ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Министерство высшего и среднего среднего специального
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра математического анализа

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сборник научных трудов

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1983

Топологические пространства и их отображения: Сб. научных трудов /Отв. ред. Энгелис Г.К. – Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1983. – 190 с.

Сборник научных трудов "Топологические пространства и их отображения" содержит результаты исследований, проведенных в 1980-82 годах на математических кафедрах ЛГУ им.П.Стучки, РПИ, РКИИГА им. Ленинского комсомола, МГУ им. Ломоносова и некоторых других вузов. Результаты, содержащиеся в статьях сборника, доложены на секции топологии и на секции функционального анализа и его приложений 40-ой и 41-ой научных конференций ЛГУ им. П.Стучки в 1981 и 1982 годах, а также на заседаниях научных семинаров ЛГУ им. П.Стучки, РПИ и МГУ им.Ломоносова.

Сборник предназначен для научных работников в области функционального анализа, теории функций и топологии, а также для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в указанных областях.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки

Т $\frac{20203-063у}{М\ 812(11)-83}$ 82.83.1702040000

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1988.

УДК 513.83

О КРУЖЕВНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

Ю.Х.Брегман
ЛГУ им. П.Стучки

После того как кружевные пространства были введены в 1961 г. Дж.Сидером [1], этот класс, естественно обобщающий метрические пространства, был исследован многими авторами (см. напр. [2],[3],[4]). В данной работе мы рассматриваем топологические группы, пространство которых является кружевным (будем называть их кружевными топологическими группами). Приводятся примеры неметризуемых кружевных групп, рассматриваются критерии метризуемости кружевных топологических групп (следствие 1, теорема 2), а также некоторые другие их свойства.

Напомним основные понятия и факты (см. [2],[5]). T_1 -пространство X называется кружевным, если каждому открытому в X множеству $\mathcal{U}$ можно поставить в соответствие такую счетную систему открытых множеств $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$, что $\cup\{\mathcal{U}_n : n\in\mathbb{N}\}=\mathcal{U}$, $[\mathcal{U}_n]_X \subset \mathcal{U}$ для всех $n\in\mathbb{N}$, причем так, что если $\mathcal{U}\subset V$, то $\mathcal{U}_n\subset V_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Пространство, обладающее σ -дискретной сетью, называется σ -пространством. Заметим, что кружевные пространства являются наследственно паракомпактными σ -пространствами. Вся остальная терминология соответствует монографиям [6],[7],[14].

Приведем прежде всего примеры неметризуемых кружевных топологических групп. Из работы М.И.Граева [8] легко следует, что свободная топологическая группа в смысле Маркова метрического компакта является кружевной и неметризуемой (это отмечено также в [9]). Другим примером неметризуемых кружевных топологических групп является прямое произведение метрических групп, наделенное ящичной топологией [10]. Под прямым произведением групп $\{G_\alpha : \alpha\in A\}$ мы понимаем множество всех точек $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ декартового произведения $\prod\{G_\alpha : \alpha\in A\}$, у которых $x_\alpha \neq e_\alpha$ лишь на конечном множестве индексов.

Хорошо известно, что в топологических группах метризуемость эквивалентна первой аксиоме счетности (теорема Маркова-Какутани [7]). Близость класса кружевных топологических групп к метризуемым проявляется, в частности, в том, что и во многих других случаях кружевные группы метризуемы.

Приведем здесь некоторые метризационные теоремы для кружевных топологических групп.

<u>Теорема 1.</u> Топологическая группа, являющаяся паракомпактным σ-пространством со свойством Бера, метризуема.

<u>Доказательство.</u> По теореме Э.К.ван Дауэна [12] паракомпактное σ-пространство G со свойством Бэра содержит всюду плотное метризуемое подпространство Y. Нетрудно заметить, что точки множества Y являются точками счетного характера в пространстве G, т.е. $\chi(y,G)=\aleph_0$ для всякого $y\in Y$. Таким образом, в группе G имеется точка счетного характера, а следовательно, по теореме Маркова-Какутани эта группа метризуема.

<u>Следствие 1.</u> Кружевная топологическая группа со свойством Бэра метризуема.

Прежде чем формулировать следующую метризационную теорему, напомним одно понятие.

<u>Определение 1.</u> [4] Кружевом в смысле Хита в пространстве X с топологией T назовем функцию $g: \mathbb{N}\times X \to T$, удовлетворяющую условиям: (1) $x\in g(n,x)$ для всех $x\in X$ и $n\in\mathbb{N}$ и (2) для любого замкнутого в X множества M и не лежащей в M точки p существует номер m такой, что $p \notin [\bigcup\{g(m,x): x\in M\}]_X$.

Хит показал [4], что пространство является кружевным тогда и только тогда, когда в нем существует кружево в смысле Хита.

Напомним, что метрика $\rho(x,y)$ в группе G называется левоинвариантной, если $\rho(x,y)=\rho(a\cdot x, a\cdot y)$ для любых $a,x,y\in G$. Естественным обобщением этого понятия является

<u>Определение 2.</u> Кружево в смысле Хита в кружевной

топологической группе G с единицей e называется левоинвариантным, если $g(n,x) = x\cdot g(n,e)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $x\in G$.

Хорошо известно, что каждая метризуемая группа обладает левоинвариантной метрикой. Следующая теорема описывает кружевные топологические группы, обладающие левоинвариантным кружевом.

Теорема 2. Топологическая группа, обладающая левоинвариантным кружевом, метризуема.

Доказательство. Пусть $g(n,x)$ - левоинвариантное кружево в группе G . Нетрудно заметить, что без ограничения общности можно предполагать, что $g(n,e)$ - симметрические множества и $(g(n+1,e))^2\subset g(n,e)$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда (см., напр., [7, стр. 95]) по системе $\{g(n,e): n\in\mathbb{N}\}$ можно построить непрерывную левоинвариантную метрику $\delta(x,y)$ такую, что $g(n,x)$ содержится в $\{y\in G: \delta(x,y)\le 2^{-n+2}\}$, и если $y\notin g(n,x)$, то $\delta(x,y)\geqslant 2^{-n}$ для всех $x\in G$ и всех $n\in\mathbb{N}$.

Покажем, что $\{g(n,e): n\in\mathbb{N}\}$ является счетной базой в единице группы G . Пусть V - произвольная открытая окрестность единицы. Тогда множество $M = G\setminus V$ замкнуто и не содержит единицу e . В силу определения кружева существует такой номер n , что $e\notin[\bigcup\{g(n,x): x\in M\}]_G$. Поскольку $e\notin g(n,x)$, то расстояние $\delta(e,x)\geqslant 2^{-n}$ для всех $x\in M$. Поэтому шар $\{y\in G: \delta(e,y)\le 2^{-(n+1)}\}$ лежит в $V = X\setminus M$. Тогда имеем $g(n+3,e)\subset\{y\in G: \delta(e,y)\le 2^{-(n+1)}\}\subset V$.

Таким образом, $\{g(n,e): n\in\mathbb{N}\}$ - база окрестностей в единице e , поэтому по теореме Маркова-Накутани группа G метризуема. Заодно мы доказали, что метрика $\delta(x,y)$ порождает исходную топологию в группе G .

Замечание. В доказательстве теоремы 2 мы фактически пользовались лишь тем, что $g(n,x)$ - левоинвариантное псевдокружево. Напомним, что функция $g: \mathbb{N}\times X\to T$ называется псевдокружевом в пространстве X с топологией T , если $x\in g(n,x)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и для любого замкнутого множества M и точки p , не лежащей в M , существует номер m такой, что $p\notin\bigcup\{g(m,x): x\in M\}$ (см. [13]). Пространство, в котором существует псевдокружево, называется псевдокружевным. Таким образом, мы фактически доказали, что если в топологической группе существует левоинвариантное псевдокружево, то эта группа метризуема.

Классы кружевных топологических пространств и локально кружевных топологических пространств не совпадают: пространство $T(\omega_1)$ всех счетных ординалов, наделенное порядковой топологией, является простейшим примером некружевного локально кружевного топологического пространства. Однако, как мы покажем ниже, классы кружевных топологических групп и локально кружевных топологических групп совпадают.

Теорема 3. Локально паракомпактная топологическая группа является паракомпактной.

Доказательство. Рассмотрим счетную систему $\{\mathfrak{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых окрестностей единицы группы, замыкания которых паракомпактны. Без ограничения общности можно предполагать, что эти окрестности симметричны и $\mathfrak{U}^2_{n+1} \subset \mathfrak{U}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда [7, с. 95] по системе $\{\mathfrak{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ в группе G можно построить такую левоинвариантную псевдометрику $\sigma(x,y)$, что шары $\{x \in G : \sigma(x,e) < 2^{-n}\} \subset \mathfrak{U}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и топология, порожденная псевдометрикой $\sigma(x,y)$, слабее исходной групповой топологии. Пусть $V = \{x \in G : \sigma(x,e) < \frac{1}{2}\}$. Замыкание множества V в исходном пространстве группы G паракомпактно. Семейство $\{x \cdot V : x \in G\}$ является открытым покрытием псевдометрического пространства $(G, \sigma(x,y))$. В это покрытие можно вписать открытое локально конечное покрытие $\mathscr{E} = \{W_\alpha : \alpha \in A\}$, поскольку псевдометрическое пространство является паракомпактным, хотя и не обязано быть T_1 [6]. Так как топология, порожденная псевдометрикой $\sigma(x,y)$, слабее исходной групповой топологии на множестве G, то семейство $\mathscr{E}$ будет также открытым локально конечным покрытием исходной топологической группы G. Поэтому локально конечным покрытием будет и семейство $\widetilde{\mathscr{E}} = \{[W_\alpha]_G : \alpha \in A\}$ [14, с. 293]. Поскольку семейство $\widetilde{\mathscr{E}}$ вписано в семейство $\{x \cdot \overline{V} : x \in G\}$, то множества $[W_\alpha]_G$ паракомпактны для каждого $\alpha \in A$. Таким образом, семейство $\widetilde{\mathscr{E}}$ является локально конечным покрытием топологической группы G паракомпактными множествами. Для завершения доказательства остается заметить, что если существует локально конечное покрытие регулярного пространства паракомпактными подпространствами, то это пространство само паракомпактно [14, с. 300].

Пространство называется локально кружевным, если каждая его точка обладает кружевной окрестностью [1]. Сидер [1] показал, что локально кружевное паракомпактное пространство является кружевным. Поэтому имеем

Следствие 2. Локально кружевная топологическая группа является кружевной.

Пусть H и G – топологические группы. Отображение $i: H \longrightarrow G$ называется i-изоморфизмом, если оно непрерывно и является алгебраическим изоморфизмом [15]. В.Г.Пестов [16] доказал, что декартово произведение с ящичной топологией несчетного числа групп $GL(2,\mathbb{R})$ обратимых вещественных матриц второго порядка не i-изоморфно никакой метризуемой группе. Тем самым был построен пример топологической группы счетного псевдохарактера, не i-изоморфной никакой метризуемой группе. Мы докажем, что если прямое произведение метризуемых групп, набитое с ящичной топологией, является кружевным, то оно являющееся кружевной топологической группой, i-изоморфно метризуемой группе. Однако нам не известен ответ на

Вопрос 1. Каждая ли кружевная топологическая группа i-изоморфно отображается на метризуемую группу ?

Напомним, что топологическая группа G называется $\aleph_0$-уравновешенной, если для каждой окрестности $\mathfrak{U}$ единицы e существует такое счетное семейство γ окрестностей e, что для любого элемента $g \in G$ существует окрестность $V \in \gamma$ такая, что $g \cdot V \cdot g^{-1} \subset \mathfrak{U}$.

Теорема 4. Пусть группа $G = \Pi^* \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ является прямым произведением топологических групп $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$, наделенным ящичной топологией, и каждая группа G_α $\aleph_0$-уравновешена. Тогда группа G также является $\aleph_0$-уравновешенной.

Доказательство. Очевидно, что достаточно проверить условие $\aleph_0$-уравновешенности лишь для базовых окрестностей единицы e, т.е. окрестностей вида $\mathfrak{U} = \Pi \{\mathfrak{U}_\alpha : \alpha \in A\} \cap G$, где $\mathfrak{U}_\alpha$ – окрестность единицы группы G_α для каждого $\alpha \in A$. Построим для $\mathfrak{U}$ требуемое семейство γ. Поскольку все группы G_α $\aleph_0$-уравновешены, то для каждого $\mathcal{U}_\alpha$ существует счетное семейство $\gamma_\alpha = \{V_\alpha^n : n \in \mathbb{N}\}$ окрестностей единицы группы G_α такое, что для каждого элемента $g_\alpha \in G_\alpha$ существует номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что $g_\alpha \cdot V_\alpha^n \cdot g_\alpha^{-1} \subset \mathcal{U}_\alpha$. Без ограничения общности можно предполагать, что $V_\alpha^{n+1} \subset V_\alpha^n \subset V_\alpha$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in A$. Пусть $V_n = \{V_\alpha^n : \alpha \in A\} \cap G$. Покажем, что семейство $\gamma = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию $\aleph_0$-уравновешенности для окрестности $\mathcal{U}$. Действительно, пусть элемент $g = (g_\alpha : \alpha \in A)$ таков, что лишь координаты $g_{\alpha_1}, \ldots, g_{\alpha_n}$ отличны от единиц соответствующих групп. Для каждого i, $1 \leq i \leq n$, существует номер m_i такой, что $g_{\alpha_i} \cdot V_{\alpha_i}^{m_i} \cdot g_{\alpha_i}^{-1} \subset \mathcal{U}_{\alpha_i}$. Положим $m = \max\{m_i : 1 \leq i \leq n\}$. Тогда для каждого $\alpha \in A$ имеет место включение $g_\alpha \cdot V_\alpha^m \cdot g_\alpha^{-1} \subset \mathcal{U}_\alpha$, а следовательно, и $g \cdot V_m \cdot g^{-1} \subset \mathcal{U}$. Теорема доказана.

Поскольку [15] топологическая группа $\aleph_0$-уравновешена и имеет счетный псевдохарактер тогда и только тогда, когда ее топология является верхней гранью некоторого семейства метризуемых групповых топологий, то имеет место

<u>Следствие 3.</u> Пусть группа G является прямым произведением $\aleph_0$-уравновешенных групп счетного псевдохарактера, наделенным ящичной топологией. Тогда топология группы G является верхней гранью некоторого семейства метризуемых групповых топологий.

<u>Следствие 4.</u> Прямое произведение метризуемых групп, наделенное ящичной топологией, i-изоморфно отображается на метризуемую группу.

Отметим в заключении, что нам не известен ответ на

<u>Вопрос 2.</u> Можно ли каждое кружевное пространство замкнуто вложить в кружевную топологическую группу ?

Литература

1. Ceder J.G. Some generalizations of metric spaces, -Pacif. J. Math., 1961, v. 11, N 2, p. 105-125.

2. Borges C.J.R. On stratifiable spaces, -Pacif. J. Math., 1966, v. 17, N 1, p. 1-16.

3. Мардешич С., Шостак А.П. О совершенных прообразах кружевных пространств. - УМН, 1980, т. 35, № 3, с. 84-91.

4. Heath R.W., Hodel R.E. Characterizations of σ-spaces, -Fund. math., 1973, v. 77, N 3, p. 271-275.

5. Okuyama A. Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces, -Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A 9, 1967, p. 236-254.

6. Engelking R. General topology, Warszawa, 1977, p. 626.

7. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ, М., 1975, т. 1.

8. Граев М.И., Теория топологических групп. - УМН, 1950, т. 5, № 2, с. 3-56.

9. Borges C.J.R. Free topological groups, -J. Austral. Math. Soc., Ser. A, 1977, v. 23, N 3, p. 360-365.

10. van Douwen E.K. The box product of countably many metrizable spaces need not be normal, -Fund. math., 1975, v. 88, N 2, p. 127-132.

11. van Douwen E.K. Homogeneity of βG if G is a topological group.-Coll. Math. 1979, v. 64, N 2, p. 193-199.

12. van Douwen E.K. An unbaireable stratifiable space, -Proc. Amer. Math. Soc., 1977, v. 67, N 2, p. 324-326.

13. Кофнер Я. О псевдокружевных пространствах. - Fund. math., 1971, v. 70, № 1. p. 25-47.

14. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974, с. 424.

15. Архангельский А.В. Классы топологических групп, - УМН, 1981, т. 36, № 3, с. 127-146.

16. Пестов В.Г. О строении вложения топологических групп, Томск, Томский ун-т, 1981. (Рукопись депонирована в ВИНИТИ, № 149-81 Деп.)

Поступила 30 октября 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.881

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПЕРЕНОРМИРОВКИ ПРОСТРАНСТВ.

М.А.Гольдман
ЛГУ им. П.Стучки

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – нормированное пространство и Y – векторное подпространство пространства X. Зададим на X полунорму p, полагая $p(x)=\inf\{\|x-y\| \mid y\in Y\}$ $(x\in X)$. Полученное полунормированное пространство (X,p) обозначим через $\tilde{X}$, а пространство $(X,\|\cdot\|)$ будем в дальнейшем обозначать просто через X. Пусть T – оператор вложения X в $\tilde{X}$: $Tx=x$ $(x\in X)$. Так как $p(x)\leq\|x\|$ $\forall x\in X$, то оператор T ограничен. Нас будут интересовать условия, необходимые или достаточные для того, чтобы оператор T был вполне ограниченным, т.е. чтобы образ $T(E)$ любого ограниченного множества $E\subset X$ был вполне ограничен в $\tilde{X}$. С целью получить такие условия введем в рассмотрение множества

$$Y_\varepsilon=\left[\bigcup\{B(y,\varepsilon\|y\|)\mid y\in Y\setminus\{\theta\}\}\right]\cup\{\theta\},$$

где ε – произвольное число промежутка $]0,1[$, $B(y,\varepsilon\|y\|)$ – открытый шар пространства X с центром y и радиусом $\varepsilon\|y\|$, а θ – нулевой элемент пространства X.

Установим некоторые неравенства между $p(x)$ и $\|x\|$, связанные с введенными множествами Y_ε.

Лемма. Пусть x – элемент пространства X. Тогда:

а) если $x\notin Y_\varepsilon$, то $p(x)\geq\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|x\|$;

в) если $x\in Y_\varepsilon$, то $p(x)<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\|$;

с) если $p(x)\geq\delta>0$, то $x\notin Y_\varepsilon$ при $\varepsilon=\frac{\delta}{\delta+\|x\|}$.

Доказательство. а) Из условия $x\notin Y_\varepsilon$ следует, что $\|x-y\|\geq\varepsilon\|y\|$ $\forall y\in Y$, а так как $\|y\|=\|x-(x-y)\|\geq\|x\|-\|x-y\|$, то $\|x-y\|\geq\varepsilon(\|x\|-\|x-y\|)$ $\forall y\in Y$. Отсюда получаем, что $\|x-y\|\geq\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|x\|$ $\forall y\in Y$; следовательно, $p(x)\geq\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\|x\|$.

в) В силу условия $x \in Y_\varepsilon$ существует такой элемент $y \in Y$, что $\|x-y\| < \varepsilon\|y\|$, а так как $\|x\| = \|y-(y-x)\| \geq \|y\| - \|x-y\|$, то $\|x\| > (1-\varepsilon)\|y\|$, откуда следует неравенство $\varepsilon\|y\| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\|$. Сопоставляя его с неравенством $\|x-y\| < \varepsilon\|y\|$, получаем: $\|x-y\| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\|$. Этим доказано, что $\rho(x) < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\|$.

с) Так как $\rho(x) \leq \|x\|$, то из условия $\rho(x) > \delta' > 0$ следует, что $\|x\| > \delta' > 0$. Поэтому $0 < \frac{\delta'}{\delta' + \|x\|} < \frac{1}{2} < 1$, т.е. $0 < \varepsilon < 1$. Из равенства $\varepsilon = \frac{\delta'}{\delta' + \|x\|}$ получаем: $\delta' = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\|$. Отсюда вытекает, что $x \notin Y_\varepsilon$, ибо в противном случае мы имели бы, согласно пункту в) настоящей леммы, что $\rho(x) < \delta'$ (в противоречие с условием $\rho(x) \geq \delta'$).

С помощью этой леммы установим одно необходимое и одно достаточное условие полной ограниченности оператора вложения T.

<u>Теорема I.</u> Для полной ограниченности оператора вложения T необходимо, чтобы при любом $\varepsilon \in]0,1[$ векторные пространства, расположенные в множестве $(X \setminus Y_\varepsilon) \cup \{\theta\}$, были все конечномерными, и чтобы при каждом фиксированном $\varepsilon \in]0,1[$ среди размерностей этих пространств существовала наибольшая.

<u>Доказательство.</u> Предположим, что оператор T вполне ограничен и что, вопреки утверждению теоремы, при некотором $\varepsilon_0 \in]0,1[$ в множестве $(X \setminus Y_{\varepsilon_0}) \cup \{\theta\}$ содержатся векторные пространства сколь угодно большой конечной размерности (следовательно, и любой конечной размерности). Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_k, \ldots$ – векторные пространства, содержащиеся в $(X \setminus Y_{\varepsilon_0}) \cup \{\theta\}$, причем $\dim L_k = k$ $(k = 1,2,\ldots)$. Возьмем в каждом L_k базис $x_1^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ так, чтобы выполнялись условия: $\|x_i^{(k)}\| = 1$, $i = \overline{1,k}$ и $\|x_i^{(k)} - x_j^{(k)}\| \geq \frac{1}{2}$ при $i \neq j$, $i,j = \overline{1,k}$ (это возможно в силу леммы Рисса о почти перпендикуляре [I, с.129]). Тогда, согласно пункту а) доказанной выше леммы, $\rho(x_i^{(k)} - x_j^{(k)}) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}$ $(i \neq j;\ i,j = \overline{1,k};\ k = 1,2,\ldots)$. Пусть $B = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$. Так как оператор T вполне ограничен, то множество $T(B)$ вполне ограничено в $\widetilde{X}$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – δ-сеть в $T(B)$, где $\delta = \frac{1}{4} \cdot \frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}$. Возьмем $k > n$: тогда най-

дутся такие числа i,j и m, где $i,j=\overline{1,k}$, $i\neq j$ и $m=\overline{1,n}$, что $\rho(x_i^{(k)}-x_m)<\delta''$ и $\rho(x_j^{(k)}-x_m)<\delta''$. Отсюда получаем:

$$\rho(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})\leq \rho(x_i^{(k)}-x_m)+\rho(x_m-x_j^{(k)})<2\delta''=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0},$$

т.е., $\rho(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})<\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}$. Это противоречит ранее полученным неравенствам: $\rho(x_i^{(k)}-x_j^{(k)})\geq\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}$ $(i\neq j; i,j=\overline{1,k}; k=1,2,\ldots)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Для полной ограниченности оператора вложения T достаточно, чтобы при любом $\varepsilon\in]0,1[$ множество $M_\varepsilon=[B\cap(X\setminus Y_\varepsilon)]\cup\{\theta\}$, где $B=\{x\in X\,|\,\|x\|\leq 1\}$, было вполне ограничено в X.

Доказательство. Считая, что все множества M_ε вполне ограничены, допустим, вопреки утверждению теоремы, что оператор T не вполне ограничен. Тогда множество $T(B)$ не будет вполне ограниченным в $\tilde{X}$. Это значит, что для некоторого $\delta_0'>0$ в $T(B)$ найдется множество $\{x_n\,|\,n=1,2,\ldots\}$, такое, что $\rho(x_n)\geq\delta_0'$ $(n=1,2,\ldots)$ и $\rho(x_i-x_j)\geq\delta_0'$ $(i,j=1,2,\ldots; i\neq j)$. Согласно пункту c) леммы, $x_n\notin Y_{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_n=\frac{\delta_0'}{\delta_0'+\|x_n\|}$ $(n=1,2,\ldots)$. Так как $\|x_n\|\leq 1$, то $\varepsilon_n\geq\frac{\delta_0'}{\delta_0'+1}$ $(n=1,2,\ldots)$. Полагая $\varepsilon_0=\frac{\delta_0'}{\delta_0'+1}$, можем записать: $\varepsilon_n\geq\varepsilon_0$ и $Y_{\varepsilon_0}\subset Y_{\varepsilon_n}$ $(n=1,2,\ldots)$. Ясно, что $x_n\notin Y_{\varepsilon_0}$ (ибо $x_n\notin Y_{\varepsilon_n}$), следовательно, $x_n\in M_{\varepsilon_0}$ $(n=1,2,\ldots)$. Последнее, однако, противоречит полной ограниченности в X множества M_{ε_0} (ввиду неравенств $\|x_i-x_j\|\geq\delta_0'$ при $i\neq j$ и $i,j=1,2,\ldots$). Этим теорема доказана.

Изложенный способ перенормировки пространств можно обобщить следующим образом. Выберем в X векторные пространства $Y_1,\ldots,Y_m$ и определим на X m полунорм p_i, полагая $p_i(x)=\{\|x-y\|\,|\,y\in Y_i\}$, $i=\overline{1,m}$. Функция $p=\sum_{i=1}^{m}p_i$ представляет собой полунорму на X, а в случае, когда $\bigcap_{i=1}^{m}\bar{Y}_i=\{\theta\}$, где $\bar{Y}_i$ – замыкание в X пространства Y_i, p является нормой. Обозначим через $\tilde{X}$ пространство (X,p) и через T – оператор вложения X в $\tilde{X}$: $Tx=x$ $(x\in X)$. Ясно, что оператор T ограничен: $p(x)\leq m\|x\|$ $\forall x\in X$. Для решения вопроса о его полной ограниченности следует рассмотреть операторы вложения $T_i: X\to X_i$, где $X_i=(X,p_i)$, $i=\overline{1,m}$. Если все операторы T_i вполне ограничены, то вполне ограничен и оператор T .

Эта схема построения оператора T открывает некоторую возможность получать теоремы вложения, играющие, как известно (см., например, [2]), большую роль в исследовании краевых задач математической физики.

Литература

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., 1977.

2. Никольский С.М. Вложения теоремы.-В кн.: Математическая энциклопедия, I А-Г. М., 1977, с.723-731.

Поступила 19 ноября 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.881

ОБ УСЛОВИЯХ КОНЕЧНОМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА НУЛЬ-ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ОТДЕЛИМЫХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н.А.Дергунова
РПИ

Пусть $\mathcal{L}(\mathfrak{X})$ – совокупность всевозможных линейных операторов, действующих в отделимом локально выпуклом пространстве $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{D}(A)$ – область определения, $\mathfrak{R}(A)$ – область значения, $N(A)$ – ядро, $\mathfrak{N}(A) \overset{def}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} N(A^n)$ – множество нульэлементов оператора $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$.

Теорема 1. Для того, чтобы пространство $\mathfrak{N}(A)$ было конечномерным необходимо и достаточно, чтобы оператор A был представим в виде $A = B + C$, где $B, C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $N(B) = \{\theta\}$, C – вполне непрерывный оператор и $BC = C$.

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как в теореме 1 из [3], если установлено существование непрерывного линейного оператора проектирования P пространства $\mathfrak{X}$ на $\mathfrak{N}(A)$. Как известно, топологически сопряженное пространство $\mathfrak{X}^*$ к локально выпуклому топологическому пространству $\mathfrak{X}$ разделяет точки в $\mathfrak{X}$. А этого достаточно для построения непрерывного линейного оператора проектирования, поскольку $\dim \mathfrak{N}(A) < \infty$.

Достаточность. Пусть $A = B + C$, где B, C – операторы, удовлетворяющие условиям теоремы. В силу существования оператора B^{-1} и условия $BC = C$, имеем $B^{-1}C = C$. Рассмотрим оператор $T = -B^{-1}A = -I - C$. Из предложения 2 в [1, гл. VIII] следует (т.к. $T = u$, $I = \mathcal{F}$, $\lambda = -1$), что оператор T имеет конечный подъем p. Поскольку операторы A, B, C удовлетворяют условиям предложения V из [2], то $\mathfrak{N}(-T) = \mathfrak{N}(A)$. А т.к. $\mathfrak{N}(-T) = \mathfrak{N}(T)$, то $\mathfrak{N}(T) = \mathfrak{N}(A)$. Далее, линейный оператор T непрерывен, перестановочен с I и по предложению 1 из [1, гл. VIII] $\dim N(T) < \infty$, а так как $\dim N(T^p) \leq p \dim N(T)$ и

T имеет конечный подъем, то $\dim \mathfrak{N}(T) < \infty$. Следовательно, $\dim \mathfrak{N}(A) < \infty$.

Теорема 2. Если пространство нульэлементов $\mathfrak{N}(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$ конечномерно, то A — инвариантное замкнутое дополнение к $\mathfrak{N}(A)$ существует тогда и только тогда, когда оператор A представим в виде $A = B + C$, где $B, C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X})$, B - обратимый, C - ограниченный конечномерный оператор, $BC = C$ и $CB \subseteq C$.

Доказательство необходимости аналогично доказательству необходимости теоремы 2 в [3].

Достаточность. В разложении оператора A оператор C - локально-алгебраический (это следует из его конечномерности), B - обратимый. Эти и остальные условия теоремы обеспечивают существование A-инвариантного алгебраического дополнения к $\mathfrak{N}(A)$ (см. теорему в [2]). По следствию 1 из предложения 2, в [1, гл. УШ] $\mathfrak{X}$ есть топологическая сумма подпространств $\mathfrak{N}(T)$ и $\mathfrak{M}(T)$ ($\mathfrak{M}(T) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{R}(T^n)$), где $T = -B^{-1}A = -I - C$; таким образом, по следствию из предложения 1 в [1, гл. УШ] получаем, что $\mathfrak{M}(T)$ - замкнутое T-инвариантное дополнение к $\mathfrak{N}(T)$. Далее, любое T-инвариантное дополнение в $\mathfrak{X}$ к $\mathfrak{N}(T)$ является A-инвариантным (см. доказательство теоремы 3 в [2]). Таким образом, из замкнутости $\mathfrak{M}(T)$, его A-инвариантности и того, что $\mathfrak{N}(A) = \mathfrak{N}(T)$, следует существование замкнутого A-инвариантного дополнения в $\mathfrak{X}$ к $\mathfrak{N}(A)$.

Литература

1. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. Топологические векторные пространства. М., 1967.

2. Гольдман М.А. Об одном разложении линейного оператора. -ДАН СССР, 1969, т. 189, № 5, с. 930-933.

3. Дергунова Н.А. Об условиях конечномерности пространства нульэлементов линейного оператора. -В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979, вып. 3, с. 53-55.

Поступила 13 сентября 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983

УДК 517.948

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЧТИ ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ И АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Е.С.Козьмина
РКИИГА им. Ленинского комсомола

В последние годы большое внимание уделяется изучению дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в абстрактных пространствах. Для таких уравнений ставится задача Коши и исследуются условия, при которых существуют локальные и глобальные решения. В данной работе методом теории полугрупп для линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах совместно с методом априорных оценок исследуется разрешимость задачи Коши для дифференциального уравнения гиперболического типа с операторной нелинейностью. Полученные абстрактные теоремы применяются к уравнениям с функциональными и алгебраическими нелинейностями.

I. Почти линейное уравнение гиперболического типа с операторной нелинейностью

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, порождающим норму $\|\cdot\|$, рассмотрим линейный оператор A с плотной в H областью определения $\mathcal{D}(A)$.

Условие I. Оператор A является неограниченным самосопряжённым оператором в H и обладает ограниченным обратным оператором A^{-1}, определённым на всём пространстве H.

Для каждого целого положительного p множество $\mathcal{D}(A^p)$ можно превратить в гильбертово пространство H_p, вводя скалярное произведение $(u,v)_p=(A^p u, A^p v)$, которому отвечает норма $\|u\|_p=\|A^p u\|$.

Пусть $u=u(t)$ – абстрактная функция, определённая на отрезке $[0,T]$ вещественной оси, со значениями в H. Рассмотрим задачу Коши:

$$u_{tt}+A^2u=F_1u+F_2u+f,\quad u|_{t=0}=u_0,\quad u_t|_{t=0}=u_1. \qquad (1.1)$$

Операторы F_1 и F_2, действующие в H, нелинейны; функция $f:[0,T]\to H$ задана. Относительно оператора F_1 будем предполагать выполненным

Условие II. Оператор $F_1' : \mathcal{D}(A^2)\to\mathcal{D}(A)$ удовлетворяет таким ограничениям: для любых $u, v\in H_2$

$$\|F_1 u\|_1 \le C_1(\|u\|_2),$$

$$\|F_1 u - F_1 v\|_1 \le C_2(\|u\|_2+\|v\|_2)\|u-v\|_2,$$

где C_1, C_2 – монотонно возрастающие всюду конечные функции.

Для оператора F_2 сформулируем

Условие III. Оператор $F_2 : \mathcal{D}(A^2)\to H$ имеет производную Фреше $\mathcal{D}_u(F_2 u): H_2\to H$, которая удовлетворяет неравенству

$$\|\mathcal{D}_u(F_2 u)w\| \le C_3(\|u\|_2)\|w\|_1 \qquad \forall\, u, w\in H_2$$

и условию Липшица в каждом шаре пространства H_2:

$$\|[\mathcal{D}_u(F_2 u)-\mathcal{D}_v(F_2 v)]w\| \le C_4(\|u\|_2+\|v\|_2)\|u-v\|_2\|w\|_1 \quad \forall\, u, v, w\in H_2,$$

причём функции C_3 и C_4 являются монотонно возрастающими всюду конечными функциями.

Так как пространство H_2 плотно вложено в H_1, то производная Фреше $\mathcal{D}_u(F_2 u): H_2\to H$ в силу условия III может быть единственным образом продолжена до линейного ограниченного оператора, определённого на H_1, без увеличения нормы. Следовательно, для расширения оператора $\mathcal{D}_u(F_2 u): H_2\to H$ на пространство H_1, которое будем обозначать также $\mathcal{D}_u(F_2 u): H_1\to H$, имеют место неравенства из условия III для любого $w\in H_1$.

Теорема I. Пусть операторы A, F_1, F_2 удовлетворяют условиям I – III. Пусть $u_0\in\mathcal{D}(A^2)$, $u_1\in\mathcal{D}(A)$ и $f\in C(0,T;H_1)\cup C^1(0,T;H)$, где $C^\ell(0,T;H)$ – пространство всех ℓ раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в H. Тогда задача Коши (I.I) на некотором промежутке $[0,T_1]\subseteq[0,T]$ имеет единственное решение $u=u(t)\in C(0,T_1;H_2)\cap C^2(0,T_1;H)$.

Доказательство. Из самосопряжённости оператора A следует что iA является производящим оператором сильно непрерывной группы унитарных операторов $\mathcal{U}(t)$, $-\infty<t<+\infty$ [2]. Обозначим

$$C(t)=\frac{1}{2}[\mathcal{U}(t)+\mathcal{U}(-t)], \quad S(t)=\frac{1}{2i}[\mathcal{U}(t)-\mathcal{U}(-t)]$$

и отметим некоторые свойства операторов $C(t)$ и $S(t)$: $\|C(t)\| \le 1$, $\|S(t)\| \le 1$; для любого $v \in \mathcal{D}(A^2)$ $\frac{dC(t)v}{dt} = -S(t)Av$, $\frac{dS(t)v}{dt} = C(t)Av$, $\frac{\partial}{\partial t} S(t-s)v = -\frac{\partial}{\partial s} S(t-s)v = C(t-s)Av$, $\frac{\partial}{\partial s} C(t-s)v = -\frac{\partial}{\partial t} C(t-s)v = -S(t-s)Av$; кроме того, $S(0)=0$, $C(0)=I$, где I – тождественный оператор в H . Задача Коши для линейного неоднородного уравнения

$$u_{tt} + A^2 u = g, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{I.2}$$

с оператором A , удовлетворяющим условиям теоремы, имеет единственное решение $u = u(t) \in C(0,T;H_2) \cap C^2(0,T;H)$ при любых $u_0 \in \mathcal{D}(A^2)$, $u_1 \in \mathcal{D}(A)$, если $g \in C(0,T;H_1) \cup C^1(0,T;H)$. [2] Решение задаётся формулой

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)A^{-1}u_1 + \int_0^t S(t-s)A^{-1}g(s)ds. \tag{I.3}$$

Введём оператор $L = d^2/dt^2 + A^2$ с $\mathcal{D}(L) = \{(u_0, u_1, u): u(0)=u_0, u'(0) = u_1, u = u(t) \in C(0,T;H_2) \cap C^2(0,T;H)\}$. Область значений $R(L)$ этого оператора содержится в $C(0,T;H)$, причём $C(0,T;H_1) \cup C^1(0,T;H) \subset R(L)$ и оператор

$$L^{-1}: C(0,T;H_1) \cup C^1(0,T;H) \to C(0,T;H_2) \cap C^2(0,T;H)$$

порождает решение задачи Коши (I.2). Выражение (I.3) принимает такой вид: $u(t) = L^{-1}g(t)$. Если $g(t) = F_1 u(t) + F_2 u(t) + f(t)$, то задача Коши (I.1) может быть заменена эквивалентным ей уравнением $u(t) = L^{-1}[F_1 u(t) + F_2 u(t) + f(t)]$ в пространстве $C(0,T;H_2)$. Перепишем это уравнение в виде

$$u(t) = Gu(t), \qquad Gu(t) \equiv L^{-1}[F_1 u(t) + F_2 u(t) + f(t)]. \tag{I.4}$$

Если $u(t) \in C(0,T;H_2) \cap C^1(0,T;H_1)$, то из условия II следует, что $F_1 u(t) \in C(0,T;H_1)$, и из условия III следует, что $dF_2 u(t)/dt = -D_u(F_2 u)u'(t) \in C(0,T;H)$, т.е. $F_2 u(t) \in C^1(0,T;H)$. Поэтому

$$G: C(0,T;H_2) \cap C^1(0,T;H_1) \to C(0,T;H_2) \cap C^2(0,T;H) \subseteq C(0,T;H_2) \cap C^1(0,T;H_1).$$

Покажем, что уравнение (I.4) разрешимо с помощью принципа сжатых отображений. Функцию $f \in C(0,T;H_1) \cup C^1(0,T;H)$ представим в виде суммы $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in C(0,T;H_1)$, $f_2 \in C^1(0,T;H)$. Пусть $g_1(t) = F_1 u(t) + f_1(t)$, $g_2(t) = F_2 u(t) + f_2(t)$. При этом $g_2'(t) =$

$-\mathcal{D}_u\,(F_2 u)\,u'(t) + f_2'(t) \in C(0,T;H)$. Используя интегрирование по частям и представление $g_2(t) = g_2(0) + \int_0^t g_2'(s)\,ds$, преобразуем выражение

$$\int_0^t S(t-s)A^{-1}g_2(s)\,ds = \int_0^t \left[\frac{\partial}{\partial s}C(t-s)\right]A^{-2}g_2(s)\,ds = A^{-2}g_2(t) - C(t)A^{-2}g_2(0) -$$
$$-\int_0^t C(t-s)A^{-2}g_2'(s)\,ds = [I - C(t)]A^{-2}g_2(0) + \int_0^t [I - C(t-s)]A^{-2}g_2'(s)\,ds.$$

Учитывая это равество, подставляем $g = g_1 + g_2$ в (I.3); получаем

$$Gu(t) = C(t)u_0 + S(t)A^{-1}u_1 + \int_0^t S(t-s)A^{-1}[F_1u(s) + f_1(s)]\,ds +$$
$$+[I - C(t)]A^{-2}[F_2u_0 + f_2(0)] + \int_0^t [I - C(t-s)]A^{-2}[\mathcal{D}_u(F_2u)u'(s) + f_2'(s)]\,ds. \qquad (I.5)$$

Дифференцирование равенства (I.3) с $g = g_1 + g_2$ даёт

$$\frac{d\,Gu(t)}{dt} = -S(t)Au_0 + C(t)u_1 + \int_0^t C(t-s)[F_1u(s) + f_1(s)]\,ds +$$
$$+ S(t)A^{-1}[F_2u_0 + f_2(0)] + \int_0^t S(t-s)A^{-1}[\mathcal{D}_u(F_2u)u'(s) + f_2'(s)]\,ds. \qquad (I.6)$$

В пространстве $C(0,T;H_2) \cap C^1(0,T;H_1)$ рассмотрим множество $M_{R_0,T} = \{u(t) \in C(0,T;H_2) \cap C^1(0,T;H_1),\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \max_{t\in[0,T]}(\|u(t)\|_2 + \|u'(t)\|_1 \le R_0\}$, R_0 – некоторая положительная постоянная. Обозначая $C(R_0) = \max[C_1(R_0), C_2(R_0, R_0), C_3(R_0), C_4(R_0, R_0)]$ и учитывая (I.5), (I.6), получаем, что при $R_0 = 3(\|u_0\|_2 + \|u_1\|_1 + \|F_2u_0\| + \|f_2(0)\|) + 1$ и $T = T_1$, где $3T_1[C(R_0)(R_0+1) + \max_{t\in[0,T]}(\|f_1(t)\|_1 + \|f_2'(t)\|)] = q < 1$, оператор G отображает множество M_{R_0,T_1} в себя и на этом множестве является сжатием с константой $q < 1$. Теорема доказана.

Замечание I. Доказательство теоремы I полностью сохраняется, если вместо уравнения (I.I) рассматривать уравнение

$$u_{tt} + A^2u = F_1(u, u_t) + F_2u + f$$

в предположении, что нелинейный оператор $F_1 : \mathcal{D}(A^2) \times \mathcal{D}(A) \to \mathcal{D}(A)$ удовлетворяет ограничениям: для любых $u, v \in \mathcal{D}(A^2)$ и любых $w, z \in \mathcal{D}(A)$

$$\|F_1(u,w)\|_1 \le C_1(\|u\|_2 + \|w\|_1),$$

$$\|F_1(u,w) - F_1(v,z)\|_1 \le C_2(\|u\|_2 + \|w\|_1 + \|v\|_2 + \|z\|_1)(\|u-v\|_2 + \|w-z\|_1).$$

Замечание II. В случае, когда $F_2 \equiv 0$, принцип сжатых отображений применялся к уравнению (I.4) в пространстве $C(0,T;H_2)$ в работе [I].

Замечание III. Предположим, что $F_1 \equiv 0$, а оператор F_2 зависит также от u_t , т.е. рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + A^2 u = F_2(u, u_t) + f.$$

Условие III заменяется таким условием: нелинейный оператор $F_2 : \mathcal{D}(A^2) \times \mathcal{D}(A) \to H$ имеет производные Фреше $\mathcal{D}_u F_2(u, w)$, $\mathcal{D}_w F_2(u,w) : H_2 \times H_1 \to H$, которые удовлетворяют неравенствам $\|[\mathcal{D}_u F_2(u,w)](h_2, h_1)\|, \|[\mathcal{D}_w F_2(u,w)](h_2,h_1)\| \leq C_3(\|u\|_2 + \|w\|_1)(\|h_2\|_1 + \|h_1\|)$ для любых (u,w), $(h_2, h_1) \in H_2 \times H_1$ и условию Липшица в каждом шаре пространства $H_2 \times H_1$: $\|[\mathcal{D}_u F_2(u,w) - \mathcal{D}_v F_2(v,z)](h_2, h_1)\|, \|[\mathcal{D}_w F_2(u,w) - \mathcal{D}_z F_2(v,z)](h_2, h_1)\| \leq C_4(\|u\|_2 + \|w\|_1 + \|v\|_2 + \|z\|_1)(\|u - v\|_2 + \|w - z\|_1)(\|h_2\|_1 + \|h_1\|)$. Разрешимость такого уравнения может быть получена для функции $f \in C(0,T;H_1) \cup C^1(0,T;H)$, если к оператору $Gu(t) = L^{-1}[F_2(u,u_t) + f]$ применить принцип сжатых отображений в пространстве $C(0,T;H_2) \cap C^2(0,T;H)$. От теоремы 5 [4] этот случай отличается тем, что функция f может принадлежать пространству $C(0,T;H_1)$. Свойства нелинейного оператора в упомянутой теореме определяются включением $C^1(0,T;H) \subset \mathcal{D}(L^{-1})$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы I, и на всём конечном промежутке $[0,T]$ для решения задачи Коши (I.I) имеет место априорная оценка

$$\max_{t \in [0,T]} (\|u(t)\|_2 + \|u'(t)\|_1) \leq C = const. \qquad (I.7)$$

Тогда задача Коши (I.I) имеет глобальное решение $u(t) \in C(0,T;H_2) \cap C^2(0,T;H)$, причём единственное.

Доказательство. Исходя из априорной оценки (I.7) , в доказательстве теоремы I будем считать, что $R_0 = 3(C + \|F_2 u_0\| + \|f_2(0)\|) + 1$. Тогда какая бы точка интервала $[0,T]$ ни была бы выбрана в качестве начальной, решение задачи Коши всякий раз существует на одном и том же интервале $[0,T_1]$. Ввиду конечности интервалов $[0,T_1]$, $[0,T]$ и единственности решения на общей части интервалов существования решения, локальное решение задачи Коши (I.I) может быть продолжено на весь интервал $[0,T]$ за конечное число шагов единственным образом. Теорема доказана.

Пусть для целого $p \geq 1$

$$u_0 \in \mathcal{D}(A^{p+1}), \quad u_1 \in \mathcal{D}(A^p), \quad f \in C(0,T;H_p) \cup C^1(0,T;H_{p-1}). \qquad (I.8)$$

Предположим, что для операторов F_1 и F_2 выполнены более сильные

Условие IУ. Нелинейный оператор $F_1 : \mathcal{D}(A^{p+1}) \to \mathcal{D}(A^p)$ удовлетворяет следующим ограничениям: для любых $u, v \in \mathcal{D}(A^{p+1})$

$$\|F_1 u\|_p \le C_1(\|u\|_{p+1}),$$

$$\|F_1 u - F_1 v\|_p \le C_2(\|u\|_{p+1} + \|v\|_{p+1})\|u-v\|_{p+1}.$$

Условие У. Нелинейный оператор $F_2 : \mathcal{D}(A^{p+1}) \to \mathcal{D}(A^{p-1})$ имеет производную Фреше $\mathcal{D}_u(F_2 u) : H_{p+1} \to H_{p-1}$, которая удовлетворяет неравенству $\|\mathcal{D}_u(F_2 u) w\|_{p-1} \le C_3(\|u\|_{p+1})\|w\|_p$ для любых $u, w \in H_{p+1}$ и условию Липшица в каждом шаре пространства H_{p+1}:

$$\|[\mathcal{D}_u(F_2 u) - \mathcal{D}_v(F_2 v)]w\|_{p-1} \le C_4(\|u\|_{p+1} + \|v\|_{p+1})\|u-v\|_{p+1}\|w\|_p \quad \forall u, v, w \in H_{p+1}.$$

Теорема 3. Пусть операторы A, F_1, F_2 удовлетворяют условиям I, IУ, У, и выполнено (I.8). Тогда задача Коши (I.I) на некотором промежутке $[0,T_p] \subseteq [0,T]$ имеет единственное решение $u(t) \in C(0,T_p; H_{p+1}) \cap C^2(0,T_p; H_{p-1})$.

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы I с той лишь разницей, что принцип сжатых отображений применяется к уравнению (I.4) в пространстве $C(0,T; H_{p+1}) \cap C^1(0,T; H_p)$.

Аналогично теореме 2 может быть доказана такая

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3, и для решения задачи Коши (I.I) имеет место априорная оценка $\max\limits_{t \in [0,T]} (\|u(t)\|_{p+1} + \|u'(t)\|_p) \le const$. Тогда локальное решение, полученное по теореме 3, может быть продолжено на весь промежуток $[0,T]$ с сохранением гладкости.

2. Почти линейное уравнение гиперболического типа с функциональной нелинейностью.

Пусть Q – линейный оператор с плотной в H областью определения $\mathcal{D}(Q)$, подчинённый оператору A, т.е. $\|Qu\| \le c\|Au\|$ для любого $u \in \mathcal{D}(A)$, $c = const$. Предположим, что оператор F_1 имеет специальный вид: $F_1 u = -\varphi(u) A u$, где φ – определённый на $\mathcal{D}(Q)$ функционал; $F_2 \equiv 0$. Тогда задача Коши (I.I) записывается так:

$$u_{tt} + A^2 u + \varphi(u) A u = f, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1. \qquad (2.1)$$

К задаче Коши (2.I) применим результаты предыдущего параграфа. Для этого потребуем, чтобы φ удовлетворял ограничениям

$$|\varphi(u)| \le M_1(\|Qu\|) \qquad \forall u \in \mathcal{D}(Q), \qquad (2.2)$$

$$|\varphi(u)-\varphi(v)|\le M_2(\|Qu\|+\|Qv\|)\|Qu-Qv\| \quad \forall u,v\in\mathcal{D}(Q), \tag{2.3}$$

где M_1, M_2 – монотонно возрастающие всюду конечные функции. Легко проверить, что так определённый оператор F_1 удовлетворяет условию IУ при каждом p = I, 2, ...

Отметим, что требование подчинённости оператора Q оператору A не ограничивает общности. Действительно, если предположить, что функционал φ_1 определён на $\mathcal{D}(Q_1)$, где оператор Q_1 подчинён оператору A^β, $\beta>1$ и удовлетворяет условиям

$$|\varphi_1(w)|\le M_1(\|Q_1w\|), \quad |\varphi_1(w)-\varphi_1(z)|\le M_2(\|Q_1w\|+\|Q_1z\|)\|Q_1w-Q_1z\|$$

для любых $w, z\in\mathcal{D}(Q_1)$, то замена $u=A^{\beta-1}w$ позволяет перейти от задачи Коши $w_{tt}+A^2w+\varphi_1(w)Aw=f_1$, $w|_{t=0}=w_0$, $w_t|_{t=0}=w_1$, к задаче Коши (2.I) с $\varphi(u)=\varphi_1(A^{1-\beta}u)$, $u_0=A^{\beta-1}w_0$, $u_1=A^{\beta-1}w_1$, $f(t)=A^{\beta-1}f_1(t)$, причём функционал φ определён на $\mathcal{D}(Q)$, где $Q=Q_1A^{1-\beta}$, и удовлетворяет условиям (2.2), (2.3).

Предположим, что на решении $u=u(t)$ задачи Коши (2.I) $\max\limits_{t\in[0,T]}\|Qu\|\le\bar c=const$. Тогда для начальных данных $u_0\in\mathcal{D}(A^{p+1})$, $u_1\in\mathcal{D}(A^p)$, $f(t)\in L^2(0,T;H_p)$ при некотором фиксированном натуральном p можно получить априорную оценку $\max\limits_{t\in[0,T]}(\|u_t\|_p^2+\|u\|_{p+1}^2)=const$ следующим образом. Применим к обеим частям уравнения (2.I) оператор A^p и результат скалярно умножим на A^pu_t. После преобразований получим $\frac{d}{dt}(\|u_t\|_p^2+\|u\|_{p+1}^2)=-\varphi(u)2Re(A^{p+1}u,A^pu_t)+$ $+2Re(A^pf,A^pu_t)\le M_1(\|Qu\|)(\|u_t\|_p^2+\|u\|_{p+1}^2)+\|u_t\|_p^2+\|f\|_p^2.$
Отсюда следует, что

$$\max_{t\in[0,T]}(\|u_t\|_p^2+\|u\|_{p+1}^2)\le\left(\|u_0\|_{p+1}^2+\|u_1\|_p^2+\int_0^T\|f(t)\|_p^2dt\right)\exp(T+TM_1(\bar c)).$$

В силу результатов п. I для задачи Коши (2.I) имеет место

Теорема 5. Пусть оператор A удовлетворяет условию I; линейный оператор Q с плотной в H областью определения $\mathcal{D}(Q)$ подчинён оператору A; определённый на $\mathcal{D}(Q)$ функционал φ удовлетворяет условиям (2.2), (2.3); на решении задачи Коши (2.I) имеет место априорная оценка $\max\limits_{t\in[0,T]}\|Qu\|\le\bar c=const$, и начальные данные удовлетворяют условию (I.8), где p – некоторое фиксированное натуральное число. Тогда задача Коши (2.I) имеет единственное решение: $u(t)\in C(0,T;H_{p+1})\cap C^2(0,T;H_{p-1})$.

Пример I$^{\circ}$. Пусть A – неограниченный самосопряжённый положительно определённый оператор в H ; Q – линейный оператор, коммутирующий с оператором $A^{1/2}$ на $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^j)$ и подчинённый оператору A . Рассмотрим задачу Коши (2.I) с функционалом $\varphi(u) = a(\|Qu\|^2)$, где функция $a(s)$ при $s \geq 0$ непрерывно дифференцируема и ограничена снизу некоторой постоянной (не обязательно положительной):

$$a(s) \geq m > -\infty \qquad \forall s \geq 0. \tag{2.4}$$

Очевидно, что $|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq [\max\limits_{s \in [0, \|Qu\|^2 + \|Qv\|^2]} |a'(s)|] (\|Qu\| + \|Qv\|) \|Qu - Qv\|$ и $|\varphi(u)| \leq \max\limits_{s \in [0, \|Qu\|^2]} |a(s)|$ для любых $u, v \in \mathcal{D}(Q)$, т.е. выполнены условия (2.2), (2.3).

Так как замыкание множества $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^j)$ в норме $\|\cdot\|_r$ при любом $r \geq 0$ даёт пространство H_r , то учитывая перестановочность операторов $A^{1/2}$ и Q на $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{D}(A^j)$, подчинённость оператора Q оператору A и замкнутость оператора $A^{1/2}$, устанавливаем, что $A^{1/2}$ и Q коммутируют на $H_{3/2}$. Из этого факта следует перестановочность операторов $A^{-1/2}$ и Q на H_1 .

Применим к уравнению

$$u_{tt} + A^2 u + a(\|Qu\|^2) A u = f, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1, \tag{2.5}$$

оператор QA^{-1} , результат скалярно умножим на Qu_t и, используя указанную выше перестановочность операторов и оценку (2.4), преобразуем к такому виду:

$$\frac{d}{dt}\{\|QA^{-1/2}u_t\|^2 + \|QA^{1/2}u\|^2 + \int\limits_0^{\|Qu\|^2} [a(s) + |m|]\,ds\} = |m| \cdot 2\operatorname{Re}(QA^{1/2}u, QA^{-1/2}u_t) +$$
$$+ 2\operatorname{Re}(QA^{-1/2}f, QA^{-1/2}u_t) \leq |m|[\|QA^{-1/2}u_t\|^2 + \|QA^{1/2}u\|^2] + \|QA^{-1/2}u_t\|^2 + \|QA^{-1/2}f\|^2.$$

Отсюда следует априорная оценка $\max\limits_{t \in [0,T]} (\|QA^{-1/2}u_t\|^2 + \|QA^{1/2}u\|^2) \leq const$ и, значит, $\max\limits_{t \in [0,T]} \|Qu\| = \|A^{-1/2}\| \max\limits_{t \in [0,T]} \|QA^{1/2}u\| \leq const$. Таким образом, для задачи Коши (2.5) справедлива теорема 5, которая устанавливает существование сильного решения задачи Коши (2.5) в предположении конечной гладкости начальных данных, т.е. здесь $p \geq 1$ может быть любым конечным числом, в то время как в работах [5 , 6] требуется выполнение условий (I.8) при всех p = I, 2, ... одновременно. Кроме того, в [5, 6] к оператору A предъявляется дополнительное требование: дискретность спектра.

<u>Пример 2°</u>. Пусть оператор A и функция $a(s)$ такие же, как в примере I°; B – линейный оператор, подчинённый оператору A

с константой c. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + A^2 u + a(\|A^{1/2} u\|^2) A u + Bu = f.$$

Из примера I^0 следует, что оператор $F_1 u = -a(\|A^{1/2}u\|^2)Au$ удовлетворяет условию II. Полагая $F_2 = -B$, замечаем, что $\|Bv\| \le c\|Av\| \le$ $\le c\|A^{-1}\|\cdot\|v\|_2$ для любого $v \in \mathcal{D}(A^2)$, и производная Фреше $D_u(F_2 u) =$ $= -B : H_1 \to H$ не зависит от u. Условия теоремы I выполнены, следовательно, существует локальное решение задачи Коши для рассматриваемого уравнения. Скалярно умножая это уравнение на u_t и используя подчинённость оператора B оператору A получаем

неравенство $\frac{d}{dt}[\|u_t\|^2 + \|u\|_1^2 + \int_0^{\|A^{1/2}u\|^2} (a(s) + |m|) ds] \le \|f\|^2 + (|m| + c + 1)(\|u_t\|^2 + \|u\|_1^2)$, из которого вытекает априорная оценка $2 \max_{t \in [0,T]} \|A^{1/2} u\|^2 \le$ $\le \max_{t\in[0,T]} (\|u_t\|^2 + \|u\|_1^2) \le c_1 = const$. Если оператор B коммутирует с оператором A на $\mathcal{D}(A^2)$, то применяя к исходному уравнению оператор A и скалярно умножая результат на Au_t, после преобразований получаем $\frac{d}{dt}(\|u_t\|_1^2 + \|u\|_2^2) \le \|f\|_1^2 + (\max_{s \in [0,c]} a(s) + c + 1)(\|u_t\|_1^2 + \|u\|_2^2)$. Отсюда следует априорная оценка $\max_{t\in[0,T]} (\|u_t\|_1^2 + \|u\|_2^2) \le const$, достаточная для получения глобального решения по теореме 2.

3. Почти линейное гиперболическое уравнение с функциональной и алгебраической нелинейностями

Пусть Ω – ограниченная область с границей Γ в n-мерном евклидовом пространстве R^n точек $x = (x_1, \dots, x_n)$. В качестве H будем рассматривать пространство $L_2(\Omega)$ всех вещественных квадратично суммируемых по области Ω функций. Зададим оператор $A = -\sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$ с $\mathcal{D}(A) = \{u(x) \in L_2(\Omega), \sum_{i=1}^{n} \partial^2 u(x)/\partial x_i^2 \in L_2(\Omega), u(x)|_\Gamma = 0\}$. Оператор A является неограниченным самосопряжённым положительно определённым оператором в $L_2(\Omega)$; при этом $\mathcal{D}(A) \subseteq H^2(\Omega)$, где $H^s(\Omega)$ – пространство Соболева порядка $s \ge 0$ (см., например, [3]). Пусть $B = \sum_{i=1}^{n} b_i \partial/\partial x_i$ с $\mathcal{D}(B) \subset H^1(\Omega)$, b_i – скалярные множители. Оператор B подчинён оператору A, так как $\|Bu\| \le (\max_{i=1,\dots,n} b_i)\|u\|_{H^1(\Omega)} \le (\max_{i=1,\dots,n} b_i)\|u\|_{H^2(\Omega)} \le$ $\le C\|Au\|$ для $u \in \mathcal{D}(A)$ (см. [3], с. 229). Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + A^2 u + a(\|A^{1/2} u\|^2) A u + (\alpha + Bu)^\sigma = f; \quad \alpha, \sigma \in (-\infty, +\infty). \quad (3.1)$$

Проверим условие III для оператора $F_2 u = (\alpha + Bu)^\sigma$. Будем предполагать, что $n < 6$. В этом случае пространство $H^3(\Omega)$ вложено в пространство $C(\bar\Omega)$ всех непрерывных на замыкании области

Ω функций, следовательно, для $u \in \mathcal{D}(A^2) \subseteq H^4(\Omega)$ элемент $Bu \in H^3(\Omega) \subseteq C(\Omega)$ и $\|(\alpha + Bu)^{\sigma-1} Bw\| \le (|\alpha| + \max_{x\in\Omega}|Bu|)^{\sigma-1}\|Bw\| \le C_1(|\alpha| + \|u\|_2)^{\sigma-1}\|w\|_1$, где $w \in \mathcal{D}(A) \subseteq H^2(\Omega)$, $C_1 = const$. Поэтому $D_u(F_2 u) = -\sigma(\alpha + Bu)^{\sigma-1}B : \mathcal{D}(A) \subseteq H^2(\Omega) \to C(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ и $C_3(\|u\|_2) = \begin{cases} C_1|\sigma|(|\alpha| + \|u\|_2)^{\sigma-1}, & \sigma > 1 \\ C_1|\sigma|\,|\alpha|^{\sigma-1}, & \sigma \le 1 \end{cases}$.
Липшицевость производной Фреше вытекает из следующего неравенства: для любых u, $v \in \mathcal{D}(A^2)$, $w \in \mathcal{D}(A)$

$$\|[(\alpha + Bu)^{\sigma-1} - (\alpha + Bv)^{\sigma-1}]Bw\| \le |\sigma-1|(|\alpha| + \max_{x\in\Omega}|Bu| + \max_{x\in\Omega}|Bv|)^{\sigma-2}\max_{x\in\Omega}|Bu - Bv|\cdot\|Bw\| \le C_1|\sigma-1|(|\alpha| + \|u\|_2 + \|v\|_2)^{\sigma-2}\|u-v\|_2\|w\|_1.$$

Из теоремы I следует существование локального решения задачи Коши для уравнения (3.I) с операторами A и B указанного вида. В частности, при $n = 1$ уравнение (3.I) служит математической моделью для описания нелинейных колебаний пластины в сверхзвуковом потоке газа в случае цилиндрического изгиба.

Автор благодарит Лаптева Г.И. за обсуждение полученных результатов и полезные советы.

Литература

I. Козьмина Е.С. Локальная разрешимость уравнений нелинейных колебаний цилиндрических оболочек.- В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, I98I, с. 45-5I.

2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., I967.

3. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М., I976.

4. Якубов С.Я. Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения.- Труды московского математического общества, I970, т. 23, с. 37-60.

5. Medeiros L.A. Sur une équation non linéaire de la physique mathématique.- C.R.Acad.Sci., I978, AB 286, N 5, p. 277-278.

6. Medeiros L.A. On a new class of nonlinear wave equations.- Journal of Mathematical Analysis and Applications, I979, 69, p. 252-262.

Поступила I7 сентября I98I г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.88

ОБ ОЦЕНКЕ НОРМ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.И.Лабеев

ЛГУ им. П.Стучки

В работах [1-4] доказаны теоремы об устойчивости индекса, свойств изоморфности, спектральных свойств линейных непрерывных и линейных замкнутых операторов при с.к.а. (см. ниже, опр. 1). Однако эти теоремы устанавливали лишь сам факт устойчивости, но не позволяли конструктивно установить номер аппроксимирующего оператора, начиная с которого выполнялись условия теорем

В настоящей работе эти теоремы будут доказаны новым методом с использованием схемы доказательства классических результатов о возмущении линейных операторов операторами, малыми по норме.

Напомним некоторые определения.

Определение 1. Пусть X и Y – банаховы пространства над полем скаляров $\mathbb{K}\ (=\mathbb{R}, =\mathbb{C})$. Последовательность линейных непрерывных операторов $A_n : X \longrightarrow Y$ секвенциально-компактно аппроксимирует (с.к.а.) линейный непрерывный оператор $A : X \to Y$, если

1) $\forall x \in X\ \lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$;

2) для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(A_n x_n - A x_n)$ относительно компактна в пространстве Y.

В этой ситуации будем просто писать, что $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A$.

В дальнейшем существенно используется следующая

Лемма 1. (см. [2]). Пусть $A_n \in L(X,Y)$, $B_n \in L(Y,Z)$ и $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$, $B_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \|B_n \circ A_n\| = 0$.

В частности, если $Z = Y = X$, $B_n = A_n$, то $\lim_{n\to\infty} \|A_n^2\| = 0$

Следующая теорема даёт одно из необходимых и достаточных условий с.к.а.

Теорема 1. Пусть $X = Y$ – банахово пространство.

$A_n \in L(X,Y)$ и для любого вектора $x \in X$ $\lim_{n\to\infty} A_n x = 0$. Тогда $(A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0) \Leftrightarrow (A_n^2 - A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0,\ \exists\, k \in N : \lim_{n\to\infty} \| A_n^k \| = 0)$.

Доказательство. Необходимость следует из того, что с.к.а. является обобщением сходимости по норме линейных операторов и из аддитивности с.к.а.

Достаточность. Не трудно установить, что $A_n^3 - A_n^2 \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$. Отсюда следует, что $A_n^3 - A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$. Аналогично – $A_n^4 - A_n^2 \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$, поэтому $A_n^4 - A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$. Продолжая доказательство, по аналогии получим $A_n^k - A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$. Тогда из равенства $\lim_{n\to\infty} \| A_n^k \| = 0$ следует нужное: $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$.

Данная теорема даёт один из критериев для проверки с.к.а.

Теорема 2. Пусть $X = Y$, $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$. Тогда существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n > n_0$ $A_n + I \in I_{som}(X,X)$.

Доказательство. В силу леммы 1 $\lim_{n\to\infty} \| A_n^2 \| = 0$. Поэтому существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $\| A_n^2 \| < 1$. Докажем теперь, что $I + A_n \in I_{som}(X,Y)$. Действительно, операторный ряд $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_n^m$ сходится, а его сумма является оператором, обратным к $A_n + I$.

Используя идею доказательства теоремы 2 и схемы доказательства соответствующих теорем в случае возмущений операторами, малыми по норме, можно конструктивно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A \in I_{som}(X,Y)$. Тогда существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $A_n \in I_{som}(X,Y)$, $\| A_n \| < c$, $\| A_n^{-1} \| \leq c = const$, $A_n^{-1} \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A^{-1}$.

В этой ситуации n_0 нужно выбрать таким, чтобы для всех $n \geq n_0$ $\| (A_n - A)^2 \| < \| A^{-1} \|^{-2}$.

Теорема 4. Пусть $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A$ и A – относительно открытый инъективный оператор. Тогда существуют такие числа $n_0 \in N$ и $a > 0$, что при всех $n \geq n_0$ A_n – относительно открытый инъективный оператор и для всех $x \in X$ $\| A_n x \| \geq a \| x \|$.

Теорема 5. Пусть $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A$, A – относительно открытый оператор и $\dim A^{-1}\{0\} < +\infty$. Тогда для всех достаточно больших $n \in N$ A_n – относительно открытый оператор и $\dim A_n^{-1}\{0\} \leq \dim A^{-1}\{0\}$. Знак равенства выполняется в том и только в том случае, когда существует такая последовательность подпространств $(Z_n) \subset\subset X$, что $X = Z_n \oplus A_n^{-1}\{0\}$ и для некоторого числа $a \in \mathbb{R}$ и для всех $x \in Z_n$ $\|A_n x\| \geq a\|x\|$.

Теорема 6. Пусть $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A$, A – Φ-оператор. Тогда для всех достаточно больших $n \in N$ A_n также является Φ-оператором; $\operatorname{rang} A_n \leq \operatorname{rang} A$, $\operatorname{def} A_n \leq \operatorname{def} A$ и $\operatorname{ind} A_n = \operatorname{ind} A$.

Используя классический переход от линейных замкнутых к линейным непрерывным операторам посредством нормы Секкефальви-Надя, можно доказать теоремы, аналогичные теоремам 4–6, в той ситуации, когда X является подпространством банахова пространства Z, а A_n, A – линейные замкнутые операторы.

Предыдущие теоремы позволяют рассмотреть по классической схеме вопросы устойчивости свойств спектра линейных непрерывных операторов при с.к.а. и получить результаты из [3].

Большой интерес представляет исследование свойств спектра пучка операторов $A_n - \lambda B_n$.

Определение 2. Число λ называется регулярным числом оператора A относительно оператора B если $A - \lambda B \in I_{som}(X, Y)$. Множество всех регулярных чисел называется резольвентным множеством пучка операторов $A - \lambda B$ и обозначается через $\operatorname{Res}(A,B)$. Множество $\operatorname{Res}(A,B)$ является открытым (в предположении, что A и B – непрерывные операторы) и оператор-функция $A - \lambda B$ является аналитической функцией относительно λ на $\operatorname{Res}(A,B)$. Множество, дополнительное к $\operatorname{Res}(A,B)$ в поле K, называется спектром пучка $A - \lambda B$ и обозначается через $S(A,B)$. Спектр является замкнутым, не обязательно компактным (даже для непрерывных операторов) множеством.

Отметим справедливость следующей теоремы, доказательство которой аналогично доказательству соответствующих теорем из [3].

Теорема 7. Пусть $A_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} A$, $B_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} B$. Тогда для любого компактного множества $F \subset \operatorname{Res}(A,B)$ найдётся такой номер $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $F \subset Res(A_n,B_n)$. Если $X = Y$ и $A_n \circ A = A \circ A_n$, $B_n \circ B = B \circ B_n$, то расстояние $\varkappa[S(A,B);S(A_n,B_n)]$ между спектрами пучков $A-\lambda B$ и $A_n-\lambda B_n$ в смысле Хаусдорфа стремится к нулю при $n \to \infty$.

Дальше, пусть $\lambda_0 \neq 0$ – изолированное собственное число пучка $A-\lambda B$. Тогда существует такое число $\delta > 0$ что $s = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda-\lambda_0| = \delta\} \subset Res(A,B)$ и можно рассмотреть следующие проекторы, аналогичные проектору Рисса:

$$T = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}(A-\lambda B)^{-1}d\lambda, \quad Q = T\circ B, \quad P = B\circ T.$$

В силу теоремы 7 для всех достаточно больших $n \in N$ $s \subset Res(A_n,B_n)$ и поэтому корректно определение проекторов

$$T_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda-\lambda_0|=\delta}(A_n-\lambda B_n)^{-1}d\lambda, \quad Q_n = T_n\circ B_n, \quad P_n = B_n\circ T_n.$$

При указанных выше предположениях справедлива теорема:

Теорема 8. $T_n \xrightarrow{c.к.a.} T$, $Q_n \xrightarrow{c.к.a.} Q$, $P_n \xrightarrow{c.к.a.} P$.

Используя метод исследования спектра с помощью проекторов Рисса, можно доказать следующее предположение:

Теорема 9. Пусть $A_n \xrightarrow{c.к.a.} A$, $B_n \xrightarrow{c.к.a.} B$, λ_0 – изолированное собственное число пучка операторов $A-\lambda B$, отличное от нуля. Тогда:

а) для всех достаточно больших $n \in N$ пересечение множества $S(A_n,B_n)$ с кругом $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda-\lambda_0| < \delta\}$ – не пусто; существует такая последовательность чисел $\lambda_n \in S(A_n,B_n)$, что $\lambda_0 = \lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$.

б) $QX = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}Q_nX}$; $TY = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}T_nY}$; $PY = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}P_nY}$.

в) если $\dim QX < +\infty$, то существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n > n_0$ $\dim Q_nX < +\infty$, следовательно, пересечение $S(A_n,B_n) \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda-\lambda_0| < \delta\}$ содержит лишь конечное число точек, каждая из которых является собственным числом конечной корневой кратности; раствор $\hat{\delta}(QX,Q_nX)$ между подпространствами QX и Q_nX в смысле Т.Като стремится к нулю при $n \to \infty$;

г) если $\dim QX = 1$, то существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n > n_0$ в круге $\{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda-\lambda_0| < \delta\}$ содержится единственное собственное число λ_n пучка $A_n-\lambda B_n$ единичной кратности и $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lambda_0$.

Таким образом, теорема 9 позволяет установить связь между спектрами пучков операторов $A-\lambda B$ и $A_n - \lambda B_n$. Используя теорему 3 из [4] можно показать, что в случае, когда λ_0 является изолированным, отличным от нуля, собственным числом пучка операторов $A-\lambda B$ конечной корневой кратности $p(\lambda_0)$, то для всех достаточно больших $n \in N$ размерность линейной оболочки, натянутой на корневые подпространства, соответствующие всем собственным числам пучка $A_n - \lambda B_n$, лежащим в достаточно малой окрестности числа λ_0, совпадает с $p(\lambda_0)$. Здесь под корневым подпространством числа λ_0 понимаем линейную оболочку, натянутую на собственные векторы и на векторы, присоединённые к собственным векторам.

Норма возмущения и быстрота сходимости собственных чисел в данной ситуации зависит от операторов A и B, но выражение быстроты сходимости через λ_0 и $\|(A-\lambda B)^{-1}\|$, $\lambda \in S$ затруднено.

Литература

1. Карклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.-Латвийский математический ежегодник, 1976, т.17, с. 3-29.

2. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах.-В кн.:Топологические пространства и их отображения. Рига, 1975, вып.1, с. 39-58.

3. Лабеев В.И. Устойчивость свойств спектра линейных отображений при секвенциально компактной аппроксимации в банаховых пространствах.-В кн. Топологические пространства и отображения в них. Рига, 1975, с. 59-75.

4. Лабеев В.И. Об устойчивости секвенциальной предкомпактности отображений в топологических векторных пространствах при секвенциально предкомпактной аппроксимации. -В кн.:Топологические пространства и отображения в них. Рига, 1975, с. 76-90.

Поступила 14 сентября 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.83

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ИХ СОПРЯЖЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В.С. Левченков
ЛГУ им. П.Стучки

Понятие секвенциально компактной аппроксимации линейных непрерывных отображений в банаховых пространствах ввёл и исследовал Г.М.Вайникко [1]. В §1 настоящей работы исследуются необходимые и достаточные условия секвенциально компактной аппроксимации в связи с одной из проблем, поставленной Г.М.Вайникко [2, стр. 34]. В §2 получены результаты, касающиеся устойчивости индекса фредгольмовых отображений при секвенциально компактной аппроксимации сопряжённого отображения. Эти результаты дополняют результаты работ [3–8].

§1. В дальнейшем изложении используются следующие обозначения: $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел; X, Y, Z – нормированные векторные пространства над полем $\mathbb{K}$ действительных или комплексных чисел. $LC(X,Y)$, $LCC(X,Y)$ и $LCC_0(X,Y)$ – соответственно – пространство всех линейных непрерывных, линейных компактных и линейных конечномерных отображений X в Y; $B_X := \{x \in X \mid \|x\|_X \leq 1\}$. Для $f \in LC(X,Y)$, кроме нормы $\|f\| = \sup \|f B_X\|_Y$, рассматривается полунорма $p(f) = \inf \|f - LCC(X,Y)\|$, т.е. расстояние от f до множества $LCC(X,Y)$, а полунорма $q(f) = \chi(f, B_X)$, где норма множества – это множество норм его элементов, а χ – мера некомпактности Хаусдорфа. $f_n \xrightarrow{c.c.a.} f \in LC(X,Y)$ означает, что последовательность $f_n \in LC(X,Y)$ компактно аппроксимирует $f \in LC(X,Y)$ (определение см. [5], или с. 26 наст. сб.).

<u>Лемма 1.</u> Если $f_n, g_n \in LC(X,Y)$, $h_n \in LCC(X,Y)$, $f_n = g_n + h_n$ $(n \in \mathbb{N}_+)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n\| = 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} q(f_n) = 0$.

Утверждение вытекает из следующих неравенств:
$q(f_n)=q(g_n+h_n)\leq q(g_n)+q(h_n)=q(g_n)\leq \|g_n\|$.

Теорема 1. Пусть X , Y - полные пространства, причём Y - пространство с базисом Шаудера, $f_n\in LC(X,Y)$. Для того, чтобы $\lim_{n\to\infty} q(f_n)=0$, необходимо и достаточно существование таких последовательностей отображений $g_n\in LC(X,Y)$ и $h_n\in LCC(X,Y)$, что

1. $f_n=g_n+h_n \quad (n\in\mathbb{N})$;
2. $\lim_{n\to+\infty}\|g_n\|=0$.

Доказательство. По определению $p(f_n)$ для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует такое $h_n\in LCC(X,Y)$, что

$$\|f_n-h_n\|<p(f_n)+\frac{1}{n}.$$

Положим $g_n:=f_n-h_n$. Необходимость вытекает из неравенств [9]:

$\|g_n\|=\|f_n-h_n\|<p(f_n)+\frac{1}{n}\leq bq(f_n)+\frac{1}{n}$,

где $b=\varliminf_{n\to+\infty}\|u_n\|$ и u_n - проектор, проектирующий Y на линейную замкнутую оболочку множества $\{e_i\mid i\geq n\}$ параллельно линейной оболочке множества $\{e_1,e_2,\dots,e_{n-1}\}$.

Достаточность следует из леммы 1.

Замечание. Из доказательства вытекает, что если в формулировке теоремы 1 заменить q полунормой p , то в силу $p(f_n)\geq q(f_n)$ [9] результат справедлив без условий полноты пространств и существования базиса Шаудера в Y .

Теорема 2. Пусть Y - предгильбертово пространство и для каждого $n\in\mathbb{N}$ $f_n\in LC(X,Y)$. Тогда утверждение теоремы 1 верно для $h_n\in LCC_0(X,Y)$.

Доказательство. Необходимость. В случае конечномерного пространства X $q(f_n)=0$ и $f_n\in LCC(X,Y)$. Тогда $g_n=0$ и $h_n=f_n$ для каждого $n\in\mathbb{N}$. Рассмотрим бесконечномерное пространство X . Так как

$$q(f_n)=\chi(f_nB_X),$$

то для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует конечное подмножество $K_n\subset Y$, удовлетворяющее условию

$$f_nB_X\subset K_n+(q(f_n)+\tfrac{1}{n})B_Y.$$

Построим линейную оболочку $\mathcal{L}(K_n)$ конечного множества K_n в пространстве Y . Так как $\dim\mathcal{L}(K_n)<+\infty$, то по теореме 6.3.1 из [10] для каждого $n\in\mathbb{N}$ существуют непрерывные ортогональные проекторы $u_n \in LC(Y,Y)$ и $\vartheta_n \in LC(Y,Y)$, удовлетворяющие условиям:

$u_n + \vartheta_n = I_Y$, $u_n Y = \mathcal{L}(K_n)$, $\vartheta_n Y = \mathcal{L}(K_n)^{\perp}$, $\|u_n\| \le 1$, $\|\vartheta_n\| \le 1$.

Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения:

$f_n = I_Y \circ f_n = (u_n + \vartheta_n) \circ f_n = u_n \circ f_n + \vartheta_n \circ f_n = g_n + h_n$,

$g_n = \vartheta_n \circ f_n$, $h_n = u_n \circ f_n$, $h_n \in LC(X,Y)$, $g_n \in LC(X,Y)$.

Так как $h_n X = (u_n \circ f_n) X = u_n (f_n X) \subset u_n Y = \mathcal{L}(K_n)$, то $\dim h_n X \le \dim \mathcal{L}(K_n) < +\infty$ и, следовательно, $h_n \in LCC_0(X,Y)$.

Если $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – последовательность векторов из шара B_X, то для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$f_n x_n = y_n(x_n) + (q(f_n) + \tfrac{1}{n}) z_n(x_n),$$

где $y_n(x_n) \in K_n$ и $z_n(x_n) \in B_Y$. Тогда из

$\|g_n x_n\|_Y = \|(\vartheta_n \circ f_n) x_n\|_Y = \|\vartheta_n (f_n x_n)\|_Y =$

$= \|\vartheta_n (y_n(x_n) + (q(f_n) + \frac{1}{n}) z_n(x_n))\|_Y =$

$= \|\vartheta_n (y_n(x_n)) + (q(f_n) + \frac{1}{n}) \vartheta_n (z_n(x_n))\|_Y =$

$= |q(f_n) + \frac{1}{n}| \, \|\vartheta_n (z_n(x_n))\|_Y \le (q(f_n) + \frac{1}{n}) \|\vartheta_n\| \, \|z_n(x_n)\|_Y \le$

$\le q(f_n) + \frac{1}{n}$

и условия $\lim\limits_{n \to +\infty} q(f_n) = 0$ следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|g_n x_n\|_Y = 0$, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} \|g_n\| = 0$. Действительно, если бы $\|g_n\| \not\to 0$ при $n \to \infty$, то существовали бы последовательность векторов $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ из шара B_X и положительное число $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\|g_{n_k} x_{n_k}\|_Y + \tfrac{1}{k} > \|g_{n_k}\| \ge \varepsilon_0 > 0.$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$, получаем противоречие.

Достаточность следует из леммы 1.

<u>Теорема 3.</u> Пусть X, Y – полные пространства, причём Y – пространство с базисом Шаудера. Для того, чтобы $f_n \xrightarrow{\text{с.к.о.}} 0 \in LC(X,Y)$, необходимо и достаточно существование последовательностей отображений $g_n \in LC(X,Y)$ и $h_n \in LCC(X,Y)$, удовлетворяющих условиям:

1. $f_n = g_n + h_n$ $(n \in \mathbb{N}_+)$;
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \|g_n\| = 0$;
3. $h_n \xrightarrow{\text{с.к.о.}} 0 \in LC(X,Y)$.

<u>Доказательство.</u> Необходимость. Если $f_n \xrightarrow{\text{с.к.о.}} 0 \in LC(X,Y)$, то в силу следствия 1 из [7] $\lim\limits_{n \to +\infty} q(f_n) = 0$. Тогда по теореме 1 существуют последовательности отображений $g_n \in LC(X,Y)$ и $h_n \in LCC(X,Y)$ такие, что $f_n = g_n + h_n$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} \|g_n\| = 0$. Так как $h_n = f_n - g_n$ $(n \in \mathbb{N}_+)$, $f_n \xrightarrow{\text{с.к.о.}} 0 \in LC(X,Y)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \|g_n\| = 0$, то

$h_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0 \in LC(X,Y)$.

Достаточность. Если $f_n = g_n + h_n \quad (n \in \mathbb{N})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n\| = 0$ и $h_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0 \in LC(X,Y)$, то $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0 \in LC(X,Y)$.

Теорема 4. Пусть Y – предгильбертово пространство и $f_n \in LC(X,Y) \quad (n \in \mathbb{N})$. Тогда утверждение теоремы 3 верно для $h_n \in LCC_0(X,Y)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, в котором надо использовать теорему 2 вместо теоремы 1.

Замечание. Очевидно, теоремы 3,4 можно перефразировать для случая, когда $f_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f \in LC(X,Y)$.

§2. Пусть X' – пространство, топологически сопряжённое с пространством X, $\|x'\|_{X'}$ – норма линейного непрерывного функционала $x' \in X'$ и $\langle x, x' \rangle$ – значение функционала $x' \in X'$ на элементе $x \in X$. Если $f \in LC(X,Y)$, то сопряжённое отображение $f' : Y' \longmapsto X'$ определено равенством $\langle fx, y' \rangle = \langle x, f'y' \rangle$, верным для каждого $x \in X$ и каждого $y' \in Y'$, причём $f' \in LC(Y', X')$. Пусть далее $\dim X$ – алгебраическая размерность векторного пространства X, $\ker f = \{ x \in X \mid fx = 0_Y \}$ – ядро отображения $f : X \longmapsto Y$, $\operatorname{coker} f = Y / fX$ – коядро отображения f, $\operatorname{ind} f = \dim \ker f - \dim \operatorname{coker} f$ – индекс отображения f, при условии, что по крайней мере одно из чисел в правой части конечно.

Теорема 5. Пусть $f, f_n \in LC(X,Y) \quad (n \in \mathbb{N})$. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n - f \| = 0$, то $f_n' \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f' \in LC(Y', X')$.

Доказательство. В силу известной теоремы [11, с. 203] $\| f_n - f \| = \| (f_n - f)' \|$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty} \| f_n' - f' \| = 0$. Тогда в силу теоремы 9 из [5], $f_n' \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f' \in LC(Y', X')$.

Следующий пример показывает, что обратное утверждение не имеет место, более того, последовательность отображений может даже не сходиться поточечно к 0, хотя их сопряжённые отображения с.к.а. отображение 0!

Пример 1. Пусть $X = Y = \ell_2$ – гильбертово пространство последовательностей чисел из $\mathbb{K}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x = (pr_i x)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_2$ определим вектор $g_n x = (pr_1 x) e_n$, где $e_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_2$. Так как операции проектирования pr_n и умножения вектора на скаляр линейны и непрерывны, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ $g_n \in LC(\ell_2, \ell_2)$.

Если $x = e_1$, то $\|g_n x\| = \|g_n e_1\| = \|(pr_1 e_1) e_n\| = \|e_n\| = 1$, а значит, последовательность отображений $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не сходится поточечно к нулевому отображению и тем более не аппроксимирует секвенциально компактно нулевое отображение. Покажем, что $g_n' \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0' \in LC(\ell_2, \ell_2)$. Действительно, для любого линейного непрерывного функционала $y' \in \ell_2' = \ell_2$, и для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим отображение g_n' формулой $g_n' y' = (pr_n y') e_1$. Так как скалярное произведение $(g_n x \mid y') = pr_1 x \overline{pr_n y'} = (x \mid g_n' y')$, то g_n' – сопряжённое к отображению g_n. Далее из доказательства теоремы 10 из [5] следует, что $g_n' \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0' \in LC(\ell_2, \ell_2)$.

Приведём ещё пример, показывающий, что условие теоремы 5 нельзя ослабить, заменив сходимость последовательности отображений по норме поточечной сходимостью.

<u>Пример 2.</u> Пусть $X = Y = \ell_2$. Определим для каждого $n \in \mathbb{N}$ и любого $x \in \ell_2$ вектор $g_n x = (pr_n x) e_n \in \ell_2$. Тогда $g_n' y' = (pr_n y') e_n$, т.к. $(g_n x \mid y') = pr_n x \overline{pr_n y'} = (x \mid g_n' y')$. Очевидно, для каждого $x \in \ell_2$ $\lim_{n\to+\infty} \|g_n x\| = 0$, однако $g_n' \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$ не имеет место [5, теор. 11].

Непосредственно из результатов [5] вытекает

<u>Теорема 6.</u> Пусть X или Y – конечномерное пространство, $f_n, f \in LC(X, Y)$ $(n \in \mathbb{N})$ и последовательность сопряжённых отображений $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ поточечно сходится к отображению $f' \in LC(Y', X')$. Тогда $f_n' \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f' \in LC(Y', X')$.

Ниже устанавливается некоторые свойства секвенциально компактной аппроксимации сопряжённого отображения.

<u>Лемма 2.</u> Пусть последовательность отображений $g_n \in LC(X, Y)$ удовлетворяет следующему условию: для любой ограниченной последовательности $(y_n')_{n\in\mathbb{N}}$ из пространства Y' последовательность $(g_n' y_n')_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена в пространстве X'. Тогда существуют натуральное число $n_0 \in \mathbb{N}$ и положительное число $c > 0$ такие, что для всех $n > n_0$ $\|g_n\| = \|g_n'\| \le c$.

<u>Доказательство.</u> В силу теоремы 3 из [12] существуют такие $n_0 \in \mathbb{N}$ и $c > 0$, что для всех натуральных $n > n_0$ $\|g_n'\| \le c$. В силу теоремы 1 из [11, гл. III, §23] для всех $n > n_0$ $\|g_n\| = \|g_n'\|$. Лемма доказана.

<u>Теорема 7.</u> Пусть $f_n, f \in LC(X, Y)$ $(n \in \mathbb{N})$. Если $f_n' \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f' \in LC(Y', X')$, то существуют $n_0 \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что для всех

$n > n_0$ $\|f_n\| = \|f_n'\| \le c$.

Доказательство. В силу определения секвенциально компактной аппроксимации для любой ограниченной последовательности $(y_n')_{n\in N}$ из Y' последовательность $(f_n'y_n' - f'y_n')_{n\in N}$ относительно компактна и, следовательно, ограничена в .
В силу леммы 2 $\|f_n - f\| \le c_0$ для всех $n > n_0$ при некотором $c_0 > 0$. Отсюда следует, что $\|f_n'\| = \|f_n\| = \|(f_n - f) + f\| \le \|f_n - f\| + \|f\| \le c_0 + \|f\| = c$.

Теорема 8. Пусть $f_n \xrightarrow{c.\kappa.a.} f \in LC(X,Y)$, тогда существуют числа $n_0 \in N$ и $c > 0$ такие, что для всех $n > n_0$ $\|f_n\| \le c$

Доказательство. В силу теоремы 3 из [12] существуют такие числа $n_0 \in N_+$ и $c > 0$, что для всех $n > n_0$ $\|f_n\| \le c$.
В силу теоремы 1 из [6, гл. III, §23] для всех $n \in N$, $n > n_0$ $\|f_n'\| = \|f_n\|$.

Лемма 3. Пусть $f_n, f \in LC(X,Y)$ $(n \in N)$. Если последовательность сопряжённых отображений $(f_n')_{n\in N}$ поточечно сходится к отображению $f' \in LC(Y', X')$ и последовательность $(x_n)_{n\in N}$ из X сходится к $x \in X$, то последовательность $(f_n x_n)_{n\in N}$ из Y слабо сходится к $fx \in Y$.

Доказательство. Для каждого $y' \in Y'$ рассмотрим соотношение

$$|\langle f_n x_n - fx, y'\rangle| \le |\langle f_n x_n - f_n x, y'\rangle| + |\langle f_n x - fx, y'\rangle| =$$
$$= |\langle x_n - x, f_n' y'\rangle| + |\langle x, f_n' y' - f'y'\rangle| \le$$
$$\le \|x_n - x\|_X \|f_n'\| \|y'\|_{Y'} + \|x\|_X \|f_n' y' - f'y'\|_{X'} .$$

Так как X', Y' – банаховы пространства и последовательность отображений $(f_n')_{n\in N}$ поточечно сходится к отображению $f' \in LC(Y', X')$, то по теореме Банаха–Штейнгауза $\|f_n'\| \le c$.

Теорема 9. Пусть $f_n, f \in LC(X,Y)$ $(n \in N)$. Если $f_n' \xrightarrow{c.\kappa.a.} f' \in LC(Y',X')$ и $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$, то последовательность $(f_n x_n)_{n\in N}$ из Y сходится слабо к $fx \in Y$.

Доказательство. Так как $f_n' \xrightarrow{c.\kappa.a.} f' \in LC(Y', X')$, то последовательность отображений $(f_n')_{n\in N}$ поточечно сходится к отображению f' и применима теорема 3.

Теорема 10. Пусть $g_n \in LC(X,Y)$, $h_n \in LC(Y,Z)$ $(n \in N)$
Если $(g_n')_{n\in N}$ удовлетворяет первому, а $(h_n')_{n\in N}$ – второму условию секвенциально компактной аппроксимации нулевого отображения (см. с. 26 наст. сб.), то $\lim_{n\to\infty} \|h_n \circ g_n\| = \lim_{n\to\infty} \|g_n' \circ h_n'\| = 0$.

Доказательство. Так как пространства X', Y', Z' банаховы, то применимо следствие 2 леммы 2 из [7] и, следовательно, $\lim\limits_{n\to+\infty}\|g'_n \circ h'_n\| = 0$. Но так как $\|h_n \circ g_n\| = \|(h_n \circ g_n)'\| = \|g'_n \circ h'_n\|$, то $\lim\limits_{n\to+\infty}\|h_n \circ g_n\| = 0$.

При $X = Y = Z$ и $g_n = h_n$ получаем

Следствие 1. Пусть $g_n \in LC(X, X)$ $(n \in \mathbb{N})$, причём $g'_n \xrightarrow{c.k.a.} 0' \in LC(X', X')$. Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty}\|g_n^2\| = \lim\limits_{n\to+\infty}\|g_n'^2\| = 0$.

Теорема 11. Пусть X, Y - полные пространства и $f : D \subset X \longmapsto Y$ - фредгольмово отображение, т.е. линейное замкнутое отображение с плотным множеством определения D, замкнутой областью значений и конечномерными ядром и коядром. Если $g_n \in LC(X, Y)$ $(n \in \mathbb{N})$, причём $g'_n \xrightarrow{c.k.a.} 0' \in LC(Y', X')$, то существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $f + g_n$ и $f' + g'_n$ - фредгольмовы отображения, причём $\dim \ker(f + g_n) = \dim \operatorname{coker}(f' + g'_n) \leq \dim \operatorname{coker} f' = \dim \ker f$, $\dim \operatorname{coker}(f + g_n) = \dim \ker(f' + g'_n) \leq \dim \ker f' = \dim \operatorname{coker} f$; $\operatorname{ind}(f + g_n) = -\operatorname{ind}(f' + g'_n) = -\operatorname{ind} f' = \operatorname{ind} f$.

Доказательство. По теореме 5.13 из [13, гл. IV] f' - фредгольмово отображение. Тогда [6, теор. 3] существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $f' + g'_n$ - фредгольмово отображение, причём $\dim \ker(f' + g'_n) \leq \dim \ker f'$, $\dim \operatorname{coker}(f' + g'_n) \leq \dim \operatorname{coker} f'$, $\operatorname{ind}(f' + g'_n) = \operatorname{ind} f'$. По теореме 5.13 из [13] для всех натуральных чисел $n \geq n_0$ $f + g_n$ - фредгольмово отображение, причём $\dim \ker(f + g_n) = \dim \operatorname{coker}(f' + g'_n)$, $\dim \operatorname{coker}(f + g_n) = \dim \ker f'$, $\operatorname{ind}(f + g_n) = -\operatorname{ind}(f' + g'_n)$ и $\operatorname{ind} f = -\operatorname{ind} f'$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 11 остается справедливой, если условие $g'_n \xrightarrow{c.k.a.} 0' \in LC(Y', X')$ заменить условием $g_n \xrightarrow{c.k.a.} 0 \in LC(X, Y)$.

Замечание 2. В [14] устанавливается связь между индексом $\widetilde{\operatorname{ind}} f$ и алгебраическим индексом $\operatorname{ind} f$. Если выполнены условия теоремы 11, то $\dim \ker f = \widetilde{\dim} \ker f$, $\widetilde{\dim} \operatorname{coker} f = \dim \operatorname{coker} f$, $\widetilde{\operatorname{ind}} f = \operatorname{ind} f$.

Замечание 3. Если X, Y - полные пространства и $f \in LC(X, Y)$ - фредгольмово отображение, а последовательность $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет второму условию секвенциально компактной аппроксимации нулевого отображения, (см. 26 стр. наст. об то можно доказать, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ $f + g_n$ и $f' + g'_n$ фредгольмовы отображения и $\operatorname{ind}(f + g_n) = -\operatorname{ind}(f' + g'_n) = -\operatorname{ind} f' = \operatorname{ind} f$ [7, теор. 1].

Замечание 4. В силу замечания 2 к теореме 1 из [7] условие $g_n' \xrightarrow{c.k.a.} 0' \in LC(Y', X')$ в теореме 11 нельзя заменить совокупностью двух условий: 1) $\lim_{n\to+\infty} q(g_n') = 0$ и 2) поточечной сходимостью $(g_n')_{n\in N_+}$ к нулевому отображению $0' \in \in LC(Y', X')$.

Теорема 12. Пусть X, Y – полные пространства и $f: X \longmapsto Y$ – изоморфизм. Если $g_n \in LC(X,Y)$ $(n \in N)$, причём $g_n' \xrightarrow{c.k.a.} 0' \in LC(Y', X')$, то существует такое $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $f + g_n: X \longmapsto Y$ – гомоморфизмы, $f' + g_n': Y' \longmapsto X'$ – изоморфизмы, причём $(f' + g_n')^{-1} \xrightarrow{c.k.a.} (f')^{-1} \in LC(X', Y')$.

Доказательство следует из теоремы 5.13 [13, гл. IV] и теоремы 16 из [12].

В заключении автор выражает искреннюю благодарность И.В.Кирклиньшу за внимание к настоящей работе и ценные замечания.

Литература

1. Вайникко Г.М. Компактная аппроксимация операторов и приближённое решение уравнений. Тарту, 1970.

2. Вайникко Г.М. Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.

3. Аткинсон Ф.В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах. Матем. сб., 1951, т.28 (70), № 1, с.3-14.

4. Гольдман М.А. Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных уравнений.-ДАНСССР, 1955, т. 100, № 2 с.201-204.

5. Кирклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.-Латвийский математический ежегодник, Рига, 1976, Т. 17, с.3-29.

6. Левченков В.С. Сохранение индекса линейных замкнутых отображений с замкнутой областью значений в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.-Топологические пространства и отображения в них, Рига, 1975, с.91-96.

7. Владимирский Ю.Н. Замечания о компактной аппроксимации в банаховых пространствах.-Сибирск.матем. ж., 1974, т.15, № 1, с.200-204.

8. Бурштейн Е.И. Об одном виде сходимости подпространств нормированного пространства.-В кн. Топологические пространства и их отображения. Рига, 1977, с.7-15.

9. Гольденштейн Л.С., Гохберг И.Ц., Маркус А.С. Исследование некоторых свойств линейных ограниченных операторов в связи с их q -нормой.-Уч.зап. Кишиневск. ун-та, 1957, т.29, с.29-36.

10. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М., 1964.

11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М., 1965.

12. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах.-В кн. Топологические пространства и отображения в них. Рига, 1975, с.39-58.

13. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.

14. Левченков В.С. Об индексе и алгебраическом индексе Φ, Φ_+, Φ_- - отображений в банаховых пространствах.-В кн. Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979, с.65-68.

Поступила 15 апреля 1982 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 517.941

ПРИЛОЖЕНИЕ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ К ПРИБЛИЖЁННОМУ РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.С.Левченков
ЛГУ им. П.Стучки

Понятие секвенциально компактной аппроксимации линейных непрерывных отображений в банаховых пространствах ввёл и исследовал Г.М.Вайникко (см. [1], [2]). В данной работе рассматривается одно из приложений секвенциально компактной аппроксимации для приближённого решения линейных уравнений в произведении конечного числа банаховых пространств, которые изучались в работе [3].

Всюду в дальнейшем изложении $X_j, Y_j, j\in\{1,2,\dots,m\}$ обозначают банаховы пространства над одним и тем же полем K действительных или комплексных чисел с нормами $\|\cdot\|_{X_j}$, $\|\cdot\|_{Y_j}$, $j\in\{1,2,\dots,m\}$ соответственно.

Пусть $X=\prod_{j=1}^{m} X_j$, $Y=\prod_{j=1}^{m} Y_j$ — декартовы произведения пространств X_j, $j\in\{1,2,\dots,m\}$ и пространств Y_j, $j\in\{1,2,\dots,m\}$ с нормами $\|\cdot\|_X=\left(\sum_{j=1}^{m}\|\cdot\|_{X_j}^p\right)^{1/p}$, $\|\cdot\|_Y=\left(\sum_{j=1}^{m}\|\cdot\|_{Y_j}^p\right)^{1/p}$, где $p>1$. Пространства $(X,\|\cdot\|_X)$ и $(Y,\|\cdot\|_Y)$ также банаховы. Если $f: X\longmapsto Y$ — линейное отображение пространства X в пространство Y (сокращённо: $f\in L(X,Y)$), то ему можно сопоставить матрицу отображений

$$f\sim\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m}\\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm}\end{pmatrix},$$

где отображения $f_{ik}\in L(X_k,Y_i)(i,k\in\{1,2,\dots,m\})$ определены следующими равенствами:

$$f_{ik}=q_i\circ f\circ u_k$$

причём $q_i:\prod_{j=1}^{m} Y_j\longmapsto Y_i$ $(i\in\{1,2,\dots,m\})$ — канонические проекции, $u_k: X_k\longmapsto\prod_{j=1}^{m} X_j$ $(k\in\{1,2,\dots,m\})$ — канонические иньекции [4, гл. 1, § 2.5].

Равенство

$$fx = y, \qquad (1)$$

где, x - неизвестный вектор из пространства X , а y - известный вектор из пространства Y, эквивалентно системе равенств

$$f_{i1}x_1 + f_{i2}x_2 + \ldots + f_{im}x_m = y_i, \; i = 1, \ldots, m, \qquad (1')$$

где $x_k \in X_k$ $k = 1, \ldots, m$, $y_i \in Y_i$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in X$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in Y$.

Теорема 1. $(f \in LC(X,Y)) \Leftrightarrow (f_{ik} \in LC(X_k, Y_i), \; i,k \in \{1,2,\ldots,m\})$.

Доказательство. Необходимость. Так как $f_{ik} = q_i \circ f \circ u_k$, $u_k \in LC(X_k, X)$, $q_i \in LC(Y, Y_i)$ и $f \in LC(X,Y)$, то $f_{ik} \in LC(X_k, Y_i)$ $(i,k \in \{1,2,\ldots,m\})$.

Достаточность. Так как

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \vartheta_i \circ f_{ij} \circ p_j,$$

где $p_k : \prod_{j=1}^{m} X_j \longmapsto X_k$ $(k \in \{1,2,\ldots,m\})$ - канонические проекции, $\vartheta_i : Y_i \longmapsto \prod_{j=1}^{n} Y_j$ $(i \in \{1,2,\ldots,m\})$ - канонические иньекции и $\vartheta_i \in LC(Y_i, Y)$, $f_{ik} \in LC(X_k, Y_i)$, то $f \in LC(X,Y)$.

Замечание. В работе [3] имеются результаты о с язи . индекса и других характеристик для отображений f и f_{ik} $(i,k \in \{1,2\})$.

Аналогично для каждого натурального числа n можно рассмотреть линейное уравнение

$$f^n x^n = y^n, \qquad (2)$$

где x^n - неизвестный вектор из X , y^n - известный вектор из Y , отображениям $f^n \in LC(X,Y)$ соответствуют матрицы

$$\begin{pmatrix} f_{11}^n & f_{12}^n & \cdots & f_{1m}^n \\ f_{21}^n & f_{22}^n & \cdots & f_{2m}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1}^n & f_{m2}^n & \cdots & f_{mm}^n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и $f_{ik}^n \in LC(X_k, Y_i)$ $(i,k \in \{1,2,\ldots,m\})_{n \in \mathbb{N}}$. При этом (2) можно переписать в виде системы

$$f_{i1}^n x_1^n + f_{i2}^n x_2^n + \ldots + f_{im}^n x_m^n = y_i^n, \; i \in \{1,2,\ldots,m\}, \qquad (2')$$

где $x_k^n \in X_k$, $y_i^n \in Y_i$ $(i,k \in \{1,2,\ldots,m\})$ и $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n)$, $y^n = (y_1^n, y_2^n, \ldots, y_m^n)$.

Теорема 2. $(f^n \xrightarrow{c.k.a.} f \in LC(X,Y)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f_{ik}^n \xrightarrow{c.k.a.} f_{ik} \in LC(X_k, Y_i), \; i,k \in \{1,2,\ldots,m\})$.

Доказательство. Необходимость и достаточность вытекают из следующего равенства

$$f_n x - f x = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(f_{ij}^n x_j - f_{ij} x_j),$$

справедливого для любого $x \in X$ и из соотношений между нормами пространств X_k, Y_i $(i,k \in \{1,2,\dots,m\})$, X и Y.

Следующая теорема следует из результатов работ [2] и [5].

Теорема 3. Пусть $f \in LC(X,Y)$ и $f^n \in LC(X,Y)$, причём f – биекция. Если $f^n \xrightarrow{c.c.d.} f \in LC(X,Y)$ и $\lim_{n\to+\infty} \|y^n - y\|_Y = 0$, то:

1) система линейных уравнений (1') имеет единственное решение $x \in X$;

2) существует такое натуральное число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_0$ система линейных уравнений (2') имеет единственное решение $x^n \in X$;

3) $\lim_{n\to+\infty} \|x^n - x\|_X = 0$;

4) $c_1 \|f^n x - y^n\|_Y \leq \|x_n - x\|_X \leq c_2 \|f^n x - y^n\|_Y$,

где c_1 и c_2 – некоторые не зависящие от n положительные постоянные.

Доказательство. В силу теоремы 26 из работы [5] существует такое натуральное число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех натуральных чисел $n > n_0$ f^n – биекции. Далее, так как $f^n \xrightarrow{c.c.d.} f \in LC(X,Y)$ и f – биекция, то последовательность отображений $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ регулярно сходится к отображению f (см. определение 2 из главы 1, § 2.2 работы [2]). Тогда применима теорема 1 из главы II, § 3.1 работы [2].

Пример. Пусть $X_1 = X_2 = \dots = X_m = Y_1 = Y_2 = \dots = Y_m = C(M)$ – пространство вещественных непрерывных функций, определённых на компактном множестве $M \subset \mathbb{R}^z$, где $z \in \mathbb{N}$, с обычной нормой. Определим отображение $f : X \longmapsto X$ следующим равенством:

$$f = I_X + g,$$

где I_X – тождественное отображение пространства X и $g : X \longmapsto X$ – отображение с матрицей

$$g \sim \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2m} \\ \vdots & & & \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix},$$

где $g_{ik} : C(M) \longmapsto C(M)$ $(i,k \in \{1,2,\dots,m\})$ – интегральные операторы с непрерывными ядрами $\mathcal{K}_{ik} \in C(M \times M)$, определённые для каждой функции $z \in C(M)$ равенствами

$$g_{ik}\, z(t) = \int_M \mathcal{K}_{ik}(t,s)\, z(s)\, ds,$$

$i,k \in \{1,2,\dots,m\}$. Для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$ отображение g^n с матрицей

$$\begin{pmatrix} g^n_{11} & g^n_{12} \cdots & g^n_{1m} \\ g^n_{21} & g^n_{22} \cdots & g^n_{2m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ g^n_{m1} & g^n_{m2} \cdots & g^n_{mm} \end{pmatrix}$$

определим сходящимися квадратурными формулами

$$g^n_{ik}\, z(t) = \sum_{j=1}^{n} \gamma^{ik}_{nj}\, \mathcal{K}_{ik}(t, s_{nj}) z(s_{nj})$$

с узлами $s_{nj} \in M$ и коэффициентами $\gamma_{nj} \in \mathbb{R}$, причём для каждой функции $z \in C(M)$ $\sum_{j=1}^{n} \gamma_{nj}\, z(s_{nj}) \to \int_M z(s)ds$ при $n \to +\infty$.

Тогда в силу теоремы 3.1 из работы [1]

$g^n_{ik} \xrightarrow{c.к.а.} g_{ik} \in LC(C(M), C(M))$ и, следовательно, по теореме 2

$$g^n \xrightarrow{c.к.а.} g \in LC(X,X).$$

Определим $f^n = I_X + g^n$. Тогда также

$$f^n \xrightarrow{c.к.а.} f \in LC(X,X).$$

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$x_i(t) + \sum_{l=1}^{m} \int_M \mathcal{K}_{il}(t,s) x_l(s) ds = y_i(t),\ i \in \{1,2,\dots,m\}, \qquad (1'')$$

в предположении, что для любого $(y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y$ система интегральных уравнений (1") имеет единственное решение $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in X$. Далее для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим систему линейных уравнений

$$x^n_i(t) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \gamma^{il}_{nj}\, \mathcal{K}_{il}(\cdot, s_{nj}) x^n_l(s_{nj}) = y^n_i(t),\ i \in \{1,2,\dots,m\}. \qquad (2'')$$

Пусть $\lim_{n\to+\infty} \max_{t\in M} |y^n_i(t) - y_i(t)| \to 0,\ i \in \{1,2,\dots,m\}$. Тогда в силу теоремы 3 система линейных уравнений (2") для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеет единственное решение $(x^n_1, x^n_2, \dots, x^n_m) \in X$, причём для каждого $j = 1,2,\dots,m$, $\lim_{n\to+\infty} \max_{t\in M} |x^n_j(t) - x_j(t)| \to 0$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность И.В.Карклиньшу за внимание к настоящей работе и ценные замечания.

Литература

1. Вайникко Г.М. Компактная аппроксимация операторов и приближённое решение уравнений. Тарту, 1970.

2. Вайникко Г.М. Анализ дискретизационных методо Тартуский Государственный университет. Тарту, 1976.

3. Петров Н.Н. О разрешимости линейных уравнений произведении банаховых пространств.-В кн. Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979, с. 102-106.

4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.

5. Карклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации. - Латвийский математический ежегодник, Рига, 1976, т. 17, с. 3-29.

Поступила 2 июня 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1988.

УДК 513.83

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Я.Ливчак
РВВИАУ им. Я.Алксниса

В статьях [7] - [10] изучалась устойчивость свойств линейного замкнутого оператора в банаховом пространстве, связанных с его риссовским ядром. Некоторые результаты из [8] были распространены Мартенсом [6] на случай отделимых локально выпуклых пространств. Целью настоящей работы является перенесение некоторых результатов статьи [7] на случай отделимых топологических векторных пространств и статей [9] - [10] - на случай F-пространств и пространств Фреше, а также сокращение числа условий теоремы 3 статьи [6].

§1. Ограниченные и банаховы ограниченные операторы

Пусть X и Y - топологические векторные пространства над полем $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). Напомним ряд определений.

1. Говорят, что линейный оператор K, действующий из X в Y, ограничен, если он переводит некоторую окрестность нуля V из X в ограниченное множество.

2. Пусть X - отделимое пространство; E - ограниченное выпуклое уравновешенное множество в X. Обозначим через X_E линейную оболочку E в X, наделённую нормой $\|x\|_E = \inf\{\rho>0 \mid x\in\rho E\}$. Множество E называется банаховым шаром [4], если пространство X_E полное.

3. Пусть Y - отделимое пространство. Линейный оператор K, действующий из X в Y, называется банаховым ограниченным [6], если он переводит некоторую окрестность нуля V из X в банахов шар.

Заметим, что при определении понятия банахового шара в [4] пространство X предполагается локально выпуклым. Легко видеть, что теоремы 1 из [5] и 3 из [6], использующие это определение, остаются верными, если в их условиях не предполагать локальной выпуклости пространств.

Обозначим через $S(V,Y)$ множество всех линейных операторов, отображающих X в Y и ограниченных на некоторой фиксированной окрестности нуля V. Согласно [13] зададим на $S(V,Y)$ топологию векторного пространства. За базисные окрестности нуля в $S(V,Y)$ принимаются множества вида $W=\{K \mid K(V)\subset U\}$, где U пробегает совокупность окрестностей нуля в Y. Для случая $Y=X$ пространство $S(V,Y)$ будем обозначать $S(V)$.

Пусть Y - отделимое пространство. Через $SB(V,Y)$ обозначим подмножество в $S(V,Y)$ операторов, отображающих окрестность V в банахов шар. Известно [4], что линейный непрерывный образ банахового шара и алгебраическая сумма двух банаховых шаров снова есть банахов шар. Следовательно, $SB(V,Y)$ - векторное пространство.

Пусть A - линейный оператор, действующий из X в Y. Обозначим через $S_A(V,Y)$ и $SB_A(V,Y)$ подпространства в $S(V,Y)$ и в $SB(X,Y)$, соответственно, всех перестановочных с A операторов. В случае, когда $Y=X$, вместо $SB(V,Y)$, $S_A(V,Y)$ и $SB_A(V,Y)$ будем использовать обозначения $SB(V)$, $S_A(V)$ и $SB_A(V)$. На всех этих подпространствах мы будем рассматривать топологию, индуцированную из $S(V,Y)$.

Рассмотрим $L(X,Y)$ - пространство всех линейных непрерывных отображений X в Y. Очевидно, что $SB(V,Y)\subset S(V,Y)\subset L(X,Y)$. Если X и Y - нормированные пространства, V - ограниченная окрестность нуля, то, как легко видеть, $S(V,Y) = L(X,Y)$. Если при этом Y - банахово пространство, то $SB(V,Y)=S(V,Y)=L(X,Y)$.

Всюду в дальнейшем под обозначениями $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ будем понимать, соответственно, область определения и область значений оператора A, действующего из X в Y. Через $Isom(X,Y)$ будем обозначать множество всех изоморфизмов X на Y в классе топологических векторных пространств. В случае, когда $X=Y$, вместо $Isom(X,Y)$ будем использовать обозначение $Isom(X)$.

Пусть X - нормированное пространство; K - линейный непрерывный оператор, действующий в X, причём $\|K\|<1$. Для $x\in\mathcal{D}(K)$ имеем $\|x+Kx\|\geqslant\|x\|-\|Kx\|\geqslant(1-\|K\|)\|x\|$, т.е. $\|x\|\leqslant(1-\|K\|)^{-1}\|x+Kx\|$. Отсюда вытекает, что $\dot{I}+K\in$ $\in\dot{I}som(\mathcal{D}(K),\mathcal{R}(\dot{I}+K))$ ($\dot{I}$ - тождественный оператор). В следующей теореме этот известный факт обобщается на случай отделимого топологического векторного пространства.

Теорема I. Пусть X - отделимое топологическое векторное пространство; $\mathcal{D}$ - некоторое подпространство в X. Зафиксируем какую-либо окрестность нуля V в $\mathcal{D}$. Тогда найдётся окрестность нуля $W\subset S(V,X)$ такая, что для каждого $K\in W$ имеет место $\dot{I}+K\in\dot{I}som(\mathcal{D},\mathcal{R}(\dot{I}+K))$.

Доказательство. Существует окрестность нуля U'' в X такая, что $V=U''\cap\mathcal{D}$. Возьмём уравновешенные окрестности нуля U и U' в X, удовлетворяющие условию $U+U\subset U'\subset U''$, и обозначим $W=\{K\in S(V,X)\,|\,K(V)\subset\frac{1}{2}U\}$. Покажем, что для любого оператора $K\in W$ выполняется утверждение теоремы. Пусть $K\in W$. Введём следующие обозначения: $U_1=U\cap\mathcal{D}$, $\mathcal{V}=\{x\in U_1\,|\,Kx\in\mathcal{D}\}$, $E_1=K(U_1)$, $E=E_1\cap\mathcal{D}$. Ясно, что $K(\mathcal{V})=E\subset\frac{1}{2}U_1$.

Докажем сначала, что оператор $\dot{I}+K$ взаимно однозначен. Предположим, что существует элемент $x\in\mathcal{D}$, $x\neq\theta$, такой, что $(\dot{I}+K)x=\theta$. Можно считать, что $x\in U_1$. Так как $Kx=-x\in$ $\in\mathcal{D}$, то $x\in\mathcal{V}$. Обозначим $L=\{sx\,|\,s\in\mathbb{C}\}$ (для определённости считаем, что X - комплексное пространство).

Допустим, что существует такой элемент $y\in L\cap\mathcal{V}$, что $y\notin E$. Поскольку $y\in\mathcal{V}$, то $Ky\in E$. Из уравновешенности множества E вытекает, что $-Ky\in E$. Но $y\notin E$, следовательно, $y\neq-Ky$ или $y+Ky\neq\theta$. Имеем $y=sx$ для некоторого числа $s\in\mathbb{C}$, $s\neq 0$. Тогда $s(x+Kx)\neq\theta$, откуда $x+Kx\neq\theta$, что противоречит предположению $(\dot{I}+K)x=\theta$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение: $-K(L\cap\mathcal{V})\subset\frac{1}{2}\mathcal{V}$. Возьмём $y\in L\cap\mathcal{V}$. Имеем $-Ky=y\in\mathcal{V}$. Так как $K(\mathcal{V})\subset\frac{1}{2}U_1$, и U_1 - уравновешенное множество, то $-Ky\in\frac{1}{2}U_1$. Таким образом, $-Ky\in\frac{1}{2}U_1\cap\mathcal{V}$. Поскольку $\mathcal{V}=U_1\cap K^{-1}(\mathcal{D})$, то $\frac{1}{2}\mathcal{V}=\frac{1}{2}U_1\cap K^{-1}(\mathcal{D})=\frac{1}{2}U_1\cap U_1\cap K^{-1}(\mathcal{D})=$

$=\frac{1}{2}U_1\cap\mathcal{V}$. Отсюда следует, что $-Ky\in\frac{1}{2}\mathcal{V}$.

Допустим теперь, что $L\cap\mathcal{V}\subset E$ и $\sup\limits_{S\in\mathbb{C}}\{|S|\,|\,Sx\in\mathcal{V}\}=r<\infty$. Так как $x\in\mathcal{V}$, то $r\geq 1$. Возьмём $y=\frac{3r}{4}x$. Очевидно, что $y\in L\cap\mathcal{V}$, но $y\notin\frac{1}{2}\mathcal{V}$. Согласно доказанному выше $-Ky\in\frac{1}{2}\mathcal{V}$; следовательно, $y=-Ky\in\frac{1}{2}\mathcal{V}$, что противоречит выбору y.

Предположим, наконец, что $L\cap\mathcal{V}\subset E$ и $\sup\limits_{S\in\mathbb{C}}\{|S|\,|\,Sx\in\mathcal{V}\}=\infty$. Так как $K\in S(V,X)$, то множество E, а вместе с тем и $L\cap\mathcal{V}$,- ограничены. В силу отделимости пространства X существует уравновешенная окрестность нуля $\mathcal{W}$ в X такая, что $x\notin\mathcal{W}$. Покажем, что $L\cap\mathcal{V}\not\subset t\mathcal{W}$, каким бы мы ни взяли $t\in\mathbb{R}$. Действительно, пусть $L\cap\mathcal{V}\subset t'\mathcal{W}$ для некоторого $t'\in\mathbb{R}$. Возьмём такое число $S\in\mathbb{C}$, что $|S|>|t'|$ и $Sx\in\mathcal{V}$. Имеем $Sx\in t'\mathcal{W}$ или $x\in S^{-1}t'\mathcal{W}\subset\mathcal{W}$. Но, по выбору $\mathcal{W}$, $x\notin\mathcal{W}$. Из полученного противоречия вытекает, что $L\cap\mathcal{V}\not\subset t\mathcal{W}$, каково бы ни было $t\in\mathbb{R}$. А это, в свою очередь, противоречит ограниченности множества $L\cap\mathcal{V}$. Таким образом, взаимная однозначность оператора $\dot{I}+K$ доказана.

Поскольку оператор $\dot{I}+K$ непрерывен, то нам осталось показать непрерывность оператора $(\dot{I}+K)^{-1}$. Пусть $(y_\alpha)_{\alpha\in A}$ - сходящаяся к нулю направленность из $\mathcal{R}(\dot{I}+K)$. Существует направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}\subset\mathcal{D}$ такая, что $x_\alpha+Kx_\alpha=y_\alpha$, $\alpha\in A$. Покажем, что $x_\alpha\xrightarrow[\alpha\in A]{}\theta$, тогда теорема будет доказана. Имеем $y_\alpha\xrightarrow[\alpha\in A]{}\theta$, т.е. $x_\alpha+Kx_\alpha\xrightarrow[\alpha\in A]{}\theta$. Допустим, что $x_\alpha\not\xrightarrow[\alpha\in A]{}\theta$, тогда $Kx_\alpha\not\xrightarrow[\alpha\in A]{}\theta$. Следовательно, существует поднаправленность $(x_{\alpha_\beta})_{\beta\in B}$ такая, что все элементы Kx_{α_β}, $\beta\in B$ находятся вне некоторой окрестности нуля $\mathcal{W}$ в X. Обозначим $E'=K(U'\cap\mathcal{D})$. В силу ограниченности E' найдётся число $t>0$ такое, что $E'\subset t\mathcal{W}$. Обозначим $z_\beta=tx_{\alpha_\beta}$, $\beta\in B$. Поскольку $Kz_\beta\notin t\mathcal{W}$, то $Kz_\beta\notin E'$ для всех $\beta\in B$. Отсюда $z_\beta\notin U'$, $\beta\in B$. Последнее означает, что $\sup\limits_{S\in\mathbb{C}}\{|S|\,|\,Sz_\beta\in U'\}=S_\beta\leq 1$. Множество U' поглощающее, поэтому для каждого $\beta\in B$ существует число $S'_\beta\neq 0$ такое, что $S'_\beta z_\beta\in U'$; следовательно, $S_\beta>0$, $\beta\in B$. Обозначим $z'_\beta=\frac{3}{4}S_\beta z_\beta$, $\beta\in B$. Легко видеть, что $z'_\beta\in U'\setminus\frac{1}{2}U'$, $\beta\in B$. Так как $x_\alpha+Kx_\alpha\xrightarrow[\alpha\in A]{}0$, то $tx_\alpha+Ktx_\alpha\xrightarrow[\alpha\in A]{}0$, а тогда и $z_\beta+Kz_\beta\xrightarrow[\beta\in B]{}0$. Из того, что $S_\beta<1$ для всех $\beta\in B$, следует, что $z'_\beta+Kz'_\beta \xrightarrow[\beta\in B]{} 0$. Найдётся индекс $\beta'\in B$ такой, что для всех $\beta\geq\beta'$, $\beta\in B$ выполняется $z'_\beta+Kz'_\beta\in\frac{1}{2}U$. Тогда для всех $\beta\geq\beta'$, $\beta\in B$ имеем: $z'_\beta\in\frac{1}{2}U-Kz'_\beta\subset\frac{1}{2}U-K(V)\subset\frac{1}{2}U-\frac{1}{2}U=\frac{1}{2}(U+U)\subset\frac{1}{2}U'$. Но, по построению, $z'_\beta\in U'\setminus\frac{1}{2}U'$ для каждого $\beta\in B$. Таким образом, допустив, что направленность $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ не сходится к нулю мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Приведём доказательства нескольких вспомогательных утверждений.

Лемма I. Пусть X – отделимое топологическое векторное пространство; E – банахов шар в X. Если подпространство Z замкнуто в X, то множество $E'=E\cap Z$ также является банаховым шаром в X.

Доказательство. Очевидно, что множество E' ограничено, выпукло и уравновешено. Докажем, что $X_{E'}$ – полное пространство. Из равенства $\|x\|_{E'}=\|x\|_E$ вытекает, что топология, индуцированная на $X_{E'}$ нормой $\|\cdot\|_E$, совпадает с топологией пространства $X_{E'}$. Поэтому достаточно показать, что пространство $X_{E'}$ замкнуто в X_E. Пусть $(x_n)_{n\in N}\subset X_{E'}$ и $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в X_E. В силу непрерывности вложения $i_E: X_E\to X$ [4] имеем $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в X. Так как Z замкнуто в X, и $(x_n)_{n\in N}\subset Z$, то $x\in Z$, и, следовательно, $x\in Z\cap X_E=X_{E'}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть L, X, Y, M – топологические векторные пространства; Y – отделимое пространство; K – банахов ограниченный оператор, отображающий X в Y; $A_1: Y\to M$, $A_2: L\to X$ – линейные непрерывные отображения, причём $\mathcal{D}(A_2)=L$, $\mathcal{R}(K)\subset\mathcal{D}(A_1)$ и $\mathcal{D}(A_1)$ замкнуто в Y. При этих условиях A_1K и KA_2 будут банаховыми ограниченными операторами.

Доказательство. Существует окрестность нуля U в X такая, что $K(U)\subset E$, где E – банахов шар в Y. Согласно лемме I множество $E'=E\cap\mathcal{D}(A_1)$ является банаховым шаром в Y. Поскольку оператор A_1 линеен и непрерывен, то множество $F=A_1(E')$ – банахов шар в M. Имеем $A_1K(U)\subset$ $\subset A_1(E\cap\mathcal{R}(K))\subset A_1(E\cap\mathcal{D}(A_1))=F$; следовательно, A_1K – банахов ограниченный оператор. Так как A_2 – линейное непрерывное отображение, то множество $\mathcal{V}=A_2^{-1}(U)$ есть окрестность нуля в L. Имеем $KA_2(\mathcal{V})\subset E$, т.е. KA_2 также является банаховым ограниченным оператором.

Всюду в дальнейшем будем считать V некоторой фиксированной окрестностью нуля в пространстве X.

Лемма 3. Пусть A_1 и A_2 – линейные непрерывные операторы, действующие в отделимом топологическом векторном пространстве X; $\mathcal{D}_1$ – подпространство в X. Тогда найдётся окрестность нуля $W\subset S(V)$ такая, что как только оператор B удовлетворяет условиям $B\in W$ и $B(\mathcal{D}_1)\subset\mathcal{D}(A_1)$, для операторов $C_1=\dot{I}+A_1B$ и $C_2=\dot{I}+BA_2$ выполняются включения $C_1\in \in \dot{I}som(\mathcal{D}_1, C_1(\mathcal{D}_1))$ и $C_2\in \dot{I}som(\mathcal{D}(A_2), C(\mathcal{D}(A_2)))$. Если пространства $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}(A_1)$ и $\mathcal{D}(A_2)$ замкнуты, то найдётся окрестность нуля $W'\subset SB(V)$ такая, что для каждого $B\in W'$, удовлетворяющего условиям $B(\mathcal{D}_1)\subset\mathcal{D}(A_1)$, $A_1B(\mathcal{D}_1)\subset\mathcal{D}_1$, $BA_2(\mathcal{D}(A_2))\subset \subset\mathcal{D}(A_2)$, имеет место $C_1\in \dot{I}som(\mathcal{D}_1)$ и $C_2\in \dot{I}som(\mathcal{D}(A_2))$.

Доказательство. Обозначим $V_1=V\cap\mathcal{D}_1$. По теореме I найдётся такая окрестность нуля U в X, что для каждого $K\in S(V_1, X)$ такого, что $K(V_1)\subset U$, имеет место $\dot{I}+K\in \in \dot{I}som(\mathcal{D}_1, (\dot{I}+K)(\mathcal{D}_1))$. Множество $U_1=A_1^{-1}(U)$ есть окрестность нуля в $\mathcal{D}(A_1)$. Пусть $\widetilde{U}$ – окрестность нуля в X такая, что $\widetilde{U}\cap\mathcal{D}(A_1)=U_1$. Возьмём $W=\{B\in S(V)/B(V)\subset\widetilde{U}\}$. Легко видеть, что для каждого оператора $B\in W$, удовлетворяющего условию $B(\mathcal{D}_1)\subset\mathcal{D}(A_1)$, выполняется включение $A_1B(V_1)\subset U$, и, следовательно, $\dot{I}+A_1B\in \dot{I}som(\mathcal{D}_1, C(\mathcal{D}_1))$. Таким же образом доказывается, что $C_2\in \dot{I}som(\mathcal{D}(A_2), C_2(\mathcal{D}(A_2)))$. Второе утверждение леммы можно доказать аналогично, используя лемму 2 и теорему I из [5].

Лемма 4. Пусть X и Y – топологические векторные пространства; A – линейный оператор, отображающий X на Y. Если существует оператор $\hat{A}: Y\to X$, непрерывный в точке θ_Y, такой, что $A\hat{A}=\dot{I}_Y$ и $\hat{A}(\theta_Y)=\theta_X$, то оператор A открыт.

Доказательство. Предположим, что A не является открытым оператором. Так как A – линейное отображение, то существует окрестность нуля U из X такая, что множество $A(U)$ не содержит ни одной окрестности нуля из Y. Следовательно, найдётся направленность $(y_\beta)_{\beta\in B}$, сходящаяся к нулю θ_Y такая, что ни один элемент y_β не содержится в $A(U)$. Так как оператор $\hat{A}$ непрерывен в точке θ_Y и $\hat{A}(\theta_Y)=\theta_X$, то $x_\beta=\hat{A}y_\beta \xrightarrow[\beta\in B]{} \theta_X$. Найдётся индекс $\beta'\in B$ такой, что для всех $\beta\geqslant\beta'$, $\beta\in B$ имеет место $x_\beta\in U$. Тогда $y_\beta=A\hat{A}y_\beta=Ax_\beta\in A(U)$, как только $\beta\geqslant\beta'$. Но это противоречит выбору направленности $(y_\beta)_{\beta\in B}$. Лемма доказана.

§2. Устойчивость свойств линейного оператора, связанных с его риссовским ядром, в отделимых топологических векторных пространствах

Пусть X – топологическое векторное пространство; A – линейный оператор, действующий в X. Обозначим, как обычно, $N(A)=\{x\in\mathcal{D}(A) \mid Ax=\theta\}$ – множество нулей и $\mathcal{M}(A)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{R}(A^n)$ – риссовское ядро оператора A. Будем предполагать, что пространство $\mathcal{R}(A)$ замкнуто, $N(A)\subset\mathcal{M}(A)$ и существует линейный непрерывный оператор $\hat{A}$, отображающий $\mathcal{R}(A)$ в $\mathcal{D}(A)$, такой, что $A\hat{A}=I_{\mathcal{R}(A)}$.

Лемма 5. При сделанных выше предположениях оператор A является относительно открытым, а пространство $\mathcal{M}(A)$ замкнуто.

Доказательство. Из леммы 4 вытекает относительная открытость оператора A. Тогда, согласно следствию из теоремы 3 в [II], пространство $\mathcal{M}(A)$ замкнуто.

Замечание. Из леммы 5 следует, что в условиях теоремы 3 из [6] можно не предполагать замкнутости пространства $\mathcal{M}(A)$, а при доказательстве утверждений (5) и (6) этой же теоремы можно не требовать, чтобы отображение A было относительно открытым.

По теореме I из [I2] $A(\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{M}(A))=\mathcal{M}(A)$. Из того, что $N(A)\subset\mathcal{M}(A)$, вытекает, что $A^{-1}(\mathcal{M}(A))\subset\mathcal{M}(A)$. Следовательно, $\hat{A}(\mathcal{M}(A))\subset\mathcal{M}(A)$. Легко показать, что для каждого линейного оператора B, перестановочного с A, выполняются включения $B(\mathcal{R}(A))\subset\mathcal{R}(A)$ и $B(\mathcal{M}(A))\subset\mathcal{M}(A)$.

Пусть теперь X – отделимое пространство. Так как для всех $B \in SB_A(V)$ выполняется включение $\hat{A}B(\mathfrak{M}(A)) \subset \mathfrak{M}(A)$, то, согласно лемме 3, $\dot{I}+\hat{A}B \in Isom(\mathfrak{M}(A))$ для всех B из некоторой окрестности нуля $W \subset SB_A(V)$. Обозначим $T(B) = ((\dot{I}+\hat{A}B)|_{\mathfrak{M}(A)})^{-1}$ и всюду в дальнейшем будем считать, что оператор B содержится в "достаточно малой" окрестности нуля $W \subset SB_A(V)$ (или $S_A(V)$).

Лемма 6. Выполняется включение $\mathfrak{M}(A) \subset \mathfrak{M}(A+B)$.

Доказательство. Поскольку $T(B) = \dot{I}_{\mathfrak{M}(A)} - \hat{A}BT(B)$, то рассуждая по индукции, можно показать, что $T(B)(\mathcal{D}(A^n) \cap \mathfrak{M}(A)) \subset \mathcal{D}(A^n) \cap \mathfrak{M}(A)$ для любого $n \in N$. Возьмём некоторое $m \in N$, и пусть $y \in \mathfrak{M}(A)$. Как отмечалось выше, $A^{-1}(\mathfrak{M}(A)) \subset \mathcal{D}(A) \cap \mathfrak{M}(A)$, следовательно, существует элемент $x \in \mathcal{D}(A) \cap \mathfrak{M}(A)$ такой, что $y = A^m x$. Обозначим $z = T(B)^m x \in \mathcal{D}(A^m)$. Тогда $y = A^m x = A^m(\dot{I}+\hat{A}B)^m z = (A+B)^m z \in \mathcal{R}((A+B)^m)$. В силу произвольности выбора m имеем $y \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}((A+B)^m) = \mathfrak{M}(A+B)$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Очевидно, что $\mathcal{D}(A) = N(A) \oplus \mathcal{R}(\hat{A})$. Обозначим через P_A линейный оператор проектирования пространства X на $N(A)$, порождённый разложением $X = N(A) \oplus \mathcal{R}(\hat{A}) \oplus (X \ominus \mathcal{D}(A))$.

Теорема 2. Пусть A – линейный оператор, действующий в отделимом топологическом векторном пространстве X; пространство $\mathcal{R}(A)$ замкнуто; $N(A) \subset \mathfrak{M}(A)$; существует линейный непрерывный оператор $\hat{A}: \mathcal{R}(A) \to \mathcal{D}(A)$ такой, что $A\hat{A} = \dot{I}_{\mathcal{R}(A)}$. Тогда найдётся окрестность нуля $W \subset SB_A(V)$ такая, что для каждого $B \in W$ выполняются следующие утверждения:

(I) $T(B) \in Isom(N(A), N(A+B))$;

(2) $N(A+B) \subset \mathfrak{M}(A+B)$;

(3) существует линейный оператор проектирования P_{A+B} пространства X на $N(A+B)$ такой, что $\mathcal{R}(\dot{I}-P_A) = \mathcal{R}(\dot{I}-P_{A+B})$. Если оператор P_A непрерывен, то и P_{A+B} непрерывен.

(4) $\dot{I}+B\hat{A} \in Isom(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(A+B))$;

(5) пространство $\mathcal{R}(A+B)$ замкнуто;

(6) существует линейный непрерывный оператор $\widehat{A+B}: \mathcal{R}(A+B) \to \mathcal{D}(A)$ такой, что $(A+B)\widehat{A+B} = \dot{I}_{\mathcal{R}(A+B)}$;

(7) оператор $A+B$ относительно открыт;

(8) пространство $\mathfrak{M}(A+B)$ замкнуто.

Доказательство. (I) Пусть $x \in N(A)$. Имеем $Ax = A(\dot{I}+\hat{A}B)T(B)x = (A+B)T(B)x$. Но $Ax=\theta$, следовательно, $T(B)x \in N(A+B)$. Таким образом, $T(B)(N(A)) \subset N(A+B)$. Пусть теперь $y \in N(A+B)$. Поскольку $By=-Ay \in \mathcal{R}(A)$, то $y \in \mathcal{D}(\dot{I}+\hat{A}B)$. Имеем $A(\dot{I}+\hat{A}B)y=(A+B)y=\theta$, т.е. $(\dot{I}+\hat{A}B)(N(A+B)) \subset N(A)$. По лемме 3 оператор $\dot{I}+\hat{A}B$ является изоморфизмом. Тогда $N(A+B) \subset (\dot{I}+\hat{A}B)^{-1}(N(A))$. Но $(\dot{I}+\hat{A}B)^{-1}|_{N(A)} = T(B)|_{N(A)}$; следовательно, $N(A+B) \subset T(B)(N(A))$, что вместе с полученным ранее включением даёт $T(B)(N(A)) = N(A+B)$. Утверждение (I) вытекает из того, что $T(B) \in \dot{I}som(\mathfrak{M}(A))$.

(2) Имеем $N(A+B) = T(B)(N(A)) \subset T(B)(\mathfrak{M}(A)) = \mathfrak{M}(A)$. Согласно лемме 6 $\mathfrak{M}(A) \subset \mathfrak{M}(A+B)$, откуда следует включение $N(A+B) \subset \mathfrak{M}(A+B)$.

(3) Пусть $x \in N(A)$. Так как $\mathcal{R}(\hat{A}) \subset N(P_A)$, то $P_A T(B)x = P_A x - P_A \hat{A} B T(B)x = P_A x = x$; следовательно, $P_A T(B)|_{N(A)} = \dot{I}_{N(A)}$. Используя это равенство и утверждение (I), можно показать, что оператор $P_{A+B}=T(B)P_A$ является проектором пространства X на $N(A+B)$. Равенство $\mathcal{R}(\dot{I}-P_A)=\mathcal{R}(\dot{I}-P_{A+B})$ равносильно совпадению $N(P_A)$ с $N(P_{A+B})$. Последнее же вытекает из того, что $P_{A+B}=T(B)P_A$ и оператор $T(B)$ обратим на $N(A)$.

(4) Имеем $\mathcal{R}(A+B) = (A+B)(\mathcal{D}(A)) = (A+B)(N(A+B) \oplus N(P_A) \cap \mathcal{D}(A)) = (A+B)(N(P_A) \cap \mathcal{D}(A)) = (A+B)(\hat{A}(\mathcal{R}(A))) = (\dot{I}+B\hat{A})(\mathcal{R}(A))$. По лемме 3 $\dot{I}+B\hat{A} \in \dot{I}som(\mathcal{R}(A), \mathcal{R}(A+B))$.

(5) Очевидно; следует из (4).

(6) Положим $\widehat{A+B} = ((A+B)|_{N(P_A) \cap \mathcal{D}(A)})^{-1}$. Из (3) следует, что оператор $A\widehat{A+B}$ отображает $\mathcal{R}(A+B)$ на $\mathcal{R}(A)$. Заметим, что $\hat{A}Ax=x$ для всех $x \in N(P_A) \cap \mathcal{D}(A)$. Тогда $(\dot{I}+B\hat{A})A\widehat{A+B} = (A+B)\widehat{A+B} = \dot{I}_{\mathcal{R}(A+B)}$, следовательно, оператор $A\widehat{A+B}$ является обратным к $\dot{I}+B\hat{A}$. Так как $\dot{I}+B\hat{A}$ – изоморфизм, то оператор $A\widehat{A+B}$ непрерывен. Тогда оператор $\hat{A}A\widehat{A+B}$ также непрерывен. Но $\hat{A}A\widehat{A+B} = \widehat{A+B}$, откуда и вытекает наше утверждение.

Утверждения (7) и (8) следуют из (6) и леммы 5.

Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 2 вытекает справедливость утверждений (3) – (6) теоремы 3 из [6]. Таким образом, для выполнения этих утверждений не обязательно требовать, чтобы существовал линейный непрерывный оператор проектирования пространства X на $\mathcal{R}(A)$. Достаточно, чтобы $\mathcal{R}(A)$ было замкнуто. Заметим, что теорему 3 из [6] также можно формулировать в терминах топологии пространства $SB_A(V)$.

Используя следствие 3 из [5], можно показать, что утверждения теоремы 2 настоящей работы и теоремы 3 из [6] будут верны для ограниченных возмущающих операторов ($B \in S_A(V)$) в отделимом локально выпуклом локально полном [4, с. 284] пространстве.

§3. Устойчивость свойств линейного замкнутого оператора, связанных с его рисcовским ядром, в F-пространствах и в пространствах Фреше

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{N}(A) = \bigcup_{n\geq 1} N(A^n)$ – множество нуль-элементов линейного оператора A, $N'(A) = N(A) \ominus N(A) \cap \mathfrak{M}(A)$, $\mathfrak{N}'(A) = \mathfrak{N}(A) \ominus \mathfrak{N}(A) \cap \mathfrak{M}(A)$, $\alpha(A) = \dim N(A)$, $\gamma(A) = \dim N'(A)$, $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{Q}(A)$ – множества линейных непрерывных операторов проектирования пространства X на $N(A)$ и на $\mathcal{R}(A)$ соответственно.

<u>Лемма 7</u>. Пусть X и Y – F-пространства; A – линейный замкнутый оператор, действующий из X в Y. Тогда для относительной открытости оператора A необходимо и достаточно, чтобы пространство $\mathcal{R}(A)$ было замкнутым.

<u>Доказательство</u>. Достаточность условия вытекает из теоремы 6.4.4. в [I]. Доказательство обратного утверждения можно провести без использования полноты пространства по схеме доказательства теоремы II.2.I из [3].

<u>Теорема 5</u>. Пусть A – линейный замкнутый оператор, действующий в F-пространстве (пространстве Фреше) X, с замкнутой областью значений $\mathcal{R}(A)$; $\gamma(A) = 0$; существует оператор $P_A \in \mathcal{P}(A)$. Тогда найдётся окрестность нуля $W \subset SB_A(V)$ ($\subset S_A(V)$) такая, что для каждого $B \in W$ выполняются утверждения теоремы 2.

<u>Доказательство</u>. Так как множество $N(P_A) \cap \mathcal{D}(A)$ замкнуто

в $\mathcal{D}(A)$, то сужение $A_1 = A|_{N(P_A)\cap\mathcal{D}(A)}$ является замкнутым оператором. Из леммы 7 вытекает, что A_1 - относительно открытое отображение; следовательно, $\hat{A} = A_1^{-1}$ - линейный непрерывный оператор. Доказательство утверждений (I) - (8) проводится по схеме доказательства теоремы 2.

Далее мы будем рассматривать случай, когда $\gamma(A) < \infty$.

Пусть X - пространство Фреше; A - линейный замкнутый оператор с замкнутой областью значений $\mathcal{R}(A)$, действующий в X; $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$, $\gamma(A) < \infty$.

Лемма 8. Существует оператор $P_A \in \mathcal{P}(A)$ такой, что $\mathfrak{M}(A) = N(A) \cap \mathfrak{M}(A) \oplus N(P_A) \cap \mathfrak{M}(A)$.

Доказательство. Пусть $P \in \mathcal{P}(A)$ и $N_1(P) = N(P) \ominus \ominus N(P) \cap \mathfrak{M}(A)$ - некоторое дополнительное пространство. Обозначим $X_1 = N(A) \cap \mathfrak{M}(A) \oplus N(P) \cap \mathfrak{M}(A)$, $\mathfrak{M}_1 = (N'(A) \oplus N_1(P)) \cap \mathfrak{M}(A)$. Легко убедиться в том, что $\mathfrak{M}(A) = X_1 \oplus \mathfrak{M}_1$ и из конечности $\gamma(A)$ следует конечномерность пространства $\mathfrak{M}_1$. Так как X_1 представлено в виде суммы двух подпространств, замкнутых, соответственно в $N(A)$ и $N(P)$, то X_1 замкнуто в $N(A) \oplus N(P)$, т.е. в X. Так как $\gamma(A) < \infty$, то подпространство $X_1 \oplus N'(A)$ также замкнуто. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ - базис в $\mathfrak{M}_1$. По теореме 3.5 из [2] найдутся функционалы $f_1, \ldots, f_m$ из X^*, биортогональные к $x_1, \ldots, x_m$ и обращающиеся в нуль на $X_1 \oplus N'(A)$. Определим оператор P_A по формуле $P_A x = P(x - \sum_{i=1}^{m} f_i(x) x_i)$. Легко показать, что $P_A \in \mathcal{P}(A)$, причём $N(P) \cap \mathfrak{M}(A) \oplus \mathfrak{M}_1 = N(P_A) \cap \mathfrak{M}(A)$, откуда следует, что оператор P_A удовлетворяет утверждению леммы.

С помощью оператора P_A, построенного в лемме 8, определим оператор $\hat{A}$ так же, как в доказательстве теоремы 3. Можно показать, что выполняется включение $\hat{A}(\mathfrak{M}(A)) \subset \mathfrak{M}(A)$. Тогда из непрерывности $\hat{A}$ следует, что для достаточно малых B из $S_A(V)$ имеем $\dot{I} + \hat{A}B \in \dot{H}om(\mathfrak{M}(A))$. Легко видеть также, что $\dot{I} + \hat{A}\Pi_A B \in \dot{H}om(\overline{\mathfrak{N}(A)})$ (оператор Π_A был определён в [9]). Обозначим $T(B) = ((\dot{I} + \hat{A}B)|_{\mathfrak{M}(A)})^{-1}$ и $W(B) = ((\dot{I} + \hat{A}\Pi_A B)|_{\overline{\mathfrak{N}(A)}})^{-1}$. Заметим, что для доказательства того, что $\dot{I} + \hat{A}\Pi_A B \in \dot{H}om(\overline{\mathfrak{N}(A)})$, не используется лемма 8, и, следовательно, можно не требовать локальной выпуклости пространства X.

но операторы B тогда берутся из $SB_A(V)$.

Теорема 4. Пусть A – линейный замкнутый оператор, действующий в F -пространстве (пространстве Фреше) X , с замкнутой областью значений $\mathcal{R}(A)$. Если $\gamma(A)<\infty$ и $\mathcal{P}(A)\neq\emptyset$, то найдётся окрестность нуля $W\subset SB_A(V)$ $(S_A(V))$ такая, что для каждого $B\in W$ выполняются следующие утверждения:

(1) $N(A+\Pi_A B)=\mathcal{R}(W(B)|_{N(A)})$;

(2) $\mathfrak{M}(A)\subset\mathfrak{M}(A+B)$;

(3) $\mathfrak{N}(A+B)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$;

(4) $\mathfrak{N}(A+\Pi_A B)\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$;

(5) $\dim\mathfrak{N}'(A+B)\leq\dim\mathfrak{N}'(A)$;

(6) $\gamma(A+B)\leq\gamma(A)$.

Если X – пространство Фреше, то для достаточно малых $B\in S_A(V)$ имеет место

(7) $N(A+B)\cap\mathfrak{M}(A)=\mathcal{R}(T(B)|_{N(A)\cap\mathfrak{M}(A)})$;

(8) пространство $\mathcal{R}(A+B)$ замкнуто;

(9) $\mathcal{P}(A+B)\neq\emptyset$, причём для каждого $P_A\in\mathcal{P}(A)$ существует $P_{A+B}\in\mathcal{P}(A+B)$ такой, что $N(P_A)\subset N(P_{A+B})$.

Доказательство. Возьмём $P_A\in\mathcal{P}(A)$ и определим оператор $\hat{A}$ по формуле $\hat{A}=(A|_{N(P_A)\cap\mathcal{D}(A)})^{-1}$, причём в (7) – (9) оператор P_A выбирается так, чтобы он удовлетворял утверждению леммы 8. Тогда утверждения (1) и (7) доказываются так же, как (1) в теореме 2, а утверждение (2)- так же, как лемма 6. Доказательство остальных утверждений использует схему доказательств результатов статей [9] и [10] .

Всюду в дальнейшем, говоря об операторе $\hat{A}$, мы будем предполагать, что он определяется так же, как в доказательстве теоремы 4.

Теорема 5. Если X – пространство Фреше, и выполняются предположения теоремы 3, то для достаточно малых B из $S_A(V)$ справедливо равенство $\overline{\mathfrak{N}(A)}=\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$.

Доказательство. Включение $\overline{\mathfrak{N}(A+B)}\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$ следует из теоремы 4. Покажем, что выполняется обратное включение. Введём обозначения: $T=((I+\hat{A}B)|_{\mathfrak{M}(A)})^{-1}$ и $T_K^\circ=(T\hat{A}B)^K T$, $K=0,1,\ldots$. Пусть $x\in N(A)$. Непосредственно проверяется, что $(A+B)T_0^\circ x=\theta$ и $(A+B)T_{K+1}^\circ x=BT_K^\circ x$, $K=1,2,\ldots$, откуда следует, что

$T_K^o x \in \mathfrak{N}(A+B)$, $K=0,1,\dots$. Так как $T(\dot{I}+\hat{A}B)=\dot{I}$, то оператор $T-\dot{I}$ является квазиобратным к $\hat{A}B$. Но $T-\dot{I}=-T\hat{A}B$. Тогда по лемме I из [I3] оператор $T\hat{A}B$ непрерывно зависит от $\hat{A}B$ в пространстве $S(V\cap\mathfrak{M}(A))$. Обозначим $V_1 = V\cap\mathfrak{M}(A)$. Из доказательства леммы 3 видно, что оператор $\hat{A}B$ непрерывно зависит от $B\in S(V)$. Следовательно, найдётся окрестность нуля $W\subset S_A(V)$ такая, что для каждого $B\in W$ оператор $T\hat{A}B$ удовлетворяет условию $T\hat{A}B(V_1)\subset\frac{1}{2}V_1$. Поскольку $T\hat{A}B$ – ограниченный оператор, то $(T\hat{A}B)^n x \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$ для любого $x\in\mathfrak{M}(A)$. Тогда для $x\in N(A)$ имеем $\sum_{K=0}^{\infty} T_K^o x = \sum_{K=0}^{\infty}(T\hat{A}B)^K T x = \sum_{K=0}^{\infty}(T\hat{A}B)^K(\dot{I}-T\hat{A}B)x = x-\lim_{K\to\infty}(T\hat{A}B)^K x = x$. Так как $T_K^o x\in\mathfrak{N}(A+B)$, $K=0,1,\dots$, то $x\in\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Этим мы показали, что $N(A)\subset\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Далее рассуждаем по индукции. Допустим что $N(A^n)\subset\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$ для некоторого $n\in N$, и докажем включение $N(A^{n+1})\subset\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Сначала покажем, что $\hat{A}(N(A^n))\subset\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Пусть $x\in N(A^n)$. Обозначим $T_K^1=(T\hat{A}B)^K T\hat{A}$, $K=0,1,\dots$. Легко видеть, что $(A+B)^{K+1}T_K^1 x = B^K x\in N(A^n)\subset\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$, и что $\hat{A}x = \sum_{K=0}^{\infty}T_K^1 x$; следовательно, $\hat{A}x\in\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Возьмём $y\in N(A^{n+1})$. Имеем $y=\hat{A}Ay+x'$, где x' – некоторый элемент из $N(A)$. Так как $Ay\in N(A^n)$ то $\hat{A}Ay\in\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$, откуда вытекает, что $y\in\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Таким образом, $N(A^n)\subset\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$, $n=1,2,\dots$, т.е. $\mathfrak{N}(A)\subset\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Теорема доказана.

<u>Теорема 6</u>. Если X – пространство Фреше, и выполняются условия теоремы 4, то найдётся окрестность нуля $W\subset S_A(V)$ такая, что для всех $B\in W$, удовлетворяющих условию $B(\mathfrak{N}(A))\subset\mathcal{R}(A)$, имеет место равенство $\overline{\mathfrak{N}(A)}=\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$.

<u>Доказательство</u>. Согласно утверждению (3) теоремы 4 достаточно показать включение $\overline{\mathfrak{N}(A)}\subset\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Так как $B(\mathfrak{N}(A))\subset\mathcal{R}(A)$, то оператор $\hat{A}B$ определён на $\mathfrak{N}(A)$, причём $\hat{A}B(\mathfrak{N}(A))\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$. Вследствие непрерывности $\hat{A}$ и B выполняется $\hat{A}B(\overline{\mathfrak{N}(A)})\subset\overline{\mathfrak{N}(A)}$. Тогда для малых B из $S_A(V)$, удовлетворяющих условию теоремы, имеем $T=((\dot{I}+\hat{A}B)|_{\overline{\mathfrak{N}(A)}})^{-1}\in\dot{I}_{hom}(\overline{\mathfrak{N}(A)})$. Рассуждая далее так же, как в теореме 5, показываем, что $N(A)\subset\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Докажем теперь включение $\mathcal{R}(A)\cap\mathfrak{N}(A+B)\subset A(\mathcal{D}(A)\cap\overline{\mathfrak{N}(A+B)})$, т.е. докажем, что $Ax\in\mathfrak{N}(A+B)$ влечёт за собой $x\in\overline{\mathfrak{N}(A+B)}$. Пусть $Ax=\theta$. Тогда

$x\in N(A)\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Далее рассуждаем по индукции. Предположим, что выполняется следующее свойство: из того, что $Ay\in N((A+B)^n)$ $(n\in N\cup\{0\})$, следует, что $y\in\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Возьмём $Ax\in N((A+B)^{n+1})$ и обозначим $z=(A+B)x$. Имеем $Az=A(A+B)x=$ $=(A+B)Ax\in N((A+B)^n)$. Отсюда, по предположению, $z\in\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Из утверждений (8) и (9) теоремы 4 вытекает существование линейного непрерывного оператора $\widehat{A+B}$ такого, что $(A+B)\widehat{A+B}=I_{\mathcal{R}(A+B)}$. Можно записать $x=\widehat{A+B}z+x'$, где $x'\in N(A+B)$. Поскольку $\widehat{A+B}(\overline{\mathcal{N}(A+B)}\cap\mathcal{R}(A+B))\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}$, то $x\in\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Итак, мы показали, что $\mathcal{R}(A)\cap\overline{\mathcal{N}(A+B)}\subset A(\mathcal{D}(A)\cap\overline{\mathcal{N}(A+B)})$, откуда следует включение $\hat{A}(\mathcal{R}(A)\cap\overline{\mathcal{N}(A+B)})\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Так как $\overline{\mathcal{N}(A+B)}\subset\mathcal{N}(A)$, то $\dim(\overline{\mathcal{N}(A+B)}\ominus\overline{\mathcal{N}(A+B)\cap\mathcal{R}(A)})\leqslant\gamma(A)$. Отсюда легко получить, что $\overline{\mathcal{N}(A+B)}\cap\mathcal{R}(A)=\overline{\mathcal{N}(A+B)\cap\mathcal{R}(A)}$. Тогда $\hat{A}(\overline{\mathcal{N}(A+B)}\cap\mathcal{R}(A))=\hat{A}(\overline{\mathcal{N}(A+B)\cap\mathcal{R}(A)})\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Покажем, наконец, что $\mathcal{N}(A)\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Уже имеем $N(A)\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Предположим, что $N(A^n)\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}$ для некоторого $n\in N$. Возьмём $x\in N(A^{n+1})$ и запишем $x=\hat{A}Ax+x'$, где $x'\in N(A)$. Так как $Ax\in N(A^n)\cap\mathcal{R}(A)\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}\cap\mathcal{R}(A)$, то, согласно доказанному выше, $\hat{A}Ax\in\overline{\mathcal{N}(A+B)}$; и, следовательно, $x\in\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Таким образом, $N(A^n)\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}$ для всех $n\in N$, т.е. $\mathcal{N}(A)\subset\overline{\mathcal{N}(A+B)}$. Теорема доказана.

Теорема 7. Пусть A – линейный замкнутый оператор, действующий в F-пространстве X, с замкнутой областью значений $\mathcal{R}(A)$. Если существует оператор $P_A\in\mathcal{P}(A)$, то для достаточно малых $B\in S_A(V)$ сужение $P_A|_{N(A+B)}$ является изоморфизмом, и, следовательно, $\alpha(A+B)\leqslant\alpha(A)$.

Доказательство. Возьмём $x\in N(A+B)$. Представим элемент x в виде $x=\hat{A}Ax+x'$, $x'\in N(A)$. Так как $(A+B)x=0$, то $Ax=-Bx$ и $\hat{A}Ax=-\hat{A}Bx$. Отсюда $x=-\hat{A}Bx+x'$, т.е. $x'=(I+\hat{A}B)x$. Применяя оператор P_A, получим $P_Ax=$ $=P_A\hat{A}Bx+P_Ax'=x'=(I+\hat{A}B)x$, и утверждение теоремы вытекает из леммы 3.

Замечание. В теоремах 2 и 3 доказывается, что пространства $N(A)$ и $N(A+B)$ изоморфны. Можно показать, что в предположениях теоремы 6 имеет место включение $I+\hat{A}B\in$ $\in Hom(N(A+B),N(A))$. Следовательно, в этих случаях выполняется равенство $\alpha(A+B)=\alpha(A)$, причём размерность пространств понимается как в алгебраическом, так и в топологическом смысле.

Автор выражает благодарность доценту М.А.Гольдману за руководство работой.

Литература

1. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М., 1969.

2. Рудин У. Функциональный анализ. М., 1975.

3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.

4. Райков Д.А. Экспоненциальный закон для пространств непрерывных линейных отображений.– Математический сборник, 1965, т.67, №2, с.279-302.

5. Martens E. Invertibility of on operator.–J.London Math. Soc., 1976, v. 12, № 4, p. 467-468.

6. Martens E. Complemented range spaces.–Quaestiones Mathematicae, 1978, v. 2, p. 439-442.

7. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Об одном классе возмущений линейного замкнутого оператора с замкнутой областью значений.–ДАН СССР, 1971, т.197, №6, с.1243-1246.

8. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Об устойчивости некоторых свойств линейного замкнутого оператора.–ДАН СССР, 1973, т.209, №4, с.769-772.

9. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Операторы, нули которых образуют конечномерный выступ на риссовском ядре.– ДАН СССР, 1974, т.215, №6, с.1281-1284.

10. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Поведение пространства нуль-элементов с конечномерным выступом на риссовском ядре при возмущении оператора.–ДАН СССР, 1975, т.221, №3, с.532-534.

11. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Произведения, степени и сужения гомоморфизмов.–ДАН СССР, 1968, т.181, №5,

12. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. О некоторых воз-

мущениях замкнутого линейного оператора.–ДАН СССР, 1964, т.168, №3, с.507–509.

13. Маркус А.С., Фельдман И.А. Об ограниченных операторах в локально выпуклых пространствах.– Известия Молдавского филиала Академии наук СССР, 1960, т.76, №10, с.71–78.

Поступила 27 марта 1980 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 517.98

КОЛЫБЕЛЬНАЯ ДЛЯ МАЛЕНЬКОГО ТИГРЕНКА О НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ

А.Х. Лиепиньш
ЛГУ им. П.Стучки

"У Томаса Трейси был тигр. На самом деле это была черная пантера, но это не имеет никакого значения, потому что думал он о ней как о тигре". [1, с.125.]

О выпуклом слабо компактном подмножестве пространства Банаха в поисках неподвижных точек отображений целесообразно думать как о субсимметризуемом топологическом пространстве с некоторым оператором замыкания [2, 3].

В предлагаемой работе изучается в этом плане существование неподвижных точек у отображений, удовлетворяющих условиям, более слабым, чем условие Р.Каннана [4].

1. Введем основные обозначения и определения.

Пусть X – непустое множество. Через PX обозначим множество всех подмножеств множества X.

Определение 1. [5, с.56]. Отображение $S: PX \longrightarrow PX$ называется оператором замыкания на X, если для любых $A, B \in PX$ выполнено:

1) $A \subset B \rightarrow S(A) \subset S(B)$;

2) $A \subset S(A)$;

3) $S(S(A)) = S(A)$.

Определение 2. [5, с.59]. Оператор замыкания S на X называется алгебраическим, если для любого $A \in PX$ и $x \in S(A)$ существует такое конечное множество $F \subset A$, что $x \in S(F)$.

Пусть S – оператор замыкания на X.

Назовем множество $A \in PX$ – S -замкнутым, если $A = S(A)$.

Отметим, что множество $S(PX)$ всех S-замкнутых подмножеств множества X инвариантно относительно пересечений, т.е., пересечение любой системы S-замкнутых множеств S-замкнуто.

Обратно: если множество $\mathfrak{A} \subset PX$ инвариантно относительно пересечений (в частности, $\bigcap\phi := X \in \mathfrak{A}$), то отображение $S' : PX \to PX$, определяемое для любого $A \in PX$, равенством:

$$S'(A) := \bigcap\{B \in \mathfrak{A} \mid B \supset A\},$$

- оператор замыкания на X, причем $S'(PX) = \mathfrak{A}$. В этой ситуации условимся говорить, что оператор S' порождается множеством $\mathfrak{A}$.

Например, для любого отображения $f : X \to X$ множество

$$\{A \in PX \mid f(A) \subset A\}$$

порождает оператор замыкания, про который скажем, что он порождается отображением f.

Если S_1 и S_2 - операторы замыкания на X, то оператор замыкания, порождаемый множеством $S_1(PX) \cap S_2(PX)$, обозначим через $\inf\{S_1, S_2\}$.

Назовем множество $H \in PX$ - S-компактным, если для любого множества $\mathfrak{A} \subset S(PX)$, для которого

$$\bigcap\{A \cap H \mid A \in \mathfrak{A}\} = \phi,$$

существует такое конечное множество $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{A}$, что

$$\bigcap\{A \cap H \mid A \in \mathfrak{F}\} = \phi.$$

Рассмотрим отображения $t : X \times X \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ - множество всех вещественных неотрицательных чисел) и $f : X \to X$.

Пусть $x \in X$, $r \in \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ - множество всех вещественных положительных чисел) и $A \in PX$, $A \neq \phi$.

Положим:

$$B(x,r) := \{y \in X \mid t(x,y) \leqslant r\};$$

$$\operatorname{diam} A := \sup\{t(y,z) \mid y,z \in A\};$$

$$f^0(x) := x \text{ и } f^{n+1}(x) := f(f^n(x))$$

для любого $n \in \mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ - множество всех целых неотрицательных чисел);

$$\theta(x) := \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}.$$

Определение 3. [6, с.70]. Отображение $t: X \times X \to \mathbb{R}^+$ называется симметрикой на X, если для любых $x,y \in X$ выполнено:

1) $t(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
2) $t(x,y)=t(y,x)$.

Назовем топологическое пространство - субсимметризуемым, если на нем существует непрерывная симметрика, следовательно, оно уплотняется на некоторое симметризуемое топологическое пространство [6, с.70].

2. Теорема 1. Пусть X - непустое множество, t -симметрика на X и $f: X \to X$.

Пусть S - некоторый оператор замыкания на X. S_f - оператор замыкания, порождаемый отображением f, $S' := \inf\{S, S_f\}$ и $H \in PX$ - непустое множество, S'-компактное.

Предположим, что выполнены следующие условия:
1) $(\forall x \in X)(\forall r \in \mathbb{R}_+)$: $B(x,r) \in S(PX)$;
2) $(\forall x \in X)$. $S'(B(x)) \cap H \neq \phi$;
3) $(\forall x,y \in X)$: $t(f(x),f(y)) \leq \max\{t(x,f(x)),t(y,f(y))\}$;
4) $(\forall x \in X)$: $x \neq f(x) \Rightarrow \sup\{t(y,f(y)) | y \in S'(B(x))\} < \operatorname{diam} S'(B(x))$.

Тогда f имеет единственную неподвижную точку в H.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 в [2].

Пусть непустое $A \in PX$ S'-замкнуто, $x \in A$. Имеем: $S'(B(x)) \subseteq A$ - в силу S'-замкнутости A. Тогда $A \cap H \neq \phi$ вследствие условия 2. В силу произвольности выбора множества A последнее справедливо для любого непустого S'-замкнутого подмножества множества X.

Пользуясь S'-компактностью множества H, построим по лемме Цорна - минимальное непустое S'-замкнутое множество M. Имеем: $M \cap H \neq \phi$.

Пусть $a \in M \cap H$. Предположим, что $a \neq f(a)$. Тогда согласно условию 4 имеем:

$$\sup\{t(x,f(x)) | x \in M\} = r < \operatorname{diam} M,$$

ибо $S'(\theta(a))=M$ -

в силу минимальности M.

Пусть $x\in M$. Рассмотрим множество

$A_1:=B(f(x),r)\cap M.$

Оно непусто, ибо $x\in A_1$. Вследствие условия 1 оно S-замкнуто.

Пусть $y\in A_1$. Пользуясь условием 3, заключаем, что $t(f(x),f(y))\leq r$. Следовательно $f(y)\in A_1$. В силу произвольности $y\in A_1$ имеем: $f(A_1)\subset A_1$. Тем самым: A_1 - S'-замкнуто. Следовательно, $A_1=M$, ибо M - минимально. Таким образом, $M\subset B(f(x),r)$ и $f(x)\in A_2$, где

$A_2:=(\bigcap\{B(y,r)\mid y\in M\})\cap M.$

В силу произвольности $x\in M$ тогда: $f(M)\subset A_2$. Следовательно, $f(A_2)\subset A_2$ и A_2 S'-замкнуто, ибо оно - S-замкнуто вследствие условия 1.

Пользуясь минимальностью множества M, заключаем, что $A_2=M$. Одновременно:

$\operatorname{diam} A_2\leq r<\operatorname{diam} M.$

Таким образом, $a=f(a)$, $a\in H$.

Единственность неподвижной точки получаем из условия 3.

Теорема 1 обобщает теорему 2 из [2] и тем самым - теорему 1 из [4].

<u>Теорема 2.</u> Пусть X - непустое множество, t - симметрика на X и $f:X\longrightarrow X$.

Пусть S - некоторый оператор замыкания на X, S_f - оператор замыкания, порождаемый отображением f, $S':=\inf\{S,S_f\}$ и $H\in PX$ - непустое S'-компактное множество.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $(\forall x\in X)(\forall r\in R_+): B(x,r)\in S(PX)$;

2) $(\forall x\in X): S'(\theta(x))\cap H\neq\emptyset$;

3) $(\forall x,y\in X): t(f(x),f(y))\leq$
$\leq\max\{t(x,f(x)),t(y,f(y)),t(x,f(y)),t(y,f(x)),t(x,y)\}$;

4) $(\forall x\in X): x\neq f(x)\Rightarrow\sup\{t(y,f(z))\mid y,z\in S'(\theta(x))\}<$
$<\operatorname{diam} S'(\theta(x))$.

Тогда f имеет неподвижную точку в H.

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 1, построим минимальное непустое S'-замкнутое множество M, для которого: $M \cap H \neq \phi$.

Пусть $a \in M \cap H$. Предположим, что $a \neq f(a)$. Согласно условию 4:

$$\sup\{t(x, f(y)) \mid x, y \in M\} =: r < \operatorname{diam} M.$$

Пусть $x \in M$.

Рассмотрим множество

$$A_1 := B(x, r) \cap B(f(x), r) \cap M.$$

Оно непусто, ибо $x \in A_1$. Вследствие условия 1 оно S-замкнуто.

Пользуяаь условием 3, заключаем, что $f(A_1) \subset A_1$. Дальнейшее доказательство существования неподвижной точки у отображения f дословно повторяет доказательство теоремы 1.

3. Сформулируем и докажем основной результат настоящей работы.

Теорема 3. Пусть X - субсимметривуемое топологическое пространство, t - непрерывная симметрика на X, и отображение $f: X \longrightarrow X$ - непрерывно.

Пусть S - некоторый алгебраический оператор замыкания на X, S_t - оператор топологического замыкания на X, S_f - оператор замыкания, порождаемый отображением f,

$$S' := \inf\{S, S_t, S_f\} \quad \text{и}$$

$H \in PX$ непустое S'-компактное множество.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $(\forall x \in X)(\forall r \in \mathbb{R}_+): B(x, r) \in S(PX)$;

2) $(\forall A \in PX): S(S_t(S(A))) = S_t(S(A))$;

3) $(\forall x \in X): S'(\theta(x)) \cap H \neq \phi$;

4) $(\forall x, y \in X)(\exists \alpha \in]0, 1[)$:
$t(f(x), f(y)) \leq \alpha t(x, f(x)) + (1-\alpha) t(y, f(y))$;

5) $(\forall x \in X): x \neq f(x) \longrightarrow (\exists y \in S'(\theta(x)))$:
$t(y, f(y)) < \sup\{t(z, f(z)) \mid z \in S'(\theta(x))\}$.

Тогда f имеет единственную неподвижную точку в H.

<u>Доказательство.</u> Построим, как и при доказательстве теорем 1 и 2, минимальное непустое S'-замкнутое множество M, для которого: $M \cap H \neq \varnothing$.

Пусть $a \in M \cap H$. Предположим, что $a \neq f(a)$. Согласно условию 5, существует такое $a_1 \in S'(\theta(a))$, что

$$t(a_1, f(a_1)) =: r < \sup\{t(x, f(x)) \mid x \in M\},$$

ибо $S'(\theta(a)) = M$ – в силу минимальности M.

Рассмотрим множества

$$A := \{x \in M \mid t(x, f(x)) \leq r\} \quad \text{и}$$
$$A_1 := S(f(A)).$$

Они непусты, ибо $a_1 \in A$.

Пусть $x \in A_1$. Оператор замыкания S на X по условию алгебраичен. Поэтому существует такое конечное множество $F \subset f(A)$, что $x \in S(F)$. Полагая

$$q := \max\{t(f(x), y) \mid y \in F\},$$

имеем: $F \subset B(f(x), q)$. Следовательно, $S(F) \subset B(f(x), q)$ в силу условия 1. Тем самым: $x \in B(f(x), q)$, т.е., $t(x, f(x)) \leq q$. Таким образом,

$$t(x, f(x)) \leq t(f(x), f(y))$$

при некотором $y \in A$. Пользуясь условием 4, имеем:

$$t(f(x), f(y)) \leq \lambda t(x, f(x)) + (1-\lambda) t(y, f(y))$$

при некотором $\lambda \in]0,1[$. Следовательно,

$$t(x, f(x)) \leq t(y, f(y)) \leq r,$$

т.е., $x \in A$. В силу произвольности $x \in A_1$ имеем: $A_1 \subset A$.

Пусть $A_2 := S_t(A_1)$.

Имеем: $A_2 = S_t(A_1) \subset S_t(A)$. Но A S-замкнуто (т.е., замкнуто как подмножество топологического пространства X) вследствие непрерывности отображения f и симметрии t. Поэтому: $S_t(A) = A$. Следовательно, $A_2 \subset A$.

Множество A_2 S-замкнуто вследствие условия 2. Кроме того $f(A_2) = f(S_t(A_1)) \subset S_t(f(A_1)) \subset S_t(f(A)) \subset$
$\subset S_t(S(f(A))) = S_t(A_1) = A_2$.

Таким образом, оно S'-замкнуто.

Пользуясь минимальностью множества M, заключаем, что $A_2 = M$. Одновременно:

$$\sup\{t(x, f(x)) \mid x \in A_2\} \leq r < \sup\{t(x, f(x)) \mid x \in M\}.$$

Таким образом, $a = f(a)$, $a \in H$.

Единственность неподвижной точки следует из условия 4.

<u>Следствие</u> [4, 2, с.113]. Пусть X - непустое выпуклое слабо компактное подмножество пространства Банаха и непрерывное отображение $f : X \longrightarrow X$ при любом $x, y \in X$ удовлетворяет неравенству:

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \frac{1}{2} (\| x - f(x) \| + \| y - f(y) \|)$$

(условие Р.Каннана).

Предположим, что для любого выпуклого замкнутого множества $A \in PX$, содержащего более одного элемента и инвариантного относительно f, существует такое $x \in A$, что

$$\| x - f(x) \| < \sup \{ \| y - f(y) \| \mid y \in A \}.$$

Тогда f имеет единственную неподвижную точку в X.

<u>Доказательство.</u> Применяется теорема 3, полагая, что S - оператор выпуклой оболочки и $H = X$.

4. В заключение уточним и докажем результат, сформулированный в [3] и обобщающий известные теоремы из [7] о существовании неподвижных точек у нерастягивающих отображений в слабо компактных выпуклых подмножествах банаховых пространств.

<u>Теорема 4.</u> Пусть X - топологическое пространство, $\mathfrak{U}(x)$ - система всех окрестностей точки $x \in X$, t - симметрика на X и $f : X \longmapsto X$ - непрерывное отображение пространства в себя.

Пусть S_a - некоторый алгебраический оператор замыкания на X, S_t - оператор топологического замыкания на X, S_f - оператор замыкания, порождаемый отображением f,

$S := \inf \{ S_a, S_t \}$.

$S' := \inf \{ S, S_f \}$;

$H \in PX$, $H \neq \emptyset$, - S-компактное множество.

Пусть выполнены следующие условия:

1) $(\forall x \in X)(\forall r \in \mathbb{R}_+) : B(x, r) \in S(PX)$;

2) $(\forall A \in PX) : S_a(S_t(S_a(A))) = S_t(S_a(A))$;

3) $(\forall x \in X) : S'(O(x)) \cap H \neq \emptyset$;

4) $(\forall x,y\in X): t(f(x),f(y))\leq t(x,y)$;

5) $(\forall x\in X): x\neq f(x)\Longrightarrow(\exists y\in S'(\theta(x)))$:
$\inf\{\sup\{t(y,f^m(x))\mid m\geq n\}\mid n\in \mathbb{Z}^+\}<\operatorname{diam} S'(\theta(x))$;

6) $(\forall x\in X)(\forall \varepsilon\in \mathbb{R}_+)(\exists \mathcal{U}\in \mathfrak{U}(x))(\forall y\in \mathcal{U})(\forall z\in X): |t(y,z)-t(x,z)|<\varepsilon$.

Тогда f имеет неподвижную точку в H.

Доказательство. Пусть $A\in S'(PX)$ и $A\neq\phi$. Тогда $S'(\theta(x))\subset A$ в силу S'-замкнутости A для любого $x\in A$. По предположению, $A\neq\phi$. Вследствие условия 3 $A\cap H\neq\phi$. Множество H по условию S-компактно. Следовательно, оно S'-компактно. Пользуясь этим, построим по лемме Цорна минимальное непустое S'-замкнутое множество M. При этом $M\cap H\neq\phi$. Пусть $a\in M\cap H$. Докажем, что $a=f(a)$. Допустим противное. В силу условия 5 существует такое $a_0\in S'(\theta(a))$, что $\inf\{\sup\{t(a_0,f^m(a))\mid m\geq n\}\mid n\in\mathbb{Z}^+\}=:q<\operatorname{diam} S'(\theta(a))$. Пусть $r\in]q,\operatorname{diam} S'(\theta(a))[$ и $A_1:=\bigcup\{\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M\mid m\geq n\}\mid n\in\mathbb{Z}^+\}$. Имеем $A_1\neq\phi$, ибо $a_0\in A_1$. Тем самым $S_t(A_1)\neq\phi$. Ввиду условия 1 и алгебраичности оператора S_a, множество A_1 S_a-замкнуто. Поэтому $S_t(A_1)$ S-замкнуто в силу условия 2. Пусть $y\in\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M\mid m\geq n\}$ при некотором $n\in\mathbb{Z}^+$. В силу условия 4.

$$f(y)\in\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M\mid m\geq n+1\}.$$

Тем самым показано, что $f(A_1)\subset A_1$. Следовательно, $S_t(A_1)$ S'-замкнуто. Заключаем, что $S_t(A_1)$ M в силу минимальности M. Пусть $x\in M$ и $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$. В силу условия 6 существует такое $\mathcal{U}\in\mathfrak{U}(x)$, что $|t(y,z)-t(x,z)|<\varepsilon$ для любого $y\in\mathcal{U}$ и $z\in X$. Имеем $\mathcal{U}\cap A_1\neq\phi$. Пусть $y\in\mathcal{U}\cap A_1$. Существует такое $n_0\in\mathbb{Z}^+$, что $y\in\bigcap\{B(f^m(a),r)\cap M\mid m\geq n_0\}$. Следовательно, $S(\{f^m(a)\mid m\geq n_0\})\subset B(y,r)$. Заключаем, что $S(\{f^m(a)\mid m\geq n_0\})\subset$ $\subset B(x,r+\varepsilon)$. В силу произвольности выбора $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$:
$\bigcap\{S(\{f^m(a)\mid m\geq n\})\mid n\in\mathbb{Z}^+\}\subset B(x,r)$.

Таким образом,

$$B(x,r)\supset(\bigcap\{S(\{f^m(a)\mid m\geq n\})\mid n\in\mathbb{Z}^+\})\cap H,$$

причем последнее множество непусто в силу S-компактности множества H. Пусть

$$z\in(\bigcap\{S(\{f^m(a)\mid m\geq n\})\mid n\in\mathbb{Z}^+\})\cap H.$$

Тогда $z\in B(x,r)$ и, следовательно, $z\in\bigcap\{B(x,r)\mid x\in M\}$ в силу произвольности выбора $x\in M$. По построению $z\in M$.

Таким образом, $z \in (\bigcap \{B(x,r) | x \in M\}) \cap M =: A_2$ и $A_2 \neq 0$. Установим, что $f(A_2) \subset A_2$. Допустим существование такого $x \in A_2$, что $f(x) \notin A_2$. Тогда существует такое $y \in M$, что $y \notin B(f(x), r)$. Тем самым, $A_3 = B(f(x), r) \cap M$ – собственное подмножество множества M. Это невозможно. Действительно, $A_3 \neq \phi$, ибо $f(x) \in A_3$. Кроме того, A_3 S'-замкнуто. Следовательно, $A_3 = M$, ибо M минимально. Заключаем, что $f(A_2) \subset A_2$. Тогда A_2 S'-замкнуто. Из минимальности M следует, что $A_2 = M$. Одновременно: $\operatorname{diam} A_2 \leq r < \operatorname{diam} M$. Заключаем, что $a = f(a)$, причем $a \in H$.

" Проснувшись, тигренок грустно сказал, что во сне все так подвижно, неуловимо, даже если сон симметричен со сладким темно-рыжеватым оттенком. И потом добавил, что во сне он на какой-то миг, кажется, был черной пантерой. "

Литература

1. Сароян У. Тигр Тома Трейси.-Библиотека современной фантастики. Т.21. М., 1971.

2. Liepiņš A. On fixed points of mappings in metric space with closure operator.-Bull. Acad. Polon. Sci. (to appear).

3. Liepiņš A. Fixed point theorems in subsymmetrizable spaces.-Fifth Prague Topological symposium. Theses. Prague, 198[illegible].

4. Kannan R. Fixed point theorems in reflexive Banach spaces.-Proc. Amer. Math. Soc., vol. 38, p. 111-118.

5. Кон П. Универсальная алгебра. М., 1968.

6. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., 1974.

7. Belluce L.P., Kirk W.A. Fixed point theorems for certain classes of nonexpansive mappings.-Proc. Amer. Math. Soc. 1969, vol. 20, p. 141-146.

Поступила 10 сентября 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.83

ОБ УЗКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.И.Малыхин
Московский институт управления
им. С.Орджоникидзе

Понятие узкого пространства введено А.И.Векслером [1].

Приведем необходимые определения. Все пространства в дальнейшем предполагаются T_1 и не имеющими изолированных точек. Через N обозначается множество натуральных чисел.

Пусть (X,τ) - топологическое пространство; последовательность $\{F_n : n \in N\}$ замкнутых /з./ нигде не плотных /н.н.п./ подмножеств из X называется доминирующей последовательностью, если $\bigcup_n F_n$ плотно в X и если из того, что F_n' з.н.н.п. и $F_n \cap F_n' = \emptyset$ для всякого $n \in N$, вытекает что $\bigcup_n F_n'$ н.н.п. в X.

Пространство, в котором есть доминирующая последовательность, называется узким.

При исследовании понятий доминирующей последовательности и узкого пространства получены нетривиальные результаты, придавшие интерес этим исследованиям:

1. А.В.Колдунов построил бикомпакт с условием Суслина, являющийся узким пространством.

2. А.И.Векслер доказал, используя дополнительное теоретико-множественное предположение, что пространство $U N_1$ - множество всех равномерных ультрафильтров на дискретном множестве N_1 мощности $\aleph_1$ с топологией подпространства из βN_1 - узкое.

Основные результаты данной заметки таковы:

1. Полное в смысле Бэра пространство со счетной π-базой не является узким.

2. Произведение пространств, каждая счетная грань которого есть полное в смысле Бэра пространство со счетной

π-базой, не является узким

3. Никакое метрическое пространство не является узким.

4. [CH] существует счетное регулярное узкое пространство.

Осталось неясным, может ли существовать узкий сепарабельный бикомпакт.

Доказательства объявленных результатов.

1. Пусть X – полное в смысле Бэра пространство со счетной π-базой и $\{F_n : n \in N\}$ – произвольное счетное семейство з.н.н.п. подмножеств. Так как X полно в смысле Бэра, то $X \setminus \bigcup\limits_n F_n$ плотно в X, а так как в X есть счетная π-база, то в $X \setminus \bigcup\limits_n F_n$ есть счетное плотное подмножество $\{x_n : n \in N\}$, причем среди этих точек нет изолированных, так как их нет и во всем пространстве. Тогда $F'_n = \{x_n\}$ з.н.н.п., $F_n \cap F'_n = \varnothing$ и $\bigcup\limits_n F'_n$ плотно в X и, следовательно, $\{F_n : n \in N\}$ – не доминирующая последовательность. В силу произвольности семейства $\{F_n : n \in N\}$ отсюда вытекает, что в X нет доминирующей последовательности, тем самым, X – не узкое пространство.

2. Пусть $X = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и каждая счетная грань этого произведения есть полное в смысле Бэра пространство со счетной π-базой. Ясно, что X удовлетворяет условию Суслина. Пусть $\{F_n : n \in N\}$ – произвольное счетное семейство з.н.н.п. подмножеств X; тогда для каждого $n \in N$ найдется счетное подмножество A_n из A, такое, что $F_n \subseteq \pi_{A_n}^{-1}\pi_{A_n} F_n$ и $\Phi_n = \pi_{A_n} F_n$ – н.н.п. подмножество в $\prod\{X_\alpha : \alpha \in A_n\}$, а $\pi_{A_n}^{-1}\Phi_n$ н.н.п. в X. Пусть $A_0 = \bigcup\limits_n A_n$, тогда $|A_0| \leq \aleph_0$.

Рассмотрим теперь $Y = \prod\{X_\alpha : \alpha \in A_0\}$. Это счетная грань произведения X, следовательно, Y – полное в смысле Бэра пространство со счетной π-базой. Пусть $Y_n = [\varphi_n^{-1}(\Phi_n)]$ для всякого $n \in N$, где φ_n – проектирование из Y на Y_n. Тогда $\{Y_n : n \in N\}$ – счетное семейство з.н.н.п. подмножеств в Y. Согласно предыдущему доказательству (см. п. 1), в $Y \setminus \bigcup\limits_n Y_n$ есть счетное плотное в Y подмножество $\{y_n : n \in N\}$. Положим $F'_n = \pi_{A_0}^{-1}\{y_n\}$, тогда F'_n з.н.н.п. в X и $F_n \cap F'_n = \varnothing$ для всякого $n \in N$, но $\bigcup\limits_n F'_n$ плотно в X. Следовательно,

$\{F_n : n \in N\}$ не доминирующая последовательность. В силу произвольности выбора семейства $\{F_n : n \in N\}$ отсюда вытекает, что в X нет доминирующей последовательности, тем самым, X - не узкое пространство.

3. Докажем сначала, что не является узким полное метрическое пространство (X, ρ), где ρ - метрика на X. Пусть $\{F_n : n \in N\}$ - произвольное счетное семейство з.н.н.п. подмножеств из X, тогда в $X \setminus \bigcup_n F_n$ существует подмножество Y, плотное в X. Так как Y - метрическое пространство (с σ-дискретной базой), то в Y есть для каждого $n \in N$ подмножество Y_n такое, что $\rho(y', y'') \geq \frac{1}{n}$ для любых $y', y'' \in Y_n$ и $\bigcup_n Y_n$ плотно в Y и, стало быть, в X. Но легко видеть, что каждое Y_n з.н.н.п. и $Y_n \cap F_n = \phi$.

Пусть теперь X - произвольное метрическое пространство, и $\{F_n : n \in N\}$ - некоторое счетное семейство з.н.н.п. его подмножеств. Пусть $\tilde{X}$ - метрическое пополнение X и $\tilde{F}_n = [F_n]_{\tilde{X}}$ для каждого $n \in N$. Ясно, что каждое $\tilde{F}_n$ з.н.н.п. в $\tilde{X}$. Согласно предидущему рассуждению, в $\tilde{X} \setminus \bigcup_n \tilde{F}_n$ найдутся множества Y_n (см. их свойства чуть выше). Теперь нетрудно найти в X такие з.н.н.п. подмножества Z_n, что $[Z_n]_{\tilde{X}} = Z_n \cup Y_n$ и $Z_n \cap F_n = \phi$ для каждого $n \in N$. Но тогда $[\bigcup_n Z_n]_{\tilde{X}} \supseteq \bigcup_n Y_n$, тем самым, $\bigcup_n Z_n$ плотно в $\tilde{X}$, и, тем более, в X. Заключаем, что $\{F_n : n \in N\}$ - не доминирующая последовательность. В силу произвольности её выбора, отсюда вытекает, что в X нет доминирующей последовательности, т.е., пространство X не является узким.

4. При построении счетного регулярного узкого пространства самую важную роль играет следующая

<u>Лемма.</u> Пусть (X, τ) - счетное регулярное пространство со счетной базой (и без изолированных точек), и $A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_n \ldots$ - возрастающая последовательность з.н.н.п. подмножеств, таких, что $A_n \subseteq [A_{n+1} \setminus A_n]_\tau$ для каждого $n \in N$ и $A = \bigcup_n A_n$ плотно в (X, τ). Пусть также $\{B_n : n \in N\}$ - последовательность з.н.н.п. подмножеств и $B_n \cap A_n = \phi$ для всякого $n \in N$.

Тогда на X существует регулярная со счетной базой топология μ, мажорирующая τ, которая не имеет изолированных точек и такая, что каждое A_n з.н.н.п. в (X,μ), $A_n \subseteq [A_{n+1}\setminus A_n]_\mu$, A плотно в (X,μ), причем:

1) либо некоторое B_n имеет непустую внутренность в (X,μ),

2) либо $X\setminus B$ ($B = \bigcup_n B_n$) есть плотное открытое подмножество в (X,μ).

<u>Доказательство леммы.</u> Для всякого $n \in N$ положим $A'_n = A_n \setminus B$, и пусть $A' = \bigcup_n A'_n$. Если A' плотно в (X,τ), то, учитывая, что каждое A_n н.н.п. в (X,τ), легко представить $X\setminus B$ в виде объединения $\bigcup_m K_m$ так, что если каждое K_m объявить открыто-замкнутым подмножеством и, тем самым, усилить топологию τ до μ, то топология μ и множества A_n будут удовлетворять условиям леммы; в то же время B станет н.н.п. в (X,μ). Это и есть случай 2).

Предположим, однако, что найдется непустое открытое подмножество V из (X,τ), такое что $(A'_n=(A_n\setminus B))\cap V = \phi$ для всякого $n \in N$, тогда $A_n \cap V \subseteq (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}) \cap V$ для всякого $n = 2,3,\ldots$. Обозначим через P_n множество $A_n \cap V$ и через Q_n множество $B_n \cap V$ для всякого $n \in N$. Ясно, что V с топологией подпространства δ вместо (X,τ), множества P_n вместо A_n и множества Q_n вместо B_n удовлетворяют условиям леммы. Кроме того, $P_n \subseteq Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n-1}$ для всякого $n = 2,3,\ldots$ Мы намерены сейчас усилить топологию δ так, чтобы некоторое Q_n стало бы иметь непустую внутренность. Таким образом, здесь будет осуществлен случай 1).

Вообще говоря, некоторые множества P_n могут быть пусты. Перенумеруем непустые множества P_n в соответствии с их прежней нумерацией, так что номер 2 получит первое непустое множество из семейства $\{P_n : n \in N\}$, имеющее, скажем, номер $n_1 + 1$. Теперь $M_2 = P_{n_1+1}$, $M_3 = P_{n_2+2}, \ldots$ и т.д. Обозначим также через L_1 множество $Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n_1}$, $L_2 = Q_{n_1+1}$ и т.д. Множества M_n, $n = 2,3,\ldots$; L_k, $k = 1,2,\ldots$ удовлетворяют следующим условиям:

I) $M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$;

2) $M_n \subseteq [M_{n+1}\setminus M_n]_\tau$ для всякого $n = 2,3,\ldots$;

3) $\bigcup_{n>1} M_n$ плотно в (V, δ);

4) $M_n \cap L_n = \phi$ для всякого $n = 2, 3, \ldots$;

5) $M_n \subseteq L_1 \cup \ldots \cup L_{n-1}$ для всякого $n = 2, 3, \ldots$;

6) каждое M_n, $n = 2, 3, \ldots$ и каждое L_k, $k = 1, 2, \ldots$ з.я.н.п. в (V, δ).

Пусть $M'_n = M_n \setminus (L_2 \cup \ldots \cup L_{n-1})$ для $n = 3, 4, \ldots$. $M'_2 = M_2$, $M'_2 \neq \phi$. Так как $V \setminus L_2$ есть окрестность для $M'_2 = M_2$, то $M_2 \subseteq [(M_3 \setminus M_2) \cap (V \setminus L_2)]$ или $M_2 \subseteq [(M_3 \setminus L_2) \setminus M_2]$, т.е. $M'_2 \subseteq [M'_3 \setminus M'_2]$, при этом $M'_3 \subseteq L_1$. В частности, конечно, $M'_3 \neq \phi$.

Предположим, уже доказано, что $M'_n \subseteq [M'_{n+1} \setminus M'_n]$ для каждого $n = 2, 3, \ldots, k-1$. Докажем, что и $M'_k \subseteq [M'_{k+1} \setminus M'_k]$. Ясно, что $V \setminus (L_2 \cup \ldots \cup L_k)$ есть окрестность для $M_k \setminus (L_2 \cup \ldots \cup L_{k-1}) = M'_k$, и так как $M_k \subseteq [M_{k+1} \setminus M_k]$, то $M'_k \subseteq [(M_{k+1} \setminus M_k) \cap (V \setminus (L_1 \cup \ldots \cup L_{k-1}))]$, т.е. $M'_k \subseteq [M_{k+1} \setminus (L_2 \cup \ldots \cup L_k)) \setminus (M_k \setminus (L_2 \cup \ldots \cup L_{k-1}))]$; тем самым, $M'_k \subseteq [M'_{k+1} \setminus M'_k]$, при этом $M'_{k+1} \subseteq L_1$, так же как и $M'_k \subseteq L_1$. Так как $M'_k \neq \phi$, то, в частности, и $M'_{k+1} \neq \phi$.

Пусть $M' = \bigcup_{n>1} M'_n$, ясно, что $M' \subseteq L_1$ и M' – плотное в себе подмножество, в котором каждое M_n н.н.п.. Разделим M' на счетное бесконечное число дизъюнктных подмножеств K_m таких, что если каждое K_m, $m \in N$ объявить открыто-замкнутым подмножеством во всем множестве X и, тем самым, усилять топологию τ до μ, то топология μ и множества A_n будут удовлетворять условиям леммы; в то же время L_1 будет иметь непустую внутренность относительно этой новой топологии μ. Но L_1 есть сумма конечного числа з.н.н.п. подмножеств B_n, следовательно, какое-то из них будет иметь непустую внутренность в топологии μ. Это и есть случай I).

Собственно построение примера.

Пусть (X, τ) – какое-нибудь счетное регулярное пространство со счетной базой (без изолированных точек) и $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ – возрастающая последовательность з.н.н.п. подмножеств таких, что $A_n \subseteq [A_{n+1} \setminus A_n]$ для каждого $n \in N$ и $\bigcup_n A_n$ плотно в (X, τ). Так как CH предполагается, занумеруем счетными ординалами все счетные бесконечные последовательности, состоящие из подмножеств X: $\{S_\beta : \beta \in \omega_1\} = S$, где каждое S_β счетно, и если $B_n \in S_\beta$, то $B_n \subset X$.

Теперь будем усиливать топологию на X - построим возрастающее семейство регулярных со счетной базой (без изолированных точек) топологий на X - $\{\tau_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Построение таких топологий происходит с учетом следующих утверждений:

Утверждение I. Пусть $\tau = \sup\{\tau_\alpha : \alpha < \beta\}$ и топологии τ_α возрастают. Если A - з.н.н.п. в каждой топологии τ_α, то оно з.н.н.п. и в τ.

Утверждение 2. В условиях утверждения I, если C плотно в каждой топологии τ_α, то оно плотно и в τ.

Утверждение 3. Пусть $\partial = \sup\{\tau_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ топологии τ_α возрастают и все они заданы на одном и том же счетном множестве. Если Δ - счетное семейство з.н.н.п. подмножеств в ∂, то найдется такой ординал $\alpha(\Delta)$, что Δ - счетное семейство з.н.н.п. подмножеств в $\tau_{\alpha(\Delta)}$.

Доказательства этих утверждений нетрудны и опускаются.

Итак, на предельном ординале α полагаем $\tau_\alpha = \sup\{\tau_\beta : \beta < \alpha\}$. При этом $\tau_0 = \varepsilon$. Переход же от α к $\alpha+1$ происходит так:

Обозначим через S_α подмножество S, в которое войдут те элементы $s \in S$, которые удовлетворяют условиям леммы, где

вместо (X,τ) взято (X,τ_α),

вместо последовательности $\{B_n : n \in N\}$ взята последовательность $s \in S$, такая, что $\cup s$ не н.н.п. в (X,τ_α).

Выберем из S_α элемент с наименьшим номером, обозначим его через $\bar{s}$. Применим лемму к (X,τ_α) вместо (X,τ) и $\bar{s}$ вместо $\{B_n : n \in N\}$, получим топологию $\tau_{\alpha+1}$, при этом переходе "уничтожится" $\bar{s}$ (теперь $\bar{s}$ не мешает $\{A_n : n \in N\}$ быть доминирующей последовательностью).

По окончании описанного трансфинитного процесса по всем счетным ординалам обозначим через ∂ топологию $\sup\{\tau_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Несложно убедиться, что в пространстве (X,∂) последовательность $\{A_n : n \in N\}$ - доминирующая, тем самым, (X,∂) - счетное регулярное узкое пространство.

Замечание. Примерно так же можно построить счетное регулярное узкое пространство и в предположении лишь аксиомы Мартина.

Литература

1. Векслер А.И. Доминирующие последовательности и узкие топологические пространства -В кн.:Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981, с.159-174.

Поступила 15 марта 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.83

О ПСЕВДОХАРАКТЕРЕ ПОДГРУПП БИКОМПАКТНЫХ ГРУПП

Л.Э.Медников
Удмуртский ГУ им. 50-летия СССР

Нас будет интересовать связь между характером $\chi(M)=\tau$, мощностью $|M|=\sigma$ и псевдохарактером $\psi(M)=\lambda$ подгруппы M бикомпактной группы. Как обычно, $\lambda \geq \aleph_0$, $\sigma \geq \lambda_0$, $\tau \geq \aleph_0$.

Ясно, что $\lambda \leq \sigma$, $\lambda \leq \tau$, $\tau \leq 2^{\sigma}$. (*)

Кроме того, имеет место следующее неравенство:

<u>Теорема I.</u> Пусть M – подгруппа бикомпактной группы G, причем $|M|=\sigma$, а псевдохарактер $\psi(M)=\lambda$. Тогда $\sigma \leq 2^{\lambda}$. (**)

<u>Доказательство.</u> Бикомпактная группа G допускает достаточную систему линейных представлений [2, гл.5] (т.е. для всякого элемента $g \neq e$ группы G существует такое конечномерное линейное представление T группы G, что $T_g \neq E$).

Отсюда очевидно следует, что группа G, и следовательно, её подгруппа M, вкладывается в произведение $\prod_{\alpha\in A} G_\alpha$, где G_α – компактные группы матриц.

Так как $\psi(M)=\lambda$, то найдется такое $B\subset A$, что $|B|=\lambda$ и $\pi_B^{-1}(e_B)\cap M=\{e\}$ (здесь $\pi_B : \prod_{\alpha\in A} G_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\in B} G_\alpha$ – естественная проекция, а e и e_B – единичные элементы групп M и $\prod_{\alpha\in B} G_\alpha$ соответственно). Это значит, что $\pi_B|_M : M \longrightarrow \prod_{\alpha\in B} G_\alpha$ – мономорфизм. Отсюда $|M| \leq |\prod_{\alpha\in B} G_\alpha| \leq 2^{\lambda}$, т.к. $|G_\alpha| = c$, а $|B|=\lambda$.

Пусть $f : X \to \mathfrak{D}$ – отображение пространства X в двоеточие $\mathfrak{D}$ и $|X|=\tau$. Положим $\mathfrak{D}^{\tau} = \prod_{x\in X} \mathfrak{D}_x$ и отождествим f с точкой $(f(x) : x\in X)$. Любое семейство отображений X в $\mathfrak{D}$ отождествляется тем самым с подмножеством $\mathfrak{D}^{\tau}$.

Семейство непрерывных отображений $M=\{f : X \to \mathfrak{D}\}$

называется расчленяющим, если для любого замкнутого в X множества F и любой точки $x \notin F$ найдется такое $f \in M$, что $f(x)=1$ и $f(F)=0$ (т.е. семейство $\{f^{-1}(1) : f \in M\}$ образует базу из открыто-замкнутых множеств). Так как из любой базы можно выбрать базу мощности, равной весу wX пространства X [I. гл.I, §2], то справедливо

Утверждение. Если $\operatorname{ind} X = 0$, то существует расчленяющее семейство мощности, равной wX.

Теорема 2. Если M – расчленяющая подгруппа группы $\mathfrak{A}^{|X|}$ отображений хаусдорфова пространства X в $\mathfrak{A}$, то

1. M плотно в $\mathfrak{A}^{|X|}$ и, следовательно, $\chi(M) = |X|$.

2. Псевдохарактер $\psi(M)$ равен плотности $S(X)$ пространства X.

Доказательство. 1. Нужно доказать, что для любых конечных непересекающихся множеств $F_0, F_1 \subset X$ существует такое $f \in M$, что $f(F_0)=0$ и $f(F_1)=1$. Для любого $x \in F_1$ найдем такое $f_x \in M$, что $f_x(x)=1$ и $f_x(F_0 \cup (F_1 \setminus \{x\}))=0$. Положим теперь $f = \sum_{x \in F_1} f_x$. 2. $\psi(M) \leq S(X)$, т.к. непрерывная функция определяется своими значениями на плотном множестве.

Пусть $f \in \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \cap M$, U_α открыты в $\mathfrak{A}^{|X|}$ и $|A| < S(X)$. Очевидно, найдутся такие $B_0, B_1 \subset X$, что $\bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \supset \{h : h(B_i) = i\} \ni f$ и $|B_0 \cup B_1| = |A|$. Пусть $F_0 = \overline{B_0}$, $F_1 = \overline{B_1}$ и $x \notin F_0 \cup F_1$ (такая точка найдется, т.к. $\overline{B_0 \cup B_1} \neq X$).

Возьмем такое $g \in M$, что $g(F_0 \cup F_1) = 0$, $g(x) = 1$. Тогда $(f+g) \in \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha \cap M$, но $f + g \neq f$. Следовательно, $\psi(M) \geq S(X)$.

Теорема 3. Для любых кардиналов λ, σ, τ, удовлетворяющих неравенствам (*) и (**), найдется такая плотная в $\mathfrak{A}^{\tau}$ подгруппа M, что $|M| = \sigma$ и $\psi(M) = \lambda$.

Доказательство. Рассмотрим дискретное пространство T_λ мощности λ и плотное в $\mathfrak{A}^{\sigma}$ подмножество Y мощности τ и плотности $\ln \sigma$ (такое множество существует, поскольку $S(\mathfrak{A}^{\sigma}) = \ln \sigma \leq \tau \leq 2^{\sigma} = |\mathfrak{A}|^{\sigma}$).

Пусть $X = T_\lambda \times Y$. Тогда $|X| = \lambda \tau = \tau$ и $wX \leq \lambda \sigma = \sigma$. Кроме того, существует не меньше $2^{\lambda} \geq \sigma$ непрерывных отобра жений пространства X в $\mathfrak{R}$. Поэтому в X найдется расчленяющее семейство мощности σ. Пусть M - подгруппа $\mathfrak{R}^{|\omega|}$, порожденная этим семейством.

Имеем $|M|=\sigma$, $\psi(M)=S(X)=\tau\cdot S(Y)=\lambda$ (т.к. $S(Y)=\ln\sigma\leq\tau$).

Литература

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М., 1973.
2. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М., 1973.

Поступила 13 октября 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.83

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КЛАССАМИ ПОЧТИ МЕТРИЗУЕМЫХ, ПРОЕКТИВНО МЕТРИЗУЕМЫХ И $\aleph_0$ -ПРЕДСТАВИМЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

В.Г.Пестов
МГУ им. М.В.Ломоносова

I. Мы рассматриваем только отделимые топологические группы. Пусть G – топологическая группа. Говорят, что G почти метризуема [I2], если в G лежит бикомпакт, обладающий счетной фундаментальной системой окрестностей в G. Группа G проективно метризуема [I4], если в любой окрестности единицы в G лежит такой бикомпактный нормальный делитель N, что топологическая фактор-группа G/N метризуема. Наконец, топологическая группа G τ -представима [2], если G погружается как топологическая подгруппа в прямое произведение некоторого семейства групп, имеющих псевдохарактер $\leqslant \tau$.

Очевидно, что любая проективно метризуемая группа почти метризуема. Ниже мы строим пример, показывающий, что обратное неверно (вопрос о существовании такого примера был поставлен А.В.Архангельским в обзоре [3]). Далее, оказывается, что почти метризуемая группа проективно метризуема если и только если она $\aleph_0$ - представима; это позволяет построить пример топологического пространства, являющегося свободной суммой семейства бикомпактов, свободная топологическая группа которого не $\aleph_0$ -представима, что отрицательно отвечает на вопрос 2 из обзора А.В.Архангельского [3].

2. Всюду в работе под свободной топологической группой $F(X)$ пространства X мы понимаем свободную топологическую группу в смысле А.А.Маркова [10], [11]; впрочем, все результаты справедливы, если под $F(X)$ понимать свободную группу в смысле М.И.Граева [5], [6].

Через $F_{тв}(X,e)$ мы обозначаем топологическую группу со следующими свойствами:

1) группа $F_{тв}(X,e)$ алгебраически порождается множеством X ;

2) любое непрерывное отображение $\xi : X \to G$ пространства X в произвольную вполне ограниченную топологическую группу G , переводящее фиксированный элемент e пространства X в единицу группы G , продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{\xi} : F_{тв}(X,e) \to G$.

М.И.Граев показал [6] , что для любого вполне регулярного X и $e \in X$ группа $F_{тв}(X,e)$ существует, единственна, алгебраически свободна над $X \setminus \{e\}$; e является единицей группы $F_{тв}(X,e)$. При этом группа $F_{тв}(X,e)$ вполне ограничена и не зависит от выбора $e \in X$ с точностью до топологического автоморфизма; в силу последнего, мы будем обозначать далее эту группу просто через $F_{тв}(X)$, имея в виду, что единица e группы $F_{тв}(X)$ есть фиксированный элемент X .

3. Пусть X – вполне регулярное пространство, $e \in X$, причем: а) $\psi(e,X) > \aleph_0$; б) для любых $a,b \in X \setminus \{e\}$ существует гомеоморфизм $h: X \to X$, для которого $h(a) = b$ и $h(e) = e$. Примером такого X может служить одноточечная бикомпактификация Александрова $\alpha\Gamma$ несчетного дискретного пространства Γ , где e – точка нароста.

<u>Лемма I.</u> Пусть H – подмножество $F_{тв}(X)$, инвариантное относительно всех топологических автоморфизмов группы $F_{тв}(X)$ и такое, что $X \setminus H \neq \varnothing$ и $e \in H$. Тогда $H \cap X = \{e\}$.

<u>Доказательство.</u> Заметим прежде всего, что любой гомеоморфизм $h: X \to X$, для которого $h(e) = e$, продолжается до топологического автоморфизма $\hat{h}$ группы $F_{тв}(X)$. Действительно, по определению группы $F_{тв}(X)$ и h , и h^{-1} канонически продолжаются до непрерывных гомоморфизмов $\hat{h}$ и $\widehat{h^{-1}}$ группы $F_{тв}(X)$ в себя; нетрудно убедиться, что $\widehat{h^{-1}} = (\hat{h})^{-1}$. Предположим, что $a \in (X \setminus \{e\}) \cap H$; пусть $b \in X \setminus H$. Тогда, по вышеуказанному, для некоторого топологического автоморфизма $\hat{h}$ группы $F_{тв}(X)$ $\hat{h}(a) = b$. От-

сюда, $b = \hat{h}(a) \in \hat{h}(H) = H$ — противоречие. Итак, $H \cap X = \{e\}$.

Обозначим через G пополнение топологической группы $F_{TB}(X)$ [6], [13]. В силу вполне ограниченности группы $F_{TB}(X)$ группа G бикомпактна [6].

Пусть H обозначает расширение группы G посредством группы всех топологических автоморфизмов группы G [8]. Иными словами, G является подгруппой группы H; для любого топологического автоморфизма φ группы G существует $h_\varphi \in H$ такой, что при всех $g \in G$ $h_\varphi \cdot g \cdot h_\varphi^{-1} = \varphi(g)$; группа H алгебраически порождается G и множеством элементов вида h_φ, где φ — топологический автоморфизм G. Топологизируем H, полагая базисными открытыми окрестностями единицы в H всевозможные открытые окрестности e в G. Покажем, что H с так определенной топологией — топологическая группа. Если обозначить базу G (и, следовательно, H) в единице через $\mathfrak{B}$, то для любого $V \in \mathfrak{B}$ $V^{-1} \in \mathfrak{B}$ и существует $W \in \mathfrak{B}$, для которого $W^2 \subset V$; $\bigcap \mathfrak{B} = \{e\}$. Пусть $V \in \mathfrak{B}$ и $g \in H$. Если $g \in G$, то $gVg^{-1} \in \mathfrak{B}$. Если $g \notin G$, то g раскладывается в конечное произведение элементов из G и элементов вида h_φ в степени ± 1; поэтому достаточно показать, что для любого элемента вида h_φ $h_\varphi \cdot V \cdot h_\varphi^{-1} \in \mathfrak{B}$. Но это сразу следует из того, что $h_\varphi \cdot V \cdot h_\varphi^{-1} = \varphi(V)$, а φ есть топологический автоморфизм группы G, откуда $\varphi(V)$ — открытая окрестность e в G.

Очевидно, G — открытая бикомпактная подгруппа группы H, и поэтому группа H почти метризуема (более того, группа H D — бикомпактна [1], т.е. ее пространство является свободной суммой бикомпактов).

Покажем, наконец, что группа H не проективно метризуема, для чего предположим обратное. Пусть $V = G \setminus \{x\}$, где $x \in X \setminus \{e\}$, $X \subset F_{TB}(X) \subset G \subset H$. В силу проективной метризуемости H, для некоторого бикомпактного нормального делителя N группы H $N \subset V$ и $\chi(H/N) = \aleph_0$; поэтому N имеет тип G_δ в H, а $N' = N \cap F_{TB}(X)$ имеет тип G_δ в $F_{TB}(X)$. Покажем, что N' инвариантно относительно всех топологических автоморфизмов группы $F_{TB}(X)$. Если φ – такой автоморфизм, то он продолжается до топологического автоморфизма $\overline{\varphi}$ группы G [6], так как G – пополнение $F_{TB}(X)$; имеем: $\varphi(N') = \overline{\varphi}(N') = h_\varphi N' h_\varphi^{-1} = h_\varphi (N \cap F_{TB}(X)) h_\varphi^{-1} = h_\varphi N h_\varphi^{-1} \cap h_\varphi F_{TB}(X) h_\varphi^{-1} = N \cap \varphi(F_{TB}(X)) = N'$, где мы воспользовались нормальностью подгруппы N в H.

Так как $x \in X \setminus N'$, то, согласно лемме I, $N' \cap X = \{e\}$, откуда $\{e\}$ имеет тип G_δ в X, т.е. $\psi(e, X) = \aleph_0$, что противоречит выбору X и e.

4. <u>Теорема I.</u> Почти метризуемая топологическая группа G проективно метризуема тогда и только тогда, если она $\aleph_0$ – представима.

<u>Доказательство.</u> Любая проективно метризуемая группа очевидным образом вкладывается в произведение семейства метризуемых групп [I4] и тем более $\aleph_0$-представима. Пусть теперь G – почти метризуемая $\aleph_0$-представимая группа; т.е., $G \subset \Pi = \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$, где $\psi(G_\alpha) \leq \aleph_0$ при $\alpha \in A$. Пусть V – открытая окрестность единицы в G; мы покажем, что в G есть бикомпактный нормальный делитель N, для которого $N \subset V$ и $\chi(G/N) = \aleph_0$. Пусть B – бикомпакт, $e \in B \subset G$, $\chi(B, G) = \aleph_0$. Тогда $B = \cap\{V_n : n \in N^+\}$, где все V_n открыты в G, $n \in N^+$. Положим $V = V_0$, и для всех $n \in N = N^+ \cup \{0\}$ фиксируем стандартную открытую окрестность единицы в Π вида $U_n = \Pi_{\alpha \in A} U_n^\alpha$, $e \in U_n \cap G \subset V_n$. Обозначим $S_n = \{\alpha \in A : U_n^\alpha \neq G_\alpha\}$ и $S = \cup\{S_n : n \in N\}$; очевидно, $|S| \leq \aleph_0$. Пусть π_S – канонический гомоморфизм из Π на $\Pi\{G_\alpha : \alpha \in S\}$. Очевидно, π_S непрерывен, а поэтому множество $\pi_S^{-1}(e)$ является замкнутым нормальным делителем в Π типа G_δ; при этом $N = \pi_S^{-1}(e) \cap G$ есть замкнутый нормальный делитель в G типа G_δ, и при всех $n \in N$ $N \subset V_n$. Отсюда $N \subset B$. Известно, что для замкнутого подмножества N бикомпакта B всегда $\chi(N, B) = \psi(N, B)$. Итак, $\chi(N, B) = \aleph_0$. Но и $\chi(B, G) = \aleph_0$; поэтому $\chi(N, G) = \aleph_0$ [I2] и $\chi(G/N) = \aleph_0$ так как N – бикомпактен [I2].

Итак, G – проективно метризуема.

<u>Теорема 2.</u> Если свободная топологическая группа $F(G)$ пространства группы G $\aleph_0$ -представима, то и группа G $\aleph_0$ -представима.

<u>Доказательство.</u> Для любой топологической группы H через H^* обозначим топологическую группу, алгебраически изоморфную H, базу топологии которой составляют всевозможные множества, имеющие в H тип G_δ. Заметим, что естественный гомоморфизм $f^*: F(G)^* \longrightarrow G^*$ непрерывен (действительно, прообразы G_δ - множеств в G есть G_δ - множества в $F(G)$). Далее, так как топология свободной группы $F(X)$ есть сильнейшая из топологий, продолжающих данную на X и согласованных со структурой группы $F(X)$ [5], [6], то топология группы $F(G)^*$ входит в топологию группы $F(G^*)$) в силу того, что G^* есть, очевидно, подпространство $F(G)^*$). Так как для любой топологической группы H гомоморфизм $f: F(H) \to H$ всегда открыт [I], то и гомоморфизм f^* также открыт.

Пусть V - окрестность единицы в группе G; $f^{-1}(V)$ - открытая окрестность единицы в $F(G)$ и, в силу $\aleph_0$ -представимости $F(G)$, существует нормальный делитель N группы $F(G)$ такой, что N есть G_δ - множество в $F(G)$ и поэтому открыто в $F(G)^*$. Далее, $M = f^*(N)$ открыто в G^*, есть нормальный делитель в G^* и $e \in M \subset V$.

Пусть γ - такое семейство окрестностей единицы группы G, что $|\gamma| \leq \aleph_0$ и для каждого $V \in \gamma$ существуют: I) такое $U \in \gamma$, что $U^2 \subset V$; 2) такое $S_U \subset \gamma$, что $e \in \cap S_U \subset M_U \subset U$, где M_U - некоторый нормальный делитель группы G^* (следовательно, и G), причем M_U открыт в G^*. Положим $M = \cap\gamma$. Так как $M = \cap\{M_U : U \in \gamma\}$, то M - нормальный делитель группы G^* (и G); а так как $M = \cap\{\cap S_U : U \in \gamma\}$, то из первого условия легко следует, что $\psi(G/M) = \aleph_0$. Теперь стандартным образом показывается $\aleph_0$ -представимость группы G (см. [2], доказательство импликации ($I \to I$) в предложении I).

Теоремы I и 2 показывают, что свободная топологическая группа $F(H)$ D -бикомпактного пространства построенной нами в п. 3 группы H не $\aleph_0$ -представима; это является ответом на вопрос 2 п. 4 из [3] .

5. Так как H есть свободная сумма бикомпактных пространств, то $F(H)$ является свободным произведением семейства свободных топологических групп бикомпактов [15] .

Учитывая известные результаты о свободных группах бикомпактных пространств [4] , [7], получаем:

<u>Следствие 1.</u> Следующие свойства топологических групп не сохраняются операцией свободного произведения: $\aleph_0$ - ограниченность [3] , [7] , $\aleph_0$ - уравновешенность [3] (в другой терминологии - наличие квазиинвариантного базиса - [9, 7]), $\aleph_0$ -предотавимость.

Автор глубоко признателен А.В.Архангельскому за ценные обсуждения и постановку задач.

Литература

1. Архангельский А.В. Об отображениях, связанных с топологическими группами, - ДАН СССР, 1968, т. 181, № 6, с. 1303-1306.

2. Архангельский А.В. Кардинальные инварианты топологических групп. Вложения и уплотнения. - ДАН СССР, 1979, т. 247, № 4, с. 779-782.

3. Архангельский А.В. Классы топологических групп. - УМН, 1981, т. 36, № 3, с. 127-146.

4. Бельнов В.К. О размерности свободных топологических групп.-В кн.: IV Тираспольский симпозиум по общей топологии, Тирасполь, 1979, с. 14-15.

5. Граев М.И. Свободные топологические группы. - ИАН, сер. мат., 1948, т. 12, № 3, с. 279-324.

6. Граев М.И. Теория топологических групп. - УМН, 1950, т. 5, № 2, с. 3-56.

7. Гурая И.И. О топологических группах, близких к финально компактным. - ДАН СССР, 1981, т. 256, № 6, с. 1035-1037.

8. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М., 1977.

9. Кац Г.И. Изоморфное отображение топологических групп в прямое произведение групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности. - УМН, 1953, т. 8, № 6, с. 107-113.

10. Марков А.А. О свободных топологических группах. - ДАН СССР, 1941, т. 31, № 4, с. 299-301.

11. Марков А.А. О свободных топологических группах. - ИАН, сер. мат., 1945, т. 9, № 1, с. 3-64.

12. Пасынков Б.А. Почти метризуемые топологические группы. - ДАН СССР, 1965, т. 161, № 2, с. 281-284.

13. Райков Д.А. О пополнении топологических групп. - ИАН, сер. мат., 1946, т. 10, № 6, с. 513-518.

14. Чобан М.М. Топологическое строение подмножеств топологических групп и фактор-пространств. - В кн.: Топологические структуры и алгебраические системы, Кишинев, 1977, с. 117-163.

15. Morris S.A. Free products of topological groups.- Bull. Austral. Math. Soc., 1971, v. 4, Nr. 1, p. 17-29.

Поступила 10 сентября 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.83

ПРОСТРАНСТВА ОЧАНОВСКОГО ТИПА И К-ПРОСТРАНСТВА

В.В.Попов
Волгоградский ГПИ

В работе исследованы условия, при которых пространство замкнутых подмножеств топологического пространства в $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-топологии является k-пространством.

Для топологического пространства X через $\mathcal{P}(X)$ и $\exp X$ обозначаются соответственно множество всех и множество всех замкнутых подмножеств (в том числе пустое) пространства X.

<u>Определение 3</u>. Пусть X – топологическое пространство, $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\subset\mathcal{P}(X)$; $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-топологией на пространстве $\exp X$ (или топологией очановского типа [4]) называется топология с предбазой $\{[A,B]: A\in\mathfrak{A}, B\in\mathfrak{B}\}$, где $[A,B]=\{(F)\in\exp X: A\subset F\subset X\setminus B\}$.

Через (F) обозначаем точку пространства $\exp X$, соответствующую замкнутому множеству F пространства X. В дальнейшем считаем, что семейства $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ инвариантны относительно конечных объединений: в этом случае указанное выше семейство является базой $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-топологии. Через $C_0(X)$ и $C_1(X)$ обозначаются соответственно множество всех конечных и множество всех замкнутых подмножеств пространства X; (C_i, C_j)-топологией называется $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-топология на пространстве $\exp X$, где $\mathfrak{A}=C_i(X)$, $\mathfrak{B}=C_j(X)$ (в [6] (C_i,C_j)-топологии определены для $i,j\leq 7$). Пространство X предполагаем регулярным, хотя в большинстве результатов это требование может быть значительно ослаблено.

Необходимые определения можно найти в [2], [7]. Напомним, что топологическое пространство называется k-пространством, если множество в нем замкнуто тогда и только тогда, когда пересечение его с любым бикомпактом замкнуто. Ряд необходимых в дальнейшем сведений о k-пространствах содержится в обширной работе [1].

Приведем некоторые результаты об $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-топологиях [6]:

(P1) Пространство $\exp X$ хаусдорфово в $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$-топологии тогда и только тогда, когда пополнение семейств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ семейством $C_0(X)$ не изменяет $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии.

Ограничиваясь рассмотрением хаусдорфовых топологий на пространстве exX, считаем в дальнейшем, что всегда выполнено $C_0(X) \subset \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$.

(P2) Если Y - замкнутое подмножество топологического пространства X, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$ и $\mathfrak{A}_0 = \{A \in \mathfrak{A} : A \subset Y\}$, $\mathfrak{B}_0 = \{B \cap Y : B \in \mathfrak{B}\}$, то отображение $j: exY \to exX$, определенное формулой $j(F) = (F)$, является гомеоморфизмом пространства exY в $(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)$-топологии на замкнутое подмножество пространства exX в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии.

(P3) Соответствие, ставящее замкнутому подмножеству данного топологического пространства X его характеристическую функцию, порождает гомеоморфное вложение пространства exX, наделенное в (C_0, C_0)-топологией в канторов дисконтинуум веса $\tau = |X|$.

<u>Лемма 1.</u> Пусть X - топологическое пространство Z - его дискретное (в себе) подмножество мощности $\aleph_1$, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$. Пусть $C = [Z] \setminus Z$, и выполнены условия:

1. Существует семейство Θ мощности $\aleph_1$ (не более чем) счетных подмножеств множества Z такое, что для всякого элемента $B \in \mathfrak{B}$, дизъюнктного с C, существует элемент $T \in \Theta$, для которого $Z \cap B \subset T$.

2. Для всякого счетного подмножества $Z_0 \subset Z$ существует элемент $A \in \mathfrak{A}$, для которого $Z_0 \subset A \subset [Z_0]$.

Тогда exX не является K-пространством в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии.

<u>Доказательство.</u> Перенумеруем множество Z и семейство Θ: $Z = \{x_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta < \omega_1\}$, $\Theta = \{T_\xi : \xi < \omega_1\}$. Для ординала $\xi < \omega_1$ положим $F_\xi = (C \cup \{x_{\alpha,\beta} : \alpha < \xi, \beta < \omega\}) \setminus T_\xi$, тогда F_ξ - замкнутое подмножество пространства exX. Положим $\mathfrak{L} = \{(F_\xi) : \xi < \omega_1\}$.

Покажем, что $[\mathfrak{L}] \setminus \mathfrak{L} \neq \varphi$. Ясно, что $(C) \notin \mathfrak{L}$. Пусть $\mathfrak{U} = \{A, B\}$ - произвольная (базисная) окрестность точки (C) в пространстве exX. Тогда $B \cap C = \varphi$ и $B \in \mathfrak{B}$, поэтому существует ординал $\xi < \omega_1$ такой, что $B \cap Z \subset T_\xi$. Из $(C) \in \mathfrak{U}$ получаем $A \subset C$, откуда $A \subset F_\xi$; кроме того, $F_\xi \cap B \subset B \setminus T_\xi = \varphi$, поэтому $(F_\xi) \in \mathfrak{U} \cap \mathfrak{L}$. Итак, $(C) \in [\mathfrak{L}]$. Следовательно, $\mathfrak{L}$ - не замкнутое в пространстве exX множество.

Пусть $\mathfrak{I}<\omega_1$ и $\mathfrak{I}$ упорядочено по типу ω_0. Положим $\mathfrak{A}=\{(F_\xi):\xi\in\mathfrak{I}\}$ и покажем, что $\mathfrak{A}$ не имеет в пространстве εX предельной точки. Пусть, напротив, (P) – такая точка. Положим $\tilde{Z}=\bigcup\{T_\xi:\xi\in\mathfrak{I}\}$, тогда $|\tilde{Z}|\leq\aleph_0$, поэтому существует ординал $\bar{\beta}<\omega_1$ такой, что для множества $Z^*=\{x_{\alpha,\bar{\beta}}:\alpha<\omega_1\}$ верно $Z^*\cap\tilde{Z}=\phi$. Предположим, что $y=x_{\varepsilon,\bar{\beta}}\notin P$ для некоторого ординала $\varepsilon\in\mathfrak{I}$. Положим $\mathfrak{V}=[\phi,\{y\}]$, тогда $\mathfrak{V}$ – окрестность точки (P) в пространстве εX. При этом из $(F_\xi)\in\mathfrak{V}$, $\xi\in\mathfrak{I}$ следует $y\notin F_\xi$, что с учетом $Z^*\cap\tilde{Z}=\phi$ дает $\xi\leq\varepsilon$. Так как $\mathfrak{I}$ упорядочено по типу ω_0, получаем $|\mathfrak{V}\cap\mathfrak{A}|<\aleph_0$, что противоречит предельности точки (P). Противоречие показывает, что множество $Z_0=\{x_{\varepsilon,\bar{\beta}}:\varepsilon\in\mathfrak{I}\}$ лежит в P. Пусть A – такой элемент из $\mathfrak{A}$, для которого $Z_0\subset A\subset[Z_0]$. Тогда $A\in P$, поэтому $\mathfrak{W}=[A,\phi]$ – окрестность точки (P) в пространстве εX. При этом из $\xi\in\mathfrak{I}$ и $(F_\xi)\in\mathfrak{W}$ следует $A\subset F_\xi$, откуда $\xi\geq\sup\mathfrak{I}$, что противоречит соотношению $\xi\in\mathfrak{I}$. Итак, $\mathfrak{A}$ не имеет предельной точки в пространстве εX.

Допустим, что $B\subset\varepsilon X$ – бикомпакт и $|B\cap\mathcal{K}_1|\geq\aleph_0$. Тогда во множестве ординалов $\{\xi:(F_\xi)\in B\}$ можно выбрать подмножество $\mathfrak{I}$, упорядоченное по типу ω_0. Положим $\mathcal{K}'=\{(F_\xi):\xi\in\mathfrak{I}\}$, тогда, являясь подмножеством бикомпакта B, множество $\mathcal{K}'$ обязано иметь предельную точку, что, однако противоречит ранее доказанному. Противоречие показывает, что пересечение множества $\mathcal{K}_1$ с любым бикомпактом конечно, а следовательно, замкнуто. Итак, $\mathcal{K}_1$ – не замкнутое, но κ – замкнутое множество в εX, поэтому εX – не κ-пространство [6].

<u>Определение.</u> Семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств топологического пространства X накрывает счетные множества, если для всякого счетного $Z_0\subset X$ существует элемент $A\in\mathfrak{A}$ такой, что $Z_0\subset A\subset[Z_0]$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть X – топологическое пространство, Z – его дискретное в себе подпространство мощности $\aleph_1$, $\mathfrak{A},\mathfrak{B}\subset\mathcal{P}(X)$ и выполнены условия:

а) семейство $\mathfrak{A}$ накрывает счетные множества;

б) для произвольного элемента $B\in\mathfrak{B}$, дизъюнктного с $[Z]\setminus Z$, множество $B\cap Z$ счетно. Тогда εX не является κ-пространством в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии.

<u>Доказательство.</u> Перенумеруем множество Z ординалами: $Z = \{z_\xi : \xi < \omega_1\}$. Положим $\theta = \{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, где $T_\alpha = \{z_\xi : \xi < \alpha\}$. Очевидно для семейств θ, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ выполнены условия леммы 1, которая утверждает, что exX не является κ-пространством. Теорема доказана.

Условие б) теоремы 1 выполнено, если всякий элемент $B \in \mathfrak{B}$ наследственно удовлетворяет условию Суслина (то есть не содержит несчетных дискретных в себе подпространств). Из теоремы 1 получаем

<u>Следствие 1.</u> Пусть X – топологическое пространство, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X)$, $\mathfrak{A}$ накрывает счетные множества и всякий элемент $B \in \mathfrak{B}$ наследственно удовлетворяет условию Суслина. Тогда если exX – κ-пространство в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии, то X наследственно удовлетворяет условию Суслина.

Семейство $\mathfrak{B}$ в следствии 1 может состоять из следующих подпространств: а) конечных; б) счетных; в) компактных; г) наследственно сепарабельных.

Если в обозначениях теоремы 1 множество Z замкнуто в пространстве X, то условие б) этой теоремы выполнено, если всякий элемент $B \in \mathfrak{B}$ не содержит несчетных замкнутых дискретных подпространств. Отсюда получаем такое, например, следствие:

<u>Следствие 2.</u> Пусть exX – κ-пространство в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии, семейство $\mathfrak{A}$ накрывает счетные множества, а всякий элемент $B \in \mathfrak{B}$ счетно компактен или финально компактен. Тогда всякое несчетное подмножество $Z \subset X$ имеет предельную точку в пространстве X.

<u>Следствие 3.</u> Пусть exX – κ-пространство в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии, причем X – дискретное пространство. Тогда или семейство $\mathfrak{A}$ не накрывает счетные множества, или семейство $\mathfrak{B}$ содержит несчетное множество.

Отметим, что ограничения на семейства $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в теореме 1 существенны:

<u>Пример 1.</u> Пусть X – произвольное топологическое пространство, семейство $\mathfrak{A}$ состоит из всех замкнутых, а $\mathfrak{B}$ – из всех открытых подмножеств пространства X. Тогда $[\Gamma, X \setminus \Gamma] = \{\{\Gamma\}$

для произвольной точки $(F) \in ex X$. Следовательно, $ex X$ – дискретное пространство в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии. Очевидно, оно является и K-пространством.

Пример 2 [6]. Пусть пространство $ex X$ наделено (C_0, C_0)-топологией. Тогда: а) если X дискретно, то $ex X$ гомеоморфно канторову дисконтинууму $\mathfrak{D}^{\tau}$ веса $\tau = |X|$; б) если X – одноточечная компактификация (финальная компактификация) дискретного пространства, то $ex X$ гомеоморфно прямой топологической сумме $\mathfrak{D}^{\tau}$ и σ-произведения (Σ-произведения) дискретных двоеточий в числе τ; в) если X счетно, то $ex X$ – метризуемое сепарабельное пространство. Приведенные пространства являются нетривиальными примерами K-пространств очановского типа.

Лемма 2. Пусть X – дискретное пространство мощности $\aleph_1$, $\mathfrak{A} = C_0(X)$, семейство $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X)$ накрывает счетные множества в X. Тогда $ex X$ не является K-пространством в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии.

Доказательство. Представим X в виде $X = \cup\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, где X_α попарно дизъюнктны и имеют мощность $\aleph_1$ каждое. Перенумеруем счетными ординалами множество $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Положим $\mathcal{G} = \{(F_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$, где $F_\alpha = A_\alpha \cup X_\alpha$. Пусть $\mathfrak{U} = [A, \phi]$ – произвольная базисная окрестность точки (X) в пространстве $ex X$. Тогда существует ординал $\beta < \omega_1$, для которого $A = A_\beta$; очевидно, $(F_\beta) \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{G}$. Отсюда $(X) \in [\mathcal{G}]$. Так как $(X) \notin \mathcal{G}$, получаем, что множество $\mathcal{G}$ не замкнуто в пространстве $ex X$. Пусть $J \subset \omega_1$ – произвольное счетное подмножество. Допустим, что множество $\mathcal{K} = \{(F_\alpha) : \alpha \in J\}$ имеет в пространстве $ex X$ некоторую предельную точку (P). Если при всяком $\alpha \in J$ существует точка $x_\alpha \in F_\alpha \setminus P$, то, положив $B = \{x_\alpha : \alpha \in J\}$, получим окрестность $\mathfrak{V} = [\phi, B]$ точки (P) в $ex X$, отделяющую точку (P) от множества $\mathcal{K}$, что противоречит предельности точки (P). Противоречие показывает, что $F_\gamma \subset P$ при некотором ординале $\gamma \in J$, откуда $|P| \geq \aleph_1$. Из определения множества F_α следует, что $|F_\alpha \cap F_\beta| \leq \aleph_0$ для любых различных ординалов $\alpha, \beta \in J$, поэтому найдется точка $p \in P \setminus \cup\{F_\alpha \cap F_\beta : \alpha < \beta; \alpha, \beta \in J\}$. Положим $\mathfrak{W} = [\{p\}, \phi]$, тогда $\mathfrak{W}$ – окрестность точки (P) в $ex X$. Допустим, что $(F_\alpha), (F_\beta) \in \mathfrak{W}$, тогда $p \in F_\alpha$ и $p \in F_\beta$, откуда $p \in F_\alpha \cap F_\beta$, что влечет $\alpha = \beta$. Итак, $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{Y}$ состоит не более чем из одной точки, а это противоречит предельности точки (P).

Показано, что всякое счетное подмножество в $\mathfrak{Y}$ дискретно, поэтому пересечение множества $\mathfrak{Y}$ с произвольным бикомпактом $\mathfrak{B} \subset \exp X$ конечно, а следовательно, замкнуто. Таким образом, $\mathfrak{Y}$ — κ-замкнутое, но не замкнутое множество в пространстве $\exp X$, поэтому $\exp X$ — не κ-пространство [1].

<u>Теорема 2.</u> Пусть $\exp X$ — κ-пространство в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии, где $\mathfrak{A} = C_0(X)$, а $\mathfrak{B}$ накрывает счетные множества. Тогда всякое несчетное подмножество $Y \subset X$ имеет в X предельную точку. Если, в частности, X паракомпакт, то X — финально компактное пространство.

<u>Теорема 3.</u> Пусть в топологическом пространстве X существует бесконечное дискретное семейство, состоящее из недискретных замкнутых подмножеств пространства X, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$, семейство $\mathfrak{B}$ состоит из замкнутых множеств и содержит замыкание произвольного счетного дискретного множества $Y \subset X$. Тогда $\exp X$ не является κ-пространством в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии.

<u>Доказательство.</u> В обозначениях леммы 1 работы [5] подмножество $\mathfrak{Y}$ пространства $\exp X$ является κ-замкнутым, но не замкнутым в $\exp X$ (схема доказательства сохраняется). Далее нужно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1 указанной выше работы.

<u>Следствие 4.</u> Если при ограничениях на семейство $\mathfrak{B}$, указанных в теореме 3, пространство $\exp X$ является κ-пространством, а X — плотный в себе паракомпакт, то X — бикомпакт.

<u>Лемма 2.</u> Пусть X — топологическое пространство, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{P}(X)$, $Y \subset X$ и n — натуральное число. Положим $\mathfrak{Y}_1 = \{(F) : F \subset Y\}$, $\mathfrak{Y}_2 = \{(F) : F \supset Y\}$, $\mathfrak{F}_n(X) = \{(F) : |F| \le n\}$ и $\mathcal{E}_n(X) = \{(F) : |F| = n\}$. Тогда множества $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ и $\mathfrak{F}_n(X)$ замкнуты в пространстве $\exp X$ с $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологией, а $\mathcal{E}_n(X)$ дискретно в себе.

<u>Доказательство.</u> Пусть $(P) \in \exp X \setminus \mathfrak{Y}_1$, тогда существует точка $p \in P \setminus Y$, и в этом случае окрестность $[\{p\}, \mathfrak{A}]$ отделяет точку (P) от множества $\mathfrak{Y}_1$. Пусть теперь $(P) \in \exp X \setminus \mathfrak{Y}_2$, тогда

найдется точка $y \in Y \setminus P$, и в этом случае окрестность $[\phi, \{y\}]$ отделяет точку (P) от $\mathfrak{L}_2$. Если же $(P) \in exX \setminus \mathfrak{F}_n(X)$, то найдется подмножество $S \subset P$, состоящее из $n+1$ элемента, а тогда окрестность $[S, \phi]$ отделяет точку (P) от множества $\mathfrak{F}_n(X)$. Для произвольной точки $(P) \in \mathcal{E}_n(X)$ положим $\mathfrak{U} = [S, \phi]$, тогда $\mathfrak{U}$ - окрестность точки (P), пересекающая множество $\mathcal{E}_n(X)$ только по одной точке (P). Лемма доказана. Отметим, что при доказательстве использована хаусдорфовость пространства exX (см. (P1)).

Широко известна

Лемма 4. Если Z - топологическое пространство с единственной предельной точкой и Z - k-пространство, то Z - пространство Фреше-Урысона.

Лемма 5. Пусть X - топологическое пространство, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(X)$, $M \subset X$, $a \in [M] \setminus M$ и для всякого элемента $B \in \mathfrak{B}$ из $a \notin B$ следует $M \setminus B \neq \phi$. Тогда, если подпространство $\mathfrak{F}_2(X)$ пространства exX в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии является k-пространством, то существует счетное подмножество $M_0 \subset M$ такое, что из $B \in \mathfrak{B}$ и $a \notin B$ следует $|M_0 \cap B| < \aleph_0$.

Доказательство. Положим $\mathfrak{L} = \{(F_x) : x \in M\}$, где $F_x = \{x, a\}$. Пусть $\mathfrak{U} = [\{a\}, B]$ - произвольная базисная окрестность точки $(\{a\})$ в пространстве exX. Тогда $a \notin B \in \mathfrak{B}$, поэтому существует точка $x \in M \setminus B$. Ясно, что $(F_x) \in \mathfrak{U}$. Итак, $(\{a\}) \in [\mathfrak{L}]$. При этом, очевидно, $(\{a\}) \notin \mathfrak{L}$.

Положим $\mathfrak{N} = \{(F) \in \mathfrak{F}_2(X) : a \in F\}$, тогда $\mathfrak{N}$ замкнуто по лемме 3 и, как легко видеть, содержит $\{(a)\} \cup \mathfrak{L}$. Из замкнутости $\mathfrak{N}$ и условия леммы получаем, что $\mathfrak{N}$ - k-пространство. Пусть (P) - произвольная предельная точка в $\mathfrak{N}$. По лемме 3 $(P) \notin \mathcal{E}_2(X)$, откуда $|P| = 1$. Из определения $\mathfrak{N}$ следует $a \in P$. Итак, $P = \{a\}$, поэтому $\mathfrak{N}$ - пространство с единственной предельной точкой. По лемме 4 $\mathfrak{N}$ - пространство Фреше-Урысона. Так как $(\{a\}) \in [\mathfrak{L}]$, существует сходящаяся к точке $(\{a\})$ последовательность $\mathfrak{L}_0 \subset \mathfrak{L}$. Положим $M_0 = \{x : (F_x) \in \mathfrak{L}_0\}$. Проверим, что M_0 - искомое множество. Ясно, что M_0 счетно. Если $B \in \mathfrak{B}$ и $a \notin B$, то $[\{a\}, B]$ - окрестность точки $(\{a\})$ в exX, поэтому множество $\mathfrak{L}_0 \setminus [\{a\}, B]$ конечно. Осталось заметить, что из $x \in M_0 \cap B$ следует $(F_x) \in \mathfrak{L}_0 \setminus [\{a\}, B]$. Лемма доказана.

В случае, когда $X\setminus U\in\mathfrak{B}$ для произвольной окрестности U точки a, M_0 является сходящейся к точке a последовательностью. С учетом соотношения $\mathfrak{F}_2(X) \subsetneq_{cl} exX$ получаем:

<u>Теорема 4.</u> Пусть exX – k-пространство в $(\mathfrak{F},\mathfrak{B})$-топологии, причем $\mathfrak{B}=C_1(X)$. Тогда X – пространство Фреше-Урысона.

<u>Лемма 6.</u> Пусть X – нормальное пространство, (F) – точка пространства exX, рассматриваемого в (C_1,C_1)-топологии. Тогда эквивалентны следующие условия: а) теснота пространства exX в точке (F) счетна; б) множество F имеет счетную базу $\mathfrak{N}$ окрестностей в пространстве X; в) в точке (F) пространства exX выполнена 1-ая аксиома счетности. Ограничимся схемой доказательства. Достаточно проверить, что из а) следует б), а из б) следует в). Пусть выполнено а). Положим $\mathfrak{U}=\{(P)\in exX : F\subset \operatorname{Int} P\}$. Из нормальности X следует $(F)\in[\mathfrak{U}]$. Пользуясь свойством а), фиксируем счетное $\mathfrak{U}_0\subset\mathfrak{U}$, для которого $(F)\in[\mathfrak{U}_0]$. Тогда $\{\operatorname{Int}P : (P)\in\mathfrak{U}_0\}$ – счетная база окрестностей множества F в X. Пусть теперь выполнено б). Положим $\mathfrak{H}=\{[F, X\setminus U] : U\in\mathfrak{N}\}$, тогда $\mathfrak{H}$ – счетная база окрестностей точки (F) в пространстве exX.

<u>Лемма 7.</u> Пространство exX имеет в точке (F) псевдохарактер $\leq\lambda$, где λ – некоторый кардинал, в $(\mathfrak{F},\mathfrak{B})$-топологии тогда и только тогда, когда найдутся подсемейства $\mathfrak{F}_0\subset\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{B}_0\subset\mathfrak{B}$ мощности $\leq\lambda$ каждое такие, что $F=\bigcap\{U : U\in\mathfrak{F}_0\}$ и $X\setminus F=\bigcup\{B : B\in\mathfrak{B}_0\}$.

Доказательство следует непосредственно из определения $(\mathfrak{F},\mathfrak{B})$-топологии.

Учитывая, что в совершенно нормальном пространстве любое открытое множество представимо в виде счетной суммы замкнутых, а также (P1), получаем:

<u>Следствие 5.</u> Пространство exX в $(\mathfrak{F},\mathfrak{B})$-топологии имеет счетный псевдохарактер, если выполнено хотя бы одно из следующих свойств: а) X – совершенно нормальное пространство и $C_1(X)\subset\mathfrak{F}\cap\mathfrak{B}$; б) X – совершенно нормально и наследственно сепарабельно, $C_1(X)\subset\mathfrak{B}$; в) X счетно.

<u>Лемма 8.</u> Если k-пространство Z имеет счетный

псевдохарактер, то теснота Z счетна.
Доказательство этой широко известной леммы основано на том, что всякий бикомпакт в Z удовлетворяет 1-ой аксиоме счетности.

Из лемм 6, 8 и следствия 5 получаем:

Теорема 5. Пусть X – совершенно нормальное пространство и пространство $\exp X$ наделено (C_1, C_1)-топологией. Тогда эквивалентны следующие условия: а) $\exp X$ – k-пространство; б) $\exp X$ – пространство с 1-ой аксиомой счетности; в) всякое замкнутое множество в X имеет счетную базу окрестностей.

Отметим, что теорема 5 переносится на большие кардиналы (и – с некоторыми изменениями – на очановские топологии, отличные от (C_1, C_1)-топологии).

Следствие 6. Пусть X – совершенно нормальный паракомпакт и $\exp X$ – k-пространство в (C_1, C_1)-топологии. Тогда X – пространство с 1-ой аксиомой счетности и X' – бикомпакт.

Отметим, что требование $\mathfrak{A} = C_1(X)$ существенно:

Пример 3. Пусть X – компактификация точкой a дискретного пространства несчетной мощности τ и пространство $\exp X$ наделено (C_0, C_1)-топологией. Тогда $\exp X = Z_1 \oplus Z_2$, где $Z_1 = \{(F) : F \ni a\}$ гомеоморфно пространству Q^{τ}, а $Z_2 = \{(F) : F \not\ni a\}$ – дискретное пространство (см. (Р3)).

Лемма 9. Пусть $\exp X$ – k_1-пространство в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии, причем элементы семейства $\mathfrak{A}$ замкнуты в X; пусть $\tilde{\mathfrak{A}}$ – наименьшее семейство подмножеств пространства X, содержащее $\mathfrak{A}$ и инвариантное относительно счетных объединений. Тогда если в X плотно некоторое множество $S \in \tilde{\mathfrak{A}}$, то $X \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть $S = \bigcup\{S_n : n < \omega_0\}$, где S_n являются элементами множества $\mathfrak{A}$. Положим $\mathfrak{X} = \{(A) : A \in \mathfrak{A}\}$, тогда произвольная базисная окрестность $[A, \mathfrak{f}]$ точки (X) содержит элемент (A) семейства $\mathfrak{X}$, поэтому $(X) \in [\mathfrak{X}]$. Так как $\exp X$ – k_1-пространство, найдется бикомпакт $B \subset \exp X$, для которого $(X) \in [\mathfrak{X}_1]$, где $\mathfrak{X}_1 = B \cap \mathfrak{X}$. Для произвольного $n < \omega_0$ положим $T = \bigcup\{S_i : i \leq n\}$, тогда $T \in \mathfrak{A}$, так как семейство $\mathfrak{A}$ инвариантно относительно конечных объединений; отсюда следует, что

$\mathfrak{U}=[T,\phi]$-окрестность точки (X). Так как $(X)\in[\mathfrak{X}_1]$, найдется точка $(L_n)\in\mathfrak{U}\cap\mathfrak{X}_1$; так как $(L_n)\in\mathfrak{U}$, выполнено следующее свойство: $(a)\ S_i\subset L_n$ при всех $i\leqslant n$.

Положим $\mathfrak{X}=\{(L_n): n<\omega_0\}$. Являясь подмножеством бикомпакта B, множество $\mathfrak{X}$ обязано иметь некоторую предельную точку (P). Допустим, что при некотором i существует точка $t\in S_i\setminus P$; тогда $\mathfrak{V}=[\phi,\{t\}]$- окрестность точки (P), причем из $(L_m)\in\mathfrak{V}\cap\mathfrak{X}$ следует $t\notin L_m$, откуда $m<i$, так как в противном случае из (a) получаем $t\in S_i\subset L_m$. Итак, $|\mathfrak{V}\cap\mathfrak{X}|<i$, а это противоречит предельности точки (P). Из сказанного вытекает $S\subset P$. Так как $[P]=P$ и S плотно в X, имеем $P=X$. Положим $C=\bigcup\{L_n: n<\omega_0\}$, тогда $C\in\mathfrak{F}$. Допустим, что найдется точка $x\in P\setminus C$, тогда окрестность $[\{x\},\phi]$ отделяет точку (P) от $\mathfrak{X}$, что противоречит предельности точки (P). Таким образом, должно выполняться $X=P=C$, отсюда $X\in\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Отметим, что требование замкнутости элементов семейства $\mathfrak{F}$ в лемме 9 не является серьезным ограничением, так как вместо $\mathfrak{F}$ можно ввести семейство $\mathfrak{F}'=\{[A]: A\in\mathfrak{F}\}$, сохранив при этом $(\mathfrak{F},\mathfrak{B})$-топологию на пространстве exX [6].

Переходя в лемме 9 к замкнутым подпространствам (см. (P2)), получаем следующее утверждение:

<u>Теорема 6.</u> Пусть exX является κ_1-пространством в $(\mathfrak{F},\mathfrak{B})$-топологии, ξ - некоторый класс топологических пространств, наследственный по замкнутым подмножествам и инвариантный относительно счетных объединений. Допустим, что замыкание произвольного элемента $A\in\mathfrak{F}$ принадлежит ξ. Тогда для всякого подмножества $Z\subset X$, такого, что $Z\in\xi$, выполняется $[Z]\in\xi$.

В качестве ξ можно выбрать любой из следующих классов топологических пространств: а) класс счетных пространств; б) класс пространств, представимых в виде счетной суммы компактов; в) σ-компактных; г) финально компактных; д) со счетным псевдохарактером; е) 1-й категории в X; ж) совершенно нормальных (без нормальности). Приходим к ряду следствий, из которых приведём одно:

<u>Следствие 7.</u> Если exX является κ_1-пространством

в $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топологии, и замыкание любого элемента $A \in \mathfrak{A}$ счетно, то всякое сепарабельное подпространство в X счетно.

Учитывая пример 2, получаем:

Следствие 8. Если X – сепарабельное пространство, то эквивалентны следующие условия: а) $\exp X$ является κ_1-пространством в (C_0, C_0)-топологии; б) X счетно; в) $\exp X$ – метризуемое пространство со счетной базой в (C_0, C_0)-топологии.

Отметим, что требование сепарабельности в следствии 8 существенно:

Пример 3. Пространство X метризуемо, несепарабельно, $\exp X$ – κ_1-пространство в (C_0, C_0)-топологии. Пусть X – метризуемый ёж с несчетным числом иголок из последовательностей, a – единственная неизолированная точка в X. Положим $Z_1 = \{(F) : a \in F\}$ и $Z_2 = \{(F) : a \notin F\}$. Тогда $\exp X = Z_1 \oplus Z_2$ и Z_1 гомеоморфно канторову дисконтинууму веса $\tau = |X|$, а Z_2 – σ-произведению τ экземпляров натурального ряда. Так как Z_1 – бикомпакт, а Z_2 – пространство Фреше-Урысона, получаем, что $\exp X$ – κ_1-пространство.

Различные следствия можно получить из следующего примера:

Пример 4. Пусть X – дискретное несчетное пространство, семейство $\mathfrak{A}$ состоит из конечных, а $\mathfrak{B}$ – из всех подмножеств пространства X. Тогда $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$-топология на пространстве $\exp X$ совпадает с топологией Виеториса [8], [7], [9] и из [5] следует, что $\exp X$ не является κ-пространством.

Автор выражает искреннюю признательность профессору А.В.Архангельскому и к.ф.-м.н. Кашубе Р.П. за ценные обсуждения.

Литература

1. Архангельский А.В. Бикомпактные множества и топология пространств.–Тр. Московс. матем. о-ва, 1965, т.13, с. 3–55.

2. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях, М., 1974.

3. Кашуба Р.П., Матиэявичус А.И. Очановские пространства и кольца.-В кн.:Труды 1У Тираспольского симпозиума по общей топологии и её приложениям, Тираспол, I979, с.59-60.

4. Очан Ю.С. Пространство подмножеств топологического пространства - Матем. сб., 1943, т. 2, с. 340-352.

5. Попов В.В. О топологии пространства замкнутых подмножеств - Вестник Моск. ун-та. Сер.I. Мат.,мех., I975, № I, с. 65-70.

6. Попов В.В. О нормальности экспоненты в топологиях очановского типа, - Математич.заметки, I982, т.32, № 3, с. 375-384.

7. Engelking R. General topology. Warszawa, 1977.

8. Michael E. Topologies on spaces of subsets.- Trans. Amer. Math. Soc., 1951, v. 71, p. 152-182.

9. Vietoris L., Bereiche zweiter Ordnung.-Monatsh. fur Math. und Phys., 1922, v. 32, p. 258-280.

Поступила 16 июня 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.83.

К ТЕОРЕМЕ ЧЕПМЭНА О ДОПОЛНЕНИИ

И.С.Рубанов

МГПИ им. В.И.Ленина

Введение. Теоремой о дополнении мы называем следующий результат Т.А.Чепмэна [1] :

Теорема 1. Если шейпы компактных Z-множеств X и Y гильбертова куба Q равны, то дополнения $Q\setminus X$ и $Q\setminus Y$ этих множеств гомеоморфны.

Наша заметка посвящена доказательству этого замечательного факта, которое элементарно в том смысле, что, в отличие от авторского, почти не опирается на теорию Q-многообразий. Оно основано на характеризации шейпов компактов, данной в [2]. Чепмэн доказал и обратную теорему, но так коротко и просто, что передоказывать ее нет смысла.

Обозначения. Далее везде I есть отрезок $[0;1]$, J - интервал $(0;1)$, n - некоторое натуральное число. Гильбертов куб Q есть произведение счетного числа отрезков $I_n = I$; лежащее в нем произведение всех интервалов $J_n = J$ называется его псевдовнутренностью и обозначается S . Знаком $\cong$ мы обозначаем гомеоморфность топологических пространств, знаком $\simeq$ - гомотопность их непрерывных отображений.

1. Постановка задачи. Компакт $X \subset Q$ называется Z-множеством в , если любое открытое покрытие U куба Q обладает таким непрерывным отображением $f : Q \longrightarrow Q\setminus X$, что всякая точка $x \in Q$ покрыта вместе со своим образом $f(x)$ одним и тем же элементом из U . Хотя псевдовнутренность S куба Q и не компактна, она удовлетворяет условию из определения Z-множества: за отображение f здесь всегда можно принять проектирование куба Q на подходящую конечномерную грань. Поэтому справедлива

Лемма 1. Всякий компакт $X \subset S$ есть Z-множество в Q .

Нам понадобится ещё такая, принадлежащая, как и само понятие Z-множества, Р.Д.Андерсону [3],

Лемма 2. Любой гомеоморфизм $h: X \longrightarrow Y$ замкнутых Z-множеств в Q продолжается до гомеоморфизма $H: Q \longrightarrow Q$.

По модулю лемм 1 и 2 теорема 1 равносильна такой

Теорема 2. Если шейпы (метризуемых) компактов X и Y равны, то найдутся такие компакты $X' \cong X$ и $Y' \cong Y$, лежащие в S, что $Q \setminus X' \cong Q \setminus Y'$.

Это утверждение мы и будем доказывать.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть X и Y – компакты одного шейпа. Тогда, как вытекает из [2, следствие 1], эти компакты гомеоморфны пределам X' и Y' таких направленных по множеству всех натуральных чисел топологических обратных спектров $\underline{X} = \{X_n, p_{n'}^n\}$ и $\underline{Y} = \{X_n, q_{n'}^n\}$ соответственно, что все X_n суть компактные полиэдры и, кроме того,

$$\text{при всех } n \geq n' \quad p_{n'}^n \simeq q_{n'}^n . \qquad (1)$$

Предел обратного спектра $\underline{X}$ мы понимаем здесь в самом узком смысле, как подпространство произведения $\prod X_n$, состоящее из всех таких последовательностей $\{x_n \mid x_n \in X_n, n = 1,2\ldots\}$, что $x_{n'} = p_{n'}^n(x_n)$ при всех $n \geq n'$.

Будем, не умаляя общности, считать, что каждый из полиэдров X_n кусочно-линейно вложен в некоторый конечномерный куб $K^{(n)} = I^{m_n}$, причем целиком лежит в его внутренности $\overset{\circ}{I}{}^{m_n}$. Отождествим произведение всех кубов $K^{(n)}$ с гильбертовым кубом Q. Тогда пределы X' и Y' спектров $\underline{X}$ и $\underline{Y}$ будут вместе с произведением всех полиэдров X_n лежать в псевдовнутренности S этого гильбертого куба. Наша цель - показать, что $Q \setminus X' \cong Q \setminus Y'$. Чтобы упростить обозначения, мы в дальнейшем будем отождествлять X' с X и Y' с Y.

Идея построения гомеоморфизма $\Phi: Q \setminus X \longrightarrow Q \setminus Y$. Назовем последовательность $W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_n \supset \ldots$ замкнутых окрестностей компакта C в гильбертовом кубе Q фундаментальной системой вложенных окрестностей (коротко - ФСВО) этого компакта, если пересечение всех W_n равно C.

Допустим, мы построили такие ФСВО $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$ компактов X и Y соответственно и такую последовательность $\{\Phi_n\}$ гомеоморфизмов куба Q на себя, что при всех n выполнены следующие два условия:

$$\Phi_n(\mathcal{U}_n)=V_n \qquad (2)$$

$$\Phi_{n+1}\big|_{Q\setminus\mathcal{U}_n}=\Phi_n\big|_{Q\setminus\mathcal{U}_n}. \qquad (3)$$

Условие (3) позволяет формулами $\tilde{\Phi}\big|_{Q\setminus\mathcal{U}_n}=\Phi_n\big|_{Q\setminus\mathcal{U}_n}$, $n=1,2,\ldots$ корректно задать отображение $\tilde{\Phi}$ пространства $\bigcup_{n=1}^{\infty}(Q\setminus\mathcal{U}_n)=Q\setminus X$ в куб Q. Поскольку все множества $Q\setminus\mathcal{U}_n$ открыты в Q, а отображения Φ_n непрерывны и инъективны, отображение $\tilde{\Phi}$ также непрерывно и инъективно. Кроме того, поскольку $\tilde{\Phi}(Q\setminus X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\tilde{\Phi}(Q\setminus\mathcal{U}_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Phi_n(Q\setminus\mathcal{U}_n)=$
$=\bigcup_{n=1}^{\infty}(Q\setminus\Phi_n(\mathcal{U}_n))=\bigcup_{n=1}^{\infty}(Q\setminus V_n)=Q\setminus Y$,
определено непрерывное и биективное ограничение отображения $\tilde{\Phi}$ до отображения $\Phi: Q\setminus X\longrightarrow Q\setminus Y$. Наконец, в силу биективности гомеоморфизмов Φ_n, условия (2) и (3) равносильны соответственно условиям

$$\Phi_n^{-1}(V_n)=\mathcal{U}_n \qquad (2a)$$

$$\Phi_{n+1}^{-1}\big|_{Q\setminus V_n}=\Phi_n^{-1}\big|_{Q\setminus V_n}. \qquad (3a)$$

Тем самым отображение $\Phi': Q\setminus Y\longrightarrow Q\setminus X$, обратное к Φ, также непрерывно, ибо аналогично отображению Φ может быть задано формулами $\Phi'\big|_{Q\setminus V_n}=\Phi_n^{-1}\big|_{Q\setminus V_n}$, $n=1,2,\ldots$.

Итак, Φ – гомеоморфизм, и для доказательства теоремы 2 нам достаточно построить ФСВО $\{\mathcal{U}_n\}$ и $\{V_n\}$ и последовательность гомеоморфизмов $\{\Phi_n\}$, удовлетворяющее условиям (2) и (3).

Основная конструкция. При всех n положим $K_n=\prod_{m=1}^{n}K^{(m)}$, $Q_n=\prod_{m=n+1}^{\infty}K^{(m)}$ и зададим отображения $p_n, q_n: X_n\longrightarrow K_n$ соответственно формулами $p_n(x)=\{p_m^n(x)\}$ и $q_n(x)=\{q_m^n(x)\}$, где $x\in X_n$, $m=1,\ldots,n$. Образы $p_n(X_n)$ и $q_n(X_n)$ обозначим соответственно через X_n' и Y_n'.

Множество X_n' можно описать как совокупность всех таких последовательностей $\{x_1,\ldots,x_n\}\in K_n$, где $x_1\in X_1,\ldots,x_n\in X_n$, что $x_s=p_s^m(x_m)$ при всех $1\le s\le m\le n$. Отсюда

$$X'_1\times Q_1\supset X'_2\times Q_2\supset\ldots\supset X'_n\times Q_n\supset\ldots\ , \tag{5x}$$

и поскольку мы отождествляем компакт X с пределом спектра,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(X'_n\times Q_n)=X\ . \tag{6x}$$

Аналогично

$$Y'_1\times Q_1\supset Y'_2\times Q_2\supset\ldots\supset Y'_n\times Q_n\supset\ldots \tag{5y}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(Y'_n\times Q_n)=Y\ . \tag{6y}$$

С помощью условий (5x) – (6y) нетрудно по индукции построить при каждом n такие замкнутые окрестности $\mathcal{U}'_n$ компакта X'_n и V'_n компакта Y'_n в кубе K_n, что последовательности $\{\mathcal{U}'_n\times Q_n\}$ и $\{V'_n\times Q_n\}$ будут ФСБО в гильбертовом кубе Q для компактов X и Y соответственно. Наша ближайшая цель – построить при каждом n такие гомеоморфизмы h_n и H_n куба K_n на себя, чтобы были выполнены следующие три условия:

$$H_{n+1}=h_{n+1}\circ(H_n\times id_{K^{(n+1)}})\ , \tag{7}$$

$$H_n\circ p_n=q_n\ , \tag{8}$$

гомеоморфизм h_{n+1} тождественен вне множества $(H_n(\mathcal{U}'_n)\cap V'_n)\times K^{(n+1)}$ (9)

Для этого нам понадобится такая

<u>Лемма 3.</u> Пусть Z и Z' – компакты, $K=I^n$ и $K'=I^{n'}$ – конечномерные кубы, $Z\subset J^n\subset K$, $Z'\subset K'$ и отображения $p,q: Z'\longrightarrow Z$ гомотопны. Тогда для всякой окрестности W компакта Z в кубе K найдется такой гомеоморфизм h куба $K\times K'$ на себя, тождественный вне множества $W\times K'$, что $h(p(x),x)=(q(x),x)$ при всех $x\in Z'$.

Построение гомеоморфизмов h_n и H_n мы проведем по индукции. Прежде всего, можно положить $h_1=H_1=id_{K_1}$. Допустим далее, что искомые гомеоморфизмы уже построены при данном n. Тогда $H_n(X'_n)=H_n(p_n(X_n))=q_n(X_n)=Y'_n$, откуда

множество $H_n(\mathcal{U}_n)\cap V'_n$ есть замкнутая окрестность компакта Y'_n в кубе K_n. (10)

Поскольку ввиду (1) $p_n^{n+1}\simeq q_n^{n+1}$, из (10) и леммы 3 вытекает существование такого гомеоморфизма $h: K_n\times K^{(n+1)}=$

$: K_{n+1} \longrightarrow K_{n+1}$, тождественного вне множества $(H_n(\mathfrak{U}_n')\cap V_n')\times K^{(n+1)}$, что при всех $x\in X_{n+1}$ $h(g_n(p_n^{n+1}(x)),x) = (g_n(g_n^{n+1}(x)),x)$. Положим $h_{n+1}=h$ и определим гомеоморфизм $H_{n+1}: K_{n+1}\longrightarrow K_{n+1}$ формулой (7). Поскольку $p_m^{n+1}=p_m^n\circ p_n^{n+1}$ и $q_n^{n+1}=q_m^n\circ q_n^{n+1}$ при всех натуральных $m\leqslant n$, а $p_n^n=q_n^n=id_{X_n}$, для всех $x\in X_{n+1}$ имеем $H_{n+1}(p_{n+1}(x))=H_{n+1}(p_n(p_n^{n+1}(x)),x)=h_{n+1}(H_n(p_n(p_n^{n+1}(x))),x)=$ $=h_{n+1}(q_n(p_n^{n+1}(x)),x)=(q_n(q_n^{n+1}(x)),x)=q_{n+1}(x)$, откуда $H_{n+1}\circ p_{n+1}=q_{n+1}$. Это завершает индукцию.

<u>Завершение доказательства теоремы 2.</u> Положим при всех n

$$\mathfrak{H}_n = H_n\times id_{Q_n}: K_n\times Q_n = Q \longrightarrow Q \tag{11}$$

$$\mathfrak{U}_n = (\mathfrak{U}_n'\cap H_n^{-1}(V_n'))\times Q_n = (\mathfrak{U}_n'\times Q_n)\cap\mathfrak{H}_n^{-1}(V_n'\times Q_n) \tag{12}$$

$$V_n = (H_n(\mathfrak{U}_n')\cap V_n')\times Q_n = \mathfrak{H}_n(\mathfrak{U}_n'\times Q_n)\cap(V_n'\times Q_n) \tag{13}$$

и покажем, что определенные таким образом последовательности компактов $\{\mathfrak{U}_n\}$ и $\{V_n\}$ суть ФСВО соответственно для компактов X и Y, а последовательность гомеоморфизмов $\{\mathfrak{H}_n\}$ удовлетворяет условиям (2) и (3).

Начнем с $\{\mathfrak{H}_n\}$. Справедливость для нее условия (2) непосредственно вытекает из (12) и (13), а чтобы проверить (3), достаточно заметить, что при всех n $\mathfrak{H}_{n+1}=$ $=H_{n+1}\times id_{Q_{n+1}}=(h_{n+1}\circ(H_n\times id_{K^{(n+1)}}))\times id_{Q_{n+1}}=(h_{n+1}\times id_{Q_{n+1}})\circ(H_n\times id_{Q_n})=$ $=(h_{n+1}\times id_{Q_{n+1}})\circ\mathfrak{H}_n$ и отображение $h_{n+1}\times id_{Q_{n+1}}$ согласно (9) тождественно вне множества $(V_n'\cap H_n(\mathfrak{U}_n'))\times K^{(n+1)}\times Q_{n+1}=V_n=\mathfrak{H}_n(\mathfrak{U}_n)$.

Перейдем к последовательностям $\{\mathfrak{U}_n\}$ и $\{V_n\}$. Ввиду (10) все множества V_n суть замкнутые окрестности в Q призм $Y_n'\times Q_n$, а тем самым, из-за (6y), и компакта Y. Поскольку при всех n $\mathfrak{H}_n^{-1}(V_n)=\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{H}_n^{-1}(Y_n'\times Q_n)=$ $=H_n^{-1}(Y_n')\times Q_n=X_n'\times Q_n$ и $\mathfrak{H}_n^{-1}$ – гомеоморфизм, множество $\mathfrak{U}_n$ ввиду (6x) является тем самым замкнутой окрестностью компакта X. Осталось доказать, что при всех n $\mathfrak{U}_{n+1}\subset\mathfrak{U}_n$ и $V_{n+1}\subset V_n$. Сначала докажем второе включение. Ввиду (12) для этого достаточно доказать, что $\mathfrak{H}_{n+1}(\mathfrak{U}_{n+1}'\times Q_{n+1})\subset$ $\subset\mathfrak{H}_n(\mathfrak{U}_n'\times Q_n)$, ибо $V_{n+1}'\times Q_{n+1}\subset V_n'\times Q_n$ по построению. Но это вытекает из включения $\mathcal{U}'_{n+1}\times Q_{n+1}\subset\mathcal{U}'_n\times Q_n$ и равенства $\Phi_{n+1}(\mathcal{U}'_n\times Q_n)=\Phi_n(\mathcal{U}'_n\times Q_n)$, которое, в свою очередь, следует из (8), (12) и биективности гомеоморфизмов Φ_n и Φ_{n+1}. Теперь, чтобы доказать включение $\mathcal{U}_{n+1}\subset\mathcal{U}_n$, достаточно заметить, что $\mathcal{U}_{n+1}=\Phi^{-1}_{n+1}(V_{n+1})\subset\Phi^{-1}_{n+1}(V_n)=$ $=\Phi^{-1}_n(V_n)=\mathcal{U}_n$. Здесь равенство $\Phi^{-1}_{n+1}(V_n)=\Phi^{-1}_n(V_n)$ вытекает из (3а).

Доказательство леммы 3. Будем обозначать отрезок, соединяющий в кубе K точки x и y через $[x,y]$. Вначале докажем лемму в случае, когда отображения p и q W-близки, т.е. для каждой точки $x\in K'$ отрезок $[p(x),q(x)]$ целиком содержится в W. Пользуясь теоремой Титце, продолжим отображения p и q соответственно до отображений p' и q' из K' в K. Найдется такая компактная окрестность W' компакта Z' в кубе K', что сужения на нее отображений p' и q' все еще W-близки. Положим $T=\cup\{[p'(x),q'(x)]\,|\,x\in W'\}$.

Куб $K=I^n$ естественно вложен в пространство $\mathbb{R}^n$. Метризуем последнее метрикой $\rho(\{x_i\},\{y_i\})=\sum_i|x_i-y_i|$, и пусть $\varepsilon=\rho(T,\mathbb{R}^n\setminus W)$. Легко видеть, что $\varepsilon>0$. Нетрудно показать далее, что существует непрерывно зависящее от параметров $a,b\in\mathbb{R}^n$ семейство гомеоморфизмов $\{G^\varepsilon_{a,b}\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, удовлетворяющее таким условиям:

при всех $a\in\mathbb{R}^n$ $\quad G^\varepsilon_{a,a}=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, $\qquad$ (14)

при всех $a,b\in\mathbb{R}^n$ $\quad G^\varepsilon_{a,b}(a)=b$ и $G^\varepsilon_{a,b}(x)=x$, если $\rho(x,[a,b])>\varepsilon$. $\qquad$ (15)

Возьмем теперь функцию Урысона $\theta: K'\longrightarrow I$, равную 0 на Z' и 1 вне W' и положим при всех $x\in\mathbb{R}^n$ и $y\in K'$ $H(x,y)=$ $=(G^\varepsilon_{p'(y),\ell(y)}(x),y)$, где $\ell(y)=\theta(y)\cdot p'(y)+(1-\theta(y))\cdot q'(y)$. Этим мы, как легко видеть, задаем гомеоморфизм H произведения $\mathbb{R}^n\times K'$ на себя, тождественный вне $W\times W'$. Поскольку $W\times W'\subset W\times K'\subset K\times K'$, определено ограничение гомеоморфизма H до гомеоморфизма $h: K\times K'\longrightarrow K\times K'$, тождественного вне множества $W\times K'$. По построению при всех $y\in Z'$ имеем $h(p(y),y)=H(p'(y),y)=(G^\varepsilon_{p'(y),q'(y)}(p'(y)),y)=(q(y),y)$, так что гомеоморфизм h – искомый.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $F: Z'\times I\longrightarrow Z$ – гомотопия, равная p на $Z'\times\{0\}$ и q на $Z'\times\{1\}$. Поскольку

Z' - компакт, найдется такое натуральное k, что при всех $y \in Z'$ и $t \in [0, 1-1/k]$ отрезок $[F(y,t), F(y, t+1/k)]$ целиком лежит в W. По доказанному отсюда следует, что найдутся такие гомеоморфизмы $h_m : K \times K' \longrightarrow K \times K'$, $m = 1, \dots, k$, тождественные вне множества $W \times K'$, что при всех m и $y \in Z'$ $h_m(F(y, m/k), y) = (F(y, \frac{m+1}{k}), y)$. Гомеоморфизм $h = h_k \circ \dots \circ h_1$ - искомый.

Литература

1. Chapman T.A. On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape. - Fund. Math., 1972, v. 76, Nr. 2, pp. 181- 192.

2. Рубанов И.С. Характеризация шейпов компактов с помощью спектров из нервов покрытий. - Сибирский математический журнал, 1979, т. 20, № 1, с. 128-140.

3. Anderson R.D. On topological infinite deficiency. - Mich. Math. J., 1967, v. 14, pp. 365-383.

Поступила 15 августа 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.88

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ-ВИНЕРА ДЛЯ МЕТАБЕЛЕВЫХ ГРУПП ЛИ

Л.А.Севастьянов
Университет дружбы народов им. П.Лумумбы

Пусть G – односвязная метабелевая группа Ли, $\mathfrak{g}$ –её алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ – линейное пространство, сопряженное к $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_c^*$ – комплексификация $\mathfrak{g}^*$. В $\mathfrak{g}^*$ существует [1], [4] непустое открытое в топологии Зарисского инвариантное относительно копрясоединенного действия группы G подмножество V и линейное подмногообразие Q, что все G – орбиты, лежащие в V, пересекаются с Q ровно в одной точке. В $\mathfrak{g}$ существует такой базис $\{e_1,\dots,e_l,e_{l+1},\dots,e_n\}$, что функции $e_{l+1},\dots,e_n$ обращаются в нуль на Q, а $e_1,\dots,e_l$ – являются координатами на Q.

В $\mathfrak{g}$ существует скалярное произведение, относительно которого базис $\{e_1,\dots,e_n\}$ ортонормирован. Пусть $\lambda\in\mathfrak{g}_c^*$ – произвольный функционал, $G(\lambda)$ – стационарная подгруппа точки λ. В подпространстве $\mathfrak{g}(\lambda)=\mathrm{Ln}\,G(\lambda)$ с индуцированной евклидовой структурой существует такой ортонормированный базис $e_\lambda^1,\dots,e_\lambda^m$ $(m=m(\lambda)=\dim G(\lambda))$, что векторы $e_\lambda^1=e_1,\dots,e_\lambda^2=e_2$ образуют базис подпространства $\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{g}(\lambda)$. В подпространстве $\mathfrak{h}(\lambda)$, ортогональном к $\mathfrak{g}(\lambda)$, существует ортонормированный базис $\{e_\lambda^{m+1},\dots,e_\lambda^n\}$, коэкспоненциальный к подалгебре $\mathfrak{g}(\lambda)$ [9]. Отображение

$$G(\lambda)\times R^{n-m}\longrightarrow G \qquad (\ )$$

$$(g_0^\lambda;t_1,\dots,t_{n-m})\longmapsto g=g_0^\lambda\cdot g_1^\lambda(t_1)\cdot\ldots\cdot g_{n-m}^\lambda(t_{n-m}),$$

где $g_i^\lambda(t)=\exp(t\,e_\lambda^{m+i})$, является гладким диффеоморфизмом многообразий [9].

Обозначим через $\|\cdot\|$ евклидову норму на $\mathfrak{g}$ и дуальную норму на $\mathfrak{g}_c^*$, построим на G функцию ρ^λ:

$$g=g_0^\lambda g_1^\lambda(t_1)\ldots g_{n-m}^\lambda(t_{n-m})\longmapsto \rho^\lambda(g)=\sqrt{\|\ln g_0^\lambda\|^2+t_1^2+\ldots+t_{n-m}^2}.$$

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_{n-m})\in R^{n-m}$, и $\|x\|^\lambda=\prod_{i=1}^{n-m}\|x_i\|_i^\lambda$, где $\|x_i\|_i^\lambda$ – норма оператора $\mathrm{Ad}\,g_i^\lambda(x_i)$ в $\mathfrak{g}$. Для любого $t\in R$ определим на R^{n-m} меру $d\mu_{t,\lambda}(x)=e^{t\|x\|^\lambda}dx_1\ldots dx_{n-m}$ и гильбертово пространство $H_{t,\lambda}=L^2(R^{n-m},d\mu_{t,\lambda})$, снабженное гильбертовой нормой $\|\cdot\|_{t,\lambda}$:

$$\|\psi\|_{t,\lambda}=\{\int_{R^{n-m}}|\psi(x)|^2d\mu_{t,\lambda}(x)\}^{1/2},\ \psi\in H_{t,\lambda}.$$

Проективный предел H_λ семейства гильбертовых пространств $H_{t,\lambda}$, т.е. линейное пространство $\bigcap_{t\in R}H_{t,\lambda}$, снабженное системой согласованных норм $\|\cdot\|_{t,\lambda}$, является полным счетно-гильбертовым пространством [2]. Пространство H_λ', сопряженное к H_λ, является индуктивным пределом пространств $H_{t,\lambda}$, т.к. $H_{t,\lambda}'=H_{-t,\lambda}$ [2].

Одномерное представление χ^λ подгруппы $G(\lambda)$:

$$\chi^\lambda(g)=\exp\{i<\lambda,\ln g>\},\ g\in G(\lambda),$$

индуцирует в H_λ представление $e(\lambda)$ группы G:

$$e(\lambda,g)\psi(x)=\chi^\lambda(g_0^\lambda)\psi(y),$$

где $g_1^\lambda(x_1)\ldots g_{n-m}^\lambda(x_{n-m})g=g_0^\lambda g_1^\lambda(y_1)\ldots g_{n-m}^\lambda(y_{n-m})$.

<u>Предложение 1.</u> Представление $e(\lambda)$ непрерывно при любом $\lambda\in\mathfrak{g}_c^*$.

<u>Доказательство.</u> Действительно,

$$e(\lambda,g)\psi(x)=e(\lambda,g_0^\lambda(t_1)\ldots g_{n-m}^\lambda(t_{n-m}))\psi(x_1,\ldots,x_{n-m})=$$
$$=\exp[i<\lambda,(\mathrm{Ad}\{g_1^\lambda(x_1)\ldots g_{n-m}^\lambda(x_{n-m})\}(\ln g_0^\lambda)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-m}[(\sum_{j=k+1}^{n-m}x_je_\lambda^{m+j}),t_ke_\lambda^{m+k}])>]\psi(x_1+t_1,\ldots x_{n-m}+t_{n-m}).$$

Поэтому верны оценки:

$$|e(\lambda,g)\psi(x)|^2\leq\exp\{2\|\mathrm{Im}\lambda\|g^\lambda(g)\|x\|^\lambda\}|\psi(x+t)|^2,$$

и представление $e(\lambda)$ непрерывно в H_λ в силу неравенства:

$$\|e(\lambda,g)\psi\|_{s,\lambda}\leq\|\psi\|_{\tau(s,\lambda,x),\lambda},$$

где

$$\tau(s,\lambda,x)=\begin{cases}(s+2\|\mathrm{Im}\lambda\|g^\lambda(g))\|t\|^\lambda & \text{при } s\geq-2\|\mathrm{Im}\lambda\|g^\lambda(g)\\ (s+2\|\mathrm{Im}\lambda\|g^\lambda(g))(\|t\|^\lambda)^{-1} & \text{при } s<-2\|\mathrm{Im}\lambda\|g^\lambda(g).\end{cases}$$

В силу (2) любой оператор $e(\lambda,g)$ продолжается до линейного непрерывного оператора $\tilde{e}(\lambda,g)$ в H_λ', так как H_λ плотно в H_λ' [2].

<u>Следствие 1.</u> Представление $\tilde{e}(\lambda)$ группы G в H_λ' непрерывно при произвольном $\lambda\in\mathfrak{g}_c^*$.

Пусть $e(\lambda,g)'$ – оператор в H_λ', сопряженный $e(\lambda,g)$ относительно билинейной канонической формы $(\cdot,\cdot)$ на $H'_\lambda \times H_\lambda$, тогда $e(\lambda,g)' = \tilde{e}(\bar\lambda, g^{-1})$ и, т.к. H_λ инвариантно относительно $e(\lambda,g)'$, $e(\lambda,g)'|_{H_\lambda} = e(\bar\lambda, g^{-1})$.

Представление $e(\lambda)$ порождает [4] в пространстве Гординга H_λ^∞ представление $\mathcal{E}(\lambda)$ универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Замечание 1. Канонические координаты 1-го и 2-го рода на G связаны полиномиальными соотношениями, поэтому $H_\lambda^\infty = H_\lambda \cap C^\infty(R^{n-m})$.

Непрерывный линейный функционал F на H_λ^∞ записывается в виде [2,5]:

$$(F,\psi) = \sum_{k=1}^{N} \int_{R^{n-m}} F_k(x)\partial^k/\partial x^k \psi(x)dx = \sum_{k=1}^{N} (F_k, \partial^k/\partial x^k \psi),$$

где каждый $F_k \in H'_{t,\lambda}$ при некотором $t \in R$. В силу замечания 1 его можно записать в виде

$$(F,\psi) = \sum_{k=1}^{N} \int_{R^{n-m}} \Phi_k(x)\mathcal{E}(\lambda,u_k)\psi(x)dx = \sum_{k=1}^{N} (\Phi_k, \mathcal{E}(\lambda,u_k)\psi),$$

где каждый $\Phi_k \in H'_{t,\lambda}$ при некотором $t \in R$ и $u_k \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$.

Пусть c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с базисом $\{e_1,\dots,e_n\}$ и $M^2 = \sum_{i,j,k=1}^{n} (c_{ij}^k)^2/4$.

Лемма 1. Для произвольного элемента $g = g_0^\lambda g_1^\lambda(t_1)\dots g_{n-m}^\lambda(t_{n-m}) \in G$ справедливы оценки:

$$\rho^\lambda(g) \le (1 + M\|\ln g\|)\|\ln g\|,$$
$$\|t\|^\lambda \le (1 + 2M\|\ln g\|)^{n-m}.$$

Доказательство. Разложим векторы e_λ^i по базису $\{e_j\}$: $e_\lambda^i = \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^\lambda e_j$, тогда $L_{ij}^\lambda = \left(\frac{1 \mid 0}{0 \mid M_{ij}^\lambda}\right)$,

где $M_{ij}^\lambda \in O(n-m, R)$. Рассмотрим элемент $g = \exp\{\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\} = \exp\{\sum_{i=1}^{m} a_i e_\lambda^i\} g_1^\lambda(a_{m+1})\dots g_{n-m}^\lambda(a_n)$. Тогда из формулы Кэмпбелла-Хаусдорфа следует соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j e_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} L_{ij}^\lambda e_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=m+1}^{n} a_j \sum_{p,q,s=1}^{n} L_{ip}^\lambda L_{jq}^\lambda C_{pq}^s e_s.$$

В силу линейной независимости векторов e_j получаем:

$$y_j = \sum_{i=m+1}^{n} a_i M_{ij}^\lambda,\ j = m+1,\dots,n,$$

$$y_k = a_k + \frac{1}{2}\sum_{i=m+1}^{m} a_i \sum_{j=m+1}^{n} a_j \sum_{p,q=m+1}^{n} M_{ip}^\lambda M_{jq}^\lambda C_{pq}^k$$

Из ортогональности матрицы M_{ij}^λ следует:

$$\sum_{j=r+1}^{n} y_j^2 = \sum_{i=r+1}^{n} a_i^2 .$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского, получаем оценку:

$$|[x,y]| \leq 2M|x||y|,$$

для любых $x,y \in \mathfrak{g}$.

Из соотношений (5) и (6) следует неравенство:

$$|t|_j^\lambda = |\mathrm{Ad}\, g_j^\lambda(t)| \leq 1 + |\mathrm{ad}\, t e_\lambda^{m+j}| \leq 1 + 2M|\ln g|,$$

из которого получается оценка (4а) леммы. Из неравенства Коши-Буняковского, оценки (6) и ортогональности матрицы M_y^λ получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \sum_{k=1}^{2} y_k^2 + M^2 |\ln g|^4 .$$

Отсюда, с учетом равенства (5), следует оценка:

$$(\rho^\lambda(g))^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq |\ln g|^2 (1 + M^2 |\ln g|^2),$$

из которой вытекает оценка (4) леммы.

Следствие 2. Пусть $g \in Q_\alpha = \{g \in G : |\ln g| \leq \alpha\}$, тогда выполняются оценки:

$$\rho^\lambda(g) \leq \alpha(1 + M\alpha),$$

$$|t|^\lambda \leq (1 + 2M\alpha)^{n-m}.$$

Лемма 2. Пусть $\varphi \in L^1(G)$ и $\mathrm{supp}\,\varphi \subseteq Q_\alpha$, тогда операторный интеграл

$$e(\lambda,\varphi) = \int_G \varphi(g) e(\lambda,g)\, dg$$

сильно сходится и определяет непрерывный оператор в H_λ, для которого выполняются оценки:

$$|e(\lambda,\varphi)\psi|_{t,\lambda} \leq |\varphi|_{L^1} |\psi|_{\tau(t,\lambda,\alpha),\lambda},$$

где

$$\tau(t,\lambda,\alpha) = \begin{cases} (t + 2|\mathrm{Im}\,\lambda|(1+M\alpha)\alpha)(1+2M\alpha)^{n-m} & \text{при } t > -2|\mathrm{Im}\,\lambda|(1+M\alpha)\alpha \\ (t + 2|\mathrm{Im}\,\lambda|(1+M\alpha)\alpha)(1+2M\alpha)^{m-n} & \text{при } t < -2|\mathrm{Im}\,\lambda|(1+M\alpha)\alpha . \end{cases}$$

Утверждение леммы 2 следует из (2) и следствия 2.

Основным обьектом исследования является алгебра с инволюцией $A = C_0^\infty(G)$. Непосредственной проверкой доказывается

Лемма 3. Пусть $\varphi, \varphi_1 \in A$, R_g L_g – правый и левый сдвиги на G , $u \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$, $D_R(u)$ и $D_L(u)$ – соответствующие дифференциальные операторы на G . Тогда выполняются соотношения:

(1) $e(\lambda,\varphi^*\varphi_1)=e(\lambda,\varphi)e(\lambda,\varphi_1)$;

(2) $e(\lambda,R_g\varphi)=e(\lambda,\varphi)e(\lambda,g^{-1})$,
$e(\lambda,L_g\varphi)=e(\lambda,g)e(\lambda,\varphi)$;

(3) $e(\lambda,D_L(u)\varphi)=\varepsilon(\lambda,u)e(\lambda,\varphi)$,
$e(\lambda,D_R(u)\varphi)=e(\lambda,\varphi)\varepsilon(\lambda,u^*)$;

здесь $u^*=\alpha(u)$, где α – главный антиавтоморфизм алгебры $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$ [8].

<u>Определение.</u> Обозначим через B_α ($\alpha>0$) множество операторнозначных функций f на

$$\Lambda_c=\{\lambda\in\mathfrak{g}_c^*: e_j(\lambda)=0,\ j=l+1,\dots,n\},$$

удовлетворяющих условиям:

а) при любых $f\in B_\alpha$ и $\lambda\in\Lambda$ значение $f(\lambda)$ является непрерывным линейным оператором в H_λ , отображающим H_λ в подпространство Гординга H_λ^∞ ;

б) при любых $f\in B_\alpha$, $\lambda\in\Lambda_c$ оператор $f(\lambda)'$ в H_λ' , сопряженный к оператору $f(\lambda)$, отображает H_λ в себя и непрерывен в топологии H_λ ; функция f^* , значения которой задаются равенством $f^*(\lambda)=f(\lambda)'|_{H_\lambda}$, также принадлежит B_α ;

в) для любых $u_1,u_2\in\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$ существует такая константа $C(u_1,u_2)$, что оценки:

$$\|\varepsilon(\lambda,u_1)f(\lambda)\varepsilon(\lambda,u_2)\psi\|_{t,\lambda}\leq C(u_1,u_2)\|\psi\|_{\tau(t,\lambda,\alpha),\lambda},$$

справедливы для всех $t\in R$, $\lambda\in\Lambda_c$, $\psi\in H_\lambda^\infty$;

г) при любых $u_1,u_2\in\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$, $\psi\in H_\lambda^\infty$, $F\in(H_\lambda^\infty)'$ билинейная форма $\langle F,\varepsilon(\lambda,u_1)f(\lambda)\varepsilon(\lambda,u_2)\psi\rangle$ является целой аналитической функцией на Λ_c .

На множестве $B=\bigcup\limits_{\alpha>0}B_\alpha$ задаем структуру алгебры операциями поточечного сложения и умножения функций f , алгебру B снабжаем инволюцией $^*: f\longrightarrow f^*$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть функция $\varphi\in A$ и $\sup_\cdot\varphi\subset Q_\alpha$, тогда её преобразование (7) $e(\lambda,\varphi)$ принадлежит алгебре B .

<u>Доказательство.</u> Свойство а) следует из леммы 2, гладкости функции φ и свойств пространства Гординга. Свойство

б) вытекает из следствия 1. Свойство в) следует из леммы 3 (3) и соотношения (8). Свойство г) следует из замечания 1, леммы 3 (3) и того факта, что $e(\lambda,g)$ является целой аналитической функцией в слабой топологии.

Теорема 2. Пусть $f \in B_\mathcal{L}$, тогда существует единственная функция $\varphi \in A$, преобразование (7) которой $e(\lambda,\varphi) = f(\lambda)$.

Доказательство проводим по схеме, предложенной С.Андо [10], [9].

А) Оператор $f(\lambda)$ является интегральным оператором с ядром $\mathcal{K}_f^\lambda(x,y)$;

Б) Функция $\mathcal{K}_f^\lambda(0,\cdot) \in C_0^\infty(R^{n-m})$;

В) $\mathcal{K}_f^\lambda(0,x)$ - целая аналитическая функция экспоненциального типа на Λ ;.

Г) Обратное преобразование $B \to A$ имеет вид:

$$\varphi(g) = \frac{1}{(2\pi)^\ell} \int_\Lambda \chi^\lambda((g_0^\lambda)^{-1}) \mathcal{K}_f^\lambda(0,x) d\lambda,$$

где $g = g_0^\lambda g_1^\lambda(x_1) \dots g_{n-m}^\lambda(x_{n-m})$, $\Lambda = \operatorname{Re}\Lambda_c$, $\ell = \dim \Lambda$, $d\lambda$ - мера Лебега на Λ.

А) Замечание 2. Из неравенства (9) следует, что оператор $\mathcal{E}(\lambda,u_1) f(\lambda) \mathcal{E}(\lambda,u_2)$ продолжается до непрерывного линейного оператора в пространстве H_λ, так что свойство в) можно считать справедливым при любом $\psi \in H_\lambda$.

Лемма 4. Пусть $\lambda \in \mathcal{G}_c^*$, $x = (x_1,\dots,x_{n-m}) \in R^{n-m}$ и $\|x\|_0 = \sqrt{n + x_1^2 + \dots + x_{n-m}^2}$, тогда существуют такие положительные константы γ_1, γ_2, что для любого $x \in R^{n-m}$ справедливы оценки:

$$\|x\|_0 \le \gamma_1 \|x\|^\lambda,$$

$$\|x\|^\lambda \le \gamma_2 \|x\|_0.$$

Доказательство. Ядром присоединённого представления Ad является центр Z группы G, который лежит в G_λ при произвольном $\lambda \in \mathcal{G}_c^*$, поэтому отображение Ad/M_λ взаимно однозначно и две нормы $\|x\|_0$ и $\prod_{j=1}^{n-m} \|x_j\|_\lambda^i$ эквивалентны.

Лемма 5. Пусть P - полином от $(n-m)$ переменных и функция $\psi \in H_\lambda^\infty$, тогда

$$P(\partial/\partial x)[e^{t\|x\|_0}\psi(x)] = \sum_{j=1}^N R_j(x)\|x\|_0^{-N(j)} [P_j(\partial/\partial x)\psi(x)] e^{t\|x\|_0},$$

где P_j, R_j - полиномы от $(n-m)$ неизвестных, а $N(j)$ - положительные целые числа.

Доказательство проводится индукцией по степени полинома P и по числу переменных.

Предложение 2. При произвольных $f \in B_\lambda$ и $\lambda \in \Lambda_c f(\lambda)$ является интегральным оператором.

Доказательство. Из замечания 1 и леммы 5 следует, что

$$P(\partial/\partial x)[e^{t\|x\|_0}\psi(x)] \in H_\lambda$$

при произвольных $P, t \in R, \psi \in H_\lambda^\infty$. Поэтому, согласно лемме Соболева [6], функция $e^{t\|x\|_0}$ бесконечно дифференцируема и ограничена на R^{n-m}. Функция $\psi(x) \to 0$ при $\|x\|_0 \to \infty$, следовательно, согласно леммы 4, $\psi(x) \to 0$ при $\|x\|^\lambda \to \infty$.

Так как $H_\lambda \subseteq L^1(R^{n-m})$, для любого $\psi \in H_\lambda^\infty$ справедливо равенство:

$$\psi(x) = (-1)^{n-m} \int_{x_1}^{\infty} \ldots \int_{x_{n-m}}^{\infty} \{\prod_{j=1}^{n-m} \partial/\partial y_j\} \psi(y)\, dy.$$

Из условия а) следует, что при произвольном $\psi \in H_\lambda$ элемент $f(\lambda)\psi \in H_\lambda^\infty$, поэтому (13) справедливо для произвольного $f(\lambda)\psi$. Из неравенства Шварца получаем:

$$|f(\lambda)\psi(x)| \leq \{\int_{x_1}^{\infty} \ldots \int_{x_{n-m}}^{\infty} e^{-t\|y\|^\lambda} dy\}^{1/2} \cdot \|\{\prod_{j=1}^{n-m} \partial/\partial y_j\} f(\lambda)\psi\|_{t,\lambda}.$$

Согласно замечанию 1 дифференциальный оператор

$$\prod_{j=1}^{n-m} \partial/\partial y_j = \sum_{k=1}^{N} R_k(x) \delta(\lambda, u_k)$$

для некоторых полиномов R_k и $u_k \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$. Верно также, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $A(\varepsilon) > 0$, что

$$|R_k(x)| \leq A(\varepsilon) \exp\{\tfrac{1}{2} \varepsilon \|x\|^\lambda\}$$

справедливо для всех R_k и всех $x \in R^{n-m}$ одновременно. Следовательно,

$$\|\{\prod_{j=1}^{n-m} \partial/\partial y_j\} f(\lambda)\psi\|_{t,\lambda} \leq A(\varepsilon) \sum_{k=1}^{N} \|\delta(\lambda, u_k) f(\lambda)\psi\|_{t+\varepsilon,\lambda}.$$

Отсюда, с учетом условия г), получаем:

$$|f(\lambda)\psi(x)| \leq C\{\int_{R^{n-m}} d_{y,-t,\lambda}(y)\}^{1/2} \|\psi\|_{\tau(t+\varepsilon,\lambda,\mu),\lambda},$$

где C не зависит от $\lambda \in \Lambda_c$, $\psi \in H_\lambda$, $t > 0$.

Таким образом, линейный функционал $F_{f\lambda x}: \psi \mapsto f(\lambda)\psi(x)$ непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_{\tau,\lambda}$, т.е. существует функция $\mathcal{K}_f^\lambda(x,y) \in H_{-\tau(t+\varepsilon,\lambda,\mu),\lambda}$, для которой выполняется равенство:

$f(\lambda)\psi(x)=\int_{R^{n-m}}\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,y)\psi(y)dy.$

Б) Предложение 3. Функция $\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,\cdot)$ принадлежит классу $C^{\infty}(R^{n-m})$.

Доказательство. Пусть D_y^k – обобщенная производная, соответствующая оператору $\partial^k/\partial x^k$, тогда

$$\int_{R^{n-m}}\{D_y^k\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,y)\}\psi(y)dy=\int_{R^{n-m}}\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,y)\{\partial^k/\partial x^k\psi(y)\}dy=$$

$$=\sum_{s=1}^{N}\int_{R^{n-m}}\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,y)R_s(y)\varepsilon(\lambda,u_s)\psi(y)dy=\sum_{s=1}^{N}f(\lambda)\varepsilon(\lambda,u_s)\{P_s(x)\psi(x)\}.$$

Следовательно, как и в пункте А, получаем, что линейный функционал $\psi\longmapsto\sum_{s=1}^{N}f(\lambda)\varepsilon(\lambda,u_s)\psi(x)$ непрерывен относительно некоторой нормы $\|\cdot\|_{t,\lambda}$, так что $D_y^k\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,y)\in H_\lambda'$. Отсюда по теореме Никодима [7] следует, что $\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,\cdot)\in C^{\infty}(R^{n-m})$.

Замечание 3. Из условия б) следует, что $\overline{\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,y)}=\mathcal{K}_{f^*}^{\bar\lambda}(x,y)$, поэтому $\mathcal{K}_f^{\lambda}(\cdot,x)\in C^{\infty}(R^{n-m})$.

Лемма 6. Пусть $f\in B_\alpha$ и $\psi\in H_\lambda^{\beta}=\{\psi\in H_\lambda:\ \mathrm{supp}\,\psi\in F_\beta\}$, где $F_\beta=\{x=(x_1,\dots,x_{n-m})\in R^{n-m}:|x_i|\le\beta\}$. Тогда $f(\lambda)\psi(x)=0$ при $|x|^{\lambda}>$ $>[(1+M\alpha)(1+M\beta)]^{n-m}$.

Доказательство. Непосредственно проверяем, что

$$e^{t\rho}\int_{|x|^{\lambda}>\rho}|f(\lambda)\psi(x)|^2dx\le C\exp\{\tau(t,\lambda,\alpha)(1+M\beta)^{n-m}\}\int_{F_\beta}|\psi(x)|^2dx.$$

Поэтому

$$\int_{|x|^{\lambda}>\rho}|f(\lambda)\psi(x)|^2dx\le C'\exp t\{(1+M\alpha)^{n-m}(1+M\beta)^{n-m}-\rho\}\int_{F_\beta}|\psi(x)|^2dx,$$

где C' не зависит от t. Устремляем $t\to+\infty$ и получаем утверждение леммы.

Иными словами, пусть $f\in B_\alpha$, тогда $\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,y)=0$ при $y\in F_\beta$ и $\|x\|^{\lambda}>(1+M\alpha)^{n-m}(1+M\beta)^{n-m}$.

Следствие 3. Функция $\mathcal{K}_f^{\lambda}(0,\cdot)\in C_0^{\infty}(R^{n-m})$ при $\forall f\in B_\alpha$.

Доказательство. В частном случае $y=0$, утверждение леммы 6 имеет вид: пусть $f\in B_\alpha$, $\|x\|^{\lambda}>(1+M\alpha)^{n-m}$, тогда $\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,y)=0$. В силу замечания 3 отсюда получается утверждение следствия 3.

В) Предложение 4. Пусть $f\in B_\alpha$ и P – произвольный полином, тогда $P(\partial/\partial x)\mathcal{K}_f^{\lambda}(0,x)$ является целой аналитической функцией на Λ_c.

Доказательство. Согласно замечаниям 1 и 2 имеем:

$f(\lambda)\{P(\partial/\partial x)\psi\}(x)=\int_{R^{n-m}}\{P^*(\partial/\partial y)\mathcal{K}_f^{\lambda}(x,y)\}\psi(y)dy.$

Так как $\operatorname{supp}\mathcal{X}_f^\lambda(0,\cdot)\subseteq V_\alpha=\{x\in R^{n-m}: |x|\leq(1+M\alpha)^{n-m}\}$, для произвольного полинома P можем записать:

$$P(\partial/\partial x)\mathcal{X}_f^\lambda(0,x)=(-1)^{n-m}\int\limits_{\Upsilon(x)}\{\prod_{j=1}^{n-m}\partial/\partial y_j\}P(\partial/\partial y)\mathcal{X}_f^\lambda(0,y)\,dy.$$

Здесь интегрирование производится по параллелепипеду $\Upsilon(x)=\{y\in R^{n-m}: x_j\leq y_j\leq x_j^0,\ j=1,\dots,n-m\}$, у которого все вершины, кроме x, лежат вне компакта V_α. Обозначим через θ_Υ характеристическую функцию параллелепипеда $\Upsilon(x)$. Так как $\theta_\Upsilon\in H_\lambda$, из соотношений (14) и (15) получаем:

$$P(\partial/\partial x)\mathcal{X}_f^\lambda(0,x)=\int\limits_{R^{n-m}}\mathcal{X}_f^\lambda(0,y)R(\partial/\partial y)\theta_\Upsilon(y)\,dy,$$

где $R(\partial/\partial y)$ – оператор, сопряженный к оператору

$$\{\prod_{j=1}^{n-m}\partial/\partial y_j\}P(\partial/\partial y).$$

Согласно замечанию 1 функция

$$P(\partial/\partial x)\mathcal{X}_f^\lambda(0,x)=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{R^{n-m}}\mathcal{X}_f^\lambda(0,y)\varepsilon(\lambda,u_k)R_k(y)\theta_\Upsilon(y)\,dy=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}(\delta,f(\lambda)\varepsilon(\lambda,u_k)R_k\theta_\Upsilon)$$

является в силу условия 2) конечной суммой целых аналитических функций, что завершает доказательство.

<u>Предложение 5.</u> Пусть $f\in B_\alpha$, тогда для произвольного полинома P и любого целого $k>0$ справедливы оценки:

$$\|\lambda\|^k|P(\partial/\partial x)\mathcal{X}_f^\lambda(0,x)|\leq C(k,P)\exp\{\alpha(1+M\alpha)|\operatorname{Im}\lambda|\},$$

где константы $C(k,P)$ не зависят от $\lambda\in\Lambda_c$.

<u>Доказательство.</u> В доказательстве предложения 4 рассмотрена функция $\psi=f(\lambda)P(\partial/\partial x)\theta_\Upsilon=\sum_{j=1}^{N}\psi_j$, где $\psi_j=f(\lambda)\varepsilon(\lambda,u_j)[R_j\theta_\Upsilon]\in H_c^\infty$ согласно условию a) и замечанию 2. Носитель функции θ_Υ ограничен и лежит в компакте F_ρ при некотором $\rho>0$, поэтому, в силу леммы 6, $\operatorname{supp}\psi_j\subseteq V_{\gamma_j}$ при некотором $\gamma_j>0$. Следовательно,

$$\psi_j(0)=(-1)^{n-m}\int\limits_{\omega}\{\prod_{i=1}^{n-m}\partial/\partial x_i\}\psi_j(x)\,dx,$$

где параллелепипед $\omega=\{x\in R^{n-m}: 0\leq x_i\leq x_i^1\}$ выбирается таким образом, чтобы все его вершины, кроме $(0,\dots,0)$, лежали вне V_γ. Пусть $\delta=\sup_{\omega}|x|^{n}$ и $\gamma>0$ – произвольное целое число. Введем функцию

$$E_\gamma(x)=\exp\{\frac{\gamma_4}{\gamma}(\frac{2\delta}{\gamma_4})^{2\gamma+1}|x|_0^{-2\gamma}\},$$

где φ_k из леммы 4. Согласно леммы 5,

$$P(\partial/\partial x)\{\psi_j(x)E_\nu(x)\} = \sum_{k=1}^{N} P_{jk}(x)\|x\|_0^{-M(P,k)}\{\mathcal{E}(\lambda,u_{jk})\psi_j\}E_\nu(x).$$

Поэтому

$$\mathfrak{T}_k = \psi_k(0)E_\nu(0) = \sum_{j=1}^{N}\int_\omega P_{kj}(x)\|x\|_0^{-M(P,j)}\{\mathcal{E}(\lambda,u_{kj})\psi_k\}E_\nu(x)dx.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая константа C_ε, что для всех P_{kj} выполняется оценка:

$$|P_{kj}(x)| \leq C_\varepsilon \exp\{\tfrac{1}{2}\varepsilon\|x\|^\lambda\}.$$

Так как $\|x\|_0 \geq 1$ при любом $x \in R^{n-m}$, то выполняются оценки:

$$|\mathfrak{T}_k| \leq C_\varepsilon \sum_{j=1}^{N}\int_\omega e^{\frac{\varepsilon}{2}\|x\|^\lambda}\{\mathcal{E}(\lambda,u_{kj})\psi_k\}(x)E_\nu(x)dx.$$

С помощью неравенства Шварца получаем:

$$|\mathfrak{T}_k| \leq C_\varepsilon\left\{\int_\omega \exp\{(\varepsilon-t)\|x\|^\lambda\}E_\nu^2(x)dx\right\}^{1/2}\sum_{j=1}^{N}\|\mathcal{E}(\lambda,u_{kj})\psi_k\|_{t,\lambda},$$

откуда, с учетом свойства в) и определения ψ_k, **следует**:

$$|\mathfrak{T}_k| \leq C_\varepsilon\sum_{j=1}^{N} C_{jk}\|R_k\theta_\delta\|_{\tau(t,\lambda,\alpha),\lambda}\cdot I(t)^{1/2},$$

причем, в силу леммы 4,

$$I(t) \leq \int_\omega \exp\{(\varepsilon-t)\|x\|^\lambda + \frac{2(2\delta)^{2\nu+1}}{\nu(\|x\|^\lambda)^{2\nu}}\}dx.$$

Возьмем теперь $t = -2\alpha(1+M\alpha)\|\Im m\lambda\|$, тогда $\tau(t,\lambda,\alpha) = 0$ и

$$I(-2\alpha(1+M\alpha)\|\Im m\lambda\|) \leq \int_\omega \exp\{L(\|x\|^\lambda)\}dx,$$

где функция $L(\rho) = (\varepsilon + 2\alpha(1+M\alpha)\|\Im m\lambda\|)\rho + \frac{2(2\delta)^{2\nu+1}}{\nu\rho^{2\nu}}$ монотонно убывает при $0 \leq \rho \leq \{(4/\ell)^{1/(2\nu+1)}\}2\delta^{4}$. Следовательно, при достаточно большом ν функция $L(\rho)$ убывает по крайней мере в интервале $1 \leq \rho \leq \delta$. Тогда функция $L(\|x\|^\lambda)$ достигает своего максимума в точке $(0,\dots,0)$, следовательно, верны оценки:

$$|\mathfrak{T}_k| \leq C\exp\{\alpha(1+M\alpha)\|\Im m\lambda\| + \varepsilon/2 + (2\delta)^{2\nu+1}/\nu\}.$$

Следовательно,

$$|\psi_k(0)| \leq C\exp\{\alpha(1+M\alpha)\|\Im m\lambda\|\},$$

гд не зависит от $\lambda \in \Lambda_e$. Таким образом,

$$|P(\partial/\partial x)\mathcal{K}_\xi^\lambda(0,x)| \leq \sum_{k=1}^{N}|\psi_k(0)| \leq Ce^{\alpha\|\Im m\lambda\|(1+M\alpha)}. \tag{16}$$

Пусть $y \in \mathfrak{g}(\lambda)$, тогда ядро интегрального оператора $\xi(\lambda) = \mathcal{E}(\lambda,y)^k\xi(\lambda)$ равно:

$$\mathcal{K}_\xi^{k}(x,y) = (i\langle\lambda, Ad\{g_1^\lambda(x_1)\dots g_{n-m}^\lambda(x_{n-m})\}(y)\rangle)^k\mathcal{K}_\xi^\lambda(x,y),$$

а оценка (16) для него имеет вид:

$$\|y\|^k|P(\partial/\partial x)\mathcal{K}_\xi^\lambda(0,x)| \leq C(k,P)e^{\alpha(1+M\alpha)\|\Im m\lambda\|}.$$

Г) Из предложения 5 и следствия 3 в силу классической теоремы Пэли-Винера следует, что функция φ, определенная соотношением (10), бесконечно дифференцируемая и с компактным носителем, если $f \in B_\alpha$. Непосредственно проверяется, что ядра интегральных операторов $e(\lambda,\varphi)$ и $f(\lambda)$ совпадают, следовательно, $e(\lambda,\varphi)=f(\lambda)$.

Автор выражает глубокую благодарность Д.П.Желобенко за руководство и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Кириллов А.А. О мере Планшереля для нильпотентных групп Ли,–Функц. анализ, 1967, т. 1, № 4, с. 84–85.

2. Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я. Обобщенные функции, М., 1961.

3. Кириллов А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли–УМН, 1962, т. 17, № 4, с. 57–110.

4. Кириллов А.А. Элементы теории представлений, М., Наука, 1978.

5. Гельфанд И.М., Шилов Е. Обобщенные функции, М., 1959.

6. Рудин У. Функциональный анализ. М., 1975, 1977.

7. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. М., 1977.

8. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М., 1978.

9. Андо С. Аналог теоремы Пэли-Винера для групп линейных преобразований прямой линии – J.Math. Kyoto Univ. 1974, т.14, № 2, с. 195–213.

10. Андо С. Аналог теоремы Пэли-Винера для некоторых метрических групп.– J.Math. Kyoto Univ., 1976, т.16, № 2, с. 375–393.

Поступила 16 апреля 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 517.929

ФУНКЦИОНАЛ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Е.Ф.Царьков, Л.Е.Энгельсон
РПИ, ЛГУ им. П.Стучки

В работе [3] были получены некоторые результаты по устойчивости линейных дифференциально-функциональных уравнений с постоянным оператором в правой части. Настоящая статья посвящена обобщению этих результатов на случай уравнения с периодическим оператором.

Пусть $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел, C – пространство всех непрерывных функций $\varphi : [-1,0] \to \mathbb{R}$ с нормой $\|\varphi\| = \max_{[-1,0]} |\varphi(t)|$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \langle x_t, f^t \rangle, \tag{1}$$

где $x_t(\theta) := x(t+\theta)$ для $\theta \in [-1,0]$, и $\langle x_t, f^t \rangle$ – значение функционала $f^t \in C^*$ на элементе $x_t \in C$. Предполагается, что $\langle \varphi, f^t \rangle$ непрерывно по t для каждой $\varphi \in C$, и существуют $\omega > 0$ и $K > 0$ такие, что $f^{t+\omega} = f^t$ и $\|f^t\| \leqslant K$ при всех $t \in R$.

Второй метод Ляпунова для уравнений вида (1) был развит в работах Н.Н.Красовского [1], Дж.Хейла [2] и их учеников. Основную трудность в применении этого метода представляет отсутствие общих приемов построения функционала Ляпунова даже в линейном случае. В настоящей работе предлагается некоторый вариант метода теории возмущений для построения в явном виде функционалов Ляпунова-Красовского, т.е. таких функционалов, положительная определенность которых эквивалентна асимптотической устойчивости тривиального решения исследуемого уравнения. Этот подход основан на решении дифференциального уравнения в пространстве симметричных билинейных форм над C.

Известно [9, с. 96], что тривиальное решение уравнения (1) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда оно экспоненциально устойчиво. В этом случае будем называть само уравнение (1) асимптотически устойчивым.

§1. Модифицированный функционал Ляпунова

В этом параграфе доказывается необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости уравнения (1). Таким условием оказывается существование функционала $\vartheta : R\times C \to R$, удовлетворяющего некоторым требованиям, более слабым, чем общепринятые (см. [1],[2] и др.).

Для произвольно выбранного $\varkappa > 1$ обозначим $G=\{\varphi\in C \mid \|\varphi\|\leqslant \varkappa|\varphi(0)|\}$.

<u>Теорема 1.</u> Пусть существует функционал $\vartheta : R\times C \to R$ и числа $c_1, c_2, c_3>0$ такие, что для всех $(t,\varphi)\in R\times C$ выполняется равенство $\vartheta(t+\omega,\varphi)=\vartheta(t,\varphi)$, а для всех $\varphi\in G$ - неравенства

$$c_2(\varphi(0))^2 \leqslant \vartheta(t,\varphi) \leqslant c_1\|\varphi\|^2 \tag{2}$$

$$\dot{\vartheta}(t,\varphi)=\lim_{\tau\to+0}\frac{\vartheta(t+\tau,x_{t+\tau})-\vartheta(t,\varphi)}{\tau}\leqslant -c_3(\varphi(0))^2, \tag{3}$$

где $x_{t+\tau}$ соответствует решению уравнения (1) при начальном условии $x_t=\varphi$.

Тогда уравнение (1) асимптотически устойчиво.

<u>Доказательство.</u> Определим функционал

$$w(t,\varphi)=\begin{cases} c_2\varkappa^{-2}\|\varphi\|^2 & ,\ \text{если}\ \varphi\notin G,\\ \vartheta(t,\varphi) & ,\ \text{если}\ \varphi\in G.\end{cases}$$

Для него во всей его области определения $R\times C$ выполняются неравенства

$$c_2\varkappa^{-2}\|\varphi\|^2\leqslant w(t,\varphi)\leqslant (c_2\varkappa^{-2}+c_1)\|\varphi\|^2.$$

Обозначим $D^+w(t,\varphi)=\overline{\lim_{\tau\to+0}}\dfrac{w(t+\tau,x_{t+\tau})-w(t,\varphi)}{\tau}$

и покажем, что при всех $t\in R$, $\varphi\in C$ $D^+w(t,\varphi)\leqslant 0$.

1) Пусть $\|\varphi\|>\varkappa|\varphi(0)|$, т.е. $\varphi\notin G$. Тогда $|\varphi(0)|<\frac{1}{\varkappa}\|\varphi\|<\|\varphi\|$, и при достаточно малых $\tau>0$ верно $|x(t+\tau)|<\|\varphi\|$, откуда следует $\|x_{t+\tau}\|\leqslant\|\varphi\|$. Значит, $D^+w(t,\varphi)\leqslant 0$.

2) Пусть $\|\varphi\|<\varkappa|\varphi(0)|$. Тогда при достаточно малых

$\tau > 0$ $x_{t+\tau} \in G$, откуда $D^+ \mathfrak{W}(t,\varphi) - \dot{\vartheta}(t,\varphi) \le 0$.

3) Пусть $\|\varphi\| = \alpha|\varphi(0)|$. Аналогично случаю 1), при достаточно малых τ имеем

$$|x_{t+\tau}| \le \|\varphi\|. \qquad (4)$$

С другой стороны, поскольку $\varphi \in G$, имеет место неравенство (3), и значит при достаточно малых $\tau > 0$

$$\vartheta(t+\tau, x_{t+\tau}) < \vartheta(t,\varphi). \qquad (5)$$

Теперь при $x_{t+\tau} \in G$ получим из (5)

$$\mathfrak{W}(t+\tau, x_{t+\tau}) = \vartheta(t+\tau, x_{t+\tau}) < \vartheta(t,\varphi) = \mathfrak{W}(t,\varphi),$$

а при $x_{t+\tau} \notin G$ из (4) и (2) –

$$\mathfrak{W}(t+\tau, x_{t+\tau}) = c_2\alpha^{-2}|x_{t+\tau}|^2 \le c_2\alpha^{-2}\|\varphi\|^2 - c_2|\varphi(0)|^2 \le \vartheta(t,\varphi) = \mathfrak{W}(t,\varphi).$$

Следовательно, $D^+\mathfrak{W}(t,\varphi) \le 0$.

Остается показать, что вдоль нетривиального решения x уравнения (1) не может быть $\mathfrak{W}(s,x_s) = \mathrm{const}$. Тогда по теореме 31.2 из [1] отсюда будет следовать утверждение нашей теоремы.

В самом деле, предположим, что x – нетривиальное решение уравнения (1) и при $s > t_0$ $\mathfrak{W}(s,x_s) = \mathfrak{W}_0$.

Если замыкание множества $\mathfrak{M} = \{s > t_0 \mid x_s \notin G\}$ не совпадает с $[t_0, +\infty[$, т.е. существует интервал $]t_1,t_2[\subset [t_0,+\infty[\setminus \overline{\mathfrak{M}}$, то при $s \in]t_1,t_2[$

$$0 = D^+\mathfrak{W}(s,x_s) = \dot{\vartheta}(s,x_s) \le -c_3|x(s)|^2 \le -c_3\alpha^{-2}\|x_s\|^2,$$

что противоречит нетривиальности x.

Если же $\mathfrak{M}$ всюду плотно на $[t_0,+\infty[$, то, в силу непрерывности решения, с одной стороны для всех $s > t_0$ имеем $\|x_s\| > \alpha|x(s)| \ge |x(s)|$, откуда следует убывание $\|x_s\|$ при возрастании s; с другой стороны, для всех $s > t_0$ имеем $c_2\alpha^{-2}\|x_s\|^2 = \mathfrak{W}_0 = \mathrm{const}$.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Функционал ϑ, удовлетворяющий условиям теоремы 1, будем называть модифицированным функционалом Ляпунова для уравнения (1).

Теорема 1 имеет следующее простое обращение:

<u>Теорема 2.</u> Если уравнение (1) асимптотически устойчиво, то при любом $\alpha > 1$

$$\vartheta(t,\varphi)=\int_t^{+\infty}x(s,t,\varphi)^2ds, \tag{6}$$

где $x(s,t,\varphi)$ как функция от s есть решение уравнения (1) при начальном условии $x_t=\varphi$, является модифицированным функционалом Ляпунова для уравнения (1) и при всех $t\in R$ и $\varphi\in C$ удовлетворяет равенству

$$\dot\vartheta(t,\varphi)=-(\varphi(0))^2. \tag{7}$$

Доказательство. Из асимптотической устойчивости уравнения (1) следует [2, § 32] неравенство

$$|x(s,t,\varphi)|\leqslant Me^{-\beta(s-t)}\|\varphi\| \tag{8}$$

при некоторых $M>0$, $\beta>0$. Отсюда вытекает сходимость интеграла (6) и правое неравенство (2). В том, что функционал (6) ω -периодичен по t и удовлетворяет равенству (7), легко убедиться простым вычислением.

Остается доказать левое неравенство (2).

Из (8) получаем $\|x_s\|\leqslant Me^{-\beta(s-t-1)}\|\varphi\|$. Отсюда и из уравнения (1) $\left|\frac{dx(s,t,\varphi)}{ds}\right|\leqslant K\|x_s\|\leqslant KMe^{-\beta(s-t-1)}\|\varphi\|$.

Следовательно,

$$\left|\frac{d}{ds}[x(s,t,\varphi)^2]\right|=2\left|\frac{d}{ds}x(s,t,\varphi)\right||x(s,t,\varphi)|\leqslant 2M^2Ke^{-\beta(2s-2t-1)}\|\varphi\|^2.$$

Отсюда вытекает $x(s,t,\varphi)^2=\varphi(0)^2-\int_t^s\frac{d}{dr}[x(r,t,\varphi)^2]dr\geqslant$

$$\geqslant\varphi(0)^2-2M^2K\|\varphi\|^2e^{\beta(2t+1)}\int_t^s e^{-2\beta r}dr=\varphi(0)^2-M^2\beta^{-1}K\|\varphi\|^2e^{\beta}[1-e^{2\beta(t-s)}].$$

Поскольку $\varphi\in C$, то имеем $x(s,t,\varphi)^2\geqslant\varphi(0)^2h(s)$, где $h(s)=1-M^2\alpha^2\beta^{-1}Ke^{\beta}(1-e^{2\beta(t-s)})$.

Из того, что $h(t)=1$, следует существование $\delta>0$ такого, что при $t\leqslant s\leqslant t+\delta$ будет $h(s)>0$. Отсюда

$$\vartheta(t,\varphi)\geqslant\int_t^{t+\delta}x(s,t,\varphi)^2ds\geqslant c_2\varphi(0)^2,$$

где $c_2=\int_t^{t+\delta}h(s)ds>0$. Теорема доказана.

§ 2. Функционал Ляпунова-Красовского как решение дифференциального уравнения в пространстве мер

Формула (6) непосредственно еще не дает возможности явно вычислить функционал Ляпунова при произвольном $\varphi\in C$. Чтобы это сделать, удобнее представить функционал (6) в виде

$$\vartheta(t,\varphi)=\iint_Q\varphi(\theta)\varphi(\eta)d\vartheta_0^t,$$

где ν_0^t при каждом t – симметричная мера на квадрате $Q = [-1,0] \times [-1,0]$.

В настоящем параграфе доказывается возможность такого представления функционала $\vartheta(t,\varphi)$ и составляется дифференциальное уравнение в пространстве мер, решение которого в случае асимптотической устойчивости уравнения (1) есть в точности ν_0^t.

Пусть $S(s,t)$ $(s \geq t)$ -эволюционное семейство операторов сдвига вдоль решений уравнения (1), определяемое для $s \geq t$ и $\varphi \in C$ равенством $S(s,t)\varphi = x_s$, где x – решение уравнения (1) при начальном условии $x_t = \varphi$.

Обозначим $C \otimes C$ – тензорное произведение [4] пространства C на себя. Оно изоморфно множеству всех функций $q : Q \to R$ вида

$$q(\theta,\eta) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\theta)\psi_i(\eta),$$

где $\varphi_i \in C$, $\psi_i \in C$ $(i = 1,\dots,n)$.

На пространстве $C \otimes C$ введем семейство операторов $T(s,t) = S(s,t) \otimes S(s,t)$, т.е.

$$[T(s,t)q](\theta,\eta) = \sum_{i=1}^{n} [S(s,t)\varphi_i](\theta) \cdot [S(s,t)\psi_i](\eta).$$

<u>Замечание 1.</u> Оператор $T(s,t)$ допускает также описание в виде композиции двух операторов: $T(s,t)q = H(s,t)Z(s,t)q$, где $[Z(s,t)q](\theta,\cdot) = S(s,t)[q(\theta,\cdot)]$ для любого $\theta \in [-1,0]$, и $[H(s,t)q](\cdot,\eta) = S(s,t)[q(\cdot,\eta)]$ для любого $\eta \in [-1,0]$. Отсюда видно, что операторы $Z(s,t)$, $H(s,t)$ и $T(s,t)$ непрерывны на $C \otimes C$ относительно нормы $\|q\| = \sup_{(\theta,\eta)\in Q} |q(\theta,\eta)|$, причем $\|T(s,t)\| = \|S(s,t)\|^2$.

Пополнение $C \hat{\otimes} C$ пространства $C \otimes C$ относительно указанной нормы изоморфно пространству $C(Q)$ всех непрерывных функций $q : Q \to R$ [4, с. 204]. Продолжим оператор $T(s,t)$ по непрерывности на пространство $C(Q)$.

Легко показать, что подпространство симметричных функций $E = C_s(Q) = \{q \in C(Q) \mid q(\theta,\eta) = q(\eta,\theta)\ \forall (\theta,\eta) \in Q\}$ инвариантно относительно операторов $T(s,t)$, а сопряженное к нему пространство E^* есть пространство всех симметричных мер ν на квадрате Q т.е. таких, для которых $\nu(\Omega^T) = \nu(\Omega)$, где $\Omega^{T} = \{(\theta,\eta)\in\Theta \mid (\eta,\theta)\in\Omega\}$. Значение функционала $\vartheta\in E^*$ на элементе $q\in E$ будем обозначать $[q,\vartheta]$. Обозначим $T^*(s,t)$ оператор, сопряженный к $T(s,t)$.

Пусть X - пространство всех ω-периодических непрерывных отображений R в E^*. Определим оператор $L:\mathfrak{D}(L)\to X$ равенством

$$[q, L\vartheta(t)] = \frac{d^+}{d\tau}[q, T^*(t+\tau,t)\vartheta(t+\tau)]\Big|_{\tau=0}.$$

Его область определения $\mathfrak{D}(L)$ состоит из таких $\vartheta(\cdot)\in X$, для которых указанная правая производная существует при любых $q\in E$, $t\in R$ и непрерывна как отображение R в E^*.

Определение. Будем говорить, что отображение $\vartheta(\cdot)\in X$ положительно определено на Θ (см. теорему 1), если существует такое $c_2>0$, что при всех $\varphi\in\Theta$, $t\in R$ выполняется неравенство $[\varphi\otimes\varphi,\vartheta(t)]\geq c_2\varphi(0)^2$.

Пусть $\mathfrak{F}_0$ - элемент из E^*, определяемый равенством $[q,\mathfrak{F}_0]=q(0,0)$ $\forall q\in E$.

Теорема 3. 1) Если уравнение (1) асимптотически устойчиво, то уравнение

$$L\vartheta(\cdot) = -\mathfrak{F}_0 \tag{9}$$

имеет единственное решение $\vartheta_0(\cdot)$, причем функционал

$$\mathfrak{V}(t,\varphi) = [\varphi\otimes\varphi, \vartheta_0(t)] \tag{10}$$

является модифицированным функционалом Ляпунова для уравнения (1).

2) Пусть уравнение (9) имеет какое-нибудь решение $\vartheta(\cdot)$. Тогда положительная определенность $\vartheta(\cdot)$ на Θ эквивалентна асимптотической устойчивости уравнения (1).

Доказательство. 1) Из асимптотической устойчивости уравнения (1) следует неравенство (8). Учитывая замечание 1, получим $\|T^*(s,t)\|\leq M^2 e^{-2\rho(s-t)}$, откуда следует сходимость интеграла

$$\vartheta_0(t) = \int_t^{+\infty} T^*(s,t)\mathfrak{F}_0\, ds. \tag{11}$$

При таком определении отображения $\vartheta_0(\cdot)$ функционал (10) совпадает с функционалом (6) и в силу теоремы 2 является модифицированным функционалом Ляпунова для уравнения (1).

Легко проверить, что отображение (11) является решением уравнения (9).

Докажем, что это решение единственно. Очевидно, это утверждение эквивалентно тому, что однородное уравнение $L\vartheta(\cdot)=0$ имеет лишь тривиальное решение.

Из определения оператора L, для решения $\vartheta(\cdot)$ однородного уравнения при любом $q\in E$ получаем

$$\frac{d}{ds}[q,T^*(s,t)\vartheta(s)]=[T(s,t)q,L\vartheta(s)]=0.$$

Отсюда при фиксированном t и при всех $s>t$ имеем

$$T^*(s,t)\vartheta(s)=\vartheta_c, \tag{12}$$

где ϑ_c - некоторый элемент E^* не зависящий от s.

С другой стороны, из неравенства (8) следует неравенство.

$$\|\vartheta_c\|\le\|T^*(s,t)\|\|\vartheta(s)\|\le\|\vartheta(s)\|M^2e^{-2\beta(s-t)},$$

т.е. $\|\vartheta(s)\|>\|\vartheta_c\|M^{-2}e^{2\beta(s-t)}$, что в силу периодичности $\vartheta(s)$ возможно только при $\vartheta_c=0$. Полагая $s=t$ в (12), получаем $T^*(t,t)\vartheta(t)=0$, т.е. $\vartheta(t)=0$, ч.т.д.

2) Предположим, что решение $\vartheta(\cdot)$ уравнения (9) положительно определено на G. Тогда функционал $\vartheta(t,\varphi)=[\varphi\otimes\varphi,\vartheta(t)]$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и, следовательно, уравнение (1) асимптотически устойчиво.

Обратно, если уравнение (1) асимптотически устойчиво, то в силу первой части теоремы решение уравнения (9) есть $\vartheta_0(\cdot)$, которое положительно определено на G.

Теорема 3 доказана.

Введем некоторые операторы, которые дадут возможность записать уравнение (9) в виде, более удобном для решения.

При каждом $t\in R$ определим инфинитезимальный оператор эволюционного семейства $S(s,t)$ равенством

$$A(t)\varphi=\lim_{\tau\to+0}\frac{S(t+\tau,t)\varphi-\varphi}{\tau}$$

для $\varphi\in\mathcal{D}(A(t))$, т.е. для таких $\varphi\in C$, для которых существует указанный предел. $*$-слабый инфинитезимальный оператор $A^*(t)$ семейства сопряженных операторов $S^*(s,t)$ при каждом $t\in R$ определяется равенством

$$\langle\varphi,A^*(t)\ell\rangle=\lim_{\tau\to+0}\frac{\langle\varphi,S^*(t+\tau,t)\ell-\ell\rangle}{\tau}$$

для $l \in \mathfrak{D}(A'(t))$, т.е. для тех $l \in C^*$, для которых указанный предел существует при любом $\varphi \in C$.

Аналогично определяются при каждом $t \in R$ инфинитезимальный оператор $\mathfrak{A}(t)$ семейства $T(s,t)$ и $*$ -слабый инфинитезимальный оператор $\mathfrak{A}'(t)$ семейства $T^*(s,t)$.

<u>Лемма 1.</u> При любом $t \in R$ оператор $A'(t)$ совпадает с оператором $A^*(t)$, сопряженным к $A(t)$, а $\mathfrak{A}'(t)$ – с оператором $\mathfrak{A}^*(t)$, сопряженным к $\mathfrak{A}(t)$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $l \in \mathfrak{D}(A'(t))$. В силу $*$ -слабой полноты пространства C^* имеем $A'(t)l \in C^*$. Легко проверить, что для любой $\varphi \in \mathfrak{D}(A(t))$ имеет место равенство $\langle A(t)\varphi, l\rangle = \langle \varphi, A'(t)l\rangle$. Отсюда следует, что, во-первых, $\langle A(t)\varphi, l\rangle$ непрерывно по φ на $\mathfrak{D}(A(t))$, т.е. $l \in \mathfrak{D}(A^*(t))$, а во-вторых, $A^*(t)l = A'(t)l$.

Обратно, пусть $l \in \mathfrak{D}(A^*(t))$. Зафиксировав t , рассмотрим дифференциально-функциональное уравнение с постоянным функционалом $\frac{dx(s)}{ds} = \langle x_s, f^t\rangle$.

Легко проверить, что инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{S^t(s), s \geq 0\}$ операторов сдвига вдоль решений этого уравнения [2, §19] есть в точности $A(t)$, потому что

$$\| S(t+\tau, t)\varphi - S^t(\tau)\varphi \| = o(\tau) . \tag{13}$$

Из известного свойства производящего оператора полугруппы класса (C_0) следует, что для любой $\varphi \in \mathfrak{D}(A(t))$

$$\frac{dS^t(s)\varphi}{ds} = A(t)S^t(s)\varphi,$$

откуда $S^t(\tau)\varphi - \varphi = \int_0^\tau A(t)S^t(s)\varphi\, ds.$

Поскольку $l \in \mathfrak{D}(A^*(t))$, то

$$\frac{\langle S^t(\tau)\varphi - \varphi, l\rangle}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \langle S^t(s)\varphi, A^*(t)l\rangle ds.$$

Но $\overline{\mathfrak{D}(A(t))} = C$. Значит, предыдущее равенство верно для всех $\varphi \in C$. Правая часть его имеет предел при $\tau \to +0$. Отсюда следует, что и левая часть имеет предел при $\tau \to +0$. Используя вновь соотношение (13), мы получаем, что существует

$$\lim_{\tau \to +0} \frac{\langle S(t+\tau, t)\varphi - \varphi, l\rangle}{\tau}$$, т.е. $l \in \mathfrak{D}(A'(t))$.

Второе утверждение леммы можно доказать аналогично, используя замечание 1.

Замечание 2. Пусть $\vartheta(\cdot)\in X$, при каждом $t\in R$ $\vartheta(t)\in \mathfrak{D}(\mathfrak{f}^*(t))$ и существует $*$-слабая производная $\frac{d\vartheta(t)}{dt}$, т.е. при любом $q\in E$ существует $\frac{d\langle q,\vartheta(t)\rangle}{dt}$. Предположим, что сумма $\frac{d\vartheta(t)}{dt}+\mathfrak{f}^*(t)\vartheta(t)$ непрерывна, как отображение R в E^*. Легко проверить, что в этом случае $\vartheta(\cdot)\in\mathfrak{D}(L)$, и верно равенство $L\vartheta(t)=\frac{d\vartheta(t)}{dt}+\mathfrak{f}^*(t)\vartheta(t)$. Обратно, если $\vartheta(\cdot)\in\mathfrak{D}(L)$ и $\vartheta(t)=\mathfrak{D}(\mathfrak{f}^*(t))$ при всех $t\in R$, то существует $*$-слабая производная $\frac{d\vartheta(t)}{dt}$ и верно то же равенство. Поэтому всякое ω-периодическое решение уравнения

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt}+\mathfrak{f}^*(t)\vartheta(t)=-\mathfrak{F}_0 \qquad (14)$$

является решением уравнения (9), и, обратно, всякое решение $\vartheta(\cdot)$ уравнения (9), для которого $\vartheta(t)\in\mathfrak{D}(\mathfrak{f}^*(t))$ при всех $t\in R$, является решением уравнения (14).

Теорема 4. 1) Пусть при всех $\varphi\in C$, $t\in R$ функция $\langle\varphi,\mathfrak{f}^t\rangle$ непрерывно дифференцируема по t, и уравнение (1) асимптотически устойчиво. Тогда уравнение (14) имеет единственное решение $\vartheta_0(t)$, причем функционал $\mathfrak{V}(t,\varphi)=[\varphi\otimes\varphi,\vartheta_0(t)]$ является модифицированным функционалом Ляпунова для уравнения (1).

2) Пусть уравнение (14) имеет какое-нибудь ω-периодическое решение $\vartheta(t)$. Тогда положительная определенность отображения $\vartheta(\cdot)$ на G эквивалентна асимптотической устойчивости уравнения (1).

Доказательство. 1) Это утверждение будет следовать из первой части теоремы 3, если мы докажем, что отображение (11) является решением уравнения (14). Согласно замечанию 2, достаточно показать, что $\vartheta_0(t)\in\mathfrak{D}(\mathfrak{f}^*(t))$ при всех $t\in R$.

Из определения оператора $\mathfrak{f}^*(t)$ и леммы 1 имеем

$$[q,\mathfrak{f}^*(t)\vartheta_0(t)]=\lim_{\sigma\to+0}[q,\frac{T^*(t+\sigma,t)-I}{\sigma}\int_t^\infty T^*(s,t)\mathfrak{F}_0\,ds]=$$

$$=\lim_{\sigma\to+0}[T(t+\sigma,t)q,\int_t^\infty\frac{T^*(s,t)-T^*(s,t+\sigma)}{\sigma}\mathfrak{F}_0\,ds]=-\int_t^\infty\frac{\partial}{\partial t}[T(s,t)q(0,0)]ds,$$

если при всех $p\in E$ выполняются следующие два условия:

А) правая производная $\frac{\partial}{\partial t}[T(s,t)p(0,0)]$ существует и непрерывна по s и t при $s>t$ и имеет конечный предел при

$s \to t$;

Б) интеграл $\int\limits^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau}[T(s,\tau)\,p(0,0)]ds$ сходится равномерно относительно $\tau \in [t, t_1]$, где t_1 – некоторое число, большее t .

Аналогично тому, как это делается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, можно доказать (при условии непрерывной дифференцируемости $<\varphi, f^t>$ по t), что при $s > t$ существует производная от решения уравнения (1) в момент времени s по начальному моменту t , непрерывная по совокупности s, t и начальной функции φ , причем существует предел этой производной при $s \to t$. Отсюда, используя замечание 1, получаем условие А).

Кроме того, отсюда следует существование производной $\frac{\partial}{\partial \tau}[S(s,\tau)\varphi]$ и неравенство $\|\frac{\partial}{\partial \tau}[S(s,\tau)\varphi]\| \le N\|\varphi\|$ при $t < \tau < s-1 \le t_1$. Теперь, учитывая замечание 1, легко показать, что при $t \le \tau < s-1 \le t_1$, $p \in E$ выполняется неравенство $\|\frac{\partial}{\partial \tau}[T(s,\tau)p]\| \le 2N\|S(s,\tau)\|\cdot\|p\|$.

Наконец, из асимптотической устойчивости уравнения (1) следует неравенство (8), и при $t \le \tau \le t_1$ и $s > t_1 + 1$ получаем

$$\|\frac{\partial}{\partial \tau}[T(s,\tau)p]\| = \|T(s,t_1+1)\frac{\partial}{\partial \tau}[T(t_1+1,\tau)p]\| \le$$

$$\le \|S(s,t_1+1)\|^2 \cdot 2N\|S(t_1+1,\tau)\|\cdot\|p\| \le 2NM^3 e^{-\beta(2s-t_1-1-\tau)},$$

откуда следует условие Б).

Следовательно, $\lambda_0(t) \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}^*(t))$, ч.т.д.

2) Доказательство следует из второй части теоремы 3 и замечания 2.

<u>Замечание 3.</u> Итак, задача построения функционала Ляпунова-Красовского сводится к решению уравнений (9) или (14). При этом оператор $\mathfrak{A}^*(t)$, входящий в уравнение (14), может быть легко вычислен на любой мере $\nu \in E^*$, так как

$\mathfrak{A}(t)q = \frac{\partial q}{\partial \theta} + \frac{\partial q}{\partial \eta}$ для всех непрерывно дифференцируемых $q \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}(t))$, где $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}(t)) = \{q \in E \mid (\forall \eta \in [-1,0])\, \frac{\partial q}{\partial \theta}(0,\eta) = <q(\cdot,\eta), f^t>\}$

[3, лемма 2].

§ 3. Вычисление функционала Ляпунова-Красовского в виде ряда для уравнения, близкого к автономному

В работе [3] изучена возможность и приведен пример построения функционала Ляпунова в случае автономного уравнения (1). В этой ситуации оператор $\mathcal{A}^*$ не зависит от t, и для построения функционала Ляпунова-Красовского $\vartheta(\varphi)=[\varphi\otimes\varphi,\vartheta_0]$ достаточно решить уравнение $\mathcal{A}^*\vartheta_0=-\mathfrak{I}_0$.

Рассмотрим теперь случай уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt}=\langle x_t, f_0+\varepsilon f_1^t\rangle, \tag{15}$$

где $\varepsilon\in R$, $f_0\in C^*_t$ и при всех $t\in R$ $f_1^t\in C^*$, $f_1^{t+\omega}=f_1^t$, $\|f_1^t\|\le K$ и $\langle\varphi, f_1^t\rangle$ непрерывно по t для любой $\varphi\in C$. Введенные ранее операторы $S(s,t)$, $A(t)$, $A^*(t)$, $T(s,t)$, $\mathcal{A}(t)$, $\mathcal{A}^*(t)$ и L, которые теперь зависят еще и от ε, снабдим нижним индексом ε.

При $\varepsilon=0$ операторы $S_0(t)=S_0(t,0)$ и $T_0(t)=T_0(t,0)$ $(t\ge 0)$ вполне непрерывны для $t\ge 1$ и образуют в пространствах C и E полугруппы класса (C_0) с производящими операторами A_0 и $\mathcal{A}_0$ соответственно [3].

В этом параграфе мы изучим возможность построения функционала Ляпунова для уравнения (15) при достаточно малых ε путем решения уравнения (9).

Как известно [2, с. 99], область определения оператора $A_\varepsilon(t)$ состоит из тех $\varphi\in C^1([-1,0])$, для которых $\varphi'(0)=\langle\varphi, f_0+\varepsilon f_1^t\rangle$. Очевидно, она меняется при изменении ε и t. Аналогичным свойством обладают области определения операторов $\mathcal{A}_\varepsilon(t)$ (см. замечание 3). Однако для операторов $A_\varepsilon^*(t)$, $\mathcal{A}_\varepsilon^*(t)$ и L_ε дело обстоит иначе, как показывает приведенная ниже лемма 2.

Определим оператор $P_0: E^*\to C^*$ равенством $(P_0\vartheta)(\Omega)=\vartheta(\{0\}\times\Omega)$ для любых $\vartheta\in E^*$ и измеримого $\Omega\subset[-1,0]$, а для каждого $t\in R$ определим оператор $B^*(t): E^*\to E^*$ равенством $[q, B^*(t)\vartheta]=\int_{-1}^{0}\langle q(\cdot,\eta), f_1^t\rangle d_\eta(P_0\vartheta)+\int_{-1}^{0}\langle q(\theta,\cdot), f_1^t\rangle d_\theta(P_0\vartheta)$.

Лемма 2. Для всех t, $\varepsilon\in R$ имеют место утверждения:
1) $\mathfrak{D}(A_\varepsilon^*(t))=\mathfrak{D}(A_0^*)$, причем для любого $\ell\in\mathfrak{D}(A_0^*)$

$$A_\varepsilon^*(t)l = A_0^*l + \varepsilon l(\{0\}) f_1^t , \qquad (16)$$

где $l(\{0\})$ – значение на множестве $\{0\}$ меры, соответствующей функционалу l ;

2) $\mathfrak{D}(\mathcal{A}_\varepsilon^*(t)) = \mathfrak{D}(\mathcal{A}_0^*)$, причем для любого $\nu \in \mathfrak{D}(\mathcal{A}_0^*)$:

$$\mathcal{A}_\varepsilon^*(t)\nu = \mathcal{A}_0^*\nu + \varepsilon B^*(t)\nu ;$$

3) $\mathfrak{D}(L_\varepsilon) = \mathfrak{D}(L_0)$, причем для любого $\nu(\cdot) \in \mathfrak{D}(L_0)$

$$(L_\varepsilon \nu)(t) = (L_0 \nu)(t) + \varepsilon B^*(t)\nu(t).$$

Доказательство. Пусть $l \in \mathfrak{D}(A_0^*)$. Это означает, что для любого $\varphi \in C$ существует

$$\langle \varphi, A_0^* l \rangle = \lim_{\tau \to 0} \langle \frac{S_0(\tau)\varphi - \varphi}{\tau}, l \rangle .$$

Рассмотрим выражение

$$\langle \frac{S_\varepsilon(t+\tau,t)\varphi - \varphi}{\tau}, l \rangle = \langle \frac{S_0(\tau)\varphi - \varphi}{\tau}, l \rangle + \langle \frac{S_\varepsilon(t+\tau,t)\varphi - S_0(\tau)\varphi}{\tau}, l \rangle . \qquad (17)$$

Первое слагаемое в правой части при $\tau \to 0$ стремится к $\langle \varphi, A_0^* l \rangle$. Для любых $t > 0$, $\varepsilon \in R$

$$S_\varepsilon(t+\tau,t)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(\theta+\tau) & \text{при } -1 \le \theta < -\tau, \\ \varphi(0) + \langle \varphi, f^t \rangle (\theta+\tau) + o(\theta+\tau) & \text{при } -\tau \le \theta \le 0 . \end{cases}$$

Следовательно,

$$S_\varepsilon(t+\tau,t)\varphi(\theta) - S_0(\tau)\varphi(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } -1 \le \theta < -\tau, \\ \varepsilon \langle \varphi, f_1^t \rangle (\theta+\tau) + o(\theta+\tau) & \text{при } -\tau \le \theta \le 0. \end{cases}$$

и

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{S_\varepsilon(t+\tau,t)\varphi(\theta) - S_0(\tau)\varphi(\theta)}{\tau} = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta \ne 0, \\ \varepsilon \langle \varphi, f_1^t \rangle & \text{при } \theta = 0. \end{cases}$$

Значит, второе слагаемое в (17) стремится к $\varepsilon \langle \varphi, f_1^t \rangle l(\{0\})$.

Этим доказано равенство (16) и включение $\mathfrak{D}(A_0^*) \subset \mathfrak{D}(A_\varepsilon^*(t))$. Такими же рассуждениями доказывается обратное включение $\mathfrak{D}(A_\varepsilon^*(t)) \subset \mathfrak{D}(A_0^*)$.

Остальные утверждения леммы можно доказать аналогично, используя замечание 1.

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (15) асимптотически устойчиво, т.е. все собственные значения оператора A_0 имеют отрицательные действительные части. Пусть $\vartheta_0(t) = [\varphi \circ \varphi, \nu_0]$ – функционал Ляпунова, полученный решением уравнения $\mathfrak{F}_0^* \lambda_0 = -\pi_0$ (см. начало § 3). Вычисляя производную от этого функционала вдоль решений уравнения (15) при $\varepsilon \neq 0$, получим в силу замечания 2 и леммы 2

$$\dot{\vartheta}_\varepsilon(t,\varphi) = [\varphi \otimes \varphi, L_\varepsilon \lambda_0(t)] =$$
$$= [\varphi\otimes\varphi, -\pi_0 + \varepsilon B^*(t)\lambda_0] \le -|\varphi(0)|^2 + 2\varepsilon \|\varphi\|^2 K \|\lambda_0\|,$$

т.к. $\|B^*(t)\| \le 2K$ при всех $t \in R$. Отсюда при достаточно малых ε получим неравенство (3) для всех $t \in R, \varphi \in C$. Таким образом, $\vartheta_0(t)$ является функционалом Ляпунова для уравнения (15) также при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Если же у оператора A_0 существует хотя бы одно собственное значение с положительной действительной частью, то в силу теоремы о неустойчивости по первому приближению [10] ни при $\varepsilon = 0$, ни при близких значениях ε функционал Ляпунова не существует.

Остается рассмотреть критический случай, когда у оператора A_0 есть собственные значения на мнимой оси, но нет собственных значений с положительной действительной частью.

В оставшейся части § 3 будем предполагать, что 0 является простым собственным значением оператора A_0, $A_0 \varphi_0 = 0$, а все остальные собственные значения оператора A_0 имеют отрицательные действительные части.

Из свойств полугрупп класса (C_0) следует, что при всех $t \ge 0$ $S_0(t)\varphi_0 = \varphi_0$ и $T_0(t) q_0 = q_0$, где $q_0 = \varphi_0 \otimes \varphi_0$.

<u>Лемма 3.</u> При всех $t > 0$ единица является простым изолированным собственным значением операторов $S_0(t), T_0(t)$ и $T_0^*(t)$. Нуль является простым изолированным собственным значением операторов $\mathfrak{F}_0$ и $\mathfrak{F}_0^*$.

<u>Доказательство.</u> При $t > 0$ можно подобрать такое натуральное n, чтобы было $nt > 1$. Тогда операторы $S_0(t)^n = S_0(nt)$ и $T_0(t)^n = T_0(nt)$ вполне непрерывны и, следовательно, собственное значение 1 является изолированным и для $S_0(t)^n$, и для $T_0(t)^n$. Но по теореме об отображении спектров $\sigma(S_0(t)^n) = [\sigma(S_0(t))]^n$ и $\sigma(T_0(t)^n) = [\sigma(T_0(t))]^n$, откуда следует то же утверждение для операторов $S_0(t)$ и $T_0(t)$.

Простота собственного значения 1 для оператора $S_0(t)$ следует из [5, теорема 16.7.2].

Рассмотрим проектор $P = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (S_0(t) - z I)^{-1} dz$,

где Γ – замкнутый спрямляемый контур, окружающий 1 и не окружающий других точек $\sigma(S_0(t))$. Обозначим C_1 и C_2, соответственно, области значений операторов P и $I-P$. Тогда $C = C_1 \oplus C_2$, причем C_1 – линейная оболочка вектора φ_0, и $\sigma(S_0'(t)) = \sigma(S_0(t)) \setminus \{1\}$, где $S_0'(t) = S_0(t)|_{C_2}$.

Отсюда следует, что

$$C \check{\otimes} C = (C_1 \check{\otimes} C_1) \oplus (C_1 \check{\otimes} C_2) \oplus (C_2 \check{\otimes} C_1) \oplus (C_2 \check{\otimes} C_2),$$

причем эти четыре подпространства инвариантны относительно оператора $T_0(t)$, и на каждом из них его действие сводится соответственно к $I \otimes I$, $I \otimes S_0'(t)$, $S_0'(t) \otimes I$, $S_0'(t) \otimes S_0'(t)$.

Из равенства

$$\sigma(\mathcal{U} \otimes V) = \sigma(\mathcal{U})\sigma(V) = \{\lambda\mu \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{U}), \mu \in \sigma(V)\}$$

[6] следует, что из перечисленных четырех операторов лишь $I \otimes I$ имеет в своем спектре число 1. Пространство $C_1 \check{\otimes} C_1$, очевидно, одномерно. Поэтому 1 – простое собственное значение оператора $T_0(t)$.

Отсюда нетрудно получить то же утверждение для оператора $T_0^*(t)$.

Из того, что $T_0(t) q_0 = q_0$ при всех $t > 0$, следует, что 0 является собственным значением оператора $\mathfrak{A}_0$, т.к. $\mathfrak{A}_0 q_0 = 0$. Его простота и изолированность от других точек $\sigma(\mathfrak{A}_0)$ вытекает из теорем 16.7.1 и 16.7.2 монографии [5]. Отсюда следует и последнее утверждение леммы.

Лемма 4. L_0 – замкнутый оператор, и 0 – его изолированное простое собственное значение.

Доказательство. Пусть μ_0 – собственный вектор оператора $\mathfrak{A}_0^*$, соответствующий нулевому собственному значению. Полагая в определении оператора L $T^*(t, \tau, t) = T_0^*(\tau)$, получим

$$[q, L_0 \nu(t)] = \frac{d'}{d\tau}[q, T_0^*(\tau)\nu(t+\tau)]\Big|_{\tau=0}.$$

Положим $\mu_0(\cdot) = \mu_0$. Ясно, что $L_0[\mu_0(\cdot)] = 0$, т.е. 0 является собственным значением оператора L_0.

Пусть комплексное число λ таково, что $e^{\lambda\omega}$ – регулярная точка оператора $T^*(\omega)$. Вычислим резольвенту $(L_0 - \lambda I)^{-1}$. Для этого при произвольном $\mu \in X$ надо найти $\nu \in X$ такое, что для любых $q \in E$, $s \in [0, \omega]$

$$\frac{d}{d\tau}[q, T_0^*(\tau)\nu(s+\tau)]\Big|_{\tau=0} - \lambda[q, \nu(s)] = [q, \mu(s)]. \qquad (18)$$

Заменив q на $e^{-\lambda(s-t)} T_0(s-t) q$ $(0 \le t \le s)$, получим $\frac{d}{ds}[q, e^{-\lambda(s-t)}T_0^*(s-t)\lambda(s)] = [q, e^{-\lambda(s-t)}T_0^*(s-t)\mu(s)]$.

Интегрируя это уравнение в пределах от t до ω, получим

$$\lambda(t) = e^{-\lambda(\omega-t)}T_0^*(\omega-t)\lambda(\omega) - \int_t^\omega e^{-\lambda(s-t)}T_0^*(s-t)\mu(s)ds. \qquad (19)$$

Функционал $\lambda(\omega)$ следует подобрать так, чтобы $\lambda(0) = \lambda(\omega)$. Отсюда имеем уравнение

$$e^{-\lambda\omega}T_0^*(\omega)\lambda(\omega) - \lambda(\omega) = \int_0^\omega e^{-\lambda s}T_0^*(s)\mu(s)ds, \qquad (20)$$

решение которого

$$\lambda(\omega) = [T_0^*(\omega) - e^{\lambda\omega}I]^{-1}e^{\lambda\omega}\int_0^\omega e^{-\lambda s}T_0^*(s)\mu(s)ds.$$

Легко проверить, что при любом $\mu \in X$ выражение (19) с указанным $\lambda(\omega)$ дает решение уравнения (18). Таким образом, если $e^{\lambda\omega} \notin \sigma(T_0(\omega))$, то существует непрерывный оператор $[L_0 - \lambda I]^{-1}: X \to X$.

Отсюда следует: 1) L_0 – замкнутый оператор; 2) нуль является изолированной точкой $\sigma(L_0)$, т.к. 1 является изолированной точкой $\sigma(T_0^*(\omega))$ (см. лемму 3).

Осталось доказать простоту собственного значения 0 оператора L_0, т.е. неразрешимость уравнения (18) при $\mu(s) \equiv \mu_0$ и $\lambda = 0$. При этих данных неразрешимо уравнение (20), т.к. $T_0^*(s)\mu_0 = \mu_0$ при всех $s \geq 0$, а 1 – простое собственное значение оператора $T_0^*(\omega)$. Отсюда следует и неразрешимость уравнения (18).

Леммы 2 и 4 дают возможность применить к решению уравнения (9) в критическом случае теорию возмущений линейных операторов.

Введем оператор $M: X \longrightarrow X$, положив для каждого $t \in R$

$$M\lambda(t) = B^*(t)(\lambda(t)). \qquad (21)$$

Теперь уравнение (9) приобретает вид

$$L_0\lambda(\cdot) + \varepsilon M\lambda(\cdot) = -\mathfrak{F}_0, \qquad (22)$$

где M – очевидно, линейный непрерывный оператор.

<u>Теорема 5.</u> Если при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ оператор $L_0 + \varepsilon M$ ограниченно обратим, то решение уравнения (22) можно представить в виде сходящегося при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ ряда

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{k=-m}^{\infty}\lambda_k\varepsilon^k, \qquad (23)$$

где $m \geqslant 1$, $\vartheta_k \in X$ $(k \geqslant -m)$.

<u>Доказательство.</u> При достаточно малых ε у оператора $L_0 + \varepsilon M$ имеется простое собственное значение

$$\lambda(\varepsilon) = \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \varepsilon^2 + \dots, \tag{24}$$

лежащее внутри круга $|\lambda| < r$, причем все остальные точки $\sigma(L_0 + \varepsilon M)$ лежат вне этого круга (см.[7, § VII.1]). В окрестности этого собственного значения резольвента оператора $L_0 + \varepsilon M$ представляется в виде

$$(L_0 + \varepsilon M - \xi I)^{-1} = -\frac{P(\varepsilon)}{\xi - \lambda(\varepsilon)} + \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - \lambda(\varepsilon))^n S^{n+1}(\varepsilon),$$

где $P(\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} (L_0 + \varepsilon M - \varkappa I)^{-1} d\varkappa$, $\quad S(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} (L_0 + \varepsilon M - \varkappa I)^{-1} \frac{d\varkappa}{\varkappa - \lambda(\varepsilon)}$,

Γ_r – окружность $|\lambda| = r$, проходимая против часовой стрелки [7, § III.6]. Полагая $\xi = 0$, получаем

$$(L_0 + \varepsilon M)^{-1} = \frac{P(\varepsilon)}{\lambda(\varepsilon)} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \lambda(\varepsilon)^n S^{n+1}(\varepsilon). \tag{25}$$

Поскольку разность $\varkappa - \lambda(\varepsilon)$ не обращается в нуль при $\varkappa \in \Gamma_r$, то оператор $S(\varepsilon)$, а следовательно, и вся бесконечная сумма в правой части (25) разложимы в ряд по неотрицательным степеням ε. Отсюда и из аналитичности $P(\varepsilon)$ следует, что

$\vartheta_\varepsilon = -(L_0 + \varepsilon M)^{-1} \pi_0 = \sum_{k=-m}^{\infty} \vartheta_k \varepsilon^k$, где m не больше номера первого отличного от нуля члена в разложении (24), ч.т.д.

Для явного вычисления числа m и коэффициентов ряда (23) воспользуемся методом Вишика-Люстерника [8].

Подставим (23) в уравнение (22) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Предположим вначале, что $m = 1$. Приравнивая коэффициенты при ε^{-1}, получим:

$$L_0 \vartheta_{-1} = 0.$$

Из леммы 4 вытекает, что общее решение этого уравнения $\vartheta_{-1} = C_{-1} \mu_0$, где C_{-1} – произвольная вещественная константа, μ_0 – решение уравнения $\mathfrak{A}_0^* \mu_0 = 0$, $\|\mu_0\| = 1$. Далее, приравнивая коэффициенты при ε^0, получим

$$L_0 \vartheta_0 + M \vartheta_{-1} = -\pi_0, \tag{26}$$

или, когда мы ищем решение в $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_0^*)$ (т.е. решаем уравнение (14)),

$$\frac{d\vartheta_0(t)}{dt} + \mathfrak{A}_0^* \vartheta_0(t) = -\pi_0 - C_{-1} B^*(t) \mu_0.$$

Периодическое решение этого уравнения может существовать лишь в том случае, когда

$$\int_0^{\omega}[q_{o},-\pi_o-C_{-1}B^*(t)\mu_o]dt=0, \qquad (27)$$

где $A_o q_o=0$ (см. лемму 3). Если

$$\int_0^{\omega}[q_{o},B^*(t)\mu_o]dt\neq 0, \qquad (28)$$

то из (27) можно найти константу C_{-1}, а затем общее решение уравнения (26): $\lambda_o=-F(\pi_o+C_{-1}M\mu_o)+C_o\mu_o$, где F – оператор, обратный к сужению L_o на его область значений $R(L_o)$.

Затем приравниваем коэффициенты при ε:

$$L_o\lambda_1=-M\lambda_o.$$

Из необходимого и достаточного условия разрешимости этого уравнения $\int_0^{\omega}[q_o,B^*(t)\lambda_o(t)]dt=0$ находим C_o (это можно сделать потому, что $[q_o,\mu_o]\neq 0$, т.к. 0 – простое собственное значение A_o^*). Потом находим $\lambda_1=-FM\lambda_o+C_1\mu_o$ и т.д.

Если же условие (28) не выполняется, это означает, что $m\geq 2$. В этом случае принимаем $m=2$, подставляем (23) в уравнение (22) и т.д. (см. [8]).

Конечность числа m следует из теоремы 5.

Из теоремы 3 следует, что функционал $\vartheta_\varepsilon(\varphi)=[\varphi\circ\varphi,\lambda_\varepsilon(t)]$ дает необходимое и достаточное условие устойчивости тривиального решения уравнения (15):

существует $c_2>0$ такое, что при всех $\varphi\in C, t\in[0,\omega]$ $\vartheta_\varepsilon(t,\varphi)\geq c_2\varphi(0)^2$.

Замечание 4. Оказывается, этим же свойством обладает и функционал $\bar{\vartheta}_\varepsilon(t,\varphi)=[\varphi\circ\varphi,\bar{\lambda}_\varepsilon(t)]$, где $\bar{\lambda}_\varepsilon=\sum_{k=-m}^{0}\lambda_k\varepsilon^k$. В самом деле, $\lambda_\varepsilon-\bar{\lambda}_\varepsilon=\varepsilon\tilde{\lambda}_\varepsilon$, где $\|\tilde{\lambda}_\varepsilon\|$ ограничена при $\varepsilon\in(-\varepsilon_o,\varepsilon_o)$. С другой стороны, $L_o\lambda_{k+1}=-M\lambda_k$ $(k=0,1,\ldots)$ в силу построения λ_k, откуда $(L_o+\varepsilon M)\tilde{\lambda}_\varepsilon=L_o\lambda_1$. Поэтому
$|\vartheta_\varepsilon(t,\varphi)-\bar{\vartheta}_\varepsilon(t,\varphi)|=\varepsilon|[\varphi\circ\varphi,(L_o+\varepsilon M)\tilde{\lambda}_\varepsilon(t)]|\leq\varepsilon\|L_o\lambda_1\|\|\varphi\|^2$.
Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon\neq 0$ условия теоремы 1 выполняются для ϑ_ε тогда и только тогда, когда они выполняются для $\bar{\vartheta}_\varepsilon$.

Таким образом, при нахождении функционала Ляпунова-Красовского достаточно вычислить лишь λ_k с неположительными индексами.

§ 4. Пример

В заключение приведем пример вычисления функционала $\bar{\vartheta}_\varepsilon(t,\varphi)$ для уравнения

$$\dot{x}(t) = x(t-1) - x(t) + \varepsilon x(t)\sin t.$$

Согласно замечанию 4, $\bar{\vartheta}_\varepsilon(t,\varphi) = [\varphi \otimes \varphi, \sum_{k=-m}^{0} \varepsilon^k \lambda_k(t)]$,

где

$$\lambda(t) = \sum_{k=-m}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k(t) \tag{29}$$

является решением уравнения

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} + \mathcal{A}_0^* \lambda(t) + \varepsilon B^*(t)\lambda(t) = -\bar{\Gamma}_0. \tag{30}$$

Вначале примем $m = 1$, подставим (29) в (30) и приравняем коэффициенты при ε^{-1}. Получим уравнение

$$\frac{d\,\lambda_{-1}(t)}{dt} + \mathcal{A}_0^* \lambda_{-1}(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения $\lambda_{-1}(t) = C_{-1}\mu_0$, где $\mathcal{A}_0^*\mu_0 = 0$, $\|\mu_0\| = 1$. Чтобы найти μ_0, заметим, что $T_0^*(t)\mu_0 = \mu_0$ для любого t, и можно взять $\mu_0 = \ell_0 \otimes \ell_0$, где $\ell_0 \in C^*$, $S^*(t)\ell_0 = \ell_0$, т.е. $\langle \psi, \ell_0 \rangle = 0$ для любой $\psi \in \mathcal{R}(A_0)$. Поскольку $A_0\varphi = \varphi'$ и $\mathcal{D}(A_0) = \{\varphi \in C^1 : \varphi'(0) = \varphi(-1) - \varphi(0)\}$, то $\mathcal{R}(A_0) = \{\psi \in C : \psi(0) = -\int_{-1}^{0}\psi(\theta)d\theta\}$. Следовательно, можно взять $\langle \varphi, \ell_0 \rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\varphi(\theta)d\theta + \frac{1}{2}\varphi(0)$. Тогда

$$[q,\mu_0] = \frac{1}{4}\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} q(\theta,\eta)\,d\theta d\eta + \frac{1}{4}\int_{-1}^{0} q(0,\eta)\,d\eta + \frac{1}{4}q(0,0) + \frac{1}{4}\int_{-1}^{0} q(\theta,0)\,d\theta. \tag{31}$$

для любого $q \in E$.

Далее, приравнивая коэффициенты при ε^0, получим

$$\frac{d\,\lambda_0(t)}{dt} + \mathcal{A}_0^* \lambda_0(t) = -\bar{\Gamma}_0 - C_{-1}B^*(t)\mu_0.$$

Из (31) следует, что для любой $q \in E$

$$[q, B^*(t)\mu_0] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\langle q(\cdot,\eta), f_1^t \rangle d\eta + \frac{1}{2}\langle q(\cdot,0), f_1^t \rangle = \tag{32}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\int_{-1}^{0} q(0,\eta)d\eta + q(0,0)\Big]\sin t.$$

Очевидно, $q_0 = \varphi_0 \otimes \varphi_0$, где $A_0\varphi_0 = 0$, т.е. $\varphi_0 = \mathrm{const}$. Для определенности возьмем $\varphi_0 = 1$. Тогда $q_0 = 1$. Следовательно, $\int_0^{2\pi}[q_0, B^*(t)\mu_0]dt = \int_0^{2\pi}\sin t\,dt = 0$, т.е. C_{-1} определить нельзя. Значит, $m \geq 2$.

Берем $m = 2$ и подставляем (29) в (30). Приравняв коэффициенты при ε^{-2}, получим $\lambda_{-2} = C_{-2}\mu_0$, а при ε^{-1} – получим уравнение: $\dfrac{d\lambda_{-1}(t)}{dt} + \mathfrak{A}_0^* \lambda_{-1}(t) = -C_{-2} B^*(t)\mu_0.$

Ив (32) следует, что это уравнение можно записать в виде:

$$\frac{d\lambda_{-1}(t)}{dt} + \mathfrak{A}_0^* \lambda_{-1}(t) = \xi_0 \sin t, \tag{33}$$

где $[q, \xi_0] = -\frac{C_2}{2}[\int_{-1}^{0} q(0,\eta)d\eta + q(0,0)]$.

Решение уравнения (33) ищем в виде $\lambda_{-1}(t) = \beta \sin t + \delta \cos t$, где $\beta, \delta \in E^*$. Для β и δ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_0^* \beta - \delta = \xi_0, \\ \beta + \mathfrak{A}_0^* \delta = 0, \end{cases}$$

откуда $\delta = -(\mathfrak{A}_0^{*2} + I)^{-1}\xi_0$.

Чтобы записать в явном виде $[\varphi\otimes\varphi, \delta]$ для произвольного $\varphi \in C$, нужно решить уравнение $\mathfrak{A}_0^2 q + q = \varphi\otimes\varphi$.

Учитывая замечание 3, это уравнение можно свести к системе четырех обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Литература

1. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

2. Hale J.K. Functional Differential Equations.- Lectures at the University of California, Los Angeles. 1968-69.

3. Царьков Е.Ф., Энгельсон Л.Е. О статистических решениях линейных систем дифференциально-функциональных уравнений.- В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, 1981, с. 144-153.

4. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. Топологические векторные пространства. М., 1967.

5. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.

6. Harte R.E. Tensor products, multiplication operators and the spectral mapping theorem.- Proceedings of the Royal Irish Academy, sect. A, vol. 73, Nr. 21, 1973, pp. 285-302.

7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.

М., 1972.

8. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений.-УМН, 1960, т. 15, вып. 3, с. 3-80.

9. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.

10. Шиманов С.Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени.-ПММ, 1960, т. 24, вып. 1, с. 55-68.

Поступила 19 ноября 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.015.2:513.83

ПРОСТРАНСТВА МЕЖНОСТИ

Я.П.Цирулис
ЛГУ им. П.Стучки

Словом 'межность' мы переводим английский термин 'betweenness' и употребляем его вместо неудобного 'отношение "между"' – подобно тому как 'упорядоченность' заменяет 'отношение "меньше"' (или даже "меньше или равно"). При этом мы, следуя [3-4], в настоящей работе будем иметь в виду т.наз. нестрогую межность, которая не исключает совпадения рассматриваемых точек. В работе изучаются некоторые структурные свойства множеств с заданным отношением межности (пространств межности), доказывается теорема представления для них и рассматривается связанная с таким отношением естественная топология. Использованные факты общей топологии читатель найдет в [2].

§1. Отношения межности

Определение 1. Межностью на множестве X называется всякое тернарное отношение β на X, удовлетворяющее условиям

$$
\begin{aligned}
&\beta 1: && \beta xyy\\
&\beta 2: && \beta xyx \Rightarrow x=y\\
&\beta 3: && \beta xyz \Rightarrow \beta zyx\\
&\beta 4: && \beta xuy,\ \beta xyz \Rightarrow \beta uyz\\
&\beta 5: && \beta uxy,\ \beta xyz,\ x\neq y \Rightarrow \beta uxz\\
&\beta 6: && \beta xuy,\ \beta xzy \Rightarrow \beta xuz \vee \beta xzu\\
&\beta 7: && \beta xyu,\ \beta xyz,\ x\neq y \Rightarrow \beta xuz \vee \beta xzu.
\end{aligned}
$$

При этом запись 'βxyz' читается: "y лежит между x и z". Межность β называется линейной, если

$$\beta 8: \quad \beta xyz \vee \beta yzx \vee \beta zxy.$$

Множество X вместе с заданной на ней межностью β, т.е.

пара (X, β) ., называется пространством межности.

Каждая межность обладает еще следующими свойствами:

$$
\begin{array}{lll}
\beta 9: & \beta xyz,\ \beta yzx \Rightarrow y = z & [\beta 5] \\
\beta 10: & \beta xuy,\ \beta xyv \Rightarrow \beta xuv & [\beta 4, \beta 5] \\
\beta 11: & \beta uxy,\ \beta xyv,\ x \neq y \Rightarrow \beta uyv & [\beta 5, \beta 3] \\
\beta 12: & \beta xuy,\ \beta xvy \Rightarrow \beta uvy \vee \beta vuy & [\beta 6, \beta 3] \\
\beta 13: & \beta xyu,\ \beta xyv,\ x \neq y \Rightarrow \beta yuv \vee \beta yvu & [\beta 7, \beta 4] \\
\beta 14: & \beta xuy,\ \beta xvy \Rightarrow \beta xuv \vee \beta xvu & [\beta 6, \beta 4] \\
\beta 15: & \beta xyu,\ \beta xyv,\ x \neq y \Rightarrow \beta xuv \vee \beta yvu. & [\beta 7, \beta 4]
\end{array}
$$

Группа аксиом $\beta 2 - \beta 5$ равносильна системе аксиом Биркгофа для более общего понятия межности (см. [I], с. I7). Линейная межность подробно была изучена Шмелевой в [3]. Можно легко убедиться, что $\beta 1, \beta 6, \beta 7$ являются следствиями аксиом $\beta 2 - \beta 5$ и $\beta 8$ (ср. с [3]).

Приведем несколько типичных примеров, иллюстрирующих введенные понятия.

<u>Пример I.</u> Пусть X – множество точек некоторого аффинного пространства, и пусть для всех x, y, z из X βxyz означает, что y принадлежит замкнутому промежутку с концами x, z, т.е. что $\vec{xy} = \lambda \cdot \vec{xz}$, где $0 \leq \lambda \leq 1$. Тогда (X, β) – пространство межности. (Отметим, что любое аффинное пространство в смысле [4] само является пространством межности).

<u>Пример 2.</u> Пусть (X, d) – метрическое пространство, и пусть

$$\beta xyz \Leftrightarrow dxy + dyz = dxz.$$

Отношение β, вообще говоря, не является межностью. Например, $\beta 5$ не выполняется в случае, когда X – множество вершин n-мерного куба, а d – расстояние Хемминга. Однако, если (X, d) – множество точек евклидова пространства с обычным расстоянием, то (X, β) – пространство межности.

<u>Пример 3.</u> Пусть $(X, \leq)$ – линейно упорядоченное множество, и пусть

$$\beta_{\leq} xyz \Leftrightarrow x \leq y \leq z \vee z \leq y \leq x.$$

Тогда $(X, \beta_{\leq})$ – пространство линейной межности. Очевидно, еще только обратная упорядоченность $\geq$ определяет ту же межность на X (ср. [3]).

§2. Структура пространств межности

Определение 2. Точки x, y, z пространства (X, ρ) называются сравнимыми, если они находятся в отношении ζ, определяемым условием

$$\zeta xyz \Leftrightarrow \rho xyz \vee \rho yzx \vee \rho zxy.$$

Множество $A \subset X$ называется цепью в (X, ρ), если любые три его точки (не обязательно все разные) сравнимы. Цепь называется максимальной, если она не является частью никакой другой цепи.

Отношение ζ обладает свойствами

$\zeta 1$: ζxxy,

$\zeta 2$: $\zeta x_1 x_2 x_3 \Rightarrow \zeta x_i x_j x_k$,

где ijk – произвольная перестановка чисел 1,2,3,

$\zeta 3$: $\zeta xyu, \zeta xyv, x \neq y \Rightarrow \zeta uvx \wedge \zeta uvy$,

$\zeta 4$: $\zeta xyu, \zeta xyv, \zeta xyw, x \neq y \Rightarrow \zeta uvw$,

$\zeta 5$: $\zeta xyu, \zeta xyv, \zeta uvw, u \neq v \Rightarrow \zeta xyw$.

Из них первые три проверяются непосредственно, а два остальные являются следствиями предыдущих. Отметим, что три точки сравнимы т.т.т., когда они принадлежат одной и той же цепи. Примером цепи служит любое множество L_{ab} вида $\{x : \zeta abx\}$, где a, b – две различные точки.

Лемма 1. Пусть (X, ρ) – пространство межности, и пусть $\phi \neq A \subset X$. Тогда следующие утверждения равносильны:

а) если $|X| > 1$, то $A = L_{ab}$ для каких-либо различных точек a, b из X,

б) A – максимальная цепь,

в) $A = L_{ab}$ для любых двух различных точек a, b из A.

Доказательство. С помощью соответствующих определений и свойств $\zeta 1 - \zeta 4$, непосредственно проверяется, что а) $\Rightarrow$ б) $\Rightarrow$ в) $\Rightarrow$ а).

Определение 3. Системой прямых в X называется любое множество $\mathbb{L} \subset \exp X$, такое, что

$\mathbb{L} 1$: каждое множество из $\mathbb{L}$ непусто и, если

$|X| > 1$, содержит по крайней мере два элемента,

$\mathbb{L}2$: различные члены $\mathbb{L}$ имеют не более одного общего элемента,

$\mathbb{L}3$: любые два элемента X (не обязательно различные) принадлежат некоторому члену $\mathbb{L}$.

Система $\mathbb{L}$ называется согласованной с межностью ρ , если любые три точки пространства (X,ρ) сравнимы т.т.т., когда они принадлежат одному и тому же члену $\mathbb{L}$.

Пример 4. Множество $\mathbb{M}_\rho$ всех максимальных цепей пространства (X,ρ) является единственной системой прямых в X , согласованной с ρ , и будет поэтому называться системой прямых этого пространства.

Определение 4. $\mathcal{B}$ -структурой на X называется всякая пара $\mathbb{B}=(\mathbb{L},\mathbb{b})$, где $\mathbb{L}$ - система прямых в X , а $\mathbb{b}$ - функция, сопоставляющая каждому A из $\mathbb{L}$ какую-либо линейную межность ρ_A на A . В частности, если ρ - межность на X , то пара $\mathbb{B}_\rho=(\mathbb{M}_\rho,\mathbb{b}_\rho)$, где функция $\mathbb{b}_\rho$ определена условием $\mathbb{b}_\rho(A)=\rho|A$, называется $\mathcal{B}$ -структурой пространства (X,ρ) .

Теорема I. Пусть $\mathbb{B}=(\mathbb{L},\mathbb{b})$ - произвольная $\mathcal{B}$ -структура на X , и пусть для всех x,y,z из X $\rho_{\mathbb{B}}xyz$ означает, что

$$\exists A\in\mathbb{L}(x,y,z\in A \text{ и } \rho_A xyz).$$

Тогда для любого тернарного отношения ρ на X

$$\rho=\rho_{\mathbb{B}}\Leftrightarrow\rho \text{ - межность и } \mathbb{B}=\mathbb{B}_\rho .$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что, если ρ - межность и $\mathbb{B}=\mathbb{B}_\rho$, то $\rho xyz\Leftrightarrow\rho_{\mathbb{B}}xyz$, т.е. $\rho=\rho_{\mathbb{B}}$. При проверке обратного рассмотрим лишь нетривиальный случай, когда $|X|>1$.

Пусть $\rho=\rho_{\mathbb{B}}$. Что ρ действительно межность, легко проверяется непосредственно. Ясно также, что $\mathbb{b}=\mathbb{b}_\rho$: ведь $\mathbb{b}(A)=\rho_A$, а $\mathbb{b}_\rho(A)=\rho|A$. Далее покажем, что всякие две различные точки из X определяют в $\mathbb{L}$ и $\mathbb{M}_\rho$ одну и ту же прямую; этим будет показано, что $\mathbb{L}=\mathbb{M}_\rho$ и завершено доказательство. Итак, пусть $a,b\in X$ и $a\neq b$. Обозначим через A единственную прямую из $\mathbb{L}$, проходящую через a и b , и вспомним, что L_{ab} есть такая же прямая в $\mathbb{M}_\rho$.

Теперь если $x \in L_{ab}$, то в силу выбора ρ $x \in A$. Если же $x \in A$, то a, b и x сравнимы в смысле ρ_A, а поэтому и в смысле ρ; отсюда $x \in L_{ab}$. Таким образом, $A = L_{ab}$.

Как следствие доказанной теоремы получаем своего рода теорему представления для отношения межности.

Теорема 2. Тернарное отношение ρ на X тогда и только тогда является межностью, когда $\rho = \rho_B$ для некоторой однозначно определенной B-структуры B на X.

Итак, общее понятие межности может быть сведено к своему частному случаю – понятию линейной межности. Оказывается, что последнее, в свою очередь, может быть сведено к понятию линейной упорядоченности.

Следуя [3], неориентированной линейной упорядоченностью (н.л.у.) на каком-либо множестве A будем называть всякое множество $\varrho = \{\leq, \geq\}$, состоящее из двух взаимно обратных линейных упорядоченностей на A. Привлекая результат примера 3, с ϱ можно связать линейную межность $\rho_\varrho = \rho_\leq (= \rho_\geq)$. Следующая теорема, в сущности, является следствием теоремы I.19 из [3].

Теорема 3. Тернарное отношение ρ на A является линейной межностью тогда и только тогда, когда $\rho = \rho_\varrho$ для некоторой однозначно определенной н.л.у. ϱ на A.

В [3] указан также конкретный способ построения такой н.л.у. по данной линейной межности ρ. Строго говоря, теорема из [3] применима лишь в случае, когда $|A| \geq 3$. Однако случай $|A| < 3$ тривиален и может быть рассмотрен отдельно.

§3. Топология в пространствах межности

Определение 5. Пусть (X, ρ) – пространство межности. Точка x называется внутренней точкой множества $U \subset X$, если

$$\forall z \neq x\ \exists y \neq x\ (\rho x y z \wedge \forall u \neq y (\rho x u y \Rightarrow u \in U)).$$

Множество U называется открытым, если все его точки внутренние.

Отметим, что в силу $\rho 1$, $\rho 2$ все внутренние точки $\mathfrak{U}$ лежат в $\mathfrak{U}$.

<u>Теорема 4.</u> Пусть (X,ρ) – пространство межности. Тогда

а) множество τ_ρ всех открытых подмножеств X является топологией на X,

б) топологическое пространство (X,τ_ρ) является T_1 -пространством.

<u>Доказательство.</u> (а). Очевидно, что обьединение любого числа открытых множеств, а также множества $\varnothing$ и X -открытые. Проверим, что открыто также пересечение двух открытых множеств $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$. Пусть $x \in \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$, и пусть $z \neq x$. Тогда существуют y_1, y_2, такие, что

$$y_1 \neq x,\ \rho x y_1 z \text{ и } \forall u \neq y_1\ (\rho x u y_1 \Rightarrow u \in \mathfrak{U}_1),$$
$$y_2 \neq x,\ \rho x y_2 z \text{ и } \forall u \neq y_2\ (\rho x u y_2 \Rightarrow u \in \mathfrak{U}_2).$$

В силу $\rho 6$ из $\rho x y_1 z$ и $\rho x y_2 z$ вытекает, что $\rho x y_1 y_2$ или $\rho x y_2 y_1$. Рассмотрим подробно лишь первый случай: второй анализируется аналогично. Положим $y = y_1$, тогда имеем, что

$$y \neq x,\ \rho x y z,\ \forall u \neq y\ (\rho x u y \Rightarrow u \in \mathfrak{U}_1).$$

Кроме того, в силу $\rho 10$ из $\rho x u y_1$ и $\rho x y_1 y_2$ следует, что $\rho x u y_2$. Значит, $u \in \mathfrak{U}_2$ для всех таких $u \neq y$, для которых $\rho x u y$. В итоге

$$\forall u \neq y\ (\rho x u y \Rightarrow u \in \mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2).$$

(б). Пусть $a \in X$. Мы должны проверить, что множество $\mathfrak{U} = X - \{a\}$ открытое, т.е. что

$$\forall x \neq a\ \forall z \neq x\ \exists y \neq x\ (\rho x y z \wedge \forall u \neq y\ (\rho x u y \Rightarrow u \neq a)).$$

Пусть $x \neq a$ и $z \neq x$. Если при этом $\rho x a z$, то в качестве требуемого y можно брать a. В противном случае достаточно положить $y = z$. Тогда, конечно, $\rho x y z$; кроме того, если $\rho x u z$, то u не может совпадать с a.

Естественно называть топологию вида τ_ρ топологией межности. Следует отметить, что одну и ту же топологию могут породить разные межности. Например, на конечном множестве возможна лишь одна такая - т.наз. дискретная топология. Автору неизвестно, как соотносятся между собой приводящие к одной и той же топологии отношения межности на бесконечном множестве.

В нескольких последующих теоремах подробнее характеризуется строение топологий межности. Подчеркнем, что согласно принятым определениям обозначение $\tau_{\rho|A}$ означает топологию, порожденную на множестве $A \subset X$ ограничением $\rho|A$ межности ρ на A. Обозначение $\tau|A$, где τ – топология на X, означает топологию на A, индуцированную топологией τ.

<u>Теорема 5.</u> Пусть ρ – межность на X, и пусть $\mathcal{U} \subset X$. Множество $\mathcal{U}$ открыто в X (относительно ρ) тогда и только тогда, когда в каждом $A \in \mathbb{M}_\rho$ открыто (относительно $\rho|A$) множество $\mathcal{U} \cap A$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mathcal{U} \in \tau_\rho$, и пусть $A \in \mathbb{M}_\rho$. Покажем, что $\mathcal{U} \cap A \in \tau_{\rho|A}$, т.е. что все точки множества $\mathcal{U} \cap A \subset A$ внутренние в смысле существующей на A межности $\rho|A$. Предположим, что $x \in \mathcal{U} \cap A$, $z \in A$ и $z \neq x$. Тогда $A = L_{zx}$. По предположению, в X существует такой y, отличный от x, что $\rho x y z$ и что $u \in \mathcal{U}$ для любой отличной от y точки $u \in X$, удовлетворяющей условию $\rho x u y$. Но тогда $y \in L_{zx} = A$ и $(\rho|A) x y z$; кроме того, если $u \in A$, $u \neq y$ и $(\rho|A) x u y$, то, конечно, $\rho x u y$ и, далее, $u \in \mathcal{U}$. Значит $u \in \mathcal{U} \cap A$, поэтому x – действительно внутренняя точка множества $\mathcal{U} \cap A$ в A.

Пусть теперь $\mathcal{U} \cap A \in \tau_{\rho|A}$ для всех $A \in \mathbb{L}_\rho$. Покажем, что $\mathcal{U} \in \tau_\rho$, т.е. что все точки множества $\mathcal{U}$ – внутренние относительно ρ. Предположим, что $x \in \mathcal{U}$, $z \in X$ и $z \neq x$, а также – что $A = L_{zx}$. Тогда $A \in \mathbb{L}_\rho$, $x, z \in A$, и в A должна существовать точка y такая, что $y \neq x$, $(\rho|A) x y z$ и $u \in \mathcal{U} \cap A$ для любой отличной от y точки $u \in A$, удовлетворяющей условию $(\rho|A) x u y$. Но тогда, конечно, $\rho x y z$; кроме того, если $u \neq y$ и $\rho x u y$, то $u \in L_{xy} = A$ и $(\rho|A) x u y$. Поэтому $u \in A \cap \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. Значит, x действительно внутренняя точка множества $\mathcal{U}$.

В частности, мы показали, что $\tau_\rho | A \subset \tau_{\rho|A}$. Автору неизвестно, при каких условиях имеет место обратное включение.

Теорема 5 показывает, что в любом пространстве межности (X,ρ) естественная топология τ_ρ в определенном смысле полностью задается семейством внутренних топологий $\tau_{\rho|A}$, которые на каждой прямой A пространства могут быть заданы независимо от τ_ρ. Так как при этом все межности $\rho|A$ линейные, представляет интерес следующая характеристика топологий линейной межности.

Теорема 6. Пусть ρ – линейная межность на A. Тогда множество $\sigma_\rho \subset \exp(A)$, состоящее из самого A (если $|A|=1$) и всевозможных подмножеств вида $\{u : \rceil \rho u a b\}$, где $a \neq b$, служит предбазой топологии τ_ρ на A.

Доказательство. Нам необходимо показать, что 1) $\sigma_\rho \subset \tau_\rho$, 2) если $x \in \mathfrak{U} \in \tau_\rho$, то существует такое множество V, принадлежащее σ_ρ или представимое в виде конечного пересечения множеств из σ_ρ, для которого $x \in V \subset \mathfrak{U}$. Ограничимся указанием лишь основных идей, предоставляя читателю проверку деталей (сводящуюся к вычислениям на основе $\rho 1 - \rho 15$).

1) Конечно, $A \in \tau_\rho$. Пусть теперь $V=\{u : \rceil \rho u a b\}$, где $a \neq b$. Пусть, далее, $x \in V$; тогда $x \neq a$ и, в силу линейности ρ, $\rho x a x$ или $\rho a b x$. Выберем отличную от x точку z. Если $\rho z a x$, положим $y = a$, в противном случае пусть $y = z$. В обоих случаях получим, что $y \neq x$, $\rho x y z$ и $\forall u \neq y\ (\rho x u y \Rightarrow u \in V)$, так что x – внутренняя точка V. Следовательно, каждое множество вида V открыто.

2) Рассмотрим нетривиальный случай, когда $|A|>1$. Пусть $x \in \mathfrak{U} \in \tau_\rho$, и пусть $z \neq x$. Тогда найдется такой y, что $y \neq x$, $\rho x y z$ и $\forall u \neq y\ (\rho x u y \rightarrow u \in \mathfrak{U})$. Положим $V_1 = \{u : \rceil \rho u y z\}$. Далее возможны два случая. Если существует такой $z' \neq x$, что $\rho z' x z$, то найдется и такой $y' \neq x$, что $\rho x y' z'$ и $\forall u \neq y'\ (\rho x u y' \Rightarrow u \in \mathfrak{U})$. Тогда положим $V_2 = \{u : \rceil \rho u y' x\}$ и $V = V_1 \cap V_2$. Если такого z' нет, пусть $V = V_1$. Построенное множество V будет искомым.

Теперь сформулируем и докажем для топологий межности теоремы, аналогичные теоремам 2 и 3.

Определение 6. T-структурой на X называется всякая пара $\mathbb{T}=(\mathbb{K},\mathfrak{t})$, где $\mathbb{K}$ – система прямых в X, а $\mathfrak{t}$ – функция, сопоставляющая каждому $A\in\mathbb{K}$ какую-либо топологию линейной межности τ_A на A. В частности, если ρ – межность на X, то пара $\mathbb{T}_\rho=(\mathbb{M}_\rho,\mathfrak{t}_\rho)$, где функция $\mathfrak{t}_\rho$ определена условием $\mathfrak{t}_\rho(A)=\tau_{\rho|A}$, называется T-структурой пространства (X,ρ).

Пример 5. Пусть $\mathbb{T}=(\mathbb{K},\mathfrak{t})$ – произвольная T-структура. Определим B-структуру $\mathbb{B}=(\mathbb{K},\mathfrak{b})$, полагая что для всех $A\in\mathbb{K}$ $\mathfrak{b}(A)$ есть одна из линейных межностей ρ_A, таких, что $\tau_{\rho_A}=\mathfrak{t}(A)$. Пусть $\rho=\rho_{\mathbb{B}}$. Тогда $\mathbb{T}$ – T-структура пространства (X,ρ).

Однако в отличие от B-структур разные пространства межности могут иметь одинаковые T-структуры (ср. с замечанием после теоремы 4). С каждой T-структурой $\mathbb{T}=(\mathbb{K},\mathfrak{t})$ на X свяжем множество

$$\tau_{\mathbb{T}}=\{U\subset X:\forall A\in\mathbb{K}\ U\cap A\in\mathfrak{t}(A)\}.$$

Оказывается, что $\tau_{\mathbb{T}}$ всегда является топологией межности на X.

Теорема 7. Множество $\tau\subset\exp(X)$ тогда и только тогда является топологией межности на X, когда $\tau=\tau_{\mathbb{T}}$ для некоторой T-структуры $\mathbb{T}$ на X.

Доказательство. Пусть τ – топология межности, т.е. $\tau=\tau_\rho$ для некоторой межности ρ на X, и пусть $\mathbb{T}=\mathbb{T}_\rho$. В силу теоремы 4 имеем, что $\tau_\rho=\{U\subset X:\forall A\in\mathbb{L}_\rho\ U\cap A\in\tau_{\rho|A}\}$. Но это множество есть не что иное, как $\tau_{\mathbb{T}_\rho}$. В итоге $\tau=\tau_{\mathbb{T}}$. Наоборот, пусть $\mathbb{T}$ – T-структура на X, пусть $\tau=\tau_{\mathbb{T}}$, и пусть ρ – одна из тех межностей, для которых $\mathbb{T}=\mathbb{T}_\rho$ (см. пример 5). Тогда опять $\tau_{\mathbb{T}_\rho}=\tau_\rho$, откуда $\tau=\tau_\rho$. Значит τ – действительно топология межности.

Таким образом, и общее понятие топологии межности может быть сведено к своему частному случаю – к понятию топологии линейной межности. Последнее, в свою очередь, совпадает с хорошо известным понятием топологии упорядоченности (порядка). Напомним, что топологией упорядоченности на A называется любая такая топология $\tau_{\leq}$, которая имеет предбазу $\sigma_{\leq}$, состоящую из самого множества A (если $|A| = 1$) и всевозможных множеств вида $\{x : x < a\}$ или $\{x : a < x\}$, где $\leq$ – какая либо линейная упорядоченность на A, $<$ – соответствущая ей строгая упорядоченность. Наша последняя теорема связывает топологии линейной упорядоченности и линейной межности.

<u>Теорема 8.</u> Пусть $\leq$ – линейная упорядоченность на A. Тогда $\sigma_{\leq} = \sigma_{\rho_{\leq}}$ и, следовательно, $\tau_{\leq} = \tau_{\rho_{\leq}}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть V – истинное подмножество A (случай $V = A$ тривиален). Тогда $V \in \sigma_{\rho_{\leq}} \Leftrightarrow V = \{x : \neg\rho_{\leq} xab\}$ для некоторых различных $a, b \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow V = \{x : \neg(x \leq a \leq b) \wedge \neg(b \leq a \leq x)\} \Leftrightarrow V = \{x : \neg(x \leq a \leq b)\} \cap$$

$$\cap \{x : \neg(b \leq a \leq x)\} \Leftrightarrow V = \{x : a \leq b \Rightarrow a < x\} \cap \{x : b \leq a \Rightarrow x < a\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \left\{ \begin{array}{l} \{x : a < x\}, \text{если } a < b \\ \{x : x < a\}, \text{если } b < a \end{array} \right\} \Leftrightarrow V \in \sigma_{\leq}.$$

Литература

1. Биркгоф Г. Теория структур. М., 1952.
2. Келли Дж.Л. Общая топология. М., 1968.
3. Szmielew W. Oriented and nonoriented linear orders.- Bull. Polon. Acad. Sci , 1977, v. 25, N 7, p.659-665.
4. Sczerba L.W., Tarski A. Metamathematical properties of some affine geometries. In: Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1964 Intern. Congr., 1964), 1965., pp. 168-178.

Поступила 17 января 1980 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

О КРУЖЕВНОМ КРИТЕРИИ МЕТРИЗУЕМОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

А.П.Шостак
ЛГУ им. П.Стучки

К числу важнейших обобщений метризуемых пространств, в большом количестве появившихся в последние два десятилетия, принадлежат, безусловно, кружевные пространства, введенные Дж.Сидером [4], и исследовавшиеся интенсивно Р.Боргесом [2] и другими авторами. Обладая многими достоинствами метризуемых пространств (счетная мультипликативность, наследственность и др.), кружевные пространства им ют и ряд преимуществ перед ними. Так, класс кружевных пространств инвариантен относительно операции присоединения и перехода к замкнутому образу; объединение кружевных пространств, наделенное слабой топологией, является кружевным [2] - последнее особенно важно для нужд алгебраической топологии. Кружевные пространства являются совершенно нормальными паракомпактами с G_δ -диагональю и, следовательно, уплотняются на метризуемые пространства ([10], [2]; см. также [3], [11]). Если у кружевного пространства имеется точечно счетная база, то оно метризуемо [6]. Метризуемым будет и каждое кружевное перистое пространство. С другой стороны, известны примеры неметризуемых кружевных сепарабельных пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности [4].

В связи со всем вышесказанным нам представляется интересным и естественным найти условие, необходимое и достаточное для метризуемости топологического пространства, которое было бы сформулировано в "кружевных" терминах. В данной заметке получен результат такого рода - критерий метризуемости пространства в терминах псевдобазы Р.Хита [7].

Напомним известный результат Хита ([7], см. также

[9]), согласно которому T_1 -пространство X является кружевным тогда и только тогда, когда каждой точке $x \in X$ может быть сопоставлена последовательность ее открытых окрестностей $\{V_n(x): n \in \mathbb{N}\}$, причем таким образом, что если G - замкнутое множество, не содержащее x, то $x \notin \overline{\cup\{V_m(y): y \in G\}}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что определенное таким образом семейство окрестностей $\{V_n(x): n \in \mathbb{N}, x \in X\}$ является псевдобазой пространства X (так называемая псевдобаза Хита). Положим для множества $G \subset X$ $V_n(G) = \cup\{V_n(y): y \in G\}$. Предыдущую теорему мы можем сформулировать теперь таким образом:

<u>Теорема.</u> (Р.Хит) T_1 -пространство X является кружевным тогда и только тогда, когда в нем существует система окрестностей $\{V_n(x): n \in \mathbb{N}, x \in X\}$, удовлетворяющая следующему условию:

(а) для каждой точки $x \in X$ и не содержащего ее замкнутого множества G существует n такое, что $x \notin \overline{V_n(G)}$.

Следующая теорема, являющаяся основной в нашей заметке, дает "кружевной" критерий метризуемости топологического пространства и одновременно выясняет некоторые аспекты взаимосвязи между свойствами наличия кружева в пространстве и свойством его метризуемости:

<u>Теорема.</u> T_1 -пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда в нем существует система окрестностей $\{V_n(x): x \in X, n \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

(а) для каждой точки $x \in X$ и не содержащего ее замкнутого множества G существует n такое, что $x \notin \overline{V_n(G)}$;

(в) для каждого множества G и каждого n имеет место включение $\overline{V_{n+1}(V_{n+1}(G))} \subset V_n(G)$.

<u>Доказательство.</u> Пусть (X, ρ) - метрическое пространство. Определим для каждой точки $x \in X$ окрестность $V_n(x) = \{y: y \in X, \rho(x,y) < 3^{-n}\}$. Тогда для множества $G \subset X$, очевидно, $V_n(G) = \{y: y \in X, \rho(G,y) < 3^{-n}\}$. Справедливость условия (а) для определенной таким образом системы окрестностей $\{V_n(x): x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ очевидна. Для проверки условия (в) возьмем $x \in \overline{V_{n+1}(V_{n+1}(G))}$, и пусть $y \in V_{n+1}(V_{n+1}(G))$ - точка, удовлетворяющая неравенству

$\rho(x,y)<3^{-n-1}$. Выберем теперь $y'\in V_{n+1}(G)$ и $z\in G$ таким образом, чтобы $\rho(y,y')<3^{-n-1}$ и $\rho(y',z)<3^{-n-1}$. Очевидно, что $\rho(x,z)\leq\rho(x,y)+\rho(y,y')+\rho(y',z)\leq 3^{-n}$, а следовательно, $x\in V_n(G)$.

Обратно, пусть в T_1 -пространстве X существует система окрестностей $\{V_n(x): x\in X, n\in\mathbb{N}\}$, удовлетворяющая условиям (а) и (в). Легко видеть, что эта система всегда может быть выбрана таким образом, чтобы для точки $x\in X$ и каждого $n\in\mathbb{N}$ выполнялось включение $V_n(x)\supset V_{n+1}(x)$.

Рассмотрим функцию $d: X\times X\longrightarrow R^+$, определенную равенством $d(x,y)=\min\{3^{-n}: y\in V_n(x)\}$. Очевидно, что $d(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$. Пусть для точек $x,y,z\in X$ выполнены неравенства $d(x,y)<3^{-n-1}$ и $d(y,z)<3^{-n-1}$; это означает, что $y\in V_{n+1}(x)$ и $z\in V_{n+1}(y)$. Но тогда, согласно (в) $z\in V_{n+1}(V_{n+1}(x))\subset V_n(x)$, т.е. $d(x,z)<3^{-n}$. Определим теперь функцию $e: X\times X\to R^+$, симметризующую d, положив для точек $x,y\in X$ $e(x,y)=\frac{1}{2}(d(x,y)+d(y,x))$. Ясно, что если $e(x,y)<3^{-n-2}$ и $e(y,z)<3^{-n-2}$, то $d(x,y)<3^{-n-1}$, $d(y,x)<3^{-n-1}$, $d(y,z)<3^{-n-1}$ и $d(z,y)<3^{-n-1}$, а следовательно, как было установлено, $d(x,z)<3^{-n}$ и $d(z,x)<3^{-n}$, откуда $e(x,z)<3^{-n}$.

Итак, для каждого положительного числа s существует такое положительное число r, что если $e(x,y)<r$ и $e(y,z)<r$, то $e(x,z)<s$. Поскольку, очевидно, $e(x,y)=e(y,x)$ для любых $x,y\in X$ и $e(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$, то функция $e: X\times X\to R^+$ является "отклонением" на множестве X [8]. Согласно теореме Читтендана [8, с. 275] найдется метрика ρ на X, удовлетворяющая следующему условию:

(*) для каждого $s>0$ существует $r>0$ такое, что если $e(x,y)<r$, то $\rho(x,y)<s$ и если $\rho(x,y)<r$, то $e(x,y)<s$.

Соответствующее метрическое пространство будем обозначать X_ρ. Нам осталось показать, что топология в X_ρ совпадает с топологией исходного пространства X.

Пусть G - замкнутое подмножество в X и $x\notin G$. Выберем такое n, чтобы $x\notin V_n(G)$. Тогда $d(y,x)>3^{-n}$ для всех $y\in G$, а следовательно $e(x,y)>2\cdot 3^{-n}$. Из условия (*) вытекает существование такого числа $r>0$, что $\rho(x,y)>r$ как только $e(x,y)\geq 2\cdot 3^{-n}$. Отсюда, в частности, следует, что $\rho(x,G)>0$, что и доказывает замкнутость множества G

в X_ρ.

Обратно, пусть G – замкнутое подмножество пространства X_ρ и $x \notin G$. Тогда $\rho(x, G) > 0$, а следовательно, $e(x, G) > 0$, т.е. найдется такое число $n \in \mathbb{N}$, что для всех $y \in G$ имеет место неравенство $e(x, y) > 3^{-n}$. Поскольку $e(x, y) = \frac{1}{2}(d(x,y) + d(y,x))$, множество G можно представить в виде объединения $G = G_1 \cup G_2$, где $G_1 = \{y : y \in G, d(x,y) > 3^{-n}\}$, а $G_2 = \{y : y \in G, d(y,x) > 3^{-n}\}$. Пусть $y \in G_1$, тогда $y \notin V_n(x)$, а следовательно, $V_n(x) \cap G_1 = \phi$. Если же $y \in G_2$, то $x \notin V_n(y)$, и значит, $x \notin V_n(G_2)$. Но тогда $x \notin \overline{G_2}$ (замыкание берется в X), так как согласно (в) $\overline{G} \subset \overline{V_{n+1}(G_2)} \subset \subset \overline{V_{n+1}(V_{n+1}(G_2))} \subset V_n(G)$. Следовательно, $x \notin \overline{G_1} \cup \overline{G_2} = \overline{G}$, что и доказывает замкнутость множества G в пространстве X.

<u>Замечание 1.</u> Поскольку из условия (в) следует, что для каждого множества $G \subset X$ имеет место включение $\overline{V_{n+1}(G)} \subset \subset V_n(G)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, одновременное выполнение условий (а) и (в) равносильно одновременному выполнению условий (а') и (в), где

(а') для каждой точки $x \in X$ и каждого не содержащего его замкнутого множества $G \subset X$ существует n такое, что $x \notin V_n(G)$.

Ввиду этого теорема 1 может быть переформулирована теперь таким образом:

<u>Теорема 1'.</u> T_1-пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда в нем существует система окрестностей $\{V_n(x) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющая условиям (а') и (в).

В связи с этим интересно напомнить следующую характеристику полукруженных пространств, принадлежащую Криду ([5], см. также [9]):

<u>Теорема</u> (G. Creede) T_1-пространство является полукруженным тогда и только тогда, когда в нем существует система окрестностей $\{V_n(x) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$, удовлетворяющая условию (а').

Замечание 2. Покажем, что условие (в) равносильно одновременному выполнению следующих двух условий:

($в_1$) для любых $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место включение $V_{n+1}(V_{n+1}(x)) \subset V_n(x)$;

($в_2$) для каждого множества $G \subset X$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо $\overline{V_{n+1}(G)} \subset V_n(G)$.

Действительно, из условия (в) очевидным образом вытекает справедливость условий ($в_1$) и ($в_2$). Обратно, из условия ($в_1$) следует, что $V_{n+1}(V_{n+1}(G)) \subset V_n(G)$ для каждого $G \subset X$. Воспользовавшись условием ($в_2$), отсюда получим $V_{n+1}(V_{n+1}(G)) \supset \overline{V_{n+1}(V_{n+1}(G))} \supset \overline{V_{n+2}(V_{n+2}(G))}$, откуда $V_n(G) \supset V_{n+2}(V_{n+2}(G))$. Теперь легко заметить, что для системы $\{V_n(x): x \in X, n=2k, k\in \mathbb{N}\}$ выполнено условие (в). При этом если система окрестностей $\{V_n(x): x\in X, n\in \mathbb{N}\}$ удовлетворяла условию (а), то и система $\{V_n(x): x\in X, n=2k, k\in \mathbb{N}\}$ будет удовлетворять условию (а).

Литература

1. Архангельский А.В. Отображения и пространства. – УМН, 1966, т.31, № 4, с. 133-184.

2. Borges C.J.R. On stratifiable spaces – Pacific J. Math., 1966, v. 17, p. 1-16.

3. Bregman Ju.H. A note on M_1-spaces – Pacific spaces – CMUC, 1983, v. 24, N 1, p. 27-33.

4. Ceder J. Some generalizations of metric spaces.- Pacific J.Math., 1966, v. 11, p. 105-125.

5. Creede G. Concerning semi-stratifiable spaces.- Pacific J.Math., 1970, v. 32, p. 47-54.

6. Heath R.W. On spaces with point-countable bases.- Bull. Acad. Polon. Sci, Ser. Math., 1965, v. 13. N 6, p. 393-395.

7. Heath R.W. On open mappings and certain spaces satis-fying the first countability axiom,-Fund.Math., 1965, v. 57, p. 91-96.

8. Келли Дж.Л. Общая топология. М., 1967.

9. Nagata J.-iti Some theorems on generalized metric

10. Okuyama A. On metrizability of M-spaces - Proc. Japan. Acad., 1964, vol. 40, p. 176-179.

11. Šostak A.P. Some remarks on bijections auto metric spaces. - Czechoslovak math. J., 1983, vol.33 (108), N 3, p. 420-426.

Поступила 16 апреля 1981 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 517.98

О ДЕКОМПОЗИЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.Л.Энгельсон
ЛГУ им. П.Стучки

В ряде работ М.М.Вайнберга и автора рассматривался вопрос о существовании корня квадратного из линейного ограниченного оператора B, действующего из одного локально выпуклого пространства в другое (см. [I], где, в частности, пп. 15.3 и 15.5 содержат соответствующие результаты и ссылки). Полученные результаты были затем приложены к доказательству теорем о существовании решения уравнения вида $x = BFx$, где F – нелинейный оператор из локально выпуклого пространства E в его сильное сопряженное пространство E', а B – линейный ограниченный оператор из E' в E (см. [I], [2]). Исследование квадратного корня из линейного оператора в случае банахова пространства было продолжено в [3] (см. также [I, §16]), где существование и свойства квадратного корня изучались без предположения об ограниченности оператора и без условия вложимости [I, с.207] пространства E. Эти результаты были приложены в [4] (см. также [I, §17]) к доказательству теорем существования решений нелинейных уравнений типа Гаммерштейна в банаховом пространстве.

В настоящей работе предложения, аналогичные теоремам из [3], получены для некоторых классов локально выпуклых пространств.

I. Пусть E – отделимое локально выпуклое пространство, удовлетворяющее следующему условию:

/A_1/. Существует такое гильбертово пространство H, что I) $H \cap E \neq \emptyset$ и $H \cap E' \neq \emptyset$, причем топология, индуцированная в $E \cap H$ из E, мажорирует топологию, индуцированную в этом множестве из H, 2) множество

$H \cap E'$ плотно в H и в E', и 3) значение $\langle y, x\rangle$ линейного непрерывного функционала $y \in E'$ в точке $x \in E$ равно скалярному произведению этих элементов, если $y \in E' \cap H$ и $x \in E \cap H$.

Условию /A_1/ удовлетворяет, например, пространство $\mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ всех бесконечно дифференцируемых функций из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ [9, гл. III]. Действительно, пространства $\mathcal{E}$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$ имеют непустое пересечение, содержащее, в частности, множество $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ всех быстроубывающих бесконечно дифференцируемых функций, а пересечение пространства $\mathcal{E}'$ всех финитных обобщенных функций с $L^2(\mathbb{R}^n)$ содержит множество $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций, плотное в $L^2(\mathbb{R}^n)$ и в $\mathcal{E}'$ [7, теор. 1.2.1]. Очевидно, условие вложимости, т.е. $E \subset H \subset E'$, которое использовалось в [2] и других работах, для пространства $E = \mathcal{E}$ не выполнено. Ясно также, что топология, индуцированная в $\mathcal{E} \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ из $\mathcal{E}$, мажорирует топологию, индуцированную из $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. Будем говорить, что линейный оператор $B : \mathcal{D}(B) \to E$ обладает свойством /β_1/, если:

1) $\mathcal{D}(B) \subset E'$ и $\mathcal{D}(B)$ плотно в E',

2) $\mathcal{D}(B) \cap H$ плотно в H,

3) Сужение B_0 оператора B на множество $\mathcal{D}(B) \cap H$ есть симметричный оператор, допускающий самосопряженное положительное расширение B_H в H.

<u>Теорема 1.</u> Пусть E удовлетворяет условию /A_1/, а линейный оператор B обладает свойством /β_1/ и $A = B_H^{1/2} : \mathcal{D}(A) \mapsto H$ – положительный квадратный корень из оператора B_H, $\mathcal{D}(A) \subset H$.

Тогда сужение $\tilde{A}$ оператора A на $\mathcal{D}(A) \cap E'$ допускает замыкание $T : \mathcal{D}(T) \mapsto H$, $\mathcal{D}(T) \subset E'$, причем

$$T'T x = Bx \quad \text{для всех } x \in \mathcal{D}(B) \cap H. \tag{1}$$

<u>Доказательство.</u> A является самосопряженным оператором в H, поэтому $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A') \subset H$ и $R(A) \subset H$, но тогда $\mathcal{D}(\tilde{A}) \subset E'$ и $R(\tilde{A}) \subset H$. Учитывая, что

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A) \cap E' \supset \mathcal{D}(B_H) \cap E' \supset \mathcal{D}(B_0),$$

в силу свойства /β_1/ получаем

$$\overline{\mathfrak{D}(\tilde A)}^{E'} \supset \overline{\mathfrak{D}(B_0)}^{E'} \supset \overline{\mathfrak{D}(B_0)}^{H} \supset H \supset H\cap E',$$

где $\overline{\mathfrak{D}(B_0)}^{E'}$ – замыкание множества $\mathfrak{D}(B_0)$ в топологии, индуцированной в $H\cap E'$ из пространства E', а $\overline{\mathfrak{D}(B_0)}^{H}$ – замыкание того же множества в топологии, индуцированной из H, которая, как это следует из условия /α_1/, мажорирует топологию, индуцированную из E' [1, лемма 15.1] (см. также [5]). Из полученного включения в силу условия /α_1/ следует, что $\overline{\mathfrak{D}(\tilde A)}^{E'} \supset \overline{H\cap E'}^{E'} \supset E'$, т.е. плотность $\mathfrak{D}(\tilde A)$ в E'. Поэтому существует сопряженный к $\tilde A$ оператор $\tilde A'$, причем $\mathfrak{D}(\tilde A') \subset H$ и $R(\tilde A') \subset E''$. Далее из $\mathfrak{D}(A) \supset \mathfrak{D}(\tilde A)$ следует $\mathfrak{D}(\tilde A') \supset \mathfrak{D}(A') \supset \mathfrak{D}(B_H) \supset \mathfrak{D}(B)\cap H$, а потому, в силу свойства /β_1/, $\mathfrak{D}(\tilde A')$ плотно, а значит, и слабо* плотно в H. Согласно лемме 2.1 из [6] отсюда вытекает существование замыкания T оператора $\tilde A$, так что $\mathfrak{D}(\tilde A) \subset \mathfrak{D}(T) \subset E'$, $R(T) \subset H$ и график $G(T) = \overline{G(\tilde A)}^{E'\times H}$, а значит,

$$Tx = \tilde A x \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{D}(\tilde A) = \mathfrak{D}(A)\cap E'.$$

Пусть $x \in \mathfrak{D}(A)\cap E'$ и $h \in \mathfrak{D}(T)$. Так как $(h, Th) \in \overline{G(\tilde A)}$, то существует сеть $\{h_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{D}(\tilde A)$ такая, что

$$\lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} (h_\alpha, \tilde A h_\alpha) = (h, Th).$$

Поэтому, учитывая, что $\mathfrak{D}(B_0) = \mathfrak{D}(B)\cap H \subset \mathfrak{D}(\tilde A) \subset \mathfrak{D}(A)$, имеем

$$Tx = Ax \quad \text{и} \quad Th_\alpha = Ah_\alpha \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{D}(B)\cap H,\ h_\alpha \in \mathfrak{D}(\tilde A).$$

Следовательно, для $h \in \mathfrak{D}(T)$ получаем:

$$\langle Th, Tx\rangle = \langle Th, Ax\rangle = \lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} \langle Th_\alpha, Ax\rangle = \lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} \langle Ah_\alpha, Ax\rangle = \lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} \langle h_\alpha, AAx\rangle = \langle h, B_H x\rangle = \langle h, Bx\rangle.$$

Так как вместе с $\mathfrak{D}(\tilde A)$ множество $\mathfrak{D}(T)$ также плотно в E', то существует сопряженный к T оператор T', и из полученного равенства вытекает $Tx \in \mathfrak{D}(T')$ и равенство (1). Теорема доказана.

Замечание. Так как $\mathfrak{D}(T) \subset E'$, то значения оператора T' принадлежат E'', но для $x \in \mathfrak{D}(B)\cap H$ образ $Bx \in E'$, поэтому в силу (1) получаем также $T'Tx \in E$. Это значит, что оператор T' отображает множество $T(\mathfrak{D}(B)\cap H)$ в пространство E.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, и график оператора B_0 плотен в графике оператора B. Тогда оператор $T'T$ допускает замыкание, и

$$\overline{T'T}x = Bx \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{D}(B). \qquad (2)$$

Доказательство. Из теоремы I следует, что $\mathfrak{D}(T'T) \supset \mathfrak{D}(B) \cap H$, откуда так же, как раньше для оператора $\tilde{A}$, можно заключить, что $\mathfrak{D}(T'T)$ плотно в E', и следовательно, существует сопряженный оператор $(T'T)'$. Далее, из доказанной выше замкнутости оператора T и плотности в E' множества $\mathfrak{D}(T)$ вытекает равенство $T'' = T$, [8 , гл. IУ,7.I]. Следовательно, для любых $x, y \in \mathfrak{D}(B) \cap H$ имеем

$$\langle T'Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T'Ty\rangle,$$

откуда $(T'T)'|_{\mathfrak{D}(B)\cap H} = T'T|_{\mathfrak{D}(B)\cap H}$. Таким образом, $\mathfrak{D}((T'T)') \supset \mathfrak{D}(B) \cap H$, откуда снова можем заключить, что множество $\mathfrak{D}((T'T)')$ плотно, а значит, и слабо* плотно в E'. Поэтому существует замыкание $\overline{T'T}$ оператора $T'T$, причем в силу теоремы I $G(\overline{T'T}) = \overline{G(T'T)} \supset \overline{G(B_0)}$, а так как по условию данной теоремы $\overline{G(B_0)} \supset G(B)$, то $\overline{T'T}|_{\mathfrak{D}(B)} = B$. Теорема доказана.

Ясно, что если оператор $T'T$ замкнут, то $T'T|_{\mathfrak{D}(B)} = B$.

Замечание. Если оператор B замкнут, то из условий теоремы 2 вытекает равенство $\overline{B_0} = B$. Действительно, так как $G(B_0)$ плотно в $G(B)$, то $\overline{G(B_0)} \supset G(B)$, откуда ввиду замкнутости $G(B)$ и включения $G(B) \supset G(B_0)$ следует $G(B) = G(\overline{B_0})$.

3. Рассмотрим далее случай, когда оператор B_H не является положительным. Если при этом B обладает свойством /ρ_1/, то будем говорить, что оператор B обладает свойством /ρ_2/. Для такого оператора B положим

$$B_H^+ = \tfrac{1}{2}(|B_H| + B_H), \quad B_H^- = \tfrac{1}{2}(|B_H| - B_H),$$
$$A = (B_H^+)^{\frac{1}{2}} + (B_H^-)^{\frac{1}{2}}, \quad C = (B_H^+)^{\frac{1}{2}} - (B_H^-)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 3. Пусть пространство E удовлетворяет условию /$\mathcal{A}_1$/ а оператор B обладает свойством /ρ_2/. Тогда сужения операторов A и C:

$$A|_{\mathfrak{D}(A)\cap E'} = \tilde{A} \quad \text{и} \quad C|_{\mathfrak{D}(C)\cap E'} = \tilde{C},$$

допускают замыкания V и W соответственно, причем

$$V'Wx = W'Vx = Bx \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{D}(B)\cap H. \qquad (3)$$

Доказательство. Пользуясь теми же рассуждениями, что и при доказательстве теоремы I, строим операторы V и W как замыкания операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$ соответственно, причем $G(V) = \overline{G(\tilde{A})} \subset E' \times H$ и $G(W) = \overline{G(\tilde{C})} \subset E' \times H$.

Для доказательства равенства (3) выберем произвольно $h \in \mathfrak{D}(V)$ и $x \in \mathfrak{D}(B)\cap H$. Так как $(h, V(h)) \in \overline{G(\tilde{A})}$, то найдется сеть $\{(h_\alpha, V(h_\alpha)), \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset G(\tilde{A})$, сходящаяся к $(h, V(h))$, причем $h_\alpha \in \mathfrak{D}(A)\cap E'$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$. Тогда для выбранных h и x получаем

$$\langle Vh, Wx\rangle = \lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} \langle Vh_\alpha, \tilde{C}x\rangle = \lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} \langle Ah_\alpha, Cx\rangle =$$
$$= \lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} \langle h_\alpha, A'Cx\rangle = \lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} \langle h_\alpha, B_H x\rangle = \langle h, Bx\rangle.$$

Отсюда видно, что

$$Wx \in \mathfrak{D}(V') \text{ и } V'Wx = Bx \quad \text{для всех } x \in \mathfrak{D}(B)\cap H.$$

Аналогично доказывается второе из равенств (3).

Теперь подобно теореме 2 доказывается

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3, и график оператора B_0 плотен в $G(B)$, то операторы $V'W$ и $W'V$ допускают замыкания, и для всех $x \in \mathfrak{D}(B)$ имеют место равенства

$$\overline{V'W}x = \overline{W'W}x = Bx. \qquad (4)$$

Доказательство. Так же, как при доказательстве теоремы 2, устанавливаем, что $\mathfrak{D}(V'W)$ и $\mathfrak{D}(W'V)$ плотны в E', и поэтому существуют сопряженные операторы $(V'W)'$ и $(W'V)'$. Так как множества $\mathfrak{D}(V)$ и $\mathfrak{D}(W)$ плотны в E' и операторы V и W замкнуты, то $V'' = V$ и $W'' = W$, откуда так же, как в доказательстве теоремы 2, вытекает существование замыканий $\overline{W'V}$ и $\overline{V'W}$.

Отсюда и из теоремы 3 вытекает, что $G(\overline{V'W}) = \overline{G(V'W)} \supset \overline{G(B_0)}$, а так как $\overline{G(B_0)} \supset G(B)$ по условию данной теоремы, то $G(\overline{V'W}) \supset G(B)$, что и означает выполнение одного из равенств (4) для всех $x \in \mathfrak{D}(B)$. Второе равенство получается так же.

4. Рассмотрим далее случай, когда оператор B ограничен из E' в E, т.е. отображает некоторую окрестность

нуля в ограниченное множество.

Теорема 5. Пусть E удовлетворяет условию /α_1/, а ограниченный линейный оператор B из E' в E обладает свойством /β_1/. Тогда сужение $\tilde{A}$ оператора $A = B_H^{1/2}$ на $H \cap E'$ имеет ограниченное продолжение $T: E' \mapsto H$ и

$$T'T = B. \tag{5}$$

Доказательство. Для произвольно выбранного x из множества $E' \cap H$, плотного в E' и в H, имеем:

$$\langle \tilde{A}x, \tilde{A}x \rangle = \langle x, A^2 x \rangle = \langle x, B_H x \rangle.$$

Так как $B_H|_{H \cap E'} = B|_{H \cap E'}$, это равенство можно переписать так:

$$\|\tilde{A}x\|_H^2 = \langle x, Bx \rangle \text{ для всех } x \in H \cap E'. \tag{6}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу ограниченности оператора B найдется окрестность нуля $\mathcal{U}_1 \subset E'$ такая, что $B(\mathcal{U}_1)$ ограничено в E, следовательно, его поляра $(B(\mathcal{U}_1))^0$ – окрестность нуля в сильной топологии E'. Тогда для $x \in \varepsilon[(B(\mathcal{U}_1))^0 \cap \mathcal{U}_1] = \mathcal{U}$ получаем

$$|\langle x, Bx \rangle| \leqslant \varepsilon^2.$$

Отсюда и из равенства (6) следует

$$\|\tilde{A}x\|_H^2 \leqslant \varepsilon^2 \text{ для всех } x \in H \cap \mathcal{U}.$$

Это означает, что оператор $\tilde{A}$ непрерывен на плотном в E' множестве $H \cap E'$, поэтому существует непрерывное продолжение T оператора $\tilde{A}$ на все пространство E'. Так как значения оператора T принадлежат нормированному пространству H, то он является также ограниченным, откуда следует ограниченность сопряженного оператора T' из H в E'.

Для любого $x \in E'$ существует сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset H \cap E'$ такая, что $\lim\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha = x$ (условие /α_1/), поэтому ввиду непрерывности операторов T, T' и B получаем:

$$T'Tx = \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} T'Tx_\alpha = \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \tilde{A}'\tilde{A}x_\alpha = \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} A^2 x_\alpha =$$
$$= \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} B_H x_\alpha = \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} Bx_\alpha = Bx.$$

Следовательно, $T'T = B$ и $T'(T(E')) \subset E$.

Теорема 6. Пусть E удовлетворяет условию /α_1/, а линейный оператор B из E' в E обладает свойством /β_2/, причем существуют такие ограниченные из E' в E линейные операторы B^+ и B^-, что $B = B^+ + B^-$ и

$$B^+|_{H\cap E'} = B_H^+|_{H\cap E'}, \quad B^-|_{H\cap E'} = B_H^-|_{H\cap E'}.$$

Тогда сужения $\widetilde{A}$ и $\widetilde{C}$ на $H \cap E'$ операторов A и C (см. теор. 3) имеют продолжения V и W, ограниченные из E' в H, причем

$$W'V = V'W = B. \tag{7}$$

<u>Доказательство.</u> Для $x \in H \cap E'$ имеют место равенства:

$$\langle \widetilde{A}x, \widetilde{A}x \rangle = \langle A^2 x, x \rangle = \langle B_H x, x \rangle = \langle B_H^+ x, x \rangle + \\ + \langle B_H^- x, x \rangle = \langle B^+ x, x \rangle + \langle B^- x, x \rangle. \tag{8}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как операторы B^+ и B^- ограничены, то существует окрестность нуля $\mathcal{U}_1 \subset E'$, для которой $B^+(\mathcal{U}_1)$ и $B^-(\mathcal{U}_1)$ ограничены в E. Тогда их поляры являются окрестностями нуля в E', и для $x \in \frac{\varepsilon}{2}[(B^+(\mathcal{U}_1))^\circ \cap (B^-(\mathcal{U}_1))^\circ \cap \mathcal{U}_1]$ имеем

$$|\langle B^+ x, x \rangle| \leq \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad |\langle B^- x, x \rangle| \leq \frac{\varepsilon^2}{4},$$

откуда в силу равенства (8) получаем

$$\|\widetilde{A}x\|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \text{для всех } x \in H \cap \frac{\varepsilon}{2}[(B^+(\mathcal{U}_1))^\circ \cap (B^-(\mathcal{U}_1))^\circ \cap \mathcal{U}_1].$$

Таким образом, оператор непрерывен на плотном в E' множестве $H \cap E'$ и, следовательно, имеет непрерывное продолжение V из E' в H, которое также ограничено. Тогда и оператор V' ограничен из H в E''. Точно таким же образом доказывается, что оператор $\widetilde{C}$ имеет ограниченное продолжение W из E' в H и что W' – ограниченный оператор из H в E''.

Пусть $x \in E'$. В силу условия $/\lambda_1/$ существует сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset H \cap E'$, предел которой равен x. Поэтому для любого $h \in H \cap E'$ имеем

$$\langle W'Vx, h \rangle = \langle Vx, Wh \rangle = \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \langle Vx_\alpha, Wh \rangle =$$
$$= \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \langle \widetilde{A}x_\alpha, \widetilde{C}h \rangle = \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \langle B_H x_\alpha, h \rangle = \lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \langle Bx_\alpha, h \rangle = \langle Bx, h \rangle,$$

ибо операторы V и B непрерывны. Таким образом,

$$\langle W'Vx, h \rangle = \langle Bx, h \rangle \quad \text{для всех } x \in E', \ h \in H \cap E'.$$

Но так как $H \cap E'$ плотно в E', то $W'Vx = Bx$ для всех $x \in E'$, т.е.,

$$W'V = B.$$

Так же доказывается второе из равенств (7).

Литература

I. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.,I972.

2. Энгельсон Я.Л. К теории нелинейных уравнений в локально выпуклых пространствах.-Латвийский математический ежегодник, I966, т.2, с.349-356.

3. Вайнберг М.М., Лаврентьев И.М. О квадратном корне из линейного оператора в некоторых банаховых пространствах.-Вестник Московского университета, I970, №6, с.36-46.

4. Вайнберг М.М., Лаврентьев И.М. Нелинейные уравнения типа Гаммерштейна с потенциальными и монотонными операторами в банаховых пространствах.-Математический сборник, I972, т.87, вып.3, с.324-337.

5. Энгельсон Я.Л. Некоторые вопросы вариационной теории нелинейных уравнений в локально выпуклых пространствах.-Ученые записки Латвийского Государственного Университета, I959, т.28, вып.4, с.45-65.

6. Browder F.E. Funktional analysis and partial differential equations I.-Math. Ann., 1959, v.138, p.55-79.

Русский перевод см.: Математика:Сборник переводов, I960, вып.4:3, с.78-I42.

7. Хёрмандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.,I965.

8. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.,I97I.

9. Schwartz L. Theorie des distributions. v. 1. Paris, 1950.

Поступила 23 октября I98I г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 513.83+519.21

ГЕЛЬФАНДОВСКАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ И ДВУЗНАЧНЫЕ МЕРЫ

А.И.Жданок
РПИ

Пусть X некоторое множество, и Σ - произвольная σ-алгебра его подмножеств (далее будем использовать обозначения и определения работы [1]). Пространство измеримых ограниченных функций $B(X,\Sigma)$ как банахова алгебра изоморфна алгебре непрерывных ограниченных функций $C(\gamma_\Sigma X)$ на некотором компакте $\gamma_\Sigma X$. Этот компакт обычно называют гельфандовской компактификацией пространства (X,Σ) и определяют как наименьший компакт, содержащий X, и такой, что все функции из $B(X,\Sigma)$ имеют на него единственное непрерывное продолжение (наличия топологии в X не предполагается) Если X топологическое пространство с борелевской σ-алгеброй $\mathfrak{B}$, то гельфандовская компактификация $\gamma_{\mathfrak{B}} X$ шире хорошо изученной стоун-чеховской компактификации βX. Гельфандовская компактификация оказалась полезной при изучении марковских случайных процессов. Некоторые свойства $\gamma_\Sigma X$ были изучены в работе [1] и затем использованы при выводе эргодических теорем для марковских процессов в [1] и [2].

Если Q является компактным пространством, то известен целый ряд теорем о представлении Q через элементы пространства $C^*(Q)$, сопряженного к пространству $C(Q)$. В теории банаховых алгебр обычно устанавливается соответствие между Q и некоторым множеством мультипликативных функционалов на $C(Q)$ [3]. В анализе это же множество трактуют как множество крайних точек единичной сферы в $C^*(Q)$ [4]. Поскольку $C^*(Q)$ изометрично некоторому пространству мер (обобщенная теорема Рисса), то интересно представление указанных множеств мультипликативных функционалов или крайних точек как множеств мер. Для случая, когда Q является стоун-чеховской компактификацией

βX, соответствующий результат приведен, например, в [5,с.85]. В настоящей заметке такого рода теорема доказывается для гельфандовской компактификации.

<u>Определение 1.</u> Мера $\mu \in ba(X,\Sigma)$, $\mu \neq 0$, называется двузначной, если для любого $E \in \Sigma$ либо $\mu(E)=0$ либо $\mu(E)=\mu(X)$.

<u>Определение 2.</u> Мера $\mu = \delta_x \in ba(X,\Sigma), x \in X$ называется мерой Дирака, если для любого $E \in \Sigma$

$$\delta_x = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Очевидно, мера Дирака счетно-аддитивна.

<u>Определение 3.</u> Измеримое пространство (X,Σ) назовем пространством Дирака, если любая двузначная счетно-аддитивная мера на (X,Σ) является мерой Дирака с некоторым вещественным множителем. В случае топологического X рассматриваем только регулярные меры на $(X,\mathfrak{B})$.

Для любого пространства (X,Σ) (кроме вырожденного случая $X=\mathfrak{f}_\Sigma X$) существуют двузначные чисто конечно-аддитивные меры, не представимые через меру Дирака.

Всегда ли двузначная счетно-аддитивная мера представима в виде $\mu=\lambda\delta_x$, $x \in X, \lambda \in R^1$? Ответ зависит от свойств пространства (X,Σ) и от свойств самой меры μ. Окончательные условия пока неизвестны. Однако, если пространство X метрическое мощности не более континуума, то $(X,\mathfrak{B})$ является пространством Дирака ([5, стр. 52]) Рассмотрим в этой связи пространство $\mathfrak{f}_\Sigma X$ с борелевской σ-алгеброй $\mathfrak{B}_\Sigma$.

<u>Теорема 1.</u> Гельфандовская компактификация $(\mathfrak{f}_\Sigma X, \mathfrak{B}_\Sigma)$ пространства (X,Σ) является пространством Дирака.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\mu \in ba(X,\Sigma)$, $\mu > 0$, $\mu(X)=1$, $\tilde{\mu}=\tau^{*-1}\mu$, и $\tilde{\mu}$ - двузначн.. Предположим, что $y \in K_{\tilde{\mu}}$ и $\tilde{\mu}(\{y\})=0$. Так как носитель меры $\tilde{\mu}$, то для любой открытой окрестности $\mathcal{U}(y)$ точки y выполняется $\tilde{\mu}(\mathcal{U}(y))>0$, т.е. $\tilde{\mu}(\mathcal{U}(y))=1$. Мера $\tilde{\mu}$ регулярна. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует $G=\bar{G}\ni y$ такое, что $\tilde{\mu}(G)<\varepsilon$. Значит, $\tilde{\mu}(\{y\})>0$, т.е. $\tilde{\mu}(\{y\})=1$ и $\{y\}=K_{\tilde{\mu}}$.

Теорема доказана.

Как легко видеть, в доказательстве используется лишь регулярность мер на $\mathfrak{f}_\Sigma X$ и существование носителя у каждой из них.

Обозначим

$m(X,\Sigma)=\{\mu\in ba(X,\Sigma):\mu\geq 0,\mu(X)=1,\mu$ – двузначна$\}$.

Теорема 2. Гельфандовская компактификация $\beta_\Sigma X$ произвольного измеримого пространства (X,Σ) изоморфна множеству двузначных мер $m(X,\Sigma)$ в τ_B-топологии. Если (X,Σ) – пространство Дирака, то X изоморфно $m(X,\Sigma)\cap ca(X,\Sigma)$.

Доказательство. Как следует из гельфандовской теории банаховых алгебр [3], пространство $\beta_\Sigma X$ изоморфно пространству всех линейных непрерывных мультипликативных функционалов $\mathfrak{U}(X,\Sigma)$ на пространстве $B(X,\Sigma)$. При этом гельфандовская топология в $\mathfrak{U}(X,\Sigma)$ эквивалентна τ_B- топологии в $\mathfrak{U}(X,\Sigma)$, рассматриваемом как подмножество в $B^*(X,\Sigma)=ba(X,\Sigma)$. Покажем, что $\mathfrak{U}(X,\Sigma)\subset m(X,\Sigma)$. Пусть $\mu\in\mathfrak{U}(X,\Sigma)$. Тогда для любого $E\in\Sigma$ выполняется $\mu(E)=\mu(\chi_E)=\mu(\chi_E^2)=\mu(\chi_E)\cdot\mu(\chi_E)=[\mu(E)]^2$, где $\mu(f)$ обозначает интеграл $\int f d\mu$. Следовательно, если $\mu\neq 0$, то μ может принимать лишь два значения – 0 и +1, т.е. .

Докажем обратное. Пусть $f\in B(X,\Sigma)$ – необратимый элемент в алгебре $B(X,\Sigma)$. Это означает, что существует $\sigma>0$ такое, что $|f(x)|\geq\sigma$, $x\in X$, т.е. $X=E_1\cup E_2$, $E_1\cap E_2=\emptyset$, $E_1,E_2\in\Sigma$, $f(E_2)\subset[\sigma,\infty[$ $f(E_1)\subset]-\infty,\sigma]$. Предположим, что для некоторой $\mu\in m(X,\Sigma)$ $\mu(f)=0$, т.е. $\mu(\chi_{E_1}f)=\mu(\chi_{E_2}f)$. Поскольку либо $\mu(E_1)=1$, либо $\mu(E_2)=1$, и следовательно, либо $|\mu(\chi_{E_1}f)|\geq\sigma$, либо $|\mu(\chi_{E_2}f)|\geq\sigma$, то из $\mu(\chi_{E_1}f)=\mu(\chi_{E_2}f)$ следует, что $\mu(E_1)>0$ и $\mu(E_2)>0$, т.е. $\mu\notin m(X,\Sigma)$. Итак, для каждого обратимого элемента $f\in B(X,\Sigma)$ и для любой $\mu\in m(X,\Sigma)$ $\mu(f)\neq 0$. Теперь из теоремы Глисона-Кахана-Желязко [3, с 261] следует, что меры $\mu\in m(X,\Sigma)$ представляют мультипликативные функционалы в $B^*(X,\Sigma)$, т.е. $m(X,\Sigma)\subset\mathfrak{U}(X,\Sigma)$.

Последнее утверждение теоремы следует из определений.

Теорема доказана.

Литература

1. Жданок А.И. Эргодические теоремы для негладких марковских процессов.-В кн.: Топологические пространства и их отображения. Рига, изд-во ЛГУ им. П.Стучки, 1981, с. 18-33.

2. Жданок А.И. Инвариантные конечно-аддитивные меры и предельное поведение марковских процессов с дискретным временем.-ДАН УкрССР, 1981, № 3, с. 11-13.

3. Рудин У. Функциональный анализ. М., 1975,

4. Данфорд Н., Шварц Жд. Линейные операторы. Общая теория. М., 1962.

5. Варадарайн В.С. Меры на топологических пространствах. - Матем. сб., 1961, 55(97), 1, с. 35-100.

Поступила 20 октября 1982 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 519.46

О PI-МНОГООБРАЗИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ АЛГЕБР ЛИ

Р.С. Липянский

ЛГУ им. П. Стучки

I. Пусть L – алгебра Ли над полем K, V – некоторый L-модуль. Объектом рассмотрения здесь являются классы L-модулей с переменными V и L. В связи с этим удобно говорить об L-модуле V как об лиевской паре (V, L). За всеми определениями, относящимися к лиевским парам, мы отсылаем к работам [4] и [5].

Обозначим через $\mathfrak{U}(F)$ универсальную обертывающую алгебру свободной алгебры Ли F со счетным множеством свободных образующих Y. Элемент $u \in \mathfrak{U}(F)$ называется тождеством пары (V, L), если при любом гомоморфизме $\mu: F \to L$ элемент u^{μ} аннулирует V. Класс лиевских пар, удовлетворяющих некоторому набору тождеств, называется многообразием представлений алгебры Ли [4].

Элемент $u \in \mathfrak{U}(F)$ назовем полиномиальным тождеством пары (V, L), если при любом эндоморфизме $\nu: \mathfrak{U}(F) \to \mathfrak{U}(F)$ элемент u^{ν} есть тождество этой пары.

Параллельно групповому случаю, многообразие представлений лиевских пар $\mathfrak{X}$ будем называть PI-многообразием, если в каждом представлении из $\mathfrak{X}$ выполняется некоторое полиномиальное тождество [1].

Напомним, что, если $\mathfrak{X}$ – многообразие лиевских пар, а Θ – многообразие алгебр Ли над K, то $\mathfrak{X} \times \Theta$ – класс пар (V, L) таких, что в L имеется идеал I с $(A, I) \in \mathfrak{X}$ и $L/I \in \Theta$. Обозначим через S многообразие, заданное битождеством $x \circ y = 0$. Полагаем также $S \times \Theta := \omega\Theta$. Ясно, что $(V, L) \in \omega\Theta$, если L с точностью до ядра представления принадлежит многообразию Θ.

В случае представлений групп известно, что $S \times \Theta$ является PI-многообразием тогда и только тогда, когда Θ – абелева [1]. Мы доказываем эту теорему для представлений алгебр Ли, а также показываем, что нормализаторы полугруппы PI-многообразий и полугруппы малых многообразий лиевских пар тривиальны.

2. Для доказательства основного результата нам потребуются следующие определения:

Определение I. Алгебру Ли L назовем FC -алгеброй, если коразмерность централизатора всякого ее элемента конечна.

Определение 2. Алгебру Ли L назовем BFC -алгеброй, если коразмерности централизаторов всех ее элементов конечны и ограничены в совокупности.

Соответствующие понятия для случая групп рассмотрены в [7].

Справедливо следующее утверждение:

Теорема I [6]. Если L - алгебра Ли над полем K, такая, что коразмерность централизаторов всех ее элементов не превосходит числа b, то $\dim L' < b^2$.

Легко показать, что и обратно, если размерность коммутанта L' конечна, то коразмерности централизаторов всех элементов из L ограничены в совокупности. Следовательно, класс BFC -алгебр Ли совпадает с классом алгебр Ли с конечномерным коммутантом.

Определение 3. Множество элементов алгебры Ли L, коразмерность централизаторов которых конечна, назовем FC -центром L и обозначим $FC(L)$.

Лемма I. Если в L имеется подалгебра H такая, что $\dim |L/H| < \infty$ и $\dim H' < \infty$, то $FC(L)$ является BFC -алгеброй.

Доказательство. Покажем вначале, что $H \subset FC(L)$. Действительно, если $x_1+H, \ldots, x_n+H$ - базис в L/H, то для каждого $x \in L$ найдутся $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ такие, что $x - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \in H$. Для фиксированного $h \in H$ рассмотрим подпространство $[h, H]$. По условию существуют $g_1, \ldots, g_m \in H$ такие, что $[g_1, h], \ldots, [g_n, h]$ - базис в $[h, H]$. Поэтому $[x - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i, h] = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i [g_i, h]$, $\alpha_i \in H$, т.е. $x - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i \in \mathfrak{z}(h)$. Значит, $|L : \mathfrak{z}(h)| < \infty$.

Рассмотрим теперь фактор-алгебру $FC(L)/H$ и ее базис $z_1+H, \ldots, z_n+H$. Обозначим через m_1 верхнюю грань коразмерностей централизаторов $\mathfrak{z}(z_i)$ в $FC(L)$, а через m_2 - верхнюю грань коразмерностей централизаторов элементов $h \in H$ в $FC(L)$. (m_2 конечно согласно теореме I). Тогда, очевидно, коразмерности пересечений $\mathfrak{z}(z_i) \cap \mathfrak{z}(h)$ также ограничены в совокупности числом b, зависящим от m_1 и m_2. Отсюда следует, что индексы любых элементов из $FC(L)$ ограничены в совокупности числом b, т.е. $FC(L)$ является BFC -алгеброй.

Лемма 2. Пусть Θ – многообразие алгебр Ли над K, E – свободная алгебра этого многообразия. Если $\mathfrak{U}(E)$ является PI-алгеброй, то алгебра E – абелева.

Доказательство. В случае, когда поле K имеет характеристику 0, утверждение леммы 2 хорошо известно [3]. Если же характеристика поля $p>0$, то из [2] следует, что E обладает абелевым идеалом конечной коразмерности. Следовательно, по лемме I алгебра $FC(E)$ является BFC-алгеброй.

Пусть $\dim E/FC(E)=m$, где $m \neq 0$. Так как E – относительно свободная алгебра, то существует эпиморфизм $\mu : E \to E \times E$. Но $FC(E \oplus E) = FC(E) \oplus FC(E)$, и поэтому коразмерность алгебры $FC(E \oplus E)$ в $E \oplus E$ равна $2m$. С другой стороны, $FC(E)^{\mu} \subset FC(E \oplus E)$ и, следовательно, коразмерность алгебры $FC(E \oplus E)$ в $E \oplus E$ не может превосходить m. Следовательно, $m=0$ и $FC(E)=E$. Согласно лемме I, можно считать E BFC-алгеброй, откуда $\dim E' = n$. Покажем, что $n=0$. Рассмотрим эпиморфизм $E \to E \oplus E$ и индуцированный им эпиморфизм $E' \to E' \oplus E'$. Тогда $n=2n$, т.е. $n=0$. Значит, E – абелева алгебра, а Θ – абелево многообразие.

Теорема 2. $S \times \Theta$ является PI-многообразием тогда и только тогда, когда Θ – абелево многообразие.

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно. Обратно, если $S \times \Theta$ является PI-многообразием, рассмотрим пару $(\mathfrak{U}(E), E)$, где E – свободная алгебра из Θ. Эта пара порождает $S \times \Theta$, и по аналогии с [I] можно показать, что пара $(\mathfrak{U}(E), \mathfrak{U}(E))$ удовлетворяет некоторому тождеству. Так как последняя пара точная, то $\mathfrak{U}(E)$ является PI-алгеброй. Лемма 2 позволяет заключить, что E – абелева алгебра, а Θ – абелево многообразие.

Следствие. Если $\mathfrak{X} \times \Theta$ является PI-многообразием, то Θ – абелево.

Действительно, $S \times \Theta \subset \mathfrak{X} \times \Theta$ и, значит, $S \times \Theta$ – PI-многообразие.

3. Рассмотрим некоторые применения теоремы 2. (Здесь K – произвольное бесконечное поле).

Пусть $\mathfrak{M}$ – полугруппа представлений алгебр Ли, $\mathfrak{M}'$ – подполугруппа в $\mathfrak{M}$.

Определение 4. Нормализатором $\mathfrak{M}'$ в полугруппе многообразий алгебр Ли $\mathfrak{N}$ называется полугруппа всех $\Theta \subset \mathfrak{N}$, для которых $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}'$ влечёт $\mathfrak{X} \times \Theta \subset \mathfrak{N}$.

Совокупность всех PI-многообразий составляют подполугруппу $\mathfrak{M}_0$ в $\mathfrak{M}$. Вычислим её нормализатор.

Теорема 3. Нормализатор $\mathfrak{N}_0$ полугруппы $\mathfrak{M}_0$ тривиален.

Доказательство. Пусть $\Theta \subset \mathfrak{N}_0$ и $\Theta \neq 0$. Тогда $\Theta^4 \in \mathfrak{N}_0$, и поэтому $S \times \Theta^4$ является PI-многообразием. По теореме 2 многообразие Θ^4 является абелевым. Противоречие.

Определение 5. Многообразие представлений, порожденное одним конечномерным представлением, называется малым.

Предложение I. Произведение $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \cdot \mathfrak{X}_2$ мало тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ малы.

Доказательство Пусть $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{var}(A, L_1)$ и $\mathfrak{X}_2 = \mathrm{var}(B, L_2)$ где (A, L_1) и (B, L_2) - конечномерные представления. Тогда $(V, L) = (A, L_1) \triangledown (B, L_2)$ порождает многообразие $\mathfrak{X}_1 \cdot \mathfrak{X}_2$ [5]. Это представление конечномерно, и значит, $\mathfrak{X}_1 \cdot \mathfrak{X}_2$ мало.
Пусть теперь $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \cdot \mathfrak{X}_2$ мало и порождается конечномерным представлением (V, L). Возьмем в V такой L-подмодуль A, что $(A, L) \in \mathfrak{X}_1$ и $(V/A, L) \in \mathfrak{X}_2$. Представлениее (V, L) принадлежит $\mathrm{var}((A, L) \triangledown (V/A, L))$. Значит, имеем включения $\mathfrak{X} = \mathrm{var}(V, L) \subset \mathrm{var}((A, L) \triangledown (V/A, L)) = \mathrm{var}(A, L) \cdot \mathrm{var}(V/A, L) \subset \mathfrak{X}_1 \cdot \mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}$, т.е. $\mathfrak{X} = \mathrm{var}(A, L) \cdot \mathrm{var}(A/A, L)$ и $\mathrm{var}(A, L) \in \mathfrak{X}_1$, $\mathrm{var}(V/A, L) \in \mathfrak{X}_2$. Теорема о свободе полугруппы $\mathfrak{M}$ [5] дает $\mathfrak{X}_1 = \mathrm{var}(A, L)$ и $\mathfrak{X}_2 = \mathrm{var}(V/A, L)$, т.е. $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ малы.

Из утверждения предложения, в частности, следует, что малые многообразия составляют полугруппу $\mathfrak{M}_1$. Так как всякое малое многообразие очевидно является PI-многообразием, то, $\mathfrak{M}_1$ - подполугруппа в $\mathfrak{M}_0$.

Рассуждая так же, как в теореме 3, получаем утверждение

Теорема 4. Нормализатор полугруппы всех малых многообразий тривиален.

Литература

I. Плоткин Б.И. Многообразия представлений групп и многообразия ассоциативных алгебр. - В кн: Сборник работ по алгебре, Рига, 1978, с. 172 - 137.

2. Bachturin Y.A. - Identities in the universal envelopes of Lie algebras - v. XVIII, p.10-21 1974.

3. Латышев В.Н. Два замечания о PI-алгебрах - Сиб.мат.ж. 1963, т.4, с. 1120-1121.

4. Симонян Л.А. Вербальные сплетения в линейных представлениях групп и лиевых алгебр - Латв. мат. ежегод. 1976, т.18, с.170-189

5. Липянский Р.С. Полугруппа многообразий лиевских пар.- В кн: Теория множеств и топология, Ижевск, 1977, вып. I. с.44-54

6. Neumann P.M. An improved bound for BFC p-groups .- J. Austral Math. Soc. 11(1973) p.19-27

7. Baer R. Finiteness properties of groups.-Duke math. J. 15 (1948), p. 1021-1032

Поступила 25 октября 1982 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1983.

УДК 519.21

О ПРЕДСТАВИМОСТИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ВИДЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.П. Нейманис
ЛГУ им. П.Стучки

Пусть H -вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $|h| = \sqrt{\langle h,h\rangle}$, $\mathcal{L}(H,H)$ – семейство линейных операторов D, действующих из H в H, с конечной нормой $\|D\| = \sup\limits_{|h|=1} |Dh|$, $Z = \{z(t), P_z, t \geq 0\}$ – непрерывный справа марковский процесс, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, со значениями в метрическом пространстве (E, ρ), θ_t – оператор сдвига в Ω, для которого почти наверное (п.н.) при всех $t,s \geq 0$ $z(t+s,\omega) = z(t,\theta_t\omega)$. Замкнутые полузамкнутые и открытые интервалы из $[0,\infty)$ далее будем называть просто интервалами. Если $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ – два интервала, и для любых $a \in \mathcal{J}_1$, $b \in \mathcal{J}_2$ выполняется $a < b$, то будем писать $\mathcal{J}_1 < \mathcal{J}_2$. В дальнейшем используем обозначения $\mathcal{J}+t = \{u : u = s+t, s \in \mathcal{J}\}$ и $\mathcal{F}_\mathcal{J} = \sigma(z(t), t \in \mathcal{J})$, т.е. $\mathcal{F}_\mathcal{J}$ – наименьшая σ-алгебра подмножеств пространства E, относительно которой для каждого $t \in \mathcal{J}$ $z(t)$ измерима.

Определение. [1], [2]. Отображение $M : (\mathcal{J},\omega) \longmapsto \mathcal{L}(H,H)$, где $\mathcal{J}$ -интервал из $[0,\infty)$, $\omega \in \Omega$, назовём мультипликативным операторным функционалом от марковского процесса Z со значениями в $\mathcal{L}(H,H)$ (м.о.ф. от (Z, H)), если

1) для любых интервалов $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$ таких, что $\mathcal{J}_1 < \mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2$ интервал, и всех $z \in E$

$$P_z\{M(\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2, \omega) = M(\mathcal{J}_1,\omega) M(\mathcal{J}_2,\omega)\} = 1;$$

2) для любых интервалов $\mathcal{J} \subset [0,\infty)$ и $h \in H$ отображение $\omega \longmapsto M(\mathcal{J},\omega)h$. $\mathcal{F}_\mathcal{J}$-измеримо;

3) для любых интервалов $\mathcal{J} \subset [0,\infty)$, $t \geq 0$, $z \in E$

$$P_z\{M(\mathcal{J}+t,\omega) = M(\mathcal{J}, \theta_t\omega)\} = 1;$$

4) для любой монотонно возрастающей (убывающей) по-

следовательности интервалов $\{\mathfrak{J}_n, n\geq 1\}$, объединение (пересечение) которых равно $\mathfrak{J}$, и для каждого $z\in E$

$$P_z\{s-\lim_{n\to\infty} M(\mathfrak{J}_n,\omega)=M(\mathfrak{J},\omega)\}=1;$$

5) для любого $z\in E$ $P_z\{M(\{0\},\omega)=I\}=1$.

Рассмотрим d-мерный полумартингал $X=\{x_t=(x_t^1,\dots,x_t^d), t\geq 0\}$ относительно возрастающего непрерывного справа семейства σ-подалгебр $\{\mathfrak{F}_t, t\geq 0\}$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathfrak{F},P)$. Определим случайную точечную меру p на борелевской σ-алгебре подмножеств множества $(0,t]\times R^d\setminus\{0\}$ (в дальнейшем она обозначается через $\mathfrak{B}((0,t]\times R^d\setminus\{0\}))$ формулой

$$p((s,t]\times\Gamma)=\sum_{s<u\leq t}\chi_\Gamma(x_u-x_{u-}),\ \Gamma\in\mathfrak{B}(R^d\setminus\{0\}),\ 0\leq s\leq t.$$

Пусть $\Pi(dt,dy)$ - дуальная предсказуемая проекция случайной меры p; определим мартингальную меру q формулой

$$q((0,t]\times\Gamma)=p((0,t]\times\Gamma)-\Pi((0,t]\times\Gamma),\Gamma\in\mathfrak{B}(R^d\setminus\{0\}),\ 0\leq s\leq t.$$

Известно, что полумартингал X однозначно представим в виде

$$x_t=x_0+\alpha_t+x_t^c+\int_0^t\int_{|y|\leq 1} y\,q(ds,dy)+\int_0^t\int_{|y|>1} y\,p(ds,dy),$$ где

$\alpha_0=0$, α -предсказуемый относительно $\{\mathfrak{F}_t, t\geq 0\}$ процесс, который на каждом конечном интервале времени имеет п.н. конечную вариацию, x^c -непрерывный локальный мартингал, где $x_0^c=0$. Случайная мера Π и предсказуемый процесс α вместе с матрицей $B=\|B_{ij}\|$ взаимных характеристик $B_{ij}=\langle x^{ci},x^{cj}\rangle$ $1\leq i,j\leq d$ локальных мартингалов x^{ci} и x^{cj} образует триплет характеристик (α,Π,B) полумартингала X.

В монографии [3] был введён класс $L^1_{loc}(x)$ отображений $f(\omega,t):\Omega\times[0,\infty)\longmapsto R$, для которых можно определить стохастический интеграл по непрерывному мартингалу X (см. с 42), а также класс $G^1_{loc}(\mu)$ отображений $g(\omega,t,x):\Omega\times[0,\infty)\times R^d\setminus\{0\}\longmapsto R$, для которых можно определить стохастический интеграл по мартингальной мере μ (см. с 98). Пусть $L^1_{loc}(x^{cj},H)$ ($G^1_{loc}(q,H)$) - класс отображений $A(\omega,t):\Omega\times[0,\infty)\longmapsto\mathfrak{L}(H,H)$ ($B(\omega,t,x):\Omega\times[0,\infty)\times R^d\setminus\{0\}\longmapsto\mathfrak{L}(H,H)$) таких, что для каждого ортонормированного базиса $\{\varphi_i, i\geq 1\}$ в H и любых $k,\ell\geq 1$ справедливо

$$\langle\!\langle A(t)\varphi_k,\varphi_\ell\rangle\!\rangle\in L^1_{loc}(x^{cj})\quad(\langle\!\langle B(t,x)\varphi_k,\varphi_\ell\rangle\!\rangle\in G^1_{loc}(q)).$$

Для $A\in L^1_{loc}(x^{cj},H)$ определим $\int_0 A(s)dx_s^{cj}$ как оператор $I(t)$

семейства $\mathcal{L}(H,H)$, для которого при всех $k,l \geq 1$ имеет место равенство $\langle\langle I_1(t)\varphi_k, \varphi_l \rangle\rangle = \int_0^t \langle A(s)\varphi_k, \varphi_l \rangle \, d x_s^{c,i}$.

Аналогично, для $B \in G_{loc}(q,H)$ определим $\int_0^t \int_{R^d\setminus\{0\}} B(s,y) q(ds,dy)$ как оператор $I_2(t) \in \mathcal{L}(H,H)$, для которого при всех $k,l \geq 1$ справедливо $\langle I_2(t)\varphi_k, \varphi_l \rangle = \int_0^t \int_{R^d\setminus\{0\}} \langle B(s,y)\varphi_k, \varphi_l \rangle q(ds,dy)$.

Обозначим через $B(R^d \times H, H)$ семейство всех ограниченных билинейных отображений $R^d \times H$ в H. Если выбраны ортонормированные базисы в R^d и H, тогда каждый $D \in B(R^d \times H,H)$ можно определить с помощью семейства вещественных чисел D_{jkl}, где $1 \leq j \leq d$ и $k,l \geq 1$. Зафиксировав j, мы получим матрицу $M^j = \| M^j_{kl} \|$, $k,l \geq 1$, которой соответствует некоторый $D^j \in \mathcal{L}(H,H)$. Определим взаимно однозначное отображение $S: B(R^d \times H,H) \to (\mathcal{L}(H,H))^d$ с помощью формулы $S(D) = (S_1(D), \ldots, S_d(D))$, где $D \in B(R^d \times H,H)$, $S_j(D) = D^j$, $j = 1, \ldots, d$.

В дальнейшем рассмотрим d-мерные полумартингалы X с характеристиками $A_t = \int_0^t a(x_s)ds$, $B_t = \int_0^t A(x_s)ds$ и $\Pi((0,t]\times\Gamma) = \int_0^t \pi(x_s,\Gamma)ds$, где $t \geq 0$, $\Gamma \in \mathcal{B}(R^d \cap \{|y| > \varepsilon\})$, $\varepsilon > 0$.

При таких условиях X является процессом Ито с марковским свойством относительно $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$; триплет (a, A, π) в этом случае называется локальными характеристиками процесса Ито X.

Пусть $L_\infty = \{f \mid f: R^d \to H, f - \mathcal{B}(H)$ измерима, и $\sup_{x \in R^d} |f(x)| < \infty\}$, а L^2_∞ – класс дважды непрерывно дифференцируемых функций из L_∞.

<u>Теорема.</u> Пусть $M((0,t])$ – м.о.ф. от (X,H), где X – процесс Ито с локальными характеристиками $(a(x_s), A(x_s), \pi(x_s,dy))$ и для любых $t \in [0,\infty)$, $x \in R^d$ $E_x \|M((0,t])\| < \infty$.

Пусть для каждой $f \in L^2_\infty$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{E_x\{M((0,t])f(x_t) - f(x)\}}{t} = f'(x)a(x) + \frac{1}{2}f''(x)A(x) + F(x)f(x) + \tag{*}$$

$$+ B(x)f'(x)A(x) + \int_{|y|\leq 1} [f(x+y) - f(x) - f'(x)y + G(x,y)f(x) +$$

$$+ C(x,y)(f(x+y) - f(x))]\pi(x,dy) + \int_{|y|>1} [f(x+y) - f(x) + G(x,y)f(x)]\pi(x,dy),$$

где $\widetilde{B}(x)\in B(R^d\times H, H)$, а $B^j(x) = S_j(\widetilde{B}(x))$, $j=1,\dots,d$,
$C(x,y)$, $G(x,y)$, $F(x)$, $x,y\in R^d$ – $\mathcal{B}(\mathcal{L}(H,H))$-измеримые функции со значениями в $\mathcal{L}(H,H)$ такие, что

$$\sup_{x\in R^d}\{\|\sqrt{A_{jj}(x)}\,B^j(x)\|,\ j=1,\dots,d,\ \int_{R^d\setminus\{0\}}\|C(x,y)\|^2+\|G(x,y)\|^2\,\pi(x,dy),$$
$$\|\int_{R^d\setminus\{0\}} G(x,y)\pi(x,dy)\|,\ \|F(x)\|\}<\infty.$$

Тогда $M((0,t])$ представим в виде решения стохастического интегрального уравнения

$$M((0,t]) = I + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t M((0,s))B^j(x_{s-})\,dx^{c_j}_s + \int_0^t M((0,s))F(x_{s-})\,ds +$$
$$+\int_0^t\int_{R^d\setminus\{0\}} M((0,s))\,C(x_{s-},y)\,q(ds,dy) + \int_0^t\int_{R^d\setminus\{0\}} M((0,s))\,G(x_{s-},y)\,p(ds,dy).$$

Приведём узловые моменты доказательства теоремы. В нем существенно используется часть теоремы (1.1.3) работы [2], в которой утверждается, что для двух ограниченных по норме м.о.ф. от (X,H) M_1 и M_2 при любых $x\in R^d$ и $t\in(0,\infty]$ $P_x\{M_1((0,t]) = M_2((0,t])\} = 1$, если совпадают их полугруппы математического ожидания. Полугруппа математического ожидания $T(t)$ на L_∞ определяется формулой $(T(t)f)(x) = E_x\{M((0,t])f(x_t)\}$, где $f\in L_\infty$, $x\in R^d$, M – м.о.ф. от (X,H). Известно также, что полугруппы $T_1(t)$ и $T_2(t)$ совпадают на L_∞, если определены и совпадают их инфинитезимальные операторы на некотором всюду плотном множестве, например, на L^2_∞.

С помощью формулы Ито можно вычислить инфинитезимальный оператор на L^2_∞ полугруппы математического ожидания $T(t)$ для м.о.ф. от (X,H), который был сконструирован в следствии 1 работы [4]. Оказывается, что он равен правой части равенства (*). Теперь, воспользовавшись методами теории полугрупп, можно вывести данную теорему.

В [2] были найдены достаточные условия представимости м.о.ф. от (X,H) в виде решения стохастического интегрального уравнения в случаях, когда X – винеровский процесс и когда X – консервативный регулярный скачкообразный марковский процесс. В обоих этих случаях применима и теорема данной работы, так как соответствующие процессы являются процессам Ито с марковским свойством.

В случае, когда X винеровский процесс, используя теорему настоящей работы, можно показать, что теорема 4.1.4.

работы [2] остаётся в силе и без условия:
$\lim_{h\to 0} E_x\{\|M((0,t+h])-M(0,t])\|^2\}=0$ равномерно по $x\in R^d$.

Литература

1. Pinsky M. Stochastic integral representation of multiplicative operator functionals of a Wiener process.- Trans.Am. Math. Soc., 1972, vol. 167, p. 89-104.

2. Pinsky M. Multiplicative operator functionals and their asymptotic properties.-Adv. in Probab., 1974., M.Dekker, New York, p. 2-100.

3. Jacod J. Calcul stochastique et problèmes de martingales.-Lect. Notes in Math., 1979., Springer Verlag, vol. 714.

4. Neimanis V. On multiplicative operator functionals.-Abstr. of comm. of third intern. Vilnius conf. on prob. th. and math. st., 1981., vol. 3, p. 223-224.

Поступила 25 декабря 1982 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Сборник научных трудов

Редакторы Г.Энгелис, Н.Сарамонова
Технический редактор Д.Бринке
Корректор И.Балоде

Подписано к печати 06.04.1983. ЯТ 09051. Ф/б 60х84/16.
Бумага №1.12,3 физ.печ.л.II,4 усл.печ.л. ?,5 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Зак.№ 834. Цена 1 р. 30 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 226098, б. Райниса, 19
Отпечатано в типографии, Рига 226050, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

УДК 513.83

О кружевных топологических группах.
Брегман Ю.Х., с.3-9 .

Изучаются некоторые свойства кружевных топологических групп (т.е. топологических групп, пространства которых являются кружевными). В частности, получены критерии метризуемости таких групп. Приведены примеры неметризуемых кружевных топологических групп. Библиограф. - 16 назв.

УДК 513.881

Об одном способе перенормировки пространств.
Гольдман М.А., с.10-13.

На нормированном пространстве строится полунорма, определенным образом связанная с данной нормой. Рассматривается оператор вложения первого пространства - нормированного на второе - полунормированное. Устанавливается одно необходимое и одно достаточное условие полной ограниченности этого оператора. Библиогр. - 2 назв.

УДК 513.881

Об условиях конечномерности пространства нуль-элементов линейного оператора в отделимых локально выпуклых пространствах.
Дергунова Н.А., с.14-15.

Доказано, что для конечномерности пространства нуль-элементов линейного оператора, действующего в отделимом локально выпуклом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор был представим в виде суммы обратимого и компактного операторов. Данный результат обобщает аналогичное утверждение, доказанное автором ранее для случая банаховых пространств. Библиогр. - 3 назв.

УДК 517.948

Разрешимость задачи Коши для почти линейного гиперболического уравнения с функциональными и алгебраическими нелинейностями.

Козьмина Е.С., с.16-25.

Методами теории линейных полугрупп и априорных оценок исследуется разрешимость задачи Коши в гильбертовом пространстве для почти линейного дифференциального уравнения гиперболического типа с операторной нелинейностью. Устанавливаются условия, при которых существуют локальные и глобальные решения. Полученные теоремы применяются к уравнениям с функциональными и алгебраическими нелинейностями. Библиогр. - 6 назв.

УДК 517.941

Об оценке норм возмущений при секвенциально компактной аппроксимации.
Лабеев В.И., с.26-30.

С помощью сходимости по норме операторных рядов получены новые доказательства основных теорем, касающихся устойчивости при секвенциально компактной аппроксимации (с.к.а.) таких свойств линейных операторов, как изоморфность, относительная открытость и фредгольмовость. Исследуется также устойчивость некоторых свойств спектра пучка операторов при с.к.а. и приведено одно необходимое и достаточное условие с.к.а. Библиогр. - 4 назв.

УДК 513.88

О некоторых условиях секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений и их сопряженных отображений.
Левченков В.С., с.31-39.

Получен ряд теорем, устанавливающих необходимые и достаточные условия секвенциально компактной аппроксимации линейного отображения и его сопряженного. Кроме того, доказана устойчивость индекса фредгольмовых отображений при секвенциально компактной аппроксимации сопряженного отображения. Библиогр. - 14 назв.

УДК 513.83;517.941

Приложение секвенциально компактной аппроксимации к решению линейных уравнений в произведении банаховых пространств.

Левченков В.С., с.40-44.

Секвенциально компактная аппроксимация применяется для доказательства существования решения линейных уравнений в произведении банаховых пространств и сходимости к нему последовательности приближённых решений. Библиогр. - 5 назв.

УДК 513.83

Устойчивость некоторых свойств линейных операторов в топологических векторных пространствах.
Ливчак А.Я., с.45-60.

Некоторые результаты об устойчивости свойств линейного замкнутого оператора в банаховом пространстве переносятся на отделимые топологические векторные пространства, F -пространства и пространства Фреше. Библиогр. - 13 назв.

УДК 513.83

Колыбельная для маленького тигренка о неподвижных точках.
Лиепиньш А.Х., с.61-69.

Доказывается существование неподвижных точек для отображений в абстрактных пространствах с операторами замыкания. Библиогр. - 7 назв.

УДК 513.83

Об узких пространствах.
Малыхин В.И., с.70-76.

Найдены некоторые условия, при которых пространство не является узким. В предположении континуум-гипотезы построено счётное регулярное узкое пространство. Библиогр. - 1 назв.

УДК 513.83

О псевдохарактере подгрупп бикомпактных групп.
Медников Л.Э., с.77-79.

Доказано, что $|M| \leq 2^{\psi(M)}$ для подгруппы M бикомпактной группы. Для любых λ, σ, τ таких, что $\aleph_1 \leq \sigma \leq \lambda \leq \tau \leq 2^{\sigma}$, $\lambda \leq \sigma$, построена плотная в $\mathfrak{A}^{\tau}$ подгруппа мощности σ и псевдохарактера λ. Библиогр. – 2 назв.

УДК 513.83

Соотношения между классами почти метризуемых, проективно метризуемых и $\aleph_0$-представимых топологических групп.
Пестов В.Г., с.80–86.

Построены примеры почти метризуемой не проективно метризуемой топологической группы и топологического пространства, являющегося свободной суммой бикомпактов, свободная топологическая группа которого не $\aleph_0$-представима. Библиогр. – 15 назв.

УДК 513.83

Пространства очановского типа и κ-пространства.
Попов В.В., с.87–98.

В работе исследованы условия, при которых пространство замкнутых подмножеств данного топологического пространства, наделённое топологией очановского типа, является к-пространством. Библиогр. – 9 назв.

УДК 513.83

К теореме Чепмэна о дополнении.
Рубанов И.С., с.99–105.

В работе приведено элементарное (не опирающееся на теорию Q-многообразий) доказательство известной теоремы Чепмэна утверждающей, что компактные Z-подмножества X и Y гильбертово куба Q имеют одинаковый шейп тогда и только тогда, когда гомеоморфны их дополнения $Q\setminus X$ и $Q\setminus Y$. Библиогр. – 3 назв.

УДК 513.83

Об одном аналоге теоремы Пэли-Винера для метабелевых групп Ли.
Севастьянов Л.А., с.106–116.

В работе приводится доказательство аналога классической теоремы Пэли-Винера о преобразовании Фурье в классе финитных бесконечно дифференцируемых функций на вещественных метабелевых группах Ли. Краткое сообщение об этом результате было опубликовано в предыдущем выпуске этого сборника. Библиогр. - 10 назв.

УДК 517.929

Функционал Ляпунова для периодических линейных дифференциальных уравнений с последействием.
Царьков Е.Ф., Энгельсон Л.Е., с.117-136.

Для уравнений, указанных в заглавии, дается новый метод построения квадратичного функционала, положительная определенность которого необходима и достаточна для асимптотической устойчивости уравнения. Метод основан на решении дифференциального уравнения в пространстве мер. Для периодического уравнения, близкого к критическому случаю стационарного, получено конечное разложение функционала по отрицательным степеням малого параметра. Библиогр. - 10 назв.

УДК 513.015.2:513.83

Пространства межности.
Цирулис Я.П., с.137-146.

Пространство межности - это множество с заданным на нем трехместным отношением ρ, удовлетворяющим аксиомам $\rho 1$: ρxyy; $\rho 2$: $\rho xyx \Rightarrow x=y$; $\rho 3$: $\rho xyz \Rightarrow \rho zyx$; $\rho 4$: $\rho xuy \wedge \rho xyv \Rightarrow \rho uyv$; $\rho 5$: $\rho xuy \wedge \rho xyv \wedge x \neq y \Rightarrow \rho xuv$; $\rho 6$: $\rho xuy \wedge \rho xvy \Rightarrow \rho xuv \vee \rho xvu$; $\rho 7$: $\rho xyu \wedge \rho xyv \wedge x \neq y \Rightarrow \rho xuv \vee \rho xvu$ (ρabc читается как "b лежит между a и c"). В работе изучается структура межностных пространств, а также их естественная топология, в которой множество считается открытым тогда и только тогда, когда $\forall x \in \mathfrak{U}\ \forall z \neq x\ \exists y \neq x (\rho xyz \wedge \forall u \neq y (\rho xuy \Rightarrow u \in \mathfrak{U}))$. Рассматриваются примеры. Библиогр. - 4 назв.

УДК 513.83

О кружевном критерии метризуемости топологических пространств.
Шостак А.П., с. 147-152.

Доказано, что для метризуемости T_1-пространства необходимо и достаточно существования в нем кружева специального вида. Библиогр. - 11 назв.

УДК 517.98

О декомпозиции линейного оператора в локально выпуклых пространствах.

Энгельсон Е.Л., с.153-160.

Изучается представимость данного линейного оператора B из E' в E в виде композиции некоторого замкнутого и сопряженного к нему оператора, когда локально выпуклое пространство E не предполагается обладающим свойством $E \subset H \subset E'$, где H - гильбертово, а E' - сопряженное к E пространство. Рассматриваются случаи ограниченного и неограниченного оператора B. Библиогр. - 9 назв.

УДК 513.88+519.21

Гельфандовская компактификация и двузначные меры.

Жданок А.И., с.161-164.

В работе изучается гельфандовская компактификация произвольного измеримого пространства. Доказывается эквивалентность такого компакта множеству двузначных мер на данном пространстве в $*$-слабой топологии. Библиогр. - 5 назв.

УДК 519.46

О PI-многообразиях представлений алгебр Ли.

Липянский Р.С., с.165-169.

Определяется понятие PI-многообразия представлений алгебр Ли и доказывается, что нормализаторы полугруппы PI-многообразий и полугруппы малых многообразий лиевских пар тривиальны. При вычислении этих нормализаторов существенную роль играет теорема 2, утверждающая, что $S \times \Theta$ является PI-многообразием тогда и только тогда, когда Θ - абелево. Библиогр. - 7 назв.

УДК 519.21

О представимости мультипликативных операторных функционалов в виде решений стохастических интегральных уравнений.

Нейманис В.П., с 170-176.

В работе получены достаточные условия представимости мультипликативного операторного функционала M от d-мерного марковского процесса Ито X со значениями в семействе ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, в виде решения стохастического интегрального уравнения. Результат сформулирован на языке инфинитезимального оператора полугруппы математического ожидания, соответствующей M. Библиогр. - 4 назв.

— o —

On stratifiable topological groups.
Bregman Ju.H., p.3-9.

The author studies properties of stratifiable topological groups (i.e. topological groups the spaces of which are stratifiable in sense of C.Borges). Specifically some criteria for a stratifiable group to be metrizable are obtained. The paper contains also some examples of nonmetrizable stratifiable topological groups. Bibl. - 16 names.

On a method of changing a norm in a space.
Goldman M.A., p.10-13.

A new seminorm is defined in a special way in a normed space. The author studies the operator which embeds the first, normed space into the second, seminormed space. In particular, a condition which is both necessary and sufficient for this operator to be compact is established. Bibl. - 2 names.

A condition when the space of zeroelements of a linear operator in Hausdorff locally convex spaces is finite dimensional.
Dergunova N.A., p.14-15.

Let A be an operator in a Hausdorff locally convex space and let N(A) denote the set of all its zeroelements (i.e. the zeros of A^n for some $n \in N$). It is proved that the dimension of N(A) is finite iff A is a sum of two operators one of which is compact and another is invertible. This theorem generalizes an analogous result obtained earlier by the author for the Banach case. Bibl. - 3 names.

The solvability of the Cauchy problem for the quasi-linear hyperbolic equation with functional and algebraic nonlinearities.
Kozmina E.S., p.16-25.

The solvability of the Cauchy problem in Hilbertspace for a quasi-linear hyperbolic differential equation with operational nonlinearity is studied. The methods used here are the ones of linear semi-group theory and of apriori estimates. Some conditions when local and global solutions exist are found. The obtained theorems are applied to the equations with functional and algebraic nonlinearities. Bibl. - 6 names.

On estimation of norms of perturbations under the sequentially compact approximation.
Lahejev V.I., p.26-30.

By the help of norm convergence of operator series the author obtains new proofs for the main theorems about the stability of some properties of linear operators under the sequentially compact approximation (s.c.a.). There are the properties of Fredholm, relative openness, izomorphness among them. The stability of some properties of a bundle of operators under the s.c.a. is also studied. Bibl. - 4 names.

On some conditions for a sequentially compact approximation of linear mappings and their conjugates.
Levčenkov V.S., p.31-3..

The paper contains some theorems which state necessary and sufficient conditions for the s.c.a. of a linear mapping and its conjugate. The stability of index for Fredholm mappings under s.c.a. of a conjugate mapping is obtained, too. Bibl. - 14 names.

Application of the sequentially compact approximation to solve linear equations in a product of Banach spaces.
Levčenkov V.S., p.40-44.

The existence of a solution for a linear equation in a product of Banach spaces is established by means of the s.c.a. Moreover, it is shown how this solution can be found as a limit of a sequence of approximate solutions. Bibl. - 5 names.

Stability of some properties of linear operators in topological vector spaces.
Livčak A.Ja., p.45-60.

Some known results concerning the stability of some properties of closed linear operators in Banach spaces are transfered for the case of more general spaces. Bibl. - 13 names.

A cradle-song for a little tiger cub on fixed points.
Liepiņš A.M., p.61-69.

The existence of fixed points for mappings in abstract spaces with closure operators is proved. Bibl. - 7 names.

On narrow spaces.
Malyhin V.I., p.70-76.

The paper contains some conditions when a topological space is not narrow. Under the assumption of CH a countable regular narrow space is constructed. Bibl. - 1 name.

On a pseudocharacter of subgroups of compact groups.
Mednikov L.E., p.77-79.

For a subgroup M of a compact group the inequality $|M| \leq 2^{\psi(M)}$ is proved. If λ, σ and τ are cardinals satisfying $\ln \sigma \leq \lambda \leq \tau \leq 2^{\sigma}$, $\lambda \leq \sigma$, then a group M is constructed so that $|M| = \sigma$, $\psi(M) = \lambda$ and M is a dense subgroup of Ω^{τ}. Bibl. - 2 names.

A connection between the classes of almost metrizable, projectively metrizable and $\aleph_0$-representable topological groups.
Pestov V.G., p.80-86.

Two examples are constructed in the paper. The first one is an almost metrizable topological group which is not projectively metrizable. The second is a topological space which is a discrete union of compacta, but the free topological group of this space is not $\aleph_0$-representable. Bibl. - 15 names.

Očan-type spaces and κ-spaces.
Popov V.V., p.87-98.

The conditions are studied under which the space of closed subsets of a given topological space provided with an Očan-type topology is a κ-space. Bibl. - 9 names.

On Chapman's complement theorem.
Rubanov I.S., p.99-105.

An elementary proof (i.e. a proof which does not appeal to the notion of a Q-manifold) of the wellknown Chapman's theorem about complement is given. Bibl. - 3 names.

An analogue of Paley-Wiener theorem for metabelian Lie groups.
Sevastjanov L.A., p.106-116.

The paper contains the proof of the analogue of the classic Paley-Wiener theorem on Fourier transformation for $C_0^{\infty}(G)$ where G is a real metabelian Lie group. (This result was first announced in the previous issue in 1981). Bibl. - 10 names.

Ljapunov's functional for periodic linear differential equations with an after-effect.
Carkov E.F., Engelson L.E., p.117-135.

The paper contains a new method how for the equations mentioned in the title a quadratic functional can be constructed which is positively determined iff the corresponding equation is stable. The authors also obtain the decomposition of a functional into negative degrees of a small parameter for a periodic equation which is close to the critical case of an autonomous one. Bibl. - 10 names.

Betweenness spaces.
Cīrulis Ja.P., p.137-146.

By a betweenness space we understand a set together with a ternary relation β on it satisfying the following axioms $\beta 1: \beta xyy$; $\beta 2: \beta xyx \Rightarrow x=y$; $\beta 3: \beta xyz \Rightarrow \beta zyx$; $\beta 4: \beta xuy \wedge \beta xyv \Rightarrow \beta uyv$; $\beta 5: \beta uxy \wedge \beta xyv \wedge x \neq y \Rightarrow \beta uxv$; $\beta 6: \beta xuy \wedge \beta xvy \Rightarrow \beta xuv \vee \beta xvy$; $\beta 7: \beta xyu \wedge \beta xyv \wedge x \neq y \Rightarrow \beta xuv \vee \beta xvy$ (βabc reads as b lies between a and c). The structure as well as the natural topology of betweenness spaces are studied. (A set U is open in this topology if $\forall x \in U \ \forall z \neq x \ \exists y \neq x (\beta xyz \wedge \forall u \neq y (\beta xuy \rightarrow u \in U))$. Some examples are given. Bibl. - 4 names.

On a stratified condition for metrizability of topological spaces.
Šostak A.P., p.147-152.

It is proved that a T_1-space is metrizable iff its topology can be stratified (in sense of C.J.R. Borges) in a special way. Bibl. - 11 names.

On decomposition of a linear operator in locally convex spaces.
Engelson Je.L., p.153-160.

Let E be a locally convex space and E' its conjugate. The existence of a Hilbert space H such that $E \subset H \subset E'$ is not assumed. The paper deals with the problem when a given linear operator $B: E' \to E$ can be represented as a composition of a clos operator and conjugate. Bibl. - 9 names.

Gelfand compactification and two-valued measures.
Ždanok A.I., p.161-164.

The Gelfand compactification of a measurable space is studied. It is proved that this compactification is equivalent to the set of two-valued measures on a given space endowed with the $*$-weak topology. Bibl. - 5 names.

On PI-variatates of Lie algebras representations.
Lipjanskij R.S., p.165-169.

The notion of a PI-variatate of Lie algebras representations is defined. A normalizator of a semigroup of PI-variatates and a normalizator of a semigroup of small variatates of Lie pairs are shown to be trivial. The proof of these facts essentially relies on theorem 2 which states that $S\times\theta$ is a PI-variatate iff θ is abel. Bibl. - 7 names.

On the representation of multiplicative operator functionals as solutions of stochastic integral equations.
Neimanis V.P., p.170-174.

We consider a d-dimensional I to process X with the Markov property and a multiplicative operator functional M of such a process with values in the collection of bounded linear operators defined on the Hilbert space H. Sufficient conditions are found for the representation of M as a solution of a stochastic integral equation. The result is formulated in terms of the infinitesimal operator for expectation semigroup of M.
Bibl. - 4 names.