RĪGAS TEHNISKĀ UNIVERSITĀTE

NADEŽDA SIŅENKO

PROMOCIJAS DARBS

DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU AR MARKOVA IMPULSU ATGRIEZENISKO SAITI ASIMPTOTISKĀS ANALĪZES ROBEŽTEORĒMAS

Zinātniskais vadītājs
prof. J.Carkovs

Rīga-1999

Saturs

IEVADS

Dažādu fizikas un tehnikas nozaru (piemēram. radiotehnikas. akustikas, mēraparatūras u. c.), kas prasa paaugstinātu jūtību un stabilitāti pret traucējumiem radiouztvērējos un mērierīcēs, finansu un ekonomiskās matemātikas, kā arī ģenētikas strauja attīstība šajā gadsimtā izvirzīja uzdevumu izpētīt pastāvīgi darbojošos gadījumspēku ietekmi uz dinamisko sistēmu uzvedību. Būtiskākie rezultāti dotajā jomā saistīti ar dinamisko sistēmu asimptotisko metožu un varbūtību teorijas robežteorēmu pielietojumiem. Svarīga loma šajā virzienā bija N.N.Bogoļubova un N.M.Krilova darbam [40]. kur pirmo reizi tika apskatīts robežvienādojums dinamiskai sistēmai. kuru ietekmē gadījumspēks. konverģējošs uz procesu ar neatkarīgām vērtībām. Autori pierādīja, ka robežgadījumā veidojas Markova process, un izveda Fokkera-Planka vienādojumu tā pārejas varbūtībām. Četrdesmito gadu vidū un piecdesmito gadu sākumā N.M.Krilova skolnieks I.I.Gihmans ieviesa vispārējus stohastiskā līklīnijas integrāļa un stohastiskā diferenciālvienādojuma jēdzienus. pierādīja atrisinājuma eksistences un unitātes teorēmas tādiem vienādojumiem un atrisinājuma diferencējamību pēc sākuma nosacījumiem. izveda A.N.Kolmogorova vienādojumus atrisinājumu pārejas varbūtībām (sk., piem., darbus [13-15] un apskatu darbā [19]). Tajā pat laikā japāņu matemātiķis K.Ito [24-26] neatkarīgi izveidoja stohastisko diferenciālvienādojumu teoriju, balstītu uz stohastiskā integrāļa pēc Brauna kustības procesa jēdzienu. Minētā konstrukcija izrādījās ērta, un turpmāk daudzi autori tādu izmantoja. Ito stohastisko vienādojumu teorija pēta

$$dx = a(t.x)dt + \sigma(t,x)dw(t)$$

tipa vienādojumus, kur $w(t)$ ir Brauna kustības jeb Vīnera process. Dotā modeļa galvenā priekšrocība ir tas, ka tādu stohastisku diferenciālvienādojumu atrisinājumi ir Markova procesi. kuru teorija ir izstrādāta.

Tālākajā laikā ar stohastisko vienādojumu teoriju nodarbojušies daudzi zinātnieki. Tika precizēti eksistences un unitātes nosacījumi, konstruēti stohastiskie vienādojumi procesiem ar robežām. pētīta rezultātu atkarība no sākuma nosacījumiem un parametriem. konstruēti asimptotiskie izvirzījumi, pamatota N.N.Bogoļubova vidējošanas metode šādiem vienādojumiem. Plaši tika pētīta stohastisko sistēmu stabilitāte [1,2,49,50,70-72,74].

Daudzo darbu stohastisko diferenciālvienādojumu teorijā rezultāti apkopoti monogrāfijās [18, 66].

Kopā ar stohastiskajiem diferenciālvienādojumiem bieži tiek apskatīti vienādojumi ar gadījuma perturbācijām, t.i., diferenciālvienādojumi, kuros gadījumfunkcijas iekļautas pietiekami regulāri, piemēram,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y(t)),$$

kur $y(t)$-Markova process. Kaut gan šie vienādojumi izskatās vienkāršāki nekā stohastiskie diferenciālvienādojumi, to pētīšanu sarežģī apstāklis, ka atrisinājumam nepiemīt Markova īpašība. Tāpēc izplatītākā šo vienādojumu analīzes metode ir asimptotiskās metodes un varbūtību teorijas robežteorēmu pielietojums. Tām (sk., piem., [7-9,33,34,51]) noteikts vidējošanas princips un pētīta vidējotās sistēmas atrisinājuma normētu noviržu no precīza atrisinājuma uzvedība.

Tomēr reālu dinamisku sistēmu pētīšanā ir prasība ņemt vērā ne tikai tādus gadījumspēkus, kas nepārrauj fāzu trajektorijas, bet arī spēkus, kas īsā laikā būtiski izmaina sistēmas fāzu koordinātas. Bieži to ilglaicību var neņemt vērā un uzskatīt tās par "momentāliem". Tāda idealizācija noved pie diferenciālvienādojumiem ar impulsu veida iedarbību. Vienādojumu ar impulsiem pētīšana saistīta ar A.M.Samoiļenko, A.D.Miška, N.A.Perestjuka, D.D.Bainova, P.S. Semjonova un citu autoru darbiem, tā, piemēram, [48] pētītas sistēmas ar impulsiem fiksētos laika momentos, [60] veikta impulsu sistēmu klasifikācija un dots vidējošanas principa pamatojums. N.N.Bogoļubova otrās problēmas atrisinājumam, impulsu sistēmu stabilitātei, periodisku un ierobežotu sistēmu atrisinājumu eksistencei veltīti darbi [45-47,52,61]. Pietiekami detalizētu pētījumu aprakstu dotajā jomā var atrast monogrāfijā [62]. Jāpiemin arī latviešu matemātiķa A. Reinfelda darbi [56 - 59 u.c.], kuros piedāvātā impulsu dinamisko sistēmu ekvivalences analīzes metodika, kas būtiski vienkāršo nekustīgo punktu stabilitātes pētīšanu ar sākotnējās sistēmas lineārā tuvinājuma palīdzību.

Praksē lielākoties impulsu iedarbībai uz reālām sistēmām ir nevis determinēts, bet gadījuma raksturs. Pie tam gadījumveida var būt gan moments, kad impulss "iedarbojas", gan tā lielums. Pirmais no darbiem, kurā tika pētīta iedarbība, kam ir gadījuma raksturs, ir [44], kurā lineāra sistēma ar konstantiem koeficientiem atrodas gadījuma impulsu iedarbībā fiksētos laika momentos. Vidējošanas princips impulsu sistēmām ar fiksētiem laika momentiem izstrādāts [63], turpat arī iegūta sākotnējās sistēmas atrisinājuma normētu noviržu no vidējotās sistēmas atrisinājuma asimptotika.

Augstāk minētajos darbos apskatīta impulsu iedarbība determinētos laika momentos. Tomēr reālās sistēmās impulsu perturbāciju laika momentiem parasti ir gadījuma raksturs. Tā, piemēram, masu apkalpošanas sistēmās atteikuma laika momenti ir gadījuma lielumi, un, ja aparatūra pārtrauc darboties, vadošā signāla fāzu koordināta var mainīties lēcienveidīgi. Analoģiski modeļi sastopami arī finansu matemātikā, piemēram, apdrošināšanas kompānijas kapitāla izmaiņas, saistītas ar apdrošināšanas izmaksām, notiek gadījumlaika momentos. Pietiekami vispārīgs modelis tāda veida dinamiskām sistēmām ir sekojoša veida impulsu sistēmas: to fāzu koordināta ir no labās puses nepārtraukts gadījuma process $x(t) \in \mathbb{R}^n$, kurš apmierina sākuma nosacījumu $x(0) = x$, kurš visiem $t \in \{(\tau_j - 0, \tau_j), j \in \mathbb{N}\}$ apmierina diferenciālvienādojumu

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y(t), \varepsilon), \tag{1}$$

bet laika momentos $\tau_j, j \in \mathbb{N}$ ir pārrāvums (lēciena nosacījums) formā:

$$x(\tau_j) = x(\tau_j - 0) + \varepsilon g(x(\tau_j - 0), y(\tau_j - 0), \varepsilon). \tag{2}$$

Trajektorijas $x(t)$ pārrāvuma momenti ir gabaliem konstanta Markova procesa $y(t)$ pārslēgumu laika momenti:

$$P\{\tau_{j-1} - \tau_j > t \mid y(\tau_{j-1}) = y\} = e^{-a(y)t}.$$

Tādējādi veidojas impulsu sistēma, kurā Markova process nosaka lēciena momentus un lielumus. Darbā [69] izstrādātas (1)-(2) tipa vienādojumu analīzes asimptotiskās metodes, konstruēta vidējotā robežsistēma un difūziju aproksimācija, pierādīta iespējamība izmantot robežvienādojumus stabilitātes pētīšanai, kā tas tika veikts gludu sistēmu gadījumos, piemēram, darbos [6], [36]. Cita starpā šajā darbā pierādīts, ka sistēmas (1)-(2) atrisinājums formā $x(\frac{t}{\varepsilon})$ visiem $r > 0, T > 0$ konverģē pēc varbūtības, ja $\varepsilon \to 0$, vienmērīgi pa $x \in S_r, t \in [0,T]$ uz vidējotā vienādojuma

$$\frac{du}{dt} = b_1(u) = \int_{\mathbb{Y}} [f(x,y,0) + a(y)g(x,y,0)]\mu(dy)$$

atrisinājumu ar sākuma nosacījumu $u(0) = x$. Normētu noviržu saimei $[x(\frac{t}{\varepsilon}) - u(t)]/\sqrt{\varepsilon}$ pierādīta vājā konverģence, ja $\varepsilon \to 0$, uz stohastiskā vienādojuma

$$dX = (Db_1)(u(t))Xdt + \sigma(u(t))dw(t)$$

atrisinājumu ar triviālo sākuma nosacījumu. Gadījumā, kad $b_1(x) = 0$, process $x(\frac{t}{\varepsilon^2})$ vāji konverģē, ja $\varepsilon \to 0$, uz stohastiskā diferenciālvienādojuma

$$d\hat{x} = b(\hat{x})dt + \sigma(u(t))dw(t)$$

atrisinājumu, kur sanesēs koeficients $b(\hat{x})$ un difūzijas matrica $\sigma(\hat{x})$ tiek izrakstīti ar gadījumfunkciju $f(x, y(t))$ un $g(x, y(t))$ vidējoto korelācijas raksturlielumu palīdzību.

Pēdējos gados radušies ievērojami daudz darbu, kuri veltīti dinamisku sistēmu analīzei no pusgrupu viedokļa, kuru sauc par gadījumevolūciju teoriju (skat. apskatu darbos [37], [73]).

No šīs pieejas viedokļa nozīmīgu vietu ieņem robežteorēmas sēriju shēmā. Vidējošanas teorēmas nepārtrauktām Markova gadījumevolūcijām pētītas darbos [10,21,22,32,39,41,65], pārtrauktām - darbos [28-30, 53-55]. Difūziju aproksimācija nepārtrauktām Markova evolūcijām pētīta darbos [10,11,20, 21,23,38,41,53], pārtrauktajām - darbos [29-31,53]. Gadījumevolūciju pētīšanā aktīvi izmantotas martingālās metodes, kuras pirmie izmantoja Struks un Varadans Markova procesa raksturošanai [68]. Martingālās metodes ļauj risināt gadījumprocesu sēriju shēmā virkņu kompaktības problēmas, kā arī izrakstīt gadījumevolūciju robežvienādojumus vidējošanas un difūziju aproksimācijas teorēmās.

Neskatoties uz panākumiem dotajā jomā, diferenciālvienādojumi ar impulsu iedarbību ir maz izpētīti. Īpašu interesi izraisa tāda tipa gadījumsistēmas, kādas aprakstītas un pētītas [69], tikai ar "atgriezenisko saiti", t.i., kad "vadošā" gadījumprocesa lēcienu momenti, savukārt, ir atkarīgi no fāzu koordinātas.

Kā piemēru modelim ar atgriezenisko saiti var ņemt modeli no matemātiskās ģenētikas ([64]): pietiekami lielai organismu panmiktiskai populācijai, kurā kādas pazīmes pārmantojamību nosaka viens poliallēlais gēns pie pieņēmuma, ka abi dzimumi ir vienlīdzīgi gan pārmantojamības, gan atlases ziņā, tad allēlo biežumu evolūciju vienādojums ir formā:

$$\frac{dp_i}{dt} = p_i(\omega_i - \omega),$$

kur $\omega_i = \sum\limits_j \omega_{ij}(N)p_i, \omega = \sum\limits_i \omega_i p_i$ un $\omega_{ij}(N)$ - nosacītās dzīvildzes koeficienti, N - populācijas apjoms.

Teorētiskās dzīvildzes koeficientu atkarība no populācijas apjoma atspoguļo ārējās vides iedarbību: atlases spiediens atkarīgs no to vai citu genotipu koncentrācijas populācijā. Tādā situācijā populācija evolucionējot formē savu "genotipisko vidi", bet, tā kā atlases spiediens atkarīgs no gēnu biežuma, tad "genotipiskā vide", savukārt, nosaka populācijas tālāko dinamiku. Acīmredzami, ka populācijas apjoms mainās diskrēti dzimstības - mirstības gadījumos, un tā izmaiņas var aprakstīt, izmantojot Markova procesu ar diskrētu stāvokļu skaitu. Populācijas lieluma izmaiņas matemātiskajā modelī jāatspoguļo dzimšanas un miršanas laika momentu gadījumraksturs, pie kam dotā procesa lēcienu varbūtībai, savukārt, jābūt atkarīgai no populācijas lieluma.

Nelineāru stohastisku vienādojumu sistēmu, kuru vada diskrēts Markova process un kurai pastāv atgriezeniskā saite, bet kurai nav impulsu, pirmo reizi apskatījis A.V. Skorohods [66]. Šajā darbā pētīts homogēns, no maza parametra ε atkarīgs Markova process $\{x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\}$, kura fāzu komponente x_ε uzdota ar diferenciālvienādojumu

$$dx_\varepsilon(t) = a(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))dt + B(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))dw(t), \tag{3}$$

bet diskrētā komponente $y_\varepsilon(t)$ ir gabaliem konstants gadījumprocess, kuram intervāli starp lēcienu momentiem atkarīgi no fāzu koordinātas un sadalīti pēc eksponenciālā sadalījuma likuma:

$$\mathbf{P}\left\{\tau_{j-1} - \tau_j > t \;/\; y_\varepsilon(\tau_{j-1}),\ x_\varepsilon(\tau_{j-1})\right\} =$$

$$= \exp\left(- \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_{j-1}+t} \frac{1}{\varepsilon} c(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(\tau_{j-1}))ds \right). \tag{4}$$

Ja izpildās vienmērīgas ergoditātes nosacījums procesu saimei $y_\varepsilon(t)$, ar invariantu mēru ρ_x, procesu saime $x_\varepsilon(t)$, kur $(x_\varepsilon(t); y_\varepsilon(t))$ - sistēmas (3)-(4) atrisinājums ar sākuma nosacījumu $x_\varepsilon(0) = x_0$, $y_\varepsilon(0) = y_0$, ja $\varepsilon \to 0$, konverğē pēc sadalījuma uz funkciju $\hat{x}(t)$, kas nav gadījumfunkcija un ir vienādojuma

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = \hat{a}\left(\hat{x}(t)\right)$$

atrisinājums ar sākuma nosacījumu $\hat{x}_\varepsilon(0) = x_0$, kur

$$\hat{a}(x) = \int a(x, y)\rho_x(dy).$$

Ja $\hat{a}(x) \equiv 0$ visiem $x \in \mathbf{R}^n$, tad pie dažiem papildnosacījumiem process $\hat{x}_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(\frac{t}{\varepsilon})$ konverğē pēc sadalījuma, ja $\varepsilon \to 0$, uz procesu $\tilde{x}(t)$, kas ir vienādojuma

$$d\tilde{x}(t) = \tilde{a}\left(\tilde{x}(t)\right)dt + \tilde{B}\left(\tilde{x}(t)\right)dw(t)$$

atrisinājums ar sākuma nosacījumu $\tilde{x}_\varepsilon(0) = x_0$, kur saneses koeficients izsakās kā

$$\tilde{a}(x) = a_1(x) + a_2(x),$$

kur

$$a_1(x) = \int [\Pi^x a'(x, z)]\, a(x, z)\rho_x(dz)$$

$$a_2(x) = \iint \left(\bar{a}(x, y)\Pi^x P_x(z, dy), a(x, z)\right)\rho_x(dz)$$

un difūzija $\tilde{B}(x)$ ir simetrisks nenegatīvs operators, kurš tiek definēts kā:

$$\left(\tilde{B}^2(x)v, v\right) = 2\int (a(x, y), v)\left([\Pi^x a(x, y)], v\right)\rho_x(dy),$$

kur Π^x ir potenciāloperators un $P_x(z, dy)$ ir iekļautas Markova ķēdes pārejas varbūtība.

Šī promocijas darba **pētījuma objekts** ir gadījumprocess $\{x(t), t \geq 0\}$ ar vērtībām no telpas $\mathbf{R}^n$, kura uzvedība atkarīga no gabaliem konstanta Markova procesa $\{y(t), t \geq 0\}$ ar vērtībām no diskrētas telpas $\mathbf{Y} \subset \mathbf{R}$. Intervālos, kur process $y(t)$ ir konstants, process $x(t)$ apmierina diferenciālvienādojumu (1), bet procesa $y(t)$ lēcienu laika momentos $\{\tau_j, j \in \mathbf{N}\}$ procesa $x(t)$ trajektorijām ir pārrāvumi, uzdoti ar vienādojumu (2). Process $y(t)$ tiek uzdots ar pārslēgumu laika momentu virknes $\{\tau_j\}$ palīdzību, intervālu starp lēcienu momentiem sadalījums uzdots ar vienādību

$$\mathbf{P}\left(\tau_{j-1} - \tau_j > t \ / \ \ y(\tau_{j-1}), \quad x(\tau_{j-1})\right) =$$

$$= \exp\left\{ - \int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_{j-1}+t} a(x(s), y(\tau_{j-1}))ds \right\}, \quad \tau_0 = 0, \quad j \in \mathbf{N}, \qquad (5)$$

bet iekļautās Markova ķēdes pārejas varbūtības - ar vienādību

$$\mathbf{P}\left\{y(\tau_j) = z \,/ y(\tau_j - 0) = y, \ x(\tau_j - 0) = x\right\} = p_x(y, z).$$

Kā redzams no (1) un (2), procesa $\{x(t), t \geq 0\}$ raksturlielumi ir atkarīgi no parametra ε. Darbā tiek pētīta (1)-(2) atrisinājuma asimptotika, ja $\varepsilon \to 0$. Sīks modeļa apraksts un visi tālākai analīzei nepieciešamie pieņēmumi atrodami 1. daļā.

Šī darba **mērķis** ir:

(1) pamatot vidējošanas metodes lietojuma iespējamību tuvinātam procesu saimes $\{x(\frac{t}{\varepsilon}), 0 \leq t \leq T\}$ aprakstam, ja $\varepsilon \to 0$;

(2) pierādīt centrālo robežteorēmu Skorohoda telpā procesu saimei $\{x(t/\varepsilon^2), 0 \leq t \leq T\}$, ja $\varepsilon \to 0$, gadījumam, kad vidējotie raksturlielumi vienādi ar nulli;

(3) izrakstīt difūziju aproksimācijas vienādojumu tuvinātam procesu saimes $\{x(t/\varepsilon^2), 0 \leq t \leq T\}$ aprakstam, ja $\varepsilon \to 0$, gadījumam, kad vidējotie raksturlielumi vienādi ar nulli;

(4) pierādīt vidējotā vienādojuma un difūziju aproksimācijas vienādojuma lietojamības iespēju sistēmas (1)-(2) triviālā atrisinājuma stabilitātes analīzei.

Galvenās pētnieciskās metodes ir:

-funkciju no Markova procesiem uzdošana ar šo procesu infinitezimālo operatoru palīdzību (J.Dinkina formula [12]);

-otrās Ļapunova metodes stohastiskais variants stohastisku diferenciālvienādojumu atrisinājumu pētīšanai [35, 69];

-gadījumprocesu teorijas martingālās metodes [11] konverģences gandrīz droši analīzei;

-A.Skorohoda robežteorēmas Markova procesu bez otrā veida pārrāvumiem konverģences uz difūziju procesu analīzei [66].

Promocijas darbs sastāv no ievada, trijām daļām un bibliogrāfijas saraksta ar 74 nosaukumiem.

1.daļa ir ievaddaļa.Tā satur pētāmā objekta aprakstu, nepieciešamās teorētiskās atziņas un dažus tālākajam iztirzājumam nepieciešamus novērtējumus.

Apskatīsim gabaliem konstantu, no labās puses nepārtrauktu, homogēnu Markova procesu saimi $\{y(t), t \geq 0\}$ ar parametru $x \in \mathbf{R}^n$, kura vērtību kopa $\mathbf{Y} \subset \mathbf{R}$ ir sanumurējama telpa, ar infinitezimālo operatoru Q_x :

$$(Q_x v)(y) = a(x, y) \sum_{z \in \mathbf{Y}} [v(z) p_x(y, z) - v(y)]. \tag{6}$$

kur $a(x, y)$ ir pozitīva, nepārtraukta, vienmērīgi ierobežota funkcija

$$0 < a_1 := \inf_{y \in \mathbf{Y}, x \in \mathbf{R}^n} a(x, y) \leq \sup_{y \in \mathbf{Y}, x \in \mathbf{R}^n} a(x, y) := a_2 < \infty,$$

kuras pirmais un otrais atvasinājumi pēc x ir nepārtraukti un ierobežoti; $p_x(y, z)$ ir iekļautās Markova ķēdes pārejas varbūtība, kuras pirmais un otrais atvasinājumi pēc x ir nepārtraukti un ierobežoti, x - parametrs. Markova process ar infinitezimālo operatoru (6) ir gabaliem konstants process [12].

Operatori (6) tiek definēti visu ierobežoto reālo funkciju $v(y)$ ar normu $\|v\| = \sup_y |v(y)|$ telpā $\mathbf{B(Y)}$. Ir viegli pierādīt, ka pie mūsu nosacījumiem katrai funkcijai $v \in \mathbf{B}(\mathbf{Y})$ operatoram $(Q_x v)(y)$ ir divi nepārtraukti atvasinājumi pēc x, kuri ierobežoti pēc telpas $\mathbf{B}(\mathbf{Y})$ normas. Papildus mēs pieprasīsim šādu nosacījumu izpildīšanos:

- eksistē $\nabla_x Q_x v(y)$ un $D\nabla_x Q_x v(y)$, kuri ir ierobežoti operatori telpā $\mathbf{B}(Y)$.

- fiksētam y funkcijas $p_x, \nabla_x p_x, D\nabla_x p_x$ ir σ-aditīvas ar ierobežotu variāciju (pēc telpas $\mathbf{B}(\mathbf{Y})$ normas).

Bez tam pieņemsim, ka Markova procesu saime ar ģenerējošajiem operatoriem Q_x ir vienmērīgi ergodiska katram x, t.i., eksistē tāds invariants mērs μ_x, ka eksistē tāda $\rho(x) \geq c > 0$, ka

$$|P_x(t,y,z) - \mu_x(z)| \leq e^{-\rho(x)t}$$

visiem $t > 0$ un $y, z \in \mathbf{Y}$, kur $P_x(t,y,z)$ ir pārejas varbūtība Markova procesam $y(t)$.

Pieņemsim, ka (x,y) patvaļīgs punkts $\mathbf{R}^n \times \mathbf{Y}$ telpā un $x(t)$ ir atrisinājums diferenciālvienādojumam

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x,y,\varepsilon) \tag{7}$$

ar sākuma nosacījumu

$$x(0) = x. \tag{8}$$

Iegūto sistēmas (7)-(8) atrisinājumu $x(t)$ mēs varam ievietot x vietā funkcijā $a(x,y)$ un atrast procesa $y(t)$ pirmā lēciena momentu τ_1, kas ir gadījuma lielums ar nosacīti eksponenciālo sadalījumu:

$$\mathbf{P}\{\tau_1 > t \;/\quad y(0) = y, \quad x(0) = x\} = \exp\left\{-\int_0^t a(x(s),y)ds\right\}$$

Tagad varam definēt $y(t)$ sekojošā veidā: $y(t) \equiv y$ visiem $t \in [0,\tau_1)$ un $y(\tau_1)$ ir gadījuma lielums ar sadalījumu $\mathbf{P}(y(\tau_1) = z) = p_{x(\tau_1 - 0)}(y,z)$. Tas nozīmē, ka procesam $y(t)$ momentā τ_1 ir lēciens no punkta $y \in \mathbf{Y}$ uz $z \in \mathbf{Y}$ ar varbūtību $p_{x(\tau_1-0)}(y,z)$.

Laika momentā $t = \tau_1$ arī procesam $x(t)$ ir lēciens:

$$x(t) = x(t-0) + \varepsilon g(x(t-0), y(t-0), \varepsilon), \tag{9}$$

kur $y(t-0) = y$.

Tagad mēs varam atrisināt vienādojumu

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x,z,\varepsilon)$$

ar sākuma nosacījumu $x(\tau_1)$ no (9). Iegūto atrisinājumu $x(t)$ mēs atkal varam ievietot x vietā funkcijā $a(x,y)$ un atrast gadījuma lielumu τ_2 ar nosacīti eksponenciālo sadalījumu:

$$\mathbf{P}\{\tau_2 - \tau_1 > t \ / \quad y(\tau_1) = z,\ x(\tau_1)\} = \exp\left\{-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_1+t} a(x(s), z)ds\right\}.$$

Talāk $y(t)$ ir identiski vienāds ar $y(\tau_1)$ visiem $t \in [\tau_1, \tau_2)$ un laika momentā τ_2 - $y(\tau_2)$ ir gadījuma lielums, kurš pieņem vērtības $z \in \mathbf{Y}$ ar varbūtību $p_{x(\tau_2-0)}(y(\tau_1), z)$. Pēc tam laika momentā $t = \tau_2$ procesam $x(t)$ ir lēciens, kuru apraksta vienādojums (9).

Rezultātā katram $j \in \mathbf{N}$ iegūstam sekojošo shēmu: ja mums ir zināms laika moments τ_{j-1} un vērtības $y(\tau_{j-1})$ un $x(\tau_{j-1})$, mēs varam atrast atrisinājumu $x(t)$ diferenciālvienādojumam (7) ar sākuma nosacījumu $x(\tau_{j-1})$ uz $t > \tau_{j-1}$ pusass. Lietojot šo atrisinājumu, var nodefinēt gadījuma lielumu τ_j ar nosacīti eksponenciālo sadalījumu:

$$\mathbf{P}\{\tau_{j-1} - \tau_j > t \ / y(\tau_{j-1}),\ x(\tau_{j-1})\} =$$

$$= \exp\left\{-\int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_{j-1}+t} a(x(s), y(\tau_{j-1}))ds\right\}.$$

Tad var nodefinēt $y(t)$ kā $y(\tau_{j-1})$ visiem $t \in [\tau_{j-1}, \tau_j)$ un gadījuma lielumu $y(\tau_j)$, kurš pieņem vērtības $z \in \mathbf{Y}$ ar sadalījumu $p_{x(\tau_j-0)}(y(\tau_{j-1}), z)$ laika momentos τ_j.

Turpinot rekurenti šo procedūru, iegūstam momentu virkni $\{\tau_j, j \in \mathbf{N}\}$ tādu, ka

- intervālos (τ_{j-1}, τ_j) process $y(t)$ nemainās, bet $x(t)$ apmierina vienādojumu:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y(t), \varepsilon); \tag{10}$$

- laika momentos τ_j process $x(t)$ veic lēcienus, uzdotus ar nosacījumu (9).

Pieņemsim, ka funkcijas $f(x,y,\varepsilon)$ un $g(x,y,\varepsilon)$ no (9) un (10) var tikt uzrakstītas formā:

$$f(x,y,\varepsilon) = f_1(x,y) + \varepsilon f_2(x,y) + \varepsilon f_3(x,y,\varepsilon),$$

$$g(x,y,\varepsilon) = g_1(x,y) + \varepsilon g_2(x,y) + \varepsilon g_3(x,y,\varepsilon),$$

kur funkcijas $f_1(x,y), g_1(x,y)$ ir nepārtrauktas un ierobežotas pēc x, bet $f_2(x,y)$ un $g_2(x,y)$ ir nepārtrauktas pēc x funkcijas; $f_1(x,y)$, $g_1(x,y)$ ir divreiz, bet $f_2(x,y)$, $g_2(x,y)$ un $f_3(x,y,\varepsilon)$, $g_3(x,y,\varepsilon)$ - vienu reizi diferencējamas pēc x, un to atvasinājumi ir pēc visiem argumentiem nepārtraukti un ierobežoti.

Papildus tiek prasīts, lai funkcijām $f_3(x,y,\varepsilon)$ un $g_3(x,y,\varepsilon)$ izpildītos sakarība

$$\|Df_3(x,y,\varepsilon)\| + \|Dg_3(x,y,\varepsilon)\| \leq \beta(\varepsilon)$$

visiem $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{Y}$ un $\varepsilon \in [0,1]$, kur $\beta(\varepsilon)$ ir bezgalīgi mazs lielums, ja $\varepsilon \to 0$.

Šajā daļā tika pierādīta arī

Teorēma 1.1.1. *Pie augstāk minētiem nosacījumiem pāris $\{x(t), y(t)\}$ veido Markova procesu fāzu telpā $\mathbf{R}^n \times \mathbf{Y}$ ar infinitezimālo operatoru $\mathcal{L}$, kas uzdots ar sakarību:*

$$(\mathcal{L}v)(x,y) = \varepsilon(f(x,y,\varepsilon), \nabla_x)v(x,y) + Q_x v(x,y) + \varepsilon Gv(x,y),$$

kur $(Gv)(x,y) = \frac{a(x,y)}{\varepsilon} \sum\limits_{z\in\mathbf{Y}} [v(x+\varepsilon g(x,y,\varepsilon), z) - v(x,z)]p_x(y,z)$.

2.daļās 1.nodaļā pētāmai sistēmai ir noformulēta un pamatota vidējošanas shēma. Pāriesim uz "lēno" laiku $s = \varepsilon t$. Ieviesīsim apzīmējumus:

$$b_1(x) = \sum_{y\in\mathbf{Y}} [f_1(x,y) + a(x,y)g_1(x,y)\mu_x(y)], \tag{11}$$

$x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = x^\varepsilon(t)$, $\quad y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = y^\varepsilon(t)$.

Vispirms tika pierādīts, ka, pētot procesa $x^\varepsilon(t)$ asimptotiku, varam sistēmā (9)-(10) atstāt tikai funkcijas $f_1(x,y)$ un $g_1(x,y)$. Tātad procesam $x^\varepsilon(t)$ pētāmā sistēma izskatīsies šādi:

$$\frac{dx^\varepsilon}{dt} = f_1(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)) \tag{12}$$

ja $t \in (\tau_{j-1}^{\varepsilon}, \tau_j^{\varepsilon})$,

$$x^{\varepsilon}(\tau_j^{\varepsilon}) = x^{\varepsilon}(\tau_j - 0) + \varepsilon g_1(x^{\varepsilon}(\tau_j - 0), y^{\varepsilon}(\tau_j - 0)) \tag{13}$$

visiem $j \in \mathbf{N}$, ar sākuma nosacījumu

$$x^{\varepsilon}(0) = x. \tag{14}$$

Kopā ar vienādojumu sistēmu (12)-(13)-(14) apskatīsim pēc invariantā mēra vidējoto sistēmu:

$$\frac{du}{dt} = b_1(u), \tag{15}$$

$$u(0) = x. \tag{16}$$

Šīs nodaļas galvenais rezultāts ir:

Teorēma 2.1.1. (Vidējošanas princips). *Pie iepriekšminētajiem nosacījumiem visiem $r > 0$ un $T > 0$ process $x^{\varepsilon}(t)$ konverģē ar varbūtību 1, ja $\varepsilon \to 0$, uz vidējotā vienādojuma (15) atrisinājumu $u(t, x)$ vienmērīgi visiem $t \in [0, T]$ kopā $U_r = \{|x| < r\}$, t.i., visiem $\delta > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{\substack{y \in \mathbf{Y} \\ x \in U_r}} P_{x,y} \left(\sup_{0 \le t \le T} |x^{\varepsilon}(t) - u(t, x)| > \delta \right) = 0.$$

2.nodaļā tiek pētīta sistēmas (9)-(10) triviālā atrisinājuma stabilitāte ar 2. Ļapunova metodes stohastiskā varianta palīdzību, izmantojot 1.nodaļā iegūto vidējoto vienādojumu.

Šajā nodaļā aplūkojam impulsu sistēmu (12)-(13) pie nosacījumiem

$$f_1(0, y) \equiv 0, \qquad g_1(0, y) \equiv 0. \tag{17}$$

Ir viegli redzēt, ka pie šiem nosacījumiem izpildās vienādojums $b_1(0) = 0$, kas nodrošina vienādojuma (15) triviālā atrisinājuma eksistenci.

1.definīcija. Vienādojuma (15) triviālo atrisinājumu sauksim par *eksponenciāli stabilu*, ja eksistē tādas konstantes $M > 0$ un $\gamma > 0$, ka katram $x \in \mathbf{R}^n$ un $t \ge 0$ izpildās nevienādība

$$|u(t, x)| \le M e^{-\gamma t} |x|. \tag{18}$$

2.definīcija. Vienādojumu sistēmas (12)-(13) triviālo atrisinājumu sauksim par *asimptotiski lokāli stabilu pēc varbūtības*, ja eksistē tāda konstante $\delta > 0$, ka katram $x \in U_\delta = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < \delta\}$ un $t \geq 0$ nevienādība

$$\mathbf{P}_x \{|x(t)| \geq \gamma_1\} < \gamma_2$$

izpildās visiem $\gamma_1 > 0$ un $\gamma_2 > 0$, un eksistē $\delta_1 > 0$ tāds, ka

$$\mathbf{P}_x \{|x^\varepsilon(t)| \geq \gamma_1\} \to 0, \text{ ja } t \to \infty$$

visiem $x \in U_{\delta_1}$.

Teorēma 2.2.1. *Ja izpildās iepriekšminētie nosacījumi un vidējotā vienādojuma (15) triviālais atrisinājums ir eksponenciāli stabils, tad eksistē tāds $\varepsilon_0 > 0$, ka visiem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ sistēmas (12)-(13) atrisinājums $x^\varepsilon(t)$ ir asimptotiski lokāli stabils pēc varbūtības.*

3.daļas 1.nodaļa veltīta sakotnējās sistēmas difūziju aproksimācijai, izpildoties dažiem papildnosacījumiem. Tika pierādīta sakotnējās sistēmas atrisinājuma vājā konverģence uz difūziju vienādojuma atrisinājumu galīgā laika intervālā.

Šajā daļā sistēmu (9)-(10) aplūkojam, pieņemot, ka $b_1(x) \equiv 0$. Tad visi vidējotā vienādojuma (15) atrisinājumi ir konstantes, un tie nedod mums nekādu informāciju par sistēmas (9)-(10) atrisinājumu uzvedību. Šajā gadījumā mēs lietosim laika substitūciju $s = t\varepsilon^2$. Apzīmējot $x(\frac{t}{\varepsilon^2}) = x_\varepsilon(t)$, $y(\frac{t}{\varepsilon^2}) = y_\varepsilon(t)$, varam pārrakstīt sistēmu (9)-(10) formā:

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f(x_\varepsilon, y_\varepsilon(t), \varepsilon), \tag{19}$$

ja $t \in (\tau_{j-1}^{\varepsilon^2}, \tau_j^{\varepsilon^2})$,

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-0) + \varepsilon g(x_\varepsilon(t-0), y_\varepsilon(t-0), \varepsilon) \tag{20}$$

visiem $t = \tau_j^{\varepsilon^2}, j \in \mathbf{N}$, kur $\{\tau_j^{\varepsilon^2}\}$ ir Markova procesa $y_\varepsilon(t)$ lēcienu momenti.

Paragrāfa 3.1.1 Lemmās ir pierādīts, ka katram $m \in \mathbf{N}$ un katrai virknei $t_m > t_{m-1} > ... > t_1 \geq 0$ gadījuma vektora $\{x_\varepsilon(t_1), ..., x_\varepsilon(t_m)\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ sadalījumi ir relatīvi vāji kompakti. Paragrāfā 3.1.2 aplūkojam (19)-(20) atrisinājumu ar sākuma nosacījumu $x_\varepsilon(0) = x$ kā gadījuma lielumu Skorohoda telpā $\mathcal{D}([0,T],\mathbf{R}^n)$. Šim atrisinājumam atbilstošo varbūtību mēru apzīmēsim ar $\mathbf{P}^\varepsilon$. Tika pierādīts, ka saime $\mathbf{P}^\varepsilon$ ir relatīvi vāji kompakta, t.i., eksistē tāda virkne $\{\varepsilon_n,\ n \in \mathbf{N}\}$, ka $\{\mathbf{P}^{\varepsilon_n}, n \in \mathbf{N}\}$ vāji konverģē uz kādu sadalījumu $\hat{\mathbf{P}}$, ja $\varepsilon_n \to 0$, kad $n \to \infty$.

Apzīmēsim

$$F_1(x,y) = f_1(x,y) + a(x,y)g_1(x,y),$$

$$F_2(x,y) = f_2(x,y) + a(x,y)g_2(x,y).$$

Nodefinēsim vektoru $b(x)$ šādi:

$$b(x) = \sum_{y\in\mathbf{Y}} F_2(x,y)\mu_x(y) + \sum_{y\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,y)]f_1(x,y)\mu_x(y) +$$

$$+\sum_{y\in\mathbf{Y}} a(x,y) \sum_{z\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,z)]g_1(x,y)p_x(y,z)\ \mu_x(y)$$

un simetrisku matricu $A(x) = \{a_{i,j}(x)\}_{i,j=1}^n$ ar formulu:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^i\, \partial x^j} = \frac{1}{2}tr\left[A(x)D\nabla v(x)\right] =$$

$$= \sum_{y\in\mathbf{Y}} \left([D\nabla v(x)]F_1(x,y)\ , \Pi_x F_1(x,y)\right)\mu_x(y) -$$

$$\sum_{y\in\mathbf{Y}}\left([D\nabla v(x)]g_1(x,y)\ , \frac{a(x,y)}{2}g_1(x,y) + f_1(x,y)\right)\mu_x(y),$$

kur $v(x)$ ir patvaļīga, pietiekoši gluda skalāra funkcija.

Teorēma 3.1.1. *Ja izpildās iepriekšminētie nosacījumi, procesu virkne $\{x_\varepsilon(t)\}$ vāji konverģē, ja $\varepsilon \to 0$, uz difūziju Markova procesu $\bar{x}(t)$ ar infinitezimālo operatoru $\mathcal{L}_0$:*

$$(\mathcal{L}_0 v)(x,y) = \frac{1}{2}tr[A(x)D\nabla v(x)] + (\nabla v(x), b(x)) \tag{21}$$

2.nodaļā izpētīta sakotnējās sistēmas triviālā atrisinājuma stabilitāte, balstoties uz difūziju aproksimāciju.

Robežprocess $\bar{x}(t)$, kurš tiek definēts ar infinitezimālo operatoru (21), ir stohastiskā diferenciālvienādojuma

$$d\bar{x} = b(\bar{x})dt + \overline{A}(\bar{x})dw(t) \tag{22}$$

atrisinājums, kur $w(t)$ ir standarta Vīnera process telpā $\mathbf{R}^n$, $\overline{A}(\bar{x})$ ir tāda pozitīvi definita, simetriska matrica, ka $(\bar{A}(x))^2 = A(x)$.

3.definīcija. Vienādojuma (22) triviālo atrisinājumu sauksim par *eksponenciāli p-stabilu* kādam $p > 0$, ja eksistē tādas konstantes $M > 0, \gamma > 0$ un $p > 0$, ka katram $x \in \mathbf{R}^n$ un $t \geq 0$ izpildās nevienādība

$$\mathbf{E}\left|\bar{x}(t)\right|^p \leq Me^{-\gamma t}\left|x\right|^p .$$

Teorēma 3.2.1. *Ja vienādojuma (22) triviālais atrisinājums ir eksponciāli p-stabils kādam $p > 0$, tad sistēmas (9)-(10) triviālais atrisinājums ir asimptotiski lokāli stabils pēc varbūtības jebkuram $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ kādam pozitīvam ε_0.*

Promocijas darba rezultātu **zinātniskā jaunrade** izpaužas apstāklī, ka nav prasības, lai impulsu perturbācijas ģenerējošais Markova process būtu homogēns, bet šī procesa raksturlielumi ir atkarīgi no pētāmās vienādojumu sistēmas atrisinājumiem.

Rezultātu praktiskā nozīmība ir iespējamība aprakstīt ar tuvinātām formulām sarežģītu impulsu dinamisku sistēmu ar Markova pārslēgumiem, atkarīgiem no fāzu koordinātas, dinamiku.

Formulas (11) un (18) ļauj ne tikai izmantot parastos vai stohastiskos diferenciālvienādojumus sākotnējās sistēmas analīzei galīgā laika intervālā, bet arī pētīt šo atrisinājumu uzvedību, ja $t \to \infty$.

Par promocijas darba rezultātiem tika referēts:

- *seminārā "Markova dinamisko sistēmu kvalitatīvās analīzes metodes"* (1994.,1995.,1996 un 1997. gados),
- *35. un 36. RTU Zinātniskajās un tehniskajās konferencēs* (1994. un 1995. gados),
- *2. Latvijas Matemātikas konferencē* (1997. gadā)

Ar promocijas darbu saistītās publikācijas:

1. N.Sinenko, S.Rogol. *On exponential 2p-stability of the beam uder logitudinal perturbations.* Proceedings of the

Latvian probability seminar. Vol.1. RTU, Rīga,1992.,p.127-139

2. N.Siņenko, J.Carkovs. *Impulsu sistēmu vidējošana ar Markova pārslēgumiem, kas atkarīgi no koordinātas.* 35. RTU studentu zinātniskās un tehniskās konferences materiāli. RTU, Rīga, 1994.,44-45.lpp.
3. N.Siņenko, J.Carkovs. *Vidējotas impulsu sistēmas ar Markova pārslēgumiem, kas atkarīgi no koordinātas, vāja konverģence uz difūzijas procesu.* 36. RTU studentu zinātniskās un tehniskās konferences materiāli. RTU, Rīga, 1995., 131-134.lpp.
4. N.Sinenko. *Averaging of impulse system with Markov switchings, depending on coordinates.* Proceedings of the Latvian probability seminar. Vol.4. RTU, Rīga, 1996., p.62-74
5. N.Sinenko. *Limit theorem and stability of impulse system with Markov switchings, dependent on coordinates.* 2.Latvijas Matemātikas konferences tēžu krājums. Rīga, 1997., 62-63.lpp.
6. N.Sinenko. *Diffusion approximation of an impulse system with coordinate dependent Markov swichings.* Journ. Modern aspects of Management Science. Rīga, 1999.

1. Uzdevuma nostādne

Apskatīsim gabaliem konstantu, no labās puses nepārtrauktu, homogēnu Markova procesu saimi $\{y(t), t \geq 0\}$ ar parametru $x \in \mathbf{R}^n$, kura vērtību kopa $\mathbf{Y} \subset \mathbf{R}$ ir sanumurējama telpa, ar infinitezimālo operatoru $\mathbf{Q}_x$:

$$(Q_x v)(y) = a(x, y) \sum_{z \in \mathbf{Y}} [v(z) p_x(y, z) - v(y)] \tag{1.1}$$

kur $a(x, y)$ ir pozitīva, nepārtraukta, vienmērīgi ierobežota funkcija:

$$0 < a_1 := \inf_{y \in \mathbf{Y}, x \in \mathbf{R^n}} a(x, y) \leq \sup_{y \in \mathbf{Y}, x \in \mathbf{R^n}} a(x, y) := a_2 < \infty \tag{1.2}$$

kuras pirmais un otrais atvasinājumi pēc x ir nepārtraukti; $p_x(y, z)$ ir iekļautās Markova ķēdes pārejas varbūtība, kuras pirmais un otrais atvasinājumi pēc x ir nepārtraukti un ierobežoti. Fiksētam x Markova process ar infinitezimālo operatoru (1.1) ir gabaliem konstants process [12]. Operatoru saime (1.1) tiek definēta visu $\mathcal{B}_{\mathbf{Y}}$-mērojamu ierobežotu reālo funkciju $v(y)$ ar normu $\|v\| = \sup_y |v(y)|$ telpā $\mathbf{B(Y)}$.

Ir viegli pierādīt, ka pie mūsu nosacījumiem katrai funkcijai $v(y) \in \mathbf{B(Y)}$ operatoram $(Q_x v)(y)$ ir divi nepārtraukti, ierobežoti pēc telpas $\mathbf{B(Y)}$ normas atvasinājumi pēc x. Papildus mēs pieprasīsim šādu nosacījumu izpildīšanos:

- eksistē $\nabla_x Q_x v(y)$ un $D\nabla_x Q_x v(y)$, kuri ir ierobežoti operatori telpā $\mathbf{B(Y)}$. Mēs definēsim šos operatorus šādi:

$$\begin{aligned} \nabla_x Q_x v(y) = \nabla_x a(x, y) \left\{ \sum_{z \in \mathbf{Y}} [v(z) p_x(y, z) - v(y)] \right\} + \\ + a(x, y) \sum_{z \in \mathbf{Y}} v(z) \nabla_x p_x(y, z), \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$D\nabla_x Q_x v(y) = D\nabla_x a(x, y) \left\{ \sum_{z \in \mathbf{Y}} [v(z) p_x(y, z) - v(y)] \right\} +$$

$$+\nabla_x a(x, y) \sum_{z \in \mathbf{Y}} v(z) [\nabla_x p_x(y, z)]^T + \sum_{z \in \mathbf{Y}} v(z) \nabla_x p_x(y, z) [\nabla_x a(x, y)]^T +$$

$$+a(x, y) \sum_{z \in \mathbf{Y}} v(z) D\nabla_x p_x(y, z).$$

Fiksētam y funkcijas $p_x, \nabla_x p_x, D\nabla_x p_x$ ir σ-aditīvas ar ierobežotu variāciju (telpā $\mathbf{B(Y)}$). (šeit un tālāk ar D apzīmēsim Frešē atvasinājumu pēc x, ar D^k - k-tās kārtas atvasinājumu pēc x.)

Bez tam pieņemsim, ka Markova procesu saime ar ģenerējošajiem operatoriem Q_x ir vienmērīgi ergodiska katram x, t.i., eksistē tāds invariants mērs μ_x, ka eksistē tāda $\rho(x) > c > 0$, ka

$$|P_x(t, y, z) - \mu_x(z)| \leq e^{-\rho(x)t}$$

visiem $t > 0$ un $y, z \in \mathbf{Y}$, kur $P_x(t, y, z)$ ir pārejas varbūtība Markova procesam $y(t)$.

Pieņemsim, ka (x, y) patvaļīgs punkts $\mathbf{R}^n \times \mathbf{Y}$ telpā un $x(t)$ ir atrisinājums diferenciālvienādojumam

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x, y, \varepsilon) \tag{1.4}$$

ar sākuma nosacījumu

$$x(0) = x, \tag{1.5}$$

kur funkcija $f(x, y, \varepsilon)$ var tikt uzrakstīta formā:

$$f(x, y, \varepsilon) = f_1(x, y) + \varepsilon f_2(x, y) + \varepsilon f_3(x, y, \varepsilon),$$

kur $f_1(x, y)$ ir nepārtraukta un ierobežota, bet $f_2(x, y)$ ir nepārtraukta pēc visiem argumentiem funkcija; $f_1(x, y)$ ir divreiz, $f_2(x, y)$ un $f_3(x, y, \varepsilon)$ vienu reizi diferencējamas pēc x un to atvasinājumi ir pēc visiem argumentiem nepārtraukti un ierobežoti. Iepriekšminētie nosacījumi garantē vienādojuma (1.4) atrisinājuma eksistenci.

Iegūto sistēmas (1.4)-(1.5) atrisinājumu $x(t)$ mēs varam ievietot funkcijā $a(x, y)$ un atrast procesa $y(t)$ pirmā lēciena momentu τ_1, kas ir gadījuma lielums ar nosacīti eksponenciālo sadalījumu:

$$\mathbf{P}(\tau_1 > t \;/\; y(0) = y,\ x(0) = x) = \exp\left\{-\int_0^t a(x(s), y)ds\right\}$$

Tagad varam definēt $y(t)$ sekojošā veidā: $y(t) \equiv y$ visiem $t \in [0, \tau_1)$ un $y(\tau_1)$ ir gadījuma lielums ar sadalījumu $\mathbf{P}(y(\tau_1) = z) = p_{x(\tau_1 - 0)}(y, z)$. Tas nozīmē, ka procesam $y(t)$ momentā τ_1 ir lēciens no punkta y uz z ar varbūtību $p_{x(\tau_1 - 0)}(y, z)$.

Pieņemsim, ka laika momentā $t = \tau_1$ arī procesam $x(t)$ ir lēciens:

$$x(t) = x(t-0) + \varepsilon g(x(t-0), y(t-0), \varepsilon), \tag{1.6}$$

kur $y(t-0) = y$ un $g(x, y, \varepsilon)$ var tikt uzrakstīta formā:

$$g(x, y, \varepsilon) = g_1(x, y) + \varepsilon g_2(x, y) + \varepsilon g_3(x, y, \varepsilon),$$

kur $g_1(x,y)$ ir nepārtraukta un ierobežota pēc x un nepārtraukta pēc y, bet $g_2(x,y)$ ir nepārtraukta pēc visiem argumentiem funkcija; $g_1(x,y)$ ir divreiz, $g_2(x,y)$ un $g_3(x,y,\varepsilon)$ vienu reizi diferencējamas pēc x un to atvasinājumi ir pēc visiem argumentiem nepārtraukti un ierobežoti.

Papildus no funkcijām $f_3(x,y,\varepsilon)$ un $g_3(x,y,\varepsilon)$ tiek prasīts, lai izpildītos

$$\|Df_3(x,y,\varepsilon)\| + \|Dg_3(x,y,\varepsilon)\| \leq \beta(\varepsilon)$$

visiem $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{Y}$ un $\varepsilon \in [0,1]$, kur $\beta(\varepsilon)$ ir bezgalīgi mazs, ja $\varepsilon \to 0$.

Tagad mēs varam atrisināt vienādojumu

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x,z,\varepsilon)$$

ar sākuma nosacījumu $x(\tau_1)$ no (1.6). Iegūto atrisinājumu $x(t)$ mēs atkal varam ievietot funkcijā $a(x,y)$ un atrast gadījuma lielumu τ_2 ar nosacīti eksponenciālo sadalījumu:

$$\mathbf{P}(\tau_2 - \tau_1 > t \;/\; \;\; y(\tau_1) = z,\; x(\tau_1)) = \exp(-\int\limits_{\tau_1}^{\tau_1+t} a(x(s),y(\tau_1))ds).$$

Iegūstot τ_2, $y(t)$ ņemsim identiski vienādu ar $y(\tau_1)$ visiem $t \in [\tau_1,\tau_2)$ un $y(\tau_2)$ kā gadījuma lielumu ar sadalījumu $p_{x(\tau_2-0)}(y(\tau_1),z)$. Tālāk pieņemsim, ka laika momentā $t = \tau_2$ procesam $x(t)$ ir lēciens, kuru apraksta vienādojums (1.6).

Vispārinot, ja mums ir laika moments τ_{j-1} un atrisinājums $x(\tau_{j-1})$, mēs varam atrast atrisinājumu $x(t)$ vienādojumam (1.7) ar sākuma nosacījumu $x(\tau_{j-1})$. Lietojot šo atrisinājumu, var nodefinēt gadījuma lielumu τ_j ar nosacīti eksponenciālo sadalījumu :

$$\mathbf{P}(\tau_{j-1}-\tau_j > t \;/\; \;\; y(\tau_{j-1}),\; x(\tau_{j-1})) = \exp(-\int\limits_{\tau_{j-1}}^{\tau_{j-1}+t} a(x(s),y(\tau_{j-1}))ds).$$

Tad var nodefinēt $y(t)$ kā $y(\tau_{j-1})$ visiem $t \in [\tau_{j-1},\tau_j)$ un gadījuma lielumu $y(\tau_j)$ ar sadalījumu $p_{x(\tau_j-0)}(y(\tau_{j-1}),z)$ laika momentos τ_j.

Turpinot šo procedūru, iegūstam momentu virkni $\{\tau_j, j \in \mathbf{N}\}$ tādu, ka

-intervālos (τ_{j-1},τ_j) process $y(t)$ nemainās, bet $x(t)$ apmierina vienādojumu

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon f(x,y(t),\varepsilon) \tag{1.7}$$

-laika momentos τ_j process $x(t)$ veic lēcienus, uzdotus ar nosacījumu (1.6).

Teorēma 1.0.1. *Pie augstāk minētājiem nosacījumiem pāris $(x(t), y(t))$ veido Markova procesu fāzu telpā $\mathbf{R^n}\times\mathbf{Y}$ ar infinitezimālo operatoru $\mathcal{L}$, kas uzdots ar sakarību:*

$$(\mathcal{L}v)(x,y) = \varepsilon(f(x,y,\varepsilon), \nabla_x)v(x,y) + Q_x v(x,y) + \varepsilon G v(x,y) \quad (1.8)$$

kur

$$(Gv)(x,y) = \frac{a(x,y)}{\varepsilon}\sum_{z\in\mathbf{Y}}[v(x+\varepsilon g(x,y,\varepsilon),z) - v(x,z)]p_x(y,z) \quad (1.9)$$

$(\cdot,\cdot)$ - skalārais reizinājums un ∇ - gradients telpā $\mathbf{R}^n$.

Pierādījums. Kā tika pierādīts iepriekš, sākuma nosacījumi x un y nosaka talāko procesa $(x(t), y(t))$ uzvedību. Lietojot iepriekšējo aprakstu, varam aprēķināt (formāli) infinitezimālos raksturojumus pārim (x, y). Pēc definīcijas varam uzrakstīt:

$$(Lv)(x,y) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ \mathbf{E}_{x,y}\{v(x(t),y(t)) - v(x,y)\} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ \mathbf{E}_{x,y}\{v(x(t),y(t)) - v(x,y(t))\} + \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\ \mathbf{E}_{x,y}\{v(x,y(t)) -$$

$$-v(x,y)\} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{\sum_{z\in\mathbf{Y}} v(x+\varepsilon g(x,y,\varepsilon),z)\left(1-e^{-a(x,y)t}\right)p_x(y,z) + \right.$$

$$+v(x+\varepsilon f(x,y)t, y)\left(e^{-a(x,y)t}\right) -$$

$$\left. - \left(\sum_{z\in\mathbf{Y}} v(x,z)\left(1-e^{-a(x,y)t}\right)p_x(y,z) + v(x,y)\left(e^{-a(x,y)t}\right)\right)\right\} +$$

$$+(Q_x v)(x,y) = a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}}[v(x+\varepsilon g(x,y,\varepsilon),z) - v(x,z)]p_x(y,z) +$$

$$+\varepsilon(f(x,y,\varepsilon),\nabla_x)v(x,y) + (Q_x v)(x,y),$$

tatād

$$(Lv)(x,y) = \varepsilon(f(x,y,\varepsilon),\nabla_x)v(x,y) + \varepsilon(Gv)(x,y) + (Q_x v)(x,y), \quad (1.10)$$

kur operators G ir no (1.9).

Lai iegūtu diferenciālvienādojumu procesam $y(t)$, lietosim konstrukciju, līdzīgu izveidotajai rakstā [27]. Nodefinēsim telpā $\mathbf{R}\times\mathbf{Y}\times\mathbf{Y}$ funkciju

$$r(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 0, & \text{ja } y_1 \neq y_2 \\ y_3 - y_2, & \text{ja } y_1 = y_2 \end{cases}$$

un mēru

$$\pi_x(y_2, y_3) = a(x, y_2) p_x(y_2, y_3)$$

telpā $\mathbf{Y} \times \mathbf{Y}$.

Kādā varbūtību telpā $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ar filtrāciju $\{\mathcal{F}^t, t \geq 0\}$ var definēt [18] $\mathcal{F}^t$–mērojamo Puasona mēru $\nu_x(y_1, y_2, dt)$ ar parametru $\pi_x(y_2, y_3)dt$ (kas nozīmē $\mathbf{E}\nu_x(y_1, y_2, dt) = \pi_x(y_1, y_2)dt$). Ir viegli pārbaudīt, ka skalārais stohastiskais vienādojums

$$dy(t) = \sum_{y_2 \in \mathbf{Y}} \sum_{y_3 \in \mathbf{Y}} r(y(t), y_2, y_3) \nu_x(y_2, y_3, dt) \tag{1.11}$$

definē [18] no labās puses nepārtrauktu, homogēnu Markova procesu telpā $\mathbf{Y}$ ar infinitezimālo ģeneratoru

$$\sum_{y_2 \in \mathbf{Y}} \sum_{y_3 \in \mathbf{Y}} [v(y + r(y, y_2, y_3)) - v(y)] \pi_x(y_2, y_3) =$$

$$= a(x, y) \sum_{y_3 \in \mathbf{Y}} [v(y_3) - v(y)] p_x(y, y_3) = (Q_x v)(y).$$

Tā kā eksistē [12] viens vienīgs Markova process telpā $\mathbf{Y}$, kuru uzdod infinitezimālais operators (1.1), mēs varam lietot vienādojumu (1.11) Markova procesa $y(t)$ aprakstam.

Lietojot iepriekš nodefinēto Puasona mēru $\nu_x(y_2, y_3, dt)$, var pārrakstīt vienādojumus (1.7) un (1.6) kā Puasona tipa stohastisko diferenciālvienādojumu:

$$dx(t) = \varepsilon f(x(t), y(t), \varepsilon) dt +$$

$$+ \sum_{y_2 \in \mathbf{Y}} \sum_{y_3 \in \mathbf{Y}} \varepsilon \tilde{g}(x(t), y(t), y_2, y_3, \varepsilon) \nu_x(y_2, y_3, dt), \tag{1.12}$$

kur

$$\tilde{g}(x, y, y_2, y_3, \varepsilon) = \begin{cases} 0, & ja\ y \neq y_2 \\ g(x, y, \varepsilon), & ja\ y = y_2 \end{cases}$$

un $y(t)$ ir vienādojuma (1.11) atrisinājums ar sākuma nosacījumu $y(0) = y$. Tagad pāri $\{x(t), y(t)\}$ varam apskatīt kā stohastisko diferenciālvienādojumu sistēmas (1.11)-(1.12) atrisinājumu. Tad, saskaņā ar [18], šīs sistēmas atrisinājums ir Markova process $\{x(t), y(t)\}$ ar infinitezimālo operatoru

$$(\ell v)(x, y) = \varepsilon (f(x, y, \varepsilon), \nabla_x) v(x, y) +$$

$$+\sum_{y_2\in\mathbf{Y}}\sum_{y_3\in\mathbf{Y}}[v(x+\varepsilon\tilde{g}(x,y,y_2,y_3,\varepsilon),y+r(y,y_2,y_3))-v(x,y)]\pi_x(y_2,y_3). \tag{1.13}$$

Formulas (1.13) otro saskaitāmo var pārrakstīt formā:

$$\sum_{y_2\in\mathbf{Y}}\sum_{y_3\in\mathbf{Y}}[v(x+\varepsilon\tilde{g}(x,y,y_2,y_3,\varepsilon),y+r(y,y_2,y_3))-v(x,y)]\pi_x(y_2,y_3)=$$

$$=\sum_{y_2\in\mathbf{Y}}\sum_{y_3\in\mathbf{Y}}[v(x+\varepsilon\tilde{g}(x,y,y_2,y_3,\varepsilon),y+r(y,y_2,y_3))-$$

$$-v(x,y+r(y,y_2,y_3)]\pi_x(y_2,y_3)+$$

$$+\sum_{y_2\in\mathbf{Y}}\sum_{y_3\in\mathbf{Y}}[v(x,y+r(y,y_2,y_3)-v(x,y)]\pi_x(y_2,y_3)=$$

$$=a(x,y)\sum_{y_3\in\mathbf{Y}}[v(x+\varepsilon g(x,y,\varepsilon),y_3)-v(x,y_3)]p_x(y,y_3)+Q_x v(x,y).$$

Rezultātā iegūstam:

$$(\ell v)(x,y)=\varepsilon(f(x,y,\varepsilon),\nabla_x)v(x,y)+$$

$$+a(x,y)\sum_{y_3\in\mathbf{Y}}[v(x+\varepsilon g(x,y,\varepsilon),y_3)-v(x,y_3)]p_x(y,y_3)+Q_x v(x,y).$$

Šis operators pilnīgi sakrīt ar (1.10).

Tā kā vājais infinitezimālais operators pilnīgi definē Markova procesu, mēs varam secināt, ka vienādojumu sistēma (1.1) -(1.4)-(1.6) arī definē Markova procesu $\{x(t),y(t)\}$ ar infinitezimālo operatoru (1.10). Pierādījums pabeigts. □

Nākošajās nodaļās lietosim potenciāloperatoru Π_x, tāpēc ieviesīsim šo jēdzienu un dosim dažus novērtējumus.

Tā kā process $y(t)$ ir vienmērīgi ergodisks, tad vienādojumam

$$(Q_x r)(x,y)=-F(x,y) \tag{1.14}$$

pēc Fredholma Alternatīvas atrisinājums eksistē tad un tikai tad, ja ir spēkā vienādība:

$$\sum_{y\in\mathbf{Y}}F(x,y)\mu_x(dy)=0. \tag{1.15}$$

Vienādojuma (1.14) atrisinājums uzdots ar potenciāloperatora $\Pi_x\subset\mathbf{L}(\mathbf{C}(\ \mathbf{Y}))$ palīdzību:

$$r(x,y)=(\ \Pi_x F)(x,y)=\int_0^\infty\sum_{z\in\mathbf{Y}}F(x,z)P_x(t,y,z)dt=\int_0^\infty\mathbf{E}_y F(x,y(t))dt. \tag{1.16}$$

Ja ir spēkā eksponenciālās ergoditātes nosacījums, tad šis integrālis eksistē. Bet oprerators Π_x , kuru uzdod (1.16), tika definēts tikai tādām funkcijām, kurām izpildās (1.15). Apskatīsim potenciāla paplašinājumu uz visu telpu $\mathbf{C}(\mathbf{Y})$

$$(\Pi_x v)(y) = \int_0^\infty \sum_{z \in \mathbf{Y}} (P_x(t, y, z) - \mu_x(z)) v(z) dt \tag{1.17}$$

jebkurai funkcijai $v \in C(\mathbf{Y})$. Viegli pārliecināties, ka katram $v \in C(\mathbf{Y})$ izpildās

$$Q_x \Pi_x v = -v(y) + \overline{v}, \tag{1.18}$$

kur

$$\overline{v} = \sum_{y \in \mathbf{Y}} v(y) \mu_x(dy). \tag{1.19}$$

Kad tiek lietoti operatori Q_x, Π_x un vidējošana (1.19) divargumentu funkcijām, tad pieņemam, ka x ir fiksēts.

Saskaņā ar $y(t)$ vienmērīgo ergoditāti, operators Π_x ir lineārs, nepārtraukts operators, tātad Π_x ir vienmērīgi ierobežots, t.i. eksistē tāda positīva konstante h, ka

$$\sup_{y \in \mathbf{Y}} |(\Pi_x F)(x, y)| \leq h \sup_{y \in \mathbf{Y}} |F(x, y)| \text{ visiem } x \in \mathbf{R}^n \text{ un } \sup_{x \in \mathbf{R}^n} \|\Pi_x\| \leq h \tag{1.20}$$

Viegli pārliecināties, ka pie minētajiem nosacījumiem uz $p_x(x, y)$ visiem $F(x, y)$, kas apmierina (1.15), ir spēkā novērtējumi:

$$\sup_{y \in \mathbf{Y}} \|(D\Pi_x F)(x, y)\| \leq h \left\{ \sup_{y \in \mathbf{Y}} \|DF(x, y) + \nabla_x Q_x [\Pi_x F(x, y)]\| \right\} \leq$$

$$\leq h \sup_{x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}} \|DF(x, y)\| + h^2 \widehat{C}_1 \sup_{x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}} \|F(x, y)\| \tag{1.21}$$

un

$$\sup_{y \in \mathbf{Y}} \left\| D^2(\Pi_x F)(x, y) \right\| \leq$$

$$\leq h \sup_{y \in \mathbf{Y}} \left\| D^2 F(x, y) + D\nabla_x Q_x [\Pi_x F(x, y)] + 2Q_x [D(\Pi_x F)(x, y)] \right\| \leq$$

$$\leq \left\{ h \sup_{x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}} \left\| D^2 F(x, y) \right\| + 2\widehat{C}_1 h^2 \sup_{x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}} \|DF(x, y)\| + \right.$$

$$\left. + h^2 (\widehat{C}_2 + 2\widehat{C}_1^2) \sup_{x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}} \|F(x, y)\| \right\} \tag{1.22}$$

pozitīvām konstantēm $\widehat{C}_1, \widehat{C}_2$.

Lietosim apzīmējumus:
$y_\varepsilon(t)$ - stohastiska vienādojuma

$$dy_\varepsilon(t) = \sum_{y_2 \in \mathbf{Y}} \sum_{y_3 \in \mathbf{Y}} r(y_\varepsilon(t), y_2, y_3) \nu_{x\varepsilon^2}(y_2, y_3, dt) \tag{1.23}$$

atrisinājums,
$x_\varepsilon(t) = \widetilde{x}(\frac{t}{\varepsilon^2})$,
$\tau_j^{\varepsilon^2}$ - procesa $y^\varepsilon(t)$ lēciena momenti
$F_j(x, y) = f_j(x, y, \varepsilon) + a(x, y) g_j(x, y, \varepsilon)$,
$b_j(x) = \sum_{y \in \mathbf{Y}} F_j(x, y) \mu_x(y), \quad j = 1, 2$
$(D\nabla v)(x)$ - otro atvasinājumu pēc x matrica,
$\mathbf{E}_{x,y}\{v(x(t), y(t)\} = \mathbf{E}\{v(x(t), y(t) \mid x(0) = x,\ y(0) = y\}$.
Citus nepieciešamos apzīmējumus un definīcijas ieviesīsim darba gaitā.

2. Diferenciālvienādojumu ar Markova impulsu atgriezenisko saiti vidējošana un stabilitāte

2.1. Vidējošanas principa pamatojums

Veiksim laika maiņu $s = \varepsilon t$. Ieviesīsim apzīmējumus $y^\varepsilon(s) = y(\frac{s}{\varepsilon})$, $x^\varepsilon(s) = \widetilde{x}(\frac{s}{\varepsilon})$. Apzīmēsim ar $\widetilde{x}(t)$ vienādojumu sistēmas (1.7)-(1.5)-(1.6) atrisinājumu ar funkcijām $f(x, y, 0)$ un $g(x, y, 0)$ funkciju $f(x, y, \varepsilon)$ un $g(x, y, \varepsilon)$ vietā.

Lemma 2.1.1. *Visiem $T > 0, \delta > 0$, $y \in \mathbf{Y}$ un $x \in \mathbf{R}^n$*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E} \sup_{0\le t\le T} \left| x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - x^\varepsilon(t)\right|^2 = 0.$$

Pierādījums. Aprēķināsim procesa $y^\varepsilon(t)$ vājo infinitezimālo operatoru:

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, \mathbf{E}_{x,y}\left\{v(x, y(t)) - v(x, y)\right\} = \lim_{t\to 0}\, \mathbf{E}_{x,y}\left\{\frac{v(x, y(\frac{t}{\varepsilon})) - v(x, y)}{t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(Q_x v)(x, y) = \frac{a(x, y)}{\varepsilon}\sum_{z\in\mathbf{Y}}[v(z)p_x(y, z) - v(y)].$$

No šīs formulas un (1.11) varam secināt, ka Markova procesu $y^\varepsilon(t)$ var apskatīt kā stohastiskā diferencialvienādojuma

$$dy^\varepsilon(t) = \sum_{y_2\in\mathbf{Y}}\ \sum_{y_3\in\mathbf{Y}} r(y(t), y_2, y_3)\nu^\varepsilon_x(y_2, y_3, dt)$$

atrisinājumu, kur $\mathbf{E}\nu^\varepsilon_x(y_1, y_2, dt) = \frac{1}{\varepsilon}\pi_x(y_1, y_2)dt$. Lietojot mēru ν^ε_x procesa $x^\varepsilon(t)$ aprakstam, iegūsim stohastisko vienādojumu:

$$dx\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = f(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), y^\varepsilon(t), \varepsilon)dt +$$

$$+ \sum_{y_2\in\mathbf{Y}}\ \sum_{y_3\in\mathbf{Y}} \widetilde{g}(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), y^\varepsilon(t), y_2, y_3, \varepsilon)\nu^\varepsilon_x(y_2, y_3, dt)).$$

Šo vienādojumu var pārrakstīt formā

$$dx\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) = f_1(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right), y^\varepsilon(t))dt +$$

$$+\sum_{y_2\in\mathbf{Y}}\sum_{y_3\in\mathbf{Y}}\widetilde{g}_1(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),y^{\varepsilon}(t),y_2,y_3,)\nu_x^{\varepsilon}(y_2,y_3,dt))+$$

$$+\varepsilon\Big[(f_2(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),y^{\varepsilon}(t)),\varepsilon)dt+$$

$$+\sum_{y_2\in\mathbf{Y}}\sum_{y_3\in\mathbf{Y}}\widetilde{g}_2(x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),y^{\varepsilon}(t),y_2,y_3,\varepsilon)\nu_x^{\varepsilon}(y_2,y_3,dt))\Big],$$

kur

$$\widetilde{g}_1(x,y,y_2,y_3)=\begin{cases}0, & ja\ y\neq y_2\\ g_1(x,y), & ja\ y=y_2\end{cases},$$

$$\widetilde{g}_2(x,y,y_2,y_3,\varepsilon)=\begin{cases}0, & ja\ y\neq y_2\\ g_2(x,y,\varepsilon), & ja\ y=y_2\end{cases}.$$

Vienādojuma labā puse apmierina Lipšica nosacījumu un lineārā pieauguma nosacījumu vienmērīgi pēc $y\in\mathbf{Y}$ un $\varepsilon\in[0,1]$, un pierādījums seko no [18] II daļas §2.9 1.teorēmas. □

Tagad par pamatu ņemot Lemmu 2.1.1, pētot procesu x^{ε}, varam lietot funkcijas $f(x,y,0)$ un $g(x,y,0)$ funkciju $f(x,y,\varepsilon)$ un $g(x,y,\varepsilon)$ vietā. Pēc lēnā laika substitūcijas vienādojumu sistēma procesam $\widetilde{x}(\frac{t}{\varepsilon})=x^{\varepsilon}$ izskatīsies šādi:

$$\frac{dx^{\varepsilon}}{dt}=f_1(x^{\varepsilon}(t),y^{\varepsilon}(t)),\tag{2.1}$$

ja $t\in(\tau_{j-1}^{\varepsilon},\tau_j^{\varepsilon})$,

$$x^{\varepsilon}(\tau_j^{\varepsilon})=x^{\varepsilon}(\tau_j-0)+\varepsilon g_1(x^{\varepsilon}(\tau_j-0),y^{\varepsilon}(\tau_j-0))\tag{2.2}$$

visiem $j\in\mathbf{N}$, ar sākuma nosacījumu

$$x^{\varepsilon}(0)=x.\tag{2.3}$$

Pārim $\{x^{\varepsilon}(t),y^{\varepsilon}(t)\}$ varam aprēķināt vājo infinitezimālo operatoru:

$$\mathcal{L}(\varepsilon)v(x,y)=\lim_{t\to 0}\mathbf{E}_{x,y}\frac{v(x^{\varepsilon}(t),y^{\varepsilon}(t))-v(x,y)}{t}=$$

$$=(f_1(x,y),\nabla_x)v(x,y)+\frac{1}{\varepsilon}Q_xv(x,y)+(G(\varepsilon)v)(x,y),$$

kur

$$(G(\varepsilon)v)(x,y)=\frac{a(x,y)}{\varepsilon}\sum_{z\in\mathbf{Y}}[v(x+\varepsilon g_1(x,y,\varepsilon),z)-v(x,z)]p_x(y,z).$$

Kopā ar sistēmu (2.1)-(2.2) apskatīsim pēc invariantā mēra vidējoto sistēmu:

$$\frac{du}{dt} = b_1(u), \tag{2.4}$$

$$u(0) = x, \tag{2.5}$$

kur

$$b_1(x) = \sum_{y \in \mathbf{Y}} [f_1(x, y, \varepsilon) + a(x, y) g_1(x, y, \varepsilon)] \mu_x(y).$$

Vienādojuma (2.4) atrisinājumu ar sākuma nosacījumu (2.5) apzīmēsim ar $u(t, x)$.

Pierādīsim, ka attēlojumam $b_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ ir divi nepārtraukti, ierobežoti atvasinājumi. Atvasinājums

$$Db_1(x) = \sum_{z \in Y} DF_1(x, z) \mu_x(z) + \sum_{z \in Y} F_1(x, z) \nabla_x \mu_x(z) \tag{2.6}$$

eksistē , ja eksistē $\nabla_x \mu_x(z)$. Lai to pārbaudītu, apskatīsim vienādojumu

$$(Q_x^* \mu_x)(y) \equiv 0,$$

kurš nosaka mēru $\mu_x(y)$. Atvasinot šo vienādojumu, iegūstam

$$Q_x^* \nabla_x \mu_x = -\nabla_x Q_x^* \mu_x. \tag{2.7}$$

Lai šim vienādojumam eksistētu atrisinājums $\nabla_x \mu_x$, pēc Fredholma Alternatīvas vienādojuma labajai pusei ir jābūt ortogonālai vienādojuma

$$(Q_x v)(y) = 0 \tag{2.8}$$

atrisinājumam. Tā kā vienādojuma (2.8) atrisinājums ir patvaļīga konstante, pārbaudīsim nosacījuma

$$\sum_{y \in Y} \nabla_x Q_x^* \mu_x(y) = 0 \tag{2.9}$$

izpildīšanos. Ir viegli pierādīt, ka operators $Q_x^* \mu$ ir formā:

$$Q^* \mu(y) = \sum_{z \in Y} a(x, z) p_x(z, y) \mu(z) - a(x, y) \mu(y).$$

Tad nosacījumu (2.9) var pārakstīt šāda veidā:

$$\sum_{y \in Y} \Big\{ \sum_{z \in Y} [\nabla_x a(x, z)] p_x(z, y) \mu_x(z) + \sum_{z \in Y} a(x, z) [\nabla_x p_x(z, y)] \mu_x(z) -$$

$$-[\nabla_x a(x,z)]\mu_x(y)\Big\} = 0.$$

Tā kā

$$\sum_{y\in\mathbf{Y}}\sum_{z\in\mathbf{Y}}[\nabla_x a(x,z)]p_x(z,y)\mu_x(z) = \sum_{y\in\mathbf{Y}}[\nabla_x a(x,z)]\mu_x(y)$$

un

$$\sum_{z\in\mathbf{Y}}\nabla_x p_x(z,y) = 0,$$

nosacījums (2.9) izpildās. Tad $\nabla_x\mu_x$ uzdod veidā:

$$\nabla_x\mu_x = \int_0^\infty \exp\left(Q_x^* t\right)\nabla_x Q_x^*\mu_x\, dt.$$

Lietojot šo formulu, varam iegūt $\nabla_x\mu_x$ novērtējumu:

$$\|\nabla_x\mu_x\| \leq C\left\|\nabla_x Q_x^*\mu_x\right\|.$$

Tā kā pie mūsu nosacījumiem attiecībā uz $a(x,y)$ un $\nabla_x p_x(y,z)$

$$|\nabla_x a(x,z)| \leq c_1 \qquad \sup_{y\in\mathbf{Y}}\sum_{z\in\mathbf{Y}}|\nabla_x p_x(z,y)| \leq C_1 \tag{2.10}$$

kādām pozitīvām konstantēm c_1 un C_1, tad

$$\|\nabla_x Q^*\mu_x\| = \Big\|\sum_{z\in Y}\nabla_x a(x,z)p_x(z,y)\mu_x(z) +$$

$$+\sum_{z\in Y}a(x,z)\nabla_x p_x(z,y)\mu_x(z) - -\nabla_x a(x,z)\mu_x(y)\Big\| \leq$$

$$\leq c_1\|\mu_x(z)\| + c_1\|\mu_x(y)\| + a_2\|\mu_x(z)\|\sup_{y\in\mathbf{Y}}\sum_{z\in Y}\|\nabla_x p_x(z,y)\| \leq$$

$$\leq \widetilde{C}_1\|\mu_x(y)\|$$

Visbeidzot ieguvām novērtējumu:

$$\|\nabla_x\mu_x\| \leq C_1\widetilde{C}_1\|\mu_x(y)\|,$$

no kura seko

$$\|Db_1(x)\| \leq \sup_{y\in\mathbf{Y},\ \mathbf{x}\in\mathbf{X}}\|DF_1(x,z)\| + \widehat{C}\sup_{y\in\mathbf{Y},\ \mathbf{x}\in\mathbf{X}}\|F_1(x,z)\|$$

kādai pozitīvai $\widehat{C}$.

Lai novērtētu normu $\|D^2 b_1(x)\|$

$$D^2 b_1(x) = \sum_{z\in Y} D^2 F_1(x,z)\mu_x(z) + 2\sum_{z\in Y} DF_1(x,z)\nabla_x\mu_x(z) +$$

$$+\sum_{z\in Y} F_1(x,z)D\nabla_x\mu_x(z),$$

no (2.7) varam iegūt vienādojumu funkcijai $D\nabla_x\mu_x$:

$$Q_x^* D\nabla_x\mu_x = -D\nabla_x Q_x^*\mu_x - 2DQ_x^*\nabla_x\mu_x.$$

Kā viegli pārbaudīt, nosacījums

$$\sum_{y\in Y}\Big\{\sum_{z\in Y} D\nabla_x a(x,z)p_x(z,y)\mu_x(z) + 2\sum_{z\in Y}\nabla_x a(x,z)\nabla_x p_x(z,y)\mu_x(z) -$$

$$-D\nabla_x a(x,z)\mu_x(y)\Big\} + +2\sum_{y\in Y}\Big\{\sum_{z\in Y}\nabla_x a(x,z)p_x(z,y)\nabla_x\mu_x(z) +$$

$$+\sum_{z\in Y} a(x,z)\nabla_x p_x(z,y)\nabla_x\mu_x(z) - \nabla_x a(x,z)\nabla_x\mu_x(y)\Big\} = 0$$

izpildās, kas garantē mums funkcijas $D\nabla_x\mu_x$ eksistenci un veidu:

$$D\nabla_x\mu_x = \int_0^\infty \exp\left(Q_x^* t\right)\left(D\nabla_x Q_x^*\mu_x + 2DQ_x^*\nabla_x\mu_x\right)dt,$$

no kura seko

$$\|D\nabla_x\mu_x\| \le C\left(\left\|D^2 Q_x^*\mu_x\right\| + 2\left\|DQ_x^*\nabla_x\mu_x\right\|\right).$$

Tad atliek tikai aprēķināt normu

$$\|D\nabla_x Q_x^*\mu_x\| = \Big\|\sum_{z\in Y} D\nabla_x a(x,z)p_x(z,y)\mu_x(z) +$$

$$+2\sum_{z\in Y}\nabla_x a(x,z)\nabla_x p_x(z,y)\mu_x(z) + \sum_{z\in Y} a(x,z)D\nabla_x p_x(z,y)\mu_x(z) -$$

$$D\nabla_x a(x,z)\mu_x(y)\Big\|,$$

un no (2.10) un novērtējumiem

$$\|D\nabla_x a(x,z)\| \le c_2 \qquad \sup_{y\in\mathbf{Y}} \sum_{z\in\mathbf{Y}} \|D\nabla_x p_x(z,y)\| \le C_2$$

seko

$$\|D\nabla_x Q^*\mu\| \le c_2 \|\mu_x(z)\| + c_1 \|\mu_x(z)\| \sup_{y\in\mathbf{Y}} \left\| \sum_{z\in Y} D\nabla_x p_x(z,y) \right\| +$$

$$+a_2 \|\mu_x(z)\| \sup_{y\in\mathbf{Y}} \left\| \sum_{z\in Y} D\nabla_x p_x(z,y) \right\| +$$

$$+c_2 \|\mu_x(y)\| \le \widetilde{C}_2 \|\mu_x(y)\|$$

$$\|D\nabla_x \mu_x\| \le C\widetilde{C}_2 \|\mu_x(y)\| + 2C\widetilde{C}_2 \|\nabla_x \mu_x\| \le \tilde{K} \|\mu_x(y)\|$$

kādai pozitīvai $\tilde{K}$, kas dos mums novērtējumu

$$\left\|D^2 b_1(x)\right\| \le \sup_{y\in\mathbf{Y},\ \mathbf{x}\in\mathbf{X}} \left\|D^2 F_1(x,z)\right\| + \widehat{C} \sup_{y\in\mathbf{Y},\ \mathbf{x}\in\mathbf{X}} \|DF_1(x,z)\| +$$

$$+\tilde{K} \sup_{y\in\mathbf{Y},\ \mathbf{x}\in\mathbf{X}} \|F_1(x,z)\| .$$

Tātad pie mūsu nosacījumiem uz $f_1(x,y)$ un $g_1(x,y)$ funkcijai $b_1(x)$ eksistē 2 nepārtraukti, ierobežoti atvasinājumi.

Mūsu tālakajam aprēķinam būs vajadzīgi sekojoši novērtējumi: no tā, ka funkcijas $f_1(x,y)$ un $g_1(x,y)$ ir nepārtrauktas un ierobežotas, seko novērtējumi:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n, y\in\mathbf{Y}} |F_1(x,y)| \le k, \qquad \sup_{x\in\mathbf{R}^n, y\in\mathbf{Y}} \|DF_1(x,y)\| \le k_1$$

pietiekoši lieliem k, k_1. Tad no 1.daļas (1.20) formulas izriet

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\ y\in\mathbf{Y}} |(\Pi_x F_1)(x,y)| \le h \sup_{x\in\mathbf{R}^n,\ y\in\mathbf{Y}} |F_1(x,y)| \le hk \tag{2.11}$$

un no (1.21) seko novērtējums:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\ y\in\mathbf{Y}} \|(D\Pi_x F_1)(x,y)\| \le h \sup_{x\in\mathbf{R}^n, y\in\mathbf{Y}} \|DF_1(x,y)\| +$$

$$+h^2\widehat{C}_1 \sup_{x\in\mathbf{R}^n, y\in\mathbf{Y}} |F_1(x,y)| \le hk_1 + h^2\widehat{C}_1 k . \tag{2.12}$$

Lemma 2.1.2. *Eksistē tāda konstante $c_3 > 0$, ka visiem $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{Y}$ un $\varepsilon \in (0,1)$ izpildās nevienādības*

$$|(x-u,(\Pi_x F_1)(x,y))| \le c_3\left(1+|x|^2+|u|^2\right)$$

$$(|f_1(x,y,\varepsilon)|+a(x,y)\,|g_1(x,y,\varepsilon)|)\,|(\Pi_x F_1)(x,y)| \le c_3\left(1+|x|^2\right)$$

$$|(b_1(u),(\Pi_x F_1)(x,y)| \le c_3\left(1+|x|^2+|u|^2\right)$$

$$|(x-u,(D\Pi_x F_1)(x,y)f_1(x,y)| \le c_3\left(1+|x|^2+|u|^2\right)$$

$$\frac{a(x,y)}{\varepsilon}\,|(x+\varepsilon g_1(x,y)-u,(\Pi_x F_1)(x+\varepsilon g_1(x,y),y)-(\Pi_x F_1)(x,y)| \le$$
$$\le c_3\left(1+|x|^2+|u|^2\right)$$

Pierādījums. Visas šīs nevienādības seko no skalārā reizinājuma īpašībām, funkciju $f_1(x,y)$ un $g_1(x,y)$ vienmērīgās ierobežotības un (2.11):

$$|(x-u,(\Pi_x F_1)(x,y))| \le |x-u|\,|(\Pi_x F_1)(x,y)| \le hk\,(|x|+|u|) \le$$
$$\le c_3\left(1+|x|^2+|u|^2\right),$$

$$(|f_1(x,y,\varepsilon)|+a(x,y)\,|g_1(x,y,\varepsilon)|)\,|(\Pi_x F_1)(x,y)| \le hk^2 \le c_3\left(1+|x|^2\right)$$

$$|(b_1(u),(\Pi_x F_1)(x,y)| \le hk^2 \le c_3\left(1+|x|^2+|u|^2\right),$$

$$\frac{a(x,y)}{\varepsilon}\,|(x+\varepsilon g_1(x,y)-u,(\Pi_x F_1)(x+\varepsilon g_1(x,y),y)-(\Pi_x F_1)(x,y)| \le$$
$$\le \frac{a_2}{\varepsilon}\,|x+\varepsilon k-u|\left|\Pi_x\left(\varepsilon\int_0^1 DF_1\left(x+sg_1(x,y),y\right)g_1(x,y)ds\right)\right| \le$$
$$\le a_2hkk_1\,|x+k-u| \le c_3\left(1+|x|^2+|u|^2\right)$$

un no (2.12) seko:

$$|(x-u,(D\Pi_x F_1)(x,y)f_1(x,y)| \le |x-u|\left(hk_1+h^2\widehat{C}_1 k\right) \le$$
$$\le c_3\left(1+|x|^2+|u|^2\right)$$

Teorēma 2.1.1. (Vidējošanas princips). *Pie iepriekšminētajiem nosacījumiem visiem* $r > 0$ *un* $T > 0$ *process* $x^{\varepsilon}(t)$ *konverģē, ja* $\varepsilon \to 0$, *uz vidējotā vienādojuma (2.4) atrisinājumu* $u(t,x)$ *vienmērīgi visiem* $t \in [0,T]$ *kopā* $U_r = \{|x| < r\}$, *t.i., visiem* $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{y\in \mathbf{Y},\ x\in \mathbf{U_r}} \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{0\le t\le T}|x^{\varepsilon}(t)-u(t,x)|>\delta\right)=0.$$

Pierādījums. Apzīmēsim:

$$v_1(x,y,u) = 2\left(x-u,(\Pi_x F_1)(x,y)\right) + (2c_1+1)\left(1+|x|^2+|u|^2\right).$$

No Lemmas 2.1.2 seko nevienādības:

$$\left(1+|x|^2+|u|^2\right) \le v_1(x,y,u) \le (4c_1+1)\left(1+|x|^2+|u|^2\right), \quad (2.13)$$

$$\begin{gathered}
|((\nabla_x v_1)(x,y,u), f_1(x,y))| = \\
= |([2\Pi_x F_1(x,y) + 2(x-u)D\Pi_x F_1(x,y) + \\
+(4C_1+4)x], f_1(x,y))| \le k_1\left(1+|x|^2+|u|^2\right),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
|((\nabla_u v_1)(x,y,u), b_1(u))| = 2\,|(\Pi_x F_1(x,y), b_1(u))| + \\
+(4C_1+4)(|u|, b_1(u)) \le k_1\left(1+|x|^2+|u|^2\right),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
|(G(\varepsilon)v_1)(x,y,u)| = \\
= \left|\tfrac{a(x,y)}{\varepsilon}\sum_{z\in\mathbf{Y}}[v(x+\varepsilon g_1(x,y),z) - v(x,z)]p_x(y,z)\right| = \\
= \left|\tfrac{a(x,y)}{\varepsilon}\sum_{z\in\mathbf{Y}}\{2\left(x+\varepsilon g_1(x,y)-u, \Pi_x F_1(x+\varepsilon g_1(x,y),z)\right) + \right. \\
+ (2c_1+1)\left(1+|x+\varepsilon g_1(x,y)|^2+|u|^2\right) - \\
\left. -2\left(x-u,(\Pi_x F_1)(x,z)\right) - (2c_1+1)\left(1+|x|^2+|u|^2\right)\}p_x(y,z)\right| = \\
= \tfrac{a(x,y)}{\varepsilon}\sum_{z\in\mathbf{Y}}\{2\left(x+\varepsilon g_1(x,y)-u, \Pi_x F_1(x+\varepsilon g_1(x,y),z)\right. - \\
-(\Pi_x F_1)(x,z) + 2\varepsilon\left(g_1(x,y),(\Pi_x F_1)(x,z)\right)\}p_x(y,z)| + \\
+\tfrac{a(x,y)}{\varepsilon}(2c_1+1)\left(1+|x+\varepsilon g_1(x,y)|^2-|x|^2\right) \le \\
\le 2\sup_{z\in\mathbf{Y}}\tfrac{a(x,y)}{\varepsilon}\left(x+\varepsilon g_1(x,y)-u, \Pi_x F_1(x+\varepsilon g_1(x,y),z)\right. - \\
-(\Pi_x F_1)(x,z)) + 2a(x,y)\,|g_1(x,y)|\sup_{z\in\mathbf{Y}}|(\Pi_x F_1)(x,z)| \le \\
\le 2c_1\left(1+|x|^2+|u|^2\right) + \\
+ (2c_1+1)\sup_{z\in\mathbf{Y}} a(x,y)\left(2\,|x|\,|g_1(x,y)| + \varepsilon\,|g_1(x,y)|^2\right) \\
\le k_1\left(1+|x|^2+|u|^2\right)
\end{gathered}$$

kādai konstantei k_1. Tagad varam aprēķināt infinitezimālo operatoru Markova procesam $\{x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(t)\}$:

$$(\widehat{L}v)(x,y,u) = \lim_{t\to 0} \tfrac{1}{t}\left[\mathbf{E}_{x,y}(v(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(t)) - v(x,y,u)\right] =$$
$$= (b_1(x), \nabla_u)v(x,y,u) + (f_1(x,y), \nabla_x)v(x,y,u) + G(\varepsilon)v(x,y,u) +$$
$$+\tfrac{1}{\varepsilon}Q_x v(x,y,u)$$

Funkcijai $v(x,y,u) = |x-u|^2 + \varepsilon v_1(x,y,u)$ iegūstam

$$(\widehat{L}v)(x,y,u) =$$
$$= 2\,(x-u, F_1(x,y) - b_1(u)) + \varepsilon(b_1(x), \nabla_u)v_1(x,y,u) +$$
$$+\varepsilon(f_1(x,y), \nabla_x)v_1(x,y,u) + \varepsilon G(\varepsilon)v_1(x,y,u) + Q_x v_1(x,y,u) +$$
$$+a(x,y)\varepsilon\,|g_1(x,y)|^2 .$$

No operatoru Q_x un Π_x definīcijām seko vienādība

$$(Q_x v_1)(x,y,u) = -2\,(x-u, F_1(x,y)) + 2\,(x-u, b_1(x)),$$

ar kuras palīdzību varam uzrakstīt:

$$(\widehat{L}v)(x,y,u) \le 2\,(x-u, b_1(x) - b_1(u)) + 3\varepsilon k_2\left(1 + |x|^2 + |u|^2\right) \le$$
$$\le 2k\,|x-u|^2 + +c_2\varepsilon\left(1 + |x|^2 + |u|^2\right) \le (2k + c_2)\left(|x-u|^2 +\right.$$
$$\left.+\varepsilon\left(1 + |x|^2 + |u|^2\right)\right) \le (2k + c_2)\,v(x,y,u)$$

ar konstanti $c_2 = 3k_2$. Tagad varam pielietot Dinkina formulu ([12]):

$$\mathbf{E}_{x,y}v\left(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(t,u)\right) =$$
$$= v(x,y,u) + \int_0^t \mathbf{E}_{x,y}(\widehat{L}v)\left(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(s,u)\right) ds \le$$
$$\le v(x,y,u) + (2k + c_2)\int_0^t \mathbf{E}_{x,y}v\left(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(s,u)\right) ds.$$

no kuras izriet, ka $\varsigma(t) = e^{-(2k+c_2)t}v\left(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(t)\right)$ ir pozitīvs supermartingāls, un mēs varam lietot supermartingālu nevienādību:

$$\mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0\le t\le T}\varsigma(t) \ge \rho\right) \le \frac{1}{\rho}\mathbf{E}_{x,y}\varsigma(t_0)$$

visiem $T \geq t_0 \geq 0$ un $\rho > 0$. Ņemot vērā (2.13), varam uzrakstīt:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x^\varepsilon(t) - u(t,x)| \geq \delta\right) = \\
&= \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x^\varepsilon(t) - u(t,x)|^2 \geq \delta^2\right) \leq \\
&\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} v(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(t,x)) \geq \delta^2\right) \leq \\
&\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} e^{-(2k+c_2)t} v(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t), u(t,x)) \geq e^{-(2k+c_2)T}\delta^2\right) \leq \\
&\leq \frac{e^{-(2k+c_2)T}}{\delta^2}\mathbf{E}_{x,y}\varsigma(t_0) \leq \frac{e^{-(2k+c_2)T}}{\delta^2} v(x,y,x) \leq \frac{\varepsilon e^{-(2k+c_2)T}}{\delta^2}\left(1 + 2|x|^2\right)
\end{aligned}
$$

No tā uzreiz izriet

$$
\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{x \in U_r, y \in \mathbf{Y}} \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x^\varepsilon(t) - u(t,x)| > \delta\right) = 0
$$

Teorēma ir pierādīta. □

2.2. Stabilitātes pētījums, izmantojot vidējoto vienādojumu.

Tagad apskatīsim impulsu sistēmu (2.1)-(2.2) pie nosacījumiem:

$$
f_1(0,y) \equiv 0, \qquad g_1(0,y) \equiv 0. \tag{2.14}
$$

Ir viegli redzēt, ka pie šiem nosacījumiem izpildās identitāte $b_1(0) = 0$, kas nodrošina vienādojuma (2.4) triviālā atrisinājuma eksistenci. Lai gan funkcijas f_1 un g_1 ir ierobežotas, tām arī eksistē pēc visiem argumentiem nepārtraukti atvasinājumi, tāpēc varam lietot arī novērtējumus:

$$
|f_1(x,y)| \leq k_1 |x|, \qquad |g_1(x,y)| \leq k_1 |x|, \tag{2.15}
$$

kur konstante k_1 ir tāda, ka $|\nabla f_1(x,y)| \leq k_1$ un $|\nabla g_1(x,y)| \leq k_1$.

Definīcija 1. *Vienādojuma (2.4) triviālo atrisinājumu sauksim par* eksponenciāli stabilu, *ja eksistē tādas konstantes $M > 0$ un $\gamma > 0$, ka katram $x \in \mathbf{R}^n$ un $t \geq 0$ izpildās*

$$
|u(t,x)| \leq Me^{-\gamma t}|x|. \tag{2.16}
$$

Teorēma 2.2.1. *Ja izpildās iepriekšminētie nosacījumi un vidējotā vienādojuma (2.4) triviālais atrisinājums ir eksponenciāli stabils, tad (eksistē tāds $\varepsilon_0 > 0$, ka visiem $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$) sistēmas (2.1)-(2.2) atrisinājums $x^\varepsilon(t)$ ir asimptotiski lokāli stabils pēc varbūtības.*

Pierādījums. Lietosim Ļapunova funkcionāli

$$v_0(x) = \int_0^T |u(t,x)|^2 \, dt \tag{2.17}$$

kādam pozitīvam $T > 0$. No formulām (2.15)-(2.16) seko, ka konstanti T var izvēlēties tā, lai izpildītos

$$c_1 |x|^2 \le v_0(x) \le c_2 |x|^2 \tag{2.18}$$

kādai $c_1 > 0$ un visiem $x \in \mathbf{R}^n$. Tā kā funkcijas $b_1(x)$ pirmais un otrais atvasinājumi ir ierobežotas funkcijas, tad vienādojuma (2.4) atrisinājumam $u(t,y)$ arī ir divi atvasinājumi [35] un ir spēkā novērtējumi:

$$\left| \nabla |u(t,x)|^2 \right| \le q_1 e^{q_2 t} |x|$$

$$\left\| D\nabla |u(t,x)|^2 \right\| \le q_1 e^{q_2 t} \tag{2.19}$$

visiem $t \ge 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ un kādiem $q_1 > 0$, $q_2 > 0$. Tad funkcionālim $v_0(x)$ arī ir divi nepārtraukti atvasinājumi, kuriem izpildās novērtējumi:

$$|(\nabla v_0)(x)| \le q_3 |x|, \qquad \|D\nabla v_0(x)\| \le q_3 \tag{2.20}$$

kādam pozitīvam $q_3 > 0$. Bez tam vektorfunkcija $(\nabla v_0)(x)$ apmierina Lipšica nosacījumu

$$|(\nabla v_0)(x) - (\nabla v_0)(u)| \le q_4 |x - u| \tag{2.21}$$

visiem $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^n$ un kādai konstantei $q_4 > 0$. Lietojot reprezentāciju

$$v_0(u(t,x)) = \int_0^T |u(t,(u(\Delta,x))|^2 \, dt =$$

$$= \int_0^T |u(t+\Delta,x)|^2 \, dt = \int_\Delta^{T+\Delta} |u(s,x)|^2 \, ds$$

un (2.16), iegūstam :

$$(\nabla v_0(x), b_1(x)) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left[v_0(u(t,x)) - v_0(x) \right] =$$

$$=\lim_{\Delta\downarrow 0}\frac{1}{\Delta}\left\{\int\limits_{\Delta}^{T+\Delta}|u(s,x)|^2\,ds-\int\limits_{0}^{T}|u(s,x)|^2\,ds\right\}=|u(T,x)|^2-|x|^2\leq$$

$$\leq\left(Me^{-\gamma T}-1\right)|x|^2.$$

No šī novērtējuma un (2.18) ir redzams, ka mēs varam izvēlēties T tik lielu, lai nevienādība

$$(\nabla v_0(x),b_1(x))\leq-\frac{1}{2}x^2\leq-\frac{1}{2c_2}v_0(x) \tag{2.22}$$

būtu spēkā visiem $x\in\mathbf{R}^n$. Tālāk varam uzrakstīt $v_0\left(x+\varepsilon g_1(x,y)\right)-v_0(x)$ formā:

$$v_0\left(x+\varepsilon g_1(x,y)\right)-v_0(x)=\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\left(\nabla v_0\right)\left(x+sg_1(x,y)\right),g_1(x,y)\right)ds=$$

$$=\varepsilon\left((\nabla v_0)(x),g_1(x,y)\right)+\varepsilon^2\tilde{g}_1(x,y,\varepsilon), \tag{2.23}$$

kur $\tilde{g}_1(x,y,\varepsilon)$ ir funkcionālis:

$$\tilde{g}_1(x,y,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\left(\nabla v_0\right)\left(x+sg_1(x,y)\right)-(\nabla v_0)(x),g_1(x,y)\right)ds.$$

Tālākos mūsu spriedumos apskatīsim tikai apkārtnīti $|x|\leq 1$. Tā kā $|x|\leq 1$, izteiksmes novērtēsim ar mazākām x pakāpēm. Tātad, izpildoties formulai (2.21), varam rakstīt:

$$|\tilde{g}_1(x,y,\varepsilon)|\leq q_4\,|g_1(x,y)|^2\leq q_4k^2\,|x|^2. \tag{2.24}$$

Tagad apskatīsim funkcionāli $v(x,y)=v_0(x)+\varepsilon v_1(x,y)$, kur $v_0(x)$ tika nodefinēta ar formulu (2.17), un $v_1(x,y)$ definēsim kā

$$v_1(x,y)=\left(\nabla v_0(x),(\Pi_x F_1)(x,y)\right). \tag{2.25}$$

Pēc definīcijas varam aprēķināt funkcijai $v(x,y)$ infinitezimālo operatoru:

$$\mathcal{L}(\varepsilon)v(x,y)=\left(\nabla v_0(x),f_1(x,y)\right)+\varepsilon\left((\nabla v_1)(x,y),f_1(x,y)\right)+$$

$$+\left(Qv_1\right)(x,y)+\frac{a(x,y)}{\varepsilon}\left[v_0\left(x+\varepsilon g_1(x,y)\right)-v_0(x)\right]+$$

$$+a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}}[v_1(x+\varepsilon g_1(x,y),z)-v_1(x,z)]\,p(x,y,z)=$$

$$=(\nabla v_0(x),F_1(x,y))-(\nabla v_0(x),F_1(x,y))+(\nabla v_0(x),b_1(x,y))+$$

$$+a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}}[v_1(x+\varepsilon g_1(x,y),z)-v_1(x,z)]\,p(x,y,z)+$$

$$+\varepsilon\left\{\tilde{g}_1(x,y,\varepsilon)a(x,y)+((\nabla v_1)(x,y),f_1(x,y))\right\}$$

Novērtēsim šīs izteiksmes locekļus:

$$|v_1(x,y)|\le|\nabla v_0(x)|\sup_{\substack{y\in\mathbf{Y}\\|x|\le 1}}|(\Pi_x F_1)(x,y)|\le q_3hk\,|x|^2. \tag{2.26}$$

Lai iegūtu $\nabla v_1(x,y)$ novērtējumu, mums ir jāiegūst $D(\Pi_x F_1)(x,y)$ novērtējums:

$$\|D(\Pi_x F_1)(x,y)\|\le h\sup_{\substack{y\in\mathbf{Y}\\|x|\le 1}}\|DF_1(x,y)\|+h^2C_1\sup_{\substack{y\in\mathbf{Y}\\|x|\le 1}}|F_1(x,y)|\le$$

$$\le hk_2+hC_1k\,|x|\le hC_3$$

tad

$$\begin{aligned}|\nabla v_1(x,y)|&\le\|D\nabla v_0(x)\|\;\|(\Pi_x F_1)(x,y)\|+\\&+\|\nabla v_0(x)\|\;\|D(\Pi_x F_1)(x,y)\|\le\\&\le q_3hK\,|x|+q_3h_2\,|x|\,hC_3\le\overline{q}_3\,|x|\end{aligned} \tag{2.27}$$

kādam $\overline{q}_3>0$, un, lietojot (2.27), ir viegli iegūt novērtējumu:

$$a(x,y)\,|v_1(x+\varepsilon g_1(x,y),z)-v_1(x,z)|\le$$

$$\le a_2\varepsilon\,|g_1(x,y)|\,|\nabla v_1(x,z)|\le\varepsilon\overline{q}_3\,|x|^2 \tag{2.28}$$

visiem $\varepsilon\in(0,1)$, $y\in\mathbf{Y}$, $|x|<1$. Tagad varam novērtēt $\mathcal{L}(\varepsilon)v(x,y)$

$$\mathcal{L}(\varepsilon)v(x,y)\le-\frac{1}{2}|x|^2+\varepsilon\overline{q}_3\,|x|^2+\varepsilon\left(a_2q_4k^2\,|x|^2+\overline{q}_3k\,|x|^2\right)\le$$

$$\le-\frac{1}{2}|x|^2+\varepsilon c_3\,|x|^2 \tag{2.29}$$

kādai konstantei $c_3>0$ un visiem $\varepsilon\in(0,1)$, $y\in\mathbf{Y}$, $|x|<1$. No formulām (2.18) un (2.26) izriet novērtējums:

$$\bar{k}_1\,|x|^2\le v(x,y)\le\bar{k}_2\,|x|^2, \tag{2.30}$$

kur

$$\bar{k}_1 = c_1 - \varepsilon q_3 hk, \quad \bar{k}_2 = c_2 + \varepsilon q_3 hk.$$

Tad (2.29) var pārrakstīt formā:

$$\mathcal{L}(\varepsilon)v(x,y) \le -\frac{1}{2}(1-2\varepsilon c_3)\,|x|^2 \le -\frac{1}{2}\,\frac{1-2\varepsilon c_3}{\bar{k}_2}\,v(x,y) \tag{2.31}$$

visiem $y \in \mathbf{Y}$, $|x| < 1$ un $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ (pietiekoši mazam $\varepsilon_0 > 0$). Mēs varam izvēlēties ε_0 tik mazu, lai izpildītos nevienādība:

$$\frac{1-2\varepsilon c_3}{\bar{k}_2} \ge \frac{1}{2c_2}$$

visiem $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, un tad varam rakstīt:

$$\mathcal{L}(\varepsilon)v(x,y) \le -\frac{1}{4c_2}v(x,y). \tag{2.32}$$

Tagad mēs varam pielietot Dinkina formulu apstādinātiem laika momentiem:

$$\mathbf{E}_{x,y}v\left(x^{\varepsilon}(\tau_\rho(t)),y^{\varepsilon}(\tau_\rho(t))\right) = v(x,y)+\mathbf{E}_{x,y}\int_0^{\tau_\rho(t)}(\mathcal{L}(\varepsilon)v)(x^{\varepsilon}(s),y^{\varepsilon}(s))\,ds, \tag{2.33}$$

kur $\tau_\rho(t) = \min\{\tilde{\tau}_\rho, t\}$, $\tilde{\tau}_\rho = \inf\{t \ge 0 : |x_\varepsilon(t)| > \rho\}$ (pirmais laika moments, kad $x_\varepsilon(t)$ iziet no lodes $|x| < \rho$). Ievietojot operatora $\mathcal{L}(\varepsilon)v(x,y)$ novērtējumu no (2.32), iegūstam:

$$\mathbf{E}_{x,y}v\left(x^{\varepsilon}(\tau_\rho(t)),y^{\varepsilon}(\tau_\rho(t))\right) \le v(x,y) - \frac{1}{4c_2}\mathbf{E}_{x,y}\int_0^{\tau_\rho(t)}v(x^{\varepsilon}(s),y^{\varepsilon}(s))\,ds.$$

No šis nevienādības izriet, ka

$$\mathbf{E}_{x,y}v\left(x^{\varepsilon}(\tau_\rho(t)),y^{\varepsilon}(\tau_\rho(t))\right) \le v(x,y).$$

Tagad apskatīsim tā saucamo "apstādināto" procesu $\bar{x}$, kuru iegūstam, apstādinot procesu $x^{\varepsilon}(t)$ pirmajā laika momentā τ, pārejot ρ robežu:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x^{\varepsilon}(t), & t \le \tau_\rho \\ x^{\varepsilon}(\tau_\rho), & t > \tau_\rho, \quad |x^{\varepsilon}(\tau_\rho)| = \rho \end{cases}$$

Aprēķināsim varbūtību $\mathbf{P}\left(\sup\limits_{t\ge 0}|x^{\varepsilon}(t)| > \rho\right)$:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}|x^{\varepsilon}(t)|>\rho\right)\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}|\bar{x}(t)|=\rho\right)\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}|\bar{x}(t)|^2>\frac{\rho^2}{4}\right)\overset{(*)}{\leq}$$

(tā kā līdz izejai no lodes $U_\rho=\{|x|\leq\rho\}$ ir spēkā novērtējumi (2.30) un (2.32), tad process $v\left(\bar{x}(t),y^{\varepsilon}(t)\right)$ ir supermartingāls un mēs varam pielietot supermartingālu nevienādību)

$$\overset{(*)}{\leq}\mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}\frac{1}{\bar{k}_1}v\left(\bar{x}(t),y^{\varepsilon}(t)\right)>\frac{\rho^2}{4}\right)\leq\frac{4}{\bar{k}_1\rho^2}v(x,y)\leq\frac{4\,\bar{k}_2}{\bar{k}_1\rho^2}|x|^2.$$

Šo varbūtību var padarīt pec patikas mazu, izvēloties sākotnējos datus $x(0)=x$. Tātad mēs esam pierādījuši procesa $x^{\varepsilon}(t)$ stabilitāti pēc varbūtības,t.i.

$$\lim_{|x|\to 0}\mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}|x^{\varepsilon}(t)|\geq\delta\right)=0$$

visiem $\delta>0$.

Tagad ir jāpierāda, ka visi atrisinājumi, kuri neiziet no U_ρ, tiecas uz 0, ja $t\to\infty$. No (2.32) seko, ka

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}(\varepsilon)\right)e^{\frac{1}{4c_2}t}v(x,y)\leq 0. \tag{2.34}$$

Lietojot Dinkina formulu, varam uzrakstīt visiem $x\in U_\rho$, $y\in\mathbf{Y}$ un visiem $t\geq s\geq 0$:

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(t)}v(x^{\varepsilon}(\tau_\rho(t)),y^{\varepsilon}(\tau_\rho(t)))\right\}=$$

$$=\mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(s)}v(x^{\varepsilon}(\tau_\rho(s)),y^{\varepsilon}(\tau_\rho(s)))\right\}+$$

$$+\mathbf{E}_{x,y}\int\limits_{\tau_\rho(s)}^{\tau_\rho(t)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}+\mathcal{L}(\varepsilon)\right)e^{\frac{1}{4c_2}u}v(x^{\varepsilon}(u),y^{\varepsilon}(u))\right\}du\leq$$

$$\leq v(x,y)+\mathbf{E}_{x,y}\int\limits_{0}^{\tau_\rho(s)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}+\mathcal{L}(\varepsilon)\right)e^{\frac{1}{4c_2}u}v(x^{\varepsilon}(u),y^{\varepsilon}(u))\right\}du\leq$$

$$\leq v(x,y)\leq\bar{k}_2|\rho|^2. \tag{2.35}$$

Tātad mēs esam pieradījuši, ka process $\zeta(t) = e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(t)} v(x^\varepsilon(\tau_\rho(t)), y^\varepsilon(\tau_\rho(t)))$ ir $\mathcal{F}^t$-saskaņots supermartingāls, jo visiem $x \in U_\rho$, $y \in \mathbf{Y}$ un $t \geq s \geq 0$ izpildās nevienādība:

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(t)} v(x^\varepsilon(\tau_\rho(t)), y^\varepsilon(\tau_\rho(t))) / \mathcal{F}^s\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(s)} v(x^\varepsilon(\tau_\rho(s)), y^\varepsilon(\tau_\rho(s)))\right\}.$$

Aprēķināsim varbūtību:

$$\mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} |x^\varepsilon(t)| \geq \delta,\, \tau_\rho = \infty\right) = \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} |x^\varepsilon(t)|^2 \geq \delta^2,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} \frac{1}{\bar{k}_1} v(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)) \geq \delta^2,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} e^{\frac{1}{4c_2}t} v(x^\varepsilon(t), y^\varepsilon(t)) \geq e^{\frac{1}{4c_2}s}\delta^2 \bar{k}_1,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(t)} v(x^\varepsilon(\tau_\rho(t)), y^\varepsilon(\tau_\rho(t)))s > e^{\frac{1}{4c_2}s}\delta^2 \bar{k}_1,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(t)} v(x^\varepsilon(\tau_\rho(t)), y^\varepsilon(\tau_\rho(t))) \geq e^{\frac{1}{4c_2}s}\delta^2 \bar{k}_1\right) \overset{(**)}{\leq}$$

(tā kā $e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(t)} v(x^\varepsilon(\tau_\rho(t)), y^\varepsilon(\tau_\rho(t)))$ ir pozitīvs supermartingāls, varam pielietot supermartingālu nevienādību)

$$\overset{(**)}{\leq} \frac{1}{\bar{k}_1\delta^2} e^{-\frac{1}{4c_2}s} \mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(t)} v(x^\varepsilon(\tau_\rho(t)), y^\varepsilon(\tau_\rho(t)))\right\}.$$

Lietojot (2.35) varam uzrakstīt

$$\mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} |x^\varepsilon(t)| \geq \delta,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq \frac{\bar{k}_2}{\bar{k}_1\delta^2} e^{-\frac{1}{4c_2}s} |\rho|^2 \to 0, \text{ ja } s \to \infty,$$

visiem $y \in \mathbf{Y}$, $|x| < 1$ un $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (pietiekoši mazam $\varepsilon_0 > 0$).

Tadejādi mēs ieguvām šādu rezultātu: visi sistēmas (2.1)-(2.2) atrisinājumi, kuri neiziet no lodes $|x| \leq \rho < 1$, eksponenciāli tiecas uz nulli.

No atrisinājumu $x^\varepsilon(t)$ stabilitātes pēc varbūtības un no tā, ka atrisinājumi, kuri nav izgājuši ārpus lodes U_ρ, eksponenciāli tiecas uz nulli, var secināt, ka atrisinājumi $x^\varepsilon(t)$ ir asimptotiski lokāli stabili pēc varbūtības. □

2.3. Stohastisks oscilators, kura pārslēdzošais Markova process atkarīgs no fāzu koordinātas

Kā vienkāršāko piemēru apskatīsim vienādojumu lineāram harmoniskam oscilatoram, kurš atrodas mazu lineāru impulsa perturbāciju ietekmē:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\delta(y)\dot{x} + \left(\omega^2 + \varepsilon h y(t)\right) x = 0. \tag{2.36}$$

Process $y(t)$, kurš rada šīs perturbācijas, ir gabaliem konstants. Šī procesa konstantuma intervālos dinamiskā sistēmā notiek kustība pa kustības trajektorijām (2.36) līdz procesa y(t) kārtēja lēciena gadījummomentam τ_j, kad notiek arī fāzu trajektorijas lēciens, kurš tiek uzdots ar nosacījumu

$$\begin{cases} x(\tau_j) = & x(\tau_j - 0) \\ \dot{x}(\tau_j) = & \dot{x}(\tau_j - 0) + \varepsilon\gamma\dot{x}(\tau_j - 0). \end{cases} \tag{2.37}$$

Pieņemsim, ka procesam $y(t)$ ir divi stāvokļi y_1 un y_2 un ka tas ir ergodisks, ar vienu vienīgu invariantu mēru μ, atkarīgu no x.

$y(t)$	y_1	y_2
$\mu(x)$	$\mu_1(x)$	$1 - \mu_1(x)$

Tāpat pieņemsim, ka

$$\mu_1(x) = 1 - x^2$$

(saskaņā ar to, ka mēs apskatam mazas svārstības $x = 0$ apkārtnē, mērs būs pozitīvs.)

Pāriesim uz polārajām koordinātām, izmantojot standarta substitūciju

$$\begin{cases} x = r\cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} = -r\omega\sin(\omega t + \varphi). \end{cases}$$

Ieguvām ekvivalentu sākotnējai sistēmai (2.36)-(2.37) sistēmu polārajās koordinātās, kurā sastāv no diferenciālvienādojumiem radiusam un fazai

$$\dot{r} = \varepsilon r\left\{\frac{1}{2\omega} h y(t)\sin 2(\omega t + \varphi) - 2\delta(y)\sin^2(\omega t + \varphi)\right\}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{\omega} h y(t)\cos^2(\omega t + \varphi) - \varepsilon\delta(y)\sin 2(\omega t + \varphi),$$

ja $\tau_{j-1} < t < \tau_j$, un lēcienu nosacījumiem

$$r(\tau_j) = r(\tau_j - 0)\left[1 + \varepsilon\frac{\gamma}{2}\{1 - \cos 2(\omega\tau_j + \varphi(\tau_j - 0))\} + \right.$$

$$+\varepsilon^2\frac{\gamma^2}{8}\sin^2 2\left(\omega\tau_j+\varphi(\tau_j-0)\right)\Big],$$

$$\varphi(\tau_j)=\varphi(\tau_j-0)+\varepsilon\frac{\gamma}{2}\sin 2\left(\omega\tau_j+\varphi(\tau_j-0)\right)-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\gamma^2}{2}\sin 2\left(\omega t+\varphi(\tau_j-0)\right)\sin^2\left(\omega\tau_j+\varphi(\tau_j-0)\right).$$

Saskaņā ar 2.daļā iegūtiem rezultātiem, šīs sistēmas dinamiskus raksturojumus vidējosim pēc invarianta mēra

$$\bar{F}(r,\varphi,t)=\varepsilon\sum_{i=1,2}\left\{\frac{1}{2\omega}hy_i\sin 2\left(\omega t+\varphi\right)-2\delta(y_i)\sin^2\left(\omega t+\varphi\right)+\right.$$

$$\left.+\,a\frac{\gamma}{2}\left[1-\cos 2\left(\omega t+\varphi\right)\right]\right\}r\mu_i(r,\varphi)$$

$$\bar{\Phi}(r,\varphi,t)=\varepsilon\sum_{i=1,2}\left\{\frac{1}{\omega}hy_i\cos^2\left(\omega t+\varphi\right)-\delta(y_i)\sin 2\left(\omega t+\varphi\right)+\right.$$

$$\left.+\,a\frac{\gamma}{2}\sin 2\left(\omega t+\varphi\right)\right\}\mu_i(r,\varphi)$$

un tieši iekļautā laika

$$\widehat{F}(r,\varphi)=\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\bar{F}(r,\varphi,t)dt=\varepsilon r\left(\delta(y_1)+a\frac{\gamma}{2}\right)+\varepsilon\frac{r^3}{4}\left(\delta(y_2)-\delta(y_1)\right)$$

$$\widehat{\Phi}(r,\varphi)=\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\omega}\bar{\Phi}(r,\varphi,t)dt=\varepsilon\frac{1}{2\omega}hy_1+\varepsilon\frac{3}{8\omega}h(y_2-y_1)r^2.$$

Ieguvām parasto diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\dot{r}=\varepsilon r\left(\delta(y_1)+a\frac{\gamma}{2}\right)+\varepsilon\frac{r^3}{4}\left(\delta(y_2)-\delta(y_1)\right) \tag{2.38}$$

$$\dot{\varphi}=\varepsilon\frac{1}{2\omega}hy_1+\varepsilon\frac{3}{8\omega}h(y_2-y_1)r^2, \tag{2.39}$$

kas tuvināti apraksta sākotnējo impulsa sistēmu (2.36)-(2.37). Sākotnējās sistēmas atrisinājums pietiekoši maziem ε atrodas sistēmas (2.38)-(2.39) atrisinājuma $\varepsilon-$apkārtnē. Kā izriet no 2.daļas 2.nodaļas rezultātiem, iegūtas sistēmas (2.38)-(2.39) kvalitatīva analīze ļauj pētīt arī sākotnējās sistēmas stabilitāti.

No formulas (2.38) viegli redzams, ka sistēmā, izņemot līdzsvara stāvokli $r = 0$, parādās papildus stacionāra amplitūda r_2

$$r_2 = 2\sqrt{\frac{\delta(y_1) + a\frac{\gamma}{2}}{\delta(y_1) - \delta(y_2)}},$$

kas dod stacionāru dinamisku režīmu

$$\hat{x} = r_2 \cos(\omega t + \hat{\varphi}),$$

kur $\hat{\varphi}$ definēts vienādojumā (2.39). Tātad, ieguvām robežciku. Pārslēdzošā procesa varbūtisko raksturojumu atkarības no koordinātām dēļ lineārā modelī parādas nelineārs efekts.

3. Difūziju aproksimācija un stabilitāte

3.1. Difūziju aproksimācija

3.1.1. Pāreja uz laiku $\varepsilon^{-2}t$ un palīgfunkcionāļu novērtējumi

Pieņemsim, ka $b_1(x) = 0$. Tad visi vidējotā vienādojuma atrisinājumi ir konstantes, un tie nedod mums nekādu informāciju par sistēmas (1.5)-(1.8) atrisinājumu uzvedību. Šajā gadījumā mēs lietosim laika substitūciju $s = t\varepsilon^2$. Apzīmējot $x(\frac{t}{\varepsilon^2}) = x_\varepsilon(t)$, varam pārrakstīt sistēmu (1.5)-(1.8) formā:

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f(x_\varepsilon, y_\varepsilon(t), \varepsilon),$$

ja $t \in (\tau_{j-1}^{\varepsilon^2}, \tau_j^{\varepsilon^2})$,

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-0) + \varepsilon g(x_\varepsilon(t-0), y_\varepsilon(t-0), \varepsilon)$$

visiem $t = \tau_j^{\varepsilon^2}, j \in \mathbf{N}$, kur $\{\tau_j^{\varepsilon^2}\}$ ir Markova procesa $y_\varepsilon(t)$, kurš ir definēts formulā (1.23), lēcienu momenti. Minētajā sistēmā (1.5)-(1.8) mēs īslaicīgi atmetīsim locekļus f_3 un g_3 funkcijās f un g, un vēlreiz pārrakstīsim sistēmu:

$$\frac{dx_\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f_1(x_\varepsilon, y_\varepsilon(t)) + f_2(x_\varepsilon, y_\varepsilon(t)), \tag{3.1}$$

ja $t \in (\tau_{j-1}^{\varepsilon^2}, \tau_j^{\varepsilon^2})$,

$$x_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t-0) + \varepsilon g_1(x_\varepsilon(t-0), y_\varepsilon(t-0)) + \varepsilon^2 g_2(x_\varepsilon(t-0), y_\varepsilon(t-0)), \tag{3.2}$$

ja $t = \tau_j^{\varepsilon^2}, j \in \mathbf{N}$, ar sākuma nosacījumu

$$x_\varepsilon(0) = x. \tag{3.3}$$

Markova procesa $\{x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\}$ infinitezimālais operators $\tilde{L}(\varepsilon)$ ir veidā:

$$(\tilde{L}(\varepsilon)v)(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^2} Qv(x,y) + \frac{1}{\varepsilon}(\nabla v(x,y), f_1(x,y) + \varepsilon f_2(x,y)) + \\ tildeG(\varepsilon)v(x,y), \tag{3.4}$$

kur operators $\tilde{G}(\varepsilon)$ ir nodefinēts ar formulu:

$$\tilde{G}(\varepsilon)v(x,y) = \frac{1}{\varepsilon^2} a(x,y) \sum_{z\in Y} [v(x + \varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y), z) - \\ -v(x,z)] p_x(y,z). \tag{3.5}$$

Lemma 3.1.1. *Pieņemsim, ka funkcijai $u(x,y)$ ir nepārtraukti atvasinājumi pēc $x \in \mathbf{R}^n$ un $u \in \mathbf{V}_p, |\nabla u| \in \mathbf{V}_{p-1}$ kādam $p \geq 1$. Tad*

$$\varepsilon^2(\tilde{L}(\varepsilon)u)(x,y) - Qu(x,y) = r_{1\varepsilon}(x,y) \tag{3.6}$$

visiem $\varepsilon \in (0,1)$, $r_{1\varepsilon}(x,y)$, un $Q_x u$ pieder telpai $\mathbf{V}_p$, bez tam

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \|r_{1\varepsilon}\|_p < \infty, \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} r_{1\varepsilon}(x,y) = 0 \textit{ visiem } x \in \mathbf{R}^n,\ y \in \mathbf{Y}.$$

Pierādījums. Uzrakstīsim funkcijai $\varepsilon^2 u(x,y)$ infenitezimālo operatoru (3.4):

$$\varepsilon^2(\tilde{L}(\varepsilon)u)(x,y) = Qu(x,y) + \varepsilon(\nabla u(x,y), f_1(x,y) + \varepsilon f_2(x,y)) +$$

$$+\varepsilon^2 \tilde{G}(\varepsilon)u(x,y),$$

Saskaņā ar mūsu nosacījumiem $|f_1|, |g_1| \in \mathbf{V}_0$, $|f_2|, |g_2| \in \mathbf{V}_1$. Katram $\varepsilon \in (0,1), s \in [0,1]$ varam uzrakstīt:

$$\left|\left(\nabla u\left(x + s\left(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y)\right), z\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \|\nabla u\|_{p-1} (1 + |x| + |g_1(x,y)| + |g_2(x,y)|)^{p-1} \leq$$

$$\leq \|\nabla u\|_{p-1} (1 + \|g_1\|_0 + \|g_2\|_1)(1 + |x|)^{p-1}.$$

Tad operatoram (3.5) un augstāk minētajam u var uzrakstīt:

$$\varepsilon^2(\tilde{G}(\varepsilon)u)(x,y) =$$

$$= \varepsilon a(x,y) \sum_{z \in Y} \int_0^1 (\nabla u(x + s(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y)), z), g_1(x,y) +$$

$$+\varepsilon g_2(x,y)) ds\, p_x(y,z) = \varepsilon a(x,y) \sum_{z \in Y} (\nabla u(x,z), g_1(x,y))\, p_x(y,z) +$$

$$+\varepsilon^2 a(x,y) \sum_{z \in Y} \int_0^1 (\nabla u(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)), z), g_2(x,y)) ds\, p_x(y,z) +$$

$$+\varepsilon a(x,y) \sum_{z \in Y} \int_0^1 (\nabla u(x + s(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y)), z) -$$

$$-\nabla u(x,z), g_1(x,y)) ds\, p_x(y,z).$$

Tā kā $\nabla u(x,y)$ ir nepārtraukts attēlojums, tam izpildās

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_0^1 \left|\nabla u(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)),z)-\nabla u(x,z)\right| ds = 0$$

visiem $x \in \mathbf{R}^n$ un $y \in \mathbf{Y}$. Izrakstīsim atlikumu :

$$\begin{gathered}
r_{1\varepsilon}(x,y)=\varepsilon(\nabla u(x,y),f_1(x,y))+ \\
+\varepsilon a(x,y)\sum_{z\in Y}(\nabla u(x,z),g_1(x,y))\,p_x(y,z)+ \\
+\varepsilon a(x,y)\sum_{z\in Y}\int_0^1(\nabla u(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)),z)- \qquad (3.7) \\
-\nabla u(x,z),g_1(x,y))ds\,p_x(y,z)+\varepsilon^2(\nabla u(x,y),f_2(x,y))+ \\
+\varepsilon^2 a(x,y)\sum_{z\in Y}\int_0^1(\nabla u(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+ \\
+\varepsilon^2 g_2(x,y)),z),g_2(x,y))ds\,p_x(y,z)
\end{gathered}$$

Ir viegli redzēt, ka $Q_x u(x,y)$, kā arī visi vienādojuma (3.7) labās puses locekļi pieder telpai $\mathbf{V}_p$. Lemma ir pierādīta. □

Lemma 3.1.2. *Pieņemsim, ka $v_0(x)$ ir nepārtraukta funkcija ar diviem nepārtrauktiem atvasinājumiem un $v_0 \in \mathbf{V}_p$, $|v_0| \in \mathbf{V}_{p-1}$, $\|D\nabla v_0\| \in \mathbf{V}_{p-2}$ kādam $p \geq 2$.*
Tad

$$\begin{gathered}
(\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)(\varepsilon)v_0)(x)-\frac{1}{\varepsilon}(\nabla v_0(x),F_1(x,y))=(\nabla v_0(x),F_2(x,y))+ \\
+\frac{1}{2}a(x,y)\left([D\nabla v_0(x)]g_1(x,y),g_1(x,y)\right)\right)+r_{2\varepsilon}(x,y) \qquad (3.8)
\end{gathered}$$

Visiem $\varepsilon \in (0,1)$ un vienādojuma (3.8) labās puses locekļi pieder telpai $\mathbf{V}_p$, un

$$\sup_{0<\varepsilon<1}\|r_{2\varepsilon}\|_p<\infty, \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} r_{2\varepsilon}(x,y)=0 \ \textit{visiem}\ x\in\mathbf{R}^n,\ y\in\mathbf{Y}.$$

Pierādījums. Pēc $\tilde{G}(\varepsilon)$ definīcijas varam uzrakstīt funkcijai $v_0(x)$:

$$\left(\tilde{G}(\varepsilon)v_0\right)(x) = \frac{a(x,y)}{\varepsilon^2}[v_0(x+\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)) - v_0(x)] =$$

$$= \frac{a(x,y)}{\varepsilon^2}\left(\nabla v_0(x), \varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)\right) +$$

$$+\frac{a(x,y)}{\varepsilon^2}\int_0^1\Big(\nabla v_0(x+s\left(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)\right) -$$

$$-\nabla v_0(x), \varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y))\Big)\, ds =$$

$$= \frac{a(x,y)}{\varepsilon}\left(\nabla v_0(x), g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y)\right) +$$

$$+\frac{a(x,y)}{\varepsilon^2}\int_0^1\int_0^1 s\Big((D\nabla v_0)(x+ts\left(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)\right) *$$

$$*\left(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)\right)\Big), \varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)\Big) ds\, dt =$$

$$= \frac{a(x,y)}{\varepsilon}\left(\nabla v_0(x), \varepsilon g_1(x,y)\right) + a(x,y)\left(\nabla v_0(x), g_2(x,y)\right) +$$

$$+\frac{a(x,y)}{2}\left([D\nabla v_0(x)]\left(g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y)\right), g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y)\right) + r_{21\varepsilon}, \tag{3.9}$$

kur

$$r_{21\varepsilon} = a(x,y)\int_0^1\int_0^1 s\Big(\Big[(D\nabla v_0)\left(x+ts\left(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)\right)\right) -$$

$$-D\nabla v_0(x)\Big]\left(g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y)\right), g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y)\Big) ds\, dt$$

No attēlojuma $(D\nabla v_0)(x)$ nepārtrauktības seko:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} r_{21\varepsilon}(x,y) = 0 \quad \text{visiem } x\in \mathbf{R}^n, y\in \mathbf{Y}.$$

Tagad varam izrakstīt funkcijai $v_0(x)$ infinitezimālo opertoru $\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)$ no (3.4):

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v_0(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}Qv_0(x) + \frac{1}{\varepsilon}(\nabla v_0(x), f_1(x,y)+\varepsilon f_2(x,y)) + \tilde{G}(\varepsilon)v_0(x).$$

Ievietojot $\tilde{G}(\varepsilon)$ no (3.9), iegūstam

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v_0(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\nabla v_0(x), f_1(x,y)\right) + \left(\nabla v_0(x), f_2(x,y)\right) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}a(x,y)\left(\nabla v_0(x), g_1(x,y)\right) + \left(\nabla v_0(x), g_2(x,y)\right) +$$

$$+\frac{a(x,y)}{2}\left([D\nabla v_0(x)]\left(g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y)\right), g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y)\right) + r_{21\varepsilon}. \tag{3.10}$$

Apzīmējot

$$r_{22\varepsilon}(x,y) = \varepsilon\frac{a(x,y)}{2}\{([D\nabla v_0(x)]g_2(x,y), g_1(x,y)) +$$

$$+ ([D\nabla v_0(x)]g_1(x,y), g_2(x,y))\} +$$

$$+\varepsilon^2\frac{a(x,y)}{2}\left([D\nabla v_0(x)]g_2(x,y), g_2(x,y)\right),$$

varam (3.10) pārrakstīt formā (3.8), kur $r_{2\varepsilon}(x,y) = r_{21\varepsilon}(x,y) + r_{22\varepsilon}(x,y)$. Ir viegli redzēt, ka $r_{2\varepsilon}(x,y) \in \mathbf{V}_p$ un

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} r_{22\varepsilon}(x,y) = 0 \text{ visiem } x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}.$$

Tad Lemmas apgalvojumi seko no novērtējumiem:

$$\left|\left([D\nabla v_0(x)]\left(g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y)\right), g_1(x,y)+\varepsilon g_2(x,y)\right)\right| \le$$

$$\le \|D\nabla v_0\|_{p-2}\left(1+\|g_1\|_0+\|g_2\|_1\right)^2(1+|x|)^p$$

un

$$\left|(D\nabla v_0)\left[x+ts\left(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)\right)\right]c, c\right| \le$$

$$\le |c|^2\ \|D\nabla v_0\|_{p-2}\ \left(1+|x|+|g_1(x,y)|+|g_2(x,y)|\right)^{p-2} \le$$

$$\le |c|^2\ \|D\nabla v_0\|_{p-2}\ \left(\|g_1\|_0+\|g_2\|_1\right)^{p-2}(1+|x|)^{p-2},$$

kuri ir spēkā visiem $c \in \mathbf{R}^n$, $t, s \in [0,1]$ un $\varepsilon \in (0,1)$.

Lemma 3.1.3. *Pieņemsim, ka $v_0(x,y)$ apmierina Lemmas 3.1.2 nosacījumus, bet $u(x,y)$– Lemmas 3.1.1 nosacījumus, un apzīmēsim:*

$$v_1(x,y) = \left(\nabla v_0(x), \Pi_x F_1(x,y)\right), \quad v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 u.$$

Tad $\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v \in \mathbf{V}_p$ un $\sup_{0<\varepsilon<1}\left\|\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)\right\|_p < \infty$.

Pierādījums. Ir viegli redzēt, ka

$$|v_1(x,y)| \le \|\nabla v_0\|_{p-1} h \|F_1\|_0 (1+|x|)^{p-1}$$

un

$$|\nabla v_1(x,y)| \le \|D\nabla v_0(x)\| \ |\Pi_x F_1(x,y)| +$$

$$+ |\nabla v_0(x)| \ \|D\Pi_x F_1(x,y)\| \le \Big[\|D\nabla v_0\|_{p-2} \ h \|F_1\|_0 +$$

$$+ \|\nabla v_0\|_{p-1} \Big(h_1 \sup_{y \in \mathbf{Y}} \|F_1(x,y)\| + h_3 \Big) \Big] (1+|x|)^{p-1}$$

visiem $y \in \mathbf{Y}$, $x \in \mathbf{R}^n$. Pēc potenciāloperatora definīcijas varam uzrakstīt jebkurai funkcijai $v \in C(\mathbf{Y})$:

$$a(x,y) \sum_{z \in \mathbf{Y}} (\Pi_x v)(z) p_x(y,z) = -v(y) + a(x,y)(\Pi_x v)(y) + \sum_{y \in \mathbf{Y}} v(y)\mu_x(y).$$

Pēc konstrukcijas $v_1 \in \mathbf{V}_{p-1}$, $|\nabla v_1| \in \mathbf{V}_{p-1}$, $\sum_{y \in \mathbf{Y}} v_1(x,y)\mu_x(y) = 0$, un tad visiem $\varepsilon \in (0,1)$

$$\varepsilon(\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)(\varepsilon) v_1)(x,y) + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla v_0(x), F_1(x,y)) =$$

$$\begin{aligned}
= (\nabla v_0(x), [D\Pi_x F_1(x,y)] f_1(x,y)) + ([D\nabla v_0(x)] f_1(x,y), \Pi_x F_1(x,y)) +& \\
+ a(x,y) \left([D\nabla v_0(x)] g_1(x,y), \Pi_x F_1(x,y) \right) -& \\
- \left([D\nabla v_0(x)] g_1(x,y), F_1(x,y) \right) +& \\
+ a(x,y) \sum_{z \in \mathbf{Y}} (\nabla v_0(x), [D\Pi_x F_1(x,z)] g_1(x,y)) \ p_x(y,z) + r_{3\varepsilon}(x,y),&
\end{aligned}$$

kur visi vienādības labās puses locekļi pieder telpai $\mathbf{V}_p$, un atlikums $r_{3\varepsilon}$ ir vienāds ar

$$r_{3\varepsilon} = \varepsilon (\nabla v_1(x,y), f_2) +$$

$$+ \varepsilon a(x,y) \sum_{z \in Y} \int_0^1 (\nabla v_1(x + s(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y)), z), g_2(x,y) ds \ p_x(y,z) +$$

$$+ a(x,y) \sum_{z \in Y} \int_0^1 \Big(\Big[\nabla v_1(x + s(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y)), z) -$$

$$- \nabla v_1(x,z) \Big], g_1(x,y) \Big) ds \ p_x(y,z).$$

Viegli redzēt, ka

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \|r_{3\varepsilon}\|_p < \infty, \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} r_{3\varepsilon}(x,y) = 0$$

visiem $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}$. Tagad no šī novērtējuma un formulas (3.8) izriet vienādība:

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)\left[v_0(x) + \varepsilon v_1(x,y)\right] = (\nabla v_0(x), F_2(x,y)) + \\
+ (\nabla v_0(x), [D\Pi_x F_1(x,y)]\, f_1(x,y)) - \\
- \Big([D\nabla v_0(x)] g_1(x,y), f_1(x,y) + \frac{1}{2} a(x,y) g_1(x,y)\Big) + \\
+ ([D\nabla v_0(x)]\, F_1(x,y), \Pi_x F_1(x,y)) + \\
+ a(x,y) \sum_{z\in\mathbf{Y}} (\nabla v_0(x), [D\Pi_x F_1(x,z)]\, g_1(x,y))\ p_x(y,z) + \\
+ r_{2\varepsilon}(x,y) + r_{3\varepsilon}(x,y),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

kuras labās puses locekļi pieder telpai $\mathbf{V}_p$. Tad $\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)\,(v_0 + \varepsilon v_1) \in \mathbf{V}_p$ un papildus

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \left\| \widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)\,(v_0 + \varepsilon v_1) \right\|_p < \infty.$$

Tā kā $Q_x u \in \mathbf{V}_p$, tad Lemmas 3.1.3 apgalvojumi seko no Lemmas 3.1.1. □

Lemma 3.1.4. *Katram $m > 0$ eksistē tādas pozitīvas konstantes $\varepsilon_m, c_m, \gamma_m$, ka (3.1)-(3.2)-(3.3) atrisinājumam $x_\varepsilon(t)$ izpildās nevienādība*

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{|x_\varepsilon(t)|^m\right\} \le c_m e^{\gamma_m t} (1 + |x|)^m \tag{3.12}$$

visiem $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{Y}, t \ge 0$ un $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m)$.

Pierādījums. Pierādīsim šo lemmu tikai gadījumam $m \ge 2$, tapēc kā visiem $p \in (0,2]$ izpildās

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{|x_\varepsilon(t)|^p\right\} \le \left(\mathbf{E}_{x,y}\left\{|x_\varepsilon(t)|^2\right\}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Pieņemsim, ka $v_0(x)$ ir nepārtraukta funkcija ar diviem nepārtrauktiem atvasinājumiem, kura apmierina Lemmas 3.1.2 nosacījumus, un eksistē tādas pozitīvas konstantes l_1, l_2 ka ir spēkā novertējums

$$l_1 (1 + |x|)^m \le v_0(x) \le l_2 (1 + |x|)^m \tag{3.13}$$

visiem $x \in \mathbf{R}^n$. Apskatīsim funkciju $v(x,y) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x,y)$, kur $v_1(x,y)$ ir no Lemmas 3.1.3. Pēc konstrukcijas

$$|v_1(x,y)| \le \|\nabla v_0\|_{m-1} h \|F_1\|_0 (1+|x|)^{m-1}.$$

No šī un (3.13) seko novērtējums:

$$k_1 (1+|x|)^m \le v(x,y) \le k_2 (1+|x|)^m, \tag{3.14}$$

kur

$$k_1 = l_1 - \frac{\varepsilon_m}{1+|x|} h \|\nabla v_0\|_{m-1} \|F_1\|_1,$$

$$k_2 = l_1 + \frac{\varepsilon_m}{1+|x|} h \|\nabla v_0\|_{m-1} \|F_1\|_1$$

ir pozitīvas konstantes kādam pietiekoši mazam $\varepsilon_m > 0$. Tagad varam aprēķināt infinitezimālo operatoru (3.11) funkcijai $v(x,y)$:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v(x,y) = \widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v_0(x) + \varepsilon \widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v_1(x,y) =$$

$$= (\nabla v_0(x), F_2(x,y)) + (\nabla v_0(x), [D\Pi_x F_1(x,y)] f_1(x,y)) +$$
$$+ ([D\nabla v_0(x)] F_1(x,y) , \Pi_x F_1(x,y)) -$$
$$- \Big([D\nabla v_0(x)] g_1(x,y) , f_1(x,y) + \frac{1}{2} a(x,y) g_1(x,y) \Big) +$$
$$+ a(x,y) \sum_{z \in \mathbf{Y}} (\nabla v_0(x), [D [\Pi_x F_1(x,z)]] g_1(x,y)) \; p_x(y,z) + r_{4\varepsilon}(x,y),$$

kur $r_{4\varepsilon}(x,y) \in \mathbf{V}_m$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1} \|r_{4\varepsilon}\|_m < \infty$. Tad $\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v \in \mathbf{V}_m$ un varam novērtēt:

$$\left| \widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v \right| \le \sup_{0<\varepsilon<1} \left\| \widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v \right\| (1+|x|)^m.$$

Apzīmējot $h_3 = \sup\limits_{0<\varepsilon<1} \left\| \widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v \right\|$ un ņemot verā (3.14), iegūstam novērtējumu:

$$\left| \widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v \right| \le \frac{h_3}{k_1} v(x,y), \tag{3.15}$$

kuru ievietosim Dinkina formulā:

$$\mathbf{E}_{x,y} v\left(x_\varepsilon(\tau_\rho(t)), y_\varepsilon(\tau_\rho(t))\right) = v(x,y) + \mathbf{E}_{x,y} \int\limits_0^{\tau_\rho(t)} (\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v)(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)) \, ds, \tag{3.16}$$

laika momentam $\tau_\rho(t) = \min\{\tilde{\tau}_\rho, t\}$, $\tilde{\tau}_\rho = \inf\{t \geq 0 : |x_\varepsilon(t)| > \rho\}$ visiem $x \in \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < \rho\}$ (pirmais laika moments, kad $x_\varepsilon(t)$ iziet no lodes $|x| < \rho$).

Tātad, lietojot (3.15), varam pārrakstīt (3.16) formā:

$$\mathbf{E}_{x,y} v\left(x_\varepsilon(\tau_\rho(t)), y_\varepsilon(\tau_\rho(t))\right) \leq v(x,y) + \frac{h_3}{k_1} \int_0^{\tau_\rho(t)} \mathbf{E}_{x,y}\, v(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s))\, ds.$$

Tā pēc Gronwala Lemmas izriet novērtējums:

$$\mathbf{E}_{x,y} v\left(x_\varepsilon(\tau_\rho(t)), y_\varepsilon(\tau_\rho(t))\right) \leq v(x,y) e^{\frac{h_3}{k_1}\tau_\rho}. \tag{3.17}$$

Tagad apskatīsim procesu $\eta(t) = e^{-\frac{h_3}{k_1}t}\, v\left(x_\varepsilon(\tau_\rho(t)), y_\varepsilon(\tau_\rho(t))\right)$. Procesa nosacītās matemātiskās cerības atvasinājums no labās puses ir nepozitīvs:

$$\lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{1}{\Delta} \mathbf{E}_{x,y} \left\{ \eta(t+\Delta) - \eta(t) \,/\, \mathcal{F}^{\frac{t}{\varepsilon^2}} \right\} =$$

$$= -\frac{h_3}{k_1}\eta(t) + e^{-\frac{h_3}{k_1}t} \left(\tilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v\right)\left(x_\varepsilon(\tau_\rho(t)), y_\varepsilon(\tau_\rho(t))\right) \leq 0.$$

Tad $\eta(t)$ ir nenegatīvs supermartingāls attiecība uz $\sigma-$algebru $\mathcal{F}^{\frac{t}{\varepsilon^2}}$, un mēs varam lietot supermartingālu nevienādību:

$$\mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0 < t < T} \eta(t) \geq \rho \right) \leq \frac{1}{\rho} \mathbf{E}_{x,y}\ \eta(t_0) \tag{3.18}$$

visiem $T > t_0 \geq 0$ un $\rho > 0$. Tad

$$\mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} |\, x_\varepsilon(\tau_\rho(t))| \geq \rho \right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0 < t < T} \left(x_\varepsilon(\tau_\rho(t)), y_\varepsilon(\tau_\rho(t))\right) \geq k_1(1+\rho)^m \right) \leq$$

$$\mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t_0 < t < T} \eta(t) \geq k_1(1+\rho)^m\, e^{-\frac{h_3}{k_1}T} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{k_1(1+\rho)^m}\, e^{\frac{h_3}{k_1}T} \mathbf{E}_{x,y}\ \eta(0) \leq \frac{k_2(1+|x|)^m}{k_1(1+\rho)^m}\, e^{\frac{h_3}{k_1}T} \underset{\text{ja } \rho \to \infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.19}$$

un

$$\mathbf{P}_{x,y}\left(\lim_{\rho\to\infty}\tau_\rho(t)=t\right)=1 \tag{3.20}$$

izpildās visiem $x\in\mathbf{R}^n, y\in\mathbf{Y}$, un $\varepsilon\in(0,\varepsilon_m)$.

No (3.14) seko novērtējums

$$|x|^m\le\frac{v(x,y)}{h_1},$$

un mēs varam uzrakstīt, lietojot arī (3.17):

$$\mathbf{E}_{x,y}|x_\varepsilon(t)|^m\le\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{k_1}\mathbf{E}_{x,y}\,v\left(x_\varepsilon(\tau_\rho(t)),y_\varepsilon(\tau_\rho(t))\right)\le$$

$$\le\lim_{\rho\to\infty}\frac{1}{k_1}v(x,y)\,e^{\frac{h_3}{k_1}\tau_\rho(t)}\le\frac{k_2}{k_1}e^{\frac{h_3}{k_1}t}\left(1+|x|\right)^m.$$

Lemma ir pieradīta. □

Secinājums 3.1.1. *Ja $v\in\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)), v\in\mathbf{V}_{p_1}, \widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v\in\mathbf{V}_{p_2}$ kādiem $p_1>0$ un $p_2>0$, tad visiem $T>0, t\in[0,T], y\in\mathbf{Y}$ izpildās:*

$$\mathbf{E}_{x,y}\,v(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t))=v(x,y)+\mathbf{E}_{x,y}\int_0^t(\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v)(x_\varepsilon(s),y_\varepsilon(s))\,ds, \tag{3.21}$$

un eksistē tāds $M_T>0$, ka:

$$\left|\mathbf{E}_{x,y}\,v(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t))-v(x,y)\right|\le tM_T\left(1+|x|\right)^{p_2}. \tag{3.22}$$

Pierādījums. Lietojot formulu (3.20), varam pārrakstīt Dinkina formulu veidā:

$$\lim_{\rho\to\infty}\mathbf{E}_{x,y}\,v\left(x_\varepsilon(\tau_\rho),y_\varepsilon(\tau_\rho)\right)=$$

$$=\lim_{\rho\to\infty}\left(v(x,y)+\mathbf{E}_{x,y}\int_0^{\tau_\rho(t)}(\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v)(x_\varepsilon(s),y_\varepsilon(s))\,ds\right)=$$

$$=v(x,y)+\mathbf{E}_{x,y}\int_0^t(\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v)(x_\varepsilon(s),y_\varepsilon(s))\,ds$$

Pēc mūsu nosacījumiem $\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v \in \mathbf{V}_{p_2}$. Tad no iepriekšējā novērtējuma ieguvām:

$$|\mathbf{E}_{x,y}\, v(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - v(x,y)| \le c_1 \int_0^t \mathbf{E}_{x,y}\,(1 + |x(s)|)^{p_2}\, ds,$$

kur $c_1 = \left\|\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v\right\|_{p_2}$, un (3.22) seko no (3.12). □

Secinājums 3.1.2. *Katram $T > 0$ eksistē tāda pozitīva konstante ε_T, ka visiem $r > 0$*

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_T} \sup_{|x|<r,\, y\in\mathbf{Y}} \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{0\le t\le T} |x_\varepsilon(t)| \ge \rho\right) = 0.$$

Pierādījums. No formulas (3.19) viegli redzēt, ka robeža

$$\lim_{\rho\to\infty} \left(\sup_{0\le t\le T} |x_\varepsilon(t)| \ge \rho\right) = 0 \tag{3.23}$$

nav atkarīga no x un y visiem $r > 0$. Tāpēc varam pārrakstīt:

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_{|x|<r,\, y\in\mathbf{Y}} \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{0\le t\le T} |x_\varepsilon(t)| \ge \rho\right) = 0. \tag{3.24}$$

Tā kā visi secinājumi bija izdarīti pietiekami mazam $\varepsilon < \varepsilon_m$, un robeža no tā nav atkarīga, (3.24) ir spēkā visiem $\varepsilon < \varepsilon_m$. □

3.1.2. Vājā konverğence uz difūziju robežvienādojuma atrisinājumu

Saskaņā ar Secinājumu 3.1.2 varam konstatēt, ka katram $m \in \mathbf{N}$ un katrai virknei $t_m > t_{m-1} > ... > t_1 \geq 0$ gadījuma vektora $\{x_\varepsilon(t_1), ...x_\varepsilon(t_m)\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ sadalījumi ir relatīvi vāji kompakti. Aplūkosim (3.1)-(3.2) atrisinājumu ar sākuma nosacījumu $x_\varepsilon(0) = x$ kā gadījuma lielumu Skorohoda telpā $\mathcal{D}([0,T], \mathbf{R}^n)$. Šim atrisinājumam atbilstošo varbūtības mēru apzīmēsim $\mathbf{P}^\varepsilon$. Šajā paragrāfā mēs pierādīsim, ka saime $\mathbf{P}^\varepsilon$ ir relatīvi vāji kompakta, t.i. eksistē tāda virkne $\{\varepsilon_n, n \in \mathbf{N}\}$, ka $\{\mathbf{P}^{\varepsilon_n}, n \in \mathbf{N}\}$ tiecas uz kādu sadalījumu $\hat{\mathbf{P}}$, ja $\varepsilon_n \to 0$, kad $n \to \infty$.

Viegli redzēt, ka sistēmas (3.1)-(3.2) atrisinājumam un procesam

$$\widetilde{x}_\varepsilon(t) = x_\varepsilon(t) + \varepsilon \Pi_x F_1(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$$

ir viena un tā pati konverğences īpašība, ja $\varepsilon \to 0$, jo jebkuram $T > 0$, $\delta > 0$ un visiem $x \in \mathbf{R}^n$ un $y \in \mathbf{Y}$ ir spēkā:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}_{x,y} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\widetilde{x}_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t)| > \delta \right) = 0.$$

Tieši tāpēc mūsu analīzei lietosim funkcionāļus

$$\widetilde{v}_\varepsilon(x,y) = |x + \varepsilon \Pi_x F_1(x,y)|^2,$$
$$\widehat{v}_\varepsilon(x,y,c) = (x + \varepsilon \Pi_x F_1(x,y), c), \tag{3.25}$$

kādam $c \in \mathbf{R}^n$.

Secinājums 3.1.3. *Katram $T > 0$ eksistē tādas pozitīvas konstantes ε_T un A_T, ka nevienādība*

$$|\mathbf{E}_{x,y}\, \widetilde{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - \widetilde{v}_\varepsilon(x,y)| < t A_T (1 + |x|)^2 \tag{3.26}$$

izpildās visiem $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $x \in \mathbf{R}^n$ un $y \in \mathbf{Y}$.

Pierādījums.

$$\widetilde{v}_\varepsilon(x,y) = |x + \varepsilon \Pi_x F_1(x,y)|^2 =$$
$$= |x|^2 + 2\varepsilon (x\, , \Pi_x F_1(x,y)) + \varepsilon^2 |\Pi_x F_1(x,y)|^2.$$

Tagad mēs varam lietot Lemmu 3.1.3 ar $v_0(x) = |x|^2$ un $u(x,y) = |\Pi_x F_1(x,y)|^2$. Tā kā $v_0(x) \in \mathbf{V}_2$ un $u(x,y) \in \mathbf{V}_0$, $\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v \in \mathbf{V}_2$. Tālāk, izmantojot Secinājumu 3.1.1, iegūsim:

$$|\mathbf{E}_{x,y}\, \widetilde{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - \widetilde{v}_\varepsilon(x,y)| \leq t M_T (1 + |x|)^2.$$

□

Secinājums 3.1.4. *Katram $T > 0$ un $c \in \mathbf{R}^n$ eksistē tādas pozitīvas konstantes ε_T un A_T, ka nevienādība*

$$\left|\mathbf{E}_{x,y}\, \widehat{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), c) - \widehat{v}_\varepsilon(x, y, c)\right| \leq tA_T\,|c|\,(1 + |x|) \tag{3.27}$$

izpildās visiem $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $x \in \mathbf{R}^n$ un $y \in \mathbf{Y}$.

Pierādījums. Liekot Lemmā 3.1.3 $v_0(x) = (x, c) \in \mathbf{V}_1$ un $u(x, y) = 0$, $\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v \in \mathbf{V}_1$. Tad no Secinājuma 3.1.1 izriet, ka eksistē tāda konstante M_{T2}, ka nevienādība

$$\left|\mathbf{E}_{x,y}\, \widehat{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), c) - \widehat{v}_\varepsilon(x, y, c)\right| \leq tM_{T2}\,|c|\,(1 + |x|)$$

izpildās visiem $T > 0$, $t \in [0, T]$, $y \in \mathbf{Y}$. □

Secinājums 3.1.5. *Katram $T > 0$ eksistē tādas pozitīvas konstantes ε_T un A_T, ka nevienādība*

$$\mathbf{E}_{x,y}\left|x_\varepsilon(t) + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\right) - x - \varepsilon\Pi_x F_1\left(x, y\right)\right|^2 \leq tA_T\left(1 + |x|\right)^2 \tag{3.28}$$

izpildās visiem $t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $x \in \mathbf{R}^n$ un $y \in \mathbf{Y}$.

Pierādījums. Pārrakstīsim izteiksmi, kurai ir jāaprēķina matemātiskā cerība, formā:

$$\begin{aligned}
&\left|x_\varepsilon(t) + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\right) - x - \varepsilon\Pi_x F_1\left(x, y\right)\right|^2 = \\
&= \widetilde{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - \widetilde{v}_\varepsilon(x, y) - 2\left(x_\varepsilon(t) + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\right) - \right. \\
&\qquad \left. - x - \varepsilon\Pi_x F_1\left(x, y\right),\ x + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x, y\right)\right).
\end{aligned}$$

Apzīmēsim $x + \varepsilon\Pi_x F_1(x, y) = c$. Tad varam trešo saskaitāmo uzrakstīt šādi:

$$\begin{aligned}
&\left(x_\varepsilon(t) + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\right) - x - \varepsilon\Pi_x F_1\left(x, y\right), c\right) = \\
&= \widehat{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), c) - \widehat{v}_\varepsilon(x, y, c).
\end{aligned}$$

Tad no Secinājuma 3.1.4 iegūstam novērtējumu:

$$\left|\mathbf{E}_{x,y}\, \widehat{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), c) - \widehat{v}_\varepsilon(x, y, c)\right| \leq tA_{T2}\,|c|\,(1 + |x|)$$

kādai konstantei A_{T2}. Tā kā

$$|c| = \left|x + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)\right)\right| \leq K_1\left(1 + |x|\right)$$

kādai konstantei K_1, un no Secinājuma 3.1.3 iegūsim:

$$|\mathbf{E}_{x,y}\ \widetilde{v}_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - \widetilde{v}_\varepsilon(x, y)| < tA_{T1}(1 + |x|)^2$$

kādai A_{T1}, tāpēc varam uzrakstīt:

$$\mathbf{E}_{x,y}\left|x_\varepsilon(t) + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\right) - x - \varepsilon\Pi_x F_1\left(x, y\right)\right|^2 \leq$$

$$\leq tA_{T1}(1 + |x|)^2 + tK_1 A_{T2}(1 + |x|)^2 \leq tA_{T4}(1 + |x|)^2,$$

kur $A_{T4} = A_{T1} + K_1 A_{T2}$. □

Secinājums 3.1.6. *Katram $T > 0$ eksistē tādas pozitīvas konstantes ε_T un A_T, ka nevienādība*

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{\left|x_\varepsilon(t) + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\right) - \right.\right. \leq$$

$$\left.\left. -x_\varepsilon(s) - \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)\right)\right|^2 \Big/ \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\} \leq$$

$$\leq (t - s)A_T\left(1 + |x_\varepsilon(s)|\right)^2 \tag{3.29}$$

izpildās visiem $s, t \in [0, T]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_T)$, $x \in \mathbf{R}^n$ un $y \in \mathbf{Y}$.

Pierādījums. Lietojot formulu

$$\mathbf{E}\left\{v\left(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\right) \Big/ \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\} = \mathbf{E}_{x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)}\ v\left(x_\varepsilon(t - s), y_\varepsilon(t - s)\right),$$

var pārrakstīt (3.29) formā

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{\left|x_\varepsilon(t) + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -x_\varepsilon(s) - \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)\right)\right|^2 \Big/ \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\} =$$

$$\mathbf{E}_{x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)}\left\{\left|x_\varepsilon(t - s) + \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(t - s), y_\varepsilon(t - s)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -x_\varepsilon(s) - \varepsilon\Pi_x F_1\left(x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)\right)\right|^2\right\} \leq$$

(skat. (3.28))

$$\leq (t - s)A_T\left(1 + |x_\varepsilon(s)|\right)^2.$$

□

Nodefinēsim vektoru $b(x)$ šādi:

$$b(x) = \sum_{y\in\mathbf{Y}} F_2(x,y)\mu_x(y) + \sum_{y\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,y)] f_1(x,y)\mu_x(y) +$$

$$+ \sum_{y\in\mathbf{Y}} a(x,y) \sum_{z\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,z)] g_1(x,y) p_x(y,z)\ \mu_x(y)$$

un simetrisku matricu $A(x) = \{a_{i,j}(x)\}_{i,j=1}^n$ ar formulu:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^i\, \partial x^j} = \frac{1}{2} tr\left[A(x) D\nabla v(x)\right] =$$

$$= \sum_{y\in\mathbf{Y}} \left([D\nabla v(x)] F_1(x,y)\ , \Pi_x F_1(x,y)\right) \mu_x(y) -$$

$$- \sum_{y\in\mathbf{Y}} \left([D\nabla v(x)] g_1(x,y)\ , \frac{a(x,y)}{2} g_1(x,y) + f_1(x,y)\right) \mu_x(y),$$

kur $v(x)$ ir patvaļīga pietiekoši gluda skalāra funkcija. Pēc konstrukcijas

$$b_j \in \mathbf{V}_1,\ |\nabla b_i| \in \mathbf{V}_1,\ a_{ij} \in \mathbf{V}_0,\ |\nabla a_{ij}| \in \mathbf{V}_0,\ \|D\nabla a_{ij}\| \in \mathbf{V}_0 \tag{3.30}$$

visiem $i, j = 1, 2, ..., n$.

Lemma 3.1.5. *Pieņemsim, ka $v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 u$ ir funkcionālis no Lemmas 3.1.3, un $u(x,y)$ apmierina vienādojumu $Q_x u + F = 0$, kur*

$$F(x,y) = (\nabla v_0(x), (D\left[\Pi_x F_1(x,y)\right] f_1(x,y)) + F_2(x,y) + \tag{3.31}$$

$$\left. + a(x,y) \sum_{z\in\mathbf{Y}} g_1(x,y) \left(D\left[\Pi_x F_1(x,z)\right]\right) p_x(y,z)\ - b(x)\right) +$$

$$+ \left([D\nabla v_0(x)] F_1(x,y)\ , \Pi_x F_1(x,y)\right) -$$

$$- \left([D\nabla v_0(x)] g_1(x,y)\ , \frac{a(x,y)}{2} g_1(x,y) + f_1(x,y)\right) -$$

$$- \frac{1}{2} tr[A(x) D\nabla v_0(x)].$$

Tad $\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v \in \mathbf{V}_p$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1} \left\|\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v\right\|_p < \infty$ un visiem $x \in \mathbf{R}^n$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v(x,y) = \mathcal{L}_0 v_0(x),$$

kur

$$\mathcal{L}_0 v_0(x) = \frac{1}{2} tr[A(x) D\nabla v_0(x)] + (\nabla v_0(x), b(x)). \tag{3.32}$$

Pierādījums. Pēc Fredholma alternatīvas vienādojumam

$$Q_x u = -F$$

eksistē atrisinājums, ja izpildās nosacījums:

$$\sum_{y \in \mathbf{Y}} F(x,y)\mu_x(y) = 0.$$

Ja atrisinājums eksistē, to var uzrakstīt formā: $u(x,y) = \Pi_x F(x,y)$. Tad operators $\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)$ no Lemmas 3.1.3 būs formā:

$$\left(\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v\right)(x,y) = \frac{1}{2}tr[A(x)D\nabla v_0(x)] + (\nabla v_0(x), b(x)) +$$

$$+\varepsilon r_{1\varepsilon}(x,y) + r_{2\varepsilon}(x,y) + r_{3\varepsilon}(x,y) \tag{3.33}$$

un visi Secinājumu apgalvojumi izriet no iepriekšēja punkta lemmām. □

Vēlāk mēs pierādīsim, ka matrica $A(x)$ ir pozitīvi definita. Tad varam apgalvot (skat. [18]), ka operatoru $\mathcal{L}_0$ no (3.32) var uzskatīt par kāda difūziju Markova procesa $\{\overline{x}(t),\ t \geq 0\}$ infinitezimālo operatoru kādā varbūtību telpā.

Teorēma 3.1.1. *Ja izpildās iepriekšminētie nosacījumi, tad process $x_\varepsilon(t)$ vāji konverģē, ja $\varepsilon \to 0$, uz difūziju Markova procesu $\overline{x}(t)$ ar infinitezimalo operatoru $\mathcal{L}_0$.*

Pierādījums. Lai pierādītu procesa $x_\varepsilon(t)$ vājo konverģenci uz difūziju Markova procesu $\overline{x}(t)$, ir pietiekoši pierādīt [66], ka procesu saime $x_\varepsilon(t)$ ir relatīvi vāji kompakta, ja $\varepsilon \to 0$, un jebkurai nepārtrauktai funkcijai $v(x)$ ar diviem nepārtrauktiem atvasinājumiem un kompaktības nesēju izpildās

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \sup_{0 \leq s < t \leq T} \left| \mathbf{E}_{x,y} \left\{ v(x_\varepsilon(t)) - v(x_\varepsilon(s)) - \int_s^t \mathcal{L}_0 v(x_\varepsilon(\tau))d\tau \right\} \right| = 0$$

visiem $T > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ un $y \in \mathbf{Y}$. Relatīva kompaktība telpā $D([0,T],\ \mathbf{R}^n)$ izriet ([5],[35]) no (3.23) un tādu pozitīvu konstanšu $\delta, \beta, \varepsilon_0$ eksistences, ka jebkuram $\rho > 0$, un visiem $x \in \{|x| < \rho\}$, $y \in \mathbf{Y}$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, $T > 0$, $s \in [0,T]$, $\tau \in [s,T]$ un $t \in [\tau,T]$ ir spēkā:

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(\tau)|^\gamma\, |x_\varepsilon(\tau) - x_\varepsilon(s)|^\gamma\right\} \leq c\,(t-s)^{1+\beta}, \tag{3.34}$$

kur konstante c nav atkarīga no $s, \tau, t, \varepsilon, x$ un y, ja x pieder kādai kompaktai kopai no $\mathbf{R}^n$.

Nodefinēsim funkciju $\varphi(x,y,\varepsilon)$ ar formulu:

$$\varphi(x,y,\varepsilon) = x + \varepsilon \Pi_x F_1(x,y).$$

No nevienādības (3.19) izriet, ka kādam $\varepsilon_1 > 0$ jebkuram $r > 0$ un $T > 0$, visiem $\rho > r$, $x \in B_r$, $y \in \mathbf{Y}$ un $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$

$$\mathbf{P}_{x,y}\left\{\sup_{0<t<T} |x_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), \varepsilon)| \geq \rho\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left\{\sup_{0<t<T} |\varepsilon \Pi_x F_1(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))| \geq \rho\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left\{h \|F_1\|_1 \sup_{0<t<T} (1 + |x_\varepsilon(t)|) \geq \rho\right\} \leq \frac{k_2(1+r)}{k_1 \frac{\rho}{\varepsilon h(1+\|F_1\|_1)}} e^{\frac{h_3}{k_1}T} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Tad ir pietiekoši pierādīt, ka (3.34) izpildās procesam

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = \varphi_\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), \varepsilon).$$

No Secinājuma 3.1.6 izriet nevienādība:

$$\mathbf{E}\left\{|\tilde{x}_\varepsilon(t) - \tilde{x}_\varepsilon(s)|^2 / \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\} \leq (t-s) A_T \left(1 + |x_\varepsilon(s)|^2\right)$$

visiem $s \in [0,T]$, $t \in [s,T]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_T)$, $x \in \mathbf{R}^n$ un $y \in \mathbf{Y}$. Tagad mēs varam lietot novērtējumus no [6], lpp.452:

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{|\tilde{x}_\varepsilon(t) - \tilde{x}_\varepsilon(\tau)|^{\frac{3}{2}} |\tilde{x}_\varepsilon(\tau) - \tilde{x}_\varepsilon(s)|^{\frac{3}{2}}\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{E}_{x,y}\left\{\left(\mathbf{E}\left\{|\tilde{x}_\varepsilon(t) - \tilde{x}_\varepsilon(\tau)|^2 / \mathcal{F}^{\tau/\varepsilon^2}\right\}\right)^{\frac{3}{4}} |\tilde{x}_\varepsilon(\tau) - \tilde{x}_\varepsilon(s)|^{\frac{3}{2}}\right\} \leq$$

$$\leq A_T^{\frac{3}{4}} (t-\tau)^{\frac{3}{4}} \mathbf{E}_{x,y}\left\{\mathbf{E}\left\{(1 + |x_\varepsilon(\tau)|)^{\frac{3}{2}} |\tilde{x}_\varepsilon(\tau) - \tilde{x}_\varepsilon(s)|^{\frac{3}{2}} / \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\}\right\} \leq$$

$$\leq A_T^{\frac{3}{4}} (t-\tau)^{\frac{3}{4}} \mathbf{E}_{x,y}\left\{\left(\mathbf{E}\left\{(1 + |x_\varepsilon(\tau)|)^6 / \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\}\right)^{\frac{1}{4}} * \leq\right.$$

$$\left. * \left(\mathbf{E}\left\{|\tilde{x}_\varepsilon(\tau) - \tilde{x}_\varepsilon(s)|^2 / \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\}\right)^{\frac{3}{4}}\right\} \leq A_T^{\frac{3}{2}} (t-\tau)^{\frac{3}{4}} (\tau - s)^{\frac{3}{4}} *$$

$$* \mathbf{E}_{x,y}\left\{\left(\mathbf{E}\left\{(1 + |x_\varepsilon(\tau)|)^6 / \mathcal{F}^{s/\varepsilon^2}\right\}\right)^{\frac{1}{4}} (1 + |x_\varepsilon(s)|)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Izmantojot (3.12), iegūstam procesam $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ formulu (3.34) ar $\gamma = \frac{3}{2}$ un $\beta = \frac{1}{2}$.

Tātad mēs pierādījām, ka saime $x_\varepsilon(t)$ ar $\varepsilon \in (0,1)$ ir relatīvi vāji kompakta. Tagad pieņemsim, ka virkne $x_{\varepsilon_k}(t)$ vāji konverģē uz kādu procesu $\overline{x}(t)$, ja $\varepsilon_k \to 0$.

Apskatīsim funkcionāli

$$u_\varepsilon(x,y) = (x,c)^2 + 2\varepsilon\,(x,c)\,(\Pi_x F_1(x,y),c) + \varepsilon^2 u(x,y),$$

kur

$$\begin{aligned} u(x,y) = \Pi_x \{&2\,(F_1(x,y),c)\,(\Pi_x F_1(x,y),c) - \\ &-2\,(g_1(x,y),c)\left(f_1(x,y) + \frac{1}{2}a(x,y)g_1(x,y)\ ,c\right) + \\ &+2\,(x,c)\,(F_2(x,y),c) + 2\,(x,c)\,((D[\Pi_x F_1(x,y)])\,f_1(x,y),c) + \\ &+2\,(x,c)\left(a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,z)]g_1(x,y)\ p_x(y,z)\ ,c\right) - \\ &-(A(x)c,c) - 2(x,c)\,(b(x),c)\}\,. \end{aligned}$$

No Lemmām 3.1.5 un 3.1.3 iegūstam:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)u_\varepsilon(x,y) = (A(x)c,c) + 2(x,c)\,(b(x),c) + r_{4\varepsilon}(x,y),$$

kur $r_{4\varepsilon}(x,y) \in \mathbf{V}_2$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1} \|r_{4\varepsilon}(x,y)\|_2 < \infty$ un

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} r_{4\varepsilon}(x,y) = 0$$

visiem $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}$.

Apskatīsim arī funkcionāli

$$\check{v}_\varepsilon(x,y) = (x,c) + 2\varepsilon\,(\Pi_x F_1(x,y),c) + \varepsilon^2 \check{u}(x,y),$$

kur

$$\begin{aligned} \check{u}(x,y) = \Big\{&(F_2(x,y),c) + (D[\Pi_x F_1(x,y)]f_1(x,y),c) + \\ &+\Big(a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,z)]g_1(x,y)\ p_x(y,z)\ ,c\Big) - (b(x),c)\Big\}. \end{aligned}$$

Pēc konstrukcijas

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)\check{v}_\varepsilon(x,y) = (b(x),c) + r_{5\varepsilon}(x,y)$$

kur $r_{5\varepsilon}(x,y) \in \mathbf{V}_2$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1} \|r_{5\varepsilon}(x,y)\|_2 < \infty$ un $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} r_{4\varepsilon}(x,y) = 0$ visiem $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}$.

Tagad lietosim formulu:

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{(\overline{x}(t)-x,c)^2\right\}=$$

$$=\mathbf{E}_{x,y}\left\{(\overline{x}(t),c)^2\right\}-(x,c)^2-2(x,c)\left(\mathbf{E}_{x,y}\left\{(\overline{x}(t),c)-(x,c)\right\}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\mathbf{E}_{x,y}\,u_{\varepsilon_k}\left(x_{\varepsilon_k}(t),y_{\varepsilon_k}(t)\right)-u_{\varepsilon_k}(x,y)\right\}-$$

$$-2\,(x,c)\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\mathbf{E}_{x,y}\,\widehat{v}_{\varepsilon_k}\left(x_{\varepsilon_k}(t),y_{\varepsilon_k}(t)\right)-\widehat{v}_{\varepsilon_k}(x,y)\right\}$$

Izpildoties formulai (3.12), iegūstam

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbf{E}_{x,y}\,r_{j\varepsilon}\left(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t)\right)=0,\qquad j=4,5$$

visiem $x\in\mathbf{R}^n$, $y\in\mathbf{Y}$, $T>0$ vienmērīgi pēc $t\in[0,T]$. Tātad, visiem $t\geq 0$

$$0\leq\mathbf{E}_{x,y}\left\{(\overline{x}(t)-x,c)^2\right\}=\int_0^t\mathbf{E}_{x,y}\left(A\left(\bar{x}(s)\right)c,c\right)ds+$$

$$+2\int_0^t\mathbf{E}_{x,y}\left\{(\bar{x}(s),c)\left(b\left(\bar{x}(s)\right),c\right)\right\}ds-2\int_0^t\mathbf{E}_{x,y}\left(b\left(\bar{x}(s)\right),c\right)ds,$$

un tad

$$(A(x)c,c)=\frac{d}{dt}\mathbf{E}_{x,y}\left\{(\overline{x}(t)-x,c)^2\right\}\bigg|_{t=0}\geq 0$$

visiem $x\in\mathbf{R}^n$, $y\in\mathbf{Y}$, $c\in\mathbf{R}^n$. Mēs pierādījam, ka matrica $A(x)$ ir pozitīvi definita. No tā izriet, ka eksistē tāda pozitīva simetriska matrica $\bar{A}(x)$, ka $\left(\bar{A}(x)\right)^2=A(x)$.

Pieņemsim, ka $v_0(x)$ ir nepārtraukta funkcija ar diviem nepārtrauktiem atvasinājumiem un kompaktības nesēju, v_1 un u apmierina Lemmas 3.1.5 nosacījumus, un $v_\varepsilon=v_0+\varepsilon v_1+\varepsilon^2 u$. Tad, lietojot Lemmu 3.1.5, varam uzrakstīt:

$$\mathbf{E}_{x,y}v_\varepsilon\left(x_\varepsilon(t),y_\varepsilon(t)\right)=v_\varepsilon(x,y)+\int_0^t\mathbf{E}_{x,y}\left\{\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)v_\varepsilon\left(x_\varepsilon(\tau),y_\varepsilon(\tau)\right)\right\}d\tau$$

$$=v_\varepsilon(x,y)+\int_0^t\mathbf{E}_{x,y}\left\{\mathcal{L}_0v_0\left(x_\varepsilon(\tau)\right)\right\}d\tau+\int_0^t\mathbf{E}_{x,y}\left\{\hat{r}_\varepsilon\left(x_\varepsilon(\tau),y_\varepsilon(\tau)\right)\right\}d\tau$$

kur $\hat{r}_\varepsilon(x,y) \in \mathbf{V}_0$, $\sup\limits_{0<\varepsilon<1} \|\hat{r}_\varepsilon(x,y)\|_0 < \infty$ un $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \hat{r}_\varepsilon(x,y) = 0$ visiem $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{Y}$. Tātad

$$\mathbf{E}_{x,y} v_\varepsilon (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - \mathbf{E}_{x,y} v_\varepsilon (x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s)) = \mathbf{E}_{x,y}\, v_0 (x_\varepsilon(t)) -$$

$$-\mathbf{E}_{x,y}\, v_0 (x_\varepsilon(s)) + +\varepsilon \left[\mathbf{E}_{x,y} \left\{\gamma (x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) - \gamma (x_\varepsilon(s), y_\varepsilon(s))\right\}\right],$$

$$\int_s^t \mathbf{E}_{x,y} \left\{\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon) v_\varepsilon (x_\varepsilon(\tau), y_\varepsilon(\tau))\right\} d\tau =$$

$$= \int_s^t \mathbf{E}_{x,y} \left\{\mathcal{L}_0 v_0 (x_\varepsilon(\tau))\right\} d\tau + \int_s^t \mathbf{E}_{x,y} \left\{\hat{r}_\varepsilon (x_\varepsilon(\tau), y_\varepsilon(\tau))\right\} d\tau,$$

kur

$$\gamma(x,y) = v_1(x,y) + \varepsilon u(x,y)$$

un $v_1 \in \mathbf{V}_0$, $u \in \mathbf{V}_0$, jo funkcijai $v_0(x)$ un tās atvasinājumiem ir kompaktības nesējs . Tad

$$\sup_{\substack{0 \le s \le T \\ t-s<\varepsilon}} \Bigg| \mathbf{E}_{x,y}\, v_0 (x_\varepsilon(t)) - \mathbf{E}_{x,y}\, v_0 (x_\varepsilon(s)) -$$

$$- \int_s^t \mathbf{E}_{x,y} \left\{\mathcal{L}_0 v_0 (x_\varepsilon(\tau))\right\} d\tau \Bigg| = o(\varepsilon) \qquad (3.35)$$

izpildās visiem $T > 0$, $x \in \mathbf{R}^n$ un $y \in \mathbf{Y}$. No tā varam secināt [18], ka jebkurš robežprocess $\bar{x}(t)$ apmierina stohastisku diferenciālvienādojumu

$$d\bar{x} = b(\bar{x})dt + \overline{A}(\bar{x})dw(t) \qquad (3.36)$$

kur $w(t)$ ir standarta Vīnera process telpā $\mathbf{R}^n$. Ja ir spēkā (3.31), tad vienādojumam (3.36) ar sākuma nosacījumu $x(0) = x$ eksistē viens vienīgs atrisinājums visiem $x \in \mathbf{R}^n$. Tātad virkne $\{x_\varepsilon(t)\}$ vāji konverģē uz difūziju Markova procesu $\bar{x}(t)$, kurš apmierina stohastisko diferenciālvienādojumu (3.36). Teorēma ir pierādīta. □

Tagad atgriezīsimies pie sistēmas, kuru mēs apskatījām šīs daļas sakumā:

$$\frac{dx_\varepsilon(t)}{dt} = \frac{1}{\varepsilon} f_1(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) + f_2(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) + f_3^\varepsilon(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)), \quad (3.37)$$

ja $t \in (\tau_{j-1}^{\varepsilon^2}, \tau_j^{\varepsilon^2})$,

$$x_\varepsilon(\tau_j) = x_\varepsilon(\tau_j - 0) + \varepsilon g_1(x_\varepsilon(\tau_j - 0), y_\varepsilon(\tau_j - 0)) +$$

$$+\varepsilon^2 g_2(x_\varepsilon(\tau_j-0),y_\varepsilon(\tau_j-0))+\varepsilon^2 g_3^\varepsilon(x_\varepsilon(\tau_j-0),y_\varepsilon(\tau_j-0)), \quad (3.38)$$

kur $f_3^\varepsilon(x,y)$ un $g_3^\varepsilon(x,y)$ ir nepārtrauktas funkcijas ar nepārtrauktiem, vienmērīgi (pēc $x\in\mathbf{R}^n$, $y\in\mathbf{Y}$, $\varepsilon\in[0,1]$) ierobežotiem atvasinājumiem pēc x, kuriem ir spēkā

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}|f_3^\varepsilon(x,y)|=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}|g_3^\varepsilon(x,y)|=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\|Df_3^\varepsilon(x,y)\|=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\|Dg_3^\varepsilon(x,y)\|=0. \quad (3.39)$$

Secinājums 3.1.7. *Ja izpildās iepriekšminētie nosacījumi, sistēmas (3.37)-(3.38) atrisinājumi $x_\varepsilon(t)$ vāji konverģē, ja $\varepsilon\to 0$, uz difūziju Markova procesu $\bar{x}(t)$ ar infinitezimālo operatoru $\mathcal{L}_0$.*

Pierādījums. Tā kā ir spēkā novērtējumi

$$|f_3^\varepsilon(x,y)|\in\mathbf{V}_1,\quad |g_3^\varepsilon(x,y)|\in\mathbf{V}_1,$$

$$\|Df_3^\varepsilon(x,y)\|\in\mathbf{V}_0,\quad \|Dg_3^\varepsilon(x,y)\|\in\mathbf{V}_0$$

jebkuram $\varepsilon\in(0,1)$ un

$$\sup_{0\le\varepsilon\le 1}\{\|f_3^\varepsilon(x,y)\|_1+\|g_3^\varepsilon(x,y)\|_1+\|Df_3^\varepsilon(x,y)\|_0+\|Dg_3^\varepsilon(x,y)\|_0\}<\infty,$$

mēs varam uzrakstīt sistēmas (3.37)-(3.38) infinitezimālajam operatoram $\mathcal{L}(\varepsilon)$, sistēmas (3.1)-(3.2) infinitezimālajam operatoram un u no Lemmas 3.1.5:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left|\mathcal{L}(\varepsilon)u(x,y)-\widetilde{\mathcal{L}}(\varepsilon)u(x,y)\right|=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}|(\nabla u(x,y),f_3^\varepsilon(x,y))+$$

$$+a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}}\left[u\left(x+\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)+\varepsilon^2 g_3^\varepsilon(x,y)\ ,z\right)-\right.$$

$$\left.-u\left(x+\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)\ ,z\right)\right]p_x(y,z)\Big|=0.$$

□

3.2. Stabilitāte, balstoties uz difūziju aproksimāciju

3.2.1. Palīgnovērtējumi

$$D[\Pi_x F_1(x,y)] = \Pi_x \{DF_1(x,y) + DQ_x [\Pi_x F_1(x,y)]\} \tag{3.40}$$

Novērtēsim operatoru $\nabla_x Q_x v(y)$, kurš tika nodefinēts formulā (1.3):

$$|\nabla_x Q_x u(y)| = \left|\nabla_x a(x,y) \sum_{z\in \mathbf{Y}} u(z) p_x(y,z) - \nabla_x a(x,y) u(y)\right| +$$

$$+ \left|a(x,y) \sum_{z\in \mathbf{Y}} u(z) \nabla_x p_x(y,z)\right| \le$$

$$\le c_1 \sup_{z\in \mathbf{Y}} \|u(z)\| + c_1 \sup_{y\in \mathbf{Y}} \|u(y)\| + a_2 C_1 \sup_{z\in \mathbf{Y}} \|u(z)\| \le \hat{C}_1 \sup_{y\in \mathbf{Y}} \|u(y)\| . \tag{3.41}$$

kur konstantes c_1 un C_1 no (2.10).

Tagad varam novērtēt (3.40):

$$\|D[\Pi_x F_1(x,y)]\| \le h \{\|DF_1(x,y)\| + \|DQ_x [\Pi_x F_1(x,y)]\|\} \le$$

$$\le h \sup_{x\in \mathbf{R}^n,\, y\in \mathbf{Y}} \|DF_1(x,y)\| + h^2 \hat{C}_1 \sup_{x\in \mathbf{R}^n,\, y\in \mathbf{Y}} \|F_1(x,y)\| . \tag{3.42}$$

Aprēķinot $\nabla b(x)$, sastopam izteiksmi $D^2(\Pi_x F)(x,y)$.

$$D^2(\Pi_x F)(x,y) =$$

$$= \Pi_x \left\{D^2 F(x,y) + D^2 Q_x [\Pi_x F(x,y)] + 2DQ_x [D(\Pi_x F)(x,y)]\right\}$$

Lai novērtētu šo izteiksmi, mums ir jāiegūst operatora $D\nabla_x Q_x$ normas novērtējums. Pēc šī operatora definīcijas, kura dota 1.daļas sākumā, varam uzrakstīt:

$$\|D\nabla_x Q_x v(y)\| \le \|D\nabla_x a(x,y)\| \left|\sum_{z\in \mathbf{Y}} [v(z) p_x(y,z) - v(y)]\right| +$$

$$+ |\nabla_x a(x,y)| \left|\sum_{z\in \mathbf{Y}} v(z) [\nabla_x p_x(y,z)]^T\right| +$$

$$+ \left\|\sum_{z\in \mathbf{Y}} v(z) \nabla_x p_x(y,z) [\nabla_x a(x,y)]^T\right\| + \left\|a(x,y) \sum_{z\in \mathbf{Y}} v(z) D\nabla_x p_x(y,z)\right\| +$$

$$\leq c_2\left(\sup_{z\in\mathbf{Y}}|v(z)|+|v(y)|\right)+2c_1\sup_{z\in\mathbf{Y}}|v(z)|\sup_{y\in\mathbf{Y}}\sum_{z\in\mathbf{Y}}|\nabla_x p_x(y,z)|+$$

$$+a_2\sup_{z\in\mathbf{Y}}|v(z)|\sup_{y\in\mathbf{Y}}\sum_{z\in\mathbf{Y}}\|D\nabla_x p_x(y,z)\|\leq$$

$$\leq c_2\left(\sup_{z\in\mathbf{Y}}|v(z)|+\sup_{y\in\mathbf{Y}}|v(y)|\right)+2c_1C_1\sup_{z\in\mathbf{Y}}|v(z)|+$$

$$+a_2C_2\sup_{z\in\mathbf{Y}}|v(z)|\leq\hat{C}\sup_{z\in\mathbf{Y}}|v(z)|$$

pozitīvai konstantei $\hat{C}=2c_2+2c_1C_1+a_2C_2$.

Novērtēsim $(\Pi_x F)(x,y)$ otro atvasinājumu:

$$\sup_{y\in\mathbf{Y}}\left\|D^2(\Pi_x F)(x,y)\right\|\leq$$

$$\leq h\sup_{y\in\mathbf{Y}}\left\|D^2F(x,y)+D^2Q_x\left[\Pi_xF(x,y)\right]+2DQ_x\left[D(\Pi_xF)(x,y)\right]\right\|\leq$$

$$\leq h\left\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{Y}}\left\|D^2F(x,y)\right\|+\widehat{C}\sup_{x\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{Y}}\|\Pi_xF(x,y)\|+\right.$$

$$\left.+2\widehat{C}_1\sup_{x\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{Y}}\|D(\Pi_xF)(x,y)\|\right\}\leq$$

$$\leq h\left\{\sup_{x\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{Y}}\left\|D^2F(x,y)\right\|+\widehat{C}h\sup_{x\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{Y}}|F(x,y)|+\right.$$

$$\left.+2\widehat{C}_1\left[h\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|DF(x,y)\|+h^2\hat{C}_1\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|F(x,y)|\right]\right\}\leq$$

$$\leq h\sup_{x\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{Y}}\left\|D^2F(x,y)\right\|+h^2\left(\widehat{C}+2h\hat{C}_1^2\right)\sup_{x\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{Y}}|F(x,y)|+$$

$$+2h^2\widehat{C}_1\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|DF(x,y)\|$$

pozitīvām konstantēm $\widehat{C}_1,\widehat{C}_2$.

3.2.2. Stabilitāte

Apskatīsim sistēmu (3.1)-(3.2) pie nosacījumiem:

$$f_1(0, y_\varepsilon(t)) = f_2(0, y_\varepsilon(t)) = f_3(0, y_\varepsilon(t)) \equiv 0,$$
$$g_1(0, y) = g_2(0, y) = g_3(o, y) \equiv 0$$

Apzīmēsim ar U_ρ lodi $\{|x| \leq \rho\}$, $0 < \rho < 1$.

Sākotnējas sistēmas (3.1)-(3.2) pētīšanai konstruēsim perturbētu Ļapunova funkciju sekojošā veidā:

$$v(x, y) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x, y) + \varepsilon^2 v_2(x, y), \tag{3.43}$$

kur

$$v_1(x, y) = (\Pi_x F_1(x, y), \nabla v_0(x)) \tag{3.44}$$

un $v_2(x, y)$ tiek izvēlēta tā, lai izpildītos vienādība:

$$\begin{aligned} Q_x v_2(x, y) = {} & (L_0 v_0)(x) - \Big(\nabla v_0(x), (D[\Pi_x F_1(x, y)]) F_1(x, y) + \\ & + F_2(x, y) + a(x, y) \sum_{z \in \mathbf{Y}} g_1(x, y) (D[\Pi_x F_1(x, z)]) p_x(y, z) \Big) - \\ & - ([D \nabla v_0(x)] F_1(x, y), \Pi_x F_1(x, y)) + \\ & + \left([D \nabla v_0(x)] g_1(x, y), \frac{a(x, y)}{2} g_1(x, y) + f_1(x, y) \right). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Tāda funkcija eksistē, jo vienādojuma (3.45) labajai pusei izpildās Fredholma alternatīva (šis fakts tika pierādīts iepriekšējā daļā). Kā izriet no Lemmas ??, $v_2(x, y)$ var izvēlēties formā:

$$v_2(x, y) = \Pi_x F(x, y), \tag{3.46}$$

kur $F(x, y)$ ir no formulas (3.31).

Lemma 3.2.1. *Pieņemsim, ka funkcija $v_0(x)$ apmierina nosacījumus:*

$$c_1 |x|^p \leq v_0(x) \leq c_2 |x|^p \tag{3.47}$$

$$\left\| D^j v_0(x) \right\| \leq \hat{k} |x|^{p-j}, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{3.48}$$

kur D^j– j-tās kārtas atvasinājumi, visas konstantes ir pozitīvas, un funkcija $v(x, y)$ tika nodefinēta formulā (3.43).

Tad funkcijām $v_1(x, y)$ un $v_2(x, y)$ ir spēkā novērtējumi:

$$|v_1(x, y)| \leq m_1 |x|^p, \quad |v_2(x, y)| \leq m_3 |x|^p,$$

$$\|\nabla v_1(x, y)\| \leq m_2 |x|^{p-1}, \quad \|\nabla v_2(x, y)\| \leq m_4 |x|^{p-1},$$

un funkcijai $v(x, y)$ ir spēkā novērtējums:

$$m_5 |x|^p \leq v(x, y) \leq m_6 |x|^p. \tag{3.49}$$

Pierādījums. Novērtēsim funkciju $v_1(x,y)$ un tās atvasinājuma pēc x normu:

$$|v_1(x,y)| = |(\Pi_x F_1(x,y), \nabla v_0(x))| \leq hk\,|x|\,\hat{k}\,|x|^{p-1} \leq m_1\,|x|^p\,, \tag{3.50}$$

kur $m_1 = hk\hat{k}$. Papildus lietosim šādus novērtējumus: $|F_2(x,y)| \leq k\,|x|$ un $\|DF_i(x,y)\| \leq k_1$, $\|D^2F_i(x,y)\| \leq k_2$, j=1,2.

$\|\nabla v_1(x,y)\| \leq \|D\Pi_x F_1(x,y)\|\cdot\|\nabla v_0(x)\| + \|\Pi_x F_1(x,y)\|\cdot\|D\nabla v_0(x)\| \leq$

(skat.(3.42))

$$\leq \left(h \sup_{x\in U_\rho,\, y\in \mathbf{Y}} \|DF_1(x,y)\| + h^2\hat{C}_1 \sup_{x\in U_\rho,\, y\in \mathbf{Y}} |F_1(x,y)|\right)\cdot\|\nabla v_0(x)\| +$$

$$+h \sup_{x\in U_\rho,\, y\in \mathbf{Y}} |F_1(x,y)|\cdot\|D\nabla v_0(x)\| \leq \left(hk_1 + h^2C_1k\,|x|\right)\hat{k}\,|x|^{p-1} +$$

$$+hk\,|x|\,\hat{k}\,|x|^{p-2} \leq m_2\,|x|^{p-1}$$

kur $m_2 = (hk_1 + h^2C_1k + hk)\,\hat{k}$.

Tagad varam novērtēt funkciju $v_2(x,y) = \Pi_x F(x,y)$, kur funkcija $F(x,y)$ tika nodefinēta formulā (3.31).

$$\|(b(x), \nabla v_0(x))\| \leq$$

$$\leq \left(\left\|\sum_{y\in\mathbf{Y}} F_2(x,y)\mu_x(y)\right\| + \left\|\sum_{y\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,y)]f_1(x,y)\mu_x(y)\right\| +\right.$$

$$\left.+\left\|\sum_{y\in\mathbf{Y}} a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,z)]g_1(x,y)p_x(y,z)\;\mu_x(y)\right\|\right)\cdot\|\nabla v_0(x)\| \leq$$

$$\leq \left(k\,|x| + 2\left[hk_1 + h^2\hat{C}_1k\,|x|\right]k\,|x|\right)\cdot\hat{k}\,|x|^{p-1} \leq K_1\,|x|^p,$$

kur $K_1 = \hat{k}k\left(1 + 2(hk_1 + h^2\hat{C}_1k)\right)$.

$$\left\|\frac{1}{2}tr\left[A(x)D\nabla v_0(x)\right]\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{y\in\mathbf{Y}} \left([D\nabla v_0(x)]F_1(x,y)\;,\Pi_x F_1(x,y)\right)\mu_x(y)\right\| +$$

$$+\left\|\sum_{y\in\mathbf{Y}} \left([D\nabla v_0(x)]g_1(x,y)\;,\frac{a(x,y)}{2}g_1(x,y) + f_1(x,y)\right)\mu_x(y)\right\| \leq$$

$$\leq \hat{k}\,|x|^{p-2}\,hk^2\,|x|^2 + \hat{k}\,|x|^{p-2}\,k^2\,|x|^2 \leq K_2\,|x|^p,$$

kur $K_2 = \hat{k}k^2(h+1)$.

Apzīmēsim ar $H(x,y)$ visu, kas paliek funkcijā $F(x,y)$ bez locekļiem $(b(x), \nabla v_0(x))$ un $\frac{1}{2}tr\,[A(x)D\nabla v_0(x)]$:

$$H(x,y) = (\nabla v_0(x), (D\,[\Pi_x F_1(x,y)])\,F_1(x,y) + F_2(x,y) +$$

$$\left. + a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}} g_1(x,y)\,(D\,[\Pi_x F_1(x,z)])\,p_x(y,z)\right) +$$

$$+ ([D\nabla v_0(x)]F_1(x,y)\ , \Pi_x F_1(x,y)) -$$

$$-\left([D\nabla v_0(x)]g_1(x,y)\ , \frac{a(x,y)}{2}g_1(x,y) + f_1(x,y)\right).$$

Tad

$$\|H(x,y)\| \leq \|\nabla v_0(x)\|\cdot\{\|(D\,[\Pi_x F_1(x,y)])\,F_1(x,y)\| + \|F_2(x,y)\| +$$

$$\left. + \left\| a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}} g_1(x,y)\,(D\,[\Pi_x F_1(x,z)])\,p_x(y,z)\right\| \right\} +$$

$$+ \|([D\nabla v_0(x)]F_1(x,y)\ , \Pi_x F_1(x,y))\| +$$

$$+ \left\|\left([D\nabla v_0(x)]g_1(x,y)\ , \frac{a(x,y)}{2}g_1(x,y) + f_1(x,y)\right)\right\| \leq$$

$$\leq \hat{k}\,|x|^{p-1}\left\{2\left[hk_1 + h^2C_1k\,|x|\right]k\,|x| + k\,|x|\right\} +$$

$$+\hat{k}\,|x|^{p-2}\,hk^2\,|x|^2 + \hat{k}\,|x|^{p-2}\,k^2\,|x|^2 \leq K_1\,|x|^p + K_2\,|x|^p$$

Tagad varam novērtēt funkcijas $F(x,y)$ normu:

$$\|F(x,y)\| \leq \|H(x,y)\| + \|(b(x), \nabla v_0(x))\| + \left\|\frac{1}{2}tr\,[A(x)D\nabla v_0(x)]\right\| \leq$$

$$\leq (2K_1 + 2K_2)\,|x|^p.$$

Tad, visbeidzot, varam iegūt funkcijas $v_2(x,y)$ novērtējumu:

$$|v_2(x,y)| \leq \|\Pi_x F(x,y)\| \leq h\,(2K_1 + 2K_2)\,|x|^p \leq m_3\,|x|^p, \quad (3.51)$$

kur $m_3 = h\,(2K_1 + 2K_2)$.

Kā izriet no formulas (3.40),

$$\nabla v_2(x,y) = \Pi_x\,\{DF(x,y) + DQ_x\Pi_x F(x,y)\} \quad (3.52)$$

Šo normu novērtēsim pa daļām. No (3.41) un (3.51) varam uzrakstīt:

$$\|DQ_x\Pi_x F(x,y)\| \leq \hat{C}_1 \sup_{x\in U_\rho,\, y\in \mathbf{Y}} \|\Pi_x F(x,y)\| \leq \hat{C}_1 m_3 |x|^p . \quad (3.53)$$

Tālāk ir jānovērtē norma $\|DF(x,y)\|$:

$$\|DF(x,y)\| \leq \|b(x)\,[D\nabla v_0(x)]\| + \|Db(x)\nabla v_0(x)\| + \|DH(x,y)\| \quad (3.54)$$

Vispirms aprēķināsim atvasinājumu $Db(x)$:

$$Db(x) = \sum_{y\in\mathbf{Y}} DF_2(x,y)\mu_x(y) + \sum_{y\in\mathbf{Y}} F_2(x,y)\nabla\mu_x(y) +$$

$$+ \sum_{y\in\mathbf{Y}} D^2[\Pi_x F_1(x,y)] f_1(x,y)\mu_x(y) +$$

$$+ \sum_{y\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,y)] Df_1(x,y)\mu_x(y) +$$

$$+ \sum_{y\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,y)] f_1(x,y)\nabla\mu_x(y) +$$

$$+ \sum_{y\in\mathbf{Y}} \nabla a(x,y) \sum_{z\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,z)] g_1(x,y) p_x(y,z)\; \mu_x(y) +$$

$$+ \sum_{y\in\mathbf{Y}} a(x,y) \sum_{z\in\mathbf{Y}} D^2[\Pi_x F_1(x,z)] g_1(x,y) p_x(y,z)\; \mu_x(y) +$$

$$+ \sum_{y\in\mathbf{Y}} a(x,y) \sum_{z\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,z)] Dg_1(x,y) p_x(y,z)\; \mu_x(y) +$$

$$+ \sum_{y\in\mathbf{Y}} a(x,y) \sum_{z\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,z)] g_1(x,y) \nabla p_x(y,z)\; \mu_x(y) +$$

$$+ \sum_{y\in\mathbf{Y}} a(x,y) \sum_{z\in\mathbf{Y}} D[\Pi_x F_1(x,z)] g_1(x,y) p_x(y,z)\; \nabla\mu_x(y).$$

Tagad varam novērtēt šī atvasinājuma normu, lietojot novērtējumu $\sum_{z\in\mathbf{Y}} \|\nabla\mu_x(z)\| \leq \hat{C}$ no 2.daļas :

$$\|Db(x)\| \leq \sup_{x\in\mathbf{R}^n,\, y\in\mathbf{Y}} \|DF_2(x,y)\| + \hat{C} \sup_{x\in\mathbf{R}^n,\, y\in\mathbf{Y}} |F_2(x,y)| +$$

$$+ \sup_{x\in\mathbf{R}^n,\, y\in\mathbf{Y}} \left\| D^2[\Pi_x F_1(x,y)] \right\| \sup_{x\in\mathbf{R}^n,\, y\in\mathbf{Y}} |f_1(x,y)| +$$

$$+\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|D[\Pi_x F_1(x,y)]\|\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|Df_1(x,y)\|+$$

$$+\hat{C}\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|D[\Pi_x F_1(x,y)]\|\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|f_1(x,y)|+$$

$$+c_1\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|D[\Pi_x F_1(x,y)]\|\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|g_1(x,y)|+$$

$$+a_2\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\left\|D^2[\Pi_x F_1(x,y)]\right\|\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|g_1(x,y)|+$$

$$+a_2\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|D[\Pi_x F_1(x,y)]\|\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|Dg_1(x,y)\|+$$

$$+a_2C_1\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|D[\Pi_x F_1(x,y)]\|\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|g_1(x,y)|+$$

$$a_2\hat{C}\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|D[\Pi_x F_1(x,y)]\|\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|g_1(x,y)|\le$$

$$\le\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|DF_2(x,y)\|+\hat{C}\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|F_2(x,y)|+$$

$$+\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\left\|D^2[\Pi_x F_1(x,y)]\right\|\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|F_1(x,y)|+$$

$$+\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|D[\Pi_x F_1(x,y)]\|\left(\hat{C}\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|F_1(x,y)|+\right.$$

$$\left.\times\, a_2\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}|g_1(x,y)|+\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|DF_1(x,y)\|\right).$$

No (1.22) ieguvām novērtējumu:

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\left\|D^2[\Pi_x F_1(x,y)]\right\|\le h\sup_{x\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{Y}}\left\|D^2F_1(x,y)\right\|+$$

$$+h^2\left(\widehat{C}+2h\widehat{C}_1^2\right)\sup_{x\in\mathbf{R}^n,y\in\mathbf{Y}}|F_1(x,y)|+2h^2\widehat{C}_1\sup_{x\in\mathbf{R}^n,\,y\in\mathbf{Y}}\|DF_1(x,y)\|\le$$

$$\le hk_2+h^2\left(\widehat{C}+2h\widehat{C}_1^2\right)k|x|+2h^2\widehat{C}_1k_1\le S_1,$$

kur konstante $S_1=hk_2+h^2\left(\widehat{C}+2h\widehat{C}_1^2\right)k+2h^2\widehat{C}_1k_1$. Un, visbeidzot, varam uzrakstīt:

$$\|Db(x)\|\le k_2+\hat{C}k|x|+S_1k|x|+$$

$$+S_0\left(\left[\hat{C}+1\right]k|x|+k_1\right)\le S_2,$$

kur S_2- kāda pozitīva konstante.

Tagad aprēķināsim atvasinājumu $\frac{1}{2}D\left\{tr\left[A(x)D\nabla v(x)\right]\right\}$:

$$\frac{1}{2}D\left\{tr\left[A(x)D\nabla v(x)\right]\right\}=\sum_{y\in\mathbf{Y}}[D^2\nabla v(x)]F_1(x,y)\ \Pi_x F_1(x,y)\mu_x(y)+$$

$$+\sum_{y\in\mathbf{Y}}[D\nabla v(x)]DF_1(x,y)\ \Pi_x F_1(x,y)\mu_x(y)+$$

$$+\sum_{y\in\mathbf{Y}}[D\nabla v(x)]F_1(x,y)\ D\left[\Pi_x F_1(x,y)\right]\mu_x(y)+$$

$$+\sum_{y\in\mathbf{Y}}[D\nabla v(x)]F_1(x,y)\ \Pi_x F_1(x,y)\nabla\mu_x(y)-$$

$$-\sum_{y\in\mathbf{Y}}[D^2\nabla v(x)]g_1(x,y)\ \left(\frac{a(x,y)}{2}g_1(x,y)+f_1(x,y)\right)\mu_x(y)-$$

$$-\sum_{y\in\mathbf{Y}}[D\nabla v(x)]Dg_1(x,y)\ \left(\frac{a(x,y)}{2}g_1(x,y)+f_1(x,y)\right)\mu_x(y)-$$

$$-\sum_{y\in\mathbf{Y}}[D\nabla v(x)]g_1(x,y)\ \left(\frac{1}{2}\nabla a(x,y)g_1(x,y)+\right.$$

$$\left.+\frac{a(x,y)}{2}Dg_1(x,y)+Df_1(x,y)\right)\mu_x(y)-$$

$$-\sum_{y\in\mathbf{Y}}\left([D\nabla v(x)]g_1(x,y)\ ,\ \frac{a(x,y)}{2}g_1(x,y)+f_1(x,y)\right)\nabla\mu_x(y).$$

Lietosim šādu novērtējumu:

$$\left\|D\left[\Pi_x F_1(x,y)\right]\right\|\leq\left(hk_1+h^2\widehat{C}_1 k\left|x\right|\right)\leq S_0$$

Tad varam novērtēt normu $\left\|\frac{1}{2}D\left\{tr\left[A(x)D\nabla v(x)\right]\right\}\right\|$:

$$\left\|\frac{1}{2}D\left\{tr\left[A(x)D\nabla v(x)\right]\right\}\right\|\leq$$

$$\leq\hat{k}\left|x\right|^{p-3}k^2\left|x\right|^2(h+1)+\hat{k}\left|x\right|^{p-2}k_1 k\left|x\right|(h+1)+$$

$$+\hat{k}\left|x\right|^{p-2}k\left|x\right|S_0+\widehat{C}\hat{k}\left|x\right|^{p-2}k^2\left|x\right|^2(h+1)\leq S_3\left|x\right|^{p-1}$$

kādai pozitīvai konstantei S_3.

Iegūsim funkcijas $H(x,y)$ atvasinājumu:

$$DH(x,y) = D\nabla v_0(x)\Big((D\,[\Pi_x F_1(x,y)])\,F_1(x,y)+$$

$$+F_2(x,y) + a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}} g_1(x,y)\,(D\,[\Pi_x F_1(x,z)])\,p_x(y,z)\;\Big)+$$

$$+\nabla v_0(x)\Big\{\Big(D^2\,[\Pi_x F_1(x,y)]\Big)\,F_1(x,y) + (D\,[\Pi_x F_1(x,y)])\,DF_1(x,y)+$$

$$+DF_2(x,y) + \nabla a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}} g_1(x,y)\,(D\,[\Pi_x F_1(x,z)])\,p_x(y,z) +$$

$$+a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}} \{Dg_1(x,y)\,(D\,[\Pi_x F_1(x,z)]) +$$

$$+g_1(x,y)\,\Big(D^2\,[\Pi_x F_1(x,z)]\Big)\Big\}\,p_x(y,z) +$$

$$+a(x,y)\sum_{z\in\mathbf{Y}} g_1(x,y)\,(D\,[\Pi_x F_1(x,z)])\,\nabla p_x(y,z)\Big\} +$$

$$+[D^2\nabla v_0(x)]F_1(x,y)\;\Pi_x F_1(x,y)+$$
$$+[D\nabla v_0(x)]DF_1(x,y)\;\Pi_x F_1(x,y)+$$
$$+[D\nabla v_0(x)]F_1(x,y)\;D\,[\Pi_x F_1]\,(x,y)+$$

$$-[D^2\nabla v_0(x)]g_1(x,y)\;\left(\frac{a(x,y)}{2}g_1(x,y) + f_1(x,y)\right) -$$

$$-[D\nabla v_0(x)]Dg_1(x,y)\;\left(\frac{a(x,y)}{2}g_1(x,y) + f_1(x,y)\right) -$$

$$-[D\nabla v_0(x)]g_1(x,y)\;\Big(\frac{1}{2}\nabla a(x,y)g_1(x,y)+$$

$$+\frac{a(x,y)}{2}Dg_1(x,y) + Df_1(x,y)\Big)\,.$$

Šī atvasinājuma normu novērtēsim:

$$\|DH(x,y)\| \le \hat{k}\,|x|^{p-2}\,(2k\,|x|\,S_0 + k\,|x|) + \hat{k}\,|x|^{p-1}\,(k\,|x|\,S_1+$$

$$+k_1S_0 + k_2 + +c_1S_0k\,|x| + k_1S_0 + S_1k\,|x| + C_1S_0k\,|x|)+$$
$$+\hat{k}\,|x|^{p-3}\,k^2\,|x|^2\,(h+1) + \hat{k}\,|x|^{p-2}\,k_1k\,|x|\,(h+1) +$$
$$+\hat{k}\,|x|^{p-2}\,k\,|x|\,S_0 + \hat{k}\,|x|^{p-2}\,k\,|x|\,k_1 \le S_4\,|x|^{p-1}\,.$$

Visbeidzot, varam pārrakstīt (3.54) formā

$$\|DF(x,y)\| \leq S_2 |x|^{p-1} + S_3 |x|^{p-1} + S_4 |x|^{p-1} \leq (S_2 + S_3 + S_4) |x|^{p-1}.$$

Tad $\|\nabla v_2(x,y)\|$ no (3.52) var novērtēt šādi:

$$\|\nabla v_2(x,y)\| \leq h\left((S_2 + S_3 + S_4)|x|^{p-1} + \hat{C}_1 m_3 |x|^p\right) \leq m_4 |x|^{p-1},$$

kur $m_4 = S_2 + S_3 + S_4 + \hat{C}_1 m_3$.
No formulām (3.47), (3.50) un (3.51) iegūstam prasīto (3.49). □

Lemma 3.2.2. *Pieņemsim, ka funkcija $v(x,y)$ ir funkcionālis no Lemmas 3.2.1.*
Tad

$$(L(\varepsilon)v)(x,y) = (L_0 v_0)(x) + r(x,y,\varepsilon), \tag{3.55}$$

$$|r(x,y,\varepsilon)| \leq m(\varepsilon)|x|^p \tag{3.56}$$

un $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} m(\varepsilon) = 0$ visiem $x \in U_\rho$, $y \in \mathbf{Y}$, kur operatori $L(\varepsilon)$ un L_0 tika nodefinēti 3.1.nodaļā.

Pierādījums. Tā kā funkcijas $v(x,y)$ veids ir tāds pats kā Lemmā 3.1.5, varam izmantot tās rezultātus. No tiem izriet, ka funkcijai $v(x,y)$ infinitezimālo operatoru $L(\varepsilon)v$ var uzrakstīt formā (3.55). Novērtēsim tagad atlikumu $r(x,y,\varepsilon)$ no formulas (3.55), izmantjot 3.1.2 paragrafa Lemmu rezultātus:

$$r(x,y,\varepsilon) = r_{1\varepsilon}(x,y) + r_{2\varepsilon}(x,y) + r_{3\varepsilon}(x,y),$$

kur $r_{1\varepsilon}(x,y)$ no Lemmas 3.1.1, $r_{2\varepsilon}(x,y)$ no Lemmas 3.1.2 un $r_{3\varepsilon}(x,y)$ no Lemmas 3.1.3.

$$r_{1\varepsilon}(x,y) = \varepsilon(\nabla v_2(x,y), f_1(x,y)) +$$

$$+\varepsilon a(x,y)\sum_{z\in Y}(\nabla v_2(x,z), g_1(x,y))\, p_x(y,z) +$$

$$+\varepsilon a(x,y)\sum_{z\in Y}\int_0^1 (\nabla v_2(x + s(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y)), z) -$$

$$-\nabla v_2(x,z), g_1(x,y))ds\; p_x(y,z) + +\varepsilon^2(\nabla v_2(x,y), f_2(x,y)) +$$

$$+\varepsilon^2 a(x,y)\sum_{z\in Y}\int_0^1 (\nabla v_2(x + s(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y)), z), g_2(x,y))ds\; p_x(y,z)$$

No novērtējuma

$$\left|\nabla v_2(x + s(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y)), z)\right| \leq$$

$$\leq m_4 \left|x + s(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y))\right|^{p-1} \leq$$

$$\leq m_4 (1 + 2k) |x|^{p-1}$$

seko, ka

$$|r_{1\varepsilon}(x,y)| \leq \varepsilon m_5 |x|^p$$

kādai pozitīvai konstantei m_5, visiem $s \in [0,1]$ un $\varepsilon \in (0,1)$.

$$r_{21\varepsilon}(x,y) = a(x,y) \int_0^1 \int_0^1 s \left((D\nabla v_0) \left(x + ts \left(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y) \right) \right) - \right.$$

$$\left. - D\nabla v_0(x) \right] (g_1(x,y) + \varepsilon g_2(x,y)), g_1(x,y) + \varepsilon g_2(x,y)) \, ds \, dt.$$

No nevienādības

$$\left| (D\nabla v_0) \left(x + ts \left(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y) \right) \right) \right| \leq$$

$$\leq \hat{k} \left| x + ts \left(\varepsilon g_1(x,y) + \varepsilon^2 g_2(x,y) \right) \right|^{p-2} \leq \hat{k} (1 + 2k) |x|^{p-2},$$

kura izpildās visiem $s, t \in [0,1]$ un $\varepsilon \in (0,1)$, seko novērtējums

$$|r_{21\varepsilon}(x,y)| \leq m_6 |x|^p$$

kādai pozitīvai konstantei m_6. Bez tam no attēlojuma $D\nabla v_0(x)$ nepārtrauktības attiecībā uz x seko: $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} r_{21\varepsilon}(x,y) = 0$ visiem $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{Y}$.

$$r_{22\varepsilon}(x,y) = \varepsilon \frac{a(x,y)}{2} \{ ([D\nabla v_0(x)] g_2(x,y), g_1(x,y)) +$$

$$+ ([D\nabla v_0(x)] g_1(x,y), g_2(x,y)) \} +$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{a(x,y)}{2} ([D\nabla v_0(x)] g_2(x,y), g_2(x,y)),$$

$$|r_{22\varepsilon}(x,y)| \leq 2\varepsilon \frac{a_2}{2} \hat{k} k^2 |x|^p + \varepsilon^2 \frac{a_2}{2} \hat{k} k^2 |x|^p.$$

Tad

$$|r_{2\varepsilon}(x,y)| \leq |r_{21\varepsilon}(x,y)| + |r_{22\varepsilon}(x,y)| \leq m_7 |x|^p$$

pozitīvai konstantei m_7.

$$r_{3\varepsilon}(x,y) = \varepsilon\left(\nabla v_1(x,y), f_2\right) +$$

$$+\varepsilon a(x,y)\sum_{z\in Y}\int_0^1\Big(\nabla v_1(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+$$

$$+\varepsilon^2 g_2(x,y)), z), g_2(x,y)\Big)ds\ p_x(y,z)+$$

$$+a(x,y)\sum_{z\in Y}\int_0^1\Big(\Big[\nabla v_1(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+$$

$$+\varepsilon^2 g_2(x,y)), z) - \nabla v_1(x,z)\Big], g_1(x,y)\Big)ds\ p_x(y,z).$$

No nevienādības

$$\Big|\nabla v_1(x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y)), z)\Big| \leq$$

$$\leq m_2\Big|x+s(\varepsilon g_1(x,y)+\varepsilon^2 g_2(x,y))\Big|^{p-1} \leq m_2\,(1+2k)\,|x|^{p-1}$$

seko novērtējums

$$|r_{3\varepsilon}(x,y)| \leq m_8\,|x|^p$$

pozitīvai konstantei m_8. Ir viegli redzēt, ka

$$|r\,(x,y,\varepsilon)| \leq m\,(\varepsilon)\,|x|^p$$

un $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} m(\varepsilon) = 0$ visiem $x \in U_\rho$, $y \in \mathbf{Y}$. Lemma ir pierādīta. □

Definīcija 2. *Vienādojuma (3.36) triviālo atrisinājumu sauksim par* eksponenciāli p-stabilu *kādam $p > 0$, ja eksistē tādas konstantes $M > 0, \gamma > 0$ un $p > 0$, ka katram $x \in \mathbf{R}^n$ un $t \geq 0$ izpildās $\mathbf{E}\,|\bar{x}(t)|^p \leq Me^{-\gamma t}\,|x|^p$.*

Teorēma 3.2.1. *Pieņemsim, ka vienādojuma (3.36) triviālais atrisinājums ir eksponenciāli p-stabils ar kādu p¿0. Tad eksistē tāds $\varepsilon_0 > 0$, ka visiem $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ sistēmas (3.1)-(3.2) atrisinājums $x(t)$ ir asimptotiski lokāli stabils pēc varbūtības.*

Pierādījums. Stohastiskajam diferenciālvienādojumam (3.36) var izveidot Ļapunova funkcionāli formā:

$$v_0(x) = \int_0^T \mathbf{E}_x \left|\bar{x}(t)\right|^p dt,$$

kur $\bar{x}(t)$–vienādojuma (3.36) atrisinājums. Saskaņā ar Hasjminska rezultātiem ([35]), pietiekoši lielam T ir spēkā novērtējumi (3.47), (3.48), un var uzrakstīt:

$$\left(L_0^\varepsilon v_0\right)(x) \leq -c_3 \left|x\right|^p . \tag{3.57}$$

Stabilitātes pētīšanai izmantosim Ļapunova funkcionāli no Lemmas 3.2.1. No novērtējumiem (3.55) un (3.56) seko, ka eksistē tāds pietiekoši mazs ε_0, ka

$$\left(L(\varepsilon)v\right)(x,y) \leq -m_7 \left|x\right|^p \tag{3.58}$$

visiem $x \in U_\rho$, $y \in \mathbf{Y}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ un kādai pozitīvai konstantei m_7. Lietojot (3.49), varam pārrakstīt (3.58) formā:

$$\mathcal{L}(\varepsilon)v(x,y) \leq -\frac{m_7}{m_5} v(x,y). \tag{3.59}$$

Tagad, ievietojot operatora $\mathcal{L}(\varepsilon)v(x,y)$ novērtējumu (3.59) Dinkina formulā "apstādinātiem" laika momentiem (2.33), iegūstam:

$$\mathbf{E}_{x,y} v\left(x(\tau_\rho(t)), y(\tau_\rho(t))\right) \leq v(x,y) - \frac{m_7}{m_5} \mathbf{E}_{x,y} \int_0^{\tau_\rho(t)} v(x(s), y(s))\, ds,$$

kur $\tau_\rho(t) = \min\{\bar{\tau}_\rho, t\}$, $\bar{\tau}_\rho = \inf\{t \geq 0 : \left|x(t)\right| > \rho\}$ (pirmais laika moments, kad $x(t)$ iziet no lodes $|x| < \rho$). No šīs nevienādības izriet, ka

$$\mathbf{E}_{x,y} v\left(x(\tau_\rho(t)), y(\tau_\rho(t))\right) \leq v(x,y).$$

Tagad apskatīsim "apstādināto" procesu $\bar{x}$, kuru iegūstam, apstādinot procesu $x(t)$ pirmajā laika momentā τ, pārejot ρ robežu:

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq \tau_\rho \\ x(\tau_\rho) & t > \tau_\rho, \end{cases} \quad \left|x(\tau_\rho)\right| = \rho.$$

Aprēķināsim varbūtību $\mathbf{P}\left(\sup_{t \geq 0} \left|x(t)\right| > \rho\right)$:

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}|x(t)|>\rho\right)\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}|\tilde{x}(t)|=\rho\right)\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}|\tilde{x}(t)|^2>\frac{\rho^2}{4}\right)\leq (*)$$

Tā kā līdz izejai no lodes $U_\rho=\{|x|\leq\rho\}$ ir spēkā novērtējumi (3.49) un (3.59), tad process $v\left(\tilde{x}(t),y(t)\right)$ ir supermartingāls un mēs varam pielietot supermartingālu nevienādību:

$$(*)\leq \mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}\frac{1}{\bar{k}_1}v\left(\tilde{x}(t),y(t)\right)>\frac{\rho^2}{4}\right)\leq \frac{4}{m_5\rho^2}v(x,y)\leq \frac{4\,m_6}{m_5\rho^2}|x|^2.$$

Šo varbūtību var padarīt pēc patikas mazu, izvēloties sākotnējos datus $x(0)=x$. Tātad mēs esam pierādījuši procesa $x(t)$ stabilitāti pēc varbūtības,t.i.,

$$\lim_{|x|\to 0}\mathbf{P}\left(\sup_{t\geq 0}|x(t)|\geq\delta\right)=0$$

visiem $\delta>0$.

Tagad ir jāpierāda, ka visi atrisinājumi, kuri neiziet no U_ρ, tiecas uz 0, ja $t\to\infty$. No (3.59) tieši seko, ka

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}(\varepsilon)\right)e^{\frac{m_7}{m_5}t}v(x,y)\leq 0. \tag{3.60}$$

Lietojot Dinkina formulu, varam uzrakstīt visiem $x\in U_\rho$, $y\in\mathbf{Y}$ un visiem $t\geq s\geq 0$:

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{m_7}{m_5}\tau_\rho(t)}v(x(\tau_\rho(t)),y(\tau_\rho(t)))\right\}=$$

$$=\mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{m_7}{m_5}\tau_\rho(s)}v(x(\tau_\rho(s)),y(\tau_\rho(s)))\right\}+$$

$$+\mathbf{E}_{x,y}\int\limits_{\tau_\rho(s)}^{\tau_\rho(t)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}+\mathcal{L}(\varepsilon)\right)e^{\frac{m_7}{m_5}u}v(x(u),y(u))\right\}du\leq$$

$$\leq v(x,y)+\mathbf{E}_{x,y}\int\limits_{0}^{\tau_\rho(s)}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u}+\mathcal{L}(\varepsilon)\right)e^{\frac{m_7}{m_5}u}v(x(u),y(u))\right\}du\leq$$

$$\leq v(x,y)\leq m_6\,|\rho|^p. \tag{3.61}$$

Tātad mēs esam pierādījuši, ka process

$$\zeta(t)=e^{\frac{m_7}{m_5}\tau_\rho(t)}v(x(\tau_\rho(t)),y(\tau_\rho(t)))$$

ir $\mathcal{F}^t$-saskaņots supermartingāls tā, ka visiem $x \in U_\rho$, $y \in \mathbf{Y}$ un $t \geq s \geq 0$ izpildās nevienādība:

$$\mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{m_7}{m_5}\tau_\rho(t)} v(x(\tau_\rho(t)), y(\tau_\rho(t))) / \mathcal{F}^s\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{m_7}{m_5}\tau_\rho(s)} v(x(\tau_\rho(s)), y(\tau_\rho(s)))\right\}.$$

Aprēķināsim varbūtību:

$$\mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s}|x(t)| \geq \delta,\, \tau_\rho = \infty\right) = \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s}|x(t)|^2 \geq \delta^2,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s}\frac{1}{m_5}v(x(t), y(t)) \geq \delta^2,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} e^{\frac{m_7}{m_5}t} v(x(t), y(t)) \geq e^{\frac{m_7}{m_5}s}\delta^2 m_5,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} e^{\frac{1}{4c_2}\tau_\rho(t)} v(x^\varepsilon(\tau_\rho(t)), y^\varepsilon(\tau_\rho(t)))s > e^{\frac{1}{4c_2}s}\delta^2\bar{k}_1,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s} e^{\frac{m_7}{m_5}\tau_\rho(t)} v(x(\tau_\rho(t)), y(\tau_\rho(t))) \geq e^{\frac{m_7}{m_5}s}\delta^2 m_5\right) \leq (**)$$

Tā kā $e^{\frac{m_7}{m_5}\tau_\rho(t)} v(x(\tau_\rho(t)), y(\tau_\rho(t)))$ ir pozitīvs supermartingāls, varam pielietot supermartingālu nevienādību. Tad

$$(**) \leq \frac{1}{m_5\delta^2}e^{-\frac{m_7}{m_5}s}\mathbf{E}_{x,y}\left\{e^{\frac{m_7}{m_5}\tau_\rho(t)} v(x(\tau_\rho(t)), y(\tau_\rho(t)))\right\}.$$

Lietojot (3.61), varam uzrakstīt

$$\mathbf{P}_{x,y}\left(\sup_{t\geq s}|x(t)| \geq \delta,\, \tau_\rho = \infty\right) \leq \frac{m_6}{m_5\delta^2}e^{-\frac{m_7}{m_5}s}|\rho|^p \to 0, \text{ ja } s \to \infty,$$

visiem $y \in \mathbf{Y}$, $|x| < 1$ un $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (pietiekoši mazam $\varepsilon_0 > 0$).

Tadējādi mēs ieguvām šādu rezultātu: visi sistēmas (1.6)-(1.7) atrisinājumi, kuri neiziet no lodes $|x| \leq \rho < 1$, eksponenciāli tiecas uz nulli.

No atrisinājumu $x(t)$ stabilitātes pēc varbūtības un no tā, ka atrisinājumi, kuri nav izgājuši ārpus lodes U_ρ, eksponenciāli tiecas uz nulli, var secināt, ka atrisinājumi $x(t)$ ir asimptotiski lokāli stabili pēc varbūtības. Teorēma pierādīta. □

Bibliogrāfija

1. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. - М.:ИЛ, 1954. -325 с.
2. Bellman R. Limit theorem for non-comutative operators //Duke Math. J. -1954.-21.-P.491-500
3. Бернштейн И.Л. Principes de la theorie des equations differentiales stohastiques //Труды физ.-матем. ин-та им.Стеклова - 1934. - с.95-124.
4. Бернштейн И.Л. Теория вероятностей //Гостехиздат. - 1946. - Изд-е 4. - с.485-546.
5. P.Billingsley. *Convergence of Probability measures.* John Willey. New York. 1968.
6. G.Blankenship. G.C.Papanicolaou. *Stability and control of Stochastic Systems with Wide-Band Noise Disturbances.* SIAM J. Appl. Mat., v.34, p.437-476. 1978.
7. Бородин А.Н. Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью //Теория вероятностей и ее применения. -1977.-22, N3.-С.498-511.
8. Бродский Я.С., Лукачер Б.Я. Флюктуации в схеме усреднения для дифференциальных уравнений со случайной правой частью //Теория случайн. процессов. - 1984. -Вып.12. -С.8-17
9. Бродский Я.С., Лукачер Б.Я. Предельные теоремы для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью //Докл. АН УССР. Сер.А. -1983. -N5. -С.3-6.
10. Cogburn R., Hersh R. Two limit theorems for random differential equations //Ind. Univ. Math. J.-1973.-22.-P.1067-1089.
11. Doob D.L. Martingals and one-dimentional diffusion // TAMS.-1955.-78. P.168-208
12. Е.Б.Дынкин. Марковские процессы.М.: Физматгиз. 1963. 859с.
13. Гихман И.И. Об одной схеме образования случайных процессов //Докл.АН УССР. -1947. -16.58. - С.961-964.
14. Гихман И.И. О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями //Укр.мат.журн. - 1950. -2, N3.-С.45-69
15. Гихман И.И. К теории дифференциальных уравнений случайных процессов // Там же.-N4. -С.37-63; -1951. -2, N3.-С.317-339.
16. Гихман И.И. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений //Предельные теоремы и статисти-

ческие выводы. -Ташкент: ФАН.-1966. -С.41-86

17. Гихман И.И., Дороговцев А.Я. Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений //Укр.мат.журн. - 1965. -17, N6.-С.3-21
18. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. К.:Наук.думка, 1968. -354 с.
19. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. В 3-х томах. -М:Наука, 1971-1975.-Т.3, -496 с.
20. Grego R., Hersh R. Theory of random evolutions with applications to partial differential equations // TAMS.-1971.-156.-P.405-418.
21. Hersh R. Random evolutions: a survey of results and problems // Rocky Mount. J. Math. - 1974.-4. N3.-P.443-496.
22. Hersh R., Griego R. Random evolutions - theory and applications // Univ. New Mexico, Tech. Repts.- 1969.-180.-P.38.
23. Hersh R., Pinsky M. Random evolutions are asymptotically Gaussian // Ibid.-25, N1.-P.33-44.
24. Ito K. Stochastic integral //Proc. Jap.Accad. - 1944. - 20. -P.30-39.
25. Ito K. On stochastic integral equations //Proc. Jap.Accad. - 1946. - 22. -P.32-35.
26. Ito K. On stochastic differential equations //Mem. Amer. Math. Soc. -1951. -N4. -P.1-51.
27. L.Katafigiotis, Ye.Tsarkov. *Mean square stability of linear dynamical systems with small Markov perturbations.* Random Oper. and Stoch. Equ. 4(1996), no 4.
28. Kertz R. Random evolutions with underlying semi-markov processes // Publ. Res. Inst. Math. Scien.-1978.-14, N3.-P.589-614.
29. Kertz R. Perturbed semigroup limit theorems with applications to discontinuous random evolutions // TAMS.-1974.-199, N1.-P.29-53.
30. Kertz R. Discontinuous random evolutions // Ann. Probab.-1974.-2, N6. -P.416-448.
31. Kertz R. Limit theorems for discontinuous random evolutions with applications to initial value problems and to Markov process on N-lines // Ann. Probab.-1974.-2.-P.1054-1064.
32. Kertz R. Limit theorems for semigroups with perturbed generators. with applications to multy-scaled random evolutions // TAMS.-1978.-27. -P.215-233.

33. Хасьминский Р.З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром // Там же. -1966. -11. N2. C.240-259
34. Хасьминский Р.З. Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью //Теория вероятностей и ее применения. -1966. -11. N3.-C.444-462.
35. R.Z.Khasminskij. *Stability of Systems of Differential Equations under Random Perturbations of their Parameters*. Nauka. Moscow. 1969 [Russ.]
36. Korolyuk V.S. Averaging and Stability of Dynamical Systems with Rapid Markov Switchings. -Univ. of Umea. S-90167. Umea. 1991.-Febr. -15p.
37. Королюк В.С.. Турбин А.Ф. Математические основы фазового укрупнения сложных систем.-Киев:Наук. думка. 1978.-217 с.
38. Koroljuk V.S.. Turbin A.F.. Swishcuk A.V. Markov random evolutions // IV USSR-Japan symp. Prob. Th. Math. Stat.. Tbilisi. 1982. Abstr. Tbilisi. 1982.-Vol.2.-P.39-40.
39. Koroljuk V.S.. Turbin A.F. Limit theorems for Markov random evolutions in the scheme of asymptotic phase lumping // Lect. Not. Math.-1983. -1021. -P.327-332.
40. Крылов Н.М.. Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. - Киев: Изд-во АН УССР. 1934.-112с.
41. Kurtz T. A limit theorem for perturbed operator semigroups with applications to random evolutions // J. Funct. Anal.-1973.-12.-P.55-67. 1972.-35.-P.
42. V.Lakshmikantham. D.D.Bainov. P.S.Semenov. Theory of impulse differential equations. World Sci. Publishing. River Edge. NJ. 1989.
43. Мильман В.Д.. Мышкис А.Д. Об утойчивости движения при наличии толчков // Сиб. мат. журн. 1(1960). N2 -C.233-237
44. Мильман В.Д.. Мышкис А.Д. Случайные толчки в линейных динамических системах //Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. -1963. -Киев: Изд-во АН УССР. -C.64-81.
45. Митропольский Ю.А.. Перестюк Н.А.. Черникова О.С. Конвергентность систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием //Докл. АН УССР. Сер.А.-1983. -N11.-C.11-

15.
46. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Перестюк Н.А. К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений второго порядка с импульсным воздействием // Укр.мат.журн.-1977.-Т.29, №6.-С.750-762
47. Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Интегральные множества одного класса дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. К.,1987. -44с.(Препринт / АН УССР. Ин-т математики: 87.2).
48. Мышкис А.Д., Самойленко А.М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Математический сб.-1967.-Т.74, вып.2.-С.202-208.
49. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Об устойчивости стохастических систем// Проблемы передачи информации.-1966. -2, №3.-С.76-91.
50. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Устойчивость и стабилизация стохастических дифференциальных уравнений// Летняя школа по теории вероятностей и математической статистике. -Киев: АН УССР, 1969.-С.51-64.
51. Papanicolaou G.C., Kohler W. Asymptotic theory of mixing stochastic ordinary differential equations //Comm. Pure. Appl.Math. -1974. -27. -P.641-668.
52. Перестюк Н.А. Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Конференция по дифференциальным уравнениям и их приложениям: Тез.докл.-Болгария.1975.-С.35.
53. Pinsky M. Random evolutions //Lect. Notes Math.-1975. -451.-P.89-100.
54. Pinsky M. Multiplicative operator functionals and their asymptotical properties // Adv. in Prob.-1975.-3.-P.1-100.
55. Pinsky M. Multiplicative operator functionals of Markov processes // BAMS.-1971.-77.-P.377-380.
56. А.А.Рейнфелд, Л.Сермоне Эквивалентность дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, Latv. Univ. Zinãt. Raksti 553 (1990), 124-130.
57. A.Reinfelds and L.Sermone. Equivalence of nonlinear differential equations with impulse effect in Banach space, Latv. Univ. Zinãt. Raksti 577 (1992), 68-73.

58. A.Reinfelds. A reduction theorem for systems of differential equations with impulse effect in Banach space. J.Math.Anal. Appl.203 (1996), no.1, P.187-210
59. A.Reinfelds, Dynamical equivalence of impulsive differential equations, Nonlinear Anal. 30 (1997).no. 5, P.2743-2752.
60. Самойленко А.М. Метод усреднения в системах с толчками // Математическая физика.-1971. -Вып.9.-С.101-117.
61. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Вторая теорема Боголюбова Н.Н. для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием //Дифференц.уравнения. -1974.-Т.10. №11.-С.2001-2010.
62. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. К.:Виша школа. 1987.-287 с.
63. Самойленко А.М., Станжицкий А.Н. О флуктуациях в схеме усреднения для дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием // Укр.мат.журн. - 1989. №5.-С.631-641.
64. Свирежев Ю.М., Пасеков В.П.. Основы математической генетики. М.:Наука, 1982.-510с.
65. Свищук А.В. Предельные теоремы для марковских случайных эволюций // Асимптотические методы в теории вероятностей. -Киев, 1983. -С. 92-97.
66. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. -К.:Наук.думка. 1987. -328 с.
67. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. -М.: Сов. радио. 1961. -425 с.
68. Strook D., Varadhan S.R.S. Diffusion processes with continuous coefficients // Comm. Pure Appl. Math.-1969.-22. N3.-P.345-401; N4.-P.479-531.
69. Ye.Tsarkov. *Averaging in Dynamical Systems with Markov Jumps.* Universitat Bremen, rep.Nr.282. Bremen, 1993.-April -41p.
70. Царьков Е.Ф. Экспоненциальная p-устойчивость тривиального решения стохастических функционально-дифференциальных уравнений //Теория вероятностей и ее применения. -1978. -23. №2. -С.16-24.
71. Царьков Е.Ф. Устойчивость по первому приближению тривиального решения стохастических функционально-дифференциальных уравнений //Мат.заметки. -1978. -№5.-С.76-82.

72. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. -Рига:Ориентир -1992. 322с.

73. Турбин А.Ф. Применение теории возмущений линейных операторов к решению некоторых задач, связанных с цепями Маркова и полумарковскими процессами // Теория вероятностей и мат. статистика.-1972.-Вып. 6.-С.211-212.

74. Ясинский В.К. Устойчивость почти наверное нулевого решения систем функционально-дифференциальных уравнений.// Асимптотические методы нелинейной механики. -К.:Ин-т математики АН УССР. 1979. -с.109-117