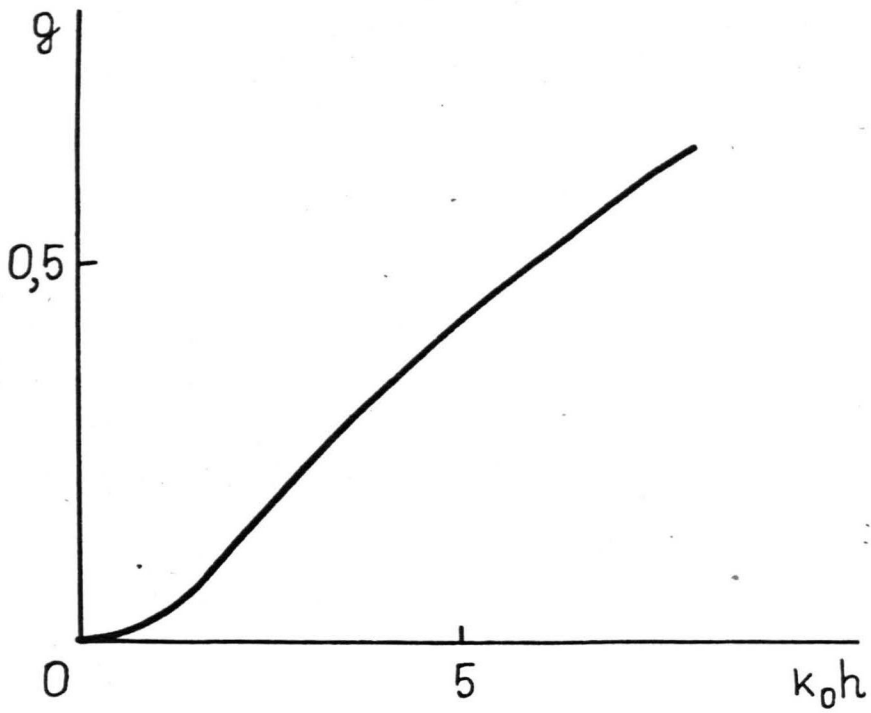


Рис. 3.7.1. Зависимость коэффициента ϱ от волнового числа критических возмущений.

5 порядок

$$\begin{aligned}
 & -y_5'' + \frac{3}{2}y_1''y_3'y_1' + \frac{3}{2}y_3''y_1'^2 - \frac{15}{8}y_1''y_1'^4 + Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' (((x-x')^2)^{-1/2} - \\
 & - ((x-x')^2+1)^{-1/2}) (y_5(x') - y_5(x) + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' (((x-x')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+1)^{-1/2}) \times \\
 & \times (y_3(x') - y_3(x)) + \alpha_4 \int_{-\infty}^{\infty} dx' (((x-x')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2+1)^{-1/2}) (y_1(x') - y_1(x)) + \\
 & + \frac{1}{2} Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' (-((x-x')^2)^{-3/2} + ((x-x')^2+1)^{-3/2}) (y_1(x') - y_1(x))^2 (y_3(x') - \\
 & - y_3(x)) + \frac{1}{6} \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx' (-((x-x')^2)^{-3/2} + ((x-x')^2+1)^{-3/2}) (y_1(x') - y_1(x))^3 + \\
 & + \frac{3}{40} Bm_* \int_{-\infty}^{\infty} dx' (((x-x')^2)^{-5/2} - ((x-x')^2+1)^{-5/2}) (y_1(x') - y_1(x))^5.
 \end{aligned}$$

Условие разрешимости уравнения для y_5 имеет вид

$$\begin{aligned}
 \alpha_4 = \frac{Bm_*}{2J(k_0)} \left(-\frac{3}{64} (3J'(k_0)k_0^3 + p(k_0))^2 / q(k_0) + \frac{1}{32} (15k_0^5 J'(k_0) / 2 - \right. \\
 \left. - 6r(k_0)) + \frac{1}{4} g(k_0)h(k_0) \right) = Bm_* S(k_0),
 \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 r(k_0) = \left(\frac{27}{16} \ln 3 - 2 \ln 2 \right) k_0^4 - 10/3 + 5/2 k_0^2 K_2(k_0) - 4k_0^2 K_2(2k_0) + \\
 + \frac{3}{2} k_0^2 \times K_2(3k_0), h(k_0) = 3 - 2k_0^2 \ln 2 - 4k_0 K_1(k_0) + 2k_0 K_1(2k_0).
 \end{aligned}$$

Графически зависимость $S(k_0)$ представлена на рис. 3.7.2.

В результате уравнение для определения амплитуды гребенчатой структуры имеет вид

$$Bm = Bm_* (1 - g(k_0)a^2 + S(k_0)a^4). \quad (3.7.3)$$

Так как $S(k_0) > 0$, то уравнение (3.7.3) показывает существование устойчивой гребенчатой структуры в докритической области значений магнитного числа Бонда. Вводя $a^2 = g(k_0)x^2 / S(k_0)$ и

$\varepsilon = g^2(k_0)/4S(k_0)$, уравнение (3.7.3) запишем в виде

$$(B_m/B_{m*} - 1)/\varepsilon = -4x^2(1-x^2) \quad (3.7.4)$$

Графически зависимость (3.7.4) показана на рис. 3.7.3.

Рис. 3.7.3 показывает, что характер ветвления решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения свободной поверхности НЖ в вертикальной щели по терминологии книги [151] соответствует односторонней субкритической бифуркации. Для подобного характера ветвления решений характерен гистерезис и жесткий характер (скачкообразный) возникновения новой равновесной конфигурации. На рис. 3.7.3 этот гистерезис изображен стрелками.

Величина скачка амплитуды A гребенчатой структуры при ее возникновении в момент потери устойчивости плоского состояния свободной поверхности относительно бесконечно малых возмущений, как показывает соотношение (3.7.4), равно

При малых k_0 для функций $g(k_0)$, $S(k_0)$ и $\varepsilon(k_0)$ справедливы следующие асимптотические зависимости

$$g(k_0) \cong \frac{k_0^2 (\ln 2 - 9/16)}{2 \ln 1/k_0}; S(k_0) \cong 0,073 k_0^4 / \ln 1/k_0; \varepsilon(k_0) = \frac{0,015}{\ln 1/k_0}$$

Графически зависимость $\sqrt{g(k_0)/S(k_0)}$ от k_0 приводится на рис. 3.7.4. Согласно представленной на рис. 3.7.4 зависимости, амплитуда гребенчатой структуры с уменьшением длины волны критических возмущений уменьшается, что соответствует результатам эксперимента.

В настоящее время экспериментальных данных относительно характера возникновения и исчезновения гребенчатой структуры не имеется. Полученные в настоящем разделе результаты позволяют дать ряд количественных характеристик ожидаемого гистерезиса возникновения и исчезновения структуры. Величина гистерезиса

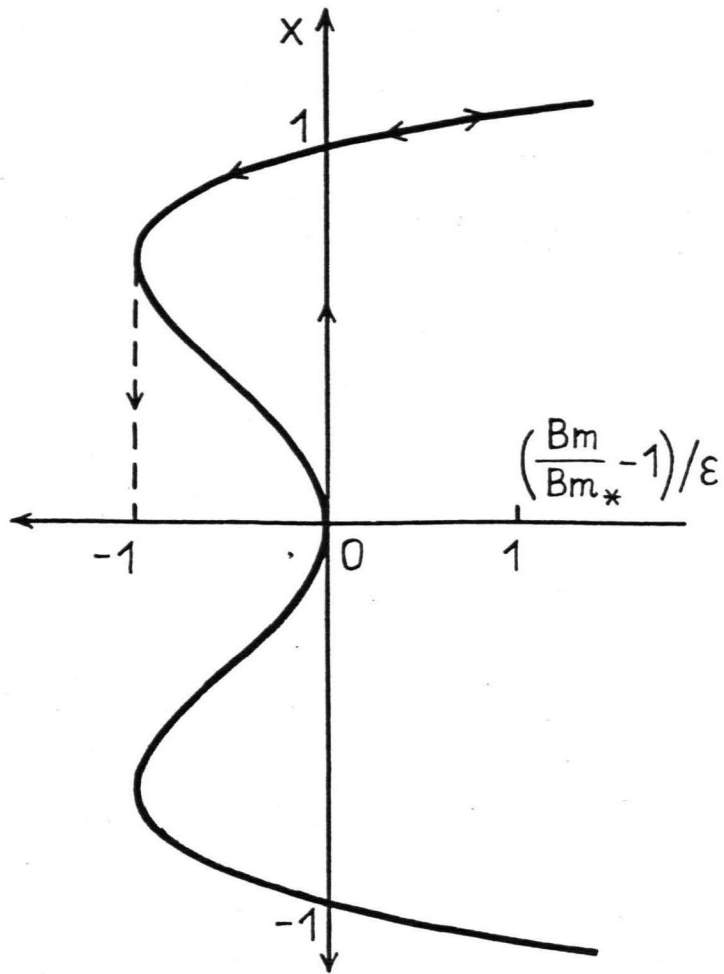


Рис. 3.7.3. Характер зависимости амплитуды гребенчатой структуры от магнитного числа Бонда.

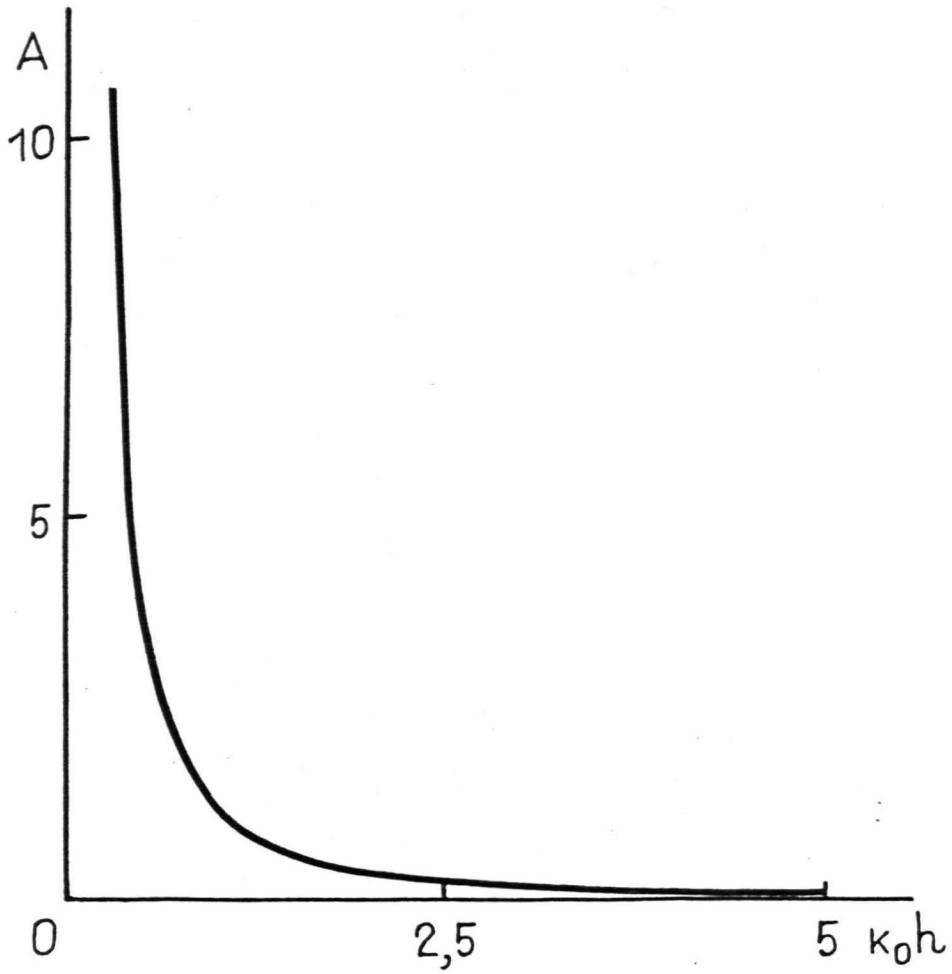


Рис. 3.7.4. Зависимость амплитуды гребенчатой структуры в момент скачкообразного ее возникновения от волнового числа критических возмущений.

намагниченности $H_{\text{Ж}}$, соответствующих возникновению и исчезновению структуры, определяется величиной ε . Однако этот гистерезис мал и для значения $K_0 h = 4$ составляет величину порядка 0,1%. Значение амплитуды гребенчатой структуры в момент ее исчезновения равно $A/\sqrt{2}$, т.е. порядка 70% от ее величины в момент скачкообразного возникновения структуры. Тут необходимо отметить, что на ожидаемый гистерезис существенное влияние могут оказывать поверхностные явления на границах щели (гистерезис смачивания), которые в рассматриваемой модели не учитываются.

ВЫВОДЫ

1. Показано, что симметричные равновесные фигуры $H_{\text{Ж}}$ в плоских слоях при наличии магнитного поля, поперечного слою, теряют устойчивость относительно нарушающих симметрию возмущений. Найдена область значений намагниченности $H_{\text{Ж}}$ в зависимости от объема капли, ее поверхностного натяжения и толщины плоского слоя, в которой осесимметричная форма капли неустойчива. Показано, что при данной намагниченности $H_{\text{Ж}}$, большей определенного критического значения, существует ограниченная область толщин щели, в которой капля неустойчива относительно неосесимметричных возмущений. Основные теоретические заключения подтверждены в эксперименте.

2. Доказано, что поведение капли и пузырька в неограниченном плоском слое $H_{\text{Ж}}$ в поперечном слою поле является эквивалентным. Это заключение подтверждено в эксперименте.

3. Показано, что прямолинейная полоска $H_{\text{Ж}}$ в плоской щели при наличии поперечного ей поля неустойчива относительно изгибных деформаций и деформаций типа перетяжек. Развитие изгибных деформаций подтверждено в эксперименте. Сформулировано представле-

ние о механизме образования лабиринтных структур НЖ в плоских щелях, заключающегося в проникновении в немагнитную среду языков НЖ, образуемых в результате развития гидродинамической неустойчивости поверхности раздела НЖ с немагнитной средой. Дана иллюстрация действия данного механизма в эксперименте.

4. Показано, что горизонтальная свободная поверхность НЖ в вертикальной щели при наличии поперечного ей поля теряет устойчивость относительно периодических возмущений конечной длины волны, которая уменьшается с ростом эффективного ускорения свободного падения. Эти заключения подтверждены экспериментально. Найдено, что в предельных случаях узкой и широкой щелей свободная поверхность НЖ в вертикальной щели устойчива. Исследовано развитие данной неустойчивости в щели мягкого ферромагнетика и показано, что магнитное окружение стабилизирует НЖ относительно развития неустойчивости, причем с увеличением магнитной проницаемости ферромагнетика длина волны наиболее опасных возмущений увеличивается.

5. Рассмотрен характер ветвления решений нелинейного интегро-дифференциального уравнения для свободной поверхности НЖ в вертикальной щели и показано, что он соответствует односторонней субкритической бифуркации. Новое состояние свободной поверхности при этом возникает жестким образом. Найдена зависимость амплитуды периодической структуры от длины волны наиболее опасных возмущений и оценен малый гистерезис намагниченностей возникновения и исчезновения периодической структуры.

Глава 4. ГИДРОДИНАМИКА НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ
С УЧЕТОМ ПОНДЕРОМОТОРНОГО ДЕЙСТВИЯ
СОБСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

4.1. Уравнения движения намагничивающейся жидкости
в тонкой щели и инкременты роста деформационных
мод равновесных конфигураций

Ряд особенностей процессов образования структур НЖ в плоских слоях связан с динамикой развития неустойчивости.

В настоящем разделе в приближении течения Хеле-Шоу [138] получаются уравнения движения НЖ в плоской щели с учетом дальнедействующих сил магнитного межчастичного взаимодействия и на основе этого рассчитываются инкременты роста деформационных мод равновесных конфигураций НЖ. Получаемые уравнения делают возможным также проведение численных экспериментов по моделированию динамики МГД-неустойчивости НЖ в плоских слоях.

Уравнение движения НЖ, в пренебрежении действием объемных пар, имеет вид

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + M\nabla H + \eta \Delta \vec{v}, \quad (4.1.1)$$

где H модуль напряженности макроскопического поля в среде.

Решение (4.1.1) в тонкой щели находится в виде $\vec{V} = \vec{V}_0(x, y, t) \times F(z/h)$, где векторное поле \vec{V}_0 потенциально и имеет компоненты только параллельные границам щели. Эти предположения составляют основу приближения течения Хеле-Шоу [152]. Условие несжимаемости НЖ дает $\text{div} \vec{V}_0 = 0$. Величина модуля напряженности поля H , в случае внешнего поля \vec{H}_0 , поперечного границам щели, с учетом действия собственного поля НЖ в первом неис-

чезающем приближении равна $H_0 + \partial\psi/\partial z$, где ψ потенциал собственного поля. В таком случае уравнение (4.1.1) для компонент в направлении параллельном границам слоя дает

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \frac{\rho}{2} F^2 \nabla v_0^2 = -\nabla p + M \nabla \frac{\partial \psi}{\partial z} + \eta \nabla_0^2 F''$$

Усреднение данного уравнения по толщине щели при выборе функции F в виде полинома второго порядка, удовлетворяющего граничным условиям прилипания $F(0) = F(h) = 0$ и нормировки $\int_0^h F(z) dz = h$, дает уравнение движения НЖ в тонкой щели в следующем виде

$$\rho \frac{\partial \vec{v}_0}{\partial t} + \frac{6\rho}{10} \nabla v_0^2 = -\nabla \tilde{p} + 2Mh^{-1} \nabla \psi|_{z=h} - 12\eta h^{-2} \vec{v}_0. \quad (4.1.2)$$

Уравнение (4.1.2) позволяет получить в качестве критерия малости сил инерции по сравнению с вязкими приведенное число Рейнольдса $v_0 h^2 / 20\nu L$, введенное в [152], где L - характерный масштаб движения в плоскости щели. Физически условие малости приведенного числа Рейнольдса заключается в малости характерного времени диффузии завихренности поперек щели по сравнению с характерным гидродинамическим временем. Дальнейшее рассмотрение проводится для этого случая.

На основе уравнения Дарси, модифицированного путем учета пондеромоторных сил собственного поля, ($\alpha = 12\eta/h^2$)

$$-\nabla p + 2Mh^{-1} \nabla \psi - \alpha \vec{v} = 0 \quad (4.1.3)$$

возможно рассмотрение динамики развития МГД-неустойчивостей капля и пузырьков.

Рассмотрим инкременты роста мод деформации круглой капли в эллиптическую конфигурацию и конфигурацию типа трехлепесткового цветка. Вводя лагранжево смещение материальной точки $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ радиус-вектор \vec{r}' ее положения в момент времени t через радиус-

вектор ее положения в начальный момент времени выражается в виде $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{\xi}(\vec{r}, t)$. Условие несжимаемости дает $\text{div } \vec{\xi} = 0$. Пусть уравнение возмущенной свободной поверхности в полярной системе координат имеет вид $r = r(\varphi) + \zeta(\varphi)$. Тогда для лагранжева смещения свободной поверхности с точностью до величин первого порядка малости по $\zeta(\varphi)$ получается $\xi_n = \zeta(\varphi) / \sqrt{1 + (r'/r)^2}$.

$$(4.1.4)$$

Пусть новая конфигурация капли НЖ образуется в результате лагранжева смещения материальных точек $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$. Тогда уравнение движения для возмущений имеет вид

$$-\nabla \delta p + 2Mh^{-1} \nabla \delta \psi - \alpha \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} = 0, \quad (4.1.5)$$

причем для лагранжевой вариации давления на свободной поверхности имеет место $\delta_L p = \delta(\sigma/R)$. Если ввести инкремент роста возмущений $\vec{\xi} = \vec{\xi} \exp \lambda t$ и потенциал лагранжевых смещений $\vec{\xi} = \nabla \varphi_r$, то уравнение (4.1.5) дает

$$-\delta p + 2Mh^{-1} \delta \psi - \alpha \lambda \varphi_r = \text{const}. \quad (4.1.6)$$

Так как в невозмущенном состоянии $-\nabla p_0 + 2Mh^{-1} \nabla \psi_0 = 0$, то пользуясь связью лагранжевых вариаций с эйлеровыми

$$\delta_L p = \delta p + \nabla p_0 \vec{\xi}$$

из соотношения (4.1.6) получаем

$$-\delta_L p + 2Mh^{-1} (\delta \psi + \vec{\xi} \nabla \psi_0) - \alpha \lambda \varphi_r = \text{const}. \quad (4.1.7)$$

Для вариации $\delta \psi$ имеет место

$$\delta \psi = -M \phi dl' \xi_n \left(((\vec{r} - \vec{r}')^2)^{-1/2} - ((\vec{r} - \vec{r}')^2 + h^2)^{-1/2} \right).$$

Проведем вокруг точки с радиус-вектором \vec{r} окружность ра-

диуса ε . В таком случае интеграл

$$\oint dl' n' \left(\left((\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 \right)^{-1/2} - \left((\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 + h^2 \right)^{-1/2} \right),$$

где $\vec{n}'^{L+L\varepsilon}$ внешняя нормаль к контуру интегрирования, состоящего из контура капли L и окружности радиуса $\varepsilon - L\varepsilon$, равен

$$\int_{S-S\varepsilon} dS' \nabla' \left(\frac{1}{\sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 + h^2}} \right) = -\nabla \int_{S-S\varepsilon} dS' \left(\frac{1}{\sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 + h^2}} \right)$$

Так как интеграл

$$\oint_{L\varepsilon} dl' \vec{n}' \left(\frac{1}{\sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 + h^2}} \right)$$

стремится к нулю при стремлении ε к нулю, а интеграл

$$\int_{S-S\varepsilon} dS' \left(\frac{1}{\sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 + h^2}} \right)$$

сходится равномерно относительно $\vec{\rho}$.

В результате соотношение (4.1.7) может быть записано в следующем виде

$$\begin{aligned} & -\delta_L p - 2M^2 h^{-1} \left(\oint dl \vec{\xi}(\vec{r}) \vec{n}' \left(\left((\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 \right)^{-1/2} - \left((\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 + h^2 \right)^{-1/2} \right) - \right. \\ & \left. - \oint \vec{\xi}(\vec{r}) \vec{n}' dl \left(\left((\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 \right)^{-1/2} - \left((\vec{\rho} - \vec{\rho}')^2 + h^2 \right)^{-1/2} \right) - \alpha \lambda \varphi_r = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

При устремлении точки с радиус-вектором $\vec{\rho}$ к границе капли, при учете соотношения (4.1.4), для случая начальной конфигурации в виде круга получается ($\tilde{h} = h/2R$)

$$\begin{aligned} & -\delta_L p - M^2 h^{-1} \oint d\varphi' (\zeta(\varphi') - \zeta(\varphi)) \left(\left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)^{-1/2} - \left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \tilde{h}^2 \right)^{-1/2} \right) + \\ & + M^2 h^{-1} \zeta(\varphi) \oint d\varphi' (\cos(\varphi' - \varphi) - 1) \left(\left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)^{-1/2} - \left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \tilde{h}^2 \right)^{-1/2} \right) + \\ & + M^2 h^{-1} \xi_\varphi(\varphi) \oint d\varphi' \sin(\varphi' - \varphi) \left(\left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)^{-1/2} - \left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \tilde{h}^2 \right)^{-1/2} \right) - \\ & - \alpha \lambda \varphi_r = \text{const.} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Третий интеграл левой части соотношения (4.1.9) равен нулю. В результате для свободной поверхности НЖ справедливо уравнение

$$\begin{aligned}
 & (\zeta + \zeta_{\varphi\varphi}) \sigma / R^2 - M^2 h^{-1} \oint d\varphi' (\zeta(\varphi') - \zeta(\varphi)) \left(\left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)^{-1/2} - \left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \tilde{h}^2 \right)^{-1/2} \right) - 2M^2 h^{-1} \zeta(\varphi) \int d\varphi' \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \left(\left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)^{-1/2} - \left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \tilde{h}^2 \right)^{-1/2} \right) - \\
 & - \alpha \lambda \varphi_r = \text{const.}
 \end{aligned}
 \tag{4.1.10}$$

На основе (4.1.10) получаются инкременты роста мод деформации в эллипс и трехлепестковый цветок. Потенциал лагранжевых смещений находится как решение уравнения Лапласа в круге при граничном условии Неймана $\partial \varphi_r / \partial n = \zeta_0 \cos 2\varphi$ в следующем виде $\varphi_r = \frac{\zeta_0}{2R} \rho^2 \cos 2\varphi$. В результате для инкремента роста моды эллиптической деформации получается ($\lambda_0 = \sigma / \alpha R^3$)

$$\lambda_2 = \lambda_0 \sigma \left(Bm / Bm_{2*} - 1 \right),
 \tag{4.1.11}$$

где критическое значение магнитного числа Бонда $Bm_{2*} = 2M^2 h / \sigma$ определяется соотношением (4.3.10).

Аналогично для случая моды деформации в трехлепестковый цветок, когда $\zeta(\varphi) = \zeta_0 \cos 3\varphi$ и $\varphi_r = \frac{\zeta_0 \rho^3}{3R^2} \cos 3\varphi$ для инкремента роста получается

$$\lambda_3 = \lambda_0 24 \left(Bm / Bm_{3*} - 1 \right),
 \tag{4.1.12}$$

где Bm_{3*} определяется соотношением (4.3.11).

Соотношения (4.1.11) и (4.1.12) позволяют оценить характерное время развития неустойчивости капель НЖ. Так в случае НЖ с физическими параметрами $\sigma = 20$ эрг/см², $\eta = 10$ сП характерное время $\tau_0 = \alpha R^3 / \sigma$ развития неустойчивости капли радиуса $R = 4$ мм в слое толщиной 2 мм составляет величину порядка 0,1 с.

Соотношения (4.1.11) и (4.1.12) показывают, что рассмотре-

ние устойчивости капли НЖ на основе уравнения Дарси, модифицированного с учетом пондеромоторного действия собственного поля, приводит к заключениям, тождественным полученным на основе энергетического подхода в предыдущей главе.

Данное заключение вытекает также из следующего из уравнения (4.1.3) интегрального соотношения. Если умножить уравнение (4.1.3) на $\vec{\xi}$ и проинтегрировать по сечению капли, то воспользовавшись преобразованиями, аналогичными изложенным выше в настоящей главе, можно получить

$$\alpha \int_{\vec{\xi}} \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} dS = \frac{G}{R} \int_0^{2\pi} (\zeta^2(\varphi) - \zeta_{\varphi}^2(\varphi)) d\varphi - \frac{M^2 R}{2h} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' (\zeta(\varphi') - \zeta(\varphi))^2 \times$$

$$\left(\left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)^{-1/2} - \left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \tilde{h}^2 \right)^{-1/2} \right) + \frac{2M^2 R}{h} \int_0^{2\pi} \zeta^2(\varphi) \sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi \times$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' \left(\left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} \right)^{-1/2} - \left(\sin^2 \frac{\varphi' - \varphi}{2} + \tilde{h}^2 \right)^{-1/2} \right) = -2h^{-1} \delta^2 E. \quad (4.1.13)$$

Соотношение (4.1.13) показывает, что условие положительности инкремента роста возмущений, вследствие положительности функционала $\int_{\vec{\xi}} \xi^2 dS$, эквивалентно условию потери устойчивости энергетического метода $\delta^2 E < 0$.

Соотношения (4.1.11) и (4.1.12) позволяют сделать заключение о превышении скоростью роста моды деформации в трехлепестковый цветок скорости эллиптической деформации при достаточно больших значениях магнитного числа Бонда. Зависимость магнитного числа Бонда, при котором инкремент роста деформаций в трехлепестковый цветок становится равным инкременту роста эллиптических деформаций от $2R/h$, приводится на рис. 4.1.1. В области значений Bm , больших приведенных на рис. 4.1.1, при скачкообразном включении поля можно ожидать образование более сложных

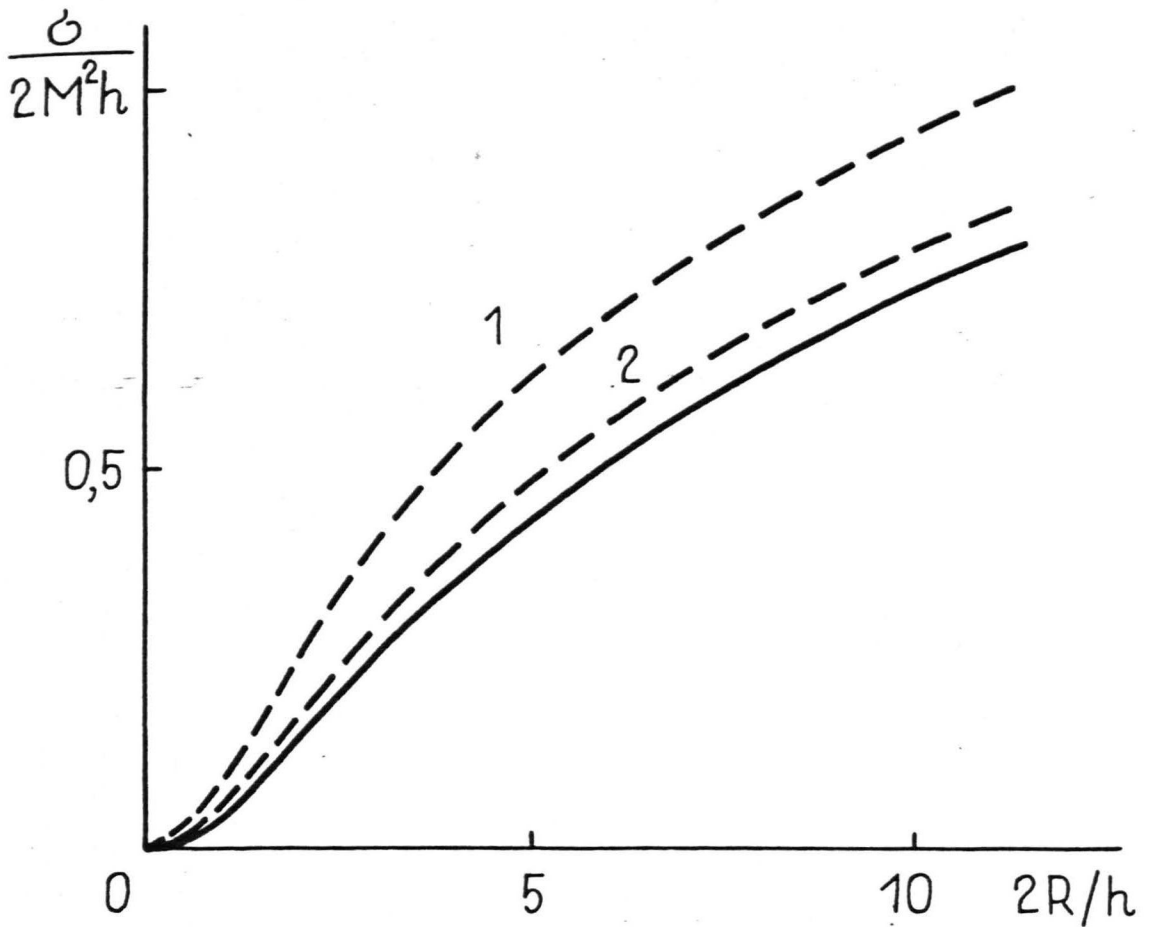


Рис. 4.1.1. В области, ограниченной непрерывной кривой и осью абсцисс мода деформации в трехлепестковый цветок имеет больший инкремент роста, чем мода эллиптических деформаций. Прерывистые кривые – пороговые значения развития моды эллиптических деформаций (1) и моды деформации в трехлепестковый цветок (2).

чем гантелеобразная конфигурация капель и пузырьков. В качестве иллюстрации этого можно указать на рис. 4.1.2 и рис. 3.3.8, где показаны две качественно различные равновесные конфигурации пузырька, из которых одна (рис. 4.1.2) получена при квазистатическом увеличении поля, а другая при скачкообразном наложении поля выше порогового. Образование более сложной, лабиринтной структуры пузырька во втором случае можно связать с отмеченным выше более быстрым ростом возмущений в виде трехлепесткового цветка при больших значениях магнитного числа Бонда. Можно добавить, что структуры, качественно подобные представленной на рис. 3.3.8, наблюдаются и в случае капель (рис. 3.3.7).

Аналогичным образом могут быть рассмотрены инкременты роста мод змеевидной деформации и деформации типа перетяжек прямолинейной полоски НЖ.

Для случая змеевидной деформации прямолинейной полоски толщиной $2d$ соотношение (4.1.8), если найти потенциал лагранжевых смещений в виде решения уравнения Лапласа в области, занятой полоской, при граничных условиях типа Неймана $\frac{\partial \varphi_{\Gamma}}{\partial y} \Big|_{\pm d} = \zeta(x)$, дает

$$\lambda_3 = \lambda_0 (kh)^3 \operatorname{cth}(kh\delta/2) (Bm/Bm_{3*} - 1), \quad (4.1.14)$$

где Bm_{3*} критическое значение магнитного числа Бонда змеевидной неустойчивости, определяемое соотношением (3.4.2).

Зависимость (4.1.14) инкремента роста змеевидных возмущений от kh приводится на рис. 4.1.3, откуда видно, что существует длина волны моды возмущений, для которой инкремент роста возмущений является наибольшим. Кроме того, рис. 4.1.3 также показывает, что длина волны наиболее быстро растущих изгибных деформаций с ростом Bm уменьшается. Определяемая из условия $\frac{d\lambda_3}{d(kh)} = 0$ зависимость волнового числа наиболее быстро растущих изгибных деформаций от магнитного числа Бонда имеет вид



Рис. 4.1.2. Конечная равновесная конфигурация пузырька при квазистатическом увеличении напряженности поля.

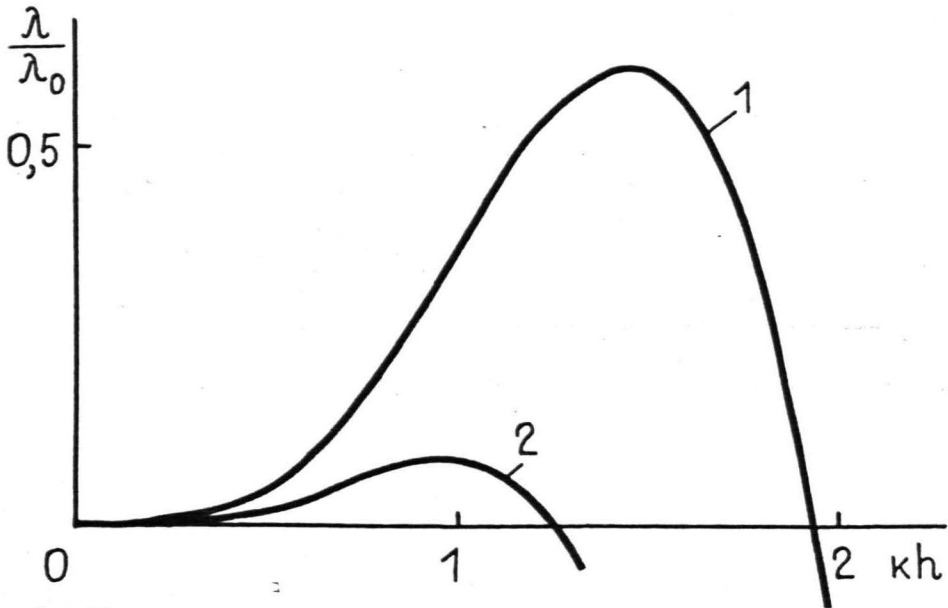


Рис. 4.1.3. Зависимость инкремента роста изгибных деформаций от волнового числа возмущений.

1 - $Bm = 3,33$; 2 - $Bm = 2,5$, $\delta = 2$.

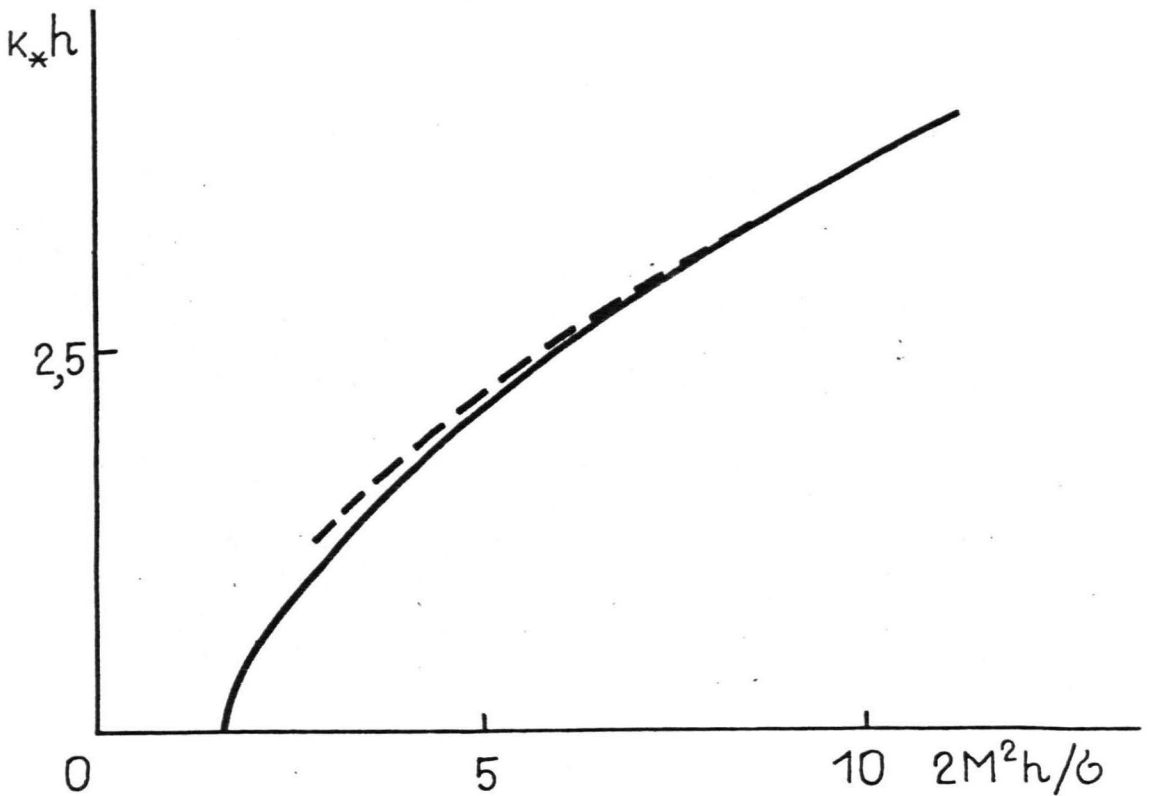


Рис. 4.1.4. Зависимость волнового числа изгибных деформаций (непрерывная кривая) и деформаций типа перетяжек (прерывистая кривая) с максимальным инкрементом роста от магнитного числа Бонда ($\delta = 2$).

$$Bm = \frac{(k_*h)^2(3 - k_*h\delta/\text{sh}(k_*h\delta))}{((1 - k_*h\delta/\text{sh}(k_*h\delta))F_1(k_*h) + k_*hF_1'(k_*h))} \quad (4.1.15)$$

где функция F_1 определена соотношением (3.4.2). Графически зависимость (4.1.15) показана на рис. 4.1.4.

Таким образом, рассмотрение динамики развития изгибных деформаций показывает, что при неквазистатическом увеличении напряженности поля можно ожидать развития изгибных деформаций конечной длины волны. В качестве экспериментальной иллюстрации этого заключения можно указать на рис. 3.4.5 б, в, на которых отображен процесс развития изгибных деформаций конечной длины волны у языка МЖ.

Аналогично могут быть найдены инкременты роста мод перетяжек, для которых получается

$$\lambda_{\Pi} = \lambda_0(kh)^3 \text{th}(kh\delta/2)(Bm/Bm_{* \Pi} - 1),$$

где $Bm_{* \Pi}$ - критическое магнитное число Бонда развития неустойчивости типа перетяжек. Волновое число k_* моды перетяжек с наибольшим инкрементом определяется из условия $d\lambda_{\Pi}/d(kh) = 0$, которое для зависимости последнего от Bm дает

$$Bm = \frac{(3 + \delta k_*h/\text{sh}(\delta k_*h))(k_*h)^2}{(1 + \delta k_*h/\text{sh}(\delta k_*h))F_2(k_*h) + k_*hF_2'(k_*h)}, \quad (4.1.16)$$

где функция $F_2(k_*h)$ определена соотношением (3.4.4).

Для случая $\delta = 2$ волновое число наиболее быстрой моды перетяжек в зависимости от Bm показано прерывистой линией на рис. 4.1.4, из которого видно, что для данного значения параметра δ длина волны наиболее быстрой моды перетяжек немного меньше длины волны наиболее быстрой изгибной моды. Сопоставле-

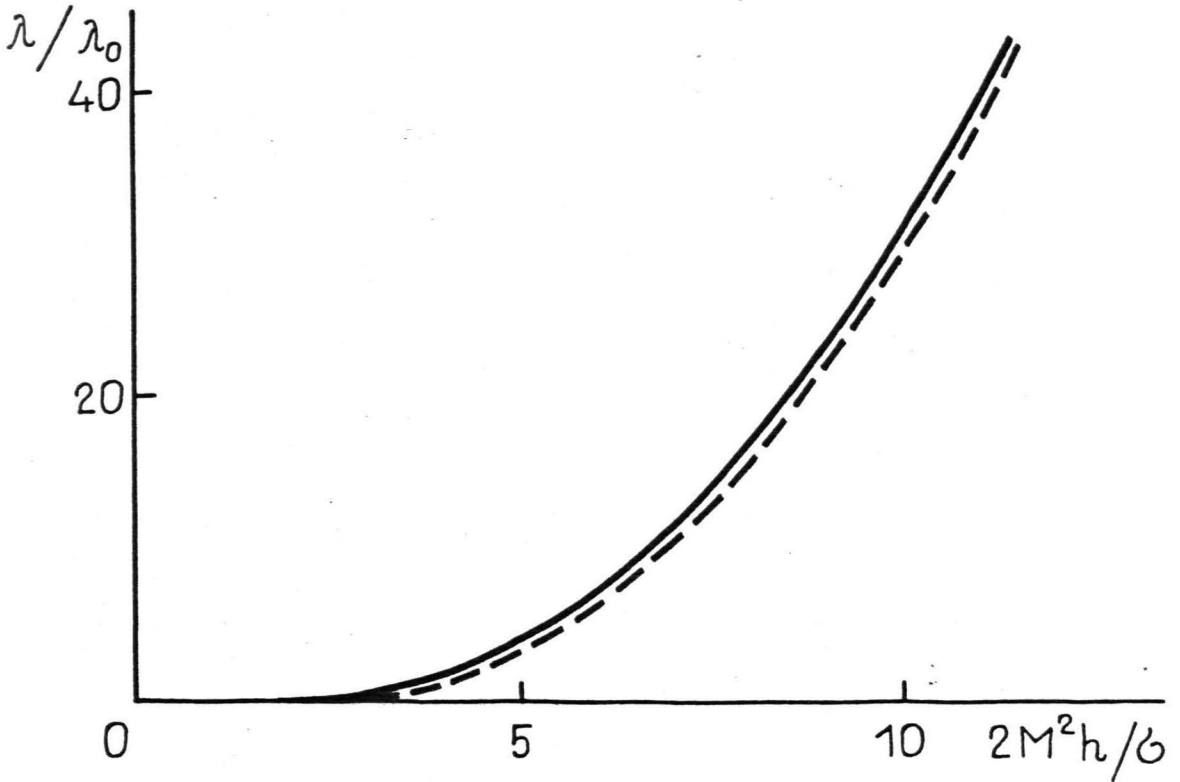


Рис. 4.1.5. Зависимости инкрементов наиболее быстро растущих мод изгибных деформаций (непрерывная кривая) и деформаций типа перетяжек (прерывистая кривая) от магнитного числа Бонда ($\delta = 2$).

ние инкрементов роста наиболее быстро растущих мод изгибных деформаций и перетяжек дается на рис. 4.1.5, из которого видно, что рост змеевидной неустойчивости происходит быстрее. По-видимому, факт отсутствия наблюдений на эксперименте развития неустойчивости типа перетяжек связан и с данным обстоятельством.

4.2. Неустойчивость Тейлора-Саффа в гидродинамике намагничивающихся сред

В работе [153] было показано, что процесс вытеснения вязкой жидкости из пористой среды или тонкой щели другой, менее вязкой жидкостью является неустойчивым. В результате развития неустойчивости происходит проникновение менее вязкой жидкости в более вязкую в виде отдельных пальцевидных образований.

Результаты, полученные в главе 3, показывают, что поперечное щели магнитное поле должно приводить к дополнительной дестабилизации процесса вытеснения НЖ менее вязкой жидкостью. В настоящем разделе рассматриваются количественные характеристики данного явления. При этом оказывается, что при наличии поля неустойчивым является и процесс вытеснения НЖ из тонкой щели более вязкой жидкостью.

Необходимо отметить, что постановка вопроса о процессе вытеснения НЖ из тонкой щели в магнитном поле ранее рассматривалась в работах [139], [154], но при другой ориентации поля. А именно, в работах [139], [154] показано, что наложение поля, тангенциального границам плоского слоя и свободной поверхности НЖ приводит к стабилизации процесса вытеснения. Тут следует однако отметить, что в указанных работах теоретически фактически был рассмотрен случай вытеснения из пористой среды, в то время как экспериментальная иллюстрация стабилизации процесса вытесне-

ния в поле производилось для случая течения Хеле-Шоу, что неадекватно условиям теоретической модели вследствие различий в виде собственного поля НЖ в данных двух случаях. Вследствие этого в данном разделе рассматривается также случай процесса вытеснения из тонкой щели в поле параллельном границам щели и свободной поверхности НЖ, что приводит к ряду отличных от случая пористой среды выводов.

Пусть прямолинейная граница раздела немагнитной и магнитной жидкостей перемещается со скоростью V . Рассмотрим устойчивость прямолинейного состояния свободной поверхности в поле поперечном границам щели. Если ввести лагранжево перемещение материальной точки $\vec{r}'_g = \vec{r}(t) + \vec{\xi}(\vec{r}(t), t)$, то уравнения для возмущений можно записать в следующем виде (индекс "1" - немагнитная среда, индекс "2" - магнитная)

$$\begin{aligned} -\nabla \delta p_1 - \alpha_1 \frac{\partial \vec{\xi}_1}{\partial t} &= 0; \\ -\nabla \delta p_2 + 2Mh^{-1} \nabla \delta \psi_2 - \alpha_2 \frac{\partial \vec{\xi}_2}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Вводя потенциал лагранжевых смещений $\vec{\xi} = \nabla \varphi_g$, из уравнения (4.2.1) получим следующие соотношения

$$-\delta p_1 - \alpha_1 \lambda \varphi_{1r} = const; \quad (4.2.2)$$

$$-\delta p_2 + 2Mh^{-1} \delta \psi_2 - \alpha_2 \lambda \varphi_{2r} = const. \quad (4.2.3)$$

Если воспользоваться соотношениями

$$\Delta_L p_1 = \delta p_1 - \alpha_1 V \xi_y; \quad \Delta_L p_2 - \alpha_2 V \xi_y + 2Mh^{-1} \vec{\xi} \nabla \psi_{20},$$

то в результате вычитания (4.2.2) от (4.2.3) при учете граничного условия для давления $\delta_L(p_1 - p_2) = \delta(\zeta/R_L)$ получается

$$\delta(\zeta/R_L) + 2Mh^{-1} (\delta \psi_2 + \vec{\xi} \nabla \psi_{20}) + (\alpha_1 - \alpha_2) V \xi_y + \lambda (\alpha_1 \varphi_{1r} - \alpha_2 \varphi_{2r}) = const,$$

которое аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, может быть записано в виде интегро-дифференциального уравнения следующего вида

$$-\sigma \zeta'' + 2M^2 h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} (\zeta(x') - \zeta(x)) \left(\frac{1}{((x-x')^2)^{1/2}} - \frac{1}{((x-x')^2 + h^2)^{1/2}} \right) dx' + (\alpha_1 - \alpha_2) V \zeta(x) + (\alpha_1 - \alpha_2) \lambda \varphi_r = \text{const}.$$

Находя потенциал лагранжевых смещений в результате решения уравнения Лапласа при граничном условии $\partial \varphi_r / \partial y = \zeta$ для инкрементов роста возмущений получается

$$\lambda = \frac{\sigma k h}{(\alpha_1 + \alpha_2) h^3} \left((kh)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2) V h^2 / \sigma \right) (Bm / Bm_* - 1) \quad (4.2.4)$$

$$Bm_*^{-1} = 2 \mathcal{J}(kh) / \left((kh)^2 + (\alpha_1 - \alpha_2) V h^2 / \sigma \right).$$

Выражение (4.2.4) показывает, что в поле поперечном щели неустойчивым при магнитных числах Бонда больших критического значения, определяемого соотношением (4.2.4), является и процесс вытеснения НЖ более вязкой жидкостью $\alpha_1 > \alpha_2$, для которого неустойчивость Тейлора-Саффмена обычной гидродинамики не имеет места. Нейтральная кривая неустойчивости (4.2.4) при этом аналогична рассмотренному в 3.5 случаю гребенчатой неустойчивости, где вместо квадрата отношения толщины щели к капиллярной длине $(K_0 h)^2$ фигурирует безразмерный параметр $(\alpha_1 - \alpha_2) V h^2 / \sigma$, так называемое капиллярное число [155].

Для случая, когда вытеснение в поле осуществляется менее вязкой жидкостью ($\alpha_2 > \alpha_1$), соотношение (4.2.4) записывается в несколько другом виде

$$\lambda = \frac{\sigma k h}{(\alpha_1 + \alpha_2) h^3} \left(2 \mathcal{J}(kh) Bm - (kh)^2 + (\alpha_2 - \alpha_1) V h^2 / \sigma \right) \quad (4.2.5)$$

откуда видно, что так как $\mathcal{J}(kh) > 0$, поле в этом случае приводит к дополнительной дестабилизации фронта вытеснения.

Зависимость (4.2.5) инкремента роста возмущений фронта вытеснения при некоторых значениях Vm показана на рис. 4.2.1. Отсюда видно, что наложение поля поперечного щели при вытеснении НЖ менее вязкой жидкостью приводит к смещению длины волны наиболее быстро растущих возмущений в коротковолновую область, а также увеличивает скорость роста возмущений.

Как экспериментально показано в работах [139], [154] наложение поля тангенциального границам щели и свободной поверхности приводит к стабилизации процесса вытеснения.

Уравнения движения НЖ и немагнитной жидкости в тонкой щели, ограничиваясь учетом собственного поля НЖ в первом исчезающем приближении, в этом случае имеют следующий вид (внешнее поле направлено вдоль оси X , ψ потенциал собственного поля НЖ)

$$\begin{aligned} -\nabla p_1 - \alpha_1 \vec{V}_{10} &= 0; \\ -\nabla p_2 + Mh^{-1} \nabla \int_0^h \frac{d\psi}{dx} dz - \alpha_2 \vec{V}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Пусть граница раздела жидкостей перемещается со скоростью V в направлении от немагнитной жидкости к НЖ ($\alpha_1 < \alpha_2$). В таком случае, вводя лагранжево смещение $\vec{\xi}$, инкремент λ возмущений, из уравнения (4.2.6) для малых возмущений получим

$$\begin{aligned} -\nabla \delta p_1 - \alpha_1 \lambda \vec{\xi}_1 &= 0; \\ -\nabla \delta p_2 + Mh^{-1} \nabla \int_0^h \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dz - \alpha_2 \lambda \vec{\xi}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Если уравнение фронта в возмущенном состоянии имеет вид $y = \zeta(x)$, то потенциал возмущения собственного поля выразится в виде

$$\delta \psi = M \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^h \zeta(x') \frac{dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2}}.$$

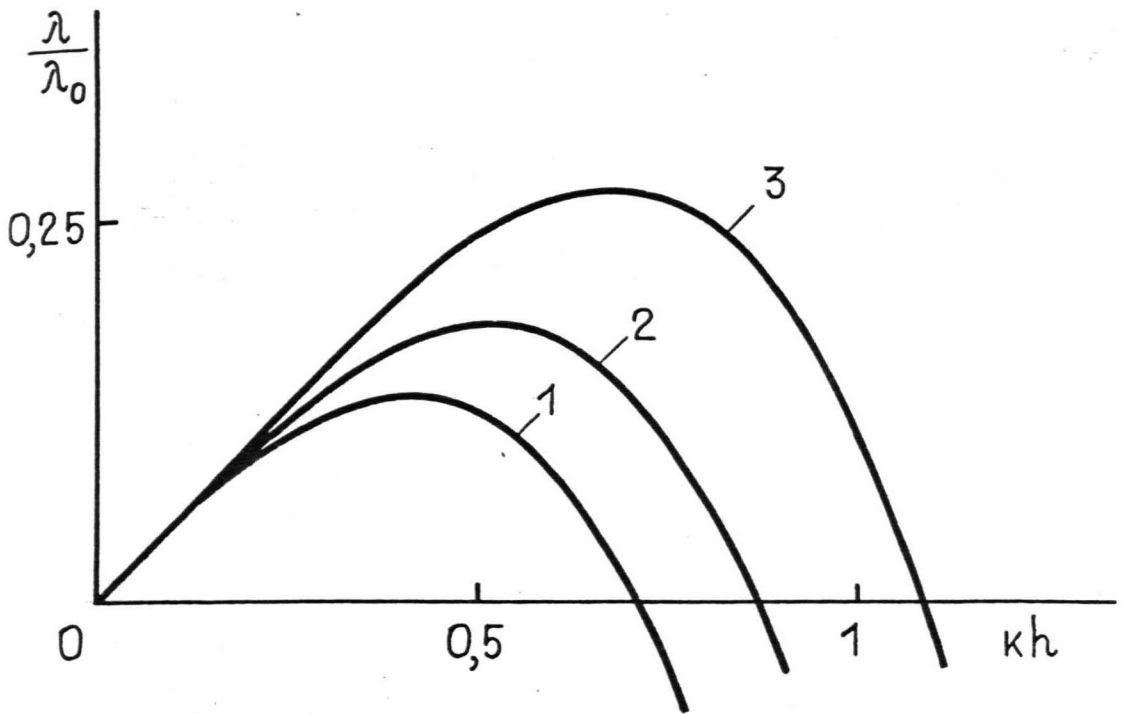


Рис. 4.2.1. Инкременты роста неустойчивости Тейлора-Саффмена в магнитном поле в зависимости от волнового числа возмущений фронта вытеснения. Капиллярное число $(\alpha_2 - \alpha_1) V h^2 / \sigma$ равно 0,5.
1 - $V_m = 0$; 2 - $V_m = 0,5$; 3 - $V_m = 1$.

Если ввести лагранжевы вариации давления жидкости $\Delta_L p = \delta p + \nabla p_0 \vec{\xi}$ и подставить значения градиентов давлений в невозмущенном состоянии $\nabla p_{01} = -\alpha_1 V \vec{e}_y$ и $\nabla p_{02} = -\alpha_2 V \vec{e}_y$, то с учетом граничного условия на возмущенной поверхности $\Delta_L(p_1 - p_2) = \delta(\sigma/R_L)$, соотношение (4.2.7) позволяет получить уравнение свободной поверхности в следующем виде

$$\delta(\sigma/R_L) + (\alpha_1 - \alpha_2) V \zeta(x) + M h^{-1} \int_0^h \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} dz + (\alpha_1 \varphi_{1r} - \alpha_2 \varphi_{2r}) \lambda = \text{const} \quad (4.2.8)$$

Рассмотрим периодические возмущения фронта вытеснения вида $\zeta(x) = \zeta_0 \cos kx$. Тогда возмущение магнитостатического потенциала на свободной поверхности выразится следующим образом

$$\delta \psi = 2 M k \zeta_0 \sin kx \int_0^h dz' K_0(|z - z'| k).$$

Находя потенциал лагранжевых смещений как решение уравнения Лапласа при граничных условиях Неймана $\frac{\partial \varphi_{1r}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial \varphi_{2r}}{\partial y} \Big|_{y=0} = \zeta_0 \cos kx$ из уравнения свободной поверхности (4.2.8) для инкремента роста возмущения получим

$$\sigma k^2 + (\alpha_1 - \alpha_2) V + 2 M^2 k^2 h^{-1} \int_0^h dz \int_0^h dz' K_0(k|z - z'|) + (\alpha_1 + \alpha_2) \lambda / k = 0.$$

Двойной интеграл в последнем выражении можно вычислить следующим образом

$$\int_0^h dz \int_0^h dz' K_0(k|z - z'|) = 2 k h \left(\int_0^{kh} K_0(z) dz + K_1(kh) \right) / k^2,$$

откуда инкремент роста возмущений фронта вытеснения можно выразить в виде

$$\lambda = \frac{\sigma}{(\alpha_1 + \alpha_2) h^3} k h \left(- \frac{4 M^2 h}{\sigma} k h \left(\int_0^{kh} K_0(z) dz + K_1(kh) \right) - (kh)^2 \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) V h^2}{\sigma} \right) \quad (4.2.9)$$

Как показывает соотношение (4.2.9), фронт вытеснения устойчив при $\alpha_1 > \alpha_2$ аналогично случаю отсутствия неустойчивости

Тейлора-Сайфмена в немагнитном случае. В случае же $\alpha_1 < \alpha_2$ соотношение (4.2.9) показывает устойчивость фронта вытеснения лишь при достаточно больших магнитных числах Бонда. Нейтральная кривая устойчивости в этом случае определяется соотношением $\lambda = 0$.

Вводя капиллярное число $C = (\alpha_2 - \alpha_1) \sqrt{h^2 / \sigma}$, нейтральную кривую в безразмерных координатах $\pi B m / \sqrt{C}$ и kh / \sqrt{C} можем описать следующим соотношением

$$\frac{\pi B m}{\sqrt{C}} = \frac{1 - \left(\frac{kh}{\sqrt{C}}\right)^2}{\frac{kh}{\sqrt{C}} F_1\left(\sqrt{C} \frac{kh}{\sqrt{C}}\right)}, \quad (4.2.10)$$

где F_1 имеет вид $F_1(x) = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^x K_0(t) dt + K_1(x) \right)$.

Нейтральные кривые в данных координатах при некоторых значениях капиллярного числа C показаны на рис. 4.2.2. Отметим при этом, что выражение (4.2.10) показывает, что при магнитных числах Бонда $2M^2 h / \sigma > C/2$ фронт вытеснения устойчив относительно возмущений произвольной длины волны.

Вывод о возможности полной стабилизации процесса вытеснения в ячейке Хеле-Шоу расходится с выводами работ [139], [154] в которых анализ процесса вытеснения НЖ из пористой среды распространен и на случай процесса вытеснения из тонкой щели. Результаты указанных работ соответствуют случаю, когда длина волны возмущений намного меньше толщины щели и влиянием последней можно пренебречь. В этом случае соотношение (4.2.10) дает условие нейтральности возмущений в следующем виде

$$\frac{2M^2 h}{\sigma} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) \sqrt{h^2 / \sigma} - (kh)^2}{\pi kh},$$

которое показывает отсутствие стабилизации относительно длинноволновых возмущений.

Соотношение (4.2.10) позволяет рассчитать длину волны возму-

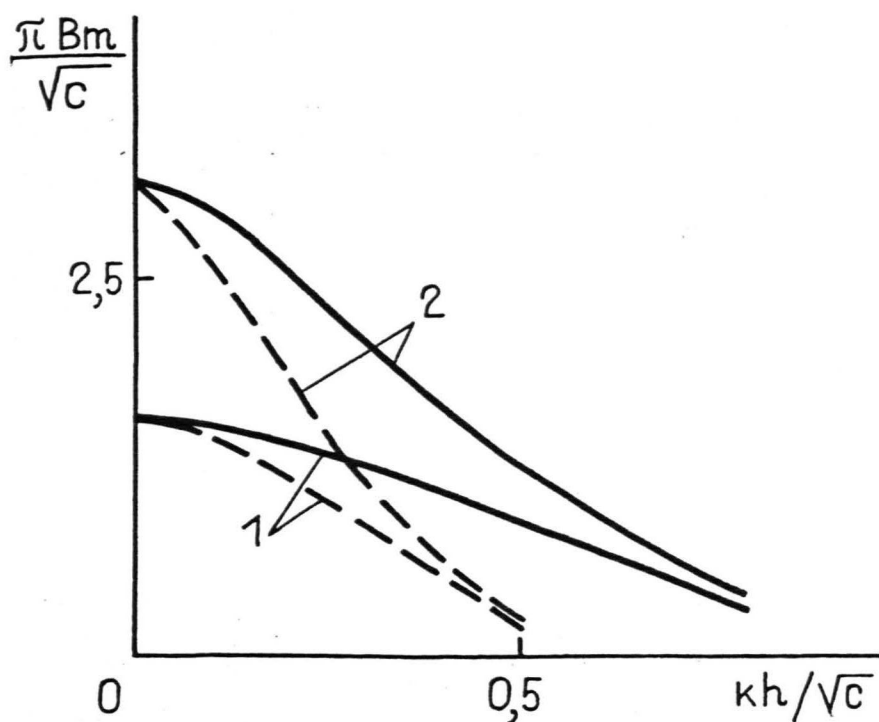


Рис. 4.2.2. Нейтральные кривые неустойчивости Тейлора-Саффмена в магнитном поле, тангенциальном фронту вытеснения (непрерывные кривые). Прерывистые кривые - волновые числа наиболее быстро растущих мод данной неустойчивости. 1 - $C = 1$; 2 - $C = 4$.

щений с наибольшим инкрементом. Условие $d\lambda/dk = 0$ для волнового числа K_* возмущений с наибольшим инкрементом в указанных выше безразмерных координатах дает зависимость следующего вида

$$\frac{\pi Bm}{\sqrt{C}} = \frac{1 - 3 \left(\frac{K_* h}{\sqrt{C}} \right)^2}{\frac{K_* h}{\sqrt{C}} F_2 \left(\sqrt{C} \frac{K_* h}{\sqrt{C}} \right)}, \quad (4.2.II)$$

где $F_2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x K_0(t) dt + K_1(x)$.

Графически зависимость (4.2.II) показана прерывистой линией на рис. 4.2.2.

В заключение настоящего раздела рассмотрим в свете полученных соотношений (4.2.I0) и (4.2.II) экспериментальные данные работ [139], [154]. Необходимо отметить, что учет конечной толщины плоского слоя при расчете собственного поля НЖ показывает, что, в отличие от результатов работ [139], [154], которые для нейтральной кривой процесса вытеснения и волнового числа наиболее быстро растущих возмущений соответственно дают

$$\frac{\pi Bm}{\sqrt{C}} = \frac{1 - (kh C^{-1/2})^2}{kh C^{-1/2}};$$

$$\frac{\pi Bm}{\sqrt{C}} = \frac{1 - 3(k_* h C^{-1/2})^2}{k_* h C^{-1/2}}, \quad (4.2.I2)$$

характеристики устойчивости процесса вытеснения в поле не представляются универсальной кривой в координатах Bm/\sqrt{C} и kh/\sqrt{C} но зависят также от капиллярной постоянной, характеризующей отношение вязких и капиллярных сил. При этом зависимости (4.2.I2) имеют место при больших значениях капиллярной постоянной, когда длина волны развивающихся возмущений фронта вытеснения мала и

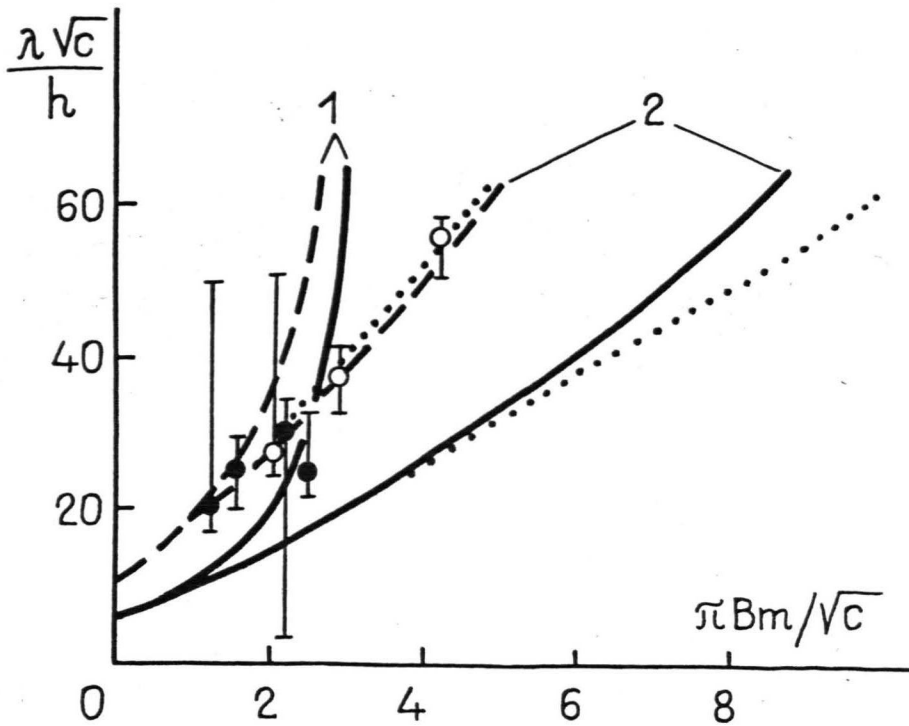


Рис. 4.2.3. Зависимости длины волны (λ) нейтральной моды (непрерывные кривые), определяемые соотношением (4.2.10), и длины волн наиболее быстро растущей моды (прерывистые линии), определяемые соотношением (4.2.11), от магнитного числа Бонда в случае поля, тангенциального фронту вытеснения. Пунктирные линии - значения данных величин, определяемые соотношениями (4.2.12). Белые ($\mathcal{O} = 5$ эрг/см²) и черные ($\mathcal{O} = 10$ эрг/см²) кружки - экспериментальные данные работ [139], [154].
1 - $C = 4$; 2 - $C = 100$.

справедливо неравенство $kh \gg 1$.

Однако в реальных экспериментах значения капиллярной постоянной не высоки (в классических экспериментах Тейлора, Саффамена [153] не больше 1), так что соотношения (4.2.12) не представляются пригодными. Это иллюстрируется рис. 4.2.3, на котором пунктирными линиями показаны зависимости (4.2.12) и зависимости (4.2.10) (непрерывная линия) и (4.2.11) (штриховая линия) при двух сильно различающихся значениях капиллярной постоянной. На этом же рисунке показаны экспериментальные значения работ [139], [154]. Однако заключений о возможности описания результатов эксперимента в данном случае сделать невозможно, так как в работах [139], [154] результаты представлены в безразмерном виде и соответствующие им значения капиллярной постоянной остаются неизвестными.

4.3. Некоторые свойства лабиринтных структур

намагничивающихся жидкостей в плоских щелях

Одним из основных вопросов для практического применения рассматриваемых явлений является количественная оценка достигаемого в результате развития описанных в предыдущих разделах МГД-неустойчивостей увеличения межфазной поверхности раздела. Оценка возможного увеличения межфазной поверхности раздела на основе сопоставления энергии размагничивающего поля первоначально круглой капли или пузырька с поверхностной энергией разветвленной конфигурации была дана нами [128]. Подобная оценка приводит к завышенным значениям достигаемого увеличения межфазной поверхности, так как не принимает во внимание диссипацию энергии в процессе образования разветвленной конфигурации, а также ее энергию размагничивающего поля.

Другой способ оценки достигаемого увеличения межфазной поверхности раздела возможен на основе подхода работы [144]. Там рассматривается зависимость параметров сформированной лабиринтной структуры НЖ в плоской щели при заданном отношении количества магнитных и немагнитных компонент от напряженности внешнего поля.

Пусть НЖ занимает φ -ую долю объема плоской щели размером L . При образовании лабиринтной структуры первоначально компактное образование НЖ распадается на $n = \varphi L / 2\ell_2$ полосок толщиной $2\ell_2$. В результате для свободной поверхности лабиринтной структуры НЖ имеем оценку $2nLh (n \gg 1)$, которая для увеличения поверхности раздела на единицу площади границы щели смоченной НЖ дает $-(2\ell_2/h)^{-1}$.

Зависимость $2\ell_2/h$ лабиринтной структуры от магнитного числа Бонда в рамках ряда упрощающих предположений - 1) постоянство размагничивающего поля в полоске НЖ и равенство его значения значению в центре полоски, 2) справедливость линейного закона намагничивания $\vec{M} = \chi \vec{H}$, была рассчитана в работе [144]. Приводимая ниже зависимость $2\ell_2/h$ от магнитного числа Бонда получена нами в результате минимизации энергетического функционала относительно ℓ_2 .

При этом энергия размагничивающего поля одиночной полоски толщиной $2\ell_2$ в периодической структуре полосок, разделенных немагнитными включениями толщиной $2\ell_1$ на единицу ее длины выражается следующим образом ($L = 2(\ell_1 + \ell_2)$)

$$e_p = M^2 \sum_{n=-N-\ell_2}^{\ell_2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \left(((x-x')^2 + (y-y')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2 + (y-y')^2 + h^2)^{-1/2} \right).$$

Отсюда для энергии на единицу площади периодической структуры имеет место

$$e = e_p / 2(\ell_1 + \ell_2) + 2\phi h / 2(\ell_1 + \ell_2) . \quad (4.3.1)$$

Минимизация (4.3.1) относительно ℓ_2 , аналогично как в [I44] при постоянстве $\ell_1 / \ell_2 = r$, представляющего отношение количества магнитных и немагнитных компонент в плоской щели, дает уравнение для определения равновесной толщины полосок лабиринтной структуры в следующем виде ($\delta = 2\ell_2 / h$)

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{M^2 h} = & \frac{1}{2} \delta^2 \sum_{n=-N}^N \left(\left((n(1+r)+1)^2 + \delta^2 \right) \ln \left(1 + 1/\delta^2 (1+n(1+r))^2 \right) - \right. \\ & - \left((n(1+r))^2 + \delta^2 \right) \ln \left(1 + 1/\delta^2 (n(1+r))^2 \right) + \\ & \left. + \delta^2 \ln \left((n(1+r)+1)^2 / (n(1+r))^2 \right) \right) . \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Зависимость (4.3.2) $M^2 h / \phi$ от $2\ell_2 / h$ для ряда значений r показана на рис. 4.3.1 и при больших $M^2 h / \phi$ качественно соответствует зависимости, полученной в работе [I44]. Качественное отличие результата [I44] имеем место при достаточно больших $2\ell_2 / h$ ($2\ell_2 / h \cong 10$), когда в указанной работе отмечается немонотонная зависимость $2\ell_2 / h$ от магнитного числа Бонда, которая, по-видимому, связана с приближенным характером расчета энергии размагничивающего поля лабиринтной структуры.

Сумма ряда в (4.3.2) находится численно, причем ряд обрывается, когда относительное изменение суммы ряда при учете взаимодействия с полоской, отстоящей от данной на расстоянии NL не превышает $10^{-2} \%$.

Из показанных на рис. 4.3.1 зависимостей следует, что увеличение магнитного числа Бонда приводит к измельчению лабиринтной структуры НЖ. При этом при больших $M^2 h / \phi$ имеет место асимптотическая зависимость $2\ell_2 / h \sim Bm^{-0.5}$.

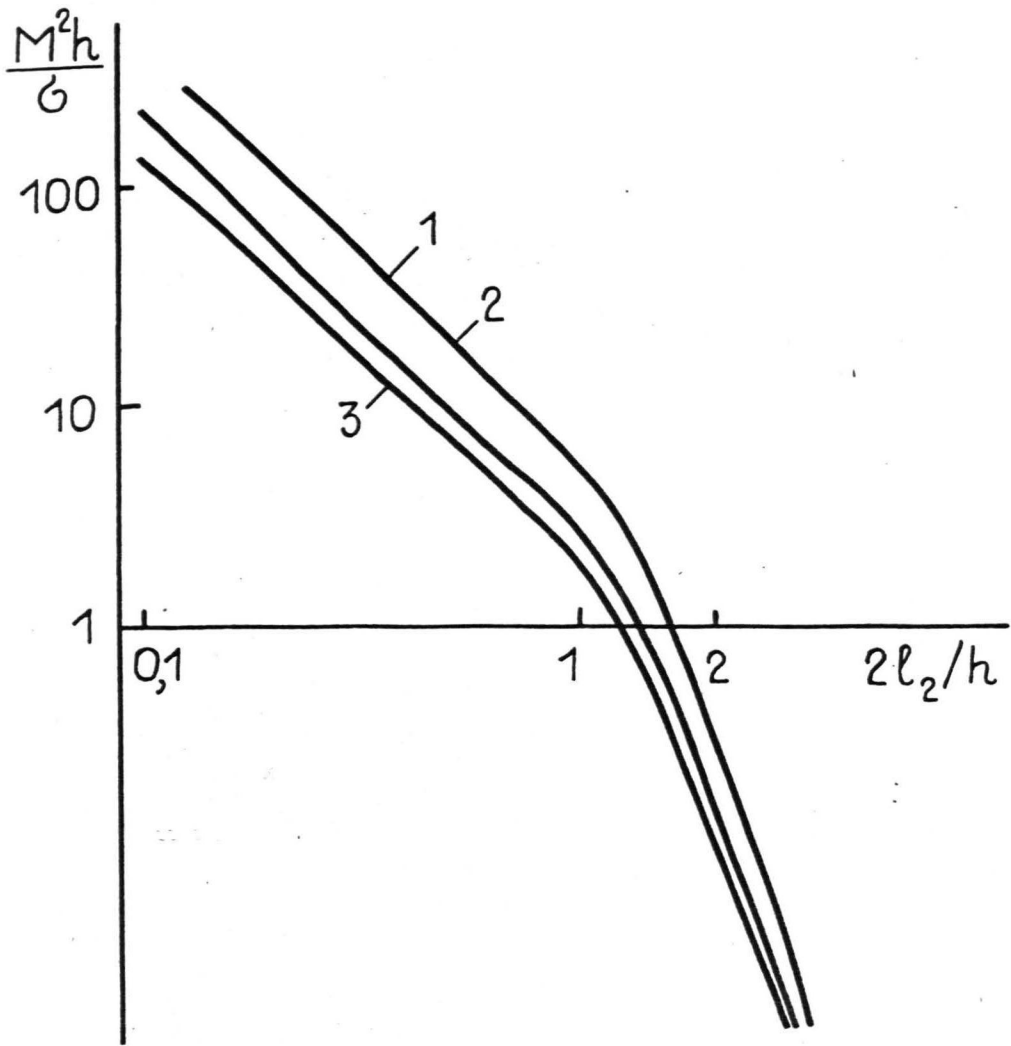


Рис. 4.3.1. Зависимость толщины полосок лабиринтной структуры НЖ от магнитного числа Бонда в логарифмических координатах.

1 - $r = 0,5$; 2 - $r = 1$; 3 - $r = 1,5$.

В этой области зависимость относительной ширины полосок лабиринтной структуры $НЖ$ от магнитного числа Бонда при $r = 1$ и замене $2M \rightarrow M$ совпадает с зависимостью ширины доменов в плоских слоях высокоанизотропных ферромагнетиков от толщины слоя для так называемой структуры Киттеля, которая имеет вид [156]

$$2\ell_2/h = 1,56 \left(\frac{\sigma}{4M^2h} \right)^{1/2},$$

где σ - поверхностное натяжение границ доменов, M - намагниченность ферромагнетика. Добавим также, что следующая отсюда зависимость ширины полосок лабиринтной структуры $2\ell_2 \sim \sqrt{h}$ качественно соответствует экспериментальным данным работы [144], где представлены фотографии лабиринтных структур для ряда значений толщин щели. Отметим, что представляет интерес более подробное экспериментальное исследование этой зависимости.

Вариацией параметра r можно моделировать влияние внешнего поля на доменную структуру Киттеля.

Эти заключения подтверждают найденную нами [115] аналогию между статическими лабиринтными структурами $МЖ$ в плоских щелях и структурами полосовых доменов в пленках высокоанизотропных ферромагнетиков. При этом, как уже было указано в 3.1, динамика образования этих структур носит принципиально различный характер. Если лабиринтные структуры $МЖ$ образуются путем развития гидродинамической неустойчивости ее свободной поверхности, то возникновение доменных структур ферромагнетиков носит объемный характер.

Следует при этом подчеркнуть, что проведенное выше рассмотрение лабиринтной структуры является весьма приближенным, так как не учитывает возможность разветвлений полосок $НЖ$, их изгиб, которые можно заметить на рис. 3.4.5.

Приведенные результаты показывают, что для реальных значе-

ний параметров МЖ $\zeta = 30$ эрг/см² и $M = 60$ Гс в щели размером 10 см при толщине 2 мм наполовину заполненной МЖ возможно увеличение межфазной поверхности в 150 раз.

Оценка, основанная на сравнении энергии размагничивающего поля $M^2 L^2 h$ с поверхностной энергией разветвленной конфигурации $\zeta L_n h$ несколько завышает, как и следовало ожидать, увеличение поверхности раздела фаз $L_n / L \cong \frac{M^2 h}{\zeta} \frac{L}{h} = 1000$, при указанных значениях физических параметров.

Показанное на рис. 3.4.5 развитие неустойчивости приводит к образованию односвязных структур. Подобного хода событий следует ожидать при квазистатическом увеличении поля. В условиях высокой надкритичности возможно развитие многосвязных структур. На серии фотографий - рис. 4.3.2 - показана кинограмма разбиения пузырька струйками МЖ при резком включении надкритического значения напряженности поля. Физические параметры использованной на эксперименте МЖ следующие - $M = 30$ Гс, $\eta = 10$ сП. Толщина щели 2 мм. Первоначальный размер пузырька порядка 4 см.

Процесс, показанный на рис. 4.3.2, можно приближенно описать и количественно. Так как характерное время развития струек $6 \cdot 10^{-2}$ с меньше характерного времени диффузии вихря поперек щели $h^2 / \nu \cong 4 \cdot 10^{-1}$ с, то при рассмотрении развития периодической системы струек действием вязкости можно пренебречь.

В качестве модельного рассмотрим случай развития струек на прямолинейной границе полубесконечного слоя НЖ. В пренебрежении действием вязкости уравнение движения НЖ имеет вид

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \nabla v^2 = -\nabla p + 2 M h^{-1} \nabla \psi,$$

интеграл Коши-Лагранжа, которого дает ($\vec{v} = \nabla \varphi$)

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} (\nabla \varphi)^2 + p - 2 M h^{-1} \psi = const. \quad (4.3.3)$$

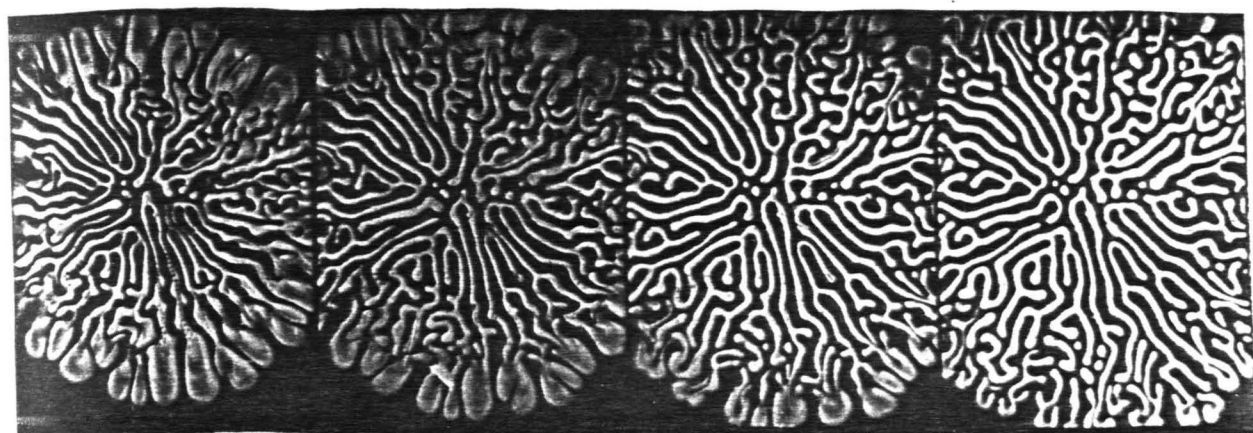
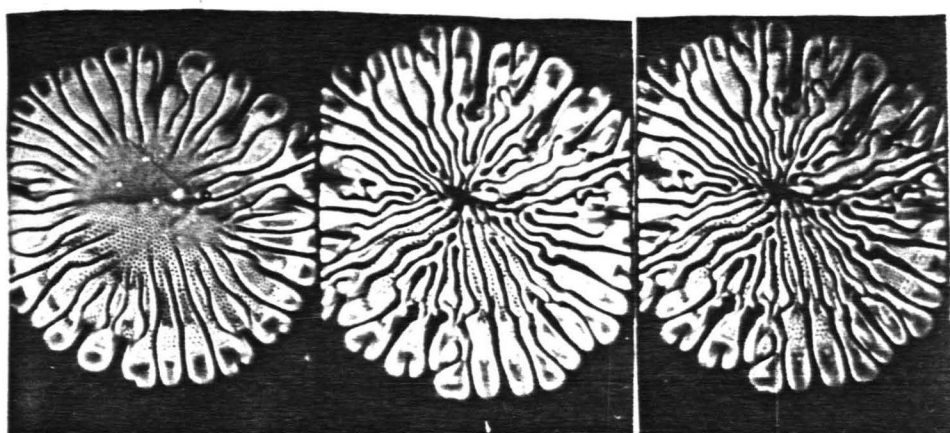
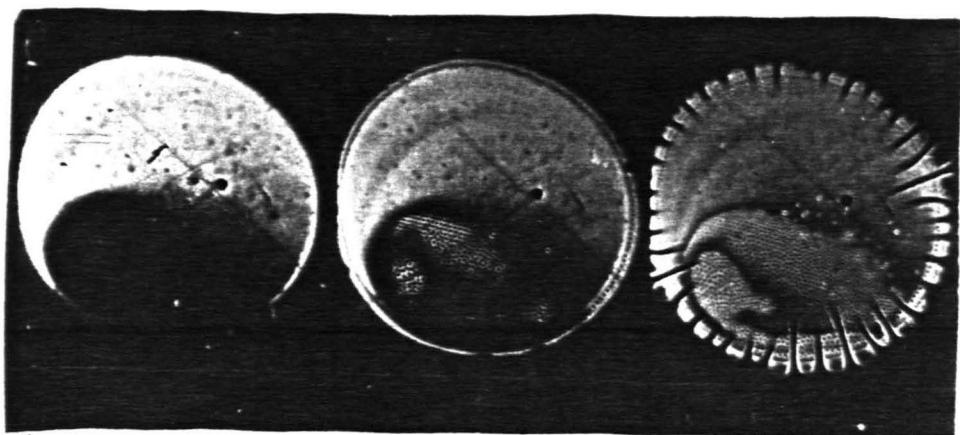


Рис. 4.3.2. Кинограмма разбиения пузырька струйками МЖ при скачкообразном увеличении напряженности поля. Частота съемки - 48 кадров/с.

Этот интеграл, граничные условия в линейном приближении на свободной границе $\partial\psi/\partial y = \partial\zeta/\partial t$ и $p = -\rho\zeta_{xx}$ для инкремента роста периодических возмущений $\zeta = \zeta_0 \cos kx$ дает

$$\lambda^2(k) = \frac{\rho}{\rho h^3} kh \left(\frac{4M^2 h}{\rho} \left(\gamma + \ln \frac{kh}{2} + K_0(kh) \right) - (kh)^2 \right).$$

Зависимость инкремента роста от волнового числа при некоторых значениях магнитного числа Бонда показана на рис. 4.3.3. Видно, что растущими являются длинноволновые возмущения, причем существует мода, инкремент которой наибольший. Зависимость длины волны наиболее быстро растущей моды от магнитного числа Бонда представлена на рис. 4.3.4.

Показанные на рис. 4.3.4 данные позволяют оценить $M^2 h / \rho$. Так как длина волны развивающейся на рис. 4.3.2 периодической системы струек может быть оценена как 6 мм, то зависимость на рис. 4.3.4 для $M^2 h / \rho$ дает значение порядка 2,15, что приводит к разумному значению намагниченности порядка 15 Гс, если поверхностное натяжение МЖ 20 эрг/см².

Интеграл Коши-Лагранжа (4.3.3) с учетом пондеромоторных сил собственного поля позволяет оценить в стационарном случае скорость струек МЖ. А именно, в предположении постоянства давления вдоль струйки, что представляется разумным вследствие постоянства капиллярного давления, интеграл (4.3.3) дает (точка 1 - в глубине слоя МЖ, точка 2 - на оси струйки)

$$-\int_1^2 v_1^2 - 2Mh^{-1}\psi_1 = -\int_1^2 v_2^2 - 2Mh^{-1}\psi_2$$

Отсюда, пренебрегая действием собственного поля МЖ на оси струйки, а для потенциала размагничивающего поля в глубине слоя, где скорость движения жидкости v_1 незначительна, беря значение, соответствующее значению на границе полубесконечного слоя $-\pi Mh$, для скорости струйки получим $v_2^2 = 4\pi M^2/\rho$.

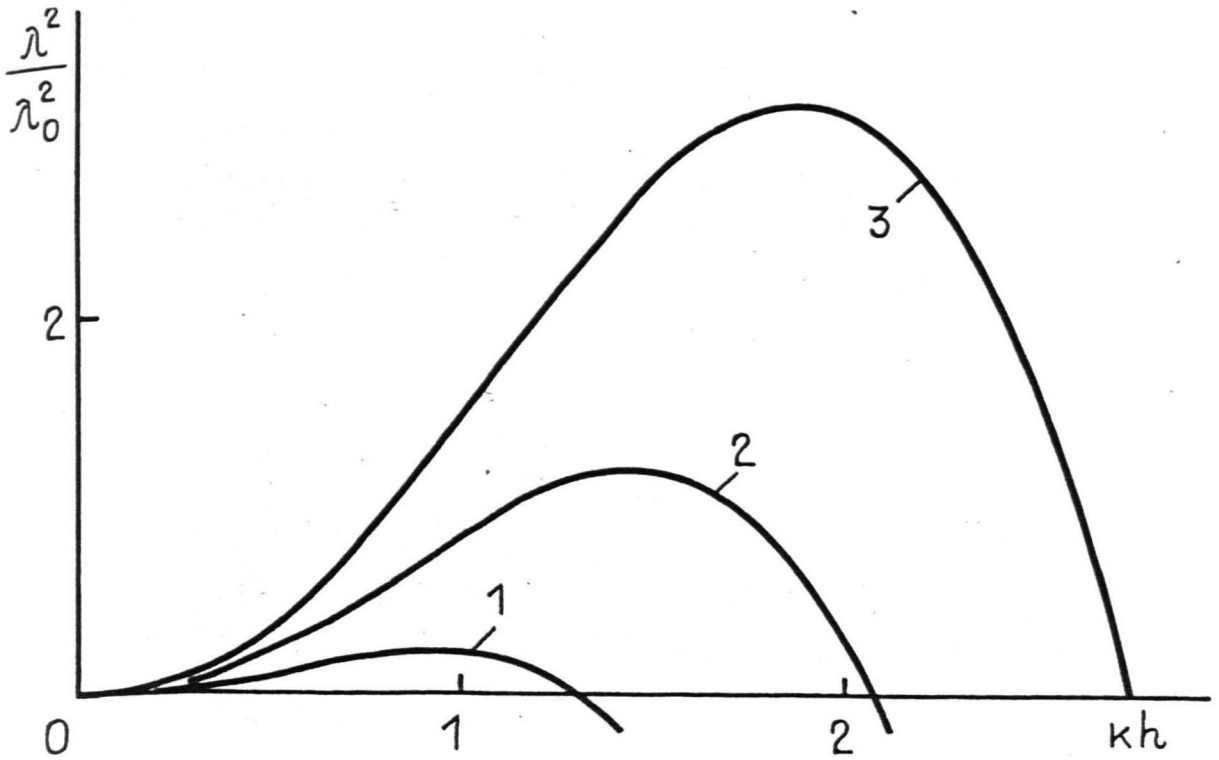


Рис. 4.3.3. Инкременты роста возмущений свободной поверхности идеальной НЖ в плоском слое от волнового числа возмущений. 1 - $M^2 h / \sigma = 1$; 2 - $M^2 h / \sigma = 1,5$; 3 - $M^2 h / \sigma = 2$.

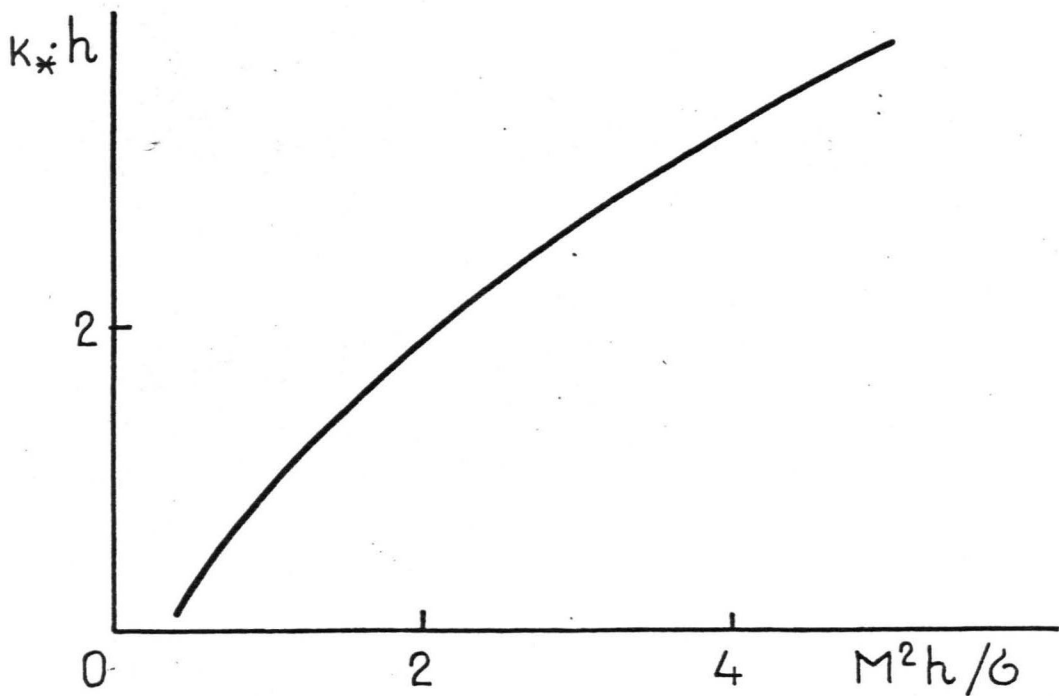


Рис. 4.3.4. Зависимость волнового числа наиболее быстро растущей моды от магнитного числа Бонда.

Оценка при полученном выше по периоду системы развивающихся струек значения намагниченности $M = 15$ Гс и $\rho = 1,2$ г/см³ для скорости струйки дает значение порядка 50 см/с, хорошо согласующееся с экспериментом.

Таким образом, данный пример показывает возможность образования и многосвязных структур, подобных лабиринтным при скачкообразном включении поля. Если после образования подобной структуры поле выключить, то образуется весьма полидисперсная эмульсия пузырьков круглой формы. Отметим, что поскольку на фотографиях работы [130] отображена именно многосвязная лабиринтная структура МЖ, то можно предположить, что ее образование было связано со скачкообразным наложением поля. Квазистатическое наложение поля, как это показано нами [115], приводит к образованию односвязных лабиринтных структур. Позже этот вывод был подтвержден также в работах [137], [144] на примере развития лабиринтных структур МЖ в вертикальных щелях, а также диэлектрических жидкостей в электрическом поле.

4.4. Неустойчивость в поле диффузионного фронта и кооперативный характер магнитодиффузионных явлений

МД-неустойчивости свободной поверхности НЖ, приводящие к развитию сильноразветвленных структур границ раздела фаз, обусловлены действием потенциальных пондеромоторных сил собственного поля.

Другой класс явлений возникает, когда пондеромоторные силы собственного поля имеют вихревой характер. Такие случаи возможны, когда НЖ стратифицирована по концентрации, температуре. В этой ситуации возможно возникновение вихревых структур подобных

ячейстой тепловой конвекции. Это открывает новые возможности управления полем явлениями тепло- массообмена.

В настоящем разделе рассматривается возникновение вихревого движения НЖ в случае неоднородного распределения концентрации феррочастиц при наличии внешнего однородного поля, обусловленное неоднородным собственным магнитным полем НЖ.

Так как возникновение подобного движения в значительной мере интенсифицирует процесс диффузии частиц, а по своей физической природе оно связано с дальнедействующими силами магнитного межчастичного взаимодействия, то рассматриваемое явление показывает, что процесс диффузии ансамбля феррочастиц во внешнем поле имеет кооперативный характер.

Далее рассмотрим модельный пример данного круга явлений - гидродинамическую неустойчивость горизонтального диффузионного фронта феррочастиц в вертикальном магнитном поле. Пусть в некоторый момент времени образовался концентрационный профиль феррочастиц $n_0(z)$ (ось z направлена вертикально вверх, $\lim_{z \rightarrow -\infty} n_0(z) = n_{03}$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} n_0(z) = n_{01}$).

Плотность среды предполагается линейно зависящей от концентрации частиц, а зависимость вязкости от концентрации пренебрегается. Вводя потенциал собственного поля \vec{H}_p НЖ - $\vec{H}_p = \nabla \varphi$, уравнения магнитостатики и гидродинамики, учитывая действие собственного поля в первом исчезающем приближении, получим в виде (инерцией жидкости пренебрегается)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{H}_p + 4\pi M(n, H_0) \vec{e}_z) &= 0; \\ -\nabla p + \eta \Delta \vec{V} + M(n, H_0) \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \rho(n) g \vec{e}_z &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение переноса частиц, пренебрегая флорезом частиц в неоднородном собственном поле НЖ, а также их броуновской диффузией, имеет вид $\partial n / \partial t + (\vec{V} \nabla) n = 0$.

Так как рассмотрение произвольного концентрационного профиля $n(z)$ представляется затруднительным, то дальнейший анализ проводится для упрощенной ситуации, когда диффузионный фронт представляется в виде плоского слоя толщиной 2ℓ с постоянным градиентом концентрации. Области вне переходного слоя имеют постоянные концентрации частиц $n_1 (z > \ell)$ и $n_3 (z < -\ell)$. Для рассмотрения гидродинамической неустойчивости подобной конфигурации поверхности разрыва градиента концентрации частиц следует рассматривать как свободные. На последних ставятся обычные условия непрерывности тангенциальных и нормальных к поверхности раздела компонент скорости и напряжений. Предполагая $\partial M / \partial n$ от концентрации независимой, уравнения для малых возмущений состояния покоя данной конфигурации можно записать в виде ($i = 1$ - область $z > \ell$; $i = 2$ - переходной слой, $i = 3$ - область $z < -\ell$): движения ($i = 1, 2, 3$)

$$-\nabla p_i + \eta \Delta \vec{V}_i - 4\pi \left(\frac{\partial M_i}{\partial n} \right)^2 n_i \frac{dn_0}{dz} \delta_{i,2} \vec{e}_z + M_{i0} \nabla \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} - \frac{\partial \rho}{\partial n} g n_i \vec{e}_z = 0 \quad (4.4.1)$$

переноса частиц (4.4.2)

$$\partial n_{1,3} / \partial t = 0, \quad \partial n_2 / \partial t = -v_{2z} \frac{dn_0}{dz}$$

и уравнение магнитостатики для малых возмущений собственного поля НЖ

$$\Delta \varphi_i = -4\pi \frac{\partial M_i}{\partial n} \frac{dn_i}{dz} \quad (4.4.3)$$

Уравнение (4.4.1) показывает, что в области переходного слоя ponderomotorная сила собственного поля имеет вихревой характер. Это и является причиной гидродинамической неустойчивости. Физический механизм ее развития наглядно можно описать следующим образом. При неоднородном распределении концентрации феррочастиц M во внешнем однородном поле возникает неоднородное собственное поле, градиент напряженности которого направлен в сторону более

низких концентраций, в данном случае вверх. На поднимающийся элемент объема среды при этом действует направленная вверх пондеромоторная сила, обусловленная неоднородным собственным полем, H_z , которая больше пондеромоторной силы, действующей на окружающую его среду, так как он поднялся с слоев, где намагниченность выше. В результате этого его скорость перемещения вверх увеличивается.

Вторая вихреобразующая сила связана с наличием возмущений собственного поля на диффузионном фронте феррочастиц. Причем так как концентрация частиц в области восходящего движения больше, а следовательно напряженность магнитного поля меньше, то существует градиент напряженности поля, параллельный диффузионному фронту и направленный в сторону нисходящего движения среды. Вследствие неоднородности диффузионного фронта, обусловленная данной неоднородностью поля, пондеромоторная сила имеет отличную от нуля циркуляцию, которая тормозит развивающееся вихревое движение. Игра данных противоборствующих тенденций и определяет развитие гидродинамической неустойчивости диффузионного фронта.

Применяя операцию rot к уравнению движения (4.4.1) и представляя, в предположении двумерности движения $\vec{V} = (0, v_y(y, z), v_z(y, z))$, поле скоростей через функцию тока $v_y = -\partial\psi/\partial z$ и $v_z = \partial\psi/\partial y$ для последней получим уравнения следующего вида

$$\Delta \Delta \psi_{1,3} = 0;$$

$$\Delta \Delta \psi_2 = \eta^{-1} 4\pi \left(\frac{\partial M_2}{\partial n} \right)^2 \frac{dn_0}{dz} \frac{\partial n_2}{\partial y} + \eta^{-1} \frac{\partial M_2}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial z} + \eta^{-1} \frac{\partial \rho}{\partial n} g \frac{\partial n_2}{\partial y} \quad (4.4.4)$$

Далее запишем систему граничных условий на поверхности разрыва градиента концентрации, при этом ограничимся рассмотрением четных относительно Z возмущений. Уравнения возмущенных поверхностей разрыва градиента концентрации при этом имеют следующий

вид $z = \ell + \zeta(y)$; $z = -\ell + \zeta(y)$. Условия непрерывности тангенциальной и нормальной компонент скорости имеют вид

$$\psi_1(\ell) = \psi_2(\ell) ; \frac{d\psi_1(\ell)}{dz} = \frac{d\psi_2(\ell)}{dz} . \quad (4.4.5)$$

Условие непрерывности тангенциальной компоненты тензора напряжений дает

$$\frac{d^2\psi_1(\ell)}{dz^2} = \frac{d^2\psi_2(\ell)}{dz^2} . \quad (4.4.6)$$

Получим условие непрерывности нормальной компоненты тензора напряжений. Оно может быть записано в следующем виде

$$-p_2 - \zeta \frac{dp_{20}}{dz} + 2\eta \frac{\partial v_{2z}}{\partial z} = -p_1 - \zeta \frac{dp_{10}}{dz} + 2\eta \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} .$$

Градиент давления в состоянии покоя представляется в виде

$$\frac{dp_{20}}{dz} = -4\pi M_2 \frac{\partial M_2}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} - \rho g ; \quad dp_{10}/dz = -\rho g .$$

Если ввести инкремент временного роста возмущений $\lambda(n, \vec{v} \sim \exp \lambda t)$, то кинематическое условие на свободной границе $\partial \zeta / \partial t = v_z$ для периодических в направлении оси y возмущений дает $\lambda \zeta = ik \psi_1(\ell)$.

На основании " y " компоненты уравнения (4.4.1) выразим давление в возмущенном состоянии в следующем виде

$$-ikp_2 + \eta \left(\frac{d^2 v_{2y}}{dz^2} - k^2 v_{2y} \right) + M_{20} ik \frac{d\varphi_2}{dz} = 0 ;$$

$$-ikp_1 + \eta \left(\frac{d^2 v_{1y}}{dz^2} - k^2 v_{1y} \right) + M_{10} ik \frac{d\varphi_1}{dz} = 0 .$$

Граничные условия для тангенциальных и нормальных компонент возмущенного собственного поля НЖ при этом имеют следующий вид

$$\varphi_2|_{z=\ell} = \varphi_1|_{z=\ell} ;$$

$$\left. \frac{d\varphi_2}{dz} + \zeta \frac{d^2\varphi_2^0}{dz^2} + 4\pi \frac{\partial M_2}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} \zeta + 4\pi \frac{\partial M_2}{\partial n} n_2 \right|_{z=\ell} = \frac{d\varphi_1}{dz} + 4\pi \frac{\partial M_1}{\partial n} n_1 ; \quad (4.4.7)$$

что, если подставить градиент невозмущенного собственного поля

$$\frac{d^2 \psi_2^0}{dz^2} = -4\pi \frac{\partial M_2}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} \quad \text{дает} \quad \frac{d\psi_2}{dz} = \frac{d\psi_1}{dz} + 4\pi \frac{\partial M_2}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} \zeta. \quad (4.4.8)$$

В результате условие непрерывности нормальной компоненты тензора напряжений может быть записано в следующем виде

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta}{i\kappa} \left(\frac{d^2 V_{2y}}{dz^2} - K^2 V_{2y} \right) - M_{20} \frac{d\psi_2}{dz} + \zeta 4\pi M_2 \frac{\partial M_2}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} + \zeta \rho_2 g + 2\eta i\kappa \frac{d\psi_2}{dz} = \\ & = -\frac{\eta}{i\kappa} \left(\frac{d^2 V_{1y}}{dz^2} - K^2 V_{1y} \right) - M_{10} \frac{d\psi_1}{dz} + \zeta \rho_1 g + 2\eta i\kappa \frac{d\psi_1}{dz}, \end{aligned}$$

что, воспользовавшись условием (4.4.8), непрерывности плотности и касательных компонент скорости дает

$$\frac{d^2 V_{2y}}{dz^2} = \frac{d^2 V_{1y}}{dz^2} \Big|_{z=l} \quad \text{или} \quad \frac{d^3 \psi_2}{dz^3}(l) = \frac{d^3 \psi_1}{dz^3}(l). \quad (4.4.9)$$

На основании уравнений (4.4.1-3), и граничных условий (4.4.5-9) найдем инкремент роста малых возмущений в зависимости от их волнового числа. Если воздействовать оператором Лапласа на уравнение для функции тока в области "2" и выразить концентрацию феррочастиц на основании уравнения (4.4.2) в виде

$$n_2 = -\frac{i\kappa \psi_2}{\lambda} \frac{dn_0}{dz},$$

то уравнение для ψ_2 может быть записано в следующем виде

$$\Delta \Delta \Delta \psi_2 = -\frac{4\pi \left(\frac{\partial M_2}{\partial n} \right)^2 \left(\frac{dn_0}{dz} \right)^2 K^4 \psi_2}{\eta \lambda} + \frac{\frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} - g K^2}{\eta \lambda} \Delta \psi_2.$$

Решение для ψ_2 находим в виде $\psi_2 \sim \exp(\alpha z/l)$. Тогда для α , вводя безразмерный параметр $Gm = \Delta \rho g l / 4\pi (\Delta M)^2$ ($\Delta \rho = -\frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} l$), характеризующий отношение гравитационных и магнитных сил, получим характеристическое уравнение следующего вида ($\Delta M = \frac{\partial M_2}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} l$)

$$(\alpha^2 - (kl)^2)^3 + \frac{4\pi(\Delta M)^2}{\eta\lambda} (kl)^4 (1 - Gm) + \frac{4\pi(\Delta M)^2}{\eta\lambda} (kl)^2 \alpha^2 Gm = 0. \quad (4.4.10)$$

Как можно показать, кубическое относительно α^2 уравнение обладает одним действительным и двумя комплексно сопряженными корнями. Тогда четное решение для функции тока в области "1" и "2" можно записать в следующем виде ($\tilde{z} = z/l$)

$$\psi_1 = B_1 \exp(-kl\tilde{z}) + B_2(\tilde{z}-1) \exp(-kl\tilde{z});$$

$$\psi_2 = A_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\alpha_1}\tilde{z}) + A_2 \operatorname{ch}(\gamma\tilde{z}) \cos(\delta\tilde{z}) + A_3 \operatorname{sh}\gamma\tilde{z} \sin\delta\tilde{z};$$

α_1 - действительный корень уравнения (4.4.10), $\gamma, \pm\delta$ - действительная и мнимая части квадратного корня комплексных корней уравнения (4.4.10).

Решение для возмущения собственного поля имеет вид

$$\left(\varphi = \frac{4\pi i k}{\lambda} \frac{\partial M_2}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} \tilde{\varphi}\right) \tilde{\varphi}_1 = D_1 \exp(-kl\tilde{z}),$$

$$\tilde{\varphi}_2 = C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_1}\tilde{z}) + C_2 \operatorname{sh}(\gamma\tilde{z}) \cos\delta\tilde{z} + C_3 \operatorname{ch}\gamma\tilde{z} \sin\delta\tilde{z}.$$

Связь коэффициентов $C_1 \div C_3$ и $A_1 \div A_3$ следующая

$$C_1/l = \sqrt{\alpha_1} A_1 / (\alpha_1 - (kl)^2);$$

$$C_2/l = A_2 \gamma (\gamma^2 + \delta^2 - (kl)^2) / \Delta - A_3 \delta (\gamma^2 + \delta^2 + (kl)^2) / \Delta;$$

$$C_3/l = A_2 \delta (\gamma^2 + \delta^2 + (kl)^2) / \Delta + A_3 \gamma (\gamma^2 + \delta^2 - (kl)^2) / \Delta,$$

$$\text{здесь } \Delta = (\gamma^2 - \delta^2 - (kl)^2)^2 + 4\delta^2\gamma^2.$$

Граничные условия (4.4.5 - 4.4.9) дают систему уравнений для определения шести неизвестных постоянных A_1, A_3, B_1, B_2 и D_1 . В результате исключения неизвестных B_1, B_2 и D_1

получается система уравнений для неизвестных коэффициентов $A_1 \div A_3$ $\sum_{k=1}^3 a_{ik} A_k = 0$. Элементы матрицы коэффициентов данной системы выражаются следующим образом

$$(\alpha^2 - (kl)^2)^3 + \frac{4\pi(\Delta M)^2}{\eta\lambda} (kl)^4 (1 - Gm) + \frac{4\pi(\Delta M)^2}{\eta\lambda} (kl)^2 \alpha^2 Gm = 0. \quad (4.4.10)$$

Как можно показать, кубическое относительно α^2 уравнение обладает одним действительным и двумя комплексно сопряженными корнями. Тогда четное решение для функции тока в области "1" и "2" можно записать в следующем виде ($\tilde{z} = z/l$)

$$\psi_1 = B_1 \exp(-kl\tilde{z}) + B_2(\tilde{z}-1) \exp(-kl\tilde{z});$$

$$\psi_2 = A_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\alpha_1}\tilde{z}) + A_2 \operatorname{ch}(\gamma\tilde{z}) \cos(\delta\tilde{z}) + A_3 \operatorname{sh}\gamma\tilde{z} \sin\delta\tilde{z};$$

α_1 - действительный корень уравнения (4.4.10), $\gamma, \pm\delta$ - действительная и мнимая части квадратного корня комплексных корней уравнения (4.4.10).

Решение для возмущения собственного поля имеет вид

$$\left(\varphi = \frac{4\pi i k}{\lambda} \frac{\partial M_2}{\partial n} \frac{dn_0}{dz} \tilde{\varphi}\right) \tilde{\varphi}_1 = D_1 \exp(-kl\tilde{z}),$$

$$\tilde{\varphi}_2 = C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{\alpha_1}\tilde{z}) + C_2 \operatorname{sh}(\gamma\tilde{z}) \cos\delta\tilde{z} + C_3 \operatorname{ch}\gamma\tilde{z} \sin\delta\tilde{z}.$$

Связь коэффициентов $C_1 \div C_3$ и $A_1 \div A_3$ следующая

$$C_1/l = \sqrt{\alpha_1} A_1 / (\alpha_1 - (kl)^2);$$

$$C_2/l = A_2 \gamma (\gamma^2 + \delta^2 - (kl)^2) / \Delta - A_3 \delta (\gamma^2 + \delta^2 + (kl)^2) / \Delta;$$

$$C_3/l = A_2 \delta (\gamma^2 + \delta^2 + (kl)^2) / \Delta + A_3 \gamma (\gamma^2 + \delta^2 - (kl)^2) / \Delta,$$

здесь $\Delta = (\gamma^2 - \delta^2 - (kl)^2)^2 + 4\delta^2\gamma^2$.

Граничные условия (4.4.5 - 4.4.9) дают систему уравнений для определения шести неизвестных постоянных A_1, A_3, B_1, B_2 и D_1 . В результате исключения неизвестных B_1, B_2 и D_1 получается система уравнений для неизвестных коэффициентов $A_1 \div A_3$ $\sum_{k=1}^3 a_{ik} A_k = 0$. Элементы матрицы коэффициентов данной системы выражаются следующим образом

$$a_{11} = (\alpha_1 + (\kappa l)^2) \operatorname{ch} \sqrt{\alpha_1} + 2 \kappa l \sqrt{\alpha_1} \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_1};$$

$$a_{12} = \operatorname{ch} \gamma (\cos \delta (\gamma^2 - \delta^2 + (\kappa l)^2) - \sin \delta \cdot 2 \delta \kappa l) + \operatorname{sh} \gamma (2 \kappa l \gamma \times \\ \times \cos \delta - 2 \delta \gamma \sin \delta);$$

$$a_{13} = \operatorname{sh} \gamma (\sin \delta (\gamma^2 + (\kappa l)^2 - \delta^2) + 2 \kappa l \delta \cos \delta) + \operatorname{ch} \gamma (2 \delta \gamma \cos \delta + \\ + 2 \kappa l \gamma \sin \delta);$$

$$a_{21} = \sqrt{\alpha_1} \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_1} (\alpha_1 - 3(\kappa l)^2) - 2(\kappa l)^3 \operatorname{ch} \sqrt{\alpha_1};$$

$$a_{22} = \operatorname{ch} \gamma (\sin \delta (\delta^2 - 3\gamma^2 + 3(\kappa l)^2) \delta - 2(\kappa l)^3 \cos \delta) + \\ + \operatorname{sh} \gamma \cos \delta (\gamma^2 - 3\delta^2 - 3(\kappa l)^2) \gamma;$$

$$a_{23} = \operatorname{sh} \gamma (\cos \delta (3\gamma^2 - \delta^2 - 3(\kappa l)^2) \delta - 2(\kappa l)^3 \sin \delta) + \operatorname{ch} \gamma (\gamma^2 - \\ - 3\delta^2 - 3(\kappa l)^2) \gamma \sin \delta;$$

$$a_{31} = ((\kappa l)^2 \operatorname{ch} \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\alpha_1} \kappa l \operatorname{sh} \sqrt{\alpha_1}) / (\alpha_1 - (\kappa l)^2);$$

$$a_{32} = \operatorname{sh} \gamma (2 \gamma \delta (\kappa l)^2 \sin \delta + \kappa l \gamma \cos \delta (\delta^2 + \gamma^2 - (\kappa l)^2)) / \Delta + \\ + \operatorname{ch} \gamma (\delta \kappa l \gamma^2 + \delta^2 + (\kappa l)^2) \sin \delta + (\kappa l)^2 (\gamma^2 - \delta^2 - (\kappa l)^2) \cos \delta / \Delta;$$

$$a_{33} = \operatorname{ch} \gamma (\gamma \kappa l (\delta^2 + \gamma^2 - (\kappa l)^2) \sin \delta - 2 \delta \gamma (\kappa l)^2 \cos \delta) / \Delta + \\ + \operatorname{sh} \gamma ((\kappa l)^2 (\gamma^2 - \delta^2 - (\kappa l)^2) \sin \delta - \\ - \kappa l \delta (\gamma^2 + \delta^2 + (\kappa l)^2) \cos \delta) / \Delta.$$

Условие обращения в нуль определителя матрицы a_{ik} дает инкремент роста возмущений в зависимости от физических параметров и длины волны. Данная зависимость, аналогично тому как это было сделано при исследовании электрогидродинамической неустойчивости жидких кристаллов [157], находилась численно на ЭВМ. При этом численно решалось также кубическое уравнение (4.4.10). Соответствующие обращению в нуль определителя матрицы a_{ik} значения инкремента роста возмущений находятся путем сканирования значений определителя на плоскости λ , κl .

Полученные таким образом значения безразмерного инкремента роста возмущений показаны на рис. 4.4.1. Рис. 4.4.1 показывает наличие возмущений с максимальным инкрементом роста. В этом плане настоящий вывод отличается от результатов рассмотрения неустойчивости границы раздела магнитной и немагнитной сред с одинаковыми вязкостями при пренебрежимо малом коэффициенте поверхностного натяжения, которое для инкремента роста малых возмущений дает

$$\lambda = \frac{(2\pi M^2 - \Delta\rho g/k)}{4\eta} \quad (4.4.II)$$

Как показывает выражение (4.4.II) в этом случае положительный инкремент имеют моды с длиной волны меньшей критической $\lambda_c = (2\pi M)^2 / \Delta\rho g$, причем наибольший инкремент соответствует бесконечно малым длинам волн. Таким образом, при интерпретации образования периодической структуры учет толщины переходного слоя представляется существенным.

Возникающее в результате развития неустойчивости диффузионного фронта макроскопическое движение имеет ячеистый характер, аналогичный обычной бенароской конвекции. Несколько линий тока наиболее быстро растущих возмущений при $Gm = 0,3$, соответствующих волновому числу $k\ell = 0,9$, показано на рис. 4.4.2. Функция тока при этом нормирована условием $A_1 = 1/\text{ch}\sqrt{\alpha_1}$. Для корней уравнения (4.4.I0) в этом случае имеют место следующие численные значения $\sqrt{\alpha_1} = 0,768i$, $\mu = 1,402$, $\delta = 0,675$, а функция тока имеет следующий вид ($\tilde{y} = y/\ell$)

$$\psi_1 = (1,206 + 0,647(\tilde{z}-1)) e^{-0,9(\tilde{z}-1)} \cos(0,9\tilde{y});$$

$$\psi_2 = (1,390 \cos(0,768\tilde{z}) + 0,068 \text{ch}(1,402\tilde{z}) \cos(0,675\tilde{z}) + 0,077 \text{sh}(1,402\tilde{z}) \sin(0,675\tilde{z})) \cos(0,9\tilde{y}).$$

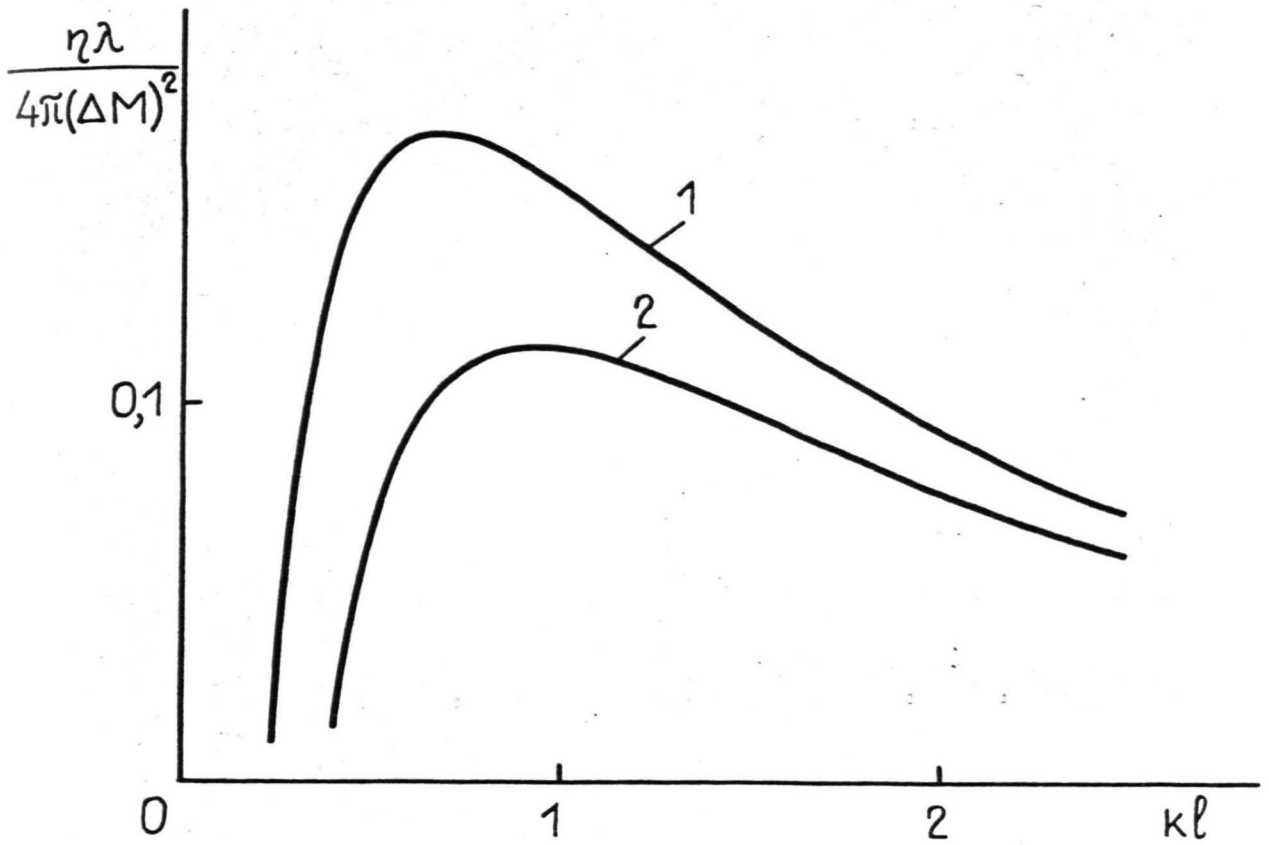


Рис. 4.4.1. Инкременты роста малых возмущений
диффузионного фронта в зависимости
от волнового числа возмущений.
1 - $Gr = 0,2$; 2 - $Gr = 0,3$.

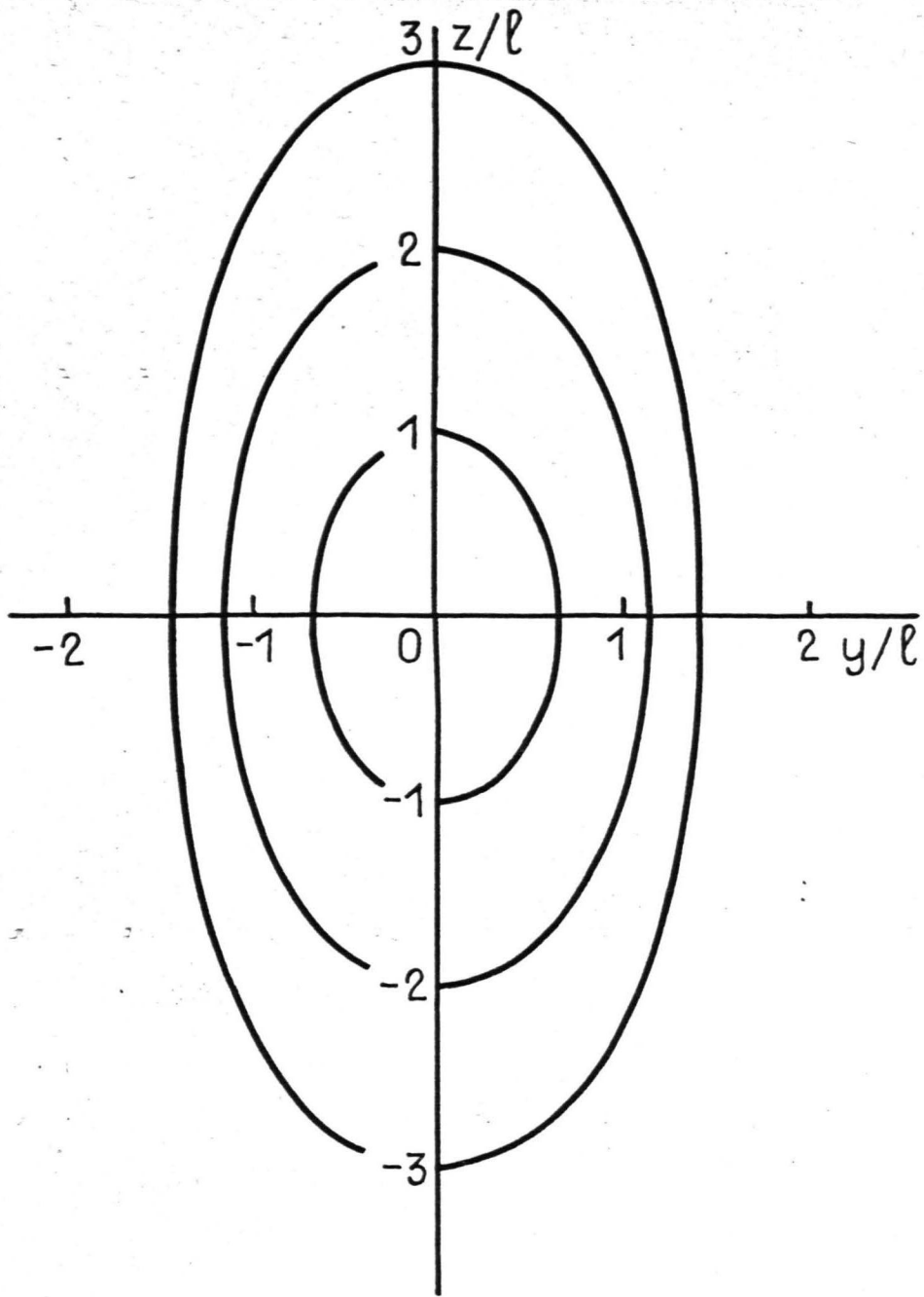


Рис. 4.4.2. Линии тока возмущения ($k\ell = 0,9$) с наибольшим инкрементом роста при $Gm = 0,3$.

В начале настоящего раздела было указано на действии двух противоборствующих тенденций при возникновении макроскопического движения на диффузионном фронте феррочастиц — одной дестабилизирующей и связанной с неоднородностью собственного поля в невозмущенном состоянии и другой стабилизирующей, связанной с возмущением собственного поля в диффузионном фронте макроскопическим движением среды. Полученные характеристики движения и магнитного поля позволяют проиллюстрировать это и количественно для случая наиболее быстро растущей моды с $k\ell = 0,9$ при $Gm = 0,3$.

Уравнение вихря (4.4.4) можно преобразовать к следующему виду, опуская гравитационный член, который в рассматриваемом случае играет стабилизирующую роль

$$\Delta \Delta \Psi_2 = \frac{4\pi (\Delta M)^2 k^2}{\lambda \eta \ell^2} \left(\Psi_2 - \frac{d\varphi_2}{dz} \right).$$

Отсюда видно, что условие поддержания отрицательной циркуляции в окрестности точки $Y = 0, Z = 0$ состоит в выполнении неравенства $\Psi_2 - d\tilde{\varphi}_2/dz > 0$. При этом $\Psi_2(0,0) = 1,458$, а $d\tilde{\varphi}_2/dz(0,0)$ выра-

жается в виде

$$d\tilde{\varphi}_2/dz(0,0) = \frac{C_1}{\ell} \sqrt{\alpha_1} + \left(\frac{C_2}{\ell} \gamma + \frac{C_3}{\ell} \delta \right),$$

что, если воспользоваться выражениями коэффициентов $C_1 \div C_3$, а также полученными выше численными значениями $\sqrt{\alpha_1}$, γ и δ дает $d\tilde{\varphi}_2/dz = 0,634$.

Таким образом, модельный пример подтверждает наличие двух противоборствующих тенденций вихреобразования на диффузионном фронте феррочастиц, причем дестабилизация, связанная с неоднородностью собственного поля в невозмущенном состоянии оказывается преобладающей.

Возникающее на диффузионном фронте в однородном внешнем поле макроскопическое движение показывает, что диффузия магнитных

частиц вследствие дальнедействующего характера межчастичных магнитных сил имеет кооперативный характер. Это заставляет с определенной осторожностью подходить к интерпретации экспериментов по исследованию диффузии магнитных частиц в однородном поле [158].

Далее приведем результаты некоторых качественных экспериментов, иллюстрирующих возникновение конвективных движений на диффузионном фронте коллоидальных частиц ферромагнетика во внешнем магнитном поле. При этом переходной слой, разделяющий области различных концентраций феррочастиц, образовывался в результате приведения в соприкосновение в горизонтальном плоском слое толщиной 0,1 мм двух капелек - одной чистого трансформаторного масла, второй - МЖ на основе трансформаторного масла с намагниченностью насыщения 10 Гс.

Состояние диффузионного фронта после приведения капелек в соприкосновение показано на рис. 4.4.3. При наложении поля напряженностью 200 Э поперечного переходному слою на нем в течении долей секунды развивается пальцеобразная структура, показанная на рис. 4.4.4. Образование пальцевидной структуры можно интерпретировать как результат развития конвективного движения на диффузионном фронте феррочастиц, причем расположение пальцев соответствует местам движения, направленного от более концентрированной частицами области к менее концентрированной. Характерный период пальцеобразной структуры - около 0,02 мм. Фотографирование структур осуществляется через микроскоп в проходящем свете.

Оценку влияния теплового движения частиц на развитие указанных структур, можно получить на основе соотношения Эйнштейна $\Delta l = \sqrt{kT/3\pi\eta R t}$, что при значениях параметров $kT = 4 \cdot 10^{-14}$ эрг, $R = 5 \cdot 10^{-7}$ см, $\eta = 0,2$ пуаз и характерном времени порядка 1/10 с для случайного перемещения частиц дает $7 \cdot 10^{-5}$ см,



Рис. 4.4.3. Диффузионный фронт феррочастиц при отсутствии магнитного поля.

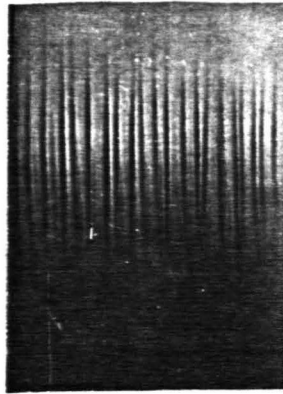


Рис. 4.4.4. Структура диффузионного фронта в поперечном ему магнитном поле.

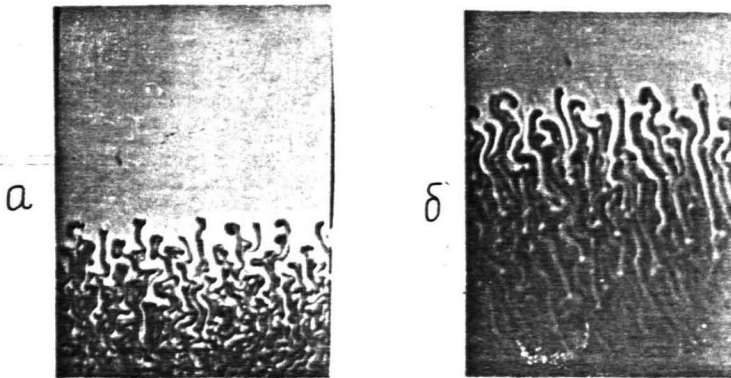


Рис. 4.4.5. Структура диффузионного фронта феррочастиц в тонкой щели при наличии магнитного поля поперечного границам щели. Структура "б" соответствует более поздним моментам времени.

что более чем на порядок меньше характерного периода структуры. Это оправдывает возможность пренебрежения собственной диффузией частиц при описании развития периодической структуры диффузионного фронта.

В модельном примере при написании уравнения переноса частиц пренебрегается влиянием случайного теплового движения и флорезом в неоднородном поле, создаваемом ансамблем частиц. Получим условие возможности пренебрежения флоретической скоростью переноса частиц по сравнению со скоростью макроскопического движения среды. Скорость макроскопического движения имеет порядок ψ/ℓ , где ψ значение функции тока в центре вихря. Флоретическая скорость равна $\frac{M}{n\alpha} \frac{d^2\psi}{dz^2}$ (α - коэффициент стоксова трения). Из уравнений магнитостатики видно, что $d^2\psi/dz^2$ имеет порядок $\frac{\partial M}{\partial n} n^{1/\ell}$. Возникающее перераспределение концентрации частиц может быть оценено, исходя из характерного времени развития возмущений λ^{-1} как $n \sim \frac{\psi}{\lambda\ell} \frac{dn_0}{dz}$. Отсюда следует, что флоретическая скорость частиц имеет порядок $\frac{M^2}{n\alpha} \cdot \psi/\lambda\ell^3$. В результате, с учетом того обстоятельства, что $n\alpha R^2$ (R - радиус частицы) имеет порядок $\eta\psi$ (ψ - объемная доля частиц), а инкремент развития структуры $\lambda \sim M^2/\eta$, для отношения скорости флореза к макроскопической скорости среды имеет место оценка R^2/ℓ^2 т.е. в условиях, когда размер частиц мал по сравнению с характерным масштабом движения, относительным движением частиц и среды можно пренебречь.

При наложении магнитного поля напряженностью 100 Э поперечно плоской щели характер развивающихся структур имеет несколько другой вид, который в разные моменты развития показан на рис. 4.4.5а и б. В этом случае ситуация в некотором смысле аналогична случаю развития гребенчатой неустойчивости, рассмотрен-

ному в 3.5. Отметим, что для концентрированных частицами выростов наблюдается характерная змеевидная неустойчивость, описанная в 3.4.

Физическая причина развития неустойчивости в случае наложения поля тангенциального диффузионному фронту феррочастиц в плоской щели при этом аналогична случаю нормального к диффузионному фронту поля — так как в области более концентрированной частицами размагничивающее поле больше, то существует градиент напряженности макроскопического поля, направленный в сторону меньших концентраций частиц. Подобная конфигурация является неустойчиво стратифицированной, аналогично тому, как это было теоретически проиллюстрировано для рассмотренной выше модельной ситуации.

В отношении возможности количественного сопоставления выводов рассмотрения модельной ситуации с данными описанных качественных экспериментов следует сказать следующее. Настоящий модельный пример рассматривался с целью иллюстрации нового физического явления — возникновения, обусловленного межчастичным магнитным взаимодействием вихревого движения намагничивающихся жидких сред и образования вследствие этого периодических структур. Качественные эксперименты выполнены в горизонтальных плоских слоях, где действием силы тяжести можно пренебречь. Роль силы тяжести в этом случае может играть неоднородность внешнего поля, создаваемого постоянными магнитами. Отметим, также, что для возможности проведения количественного сопоставления необходим контроль толщины диффузионного фронта, определение динамики развития его неустойчивости. Это требует дальнейших экспериментальных исследований.

Следует отметить, что в настоящее время известно также несколько экспериментальных и теоретических работ, в которых рассматривается в известном смысле аналогичная ситуация — тепловая

конвекция МЖ в тонких горизонтальных слоях при наличии однородного магнитного поля. В работе [159] теоретически показано, что возмущения внешнего однородного поля, обусловленные температурной зависимостью намагниченности, могут приводить к тепловой конвекции и в ситуациях, когда обычный механизм, обусловленный действием архимедовой подъемной силы, например при нагреве сверху, не работает.

Экспериментально развитие свободной конвекции в МЖ при наличии внешнего однородного поля и нагреве сверху, что аналогично рассмотренному выше случаю возникновения конвекции при гравитационно устойчивой концентрационной стратификации НЖ одновременно с нашей работой [160] обнаружена в работе [161]. Физический механизм ее развития аналогичен описанному выше - неоднородный нагрев приводит к наличию неоднородного собственного поля МЖ с градиентом порядка $-4\pi \frac{\partial M}{\partial T} \frac{dT}{dz}$ и направленного в направлении градиента температуры. В поле сил данного неоднородного поля и реализуется магнитный аналог тепловой конвекции, обусловленной действием архимедовой выталкивающей силы - на поднимающийся элемент жидкости, так как он более холоден при нагреве сверху, действует сила со стороны неоднородного собственного поля НЖ, которая больше, чем сила, действующая на окружающую его более теплую среду, в результате чего его скорость перемещения вверх увеличивается. В реальных условиях порог развития тепловой конвекции, обусловленный данным механизмом, определяется балансом сил магнитного и гравитационного происхождения, а также вязкостью и теплопроводностью НЖ. Условия возникновения тепловой конвекции в плоском слое толщиной ℓ , с учетом ponderomotorного действия собственного поля НЖ, обусловленного ее температурной неоднородностью, и силы тяжести теоретически получены в работе [159] и при отсутствии гравитационного механизма тепловой конвекции имеют вид

$$\frac{4\pi(\partial M/\partial T)^2(\Delta T)^2\ell^2}{k\eta\mu} \gg N_c,$$

где N_c зависит от значения напряженности внешнего поля, граничных условий и имеет порядок $2 \cdot 10^3$, а k - коэффициент температуропроводности, μ - магнитная проницаемость НЖ.

Случай, рассматриваемый в настоящем разделе, качественно отличается от рассмотренного в работе [159] тем, что рассматривается конвекция, обусловленная неоднородным собственным полем при неоднородном распределении концентрации частиц. Это отличие обусловлено следующими причинами. Во-первых, коэффициенты диффузии феррочастиц намного меньше коэффициента температуропроводности, который для МЖ имеет порядок 10^{-3} см²/с, в то время как коэффициент диффузии для МЖ с размером частиц порядка 100 А имеет порядок 10^{-8} см²/с. Это позволяет пренебречь диффузией частиц при развитии конвективного движения, в результате чего оно, как показано выше, возникает беспороговым образом. Во-вторых, в случае неоднородного распределения частиц гораздо большим является и неоднородное собственное поле, так как по сравнению с концентрированной температурная зависимость намагниченности слаба -

$$\frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial T} \cong 10^{-2} - 10^{-3} \text{ 1/К.}$$

Можно добавить, что достаточно интересным представляется исследование развития тепловой конвекции в ситуации, аналогичной показанной на рис. 4.4.5а и б. Неоднородность собственного поля НЖ в данной ситуации должно приводить к развитию весьма сложных, лабиринтных структур поля температур.

ВЫВОДЫ

1. Получены уравнения движения НЖ в тонкой щели с учетом действия сил магнитного межчастичного взаимодействия. Показано, что динамика развития МГД-неустойчивостей НЖ в плоских слоях может быть описана на основе рассмотрения течения Хеле-Шоу, обусловленного действием сил поверхностного натяжения и магнитного межчастичного взаимодействия.

2. Найдены инкременты роста основных деформационных мод равновесных фигур НЖ и установлено, что результаты рассмотрения их устойчивости, полученные путем анализа второй вариации функционала энергии и динамики деформационных мод, идентичны. При этом, в частности, показано, что при достаточно больших магнитных числах Бонда мода деформации капли НЖ в виде трехлепесткового цветка обладает большим инкрементом роста по сравнению с модой эллиптических деформаций. Это показывает возможность развития качественно различного вида структур капель НЖ при квазистатическом и скачкообразном увеличении напряженности поля, которая подтверждается результатами эксперимента.

3. На основе полученных уравнений движения НЖ рассмотрена неустойчивость Тейлора-Саффмена процесса ее вытеснения из тонкой щели немагнитной средой при наличии магнитного поля. Показано, что магнитное поле, поперечное щели, приводит к дополнительной дестабилизации процесса вытеснения, причем в этом случае неустойчивым оказывается и процесс вытеснения НЖ более вязкой жидкостью. Для случая поля, параллельного границам щели и фронту вытеснения, показано, что его наложение приводит к стабилизации процесса вытеснения, причем при достаточно больших магнитных числах Бонда фронт вытеснения устойчив относительно возмущений произвольной

длины волны.

4. Проведены оценки достигаемого в результате развития МГД-неустойчивости НЖ в плоских слоях увеличения межфазной поверхности раздела, которые показывают, что оно реально может составлять сотни и более раз. Показано, что зависимость параметров лабиринтных структур, образуемых НЖ в плоских щелях, от толщины щели, намагниченности аналогична зависимости параметров доменной структуры Киттеля в пленках высокоанизотропных ферромагнетиков от ее толщины и намагниченности ферромагнетика. Указано, что изменением отношения количеств НЖ и немагнитной среды в плоской щели можно моделировать эффекты перестройки доменной структуры ферромагнетика во внешнем поле. Указаны условия получения одно- и многосвязных лабиринтных структур НЖ в плоских слоях и описаны экспериментальные иллюстрации этих ситуаций.

5. Рассмотрено развитие в вертикальном однородном магнитном поле гидродинамической неустойчивости, обусловленной магнитным межчастичным взаимодействием, при гравитационно устойчивой стратификации концентрации НЖ. Показано возникновение обусловленного этим взаимодействием ячеистого движения НЖ и определены инкременты роста мод возмущений концентрационного профиля. Приведен ряд экспериментальных иллюстраций данных явлений. Отмечено, что данное явление в известном смысле аналогично возникновению тепловой конвекции НЖ в однородном поле при нагреве сверху. Указано, что вследствие развития данного вида неустойчивости процесс диффузии коллоидальных частиц ферромагнетика в поле должен иметь кооперативный характер.

Глава 5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МГД-НЕУСТОЙЧИВОСТИ
СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ
ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ СЛОЕ

5.1. Метод граничных интегральных уравнений и динамика
свободных поверхностей в течениях Хеле-Шоу

В третьей и четвертой главах в рамках линейной теории получены достаточные условия неустойчивости симметричных фигур НЖ. Открытым остается вопрос о существовании и форме несимметричных фигур равновесия НЖ. Он может быть исследован путем численного моделирования динамики развития неустойчивости. В данной главе развивается метод проведения подобных численных экспериментов и описываются полученные на его основе результаты численного моделирования.

В разделе 4.1 было показано, что развитие МГД-неустойчивости свободной поверхности НЖ описывается уравнением Дарси

$$-\alpha \vec{v} - \nabla p + 2Mh^{-1} \nabla \varphi = 0; \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

где давление на свободной поверхности равно $p = \sigma/R_L$ (R_L - кривизна границы капли). Магнитостатический потенциал φ определяется формой области, занимаемой НЖ, в виде интеграла

$$\varphi = -M \int dS' \left(\left(\vec{\rho} - \vec{\rho}' \right)^2 \right)^{-1/2} - \left(\left(\vec{\rho} - \vec{\rho}' \right)^2 + h^2 \right)^{-1/2},$$

где $\vec{\rho}$, $\vec{\rho}'$ - радиус-векторы положения точек на границе щели, а интегрирование осуществляется по смачиваемой НЖ области границы щели.

Представляя поле скоростей через функцию тока $v_x = \partial \psi / \partial y$; $v_y = -\partial \psi / \partial x$, вследствие потенциальности движения в плоскости щели для функции тока получим уравнение Лапласа $\Delta \psi = 0$.

Находя решение уравнения Лапласа в виде потенциала простого слоя

$$\psi(\vec{r}) = (2\pi)^{-1} \oint f(l') \ln |\vec{r} - \vec{r}'| dl'$$

из теоремы теории потенциала о нормальной производной потенциала простого слоя на границе области [162] получим

$$(\partial\psi/\partial n)_- = -\frac{1}{2}f(l) + \frac{1}{2\pi} P \oint f(l') \frac{\partial}{\partial n} \ln |\vec{r} - \vec{r}'| dl', \quad (5.1.1)$$

где интеграл в (5.1.1) следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Так как производная функции тока по направлению внешней нормали связана с касательной к границе области компонентой скорости $v_t = -\partial\psi/\partial n|_-$, то выражая предельное значение v_t из уравнения движения ($\tilde{p} = p - 2Mh^{-1}\varphi$) $v_t|_- = -\alpha^{-1} d\tilde{p}/dl|_-$ для определения плотности потенциала простого слоя получается интегральное уравнение II рода

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\tilde{p}}{dl} = -\frac{1}{2}f(l) + \frac{1}{2\pi} P \oint f(l') \frac{\partial}{\partial n} \ln |\vec{r} - \vec{r}'| dl'. \quad (5.1.2)$$

Решение интегрального уравнения (5.1.2) определяет поле скоростей в области и, следовательно, положение ее границы в следующие моменты времени.

Граница области при реализации численного эксперимента фиксируется конечным числом равномерно расположенных вдоль нее маркеров - лагранжевых частиц, перемещающихся со скоростью движения жидкости. При этом координаты границы контура определяются параметрическим образом $X = X(S)$ и $Y = Y(S)$.

Декартовы компоненты скорости движения маркеров связаны с касательной V_t и нормальной V_n к границе контура компонентами скорости соотношениями

$$V_x = \frac{V_t X_s + V_n Y_s}{\sqrt{X_s^2 + Y_s^2}}; \quad V_y = \frac{V_t Y_s - V_n X_s}{\sqrt{X_s^2 + Y_s^2}},$$

здесь и далее индекс " S " означает производную по параметру

S. Воспользовавшись теоремами теории потенциала – теоремой о нормальной производной потенциала простого слоя [I62] и теоремой о касательной производной потенциала простого слоя [I63]

$$\frac{\partial \psi}{\partial \ell} \Big|_- = \frac{1}{2\pi} P \oint f(\ell') \frac{\partial}{\partial \ell} \ln |\vec{r} - \vec{r}'| d\ell',$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, и связью касательной и нормальной к границе области компонент скорости с функцией тока $V_t \Big|_- = -\partial \psi / \partial n \Big|_-$; $V_n \Big|_- = \partial \psi / \partial \ell \Big|_-$ для декартовых компонент скорости движения маркеров получаем ($f_1 = f \sqrt{X_s^2 + Y_s^2}$)

$$\frac{dx}{dt} = V_x = \frac{1}{2} \frac{X_s f_1(s)}{(X_s^2 + Y_s^2)} - \frac{1}{2\pi} P \oint f_1(s') \frac{(y(s') - y(s)) ds'}{(x(s') - x(s))^2 + (y(s') - y(s))^2};$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y = \frac{1}{2} \frac{Y_s f_1(s)}{(X_s^2 + Y_s^2)} + \frac{1}{2\pi} P \oint f_1(s') \frac{(x(s') - x(s)) ds'}{(x(s') - x(s))^2 + (y(s') - y(s))^2}.$$

Расстояния обезразмериваются по радиусу R равного по площади фигуры капли круга, давления по характерному капиллярному давлению σ / R , а времени по характерному временному масштабу $\tau_0 = R^3 \alpha / \sigma$. В таком случае, производя обезразмеривание линейной плотности вихрей на границе капли согласно $f = \frac{\sigma}{\alpha R^2} \tilde{f}$, исходную систему уравнений для численного моделирования получаем в следующем виде (опуская тильду для безразмерных величин)

$$f_1 = -2 \frac{d\tilde{p}}{ds} + \frac{1}{\pi} P \oint f_1(s') \frac{((y(s') - y(s)) X_s(s) - (x(s') - x(s)) Y_s(s)) ds'}{(x(s) - x(s'))^2 + (y(s) - y(s'))^2}; \quad (5.I.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{x_s(s) f_1(s)}{(x_s^2(s) + y_s^2(s))} - \frac{1}{2\pi} \oint f_1(s') \frac{(y(s') - y(s)) ds'}{(x(s') - x(s))^2 + (y(s') - y(s))^2} \quad (5.1.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{y_s(s) f_1(s)}{(x_s^2(s) + y_s^2(s))} + \frac{1}{2\pi} \oint f_1(s') \frac{(x(s') - x(s)) ds'}{(x(s') - x(s))^2 + (y(s') - y(s))^2} \quad (5.1.5)$$

Давление \tilde{p} на границе капли определяется выражением

$$\tilde{p} = 1/R_L + \frac{Bm R^2}{h^2} \int_S dS' (|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^{-1} - |\vec{\rho} - \vec{\rho}' - h/R \vec{e}_z|^{-1}). \quad (5.1.6)$$

Радиус кривизны границы капли рассчитывается по формуле

$$1/R_L = (x_s y_{ss} - y_s x_{ss}) / (x_s^2 + y_s^2)^{3/2}.$$

При реализации численных экспериментов задача расщепляется следующим образом: 1) при известной форме области, занимаемой каплей, в результате решения интегрального уравнения (5.1.3) находится линейная плотность вихревого слоя, 2) по известной функции f_1 и форме капли производится перестройка согласно соотношениям (5.1.4) и (5.1.5) границы капли для следующего временного шага.

Равновесные конфигурации капли в поле на численном эксперименте получаются путем установления. При этом задается возмущение симметричной конфигурации определенной формы и моделируется динамика развития конфигураций вплоть до момента, когда изменения на временном шаге координат маркеров становятся меньшими некоторой наперед заданной малой величины.

5.2. Алгоритм реализации численных экспериментов
и результаты некоторых тестовых расчетов

Решение интегрального уравнения (5.1.3) находится методом конечных элементов (Галеркина) [164]. При этом искомая функция $f_1(s)$ разлагается в ряд по пирамидальным функциям φ_i , связанным с узлами сетки $\{s_i\}$ в области значений параметра S , которые определяются следующими равенствами

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{s_{i+1} - s}{s_{i+1} - s_i} = \varphi_i^+ & ; s_i \leq s \leq s_{i+1} \\ \frac{s - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} = \varphi_i^- & ; s_i \geq s \geq s_{i-1} \end{cases}$$

а разложение f_1 имеет вид $f_1(s) = \sum_{i=1}^N f_i \varphi_i(s)$,
здесь f_i - сеточные значения линейной плотности вихревого слоя f_1 . Ортогонализация невязки, получаемой в результате подстановки разложения f_1 в интегральное уравнение (5.1.3) относительно базисных функций φ_i дает алгебраическую систему уравнений для определения f_i

$$\sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} \varphi_i(s) \varphi_k(s) ds f_k = -2 \int_0^{2\pi} \varphi_i(s) \frac{d\tilde{p}}{ds} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_i(s) ds P \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} \varphi_k(s') ((y(s') - y(s)) x_s(s) - (x(s') - x(s)) y_s(s)) / ((x(s') - x(s))^2 + (y(s') - y(s))^2) \cdot ds' f_k. \quad (5.2.1)$$

Неоднородный член уравнения преобразуется в результате интегрирования по частям

$$\int_0^{2\pi} \varphi_i(s) \frac{d\tilde{p}}{ds} ds = \frac{1}{(s_{i+1} - s_i)} \int_{s_i}^{s_{i+1}} \tilde{p} ds - \frac{1}{(s_i - s_{i-1})} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \tilde{p} ds.$$

Интегралы в левой части соотношений (5.2.1) рассчитываются точно согласно формулам $(I_{ik} = \int_0^{2\pi} \varphi_i(s) \varphi_k(s) ds)$

$$I_{ik} = 0; i < k-1; I_{ik} = \frac{1}{6}(s_k - s_{k-1}), i = k-1; I_{ik} = \frac{1}{3}(s_{k+1} - s_{k-1}), i = k$$

$$I_{ik} = \frac{1}{6}(s_{k+1} - s_k); \quad i = k+1; \quad 0, \quad i > k+1.$$

Интегралы в правой части соотношения рассчитываются по формуле трапеций. В результате линейная алгебраическая система уравнений для определения сеточной функции f_i в случае равномерной сетки $\{s_i\}$ имеет следующий вид (H - шаг сетки)

$$\frac{2}{3}f_i + \frac{1}{6}f_{i-1} + \frac{1}{6}f_{i+1} = -\frac{1}{H}(\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1}) + H \sum_{k=1}^N R(i,k) f_k, \quad (5.2.2)$$

здесь

$$R(i,k) = \frac{1}{\pi} \frac{(y(k) - y(i))x_s(i) - (x(k) - x(i))y_s(i)}{(x(k) - x(i))^2 + (y(k) - y(i))^2}, \quad i \neq k;$$

$$R(i,i) = \frac{1}{2\pi} \frac{y_{ss}(i)x_s(i) - x_{ss}(i)y_s(i)}{(x_s^2(i) + y_s^2(i))}.$$

Тут учтено, что особенность ядра интегрального уравнения при $s' = s$ является устранимой и раскрывается по формуле

$$R(s,s) = \frac{1}{2\pi} \frac{y_{ss}x_s - x_{ss}y_s}{x_s^2 + y_s^2}.$$

Система линейных алгебраических уравнений (5.2.2) решается методом исключения Гаусса с частичным выбором ведущего элемента [I65].

Необходимые для определения матрицы коэффициентов и неоднородной части уравнения (5.2.2) значения производных x_s, x_{ss} и y_s, y_{ss} находятся путем интерполирования сеточных значений $x(i)$ и $y(i)$ кубическими сплайн-функциями [I64] при учете периодичности, выражающем условие замкнутости контура капли $x(0) = x(2\pi)$ и $y(0) = y(2\pi)$. Возникающая при этом линейная система уравнений для сеточных значений вторых производных координатных функций $x(s)$ и $y(s)$, решается методом циклической прогонки [I66].

С точностью до членов порядка H^2 система (5.2.2) совпадает с системой, получаемой при решении интегрального уравнения (5.1.3) методом коллокаций на сетке $\{s_i\}$, если функцию $f_1(s)$ представить в виде кусочно-постоянной на интервалах $[s_i - H/2; s_i + H/2]$ и возникающие интегралы рассчитывать по формуле прямоугольника. Подобным образом аппроксимировались выражения для скоростей лагранжевых частиц (5.1.4) и (5.1.5).

При этом интегралы Коши рассчитываются по следующей формуле

$$P \int_{s_i - H/2}^{s_i + H/2} f_1(s') \frac{(y(s') - y(i)) ds'}{(x(s') - x(i))^2 + (y(s') - y(i))^2} = \frac{1}{2} f(i) \frac{y_{ss}(i) H}{x_s^2(i) + y_s^2(i)}$$

и аналогично для второй компоненты скорости маркеров.

В результате выражения для скоростей маркеров имеют следующий вид

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{x_s(i) f(i)}{(x_s^2(i) + y_s^2(i))} - \frac{1}{4\pi} \frac{H y_{ss}(i) f(i)}{(x_s^2(i) + y_s^2(i))} - \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq i} \frac{H f_k (y(k) - y(i))}{(x(k) - x(i))^2 + (y(k) - y(i))^2}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{1}{2} \frac{y_s(i) f(i)}{(x_s^2(i) + y_s^2(i))} + \frac{1}{4\pi} \frac{H x_{ss}(i) f(i)}{(x_s^2(i) + y_s^2(i))} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq i} \frac{H f_k (x(k) - x(i))}{(x(k) - x(i))^2 + (y(k) - y(i))^2}$$

При проведении тестовых численных экспериментов была установлена необходимость равномерного расположения маркеров по контуру капли. Для выравнивания лагранжевых частиц - маркеров вдоль контура капли был применен алгоритм, описанный в работе [167], который состоит из следующих шагов:

- 1) производится параметризация координат маркеров при помощи длин хорд контура согласно следующим соотношениям $\lambda_i = \lambda_{i-1} + \sqrt{(x(i) - x(i-1))^2 + (y(i) - y(i-1))^2}$; $\lambda_0 = 0$; $x(0) = x(N)$, $y(0) = y(N)$;
- 2) путем интерполирования сеточных функций X_i и Y_i на неравномерной сетке λ_i кубическими сплайн-функциями с учетом пери-

одичности, выражающим условие замкнутости контура капли, находится параметрическое представление границы $x(\lambda)$, $y(\lambda)$,

3) на каждом из интервалов $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ параметра λ выбирается средняя точка и по параметрическому представлению контура капли находятся длины дуг ℓ_i ее границы между начальной точкой $x(0) \equiv x(N)$ и $y(0) \equiv y(N)$ и точками, соответствующим узловым значениям параметра λ , вдвое измельченной в результате деления интервалов $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ пополам сетки,

4) полученная сеточная функция $\ell_i = \ell(\lambda_i)$ обращается и путем интерполирования кубическими сплайн-функциями на неравномерной сетке S_i устанавливается непрерывная зависимость $\lambda = \lambda(\ell)$,

5) по зависимостям $\lambda = \lambda(\ell)$ и $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ находятся координаты равномерно расположенных по дуговой длине контура лагранжевых частиц для следующего временного шага.

Для ряда случаев численное моделирование в целях ускорения алгоритма производилось с учетом симметрии капли. При наличии у капли одной плоскости симметрии интерполяция сеточных значений координат маркеров кубическими сплайнами производилась при граничных условиях $\frac{dx}{ds}\Big|_{s=0} = 0; \frac{dy}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{L}{\pi}; \frac{dx}{ds}\Big|_{s=\pi} = 0; \frac{dy}{ds}\Big|_{s=\pi} = -\frac{L}{\pi}$, где L длина половины контура капли, находящаяся на каждом временном шаге при выравнивании маркеров вдоль контура. Интерполяция кубическими сплайнами при выравнивании маркеров вдоль контура производилась с учетом следующих граничных условий

$$\frac{dx}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0; \frac{dy}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 1; \frac{dx}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_N} = 0; \frac{dy}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_N} = -1,$$

а также $d\ell/d\lambda\Big|_{\lambda=0} = d\ell/d\lambda\Big|_{\lambda=\lambda_N} = 1$.

Граничные условия при моделировании капли с двумя перпендикулярными плоскостями симметрии следующие $\frac{dx}{ds}\Big|_{s=0} = 0; \frac{dy}{ds}\Big|_{s=0} = 2L/\pi;$
 $\frac{dx}{ds}\Big|_{s=\pi/2} = 0; \frac{dy}{ds}\Big|_{s=\pi/2} = -2L/\pi,$

где L - длина четверти контура капли, а также

$$\frac{dx}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 0; \quad \frac{dy}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = 1; \quad \frac{dx}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_N} = -1; \quad \frac{dy}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_N} = 0$$

$$\frac{d\ell}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \frac{d\ell}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_N} = 1.$$

В этих случаях не производится также измельчение первоначальной сетки λ_i вдвое (п.3). Длины дуг при выравнивании маркеров вдоль контура находятся в результате численного интегрирования.

Расчет магнитного слагаемого в соотношении (5.1.6) производится двумя способами. Первый применялся при численном моделировании динамики капли, обладающей двумя плоскостями симметрии. При этом предполагалось, что уравнения границы капли в верхней и нижней полуплоскости определяются однозначными функциями $y = y(x)$ и $y = -y(x)$. Обозначая через X_{\min} и X_{\max} абсциссы точек пересечения контуром капли оси X , двойной интеграл в соотношении (5.1.6) может быть записан в следующем виде ($\tilde{h} = h/R$)

$$I = \int_S dS (|\vec{\rho} - \vec{\rho}'|^{-1} - |\vec{\rho} - \vec{\rho}' - h\vec{e}_z|^{-1}) = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} dx' \int_0^{y(x')} dy' \left(((x-x')^2 + (y(x)-y')^2)^{-1/2} + \right. \\ \left. + ((x-x')^2 + (y(x)+y')^2)^{-1/2} - ((x-x')^2 + (y(x)-y')^2 + \tilde{h}^2)^{-1/2} - ((x-x')^2 + (y(x)+y')^2 + \tilde{h}^2)^{-1/2} \right).$$

Данный двойной интеграл в результате его сведения к повторному и явного интегрирования по y' сводится к однократному, который вычисляется численно. Для устранения возникающей логарифмической особенности повторный интеграл преобразуется следующим

$$\int_{X_{\min}}^{X_{\max}} dx' \int_0^{y(x')} dy' (\dots) = \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} dx' \int_{y(x)}^{y(x')} dy' (\dots) + \int_{X_{\min}}^{X_{\max}} dx' \int_0^{y(x)} dy' (\dots),$$

причем второй член правой части последнего выражения вычисляется аналитически. Получаемая для численного интегрирования подынтегральная функция имеет лишь устранимые особенности.

В результате для интеграла I получается следующее выражение

$$\begin{aligned}
 I = & (x_{\max} - x) \ln(2y(x) + \sqrt{(x_{\max} - x)^2 + 4y^2(x)}) + 2y(x) \ln(x_{\max} - x + \\
 & + \sqrt{(x_{\max} - x)^2 + 4y^2(x)}) - (x_{\min} - x) \ln(2y(x) + \sqrt{(x_{\min} - x)^2 + 4y^2(x)}) - \\
 & - 2y(x) \ln(x_{\min} - x + \sqrt{(x_{\min} - x)^2 + 4y^2(x)}) - (x_{\max} - x) \ln|x_{\max} - x| + \\
 & + (x_{\min} - x) \ln|x_{\min} - x| - (x_{\max} - x) \ln(2y(x) + \sqrt{(x_{\max} - x)^2 + \\
 & + \tilde{h}^2 + 4y^2(x)}) + (x_{\min} - x) \ln(2y(x) + \sqrt{(x_{\min} - x)^2 + \tilde{h}^2 + 4y^2(x)}) - \\
 & - 2y(x) \ln(x_{\max} - x + \sqrt{(x_{\max} - x)^2 + \tilde{h}^2 + 4y^2(x)}) + 2y(x) \ln(x_{\min} - x + \\
 & + \sqrt{(x_{\min} - x)^2 + \tilde{h}^2 + 4y^2(x)}) - 2\tilde{h} \operatorname{arctg}((x_{\max} - x + \sqrt{(x_{\max} - x)^2 + \tilde{h}^2 + 4y^2(x)} + \\
 & + 2y(x))/\tilde{h}) + 2\tilde{h} \operatorname{arctg}((x_{\min} - x + \sqrt{(x_{\min} - x)^2 + \tilde{h}^2 + 4y^2(x)} + 2y(x))/\tilde{h}) + \\
 & + (x_{\max} - x) \ln \sqrt{(x_{\max} - x)^2 + \tilde{h}^2} - (x_{\min} - x) \ln \sqrt{(x_{\min} - x)^2 + \tilde{h}^2} + \\
 & + 2\tilde{h} \operatorname{arctg}((x_{\max} - x + \sqrt{(x_{\max} - x)^2 + \tilde{h}^2})/\tilde{h}) - 2\tilde{h} \operatorname{arctg}((x_{\min} - x + \\
 & + \sqrt{(x_{\min} - x)^2 + \tilde{h}^2})/\tilde{h}) + \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx' (\ln((y(x') - y(x) + \sqrt{(x - x')^2 + (y(x') - y(x))^2})/|x - x'| + \\
 & + \ln((y(x') + y(x) + \sqrt{(x - x')^2 + (y(x') + y(x))^2})/(2y(x) + \sqrt{(x - x')^2 + 4y^2(x)})) - \\
 & - \ln((y(x') - y(x) + \sqrt{(x - x')^2 + \tilde{h}^2 + (y(x') - y(x))^2})/\sqrt{(x - x')^2 + \tilde{h}^2}) - \\
 & - \ln((y(x') + y(x) + \sqrt{(x - x')^2 + \tilde{h}^2 + (y(x') + y(x))^2})/(2y(x) + \\
 & + \sqrt{(x - x')^2 + \tilde{h}^2 + 4y^2(x)})) .
 \end{aligned}$$

(5.2.3)

Интегралы в (5.2.3) рассчитывались в результате перехода к независимой переменной интегрирования S и использования пара-

метрического представления координат границы капли $X(S)$ и $y(S)$ кубическими сплайн-функциями. Численное интегрирование производилось по Симпсону с адаптирующимся шагом [165]. Точность интегрирования равнялась $\varepsilon_u = 10^{-5}$.

Данный алгоритм расчета сил собственного магнитного поля капли обладают тем недостатком, что он применим лишь при рассмотрении конфигураций с двумя плоскостями симметрии. Так как теоретические и экспериментальные результаты, изложенные в главе 3, показывают возможность изгиба капель, то для численного моделирования таких ситуаций необходим другой алгоритм.

Алгоритм расчета магнитных сил, пригодный для моделирования произвольных конфигураций, основан на преобразовании двойного интеграла I к контурному.

Последнее возможно на основе следующего тождества

$$\frac{\partial}{\partial y'} \ln(y-y'+\sqrt{a^2+(y-y')^2}) = -1/\sqrt{a^2+(y-y')^2},$$

которое дает

$$I(x,y) = - \int dS' \frac{\partial}{\partial y'} (\ln(y-y'+\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}) - \ln(y-y'+\sqrt{(x-x')^2+\tilde{h}^2+(y-y')^2})).$$

Преобразуя последний интеграл на основе тождества $\int dS \nabla \psi = \oint d\vec{l} \vec{n} \psi$ в интеграл по контуру капли и переходя к параметрическому представлению контура, получается

$$I = \oint ds' x'_s \ln(y-y'+\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}) - \oint ds' x'_s \ln(y-y'+\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\tilde{h}^2}).$$

Первый интеграл в целях удобства вычислений преобразуется путем интегрирования по частям. Замечая, что $x'_s = d/ds'(x(s') - x)$ в результате получается

$$I = \oint ds' \frac{((y-y')x'_s - (x-x')y'_s)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} - \oint ds' x'_s \ln(y-y'+\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+\tilde{h}^2}). \quad (5.2.4)$$

Отсюда видно, что особенность в первом интеграле при $S' = S$ является устранимой. Расчет магнитных сил при численном моделировании конфигураций с одной плоскостью симметрии производился согласно соотношению (5.2.4).

Далее описываются результаты ряда тестовых численных экспериментов, иллюстрирующие работоспособность и достаточную точность предложенного алгоритма численного моделирования МГД-неустойчивости капли НЖ в плоской щели.

В основу тестовых расчетов положен факт, что единственной устойчивой равновесной конфигурацией капли в плоской щели при отсутствии поля является круглая. Следовательно, любая произвольно заданная конфигурация с течением времени должна релаксировать к круглой. Тестовые численные эксперименты подтверждают это. На рис. 5.2.1 показана динамика сходимости к круглой конфигурации при отсутствии магнитного поля.

Данные численного эксперимента могут быть сопоставлены с теорией и количественно. Как показывает отображение временной зависимости разности квадратов большой и малой полуосей фигур, получаемых в ходе развития капли, в полупологарифмических координатах, она имеет линейный характер. Определение методом наименьших квадратов по равномерно расположенным на временном интервале $[0,3; 0,7]$ 30 точкам численного эксперимента коэффициента наклона данной линейной зависимости дает значение $-5,52$ при коэффициенте корреляции практически равном 1.

Данное значение на 8 %, как показывает формула (4.1.II), отличается от теоретического значения -6 . Расхождение данных значений помимо чисто аппроксимационных ошибок может быть обусловлено также нелинейными эффектами.

Аналогичным образом были проведены тестовые численные эксперименты по динамике более сложных конфигураций капель. На рис.

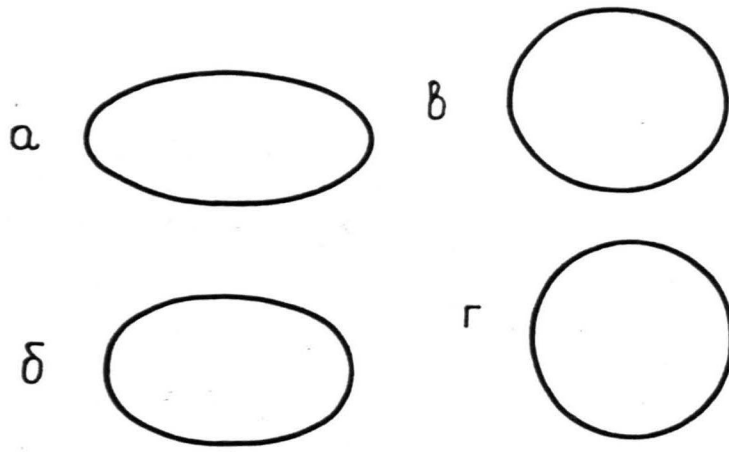


Рис. 5.2.1. Динамика конфигураций капли при отсутствии магнитного поля. 40 маркеров по контуру капли, временной шаг - $2 \cdot 10^{-3}$. а - исходная конфигурация (эллипс с отношением полуосей 2,18); б - 50-й временной шаг; в - 150-й; г - 360-й.

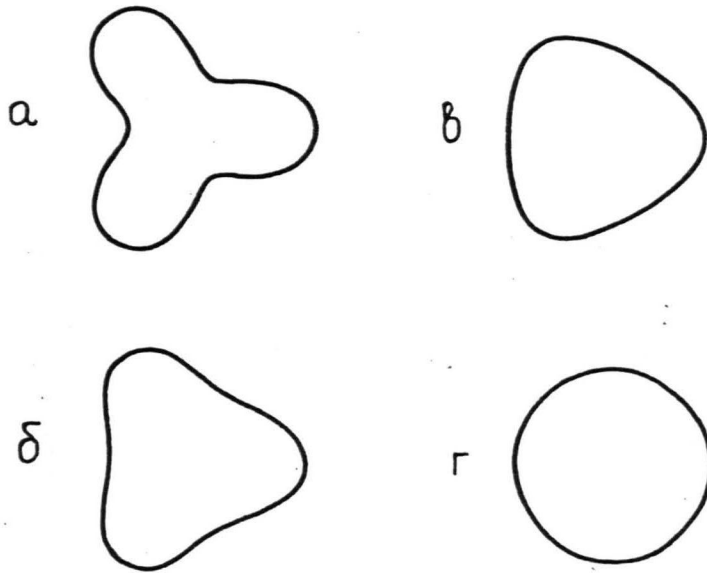


Рис. 5.2.2. Динамика конфигураций капли при отсутствии магнитного поля. 40 маркеров по контуру капли, временной шаг - $2 \cdot 10^{-3}$. а - исходная конфигурация; б - 20-й временной шаг; в - 40-й; г - 132-й.

5.2.2 показано развитие конфигураций из начальной конфигурации в виде трехлепесткового цветка при отсутствии магнитного поля. Уравнение контура исходной конфигурации в полярной системе координат имеет следующий вид $\rho(\varphi) = \sqrt{1 - \varepsilon^2/2} + \varepsilon \cos 3\varphi$, где в данном случае $\varepsilon = 0,4$. Данные этого тестового расчета показывают, что, как и ожидается, происходит релаксация исходной конфигурации к конфигурации в виде круга.

Представление временной зависимости разности расстояний от начала координат точек пересечения контуром капли оси абсцисс в полулогарифмических координатах показывает, что она имеет линейный характер. Определение методом наименьших квадратов по равномерно расположенным на временном интервале $[0,076; 0,192]$ 30 точкам численного эксперимента коэффициента наклона данной линейной зависимости дает значение $-20,77$ при коэффициенте корреляции практически равном -1 . Данное значение на 13% , как показывает формула (4.1.12), отличается от теоретического значения -24 .

Далее описываются результаты численного моделирования, позволяющие численно определить порог развития МГД-неустойчивости круглой капли относительно некоторых деформационных мод. В основу данных расчетов положены так называемые законы критического замедления флуктуаций, описывающие замедление затухания возмущений при приближении к порогу развития неустойчивости и представленные формулами (4.1.11) и (4.1.12).

Определение инкремента затухания возмущений при известном значении магнитного числа Бонда позволяет по соотношениям (4.1.11) и (4.1.12) найти критические значения магнитного числа Бонда соответствующих мод.

Затухание эллиптических возмущений круглой формы капли в докритических условиях производилось для случая $Bm = 9$. Относительная толщина плоской щели \tilde{h} равнялась 2. Временной шаг

$2 \cdot 10^{-3}$, точность интегрирования при нахождении магнитного давления и выравнивании частиц по контуру капли - 10^{-5} . Число лагранжевых частиц по контуру капли равняется 40. Счет прекращается, когда изменение координат маркеров на временном шаге становится меньше 10^{-4} . Расчет магнитного давления производился согласно соотношению (5.2.4).

Моделирование динамики конфигураций в этом случае показало, что исходная конфигурация в виде эллипса с отношением полуосей равном 2,18 релаксирует к кругу, т.е. данное значение B_m является докритическим. При данных значениях параметров отличие конечной конфигурации от круга не превышала 5 %. Для контроля в данном случае производилось также слежение за сохранением объема капли. За весь ход численного эксперимента, который в данном случае составлял 1258 временных шагов, объем капли уменьшился на малую величину, составляющую 0,1 % первоначального значения. Это показывает эффективность предложенного алгоритма с точки зрения сохранения объема капли.

Определение методом наименьших квадратов, аналогично как и выше, декремента затухания возмущений по равномерно расположенным на временном интервале $[1,2; 2,5]$ 66 точкам дает значение -0,85. Отсюда для критического магнитного числа Бонда развития эллиптических возмущений по формуле (4.1.II) получается 10,49, что лишь на 0,6% отличается от теоретического значения 10,55. Подобное хорошее согласие в отличие от расхождения декрементов в 8 % при моделировании динамики капли при отсутствии поля связано с тем, что в поле линейная плотность вихрей, а следовательно скорость движения маркеров меньше, что приводит к меньшим аппроксимационным ошибкам на временном шаге.

Аналогичным образом может быть получен порог развития неустойчивости относительно других деформационных мод. Исследование

затухания возмущений в виде трехлепесткового цветка при наличии поля производилось при $Bm = 12$ и $\tilde{h} = 2$. Численный эксперимент показывает, что исходная конфигурация с уравнением границы в полярной системе координат $r(\varphi) = \sqrt{1 - \varepsilon^2/2} + \varepsilon \cos 3\varphi$ ($\varepsilon = 0,4$) с течением времени сходится к кругу. Параметры численного эксперимента те же, что и в предыдущем случае.

Отображение временной зависимости разности расстояний точек пересечения контуром капли оси абсцисс до начала координат в полупологари́фмических координатах показывает линейную зависимость. Определение методом наименьших квадратов по равномерно расположенным на временном интервале $[0,26; 0,55]$ 30 точкам декремента затухания возмущений дает значение $-6,15$ при коэффициенте корреляции практически равном 1. Отсюда для критического магнитного числа Бонда развития малых возмущений в виде трехлепесткового цветка получается $16,135$, что на $3,3\%$ отличается от теоретического значения, получаемого по формуле (3.3.II).

В ходе данного процесса эволюции конфигураций к кругу, который осуществляется на протяжении 376 временных шагов, объем капли сохраняется с точностью $0,2\%$.

Несколько меньшая точность определения критического значения Bm по сравнению с предыдущим случаем связана с более высокими значениями линейной плотности вихревого слоя и большей аппроксимационной ошибкой при представлении контура по координатам 40 маркеров кубическими сплайн-функциями.

Ряд дополнительных проверочных расчетов будет описан в следующем разделе.

Можно отметить, что при решении линейной алгебраической системы уравнений (5.2.2) был апробован также итерационный алгоритм в виде метода последовательных приближений

$$f_i^{(n)} = H \sum_{k=1}^N R(i,k) f_k^{(n-1)} - (\tilde{p}_{i+1} - \tilde{p}_{i-1}) / H$$

сходимость которого вытекает из свойств потенциала простого слоя [I68] .

Проведенные на основе итерационного алгоритма расчеты при $Vm = 12$ и числе маркеров равном 40 и прочих равных параметрах показывает согласие с результатами расчета по вышеописанному алгоритму. При этом итерационный процесс прекращался, когда максимальное по сетке изменение вихревой плотности было меньше наперед заданной величины $\epsilon = 10^{-3}$. Однако к заметной экономии времени счета использование итерационного алгоритма при указанном размере сетки не привело.

Настоящий алгоритм был реализован в виде Фортран программы для ЕС-1022.

5.3. Численные эксперименты по моделированию развития МГД-неустойчивости капель в плоских щелях и их равновесные конфигурации в поле

Описанные в предыдущих разделах метод и алгоритм реализации численных экспериментов позволяют провести моделирование динамики конфигураций капли при надкритических значениях Vm . В данном разделе излагаются результаты соответствующих численных экспериментов.

В начале решается принципиальный вопрос существования в поле у предполагаемого функционала энергии других, помимо тривиальной круглой, равновесных конфигураций НК и определяется их форма.

Для этого в случае $h / R = 2$ проводится численный эксперимент по динамике установления равновесной конфигурации при надкритическом значении Vm равном 12. Магнитное давление, в пред-

положении наличия у капли двух плоскостей симметрии, находится согласно соотношению (5.2.3), причем в этом случае достаточно нахождения его значений для точек одной четверти контура капли. Перемещение маркеров, находящихся на оси абсцисс, происходят только вдоль нее. Моделируется динамика конфигураций всего контура в целом.

На численном эксперименте, как это показана на рис. 5.3.1, происходит развитие исходной конфигурации в виде эллипса с отношением полуосей 2,18 к гантелеобразной конфигурации. Таким образом, численный эксперимент подтверждает существование у предполагаемого функционала энергии при надкритических значениях неосесимметричных равновесных конфигураций.

Как показывает сопоставление рис. 3.3.4 и 3.3.6 с рис. 5.3.1, получаемая на численном эксперименте равновесная конфигурация качественно сходна конфигурациям, наблюдаемым в натурном эксперименте. Это позволяет сделать заключение, что рассматриваемая модель НЖ с учетом дальнедействующих сил магнитного межчастичного взаимодействия соответствует действительности.

Проводились численные эксперименты, показывающие независимость получаемой равновесной конфигурации от начальной. Так, например, исходная конфигурация в виде эллипса с отношением полуосей равном 4,33 релаксирует в течение 270 временных шагов к конфигурации практически не отличающейся от показанной на рис.

5.3.1. В отличие от динамики, показанной на рис. 5.3.1. в данном случае релаксация к равновесной конфигурации происходит путем стягивания капли вдоль ее длинной оси. Эти расчеты показывают, что выбранный критерий остановки численного эксперимента приводит к возможной ошибке определения параметров равновесной конфигурации, не превышающей 0,5 %.

В целях исследования влияния аппроксимационной точности

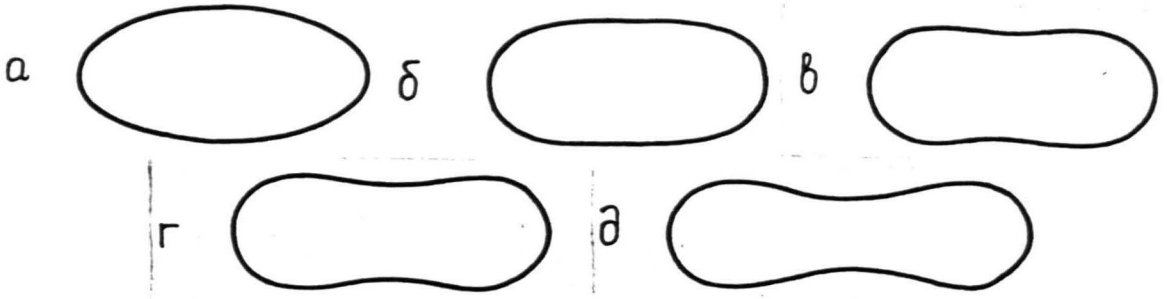


Рис. 5.3.1. Динамика конфигураций капли НЖ в магнитном поле ($B_m = 12$; $\tilde{h} = 2$). 40 маркеров по контуру капли, временной шаг $2 \cdot 10^{-3}$. Точность интегрирования при выравнивании маркеров вдоль контура капли и нахождении магнитного давления 10^{-5} . Для конечной конфигурации изменение координат маркеров на временном шаге меньше 10^{-4} . а - исходная конфигурация (эллипс с отношением полуосей 2,19); б - $t = 0,1$; в - 0,4; г - 0,8; д - 2,546.

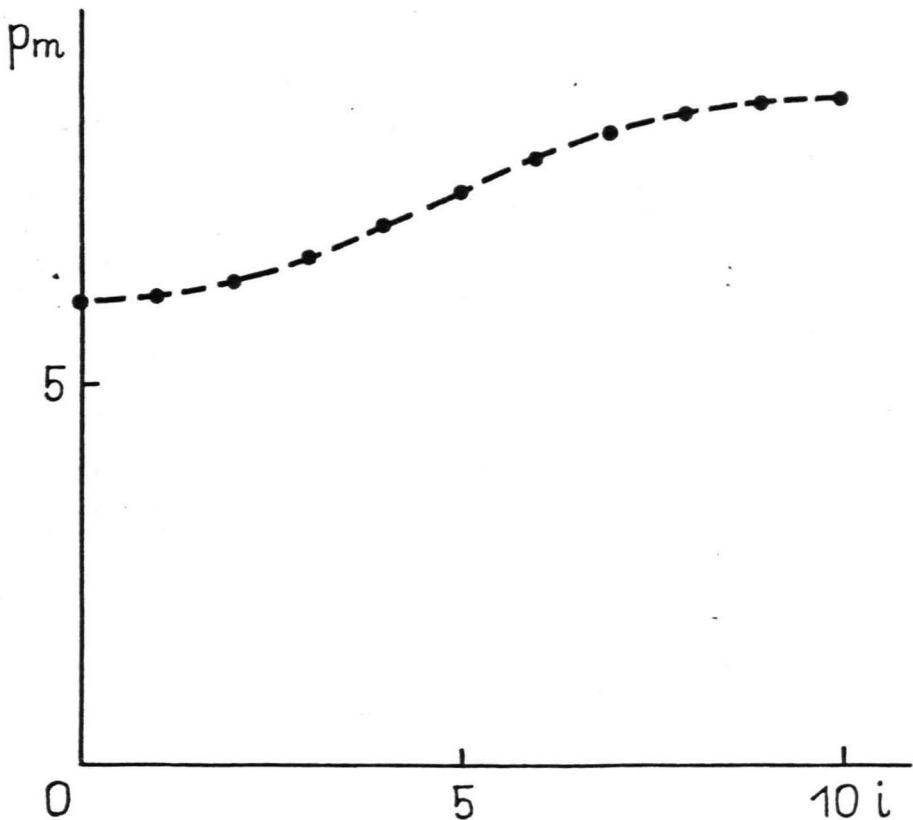


Рис. 5.3.2. Зависимость магнитного давления от номера маркера контура капли для равновесной фигуры НЖ (рис.5.3.1д) в магнитном поле. Отображены точки, соответствующие первому квадранту, нулевой номер соответствует маркеру на оси абсцисс, 10-й - на оси ординат.

представления контура капли по координатам 40 маркеров проводился контрольный расчет при вдвое большем числе маркеров. Для ускорения счета в этом случае моделирование производилось вследствие условий симметрии для одной четверти капли. Расчет при 20 маркерах для 1/4 контура с временным шагом $5 \cdot 10^{-4}$ при $Vm = 12$ показал, что получаемые в заданный момент на рассмотренном отрезке времени $[0; 0,28]$, когда происходят основные качественные изменения конфигурации, положения контура капли практически не отличаются от получаемых из той же исходной конфигурации, но при 40 маркерах по ее периметру. Таким образом, 40 маркеров по контуру капли обеспечивают приемлемую точность при небольших растяжениях капли порядка 5.

Показанная на рис. 5.3.1 равновесная конфигурация определяется балансом сил поверхностного натяжения и магнитного межчастичного взаимодействия. На рис. 5.3.2 показана зависимость эффективного магнитного давления на контуре равновесной гантелеобразной конфигурации от номера равномерно расположенных вдоль него маркеров (нулевой номер соответствует маркеру на оси абсцисс). Рис. 5.3.2 показывает, что магнитное давление на вогнутом участке капли возрастает по сравнению с выпуклым.

Особенности динамики развития гантелеобразной конфигурации характеризует временная зависимость линейной плотности вихревого слоя, которая для случая исходной конфигурации в виде эллипса с отношением полуосей 2,18 показана на рис. 5.3.3. Так как f характеризует линейную плотность вихревого слоя, то ее монотонный характер в начальный момент времени характеризует возникновение гантелеобразной конфигурации. Дальнейшее монотонное поведение f в пределах первого квадранта соответствует процессу растяжения гантелеобразной конфигурации. Для сравнения на рис. 5.3.4 показана временная зависимость линейной плотности

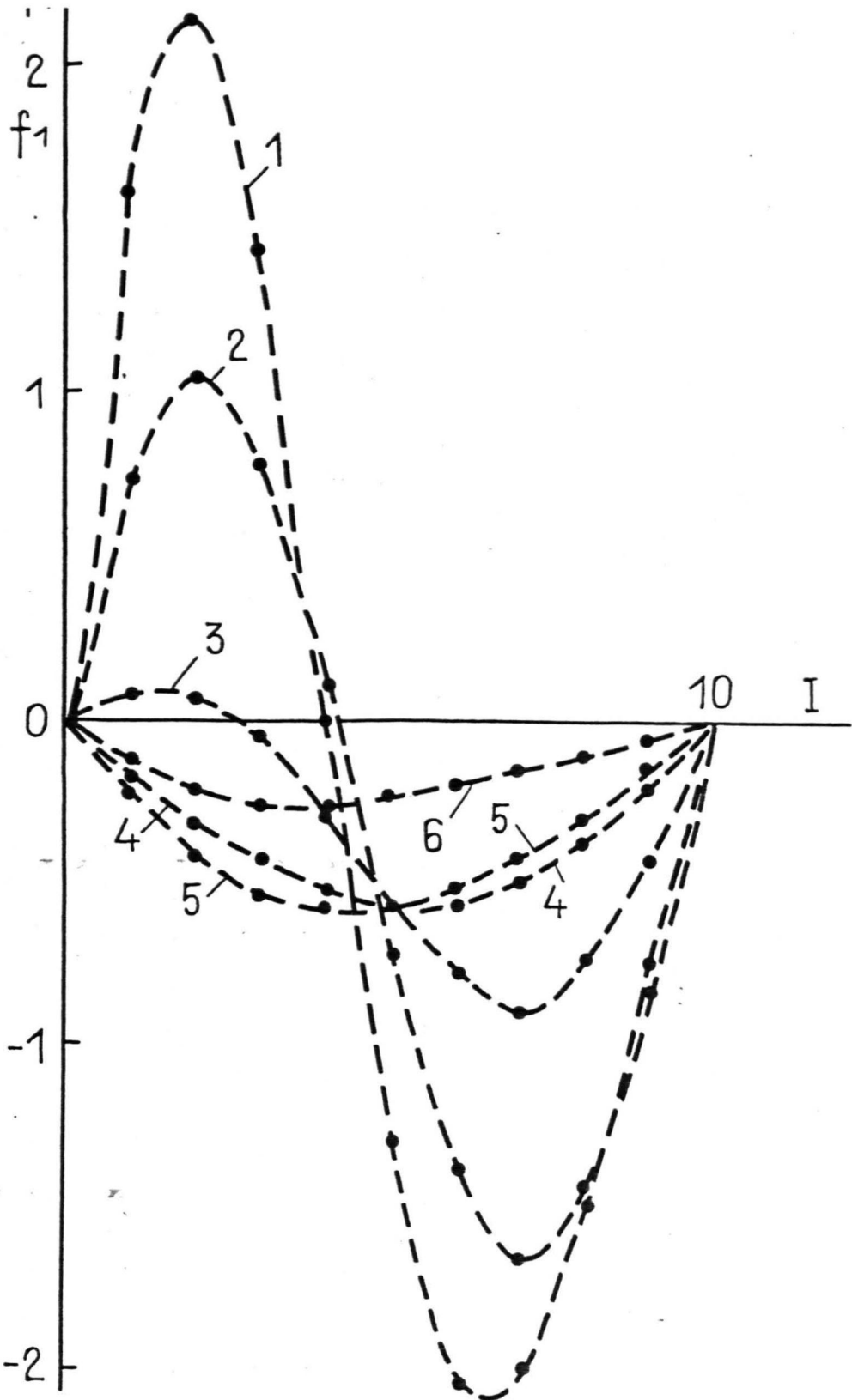


Рис. 5.3.3. Динамика линейной плотности вихревого слоя для динамики конфигураций, показанной на рис. 5.3.1. По оси абсцисс отложены номера маркеров контура капли, нулевой номер - маркер на оси абсцисс. $I - t = 0,02$; 2 - 0,04; 3 - 0,1; 4 - 0,2; 5 - 0,4; 6 - 2.

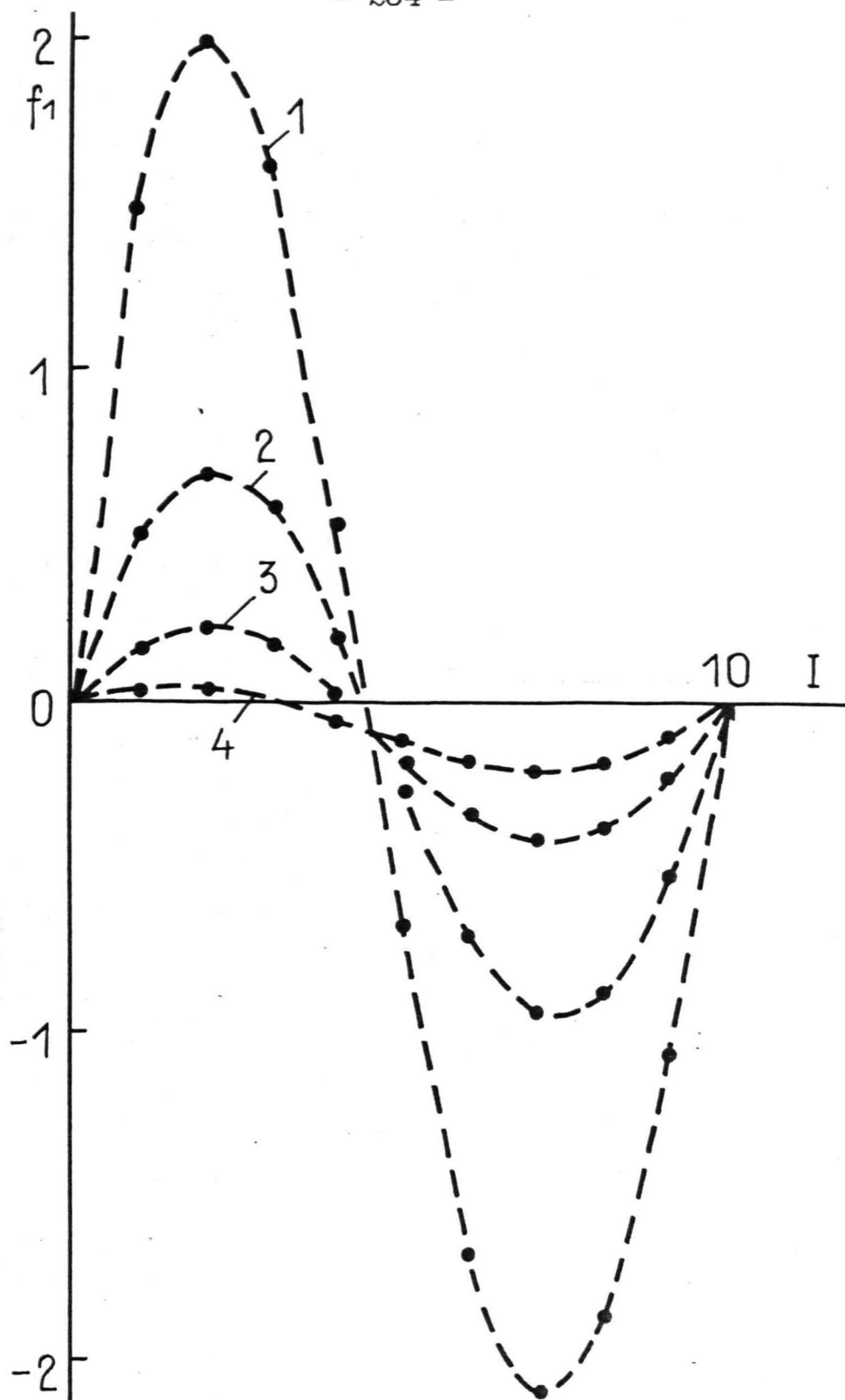


Рис. 5.3.4. Динамика плотности вихревого слоя ($V_m = 12$, $\tilde{h} = 2$) в случае образования равновесной гантелеобразной конфигурации из исходной конфигурации в виде эллипса с отношением полуосей 4,33. По оси абсцисс отложены номера маркеров контура капли, нулевым номер — маркер на оси абсцисс. 1 — $t = 0,1$; 2 — 0,2; 3 — 0,3; 4 — 0,4.

вихревого слоя для случая исходной конфигурации в виде эллипса с отношением полуосей 4,33, когда при $Bm = 12$ достижение равновесной гантелеобразной конфигурации осуществляется не растяжением исходной, а путем ее стягивания. Видно, что имеющее место распределение вихрей соответствует развитию гантелеобразной конфигурации.

Параметры равновесных гантелеобразных конфигураций зависят от Bm . Это иллюстрирует рис. 5.3.5, на котором представлена равновесная конфигурация в виде прямолинейной гантели при $Bm = 16$. Сопоставление с равновесной конфигурацией при $Bm = 12$, показанной на рис. 5.3.4д, показывает, что увеличение Bm приводит к увеличению степени растяжения гантелеобразной конфигурации.

Полученные равновесные конфигурации при $Bm = 12$ и $Bm = 16$ позволяют сравнительно быстро, в результате задания их в качестве исходных, получить равновесные конфигурации при других значениях магнитного числа Бонда. На следующей серии рисунков (рис. 5.3.6) показаны полученные таким образом из равновесной конфигурации при $Bm = 12$ конфигурации, соответствующие меньшим Bm .

Представленные на рис. 5.3.6 данные численных экспериментов показывают существование равновесных конфигураций, отличных от осесимметричной при значениях магнитного числа Бонда меньших критического 10,55, которое хорошо согласуется и с значением 10,48, полученным в описанных выше численных экспериментах по критическому замедлению затухания эллиптических возмущений.

Таким образом, настоящие численные эксперименты указывают на докритический характер бифуркации равновесных конфигураций капли в плоской щели. Отсюда следует, что эллиптическая неустойчивость капли должна развиваться скачкообразно, причем должен иметь место гистерезис образования и исчезновения неосесиммет-



Рис. 5.3.5. Фигура равновесия НЖ в плоском слое при $Vm = 16$ и $\tilde{h} = 2$. Число маркеров по контуру капли 40, временной шаг $2 \cdot 10^{-3}$. Достигнута по истечении времени 1,634 из исходной конфигурации в виде эллипса с отношением полуосей 4,33. В данной конфигурации изменение координат лагранжевых частиц на временном шаге меньше $2 \cdot 10^{-4}$.

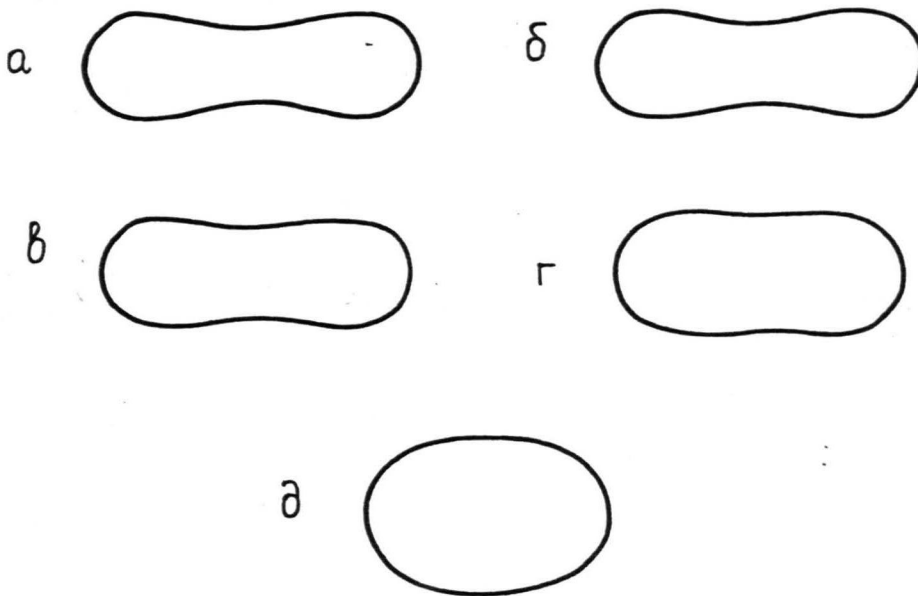


Рис. 5.3.6. Фигуры равновесия НЖ в плоском слое ($\tilde{h} = 2$). 40 маркеров по контуру капли. Для представленных конфигураций изменение координат лагранжевых частиц на временном шаге $2 \cdot 10^{-3}$ меньше $2 \cdot 10^{-4}$. а - $Vm = 10,75$; б - $Vm = 10,5$; в - $Vm = 10,25$; г - $Vm = 10,0$; д - $Vm = 9,75$.

ричных конфигураций. Однако в настоящее время экспериментальных данных, подтверждающих этот вывод, не имеется. Отметим, что вывод о докритическом характере бифуркации равновесных конфигураций для случая плоской границы в вертикальной щели был получен аналитически в главе 3.

Важным является вопрос устойчивости полученных равновесных конфигураций относительно различных деформационных мод. В связи с тем, что на физическом эксперименте наблюдается изгиб равновесных конфигураций (рис. 3.3.9 и рис. 3.3.10), далее проводится исследование устойчивости полученных равновесных конфигураций относительно деформаций изгиба. Магнитное давление на контуре капли при этом находится согласно формуле (5.2.4).

Динамика деформаций изгиба капли для случая $Bm = 12$ и $h/R = 2$ показана на рис. 5.3.7, из которого видно, что при данных значениях параметров прямолинейная гантелеобразная конфигурация является устойчивой относительно изгиба.

Аналогичные результаты имеют место и при двух следующих значениях магнитного числа Бонда - $Bm = 14$ и $Bm = 16$. Динамика восстановления прямолинейной гантелеобразной конфигурации из исходной изогнутой при $Bm = 14$ показана на рис. 5.3.8, а при $Bm = 16$ - на рис. 5.3.9.

Таким образом, численный эксперимент показывает устойчивость прямолинейной гантелеобразной конфигурации относительно изгиба при Bm меньших 16. При этом в результате установления из исходной изогнутой конфигурации получаются конфигурации, полученные в результате установления из исходных конфигураций в виде эллипсов. Отметим, что при отсутствии поля исходная изогнутая конфигурация релаксирует к конфигурации в виде круга, как это показано на рис. 5.3.10.

Данные численных экспериментов при $Bm = 12, 14$ и 16 по ки-

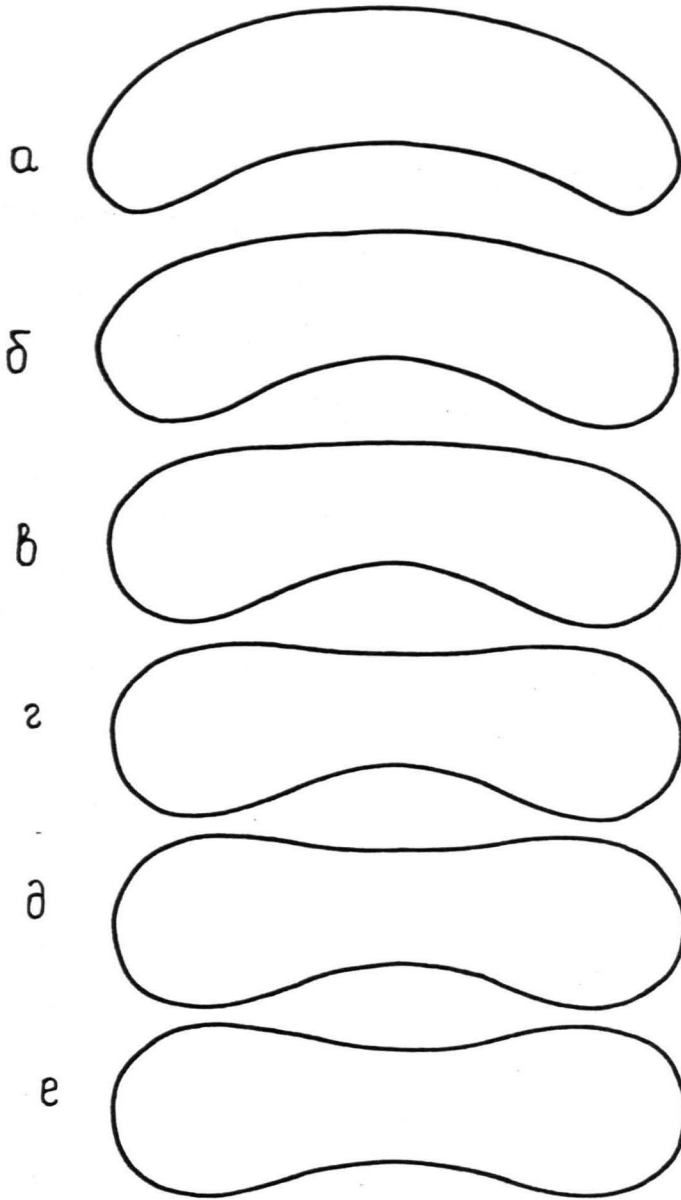


Рис. 5.3.7. Динамика изгибных деформаций капли НЖ при $\tilde{h} = 2$ и $Bm = 12$. 40 маркеров по контуру капли, временной шаг до $\tilde{t} = 0,225$ равняется 10^{-3} , далее $2 \cdot 10^{-3}$. В конечной конфигурации (Рис. 5.3.7е) изменение координат маркеров на временном шаге меньше 10^{-4} . В процессе динамики конфигураций объем капли сохраняется с точностью до 0,05 %. а - исходная конфигурация; б - $\tilde{t} = 0,1$; в - 0,2; г - 0,425; д - 0,595; е - конечная конфигурация ($\tilde{t} = 1,061$).

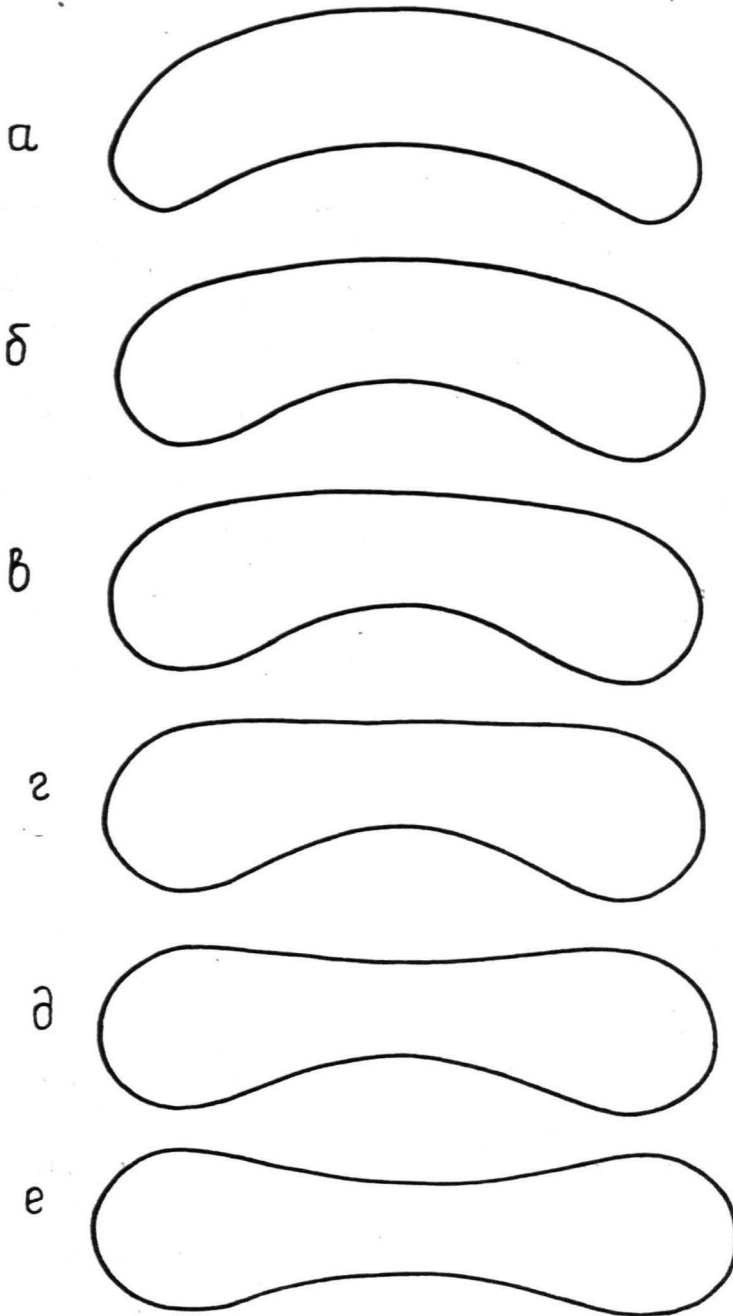


Рис. 5.3.8. Динамика изгибных деформаций капли НЖ при $\tilde{h} = 2$ и $Вт = 14$. 40 маркеров по контуру капли, временной шаг до $\tilde{t} = 1,1$ равняется 10^{-3} , далее $2 \cdot 10^{-3}$. В конечной конфигурации (рис. 5.3.8) изменение координат маркеров меньше 10^{-4} . Объем капли в процессе установления равновесной фигуры сохраняется с точностью 0,2%. а - исходная конфигурация; б - $\tilde{t} = 0,1$; в - 0,2; г - 0,4; д - 0,75; е - конечная конфигурация ($\tilde{t} = 1,84$).

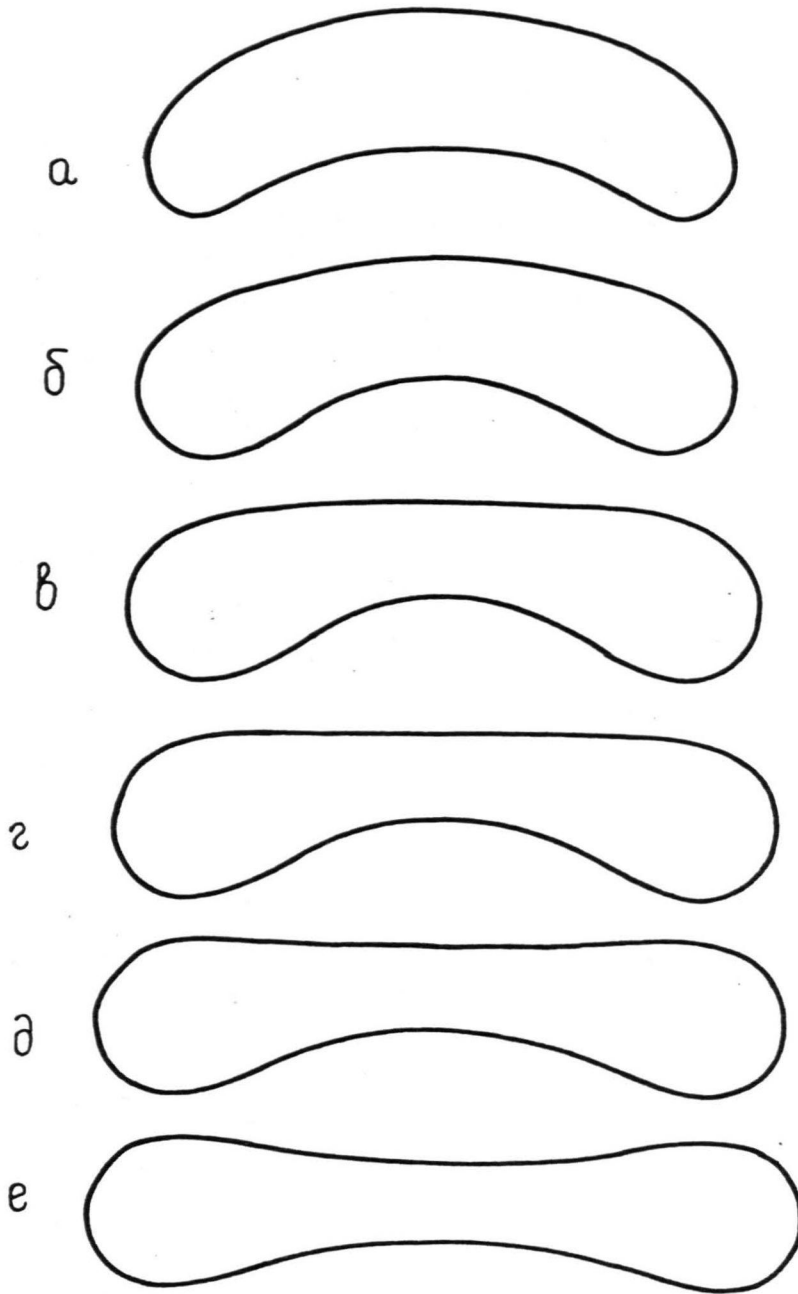


Рис. 5.3.9. Динамика изгибных деформаций капли НЖ при $\tilde{h} = 2$ и $Вm = 16$. 40 маркеров по контуру капли, временной шаг до $\tilde{t} = 0,77$ равняется 10^{-3} , далее $2 \cdot 10^{-3}$. В конечной конфигурации изменение координат лагранжевых частиц меньше 10^{-4} . Объем капли в процессе установления равновесной фигуры сохраняется с точностью 0,2%. а - исходная конфигурация; б - $\tilde{t} = 0,1$; в - $0,4$; г - $0,75$; д - $1,23$; е - конечная конфигурация ($\tilde{t} = 2,393$).

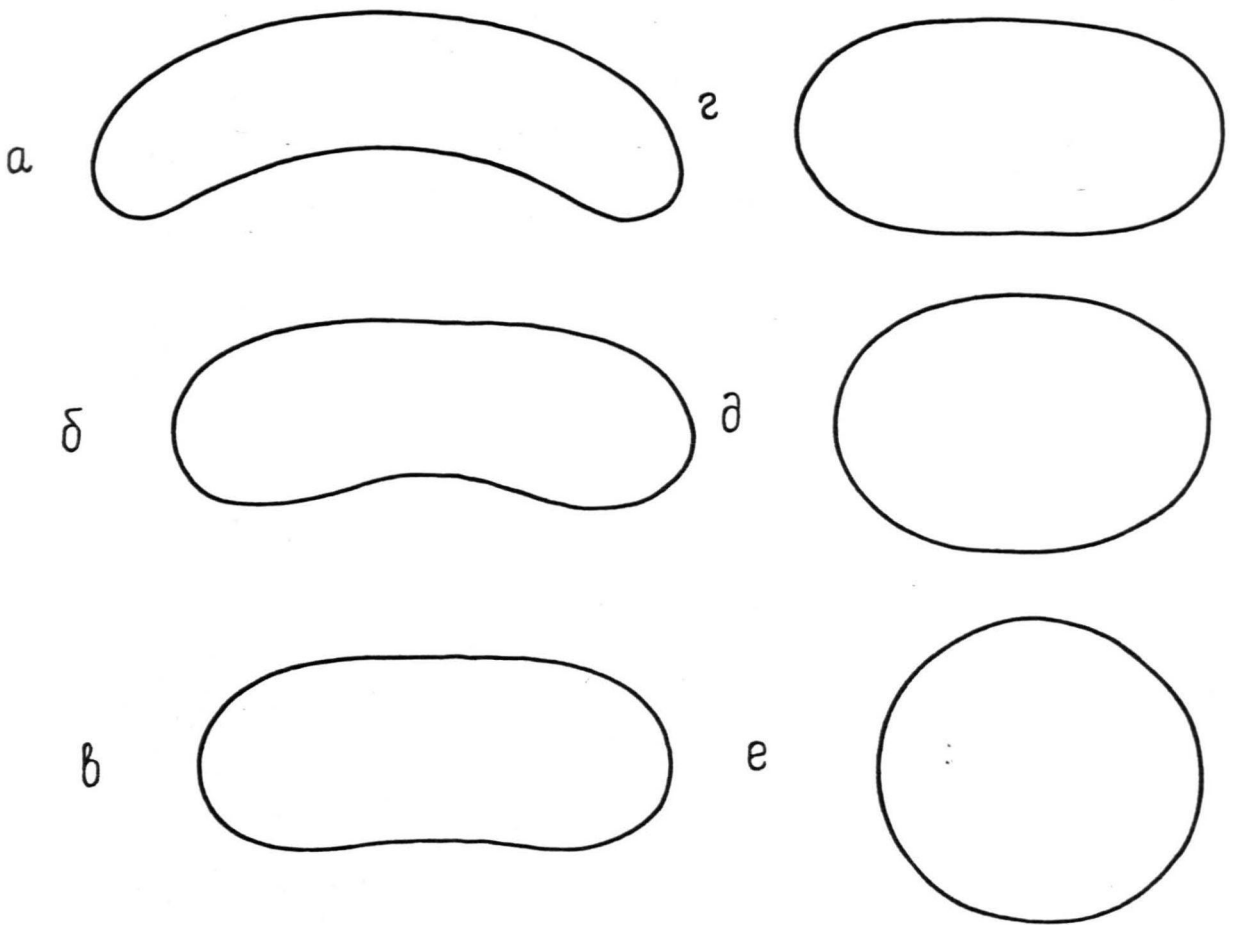


Рис. 5.3.10. Динамика изгибных деформаций капли при отсутствии магнитного поля. 40 маркеров по контуру капли, временной шаг $5 \cdot 10^{-4}$. Объем капли в процессе установления равновесной фигуры сохраняется с точностью 0,2%. а - исходная конфигурация; б - $t = 0,1$; в - 0,175; г - 0,25; д - 0,375; е - конечная конфигурация ($t = 0,6835$).

нетике затухания возмущений изгиба позволяют сделать заключение о возможном развитии изгибных деформаций при больших магнитных числах Бонда. Для нахождения критического значения вторичной бифуркации семейства равновесных конфигураций капли НЖ можно воспользоваться принципом критического замедления затухания возмущений. Для этого в случае показанных на рис. 5.3.7-9 процессов установления прямолинейных гантелеобразных конфигураций проводится анализ в полулогарифмических координатах временных зависимостей разности магнитных давлений для точек контура капли на оси симметрии. Эта разность с течением времени вследствие распрямления капли стремится к нулю. При этом процесс релаксации имеет экспоненциальный характер. Проведение методом наименьших квадратов прямых через точки численного эксперимента позволяют определить декремент затухания изгибных деформаций для данных трех значений

Определенные подобным образом декременты в зависимости от Bm показаны на рис. 5.3.II, откуда видно, что они уменьшаются с ростом Bm согласно линейной зависимости. Это свидетельствует о наличии критического значения Bm роста изгибных деформаций. Проведение через данные три точки прямой для этого критического значения дают величину 18,6. Отсюда можно заключить, что при $Bm > 18,6$ следует ожидать развития изгибных деформаций прямолинейной гантелеобразной конфигурации. Таким образом, семейство равновесных конфигураций капли при $h/R = 2$ имеет последовательность по крайней мере двух бифуркаций - первая при $Bm = 10,55$ приводит к образованию семейства прямолинейных гантелеобразных конфигураций, вторая при $Bm = 18,6$ дает начало изогнутым гантелеобразным конфигурациям.

Полученный вывод о развитии изгибных деформаций при $Bm > 18,6$ был подвергнут проверке на численном эксперименте.

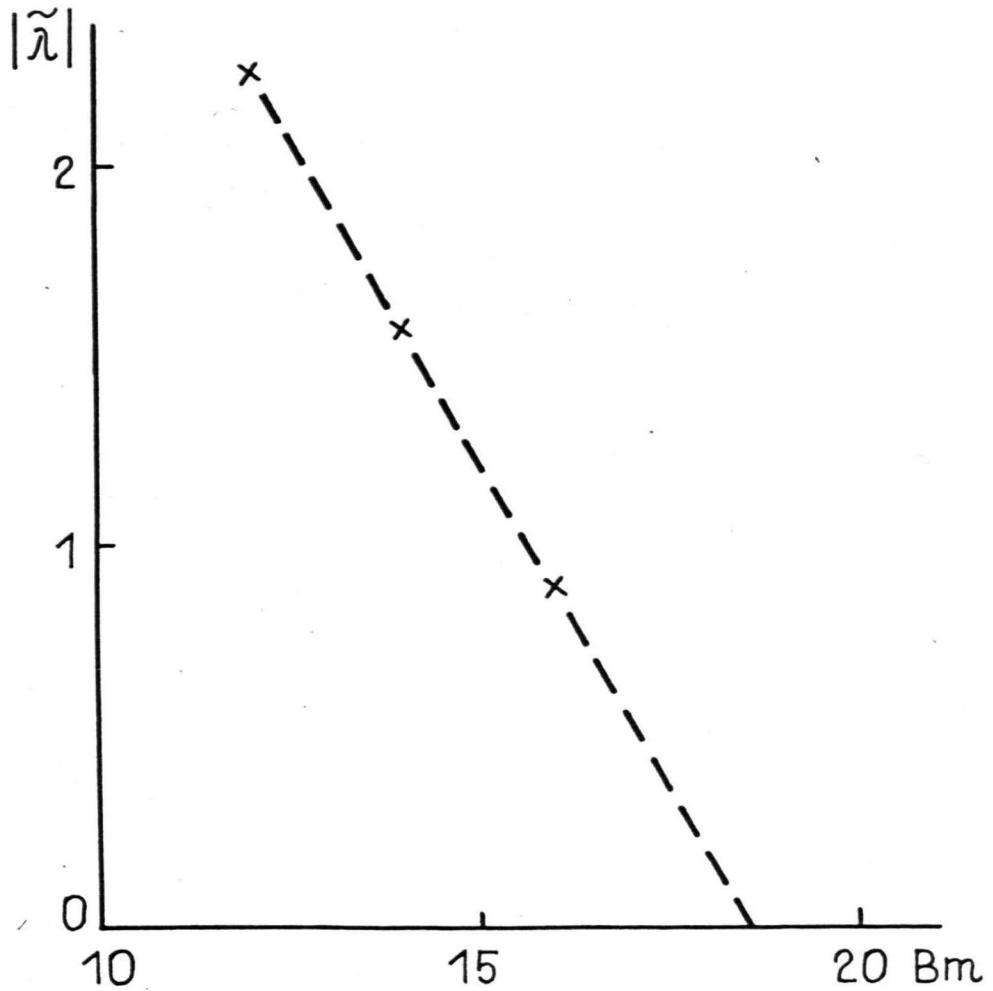


Рис. 5.3.II. Декременты затухания изгибных деформаций капли НЖ ($\tilde{h} = 2$). Крестики - данные численных экспериментов. Обработка данных численного эксперимента методом наименьших квадратов производилась по равномерно расположенным с шагом 10^{-2} точкам на интервале времени $[0,6; 1,055]$ в случае $Bm = 12$, интервале времени $[1,442; 1,812]$ в случае $Bm = 14$ и интервале времени $[1,371; 2,391]$ в случае $Bm = 16$.

На рис. 5.3.12 показана динамика развития конфигураций капли НЖ при $Bm = 19$. Видно, что в данном случае, в отличие от ситуаций, показанных на рис. 5.3.7-9, отсутствует процесс изменения знака кривизны контура в окрестности оси симметрии капли. Для установившейся в ходе численного эксперимента конфигурации характерен элемент изгиба. В качестве иллюстрации последнего на рис. 5.3.13 показано изменение магнитного давления вдоль контура конечной конфигурации капли. Подобная, но только отраженная в плоскости поперечной оси Y , зависимость характеризует изменение кривизны контура в установившейся конфигурации. Точки минимума зависимости на рис. 5.3.13 соответствуют наиболее отдаленным от оси симметрии точкам контура капли.

В настоящем случае, как это показывают рис. 5.3.12 и 5.3.13 изгиб гантели в согласии с приведенной оценкой порога развития изгибных деформаций выражен слабо. Для получения более изогнутых конфигураций необходимы большие магнитные числа Бонда. На следующих двух рисунках показаны установившиеся конфигурации при $Bm = 20$ и 21 . Видно, что изгиб капель с увеличением Bm увеличивается.

Так как равновесная конфигурация капли НЖ определяется двумя независимыми параметрами - магнитным числом Бонда и относительной толщиной плоского слоя, - то представляет интерес выяснить, каким образом изменение толщины слоя влияет на развитие изгибных деформаций.

В настоящем случае для исследования развития изгибных деформаций в слоях меньшей относительной толщины в целях ускорения счета проводилось моделирование динамики лишь одной половины контура капли. Приводимые далее результаты получены в случае, когда магнитное число Бонда, определенное по объему капли $M^2 \sqrt{V}/\sigma$, остается равным его значению при $Bm = 12$ и $h/R = 2$, т.е.

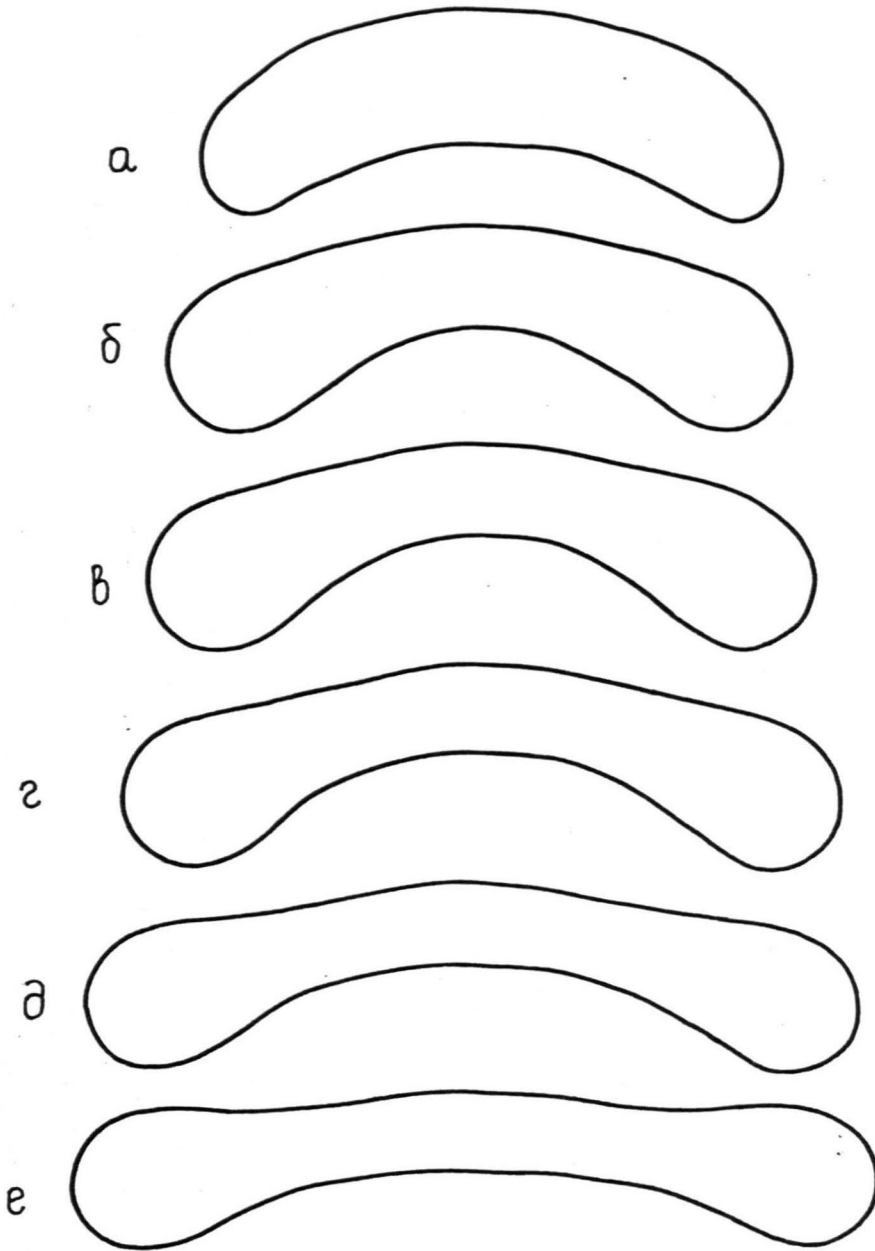


Рис. 5.3.12. Динамика изгибных деформаций капли НЖ при $\tilde{h} = 2$ и $Bm = 19$. 40 маркеров по контуру капли, временной шаг - 10^{-3} . В конечной конфигурации изменение координат маркеров в направлении оси симметрии меньше $8,9 \cdot 10^{-5}$, в направлении, поперечном ей, меньше $6,6 \cdot 10^{-5}$. В процессе установления конечной конфигурации объем капли сохраняется с точностью 0,45 %.

а - исходная конфигурация, б - $\tilde{t} = 0,2$; в - 0,4; г - 0,75; д - 1,5; е - конечная конфигурация ($\tilde{t} = 2,81$).

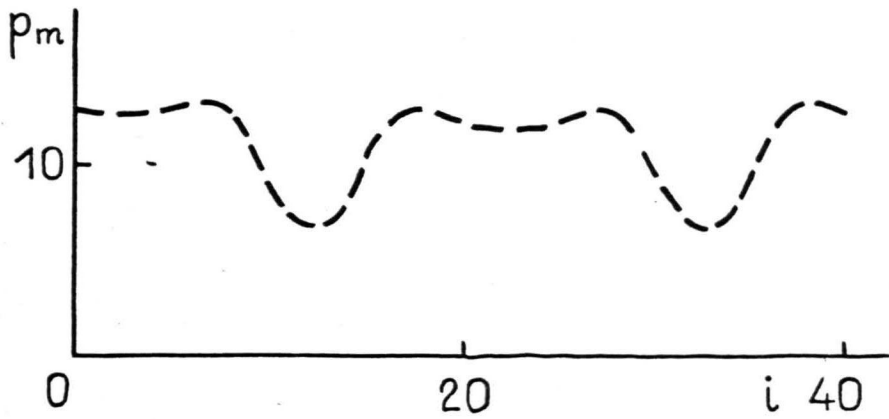


Рис. 5.3.13. Изменение магнитного давления вдоль контура конечной конфигурации (рис. 5.3.12e). Глубокие минимумы магнитного давления соответствуют наиболее отдаленным от оси симметрии точкам контура капли.

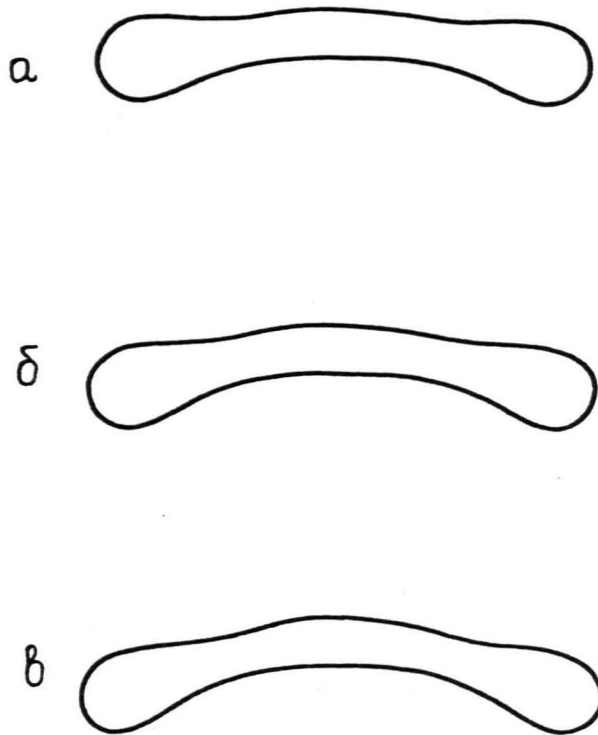


Рис. 5.3.14. Развитие изгибных деформаций капли НЖ в зависимости от магнитного числа Бонда ($\tilde{h} = 2$). Показаны конфигурации, установившиеся за промежуток времени $t = 2,81$ при $Bm = 19$ (рис. 5.3.14а), $Bm = 20$ (рис. 5.3.14б), $Bm = 21$ (рис. 5.3.14в). Видно, что элемент изгиба с ростом Bm увеличивается.

5,54. Физически это соответствует ситуации, когда при постоянном поле и объеме капли производится вариация толщины слоя.

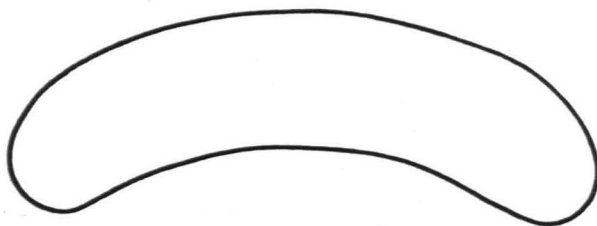
В главе 3 показано, что уменьшение относительной толщины слоя по сравнению с использованным выше значением 2 приводит в этом случае к более сильной надкритичности относительно развития эллиптических возмущений. Можно ожидать, что подобная ситуация имеет место и относительно деформаций изгиба.

Данные численного эксперимента подтверждают это предположение. На рис. 5.3.15 показана динамика развития конфигураций капли при $Bm = 6$ и $\tilde{h} = 1/\sqrt{2}$, в которой отчетливо выражено развитие изгибных деформаций. Таким образом, результаты данного численного эксперимента показывают, что устойчивая относительно изгибных деформаций прямолинейная гантелеобразная конфигурация теряет устойчивость относительно изгиба при уменьшении относительной толщины слоя.

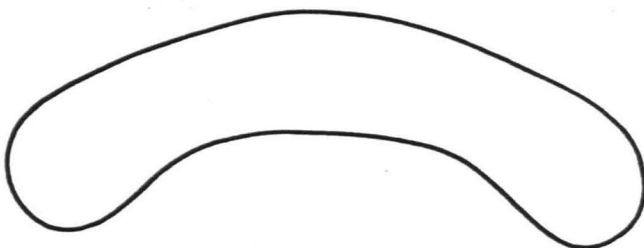
Отметим, что развитие сильного изгиба капли рис. 5.3.15а - е сопровождается медленным процессом распрямления капли рис. 5.3.15 в - к, обусловленным медленно релаксирующей плотностью вихревого слоя на концах капли. Она в зависимости от номера лагранжевых частиц для конечной конфигурации (рис. 5.3.15к) показана на рис. 5.3.16. На рис. 5.3.17 для этой же конфигурации показано распределение магнитного давления вдоль контура капли. Разность значений магнитного давления для маркеров, лежащих на оси симметрии, связана с изгибом капли, причем большее значение соответствует вогнутому участку контура капли, меньшее - выпуклому.

Численные эксперименты по развитию изгибных деформаций были осуществлены и для случая промежуточного по отношению к случаям $h/R = 1/\sqrt{2}$ и $h/R = 2$ значения относительной толщины плоского слоя $h/R = 3\sqrt{3}/4\sqrt{2}$. Магнитное число Бонда,

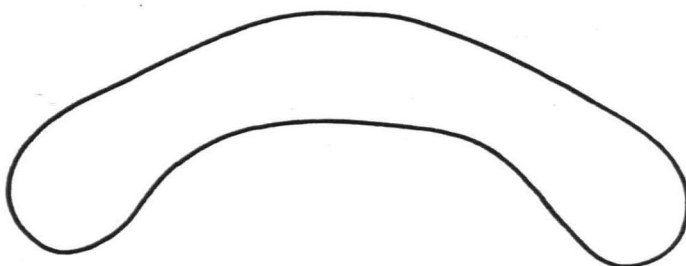
a



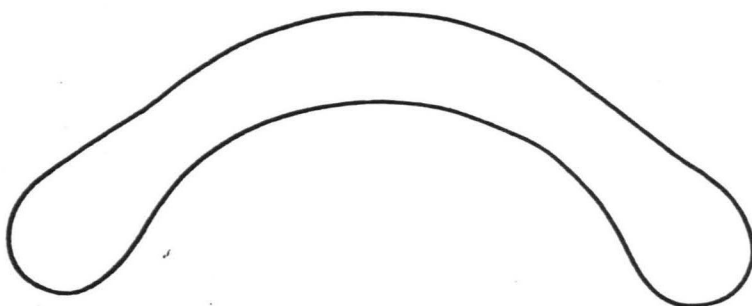
δ



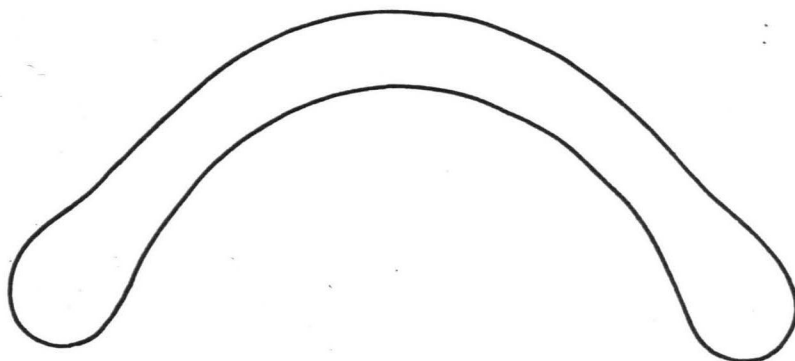
β



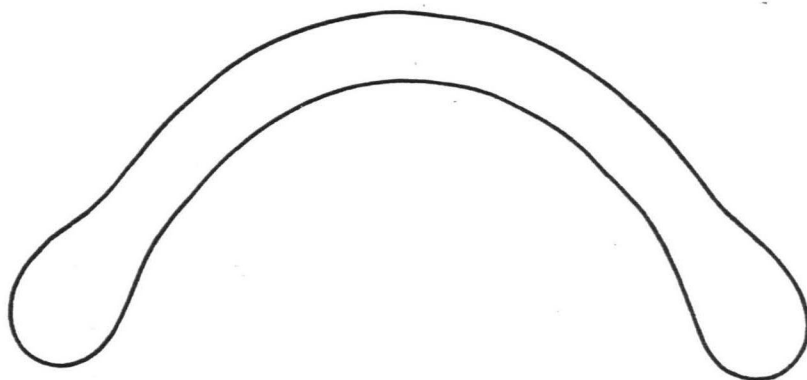
z



θ



e



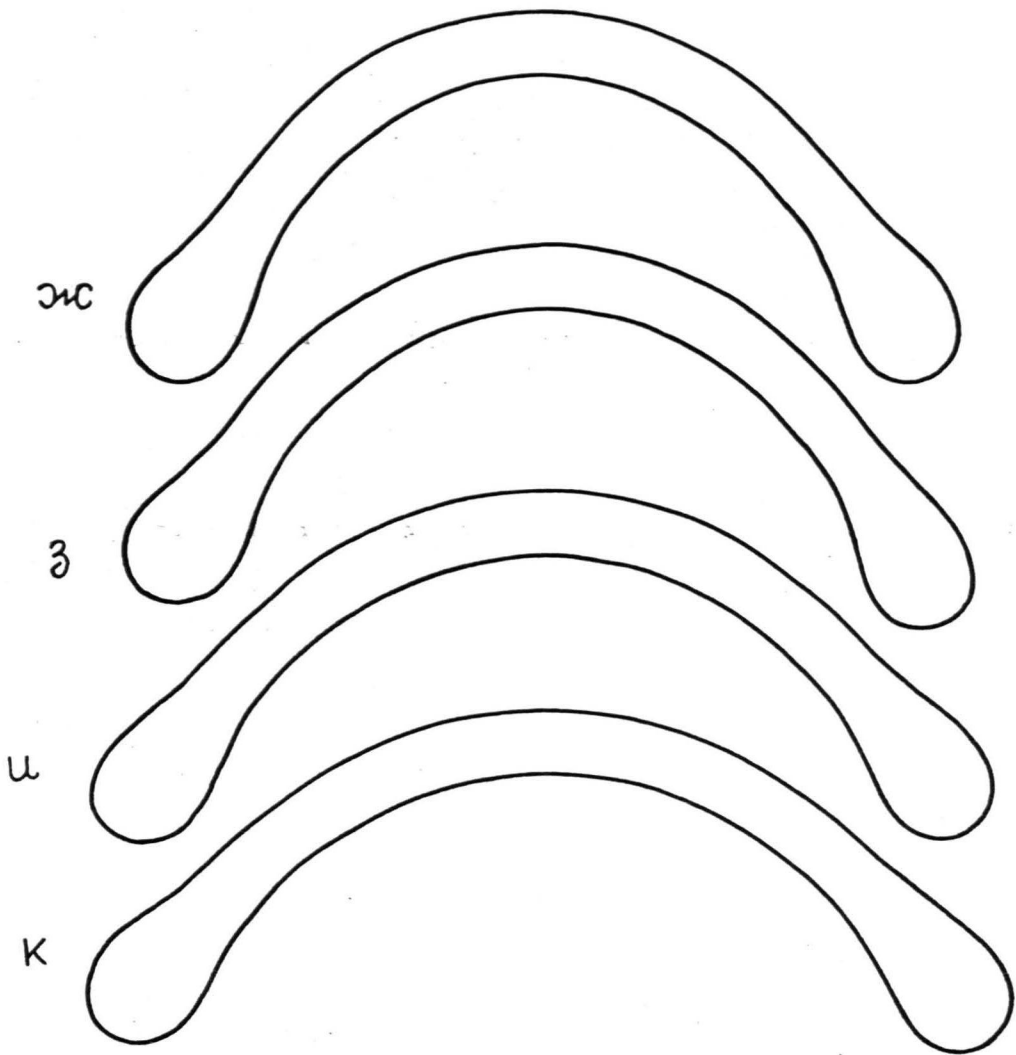


Рис. 5.3.15. Развитие изгибных деформаций при $Bm = 6$, $\tilde{h} = 1/\sqrt{2}$
 $2l$ маркер для одной половины контура капли. Временной шаг до $t = 2,825$ равняется 10^{-3} , далее $2 \cdot 10^{-3}$. В конечной конфигурации (рис. 5.3.15к) изменение координат маркеров на временном шаге в направлении, параллельном оси симметрии, меньше $4,9 \cdot 10^{-4}$, в направлении, поперечном ей, меньше $8,3 \cdot 10^{-5}$. а - исходная конфигурация; б - $t = 0,1$; в - $0,2$; г - $0,4$; д - $0,75$; е - 1 ; ж - $1,5$; з - $2,5$; и - $6,225$; к - $9,945$.

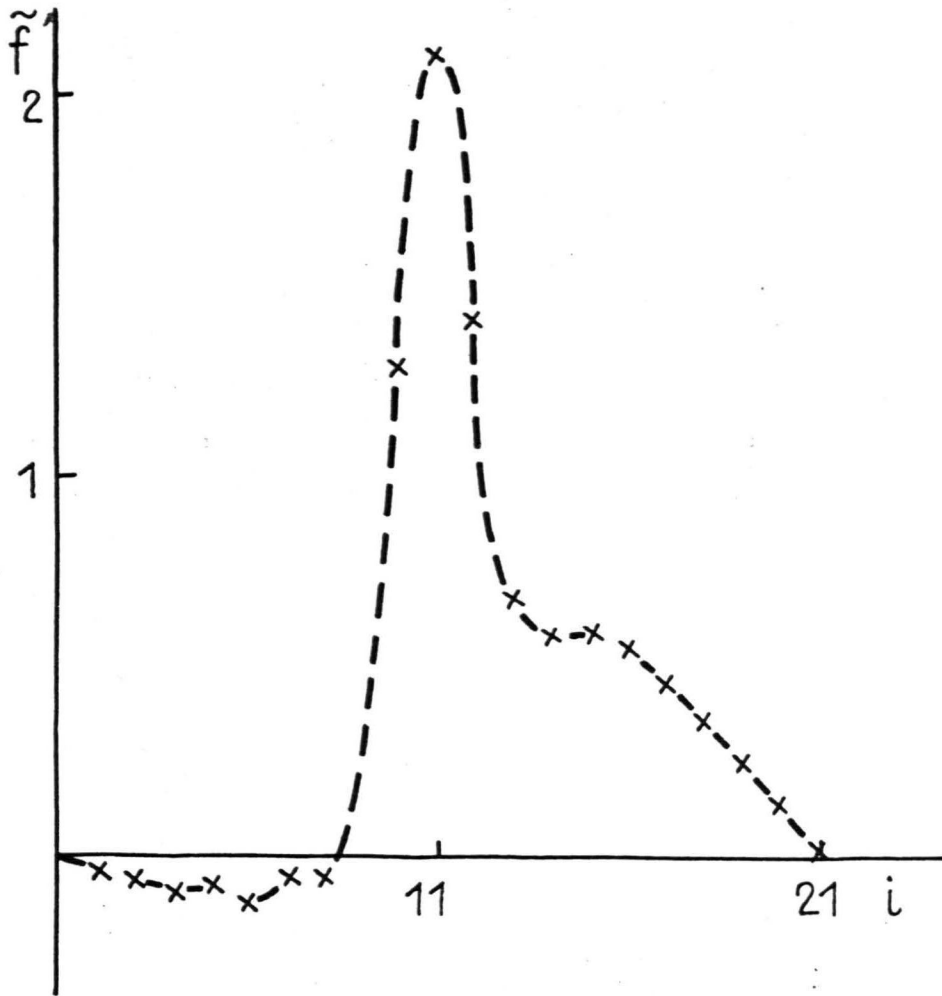


Рис. 5.3.16. Зависимость линейной плотности вихревого слоя от номера маркера для конечной конфигурации (рис. 5.3.15к). Представлены данные для одной половины контура капли. Маркеры под номерами 1 и 21 находятся на оси симметрии капли. Наибольшая остаточная плотность вихревого слоя приходится на наиболее отдаленный в направлении оси симметрии конец капли.

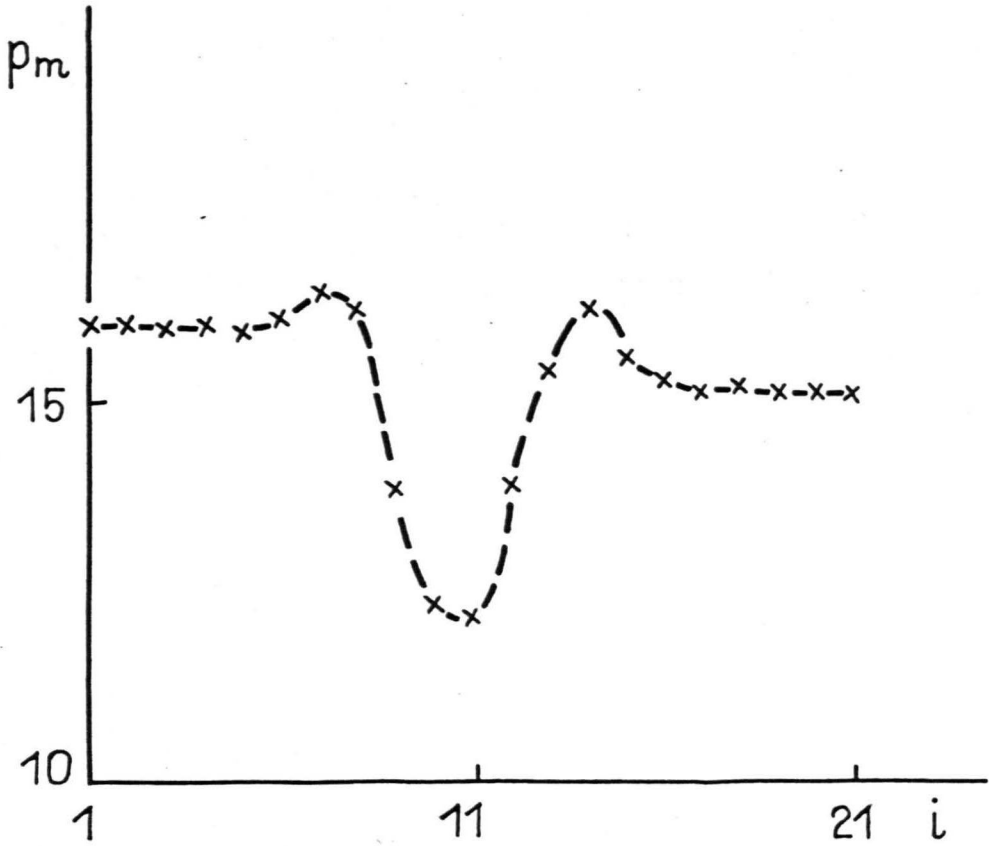


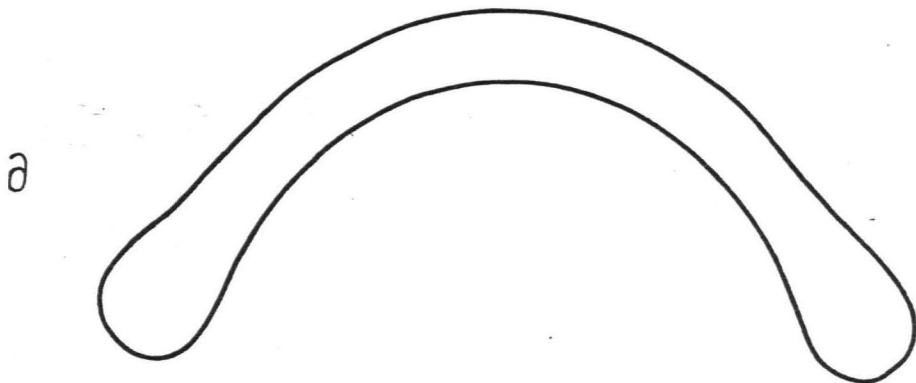
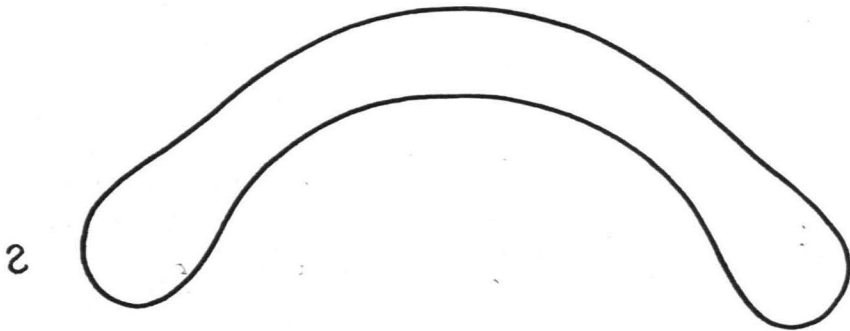
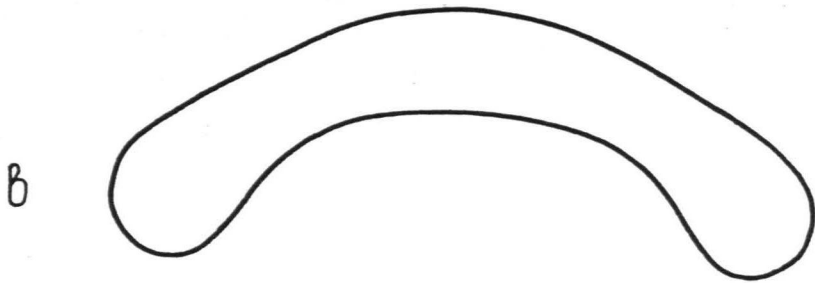
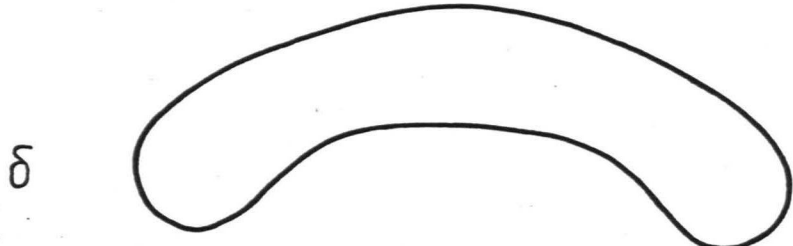
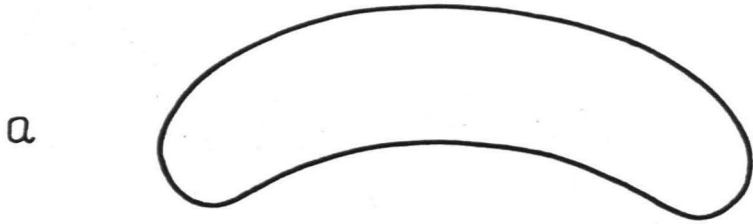
Рис. 5.3.17. Изменение магнитного давления вдоль контура изогнутой конфигурации НЖ на рис. 5.3.15к. Маркеры под номерами I и 2I находятся на оси симметрии капли.

определенное по объему капли для этого случая равняется 6,97. Моделировалась динамика половины контура капли, причем число маркеров в начальной стадии эксперимента равнялось 21. Динамика развития конфигураций в этом случае показана на рис. 5.3.18. Два последних рисунка данной серии иллюстрируют влияние аппроксимационной точности на динамику развития изгибных деформаций. Число маркеров при этом равняется 41. В качестве исходной конфигурации при продолжении счета с вдвое большим количеством маркеров служила конфигурация, показанная на рис. 5.3.18з.

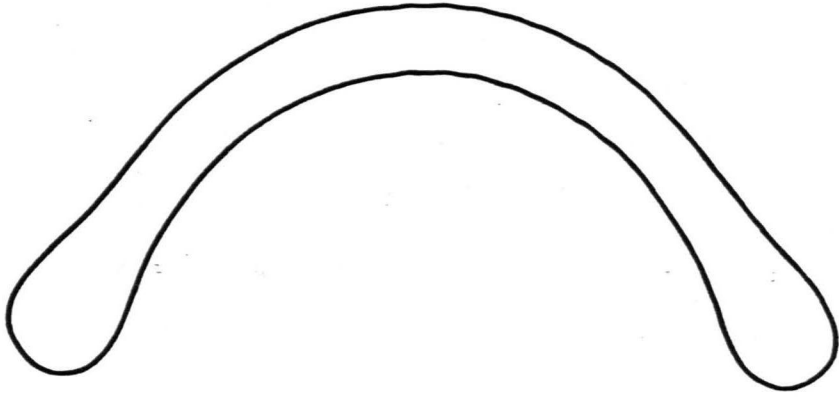
Сопоставление рис. 5.3.15 и 5.3.18 показывает, что в обоих случаях изгибные деформации выражены одинаково сильно. Отсюда следует, что изгибные деформации при магнитном числе Бонда, определенном по объему капли, равном 5,54 для случая ситуации на рис. 5.3.18 будут выражены слабее по сравнению с 5.3.15. Количественное сравнение случаев, показанных на рис. 5.3.15 и рис. 5.3.18, возможно путем сравнения показанных на рис. 5.3.17 и 5.3.19 изменений магнитного давления вдоль контура капли для конечных конфигураций.

Отметим, что продолжение численного эксперимента с вдвое большим количеством маркеров не показывает качественных отличий в динамике развития конфигураций. Для сравнения с рис. 5.3.16 на рис. 5.3.20 показана плотность вихревого слоя для конфигурации на рис. 5.3.18к. Видно, что характер медленной релаксации плотности вихревого слоя на наиболее отдаленном в направлении оси симметрии конце капли сохраняется. Характер этого процесса установления равновесной изогнутой конфигурации отображен на рис. 5.3.21.

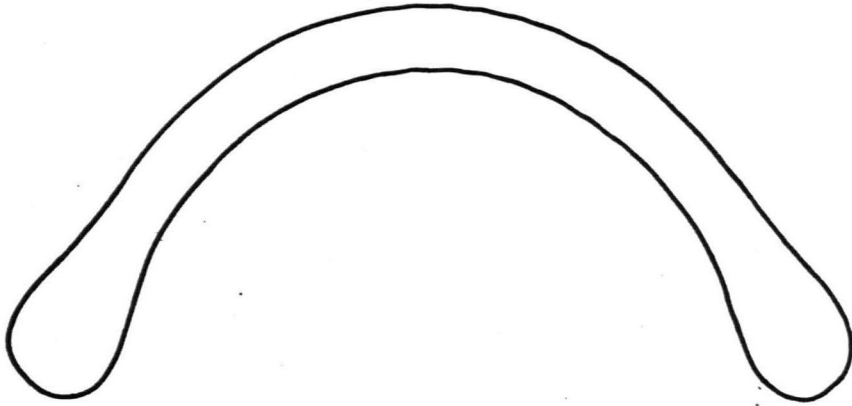
Таким образом, проведенные численные эксперименты по моделированию изгибных деформаций капель показывают, что существует область значений Bm , в которой устойчивой является конфигу-



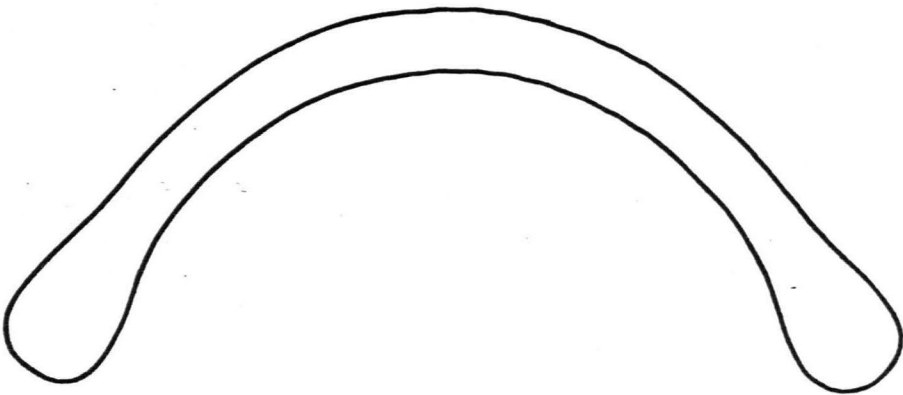
e



жс



з



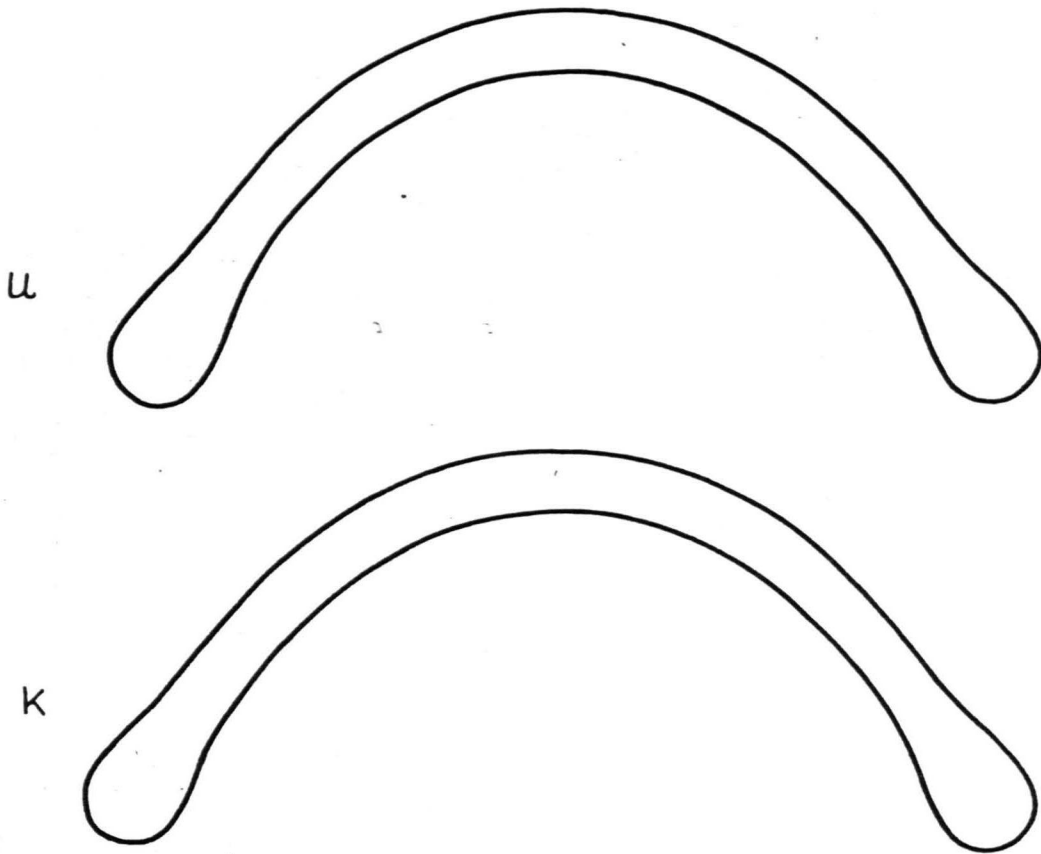


Рис. 5.3.18. Развитие изгибных деформаций при $Bm = 9$ и $\tilde{h} = 3\sqrt{3}/4\sqrt{2}$. Временной шаг 10^{-3} . Для конфигурации на рис. 5.3.18з изменение координат маркеров на временном шаге меньше $3,3 \cdot 10^{-4}$ и $1,1 \cdot 10^{-4}$ в направлениях, поперечном и продольном оси симметрии соответственно, а для конфигурации на рис. 5.3.18к - меньше $1,1 \cdot 10^{-4}$. Число маркеров по контуру капли для конфигураций на рис. 5.3.18а-з - 21, а для конфигураций на рис. 5.3.18и,к - 41. а - исходная конфигурация; б - $t = 0,1$; в - 0,2; г - 0,4; д - 0,75; е - 1; ж - 1,5; з - 3,2; и - 0,4 (отсчет времени от конфигурации рис.5.3.18з); к - 1,095.

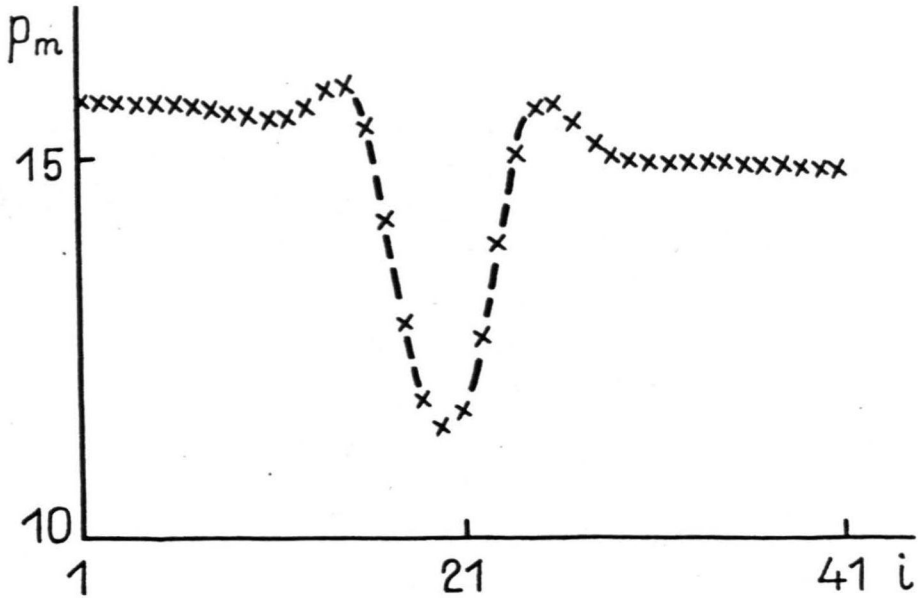


Рис. 5.3.19. Изменение магнитного давления вдоль контура капли для конфигурации на рис. 5.3.18к. Маркеры под номерами 1 и 41 находятся на оси симметрии капли.

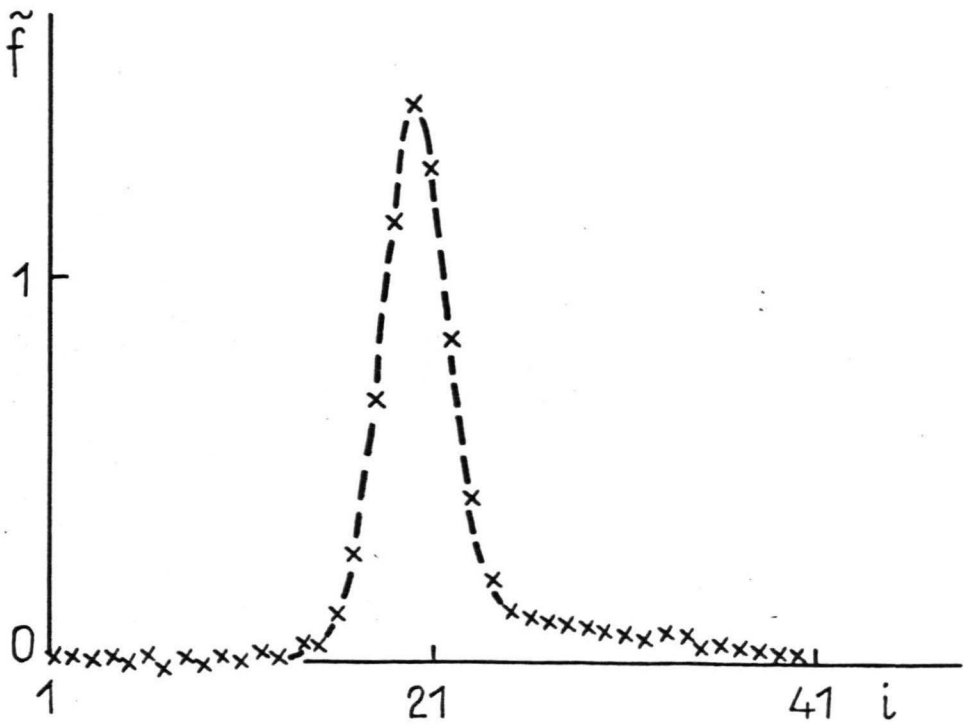


Рис. 5.3.20. Зависимость линейной плотности вихревого слоя от номера маркера для конфигурации на рис. 5.3.18к. Маркеры под номерами 1 и 41 находятся на оси симметрии капли.

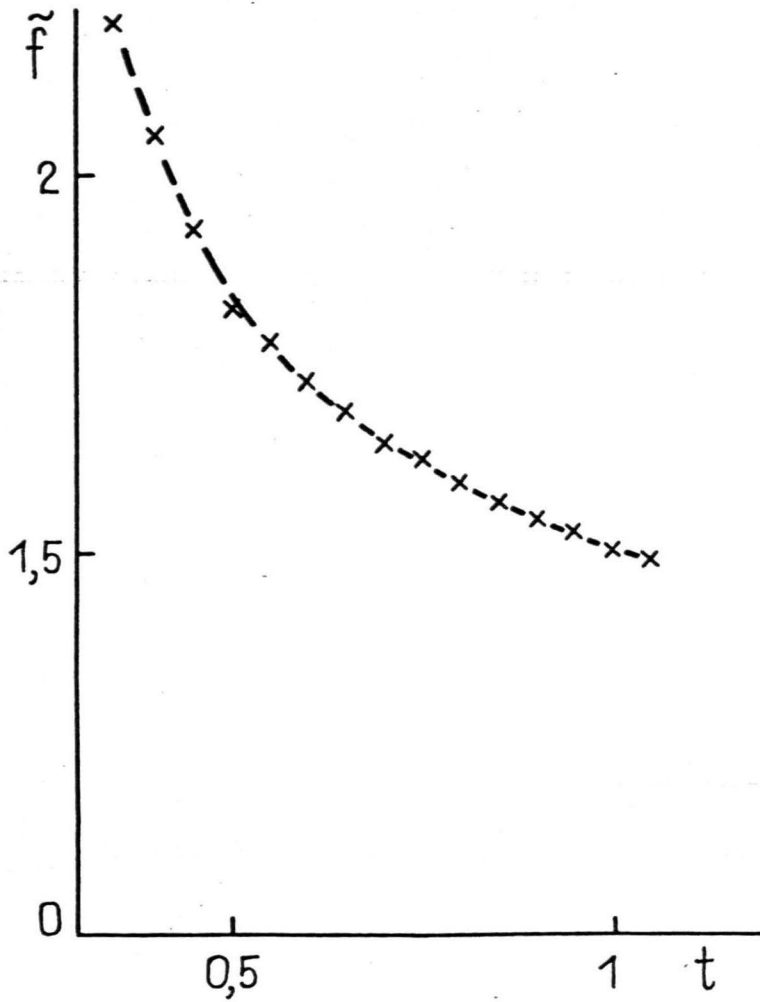


Рис. 5.3.21. Релаксация максимального значения линейной плотности вихревого слоя (маркер № 20 на рис. 5.3.20) для динамики конфигураций на рис. 5.3.18и - к.

рация в виде прямолинейной гантели. Устойчивые изогнутые конфигурации возникают в результате вторичной бифуркации семейства равновесных конфигураций капли НЖ. При этом критическое значение Bm ответвления изогнутых конфигураций при $h/R = 2$ в 1,73 раза больше критического значения развития эллиптических деформаций. Факт возможности существования как изогнутых, так и прямолинейных гантелеобразных конфигураций, установленный на численных экспериментах, находится в согласии, как это иллюстрирует рис. 3.3.6, с результатами натурального эксперимента.

Важным является вопрос о числе возможных равновесных конфигураций капли НЖ при данных значениях параметров. Так как осесимметричная конфигурация капли НЖ имеет ряд бифуркаций, соответствующих ответвлению гантелеобразных конфигураций, конфигураций в виде трехлепесткового цветка и т.д., то при магнитных числах Бонда превышающих второе бифуркационное значение можно ожидать существования нескольких равновесных конфигураций.

Это иллюстрируется показанным на рис. 5.3.22 процессом установления конфигурации в виде трехлепесткового цветка при $Bm = 18$ и $\tilde{h} = 2$. Уравнение контура исходной конфигурации при этом имеет вид $\rho(\varphi) = \sqrt{1 - \varepsilon^2/2} + \varepsilon \cos 3\varphi$ ($\varepsilon = 0,4$). Магнитное давление вычисляется по формуле (5.2.4).

Изменение магнитного давления по контуру конечной конфигурации рис. 5.3.22г показано на рис. 5.3.23. Максимум магнитного давления соответствует вогнутым участкам контура, минимум - выпуклым.

Таким образом, численный эксперимент подтверждает, что при достаточно больших значениях Bm имеются по крайней мере две равновесные конфигурации капли НЖ - одна гантелеобразная (возможно изогнутая), другая в виде трехлепестковой структуры. Этот вывод согласуется с данными физического эксперимента - в зависи-

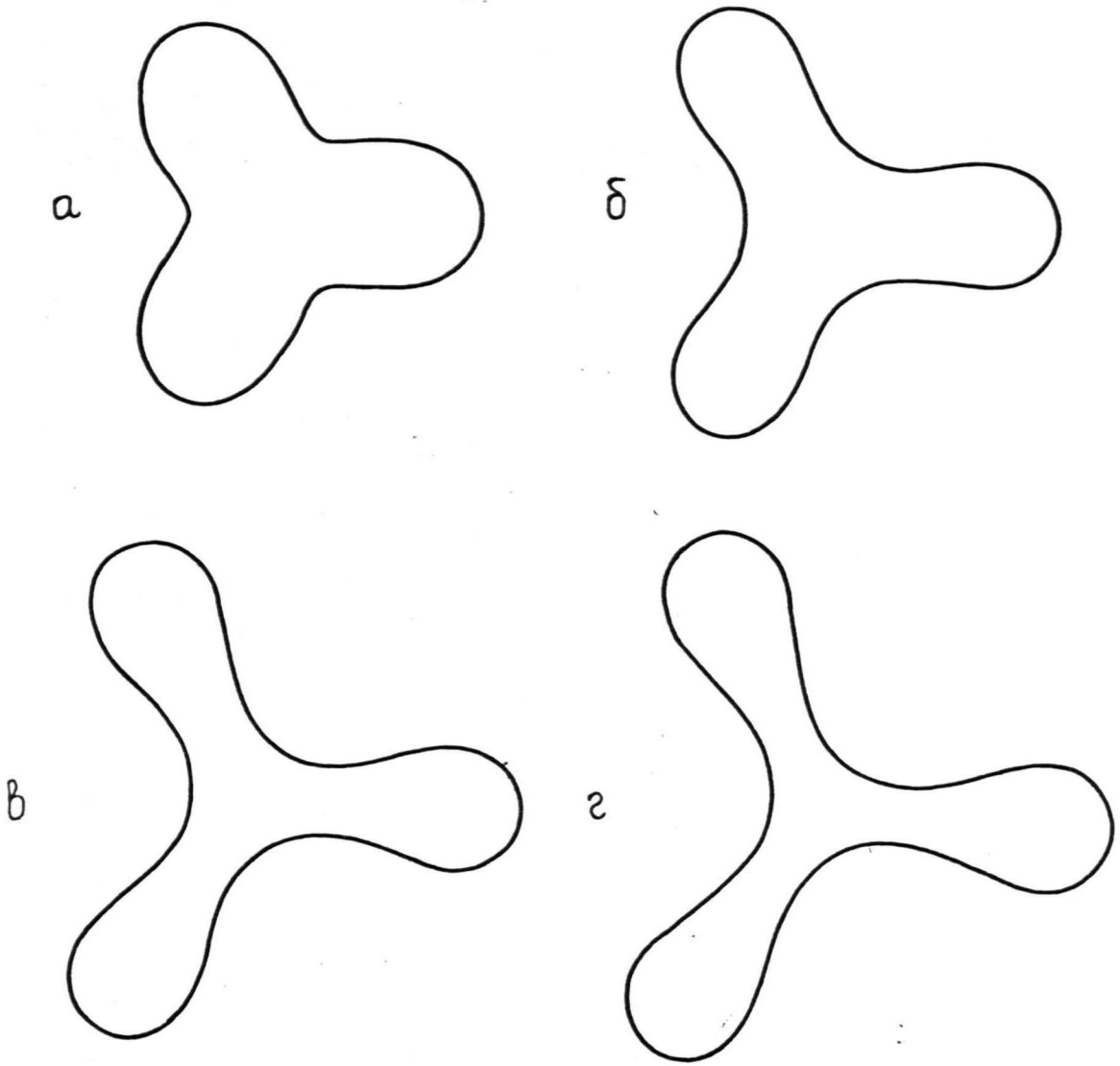


Рис. 5.3.22. Динамика развития деформаций в треугольную звезду при $\tilde{h} = 2$ и $Bm = 18$. 40 маркеров по контуру капли, временной шаг $2 \cdot 10^{-3}$. В конечной конфигурации изменение координат маркеров меньше 10^{-4} . В процессе установления равновесной фигуры объем капли сохраняется с точностью 0,53 %. а - исходная конфигурация; б - $t = 0,2$; в - 0,6; г - конечная конфигурация ($t = 1,476$).

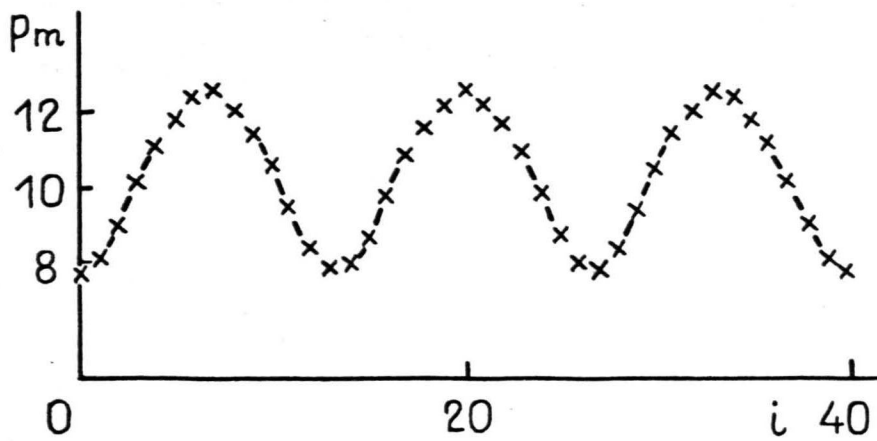


Рис. 5.3.23. Изменение магнитного давления вдоль контура равновесной конфигурации в виде трехлепесткового цветка (рис. 5.3.22г).

мости от способа наложения поля - квазистатического или скачкообразного, конечные равновесные конфигурации пузырька имеют качественно различный характер - длинная свернутая нить (квазистатическое поле рис. 4.1.2) или лабиринтная структура (рис. 3.3.8) Подобное поведение пузырька, что, как показано в главе 3, эквивалентно случаю капли НЖ, возможно лишь в условиях существования при данных значениях параметров нескольких равновесных его конфигураций.

В главе 3 при рассмотрении устойчивости прямолинейной полоски НЖ было показано, что наряду с неустойчивостью относительно изгибных деформаций имеет место и неустойчивость относительно перетяжек, однако порог развития последних возмущений выше, а инкремент роста меньше, чем у изгибных возмущений. Развитие неустойчивости перетяжек может приводить к дроблению капли, так что моделирование ее развития на численном эксперименте, вообще говоря, должно предусматривать возможность топологической перестройки области капли из односвязной к многосвязной. Такие ситуации в настоящих реализациях численных экспериментов не предусматривались.

В главе 3 показано, что существует ограниченная область толщин слоя, в которой имеет место эллиптическая неустойчивость капли НЖ. Рис. 3.3.2 показывает, что значения параметров $Bm = 12$ и $\tilde{h} = 2$ соответствуют точке вблизи правой ветви нейтральной кривой.

Отсюда следует, что уменьшение h/R при постоянном значении $M^2 \sqrt{V/\nu}$ приводит к более сильной надкритичности относительно развития эллиптических возмущений. Этот вывод подтверждается численными экспериментами.

На рис. 5.3.24 представлена динамика конфигураций при $h/R = 0,5$ и $Bm = 4,76, M^2 \sqrt{V/\nu}$ при этом равно его значению

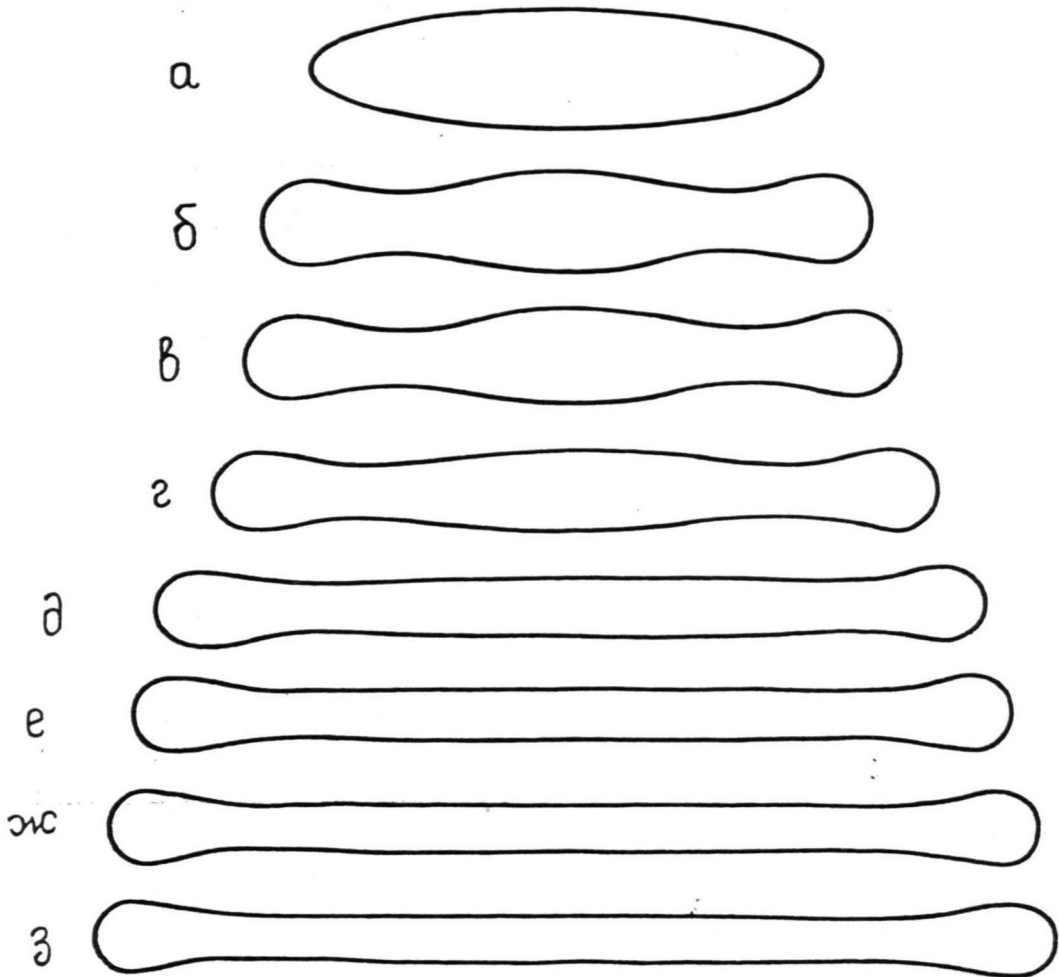


Рис. 5.3.24. Динамика развития эллиптических деформаций при $\tilde{h} = 0,5$ и $Bm = 4,76$. Число маркеров для четверти контура капли равняется 11, временной шаг - $2 \cdot 10^{-3}$. В конечной конфигурации изменение координат маркеров на временном шаге меньше 10^{-4} .
а - исходная конфигурация; б - $t = 0,2$; в - $0,3$; г - $0,5$; д - 1 ; е - $1,5$; ж - $2,5$; з - $4,272$.

5,54 при $h / R = 2$ и $Bm = 12$. В этом случае развитие изгибных деформаций исключается условиями симметрии. Вследствие наличия двух осей симметрии моделируется динамика лишь 1/4 контура капли. Число маркеров для 1/4 контура при этом равняется 11. Рис. 5.3.24з показывает, что эллиптическая неустойчивость выражена гораздо сильнее по сравнению со случаем $h / R = 2$. Конечная равновесная конфигурация имеет вид полосы постоянной толщины. Подобная черта равновесной конфигурации характерна для различных структур, образуемых МЖ в плоских слоях. Как конфигурации капель и пузырьков, так и лабиринты, характеризуются постоянной толщиной элементов структуры.

Динамика конфигураций на рис. 5,3.24 обращает внимание изменением знака кривизны контура в начальной стадии растяжения капли, что может быть связано с развитием неустойчивости типа перетяжек.

Это подтверждается данными численного эксперимента, представленного на рис. 5.3.25. Значения параметров следующие - $h / R = 0,25$ и $Bm = 3$, $M^2 \sqrt[3]{V/\sigma}$ остается равным 5,54. Значение $h/\sqrt[3]{V}$ равно 0,27. В согласии с данными, представленными на рис. 3.3.2, который показывает, что этот случай является более надкритическим относительно развития эллиптических возмущений по сравнению с предыдущим, для отношения длины установившейся конфигурации к ее ширине имеет место значение 29,95 по сравнению с 20,46 для предыдущего случая. На показанной на рис. 5.3.25 динамике конфигураций видно развитие неустойчивости перетяжек в начальной стадии растяжения капли.

Представляет интерес величина инкремента роста моды перетяжек. Для этого на рис. 5.3.26 в полулогарифмических координатах представлена временная зависимость разности ΔX наибольшей ширины капли и ее ширины в центре капли. Видно, что развитие неус-

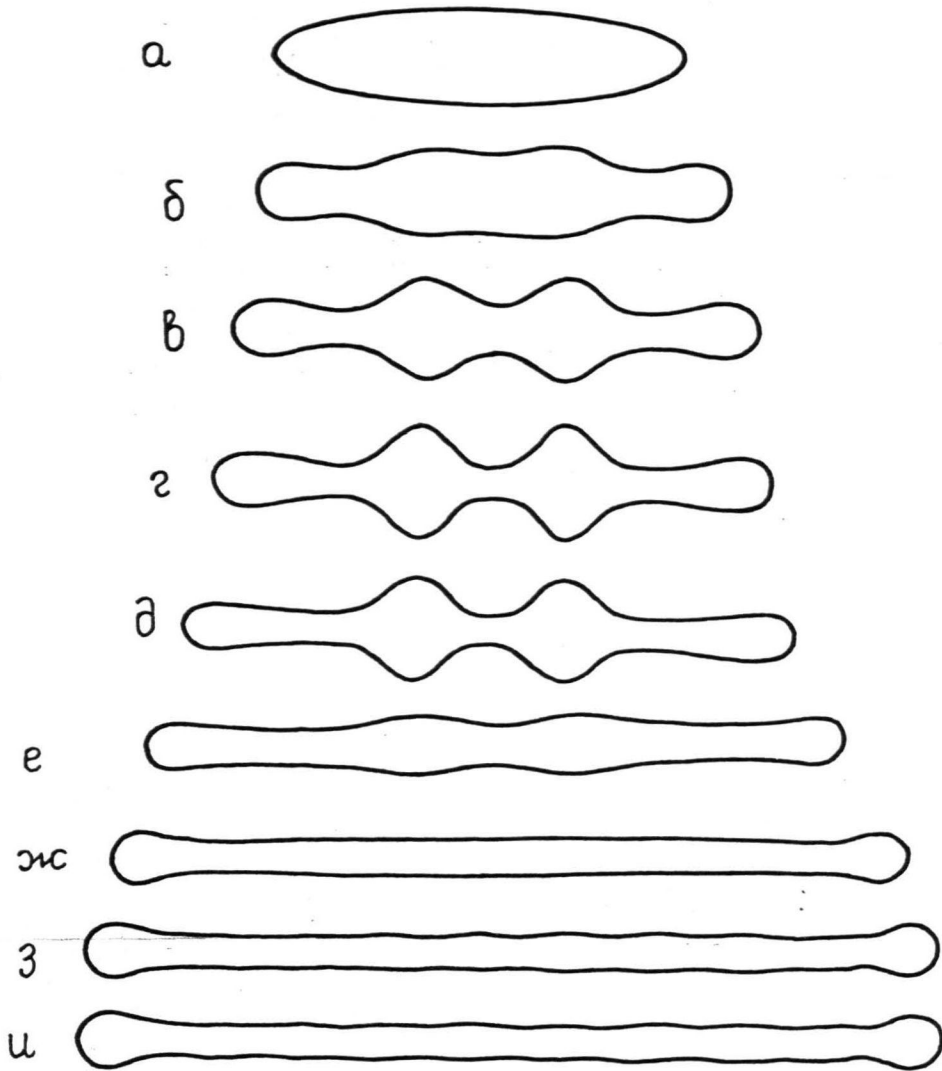


Рис. 5.3.25. Динамика развития эллиптических деформаций при $\tilde{h} = 0,25$ и $Vm = 3$. Число маркеров для $1/4$ контура капли равняется 11, временной шаг $2 \cdot 10^{-3}$. В конечной конфигурации изменение координат маркеров меньше 10^{-4} . а - исходная конфигурация; б - $t = 0,1$; в - 0,2; г - 0,3; д - 0,5; е - 1; ж - 2; з - 4; и - 5,418.

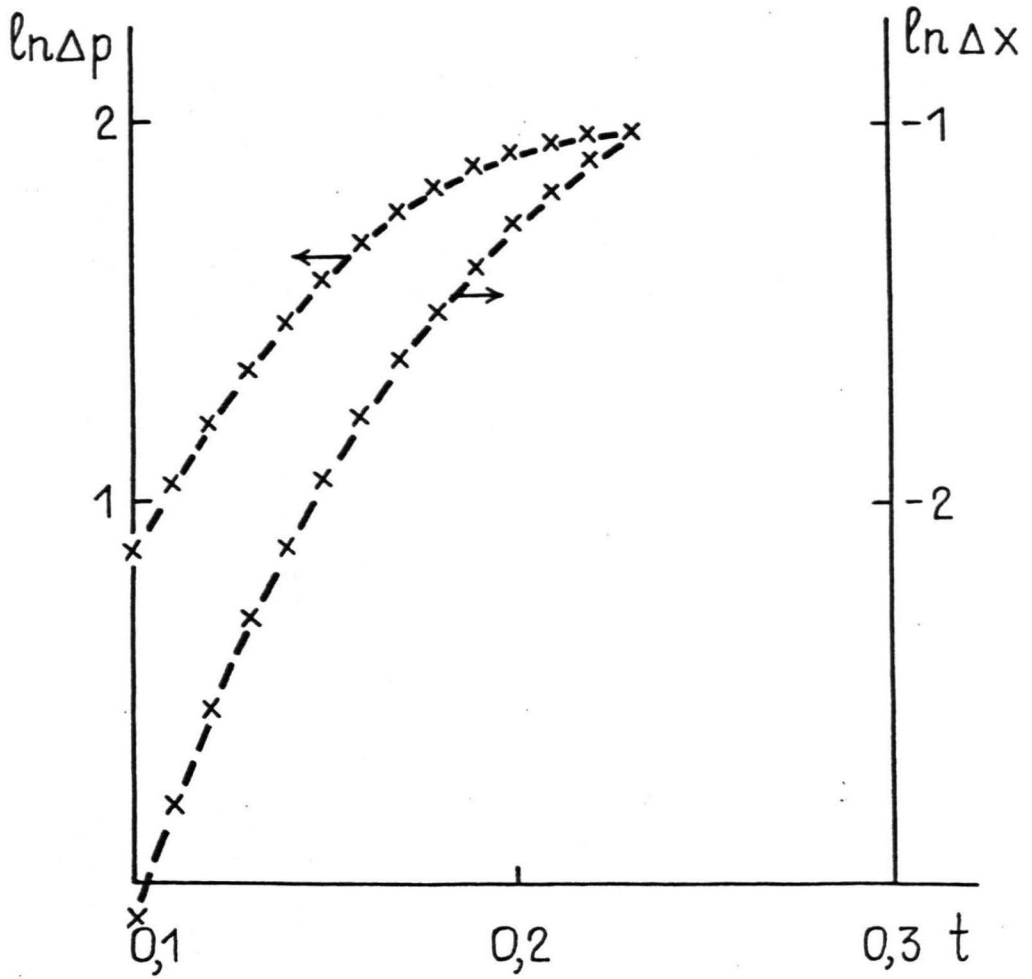


Рис. 5.3.26. Динамика развития неустойчивости относительно перетяжек при $\tilde{h} = 0,25$ и $Vm = 3$.

стойчивости перетяжек по мере растяжения капли замедляется. Определенный по начальному наклону кривой инкремент роста возмущений приблизительно равен 30. На этом же рисунке показана временная зависимость разности магнитных давлений для этих же точек контура капли. Определенный по начальному наклону этой кривой инкремент роста моды перетяжек приблизительно равен 18.

Эти значения могут быть сопоставлены с теоретически рассчитанными в главе 4. Так в случае $\delta = 2d/h = 4$ для инкремента роста возмущений при $Vm = 3$ имеем $\lambda \cong 1,2(R/h)^3 = 77$, а в случае $\delta = 2; \lambda \cong 0,2(R/h)^3 = 13$. Видно, что так как относительная ширина исходной эллиптической конфигурации в середине равняется 3,84, полученное на численном эксперименте значение инкремента соответствует теоретическому, тем более, что капля конечных размеров с бесконечной прямолинейной полоской НЖ имеет лишь отдаленное сходство. Относительная толщина капли по мере ее растяжения к моменту времени 0,2 уменьшается более чем в два раза и значение $Vm = 3$ становится согласно 3.4.4 докритическим относительно развития моды перетяжек. Это соответствует наблюдаемому на численном эксперименте (рис. 5.3.25) замедлению ее развития. Таким образом, характеристики динамики развития перетяжек, показанной на рис. 5.3.25, находятся в качественном согласии с теоретическими зависимостями.

Для показанной на рис. 5.3.25 ситуации проводился и ряд контрольных расчетов. На рис. 5.3.27 иллюстрируется влияние числа маркеров на развитие неустойчивости. Видно, что число маркеров не влияет на качественные особенности развития неустойчивости перетяжек — число волн, место их положения, однако количественные характеристики развития неустойчивости перетяжек в этих двух случаях различаются — для представленной на рис. 5.3.27 в конфигурации координаты контура различаются на 26 %, причем развитие

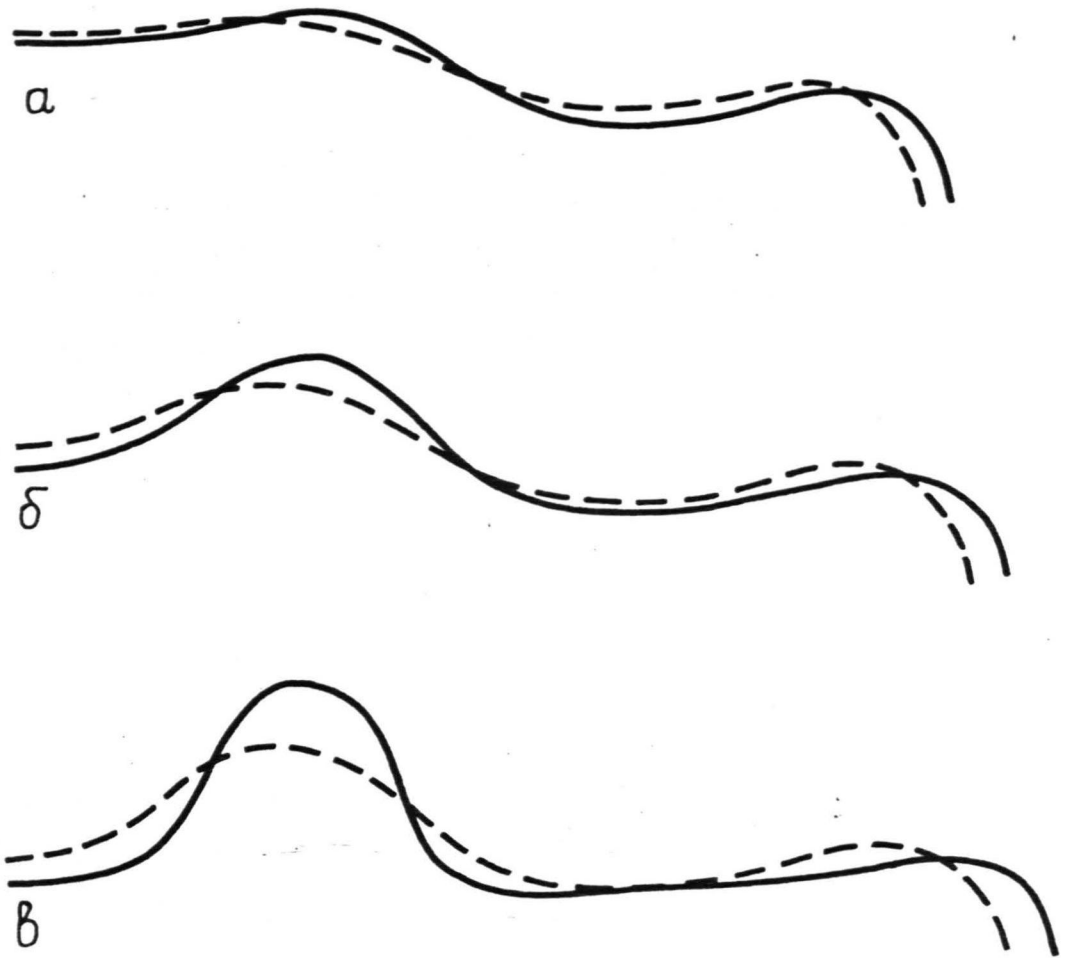


Рис. 5.3.27. Влияние числа маркеров на динамику развития неустойчивости относительно перетяжек при $\tilde{h} = 0,25$ и $Bm = 3$. Непрерывная линия - 20 маркеров для $1/4$ контура капли, временной шаг $5 \cdot 10^{-4}$, прерывистая линия - 11 маркеров для $1/4$ контура капли, временной шаг $2 \cdot 10^{-3}$. а - $t = 0,1$; б - $0,15$; в - $0,2$.

неустойчивости перетяжек в последнем случае происходит быстрее.

В случае 20 маркеров для $I/4$ контура проводились также расчеты с отличающимися в два раза шагами по времени. Отличий в характере динамики, по сравнению с показанной на рис. 5.3.27, замечено не было.

Таким образом, численный эксперимент подтверждает наличие неустойчивости относительно перетяжек, когда развитие изгибных деформаций запрещено условиями симметрии, при этом для получения более точной количественной информации требуется увеличение аппроксимационной точности представления контура.

Следует отметить, что длина волны развивающейся моды перетяжек, как показывает соотношение (4.1.16), зависит от Bm . Это иллюстрирует также данные численного эксперимента, представленного на рис. 5.3.28, на котором показано развитие неустойчивости перетяжек при $h/R = 0,26$ и $Bm = 5$. Видно, что в согласии с теоретической зависимостью длина волны развивающейся моды перетяжек с увеличением Bm уменьшается. Показанная на рис. 5.3.28 развитие перетяжек приводит к дроблению капли и следовательно срыву алгоритма, который подобную возможность не учитывает.

Так как на физическом эксперименте дробление капли с наложением поля не наблюдается, то представляет интерес исследование на численном эксперименте влияния изгибных деформаций на развитие моды перетяжек. Это требует дальнейших исследований.

Данные численных экспериментов, представленных на рис. 5.3.24, 5.3.25, коррелируют с зависимостью критического значения $M^2 \sqrt{V/\sigma}$ развития эллиптической неустойчивости от $h/\sqrt[3]{V}$. Это иллюстрирует рис. 5.3.29, на котором показана зависимость относительной деформации капли $(a-b)/a$ от $h/\sqrt[3]{V}$.

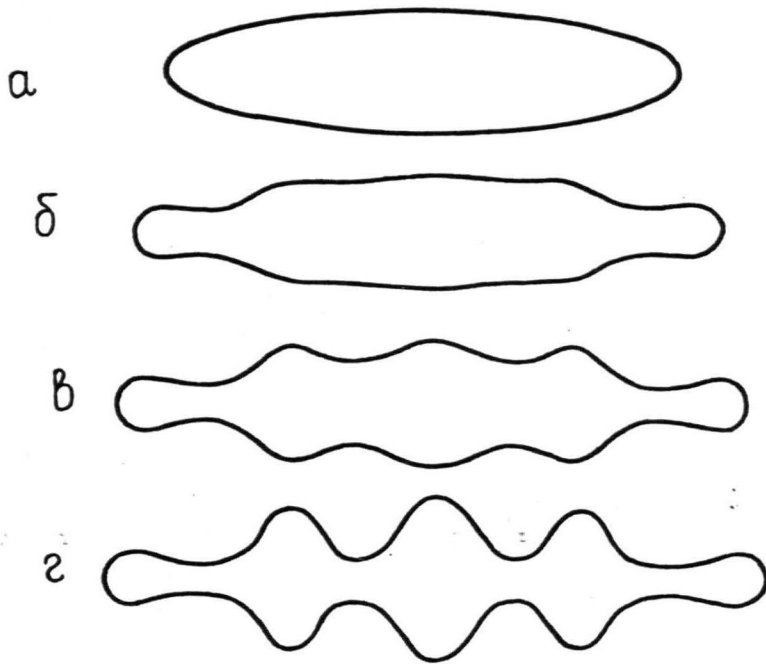


Рис. 5.3.28. Динамика развития неустойчивости перетяжек при $\tilde{h} = 0,25$ и $Bm = 5$. Число маркеров для $1/4$ контура капли равняется Π , временной шаг - 10^{-3} . а - исходная конфигурация; б - $t = 0,03$; в - $0,05$; г - $0,07$.

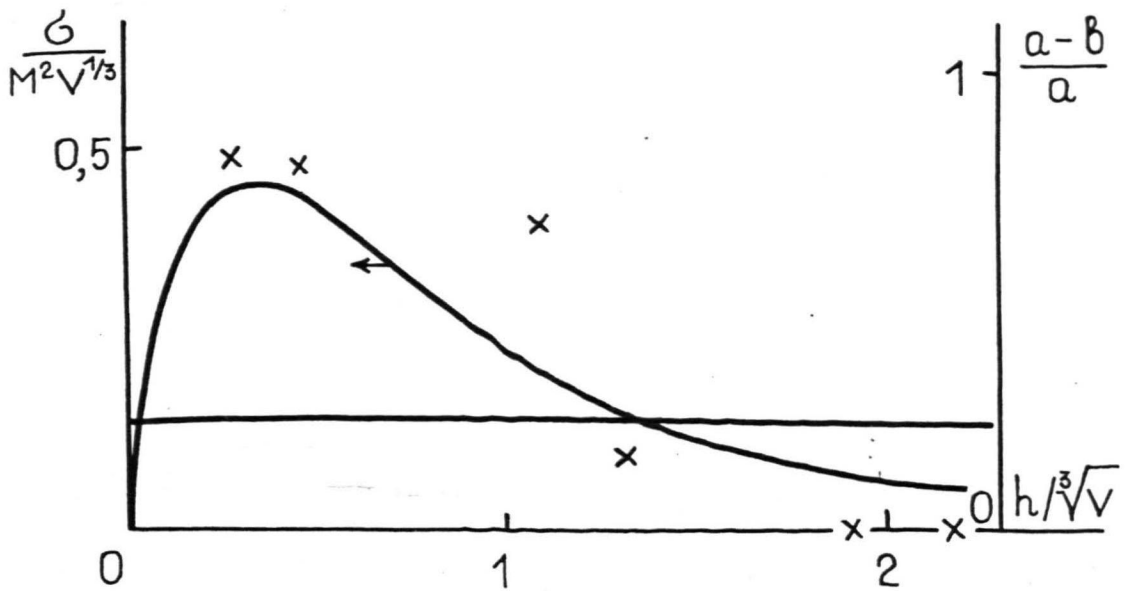


Рис. 5.3.29. Зависимость параметров равновесных фигур НЖ от толщины плоской щели. Крестики - данные проведенных численных экспериментов. Прямая линия - использованное значение параметра $G/M^2\sqrt[3]{V}$.

В Н В О Д Н

1. Поставлена задача о фигурах равновесия НЖ в плоских слоях с учетом действия сил поверхностного натяжения и магнитного межчастичного взаимодействия. Развита метод нахождения равновесных фигур путем численного моделирования процесса их установления, заключающегося в нахождении функции тока поля скоростей НЖ, определяемого действием сил поверхностного натяжения и магнитного межчастичного взаимодействия, на основе метода граничных интегральных уравнений.

2. Определенные на численных экспериментах по критическому замедлению затухания флуктуаций пороговые значения магнитных чисел Бонда неустойчивости капли относительно неосесимметричных мод деформации хорошо согласуются с найденными теоретически. Путем численного моделирования показано существование в надкритических условиях неосесимметричных равновесных фигур НЖ в плоских слоях, имеющих гантелеобразный вид. Найдено, что растяжение гантелеобразных конфигураций с ростом степени надкритичности увеличивается. Данные численных экспериментов указывают на субкритический характер бифуркации при возникновении семейства гантелеобразных конфигураций. Полученные на численных экспериментах равновесные фигуры НЖ соответствуют наблюдаемым в натуральных условиях.

3. В результате численного моделирования показано существование при достаточно больших магнитных числах Бонда нескольких семейств равновесных фигур НЖ в плоских слоях. В натуральных условиях это подтверждается образованием качественно различного вида структур капель и пузырьков в НЖ при квазистатическом и скачкообразном наложении поля.

4. Проведено исследование на численных экспериментах устойчивости прямолинейных гантелеобразных конфигураций относительно изгиба и показано существование области значений параметров, в которой они являются устойчивыми. По критическому замедлению релаксации деформаций изгиба гантелеобразных конфигураций установлено значение магнитного числа Бонда в точке вторичной бифуркации семейства гантелеобразных конфигураций, приводящей к возникновению изогнутых фигур. Существование изогнутых равновесных гантелеобразных конфигураций подтверждено на численных экспериментах. Факт существования как прямолинейных, так и изогнутых конфигураций находится в согласии с результатами натуральных экспериментов.

5. В ситуациях, когда изгиб капель запрещен условиями симметрии, на численных экспериментах подтверждено развитие неустойчивости типа перетяжек. Характеристики развития неустойчивости перетяжек находятся в согласии с результатами теоретического рассмотрения.

Глава 6. ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЕ В ГИДРОДИНАМИКЕ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕД

6.1. Модели и задачи гидродинамики НЖ с учетом ориентационных процессов. Краткий обзор состояния вопроса

В настоящее время установлено, что модель намагничивающегося бесструктурного континуума [3] не описывает целый ряд явлений, наблюдаемых на эксперименте и связанных с изменением реологических свойств МЖ в поле [39] - [43], возникновением движений МЖ в переменных однородных полях [44] - [50] и др. Для описания этих явлений оказалось необходимым рассмотрение моделей с внутренними степенями свободы, описывающими необратимые явления, связанные с процессами ориентации коллоидальных частиц ферромагнетика [51] - [73]. При этом МЖ трактуется как система магнитных стрелок, ориентирующихся под действием поля.

Пондеромоторная сила, действующая на среду, в пренебрежении вращательной инерцией частиц и моментными напряжениями в этом случае равна $(\vec{M} \nabla) \vec{H} + \frac{1}{2} \text{rot} [\vec{M} \times \vec{H}]$, где второе слагаемое связано с действием касательных напряжений, обусловленных наличием объемного момента сил. Отсюда видно, что для решения возникающих гидродинамических задач необходимо релаксационное уравнение для намагниченности движущейся жидкости. Далее дается краткий обзор состояния вопроса построения подобных уравнений и указывается ряд конкретных применений таких моделей.

Отметим, что в ряде работ [61], [62] рассматриваются и более общие модели НЖ, включающие в рассмотрение эффекты, обусловленные наличием внутреннего (спинового) момента количества дви-

жения коллоидальных частиц ферромагнетика, связанного с ее магнитным моментом посредством гиромагнитного отношения. Однако конкретный анализ [169] величины этих эффектов для случая реальных коллоидов ферромагнетиков показывает, что ими можно пренебречь по сравнению с эффектами, обусловленными в конечном счете магнитной анизотропией частиц.

В настоящее время предложено довольно много вариантов моделей МЖ с учетом необратимых ориентационных процессов [61], которые формулируются в рамках определенных феноменологических предположений, связанных с выбором внутренних параметров состояния, анизотропией феноменологических законов и значениями феноменологических констант.

Так в работах [51], [52] путем выбора в качестве внутренних параметров состояния внутреннего момента количества движения, обусловленного вращением коллоидальных частиц, и намагниченности, в предположении изотропии феноменологических законов, описывающих необратимые ориентационные процессы, формулируется нелинейное уравнение намагниченности следующего вида:

$$n \frac{d\vec{M}}{dt} = [\vec{\Omega}_0 \times \vec{M}] + (\alpha n)^{-1} [[\vec{M} \times \vec{H}] \times \vec{M}] - \tau_B^{-1} (\vec{M} - \vec{M}_0), \quad (6.1.1)$$

где $\tau_B = \alpha / 2kT$ - броуновское время ориентационной релаксации, α - коэффициент вращательного трения коллоидальных частиц.

Из данной модели следует наличие ряда физических эффектов, которые обусловлены нелинейным характером релаксационных уравнений (6.1.1). Так на основе этих уравнений в работе [170] показано существование гистерезиса зависимости намагниченности от частоты вращающегося поля.

Позже в работах [171], [172] на основе модели (6.1.1) сделан ряд принципиальных выводов относительно реологического поведения коллоида ферромагнетика в поле. В частности сделано заклю-

чение о возможности неоднозначного характера зависимости касательных напряжений от скорости сдвига. Однако вследствие использования при написании уравнений (6.1.1) указанных выше феноменологических гипотез, адекватность которых остается неясной, вопрос существования гистерезиса, а также указанных особенностей реологического поведения оставался открытым.

Общая модель НЖ с функцией распределения частиц в ориентационном пространстве $f(\vec{e})$ в качестве внутреннего параметра состояния была введена автором в работах [173], [174]. В рамках данной модели для некомпенсированного тепла имеет место выражение

$$\frac{\delta Q'}{\delta V \delta t} = \epsilon'_{ik} \mu_{ik} - n \int \vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e}) (\vec{J}_{\vec{e}} - \vec{\Omega}_0 f(\vec{e})) d^2 \vec{e}, \quad (6.1.2)$$

где $\vec{J}_{\vec{e}}$ - поток частиц в ориентационном пространстве ($\frac{df(\vec{e}, t)}{dt} = -\vec{K}_{\vec{e}}(\vec{J}_{\vec{e}})$), а $\mu(\vec{e})$ - химический потенциал частиц в ориентационном пространстве.

Задание уравнения состояния для химического потенциала в ориентационном пространстве позволяет описать эффекты, связанные с конечной магнитной анизотропией частиц [56], межчастичным ориентационным взаимодействием [173] и др. Сокращение этого описания на основе метода эффективного поля [175] позволяет получить модель НЖ с намагниченностью в качестве внутреннего параметра состояния [54]. Для некомпенсированного тепла, связанного с необратимыми ориентационными процессами в рамках модели жесткого диполя в этом случае следует [58]

$$\frac{\delta Q'_m}{\delta V \delta t} = - \left(n \frac{d\vec{M}}{dt} - [\vec{\Omega}_0 \times \vec{M}] \right) (\vec{H}_3 - \vec{H}). \quad (6.1.3)$$

Как и для вышерассмотренного случая построение замкнутой системы уравнений связано с использованием определенных предпо-

ложений при написании феноменологических уравнений соответствующих (6.1.3), причем коэффициенты последних могут являться функциями параметров состояния модели, т.е. напряженности магнитного поля и намагниченности.

В предположении, что анизотропия феноменологических законов определяется напряженностью магнитного поля \vec{H} на основе (6.1.3) можно получить линейные релаксационные уравнения намагниченности следующего вида [58], [176]

$$\left(n \frac{d\vec{M}}{dt} - [\vec{\Omega}_0 \times \vec{M}] \right)_{\parallel, \perp} = -\frac{1}{\tau_{\parallel, \perp}} (\vec{M} - \vec{M}_0)_{\parallel, \perp}, \quad (6.1.4)$$

где индексы \parallel , \perp определяют компоненты продольную и поперечные вектору напряженности поля соответственно, а для τ_{\parallel} и τ_{\perp} справедливы выражения, полученные в работе [54]

$$\tau_{\parallel} = \tau_B \xi L'(\xi) / L(\xi); \quad \tau_{\perp} = 2\tau_B L(\xi) / (\xi - L(\xi)).$$

Нелинейные релаксационные уравнения намагниченности без конкретизации значений феноменологических коэффициентов, следующие из (6.1.3) в рамках предположения, что анизотропия среды определяется намагниченностью, приводятся в работе [73] и имеют вид

$$\left(n \frac{d\vec{M}}{dt} - [\vec{\Omega}_0 \times \vec{M}] \right)_{\parallel, \perp} = -\frac{1}{\tau_{\parallel, \perp}} (f(M)\vec{M} - \vec{H})_{\parallel, \perp}, \quad (6.1.5)$$

где в отличие от (6.1.4) индексы \parallel , \perp обозначают компоненты векторов продольную и поперечные намагниченности. Функция $f(M)$ при этом определяется равновесным законом намагничивания среды $\vec{M} = f_1(H_3)\vec{H}_3$ в виде $\vec{H}_3 = f(M)\vec{M}$

В работе [54] путем расщепления в рамках приближения эффективного поля цепочки кинетических уравнений для моментов функции распределения частиц в ориентационном пространстве было получено

нелинейное уравнение релаксации намагниченности следующего вида

$$2\tau_B n \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = - \frac{2nmL(\xi_3)}{\xi_3} (\vec{\xi}_3 - \vec{\xi}) - \frac{nm(3L(\xi_3) - \xi_3)}{\xi_3^3} \left[\vec{\xi}_3 \times \left[\vec{\xi} \times \vec{\xi}_3 \right] \right], \quad (6.1.6)$$

где согласно использованному приближению эффективного поля намагниченность неравновесного состояния определяется соотношением $\vec{M} = nmL(\xi_3) \vec{\xi}_3 / \xi_3$, а ξ_3 - значение параметра Ланжевена эффективного поля \vec{H}_3 .

В работе [176] уравнение (6.1.6) написано с учетом движения среды, который сводится к добавлению в правой части уравнения (6.1.6) дезориентационного члена $[\vec{\Omega}_0 \times \vec{M}]$ и замене в соответствии с требованием галилеевской инвариантности частной производной в левой части (6.1.6) на субстанциальную.

Необходимо отметить, что нелинейное уравнение (6.1.6) в проекциях на направления продольное и поперечные намагниченности может быть записано в виде, тождественном (6.1.5), причем для феноменологических коэффициентов $\gamma_{\parallel, \perp}$ в этом случае получается

$$\gamma_{\parallel}^{-1} = \frac{nm^2}{\alpha} \frac{2L(\xi_3)}{\xi_3}; \quad \gamma_{\perp}^{-1} = \frac{nm^2}{\alpha} \left(1 - \frac{L(\xi_3)}{\xi_3} \right). \quad (6.1.7)$$

К сказанному можно добавить, что эти значения $\gamma_{\parallel, \perp}$ могут быть определены также путем сопоставления выражения для некомпенсированного тепла

$$\delta Q'_m / \delta V \delta t = \gamma_{\parallel}^{-1} (\vec{H}_3 - \vec{H})_{\parallel}^2 + \gamma_{\perp}^{-1} (\vec{H}_3 - \vec{H})_{\perp}^2, \quad (6.1.8)$$

вытекающего в рамках феноменологической модели, в которой анизотропия среды определяется ее намагниченностью, из (6.1.3) и (6.1.5) с его выражением в общей модели с функцией распределения частиц в ориентационном пространстве в качестве внутреннего параметра состояния [173]. При этом выражение (6.1.2) в случае

$\vec{J}_e - \vec{\Omega}_0 f(\vec{e}) = -\alpha^{-1} f(\vec{e}) K_{\vec{e}} \mu(\vec{e})$ в состоянии частичного равновесия, когда $\mu(\vec{e}) = m\vec{e}(\vec{H}_3 - \vec{H})$ дает (6.1.8), где $\gamma_{\parallel, \perp}$ определены соотноше-

ниями (6.1.7).

Различные частные случаи данных моделей рассматривались в целом ряде других работ, например, в работе [60], предлагается использовать в качестве уравнения состояния для намагниченности в неравновесном состоянии соотношение

$$M_i = M_{oi} - (\chi_{\parallel} \delta_{ik} + (\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) h_i h_k) \left(\frac{d\vec{H}}{dt} - [\vec{\Omega}_0 \times \vec{H}] \right)_k,$$

которое при $\chi_{\parallel} = \tilde{\tau}_{\parallel} \alpha_{\parallel}$; $\chi_{\perp} = \tilde{\tau}_{\perp} \alpha_{\perp}$ в предположении

$\tilde{\tau}_{\parallel, \perp} \Omega_0 \ll 1$ следует из (6.1.4).

Модель, подобная (6.1.5), но в рамках изотропного приближения ($\tilde{\tau}_{\parallel} = \tilde{\tau}_{\perp} = g(M)$), рассматривается в работе [53].

Таким образом, в настоящее время развиты различные варианты моделей МЖ с учетом необратимых ориентационных процессов, которые не являются физически эквивалентными. Так модель (6.1.4), а также, как показано в работе [73], модель (6.1.5), в отличие от модели (6.1.1), показывают отсутствие гистерезиса зависимости намагниченности от частоты вращающегося поля. Отбор адекватной модели до появления результатов данной работы отсутствовал. Ввиду действия в коллоидах ферромагнетиков многих трудно контролируемых факторов (полидисперсность, агрегация и др.) апробирование моделей в натуральных условиях носит в основном качественный характер [177].

Проверка адекватности предположений феноменологического порядка, лежащих в основе моделей, возможна на основе численных экспериментов, которых, за исключением расчетов методом Галеркина стационарной функции распределения в ориентационном пространстве при наличии поля и течения со сдвигом для весьма ограниченного количества параметров работы [71], не было.

Отметим, что вышеописанные модели относятся к случаю так называемой модели жесткого магнитного момента [178], когда его

движением в однодоменной частице ферромагнетика можно пренебречь. Это имеет место в случае, когда напряженность магнитного поля намного меньше эффективного поля магнитной анизотропии, а неелевское время тепловых флуктуаций магнитного момента гораздо больше характерного времени вращательного броуновского движения частицы. Модель на основе кинетической теории, учитывающая как случайное движение магнитного момента в частице ферромагнетика, так и случайное вращательное движение самой частицы, была построена автором в работах [56], [169]. На ее основе рассчитывается зависимость вращательной вязкости коллоида ферромагнетика от напряженности магнитного поля и параметра, характеризующего магнитную анизотропию частиц. Соответствующих данной модели уравнений релаксации намагниченности не было.

В настоящее время развит и ряд усложненных моделей [57], [59], [68], в которых учет движения магнитного момента и самой частицы при наличии случайных тепловых воздействий осуществляется на феноменологической основе. При этом вводится дополнительный внутренний параметр состояния - аксиальный вектор, характеризующий поле магнитной анизотропии частицы, а феноменологические законы записываются в изотропном приближении. В свете вышесказанного адекватность подобных усложненных феноменологических моделей может быть установлена путем сопоставления с выводами из кинетической теории или с результатами численных экспериментов.

Необходимо подчеркнуть, что рассматриваемые модели НЖ с учетом необратимых ориентационных процессов представляют интерес и при описании ряда явлений в гидродинамике ПЖ, в частности, при исследовании влияния электрического поля иона на его обтекание полярной жидкостью. Вопросы построения модели ПЖ с учетом необратимых ориентационных процессов рассматриваются в работах [55], [79], где, в частности, для некомпенсированного тепла приводится

выражение

$$\frac{\delta Q'}{\delta V \delta t} = \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\tau}{\alpha} \left(n \frac{d\vec{P}}{dt} - [\vec{\Omega}_0 \times \vec{P}] \right)^2,$$

совпадающее в пределе слабых полей, когда справедливо изотропное приближение для феноменологических законов, с выражением, следующим из (6.1.3) и (6.1.4).

На основе данной модели в работах [79], [80], с учетом электровязкого эффекта в поле иона получен коэффициент трения ζ при его поступательном движении в ПЖ, который в пределе малого электровязкого эффекта совпадает с значением, полученным ранее автором [55]

$$\zeta = 6\pi\eta R \left(1 + \frac{17}{420} \frac{\tau(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)}{4\pi\eta\epsilon_0^2 R^4} \right).$$

Можно добавить, что впервые задача о электровязком эффекте при обтекании иона ПЖ была поставлена еще в 20-е годы Борном [179]. Однако при рассмотрении возмущения поляризации движением жидкости им был учтен лишь дезориентационный член $[\vec{\Omega}_0 \times \vec{P}]$. Позже в работе [180] был рассмотрен этот же вопрос, но при учете лишь возмущения поляризации, обусловленного ее конвективным переносом, и был получен вывод о существовании электрического поля реакции, тормозящего поступательное движение иона. Впервые данная задача в полной постановке, с учетом возмущения поляризации как вследствие ее конвективного переноса, так вследствие дезориентации в поле гидродинамического вихря, была рассмотрена автором [55], [78], где показано, что увеличение коэффициента поступательного трения иона обусловлено электровязким эффектом в обтекающей ион жидкости, а электрическое поле реакции отсутствует. Эти результаты позже были подтверждены в указанных выше работах [79], [80]. Укажем, что необходимость учета конвективной производной в уравнениях релаксации поляризации

или намагниченности вытекает из требований галилеевской инвариантности.

Можно добавить, что, как показано автором в работе [78], релаксационные уравнения (6.1.1) пригодны для описания необратимых явлений, связанных с поляризацией, в слабопроводящих суспензиях сферических частиц. При этом τ имеет смысл максвелловского времени релаксации межфазной плотности свободного заряда.

Для описания наблюдаемой на эксперименте анизотропии изменения реологических свойств коллоидов ферромагнетиков с наложением поля [41] представляют интерес модели, описывающие необратимые ориентационные процессы в системах анизотропных частиц. В рамках общей модели с функцией распределения частиц в ориентационном пространстве в качестве внутреннего параметра состояния подобные модели получаются в результате учета определяемой вектором ориентации частиц \vec{e} анизотропии феноменологических законов, соответствующих (6.1.2).

Значения феноменологических коэффициентов в предельном случае разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц, когда межчастичным взаимодействием можно пренебречь, получаются путем сопоставления с известным в этом случае выражением для тензора напряжений, получаемом в результате решения задачи о возмущении течения со сдвигом одиночной эллипсоидальной частицей [75], [181]. В работах [55], [75], [76] на основе данной модели рассматриваются реологические свойства коллоидов ферромагнетиков при малых скоростях сдвига, характеризующиеся начальной эффективной вязкостью.

Исследований особенностей собственно реологического поведения коллоидов анизотропных частиц ферромагнетика в поле — зависимости эффективной вязкости, нормальных напряжений от скорости сдвига — отсутствовало.

Путем задания соответствующего уравнения состояния для химического потенциала в ориентационном пространстве могут быть описаны и гидродинамические явления, обусловленные межчастичным ориентационным взаимодействием. Исследование этих явлений представляет интерес в связи с интенсивно развивающимися в настоящее время исследованиями физики и гидродинамики анизотропных намагничивающихся жидкостей - жидких кристаллов. В имеющихся моделях жидких кристаллов (модель Лесли-Эриксона [77]) наличие межчастичных ориентационных взаимодействий учитывается путем введения в качестве внутреннего параметра состояния единичного вектора - директора, характеризующего направление преимущественной ориентации анизотропных частиц. Зависимость феноменологических коэффициентов подобной модели от степени ориентационного упорядочения, на которую указывают экспериментальные исследования реологических свойств жидких кристаллов [182] - [184], оставалась теоретически неизученной. Ее рассмотрение возможно на основе кинетической теории необратимых ориентационных процессов анизотропных частиц в течениях со сдвигом при наличии межчастичных ориентационных взаимодействий, которая не была развита.

Рассмотренные выше модели НЖ с учетом необратимых ориентационных процессов позволяют описать целый ряд новых гидродинамических явлений. О явлениях, связанных с изменением реологических свойств среды в поле было сказано выше. В настоящее время имеется ряд экспериментальных работ [46] - [50], в которых показано, что МЖ с подвижными границами в однородном вращающемся магнитном поле приходит в движение. При этом, как теоретически было показано нами на основе модели МЖ с внутренними вращениями [185], направление этого движения зависит от взаимного расположения подвижной границы и МЖ - заключенная свободной границей МЖ приходит в движение в направлении вращения поля, расположенная вне ее - в

направлении, противоположном направлению вращения поля. Эти исследования получили развитие в целом ряде экспериментальных и теоретических работ [186] - [189], в которых был получен ряд новых физически интересных выводов.

Так в работе [47] установлено, что при противоположных направлениях вращения поля и внутреннего из коаксиальных цилиндров, между которыми находится НЖ, существует такая угловая скорость вращения цилиндра, при которой действующий на него момент сил от напряженности поля не зависит, причем при угловых скоростях вращения цилиндра, меньших данной критической, наличие вращающегося поля приводит к его разгрузению.

Факт более быстрого в этой геометрии вращения свободного внутреннего цилиндра по сравнению с внешним при наличии постоянного поля, поперечного оси системы, установлен в работе [49], Данное явление эквивалентно теоретически описанному нами [185] явлению вращения внутреннего свободного цилиндра в направлении, противоположном направлению вращения вращающегося поля, если его рассмотреть с точки зрения системы координат, связанной с полем.

Интересное явление перекачивания капли МЖ по твердой подложке во вращающемся поле описывается нами в работе [174], причем направления движения лежащей и висячей капель противоположны. Данное явление обусловлено действием антисимметричных вязких напряжений на свободной поверхности капли [174].

На основе уравнений гидродинамики НЖ с учетом внутренних вращений в работах [174], [190], [191] теоретически описывается движение МЖ в бегущих магнитных полях.

В работе [47] в геометрии коаксиальных цилиндров, заключающих крупнодисперсную ферросуспензию, экспериментально обнаружено увеличение во вращающемся поле переноса тепла от внутреннего цилиндра, которое качественно может быть связано с микроконвек-

тивным переносом тепла вихревым движением несущей жидкости, обусловленного вращением частиц. Рассмотрение влияния вращений частиц суспензии на подобное явление - перенос массы - проведено нами в работе [192], из результатов которой, в частности, следует, что увеличение эффективного коэффициента теплопроводности определяется числом Пекле - $R^2 \omega / \chi$. Отсюда видно, что ощутимых эффектов при промышленных частотах следует ожидать в случае ферросуспензий с размером частиц порядка $10 \mu\text{м}$, который, кстати, соответствует размерам частиц суспензии, исследуемой в работе [47]. Позже полученные нами [192] результаты были подтверждены в работе [193]. Феноменологически особенности теплопереноса в средах с внутренними вращениями рассматривались в работе [194].

Диссипация энергии в МЖ при наличии вращающегося магнитного поля экспериментально исследуется в работе [195]. Для теоретического описания подобных явлений необходимо выражение для некомпенсированного тепла, обусловленного необратимыми ориентационными процессами.

Необходимость интерпретации новых особенностей движений НЖ в геометрии коаксиальных цилиндров при наличии вращающегося поля приводит к необходимости рассмотрения данного вопроса в более полной постановке, чем в нашей работе [185], где рассматривался лишь случай свободно подвешенного внутреннего цилиндра. При этом общий случай эквивалентен случаю покоящегося внешнего цилиндра, который был рассмотрен нами в работе [196.]. Следует отметить, что это имеет место лишь при отсутствии гидродинамической неустойчивостей, которые в данной ситуации в работе не рассматриваются. Влияние внутренних вращений на развитие неустойчивости Тейлора течения Куэтта рассматривается в работе [197].

В заключение данного краткого введения отметим, что исследо-

вание гидродинамических явлений, обусловленных необратимыми ориентационными процессами, представляет интерес и в связи с возникающими в настоящее время практическими приложениями этих явлений. Так в работе [50] сообщается об успешном создании ротационных вискозиметров, в которых вращающий момент создается действием вращающегося поля на МЖ. В работе [188] рассматривается применение данных явлений в целях интенсификации охлаждения статора асинхронного двигателя. Возможен и целый ряд других применений явлений гидродинамики МЖ с внутренними вращениями, связанных с управлением процессами переноса и др.

6.2. Численное моделирование процесса намагничивания коллоида ферромагнетика и модели МЖ с учетом необратимых ориентационных процессов

Проведенный в предыдущем разделе обзор состояния вопроса построения моделей МЖ с учетом необратимых ориентационных процессов показывает необходимость апробации имеющихся моделей и обоснованного отбора модели, наиболее адекватно описывающую реальную ситуацию.

В настоящее время численный эксперимент представляется единственным средством достижения этой цели, так как действие в натуральных условиях множества таких усложняющих ситуацию факторов как полидисперсность, агрегация частиц и др. приводит к трудности определения того, связано ли имеющее место расхождение экспериментальных и теоретических зависимостей с приближенным характером последних или действием данных трудно контролируемых факторов.

Для отражения в численных экспериментах реальных особенностей процесса намагничивания коллоидов ферромагнетиков необходи-

мо моделирование вращательного движения однодоменной частицы ферромагнетика в вязкой жидкости под действием моментов сил, обусловленных магнитным полем, вязким трением и случайными тепловыми толчками, которые существенны вследствие малого размера частиц.

Подходящим средством моделирования в этом случае является метод броуновской динамики, который в связи с появлением мощных компьютеров типа GRAU-1 получил развитие в качестве инструмента исследования динамики конформационных процессов в полимерах [198].

В данном методе происходит численное моделирование случайного процесса $\vec{X}(t)$, описываемого уравнением Ланжевена $\dot{\vec{X}} = -\alpha^{-1}\nabla V + \vec{f}$, где \vec{f} случайная сила, описывающая воздействие на систему тепловых флуктуаций термостата. Для рассматриваемого случая, когда вопрос состоит в моделировании случайного процесса блужданий одиночной частицы в ориентационном пространстве вполне реальным является использование доступной ЭВМ ЕС-1022.

Основные результаты настоящего раздела были получены нами в работе [199].

Исходными являются уравнения Ланжевена вращательного движения коллоидальной частицы ферромагнетика в поле

$$-\alpha(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) + mH[\vec{n} \times \vec{h}] + \vec{M}^{c\wedge} = 0;$$

$$d\vec{n}/dt = [\vec{\Omega} \times \vec{n}]. \quad (6.2.I)$$

Для временной корреляционной функции в среднем равного нулю случайного момента сил $\vec{M}^{c\wedge}$ согласно флуктуационно-диссипационной теореме [88] имеет место $\langle M_i^{c\wedge}(t) M_k^{c\wedge}(t') \rangle = 2\alpha kT \delta_{ik} \delta(t-t')$.

Дискретизация стохастической системы дифференциальных уравнений (6.2.I) осуществляется следующим образом. Наряду с неподвижной декартовой системой координат с осью Z в направлении

$\vec{h} = \vec{H}/H$ вводится подвижная, связанная с единичным вектором \vec{n} . Осями подвижной системы координат являются $\vec{e}_1 = [\vec{n} \times \vec{h}] / |[\vec{n} \times \vec{h}]|$ и $\vec{e}_2 = [\vec{n} \times \vec{e}_1]$. Система уравнений (6.2.1) для компонент изменения $\Delta \vec{a}_1$ на направления \vec{e}_1 и \vec{e}_2 на временном шаге Δt в первом порядке точности по Δt дают (\vec{n}_0 - вектор \vec{n} в начале временного шага, вектор $\vec{\Omega}_0$ в направлении оси X)

$$\Delta n_1 = \Omega_2 \Delta t; \quad \Delta n_2 = -\Omega_1 \Delta t,$$

где компоненты вектора угловой скорости вращения частицы Ω_1 и Ω_2 в подвижной системе координат выражаются следующим образом

$$\Omega_1 = \Omega_0 n_y^0 / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \xi \alpha^{-1} kT \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \Omega_1^{c\wedge};$$

$$\Omega_2 = \Omega_0 n_x^0 n_z^0 / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \Omega_2^{c\wedge}.$$

Случайные углы поворота $\Omega_1^{c\wedge} \Delta t$ и $\Omega_2^{c\wedge} \Delta t$, в среднем равные нулю, как результат действия многих случайных толчков распределены по гауссовскому закону с дисперсией $\langle (\Omega_{1,2}^{c\wedge} \Delta t)^2 \rangle = 2D \Delta t$ (D - коэффициент вращательной диффузии, равный kT/α), получаемой из соотношения Эйнштейна, и согласно флуктуационно-диссипационной теореме статистически независимы.

В результате обезразмеривания времени по характерному броуновскому масштабу α/kT , Δn_1 и Δn_2 могут быть выражены в следующем виде ($\omega = \Omega_0 \alpha/kT$ - вращательное число Пекле)

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= \omega \Delta t n_x^0 n_z^0 / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \sqrt{2\Delta t} \mu_2; \\ \Delta n_2 &= -\omega \Delta t n_y^0 / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} - \xi \Delta t \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} - \sqrt{2\Delta t} \mu_1, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

где μ_1 , μ_2 статистически независимые случайные величины, распределенные по нормальному закону с средним значением нуль и дисперсией, равной 1.

Вектор \vec{n} в конце временного шага Δt в неподвижной сис-

теме координат находится из условия нормировки $\vec{n}^2 = 1$ и выражений компонент ортов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 в неподвижной системе координат в следующем виде ($\Delta \vec{n}_1 = \Delta n_1 \vec{e}_1 + \Delta n_2 \vec{e}_2$)

$$\begin{aligned} n_x &= \sqrt{1 - (\Delta n_1)^2} n_x^0 + \Delta n_1 n_y^0 / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \Delta n_2 n_x^0 n_z^0 / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}}; \\ n_y &= \sqrt{1 - (\Delta n_1)^2} n_y^0 - \Delta n_1 n_x^0 / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \Delta n_2 n_y^0 n_z^0 / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}}; \\ n_z &= \sqrt{1 - (\Delta n_1)^2} n_z^0 - \Delta n_2 \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}}. \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

На основе соотношений (6.2.2) и (6.2.3) происходит генерация случайной траектории частицы в ориентационном пространстве. Генерация нормально распределенных случайных величин производится на основе датчика псевдослучайных чисел URAND [165] и описанному там же методу полярных координат.

Предположение о нормальности распределения μ_1 и μ_2 проверялось на статистическом тесте. Для этого производилась генерация последовательности из 10^4 пар чисел и строилась гистограмма их распределения по интервалам $[-\infty; -2]$, $[-2; -1,8]$, ..., $[1,8; 2]$, $[2; +\infty]$, которая показана на рис. 6.2.1.

Критерий Пирсона χ^2 для данной реализации оказывается равным 16,1. Так как табличные данные для распределения χ^2 для данного случая 21 степени свободы показывают, что в 80 % случаев χ^2 больше 15,445, то представленные на рис. 6.2.1 данные удовлетворяют критерию χ^2 .

Релаксационные уравнения \vec{M} для случая покоящейся жидкости позволяют вычислить временные корреляционные функции намагниченности в состоянии термодинамического равновесия. Действительно, согласно уравнениям (6.1.4) для условно среднего значения компонент намагниченности справедливо ($\vec{M} = nm \langle \vec{n} \rangle$) [200]

$$\langle n_\alpha \rangle_{\vec{n}_0} = \int n_\alpha P(\vec{n}; \vec{n}_0 | t) d^2 \vec{n} = n_{p\alpha} + (n_{o\alpha} - n_{p\alpha}) e^{-t/\tau_\alpha},$$

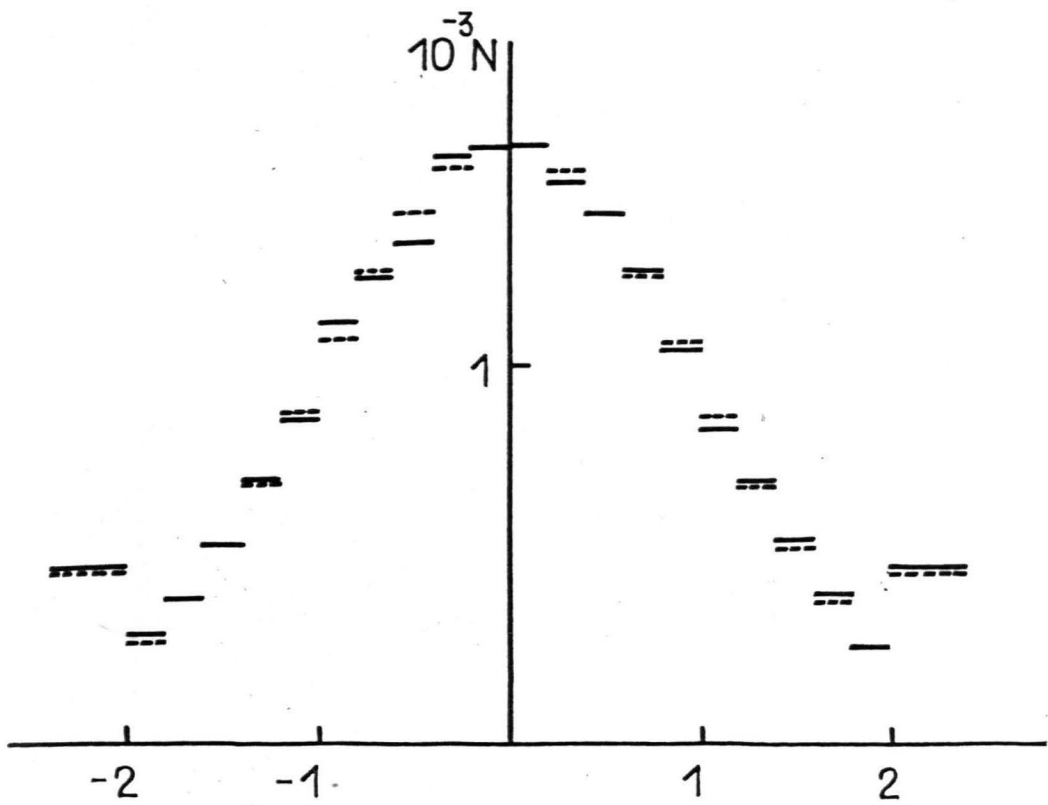


Рис. 6.2.1. Гистограмма распределения псевдослучайных чисел. Прерывистые линии - значения, ожидаемые для случая нормального распределения.

где $\alpha = \parallel$ или \perp , а $P(\bar{n}; \bar{n}_0 | t)$ плотность условной вероятности перехода за время t магнитного момента от начального значения \bar{n}_0 к конечному \bar{n} . Отсюда для временной корреляционной функции намагниченности в состоянии термодинамического равновесия

$$\langle n_\alpha(t) n_\alpha(0) \rangle = (n_{p\alpha})^2 + e^{-t/\tau_\alpha} (\langle n_\alpha^2 \rangle - n_{p\alpha}^2) \quad (6.2.4)$$

Как показывает соотношение (6.2.4), временное затухание корреляций носит экспоненциальный характер. На этом и основывается нахождение зависимости времен релаксации от напряженности поля методом статистического моделирования.

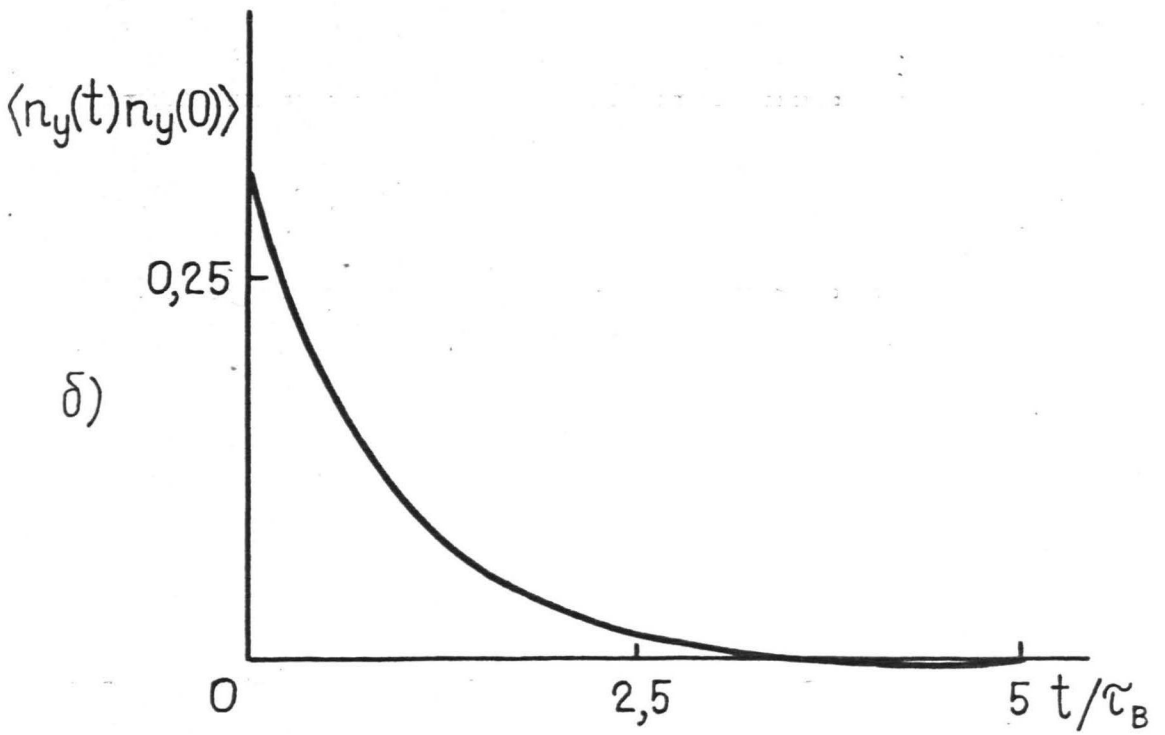
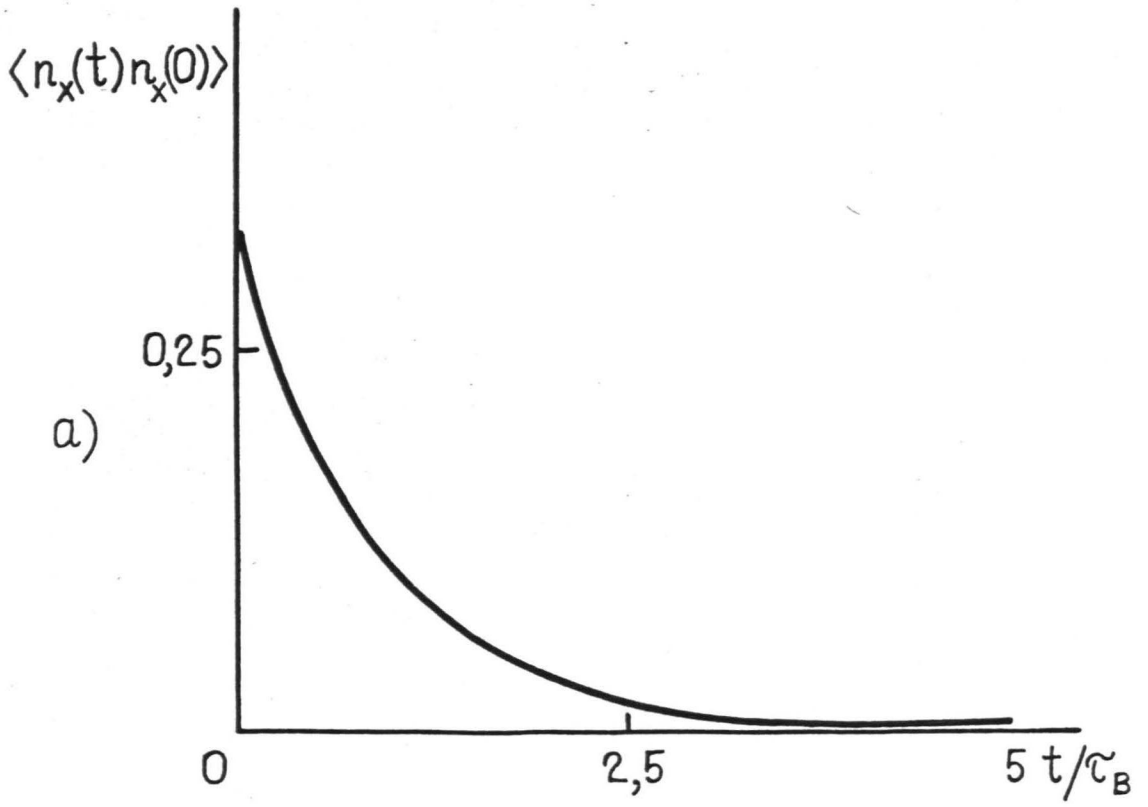
При этом согласно соотношениям (6.2.2) и (6.2.3) происходит генерация случайной траектории частицы в ориентационном пространстве. Для временного шага Δt в случае $\omega = 0$ полагается $\Delta t = 10^{-2} / \xi$. Временные корреляционные функции согласно эргодической гипотезе находятся в результате усреднения произведения значений компонент намагниченности вдоль случайной траектории согласно формуле

$$\langle n_\alpha(t) n_\alpha \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T n_\alpha(\tau) n_\alpha(\tau - t) d\tau \approx N^{-1} \sum_{i=1}^N n_\alpha(\tau_i) n_\alpha(\tau_i - t),$$

где N число временных шагов численного эксперимента. Временные зависимости получаемых подобным образом корреляционных функций при $\xi = 1$ показаны на рис. 6.2.2а - в.

Обработка временных зависимостей корреляционных функций в полулогарифмических координатах методом наименьших квадратов позволяет определить времена релаксации намагниченности τ_x , τ_y , τ_z . Определение наклона прямых проведенных этим методом по 15 равномерно расположенным в интервале $[0 \div 1,5 \tau_B]$ точкам численного эксперимента для времен релаксации дает

$$\tau_x / \tau_B = 0,89, \quad \tau_y / \tau_B = 0,89, \quad \tau_z / \tau_B = 0,84. \text{ Коэффицици-}$$



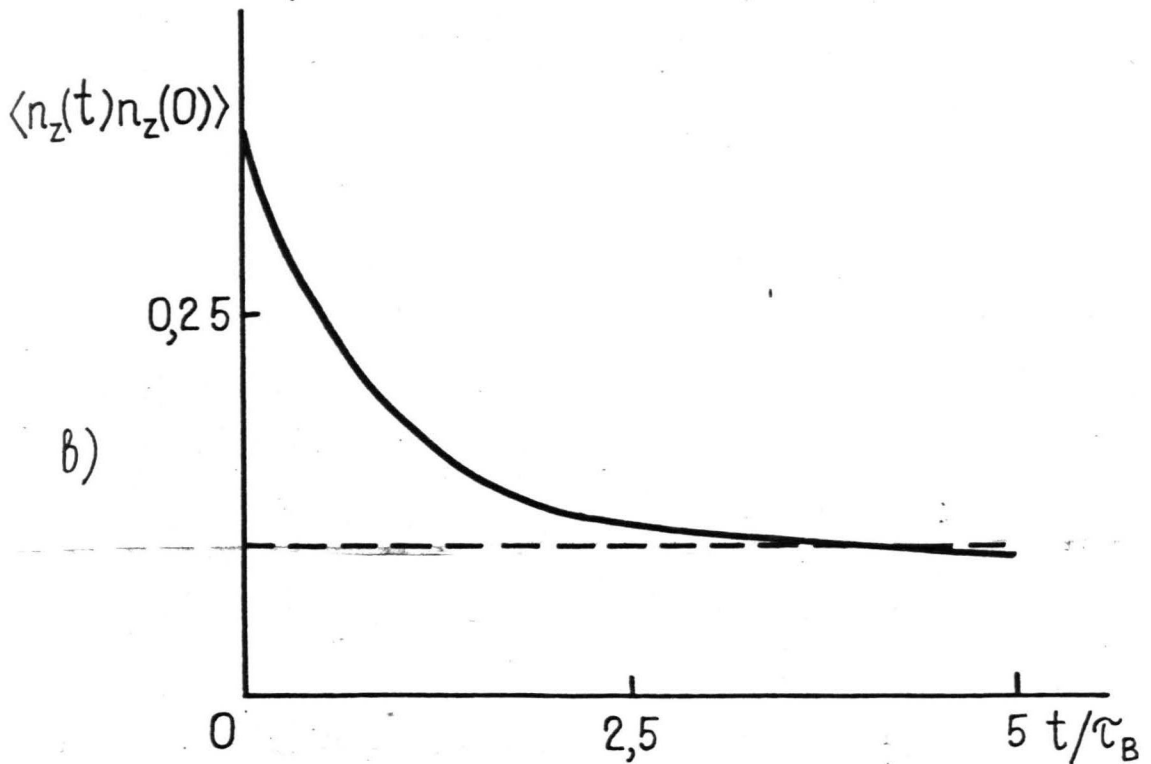


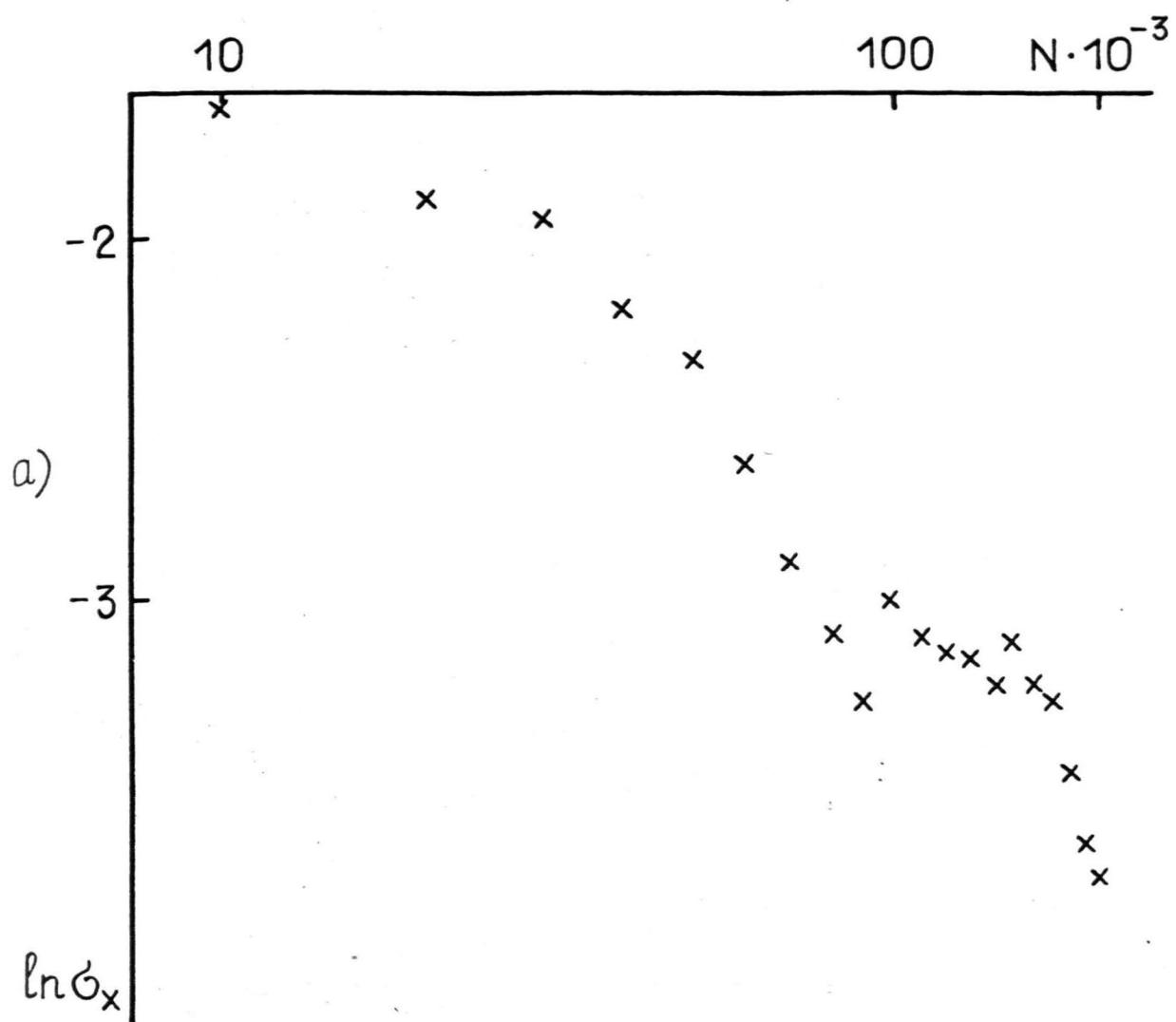
Рис. 6.2.2. Временные корреляционные функции намагниченности. Параметр Ланжевена $\xi = 1$, число временных шагов $N = 2 \cdot 10^5$. а - $\langle n_x(t)n_x(0) \rangle$; б - $\langle n_y(t)n_y(0) \rangle$; в - $\langle n_z(t)n_z(0) \rangle$.

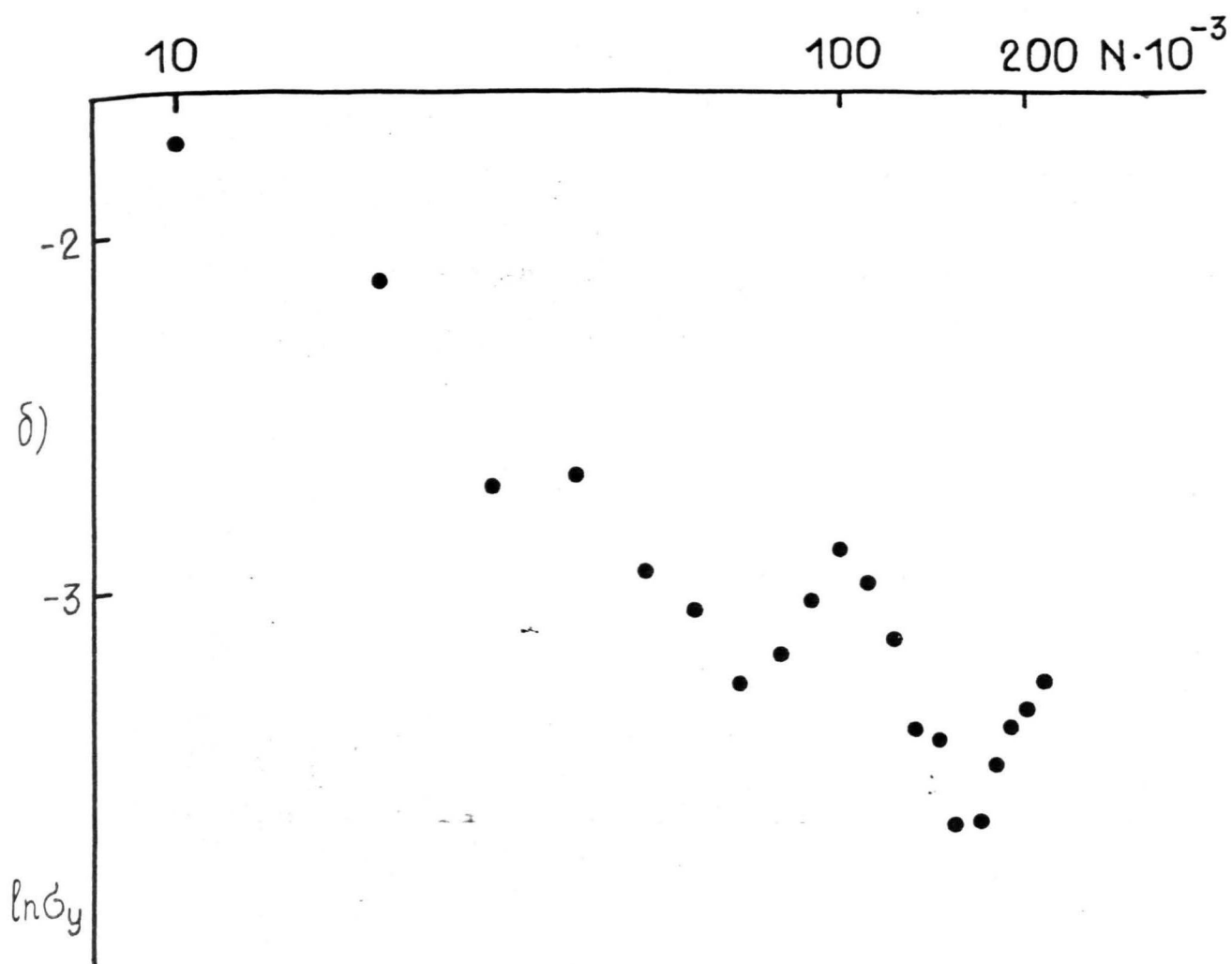
ент корреляции при этом равен -1 с точностью до четвертого или пятого знака после запятой, что свидетельствует о хорошем соответствии экспоненциальному закону затухания флуктуаций.

Существенным, но трудным вопросом для рассматриваемого метода статистического моделирования магнитной релаксации является оценка ошибки определения времен релаксации. Статистическая ошибка определения временной корреляционной функции, связанная с конечностью времени усреднения T численного эксперимента, теоретически исследуется в работе [201], где показано, что ошибка в определении корреляционной функции убывает с ростом времени усреднения по закону $T^{-1/2}$.

В настоящем случае исследование статистической ошибки, связанной с конечностью времени усреднения производилась при помощи дополнительных численных экспериментов. Для этого производилось вычисление временных корреляционных функций при 10 различных взятых наугад в виде шестизначных чисел начальных затравках генератора псевдослучайных чисел URAND. В качестве начального состояния во всех случаях используется $(1, 0, 0)$. Определенная по данной выборке из 10 реализаций случайного процесса несмещенная оценка дисперсии времен релаксации намагниченности при $\xi = 1$ в зависимости от числа шагов случайной траектории в логарифмических координатах приводится на рис. 6.2.3. Времена релаксации определялись по 51 равномерно расположенным на интервале $[0; 5\tau_B]$ точкам численного эксперимента. При этом в полулогарифмических координатах методом наименьших квадратов обрабатывалась функция, получаемая в результате вычитания из корреляционной функции квадрата среднего по данному числу шагов N значения соответствующей компоненты намагниченности.

Метод наименьших квадратов для коэффициентов линейной регрессии a_i с N дисперсий времен релаксаций в данной выборке





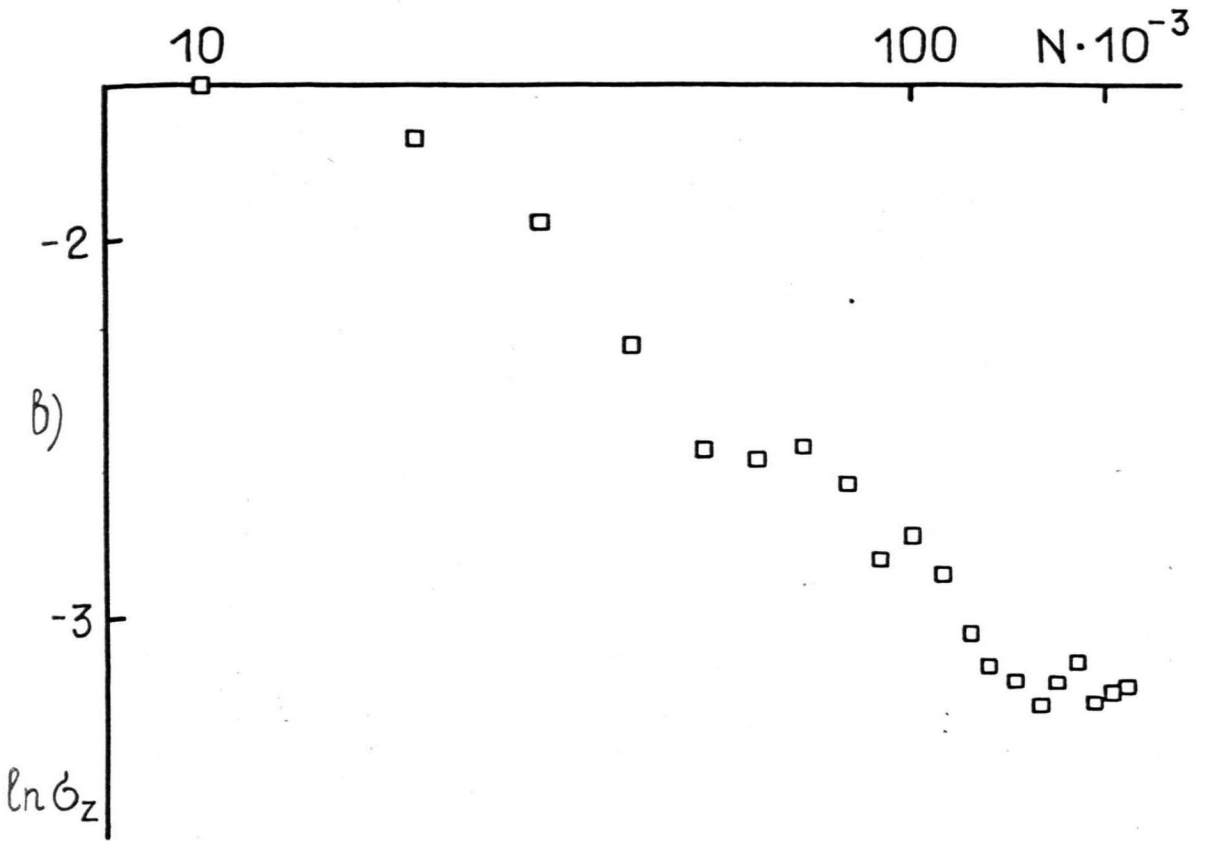


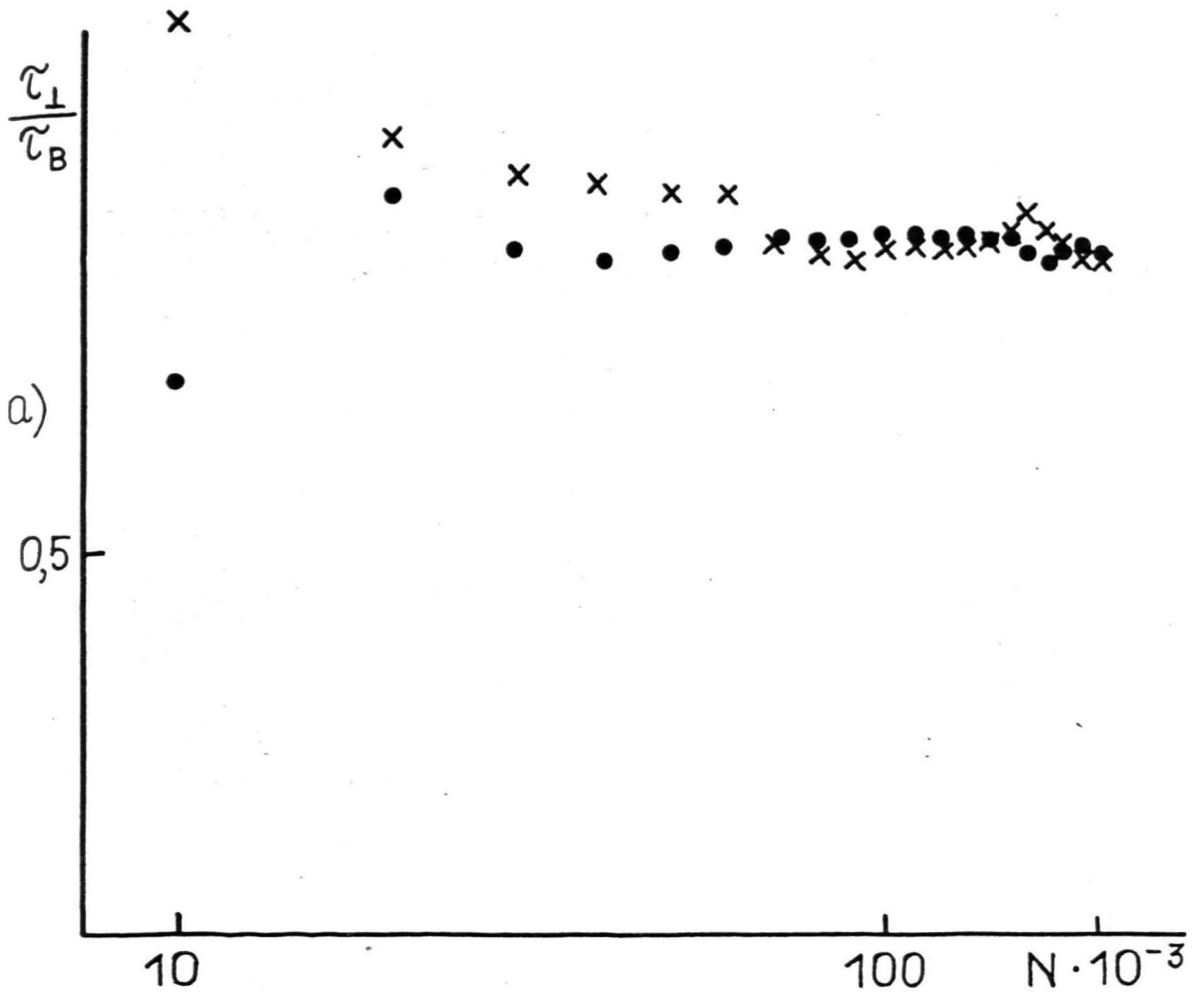
Рис. 6.2.3. Дисперсия времен релаксации намагниченности в зависимости от длины интервала усреднения. а - дисперсия $\tilde{\tau}_x$; б - $\tilde{\tau}_y$; в - $\tilde{\tau}_z$.

10 значений дает $\tau_x - a_x = 0,71$, $\tau_y - a_y = 0,54$ и $\tau_z - a_z = 0,61$ при коэффициентах корреляции $r_x = 0,96$, $r_y = 0,92$ и $r_z = 0,98$. Эти показатели степенного закона убывания с ростом N ошибки времени релаксации близки к теоретически полученному в работе [201] значению $\approx 0,5$ для временной корреляционной функции.

Результаты, приведенные на рис. 6.2.3, показывают, что при длине промежутка усреднения соответствующему 10^5 временным шагам 95 % доверительный интервал для времени релаксации составляет порядка 10 %. Отметим, что разброс определяемых на конкретном численном эксперименте времен релаксации при N порядка 10^5 в зависимости от длины интервала усреднения имеет величину, близкую к указанным 10 %. Зависимость времен релаксации намагниченности при $\xi = 1$ от длины интервала усреднения в полулогарифмических координатах иллюстрируется на рис. 6.2.4.

В качестве теста адекватности рассматриваемой численной модели вращательного броуновского движения магнитного диполя во внешнем поле производилось вычисление по формуле $\langle a \rangle = N^{-1} \sum_{i=1}^N a(\tau_i)$ и статистически средних по данному промежутку усреднения значений компонент намагниченности и их квадратов, для которых усреднение по ансамблю с функцией распределения $f(\vec{n}) = a^{-1} \times \exp(\xi(\vec{n} \cdot \vec{h}))$ дает известные выражения $\langle n_x \rangle = \langle n_y \rangle = 0$; $\langle n_z \rangle = L(\xi)$; $\langle n_x^2 \rangle = \langle n_y^2 \rangle = L(\xi)/\xi$; $\langle n_z^2 \rangle = 1 - 2L(\xi)/\xi$ где $L(\xi)$ - функция Ланжевена. Найденные на численных экспериментах ($N = 10^5$) значения этих моментов в зависимости от параметра Ланжевена ξ приводятся на рис. 6.2.5. Видно, что отличие теоретических значений от данных численного эксперимента не более 5 %.

Далее описывается ряд полученных статистическим моделированием результатов. На рис. 6.2.6 показаны полученные в результате обработки временных корреляционных функций методом наименьших



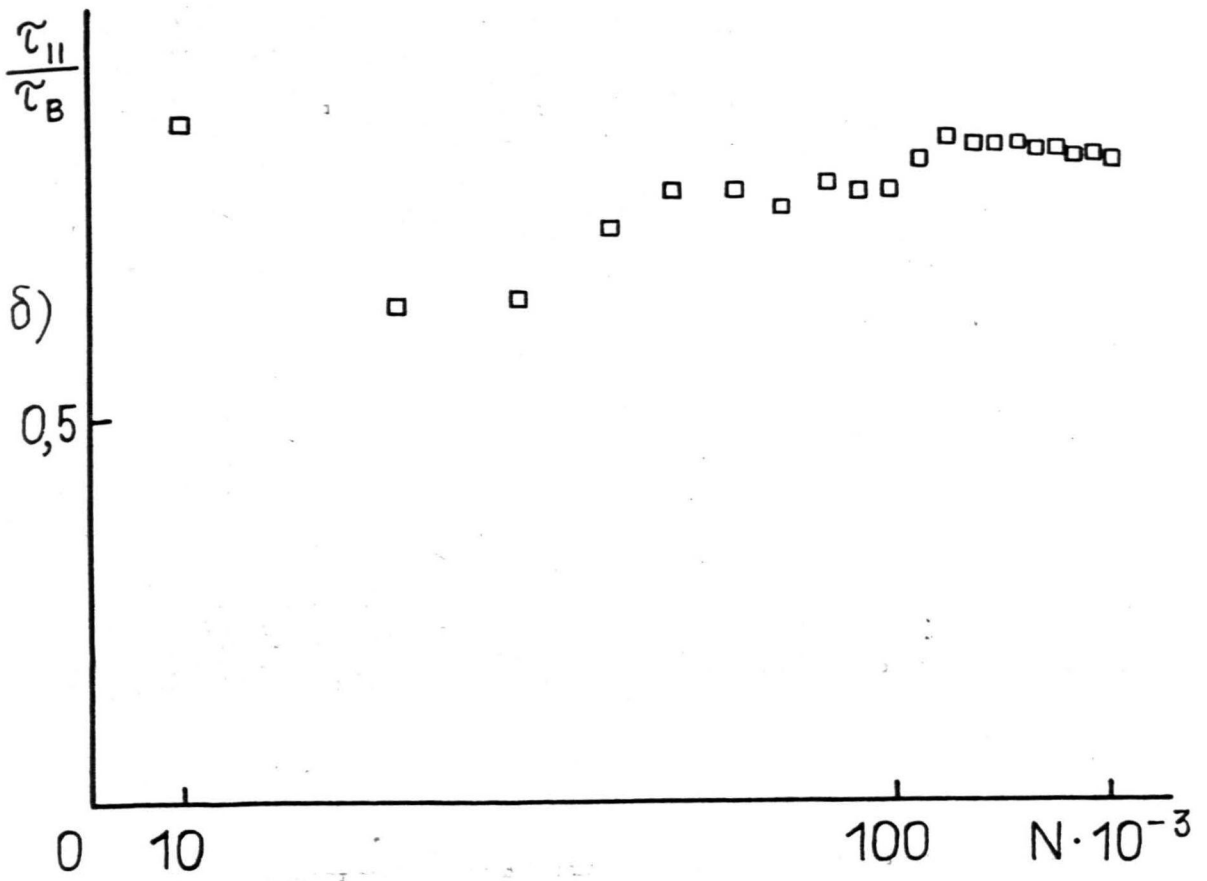
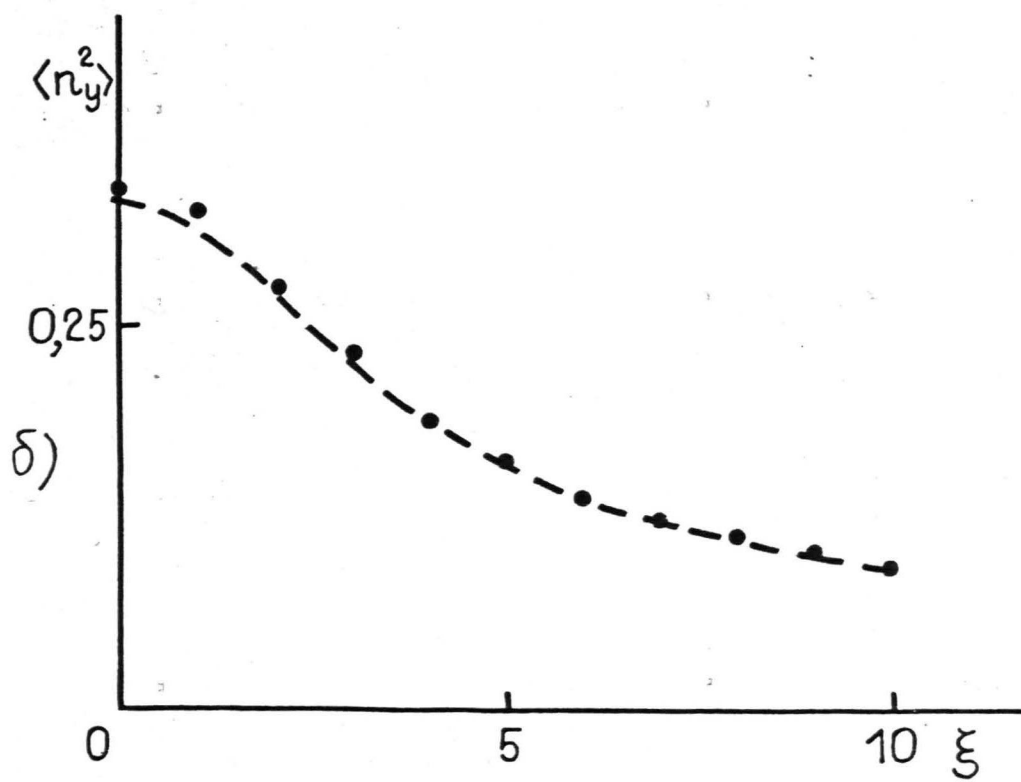
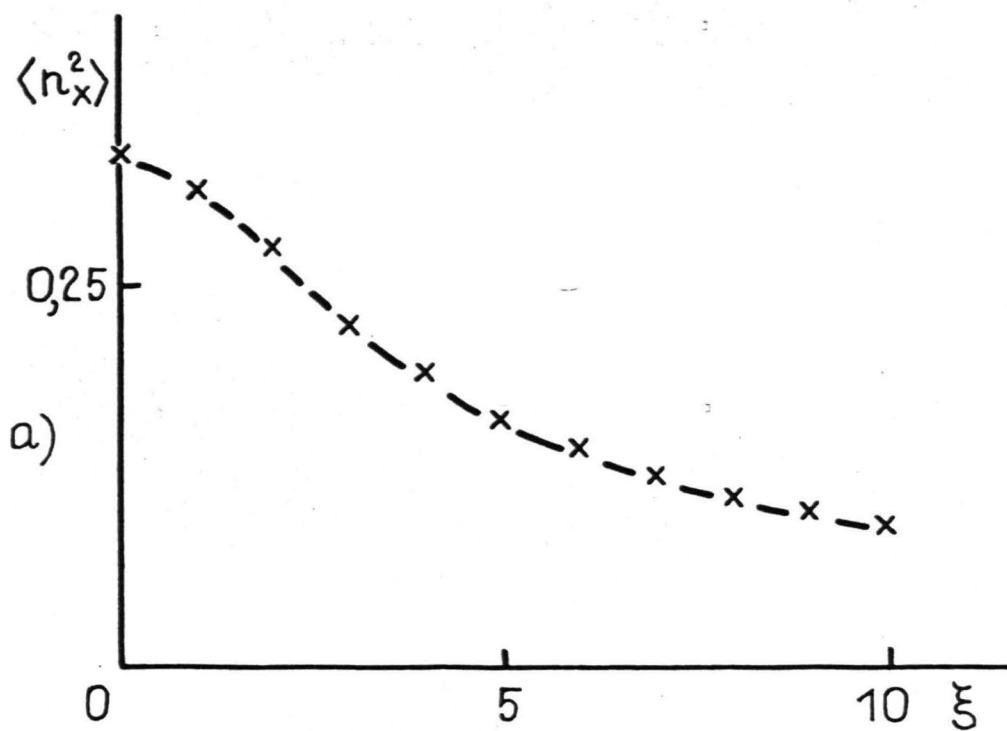


Рис. 6.2.4. Времена релаксации намагниченности в зависимости от длины интервала усреднения. Параметр Ланжевена $\xi = 1$. а - крестики τ_x , кружочки τ_y ; б - прямоугольники τ_z .



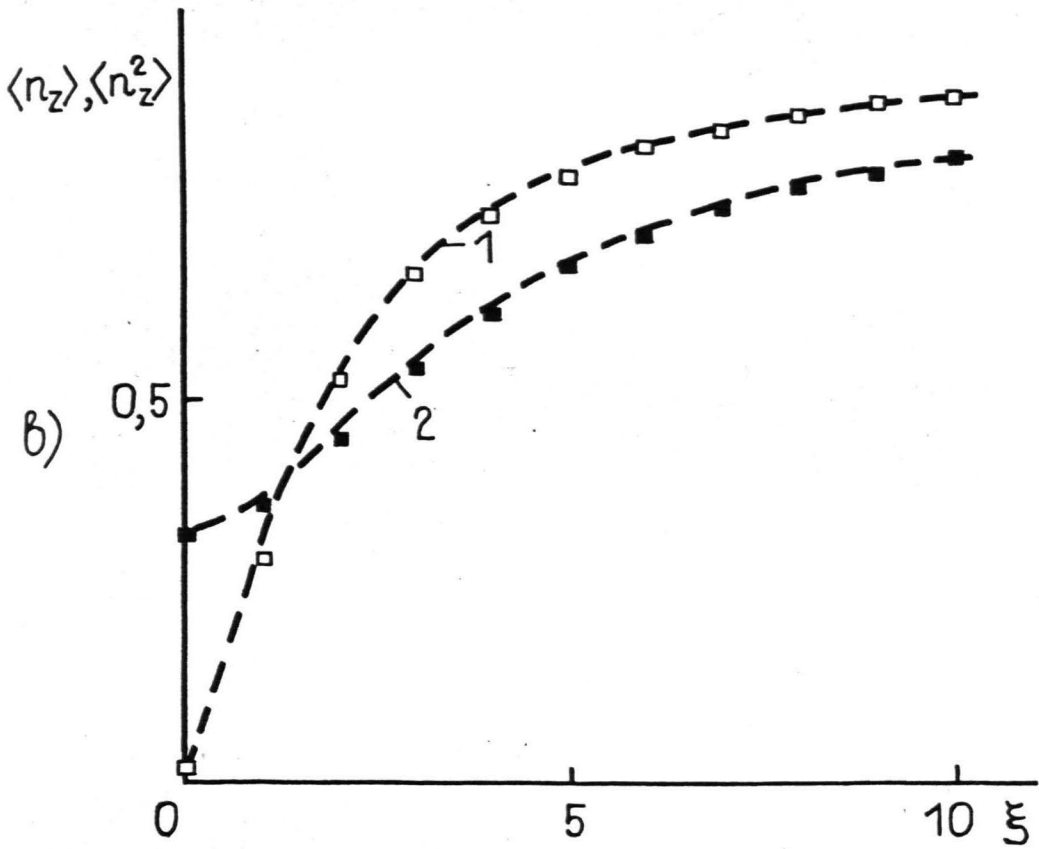


Рис. 6.2.5. Моменты компонент намагниченности в зависимости от параметра Ланжевена. Прерывистые линии - теоретические средние по ансамблю. Длина интервала усреднения $N = 10^5$. а - $\langle n_x^2 \rangle$; б - $\langle n_y \rangle$; в - $\langle n_z \rangle$ (1), $\langle n_z^2 \rangle$ (2).

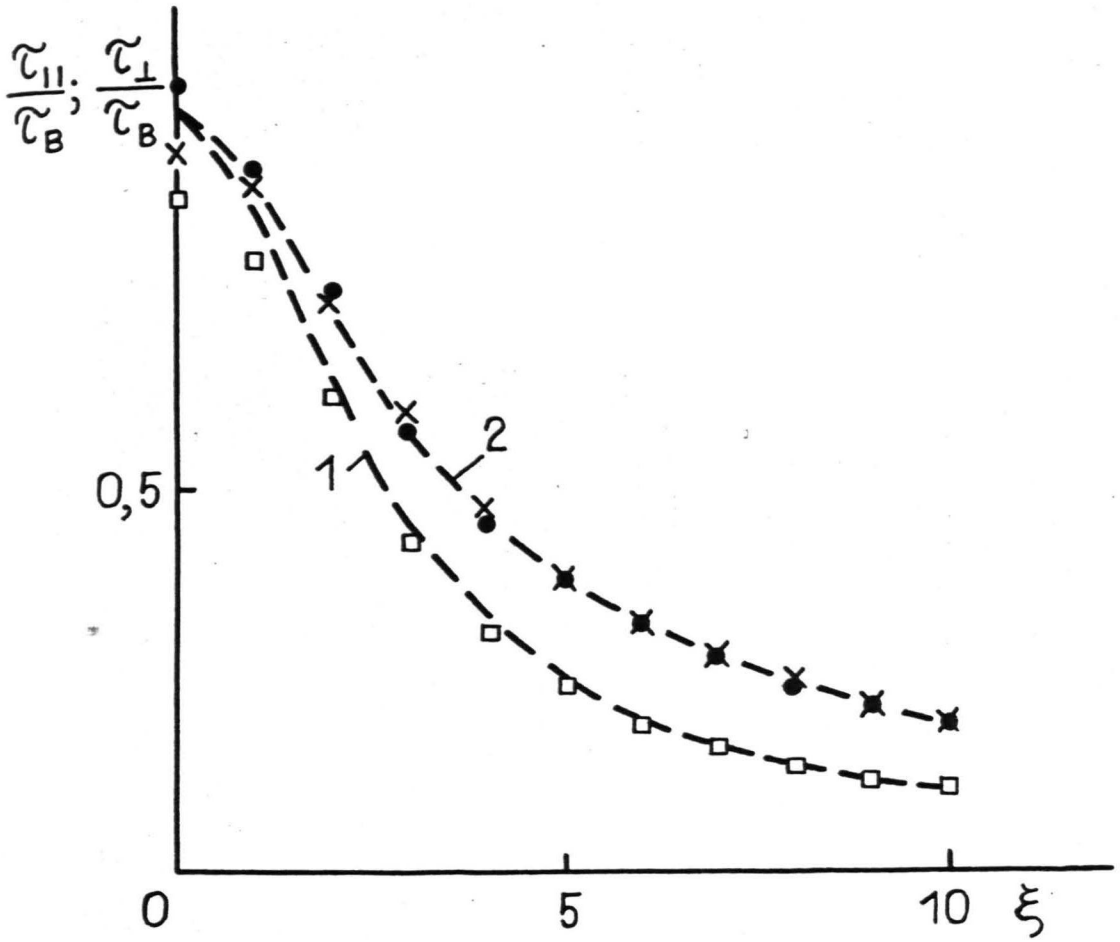


Рис. 6.2.6. Зависимость времен релаксации намагниченности от параметра Ланжевена. Крестики - τ_x / τ_B ; кружки - τ_y / τ_B ; прямоугольники - τ_z / τ_B . Число шагов случайной траектории $N = 10^5$. Прерывистые линии - теоретические зависимости работы [54] (1 - время релаксации продольной компоненты намагниченности, 2 - время релаксации поперечных компонент намагниченности).

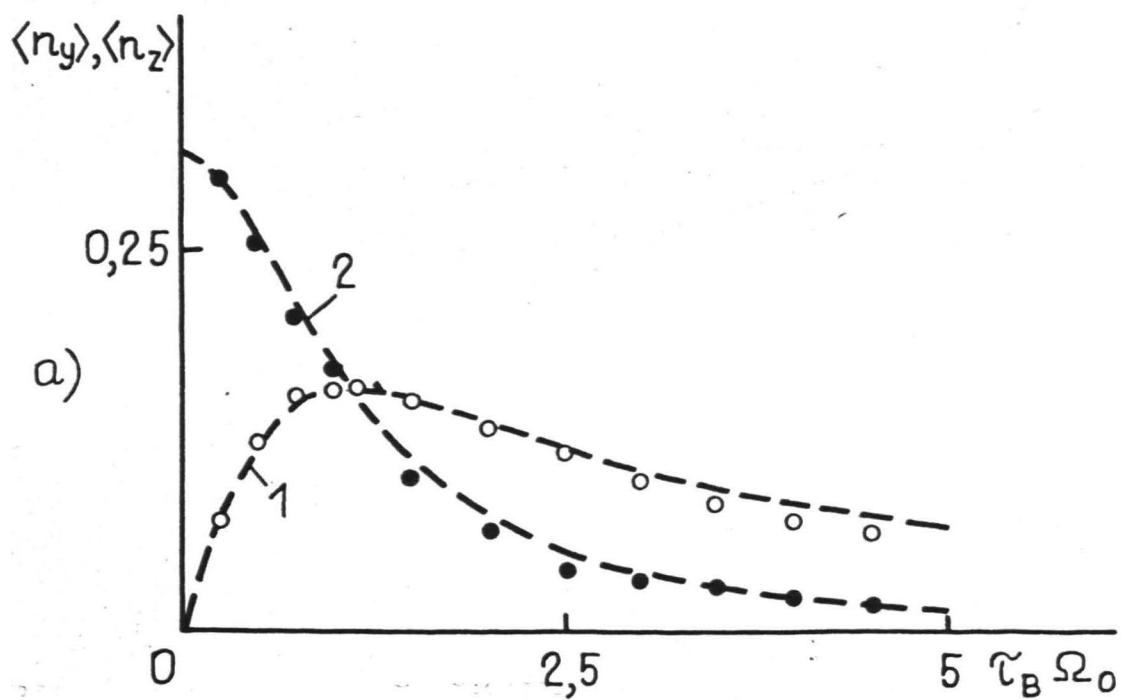
квадратов времена релаксации поперечных и продольной компонент намагниченности в зависимости от ξ . Обработка временных корреляционных функций в полупологарифмических координатах производилась по 15 равномерно расположенным в интервале $[0; 1,5\tau_B]$ точкам численного эксперимента. При этом из корреляционных функций производился вычет, в соответствии с формулой (6.2.4), квадратов, статистически средних за данный промежуток усреднения, компонент намагниченности. Видно, что в пределах указанной ошибки статистического моделирования результаты численных экспериментов подтверждают теоретические зависимости для времен релаксации намагниченности, полученные в работе [54] для состояний, близких к термодинамическому равновесию.

Метод броуновской динамики позволяет провести анализ применимости релаксационных уравнений (6.1.1), (6.1.4) и (6.1.5) для описания намагничивания коллоида в течениях со сдвигом, когда его состояние может быть и сильно неравновесным.

Полученные в результате усреднения вдоль случайной траектории диполя при наличии гидродинамического вихря зависимости $\langle n_y \rangle$ и $\langle n_z \rangle$ от $\tau_B \Omega_0$ при $\xi = 1, 2$ показаны на рис. 6.2.7а, б. Штриховыми линиями на рис. 6.2.7 показаны зависимости для компонент намагниченности, следующие из линейных уравнений релаксации намагниченности (6.1.4) при $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0 \vec{e}_x$:

$$\begin{aligned} \langle n_x \rangle &= 0; \quad \langle n_y \rangle = -\tau_{\perp} \Omega_0 \langle n_z \rangle_p / (1 + \tau_{\parallel} \tau_{\perp} \Omega_0^2); \\ \langle n_z \rangle &= \langle n_z \rangle_p / (1 + \tau_{\parallel} \tau_{\perp} \Omega_0^2). \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Как и следовало ожидать при достаточно больших $\tau_B \Omega_0$, когда отклонение \vec{H}_3 от \vec{H} не является малым, имеется расхождение между данными численных экспериментов и зависимостями (6.2.5), однако качественное соответствие при данных значениях параметра Ланжевена имеется.



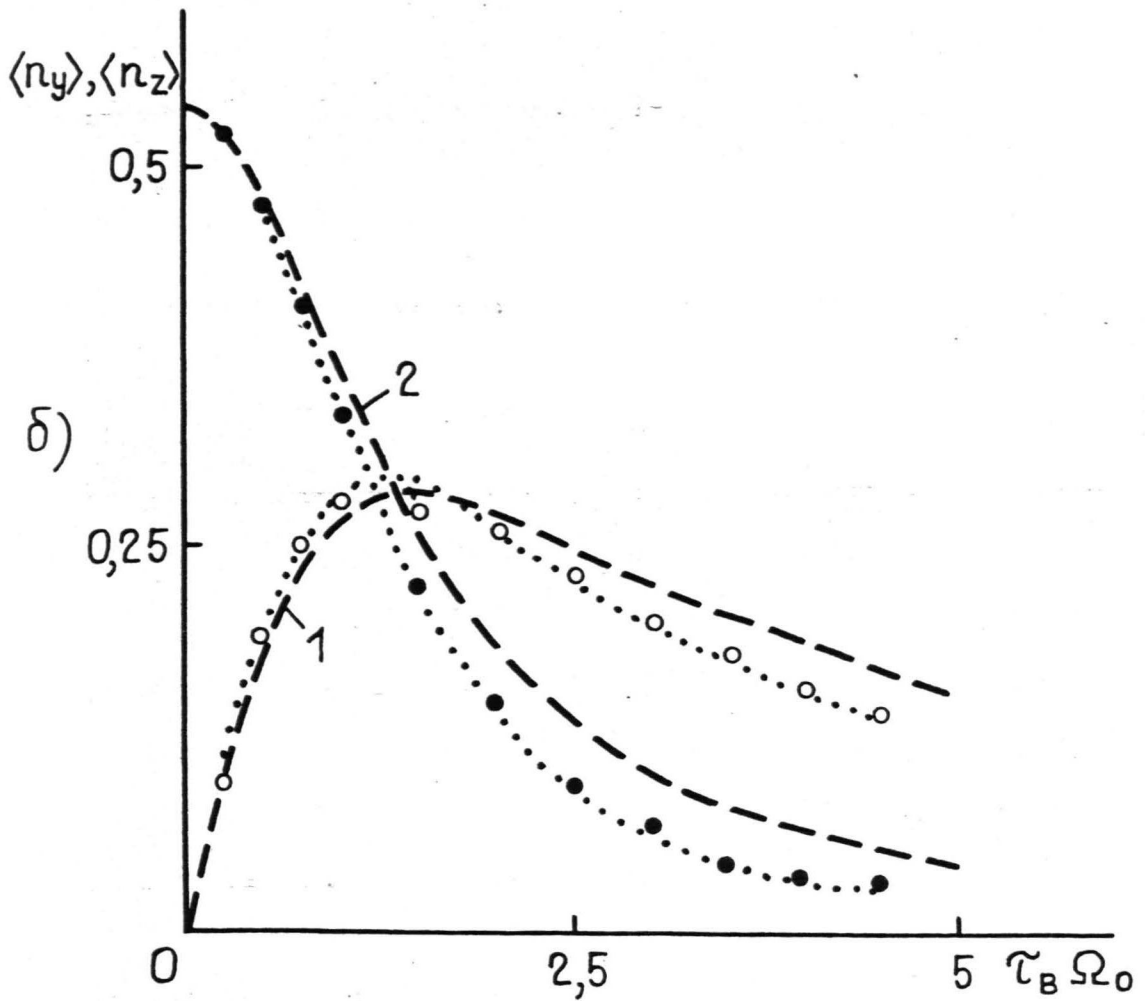


Рис. 6.2.7. Компоненты намагниченности коллоида ферромагнетика в течении со сдвигом. Светлые кружки - поперечная компонента $\langle n_y \rangle$, темные кружки - продольная компонента $\langle n_z \rangle$. Прерывистые линии - теоретические зависимости (6.2.7), где времена релаксации $\tau_{||}$ и τ_{\perp} определены согласно теоретическим зависимостям на рис. 6.2.6. Длина интервала усреднения $2 \cdot 10^5$. Временной шаг 10^{-2} ($\omega \leq 2$) и $10^{-2}/\omega$ ($\omega \gg 2$). а - $\xi = 1$, б - $\xi = 2$. 1 - $\langle n_y \rangle$; 2 - $\langle n_z \rangle$.

Количественные характеристики намагничивания ферроколлоида в гидродинамическом потоке, полученные методом статистического моделирования, можно сопоставить с расчетными данными, которые для небольшого количества значений параметров приведены в работе [71]. В работе [71] для расчета характеристик намагничивания коллоида в гидродинамическом потоке предлагается алгоритм, основанный на решении уравнения Фоккера-Планка для функции распределения путем разложения последней по системе ортогональных функций и обрезании получаемой линейной системы алгебраических уравнений для коэффициентов разложения. Сопоставление эффективности данного алгоритма с методом статистического моделирования представляется затруднительным, так как в работе [71] не указаны количественные его характеристики, однако, следует отметить громоздкость его аналитической части, а также отмеченную в [71] трудность, связанную с медленной сходимостью алгоритма, которые не возникают в методе броуновской динамики.

Сопоставление результатов статистического моделирования с небольшой таблицей данных работы [71] показывает, как это видно из рис. 6.2.8, хорошее согласие. При этом сопоставлении были использованы табличные данные для коэффициентов разложения b_{11} работы [71] случая поперечной ориентации поля по отношению к гидродинамическому вихрю. Приращение вязкости в поле через b_{11} выражается в виде $\Delta\eta/\eta = -\varphi 2\pi \xi b_{11} / \omega$, где ω - вращательное число Пекле. Для последнего через статистически среднее значение намагниченности имеет место выражение $\Delta\eta/\eta = -3\varphi/2 \xi \langle n_y \rangle / \omega$, откуда следует показанная на рис. 6.2.8 связь коэффициента b_{11} и $\langle n_y \rangle - b_{11} = \frac{3}{4\pi} \langle n_y \rangle$. Расхождение численных данных при этом составляют при $\omega = 0,5 - 3,7 \%$; $\omega = 1 - 1,4 \%$; $\omega = 5 - 0,3 \%$, что находится в пределах ошибки статистического моделирования.

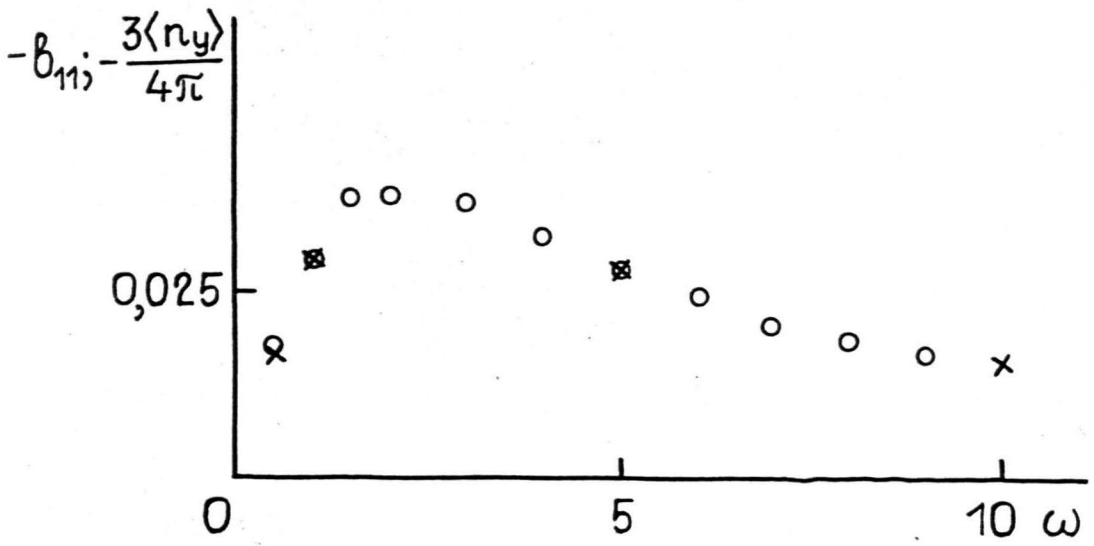


Рис. 6.2.8. Сопоставление результатов статистического моделирования намагничивания в течении со сдвигом (кружки) с табличными данными работы [71] (крестики). Параметр Ланжевена $\xi = 1$.

Таким образом сопоставление с имеющимися численными данными работы [71] показывает хорошую количественную точность рассматриваемого метода статистического моделирования при вычислении статистически средних значений компонент намагниченности.

Проведенное количественное сопоставление показывает, что имеющее место на рис. 6.2.7 отклонение теоретических зависимостей (6.2.5) от данных численного эксперимента с возрастанием $\tau_B \Omega_0$ является значимым.

Оно обусловлено тем, что линейные релаксационные уравнения (6.1.4) применимы, когда отклонение эффективного поля \vec{H}_z от напряженности внешнего поля \vec{H} незначительно, т.е. малых $\tau_B \Omega_0$. Во всей рассмотренной области значений параметров данные численных экспериментов на рис. 6.2.7 хорошо описываются соотношениями, вытекающими из нелинейных релаксационных уравнений (6.1.5), (6.1.7), которые в работе [54] в рамках приближения эффективного поля получены при произвольном соотношении \vec{H}_z и \vec{H} . На рис. 6.2.7б они показаны пунктирными линиями.

Критическим, как следует из раздела 6.1, для выбора в пользу модели (6.1.1) или (6.1.5) является наличие гистерезиса в зависимости намагниченности от угловой скорости гидродинамического вихря. Этот вопрос может быть исследован на численном эксперименте.

Уравнения (6.1.1) в стационарном случае при наличии гидродинамического вихря $\vec{\Omega}_0 = \Omega_0 \vec{e}_x$ и поля $\vec{H} = H \vec{e}_z$ дают

$$\tau_B \Omega_0 = \sqrt{(1 + \xi \langle n_z \rangle / 2)^2 ((L(\xi) - \langle n_z \rangle) / \langle n_z \rangle)} = F(\langle n_z \rangle); \quad (6.2.6)$$

$$\langle n_y \rangle = -\tau_B \Omega_0 \langle n_z \rangle / (1 + \xi \langle n_z \rangle / 2).$$

Математически условие возникновения гистерезиса можно выразить в виде условия появления точки перегиба у первой из указанных зависимостей (6.2.6). Условия $F'(\langle n_z \rangle) = F''(\langle n_z \rangle) = 0$ для крити-

ческих значений напряженности поля ξ_* и угловой скорости вращающегося поля $(\tau_B \Omega_0)_*$ дает полученные в работе [170] значения $\xi_* = 17$ и $(\tau_B \Omega_0)_* = 5,2$. Для компонент намагниченности при этом $\langle n_z \rangle_* = 0,24$ и $|\langle n_y \rangle|_* = 0,41$.

Соответственно линейные уравнения (6.1.4) для намагниченности в поле гидродинамического вихря дают

$$\tau_B \Omega_0 = \sqrt{(\langle n_z \rangle_p - \langle n_z \rangle) / \langle n_z \rangle / (\tau_{||} / \tau_B) / (\tau_{\perp} / \tau_B)}; \quad (6.2.7)$$

$$\langle n_y \rangle = -\frac{\tau_{\perp}}{\tau_B} \tau_B \Omega_0 \langle n_z \rangle.$$

На рис. 6.2.9 показаны полученные на численных экспериментах путем усреднения вдоль случайной траектории диполя в ориентационном пространстве компоненты намагниченности $\langle n_y \rangle$ и $\langle n_z \rangle$ в зависимости от интенсивности гидродинамического вихря при значении параметра Ланжевена равном 20, которое больше критического значения $\xi_* = 17$ существования гистерезиса в модели (6.1.1). На этом же рисунке соответственно непрерывными и штриховыми линиями показаны зависимости (6.2.6) и (6.2.7). Видно, что численный эксперимент не подтверждает наличие гистерезиса в зависимости намагниченности от угловой скорости гидродинамического вихря. Линейные уравнения (6.1.4), как и следовало ожидать, также не позволяют описать данные численных экспериментов при больших $\tau_B \Omega_0$, т.е. в области сильной неравновесности состояний.

Нелинейные уравнения (6.1.5), (6.1.7) для определения намагниченности $\vec{M} / nm = (0, L(\xi_3) \sin \vartheta, L(\xi_3) \cos \vartheta)$ в поле гидродинамического вихря дают ($\xi = mH / kT$, а ϑ - угол между намагниченностью и вектором напряженности поля)

$$\cos \vartheta = \xi_3 / \xi; \quad \frac{2\tau_B \Omega_0}{\xi} = \left(\frac{1}{L(\xi_3)} - \frac{1}{\xi_3} \right) \sin \vartheta. \quad (6.2.8)$$

Определенные на основе соотношений (6.2.8) компоненты намагниченности показаны на рис. 6.2.9 пунктирными линиями.

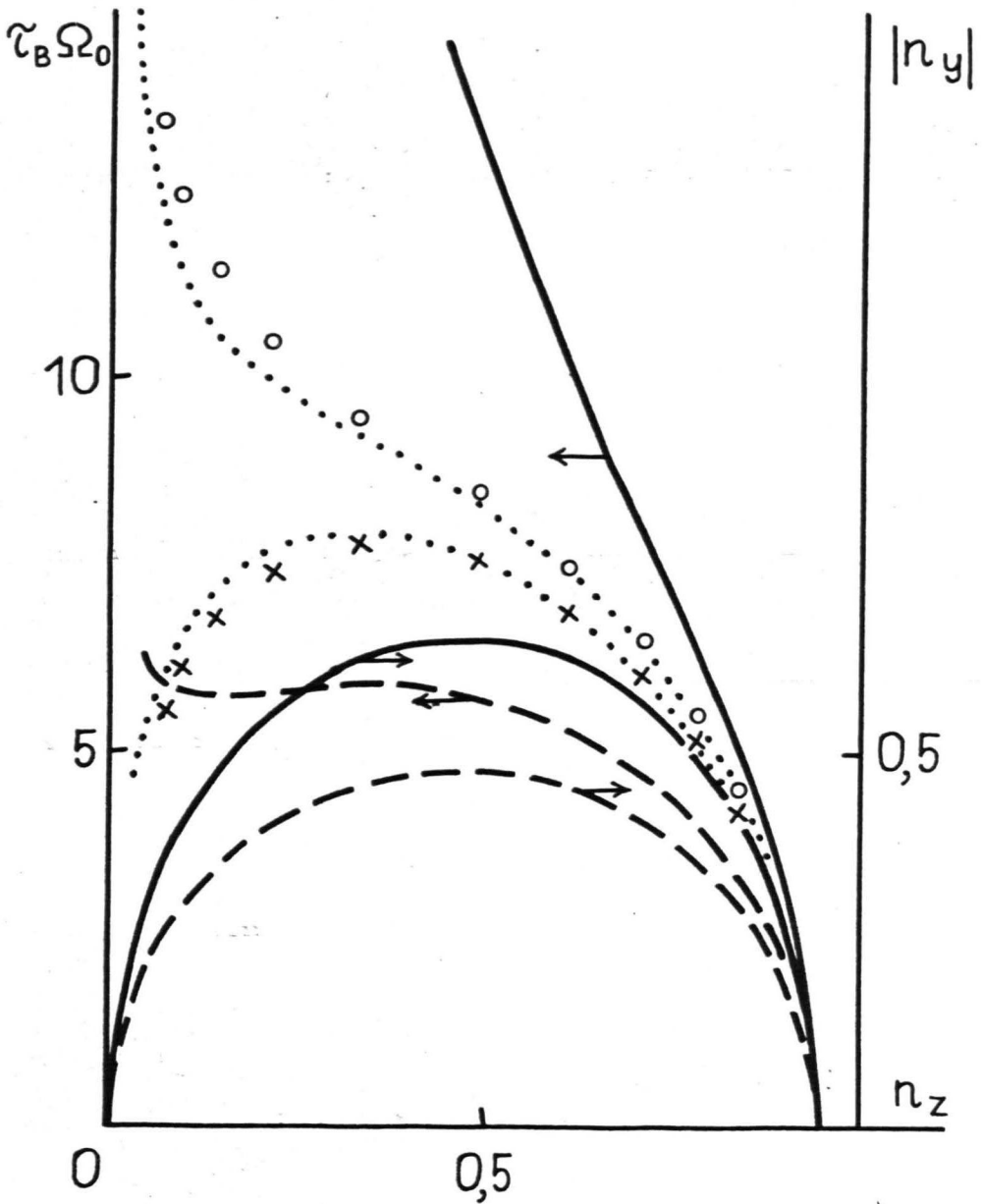


Рис. 6.2.9. Намагничивание коллоида ферромагнетика в течении со сдвигом. Параметр Ланжевена $\xi = 20$. Непрерывные линии - теоретические зависимости (6.2.6), прерывистые - теоретические зависимости (6.2.7). Пунктирные - теоретические зависимости (6.2.8). Временной шаг - $5 \cdot 10^{-4}$, длина интервала усреднения $N = 2 \cdot 10^5$. Крестики - данные численного эксперимента для $\langle n_y \rangle$, кружки - $\langle n_z \rangle$.

Рис. 6.2.9, как и рис. 6.2.7, показывает, что релаксационные уравнения (6.1.5) наиболее адекватно из в настоящее время имевшихся описывают данные численных экспериментов. Тем не менее необходимо отметить наличие расхождения при значениях параметра $2\tau_B \Omega_0 / \xi > 1$. Данный факт имеет место и при других значениях параметра Ланжевена внешнего магнитного поля, как это показано для случая $\xi = 15$ на рис. 6.2.10. Отмеченное расхождение в указанной области значений параметра $2\tau_B \Omega_0 / \xi$ может быть связано с проявлением особенностей в характере броуновского движения диполя.

Это заключение подтверждается анализом временных корреляционных функций магнитного момента частицы, полученных в данных численных экспериментах. Если определить времена релаксации компонент намагниченности, аналогично как и выше для случая покоящейся среды, путем проведения методом наименьших квадратов прямой в полулогарифмических координатах, отображающих временную зависимость корреляционных функций, то для последних в случае $\xi = 20$ получим результаты, показанные на рис. 6.2.11. Штриховой линией на рис. 6.2.11 показана теоретическая зависимость времени релаксации продольной гидродинамическому вихрю компоненты малых возмущений намагниченности в сдвиговом потоке от параметра Ланжевена эффективного поля $\xi_{\text{э}}$, который определяется согласно зависимостям (6.2.8).

Уравнения (6.1.5) для данной компоненты малых возмущений намагниченности дают $\frac{dm'_x}{dt} = -\frac{1}{\tau_x} m'_x$,
 где $\tau_x = 2\tau_B L(\xi_{\text{э}}) / (\xi_{\text{э}} - L(\xi_{\text{э}}))$. (6.2.9)

Можно отметить одинаковый вид формулы (6.2.9) с формулой, определяющей время релаксации поперечных полю компонент намагниченности для случая покоящейся среды. При этом формула (6.2.9) позволяет описать зависимость времени релаксации продольной гид-

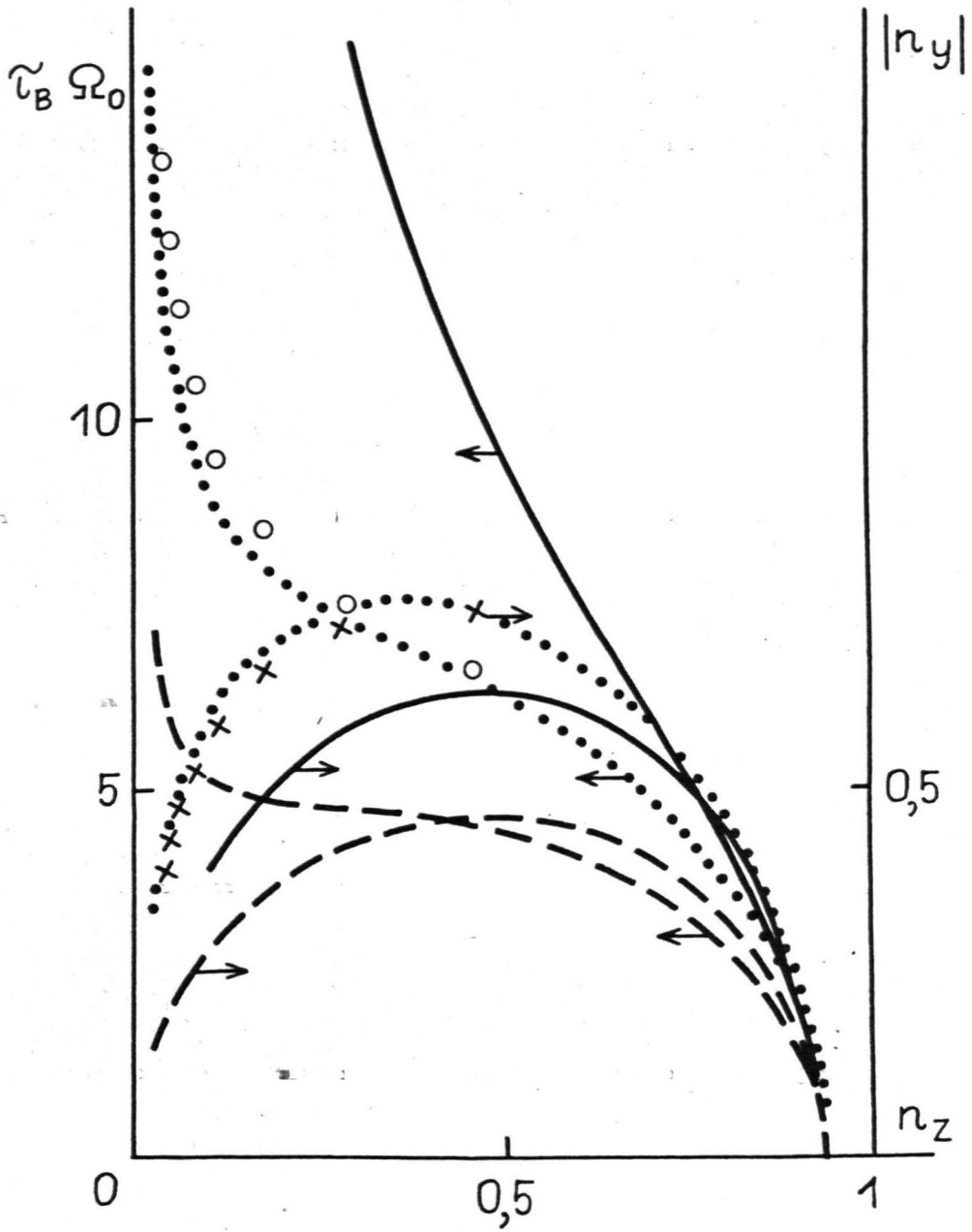


Рис. 6.2.10. Намагничивание коллоида ферромагнетика в течении со сдвигом. Параметр Ланжевена $\zeta = 15$. Обозначения те же, что на рис. 6.2.9.

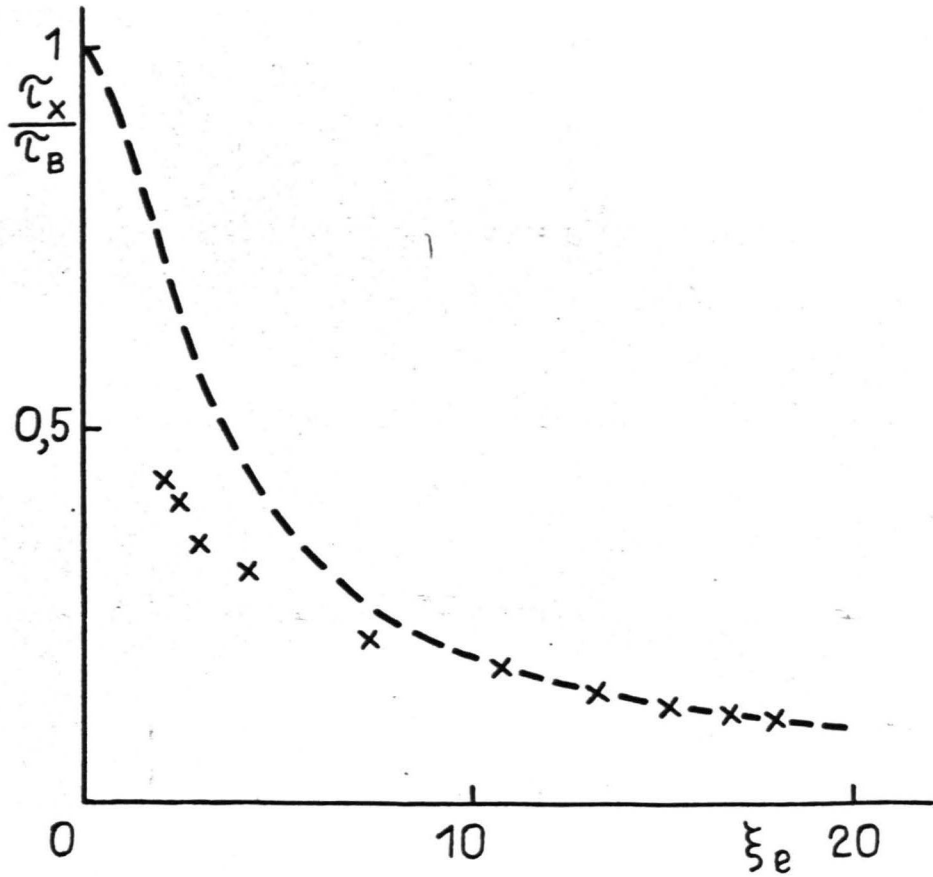


Рис. 6.2.11. Время релаксации продольной гидродинамическому вихрю компоненты намагниченности. $\xi = 20$.

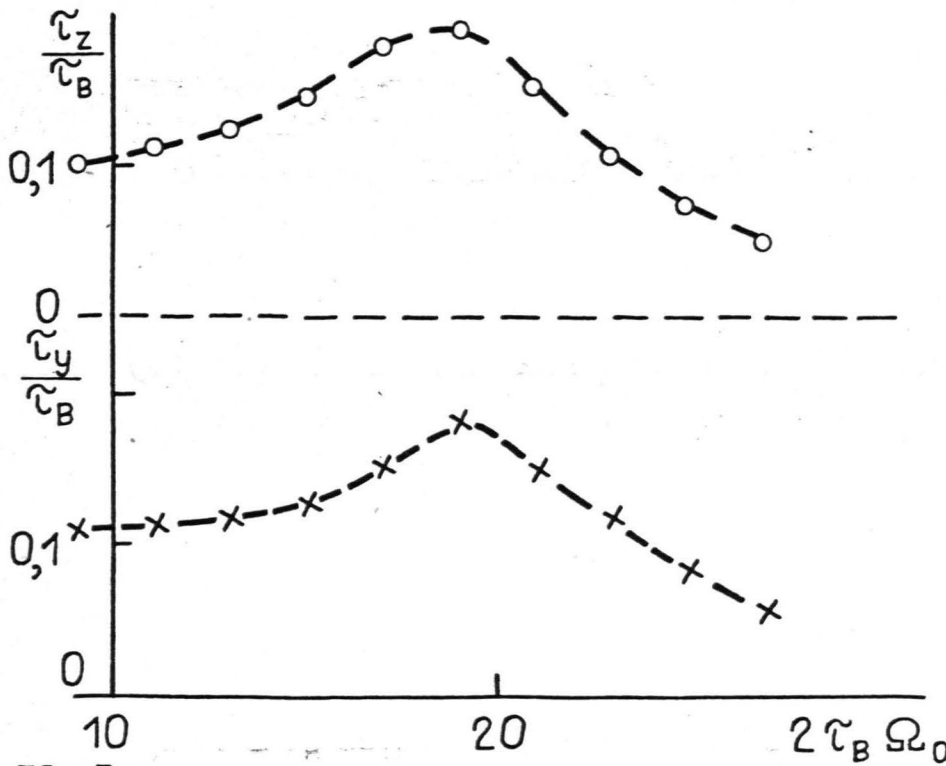


Рис. 6.2.12. Времена релаксации поперечных гидродинамическому вихрю компонент намагниченности. $\xi = 20$.

родинамическому вихрю компоненты намагниченности от его интенсивности, так как параметр ξ_0 с ростом $\tau_B \Omega_0$ уменьшается (гидродинамическое размагничивание).

Расхождение данных численного эксперимента с теоретической зависимостью (6.2.9), имеющее место на рис. 6.2.II, свидетельствует о качественном изменении характера броуновского движения диполя при $2\tau_B \Omega_0 / \xi > 1$, так как последнее уже не описывается зависимостями, следующими из рассмотрения малых возмущений стационарного состояния намагниченности.

На проявление особенностей броуновского движения в названной области значений параметра $2\tau_B \Omega_0 / \xi$ указывают и максимумы зависимостей времен релаксации Y и Z компонент намагниченности от $\tau_B \Omega_0$, имеющие место при $2\tau_B \Omega_0 / \xi \sim 1$. Наличие подобных особенностей следует ожидать на основе результатов работы [69], в которой при отсутствии броуновского движения для случая, когда направление поля составляет прямой угол с направлением вектора угловой скорости гидродинамического вихря, показано, что устойчивое стационарное состояние намагниченности существует лишь при $\frac{2\tau_B \Omega_0}{\xi} = \frac{\alpha \Omega_0}{mH} < 1$. При $\frac{\alpha \Omega_0}{mH} > 1$ возникают периодические движения диполя. Вследствие этого при $\frac{2\tau_B \Omega_0}{\xi} \sim 1$

следует ожидать качественную перестройку характера броуновского движения диполя от малых флуктуаций вблизи устойчивого состояния равновесия к случайным блужданиям по всей сфере направлений. При этом полученные на численных экспериментах максимумы времен релаксации намагниченности (рис. 6.2.I2) при $\frac{2\tau_B \Omega_0}{\xi} \sim 1$ находятся в согласии с тем, что период периодического движения диполя в момент его возникновения является большим.

Для определения приведенных на рис. 6.2.II-I2 времен релаксации компонент намагниченности в течении со сдвигом были использованы 30 равномерно расположенных в интервале $[0; 0,15\tau_B]$

точек временной зависимости корреляционных функций при $\xi = 20$.

В отношении результатов, показанных на рис. 6.2.12, следует отметить некоторую формальность их определения, связанную с тем, что коэффициент корреляции при определении коэффициента линейной регрессии данных численного эксперимента, отличаясь от -1 в третьем-четвертом знаке, при $2\tau_B \Omega_0 > 19$ начинает уменьшаться по абсолютной величине, достигая значения $0,9$ при $2\tau_B \Omega_0 = 27$. Это указывает, в согласии со сделанным выше замечанием относительно результатов работы [69], на переход к более сложному характеру броуновского движения диполя.

Таким образом, данные проведенных численных экспериментов показывают, что нелинейные релаксационные уравнения (6.1.5) из имевшихся в настоящее время наиболее адекватно соответствуют действительности. В области слабой неравновесности, т.е. малых $\tau_B \Omega_0$ применимы линейные релаксационные уравнения (6.1.4). В то же время нелинейное релаксационное уравнение намагниченности (6.1.1), получаемое в рамках моделей с внутренним моментом количества движения [51], [52], [61] приводит к выводам, неверным даже качественно. Имеющее место расхождение данных численных экспериментов с выводами модели с намагниченностью в качестве внутреннего параметра состояния, получаемой в рамках приближения эффективного поля [54], показывает необходимость уточнения названной модели путем более полного описания ориентационного состояния.

6.3. Численное моделирование реологии разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц в магнитном поле

Реология разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц является предметом многих работ в области механики суспензий [75]. Кривые течения данного класса материалов могут быть теоретически рассчитаны в результате решения уравнения Фоккера-Планка для функции распределения частиц в ориентационном пространстве с учетом ориентирующего действия течения со сдвигом. Аналитические решения данной задачи известны лишь для некоторых предельных ситуаций [202]. В работе [203] дается построение интерполяционных формул между случаями сильного и слабого броуновского движения.

Модель разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц привлекалась и для описания реологии коллоидов анизотропных частиц ферромагнетика в магнитном поле [55], [65], [76]. Необходимость исследования подобного класса материалов возникает в связи с описанием особенностей реологических свойств некоторых МЖ [41], показывающих наличие анизотропии вязкости.

В указанных теоретических работах рассмотрение суспензии эллипсоидальных частиц ферромагнетика ограничивается предельным случаем сильного броуновского движения, когда характерное время броуновской ориентационной релаксации гораздо меньше характерного времени вращения анизотропной частицы в сдвиговом потоке. Полученные при этом результаты дают информацию о начальной ньютоновской вязкости, а особенности реологического поведения суспензии анизотропных частиц ферромагнетика в поле остаются неисследованными. Решение этих вопросов должно дать информацию о физических процессах перестройки структуры, имеющих место при движении магнитного коллоида в поле.

В настоящем разделе излагается применение метода броуновской динамики к определению реологического поведения коллоида ферромагнетика в поле. Рассматриваемые результаты получены нами в работе [211]. Необходимые для этого соотношения, определяющие напряжения в движущейся суспензии эллипсоидальных частиц, приводятся в приложении 3.

Аналитические выражения эффективной вязкости суспензии эллипсоидальных частиц при отсутствии поля известны лишь в предельных случаях сильного и слабого броуновского движения [75], [206]. В промежуточной области имеют место степенные зависимости вязкости и нормальных напряжений от скорости сдвига. Кроме того, при отсутствии поля составлены подробные таблицы характеристической вязкости от скорости сдвига и отношения полуосей эллипсоида a/b [207]. Эти результаты играют роль тестовых для нижеследующих численных экспериментов.

В случае ориентации вектора напряженности поля поперек скорости суспензии соотношение (П.3.6), с учетом (П.3.7) дает следующее выражение для характеристической вязкости суспензии

$$\begin{aligned} (\zeta_{yz} = \tilde{\eta} \dot{\gamma}) \\ \frac{\tilde{\eta} - \eta_0}{\eta_0 \dot{\gamma}} = (\tilde{\alpha} + (\alpha - 2\lambda\beta) \langle n_y^2 n_z^2 \rangle + \frac{1}{2} (\zeta - \beta(1-\lambda)) \langle n_y^2 \rangle + \\ + \frac{1}{2} (\zeta + \beta(1+\lambda)) \langle n_z^2 \rangle) + \eta_{вр} \end{aligned} \quad (6.3.I)$$

где $\eta_{вр}$ - характеристическая вращательная вязкость суспензии, определяемая действием антисимметричной части тензора вязких напряжений, равная $\eta_{вр} = \beta \xi \langle n_y \rangle / 2\omega$, где $\omega = (2D)^{-1} \dot{\gamma}$ - безразмерный параметр скорости сдвига, определяемый отношением характерного броуновского $\tau_B = 1/2D$ и гидродинамического времен $1/\dot{\gamma}$. Для случая суспензии сферических частиц приращение вязкости в поле определяется лишь одной вращательной вязкостью $\eta_{вр}$.

Разности нормальных напряжений в этом случае выражаются

следующим образом

$$\dot{\omega}_{yy} - \dot{\omega}_{xx} = 4\eta_0\varphi DF_1\omega^2; \quad (6.3.2)$$

$$\dot{\omega}_{yy} - \dot{\omega}_{zz} = 4\eta_0\varphi DF_3\omega^2,$$

где

$$F_1 = ((\alpha - 2\lambda\beta)\langle(n_y^2 - n_x^2)n_y n_z\rangle + \langle n_y n_z\rangle(\zeta + \beta(1 + \lambda))) / 2\omega;$$

$$F_3 = ((\alpha - 2\lambda\beta)\langle(n_y^2 - n_z^2)n_y n_z\rangle + 2\beta\langle n_y n_z\rangle) / 2\omega. \quad (6.3.3)$$

Выражения (6.3.1), (6.3.3) показывают, что реологическое поведение суспензии при данной ориентации поля определяется следующими моментами директора $\langle n_y \rangle, \langle n_y n_z \rangle, \langle n_y^3 n_z \rangle, \langle n_z^3 n_y \rangle, \langle n_y^2 n_z^2 \rangle, \langle n_y^2 \rangle, \langle n_z^2 \rangle$. Зависимость последних от скорости сдвига и определяет ее реологические свойства. Вычисление этих моментов возможно на основе метода броуновской динамики.

Стохастическое уравнение вращательного движения Ланжевена эллипсоидальной частицы ферромагнетика в сдвиговом потоке при наличии поля (П.3.3), аналогично как в предыдущем разделе, для проекций изменения директора $\Delta \vec{n}$ на временном шаге $\Delta \tilde{t}$ на орты подвижной системы координат, обезразмеривая время по характерному масштабу α/kT дает

$$\Delta n_1 = -\omega \Delta t n_x^0 n_z^0 (1 + \lambda) / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \sqrt{2\Delta t} \gamma_2; \quad (6.3.4)$$

$$\Delta n_2 = -\xi \Delta t \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \omega \Delta t (n_y^0 - \lambda n_y^0 (1 - 2n_z^{02})) / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \sqrt{2\Delta t} \gamma_1,$$

здесь γ_1, γ_2 - независимые нормально распределенные случайные величины со средним значением нуль и дисперсией 1.

Компоненты вектора \vec{n} в неподвижной системе координат в конце временного шага выражаются через компоненты директора \vec{n}_0 в его начале согласно соотношениям (6.2.3).

На основе соотношений (6.3.4) и (6.2.3), как описано в предыдущем разделе, происходит генерация случайной траектории эл-

липсоидальной частицы ферромагнетика в сдвиговом потоке при наличии поля. Статистически средние моменты компонент директора согласно эргодической гипотезе находятся в результате их усреднения вдоль случайной траектории директора в ориентационном пространстве по формуле $\langle a \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a(t_i)$, N - число временных шагов варьировалось в пределах $2 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^5$. Величина временного шага варьировалась в зависимости от значения ω и составляла 10^{-2} при $\omega \leq 1$ и $10^{-2}/\omega$ при $\omega \geq 1$.

На рис. 6.3.1 представлена полученная на численных экспериментах зависимость характеристической вязкости $\tilde{\eta} = \tilde{\eta} - \tilde{\alpha}$ от скорости сдвига при отсутствии поля. Для промежуточной области скоростей сдвига данные численных экспериментов хорошо ложатся на зависимость $\tilde{\eta} \sim \omega^{-1/3}$, теоретически полученную в работе [208]. Так, проведение методом наименьших квадратов прямой в логарифмических координатах по 8 точкам численного эксперимента в интервале значений $\omega \in [10; 25]$ для коэффициента наклона дает значение $-0,38$ против ожидаемого теоретического $-0,33$ при коэффициенте корреляции практически равном 1.

Более полным образом точность рассматриваемой численной модели суспензии эллипсоидальных частиц может быть установлена путем сопоставления рассчитанных значений характеристической вязкости с подробными ее таблицами при отсутствии поля [207]. Это сопоставление производится на рис. 6.3.2, из которого видно, что результаты статистического моделирования хорошо согласуются с табличными данными. Наибольшее расхождение не превышает 2%.

Представляет интерес также сопоставление показателя степенного закона вязкости в промежуточной области скоростей сдвига, найденного в численных экспериментах, с показателем, вычисленным согласно табличным данным [207]. Расчет по табличным данным в интервале значений $\omega \in [10; 25]$ методом наименьших квадратов

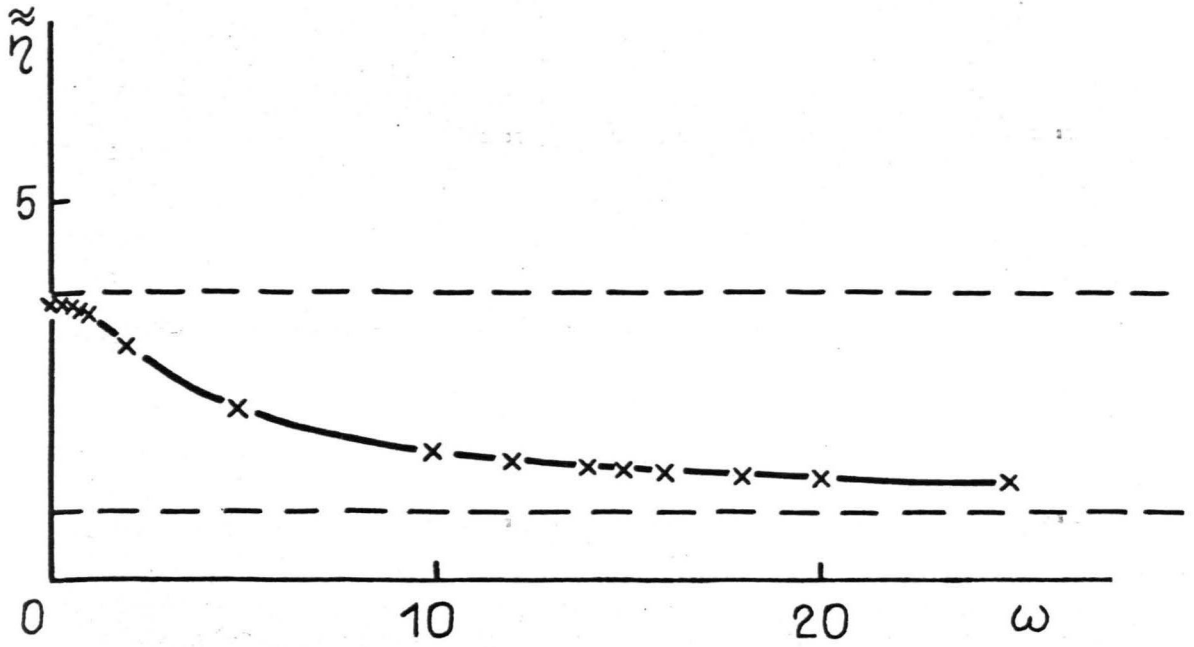


Рис. 6.3.I. Характеристическая вязкость суспензии эллипсоидальных частиц с отношением полуосей $a/b = 5$ при отсутствии поля. Крестики - данные численных экспериментов, прерывистыми линиями показаны значения характеристической вязкости в предельных случаях сильного (3,77) и слабого (0,88) броуновского движения [75] , [206].

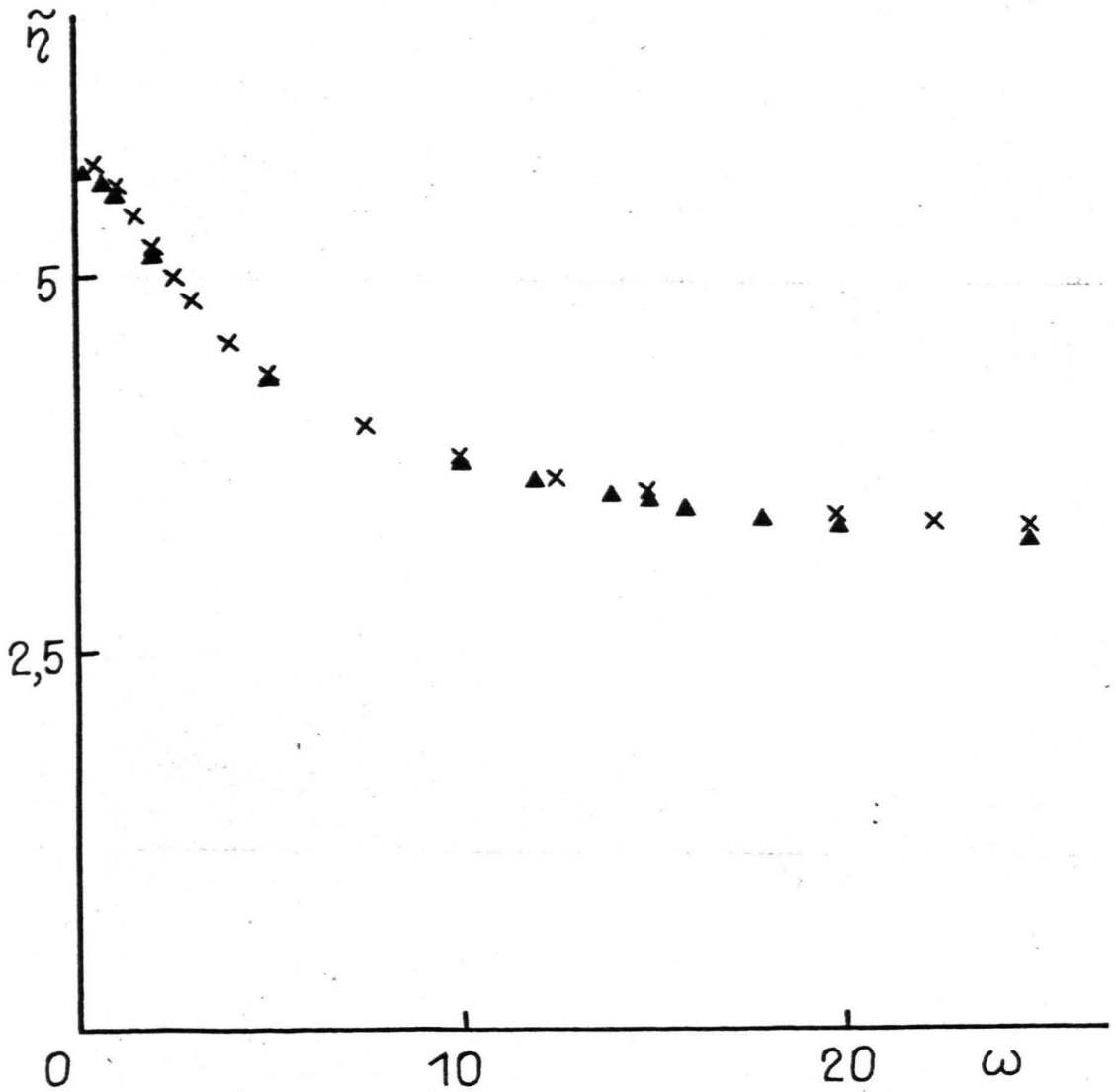


Рис. 6.3.2. Сопоставление данных численного эксперимента (треугольники) с табличными данными характеристической вязкости $\tilde{\eta} = \tilde{\eta} + \tilde{\alpha}$ работы [207] (крестики) суспензии эллипсоидальных частиц при отсутствии магнитного поля ($a / b = 5$).

дает $-0,344$ против найденного из численных экспериментов $-0,38$, что соответствует относительной ошибке 9 %.

Разброс результатов статистического моделирования характеристической вязкости в зависимости от интервала усреднения имеет порядок указанной выше величины 2 %. Это иллюстрируется рис. 6.3.3, где показаны значения характеристической вязкости в зависимости от длины интервала статистического усреднения N . Проводились также дополнительные численные эксперименты с целью выяснения ошибки вычислений, связанных с дискретностью временного шага, которые показывают, что результаты расчета с временными шагами $10^{-2}/\omega$ и $5 \cdot 10^{-3}/\omega$ при равном полном времени усреднения в случаях $\xi = 1$ и $\xi = 5$ и $\xi = 2$ и $\omega = 2$ различаются в пределах указанного выше расхождения порядка 2 %. При этом конкретные значения расхождений следующие - $\Delta \tilde{\eta} / \tilde{\eta} = 0,6 \%$, $\Delta F_1 / F_1 = 1 \%$ и $\Delta F_3 / F_3 = 1,3 \%$ при $\xi = 1$ и $\omega = 5$ и $1,3 \%$, $5,4 \%$, $5,3 \%$ при $\xi = 2$ и $\omega = 2$ соответственно.

С имеющимися табличными данными могут быть сопоставлены также полученные в статистическом моделировании зависимости нормальных напряжений от скорости сдвига. На рис. 6.3.4 в зависимости от скорости сдвига показаны табличные данные разности нормальных напряжений $\sigma_{yy} - \sigma_{xx}$, приведенные в работе [209] и данные численных экспериментов. Видно, что качественное и количественное согласие результатов с табличными данными работы [209] удовлетворительное. Отметим, что, по-видимому, расхождение, достигающее значения порядка 10 %, обусловлено не только ошибками статистического моделирования, но и также возможной неточностью табличных данных для нормальных напряжений, так как последние получены не в результате численного решения уравнения Фоккера-Планка, а в результате пересчета данных по сдвиговому

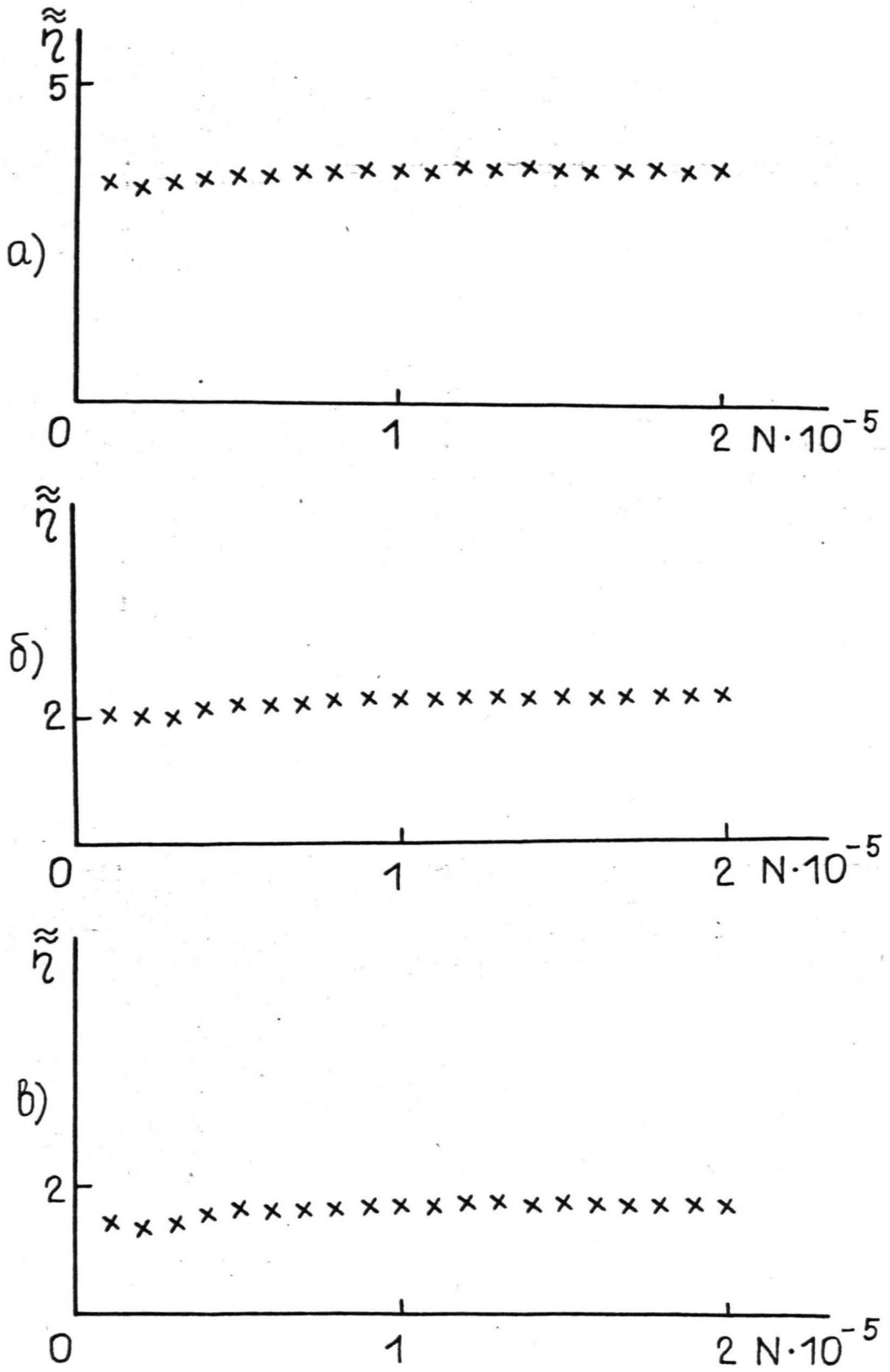


Рис. 6.3.3. Зависимость характеристической вязкости при
отсутствии поля от длины интервала усреднения
 N . а - $\omega = 0,2$; б - $\omega = 5$; в - $\omega = 10$.

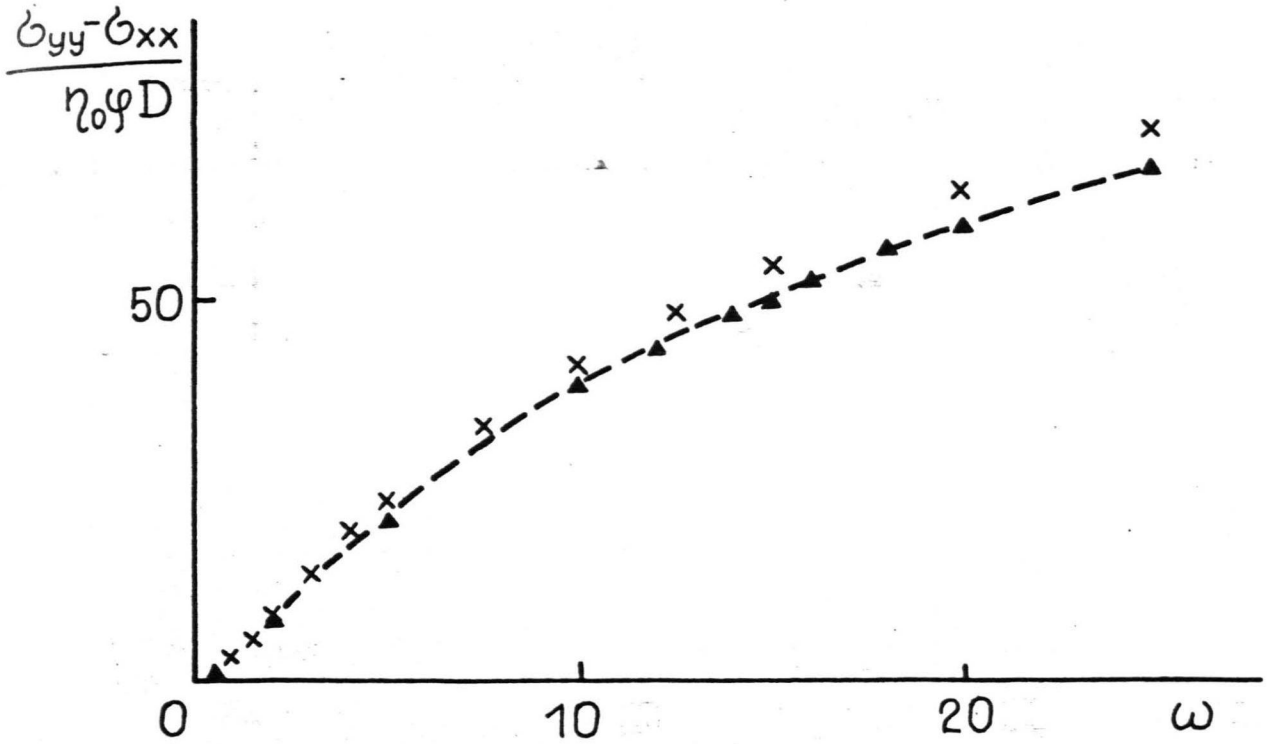


Рис. 6.3.4. Сопоставление данных численных экспериментов (треугольники) и табличных данных работы [209] (крестики) зависимости разности нормальных напряжений суспензии эллипсоидальных частиц ($a / b = 5$) от скорости сдвига при отсутствии магнитного поля.

двулучепреломлению работы [210]. На это указывает лучшее согласие данных численного моделирования с более поздними и точными данными работы [207] по зависимости вязкости от скорости сдвига.

Полученные на численных экспериментах зависимости коэффициентов F_1 и F_3 от безразмерной скорости сдвига показаны на рис. 6.3.5. Для промежуточной области значений скоростей сдвига в работе [208] теоретически получены степенные зависимости нормальных напряжений вида $\omega^{2/3}$. Проведение в логарифмических координатах по 8 точкам численного эксперимента, лежащих в интервале значений $\omega \in [10; 25]$, методом наименьших квадратов прямой для коэффициентов наклона зависимостей первой и третьей разности нормальных напряжений от скорости сдвига дает соответственно 0,63 и 0,61 при коэффициенте корреляции практически равном 1 против теоретического значения 0,66.

Таким образом видно, что рассматриваемая численная модель позволяет получать достаточно достоверные данные относительно реологического поведения разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц.

Особенности реологического поведения суспензии эллипсоидальных частиц в поле в настоящее время изучены слабо. Известные значения предельной характеристической вязкости в поле для случая сильного броуновского движения приведены в работе [75]. Таблиц, подобных [207], в этом случае не существует.

На рис. 6.3.6 показаны полученные в численных экспериментах при разных значениях напряженности поля зависимости характеристической вязкости от скорости сдвига при поперечной в его плоскости ориентации вектора напряженности поля относительно скорости суспензии. Из рис. 6.3.6 видно, что в пределах малых ско-

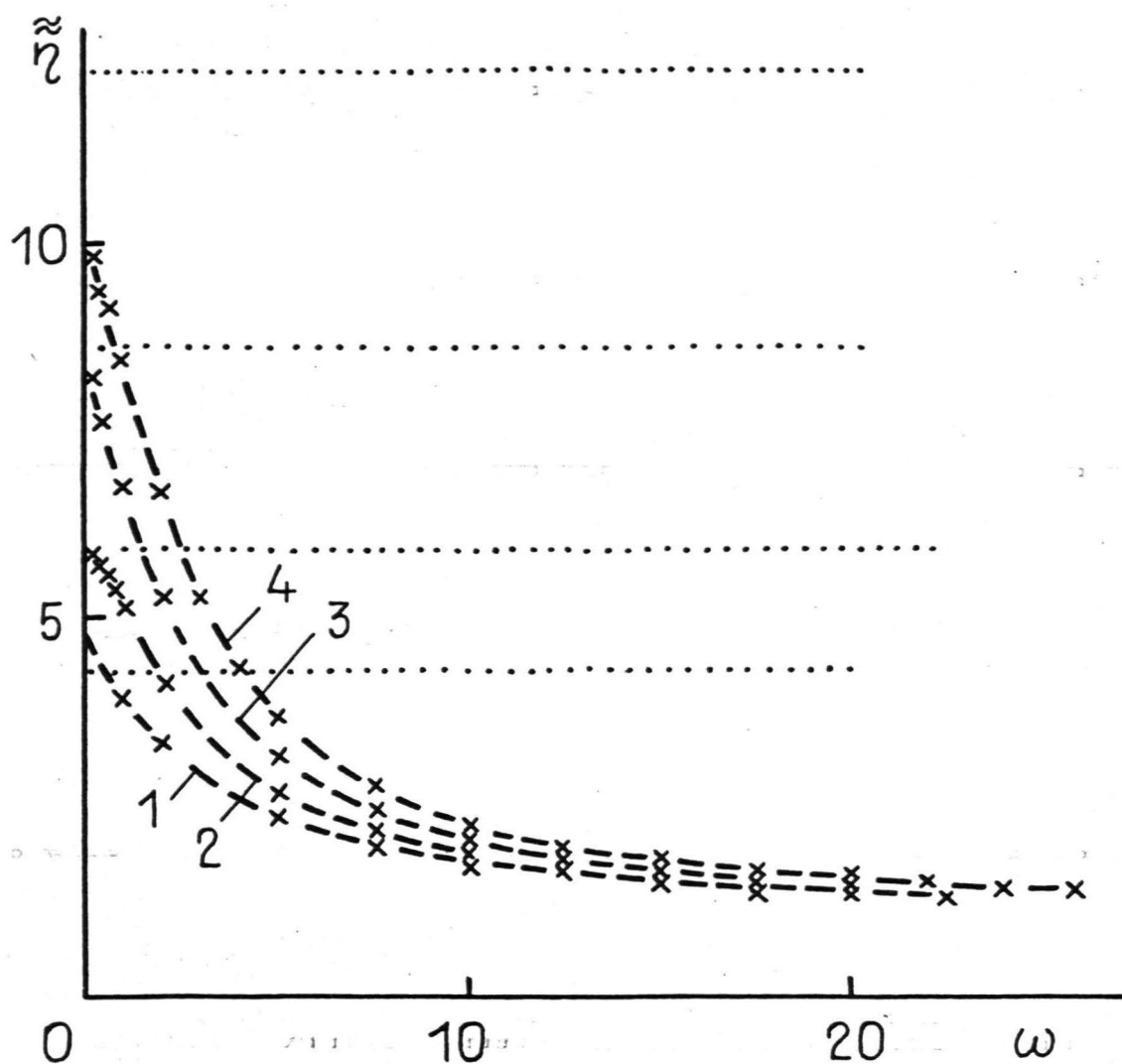


Рис. 6.3.6. Зависимость характеристической вязкости от скорости сдвига в магнитном поле, параллельном градиенту скорости. Пунктирные линии - теоретические значения характеристической вязкости при малых скоростях сдвига $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0 + 2,14 \xi^2$ [75] (1 - $\xi = 0,5$; 2 - $\xi = 1$; 3 - $\xi = 1,5$; 4 - $\xi = 2$).

ростей сдвига зависимость характеристической вязкости от напряженности поля при $\xi \leq 1$ хорошо согласуется с известным теоретическим соотношением $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0 + 2,14 \xi^2$, приведенным в работе [75]. При $\xi = 2$ намечается отклонение от квадратичной зависимости приращения начальной вязкости в поле от его напряженности, что связано с переходом к области ее насыщения.

Рис. 6.3.6 показывает, что реологическое поведение суспензии с увеличением поля выражено более резко. В качестве иллюстрации этого на рис. 6.3.7 показана зависимость показателя α степенного закона убывания характеристической вязкости $\tilde{\eta} \sim \omega^{-\alpha}$ в промежуточной области скоростей сдвига ($\omega > 7,5$) от напряженности поля, полученная, как описано выше, методом наименьших квадратов.

В связи с результатами, показанными на рис. 6.3.7, отметим, что факт более резкого проявления реологических свойств МЖ в поле экспериментально установлен в работе [41]. Там для показателя убывания вязкости МЖ в поле со скоростью сдвига получено значение $-0,5$, что близко к приведенным на рис. 6.3.7. Это показывает возможность интерпретации реологических свойств разбавленных МЖ на основе модели в виде разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц. Заметим, что поле может изменять характерное отношение полуосей эллипсоидальных частиц вследствие агрегирования. С этим может быть связано наблюдаемое на эксперименте более сильное, чем в рассматриваемых здесь численных экспериментах, отличие реологического поведения МЖ в поле и без него.

Зависимости коэффициентов нормальных напряжений F_1 и F_3 от скорости сдвига при разных значениях напряженности поля представлены на рис. 6.3.8. Видно, что наложение поля приводит к росту разности нормальных напряжений. Экспериментальных подт-

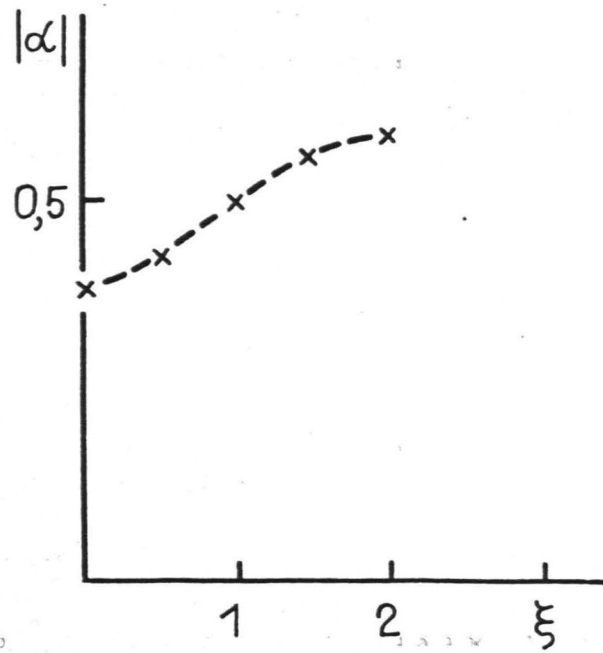


Рис. 6.3.7. Зависимость показателя α от напряженности магнитного поля. Вектор поля параллелен градиенту скорости.

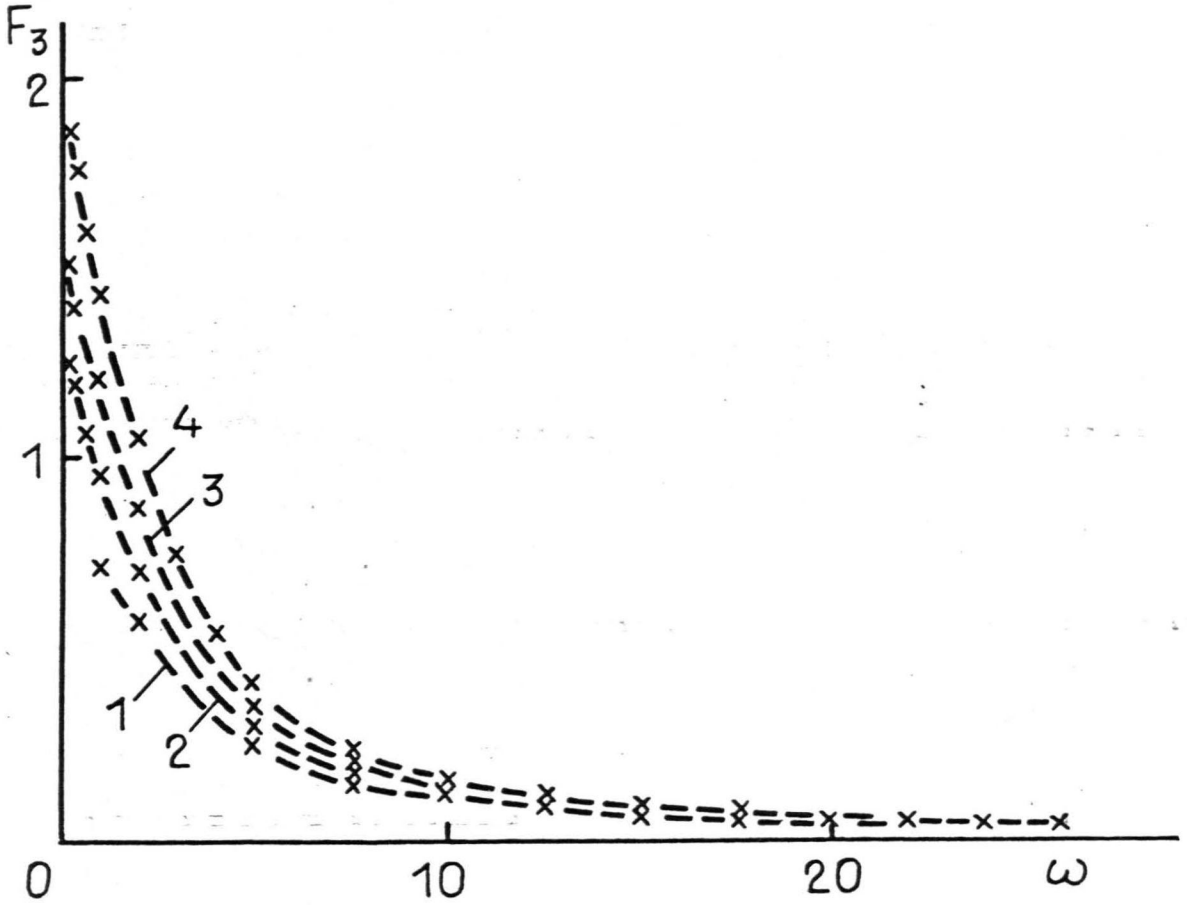
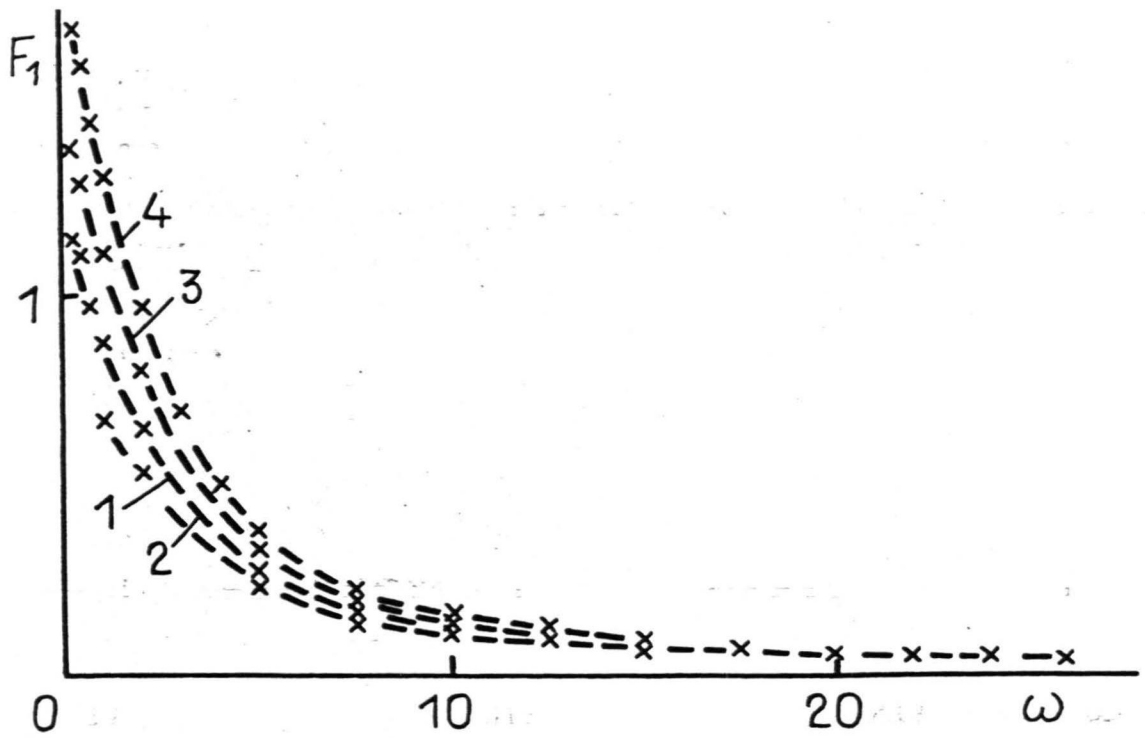


Рис. 6.3.8. Зависимости коэффициентов нормальных напряжений от скорости сдвига в магнитном поле, параллельном градиенту скорости.
1 - $\xi = 0,5$; 2 - $\xi = 1$; 3 - $\xi = 1,5$; 4 - $\xi = 2$.

верждений подобного явления в настоящее время не имеется.

Характер влияния поля на разности нормальных напряжений в промежуточной области скоростей сдвига иллюстрируется рис. 6.3.9, на котором показаны значения показателей степенного роста разности нормальных напряжений с увеличением скорости сдвига в зависимости от напряженности поля. Эти значения, как и выше, получены в результате проведения методом наименьших квадратов прямых в логарифмической системе координат в области значений $\omega > 7,5$. Из рис. 6.3.9 видно, что с ростом поля рост разности нормальных напряжений с увеличением скорости сдвига замедляется.

Характерной особенностью реологического поведения суспензии эллипсоидальных частиц ферромагнетика в поле является анизотропия ее вязкости. Последнее является удобным критерием проверки структурирования МЖ на практике. Экспериментально анизотропия вязкости коллоидов ферромагнетиков в поле обнаружена в работе [41].

Это показывает, что представляет интерес моделирование анизотропии вязкости суспензии эллипсоидальных частиц в поле и на численном эксперименте.

В случае движения $\vec{V} = (0, 0, \gamma y)$ в направлении поля для характеристической вязкости суспензии имеет место формула

$$\frac{\tilde{\eta} - \eta_0}{\eta_0 \varphi} = (\tilde{\alpha} + (\alpha - 2\lambda\beta) \langle n_y^2 n_z^2 \rangle + \frac{1}{2} (\zeta - \beta(1-\lambda)) \langle n_z^2 \rangle + \frac{1}{2} (\zeta + \beta(1+\lambda)) \langle n_y^2 \rangle) + \tilde{\eta}_{\text{вр}},$$

где вращательная вязкость выражается в виде $\tilde{\eta}_{\text{вр}} = -\beta \xi \langle n_y \rangle / 2\omega$.

Для разностей нормальных напряжений в этом случае имеет место $\sigma_{zz} - \sigma_{xx} = 4\eta_0 \varphi D F_1 \omega^2$; $\sigma_{zz} - \sigma_{yy} = 4\eta_0 \varphi D F_3 \omega^2$,

где $F_1 = ((\alpha - 2\lambda\beta) \langle (n_z^2 - n_x^2) n_y n_z \rangle + (\zeta + \beta(1+\lambda)) \langle n_y n_z \rangle) / 2\omega$;

$$F_3 = ((\alpha - 2\lambda\beta) \langle (n_z^2 - n_y^2) n_y n_z \rangle + 2\beta \langle n_y n_z \rangle) / 2\omega.$$

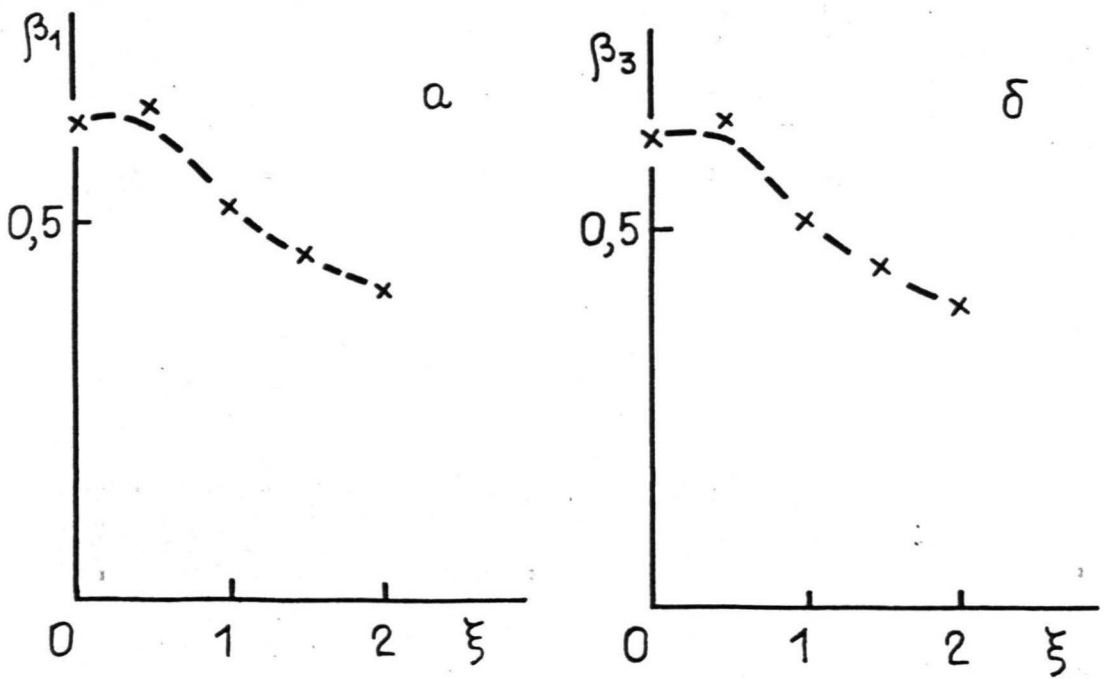


Рис. 6.3.9. Зависимость показателей степенных законов роста нормальных напряжений от напряженности магнитного поля. а - $\sigma_{yy} - \sigma_{xx}$;
б - $\sigma_{yy} - \sigma_{zz}$.

Соотношения (6.3.4) для генерирования случайной траектории анизотропной частицы в этом случае записываются следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta n_1 &= \omega \Delta t (1 - \lambda) n_x^0 n_z^0 / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \sqrt{2 \Delta t} \mu_2 ; \\ \Delta n_2 &= -\xi \Delta t \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} - \omega \Delta t n_y^0 (1 - \lambda (1 - 2 n_z^{02})) / \sqrt{n_x^{02} + n_y^{02}} + \sqrt{2 \Delta t} \mu_1 . \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Необходимые для определения реологических свойств статистически средние произведений компонент директора, как и выше, находятся в результате усреднения вдоль его случайной траектории, генерируемой согласно соотношениям (6.2.3), (6.3.5).

Полученные зависимости характеристической вязкости суспензии от скорости сдвига показаны на рис. 6.3.10. Согласие результатов численного эксперимента с известными предельными теоретическими значениями удовлетворительное. Сопоставление рис. 6.3.6 с рис. 6.3.10 показывает, что приращение вязкости в поле при продольном скорости векторе напряженности поля значительно меньше чем при поперечном. Наглядно это иллюстрируется на рис. 6.3.11, где приведены данные численного эксперимента для указанных ориентаций поля при $\xi = 2$. Отметим также, что анизотропия приращения вязкости в поле, как показывает рис. 6.3.11, сильно зависит от скорости сдвига.

Рис. 6.3.10 и 6.3.11 показывают, что в данном случае менее выраженным является и реологическое поведение суспензии. В качестве иллюстрации этого на рис. 6.3.12 показаны показатели степенного закона убывания характеристической вязкости в промежуточной области скоростей сдвига ($\omega \in [7,5; 20]$).

Коэффициенты F_1 , F_3 разностей нормальных напряжений в зависимости от скорости сдвига показаны на рис. 6.3.13. Из рис. 6.3.13 видно, что наложение поля, продольного скорости суспен-

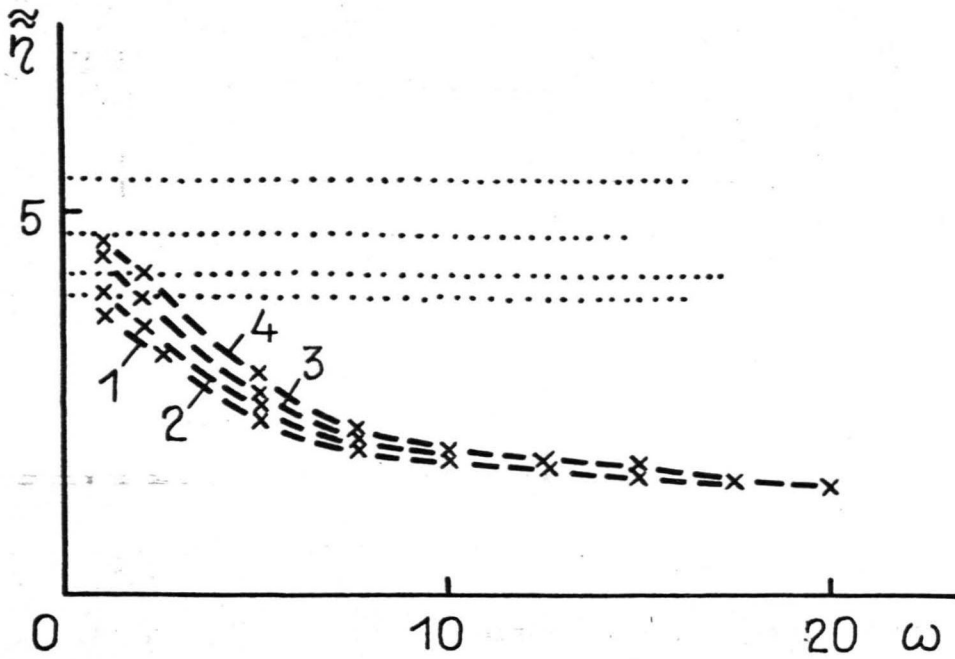


Рис. 6.3.10. Зависимость характеристической вязкости суспензии эллипсоидальных частиц от скорости сдвига в магнитном поле, параллельном вектору скорости. Пунктирные линии - теоретические значения характеристической вязкости при данной ориентации поля в предельном случае малых скоростей сдвига $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}_0 + 0,425 \xi^2$ [75].
 1 - $\xi = 0,5$; 2 - $\xi = 1$; 3 - $\xi = 1,5$; 4 - $\xi = 2$.

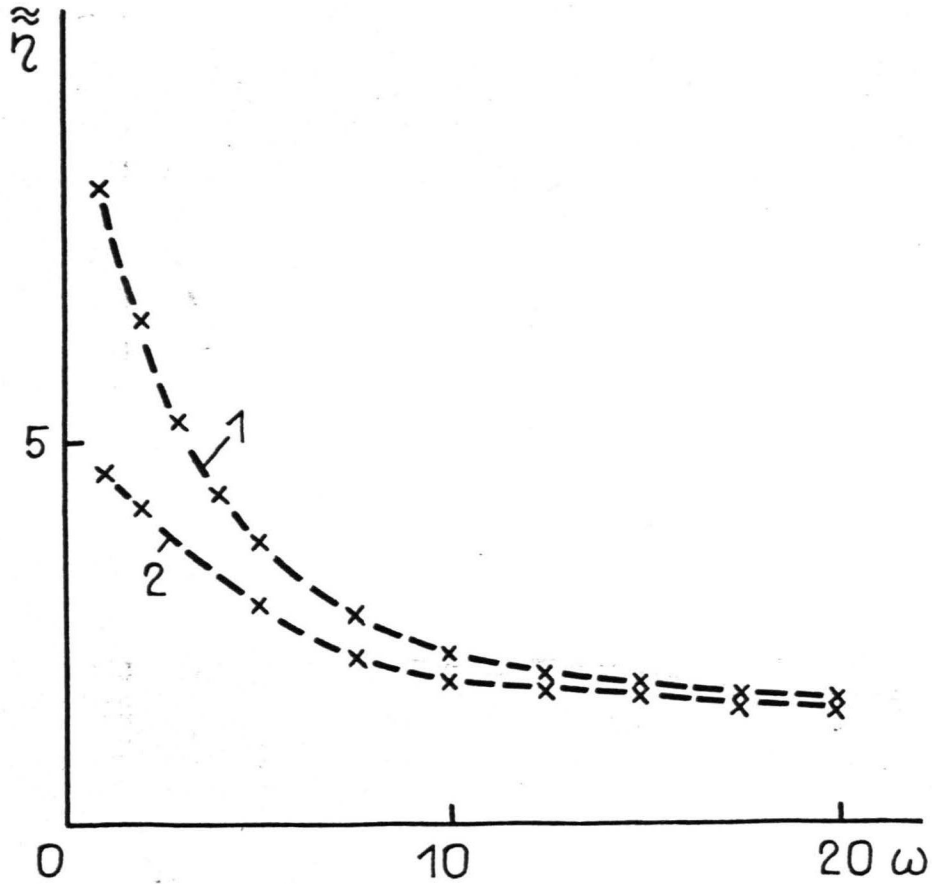


Рис. 6.3. II. Анизотропия вязкости суспензии эллипсоидальных частиц в магнитном поле. Параметр Ланжевена $\xi = 2$. 1 - вектор напряженности поля параллелен градиенту скорости, 2 - параллелен скорости.

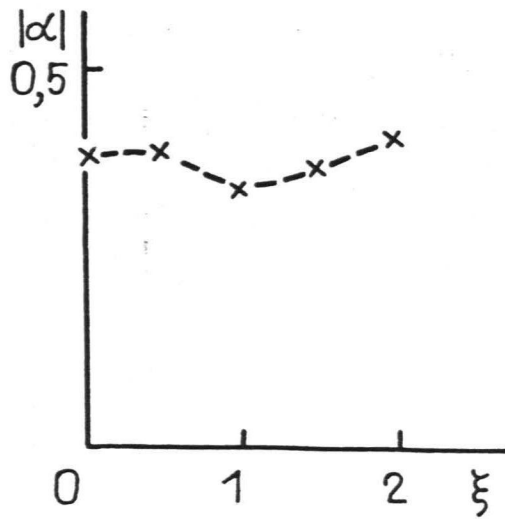


Рис. 6.3.12. Зависимость от напряженности магнитного поля показателя степенного закона убывания характеристической вязкости суспензии со скоростью сдвига.

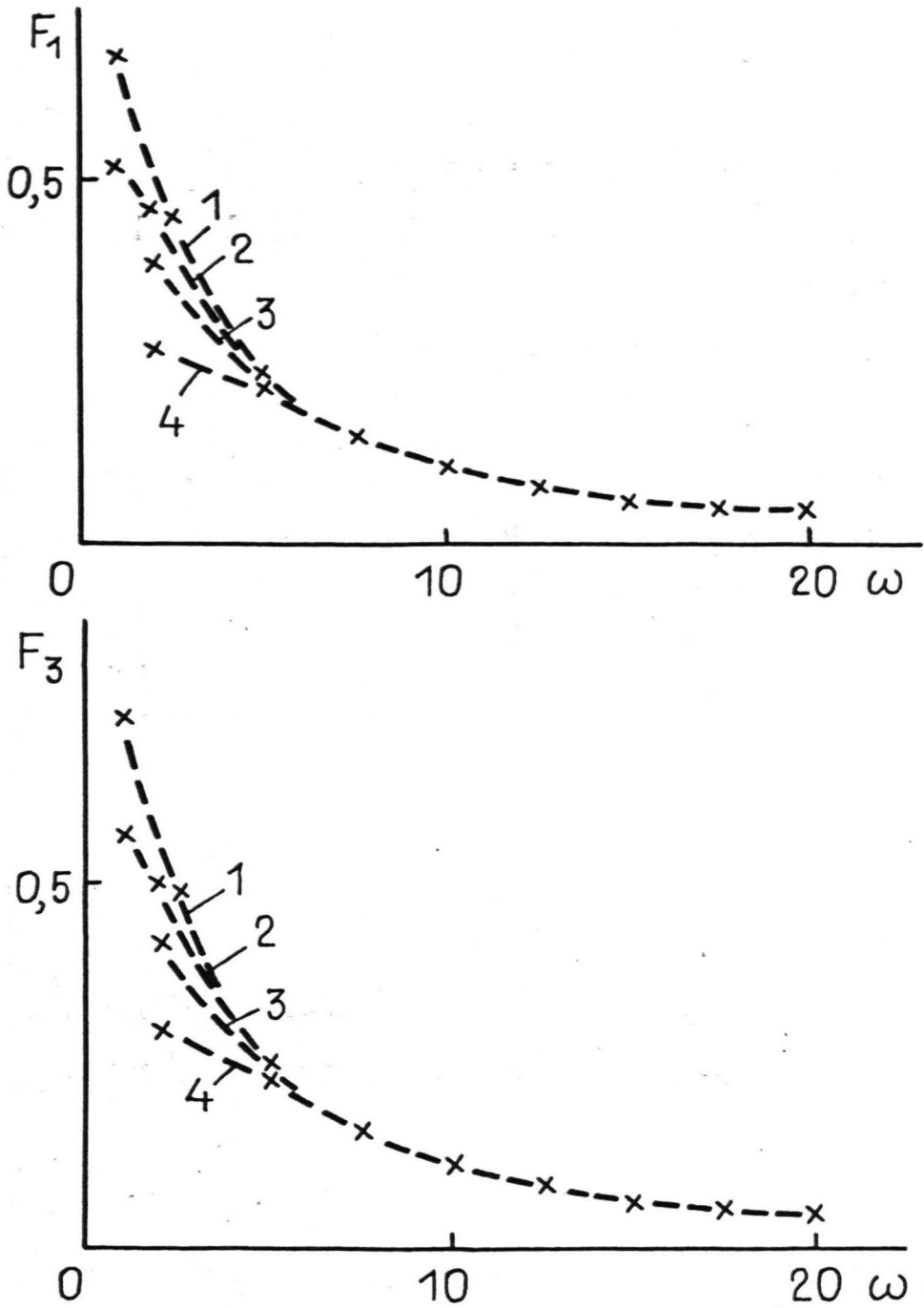


Рис. 6.3.13. Зависимость коэффициентов нормальных напряжений от скорости сдвига в магнитном поле, параллельном скорости суспензии.
1 - $\xi = 0,5$; 2 - $\xi = 1$; 3 - $\xi = 1,5$; 4 - $\xi = 2$.

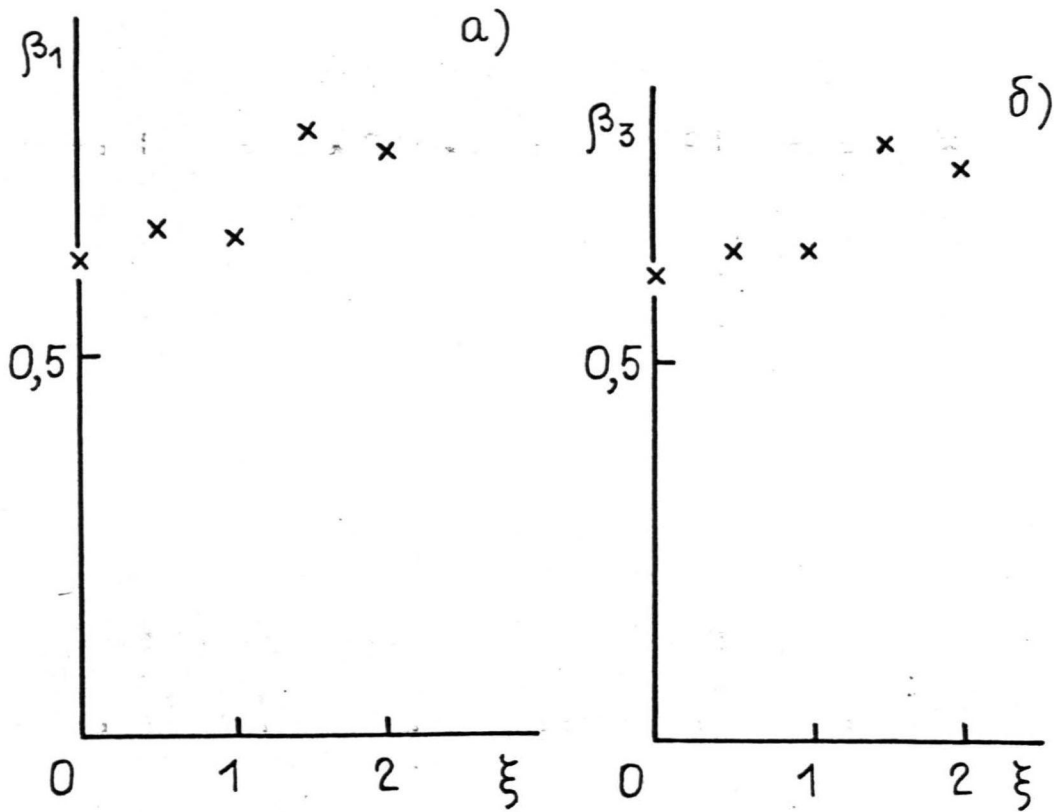


Рис. 6.3.14. Показатели степенного закона роста нормальных напряжений со скоростью сдвига при различных величинах магнитного поля, параллельного скорости суспензии.

а - $\sigma_{zz} - \sigma_{xx}$; б - $\sigma_{zz} - \sigma_{yy}$.

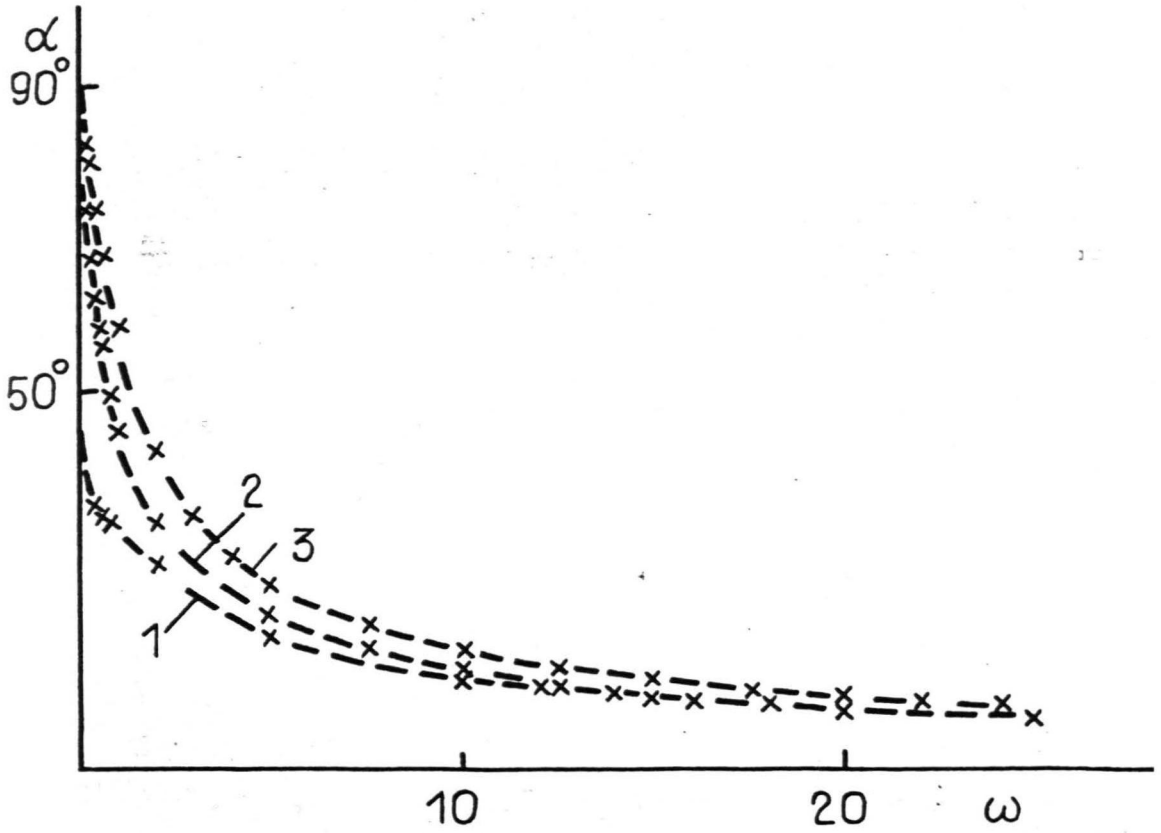


Рис. 6.3.15. Зависимость угла гашения от скорости сдвига при различных значениях напряженности магнитного поля, параллельной градиенту скорости суспензии. (1 - $\xi = 0$, 2 - $\xi = 1$, 3 - $\xi = 2$).

зии, приводит к уменьшению разностей нормальных напряжений. Кроме того, в отличие от случая поперечной ориентации вектора напряженности поля, разности нормальных напряжений со скоростью сдвига, как это показывает рис. 6.3.I4, на которых отложены показатели степенного роста нормальных напряжений в промежуточной области скоростей сдвигов $\omega \in [7,5; 20]$, растут сильнее.

Следует обратить внимание также на то, что развитый алгоритм численного моделирования позволяет получать информацию и о динамооптических явлениях. На рис. 6.3.I5 показаны полученные зависимости угла гашения света, проходящего через суспензию, помещенную между скрещенными поляризаторами, поперечно плоскости сдвига, от его скорости. Угол α отсчитывается от направления скорости суспензии $\vec{V} = (0, V_y(z), 0)$ и определяется согласно соотношению

$$\alpha = \text{arcctg} \left(\frac{(\langle n_y^2 \rangle - \langle n_z^2 \rangle) + \sqrt{(\langle n_y^2 \rangle - \langle n_z^2 \rangle)^2 + 4 \langle n_y n_z \rangle^2}}{2 \langle n_y n_z \rangle} \right).$$

Представленные на рис. 6.3.I5 результаты показывают, что при умеренных значениях напряженности поля ($\xi \leq 2$) происходит быстрый поворот с ростом скорости сдвига оси анизотропии суспензии от направления, поперечного течению, к направлениям, характерным для суспензии при отсутствии поля. Эти результаты представляют интерес при описании магнитооптических явлений.

6.4. Кинетика намагничивания коллоида ферромагнетика при конечном значении константы магнитной анизотропии

Рассмотренные в разделе 6.2 явления релаксации намагниченности относятся к случаю большой константы магнитной анизотропии, которая реализует жесткую связь магнитного момента с части-

дей. При конечных значениях константы магнитной анизотропии частицы ее магнитный момент получает свободу вращения по телу частицы, в результате чего магнитная релаксация определяется уже двумя процессами – релаксацией магнитного момента внутри частицы и вращательным движением частицы в жидкости. Это находит свое проявление в зависимости реологических свойств коллоидов ферромагнетиков от эффективной константы магнитной анизотропии, которая отсутствует в случае моделей, рассмотренных в разделах 6.2 и 6.3, но проявляется на эксперименте [41].

Система уравнений совместного движения магнитного момента и частицы получена нами в работе [169]. В результате введения случайных тепловых моментов, действующих на магнитный момент и частицу, в этой работе получено также уравнение для совместной функции распределения ориентации магнитного момента и частицы.

Для случая, когда характерное время установления теплового равновесия магнитного момента в частице τ_m гораздо меньше характерного времени движения частицы в вязкой жидкости $\tau_B = l/2D$, а неелевское время релаксации намагниченности τ_N мало по сравнению с τ_B , описание процесса магнитной релаксации возможно в рамках предположения о локальном равновесии

[56], т.е. теплового равновесия магнитного момента при данном направлении оси магнитной анизотропии частицы \vec{n} . Условная вероятность $P(\vec{e}; \vec{n})$ распределения магнитного момента $\vec{m} = m\vec{e}$ при заданном направлении оси магнитной анизотропии \vec{n} в этом случае имеет вид ($\xi = mH/kT, \phi = KV/2kT$)

$$P(\vec{e}, \vec{n}) = \exp(\xi(\vec{e}\vec{h}) + \phi(\vec{e}\vec{n})^2) / \left(\int d^2\vec{e} \exp(\xi(\vec{e}\vec{h}) + \phi(\vec{e}\vec{n})^2) \right). \quad (6.4.1)$$

Намагниченность коллоида определяется соотношением $\vec{M} = n \langle \vec{m} \rangle$

$$\langle \vec{m} \rangle = m \int d^2\vec{n} P(\vec{n}) \left(\int d^2\vec{e} \vec{e} P(\vec{e}; \vec{n}) \right), \quad (6.4.2)$$

где $P(\vec{n})$ - функция распределения осей магнитной анизотропии частицы. Для последней в указанных условиях в работе [56] получено уравнение $(\vec{K}_{\vec{n}} = [\vec{n} \times \partial/\partial \vec{n}])$

$$\partial P/\partial t = -\vec{K}_{\vec{n}}(\vec{\omega}_0 P) + \alpha^{-1} \vec{K}_{\vec{n}}((K_{\vec{n}} F_m) P) + kT \alpha^{-1} K_{\vec{n}}^2 P, \quad (6.4.3)$$

где $F_m = -kT \ln \int d^2 \vec{e} \exp(\xi(\vec{e} \vec{h}) + \zeta(\vec{e} \vec{n})^2)$ - свободная энергия магнитного состояния частицы.

В состоянии термодинамического равновесия, когда $P_0(\vec{n}) = Q^{-1} e^{-F_m/kT}$ соотношение (6.4.2) с учетом (6.4.1) дает Ланжевеновскую зависимость для намагниченности $\langle \vec{m} \rangle = mL(\xi) \vec{h}$. Расчет по формуле (6.4.2) в различных предположениях о виде функции $P(\vec{n})$ выполнен в работе [212], из результатов которой видно, что намагниченность коллоида при изотропном распределении осей магнитной анизотропии, когда $P(\vec{n}) = 1/4\pi$, меньше, чем для состояния термодинамического равновесия. Работа [213] это подтверждает экспериментально. Этот результат является естественным, так как при установлении состояния термодинамического равновесия происходит разворот осей магнитной анизотропии, затрудняющих намагничивание коллоида, в направлении магнитного поля.

Отсюда видно, что процесс магнитной релаксации коллоида при конечном значении константы магнитной анизотропии протекает в виде двух стадий. На первой происходит быстрое установление значения намагниченности, соответствующего данному распределению осей магнитной анизотропии, на второй в результате вращательного броуновского движения происходит установление равновесного распределения осей магнитной анизотропии, и соответственно, равновесного значения намагниченности. Согласно этим представлениям намагниченность коллоида образуется из двух частей - быстрорелаксирующей ($\tau_m \ll \tau_B$) и медленно, с характер-

ным временем релаксации порядка времени вращательного броуновского движения частицы в вязкой жидкости.

Далее получают релаксационные уравнения для медленной компоненты намагниченности для случая, когда на постоянное поле $\vec{\xi}_0$ налагается малая периодическая составляющая $\vec{\xi}'$.

Процесс установления равновесного распределения осей магнитной анизотропии описывается в приближении частичного равновесия, когда

$$P(\vec{n}) = P_p(\vec{n}) (1 + \lambda_{ik} (n_i n_k - \langle n_i n_k \rangle_0)). \quad (6.4.4)$$

Значения компонент эффективного поля λ_{ik} находятся из условия равенства тензора анизотропии заданному значению ζ_{ik}

$$\zeta_{ik} = \int P(\vec{n}) (n_i n_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}) d^2 \vec{n} / \int P(\vec{n}) d^2 \vec{n}.$$

Для намагниченности коллоида в неравновесном состоянии согласно (6.4.2) и (6.4.4) справедлива формула

$$\langle m_\rho \rangle = mL(\xi) h_\rho + mA \lambda_{ik} \langle e_\rho e_i e_k \rangle_\Lambda - mA L(\xi) L_2 h_\rho \lambda_{ik} h_i h_k \quad (6.4.5)$$

Значения равновесных моментов $\langle \rangle_\Lambda$, $\langle \rangle_0$ приводятся в приложении 4.

Умножение уравнения (6.4.3) на $n_i n_k$ и интегрирование дает релаксационные уравнения для компонент тензора анизотропии следующего вида ($\vec{\Omega}_0 = 0$)

$$\frac{\partial \langle n_i n_k \rangle}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_B} (\lambda_{im} \langle n_k n_m \rangle_0 + \lambda_{km} \langle n_i n_m \rangle_0 - 2 \langle n_i n_k n_e n_m \rangle_{em} \lambda) \quad (6.4.6)$$

Компоненты λ_{ik} при этом определяются из системы уравнений

$$\langle n_i n_k \rangle = \langle n_i n_k \rangle_p + \lambda_{em} (\langle n_i n_k n_e n_m \rangle_0 - \langle n_i n_k \rangle_0 \langle n_e n_m \rangle_0) \quad (6.4.7)$$

Если воспользоваться соотношениями для моментов (П.4.7), (П.4.8), то из соотношений (6.4.6) и (6.4.7) получим релаксаци-

онные уравнения для компонент тензора анизотропии $\zeta_{\parallel\parallel}$ и $\zeta_{\perp\perp}$ (значки \parallel , \perp обозначают компоненты продольные и поперечные постоянному полю)

$$\frac{\partial \zeta_{\parallel\parallel}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_{\parallel}} (\zeta_{\parallel\parallel} - \zeta_{\parallel\parallel}^P); \quad \frac{\partial \zeta_{\perp\perp}}{\partial t} = -\frac{1}{\tau_{\perp}} (\zeta_{\perp\perp} - \zeta_{\perp\perp}^P) \quad (6.4.8)$$

где $\tau_{\parallel} = \tau_B (2a_1 + 5b_1 + c_1 - (a+b)a) / 2 / ((a+b) - (2a_1 + 5b_1 + c_1))$,
 $\tau_{\perp} = 2\tau_B (a_1 + b_1) / (2b + a - 4(a_1 + b_1))$.

Соотношение (6.4.5) для компонент намагниченности дает

$$\langle m_{\parallel} \rangle = m_{\parallel}^P + m_{\parallel a}^H - m_{\parallel a}^P; \quad \langle m_{\perp} \rangle = m_{\perp}^P + m_{\perp a}^H - m_{\perp a}^P;$$

$$m_{\parallel}^P = m(L + \xi'_{\parallel} L'); \quad m_{\perp}^P = mL \xi'_{\perp} / \xi;$$

$$m_{\parallel a}^H = 3mA(L^2 - L_2) \zeta_{\parallel\parallel} / \xi / (2a_1 + 5b_1 + c_1 - (a+b)a);$$

$$m_{\perp a}^H = ma(\xi) \zeta_{\perp\perp} / \xi / (a_1(\xi) + b_1(\xi));$$

$$m_{\parallel a}^P = m((A+B-2AL/\xi)A^3(L^2-L_2)/\xi + A^2 3(L^2-L_2) \frac{d}{d\xi} (-\frac{2L}{\xi} \xi'_{\parallel})) / (2a_1 + 5b_1 + c_1 - (a+b)a);$$

$$m_{\perp a}^P = ma^2(\xi) \xi'_{\perp} / \xi^2 (a_1(\xi) + b_1(\xi)). \quad (6.4.9)$$

Из (6.4.8) для $m_{\parallel, \perp a}^H$ следуют релаксационные уравнения

$$\frac{dm_{\parallel a}^H}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\parallel}} (m_{\parallel a}^H - m_{\parallel a}^P); \quad \frac{dm_{\perp a}^H}{dt} = -\frac{1}{\tau_{\perp}} (m_{\perp a}^H - m_{\perp a}^P).$$

Времена релаксации τ_{\parallel} и τ_{\perp} в зависимости от ξ показаны на рис. 6.4.1. Из рис. 6.4.1 видно, что при малых ξ времена релаксации τ_{\parallel} , τ_{\perp} равны известному значению $\tau_B / 3$.

С точки зрения рассмотрения магнитовязкого эффекта в случае конечного значения константы магнитной анизотропии представляет интерес поперечная внешнему полю компонента намагниченности в потоке. Ее значение, как показывают соотношения

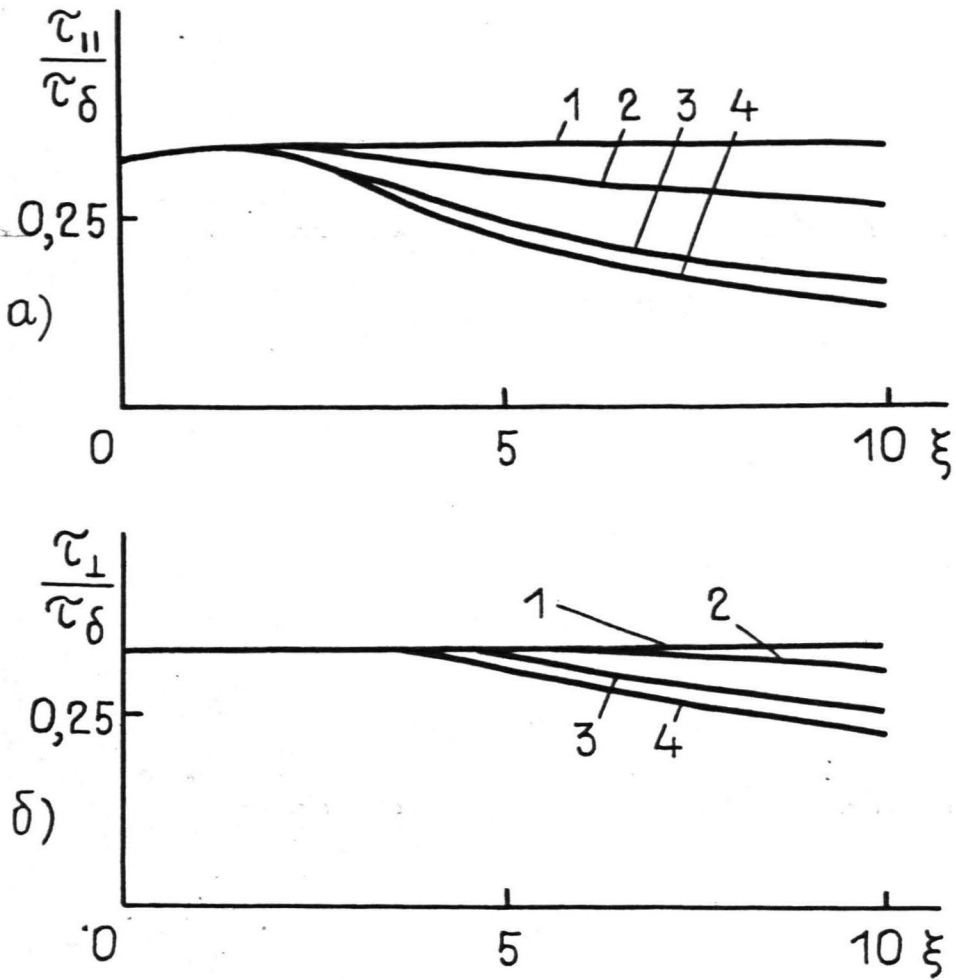


Рис. 6.4.І. Зависимость времени релаксации намагниченности коллоида нежестких частиц от напряженности магнитного поля. а - продольная полю компонента; б - поперечная полю компонента.
1 - $\zeta = 1$, 2 - $\zeta = 4$, 3 - $\zeta = 9$, 4 - $\zeta = 16$.

(6.4.9), определяется смешанными компонентами тензора анизотропии $\zeta_{\perp\parallel}$. Для последних при $\tau_{\perp\parallel}\Omega_0 \ll 1$ из уравнения (6.4.3) в приближении частичного равновесия следует уравнение

$$\frac{\partial \zeta_{\perp\parallel}}{\partial t} = a(\xi) [\vec{\Omega}_0 \times \vec{h}] - \tau_{\perp\parallel}^{-1} \zeta_{\perp\parallel}.$$

Откуда для поперечной полю компоненты намагниченности следует

$$\vec{M}_{\perp} = 2mna^2(\xi)\tau_B [\vec{\Omega}_0 \times \vec{h}] / \xi(2b(\xi) + a(\xi) - 4(a_1(\xi) + b_1(\xi))).$$

Данное соотношение для приращения вязкости коллоида во внешнем поле при конечном значении константы магнитной анизотропии дает выражение, полученное нами в работе [56]

$$\Delta\eta = \frac{3}{2} \varphi \frac{a^2(\xi)}{(2b(\xi) + a(\xi) - 4(a_1(\xi) + b_1(\xi)))}.$$

Таким образом, рассматриваемая система уравнений для компонент тензора анизотропии коллоида и намагниченности может быть использована для описания гидродинамических явлений в коллоидах ферромагнетиков при конечном значении константы магнитной анизотропии.

С точки зрения возможности использования развитых соображений при экспериментальном изучении кинетики намагничивания коллоидов ферромагнетиков представляет интерес определение восприимчивости медленной и быстрой компонент в зависимости от величины постоянного намагничивающего поля и константы магнитной анизотропии. Для восприимчивости медленной компоненты соотношения (6.4.9) дают

$$\begin{aligned} \chi_{\perp}^a / \chi_{n\perp} &= a^2(\xi) / \xi L(\xi) / (a_1(\xi) + b_1(\xi)); \quad \chi_{\parallel}^a / \chi_{n\parallel} = \\ &= 3A^2(L^2 - L_2) d/d\xi (L_2 + L/\xi) / \xi / (2a_1(\xi) + 5b_1(\xi) + c_1(\xi) - (a(\xi) + b(\xi))a(\xi)) / L'(\xi). \end{aligned}$$

Зависимости $\chi_{\parallel}^a / \chi_{n\parallel}$ и $\chi_{\perp}^a / \chi_{n\perp}$ от ξ представлены на

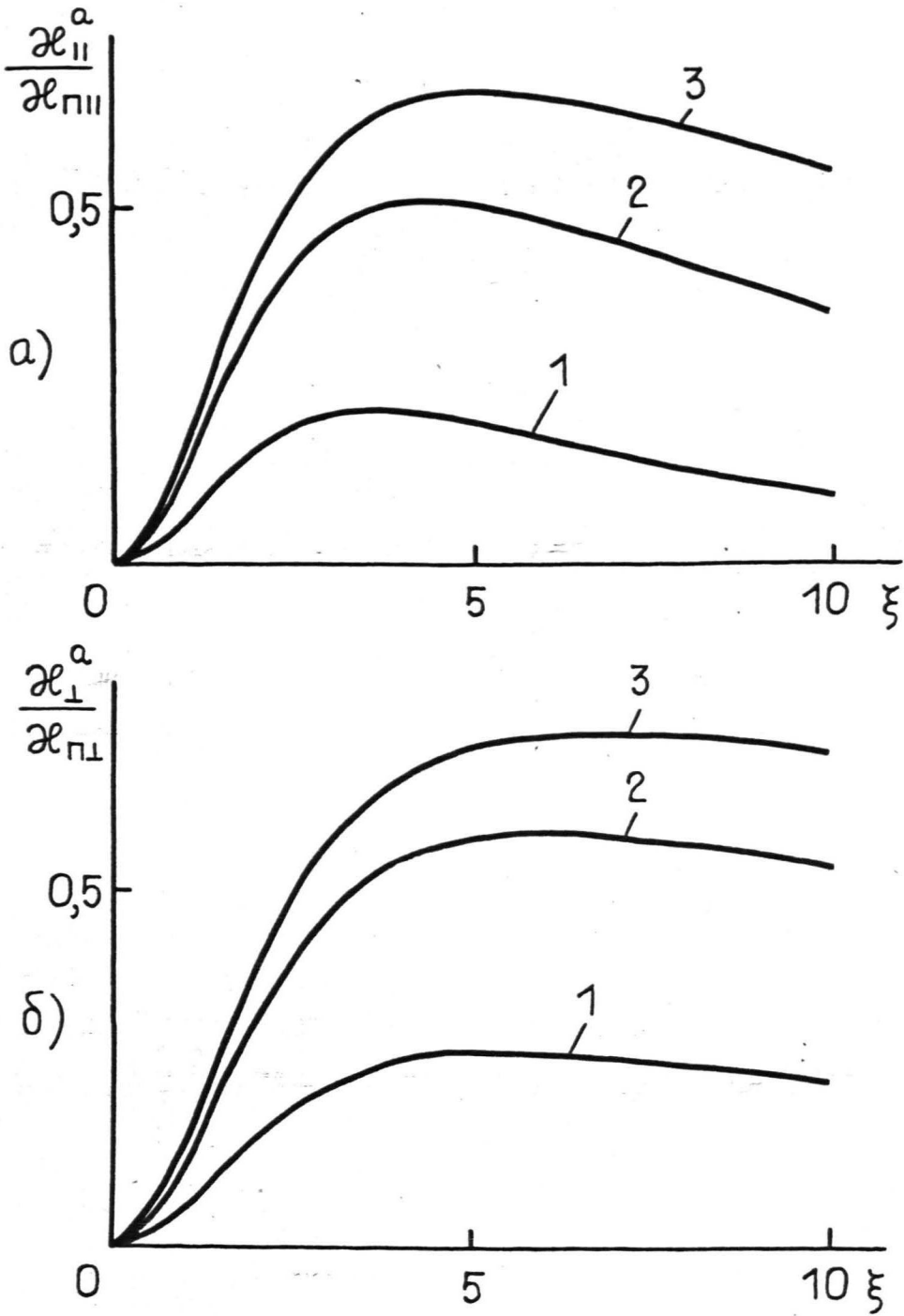


Рис. 6.4.2. Восприимчивость медленной компоненты намагниченности коллоида нежестких частиц в зависимости от напряженности поля. а - продольная компонента, б - поперечная компонента. 1 - $\zeta = 4$, 2 - $\zeta = 9$, 3 - $\zeta = 16$.

рис. 6.4.2. Рис. 6.4.2 показывает, что при достаточно высоких значениях ω дифференциальная восприимчивость, обусловленная релаксацией распределения осей магнитной анизотропии, в промежуточной области значений напряженности поля составляет заметную величину статической дифференциальной восприимчивости системы. Частотная зависимость ее компонент определяется временами релаксации τ_{\parallel} , τ_{\perp} . Экспериментальное определение χ_{\parallel}^a и χ_{\perp}^a возможно на основе диаграмм Коул-Коула, как это показано в работе [214] для частного случая нулевого намагничивающего поля. При этом определение низкочастотной $\chi_0 = \chi_n$ и высокочастотной $\chi_{\infty} = \chi_n - \chi_a$ восприимчивостей происходит в результате представления экспериментальных данных для действительной и мнимой частей χ' , χ'' магнитной восприимчивости в координатах χ' , χ'' , которые в частном случае дебаевской дисперсии ложатся на полуокружность, определяемую уравнением $(\chi' - \frac{\chi_0 + \chi_{\infty}}{2})^2 + \chi''^2 = \frac{(\chi_0 - \chi_{\infty})^2}{4}$, что позволяет определить искомые характеристики коллоида χ_0 и χ_{∞} .

Полученные уравнения релаксации тензора анизотропии коллоида дают возможность рассмотрения и других представляющих интерес кинетических явлений в коллоидах ферромагнетиков. В частности, на их основе возможно рассмотрение возбуждения ультразвука, обусловленное магнитострикционными колебаниями объема частиц ферромагнетика, при наложении на постоянное намагничивающее поле переменной составляющей. Этот вопрос рассмотрен автором в работе [215].

6.5. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей с внутренними вращениями при наличии подвижных границ

Внутренние вращения в НЖ могут приводить не только к изменению реологических свойств жидкости, появлению новых механизмов переноса и диссипации, но в определенных условиях могут приводить к возникновению течений.

В следующих разделах проводится анализ различных ситуаций макроскопического движения НЖ при наличии у последней подвижных границ, обусловленного внутренними вращениями. К данному классу явлений относится поведение погруженных в НЖ твердых тел во вращающемся магнитном поле, поведение капель и пузырьков в НЖ при малых магнитных числах Бонда, когда деформациями свободной поверхности можно пренебречь и т.д.

Далее рассматривается осесимметричная ситуация, когда НЖ заполняет пространство между двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями, и имеется магнитное поле, вращающееся в плоскости поперечной оси аксиальной симметрии системы.

Пусть радиус цилиндрического сосуда R_2 и угловая скорость его вращения Ω_2 , а внутреннего цилиндра R_1 и Ω_1 соответственно. Угловая скорость вращения поля Ω . Тогда релаксационные уравнения намагниченности (6.1.4) для антисимметричной части тензора вязких напряжений $\sigma_{ik}^a = \frac{1}{2} e_{ikl} [\vec{M} \times \vec{H}]_l$ в стационарном случае, когда вектор намагниченности образует постоянный угол с направлением магнитного поля ($d\vec{M}/dt = [\vec{\Omega} \times \vec{M}]$) при $\tau_1 \Omega \ll 1$ дают $\sigma_{ik}^a = 2\eta_{вр} e_{ikl} (\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0)_l$ где $\eta_{вр}$ - вращательная вязкость коллоида $\eta_{вр} = 1/4 \tau_1 M_0 H$.

Уравнения движения НЖ в цилиндрических координатах в слу-

чае поля скоростей с одной лишь осесимметричной азимутальной составляющей $\vec{V} = (0, V_\varphi(r), 0)$ тогда дают

$$\frac{d^2 V_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_\varphi}{dr} - \frac{V_\varphi}{r^2} = 0,$$

общее решение которого имеет вид $V_\varphi = ar + b/r$.

Постоянные a и b определяются граничными условиями прилипания

$$V_\varphi|_{r=R_1} = \Omega_1 R_1; \quad V_\varphi|_{r=R_2} = \Omega_2 R_2.$$

В результате для V_φ получается

$$V_\varphi = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{1}{r},$$

что соответствует известному решению теории смазки Н.П.Петрова [216].

Для моментов сил, действующих на единицу длины внутреннего и внешнего цилиндров справедливо $K_1 = 2\pi R_1^2 \zeta_{\varphi r}|_{r=R_1}$; $K_2 = -2\pi R_2^2 \zeta_{\varphi r}|_{r=R_2}$. Отличие от обычного случая состоит в том, что моменты сил должны быть вычислены с учетом как симметричной, так и антисимметричной части тензора вязких напряжений. Последнее описывает усилия, оказываемые на границу жидкости вращающимися частицами. С учетом ζ_{ik}^a для моментов сил получается

$$K_1 = \frac{4\pi\eta R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left((\Omega_2 - \Omega_1) R_2^2 + \frac{\eta b_p}{\eta} \left((\Omega_2 - \Omega) R_2^2 - (\Omega_1 - \Omega) R_1^2 \right) \right);$$

$$K_2 = -\frac{4\pi\eta R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left((\Omega_2 - \Omega_1) R_1^2 + \frac{\eta b_p}{\eta} \left((\Omega_2 - \Omega) R_2^2 - (\Omega_1 - \Omega) R_1^2 \right) \right). \quad (6.5.1)$$

На основе соотношений (6.5.1) может быть рассмотрен ряд конкретных ситуаций.

I. Пусть $\Omega_2 = 0$ и $K_1 = 0$, что соответствует случаю свободно подвешенного в неподвижном сосуде цилиндра [185]. Тогда (6.5.1) для угловой скорости вращения внутреннего цилиндра дает

$$\Omega_1 = -\frac{\eta b_p}{\eta} \Omega \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{(R_2^2 + \frac{\eta b_p}{\eta} R_1^2)}. \quad (6.5.2)$$

Соотношение (6.5.2) показывает, что свободный внутренний цилиндр во вращающемся магнитном поле приходит во вращение в направлении, противоположном направлению вращения магнитного поля. Это находится в согласии с экспериментом работы [46]. Позже в работе [65] соотношение (6.5.2), полученное нами, было подтверждено с точностью до членов I порядка по $\eta_{вр}/\eta$ и для общего случая суспензии эллипсоидальных частиц.

2. Своеобразные явления имеют место и в общем случае неподвижного внешнего цилиндра $\Omega_2 = 0$ [196]. Тогда для K_1 соотношение (6.5.1) дает

$$K_1 = \frac{4\pi\eta R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\Omega \frac{\eta_{вр}}{\eta} (R_2^2 - R_1^2) - \Omega_1 \left(R_2^2 + \frac{\eta_{вр}}{\eta} R_1^2 \right) \right). \quad (6.5.3)$$

Соотношение (6.5.3) показывает, что в случае, когда угловая скорость внутреннего цилиндра противоположна угловой скорости вращения поля ($\Omega_1 > 0; \Omega < 0$) возможна ситуация, когда внутренний цилиндр разгружен, т.е. $K_1 = 0$. Это имеет место при угловой скорости вращения поля

$$\Omega_* = - \frac{\Omega_1 \left(R_2^2 + \frac{\eta_{вр}}{\eta} R_1^2 \right)}{\eta_{вр}/\eta (R_2^2 - R_1^2)}.$$

При угловых скоростях $|\Omega| > \Omega_*$ момент сил действует в направлении вращения цилиндра, что физически связано с тем, что вращающиеся частицы подталкивают цилиндр в направлении его вращения. При данных направлениях вращения внутреннего цилиндра и поля существует независимая от напряженности поля угловая скорость вращения внутреннего цилиндра, при которой действующий на него момент сил от напряженности вращающегося поля не зависит. Она равна $\Omega = - \Omega_1 R_1^2 / (R_2^2 - R_1^2)$.

Физически данное обстоятельство связано с равенством угло-

вой скорости гидродинамического вихря с угловой скоростью вращающегося поля. В подобной ситуации вращающееся поле на изотропную НЖ влияния не оказывает. Все отмеченные факты экспериментально наблюдались в работе [47] для случая крупнодисперсной суспензии ферромагнетика. Таким образом, проведенный нами [196] анализ этих экспериментальных данных с точки зрения гидродинамики с внутренними вращениями показывает плодотворность применения этих представлений и к крупнодисперсным суспензиям.

3. Как показывают соотношения (6.5.1), моменты сил, действующие на цилиндры, зависят лишь от относительных угловых скоростей вращения цилиндров и поля. Этот факт и полученное нами в работе [185] соотношение (6.5.2) показывает, что в стационарном магнитном поле свободный внутренний цилиндр должен вращаться быстрее внешнего. Действительно, решение (6.5.2), с точки зрения системы координат, связанной с вращающимся полем, для угловой скорости Ω'_1 внутреннего цилиндра дает $\Omega'_1 = \Omega_1 - \Omega =$

$$= (1 + \eta_{вп}/\eta) \times \Omega'_2 R_2^2 / (R_2^2 + \eta_{вп}/\eta R_1^2).$$

где $\Omega'_2 = -\Omega$ — угловая скорость вращения внешнего цилиндра в системе координат, связанной с полем. Отсюда видно, что $\Omega'_1 > \Omega'_2$, так как $R_2 > R_1$. Подобное явление экспериментально подтверждено в работе [49].

4. Из соотношений (6.5.1) следует, что в случае, когда оба цилиндра являются свободными, т.е. $K_1 = K_2 = 0$, угловые скорости их вращения равняются угловой скорости вращения поля Ω . Это заключение экспериментально и теоретически было получено в работе [217].

Аналогичным образом могут быть разобраны различные случаи вращения внешнего цилиндра.

1. В случае неподвижного внутреннего цилиндра ($\Omega_1 = 0$) и свободного внешнего ($K_2 = 0$) соотношения (6.5.1) показывают, что внешний цилиндр вращается в направлении вращающегося поля с угловой скоростью

$$\Omega_2 = \frac{\eta_{\text{вп}}/\eta (R_2^2 - R_1^2)\Omega}{R_1^2 + \eta_{\text{вп}}/\eta R_2^2}$$

Этот вывод находится в согласии с результатами работы [46], которые показывают, что свободно подвешенный сосуд с НМ приходит во вращение в направлении вращения магнитного поля. Аналогичные явления наблюдаются в работах [48], [73].

2. В случае $\Omega_1 = 0$ для момента сил, действующего на внешний цилиндр, справедливо

$$K_2 = -\frac{4\pi\eta R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left(\Omega_2 \left(R_1^2 + \frac{\eta_{\text{вп}}}{\eta} R_2^2 \right) - \frac{\eta_{\text{вп}}}{\eta} \Omega (R_2^2 - R_1^2) \right).$$

Видно, что вращающееся поле уменьшает момент сил, действующий на внутренний цилиндр в случае, когда направление вращения поля совпадает с направлением вращения внешнего цилиндра. При угловой скорости вращающегося поля

$$\Omega = \Omega_2 (R_1^2 + \eta_{\text{вп}}/\eta R_2^2) / \eta_{\text{вп}}/\eta (R_2^2 - R_1^2)$$

происходит полное разгружение внешнего цилиндра. Аналогично случаю вращения внутреннего цилиндра существует независящая от напряженности поля угловая скорость вращения внешнего цилиндра, при которой момент сил равен его значению при отсутствии поля

$$\Omega_* = \Omega_2 R_2^2 / (R_2^2 - R_1^2)$$

3. В случае стационарного поля угловая скорость вращения внешнего свободного цилиндра при заданной угловой скорости вращения внутреннего цилиндра Ω_1 равняется

$$\Omega_2 = \Omega_1 R_1^2 (1 + \eta_{\text{вр}}/\eta) / (R_1^2 + \eta_{\text{вр}}/\eta R_2^2) < \Omega_1,$$

т.е. в этом случае внешний цилиндр вращается медленнее внутреннего.

Постановка задачи о движении лежащей на твердой поверхности капли НК во вращающемся поле возникает при интерпретации гидродинамических явлений, имеющих место при воздействии на МК бегущего магнитного поля одностороннего индуктора и описанных нами в работе [174].

Задача о движении лежащей на твердой поверхности капли при полной ее постановке принадлежит к наиболее сложным в гидромеханике, так как, помимо определения положения свободных поверхностей, в этом случае требуется нахождение и положения контактных линий трех фаз. Как показано в работе [218], предположение о выполнении условия прилипания на твердой поверхности приводит к сингулярности на контактной линии, которая дает бесконечную силу на твердую поверхность. Для устранения данного противоречия разными авторами были рассмотрены модификации условия прилипания вблизи контактной линии. Одно из них заключается в предположении на малых расстояниях от контактной линии скольжения, пропорционального касательному напряжению [155]. Движение в основной области может быть получено в результате сшиваия решений в внешней области и малой окрестности контактной линии. Как указано в работе [219], решение во внешней области определено, если известно значение краевого угла смачивания на некотором промежуточном расстоянии от контактной линии.

Для определения его значения воспользуемся результатом работы [220], в которой для краевого угла смачивания ϑ на расстоянии h от твердой поверхности получена зависимость

$$\vartheta^3 = \vartheta_m^3 + \frac{g\eta V}{\sigma} \ln h/h_m, \quad (6.5.4)$$

где h_m обозначает высоту мениска молекулярных масштабов, на котором $\vartheta = \vartheta_m$ и начиная с которого выполняются законы гидродинамики. При малых V для ϑ получаем

$$\vartheta = \vartheta_m + \frac{3\eta}{\vartheta_m^2 \sigma} \ln \frac{h_i}{h_m} \cdot V.$$

Что касается значения промежуточной высоты h_i , то относительно ее положения строгих соотношений дать затруднительно [219], однако ясно, что множитель $\ln h_i/h_m$ можно оценить как величину порядка 10. В таком случае для скорости скольжения контактной линии V получается закон

$$V = K(\vartheta - \vartheta_m) \quad (6.5.5)$$

где коэффициент $K \cong \alpha \vartheta_m^2 \sigma / 3\eta$ ($\alpha \sim 0,1$). Отметим, что углы смачивания ϑ_m , надвигающейся и отступающей жидкости, вообще говоря, различаются (гистерезис смачивания), однако в настоящем приближенном рассмотрении это не учитывается. Формула вида (6.5.5) для динамического краевого угла используется в работах [155], [221].

Отметим, что хотя формула (6.5.4) в работе [220] получена при отсутствии внутренних вращений, можно в результате рассмотрения задачи о движении в клине жидкости с внутренними вращениями показать, что она справедлива и в этом случае.

Получим в рамках приближений теории смазки уравнение для формы, лежащей на твердой поверхности двумерной капли НЖ, в однородном вращающемся поле. Пусть уравнение свободной поверхности имеет вид $y = h(x, t)$, интегрируя уравнение неразрывности $\partial u_x / \partial x + \partial u_y / \partial y = 0$ по y от 0 до h и пользуясь кинематическим

граничным условием $u_y|_{h=h_t} + u_x h_x|_h$, получим уравнение $h_t + Q_x = 0$, где $Q = \int u_x dy$ - расход жидкости.

Уравнения ползучего движения в приближении тонкого смазочного слоя в однородном вращающемся поле имеют следующий вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (\eta + \eta_{впр}) \frac{d^2 u_x}{dy^2}; \quad \partial p / \partial y = 0. \quad (6.5.6)$$

На свободной поверхности выполняется условие отсутствия касательных напряжений, которое с учетом действия антисимметричных напряжений можно представить в виде

$$(\eta + \eta_{впр}) \frac{du_x}{dy} - 2 \eta_{впр} \omega = 0; \quad y = h.$$

На твердой поверхности выполняется условие прилипания $u_x|_{y=0} = 0$. Интегрируя уравнение (6.5.6) для скорости u_x и расхода Q

получим
$$u_x = \frac{2 \eta_{впр}}{\eta + \eta_{впр}} \omega y + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2(\eta + \eta_{впр})} (y^2 - 2yh);$$

$$Q = \frac{\eta_{впр}}{\eta + \eta_{впр}} \omega h^2 - \frac{1}{3(\eta + \eta_{впр})} \frac{\partial p}{\partial x} h^3.$$

Давление на свободной поверхности определяется капиллярными силами $p = -\sigma h_{xx}$. В таком случае для h получается дифференциальное уравнение следующего вида

$$h_t + \frac{\eta_{впр} \omega}{\eta + \eta_{впр}} \frac{\partial}{\partial x} h^2 + \frac{\sigma}{3(\eta + \eta_{впр})} \frac{\partial}{\partial x} (h_{xxx} h^3) = 0. \quad (6.5.7)$$

На контактных линиях вследствие (6.5.5) имеют место граничные условия следующего вида (рассматривается случай малых углов смачивания)

$$\frac{dx_2}{dt} = \kappa (-h'_x(x_2) - \sigma_m); \quad \frac{dx_1}{dt} = -\kappa (h'_x(x_1) - \sigma_m); \quad (6.5.8)$$

$$h(x_2, t) = h(x_1, t) = 0.$$

Таким образом, определение формы и положения капли НЖ во вращающемся поле возможно на основе решения нелинейного дифференциального уравнения в частных производных (6.5.7) при граничных условиях (6.5.8). В целях выяснения качественных особенностей поведения капли во вращающемся поле задача упрощается в результате разложения по ряду малых параметров. Для обезразмеривания исходных уравнений выбираются следующие масштабы - $X = a_s \tilde{X}$; a_s - характерный размер основания капли при равновесии, $t = \tau_0 \tilde{t}$, $\tau_0 = a_s / \nu_m K$. В таком случае дифференциальное уравнение (6.5.7) и граничные условия (6.5.8) принимают следующий вид

$$\left(\varepsilon = \frac{3(\eta + \eta_{вр})K}{6\nu_m^2} ; \delta = \frac{5\omega a_s^3(\eta + \eta_{вр})}{6\nu_m^2} ; S = \frac{\eta_{вр}}{\eta + \eta_{вр}} \right)$$

$$\varepsilon \tilde{h}_t + \delta (\tilde{h}^2)_x + (\tilde{h}_{xxx} \tilde{h}^3)_x = 0.$$

Численное значение параметра $\varepsilon \cong \alpha \sim 0,1$ мало, так что решение находится в виде разложения по данному малому параметру. Тогда $\delta (\tilde{h}_0^2)_x + (\tilde{h}_{0xxx} \tilde{h}_0^3)_x = 0$, откуда для формы капли имеет место уравнение

$$h_{0xxx} h_0 + \delta = 0 \tag{6.5.9}$$

и граничные условия $h(x_2, t) = h(x_1, t) = 0$;

$$\frac{dx_2}{dt} = -(h'_x(x_2) - 1) ; \frac{dx_1}{dt} = -(h'_x(x_1) - 1).$$

Площадь сечения капли V , которая через безразмерные переменные выражается по формуле $\int_{-x_e}^{x_e} y dx = V / \nu_s a_s^2$ при этом есть величина заданная.

Решение уравнения (6.5.9) находится в виде разложения в ряд по степеням δ , ограничиваясь членами до первого порядка включительно, т.е. $h_0 = h_0^0 + \delta h_0^1$. Тогда уравнение (6.5.9) в подвижной системе координат, в которой $X_2 = X_e$, $X_1 = -X_e$,

если определить размерное расстояние a_s в виде $3V/2\vartheta_m a_s^2 = 1$ получаем $h_0^0 = 1/2 x_e^3 (x_e^2 - x^2)$;

$$h_0^1 = -\delta x_e^2 (1/2(x+x_e)^2 \ln(x+x_e) - 1/4(x+x_e)^2 - 1/2(x_e-x)^2 \ln(x_e-x) + 1/4(x-x_e)^2 - 2x_e x) + \delta x_e^3 (2 \ln 2 x_e - 3) x. \quad (6.5.10)$$

Уравнения движения контактных линий позволяют получить уравнения для длины основания капли $l = x_2 - x_1$ и начала подвижной системы координат $W = (x_2 + x_1)/2$ в следующем виде

$$dl/dt = 2(4/l^2 - 1);$$

$$dw/dt = \delta l^3 / 8. \quad (6.5.11)$$

Как показывают уравнения (6.5.11), длина смачиваемого каплей участка подложки стремится к равновесному значению $l = 2$, а сама капля перемещается поступательно с постоянной скоростью δ .

В размерных единицах для скорости перемещения капли получается

$$V = \frac{\eta_{bp}}{\eta} \omega \vartheta_m a_s \alpha. \quad (6.5.12)$$

Полученное соотношение можно проиллюстрировать численным примером. Так при частоте вращающегося поля $\omega = 314 \text{ с}^{-1}$, $\eta_{bp} / \eta = 1$ и $\vartheta_m a_s = 1 \text{ мм}$ для скорости капли во вращающемся поле получается значение порядка 3 см/с ($\alpha = 10^{-1}$). Данное значение по порядку величины соответствует скорости перекатывающейся капли МЭ по твердой поверхности в бегущем поле одностороннего индуктора [174].

Форма капли НЭ во вращающемся поле, определяемая соотноше-

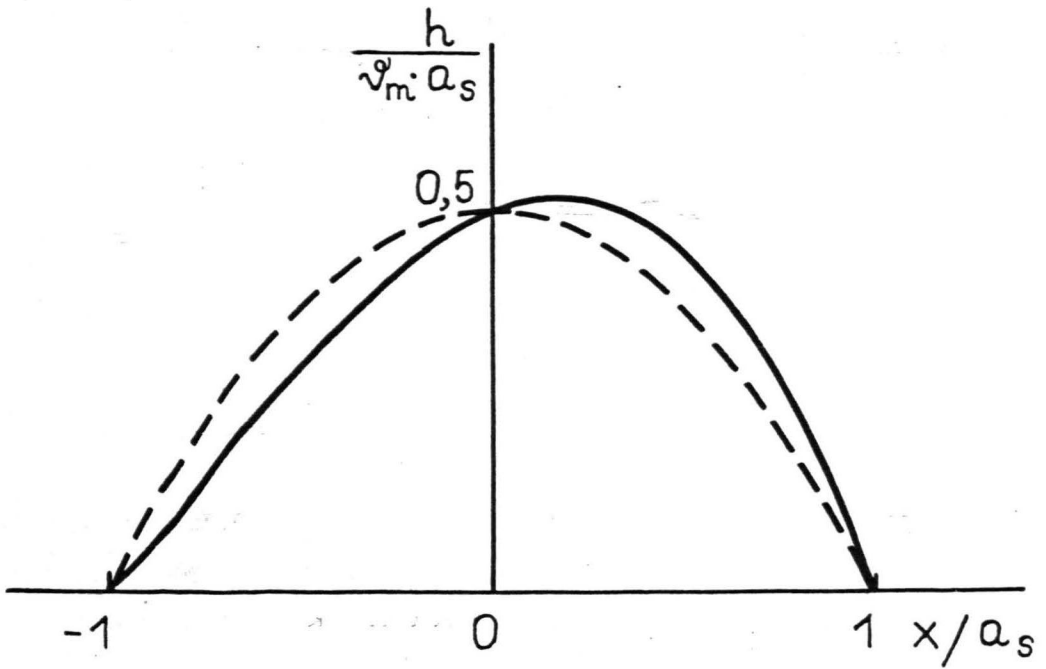


Рис. 6.5.1. Форма свободной поверхности лежащей капли НЖ во вращающемся магнитном поле (непрерывная линия). Прерывистой линией показана равновесная конфигурация лежащей капли при отсутствии магнитного поля.

нием (6.5.10) при $\delta = 0,5$ показана на рис. 6.5.1. Рис. 6.5.1 показывает, что форма свободной поверхности соответствует представлению о перекачивании капли во вращающемся поле.

В качественных экспериментах, описанных в работе [174], используется МЖ двух типов - одна на основе магнетита в керосине, вторая - на основе феррита кобальта. Физические параметры жидкостей, за исключением материала дисперсного ферромагнетика, приблизительно одинаковы. Однако скорость перемещения капель данных жидкостей были существенно различными - капля МЖ на основе феррита кобальта перемещалась значительно быстрее. Это находится в качественном согласии с формулой (6.5.12), так как вращательная вязкость МЖ на основе феррита кобальта, как следует из результатов, полученных нами [56], больше вращательной вязкости коллоида магнетита вследствие большей кристаллографической магнитной анизотропии частиц феррита кобальта. Отметим, что данный факт подтверждается и экспериментом [41].

В качественном согласии с рассматриваемым механизмом перекачивания капли по подложке во вращающемся поле находятся также следующие факты. Висячая капля МЖ перемещается в направлении, противоположном лежащей. В случае замкнутой полости можно организовать циркуляционное движение капли по стенкам полости.

Таким образом, механизм внутренних вращений позволяет в общих чертах объяснить и особенности явлений с лежащими и висящими каплями в однородном вращающемся поле.

6.6. Неустойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости во вращающемся магнитном поле

Как показано в разделе 6.5, внутренние вращения при наличии подвижных границ могут вызывать макроскопическое движение жидкости. Имеется ряд работ [222], [223], в которых сообщается об образовании структур на свободной поверхности МЖ во вращающемся магнитном поле.

Представляет интерес рассмотрение возможности интерпретации возникновения данных структур на основе механизма, связанного с возникающими во вращающемся поле внутренними вращениями. На это указывают такие описанные в работах [222], [223] факты, как образование кольцевых структур, вращение горбов деформированной поверхности в направлении вращающегося поля и др.

В настоящем разделе этот вопрос рассматривается с точки зрения модели НЖ с внутренними вращениями, в которой фактором ориентации частиц во внешнем поле является взаимодействие магнитной анизотропии, энергия которого $E_a = -\frac{1}{2}KV(\vec{e}\vec{n})^2$. Направление магнитного момента частицы \vec{e} при этом считается совпадающим с направлением внешнего поля \vec{h} , а тепловым вращательным движением пренебрегается. Это возможно при $H \gg K/M$ и $KV/2kT \gg 1$.

В таком случае уравнение движения НЖ записывается в следующем виде

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \Delta v_i + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} ; \operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (6.6.I)$$

где антисимметричная часть тензора вязких напряжений σ'_{ik} определяется моментом сил, действующем на единицу объема суспензии,

в следующем виде $G'_{ik} = 1/2 e_{ike} M_e$, а \vec{M} равно $Kc(\vec{n}\vec{h})[\vec{n}\times\vec{h}]$. Тогда уравнение движения директора имеет вид

$$[\vec{n}\times\dot{\vec{n}}] = \alpha^{-1}\vec{M} + [\vec{n}\times[\vec{\Omega}_0\times\vec{n}]], \quad (6.6.2)$$

здесь $\vec{\Omega}_0 = 1/2 \text{rot } \vec{v}$, $\alpha = \alpha_{bp} n$, где α_{bp} коэффициент вращательного трения одиночной частицы, которая предполагается сферической.

На основе уравнений (6.6.1-2) рассматривается устойчивость плоского состояния свободной поверхности НЖ в горизонтальном вращающемся с угловой частотой ω магнитном поле. В состоянии покоя НЖ уравнение движения директора (6.6.2) имеет вид

$$[\vec{n}\times\dot{\vec{n}}] = \alpha^{-1} Kc(\vec{n}\vec{h}) [\vec{n}\times\vec{h}]. \quad (6.6.3)$$

Как хорошо известно еще с работы [224], уравнение (6.6.3) при $\omega\tau_0 < 1/2$, где $\tau_0 = \alpha/Kc$ - характерное время ориентационной релаксации суспензии, дает синхронное вращение частиц и поля. В сферической системе координат ϑ, φ с полярной осью в направлении вертикальной оси Z компоненты директора $\vec{n} = (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta)$ во вращающемся поле $\vec{h} = (\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$ в этом случае определяются из условий $\vartheta = \vartheta_0 = \pi/2$, $\varphi = \varphi_0 = \omega t - \beta$, где угол β находится из уравнения $\omega\tau_0 = 1/2 \sin 2\beta$.

Рассмотрение, проведенное ниже, относится к случаю синхронного вращение частиц и поля.

Пусть НЖ в состоянии покоя занимает область $z < 0$, а форма возмущенной поверхности определяется уравнением $Z = \zeta(x, t)$. Уравнения движения для малых возмущений поля скоростей НЖ $\vec{v} = (v_x(x, z), v_y(x, z), v_z(x, z))$ в таком случае будут иметь следующий вид $(\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2)$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial M'_y}{\partial z}; \\ \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} &= \eta \Delta v_y + \frac{1}{2} \frac{\partial M'_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial M'_z}{\partial x}; \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z + \frac{1}{2} \frac{\partial M'_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

Уравнение (6.6.2) для малых возмущений состояния директора во вращающемся поле ($\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + \mathcal{V}'$; $\varphi = \varphi_0 + \varphi'$) дает

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}' &= -\frac{1}{\tau_1} \varphi' + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x}; \\ \dot{\mathcal{V}}' &= -\frac{1}{\tau} \mathcal{V}' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial z} \sin \varphi_0, \end{aligned} \quad (6.6.5)$$

где $\tau = \tau_0 / \cos^2 \beta$ и $\tau_1 = \tau_0 / \cos 2\beta$ характерные времена релаксации директора во вращающемся поле. Отметим, что $\tau_1 \rightarrow \infty$ при приближении к точке срыва режима синхронного вращения.

Уравнения (6.6.4) и (6.6.5) дополняются системой граничных условий на невозмущенной свободной поверхности $Z = 0$, которая включает: 1) кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = v_z, \quad (6.6.6)$$

2) условия исчезновения касательных напряжений

$$\eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) - \frac{1}{2} M'_y = 0; \quad \frac{1}{2} \alpha \omega \zeta' + \eta \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{1}{2} M'_x = 0, \quad (6.6.7)$$

3) условие для нормальной компоненты тензора напряжений

$$-p + 2\eta \frac{\partial v_z}{\partial z} = \sigma \zeta'' - \rho g \zeta. \quad (6.6.8)$$

Для решения данной линейной краевой задачи воспользуемся тем, что характерное гидродинамическое время диффузии вихря $\tau_r = l/\sqrt{\nu K^2}$ гораздо больше периода вращающегося поля и характерного времени ориентационной релаксации. Это позволяет при нахожде-

нии решения уравнений (6.6.5) считать скорость движения жидкости постоянной. Тогда получается $\psi' = \frac{1}{2} \tau_{\perp} \frac{\partial v_{y-}}{\partial x}$;

$$\psi' = \left(-\frac{\omega \tau}{1+(\omega \tau)^2} \cdot \frac{1}{2} \tau \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{1}{1+(\omega \tau)^2} \cdot \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) \cos \varphi_0 +$$

$$+ \left(\frac{1}{1+(\omega \tau)^2} \cdot \frac{1}{2} \tau \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\omega \tau}{1+(\omega \tau)^2} \cdot \frac{1}{2} \tau \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right) \sin \varphi_0. \quad (6.6.9)$$

Соотношения (6.6.9) для усредненного по периоду вращающегося поля момента сил дают

$$M'_x = \frac{\alpha}{4} \frac{1-(\omega \tau)^2}{1+(\omega \tau)^2} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} \frac{\omega \tau}{1+(\omega \tau)^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right);$$

$$M'_y = \frac{\alpha}{2} \frac{\omega \tau}{1+(\omega \tau)^2} \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\alpha}{4} \frac{1-(\omega \tau)^2}{1+(\omega \tau)^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right);$$

$$M'_z = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x}. \quad (6.6.10)$$

Подставляя соотношения (6.6.10) в уравнения движения (6.6.4) и граничные условия (6.6.7), последние можем записать в следующем

виде $\int \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \tilde{\eta} \Delta v_x - f \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2};$

$$\int \frac{\partial v_y}{\partial t} = \eta_0 \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \tilde{\eta} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} + f \Delta v_x; \quad (6.6.11)$$

и $\int \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \tilde{\eta} \Delta v_z + f \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z}$

$$\frac{1}{2} \alpha \omega \zeta' + \tilde{\eta} \frac{\partial v_y}{\partial z} + f \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = 0; \quad (6.6.12)$$

$$-f \frac{\partial v_y}{\partial z} + \tilde{\eta} \frac{\partial v_x}{\partial z} - (\tilde{\eta} - 2\eta) \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0.$$

Здесь введены следующие обозначения: $\eta_0 = \eta + \alpha/4$;

$$f = \frac{\alpha}{4} \omega \tau / (1+(\omega \tau)^2); \quad \tilde{\eta} = \eta + \frac{\alpha}{8} (1-(\omega \tau)^2) / (1+(\omega \tau)^2).$$

Нестационарное решение системы (6.6.11) при граничных условиях (6.6.6), (6.6.8) и (6.6.12) находится в виде $\vec{V} =$

$= \vec{V}_0(z) \exp(\lambda t + i k x)$. В результате исключения V_{0x} и ρ для V_{0y} и V_{0z} получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left[\tilde{\eta} \frac{d^4}{dz^4} - (\rho\lambda + 2\tilde{\eta}k^2) \frac{d^2}{dz^2} + k^2(\rho\lambda + \tilde{\eta}k^2) \right] V_{0z} &= -f_{ik} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \frac{dV_{0y}}{dz}; \\ \left[\tilde{\eta} \frac{d^2}{dz^2} - (\rho\lambda + \eta_0 k^2) \right] V_{0y} &= -\frac{f_{ik}}{k^2} \left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \frac{dV_{0z}}{dz}. \end{aligned} \quad (6.6.13)$$

Если находить решение системы (6.6.13) в виде $V_{0y}, V_{0z} \sim e^{\mu z}$, то для μ^2 получаем кубическое уравнение

$$(\mu^2 - k^2) \left((\tilde{\eta}\mu^2 - (\rho\lambda + \tilde{\eta}k^2)) (\tilde{\eta}\mu^2 - (\rho\lambda + \eta_0 k^2)) + f^2 (\mu^2 - k^2) \mu^2 \right) = 0,$$

решения которого обозначаются как μ_j ($j = 1, \dots, 6$).

Если записать общее решение системы (6.6.13) в виде

$$V_{0z} = \sum_{j=1}^3 A_j \exp(\mu_j z); \quad V_{0y} = \sum_{j=1}^3 B_j \exp(\mu_j z),$$

где μ_j имеют положительные действительные части, а

$$B_j = -\frac{f_{ik} (\mu_j^2 - k^2) \mu_j A_j}{k^2 (\tilde{\eta}\mu_j^2 - (\rho\lambda + \eta_0 k^2))}$$

и представить возмущение формы свободной поверхности в виде $\zeta = \zeta_0 \exp(\lambda t + i k x)$, то система граничных условий (6.6.6), (6.6.8) и (6.6.12) дает следующую линейную однородную систему алгебраических уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов ζ_0 и A_j ($j = 1, 2, 3$)

$$\lambda \zeta_0 = \sum_{j=1}^3 A_j;$$

$$\sum_{j=2}^3 (\rho\lambda \tilde{\eta} - (\tilde{\eta}^2 + f^2) (\mu_j^2 - k^2)) A_j = \frac{1}{2} \alpha \omega k^2 f \zeta_0;$$

$$A_1 + (1 + \rho\lambda / 2\eta k^2) \sum_{j=2}^3 A_j = 0;$$

$$\frac{(\rho\lambda + 2\eta k^2)}{k} A_1 + 2\eta \sum_{j=2}^3 \mu_j A_j = -(\rho g + \sigma k^2) \zeta_0.$$

Условие разрешимости данной системы дает дисперсионное уравнение для инкрементов возмущений ($Z = \lambda / \nu k^2; A = (g + \frac{\sigma}{\rho} k^2) / 4 \nu^2 k^3$)

$$F(z) = \frac{(\mu_2 + \mu_3)}{K} (A + (1+z/2)^2) - \frac{z \tilde{\eta} \eta}{(\tilde{\eta}^2 + \tilde{f}^2)} - 1 \frac{\sqrt{(\tilde{\eta} + \eta z)(\eta_0 + \eta z)}}{\sqrt{\tilde{\eta}^2 + f^2}} = W, \quad (6.6.I4)$$

$$W = \frac{\alpha}{4} f \omega (\nu K^2)^{-1} / (\tilde{\eta}^2 + f^2).$$

В случае равной нулю вращательной вязкости это дисперсионное уравнение сводится к дисперсионному уравнению капиллярно-гравитационных волн на поверхности вязкой жидкости $A + (1+z/2)^2 = \sqrt{1+z}$.

Неустойчивость имеет место, если дисперсионное уравнение (6.6.I4) обладает хотя бы одним корнем с положительной действительной частью. Для выяснения условий, при которых это имеет место, воспользуемся принципом аргумента [225], согласно которому число нулей N аналитической функции $f(z)$ в области, ограниченной контуром C , определяется изменением $\arg f(z)$ при обходе контура C согласно следующей формуле $N = (2\pi)^{-1} \Delta \arg f(z)$. Отсюда принцип аргумента для контура, состоящего из отрезка мнимой оси $[+iR, -iR]$ и полуокружности радиуса R в правой части комплексной плоскости, в пределе $R \rightarrow \infty$ для числа корней уравнения $F(z) = W$ с положительной действительной частью дает

$$N = (2\pi)^{-1} \Delta \arg (F(it) - W) + 5/4, \quad (6.6.I5)$$

где $\Delta \arg (F(it) - W)$ равно изменению аргумента $F(z) - W$ при прохождении мнимой оси в отрицательном направлении. Оно находится в результате рассмотрения отображения $F(it)$ на комплексную плоскость. Асимптотически для этого отображения справедлив закон

$$\operatorname{Re} F(it) \cong \operatorname{Im} F(it) \cong -\frac{1}{4} \frac{t^{5/2} (\sqrt{(\tilde{\eta}/\eta)^2 + (f/\eta)^2} - f/\eta + \sqrt{(\tilde{\eta}/\eta)^2 + (f/\eta)^2} + f/\eta)}{\sqrt{2((\tilde{\eta}/\eta)^2 + (f/\eta)^2)}}$$

Асимптотические свойства при $t \rightarrow -\infty$ получаются из равенств

$$\operatorname{Re} F(-it) = \operatorname{Re} F(it); \quad \operatorname{Im} F(-it) = -\operatorname{Im} F(it).$$

Вид отображения мнимой оси $F(z)$ при некоторых значениях параметров задачи показан на рис. 6.6.I.

Из рис. 6.6.I видно, что отображение $F(it)$ мнимой оси на комплексную плоскость разбивает плоскость значений параметра W на три области - 1, 2, 3, для которых соотношение (6.6.I5) дает следующие значения для числа корней уравнения (6.6.I4) с положительной действительной частью - в области 1 - $N = 0$, 2 - $N = 1$, а в 3 - $N = 2$. Так как W положительно и действительно, то для существования инкремента с положительной действительной частью W должно принадлежать области 2. Так как $F(0) = \left(1 + \sqrt{\frac{\tilde{\eta}\eta_0}{\tilde{\eta}^2 + f^2}}\right) A$, то для наличия неустойчивости должно иметь место неравенство

$$A < \frac{\alpha}{4\eta^2} f \frac{\omega}{\nu k^2} / \left(\left(\frac{\tilde{\eta}}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{f}{\eta} \right)^2 \right) / \left(1 + \sqrt{\tilde{\eta}\eta_0 / (\tilde{\eta}^2 + f^2)} \right). \quad (6.6.I6)$$

Заметим, что проведенный анализ дисперсионного уравнения позволяет заключить, что неустойчивость имеет монотонный характер. Действительно, так как дисперсионному уравнению одновременно с Z удовлетворяет и комплексно сопряженное Z значение инкремента, то комплексные значения инкремента с положительной действительной частью должны возникать парами. Отсюда, так как при переходе значения W из области 1 в область 2 возникает лишь один корень с положительной действительной частью, следует, что мнимая часть инкремента равна нулю, т.е. неустойчивость имеет монотонный характер.

Неравенство (6.6.I6) в результате введения функции

$$F = (\omega\tau_0)^2 / \left(\left(\frac{\tilde{\eta}}{\eta} \right)^2 + \left(\frac{f}{\eta} \right)^2 \right) / \left(1 + \sqrt{\tilde{\eta}\eta_0 / (\tilde{\eta}^2 + f^2)} \right)$$

может быть преобразовано к следующему виду

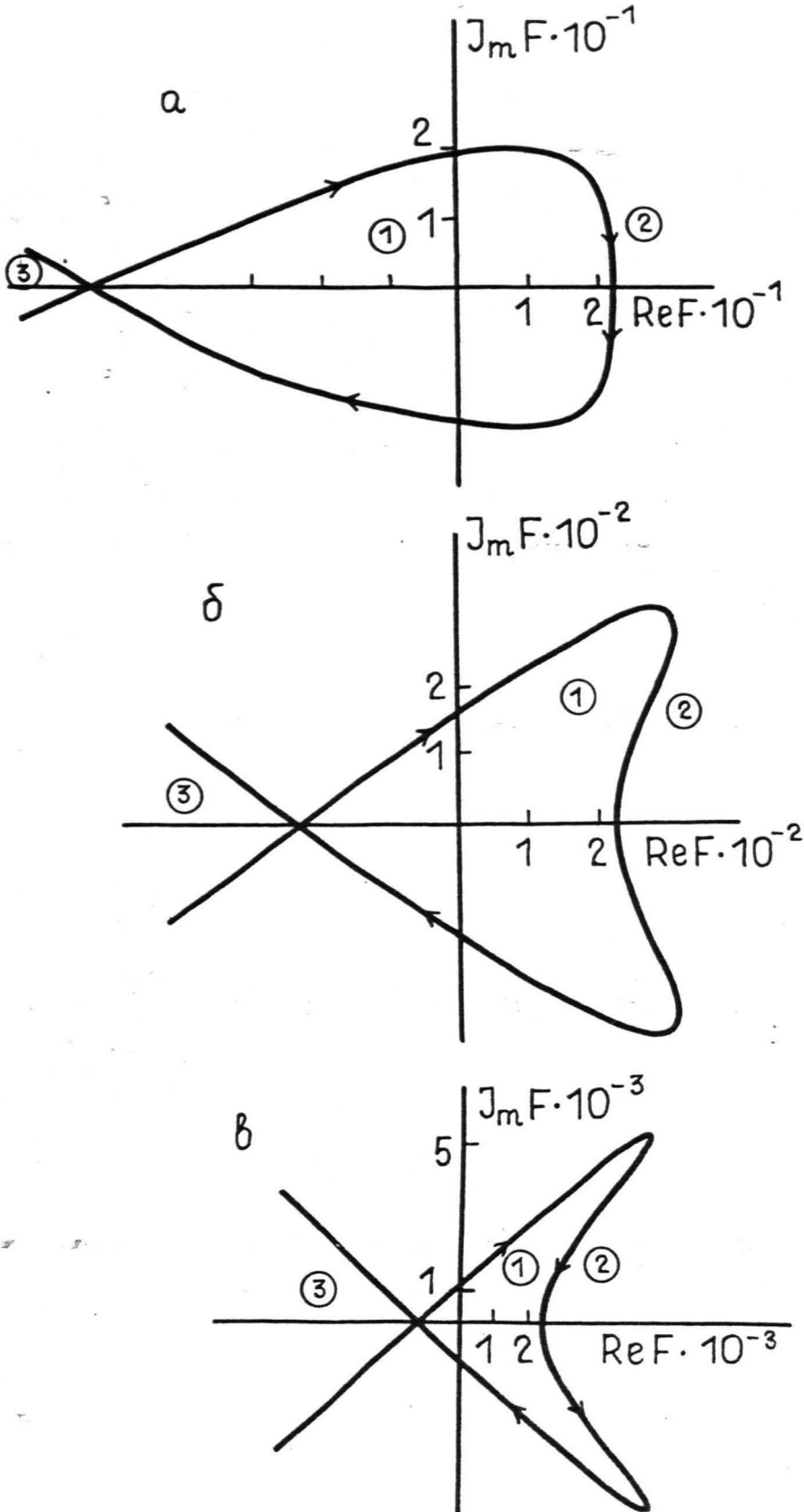


Рис. 6.6.1. Отображение $F(z)$ мнимой оси на комплексную плоскость, $\alpha / 4\eta = 1$, $\omega\tau = 0,8$.
а - $A = 10$; б - $A = 10^2$; в - $A = 10^3$.

$$\rho g k^{-1} + \sigma k \leq K c \frac{\alpha}{4\eta} F. \quad (6.6.17)$$

Функция F является возрастающей функцией частоты вращающегося поля. Она в зависимости от $\omega\tau_0$ представлена на рис. 6.6.2.

Наиболее опасной модой является мода, для которой левая часть неравенства (6.6.17) минимальна, что дает $K_* = \sqrt{\rho g / \sigma}$. Неравенство (6.6.17) позволяет оценить минимально необходимую для развития неустойчивости объемную долю ферромагнетика C_m в виде

$$K c_m = 2\sqrt{\rho g \sigma} / \max\left(\frac{\alpha}{4\eta} F(\omega\tau_0 = 1/2)\right).$$

Зависимость $\alpha/4\eta F$ от $\alpha/4\eta$ при $\omega\tau_0 = 1/2$ приведена на рис. 6.6.3. Это для C_m дает $K c_m = 2\sqrt{\rho g \sigma} / 0,11$. Отсюда в случае МЖ, K которой соответствует константе кристаллографической магнитной анизотропии магнетита 10^5 эрг/см³ и $\rho = 1$ г/см³, $\sigma = 30$ эрг/см² для минимально необходимой объемной доли твердой фазы получается 3,2 %, что соответствует весьма умеренному для МЖ значению намагниченности порядка 16 Гс. На основании этого наблюдение данного вида неустойчивости в современных МЖ представляется вполне реальным.

Остановимся вкратце на свойствах нейтрального возмущения и дадим физическую интерпретацию механизма развития неустойчивости. Движение в плоскости X, Z может быть описано функцией тока $\psi\left(v_z = \frac{\partial\psi}{\partial X}; v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)$. Тогда в случае нейтральных возмущений поверхности $\zeta = \zeta_0 \cos kx$ имеет место

$$\psi = -2\nu k A \zeta_0 (e^{\gamma_3^{(0)} z} - e^{kz}) \sin kx / (\gamma_3^{(0)} / k - 1). \quad (6.6.18)$$

Вид функции тока (6.6.18) показывает, что восходящее движение жидкости имеет место в окрестностях выпуклостей поверхности, а

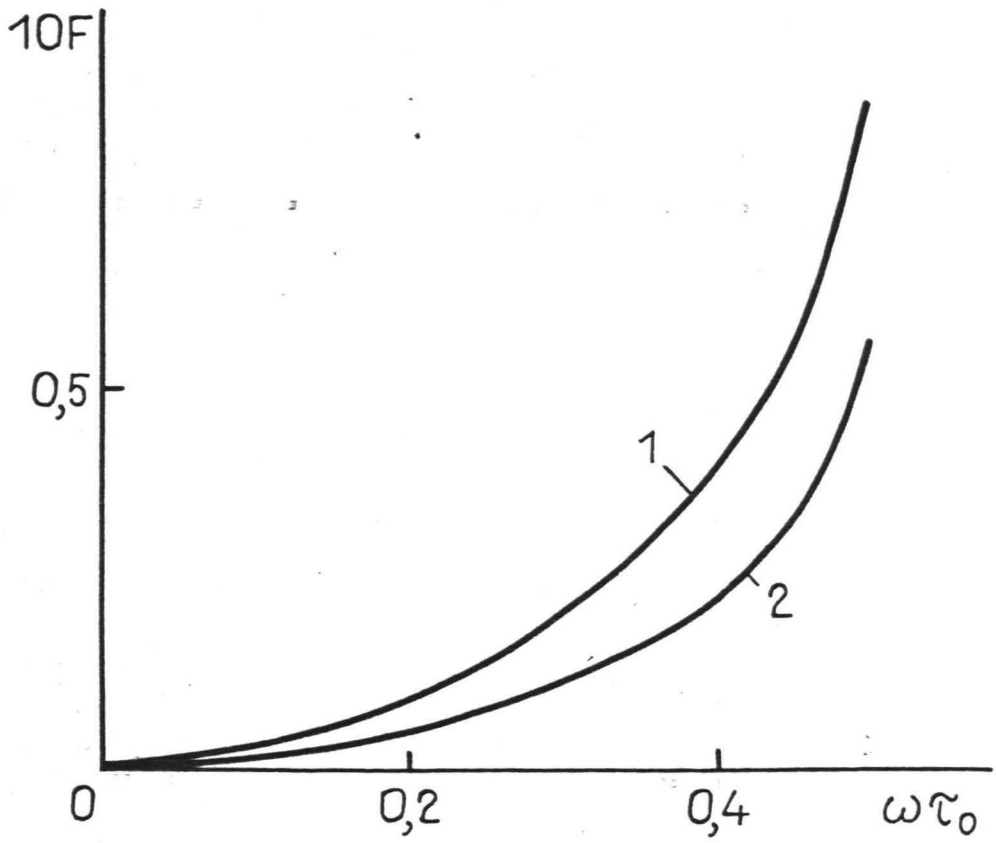


Рис. 6.6.2. Зависимость функции F от частоты вращающегося поля. 1 - $\alpha / 4\eta = 1$; 2 - $\alpha / 4\eta = 2$.

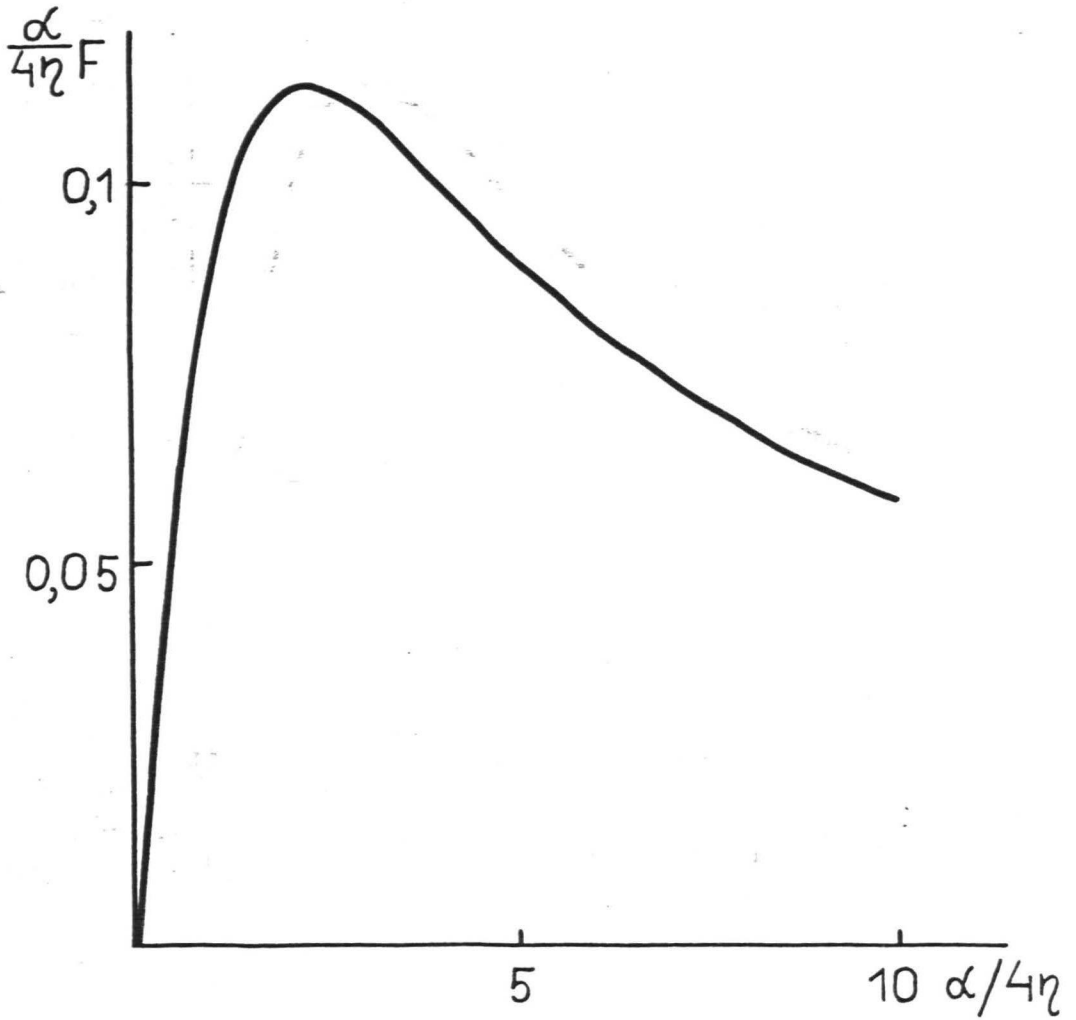


Рис. 6.6.3. Зависимость $\frac{\alpha}{4\eta} F\left(\frac{\alpha}{4\eta}, \omega\tau_0 = \frac{1}{2}\right)$ от $\alpha/4\eta$.

нисходящее в окрестностях вогнутостей. Это движение и обуславливает развитие неустойчивости. Характер линий тока, соответствующих (6.6.18), представлен на рис. 6.6.4.

Механизм возникновения ячеистого движения следующий, — при деформации свободной поверхности во вращающемся поле, аналогично случаю капли НЖ во вращающемся поле, который рассмотрен нами в работе [185], возникают тангенциальные напряжения, обусловленные внутренними вращениями, которые вызывают движение в направлении гребней возмущенной поверхности. Это движение описывается формулой

$$v_y = 2(\tilde{\eta}^2 + f^2) \left(\frac{\mu_3(0)}{K} + 1 \right) \frac{\mu_3(0)}{K} \nu k^2 A \zeta_0 e^{\mu_3(0)z} \sin kx / \eta_0 f.$$

Неоднородность данного движения в направлении оси Z приводит к отклонению направления директора от плоскости вращающегося поля, в результате чего возникает неоднородный момент сил M'_y , действующий в направлении гребней. M'_y выражается в виде

$$M'_y = 4\eta \nu k^2 A k \zeta_0 \left(\mu_3(0)/k + 1 \right) e^{\mu_3(0)z} \sin kx.$$

Неоднородность момента сил M'_y в направлении оси X и приводит к ячеистому движению, показанному на рис. 6.6.4.

Таким образом показано, что внутренние вращения могут приводить к наличию специфических механизмов гидродинамической неустойчивости. Вопрос о наблюдении подобной неустойчивости на эксперименте в настоящее время остается открытым. Имеется ряд экспериментальных работ [222], [223], в которых сообщается о развитии поверхностных структур во вращающемся поле. На возможность интерпретации результатов данных работ рассмотренным механизмом неустойчивости указывает следующие факты — I) период наблюдаемых структур соответствует длине волны $2\pi\sqrt{g/\rho g}$ наиболее

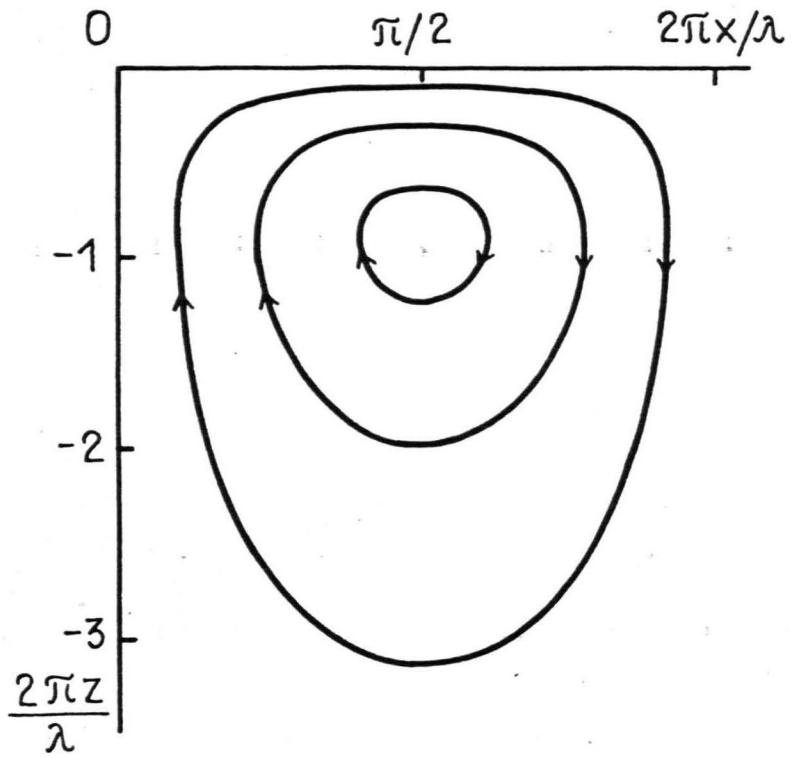


Рис. 6.6.4. Линии тока нейтральных возмущений.

опасной моды гидродинамической неустойчивости, 2) явление наблюдается для достаточно концентрированных систем, 3) на горбах деформированной поверхности наблюдается вращение в направлении вращения поля, 4) в случае околоторговых значений напряженности поля в цилиндрической кювете наблюдается образование концентрических волн.

Однако вопрос о механизме возникновения этих структур считать решенным нельзя, так как существует альтернативный механизм образования поверхностных структур во вращающемся магнитном поле - механизм параметрических колебаний.

Явление параметрического резонанса хорошо известно в механике. Значительно менее подробно оно исследовано в гидромеханике. В настоящее время известны лишь экспериментальные исследования возбуждения параметрических колебаний свободной поверхности в вертикально колеблющемся сосуде [226], в переменном электрическом поле, нормальном к свободной поверхности проводящей жидкости [227].

Разнообразные ситуации возбуждения параметрических колебаний свободной поверхности НЖ могут быть реализованы в переменных магнитных полях. Теоретическое рассмотрение условий их возбуждения в магнитных полях различной конфигурации было дано нами в работах [228], [229]. При этом для амплитуды ζ_0 моды возмущений свободной поверхности с волновым числом K в поле

$$\vec{H}_0 \text{ имеет место уравнение } \frac{d^2\zeta_0}{dt^2} + 4\nu K^2 \frac{d\zeta_0}{dt} + \left(\frac{G}{\rho} K^3 + gK\right) \zeta_0 - \frac{K}{4\pi\rho} \left[(\mu-1) \vec{H}_0 \vec{H}' + (\mu-1)^2 (\vec{H}_0 \vec{n}_0) (\vec{H} \vec{n}'_0 + \vec{H}_0 \vec{n}') \right]_K = 0, \quad (6.6.19)$$

где \vec{H}' , \vec{n}' - возмущенные величины напряженности поля и нормали к свободной поверхности, а индексом "K" обозначена фурье-компонента выражения, заключенного в скобку.

В частном случае переменного поля $(H_0 \cos \omega t, 0, 0)$, тан-

тангенциального к свободной поверхности, уравнение (6.6.19) для малых возмущений свободной поверхности приводится к уравнению типа Матье. В результате анализа последнего для критической напряженности магнитного поля $H_{кр}$ раскачки параметрических колебаний получается

$$H_{кр}^2 = 64\pi\omega(\mu+1)/(\mu-1)^2\eta^{-1} \quad (6.6.20)$$

Длина волны развивающейся структуры определяется из условия параметрического резонанса, что с учетом (6.6.20) дает

$$\frac{\sigma}{\rho}k^3 + gk + \frac{8\eta k^2\omega}{\rho} - \frac{16\eta^2 k^4}{\rho^2} = \omega^2.$$

Оценка для МЖ с параметрами $\eta = 10$ сП, $\mu = 5$, $\sigma = 30$ эрг/см², $\rho = 1$ г/см³ для критической напряженности поля $H_{кр}$ при $\omega = 314$ с⁻¹ дает значение порядка 50 Э. Длина волны λ образуемой структуры при этом составляет порядка 5 мм.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и случаи других ориентаций поля.

Факт возбуждения параметрических колебаний свободной поверхности МЖ в тангенциальном к ней переменном магнитном поле с частотой 50 Гц подтвержден в наших работах [228], [229] экспериментально. Это иллюстрируется рис. 6.6.5 и 6.6.6, на которых показаны поверхностные структуры, сфотографированные при стробоскопическом освещении с частотой 50 Гц и 100 Гц. Уменьшение периода структуры вдвое при переходе к освещению частотой 100 Гц (рис. 6.6.6) подтверждает наличие в данной структуре колебаний частотой 50 Гц.

Как видно из рис. 6.6.5 и 6.6.6, линии постоянной фазы в этом случае связаны с направлением переменного поля и поперечны ему. В этом плане данная ситуация отличается от случая вращающегося в плоскости тангенциальной свободной поверхности МЖ поля



Рис. 6.6.5. Структура свободной поверхности МЖ в переменном магнитном поле частотой 50 Гц. Частота стробоскопического освещения 50 Гц.



Рис. 6.6.6. То же при частоте стробоскопического освещения 100 Гц.

или случая переменного поля, нормального к ней. В последних случаях имеющее место вырождение в плоскости поверхности может приводить к возникновению в надкритических условиях перестройки плоской структуры в квадратную и гексагональную, аналогично тому, как это наблюдалось в работе [227] в случае переменного электрического поля, нормального к свободной поверхности. Отметим, что подобная перестройка структур на свободной поверхности МЖ во вращающемся поле наблюдалась в работе [222].

Данные замечания показывают, что вполне реальным механизмом образования наблюдаемых в работах [222], [223] поверхностных структур во вращающемся поле, наряду с вышерассмотренным механизмом, обусловленным внутренними вращениями, может являться механизм раскачки параметрических колебаний. Для окончательного решения данного круга вопросов необходимо проведение дальнейших экспериментальных исследований возникновения структур при различных частотах вращающегося поля и определение изменения критической напряженности поля образования структур, а также их характеристик, с его частотой.

ВЫВОДЫ

I. Поставлена задача о апробировании и отборе моделей МЖ с внутренними параметрами состояния, характеризующими ориентационные степени свободы, путем численного моделирования. Для этого развит алгоритм численного моделирования вращательного броуновского движения частицы ферромагнетика при наличии магнитного поля и течения со сдвигом. Вычисленные на основе численных экспериментов временные корреляционные функции намагниченности покоящейся среды показывают экспоненциальный характер затухания, зависимость времени которого от напряженности магнитного поля

хорошо соответствует теоретической, ранее полученной в предположении частичного равновесия другими авторами.

2. Определенная путем численного моделирования вращательного броуновского движения частиц ферромагнетика зависимость вращательной вязкости $M\dot{\alpha}$ от скорости сдвига хорошо соответствует имеющимся данным, полученным на основе других численных методов. Проведенные численные эксперименты показывают отсутствие гистерезиса зависимости намагниченности от частоты вращающегося поля или скорости сдвига, который имеет место в моделях НЖ с внутренним моментом количества движения и намагниченностью в качестве внутренних параметров состояния. Показано, что модель НЖ с намагниченностью в качестве внутреннего параметра состояния, из имеющихся в настоящее время, наиболее адекватно соответствует данным численных экспериментов по намагничиванию коллоида ферромагнетика в течении со сдвигом как вблизи термодинамического равновесия, так и вдали от него. Состояния, близкие к термодинамическому равновесию, могут описываться на основе линейных релаксационных уравнений намагниченности, соответствующих феноменологической модели, получаемой в предположении, что выделенное направление среды определяется вектором напряженности магнитного поля. Имеющее место расхождение результатов численных экспериментов с выводами модели с намагниченностью в качестве параметра состояния коррелирует с наличием особенностей у времен релаксации намагниченности в течении со сдвигом, найденных по временным зависимостям корреляционных функций магнитного момента частицы в численном эксперименте, которые показывают качественное изменение характера броуновского движения диполя в определенной области значений скоростей сдвига. Это показывает необходимость уточнения модели $M\dot{\alpha}$ с намагниченностью в качестве внутреннего параметра состояния, получаемой в рамках приближения

эффективного поля, путем более полного описания состояния системы в ориентационном пространстве.

3. Развитый метод броуновской динамики распространен на случай исследования реологии разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц ферромагнетика в магнитном поле. Результаты численного моделирования этим методом реологии суспензии при отсутствии поля хорошо согласуются с имеющимися табличными данными и известными асимптотическими законами, полученными теоретически. Результаты численного моделирования показывают, что приращение вязкости суспензии в поле, параллельном градиенту скорости, больше чем в поле, параллельном скорости, а ее неньютоновские свойства в первом случае выражены сильнее, чем во втором. Показано, что разности нормальных напряжений с наложением поля параллельного градиенту скорости увеличиваются, а в поле, параллельном скорости, уменьшаются. Показано, что методом броуновской динамики можно получать информацию и о динамооптических явлениях в коллоидах ферромагнетиков при наличии магнитного поля.

4. Методом частичного равновесия в предположении локально равновесного магнитного состояния коллоидальных частиц ферромагнетика из уравнения для функции их распределения в ориентационном пространстве получены релаксационные уравнения намагниченности при конечном значении константы магнитной анизотропии. Показано, что в этом случае кинетика релаксации намагниченности протекает в два этапа: на первом мгновенно устанавливается значение намагниченности, соответствующее данному распределению осей магнитной анизотропии, который сопровождается медленным процессом релаксации намагниченности, связанным с изменением ориентации осей магнитной анизотропии. Получены зависимости восприимчивостей медленной и быстрой компонент намагниченности

и времен ее релаксации от напряженности магнитного поля и константы магнитной анизотропии.

5. Рассмотрены различные ситуации возникновения макроскопического движения НЖ с подвижными границами, обусловленного ориентационными процессами. В случае геометрии коаксиальных цилиндров показано, что НЖ, расположенная вне твердой свободной границы, во вращающемся в плоскости поперечной осей цилиндров поле приходит в движение в направлении, противоположном направлению вращения поля, а заключенная ею - в направлении вращения поля. Найдены моменты сил, действующие на цилиндры во вращающемся поле, в зависимости от угловых скоростей их вращения и показано, что в случае противоположных направлений вращения внутреннего цилиндра и поля при неподвижном внешнем цилиндре существует угловая скорость вращения внутреннего цилиндра, при которой действующий на него момент сил от напряженности поля не зависит. Кроме того, в этом случае при достаточно малых угловых скоростях вращения внутреннего цилиндра вращающееся поле его разгружает. Эти выводы подтверждаются результатами эксперимента. Рассмотрено движение во вращающемся магнитном поле лежащей на твердой подложке капли НЖ и в приближении теории смазки показано, что форма ее свободной поверхности и направление перемещения соответствуют представлению о ее перекатывании под действием касательных напряжений, обусловленных внутренними вращениями. Приведенные оценки скорости ее перекатывания во вращающемся магнитном поле находятся в согласии с экспериментальными результатами исследования движения лежащей капли в бегущем поле одностороннего индуктора.

6. Показано наличие неустойчивости свободной поверхности МЖ во вращающемся в горизонтальной плоскости магнитном поле,

обусловленной ориентационными эффектами. Для случая сильного магнитного поля найдена область концентраций коллоида в зависимости от его физических свойств и частоты вращения поля, в которой неустойчивость имеет место. Показано, что неустойчивость имеет монотонный характер, а нейтральные возмущения поля скоростей трехмерны. Период возникающей структуры, определяется капиллярной постоянной.

7. Показана возможность возбуждения в переменных магнитных полях параметрических колебаний свободной поверхности НК. Для случая магнитного поля, тангенциального свободной поверхности, приведены значения напряженностей поля, при которых происходит возбуждение ее параметрических колебаний. Приводятся результаты качественных экспериментов, подтверждающих возбуждение параметрических колебаний свободной поверхности МК в переменном магнитном поле. Указывается, что для выяснения причин образования поверхностных структур МК во вращающемся поле необходимы дальнейшие экспериментальные исследования.

Глава 7. ОРИЕНТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ГИДРОДИНАМИКЕ АНИЗОТРОПНЫХ И ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

7.1. Межчастичные ориентационные взаимодействия и гидродинамика анизотропных намагничивающихся жидкостей

Рассмотренные в шестой главе гидродинамические явления, обусловленные необратимыми ориентационными процессами, существенны также в гидродинамике анизотропных НЖ — жидких кристаллов и ПЖ. В настоящей главе развивается ряд новых моделей этих сред и описываются получаемые на их основе результаты.

Нематические жидкие кристаллы (НЖК) являются анизотропными жидкими средами, обладающими выделенным направлением, которое описывается единичным вектором \vec{n} , называемом директором. Динамика НЖК определяется полями скорости \vec{V} и директора \vec{n} . Подобная модель для описания движений НЖК развита Лесли и Эриксоном [230]. Вследствие существования оси анизотропии НЖК тензор его вязких напряжений определяется пятью независимыми феноменологическими коэффициентами.

Накопленный в настоящее время экспериментальный материал показывает сильную температурную зависимость феноменологических коэффициентов вязкости, которая отличается от аррениусовской характерной для простых жидкостей. Это естественно связать с их зависимостью от степени ориентационного упорядочения вытянутых молекул в направлении \vec{n} , которое в статистической теории [231], [232] нематического состояния описывается параметром ориентационного порядка S .

Попытка нахождения подобной связи феноменологическим образом впервые была предпринята в работе [233], где тензоры фено-

менологических коэффициентов вязкого переноса импульса были представлены в виде тензорных функций от тензорного аргумента - симметричного тензора второго ранга с нулевым следом, характеризующего ориентационную упорядоченность НЖК. Ограничиваясь разложением данных функций с точностью до членов второго порядка малости включительно в работе [233] получена зависимость феноменологических коэффициентов вязкости с точностью до членов второго порядка по параметру порядка. Однако коэффициенты разложения, а также его точность при этом остаются неопределенными.

Получение зависимости феноменологических коэффициентов вязкости от степени порядка возможно, как показано нами в работе [173], на основе молекулярно-кинетической теории ориентационных процессов. Позже в данном направлении различными авторами был выполнен ряд теоретических и экспериментальных исследований [183], [184], [234] - [238], подтверждающих наши выводы [173].

Получение зависимости феноменологических коэффициентов модели Лесли-Эриксона от параметра порядка возможно путем построения модели движения НЖК, параметры состояния которой содержат полную информацию о степени его ориентационной упорядоченности. Подобную информацию представляет функция распределения частиц в ориентационном пространстве $f(\vec{e})$. Осуществляя переход из данной более полной модели к модели Лесли-Эриксона, которая из всей информации об ориентационном распределении использует лишь наличие выделенного направления, получается зависимость феноменологических коэффициентов последней от параметра порядка.

Параметрами состояния в полной модели НЖК являются - удельная энтропия \tilde{S} , число молекул в единице объема n , $f(\vec{e})$, а также напряженность магнитного поля \vec{H} . Тождество Гиббса для удельной энергии \tilde{E} при этом имеет следующий вид

$$d\tilde{E} = Td\tilde{S} - pd\left(\frac{1}{n}\right) + \int \mu(\vec{e}) df(\vec{e}) d^2\vec{e} - \tilde{M}d\vec{H} \quad (7.1.1)$$

Законы сохранения и баланса для рассматриваемой модели формулируются в следующем виде:

1) закон сохранения числа частиц $n \frac{df(\vec{e})}{dt} = -n \vec{K}_e(\vec{J}_e)$ предполагает изменение числа частиц с единичным вектором внутри данного телесного угла в результате потока \vec{J}_e в ориентационном пространстве, $\vec{K}_e = [\vec{e}_x \partial/\partial \vec{e}]$,

2) закон сохранения импульса $nm \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x_k}$,

3) закон сохранения момента импульса, который в пренебрежении собственным моментом импульса молекул НМК, заключается в условии симметрии тензора напряжения $\phi_{ik} = \phi_{ki}$,

4) закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} n\tilde{E} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{nm\vec{v}^2}{2} + \text{div} \vec{j}_E = -\vec{M} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

5) закон баланса энтропии $n \frac{d\tilde{S}}{dt} + \text{div} \vec{j}_S = R$.

Предполагая для потока энергии

$$\vec{j}_{EK} = \left(n\tilde{E} + \frac{nmv^2}{2}\right)v_k + j_k^q + v_i p - v_i \phi'_{ik},$$

где $\vec{j}_q = T\vec{j}_S$ поток тепла, ϕ_{ik} - тензор вязких напряжений, для необратимого производства энтропии, при учете уравнений магнитостатики для непроводящей среды $\text{div} \vec{B} = 0$ и $\text{rot} \vec{H} = 0$, получаем

$$R = -\frac{\vec{j}_q \nabla T}{T^2} + \frac{1}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \phi'_{ik} - \frac{n}{T} \int \vec{J}_e \vec{K}_e \mu_e d^2\vec{e}. \quad (7.1.2)$$

Полный тензор напряжений ϕ_{ik} при этом равен

$$\phi_{ik} = -p\delta_{ik} + \phi'_{ik} + \frac{1}{4\pi} (H_i B_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik}).$$

Для преобразования выражения (7.1.2) воспользуемся вращательной инвариантностью энергии системы при одновременном враще-

нии среды и поля на один и тот же угол, которое дает

$$[\vec{M} \times \vec{H}] = -n \int f(\vec{e}) \vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e}) d^2\vec{e}.$$

В результате R можно представить в виде

$$R = -\frac{\int q \nabla T}{T^2} + \frac{1}{T} \gamma_{ik} G'_{ik} - \frac{n}{T} \int (\vec{J}_{\vec{e}} - \vec{\Omega}_0 f(\vec{e})) \vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e}) d^2\vec{e}.$$

Необходимые для замыкания уравнений выражения для G'_{ik} и $\vec{J}_{\vec{e}}$ могут быть получены в рамках предположений линейной термодинамики необратимых процессов [200] о линейной зависимости между термодинамическими потоками G'_{ik} и $n(\vec{J}_{\vec{e}} - \vec{\Omega}_0 f(\vec{e}))$ и термодинамическими силами $\frac{1}{T} \gamma_{ik}$ и $\frac{1}{T} \vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e})$. Вследствие наличия у молекул выделенного направления \vec{e} феноменологические коэффициенты данных соотношений являются тензорами инвариантными относительно вращений вокруг оси симметрии молекулы \vec{e} и преобразования $\vec{e} \rightarrow -\vec{e}$. В результате с учетом перекрестных эффектов между истинным симметричным тензором второго ранга G'_{ik} и аксиальным вектором $\vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e})$ феноменологические законы имеют вид

$$G'_{ik} = \int f(\vec{e}) L_{ikmn}^{ss}(\vec{e}) \gamma_{mn} d^2\vec{e} + \int L_{ikl}^{sa}(\vec{e}) (-\vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e})) d^2\vec{e} \quad (7.1.3)$$

и

$$n(\vec{J}_{\vec{e}} - \vec{\Omega}_0 f(\vec{e}))_e = -n \alpha^{-1} f(\vec{e}) (\vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e}))_e + L_{lik}^{as}(\vec{e}) \gamma_{ik}. \quad (7.1.4)$$

Так как термодинамические силы γ_{ik} и $-\vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e})$ обладают различной четностью относительно обращения времени, то соотношения взаимности Онсагера [200] дают $L_{ikl}^{sa} = -L_{lik}^{as}$.

Для тензоров феноменологических коэффициентов при этом справедливы следующие общие выражения

$$L_{ikmn}^{ss} = \eta (\delta_{im} \delta_{kn} + \delta_{in} \delta_{km}) + \beta_1 e_i e_k e_m e_n + \frac{1}{2} \beta_2 \times \\ \times (e_i e_m \delta_{kn} + e_i e_n \delta_{km} + e_k e_m \delta_{in} + e_k e_n \delta_{im}) + \beta_3 (e_i e_k \delta_{mn} + e_n e_m \delta_{ik});$$

$$L_{e_{ik}}^{as} = -n\gamma_1(e_i e_{kpl} e_p + e_k e_{ipl} e_p) f(\vec{e})$$

С учетом феноменологических законов (7.1.3) и (7.1.4) законы вязкого переноса и переноса частиц в ориентационном пространстве будут иметь следующий вид

$$\frac{df(\vec{e})}{dt} = -\vec{K}_{\vec{e}}(\Omega_0 f(\vec{e})) + 2\gamma_1 \vec{K}_{\vec{e}}([\gamma \cdot \vec{e}] \times \vec{e}) f(\vec{e}) + \alpha^{-1} \vec{K}_{\vec{e}}(f(\vec{e}) \vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e})) \dot{\vec{e}} \quad (7.1.5)$$

$$\dot{\sigma}'_{ik} = \int f(\vec{e}) L_{ikmn}^{ss}(\vec{e}) \gamma_{mn} d^2\vec{e} - n\gamma_1 \int e_i e_k \vec{K}_{\vec{e}}(f(\vec{e}) \vec{K}_{\vec{e}} \mu(\vec{e})) d^2\vec{e}; \quad (7.1.6)$$

$$\vec{\sigma}' = [\vec{M} \times \vec{H}] \quad (7.1.7)$$

Позже соотношения (7.1.5-7), полученные нами [173], были подтверждены другим методом в работе [236] для частного случая $2\gamma_1 = (p^2 - 1)/(p^2 + 1)$, где p отношение полуосей эллипсоида, представляющего молекулу. Кроме того, в работе [236] рассматривается случай, когда феноменологические коэффициенты β_1 , β_2 , β_3 равны нулю. Подобную модель можно назвать укороченной.

Конкретные количественные заключения на основании рассматриваемой модели могут быть получены, если известно уравнение состояния для химического потенциала во внутреннем ориентационном пространстве. Наибольшую известность тут в настоящее время имеет модель Майера-Саупе [231], [232], представляющая собой вариант модели самосогласованного поля в приложении к анизотропным жидкостям. В рамках данной модели уравнение состояния для химического потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \mu(\vec{e}) = \mu_0(n, T, H) + kT \ln f(\vec{e}) - \frac{1}{2} \Delta \chi H^2 (\vec{e} \cdot \vec{h})^2 - \phi(n, T) (e_i e_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}) \times \\ \times \int (e'_i e'_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}) f(\vec{e}') d^2\vec{e}'. \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

$$V(\vec{e}, f) = -\phi(e_i e_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}) \int (e'_i e'_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}) f(\vec{e}') d^2\vec{e}'$$

является самосогласованным потенциалом НЖК в ориентационном пространстве.

При отсутствии магнитного поля условие равновесия $\mu(\vec{e}) = \text{const}$ в ориентационном пространстве дает интегральное уравнение для определения $f(\vec{e})$ в виде

$$f(\vec{e}) = Q^{-1} \exp(\mathcal{G}/kT (e_i e_k - \frac{1}{3} \delta_{ik})) \int (e'_i e'_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}) f(\vec{e}') d^2 \vec{e}', \quad (7.1.9)$$

которое сводится к нелинейному уравнению для параметра ориентационного порядка: $S = (3F' - F)/2F$,

(7.1.10)

где $F(x)$ функция, определяемая интегралом $F(x) = \int \exp x (\vec{e} \vec{n})^2 d^2 \vec{e}$, $x = \mathcal{G}S/kT$. При этом второй момент функции распределения выражается через параметр порядка в виде

$$\int (e_i e_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}) f(\vec{e}) d^2 \vec{e} = S (n_i n_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}).$$

Нематическая фаза ЖК соответствует нетривиальным решениям уравнения (7.1.10), которое существует при достаточно больших значениях параметра \mathcal{G}/kT .

Если пренебречь малым изменением удельного объема при фазовом переходе нематик-изотропная жидкость, то условие равенства свободных энергий изотропной и анизотропной фаз для температуры фазового перехода дает $\mathcal{G}/kT_{NI} = 6,81$, значение параметра порядка при этом $S_C = 0,43$. Температурная зависимость параметра порядка в модели Майера-Саупе показана на рис. 7.1.1.

Как следует из соотношений (7.1.6-7), напряжения в сдвиговом течении НЖК определены, если известна функция распределения $f(\vec{e})$, которая находится как решение нелинейного дифференциального уравнения (7.1.5). Последнее может быть найдено методом, аналогичным методу Чепмена-Энсконга кинетической теории газов.

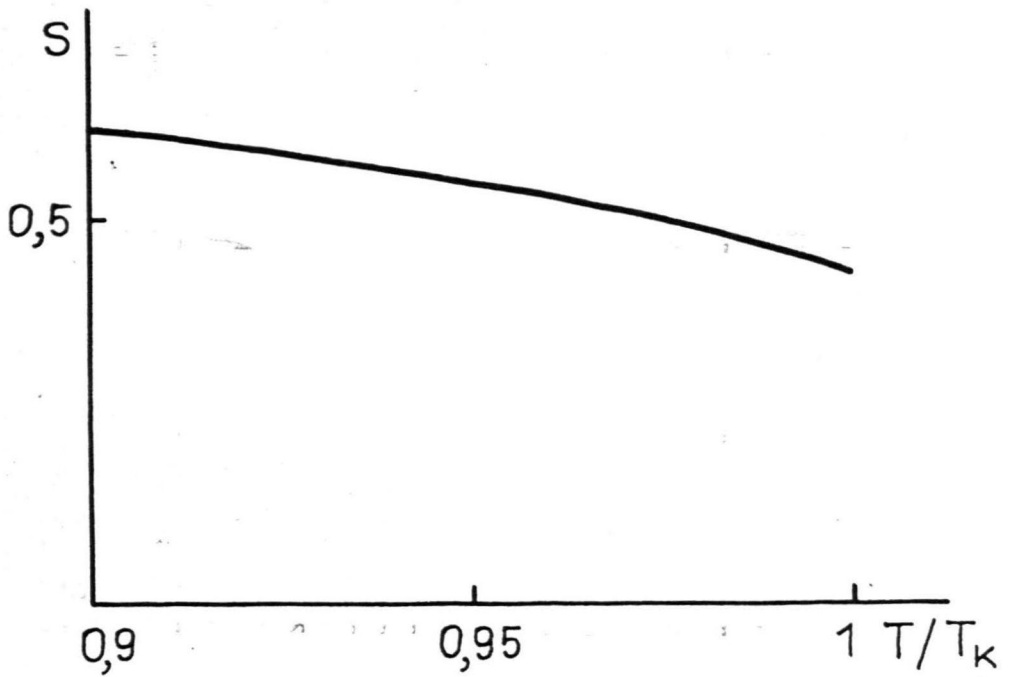


Рис. 7.1.1. Зависимость параметра порядка от температуры в модели самосогласованного поля Майера-Сауле.

Протекающие в ориентационном пространстве процессы релаксации определяются следующими временами - временем порядка броуновского времени ориентационной релаксации $\tilde{\tau}_0 \sim \alpha/kT$ и гидродинамическими временами, характеризующими времена движения директора порядка $\tilde{\tau}_r^{-1} \sim |\gamma|$ и $\Delta \chi H^2/\alpha$. Так как $\tilde{\tau}_0 \ll \tilde{\tau}_r$, то решение уравнения находится в виде $f = f_0(\vec{n}(t/\tilde{\tau}_r), t/\tilde{\tau}_0) + \frac{\tilde{\tau}_0}{\tilde{\tau}_r} \times f_1(\vec{n}(t/\tilde{\tau}_r), t/\tilde{\tau}_0)$, где временная зависимость функции распределения имеет двойкий характер - явный с характерным временем порядка времени молекулярной ориентационной релаксации $\tilde{\tau}_0$ и неявный посредством зависимости директора \vec{n} от времени на гидродинамических масштабах времени порядка $\tilde{\tau}$. При этом f_0 на временах $t > \tilde{\tau}_0$ является термодинамически равновесной функцией распределения НЖК, определяемое решением интегрального уравнения (7.1.9).

В таком случае для f_1 получается дифференциальное уравнение

$$(\tilde{t} = t/\tilde{\tau}_0; \vec{\omega} = (\vec{\omega}_0 + 2\gamma_1[\vec{e} \times (\gamma \cdot \vec{e})] + \Delta \chi H^2(\vec{e} \cdot \vec{h})[\vec{e} \times \vec{h}]/kT)\tilde{\tau}_r/\tilde{\tau}_0)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \vec{n}} \vec{n} + \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{t}} = -\vec{K}_{\vec{e}}(\vec{\omega} f_0) + \vec{K}_{\vec{e}}(\vec{K}_{\vec{e}} f_1 + f_0 \vec{K}_{\vec{e}}(V_1/kT) + f_1 \vec{K}_{\vec{e}}(V_0/kT)),$$

здесь $V_1 = V(\vec{e}, f_1)$, $V_0 = V(\vec{e}, f_0)$. Так как в настоящем случае нас интересуют медленные сдвиговые течения, то явной зависимостью функции распределения от времени пренебрегается.

Представление о различии двух характерных времен ориентационной релаксации является центральным при выводе уравнений модели Лесли-Эриксона из молекулярно-кинетической теории и было введено нами [173].

В квазиравновесном приближении ($\frac{\partial f_1}{\partial \tilde{t}} = 0$) нахождение функции распределения f_1 сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения

$$\vec{K}_{\vec{e}}(\vec{K}_{\vec{e}}f_1 + f_0 \vec{K}_{\vec{e}}(V_1/kT) + f_1 \vec{K}_{\vec{e}}(V_0/kT)) = \vec{K}_{\vec{e}}(\vec{\omega}_{f_0}) + \frac{\partial f_0}{\partial \vec{n}} \vec{n}. \quad (7.1.II)$$

Необходимым условием разрешимости уравнения (7.1.II) является условие ортогональности неоднородной части решению однородного сопряженного уравнения. Если представить $f_1 = g f_0$ и воспользоваться уравнением для равновесной функции распределения $\vec{K}_{\vec{e}}f_0 + f_0 \vec{K}_{\vec{e}}V_0/kT = 0$, то уравнение (7.1.II) можно записать в следующем виде

$$\hat{L}g = \vec{K}_{\vec{e}}(f_0 \vec{K}_{\vec{e}}g + f_0 \vec{K}_{\vec{e}}(V(\vec{e})g f_0)/kT) = \vec{K}_{\vec{e}}(\vec{\omega}_{f_0}) + \frac{\partial f_0}{\partial \vec{n}} \vec{n}. \quad (7.1.I2)$$

Сопряженный оператору \hat{L} оператор \hat{L}^+ имеет вид

$$L^+ \varphi = \vec{K}_{\vec{e}}(f_0 \vec{K}_{\vec{e}}\varphi) + f_0 V(\vec{e}/\vec{K}_{\vec{e}}(f_0 \vec{K}_{\vec{e}}\varphi))/kT.$$

Вводя функцию $\psi = \vec{K}_{\vec{e}}(f_0 \vec{K}_{\vec{e}}\varphi)$, уравнение $L^+ \varphi = 0$ можем записать в виде

$$\psi = -f_0 V(\vec{e}/\psi)/kT. \quad (7.1.I3)$$

Для нахождения линейно независимых решений уравнения (7.1.I3) воспользуемся вырожденностью состояния термодинамического равновесия НЖК относительно направлений директора \vec{n} , из которого следует, что если f_0 является решением уравнения для функции распределения в состоянии термодинамического равновесия, то им является и $f_0 + \vec{\beta} \vec{K}_{\vec{n}} f_0$, где $\vec{\beta}$ вектор угла инфинитезимального поворота \vec{n} . Отсюда следует, что

$$\vec{\beta}(\vec{K}_{\vec{e}} \vec{K}_{\vec{n}} f_0 + \vec{K}_{\vec{n}} f_0 \vec{K}_{\vec{e}} V_0/kT + f_0 \vec{K}_{\vec{e}} V(\vec{e}/\vec{K}_{\vec{n}} f_0)/kT) = 0.$$

Так как $\vec{K}_{\vec{n}} f_0 = -\vec{K}_{\vec{e}} f_0$, то это соотношение $(\vec{K}_{\vec{e}} V_0(\vec{e}|f_0) = V_0(\vec{e}|\vec{K}_{\vec{e}} f_0))$ дает $\vec{\beta} \vec{K}_{\vec{e}}(\vec{K}_{\vec{e}} f_0 + f_0 \vec{K}_{\vec{e}}(V(\vec{e}|\vec{K}_{\vec{e}} f_0)/kT)) = 0$.

Отсюда видно, что уравнение $\psi + f_0 V(\vec{e}|\psi)/kT = 0$ имеет решение $\vec{\beta} \vec{K}_{\vec{e}} f_0$.

Таким образом, собственной функцией с нулевым собственным значением сопряженного оператора L^+ является решение уравнения $\vec{K}_{\vec{e}}(f_0 \vec{K}_{\vec{e}} \varphi) = \beta \vec{K}_{\vec{e}} f_0$, которое с учетом $\vec{K}_{\vec{e}} f_0 = -f_0 \vec{K}_{\vec{e}} V_0 / kT$ может быть записано в следующем эквивалентном виде

$$\vec{K}_{\vec{e}}^2 \varphi - \vec{K}_{\vec{e}} V_0 / kT \cdot \vec{K}_{\vec{e}} \varphi = -\beta \vec{K}_{\vec{e}} V_0 / kT. \quad (7.1.14)$$

Уравнение (7.1.14) в сферической системе координат ϑ, α с полярной осью в направлении директора выглядит следующим образом

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{kT} \frac{dV_0}{d\vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} = (\beta_x \sin \alpha - \beta_y \cos \alpha) \times \frac{1}{kT} \frac{dV_0}{d\vartheta}. \quad (7.1.15)$$

Решение уравнения (7.1.15), разделяя переменные, находится в виде $\varphi = (\beta_x \sin \alpha - \beta_y \cos \alpha) h(\vartheta)$, где h удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} (\sin \vartheta \frac{dh}{d\vartheta}) - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} h - \frac{1}{kT} \frac{dV_0}{d\vartheta} \frac{dh}{d\vartheta} = \frac{1}{kT} \frac{dV_0}{d\vartheta}. \quad (7.1.16)$$

Необходимое условие разрешимости дифференциального уравнения (7.1.12) может быть записано в следующем виде.

$$\int \varphi (\vec{K}_{\vec{e}} (\vec{\omega} f_0) + \frac{\partial f_0}{\partial \vec{n}}) d^2 \vec{e} = 0.$$

Это соотношение дает уравнение движения директора модели Лесли-Эриксона, которое, осуществляя простые алгебраические преобразования, может быть записано в следующем виде

$$([\vec{n} \times \dot{\vec{n}}] - \tau_r [\vec{n} \times [\vec{\Omega}_0 \times \vec{n}]]) \int f_0 \vec{K}_{\vec{e}} \varphi d^2 \vec{e} - 2\tau_r \gamma_1 S \vec{\beta} [\vec{n} \times \gamma \cdot \vec{n}] - \Delta \alpha H^2 \tau_r S \vec{\beta} [\vec{n} \times \vec{h}] (\vec{n} \vec{h}) / \alpha = 0.$$

Для расчета коэффициентов уравнения директора необходимо рассчитать интеграл $\int f_0 \vec{K}_{\vec{e}} \varphi d^2 \vec{e}$. Он преобразуется к следующему эквивалентному виду

$$-\frac{1}{2} \vec{\beta} \int f_0 \left(\frac{dh}{d\vartheta} + \text{ctg} \vartheta h \right) d^2 \vec{e}. \quad (7.1.17)$$

Решение уравнения (7.1.16) находим методом Галеркина, ортогонализируя невязку при помощи равновесной функции распределения f_0 . Ограничиваясь первым членом разложения Галеркина $h = A_2^1 \times \sin 2\vartheta$, в результате интегрирования по частям при учете соотношения $\frac{df_0}{d\vartheta} = -\frac{1}{kT} f_0 \frac{dV_0}{d\vartheta}$ для неопределенного коэффициента A_2^1 получается

$$A_2^1 = -S / ((S+2)/3 - 2S/x) / 2.$$

Если подставить найденное выражение для функции h в интеграл (7.1.17), то в силу произвольности $\vec{\beta}$ получается уравнение директора в следующем окончательном виде $(\vec{N} = \frac{d\vec{n}}{dt} - [\vec{\Omega}_0 \times \vec{n}])$

$$[\vec{n} \times \vec{N}] \frac{S^2}{((S+2)/3 - 2S/x)} - 2\gamma_1 S [\vec{n} \times \gamma \cdot \vec{n}] - \frac{\Delta \chi H^2}{\alpha} S(\vec{n} \cdot \vec{h}) [\vec{n} \times \vec{h}] = 0 \quad (7.1.18)$$

Уравнение (7.1.18) было получено нами в работе [173]. При этом способ его получения несколько отличался от изложенного выше. В работе [173] первая поправка функции распределения f_1 находилась в предположении частичного равновесия в ориентационном пространстве, которое заключается в условии экстремальности свободной энергии при фиксированном значении тензора анизотропии, т.е. $\mu(\vec{e}) = \lambda_{ik} (e_i e_k - \frac{1}{3} \delta_{ik})$. Это условие дает неоднородное интегральное уравнение с симметричным ядром, условие разрешимости которого налагает ограничения на смешанные компоненты тензора эффективного поля $\beta_i n_k \lambda_{ik}$. Данное условие при использовании уравнения переноса в ориентационном пространстве (7.1.5) приводит к уравнению движения директора (7.1.18).

Вывод уравнения движения директора (7.1.18) из молекулярно-кинетической теории показывает, что допущенные при его получении приближения связаны с приближенным характером решения дифференциального уравнения (7.1.16). Коэффициент при первом члене урав-

нения (7.I.18) может быть уточнен путем учета дальнейших членов галеркинского разложения решения уравнения (7.I.16).

Позже вывод уравнения движения директора из молекулярно-кинетической теории рассматривался также в работе [236]. Полученные там в частном случае $\vec{n} = 0$ результаты подтверждают наши выводы. Необходимо однако отметить, что в работе [236] зависимость коэффициента при первом члене уравнения (7.I.18) от параметра порядка, определяемая соотношением (7.I.17), при этом остается неопределенной.

Так как соотношения Максвелла для уравнения Гиббса (7.I.1) дают $[\vec{M} \times \vec{H}] = \Delta \chi n S H^2 (\vec{n} \cdot \vec{h}) [\vec{n} \times \vec{h}]$, то уравнение движения директора (7.I.18) позволяет выразить антисимметричную часть тензора вязких напряжений

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik}{}^a = \frac{1}{2} e_{ikl} [\vec{M} \times \vec{H}]_l = \frac{\alpha S^2 n}{2((S+2)/3 - 2S/\chi)} (n_i N_k - n_k N_i) - \\ - 2\gamma_1 n S (n_i \gamma_{kn} n_n - n_k \gamma_{in} n_n). \end{aligned} \quad (7.I.19)$$

Воспользовавшись уравнением для f_1 соотношение (7.I.6) для симметричной части тензора вязких напряжений может быть преобразовано к следующему виду

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik}{}^s = \int f(\vec{e}) L_{ikmn}^{ss}(\vec{e}) \gamma_{mn} d^2 \vec{e} - n \gamma_1 \alpha S (N_i n_k + N_k n_i) + \\ + 2n \alpha \gamma_1^2 \int (e_i \gamma_{kn} e_n + e_k \gamma_{in} e_n - 2e_i e_k e_n e_m \gamma_{nm}) f_0 d^2 \vec{e}. \end{aligned}$$

Необходимые для расчета этого выражения моменты функции распределения находятся согласно соотношениям (П.4.5), (П.4.6). Отсюда для $\sigma'_{ik}{}^s$, опуская несущественную для случая несжимаемой среды изотропную часть, получается

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik}{}^s = n \gamma_1^2 \alpha \left(\frac{2(1-S)}{3} + \frac{S}{\chi} \right) \gamma_{ik} + 2n \gamma_1^2 \alpha \left(\frac{(2S+1)}{3} - \frac{5S}{2\chi} \right) (n_i \gamma_{kn} n_n + \\ + n_k \gamma_{in} n_n) - n \gamma_1^2 \alpha \left(\frac{7}{3} + \frac{5S}{3} - \frac{35S}{2\chi} \right) n_i n_k n_n n_m \gamma_{nm} - \\ - n \gamma_1 \alpha S (n_i N_k + N_i n_k). \end{aligned}$$

Это и соотношение (7.1.19) для феноменологических коэффициентов α_i модели Лесли-Эриксона, в которой тензор вязких напряжений НБК имеет вид $\hat{\sigma}'_{ik} = \alpha_1 n_i n_k n_m n_n \gamma_{nm} + \alpha_2 n_k N_i + \alpha_3 n_i N_k + \alpha_4 \gamma_{ik} + \alpha_5 n_k n_n \gamma_{in} + \alpha_6 n_i n_k \gamma_{kn}$, в результате позволяет получить

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(y)} &= -n\gamma_1^2 \alpha \left(\frac{7}{3} + \frac{5S}{3} - \frac{35S}{2x} \right); \\ \alpha_2^{(y)} &= - \left(\frac{\alpha S^2 n}{2((S+2)/3 - 2S/x)} + n\gamma_1 \alpha S \right); \alpha_3^{(y)} = \frac{\alpha S^2 n}{2((S+2)/3 - 2S/x)} - n\gamma_1 \alpha S; \\ \alpha_4^{(y)} &= n\gamma_1^2 \alpha \left(\frac{2(1-S)}{3} + \frac{S}{x} \right); \\ \alpha_5^{(y)} &= 2n\gamma_1^2 \alpha \left(\frac{(2S+1)}{3} - \frac{5S}{2x} \right) + \alpha \gamma_1 n S; \\ \alpha_6^{(y)} &= 2n\gamma_1^2 \alpha \left(\frac{(2S+1)}{3} - \frac{5S}{2x} \right) - \alpha \gamma_1 n S; \end{aligned} \quad (7.1.20)$$

В работе [238] позже проведено обобщение выражений этих коэффициентов для произвольного потенциала ориентационного взаимодействия молекул.

Как показывают соотношения (7.1.20) для полученных коэффициентов выполняется соотношение Онсагера-Пароди модели Лесли-Эриксона $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_6 - \alpha_5$.

При учете тензора феноменологических коэффициентов \lfloor^{SS} для α_i получаются следующие выражения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1^{(y)} + \frac{1}{4} \beta_1 \left(\frac{7}{3} + \frac{5S}{3} - \frac{35S}{2x} \right); \alpha_2 = \alpha_2^{(y)}; \alpha_3 = \alpha_3^{(y)}; \\ \alpha_4 &= \alpha_4^{(y)} + 2\eta + \frac{1}{4} \beta_1 \left(\frac{2(1-S)}{3} - \frac{S}{x} \right) + \frac{2}{3} \beta_2 (1-S); \\ \alpha_5 &= \alpha_5^{(y)} + \frac{1}{4} \beta_1 \left(\frac{2(S-1)}{3} + \frac{5S}{x} \right) + \beta_2 S; \\ \alpha_6 &= \alpha_6^{(y)} + \frac{1}{4} \beta_1 \left(\frac{2(S-1)}{3} + \frac{5S}{x} \right) + \beta_2 S. \end{aligned} \quad (7.1.21)$$

Соотношения Онсагера-Пароди при этом остаются без изменений.

Полученные из молекулярно-кинетической теории соотношения для феноменологических коэффициентов модели Лесли-Эриксона позволяют получить ряд нетривиальных выводов.

I. В результате использования для фиксации ориентации директора сильного магнитного поля могут быть экспериментально определены коэффициенты вязкости НЖК η_1 , η_2 , η_3 при директоре, параллельном соответственно скорости, градиенту скорости и гидродинамическому вихрю, которые через феноменологические коэффициенты α_i выражаются следующим образом

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5); \quad \eta_2 = \frac{1}{2}(-\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5); \quad \eta_3 = \frac{1}{2}\alpha_4.$$

Для разности $\eta_2 - \eta_1$ соотношения (7.I.20) при этом дают

$$\eta_2 - \eta_1 = 2\gamma_1 \alpha n S. \quad (7.I.22)$$

Этот результат, полученный нами в работе [I73], является новым и хорошо согласуется с экспериментом.

На рис. 7.I.2 показана температурная зависимость $\eta_2 - \eta_1$ экспериментально полученная в работе [I82] для НЖК - МББА. Если для данного НЖК воспользоваться экспериментальными данными зависимости параметра порядка от температуры [239], то температурная зависимость $(\eta_2 - \eta_1)/S$ в полулогарифмических координатах, за исключением непосредственной окрестности фазового перехода, изображается в согласии с (7.I.22) прямой линией. Наклон последней при этом связан с температурной зависимостью коэффициента вращательной подвижности α . Отметим, что так как для известных НЖК $\eta_2 > \eta_1$, то $\gamma_1 > 0$ в согласии с представлением об ориентирующем действии сдвигового потока на сильновытянутые частицы.

2. Из неравенства $\gamma_1 > 0$ вытекает неравенство $\alpha_2 < 0$.

Из таблицы 7.I экспериментальных значений коэффициентов

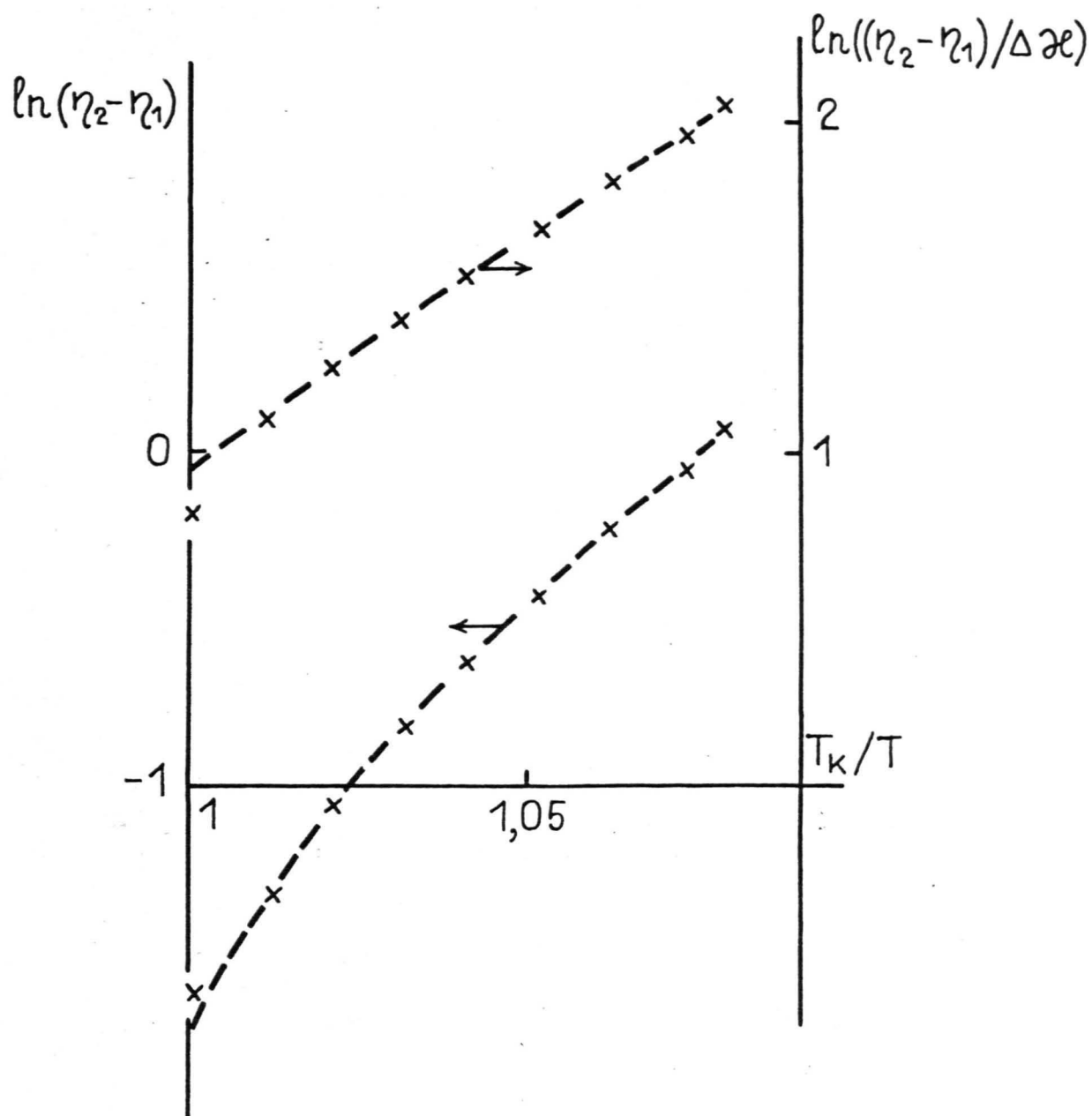


Рис. 7.1.2. Температурная зависимость анизотропии вязкости НЖК - МББА. Крестики - экспериментальные данные [182].

Таблица 7.1

Феноменологические коэффициенты вязкости МББА [182]

| $\alpha_1 (10^2 \pi)$ | α_2 | α_3 | α_4 | α_5 | α_6 |
|-----------------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|
| 6,5 \pm 4 | -77,5 \pm 1,6 | -1,2 \pm 0,1 | 83,2 \pm 1,4 | 46,3 \pm 4,5 | -34,4 \pm 2,2 |

вязкости МББА видно, что этот вывод согласуется с экспериментом. Кроме того, таблица 7.1 обращает внимание тем, что $|\alpha_3| \ll \alpha_2$.

Данный факт отражается в полученной зависимости феноменологических коэффициентов от молекулярных постоянных (7.1.20). Зависимость α_2/dn и α_3/dn от температуры T_K/T при $\gamma_1 = 0,507$ представлена на рис. 7.1.3. Температурная зависимость параметра порядка при этом определяется согласно уравнению (7.1.10). Рис. 7.1.3 показывает, что неравенство $|\alpha_3| \ll |\alpha_2|$ находит объяснение в рамках молекулярно-кинетической теории. Отметим, что использованное значение параметра γ_1 весьма близко к значению 0,5, которое следует ожидать для сильновытянутых частиц.

Выражения (7.1.20) показывают, что коэффициент α_3 может изменять знак в температурном диапазоне существования НЖК. На рис. 7.1.4 показана температурная зависимость α_2/dn и α_3/dn при $\gamma_1 = 0,462$, из которых видно, что если температура достаточно мала по сравнению с температурой фазового перехода изотропной жидкости в нематик α_3 становится положительным. Так как угол ϑ между направлениями стационарной ориентации директора в сдвиговом потоке и вектором скорости выражается в виде $\tan^2 \vartheta = \alpha_3/\alpha_2$ и $\alpha_2 < 0$, то отсюда следует, что при $\alpha_3 > 0$ стационарная ориентация директора в сдвиговом потоке невозможна. Таким образом, из полученных соотношений для феноменологических коэффициентов следует вывод о том, что возможны ситуации, когда

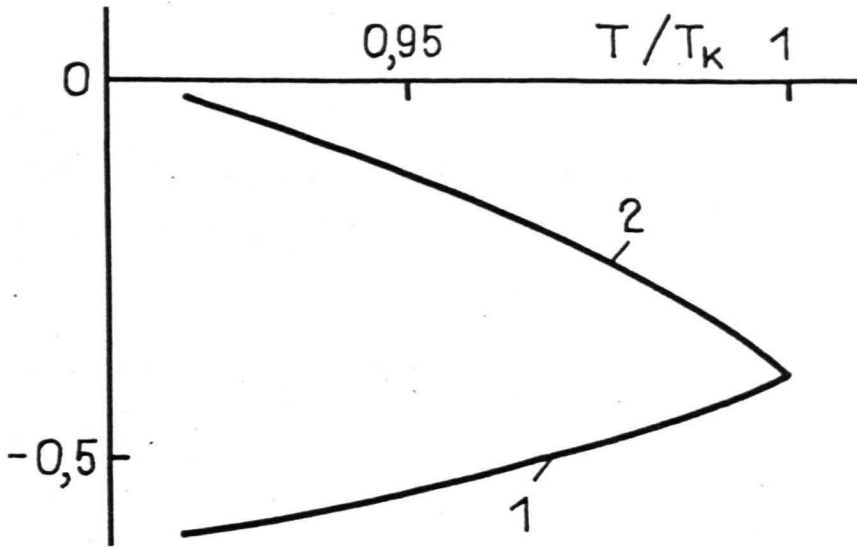


Рис. 7.1.3. Зависимость феноменологических коэффициентов α_2 и α_3 от температуры. $\mu_1 = 0,507$.
1 - α_2/dn ; 2 - $10\alpha_3/dn$.

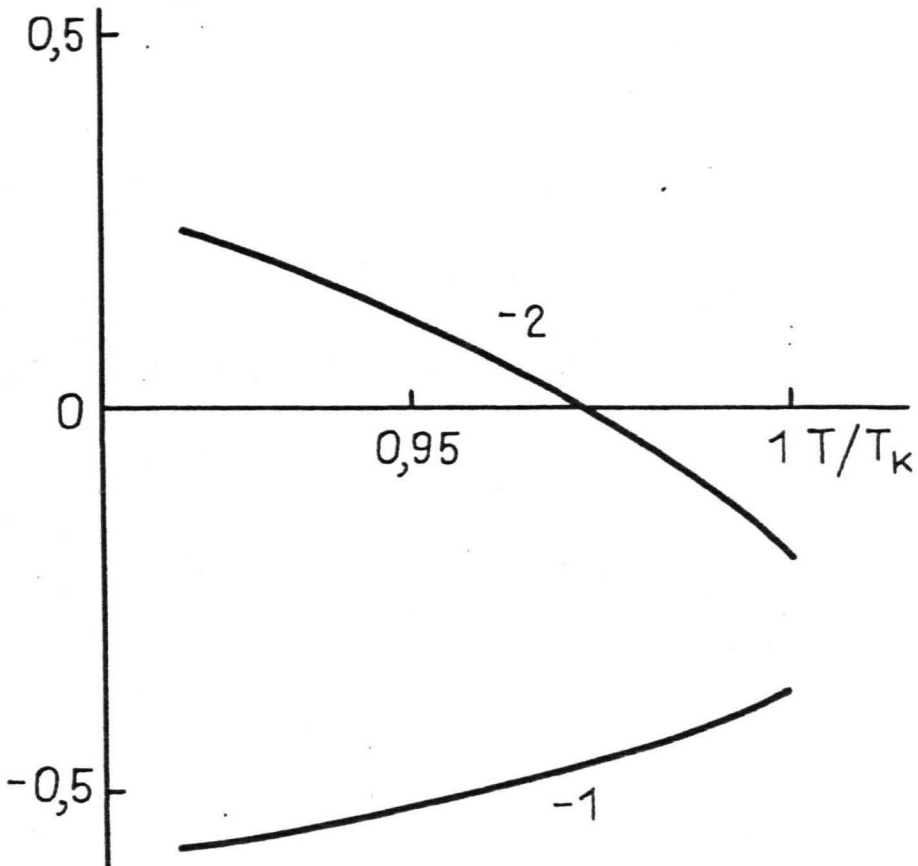


Рис. 7.1.4. Зависимость феноменологических коэффициентов α_2 и α_3 от температуры. $\mu_1 = 0,462$.
1 - α_2/dn ; 2 - $10\alpha_3/dn$.

стационарная ориентация директора в сдвиговом потоке возможна лишь при достаточной близости к температуре фазового перехода в изотропную фазу.

Именно такая ситуация наблюдается для НЖК - ХБАБ в работах [240] и [241], - директор имеет стационарную ориентацию в сдвиговом потоке при температурах не ниже 10° температуры просветления. При более низких температурах наблюдается кувыркивание директора в сдвиговом потоке. Отметим, что использованное при построении зависимостей на рис. 7.1.4 значение параметра $\gamma_1 = 0,462$ определено на основании зависимостей (7.1.20) по температуре исчезновения стационарной ориентации директора ХБАБ в сдвиговом потоке. С точки зрения представления о молекуле НЖК как эллипсоиде полученное значение γ_1 показывает правдоподобность выдвинутой в работе [240] гипотезы о том, что подобное поведение ХБАБ связано с объединением геометрически подобных молекул МБА молекул ХБАБ в пары во второе гауссовское положение под действием характерных для данных молекул диполь-дипольных сил, что приводит к уменьшению отношения полуосей эллипсоида, представляющего частицу НЖК.

3. Экспериментально зависимость вращательной вязкости ряда НЖК от температуры изучается в работе [183]. На рис. 7.1.5 показана полученная там зависимость вращательной вязкости $\eta_{вр} = \alpha_3 - \alpha_2$ МБА от температуры. Отсюда видно, что температурная зависимость вращательной вязкости отличается от аррениусовской $\ln \eta_{вр} = a/T$. Сопоставление данного рисунка с рис. 7.1.6, на котором в тех же координатах показана зависимость функции $F(S) = \frac{S^2}{(S+2)^3 - 2S/x}$ показывает, что данное отклонение можно связать с зависимостью вращательной вязкости от параметра порядка. К этому выводу приходят и авторы работы [183], производя

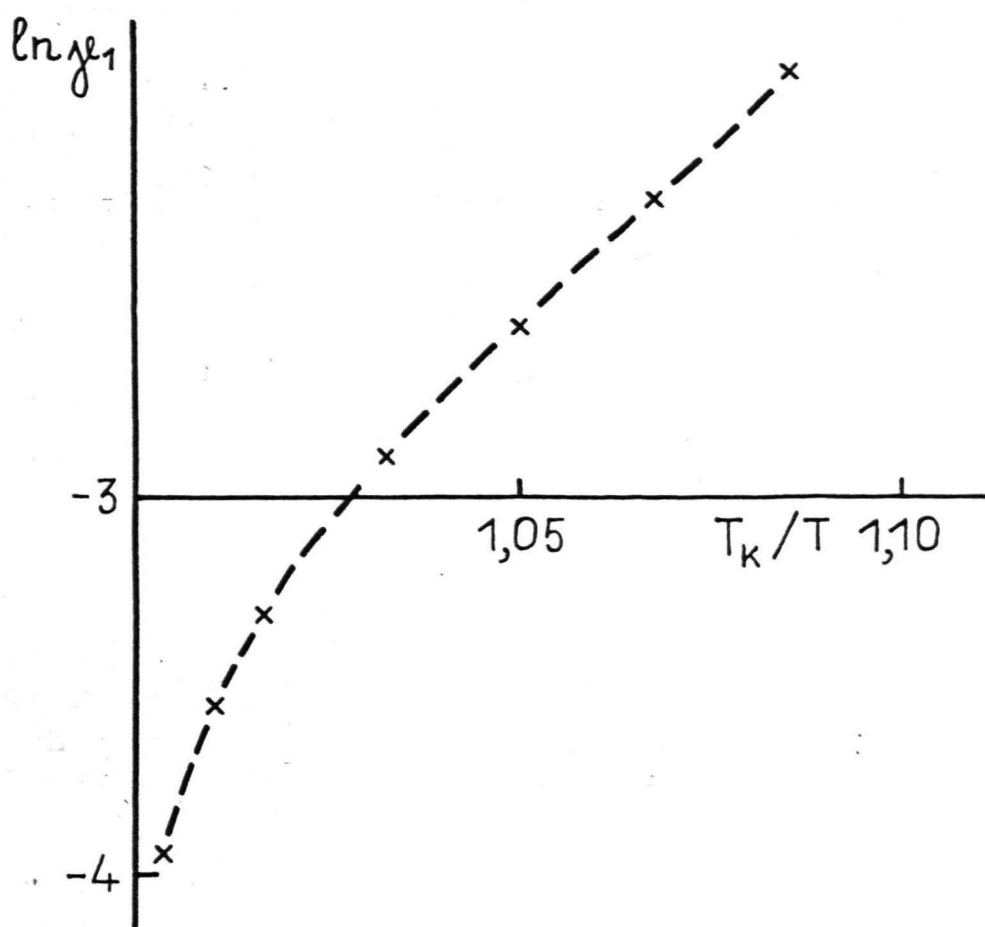


Рис. 7.1.5. Зависимость вращательной вязкости МББА от температуры. Крестики - экспериментальные значения работы [183].

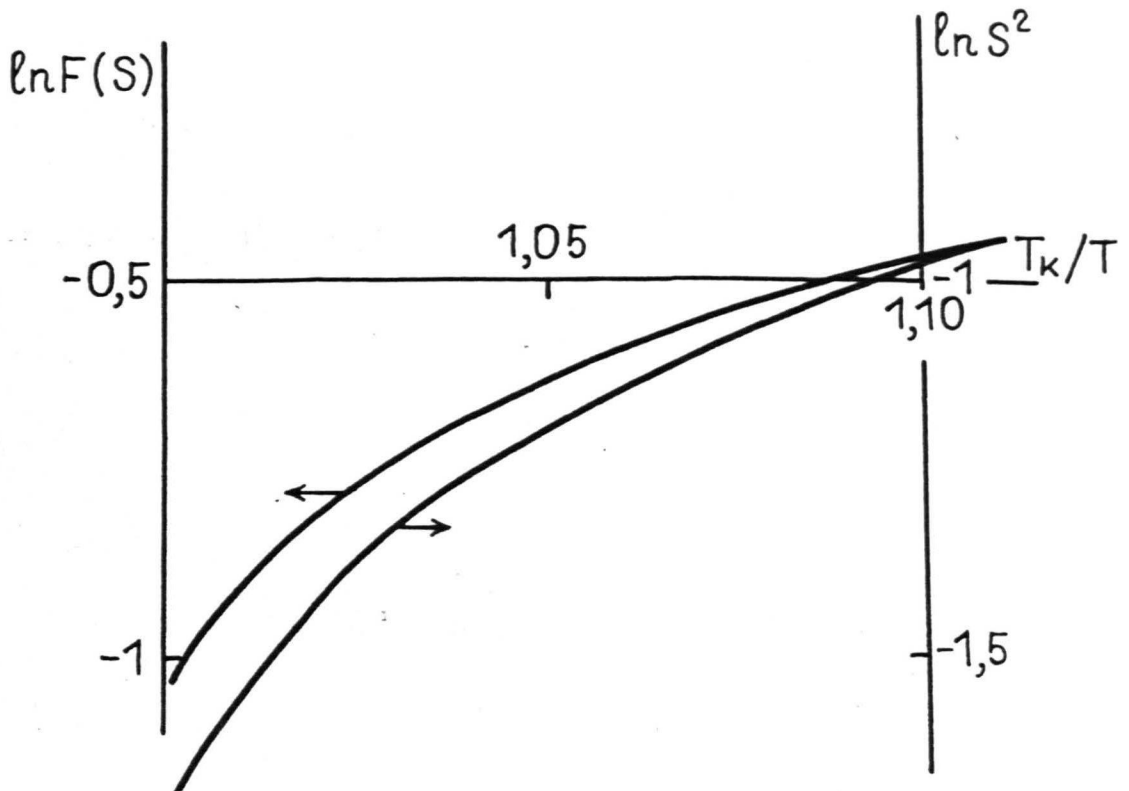


Рис. 7.1.6. Зависимость вращательной вязкости НЖК от температуры.

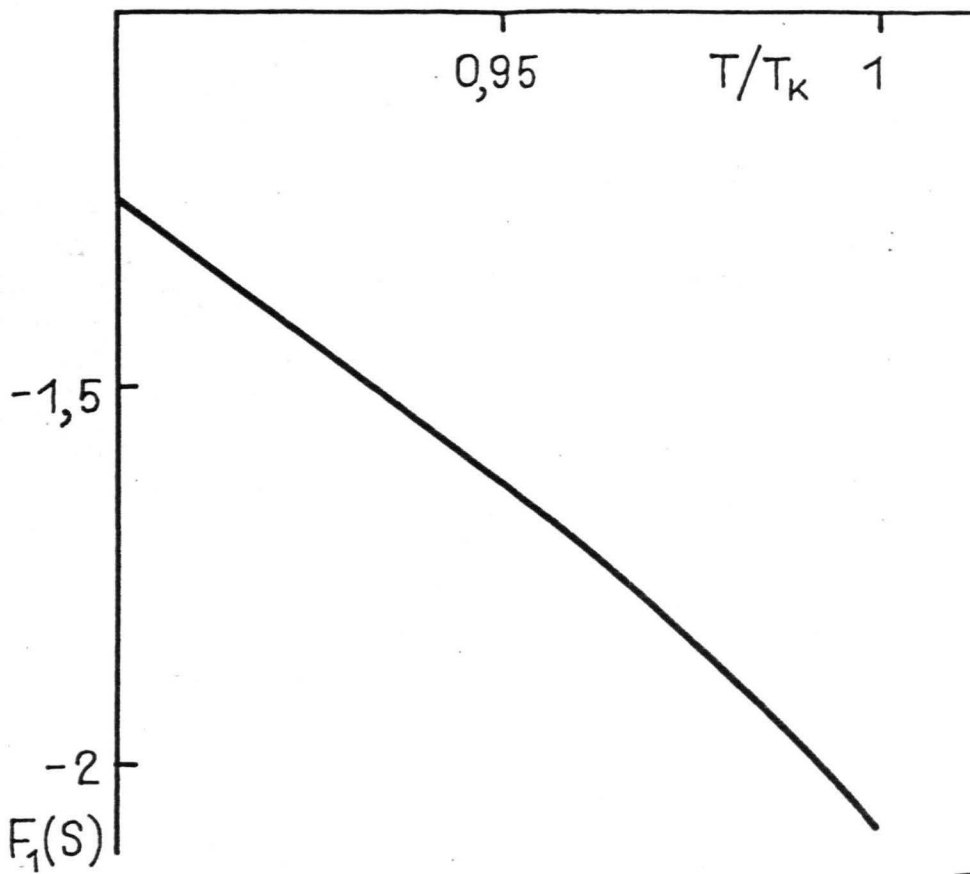


Рис. 7.1.7. Температурная зависимость коэффициента F_1 .

непосредственное сопоставление своих экспериментальных данных с зависимостями, полученными нами [173].

При этом пользуясь значениями параметра порядка, полученных на основе температурных зависимостей анизотропии диамагнитной восприимчивости, в работе [183] указано, что температурная зависимость $\eta_{\beta p}$ в аррениусовских координатах при учете ошибок измерений с одинаковым успехом может быть спрямлена как нормируя $\eta_{\beta p}$ на $F(S)$, так и на S^2 . Это связано со слабым отличием, как показано на рис. 7.1.6, температурных зависимостей $F(S)$ и S^2 .

Добавим, что полученная нами зависимость вращательной вязкости от параметра порядка (7.1.20) согласуется с экспериментальными данными также для другого НК - N 4.

4. На рис. 7.1.7 приведена температурная зависимость функции $F_1(S) = \left(\frac{7}{3} + \frac{5S}{3} - \frac{35S}{2x} \right)$, определяющей согласно соотношениям (7.1.20) и (7.1.21) зависимость коэффициента α_1 от параметра порядка. Так как $F_1 < 0$ и согласно данным, приведенным в работе [183] для МБА $\alpha_1 < 0$, то из соотношения (7.1.21) следует неравенство $\beta_1 > 4n\alpha\gamma_1^2 > 0$. Таким образом, укороченная модель противоречит экспериментальным данным [183] по МБА.

С экспериментом могут быть сопоставлены также температурные зависимости других феноменологических коэффициентов α_i . Так, согласно данным работы [183] для МБА $\alpha_6 < 0$. Это находится в согласии с соотношениями (7.1.20), которые показывают, что при использованном выше для МБА значении $\gamma_1 = 0,507\alpha_6 < 0$. При этом хорошо экспериментальной ситуации соответствует и весьма слабое отклонение температурной зависимости α_6 от аррениусовской, описываемое функцией $F_2 = 2\gamma_1 \left(\frac{(2S+1)}{3} - \frac{5S}{2x} \right) - S$. Это иллюстрируется рис. 7.1.8.

Сформулированные выше уравнения позволяют получить единое

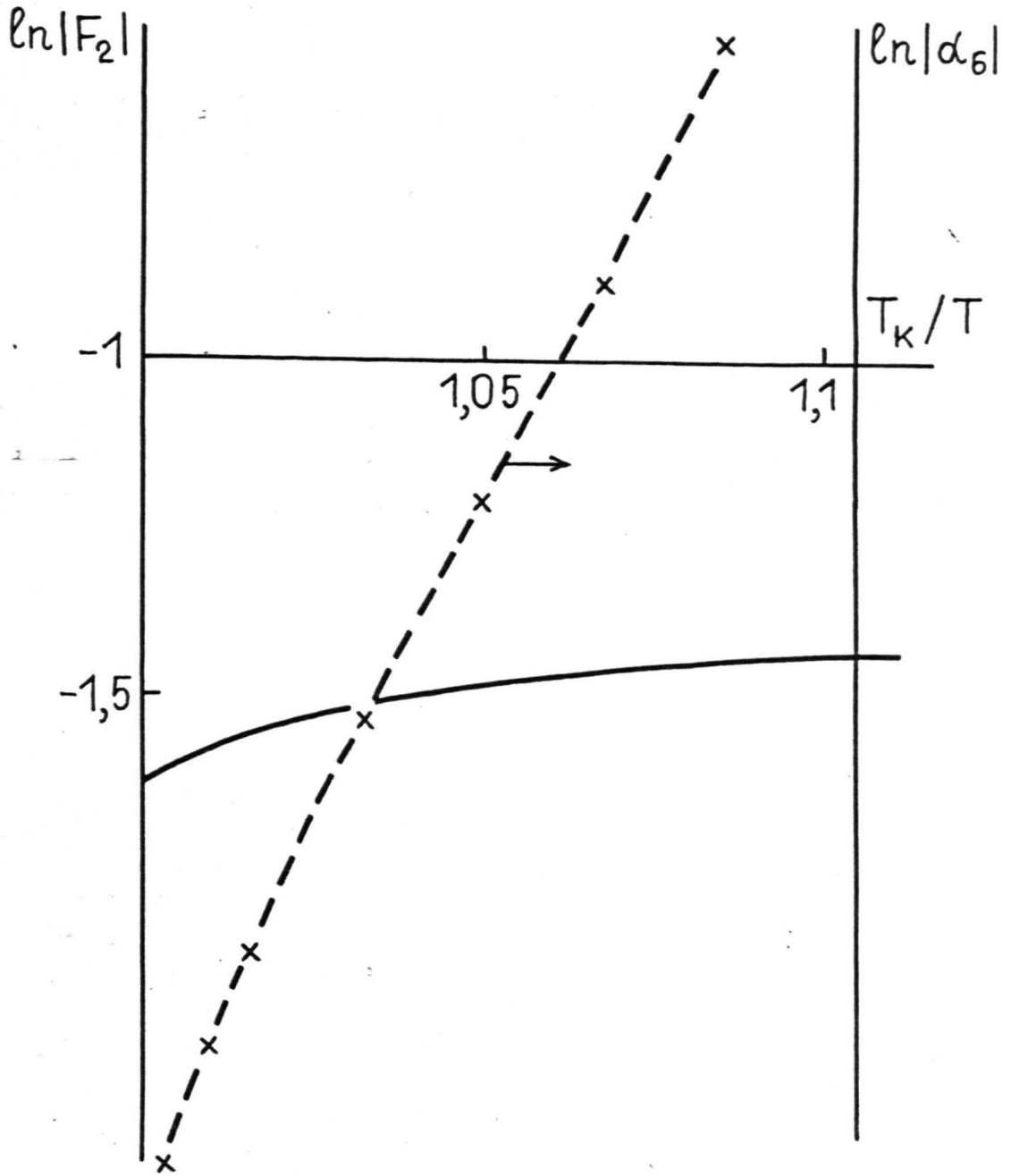


Рис. 7.1.8. Зависимость феноменологического коэффициента α_6 от температуры. Крестики - экспериментальные данные работы [183]. Непрерывная линия - отклонение от аррениусовской зависимости, обусловленная зависимостью феноменологического коэффициента α_6 (7.1.20) от параметра порядка.

описание течений нематической и изотропной фаз НМЖ. Далее в рамках предположения о частичном равновесии в ориентационном пространстве ($\delta F = 0$ при $\zeta_{ik} = \langle e_i e_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} \rangle = e$) получим связь напряжений и ориентаций в сдвиговых течениях изотропной фазы НМЖ. Так как при частичном равновесии $\mu(\vec{e}) = \lambda_{ik} (e_i e_k - \frac{1}{3} \delta_{ik})$, то уравнение переноса в ориентационном пространстве (7.1.5) в результате умножения на $e_i e_k$ и интегрирования для случая $\tau_0 |\dot{\gamma}| \ll 1$ дает уравнение релаксации для тензора анизотропии

$$\frac{d\zeta_{ik}}{dt} - \Omega_{ol} e_{lmi} \zeta_{mk} - \Omega_{ol} e_{lmk} \zeta_{mi} = \frac{4\mu_1 \mu_{ik}}{5} - \frac{4\lambda_{ik}}{5\alpha} \quad (7.1.23)$$

Уравнение состояния во внутреннем ориентационном пространстве (7.1.8), в предположении слабой неравновесности $\lambda_{ik}/kT \ll 1$ и $\Delta \chi H^2 / 2kT \ll 1$, дает следующую связь тензора анизотропии и параметров эффективного поля

$$\zeta_{ik} (1 - T_*/T) = \frac{\Delta \chi H^2}{15kT} (h_i h_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}) + 2\lambda_{ik} / 15kT, \quad (7.1.24)$$

здесь $T_* = 2\phi / 15k$, которая, как показывает рассмотрение устойчивости изотропного состояния НМЖ ограничивает область ее существования в виде неравенства $T > T_*$. В области $T_* < T < T_K$ изотропная фаза метастабильна.

С учетом (7.1.23) и (7.1.24) уравнение релаксации тензора анизотропии в изотропной фазе НМЖ получается в виде

$$\frac{d\zeta_{ik}}{dt} - \Omega_{ol} e_{lmi} \zeta_{mk} - \Omega_{ol} e_{lmk} \zeta_{mi} = \frac{4\mu_1 \mu_{ik}}{5} - \frac{6kT}{\alpha} (1 - T_*/T) \zeta_{ik} + \frac{2\Delta \chi H^2}{5\alpha} (h_i h_k - \frac{1}{3} \delta_{ik}). \quad (7.1.25)$$

Уравнение (7.1.25) показывает критическое замедление времени релаксации тензора анизотропии при приближении к температуре потери устойчивости изотропного состояния согласно закону $\tau_a =$

$$= \alpha / 6k(T - T_*) .$$

Для симметричной части тензора напряжений аналогичным образом, ограничиваясь рассмотрением укороченной модели, получается

$$\sigma_{ik}^{\prime S} = 2\eta\gamma_{ik} - n\gamma_1\alpha \left(\frac{d\zeta_{ik}}{dt} - \Omega_{ol} e_{lmi} \zeta_{mk} - \Omega_{ol} e_{lmk} \zeta_{mi} - \frac{4\gamma_1}{5} \mu_{ik} \right) \quad (7.1.26)$$

Уравнения вида (7.1.25) и (7.1.26) для изотропной фазы НБК феноменологическим образом были получены в работе [242] .

Выражения феноменологических коэффициентов нематической и изотропной фаз через молекулярные постоянные γ_1 , α позволяют получить единое описание свойств данного класса веществ. Проиллюстрируем это конкретным примером.

Уравнение релаксации тензора анизотропии (7.1.25) описывает возникновение анизотропии в изотропной фазе НБК при наличии сдвига или магнитного поля. При этом для тензора анизотропии в данных двух случаях имеет место

$$\zeta_{ik} = \frac{2\gamma_1\alpha}{15k(T - T_*)} \mu_{ik}; \quad \zeta_{ik} = \frac{\Delta\chi H^2}{15k(T - T_*)} \left(h_i h_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right). \quad (7.1.27)$$

Возникновение анизотропии связано с наличием сдвигового и магнитного двулучепреломления, для которых соотношения (7.1.27) дают (M - несущественная в данном случае постоянная, зависящая от оптических свойств среды, G - скорость сдвига dv/dy)

$$\Delta n_{cg} = M \frac{2\gamma_1\alpha}{15k(T - T_*)} G; \quad \Delta n_m = M \frac{\Delta\chi H^2}{15k(T - T_*)} .$$

Отсюда, если воспользоваться полученным выше выражением для анизотропии вязкости нематической фазы НБК (7.1.22), можем образовать безразмерный комплекс

$$\frac{(\eta_2 - \eta_1) \frac{d}{dT} \left(\frac{G}{\Delta n_{cg}} \right)}{\frac{d}{dT} \left(\frac{H^2}{\Delta n_m} \right) n \Delta\chi S} = 1$$

связывающий экспериментально определяемые величины при температуре фазового перехода изотропной фазы в нематическую - анизотропию вязкости и диамагнитной восприимчивости для нематической фазы и магнитное и сдвиговое двулучепреломление для изотропной. Если воспользоваться для указанных величин соответствующими экспериментальными данными для случая МББА - анизотропии вязкости $\eta_2 - \eta_1 = 0,16$ П работы [182], анизотропии диамагнитной восприимчивости $0,078 \cdot 10^{-6}$ [239], магнитному $d/dT(H^2/\Delta n_m) = 0,43 \cdot 10^{14} \text{ Г}^2/\text{°К}$ и сдвиговому двулучепреломлению $\frac{d}{dT}(G/\Delta n_{cg}) = 0,33 \cdot 10^8 \text{ I/c}^\circ\text{К}$ соответственно работ [243], [244], то для указанного отношения получается 1,57 против теоретического значения 1.

Согласие, с учетом того, что упомянутые данные получены для различных образцов, следует признать удовлетворительным.

7.2. Ориентационные эффекты в электрогидродинамике слабопроводящих суспензий анизотропных частиц

Известен ряд электрогидродинамических неустойчивостей, связанных с ориентационными эффектами [77] в анизотропной жидкости - жидком кристалле. В связи с практической важностью этих явлений представляет интерес исследование возможности проявления подобных явлений в другом классе анизотропных жидких сред - суспензиях анизотропных частиц. Для этого в настоящем разделе развивается модель суспензии, учитывающая ориентационные эффекты, связанные с накоплением свободного заряда на границах гетерофазных включений.

Так как суспензия анизотропных частиц представляет собою гетерогенный материал, характеризуемый различными значениями диэлектрической проницаемости ϵ и проводимости σ фаз, то возникает вопрос о построении модели, описывающей поведение дан-

ной среды в макромасштабе. Далее макроскопические полевые величины, описывающие данную гетерогенную среду, получаются в результате усреднения микромасштабных полей. При этом усреднения по поверхности и объему с размерами много большими среднего расстояния между частицами, но много меньшими характерного масштаба изменения макровеличин, являются эквивалентными [245] .

Для нахождения микромасштабных полей необходимо решение задачи о возмущении однородного электрического поля одиночной частицей. В данном случае частица суспензии представляется в виде вытянутого эллипсоида вращения с длинной и короткой полуосями, равными соответственно a и b . Решение этой задачи в стационарной постановке хорошо известно [104] , отличие приводимого ниже решения заключается в рассмотрении нестационарного случая. Последнее является необходимым для построения модели анизотропной суспензии в электрическом поле с учетом внутренних вращений. При этом оказывается, что роль времени релаксации поляризации в подобной модели играет максвелловское время релаксации межфазной плотности свободного заряда.

Потенциал возмущенного одиночным эллипсоидом электрического поля в приближении электрогидродинамики удовлетворяет уравнению Лапласа в твердой и жидкой фазах (наличием стороннего объемного электрического заряда пренебрегается) при следующих граничных условиях на поверхности эллипсоида и вдали от него (индексы "1" и "2" относятся к жидкой и твердой фазам соответственно)

$$\psi_1 = \psi_2; \quad D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\sigma; \quad (7.2.1)$$

$$\partial\sigma/\partial t = -j_n^1 + j_n^2, \quad \vec{E}|_{r \rightarrow \infty} = \vec{E}_0 = (E_{01}, 0, E_{011}).$$

Отметим, что задача решается в системе координат неподвижной относительно эллипсоида, который может вращаться относительно одной из своих коротких осей \vec{l} с угловой скоростью $\vec{\Omega} = [\vec{n} \times \dot{\vec{n}}]$.

Здесь \vec{n} — единичный вектор вдоль длинной оси эллипсоида, который в данном случае играет роль директора среды.

Уравнения Лапласа при граничных условиях (7.2.1) решаются в системе координат вытянутого эллипсоида вращения u, v, φ , которые с декартовыми связаны соотношениями $x = \alpha \cos u \times \operatorname{sh} v \cos \varphi, y = \alpha \cos u \operatorname{sh} v \sin \varphi, z = \alpha \sin u \operatorname{ch} v$.

Уравнение поверхности эллипсоида имеет вид $V = V_1$. Находя решение уравнения Лапласа в областях "1" и "2" в следующем виде

$$\begin{aligned} \psi_1 = & -\vec{E}_0 \vec{r} + \alpha \sin u \operatorname{ch} v E_{0||} B_{||} F(v)/F(v_1) + \alpha \sin u \operatorname{ch} v F(v) A_{||}(t)/F(v_1) + \\ & + \alpha \cos u \operatorname{sh} v \cos \varphi E_{0\perp} B_{\perp} G(v)/G(v_1) + \alpha \cos u \operatorname{sh} v \cos \varphi G(v) \times \\ & \times A_{\perp}(t)/G(v_1) \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

и

$$\psi_2 = \vec{A} \vec{r} - a_{||} \alpha \sin u \operatorname{ch} v E_{0||} - a_{\perp} \alpha \cos u \operatorname{sh} v \cos \varphi E_{0\perp}, \quad (7.2.3)$$

где \vec{A} — вектор $(A_{\perp}, 0, A_{||})$, а $a_{||}, a_{\perp}$ и $B_{||}, B_{\perp}$ — постоянные, для функций $F(v)$ и $G(v)$ получаем

$$F(v) = \int^v dv' / \operatorname{sh} v' \operatorname{ch}^2 v'; \quad G(v) = \int^v dv' / \operatorname{sh}^3 v'.$$

Постоянные $B_{||}, B_{\perp}$ и $a_{||}, a_{\perp}$ определяются из условия, что решение (7.2.2-3) при $\vec{A} = 0$ представляет собою решение задачи о диэлектрическом эллипсоиде во внешнем однородном поле.

Это дает

$$B_{||} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) n_{||}}{((\varepsilon_2 - \varepsilon_1) n_{||} + \varepsilon_1)}; \quad a_{||} = \frac{\varepsilon_1}{((\varepsilon_2 - \varepsilon_1) n_{||} + \varepsilon_1)};$$

$$B_{\perp} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) n_{\perp}}{((\varepsilon_2 - \varepsilon_1) n_{\perp} + \varepsilon_1)}; \quad a_{\perp} = \frac{\varepsilon_1}{((\varepsilon_2 - \varepsilon_1) n_{\perp} + \varepsilon_1)};$$

$n_{||}, n_{\perp}$ — коэффициенты деполаризации эллипсоида, которые находятся согласно соотношениям $n_{||} = \frac{(1-e^2)}{2e^3} (\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e)$; $n_{\perp} = \frac{1}{2}(1-n_{||})$, а $e = \sqrt{1-(b/a)^2}$ — эксцентриситет эллипсоида.

В таком случае граничные условия для поверхностной плотности заряда дают релаксационные уравнения для функций $A_{||}$ и A_{\perp}

следующего вида

$$-\frac{\partial A_{||,\perp}}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{\epsilon}_{||,\perp}} (A_{||,\perp} - \delta_{||,\perp} E_{0||,\perp}), \quad (7.2.4)$$

где введены обозначения

$$\tilde{\epsilon}_{||,\perp} = \frac{((\epsilon_2 - \epsilon_1)n_{||,\perp} + \epsilon_1)}{4\pi((\epsilon_2 - \epsilon_1)n_{||,\perp} + \epsilon_1)}; \quad \delta_{||,\perp} = \frac{(\epsilon_2\epsilon_1 - \epsilon_1\epsilon_2)n_{||,\perp}}{((\epsilon_2 - \epsilon_1)n_{||,\perp} + \epsilon_1)((\epsilon_2 - \epsilon_1)n_{||,\perp} + \epsilon_1)}.$$

На основе решения (7.2.2-3) получим макромасштабные поля.

Объемное усреднение электрической индукции микрополя дает

$$\langle D_i \rangle = V^{-1} \int \epsilon E_i dV = \epsilon_1 \langle E_i \rangle + (\epsilon_2 - \epsilon_1) V^{-1} \int_{V_r} E_i^{(2)} dV. \quad (7.2.5)$$

Усреднение напряженности электрического поля по части объема, занятой частицами, проводим в приближении разбавленной суспензии.

Тогда взаимным влиянием частиц можно пренебречь и считать напряженность, действующего на отдельную частицу электрического поля равной напряженности макроскопического поля $\langle \vec{E} \rangle$. В таком случае соотношение (7.2.5) дает

$$\langle D_i \rangle = \epsilon_1 \left(1 + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)\varphi}{((\epsilon_2 - \epsilon_1)n_{||} + \epsilon_1)} n_i n_k + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)\varphi}{((\epsilon_2 - \epsilon_1)n_{\perp} + \epsilon_1)} k_i k_k \right) \langle E_k \rangle - (\epsilon_2 - \epsilon_1)\varphi (n_i (\vec{n} \vec{A}) + k_i (\vec{k} \vec{A})).$$

Орты \vec{n} и \vec{k} направлены вдоль длинной и короткой оси эллипсоида соответственно ($\vec{k} \vec{l} = 0$).

Однако данный вектор индукции не представляется удобным для описания суспензии. Его поток через замкнутую поверхность, ограничивающую объем макромасштаба V вследствие эквивалентности поверхностного и объемного усреднения может быть выражен следующим образом $V \text{div} \langle \vec{D} \rangle = \oint \vec{D}_n dS = \oint \langle \vec{D} \rangle \vec{n} dS = 4\pi q$, где q свободный электрический заряд, содержащийся в объеме V . Так как сторонние электрические заряды согласно предположению отсутствуют, то заряд q обусловлен нескомпенсированным свободным зарядом, распределенным по поверхности эллипсоидальных частиц. Так как в целом частицы незаряжены, то нескомпенсированный

заряд обусловлен частицами, находящимися внутри объема V частично, т.е. $q = \sum_i \int_{S_i} \rho dS$, где S_i - часть поверхности этих частиц, принадлежащая объему V . Так как поверхностная плотность свободного заряда выражается в виде

$$\rho = \frac{\alpha \sin \psi \hbar v_1 ((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{||} + \epsilon_1) (\vec{A} \vec{n})}{4\pi \hbar v} + \frac{\alpha \sin \psi \hbar v_1 \cos \psi ((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{\perp} + \epsilon_1) (\vec{A} \vec{k})}{4\pi \hbar v},$$

то, если воспользоваться выражением нормали \vec{n}_3 к поверхности частицы $\vec{n}_3 = \frac{1}{\hbar v} \partial \vec{r} / \partial v$, интеграл $\int_{S_i} \rho dS$ можем выразить следующим образом

$$\int_{S_i} \rho dS = - \frac{S_{\Sigma_i} ((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{||} + \epsilon_1)}{4\pi} (\vec{n}_0 \vec{n}) (\vec{A} \vec{n}) + \left(\frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{\perp} + \epsilon_1}{n_{\perp}} \right) (\vec{n}_0 \vec{k}) (\vec{A} \vec{k}),$$

где S_{Σ_i} - площадь сечения поверхностью S частицы, \vec{n}_0 - внешняя нормаль к поверхности S . $\sum_i S_{\Sigma_i}$ по площадке усреднения ΔS для ансамбля многих частиц может быть выражена как $\Delta S \varphi$.

В результате для дивергенции вектора $\langle \vec{D} \rangle$ получается

$$\text{div} \langle \vec{D} \rangle = -4\pi \frac{\varphi}{4\pi} \left(\frac{((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{||} + \epsilon_1)}{n_{||}} \vec{n} (\vec{A} \vec{n}) + \frac{((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{\perp} + \epsilon_1)}{n_{\perp}} \vec{k} (\vec{A} \vec{k}) \right),$$

что, если ввести вектор поляризации $\vec{P} = \frac{\varphi \epsilon_1}{4\pi n_{||}} \vec{n} (\vec{A} \vec{n}) + \frac{\varphi \epsilon_1}{4\pi n_{\perp}} \vec{k} (\vec{A} \vec{k})$ и вектор электрической индукции \vec{D} в виде

$$\vec{D}_i = \epsilon_{ik}^{\infty} E_k + 4\pi P_i$$

вследствие отсутствия сторонних электрических зарядов дает

$$\text{div} \vec{D} = 0$$

В случае непроводящих сред $P_i = 0$ и для электрической индукции имеем $\vec{D}_i = \epsilon_{ik}^{\infty} E_k$, где ϵ_{ik}^{∞} определяется соотношением

$$\epsilon_{ik}^{\infty} = \epsilon_1 \left(1 + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) \varphi n_i n_k}{((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{||} + \epsilon_1)} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) \varphi k_i k_k}{((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{\perp} + \epsilon_1)} \right)$$

и в настоящей модели играет роль безынерционной проницаемости среды. В общем случае для стационарного состояния релаксационные уравнения для $A_{||}$ и A_{\perp} дают $\vec{D}_i = \epsilon_{ik}^0 E_k$, где

$$\epsilon_{ik}^0 = \epsilon_1 \left(1 + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) \varphi n_i n_k}{((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{\parallel} + \epsilon_1)} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) \varphi k_i k_k}{((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{\perp} + \epsilon_1)} \right)$$

является инерционной диэлектрической проницаемостью.

Если ввести

$$\chi_{\parallel, \perp}^{\infty} = \frac{\epsilon_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1) \varphi}{4\pi ((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{\parallel, \perp} + \epsilon_1)} ; \chi_{\parallel, \perp}^0 = \frac{\epsilon_1 \varphi (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{4\pi ((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{\parallel, \perp} + \epsilon_1)} ,$$

то релаксационные уравнения для вектора поляризации можем записать в следующем виде

$$\partial P_{\parallel, \perp} / \partial t = -1/\tau_{\parallel, \perp} (P_{\parallel, \perp} - (\chi_{\parallel, \perp}^0 - \chi_{\parallel, \perp}^{\infty}) E_{\parallel, \perp}) .$$

Дополним указанные соотношения соотношением для макроскопического тока проводимости. При этом, вследствие того, что вращение частиц с распределенным по ее поверхности свободным зарядом приводит к наличию поверхностного конвективного тока $\vec{i}_k = \epsilon [\vec{\Omega} \times \vec{r}]$, формула усреднения для получения макроскопического тока должна быть записана следующим образом [192]

$$\langle \vec{j} \rangle = V^{-1} \int \vec{j}_{np} dV + V^{-1} \int \vec{i}_k dS . \quad (7.2.6)$$

Первый член в соотношении (7.2.6) представляет усредненный по объему ток проводимости, во втором члене интегрирование осуществляется по поверхности частиц, находящихся в макроскопическом объеме усреднения.

В справедливости подобной формулы можно убедиться следующим образом. Макроток, протекающий через какую-либо площадку усреднения с нормалью \vec{n}_0 , равен сумме тока проводимости, усредненного по площадке, и заряда, конвективно переносимом в единицу времени через линии пересечения площадкой усреднения поверхности вращающихся частиц. Последнее слагаемое может быть представлено в виде суммы по частицам, пересекающим площадку усреднения,

$\sum_i \oint_{\ell_i} dl \vec{i}_k \vec{n}_0$, при этом интегрирование в каждом слагаемом суммы осуществляется вдоль контура сечения площадкой усреднения частицы. Так как $\sum_i \oint_{\ell_i} dl \vec{i}_k \vec{n}_0 = \frac{\Delta S}{V} \oint \vec{i}_k dS \vec{n}_0$ и объемное и поверхностное усреднение тока проводимости эквивалентны, то отсюда следует формула (7.2.6).

Так как плотность заряда на поверхности эллипсоида может быть выражена как $\sigma = (\vec{n}_\varnothing \nabla) (\vec{a} \vec{r})$, где \vec{n}_\varnothing внешняя нормаль к поверхности эллипсоида, а вектор

$$\vec{a} = \frac{((\varepsilon_2 - \varepsilon_1)n_{||} + \varepsilon_1)}{4\pi n_{||}} \vec{n}(\vec{A} \vec{n}) + \frac{((\varepsilon_2 - \varepsilon_1)n_{\perp} + \varepsilon_1)}{4\pi n_{\perp}} \vec{k}(\vec{A} \vec{k}),$$

то интеграл $\int \sigma [\vec{\omega} \times \vec{r}] dS$ равен $[\vec{\omega} \times \vec{a}] V_\varnothing$. Для макроскопической плотности тока отсюда получается (\vec{E}_\varnothing - напряженность электрического поля внутри эллипсоидальных частиц)

$$\vec{j} = \sigma_1 \vec{E} + (\sigma_2 - \sigma_1) \varphi \vec{E}_\varnothing + \varphi [\vec{\omega} \times \vec{a}].$$

Выражая \vec{E}_\varnothing согласно решению электростатической задачи (7.2.2-3), пользуясь тем, что релаксационные уравнения (7.2.4) записаны в системе координат, связанной с вращающимися эллипсоидами, а временная производная векторной величины в лабораторной системе координат связана с производной в неподвижной относительно частицы системе координат согласно соотношению

$$\partial \vec{a} / \partial t = \partial' \vec{a} / \partial t + [\vec{\omega} \times \vec{a}]$$

выражение для макроскопической плотности тока можем упростить следующим образом

$$\vec{j} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} \vec{D} + \varphi \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} \quad (7.2.7)$$

Соотношение (7.2.7) позволяет сделать ряд выводов. Во-первых, в стационарном случае, когда $\partial \vec{a} / \partial t = 0$ и $\vec{D}_i = \varepsilon_{ik}^0 E_k$ соотношение (7.2.7) дает известный закон электропроводности разбавленной суспензии анизотропных частиц

$$j_i = \epsilon_{ik} E_k, \text{ где } \epsilon_{ik} = \epsilon_1 \left(1 + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) \varphi n_i n_k}{((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{||} + \epsilon_1)} + \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1) \varphi k_i k_k}{((\epsilon_2 - \epsilon_1) n_{\perp} + \epsilon_1)} \right) E_k.$$

Во-вторых, так как выше показано, что $\text{div } \vec{D} = 4\pi \rho_{\text{ст}}$, а $\text{div } \varphi \vec{a}$ равняется плотности поляризационного заряда ρ_n , связанного с накоплением свободного заряда на межфазной поверхности раздела, и $\text{div } \vec{j} = -\partial \rho_{\text{ст}} / \partial t - \partial \rho_n / \partial t$, то уравнение (7.2.7) дает закон релаксации плотности стороннего свободного заряда $\partial \rho_{\text{ст}} / \partial t = -\frac{4\pi \epsilon_1}{\epsilon_1} \rho_{\text{ст}}$. Этим оправдывается пренебрежение $\rho_{\text{ст}}$ в дальнейшем рассмотрении.

Рассмотрим далее на основе сформулированной модели ряд электрогидродинамических явлений. Система уравнений движения анизотропной суспензии и поля при этом записывается следующим обра-

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\partial p / \partial x_i + \partial \epsilon'_{ik} / \partial x_k + \partial T_{ik} / \partial x_k;$$

$$\text{div } \vec{D} = 0; \text{ rot } \vec{E} = 0; \vec{D} = \tilde{\epsilon}_{12}^{\infty} \cdot \vec{E} + 4\pi \vec{P}; \quad (7.2.8)$$

$$\vec{P} = P_{||} \vec{n} + P_{\perp} \vec{k}; \partial P_{||, \perp} / \partial t = -1/\tau_{||, \perp} (P_{||, \perp} - (\alpha_{||, \perp}^0 - \alpha_{||, \perp}^{\infty}) E_{||, \perp}),$$

здесь тензор $T_{ik} = 1/4\pi (E_i \tilde{D}_k - 1/2 E^2 \delta_{ik})$ является тензором электрических напряжений, а для тензора вязких напряжений ϵ'_{ik} принимается выражение модели анизотропной жидкости Лесли-Эриксона

$$\epsilon'_{ik} = \alpha_1 n_i n_k n_n n_m \gamma_{nm} + \alpha_2 n_k N_i + \alpha_3 n_i N_k + \alpha_4 \gamma_{ik} + \alpha_5 n_k n_n \gamma_{in} + \alpha_6 n_i n_n \gamma_{kn}.$$

Относительно данной системы уравнений отметим, что в тензоре электрических напряжений фигурирует именно вектор индукции \vec{D} , а не объемно усредненная индукция поля \vec{D} . В этом можно убедиться следующим образом. Тензор T_{ik} приводит к объемной силе, действующей на суспензию, следующего вида

$$\partial T_{ik} / \partial x_k = \tilde{P}_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k}; \quad \vec{P} = (\vec{D} - \vec{E}) / 4\pi.$$

Так как решение (7.2.2-3) показывает, что возмущенное одночленным эллипсоидом поле на больших расстояниях от последнего представляет собою поле диполя

$$\vec{p} = \epsilon_1 V (B_{||} E_{||} + A_{||}) \vec{n} / 4\pi n_{||} + \epsilon_1 V (B_{\perp} E_{\perp} + A_{\perp}) \vec{k} / 4\pi n_{\perp},$$

то сила, действующая со стороны неоднородного поля на этот диполь, будет равна $(\vec{p} \nabla) \vec{E}$, а на единицу объема суспензии $(n \vec{p} \nabla) \vec{E}$, что как легко видеть, пользуясь выражениями коэффициентов $B_{||}$ и B_{\perp} и определением вектора \vec{P} , эквивалентно $(\vec{P} \nabla) \vec{E}$. Отметим, что таким образом видно, что введенный вектор электрической индукции выражается через дипольный момент частицы в обычном виде $\vec{D} = \epsilon_1 \vec{E} + 4\pi n \vec{p}$.

Рассмотрим устойчивость ориентационного состояния эллипсоидов в направлении внешнего поля. Макроскопическим движением суспензии на первом этапе при этом пренебрегается.

Уравнение, определяющее динамику длинной оси эллипсоида, получается из уравнения движения директора Лесли-Эриксона в следующем виде $(\alpha_3 - \alpha_2) [\vec{n} \times \dot{\vec{n}}] = [\vec{P} \times \vec{E}]$. (7.2.9)

Тогда уравнение для малых возмущений состояния $\vec{n} = (0, 0, 1)$ в поле $\vec{E} = (0, 0, E)$, когда $\vec{n} = (\vartheta, 0, 1)$, $\vec{k} = (1, 0, \vartheta)$, ϑ - угол отклонения директора от направления поля, могут быть записаны в следующем виде

$$\partial P_{\perp} / \partial t = -1/\tau_{\perp} (P_{\perp} + E \vartheta (\alpha_{\perp}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty}));$$

$$P_x = \alpha_{||}^0 E \vartheta - \alpha_{\perp}^{\infty} E \vartheta + P_{\perp};$$

$$(\alpha_3 - \alpha_2) \dot{\vartheta} = -P_x E.$$

Находя решение системы (7.2.10) в виде $P_{\perp}, \vartheta \sim e^{\lambda t}$, ус-

ловие разрешимости однородной системы уравнений для инкремента

$$\lambda \text{ дает } 2\lambda = -a \pm \sqrt{a^2 - 4E^2(\chi_{||}^0 - \chi_{\perp}^0)/\tilde{\tau}_{\perp}(\alpha_3 - \alpha_2)},$$

здесь $a = 1/\tilde{\tau}_{\perp} + E^2(\chi_{||}^0 - \chi_{\perp}^{\infty})/(\alpha_3 - \alpha_2)$. Так как для случая вытянутых частиц $\chi_{||}^0 > \chi_{\perp}^0$, вследствие $n_{\perp} > n_{||}$, то условие существования положительного инкремента дает $a < 0$. Отсюда для критической напряженности поля неустойчивости имеем

$$E_c^2 = -(\alpha_3 - \alpha_2)/\tilde{\tau}_{\perp}(\chi_{||}^0 - \chi_{\perp}^{\infty}). \quad (7.2.II)$$

Из соотношения (7.2.II) видно, что неустойчивость возможна при $\chi_{||}^0 < \chi_{\perp}^{\infty}$, что позволяет получить ограничение на отношение электропроводностей частиц и несущей среды, при которых возможна неустойчивость ориентационного состояния частиц в виде

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \leq \frac{(\epsilon_2/\epsilon_1 - 1)(n_{\perp} - n_{||}) + \epsilon_2/\epsilon_1}{1 + (\epsilon_2/\epsilon_1 - 1)(n_{\perp} - n_{||})}. \quad (7.2.I2)$$

Граница области (7.2.I2) показана на рис. 7.2.1.

Если представить $\alpha_3 - \alpha_2$ как αn , где α коэффициент вращательного трения эллипсоидальных частиц, равный

$$\alpha = a\beta^2 8\pi\eta(2 - e^2)/3(n_{||} + (1 - e^2)n_{\perp}),$$

то соотношение (7.2.II) для зависимости критической напряженности поля E_c от отношения полуосей эллипсоида в случае непроводящих частиц ($\sigma_2 = 0$) дает

$$E_c^2 = E_0^2 \frac{3(2 - e^2)(1 - n_{||}^2)\epsilon_2/\epsilon_1}{8(n_{||} + (1 - e^2)n_{\perp})(1/2(\epsilon_2/\epsilon_1 - 1)(1 - 3n_{||}) + \epsilon_2/\epsilon_1)}; E_0^2 = \frac{(4\pi)^2 8\sigma_1\eta}{9\epsilon_1\epsilon_2}.$$

Эта зависимость представлена на рис. 7.2.2.

Физический механизм развития данной неустойчивости связан с таким накоплением свободного заряда на поверхности частиц, что электродам, создающим приложенное электрическое поле, обращены

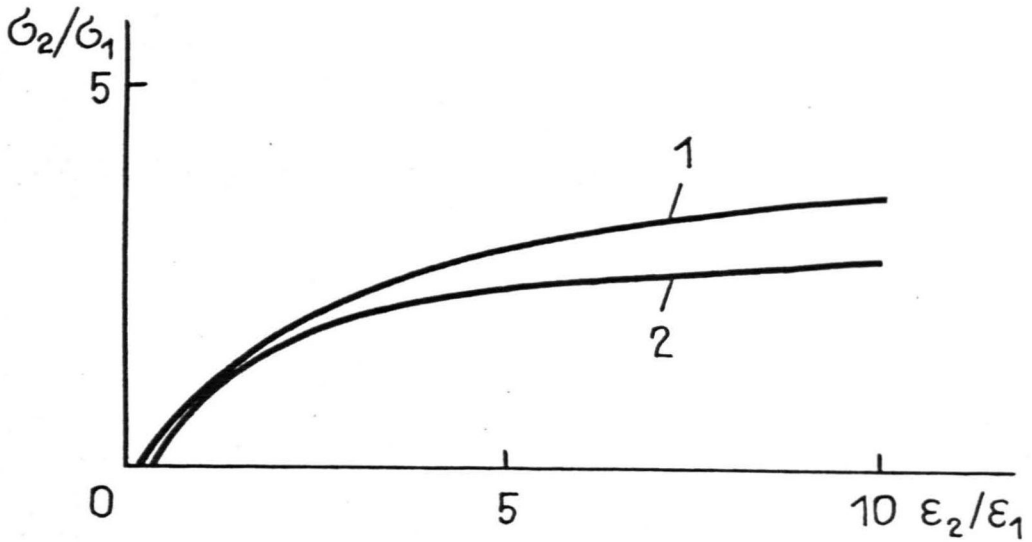


Рис. 7.2.1. Область неустойчивости ориентационного состояния анизотропных частиц.

1 - $e = 0,9$; 2 - $e = 1$.

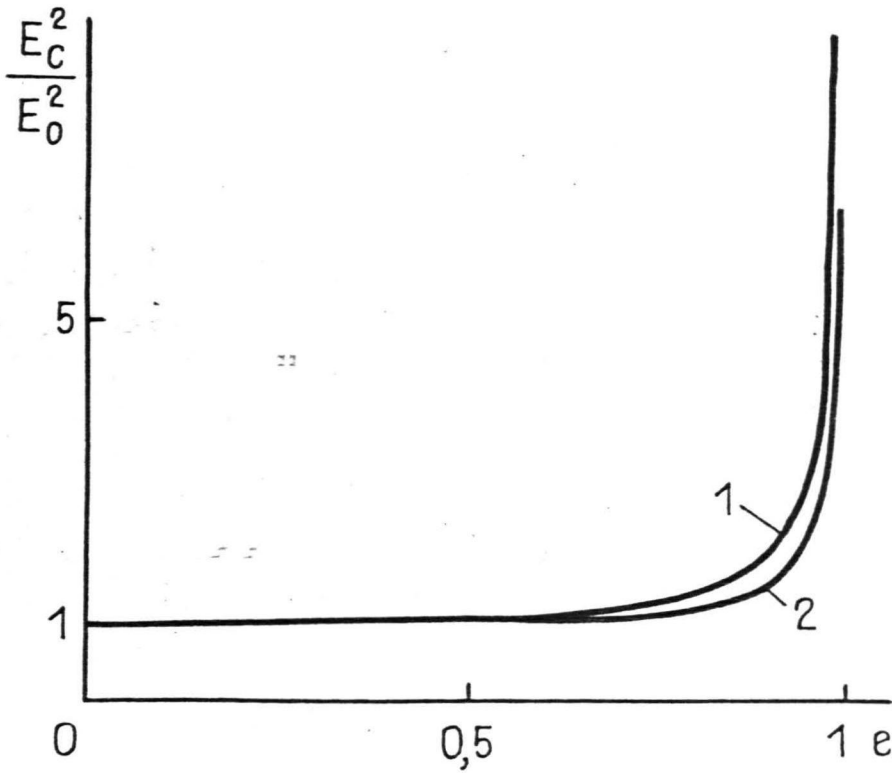


Рис. 7.2.2. Зависимость пороговой напряженности электрического поля неустойчивости ориентационного состояния эллипсоидальных частиц от их эксцентриситета.

1 - $\epsilon_2 / \epsilon_1 = 1$; 2 - $\epsilon_2 / \epsilon_1 = 5$.

участки поверхности границ, на которых накоплен свободный заряд одинаковой с ними полярности. Подобная ситуация является неустойчивой.

Интересным моментом развития неустойчивости указанного типа является ее колебательный характер. При этом для частоты колебаний при пороге развития неустойчивости получается

$$\omega_0 = 1/\zeta_{\perp} \sqrt{\frac{(\chi_{\parallel}^0 - \chi_{\perp}^0)}{(\chi_{\perp}^{\infty} - \chi_{\parallel}^0)}} \quad (7.2.13)$$

В этом плане представляет интерес наблюдение в работе [246] колебаний тока и интенсивности рассеянного света при наложении на коллоид ферромагнетика в гептане электрического поля.

Эти результаты могут быть интерпретированы на основе рассматриваемого механизма неустойчивости. Так соотношение (7.2.13) по частоте 10 Гц наблюдаемых в работе [246] колебаний тока и интенсивности рассеянного света, позволяет оценить удельное сопротивление использованного коллоида как $10^{11} \Omega \cdot \text{см}$, что хорошо соответствует представленным в этой работе данным о начальной плотности тока, которые для удельного сопротивления дают значение около $10^{10} \Omega \cdot \text{см}$.

Во-вторых, соотношение (7.2.11), если представить $\alpha_3 - \alpha_2$ в виде $\varphi F(a/b)\eta$, позволяет оценить критическую напряженность поля наступления неустойчивости как $E_c = \sqrt{\omega_0 \eta F}$, что, если воспользоваться значением вязкости гептана $0,4 \cdot 10^{-2}$ Пз и принять для фактора формы значение 10^2 , для E_c дает величины порядка $10^2 - 10^3 \text{ В/см}$, которые соответствуют величинам, используемым на эксперименте [246] $2 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^4 \text{ В/см}$.

В-третьих, необходимое для развития данной неустойчивости существование анизотропных частиц является естественным для коллоида ферромагнетика, так как в них подобные образования часто

возникают под действием анизотропных сил магнитного межчастичного взаимодействия. Это предположение подтверждается приводимыми в работе [246] данными по квазиупругому рассеянию света данным коллоидом, которые показывают большой средний размер частиц порядка $8 \cdot 10^2$ А и высокую степень полидисперсности коллоида.

В-четвертых, как показано ниже, вследствие возникновения ячеистого макроскопического движения среды осцилляции ориентации частиц суспензии имеют кооперативный характер. С этим можно связать наблюдаемые на эксперименте [246] колебания макроскопических характеристик суспензии.

Далее опишем отмеченный коллективный характер неустойчивости ориентационного состояния частиц суспензии, обусловленный возникновением макроскопического движения среды. Ограничимся рассмотрением бесконечной в направлении поля среды. Тогда для поля скоростей можно предположить $\vec{V} = (0, 0, v_z(x, t))$.

Система (7.2.8-9) для малых возмущений состояния $n = (0, 0, 1)$ и $\vec{E} = (0, 0, E)$, когда $\vec{n} = (v, 0, 1)$ и $\vec{K} = (1, 0, -v)$ дает

$$\alpha_3 \dot{v} + \eta_1 \frac{dv_z}{dx} = 0 ; \quad \eta_1 = (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6) / 2 ;$$

$$(\alpha_3 - \alpha_2) \dot{v} + \alpha_3 \frac{dv_z}{dx} = (\alpha_{||}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty}) E (E_x - E v) - P_{\perp} E ;$$

$$\partial P_{\perp} / \partial t = -1/\tau_{\perp} (P_{\perp} - (\alpha_{\perp}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty}) (E_x - E v)).$$

Возмущение электрического поля находится из условия отсутствия

X компоненты вектора индукции в следующем виде

$$E_x = - \frac{4\pi(\alpha_{||}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty}) E v}{\epsilon_{\perp}^{\infty}} - \frac{4\pi P_{\perp}}{\epsilon_{\perp}^{\infty}} .$$

В результате уравнения для поляризации и ориентации могут быть записаны в следующем виде $(\tilde{\gamma} = (\alpha_3 - \alpha_2) - \alpha_3^2 / \eta_1)$

$$-\tilde{\gamma} \dot{v} = \epsilon_{||}^0 / \epsilon_{\perp}^{\infty} ((\alpha_{||}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty}) E^2 v + P_{\perp} E) ;$$

$$\partial P_{\perp} / \partial t = -\epsilon_{\perp}^0 (P_{\perp} + E v (\alpha_{\perp}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty}) \epsilon_{||}^0 / \epsilon_{\perp}^0) / \epsilon_{\perp}^{\infty} \tau_{\perp} .$$

Находя решение этой системы в виде $\vartheta, P_{\perp} \sim \exp \lambda t$ для инкремента роста возмущений получаем $(C = \varepsilon_{\perp}^0 / \varepsilon_{\perp}^{\infty} \tilde{\gamma} + \varepsilon_{\parallel}^0 E^2 \times (\alpha_{\parallel}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty}) / \varepsilon_{\perp}^{\infty} \tilde{\gamma})$

$$2\lambda = -C \pm \sqrt{C^2 - 4\varepsilon_{\parallel}^0 (\alpha_{\parallel}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty}) E^2 / \varepsilon_{\perp}^{\infty} \tilde{\gamma}}.$$

Отсюда, так как $\alpha_{\parallel}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty} > 0$, условие положительности инкремента имеет вид $C \leq 0$. В результате для критической напряженности поля наступления неустойчивости суспензии получается

$$E_c^2 = -\varepsilon_{\perp}^0 \tilde{\gamma} / \varepsilon_{\parallel}^0 \tilde{\tau}_{\perp} (\alpha_{\parallel}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty}). \quad (7.2.14)$$

Так как $\tilde{\gamma} < \alpha_3 - \alpha_2$ и $\varepsilon_1^0 < \varepsilon_{\parallel}^0$ для случая вытянутых частиц, то соотношение (7.2.14) показывает, что критическая напряженность поля, при которой наступает неустойчивость суспензии как целой, меньше критической напряженности поля для одиночных частиц. Также как и в случае одиночных частиц, неустойчивость имеет колебательный характер, при этом для частоты колебаний при пороговой напряженности поля имеет место

$$\omega = \frac{1}{\tilde{\tau}_{\perp}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp}^0 (\alpha_{\parallel}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty})}{\varepsilon_{\perp}^{\infty} (\alpha_{\perp}^{\infty} - \alpha_{\parallel}^0)}}.$$

Так как $\alpha_{\perp}^{\infty} - \alpha_{\parallel}^0 > 0$ в силу условия наличия неустойчивости и $\alpha_{\parallel}^0 - \alpha_{\perp}^{\infty} > 0$, то $\varepsilon_{\perp}^{\infty} - \varepsilon_{\perp}^0 > 0$. Отсюда видно, что частота колебаний для случая ансамбля меньше, чем для одной частицы.

Для количественного описания наблюдаемых на эксперименте [246] явлений рассеяния света и прохождения тока данная задача должна быть рассмотрена в нелинейной постановке.

Отметим, что электрогидродинамическая неустойчивость суспензии анизотропных частиц, обусловленная ориентационными эффектами, независимо от наших работ [78], [247] и практически одновременно с ними рассматривалась в несколько других предположениях

в работе [248]. Проведенное в данной работе теоретическое рассмотрение условий возникновения неустойчивости носит в основном качественный характер и подтверждает наш вывод о возможности возникновения электрогидродинамической неустойчивости суспензии, обусловленной ориентационными эффектами.

В работе [248] рассматривается случай, когда существенно тепловое вращательное движение частиц, а релаксацией поляризации можно пренебречь. Это имеет место при $\tau_{\parallel}, \tau_{\perp} \ll \tau_B$, где τ_B характерное время вращательного броуновского движения, что отличается от случая, рассмотренного выше, где тепловым движением пренебрегается, а характерное время рассматриваемой ориентационной релаксации имеет порядок $\tau_{\parallel}, \tau_{\perp}$. При этом для случая, рассмотренного в работе [248], неустойчивость имеет монотонный характер и возможна, в противоположность результатам, полученным выше, и при $\epsilon_2 \gg \epsilon_1$.

Исследование справедливости данных выводов возможно в результате последовательного учета тепловых флуктуаций в рассмотренной выше системе уравнений.

В заключение данного раздела отметим, что в отличие от аналогичных явлений в жидких кристаллах, рассматриваемая электрогидродинамическая неустойчивость суспензии анизотропных частиц возможна не только в случае $\epsilon_{\parallel} < \epsilon_{\perp}$, но и при $\epsilon_{\parallel} > \epsilon_{\perp}$, что обусловлено отличным от случая жидких кристаллов механизмом ее развития.

7.3. Электровязкий эффект в гидродинамике поляризуемых жидкостей

В настоящем разделе в рамках модели слабопроводящей суспензии с учетом внутренних вращений рассматривается влияние электро-

вязкого эффекта на коэффициент вращательного трения диэлектрического цилиндра, поляризованного во внешнем электрическом поле. Полученные результаты позволяют, в частности, оценить влияние собственного поля НЖ на измеряемое в ротационном вискозиметре увеличение ее эффективной вязкости в поле, рассмотреть устойчивость состояния покоя свободного диэлектрического цилиндра в слабопроводящей суспензии сферических частиц при наличии электрического поля. Последний вопрос представляет интерес в связи с наблюдаемым на эксперименте [249] снижением порога возникновения в электрическом поле спонтанного вращения диэлектрического цилиндра в электрореологических суспензиях по сравнению с однофазными жидкостями.

Уравнения движения и релаксации поляризации слабопроводящей суспензии получены в предыдущем разделе и в случае сферических частиц имеют следующий вид

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + (\vec{P} \nabla) \vec{E} + \frac{1}{2} \text{rot} [\vec{P} \times \vec{E}]; \quad (7.3.1)$$

$$\partial \vec{P} / \partial t + (\vec{v} \nabla) \vec{P} = [\vec{\Omega} \times \vec{P}] - \frac{1}{\tau} (\vec{P} - \vec{P}_0),$$

где

$$\vec{P}_0 = (\alpha_0 - \alpha_\infty) \vec{E}; \quad (\alpha_0 - \alpha_\infty) = \frac{9 \epsilon_1 \psi (\epsilon_2 \epsilon_1 - \epsilon_1 \epsilon_2)}{4\pi (2\epsilon_1 + \epsilon_2)(2\epsilon_1 + \epsilon_2)}; \quad \tau = \frac{(2\epsilon_1 + \epsilon_2)}{4\pi (2\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

Напряженность электрического поля, действующего на покоящуюся суспензию, полагается равной полю диполя \vec{K} , поляризованного во внешнем поле диэлектрического цилиндра ($\vec{E}_0 = -\nabla \psi_y$, где $\psi_y = 2\vec{K}\vec{r}/\epsilon_{12}^0 r^2$). На поверхности цилиндра задаются условия прилипания $\vec{v}|_y = [\vec{\Omega} \times \vec{r}]$. Эта задача аналогична задаче о трении при поступательном движении иона в полярной жидкости. Отличия заключаются лишь в форме поля, действующего на жидкость, и физическом смысле коэффициентов.

Для поля скоростей суспензии в этом случае получается уравнение

$$\eta \Delta \operatorname{rot} \vec{V} - \frac{1}{2} \operatorname{rot} (\vec{E}_0 \operatorname{div} \vec{P}_*) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} [\vec{E}_0 \times \operatorname{rot} \vec{P}_*] = 0, \quad (7.3.2)$$

где

$$\vec{P}_* = -\tau (\nabla \nabla) \vec{P}_0 + \tau [\vec{\Omega}_0 \times \vec{P}_0]; \quad \vec{\Omega}_0 = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{V}. \quad (7.3.3)$$

Из условий симметрии задачи и несжимаемости ясно, что поле скоростей суспензии можно представить в виде $\vec{V} = \operatorname{rot} (f(r) \vec{\Omega})$. Уравнения (7.3.2) и (7.3.3) после понижения порядка дифференциального уравнения для функции f дают уравнение следующего вида ($a = \tau(\alpha_0 - \alpha_\infty) K^2 / \epsilon_{12}^{02} \eta$)

$$f'''(r^6 + ar^2) + f''(r^5 - 3ar) + f'(-r^4 + 3a) = 0.$$

Вводя новые зависимую и независимую переменные $u = f'; z = r^4/|a|$ последнее уравнение при $a < 0$ приводим к следующему виду

$$16z^2(z-1)u'' + 16z^2u' - (z+3)u = 0, \quad (7.3.4)$$

общее решение которого $u = C_1 z^{1/4} + C_2 z^{1/4} \ln \left(\frac{(\sqrt{z}-1)}{(\sqrt{z}+1)} \right)$.

Граничные условия дают

$$C_1 = 0; C_2 = -|a|^{1/4} / \ln \left(\frac{R^2/\sqrt{|a|}-1}{R^2/\sqrt{|a|}+1} \right),$$

откуда для азимутальной компоненты поля скоростей получается

$$V_\varphi(r) = \frac{\Omega r \ln \left(\frac{r^2/\sqrt{|a|}-1}{r^2/\sqrt{|a|}+1} \right)}{\ln \left(\frac{R^2/\sqrt{|a|}-1}{R^2/\sqrt{|a|}+1} \right)}. \quad (7.3.5)$$

Наиболее простым образом в стационарном случае момент сил, действующий на диэлектрический цилиндр, можно вычислить в результате интегрирования тензора полных напряжений по бесконечно удаленной поверхности. Тогда, с учетом асимптотического поведения при больших r поля скоростей $\sim 1/r$ и напряженности электрического поля $\sim 1/r^2$, вклад в искомый момент сил вдали от цилиндра вносит лишь симметричная часть тензора вязких напряжений. Этот прием избавляет от необходимости рассмотрения поляризации и

напряженности поля вблизи цилиндра. Отметим, что аналогичный прием был использован также в работах [79], [80] при вычислении силы сопротивления, действующей на поступательно движущийся в полярной жидкости ион.

В результате для момента сил, действующего на единицу длины диэлектрического цилиндра получается

$$M_{\text{тр}} = \frac{8\pi\eta|a|^{1/2}\Omega}{\ln((R^2/\sqrt{|a|}-1)/(R^2/\sqrt{|a|}+1))} = -4\pi\eta R^2\Omega F_1(R^2/\sqrt{|a|}) \quad (7.3.6)$$

Зависимость F_1 от $R^2/\sqrt{|a|}$ представлена на рис. 7.3.1. На рис. 7.3.1 видно, что момент вязких сил сопротивления на диэлектрический цилиндр уменьшается по сравнению со значением $-4\pi\eta R^2\Omega$ в чисто вязкой жидкости, что обусловлено дестабилизирующим влиянием внутренних вращений суспензии при $a < 0$. Этот случай соответствует наличию непроводящих частиц в слабопроводящей суспензии и связан с возникновением в этом случае в поле цилиндра подталкивающих его вращение вращений частиц суспензии.

Представляет интерес рассмотреть и случай $a > 0$. Тогда задача аналогична задаче о вкладе электровязкого эффекта в коэффициент вращательного трения диполя в полярной жидкости. Дифференциальное уравнение (7.3.4) в этом случае имеет следующий вид

$$16z^2(z+1)u'' + 16z^2u' - (z-3)u = 0$$

общее решение которого

$$u = C_1 z^{1/4} + C_2 z^{1/4} \operatorname{arcctg} \sqrt{z}.$$

Граничные условия дают

$$C_1 = 0; C_2 = -a^{1/4} / \operatorname{arcctg}(R^2/\sqrt{a}),$$

откуда для азимутальной компоненты скорости жидкости получается

$$V_{\varphi} = \frac{\Omega r \operatorname{arcctg}(r^2/\sqrt{a})}{\operatorname{arcctg}(R^2/\sqrt{a})}. \quad (7.3.7)$$

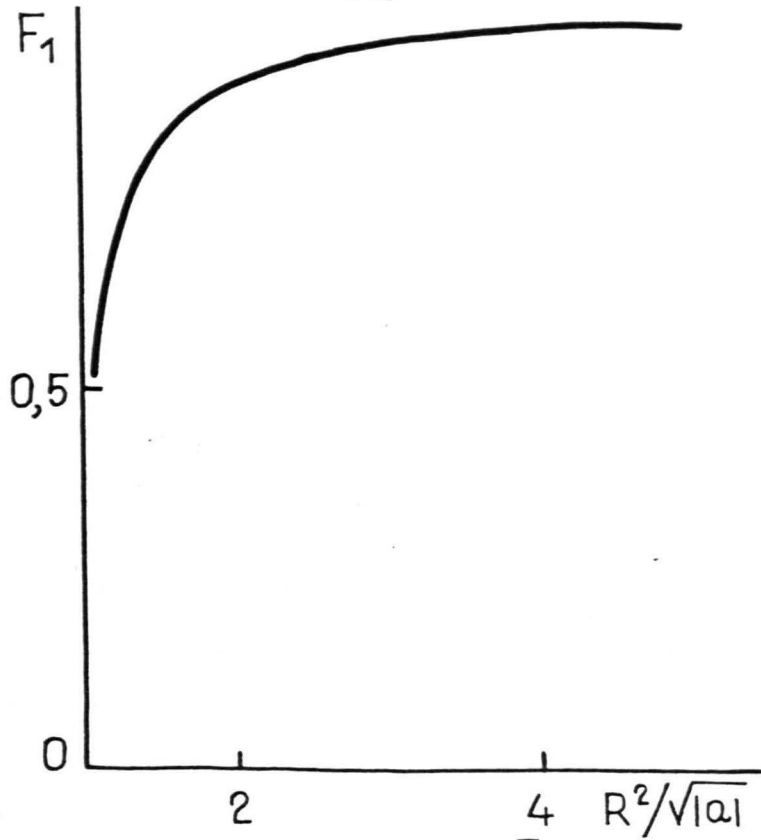


Рис. 7.3.1. Зависимость коэффициента F_1 от параметра электрогидродинамического взаимодействия $R^2/\sqrt{|a|}$

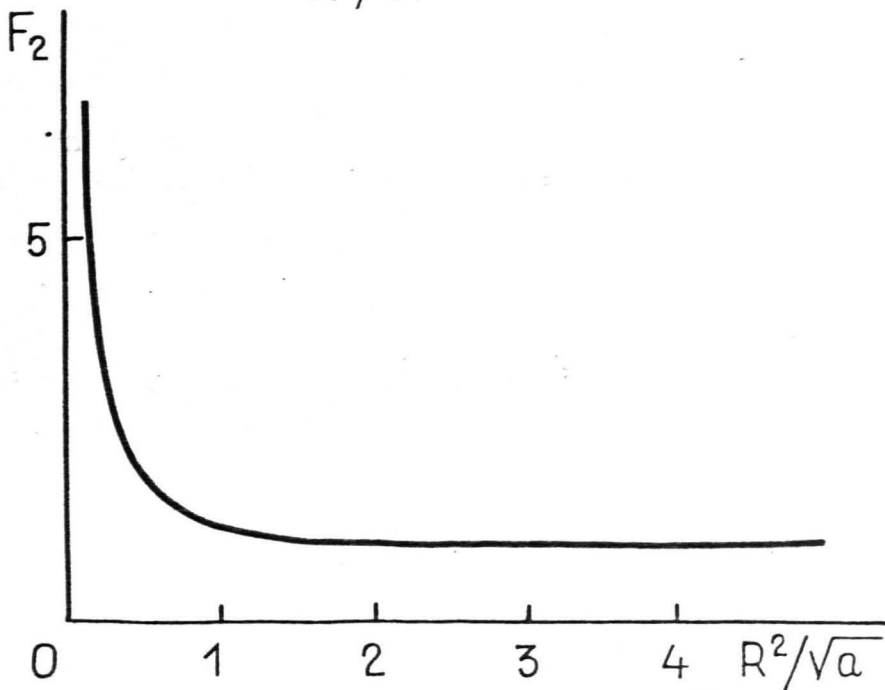


Рис. 7.3.2. Зависимость коэффициента F_2 от параметра электрогидродинамического взаимодействия R^2/\sqrt{a} .

Формула (7.3.7) для момента сил трения на вращающийся цилиндр дает

$$M_{\text{тр}} = -\frac{4\pi\eta\Omega\sqrt{a}}{\text{arcctg}(R^2/\sqrt{a})} = -4\pi\eta R^2\Omega F_2(R^2/\sqrt{a}). \quad (7.3.8)$$

Зависимость F_2 от параметра R^2/\sqrt{a} представлена на рис. 7.3.2. Полученная зависимость позволяет провести оценки роли собственного поля МЖ в измеряемом в ротационном вискозиметре моменте сил. Оценки подобного рода могут потребоваться при определении согласно данной методике таких важных параметров МЖ, как вращательная вязкость и др. Проиллюстрируем это на примере вращения цилиндра в бесконечной жидкости.

Параметр R^2/\sqrt{a} для случая намагничивающихся сред может быть при $\mu \gg 1$ и немагнитном цилиндре в начальной области намагничивания МЖ представлен следующим образом $R^2/\sqrt{a} = 1/\sqrt{\eta_{\text{вр}}/\eta}$. Отсюда и из рис. 7.3.2 видно, что поправки, вносимые влиянием собственного поля МЖ, незначительны, если мала вращательная вязкость коллоида. Если вращательная вязкость велика, то неучет рассматриваемых поправок может приводить к ошибкам, например, при $\eta_{\text{вр}}/\eta = 4$ ошибка составляет порядка 50 %.

Отметим еще ряд существенных моментов. Выше рассматривалось влияние поля поляризованного цилиндра на его вращение в поляризуемой жидкости. Так как цилиндр поляризуется во внешнем поле, то в уравнениях движения жидкости (7.3.1), вообще говоря, нужно учесть и действие внешнего поля. Можно показать, что учет этого воздействия в первом исчезающем приближении по электровязкому эффекту приводит к появлению вторичного течения.

Последнее может приводить к изменению теплопередачи между вращающимся в поле цилиндром и жидкостью. Отметим, что эксперименты, проведенные в подобной геометрии в работе [250], действительно показывают увеличение теплопередачи с наложением поля,

что там предлагается интерпретировать микроконвективным переносом. В свете указанных замечаний данная точка зрения не представляется единственно возможной, так как вклад в наблюдаемое изменение теплообмена может оказывать и возникновение отмеченных выше вторичных течений.

В пределе $a \rightarrow 0$, что соответствует отсутствию электровязкого эффекта, из формулы (7.3.8) следует известный результат $M_{\text{тр}} = -4\pi\eta R^2 \Omega$. Интересным является предельный случай $R^2/\sqrt{a} \rightarrow 0$, что соответствует предельно сильному электровязкому эффекту, когда для момента сил трения получается $M_{\text{тр}} = -8\eta\sqrt{a}\Omega$.

Формально предельное значение коэффициента трения $8\eta\sqrt{a}$ можно назвать коэффициентом вращательного трения линейного диполя, для которого, в частности, имеет место пропорциональность корню квадратному вязкости $\sqrt{\eta}$. Полученный вывод аналогичен выводам работ [79], [80] о существовании предельного коэффициента трения для случая точечного иона, который пропорционален $\eta^{3/4}$. Физически наличие отличных от нуля коэффициентов трения для точечных тел связано с увеличением электрического поля и, следовательно, электровязкого эффекта с уменьшением его размеров, что компенсирует соответствующее уменьшение сил вязкого сопротивления.

Далее на основе развитых соображений рассмотрим возможность качественного описания упомянутого выше эффекта дополнительной дестабилизации частицами суспензии состояния покоя свободного диэлектрического цилиндра в постоянном электрическом поле. Для этого получим уравнения для дипольного момента диэлектрического цилиндра во внешнем электрическом поле.

Задача о возмущении цилиндром внешнего поля ставится следующим образом $-(\vec{E} = -\nabla\psi)\Delta\psi_{1,2} = 0$ при граничных условиях на поверхности цилиндра $\psi_c = \psi_y$; $D_{cn} - D_{yn} = 4\pi\sigma$;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -j_n^c + j_n^y \quad (7.3.9)$$

Индекс "с" относится к макроскопическим величинам суспензии, "у" - диэлектрического цилиндра.

Решение уравнений Лапласа при граничных условиях (7.3.9) для электрического поля дает

$$\psi_c = -\vec{E}_0 \vec{r} + 2\vec{K}_0 \vec{r} / \epsilon_c^0 r^2 + 2\vec{K}_1 \vec{r} / \epsilon_c^0 r^2,$$

где для \vec{K}_0 и \vec{K}_1 справедливы следующие соотношения

$$\vec{K}_0 = \alpha_y^\infty R^2 \vec{E}_0; \quad \alpha_y^\infty = \epsilon_c^0 (\epsilon_y^0 - \epsilon_c^0) / 2 (\epsilon_y^0 + \epsilon_c^0);$$

$$\partial K_1 / \partial t = [\vec{\Omega} \times \vec{K}_1] - 1/\tau_y (\vec{K}_1 - (\alpha_y^0 - \alpha_y^\infty) R^2 \vec{E}_0); \quad (7.3.10)$$

$$\tau_y = \frac{(\epsilon_c^0 + \epsilon_y^0)}{4\pi(\sigma_c + \sigma_y)}; \quad \alpha_y^0 - \alpha_y^\infty = \frac{(\epsilon_c^0 \sigma_y - \sigma_c \epsilon_y^0) \epsilon_c^0}{(\epsilon_c^0 + \epsilon_y^0)(\sigma_c + \sigma_y)}.$$

Если влиянием поля диполя на суспензию можно пренебречь, то уравнения (7.3.10) и условие баланса моментов сил для стационарного случая дает

$$-\frac{(\alpha_y^0 - \alpha_y^\infty) \tau_y \Omega R^2 E_0^2}{1 + (\tau_y \Omega)^2} - 4\pi\eta R^2 \Omega = 0,$$

откуда видно, что при

$$E_0^2 \gg E_c^2 = -4\pi\eta / \tau_y (\alpha_y^0 - \alpha_y^\infty) \quad (7.3.11)$$

существует состояние стационарного вращения диэлектрического цилиндра $\Omega = \pm \tau_y^{-1} \sqrt{(E_0/E_c)^2 - 1}$.

Отметим, что факт линейного возрастания угловой скорости спонтанного вращения диэлектрического цилиндра с напряженностью поля при $E_0 \gg E_c$ находится в согласии с результатами эксперимента для однородных жидкостей [25I]. Как показывает соотношение (7.3.11), спонтанное вращение диэлектрического цилиндра воз-

можно при $\alpha_y^0 - \alpha_y^\infty < 0$, т.е. $\zeta_y < \zeta_c \epsilon_y / \epsilon_c$.

Так как согласно соотношению (7.3.6) присутствие частиц при $a < 0$ уменьшает момент сил трения на вращающийся цилиндр, то уменьшается и критическая напряженность поля возникновения спонтанного вращения диэлектрического цилиндра. Действительно, для суммы моментов M , действующих на диэлектрический цилиндр, с точностью до величин первого порядка малости по угловой скорости вращения цилиндра, получается

$$M = -(\alpha_y^0 - \alpha_y^\infty) \zeta_y R^2 E_0^2 \Omega + 4\pi\eta R^2 \frac{|a|^{1/2}}{R^2} \Omega / \ln \left(\frac{(R^2/\sqrt{|a|} - 1)}{(R^2/\sqrt{|a|} + 1)} \right),$$

откуда видно, что при

$$-(\alpha_y^0 - \alpha_y^\infty) \zeta_y E_0^2 + 4\pi\eta \frac{|a|^{1/2}}{R^2} / \ln \left(\frac{(R^2/\sqrt{|a|} - 1)}{(R^2/\sqrt{|a|} + 1)} \right) > 0$$

момент M действует в направлении угловой скорости вращения Ω , т.е. поддерживает вращательное движение.

Для критической напряженности поля E_c^* возникновения спонтанного вращения в суспензии отсюда получается

$$(E_c^*/E_c)^2 = -2 \frac{\sqrt{|a|}}{R^2} / \ln \left(\frac{(R^2/\sqrt{|a|} - 1)}{(R^2/\sqrt{|a|} + 1)} \right) < 1 \quad (7.3.12)$$

т.е. присутствие частиц снижает устойчивость состояния покоя по сравнению с однородной жидкостью с такими же электрофизическими свойствами. Соотношение (7.3.12) позволяет рассчитать E_c^*/E_c в зависимости от электрофизических свойств суспензии согласно уравнению

$$x \ln \frac{1+x}{1-x} = 2\beta^2$$

где $x = \beta E_c^*/E_c$; $\beta^2 = 4\pi\zeta(\alpha_\infty - \alpha_0)\alpha_y^0{}^2 / \zeta_y(\alpha_y^\infty - \alpha_y^0)\epsilon_{12}^0{}^2$.

Зависимость E_c^*/E_c от β представлена на рис. 7.3.3.

Получим приближенное соотношение для угловой скорости вращения цилиндра в сильно надкритических условиях. Считая $\zeta_y \Omega \gg 1$ и пренебрегая в этом случае запаздывающей частью поляризации

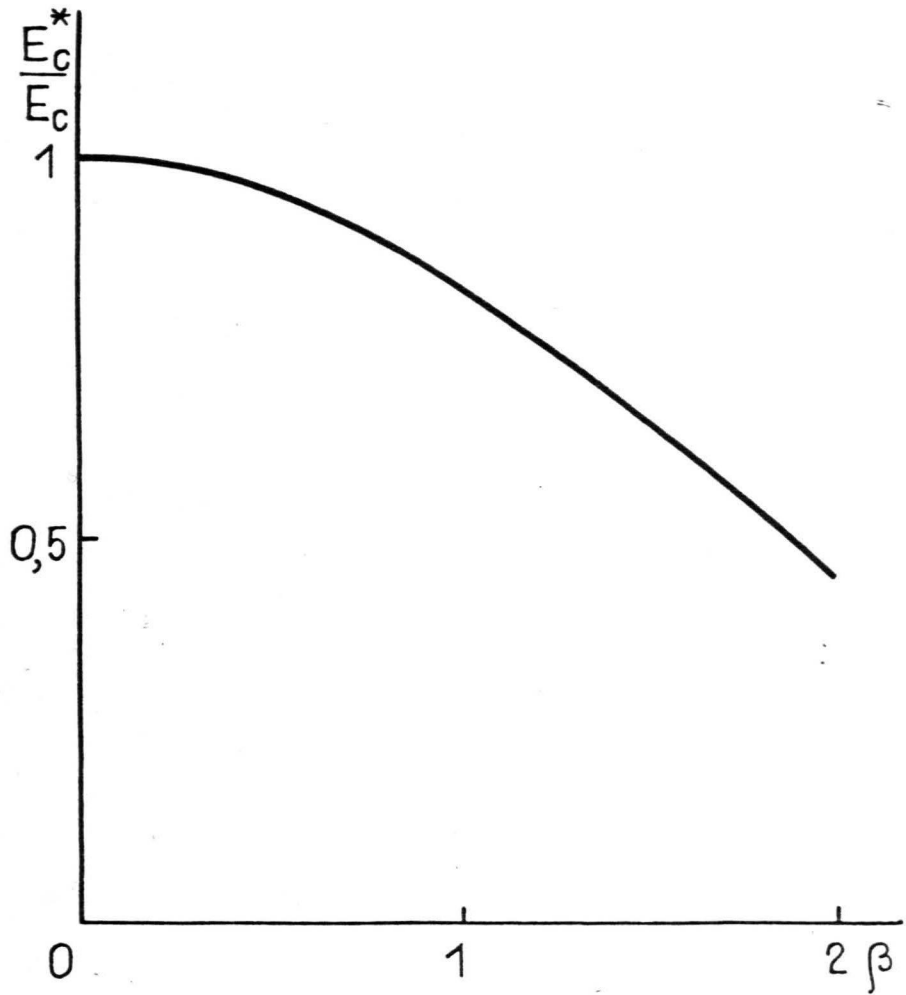


Рис. 7.3.3. Снижение порога возникновения спонтанного вращения диэлектрического цилиндра в слабопроводящей суспензии в зависимости от параметра β .

диэлектрического цилиндра \vec{K}_1 при нахождении электрического поля, действующего на суспензию и определяющего согласно (7.3.6) момент сил трения, условие баланса моментов для угловой скорости стационарного вращения диэлектрического цилиндра дает

$$\tau_y \Omega = \sqrt{\frac{1}{2\beta b} \frac{E_0}{E_c} \ln \frac{(1 + \beta \beta E_0/E_c)}{(1 - \beta \beta E_0/E_c)}} \quad (7.3.13)$$

где $|a|^{1/2}/R^2 = \beta \beta E_0/E_c$; $b^2 = \epsilon_y^{\infty 2}/\epsilon_y^{02}$.

Предел $\beta \beta \rightarrow 0$ соответствует случаю однофазной жидкости. Зависимость (7.3.13) представлена на рис. 7.3.4.

Качественно зависимость (7.3.13) отображает наблюдаемый в эксперименте [249] нелинейный характер зависимости угловой скорости спонтанного вращения диэлектрического цилиндра в суспензии от напряженности внешнего поля и его интенсификацию по сравнению со случаем однородной жидкости.

Так как вращение цилиндра сопровождается возникновением внутренних вращений и обусловленного этим микроконвективного переноса свободного заряда, то возникает поляризационный ток, приводящий к переполяризации диэлектрического цилиндра, т.е. возмущению создаваемого им электрического поля. Явления, связанные с возмущением движением электрического поля, называются реоэлектрическими [251]. Предложенная модель слабопроводящей суспензии позволяет описать подобные явления.

В качестве иллюстрации этого рассмотрим влияние реоэлектрических явлений на возникновение спонтанного вращения диэлектрического цилиндра в слабопроводящей суспензии. При этом рассмотрение проведем методом возмущений, т.е. в пренебрежении влиянием поля цилиндра на движение суспензии. В этом случае (7.3.5) дает $V_\varphi = \Omega R^2/r$. Возмущение потенциала электрического поля цилиндра, вносимое движением суспензии, находится как решение

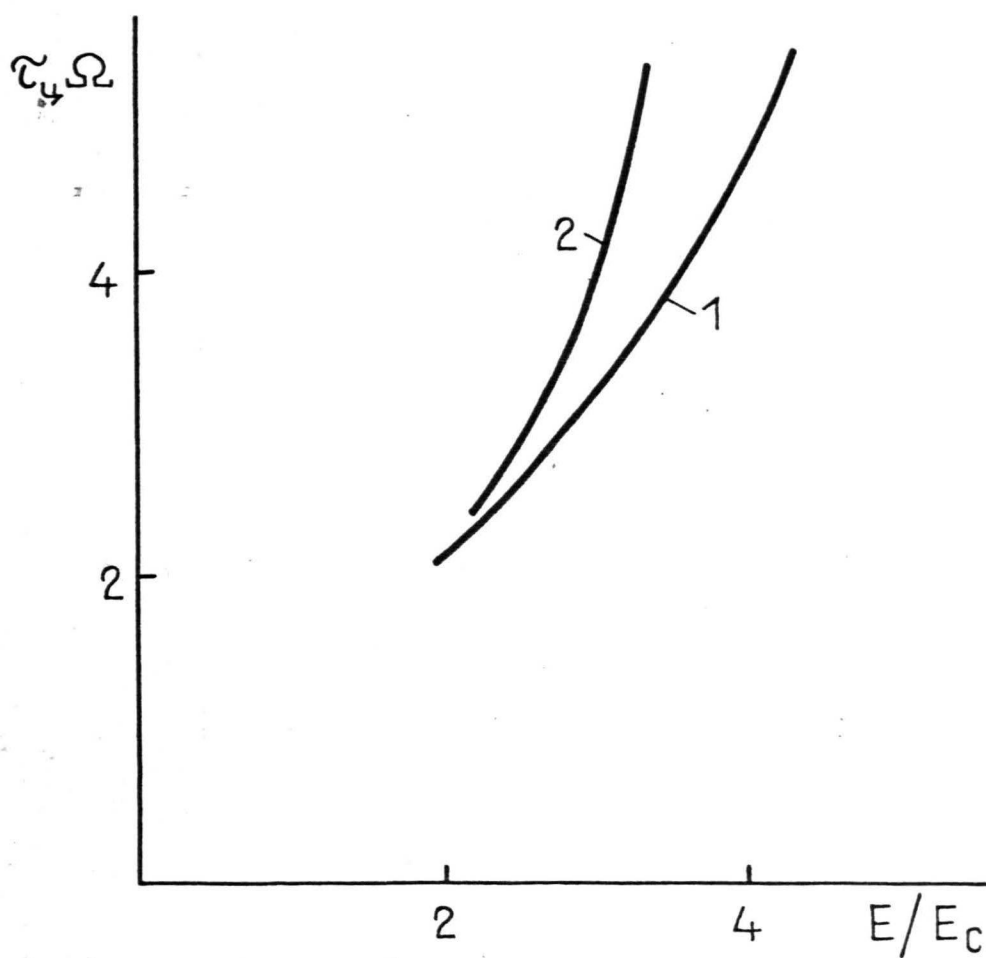


Рис. 7.3.4. Зависимость угловой скорости вращения диэлектрического цилиндра от напряженности электрического поля.

1 - $\beta v = 0,2$; 2 - $\beta v = 0,3$.

следующей задачи ($\vec{E} = -\nabla\psi$)

$$\Delta\psi_y = 0; \epsilon_c^0 \Delta\psi_c = -4\pi \operatorname{div} \vec{P}_* ; \vec{D}_c = \epsilon_c^0 \vec{E}_c + 4\pi \vec{P}_* ;$$

$$\vec{P}_* = -\tau(\chi_c^0 - \chi_c^\infty)(\nabla\nabla)\vec{E}_0 + \tau(\chi_c^0 - \chi_c^\infty)[\vec{\Omega}_0 \times \vec{E}_0]$$

при граничных условиях на поверхности диэлектрического цилиндра

$$\psi_c = \psi_y ; \epsilon_c^0 E_{cn} - \epsilon_y E_{yn} + 4\pi \vec{P}_* \vec{n} = 4\pi \rho' ; j_n^c = j_n^y .$$

Согласно (7.2.7) в стационарном случае для плотности тока в

$$\text{суспензии } \vec{j}_c = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \vec{D}_c .$$

Решение этой задачи для потенциала электрического поля в пространстве вне диэлектрического цилиндра в дипольном приближении дает

$$\psi_\partial = 2\vec{K}_1 \vec{r} / \epsilon_c^0 r^2 ; \vec{K}_1 = 4\pi\tau(\chi_c^0 - \chi_c^\infty)(\chi_y^0)^2 [\vec{\Omega} \times \vec{E}_0] . \quad (7.3.14)$$

Соотношение (7.3.14) показывает, что реоэлектрический эффект

приводит к дополнительному моменту электрических сил $\vec{M} = -4\pi\tau(\chi_y^0)^2 \times (\chi_c^0 - \chi_c^\infty) \vec{\Omega} E_0^2$, в случае $\chi_c^0 - \chi_c^\infty < 0$ дестабилизирующего состояния покоя диэлектрического цилиндра относительно возникновения вращения.

Приведем ряд количественных оценок, иллюстрирующих полученные соотношения. Экспериментальные исследования спонтанного вращения диэлектрика в суспензиях проводилось в основном на суспензиях диатомита в трансформаторном масле [249]. Весьма примечательным для данных суспензий является сильная зависимость реологических и электрофизических свойств от присутствия активатора - воды. Проводимость этих суспензий сильно зависит от содержания активатора и имеет порядок $10^{-9} \Omega^{-1} \text{ см}^{-1}$. В качестве диэлектрического тела используется цилиндр из эбонита.

Количественное сопоставление развитых представлений с экспериментом затруднительно в силу целого ряда причин: 1) сложное реологическое поведение суспензии в поле, 2) сложные физико-хими-

ческие свойства суспензии, связанные с присутствием активатора, 3) отсутствие достаточного количества данных о свойствах использованных материалов и характеристиках имеющих место явлений, тем не менее ряд грубых оценок представляется уместным.

Соотношение (7.3.II) для критической напряженности поля трогания цилиндра эбонита ($\epsilon_3 = 3$) в среде с параметрами $\epsilon_{тр} = 2,3$, $G = 10^{-9} \text{ } \Omega^{-1} \text{ см}^{-1}$, $\eta = 0,32$ пуаз (трансформаторное масло) дает значение порядка 24 кВ/см , что соответствует по порядку величины диапазону полей, в которых наблюдается вращение цилиндра эбонита в электрореологических суспензиях. Для безразмерного параметра β , определяющего снижение порога устойчивости в суспензии, если считать частицы последней непроводящими (диатомит), а отличием диэлектрической проницаемости и проводимости суспензии от значений для несущей среды пренебречь, получается $\beta = \sqrt{9\varphi\epsilon_k/4\epsilon_3\epsilon_{тр}^2} \cong 0,1$, если воспользоваться следующими параметрами суспензии: $\varphi = 2,5 \cdot 10^{-2}$, $\epsilon_k = 3,75$ (кварц), $\epsilon_3 = 3$, $\epsilon_{тр} = 2,3$. Эта оценка, как показывают данные, приведенные на рис. 7.3.3, дает весьма незначительное уменьшение пороговой напряженности поля. В качественном согласии с приведенной оценкой находится факт интенсификации вращения цилиндра с увеличением количества активатора - воды, диэлектрическая проницаемость которой велика, так как это приводит к увеличению диэлектрической проницаемости частиц и соответствующему снижению порога неустойчивости. Для параметра β_r , определяющего интенсификацию спонтанных вращений, при указанных значениях параметров получается $\beta_r = |\epsilon_y - \epsilon_c^0|/|\epsilon_y + \epsilon_c^0| \beta \lesssim \beta \sim 0,1$.

Таким образом, полученные в данном разделе результаты показывают возможность качественного объяснения на основе развитой модели слабопроводящей суспензии с учетом внутренних вращений наблюдаемой в эксперименте интенсификации спонтанного вращения

диэлектрического цилиндра в электрореологических суспензиях по сравнению с однородными жидкостями.

ВЫВОДЫ

1. Построена модель жидкости с функцией распределения частиц в ориентационном пространстве в качестве внутреннего параметра состояния. В результате описания ориентационного межчастичного взаимодействия в рамках приближения самосогласованного поля и разложения решения нелинейного уравнения для функции распределения по малому параметру - отношению броуновского и гидродинамического времен ориентационной релаксации - получена зависимость феноменологических коэффициентов модели анизотропной жидкости Лесли-Эриксона от параметра ориентационного порядка и молекулярных постоянных. Полученные соотношения позволяют описать наблюдаемые на эксперименте особенности температурной зависимости феноменологических коэффициентов модели Лесли-Эриксона НЖК. Полученная зависимость вращательной вязкости НЖК от параметра порядка подтверждена на эксперименте. Данная модель позволяет единым образом описать гидродинамические явления в изотропной и анизотропной фазах ЖК, а также в других НЖ, в которых существенны эффекты ориентационного взаимодействия частиц.

2. Построена модель слабопроводящей суспензии анизотропных частиц с внутренними вращениями, обусловленными накоплением свободного заряда на межфазных границах раздела. В частном случае сферических частиц рассматриваемая модель эквивалентна модели НЖ с внутренними вращениями. На основе развитой модели рассмотрена электрогидродинамическая неустойчивость суспензии, обусловленная ориентационными эффектами, и показано, что ориентационное состояние суспензии с длинными осями частиц в направлении поля

при определенных электрофизических свойствах фаз и параметрах частиц является неустойчивым относительно развития колебательных возмущений. Указано, что полученные теоретические результаты коррелируют с наблюдением в электрическом поле у некоторых коллоидов ферромагнетика колебаний тока и интенсивности рассеянного света. Определенная по периоду наблюдаемых колебаний, согласно полученной для него формуле, проводимость коллоида хорошо согласуется с данными эксперимента.

3. На основе развитой модели слабопроводящей суспензии сферических частиц рассмотрено влияние явлений релаксации поляризации на вращение поляризованного во внешнем поле диэлектрического цилиндра и показано, что в случае, соответствующем непроводящим частицам суспензии, коэффициент вращательного трения цилиндра уменьшается. Полученные результаты позволяют проводить оценки влияния собственного поля H_z на измеряемый в ротационном вискозиметре момент сил, что существенно при определении указанным способом вращательной вязкости концентрированных коллоидов ферромагнетиков и др. Полученные результаты качественно соответствуют наблюдаемой на эксперименте интенсификации в слабопроводящей суспензии спонтанного вращения диэлектрического цилиндра в электрическом поле по сравнению с однофазными жидкостями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение поставленных в работе задач позволяет сделать ряд общих выводов и отметить некоторые вытекающие отсюда задачи дальнейших исследований.

I. Проведенные в работе исследования влияния магнитного межчастичного взаимодействия на состояние коллоида ферромагнетика показывают наличие нового физического явления — пространственного расслоения системы во внешнем магнитном поле. Отсюда следует, что в реальных ситуациях существенным моментом при описании взаимодействия подобных сред с полем может являться ее многофазный характер. Это ставит новые весьма сложные задачи построения моделей коллоидов ферромагнетиков и описания на их основе возникающих при этом новых физических явлений. В частности, актуальной становится задача об описании поведения капли НК в течении со сдвигом при наличии магнитного поля, что открывает новые механизмы управления полем реологическими свойствами среды.

Новое содержание получает важный для многих практических приложений МЖ вопрос о ее поведении в сильнонеоднородных полях, где описанное в работе явление пространственного расслоения коллоида в поле может иметь существенное значение.

Возникает ряд новых задач и в области исследования магнитных явлений в коллоидах ферромагнетиков. В частности, возникает новая для физики магнитных явлений ситуаций, когда одновременно с изменением характера магнитного порядка происходит и изменение пространственного расположения носителей магнетизма. Как показано в данной работе, при этом возможно возникновение состояний как спонтанно намагниченных, так и спонтанной намагничен-

ностью не обладающих. На возможность определенного разнообразия в поведении коллоидов при отсутствии поля указывают и данные экспериментов. Дальнейшее разъяснение имеющей тут место ситуации представляется весьма целесообразным.

В экспериментальном плане одной из задач первостепенной важности является установление фазовых диаграмм коллоида ферромагнетика в магнитном поле, так как имеющиеся в настоящее время данные весьма неполны и разрознены.

2. Проведенные в работе исследования явлений, обусловленных далекодействующим характером магнитных межчастичных взаимодействий, приводят к постановке целого ряда новых задач гидродинамики и математической физики. Так возникает новый класс задач о семействах фигур равновесия НЖ в плоских слоях при наличии поля, поперечного слою, обусловленного балансом сил поверхностного натяжения и магнитного межчастичного взаимодействия, которые, как показывают результаты данной работы, являются весьма сложными и могут испытывать множество бифуркаций. Эффективное нахождение достаточно простых фигур равновесия, как показано в работе, может быть осуществлено путем численного моделирования процесса их установления, описываемого в приближении течения Хеле-Шоу. Однако расчет наблюдаемых на эксперименте сложных равновесных фигур НЖ, образуемых в результате последовательности многих бифуркаций их семейств, остается актуальной задачей, требующей значительного совершенствования использованных средств математического моделирования.

Обнаруженная и описанная в работе совокупность новых гидродинамических явлений, связанных с поведением НЖ в плоских слоях, показывает возможность управления в широких пределах поверхностью межфазных границ раздела. В этом плане возникает вопрос практического использования этих явлений.

Представляет интерес полученное в работе заключение о возможности развития в очень узких щелях описанных МГД-неустойчивостей и у включений концентрированной фазы коллоида ферромагнетика. Имеются указания о наблюдении подобных явлений на эксперименте. При этом возникает вопрос о виде структур, образуемых коллоидом ферромагнетика в узких щелях при фазовом расслоении в поле, которые вследствие развития МГД-неустойчивостей могут иметь и лабиринтный характер.

Определенный практический интерес может представлять и влияние движения, например, при всплывании пузырька в вертикальной щели, на развитие МГД-неустойчивостей. Проведенное автором на основе развитых в работе методов, численное моделирование развития неустойчивости всплывающего пузырька показывает, что при движении пузырька более сильно развиваются возмущения, поперечные направлению его всплывания, причем установившаяся конфигурация, в отличие от случая покоящегося пузырька, при тех же значениях физических параметров, не определяется однозначным образом, а зависит также от начальных условий. Полученные результаты показывают также возможность управления скоростью всплывания пузырьков посредством изменения их формы в однородном поле.

В экспериментальном плане исследования МГД-неустойчивостей НК в плоских слоях представляется существенным получение количественных характеристик данных явлений.

Существенное методологическое значение для постановки корректных экспериментов по исследованию явлений диффузии частиц, теплопроводности в коллоидах ферромагнетиков при наличии магнитного поля имеет описанное в работе возникновение ячеистого движения и при гравитационно устойчивой стратификации НК, обусловленного межчастичным магнитным взаимодействием, так как пренеб-

режение им может приводить к неверной интерпретации экспериментальных данных.

Характеризуя рассматриваемую совокупность явлений в целом, разумно отнести их к классу магнитогидродинамических, так как при их описании уравнения движения и магнитного поля оказываются взаимосвязанными. Это позволяет сделать заключение о расширении в настоящее время предмета магнитной гидродинамики с включением в него и намагничивающихся сред.

3. В работе показано, что в апробировании и отборе моделей НЖ с внутренними степенями свободы большое значение могут играть численные эксперименты. Сопоставление результатов численных экспериментов в условиях адекватных естественным с выводами из феноменологических уравнений позволяет устанавливать пригодность последних для описания явлений, наблюдаемых в действительности. В работе дан ряд иллюстраций этого. Развитие этого направления исследований при учете случайного теплового движения магнитного момента в частице ферромагнетика, межчастичных магнитных взаимодействий должно дать необходимую апробацию моделей, учитывающих эти эффекты. Необходимо также добавить, что проведенные в работе исследования показывают, что построение адекватных уравнений релаксации намагниченности в условиях сильной неравновесности остается актуальной задачей.

Кроме того, численные эксперименты позволяют получать информацию о свойствах среды, которую аналитическими средствами получить весьма затруднительно. На основе полученных в работе характеристик магнитореологического поведения суспензии эллипсоидальных частиц можно получить информацию об имеющихся местах при движении коллоидов ферромагнетиков структурных превращениях, описывать их движение во всем диапазоне скоростей сдвига. В связи с этим представляется целесообразным создание на основе раз-

ВИТЫХ МЕТОДОВ ДОСТАТОЧНО ПОДРОБНЫХ ТАБЛИЦ МАГНИТОРЕОЛОГИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ КОЛЛОИДОВ АНИЗОТРОПНЫХ ЧАСТИЦ ФЕРРОМАГНЕТИКА.

С точки зрения единого описания гидродинамических явлений, связанных с ориентационными эффектами, плодотворной является введенная автором модель с функцией распределения частиц в ориентационном пространстве в качестве внутреннего параметра состояния. В результате задания соответствующего уравнения состояния для химического потенциала в ориентационном пространстве могут быть описаны явления, связанные с конечным значением константы магнитной анизотропии коллоидальных частиц ферромагнетика, межчастичным ориентационным взаимодействием, влиянием броуновского вращательного движения на напряжения в суспензии эллипсоидальных частиц и др. Путем сокращения данного описания могут быть получены различные частные модели: модель Лесли-Эриксона анизотропной жидкости, модель НЖ с намагниченностью в качестве внутреннего параметра состояния и др. Из развитого общего подхода вытекает ряд новых конкретных проблем, например, задача о возникновении вследствие течения со сдвигом фазовых переходов, обусловленных ориентационными межчастичными взаимодействиями, так как течение является дополнительным фактором ориентации частиц. При этом в исследовании подобных явлений весьма плодотворным может оказаться развитый в работе метод броуновской динамики.

Построенные и апробированные модели НЖ с учетом внутренних параметров состояния, связанных с ориентационными степенями свободы, позволяют описать ряд новых гидродинамических явлений, как например, возникновение обусловленного ориентационными эффектами макроскопического движения НЖ со свободными границами во вращающихся магнитных полях, которое в настоящее время экспериментально подтверждено в различных условиях и начинает использоваться практически.

4. Полученные в работе результаты представляют интерес не только для гидродинамики НЖ, но и для ряда других областей гидродинамики и физики. Так в работе показано, что модель слабопроводящей суспензии сферических частиц с учетом внутренних вращений, обусловленных накоплением свободного заряда на межфазных границах раздела, эквивалентна модели НЖ с внутренними вращениями.

Найденные в работе механизмы образования лабиринтных структур НЖ в плоских слоях в настоящее время подтверждены и для диэлектрических жидкостей в электрическом поле. Тем самым возникает ряд новых вопросов, требующих исследования, в частности, связанных с влиянием накопления свободного заряда на развитие лабиринтных структур, развитием структур при совместном действии электрического и магнитного полей и др.

Надо отметить, что исследование явлений при совместном действии на НЖ магнитного и электрического полей представляется весьма интересной областью исследований, которая в настоящее время остается практически неизученной, хотя тут уже имеются интересные практические разработки. В работе это направление проиллюстрировано на примере рассмотрения вириальным методом образования капель проводящей НЖ при совместном действии электрического и магнитного полей струек жидкости.

Интерес представляет описанная в работе аналогия структур, образуемых НЖ в плоских слоях, с доменными структурами в пленках высокоанизотропных ферромагнетиков. Несмотря на отмеченное в работе принципиальное отличие механизмов образования этих структур, для статических конфигураций намечается много общих моментов. Так в работе показано, что характеристики лабиринтных структур НЖ и полосовых доменов ферромагнетиков определяются ана-

логичными зависимостями. Найденное в работе путем численного моделирования существование как прямолинейных, так и изогнутых гантелеобразных конфигураций капель НЖ находит подтверждение также в наблюдаемых структурах доменов ферромагнетиков, где встречаются конфигурации обоих указанных типов.

Надо отметить также, что развитый в работе численный метод моделирования динамики свободной поверхности, основанный на решении граничного интегрального уравнения, представляет интерес и в связи с развитием в последнее время численного решения задач математической физики методом граничных элементов. При этом примеров реализации этого метода для численного моделирования динамики свободной поверхности имеется мало. Показанная в работе эффективность этого метода при численном моделировании данных явлений дает возможность заключить о целесообразности его развития и совершенствования, в частности, путем предусмотрения возможности добавления дополнительных маркеров на определенных участках контура при увеличении в процессе динамики конфигураций их кривизны.

Данные общие замечания, а также конкретные выводы, полученные в заключениях к главам настоящей работы, позволяют заключить, что представленные в работе результаты являются новым перспективным направлением механики сплошных сред - гидродинамики намагничивающихся жидкостей с учетом магнитного межчастичного взаимодействия и ориентационных эффектов.

Приложение I

Свободная энергия и термодинамическая устойчивость
коллоида анизотропных частиц ферромагнетика

В настоящем приложении методом коллективных переменных проводится расчет свободной энергии суспензии иглообразных магнитов и получается необходимое условие ее термодинамической устойчивости.

Пусть в объеме V находится N иглообразных магнитов длиной l с магнитным моментом на единицу длины m . Если ввести вектор $\vec{l}(\vec{r})$, который пропорционален намагниченности суспензии (\vec{r}_i - радиус-вектор центра частицы, \vec{n}_i - единичный вектор в направлении ее оси):

$$\vec{l}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \vec{n}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i - \vec{n}_i s) ds,$$

то энергия магнитодипольного взаимодействия коллоида

$$u = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} u_{ij} = -\frac{1}{2} m^2 \sum_{i \neq j} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (\vec{n}_i \cdot \nabla_i) (\vec{n}_j \cdot \nabla_j) |\vec{r}_i + \vec{n}_i s - \vec{r}_j - \vec{n}_j s'|^{-1} ds ds'$$

через коллективные переменные $\vec{l}(\vec{k})$ - пространственные фурье-компоненты векторного поля $\vec{l}(\vec{r}) = V^{-1} \sum_{\vec{k}} \vec{l}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}}$ может быть выражена в следующем виде (двоеточие - свертка тензоров по двум индексам, точка - по одному, ее отсутствие - прямое произведение)

$$u = \frac{m^2}{2V} \sum_{\vec{k}} T(\vec{k}) : \vec{l}(\vec{k}) \vec{l}(-\vec{k}) - \frac{m^2}{2V} \sum_{\vec{k}} T(\vec{k}) : \sum_{i=1}^N \vec{n}_i \vec{n}_i \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}_i)$$

где $-\nabla \nabla |\vec{R} - \vec{R}'|^{-1} = V^{-1} \sum_{\vec{k}} T(\vec{k}) \exp(i\vec{k}(\vec{R} - \vec{R}'))$

и

$$\Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}_i) = 4 \sin^2((\vec{k} \cdot \vec{n}_i) l/2) / (\vec{k} \cdot \vec{n}_i)^2,$$

а коллективные переменные через координаты частиц выражаются в

виде $\vec{l}(\vec{k}) = \sum_{i=1}^N \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \vec{n}_i \exp - i\vec{k}(\vec{r}_i + \vec{n}_i s) ds.$

В таком случае статистическая сумма и свободная энергия коллоида, представляя его в виде многокомпонентной смеси, где "i" компонента представлена частицами с направлением вектора \vec{n} , лежащего внутри некоторого малого телесного угла ω_i , могут быть представлены в следующем виде (M_i - число частиц с единичным вектором \vec{n} внутри телесного угла ω_i)

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln \prod_i \frac{(\omega_i)^{M_i} V^N}{M_i!} \cdot \frac{1}{V^N} \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N \times \\ \times \exp\left(-\frac{m^2}{2kTV} \sum_{\vec{k}} T(\vec{k}) : \vec{\ell}(\vec{k}) \vec{\ell}(-\vec{k}) + \frac{m^2}{2kTV} \sum_{\vec{k}} T(\vec{k}) : \sum_m M_m \vec{n}_m \vec{n}_m \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}_m)\right).$$

В методе коллективных переменных в статистической сумме от интегрирования по координатам положений частиц осуществляется переход к интегрированию по коллективным переменным $\text{Re } \vec{\ell}(\vec{k})$ и $\text{Im } \vec{\ell}(\vec{k})$. Представляя якобиан замены переменных в виде (в произведение \prod' входят члены, соответствующие полупространству возможных значений вектора \vec{k})

$$\frac{1}{V^N} \int d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_N \prod_{\vec{k}} \delta(\text{Re } \vec{\ell}'(\vec{k}) - \text{Re } \vec{\ell}(\vec{k})) \delta(\text{Im } \vec{\ell}'(\vec{k}) - \text{Im } \vec{\ell}(\vec{k}))$$

и воспользовавшись представлением δ -функции $\delta(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega$ последний в приближении хаотических фаз [II3], [II4] может быть вычислен на основе следующей формулы

$$\delta(\text{Re } \vec{\ell}'(0) - \sum_m M_m \vec{n}_m \ell) \prod_{\vec{k} \neq 0} \frac{\exp(-A^{-1}(\vec{k}) : \vec{\ell}(\vec{k}) \vec{\ell}(-\vec{k}) / 2)}{2\pi \det A(\vec{k})}$$

где матрица $A(\vec{k})$ определяется выражением

$$A(\vec{k}) = \frac{1}{2} \sum_m M_m \vec{n}_m \vec{n}_m \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}_m).$$

В результате расчет свободной энергии сводится к вычислению интеграла гауссова типа

$$F = -kT \ln \prod_i \frac{(\omega_i)^{M_i} V^N}{M_i!} - \frac{m^2}{2V} \sum_{\vec{k}} T(\vec{k}) : \sum_m M_m \vec{n}_m \vec{n}_m \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}_m) -$$

$$-kT \ln \int d\text{Re } \vec{\ell}'(0) \prod_{\vec{k}} d\text{Re } \vec{\ell}'(\vec{k}) d\text{Im } \vec{\ell}'(\vec{k}) \delta(\text{Re } \vec{\ell}'(0) - \sum_m M_m \vec{n}_m \ell) \times \\ \times \exp\left(-\frac{m^2}{2kTV} \sum_{\vec{k}} (T(\vec{k}) + \frac{k_B T V}{m^2} A^{-1}(\vec{k})) : \vec{\ell}(\vec{k}) \vec{\ell}(-\vec{k})\right) / 2\pi \det A(\vec{k}).$$

Вычисление данного интеграла и введение функции распределения частиц по ориентациям $M_i = N f(\vec{n}_i) \omega_i$ при использовании $\ln M_i! \cong M_i \ln(M_i/e)$ позволяет получить зависящую от распределения частиц в ориентационном пространстве свободную энергию коллоида анизотропных частиц в следующем виде

$$F = kTN \int f(\vec{n}) \ln f(\vec{n}) d^2 \vec{n} + \frac{m^2 \ell^2 N^2}{2V} T(0) : \int f(\vec{n}) \vec{n} d^2 \vec{n} \int f(\vec{n}') \vec{n}' d^2 \vec{n}' - \\ - \frac{m^2 N}{2V} \sum_{\vec{k}} T(\vec{k}) : \int f(\vec{n}) \vec{n} \vec{n} \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}) d^2 \vec{n} + \frac{1}{2} kT \sum_{\vec{k}} \ln \det (I + \\ + \frac{nm^2 T(\vec{k}) \cdot A}{kT} \cdot \int f(\vec{n}) \vec{n} \vec{n} \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}) d^2 \vec{n}). \quad (\text{П.І.І})$$

$T(0)$ равен размагничивающему фактору объема, содержащего коллоид. Далее рассматриваются состояния коллоида не обладающие спонтанным магнитным моментом. В таком случае второй член в выражении (П.І.І) из рассмотрения выпадает. От суммирования по значениям вектора \vec{k} в соотношении (П.І.І) можно перейти к интегрированию согласно стандартной формуле $\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k}$.

Полученное выражение свободной энергии (П.І.І) позволяет рассчитать химический потенциал частиц в ориентационном пространстве, а также рассмотреть условия потери термодинамической устойчивости коллоида относительно перераспределения частиц в ориентационном пространстве.

Определитель в соотношении (П.І.І) можно вычислить в явном виде, если воспользоваться формулой для вычисления определителя матрицы \hat{b} размерностью 3×3 и выражением для фурье-компонент

тензора дипольного взаимодействия $T(\vec{k}) = 4\pi\vec{k}\vec{k}/k^2$,
что дает

$$B = \frac{nm^2}{kT} T(\vec{k}) \cdot \int f(\vec{n}) \vec{n} \vec{n} \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}) d^2\vec{n} \quad \det(I+B) = 1 + \text{Sp}B.$$

Химический потенциал частиц в ориентационном пространстве вычисляется согласно формуле $n\mu(\vec{n}) = \delta f_{0\delta} / \delta f(\vec{n})$. Дифференцирование (П.1.1) с учетом указанной формулы для определителя дает

$$n\mu(\vec{n}) = kT \ln f(\vec{n}) - \frac{kT}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \left(\frac{nm^2}{kT} \right)^2 T(\vec{k}) \cdot \int f(\vec{n}') \vec{n}' \vec{n}' \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}') d^2\vec{n}' \times \\ \times T(\vec{k}) : \vec{n} \vec{n} \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}) / \left(1 + \frac{nm^2}{kT} T(\vec{k}) : \int f(\vec{n}) \vec{n} \vec{n} \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}) d^2\vec{n} \right).$$

Условие устойчивости коллоида, заключающееся в положительности второй вариации свободной энергии, может быть выражено в следующем виде

$$\delta^2 f_{0\delta} = n \int \frac{\delta\mu(\vec{n})}{\delta f(\vec{n}')} \delta f(\vec{n}) \delta f(\vec{n}') d^2\vec{n} d^2\vec{n}' > 0.$$

Расчет вариационной производной $\delta\mu(\vec{n})/\delta f(\vec{n}')$ дает

$$n \frac{\delta\mu(\vec{n})}{\delta f(\vec{n}')} = \frac{kTn}{f(\vec{n})} \delta^2(\vec{n} - \vec{n}') - \frac{kT}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \left(\frac{nm^2}{kT} \right)^2 \int d^3\vec{k} T(\vec{k}) : \vec{n} \vec{n} \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}) \times \\ \times T(\vec{k}) : \vec{n}' \vec{n}' \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}') / \left(1 + \frac{nm^2}{kT} T(\vec{k}) : \int f(\vec{n}) \vec{n} \vec{n} \Delta(\vec{k} \cdot \vec{n}) d^2\vec{n} \right)^2.$$

В результате рассмотрения вариации функции распределения частиц вида $\delta f(\vec{n}) \sim p_2(\vec{e}\vec{n})$, где единичный вектор \vec{e} задает направление спонтанного упорядочения осей анизотропных частиц, получается необходимое условие устойчивости изотропного состояния коллоида в следующем виде

$$\frac{\lambda}{\gamma} - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz F^2(z)/z^2}{(1 + \lambda(1 - \sin z/z)/z^2)^2} > 0$$

здесь $F(z) = (3 \sin z - 3z \cos z - z^2 \sin z)/z^3$,

$\lambda = 8\pi n(ml)^2/kT$ - параметр, пропорциональный параметру магнитодипольного взаимодействия, определенному по среднему расстоянию между частицами, а $\mu = 2(ml)^2/l^3 kT$ имеет смысл параметра магнитодипольного взаимодействия, определенного по длине иглообразного магнита. Заметим, что отношение λ / μ равно $4\pi n l^3$, пропорционально доле исключенного объема анизотропных частиц, определенного по их длине.

Приложение 2.

Моменты, определяющие динамику и статику капли

НЖ в вириальном приближении

$$\frac{1}{2\pi} \int ds = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{(1-e^2)^{1/6}} \left(\frac{\arcsin e}{e} + (1-e)^{1/2} \right) \quad (\text{П.2.1})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int n_3^2 ds = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} (1-e^2)^{5/6} \left(\frac{\arcsin e}{e^3} - \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e^2} \right) \quad (\text{П.2.2})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int x_3 n_3^3 ds = \left(\frac{3V}{4\pi}\right) \frac{(1-e^2)}{e^4} \left(\frac{1}{e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 2(1+e^2/3) \right) \quad (\text{П.2.3})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int (x_1 n_1 + x_2 n_2) n_3^2 ds = \frac{3V}{4\pi} \frac{(1-e^2)}{e^2} \left(\frac{1}{e} \ln \frac{1+e}{1-e} - 2 \right) - \frac{1}{2\pi} \int x_3 n_3^3 ds \quad (\text{П.2.4})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int \left(x_3 n_3 - \frac{1}{2} (x_1 n_1 + n_2 x_2) \right) n_3^2 (n_3^2 - 1) ds = \frac{3V}{4\pi} \frac{(1-e^2)}{2} \left(\frac{(15-7e^2)}{e^6} - \frac{(e^4 - 12e^2 + 5)}{2e^7} \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \quad (\text{П.2.5})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int n_3^4 ds = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} (1-e^2)^{1/3} \left(\frac{(1-e^2)(3-e^2)}{e^4} - \frac{3(1-e^2)\arcsin e}{(1-e^2)^{1/2} e^5} \right) \quad (\text{П.2.6})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int n_1^2 n_2^2 ds = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{2/3} \frac{(1-e^2)^{1/3}}{8} \left(\frac{(4e^2-3)\arcsin e}{e^5 (1-e^2)^{1/2}} + \frac{(3-2e^2)}{e^4} \right) \quad (\text{П.2.7})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int (x_1 n_1 - x_2 n_2) n_3^2 (n_1^2 - n_2^2) ds = \frac{3V}{4\pi} \frac{(1-e^2)}{2} \left(\frac{15-13e^2}{3e^6} - \frac{(1-e^2)}{2e^7} \times \right. \\ \left. \times (5-e^2) \ln \frac{1+e}{1-e} \right). \quad (\text{П.2.8})$$

Здесь X_i - декартовы координаты точек на поверхности вытянутого эллипсоида вращения, n_i - внешняя нормаль к его поверхности.

Приложение 3

Тензор напряжений суспензии эллипсоидальных частиц в поле

В настоящем приложении даются необходимые соотношения, определяющие напряжения в движущейся суспензии эллипсоидальных частиц, в основном известные из работ [75], [76], [181]. В целях общности рассмотрение проводится в рамках общей модели анизотропной жидкости Лесли-Эриксона. Модель разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц используется лишь при нахождении численных значений феноменологических коэффициентов.

Тензор напряжений анизотропной жидкости с директором \vec{n} в рамках модели Лесли-Эриксона может быть записан в следующем виде,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ik} = & \alpha_1 n_i n_k n_e n_m \gamma_{em} + \alpha_2 n_k N_i + \alpha_3 n_i N_k + \alpha_4 \gamma_{ik} + \\ & + \alpha_5 n_k \gamma_{il} n_l + \alpha_6 n_i \gamma_{kl} n_l + \alpha_7 \delta_{ik} n_e n_m \gamma_{em} \end{aligned} \quad (\text{П.3.1})$$

здесь $\vec{N} = \dot{\vec{n}} - [\vec{\Omega}_0 \times \vec{n}]$, $\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)$, $\vec{\Omega}_0 = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$.

Условие равенства нулю антисимметричной части тензора полных напряжений дает уравнение движения директора в следующем виде ($\lambda = -\alpha_6 - \alpha_5 / \alpha_3 - \alpha_2$), $\vec{m} = m \vec{n}$ - магнитный момент отдельной частицы, $\alpha = (\alpha_3 - \alpha_2) / n$ - коэффициент вращательного трения частицы, n - объемная концентрация частиц)

$$[\vec{n} \times (\dot{\vec{n}} - [\vec{\Omega}_0 \times \vec{n}])] = \alpha^{-1} [\vec{m} \times \vec{N}] + \lambda [\vec{n} \times \gamma \cdot \vec{n}] \quad (\text{П.3.2})$$

Действие случайных тепловых толчков на частицу учитывается добавлением в правую часть соотношения (П.3.2) $\vec{\Omega}_{c\lambda}$ - случайной угловой скорости вращения эллипсоида вокруг короткой оси. В таком случае уравнение Ланжевена для директора суспензии имеет вид

ет вид

$$\vec{N} = \dot{\vec{n}} - [\vec{\Omega}_0 \times \vec{n}] = \alpha^{-1} \left\{ \left[\vec{m} \times \vec{H} \right] \times \vec{n} \right\} + \lambda (\gamma \cdot \vec{n} - \vec{n} \gamma_i \vec{n} \vec{n}) + [\vec{\Omega}_{c\Lambda} \times \vec{n}] \quad (\text{П.3.3})$$

Соотношение (П.3.3) показывает, что в напряжения анизотропной суспензии вносят вклад и случайные моменты сил, действующие на частицы. Необходимость учета в напряжениях анизотропной суспензии случайных тепловых моментов сил, действующих на частицу, подробно рассматривается в работе [204]. При этом случайную угловую скорость частиц в ансамбле предлагается представить в виде

$$\vec{\Omega}_{c\Lambda} = -D \vec{K}_n f / f \quad (D = KT \alpha^{-1}),$$

где $\vec{K}_n = [\vec{n} \times \partial / \partial \vec{n}]$. В таком случае усреднение (П.3.1) с функцией распределения f позволяет получить для среднего по ансамблю напряжения анизотропной суспензии следующее выражение (угловые скобки $\langle \rangle$ означают усреднение с функцией распределения f)

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik} = & (\alpha_1 - \lambda(\alpha_2 + \alpha_3)) \langle n_i n_k n_e n_m \rangle \gamma_{em} + \alpha_4 \gamma_{ik} + (\alpha_5 + \lambda \alpha_2) \langle n_k \gamma_{ie} n_e \rangle + \\ & + (\alpha_6 + \lambda \alpha_3) \langle n_i \gamma_{ke} n_e \rangle + \alpha_2 \alpha^{-1} \langle n_k [[\vec{m} \times \vec{H}] \times \vec{n}]_i \rangle + \\ & + \alpha_3 \alpha^{-1} \langle n_i [[\vec{m} \times \vec{H}] \times \vec{n}]_k \rangle - (\alpha_2 + \alpha_3) D \langle (3n_i n_k - \delta_{ik}) \rangle + \\ & + \alpha_7 \delta_{ik} \langle n_e n_m \rangle \gamma_{em}. \end{aligned} \quad (\text{П.3.4})$$

Выражение (П.3.4) может быть обосновано и более формальным образом. Для этого усредним напряжения, определяемые соотношением (П.3.1) по малому промежутку времени Δt . Тогда в результате усреднения по ансамблю реализаций случайного процесса $\vec{\Omega}_{c\Lambda}$ и устремления Δt к нулю, получается выражение (П.3.4). При этом для нахождения средних по ансамблю вида

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \langle n_i(t') [\vec{\Omega}_{c\Lambda}(t') \times \vec{n}(t')]_k \rangle dt' = D (\delta_{ik} - 3n_i n_k),$$

следует воспользоваться формулой Фурутцу-Новикова [205] и выражением для корреляционной функции случайного процесса $\vec{\Omega}_{cA}$.

Уравнение Ланжевена директора (П.3.3) позволяет получить уравнение Фоккера-Планка для функции распределения частиц в виде

$$\partial f / \partial t = -\vec{K}_n(\vec{\Omega}_0 f) - \alpha^{-1} \vec{K}_n([\vec{m} \times \vec{H}] f) - \lambda \vec{K}_n([\vec{n} \times \gamma \cdot \vec{n}] f) + D \vec{K}_n^2 f. \quad (\text{П.3.5})$$

Уравнение (П.3.5) позволяет преобразовать соотношение (П.3.4) к более удобной для расчетов форме. Умножая уравнение (П.3.5) на $n_i n_k$ и интегрируя по единичной сфере направления, в стационарном случае, когда $\partial f / \partial t = 0$, используя свойство антиэрмитовости оператора \vec{K}_n , получается следующее соотношение

$$\begin{aligned} & \langle [\vec{\Omega}_0 \times \vec{n}]_i n_k \rangle + \langle n_i [\vec{\Omega}_0 \times \vec{n}]_k \rangle + \alpha^{-1} \langle [[\vec{m} \times \vec{H}] \times \vec{n}]_i n_k \rangle + \\ & + \alpha^{-1} \langle [[\vec{m} \times \vec{H}] \times \vec{n}]_k n_i \rangle + \lambda \langle [[\vec{n} \times \gamma \cdot \vec{n}] \times \vec{n}]_i n_k \rangle + \\ & + \lambda \langle n_i [[\vec{n} \times \gamma \cdot \vec{n}] \times \vec{n}]_k \rangle + 2D(\delta_{ik} - 3\langle n_i n_k \rangle) = 0. \end{aligned}$$

В нестационарном случае в правой части равенства стоит $d/dt \langle n_i n_k \rangle$.

Полученное соотношение позволяет записать тензор напряжений в следующем эквивалентном виде (учитывается, что согласно соотношениям Онсагера-Пароди $\alpha_6 - \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_3$)

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik} = & \alpha_1 \langle n_i n_k n_e n_m \rangle \gamma_{em} + \alpha_4 \gamma_{ik} + \alpha_7 \delta_{ik} n_e n_m \gamma_{em} + \\ & + (\alpha_6 + \lambda(\alpha_3 - \alpha_2)/2) \langle n_i \gamma_{ke} n_e \rangle + (\alpha_5 - (\alpha_3 - \alpha_2)\lambda/2) \langle n_k \gamma_{ie} n_e \rangle - \\ & - (\alpha_2 + \alpha_3) (\langle [\vec{\Omega}_0 \times \vec{n}]_i n_k \rangle + \langle n_i [\vec{\Omega}_0 \times \vec{n}]_k \rangle) / 2 + \\ & + (\alpha_3 - \alpha_2) m H \langle h_k n_i - h_k h_i \rangle / 2 \alpha. \end{aligned} \quad (\text{П.3.6})$$

В нестационарном случае в правой части соотношения (П.3.6) появляется дополнительное слагаемое $\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2} d/dt \langle n_i n_k \rangle$, при-

чем из соображений галилеевой инвариантности ясно, что производная является конвективной.

Сопоставление (П.3.6) с выражением для тензора напряжений разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц, приведенном в [75], позволяет получить значения феноменологических коэффициентов $\alpha_1 \div \alpha_7$. Следуя обозначениям работы [75] коэффициенты $\alpha_1 \div \alpha_7$ выразятся следующим образом (η_0 - вязкость несущей среды, φ - объемная доля)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \eta_0 \varphi (\kappa - 2\lambda\beta); \alpha_2 + \alpha_3 = -2\eta_0 \varphi \beta; \alpha_4 = 2\eta_0 + 2\eta_0 \varphi \tilde{\alpha}; \\ \alpha_6 + \alpha_5 &= 2\eta_0 \varphi (\zeta + \beta\lambda); \alpha_3 - \alpha_2 = 2\eta_0 \varphi \beta / \lambda; \alpha_7 = -\eta_0 \rho \varphi. \end{aligned} \quad (\text{П.3.7})$$

Коэффициенты β , κ , λ , ζ , $\tilde{\alpha}$, ρ в зависимости от отношения полуосей эллипсоида a/b табулированы в работе [75].

Для случая отношения полуосей $a/b = 5$ они имеют значения $\lambda = 0,92$, $\beta = 12,9$, $\kappa = 19,2$, $\zeta = 0,365$, $\tilde{\alpha} = 2,04$ и $\rho = 6,04$, которые используются в описанных в разделе 6.3 расчетах.

Моменты функций распределения частиц в ориентационном пространстве при термодинамическом равновесии

В настоящем приложении приводятся необходимые при расчетах кинетических свойств МЖ и жидких кристаллов значения моментов различных равновесных функций распределения. Моменты функции распределения жестких диполей в магнитном поле в состоянии термодинамического равновесия - $f(\vec{e}) = Q^{-1} \exp(\xi(\vec{e}\vec{h}))$ вычисляются согласно следующим формулам

$$\langle e_i \rangle_\lambda = L_1(\xi) h_i \quad (\text{П.4.1})$$

$$\langle e_i e_k \rangle_\lambda = L_1(\xi)/\xi \delta_{ik} + L_2(\xi) h_i h_k \quad (\text{П.4.2})$$

$$\begin{aligned} \langle e_i e_k e_l \rangle_\lambda = & L_2(\xi)/\xi (h_i \delta_{kl} + h_k \delta_{il} + h_l \delta_{ik}) + \\ & + L_3(\xi) h_i h_k h_l \end{aligned} \quad (\text{П.4.3})$$

$$\begin{aligned} \langle e_i e_k e_l e_m \rangle_\lambda = & L_2(\xi)/\xi^2 (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{im} \delta_{kl} + \delta_{il} \delta_{km}) + \\ & + L_3(\xi)/\xi (h_i h_k \delta_{lm} + h_i h_l \delta_{km} + h_i h_m \delta_{kl} + h_k h_l \delta_{im} + \\ & + h_k h_m \delta_{il} + h_l h_m \delta_{ik}) + L_4(\xi) h_i h_k h_l h_m \end{aligned} \quad (\text{П.4.4})$$

Функции $L_n(\xi)$ вычисляются по рекуррентным формулам

$$L_0 = 1; \quad L_1(\xi) = \text{cth } \xi - 1/\xi;$$

$$L_{n-1} - L_{n+1} = (2n+1) L_n / \xi.$$

Моменты функции распределения осей магнитной анизотропии одноосных частиц ферромагнетика в сильном магнитном поле в состоянии термодинамического равновесия - $f(\vec{n}) = Q^{-1} \exp(\zeta(\vec{h}\vec{n})^2)$ вычисляются согласно следующим формулам

$$\langle n_i n_k \rangle = B \delta_{ik} + A h_i h_k \quad (\text{П.4.5})$$

$$\langle n_i n_k n_l n_m \rangle = A_1 (\delta_{ik} \delta_{lm} + \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) +$$

$$+ B_1(h_i h_k \delta_{em} + h_i h_e \delta_{km} + h_i h_m \delta_{ke} + h_k h_m \delta_{ie} + h_k h_e \delta_{im} + h_e h_m \delta_{ik}) + C_1 h_i h_k h_e h_m \quad (\text{П.4.6})$$

$$A = \frac{3}{2}(F'/F - \frac{1}{3}); \quad B = \frac{1}{2}(1 - F'/F)$$

$$A_1 = \frac{1}{8}(1 - 2F'/F + F''/F); \quad B_1 = \frac{1}{8}(6F'/F - 5F''/F - 1);$$

$$C_1 = \frac{1}{8}(3 - 30F'/F + 35F''/F).$$

Функция $F(\zeta)$ определена интегралом $F(\zeta) = \int_0^1 e^{\zeta x^2} dx$, для которого имеются подробные таблицы. Отметим, что эта же функция в приближении самосогласованного поля Майера-Саупе описывает распределение молекул нематического жидкого кристалла по ориентациям при термодинамическом равновесии.

Моменты функции распределения осей магнитной анизотропии одноосных частиц ферромагнетика в состоянии термодинамического равновесия при произвольном соотношении напряженностей внешнего магнитного поля и эффективного поля магнитной анизотропии $-f(\vec{n}) = Q^{-1} \exp(-F_m(\vec{n})/kT)$, где $F_m(\vec{n}) = -kT \ln \int d\vec{e} \exp(\xi(\vec{e}\vec{n}) + \zeta(\vec{e}\vec{n})^2)$, свободная энергия локально равновесного магнитного состояния одноосной частицы, находятся по следующим формулам

$$\langle n_i n_k \rangle_0 = b(\xi) \delta_{ik} + a(\xi) h_i h_k \quad (\text{П.4.7})$$

$$\begin{aligned} \langle n_i n_k n_e n_m \rangle_0 = & a_1(\xi) (\delta_{ik} \delta_{em} + \delta_{ie} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{ke}) + \\ & + b_1(\xi) (h_i h_k \delta_{em} + h_i h_e \delta_{km} + h_i h_m \delta_{ke} + h_k h_m \delta_{ie} + \\ & + h_k h_e \delta_{im} + h_e h_m \delta_{ik}) + c_1(\xi) h_i h_k h_e h_m \end{aligned} \quad (\text{П.4.8})$$

$$a(\xi) = AL_2; \quad b(\xi) = (B + AL_1/\xi)$$

$$a_1(\xi) = (A_1 + C_1 L_2/\xi^2 + 2B_1 L_1/\xi)$$

$$b_1(\xi) = (B_1 L_2 + C_1 L_3/\xi)$$

$$c_1(\xi) = C_1 L_4.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. О перспективных направлениях и задачах в механике сплошных сред.- ПММ, 1976, т.40, в.6, с. 963-980.
2. Седов Л.И., Цыкин А.Г. О построении моделей сплошных сред, взаимодействующих с электромагнитным полем.- ПММ, 1979, т.43, в.3, с. 387-400.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. т.1 - М.: Наука, 1976, 535 с.
4. Neuringer J.L., Rosensweig R.E. Ferrohydrodynamics.- Phys. Fluids, 1964, v.7, N 12, p. 1927-1931.
5. Кирюшин В.В., Чьонг За Бинь. Фигуры равновесия намагничиваемой жидкости в магнитном поле.- Изв. АН СССР. Мех. жидкости и газа, 1980, № 4, с. 123-128.
6. Баштовой В.Г., Будник А.М., Полевиков В.К., Рекс А.Г. Исследование двухсвязных равновесных форм магнитной жидкости в магнитном поле вертикального проводника.- Магнитная гидродинамика, 1984, № 2, с. 47-53.
7. Борисов И.Д. О равновесных формах поверхности намагничиваемой жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1976, № 4, с. II-18.
8. Rosensweig R.E. Buoyancy and stable levitation of a magnetic body immersed in a magnetizable fluid.- Nature, 1966, 210, N 5036, p. 613-614.
9. Барков Ю.Д., Фертман В.Е. Экспериментальное исследование плавания магнитных тел в намагничиваемой жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1978, № I, с. 23-26.
10. Цеберс А.О. Левитация постоянного цилиндрического магнита в ФЖ.- В кн.: Девятое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т.1. Саласпилс, 1978, с. 129-130.

- II. Вислович А.Н., Краков М.С. К расчету сил, действующих на магнит, взвешенный в магнитной жидкости.- В кн.: Одиннадцатое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. т.Ш. Магнитные жидкости. Саласпилс, 1984, с.187-190.
- I2. Шлиомис Н.И. Конвективная неустойчивость феррожидкости.- Механика жидкости и газа, 1973, № 6, с.130-135.
- I3. Блум Э.Я., Михайлов Ю.А., Озолс Р.Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле.- Рига, "Зинатне", 1980, 355 с.
- I4. Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баштовой В.Г., Краков М.С. Исследование неустойчивости неподвижного цилиндрического столба намагничивающейся жидкости.- Изв. АН СССР. Мех.жидкости и газа, 1980, № 4, с.3-8.
- I5. Архиненко В.И., Барков Ю.Д. Экспериментальное исследование распада цилиндрического слоя намагничивающейся жидкости под действием магнитных сил.- ПМТФ, 1980, № 3, с.98-105.
- I6. Berkovsky B., Bashtovoi V. Instabilities of magnetic fluids leading to a rupture of continuity.- IEEE Trans. Magn., 1980, v.16, N 2, p.288-297.
- I7. Cowley M.D., Rosensweig R.E. The interfacial stability of a ferromagnetic fluid.- J.Fluid Mech., 1967, v.30, p.4, p.671-688.
- I8. Тарапов И.Е. Поверхностные волны и устойчивость свободной поверхности намагничивающейся жидкости.- ПМТФ, 1974, № 4, с.35-40.
- I9. Gailitis A. Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field. - J.Fluid Mech., 1977, v.82, N 3, p.401-413.
20. Зайцев В.М., Шлиомис М.И. Характер неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в постоянном поле.- ДАН СССР, 1969, т.188, № 6, с.1261-1262.

21. Гайлитис А. Форма поверхностной неустойчивости ферромагнитной жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1969, № I, с.68-70.
22. Тарапов И.Е. Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред.- Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1974, № 5, с.141-144.
23. Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баштовой В.Г. Исследование формы капли намагничивающейся жидкости в однородном магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1978, № 3, с.131-134.
24. Дроздова В.И., Скроботова Т.В., Чеканов В.В. Экспериментальное изучение гидростатики межфазной поверхности феррожидкости.- Магнитная гидродинамика, 1979, № I, с.16-18.
25. Hayes Ch.F. Observation of association in a ferromagnetic colloid.- J. of Colloid and Interface Science, 1975, v.52, N 2, p.239-243.
26. Peterson E.A., Krueger D.A. Reversible, field induced agglomeration in magnetic colloids.- J. of Colloid and Interface Science, 1977, v.62, N 1, p.24-34.
27. Барьяхтар Ф.Г., Горобец Ю.И., Косачевский Л.Я., Ильчишин О.В., Хиженков П.К. Гексагональная решетка цилиндрических магнитных доменов в тонких пленках феррожидкости.- Магнитная гидродинамика, 1981, № 3, с.120-123.
28. Bacri J.C., Salin D., Massart R. Study of the deformation of ferrofluid droplets in a magnetic field.- J.Physique (Letters), 1982, t.43, N 6, p.L-179 - L-184.
29. Bacri J.C., Salin D. Instability of ferrofluid magnetic drops under magnetic field.- J.Physique (Letters), 1982, t.43, N 17, p.L-649 - L-654.
30. Bacri J.C., Salin D. Optical scattering on ferrofluid agglomerates.- J. Physique (Letters), 1982, t.43, N 22, p. L-771 - L-777.

31. Vacri J.C., Salin D. Dynamics of the shape transition of a magnetic ferrofluid drop.- J.Physique (Letters), 1983, t.44, N 11, p. L-415 -L-420.
32. Барьяхтар Ф.Г., Хиженков П.К., Дорман В.Л. Динамика доменной структуры магнитных жидкостей.- В кн.: Физические свойства магнитных жидкостей, Свердловск, 1983, с.50-57.
33. Чеканов В.В. Возникновение агрегатов как фазовый переход в магнитных коллоидах.- В кн.: Физические свойства магнитных жидкостей, Свердловск, 1983, с.42-49.
34. Хиженков П.К., Мостовой В.М. Полевая зависимость структуры домена магнитной жидкости.- В кн.: XVI Всесоюзная конференция по физике магнитных явлений. Пермь, 1983, с.87-88.
35. Дроздова В.И., Черемушкина А.В. Гистерезис намагниченности структурированных магнитных жидкостей.- В кн.: XVI Всесоюзная конференция по физике магнитных явлений. Пермь, 1983, с.257-258.
36. Чеканов В.В., Дроздова В.И., Нуцубидзе П.В., Скроботова Т.В., Черемушкина А.В. Изменение намагниченности магнитной жидкости при образовании агрегатов.- Магнитная гидродинамика, 1984, № 1, с.3-9.
37. Чеканов В.В. О взаимодействии частиц в магнитных коллоидах.- В кн.: Гидродинамика и теплофизика магнитных жидкостей, Саласпилс, 1980, с.69-76.
38. Чеканов В.В. О термодинамике агрегатов в магнитных жидкостях.- В кн.: Материалы II Всесоюзной школы-семинара по магнитным жидкостям. Изд. Московского унив., 1981, с.15-16.
39. McTague J.P, Magnetoviscosity of magnetic colloids.- The Journal of Chemical Physics, 1969, v.51, N 1, p.133-136.

40. Мозговой Е.Н., Блум Э.Я., Цеберс А.О. Течение ферромагнитной жидкости в магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1973, № 1, с.61-67.
41. Майоров М.М. Измерение вязкости феррожидкости в магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1980, № 4, с.11-18.
42. Каплун А.Б., Варламов Ю.Д. Исследование вязкости ферромагнитных жидкостей в сильных магнитных полях.- В кн.: Гидродинамика и теплофизика магнитных жидкостей. Саласпилс, 1980, с.61-68.
43. Kamiyama S., Koike K., Oyama T. Pipe flow resistance of magnetic fluids in a nonuniform transverse magnetic field.- Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1983, v.39, N 1-2. p.23-26.
44. Moskowitz R., Rosensweig R.E. Nonmechanical torque-driven flow of a ferromagnetic fluid by an electromagnetic field.- Applied Physics Letters, 1967, v.11, N 10, p.301-303.
45. Mailfert R., Martinet A. Flow regimes for a magnetic suspension under a rotating magnetic field.- Journal de Physique, 1973, t.34, N 2-3, p.197-201.
46. Каган И.Я., Рыков В.Г., Янтовский Е.И. О течении диэлектрической ферромагнитной суспензии во вращающемся магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1973, № 2, с.135-137.
47. Шульман Э.П., Кордонский В.И., Демчук С.А. Влияние неоднородного вращающегося магнитного поля на течение и теплообмен в ферросуспензиях.- Магнитная гидродинамика, 1977, № 4, с.30-34.
48. Матыгуллин Б.Я. Об увлечении цилиндрического сосуда с феррожидкостью вращающимся магнитным полем.- В кн.: Физические свойства и гидродинамика дисперсных ферромагнетиков. Свердловск, 1977, с.68-70.

49. Берковский Б.М., Исаев С.В., Кашевский Б.Э. Об одном эффекте внутренних степеней вращения в гидродинамике микроструктурных жидкостей.- ДАН СССР, 1980, т.253, № I, с.62-65.
50. Brancher J.P., Lucis M., Bernardin D., Raihani R., Stoltz J.F. Conception and realization of a new viscometer using a magnetic fluid for measuring biological fluids.- Biorheology, Suppl. I., 1984, p.83-88.
51. Суязов В.М. О несимметричной модели вязкой электромагнитной жидкости.- ПМТФ, 1970, № 2, с.12-20.
52. Шлиомис М.И. Эффективная вязкость магнитных суспензий.- ЖЭТФ, 1971, 61, в.6(12), с.2411-2418.
53. Jenkins J.T. Some simple flows of a para-magnetic fluid.- Le Journal de Physique, 1971, t.32, N 11-12, p.931-938.
54. Марценюк М.А., Райхер Ю.Л., Шлиомис М.И. К кинетике намагничивания суспензий ферромагнитных частиц.- ЖЭТФ, 1973, т.65, в.1(7), с.834-841.
55. Цеберс А.О. Течение дипольных жидкостей во внешних полях.- Магнитная гидродинамика, 1974, № 4, с.3-18.
56. Цеберс А.О. О моделях намагничивания коллоида ферромагнетика в гидродинамическом потоке.- Магнитная гидродинамика, 1975, № 4, с.37-44.
57. Баштовой В.Г., Кашевский Б.Э. Асимметричная модель магнитной жидкости с учетом конечной анизотропии ферромагнитных частиц.- Магнитная гидродинамика, 1976, № 4, с.24-32.
58. Цеберс А.О. Феррогидродинамика как гидродинамика системы с внутренними степенями свободы.- В кн.: Физические свойства и гидродинамика дисперсных ферромагнетиков, Свердловск, 1977, с.49-57.
59. Кашевский Б.Э. О моделях магнитной релаксации в феррогидродинамике.- Магнитная гидродинамика, 1978, № 4, с.14-20.

60. Берковский Б.М., Вислович А.Н. Эффекты объемных пар сил при движении феррожидкостей в магнитных полях.- Препринт ИВТАН. № 4-073- М.: 1981, 52 с.
61. Гогосов В.В., Налетова В.А., Шапошникова Г.А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей.- В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. т.16, ВИНТИ, Москва, 1981, с.76-208.
62. Желнорович В.А. Течение Куэтта и течение Пуазейля вязкой намагничивающейся жидкости.- ДАН СССР, 1978, т.238, № 2, с.289-292.
63. Maugin G.A., Drouot R. Thermomagnetic behaviour of magnetically nonsaturated fluids.- Journal of magnetism and magnetic materials, 1983, v.39, pp.7-10.
64. Шлиомис М.И. Об уравнениях движения жидкости с гиромагнитными свойствами.- ЖЭТФ, 1967, т.53, в.3(9), с.1125-1134.
65. Jansons K.M. Determination of the constitutive equations for a magnetic fluid.- J.Fluid Mech., 1983, v.137, pp.187-216.
66. Берковский Б.М., Вислович А.Н., Кашевский Б.Э. Магнитная жидкость как континуум с внутренними степенями свободы.- ИТМО АН БССР им.А.В.Лькова, Препринт № 4, Минск, 1980, 41 с.
67. Желнорович В.А. Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренними электромагнитным и механическим моментами.- М.: Изд. Московского университета, 1980, 174 с.
68. Исаев С.В., Кашевский Б.Э. Внутреннее трение и гидродинамика коллоида анизотропного ферромагнетика в магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1980, № 4, с.19-27.
69. Hall W.F., Busenberg S.N. Viscosity of magnetic suspensions.- The Journal of Chemical Physics, 1969, v.51, N 1, p.137-144.

70. Brenner H. Rheology of a dilute suspension of dipolar spherical particles in an external field.- *Journal of Colloids and Interface Science*, 1970, v.32, N 1, p.141-158.
71. Brenner H., Weissman M.H. Rheology of a dilute suspension of dipolar spherical particles in an external field. II. Effects of rotatory brownian motion.- *Journal of Colloids and Interface Science*. 1972, v.41, N 3, p.499-531.
72. Levi A.C., Hobson R.E., McCourt F.R. Magnetoviscosity of colloidal suspensions.- *Canadian Journal of Physics*, 1973, v.51, N 2, p.180-194.
73. Brancher J.P., Denis J.P. Phenomenes de relaxation dans les ferrofluides.- *C.R.Acad.Sc.Paris*, 1981, t.292, p.1247- 1250.
74. Бибик Е.Е. Некоторые эффекты взаимодействия частиц при течении феррожидкостей в магнитном поле.- *Магнитная гидродинамика*, 1973, № 3, с.25-32.
75. Покровский В.Н. Статистическая механика разбавленных суспензий.- М.: Наука, 1978, 136 с.
76. Марценюк М.А. Вязкость суспензии эллипсоидальных ферромагнитных частиц в магнитном поле.- *ИМТФ*, 1973, № 5, с.75-82.
77. Де Жен П. Физика жидких кристаллов.- М.:Мир, 1977, 400 с.
78. Цеберс А.О. Внутренние вращения в гидродинамике слабопроводящих диэлектрических суспензий.- *Механика жидкости и газа*, 1980, № 2, с.86-93.
79. Hubbard J.B., Onsager L. Dielectric dispersion and dielectric friction in electrolyte solutions. I.- *The Journal of Chemical Physics*, 1977, v.67, N 11, p.4850-4857.
80. Hubbard J.B. Dielectric dispersion and dielectric friction in electrolyte solutions. II.- *The Journal of Chemical Physics*, 1978, v.68, N 4, p.1649-1664.

81. Hubbard J.B., Kayser R.F. Dielectric friction and dielectric dispersion in electrolyte solutions with spin.- The Journal of Chemical Physics, 1981, v.74, N 6, p.3535-3545.
82. Wolynes P.G. Molecular theory of solvated ion dynamics.- The Journal of Chemical Physics, 1978, v.68, N 2, p.473-483.
83. Chen J.H., Adelman S.A. Macroscopic model for solvated ion dynamics.- The Journal of Chemical Physics, 1980, v.72, N 4, p.2819-2831.
84. De Gennes P.G., Pincus P.A. Pair correlations in a ferromagnetic collóid.- Phys.Kondens.Materie,1970,11, 189-198.
85. Jordan P.C. Association phenomena in a ferromagnetic colloid. - Molecular Physics, 1973, v.25, N 4, p.961-973.
86. Цеберс А.О. К ассоциации феррозолей магнитодипольными силами.- Магнитная гидродинамика, 1974, № 2, с.36-40.
87. Jordan P.C. Field dependent chain formation by ferromagnetic colloids.- Molecular Physics,1979, v.38, N 3, p.769-780.
88. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть I.- М.: Наука, 1976, 584 с.
89. Цеберс А.О. Термодинамическая устойчивость магнитных жидкостей.- Магнитная гидродинамика, 1982, № 2, с.42-48.
90. Sano K., Doi M. Theory of agglomeration of ferromagnetic particles in magnetic fluids.- Journal of the Physical Society of Japan, 1983, v.52, N 8, pp.2810-2815.
91. Гехт Р.С., Игнатченко В.А. Фазовый переход в системе мелких ферромагнитных частиц.- Изв. АН СССР, Сер.физическая, 1980, т.44, № 7, с.1362-1366.
92. Bean C.P., Rodbell D.S. Magnetic disorder as a first-order phase transformation.-Physical Review,1962,v.126,N 1,p.104-115.
93. Scholten P.C. How magnetic can a magnetic fluid be? - Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1983, v.39, p.99-106.

94. Цеберс А.О. О роли поверхностных взаимодействий при расслоении магнитных жидкостей.- Магнитная гидродинамика, 1982, № 4, с.21-27.
95. Цеберс А.О. Термодинамическая устойчивость суспензии иглообразных магнитов.- Магнитная гидродинамика, 1983, № 2, с.39-44.
96. Диканский Ю.И. Экспериментальное исследование эффективных магнитных полей в магнитной жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1982, № 2, с.33-36.
97. Chantrell R.W., Bradbury A., Popplewell J., Charles S.W. Particle cluster configuration in magnetic fluids.- J. Phys. D: Appl. Phys., 1980, v.13, p.L119-L122.
98. Воронцов-Вельяминов П.Н., Ушакова Е.М., Фаворский И.А. Модель Изинга с дипольным взаимодействием на простой кубической решетке во внешнем поле.- Физика твердого тела, 1976, т.18, в.2, с.331-335.
99. Фаворский И.А., Ушакова Е.М. Дипольный ферромагнетизм и антиферромагнетизм в малых магнитных частицах.- Вестник ЛГУ, 1982, № 10, с.79-82.
100. Ausloos M., Clippe P., Kowalski J.M., Pekalski A. Magnetic lattice gas.- Preprint No. 509. Institute of Theoretical Physics, University of Wroclaw, Wroclaw, 1980, 57 p.
101. Ausloos M., Clippe P., Kowalski J.M., Pekalska J., Pekalski A. Simple model of a disordered magnetic lattice gas.- Physical Review A. 1983, v.28, No. 5, p.3080-3084.
102. Цеберс А.О. Образование и свойства крупных конгломератов магнитных частиц.- Магнитная гидродинамика, 1983, № 3, с.3-11.
103. Цеберс А.О. Релаксационные процессы в магнитных жидкостях при наличии межчастичных взаимодействий.- Магнитная гидродинамика, 1983, № 1, с.3-8.

- IO4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.- М.: Наука, 1982, 620 с.
- IO5. Диканский Ю.И., Майоров М.М. Реологические свойства концентрированной магнитной жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1982, № 4, с.117-130.
- IO6. Диканский Ю.И. Экспериментальное исследование магнитной восприимчивости магнитной жидкости.- В кн.: Материалы II Всесоюзной школы-семинара по магнитным жидкостям. Изд. Московского университета, 1981, с.22-23.
- IO7. Pincus P. Static conformations and dynamics of colloidal suspensions of ferromagnetic grains.- In: Thermomechanics of magnetic fluids. Washington.-London: Hemisphere publishing corporation, 1977, p.87-95.
- IO8. Юхновский И.Р., Головки М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем.- Киев: Наукова думка, 1980, 372 с.
- IO9. Deutsch J.M., Goldenfeld N.D. Ordering in charged rod fluids. - J.Phys.A: Math.Gen.,v.15, N 2, p.L71-L73.
- II0. Deutsch J.M., Goldenfeld N.D. The isotropic-nematic transition in charged liquid crystals.- J.Physique, 1982, t.43, N 4, p.651-654.
- III. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a non uniform system. I. Interfacial free energy.- The Journal of Chemical Physics, 1958, v.28, N 2, p.258-267.
- II2. Барьяхтар В.Г., Ганн В.В., Горобец Ю.И., Смоленский Г.А., Филиппов Б.Н. Цилиндрические магнитные домены.- УФН, 1977, т.121, в.4, с.593-628.
- II3. Pieranski P. Two-dimensional interfacial colloidal crystals. - Physical Review Letters, 1980, v.45, N 7, p.569-572.

- II4. Skjeltop A.T. One- and Two-dimensional crystallization of magnetic holes.- Physical Review Letters, 1983, v.51, N 25, p.2306-2309.
- II5. Цеберс А.О., Майоров М.М. Структуры границы раздела пузырька и магнитной жидкости в поле.- Магнитная гидродинамика, 1980, № 3, с.15-20.
- II6. Allan R.S., Mason S.G. Particle behaviour in shear and electric fields. I. Deformation and burst of fluid drops.- Proc.Roy.Soc., 1962, v.267, N 1328, p.45-61.
- II7, Taylor G. Disintegration of water drops in an electric field.- Proc.Roy.Soc., 1964, v.280. N 1382, p.383-397.
- II8. Цеберс А.О. Вириальный метод исследования статики и динамики капель намагничивающейся жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1985, № I, с.25-34.
- II9. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия.- М.: Мир, 1973, 288 с.
- I20. Chandrasekhar S. The stability of a rotating liquid drop.- Proc.Roy.Soc., 1965, v.286, N 1404, p.1-26.
- I21. Rosenkilde C.E. Stability of axisymmetric figures of equilibrium of a rotating charged liquid drop.- J. Math. Phys., 1967, v.8, N 1, p.98-118.
- I22. Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баштовой В.Г. Некоторые особенности поведения капли намагничивающейся жидкости в магнитных полях.- Магнитная гидродинамика, 1980, № 3, с.3-10.
- I23. Барков Ю.Д., Берковский Б.М. Распад капли намагничивающейся жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1980, № 3, с.11-14.
- I24. Maruno S., Yubakami K., Soga M. Plain paper recording process using magnetic fluids magneto-fluid-graphy.- Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1983, v.39, N 1-2, p.187-189.

- I25. Кожевников В.М., Чеканов В.В., Янтовский Е.И. Свободные вертикальные струи над деформированной поверхностью магнитной жидкости в электрическом поле.- *Магнитная гидродинамика*, 1982, № 4, с.118-120.
- I26. Garton C.G., Krasucki Z. Bubbles in insulating liquids: stability in an electric field.- *Proc. Roy. Soc.*, 1964, v.280, N 1381, p.211-226.
- I27. Цеберс А.О., Майоров М.М. Магнитостатические неустойчивости в плоских слоях намагничивающихся жидкостей.- *Магнитная гидродинамика*, 1980, № 1, с.27-35.
- I28. Цеберс А.О. Динамика магнитостатических неустойчивостей.- *Магнитная гидродинамика*, 1981, № 2, с.3-15.
- I29. Цеберс А.О., Земитис А.А. Численный эксперимент по моделированию МГД-неустойчивости свободной поверхности зажатой капли магнитной жидкости. I.- *Магнитная гидродинамика*, 1983, № 4, с.15-26.
- I30. Romankiw L.T., Slusarczuk M.M.G., Thompson D.A. Liquid magnetic bubbles.- *IEEE Transactions on magnetics*. 1975, v.MAG-11, N 1, p.25-28.
- I31. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел.- В кн.: Л.Д.Ландау. Собрание трудов, т.1.- М.: Наука, 1969, с.128-143.
- I32. Rosensweig R.E. Fluid dynamics and science of magnetic liquids.- *Advances in electronics and electron physics*, 1979, v.48, p.103-199.
- I33. О Делл Т. Магнитные домены высокой подвижности.- М.: Мир, 1978, 197 с.
- I34. Цеберс А.О. Магнитогидродинамические неустойчивости магнитной жидкости в плоских слоях.- В кн.: Гидродинамика и теплофизика магнитных жидкостей, Саласпилс, 1980, с.127-134.

- I35. Майоров М.М., Цеберс А.О. Воздействие импульсного поля на пузырьки в плоском слое магнитной жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1981, № 4, с.131-133.
- I36. Цеберс А.О., Майоров М.М. Гребенчатая неустойчивость в тонких слоях магнитной жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1980, № 2, с.22-26.
- I37. Rosensweig R.E. Magnetic Fluids.- Scientific American, 1982, v.247, N 4, p.136-144.
- I38. Ламб Г. Гидродинамика.- М.-Л., Гос. изд.техн.-теорет.лит., 1947, 928 с.
- I39. Zahn M., Rosensweig R.E. Stability of magnetic fluid penetration through a porous medium with uniform magnetic field oblique to the interface.- IEEE Transactions on Magnetics, 1980, v.MAG-16. N 2, p.275-282.
- I40. Цеберс А.О. Численный эксперимент по моделированию МГД-неустойчивости свободной поверхности зажатой капли магнитной жидкости. II. - Магнитная гидродинамика, 1984, № 2, с.43-46.
- I41. Цеберс А.О. Численный эксперимент по моделированию МГД-неустойчивости свободной поверхности зажатой капли магнитной жидкости. III. - Магнитная гидродинамика, 1985, № 2, с.47-53.
- I42. Механика. Новое в зарубежной науке. Метод граничных интегральных уравнений.- М.: Мир, 1978, в.15, 209 с.
- I43. Цеберс А.О., Майоров М.М. Магнитостатические неустойчивости в плоских слоях намагничивающихся жидкостей.- Письма в ЖТФ, 1980, т.6, в.2, с.113-117.
- I44. Rosensweig R.E., Zahn M., Shumovich R. Labyrinthine instability in magnetic and dielectric fluids.- Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1983, v.39, p.127-132.

- I45. Цеберс А.О. Гребенчатая неустойчивость магнитной жидкости в плоском слое мягкого ферромагнетика.- Магнитная гидродинамика, 1984, № 3, с.15-18.
- I46. Баев А.Р., Майоров А.Л. Удержание магнитной жидкости между ультразвуковым преобразователем и ферромагнитным образцом. - В кн.: Магнитные жидкости: научные и прикладные исследования, Минск, ИТМО АН БССР им. А.В.Лькова, 1983, с.62-70.
- I47. Борисов И.Д. Устойчивость равновесия капиллярной жидкости в горизонтальной щели.- Механика жидкости и газа, 1983, № 5, с.172-175.
- I48. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.- М.: Наука, 1966, 295 с.
- I49. Кролл Н., Трайвелпис А. Основы физики плазмы.- М.: Мир, 1975, 525 с.
- I50. Дроздова В.И., Скибин Ю.Н., Чеканов В.В. Исследование колебаний капель магнитной жидкости.- Магнитная гидродинамика, 1981, № 4, с.17-23.
- I51. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.- М.: Мир, 1983, 300 с.
- I52. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.- М.:Наука, 1974, 711 с.
- I53. Saffman P.G., Taylor G.I. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid.- Proc. Roy. Soc. A, 1958, v.245, p.312-329.
- I54. Rosensweig R.E., Zahn M., Vogler T. Stabilization of fluid penetration through porous medium using magnetizable fluid.- In: Thermomechanics of Magnetic Fluids. Washington-London: Hemisphere publishing corporation, 1977, p.195-211.

- I55. Davis S.H. Contact-line problems in fluid Mechanics.- Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics. 1983, v.50, p.977-983.
- I56. Привороцкий И.А. Термодинамическая теория ферромагнитных доменов.- УФН, 1972, т.108, в.1, с.43-80.
- I57. Penz P.A., Ford G.W. Electromagnetic hydrodynamics of liquid crystals.- Phys. Rev.A, 1972, v.6, N 1, p.414-425.
- I58. Дроздова В.И., Чеканов В.В. Диффузия частиц феррожидкости в магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1981, № 1, с.61-65.
- I59. Finlayson B.A. Convective instability of ferromagnetic fluids.- J.Fluid Mech., 1970, v.40, p.4, p.753-767.
- I60. Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитная микроконвекция на диффузионном фронте феррочастиц.- Магнитная гидродинамика, 1983, № 4, с.36-40.
- I61. Schwab L., Hildebrandt U., Stierstadt K. Magnetic Benard convection.- Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1983, v.39, N 1-2, p.113-114.
- I62. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1966, 724 с.
- I63. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.- М.: Наука, 1968, 511 с.
- I64. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.- М.: Наука, 1980, 534 с.
- I65. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.- М.: Мир, 1980, 279 с.
- I66. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений.- М.: Наука, 1978, 588 с.

- I67. Baker G.R. A test of the method of Fink & Son for following vortexsheet motion.- J. Fluid Mech., 1980, v.100, N 1, p.209-220.
- I68. Baker G.R., Meiron D.I., Orszag S.A. Generalized vortex methods for free-surface flow problems.- J. Fluid Mech., 1982, v.123, p.477-501.
- I69. Цеберс А.О. Совместная вращательная диффузия магнитного момента и твердой матрицы однодоменной феррочастицы.- Магнитная гидродинамика, 1975, № 3, с.8-14.
- I70. Шлиомис М.И. Нелинейные эффекты в суспензии ферромагнитных частиц при воздействии вращающегося магнитного поля.- ДАН СССР, 1974, т.218, № 5, с.1071-1074.
- I71. Любимов Д.В., Любимова Т.П. О неоднозначности структуры стационарного течения магнитной жидкости.- В кн.: Одиннадцатое Рижское совещание по магнитной гидродинамике, т.Ш. Магнитные жидкости. Саласпилс, 1984, с.59-62.
- I72. Любимов Д.В., Любимова Т.П. О стационарном плоскопараллельном течении магнитной жидкости.- Механика жидкости и газа, 1984, № 6, с.57-64.
- I73. Цебер А.О. О зависимости коэффициентов вязкости нематических жидких кристаллов от параметра порядка.- Магнитная гидродинамика, 1978, № 3, с.3-10.
- I74. Майоров М.М., Цеберс А.О. Гидродинамика намагничивающихся суспензий в бегущем поле одностороннего индуктора.- Магнитная гидродинамика, 1979, № 2, с.13-20.
- I75. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика.- М.: Наука, 1983, 416 с.
- I76. Марценюк М.А., Райхер Ю.Л., Шлиомис М.И. К кинетике намагничивания суспензий однодоменных частиц.- В кн.: Труды международной конференции по магнетизму МКМ-73. т.Ш, 1973, с.540-544.

- I77. Mayorov M., Blums E. The effect of colloidal particle rotation in magnetic fluids.- Institute Physics Latvian SSR Academy of Science. Preprint. Salaspils, 1983, 16 p.
- I78. Шлиомис М.И. Магнитные жидкости.- УФН, 1974, т.112, в.3, с.427-458.
- I79. Born M. Über die beweglichkeit der elektrolytischen Ionen.- Z. Phys., 1920, 1, p.221-249.
- I80. Zwanzig R. Dielectric friction on a moving ion. II. Revised theory.- The Journal of Chemical Physics, 1970, v.52, N 7, p.3625-3628.
- I81. Покровский В.Н. Напряжения, вязкость и оптическая анизотропия движущейся суспензии жестких эллипсоидов.- УФН, 1971, т.105, в.4, с.625-643.
- I82. Gähwiller Ch. Direct determination of the five independent viscosity coefficients of nematic liquid crystals.- Mol. Cryst. Liq. Cryst., 1973, v.20, p.301-318.
- I83. Knepe H., Schneider F., Sharma N.K. Rotational viscosity of nematic liquid crystals, . - J. Chem. Phys., 1982, v.77, N 6, p.3203-3208.
- I84. Knepe H., Schneider F. Determination of the viscosity coefficients of the liquid crystal MBVA.- Mol. Cryst. Liq. Cryst., 1981, v.65, N 1-2, p.23-37.
- I85. Цеберс А.О. Межфазные напряжения в гидродинамике жидкостей с внутренними вращениями.- Магнитная гидродинамика, 1975, № I, с.79-82.
- I86. Вислович А.Н. О воздействии вращающегося поля на ферромагнитную суспензию в слое со свободной границей.- Письма в ЖТФ, т.1, в.16, с.744-748.

- I87. Берковский Б.М., Иванова Н.И., Кашевский Б.Э. Вискозиметрический метод для магнитных жидкостей.- Магнитная гидродинамика, 1984, № 2, с.3-10.
- I88. Вислович А.Н., Старовойтов В.А., Фертман В.Е. Теплообмен в феррожидкости при воздействии вращающегося магнитного поля. - Магнитная гидродинамика, 1980, № I, с.60-66.
- I89. Berkovsky B.M., Vislovich A.N. Dynamics of magnetic fluids. - Journal of Magnetism and Magnetic Mat., 1983, v.39, N 1-2, p.155-158.
- I90. Глазов О.А. О вовлечении в движение ферромагнитной жидкости бегущим магнитным полем.- Магнитная гидродинамика, 1976, № 4, с.19-23.
- I91. Вислович А.Н. Плоскопараллельные течения ферромагнитного коллоида в неоднородном магнитном поле.- В кн.: Конвекция и волны в жидкостях. Минск: ИТМО им.А.В.Лыкова АН БССР, 1977, с.98-115.
- I92. Цебер А.О. Некоторые особенности явлений переноса в суспензиях с внутренними вращениями.- ПММ, 1978, т.42, № 4, с.673-678.
- I93. Martzenyk M.A., Tchernatinskii V.F. Transverse heat transport in ferrofluid in rotating magnetic field.- IEEE Transactions on magnetics, 1980, v.MAG-16, N 2, p.326-328.
- I94. Баштовой В.Г., Вислович Н.А., Кашевский Б.Э. Явление микроконвективного теплопереноса в жидкостях с внутренним вращением.- ПМТФ, 1978, № 3, с.88-93.
- I95. Кронкалнс Г.Е., Майоров М.М. Экспериментальное исследование диссипации энергии в магнитной жидкости во вращающемся магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1984, № 3, с.28-32.

196. Цеберс А.О. Моментные напряжения и гидродинамика магнитной жидкости в однородных вращающихся магнитных полях.- Магнитная гидродинамика, 1978, № 4, с.9-13.
197. Берковский Б.М., Веретенков В.Ю., Малявин С.М. Численное исследование устойчивости куэттовского течения феррожидкости в однородном магнитном поле относительно осесимметричных возмущений.- В кн.: Одиннадцатое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. т.Ш. Магнитные жидкости. Саласпилс, 1984, с.115-118.
198. Weber T.A., Helfand E. Time-correlation functions from computer simulations of polymers.- The Journal of Physical Chemistry, 1983, v.87, N 15, p.2881-2889.
199. Цеберс А.О. Численные эксперименты по моделированию вращательного броуновского движения частицы ферромагнетика в поле.- Магнитная гидродинамика, 1984, № 4, с.17-22.
200. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесная термодинамика.- М.: Мир, 1964, 456 с.
201. Zwanzig R., Ailawadi N.K. Statistical error due to finite time averaging in computer experiments.- Phys.Rev., 1969, v.182, N 1, p.280-283.
202. Leal L.G., Hinch E.J. Theoretical studies of a suspension of rigid particles affected by Brownian couples.- Rheologica Acta, 1973, v.12, N 2, p.127-132.
203. Хинч Э., Лил Л. Уравнения состояния в механике суспензий. Часть 2. Приближения для суспензии жестких частиц, подверженных броуновским вращениям.- В кн.: Гидродинамическое взаимодействие частиц в суспензиях. М.: Мир, 1980, с.216-243.
204. Бэтчелор Дж.К. Успехи микрогидродинамики.- В кн.: Теоретическая и прикладная механика. Труды XIV международного конгресса ИУТAM. М.: Мир, 1979, с.136-187.

205. Кляцкин В.И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами.- М.: Наука, 1975, 239 с.
206. Leal L.G., Hinch E.J. The effect of weak Brownian rotations on particles in shear flow.- J. Fluid Mech., 1971, v.46, N 4, p.685-703.
207. Layec Y., Wolf C. Intrinsic viscosity of solutions of rigid particles at high shear rates.- Journal of Polymer Science. Polymer Chem Ed., 1973, v. 11, N 7, p.1653-1672.
208. Hinch E.J., Leal L.G. The effect of Brownian motion on the rheological properties of a suspension of non-spherical particles.- J.Fluid Mech., 1972, v.52, N 4, p.683-712.
209. Brenner H. Rheology of a dilute suspension of axisymmetric brownian particles.- Int. J. Multiphase Flow., 1974, v.1, N 2., p.195-341.
210. Scheraga H.A., Edsall J.T., Gadd J.O. Double refraction of flow: numerical evaluation of extinction angle and birefringence as a function of velocity gradient.- The Journal of Chemical Physics, 1951, c.19, N 9, p.1101-1108.
211. Цеберс А.О. Моделирование магнитной реологии разбавленной суспензии эллипсоидальных частиц в численном эксперименте. - Магнитная гидродинамика, 1984, № 4, с.23-29.
212. Raikher Yu.L. The magnetization curve of a textured ferrofluid.- Journal of Magnetism and Magnetic Mat., 1983, v.39, p.11-13.
213. Martinet A. Experimental evidences of static and dynamic anisotropies of magnetic colloids.- In: Thermomechanics of magnetic fluids: Theory and Applications. Washington.- London, Hemisphere Publ. Corp., 1978, p.97-114.

214. Майоров М.М. Экспериментальное исследование магнитной проницаемости феррожидкости в переменном магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1979, № 2, с.21-26.
215. Игнатенко Н.М., Мелик-Гайказян И.Я., Полунин В.М., Цеберс А.О. О возбуждении объемной магнитострикцией ультразвуковых колебаний в суспензии одноосных феррочастиц.- Магнитная гидродинамика, 1984, № 3, с.19-22.
216. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред.- М.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1953, 788 с.
217. Кирюшин В.В., Налетова В.А., Чеканов В.В. Движение намагничиваемой жидкости во вращающемся однородном магнитном поле.- ПММ, 1978, т.42, № 4, с.668-672.
218. Dussan V.E.B., Davis S.H., On the motion of a fluid-fluid interface along a solid surface.- J. Fluid Mech., 1974, v.65, p.1, p.71-95.
219. Kafka F.Y., Dussan E.B. On the interpretation of dynamic contact angles in capillaries.- J.Fluid Mech., 1979, v.95, p.3, p.539-565.
220. Воинов О.В. Гидродинамика смачивания.- Механика жидкости и газа, 1976, № 5, с.76-84.
221. Greenspan H.P. On the motion of a small viscous droplet that wets a surface.-J.Fluid Mech., 1978, v.84, p.1, p.125-143.
222. Дворчик С.Е., Рыков В.Г. Экспериментальные исследования поведения ферромагнитной жидкости в однородном вращающемся поле.- В кн.: Гидродинамика и теплофизика магнитных жидкостей. Саласпилс, 1980, с.141-144.
223. Дворчик С.Е., Рыков В.Г., Абрамович В.У. О поведении магнитных жидкостей в однородном вращающемся магнитном поле.- Магнитная гидродинамика, 1981, № 1, с.137-139.

224. Цветков В.Н. Движение анизотропных жидкостей во вращающемся магнитном поле.- ЖЭТФ, 1939, т.9, в.5, с.602-615.
225. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.- М.-Л.: Гос.изд.техн.-теорет.лит., 1951, 606 с.
226. Benjamin T.B., Ursell F. The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion.- Proc. Roy. Soc. A., 1954, v.225, p.505-515.
227. Брискман В.А., Шайдуров Г.Ф. Параметрическая неустойчивость поверхности жидкости в переменном электрическом поле.- ДАН СССР, 1968, т.180, № 6, с.1315-1318.
228. Майоров М.М., Цеберс А.О. Гидродинамические неустойчивости магнитных жидкостей: статические и волновые явления.- В кн.: Материалы II Всесоюзной школы-семинара по магнитным жидкостям. Изд. Московского университета, 1981, с.36-38.
229. Кронькалнс Г.Э., Майоров М.М., Цеберс А.О. Параметрическое возбуждение колебаний свободной поверхности магнитной жидкости.- В кн.: II Всесоюзный семинар по гидромеханике и теплообмену в невесомости, Пермь, 1981, с.118-120.
230. Механика. Новое в зарубежной науке. Эриксен Дж. Исследования по механике сплошных сред.- М.: Мир, 1977, 245 с.
231. Maier W., Saupe A. Eine einfache molekular-statistische Theorie der nematischen kristallinflüssigen Phase. Teil I.- Z.Naturforschg. 1959, Bd 14a, p.882-889.
232. Maier W., Saupe A. Eine einfache molekular-statistische Theorie der nematischen kristylinflüssigen Physe. Teil II.- Z.Naturforschg, 1960, Bd 15a, p.287-292.
233. Imura H., Okano K. Temperature dependence of the viscosity coefficients of liquid crystals.- Japanese Journal of Applied Physics, 1972, v.11, N 10, p.1440-1445.

234. Doi M. Molecular dynamics and rheological properties of concentrated solutions of rodlike polymers in isotropic and liquid crystalline phases.- Journal of Polymer Science. Polymer Phys. Ed., 1981, v.19, p.229-243.
235. Marrucci G. Prediction of Leslie coefficients for rodlike polymer nematics.- Mol. Cryst. Liq. Cryst. (Letters) , 1982, v.72, p.153-161.
236. Kuzuu N., Doi M. Constitutive equation for nematic liquid crystals under weak velocity gradient derived from a molecular kinetic equation.- Journal of the Physical Society of Japan, 1983, v.52, N 10, p.3486-3494.
237. Kuzuu N., Doi M. Constitutive equation for nematic liquid crystals under weak velocity gradient derived from a molecular kinetic equation. II. Leslie coefficients for rodlike polymers.- Journal of the Physical Society of Japan, 1984, v.53, N 3, p.1031-1038.
238. Степанов В.И. Кинетическая теория вязкоупругих свойств нематических жидких кристаллов.- В кн.: Статические и динамические задачи упругости и вязкоупругости. Свердловск, 1983, с.46-57.
239. Rose P.I. Determination of the diamagnetic anisotropy of the nematic phase of p-methoxybenzylidene-p-n-butylaniline (MBBA).-Mol.Cryst. Liq. Cryst., 1974, v.26, p.75-85.
240. Gähwiller Ch. Temperature dependence of flow alignment in nematic liquid crystals.- Phys. Rev. Lett., 1972, v.28, N 24, p.1554-1556.
241. Pieranski P., Guyon E. Two shear-flow regimes in nematic p-h-Hexyloxybenzylidene-p-aminobenzonitrile.- Phys. Rev. Letters, 1974, v.32, N 17, p.924-926.

242. De Gennes P.G. Phenomenology of short-range-order effects in the isotropic phase of nematic materials.- Physics Letters, 1969, v.30A, N 8, p.454-455.
243. Stinson T.W., Litster J.D. Pretransitional phenomena in the isotropic phase of a nematic liquid crystal.- Phys.Rev. Lett., 1970, v.25, N 8, p.503-506.
244. Martinoty P., Candau S., Debeauvais F. Dynamic properties near the nematic-isotropic transition of a liquid crystal.- Phys. Rev. Lett., 1971, v.27, N 17, p.1123-1125.
245. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред.- М.: Наука, 1978, 336 с.
246. Novotny V.J., Harbour J.R. Optical and electrical oscillations in ferrofluids induced by constant electric fields.- Appl.Phys.Lett., 1984, v.44, N 2, p.264-266.
247. Цеберс А.О. Электрогидродинамические неустойчивости в слабопроводящей суспензии эллипсоидальных частиц.- Магнитная гидродинамика, 1980, № 2, с.81-88.
248. Adam M., de Gennes P.G., Pieranski P. Instabilites de suspensions anisotropes par passage de courant.- Journal de Physique (Letters), 1978, t.39, N 4, p.L47-L49.
249. Шульман Э.П., Носов В.М. Вращение диэлектрических тел в электрореологических суспензиях.- В кн.: Проблема тепло- и массопереноса, Минск, Наука и техника, 1976, с.145-167.
250. Кашевский Б.Э., Иванова Н.И. Экспериментальное исследование влияния внутреннего вращения на вязкость и теплопроводность концентрированной магнитной жидкости.- В кн.: Одиннадцатое Рижское совещание по магнитной гидродинамике. т.Ш. Магнитные жидкости. Саласпилс, 1984, с.35-38.

251. Карпов Ю.С., Красноперов В.А., Окунев Ю.Т., Пасынков В.В.
О движении диэлектриков в электрическом поле.- В кн.:
Физика диэлектриков. М.: Изд-во АН СССР, 1960, с.124-
131.
252. Шульман З.П., Дейнега Ю.Ф., Городкин Р.Г., Мацепуро А.Д.
Электрореологический эффект.- Минск: Наука и техника,
1972, 174 с.
253. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их
математические модели.- М.: Наука, 1973, 416 с.

