ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Межвузовский сборник научных трудов

[4]

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1979

УДК 513., 519., 517.

Топологические пространства и их отображения.
Межвузовский сборник научных трудов, 1979.

Настоящий сборник, являющийся 4-м выпуском по данной теме, содержит результаты исследований, проведенных в 1977-78 годах на кафедрах математического анализа и высшей математики ЛГУ им. П.Стучки, РПИ, Ленинградского и Московского государственных университетов и некоторых других вузов. Большинство результатов было доложено на 37-й научной конференции ЛГУ им. П.Стучки в 1978 г.

Сборник предназначен для научных работников в области теории функций, функционального анализа и топологии, а также для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в этих областях.

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЛГУ им. П.Стучки от 26 октября 1979 года

Т $\frac{20203-123\ у}{М\ 812(11)-79}$ рез.79 - 1702040000

УДК 513.83

НЕКОТОРЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ РАМСЕЯ

Ю.Х.Брегман, А.П.Шостак
ЛГУ им.П.Стучки

Известная комбинаторная теорема Рамсея утверждает, в частности, что для каждого множества $\mathscr{C}_m^2$ найдется такое множество $\mathscr{C}_n^2$, всякое представление которого в виде $\mathscr{C}_n^2 = Y_1 \cup Y_2$ обладает тем свойством, что либо $\mathscr{C}_m^2 \subset Y_1$, либо $\mathscr{C}_m^2 \subset Y_2$; здесь через $\mathscr{C}_p^q$ мы обозначаем множество всевозможных сочетаний из данных p элементов по q [6]. Несколько лет тому назад чешские математики Пелант Я., Нешетрил Я. и Рёдл Ф. сформулировали проблему*, которую естественно рассматривать как топологический аналог теоремы Рамсея [5]. Приведем один из возможных вариантов этой проблемы:

Можно ли по данному топологическому пространству X найти такое топологическое пространство Y, для каждого представления которого в виде $Y = Y_1 \cup Y_2$ пространство X гомеоморфно подмножеству либо в Y_1, либо в Y_2.

В классе всех топологических пространств эта задача была вскоре же решена самими авторами [5]: несложная конструкция позволяет сопоставить для каждого пространства X пространство Y с указанными выше свойствами. К сожалению, получаемое при этом пространство Y не является хаусдорфовым (а только T_1) даже в том случае, когда в качестве X берется замкнутый отрезок $[0,1]$. Таким образом, естественно возникает вопрос о возможности построения достаточно "хорошего" (хаусдорфова, вполне регулярного или даже метрического) пространства Y в случае, если само X было "хорошим".

Немногие известные нам положительные результаты в этом направлении приведены в [1]. Там доказано, например, что если X - счетное регулярное пространство, без изолированных точек, то в качестве Y можно взять само пространство X,

---

* Вернее, даже цикл проблем.

В данной заметке приведен ряд отрицательных результатов, полученных нами в этом направлении.*

Здесь доказано, например, что каждое метрическое пространство Y веса меньшего, чем $\aleph_{c+\omega}$ ($\aleph_{c+\omega}$ обозначает первый иррегулярный кардинал, больший, чем континуум), может быть представлено в виде объединения двух таких своих подмножеств, ни одно из которых не содержит канторов дисконтинуум, а следовательно, и отрезок. (Следствия 2 и 3 теоремы 3). Основным методом доказательства этого и ряда других аналогичных результатов является рассмотрение конструкции Σ - произведения отрезков (Теорема 3).

В предположении обобщенной континуум-гипотезы GCH мы покажем, что если плотность пространства X меньше его мощности, то каждое хаусдорфово равномощное с X пространство Y может быть представлено в виде объединения двух не содержащих X подпространств Y_1 и Y_2 (Теорема 1); при этом в случае, когда $X = D^{\aleph_0}$ или $X = I$, предполагать GCH не требуется.

В дальнейшем все рассматриваемые пространства предполагаются хаусдорфовыми: D обозначает дискретное двоеточие $\{0,1\}$, I - замкнутый отрезок вещественной прямой $[0,1]$; N - дискретное пространство натуральных чисел; R - вещественная прямая.

Для обозначения плотности, мощности и веса пространства используем, соответственно, символы $d(X)$, $|X|$, $w(X)$.

Начальное порядковое число, соответствующее мощности континуума, нам будет удобно записывать в виде ω_c ; соответственно этому для записи самой мощности континуума мы будем использовать наряду с c символ $\aleph_c$. Порядковое число, соответствующее первой иррегулярной мощности, превосходящей континуум, получает при этом запись $\omega_{c+\omega_0}$, а его мощность - $\aleph_{c+\omega_0}$.

<u>Определение 1.</u> Будем говорить, что пространство Y является

---

* Основные из результатов этой заметки были впервые сформулированы в [2] .

Рамсеевским пространством для пространства X, если для каждого представления Y в виде объединения двух подмножеств $Y = Y_1 \cup Y_2$, пространство X гомеоморфно вкладывается либо в Y_1, либо Y_2.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих двух утверждений:

Предложение 1. Если Y не является рамсеевским пространством для X и $X \subset X'$, то Y не является рамсеевским и для X'.

Предложение 2. Если Y не является рамсеевским для пространства X, то и никакое его подпространство $Y' \subset Y$ не является Рамсеевским для X.

Теорема 1 [GCH]. Если $d(X) < |X|$, то ни одно пространство Y, мощность которого равна мощности X, не может являться пространством Рамсея для X.

Доказательство. Обозначим через H ($=H(X,Y)$) множество всех подпространств $P \subset Y$, которые гомеоморфны пространству X, и покажем, что $|H| \leq |X|$. Пусть S - всюду плотное подмножество пространства X, мощность которого равна $d(X)$. Ясно, что мощность множества H не больше мощности множества всевозможных гомеоморфных вложений $\{h: X \to Y\}$. Поскольку пространство Y хаусдорфово, два непрерывных отображения равны тогда и только тогда, когда совпадают их сужения на всюду плотном подмножестве S. Поэтому имеет место цепочка неравенств: $|H| \leq |\{h: X \to Y\}| = |\{h: S \to Y\}| \leq |Y|^{|S|} = |X|^{d(X)}$. Далее, известно, что для каждого хаусдорфового пространства X имеет место неравенство $|X| \leq 2^{2^{d(X)}}$ (см., напр., [4]). Отсюда, учитывая предположенное неравенство $|X| > d(X)$ и обобщенную континуум-гипотезу, получаем, что $|X|^{d(X)} = |X|$ а, следовательно, имеет место доказываемое неравенство $|H| \leq |X|$.

Занумеруем множества, входящие в семейство H, всеми трансфинитными числами, меньшими ω_ξ, где ω_ξ - начальное трансфинитное число мощности $|X|$. (Тем самым мы задали на H минимальный полный порядок.) По трансфинитной индукции построим такие множества $Y_1^* = \{y_1^\alpha : \alpha < \omega_\xi\} \subset Y$ и $Y_2^* = \{y_2^\alpha : \alpha < \omega_\xi\} \subset Y$

что каждое множество P из семейства H пересекается как с Y_1^*, так и с Y_2^*. На первом шаге индукции в качестве y_1^1 выбираем произвольную точку из P_1, а в качестве y_2^1 – произвольную точку из P_1, отличную от y_1^1. Предположим, что для каждого $\beta < \alpha$ $(\alpha < \omega_\xi)$ выбраны точки y_1^β и y_2^β из P_β, причем таким образом, что $y_1^{\beta_1} \neq y_2^{\beta_2}$ для всех $\beta_1, \beta_2 < \alpha$. Рассмотрим множество $R_\alpha \overset{def}{=} P_\alpha \setminus (\{y_1^\beta : \beta < \alpha\} \cup \{y_2^\beta : \beta < \alpha\})$. Поскольку $|H| < |X| = |P_\alpha|$ и множество H минимально упорядочено, то $|R_\alpha| = |P_\alpha|$, а, следовательно, в качестве y_1^α можем выбрать произвольную точку из R_α, а в качестве y_2^α – произвольную точку из этого же множества, отличную от y_1^α. Продолжая это построение по индукции, получим два дизъюнктных множества $Y_1^* = \{y_1^\alpha : \alpha < \omega_\xi\}$ и $Y_2^* = \{y_2^\alpha : \alpha < \omega_\xi\}$, обладающих тем свойством, что каждое множество P, гомеоморфное X, пересекается как с Y_1^*, так и с Y_2^*. Для того, чтобы завершить наше доказательство, достаточно положить $Y_1 = Y_1^*$ и $Y_2 = Y_2^* \cup (Y \setminus Y_1^*)$ и заметить, что $Y_1 \cup Y_2 = Y$ и каждое подпространство в Y, гомеоморфное X, пересекается как с Y_1, так и с Y_2. Существование таких подмножеств Y_1 и Y_2 и доказывает, что пространство Y не является рамсеевским для X.

Следствие. Ни одно пространство мощности континуума не является рамсеевским для $[0,1]$ или для канторова дисконтинуума $D^{\aleph_0}$.

Замечание. Аксиома GCH, использованная в доказательстве теоремы, может быть ослаблена; мы, однако, не будем приводить такого варианта теоремы.

В дальнейшем нам потребуется также следующая (возможно известная) лемма:

Лемма 1. Если A – подмножество канторова дисконтинуума и $|A| < c$, то его дополнение $K = D^{\aleph_0} \setminus A$ содержит гомеоморфный образ $D^{\aleph_0}$.

Доказательство. Пусть K' – подмножество всех таких точек из K, каждая из которых входит в K вместе со своим σ-произведением. Нетрудно заметить, что $|K'| = c$. Без ограничения общности можем считать, что точка $x_0 = (0, 0, \dots, 0, \dots) \in K'$. (Этого всегда можно добиться, рассмотрев гомеоморфизм пространства $D^{\aleph_0}$ на себя).

Рассмотрим отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in D^{c}$ множество $E_x \in N$, образованное номерами координат точки x, каждая из которых равна 1. Тогда множеству K' будет соответствовать множество $\mathfrak{X} \subset \exp N$ такое, что $|\exp N \setminus \mathfrak{X}| < c$.

Докажем, что найдется такое счетное множество $F \in \mathfrak{X}$, каждое подмножество которого принадлежит $\mathfrak{X}$. Заметим прежде всего, что любое конечное подмножество $P \subset N$ принадлежит $\mathfrak{X}$, поскольку конечным подмножеством в N соответствуют точки σ-произведения, содержащего x.

Рассмотрим некоторую почти дизъюнктную систему счетных подмножеств из N, мощность которой равна c. (Система множеств $\mathscr{C}$ называется почти дизъюнктной, если пересечение любых двух входящих в нее множеств не более, чем конечно; существование такой системы мощности c следует из [7]). Пересечение $\mathfrak{X} \cap \mathscr{C}$ обозначим G, $|G| = c$.

Если бы множества F с указанными выше свойствами не существовало, то для каждого $B \in G$ мы могли бы указать такое счетное множество $C \subset B$, которое не принадлежит $\mathfrak{X}$, а следовательно, и G. Из почти дизъюнитности системы G следует, что попарное пересечение определённых таким образом различных множеств C конечно. Таким образом, мы построили взаимно однозначное отображение $\psi: G \to \exp N \setminus \mathfrak{X}$ определяемое равенством $\psi(B) = C$. Но это противоречит тому, что $|G| = c$ и $|\exp N \setminus \mathfrak{X}| < c$. Из полученного противоречия следует, что существует счетное множество F, каждое счетное подмножество которого принадлежит $\mathfrak{X}$. Поскольку, с другой стороны, как показали, $\mathfrak{X}$ содержит и все конечные подмножества из N, включение $\exp F \subset \mathfrak{X}$ доказано.

Нетрудно теперь заметить, что множество точек из K', соответствующих $\exp F$, гомеоморфно D^{τ}, что и завершает доказательство леммы.

Теорема 2. Пусть Z_1 и Z_2 – подмножества пространства X, $|X|=c$, каждое из которых не содержит канторов дисконтинуум $D^{\aleph_0}$. Тогда пространство X может быть представлено в виде $X=Y_1\cup Y_2$ таким образом, что $Z_1\subset Y_1$, $Z_2\subset Y_2$ и при этом ни Y_1, ни Y_2 не содержат канторов дисконтинуум.

Доказательство. Обозначим $Z=Z_1\cup Z_2$ и заметим, что без ограничения общности можем считать множества Z_1 и Z_2 дизъюнктными.

Пусть $\mathcal{K}$ – семейство всех подмножеств $P\subset X$, каждое из которых гомеоморфно $D^{\aleph_0}$, и пересечение которых с Z не содержит канторов дисконтинуум. Подобно тому, как в доказательстве теоремы 1, убеждаемся в том, что $|\mathcal{K}|\le c$; на этот раз мы не должны предполагать континуум-гипотезу, ибо $|D^{\aleph_0}|^{d(D^{\aleph_0})}=c^{\aleph_0}=c$. Занумеруем все множества, входящие в семейство $\mathcal{K}$, порядковыми числами, меньшими наименьшего ординала ω_c, соответствующего мощности континуум. По трансфинитной индукции построим такие множества $Y_1^*=\{y_1^\alpha:\alpha<\omega_c\}\subset Y$ и $Y_2^*=\{y_2^\alpha:\alpha<\omega_c\}\subset Y$, что каждое из семейства $\mathcal{K}$ пересекается как с Y_1^*, так и с Y_2^* и при этом $Y_1^*\cap Z_2=\emptyset$, $Y_2^*\cap Z_1=\emptyset$.

В качестве y_1^1 берем произвольную точку из $P_1\setminus Z_2$, а в качестве y_2^1 – произвольную точку из $P_1\setminus Z_1$, отличную от y_1^1. Предположим, что для всех ординалов β, меньших α $(\alpha<\omega_c)$, выбраны точки y_1^β из $P_\beta\setminus Z_2$ и y_2^β из $P_\beta\setminus Z_1$, причем таким образом, что $y_1^{\beta_1}\neq y_2^{\beta_2}$ для всех $\beta_1,\beta_2<\alpha$.

Покажем, что множества $R_\alpha^1=(P_\alpha\setminus Z_2)\setminus\{y_2^\beta:\beta<\alpha\}$ и $R_\alpha^2=$ $=(P_\alpha\setminus Z_1)\setminus\{y_1^\beta:\beta<\alpha\}$ не пусты. Для этого прежде всего заметим, что $|P_\alpha\setminus Z_2|=c$. В самом деле, если $|P_\alpha\setminus Z_2|<c$, то, в силу леммы 1, $P_\alpha\cap Z_2$ содержит канторов дисконтинуум (ведь P_α гомеоморфно $D^{\aleph_0}$), а это противоречит определению семейства $\mathcal{K}$.

Поскольку множество $|\{y_1^\beta : \beta<\alpha\}| < c$ (свойство минимального порядка), отсюда следует, что $R_\alpha^1 = (P_\alpha \setminus Z_1) \setminus \{y_2^\beta : \beta<\alpha\}$ имеет мощность континуум и, следовательно, не пусто. Совершенно аналогично показываем, что и множество R_α^2 имеет мощность континуум.

В виду того, что множества R_α^1 и R_α^2 континуальны, в качестве y_1^α можем выбрать произвольную точку из R_α^1, а в качестве y_2^α – произвольную точку из R_α^2, отличную от y_1^α. Продолжая это построение по индукции, получим два дизъюнктных множества Y_1^* и Y_2^*, обладающие тем свойством, что каждое гомеоморфное канторову дисконтинууму подмножество в X пересекается как с Y_1^*, так и с Y_2^*, и при этом $Y_1^* \cap Z_2 = \emptyset$, $Y_2^* \cap Z_1 = \emptyset$. Для завершения доказательства теоремы достаточно положить $Y_1 = Y_1^* \cup Z_1$ и $Y_2 = Y \setminus Y_1$. Нетрудно заметить, что определенные так множества Y_1 и Y_2 и являются искомыми. Теорема доказана.

В дальнейшем нам неоднократно придется воспользоваться понятием Σ-произведения. Напомним его определение.

<u>Определение 2.</u> [3]. Пусть $\{E_a : a \in A\}$ – семейство топологических пространств и $E = \Pi\{E_a : a \in A\}$ – их произведение. Выберем точку $e^0 = (e_a^0) \in E$ и рассмотрим подмножество Σ_{e^0} в E, состоящее из точек e произведения E, отличающихся от точки e^0 не более, чем на счетном числе координат. Это пространство Σ_{e^0} называется Σ-произведением семейства пространств $\{E_a : a \in A\}$, а точка e^0 – его базисной точкой.

Мы будем интересоваться случаем, когда все пространства E_a являются единичными отрезками вещественной прямой; в этом случае, как легко видеть, Σ-произведения Σ_{e^1} и Σ_{e^2} для различных базисных точек e^1 и e^2 гомеоморфны между собой. Поэтому в качестве базисной точки мы можем всегда выбрать точку $0 = \{(0_a) : a \in A\}$; Σ-произведение в этом случае полностью определяется числом сомножителей в произведении.

Нам будет удобно записывать тихоновский куб в виде $I^a = \Pi \{I_\lambda : \lambda \in T(a)\}$, где a – ординал, а $T(a)$ – множество всех ординалов, меньших, чем a. Σ-произведение в этом случае может быть записано в виде $\Sigma^a = \{x = (x_\lambda) \in I^a : \lambda < a,\ x_\lambda = 0$ для всех, кроме счетного числа индексов $\lambda\}$. Кроме того, для различных $\lambda \subset T(a)$ нам потребуется рассматривать подмножества Σ^a_λ Σ-произведения Σ^a, определяемые равенством $\Sigma^a_\lambda = \Sigma^a \cap \Pi\{X_\lambda : \lambda \in T(a)\}$, где $X_\lambda = I_\lambda$ при $\lambda \in \lambda$; $X_\lambda = \{0\}$ при $\lambda \in T(a) \setminus \lambda\}$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующие две леммы, на которых основываются главные результаты работы.

Лемма 2. Σ- произведение Σ^{ω_c}* имеет мощность континуум.

Доказательство. Ясно, что $\Sigma^{\omega_c} = \bigcup\{\Sigma^{\omega_c}_\lambda : \lambda \subset T(\omega_c), |\lambda| = \aleph_0\}$. Поскольку мощность каждого $\Sigma^{\omega_c}_\lambda$, очевидно, континуум и различных счетных подмножеств λ в I^{ω_c} – также континуум, то $|\Sigma^{\omega_c}| = c \cdot c = c$.

Лемма 3. Предположим, что для данного начального ординала ω_τ выполнены следующие два условия:

1) Σ^{ω_τ} не является рамсеевским для $D^{\aleph_0}$;

2) Если $\Sigma^{\omega_\tau}_{\lambda_j} = A^j \cup B^j$ ($\lambda_j \subset T(\omega_\tau)$ для всех $j \in N$), где ни одно A^j, B^j не содержит $D^{\aleph_0}$ и $A^i \cap B^j = \emptyset$ ($i, j \in N$), то и Σ^{ω_τ} представимо в виде объединения двух дизъюнктных, не содержащих $D^{\aleph_0}$ подмножеств A и B, таких, что $\bigcup_j A^j \subset A$ и $\bigcup_j B^j \subset B$.

Тогда:

1') $\Sigma^{\omega_{\tau+1}}$ не является рамсеевским для $D^{\aleph_0}$;

2') Если $\Sigma^{\omega_{\tau+1}}_{\lambda_j} = A^j \cup B^j$ ($\lambda_j \subset T(\omega_{\tau+1})$ для всех $j \in N$), где ни одно A^j и B^j не содержит $D^{\aleph_0}$ и $A^i \cap B^j = \emptyset$ ($i, j \in N$), то и $\Sigma^{\omega_{\tau+1}}$ представимо в виде объединения двух дизъюнктных, не содержащих $D^{\aleph_0}$ подмножеств A и B, таких, что $\bigcup_j A^j \subset A$ и $\bigcup_j B^j \subset B$.

---

* Напомним, что через ω_c мы обозначаем начальный ординал, соответствующий мощности континуум c.

Доказательство Леммы 3.

Заметим, прежде всего, что $\Sigma^{\omega_{\tau+1}} = \bigcup\{\Sigma^{\xi} : \omega_\tau \leq \xi < \omega_{\tau+1}\}$. Предположим, что для каждого $a < \xi$ построены множества A_a и B_a такие, что $\Sigma^{a} = A_a \cup B_a$, и ни A_a, ни B_a не содержат канторова дисконтинуума D^{τ_0}, причем $A_{a'} \subset A_a$ и $B_{a'} \subset B_a$ при $a' < a$. Построим множества A_ξ и B_ξ таким образом, что $A_\xi \cup B_\xi = \Sigma^{\xi}$, $A_a \subset A_\xi$, $B_a \subset B_\xi$ для каждого $a < \xi$ и ни A_ξ, ни B_ξ не содержат канторов дисконтинуум D^{τ_0}. Рассмотрим три возможные ситуации: I) ξ не предельный, т.е. $\xi = a + 1$ для некоторого a; 2) ξ предельный и $cf(\xi) = \omega_0$; 3) ξ предельный, и $cf(\xi) > \omega_0$.

В случаях $\xi = a + 1$ и $cf(\xi) = \omega_0$ существование подмножеств A_ξ и B_ξ с требуемыми свойствами следует из условия 2) ввиду гомеоморфности пространств Σ^{ω_τ} и Σ^{ξ}.

Предположим теперь, что $cf(\xi) > \omega_0$. Поскольку в этом случае, очевидно, $\Sigma^{\xi} = \bigcup\{\Sigma^{a} : a < \xi\}$, определим A_ξ и B_ξ равенствами $A_\xi = \bigcup\{A_a : a < \xi\}$ и $B_\xi = \bigcup\{B_a : a < \xi\}$. Легко видеть, что ни A_ξ, ни B_ξ не содержат канторова дисконтинуума. В самом деле, если бы $D^{\tau_0} \subset A_\xi$, то можно найти такой ординал $a < \xi$, что тот же самый канторов дисконтинуум содержится и в Σ^{a}, а следовательно и в A_a, что противоречит предположению.

Поскольку $\Sigma^{\omega_{\tau+1}} = \bigcup\{\Sigma^{\xi} : \omega_\tau \leq \xi < \omega_{\tau+1}\}$, для завершения доказательства свойства I') нам достаточно положить $A = \bigcup\{A_\xi : \omega_\tau \leq \xi < \omega_{\tau+1}\}$ и $B = \bigcup\{B_\xi : \omega_\tau \leq \xi < \omega_{\tau+1}\}$. Переходим к доказательству условия 2').

Предположим, что в $\Sigma^{\omega_{\tau+1}}$ задана последовательность подпространств $\Sigma^{\omega_{\tau+1}}_{\lambda_j}$, $j \in N$, каждое из которых представлено в виде объединения $\Sigma^{\omega_{\tau+1}}_{\lambda_j} = A^j \cup B^j$, где ни A^j, ни B^j не содержат копий канторова дисконтинуума D^{τ_0}, и при этом $A^i \cap B^i = \emptyset$ ($\forall j \in N$). Для каждого $a < \omega_{\tau+1}$ рассмотрим множества $A^j_a = A^j \cap \Sigma^{a}$, $B^j_a = B^j \cap \Sigma^{a}$.

Предположим, что для каждого $a < \xi$ построены такие дизъюнктные множества A_a и B_a, не содержащие D^{τ_0}, что $A_a \cap B_a = \emptyset$, $A_{a'} \subset A_a$, $B_{a'} \subset B_a$ при $a' < a$ и $A^j_a \subset A_a$, $B^j_a \subset B_a$ для всех $j \in N$. Покажем, что существуют такие дизъюнктные множества A_ξ, B_ξ, не содержащие $D^{\aleph_0}$, объединения которых равно Σ^ξ и такие, что $A_\alpha \subset A_\xi$, $B_\alpha \subset B_\xi$, $A^j_\xi \subset A_\xi$, $B^j_\xi \subset B_\xi$ для всех $\alpha < \xi$ и всех $j \in N$.

В случае, когда $\xi = \alpha+1$ или $cf(\xi) = \omega_0$ существование таких множеств следует из 2). В случае $cf(\xi) > \omega_0$ мы снова можем определить множества A_ξ и B_ξ равенствами $A_\xi = \cup\{A_\alpha : \alpha<\xi\}$, $B_\xi = \cup\{B_\alpha : \alpha<\xi\}$. Для завершения доказательства леммы нам остается положить $A = \cup\{A_\xi : \omega_\tau<\xi<\omega_{\tau+1}\}$ и $B = \cup\{B_\xi : \omega_\tau<\xi<\omega_{\tau+1}\}$. Легко видеть, что определенные таким путем множества A и B удовлетворяют условию 2') леммы.

Воспользовавшись леммой 2, теоремой 2 и леммой 3 непосредственно убеждаемся в справедливости следующего утверждения:

Теорема 3. Σ-произведение отрезков в числе, меньшем, чем $\aleph_{\tau+\omega_1}$ не является **рамсеевским** для канторова дисконтинуума $D^{\aleph_0}$.

Для того, чтобы из теоремы 3 вывести следствия, представляющие, по-видимому, наибольший интерес, нам придется воспользоваться следующей леммой:

Лемма 4. Каждое метрическое пространство X веса τ гомеоморфно подмножеству некоторого Σ-произведения отрезков I в числе, не превосходящим τ.

Доказательство этой, по-видимому известной, леммы мы опускаем; в случае необходимости оно легко может быть восстановлено читателем.

Из теоремы 3, **леммы 4** и предложения 2 получаем

Следствие I. Никакое метрическое пространство веса меньшего, чем $\aleph_{\tau+\omega_0}$ не является **рамсеевским** для $D^{\aleph_0}$.

Вспоминая, что каждое полное метрическое пространство без изолированных точек содержит подмножество, гомеоморфное $D^{\aleph_0}$ и воспользовавшись теоремой 3 и предложением, I получаем,

Следствие 2. Σ-произведение отрезков в числе, меньшем чем $\aleph_{\tau+\omega_0}$, не является **рамсеевским** ни для какого полного метрического пространства без изолированных точек.

Отсюда, учитывая лемму 3 и предложение 2, выводим

Следствие 3. Никакое метрическое пространство веса, меньшего чем $\aleph_{\tau+\omega_0}$, не является **рамсеевским** ни для одного полного метрического пространства без изолированных точек.

В заключение мы сформулируем несколько вопросов, ответ на которые до сих пор нам не удалось найти.

1. Будет ли Σ-произведение отрезков в достаточно большом числе рамсеевским для $D^{\aleph_0}$? В частности, существует ли пространство, рамсеевское для $D^{\aleph_0}$ (для I) в классе всех метрических пространств?

2. Является ли I^c рамсеевским пространством для канторова дисконтинуума? Для отрезка?

3. Существует ли пространство, рамсеевское для $D^{\aleph_0}$ (для I) в классе всех вполне регулярных пространств? В классе всех хаусдорфовых пространств?

4. Может ли счетное произведение пространств Y, каждое из которых не является рамсеевским для X ($X = D^{\aleph_0}$, $X = I$), оказаться рамсеевским для X? Нам не известен ответ на этот вопрос даже в таком частном случае, когда все рассматриваемые пространства Y являются метрическими веса, меньшего $\aleph_{\omega_0}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брегман Ю.Х. Топологические аналоги теоремы Рамсея. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Респ.межвуз. сб.науч.тр.,вып.3,Рига,1977,с.3-6.
2. Брегман Ю.Х., Шостак А.П. О Рамсеевских пространствах.- В кн.: Тезисы докладов Школы по теории операторов в функциональных пространствах (3 - 9 июля 1978 г.), Минск,1978.
3. Corson H.H. - Amer.J.of Math., 81, 1959,p.785-796.
4. Engelkind R. General topology. Warszawa, 1977.
5. Nešetril J., Rödl V. - Gen.Topol.and Relat.Modern Anal.and Algebra. 4-th Prague Topol.Symp., 1976; Part.B,1977,p. 333-337.
6. Оре О. Теория графов. М.,1968.
7. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., 1974.

Поступила 10 сентября 1978 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.

УДК 513.88

О РАСТВОРЕ МЕЖДУ МНОЖЕСТВАМИ И ТЕОРЕМАХ УСТОЙЧИВОСТИ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.Л.Вейлер
ЛГУ им. П.Стучки

В статье распространяется понятие раствора δ (см.,например,[3]) и нелинейного аналога раствора $\hat{\varphi}$ работы [1] на случай произвольных множеств в локально выпуклых пространствах (ЛВП).

Изучается устойчивость ограниченности и свойства Липшица, а также ограниченной и липшицевой обратимости операторов в ЛВП.

В работе обобщаются результаты статьи [1] и некоторые факты, содержащиеся в [2] и [3] .

§ 1. Раствор между множествами.

1. Обозначения. Пусть (X, P) и (Y, Q) – локально выпуклые пространства над одним и тем же полем K с семействами полунорм P и Q – соответственно (ЛВП).

$$B(X,Y) \stackrel{def}{=} \{A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y \mid \exists f_A : Q \to P \ \forall q \in Q \ \exists \tilde{b}_q \in \mathbb{R}_+ : q(Ax) \le \tilde{b}_q f_A(q)(x) \ \forall x \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Через b^q_{A,f_A} обозначим нижнюю грань всевозможных констант $\tilde{b}_q$, удовлетворяющих записанному выше неравенству при данном $q \in Q$. $b_{A,f_A} \stackrel{def}{=} \sup_{q \in Q} b^q_{A,f_A}$. $B_f(X,Y) \stackrel{def}{=} \{A \in B(X,Y) : f_A = f\}$

$$Lip(X,Y) \stackrel{def}{=} \{A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y \mid \exists f_A : Q \to P \ \forall q \in Q \ \exists \tilde{a}_q \in \mathbb{R}_+ : q(Ax_1 - Ax_2) \le \tilde{a}_q f_A(q)(x_1 - x_2) \ \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Через a^q_{A,f_A} обозначим нижнюю грань всевозможных констант $\tilde{a}_q$, удовлетворяющих записанному выше неравенству при данном $q \in Q$. $a_{A,f_A} \stackrel{def}{=} \sup_{q \in Q} a^q_{A,f_A}$. $Lip_f(X,Y) \stackrel{def}{=} \{A \in Lip(X,Y) : f_A = f\}$ *

Назовем оператор $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ удовлетворяющим условию

*В случае нормированных пространств X и Y классы $Lip(X,Y)$ и $Lip_f(X,Y)$ совпадают с множеством всех операторов $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$, удовлетворяющих условию Липшица, причем константы a_{A,f_A} и a^q_{A,f_A} совпадают с константой Липшица оператора A.

Липшица, если $A \in Lip(X,Y)$.

Назовем оператор $A \in Lip_{\xi}(X,Y)$ сжатием, если $a^{q}_{A,\xi} < 1 \ \forall q \in Q$.

Легко видеть, что $B(X,Y) \neq \emptyset, Lip(X,Y) \neq \emptyset$ ($\{A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y \mid Ax = \theta \ \forall x \in \mathcal{D}(A)\} \subseteq B_{\xi}(X,Y) \cap Lip_{\xi}(X,Y) \ \forall \xi : Q \to P$), и операторы из $B(X,Y)$ и $Lip(X,Y)$ ограничены и непрерывны соответственно.

2. Основные определения. Пусть (X,P) – ЛВП, $G_1, G_2 \subseteq X$ – непустые подмножества в X.

Определение 1. Положим: $\delta(G_1,G_2)$ – нижняя грань констант $b_{F-I,\,id}$ отображений вида $F-I$, где $F \in B_{id}(X,X)$ $F : G_1 \to G_1$, а I – тождественное отображение на G_1. Число

$$\hat{\delta}(G_1,G_2) \overset{def}{=} \max[\,\delta(G_1,G_2),\ \delta(G_2,G_1)\,]$$

назовем раствором между множествами G_1 и G_2.

Определение 2. Положим: $\varphi(G_1,G_2)$– нижняя грань констант $a_{F-I,\,id}$ отображений вида $F-I$, где $F \in Lip_{id}(X,X)$ и $F : G_1 \to G_2$, а I – тождественное отображение на G_1. Число

$$\hat{\varphi}(G_1,G_2) \overset{def}{=} \max[\,\varphi(G_1,G_2),\ \varphi(G_2,G_1)\,]$$

назовем аналогом раствора между множествами G_1 и G_2.

Следующие обозначения будут удобны в дальнейшем.

Пусть $I_{G_1} : G_1 \to G_1$– тождественное отображение на G_1; $B_{G_1} : G_1 \to X$ – отображение из $B_{id}(X,X)$, и $L_{G_1} : G_1 \to X$ – отображение из $Lip_{id}(X,X)$.

Положим

$$\mathcal{F}_{\delta}(G_1,G_2) \overset{def}{=} \{F : G_1 \to G_2 \mid F = I_{G_1} + B_{G_1}\}. \tag{1}$$

$$b^{p}_{F} \overset{def}{=} b^{p}_{B_{G_1},\,id},\ b_F \overset{def}{=} b_{B_{G_1},\,id}, \text{ где } F \in \mathcal{F}_{\delta}(G_1,G_2) \text{ и } F = I_{G_1} + B_{G_1} \tag{2}$$

$$\mathcal{B}(G_1,G_2) \overset{def}{=} \{\, b \in \mathbb{R}_+ \mid \exists F \in \mathcal{F}_{\delta}(G_1,G_2) : b_F = b \,\}. \tag{3}$$

Тогда $\delta(G_1,G_2) = \inf \mathcal{B}(G_1,G_2)$

$$\mathcal{F}_{\varphi}(G_1,G_2) \overset{def}{=} \{F : G_1 \to G_2 \mid F = I_{G_1} + L_{G_1}\} \tag{1'}$$

$$a^{p}_{F} \overset{def}{=} a^{p}_{L_{G_1},\,id},\ a_F \overset{def}{=} a_{L_{G_1},\,id},\quad F \in \mathcal{F}_{\varphi}(G_1,G_2)\quad F = I_{G_1} + L_{G_1} \tag{2'}$$

$$\mathcal{A}(G_1,G_2) \overset{def}{=} \{a \in \mathbb{R}_+ \mid \exists F \in \mathcal{F}_{\varphi}(G_1,G_2) : a_F = a\} \tag{3'}$$

Тогда $\varphi(G_1,G_2) = \inf \mathcal{A}(G_1,G_2)$.

Теорема 1. Пусть (X,P) – ЛВП. $G_1, G_2 \subseteq X$ – непустые множества.

Тогда $\mathcal{F}_\varphi(G_1,G_2)\neq\emptyset$, $\mathfrak{A}(G_1,G_2)\neq\emptyset$, $0\le\varphi(G_1,G_2)\le 1$.

Если $\theta\in G_2$, то $\mathcal{F}_\delta(G_1,G_2)\neq\emptyset$, $\mathfrak{B}(G_1,G_2)\neq\emptyset$, $0\le\delta(G_1,G_2)\le 1$.

Доказательство. Пусть $y\in G_2$ и $L_{G_1}x=y-x$ $\forall x\in G_1$. Тогда $p(L_{G_1}x_1-L_{G_1}x_2)=p(x_1-x_2)$ $\forall x_1,x_2\in G_1$ $\forall p\in P$. Отсюда $F=I_{G_1}+L_{G_1}\in\mathcal{F}_\varphi(G_1,G_2)$, $1\in\mathfrak{A}(G_1,G_2)$ и $\varphi(G_1,G_2)\le 1$. Оценка $\varphi(G_1,G_2)\ge 0$ непосредственно следует из определений.

Пусть $\theta\in G_2$ и $B_{G_1}x=-x$ $\forall x\in G_1$. Тогда, очевидно, $F=I_{G_1}+B_{G_1}\in\mathcal{F}_\delta(G_1,G_2)$, $1\in\mathfrak{B}(G_1,G_2)$ и $\delta(G_1,G_2)\le 1$. Оценка $\delta(G_1,G_2)\ge 0$ непосредственно следует из определений.

Следствие 1. Из теоремы 1 в силу произвольности непустых множеств G_1 и G_2 вытекает, что $0\le\hat\varphi(G_1,G_2)\le 1$ и если $\theta\in G_1$, то $0\le\hat\delta(G_1,G_2)\le 1$.

Ниже мы будем полагать, что $\forall G\in 2^X$

$\varphi(\emptyset,G)\overset{def}{=}0$; $\varphi(G,\emptyset)\overset{def}{=}1$, если $G\neq\emptyset$;

$\hat\varphi(\emptyset,G)\overset{def}{=}\max[\varphi(\emptyset,G),\varphi(G,\emptyset)]$.

Замечание 1. Таким образом, выше мы распространили понятие аналога раствора работы [1] на локально выпуклые пространства, а понятие раствора (см., например, [3], стр. 251) между линейными замкнутыми множествами в банаховом пространстве на случай произвольных множеств, содержащих θ, в локально выпуклом пространстве.

Первое очевидно. Покажем утверждение второе. Пусть M и N – линейные замкнутые подмножества банахова пространства X. Тогда, из определения функции δ с помощью оценки (2.3) на стр. 251 в [3], $\forall\varepsilon>0\,\forall u\in M\,\exists v_u\in N:\|u-v_u\|\le(\alpha+\varepsilon)\|u\|$ для любого α, удовлетворяющего оценке (2.3). Отсюда, полагая $B_M u=v_u-u\,\forall u\in M$, получаем, что обобщение раствора не превосходит его на той же паре множеств. Обратное получим, заметив, что $dist(u,N)\le\|u-Fu\|=\|B_M u\|\le\alpha_F\|u\|$ $\forall u\in M$, где $F=I+B_M\in\mathcal{F}_\delta(M,N)$.

Из определений и теоремы 1 непосредственно следует

Лемма 1. Пусть (X,P) – ЛВП. G_1 и G_2 – непустые множества из X. Тогда $\forall\varepsilon>0\,\exists F\in\mathcal{F}_\varphi(G_1,G_2):\alpha_F<\varphi(G_1,G_2)+\varepsilon$. Если $\theta\in G_2$, то $\forall\varepsilon>0\,\exists F\in\mathcal{F}_\delta(G_1,G_2):\beta_F<\delta(G_1,G_2)+\varepsilon$.

3. Топология. Зададим топологию в пространствах $N_X \overset{def}{=} \{G \subseteq X : \theta \in G\}$ и 2^X – всех подмножеств пространства X.

Теорема 2. Пусть (X,P) – ЛВП, $G_1, G_2, G_3 \subseteq X$. Тогда

$$\varphi(G_1,G_3) \le \varphi(G_1,G_2) + \varphi(G_2,G_3) + \varphi(G_1,G_2)\varphi(G_2,G_3) \quad (4)$$

$$\hat\varphi(G_1,G_3) \le \hat\varphi(G_1,G_2) + \hat\varphi(G_2,G_3) + \hat\varphi(G_1,G_2)\hat\varphi(G_2,G_3) \quad (5)$$

Если $\theta \in G_2$, $\theta \in G_3$, то

$$\delta(G_1,G_3) \le \delta(G_1,G_2) + \delta(G_2,G_3) + \delta(G_1,G_2)\delta(G_2,G_3), \quad (4')$$

если при этом $\theta \in G_1$, то

$$\hat\delta(G_1,G_3) \le \hat\delta(G_1,G_2) + \hat\delta(G_2,G_3) + \hat\delta(G_1,G_2)\hat\delta(G_2,G_3). \quad (5')$$

Доказательство. Пусть $G_i \ne \emptyset$, $i=1,2,3$; $F_{1,2} \in \mathcal{F}_\varphi(G_1,G_2)$; $F_{2,3} \in \mathcal{F}_\varphi(G_2,G_3)$. Тогда $F \equiv F_{2,3} \circ F_{1,2} = (I_{G_2}+L_{G_2}) \circ (I_{G_1}+L_{G_1}) = I_{G_2} \circ (I_{G_1}+L_{G_1}) + L_{G_2} \circ (I_{G_1}+L_{G_1})$ $= I_{G_1} + L_{G_1} + L_{G_2} \circ (I_{G_1}+L_{G_1})$. Положим $L \equiv L_{G_1} + L_{G_2} \circ (I_{G_1}+L_{G_1})$, тогда $p(Lx_1 - Lx_2) \le p(L_{G_1}x_1 - L_{G_1}x_2) + p(L_{G_2}(I_{G_1}+L_{G_1})x_1 - L_{G_2}(I_{G_1}+L_{G_1})x_2) \le$ $\alpha_{F_{1,2}} p(x_1-x_2) + \alpha_{F_{2,3}}(p(x_1-x_2) + p(L_{G_1}x_1 - L_{G_1}x_2)) \le (\alpha_{F_{1,2}} + \alpha_{F_{2,3}} + \alpha_{F_{1,2}}\alpha_{F_{2,3}}) \cdot$ $p(x_1-x_2)$ $\forall x_1,x_2 \in G_1$ $\forall p \in P$. Отсюда $F \in \mathcal{F}_\varphi(G_1,G_2)$ и из произвольности $F_{1,2}$ из $\mathcal{F}_\varphi(G_1,G_2)$ и $F_{2,3}$ из $\mathcal{F}_\varphi(G_2,G_3)$ следует неравенство (4). Оценка (5) получается так же, как оценка (7) в лемме 2 в [1]. Если одно (или более) из множеств G_1, G_2, G_3 пусто, то оценки (4) и (5) проверяются непосредственно.

Оценки (4') и (5') получаются аналогично.

Положим $\forall G_0 \in 2^X$ и $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{U}(G_0,\varepsilon) \overset{def}{=} \{G \in 2^X ;\ \hat\varphi(G_0,G) < \varepsilon\};$$

$$\mathfrak{U} \overset{def}{=} \{\mathcal{U}(G,\varepsilon) : G \in 2^X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+\};$$

и $\forall G_0 \in N_X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$V(G_0,\varepsilon) \overset{def}{=} \{G \in N_X : \hat\delta(G_0,G) < \varepsilon\};$$

$$\mathfrak{V} \overset{def}{=} \{V(G,\varepsilon) : G \in N_X,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+\},$$

Теорема 3. Пусть (X,P) – ЛВП. Тогда $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{V}$ – базы некоторых топологий τ_φ и τ_δ в 2^X и N_X – соответственно.

Доказательство. практически совпадает с доказательством теоремы 1 в [1].

Теорема 4. Пусть (X, P) – ЛВП, $(2^X, \tau_\varphi)$ – топологическое пространство всех подмножеств X с топологией τ_φ и (N_X, τ_δ) – топологическое пространство всех подмножеств X, содержащих θ, с топологией τ_δ. Тогда пространства $(2^X, \tau_\varphi)$ и (N_X, τ_δ) полуметризуемы и

$$\mathcal{R}_\varphi = \{\rho^\varphi_{c,d}(G_1,G_2) = c\log_d(1+\hat{\varphi}(G_1,G_2)) : c,d>0,\ G_1,G_2 \in 2^X\};$$
$$\mathcal{R}_\delta = \{\rho^\delta_{c,d}(G_1,G_2) = c\log_d(1+\hat{\delta}(G_1,G_2)) : c,d>0,\ G_1,G_2 \in N_X\}$$

– семейства эквивалентных полуметрик в $(2^X, \tau_\varphi)$ и (N_X, τ_δ) соответственно, согласованных с топологиями τ_φ и τ_δ соответственно.

Доказательство. Свойства полуметрики легко проверяются с помощью теоремы 3, а из задания полуметрики $\rho^\varphi_{c,d}$ ($\rho^\delta_{c,d}$) и топологии τ_φ (τ_δ) легко видна их согласованность.

Теорема 5. Пусть $\rho^\varphi_{c,d} \in \mathcal{R}_\varphi$ и $\rho^\delta_{c,d} \in \mathcal{R}_\delta$. Тогда $\rho^\varphi_{c,d}$ и $\rho^\delta_{c,d}$ не являются метриками на 2^X и на N_X – соответственно.

Доказательство. Пусть $G \subset X$ – линейное множество и $x \notin \bar{G}$. Положим $\tilde{G} = \{z = x+y : y \in G\}$ и $L_G y = x$ $\forall y \in G$. Тогда $F = I_G + L_G \in \mathcal{F}_\varphi(G,\tilde{G})$ и $\varphi(G,\tilde{G}) = 0$. Аналогично получаем, что $\varphi(\tilde{G}, G) = 0$. Отсюда $\hat{\varphi}(G,\tilde{G}) = 0$ и $\rho^\varphi_{c,d}(G,\tilde{G}) = 0$ $\forall \rho^\varphi_{c,d} \in \mathcal{R}_\varphi$ при $\tilde{G} \neq G$.

Далее заметим, что если в банаховом пространстве X для линейных множеств ввести понятие раствора $\hat{\delta}$ так же, как и для подпространств в [8], то $\hat{\delta}(G,\bar{G}) = 0$ для любого линейного множества G. То же, очевидно, и для обобщения раствора и, следовательно, $\rho^\delta_{c,d}(G,\bar{G}) = 0$ $\forall \rho^\delta_{c,d} \in \mathcal{R}_\delta$ при, вообще говоря, $G \neq \bar{G}$.

Теорема 6. Пусть (X, P) – ЛВП, $\mathcal{B}_X \overset{def}{=} \{G \subseteq X : \theta \in G, G = \bar{G}\}$. Тогда $(\mathcal{B}_X, \rho^\delta_{c,d})$ – метрическое пространство с метрикой $\rho^\delta_{c,d}$ $\forall \rho^\delta_{c,d} \in \mathcal{R}_\delta$.

Доказательство. Пусть $G_1, G_2 \in \mathcal{B}_X$, $\rho^\delta_{c,d} \in \mathcal{R}_\delta$ и $\rho^\delta_{c,d}(G_1,G_2) = 0$. Тогда $\hat{\delta}(G_1,G_2) = 0$ и, в силу леммы 1, $\forall u \in G_1\ \exists (v_n)_{n \in \omega} \subseteq G_2$: $p(u - v_n) \le \frac{1}{2^n} p(u)\ \forall p \in P$, т.е. $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$, и т.к. $G_2 = \bar{G}_2$, то $u \in G_2$ $\forall u \in G_1$. Отсюда $G_1 \subseteq G_2$. Но в этих рассуждениях множества G_1 и G_2 можно поменять местами. Поэтому $G_1 = G_2$ и полуметрика $\rho^\delta_{c,d}$ является метрикой на $\mathcal{B}_X \subseteq N_X$.

Замечание 2. Если G'_n, $G' \in \mathcal{L}^X$, $G''_n, G'' \in N_X$ $n=1,\ldots$, то непосредственно из определений следует, что $\rho^{\varphi}_{c,d}(G'_n, G') \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\Leftrightarrow \hat{\varphi}(G'_n, G') \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall \rho^{\varphi}_{c,d} \in \mathcal{R}_\varphi$ и $\rho^{\delta}_{c,d}(G''_n, G'') \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \hat{\delta}(G''_n, G'') \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\forall \rho^{\delta}_{c,d} \in \mathcal{R}_\delta$.

4. О гомеоморфности.

Теорема 7. Пусть (X,P) – отделимое ЛВП; $G_1, G_2 \in X$; $\varphi(G_1, G_2) < 1$. Тогда существует $G_3 \subseteq G_2$ такое, что G_1 гомеоморфно G_3.

Доказательство. В силу леммы I существует $F \in \mathcal{F}_\varphi(G_1, G_2)$ такой, что $a_F < 1$. Тогда $p(Fx - Fy) \geq p(x-y) - p(L_{G_1}x - L_{G_1}y) \geq (1-a_F)p(x-y) \geq 0$ $\forall x,y \in G_1$ $\forall p \in P$, где $L_{G_1} = F - I_{G_1}$. Отсюда, если $Fx = Fy$, то $x = y$ в силу предложения 8 (с.30 в [4]), и $F^{-1} \in Lip(X,X)$. F – непрерывен как оператор из $Lip(X,X)$. Для завершения доказательства положим $G_3 = F(G_1)$

Следствие 2. Пусть (X,P) – отделимое ЛВП; G_1, G_2 – непустые замкнутые подмножества X; $\hat{\varphi}(G_1, G_2) < 1$. Тогда $\dim G_1 = \dim G_2$

Доказательство. Пусть множество $G_3 \subseteq G_2$ гомеоморфно G_1. Тогда $G_3 = \overline{G}_3$ и, в силу монотонности, $\dim G_3 \leq \dim G_2$. Следовательно, из топологической инвариантности $\dim G_1 \leq \dim G_2$. Неравенство $\dim G_2 \leq \dim G_1$ получается аналогично.

5. О двойственности.

Теорема 8. Пусть X – нормированное пространство, $G_1, G_2 \subset X$, G_1 поглощает $\mathcal{L}(G_1)$. Тогда $\delta(G_2^{\perp}, G_1^{\perp}) \leq \delta(G_1, G_2)$ (где $G_i^{\perp} \subseteq X'$ – аннулятор множества G_i $i = 1, 2$).

Доказательство. Пусть $F = I_{G_1} + B_{G_1} \in \mathcal{F}(G_1, G_2)$ и $f \in G_2^{\perp}$. Тогда $f B_{G_1}x = -fx$ $\forall x \in G_1$ и

$$|fx| = |fB_{G_1}x| \leq \|f\| \, B_F \, \|x\| \quad \forall x \in G_1 \tag{6}$$

Возьмем $x \in \mathcal{L}(G_1)$ и, т.к. G_1 поглощает $\mathcal{L}(G_1)$, получим, что $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, x' \in G_1 : x = \lambda x'$ и $|fx| = \lambda |fB_{G_1}x'|$. Отсюда, в силу (6), $|fx| \leq B_F \|f\| \|x\|$ $\forall x \in \mathcal{L}(G_1)$ и по теореме Хана-Банаха существует такое линейное непрерывное продолжение $\tilde{f}$ функционала $-f|_{\mathcal{L}(G_1)}$, что $\|\tilde{f}\| = B_F \|f\|$.

Положим теперь $B_{G_2^{\perp}} f = \tilde{f}$ $\forall f \in G_2^{\perp}$. Тогда $(I_{G_2^{\perp}} + B_{G_2^{\perp}})fx = 0$ $\forall x \in G_1$, $f \in G_2^{\perp}$; $F' = I_{G_2^{\perp}} + B_{G_2^{\perp}} \in \mathcal{F}_\delta(G_2^{\perp}, G_1^{\perp})$ и $B_{F'} = B_F$. Отсюда $\delta(G_2^{\perp}, G_1^{\perp}) \leq \delta(G_1, G_2)$.

Замечание 3. В предыдущей теореме на множество G_1 можно наложить менее слабое ограничение, а именно: $\forall x \in \mathfrak{X}(G_1)\ \exists x' \in G_1$, $\exists \lambda \in R$ (возможно не превосходящее нуля): $x = \lambda x'$. Доказательство при этом практически не меняется.

Покажем, что равенство $\delta(G_2^\perp, G_1^\perp) = \delta(G_1, G_2)$ при условиях теоремы 9 может не иметь место.

Пример I. Пусть X – нормированное пространство, $x \in X$, $x \neq \theta$, $G_1 = \{\theta, x\}$, $G_2 = \{\theta, 2x\}$. Тогда легко видеть, что $\delta(G_1, G_2) = 1$, $G_1^\perp = G_2^\perp$ и $\delta(G_2^\perp, G_1^\perp) = 0$.

Теорема 9. Пусть X – ЛВП, X' – топологическое сопряженное к X. $\sigma(X, X')$ – слабая топология в X. $G_1, G_2 \le X$. В (X, σ) $\delta(G_1, G_2) < 1$. Тогда $G_2^\perp \le G_1^\perp$.

Доказательство. Пусть $F = I_{G_1} + B_{G_1} \in \mathfrak{F}_\delta(G_1, G_2)$ и $f \in G_2^\perp$. Тогда $f B_{G_1} x = -f x\ \forall x \in G_1$ и, если $p(x) = |fx|\ \forall x \in X$, то $|fx| = |f B_{G_1} x| = p(B_{G_1} x) \le \beta^p_{B_{G_1}, id}\, p(x) = \beta^p_{B_{G_1}, id} |fx|\ \forall x \in G_1$

В силу леммы I можно полагать, что $\beta^p_{B_{G_1}, id} < 1$. Отсюда $fx = \theta\ \forall x \in G_1$, т.е. $f \in G_1^\perp$.

Следствие 3. Пусть X – ЛВП. $G_1, G_2 \le X$. В (X, σ) $\hat{\delta}(G_1, G_2) < 1$. Тогда $G_1^\perp = G_2^\perp$.

Следствие 4. Пусть X – ЛВП. $G_1, G_2 \le X$. В (X, σ) $\hat{\delta}(G_1, G_2) < 1$. Тогда $\overline{\mathfrak{X}(G_1)}^\sigma = \overline{\mathfrak{X}(G_2)}^\sigma$ *.

Доказательство. Пусть существует $x_0 \in \overline{\mathfrak{X}(G_1)}^\sigma$ такое, что $x_0 \notin \overline{\mathfrak{X}(G_2)}^\sigma$. Тогда в силу следствия I на стр. 50 в [4] $\exists f \in X' : f x_0 \notin \overline{f(\mathfrak{X}(G_2))}$. В силу линейности множества $\mathfrak{X}(G_2)$ и функционала f последнее возможно только при $f(\mathfrak{X}(G_2)) = 0$. Отсюда $f \in G_2^\perp$ и $f \notin G_1^\perp$, что противоречит следствию 3. Поэтому $\overline{\mathfrak{X}(G_1)}^\sigma \le \overline{\mathfrak{X}(G_2)}^\sigma$. Обратное включение показывается аналогично.

В связи с последним следствием возникает вопрос: существуют ли в пространстве (X, σ) различные множества с раствором, меньшим I?

---

* $\mathfrak{X}(G_i)$ имеет одно и то же замыкание во всех топологиях, согласующихся с двойственностью между X и X' (предложение 8, стр. 55 в [4]) $i = 1, 2$.

Пример 2. Пусть X – ЛВП. $x \in X$, $x \neq \theta$, $\lambda \in (0,1)$, $G_1 = \{\theta, x\}$, $G_2 = \{\theta, \lambda x\}$. Тогда легко видеть, что $G_1 \neq G_2$ и $\hat{\delta}(G_1, G_2) < 1$.

§ 2. Раствор между отображениями. Теоремы устойчивости.

I. Обозначения. Пусть (X, P) и (Y, Q) – ЛВП над одним и тем же полем K.

Замечание 4. Если $A \in B(X,Y)$, (Y,Q) – отделимо и $\theta \in \mathcal{D}(A)$, то $A\theta = \theta$.

Действительно, если $A \in B(X,Y)$ и $\theta \in \mathcal{D}(A)$, то $q(A\theta) = 0$ $\forall q \in Q$ и т.к. (Y,Q) отделимо, то из предложения 8 на стр. 30 в [4] $A\theta = \theta$.

$B[X,Y] \overset{def}{=} \{A \in B(X,Y) : \mathcal{D}(A) = X\}$; $B_\delta[X,Y] \overset{def}{=} \{A \in B[X,Y] : \delta_A = \delta\}$;

$Lip[X,Y] \overset{def}{=} \{A \in Lip(X,Y) : \mathcal{D}(A) = X\}$; $Lip_\delta[X,Y] \overset{def}{=} \{A \in Lip[X,Y] : \delta_A = \delta\}$.

Непосредственно проверяется, что множества $B_\delta[X,Y]$ и $Lip_\delta[X,Y]$ являются линейными пространствами над полем K и $P_{B_\delta[X,Y]} = \{p_B^q(A) = \theta_{A,\delta}^q : q \in Q, A \in B_\delta[X,Y]\}$,

$P_{Lip_\delta[X,Y]} = \{p_{Lip}^q(A) = a_{A,\delta}^q : q \in Q, A \in Lip_\delta[X,Y]\}$ – семейства полунорм в пространствах $B_\delta[X,Y]$ и $Lip_\delta[X,Y]$ – соответственно, причем если отделимо пространство Y, то отделимо и пространство $(B_\delta[X,Y], P_{B_\delta[X,Y]})$.

Обозначим через $X \times Y$ декартово произведение множеств X и Y. Легко проверяется, что $R = \{z_{p,q}(x,y) = (p(x)^2 + q(y)^2)^{1/2} : (x,y) \in X \times Y, p \in P, q \in Q\}$ – семейство полунорм на $X \times Y$.

Замечание 5. Топология в $(X \times Y, R)$ совпадает с топологией произведения в $X \times Y$.

2. Основные определения. Пусть (X,P), (Y,Q) – ЛВП над одним и тем же полем K. $\mathfrak{M}(X,Y) \overset{def}{=} \{A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y\}$ – множество всех отображений из X в Y.

Определение 3. Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}(X,Y)$

$\varphi(A_1, A_2) \overset{def}{=} \varphi(G(A_1), G(A_2))$;

$\hat{\varphi}(A_1, A_2) \overset{def}{=} \hat{\varphi}(G(A_1), G(A_2))$,

(G_i – график оператора A_i, $i = 1, 2$).

Положим $\mathfrak{M}_N(X,Y) \stackrel{def}{=} \{A \in \mathfrak{M}(X,Y) : \theta_x \in \mathcal{D}(A),\ A\theta_x = \theta_y\}$.

Определение 4. Пусть $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_N(X,Y)$. Тогда

$$\delta(A_1,A_2) \stackrel{def}{=} \delta(G(A_1),G(A_2)) \qquad (7)$$

$$\hat{\delta}(A_1,A_2) \stackrel{def}{=} \hat{\delta}(G(A_1),G(A_2)) \qquad (8)$$

Отметим, что из теорем I

$0 \le \varphi(A_1,A_2) \le 1 \quad 0 \le \hat{\varphi}(A_1,A_2) \le 1 \quad \forall A_1,A_2 \in \mathfrak{M}(X,Y)$

$0 \le \delta(A_1,A_2) \le 1 \quad 0 \le \hat{\delta}(A_1,A_2) \le 1 \quad \forall A_1,A_2 \in \mathfrak{M}_N(X,Y)$

Из замечания I следует, что здесь распространяются понятия раствора (см., например, с. 256 в [3]) и аналога раствора ([I]) между операторами на случай нелинейных операторов в локально выпуклых пространствах.

В силу теорем 4 и 6 в пространствах $\mathfrak{M}(X,Y)$ и $\mathfrak{M}_N(X,Y)$ можно ввести полуметрики $\rho_{\hat{\varphi}}$ и $\rho_{\hat{\delta}}$ соответственно такие, что если $A_n, A \in \mathfrak{M}(X,Y)$ $n=1,2,\dots$, то $\rho_{\hat{\varphi}}(A_n,A) \to 0 \Leftrightarrow \hat{\varphi}(A_n,A) \to 0$ и если $A_n, A \in \mathfrak{M}_N(X,Y)$ $n=1,2,\dots$, то $\rho_{\hat{\delta}}(A_n,A) \to 0 \Leftrightarrow \hat{\delta}(A_n,A) \to 0$ и ρ_{δ} – является метрикой на множестве $\mathfrak{B}(X,Y) = \{A \in \mathfrak{M}_N : G(A) = \overline{G(A)}\}$.

Теорема IO. Пусть (X,P) , (Y,Q) – ЛВП. Тогда:

а) если $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}(X,Y)$, то

$$\forall F \in \mathcal{F}_\varphi(G(A_1),G(A_2))\ \exists F_1 : \mathcal{D}(A_1) \to \mathcal{D}(A_2) \mid F(x,A_1x) = (F_1x, A_2F_1x) \quad \forall (x,A_1x) \in G(A_1),$$

причем $F_1 = I_{\mathcal{D}(A_1)} + L_1$, где $I_{\mathcal{D}(A_1)}$ – тождественное отображение на $\mathcal{D}(A_1)$, а для L_1 справедлива следующая оценка:

$$p(L_1x-L_1y)^2 + q(A_2(I_{\mathcal{D}(A_1)}+L_1)x - A_1x - (A_2(I_{\mathcal{D}(A_1)}+L_1)y - A_1y)^2 \le (a_F^{?pq})^2 (p(x-y)^2 + q(A_1x-A_1y)^2) \quad \forall x,y \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q , \qquad (9)$$

если при этом A_1 обратим (инъективен), то

$$\forall F \in \mathcal{F}_\varphi(G(A_1),G(A_2))\ \exists F_2 : R(A_1) \to R(A_2) \mid F(x,A_1x) = (F_1x, F_2A_1x) \quad \forall (x,A_1x) \in G(A_1),$$

причем $F_2 = I_{R(A_1)} + L_2$, где $I_{R(A_1)}$ – тождественное отображение на $R(A_1)$, а для L_2 справедлива следующая оценка:

$$p(L_1x-L_1y)^2 + q(L_2A_1x - L_2A_1y)^2 \le (a_F^{?pq})^2 (p(x-y)^2 + q(A_1x-A_1y)^2) \quad \forall x,y \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q; \qquad (10)$$

б) если $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_N(X,Y)$, то
$\forall F \in \mathcal{F}_\delta(G(A_1), G(A_2))\ \exists F_1 : \mathcal{D}(A_1) \to \mathcal{D}(A_2) \mid F(x, A_1x) = (F_1x, A_2F_1x)$.

$\forall (x, A_1x) \in G(A_1)$

причем $F_1 = I_{\mathcal{D}(A_1)} + B_1$, где для отображения B_1 справедлива оценка (9') $p(B_1x)^2 + q(A_2(I_{\mathcal{D}(A_1)} + B_1)x - A_1x)^2 \le (b_F^{r_{pq}})^2 (p(x)^2 + q(A_1x)^2)$ $\forall x \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q$

если при этом A_1 обратим, то
$\forall F \in \mathcal{F}_\delta(G(A_1), G(A_2))\ \exists F_2 : R(A_1) \to R(A_2) \mid F(x, A_1x) = (F_1x, F_2A_1x)\ \forall (x, A_1x) \in G(A_1)$,

причем $F_2 = I_{R(A_1)} + B_2$, где для отображения B_2 справедлива оценка (10') $p(B_1x)^2 + q(B_2A_1x)^2 \le (b_F^{r_{pq}})^2 (p(x)^2 + q(A_1x)^2)$ $\forall x \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q$

<u>Доказательство.</u> а) Отображения F_1 и L_1 строятся так же, как в лемме 4 в [1] , оценка (9) проверяется следующим образом: пусть $p \in P$, $q \in Q$, $r_{pq} \in \mathbb{R}$; $F = I_{G(A_1)} + L_{G(A_1)}$. Тогда $p(L_1x - L_1y)^2 + q(A_2F_1x - A_1x - A_2F_1y + A_1y)^2 = r_{pq}(L_{G(A_1)}(x, A_1x) - L_{G(A_1)}(y, A_1y))^2 \le (a_F^{r_{pq}})^2 r_{pq}((x, A_1x) - (y, A_1y))^2 = (a_F^{r_{pq}})^2 (p(x-y)^2 + q(A_1x - A_1y)^2)$ $\forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$

Отсюда следует оценка (9). Далее доказательство леммы 4 в можно перенести дословно. Пункт б) доказывается аналогично.

Из оценок (9), (10), (9') и (10') непосредственно следуют оценки

$$p(L_1x - L_1y) \le a_F^{r_{pq}}(p(x-y) + q(A_1x - A_1y))\ \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q \tag{11}$$

$$q((A_2F_1 - A_1)x - (A_2F_1 - A_1)y) \le a_F^{r_{pq}}(p(x-y) + q(A_1x - A_1y))\ \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q \tag{12}$$

$$q(L_2A_1x - L_2A_1y) \le a_F^{r_{pq}}(p(x-y) + q(A_1x - A_1y))\ \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q \tag{13}$$

$$p(B_1x) \le b_F^{r_{pq}}(p(x) + q(A_1x))\ \ \forall x \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q \tag{11'}$$

$$q((A_2F_1 - A_1)x) \le b_F^{r_{pq}}(p(x) + q(A_1x))\ \forall x \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q \tag{12'}$$

$$q(B_2A_1x) \le b_F^{r_{pq}}(p(x) + q(A_1x))\ \forall x \in \mathcal{D}(A_1)\ \forall p \in P\ \forall q \in Q \tag{13'}$$

3. <u>Теоремы устойчивости.</u>

<u>Теорема II.</u> Пусть (X, P), (Y, Q) – ЛВП.

1) Если $A_1 \in \mathfrak{M}(X,Y)$, $A_2 \in Lip_\delta(X,Y)$, $\varphi(A_1, A_2) < (1 + a^q_{A_2,\delta})^{-1}\ \forall q \in Q$ *,

то $A_1 \in Lip_\delta(X,Y)$ и $a^q_{A_1,\delta} \le \dfrac{a^q_{A_2,\delta} + (1 + a^q_{A_2,\delta})\varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + a^q_{A_2,\delta})\varphi(A_1, A_2)}\ \forall q \in Q$ (14),

---

* Это требование не является слишком жестким, т.к. обычно рассматриваются операторы, у которых соответствующие константы ограничены в совокупности, например, операторы сжатия в ЛВП в [5] , с. 98.

если при этом а) $\varphi(A_2,A_1)<(1+a^q_{A_2,\xi})^{-1}$, то $|a^q_{A_1,\xi}-a^q_{A_2,\xi}|\le (1+a^q_{A_2,\xi})^2\hat\varphi(A_1,A_2)/(1-(1+a^q_{A_2,\xi})\,\hat\varphi(A_1,A_2))\ \forall q\in Q$ б) A_2 -линеен $\mathcal{D}(A_1)\subseteq\mathcal{D}(A_2)$, то $a^q_{A_1-A_2,\xi}\le(1+a^q_{A_2,\xi})^2\varphi(A_1,A_2)/(1-(1+a^q_{A_2,\xi})\varphi(A_1,A_2))\ \forall q\in Q$ (15).

2) Если $(\mathcal{Y},Q)$ – отделимо, $A_1\in\mathfrak{M}_N(X,Y)$, $A_2\in B_\xi(X,Y)$, $o\in\mathcal{D}(A_2)$,* $\delta(A_1,A_2)<(1+b^q_{A_2,\xi})^{-1}\ \forall q\in Q$, то $A_1\in B_\xi(X,Y)$ и $b^q_{A_1,\xi}\le(b^q_{A_2,\xi}+(1+b^q_{A_2,\xi})\delta(A_1,A_2))/(1-(1+b^q_{A_2,\xi})\delta(A_1,A_2))\ \forall q\in Q$,

если при этом

а) $\delta(A_2,A_1)<(1+b^q_{A_2,\xi})^{-1}\ \forall q\in Q$ то $|b^q_{A_1,\xi}-b^q_{A_2,\xi}|\le\dfrac{(1+b^q_{A_2,\xi})^2\,\hat\delta(A_1,A_2)}{1-(1+b^q_{A_2,\xi})\hat\delta(A_1,A_2)}\ \forall q\in Q$

б) $A_2\in Lip_\xi(X,Y)$ (если A_2 – линеен, то это имеет место), $\mathcal{D}(A_1)\le\mathcal{D}(A_2)$, то $b^q_{A_1-A_2,\xi}\le\dfrac{(1+b^q_{A_2,\xi})^2\delta(A_1,A_2)}{1-(1+b^q_{A_2,\xi})\,\delta(A_1,A_2)}\ \forall q\in Q$.

<u>Доказательство.</u> I) Пусть $A_2\in Lip_\xi(X,Y)$, $F\in\mathfrak{F}_\varphi(G(A_1),G(A_2))$ и F_1 и L_1 – отображения, построенные по F в теореме I0. Тогда $q(A_2F_1x-A_2F_1y)\le a^q_{A_2,\xi}\,\xi(q)(F_1x-F_1y)\le a^q_{A_2,\xi}\,\xi(q)(x-y)+a^q_{A_2,\xi}\,\xi(q)(L_1x-L_1y)\ \forall x,y\in\mathcal{D}(A_1)\ \forall q\in Q$.

Отсюда в силу оценки (II) (ниже вместо $a_F^{\xi(q),q}$ будем писать a'_F)

$$q(A_2F_1x-A_2F_1y)\le a^q_{A_2,\xi}(1+a'_F)\,\xi(q)(x-y)+a^q_{A_2,\xi}\,a''_F\,q(A_1x-A_1y)\quad\forall x,y\in\mathcal{D}(A_1)\ \forall q\in Q \tag{16}$$

С другой стороны,
$q(A_2F_1x-A_2F_1y)\ge q(A_1x-A_1y)-q(A_2F_1x-A_1x-(A_2F_1y-A_1y))$
$\forall x,y\in\mathcal{D}(A_1)\ \forall q\in Q$

Отсюда в силу (I2)

$$q(A_2F_1x-A_2F_1y)\ge(1-a''_F)\,q(A_1x-A_1y)-a'_F\,\xi(q)(x-y)\ \forall x,y\in\mathcal{D}(A_1)\ \forall q\in Q \tag{17}$$

Сравнивая (I6) и (I7), получаем
$(1-a'_F(1+a^q_{A_2,\xi}))\,q(A_1x-A_1y)\le(a^q_{A_2,\xi}+a_F^{\xi(q),q}(1+a^q_{A_2,\xi}))\,\xi(q)(x-y)$
$\forall x,y\in\mathcal{D}(A_1)\ \forall q\in Q$

Отсюда, в силу произвольности оператора F из $\mathfrak{F}_\varphi(G(A_1),G(A_2))$

---

* Вместо условий $(\mathcal{Y},Q)$ – отделимо и $o\in\mathcal{D}(A_2)$ можно положить $A_2\in\mathfrak{M}_N(X,Y)$.

и условия $\varphi(A_1,A_2)<(1+a^q_{A_2,f})^{-1}\quad \forall q\in Q$, получаем, что $A_1\in Lip_f(X,Y)$ и оценку (14). а) Тут почти дословно можно повторить доказательство пункта а) теоремы 8 в [1].

б) Пусть A_2 – линеен, и $\mathcal{D}(A_1)\subseteq\mathcal{D}(A_2)$. Тогда $q((A_1-A_2)x-(A_1-A_2)y)$ $\le q(A_1x-A_2F_1x-A_1y+A_2F_1y)+q(A_2F_1x-A_2x-A_2F_1y+A_2y)\le$

$q(A_1x-A_2F_1x-A_1y+A_2F_1y)+a^q_{A_2,f}\,f(q)(L_1x-L_1y)\ \forall x,y\in\mathcal{D}(A_1)$. Поэтому из оценок (II) и (I2) $q((A_1-A_2)x-(A_1-A_2)y)\le a'_F\,(1+a^q_{A_2,f})\cdot$ $(f(q)(x-y)+q(A_1x-A_1y))\quad \forall x,y\in\mathcal{D}(A_1)\ \forall q\in Q$

или $q((A_1-A_2)x-(A_1-A_2)y)\le a'_F\,(1+a^q_{A_2,f})(1+a^q_{A_2,f})f(q)(x-y)\le$ $\dfrac{(1+a^q_{A_2,f})^2\,a'_F}{1-(1+a^q_{A_2,f})\varphi(A_1,A_2)}f(q)(x-y)\quad \forall x,y\in\mathcal{D}(A_1)\ \forall q\in Q$. Отсюда, в силу произвольности F из $\mathcal{F}_\varphi(G(A_1),G(A_2))$, следует оценка (I5).

2) В силу замечания 4 $A_2\in\mathfrak{M}_N(X,Y)$ и, следовательно, функции $\mathfrak{b}$ и $\hat{\mathfrak{b}}$ определены на паре операторов A_1 и A_2. Далее эта часть доказательства теоремы проводится аналогично предыдущей.

Следствие 4. Пусть (X,P), (Y,Q) – ЛВП. $A_1\in\mathfrak{M}(X,Y)$, $A_2\in Lip_f(X,Y)$ – оператор сжатия; $\varphi(A_1,A_2)<2^{-1}(1+a^q_{A_2,f})^{-1}(1-a^q_{A_2,f})\ \forall q\in Q$ Тогда A_1 – оператор сжатия.

Доказательство. В силу теоремы I2 $A_1\in Lip_f(X,Y)$ и $a^q_{A_1,f}\le\dfrac{a^q_{A_2,f}+(1+a^q_{A_2,f})\varphi(A_1,A_2)}{1-(1+a^q_{A_2,f})\varphi(A_1,A_2)}\quad \forall q\in Q$. Отсюда, учитывая оценку $\varphi(A_1,A_2)$, получаем, что

$$a^q_{A_1,f}<\frac{a^q_{A_2,f}+2^{-1}(1-a^q_{A_2,f})}{1-2^{-1}(1-a^q_{A_2,f})}=\frac{1+a^q_{A_2,f}}{1+a^q_{A_2,f}}=1\quad \forall q\in Q$$

Теорема I2. Пусть (X,P) – секвенциально полное отделимое ЛВП, (Y,Q) – ЛВП. $A_1\in\mathfrak{M}(X,Y)$, $A_2\in Lip_f[X,Y]$ и $f:Q\to P$ – сюръекция. $\hat{\varphi}(A_1,A_2)<(1+a^q_{A_2,f})^{-1}\ \forall q\in Q$. Тогда $A_1\in Lip_f[X,Y]$ и имеют место оценки пункта I) теоремы II.

Доказательство. Пусть $F\in\mathcal{F}_\varphi(G(A_2),G(A_1))$ и F_1 и L_1 – отображения, построенные по отображению F в теореме I0. Тогда из оценки (II) и условия $A_2\in Lip_f[X,Y]$ следует, что $f(q)(L_1x-L_1y)\le a'_F\,(f(q)(x-y)+q(A_2x-A_2y))\le a'_F\,(1+a^q_{A_2,f})\cdot$

$f(q)(x-y)\ \forall x,y\in X,\ \forall q\in Q$ и т.к. f – сюръекция, то $L_1\in Lip_{id}(X,X)$ и, в силу леммы I, L_1 – отображение сжатия. Отсюда, в силу теоремы 3.1 [6], отображение $L_y x=y-L_1y\ \forall x\in X$, где

$y \in X$ имеет неподвижную точку в X $\forall y \in X$ и, следовательно, отображение $F_1 = I + L_1$ – сюръекция. Но $R(F_1) \subseteq \mathcal{D}(A_1) \subseteq X$, поэтому $\mathcal{D}(A_1) = X$. Отсюда, в силу теоремы II, $A_1 \in Lip_{\varphi_1}[X, Y]$ и имеют место оценки пункта I).

4. Устойчивость непрерывной и ограниченной обратимости.

Определение. Пусть $(X,P),(Y,Q)$ – ЛВП. $A:\mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ – некоторый оператор из X в Y. $G(A)$ – график оператора A. Множество $G'(A) \overset{def}{=} \{(y,x) \in Y \times X \mid (x,y) \in G(A)\}$ называется обратным графиком оператора A.

Легко видеть, что если

а) $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}(X,Y)$, то $\varphi(G'(A_1),G'(A_2)) = \varphi(G(A_1),G(A_2))$

б) $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_N(X,Y)$, то $\delta(G'(A_1),G'(A_2)) = \delta(G(A_1),G(A_2))$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_i(X,Y)$ и $\mathfrak{M}_{Ni}(X,Y)$ подмножества, состоящие из всех обратимых операторов из $\mathfrak{M}(X,Y)$ и $\mathfrak{M}_N(X,Y)$ соответственно (очевидно, если $A \in \mathfrak{M}_i(X,Y)$, то $A^{-1} \in \mathfrak{M}(Y,X)$ и $G'(A^{-1}) = G(A)$ и если $A \in \mathfrak{M}_{Ni}(X,Y)$, то $A^{-1} \in \mathfrak{M}_N(Y,X)$.

Следующая теорема немедленно вытекает из сделанных замечаний.

Теорема 13. Пусть $(X,P),(Y,Q)$ – ЛВП. Если

а) $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_i(X,Y)$, то $\varphi(A_1^{-1},A_2^{-1}) = \varphi(A_1,A_2)$, $\hat{\varphi}(A_1^{-1},A_2^{-1}) = \hat{\varphi}(A_1,A_2)$;

б) $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_{Ni}(X,Y)$, то $\delta(A_1^{-1},A_2^{-1}) = \delta(A_1,A_2)$, $\hat{\delta}(A_1^{-1},A_2^{-1}) = \hat{\delta}(A_1,A_2)$.

Определение. Пусть $(X,P),(Y,Q)$ – ЛВП. $A \in \mathfrak{M}(X,Y)$ – произвольный оператор из $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ в $R(A) \subseteq Y$. Будем говорить, что оператор A обладает свойством (i), если

$$\exists \zeta_A : P \to Q \ \forall p \in P \ \exists c_p \in R_+ : \ \zeta_A(p)(A_1x_1 - A_1x_2) \geq c_p\, p(x_1 - x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$$

Теорема 14. Пусть (X,P) – отделимое ЛВП, (Y,P) – ЛВП, $A \in \mathfrak{M}(X,Y)$. Тогда $A \in \mathfrak{M}_i(X,Y)$ & $A^{-1} \in Lip(Y,X) \Longleftrightarrow A$ – обладает свойством (i).

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{M}_{\iota}(X,Y)$ и $A^{-1} \in Lip_{\rho}(Y,X)$. Тогда $\exists \varsigma_A : P \to Q\ \forall p \in P\ \exists a^p_{A,\varsigma_A} \in \mathbb{R}_+ : p(A^{-1}Ax_1 - A^{-1}Ax_2) \le a^p_{A,\varsigma_A} \varsigma_A(p)(Ax_1 - Ax_2)\ \forall x_1,x_2 \in \mathcal{D}(A)$. Отсюда следует свойство (i).

Пусть оператор A обладает свойством (i). Положим $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax_1 = Ax_2$. Тогда из свойства (i) $\forall p \in P\ c_p p(x_1 - x_2) \le \varsigma_A(p)(Ax_1 - Ax_2) = 0$ и в силу отделимости пространства (X,P) из предложения 8 на с. 30 в [4] $x_1 = x_2$, т.е. оператор A обратим. То, что $A^{-1} \in Lip(Y,X)$ непосредственно следует из свойства (i).

Покажем, что множества операторов $A \in \mathfrak{M}_{\iota}(X,Y)$ и линейных операторов $B \in \mathfrak{M}_{N\iota}(X,Y)$ таких, что $A^{-1} \in Lip(Y,X)$ и $B^{-1} \in B(Y,X)$ открыты в $(\mathfrak{M}(X,Y), \rho_\varphi)$ и $(\mathfrak{M}_N(X,Y), \rho_\delta)$ соответственно.

Теорема I5. Пусть (X,P) - отделимое ЛВП, (Y,Q) - ЛВП. Если

1) $A_1 \in \mathfrak{M}(X,Y)$; $A_2 \in \mathfrak{M}_{\iota}(X,Y)$; $A_2^{-1} \in Lip_\varsigma(Y,X)$ и $\varphi(A_1,A_2) < (1 + a^p_{A_2^{-1},\varsigma})^{-1}\ \forall p \in P$, то $A_1 \in \mathfrak{M}_{\iota}(X,Y)$, $A_1^{-1} \in Lip_\varsigma(Y,X)$ и

$$a^p_{A_1^{-1},\varsigma} \le \frac{a^p_{A_2^{-1},\varsigma} + (1 + a^p_{A_2^{-1},\varsigma})\,\varphi(A_1,A_2)}{1 - (1 + a^p_{A_2^{-1},\varsigma})\,\varphi(A_1,A_2)} \quad \forall p \in P,$$

если при этом

а) $\varphi(A_2,A_1) < (1 + a^p_{A_2^{-1},\varsigma})^{-1}\ \forall p \in P$, то

$$|a^p_{A_1^{-1},\varsigma} - a^p_{A_2^{-1},\varsigma}| \le \frac{(1 + a^p_{A_2^{-1},\varsigma})^2\,\hat{\varphi}(A_1,A_2)}{1 - (1 + a^p_{A_2^{-1},\varsigma})\,\hat{\varphi}(A_1,A_2)} \quad \forall p \in P;$$

б) $A_2 \in L(X,Y)$ и $R(A_1) \subseteq R(A_2)$, то

$$a^p_{A_1^{-1} - A_2^{-1},\varsigma} \le \frac{(1 + a^p_{A_2^{-1},\varsigma})^2\,\varphi(A_1,A_2)}{1 - (1 + a^p_{A_2^{-1},\varsigma})\,\varphi(A_1,A_2)} \quad \forall p \in P$$

2) $A_1 : \mathcal{D}(A_1) \subseteq X \to Y$ - линейный оператор; $A_2 \in \mathfrak{M}_{N\iota}(X,Y)$, $A_2^{-1} \in B_\varsigma(Y,X)$ и $\delta(A_1,A_2) < (1 + b^p_{A_2^{-1},\varsigma})^{-1}\ \forall p \in P$, то $A_1 \in \mathfrak{M}_{N\iota}(X,Y)$, $A_1^{-1} \in B_\varsigma(Y,X)$ и

$$b^p_{A_1^{-1},\varsigma} \le \frac{b^p_{A_2^{-1},\varsigma} + (1 + b^p_{A_2^{-1},\varsigma})\,\delta(A_1,A_2)}{1 - (1 + b^p_{A_2^{-1},\varsigma})\,\delta(A_1,A_2)} \quad \forall p \in P,$$

если при этом

а) $\delta(A_2,A_1) < (1 + b^p_{A_2^{-1},\varsigma})^{-1}\ \forall p \in P$, то

$$|b^p_{A_1^{-1},\varsigma} - b^p_{A_2^{-1},\varsigma}| \le \frac{(1 + b^p_{A_2^{-1},\varsigma})^2\,\hat{\delta}(A_1,A_2)}{1 - (1 + b^p_{A_2^{-1},\varsigma})\,\hat{\delta}(A_1,A_2)} \quad \forall p \in P;$$

б) $A_2^{-1} \in Lip_\varsigma(Y,X)$ и $R(A_1) \subseteq R(A_2)$, то

$$b^p_{A_1^{-1} - A_2^{-1},\varsigma} \le \frac{(1 + b^p_{A_2^{-1},\varsigma})^2\,\delta(A_1,A_2)}{1 - (1 + b^p_{A_2^{-1},\varsigma})\,\delta(A_1,A_2)} \quad \forall p \in P$$

Доказательство. I) Пусть $F \in \mathcal{F}_\varphi(G(A_1), G(A_2))$, F_1 и L_1 – отображения, построенные по оператору F в теореме IO. Тогда из оценки (I2)

$\zeta(p)(A_2F_1x_1 - A_2F_1x_2) - \zeta(p)(A_1x_1 - A_1x_2) \le a_F^{\tau p,\zeta(p)}(p(x_1 - x_2) + \zeta(p)(A_1x_1 - A_1x_2))$ $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1)$ $\forall p \in P$

Отсюда, т.к. $A_2^{-1} \in Lip_\zeta(Y, X)$, получаем
$p(F_1x_1 - F_1x_2) \le a_F^{\tau p,\zeta(p)} a^p_{A_2^{-1},\zeta} p(x_1 - x_2) + (1 + a_F^{\tau p,\zeta(p)}) a^p_{A_2^{-1},\zeta}\cdot$

$\zeta(p)(A_1x_1 - A_1x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1)$ $\forall p \in P$, или, из определения оператора F_1,
$p(x_1 - x_2) - p(L_1x_1 - L_1x_2) \le a_F^{\tau p,\zeta(p)} a^p_{A_2^{-1},\zeta} p(x_1 - x_2) + (1 + a_F^{\tau p,\zeta(p)}) a^p_{A_2^{-1},\zeta}\cdot$
$\zeta(p)(A_1x_1 - A_1x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1)$ $\forall p \in P$. Поэтому из оценки (II)

$$p(x_1 - x_2) - a_F^{\tau p,\zeta(p)}(p(x_1 - x_2) + \zeta(p)(A_1x_1 - A_1x_2)) \le a_F^{\tau p,\zeta(p)} a^p_{A_2^{-1},\zeta}\cdot p(x_1 - x_2) + (1 + a_F^{\tau p,\zeta(p)}) a^p_{A_2^{-1},\zeta} \zeta(p)(A_1x_1 - A_1x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1) \quad \forall p \in P \tag{18}$$

Но в силу леммы I можно полагать, что $a_F^{\tau p,\zeta(p)} < (1 + a^p_{A_2^{-1},\zeta})^{-1}$ $\forall p \in P$. Поэтому из (I8)

$$p(x_1 - x_2) \le \frac{a^p_{A_2^{-1},\zeta} + a_F^{\tau p,\zeta(p)}(1 + a^p_{A_2^{-1},\zeta})}{1 - a_F^{\tau p,\zeta(p)}(1 + a^p_{A_2^{-1},\zeta})} \zeta(p)(A_1x_1 - A_1x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1) \tag{19}$$

$\forall p \in P$. Отсюда: A_1 – обладает свойством (i) и, следовательно, по теореме I4 оператор $A_1 \in \mathfrak{M}_\zeta(X, Y)$ и $A_1^{-1} \in Lip_\zeta(X, Y)$.

Искомые оценки имеют место в силу теорем II и I3.

2) Пусть $F \in \mathcal{F}_\zeta(G(A_1), G(A_2))$, F_1 и B_1 – отображения, построенные по оператору F в теореме IO, и пусть $x \in \mathcal{D}(A_1)$ и $A_1x = \theta$. Тогда

$p(x)^2 \le (p(B_1x) + p(F_1x))^2 \le (p(B_1x) + b^p_{A_2^{-1},\zeta} \zeta(p)(A_2F_1y))^2 \le$

$(1 + (b^p_{A_2^{-1},\zeta})^2)(p(B_1x)^2 + \zeta(p)(A_2F_1x)^2)$ $\forall p \in P$. Поэтому из оценок (II') и (I2')

$$p(x)^2 \le (1 + (b^p_{A_2^{-1},\zeta})^2)(b_F^{\tau p,\zeta(p)})^2(p(x)^2 + \zeta(p)(A_1x)^2) = (1 + (b^p_{A_2^{-1},\zeta})^2)(b_F^{\tau p,\zeta(p)})^2 p(x)^2 \quad \forall p \in P \tag{20}$$

В силу леммы I можно полагать, что $\theta_F^{(\theta,x,p)} < (1+\theta^p_{A_2^{-1},\mathfrak{z}})^{-1}\ \forall p \in P$, поэтому из неравенства (20) и отделимости пространства X вытекает, что $x=\theta$. Следовательно, линейный оператор A_1 обратим.

Искомые оценки имеют место в силу теорем II и I3.

Покажем, что в пункте 2 последней теоремы требование линейности оператора A_1 существенно.

<u>Пример 3.</u> Пусть (X,P) – ЛВП, $x_0 \in X$, $x_0 \neq \theta$. Положим $\mathfrak{D} = \{\theta, \frac{1}{3}x_0, x_0\}$, $A_1 x = \begin{cases} \theta, & \text{при } x=\theta \\ \frac{1}{3}x_0, & \text{при } x \in \mathfrak{D},\ x \neq \theta \end{cases}$, $A_2 = I_{\mathfrak{D}}$ – тождественное отображение на $\mathfrak{D}$,

и $$B_{G(A_1)}u = \begin{cases} (\theta, -\frac{1}{3}x_0), & \text{при } u=(x_0,x_0) \\ (\theta,\theta), & \text{при } u \in G(A_1),\ u \neq (x_0,x_0) \end{cases}$$. Легко видеть, что $F = I + B_{G(A_1)} \in \mathcal{F}_1(G(A_1), G(A_2))$ и $\delta(A_1,A_2) \in \frac{1}{3}$. Оператор A_2 – обратим ($\in \mathfrak{M}_{Ni}(X,X)$) и $A_2^{-1} = I_{\mathfrak{D}} \in \mathfrak{Q}(X,X)$. Поэтому $(1+\theta^p_{A_2^{-1},\omega})^{-1} = (1+1)^{-1} = \frac{1}{2}\ \forall p \in P$, т.е. для необратимого оператора A_1 справедлива оценка $\delta(A_1,A_2) < (1+\theta^p_{A_2^{-1},\omega})^{-1}\ \forall p \in P$.

Из теорем I2, I3 и I5 непосредственно вытекает

<u>Следствие 5.</u> Пусть (X,P) – отделимое ЛВП, (Y,P) – отделимое секвенциально полное ЛВП, $\mathfrak{z}(P) = Q$; $A_1 \in \mathfrak{M}(X,Y)$; $A_2 \in \mathfrak{M}_i(X,Y)$ и $A_2^{-1} \in Lip_{\mathfrak{z}}[Y,X]$. $\hat{\varphi}(A_1,A_2) < (1+a^p_{A_2^{-1},\mathfrak{z}})^{-1}\ \forall p \in P$. Тогда $A_1 \in \mathfrak{M}_i(X,Y)$, $A_1^{-1} \in Lip_{\mathfrak{z}}[Y,X]$ и имеют место оценки первого пункта предыдущей теоремы.

<u>Замечание 6.</u> Из следствия 5 вытекает устойчивость сюръективности обратимого отображения, если обратное отображение удовлетворяет условию Липшица и возмущения малы в смысле аналога раствора.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М.А.Гольдману за ценные замечания и внимание к работе.

Литература

1. Вейлер Е.Л. Об одном нелинейном аналоге раствора. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Респ.межвуз.сб. науч.тр., вып.3, Рига, 1977, с.18-27.
2. Бейлер Е.Л. Об устойчивости некоторых свойств нелинейного оператора. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Респ.межвуз.сб.науч.тр., вып.3, Рига, 1977, с.28-35.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
4. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. Топологические векторные пространства. М., 1969.
5. Садовский Б.Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы. - УМН, т.27, вып.1, 1972, с.81-146.
6. Acharya S.P. Some results on fixed points in uniform spaces. - Jokohama Math. J., vol.22, N 1-2, 1974, p. 164-173.

Поступила 15 октября 1977 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.

УДК 513.88; 517.43; 517.9; 519.55

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ

Е.Л.Вейлер
ЛГУ имени П.Стучки

В работе приводятся (§ 1) примеры возмущений малых в смысле раствора и аналога раствора статьи [3]. Полученные результаты используются для доказательства существования и единственности решения следующих задач:

1) периодически возмущенной консервативной системы (§ 2);
2) периодической краевой задачи (§ 3);
3) задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (§ 4);
4) задачи Коши для гиперболического уравнения (§ 5);
5) первой краевой задачи для гиперболического уравнения (§ 6).

Рассматриваемые уравнения не разрешены относительно старшей производной.

Используются обозначения и применяются некоторые результаты работ [1-3].

§ 1. Примеры малых возмущений

Определение 1. Пусть (X,P), (Y,Q) – ЛВП, $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}(X,Y)$, $\mathcal{D}(A_1) \subseteq \mathcal{D}(A_2)$. Оператор A_2 будем называть непрерывным относительно оператора A_1, если $\exists \varsigma: Q \to P\ \forall q \in Q\ \exists a^q_{A_2,\varsigma}, c^q_{A_2,\varsigma} \in \mathbb{R}_+ : q(A_2 x - A_2 y) \le a^q_{A_2,\varsigma}\, \varsigma(q)(x-y) + c^q_{A_2,\varsigma}\, q(A_1 x - A_1 y)$ $\forall x,y \in \mathcal{D}(A_1)$. $c_{A_2,\varsigma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{q \in Q} c^q_{A_2,\varsigma}$.

Определение 2. Пусть (X,P), (Y,Q) – ЛВП, $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}_N(X,Y)$, $\mathcal{D}(A_1) \subseteq \mathcal{D}(A_2)$. Оператор A_2 будем называть ограниченным относительно оператора A_1, если $\exists \varsigma: Q \to P\ \forall q \in Q\ \exists b^q_{A_2,\varsigma}, d^q_{A_2,\varsigma} \in \mathbb{R}_+ :$ $q(A_2 x) \le b^q_{A_2,\varsigma}\, \varsigma(q)(x) + d^q_{A_2,\varsigma}\, q(A_1 x)$ $\forall x \in \mathcal{D}(A_1)$. $d_{A_2,\varsigma} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{q \in Q} d^q_{A_2,\varsigma}$

Очевидно, что операторы из $Lip(X,Y)$ и $B(X,Y)$ являются соответственно непрерывными и ограниченными относительно любого оператора из $\mathfrak{M}(X,Y)$.

Легко видеть, что в случае нормированных пространств X и Y относительная непрерывность оператора A_2 эквивалентна условию

$$\exists a, c \in \mathbb{R}_+ : \|A_2 x - A_2 y\| \le a\|x-y\| + c\|A_1 x - A_1 y\| \quad \forall x,y \in \mathcal{D}(A_1), \tag{1}$$

а относительная ограниченность – условию

$$\exists\, b, d \in R_+ : \|A_2 x\| \le b\|x\| + d\|A_1 x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A_1) \qquad (2)$$

Замечание 1. Пусть (X,P), (Y,Q) – ЛВП, $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}(X,Y)$. Если оператор A_2 ограничен (непрерывен) относительно оператора A_1 и $d^q_{A_2,s}<1$ $(c^q_{A_2,s}<1)$ $\forall q\in Q$, то A_2 – ограничен (непрерывен) относительно оператора A_1+A_2 с константами $(1-d^q_{A_2,s})^{-1} b^q_{A_2,s}$ $((1-c^q_{A_2,s})^{-1}a^q_{A_2,s})$ и $(1-d^q_{A_2,s})^{-1} d^q_{A_2,s}$ $((1-c^q_{A_2,s})^{-1}c^q_{A_2,s})$ $\forall q\in Q$.

Действительно, т.к. $q(A_2x) \le b^q_{A_2,s}\, s(q)(x) + d^q_{A_2,s}\, q(A_1x) \le b^q_{A_2,s}\, s(q)(x) + d^q_{A_2,s}(q((A_1+A_2)x)+q(A_2x))$ $\forall x\in\mathcal D(A_1)$ и $d^q_{A_2,s}<1$ $\forall q\in Q$, то $q(A_2x)\le(1-d^q_{A_2,s})^{-1}(b^q_{A_2,s}\, s(q)(x) + d^q_{A_2,s}\, q((A_1+A_2)x))$ $\forall x\in\mathcal D(A_1)$ $\forall q\in Q$. Для относительно непрерывного оператора доказательство аналогично.

Теорема 1. Пусть (X,P), (Y,Q) – ЛВП. Если

1) $A_1,A_2\in\mathfrak M(X,Y)$, A_2 – непрерывен относительно оператора A_1, $a^q_{A_2,s}=0$ $\forall q\in Q$ и $c_{A_2,s}<1$, то $\hat\varphi(A_1,A_1+A_2)\le c_{A_2,s}(1-c_{A_2,s})^{-1}$;

2) $A_1,A_2\in\mathfrak M_N(X,Y)$, A_2 – ограничен относительно оператора A_1, $b^q_{A_2,s}=0$ $\forall q\in Q$ и $d_{A_2,s}<1$, то $\hat\delta(A_1,A_1+A_2)\le d_{A_2,s}(1-d_{A_2,s})^{-1}$.

Доказательство. 1) Пусть $L_{G(A_1)}(x,A_1x)=(\theta,A_2x)$ $\forall x\in\mathcal D(A_1)$. Тогда $r_{p,q}(L_{G(A_1)}(x,A_1x)-L_{G(A_1)}(y,A_1y))^2 = r_{p,q}(\theta,A_2x-A_2y)^2 = q(A_2x-A_2y)^2 \le (c^q_{A_2,s})^2 q(A_1x-A_1y)^2 \le (c^q_{A_2,s})^2(p(x-y)^2+q(A_1x-A_1y)^2) = (c^q_{A_2,s})^2 r_{p,q}((x,A_1x)-(y,A_1y))^2$ $\forall x,y\in\mathcal D(A_1)$. Отсюда $F = I_{G(A_1)} + L_{G(A_1)} \in \mathcal F_\varphi(G(A_1),G(A_2))$ и $\varphi(A_1,A_1+A_2)\le c_{A_2,s}$. Оценка $\varphi(A_1+A_2,A_1)\le(1-c_{A_2,s})^{-1}c_{A_2,s}$ получается аналогично с учетом замечания 1. Отсюда $\hat\varphi(A_1,A_1+A_2)\le c_{A_2,s}(1-c_{A_2,s})^{-1}$.

2) Доказывается аналогично пункту 1).

Теорема 2. Пусть X, Y – нормированные пространства. Если

1) $A_1,A_2\in\mathfrak M(X,Y)$, A_2 – непрерывен относительно оператора A_1 и $c<1$, то $\hat\varphi(A_1,A_1+A_2)\le(1-c)^{-1}(a^2+c^2)^{1/2}$;

2) $A_1,A_2\in\mathfrak M_N(X,Y)$, A_2 – ограничен относительно оператора A_1 и $d<1$, то $\hat\delta(A_1,A_1+A_2)\le(1-d)^{-1}(b^2+d^2)^{1/2}$.

Доказательство. 1) Положим $L_{G(A_1)}(x,A_1x)=(\theta,A_2x)$ $\forall x\in\mathcal D(A_1)$. Тогда $\|L_{G(A_1)}(x,A_1x)-L_{G(A_1)}(y,A_1y)\|^2=\|(\theta,A_2x-A_2y)\|^2=\|A_2x-A_2y\|^2 \le (a\|x-y\|+c\|A_1x-A_1y\|)^2\le(a^2+c^2)(\|x-y\|^2+\|A_1x-A_1y\|^2) = (a^2+c^2)\|(x-y,A_1x-A_1y)\|^2$ $\forall x,y\in\mathcal D(A_1)$. Отсюда $F=I_{G(A_1)}+L_{G(A_1)}\in\mathcal F_\varphi(G(A_1),G(A_2))$

и $\varphi(A_1, A_1+A_2) \le (a^2+c^2)^{1/2}$. Аналогично, с учетом замечания 1, получается оценка $\varphi(A_1+A_2, A_1) \le (1-c)^{-1}(a^2+c^2)^{1/2}$. Отсюда $\hat{\varphi}(A_1, A_1+A_2) \le (1-c)^{-1}(a^2+c^2)^{1/2}$.

2) Доказывается аналогично пункту 1).

§ 2. Периодически возмущенные консервативные системы

Рассмотрим 2π-периодическую краевую задачу для уравнения

$$x'' + \operatorname{grad} G(x) + f(t, x, x'') = y, \qquad (1)$$

где $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция; $f: \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, 2π-периодическая по первому аргументу; $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная, 2π-периодическая функция.

Зададим оператор $A: \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ равенством

$$A(x) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

и воспользуемся следующим результатом для уравнения

$$x'' + \operatorname{grad} G(x) = y \qquad (2)$$

Теорема 3. ([7], Теорема 2) Если существует $m \in N$ и действительные числа $m^2 < r \le s < (m+1)^2$ такие, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ $rI \le A(x) \le sI$. Тогда уравнение (2) имеет единственное 2π- периодическое решение.

Следуя [7], обозначим через H гильбертово пространство (классов эквивалентности) отображений из $J = [0, 2\pi]$ в $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(x, y) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} [\sum_{i=1}^n x_i(t) y_i(t)] dt$ и положим $\mathcal{D} = \{x \in H \mid x$ – дважды дифференцируемая, 2π-периодическая функция и $x', x'' \in H\}$; операторы $L, N: \mathcal{D} \subset H \to H$ зададим равенствами $Lx = x''$ и $Nx = -\operatorname{grad} G(x(\cdot))$ соответственно.

В силу теорем 1 и 2 в [7] при условиях теоремы 3 оператор $L - N$ биективен и обратный оператор $(L-N)^{-1}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $K \le (2^{-1}(2m+1) - \max(|2^{-1}(2m^2+2m+1) - r|, |2^{-1}(2m^2+2m+1) - s|))^{-1}$. Поэтому, если оператор B определен равенством

$$(Bx)(t) = f(t, x(t), x''(t)) \quad \forall x \in \mathcal{D},$$

то в силу следствия 1 в [2] справедлива

Теорема 4. Пусть при условиях теоремы 3

$$\varphi(L - N + B, L - N) < (1 + K)^{-1} \qquad (3)$$

Тогда уравнение (I) имеет единственное 2π-периодическое решение.

Достаточное условие, при котором имеет место оценка (3), дает

Теорема 5. Пусть $\partial_i G$ – производная функции G по i-й переменной, и пусть функция f удовлетворяет условию

$$(f_i(t,u,u'')-f_i(t,v,v''))^2 \le a_0^2(u_i-v_i)^2 + \\ + b_0^2(u_i''+\partial_i G(u)-(v_i''+\partial_i G(v)))^2 \quad (4)$$

для любых $t\in J;\ u,v,u'',v''\in \mathbb{R}^n;\ i=1,\dots,n$,
где f_i – i-я компонента f; u_i, v_i, u_i'', v_i'' – i-е координаты векторов u, v, u'', v''; $a_0, b_0\in \mathbb{R}_+$, $b_0<1$ и $(1-b_0)^{-1}(a_0^2+b_0^2)^{1/2}<(1+K)^{-1}$.

Тогда справедлива оценка (3).

Доказательство. В силу условия (4)

$$\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{i=1}^n (f_i(t,u(t),u''(t))-f_i(t,v(t),v''(t)))^2\Big]dt \le a_0^2\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{i=1}^n(u_i(t)-v_i(t))^2\Big]dt + b_0^2\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{i=1}^n(u_i''+\partial_i G(u(t))-(v_i''+\partial_i G(v(t))))\Big]dt \quad \forall u,v\in \mathcal{D}$$

Отсюда $\|Bu-Bv\|\le a_0\|u-v\| + b_0\|(L-N)u-(L-N)v\|$ $\forall u,v\in\mathcal{D}$, и из теоремы 2 следует справедливость оценки (3).

§ 3. Периодическая краевая задача

Пусть заданы следующие системы дифференциальных уравнений, записанные в векторной форме

$$u'=A(t,u)+g(t,u,u')+f(t), \quad (I)$$

$$u'=A(t,u)+g(t,u,u')+h(t,u), \quad (2)$$

где $u:[0,2\pi]\to \mathbb{C}^n$, $A:[0,2\pi]\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$, $f:[0,2\pi]\to\mathbb{C}^n$, $g:[0,2\pi]\times\mathbb{C}^{2n}\to\mathbb{C}^n$, $h:[0,2\pi]\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$;
($\mathbb{C}^n$ – пространство элементов $(x_1,\dots,x_n)$, где $x_i\in\mathbb{C}$, $i=1,\dots,n$; $\|x\|^2=\sum_{i=1}^n |x_i|^2$); и пусть дано условие

$$u(0)=u(2\pi) \quad (3)$$

Для изучения задач (I), (3) и (2), (3) мы воспользуемся следующим результатом [6], для уравнений

$$u' = A(t,u) + f(t), \tag{4}$$
$$u' = A(t,u) + h(t,u) \tag{5}$$

Теорема 6. (теорема 4.2 [6]). Пусть функция $(t,x) \to A'(t,x)$ непрерывна на $[0,2\pi] \times \mathbb{C}^n$, где $A'(t,x_0)$ – производная Фреше отображения $x \to A(t,x)$ в x_0. Пусть

(1) существует $K>0$ такое, что $\|A'(t,x)\| \leq K$ для всех $x \in \mathbb{C}^n$ и для всех $t \in [0,2\pi]$;

(2) существует $\delta > 0$ такое, что $dist\,[\{2\pi n i : n$ – целое число$\}$, $\{\lambda : \lambda$ – собственное значение от $\int_0^{2\pi} A'(s,u(s))ds\}] > \delta$ для всех $u \in C_p[0,2\pi]$, где $C_p[0,2\pi] = \{u \in C[0,2\pi] : u(0) = u(2\pi)\}$, $C[0,2\pi] = \{u : [0,2\pi] \to \mathbb{C}^n \mid u$ – непрерывна$\}$ с нормой $\|u\| = \sup_{x \in [0,2\pi]} \|u(x)\|$;

(3) h – непрерывная функция с ограниченной областью значений.

Тогда

а) задача (4), (3) имеет единственное решение для любого $f \in C[0,2\pi]$;

б) задача (5), (3) имеет по крайней мере одно решение.

Обозначим, следуя [6], через $\mathfrak{D}(L)$ множество непрерывно дифференцируемых функций из $C_p[0,2\pi]$, и положим $|||u||| = \|u\| + \|u'\|$; операторы L, N и F зададим равенствами

$$Lu = -u' \qquad u \in \mathfrak{D}(L);$$
$$(Nu)(t) = A(t,u(t)) \qquad u \in C[0,2\pi];$$
$$(Fu)(t) = h(t,u(t)) \qquad u \in \mathfrak{D}(L).$$

Тогда, очевидно, $L, N, F : \mathfrak{D}(L) \to C[0,2\pi]$. В силу теорем 2.2 и 4.1 в [6] оператор $L+N$ при (1)–(3) биективен, и обратный оператор $(L+N)^{-1} : C[0,2\pi] \to \mathfrak{D}(L)$ удовлетворяет условию Липшица ($\mathfrak{D}(L)$ с нормой $|||\cdot|||$) с константой K_1, зависящей только от K и δ, и, как показано в теореме 4.1 [6], оператор F вполне непрерывен при условиях (1) ÷ (3).

Определим оператор B следующим образом:

$$(Bu)(t) = g(t, u(t), u'(t)) \qquad \forall u \in C_p[0,2\pi].$$

Теорема 7. Пусть функции A и h удовлетворяют условиям теоремы 6 и выполняется условие $\hat{\varphi}(L+N+B, L+N) < (1+K_1)^{-1}$. Тогда

а) задача (I),(3) разрешима и имеет единственное решение при любом $f \in C[0, 2\pi]$;

б) задача (2), (3) имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство. В силу следствия I в [2] оператор $L+N+B$ биективен и, следовательно, задача (I), (3) разрешима и имеет единственное решение.

В силу следствия I в [2] оператор $T=(L+N+B)^{-1}$ удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, оператор FT вполне непрерывен, и т.к. область значения оператора F ограничена, то существует константа $R>0$ такая, что $\|FTu\| \leq R$ для любого $u \in C[0, 2\pi]$. Поэтому $FT: B_R = \{u \in C[0,2\pi] \mid \|u\| \leq R\} \to B_R$. Следовательно, по принципу Шаудера, оператор FT имеет неподвижную точку u в B_R. Отсюда $u_0 = Tu$ является решением задачи (2), (3).

Достаточное условие, при котором имеет место оценка $\hat{\varphi}(L+N+B, L+N) < (1+K_1)^{-1}$, дает

Теорема 8. Пусть функция g удовлетворяет условию

$$\|g(t,u,u') - g(t,v,v')\| \leq a_0 \|u-v\| + b_0 \|u' - A(t,u) - v' + A(t,v)\| \qquad (6)$$

для любых $t \in [0, 2\pi]$; $u, v, u', v' \in C^n$, где $a_0, b_0 \in R_+$, $b_0 < 1$ и $(1-b_0)^{-1}(a_0^2 + b_0^2)^{1/2} < (1+K_1)^{-1}$. Тогда $\hat{\varphi}(L+N+B, L+N) < (1+K_1)^{-1}$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что из условия (6) следует неравенство

$$\|Bu - Bv\| \leq a_0 \|u-v\| + b_0 \|(L+N)u - (L+N)v\| \leq$$
$$\leq a_0 \|u-v\|_{C_p} + b_0 \|(L+N)u - (L+N)v\|$$

для любых $u, v \in C_p[0, 2\pi]$. Поэтому, в силу теоремы 2, $\hat{\varphi}(L+N+B, L+N) \leq (1+b_0)^{-1}(a_0^2 + b_0^2)^{1/2} < (1+K_1)^{-1}$.

§ 4. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений, записанной в **векторной** форме

$$u' = f_1(x, u, u') + f_2(x, u) + f_3(x, u) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u(a) = u_0, \qquad (2)$$

где $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f_1 : [a, b] \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, $f_2 : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – функция непрерывная по первому аргументу и удовлетворяющая условию Липшица с константой $L > 0$ по второму аргументу, $f_3 : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция с ограниченной областью значений; $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

4.1. Пусть $f_3 \equiv 0$. Обозначим через $C_n[a, b]$ пространство непрерывных функций, действующих из $[a, b]$ в $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\| = \max\limits_{x \in [a, b]} \|u(x)\|$ $u \in C_n[a, b]$; а через $C_n'[a, b]$ – множество непрерывно дифференцируемых функций из $C_n[a, b]$. Зададим на множестве $\mathcal{D} = \{u \in C_n'[a, b] : u(a) = u_0\}$ операторы A и B равенствами

$$(Au)(x) = u'(x) - f_2(x, u(x)) \qquad u \in \mathcal{D}$$

$$(Bu)(x) = f_1(x, u(x), u'(x)) \qquad u \in \mathcal{D}$$

Легко видеть, что $A, B : \mathcal{D} \subseteq C_n[a, b] \to C_n[a, b]$

Лемма 1. Оператор A биективен. Если $L(b-a) < 1$, то оператор A^{-1} удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Биективность оператора A вытекает из разрешимости и единственности решения системы $u' = f_2(x, u) + f(x)$ при условии (2) для любого $f \in C_n[a, b]$ ([4] с.17, пункт 4а). Далее, при условии $L(b-a) < 1$ нетрудно убедиться, что оператор A^{-1} удовлетворяет условию Липшица с константой $L_1 = (b-a)(1 - L(b-a))^{-1}$.

Из леммы 1 и следствия 1 в [2] вытекает

Теорема 9. Пусть $f_3 \equiv 0$, $L(b-a) < 1$ и

$$\varphi(A-B, A) < (1 - L(b-a))(1 + (b-a)(1-L))^{-1} \qquad (3)$$

Тогда задача (1), (2) разрешима и имеет единственное решение.

Достаточное условие, при котором имеет место оценка (3), дает

Теорема 10. Пусть функция f_1 удовлетворяет условию

$$\|f_1(x,u_1,u_1')-f_1(x,u_2,u_2')\| \le a_0\|u_1-u_2\|+ \qquad (4)$$
$$+ b_0\|(u_1'-f_2(x,u_1))-(u_2'-f_2(x,u_2))\|$$
$$\forall x\in[a,b]\ \forall u_1,u_2,u_1',u_2'\in\mathbb{R}^n,$$

где $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+$, $b_0<1$ и $(1-b_0)^{-1}(a_0^2+b_0^2)^{1/2} < (1-L(b-a))(1+(1-L)(b-a))^{-1}$. Тогда имеет место оценка (3).

Доказательство. Нетрудно видеть, что из условия (4) следует неравенство $\|Bu_1-Bu_2\|\le a_0\|u_1-u_2\|+b_0\|Au_1-Au_2\|$ для любых $u_1,u_2\in\mathcal{D}$ и из теоремы 2 следует справедливость оценки (3).

4.2. Пусть $u_0=0$. Положим $\mathcal{D}_0=\{u\in C_n'[a,b]\,|\,u(a)=0\}$, $\|u\|_{\mathcal{D}_0}=\|u\|_{\mathcal{D}}$ для любого $u\in\mathcal{D}_0$. Нетрудно видеть, что $(\mathcal{D}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{D}_0})$ – банахово пространство. Обозначим через A_0 и B_0 операторы A и B в том случае, когда $u_0=0$. Оператор F определим равенством $(Fu)(x)=f_3(x,u(x))$ $\forall u\in C_n[a,b]$ и положим $F_0=F/_{\mathcal{D}}$.

Теорема 11. Пусть $u_0=0$, $L(b-a)<1$ и

$$\varphi(A_0-B_0,A_0)<(1-L(b-a))(2+(b-a)(1-L))^{-1} \qquad (3')$$

Тогда задача (1'), (2') имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство. Пространство $C_n[a,b]$ полно; оператор $A_0:\mathcal{D}_0\to C_n[a,b]$ биективен в силу леммы 1 и нетрудно проверить, что обратный оператор A_0^{-1} удовлетворяет условию Липшица с константой $L_2=(1+L_1+LL_1)$; поэтому в силу следствия 1 в [2] оператор A_0-B_0 биективен и обратный оператор $(A_0-B_0)^{-1}:C_n[a,b]\to\mathcal{D}_0$ удовлетворяет условию Липшица.

Покажем далее, что $F_0:\mathcal{D}_0\to C_n[a,b]$ – компактный оператор. Для этого зададимся ограниченной по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_0}$ последовательностью $(u_n)_{n\in N}$ из $\mathcal{D}_0$ и заметим, что из ограниченности последовательности $(u_n)_{n\in N}$ следует ограниченность по норме $C_n[a,b]$ последовательности $(u_n')_{n\in N}$. Поэтому существует положительное число M такое, что $\|u_n(t_1)-u_n(t_2)\|\le\|u_n'(\theta_n)\|\|t_1-t_2\|\le M\|t_1-t_2\|$ $\forall t_1,t_2\in[a,b]\ \forall n\in N$, где $\theta_n\in[t_1,t_2]$. Отсюда следует равностепенная непрерывность семейства функций $(u_n)_{n\in N}$.

В силу теоремы Арцела-Асколи [redacted] можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $(u_{n_k})_{k\in N}$ и, т.к. пространство $C_n[a,b]$ полное, то существует элемент $u\in C_n[a,b]$ такой, что $u_{n_k}\underset{k\to\infty}{\rightrightarrows}u$.

Далее, $F_0 u_n = F u_n \quad \forall n\in N$.
Поэтому, если оператор $F: C_n[a,b]\to C_n[a,b]$ непрерывен и, следовательно, $(Fu_{n_k})_{k\in N}$ сходится к Fu, то F_0 - компактный оператор.

Покажем непрерывность оператора F. Пусть $(v_n)_{n\in N}\subseteq C_n[a,b]$ и $v_n\to v$. Тогда существует $M_0>0$ такое, что $\|v_n\|\le M_0$ $\forall n\in N$. Зададимся $\varepsilon>0$ и из равномерной непрерывности функции f_3 на компактном множестве $[a,b]\times\{X\in C_n[a,b] \mid \|X\|\le M_0\}$ получим, что существует $\delta>0$ такое, что $\|f_3(X_1',X_2')-f_3(X_1'',X_2'')\|<\varepsilon$, если $|X_1'-X_1''|+\|X_2'-X_2''\|<\delta$. Но $v_n\to v$, поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_0 такой, что $\|Fv_n-Fv\|<\varepsilon$ при $n\geqslant n_0$, т.е. $Fv_n\to Fv$.

Далее, нетрудно видеть, что из непрерывности оператора F следует непрерывность оператора F_0. Поэтому компактный оператор F_0 вполне непрерывен.

Рассмотрим теперь оператор $I-F_0(A_0-B_0)^{-1}$, действующий из $C_n[a,b]$ в $C_n[a,b]$ и покажем, что он сюръективен.

Нетрудно видеть, что оператор $F_0\circ(A_0-B_0)^{-1}$ непрерывен и определен на банаховом пространстве $C_n[a,b]$. Возьмем некоторый элемент v_0 пространства $C_n[a,b]$ и рассмотрим оператор F_{v_0}, определяемый равенством $F_{v_0}v=F_0(A_0-B_0)^{-1}v + v_0$ для любого $v\in C_n[a,b]$.

Легко видеть, что оператор F_{v_0} вполне непрерывен, и т.к. $R(F_0)$ ограничена, то существует $r>0$ такое, что $\|F_{v_0}v\|\le r$ $\forall v\in C_n[a,b]$. Поэтому оператор F_{v_0} переводит шар $K=\{v\in C_n[a,b] \mid \|v\|\le r\}$ в себя и, в силу принципа Шаудера, имеет неподвижную точку на шаре K. Отсюда следует, что оператор $I-F_0(A_0-B_0)^{-1}$ сюръективен; поэтому из биективности оператора A_0-B_0 следует разрешимость уравнения $A_0u=B_0u+F_0u$ на множестве $\mathcal{D}_0$. Последнее и означает разрешимость задачи (1), (2).

Достаточное условие, при котором имеет место оценка (3'), дает теорема 3, если $(1-b_0)^{-1}(a_0^2+b_0^2)^{1/2}<(1-L(b-a))\cdot(2+(1-L)(b-a))^{-1}$.

§ 5. Задача Коши для гиперболического уравнения

1. Постановка задачи.

Пусть $\mu \in C'(R)$, $\mu'(x)<0$ $\forall x\in R$ и точка $(x_0,y_0)\in R^2$ такая, что $y_0>\mu(x_0)$. Рассмотрим в замкнутой области Ω, ограниченной кривыми $y=\mu(x)$, $y=y_0$, $x=x_0$ задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+a_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+a_1(x,y)u=$$

$$F_1(x,y)+F_2\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u|_{y=\mu(x)}=\varphi_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\mu(x)}=\varphi_1(x), \end{cases} \tag{2}$$

где $F_1, a_i\in C(\Omega)$ $i=1,2,3$, $F_2\in C(\tilde{Q})$ $(\tilde{Q}=\Omega\times R^4)$;

$$|F_2(x_1,x_2,x_3',\dots,x_6')-F_2(x_1,x_2,x_3'',\dots,x_6'')|\le$$

$$a_0|x_3'-x_3''|+b_0|x_6'-x_6''+\sum_{i=3}^{5}a_{i-2}(x_1,x_2)(x_i'-x_i'')| \tag{3}$$

$$\forall (x_1,x_2)\in\Omega,\ x_i',x_i''\in R\quad i=3,\dots,6.$$

2. **Обозначения.** Положим: $\mathfrak{D}$ – множество непрерывно дифференцируемых функций на Ω, удовлетворяющих условию (2)

$(Au)(x,y)\overset{def}{=}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+a_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+a_1(x,y)u$, $u\in\mathfrak{D}$

$(Bu)(x,y)\overset{def}{=}F_2\left(x,y,u(x,y),\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)$, $u\in\mathfrak{D}$. Легко видеть, что $A:\mathfrak{D}\subseteq C(\Omega)\to C(\Omega)$, $B:\mathfrak{D}\subseteq C(\Omega)\to C(\Omega)$ и

$$\|Bu_1-Bu_2\|\le a_0\|u_1-u_2\|+b_0\|Au_1-Au_2\|\quad\forall u_1,u_2\in\mathfrak{D}.$$

Пусть v – функция Римана оператора A и $M=\iint_\Omega |v|\,dx\,dy$.

Лемма 2. Оператор A биективен и обратный удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Биективность оператора A непосредственно вытекает из разрешимости и единственности решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+a_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+a_1(x,y)u=f(x,y) \tag{1'}$$

при условии (2), $\forall f\in C(R^2)$ (см., например, [5]).

Покажем, что обратный оператор A^{-1} удовлетворяет условию Липшица.

Пусть $(x_1, y_1) \in \Omega$, и $\omega \subseteq \Omega$ – область, ограниченная кривыми $y = \mu(x)$, $y = y_1$, $x = x_1$. Тогда, в силу формулы Римана,

$$\| A^{-1} f_1 - A^{-1} f_2 \|_{C(\bar\omega)} = \max_{(x_1,y_1)\in\Omega} \left| \iint_{\omega} v (f_1 - f_2)\, dx\, dy \right| \le M \| f_1 - f_2 \|_{C(\omega)} \quad \forall f_1, f_2 \in C(\Omega)$$

3. Теорема существования и единственности решения.

Из леммы 2, теоремы 2 и следствия 1 в [2] вытекает

Теорема 12. Если $b_0 < 1$ и $(1-b_0)^{-1}(a_0^2 + b_0^2)^{1/2} < (1+M)^{-1}$ то задача (1), (2) разрешима и имеет единственное решение.

§ 6. Первая краевая задача для гиперболического уравнения

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + a_3(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + a_1(x,y)u = F_1(x,y) + F_2\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) \quad (1)$$

$$u|_{x=x_0} = \varphi_1(y),\ y_0 \le y \le b;\quad u|_{y=y_0} = \varphi_2(x),\ x_0 \le x \le a, \quad (2)$$

где $\varphi_1(y_0) = \varphi_2(x_0)$, $\varphi_1 \in C^1[y_0, b]$, $\varphi_2 \in C^1[x_0, a]$;
$F_1, a_i \in C(Q)$ $i = 1,2,3$ $(Q = [x_0, a; y_0, b])$, $F_2 \in C(\tilde Q)$
(где $\tilde Q = Q \times R^4$),

$$|F_2(x_1, x_2, x_3', \ldots, x_6') - F_2(x_1, x_2, x_3'', \ldots, x_6'')| \le a_0|x_3' - x_3''| + b_0|x_6' - x_6'' + \sum_{i=3}^{5} a_{i-2}(x_1,x_2)(x_i' - x_i'')| \quad \forall x_1 \in [x_0, a], x_2 \in [y_0, b], \quad (3)$$
$x_i', x_i'' \in R$ $i = 3, \ldots, 6$ при $a_0, b_0 \in R_+$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = w \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} + a_2(x,y)v + a_3(x,y)w + a_1(x,y)u = F_1(x,y) + F_2\left(x,y,u,v,w,\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + a_2(x,y)v + a_3(x,y)w + a_1(x,y)u = F_1(x,y) + F_2\left(x,y,u,v,w,\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} u|_{y=y_0} = \varphi_2(x);\ x_0 \le x \le a \\ v|_{y=y_0} = \varphi_2'(x);\ x_0 \le x \le a \\ w|_{x=x_0} = \varphi_1'(y);\ y_0 \le y \le b, \end{cases} \quad (5)$$

которая эквивалентна системе

$$\begin{cases} u(x,y)=\varphi_2(x)+\int\limits_{y_0}^{y} w\,dy \\ v(x,y)=\varphi_2'(x)+\int\limits_{y_0}^{y}[F_1(x,y)+F_2(x,y,u,v,w,\frac{\partial v}{\partial y})-a_2(x,y)v-a_3(x,y)w-a_1(x,y)u]dy \\ w(x,y)=\varphi_1'(y)+\int\limits_{x_0}^{x}[F_1(x,y)+F_2(x,y,u,v,w,\frac{\partial v}{\partial y})-a_2(x,y)v-a_3(x,y)w-a_1(x,y)u]dx. \end{cases} \qquad (6)$$

Пусть u - решение задачи (1), (2) и $v=\frac{\partial u}{\partial x}$, $w=\frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда непосредственно проверяется, что u, v, w - решение задачи (4), (5).

Пусть u, v, w - решение задачи (4), (5). Тогда в силу эквивалентности (4), (5) и (6)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv\varphi_2'(x)+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{\partial w}{\partial x}dy\equiv\varphi_2'(x)+\int\limits_{y_0}^{y}[F_1(x,y)+F_2(x,y,u,v,w,\frac{\partial v}{\partial y})-a_2(x,y)v-$$

$$a_3(x,y)w-a_1(x,y)u]\,dy\equiv v(x,y).$$

Подставляя $v(x,y)\equiv\frac{\partial u}{\partial x}$ и $w\equiv\frac{\partial u}{\partial y}$ во второе тождество системы (4), получаем, что $u(x,y)$ является решением системы (1). Покажем теперь, что $u|_{x=x_0}=\varphi_1(y)$; $y_0\le y\le b$. Действительно,

$$u|_{x=x_0}\equiv\varphi_2(x_0)+\int\limits_{y_0}^{y}w|_{x=x_0}dy\equiv\varphi_2(x_0)+\int\limits_{y_0}^{y}\varphi_1'(y)\,dy\equiv$$

$$\varphi_2(x_0)+\varphi_1(y)-\varphi_1(y_0)\equiv\varphi_1(y).$$

Следовательно, $u(x,y)$ является решением задачи (1), (2).

2. <u>Обозначения.</u> Положим: $C_1=C(Q)\times C(Q)\times C(Q)$, $\|\cdot\|_{C_1}=\|\cdot\|_{C(Q)}+\|\cdot\|_{C(Q)}+\|\cdot\|_{C(Q)}$; $C^{1,0}\subseteq C(Q)$ и $C^{0,1}\subseteq C(Q)$ - множества функций, непрерывно дифференцируемых по первому и второму аргументу соответственно; $\mathfrak{D}\overset{def}{=}\{(u,v,w)\in C^{0,1}\times C^{0,1}\times C^{1,0}\subseteq C_1 \mid u|_{y=y_0}=\varphi_2(x),\ x\in[x_0,a];\ v|_{y=y_0}=\varphi_2'(x),\ x\in[x_0,a];\ w|_{x=x_0}=\varphi_1(y),\ y\in[x_0,b]\}$,

$$A(u,v,w)\overset{def}{=}\Big(\frac{\partial u}{\partial y};\ \frac{\partial v}{\partial y}+a_2(x,y)v+a_3(x,y)w+a_1(x,y)u;$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}+a_2(x,y)v+a_3(x,y)w+a_1(x,y)u\Big)\qquad (u,v,w)\in\mathfrak{D}$$

$$B(u,v,w)\overset{def}{=}(0,F_2(x,y,u,v,w,\frac{\partial v}{\partial y}),F_2(x,y,u,v,w,\frac{\partial v}{\partial y}))\qquad (u,v,w)\in\mathfrak{D}.$$

Легко видеть, что $A:\mathfrak{D}\subseteq C_1\to C_1$, $B:\mathfrak{D}\subseteq C_1\to C_1$.

Непосредственно проверяется, что $\|B(u_1,v_1,w_1)-B(u_2,v_2,w_2)\|_{C_1}\le 2a_0\|(u_1,v_1,w_1)-(u_2,v_2,w_2)\|_{C_1}+2b_0\|A(u_1,v_1,w_1)-A(u_2,v_2,w_2)\|_{C_1}$ $\forall (u_1,v_1,w_1),(u_2,v_2,w_2)\in\mathfrak{D}$

Положим $c = \max[(b-y_0), (a-x_0)]$ и

$c' = \max(2\|a_1\|_{C(Q)}, 2\|a_2\|_{C(Q)}+1, 2\|a_3\|_{C(Q)})$.

Лемма 3. Оператор A биективен. Если $cc' < 1$, то оператор A^{-1} удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Биективность оператора A вытекает из разрешимости и единственности решения системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = w + f_1(x,y) \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} + a_2(x,y)v + a_3(x,y)w + a_1(x,y)u = f_2(x,y) \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + a_2(x,y)v + a_3(x,y)w + a_1(x,y)u = f_3(x,y) \end{cases}$$

при условии (4), $\forall(f_1, f_2, f_3) \in C_1$ (последнее можно показать, перейдя к интегральной системе и воспользовавшись принципом сжатых отображений).

Условие Липшица для оператора A^{-1} проверяется непосредственно.

3. Теорема существования и единственности решения.

Из леммы 3, теоремы 2 и следствия 1 в [2] вытекает

Теорема I3. Если $b_0 < \frac{1}{2}$, $cc' < 1$ и $(\frac{1}{2} - b_0)^{-1}(a_0^2 + b_0^2)^{1/2} < \frac{1-cc'}{1+c-cc'}$, то задача (1), (2) разрешима и имеет единственное решение.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М.А.Гольдману за внимание к работе.

Литература

1. Вейлер Е.Л. Об одном нелинейном аналоге раствора. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Респ.межвуз.сб. науч.тр., вып.3, Рига, 1977, с.16-27.

2. Вейлер Е.Л. Об устойчивости некоторых свойств нелинейного оператора. - В кн.: Топологические пространства и их отображения. Респ.межвуз.сб.науч.тр., вып. 3, Рига, 1977, с.28-35.

3. Вейлер Е.Л. О растворе между множествами и теоремах устойчивости в локально выпуклых пространствах. - Наст. сб., с.14-30.

4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1953.

5. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М., 1966.

6. Brown K.I. Nonlinear bondary value problems and a global inverse function theorem. -Annale mat. pura ed. appl., vol.106, 1975, p.205-217.

7. Marvhing I. Contractive mappings and periodically perturbed conservative sistems.-Arc.mat., vol.12, N 2, 1976, p.67-73.

Поступила 10 сентября 1978 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.

УДК 513.83.

О КОМПАКТНОСТИ И ОТНОСИТЕЛЬНОЙ КОМПАКТНОСТИ МНОЖЕСТВ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Л.А.Гольдман
ЛГУ им. П.Стучки

В настоящей статье устанавливается некоторый критерий компактности множеств в произвольных топологических пространствах и на его основе - критерий относительной компактности множеств в топологических векторных пространствах. Данная статья примыкает к работе [1].

Теорема 1.

Условия. X и Y - топологические пространства; Y содержит не менее двух элементов; $Y \in \mathcal{T}_1$ (т.е. Y удовлетворяет первой аксиоме отделимости); $E \subset X$.

Утверждение. Для компактности множества E необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее требование:

(1) Какова бы ни была направленность $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset E$, расходящаяся в E, найдется такое отображение $f: E \to Y$, что

(а) множество $f(E)$ относительно компактно в Y;

(в) направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ расходится в Y.

Доказательство. Необходимость. Пусть множество E компактно. Возьмем какую-либо направленность $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset E$, расходящуюся в E, и обозначим через x одну из ее предельных точек. Ввиду расходимости направленности $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки x, что множество $\{\alpha \in A \mid x_\alpha \in E \setminus \mathcal{U}\}$ конфинально с A. Поскольку x —предельная точка направленности $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, множество $\{\alpha \in A \mid x_\alpha \in \mathcal{U}\}$ тоже конфинально с A. Возьмем два разных элемента $y_1, y_2 \in Y$ и зададим отображение $f: E \to Y$, полагая $f(x) = y_1$, если $x \in E \cap \mathcal{U}$, и $f(x) = y_2$, если $x \in E \setminus \mathcal{U}$. Так как $Y \in \mathcal{T}_1$, то множество $f(E) = \{y_1, y_2\}$ относительно компактно в Y (ибо оно компактно и замкнуто) и направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ расходится в Y. Таким образом, в случае, когда множество E компактно, требование (1) выполняется.

Достаточность. Пусть множество E не компактно. Тогда найдется направленность $(\tilde{x}_\beta)_{\beta\in B}\subset E$, не имеющая предельных точек в E. Выделим из направленности $(\tilde{x}_\beta)_{\beta\in B}$ универсальную подналравленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$; она, очевидно, расходится в E. Так как для любого $f: E\to Y$ направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ тоже универсальна (см. [2], стр.116), то в случае, когда множество $f(E)$ относительно компактно в Y, направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ сходится в Y. Это показывает, что требование (1) не выполняется, если E не компактно.

Замечание. Условия теоремы 1, касающиеся пространства Y (Y содержит не менее двух элементов и $Y\in \mathcal{T}_1$), используются только при доказательстве ее первой части - необходимости.

Теорема 2.

Условия. S – множество; Y – топологическое пространство; X – некоторое множество в Y^S, снабженное топологией τ; $E\subset X$.

Утверждение. Для компактности множества E в топологическом пространстве (X,τ) достаточно, чтобы выполнялись следующие требования:

(2а) $\forall s\in S$ множество $\{x(s)\,|\,x\in E\}$ относительно компактно в Y;

(2в) если направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}\subset E$ такова, что $\forall s\in S$ направленность $(x_\alpha(s))_{\alpha\in A}$ сходится в Y, то направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ τ сходится в E.

Доказательство. Пусть $(x_\alpha)_{\alpha\in A}\subset E$ – какая-либо τ-расходящаяся в E направленность. Тогда, в силу (2в), существует такое $s_0\in S$, что направленность $(x_\alpha(s_0))_{\alpha\in A}$ расходится в Y. Зададим отображение $f: E\to Y$, полагая $f(x)=x(s_0)\ \forall x\in E$, и запишем направленность $(x_\alpha(s_0))_{\alpha\in A}$ в виде $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$. Так как она расходится в Y, и множество $f(E)=\{f(x)\,|\,x\in E\}=\{x(s)\,|\,x\in E\}$ относительно компактно в Y (согласно (2в)), то по теореме 1 множество E τ- компактно

Следствие.

Условия. S – множество; Y – топологическое пространство; $X=Y^S$; $\sigma=\sigma(X,S)$ – топология поточечной сходимости в X ; $E \subset X$.

Утверждение. Для компактности множества E в пространстве (X, σ) достаточно, чтобы выполнялось требование (2а) теоремы 2 и чтобы множество E было замкнуто.

Это известный результат (см. [2], с. 287-288), полученный здесь лишь другим способом.

Теорема 3.

Условия. X и Y — топологические пространства; $Y \in \mathcal{T}_2$ (т.е. Y удовлетворяет второй аксиоме отделимости); $E \subset X$; $\mathcal{F}$ - некоторое разделяющее точки множества E семейство непрерывных отображений E в Y с относительно компактными в Y множествами значений.

Утверждение. Для компактности множества E необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее требование:

(3) какова бы ни была направленность $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset E$, расходящаяся в E, найдется такое отображение $f \in \mathcal{F}$, что направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ расходится в Y.

Доказательство. Необходимость. Пусть множество E компактно, и $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset E$ — какая-либо расходящаяся в E направленность. Она имеет в E по крайней мере две предельные точки. Пусть e_1, e_2 — предельные точки направленности $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ($e_1, e_2 \in E$, $e_1 \neq e_2$) и f - такая функция из $\mathcal{F}$, что $f(e_1) \neq f(e_2)$. В силу непрерывности f точки $y_k = f(e_k)$ $(k = 1, 2)$ являются предельными точками направленности $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$. Отсюда следует (учитывая условие $Y \in \mathcal{T}_2$), что направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ расходится в Y. Таким образом, в случае, когда множество E компактно, требование (3) выполняется.

Достаточность. Если выполняется требование (3), то выполняется требование (1), достаточное для компактности E .

Замечание. Условие $Y \in \mathcal{T}_2$ используется только при доказательстве первой части теоремы 3 — необходимости.

Теорема 4.

Условия. X и Y — топологические векторные пространства над полем скаляров K ; $Y \in \mathcal{T}_2$; D — ограниченное множество в X ; $E = \overline{D}$; $\mathcal{F}$ — некоторое разделяющее точки множества E семейство линейных непрерывных отображений X

в Y, вполне непрерывных на E.

Утверждение. Для относительной компактности в X множества E необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующеее требование:

(4) какова бы ни была направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}\subset D$, расходящаяся в E (равносильно – в X), найдется такое отображение $f\in\mathcal{F}$, что направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится в Y.

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы 4 требование (4) эквивалентно требованию (3). Этим наша теорема будет доказана. Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) очевидна. Установим импликацию (4) $\Rightarrow$ (3). Пусть $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ – расположенная в $\overline{D}$ расходящаяся направленность. Обозначим через $(\mathcal{U}_\beta)_{\beta\in B}$ семейство всех окрестностей нуля пространства X, частично упорядоченное по убыванию. Пусть $\mathcal{V}_{(\alpha,\beta)}=x_\alpha+\mathcal{U}_\beta$ $(\alpha\in A,\ \beta\in B)$. Так как $\mathcal{V}_{(\alpha,\beta)}$ — окрестность элемента $x_\alpha\in\overline{D}$, то в множестве $D\cap\mathcal{V}_{(\alpha,\beta)}$ содержится некоторый элемент $\tilde{x}_{(\alpha,\beta)}$. Считая декартово произведение $A\times B$ частично упорядоченным с помощью отношения $(\alpha,\beta)\leq(\alpha',\beta')$, означающего, что $\alpha\leq\alpha'$ и $\beta\leq\beta'$, рассмотрим направленность $(\tilde{x}_{(\alpha,\beta)})_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$. Установим ее расходимость в X. Предположим противное: $\tilde{x}_{(\alpha,\beta)}\xrightarrow[A\times B]{}x\in X$. Возьмем какую-либо окрестность $\mathcal{U}_x$ точки x, и пусть $\mathcal{V}_x$ — такая окрестность точки x, что $\overline{\mathcal{V}_x}\subset\mathcal{U}_x$. Так как $\tilde{x}_{(\alpha,\beta)}\xrightarrow[A\times B]{}x$, то $\exists\,(\alpha_0,\beta_0)\in A\times B:$ $(\alpha,\beta)\geq(\alpha_0,\beta_0)\Rightarrow\tilde{x}_{(\alpha,\beta)}\in\mathcal{V}_x$. Отсюда следует, что $\forall\alpha\geq\alpha_0$ $\lim\limits_{B}\tilde{x}_{(\alpha,\beta)}=x_\alpha\in\overline{\mathcal{V}_x}\subset\mathcal{U}_x$. Значит $x_\alpha\xrightarrow[A]{}x$, в противоречие с выбором направленности $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Согласно (4) $\exists f\in\mathcal{F}:$ направленность $(f(\tilde{x}_{(\alpha,\beta)}))_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ расходится в Y. Выведем из этого, что направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ также расходится в Y. Снова предположим противное: $f(x_\alpha)\xrightarrow[A]{}y\in Y$. Возьмем какую-либо окрестность $\mathcal{W}_y$ точки y, положим $\mathcal{W}_0=\mathcal{W}_y-y$ и выберем окрестность $\widetilde{\mathcal{W}}_0$ нуля пространства Y так, чтобы имело место включение $\widetilde{\mathcal{W}}_0+\widetilde{\mathcal{W}}_0\subset\mathcal{W}_0$. Так как f — линейное непрерывное отображение, то $f^{-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_0)=\mathcal{U}_{\beta_0}$ для некоторого $\beta_0\in B$. Пусть $\alpha_0\in A$ таково, что $f(x_\alpha)\in y+\widetilde{\mathcal{W}}_0$, если $\alpha\geq\alpha_0$; тогда при $(\alpha,\beta)\geq(\alpha_0,\beta_0)$ будем иметь:

$$f(x_\alpha+\mathcal{U}_\beta)=f(x_\alpha)+f(\mathcal{U}_\beta)\subset y_0+\widetilde{\mathcal{W}}_0+\widetilde{\mathcal{W}}_0\subset y+\mathcal{W}_0=\mathcal{W}_y,$$

т.е. $f(V_{(\alpha,\beta)}) \subset W_y$ при $(\alpha,\beta) \geq (\alpha_0, \beta_0)$. Так как $\tilde{x}_{(\alpha,\beta)} \in V_{(\alpha,\beta)}$ (для любого $(\alpha,\beta) \in A \times B$), то $f(\tilde{x}_{(\alpha,\beta)}) \in W_y$, если $(\alpha,\beta) \geq (\alpha_0,\beta_0)$. Это означает, что $f(\tilde{x}_{(\alpha,\beta)}) \xrightarrow[A\times B]{} y$. Мы получили противоречие. Следовательно, направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится в Y. Этим доказано, что (4) $\Longrightarrow$ (3).

<u>Следствие.</u>

<u>Условия.</u> X — топологическое векторное пространство над полем скаляров K; X^* — топологическое сопряженное к X; X^* разделяет точки в X; D — ограниченное множество в X.

<u>Утверждение.</u> Для относительной компактности в X множества D необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее требование:

(4') какова бы ни была направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset D$, расходящаяся в X, существует такой функционал $f \in X^*$, что направленность $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится в K.

Литература

1. Гольдман М.Л. Характеризация некоторых классов топологических пространств, связанная с расходящимися сетями. В кн.: Топологические пространства и отображения в них. Уч.зап. ЛГУ им.П.Стучки, вып. I, т. 236, 1975, с. 3-14.
2. Келли Дж.Л. Общая топология. М., 1968.

Поступила 16 сентября 1978 г.

УДК 513.881

О КОМПОЗИЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

М.А.Гольдман, С.Н.Крачковский
ЛГУ им.П.Стучки, МИИТ

В настоящей заметке обобщаются некоторые результаты статей [1] и [2] об относительно открытых отображениях. Устанавливается достаточное условие для того, чтобы композиция таких отображений была относительно открыта. Сначала это делается в общих топологических пространствах, а затем рассматривается вариант, относящийся к линейным отображениям векторных топологических пространств.

Пусть X и Y - топологические пространства. Отображение $A:(\mathcal{D}(A)\subset X)\to Y$ называется относительно открытым (или гомоморфизмом), если для каждого открытого множества $\mathcal{U}$ в X существует такое открытое множество $\mathcal{V}$ в Y, что $A(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(A))=\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A)$, где $\mathcal{R}(A)$ - область значений отображения A.

Теорема 1. Условия. X, Y, Z - топологические пространства; $A:(\mathcal{D}(A)\subset X)\to Y$ и $B:(\mathcal{D}(B)\subset Y)\to Z$ - относительно открытые отображения; $E=\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{D}(B)$; $\mathcal{E}=B^{-1}(B(E))\cup\cup\mathcal{R}(A)$.

Утверждение. Если существует ретракция* P множества $\mathcal{E}$ на $\mathcal{R}(A)$, такая, что

$$P^{-1}y\subset B^{-1}(By)\quad \forall y\in E \qquad (1)$$

и

$$P^{-1}y=y\quad \forall y\in\mathcal{R}(A)\setminus E, \qquad (2)$$

то композиция BA есть относительно открытое отображение.

Доказательство. Требуется показать, что для каждого открытого множества $\mathcal{U}$ в X существует такое открытое множество $\mathcal{W}$ в Z, что $BA(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(BA))=\mathcal{W}\cap\mathcal{R}(BA)$. Так как $A(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(BA))=A(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(A)\cap\mathcal{D}(BA))$ и множество $\mathcal{D}(BA)=A^{-1}(E)$ насыщено по отношению эквивалентности ρ_A, порожденному

---

* Отображение $P:\mathcal{E}\to(\mathcal{F}\subset\mathcal{E})$ топологического пространства $\mathcal{E}$ на его часть $\mathcal{F}$ называется ретракцией, если оно непрерывно и $Pf=f$ для каждого $f\in\mathcal{F}$.

отображением A, то $A(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(BA))=A(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(A))\cap$ $\cap A(\mathcal{D}(BA))=A(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(A))\cap E$. Поскольку A относительно открыто, существует такое открытое множество $\mathcal{V}$ в $\mathcal{Y}$, что $A(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(A))=\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A)$. Следовательно, $A(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(BA))=\mathcal{V}\cap E$ и

$$BA(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(BA))=B(\mathcal{V}\cap E). \qquad (3)$$

Но

$$B(\mathcal{V}\cap E)=B(P^{-1}(\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A))\cap\mathcal{D}(B)). \qquad (4)$$

Действительно, $P^{-1}(\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A))=P^{-1}(\mathcal{V}\cap E)\cup P^{-1}(\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A)\setminus\mathcal{D}(B))=$ $=P^{-1}(\mathcal{V}\cap E)\cup(\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A)\setminus\mathcal{D}(B))$ (последнее равенство справедливо в силу (2)) и, значит, $P^{-1}(\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A))\cap\mathcal{D}(B)=P^{-1}(\mathcal{V}\cap E)\cap$ $\cap\mathcal{D}(B)$, откуда $P^{-1}(\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A))\cap\mathcal{D}(B)=P^{-1}(\mathcal{V}\cap E)$ (ибо $P^{-1}(\mathcal{V}\cap E)\subset\mathcal{D}(B)$ в силу (1)); следовательно, $B(P^{-1}(\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A))\cap\mathcal{D}(B))=BP^{-1}(\mathcal{V}\cap E)$, и так как $BP^{-1}(\mathcal{V}\cap E)=B(\mathcal{V}\cap E)$ на основании (1), то равенство (4) установлено. Далее, из непрерывности P заключаем, что существует такое открытое множество $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{Y}$, что $P^{-1}(\mathcal{V}\cap\mathcal{R}(A))=\mathcal{V}_1\cap\mathcal{E}$; поэтому (4) принимает вид $B(\mathcal{V}\cap E)=B(\mathcal{V}_1\cap\mathcal{E}\cap\mathcal{D}(B))$. В силу насыщенности множества $\mathcal{E}\cap\mathcal{D}(B)$ по ρ_B, отсюда будем иметь $B(\mathcal{V}\cap E)=B(\mathcal{V}_1\cap\mathcal{D}(B))\cap$ $\cap B(\mathcal{E}\cap\mathcal{D}(B))$. Поскольку B относительно открыто, существует такое открытое множество $\mathcal{W}$ в $\mathcal{Z}$, что $B(\mathcal{V}_1\cap$ $\cap\mathcal{D}(B))=\mathcal{W}\cap\mathcal{R}(B)$. Поэтому $B(\mathcal{V}\cap E)=\mathcal{W}\cap\mathcal{R}(B)\cap B(\mathcal{E}\cap\mathcal{D}(B))=$ $=\mathcal{W}\cap\mathcal{R}(B)\cap\mathcal{R}(BA)$ (ибо $B(\mathcal{E}\cap\mathcal{D}(B))=B(E)=\mathcal{R}(BA)$), откуда, принимая во внимание (3), получим $BA(\mathcal{U}\cap\mathcal{D}(BA))=$ $=\mathcal{W}\cap\mathcal{R}(BA)$, что и требовалось.

Отметим частный случай, когда множество E насыщено по отношению эквивалентности ρ_B. В этом случае $\mathcal{E}=\mathcal{R}(A)$, и требуемой ретракцией P является тождественное отображение $\mathcal{R}(A)$ на себя.

Теорема 2. Условия. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ – топологические векторные пространства над одним и тем же полем; $A:(\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{X})\to\mathcal{Y}$ и $B:(\mathcal{D}(B)\subset\mathcal{Y})\to\mathcal{Z}$ – линейные относительно открытые отображения.

Утверждение. Если существует линейный непрерывный оператор проектирования $\bar{P}$ пространства $\mathcal{E}=\mathcal{N}(B)+\mathcal{R}(A)$ на $\mathcal{R}(A)$, такой, что $\mathcal{N}(\bar{P})\subset\mathcal{N}(B)$, то композиция BA есть относительно открытое отображение*.

Доказательство. Пусть E и $\mathcal{E}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1. Так как $B^{-1}B(E)=E+\mathcal{N}(B)$, то $\mathcal{E}=$ $=(E+\mathcal{N}(B))\cup\mathcal{R}(A)\subset(E+\mathcal{N}(B))+\mathcal{R}(A)=\mathcal{N}(B)+\mathcal{R}(A)=\tilde{\mathcal{E}}$. Обозначим через P сужение $\tilde{P}$ на $\mathcal{E}$ $(P=\tilde{P}|\mathcal{E})$. Легко видеть, что оператор P является ретракцией $\mathcal{E}$ на $\mathcal{R}(A)$ и удовлетворяет требованиям (1), (2) теоремы 1. Этим теорема 2 доказана.

Отмеченный выше частный случай теоремы 1 означает в условиях теоремы 2, что $\mathcal{N}(B)\subset\mathcal{R}(A)$ и оператором проектирования $\tilde{P}$ будет тождественное отображение $\mathcal{R}(A)$ на себя.

Рассмотрим еще случай, когда $\mathcal{R}(A)$ замкнуто и $\mathcal{N}(B)$ имеет конечномерный выступ $\mathcal{N}_1(B,A)\overset{def}{=}\mathcal{N}(B)\ominus(\mathcal{N}(B)\cap\mathcal{R}(A))$ на $\mathcal{R}(A)$. Тогда, как нетрудно убедиться, если Y является отделимым локально выпуклым пространством, то будет существовать требуемый в теореме 2 оператор проектирования $\tilde{P}$.

Таким образом, в обоих случаях предпосылки теоремы 2 выполняются, так что композиция BA относительно открыта.

Сочетая этот результат для второго случая с теоремой 3 из [2], можем сформулировать последнюю в следующем дополненном виде.

Теорема 3. Условия. X, Y, Z - топологические векторные пространства над одним и тем же полем, причем Y отделимо и локально выпукло; $A:(\mathcal{D}(A)\subset X)\to Y$ и $B:(\mathcal{D}(B)\subset Y)\to Z$ - линейные относительно открытые отображения с замкнутыми областями значений $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}(B)$; выступ $\mathcal{N}_1(B,A)$ конечномерен.

Утверждение. Композиция BA есть относительно открытое отображение с замкнутой областью значений $\mathcal{R}(BA)$.

Остановимся, в заключение, еще на случае, когда A действует в одном и том же отделимом локально выпуклом пространстве X $(A:(\mathcal{D}(A)\subset X)\to X)$. Тогда из теоремы 3 вытекает, что если A относительно открыто, $\mathcal{R}(A)$ замкнуто и выступ

---

* Здесь $\mathcal{N}(\cdot)$ обозначает, как обычно, пространство нулей соответствующего отображения.

$\mathcal{N}^1(A) \overset{def}{=} \tilde{\mathcal{N}}(A) \in (\mathcal{N}(A) \cap \mathfrak{M}(A))$ на риссовском ядре $\mathfrak{M}(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(A^n)$ конечномерен, то все степени A^n $(n = 1, 2, \dots)$ суть относительно открытые отображения с замкнутыми областями значений $\mathcal{R}(A^n)$.

Литература

1. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Гомоморфизмы и отображения с замкнутым графиком. - Латвийский математический ежегодник, № 9, 1971, с.23-37.
2. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Products, powers and contraction of homomorphisms (уточненный перевод статьи "О произведениях, степенях и сужениях гомоморфизмов. - ДАН СССР, т.181, № 5, 1968).

Поступила 21 февраля 1978 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.

УДК 513.881

ОБ УСЛОВИЯХ КОНЕЧНОМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА НУЛЬ-ЭЛЕМЕНТОВ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Дергунова Н.А.
РПИ

Пусть $\mathcal{X}$ – банахово пространство; $\mathcal{L}(\mathcal{X})$ – совокупность всевозможных линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$. Через $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{R}(A)$ соответственно обозначим область определения и область значений оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$; через $N(A)$ – множество нулей оператора A ; множество нульэлементов оператора A обозначим через $\mathcal{N}(A) \stackrel{def}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} N(A^n)$.

Теорема 1. Для того, чтобы множество нульэлементов $\mathcal{N}(A)$ оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ было конечномерным пространством, необходимо и достаточно, чтобы оператор A был представим в виде $A = B + C$, где $B, C \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, B – обратимый оператор, C – вполне непрерывный и $BC = C$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$. Тогда существует линейный непрерывный оператор проектирования P пространства $\mathcal{X}$ на $\mathcal{N}(A)$. Оператор $Q = I - P$ также является оператором проектирования, причем $PQ = QP = O$. Представим оператор $T = I - A$ в виде суммы $T = T_1 + T_2$, где $T_1 = TP = (I - A)P = P - AP$ и $T_2 = TQ = Q - AQ$. При этом $T_2 T_1 = O$. Действительно, $T_2 T_1 = (Q - AQ)(P - AP) = QP - QAP - AQP + AQAP = O$, ибо $PQ = QP = O$ и $QAP = O$ в силу того, что A преобразует всякий нульэлемент в нульэлемент. Отметим еще, что $T_1(\mathcal{X}) \subset \mathcal{N}(A)$ и $T_2(\mathcal{N}(A)) = O$. Далее, обозначив операторы $I - T_2$ и $-T_1$ через B и C соответственно, получим $A = I - T = A - T_1 - T_2 = B + C$ и $BC = C$. Остается показать обратимость оператора B и полную непрерывность C.

Установим обратимость оператора B. Пусть для некоторого $x \in X$ $Bx = x - T_2 x = \theta$, т.е. $x = T_2 x$. Так как $B = A + T_1$, то $Ax + T_1 x = \theta$ и $Ax = -T_1 x \in \mathcal{N}(A)$, откуда следует, что $x \in \mathcal{N}(A)$. Но тогда $T_2 x = \theta$ и, следовательно, $x = \theta$. Полная непрерывность оператора C

очевидна, т.к. $C=-T_1$.

Достаточность. Пусть A представим в виде $A=B+C$ и операторы $B, C\in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ удовлетворяют условиям теоремы. Покажем сперва, что $\dim N(A)<\infty$. Предполагая противное, построим (с помощью леммы о почти перпендикуляре) последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $x_n\in N(A)$, $\|x_n\|=1$, $n=1,2,\dots$, и $\|x_m-x_n\|>\frac{1}{2}$ при $m\neq n$. Пользуясь равенством $Ax_n=Bx_n+Cx_n=\Theta$, получаем:

$\|Cx_m-Cx_n\|=\|Bx_m-Bx_n\|$. Но $Bx_n=x_n$ (на основании I и IУ статьи [1] при $\mu=\gamma=1$), следовательно, $\|Cx_m-Cx_n\|=\|x_m-x_n\|>\frac{1}{2}$ при $m\neq n$, а это противоречит компактности C. Значит $\dim N(A)<\infty$. Предположим теперь, что $\dim \mathcal{N}(A)=\infty$. Тогда все $N(A^n)$ окажутся различными, так как $\dim N(A^n)\leq n\dim N(A)<\infty$.

Поэтому найдется такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $x_n\in N(A^n)$, $\|x_n\|=1$ и $\rho(x_n, N(A^{n-1}))>\frac{1}{2}$, $n=1,2,\dots$.

Для любых двух значений m и $n>m$ получаем: $\|Cx_m-Cx_n\|=$
$=\|(Ax_m-Bx_m)-(Ax_n-Bx_n)\|=\|x_n-(Ax_n-Ax_m+x_m)\|>\frac{1}{2}$
(здесь принято во внимание, что $Bx_m=x_m$, $Bx_n=x_n$, и $(Ax_n-Ax_m+x_m)\in N(A^{n-1})$). Таким образом, снова получено противоречие с компактностью оператора C, следовательно, $\dim \mathcal{N}(A)<\infty$.

Теорема 2. Если пространство нульэлементов $\mathcal{N}(A)$ оператора $A\in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ конечномерно, то A-инвариантное замкнутое дополнение к $\mathcal{N}(A)$ существует тогда и только тогда, когда оператор A представим в виде $A=B+C$, где $B, C\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$: B-обратимый, C — ограниченный конечномерный оператор, $\mathcal{D}(C)=$
$=\mathcal{X}$, $BC=C$ и $CB\subseteq C$.

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы I и 2 статьи [I] при условии, что $\lambda=0$ и $\mu=1$. Действительно, при $\lambda=0$ множество $K_0=\{\Theta\}$ и множество $\mathcal{B}(K_0,A)$ совпадает с $\mathcal{N}(A)$. Таким образом, получаем представление оператора $A=B+C$ и операторы $B,C\in\mathcal{L}(\mathcal{X})$ отвечают требованиям нашей теоремы: обратимость B следует из свойства a) теорема I статьи [I]; из свойств b), e) той же теоремы и свойства f) теоремы 2 в [I] следует выполнение условий $\mathcal{D}(C)=\mathcal{X}$, $BC=C$ и $CB\subseteq C$. Конечномерность оператора C следует из свойства c) теоремы I в [I] и конечномерности $\mathcal{N}(A)$; оператор C ограничен, т.к. $C=AP-P$ (см. доказательство теоремы I в [I]) и $\dim\mathcal{N}(A)<\infty$.

Достаточность. В разложении оператора A, по условию теоремы, C — оператор конечного ранга, следовательно, C — локально алгебраический оператор. Таким образом, из обратимости B и остальных условий теоремы вытекает выполнение всех свойств теоремы 3 в [I], из чего следует существование A-инвариантного алгебраического дополнения к $\mathcal{N}(A)$. Далее, рассмотрим оператор $T=I+C$, тогда, согласно теореме Рисса (см. [2], теорема I в гл. XIII, § I), существует замкнутое T-инвариантное дополнение $\mathcal{M}(T)$ к $\mathcal{N}(T)$. В доказательстве теоремы 3 в [I] показана A-инвариантность некоторого T-инвариантного дополнения в $\mathcal{X}$ к $\mathcal{N}(T)$. Таким образом из замкнутости $\mathcal{M}(T)$ и $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}(T)$ (см. V в [I]) следует существование замкнутого A-инвариантного дополнения в $\mathcal{X}$ к $\mathcal{N}(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдман М.А.** Об одном разложении линейного оператора. - ДАН СССР, т.189, №5, 1969, с.930-933.

2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.

Поступила 23 марта 1978 года.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.

УДК 513.83

О θ-РАЗМЕРНОСТНО ПОЛНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А.Кандил
МГУ им. М.В.Ломоносова

Пространством θ-близости, или просто θ-пространством, называется пара (X,θ), где X – топологическое пространство, а θ – бинарное отношение на множестве всех подмножеств из X (θ-близость), удовлетворяющее шести аксиомам В.Федорчука [9]. Мы предполагаем знакомство читателя с определениями и обозначениями из [9]. Федорчуком В.В. [9] было доказано, что θ-близость θ на пространстве X однозначно определяет вполне регулярное пространство X_θ, его бикомпактное расширение $b_\theta X_\theta$ и θ-совершенное неприводимое отображение $\pi_{X_\theta} : X_\theta \to X$ такие, что $A\,\bar{\theta}\,B \Leftrightarrow [\pi^{-1}_{X_\theta} A]_{b_\theta X_\theta} \cap \cap [\pi^{-1}_{X_\theta} B]_{b_\theta X_\theta} = \emptyset$.

Определение 1. Назовем конечное семейство $\alpha = \{H_i\}_{i=1}^{K}$ канонически открытых множеств θ-пространства X равномерным θ-покрытием, если существуют такие открытые множества H_1', H_2', ... H_K', что $\bigcup_{i\le K}[H_i'] = X$ и $H_i'\,\bar{\theta}\,(X\setminus[H_i])$ для каждого $i\le K$.

Очевидно, что система $\gamma=\{\alpha\}$ всех равномерных θ-покрытий θ-пространства X является базой бикомпактной θ-равномерности β на X, порождающей исходную θ-близость [12].

Множество $H\subseteq X$ называется θ-окрестностью множества H', если $H'\,\bar{\theta}\,(X\setminus[H])$. В этом случае мы будем писать $H \underset{\theta}{\supseteq} H'$.

Легко проверить, что имеют место следующие утверждения:

Лемма 1. Если $\gamma=\{H_i\}_{i=1}^{K}$ – равномерное θ-покрытие θ-пространства X, то $O_\gamma = \{O_{H_i}\}_{i=1}^{K}$ является открытым покрытием бикомпакта $b_\theta X_\theta$.

Лемма 2. Если покрытие $\alpha=\{O_i\}_{i=1}^{K}$ бикомпакта $b_\theta X_\theta$ состоит из канонически открытых множеств, то

$$\alpha^* = \pi^{\#}_{X_\theta}(\alpha \cap X_\theta) = \{\pi^{\#}_{X_\theta}(O_i\cap X_\theta) : O_i\in\alpha\}$$

есть равномерное θ-покрытие θ-пространства X.

Определение 2. θ-размерностью ($\theta d X$) непустого θ-пространства X называется наименьшее из всех таких целых неотрицательных чисел n, что в любое равномерное θ-покрытие θ-пространства X можно вписать равномерное θ-покрытие кратности, не превосходящей $n+1$; если же таких n вообще не существует, то полагаем $\theta d X = \infty$. Положим, наконец, $\theta d \emptyset = -1$.

Используя леммы 1,2 и равенство $\mathcal{F}^{\#}_{X_\theta}(v_H \cap X_\theta) = H$, справедливого для каждого канонически открытого множества H, легко доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для любого θ-пространства X имеет место равенство $\theta d X = \dim b_\theta X_\theta$. Если же при этом X бикомпакт, то $\theta d X = \dim X_\theta$.

Поскольку в случае, когда θ-близость на пространстве X есть обычная близость, отображение $\mathcal{F}_{X_\theta} : X_\theta \to X$ является гомеоморфизмом, а бикомпакт $b_\theta X_\theta$ – бикомпактным расширением пространства близости X [9], из теоремы 1 получаем

Следствие 1. Если θ-близость на пространстве X есть обычная близость, то $\theta d X = \dim c X$, где $c X$ есть бикомпактное расширение пространства X в смысле Ю.М.Смирнова.

Напомним, что подмножество Y θ-пространства X называется θ-подпространством, если ограничение θ_0 отношения θ на подмножестве Y удовлетворяет шести аксиомам θ-близости. В.В. Федорчук [11] доказал, что если Y всюду плотно в X, то Y является θ-подпространством. Тем самым отношение θ_0 на Y определяет вполне регулярное пространство Y_{θ_0}, θ-совершенное неприводимое отображение $\mathcal{F}_{Y_{\theta_0}} : Y_{\theta_0} \to Y$ и бикомпактное расширение $b_{\theta_0} Y_{\theta_0}$ [9]. Так как прообраз всюду плотного множества всюду плотен, то $\mathcal{F}_{X_\theta} | \mathcal{F}^{-1}_{X_\theta} Y$ является θ-совершенным неприводимым отображением. Поскольку $\mathcal{F}^{-1}_{X_\theta} Y$ плотно в X_θ, имеем равенство $[\mathcal{F}^{-1}_{X_\theta} Y]_{b_\theta X_\theta} = b_\theta X_\theta$. Воспользовавшись теперь теоремами 1,3 из [9], получаем равенства $Y_{\theta_0} = \mathcal{F}^{-1}_{X_\theta} Y$, $\mathcal{F}_{Y_{\theta_0}} = \mathcal{F}_{X_\theta} | \mathcal{F}^{-1}_{X_\theta} Y$ и $b_{\theta_0} Y_{\theta_0} = b_\theta X_\theta$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Если X θ-пространство и Y плотное в нем подмножество, то $\theta d Y = \theta d X$.

Следствие 2. Для любого θ-пространства X имеем $\theta d X = \theta h X$ где $h X$ есть максимальное H-замкнутое расширение θ-пространства [11].

Определение 3. θ-размерной шкалой хаусдорфова пространства X называется множество всех таких целых чисел n, для каждого из которых можно определить на пространстве X θ-близость θ_n, удовлетворяющую равенству $\theta_n d X = n$.

Хаусдорфово пространство X называется θ-размерностно-полным, если его θ-размерностная шкала содержит множество всех неотрицательных целых чисел. Обозначим через $\mathcal{K}$ класс всех θ-размерностно-полных пространств.

Теорема 3. Всякий бикомпакт, содержащий неизолированную точку счетного характера, принадлежит $\mathcal{K}$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3. Всякий n-мерный бикомпакт, содержащий неизолированную точку счетного характера, есть неприводимый образ k-мерного бикомпакта, содержащего неизолированную точку счетного характера, если только $k \geq n$.

Доказательство этой леммы получаем дословным повторением доказательства леммы 8 из [10].

Лемма 4. Пусть X – бикомпакт и $x_0 \in X$ – неизолированная точка счетного характера. Тогда существуют бикомпакт Y и непрерывное неприводимое отображение $g: Y \to X$ такие, что

1) $|g^{-1}(x_0)| = 1$,

2) $\operatorname{ind}_{g^{-1}x_0} Y = 0$,

3) $g^{-1}x_0$ является неизолированной точкой счетного характера в Y.

Доказательство. Так как X бикомпакт и $\chi(x_0, X) \leq \aleph_0$, то существует система окрестностей $\alpha = \{O_i\}_{i=0}^{\infty}$ точки $x_0 \in X$, такая, что $O_0 = X$, $[O_{i+1}] \subset O_i$, $i = 1, 2, \dots$

Определим теперь подпространство Y' в $X \times \{0, 1\}$ следующим образом:

$$Y' = \bigcup_{k=1} \{([O_{2k}] \setminus O_{2k+1}) \times \{0\} \cup ([O_{2k-1}] \setminus O_{2k}) \times \{1\} \cup (x,0) \cup (x,1)\}$$

и пусть $\pi: Y' \to X$ – естественная проекция. Очевидно, что $|\pi^{-1}x| \leq 2$ для всех $x \in X$ и ограничение отображения $\pi: Y' \setminus \pi^{-1}x_0 \to X \setminus \{x_0\}$ неприводимо. Определим Y как фактор-пространство пространства Y', относительно разбиения, единственным неодноточечным элементом которого является $\pi^{-1}x_0$, и пусть $\rho: Y' \to Y$ отображение естественного проектирования. Отображение ρ непрерывно и замкнуто, $\chi(y_0, Y) = \chi(\pi^{-1}x_0, Y')$, где $y_0 = \rho(\pi^{-1}x_0)$ ([9], гл.II, задача 326) и $Y' \setminus \pi^{-1}x_0 \simeq Y \setminus \{y_0\}$ (см. [9], гл.II, задача 346). Ясно, что Y бикомпакт и точка y_0 неизолирована в Y (по крайней мере, одна из двух точек множества $\mathcal{F}^{-1}x_o$ неизолирована в Y' !). Зададим теперь отображение $g : Y \to X$ равенством

$$g(y) = \begin{cases} \mathcal{F}(y) & \text{при } y \neq y_o \\ x_o & \text{при } y = y_o \end{cases}$$

Ясно, что $gp = \mathcal{F}$ и $g/_{Y\setminus\{y_o\}} = \mathcal{F}/_{Y'\setminus\mathcal{F}^{-1}x_o}$; поэтому отображение $g : Y \to X$ неприводимо, будучи неприводимым на всюду плотном множестве $Y\setminus\{y_o\}$. Далее, g - непрерывно, поскольку pg непрерывно, а p факторно. Вспоминая, что $\mathcal{F}^{-1}x_o$ обладает базой из открыто-замкнутых окрестностей вида $[\mathcal{F}^{-1}U_k]$ получаем $ind_{y_o} Y = 0$ и $\chi(y_o, Y) = \aleph_o$, что и завершает доказательство леммы.

Лемма 5. Пусть Y - бикомпакт, y_o - принадлежащая Y неизолированная точка счетного характера, и $ind_{y_o} Y = 0$. Тогда принадлежит $\mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \{O_i\}_{i=0}^{\infty}$ - счетная система открыто-замкнутых окрестностей точки $y_o \in Y$ такая, что $O_o = Y$ и $O_{i+1} \subset O_i$ для всех $i \in N$. Ясно, что множество $Y_i = O_i - O_{i+1}$ бикомпактно. При этом бикомпакт Y_i является образом некоторого нульмерного бикомпакта Z_i при непрерывном неприводимом отображении f_i (3 , гл.4, задача 209). Определим пространство Z и Y' равенствами $Z = \oplus Z_i$, $Y' = \oplus Y_i'$. Легко видеть, что Z и Y' локально бикомпактны, а отображение $f : Z \to Y'$, где $f/_{Z_i} = f_i$, $i \in N$ совершенно неприводимо. Тогда естественное продолжение отображения f $\alpha f : \alpha Z \to \alpha Y'$ (где αZ и $\alpha Y'$ есть бикомпактные расширения П.С.Александрова пространств Z и Y' соответственно) является непрерывным неприводимым отображением, и , поскольку y_o - неизолированная точка в Y , точка $z = \alpha Z \setminus Z$ является неизолированной точкой счетного характера. Учитывая, что пространство $Y'\sigma$ бикомпактно, имеем $\alpha Y' = Y$. Далее, поскольку очевидно, что $\dim \alpha Z = 0$, согласно лемме 3 αZ, принадлежит $\mathcal{K}$ как нульмерный бикомпакт, содержащий неизолированную точку счетного характера. А тогда и пространство Y принадлежит $\mathcal{K}$, будучи непрерывным неприводимым образом пространства из $\mathcal{K}$. Лемма 5 доказана.

Из лемм 3,4,5 следует утверждение теоремы 3.

Следствие 3. Всякий бесконечный компакт с 1-й аксиомой счетности (в частности, всякий компакт) принадлежит $\mathcal{K}$.

Следствие 4. Вполне регулярное пространство, содержащее неизолированную точку счетного характера, принадлежит $\mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть x – неизолированная точка счетного характера в пространстве X, тогда $\chi(x, \beta X) \le \aleph_0$ ([3], гл.2, задача 135), а следовательно, по теореме 3, $\beta X \in \mathcal{K}$. Так как X всюду плотно в βX, то $\theta d X = \theta d \beta X$ (теорема 2), то есть $X \in \mathcal{K}$.

Теорема 4. Если $\{X^\alpha : \alpha \in A\}$ – семейство вполне регулярных пространств и хотя бы для одного α_0 X^{α_0} принадлежит $\mathcal{K}$, то и все произведение $X = \Pi\{X^\alpha : \alpha \in A\}$ принадлежит $\mathcal{K}$.

Доказательство. Если $X^{\alpha_0} \in \mathcal{K}$, то по определению класса $\mathcal{K}$ для любого $k \ge 0$ существует такая θ-близость θ_k, что $\theta_k d X^{\alpha_0} = k$. Этой близости соответствует θ-совершенное неприводимое отображение $\pi_{X_{\theta_k}} : X^{\alpha_0}_{\theta_k} \to X^{\alpha_0}$ и бикомпактное расширение $b_{\theta_k} X^{\alpha_0}_{\theta_k}$, для которого $\dim b_{\theta_k} X^{\alpha_0}_{\theta_k} = k$. Пусть bX^α есть бикомпактное расширение пространства X^α ($\alpha \ne \alpha_0$). Тогда bX^α есть нульмерный неприводимый образ нульмерного бикомпакта Y^α, а следовательно, существует такая θ-близость θ_0 на bX^α, что $\theta_0 d\, bX^\alpha = 0$. Ограничение θ_0 на X^α удовлетворяет, согласно теореме 2, равенству $\theta_0 d X^\alpha = \theta_0 d\, b X^\alpha = 0$.

Этой θ-близости соответствует θ-совершенно неприводимое отображение $\pi_{X^\alpha} : X^\alpha_{\theta_0} \to X^\alpha$. Так как отображение $\Pi\{\pi_{X^\alpha} : \alpha \in A\}$ θ совершенно неприводимо и $\Pi\{b^\alpha_\theta X^\alpha_\theta : \alpha \in A\}$ есть бикомпактное расширение пространства $X = \Pi\{X^\alpha_\theta : \alpha \in A\}$, то по теореме 1 из [9] существует θ-близость θ_k на X. Тем самым, $\Pi_{\alpha \in A} b^\alpha_\theta X^\alpha_\theta = b_{\theta_k} X_{\theta_k}$, и поскольку $\dim \Pi_{\alpha \in A} b_\theta X^\alpha_\theta = k$, то $\theta_k d X = k$, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие 5. Для любой мощности τ куб I^τ и канторов дисконтинуум D^τ принадлежат $\mathcal{K}$.

Доказательство этого следствия вытекает из теоремы 4 и предыдущего следствия.

Класс $\mathcal{K}$ замкнут не только относительно взятия произведения, но и относительно перехода к θ-совершенным неприводимым образам. В частности, классу $\mathcal{K}$ принадлежат все неприводимые диадические бикомпакты. Из теоремы 2 вытекает также, что класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно перехода ко всюду плотным подмножествам. В то же время θ-размерностная шкала экстремально несвязного бикомпакта состоит из одного нуля.

Поэтому класс $\mathcal{K}$ незамкнут относительно перехода к θ-совершенно неприводимым прообразам.

Теорема 5. $[CH]$ всякий бесконечный бикомпакт мощности не превосходящей c, принадлежит $\mathcal{K}$.

Доказательство. Так как $|X| \le 2^{\aleph_0}$, то в X существует точка счетного характера x_0. ($[3]$, гл.3, задача 127). Если x_0 неизолировано, то X принадлежит $\mathcal{K}$ согласно теореме 3. Предположим теперь, что все точки счетного характера изолированы в X. Тогда множество $E=\{x : x\in X, x$ изолирована в $X\}$ всюду плотно в X. Покажем, что в этом случае X является неприводимым образом бикомпакта Y, удовлетворяющего первой аксиоме счетности в некоторой неизолированной его точке. В самом деле, рассмотрим некоторое счетное подмножество C множества E и определим пространство Y равенством

$Y=[C]\times\{0\}\cup(X\setminus C)\times\{1\}\subset X\times\{0,1\}$; пусть $F=[C]\setminus C$.

Поскольку C открыто в X, легко видеть, что Y замкнуто, а следовательно, Y – бикомпакт. Рассмотрим отображение $\mathcal{F}:$ $Y\to X$, определяемое равенством $\mathcal{F}(x,i)=x$. Непрерывность отображения $\mathcal{F}$ очевидна, покажем его неприводимость.

Так как отображение $\mathcal{F}$ является, очевидно, гомеоморфизмом на $\mathcal{F}^{-1}(X\setminus F)$, для доказательства его неприводимости достаточно убедиться в том, что $\mathcal{F}^{-1}(X\setminus F)$ плотно в Y; последнее же проверяется непосредственно.

Поскольку $[C]\times\{0\}$ открыто-замкнуто в Y, то $\chi((y_0),Y)=\chi(y_0,[C])\le\aleph_0$. Отсюда, согласно теореме 3, Y принадлежит $\mathcal{K}$, а следовательно, и X, будучи неприводимым образом бикомпакта из $\mathcal{K}$, само принадлежит $\mathcal{K}$. Теорема 5 доказана.

Из теоремы 5 и $[3]$ (гл.3, задача 149) вытекает

Следствие 6. $[CH]$ Всякий бесконечный секвенциальный бикомпакт, удовлетворяющий условию Суслина, принадлежит $\mathcal{K}$.

Из теоремы 5 и $[3]$ (гл.3, задача 152) вытекает также

Следствие 7. $[CH]$ Всякий бесконечный секвенциальный однородный бикомпакт принадлежит $\mathcal{K}$.

Теорема 6. Если бикомпакт X содержит x-точку, то его θ-размерностная шкала бесконечна; она содержит интервал $[\dim X, \infty]$.

Доказательство. Пусть x_0 – x-точка пространства X. Тогда существует нетривиальная последовательность $\{x_m, m=1,2..\}$

сходящаяся к x_0. Отделим точки этой последовательности канонически открытыми множествами O_m таким образом, чтобы система множеств $\{[O_m]: m=1,2,\dots\}$ была дискретна в себе, то есть для любого m и любого $x \in [O_m]$ существовала окрестность U_x такая, что $[O_p] \cap U_x = \emptyset$ при $p \neq m$. Пусть F – множество всех предельных точек последовательности $\{[O_m]: m=1,2,\dots\}$, то есть $F = [\bigcup_{k=1}^{\infty} [O_k]] \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} [O_m]$. В силу дискретности системы $\{[O_m]: m=1,2,\dots\}$ каждое $[O_m]$ открыто-замкнуто в $[\bigcup_{i=1}^{\infty} [O_i]]$, и поэтому F замкнуто. При этом $x_0 \in F$, а следовательно, $F \neq \emptyset$. Далее, поскольку F замкнуто в X, то $\dim F = s \leq n = \dim X$. Для каждого целого $k > n$ рассмотрим подмножество Y в $X \times Q^{k-s}$, определяемое равенством $Y = (\bigcup_{i=1}^{\infty} [O_i] \times z_i) \cup ((X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i) \times z_0) \cup F \times Q^{k-s}$, где $\{z_0, z_1, \dots z_n, \dots\}$ – всюду плотное в Q^{k-s} множество. Множество Y замкнуто в $X \times Q^{k-s}$, поскольку

$$[\bigcup_{i=1}^{\infty} [O_i] \times z_i)] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} ([O_i] \times z_i) \subset F \times Q^{k-s}$$

По теореме суммы $\dim Y = \sup\{\dim [O_i], \dim (X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i), \dim F \times Q^{k-s}\}$. Отсюда, учитывая, что $\dim F \times Q^{k-s} = k$ получаем $\dim Y = k$.

Рассмотрим теперь проекцию $\pi: Y \to X$. Очевидно, что отображение $\pi: Y \to X$ является гомеоморфизмом на множестве $Y_1 = \pi^{-1}(X \setminus [\bigcup_{i=1}^{\infty} O_i]) \cup \pi^{-1} \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$. Непосредственно проверяется, что множество Y_1 плотно в Y. Отсюда и следует неприводимость отображения проектирования π.

Итак, мы доказали, что для любого целого числа $k \geq n$ существует бикомпакт Y, $\dim Y = k$ и непрерывное неприводимое отображение $\pi: Y \to X$. Но это и означает, что θ-размерностная шкала бикомпакта X содержит интервал $[\dim X, \infty]$. Теорема 6 доказана.

Поскольку каждая неизолированная точка диадического бикомпакта является $\mathcal{X}$-точкой [4], из теоремы 6 вытекает

Следствие 6. θ-размерностная шкала любого диадического бикомпакта X содержит интервал $[\dim X, \infty]$. В частности, если $\dim X \neq 1$, то X принадлежит $\mathcal{K}$.

Пономаревские бикомпакты размерности n характеризуются среди всех бикомпактов X размерности n тем, что они и только они являются образами нульмерных бикомпактов при непрерывных неприводимых отображениях кратности, не превосходящей $n+1$ [1].

Ясно, что если n -мерный пономаревский бикомпакт содержит $\varkappa$-точку, то и его нульмерный непрерывный неприводимый прообраз содержит $\varkappa$-точку.

Таким образом, имеет место

Следствие 9. Всякое n -мерное пономаревское пространство, содержащее $\varkappa$-точку, принадлежит $\mathcal{K}$. Имеет место и более сильное утверждение:

Следствие 10. Всякий бесконечный бикомпакт, являющийся счетно-кратным неприводимым образом нульмерного **бикомпакта и содержащий $\varkappa$-точку, принадлежит $\mathcal{K}$.**

Из следствия 4 и теоремы 6 вытекает

Следствие 11. Все бесконечные метризуемые пространства принадлежат $\mathcal{K}$.

Следуя В.И.Пономареву [5], вполне регулярное пространство назовем (неприводимо) диадическим, если у него существует бикомпактное расширение bX, являющееся (неприводимо) диадическим бикомпактом. Из этого определения и из следствия 8 вытекает

Следствие 12. Диадическое пространство X, имеющее диадическое бикомпактное расширение bX размерности $\dim bX \leq 1$, принадлежит $\mathcal{K}$.

Из следствия 6 вытекает

Следствие 13. Все неприводимо -диадические пространства принадлежат $\mathcal{K}$.

Теорема 7. Всякий бесконечный упорядоченный бикомпакт принадлежит $\mathcal{K}$.

Доказательство. Пусть X - бесконечный упорядоченный бикомпакт, тогда для счетного множества $A \subset X$ либо $\sup A$, либо $\inf A$ в $(X,<)$ будет $\varkappa$-точкой ([3], гл.3, задача 85); поскольку $\dim X \leq 1$, отсюда следует, что X принадлежит $\mathcal{K}$.

Из следствия 4 и теоремы 7 вытекает

Следствие 14. Всякое бесконечное (линейно) упорядоченное пространство принадлежит $\mathcal{K}$.

Укажем некоторые нерешенные вопросы:

1) Всякий ли бикомпакт положительной размерности принадлежит $\mathcal{K}$?

2) Замкнут ли класс $\mathcal{K}$ относительно перехода к совершенным бесконечным образам?

3) Всякий ли бесконечный диадический бикомпакт принадлежит классу $\mathcal{K}$?

Автор выражает благодарность за большую помощь и поддержку В.В.Федорчуку, под чьим руководством выполнена эта работа.

Литература

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М., 1973.

2. Александров П.С., Урысон П.С. О компактных топологических пространствах.–Тр.мат.ин-та им.В.А.Стеклова, 1950, т.31, с. 3-95.

3. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., 1974.

4. Ефимов Б.А. Диадические бикомпакты.–Тр.Московского матем. об-ва, 1965, т. 14 , с.211-234.

5. Пономарев В.И. О диадических пространствах. – Fund. Math., 1963,т.52, с.351-354.

6. Смирнов Ю.М. О пространствах близости.–Мат.сб., 1952, т.31(73), № 3, с.543-774.

7. Смирнов Ю.М. О размерности пространств близости.–Мат.сб., 1956, т.38(80), № 3, с.283-302.

8. Федорчук В.В. Равномерные пространства и совершенные неприводимые отображения топологических пространств.–ДАН СССР, 1970, т.192, с.1228-1230.

9. Федорчук В.В. Совершенные неприводимые отображения и обобщенные близости.–Мат.сб., 1968, т.76(118), № 4, с.513-536.

10. Федорчук В.В. Вполне замкнутые отображения и совместимость некоторых теорий общей топологии с аксиомами теории множеств.–Мат.сб., 1976, т. 99, № 1, с. 3-33.

11. Федорчук В.В. Об Н-замкнутых расширениях пространств θ-близости.–Мат.сб., 1972, т.89, (131), № 3, с.11.

12. V.V.Fedorčuk. Completeness and products of θ - uniform spaces. Topics in Topology, Keszthely (Hungary), 1972, 8,

Поступила 12 марта 1978 года

УДК 513.88

ОБ ИНДЕКСЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ИНДЕКСЕ Φ,Φ_+,Φ_- – ОТОБРАЖЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.С.Шевченков
ЛГУ им.П.Стучки

В настоящей работе на основе различных понятий размерности пространства и результатов из [1] определяются понятия индекса и алгебраического индекса обобщенных фредгольмовых операторов и изучаются соотношения между ними.

Всюду в дальнейшем X и Y обозначают банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел и $\varsigma : X \longrightarrow Y$ – линейное замкнутое отображение с плотной областью определения $\mathcal{D}_\varsigma$ и замкнутой областью значений $\mathcal{R}_\varsigma$. Через $\ker \varsigma$ обозначается ядро отображения ς, т.е. подпространство $\{x \in \mathcal{D}_\varsigma \mid \varsigma x = 0_Y\}$, где 0_Y – нулевой вектор в пространстве Y, и через $\operatorname{coker} \varsigma$ – коядро отображения ς, т.е. факторпространство $Y/\mathcal{R}_\varsigma$

Приведем следующие определения и факты из [1] :

1. Определения. ([1] , стр.1-3). Множество L из X называется слабо линейно независимым, если L не содержится в линейной оболочке какого-либо собственного подмножества из L. Максимальное слабо линейно независимое подмножество в X называется **алгебраическим** базисом (базисом Гамеля) для X. Мощность алгебраического базиса называется алгебраической размерностью (размерностью Гамеля) X и обозначается $\dim X$.

2. Теорема (см. [2] , гл.II, § 3.8, теорема 2). Всякое векторное пространство X обладает алгебраическим базисом.

3. Определения ([1] , опр.1-3). Множество M из X называется сильно линейно независимым, если оно не содержится в замыкании линейной оболочки какого-либо своего собственного подмножества. Максимальное сильно линейно независимое подмножество в X называется базисом (расширенным базисом Шаудера) для X . Мощность базиса называется размерностью (размерность Шаудера) X и обозначается $\dim X$.

4. Теорема ([1] , предл. 3). Если α есть некоторое

кардинальное число, то существует банахово пространство X с размерностью $\dim X = \alpha$.

5. <u>Определение.</u> <u>Кардинальным числом типа I</u> называется мощность множества, представимого в виде объединения бесконечной последовательности подмножеств, мощности которых образуют строго возрастающую бесконечную последовательность.

6. <u>Пример.</u> Мощность α бесконечного счетного множества является кардинальным числом типа I, а мощность n конечного множества или мощность континуума c не являются кардинальными числами типа I. Другие примеры несчетных множеств типа I приведены в следствии к теореме 4 ([4], гл.У, §3).

7. <u>Теорема.</u> ([1], теор.1). Пусть H – алгебраический базис и S – базис для пространства X. Тогда

(1) $$|H| = 2^{|S|},$$

если $|S|$ – кардинальное число типа I,

(2) $$|H| = |S|,$$

если $|S|$ не является кардинальным числом типа I.

<u>Замечание</u>. Здесь $|A|$ обозначает мощность множества A, а $2^{|A|}$ – мощность множества всех подмножеств множества A.

8. <u>Определение.</u> ([3], §2.2.) Отображение $f: X \to Y$ называется <u>Φ-отображением</u>, если $\dim \ker f < +\infty$ и $\dim \operatorname{coker} f < +\infty$, <u>$\Phi_+$-отображением</u>, если $\dim \ker f < +\infty$ и $\dim \operatorname{coker} f = +\infty$, и <u>$\Phi_-$-отображением</u>, если $\dim \ker f = +\infty$ и $\dim \operatorname{coker} f < +\infty$.

9. <u>Определение.</u> <u>Φ_+'-отображением</u> назовем Φ_+-отображение f, для которого $\dim \operatorname{coker} f$ является кардинальным числом типа I. Φ_-'-отображением назовем Φ_--отображение f, для которого $\dim \ker f$ является кардинальным числом типа I.

10. Пример. а) Пусть X и Y – банаховы пространства с $\dim X = n$ и $\dim Y = c$, где n – мощность конечного множества и c – мощность континуума. Такие пространства существуют в силу теоремы 4. Тогда отображение $f: X \to Y$, определяемое для каждого $x \in X$ равенством

$$f(x) = 0_Y,$$

является Φ_+' – отображением.

в) Если $\dim X = n$ и $\dim Y = \alpha$ (теорема 4), то в этом случае отображение f является Φ_+ -отображением, не являясь Φ_+' -отображением.

c) Если $\dim X = \alpha$ и $\dim Y = n$, то отображение f является Φ_-' -отображением.

d) Если $\dim X = c$ и $\dim Y = n$, то отображение f является Φ_- -отображением, не являясь Φ_-' -отображением.

Далее для отображений классов $\Phi, \Phi_+, \Phi_-, \Phi_+', \Phi_-'$ и будем изучать соотношения между индексом и алгебраическим индексом.

11. <u>Определение.</u> <u>Алгебраическим индексом</u> Φ, Φ_+, Φ_- - отображений называется число $ind\, f$, вычисляемое по формуле:

$$ind\, f = \dim\ker f - \dim\operatorname{coker} f.$$

<u>Индексом</u> Φ, Φ_+', Φ_-' -отображений называется число $\widetilde{ind}\, f$; вычисляемое по формуле

$$\widetilde{ind}\, f = \widetilde{\dim}\ker f - \widetilde{\dim}\operatorname{coker} f$$

<u>Замечание.</u> Если f является Φ_+ -отображением, то

$$ind\, f = -\dim\operatorname{coker} f, \quad \widetilde{ind}\, f = \widetilde{\dim}\ker f.$$

В случае, когда f является Φ_- -отображением, справедливы равенства

$$ind\, f = \dim\ker f, \quad \widetilde{ind}\, f = \widetilde{\dim}\ker f$$

Используя приведенные определения и теорему 7, получаем следующие предложения:

12. <u>Теорема.</u> Если f является Φ_+' -отображением, то

$$ind\, f = -2^{-\widetilde{ind}\, f}.$$

Действительно,

$$ind\, f = -\dim\operatorname{coker} f = -2^{\widetilde{\dim}\operatorname{coker} f} = -2^{-\widetilde{ind}\, f}.$$

13. <u>Теорема.</u> Если f является Φ_-' -отображением, то

$$ind\, f = 2^{\widetilde{ind}\, f}$$

Действительно,

$$ind\, f = \dim\ker f = 2^{\widetilde{\dim}\ker f} = 2^{\widetilde{ind}\, f}.$$

14. <u>Теорема.</u> Если f является Φ -отображением, то

$$ind\, f = \widetilde{ind}\, f.$$

<u>Доказательство:</u>

$$ind\, f = \dim\ker f - \dim\operatorname{coker} f = \widetilde{\dim}\ker f - \widetilde{\dim}\operatorname{coker} f = \widetilde{ind}\, f$$

15. Теорема. Если f является Φ_+-отображением, не являясь Φ_+'-отображением, то

$$\operatorname{ind} f = \widetilde{\operatorname{ind}} f.$$

Доказательство:

$$\operatorname{ind} f = -\dim \operatorname{coker} f = -\widetilde{\dim} \operatorname{coker} f = -\widetilde{\operatorname{ind}} f$$

16. Теорема. Если f является Φ_--отображением, не являясь Φ_-'-отображением, то

$$\operatorname{ind} f = \widetilde{\operatorname{ind}} f$$

Доказательство:

$$\operatorname{ind} f = \dim \ker f = \widetilde{\dim} \ker f = \widetilde{\operatorname{ind}} f.$$

Литература

1. Evans I.W., Tapia R.A. Hamel versus Schauder dimension.— The American Mathematical Monthly, 1970, vol.77, N.4, p.385-388
2. Райков Д.А. Векторные пространства. М., 1962.
3. Крачковский С.Н., Диканский А.С. Фредгольмовы операторы и их обобщения.—Итоги науки. Математический анализ. М., 1969, 39-71.
4. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М., 1970.

Поступила 10 декабря 1977 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.
УДК 518:517.948

О СОХРАНЕНИИ Т-РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ И В-ИЗМЕРИМОСТИ ОТОБРАЖЕНИЙ ПЕРВОГО КЛАССА ПРИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.С.Лемченков
ЛГУ им. П.Стучки

Определение I. (см. [1,2]). Пусть $f: X \to Y$ - отображение нормированного векторного пространства X в нормированное векторное пространство Y над одним и тем же полем K действительных или комплексных чисел. Отображение $f: X \to Y$ называется регуляризуемым по Тихонову или кратко T-регуляризуемым, если существует однопараметрическое семейство отображений $R_\delta : X \to Y$ $0 \le \delta < \delta_0$ такое, что для любого $x \in X$

$$\lim_{\delta \to 0} \Delta(R_\delta; \delta; x) = 0,$$

где

$$\Delta(R_\delta; \delta; x) = \sup_{\{x' \in X,\ \|x - x'\| \le \delta\}} \|R_\delta(x') - f(x)\|,$$

при этом R_δ называется T-регуляризатором для отображения f.

Определение 2. (см. [2]). Отображение $f: X \to Y$ называется B-измеримым отображением первого класса, если прообраз $f^{-1}(G)$ каждого открытого множества G пространства Y есть множество типа F_σ.

Теорема I. Пусть $f: X \to Y$ - T- регуляризуемое отображение. Тогда отображение $g: X \to Y$ будет T-регуляризуемым тогда и только тогда, когда отображение $f+g: X \to Y$ T-регуляризуемое.

Доказательство. Необходимость. Так как $f: X \to Y$, $g: X \to Y$ - T-регуляризуемые отображения, то существуют T-регуляризаторы этих отображений $R_\delta^f: X \to Y$, $0 \le \delta < \delta_0$ и $R_\delta^g: X \to Y$, $0 \le \delta < \delta_1$ такие, что для любого $x \in X$

$$\lim_{\delta \to 0} \Delta(R_\delta^f; \delta; x) = 0, \quad \lim \Delta(R_\delta^g; \delta; x) = 0.$$

Далее определим R_δ^{f+g} для $x' \in X$, где $0 \le \delta < \delta_2 = \min\{\delta_0, \delta_1\}$ формулой

$$R_\delta^{f+g}(x') = R_\delta^f(x') + R_\delta^g(x')$$

Тогда справедливы следующие неравенства

$$0 \leq \Delta\left(R_\delta^{f+g};\delta;x\right) = \sup \| R_\delta^{f+g}(x') - (f+g)(x)\| \leq$$

$$\leq \sup_{\{x'\in X, \|x-x'\|\leq\delta\}} \| R_\delta^f(x') - f(x)\| + \sup_{\{x'\in X, \|x-x'\|\leq\delta\}} \| R_\delta^g(x') - g(x)\| =$$

$$= \Delta\left(R_\delta^f;\delta;x\right) + \Delta\left(R_\delta^g;\delta;x'\right).$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$ получим, что

$$\lim_{\delta\to 0} \Delta\left(R_\delta^{f+g};\delta;x\right) = 0,$$

т.е. отображение $f+g : X \to Y$ T -регуляризуемое.

Достаточность. Так как

$$g = (f+g) + (-f),$$

то достаточность будет доказана, если будет установлена T -регуляризуемость отображения $-f : X \to Y$. Так как $f : X \to Y$ - T -регуляризуемое отображение, то существует T -регуляризатор отображения f, т.е. существует однопараметрическое семейство отображений $R_\delta^f : X \to Y$, $0 \leq \delta < \delta_0$ такое, что для любого $x \in X$

$$\lim_{\delta\to 0} \Delta\left(R_\delta^f,\delta;x\right) = 0.$$

Далее определим R_δ^{-f} для $x' \in X$ формулой

$$R_\delta^{-f}(x') = -R_\delta^f(x').$$

Тогда

$$\lim_{\delta\to 0} \Delta\left(R_\delta^{-f};\delta;x\right) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\{x'\in X, \|x-x'\|\leq\delta\}} \| R_\delta^{-f}(x') - (-f)(x)\| =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \sup_{\{x'\in X, \|x-x'\|\leq\delta\}} \| - R_\delta^f(x') + f(x)\| = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\{x'\in X, \|x-x'\|\leq\delta\}} \| R_\delta^f(x') - f(x)\| =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \Delta\left(R_\delta^f;\delta;x\right) = 0,$$ т.е.

отображение $-f : X \to Y$ - T -регуляризуемое.

Теорема 2. Пусть скаляр $\lambda \in K \setminus \{0\}$. Отображение $f : X \to Y$ будет T -регуляризуемым тогда и только тогда, когда отображение $\lambda f : X \to Y$ T -регуляризуемое.

Доказательство. Необходимость. Пусть $R_\delta^{\lambda f}$ для каждого $x' \in X$ определяется формулой

$$R_\delta^{\lambda f}(x') = \lambda R_\delta^f(x').$$ Тогда

$$\lim_{\delta\to 0} \Delta\left(R_\delta^{\lambda f};\delta;x\right) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{\{x'\in X, \|x-x'\|\leq\delta\}} \| R_\delta^{\lambda f}(x') - \lambda f(x)\| =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \sup_{\{x'\in X, \|x-x'\|\leq\delta\}} \| \lambda R_\delta^f(x') - \lambda f(x)\| = |\lambda| \lim_{\delta\to 0} \Delta\left(R_\delta^f;\delta;x\right) = 0.$$

Достаточность. Так как $\lambda \in K \setminus \{0\}$, то

$$f = \lambda^{-1}(\lambda f) \quad \text{и} \quad \lambda^{-1} \in K \setminus \{0\}.$$

Далее доказательство проводится так же, как и в случае необходимости.

Из теорем I и 2 вытекает теорема 3.

Теорема 3. Множество T -регуляризуемых отображений нормированного векторного пространства X в нормированное векторное пространство Y есть векторное подпространство в пространстве всех отображений Y^X.

Следствие I. Пусть $h: X \to Y$ – линейное ограниченное отображение. Отображение $f: X \to Y$ будет T -регуляризуемым тогда и только тогда, когда отображение $f + h: X \to Y$ T -регуляризуемое.

Доказательство. Так как $h: X \to Y$ – линейное ограниченное отображение, то оно непрерывно и, следовательно, T -регуляризуемо.

Определение 3. (см. [3,4]). Будем говорить, что последовательность линейных отображений $f_n: X \to Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f: X \to Y$ и писать, что $f_n \xrightarrow{c.k.a.} f \in L(X,Y)$, если:

а) для любого вектора $x \in X$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ в пространстве Y ;

б) для любой ограниченной последовательности векторов (x_n) из X последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y .

Следствие 2. Пусть $f_n: X \to Y$ - последовательность линейных отображений, и $f: X \to Y$ – линейное отображение такие, что для любой ограниченной последовательности векторов (x_n) из X последовательность векторов $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ограничена в пространстве Y . Отображение $f: X \to Y$ будет T -регуляризуемым тогда и только тогда, когда существует натуральное число $n_0 \in N_\xi$ такое, что для всех $n \geq n_0$ отображения $f_n: X \to Y$ T – регуляризуемы.

Доказательство. Необходимость. В силу теоремы 3 из работы ([5]) существуют такие числа $n_0 \in N$ и $c > 0$, что для всех $n \geq n_0$ $f_n - f: X \to Y$ – линейные непрерывные отображения, причем $\| f_n - f \| \leq c$. Тогда применимо предыдущее следствие I.

Следствие 3. Пусть последовательность линейных отображений $f_n : X \to Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f : X \to Y$. Для того, чтобы отображение $f : X \to Y$ было T-регуляризуемым, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое натуральное число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ отображения $f_n : X \to Y$ были T-регуляризуемые.

Доказательство. Так как $f_n \xrightarrow{c.k.a.} f \in L(X,Y)$, то для любой ограниченной последовательности векторов (x_n) из X последовательность векторов $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ограничена в Y и применимо следствие 2.

Известна следующая теорема (см. [2]).

Теорема 4. Пусть Y – сепарабельное нормированное векторное пространство. Отображение $f : X \to Y$ будет T-регуляризуемым тогда и только тогда, когда отображение $f : X \to fX$ – B-измеримое отображение первого класса.

Используя эту теорему и предыдущие следствия, можно получить еще ряд следствий из теорем 3 и 4.

Следствие 4. Пусть Y – сепарабельное нормированное векторное пространство, и $k : X \to Y$ – линейное ограниченное отображение. Отображение $f : X \to fX$ будет B-измеримым отображением первого класса тогда и только тогда, когда отображение $f + k : X \to (f + k)X$ – B-измеримое отображение первого класса.

Следствие 5. Пусть Y – сепарабельное нормированное векторное пространство, $f_n : X \to Y$ – последовательность линейных отображений, и $f : X \to Y$ – линейное отображение, такие, что для любой ограниченной последовательности векторов (x_n) из X последовательность векторов $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ограничена в пространстве Y. Отображение $f : X \to fX$ будет B-измеримым отображением первого класса тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ отображения $f_n : X \to f_n X$ B-измеримые отображения первого класса.

Следствие 6. Пусть Y – сепарабельное нормированное векторное пространство, и последовательность линейных отображений $f_n : X \to Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f : X \to Y$. Отображение $f : X \to fX$ будет B-измеримым отображением первого класса тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число $n_0 \in N$ что для всех $n \geq n_0$ отображения $f_n : X \to f_n X$ B- измеримые отображения первого класса.

Литература

1. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. - ДАН СССР, т.153, № 1, 1963, с.49-52.
2. Винокуров В.А. О понятии регуляризуемости разрывных отображений. - Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1971, т.11, № 5, с.1097-1112.
3. Вайникко Г.М. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, 1970.
4. Карклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации. - Латвийский математический ежегодник, т.17, 1976, с.3-29.
5. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. - В кн.: Топологические пространства и отображения в них. Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки, вып.1, т.236, 1975, с.59-75.

Поступила 16 октября 1978 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.

УДК 513.88

УСТОЙЧИВОСТЬ Φ_+-ОПЕРАТОРОВ ПРИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕДКОМПАКТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

А.Х.Лиепиньш
ЛГУ им. П.Стучки

В предлагаемой работе доказана устойчивость Φ_+-операторов в локально выпуклых топологических векторных пространствах, в частности в пространствах Фреше, при относительно предкомпактных возмущениях, понятие которых было введено в [1]. Там же возмущения, предкомпактные относительно гомоморфизмов банаховых пространств, были охарактеризованы как возмущения, малые по ρ-норме, и таким образом работа содержит обобщение результатов Л.С.Гольденштейна и А.С.Маркуса об устойчивости Φ_+-операторов в банаховых пространствах при возмущениях, малых по q-норме ([2]).

В работе используем следующие обозначения: $\mathcal{N}$ -множество всех натуральных чисел; $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ - топологические векторные пространства (ТВП) над полем вещественных или комплексных чисел $\mathcal{K}$, $\mathcal{U}$ - базис окрестностей начала в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{V}$ - в $\mathcal{Y}$. В локально выпуклом пространстве (ЛВП) базис окрестностей начала считается выбранным таким образом, что любое множество базиса замкнуто, абсолютно выпукло и поглощающее и произведение на произвольный ненулевой скаляр любого множества базиса принадлежит этому базису (см. [3]).

$\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ - векторное пространство всех линейных непрерывных отображений пространства $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$. Множество значений отображения f обозначается через $\mathcal{Im} f$ и ядро через $\mathcal{Ker} f$.

1. Определение. Отображение $f\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ называется гомоморфизмом, если оно, как отображение пространства $\mathcal{X}$ на подпространство $\mathcal{Im} f$, открыто.

2. Определение. Гомоморфизм $f\in\mathcal{L}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, ядро которого конечномерно и подпространство $\mathcal{Im} f$ замкнуто, называется Φ_+-оператором.

3. Обозначим множество всех конечных подмножеств пространства $\mathcal{Y}$ через $\mathcal{F}(\mathcal{Y})$.

Определение ([1], 1.1.1). Подмножество $A \subset \mathcal{Y}$ называется предкомпактным относительно (ПО) окрестности $V \in \mathcal{V}$, если существует такое множество $F \in \mathcal{F}(\mathcal{Y})$, что $A \subset F+V$.

4. Определение. ([1], 1.2.1). Отображение $g \in \mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$ называется возмущением, предкомпактным относительно (ВПО) окрестностей $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ и $V \in \mathcal{V}$, если множество $g(\mathcal{U})$ ПО окрестности V.

5. Обозначим множество всех подмножеств пространства $\mathcal{Y}$ через $2^{\mathcal{Y}}$ и рассмотрим при фиксированном гомоморфизме $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$ и окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ отображение $v(f, \mathcal{U}) : \mathcal{K} \mapsto 2^{(2^{\mathcal{Y}})}$, определяемое равенством $v(f,\mathcal{U})(\mu) \stackrel{def}{=} \{V \in \mathcal{V} / V \cap \operatorname{Im} f \subset f(\mu\mathcal{U})\}$.

Рассмотрим множество $I = \{\mu \in \mathcal{K} / 0 < |\mu| < 1\}$.

Через $V_0(f, \mathcal{U})$ обозначим множество $v(f, \mathcal{U})(I)$, которое непусто.

Определение. ([1], 1.2.2). Отображение $g \in \mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$ называется ВПО гомоморфизма $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$, если для любой окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ существует такая окрестность $V \in V_0(f, \mathcal{U})$, что g - ВПО окрестностей $\mathcal{U}$ и V, т.е., если $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}$ $\exists V \in V_0(f,\mathcal{U}) \exists F \in \mathcal{F}(\mathcal{Y}) : g(\mathcal{U}) \subset F+V$ или $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V} \exists \mu \in I \exists F \in \mathcal{F}(\mathcal{Y})$ $V \cap \operatorname{Im} f \subset f(\mu\mathcal{U}) \,\&\, g(\mathcal{U}) \subset F+V$.

6. Лемма. Если X и $\mathcal{Y}$ — ТВП и для отображения $f \in \mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$ и окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ существуют такие подпространства X_1 и X_2 пространства X и окрестности $V_1 \in \mathcal{V}$ и $V_2 \in \mathcal{V}$, что пространство $\mathcal{Y}$ является прямой топологической суммой своих подпространств $f(X_1)$ и $f(X_2)$ и

$$f(\mathcal{U} \cap X_1) \supset f(X_1) \cap V_1 \,\&$$
$$\& \, f(\mathcal{U} \cap X_2) \supset f(X_2) \cap V_2,$$

то для любой такой окрестности $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}$, что $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U} + \mathcal{U}$, существует такая окрестность $V \in \mathcal{V}$, что $\overline{f(\mathcal{U}_0)} \supset V$.

Доказательство. Проекцию пространства $\mathcal{Y}$ на подпространство $f(X_1)$ обозначим через pr_1 и проекцию на $f(X_2)$ через pr_2. Выберем окрестность $V \in \mathcal{V}$ так, что

$$V \subset pr_1^{-1}(f(X_1) \cap V_1 \cap V_2) \,\&\, V \subset pr_2^{-1}(f(X_2) \cap V_1 \cap V_2).$$

Тогда действительно: $V\subset$

$$\subset (f(X_1)\cap V_1\cap V_2) + (f(X_2)\cap V_1\cap V_2)\subset$$
$$\subset (f(X_1)\cap V_1) + (f(X_2)\cap V_2)\subset$$
$$\subset \overline{f(U\cap X_1)} + \overline{f(U\cap X_2)}\subset$$
$$\subset \overline{f(U)} + \overline{f(U)}\subset$$
$$\subset \overline{f(U) + f(U)}\subset$$
$$\subset \overline{f(U+U)}\subset$$
$$\subset \overline{f(U_0)}.$$

7. **Лемма.** Если X и Y — ЛВП и для отображения $f\in\mathcal{L}(X,Y)$ и окрестности $U\in\mathfrak{U}$ существуют такое подпространство X_0 пространства X и окрестность $V\in\mathfrak{V}$, что $f(X_0)=Y$ и $\overline{f(U\cap X_0)}\supset \overline{f(X_0)\cap V}$, то $\overline{f(U\cap X_0)}\supset V$.

Доказательство. Обозначим через $\overset{\circ}{V}$ внутренность окрестности V. Так как множество $\overset{\circ}{V}$ открыто, то справедливо включение $\overline{f(X_0)\cap \overset{\circ}{V}}\supset \overline{f(X_0)}\cap \overset{\circ}{V}$. Следовательно, $\overline{f(U\cap X_0)}\supset \overline{f(X_0)\cap V}\supset \overline{f(X_0)\cap\overset{\circ}{V}}\supset \overline{f(X_0)}\cap\overset{\circ}{V} = Y\cap\overset{\circ}{V}=\overset{\circ}{V}$ и тем самым $\overline{f(U\cap X_0)}\supset\overset{\circ}{V}$, что равносильно $\overline{f(U\cap X_0)}\supset V$.

8. Если подпространство Y_0 пространства Y топологически дополнимо в Y, то через $\tilde{Y}_0$ обозначим некоторое фиксированное топологические дополнение к нему.

Следствие. Если X и Y — ЛВП, отображение $f\in\mathcal{L}(X,Y)$ сюръективно и для окрестности $U\in\mathfrak{U}$ существуют такое подпространство X_0 пространства X и окрестности $V_1\in\mathfrak{V}$ и $V_2\in\mathfrak{V}$, что подпространство $\overline{f(X_0)}$ топологически дополнимо в Y и $\overline{f(U\cap X_0)}\supset \overline{f(X_0)\cap V_1}$ &

$$\& \ \overline{f(U\cap f^{-1}(\widetilde{\overline{f(X_0)}}))}\supset \widetilde{\overline{f(X_0)}}\cap V_2,$$

то для любой такой окрестности $U_0\in\mathfrak{U}$, что $U_0\supset U+U$, существует такая окрестность $V\in\mathfrak{V}$, что $\overline{f(U_0)}\supset V$.

Доказательство. В силу леммы 7 выполнено включение

$\overline{f(U\cap X_0)}\supset \overline{f(X_0)}\cap V_1$, и, следовательно, $\overline{f(U\cap f^{-1}(\overline{f(X_0)}))}\supset\overline{f(X_0)}\cap V_1$. Так как f сюръективно, то $f(f^{-1}(\overline{f(X_0)})) =$

$= \overline{f(X_0)}$ и $f(f^{-1}(\overline{f(X_0)})) =$

$= \overline{f(X_0)}$. Тем самым $\overline{f(\mathcal{U}_0)} \supset V$

по лемме 6 для некоторой окрестности $V \in \mathcal{V}$, если $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U} + \mathcal{U}$.

9. Следствие. Если X и Y – ЛВП, отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ сюрьективно и для окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ существуют такое подпространство X_0 пространства X с $\operatorname{codim} f(X_0) < \infty$ и окрестность $V \in \mathcal{V}$, что $f(\mathcal{U} \cap X_0) \supset f(X_0) \cap V$, то для любой такой окрестности $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}$, что $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U} + \mathcal{U}$, существует такая окрестность $V_0 \in \mathcal{V}$, что $\overline{f(\mathcal{U}_0)} \supset V_0$.

Доказательство. Так как $\operatorname{codim} f(X_0) < \infty$, то $\operatorname{codim} \overline{f(X_0)} < \infty$ подпространство $\overline{f(X_0)}$ топологически дополнимо в Y и $\dim \overline{f(X_0)} < \infty$. В силу последнего существует такая окрестность $V_1 \in \mathcal{V}$, что $f(\mathcal{U} \cap f^{-1}(\overline{f(X_0)})) \supset$

$\supset \overline{f(X_0)} \cap V_1$.

Таким образом $\overline{f(\mathcal{U}_0)} \supset V_0$ в силу следствия 8 для некоторой окрестности $V_0 \in \mathcal{V}$, если $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U} + \mathcal{U}$.

10. Следствие. Если X и Y – ЛВП и для отображения $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ и окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ существуют такое подпространство X_0 пространства X с $\operatorname{codim} X_0 < \infty$ и окрестность $V \in \mathcal{V}$, что $f(\mathcal{U} \cap X_0) \supset f(X_0) \cap V$, то для любой такой окрестности $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}$, что $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U} + \mathcal{U}$, существует такая окрестность $V_0 \in \mathcal{V}$, что $\overline{f(\mathcal{U}_0)} \supset \operatorname{Im} f \cap V_0$.

Доказательство. Для подпространства $f(X_0)$ пространства $\operatorname{Im} f$ справедливо, что $\operatorname{codim} f(X_0) < \infty$, поэтому, если для окрестности $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{U}$ выполнено включение $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{U} + \mathcal{U}$, то в силу следствия 9 $\overline{f(\mathcal{U}_0)} \supset \operatorname{Im} f \cap V_0$ для некоторой окрестности $V_0 \in \mathcal{V}$.

11. Следствие. Если X и Y – ЛВП, X совершенно полно и отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ не является гомоморфизмом, то существует такая окрестность $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$, что $f(\mathcal{U} \cap X_0) \not\supset$ $\not\supset f(X_0) \cap V$ для любой окрестности $V \in \mathcal{V}$ и любого подпространства $X_0 \subset X$ с $\operatorname{codim} X_0 < \infty$.

Доказательство. Отображение f, как отображение пространства X на подпространство $\operatorname{Im} f$, не является по условию открытым и тем самым не является и почти открытым, так как X совершенно полно. Следовательно, существует такая окрестность $U_0 \in \mathcal{U}$, что $f(U_0) \not\supset \operatorname{Im} f \cap V$ для любой окрестности $V \in \mathcal{V}$. Тогда в силу следствия 10 в качестве окрестности, существование которой доказывается, может быть выбрана любая окрестность $U \in \mathcal{U}$, для которой $U + U \subset U_0$.

12. Техника доказательства следующей леммы не отличается от техники доказательства леммы 3.3.5 в [1], в основе которого - представление сужения на некотором подпространстве отображения, не являющегося гомоморфизмом, в некоторой специальной форме методом, подсказанным идеями статей [4] и [5].

Лемма. Если X совершенно полное и Y метризуемое ЛВП и отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ не является гомоморфизмом, то существует бесконечномерное векторное подпространство пространства X, сужение на котором отображения f инъективно и предкомпактно.

Доказательство. Согласно следствию 11 существует такая окрестность $U \in \mathcal{U}$, что $f(U \cap X_0) \not\supset f(X_0) \cap V$ для любой окрестности $V \in \mathcal{V}$ и любого подпространства $X_0 \subset X$, $\operatorname{codim} X_0 < \infty$. Обозначим через ρ калибровочную функцию окрестности U. Выберем возрастающую последовательность преднорм $(p_n)_{n \in N}$, порождающую топологию пространства Y. Предположим, что существуют такие биортогональные последовательности $(x_n)_{n \in N} \subset X$ и $(x'_n)_{n \in N} \subset X'$, где X' - пространство, топологически сопряженное с X, что $\forall n \in N$:
$\rho(x_n) > 1$ & $p_n(f(x_n) - y_n) \leq 2^{1-2n}$ &
& $\forall x \in X: |x'_n(x)| \leq 2^{n-1} \rho(x)$. Через $\hat{X}$ обозначим векторное подпространство пространства X, натянутое на векторы последовательности $(x_n)_{n \in N}$, сужение $\hat{f}$ отображения f на котором не является гомоморфизмом, в силу чего подпространство $\hat{X}$ бесконечномерно вместе с подпространством $\operatorname{Im} \hat{f}$. Тем самым векторы последовательности $(y_n)_{n \in N}$ можно считать линейно независимыми и, следовательно, $\hat{f}$ — инъекцией. К тому же $\forall x \in \hat{X}$:

$\hat{f}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n'(x)y_n$ и, следовательно, $\hat{f}$ предкомпактно ([1], 3.3.4). Таким образом, достаточно доказать, что выполнено начальное предположение, для чего последовательности $(x_n)_{n\in N}$ и $(x_n')_{n\in N}$, существование которых предполагалось, построим индуктивно. В силу выбора окрестности $\mathcal{U}$ существует такой вектор $x_1\in X$, что $\rho(x_1)>1$ & $\rho_1(y_1)\leq\frac{1}{2}$. Существует такая линейная форма $x'\in X'$, что $x'(x_1)=\rho(x_1)$ & & $\forall x\in X: |x'(x)|\leq\rho(x)$ ([3], 2.2.2, с.49). Определим линейную форму $x_1'\in X'$ тогда равенством $x_1'\overset{def}{=}\frac{x'}{\rho(x_1)}$. Предположим, что первые $n-1$ векторы и первые $n-1$ линейные формы последовательностей, существование которых доказывается, построены. Рассмотрим векторное подпространство X_n пространства X, определяемое равенством $X_n\overset{def}{=}\bigcap_{i=1}^{n-1}\operatorname{Ker} x_i'$. Так как $\operatorname{codim} X_n<\infty$, то, согласно выбору окрестности $\mathcal{U}$, существует такой вектор $x_n\in X_n$, что $\rho(x_n)>1$ & $\rho_n(y_n)\leq 2^{1-2n}$. Существует такая линейная форма $\hat{x}'\in X'$, что $\hat{x}'(x_n)=\rho(x_n)$ & & $\forall x\in X: |\hat{x}'(x)|\leq\rho(x)$ ([3], 2.2.2, с.49). Определим линейную форму $x_n'\in X'$ тогда равенством
$$x_n'\overset{def}{=}\frac{\hat{x}'-\sum_{i=1}^{n-1}\hat{x}'(x_i)x_i'}{\rho(x_n)}.$$

13. Определение. ([1], 1.1.2). Окрестность $\mathcal{U}\in\mathfrak{U}$ в ЛВП X называется ρ-окрестностью начала, если она не является окрестностью начала в слабой топологии пространства X.

14. Определение. ([1], 3.1.1). Отображение $f\in\mathcal{L}(X,Y)$ называется ρ-предкомпактным, если существует такая ρ-окрестность $\mathcal{U}\in\mathfrak{U}$, что множество $f(\mathcal{U})$ предкомпактно.

15. Следствие. Если X — совершенно полное и Y — метризуемое ЛВП и отображение $f\in\mathcal{L}(X,Y)$ не является гомоморфизмом, то оно ρ-предкомпактно сужаемо.

Доказательство. Согласно лемме 12 существует бесконечномерное векторное подпространство пространства X, сужение на котором отображения f инъективно и предкомпактно, следовательно, ρ-предкомпактно ([1], 3.3.7).

16. Следующие две теоремы являются следствиями общих теорем об устойчивости свойств гомоморфизмов топологических векторных пространств (см. [1]).

Отметим, что общие теоремы содержат условие существования отображения $\mathcal{P}(Y)\colon 2^Y \to 2^Y$ с определенными свойствами, которое выполнено в случае метризуемого ТВП Y ([1], 2.4).

Теорема. Если X – совершенно полное и Y – метризуемое ЛВП и отображение $g \in \mathcal{L}(X,Y)$ – ВПО гомоморфизма $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ с $\dim \operatorname{Ker} f < \infty$, то отображение $f+g$ – гомоморфизм.

Доказательство. Согласно следствию 15 любое отображение $h \in \mathcal{L}(X,Y)$, не являющееся гомоморфизмом, P-предкомпактно сужаемо (в терминологии, применяемой в [1], – пара пространств X и Y является P-парой), поэтому $f+g$ гомоморфизм ([1], 3.2.11).

17. Определение. ([1], 1.?.4). ЛВП, в любом бесконечномерном замкнутом подпространстве которого индуцированная топология не совпадает со слабой топологией, называется P-пространством.

18. Теорема. Если X – совершенно полное P-пространство, Y – метризуемое ЛВП и отображение $g \in \mathcal{L}(X,Y)$ – ВПО Φ_+-оператора $f \in \mathcal{L}(X,Y)$, то отображение $f+g$ Φ_+-оператор.

Доказательство. Любое отображение $h \in \mathcal{L}(X,Y)$, для которого подпространство $\operatorname{Im} f$ не замкнуто, не является гомоморфизмом ([1], 3.3.1) и согласно следствию 15 P-предкомпактно сужаемо (тем самым в терминологии, принятой в [1], – пара пространств X и Y является P-парой), поэтому $f+g$ Φ_+-оператор ([1], 3.2.13).

19. Следствие. Если X и Y – пространства Фреше и отображение $g \in \mathcal{L}(X,Y)$ – ВПО Φ_+-оператора $f \in \mathcal{L}(X,Y)$, то отображение $f+g$ Φ_+-оператор.

Доказательство. Пространства Фреше совершенно полны и являются P-пространствами.

20. Следствие. Если X – пространство Фреше и для отображений $f \in \mathcal{L}(X,X)$ с $\dim \operatorname{Ker} f < \infty$ и $g \in \mathcal{L}(X,X)$ выполнено условие $\forall U \in \mathcal{U}\colon U \subset f(U)\ \&\ \exists \lambda \in I\colon g(U) \subset \lambda U$,

то отображение $f+g$ Φ_+-оператор.

Действительно, в силу условия, которому удовлетворяют g и f, отображение g – ВПО Φ_+-оператора f.

21. Пример. Рассмотрим следующий частный случай. В качестве пространства X выберем векторное пространство $C(R,R)$ всех непрерывных вещественных функций на вещественной прямой R, наделенное топологией компактной сходимости на R, которую зададим посредством семейства преднорм $p_n(x)=\sup_{t\in[-n,n]}|x(t)|$, $n\in N$, на $C(R,R)$, чем выберем определенный базис окрестностей начала $\mathcal{U}_c$ топологии компактной сходимости (см. [3]). Пространство $C(R,R)$ в этой топологии – пространство Фреше. Рассмотрим отображения

$$f_\alpha,\ \tilde{f}_\alpha,\ g_\theta \in \mathcal{L}(C(R,R),\ C(R,R)),$$

для любой функции $x\in C(R,R)$ определяемые равенствами

$$(f_\alpha x)(t) \stackrel{def}{=} x(\alpha t),$$

$$(\tilde{f}_\alpha x)(t) \stackrel{def}{=} x\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad \text{и}$$

$$(g_\theta x)(t) \stackrel{def}{=} x(\theta t)$$, где $t\in R$ и

постоянные $\alpha\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ и $\theta\in[-1,1]$.

Так как $\forall n\in N\ \forall q\in[-1,1]\ \forall x\in C(R,R)$: $\sup_{t\in[-n,n]}|x(t)| \geq \sup_{t\in[-n,n]}|x(qt)|$, то $\forall U\in\mathcal{U}_c$: $g_\theta(U)\subset U$ & $\tilde{f}_\alpha(U)\subset U$, в силу чего $\forall U\in\mathcal{U}_c: U\subset f_\alpha(U)$ & $g_\theta(U)\subset U$, так как $f_\alpha\circ\tilde{f}_\alpha = id$, где $id: C(R,R)\mapsto C(R,R)$ – тождественное отображение.

Рассмотрим отображение

$$h\in\mathcal{L}(C(R,R),\ C(R,R)),$$

определяемое равенством $h \stackrel{def}{=} f_\alpha + \tilde{\theta} g_\theta$, где постоянная $\tilde{\theta}\in(-1,1)$. Так как $\forall x\in C(R,R)\ \forall t\in R$: $x(t)=0 \Leftrightarrow (f_\alpha x)\left(\frac{t}{\alpha}\right)=0$, то f_α инъекция. Следовательно, отображение h – Φ_+-оператор для любой постоянной $\alpha\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, $\tilde{\theta}\in(-1,1)$ и $\theta\in[-1,1]$ согласно следствию 20.

Автор рад выразить глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю доценту Латвийского государственного университета И.В.Карлиньшу за постоянную существенную помощь и поддержку в работе.

Литература

1. Лиепиньш А.Х. Относительно предкомпактное возмущение гомоморфизмов топологических векторных пространств. –В кн.: Топологические пространства и их отображения, Респ.межвуз.сб. науч.тр.,вып.3,Рига,1977, с. 72-87.

2. Гольденштейн Л.С., Маркус А.С. О мере некомпактности ограниченных множеств и линейных операторов. – В кн.: Исследования по алгебре и математическому анализу. Кишинев, 1965, с. 45-54.

3. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. Топологические векторные пространства. М., 1967.

4. Гохберг И.Ц., Маркус А.С., Фельдман И.А. О нормально разрешимых операторах и связанных с ними идеалах. – Изв. Молдавск. филиала АН СССР, 1960, т. 76, № 10, с.51-70.

5. Владимирский Ю.Н. О строго косингулярных операторах. – ДАН СССР, 1967, т. 174, № 6, с. 1251-1252.

Поступила 20 ноября 1977 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.

УДК 513.88

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ТЕОРЕМ УСТОЙЧИВОСТИ. ПРЕДКОМПАКТНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ Φ_+– И ОТНОСИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

А.Х.Лиепиньш
ЛГУ им. П.Стучки

В предлагаемой работе приводится общая теорема об устойчивости свойств отображений, определенным образом действующих на некоторой системе множеств. Пользуясь способом исследования, вытекающим из этой теоремы, доказывается устойчивость обобщенных Φ_+– (см. определение 3) и относительно регулярных операторов при предкомпактных или в некотором смысле близких к ним возмущениях. Из общей теоремы следуют также теоремы об устойчивости Φ_+-операторов при возмущениях такого рода. Приводимая общая теорема выявляет логическую основу рассматриваемого варианта теорем устойчивости.

1. Общая теорема устойчивости.

Используем обозначения: T – непустое множество, Y – векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, Y^T – векторное пространство всех отображений множества T в пространство Y и 2^T – множество всех подмножеств множества T.

Рассмотрим следующие фиксированные отображения

$$\xi_T : \mathcal{D}(\xi_T) \to 2^{(2^T)} \quad \text{и}$$

$$\xi_Y : \mathcal{D}(\xi_Y) \to 2^{(2^Y)}, \text{ где}$$

$\mathcal{D}(\xi_T) \subset Y^T$ и $\mathcal{D}(\xi_Y) \subset Y^T$. Через P обозначим некоторый фиксированный одноместный предикат на некотором фиксированном подмножестве $\mathcal{D}(P)$ пространства Y^T.

Рассмотрим множество $F(\xi_T, \xi_Y, P) \subset \mathcal{D}(\xi_T) \cap \mathcal{D}(\xi_Y) \cap \mathcal{D}(P)$, определяемое следующим образом:

$$F(\xi_T, \xi_Y, P) = \{ f \in \mathcal{D}(\xi_T) \cap \mathcal{D}(\xi_Y) \cap \mathcal{D}(P) /$$
$$P(f) \Rightarrow \forall A \in \xi_T(f) \;\; f(A) \notin \xi_Y(f) \},$$

и при фиксированном отображении $f \in F(\xi_T, \xi_Y, P)$ множество $G(\xi_T, \xi_Y, P, f) = \{ g \in Y^T /$

$$(f \pm g \in \mathcal{D}(P)) \;\&\; (\forall A \in \xi_T(f)\ \ g(A) \in \xi_Y(f)) \;\&$$
$$\& \;(\neg P(f \pm g) \Rightarrow \exists A_0 \in \xi_T(f)\ \ (f \pm g)(A_0) \in \xi_Y(f))\}.$$

Пусть $pr_i\ (i=1,2)$ проекции на сомножители произведения $Y \times Y$. При фиксированном отображении $f \in F(\xi_T, \xi_Y, P)$ рассмотрим множество $\Omega(\xi_Y, f) = \{\omega \in (2^Y)^{(2^Y)} /$

$$(\forall \mathfrak{A} \subset 2^Y\ \ \mathfrak{A} \cap \xi_Y(f) = \emptyset \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega(\mathfrak{A}) \cap \omega(\xi_Y(f)) = \emptyset) \;\&$$
$$\& \;(\forall A \subset Y \times Y\ \ s(A) = (pr_1 + pr_2)(A) \in \xi_Y(f) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega(pr_1(A)) = \omega(pr_2(A)))\}.$$

Определение 1. Пара (T, Y) множества T и векторного пространства Y называется ω-парой относительно отображений ξ_T и ξ_Y и предиката P, если множество $\Omega(\xi_Y, f)$ непусто для любого отображения $f \in F(\xi_T, \xi_Y, P)$.

Теорема. Если пара (T, Y) ω-пара относительно отображений ξ_T и ξ_Y и предиката P, то $P(f) \Rightarrow P(f \pm g)$ для любого отображения $f \in F(\xi_T, \xi_Y, P)$ и отображения $g \in G(\xi_T^\circ, \xi_Y, P, f)$.

Доказательство. Предположим, что $P(f)$ справедливо для произвольно фиксированного отображения $f \in F(\xi_T, \xi_Y, P)$. Допустим, что $\neg P(f \pm g)$, где отображение $g \in G(\xi_T, \xi_Y, P, f)$ фиксировано произвольно. Это влечет существование такого множества $A \in \xi_T(f)$, что $(f \pm g)(A) \in \xi_Y(f)$, а следовательно, - равенство $\omega(f(A)) = \omega(g(A))$ для некоторого отображения $\omega \in \Omega(\xi_Y, f)$, ибо пара (T, Y) по условию ω-пара относительно отображений ξ_T и ξ_Y и предиката P, вследствие чего множество $\Omega(\xi_Y, f)$ непусто. Но такое равенство невозможно, так как

$$P(f) \Rightarrow f(A) \notin \xi_Y(f), \quad g(A) \in \xi_Y(f) \quad \text{и}$$
$$\omega(\mathfrak{A}(\xi_T, f)) \cap \omega(\xi_Y(f)) = \emptyset,$$

где $\mathfrak{A}(\xi_T, f) = \{f(A) / A \in \xi_T(f)\}$, в силу свойства отображения ω. •

Рассмотрим при фиксированном множестве $\mathfrak{A} \subset 2^{\mathcal{Y}}$ множество $F(\xi_T, \mathfrak{A}, P) \subset \mathcal{D}(\xi_T) \cap \mathcal{D}(P)$, определяемое следующим образом:

$$F(\xi_T, \mathfrak{A}, P) := \{f \in \mathcal{D}(\xi_T) \cap \mathcal{D}(P) / P(f) \Rightarrow \forall A \in \xi_T(f) : f(A) \notin \mathfrak{A}\},$$

и при фиксированном отображении $f \in F(\xi_T, \mathfrak{A}, P)$ множество

$$G(\xi_T, \mathfrak{A}, P, f) := \{g \in \mathcal{Y}^T / (f \pm g \in \mathcal{D}(P)) \& (\forall A \in \xi_T(f): g(A) \in \mathfrak{A}) \& (\rceil P(f \pm g) \Rightarrow \exists A_0 \in \xi_T(f) : (f \pm g)(A_0) \in \xi_{\mathcal{Y}}(f))\}.$$

Определение 2. Векторное пространство $\mathcal{Y}$ называется ω-пространством относительно множества $\mathfrak{A}_0 \subset 2^{\mathcal{Y}}$, если существует такое отображение $\omega: 2^{\mathcal{Y}} \to 2^{\mathcal{Y}}$, что

$$(\forall \mathfrak{A} \subset 2^{\mathcal{Y}} : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}_0 = \varnothing \Rightarrow \omega(\mathfrak{A}) \cap \omega(\mathfrak{A}_0) = \varnothing) \& (\forall A \subset \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} : (A) = (pr_1 + pr_2)(A) \in \mathfrak{A}_0 \Rightarrow \omega(pr_1(A)) = \omega(pr_2(A))).$$

Следствие. Если T — множество и $\mathcal{Y}$ — ω-пространство относительно множества $\mathfrak{A} \subset 2^{\mathcal{Y}}$, то $P(f) \Rightarrow P(f+g)$ для любого отображения $f \in F(\xi_T, \mathfrak{A}, P)$ и отображения $g \in G(\xi_T, \mathfrak{A}, P, f)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\xi_{\mathcal{Y}}^{(o)} : \mathcal{Y}^T \to 2^{(2^{\mathcal{Y}})}$, определяемое для любого отображения $f \in \mathcal{Y}^T$ следующим образом: $\xi_{\mathcal{Y}}^{(o)}(f) := \mathfrak{A}$. Согласно общей теореме достаточно доказать, что пара $(T, \mathcal{Y})$ ω - пара относительно отображений ξ_T и $\xi_{\mathcal{Y}}^{(o)}$ и предиката P, ибо имеет место равенство $F(\xi_T, \mathfrak{A}, P) = F(\xi_T, \xi_{\mathcal{Y}}^{(o)}, P)$ и для любого $f \in F(\xi_T, \mathfrak{A}, P)$ равенство $G(\xi_T, \mathfrak{A}, P, f) = G(\xi_T, \xi_{\mathcal{Y}}^{(o)}, P, f)$.

Действительно, по условию $\mathcal{Y}$ ω-пространство относительно множества $\mathfrak{A}$, следовательно, множество $\mathfrak{A}(\xi_{\mathcal{Y}}^{(o)}, f)$ непусто для любого отображения $f \in \mathcal{Y}^T$, тем более, если $f \in F(\xi_T, \xi_{\mathcal{Y}}^{(o)}, P)$.

2. Теоремы об устойчивости Φ_+ -операторов.

Используем обозначения: X и Y - топологические векторные пространства (ТВП) над полем вещественных или комплексных чисел, $\mathfrak{U}$ - базис окрестностей начала в пространстве X и $\mathfrak{V}$ - в Y.

$\mathcal{L}(X,Y)$ - векторное пространство всех линейных непрерывных отображений пространства X в пространство Y.

Ядро отображения f обозначается через $\operatorname{Ker} f$, а множество значений f через $\operatorname{Im} f$.

Определение 1. Отображение $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ называется гомоморфизмом, если оно как отображение пространства X на подпространство $\operatorname{Im} f$ открыто.

Определение 2. (см. [1], с.175). Гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X,Y)$, ядро которого конечномерно и подпространство $\operatorname{Im} f$ замкнуто, называется Φ_+-оператором.

Множество всех Φ_+-операторов, действующих из пространства X в пространство Y, обозначим через $\Phi_+(X,Y)$.

$\mathfrak{W}_X$ - множество всех таких подмножеств W пространства X, для которых существуют такое бесконечномерное векторное подпространство X_0 пространства X и такая окрестность начала $U \in \mathfrak{U}$, что $W \cap X_0 \supset X_0 \cap U$.

Если подпространство X_0 пространства X топологически дополнимо в X, то через $\overset{\circ}{X}_0$ обозначается некоторое фиксированное топологическое дополнение к нему.

Возможность применения способа исследования устойчивости свойств отображений, предложенного общей теоремой, по отношению к Φ_+-операторам обосновывается следующей простой леммой.

Лемма 1. Если X и Y-ТВП, X локально выпукло (ЛВП) и отображение $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ — гомоморфизм с $\dim \operatorname{Ker} f < \infty$, то $\forall\, W \in \mathfrak{W}_X \;\; f(W) \in \mathfrak{W}_Y$.

Доказательство. Выберем множество $W \in \mathfrak{W}_X$ произвольно. Предположим, что X_0 - такое бесконечномерное векторное подпространство пространства X и U - такая окрестность начала, что $W \cap X_0 \supset X_0 \cap U$.

Рассмотрим векторное подпространство X_1 пространства X, определяемое равенством $X_1 := \operatorname{Ker} f \cap X_0$.

Подпространство X_1 бесконечномерно, ибо подпространство X_0 бесконечномерно и по условию $\dim \operatorname{Ker} f < \infty$ ([2], 3.2.3., с.79). Бесконечномерно и векторное подпространство $f(X_1)$ пространства Y, так как сужение f/X_1 отображения f на подпространство X_1 инъективно, ибо инъективно сужение $f/\widetilde{\operatorname{Ker} f}$ на подпространство $\widetilde{\operatorname{Ker} f}$ и $X_1 \subset \widetilde{\operatorname{Ker} f}$. Отметим, что инъективность сужения $f/\widetilde{\operatorname{Ker} f}$ влечет включение

$$f(X_1 \cap U \cap \widetilde{\operatorname{Ker} f}) \supset f(X_1) \cap f(U \cap \widetilde{\operatorname{Ker} f}).$$

По условию отображения f - гомоморфизм, поэтому гомоморфно сужение $f/\widetilde{\operatorname{Ker} f}$ ([2], 3.2.2., с.79) и существует такая окрестность начала $V \in \mathfrak{V}$, что

$$f(U \cap \widetilde{\operatorname{Ker} f}) \supset$$
$$\supset \operatorname{Im}(f/\widetilde{\operatorname{Ker} f}) \cap V.$$

Таким образом,

$$f(W) \supset f(W \cap X_0) \supset$$
$$\supset f(X_0 \cap U) \supset f(X_1 \cap U) \supset$$
$$\supset f(X_1 \cap U \cap \widetilde{\operatorname{Ker} f}) \supset$$
$$\supset f(X_1) \cap f(U \cap \widetilde{\operatorname{Ker} f}) \supset$$
$$\supset f(X_1) \cap \operatorname{Im}(f/\widetilde{\operatorname{Ker} f}) \cap V =$$
$$= f(X_1) \cap \operatorname{Im} f \cap V = f(X_1) \cap V,$$
$$f(W) \cap f(X_1) \supset$$
$$\supset f(X_1) \cap V,$$ и подпространство $f(X_1)$ и окрестность начала V могут быть выбраны в качестве тех, доказать существование которых требовалось.

Рассмотрим при фиксированном множестве $\mathfrak{A} \subset 2^Y$ и при фиксированном отображении $f \in \Phi_+(X, Y)$ множество $G_+(\mathfrak{A}, f) \subset \mathcal{L}(X, Y)$, определяемое следующим образом: $G_+(\mathfrak{A}, f) :=$

$$:= \{g \in \mathcal{L}(X, Y) / (\forall W \in \mathfrak{W}_X :$$
$$g(W) \in \mathfrak{A}) \,\&\, (f + g \in \Phi_+(X, Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists W_0 \in \mathfrak{W}_X : (f+g)(W_0) \in \mathfrak{A})\}.$$

Теорема 1. Если X – ЛВП, Y –ω– пространство относительно множества $\mathfrak{A} \subset 2^{Y}$ и $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{W}_{Y} = \varnothing$, то $f+g \in \Phi_{+}(X,Y)$ для любого отображения $f \in \Phi_{+}(X,Y)$ и отображения $g \in G_{+}(\mathfrak{A}, f)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\xi_{+}: \mathcal{L}(X,Y) \to 2^{(2^{X})}$, определяемое для любого отображения $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ следующим образом: $\xi_{+}(f) := \mathfrak{W}_{X}$.

Кроме того, на пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ рассмотрим предикат „$\in \Phi_{+}(X,Y)$", обозначим его через P_{+}. Согласно следствию общей теоремы, достаточно отметить, что, во-первых,

$\Phi_{+}(X,Y) \subset F(\xi_{+}, \mathfrak{A}, P_{+})$ в силу леммы (2.1) и условия на множество $\mathfrak{A}$ и, во-вторых,

$G_{+}(\mathfrak{A}, f) \subset G(\xi_{+}, \mathfrak{A}, P_{+}, f)$

для любого $f \in \Phi_{+}(X,Y)$.

Рассмотрим при фиксированном множестве $\mathfrak{A} \subset 2^{Y}$ множество $G_{+}(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{L}(X,Y)$, определяемое следующим образом:

$$G_{+}(\mathfrak{A}) := \{ g \in \mathcal{L}(X,Y) / \forall W \in \mathfrak{W}_{X} \; g(W) \in \mathfrak{A} \}.$$

Определение 3. Пара (X,Y) пространств X и Y называется $\mathcal{P}_{+}$-парой относительно множества $\mathfrak{A} \subset 2^{Y}$, если для любого отображения $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ справедливо: $f \notin \Phi_{+}(X,Y) \Rightarrow \exists W \in \mathfrak{W}_{X} \; f(W) \in \mathfrak{A}$

Следующая теорема родственна результатам Ю.Н.Владимирского ([1], следствие 1, с.176).

Теорема 2. Если Y – ЛВП, Y –ω–пространство относительно множества $\mathfrak{A} \subset 2^{Y}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{W}_{Y} = \varnothing$ и пара (X,Y) $\mathcal{P}_{+}$-пара относительно $\mathfrak{A}$, то $f+g \in \Phi_{+}(X,Y)$ для любого отображения $f \in \Phi_{+}(X,Y)$ и отображения $g \in G_{+}(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы (2.1), ибо $G_{+}(\mathfrak{A}) \subset G_{+}(\mathfrak{A}, f)$ для любого отображения $f \in \Phi_{+}(X,Y)$, так как по условию пара (X,Y) $\mathcal{P}_{+}$ – пара.

Обозначим через $\mathcal{P}^{0}$ множество всех предкомпактных подмножеств пространства Y.

Лемма 2. Если X – совершенно полное и Y – метризуемое ЛВП, то пара (X, Y) $\mathcal{Y}_+$ - пара относительно любого такого множества $\mathfrak{A} \subset 2^Y$, что $\mathfrak{A} \supset \mathcal{T}^\sigma$.

Доказательство. В условиях леммы любое отображение $f \in \mathcal{L}(X,Y) \setminus \Phi_+(X,Y)$ не является гомоморфизмом или имеет бесконечномерное ядро и, следовательно, предкомпактно сужаемо на бесконечномерном векторном подпространстве пространства X ([3], 15), вследствие чего утверждение следует в силу условия на множество $\mathfrak{A}$.

Следствие 1. Если X и Y ЛВП, X совершенно полно, Y — метризуемое ω-пространство относительно множества $\mathfrak{A} \subset 2^Y$, $\mathfrak{A} \cap \mathcal{U}_Y = \emptyset$ и $\mathfrak{A} \supset \mathcal{T}^\sigma$, то $f \pm g \in \Phi_+(X,Y)$ для любого отображения $f \in \Phi_+(X,Y)$ и отображения $g \in G_+(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Согласно лемме (2.2) выполнены все условия теоремы (2.2).

Определение 4. (см. [2], 1.1.1, с.73). Множество $A \in 2^Y$ называется предкомпактным относительно окрестности начала $V \in \mathcal{U}$, если существует такое конечное множество $F \in 2^Y$, что $A \subset F + V$.

Обозначим через $V(A)$ множество всех окрестностей начала $V \in \mathcal{U}$, относительно которых множество $A \in 2^Y$ предкомпактно.

Замечание. Рассмотрим аналог меры некомпактности Хаусдорфа $\mathcal{X}(Y): 2^Y \to 2^Y$, определяемый для любого множества $A \in 2^Y$ следующим образом:

$$\mathcal{X}(Y)(A) = \bigcap_{V \in V(A)} V, \quad \bigcap_{\emptyset} = Y.$$

Этот аналог может быть выбран в качестве отображения, существование которого доказывает, что Y ω-пространство относительно множества $\mathcal{T}^\sigma$ (см. [2]).

3. Устойчивость обобщенных Φ_+-операторов.

Определение 5. Гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ называется обобщенным Φ_+-оператором или Φ_+-оператором, если его ядро топологически дополнимо в X и подпространство $\mathrm{Im}\, f$ замкнуто.

Множество всех Φ_+-операторов, действующих из пространства X в пространство Y, обозначим через $\Phi_+(X,Y)$.

Нижеприводимая лемма при исследовании Φ_+-операторов играет ту же роль, что и лемма (2.1) при исследовании $\mathscr{P}$-операторов.

Лемма 1. Если X – ЛВП, Y – ТВП и отображение $f \in \mathscr{L}(X,Y)$ – гомоморфизм с топологически дополнимым ядром в X, то $\forall\, W \in \mathscr{W}_{\mathrm{Ker} f} \quad f(W) \in \mathscr{W}_Y$.

Доказательство. В условиях леммы сужение $f/\mathrm{Ker} f$ отображения f на подпространство $\mathrm{Ker} f$ является гомоморфизмом ([2], 3.2.2, с.79). К тому же оно иньективно, поэтому утверждение следует из леммы (2.1).

Рассмотрим при фиксированном множестве $\mathfrak{O} \subset 2^Y$ и при фиксированном отображении $f \in \Phi_{\mathcal{F}}(X,Y)$ множество $G_{\mathcal{F}}(\mathfrak{O}, f) \subset \mathscr{L}(X,Y)$, определяемое следующим образом: $G_{\mathcal{F}}(\mathfrak{O}, f) = \{ g \in \mathscr{L}(X,Y) /$

$$(\forall\, W \in \mathscr{W}_{\mathrm{Ker} f} \;\; g(W) \in \mathfrak{O}) \;\&$$
$$\& \; (f \pm g \notin \Phi_{\mathcal{F}}(X,Y) \Rightarrow \exists\, W_0 \in \mathscr{W}_{\mathrm{Ker} f} \;\; (f \pm g)(W_0) \in \mathfrak{O})\}.$$

Теорема 1. Если X – ЛВП, Y – ω-пространство относительно множества $\mathfrak{O} \subset 2^Y$ и $\mathfrak{O} \cap \mathscr{W} = \varnothing$, то $f \pm g \in \Phi_{\mathcal{F}}(X,Y)$ для любого отображения $f \in \Phi_{\mathcal{F}}(X,Y)$ и отображения $g \in G_{\mathcal{F}}(\mathfrak{O}, f)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\xi_{\mathcal{F}} : \Phi_{\mathcal{F}}(X,Y) \to 2^{(2^X)}$, определяемое для любого отображения $f \in \Phi_{\mathcal{F}}(X,Y)$ следующим образом: $\xi_{\mathcal{F}}(f) = \mathscr{W}_{\mathrm{Ker} f}$.
Кроме того, на пространстве $\mathscr{L}(X,Y)$ рассмотрим предикат $u \in \Phi_{\mathcal{F}}(X,Y)$; обозначим его через $P_{\mathcal{F}}$. Согласно следствию общей теоремы достаточно отметить, что, во-первых,

$\Phi_{\mathcal{F}}(X,Y) \subset F(\xi_{\mathcal{F}}, \mathfrak{O}, P_{\mathcal{F}})$ в силу леммы (3.1) и условия на множество $\mathfrak{O}$ и, во-вторых,

$G_{\mathcal{F}}(X,Y) \subset G(\xi_{\mathcal{F}}, \mathfrak{O}, P_{\mathcal{F}}, f)$

для любого $f \in \Phi_{\mathcal{F}}(X,Y)$.

Лемма 2. Если X – пространство Фреше, являющееся прямой топологической суммой своих подпространств X_1 и X_2, X_0 – замкнутое подпространство пространства X, не имеющее топологического дополнения в X, и $X_0 \supset X_2$, то векторное подпространство $X_0 \cap X_1$ пространства X бесконечномерно.

Доказательство. Обозначим подпространство $X_0 \cap X_1$ через X_3, предположим, что $\dim X_3 < \infty$, и рассмотрим топологическое дополнение $\tilde{X}_3^{(1)}$ подпространства X_3 в подпространстве X_1. По условию $X_0 \supset X_2$, вследствие чего тогда имеет место разложение $X = \tilde{X}_3^{(1)} \oplus X_0$, что невозможно, ибо подпространство $\tilde{X}_3^{(1)}$ замкнуто в X и тем самым дополняет подпространство X_0 в X топологически.

Рассмотрим при фиксированном множестве $\mathfrak{A} \subset 2^Y$ и при фиксированном отображении $f \in \Phi_{\mp}(X,Y)$ множество $G_{\mp}^{(0)}(\mathfrak{A}, f) \subset \mathcal{L}(X,Y)$, определяемое следующим образом: $G_{\mp}^{(0)}(\mathfrak{A}, f) =$

$$= \{ g \in \mathcal{L}(X,Y) / (\forall W \in \mathfrak{W}_{\widetilde{Ker f}} : g(W) \in \mathfrak{A}) \;\&\; (Ker\, g \supset Ker\, f) \}.$$

Теорема 2. Если X и Y пространства Фреше, причем Y — σ - пространство относительно множества $\mathfrak{A} \subset 2^Y$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{W}_Y = \emptyset$ и $\mathfrak{A} \supset \mathcal{T}^{\sigma}$, то $f \pm g \in \Phi_{\mp}(X,Y)$ для любого отображения $f \in \Phi_{\mp}(X,Y)$ и отображения $g \in G_{\mp}(\mathfrak{A}, f)$.

Доказательство. Согласно теореме (3.1) достаточно доказать, что при произвольно фиксированном отображении $f \in \Phi_{\mp}(X,Y)$ имеет место включение $G_{\mp}^{(0)}(\mathfrak{A}, f) \subset$ $\subset G_{\mp}(\mathfrak{A}, f)$. Поэтому выберем отображение $g \in G_{\mp}^{(0)}(\mathfrak{A}, f)$ произвольно и докажем, что $g \in G_{\mp}(\mathfrak{A}, f)$, т.е. установим, что

$$Ker\, g \supset Ker\, f \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f \pm g \notin \Phi_{\mp}(X,Y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists W_0 \in \mathfrak{W}_{\widetilde{Ker f}} :$$
$$(f \pm g)(W_0) \in \mathfrak{A}).$$

Предположим, что $f \pm g \notin \Phi_{\mp}(X,Y)$. Это означает возможность двух случаев, а именно: подпространство $Ker\,(f \pm g)$ не имеет топологического дополнения в X или подпространство $Im\,(f \pm g)$ не замкнуто. (В условиях теоремы замкнутость множества значений отображения равносильна его гомоморфности). Разберем эти случаи. Если подпространство $Ker\,(f \pm g)$ не имеет топологического дополнения в X, то векторное подпространство $\widetilde{Ker\,(f \pm g) \cap Ker\, f}$ пространства X согласно лемме (3.2) бесконечномерно, ибо

$\mathrm{Ker}\, g \supset \mathrm{Ker}\, f$ и тем самым $\mathrm{Ker}\,(f+g) \supset \mathrm{Ker}\, f$. Таким образом, в этом случае в качестве такого множества $W_0 \in \mathcal{W}_{\mathrm{Ker}\, f}^{0}$, что $(f+g)(W_0) \in \mathcal{O}\!\iota$, можно выбрать любое из множеств вида $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\,(f+g) \cap \mathcal{U}$, где $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$, так как по условию $\mathcal{O}\!\iota \supset \mathcal{P}$ и, следовательно, $\{0\} \in \mathcal{O}\!\iota$. Если подпространство $\mathrm{Im}\,(f+g)$ не замкнуто, то этим же свойством обладает подпространство $\mathrm{Im}\,(f+g|_{\mathrm{Ker}\, f})$ ибо $\mathrm{Im}\,(f+g|_{\mathrm{Ker}\, f}) = \mathrm{Im}\,(f+g)$, так как $\mathrm{Ker}\,(f+g) \supset \mathrm{Ker}\, f$, и сужение $f+g|_{\mathrm{Ker}\, f}$ отображения $f+g$ на подпространство $\mathrm{Ker}\, f$ не является Φ_+-оператором.

Таким образом, остается лишь отметить, что пара $(\mathrm{Ker}\, f, Y)$ согласно лемме (2.2) — Φ_+-пара относительно множества $\mathcal{O}\!\iota$.

Теорема 8. Если X и Y — пространства Фреше, отображение $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ — Φ_+-оператор, отображение $g \in \mathcal{L}(X,Y)$ — предкомпактно и $\mathrm{Ker}\, g \supset \mathrm{Ker}\, f$, то отображение $f+g \in \mathcal{L}(X,Y)$ — Φ_+-оператор.

Доказательство. Ясно, что $g \in G^{(2)}(\mathcal{P}, f)$. Таким образом, согласно теореме (3.2), утверждение верно, ибо Y — ω-пространство относительно множества $\mathcal{P}$ в силу замечания (2).

4. Об устойчивости свойства относительной регулярности.

Предположим, что X и Y — отделимые ТВП.

Определение (см., например, [4], с.55). Гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ называется относительно регулярным оператором, если его ядро топологически дополнимо в X, а подпространство $\mathrm{Im}\, f$ — в Y.

Обозначим через X' пространство, топологически сопряженное к пространству X, в его сильной топологии, т.е. наделенное топологией равномерной сходимости на всех ограниченных подмножествах пространства X.

Как известно, свойство относительной регулярности, вообще говоря, не сохраняется при возмущениях, "достаточно малых" (например, малых по норме в случае банаховых пространств) или компактных ([4], с.60). Таким образом, некоторые дополнительные условия на возмущения естественны.

В следующих теоремах устанавливается устойчивость свойства относительной регулярности при компактных возмущениях с дополнительным условием на их ядра в частном случае, когда коразмерность подпространства значений возмущаемых относительно регулярных операторов конечна. Следует отметить, что то же условие на ядра возмущений содержится в теореме об устойчивости свойства относительной регулярности для эндоморфизмов банаховых пространств в [4] ([4] , теорема 3, с.61), которая в отличие от далее приводимых в некотором смысле более близка к теоремам устойчивости в случае "достаточно малых" возмущений.

Подчеркнем, что следующие теоремы основываются на предыдущих результатах об устойчивости Φ_+-операторов и что таким образом они опять-таки представляют собой реализацию способа исследования устойчивости свойств отображений, предложенного общей теоремой.

Теорема 1. Если X и Y - пространства Фреше, отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ - относительно регулярный оператор, сопряженное отображение $f' \in \mathcal{L}(Y'_\beta, X'_\beta)$ которого - гомоморфизм, причем $\operatorname{codim} \operatorname{Im} f < \infty$, отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ компактно и $\operatorname{Ker} g \supset \operatorname{Ker} f$, то отображение $f+g \in \mathcal{L}(X, Y)$ есть относительно регулярный оператор, причем $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(f+g) < \infty$.

Доказательство. Согласно теореме (3.3) отображение $f+g$ — Φ_+-оператор. Таким образом, достаточно доказать, что $\operatorname{codim} \operatorname{Im}(f+g) < \infty$. Докажем, что $\dim \operatorname{Ker}(f+g)' < \infty$. Это влечет требуемое, ибо подпространство $\operatorname{Im}(f+g)$ замкнуто. Отображение $g' \in \mathcal{L}(Y'_\beta, X'_\beta)$ компактно, так как по условию компактно g ([5], 9.6.3, с.922). Подпространство $\operatorname{Im} f'$ замкнуто, ибо в условиях теоремы замкнутость множества значений отображения равносильна замкнутости множества значений его сопряженного. По условию коразмерность замкнутого подпространства $\operatorname{Im} f$ конечна, вследствие чего $\dim \operatorname{Ker} f' < \infty$. Наконец, по условию отображение f' — гомоморфизм и, таким образом, Φ_+-оператор. Как известно, Φ_+-операторы устойчивы при компактных возмущениях, тем самым отображение $(f+g)'$ — Φ_+-оператор, ибо $(f+g)' = f' + g'$, и, в частности, $\dim \operatorname{Ker}(f+g)' < \infty$, что требовалось.

Теорема 2. Если X и Y - банаховы пространства, отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ - относительно регулярный оператор, причем $\operatorname{codim} \operatorname{Im} f < \infty$, отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ компактно и $\operatorname{Ker} g \supset \operatorname{Ker} f$, то отображение

$f+g\in\mathcal{L}(X,Y)$ - относительно регулярный оператор, причем $\operatorname{codim}\operatorname{Im}(f+g)<\infty$.

Доказательство. Согласно теореме (4.1) достаточно отметить, что в условиях теоремы отображение $f'\in\mathcal{L}(Y'_\beta, X'_\beta)$ - гомоморфизм.

Лемма. Если X - банахово пространство, Y - рефлексивное пространство Фреше и отображение $f\in\mathcal{L}(X,Y)$ - гомоморфизм, то отображение $f'\in\mathcal{L}(Y'_\beta, X'_\beta)$ - гомоморфизм.

Доказательство. Подпространство $\operatorname{Im} f$ и, следовательно, подпространство $\operatorname{Im} f'$ в условиях леммы замкнуты. Вследствие замкнутости подпространство $\operatorname{Im} f'$ бочечно. Таким образом, согласно теореме об открытом отображении, достаточно установить совершенную полноту пространства Y'_β. Действительно, в силу рефлексивности пространства Y топология пространства Y'_β является топологией Макки и, следовательно, пространство Y'_β совершенно полно, ибо Y - пространство Фреше ([5], 8.10.7, с.738, см.также задачу 8.41, с.843).

В заключение приводится теорема, вытекающая из теоремы (4.1) и леммы (4).

Теорема 3. Если X - банахово и Y - рефлексивное пространство Фреше, отображение $f\in\mathcal{L}(X,Y)$ - относительно регулярный оператор, причем $\operatorname{codim}\operatorname{Im} f<\infty$, отображение $g\in\mathcal{L}(X,Y)$ компактно и $\operatorname{Ker} g\supset\operatorname{Ker} f$, то отображение $f+g\in\mathcal{L}(X,Y)$ - относительно регулярный оператор, причем $\operatorname{codim}\operatorname{Im}(f+g)<\infty$.

Литература

1. Владимирский Ю.Н. Φ_+-операторы в локально выпуклых пространствах. - УМН, т.23, вып.3, 1968, с.175-176.

2. Лиепиньш А.Х. Относительно предкомпактное возмущение гомоморфизмов топологических векторных пространств. - В кн: Топологические пространства и их отображения. Респ.межвуз.сб.научн. тр., вып.3, Рига, 1977, с.72-87.

3. Лиепиньш А.Х. Устойчивость Φ_+-операторов при относительно предкомпактных возмущениях. - Наст.сб., с. 76-84.

4. Caradus S.R. An equational approach to products of relatively regular operators. - Aequationes Mathematicae, 1977, vol.15.

5. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М., 1969.

Поступила 12 июня 1978 г.

Топологические пространства и их отображения, Рига, 1979.

УДК 513.83

$\mathscr{B}$-ПРОСТРАНСТВА И БИСТАБИЛЬНЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ

Л.С.Медников

Удмуртский государственный университет

Настоящая статья переносит результаты работы автора [6] с сильно локально однородных пространств на гораздо более широкий класс $\mathscr{B}$-пространств, замкнутый относительно произведений. **А именно: доказано, что каждый стабильный гомеоморфизм** $\mathscr{B}$-пространства бистабилен и что каждый гомеоморфизм тихоновского куба стабилен.

В §3 доказано, что тихоновский куб является сильно локально однородным по множествам пространством. Это предложение было сформулировано в [3] в виде гипотезы, однако в последующих статьях Брехнера оно более не встречалось.

Множество всех гомеоморфизмов топологического пространства X на себя мы будем обозначать $H(X)$.

§1. sr-пространства и $\mathscr{B}$-пространства

Определение 1. Пусть X -топологическое пространство, $x,y,z,w \in X$, $X_0 \subset X$. Гомеоморфизм $f \in H(X)$ мы будем называть (x,y,X_0)-гомеоморфизмом, если $f(x)=y$ и f тождественен на X_0, и (x,y,z,w)-гомеоморфизмом, если $f(x)=y$ и f тождественен на некоторых окрестностях точек z и w.

Определение 2. Пространство X будем называть sr-пространством, если найдется такое плотное в X множество X_0 что для любой точки $x \in X$ и для любого открытого множества $\mathcal{U} \ni x$ найдется такое открытое множество $V \ni x$, что для любых двух точек $y,z \in V \cap X_0$ существует $(y,z,X \setminus \mathcal{U})$-гомеоморфизм.

Замечание. Если в определении 2 положить $X_0 = X$, то получится определение представимого пространства [4]; если потребовать $V \subset \mathcal{U}$ и существование $(y,z,X \setminus V)$-гомеоморфизма, то получится определение локально однородного по множествам пространства [2]; если наложить оба эти ограничения, то получится определение сильно локально однородного пространства.

Определение 3. Пространство X мы будем называть $\mathscr{b}$-пространством, если найдется такое плотное в $X\times X$ множество $\widetilde{X}$, что для любой точки $(x,y)\in\widetilde{X}$ найдется такое открытое плотное в X множество $\mathcal{U}$, что для любых точек $z,w\in\mathcal{U}$ существует (x,y,z,w) -гомеоморфизм.

Теорема I. Произведение $\mathscr{b}$-пространств является $\mathscr{b}$-пространством.

Доказательство. Пусть $X=\prod\limits_{\alpha\in A}X_\alpha$ и $\widetilde{X}_\alpha$ – плотные в $X_\alpha\times X_\alpha$ множества, о которых говорится в определении 3. Положим

$\widetilde{X}=\{(x,y)\in X\times X:$ найдется такое конечное множество $B\subset A$, что $(x_\alpha,y_\alpha)\in\widetilde{X}_\alpha$ для всех $\alpha\in B$ и $x_\alpha=y_\alpha$ для всех $\alpha\in A\setminus B\}$.

$\widetilde{X}$, очевидно, плотно в $X\times X$.

Пусть $(x,y)\in\widetilde{X}$ и B – соответствующее конечное множество. Пусть $\mathcal{U}_\alpha$ – открытые плотные в X_α множества, о которых говорится в определении 3, выбранные для точек $(x_\alpha,y_\alpha)\in\widetilde{X}_\alpha$ соответственно. Положим $\mathcal{U}=\prod\limits_{\alpha\in B}\mathcal{U}_\alpha\times\prod\limits_{\alpha\in A\setminus B}X_\alpha$.
Пусть $z,w\in\mathcal{U}$ и пусть f_α – $(x_\alpha,y_\alpha,z_\alpha,w_\alpha)$ -гомеоморфизмы, выбранные согласно определению 3 для $\alpha\in B$.
Тогда $f=\prod\limits_{\alpha\in B}f_\alpha\times\prod\limits_{\alpha\in A\setminus B}id_\alpha$ – (x,y,z,w) -гомеоморфизм, т.к. f тождественен на $V=\prod\limits_{\alpha\in B}V_\alpha\times\prod\limits_{\alpha\in A\setminus B}X_\alpha$, если f_α тождественны на $V_\alpha\ni z_\alpha,w_\alpha$.

Теорема 2. Пусть в пространстве Y найдется открытое плотное множество X, которое является sr -пространством /в индуцированной топологии/, причем $X\setminus(x\cup y)$ связно для любых двух точек $x,y\in X_*$. Тогда Y – $\mathscr{b}$ -пространство.

Доказательство. Пусть X_0 – плотное в X множество, о котором говорится в определении 2. Положим $\widetilde{Y}=X_0\times X_0$. $\widetilde{Y}$, очевидно, плотно в $Y\times Y$. Пусть $(x,y)\in\widetilde{Y}$. Если $x=y$, то в качестве $\mathcal{U}$ можно взять все Y. Если же $x\neq y$, то положим $\mathcal{U}=X\setminus(x\cup y)$ / точки x, y не изолированные, т.к. если, например, x -изолированная точка, то $X\setminus(y\cup y)$ несвязно, что противоречит услов[ию]/. Пусть $z, w \in U$. Рассмотрим множество

$W = \bigcup\{V \subset X\setminus(z\cup w) :$ V открыто, и для любой точки $v \in V\cap X_0$ существует (x, v, z, w) -гомеоморфизм из $H(Y)\}$.

W открыто по построению. Покажем, что W замкнуто в $X\setminus(z\cup w)$.

Пусть $y_1 \in [W]_{X\setminus(z\cup w)}$. Возьмем такую окрестность точки y_1, что $[U_1]_Y \subset X\setminus(z\cup w)$. По определению 2 найдем такую окрестность V_1 точки y_1, что для любых $v_1, v_2 \in V_1\cap X_0$ найдется $(v_1, v_2, X\setminus U_1)$-гомеоморфизм из $H(X)$. Докажем, что $V = V_1\setminus(z\cup w)\subset W$. В самом деле, пусть $v \in V\cap X_0$. Так как $y_1 \in [W]_{X\setminus(z\cup w)}$, найдется $v_1 \in W\cap V\cap X_0$.

По построению W найдется (x, v_1, z, w)-гомеоморфизм $f\in H(Y)$. По выбору множества V_1 найдется $(v_1, v, X\setminus U_1)$-гомеоморфизм $g\in H(X)$. Положим

$$\tilde g(t) = \begin{cases} g(t) & \text{при } t\in X \\ t & \text{при } t\in Y\setminus[U]_Y \end{cases}$$

$\tilde g \in H(Y)$ и $\tilde g$ $-(v_1, v, z, w)$ -гомеоморфизм. Тогда $\tilde g\circ f$ $-(x, v, z, w)$ -гомеоморфизм.

Из построения W теперь следует, что $V\subset W$ и $y_1\in V\subset W$. Аналогично доказывается, что $x\in W$. Ввиду связности $X\setminus(z\cup w)$ получаем, что $W = X\setminus(z\cup w)$, откуда $y\in W$ и существует (x, y, z, w) -гомеоморфизм из $H(Y)$.

<u>Следствие</u>. I^{τ} и R^{τ} являются $\mathcal{b}$ -пространствами при $\tau > 1$.

§2. Стабильные гомеоморфизмы $\mathcal{b}$ -пространств

<u>Определение 4</u>. Гомеоморфизм $f\in H(X)$ называется стабильным, если он может быть представлен в виде композиции конечного числа гомеоморфизмов, каждый из которых тождественен на некотором непустом открытом множестве. Если это конечное число можно свести к двум, то гомеоморфизм f называется бистабильным.

Теорема 5. Любой стабильный гомеоморфизм $\mathscr{B}$-пространства X бистабилен.

Доказательство. Очевидно, достаточно перейти от композиции трех к композиции двух гомеоморфизмов, удовлетворяющих условиям определения 4.

Пусть $f=f_3 f_2 f_1$, где $f_1, f_2, f_3 \in H(X)$ и тождественны на открытых множествах U_1, U_2, U_3 соответственно. Покажем, что существуют точки $a_i \in U_i$ $(i=1,2,3)$ и $(a_1,a_2,a_3,f_2^{-1}(a_3))$-гомеоморфизм.

Пусть $\tilde{X}$ — плотное в $X\times X$ множество, о котором говорится в определении 3. Найдутся такие точки a_1, a_2, что $(a_1,a_2)\in \tilde{X}\cap(U_1\times U_2)$.

Рассмотрим открытое плотное в X множество U, выбранное по определению 3 для точек a_1, a_2, и возьмем $a_3 \in f_2(f_2^{-1}(U_3\cap U)\cap U)\neq\emptyset$. Тогда $a_3\in U\cap U_3$ и $f_2^{-1}(a_3)\in U$ и, следовательно, существует $(a_1,a_2,a_3,f_2^{-1}(a_3))$-гомеоморфизм h. Пусть h тождественен на окрестности $V\ni a_3\cup f_2^{-1}(a_3)$. Рассмотрим теперь гомеоморфизмы $g_1=h^{-1}f_2 h f_1$ и $g_2=f_3 f_2 h^{-1} f_2^{-1} h$. Проверим, что g_1 тождественен на $h^{-1}(U_2)\cap U_1$, а g_2 — на $V\cap f_2(V)\cap U_3$. Пусть $x\in h^{-1}(U_2)\cap U_1$ и пусть $h(x)=y\in U_2$. Тогда

$$g_1(x)=h^{-1}f_2 h f_1(x)=h^{-1}f_2 h(x)=h^{-1}f_2(y)=h^{-1}(y)=x.$$

Пусть теперь $x\in V\cap f_2(V)\cap U_3$ и $f_2^{-1}(x)=y\in V$. Тогда $g_2(x)=f_3 f_2 h^{-1}f_2^{-1}h(x)=f_3 f_2 h^{-1}f_2^{-1}(x)=f_3 f_2 h^{-1}(y)=$

$$=f_3 f_2(y)=f_3(x)=x.$$

Осталось заметить, что $f=g_2\circ g_1$ и что множества $h^{-1}(U_2)\cap U_1$ и $V\cap f_2(V)\cap U_3$ непусты, т.к. первое содержит точку a_1, а второе — a_3.

Замечание. /Ю.М.Смирнов/. Если пространство несвязно и не является объединением двух связных множеств, то все его гомеоморфизмы бистабильны. Если пространство является объединением двух непересекающихся открытых связных множеств, то гомеоморфизмы, "не переставляющие" эти множества, бистабильны.

а "переставляющие" – не стабильны. Примером пространства, на котором существует стабильный, но не бистабильный гомеоморфизм, являются ребра трехмерного тетраэдра. Одномерные ребра n -мерного симплекса при $n \neq 3$ уже не обладают этим свойством.

Лемма. Пусть $h \in H(X)$, причем существует такой гомеоморфизм $g \in H(X \times [-1,0])$, что $g(x,-1) = (x,-1)$ и $g(x,0) = (h(x),0)$ для всех $x \in X$. Пусть, далее, $f \in H(X \times I)$ или $f \in H(X \times [0,1])$ и $f(x,0) = (h(x),0)$ для всех $x \in X$. Тогда f – бистабильный гомеоморфизм.

Доказательство этого утверждения для конкретных пространств имеется в статьях [I] и [9]. Практически без изменений оно проходит и для произвольного пространства X.

Теорема 4. Пусть $\tau > \aleph_0$ и $f \in H(I^\tau)$ или $f \in H(R^\tau)$. Тогда f бистабилен.

Доказательство. Для $I^{\aleph_0}$ см. [I], а для $R^{\aleph_0}$ см. [9].

Пусть $\tau > \aleph_0$ и $f \in H(I^\tau)$. По теореме 3 и следствию из теоремы 2 достаточно доказать стабильность f.

Мы будем рассматривать I^τ как $I^\tau \times I = \prod_{\alpha \in A} I_\alpha \times I$. Рассмотрим $W = I^\tau \times \{0\}$. Это Z -множество типа G_δ в $I^\tau \times I$ /определение Z -множества см. [I] /. Поэтому $f(W)$ также является множеством типа G_δ и, следовательно, существует такие счетное множество $B \subset A$ и $Y \subset \prod_{\alpha \in B} I_\alpha \times I$, что $f(W) = Y \times \prod_{\alpha \in A \setminus B} I_\alpha$.

По следствию 2 а) статьи [7] можно считать, что $Y \cong I^{\aleph_0}$. Легко видеть, что $\prod_{\alpha \in B} I_\alpha \times \{0\}$ и Y являются Z -множествами в $\prod_{\alpha \in B} I_\alpha \times I$. По известной теореме Андерсона [I] существует такой гомеоморфизм $f_1 \in H(\prod_{\alpha \in B} I_\alpha \times I)$, что $f_1(Y) = \prod_{\alpha \in B} I_\alpha \times \{0\}$.

Как уже отмечалось, гомеоморфизм $g \in H(I^{\aleph_0})$ стабилен, поэтому стабилен и гомеоморфизм $\tilde{f} = f_1 \times id_{\prod X_\alpha}$. При этом $\tilde{f} \circ f(W) = W$. Положим $h \doteq (\tilde{f} \circ f)|_W^{\alpha \in A \setminus B} \in H(W) = H(I^\tau)$.

Ренц [8] показал, что любой гомеоморфизм $h \in H(I^\tau)$ обратимо изотопен тождественному гомеоморфизму, т.е. существует такой гомеоморфизм $g \in H(I^\tau \times [-1,0])$, что $g(x,0) = (h(x),0)$,

$g(x,-1)=(x,-1)$ и $g\big|_{I^\tau\times t}\in H(I^\tau\times t)$ для всех $t\in[-1,0]$.

Поэтому мы можем применить лемму. Из нее следует, что $\tilde f\circ f$ – стабильный гомеоморфизм, и f также стабилен ввиду стабильности $\tilde f$.

Доказательство для R^τ ведется по такой же схеме. При этом нужно воспользоваться тем, что $R^\tau\cong R^\tau\times I$, следствием 2 б) статьи [7] и теоремой Ренца для R^τ.

§3. Одно свойство тихоновского куба

Брехнер [3] предположил, что тихоновский куб сильно локально однороден по множествам. Для конечномерного куба это свойство очевидно, а для бесконечномерного оно несколько слабее, чем свойство, доказываемое в следующей теореме.

Теорема 5. При $\tau\geqslant\aleph_0$

а/ тихоновский куб I^τ сильно локально однороден;

б/ в I^τ существует открытая база $\mathcal{B}$ такая, что для любого $\mathcal{U}\in\mathcal{B}$ и для любой точки $x\in\mathcal{U}$ найдется такая окрестность V точки x, что $[V]\subset\mathcal{U}$; для любого открытого $W\subset\mathcal{U}$ существует такой гомеоморфизм $f\in H(I^\tau)$, что $f([V])\subset W$ и f тождественен на $I^\tau\setminus\mathcal{U}$.

Доказательство. Свойство а/ доказано в [5]. Из определения сильной локальной однородности /см. замечание к определению 2/ следует, что в I^τ существует такая база $\mathcal{B}$, что для любого $\mathcal{U}\in\mathcal{B}$ и любых точек $x,y\in\mathcal{U}$ существует $(x,y,I^\tau\setminus\mathcal{U})$ -гомеоморфизм. Учитывая это, в свойстве б/ достаточно рассматривать только случай, когда $W\ni x$.

Рассматривая куб I^τ как $\prod_{\alpha\in A}[0,1]_\alpha$ и учитывая топологическую однородность I^τ, достаточно рассмотреть случай $x=\bar 0=(0,0,\dots)$.

Найдется такое $\varepsilon>0$ и $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in A$, что

$$F=\prod_{\alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_n}[0,\varepsilon]_\alpha\times\prod_{\alpha\neq\alpha_i}[0,1]_\alpha\subset\mathcal{U}.$$

Положим

$$V=\prod_{\alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_n}\left[0,\tfrac{\varepsilon}{2}\right)_\alpha\times\prod_{\alpha\neq\alpha_i}[0,1]_\alpha .$$

Пусть W – сколь угодно малая окрестность точки $\bar 0$.

Можно считать, что W имеет вид

$$W = \prod_{\alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_n} [0,\varepsilon)_\alpha \times \prod_{\alpha=\alpha_{n+1},\dots,\alpha_m} [0,\delta)_\alpha \times \prod_{\alpha\neq\alpha_1,\dots,\alpha_m} [0,1]_\alpha .$$

Существует такой гомеоморфизм g конечномерного куба $\prod_{\alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_m} [0,1]_\alpha$ на себя, что $g(\prod_{\alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_n}[0,\tfrac{1}{2})_\alpha) \subset \prod_{\alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_m}[0,\varepsilon)$ и g тождественен на дополнении к $\prod_{\alpha=\alpha_1,\dots,\alpha_m}[0,\varepsilon)$. Это эквивалентно следующему очевидному утверждению: пусть x — вершина симплекса Y, а Z — противоположная к ней грань. Тогда для любой окрестности V точки x и для любого замкнутого множества $G \subset X \setminus Z$ существует такой (x, x, Z)-гомеоморфизм $f \in H(Y)$, что $f(G) \subset V$.
Тогда $f = g \times \prod_{\alpha\neq\alpha_1,\dots,\alpha_m} id_\alpha$ — искомый гомеоморфизм.

Литература

1. Anderson R.D. On topological infinite deficiency Michigan Math. G., vol.14, N 3, 1967, p. 365-383.
2. Brechner B.L. On dimensions of certain spaces of homeomorphisms. - Transactions of Amer. Math. Soc., vol.121, N 2, 1966, p. 516-548.
3. Brechner B.L. Strongly locally setwise homogeneous continua and their homeomorphism groups. - Transactions of Amer. Math. Soc., vol.154, 1971, p. 279-288.
4. Fletcher P. Note on quasi-uniform spaces and representable spaces. - Colloquium Math., vol.23, N 2, 1971, p.221-231.
5. Eberhart C. Tyhonoff cubes are coset spaces. - Proceedings of Amer. Math. Soc., vol.19, N 1, 1968, p. 185-188.
6. Медников Л.Э. Стабильные и бистабильные гомеоморфизмы. - ДАН СССР, т.211, № 1, 1973, с.44-47.
7. Медников Л.Э. Гомеоморфизмы подмножеств бесконечных произведений. - В кн.: Теория множеств и топология. Ижевск, 1977, с.62-66.
8. Renz P.L. The contractibility of the homeomorphism group of some product spaces by Wong's method. - Mathematica Scand., vol.28, N 1, 1971, p. 182-188.
9. Wong Y.T. On homeomorphisms of certain infinite - dimensional spaces. - Transactions of Amer. Math. Soc., vol.128, N 1, 1967, p. 148-154.

Поступила 20 сентября 1978 года

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.

УДК 517.941

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИИ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Н.Н.Петров

Ленинградский государственный университет

Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2 - банаховы пространства. Обозначим через $X = X_1 \times X_2$, $Y = Y_1 \times Y_2$ декартовы произведения соответствующих пространств и определим в них норму следующим образом: если $x = (x_1, x_2) \in X$ ($x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$), $y = (y_1, y_2) \in Y$ ($y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$), то положим $\|x\| = (\|x_1\|^p_{X_1} + \|x_2\|^p_{X_2})^{\frac{1}{p}}$, $\|y\| = (\|y_1\|^p_{Y_1} + \|y_2\|^p_{Y_2})^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$.

Пусть $A : X \mapsto Y$ - линейный оператор, заданный операторной матрицей $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, где $A_{ik} : X_k \to Y_i$ - линейные операторы в соответствующих банаховых пространствах. Через $\mathcal{D}(\cdot)$, $R(\cdot)$, $N(\cdot)$ будем обозначать область определения, область значений и множество нулей некоторого линейного оператора.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} A_{11} x_1 + A_{12} x_2 &= y_1 \\ A_{21} x_1 + A_{22} x_2 &= y_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $y = (y_1, y_2) \in Y$ - заданный элемент. Систему (1) можно записать также в виде уравнения:

$$Ax = y, \tag{2}$$

где $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : X \mapsto Y$, $x = (x_1, x_2) \in X$.

Уравнение (2) называется корректно разрешимым на $R(A)$, если существует $K > 0$ такое, что для всех $x \in \mathcal{D}(A)$ справедливо неравенство

$$\|x\|_X \leq K \cdot \|Ax\|_Y .$$

<u>Теорема 1</u>. Предположим, что один из операторов A_{ik} $(i,k = 1,2)$, например A_{11}, обратим, $\mathcal{D}(A_{11}) = \mathcal{D}(A_{21})$, $R(A_{11}) = Y_1$, операторы A_{11}^{-1}, A_{12} ограничены, а оператор A_{21} допускает замы-

кание. Тогда для того, чтобы уравнение (2) было корректно разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})\, x_2 = y_2 \tag{3}$$

было корректно разрешимо.

<u>Доказательство.</u> Необходимость. Положим, что уравнение (2) корректно разрешимо на $R(A)$. Это означает, что

$$\exists k > 0 : \|x\| \le k \|Ax\|,$$

или иначе

$$\|x_1\|^p + \|x_2\|^p \le k^p (\|A_{11} x_1 + A_{12} x_2\|^p + \|A_{21} x_1 + A_{22} x_2\|^p),$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}(A)\,[\mathcal{D}(A_{11}) \cap \mathcal{D}(A_{21})] \times$$

$$\times [\mathcal{D}(A_{12}) \cap \mathcal{D}(A_{22})].$$

Если $x_2 \in \mathcal{D}(A_{12}) \cap \mathcal{D}(A_{22})$, то $A_{11}^{-1} A_{12} x_2 \in \mathcal{D}(A_{21})$, т.к. $\mathcal{D}(A_{11}) = \mathcal{D}(A_{21})$ и $R(A_{11}) = Y_1$, а тогда $x_2 \in \mathcal{D}(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$. Положим в предыдущем неравенстве $x_1 = -A_{11}^{-1} A_{12} x_2$, тогда получим:

$$\|A_{11}^{-1} A_{12} x_2\|^p + \|x_2\|^p \le k^p (\|-A_{12} x_2 + A_{12} x_2\|^p + \|-A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} x_2 + A_{22} x_2\|^p$$

или

$$\|x_2\|^p \le k^p \|(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) x_2\|^p \quad \text{для } \forall x_2 \in \mathcal{D}(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}),$$

а это неравенство показывает, что уравнение (3) корректно разрешимо на $R(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$.

Достаточность. Предположим, что уравнение (3) корректно разрешимо на $R(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$. Это означает, что существует постоянная $k_2 > 0$ такая, что $\|x_2\| \le k_2 \|(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) x_2\|$ для $\forall x_2 \in \mathcal{D}(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$. Это неравенство можно переписать следующим образом:

$$\|x_2\| \le k_2 \|(A_{22} x_2 + A_{21} x_1) - A_{21} x_1 - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} x_2\| =$$

$$= k_2 \|(A_{22} x_2 + A_{21} x_1) - A_{21} A_{11}^{-1} (A_{11} x_1 + A_{12} x_2)\| \le$$

$$\le k_2 \|A_{21} x_1 + A_{22} x_2\| + k_2 \|A_{21} A_{11}^{-1}\| \cdot \|A_{11} x_1 + A_{12} x_2\|.$$

Оно справедливо для $\forall x_1 \in \mathcal{D}(A_{11}) = \mathcal{D}(A_{21})$ и $\forall x_2 \in \mathcal{D}(A_{22}) \cap \mathcal{D}(A_{12})$. Используя это неравенство, оценим теперь норму X_1 :

$$\|X_1\| = \|A_{11}^{-1}(A_{11}X_1 + A_{12}X_2) - A_{11}^{-1}A_{12}X_2\| \le \|A_{11}^{-1}\| \cdot \|A_{11}X_1 + A_{12}X_2\| +$$
$$+ \|A_{11}^{-1}A_{12}\| \cdot \|X_2\| \le \|A_{11}^{-1}\| \cdot \|A_{11}X_1 + A_{12}X_2\| + \|A_{11}^{-1}A_{12}\| \cdot (K_2\|A_{22}X_2 +$$
$$+ A_{21}X_1\| + K_2\|A_{21}A_{11}^{-1}\| \cdot \|A_{11}X_1 + A_{12}X_2\|) = (\|A_{11}^{-1}\| + K_2\|A_{11}^{-1}A_{12}\| \cdot$$
$$\cdot \|A_{21}A_{11}^{-1}\|) \cdot \|A_{11}X_1 + A_{12}X_2\| + K_2\|A_{11}^{-1}A_{12}\| \cdot \|A_{11}X_1 + A_{12}X_2\| .$$

Возводя каждое из двух предыдущих неравенств в степень $p (p \ge 1)$ и складывая их, получим:

$$\|X_1\|^p + \|X_2\|^p \le K'(\|A_{11}X_1 + A_{12}X_2\|^p + \|A_{21}X_1 + A_{22}X_2\|^p),$$

или

$$\|X\| \le K\|AX\| \quad , \text{ где } K > 0 \text{ и не зависит от } X .$$

Тем самым доказана корректная разрешимость уравнения (2).

Выясним теперь, при каких условиях уравнение (2) нормально разрешимо. Уравнение (2) называется нормально разрешимым, если его область значений $R(A)$ представляет собой подпространство пространства Y , т.е. $R(A) = \overline{R(A)}$ (черта сверху обозначает замыкание соответствующего множества).

Будем далее предполагать, что области определения $\mathcal{D}(A_{ik})$ операторов $A_{ik} (i,k = 1,2)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathcal{D}(A_{11}) = \mathcal{D}(A_{21}) = \mathcal{D}_1 \subset X_1 ; \mathcal{D}(A_{12}) = \mathcal{D}(A_{22}) = \mathcal{D}_2 \subset X_2 \quad (4)$$

и множество $\mathcal{D}_i$ плотно в пространстве $X_i \ (i = 1,2)$, т.е.

$$\overline{\mathcal{D}}_1 = X_1 \ ; \quad \overline{\mathcal{D}}_2 = X_2 \quad (5)$$

При этих предположениях операторная матрица A плотно определена и поэтому может быть определена сопряженная операторная матрица $A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}$, где A_{ik}^* – оператор, сопряженный к оператору $A_{ik} (i,k=1,2)$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть области определения операторов $A_{ik} \ (i,k = 1,2)$ удовлетворяют условиям (4), (5), один из операторов A_{ik} , например A_{11} , обратим и $R(A_{11}) = Y_1$. Тогда, для того чтобы уравнение (2) было нормально разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3) было нормально разрешимо.

<u>Замечание</u>. При доказательстве теоремы 2 будут использоваться следующие утверждения, справедливость которых легко проверить:

1) если $y=(y_1,y_2)\in R(A)$,
то $y_2-A_{21}A_{11}^{-1}y_1\in R(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$;

2) если $y_2\in R(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$,
то $(0,y_2)\in R(A)$;

3) если $f=(f_1,f_2)\in N(A^*)$,
то $f_2\in N(A_{22}^*-A_{12}^*A_{11}^{*-1}A_{21}^*)$;

4) если $f_2\in N(A_{22}^*-A_{12}^*A_{11}^{*-1}A_{21}^*$,
то $(-A_{11}^{*-1}A_{21}^*f_2,f_2)\in N(A^*)$.

<u>Доказательство</u>. Необходимость. Предположим, что уравнение (2) нормально разрешимо. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $R(A)=N(A^*)^\perp$, или иначе: $f_1(y_1)+f_2(y_2)=0$ для $\forall y=(y_1,y_2)\in R(A)$ и $\forall f=(f_1,f_2)\in N(A^*)$. Возьмем произвольный элемент $\bar f_2\in N(A_{22}^*-A_{12}^*A_{11}^{*-1}A_{21}^*$. Тогда в силу утверждения 4) замечания $\bar f=(-A_{11}^{*-1}A_{21}^*\bar f_2,\bar f_2)\in N(A^*)$. Возьмем также произвольный элемент $\tilde y_2\in R(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$. Тогда, в силу утверждения 2) замечания, элемент $(0,\tilde y_2)\in R(A)$. Так как уравнение (2) нормально разрешимо, то $\bar f_2(\tilde y_2)=0$, а это равенство означает, что $R(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})=$ $=[N(A_{22}^*-A_{12}^*A_{11}^{*-1}A_{21}^*)]^\perp$, и нормальная разрешимость **уравнения** (3) доказана.

Достаточность. Пусть уравнение (3) нормально разрешимо. Тогда $f_2(y_2)=0$ для $\forall f_2\in N(A_{22}^*-A_{12}^*A_{11}^{*-1}A_{21}^*)$ и $\forall y_2\in R(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Возьмем произвольный элемент $y=(y_1,y_2)\in R(A)$. Тогда в силу утверждения 1) замечания, $y_2-A_{21}A_{11}^{-1}y_1\in R(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$. Пусть $f=(f_1,f_2)\in N(A^*)$ Тогда в силу утверждения 3) замечания, $f_2\in N(A_{22}^*-A_{12}^*A_{11}^{*-1}A_{21}^*)$. Отсюда следует, что $f(y)=f_1(y_1)+f_2(y_2)=-A_{11}^{*-1}A_{21}^*f_2(y_1)+f_2(y_2)=f_2(y_2-A_{21}A_{11}^{-1}y_1)=0$ Последнее равенство показывает, что $R(A)=[N(A^*)]^\perp$, а это означает, что уравнение (2) нормально разрешимо. Теорема доказана.

Уравнение (2), для которого нуль-пространство $N(A)$ конечномерно, называется n-нормальным. Уравнение (2), которое нормально разрешимо и для которого **дефект** подпространства $\overline{R(A)}$ конечен, называется d-нормальным. Уравнение (2) называется нетеровым, если оно n-нормально и d-нормально.

При этом, если обозначить $n(A) = \dim N(A)$, $d(A) = \operatorname{def} \overline{R(A)} = \dim [R(A)]^{\perp}$, то число $\varkappa_A = n(A) - d(A)$ называется индексом уравнения (2).

В дальнейших рассуждениях будем предполагать, что области определения операторов A_{ik} удовлетворяют условиям (4), (5), оператор A_{11} обратим.

Предположим, что уравнение (3) n-нормально, и пусть $n(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) = \dim N(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) = m < \infty$. Пусть $X_2^{(1)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_2^{(m)}$ -базис в пространстве $N(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$. Тогда векторы $Z_i = (-A_{11}^{-1} A_{12} X_2^{(i)}, X_2^{(i)}) \in N(A)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и являются линейно независимыми. Кроме того, если вектор $Z = (X_1, X_2) \in N(A)$, то вектор $X_2 \in N(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$ и $X_1 = -A_{11}^{-1} A_{12} X_2$. Это означает, что уравнение (2) n-нормально тогда и только тогда, когда n-нормально уравнение (3), при этом

$$n(A) = \dim N(A) = \dim N(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) = n(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})$$

Предположим теперь, что уравнение (2) -нормально. Тогда

$$\operatorname{def} \overline{R(A)} = \dim [R(A)]^{\perp} = \dim N(A^*) = \dim N(A_{22}^* - A_{12}^* A_{11}^{*-1} A_{21}^*) =$$

$$= \operatorname{def} \overline{R(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})}.$$ Последнее равенство показывает, что тогда и уравнение (3) является d-нормальным.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 3. Пусть области определения операторов A_{ik} $(i, k = 1, 2)$ удовлетворяют условиям (4), (5), один из операторов, например A, обратим и $R(A_{11}) = Y_1$. Тогда для того чтобы уравнение (2) было n-нормальным, d-нормальным, нетеровым, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (3) было n-нормальным, d-нормальным, нетеровым. При этом $\varkappa_A = \varkappa_{A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}}$.

Литература.

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., 1967.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
3. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1968.
4. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., 1970.

Поступила 10 октября 1976 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979.

УДК 513.83

ЭКСПОНЕНТА, Σ-ПРОИЗВЕДЕНИЯ И К-ПРОСТРАНСТВА

В.В.Попов

Волгоградский государственный университет

В работе рассмотрены условия, при которых экспонента $\exp X$ [17] топологического пространства X или Σ-произведение топологических пространств [12] является K-пространством. Основные результаты содержатся в теоремах 1,2,3,5,7 и 8. Следует отметить важность теоретико-множественной леммы 8. Часть результатов была объявлена в [9].

Для подмножества M топологического пространства X через $[M]$ будет обозначаться замыкание множества M, а через $\bar{M}$ – K-замыкание [4]. Напомним, что $\bar{M} \subset \bar{N}$ при $M \subset N \subset X$; $\bar{M} = M$ для замкнутого M и $[\bar{M} \cap B] \subset \bar{M}$ для всякого бикомпакта B, лежащего в X. В работе [4] А.В.Архангельский представил множество $\bar{M}$ в виде растущей суммы множеств M^{ξ} (ξ – ординал), удовлетворяющих следующим условиям: $M^{\xi} \subset N^{\xi}$ при $M \subset N \subset X$, $M^{\xi} = M$ для замкнутого $M \subset X$ и $[M^{\xi} \cap B] \subset M^{\xi+1}$ для бикомпакта $B \subset X$. Точка x_{α} топологического пространства X называется K_{α}-точкой (K-точкой), если из соотношений $M \subset X$ и $x \in [M]$ следует $x \in M^{\alpha}$ ($x \in \bar{M}$), см. [4,11]. Пространство, состоящее из K_{α}-точек (K-точек) называется K_{α}-пространством (K-пространством).

Через $w(X)$, $\chi(X)$, $t(X)$ обозначаются, соответственно, вес, характер и теснота пространства X (см., например, [2]). Через λ и τ обозначаются кардиналы, причем кардинал отождествляется с начальным ординалом соответствующей мощности. Остальные обозначения и определения будут вводиться по мере надобности.

Лемма 1. Пусть λ – некоторый кардинал и x – точка регулярного λ-ограниченного[*] пространства X. Пусть,

---

[*] Пространство называется λ-ограниченным, если из соотношений $M \subset X$ и $|M| < \lambda$ следует бикомпактность подпространства $[M]$.

кроме того, $Z \subset X$ и $|Z \setminus U| < \lambda$ для всякой окрестности U точки u. Тогда подпространство $\Phi = [Z]$ пространства X является бикомпактом.

Доказательство. Достаточно проверить, что из всякого открытого покрытия γ пространства X можно выделить конечное γ', покрывающее Φ. Воспользовавшись регулярностью пространства X, фиксируем открытое в X подмножество V и элемент $W \in \gamma$ такие, что $x \in V \subset [V] \subset W$. По условию леммы $|Z \setminus V| < \lambda$, поэтому λ-ограниченность пространства X влечет бикомпактность подпространства $[Z \setminus V]$ следовательно, существует конечное $\gamma'' \subset \gamma$, покрывающее $[Z \setminus V]$. Тогда $\Phi = [Z] \subset [Z \setminus V] \cup [Z \cap V] \subset \cup\{W' : W' \in \gamma''\} \cup W$, поэтому $\gamma' = \gamma'' \cup \{W\}$ - искомое конечное подпокрытие множества Φ. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть X - регулярное λ-ограниченное пространство и $\chi(X) \leq \lambda$. Тогда X является K_λ-пространством.

Доказательство. Пусть $x \in X$, $M \subset X$ и $x \in [M]$. Достаточно проверить, что $x \in M^\lambda$. Пусть $\{V_\alpha : \alpha < \lambda\}$ - база топологии в точке x, состоящая из замкнутых окрестностей.

Фиксируем ординал $\beta < \lambda$ и покажем, что существует точка $y_\beta \in M^\lambda \cap \bigcap\{V_\alpha : \alpha < \beta\}$. С этой целью для каждого конечного подмножества $S \subset \beta$ выберем точку $x_S \in M \cap \bigcap\{V_\alpha : \alpha \in S\}$ и положим $Y = \{x_S : S \subset \beta, |S| < \aleph_0\}$. Тогда $|Y| < \lambda$ и из λ-ограниченности пространства X следует бикомпактность его подпространства $B = [Y]$. Система замкнутых подмножеств $\{V_\alpha \cap B : \alpha < \beta$ бикомпакта B является, как легко проверить, центрированной, поэтому можно выбрать точку $y \in \bigcap\{V_\alpha \cap B : \alpha < \beta\}$. При этом $y \in [M \cap B] \subset M^\lambda$ и $y \in \bigcap\{V_\alpha : \alpha < \beta\}$, поэтому можем положить $y_\beta = y$.

Пусть $Z = \{y_\beta : \beta < \lambda$ и U -произвольная окрестность точки x в пространстве X. Тогда найдется ординал $\beta_0 < \lambda$, для которого $V_{\beta_0} \subset U$, а тогда при $\beta > \beta_0$ верно $y_\beta \in \bigcap\{V_\alpha : \alpha < \beta\} \subset V_{\beta_0} \subset U$; следовательно, $|Z \setminus U| < \lambda$. Отсюда по лемме 1 подпространство $\Phi = [Z]$ пространства X является бикомпактом, а следовательно, $\Phi \subset M^\lambda$. Но, как легко видеть, $x \in [Z]$, поэтому $x \in M^1$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть X – нормальное пространство, в котором всякое замкнутое подпространство имеет плотность $\leq \lambda$ и внешнюю базу [8] мощности $\leq \lambda$. Тогда пространство $\exp X$ является K_2-пространством.

Доказательство. В условиях теоремы пространство $\exp X$ регулярно [14], λ-ограниченно [13], и $\chi(\exp X) \leq \lambda$ [10]. По теореме 1 оно является K_2-пространством.

Теорема 3. Пусть для каждого $\alpha < \omega_1$ – X_α – бикомпакт счетной тесноты и веса, не превосходящего $\aleph_1$. Тогда $\exp X$, где $X = \Sigma\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, является K_2-пространством.

Доказательство. В условиях теоремы пространство X нормально [7] и $\chi(\exp X) \leq \aleph_1$ [10]. Остается воспользоваться теоремой 2 при $\lambda = \aleph_1$.

Отметим следующее: если экспонента Σ-произведения хаусдорфовых пространств является K-пространством, то число неодноточечных сомножителей меньше кардинала $2^{\aleph}$.

Теорема 4. Σ-произведение[ж)] семейства λ-ограниченных регулярных пространств X_α, характер каждого из которых не превосходит λ, является K_2-пространством.

Доказательство. Пусть $x \in X$, $M \subset X$ и $x \in [M]$. Достаточно проверить, что $x \in M^2$. Из условия теоремы и работы [8] следует $t(X) \leq \lambda$, поэтому, не ограничивая общности, будем в дальнейшем считать $|M| \leq \lambda$. Положим

$A_0 = \{\alpha$; существует такое $y \in M$, что $y_\alpha \neq x_\alpha\}$

(здесь и далее x_α у – α-ая координата точки x). Ясно, что $|A_0| \leq \lambda$, поэтому тихоновское произведение $Y = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A_0\}$ имеет характер $\leq \lambda$; из λ-ограниченности сомножителей следует λ-ограниченность Y. Учитывая регулярность Y, отсюда по теореме 1 получаем, что Y – K_2-пространство. Заметим, что существует естественный гомеоморфизм $j : Y \xrightarrow{\ } X$, при котором $j(Y) \supset M \cup \{x\}$. Остается для завершения доказательства воспользоваться таким общим фактом: если $M \subset X_1 \subset X$, $x \in X_1$ и $x \in M^{\flat} = M^{\flat}/X_1$ (оператор взятия бикомпактного замыкания действует в X_1!), то x принадлежит и множеству $M^{\flat}(= M^{\flat}/X)$ (бикомпактные замыкания берутся уже в X!).

ж) Определение Σ-произведения см. в [6].

Покажем, что Σ -произведение бикомпактов не обязано быть K -пространством. Нам потребуется для этого

Определение 1. Точку x топологического пространства X назовем $\aleph_1$ -точкой, если для всякого $M \subset X$ такого, что $|M| = \aleph_1$ и $x \in [M] \setminus [M]_{\aleph_0}$ существует $M_0 \subset [M]_{\aleph}$ мощности $\aleph_1$, для которого $|M \setminus U| \le \aleph_0$ для всякой окрестности U точки x.

Напомним, что $[M]_{\aleph_0} = \cup\{[M'] : M' \subset M, |M'| \le \aleph_0\}$ – $\aleph_0$ – замыкание множества M, см. [5].

Теорема 5. Пусть $x_\circ$ – точка регулярного пространства X, пространство $\Sigma = \Sigma_s\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ является K-пространством и при всех $\alpha < \omega_1$ существуют гомеоморфизмы "на" $j_\alpha : X_\alpha \to X$ такие, что $j_\alpha(S_\alpha) = X_\circ$. Тогда $x_\circ$ является $\aleph_1$ -точкой.

Доказательство. Пусть $M = \{m^\beta : \beta < \omega_1\}$ и $x_\circ \in [M] \setminus [M]_{\aleph_0}$. Построим M_0 в соответствии с определением 1. Для $\alpha, \beta, \gamma < \omega_1$ введем следующие множества и отображения: $M_\gamma = [\{m^\beta : \beta < \gamma\}]$, $P_\alpha : \Sigma \to X_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} X$ – естественное проектирование на X, $X/_\beta$ – точка Σ -произведения, определенная через проекции следующим образом: $P_\alpha(X/_\beta) = x$ при $\alpha \neq \beta$ и $P_\alpha(X/_\beta)$ при $\alpha > \beta$; $(x \in X)$; $\mathcal{P}_\gamma = \{y : y = X/_\gamma$ при некотором $x \in M_\gamma\}$, $\mathcal{L}_{\gamma'} = \cup\{\mathcal{P}_\gamma : \gamma \in \gamma'\}$ и $\mathcal{L} = \cup\{\mathcal{L}_{\gamma'} : < \omega_1\}$. Несложные, хотя и громоздкие выкладки показывают, что $[\mathcal{L}_{\gamma'}] = \mathcal{L}_{\gamma'}$ при всех $\gamma' < \omega_1$, $[\mathcal{L}] = \mathcal{L} \cup \{S\}$. и $P_1(\mathcal{L}) \subset [M]_{X_0}$. Ясно, что $s \bar{\in} \mathcal{L}$, поэтому $\mathcal{L}$ не замкнуто в Σ. Так как Σ является K -пространством, найдется такой бикомпакт $B \subset \Sigma$, для которого $B \cap \mathcal{L}$ не замкнуто, а тогда $S \in [B \cap \mathcal{L}]$.

Положим $M_\circ = P_1(B \cap \mathcal{L})$, тогда $M_\circ \subset P_1(\mathcal{L}) \subset [M]_{X_\circ}$. Допустим, что существует окрестность $\mathcal{U}$ точки $x_\circ$, для которой множество $M_1 = M_\circ \setminus \mathcal{U}$ несчетно. Так как $M_1 \subset P_1(B)$ и B бикомпакт, множество M_1 имеет в пространстве $P_1(B$ некоторую точку полного накопления x_1. Пусть $\bar{x}_1$ – точка тихоновского произведения $\Pi\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, все координаты которой равны x_1. Из замкнутости множеств $\mathcal{L}_\gamma$ и соотношения $S \in [B \cap \mathcal{L}]$ получаем, что множество $\{\gamma : \mathcal{X}_\gamma \cap B \neq \emptyset\}$ конфинально ω_1. Теперь уже нетрудно сделать вывод о том, что $\bar{x}_1 \in [B \cap \mathcal{L}]$. Но последнее невозможно, так как $\bar{x}_1 \in B \setminus \Sigma$, а бикомпакт замкнут во всяком объемлющем пространстве [1]. Теорема доказана.

В условиях теоремы 5 выполняется соотношение $\Sigma' \underset{top}{=} \Sigma \{ Y_\alpha : Y_\alpha = \Sigma, \alpha < \omega_1 \}$, поэтому по указанной теореме всякая точка пространства Σ является $\aleph_1$-точкой. Отметим, что в сильно счетно-компактном пространстве*) в обозначениях определения 1 выполнено соотношение $[M]_{X_1} \subset M^1$, а подпространство $[M_0]$ пространства X бикомпактно (по лемме 1); рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, показывают, что всякая точка такого пространства является $\aleph_1$-точкой.

Следствие 1. Для Σ-произведения X не более чем $\aleph_1$ экземпляров сильно счетно-компактного пространства эквивалентны условия: а) X - K-пространство; б) X - K_1-пространство; в) каждая точка пространства X является $\aleph_1$-точкой.

Следствие 2. Σ-произведение произвольного семейства экземпляров регулярного сильно счетно компактного пространства характера, не превосходящего $\aleph_1$, состоит из $\aleph_1$-точек.

Лемма 2. Точка $b \in \beta X \setminus [X]_{\aleph_0}$ Стоун-Чеховского расширения βX дискретного пространства X мощности $\aleph_1$ не является $\aleph_1$-точкой.

Доказательство. Предположим противное, тогда для множества $M = X$ в соответствии с определением 1 можно выбрать такое $M_0 \subset [X]_{\aleph_0}$, для которого справедливо свойство (1): $M_0 \setminus \mathcal{U}$ счетно для всякой окрестности $\mathcal{U}$ точки b, причем $|M_0| = \aleph_1$. По трансфинитной индукции для всех $\alpha < \omega_1$ построим семейство дизъюнктных подмножеств A_α множества X и точки $z_\alpha \in M_0$ такие, что будет выполняться (2): $z_\alpha \in [A_\alpha]_{\beta X} \cap M_0$. Точку $z_1 \in M_0$ выбираем произвольно. На α-ом шаге индуктивного построения

---

*) Сильно счетно компактным пространством принято называть $\aleph_1$-ограниченное пространство.

полагаем $B=[\cup\{A_{\alpha'}:\alpha'<\alpha\}]$, тогда $B\subset[X]_{\aleph_0}$ и $b\in\beta X\setminus B\subseteq_{\delta_p}\beta X$. Из (1) и равенства $|M_0|=\aleph_1$ следует существование точки $z_\alpha\in M_0\setminus B$. Так как $z_\alpha\in M_0$ можем выбрать такое счетное множество $A\subset X$, что $z\in[A]_{\beta X}$ и $[A]_{\beta X}\cap B=\emptyset$. Построение завершаем, положив $A_\alpha=A$.

Рассмотрим $C'=\cup\{A_\alpha:\alpha$ -четный ординал$\}$ и $C''=\cup\{A_\alpha:\alpha$ - нечетный ординал $\}$, тогда из (1) и (2) следует, что множество $C'\cup C''$ является элементом ультрафильтра b [15] ; так как $C'\cap C''=\emptyset$, одно из множеств, скажем, C' не является элементом ультрафильтра b, поэтому $b\notin[C']_{\beta X}$. Тогда из (2) следует, что для окрестности $U=\beta X\setminus[C']_{\beta X}$ точки b выполняется соотношение $|M\setminus U|\geq\aleph_1$, что противоречит предположению (1).

Лемма доказана.

Из леммы 2 и теоремы 5 получаем:

Теорема 6. Существует бикомпакт B веса $2^{\aleph_1}$, Σ-произведение $\aleph_1$ экземпляра которого не является K-пространством.

Пользуясь однородностью канторова куба D^c веса континуум и его универсальностью для пространств веса c, а также наследственностью по замкнутым подпространствам свойства быть K-пространством [4], в модели теории множеств, в которой $c=2^{\aleph_1}$ [16], можем утверждать, что Σ -произведение $\aleph_1$ экземпляра канторова куба D^c не является K-пространством. В то же время в предположении континуум-гипотезы имеем $\chi(D^c)=\aleph_1$, поэтому указанное Σ -произведение является K-пространством по теореме 4 (при $\lambda=\aleph_1$).
Поэтому справедлива

Теорема 7. Для Σ -произведения $\aleph_1$ экземпляра тихоновского куба веса континуум свойство быть K-пространством не зависит от системы аксиом ZFC теории множеств.

Ниже будет показано, что Σ -произведение произвольного семейства линейно упорядоченных бикомпактов является K-пространством. Нам потребуется теоретико-множественная лемма:

Лемма 3. Пусть λ и τ - некоторые кардиналы, причем кардинал λ регулярен и его конфинальный характер $cf(\lambda)$

ж) τ^+ - наименьший из кардиналов, превосходящих τ.

больше кардинала τ^{+} ж). Пусть, кроме того, $\{R_\gamma : \alpha < \lambda\}$ – семейство подмножеств некоторого множества Z, причем $|R_\alpha| \leq \tau$ при всяком α. Тогда существует $Z_0 \subset Z$ такое, что $|Z_0| \leq \tau$, и для всякого $B \subset Z \setminus Z_0$, $|B| \leq \tau$ множество $\{\alpha : R_\alpha \cap B = \emptyset\}$ имеет мощность λ.

Доказательство. Для некоторого сокращения записи будем предполагать $\tau = \aleph_0$. Предположим, что заключение леммы неверно, и построим семейство $\{B_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ подмножеств множества Z и ординалы $\beta_\alpha < \lambda$, где $\alpha < \omega_1$, которые удовлетворяют условиям:

(1) $B_{\alpha'} \cap B_\alpha = \emptyset$ при всех $\alpha' < \alpha < \omega_1$;

(2) $R_\gamma \cap B_\alpha = \emptyset$ при всех $\gamma \geq \beta_\alpha$.

Допустим, что построение произведено для всех α', меньших некоторого $\alpha < \omega_1$. Положим $Z_0 = \{B_{\alpha'} : \alpha' < \alpha\}$, тогда $|Z_0| \leq \aleph_0$. Так как заключение леммы предполагается неверным, найдется подмножество $B_\alpha \subset Z \setminus Z_0$ такое, что множество $\{\gamma : R_\gamma \cap B_\alpha = \emptyset\}$ имеет мощность, меньшую, чем λ. Из регулярности кардинала λ следует существование ординала $\beta_\alpha < \lambda$ такого, что из $\gamma \geq \beta_\alpha$ следует $R_\gamma \cap B_\alpha \neq \emptyset$. Построение закончено. Положим $\bar{\gamma} = \sup\{\beta_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, тогда $\bar{\gamma} < \lambda$ и из (1) и (2) получаем $|R_{\bar{\gamma}}| \geq \aleph_1 > \aleph_0$, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Теорема 8. Пусть пространство X является Σ-произведением семейства $\{X_\alpha : \alpha \in Z\}$ линейно упорядоченных бикомпактов, где Z – некоторое множество индексов. Тогда X есть k-пространство.

Доказательство. Пусть $s \in X$, $M \subset X$ и $s \in [M]$; достаточно проверить, что $x \in \bar{M}$. Будем предполагать, что выполняется условие (ж): проекция s_α точки s является минимальной точкой линейно упорядоченного пространства X_α при всяком $\alpha \in Z$. Ниже будет показано, что это условие несущественно.

Фиксируем $\alpha \in Z$ и положим $\lambda_\alpha = \chi(s_\alpha, X_\alpha)$; пусть $B_\alpha = X_\alpha$ при $\lambda_\alpha = \aleph_1$ и $B_\alpha = \{s_\alpha\}$ при $\lambda_\alpha \neq \aleph_1$. Отметим, что $\chi(s_\alpha, B_\alpha) \leq \aleph_1$. Доказательство теоремы разобьем на ряд последовательных утверждений.

А) При всяком $\alpha_0 \in Z$ существует точка $y \in \bar{M} \cap p_{\alpha_0}^{-1}(B_\alpha)$. (Здесь и далее $p_\alpha : X \to X_\alpha$ - проектирование).

Пользуясь линейной упорядоченностью пространства X_{α_0} , выберем подмножество $N \subset p_{\alpha_0}(M)$ минимальной мощности, для которого s_{α_0} является единственной точкой полного накопления. Фиксируем $M' \subset M$ такое, что ограничение проектирования p_{α_0} на M' взаимно однозначно и $p_\alpha(M') = N$. Возможны три случая:

1. $|N| \aleph_0$; тогда из счетности множества M' и сильной счетной компактности пространства X следует бикомпактность подпространства $\Phi = [M']$ пространства X Отсюда $\Phi \subset [\Phi \cap M] \subset \bar{M}$. Так как непрерывный образ бикомпакта замкнут в любом объемлющем пространстве [1] и $s_{\alpha_0} \in p_{\alpha_0}[M]$, существует точка $y \in \Phi$, для которой $p_{\alpha_0}(y) \in \Phi \subset \bar{M}$.

2. $|N| = \aleph_1$; тогда $B_{\alpha_0} = X_{\alpha_0}$, поэтому любая точка из M удовлетворяет сформулированному требованию.

3. Пусть $|N| > \aleph_1$; можем считать при этом, что кардинал $\lambda = |N|$ регулярен и $cf(\lambda) > \aleph_1$. Пронумеруем точки M трансфинитами: $M' = \{y^\alpha : \alpha < \lambda\}$, и пусть подмножество R_α является носителем точки y^α относительно точки s , то есть $R_\alpha = \{\gamma : p_\gamma(y^\alpha) \neq s_\gamma\}$. Для семейства $\{R_\alpha : \alpha < \lambda\}$ счетных подмножеств множества Z фиксируем в соответствии с леммой 3 множество $Z_0 \subset Z$, $|Z_0| \le \aleph_0$, и пусть $j : Y \to X$ - естественный гомеоморфизм "в" тихоновского произведения $Y = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in Z_0 \cup \{\alpha_0\}\}$, $Y_1 = j(Y)$. Из $|Z_0| \le \aleph_0$ и бикомпактности сомножителей X_α следует бикомпактность Y_1 .

Покажем, что $s_{\alpha_0} \in [p_{\alpha_0}(Y_1 \cap \bar{M})]$. Пусть U - произвольная замкнутая окрестность точки s_{α_0} в пространстве X_{α_0} , тогда $|N \setminus U| < \lambda$, откуда $|M_1| = \lambda$, где $M_1 = M' \cap p_{\alpha_0}^{-1}(U)$. Построим по индукции точки $z_n \in M_1$ с дизъюнктными вне множества $Z_0 \cup \{\alpha_0\}$ носителями B_n . Точку $z_1 \in M_1$ выберем произвольно, а на n-ом шаге полагаем $B = \cup\{B_i : i = n\}$, тогда из равенства $|M_1| = \lambda$ и леммы 1 следует существование ординала $\alpha' < \lambda$ такого, что $R_{\alpha'} \cap B \setminus (Z_0 \cup \{\alpha_0\}) = \emptyset$. Полагаем $z_n = y^{\alpha'}$. Построение завершено. Рассмотрим $T = \{z_n : n = 1, 2, \ldots\}$, тогда $|T| \le \aleph_0$, поэтому в бикомпактном подпространстве $F = [T]$ сильно счетно компактного пространства X существует предельная точка y' . Из "почти" дизъюнктности носителей точек из T следует $y \in Y_1$. Кроме того, $y' \in [M_1] \subset p_{\alpha_0}^{-1}[U]$, откуда $y'_{\alpha_0} \in U$. Верно также $y' \in F \subset [F \cap M_1] \subset \bar{M}_1 \subset \bar{M}$. Отсюда $p_{\alpha_0} y' \in p_{\alpha_0}(Y_1 \cap \bar{M})$. Так как окрестность U точки s_{α_0} выбиралась произвольно, получаем $s_{\alpha_0} \in [p_{\alpha_0}(Y_1 \cap \bar{M})]$. Но Y_1 – бикомпакт, поэтому $Y_1 \cap \bar{M}$ — также бикомпакт, следовательно, множество $p_{\alpha_0}(Y_1 \cap \bar{M})$ замкнуто и содержит точку s_{α_0}; поэтому найдется точка $y \in Y_1 \cap \bar{M}$ такая, что $p_{\alpha_0}(y) = s_{\alpha_0}$. Но $[Y_1 \cap \bar{M}] \subset \bar{M}$, откуда $s_{\alpha_0} \in p_{\alpha_0}(\bar{M})$. Осталось вспомнить, что $B_{\alpha_0} = \{s_{\alpha_0}\}$. Пункт А) доказан.

Б) Фиксируем при каждом $\alpha_0 \in Z$ монотонно убывающую базу $\{B_{\alpha_0}^{\gamma} : \gamma < \omega_1\}$ топологии в точке s_{α_0} бикомпакта B_{α_0}, причем множества $B_{\alpha_0}^{\gamma}$ замкнуты и среди них могут быть совпадающие. Покажем, что при всяких $\alpha_0 \in Z$ и $\gamma < \omega_1$ найдется точка $y \in \bar{M} \cap p_{\alpha}^{-1}(B_{\alpha}^{\gamma})$.

При $\lambda_{\alpha_0} = \aleph_1$ достаточно воспользоваться пунктом А) с заменой сомножителя X_{α_0} сомножителем $B_{\alpha_0}^{\gamma}$ и множества M множеством $M \cap p_{\alpha_0}^{-1}(B_{\alpha_0}^{\gamma})$. При $\lambda_{\alpha_0} \neq \aleph_1$ выполнено соотношение $B_{\alpha_0}^{\gamma} = \{s_{\alpha_0}\} = B_{\alpha_0}$ и Б) эквивалентно уже доказанному А).

В) Покажем, что при всяком $\gamma < \omega_1$ и всяком не более чем счетном $Z' \subset Z$ выполняется :

$$s \in [\cap\{p_{\alpha}^{-1}(B_{\alpha}^{\gamma}) : \alpha \in Z'\} \cap \bar{M}] \qquad (*)$$

(1) $Z' = \{\alpha_0\}$ при $\alpha_0 \in Z$.

Пусть U – произвольная замкнутая окрестность точки s пространства X, тогда используя Б) для множества $M_1 = M \cap U$ найдем точку $y \in p_{\alpha_0}^{-1}(B_{\alpha_0}^{\gamma}) \cap \bar{M}$. Тогда $y \in [M_1] \cap U$, откуда $p_{\alpha}^{-1}(B_{\alpha_0}^{\gamma}) \cap \bar{M} \cap U \neq \emptyset$. Ввиду произвольности выбора окрестности U свойство (*) верно при $|Z'| = 1$.

(2) Пусть $Z' = \{\alpha_0, \alpha_1\}$. Используя (1) для множества $M_1 = p_{\alpha_0}^{-1}(B_{\alpha_0}^{\gamma}) \cap \bar{M} \cap U$, где U – произвольная замкнутая окрестность точки s, найдем точку $y \in C = p_{\alpha}^{-1}(B_{\alpha_1}^{\gamma}) \cap M_1$. Но $C \subset p_{\alpha_1}^{-1}(B_{\alpha_1}^{\gamma}) \cap \bar{M} \cap U$, что ввиду произвольности выбора U доказывает (*) для случая (2).

(3) $|Z'| < \aleph_0$, тогда справедливость (*) доказывается

последовательным применением пункта (2).

(4) $|\mathcal{Z}'| = \aleph_0$. Пусть $\mathcal{Z}' = \{\alpha_n : n < \omega_0\}$. Фиксируем произвольную замкнутую окрестность V точки s в X и для всякого n выберем в соответствии с пунктом (3) точку $y_n \in \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(B_{\alpha_i}^{\xi}) : i < n\} \cap \bar{M} \cap V$. Тогда центрированная система $\{p_{\alpha_i}^{-1}(B_{\alpha_i}^{\xi}) \cap \Phi : i < n\}$ замкнутых подмножеств бикомпакта $\Phi = [\{y_n : n < \omega_0\}]$ сильно счетно-компактного пространства X имеет в пересечении точку y, для которой $y \in \bigcap\{p_{\alpha_i}^{-1}(B_{\alpha_i}^{\xi}) : i < \omega_0\} \cap V$, откуда $y \in \Phi \subset [\bar{M} \cap \Phi] \subset M$, а поэтому ввиду произвольного выбора V утверждение (*) справедливо. Пункт В) полностью доказан.

Г) Построим по трансфинитной индукции точки $y_\xi \in \bar{M}$ с носителями R_ξ для $\xi < \omega_1$, для которых выполняется следующее условие:

$$p_\alpha(y_\xi) \in B_\alpha^{\xi} \text{ при } \xi' < \xi < \omega_1 \text{ и } \alpha \in R_\xi \quad (**)$$

Точку $y_1 \in M$ выберем произвольно и на шаге ξ индукции положим $\mathcal{Z}' = \bigcup\{R_{\xi'} : \xi' < \xi\}$; тогда $|\mathcal{Z}'| \le \aleph_0$, и из В) следует существование точки $y \in \bigcap\{p_\alpha^{-1} B_\alpha^{\xi} : \alpha \in \mathcal{Z}'\} \cap \bar{M}$, которую и принимаем за y_ξ. Проверка справедливости (**) тривиальна.

Положим $P = \{y_\xi : \xi < \omega_1\}$ и $R = \bigcup\{R_\xi : \xi < \omega_1\}$ и покажем, что для произвольной окрестности O_s точки s верно $|P \setminus O_s| \le \aleph_0$. Очевидно, указанное свойство достаточно проверить для элементов стандартной предбазы. Итак, пусть $O_s = p_\alpha^{-1}(\mathcal{U})$ где $\mathcal{U}$ — окрестность точки s_α в пространстве X_α и $\alpha \in \mathcal{Z}$. Если $\alpha \in \mathcal{Z} \setminus R$, то $p_\alpha(y_\xi) = s_\alpha \in \mathcal{U}$ при всяком ξ, откуда $P \setminus O_s = \emptyset$. Пусть теперь $\alpha \in R_{\xi_0}$. Так как семейство $\mathcal{B} = \{B_\alpha^{\xi} : \xi < \omega_1\}$ образует базу топологии пространства B_α в точке s_α, найдется $\xi_1 < \omega_1$ такое, что $B_\alpha^{\xi_1} \subset \mathcal{U}$. Пусть $\xi > \bar{\xi} = \max\{\xi_0, \xi_1\}$ и $\xi < \omega_1$, тогда из (**) и монотонности базы $\mathcal{B}$ получаем: $p_\alpha(y_\xi) \in B_\alpha^{\xi} \subset B_\alpha^{\xi_1} \subset \mathcal{U}$. Отсюда $y_\xi \in O_s$ при $\xi > \bar{\xi}$, следовательно, $|P \setminus O_s| \le \aleph_0$. По лемме 1 подпространство $K = [P]$ пространства X является бикомпактом; кроме того, $s \in K$, поэтому $s \in K = [K \cap \bar{M}] \subsetneq M$. Доказано, что s является k-точкой в пространстве X, откуда $s \in \bar{M}$ при $M \subset X$ и $s \in [M]$.

Покажем теперь, что требование (ж) несущественно. Для $\alpha \in \mathcal{I}$ положим $X_\alpha^- = \{x \in X_\alpha : x \le s_\alpha\}$ и $X_\alpha^+ = \{x \in X_\alpha : x \ge s_\alpha\}$, тогда X гомеоморфно замкнутому подпространству $\{s_\alpha\} \times X_\alpha^- \cup X_\alpha^+ \times \{s_\alpha\}$ пространства $X_\alpha^+ \times X_\alpha^-$. Меняя в X_α^- порядок на обратный, получим бикомпакт $\tilde{X}_\alpha$, в котором точка s_α минимальна. Из сказанного ранее следует, что точка S пространства $\Sigma, \{(X_\alpha^+ \times X_\alpha^-) : \alpha \in \mathcal{I}\} = X$ является K-точкой; осталось заметить, что $\Sigma\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$ гомеоморфно замкнутому подпространству пространства X. Так как свойство быть K-точкой наследуется замкнутыми подпространствами, доказательство теоремы завершено.

При доказательстве теоремы 8 использовался частный случай леммы 3 (при $\lambda = \aleph_1$): использование указанной леммы в полном объеме позволяет показать, что Σ_λ-произведение, а также σ-произведение [12] произвольного семейства линейно упорядоченных бикомпактов является K-пространством.

Автор выражает искреннюю признательность А.В.Архангельскому и В.В.Филипову за внимание, проявленное к работе, и ценные советы.

Литература

1. Александров П.С., Урысон П.С. Мемуар о компактных топологических пространствах. М., 1971.
2. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., 1974.
3. Архангельский А.В. Число Суслина и мощность. Характеры точек в бикомпактах. - ДАН СССР, т.192, №2, 1970, с.255-258.
4. Архангельский А.В. Бикомпактные множества и топология пространств. - Труды Московск.мат.о-ва, т.13, 1965, с.3-84.
5. Архангельский А.В. Спектр часто топологического пространства и классификация пространств. - ДАН СССР, т.206, №2, 1972, с.265-267.
6. Ефимов Б.А. О диадических бикомпактах. - ДАН СССР, т.152, №3, 1963, с.794-797.
7. Комбаров А.П., Малыхин В.И. О Σ-произведениях. - ДАН СССР, т.213, № 4, 1973, с.774-777.

8. Малыхин В.И. О тесноте и числе Суслина в exp X и произведениях пространств. - ДАН СССР, т.203, №5, 1972, с.1001-1003
9. Попов В.В. Σ-произведения и к-пространства. - ДАН СССР, т.229, №5, 1976, с.1051-1055.
10. Чобан М.М. Об экспоненциальной топологии. - ДАН СССР, т.186, №2, 1969, с.272-274.
11. Bashkirov A.I. On product of K_1-spaces. - Bull.Acad.Sci., vol.23, N5, 1975, p.549-553.
12. Corson H.H. Normality in subsets of product spaces. - Amer.J.Math., vol.81, 1959, p.785-796.
13. Keesling J. Normality and propethes related to compactnes in hyperspaces. - Proc.Amer.Math.,Soc., vol.24, N 4, 1970, p.760-765.
14. Michael E. Topologies on spaces of subsets. - Trans.Amer. Math.Soc., vol.71, 1951, p.152-182.
15. Rudin W. Homogeneity problems in the theory of Čech compactificahars. - Durke Math.J., vol.23, 1956, p.409-419.
16. Solovay R., Tennenbaum S. Herated Coden extensions and Suslin's Problem. - Annals of Math., vol.94, 1971, p.201.
17. Victoris M., Monat.Math.Ph., 31, 1921, 173-204.

Поступила 15 марта 1978 г.

УДК 513.83

О ТЕСНОТЕ И БЛИЗКИХ ПОНЯТИЯХ

Б.Шапировский

ЦНИИ ИнформЭлектро

Понятие тесноты топологического пространства, введенное А.В.Архангельским, – одно из центральных в теории кардинальных инвариантов – интенсивно развивающейся области теоретико-множественной топологии (см., например, [1], [19], [20]).

<u>Теснотой</u> $t(X)$ топологического пространства X называют минимальное из кардинальных чисел τ таких, что для всякого множества $M\subset X$ и для всякой точки $x\in[M\setminus\{x\}]$ существует подмножество $M'\subset M\setminus\{x\}$, для которого $x\in[M']$ и, кроме того, $|M'|\leq\tau$. [1)]

Заменив в этом определении выражение "для всякого множества $M\subset X$" на выражение "для всякого замкнутого множества $M\subset X$", получим определение <u>c-тесноты</u> $t_c(X)$ топологического пространства X.

Очевидно, что $t_c(X)\leq t(X)$ для всякого пространства X.

Как показал Д.В.Ранчин, которым впервые было выделено понятие c-тесноты [14], см.также [15] и [11]), существуют и притом достаточно хорошие, пространства, на которых это неравенство становится строгим: им построено регулярное финально компактное пространство P, у которого $t_c(P)=\aleph_0<t(P)$. [14], [15].

В этой работе мы докажем, в частности, что для широкого класса бикомпактов c-теснота и теснота совпадают. Таков, например, класс бикомпактов с условием Суслина (следствие 4). Сразу же подчеркнем, что для класса всех бикомпактов проблема остается открытой, т.е. нет ответа на следующий вопрос:

Верно ли (хотя бы в дополнительных аксиоматических предположениях, например, в предположении GCH), что для всякого бикомпакта X справедливо равенство $t_c(X)=t(X)$? [14].

Отметим, что по методу и проблематике эта работа близка к статье [13], ряд определений и утверждений из которой здесь уточняется и обобщается.

---

1) Через $[A]$ обозначается замыкание множества A, через $|A|$ – его мощность.

Обозначения и определения. Атомом точки $x \in X$ в $Y \subset X$ мы называем /см. [11], а также [13]/ кардинальное число $a(x,Y) = \min\{|M| : M \subset Y\setminus\{x\}, x \in [M]\}$ при $[Y\setminus\{x\}] \ni x$, $a(x,Y) = 1$, если точка $x \in Y$ изолирована в Y, $a(x,Y) = 0$ если $x \notin [Y]$. Ясно, что тогда

$t(x,X) = \sup\{a(x,Y) : Y \subset X\}$ – теснота точки x в X,

$t(X) = \sup\{a(x,Y) : x \in X, Y \subset X\}$ – теснота пространства X.

Аналогично, $t_c(x,X) = \sup\{a(x,F) : F$ – замкнуто в $X\}$ – c-теснота точки x в X. $t_c(X) = \sup\{t_c(x,X) : x \in X\} = \sup\{a(x,F) : x \in X, [F] = F \subset X\}$ – c-теснота X.

По поводу неразъясненных обозначений и определений см. [1] или [9], [13].

Пусть $Y \subset X = \prod\{X_\alpha : \alpha < \delta\}$ и $z \in X$. Естественное отображение $P_\alpha^z : X \to X$ определяется следующими соотношениями: для всех $x \in X$ $\pi_\beta P_\alpha^z(x) = \pi_\beta(x)$ при $\beta < \alpha$ и $\pi_\beta P_\alpha^z(x) = \pi_\beta(z)$ при $\beta \geqslant \alpha$ $(\beta < \delta)$, где $\pi_\beta : X = \prod\{X_\alpha : \alpha < \delta\} \to X_\beta$ – естественная проекция.

Центральное определение I. Точку $z \in X = \prod\{X_\alpha : \alpha < \delta\}$ назовем б а з и с н о й точкой для $Y \subset X$ (относительно семейства $\{X_\alpha : \alpha < \delta\}$), если для всех $\alpha < \delta$ $(\alpha \neq 0)$ $P_\alpha^z(Y) \subset Y$ (Ясно, что $P_0^z(Y) = \{z\}$, поэтому если и $\{z\} = P_0^z(Y) \subset Y$, то будем говорить, что точка z – базисная в Y [!] /впрочем, это различие несущественно/). Важно отметить, что если z – базисная точка для $Y \subset X$, то для всех $\alpha < \delta$ $(\alpha \neq 0)$ отображение $P_\alpha^z|Y = p_\alpha^z : Y \to P_\alpha^z(Y) \subset Y$ – ретракция, поскольку из определений сразу же следует, что

$P_\alpha^z P_\alpha^z(x) = P_\alpha^z(x)$ для всех $x \in X$.

В случае $Y \subset X_0 \times \prod\{I_\alpha : \alpha < \delta\}$ будем говорить, что Y – I-н а д с т р о й к а над X_0 (с основанием X_0) /относительно семейства $\{I_\alpha : \alpha < \delta\}$ и с базисной точкой $z \in X$ /. Если при этом $X_0 = I$, будем говорить просто, что Y – I-надстройка.

Положим $Y(z) = \cup\{P_\alpha^z(Y) : \alpha < \delta\}$.

Лемма I. Пусть $e \in Y \subset X = \prod\{X_\alpha : \alpha < \delta\}$, где δ – предельный ординал, и существует точка $z \in X$ базисная для Y. Тогда: /а/ $[Y(z)] \supset Y$ и, если множество $\{\alpha : \pi_\alpha z \neq \pi_\alpha e\}$ –

конфинально δ , то $a(e, Y(z)) = cf(\delta)$;

/в/ если множество $\{\alpha : \pi_\alpha z \neq \pi_\alpha e\}$ вполне упорядочено по типу ординала γ , то пространство $\Omega(\gamma+1)$ всех ординалов $\leq \gamma$ топологически вкладывается в Y , причем вложение $i : \Omega(\gamma+1) \to Y(z) \cup \{e\} \subset Y$ таково, что $i(\gamma) = e$ и $i(\Omega(\gamma)) \subset Y(z)$.

Доказательство пункта /в/ (пункт /а/ очевидно следует из определения I /базисной точки/):

Пусть $\{\alpha_\beta : \beta < \gamma\}$ - соответствующее упорядочение множества $\{\alpha : \pi_\beta z \neq \pi_\beta e\}$ $(\alpha_\beta < \alpha_{\beta'} \Leftrightarrow \beta < \beta')$. Положим $y_\beta = p^z_{\alpha_\beta + 1}(e)$ для всех $\beta < \gamma$ и $y_\gamma = e$. Ясно, что $E = \{y_\beta : \beta \leq \gamma\} \subset Y(z) \cup \{e\}$ и искомый гомеоморфизм $i : \Omega(\gamma+1) \to Y(z) \cup \{e\}$ задается соотношением $i(\beta) = y_\beta$ для всех $\beta \leq \gamma$.

Пусть $\mathcal{A}$ - семейство подмножеств из X . Положим

$$\pi(\mathcal{A}, X) = \min\{|\gamma| : \gamma - \pi\text{-база относительно } \mathcal{A} \text{ в } X\}$$

(семейство γ - π-база относительно $\mathcal{A}$ в X , если для всякого непустого $A \in \mathcal{A}$ существует непустое $U \in \gamma$ такое, что $U \subset A$ [13]). Таким образом, если $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_x$ - база пространства X и база точки x в X соответственно, то

$$\pi(\mathcal{B}, X) = \pi w(X) \text{ и } \pi(\mathcal{B}_x, X) = \pi\chi(x, X).$$

Все отображения далее предполагаются непрерывными.

Основное предложение I. Пусть X - бикомпакт и $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha < \gamma\}$ - семейство непустых открытых в X множеств, для которого $\pi(\mathcal{B}, X) \geq \tau \geq \aleph_0$; пусть, кроме того, семейство $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha < \tau\}$ открытых в X множеств и семейство $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \tau\}$ замкнутых в X множеств таковы, что $F_\alpha \subset G_\alpha$ и $\pi\chi(F_\alpha, X) \geq \tau$ для всех $\alpha < \tau$.

Тогда существует отображение $f : X \to I^\tau$, для которого:

/а/ $f^{-1}f(F_\alpha) \subset G_\alpha$ и $\pi_\alpha f(F_\alpha) = 1$ $(I^\tau = \Pi\{I_\alpha : \alpha < \tau\})$;

/в/ $Y = f(X)$ - I-надстройка с базисной точкой $\bar{0}$;

/с/ $f^\#(B_\alpha) \neq \Lambda$ для всех $\alpha < \tau$.

Доказательство. Поскольку $B_0 \setminus F_0 \neq \Lambda$ (иначе: $B_0 \subset F_0$ и, следовательно, $\pi\chi(F_0, X) = 1 < \tau$), то существует отображение $h : X \to I = I_0$ такое, что $h^\#(B_0) \neq \Lambda$ и $h(F_0) = 1$.

$1 \in h^{\#}(G_0)$. Положим $h = f_0 = g_1$, и пусть для всех $\alpha < \alpha' < \tau$ уже построены отображения $f_\alpha : X \to I_\alpha$ и /при $\alpha \neq 0$ / $g_\alpha = \Delta\{f_\beta : \beta < \alpha\} : X \to I^\alpha = \Pi\{I_\beta : \beta < \alpha\}$ такие, что:

(1) $f_\alpha(F_\alpha) = 1$ и $f_\alpha^{-1}(1) \subset G_\alpha$; (2) $g_\alpha f_\alpha^{-1}(0) = g_\alpha(X)$;
(3) $f_\alpha^{\#}(B_{\sigma(\alpha)}) \neq \Lambda$, где $\sigma(\alpha) = \min\{\sigma : g_\alpha^{\#}(B_\sigma) = \Lambda\}$.
Ясно, что тогда определен ординал $\sigma(\alpha') = \min\{\sigma : g_{\alpha'}^{\#}(B_\sigma) = \Lambda\} < \tau$, поскольку в противном случае, как легко видеть, $\pi(\mathcal{B}, X) \leq w(I^{\alpha'}) = |\alpha'| < \tau$ (см. [13, утв. 2]). /заметим также, что $\alpha' \leq \sigma(\alpha')$ /. Так как $B_{\sigma(\alpha')} \setminus F_{\alpha'} \neq \Lambda$, то существуют открытые множества U и V такие, что $\Lambda \neq U \subset B_{\sigma(\alpha')}$, $F_{\alpha'} \subset V \subset G_{\alpha'}$, $U \cap V = \Lambda$ и, кроме того, $g_{\alpha'}^{\#}(U \cup V) = \Lambda$ (последнее возможно, так как если для всякого открытого $V' \supset F_{\alpha'}$ $(V' \cap U = \Lambda)$ имеем $g_{\alpha'}^{\#}(U \cup V') \neq \Lambda$, то, учитывая, что $g_{\alpha'}^{\#}(U) = \Lambda$, легко получаем $\pi\chi(F_{\alpha'}) \leq w(g_{\alpha'}(X)) \leq |\alpha'| < \tau$). Тогда отображение $f_{\alpha'} : X \to I_{\alpha'}$, для которого

$$f_{\alpha'}(X \setminus (U \cup V)) = 0, \quad f_{\alpha'}(F_{\alpha'}) = 1 \in f_{\alpha'}^{\#}(V), \ f_{\alpha'}^{\#}(U) \ni \tfrac{1}{2}$$

отвечает /вместе с $g_{\alpha'}$ / условиям (1) – (3). Построенное таким образом отображение

$$f = \Delta\{f_\alpha : \alpha < \tau\} : X \to I^\tau = \Pi\{I_\alpha : \alpha < \tau\}$$ – искомое.

Действительно, пункты /а/ и /с/ очевидно вытекают из условий (1) и (3). Остается проверить, что в силу (2) точка $\bar{0} \in I^\tau$ – базисная для $Y = f(X) \subset I^\tau = \Pi\{I_\alpha : \alpha < \tau\}$ (и, следовательно, Y – I-надстройка).

При $\mathcal{Y} = \mathcal{F} = \Lambda$ наше предложение I превращается в предложение I из [13]. Кроме того, на нем основывается

Лемма 2. Пусть X – бикомпакт, $x \in G \subset X$, $\pi\chi(x, X) \geq \tau$ и $\psi(G, X) \leq \tau$. Тогда существует отображение $f : X \to I^\tau$ такое, что

(а) $f(X) \ni \bar{1}$ и $f^{-1}(\bar{1}) \subset G$;

(в) $\Omega(\tau+1) \hookrightarrow Y = f(X)$, причем вложение $i : \Omega(\tau+1) \to Y$ таково, что $i(\tau) = \bar{1} = f(x)$ и $i(\Omega(\tau)) \subset Y(\bar{0})$.

(с) если, кроме того, $\pi\chi(x, X) = \tau$, то отображение f неприводимо в точке x и, значит, $x \in [f^{-1}(Y(\bar{0}))]$ и, при этом, $c f(\alpha(x, f^{-1}(Y(\bar{0}))) \geq c f(\tau)$

Доказательство. Положив $F_\alpha = \{x\}$ для всех $\alpha < \tau$ и взяв в качестве семейства $\mathcal{B}$ π-базу x в X, а в качестве семейства $\mathcal{H}$ – псевдобазу G в X такую, что $|\mathcal{H}| = \tau$, оказываемся в условиях предложения I. Поэтому пункт (a) нашей леммы следует из пункта /a/ предложения I, пункт (в) – из пункта /в/ предложения I и пункта /в/ леммы I. Наконец, пункт (c) следует из пункта /c/ предложения I и пункта /a/ леммы I. Действительно, в этом случае $|\mathcal{B}| = \tau$ и, значит, в силу пункта /c/ предложения I отображение f – неприводимо в точке x. Поэтому, $x \in [f^{-1}(\mathcal{Y}(\bar{o}))]$ и, следовательно, в силу (a) леммы I получаем $a(x, f^{-1}(\mathcal{Y}(\bar{o}))) \geq a(\bar{1}, \mathcal{Y}(\bar{o})) = cf(\tau)$ Доказательство завершено.

Уже пункт (в) леммы 2 уточняет предложение I из [9], которое влечет теорему I из [9] о совпадении в бикомпактах тесноты и наследственного π-характера. И хотя вопрос о возможности локализовать эту теорему, доказав в классе бикомпактов равенство $\overline{\pi\chi}(x,X) = t(x,X)$ (или, что достаточно, неравенство $\pi\chi(x,X) \leq t(x,X)$), остается открытым, тем не менее, пункт (c) леммы 2 позволяет продвинуться в этом направлении. Поэтому специально выделим его в отдельное

Утверждение I. Пусть X – бикомпакт и $x \in X$. Тогда существует множество $M \subset X$ такое, что $a(x, M) \geq cf(\pi\chi(x, X))$; следовательно, $cf(\pi\chi(x,X)) \leq t(x,X)$ и, более того, $cf(\pi\chi(x,X)) < \nabla t(x,X)$.

Если $\tau = \aleph_\alpha$, а $\mu = \aleph_{\alpha+\beta}$, то в целях краткости будем писать $\mu = \tau_{+\beta}$; в частности, $\tau^+ = \tau_{+1}$. Ясно, что $cf(\tau_{+n}) = \tau_{+n} > \tau$ при $1 \leq n < \omega_0$, и из утверждения I вытекает

Теорема I. Пусть X – бикомпакт и $\pi\chi(x,X) < t(x,X)_{+\omega_0}$

Тогда $\pi\chi(x,X) \leq t(x,X)$.

Учитывая очевидные неравенства

$$t(x,X) \leq \overline{\pi\chi}(x,X) \leq \chi(x,X)$$

из теоремы I сразу же получаем:

Теорема I'. Пусть X - бикомпакт и $\chi(x,X)<t(x,X)^{+\omega_0}$. Тогда $\overline{\pi\chi}(x,X)=t(x,X)$.

Следствие I. Если X - бикомпакт и $\chi(x,X)\leq c$ (в частности, если $|X|\leq w(X)\leq c$ или $s(X)\leq\aleph_0$) и $t(x,X)\leq\aleph_0$, то $\overline{\pi\chi}(x,X)\leq\aleph_0$ в предположении $c=\aleph_n$ /при любом $n<\omega_0$ /.

Следующее утверждение, также основывающееся на лемме 2 существенно при выяснении соотношений между δ-теснотой и теснотой в бикомпактах.

Утверждение 2. Пусть X - бикомпакт и $\overline{\pi\chi}(x,X)=\chi(x,X)=\tau$. Тогда существует бикомпакт $H\subset X$ и $H\ni x$ и неприводимое отображение $h: H\xrightarrow{\text{на}}\Omega(\tau+1)$ такое, что $h(x)=\tau$ и $h^{-1}(\tau)=\{x\}$ и, следовательно, $a(x,H)=\chi(x,H)=cf(\tau)$.

Доказательство. В силу пункта (в) леммы 2 существует бикомпакт $F\subset X$ и отображение $f: F\xrightarrow{\text{на}}\Omega(\tau+1)$ такое, что $f(x)=\tau$, а в силу пункта (а) $f^{-1}(\tau)=\{x\}$, поскольку $\psi(x,X)\leq\chi(x,X)\leq\tau$. Ясно, что $a(\tau,\Omega(\tau+1))=$ $=\chi(\tau,\Omega(\tau+1))$, и так как f - замкнуто и $f^{-1}f(x)=\{x\}$, то требуемые равенства очевидны. Заметим, наконец, что существует бикомпакт $H\subset F$, на котором отображение $f|_H=h: H\xrightarrow{\text{на}}\Omega(\tau+1)$ - неприводимо.

Замечание I. Скажем, что $\mathcal{E}=\{E_\alpha:\alpha<\gamma\}$ - свободное семейство (в X) длины γ, если $[\cup\{E_\alpha:\alpha<\beta\}]\cap[\{E_\alpha:\beta\leq\alpha<\gamma\}]=\Lambda$ при любом $\beta<\gamma$. Если все E_α - одноточечны, получаем хорошо известное определение свободной последовательности в смысле Архангельского [2]. Отметим следующий несложный, но полезный факт.

Φ_1. Для того, чтобы существовало непрерывное отображение f бикомпакта X на пространство $\Omega(\gamma+1)$ ординалов, необходимо и достаточно, чтобы в X существовало свободное семейство $\mathcal{E}$ длины γ такое, что $X=[\cup\mathcal{E}]$. При этом отображение f неприводимо тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}$ - свободная последовательность /т.е. все элементы из $\mathcal{E}$ - одноточечны/.

Ясно, что Φ_1 в силу пункта (в) леммы 2 немедленно влечет

Φ_2. Если X – бикомпакт и $x \in X$, то в X существует свободная последовательность длины $\tau = \overline{\pi}\chi(x, X)$.

Заметим, что Φ_2 усиливает основную лемму 4 из [3] (см. также [7, предложение I]), поскольку при $x \in [M] \setminus M$ имеем $\overline{\pi}\chi(x, [M]) \geq \min\{\nu : [M]_\nu \setminus M \neq \Lambda\}$.
Если же вместе с Φ_1 учесть и утверждение 2, вытекающее из пунктов (а) и (в) леммы 2, то, очевидно, получим такой его аналог:

Φ_3. Если X – бикомпакт и $\overline{\pi}\chi(x, X) = \chi(x, X) = \tau$, то в X существует свободная последовательность $\{x_\alpha : \alpha < \tau\}$ такая, что $\{x\} = [\{x_\alpha : \alpha < \tau\}] \setminus \bigcup\{[\{x_\alpha : \alpha < \beta\}] : \beta < \tau\}$.

Утверждение 3. Пусть $\nabla t_c(x, X) \leq \tau$, $\chi(x, X) < \nu$, $cf(\nu) \geq \tau$. Тогда $\nabla t(x, X) \leq \nabla\overline{\pi}\chi(x, X) \leq \nu$) и, значит, если $\nu = \lambda^+$, то $t(x, X) \leq \overline{\pi}\chi(x, X) \leq \lambda$ [I)].

Доказательство. Предположив, что $\overline{\pi}\chi(x, X') = \chi(x, X') = \nu$ для некоторого бикомпакта $X' \subset X$, приходим к противоречию, так как тогда в силу утверждения 2 существует бикомпакт $H \subset X'$, для которого $a(x, H) = cf(\nu) \geq \tau$. Значит, $\overline{\pi}\chi(x, F) < \nu$ для всякого $F \subset X$, откуда и вытекают требуемые неравенства.

Особо выделим следующий частный случай:

Утверждение 3'. Пусть X – бикомпакт и $t_c(x, X)^+ = \chi(x, X)$. Тогда $t_c(x, X) = t(x, X) = \overline{\pi}\chi(x, X)$.

Напомним, что точка $x \in X$ называется b-точкой в X [10], [11], если существуют замкнутые в X множества F_1, F_2 такие, что $\{x\} = [F_1 \setminus \{x\}] \cap [F_2 \setminus \{x\}]$; при этом точки, не являющиеся b-точками в X мы называем nb-точками в X.

Утверждение 4. Пусть X – бикомпакт, x – nb-точка в X и $t_c(x, X) \leq \tau$. Тогда $\chi(x, X) \leq 2^\tau$, $\nabla\overline{\pi}\chi(x, X) \leq 2^\tau$ и, если $t_c(x, X) = \tau$, то в предположении $2^\tau = \tau^+$

$$t_c(x, X) = t(x, X) = \overline{\pi}\chi(x, X) = \tau.$$

I) $\nabla t_c(x, X) = \sup\{a(x, F)^+ : F$ замкнуто в $X\} = \min\{\tau : a(x, F) < \tau$ для всякого замкнутого $F \subset X\}$.
$\nabla\pi\chi(x, X) = \sup\{\pi\chi(x, Y)^+ : x \in Y \subset X\} = \min\{\tau : \pi\chi(x, Y) < \tau$ для всякого $Y \subset X$ такого, что $x \in Y\}$; аналогично определяется $\nabla t(x, X)$ [8] (по поводу оператора "∇" см. [13])

Доказательство. Так как x — $h\beta$-точка, то в силу утверждения 5 из [11] $\chi(x,X)=\psi(x,X)\leq 2^{a(x,X)}\leq 2^{t(x,X)}\leq 2^{\tau}$, и, значит, утверждение 3 (которое применимо здесь, поскольку $\tau^{+}\leq cf(2^{\tau})$) вместе с утверждением 3' дают требуемые равенства.

Замечание 2. В.В.Федорчуком [6] построен (в дополнительных аксиоматических предположениях) бикомпакт, все точки которого — $h\beta$-точки. С другой стороны βN (а значит, и всякий экстремально несвязный бикомпакт) содержит β-точки [10] (Доказательство можно найти в [12], см. также [18] /Отметим, что результат, содержащийся в [18], получен и А.Шиманьским/). Тем не менее остается неясным (даже в случае βN), всякая ли точка экстремально несвязного бикомпакта является β-точкой /и, значит, точкой ненормальности/. В связи с этим отметим легко вытекающий из утверждения 2 нашей работы и утверждения 2 из [11]

Φ_4. Пусть X — бикомпакт и $\pi\chi(x,X)=\chi(x,X)=\tau$. Тогда, если $cf(\tau)<\tau$, то x — β-точка в X.

Действительно, в силу утверждения 2 существует бикомпакт $H\subset X$ такой, что $\chi(x,H)=cf(\tau)<\tau=\chi(x,X)$, но это противоречит, — если x — $h\beta$-точка, — утверждению 2 из [11]

Таким образом, при любом $\tau=\tau^{\aleph_0}$ (в частности, при $\tau=c$) из предположения $cf(\tau)<\tau$ вытекает, что всякая точка x абсолюта pI^{τ} является β-точкой, поскольку (см. [5]) $\pi\chi(x,pI^{\tau})=\chi(x,pI^{\tau})=\tau$ для любой точки $x\in pI^{\tau}$.

Чтобы продемонстрировать специфические свойства $h\beta$-точек, сформулируем следующий факт, легко вытекающий из [11, утверждение 1°, предложение 3°]:

Φ_5. Пусть X — бикомпакт, x — $h\beta$-точка в X и $\chi(x,X)=\tau>cf(\tau)$. Тогда $\pi t_c(x,X)\leq cf(\tau)$ и, следовательно (см. утверждение 3), $\pi t(x,X)\leq \pi\pi\chi(x,X)\leq\tau$.

Пусть $\mu(x,F)$ — кардинальнозначная функция, определенная для всякой точки $x\in X$ и всякого замкнутого множества $F\subset X$. Положим

$$p\mu(X)=\min\{\tau : \text{для всякого замкнутого } F\subset X \text{ существует } x\in F \text{ такая, что } \mu(x,F)\leq\tau\}.$$

Ясно, что

$$p\mu(X)=\sup\{\min\{\mu(x,F): x\in F\} : F \text{ — замкнуто в } X\}.$$

Таким образом, определены $pt(X)$, $pt_c(X)$, $p\pi\chi(X)$ и другие. (Кардинальные инварианты подобного рода уже встречались в ряде работ /например, в [17] — χ-τ-разреженные пр-ва/).

Легко заметить, что в случае бикомпакта X (и даже в случае T_2-пространства точечно-счетного типа) справедливо равенство $\rho\pi\chi(X)=\min\{\tau : F=[\{x\in F : \pi\chi(x,F)\le\tau\}]$ для всякого замкнутого $F\subset X\}$.

Аналогичные равенства справедливы для $\rho t(X)$, $\rho t_c(X)$, $\rho\chi(X)$ и вообще для всякой кардинальной функции $\rho\mu(X)$ такой, что $\mu(x,X)\le\mu(x,F)\cdot\aleph_0$ при любом замкнутом $F\subset X$ с $\chi(F,X)\le\aleph_0$.

Напомним, что $i(X)=\sup\{\tau$: существует отображение $f: X\xrightarrow{\text{на}} I^\tau\}$ и, соответственно, $\nabla i(X)=\min\{\tau$
$\nabla i(X)=\min\{\tau$: не существует отображения $f: X\xrightarrow{\text{на}} I^\tau\}$.

Утверждение 5. Пусть X – бикомпакт. Тогда $\nabla i(X)\le\min\{\tau: \tau=\tau^{\aleph_0}$ и ρI^τ не вкладывается в $X\}$.

Доказательство. Если существует отображение $f: X\xrightarrow{\text{на}} I^\tau$, то, поскольку $\rho I^\tau\hookrightarrow I^\tau$ при $\tau=\tau^{\aleph_0}$ (см., например, [5]), сразу же получаем, что $\rho I^\tau\hookrightarrow X$ (по этому поводу и по поводу абсолютов вообще см. [4], [12]).

Напомним, что $\ln(\tau)=\min\{\nu: 2^\nu\ge\tau\}$ [5] и $\operatorname{Ln}(\tau)=\min\{\nu : 2^\nu>\tau\}$ [8]. Ясно, что $\ln(\tau^+)=\operatorname{Ln}(\tau)$.

Лемма 3*. Пусть X – бикомпакт, $\tau^{\aleph_0}=\tau$, и в каждом бикомпакте $F\subset X$ с $s(F)\le\ln(\tau)$ существует точка $x\in F$ такая, что $\nabla t_c(x,F)\le cf(\tau)$. Тогда $\nabla i(X)\le\tau$.

Доказательство. При $\tau=\tau^{\aleph_0}$ для всякой точки $x\in\rho I^\tau$ имеем $\pi\chi(x,\rho I^\tau)=\chi(x,\rho I^\tau)=\tau$ и, значит, по утверждению 2 $\nabla t_c(x,\rho I^\tau)\ge cf(\tau)$ для всех $x\in\rho I^\tau$. Но $s(\rho I^\tau)\le\ln(\tau)$ (см., например, [1]) и, следовательно, ρI^τ не вкладывается в X, откуда в силу утверждения 4 и получаем $\nabla i(X)\le\tau$.

Специально выделим случаи $\tau_1=(\rho t_c(X)^{\aleph_0})^+$, $\tau_2=2^{\rho t_c(X)}$, заметив при этом, что $((\tau^{\aleph_0})^+)^{\aleph_0}=(\tau^{\aleph_0})^+$, $(2^\tau)^{\aleph_0}=2^\tau$.

Лемма 3. Пусть X – бикомпакт. Тогда
$\nabla i(X)\le\min\{(\rho t_c(X)^{\aleph_0})^+, 2^{\rho t_c(X)}\}$ и, значит,
$i(X)\le\rho t_c(X)^{\aleph_0}\le t_c(X)^{\aleph_0}$, а если $\rho t_c(X)^{\aleph_0}\le\rho t_c(X)^+$, то и $i(X)\le\rho t_c(X)\le t_c(X)$; следовательно, в предположении "$\tau^{\aleph_0}\le\tau^+$ для всех τ" и, в частности, в предположении GCH имеют место неравенства $i(X)\le\rho t_c(X)\le t_c(X)$.

Далее нам понадобится следующий результат [10, теорема 1]:

R_1. Если X – бикомпакт, то $w(X) \le l(X)^{c(X)}$.

Теорема 2. Пусть X – бикомпакт, $\gamma^{\aleph_0} = \gamma$, и в каждом бикомпакте $F \subset X$ с $\mathfrak{s}(F) \le \ln_1(\gamma)$ существует точка $x \in F$ такая, что $t_c(x, F) \le \gamma$. Тогда $l(X) \le \gamma$ и, следовательно,

$$w(X) \le \gamma^{c(X)} \le \rho t_c(X)^{c(X)} \le t_c(X)^{c(X)}.$$

Доказательство. Положив $\gamma^+ = \tau$, оказываемся в условиях леммы 3. Поэтому $l(X) \le \tau = \gamma^+$ и, значит, $l(X) \le \gamma$. Применив теперь R_1 получаем требуемые неравенства.

Следствие 2. Если X – бикомпакт с условием Суслина и каждое замкнутое подмножество $F \subset X$ (плотности $\le \aleph$) имеет точку $x \in F$ с $t_c(x, F) \le \aleph$, то и $w(X) \le \aleph$.

Новым является уже и

Следствие 2'. Если X – бикомпакт с условием Суслина и замыкание всякого подмножества $A \subset X$ мощности $\le \aleph$ имеет вес $\le \aleph$, то и вес бикомпакта X $\le \aleph$.

Так как $\ln(\tau) \le \tau$ и $t_c(x, F) \le |F|$, из теоремы 2 легко вытекает

Теорема 3. Пусть X – бикомпакт со следующим свойством: если $A \subset X$ и $|A| \le \tau$ то и $|[A]| \le \tau$.

Тогда $w(X) \le \tau^{c(X)}$ и, значит, если $\tau^{c(X)} = \tau$, то $|X| \le \tau$.

Следствие 3. Пусть X – бикомпакт с условием Суслина, $\tau^{\aleph_0} = \tau$ и $|F| \le \tau$ для всякого бикомпакта $F \subset X$ такого, что $\mathfrak{s}(F) \le \tau$. Тогда и $|X| \le \tau$; в частности, если всякое подмножество $A \subset X$ плотности $\le \aleph$ имеет мощность $\le \aleph$, то и $|X| \le \aleph$.

Замечание 3. Неравенство теоремы 2 уже в форме $w(X) \le t_c(X)^{c(X)}$ улучшает неравенство $\mathfrak{s}(X) \le 2^{t(X) c(X)}$ Архангельского из [2], и, более того, неравенство $w(X) \le t(X)^{c(X)}$ из [8, теорема 5]. В то же время теорема 3 существенно усиливает основывающийся на неравенстве $\mathfrak{s}(X) \le 2^{t(X) \cdot c(X)}$ результат, который неявно содержится в [2] и из которого вытекает известная теорема А.В.Архангельского о мощности секвенциального бикомпакта с условием Суслина. Однако метод, развитый в [2], позволяет провести доказательство лишь при $\tau = 2^{\lambda}$, и, что особенно следует подчеркнуть, базируется на требовании " $t(X) \le \lambda$ ", которое, как показывает теорема 3 является лишним.

Заметим, что хотя теорема 2 использует как $\mathfrak{A}_1$, так и лемму 3° (основывающуюся на утверждение 2), вытекающую из теоремы 2 теорему 3 можно получить почти сразу же только из неравенства $\mathfrak{A}_1$. Чтобы продемонстрировать это выделим несложный факт

$\underline{\Phi_6}$. Пусть X – бикомпакт со следующим свойством:

если $|A| \le \ell n(\tau)$, то $|[A]| < 2^{\tau}$.

Тогда $i(X) \le \forall i(X) \le \tau^{\aleph_0}$.

(Действительно, $\mathfrak{s}(pI^{(\tau^{\aleph_0})}) \le \ell n(\tau^{\aleph_0}) = \ell n(\tau)$, а $|pI^{(\tau^{\aleph_0})}| \geqslant 2^{\tau}$. Значит, $pI^{(\tau^{\aleph_0})}$ не вкладывается в X и, следовательно, по утверждению 5 $\forall i(X) \le \tau^{\aleph_0}$.

Докажем теперь теорему 3. Так как $\ell n(\tau) \le \tau < 2^{\tau}$, из Φ_6 сразу же получаем $i(X) \le \tau^{\aleph_0}$ и, в силу $\mathfrak{A}_1$, $w \le \tau^{c(X)}$. Значит, $\mathfrak{s}(X) \le \tau^{c(X)}$, что и влечет (при $\tau = \tau^{c(X)}$) немедленно $|X| \le \tau$.

Отметим, что все приведенные как выше, так и ниже теоремы (а также $\mathfrak{A}_1$) справедливы и для T_2-пространств точечно-счетного типа. Приведем в связи с этим, чтобы еще раз подчеркнуть возможности, которые дает $\mathfrak{A}_1$, следующий факт:

$\underline{\Phi_7}$. Пусть X – T_2-пространство точечно-счетного типа и с условием Суслина. Тогда, если $X \setminus \{x\}$ нормально при любом $x \in X$, то в предположении $LH \,\&\, 2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ ([8]) $X \setminus \{x\}$ коллективно нормально при любом $x \in X$, а следовательно, коллективно нормальным является пространство X.

(Φ_7 вытекает из [10, лемма 2], $\mathfrak{A}_1$, и [8, теорема 8]). Отметим, что Φ_7 нов уже в классе локально бикомпактных пространств.

Вернемся, наконец, к выяснению соотношений между c-теснотой и теснотой в бикомпактах.

Теорема 4°. Пусть X – бикомпакт, $\gamma = \gamma^{c(X)}$ и в каждом бикомпакте $F \subset X$ с $\mathfrak{s}(F) \le Ln(\gamma)$ существует точка $x \in F$ такая, что $t_c(x, F) \le \gamma$. Тогда, если $t_c(x, X') \le \tau$ и $\gamma \le \tau^{+}$ ($[X'] = X' \subset X$), то и $t(x, X') \le \tau$.

Доказательство. По теореме 2 $w(X) \le \gamma$, откуда при $\gamma \le \tau^{+}$ в силу утверждения 3 и вытекает требуемое заключение.

Следствие 4° (GCH). Пусть X – бикомпакт с условием Сусльна, и в каждом бикомпакте $F \subset X$ (плотности $\leq \Phi$) существует точка $x \in F$ такая, что $t_c(x, F) \leq \Phi$. Тогда в предположении GCH $t_c(x, X) = t(x, X)$ для всех $x \in X$.

Положив в условиях теоремы 4* последовательно $\gamma_1 = 2^{\rho t_c(X) \cdot c(X)}$, $\tau_1 = \rho t_c(X) \cdot c(X)$ и $\gamma_2 = 2^{t_c(X) \cdot c(X)}$, $\tau_2 = t_c(X) \cdot c(X)$ немедленно получаем:

<u>Теорема 4</u> (GCH). Пусть X – бикомпакт. Тогда $\rho t(X) \leq \rho t_c(X) \cdot c(X)$ и $t(X) \leq t_c(X) \cdot c(X)$.

<u>Следствие 4</u> (GCH). Если X – бикомпакт с условием Суслина, то $\rho t_c(X) = \rho t(X)$ и $t_c(X) = t(X)$.

Литература

1. Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., 1974.
2. Архангельский А.В. Число Суслина и мощность. Характеры точек в бикомпактах. – ДАН СССР, т. 192, № 2, 1970, с.255-258.
3. Архангельский А.В. О бикомпактах, которые удовлетворяют условию Суслина наследственно. – ДАН СССР, т.199, № 6, 1971, с.1227-1230.
4. Пономарев В.И. О пространствах, соабсолютных с метрическими. – УМН, т.21, № 4, 1966, с.101-132.
5. Ефимов Б.А. Экстремально несвязные бикомпакты и абсолюты. – Труды моск.мат.об-ва, т.23, 1970, с.235-276.
6. Федорчук В.В. О мощности наследственно сепарабельных бикомпактов. – ДАН СССР, т.222, № 5, 1975, с.303-305.
7. Шапировский Б.Э. О пространствах с условиями Суслина и Шанина. – Матем.заметки, т.15, № 2, 1975, с.281-285.
8. Шапировский Б.Э. Канонические множества и характер. – ДАН СССР, т.218, № 1, 1974, с.58-61.
9. Шапировский Б.Э. О π-характере и π-весе в бикомпактах. – ДАН СССР, т.223, № 4, 1975, с.799-802.
10. Шапировский Б.Э. О вложении экстремально несвязных пространств в бикомпакты. – ДАН СССР, т.223, № 5, 1975, с.1083-1086.
11. Шапировский Б.Э. О мощности наследственно нормальных пространств. – ДАН СССР, т.225, № 4, 1975, с.767-770.
12. Пономарев В.И., Шапиро Л.Б. Абсолюты топологических пространств и их непрерывных отображений. – УМН, т.31, вып.5

1976, с.121-136.
13. Шапировский Б.Э. О тесноте, π-весе и близких к ним понятиях. - В кн.: Топологические пространства и отображения в них. Уч.зап. ЛГУ им.П.Стучки, вып.2,т.257, 1976, с.88-99.
14. Ранчин Д.В. Теснота, секвенциальность и замкнутые покрытия. - ДАН СССР, т.232, № 5, 1977, с.1015-1018.
15. Ранчин Д.В. Теснота, секвенциальность и замкнутые покрытия к-пространств. - В кн.: Тезисы 3-го Тираспольского симп. по общей топологии. Кишинев, 1973, с.106.
16. Малыхин В.И. Ненормальность некоторых подпространств X, где X - дискретное пространство. - ДАН СССР, т.211, № 4, 1973, с.781-783.
17. Ефимов Б.А. О мощности расширений топологических пространств. - Матем.сб., т.96, № 4, 1975, с.614-632.
18. Грызлов А.А. К вопросу наследственной нормальности экстремально несвязных бикомпактов. - В кн.: Матер.УП Всес.топологич. конф. Минск, 1977, с.58.
19. Engelking R. General Topology. Warszava, 1977.
20. Rudin M.E. Lectures on set theoretic topology. AMS -NSF, providence, Rhode Island, vol.23, 1974.

Поступила 10 февраля 1978 г.

Топологические пространства и их отображения. Рига, 1979

УДК 513.83

НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ ФИНАЛЬНОЙ КОМПАКТНОСТИ СИЛЬНО ПАРАКОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.П.Шостак
ЛГУ им. П.Стучки

Известно, что каждое финально компактное пространство сильно паракомпактно (см.,напр., [1]). В данной заметке мы показываем, что необходимым и достаточным условием финальной компактности для сильно паракомпактного пространства X является финальная компактность пространства Q(X) квазикомпонент пространства X. Поскольку, в свою очередь, финальная компактность пространства квазикомпонент Q(X) эквивалентна свойству финальной скученности пространства X (см. определение I и предложение I), мы получаем характеристику финально компактных пространств как пространств, являющихся одновременно сильно паракомпактными и финально скученными (теорема 2). Отсюда следует, что в классе скученных пространств и, в частности, в классе связных пространств свойства сильной паракомпактности и финальной компактности совпадают.

I. Пространство квазикомпонент топологического пространства

В этом разделе мы приводим определения и некоторые нужные нам в дальнейшем результаты, касающиеся пространства квазикомпонент (см. [2]).

Квазикомпонентой точки x топологического пространства X называется пересечение всех открыто-замкнутых множеств, содержащих точку x .

На множестве Q(X) всех квазикомпонент топологического пространства X вводится топология, в качестве базы которой берется совокупность множеств вида $\{A : A \subset U\}$, где U - открыто замкнутое множество в X, а A - квазикомпонента некоторой точки пространства X. Очевидно, что наделенное такой топологией, пространство $Q(X)$ является вполне регулярным и нульмерным в смысле ind пространством. Легко заметить, что отображение $q: X \to Q(X)$, которое каждой точке $x \in X$ сопоставляет содержащую ее квазикомпоненту K_x, является непрерывным.

2. Скученные и финально скученные пространства.

Напомним, что топологическое пространство X называется скученным если из каждого покрытия этого пространства открыто-замкнутыми множествами можно выделить конечное подпокрытие (см. 3) . Там же показано, что топологическое пространство X является скученным в том и только в том случае, когда пространство его квазикомпонент $Q(X)$ бикомпактно. В дальнейшем нам будет полезно следующее определение:

Определение I. Топологическое пространство X назовем финально скученным, если из каждого открыто-замкнутого покрытия этого пространства можно выделить счетное покрытие.

Предложение I. Пространство X финально скученно в том и только в том случае, когда пространство его квазикомпонент $Q(X)$ финально компактно.

Доказательство. Если пространство $Q(X)$ не финально компактно, то в $Q(X)$ найдется открытое покрытие, из которого невозможно выделить счетное подпокрытие. Воспользовавшись нульмерностью пространства квазикомпонент, впишем в это покрытие открыто-замкнутое покрытие γ .

Ясно, что покрытие γ также не имеет счетного подпокрытия. Тогда прообразы $q^{-1}(V)$ множеств V , входящих в γ образуют открыто-замкнутое покрытие пространства X, из которого невозможно выделить конечное подпокрытие. Тем самым показано, что пространство X не является финально скученным.

Обратно, если X не финально скученно, то существует открыто-замкнутое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X, из которого невозможно выделить счетное подпокрытие. Тогда из определения топологии в $Q(X)$ следует, что $\{q(U): U \in \mathcal{U}\}$ образует открыто-замкнутое покрытие пространства $Q(X)$, из которого невозможно выделить счетное подпокрытие. Существование такого покрытия и доказывает, что пространтво $Q(X)$ не является финально скученным и тем более финально компактным. Предложение доказано.

3. Некоторые специальные семейства подмножеств

В доказательстве основной теоремы нам будет удобно воспользоваться определяемым ниже понятием цепной звезды в семействе множеств.

Определение 1. Подсемейство $\mathcal{V}$ семейства множеств $\mathcal{H}$ назовем цепной звездой (в $\mathcal{H}$), если для любых $U, V \in \mathcal{V}$ найдутся такие множества $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{V}$, что $U_1 = U$, $U_n = V$ и $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ для всех $i \neq n-1$.

Предложение 1. Каждая цепная звезда содержится в (единственной) максимальной цепной звезде.

Доказательство следует из принципа max. элемента.

Предложение 2. Если семейство $\mathcal{H}$ звездно-конечно*, то каждая цепная звезда $\mathcal{V}$ в $\mathcal{H}$ не более чем счетна.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}$ - некоторая цепная звезда, и предположим, что $\mathcal{V}$ содержит несчетное число множеств. Зафиксируем некоторое множество $U_0 \in \mathcal{V}$ и назовем расстоянием от $V \in \mathcal{V}$ до U_0 минимальное число множеств $U_1, \dots, U_n$, обладающих тем свойством, что $U_0 = U_1$, $U_n = V$ и пересечения $U_i \cap U_{i+1}$ для всех i непусты. Поскольку $\mathcal{V}$ содержит, согласно предположению, несчетное число множеств, то по крайней мере для некоторого n семейство множеств, находящихся на расстоянии n от множества U_0 несчетно. Воспользовавшись звездной конечностью семейства $\mathcal{H}$, отсюда легко вывести, что число множеств, расположенных от U_0 на расстоянии $n-1$, также несчетно. По индукции отсюда заключаем, что и число множеств, расположенных на расстоянии 1 от U_0 также несчетно, что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие и доказывает, что в каждую цепную звезду входит не более, чем счетное число множеств. Предложение доказано.

---

* Семейство множеств $\mathcal{H}$ называется звездно-конечным ([1]), если для каждого $V \in \mathcal{H}$ число элементов $U \in \mathcal{H}$, имеющих с V непустое пересечение, конечно.

4. Критерий финальной компактности сильно паракомпактных пространств

Теорема I. Топологическое пространство X финально компактно тогда и только тогда, когда оно сильно паракомпактно и пространство его квазикомпонент Q(X) финально компактно.

Теорема 2. Финально компактные пространства могут быть охарактеризованы как пространства, являющиеся одновременно сильно паракомпактными и финально скученными.

Поскольку согласно предложению I финальная скученность пространства эквивалентна финальной компактности пространства его квазикомпонент, нам достаточно доказать одну из этих теорем. Мы докажем справедливость теоремы 2.

Доказательство. Для сильной паракомпактности пространства X (необходимо и) достаточно, чтобы в каждое открытое покрытие пространства X можно было вписать открытое звездно-счетное*) подпокрытие $\mathcal{W}$ ([I], стр.229); отсюда следует, что каждое финально компактное пространство является сильно паракомпактным.

Обратно, пусть пространство X сильно паракомпактно и при этом скученно. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X и впишем в $\mathcal{U}$ звездно-конечное подпокрытие $\mathcal{W}$ (существование которого обеспечивается сильной паракомпактностью пространства X). Поскольку покрытие $\mathcal{W}$ звездно-конечно, из предложения I легко следует, что оно распадается в дизъюнктную сумму максимальных цепных звезд. Действительно, каждый элемент покрытия $\mathcal{W}$ принадлежит хотя бы одной максимальной цепной звезде, а различные такие цепные звезды ввиду своей максимальности являются дизъюнктными. Таким образом, $\mathcal{W}=\bigcup\mathcal{V}_\alpha$, где $\mathcal{V}_\alpha\cap\mathcal{V}_\beta=\emptyset$ для $\alpha\neq\beta$ и все $\mathcal{V}_\alpha$ - максимальные

---

*) т.е. для каждого элемента $V\in\mathcal{W}$ число множеств $U\in\mathcal{W}$, пересекающихся с V, не более, чем счетно.

цепные звезды. Рассмотрим множество $V_\alpha = \{V : V \in \gamma_\alpha\}$. Это множество является открыто-замкнутым: его открытость очевидна, а замкнутость следует из того факта, что для различных α, β множества V_α и V_β не пересекаются. Тем самым мы получаем дизъюнктное покрытие пространства X открыто-замкнутыми множествами V_α. Поскольку пространство X предположено финально скученным, из покрытия $\{V_\alpha\}$ можно выделить счетное подпокрытие. Отсюда, ввиду дизъюнктности исходного покрытия, получаем, что само $\{V_\alpha\}$ счетно, а следовательно, и число максимальных цепных звезд, на которые распадается семейство γ_1^2 счетно. Вспоминая, что в каждую звезду входит не более чем счетное число множеств из покрытия γ^2 (предложение 2), отсюда выводим, что и все построенное нами покрытие γ^2 счетно. Тем самым финальная компактность пространства X доказана.

Литература

1. Engelking R. Outline of General Topology. Warszava, 1968.
2. Куратовский К. Топология, т.2. М., 1969, с.624.
3. Šostak A.P. On a class of spaces containing all bicompact and all connected spaces. - General Topology and Relat. Modern. Anal.and Algebra IV. Proc. 4 th Prague Topol. Symp., 1976. Part B, Prague, 1977, p.445-451.

Поступила 13 мая 1978 г.

УДК 513.83

ЛОКАЛЬНО СКУЧЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ РАСШИРЕНИЯ

Шостак А.П.
ЛГУ им. П.Стучки

В работах [1], [2], [3] изучалось понятие скученного пространства (или св-пространства), представляющего собой обобщение свойств бикомпактности и связности. Напомним, что топологическое пространство называется скученным или св-пространством, если из каждого его покрытия открыто-замкнутыми множествами можно выделить конечное подпокрытие. В данной заметке мы рассматриваем локальный вариант свойства скученности.

Локализация топологического свойства P может быть произведена следующими двумя способами: 1) требованием наличия у каждой точки $x \in X$ базы окрестностей, обладающих свойством P; или 2) требованием у каждой точки наличия хотя бы одной окрестности, обладающей свойством P. Основным способом локализации является первый. При локализации свойства бикомпактности оба способа эквивалентны и приводят к определению локально бикомпактного пространства.

При локализации свойства связности принято использовать первый подход. Получаемые при этом пространства называются локально связными (напомним, что связное пространство не является, вообще говоря, локально связным). В данной заметке мы рассматриваем оба возможных подхода к локализации свойства скученности - в первом параграфе рассматриваются пространства, обладающие базой скученных окрестностей (эти пространства мы называем локально скученными), во втором параграфе рассматриваются пространства, каждая точка которых обладает хотя бы одной скученной окрестностью - такие пространства мы называем слабо локально скученными. Третий, последний, параграф посвящен изучению одноточечных скученных расширений локально скученных и слабо локально скученных пространств. Здесь показано, что каждое (хаусдорфово) слабо локально скученное пространство X обладает одноточечным (хаусдорфовым) скученным расширением; обратно, если у пространства имеется - одноточечное скученное и локально скученное расширение α X, то само пространство X локально скученно.

В дальнейшем все ссылки мы делаем на работу [2] , хотя формулировки большинства из используемых здесь результатов можно найти в [1] . Как и при изучении свойства скученности, для удобства мы ограничиваемся рассмотрением класса T_1- пространств.

§1. Локально скученные пространства.

Определение 1. Топологическое пространство X называется локально скученным (или локально св-пространством), если в нем существует база скученных окрестностей, т.е. если для каждой точки x $\in$ X и произвольной ее окрестности $\mathcal{U}_x$ найдется скученная окрестность V_x , содержащаяся в $\mathcal{U}_x$.

Поскольку как бикомпактные, так и связные пространства скученны [2] , локально бикомпактные пространства, а также локально связные пространства являются локально скученными.

Предложение 1. Регулярное пространство локально скученно тогда и только тогда, когда в нем существует база, состоящая из з а м к н у т ы х скученных окрестностей.

Доказательство. Если выполнено утверждение этого предложения, то пространство, очевидно, локально скученно. Обратно, пусть X - локально скученное пространство и $\mathcal{U}_x$ - произвольная окрестность некоторой его точки x. Воспользовавшись локальной скученностью и регулярностью пространства X, найдем такую скученную окрестность V_x точки x, которая лежит в $\mathcal{U}_x$ вместе со своим замыканием. Согласно предложению 7 из [2] , замыкание $\overline{V}_x$ скученно и, следовательно, является искомой окрестностью.

Предложение 2. Открытое подмножество локально скученного пространства локально скученно.

Доказательство. Пусть X - локально скученное пространство и $Y \subset X$ - его открытое подмножество. Рассмотрим произвольную точку $y \in Y$ и некоторую ее окрестность $\mathcal{U}_y$ в Y. Поскольку множество Y открыто в X, $\mathcal{U}_y$ является также окрестностью точки y во всем X. Воспользовавшись локальной скученностью пространства X, выберем такую скученную окрестность V_y точки y, которая целиком лежит в $\mathcal{U}_y \subset Y$. Существование такой окрестности и доказывает локальную скученность пространства Y.

Предложение 3. Дискретная сумма $X = \oplus X_\alpha$ топологических пространств локально скученна тогда и только тогда, когда каждое X_α является локально скученным пространством.

Доказательство очевидно.

Теорема I. Произведение $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ является локально скученным пространством тогда и только тогда, когда каждое X_α локально скученно и при этом почти все[1] X_α скученны.

Доказательство. Предположим, что произведение $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ является локально скученным пространством. Выберем точку x_{α_0} в некотором сомножителе X_{α_0} и пусть $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ - произвольная ее окрестность. Зафиксируем некоторую точку $x \in X$, для которой $\pi_{\alpha_0} x = x_{\alpha_0}$ (через π_α обозначается проекция произведения $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ на координатное пространство X_α). Поскольку X предположено локально скученным и множество $V = \mathcal{U}_{\alpha_0} \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A \setminus \{\alpha_0\}\}$ является окрестностью точки x в X, мы можем выбрать скученную окрестность V_x точки x, содержащуюся в V. Выберем теперь некоторую окрестность точки x, лежащую в V_x и имеющую вид $W = \Pi\{W_\alpha : \alpha \in A\}$, где $W_\alpha = X$ для всех индексов α, кроме, возможно, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Поскольку очевидно, что $\pi_\alpha(W) \subset \pi_\alpha(V_x)$, образы окрестности V_x при проекциях π_α

---

1) т.е. все, кроме, возможно, конечного числа X_α.

совпадают с соответствующими пространствами X_α для всех α, отличных от $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Таким образом, все координатные пространства X за исключением, возможно, пространств $X_{\alpha_0}, X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_n}$ являются скученными как образы скученного пространства X при непрерывных отображениях π_α [2, теорема 3] . Далее, поскольку, очевидно $\pi_{\alpha_0}(V_x) = V_{\alpha_0} \subset \mathcal{U}_{\alpha_0}$ множество V_{α_0} является скученной окрестностью точки x, лежащей в заданной окрестности $\mathcal{U}_{\alpha_0}$. Тем самым показано, что пространство X_{α_0} является локально скученным. Ввиду произвольности выбора пространства X_{α_0} это и означает, что все сомножители X_{α_0} являются локально скученными пространствами.

Обратно, предположим, что каждое пространство X_{α_0} локально скученно и при этом все они, кроме, возможно, конечного числа индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ являются скученными. Возьмем произвольную точку x в произведении $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$, и пусть $\mathcal{U}$ - некоторая ее окрестность; без ограничения общности можем считать, что она имеет вид $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\alpha_m} \times \mathcal{U}_{\alpha_{m+1}} \times \ldots \times \mathcal{U}_{\alpha_n} \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \neq \alpha_i\}$ Выберем в каждом $\mathcal{U}_{\alpha_i}$, где $i = 1, \ldots, m, m+1, \ldots$ скученную окрестность $V_{\alpha_i} \subset \mathcal{U}_{\alpha_i}$ точки $x_{\alpha_i} = \pi_{\alpha_i} x$. Тогда множество V, определенное равенством $V = V_{\alpha_1} \times \ldots \times V_{\alpha_m} \times \ldots \times V_{\alpha_n} \times \Pi\{X_\alpha : \alpha \neq \alpha_i\}$, является окрестностью точки x, лежащей в $\mathcal{U}$; при этом скученна как произведение скученных пространств $V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}$ и X_α $(\alpha \neq \alpha_i)$ [2, теорема 6] . Тем самым утверждение теоремы доказано.

Ранее было отмечено, что как локально связные пространства, так и локально бикомпактные пространства являются локально скученными. Приведем теперь примеры локально скученных пространств, не являющихся ни локально бикомпактными, ни локально связными.

<u>Пример 1</u>. Определим подпространство X отрезка [0,I] равенством $X = [0,I] \setminus \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$. Легко видеть, что X локально скученно и скученнс, не будучи при этом ни локально бикомпактным ни локально связным (оба эти свойства нарушаются в точке $0 \in X$). Согласно предложению 3 , дискретная сумма таких пространств также является локально скученной.

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим подпространство X плоскости, определенное равенством $X = \bigcup X_n \cup \{b\}$, где каждое X_n есть множество точек плоскости, первая координата которых равна $1/n$, а вто-

рая принадлежит отрезку $[0,1]$ и $b \in (0,1)$. Ясно, что X локально скученно (и скученно), но не является ни локально бикомпактным, ни локально связным.

<u>Пример 3</u>. Веер Кнастера-Куратовского является, как нетрудно видеть, связным и локально скученным пространством, не будучи при этом ни локально бикомпактным, ни локально связным.

Приведем теперь пример связного (вполне регулярного) пространства, не являющегося локально скученным.

<u>Пример 4</u>. Рассмотрим метрического ежа J_τ колючести τ; занумеруем все "колючки" ежа, (имеющие вид отрезков длины 1, исходящих из общей точки O) порядковыми числами, меньшими ω_τ: $I_1, I_2, \dots, I_\xi, \dots$ $\xi < \omega_\tau$. На множестве $Z = J_\tau \cup \{s\}$, где s – точка, не принадлежащая ежу J_τ, введем топологию, взяв в качестве базы все множества, открытые в топологии метрического ежа, а кроме того множества вида , где $\xi < \omega_\tau$, $\kappa \in [0,1)$ и $L_{\xi,\kappa} = \{s\} \cup \left(\bigcup_{\eta > \xi} \{x : x \in I_\eta, \rho(x,O) > \frac{\kappa-1}{\kappa}\} \right)$ (т.е. каждое множество $L_{\xi,\kappa}$ состоит из точки s и "концов" вида $\left(\frac{\kappa-1}{\kappa}; 1\right]$ всех отрезков, начиная с отрезка, имеющего номер ξ). Легко видеть, что наделенное такой топологией пространство Z связно. При этом Z не является локально скученным пространством – окрестность точки s, имеющая вид $L_{\xi,\kappa}$ при $\kappa \geqslant 2$ не содержит ни одной меньшей скученной окрестности: действительно, для любой окрестности $\mathcal{U}_s$ точки s, содержащейся в $L_{\xi,\kappa}$, семейство множеств $\{I^\kappa_{\xi+1}, I^\kappa_{\xi+2}, \dots, I_{\xi+n}, \dots, L_{\xi+\omega,\kappa}\}$, где $I^\kappa_n = \{x : x \in I_n, \rho(x,O) \geqslant \frac{\kappa-1}{\kappa}\}$ образует открыто-замкнутое покрытие $\mathcal{U}_s$, из которого невозможно выделить конечное подпокрытие.

<u>Замечание</u>. Построенное в предыдущем примере подпространство не является метризуемым, ибо в точке s не существует счетной базы. Мы не знаем, существует ли метризуемое связное пространство, которое не было бы локально скученным.

§2. Слабо локально скученные пространства.

Определение 2. Топологическое пространство называется слабо локально скученным, если каждая точка x из X обладает хотя бы одной скученной окрестностью.

Ясно, что каждое локально скученное пространство является слабо локально скученным. С другой стороны, каждое скученное пространство также является слабо локально скученным.

Предложение 4. Каждая точка слабо локально скученного пространства обладает замкнутой скученной окрестностью.

Доказательство вытекает из того факта, что замыкание скученного подмножества является скученным ([2] , предл. 7).

Предложение 5. Дискретная сумма топологических пространств слабо локально скученна тогда и только тогда, когда каждое слагаемое является слабо локально скученным пространством.

Доказательство очевидно.

Теорема 2. Произведение $X = \Pi\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ является слабо локально скученным пространством тогда и только тогда, когда каждое X_α слабо локально скученно и при этом почти все пространства X_α скученны.

Доказательство нетрудно провести по аналогии с доказательством теоремы I.

В противоположность локальной скученности свойство слабой локальной скученности не наследуется по открытым подмножествам. Действительно, пространство $X = Z\setminus\{0\}$, являющееся открытым подпространством скученного (и даже связного) пространства Z , построенного в предыдущем параграфе (пример 4), не является слабо локально скученным - точка 0 этого пространства не имеет ни одной скученной окрестности.

Приведем пример метрического пространства, не являющегося слабо локально скученным.

Пример 5. Определим пространство X как подпространство метрического ежа J_0 счетной колючести $\mathcal{X}_0$, состоящее из всех точек, расстояние которых до точки 0 равно $1/n$ $(n\in N)$ и самой точки 0. Легко видеть, что точка 0 не обладает ни одной скученной окрестностью, т.е. пространство X не является слабо локально скученным.

§3. Скученные расширения локально скученных и слабо локально скученных пространств

Теорема 3. Если X - слабо локально скученное, но не скученное пространство, то существует одноточечное скученное расширение $\alpha X = X \cup \{a\}$ этого пространства. При этом, если X хаусдорфово, то и расширение αX может быть выбрано хаусдорфовым. Обратно, если у пространства X имеется одноточечное скученное и локально скученное расширение αX, то само пространство X локально скученно.

Доказательство. Обратное утверждение очевидно, ибо X, будучи открытым подмножеством локально скученного пространства αX, является, согласно предложению 3, локально скученным.

Предположим теперь, что X - слабо локально скученное, но не скученное пространство и a - не принадлежащая ему точка. На множестве $\alpha X = X \cup \{a\}$ определим топологию базой, состоящей из всех множеств, открытых в X, а также множеств вида $\{a\} \cup X \setminus A$, где A - замкнутое скученное подмножество пространства X. Получаемое при этом пространство αX является расширением пространства X, ибо X предположено не скученным. При этом если само пространство X было хаусдорфовым, то и αX получается хаусдорфовым: действительно, согласно определению слабой локальной скученности каждая точка $x \in X$ обладает скученной окрестностью $\mathcal{U}_x$; тогда ее замыкание $\bar{\mathcal{U}}_x = A$ также скученно [2, предложение 7], а следовательно, $\mathcal{U}_x$ и $X \setminus A$ являются дизъюнктными окрестностями точек x и a.

Пространство X скученно. В самом деле, допустим, что X не скученно; тогда в X найдется открыто-замкнутый фильтр* $\mathcal{F}$, обладающий пустым пересечением [2, теорема I].

---

* Под открыто-замкнутым фильтром здесь понимается центрированное семейство открыто-замкнутых множеств, содержащее вместе с любыми двумя своими элементами их пересечение.

Поскольку пересечение всех элементов из $\mathcal{F}$ пусто, можем выбрать такое открыто-замкнутое множество $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$, которое не содержит точки a. Поскольку множество $\mathcal{U}$ открыто-замкнуто, его дополнение V также открыто-замкнуто, а следовательно, является окрестностью точки a. Но тогда, согласно определению топологии в точке a, найдется такое скученное подмножество A пространства X, что $X \setminus A \subset V$, а следовательно, $\mathcal{U} \subset A$. Тем самым мы показали, что $\mathcal{U}$ является открыто-замкнутым подмножеством скученного пространства X, а следовательно, $\mathcal{U}$ само скученно [2, теорема 2]. С другой стороны, $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$, а следовательно, след $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}$ открыто-замкнутого фильтра $\mathcal{F}$ на $\mathcal{U}$ является открыто-замкнутым фильтром в скученном пространстве $\mathcal{U}$. Но тогда $\cap \mathcal{F}_{\mathcal{U}} \neq \emptyset$, а следовательно, тем более и $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$, что противоречит выбору фильтра $\mathcal{F}$. Полученное противоречие и доказывает, что построенное расширение αX является скученным пространством.

В противоположность одноточечной бикомпактификации П.С. Александрова локально бикомпактного пространства, одноточечное скученное расширение слабо локально скученного пространства, вообще говоря, не единственно - в этом нас убеждает следующий пример:

<u>Пример 6</u>. В качестве пространства X возьмем дискретную сумму счетного семейства отрезков $(0,1)$ (т.е. $X = \bigoplus_{n \in N} (0,1)_n$). Ясно, что пространство X как локально бикомпактно, так и локально связно. В расширении αX, построенном согласно предыдущей конструкции, базой окрестностей в точке a служит семейство открыто-замкнутых окрестностей вида $X_m \cup \{a\}$, где $X_m = \bigoplus_{n \geq m} (0,1)_n$. С другой стороны, одноточечным скученным расширением пространства X является метрический еж счетной колючести $\gamma X = J_0$ (добавляется точка 0 - "центр ежа"). При этом расширение X является связным. Легко заметить, что топологии в расширениях αX и γX не сравнимы.

Одноточечным скученным расширением пространства X служит и т.н. факторный еж счетной колючести: $\delta X = J_0^f$. (Ко множеству X добавляется "центр" ежа - точка 0. Открытыми в δX объявляются все множества, пересечения которых с каждым из отрезков $(0,1)_n$ непусто и открыто. Топология в δX сильнее топологии в γX, но не сравнима с топологией αX.

Наконец, еще одним, отличным от всех предыдущих, скученным расширением пространства X является одноточечная бикомпактификация Александрова aX. Нетрудно видеть, что топология одноточечной бикомпактификации Александрова слабее, чем топология αX, а также слабее, чем топологии в расширениях γX и δX.

Связь между расширением αX и бикомпактификацией Александрова в случае локально бикомпактного пространства устанавливает следующее предложение:

<u>Предложение 6</u>. Если X - локально бикомпактное пространство, то топология расширения αX сильнее или совпадает с топологией расширения aX.

Доказательство непосредственно следует из конструкций этих расширений и того факта, что каждое бикомпактное пространство скученно.

Следующий пример показывает, что расширение αX может совпадать с расширением aX.

<u>Пример 7.</u> Определим пространство X равенством $X = \bigoplus\limits_{n\in N} [0,1]_n$. Совпадение расширений αX и aX очевидно.

Как мы видели, слабо локально скученное пространство может иметь несколько одноточечных скученных расширений. При этом топологии одноточечных скученных расширений данного пространства могут быть несравнимы. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы дать сравнительную характеристику одноточечного расширения αX среди всех других одноточечных скученных расширений данного слабо локального скученного пространства X.

Если λX и μX - два расширения топологического пространства X, то будем писать $\lambda X > \mu X$, если существует (вообще говоря, не непрерывное) отображение $\varphi : \lambda X \to \mu X$, тождественное на X, прообраз каждого открыто-замкнутого множества из μX относительно которого является открыто-замкнутым подмножеством пространства λX.

Предложение 7. Для любого одноточечного скученного расширения данного слабо локально скученного пространства μX имеет место $\alpha X > \mu X$. Другими словами, ни одно одноточечное скученное расширение μX не может содержать открыто-замкнутые множества, не являющиеся открыто-замкнутыми в αX.

Доказательство. Рассмотрим отображение $\varphi : \alpha X \to \mu X$, тождественное на X и переводящее нарост $a = \alpha X \setminus X$ в нарост $m = \mu X \setminus X$. Покажем, что прообраз каждого открыто-замкнутого подмножества из μX является открыто-замкнутым в αX. В самом деле, если U - открыто-замкнутое подмножество в μX, то и его дополнение V открыто-замкнуто в μX, а следовательно, как U, так и V являются скученными пространствами в μX [2 теорема 2] ; при этом одно из них, например, не содержит точки m. Тем самым U является открыто-замкнутым подмножеством пространства X и при этом U скученно. Отсюда и из определения топологии в пространстве αX непосредственно следует, что множество $\varphi^{-1}(U)$ является как открытым, так и замкнутым в пространстве αX, а следовательно, и его дополнение $\alpha X \setminus \varphi^{-1}(U) = \varphi^{-1}(V)$ открыто-замкнуто. Тем самым мы показали, что прообраз каждого открыто-замкнутого множества из μX является открыто-замкнутым в αX, а следовательно, $\alpha X > \mu X$.

Литература

1. Šostak A.P. On a class of spaces containing all bicompact and all connected spaces.—Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra N.Proceedings of the Fourth Prague Topological Symposium, 1976, Prague, 1977, p.445-451.
2. Šostak A.P. Generalization of Compacness and conectedness.— General Topology and Appl. (to be printed).
3. Шостак А.П. Некоторые критерии финальной компактности для сильно паракомпактных пространств. Наст. сборник, с. 132-136.

Поступила 26 июня 1978.г.

УДК 519.45

О ТОЖДЕСТВАХ МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННОГО ТРЕУГОЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Р.С.Липянский
ЛГУ им. П.Стучки

Пусть F – свободная алгебра Ли над конечным полем K характеристики p. Гомоморфизм алгебры Ли $\Delta: F \to F \times F$, задаваемый правилом $x \to (x, x)$ индуцирует гомоморфизм ассоциативных алгебр $\Delta: U(F) \to U(F) \otimes U(F)$.

Элемент $a \in U(F)$ называется примитивным, если $\Delta a = a \otimes 1 + 1 \otimes a$ [2, определение 3]. Обозначим через $PU(F)$ множество примитивных элементов алгебры $U(F)$. Из упражнений 1 и 2 [1, стр.34] следует, что $PU(F)$ является свободной ограниченной алгеброй Ли над K.

Если задано представление ограниченной алгебры Ли L линейными операторами векторного пространства V над K, то этим определяется ограниченная лиевская пара (V, L). При этом $x \circ \ell^{[p]} = (\ldots(x \underbrace{\ell)\ell) \ldots)\ell}_{p \text{ раз}})$

Пусть теперь $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ множество свободных образующих свободной алгебры F над K и $Z = \{y_i^{p^{s_i}}, y_i \in Y, s_i \geq 0\}$. Рассмотрим элемент $u = u(z_1, z_2, \ldots z_n) \in U(F)$, где $z_i \in Z$. Если (V, L) – ограниченная лиевская пара над K, то подставляя в запись u вместо $y_i, i \in N$ элементы из L, получим некоторый элемент из $U(L)$, действующий в V.

<u>Определение 1.</u> В паре (V, L) выполняется p-битождество $x \circ u(z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0, z_i \in Z$, если оно справедливо при любой подстановке вместо x элементов из V, а вместо y_i, $i \in N$, участвующих в записи z_i любых элементов из L.

Легко видеть, что если $\mathfrak{X}$ – некоторый класс ограниченных лиевских пар, и Λ – множество всех $u = u(z_1, \ldots, z_n), z_i \in Z$, для которых в парах из $\mathfrak{X}$ выполняются p-битождества $x \circ u = 0$, то Λ является идеалом в $U(F)$, выдерживающим все эндоморфизмы из F в $PU(F)$.

Далее, аналогично теории групповых пар можно ввести для ограниченных лиевских пар конструкции $\mathfrak{X}_1\cdot\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1\nabla\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_1\times\Theta$, $\vec{\mathfrak{X}}_1$, где $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ – многообразия ограниченных лиевских пар и Θ – многообразие ограниченных алгебр Ли. В дальнейшем мы будем использовать свойства этих операций, предполагая, что их можно доказать самостоятельно по аналогии с групповыми парами [2,3].

Лемма 1. Если L – ограниченная алгебра Ли над K, где $|K|=p^m$ и $x^{p^m}=x$ для $\forall x\in L$, то L – абелева алгебра Ли.

Доказательство. В $U(L)$ выполнено равенство

$$[(x+y)^{p^m}-(x+y)]-(x^{p^m}-x)-(y^{p^m}-y)=0$$

После раскрытия скобок получим $y_1(x,y)+y_2(x,y)+\dots+y_{p^m-1}(x,y)=0$, где $y_i(x,y)$ – сумма одночленов, в которых x входит i раз, а y входит p^m-i раз. Пусть $\alpha\in K$. Рассмотрим $0=y_1(\alpha x,y)+y_2(\alpha x,y)+\dots+y_{p^m-1}(\alpha x,y)$. Но $y_i(\alpha x,y)=\alpha^i y_i(x,y)$. Следовательно, $0=\alpha y_1(x,y)+\dots+\alpha^{p^m-1}y_{p^m-1}(x,y)$. Подставляя вместо α всевозможные элементы из K, получим систему с определителем Вандермонда, отличным от нуля. Таким образом, $y_i(x,y)=0$ выполняется для всех i. В частности, $y_1(x,y)=0$, из чего следует $xy=yx$.

Определение 2. Многообразие ограниченных лиевских пар (V,L) с действием $v\circ\ell=0$, $\forall v\in V$ и $\forall\ell\in L$ называется многообразием тривиальных пар и обозначается S.

Определение 3. Многообразие ограниченных алгебр Ли над K, где $|K|=p^m$, задаваемое тождеством $x^{p^m}=x$, называется многообразием экспоненты p и обозначается $\mathfrak{A}_p$.

Из леммы 1 следует, что $\mathfrak{A}_p$ является подмногообразием многообразия ограниченных абелевых алгебр Ли.

Лемма 2. Если $|K|=p^m$, то $Var(K,K)=S\times\mathfrak{A}_p$.

Лемма легко доказывается сравнением вербальных идеалов соответствующих многообразий.

Обозначим через $T(n,K)$ алгебру всех треугольных матриц n-ого порядка над K. Тогда $(K^n,T(n,K))=(K,K)\nabla\dots\nabla(K,K)$. Значит, $Var(K^n,T(n,K))=\underbrace{Var(K,K)\dots Var(K,K)}_{n\ раз}=(S\times\mathfrak{A}_p)^n=S^n\times\mathfrak{A}_p$. Следовательно, $Var\ T(n,K)=S^n\times\mathfrak{A}_p=S_n\cdot\mathfrak{A}_p=\mathfrak{R}_n\cdot\mathfrak{A}_p$. Поэтому $Var\ T(n,K)$ задается тождеством

$$[\dots[x_1^{p^m}-x_1,x_2^{p^m}-x_2]\dots]x_n^{p^m}-x_n]=0 \quad (1)$$

в многообразии ограниченных алгебр Ли. Так как $[x^{p^n}, y^{p^n}] = -y(\mathrm{ad}\,x)^{p^n}(\mathrm{ad}\,y)^{p^n-1}$, то можно показать, что тождество (1) определяет базис тождеств лиевского многообразия, порожденного треугольными матрицами над K.

Если же K бесконечно, то аналогичными рассуждениями доказывается, что $\mathrm{Var}\, T(n, K) = \mathfrak{N}_{n-1} \cdot \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{N}_{n-1}$ - многообразие нильпотентных алгебр Ли ступени $\leq n-1$, $\mathfrak{A}$ - многообразие абелевых алгебр Ли.

Автор выражает глубокую благодарность Б.И.Плоткину за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. М., 1969.

2. Плоткин Б.И. Радикалы и многообразия в представлениях групп. - Латвийский математический ежегодник, 1972, т.10, с. 75-132.

3. Плоткин Б.И., Гринберг А.С. О полугрупповых многообразиях, связанных с представлениями групп. - Сиб.мат.журнал, 1974, т.13, № 4, с. 841-858.

А Н Н О Т А Ц И И

УДК 513.83

Некоторые топологические теоремы Рамсея.
Брегман Ю.Х., Шостак А.П., с.3-13.

Изучается проблема существования Рамсеевских пространств. Доказано, в частности, что каждое метрическое пространство не слишком "большого" веса представимо в виде объединения двух своих подмножеств, ни одно из которых не содержит канторов дисконтинуум. Библ. 7 назв.

УДК 513.88

О растворе между множествами и теоремах устойчивости в локально выпуклых пространствах.
Вейлер Е.Л., с.14-30.

Понятие раствора распространяется на нелинейные множества (в частности, графики операторов) в локально выпуклых пространствах, доказывается устойчивость ряда свойств произвольных, возможно нелинейных, операторов. Библ. 7 назв.

УДК 513.88; 517.43;
517.9; 519.55

Малые возмущения и теоремы существования и единственности решений.
Вейлер Е.Л., с. 31-43.

Результаты предыдущей статьи используются для доказательства разрешимости и единственности решения периодически возмущенной консервативной системы, периодической краевой задачи и некоторых других нелинейных задач с уравнениями, неразрешенными относительно старшей производной. Библ. 6 назв.

УДК 513.83

О компактности и относительной компактности множеств в топологических пространствах.
Гольдман М.А., с. 44-48.

Устанавливается некоторый критерий компактности множеств в произвольных топологических пространствах и на его основе – критерий относительной компактности множеств в топологических векторных пространствах. Критерии используют расходящиеся направленности элементов. Библ. 2 назв.

УДК 513.881

О композиции относительно открытых отображений.
Гольдман М.А., Крачковский С.Н., с. 49–52.

Обобщаются некоторые результаты об относительно открытых отображениях, полученные авторами ранее. Устанавливаются достаточные условия для того, чтобы композиция таких отображений была относительно открытым отображением. Это делается сначала в общих топологических пространствах, затем рассматривается вариант, относящийся к линейным отображениям векторных топологических пространств. Библ. 2 назв.

УДК 513.881

Об условиях конечномерности пространства нульэлементов линейного оператора.
Дергунова Н.А., с. 53–55.

В статье приведены необходимые и достаточные условия конечномерности пространства нульэлементов линейного оператора в банаховом пространстве, связанные с представлением этого оператора в виде суммы двух линейных операторов: обратимого и компактного. Библ. 2 назв.

УДК 513.83

О θ-размерностно полных пространствах.
Кандил А., с. 56–64.

В работе изучается класс К бикомпактов, θ-размерностная шкала которых полна. Показано, что класс К содержит, в частности, все бикомпакты, в которых существует хотя бы одна неизолированная точка счетного характера, все бикомпакты мощности, не превосходящей континуум, а также все линейно-упорядоченные бикомпакты. Библ. 12 назв.

УДК 513.88

Об индексе и алгебраическом индексе Φ, Φ_+, Φ_--отображений в банаховых пространствах.
Левченков В.С., с. 65-68.

Исходя из понятий алгебраического базиса и базиса Шаудера в банаховом пространстве и соответствующих понятий размерности, определяются индекс и алгебраический индекс обобщенных фредгольмовых отображений и устанавливаются соотношения между ними. Библ. 4 назв.

УДК 518:517.948

О сохранении Т-регуляризуемости и В-измеримости отображений первого класса при секвенциально компактной аппроксимации.
Левченков В.С., с. 69-73.

Изучаются некоторые свойства линейных регуляризуемых по Тихонову отображений нормированных векторных пространств и доказываются факты, отмеченные в заглавии. Библ. 5 назв.

УДК 513.88

Устойчивость Φ_+-операторов при относительно предкомпактных возмущениях.
Лиепиньш А.Х., с. 74-82.

Доказывается устойчивость Φ_+-операторов в локально выпуклых топологических векторных пространствах при относительно предкомпактных возмущениях. Библ. 5 назв.

УДК 513.88

Об одном варианте теорем устойчивости. Предкомпактное возмущение обобщенных Φ_+- и относительно регулярных операторов.
Лиепиньш А.Х., с. 83-94.

Доказывается устойчивость обобщенных Φ_+- и относительно регулярных операторов при предкомпактных возмущениях, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию, зависящему от возмущаемого отображения. Исследуется структура характера устойчивости. Библ. 5 назв.

УДК 513.83

B-пространства и бистабильные гомеоморфизмы.
Медников Л.Э., с. 95-101.

Рассматривается класс пространств, включающий почти все сильно локально однородные пространства, а также более широкие классы представимых и локально однородных по множествам пространств. Изучаются свойства гомеоморфизмов этих пространств. В частности, доказано, что любой гомеоморфизм тихоновского куба бистабилен, а также, что тихоновский куб является сильно локально однородным по множествам пространством. Библ. 9 назв.

УДК 517.941

О разрешимости линейных уравнений в произведении банаховых пространств.
Петров Н.Н., с. 102-106.

Изучается связь между свойствами системы

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 = y_1$$
$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = y_2$$

и уравнения $(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})x_2 = y_2$ при определенных предположениях относительно линейных операторов A_{ik}. Доказано, что одна из этих задач корректно разрешима (соотв. нормально разрешима, n-нормальна, d-нормальна, нетерова) тогда и только тогда, если этим свойством обладает вторая. Библ. 4 назв.

УДК 513.83

Экспонента, Σ-произведения и К-пространства.
Попов В.В., с. 107-118.

Изучается вопрос, при каких условиях экспонента и Σ-произведение топологических пространств является К-пространством. Показано, например, что Σ-произведение линейно-упорядоченных бикомпактов является К-пространством. С другой стороны, приводится пример бикомпакта веса $2^{\aleph_1}$, Σ-произведение $\aleph_1$-экземпляров которого не является К-пространством. Библ. 17 назв.

УДК 513.83

О тесноте и близких понятиях.
Шапировский Б., с. 119-131.

Изучается соотношение между понятиями тесноты и c-тесноты. Доказано [GCH], что для бикомпактов, удовлетворяющих условию Суслина, теснота совпадает с c-теснотой. Доказано также, что если мощность замыкания каждого подмножества мощности k данного топологического пространства X не превосходит k, тогда мощность всего пространства X не превосходит $k^{c(X)}$, где $c(X)$ обозначает число Суслина X. Библ. 20 назв.

УДК 513.83

Некоторые критерии финальной компактности сильно паракомпактных пространств.
Шостак А.П., с. 132-136.

Продолжается начатое автором изучение свойств скученности, представляющее собой обобщение бикомпактности и связности. Доказано, в частности, что пространство является финально компактным тогда и только тогда, когда оно сильно паракомпактно и финально скученно. Библ. 4 назв.

УДК 513.83

Локально скученные пространства и их расширения.
Шостак А.П., с. 137-146.

Определяются и изучаются локально скученные и слабо локально скученные пространства. Рассматриваются скученные расширения таких пространств. Доказано, что такого типа расширения могут быть получены присоединением к пространству одной точки.
Библ. 3 назв.

УДК 519.45

О тождествах многообразия, порождённого треугольными матрицами.
Липянский Р.С., с. 147-149.

Описан базис тождеств Лиевского многообразия, порождённого алгеброй Ли треугольных матриц n-го порядка над конечными и над бесконечными полями. Библ. 3 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ
Межвузовский сборник научных трудов

Редакторы: Е.Энгельсон, Н.Сарамонова
Технический редактор Н.Абола
Корректор Н.Абола

Подписано к печати I9.II.I979. ЯТ I2367. Ф/б 60х84/I6.
Бумага №I. I0,0 физ.печ.л.9,3 усл.печ.л. 7,4 уч.-изд.л.
Тираж 490 экз. Зак.№ 1613. Цена 74 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 226098, б. Райниса, I9
Отпечатано на ротапринте,Рига 226050,ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки