Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(межвузовский)

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1988

УДК 517.927

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения: Сборник научных трудов (межвузовский)/ Отв.ред. Ю.А.Клоков.-Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1988. - 155 с.

Сборник содержит 15 научных статей, написанных представителями различных вузов страны. В статьях изучаются актуальные вопросы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложений. Исследованы вопросы разрешимости, единственности. Ряд статей посвящены изучению прикладных задач, возникающих в гидродинамике, акустике, в диагностике полупроводников.

Сборник предназначен для специалистов по краевым задачам обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для аспирантов и студентов специальности "Прикладная математика", занимающихся изучением прикладных задач, сводящихся к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:
Ю.А.Клоков (отв.ред.),
В.В.Гудков, Я.В.Виржбицкий

Печатается по решению Издательского совета
ЛГУ им. П.Стучки

А $\frac{20203-088у}{М\ 812(11)-88}$ Доп.88.1702050000

© Латвийский государственный университет им. П.Стучки, 1988

Введение

В современной науке все бо́льшее значение приобретает математическое моделирование, важной составной частью которого являются методы математической физики.

Особый интерес представляет изучение существенно нелинейных задач, возникающих в различных прикладных дисциплинах. Этим вопросам посвящено большинство статей сборника. В него вошли работы математиков ВЦ при ЛГУ им. П.Стучки, выполненные по госбюджетной теме "Исследование прикладных краевых задач с существенными нелинейностями для обыкновенных дифференциальных уравнений", включенной в целевую комплексную программу АН СССР "Математическое моделирование", а также работы наших научных коллег из других научных учреждений, выполненные по близкой тематике.

В статьях сборника изучаются фундаментальные вопросы разрешимости краевых задач для общих уравнений второго порядка и систем таких уравнений, в том числе и для уравнений с несуммируемой особенностью. Рассматривается связь этих задач с задачами вариационного исчисления. Часть полученных результатов относится к краевым задачам для дифференциального уравнения третьего порядка, являющегося одним из обобщений хорошо известного уравнения Фолкнера-Скена.

Ряд статей посвящен изучению прикладных задач, возникающих, в частности, в гидродинамике, акустике, в диагностике полупроводников. При этом в отдельных случаях предлагается методика и результаты их численных решений.

Полученные результаты являются новыми и вносят существенный вклад в качественную теорию нелинейных краевых задач математической физики.

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. -С. 4-14

УДК 517.927

А.И.Колосов
Харьковский институт инженеров коммунального строительства

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Имеется ряд прикладных задач / на конечном, бесконечном, нефиксированном интервалах /, которые могут быть отнесены к краевой задаче вида

$$
\begin{gathered}
x'=f(t,x,\lambda) \qquad \left(\,'=\frac{d}{dt}\right), \\
F(x)=0 \\
x_p'(t)>0\,(<0) \qquad (\alpha<t<\beta),
\end{gathered}
\tag{I}
$$

где $f,\, x\in R^n;\ \lambda\in R^k;\ F\colon C([\alpha,\beta];R^n)\to R^n;$

$$p\in\{\overline{1,n}\},\ 1\le k\le n,\quad k,n,p\in N,$$

$$-\infty<\alpha<\beta\le+\infty .$$

В той постановке, в которой рассматривается задача (I), ее решение следует понимать как $x=x(t,\lambda)$.

Для конкретности будем считать, что функционал $F(x)$ имеет вид

$$G(x)=0\,,\quad x_p(\alpha)=x_p\,, \tag{2}$$

где $G: C([\alpha,\beta];\, R^n) \to R^{n-1}$.

Доопределим задачу (I)-(2) следующим образом:

$$x' = f(t, x, \lambda)$$
$$G(x) = 0, \quad x_p(\alpha) = x_p, \tag{3}$$
$$x_i(t_i) = a_i,$$

$$x_p'(t) > 0\ (<0) \quad (\alpha < t < \beta),$$
$$(i = \overline{i_1, i_k}\ ;\ i_s \in \{\overline{1,n}\},\ s = \overline{1,k}\ ; \tag{4}$$
$$t_i \in \{\alpha, \beta\},\ i_1 = p,\ t_p = \beta\ ;\ p \in \{\overline{1,n}\})$$

и под решением задачи (3)-(4) будем понимать пару

$(x(t), \lambda) \in C_n[\alpha,\beta] \cap C_n^{(1)}]\alpha,\beta[\times R^k$.

Пусть:

$$S = \{x(t) \in C_n[\alpha,\beta] \cap C_n^{(1)}]\alpha,\beta[\ |$$
$$x_p'(t) > 0\ (<0) \quad (\alpha < t < \beta)\},$$

$$Q = \{\varphi(z) \in C_n[a_p, x_p] \cap C_n^{(1)}]a_p, x_p[\},$$

где $]a_p, x_p[\equiv \{z \mid z = \gamma a_p + (1-\gamma) x_p\,, \quad 0<\gamma<1\}$.

Рассмотрим на множестве Q систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi_i}{dz} = h_i\,(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \qquad (i=\overline{1,n}\,;\ z \in [a_p, x_p]). \tag{5}$$

Кроме того, рассмотрим некоторое невырожденное отображение $u=(u_1,\ldots,u_n)$ между множествами S и Q :

$$\begin{gathered} x_m(z) = u_m(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \\ t(z) = u_p(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \\ (z = x_p(t),\ \alpha < t < \beta;\ m=\overline{1,n};\ m \neq p). \end{gathered} \tag{6}$$

Лемма . Для того чтобы преобразование (6) приводило дифференциальное уравнение (3) к уравнению (5), необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} f_m(z,u,\lambda) = f_p(z,u,\lambda)\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_m}{\partial \varphi_i} h_i(z,\varphi,\lambda) + \frac{\partial u_m}{\partial z}\right\} \\ 1 = f_p(z,u,\lambda)\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_p}{\partial u_i} h_i(z,\varphi,\lambda) + \frac{\partial u_p}{\partial z}\right\} \\ (m=\overline{1,n}\,;\ m \neq p). \end{gathered} \tag{7}$$

Доказательство леммы можно непосредственно получить путем установления связи уравнения (5) и уравнения (3) с помощью отображения (6).

Система уравнений (7) - это аналог обобщенного уравнения Крылова-Боголюбова в нелинейной механике [I].

При заданной функции $h(z,\varphi,\lambda)$ система (7) - это система квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно $u(z,\varphi)$. В этом случае оправданно вести речь о ее приближенном решении, а следовательно, о приближенном решении задачи (I)-(2).

При заданном отображении $u=u(z,\varphi)$ система (7) - это система линейных алгебраических уравнений относительно $h_i(z,\varphi,\lambda)$ $(i=\overline{1,n})$.

Итак, задача (3)-(4) приведена к следующей краевой задаче:

$$\frac{d\varphi}{dz}=h(z,\varphi,\lambda), \qquad z\in\,]a_p\,,\,x_p[\,,$$

$$G[x(\varphi)]=0, \qquad u_p(x_p,\varphi)=\alpha, \tag{8}$$

$$u_i(a_i,\varphi)=t_i \qquad (i=\overline{i_1,i_k}).$$

Преобразование задачи (3)-(4) к задаче (8) оправдано, в первую очередь, тем, что от задачи на бесконечном или нефиксированном отрезке приходим к задаче на заданном конечном интервале. Приведенный ниже пример прикладной задачи показывает, что такое преобразование может быть полезным и для задач на заданном конечном отрезке. Имеются и другие соображения, связанные, например, с возможным разрывом функции $f(t,x,\lambda)$ по x_p [2].

Рассмотрим теперь краевую задачу:

$$x_1'=f_1(t,x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(\alpha<t<\beta)$$

$$
\begin{aligned}
&x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \\
&x_i(\alpha) = x_i \quad (i = \overline{1,m}\ ;\ k \le m \le n) \\
&x_j(\beta) = x_j \quad (j = \overline{m+1,n}) \\
&x_p'(t) > 0\ (<0) \quad (\alpha < t < \beta;\ 1 \le p \le k),
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $k, m, n, p \in N$, $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$,

$$\frac{\partial f_l}{\partial \lambda_s} \ne 0 \quad (l = \overline{1,k}\ ;\ s \in \{\overline{1,k}\})$$

Дополним задачу (9) условием

$$x_l(\beta) = a_l \qquad (l = \overline{1,k}), \tag{10}$$

и будем рассматривать задачу (9)-(10).

Рассмотрим между множествами S **и** Q **, соответствующими задаче (9)-(10), отображение**

$$
\begin{aligned}
&x_r(t(z)) = u_r(\varphi_r(z)),\quad t(z) = \varphi_p(z), \\
&z = x_p(t),\quad r = \overline{1,n}\ ;\quad r \ne p,
\end{aligned} \tag{11}
$$

где $u_r(.)$ **- строго монотонные на** R^1 **функции.**

Отображение (11) приводит задачу (9)-(10) к следующей:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\varphi_r}{dz} = h_r(z, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \quad (r = \overline{1,n}) \\
&\varphi_i(x_p) = u_i^{-1} x_i \qquad (i = \overline{1,m}\ ;\ i \ne p) \\
&\varphi_j(a_p) = u_j^{-1} x_j \qquad (j = \overline{m+1,n})
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$\varphi_\ell(a_p)=u_\ell^{-1}a_\ell \qquad (\ell=\overline{1,\kappa}\ ;\ \ell\neq p)$$

$$\varphi_p(x_p)=\alpha\ , \qquad \varphi_p(a_p)=\beta\ .$$

Отображения $u_r(z,\varphi_r)$ и функции $h_r(z,\varphi,\lambda)$ связаны системой уравнений (7):

$$f_r(z,u(\varphi),\lambda)=f_p(z,u(\varphi),\lambda)\cdot\frac{du_r}{d\varphi_r}\cdot h_r(z,\varphi,\lambda)$$

$$(r=\overline{1,n}\ ;\ r\neq p)$$

$$1=f_p(z,u(\varphi),\lambda)\cdot h_p(z,\varphi,\lambda).$$

Исследуем задачу (I2), следуя схеме З.В.Сеидова [3]. Положим

$$\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n),\quad \varphi^\circ=(x_1,\dots,x_{p-1},\alpha,x_{p+1},\dots,x_n)$$

$$\|\varphi\|=\max_{i\in\{\overline{1,n}\}}\ \max_{z\in[a_p,x_p]}|\varphi_i(z)|\ ,$$

$$\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_\kappa),\quad \|\lambda\|=\max_{\ell\in\{\overline{1,\kappa}\}}|\lambda_\ell|.$$

Предполагаем, что существует элемент $\lambda^\circ\in R^\kappa$, такой, что

$$\beta=\alpha+\int_{x_p}^{a_p}h_p(s,\varphi^\circ,\lambda^\circ)\,ds$$

$$a_\ell=x_\ell+\int_{x_p}^{a_p}h_\ell(s,\varphi^\circ,\lambda^\circ)\,ds \qquad \text{(I3)}$$

$$(\ell=\overline{1,\kappa}\ ;\ \ell\neq p),$$

что выполнены следующие условия:

1) непрерывные по совокупности переменных функции $h_i(z,\varphi,\lambda)$ $(i=\overline{1,n})$ действуют из $[x_p,a_p]\times V_1\times V_2$ в V_1, где $V_1:\|\varphi-\varphi^0\|\le r$, $(\varphi,\varphi^0\in Q)$, $V_2:\|\lambda-\lambda^0\|\le d$, $(\lambda,\lambda^0\in R^k)$ и ограничены, т.е. при $z\in[x_p,a_p]$, $\varphi\in V_1$, $\lambda\in V_2$

$$\|h(z,\varphi,\lambda)\|\le\delta(t),\quad \Big|\int_{x_p}^{a_p}\delta(s)\,ds\Big|\le r,$$

кроме того, они удовлетворяют условию Липшица, т.е. при $z\in[x_p,a_p]$, $\varphi^1,\varphi^2\in V_1$; $\lambda^1,\lambda^2\in V_2$

$$\|h(z,\varphi^1,\lambda^1)-h(z,\varphi^2,\lambda)\|\le$$
$$\le\gamma(t)(\|\varphi^1-\varphi^2\|+\|\lambda^1-\lambda^2\|),$$

где

$$q=\Big|\int_{x_p}^{a_p}\gamma(s)\,ds\Big|<\infty;$$

2) существует такое $L>0$, что для любой функции $\varphi\in V_1$ и для $\lambda^1,\lambda^2\in V_2$

$$\Big\|\int_{x_p}^{a_p}\{h(s,\varphi(s),\lambda^1)-h(s,\varphi(s),\lambda^2)\}\,ds\Big\|\ge$$
$$\ge L\cdot\|\lambda^1-\lambda^2\|,$$

где $q\left(1+\frac{q}{L}\right)<1$;

3) для каждой функции $\varphi\in V_1$ существует такой элемент $\lambda\in V_2$, что

$$\beta=\alpha+\int_{x_p}^{a_p}h_p(s,\varphi(s),\lambda)\,ds$$

$$a_\ell=x_\ell+\int_{x_p}^{a_p}h_\ell(s,\varphi(s),\lambda)\,ds\quad(\ell=\overline{1,k};\ \ell\ne p).$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а I. Пусть выполнены условия I) – 3). Тогда существует единственное решение задачи (9)-(I0), которое может быть получено методом последовательных приближений.

Прежде всего непосредственная проверка показывает, что задача (9)-(I0) топологически эквивалентна задаче (I2). (Два операторные уравнения (в частности, краевые задачи) топологически эквивалентны, если они эквивалентны, и между областями их определения установлен гомеоморфизм).

Доказательство же существования единственного решения задачи (I2), если выполнены условия I) – 3), следует из работы [3].

Последовательные приближения решения задачи (9)-(I0) получаем по схеме

$$x_r^s(z)=u_r(\varphi_r^s(z)) \qquad (r=\overline{1,n}\ ;\ r\neq p)$$

$$t^s(z)=\varphi_p^s(z) \qquad (s=0,1,2,\dots)\ ,$$

где

$$u_\ell^{-1}a_\ell=u_\ell^{-1}x_\ell+\int_{x_p}^{a_p}h_\ell(\sigma,\varphi^s(\sigma),\lambda^s)d\sigma,\quad (\ell=\overline{1,k};\ell\neq p),$$

$$\beta=\alpha+\int_{x_p}^{a_p}h_p(\sigma,\varphi^s(\sigma),\lambda^s)\,d\sigma,$$

$$\varphi_i^{s+1}(z)=u_i^{-1}x_i+\int_{x_p}^{z}h_i(\sigma,\varphi^s(\sigma),\lambda^s)d\sigma\ \ (i=\overline{1,m};\ i\neq p),$$

$$\varphi_j^{s+1}(z)=u_j^{-1}x_j+\int_{a_p}^{z}h_j(\sigma,\varphi^s(\sigma),\lambda^s)d\sigma\ \ (j=\overline{m+1,n}),$$

$$\varphi_p^{s+1}(z)=\alpha+\int\limits_{x_p}^{z} h_p(\sigma,\varphi^s(\sigma),\lambda^s)\,d\sigma \quad (s=0,1,2,\dots)$$

При исследовании задач вида (I) может быть эффективно использована теория положительных решений операторных уравнений [4].
Примером тому такая задача:

$$x''=\lambda\frac{x^{3/2}}{t^{1/2}} \quad (0<t<1, \quad \lambda>0)$$

$$x(0)=1, \qquad x(1)=0 \tag{I4}$$

$$x'(t)<0 \qquad (0<t<1).$$

Задача (I4) - это аналог известной задачи Томаса-Ферми из статистической теории атома [5]:

$$x''=\frac{x^{3/2}}{t^{1/2}}, \qquad x(0)=1, \quad x(\tau)=0$$

$$x'(t)<0 \qquad (0<t<\tau\leq+\infty), \tag{I5}$$

если задача (I5) рассматривается на конечном интервале, $\tau=\lambda^{2/3}$.

Нам удобнее исследовать задачу (I5). Дополним ее условием

$$x'(\tau)=a\leq 0, \tag{I6}$$

и будем рассматривать задачу (I5)-(I6) на нефиксированном отрезке $[0,\tau]$.

Положим $x'=-\varphi^{1/2}(x)$, и приведем задачу (I5)-(I6) к следующей

$$\frac{d\varphi}{dx}=2\frac{x^{3/2}}{t^{1/2}}, \qquad \frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\varphi^{1/2}}, \tag{I7}$$

$$\varphi(0)=a^2, \quad t(0)=\tau, \quad t(1)=0 .$$

Ищем положительные решения задачи (17) и под ее решением понимаем (t, φ, τ).

Задача (17) эквивалентна интегральному уравнению:

$$\varphi(x)=(\Gamma\varphi)(x)=a^2+2\int_0^x \sigma^{3/2}\left[\int_\sigma^1 \frac{d\omega}{\varphi^{1/2}(\omega)}\right]^{-1/2} d\sigma$$

$$t(x)=\int_x^1 \frac{d\omega}{\varphi^{1/2}(\omega)}, \quad \tau=\int_0^1 \frac{d\omega}{\varphi^{1/2}(\omega)} . \tag{18}$$

Можно проверить, что при любом $a\leq 0$ оператор Γ обладает свойствами (терминологию см. в [4]):

1) оператор Γ монотонен в конусе K неотрицательных функций в пространстве $C[0,1]$;

2) существует инвариантный для Γ отрезок $<\varphi^0, \psi^0>\subset K$: $\Gamma<\varphi^0, \psi^0>\subset<\varphi^0, \psi^0>$;

3) оператор Γ вполне непрерывен на $<\varphi^0, \psi^0>$;

4) оператор Γ u_0- вогнут в конусе K.

В силу указанных свойств оператора Γ последовательные приближения $\varphi^{s+1}=\Gamma\varphi^s$, $\psi^{s+1}=\Gamma\psi^s$ $(s=0,1,2,\ldots)$ двусторонним образом по норме сходятся к единственному в конусе решению уравнения (18).

В силу топологической эквивалентности уравнения (18) задаче (15)-(16) получаем отсюда:

Т е о р е м а 2 . При каждом $a\leq 0$ задача (15)-(16) имеет единственное решение $(x(t), \tau)$, где

$$t(x)=\int_x^1 \frac{d\omega}{\varphi^{1/2}(\omega)}, \quad x'=-\varphi^{1/2}(x),$$

$$\tau=\int_0^1 \frac{d\omega}{\varphi^{1/2}(\omega)} .$$

Решение $(x(t),\tau)$ может быть получено с двусторонними приближениями. При этом $\tau(a)$ возрастающая функция a и $\lim\limits_{a\to 0}\tau(a)=\infty$.

Следствие. Так как $\lambda=\tau^{3/2}$, то при каждом $a\leq 0$ и задача / 14/ имеет единственное решение $(x(t),\lambda)$.

Примечание. Имеется достаточное число работ, в том числе и последнего времени, посвященных задаче Томаса-Ферми. Однако нам не известны работы других авторов, в которых каким-либо способом получены двусторонние приближения, сходящиеся к решению задачи (I5) при $\tau=+\infty$. Такие приближения могут быть получены при решении уравнения (I8), где $a=0$ [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Гребеников Е.А. Математические модели в нелинейной механике. - М.: Изд-во МГУ, 1983. - 102 с.
2. Колосов А.И. Об одном классе дифференциальных уравнений с разрывной правой частью // Докл.АН УССР. Сер.А. -1986. - № 9. - С. 5-8.
3. Сеидов З.Б. Краевые задачи с параметром для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Сиб.мат. журн. - 1968. - Т. 9. - № I. - С. 223-228.
4. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматгиз, 1962. - 394 с.
5. Гамбош П. Статистическая теория атома и ее применения. - М.: Изд-во иностр.лит., 1951. - 399 с.
6. Колосов А.И., Колосова С.В., Тихонович А.Ю. О двусторонних приближениях в решении задачи Томаса-Ферми // Мат.физика: Республ.межведомствен.сборник. - Киев: Наукова думка. - 1981. - Вып.31- С. 36-38.

Поступила 29.06.87

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1988. - С. 15-22

УДК 517.927

А.И. Звягинцев
ВЦ при ЛГУ им. П. Стучки

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ РЕАКЦИЮ ОКИСЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КАТАЛИЗАТОРА

Рассматривается следующая краевая задача Неймана:

$$d_1((1-u_2)u_1''+u_1u_2'')=-a_1(1-u_1-u_2)+a_3u_1+u_1u_2, \qquad (1)$$

$$d_2(u_2u_1''+(1-u_1)u_2'')=-a_2(1-u_1-u_2)^{\gamma}+a_4u_2^{\gamma}+u_1u_2, \qquad (2)$$

$$u_1'(-1)=u_2'(-1)=u_1'(1)=u_2'(1)=0 \qquad (3)$$

с дополнительными условиями

$$u_1(x)\geq 0,\ u_2(x)\geq 0,\ u_1(x)+u_2(x)\leq 1,\ x\in[-1,1], \qquad (4)$$

где параметры $a_1, a_2, a_3, a_4, d_1, d_2$ - положительные действительные числа, $\gamma\in\{1,2\}$, и с физической точки зрения наиболее интересен случай $\gamma=2$.

Сперва исследуем случай, когда решение задачи (1)-(4) включает нулевые функции.

Т е о р е м а 1. Если $u_1(x)u_2(x)\equiv 0$, то задача (1)-(4) имеет только следующие тривиальные решения:

а) при условии $a_2a_3=0$

$$u_1(x)\equiv\frac{a_1}{a_1+a_3}, \quad u_2(x)\equiv 0;$$

б) при условии $a_1 a_4 = 0$

$$u_1(x) \equiv 0, \quad u_2(x) \equiv a_2^{\frac{1}{\gamma}} / (a_2^{\frac{1}{\gamma}} + a_4^{\frac{1}{\gamma}}).$$

Доказательство. Если $u_1(x) \equiv 0$, то уравнения (I), (2) дают

$$a_1(1-u_2)=0, \quad d_2 u_2'' = -a_2(1-u_2)^{\gamma} + a_4 u_2^{\gamma}.$$

Отсюда в случае $u_2(x) \equiv 1$ необходимо $a_4 = 0$. В случае $a_1 = 0$ при $\gamma = 1$ получаем линейное уравнение, которое имеет единственное решение $u_2(x) \equiv a_2/(a_2+a_4)$, удовлетворяющее условиям (3), а при $\gamma = 2$ получаем уравнение

$$d_2 u_2'' = (a_4 - a_2) u_2^2 + 2 a_2 u_2 - a_2. \tag{5}$$

Это уравнение для $a_2 = a_4$ линейное и имеет в силу (3) единственное решение $u_2(x) \equiv \frac{1}{2}$. Для $a_2 \neq a_4$ решения уравнения (5), удовлетворяющие условиям (3), или равны константам $\sqrt{a_2}/(\sqrt{a_2} \pm \sqrt{a_4})$, или при рассмотрении фазовой плоскости (u_2, u_2') лежат в окрестности центра $(\sqrt{a_2}/(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_4}), 0)$. Но величина $\sqrt{a_2}/(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_4})$ или больше единицы, или отрицательна. Следовательно, из условий (4) получаем только решение $u_2(x) = \sqrt{a_2}/(\sqrt{a_2} + \sqrt{a_4})$.

Если $u_2(x) \equiv 0$, то уравнения (I), (2) дают

$$d_1 u_1'' = -a_1(1-u_1) + a_3 u_1, \quad a_2(1-u_1)^{\gamma} = 0.$$

Отсюда в случае $u_1(x) \equiv 1$ необходимо $a_3 = 0$. В случае же $a_2 = 0$ условиям (3) удовлетворяет только решение $u_1(x) = a_1/(a_1 + a_3)$. Теорема доказана.

Лемма I. Если $u_1(x)$, $u_2(x)$ решение задачи (I)-(4) и для некоторого $i \in \{1, 2\}$ функция $u_i(x)$ тождественно равна константе, то $u_{3-i}(x)$ тоже является константой.

Доказательство. Пусть $u_1(x) \equiv C$. Тогда из условия (4) $0 \leq C \leq 1$, и уравнение (I) принимает вид $d_1 C u_2'' = (a_1 + C) u_2 + a_3 C + a_1 C - a_1$.

Решением этого уравнения в силу (3) является единственно

$$u_2(x) = (a_1 - a_1 C - a_3 C)(a_1 + C)^{-1}.$$

Если же $u_2(x)\equiv c$, то уравнение (I)

$$d_1(1-c)u_1''=(a_1+a_3+c)u_1+a_1c-a_1$$

в силу условий (3) имеет единственное решение $u_1(x)=$ $=(a_1-a_1c)/(a_1+a_3+c)$. Лемма доказана.

Теорема 2. Существует такое действительное число α , что решение задачи (I)-(4) имеет вид

$$u_1(x)\equiv\frac{a_1(1-\alpha)}{a_1+a_3+\alpha}=\beta,\quad u_2(x)\equiv\alpha.$$

Причем для $\gamma=1$ значение α единственно, а для $\gamma=2$ возможно или одно, или три значения α .

Доказательство. Если искать решение $u_1(x)$, $u_2(x)$ задачи (I)-(4) в виде констант, то из (I), (2) получаем систему:

$$u_1u_2+a_3u_1-a_1(1-u_1-u_2)=0,$$
$$u_1u_2+a_4u_2^\gamma-a_2(1-u_1-u_2)^\gamma=0.$$

Из первого уравнения этой системы получаем выражение

$$u_1=\frac{a_1(1-u_2)}{a_1+a_3+u_2},$$

после подстановки которого во второе уравнение имеем при γ = I

$$F_1(u_2)=(a_1-a_2-a_4)u_2^2-(a_1-a_2+a_1a_4+a_2a_3+a_3a_4)u_2+a_2a_3=0$$

и при γ =2

$$F_2(u_2)=a_2(a_3+u_2)^2(1-u_2)^2-a_4(a_1+a_3+u_2)^2u_2^2-a_1u_2(1-u_2)(a_1+a_3+u_2)=0.$$

Так как для γ =I,2

$$F_\gamma(0)=a_2a_3^\gamma>0,\quad F_\gamma(1)=-a_4(1+a_1+a_3)^\gamma<0,$$

то существует такое $\alpha\in(0,1)$, что $F_\gamma(\alpha)=0$. Причем, уравнение $F_\gamma(u_2)=0$, являясь уравнением степени 2γ , на интервале (0,I) имеет при $\gamma=1$ точно один корень, а при $\gamma=2$ один или три корня. Полагая $u_2(x)\equiv\alpha$, $u_1(x)=a_1(1-\alpha)(a_1+a_3+\alpha)^{-1}$, легко проверяется выполнение условий (4). Теорема доказана.

Пусть α, β постоянные решения (I)-(4) из теоремы 2. Сделаем замену

$$u_1(x)=\beta+v(x), \qquad u_2(x)=\alpha+w(x).$$

Так как $0<\alpha,\beta$, $\alpha+\beta<1$, то при достаточно малых $v(x)$, $w(x)$ условия (4) выполняются. Считая $v(x)$, $w(x)$ достаточно малыми функциями, перейдем от (I), (2) к линеаризованной системе. Получим для $\gamma=1$

$$v''=\frac{d_2(a_3+\alpha+a_1\alpha)-d_1\beta(a_2+\alpha)}{d_1d_2(1-\alpha-\beta)}v+$$

$$+(1-\beta)\frac{d_2\alpha(a_1+\beta)-d_1a_2\beta}{d_1d_2\alpha(1-\alpha-\beta)}w,$$

$$w''=(1-\alpha)\frac{d_1\beta(a_2+\alpha)-d_2a_1\alpha}{d_1d_2\beta(1-\alpha-\beta)}v+$$

$$+\frac{d_1(a_4+\beta+a_2\beta)-d_2\alpha(a_1+\beta)}{d_1d_2(1-\alpha-\beta)}w$$

и для $\gamma=2$

$$v''=\left(\frac{2a_2\beta}{d_2}+\frac{d_2(1+\beta)(a_1+a_3+\alpha)+d_1\alpha\beta}{d_1d_2(1-\alpha-\beta)}\right)v+$$

$$+\left(\frac{2a_2\beta}{d_2}+\frac{d_2(1+\beta)(a_1+\beta)+d_1\beta(2a_4\alpha+\beta)}{d_1d_2(1-\alpha-\beta)}\right)w,$$

$$w''=\left(\frac{2a_2(1+\alpha)}{d_2}+\frac{d_2\alpha(a_1+a_3+\alpha)+d_1\alpha(1+\alpha)}{d_1d_2(1-\alpha-\beta)}\right)v+$$

$$+\left(\frac{2a_2(1+\alpha)}{d_2}+\frac{d_2\alpha(a_1+\beta)+d_1(1+\alpha)(2a_4\alpha+\beta)}{d_1d_2(1-\alpha-\beta)}\right)w.$$

В обоих случаях пришли к системе вида :

$$v'' = Av + Bw, \tag{6}$$

$$w'' = Cv + Dw, \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$v'(-1) = w'(-1) = v'(1) = w'(1) = 0. \tag{8}$$

Ответ о существовании решения задачи (6)-(8) дает следующая

Лемма 2. Если существует такое $n \in \{0,1,2,\dots\}$, что выполняется одно из равенств

$$A + D + \sqrt{(A-D)^2 + 4BC} = -\frac{\pi^2 n^2}{2}, \tag{9}$$

$$A + D - \sqrt{(A-D)^2 + 4BC} = -\frac{\pi^2 n^2}{2}, \tag{10}$$

то задача (6)-(8) имеет бесконечное множество решений. В противном случае задача (6)-(8) имеет единственно тривиальное решение.

Доказательство. Общее решение системы (6), (7) имеет вид:

$$v(x) = \frac{k_1^2 - D}{C}\left(C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{-k_1 x}\right) + \frac{k_2^2 - D}{C}\left(C_3 e^{k_2 x} + C_4 e^{-k_2 x}\right),$$

$$w(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{-k_1 x} + C_3 e^{k_2 x} + C_4 e^{-k_2 x},$$

где

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(A + D + \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}\right)},$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(A + D - \sqrt{(A-D)^2 + 4BC}\right)}.$$

Из условий (8) для нахождения констант C_1, C_2, C_3, C_4 получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений, определитель которой равен

$$\Delta=\kappa_1^2\kappa_2^2\left(\frac{\kappa_1^2-\kappa_2^2}{C}\right)^2(\ell^{2\kappa_1}-\ell^{-2\kappa_1})(\ell^{2\kappa_2}-\ell^{-2\kappa_2}).$$

Константы C_1, C_2, C_3, C_4 будут ненулевыми, если $\Delta = 0$. При $\kappa_i^2=0$, $i\in\{1,2\}$, условие (9) или (10) выполняется для $n=0$, а решением задачи (6)-(8) является

$$v(x)=-C_1\frac{D}{C}, \qquad w(x)=C_1,$$

где C_1 - любое действительное число. При $\kappa_1^2-\kappa_2^2=0$ и при $\ell^{2\kappa_i}-\ell^{-2\kappa_i}=0$, $i\in\{1,2\}$, задача (6)-(8) имеет нетривиальное решение, если $Re\,4\kappa_i=0$ и $Im\,4\kappa_i = 2\pi n$, то есть $\kappa_i^2=-\pi^2n^2/4$, что эквивалентно (9) или (10). Для нечетных n решением (6)-(8) будет

$$v(x)=-\frac{C_1}{C}\left(\frac{\pi^2n^2}{4}+D\right)\sin\frac{\pi n}{2}x, \quad w(x)=C_1\sin\frac{\pi n}{2}x,$$

а для четных n решением будет

$$v(x)=-\frac{C_1}{C}\left(\frac{\pi^2n^2}{4}+D\right)\cos\frac{\pi n}{2}x, \quad w(x)=C_1\cos\frac{\pi n}{2}x,$$

где $C_1\in R$. В силу произвольности C_1 можно сделать функции $v(x)$, $w(x)$ сколь угодно малыми. Лемма доказана.

Теорема 3. Если функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ отличны от констант и являются решением задачи (1)-(4), то не существует $c>0$, для которого $u_2(x)\equiv c\,u_1(x)$.

Доказательство. Предположим, что $u_2(x)\equiv c\,u_1(x)$ для некоторого положительного числа c (отрицательным c не может быть в силу (4)). Тогда уравнение (1) имеет вид

$$d_1u_1''=cu_1^2+(a_1+a_3+a_1c)u_1-a_1.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям (3), при рассмотрении на фазовой плоскости (u_1, u_1') должно лежать в окрестности центра (ξ, 0), где

$$\xi=-\frac{1}{2c}\left(a_1+a_3+a_1c+\sqrt{(a_1+a_3+a_1c)^2+4a_1c}\right)<0.$$

Следовательно, $u_1(x)$ на отрезке $[-1,1]$ принимает и отрицательные значения, что противоречит условиям (4). Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. Если $\gamma=1$, то у задачи (I)-(4) не существует отличное от констант решение вида:

$$u_1(x)=\alpha_1 z(x)+\beta_1\ ,\quad u_2(x)=\alpha_2 z(x)+\beta_2$$

при условии $d_1(\alpha_1-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)=d_2(\alpha_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2)$, где функция $z\in C_2[-1,1]$; $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим противное. После подстановки $u_1=\alpha_1 z+\beta_1$, $u_2=\alpha_2 z+\beta_2$ в (I), (2) имеем:

$$d_1(\alpha_1-\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)z''=\alpha_1\alpha_2 z^2+(a_1(\alpha_1+\alpha_2)+a_3\alpha_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)z+$$
$$+a_3\beta_1-a_1(1-\beta_1-\beta_2)+\beta_1\beta_2,$$

$$d_2(\alpha_2-\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2)z''=\alpha_1\alpha_2 z^2+(a_2(\alpha_1+\alpha_2)+a_4\alpha_2+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)z+$$
$$+a_4\beta_2-a_2(1-\beta_1-\beta_2)+\beta_1\beta_2.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим тождество

$$((a_1-a_2)(\alpha_1+\alpha_2)+a_3\alpha_1-a_4\alpha_2)z-(a_1-a_2)(1-\beta_1-\beta_2)+a_3\beta_1-a_4\beta_2\equiv 0.$$

Так как функция $z(x)$ отлична от константы, то приравнивая нулю коэффициенты этого тождества, имеем

$$(a_1+a_3-a_2)\alpha_1=(a_2+a_4-a_1)\alpha_2,$$

$$(a_1+a_3-a_2)\beta_1=a_1-a_2+(a_2+a_4-a_1)\beta_2.$$

Если $(a_1+a_3-a_2)\cdot(a_2+a_4-a_1)=0$, то в силу положительности a_3, a_4 следует $\alpha_1=0$ или $\alpha_2=0$. Но тогда по лемме I функции $u_1(x)$, $u_2(x)$ постоянны, что противоречит предположению. Следовательно,

$$(a_1+a_3-a_2)(a_2+a_4-a_1)\neq 0,$$

и после подстановки

$$u_1=\frac{a_2+a_4-a_1}{a_1+a_3-a_2}(\alpha_2 z+\beta_2)+\frac{a_1-a_2}{a_1+a_3-a_2}\ ,\quad u_2=\alpha_2 z+\beta_2$$

система (I), (2) будет эквивалентна одному уравнению

$$d_1\alpha_2 a_4 z''=\alpha_2^2(a_2+a_4-a_1)z^2+$$
$$+\alpha_2(a_1-a_2+a_1a_4+a_2a_3+a_3a_4+2\beta_2(a_2+a_4-a_1))z+$$

$$+\beta_2^2(a_2+a_4-a_1)+\beta_2(a_1-a_2+a_1a_4+a_2a_3+a_3a_4)+a_2a_3 .$$

Траектория решения этого уравнения, удовлетворяющего краевым условиям $z'(-1)=z'(1)=0$, при рассмотрении на фазовой плоскости (z , z') должно находиться в окрестности центра (z_0 , 0), где

$$z_0=-\alpha_2^{-1}\beta_2+(2\alpha_2(a_2+a_4-a_1))^{-1}(a_2-a_1-a_1a_4-a_2a_3-a_3a_4-$$
$$-\sqrt{(a_1-a_2+a_1a_4+a_2a_3+a_3a_4)^2+4a_2a_3(a_2+a_4-a_1)}) .$$

Это значит, что при некотором $x_0\in[-1,1]$ решение $z(x_0)=z_0$.

Поскольку $u_2=\alpha_2 z+\beta_2$, то

$$u_2(x_0)=(\,(a_2+a_4-a_1))^{-1}(a_2-a_1-a_1a_4-a_2a_3-a_3a_4-$$
$$-\sqrt{(a_1-a_2+a_1a_4+a_2a_3+a_3a_4)^2+4a_2a_3(a_2+a_4-a_1)}) .$$

Если $a_2+a_4-a_1>0$, то $u_2(x_0)<0$, что противоречит (4).

Если же $a_2+a_4-a_1<0$, то $a_1-a_2>0$, и в силу зависимости

$$u_1=\frac{(a_2+a_4-a_1)u_2+a_1-a_2}{a_1+a_3-a_2}$$

получаем

$$u_1(x_0)=(2(a_1+a_3-a_2))^{-1}(a_1-a_2-a_1a_4-a_2a_3-a_3a_4-$$
$$-\sqrt{(a_1-a_2-a_2a_3)^2+2a_4(a_1-a_2+a_2a_3)(a_1+a_2)+a_4^2(a_1+a_3)^2+4a_2a_3a_4})<0,$$

что противоречит (4). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: ФМ, 1961. - 311 с.

Поступила 28.05.87

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1988. - С. 23-34.

УДК 517.927.4

Я. В. Вирабицкий
ВЦ при ЛГУ им. П. Стучки

О ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ФИКСИРОВАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В настоящей статье предложены исследования работ [1-3]. Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x, x'), & (1) \\ Gx = G(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = g, & (2) \\ Hx = H(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h, & (3) \\ \alpha \leq x \leq \beta, & (4) \end{cases}$$

где $t \in I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in Car(I \times R^2, R)$, $G, H \in C(R^2 \times \bar{R}^2, \bar{R})$, $g, h \in \bar{R}$, $\alpha \in AG(I, R)$, $\beta \in BG(I, R)$, $x \in SG(I, R)$, здесь AG, BG, SG - множества обобщенных нижних и верхних функций и обобщенных решений (1) (см. [4]).

На α и β накладываются дополнительные условия:

1. $\alpha(a) = \beta(a)$,	4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$,	7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$,
2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$,	5. $\alpha(b) = \beta(b)$,	8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$.
3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$,	6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$,	

В статье рассматриваются для подмножества U условий 1-8 случаи $U \in \{135, 136, 137\}$.

Рассмотрение краевой задачи (1)-(4) ведется в предположении, что функция G фиксирована.

Введем обозначения класса монотонности и класса разрешимости. Будем говорить, что функция $H: R^2 \times \bar{R}^2 \to \bar{R}$ имеет тип монотонности $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0,-,+,1\}$, если функция H при $\sigma_i = 0$ не зависит от i-го аргумента, при $\sigma_i = -(\sigma_i = +)$ не возрастает (не убывает), i =I,2,3,4. Класс монотонности состоит из функций $H \in C(R^2 \times \bar{R}^2, \bar{R})$, имеющих тип монотонности $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$. Введем также обобщенные классы монотонности $MG(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0,-,+,I,X,Y,A,E,F\}$. Определим поведение $F \in MG(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$ лишь по первому аргументу, так как по остальным аргументам аналогично. Для $\sigma_i \in \{0,-,+,I\}$ поведение, как в случае классов монотонности. При $\sigma_1 = X$ $(\sigma_1 = Y)$ строго убывает (возрастает) по первому аргументу при любых фиксированных значениях остальных аргументов. Для других σ_1 определим равенствами:

$$MG(A\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(1\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

$$MG(E\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(-\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(X\sigma_2\sigma_3\sigma_4),$$

$$MG(F\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = MG(+\sigma_2\sigma_3\sigma_4) \setminus MG(Y\sigma_2\sigma_3\sigma_4).$$

О п р е д е л е н и е. Набор (G , M , U), состоящий из функции G , класса монотонности M и U-подмножества дополнительных условий I-8, является классом разрешимости ((G , M , U) $\in \mathcal{C}$), если для любых $a \in R$, $b \in (a, +\infty)$, $f \in Car(I \times R^2, R)$, $\alpha \in AG(I,R)$, $\beta \in BG(I,R)$, $H \in M$, $g, h \in \bar{R}$ таких, что $\alpha \le \beta$, $G\alpha \le g \le G\beta$, $H\alpha \le h \le H\beta$ и выполнены условия U , существует обобщенное решение (I)-(4).

Перейдем к изложению результатов. Везде далее M-класс монотонности.

Л е м м а.I. Если $(G,M,U) \in \mathcal{C}$, $U \in \{16, 17, 157\}$, то $G \in MG$ (II-I).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что (G , M , U) $\in \mathcal{C}$, но $G \bar{\in} MG$ (II-I). Это означает, что найдутся u_1, $u_2 \in R$, u_{31} , u_{32} , $u_4 \in \bar{R}$ такие, что

$u_{31} < u_{32}$ и

$$G(u_1, u_2, u_{31}, u_4) < G(u_1, u_2, u_{32}, u_4), \qquad (5)$$

в силу непрерывности функции G и строгости равенства (5) без ограничения общности будем полагать u_{31}, u_{32}, $u_4 \in R$. Покажем, что при этих предположениях набор (G, M, U) не является классом разрешимости. Тогда полученное противоречие показывает неверность предположения $G \overline{\in} MG$ (II-I), из чего вытекает верность утверждения леммы.

Чтобы показать, что набор (G, M, U) не является классом разрешимости, построим пример конкретной краевой задачи вида (I)-(4) такой, что $\alpha \leqslant \beta$, $G\alpha \leqslant g \leqslant G\beta$, $H\alpha \leqslant h \leqslant H\beta$, выполнены условия из U, но обобщенного решения краевой задачи не существует.

Пусть $U \in \{17, 157\}$. Без ограничения общности будем считать $u_1 = u_2 = u_{31} = u_4 = 0$, $u_{32} = 1$ (см.док-во леммы I в [I]). Возьмем следующие интервал I,функцию f, функции α и β (в дальнейшем такой набор будем называть парой (α, β)):

I= [0,2]

$$f(t,x) = \begin{cases} 0, & t \in [0,1), \\ 12|x|^{1/2} \operatorname{sign} x, & t \in [1,2], \end{cases}$$

$\alpha(t) = 0,$

$$\beta(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1), \\ (t-2)^4, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Легко видеть, что для α и β выполнены условия I,2,5,7. Положим $g = G\beta$, $Hx \equiv 0$, $h = 0$. Требуемый пример краевой задачи построен. Действительно, единственное решение уравнения $x'' = f$, заключенное между α и β, есть α. Но $G\alpha < g = G\beta$, поэтому граничное условие $Gx = g$ не выполнено.

Если U =16, то в качестве пары (α, β) берем:

$I = [0, 2+\varepsilon]$, f, α, β определяем для $[2, 2+\varepsilon]$

как в случае U =17.

З а м е ч а н и е. Все леммы доказаны по приведенной схеме, поэтому последующие доказательства будут более сжаты.

С помощью замены типа $t \to -t$ из леммы I получается

Л е м м а 2. Если $(G, M, U) \in \mathcal{C}$, U =135, то $G \in MG(111+)$.

Л е м м а 3. Если $(G, M, U) \in \mathcal{C}$, $U \in \{16, 17, 136, 137\}$, то $G \in MG(1111) \setminus MG(1A1B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай U = 137. Используем следующее разбиение:

$$MG(1A1B) = MG_1(1A1B) \cup MG_2(1A1B),$$

где

$$MG_1(1A1B) = \{F \in MG(1A1B) : (\exists u_1, u_{21}, u_{22} \in R,\ \exists u_3, u_{41}, u_{42} \in \bar{R})(u_{21} < u_{22},\ u_{41} < u_{42})\ (F(u_1, u_{21}, u_3, u_{41}) < F(u_1, u_{22}, u_3, u_{41}) \wedge F(u_1, u_{22}, u_3, u_{42}) < F(u_1, u_{22}, u_3, u_{41}))\},$$

$$MG_2(1A1B) = \{F \in MG(1A1B) : (\forall u_1, u_{21}, u_{22} \in R,\ \forall u_3, u_{41}, u_{42} \in \bar{R})(u_{21} < u_{22}, u_{41} < u_{42})(F(u_1, u_{21}, u_3, u_{41}) \geq F(u_1, u_{22}, u_3, u_{41}) \vee F(u_1, u_{22}, u_3, u_{42}) \geq F(u_1, u_{22}, u_3, u_{41}))\}.$$

Если $MG_2(1A1B) \neq \emptyset$, то для любого $F \in MG_2(1A1B)$ из определения получаем $F \overline{\in} MG(1A1B)$. Полученное противоречие показывает, что $MG_2(1A1B) = \emptyset$. Следовательно, $MG(1A1B) = MG_1(1A1B)$, в силу чего для доказательства леммы достаточно показать, что $G \in MG(1111) \setminus MG_1(1A1B)$.

Предположим, что $G \in MG_1(1A1B)$. Покажем возможность построения примера краевой задачи такого, что все требования из определения класса разрешимости выполнены, но решения краевой задачи не существует. Без ограничения общности положим $u_1 = u_3 = u_{21} = u_{41} = 0$, $u_{22} = 1$, $u_{42} = 4$. Используем пару (α, β):

$$I=[1,2], \quad f(t,x)=12\,|x|^{1/2}\operatorname{sign} x,$$

$$\alpha=0, \quad \beta(t)=\begin{cases} t^4, & t\in[0,1), \\ 1, & t\in[1,2]. \end{cases}$$

Дальнейшая часть доказательства, как в лемме I, полагая $g=G\beta$, $Hx\equiv 0$, $h=0$.

Случай U =I36 рассматривается по аналогии. Для U =I6 и U =I7 условия выполнены при U =I36 и U =I37 соответственно, поэтому приведенные результаты годятся и для этих случаев.

Л е м м а 4. Если $(G, M, U)\in\mathcal{C}$, $U\in\{16, 17, 136, 137\}$, то

$$G\in MG(1A11)\Longrightarrow M\subset M(1\text{-}10).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U =I37. Включение $G\in MG(1A11)$ означает, что существуют u_1, u_{21}, $u_{22}\in R$, u_3, такие, что $u_{21}<u_{22}$ и

$$G(u_1,u_{21},u_3,u_4)<G(u_1,u_{22},u_3,u_4).$$

В силу непрерывности функции G можно считать $u_3, u_4\in R$. Без ограничения общности будем считать $u_1=u_{21}=u_3=u_4=0$, $u_{22}=1$. Чтобы доказать справедливость включения $M\subset M(1\text{-}10)$, достаточно показать невозможность включений $M(0{+}00)\subset M$, $M(000{+})\subset M$, $M(000{-})\subset M$.

Перейдем к построению примера краевой задачи с отсутствием решения. Возьмем пару (α, β):

$$I=[0,2], \quad f(t,x)=\begin{cases} 12|x|^{1/2}\operatorname{sign} x, & t\in[0,1), \\ 0, & t\in[1,2], \end{cases}$$

$$\alpha=0, \quad \beta(t)=\begin{matrix} t^4, & t\in[0,1), \\ 1, & t\in[1,2]. \end{matrix}$$

Для $H\in M(0{+}00)$ положим $g=G\beta$, $Hx=x(b)$, $h=\alpha(b)$. Для $H\in M(000{+})$ и $H\in M(000{-})$ пусть $g=G\beta$, $Hx=\pm x'(b)$, $h=\pm\alpha'(b)$.

Для случая U =I7 годится приведенное доказательство.

Перейдем к случаю U =I36 (а также U =I6). В качестве пары (α , β) берем:

$$I=[0,2], \quad f(t,x)=\begin{cases} 12|x|^{1/2}\operatorname{sign} x, & t\in[0,1), \\ 0, & t\in[1,2], \end{cases}$$

$$\alpha=0, \quad \beta(t)=\begin{cases} t^4, & t\in[0,1), \\ \varepsilon t(1-\varepsilon), & t\in[1,2], \end{cases} \quad \varepsilon\in(0,1),$$

ε - достаточно мало (чтобы выполнялось $G\alpha<G\beta$). В качестве H возьмем $Hx=x\,b$, $Hx=\pm\varphi(x'(b))$ соответственно, $h=\alpha(b)$, $h=\pm 0$ соответственно,

$$\varphi(s)=\begin{cases} \varepsilon s+\varepsilon, & s<-\varepsilon, \\ 0, & |s|\le\varepsilon, \\ \varepsilon s-\varepsilon, & s>\varepsilon. \end{cases}$$

Л е м м а 5. Если (G , M , U) $\in\mathcal{C}$, $U\in\{$I6,I36$\}$, то

$$G\in MG(111A)\Longrightarrow M\subset M(1\text{-}1\text{-}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U =I36. Включение $G\in MG$ ($111A$) означает, что существуют u_1 , $u_2\in R$, u_3 , u_{41} , $u_{42}\in\bar{R}$ такие, что $u_{41}<u_{42}$ и

$$G(u_1,u_2,u_3,u_{41})<G(u_1,u_2,u_3,u_{42}).$$

Без ограничения общности будем считать u_3 , u_{41} , $u_{42}\in R$, $u_1=u_2=u_3=u_{41}=0$, $u_{42}=1$.
Чтобы доказать включение $M\subset M(1\text{-}1\text{-})$, необходимо доказать невозможность включений $M(0{+}00)\subset M$ и $M(000{+})\subset M$.

Возьмем пару (α , β):

$$I=[0,\varepsilon], \quad f(t,x)=6\varepsilon^{-3/2}|x|^{1/2}\operatorname{sign} x,$$
$$\alpha(t)=0, \quad \beta(t)=4\varepsilon^{-3}t^4, \quad \varepsilon>0.$$

При достаточно малом ε имеем $G\alpha<G\beta$. Положим $g=G\beta$, $Hx=x(a)$, $h=\alpha(a)$ для доказательства невозможности включения $M(0{+}00)\subset M$ и $g=G\beta$, $Hx=x'(b)$, $h=\alpha'(b)$ для доказательства невозможности включения $M(000{+})\subset M$. Окончание доказательства,

как в лемме 4.

Для случая U =16 годится приведенное доказательство, так как в нем для пары (α , β) выполнены условия I и 6.

Л е м м а 6. Если (G , M , U)$\in \mathcal{C}$, U=135, то
$G\in MG(111F) \Longrightarrow M\subset M(111+)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем по схеме доказательства леммы 4. Включение $G\in MG(111F)$ означает, что существуют $u_1, u_2 \in R$, $u_3, u_{41}, u_{42} \in \bar{R}$ такие, что $u_{41} > u_{42}$ и

$$G(u_1, u_2, u_3, u_{41}) = G(u_1, u_2, u_3, u_{42}).$$

В силу $MG(111F)\subset M(111+)$ без ограничения общности можно считать $u_{41}, u_{42} \in R$. Для u_3 необходимо рассмотреть два случая: $|u_3| < \infty$ и $|u_3| = \infty$. Пусть $|u_3|<\infty$. Без ограничения общности будем считать $u_1 = u_2 = u_3 = u_{41} = 0$, u_{42} = -I (см. доказательство леммы I). Для доказательства включения $M\subset M(111+)$ достаточно показать, что невозможно включение $M(000-)\subset M$. Возьмем пару (α , β):

$$I=[0,2],\quad f(t,x)=\begin{cases} 12|x|^{1/2}\operatorname{sign} x, & t\in[0,1), \\ 0, & t\in[1,2], \end{cases}$$

$$\alpha(t)=0,\quad \beta(t)=\begin{cases} t^4, & t\in[0,1), \\ -t+2, & t\in[1,2], \end{cases}$$

имеем $G\alpha = G\beta$. Положим $g = G\beta$, $Hx=-x'(b)$, $h=0$. Конец доказательства, как в предыдущих леммах.

Пусть $u_3 = +\infty$ Тогда пример требуемой краевой задачи строится на паре (α , β):

$$I=[0,\tau],\quad \tau^{1/2}+\tau-3=0,\quad \tau=(7-\sqrt{3})2^{-1},$$

$$f(t,x)=-4^{-1}x^{-3}, \qquad \alpha(t)=t^{1/2},$$

$$\beta(t)=\begin{cases}2t^{1/2}, & t\in[0,1),\\ -t+3, & t\in[1,\tau],\end{cases}$$

наконец, полагаем $g=G\beta$, $Hx=-x'(b)$, $h=-\alpha'(b)$.

Для $u_3=-\infty$ построение проводится аналогично.

Л е м м а 7. Если $(G,M,U)\in\mathcal{C}$, $U=137$, то

1) $G\in MG_1(1E11)\Longrightarrow M\subset M(1-11)$,

2) $G\in MG_2(1E11)\Longrightarrow M\subset M(111+)\cup M(1-11)$,

где $MG_1(1E11)=\{F\in MG(1E11):(\exists u_1,u_{21},u_{22},u_{23}\in R)$,
$\exists u_3,u_{41},u_{42}\in\bar{R})(u_{21}<u_{22},\ u_{23}\in[u_{21},u_{22}]$,
$u_{41}\neq u_{42})(F(u_1,u_{23},u_3,u_{42})\neq F(u_1,u_{21},u_3,u_{41})=$
$=F(u_1,u_{22},u_3,u_{41}))\}$,

$$MG_2(1E11)=MG(1E11)\setminus MG_1(1E11).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим 1).
Предположим для определенности, что $u_{42}>u_{41}$ и $u_{21}<u_{23}<u_{22}$. Случай $u_{42}<u_{41}$ рассматривается аналогично.

Ввиду $u_3,u_{41},u_{42}\in\bar{R}$ будем рассматривать $u_3\in R$ или $|u_3|=\infty$, $u_{41},u_{42}\in R$, или $|u_{41}|,|u_{42}|=\infty$.

Пусть $u_3,u_{41},u_{42}\in R$. Без ограничения общности будем считать $u_1=u_3=u_{41}=u_{21}=0$, $u_{22}=1$, $u_{23}\in(0,1)$, $u_{42}=4\sqrt[4]{u_{23}^3}$.

Возьмем пару (α,β):

$$I=[0,2],$$

$$f(t,x)=\begin{cases}12|x|^{1/2}\operatorname{sign}x, & t\in[0,1),\\ 0, & t\in[1,2],\end{cases}$$

$\alpha = 0,$

$$\beta(t) = \begin{cases} t^4, & t \in [0,1), \\ 1, & t \in [1,2]. \end{cases}$$

Положим $g = G\alpha$, $Hx = x(\beta)$, $h = u_{23}$.
Тогда получаем неразрешимую краевую задачу, так как не выполнено условие $Gx = g$

Если $|u_3| = \infty$, пару (α, β) доопределим на (-1,0):

$I = [-1, 0)$,

$f(t, x, x') = -2(x' + 2^{-1})^3$,

$\alpha(t) = \beta(t) = -1 - 2^{-1}t + (t+1)^{1/2}$.

Л е м м а 8. Если $(G, M, U) \in \mathcal{C}$, U =136, то

1) $G \in MG_1(1\text{-}1E) \Longrightarrow M \subset M(1\text{-}11)$,

2) $G \in MG_2(1\text{-}1E) \Longrightarrow M \subset M(111+) \cup M(1\text{-}11)$,

где $MG_1(1\text{-}1E) = \{F \in MG(1\text{-}1E) : (\exists u_1, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in R,$
$\exists u_3, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \bar{R})(u_{21} < u_{22},\ u_{41} < u_{42},$
$u_{23} \in [u_{21}, u_{22}],\ u_{43} \bar{\in} [u_{41}, u_{42}])$
$(F(u_1, u_{23}, u_3, u_{43}) \neq F(u_1, u_{21}, u_3, u_{41}) =$
$F(u_1, u_{22}, u_3, u_{42}))\}$,

$MG_2(1\text{-}1E) = MG(1\text{-}1E) \setminus MG_1(1\text{-}1E)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 7 и опускается.

Теперь мы в состоянии перейти к формулировке и доказательству основных результатов.

Т е о р е м а 1. Пусть U =135, $(G, M, U) \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, если (G, M) является одним из следующих сочетаний:

I) $G \in MG(111Y)$, $M \subset M(1111)$,

2) $G \in MG(111F)$, $M \subset M(111+)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. В силу леммы 2 имеем $G \in MG(111+)$. Возьмем разбиение

$$MG(111+) = MG(111Y) \cup MG(111F).$$

Пусть $G \in MG(111F)$ и $(G,M,U) \in \mathcal{C}$. Тогда на основании леммы 6 получаем $H \in M(111+)$.

Необходимость. Рассмотрим I). Если $G \in MG(111Y)$, то для выполнения неравенства $G\alpha \leq G\beta$ необходимо = =I357, и тогда в силу теорем [5] $(G,M,U) \in \mathcal{C}$. Если условие 7 не входит в U, то необходимо должно выполняться условие 8. Но тогда $G\alpha > G\beta$, и требуемое неравенство $G\alpha \leq G\beta$ не выполнено.

Перейдем к 2). Для $G \in MG(111F) \subset M(111+)$ и $M \subset M(111+)$ набор(G, M, U) является классом разрешимости в силу теорем работы [5] для U=I35.

Т е о р е м а 2. Пусть U=I36. (G, M, U) $\in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, если (G, M) является одним из следующих со - четаний:

I) $G \in MG(1A1+)$, $M \subset M(1\text{-}10)$,

2) $G \in MG(1\text{-}1A)$, $M \subset M(1\text{-}1\text{-})$,

3) $G \in MG(1\text{-}1X)$, $M \subset M(1111)$,

4) $G \in MG_1(1\text{-}1E)$, $M \subset M(1\text{-}11)$,

5) $G \in MG_2(1\text{-}1E)$, $M \subset M(111+) \cup M(1\text{-}11)$,

где MG_1 и $MG_2(1\text{-}1E)$ определены в лемме 8.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. В силу леммы 3 имеем $G \in MG(1111) \setminus MG(1A1B)$. Возьмем разбиение:

$$MG(1111) \setminus MG(1A1B) = MG(1A1+) \cup MG(1\text{-}1A) \cup MG(1\text{-}1X) \cup$$
$$\cup MG_1(1\text{-}1E) \cup MG_2(1\text{-}1E),$$

где $MG_i(1\text{-}1E)$ определены в лемме 8. Перейдем к рассмотрению элементов правой части разбиения.
Для $G \in MG(1A1+)$ включение $M \subset M(1\text{-}10)$ получается применением лемм 4. В случае $G \in MG(1\text{-}1A)$ применяем лемму 5, в случаях $G \in MG_1(1\text{-}1E)$ и $G \in MG_2(1\text{-}1E)$ – лемму 8. Если же $G \in MG(1\text{-}1X)$, то выполнено неравенство $G\alpha > G\beta$, и поэтому рассмотрение заканчиваем.

Необходимость. $(G,M,U) \in \mathcal{C}$ в 1),2),4) на основании теорем работы [5]. Рассмотрим 5). Если $G \in MG_2(1\text{-}11)$, $M \subset M(1\text{-}11)$, то $(G,M,U) \in \mathcal{C}$ в силу теорем [5].

Если же $G \in MG_2(1\text{-}1E)$, $M \subset M(111+)$, то включение $(G,M,U) \in \mathcal{C}$ не следует непосредственно из теорем [5]. Надо доказать, как в 6) теоремы 4 в [1].

Т е о р е м а 3. Пусть $U = 137$. $(G,M,U) \in \mathcal{C}$ тогда и только тогда, если (G,M) является одним из следующих сочетаний:

1) $G \in MG(1A1+)$, $M \subset M(1\text{-}10)$,

2) $G \in MG(1X11)$, $M \subset M(1111)$,

3) $G \in MG_1(1E11)$, $M \subset M(1\text{-}11)$,

4) $G \in MG_2(1E11)$, $M \subset M(111+) \cup M(1\text{-}11)$,

где $MG_i(1E11)$ определены в лемме 7.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2 и поэтому опущено.

З а м е ч а н и е. Заменой независимого аргумента типа $t \to -t$ из теорем 1–3 можно получить теоремы для $U = 157$, $U = 457$, $U = 357$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вирбицкий Я.В. Необходимые и достаточные условия разрешимости двухточечной краевой задачи//Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. – Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1986. – С.53–68.

2. Виржбицкий Я.В. Обобщенная разрешимость нелинейной краевой задачи с фиксированной граничной функцией// Нелинейные краевых задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига:ЛГУ им.П.Стучки, 1985. - С.84-92.
3. Виржбицкий Я.В. Обобщенная разрешимость двухточечной краевой задачи с фиксированным граничным условием// Латв.мат.ежегодник. - Рига:Зинатне, 1985. - Вып.29.- С.3-7.
4. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка//Дифференциальные уравнения. - 1982. - Т.18, № 8, - С.1323-1330.
5. Лепин А.Я. Существование обобщенного решения нелинейных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка//ЛГУ им.П.Стучки. - Рига, 1986. - 94 с. - Деп. в ЛатНИИНТИ 13.02.86, № 76 Ла-Д86.

Поступила 30.09.87

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.-С. 35 - 52.

УДК 517.9274:956.4

М.М.Адъютов
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Изучению диссипативных тепловых структур, описываемых уравнением

$$Ar^{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\kappa_0}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\nu}T^{\sigma}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q_0 Ar^{\kappa}T^{\beta}, \tag{I}$$

$$\kappa_0,\ q_0,\ A,\ \sigma>0,\quad \beta>1,\ \kappa>-N,\ \nu=N-1,$$

где N - размерность пространства, посвящено большое число работ. Одним из наиболее эффективных и плодотворных приемов исследования таких уравнений оказался метод построения автомодельных решений [I-9,13]. При этом приходится исследовать некоторые краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Такая задача, связанная с уравнением (I), рассматривается в настоящей статье. Для (I) автомодельные решения ищутся в виде:

$$T(r,t)=(1-tt_f^{-1})^{-\frac{1}{\beta-1}}\theta(\xi),\quad \xi=r(1-tt_f^{-1})^{-m},$$

$$m=\frac{\beta-\sigma-1}{(\kappa+2)(\beta-1)},\quad \kappa\neq-2,$$

тогда $\theta(\xi)$ является решением задачи

$$\frac{1}{\xi^{\nu}}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{\nu}\theta^{\sigma}\frac{d\theta}{d\xi}\right)-\frac{m}{t_f}\xi^{\kappa+1}\frac{d\theta}{d\xi}-\frac{1}{(\beta-1)t_f}\xi^{\kappa}\theta+\xi^{\kappa}\theta^{\beta}=0, \tag{2}$$

$$\lim_{\xi\to 0+}\xi^{\nu}\theta^{\sigma}\frac{d\theta}{d\xi}=0,\quad \lim_{\xi\to\xi_f}\xi^{\nu}\theta^{\sigma}\frac{d\theta}{d\xi}=0,\quad \lim_{\xi\to\xi_f}\theta=0,$$

$$\theta(\xi)>0,\ \xi\in[0,\xi_f),\ \ \xi_f\leq+\infty.$$

Коэффициенты A, K_0, q_0 в дальнейшем считаются равными единице. В [8] отмечалось, что это не ограничивает общности рассмотрения, а лишь означает изменение масштабов.

При $K\leq -2$ задача (2) не имеет решения, что доказано в [9]. При $K>-2$, аналогично [9], преобразуем (2) к виду, разрешенному относительно старшей производной, подстановками

$$\xi=\left(\frac{K+2}{2}s\right)^{\frac{2}{K+2}},\qquad \theta=y^{\frac{1}{\sigma+1}}.$$

Задача (2) переходит в задачу:

$$y''=\frac{\beta-\sigma-1}{2}sy^{-\frac{\sigma}{\sigma+1}}y'-\frac{p}{s}y'+(\sigma+1)\left(y^{\frac{1}{\sigma+1}}-y^{\frac{\beta}{\sigma+1}}\right),\tag{3}$$

$$\lim_{s\to 0+}s^py'=0,\ \lim_{s\to s_f}s^py'=0,\ \lim_{s\to s_f}y=0,\tag{4}$$

$$y(s)>0,\ s\in[0,s_f),\ s_f=\frac{2}{K+2}\xi^{\frac{K+2}{2}},\ \ p=\frac{K+2\nu}{K+2}.\tag{5}$$

В (3) полагается $t_f=(\beta-1)^{-1}$. Согласно [8] это можно сделать не ограничивая общности рассмотрения. В [9] доказано, что одним из необходимых условий разрешимости (3)-(5) является $p>-1$. При этом из первого условия (4) следует

$$\lim_{s\to 0+}y'=0.\tag{6}$$

В настоящей статье рассматривается так называемый S-режим горения [5]. При этом для коэффициентов β и σ выполняется соотношение

$$\beta=\sigma+1,$$

и задача (3)-(5) принимает вид:

$$y''=-ps^{-1}y'+\beta\left(y^{\frac{1}{\beta}}-y\right),\tag{7}$$

$$\lim_{s\to 0+} s^p y' = 0, \quad \lim_{s\to s_f} s^p y' = 0, \quad \lim_{s\to s_f} y = 0, \tag{8}$$

$$y(s) > 0, \quad s \in [0, s_f), \quad p > -1. \tag{9}$$

Уравнение (7) имеет особенность при $s=0$, поэтому при изучении решений задачи (7)-(9) будем опираться на следующую лемму, которая может быть доказана совершенно аналогично соответствующему утверждению из [I2].

Л е м м а I. Предельная начальная задача

$$\lim_{s\to 0+} y = y_0, \quad \lim_{s\to 0+} s^p y' = 0 \tag{I0}$$

для уравнения (7) имеет единственное решение для любого $y_0 > 0$, это решение непрерывно зависит от y_0.

Из [9] следует, что это решение при $s \to 0+$ может быть представлено в виде:

$$\begin{gathered} y = y_0 + \frac{y_\beta}{2(p+1)} s^2 + s^4\left(\frac{y_\beta y_\sigma}{8(p+1)(p+3)} + o(1)\right), \\ y' = \frac{y_\beta}{p+1} s + s^3\left(\frac{y_\beta y_\sigma}{2(p+1)(p+3)} + o(1)\right), \end{gathered} \tag{II}$$

где $y_\beta = \beta\left(y_0^{\frac{1}{\beta}} - y_0\right)$, $y_\sigma = y_0^{-\frac{\beta-1}{\beta}} - \beta$.

Как отмечалось выше, значение ξ_f, а следовательно, и s_f, в постановке задачи может быть как конечным, так и бесконечным. Докажем две леммы о поведении решений уравнения (7), из которых, в частности следует конечность s_f.

Л е м м а 2. Если $y(s)$ положительное решение (7), то:

I) $y(s)$ не может иметь точек минимума при $y(s)>1$ и точек максимума при $y(s)<1$;

2) если $s_1 < s_2$ точки одноименного экстремума $y(s)$, то

$$\operatorname{sign}(|y(s_1)-1|-|y(s_2)-1|) = \operatorname{sign} p .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть s_0 - точка минимума. Тогда $y'(s_0)=0$, $y''(s_0) \geq 0$. Из (7) получаем $y^{\frac{1}{\beta}}(s_0) - y(s_0) \geq 0$, откуда $y(s_0) \leq \leq 1$. Доказательство для точек максимума аналогично.

Умножим (7) на $y'(s)$ и проинтегрируем от s_1 до s_2:

$$\left(\frac{\beta}{2} y^2 - \frac{\beta^2}{1+\beta} y^{\frac{\beta+1}{\beta}}\right)\Bigg|_{s_1}^{s_2} = \int_{s_1}^{s_2} -\frac{p}{\tau} y'^2(\tau)\,d\tau .$$

Если $p>0$, то

$$\frac{\beta}{2} y^2(s_2) - \frac{\beta^2}{1+\beta} y^{\frac{\beta+1}{\beta}}(s_2) < \frac{\beta}{2} y^2(s_1) - \frac{\beta^2}{1+\beta} y^{\frac{\beta+1}{\beta}}(s_1).$$

Следовательно, $y(s_2) < y(s_1)$ для точек максимума и $y(s_2) > y(s_1)$ для точек минимума. Учитывая, что колебаться $y(s)$ может лишь около значения единица, получаем второе утверждение теоремы. Для $p \in (-1, 0]$ доказательство аналогично.

Отметим, что при $p=0$ известно [1] точное решение задачи (7)-(9)

$$y(s) = \left(\frac{2\beta^2}{\beta+1}\cos^2\frac{\beta-1}{2\beta}s\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} . \tag{12}$$

Если допустить, что решение задачи (7)-(9) на некотором отрезке $[s_1, s_2]$ тождественно равно нулю, то его в случае $p=0$ можно дальше продолжить ненулевым (рис. 1) так, что будут выполнены условия (8)

$$y(s) = \left(\frac{2\beta^2}{\beta+1}\cos^2\frac{\beta-1}{2\beta}(s-s_2)\right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} .$$

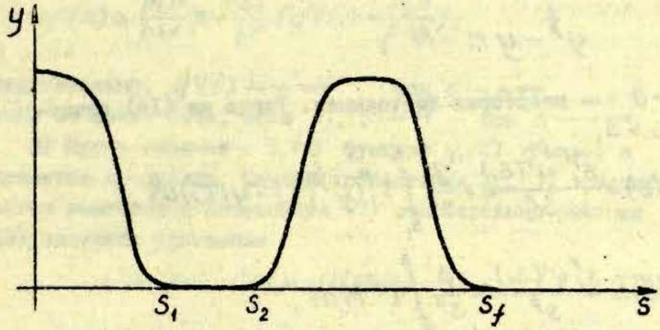

Рис.I

При $p \neq 0$ такое достроение решения невозможно, т.к. согласно лемме 2 колебания будут либо затухающими, либо нарастающими.

Л е м м а 3. Единственным положительным на $[0, +\infty)$ и монотонным, начиная с некоторого $S_0 \geqslant 0$, решением уравнения (7) является

$$y(s) \equiv 1 \tag{I3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательно рассмотрим следующие варианты возможного поведения положительного монотонного при больших S решения $y_*(s)$:

I) $y_*(s)$ возрастает до бесконечности;

2) $y_*(s)$ стремится к конечному пределу, отличному от нуля и единицы;

3) $y_*(s)$ стремится к единице;

4) $y_*(s)$ стремится к нулю,

I) Запишем (7) в виде :

$$(s^p y')' = \beta s^p (y^{\frac{1}{\beta}} - y). \tag{I4}$$

Т.к. $y(s)$ возрастает до бесконечности, то, начиная с некоторого S_1, будет выполняться

$$y^{\frac{1}{\beta}} - y \leq -M ,$$

где $M>0$ — некоторая постоянная. Тогда из (I4) следует при $s > s_1$

$$y'(s) = \frac{s_1^p\, y'(s_1)}{s^p} + \frac{\beta}{s^p}\int_{s_1}^{s} \tau^p \left(y^{\frac{1}{\beta}}(\tau) - y(\tau)\right) d\tau ,$$

$$y'(s) = \frac{s_1^p\, y'(s_1)}{s^p} - \frac{\beta}{s^p}\int_{s_1}^{s} \tau^p M\, d\tau ,$$

$$y'(s) = -\frac{M\beta}{p+1}\, s + s^{-p} s_1^p \left(y'(s_1) + \frac{M\beta}{p+1}\right),$$

таким образом при $p > -1$ производная $y'(s) \to -\infty$ при $s \to +\infty$, что противоречит возрастанию функции $y_*(s)$.

2) Для определенности предположим, что $H \in (0,1)$. Случай $H > 1$ рассматривается аналогично. Т.к. $y_*(s) \to H$ при $s \to +\infty$, то начиная с некоторого $s_1 \geq 0$, выполняется

$$\frac{H}{2} < y_*(s) < \frac{1+H}{2}$$

или

$$y_*^{\frac{1}{\beta}}(s) - y_*(s) \geq M > 0 ,$$

где $M = \min\left\{ \left(y^{\frac{1}{\beta}} - y\right) : y \in \left[\frac{H}{2}, \frac{1+H}{2}\right]\right\}$.

Из (I4) получаем при $s > s_1$:

$$y'(s) = \frac{s_1^p\, y'(s_1)}{s^p} - \frac{\beta}{s^p}\int_{s_1}^{s} \tau^p \left(y^{\frac{1}{\beta}}(\tau) - y(\tau)\right) d\tau ,$$

$$y'(s) \geq \frac{s_1^p\, y'(s_1)}{s^p} + \frac{\beta}{s^p}\int_{s_1}^{s} \tau^p M\, d\tau ,$$

$$y'(s) \geqslant \frac{M\beta}{p+1} s + \frac{s_1^p}{s^p}\left(y'(s_1) - \frac{M\beta}{p+1}\right),$$

следовательно, $y'(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$, а этого не может быть, если $y_*(s) \to H$ при $s \to +\infty$.

3) Пусть начиная с $s_1 \geqslant 0$ функция $y_*(s)$ убывает и стремится к единице. Случай возрастания $y_*(s)$ рассматривается аналогично. Линеаризуя (7) относительно решения (I3), получаем уравнение

$$u'' = -ps^{-1}u' - (\beta - 1)(u - 1), \tag{I5}$$

общее решение которого может быть записано [I0] через цилиндрические функции

$$u(s) = 1 + s^{\nu} C_{\nu}(\sqrt{\beta - 1}\, s), \quad \nu = \frac{1-p}{2}.$$

Отметим, что предполагаемое решение $y_*(s)$ уравнения (7) удовлетворяет неравенству

$$y_*'' \leqslant -ps^{-1}y_*' - (\beta - 1)(y_* - 1)$$

т.е. является верхней функцией для уравнения (I5), нижней функцией для этого уравнения является (I3). Выберем точку $s_2 > s_1$. Согласно теореме 3 [II, стр.37] краевая задача

$$u(s_1) = \frac{y_*(s_1) - 1}{2}, \quad u(s_2) = \frac{y_*(s_2) - 1}{2}$$

для уравнения (I5) будет иметь решение, заключенное между верхней и нижней функциями. Устремляя $s_2 \to +\infty$, учитывая, что верхняя и нижняя функции монотонно стремятся к одному пределу, несложно предельным переходом показать, что краевая задача

$$u(s_1) = \frac{y_*(s_1) - 1}{2}, \quad \lim_{s \to +\infty} u(s) = 1$$

имеет решение, заключенное между верхней и нижней функциями. С другой стороны [I0], известно, что цилиндрические функции имеют бесконечное число нулей вправо от любого неотрицательного S_1, и, следовательно, любое решение (I5) пересечет (I3) вправо от S_1, а это противоречит тому, что найдется решение (I5), заключенное между $y_*(S)$ и (I3). Полученное противоречие показывает, что такой $y_*(S)$ быть не может.

4) Пусть начиная с S_0 функция $y_*(S)$ монотонно стремится к нулю. Выберем $S_1 \geq S_0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$y_*(S_1) < \beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}}$$

и

$$\frac{3(2\beta+1)}{(\beta-1)^2} y_*^{\frac{\beta-1}{3\beta}}(S_1) + \frac{3|P|}{(\beta-1)S_0} y_*^{\frac{2(\beta-1)}{3\beta}}(S_1) + y_*^{\frac{\beta-1}{\beta}}(S_1) \leq 1.$$

Функции

$$w(S) = \left| y_*^{\frac{\beta-1}{3\beta}}(S_1) + S_1 - S \right|^{\frac{3\beta}{\beta-1}},$$

$$z(S) \equiv 0$$

будут при этом, соответственно, верхней и нижней функциями для краевой задачи, состоящей из уравнения (7) и условий

$$y(S_1) = y_*(S_1),$$

$$y\left(S_1 + 2y_*^{\frac{\beta-1}{3\beta}}(S_1)\right) = y_*\left(S_1 + 2y_*^{\frac{\beta-1}{3\beta}}(S_1)\right). \tag{I6}$$

По теореме 3 [II, с. 37] эта задача имеет решение $y_0(S)$, заключенное между $w(S)$ и $z(S)$. Т.к. $w\left(S_1 + y_*^{\frac{\beta-1}{3\beta}}(S_1)\right) = z\left(S_1 + y_*^{\frac{\beta-1}{3\beta}}(S_1)\right) = 0$, то и $y_0\left(S_1 + y_*^{\frac{\beta-1}{3\beta}}(S_1)\right) = 0$. По предположению краевая задача (7), (I6), кроме решения $y_0(S)$, имеет решение $y_*(S)$, причем оба эти решения меньше $\beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}}$, но при $y \in \left(0, \beta^{-\frac{\beta}{\beta-1}}\right)$ правая часть уравнения монотонно возрастает по y и согласно замечанию 2 [II,с. 104] краевая задача (7), (I6) не может иметь двух решений. Таким образом и предположение о том, что уравнение (7) может иметь положительные на $[0,+\infty)$ решения, монотонно стремящиеся к нулю, привело к противоречию.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 3 из [6]. Для этого необходимо заметить, что решение задачи (7), (10) непрерывно зависит от y_0 (лемма I) и любое решение линеаризованного уравнения (I5) имеет бесконечное число нулей (лемма 3).

Л е м м а 4. Какого бы ни было $n\in N$ найдется $y_0>1$, такое что предельная начальная задача (7), (I0) имеет не менее n точек локального экстремума. Это же справедливо и для $y_0\in(0,1)$.

В случае затухающих колебаний $(p>0)$ если решение $y(s)$ уравнения (7) имеет одну точку минимума s_1, такую что $y(s_1)>0$, то оно будет иметь бесконечное множество точек минимума $s_2<s_3<s_4<\ldots$, в которых выполняются соотношения $y(s_1)<y(s_2)<y(s_3)<\ldots<1$. При этом, очевидно, условия (8) выполнены быть не могут. Следовательно, при $p>1$ имеет смысл доказывать лишь существование монотонных решений. Предварительно докажем одну лемму.

Л е м м а 5. Существует значение $y_{01}>1$, что решение $y(s)$ задачи (7), (I0) монотонно убывает при $s>0$ и достигает нулевого значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о для $p\geq 0$ приведено в лемме 2 [I3,стр.166]. Поэтому будем изучать случай $p\in(-1,0)$. Изучение поведения решения $y(s)$ разобьем на два этапа: от $s=0$ до пересечения с прямой $y=1$ (обозначим эту точку s_1) и от $s=s_1$ и далее. Покажем, что на первом этапе решения задачи (7), (I0) заключено между решениями задачи (I0) для уравнений (I5) и

$$v''=-ps^{-1}v'-\beta(v-1). \qquad (I7)$$

Остановимся лишь на доказательстве того, что $y(s)<u(s)$, т.к. неравенство $y(s)>v(s)$ доказывается аналогично. То, что $y(s)<u(s)$ в некоторой правой полуокрестности нуля, видно из асимптотики (II) для $y(s)$ и асимптотики [IO] для $u(s)$. Предположим, что при некотором y_{0*} функция $y(s)$ пересечет $u(s)$ в некоторой точке $s_0\in(0,s_1)$. Рассмотрим множество U решений $u(s)$ задачи (I5), (IO) таких, что $y_0\leq y_{0*}$ и $u(s)$ имеет общие точки с $y(s)$ на интервале $(0,s_0)$. Т.к. (I5) линейно, то $u(s)$ непрерывно [IO] и монотонно зависит от y_0 и при y_0, близких к единице, функция $u(s)$ сколь угодно близка к единице. Следовательно, существует $u_*(s)=\inf U$. Несложно показать, что $u_*(s)$ имеет ровно одну общую точку с $y(s)$ на интервале $(0,s_0)$. Это точка касания — обозначим ее s_*. При этом $u_*(s_*)=y(s_*)$, $u'(s_*)=y'(s_*)$ и $u''(s_*)\leq y''(s_*)$. Используя (7) и (I5), получим противоречие с последним неравенством:

$$u_*''(s_*)-y''(s_*)=-\frac{p}{s_*}u_*'(s_*)-(\beta-1)(u_*(s_*)-1)+$$
$$+\frac{p}{s_*}y'(s_*)+\beta(y(s_*)-y^{\frac{1}{\beta}}(s_*))=-(\beta-1)(y(s_*)-1)+$$
$$+\beta(y(s_*)-y^{\frac{1}{\beta}}(s_*))>0.$$

Справедливость последнего неравенства становится очевидной, если учесть, что прямая $f(y)=(\beta-1)(y-1)$ является касательной к функции $f(y)=\beta(y-y^{1/\beta})$ в точке $y=1$. Таким образом, пока $v(s)>1$, $y(s)>1$, $u(s)>1$ справедливо $v(s)<y(s)<u(s)$ при любых y_0. Здесь же заметим, что из линейности (I5) и (I7) следует, что какого бы ни было y_0, точки пересечения функций $v(s)$ и $u(s)$ с прямой $y=1$ останутся одними и теми же. Обозначим их s_v и s_u. Из доказанного следует $s_v<s_1<s_u$.

Покажем, что при $y_0\to+\infty$ выполняется $y'(s_1)\to-\infty$. Предположим противное — пусть $y'(s_1)$ ограничено снизу константой M. Построим последовательность функций $\{y_n(s)\}$, являющихся решениями задач (7), (10) с различными начальными условиями $\{y_{0n}\}$, причем $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{0n}=+\infty$. Этой последовательности соответствует последовательность точек пересечения с прямой $y=1$. Эту последовательность обозначим $\{s_{1n}\}$. Т.к. $s_v < s_{1i} < s_u$ и для любого i, то из последовательности $\{s_{1n}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Будем обозначать эту подпоследовательность также $\{s_{1n}\}$, а предельное значение s_{1*}. Этой последовательности соответствует последовательность $\{y'(s_{1n})\}$, также ограниченная, т.к. $0 > y'(s_{1i}) > M$ для любого i. Следовательно, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, предел которой обозначим M_*. Решая уравнение (7) влево с начальными условиями $y(s_{1*})=1$, $y'(s_{1*})=M_*$, получим некоторую функцию $y_*(s)$, которая продолжима на интервале $(0, s_{1*}]$, что следует из вида уравнения (7). Несложно показать, что $y_*(s)$ является пределом некоторой подпоследовательности последовательности $\{y_n(s)\}$, и поэтому $\lim\limits_{s\to 0+} y_*(s)=+\infty$. Следовательно, при s, близких к нулю, выполняется $y''_*(s)>0$, $y'_*(s)<0$, $y_*(s)-y_*^{\frac{1}{\beta}}(s)>0$, и уравнение (7) несправедливо, т.к.

$$y''_*(s)+\frac{p}{s}y'_*(s)+\beta(y_*(s)-y_*^{\frac{1}{\beta}}(s))>0.$$

Полученное противоречие показывает, что за счет выбора y_0 значение $|y'(s_1)|$ можно сделать сколь угодно большим.

На втором этапе, правее точки s_1, сравним решение задачи

$$y(s_1)=1, \quad y'(s_1)=M \tag{18}$$

для уравнения (7) и уравнения

$$x''=-\frac{p}{s}x'+y_m, \tag{19}$$

где $y_m=1+\max\limits_{y\in(0,1)}\beta(y^{\frac{1}{\beta}}-y)$. Нетрудно заметить, что при достаточно больших по модулю отрицательных M, решение задачи (I9), (I8) будет монотонно убывать и станет отрицательным. Покажем, что решение $y(s)$ задачи (7), (I8) будет находится ниже решения $x(s)$ задачи (I9), (I8), пока $x(s)>0$. Доказательство проведем методом от противного. В окрестности точки s_1 выполняется неравенство $x(s)>y(s)$, что легко можно установить при помощи асимптотического представления этих решений вблизи s_1. Если $y(s)$ пересечет $x(s)$, то должна существовать точка s_*, в которой разность $x(s)-y(s)$ достигает максимума. В этой точке выполняется $x(s_*)>y(s_*)$, $x'(s_*)=$ $=y'(s_*)$, $x''(s_*)\leq y''(s_*)$. Получим противоречие с последним неравенством:

$$x''(s_*)-y''(s_*)=-\frac{p}{s_*}x'(s_*)+y_m+\frac{p}{s_*}y'(s_*)-\beta(y(s_*)-y^{\frac{1}{\beta}}(s_*))>0$$

Это противоречие завершает доказательство леммы.

Т е о р е м а I. Задача (7)-(9) имеет монотонное решение, причем значение s_f конечно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предельная начальная задача (7), (I0) имеет решение для любого $y_0>0$, и это решение непрерывно зависит от y_0 (лемма I). Определим множество Y_0 таких $y_0>1$, что задача (7), (I0) имеет точку минимума s_1 и $y(s_1)>0$. Это множество не пусто по лемме 4 и ограничено сверху по лемме 5. Покажем, что решение (7) с условиями:

$$\lim_{s\to 0+} y(s)=y_*,\quad \lim_{s\to 0+} y'(s)=0, \qquad (20)$$

где $y_*=\sup Y_0$, является решением задачи (7)-(9). Действительно, предположение о наличии точки положительного минимума или о пересечении решением задачи (7), (20) оси s с ненулевой производной приводят к немедленному противоречию с определением верхней грани множества и непрерывной зависимостью решения задачи (7), (I0) от начального значения y_0. Таким образом, решение (7), (20) не имеет точек положительного минимума и не пересекает ось S с ненулевой производной, кроме того, оно не может быть положительным для любого S, монотонно убывая, - это противоречит лемме 3. Следовательно, найдется точка $S_f < +\infty$, в которой будут выполнены условия (9), и поэтому решение задачи (7), (20) будет решением задачи (7)-(9).

Отметим, что это доказательство аналогично доказательству при $p \geq 0$ теоремы 4 [13, с. 165].

Л е м м а 6. При $p \in (-1, 0)$ существует значение $y_1 \in (0,1)$, что решение $y(S)$ задачи

$$y(S_0) = y_0, \quad y'(S_0) = 0 \tag{21}$$

для уравнения (7) для любых $S_0 \geq 0$ и $y_0 \in (0, y_1]$ при $S > S_0$ монотонно возрастает, достигает точки максимума, а затем убывает и достигает нулевого значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что если $y_0 = 0$, то методом, предложенным в [14], можно доказать существование и единственность положительного в некоторой правой полуокрестности решения задачи (7), (21). Т.к. $p < 0$, то аналогично лемме 2 показывается, что это решение имеет одну точку максимума, а затем убывает и пересекает ось S. Для доказательства леммы осталось заметить, что решение задачи (7), (21) непрерывно зависит от y_0 при $y_0 > 0$ и $S_0 \geq 0$ и пределом таких решений при $y_0 \to 0+$ является описанное единственное положительное в правой полуокрестности S_0 решения.

Т е о р е м а 2. Для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ при $p \in (-1, 0)$ задача (7)-(9) имеет решение $y(S)$ с n точками локального экстремума на интервале $(0, S_f)$, причем $y(0) > 1$ для n четных, $y_0 \in (0,1)$ для n нечетных и $S_f < +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Конечность S_f следует из леммы 2 и 3. Выберем произвольное n_0 - нечетное и будем доказывать существование решения $y(S)$ с n_0 точками локального экстремума (существование решения для четного n_0 доказывается аналогично). По лемме 4 найдется $y_0 \in (0,1)$ такое, что решение задачи (7), (10) имеет же менее $(n_0+1)/2$ точек локального минимума. Определим непустое множество Y_0 таких $y_0 \in (0,1)$, что задача (7), (10) имеет не менее $(n_0+1)/2$ точек локального минимума при $s>0$. Это множество ограничено снизу по лемме 6. Пусть $y_* = \inf Y_0$. Покажем, что решение уравнения (7) с условиями:

$$\lim_{s\to 0+} y(s) = y_*, \quad \lim_{s\to 0+} y'(s) = 0, \tag{22}$$

является решением задачи (7)-(9) с n_0 точками локального экстремума. Заметим, что у решения с n_0 точками локального экстремума имеется $(n_0-1)/2$ точка локального минимума и $(n_0+1)/2$ точка локального максимума.

Предположим противное - решение $y(s)$ задачи (7), (22) не является решением задачи (7)-(9) с $(n_0-1)/2$ точкой локального минимума. Возможны три варианта:

1) $y(s)$ имеет больше, чем $(n_0-1)/2$ точек минимума;

2) $y(s)$ имеет не более, чем $(n_0-1)/2$ точек минимума и не является решением задачи (7)-(9);

3) $y(s)$ имеет меньше, чем $(n_0-1)/2$ точек минимума и является решением задачи (7)-(9).

Приведем к противоречию все три эти утверждения:

1) Из непрерывной зависимости решения задачи (7), (10) от y_0 (лемма 1) следует, что найдется окрестность точки y_*, что любое решение с начальными данными из этой окрестности имеет по крайней мере $(n_0+1)/2$ точку минимума, что противоречит определению нижней грани.

2) По лемме 3 найдется точка s_1, что $y(s_1)=0$. По предположению $y'(s_1)<0$. Из непрерывной зависимости решения задачи (7),(10) от (лемма 1) следует, что любое решение этой задачи, у которой y_0 достаточно близко к y_*, будет иметь столько же точек минимума и достигнет нулевого значения. Поэтому $y_* = \inf Y_0$.

3) Пусть $y(s)$ имеет

$$n_1 < \frac{n_0-1}{2} \tag{23}$$

точек положительного минимума и является решением задачи (7),(9), т.е. найдется точка s_f, что $y(s_f)=y'(s_f)=0$. Т.к. решение задачи (7),(10) непрерывно зависит от y_0, то найдется $y_{01}\in Y_0$, что решение $z(s)$ задачи (7),(10) в точке s_f будет удовлетворять неравенству $z(s_f)<y_1$, где y_1 определено в лемме 6. Функция $z(s)$ по предположению имеет не менее $(n_0+1)/2$ точек локального минимума. Но по лемме 6 она может иметь не более n_1+1 точек локального минима. Из (23) получаем

$$n_1+1<\frac{n_0+1}{2}.$$

Таким образом предположение о том, что решение задачи (7),(22) не является решением задачи (7)-(9) ровно с $(n_0-1)/2$ точками положительного минимума является противоречивым.

Формулы (11) дают асимптотическое представление решения (7)-(9) в правой полуокрестности точки нуль. Следующий результат устанавливает поведение этого решения в левой полуокрестности точки s_f.

Теорема 3. Решение задачи (7)-(9) при $s\to s_f-$ задается выражением:

$$y(s)=\left(\frac{\beta-1}{\sqrt{2(\beta+1)}}(s_f-s)\right)^{\frac{2\beta}{\beta-1}}(1+o(1)).$$

Доказательство. При s, достаточно близких к s_f, выполняется

$$\left|\frac{y(s)}{y'(s)}\right|=\left|\frac{\int_s^{s_f}y'(\tau)d\tau}{y'(s)}\right|\leqslant\left|\frac{y'(s)(s_f-s)}{y'(s)}\right|=s_f-s.$$

Используя полученное неравенство и правило Лопиталя, найдем предел

$$\lim_{s\to s_f-}\frac{y'(s)}{y^{\frac{1}{\beta}}(s)}=\lim_{s\to s_f-}\frac{y''(s)}{\frac{1}{\beta}y^{-\frac{\beta-1}{\beta}}(s)y'(s)}=\lim_{s\to s_f-}\beta\left(-\frac{p}{s}y^{\frac{\beta-1}{\beta}}(s)+\right.$$

$$+\beta\frac{y(s)}{y'(s)}-y^{\frac{\beta-1}{\beta}}(s)\frac{y(s)}{y'(s)}\Big)=0.$$

Поэтому (7) может быть преобразовано следующим образом:

$$y''=\beta y^{\frac{1}{\beta}}\left(-\frac{\rho}{\beta}\frac{y'}{sy^{\frac{1}{\beta}}}+1-\frac{1}{\beta}y^{\frac{\beta-1}{\beta}}\right),$$

$$y''=\beta y^{\frac{1}{\beta}}(1+\varepsilon(s)),$$

где $\varepsilon(s)=o(1)$ при $s\to s_f^-$.

Умножим последнее уравнение на $y'(s)$ и проинтегрируем от некоторого s до s_f:

$$-\frac{y'^2}{2}=\beta\int_s^{s_f}y^{\frac{1}{\beta}}y'd\tau\,\frac{\int_s^{s_f}y^{\frac{1}{\beta}}y'(1+\varepsilon(\tau))d\tau}{\int_s^{s_f}y^{\frac{1}{\beta}}y'd\tau},$$

Для оценки дроби в окрестности точки s_f используем правило Лопиталя и получим

$$-\frac{y'^2}{2}=-\frac{\beta^2}{\beta+1}y^{\frac{\beta+1}{\beta}}(1+\varepsilon_1(s)),\quad \text{где}\quad \varepsilon(s)=o(1)$$

при $s\to s_f^-$,

или

$$y^{-\frac{\beta+1}{2\beta}}y'=-\beta\sqrt{\frac{2}{\beta+1}}(1+\varepsilon_2(s)),\quad \text{где}\quad \varepsilon_2(s)=o(1)$$

при $s\to s_f^-$. Дальнейшее интегрирование от s до s_f приводит непосредственно к утверждению теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Диссипативные структуры в неоднородной нелинейной горящей среде //Докл.АН СССР.-1980.-Т.251.-№3.-С.587-591.

2. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами.-М.,1979. (Препринт/ИПМ АН СССР:№16).
3. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г. Согласованные режимы горения в одной диссипативной среде с переносом.-М.,1980. (Препринт/ИПМ АН СССР:№125).
4. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде //Журнал вычислительной матем. и матем. физики.-1983.-Т.23.-№2.-С.380-389.
5. Курдюмов С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации //Современные проблемы математической физики и вычислительной математики.-М.-1982.-С.217-243.
6. Адьютов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Исследование автомодельных тепловых структур в нелинейной среде.-М.,1982. (Препринт/ИПМ АН СССР:№108).
7. Адьютов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной // Дифференц.уравнения.-1983.-Т.19.-№7.-С.1107-1114.
8. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потапов А.Б. Исследование многомерной архитектуры собственных функций нелинейной среды. М.,1982. (Препринт/ИПМ АН СССР:№75)
9. Адьютов М.М. Автомодельные обостряющиеся тепловые структуры в среде с распределенными параметрами // Дифференц.уравнения.-1986.-Т.22-№11.-С.1934-1944.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами/Под ред.М.Абрамовица, И.Стиган.-М.:Наука,1979.-832 с.
11. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.-Рига: Зинатне, 1978.-183 с.

12. Гризанс Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с суммируемой особенностью //Латвийский матем.ежегодник.-1984.-Вып.28.-С.14-24.

13. Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г. Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры //
Современные проблемы математики. Новейшие достижения. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР).-М.-1986.-Т.28.-С.95-206.

14. Адъютов М.М., Клоков Ю.А. О единственности положительного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.-Рига:ЛГУ им.П.Стучки,1987.-С.3-11.

Поступила 07.09.87.

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.-С. 53-58.

УДК 517.927.4:536.4

Л.А.Лепин
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

О ЕДИНСТВЕННОСТИ МОНОТОННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО АВТОМОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В работе [I] показано, как уравнение

$$Ar^{\kappa}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\kappa_0}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial r}\left(T^{\sigma}r^{\nu}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+q_0 Ar^{\kappa}T^{\beta},$$

где $\nu=N-1$, N - размерность пространства, $\kappa>-\nu-1$, в случае $\beta=\sigma+1>1$ может быть сведено к автомодельному уравнению

$$y''=-ps^{-1}y'+\beta(y^{\frac{1}{\beta}}-y), \tag{I}$$

где $p=\kappa+\nu>-1$. Для уравнения (I) естественно получается следующие краевые условия:

$$\lim_{s\to 0} s^{p}y'(s)=0, \qquad y(s_f)=0, \qquad y'(s_f)=0. \tag{2}$$

При этом точка s_f ищется вместе с решением.

В работе [I] доказывается, что в случае $p>0$ задача (I)-(2) имеет монотонное решение (этот факт доказан также в [2]), а немонотонных решений иметь не может. В случае $-1<p<0$ задача (I)-(2) имеет бесконечно много решений, отличающихся различным количеством экстремумов, при этом по крайней мере одно - монотонное. В случае $p=0$ в работе [3] найдено точное решение задачи (I)-(2).

Цель данной работы - показать, что при любом $p>-1$

монотонное решение задачи (I)-(2) единственно.

Теорема. Задача (I)-(2) не может иметь более одного монотонного решения.

Доказательство. Сначала заметим, что любое решение задачи (I)-(2) должно иметь следующие асимптотики:

$$y(s)=y_0+\frac{\beta(y_0^{\frac{1}{\beta}}-y_0)}{2(p+1)}s^2+O(s^4),\quad y'(s)=\frac{\beta(y_0^{\frac{1}{\beta}}-y_0)}{p+1}s+O(s^3)$$

при s близких к 0 (при этом для монотонных решений необходимо, чтобы y_0 было больше 1);

$$y(s)=C(s_f-s)^{\frac{2\beta}{\beta-1}}+O\left((s_f-s)^{\frac{2\beta}{\beta-1}}\right),\quad y'(s)=\frac{2C\beta}{\beta-1}(s_f-s)^{\frac{\beta+1}{\beta-1}}+O\left((s_f-s)^{\frac{\beta+1}{\beta-1}}\right)$$

при s, близких к s_f,

где
$$C=\left(\frac{2\beta(\beta+1)}{(\beta-1)^2}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}.$$

Кроме того, нам понадобятся следующие факты, доказательство которых можно найти в работах [4, 5].

1. Решение уравнения (I), удовлетворяющее условиям $y(0)=y_0$, $\lim\limits_{s\to 0} s^p y'(s)=0$, где y_0 - произвольное положительное значение, единственно.

2. Решение уравнения (I), удовлетворяющее условиям $y(s_0)=0$, $y'(s_0)=0$, $y(s)>0$ при $s\in(s_0-\varepsilon, s_0)$, где $s_0>0$, единственно.

Сделаем в уравнении (I) замену $x=-y'y^{-1}$.

Получим уравнение

$$x''=\left(2+\frac{\beta-1}{\beta}\right)xx'-\frac{\beta-1}{\beta}x^3-(\beta-1)x-\frac{p}{s}\left(x'-\frac{x}{s}-\frac{\beta-1}{\beta}x^2\right).\quad (3)$$

Монотонные решения краевой задачи (I)-(2) при этой замене перейдут в положительные решения уравнения (3), имеющие следующие асимптотики:

$$x(s)=\frac{\beta(1-y_0^{\frac{1-\beta}{\beta}})}{p+1}s+O(s^3),\quad x'(s)=\frac{\beta(1-y_0^{\frac{1-\beta}{\beta}})}{p+1}+O(s^2)\quad (4)$$

при S, близких к 0;

$$x(S)=\frac{2\beta}{(\beta-1)(S_f-S)}+O\left(\frac{1}{S_f-S}\right) \tag{5}$$

при S, близких к S_f.

Отметим, что из вышеприведенных фактов следует:

1. Решение уравнения (3), имеющее для фиксированного $y_0>0$ асимптотику (4), единственно.

2. Решение уравнения (3), имеющее для фиксированного $S_f>0$ асимптотику (5), единственно.

Предположим, что задача (I)-(2) имеет два монотонных решения y_1 и y_2, причем для первого из них $S_f=S_1$, а для второго – $S_f=S_2$ и $S_2<S_1$. При переходе к уравнению (3) им будут соответствовать решения x_1 и x_2.

Для $K>0$ рассмотрим семейство функций z_K: $[0,\frac{S_1}{K})\to R$, определенных равенством $z_K(S)=K x_1(KS)$. Заметим, что функции z_K удовлетворяют уравнению

$$z_K''=(2+\frac{\beta-1}{\beta})z_K z_K'-\frac{\beta-1}{\beta}z_K^3-K^2(\beta-1)z_K-\frac{P}{S}(z_K'-\frac{z_K}{S}-\frac{\beta-1}{\beta}z_K^2) \tag{6}$$

Поэтому, для всех $K\in(0,1)$ и $S\in(0,\frac{S_1}{K})$ справедливо неравенство

$$z_K''>(2+\frac{\beta-1}{\beta})z_K z_K'-\frac{\beta-1}{\beta}z_K^3-(\beta-1)z_K-\frac{P}{S}(z_K'-\frac{z_K}{S}-\frac{\beta-1}{\beta}z_K^2), \tag{7}$$

а для $K\in(1,\infty)$ и $S\in(0,\frac{S_1}{K})$ – неравенство

$$z_K''<(2+\frac{\beta-1}{\beta})z_K z_K'-\frac{\beta-1}{\beta}z_K^3-(\beta-1)z_K-\frac{P}{S}(z_K'-\frac{z_K}{S}-\frac{\beta-1}{\beta}z_K^2). \tag{8}$$

Покажем, что семейство $\{z_K\}$ монотонно возрастает по K, то есть, если $K_2>K_1$ и $S\in(0,\frac{S_1}{K_2})$, то $z_{K_2}(S)>z_{K_1}(S)$. Предположим, что это не так. Пусть для некоторых $K_2>K_1$ и $S_3\in(0,\frac{S_1}{K_2})$ $z_{K_2}(S_3)\le z_{K_1}(S_3)$. Заметим, что если взять К достаточно большим, то неравенство $z_k(s) > z_{k_1}(s)$ будет справедливым для всех $s \in (0, \frac{s_1}{k})$. Пусть $k_* = \sup\{k \in [k_2, \infty): \exists s \in (0, \frac{s_1}{k})$ такое, что $z_k(s) \leq z_{k_1}(s)\}$. В силу непрерывности семейства $\{z_k\}$ найдется $s_* \in (0, \frac{s_1}{k_*})$ такое, что $z_{k_*}(s_*) = z_{k_1}(s_*)$, и для всех $s \in (0, \frac{s_1}{k_*})$ $z_{k_*}(s) \geq z_{k_1}(s)$. Это означает, что $z'_{k_*}(s_*) = z'_{k_1}(s_*)$ и $z''_{k_*}(s_*) \geq z''_{k_1}(s_*)$. Учитывая это, а также уравнение (6), получим

$$-(\beta-1)k_*^2 z_{k_*}(s_*) \geq -(\beta-1)k_1^2 z_{k_1}(s_*),$$

откуда $k_* \leq k_1$, что противоречит определению k_*. Таким образом, монотонность семейства $\{z_k\}$ доказана.

Положим теперь:

$$k_1 = \sup\{k \in (0,\infty): \forall s \in [0, s_2) \quad z_k(s) \leq x_2(s)\},$$

$$k_2 = \inf\{k \in (0,\infty): \forall s \in [0, \frac{s_1}{k}) \quad z_k(s) \geq x_2(s)\}.$$

Учитывая монотонность семейства $\{z_k\}$, нетрудно убедиться, что $0 < k_1 < k_2 < \infty$, и, кроме того, при всех $s \in [0, \frac{s_1}{k_2})$ $x_2(s) \leq z_{k_2}(s)$, при всех $s \in [0, s_2)$ $z_{k_1}(s) \leq x_2(s)$. Докажем сначала, что $k_1 \geq 1$. Предположим, что это не так. Так как $s_2 < s_1 < \frac{s_1}{k}$, то возможны следующие варианты:

а) найдется $s_* \in (0, s_2)$ такое, что $z_{k_1}(s_*) = x_2(s_*)$, $z'_{k_1}(s_*) = x'_2(s_*)$, $z''_{k_1}(s_*) \leq x''_2(s_*)$;

б) $z'_{k_1}(0) = x'_2(0)$.

Случай а) невозможен, так как он противоречит уравнению (3) и неравенству (7). Рассмотрим случай б). Функции z_{k_1} и x_2 совпадать не могут, так как функция z_{k_1} не удовлетворяет уравнению (3). Поэтому найдется точка $s_3 \in (0, s_2)$ такая, что $z_{k_1}(s_3) < x_2(s_3)$. Кроме того, в силу неравенства (7) функция z_{k_1} является нижней функцией для уравнения (3). Поэтому, согласно [6], найдется решение уравнения (3) $x_3: (0, s_3] \to R$, удовлетворяющее условию $x_3(s_3) = z_{k_1}(s_3)$ и неравенствам $z_{k_1}(s) \leq x_3(s) \leq x_2(s)$ на интервале $(0, s_3]$.

Заметим, что в силу условия $z'_{K_1}(0) = x'_2(0)$, функции z_{K_1} и x_2 имеют в нуле асимптотику вида (4) с одной и той же константой y_0. Значит и функция x_3 имеет в нуле ту же асимптотику, а это противоречит единственности решения уравнения (3) с заданной в нуле асимптотикой.

Таким образом доказано, что $K_1 \geqslant 1$, а следовательно, $K_2 > 1$.

Теперь, в силу определения K_2, возможен один из трех вариантов:

а) найдется $S_* \in (0, \frac{S_1}{K_2})$ такое, что $z_{K_2}(S_*) = x_2(S_*)$, $z'_{K_2}(S_*) = x'_2(S_*)$ и $z''_{K_2}(S_*) \geqslant x''_2(S_*)$;

б) $z'_{K_2}(0) = x'_2(0)$;

в) $\frac{S_1}{K_2} = S_2$.

Варианты а) и б) рассматриваются аналогично тому, как это делалось выше. Перейдем к рассмотрению варианта в).

Так как $K_2 > 1$, то z_{K_2} не является решением уравнения (3), а поэтому z_{K_2} и x_2 не совпадают. Следовательно, найдется $S_4 \in (0, S_2)$, в которой $x_2(S_4) < z_{K_2}(S_4)$. Кроме того, так как функция z_{K_2} удовлетворяет неравенству (8), то она является верхней функцией для уравнения (3). Согласно [6], найдется решение уравнения (3) $x_4 : [S_4, S_2) \to R$, удовлетворяющее условию $x_4(S_4) = z_{K_2}(S_4)$ и неравенствам $x_2(S) \leqslant x_4(S) \leqslant z_{K_2}(S)$ на интервале $[S_4, S_2)$. Заметим, что функции x_2 и z_{K_2} имеют одинаковую асимптотику вида (5) в точке S_2. Поэтому функция x_4 имеет в точке S_2 ту же асимптотику, а это противоречит единственности решения уравнения (3) с заданной в точке S_2 асимптотикой вида (5). Это противоречие завершает доказательство теоремы.

В заключение заметим, что в случае $-1 < p < 0$, по-видимому, справедливо утверждение о единственности решения с заданным числом экстремумов, однако этот результат еще ждет своего доказательства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адъютов М.М. Об автомодельных решениях одного нелинейного уравнения параболического типа // В наст.сб., С. 35-52.
2. Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры // Современные проблемы математики. Новейшие достижения. - Т.28 (Итоги науки и техн.ВИНИТИ АН СССР). - М., 1986. - С.95-206.
3. Самарский А.А., Змитренко Н.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла //Докл.АН СССР. - 1976.- Т.227.- № 2.- С.321-324.
4. Гризанс Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью // Латвийский матем.ежегодник.- 1984.- Вып.28.- С.14-24
5. Адъютов М.М., Клоков Ю.А. О единственности положительного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: ЛГУ им.П. Стучки, 1987.- С.3-11.
6. Лепин Л.А. Метод нижних и верхних функций для дифференциальных уравнений второго порядка с особенностями // Дифференц.уравнения.- 1987.- Т.23, № 9. - С.1632-1634.

Поступила 07.09.87.

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ.
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. -С. 59-68.

УДК 517.927

Я.В.Цепитис
ЛГУ им.П.Стучки

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕСУММИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Пусть имеем дифференциальное уравнение

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{I}$$

$T \in (0, +\infty)$, либо $T = +\infty$, для любого $\delta \in (0,T)$ $f: [\delta, T) \times R^2 \to R$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори, а при $t=0$ функция f имеет, быть может, несуммируемую особенность. В настоящей заметке исследуется вопрос о существовании ограниченного вместе с производной решения $x: [0,T) \to R$ уравнения (I), удовлетворяющего условию

$$x(0) = 0. \tag{2}$$

Отметим, что под решением уравнения (I) на $(0,T)$ будем понимать функцию $z: (0,T) \to R$ с абсолютно непрерывной на $(0,T)$ первой производной, которая почти всюду на $(0,T)$ удовлетворяет уравнению (I). Относительно решения x задачи (I), (2) будет предполагаться непрерывная дифференцируемость на $[0,T)$ и то, что сужение x на $(0,T)$ является решением уравнения (I).

В дальнейшем предположим существование функций $\alpha, \beta: (0,T) \to R$ таких, что

$$\alpha(t) \le \beta(t), \quad t \in (0,T),$$

и введем обозначения

$$\alpha_0=\underline{\lim}_{t\to 0+}\alpha(t)\ ,\qquad \beta_0=\overline{\lim}_{t\to 0+}\beta(t)$$

Определение I. Будем говорить, что выполняется условие (ε,γ), если существует число $\sigma\in(0,T)$ и функции $\varepsilon,\gamma:(0,\sigma]\to[0,+\infty)$ для каждого $\delta\in(0,\sigma)$, суммируемые на $[\delta,\sigma]$, и такие, что

$$\lim_{t\to 0+}\varepsilon(t)=0\ ,$$

$$\lim_{t\to 0+}\gamma(t)=+\infty\ , \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0+}\gamma(t)\exp\Big(-\int_t^{\sigma}\gamma(\tau)d\tau\Big)<+\infty\ , \tag{4}$$

$$\lim_{t\to 0+}\int_t^{\sigma}\varepsilon(\xi)\exp\Big(\int_{\xi}^{\sigma}\gamma(s)ds\Big)d\xi<+\infty\ , \tag{5}$$

и для любых $\delta\in(0,\sigma)$, $\tau\in(\delta,\sigma]$ и решения $x:[\delta,\tau]\to R$ уравнения (I), удовлетворяющего на области определения оценке

$$\alpha(t)\le x(t)\le\beta(t)\ , \tag{6}$$

из неравенства

$$|x'(\delta)-\gamma(\delta)x(\delta)|\le\varepsilon(\delta)$$

следует выполнение для $t\in(\delta,\tau]$ неравенства

$$|x'(t)-\gamma(t)x(t)|\le\varepsilon(t)\ . \tag{7}$$

Определение 2. Будем говорить, что выполняется условие А, если функции α, β являются соответственно для любых $\delta\in(0,T)$, $\tau\in(\delta,T)$ обобщенными нижней и верхней функциями (определения и соответствущие свойства этих функций см. в [2]) уравнения (I) на $[\delta, \tau]$.

В дальнейшем, если $u:(0,T)\to R$, то $D_r u(\tau)$ обозначит правую производную функции u в точке $\tau\in(0,T)$. Напомним, что для обобщенных нижних и верхних функций эта производная всегда существует.

Определение 3. Будем говорить, что выполняется условие Б, если для любых $\tau\in(0,T)$ и решения $x:[0,T)\to R$ задачи (I), (2), удовлетворяющего для $t\in(0,T)$ оценке (6), имеет место

$$sup\{|x'(t)|:\ t\in[0,\tau)\}<+\infty .$$

Лемма I. Пусть $\alpha_0\leq 0\leq\beta_0$, при этом, если $\alpha_0=0$, то $\lim\limits_{t\to 0+} D_r\alpha(t)=-\infty$,

если $\beta_0=0$, то $\lim\limits_{t\to 0+} D_r\beta(t)=+\infty$,

и выполняется условие (ε,γ). Тогда для любого $a\in R$ найдется $s\in(0,\sigma]$ такое, что уравнение (1) имеет решение $x:(0,s]\to R$, удовлетворяющее условиям

$$x(0)=0,\ \lim_{t\to 0+} exp\left(\int_t^{\sigma}\gamma(\tau)d\tau\right)x(t)=a, \tag{8}$$

для которого на области определения справедливы оценки (6) и (7).

Доказательство. Пусть $a\in R$ фиксировано. Введем вспомогательную функцию

$$\mu(t)=a\,exp\left(-\int_t^{\sigma}\gamma(\tau)d\tau\right).$$

В силу (3) и (4) имеем $\lim\limits_{t\to 0+}\mu(t)=0$. Ясно, что для

некоторого $s_1\in(0,\sigma]$, согласно условиям леммы и соотношению (4), выполняются неравенства

$$\alpha(t)<\mu(t)<\beta(t),\ t\in(0,s_1].$$

Выберем последовательности чисел $k\to s_k$, $k\to t_k$ такие, что $s_1>s_2>\ldots>s_k>\ldots$,

$$\lim_{k\to+\infty} s_k = 0, \qquad t_k \in (s_k, \sigma],$$

и решений уравнения (I) $x_k : [s_k, t_k] \to R$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &x_k(s_k) = \mu(s_k), \quad x'_k(s_k) = \mu'(s_k), \\ &\alpha(t) < x_k(t) < \beta(t), \quad t \in [s_k, t_k). \end{aligned} \tag{9}$$

Имеем $x'_k(s_k) = \gamma(s_k)\, x_k(s_k)$, следовательно, по условию (ε, γ)

$$|x'_k(t) - \gamma(t)\, x_k(t)| \leq \varepsilon(t), \quad t \in [s_k, t_k]. \tag{10}$$

Если t_k выбраны максимально правыми, то выполняется по крайней мере одно из следующих соотношений

$$x_k(t_k) \leq \alpha(t_k), \quad x_k(t_k) \geq \beta(t_k), \quad t_k = \sigma.$$

Положим $s = \inf\limits_k \{t_k\}$. В силу неравенств (4), (9), (10) следует, что $s \in (0, \sigma]$ и последовательности функций $k \to x_k$, $k \to x'_k$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Следовательно, из последовательности решений уравнения (I) $k \to x_k$ можно выделить для любого $\delta \in (0, s)$ на $[\delta, s]$ сходящуюся к решению уравнения (I) подпоследовательность $n \to k_n \to x_{k_n}$. Функция $x : (0, s] \to R$, определенная следующим образом $t \to \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}(t)$, обеспечивает утверждение леммы.

Лемма доказана.

Замечание I. Аналогично доказывается следующая модификация леммы I, а также результат, который получается из этой модификации заменой x на $-x$.

Пусть $\alpha_0 \leq 0 = \beta_0$, $\lim\limits_{t\to 0+} |D_r \beta(t)| < +\infty$, если $\alpha_0 = 0$, то $\lim\limits_{t\to 0+} D_r \alpha(t) = -\infty$.

и выполняется условие (ε, γ) . Тогда найдется $a^* \in R$ такое, что для любого $a \in (-\infty, a^*]$ справедливо утверждение леммы I.

З а м е ч а н и е 2. Условия (8) гарантируют конечную правую производную у решения x в точке $t=0$.

Л е м м а 2. Пусть $\gamma:(0,\sigma] \to [0,+\infty)$ для каждого $\delta \in (0,\sigma)$ суммируемая на $[\delta,\sigma]$ функция, удовлетворяющая соотношениям (3), (4), непрерывно дифференцируемая функция $x:[0,\sigma] \to R$ удовлетворяет неравенству

$$x'(t) \leq \gamma(t)x(t), \quad t \in (0,\sigma], \tag{II}$$

и для некоторого $a \in R$ также условиям (8), тогда выполняется неравенство

$$x(t) \leq a\exp\Big(-\int_t^\sigma \gamma(\tau)d\tau\Big), \quad t \in [0,\sigma]. \tag{I2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь заменой переменного

$$x = \exp\Big(-\int_t^\sigma \gamma(\tau)d\tau\Big)y$$

и соотношением (4), неравенство (II) перепишем в виде

$$\exp\Big(-\int_t^\sigma \gamma(\tau)d\tau\Big)y' \leq 0. \tag{I3}$$

Условия (8) в таком случае преобразуются в равенство $y(0)=a$. Для $t \in (0,\sigma)$ из (I3) следует, что $y' \leq 0$, предельным переходом при $t \to 0+$ получаем и неравенство $y'(0) \leq 0$. Пользуясь хорошо известной теоремой о дифференциальном неравенстве, можем писать $y(t) \leq a$, $t \in [0,\sigma]$. Следовательно, выполняется и неравенство (I2). Лемма доказана.

Л е м м а 3. Пусть выполняются условия (ε,γ) и A, $\alpha_0 \leq 0 \leq \beta_0$, если $\alpha_0 = 0$, то $\lim\limits_{t \to 0+} D_r\alpha(t) < +\infty$, если $\beta_0 = 0$, то

$\lim\limits_{t\to 0+} D_r\beta(t) > -\infty$. Тогда найдутся функции $\bar\alpha$, $\bar\beta : [0,T) \to R$, имеющие конечные правые производные при $t=0$ и такие, что $\bar\alpha(0) = \bar\beta(0) = 0$,

$$\alpha(t) \le \bar\alpha(t) \le \bar\beta(t) \le \beta(t), \quad t \in (0,T),$$

являющиеся для любых $\delta \in (0,T)$, $\tau \in (\delta, T)$ соответственно обобщенными нижней и верхней функциями уравнения (I) на $[\delta,\tau]$.

Доказательство. Если $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ и не выполняются ни одно из условий

$$\lim_{t\to 0+} D_r\alpha(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to 0+} D_r\beta(t) = +\infty,$$

то непосредственно положим $\bar\alpha(0) = \bar\beta(0) = 0$,

$$\bar\alpha(t) = \alpha(t), \quad \bar\beta(t) = \beta(t), \quad t \in (0,T).$$

Пусть теперь имеет место один из следующих двух случаев: $\alpha_0\beta_0 < 0$, $\alpha_0\beta_0 = 0$, при этом, если $\alpha_0 = 0$, то $\lim\limits_{t\to 0+} D_r\alpha(t) = -\infty$, если $\beta_0 = 0$, то $\lim\limits_{t\to 0+} D_r\beta(t) = +\infty$.

Без ограничения общности мы можем считать, что

$$\alpha(\sigma) < \beta(\sigma) \tag{I4}$$

Обозначим через u решение задачи Коши

$$x' - \gamma(t)x = \varepsilon(t), \quad x(\sigma) = \alpha(\sigma),$$

а через v – решение задачи Коши

$$x' - \gamma(t)x = -\varepsilon(t), \quad x(\sigma) = \beta(\sigma),$$

которые будем рассматривать левее точки $t = \sigma$. Имеем

$$u(t) = \alpha(\sigma)\exp\left(-\int_t^\sigma \gamma(s)ds\right) - \\ - \int_t^\sigma \varepsilon(\xi)\exp\left(\int_\xi^t \gamma(s)ds\right)d\xi ,$$

$$v(t)=\beta(\sigma)\exp\left(-\int_t^{\sigma}\gamma(s)\,ds\right)+$$

$$+\int_t^{\sigma}\varepsilon(\xi)\exp\left(\int_{\xi}^{t}\gamma(s)ds\right)d\xi,$$

$$\lim_{t\to 0+}u(t)=\lim_{t\to 0+}v(t)=0.$$

Согласно неравенствам (4), (5) конечными являются и следующие пределы:

$$\lim_{t\to 0+}u(t)\exp\left(\int_t^{\sigma}\gamma(s)ds\right)=$$

$$=\alpha(\sigma)-\int_0^{\sigma}\varepsilon(\xi)\exp\left(\int_{\xi}^{\sigma}\gamma(s)ds\right)d\xi=a_1,$$

$$\lim_{t\to 0+}v(t)\exp\left(\int_t^{\sigma}\gamma(s)ds\right)=$$

$$=\beta(\sigma)+\int_0^{\sigma}\varepsilon(\xi)\exp\left(\int_{\xi}^{\sigma}\gamma(s)ds\right)d\xi=a_2,$$

при этом $a_1<a_2$.

Покажем, что выполняется неравенство

$$u(t)<v(t),\qquad t\in(0,\sigma].$$

Действительно, пусть для некоторого $\tau\in(0,\sigma)$ $u(\tau)-v(\tau)=0$. Для $t\in[\tau,\sigma]$ имеем

$$u'-\gamma(t)u=\varepsilon(t)\geq 0,$$

$$v'-\gamma(t)v=-\varepsilon(t)\leq 0,$$

$$(u-v)' \geqslant \gamma(t)\,(u-v),$$

и, следовательно, должно быть

$$u(t)-v(t)\geqslant 0\ ,\quad t\in[\tau,\sigma],$$

что несовместимо с (I4).

Далее, по лемме I, найдутся $s_1\in(0,\sigma]$ и решение $x_1:(0,s_1]\to R$ уравнения (I), удовлетворяющее условиям (8) при $a=a_1$, и $s_2\in(0,\sigma]$, и решение $x_2:(0,s_2]\to R$ уравнения (I), удовлетворяющее условиям (8) при $a=a_2$. Будем считать, что s_i выбраны так, чтобы интервалы $(0,s_i]$ максимальные, на которых выполняются оценки

$$\alpha(t)\leqslant x_i(t)\leqslant\beta(t),$$

либо $s_i=\sigma$, $i=1,2$. Для этих решений имеют место и оценки

$$|x_i'(t)-\gamma(t)x_i(t)|\leqslant\varepsilon(t),\quad t\in(0,s_i],\ i=1,2.$$

Следовательно, получаем неравенства:

$$(x_1(t)-u(t))'\leqslant\gamma(t)(x_1(t)-u(t)),\quad t\in(0,s_1],$$

$$(v(t)-x_2(t))\leqslant\gamma(t)(v(t)-x_2(t)),\quad t\in(0,s_2].$$

Согласно лемме 2 имеем:

$$x_1(t)\leqslant u(t),\qquad t\in(0,s_1],$$

$$x_2(t)\geqslant v(t),\qquad t\in(0,s_2],$$

что позволяет определить функции $\bar\alpha$, $\bar\beta$, удовлетворяющие утверждению леммы следующим образом:

$$\bar\alpha(t)=\begin{cases}x_1(t), & t\in[0,s_1),\\ \alpha(t), & t\in[s_1,T),\end{cases}$$

$$\bar\beta(t)=\begin{cases}x_2(t), & t\in[0,s_2)\\ \beta(t), & t\in[s_2,T).\end{cases}$$

Пользуясь указанной схемой с учетом замечания I, нетрудно построить функции $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, которые удовлетворяют утверждению леммы, и в оставшихся возможных ситуациях расположения на расширенной числовой оси чисел α_0, β_0,

$\lim\limits_{t\to 0+} D_r\alpha(t)$, $\lim\limits_{t\to 0+} D_r\beta(t)$

Лемма доказана.

Т е о р е м а. Пусть выполняются условия (ε,γ), А и Б, $\alpha_0\leqslant 0\leqslant\beta_0$, если $\alpha_0=0$, то $\lim\limits_{t\to 0+} D_r\alpha(t)<+\infty$, если $\beta_0=0$, то $\lim\limits_{t\to 0+} D_r\beta(t)>-\infty$. Тогда задача (I), (2) имеет решение $x:[0,T)\to R$, которое для $t\in(0,T)$ удовлетворяет оценке (6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3 и свойству обобщенных нижних и верхних функций существует обобщенное решение $x:[0,T)\to R$ задачи (I), (2), которое для $t\in(0,T)$ удовлетворяет оценке (6). Согласно условию Б x является и решением задачи (I), (2) в обычном смысле. Теорема доказана.

Отметим, что, пользуясь методикой, изложенной в работе [4], нетрудно убедиться в выполнении условия (ε,γ) для широкого класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, если $\gamma:(0,T)\to R$ абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая соотношениям (3), (4), и для правой части уравнения

$$(x'-\gamma(t)x)'=f(t,x,x') \tag{I5}$$

имеет место оценка

$$f(t,x,y)\operatorname{sign}(y-\gamma(t)x)\leqslant$$
$$\leqslant -g(t)|y-\gamma(t)x|+h(t,x,y), \tag{I6}$$
$$t\in I,\ x\in[\alpha(t),\beta(t)],\ y\in R,$$

где для любых $\delta \in (0,T)$, $\tau \in (\delta, T)$ · $h: [0,\tau] \times R^2 \to R$ удовлетворяет условию Каратеодори, $g: [\delta,\tau] \to R$, суммируемая функция, и для некоторого $k \in [0,1)$ отрицательная часть функции $t \to (g(t) + \frac{k}{t})$ суммируема на $[0,\tau]$, тогда для уравнения (I5) выполняется условие (ε, γ). Уравнением такого вида является, например, уравнение (см. [I])

$$x'' + \frac{1-p+q}{t} x' - \frac{pq}{t^2} x = h(t,x,x'), \qquad (I7)$$

где $p \geq 0$, $q > -2$. Действительно, положим $\gamma(t) = \frac{p}{t}$, $g(t) = \frac{1+q}{t}$, и уравнение (I7) запишется так:

$$(x' - \gamma(t)x)' = -g(t)(x' - \gamma(t)x) + h(t,x,y),$$

откуда легко усматривается справедливость оценки (I6).

Наконец, отметим, что при $p=1$ и $q=2$ уравнение (I7) обобщает важное для изучения уравнение, возникшее в теории гравитации (см. [3]). Разрешимость краевых задач для этого уравнения может эффективно устанавливаться, согласно теореме настоящей статьи, методикой нижних и верхних функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Гризанс Г.П. Об одной краевой задаче для уравнения с несуммируемой особенностью // Латв.мат.ежегодник-Рига: Зинатне, 1985.-Вып.29.-С.22-35.

2. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц.уравнения.-1982.-Т.18.- № 8.-С.1323-1330.

3. Моисеев Е.И., Садовничий В.А. Исследование решения одного нелинейного уравнения теории гравитации // Успехи математических наук.-1985.-Т.40.-Вып.4.-С.187-188.

4. Цепитис Я.В. Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с несуммируемой особенностью // Дифференц.уравнения.-1983.-Т.19.- № 12.-С. 2071-2075.

Поступила 14.09.87.

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.-С. 69 - 78.

УДК 517.927

А.Я.Лепин
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим краевую задачу

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\leq x\leq\beta, \quad (1)$$

где $f\in Car(I\times R^2,R)$, $I=[a,b]$, $a\in R$, $b\in(a,\infty)$, $H_{1,2}:AG(I,R)\cup BG(I,R)\to\bar{R}=[-\infty,\infty]$, $h_{1,2}\in\bar{R}$, $\alpha\in AG(I,R)$ и $\beta\in BG(I,R)$. Обозначения смотрите в [1-2]. В работе [2] для $H_{1,2}x=H_{1,2}(x(a),x(b),x'(a),x'(b))$, принадлежащим классам монотонности, полностью решен вопрос об обобщенной разрешимости краевой задачи (1) с дополнительными условиями. Наша цель-наметить пути обобщения базовых теорем работы [2]. Из 95 базовых теорем последние 7-технические. Среди остальных 88 теорем в 21 теореме α является обобщенным решением. Для обобщения остается 67 теорем. Из теорем $TB01-TB38$ наиболее простыми являются дважды вырожденные теоремы $TB09$, $TB11$, $TB12$, $TB14$, $TB15$, $TB17$, $TB20$, $TB22-TB24$ и $TB35$. Все они следуют из теорем 1-4 настоящей работы. Однократно вырожденными являются теоремы $TB01$, $TB03-TB06$, $TB08$, $TB10$, $TB13$, $TB16$, $TB18$, $TB21$, $TB25$, $TB27$, $TB28$, $TB31$, $TB32$, $TB34$ и $TB36-TB38$. Теоремы 5-14 показывают пути обобщения однократно вырожденных теорем. Не вырожденными теоремами являются теоремы $TB02$, $TB07$, $TB19$, $TB26$, $TB29$, $TB30$ и $TB33$. Теоремы 15-16 показывают пути обобщения не вырожденных теорем.

Через $SB(I,R)$ обозначим множество решений краевой задачи (I), а через $SGB(I,R)$ - множество обобщенных решений краевой задачи (I). Для условия U через $s_{max}(U)$, $s_{min}(U)$ обозначим максимальный, минимальный элемент множества $\{x \in S(I,R) : U\}$. Если $s_{max}(U) = s_{min}(U)$, то $s(U) = s_{max}(U)$. Условием 9 будем называть условие

$$(\forall x, y \in S(I,R))((\alpha \leq x \leq y \leq \beta \wedge x'(a) \leq y'(a) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x'(b) \leq y'(b)) \wedge (\alpha \leq x \leq y \leq \beta \wedge x'(b) \geq y'(b) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow x'(a) \geq y'(a))).$$

Т е о р е м а I. Пусть $\alpha \in AG(I,R)$, $\beta \in BG(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, и для любого $x \in SG(I,R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$, $x(a) = \alpha(a)$ и $x(b) = \alpha(b)$ следует $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SGB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме $TB\,02$, существует обобщенное решение x краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'),\ x(a) = \alpha(a),\ x(b) = \alpha(b),\ \alpha \leq x \leq \beta.$$

Ясно, что $x \in SGB(I,R)$.

Т е о р е м а 2. Пусть $\alpha \in AG(I,R)$, $\beta \in BG(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$ и для любого $x \in SG(I,R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$, $x'(a) = \alpha'(a)$ и $x(b) = \alpha(b)$ следует $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SGB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме $TB\,02$, существует обобщенное решение x краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'),\ x'(a) = \alpha'(a),\ x(b) = \alpha(b),\ \alpha \leq x \leq \beta.$$

Ясно, что $x \in SGB(I,R)$.

Т е о р е м а 3. Пусть $\alpha \in AG(I,R)$, $\beta \in BG(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \leq \beta'(a)$, $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$ и для любого $x \in SG(I,R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$, $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ и $\alpha'(b) \geq x'(b) \geq \beta'(b)$ следует $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SGB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме $TB\,02$, существует обобщенное решение x краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\ \alpha'(a)\leq x'(a)\leq \beta'(a),\ \alpha'(b)\geq x'(b)\geq \beta'(b),$$
$$\alpha\leq x\leq \beta .$$

Ясно, что $x\in SGB(I,R)$.

Т е о р е м а 4. Пусть $\alpha\in AG(I,R)$, $\beta\in BG(I,R)$, $\alpha\leq\beta$, $\alpha'(a)\geq\beta'(a)$, $\alpha'(b)\leq\beta'(b)$ и для любого $x\in SG(I,R)$ из $\alpha\leq x\leq\beta$, $x'(a)=\alpha'(a)$ и $x'(b)=\alpha'(b)$ следует $H_1x=h_1$ и $H_2x=h_2$. Тогда существует $x\in SGB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме $TB\ 02$, существует обобщенное решение x краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\ x'(a)=\alpha'(a),\ x'(b)=\alpha'(b),\ \alpha\leq x\leq\beta.$$

Ясно, что $x\in SGB(I,R)$.

Далее будем предполагать, что решение задачи Коши

$$x''=f(t,x,x'),\ x(\tau)=x_0,\ x'(\tau)=x_1$$

единственно для любых $\tau\in I$, $x_0,x_1\in R$, найдется $g\in L(I,R)$ такое, что для любых $t\in I$, $x,x'\in R$ $|f(t,x,x')|\leq g(t)$, функции $H_{1,2}:A(I,R)\cup B(I,R)\to R$ непрерывны и $h_{1,2}\in R$.

Т е о р е м а 5. Пусть $\alpha\in A(I,R)$, $\beta\in B(I,R)$, $\alpha\leq\beta$ и для любого $x\in S(I,R)$ из $\alpha\leq x\leq\beta$ и $x(b)=\alpha(b)$ следует $H_2x=h_2$ и

$$x(a)=\alpha(a)\Rightarrow H_1x\leq h_1,\ x(a)=\beta(a)\Rightarrow H_1x\geq h_1.$$

Тогда существует $x\in SB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть

$$y=s_{max}(x(a)=\alpha(a)\wedge x(b)=\alpha(b)\wedge\alpha\leq x\leq\beta),$$

$$z=s_{min}(x(a)=\beta(a)\wedge x(b)=\alpha(b)\wedge y\leq x\leq\beta),$$

$$u_\lambda=s(x(b)=\alpha(b)\wedge x'(b)=y'(b)+\lambda(z'(b)-y'(b))),\ \lambda\in[0,1].$$

Для любого $\lambda\in[0,1]$ $y\leq u_\lambda\leq z$. Следовательно, найдется $\lambda\in[0,1]$ такое, что $u_\lambda\in SB(I,R)$.

Т е о р е м а 6. Пусть $\alpha \in A(I,R)$, $\beta \in B(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \leq \beta'(a)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$ и $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x(b) = \alpha(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1 , \; x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1$$

Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$y = s_{max}(\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \wedge \alpha \leq x \leq \beta),$$

$$z = s_{min}(y'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge x(b) = \beta(b) \wedge y \leq x \leq \beta),$$

$$u_\lambda = s(x(a) = y(a) + \lambda(z(a) - y(a)) \wedge x'(a) = y'(a) + \lambda(z'(a) - y'(a))),$$
$$\lambda \in [0,1] .$$

Для любого $\lambda \in [0,1]$ $y \leq u_\lambda \leq z$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u_\lambda \in SB(I,R)$.

Т е о р е м а 7. Пусть $\alpha \in A(I,R)$, $\beta \in B(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$ и $x'(b) = \alpha'(b)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x(a) = \alpha(a) \Rightarrow H_1 x \leq h_1 , \; x(a) = \beta(a) \Rightarrow H_1 x \geq h_1 .$$

Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$y = s_{max}(x(a) = \alpha(a) \wedge x'(b) = \alpha'(b) \wedge \alpha \leq x \leq \beta),$$

$$z = s_{min}(x(a) = \beta(a) \wedge x'(b) = \alpha'(b) \wedge y \leq x \leq \beta),$$

$$u_\lambda = s(x(b) = y(b) + \lambda(z(b) - y(b)) \wedge x'(b) = \alpha'(b)),$$

$$\lambda \in [0,1] .$$

Для любого $\lambda \in [0,1]$ $y \leq u_\lambda \leq z$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u_\lambda \in SB(I,R)$.

Т е о р е м а 8. Пусть $\alpha \in A(I,R)$, $\beta \in B(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \leq \beta'(a)$, $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$, $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ и $\alpha'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x'(b)=\alpha'(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1, \quad x'(b)=\beta'(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Доказательство. Пусть

$$y = s_{max}(\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge x'(b)=\alpha'(b) \wedge \alpha \leq x \leq \beta),$$

$$z = s_{min}(y'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge x'(b)=\beta'(b) \wedge y \leq x \leq \beta),$$

$$u_\lambda = s(x(a)=y(a)+\lambda(z(a)-y(a)) \wedge x'(a)=y'(a)+\lambda(z'(a)-y'(a))), \quad \lambda \in [0,1]$$

Для любого $\lambda \in [0,1]$ $y \leq u_\lambda \leq z$ и $\alpha'(b) \leq u'_\lambda(b) \leq \beta'(b)$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u_\lambda \in SB(I,R)$.

Теорема 9. Пусть $\alpha \in A(I,R)$, $\beta \in B(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \leq \beta'(a)$, $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$, $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ и $\alpha'(b) \geq x'(b) \geq \beta'(b)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x(b)=\alpha(b) \vee x'(b)=\beta'(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1,$$

$$x(b)=\beta(b) \vee x'(b)=\alpha'(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Доказательство. Пусть

$$y_1 = s_{max}(\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \wedge \alpha \leq x \leq \beta),$$

$$y_2 = s_{max}(y_1'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge x'(b)=\beta'(b) \wedge y_1 \leq x \leq \beta),$$

$$S_1 = \{x \in S(I,R): y_1'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge x'(b)=\beta'(b) \wedge y_1 \leq x \leq \beta\}.$$

Если $S_1 \neq \emptyset$, то полагаем $y=y_2$. Если $S_1=\emptyset$, то полагаем $y=y_1$. В этом случае $\beta'(b) < y_1'(b)$. Пусть $z_1 = s_{min}(y'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a) \wedge x(b)=\beta(b) \wedge y \leq x \leq \beta),$

$$z_2 = s_{min}(y'(a) \le x'(a) \le z_1'(a) \wedge x'(b) = \alpha'(b) \wedge y \le x \le z_1),$$

$$S_2 = \{x \in S(I,R) : y'(a) \le x'(a) \le z_1'(a) \wedge x'(b) = \alpha'(b) \wedge y \le x \le z_1\}.$$

Если $S_2 \ne \emptyset$, то полагаем $z = z_2$. Если $S_2 = \emptyset$, то полагаем $z = z_1$. В этом случае $\alpha'(b) > z_1'(b)$. Для любого $\lambda \in [0,1]$

$u_\lambda = s(x(a) = y(a) + \lambda(z(a) - y(a)) \wedge x'(a) = y'(a) + \lambda(z'(a) - y'(a)))$

удовлетворяет неравенствам $y \le u_\lambda \le z$ и $\beta'(b) \le$ $\le u_\lambda'(b) \le \alpha'(b)$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u_\lambda \in SB(I,R)$.

З а м е ч а н и е. Если $H_{1,2}x = H_{1,2}(x(a)$, $x(b)$, $x'(a)$, $x'(b))$, то аналогично тому, как это сделано в работе [3], в теоремах 5-9 можно избавиться от дополнительных условий, кроме непрерывности $H_{1,2}$, которые сформулированы перед теоремой 5. При этом условия $\alpha \in A(I,R)$, $\beta \in B(I,R)$, $x \in S(I,R)$ и $x \in SB(I,R)$ переходят в условия $\alpha \in AG(I,R)$, $\beta \in BG(I,R)$, $x \in$ $\in SG(I,R)$ и $x \in SGB(I,R)$.

Т е о р е м а 10. Пусть $\alpha \in S(I,R)$, $\beta \in B(I,R)$, $\alpha \le \beta$, выполняется условие 9, $H_1\alpha \le h_1$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \le x \le \beta$ и $x(a) = \alpha(a)$ следует $H_2 x = h_2$ и $x(b) = \beta(b) \Longrightarrow H_1 x \ge h_1$. Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$y = s(x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \beta(b) \wedge \alpha \le x \le \beta),$$

$$u_\lambda = s(x(a) = \alpha(a) \wedge x'(a) = \alpha'(a) + \lambda(y'(a) - \alpha'(a))),\ \lambda \in [0,1].$$

Для любого $\lambda \in [0,1]$ $\alpha \le u_\lambda \le y$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u_\lambda \in SB(I,R)$.

Т е о р е м а 11. Пусть $\alpha \in S(I,R)$, $\beta \in B(I,R)$, $\alpha \le \beta$, $\alpha'(b) \le \beta'(b)$, выполняется условие 9, $H_1\alpha \le h_1$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \le x \le \beta$ и $x(a) = \alpha(a)$ следует $H_2 x = h_2$ и $x'(b) = \beta'(b) \Longrightarrow$

$H_1 x \geq h_1$. Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Доказательство. Пусть

$$y = s(x(a)=\alpha(a) \wedge x'(b)=\beta'(b) \wedge \alpha \leq x \leq \beta),$$

$$u_\lambda = s(x(a)=\alpha(a) \wedge x'(a)=\alpha'(a)+\lambda(y'(a)-\alpha'(a))),$$

$$\lambda \in [0,1].$$

Для любого $\lambda \in [0,1]$ $\alpha \leq u_\lambda \leq y$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u_\lambda \in SB(I,R)$.

Теорема 12. Пусть $\alpha, \beta \in S(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \leq \beta'(a)$, выполняется условие 9, $H_1\alpha \leq h_1$, $H_1\beta \geq h_1$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$ и $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ следует $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Доказательство. Пусть

$$u_\lambda = s(x(a)=\alpha(a)+\lambda(\beta(a)-\alpha(a)) \wedge x'(a)=\alpha'(a)+\lambda(\beta'(a)-\alpha'(a))),$$

$$\lambda \in [0,1].$$

Для любого $\lambda \in [0,1]$ $\alpha \leq u_\lambda \leq \beta$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u_\lambda \in SB(I,R)$.

Теорема 13. Пусть $\alpha, \beta \in S(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$, выполняется условие 9, $H_1\alpha \leq h_1$, $H_1\beta \geq h_1$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$ и $\alpha'(a) \geq x'(a) \geq \beta'(a)$ следует $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Доказательство. Пусть

$$y = s(x'(a)=\beta'(a) \wedge x(b)=\alpha(b) \wedge \alpha \leq x \leq \beta),$$

$$u_\lambda = s(x(b)=\alpha(b) \wedge x'(b)=\alpha'(b)+2(y'(b)-\alpha'(b))\lambda),\ \lambda \in [0,1/2],$$

$$u_\lambda = s(x(a)=y(a)+2(\beta(a)-y(a))(\lambda-1/2) \wedge x'(a)=\beta'(a)),\ \lambda \in [1/2,1].$$

Для любого $\lambda \in [0,1]$ $\alpha \leq u_\lambda \leq \beta$ и $\alpha'(a) \geq u'_\lambda(a) \geq \beta'(a)$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u_\lambda \in SB(I,R)$.

Теорема 14. Пусть $\alpha, \beta \in S(I,R)$, $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$, $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$, выполняется условие 9, $H_1\alpha \leq h_1$, $H_1\beta \geq h_1$ и для любого $x \in$

$\in S(I,R)$ из $\alpha \le x \le \beta$, $\alpha'(a) \ge x'(a) \ge \beta'(a)$ и $\alpha'(b) \le x'(b) \le \beta'(b)$ следует $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$y \in \{x \in S(I,R): x'(a) = \alpha'(a) \wedge x'(b) = \beta'(b) \wedge \alpha \le x \le \beta\},$$

$$u_\lambda = s(x(a) = \alpha(a) + 2(y(a) - \alpha(a))\lambda \wedge x'(a) = \alpha'(a)), \quad \lambda \in [0, 1/2],$$

$$u_\lambda = s(x(b) = y(b) + 2(\beta(b) - y(b))(\lambda - 1/2) \wedge x'(b) = \beta'(b)), \quad \lambda \in [1/2, 1].$$

Для любого $\lambda \in [0,1]$ $\alpha \le u_\lambda \le \beta$, $\alpha'(a) \ge u'_\lambda(a) \ge \beta'(a)$ и $\alpha'(b) \le u'_\lambda(b) \le \beta'(b)$. Следовательно, найдется $\lambda \in [0,1]$ такое, что $u_\lambda \in SB(I,R)$.

Т е о р е м а 15. Пусть $\alpha, \beta \in S(I,R)$, $\alpha < \beta$, $\alpha'(a) < \beta'(a)$, выполняется условие 9, $H_1 \alpha \le h_1$ или $H_2 \alpha \le h_2$, $H_1 \beta \ge h_1$ или $H_2 \beta \ge h_2$ и для любого $x \in S(I,R)$ из $\alpha \le x \le \beta$ и $\alpha'(a) \le x'(a) \le \beta'(a)$ следует

$$x(a) = \alpha(a) \wedge H_2 x = h_2 \Rightarrow H_1 x \le h_1,$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x'(a) = \beta'(a) \Rightarrow H_1 x \le h_1 \vee H_2 x \ge h_2,$$

$$x'(a) = \beta'(a) \wedge H_1 x = h_1 \Rightarrow H_2 x \ge h_2,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge H_2 x = h_2 \Rightarrow H_1 x \ge h_1,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x'(a) = \alpha'(a) \Rightarrow H_1 x \ge h_1 \vee H_2 x \le h_2,$$

$$x'(a) = \alpha'(a) \wedge H_1 x = h_1 \Rightarrow H_2 x \le h_2.$$

Тогда существует $x \in SB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим инъективное непрерывное отображение

$$\Phi:\{(\sin\varphi,\cos\varphi):\varphi\in[0,2\pi]\}\to\{x\in S(I,R):\alpha\leqslant x\leqslant\beta\}$$

следующим образом:

$$\Phi_\varphi=s(x(a)=\alpha(a)\wedge x'(a)=\alpha'(a)+2\pi^{-1}(\beta'(a)-\alpha'(a))\varphi),\quad \varphi\in[0,\pi/2],$$

$$\Phi_\varphi=s(x(a)=\alpha(a)+2\pi^{-1}(\beta(a)-\alpha(a))(\varphi-\pi/2)\wedge x'(a)=\beta'(a)),\quad \varphi\in[\pi/2,\pi],$$

$$\Phi_\varphi=s(x(a)=\beta(a)\wedge x'(a)=\beta'(a)+2\pi^{-1}(\alpha'(a)-\beta'(a))(\varphi-\pi)),\quad \varphi\in[\pi,3\pi/2],$$

$$\Phi_\varphi=s(x(a)=\beta(a)+2\pi^{-1}(\alpha(a)-\beta(a))(\varphi-3\pi/2)\wedge x'(a)=\alpha'(a)),\quad \varphi\in[3\pi/2,2\pi].$$

Дальнейшее доказательство аналогично соответствующей части доказательства работы [3] .

Т е о р е м а 16. Пусть $\alpha,\beta\in S(I,R)$, $\alpha<\beta$, $\alpha'(b)<\beta'(b)$, выполняется условие 9, $H_1\alpha\leqslant h_1$ или $H_2\alpha\leqslant h_1$, $H_1\beta\geqslant h_1$ или $H_2\beta\geqslant h_2$ и для любого $x\in S(I,R)$ из $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ и $\alpha'(b)\leqslant x'(b)\leqslant\beta'(b)$ следует

$$x(a)=\alpha(a)\wedge H_2x=h_2\Rightarrow H_1x\leqslant h_1,$$

$$x(a)=\alpha(a)\wedge x'(b)=\beta'(b)\Rightarrow H_1x\leqslant h_1\vee H_2x\geqslant h_2,$$

$$x'(b)=\beta'(b)\wedge H_1x=h_1\Rightarrow H_2x\geqslant h_2,$$

$$x(a)=\beta(a)\wedge H_2x=h_2\Rightarrow H_1x\geqslant h_1,$$

$$x(a)=\beta(a)\wedge x'(b)=\alpha'(b)\Rightarrow H_1x\geqslant h_1\vee H_2x\leqslant h_2,$$

$$x'(b)=\alpha'(b)\wedge H_1x=h_1\Rightarrow H_2x\leqslant h_2.$$

Тогда существует $x\in SB(I,R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y,z\in S(I,R)$

такие, что $\alpha \le y \le \beta$, $\alpha \le z \le \beta$, $y(a)=\alpha(a)$, $y'(b)=\beta'(b)$, $z(a)=\beta(a)$ и $z'(b)=\alpha'(b)$.
Определим инъективное непрерывное отображение

$$\Phi:\{(\sin\varphi,\cos\varphi):\varphi\in[0,2\pi]\}\to\{x\in S(I,R):\alpha\le x\le\beta\}$$

следующим образом:

$$\Phi_\varphi=s(x(a)=\alpha(a)\wedge x'(a)=\alpha'(a)+2\pi^{-1}(y'(a)-\alpha'(a))\varphi),\quad \varphi\in[0,\pi/2],$$

$$\Phi_\varphi=s(x(b)=y(b)+2\pi^{-1}(\beta(b)-y(b))(\varphi-\pi/2)\wedge x'(b)=\beta'(b)),\quad \varphi\in[\pi/2,\pi],$$

$$\Phi_\varphi=s(x(a)=\beta(a)\wedge x'(a)=\beta'(a)+2\pi^{-1}(z'(a)-\beta'(a))(\varphi-\pi)),\quad \varphi\in[\pi,3\pi/2],$$

$$\Phi_\varphi=s(x(b)=z(b)+2\pi^{-1}(\alpha(b)-z(b))(\varphi-3\pi/2)\wedge x'(b)=\alpha'(b)),\quad \varphi\in[3\pi/2,2\pi].$$

Дальнейшее доказательство аналогично соответствующей части доказательства работы [3] .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц.уравнения-1982.-Т.18.-№8.-С.1323-1330.
2. Лепин А.Я. Существование обобщенного решения нелинейных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // ЛГУ им.П.Стучки.-Рига, 1986.-94 с.-Деп. в ЛАТНИИНТИ 13.02.86, №76 Ла-Д86.
3. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Обобщенная разрешимость одной двухточечной краевой задачи // Латв.мат.ежегодник,30.-Рига: Зинатне, 1986.-С.63-68.

Поступила 15.09.87.

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1988. - С. 79-90.

УДК 548.732:519.6

А.А.Степанов
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РЕНТГЕНОВСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Наиболее эффективным бесконтактным неразрушающим способом определения деформаций в полупроводниковых кристаллах является рентгендифракционный метод [1]. В этом методе измеряется интенсивность дифракционного отражения рентгеновских лучей $\mathcal{J}(\theta)$ как функция угла падения θ на поверхность кристалла исходного пучка, $\theta \in \Omega \subset (0, \pi/2)$.

В случае одномерных деформаций, т.е. смещений атомных плоскостей кристаллической решетки по глубине z, функция $\mathcal{J}$ может быть найдена на основе уравнений Такаги [2]. Тогда

$$\mathcal{J}(\theta) = \left| Y(z,\theta)/X(z,\theta)\big|_{z=0} \right|^2, \qquad \theta \in \Omega, \tag{1}$$

где комплекснозначные функции X и Y являются решением двухточечной краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dz} = \sigma_{11} X + \sigma_{12} Y \\ \dfrac{dY}{dz} = \sigma_{21} X + \sigma_{22}(\alpha(\theta) + a(z))Y, \qquad z \in [0, L] \end{cases} \tag{2}$$

$$X(0,\theta) \equiv 1, \quad Y(L,\theta) = D(\theta)\cdot X(L,\theta), \qquad \theta \in \Omega, \tag{3}$$

где

$$\alpha(\theta)=\alpha_1+\alpha_2\theta, \quad \alpha_1, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22} \in \mathbb{C}, \ \alpha_2 \in \mathbb{R};$$

$a(z)$ – действительная функция, задающая изменение деформаций кристалла в зависимости от z ; $D(\theta)$ – заданная функция. Функция D может быть либо тождественным нулем, либо комплексным амплитудным коэффициентом дифракционного отражения подложки, функции Дарвина [3].

Задача диагностики полупроводников по рентгендифракционным данным заключается в определении функции $a(z)$ и числа $L>0$, если известна из эксперимента функция $J(\theta)$, $\theta\in\Omega$. Таким образом, задача диагностики является обратной краевой задачей, в которой нужно "восстановить" дифференциальное уравнение, если известно значение функционала (I) на решении краевой задачи (2-3). Отметим, что при учете характеристик прибора , на котором проводятся измерения функции J , функционал (I) может иметь более общий вид. Так, в работе [4] для двухкристального спектрометра учитывается аппаратная функция и соотношение поляризаций излучения.

Для реализации на практике диагностики полупроводников необходимо наряду с измерительной аппаратурой соответствующее математическое и программное обеспечение с целью обработки экспериментальных данных. Такая обработка предполагает решение на ЭВМ обратной задачи, что, в свою очередь, требует рассмотрение ряда проблем: адекватности математической модели реальному эксперименту, построение численных алгоритмов решения прямой и обратной задачи [5], исследование единственности решения обратной задачи [6-7]. Последняя проблема, так называемая фазовая проблема в оптике, имеет особое значение как для гарантии найденного решения, так и в автоматизированных комплексах диагностики кристаллов.

В настоящей работе для кинематического приближения, когда $\sigma_{12}=0$, рассматривается быстрый численный алгоритм решения прямой задачи дифракции, а на его основе – обратной задачи диагностики волноводных гетероструктур. Приведены результаты обработки реальных экспериментальных данных и сравнение полученных параметров профиля деформации с результатами разрушающих способов контроля.

Будем рассматривать кристаллы с постоянным градиентом состава, т.е.

$$a(z) = a_0 + \Delta a \cdot z , \qquad z \in [0, L] , \tag{4}$$

где

$$a_0 , \Delta a \in R , \quad |\Delta a| > 0 .$$

Такие полупроводники используются при изготовлении волноводов [8]. Поскольку в кинематической модели дифракции можно положить в (2) $\sigma_{12} = 0$, то для функции $\mathcal{J}(\theta)$ нетрудно получить следующее представление:

$$\mathcal{J}(\theta) = \left| D(\theta) \exp(-i\alpha(\theta) \cdot L) - \sigma_{21} \int_0^L \exp\left(-i\alpha(\theta)s + i\int_s^L a(x)dx\right)ds \right|^2 . \tag{5}$$

Пусть

$$R(\theta) = -\sigma_{21} \int_0^L \exp\left(-i\alpha(\theta)s + i\int_s^L a(x)dx\right)ds , \qquad \theta \in \Omega . \tag{6}$$

В работах [9-10] при решении обратной задачи в формуле (6) использовался класс кусочно-постоянных деформаций $a(z)$. Однако такая аппроксимация менее эффективна с вычислительной точки зрения для кристаллов с постоянным градиентом состава по сравнению с использованием кусочно-линейных непрерывных функций $a(z)$. При этом такой вид деформаций более естественен с физической точки зрения. Получим удобную для вычислений формулу для коэффициента дифракционного отражения нарушенного кристаллического слоя. Кроме того, учтем поглощение рентгеновских лучей кристаллом.

Учитывая (4) в предположении, что $\Delta a>0$, получим

$$R(\theta)=\tilde{\sigma}_{21}\int_0^L exp(-i[A(\theta)s+Bs^2])\cdot exp(\tau s)\,ds\,, \tag{7}$$

где

$$A(\theta)=Re[\alpha(\theta)]+a_0\,,\qquad B=\frac{1}{2}\Delta a\,,$$

$$\tilde{\sigma}_{21}=-\sigma_{21}exp(iLa_0+\frac{i}{2}\Delta a L^2),$$

$$\tau=Jm\,\alpha_1<0.$$

Величина τ имеет физический смысл поглощения излучения веществом. Если пренебречь поглощением, т.е. положить $\tau=0$, то формулу (7) можно представить следующим образом:

$$R(\theta)=R_0(\theta)=\sigma(\theta)[F(A/2\sqrt{B}+\sqrt{B}L)-F(A/2\sqrt{B})], \tag{8}$$

где

$$\sigma(\theta)=\tilde{\sigma}_{21}exp\left(-i\frac{A^2(\theta)}{4B}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{B}}\,,\qquad \theta\in\Omega\,,$$

$$F(\cdot)=C(\cdot)-iS(\cdot)\,,$$

$C(\cdot)$ и $S(\cdot)$ - интегралы Френеля от действительного аргумента. Таким образом, вычисление коэффициента дифракционного отражения сводится в этом случае к вычислению интегралов Френеля. Имеются эффективные численные алгоритмы вычисления функций C и S, например, с помощью полиномов Чебышева [II]. Формула типа (8) использовалась также ранее при исследовании тонких эпитаксиальных пленок [I2].

Для излучения рентгеновского диапазона величина τ по абсолютной величине есть число порядка 10^{-5}. Поэтому τ в формуле (7) является малым параметром, по которому можно разложить в ряд функцию $R(\theta)$. Ограничимся двумя первыми членами разложения, т.е.

$$R(\theta)\approx R_0(\theta)-\tau\cdot\tilde{\sigma}_{21}\int_C^L s\cdot exp(-i[A(\theta)s+Bs^2])\cdot ds\ .$$

Для реальных деформаций в кристаллах имеем $A<<1$. Учитывая это обстоятельство после интегрирования по частям во втором слагаемом, получим окончательную формулу для вычисления функции $R(\theta)$:

$$R(\theta)=R_0(\theta)[1-\tau A(\theta)/2B],\qquad(9)$$

где $R_0(\theta)$ вычисляется по формуле (8).

Если $\Delta a<0$, то аналогичным образом получим

$$R(\theta)=R_0(\theta)[1+\tau A(\theta)/2B],\qquad(9')$$

где

$$R_0(\theta)=\sigma(\theta)[F(A/2\sqrt{B}-\sqrt{B}L)-F(A/2\sqrt{B})],$$

$$F(\cdot)=C(\cdot)+iS(\cdot),\quad B=\frac{1}{2}|\Delta a|.$$

В случае $\Delta a=0$ интеграл в (6) вычисляется в квадратурах

$$R(\theta)=\tilde{\sigma}(\theta)[exp((\tau-iA(\theta))L)-1],\quad \theta\in\Omega.\qquad(10)$$

На рис.I показаны кривые дифракционного отражения (функции $J(\theta)$) для кристаллов с линейным изменением межплоскостных расстояний с учетом и без поглощения излучения. В случае отсутствия поглощения функция $J(\theta)$ симметрична относительно некоторого угла θ^* , при учете же поглощения симметрия нарушается. Формулы (9) и (9') объясняют влияние поглощения на вид кривой дифракционного отражения. Для кристаллов с прямым градиентом деформаций ($\Delta a<0$)и обратным ($\Delta a>0$) множитель

$$1-sign\Delta a\cdot A(\theta)/2B$$

также имеет разный знак градиента по углу θ . Это приводит к тому, что интенсивность дифракционного отражения существенно понижается за счет поглощения либо при $\theta<\theta^*$,

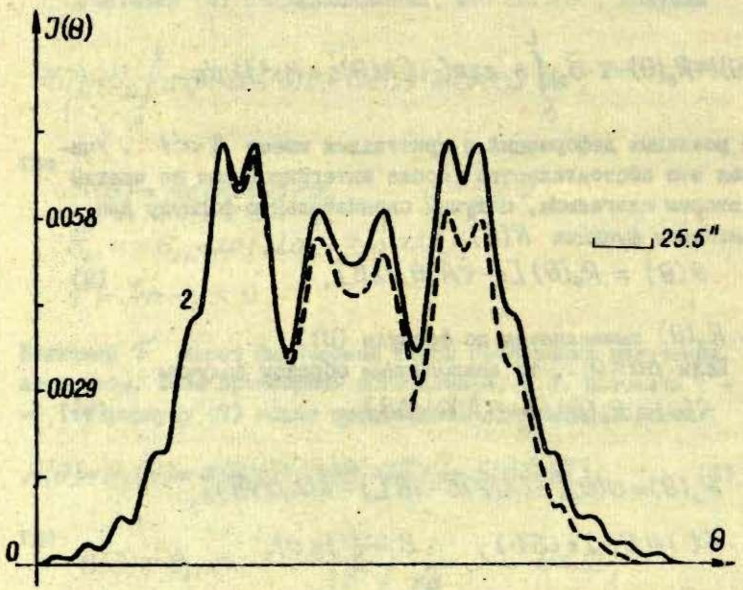

Рис.I. Кривые дифракционного отражения кристалла с линейным профилем деформации с учетом (I) и без (2) поглощения рентгеновских лучей

либо при $\theta > \theta^*$ (в зависимости от знака $\Delta\alpha$). Отметим, что этот факт был обнаружен в [I2] из более сложных оптических рассмотрений, в которых кристалл разбивался на слои, подобные зонам Френеля в оптике.

Нетрудно обобщить формулы (9), (9') на случай, когда профиль деформации имеет кусочно-линейный непрерывный вид. Очевидно, в этом случае для вычисления $R(\theta)$ получим сумму, в которой слагаемые имеют вид (9), (9') или (I0). Используя такую методику, была проведена обработка реальных экспериментальных данных для кристаллов арсенида галлия с прямым градиентом состава. Обратная задача решалась по методике, описанной в [4], где рассматривалась диагностика ионно-имплантированных кристаллов $GaAs$.

Исследуемый образец $Al_x Ga_{1-x} As$ был получен МОС-гидридным методом газовой эпитаксии. Процесс выращивания проводился в реакторе вертикального типа при атмосферном давлении и использовании в качестве исходных соединений триметилгаллия, триметилалюминия, арсения и газа-носителя водорода. Управление составом газовой фазы, приводящее к линейному изменению состава твердого раствора в направлении роста, осуществлялось путем изменения расхода водорода через термостатический питатель с триметилалюминием при постоянстве остальных параметров процесса осаждения.

Рентгендифракционные экспериментальные данные получены на двухкристальном спектрометре в положении $(-n,n)$ для излучения $Cu K_{\alpha 1}$ и отражения (400). В качестве кристалла-монохроматора использовался совершенный кристалл германия, вырезанный асимметрично с фактором асимметрии 0.725. Результаты решения обратной задачи показаны на рис. 2. Теоретическая кривая дифракционного отражения совпадает с экспериментальной с точностью до 7% (относительное среднеквадратичное отклонение), что соответствует уровню погрешности прибора.

Полученные параметры профиля деформации таковы:

$$L = 2 \text{ мкм}, \Delta a/a_0 = 0.9 \cdot 10^{-7} .$$

Вычисленные параметры в целом соответствуют технологическим. Однако сравнение экспериментальной кривой с теоретической указывает на некоторое изменение градиента на глубине 0.7-I мкм. Это может быть использовано для контроля технологического процесса выращивания кристалла.

Для выяснения соответствия вычисленного профиля деформации реальному было проведено численное моделирование кривых дифракционного отражения для найденного профиля деформации. Сравнение с результатами разрушающих способов контроля показало соответствие математической модели реальному эксперименту. На рис.3 и 4 показаны кривые дифракционного отражения при стравливании слоев 0.6 и I.2 мкм

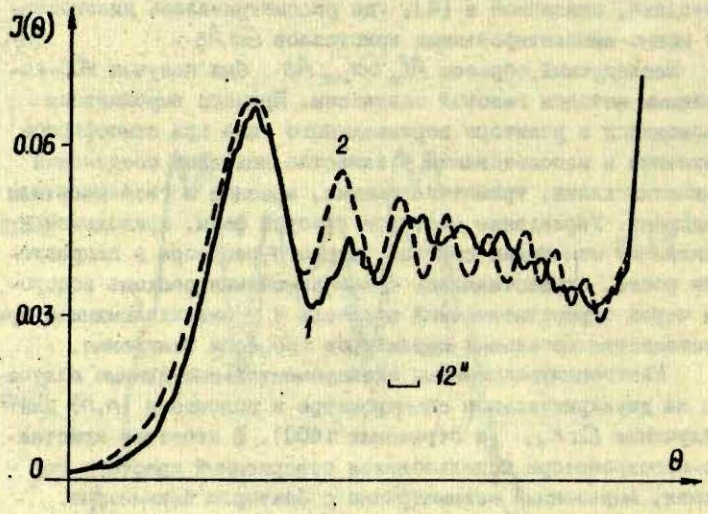

Рис.2. Экспериментальная (I) и теоретическая (2) кривые дифракционного отражения кристалла

соответственно, Этот же вывод подтверждают результаты электронно-зондовых методов контроля (например, толщина L =2.2 мкм).

Приведенные в работе результаты обработки реальных экспериментальных данных показывают эффективность примененной методики решения обратной задачи. Это может служить основой для создания неразрушающего автоматизированного способа контроля кристаллов, а также для исследования процессов роста, имплантации, диффузии и т.д. в полупроводниковых кристаллах,

Автор чрезвычайно признателен Конникову С.Г., Фалееву Н.Н. и Флаксу Л.И. за предоставление экспериментальных данных.

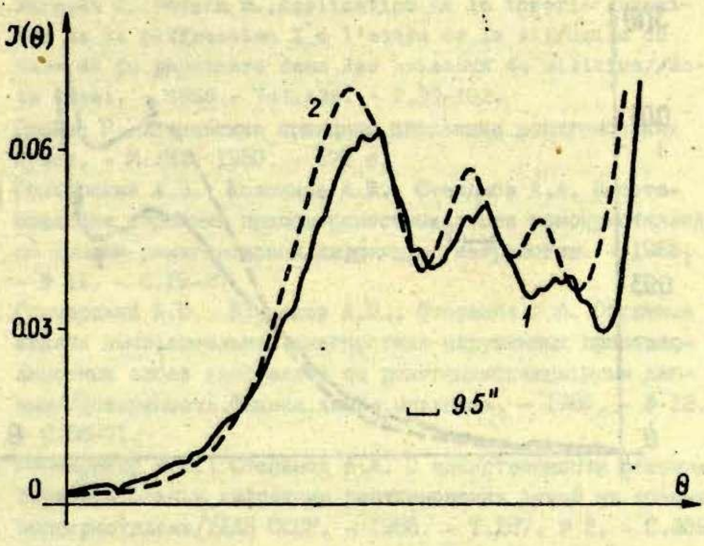

Рис.3. Экспериментальная (I) и теоретическая (2) кривые дифракционного отражения после стравливания 0.6 мкм

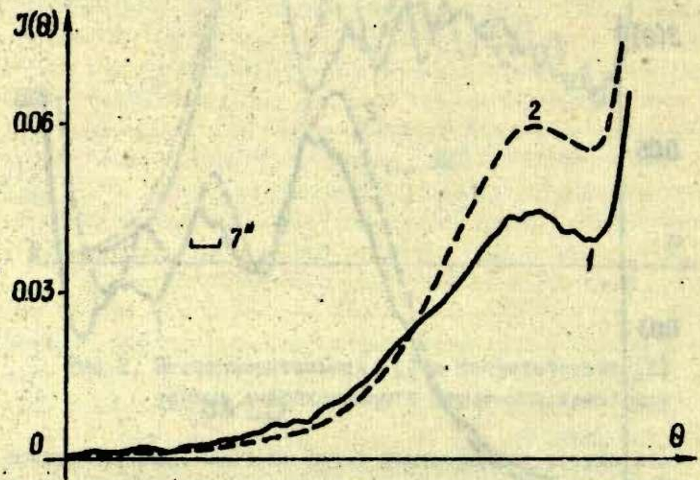

Рис.4. Экспериментальная (I) и теоретическая (2) кривые дифракционного отражения после стравливания I.2 мкм

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев А.М., Александров П.А., Имамов Р.М. Рентгеновская структурная диагностика в исследовании приповерхностных слоев монокристаллов. - М.:Наука,1986. - 96 с.
2. Burgeat J.,Taupin D.,Application de la theoric dinamique de la diffraction X a l'etude de la diffusion du bore et du phosphore dans les cristaux de silicium//Acta Cryst. - 1968.- Vol.A24. - P.99-102.
3. Джеймс Р. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. - М.:ИЛ, 1950. - 572 с.
4. Гончарский А.В., Колпаков А.В., Степанов А.А. Восстановление строения приповерхностных слоев монокристаллов по данным рентгеновской дифракции//Метрология. - 1968. - № 11. - С.19-27.
5. Гончарский А.В., Колпаков А.В., Степанов А.А. Обратные задачи вычислительной диагностики нарушенных приповерхностных слоев кристаллов по рентгендифракционным данным//Поверхность.Физика,химия,механика. - 1986. - № 12. - С.66-71.
6. Гончарский А.В., Степанов А.А. О единственности решения обратной задачи дифракции рентгеновских лучей на тонких монокристаллах//ДАН СССР. - 1986. - Т.287, № 2. - С.309-311.
7. Гончарский А.В., Степанов А.А. Вычислительная диагностика полупроводниковых кристаллов//ДАН СССР. - 1987. - Т.292, № 1. - С.60-63.
8. Елюхин В.А., Карпов С.Ю., Портной Е.А. и др. Особенности выращивания волноводных гетероструктур с плавным изменением состава//Письма в ж.техн.физики. - 1978. - Т.4, № 11. - С.629-633.
9. Kyutt R.N., Petrashen P.V., Sorokin L.M. Strain prof - foles in ion- doped silicon obtained from X-ray rocing airves//Phys.Stat.Sol.- 1980.- Vol.A60.- P.381-389.

10. Speriosu V.S., Glass H.L., Kobojashi T. X-ray determination of strain and damage distributions in ion-implanted lagers//Appl.Phys., Lett.-1979.- Vol.34. - P.539-542.
11. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Шкерстена А.Я. Применение полиномов Чебышева в численном анализе. - Рига:Зинатне, 1984. - 240 с.
12. Колпаков А.В., Хапачев Ю.П., Кузнецов Г.Ф., Кузьмин Р.Н. Дифракция рентгеновских лучей в тонком кристалле с линейным изменением периода решетки//Кристаллография. - 1977. - Т.22. - Вып.3. - С.473-480.
13. Колпаков А.В., Пунегов В.И. Развитие оптических принципов дифракции рентгеновских лучей в непрерывно-слоистых кристаллах//Вестн.Моск.ун-та. Сер.3. Физика.Астрономия. - 1986. - Т.27, № 5. - С.85-87.

Поступила 17.09.87.

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ.
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. -С. 91-98.

УДК 517.926

С.А.Мазаник
Белорусский государственный университет
им.В.И.Ленина

ПРИВОДИМОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ

В работе [1] было показано, как некоторые результаты, полученные Н.П.Еругиным в [2] , могут быть перенесены на системы линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производных. Объектом нашего исследования будут системы

$$A\frac{dx}{dt} + Bx = 0 \qquad (1)$$

с абсолютно непрерывными периодическими матрицами A и B . Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы доказать аналог теоремы Флоке-Ляпунова о приводимости периодических линейных дифференциальных систем для систем вида (1) в том случае, когда матрица A - вырождена.

Здесь и далее большими буквами обозначаем матричные функции, при этом нижний индекс указывает их размерность (если индекс отсутствует, то размерность матрицы $n \times n$). Через N обозначим матрицы с нулевыми элементами, а через E - единичные матрицы. Малыми буквами обозначаем векторные функции, размерность которых всегда согласована с размерностью соответствующих матриц.

Матрицу $X_{n \times k}$, составленную из линейно независимых решений системы (1), будем называть фундаментальной матрицей решений, если любое решение x системы (1) представимо в виде

$$x = X_{n \times k},$$

где C - постоянный вектор; k - размерность пространства решений системы (I). Существование фундаментальных матриц решений у рассматриваемых систем в дальнейшем предполагается.

Аналогично [3], систему (I) назовем асимптотически эквивалентной системе

$$C\frac{dy}{dt} + Dy = 0, \tag{2}$$

если существует такая матрица Ляпунова L, что для любого решения y системы (2) функция $x = Ly$ - решение системы (I), и для любого решения x системы (I) функция $y = L^{-1}x$ - решение системы (2).

В силу этого определения критерием асимптотической эквивалентности систем (I) и (2), как и в случае невырожденной матрицы A, является существование такой фундаментальной матрицы $X_{n \times k}$ решений систем (I), что $X_{n \times k} = LY_{n \times k}$, где L - некоторая матрица Ляпунова, а $Y_{n \times k}$ - фундаментальная матрица решений системы (2). Действительно, если $X_{n \times k} = LY_{n \times k}$ - фундаментальная матрица решений системы (I), то так как для любого решения y системы (2) существует такой постоянный вектор C, что $y = Y_{n \times k}C$, функция $x = X_{n \times k}C = LY_{n \times k}C$ является решением системы (I). Аналогично для любого решения x системы (I) существует такой постоянный вектор $\tilde{C}$, что $x = X_{n \times k}\tilde{C} = LY_{n \times k}\tilde{C}$, а поэтому $L^{-1}x = Y_{n \times k}\tilde{C} = y$ решение системы (2). Если же системы (I) и (2) асимптотически эквивалентны, то из существования преобразования $x = Ly$ с матрицей Ляпунова L следует, что, если $Y_{n \times k}$ - фундаментальная матрица решений системы (2), то $LY_{n \times k} = X_{n \times k}$ - фундаментальная матрица системы (I), поскольку все ее столбцы линейно независимы, и любое решение системы (I) представимо в виде $x = L^{-1}Y_{n \times k}C = X_{n \times k}C$, С - некоторый постоянный вектор.

Как и в работе [2], систему (I) будем называть приводимой, если она асимптотически эквивалентна системе (2) с постоянными матрицами C и D. На основании указанного критерия асимптотической эквивалентности можно доказать (см. [I]) следующее утверждение.

Т е о р е м а I. Для того чтобы система (I) с переменными коэффициентами была приводима к системе

$$diag\left\{E_{(n-k)\times(n-k)},\ J_{k\times k}+E_{k\times k}\frac{d}{dt}\right\}y=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала фундаментальная матрица $X_{n\times k}$ решений системы (I), для которой имеет место соотношение

$$X_{n\times k}=L\begin{pmatrix}N_{(n-k)\times k}\\ exp(P_{k\times k}t)\end{pmatrix},$$

где L - матрица Ляпунова, $J_{k\times k}$ - постоянная матрица, имеющая нормальную жорданову форму, $P_{k\times k}$ - постоянная матрица, такая, что асимптотически эквивалентны системы

$$\frac{dy}{dt}+J_{k\times k}\,y=0 \qquad \frac{dz}{dt}-P_{k\times k}\,z=0.$$

Рассмотрим теперь систему (I) с периодическими (одного периода) абсолютно непрерывными матрицами A и B. Матрицу A назовем обладающей стабильностью ранга, если существует такой минор $M_{k\times k}$ матрицы A, что $det\,M_{k\times k}\neq 0$ и $rank\,A=k$ при всех значениях аргумента t. Покажем, что если у системы (I) матрица A обладает стабильностью ранга и $deg\,det(A\lambda+B)=$ $=rank\,A=k$ при всех t, то у системы (I) существует фундаментальная матрица $X_{n\times k}$, и, следовательно, пространство решения системы (I) имеет размерность k. Стандартным приемом, умножением матрицы A слева и справа на невырожденные постоянные матрицы T и S соответственно преобразуем матрицу A таким образом, чтобы минор $M_{k\times k}$ располагался в правом нижнем углу матрицы $\widetilde{A}=TAS$. Поскольку строки и столбцы матрицы $\widetilde{A}$, не входящие в минор $M_{k\times k}$, представляют собой линейные комбинации соответственно строк и столбцов матрицы $\widetilde{A}$, входящих в минор $M_{k\times k}$, то, обозначая матрицы коэффициентов этих линейных комбинаций через $C_{(n-k)\times k}$ и $F_{k\times(n-k)}$, умножая матрицу $\widetilde{A}$ слева на UV и справа на W, получаем

$$UV\widetilde{A}W=H, \tag{3}$$

где

$$U=\begin{pmatrix} E_{(n-k)\times(n-k)} & N_{(n-k)\times k} \\ N_{k\times(n-k)} & M^{-1}_{k\times k} \end{pmatrix}, \quad V=\begin{pmatrix} E_{(n-k)\times(n-k)} & -C_{(n-k)\times k} \\ N_{k\times(n-k)} & E_{k\times k} \end{pmatrix},$$

$$W=\begin{pmatrix} E_{(n-k)\times(n-k)} & N_{(n-k)\times k} \\ -F_{k\times(n-k)} & E_{k\times k} \end{pmatrix}, \quad H=\begin{pmatrix} N_{(n-k)\times(n-k)} & N_{(n-k)\times k} \\ N_{k\times(n-k)} & E_{k\times k} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрицы U, V, W являются невырожденными.

Таким образом, система (I) может быть преобразована в систему

$$UVT\left(A\frac{dx}{dt}+Bx\right)=0; \tag{4}$$

сделаем в полученной системе замену

$$x=SWy. \tag{5}$$

В силу соотношения (3) получаем:

$$H\frac{dy}{dt}+\widetilde{B}y=0, \tag{6}$$

где $\widetilde{B}=UV(\widetilde{A}\dfrac{dW}{dt}+TBSW)=UV\widetilde{A}\dfrac{dW}{dt}+B^{*}$.

Очевидно, что матрица H обладает стабильностью ранга. Покажем, что $\deg \det (H\lambda + \widetilde{B}) = \operatorname{rank} H = \kappa$. По построению

$$\det (A\lambda + B) = (\det TSUW)^{-1} \det (H\lambda + B^*).$$

Представим B^* в виде:

$$B^* = \begin{pmatrix} B^*_{(n-\kappa)\times(n-\kappa)} & B^*_{(n-\kappa)\times\kappa} \\ B^*_{\kappa\times(n-\kappa)} & B^*_{\kappa\times\kappa} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Так как матрицы T, S, U, V, W не вырождены при всех t и $\deg \det (A\lambda + B) = \kappa$, то в силу (3) и (6) имеем $\deg \det (H\lambda + B^*) = \kappa$ при всех t. Вычисляя определитель $\det (H\lambda + B^*)$ по правилу Лапласа и учитывая соотношения (7), получаем

$$\det (H\lambda + B^*) = \lambda^\kappa \det B^*_{(n-\kappa)\times(n-\kappa)} + p(\lambda),$$

где степень полинома $p(\lambda)$ не превосходит $\kappa - 1$. Следовательно,

$$\det B^*_{(n-\kappa)\times(n-\kappa)} \neq 0, \quad \forall t. \tag{8}$$

Поскольку матрицу $\widetilde{B}$ можно представить в виде $\widetilde{B} = B^* + HW^{-1}\frac{dW}{dt}$, то построив (см., например, [4 с.60]) матрицу W^{-1}, получаем

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} B^*_{(n-\kappa)\times(n-\kappa)} & B^*_{(n-\kappa)\times\kappa} \\ B^*_{\kappa\times(n-\kappa)} - \frac{dF_{\kappa\times(n-\kappa)}}{dt} B^*_{\kappa\times\kappa} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в силу (8), $\deg \det (H\lambda + \widetilde{B}) = \kappa$ при всех t.

В системе (6) выделим систему алгебраических соотношений

$$B^*_{(n-k)\times(n-k)}\, y^* + B^*_{(n-k)\times k}\, \tilde{y} = 0 , \tag{9}$$

где y^*, $\tilde{y}$ векторы, состоящие соответственно из первых $n-k$ и последующих k координат вектора y.
Из (9), в силу (8), получаем

$$y^* = -(B^*_{(n-k)\times(n-k)})^{-1}\, B^*_{(n-k)\times k}\, \tilde{y} . \tag{10}$$

Следовательно, интегрирование системы (6) сводится к интегрированию системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = Q_{k\times k}\, \tilde{y} , \tag{11}$$

где

$$Q_{k\times k} = B^*_{k\times k} - (B^*_{k\times(n-k)} - \frac{dF_{k\times(n-k)}}{dt})(B^*_{(n-k)\times(n-k)})^{-1} B^*_{(n-k)\times k}, \tag{12}$$

и разрешения алгебраической системы (9) по формуле (10).

Обозначим $\tilde{Y}_{k\times k}$ фундаментальную матрицу решений системы (11). Тогда фундаментальная матрица решений системы (6) имеет вид:

$$Y_{n\times k} = \begin{pmatrix} -(B^*_{(n-k)\times(n-k)})^{-1}\, B^*_{(n-k)\times k}\, \tilde{Y}_{k\times k} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} . \tag{13}$$

Итак, фундаментальная матрица решений системы (1), в силу (5), представима в виде:

$$X_{n\times k} = SWY_{n\times k} ,$$

или в силу (13),

$$X_{n\times k} = \widetilde{L} \begin{pmatrix} N_{(n-k)\times k} \\ \widetilde{Y}_{k\times k} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где

$$\widetilde{L} = SW \begin{pmatrix} E_{(n-k)\times(n-k)} & -(B^*_{(n-k)\times(n-k)})^{-1} B^*_{(n-k)\times k} \\ N_{k\times(n-k)} & E_{k\times k} \end{pmatrix}$$

Выясним теперь структуру матриц $\widetilde{L}$ и $Q_{k\times k}$. Так как матрица A - периодическая, а матрицы T и S - постоянные, то и матрица $\widetilde{A}$ оказывается периодической. Поэтому матрицы $C_{(n-k)\times k}$, $F_{k\times(n-k)}$, $\frac{dF_{k\times(n-k)}}{dt}$, $M_{k\times k}$, а в силу невырожденности $M_{k\times k}$ при всех t, и $M^{-1}_{k\times k}$ - также периодические матрицы. Таким образом, периодичность матриц A и B влечет периодичность матриц B^*, $\widetilde{B}$, а в силу (12), и матрицы $Q_{k\times k}$. Из ограниченности матриц A и B следует ограниченность матриц W, $\frac{dW}{dt}$, W^{-1}, B^*, а так как $B^*_{(n-k)\times(n-k)}$ - невырождена, то и ограниченность матрицы $(B^*_{(n-k)\times(n-k)})^{-1}$. Следовательно, $\widetilde{L}$ матрица Ляпунова.

Поскольку матрица $Q_{k\times k}$ оказалась периодической, то из теоремы Флоке-Ляпунова (см., например, [5, с. 153]) следует приводимость системы (11). Из критерия Еругина [2, с. 9] у системы (11) следует существование фундаментальной матрицы решений, представимой в виде $L_{k\times k}\exp(P_{k\times k}t)$, где $L_{k\times k}$ - матрица Ляпунова, $P_{k\times k}$ - постоянная матрица. Не нарушая общности, считаем $\widetilde{Y}_{k\times k} = L_{k\times k}\exp(P_{k\times k}t)$. Таким образом, из (14) получаем

$$X_{n\times k} = L \begin{pmatrix} N_{(n-k)\times k} \\ \exp(P_{k\times k}t) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где

$$L=\tilde{L}L^*,\quad L^*=\begin{pmatrix} E_{(n-k)\times(n-k)} & N_{(n-k)\times k} \\ N_{k\times(n-k)} & L_{k\times k}\end{pmatrix}$$

Очевидно, что L^* - матриц Ляпунова, а поэтому и L - также матрица Ляпунова. Из теоремы I и представления (I5) следует приводимость системы (I). Таким образом, нами доказана

Теорема 2. Пусть в системе (I) матрицы коэффициентов являются периодическими с общим периодом функциями. Если матрица A обладает стабильностью ранга и

$$\deg\det(A\lambda+B)=\operatorname{rank}A,\quad \forall t,$$

то система (I) приводима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Мазаник С.А. О линейных системах дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производных. // Доклады Академии наук БССР.-1985.-Т,29, № 9.-С.784-787.
2. Еругин Н.П. Приводимые системы. // Труды Мат.ин-та им.В.А.Стеклова АН СССР.-1946.-Т.I3.
3. Богданов Ю.С. Об асимптотических эквивалентных линейных дифференциальных системах.// Дифференц.уравнения. -1965.-Т.I, № 6.-С.707-716.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.-М.:Наука,1976.- 576 с.
5. Богданов Ю.С., Сыроид Ю.Б. Дифференциальные уравнения. - Минск:Вышэйшая школа, 1983.- 239 с.

Поступила 22.09.87

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига:ЛГУ им.П.Стучки,1988.-С.99-108.

УДК 517.927

С.А.Беспалова, Ю.А.Клоков
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки, ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА-СКЕНА. I.

В приложениях часто появляется задача с условием на бесконечности для уравнения Фолкнера-Скена

$$x''' + xx'' + \beta(1 - x'^2) = 0$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_0', \quad x'(\infty) = 1 .$$

Этой задаче посвящено большое число публикаций, из которых мы отметим [1], [2], [3] - [8].

В этой статье рассмотрим более общую задачу

$$x''' = P_2(x, x', x'') \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = a, \quad x'(\infty) = b, \tag{2}$$

где P_2 - полином второй степени, который мы запишем в виде

$$\begin{aligned} P_2(x, x', x'') = x''(a_0 + a_1 + a_2 x' + a_3 x'') + \\ + b_0 + b_1 x + b_2 x' + b_{11} x^2 + b_{12} xx' + b_{22} x'^2 . \end{aligned} \tag{3}$$

п.1. Докажем следующий результат.

Л е м м а. Если решение задачи (1),(2) существует для какого-нибудь $b \neq 0$, то необходимо $b_1 + bb_{12} = 0$, $b_{11} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть это не так. Не уменьшая общности, будем считать $b = 1$. Тогда решение

$x(t)$ задачи (I),(2) при больших t имеет вид

$$x(t)=t(1+\varepsilon_1(t)),$$

так что

$$x^2(t)=t^2(1+\varepsilon_2(t)),$$

где $\varepsilon_i(t)\to 0$ при $t\to\infty$, $(i=1,2)$. Используя это, запишем (I) в виде

$$x'''=x''(a_0+a_1x+a_2x'+a_3x'')+b_{11}t^2(1+\varepsilon_3(t)), \quad (4)$$

где $\varepsilon_3(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Пусть $b_{11}\neq 0$ и, для определенности, $b_{11}>0$ (случай $b_{11}<0$ рассматривается аналогично). Тогда из (4) видно, что в точках экстремума функции $x'(t)$ (там, где $x''=0$) при больших t может быть только $x'''>0$. Отсюда следует, что при больших t $x'(t)$ изменяется монотонно, причем $x'(\infty)=1$. Если при этом $x''(t)\to 0$ при $t\to\infty$, то из (4) следует, что $x'''=b_{11}t^2(1+\varepsilon_4(t))$, где $\varepsilon_4(t)\to 0$ при $t\to\infty$, и мы получаем противоречие с условием $x'(\infty)=1$. Поэтому предположим, что $x''(t)$ не стремится к нулю при $t\to\infty$. Из монотонности $x'(t)$ следует, что $x''(t)$ при больших t сохраняет свой знак. Следовательно, существует последовательность точек t_k, $(k=1,2,\dots)$, $t_k\to\infty$, $k\to\infty$, такая, что $x'''(t_k)=0$ и $x''(t_k)\to 0$ при $k\to\infty$. Но тогда в точках t_k при больших k уравнение (4) не будет выполняться. Полученное противоречие означает, что $b_{11}=0$. Аналогично доказывается и второе равенство $b_1+b\cdot b_{12}=0$. Тем самым лемма доказана.

На основании доказанной леммы уравнение (I) можно записать в виде:

$$x'''=x''(a_0+a_1x+a_2x'+a_3x'')+b_0+b_2x'+b_{22}x'^2+b_{12}x(x'-b). \quad (5)$$

В общем случае нельзя утверждать, что если решение задачи (5),(2) существует, то необходимо

$$b_0 + b_2 b + b_{22} b^2 = 0 . \quad (6)$$

Но если $b_{12} = 0$, то (6) необходимо должно выполняться. Мы опускаем здесь эти элементарные рассуждения.

п.2. Рассмотрим некоторые частные случаи задачи (I),(2), а именно, рассмотрим уравнение

$$x''' = x''(A + Bx' + Cx''). \quad (7)$$

Если $x(t)$ есть решение задачи (7),(2), то, очевидно, $x''(t)$ сохраняет свой знак. Именно, если $a = b$, то $x''(t) = 0$ (тогда $x(t) = x_0 + b(t)$) , а если $a \neq b$, то $(b-a)x''(t) > 0 \quad \forall t \in R_+ = [0, \infty)$. Полагая $x' = y$, запишем (7) в виде

$$y'' = y'(A + By + Cy'). \quad (8)$$

Далее запишем (8) в виде системы

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = u(A + By + Cu). \end{cases} \quad (9)$$

Переходя на фазовую плоскость (y, u) , получим уравнение

$$\frac{du}{dy} = A + By + Cu , \quad (10)$$

при этом каждая точка оси y является его особой точкой. Элементарные рассмотрения на фазовой плоскости (y, u) позволяют до конце решить вопрос о существовании и единственности решения задачи (7),(2). Именно, единственность имеет место всегда. Она следует из единственности решения задачи Коши $u(y_0) = 0$, $\forall y_0 \in R$, для уравнения (10). Далее, если $a = b$, то всегда есть решение $x = x_0 + bt$.

Рассмотрим случай $a \neq b$.

Пусть $B = 0$, $A < 0$, $C \in R$. Тогда решение

задачи (7),(2) существует для любых $a,b\in R$. (Если $A\geq 0$, то решение существует только при $a=b$).
Пусть $B\neq 0$, $C=0$, $A\in R$. Тогда множество значений a, b , для которых решение задачи (7),(2) существует, определяется неравенствами

$$A+Bb<0\,,\qquad 2A+B(a+b)<0\,.$$

Пусть теперь $C\neq 0$, $|A|+|B|>0$. (Если $A=B=0$, то решение существует только при $a=b$). Необходимым условием для существования решения задачи (7),(2) в этом случае (при $a\neq b$) является неравенство $A+Bb<0$. Определим частное решение уравнения (I0) условием $u(b)=0$. Оно имеет вид:

$$u(y,b)=\left(\frac{B}{C^2}+\frac{A}{C}+\frac{B}{C}b\right)e^{C(y-b)}-\frac{B}{C^2}-\frac{A}{C}-\frac{B}{C}y\,.$$

Легко проверить, что трансцендентное уравнение $u(y,b)=0$ имеет два вещественных корня $y_1=b$, $y_2=b^*$, где $b^*=\varphi(b)$.

Пусть $C\neq 0$, $B<0$, $A\in R$. Тогда в плоскости (a,b) область значений параметров a , b , для которых решение задачи (7),(2) существует, определяется неравенствами

$$A+Bb<0\,,\qquad a>\varphi(b)\,.$$

Если же $C\neq 0$, $B>0$, $A\in R$, то имеем неравенства

$$A+Bb<0\,,\qquad a<\varphi(b)\,.$$

Типичные области существования решения в плоскости параметров (a,b) изображены на рис.I.

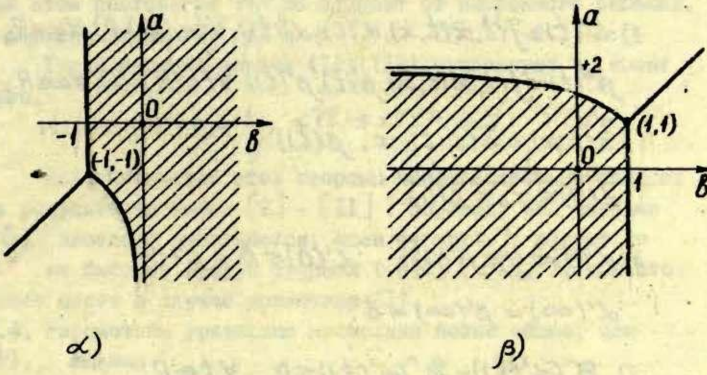

Рис.I.

Область существования решения в плоскости параметров (a,b) для случаев:
$\alpha)\ A=B=C=-1$, $\beta)\ A=-1,\ B=1,\ C=-1$.

п.3. Для задачи

$$x'''=f(t,x,x',x'') \tag{II}$$

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=a,\ x'(\infty)=b, \tag{I2}$$

где $f\in C(R_+,R^3)$, сформулируем следующую теорему.

Т е о р е м а. Пусть существуют функции $\alpha,\beta\in C^1(R_+)$ и точечные множества P и Q

$P=\{t_k\},\ (k=1,2,\dots),\ t_k<t_{k+1},$

$Q=\{t_r\},\ (r=1,2,\dots),\ t_r<t_{r+1},$

такие, что

1) $\alpha \in C^3(R_+ \setminus P), \quad \beta \in C^3(R_+ \setminus Q).$

2) $\alpha'(t) \leq \beta'(t) \quad \forall t \in R_+.$

3) $\alpha'''(t) \geq f(t, \bar{x}(t,x), \alpha'(t), \alpha''(t)) \ \forall t \in (R_+ \setminus P), \forall x \in R,$

$\beta'''(t) \leq f(t, \bar{x}(t,x), \beta'(t), \beta''(t)) \ \forall t \in (R_+ \setminus Q), \forall x \in R,$

$\bar{x}(t,x) = \delta(\alpha(t), x, \beta(t))$

$\alpha(0) \leq x_0 \leq \beta(0).$

4) $\alpha'(0) \leq a \leq \beta'(0), \quad \alpha'(0) \leq b \leq \beta'(0)$

$\alpha'(\infty) = \beta'(\infty) = b.$

5) $\underline{D}^-(\alpha'(t)) - \bar{D}^+(\alpha'(t)) \leq 0 \quad \forall t \in P,$

$\bar{D}^-(\beta'(t)) - \underline{D}^+(\beta'(t)) \geq 0 \quad \forall t \in Q,$

где

$$\delta(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} y_1, & y_2 < y_1, \\ y_2, & y_1 \leq y_2 \leq y_3, \\ y_3, & y_2 > y_3. \end{cases}$$

и $\underline{D}^-$, $\underline{D}^+$, $\bar{D}^-$, $\bar{D}^+$ есть четыре числа Дини.

Предположим далее, что функция f удовлетворяет условию (Б) : для любых $M>0$, $\tau>0$ существует $N=N(\tau,M)$ такое, что если $x(t)$, $t \in I_\tau = [0,\tau]$, есть любое решение уравнения (II), удовлетворяющее условию

$$|x(t)|+|x'(t)|\leq M \quad \forall t\in I_\tau \text{ , то } |x''(t)|\leq N \quad \forall t\in I_\tau$$

При этом постоянная N не зависит от выбранного решения, а зависит только от M и τ.

Тогда решение задачи (II),(I2) существует и, кроме того,

$$\alpha(t)\leq x(t)\leq\beta(t),\ \alpha'(t)\leq x'(t)\leq\beta'(t)\quad \forall t\in R_+ .$$

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из результатов работ [9] - [II]. Заметим, что условие (Б) заведомо выполняется, если функция f растет по x'' не быстрее второй степени ([I2], [I3]), как это имеет место в случае уравнения (I).

п.4. Рассмотрим уравнение несколько более общее, чем (7), а именно

$$x'''=x''(A+Bx+Cx'+Dx''), \qquad (I3)$$

и будем считать в (2) $b>0$, $x_0=0$, $a<b$.

Тогда для существования решения задачи (I3),(2), очевидно, необходимо, чтобы $B\leq 0$.

Действительно, в противном случае из (I3) при больших t следует $x'''>x''$ и $x'(\infty)=\infty$, что противоречит (2). Случай $B=0$ разобран в п.2, поэтому полагаем $B<0$. Тогда для любых $a,b\ (0<a<b)$ решение задачи (I3),(2) существует на основании теоремы п.3. Действительно, для этой задачи $\beta(t)=bt$ есть, очевидно, верхняя функция. С другой стороны, в качестве нижней функции можно взять

$$\alpha(t)=\begin{cases} at, & 0\leq t\leq t_1 \\ \alpha_1(t), & t\geq t_1\geq 0 \end{cases}$$

где t_1 таково, что $A+Bat+Ca<-1\quad \forall t>t_1$, и $\alpha_1(t)$ есть решение задачи

$$\alpha_1'''=-\alpha_1''$$
$$\alpha_1(t_1)=at_1,\ \alpha_1'(t_1)=a,\ \alpha_1'(\infty)=b.$$

Рассмотрим случай, когда в (2) $a<0$. Для этого случая без доказательства сформулируем следующие утверждения:
а) Существует $b_0>0$, зависящее от a . A , B , C D , (случай $b_0=+\infty$ не исключается) такое, что если $b<b_0$, то решения задачи (I3),(2) не существует, а если $b>b_0$, то тогда существует по меньшей мере два решения.
б) В случае $D>0$ можно так подобрать остальные параметры, что решение задачи (I3),(2) не будет существовать ни для каких $b>0$, $(b_0=+\infty)$.

Заметим, что при $A=C=D=0$, $B=-1$ задача (I3),(2) изучалась в работе [I4] , где ,в частности, численными методами показано, что при $a<-0.3541...$, $b_0=1$, решение задачи (I3),(2) не существует.

п.5. Рассмотрим задачу (5),(2), предполагая, что выполняется условие (6). Тогда уравнение (5) можно записать в виде:

$$x''' = x''(a_0+a_1x+a_2x'+a_3x'')+ \\ +(x'-b)(A+Bx+Cx'), \tag{I4}$$

где A , B , C - новые постоянные.

Очевидно, что если $a=b$, то решение задачи (I4), (2) есть $x=x_0+bt$. Пусть $a<b$, $b>0$ и, кроме того, $A+B(x_0+\gamma t)+C\gamma\geq 0$ для $t>0$ и $\forall\gamma\in[a,b]$. Тогда решение задачи (I4),(2) существует. Действительно, как легко проверить, $\beta(t)=x_0+bt$ есть верхняя функция. Построим нижнюю функцию. Если $B>0$, то

$$\alpha(t)=\begin{cases} x_0+at, & 0\leq t\leq t_1, \\ x_0+at_1+b(t-t_1)-(b-a)t_1\ln\dfrac{t}{t_1}, & t\geq t_1, \end{cases}$$

где $t_1>0$ - достаточно большая постоянная.

Если $B=0$, $a_1<0$, то

$$\alpha(t)=\begin{cases} x_0+at, & 0\leq t\leq t_1, \\ x_0+at_1+b(t-t_1)-(b-a)(1-e^{-(t-t_1)}), \end{cases}$$

где $t_1 > 0$ – достаточно большая постоянная.
Аналогично разбираются остальные случаи, а также случай $a > b$.

п.6. Задача (I),(2) в случае, когда P_2 не зависит от искомой функции, изучалась в работе М.М.Адъютова [I5]. Там, в частности, показано, что для заданного уравнения в зависимости от a могут быть случаи, когда решение единственно или когда решений существует любое наперед указанное число, или их может существовать бесконечно много. Заметим, что в общем случае, когда P_2 зависит от x, x', x'', задача (I),(2) также может иметь бесконечное множество решений. Так, легко проверить, что уравнение

$$x''' = -x'' - (x + x')(x'' + x' - b)$$

для любого $a \in R$ имеет бесконечное множество решений, удовлетворяющих (2), где $x_0 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: ИЛ, I956.
2. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой.–М.: Физматгиз.I962.
3. Moulden T.H.//Proc.13th Jnt.Symp.Space Technol. and Sci.1982.p.509-516.
4. Laine Claudine, Reinhart Laure //Jnt.J.Numer. Meth.Fluids.1984.v.4.p.833-852.
5. Banks W.H.H.//J.Méc.théor.et appl.1983.v.2.N3. p.375-392.
6. Brauner C.M.,Lainé Cl,Nicolaenko B.//Mathematika. 1982.v.29.part 2.p.231-248.
7. Gabutti Bruno//J.ZAMP.1984.v.35.N3.p.265-281
8. Gabutti Bruno //SIAM J.Math.Anal.1984.v.15.N5.p.943-956.
9. Kelly W.G.//J.Different.Eguations.1975.18.p.158-169.

10. Щербина Г.В. //Вестник Харьковского государственного университета. Серия механико-математическая,1967.-Т.33.-С.94-102.
11. Кигурадзе И.Т.//Дифференц.уравнения,1968.-Т.4.-№10.-С.1753-1773.
12. Клоков Ю.А. //Сибир.матем.журнал,1963.-Т.IУ.-№ 6.-С.1318-1326.
13. Клоков Ю.А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. - Рига: Изд-во РКИИГА. - 1963. - 107 с.
14. Hussaini M.Y. // Quart. J.Mech. and Appl.Math.-1986. - 39. N 1. -.Pp.15-24.
15. Альютов М.М. // Латв.математ. ежегодник. - 1982.-Вып.26. - С.3-14.

Поступила 8.10.87

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.-С.109-114.

УДК 519.31

Ф.Ж.Садырбаев
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

О МНОЖЕСТВАХ ТОНЕЛЛИ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(x)=\int_a^b F(t,x,x')\,dt \tag{1}$$

на совокупности абсолютно непрерывных функций $x:[a,b]\to R$, удовлетворяющих граничным условиям

$$x(a)=\alpha, \quad x(b)=\beta \tag{2}$$

При этом кривые $x=x(t)$ должны лежать в заданной замкнутой области G плоскости t,x.

Будем предполагать, что функция $F(t,x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет условию регулярности

$$F_{yy}>0. \tag{3}$$

Известно, что в таком случае существует абсолютная минималь $x(t)$ в поставленной задаче, если функция $F(t,x,y)$ дополнительно удовлетворяет некоторым условиям роста по третьей переменной ([1], [2]).

Л.Тонелли ([1], п.116) отмечал, что если кривая $x=x(t)$ лежит внутри области G (исключая, быть может, конечные точки), то:

1) в каждой точке интервала (a,b) существует - конечная или бесконечная - производная $x'(t)$;

2) за исключением, быть может, точек некоторого замкнутого множества Ω нулевой меры, во всех остальных точках интервала $[a,b]$ производная $x'(t)$ конечна и меняется непрерывно.

На множестве $[a,b]\setminus\Omega$ функция $x(t)$ имеет непрерывную конечную вторую производную и удовлетворяет уравнению Эйлера

$$x''=f(t,x,x'), \tag{4}$$

где

$$f=\frac{F_x-F_{yt}-F_{yx}y}{F_{yy}}$$

При сделанных предложениях о функции F правая часть уравнения (4) является непрерывной функцией. Если априори известно, что множество Ω некоторой минимали x пусто, то функция $x(t)$ является дважды непрерывно дифференцируемым решением краевой задачи (4),(2).

К данному кругу вопросов, связанному со множествами Ω, привлечено внимание в недавних работах [3], [4]. Множество Ω в этих работах названо множеством Тонелли.

Критерии пустоты множества Ω приведены в [1], хотя отсутствуют примеры, когда множество Тонелли непусто. Такие примеры приводятся в [3], [4].

Так, в задаче ([3], с.144) о минимизации функционала

$$J(x)=\int_0^1[\varepsilon x'^2+(x^3-t^2)x'^{14}]dt \tag{5}$$

при ограничениях

$$x(0)=0, \qquad x(1)=\kappa>0$$

минималью, при надлежащем выборе ε, κ, являются функция $x(t)=\kappa t^{2/3}$, которая в $(0,1]$ удовлетворяет уравнению Эйлера (6). Множество Тонелли этой минимали состоит из единственной точки $t=0$. Уравнение Эйлера имеет вид:

$$x''=\frac{56(x^3-t^2)tx'^{13}-78(x^3-t^2)x^2x'^{14}}{2\varepsilon+182(x^3-t^2)^2x'^{12}} \tag{6}$$

Отметим, что функционал (5) регулярен, т.к. вторая производная по x' от подинтегральной функции равна знаменателю правой части уравнения (6) и отделена от нуля положительным числом 2ε.

Цель настоящей заметки - обратить внимание на близость вопроса о множествах Тонелли к вопросу об ограниченности производных ограниченных решений уравнений второго порядка вида (4).
Этому вопросу посвящена большая литература (см. [5] и приведенную там библиографию).

Имеет место следующее очевидное утверждение:

Пусть уравнение Эйлера для функционала (I) внутри области G не имеет решений с неограниченной производной.

Тогда множество Тонелли для минимали в задаче (I), (2) пусто.

Таким образом, каждое условие, обеспечивающее ограниченность производных решений уравнения Эйлера в области G, является одновременно условием пустоты множества Тонелли для минимальной кривой в соответствующей вариационной задаче.

Однако возможности применения таких условий к конкретным экстремальным задачам ограничены, поскольку эти условия формулируются в терминах функции f - правой части уравнения Эйлера.

Приведем условия, обеспечивающие пустоту множества Ω, непосредственно в терминах подинтегральной функции F в функционале (I).

Т е о р е м а I. Пусть выполняются условия:

$$1)\quad \lim_{y\to\pm\infty} F_y(t,x,y)=\pm\infty$$

для всех $(t,x)\in G$;

$$2)\quad |F_x(t,x,y)|\leqslant C|yF_y(t,x,y)|$$

при $(t,x,y)\in G\times\{y: |y|>N\}$, где C,N - некоторые числа.

Тогда множество Ω минимальной кривой в задаче (I), (2) пусто.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x=x(t)$ - минимальная кривая. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Пусть, например, $x'(t)\to+\infty$ при $t\to t_0$.

Используя условие 2, получаем в окрестности точки $t=t_0$

$$\frac{d}{dt}F_y(t,x(t),x'(t)) = F_x(t,x(t),x'(t)) \leqslant$$

$$\leqslant Cx'(t)F_y(t,x(t),x'(t)).$$

Интегрируя это неравенство, имеем

$$F_y(t,x(t),x'(t)) \leqslant F_y(t_1,x(t_1),x'(t_1))\exp[C(x(t_0)-x(t_1))],$$

где t_1 - достаточно близкая к t_0 точка. Поскольку правая часть неравенства ограничена, левая не может возрастать до бесконечности вместе с $x'(t)$, что противоречит условию I при сделанных предположениях о функции F_y.

Аналогично рассматривается случай $x'(t) \to -\infty$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть выполняются условия:

I) существуют кусочно непрерывно дифференцируемые функции $\lambda,\mu:[a,b] \to R$ такие, что

I а) для всех $(t,x) \in G$

$$F_x(t,x,y)(x-\mu(t)) \geqslant 0,$$

$$F_x(t,x,y)(x-\lambda(t)) \geqslant 0$$

соответственно при $y \geqslant N$, $y \leqslant -N$;

I б) $\lambda(a) \geqslant A \geqslant \mu(a)$,
$\lambda(b) \leqslant B \leqslant \mu(b)$;

2) $\lim\limits_{y\to+\infty} F_y(t,x,y) > \max\limits_G F_y(t,x,N)$,

$\lim\limits_{y\to-\infty} F_y(t,x,y) < \min\limits_G F_y(t,x,-N)$.

Тогда справедливо утверждение предыдущей теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что множество Ω непусто. Пусть для определенности $x(t_0) \geqslant \mu(t_0)$, $x'(t) \to +\infty$ при $t \to t_0$.

Рассмотрим случай $t_0 = b$. Тогда из Iб следует, что $\mu(b) = B = x(b)$. В некоторой левой окрестности точки $t = b$ выполняется $x(t) < \mu(t)$. Пусть $t_1 = \inf\{t : x(t) < \mu(t)\}$. Такое значение существует в $[a, b)$, поскольку $x(a) = A \geq \mu(a)$. Очевидно, $x'(t_1) \leq \mu'(t_1)$. Из соображений непрерывности заключаем, что найдутся $t_2 \in [t_1, b)$, $t_3 \in (t_2, b]$ такие, что $x'(t_2) = \mu'(t_2)$, $x'(t) \to +\infty$ при $t \to t_3$, $x'(t) > \mu'(t)$, $t \in (t_2, t_3)$. Для некоторого $t_4 \in [t_2, t_3)$ $x'(t) > N$, $t \in (t_4, t_3)$. Таким образом, на интервале (t_4, t_3) производная $x'(t)$ изменяется от N до $+\infty$, и следовательно, в силу условия 2, функция $F_y(t, x(t), x'(t))$ на этом интервале имеет участок возрастания.

Но это невозможно, т.к. по условию I а при $t \in (t_4, t_3)$ выполняется

$$\frac{d}{dt} F_y(t, x(t), x'(t)) = F_x(t, x(t), x'(t)) \leq 0 .$$

Таким образом, случай $t_0 = b$ рассмотрен.

Пусть теперь $t_0 < b$. Поскольку значения $x'(t)$ превышают значения $\mu'(t)$ в близких к t_0 точках, в некоторой правой окрестности точки $t = t_0$ выполняется неравенство $x(t) > \mu(t)$. Поскольку, в силу условия $B \leq \mu(b)$, кривые $x = x(t)$ и $\mu = \mu(t)$ должны пересечься для некоторого значения $t \in (t_0, b]$, существует $t_2 \in (t_0, b]$ такое, что $x(t) > \mu(t)$, $t \in (t_0, t_2)$, $x'(t_2) \leq \mu'(t_2)$. Но тогда, ввиду 2, функция $F_y(t, x(t), x'(t))$ должна иметь участок убывания в правой окрестности точки $t = t_0$. Но это невозможно, т.к. по условию I, $F_x(t, x(t), x'(t)) \geq 0$ для рассматриваемых значений ,и, следовательно, положительна производная $\frac{d}{dt} F_y$.

Аналогично рассматриваются случаи $x(t_0) < \mu(t_0)$, $x'(t) \to +\infty$, $t \to t_0$, $x'(t) \to -\infty$, $t \to t_0$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tonelli L. Fondamenti di calcolo delle variazioni, v.II. - Bologna: Zanichelli, 1923.-660 p.
2. Nagumo M. Über die gleichmässige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variationsproblems //Japan.J. Math.-1929.-v. VI - P.173-182.
3. Ball J.M., Mizel V.J. Singular minimizers for regular one-dimensional problems in the calculus of variations //Bull.Amer.Math.Soc.-1984.-v.II.-N I.-P.143-146.
4. Ball J.M., Mizel V.J. One-dimensional Variational Problems whose Minimizers do not Satisfy the Euler-Lagrange Equation //Arch.Ration.Mech. and Anal.-1985.-v.90.-N4.-P.325-388.
5. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.- Рига: Зинатне, 1978. - 189 с.

Поступила 15.10.87.

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. -С. 115 - 121.

УДК 517.927

Г.П. Гризанс

ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{1}$$

$$x(0) = c, \quad x(b) = -Bx'(b) + d, \tag{2}$$

где $t \in I_0 = (0, b]$, $f \in Car(I_0 \times R^{2n})$, $c, d \in R^n$, $Bz \cdot z \geq 0 \ \forall z \in R^n$, $I = [0, b]$.

Определение. Решением задачи (1), (2) назовем вектор-функцию $x(t)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной на каждом сегменте, содержащемся в I_0 и непрерывна на I, удовлетворяющую краевым условиям (2) и при почти всех $t \in I_0$ уравнению (1). Двухточечные краевые задачи для уравнений второго порядка с несуммируемой особенностью рассматривались многими авторами [1-4]. Результаты данной статьи дополняют эти исследования. Одновременно с задачей (1), (2) рассмотрим задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \tag{3}$$

$$x(a) = Ax'(a) + c, \quad x(b) = -Bx'(b) + d, \tag{4}$$

где $t \in I_1 = [a, b]$, $a < b$, $f \in Car(I_1 \times R^{2n})$, $c, d \in R^n$, $Az \cdot z \geq 0$, $Bz \cdot z \geq 0 \ \forall z \in R^n$.

В дальнейшем важную роль будет играть скалярная функция $w(t, x) \in C^2(I_1 \times R^n; R^+)$. Для данного $H > 0$ обозначим через $\omega(H)$ множество точек $(t, x) \in I_1 \times R^n$, удовлетворяющих неравенству $w(t, x) \geq H$. Далее будем предполагать, что это множество непустое и связное для некоторого $H>0$, причем $|w_x|>0 \quad \forall (t,x)\in \omega(H)$, а множество точек $(t,x)\in I_1\times R^n$, удовлетворяющих неравенству $w(t,x)\leq H$, ограничено $|x|\leq M$, где постоянная M зависит от H. Через $\omega_{t_0}(H)$ обозначим множество точек $x\in R^n$, для которых $w(t_0,x)\geq H$, $t_0\in I_1$.

Теорема 1. Пусть в (4) матрицы A, B, положительно определенные, существуют функция $w(t,x)$ и число $H>0$ такие, что для $(t,x,y)\in I_1\times R^{2n}$, удовлетворяющих соотношениям $w(t,x)\geq H$, $w_t(t,x)+w_x(t,x)y=0$, выполняются неравенства:

$$(A_1)\quad w_{tt}+2w_{tx}\cdot y+w_x\cdot f(t,x,y)+w_{xx}y\cdot y\geq 0,$$

$$(A_2)\quad w_{tt}+2w_{tx}\cdot z+w_{xx}z\cdot z\geq 0 \quad \forall z\in R^n,$$

$$(A_3)\quad w_t(a,x)+w_x(a,x)\cdot A^{-1}(x-c)\geq 0 \quad x\in \omega_a(H),$$

$$(A_4)\quad -w_t(b,x)+w_x(b,x)\cdot B^{-1}(x-d)\geq 0 \quad x\in \omega_b(H).$$

(Б) Предположим также, что для любого $M>0$ найдется $N>0$ такое, что если $x(t)$, $t\in I_1$ есть любое решение уравнения

$$x''=\lambda(t)f(t,x,x'),\quad \lambda\in L(I_1;[0,1]),$$

удовлетворяющее неравенству $|x(t)|\leq M \quad \forall t\in I_1$, то выполняется неравенство $|x'(t)|\leq N \quad \forall t\in I_1$. Тогда решение (3), (4) существует.

Доказательство. Введем вектор-функцию

$$F(t,x,x')=\frac{\Phi(t,x,x')}{\gamma(t,x,x')}\ ,$$ где

$$\Phi(t,x,x')=f(t,x,y)+\frac{w_x}{|w_x|^2}\cdot r(w-H,\ w_{xx}y\cdot y-$$

$$-w_{xx}x'\cdot x'+2w_{tx}\cdot(y-x')),$$

$$y(t,x,x')=x'-\frac{w_x}{|w_x|^2}\cdot r(w-H,\ w_t+w_x\cdot x'),$$

$$r(s,u)=\begin{cases}0 & s\le 0\\ u & 0\le u\le s\\ s & u\ge s\end{cases},\quad \delta(s)=\begin{cases}0 & s\le 0\\ s & 0\le s\le 1\\ 1 & s\ge 1\end{cases},$$

$$\gamma(t,x,x')=1+[\delta(|x|-M)+\delta(|x'|-N)]\cdot|\Phi(t,x,x')|,$$

где $M>0$, $N>0$ числа из условия (Б), $w=w(t,x)$,

$$w_x=\frac{\partial w(t,x)}{\partial x},\quad w_{xx}=\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2},\quad w_{tx}=\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t\,\partial x},$$

$w_t=\dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t}$. Очевидно, что $F(t,x,x')$ ограничена на $I_1\times R^{2n}$ некоторой суммируемой функцией. Следовательно, уравнение

$$x''=F(t,x,x') \qquad (5)$$

имеет по крайней мере одно решение, удовлетворяющее условиям (4) [I, с. 28]. Обозначим его через $x(t)$, и пусть $v(t)=w(t,x(t))$. Покажем, что $v(t)\le H\ \ \forall t\in I_1$. Предположим противное. Тогда из условий (2), (A_3), (A_4) вытекает, что $v(t)$ имеет точку максимума, где $v'(t)=0$. Предположим, что эта точка $t=t_0$ лежит внутри отрезка I_1. Тогда необходимо будет существовать отрезок $[t_0-h,t_0]\subset(a,b)$, в котором $H+\varepsilon\le v(t)\le H+2\varepsilon$, $v'(t)\ge 0$, где $2\varepsilon=v(t_0)-H$. Выберем h столь малым, чтобы при $t\in[t_0-h,t_0]$ выполнялись неравенства:

$$|w_t + w_x \cdot x'| \le \varepsilon,$$

$$|w_{xx} y \cdot y - w_{xx} x' \cdot x'| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|w_{tx} \cdot y - w_{tx} \cdot x'| \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Легко проверить, что при любом $t \in [t_0 - h, t_0]$ будем иметь

$$w_t + w_x \cdot y \equiv 0,$$

$$\Phi(t, x, x') = f(t, x, y) + \frac{w_x}{|w_x|^2} \cdot [w_{xx} y \cdot y - w_{xx} x' x' + 2 w_t (y - x')]$$

Дважды дифференцируя $v(t)$, получим

$$v'' = w_{tt} + 2 w_{tx} \cdot x' + w_x \cdot x'' + w_{xx} x' \cdot x' =$$

$$= \frac{\gamma - 1}{\gamma} [w_{tt} + 2 w_{tx} \cdot x' + w_{xx} x' \cdot x'] +$$

$$+ \frac{1}{\gamma} [w_{tt} + 2 w_{tx} \cdot y + w_x \cdot f(t, x, y) + w_{xx} y \cdot y].$$

Учитывая условия (A_1), (A_2), найдем, что

$$v''(t) \ge 0 \quad \forall t \in [t_0 - h, t_0].$$

Но тогда имеем $v'(t_0) > 0$, что противоречит предположению $v'(t_0) = 0$. Следовательно, $v(t) \le H$ или $w(t, x(t)) \le H$ $\forall t \in I_1$. Из определения функции $w(t, x)$ вытекает, что $|x(t)| \le M$ $\forall t \in I_1$, а из условия (Б) находим, что $|x'(t)| \le N$ $\forall t \in I_1$. Но тогда $F(t, x, x') = f(t, x, x')$, и решение $x(t)$ задачи (5), (4) есть также решение задачи (3), (4). Случай, когда $t_0 = a$ или

$t_0 = b$, рассматривается аналогично. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Условие (Б) заведомо выполняется, если, например, функция f удовлетворяет условию (Б) теоремы 5 в работе [1, с. 83].

З а м е ч а н и е 2. Если A и B-нулевые матрицы, то в теореме 1 условия $(A_3), (A_4)$ необходимо заменить неравенствами

$$(A_5) \qquad w(a,c) \leq H, \qquad w(b,d) \leq H.$$

Тогда при выполнении условий $(A_1), (A_2), (A_5)$, (Б) уравнение (3) имеет решение, удовлетворяющее краевым условиям

$$x(a) = c, \qquad x(b) = d.$$

Аналогично формулируется условие, когда только одна из матриц A, B нулевая. Далее, пользуясь теоремой 1, докажем теорему существования решения задачи (1), (2).

Т е о р е м а 2. Пусть вектор-функция f на каждом отрезке $[a,b] \subset I_0$ удовлетворяет условию (Б) теоремы 1, где N зависит от M и a.

Предположим далее, что существует векторная функция $\varphi \in C(I)$, $\varphi(0) = C$, функция $w(t,x)$ и постоянная $H > 0$ такие, что

$$(A_6) \qquad \begin{aligned} &w(t, \varphi(t)) \leq H \quad \forall t \in I_0, \\ &w(t,x) \to \infty \text{ при } t \to 0,\ |x-c| \geq \nu > 0 \quad \forall \nu > 0, \end{aligned}$$

и на любом отрезке $[a,b] \subset I_0$ функция f удовлетворяет условиям $(A_1), (A_2), (A_4)$ теоремы 1. Тогда решение задачи (1), (2) существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для уравнения (1) рассмотрим вспомогательную задачу

$$x(a) = \varphi(a), \quad x(b) = -Bx'(b) + d. \qquad (6)$$

По теореме 1, решение задачи (1), (6) существует для любого a из I_0. Обозначим это решение через $x_a(t)$. Из условий теоремы 2 вытекает, что множество функций $(x_a(t)$,

$x'_a(t))$ компактно на любом отрезке, содержащемся в I_o. Следовательно, можно выбрать последовательность, сходящуюся к функции $x(t)$, которая при $t\in I_o$ будет решением уравнения (I) и при $t=b$ удовлетворять краевому условию (6). Очевидно также, что

$$w(t, x(t))\leq H \quad \forall\, t\in I_o. \tag{7}$$

Покажем, что $\lim\limits_{t\to 0} x(t)=c$. Допустим противное. Тогда найдется последовательность точек $\{t_n\}$ таких, что $t_n\to 0$ при $n\to\infty$ и $|x(t_n)-c|\geq \nu>0$, где ν есть некоторое положительное число. Но тогда в силу условия (A_6) $w(t_n, x(t_n)|\to\infty$ при $t_n\to 0$, что противоречит (7). Значит, $x(t)\to c$ при $t\to 0$. Определив по непрерывности $x(0)=c$, получим решение задачи (I), (2). Тем самым теорема 2 доказана.

Приведем несколько примеров.

П р и м е р I. Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} x'' &= y\Psi_0 + xy^2\Psi_1, \\ y'' &= -x^3\Psi_0 + x^4 y\Psi_2, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} x(a) &= x_a, \quad x(b)=x_b, \\ y(a) &= y_a, \quad y(b)=y_b, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\Psi_i\in Car(I_1\times R^4)$, $i=0,1,2$, причем

$$\Psi_1+\Psi_2\geq 0 \quad \forall (t,x,y,x',y')\in I_1\times R^4 \tag{10}$$

и правые части системы (8) удовлетворяет условию (Б). Взяв $w=x^4+2y^2$, на основании теоремы I и замечания 2, заключаем, что решение (8), (9) существует для любых x_a, x_b, y_a, y_b.

П р и м е р 2. Пусть в задаче (8), (9) $a=0$, $x_a=$

- $y_a=0$, $\psi_i \in Car(I_0 \times R^4)$, $i=0,1,2$. Предположим также, что правые части (8) удовлетворяет условию (I0). Тогда, если взять $w=(x^4+2y^2)/t$, из теоремы 2 вытекает, что решение существует для любых x_B , y_B .

Пример 3. Исследуем задачу:

$$x''+\frac{1-p+q}{t}x'-\frac{pq}{t^2}x=f(t,x,x'), \tag{II}$$

$$x(0)=0, \quad x(B)=-Bx'(B)+d, \tag{I2}$$

где $d\in R^n$, $p>0$, $q\geq 0$, $f\in Car(I_0\times R^{2n})$, $Bz\cdot z\geq 0 \ \forall z\in R^n$. Пусть существует постоянная $m>0$ такая, что $x\cdot f(t,x,y)+y^2\geq 0$ $p\forall t\in I_0$, $|x|\geq m$, $x\cdot y=0$. Тогда, выбрав $w=x^2/t^p$, получим из теоремы 2 существование решения (II), (I2) для любого $d\in R^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. - 189 с.

2. Гаприндашвили Г.Д. О разрешимости в обобщенном и классическом смысле одной двухточечной краевой задачи для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка // Труды Ин-та прикл.мат.им.И.Н.Векуа. - 1986.- Т.17. -С. 17-56.

3. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Тбилиси: ТГУ, 1975. - 352 с.

4. Ломтатидзе А.Г. Об одной краевой задаче для нелинейных обыкновенных уравнений второго порядка с сингулярностями // Дифференц.уравнения. - 1986. - Т.22.-№ 3. -С.416-426.

Поступила 2.09.87.

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. –С. 122 – 130.

УДК 517.929+519.67.

А.Н.Румянцев
Пермский политехнический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В [1] показана принципиальная возможность применения систем аналитических вычислений / САВ / ЭВМ [2] для исследования разрешимости краевой задачи

$$\mathcal{L}x=f, \quad \ell x=\alpha, \tag{1}$$

где $\mathcal{L}$ - линейный ограниченный оператор с фредгольмовой главной частью [3], действующий из пространства D абсолютно непрерывных на $[0,1]$ вектор-функций в пространство суммируемых на том же отрезке вектор-функций; $\ell: D \to R^n$ - линейный ограниченный вектор-функционал; f - суммируемая на отрезке $[0,1]$ вектор-функция; α - вещественный вектор. Предполагается, что задача Коши

$$\mathcal{L}x=f, \quad x(0)=0$$

однозначно разрешима. Как известно [3], в этом случае существует конечномерная фундаментальная матрица X однородного уравнения $\mathcal{L}x=0$ / полагаем, что $X(0)=E$ - единичная матрица /. Необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости задачи (1) является невырожденность матрицы ℓX. Основная идея исследования разрешимости задачи (1) состоит в том, что вывод о невырожденности ℓX можно делать на основе невырожденности матрицы $\ell_1 X_1$, если вектор-функционалы ℓ и ℓ_1, матрицы X и X_1 достаточно близки. САВ позволяют найти X_1, проверить обратимость $\ell_1 X_1$, оценить близость $\ell_1 X_1$ и ℓX и на основании этого сделать вывод об обратимости ℓX.

Предлагаемая общая схема может быть эффективно реализована лишь для конкретных операторов $\mathcal{L}$. Данная статья посвящена реализации этой схемы для исследования разрешимости двухточечной краевой задачи:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)x[h(t)] = f(t), & t \in [0,1] \\ x(\xi) = \varphi(\xi), & \xi \notin [0,1], \end{cases} \tag{2}$$

$$x(0) = 0 = x(1). \tag{3}$$

Здесь f - суммируемая на $[0,1]$ функция; функция $\varphi^h(\cdot)$, определяемая равенством

$$\varphi^h(t) = \begin{cases} 0, & h(t) \in [0,1], \\ \varphi[h(t)], & h(t) \notin [0,1] \end{cases}$$

суммируема на $[0,1]$; функции p и h / $h(t) \leq t$ / задаются на фиксированном разбиении отрезка $[0,1]$: $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = 1$ / t_i, $i = 1, \ldots, m-1$ - рациональные числа / формулами

$$p(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \chi_i(t) p^i(t), \quad h(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \chi_i(t) h^i(t),$$

где $\chi_i(\cdot)$ - характеристическая функция множества $K_i = [t_i, t_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, m-1$, $p^i(\cdot)$ и $h^i(\cdot)$ - полиномы с рациональными коэффициентами, кроме того, для каждого i, $i = 1, \ldots, m-1$ существует единственное $j: 0 \leq j \leq i$, что $h^i(t) \in K_j$, $t \in K_i$ / $K_0 = (-\infty, 0)$ /.

Как хорошо известно [4], уравнение (2) можно записать в эквивалентной форме

$$\ddot{x}(t) + p(t)x_h(t) = f_1(t), \tag{4}$$

где

$$x_h(t) = \begin{cases} x[h(t)], & h(t) \in [0,1] \\ 0, & h(t) \in [0,1] \end{cases}$$

$$f_1(t) = f(t) - p(t)\varphi^h(t).$$

Поэтому далее будет исследоваться разрешимость задачи (4), (3).

Обозначим $y^1(t) = x(t)$, $y^2(t) = \dot{x}(t)$, и пусть $Y(t) = \{y_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2$ - фундаментальная матрица системы

$$\begin{cases} \dot{y}^1(t) = y^2(t) \\ \dot{y}^2(t) + p(t)y_h^1(t) = 0 \end{cases}, \quad y_h^1(t) = \begin{cases} y^1[h(t)], & h(t) \in [0,1] \\ 0, & h(t) \notin [0,1] \end{cases},$$

эквивалентной однородному уравнению $\ddot{x}(t) + p(t)x_h(t) = 0$. Тогда краевые условия (3) можно записать в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^1(0) \\ y^2(0) \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{y}^1(s) \\ \dot{y}^2(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\ell Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \dot{y}_{11}(s) & \dot{y}_{12}(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_{11}(1) & y_{12}(1) \end{pmatrix},$$

т.е. $\det \ell Y = y_{12}(1)$. Следовательно, задача (4), (3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда $x(1) \neq 0$, где $x(\cdot)$ - решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + p(t)x_h(t) = 0, & t \in [0,1] \\ x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

В общем случае можно найти лишь приближенное решение задачи (5), поэтому для исследования разрешимости задачи (4), (3) необходимо:

а/ построить приближенное решение $x_a(\cdot)$ задачи (5);

б/ построить оценку погрешности $\Delta(t) \geq |x(t) - x_a(t)|$;

после чего выполнение условия $\Delta(1) < |x_a(1)|$ гарантирует однозначную разрешимость задачи (4), (3).

Решение задачи (5) имеет представление

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m-1} x_i(t)\, x^i(t),$$

где x^i - решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}^i(t)+p^i(t)x_h^i(t)=0, & t\in K_i \\ x^i(t_i)=x^{i-1}(t_i), & \dot{x}^i(t_i)=\dot{x}^{i-1}(t_i), \\ x^0(0)=0, & \dot{x}^0(0)=1, \end{cases} \tag{6}$$

$$x_h^i(t)=\begin{cases} x^i[h^i(t)], & h^i(t)\in K_i, \\ x^j[h^i(t)], & h^i(t)\in K_j,\ 1\le j<i, \\ 0, & h^i(t)\in K_0. \end{cases}$$

Приближенное решение $x_a(\cdot)$ будем формировать аналогичным образом

$$x_a(t)=\sum_{i=1}^{m-1}\chi_i(t)\,x_a^i(t),$$

где x_a^i - приближенное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ddot{x}^i(t)+p^i(t)_a x_h^i(t)=0, & t\in K_i, \\ x^i(t_i)=x_a^{i-1}(t_i), & \dot{x}^i(t_i)=\dot{x}_a^{i-1}(t_i), \\ x_a^0(0)=0, & \dot{x}_c^0(0)=1, \end{cases} \tag{7}$$

$${}_a x_h^i(t)=\begin{cases} x^i[h^i(t)], & t\in K_i, \\ x_a^j[h^i(t)], & t\in K_j,\ 1\le j<i, \\ 0, & t\in K_0. \end{cases}$$

Оценку погрешности $\Delta(\cdot)$ определим равенством

$$\Delta(t)=\sum_{i=1}^{m-1}\chi_i(t)\Delta^i,$$

где $\Delta^i\ge|x^i(t)-x_a^i(t)|,\ t\in K_i$.

Зафиксируем i и рассмотрим подробнее построение x_a^i и Δ^i . Обозначим $\omega^i(t)=x^i(t)-x_a^i(t)$ и определим константу δ^i неравенством $\delta^i\ge|\dot{\omega}^i(t)|,\ t\in K_i$.

В силу равенства

$$\omega^i(t)=\omega^{i-1}(t_i)+\int_{t_i}^{t}\dot\omega^i(s)ds\,,\quad \omega^0(0)=0,$$

имеем

$$|\dot\omega^i(t)|\leq|\dot\omega^{i-1}(t_i)|+\int_{t_i}^{t_{i+1}}|\dot\omega^i(s)|ds\,,\quad t\in K_i\,.$$

Тогда Δ^i можно определить равенством

$$\Delta^i=\Delta^{i-1}+\delta^i(t_{i+1}-t_i)\,.$$

Поэтому в дальнейшем будем формировать только δ^i. Возможно три случая.

Случай 1. $h^i(t)\in K_0\,,\ t\in K_i$, тогда ${}_a x^i_h(t)=0$ и задача (7) примет вид:

$$\begin{cases}\ddot x^i(t)=0\,, & t\in K_i\,,\\ x^i(t_i)=x_a^{i-1}(t_i)\,, & \dot x^i(t_i)=\dot x_a^{i-1}(t_i)\,.\end{cases}\tag{8}$$

Отсюда x^i_a находится простым интегрированием

$$x^i_a(t)=x_a^{i-1}(t_i)+(t-t_i)\dot x_a^{i-1}(t_i),$$

при этом

$$\dot\omega^i(t)=\dot x^{i-1}(t_i)-\dot x_a^{i-1}(t_i)\,,\quad \delta^i=\delta^{i-1}\,.$$

Случай 2. $h^i(t)\in K_j\,,\ 1\leq j<i\,,\ t\in K_i$, тогда ${}_a x^i_h(t)=x^j_a[h^i(t)]$ и задача (7) примет вид:

$$\begin{cases}\ddot x^i(t)+p^i(t)\,x^j_a[h^i(t)]=0\,,\quad t\in K_i\\ x^i(t_i)=x_a^{i-1}(t_i)\,,\ \dot x^i(t_i)=\dot x_a^{i-1}(t_i)\,.\end{cases}\tag{9}$$

Отсюда x^i_a находится простым интегрированием

$$x^i_a(t)=x_a^{i-1}(t_i)+(t-t_i)\dot x_a^{i-1}(t_i)-\int_{t_i}^{t}\int_{t_i}^{s}p^i(\tau)x^j_a[h^i(\tau)]d\tau ds.$$

Далее:

$$\dot\omega^i(t)=\dot x^{i-1}(t_i)-\dot x_a^{i-1}(t_i)+\int_{t_i}^{t}p^i(s)x^j_a[h^i(s)]ds-$$

$$-\int_{t_i}^{t} p^i(s)\,x^j[h^i(s)]\,ds = \dot\omega^{i-1}(t_i)-\int_{t_i}^{t} p^i(s)\,\omega^j[h^i(s)]\,ds.$$

$$|\dot\omega^i(t)|\le|\dot\omega^{i-1}(t_i)|+\int_{t_i}^{t_{i+1}} |p^i(s)|\,|\omega^j[h^i(s)]|\,ds\le$$

$$\le \delta^{i-1}+\Delta^j\int_{t_i}^{t_{i+1}} |p^i(s)|\,ds\le$$

$$\le \delta^{i-1}+\Delta^j\sqrt{t_{i+1}-t_i}\,\Big(\int_{t_i}^{t_{i+1}} |p^i(s)|^2 ds\Big)^{1/2}.$$

С л у ч а й 3. $h^i(t)\in K_i,\ t\in K_i$, тогда ${}_a x_h^i(t)= x^i[h^i(t)]$ и задача (7) примет вид

$$\begin{cases}\ddot x^i(t)+p^i(t)x^i[h^i(s)]=0, & t\in K_i\\ x^i(t_i)=x_a^{i-1}(t_i), & \dot x^i(t_i)=\dot x_a^{i-1}(t_i).\end{cases}\tag{10}$$

Приближенное решение задачи (10) ищется в виде отрезка ряда Тейлора:

$$x_a^i(t)=\sum_{q=2}^{n_i} c_q^i(t-t_i)^q+(t-t_i)\,\dot x_a^{i-1}(t_i)+x_a^{i-1}(t_i).$$

Неизвестные коэффициенты c_q^i находятся методом неопределенных коэффициентов. Погрешность $\omega^i(\cdot)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases}\ddot\omega^i(t)+p^i(t)\omega^i[h^i(t)]=\mu^i(t), & t\in K_i\\ \omega^i(t_i)=\omega^{i-1}(t_i), & \dot\omega^i(t_i)=\dot\omega^{i-1}(t_i),\\ \omega^0(0)=0, & \dot\omega^0(0)=0,\end{cases}$$

где невязка $\mu^i(\cdot)$ вычисляется по формуле:

$$\mu^i(t) = -\ddot{x}_a^i(t) - p^i(t)\, x_a^i[h^i(t)].$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\dot{\omega}^i(t) = \dot{\omega}^{i-1}(t_i) + \int_{t_i}^{t} \mu^i(s)ds - \int_{t_i}^{t} p^i(s)\omega^i[h^i(s)]ds =$$

$$= \dot{\omega}^{i-1}(t_i) + \int_{t_i}^{t} \mu^i(s)ds - \int_{t_i}^{t} p^i(s)\left(\omega^{i-1}(t_i) + \int_{t_i}^{h^i(s)} \dot{\omega}^i(\tau)d\tau\right)ds =$$

$$= \dot{\omega}^{i-1}(t_i) + \int_{t_i}^{t} \mu^i(s)ds - \omega^{i-1}(t_i)\int_{t_i}^{t} p^i(s)ds - \int_{t_i}^{t} p^i(s)\int_{t_i}^{h^i(s)} \dot{\omega}^i(\tau)d\tau ds =$$

$$= \dot{\omega}^{i-1}(t_i) + \int_{t_i}^{t} \mu^i(s)ds - \omega^{i-1}(t_i)\int_{t_i}^{t} p^i(s)ds - \int_{t_i}^{h^i(t)} \dot{\omega}^i(\tau)\int_{h^i(\tau)}^{t} p^i(s)ds d\tau.$$

Таким образом:

$$|\dot{\omega}^i(t)| \le |\dot{\omega}^{i-1}(t_i)| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\mu^i(s)|ds + |\omega^{i-1}(t_i)|\int_{t_i}^{t_{i+1}} |p^i(s)|ds +$$

$$+ \int_{t_i}^{t} |\dot{\omega}^i(s)|ds \cdot \int_{t_i}^{t_{i+1}} |p^i(s)|ds, \quad t \in K_i.$$

Определим константы γ_1^i и γ_2^i неравенствами

$$\gamma_1^i \ge \sqrt{t_{i+1} - t_i}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} |\mu^i(s)|^2 ds\right)^{1/2}, \quad \gamma_2^i \ge \sqrt{t_{i+1} - t_i}\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} |p^i(s)|^2 ds\right)^{1/2}.$$

Тогда, используя лемму Гронуолла-Беллмана, получим

$$|\dot{\omega}^i(t)| \le (\delta^{i-1} + \gamma_1^i + \Delta^{i-1}\gamma_2^i)\exp\{(t_{i+1} - t_i)\gamma_2^i\} \overset{def}{=} \delta^i.$$

Предложенный алгоритм исследования разрешимости задачи (2), (3) реализован в рамках САВ ФОРМАК [2] на ЭВМ ЕС-1060. С помощью созданного программного обеспечения в качестве примера была доказана разрешимость задачи (2), (3) для случая, когда

$$p(t) = \begin{cases} 20t^2, & t \in [0, 1/5) \\ 5t, & t \in [1/5, 2/3), \\ 50t^3, & t \in [2/3, 1) \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t^5/10 + t^2/2, & t \in [0, 1/5) \\ 1/5 - t^2/5, & t \in [1/5, 1/2) \\ -t, & t \in [1/2, 2/3) \\ t^2 - 2/3\,t + 2/3, & t \in [2/3, 1]. \end{cases}$$

В [5] показано, что для разрешимости задачи (2), (3), когда $p(t) \geq 0$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^1 (1-s)\,x(s)\,h(s)\,p(s)\,ds < 1, \tag{II}$$

где

$$x(t) = \begin{cases} 1, & h(t) > 0 \\ 0, & h(t) < 0 \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что для указанного примера условие (II) не выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максимов В.П., Румянцев А.Н. Исследование разрешимости краевых задач с использованием средств аналитических вычислений ЭВМ // Краевые задачи. - Пермь: ППИ. - 1986. -С. 6-9.
2. Закс М.Б. Аналитические преобразования на ЕС ЭВМ. - Саратов: Саратовский университет, 1981. - 144 с.
3. Азбелев Н.В., Рахматулина Л.Ф. Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференц.уравнения. - 1978. - Т.14. - № 5. -С.771-797.
4. Рахматуллина Л.Ф. Об определении решения уравнения с отклоняющимся аргументом // Функционально-дифференциальные уравнения. - Пермь: ППИ, 1985. -С.13-19.
5. Рахматуллина Л.Ф. Линейные функционально-дифференциальные уравнения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. - Киев, 1982. - 280 с.

Поступила 4.09.87

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.-С.131 - 139.

УДК 517.927

Э.И.Лепина
ЛГУ им.П.Стучки

О МАКСИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Вопрос о существовании максимального и минимального решений для различных случаев краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\le x\le\beta, \quad (1)$$

где $H_i x = H_i(x(a),x(b),x'(a),x'(b))$, $i=1,2$, $a\in R$, $b\in(a,+\infty)$, α - нижняя функция, β - верхняя функция, рассматривался в работах [1-6].

В настоящей работе исследуется существование максимального обобщенного решения краевой задачи (1) в предположениях, что $I=[a,b]$, $f\in Car(I\times R^2, R)$

$$H_{1,2}\in C(R^2\times\bar{R}^2,\bar{R}),\ \alpha\in AG(I,R),\ \beta\in BG(I,R),\ \alpha\le\beta.$$

(Определения и обозначения см. в [7-8].) Условия существования состоят из принадлежности H_1 и H_2 определенным классам монотонности [8] и различных сочетаний дополнительных условий:

1. $\alpha(a)=\beta(a)$,	2. $\alpha'(a)<\beta'(a)$,
3. $\alpha'(a)=\beta'(a)$,	4. $\alpha'(a)>\beta'(a)$,
5. $\alpha(b)=\beta(b)$,	6. $\alpha'(b)<\beta'(b)$,
7. $\alpha'(b)=\beta'(b)$,	8. $\alpha'(b)>\beta'(b)$.

В множестве всех теорем существования решения краевой задачи (1), определяемых базовыми теоремами $TB01 - TB24$

(см. [8]), найдено подмножество теорем, условия которых обеспечивают и существование максимального обобщенного решения этой задачи. Аналогично тому, как это делается в [8] , при помощи примеров можно показать, что найдены все теоремы такого типа. В этом множестве выделены 17 базовых теорем, которые приводятся ниже.

Доказательства этих теорем проводятся по следующей схеме. Пусть $SGB(I,R)$ - множество решений краевой задачи (1), а $\gamma(t)=\sup\{x(t): x\in SGB(I,R)\}$ для $t\in I$. Тогда (см. [10]) $\gamma\in AG(I,R)$. Поэтому, если краевая задача

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \gamma\leq x\leq\beta \quad (2)$$

имеет обобщенное решение, то γ является максимальным обобщенным решением краевой задачи (1).

В доказательствах используются следующие факты, которые вытекают из определения γ и работ [9-10] : $\alpha\leq\gamma\leq\beta$; найдутся $x_i\in SGB(I,R)$, $i=1,2,3,4$ такие, что $x_1(a)=\gamma(a)$, $x_2(b)=\gamma(b)$, $x_3'(a)=\gamma'(a)$ и $x_4'(b)=\gamma'(b)$; если $\gamma'(a)<+\infty$, то существует $x_5\in SGB(I,R)$, для которого $x_5(a)=\gamma(a)$ и $x_5'(a)=\gamma'(a)$; если $\gamma'(b)>-\infty$, то существует $x_6\in SGB(I,R)$, для которого $x_6(b)=\gamma(b)$, $x_6'(b)=\gamma'(b)$.

Т е о р е м а 1. Если $H_1\in M(1,-,-,0)$, $H_2\in M(-,1,0,+)$, $H_i\alpha\leq H_i\beta$, $h_i\in[H_i\alpha, H_i\beta]$, $i=1,2$, то краевая задача (1) имеет максимальное обобщенное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проверить выполнение условий этой теоремы при замене α на γ . Из определений γ , x_1 и x_2 и условий монотонности получаем, что $H_i\gamma\leq H_ix_i=h_i\leq H_i\beta$, $i=1,2$. Следовательно, краевая задача (2) имеет обобщенное решение.

Т е о р е м а 2. Если $H_1\in M(1,1,-,+)$, $H_2\in M(1,-,-,0)$, $H_i\alpha\leq H_i\beta$, $h_i\in[H_i\alpha, H_i\beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a)=\beta(a)$, то краевая задача (1) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $\gamma(a) = x_1(a) = \alpha(a) = \beta(a)$ и $H_i\gamma \leq H_i x_1 = h_i \leq H_i\beta$, $i = 1,2$. Следовательно, краевая задача (2) имеет обобщенное решение.

Теорема 3. Если $H_i \in M(-,-,-,0)$, $H_i\alpha \leq H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i = 1,2$ и $\alpha'(a) \leq \beta'(a)$, то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий монотонности и неравенства $\alpha'(a) \leq \beta'(a)$ следуют неравенства $H_i\alpha \geq H_i\beta$, $i = 1,2$, т.е. здесь $H_i\alpha = H_i\beta = h_i$, $i = 1,2$.
Далее $H_i\gamma \leq H_i x_1 = h_i = H_i\beta$, $i = 1,2$. Значит, при $\gamma'(a) > \beta'(a)$ краевая задача (2) имеет обобщенное решение. Если $\gamma'(a) \leq \beta'(a)$, то существует обобщенное решение x краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'),\ x'(a) = \beta'(a),\ \gamma \leq x \leq \beta$$

(это следует из теоремы I), для которого $H_i x = H_i\alpha = H_i\beta = h_i$, $i = 1,2$. Это значит, что x - обобщенное решение краевой задачи (2).

Теорема 4. Если $H_1 \in M(-,1,0,+)$, $H_2 \in M(-,0,+,0)$, $H_i\alpha \leq H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i = 1,2$, $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$, то краевая задача (I) имеет максимальное обобщённое решение.

Доказательство. Здесь также $H_i\alpha = H_i\beta = h_i$, $i = 1,2$. Поэтому при $\gamma'(a) \geq \beta'(a)$ существует обобщенное решение x краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'),\ H_1 x = h_1,\ x'(a) = \beta'(a),\ \gamma \leq x \leq \beta,$$

для которого $H_2 x = H_2\alpha = H_2\beta = h_2$, т.е. x - обобщенное решение краевой задачи (2). При $\gamma'(a) < \beta'(a)$ из $H_2 x_5 = h_2$ следует $H_2\gamma = h_2 = H_2\beta$. Теперь существование обобщенного решения краевой задачи (2) следует из теоремы $T423$ работы [8].

Теорема 5. Если $H_1 \in M(-,-,-,0)$, $H_2 \in M(-,0,+,0)$, $H_i\alpha \leq H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i = 1,2$, $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$, то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $H_2\alpha = H_2\beta = h_2$ и $H_1\gamma \leq H_1x_1 = h_1 \leq H_1\beta$. Кроме того, $H_2\gamma \geq H_2x_1 = h_2$ и $H_2\gamma \leq H_2x_3 = h_2$, т.е. $H_2\gamma = h_2 = H_2\beta$. Теперь существование обобщенного решения краевой задачи (2) следует из теоремы $T422$ работы [8].

Теорема 6. Если $H_i \in M(-,0,+,0)$, $H_i\alpha \leq H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i=1,2$ и $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$, то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь также $H_i\alpha = H_i\beta = h_i$, $i=1,2$. Далее $H_i\gamma \geq H_ix_1 = h_i$ и $H_i\gamma \leq H_ix_3 = h_i$, $i=1,2$. Следовательно, $H_i\gamma = h_i = H_i\beta$, $i=1,2$. Поэтому при $\gamma'(a) \geq \beta'(a)$ существует обобщенное решение краевой задачи (2). Пусть $\gamma'(a) < \beta'(a)$ и y - обобщенное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'),\ x(a) = \gamma(a),\ x(b) = \gamma(b),\ \gamma \leq x \leq \beta. \quad (3)$$

Если $y'(a) \geq \beta'(a)$, то существует обобщенное решение краевой задачи

$$x'' = f(t,x,x'),\ x'(a) = \beta'(a),\ y \leq x \leq \beta,$$

для которого $h_i = H_i\alpha \leq H_ix \leq H_i\beta = h_i$, $i=1,2$, т.е. x - обобщенное решение краевой задачи (2). Если $y'(a) < \beta'(a)$, то из $H_i\alpha = H_i\gamma = h_i$, $i=1,2$ получаем, что $H_iy = h_i$, $i=1,2$, т.е. y - обобщенное решение краевой задачи (2).

Теорема 7. Если $H_1 \in M(1,1,1,+)$, $H_2 \in M(1,-,1,0)$, $H_i\alpha \leq H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a) = \beta(a)$, $\alpha'(a) = \beta'(a)$, то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $\gamma(a) = \alpha(a) = \beta(a)$, $\gamma'(a) = \alpha'(a) = \beta'(a)$ и $H_i\gamma \leq H_ix_2 = h_i \leq H_i\beta$, $i=1,2$. Следовательно, краевая задача (2) имеет обобщенное решение.

Теорема 8. Если $H_i \in M(1,1,-,+)$, $H_i\alpha \leq H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha(b)=\beta(b)$, то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $\gamma(a)=\alpha(a)=\beta(a)$, $\gamma(b)=\alpha(b)=\beta(b)$ и $H_i\gamma \leq H_i x_1 = h_i \leq H_i\beta$, $i=1,2$. Следовательно, краевая задача (2) имеет обобщенное решение.

Теорема 9. Если $H_1 \in M(1,-,-,+)$, $H_2 \in M(1,-,0,-)$, $H_i\alpha \leq H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$, то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $\gamma(a)=\alpha(a)=\beta(a)$, $H_1\gamma \leq H_1 x_2 = h_1 \leq H_1\beta$ и $H_2\gamma \leq H_2 x_4 = h_2 = H_2\alpha = H_2\beta$. Поэтому при $\gamma'(b) \leq \beta'(b)$ существует обобщенное решение краевой задачи (2). Если $\gamma'(b) > \beta'(b)$, то $H_2\gamma = H_2 x_6 = h_2 = H_2\beta$, и существование обобщенного решения краевой задачи (2) следует из теоремы $T431$ работы [8].

Теорема 10. Если $H_i \in M(1,-,0,-)$, $H_i\alpha \leq H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$, то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $H_i\alpha = H_i\beta = h_i$, $i=1,2$, $\gamma(a)=\alpha(a)=\beta(a)$ и $H_i\gamma \leq H_i x_4 = h_i = H_i\beta$, $i=1,2$. Поэтому при $\gamma'(b) \leq \beta'(b)$ существует обобщенное решение краевой задачи (2). Пусть $\gamma'(b) > \beta'(b)$ и y - обобщенное решение краевой задачи (3). Если $y'(b) \leq \beta'(b)$, то существует обобщенное решение x краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\ x'(b)=\beta'(b),\ y \leq x \leq \beta, \tag{4}$$

для которого $H_i x = H_i \alpha = H_i \beta = h_i$, $i=1,2$, т.е. x – обобщенное решение краевой задачи (2). Если $y'(b) > \beta'(b)$, то $h_i = H_i x_6 = H_i \gamma \leq H_i y \leq H_i \beta = h_i$, $i=1,2$, и, следовательно, y - обобщенное решение краевой задачи (2).

Теорема II. Если $H_i \in M(1,-,-,+)$, $H_i \alpha \leq H_i \beta$, $h_i \in [H_i \alpha, H_i \beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a) = \beta(a)$, $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$,

то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $H_i \alpha = H_i \beta = h_i$ и $H_i \gamma \leq H_i x_2 = h_i = H_i \beta$, $i=1,2$, поэтому при $\gamma'(b) \geq \beta'(b)$ существует обобщенное решение краевой задачи (2). Если $\gamma'(b) < \beta'(b)$, то существует обобщенное решение x краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \ x'(b) = \beta'(b), \ \gamma \leq x \leq \beta , \qquad (5)$$

для которого $H_i x = H_i \alpha = H_i \beta = h_i$, $i=1,2$, т.е. x – обобщенное решение краевой задачи (2).

Теорема I2. Если $H_1 \in M(-,0,+,0)$, $H_2 \in M(0,-,0,-)$, $H_i \alpha \leq H_i \beta$, $h_i \in [H_i \alpha, H_i \beta]$, $i=1,2$, $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$, $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$,

то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $H_i \alpha = H_i \beta = h_i$, $i=1,2$, а также $H_1 \gamma \geq H_1 x_1 = h_1$, $H_1 \gamma \leq H_1 x_3 = h_1$, $H_2 \gamma \geq H_2 x_2 = h_2$, $H_2 \gamma \leq H_2 x_4 = h_2$.

Следовательно, $H_i \gamma = h_i = H_i \beta$, $i=1,2$. Кроме того, $H_1 \in M(-,0,+,0) \subset M(1,+,+,0)$ и $H_2 \in M(0,-,0,-) \subset M(+,-,0,-)$.

Теперь существование обобщенного решения краевой задачи (2) следует из теоремы $T\,707$ работы [8] .

Теорема I3. Если $H_i \in M(1,1,1,+)$, $H_i \alpha \leq H_i \beta$, $h_i \in [H_i \alpha, H_i \beta]$, $i=1,2$,

$$\alpha(a)=\beta(a),\ \alpha'(a)=\beta'(a),\ \alpha(b)=\beta(b),$$

то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $\gamma(a)=\alpha(a)=\beta(a)$, $\gamma'(a)=\alpha'(a)=\beta'(a)$, $\gamma(b)=\alpha(b)=\beta(b)$ и $H_i\alpha=H_i\gamma=H_i\beta$, $i=1,2$. Следовательно, краевая задача (2) имеет обобщенное решение.

Теорема I4. Если $H_1\in M(1,-,1,+)$, $H_2\in M(1,-,1,-)$, $H_i\alpha\leq H_i\beta$, $h_i\in[H_i\alpha,H_i\beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha'(a)=\beta'(a)$, $\alpha'(b)\leq\beta'(b)$,

то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $H_2\alpha=H_2\beta=h_2$, $\gamma(a)=\alpha(a)=\beta(a)$, $\gamma'(a)=\alpha'(a)=\beta'(a)$, $H_1\gamma\leq H_1x_2=h_1\leq H_1\beta$ и $H_2\gamma\leq H_2x_4=h_2=H_2\beta$. Поэтому при $\gamma'(b)\leq\beta'(b)$ существует обобщенное решение краевой задачи (2). Если $\gamma'(b)>\beta'(b)$, то $H_2\gamma=H_2x_6=h_2=H_2\beta$, и существование обобщенного решения краевой задачи (2) следует из теоремы $T487$ работы [8].

Теорема I5. Если $H_i\in M(1,-,1,-)$, $H_i\alpha\leq H_i\beta$, $h_i\in[H_i\alpha,H_i\beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha'(a)=\beta'(a)$, $\alpha'(b)\leq\beta'(b)$, то краевая задача (I) имеет максимальное обобщенное решение.

Доказательство. Здесь $H_i\alpha=H_i\beta=h_i$, $i=1,2$, $\gamma(a)=\alpha(a)=\beta(a)$, $\gamma'(a)=\alpha'(a)=\beta'(a)$ и $H_i\gamma\leq H_ix_4=h_i=H_i\beta$, $i=1,2$. Поэтому при $\gamma'(b)\leq\beta'(b)$ существует обобщенное решение краевой задачи (2). Пусть $\gamma'(b)>\beta'(b)$ и y - обобщенное решение краевой задачи (3). Если $y'(b)\leq\beta'(b)$, то существует обобщенное решение x краевой задачи (4), для которого $H_ix=H_i\alpha=H_i\beta=h_i$, $i=1,2$, т.е. x - обобщенное решение краевой задачи (2). Если $y'(b)>\beta'(b)$, то $h_i=H_ix_6=H_i\gamma\leq H_iy\leq H_i\beta=h_i$, $i=1,2$. Значит, y - обобщенное решение краевой задачи (2).

Т е о р е м а 16. Если $H_i \in M(1,-,1,+)$, $H_i\alpha \leqslant \leqslant H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a)=\beta(a)$, $\alpha'(a)=\beta'(a)$, $\alpha'(b) \geqslant \beta'(b)$, то краевая задача (1) имеет максимальное обобщенное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь $H_i\alpha = H_i\beta = h_i$, $i=1,2$, $\gamma(a)=\alpha(a)=\beta(a)$, $\gamma'(a)=\alpha'(a)=\beta'(a)$ и $H_i\gamma \leqslant H_i x_2 = h_i = H_i\beta$, $i=1,2$. Поэтому при $\gamma'(b) \geqslant \beta'(b)$ существует обобщенное решение краевой задачи (2).
Если $\gamma'(b) < \beta'(b)$, то существует обобщенное решение x краевой задачи (5), для которого $H_i x = H_i\alpha = = H_i\beta = h_i$, $i=1,2$, т.е. x - обобщенное решение краевой задачи (2).

Т е о р е м а 17. Если $H_i \in M(1,1,1,1)$, $H_i\alpha \leqslant H_i\beta$, $h_i \in [H_i\alpha, H_i\beta]$, $i=1,2$, $\alpha(a)= =\beta(a)$, $\alpha'(a)=\beta'(a)$, $\alpha(b)=\beta(b)$ и $\alpha'(b)=\beta'(b)$, то краевая задача (1) имеет максимальное обобщенное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что обобщенное решение x краевой задачи (3) является также обобщенным решением краевой задачи (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akô K. Subfunctions for ordinary differential equations // J.Fac.Scien.Univ. Tokyo. - 1965. - S.I, v.XII, P.1.-P.17-43.
2. Akô K. Subfunctions for ordinary differential equations III // Fun.Ekvacioj. - 1968. - v.11, N 2. - P.111-129.
3. Akô K. Subfunctions for ordinary differential equations IV // Fun.Ekvacioj. - 1968. - v.11, N 3. - P.185-195.
4. Akô K. Subfunctions for ordinary differential equations VI // J.Fac.Sci.Univ. Tokyo. - 1969. - v.16, N 2.- P.149-156.

5. Bernfeld S.R., Chandra J. Minimal and maximal solutions of nonlinear boundary value problem // Pac.Jour. of Math. - 1977. - v.71, N 1. - P.13-20.
6. Лепин Л.А. Аксиоматический подход к нижним и верхним функциям для краевых задач // Латв.мат.ежегодник, 22. -Рига: Зинатне, I978.-С.37-4I.
7. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Диф.уравн.-I982.—Т.I8, №8.-С.I323-I330.
8. Лепин А.Я. Существование обобщенного решения нелинейных краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // ЛГУ им.П.Стучки.-Рига, I986.-94 с.-Деп. в ЛАТНИИНТИ I3.02.86, №76 Ла-Д86.
9. Лепин Л.А. Обобщенные нижние и верхние функции и их свойства // Латв.мат.ежегодник.-Рига: Зинатне,I980. -Вып.24.-С.II3-I23.
I0. Лепин Л.А. Предельные свойства обобщенных нижних и верхних функций // Латв.мат.ежегодник.-Рига: Зинатне, I980.-Вып.24.-С.I24-I32.

Поступила 09.09.87.

Межвузовский сборник научных трудов
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ.
Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.-С.140-152.

УДК 517.927.4

В.В.Гудков, И.Р.Клиодере
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки, ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В УПРУГИХ ТЕЛАХ

1. Постановка задачи.

Рассматривается прикладная задача, возникающая при изучении распространения волн в упругих телах. Физическая постановка задачи и метод ее исследования описаны в работах [1,2] . В работе [3] развит предложенный в [1] метод и проведены расчеты двумерной математической модели рассматриваемой задачи. В настоящей работе приводятся результаты расчетов трехмерной математической модели, предложенной Тютекиным В.В. и Приходько В.Ю. - представителями Акустического института им.Н.Н.Андреева АН СССР.

Математическая модель изучаемого процесса включает в себя следующие математические задачи:

- задачу на собственные числа для системы комплексных обыкновенных дифференциальных уравнений 9-го порядка с двухточечными краевыми условиями;
- задачу Коши для системы 3-х-комплексных обыкновенных дифференциальных уравнений, использующих как собственные числа,так и собственные решения предыдущей задачи, с начальными условиями, определяемыми из решения линейной алгебраической системы уравнений;
- задачу на вычисление значений функционалов, зависящих от решений предыдущих двух задач.

Была разработана методика вычислительных работ, составлены программы на Фортране и проведены расчеты с двойной точностью на ЭВМ ЕС-1060. Результаты расчетов проиллюстрированы на рисунках.

2. Задача на собственные числа.

Исследуется двухточечная краевая задача

$$U' = F(x,U)\,, \qquad x \in [a, b]\,, \tag{1}$$

$$U(a) = E\,, \qquad \det \| U(b) - E \| = 0\,. \tag{2}$$

Здесь U - неизвестная 3×3 матрица с комплексными элементами, E - единичная матрица, F - комплексная матричная функция

$$F(x,U) = \frac{i}{2}[(U-E)A(E-U) - i(U-E)B(U+E) + i(U+E)C(E-U) + (U+E)D(U+E)]\,,$$

i - мнимая единица. Матрицы A, B, C, D определяются следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{C_0}{C_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+R_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{1+R_1} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}\,\frac{(1-2C_0)}{C_1} & \frac{m}{x}\,\frac{(1-2C_0)}{C_1} & iK\,\frac{(1-2C_0)}{C_1} \\ -\frac{m}{x} & -\frac{1}{x} & 0 \\ iK & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{1}{x}\,\frac{2C_0(1+R_1)}{C_1} & -\frac{m}{x} & -ik \\ \frac{m}{x}\,\frac{(1-2C_0)}{C_1} & -\frac{2}{x} & 0 \\ -ik\,\frac{(1-2C_0)}{C_1} & 0 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -(1+R_2)+\frac{R_3}{x^2} & \frac{mR_3}{x^2} & \frac{2ik}{x}R_4 \\ \frac{mR_3}{x^2} & -(1+R_2)+k^2(1+R_1)-\frac{m^2}{x^2}R_3 & \frac{ikm}{x}\,\frac{(1+R_1)C_2}{C_1} \\ -\frac{2ik}{x}R_4 & -\frac{ikm}{x}\,\frac{(1+R_1)C_2}{C_1} & -(1+R_2)+k^2R_3+\frac{m^2}{x^2}(1+R_1) \end{pmatrix}$$

Относительно функций R_1 и R_2 возможны 3 варианта: $R_1=R_2=0$; $R_1=0$, $R_2=\frac{(x-a)^2}{b^2}$; $R_1=\frac{(x-a)^2}{b^2}$, $R_2=0$. Другие параметры следующие: $C_0=0.2518$, $C_1=1+2C_0R_1$, $C_2=3-4C_0+2C_0R_1$, $R_3=4(1+R_1)(1-C_0+C_0R_1)C_1^{-1}$, $R_4=(1+R_1)(1-2C_0)C_1^{-1}$.

Параметр m может принимать значения 0 или 1 . Число k является собственным числом задачи (I),(2). Интервал интегрирования $[a,b]=[1,10]$.

Методика вычисления собственных чисел задачи (I),(2) проста в изложении, но трудоемка с вычислительной точки зрения. Ищутся положительные собственные числа k . По рельефу комплексной функции

$$d(k)=\det\|U(b)-E\|$$

выбирается шаг ΔK , например 0.02 , и, начиная с $K=0$ шагом ΔK решаются задачи Коши для уравнения (I) с единичным начальным условием. Строится график реальной и мнимой части функции $d(K)$ (можно строить модуль этой функции). В окрестности точки, где $Re\ d(K)=Im\ d(K)=0$, методом деления отрезка пополам уточняется значение собственного числа K до 5 значащих цифр. Этому числу присваивается порядковый номер n , и как само собственное число K_n , так и соответствующее ему собственное решение $U(x, K_n)$ задачи (I),(2) запоминается в ЭВМ.

Начальная задача для системы (I) решалась методом Рунге-Кутта 4-го порядка с переменным шагом интегрирования на интервале $[1,10]$. В пограничном слое справа от $x=1$, где диагональные элементы решения U резко меняют свое поведение, вычисления проводились с шагом $2^{-10} - 2^{-12}$. Вне погранслоя система (I) решалась с шагом $2^{-5} - 2^{-6}$. На собственных числах вычисления проводились с более мелким шагом, чтобы получить более точное собственное решение. Для сравнения была сделана попытка решать систему (I) с помощью программ LSODE - пакета программ для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако оказалось, что для получения решения с той же точностью, программы пакета из-за своей универсальности поглощают в 2 раза больше машинного времени, чем используемый нами метод.

Результаты расчетов собственных чисел K_n приведены в таблице I, где в наименовании вариантов введено обозначение

$$f = \frac{(x-1)^2}{10^2}$$

Количество собственных чисел в вариантах различно. В I, Ш и У вариантах по 7, а во II и IУ вариантах по 8 собственных чисел.

Таблица I

	$m=0$, $R_1=0$, $R_2=0$	$m=0$, $R_1=0$, $R_2=f$	$m=0$, $R_1=f$, $R_2=0$	$m=1$, $R_1=0$, $R_2=f$	$m=1$, $R_1=f$, $R_2=0$
K_1	0.12397	0.26375	0.31003	0.39334	0.22604
K_2	0.48094	0.36470	0.43737	0.48445	0.40225
K_3	0.53359	0.55616	0.45872	0.66286	0.52767
K_4	0.59184	0.71495	0.72857	0.84449	0.63737
K_5	0.88854	0.78100	0.79591	0.92005	0.79420
K_6	1.00000	0.98223	0.84374	1.02441	0.87014
K_7	1.07458	1.26091	0.91774	1.25430	0.93166
K_8	-	1.36576	-	1.36216	-

В дальнейшем будем обращаться к этим вариантам по их порядковым номерам, соответствующим номеру столбца.

3. Задача Коши.

Решается линейная однородная система 3-го порядка комплексных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальным условием на правом конце интервала $[a, b]$

$$M'_x(x, K_n) = F_1(x, U(x, K_n))\, M(x, K_n) \qquad (3)$$
$$M(b, K_n) = M_0 .$$

Здесь M и M_0 – 3-х-компонентные вектор-столбцы, K_n – собственные числа задачи (I),(2), $U(x, K_n)$ – собственные решения задачи (I),(2),

$$F_1(x, U) = \frac{1}{2}[iA - B + C + iD + (iD - iA - B - C)U^*],$$

U^* – эрмитово сопряженная к U матрица, т.е.

$U^* = \bar{U}^t$ – транспонированная с комплексно-сопряженными элементами. Матрицы A, B, C, D определены в предыдущем разделе. Вектор M_0 определяется из однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$(E - U^*(b, \kappa_n)) M_0 = 0$$

с условием нормировки $|M_0| = 1$. Интервал интегрирования $[1,10]$.

На рис.1 приведено поведение диагонального элемента u_{11} матрицы $U(x, \kappa_n)$ при $\kappa_3 = 0.53359$ для I варианта, т.е. когда $m=0$, $R_1 = R_2 = 0$.

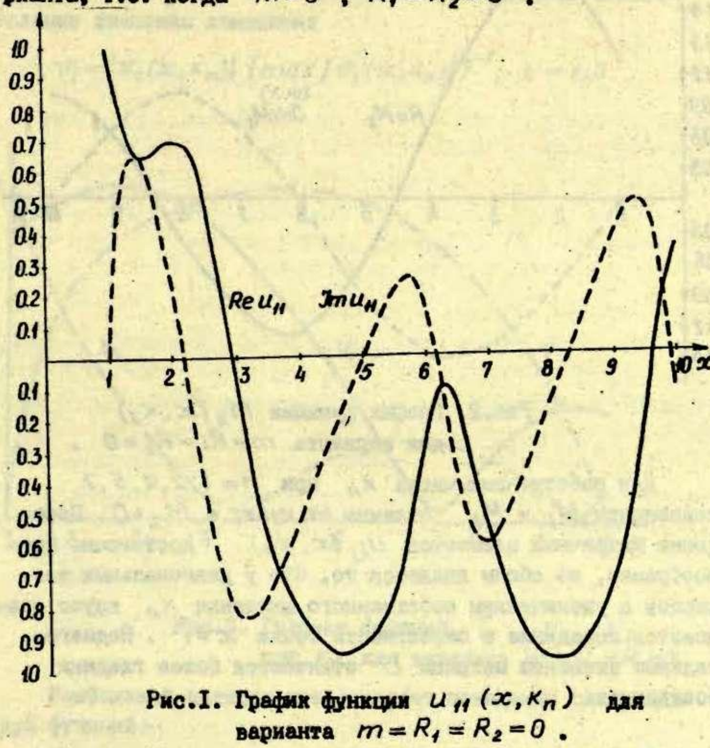

Рис.1. График функции $u_{11}(x, \kappa_n)$ для варианта $m = R_1 = R_2 = 0$.

На рис.2 приведено поведение средней компоненты вектора $M(x, \kappa_3)$ для I варианта. В этом варианте расчеты проведены для всех 7 собственных чисел K_n. Оказалось, что для собственных чисел K_3 и K_6 характер решения $M(x, K_n)$ существенно отличается от решения для других 5 собственных чисел. Именно тем, что при K_3 и K_6 первая и третья компоненты вектора $M(M_1, M_2, M_3)$ равны нулю, а M_2 - для собственного числа K_3 приведены на рис.2.

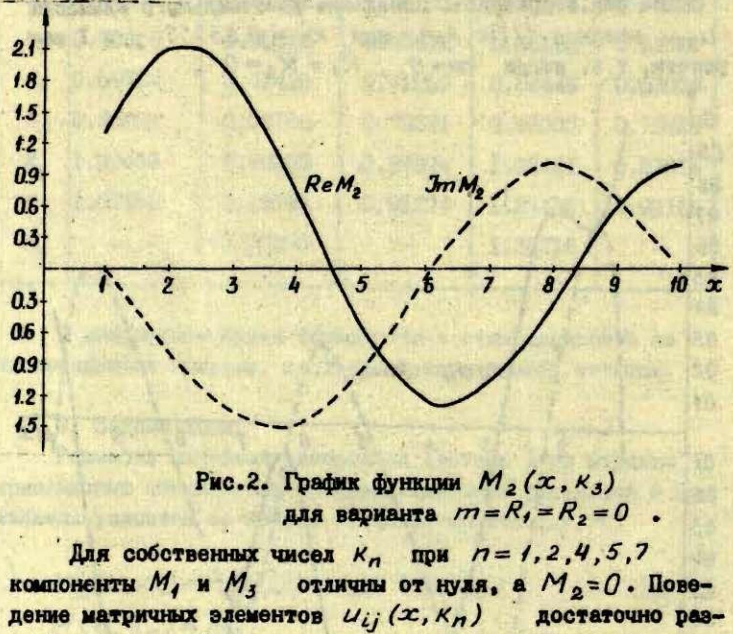

Рис.2. График функции $M_2(x, K_3)$ для варианта $m = R_1 = R_2 = 0$.

Для собственных чисел K_n при $n = 1, 2, 4, 5, 7$ компоненты M_1 и M_3 отличны от нуля, а $M_2 = 0$. Поведение матричных элементов $u_{ij}(x, K_n)$ достаточно разнообразно, но общим является то, что у диагональных элементов с увеличением собственного значения K_n круче становится поведение в окрестности точки $x = 1$. Недиагональные элементы матрицы U отличаются более гладким поведением.

4. Вычисление функционалов.

Результаты расчетов задач (I), (2) и (3) используются для вычисления некоторых функционалов. Конкретно, требуется выяснить поведение функций $V = (v_1, v_2, v_3)$

и T на интервале [I,I0]

$$V(x,\kappa_n)=\frac{i}{2}[E+U^*(x,\kappa_n)]\,M(x,\kappa_n),$$

$$T(x,\kappa_n)=\left|\frac{1}{2}[E-U^*(x,\kappa_n)]\,M(x,\kappa_n)\right|.$$

На рис.3 приведено поведение функции T и компонент v_1 и v_3 вектора V для I варианта при $\kappa_5=0.88854$. Компонента $v_2=0$. На графиках откладывались относительные значения компонент

$$v_i=|v_i(x,\kappa_n)|\,(\max_{[1,10]}|v_i(x,\kappa_n)|)^{-1},\quad i=1,3$$

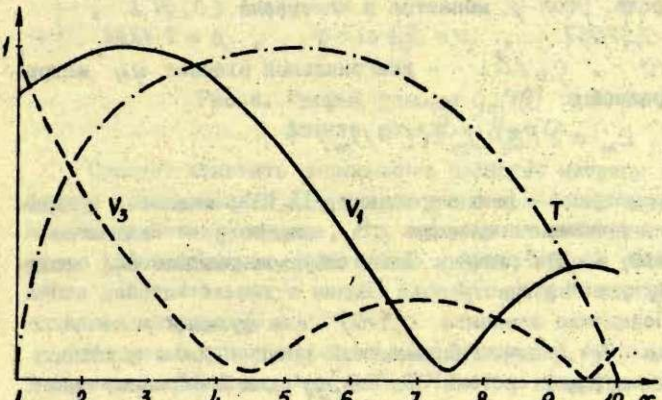

Рис.3. Графики функций T, v_1, v_3 при κ_5 для варианта $m=R_1=R_2=0$.

Наибольший интерес представляет поведение следующих двух функций:

$$f_0(\varphi)=\left|\frac{pJ_0'(p)+\rho b g_0(b)J_0(p)}{pH_0'(p)+\rho b g_0(b)H_0(p)}H_0(5b\sin\varphi)\right|,$$

$$f_1(\varphi)=\left|-2\frac{pJ_1'(p)+\rho b g_1(b)J_1(p)}{pH_1'(p)+\rho b g_1(b)H_1(p)}H_1(5b\sin\varphi)\right|.$$

Здесь J_0, J_1, H_0, H_1 - функции Бесселя и Ханкеля I-го рода, угол φ меняется в интервале $[0,\pi]$, $\rho=0.37037$, $p=b\beta\sin\varphi$, $\beta=2.1241$, $b=10$, $g_m(b)$ - диагональный элемент g_{11} матрицы, обратной к

$$Z_m=i(E-U_m)(E+U_m)^{-1}.$$

U_m - матрица - решение задачи (I),(2), индекс m указывает на значение параметра m, параметр k задается формулой $k=\beta b\cos\varphi$. Таким образом, решение U_m является функцией угла φ.

Поведение элемента $g_0(10)$, как функции угла φ, приведено на рис.4. Разрывы этой функции можно объяснить лишь спецификой системы. Кстати, g_0 для I варианта имеет 5 разрывов, а функция g_1 для IУ варианта имеет 8 разрывов (ее график мы не стали приводить). Область $\varphi\in[85°,90°]$, в которой функция g_0 разрывна, представлена на графике с мелким шагом.

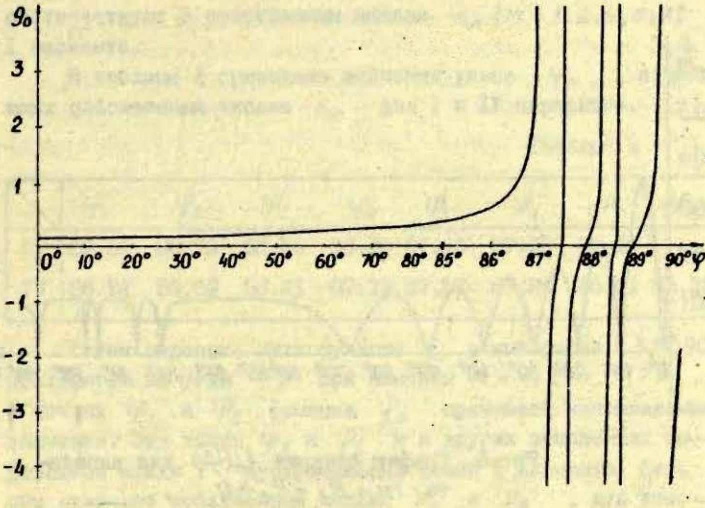

Рис.4. График функции $g_0(10)$ для варианта $m=R_1=R_2=0$.

Следует отметить неожиданное свойство матрицы Z_m: будучи произведенной из двух матриц с полностью комплексными элементами, матрица Z_m состоит из элементов либо чисто действительных, либо чисто мнимых, причем расположение действительных и мнимых элементов такое же, как в исходной матрице D.

На рис.5 приведено поведение функции $f_0(\varphi)$ для I варианта. Область $\varphi \in [85°, 90°]$, представляющая особый интерес, нарисована с мелким шагом.

Нули функции $f_0(\varphi)$ до точки $\varphi = 85°$ определяются нулями уравнения

$$\rho J_0'(\rho) + \rho b g_0(b) J_0(\rho) = 0 . \quad (4)$$

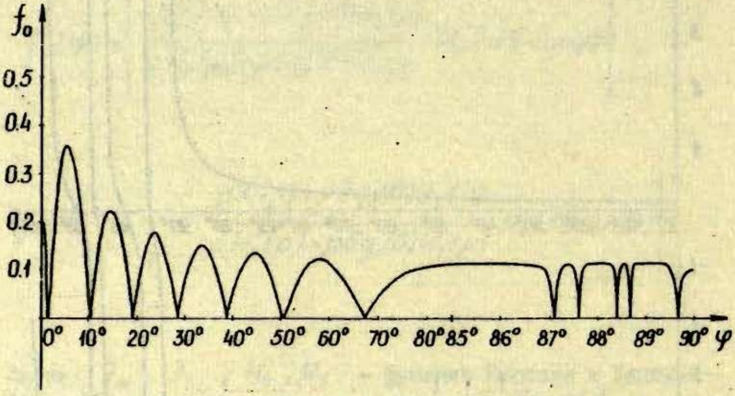

Рис.5. График функции $f_0(\varphi)$ для варианта $m = R_1 = R_2 = 0$.

Учитывая значения параметров ρ , b , p и функции g_0 , нули этого уравнения могут быть найдены как нули функции $J_0'(p)$, взятые с некоторым избытком. Последний нуль, определяемый таким образом,находится в окрестности $\varphi = 67°$.

В области $\varphi \in [85°, 90°]$ нули функции $f_0(\varphi)$ определяются поведением элемента g_0 . Поясним это подробнее. Седьмой нуль функции $J_0(p)$ приходится на значение $p = 21,212$, что соответствует значению

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{p}{\beta b} \approx 87° .$$

Для $\varphi > \varphi_0$ оказывается $J_0(p) < 0$, $J_0'(p) < 0$, следовательно, уравнение (4) может иметь нуль лишь при отрицательных значениях

$$g_0 = - \frac{p J_0'(p)}{\rho b J_0(p)} \approx -O(10^2) .$$

Из рис.4 видно, что благодаря 5 разрывам функции g_0 существует 5 отрицательных значений g_0 , доставляющих нуль уравнению (4), а следовательно, обращающих в нуль и функцию f_0 . Эти 5 нулей функции f_0 в точности соответствуют 5 собственным числам K_n $(n = 1, 2, 4, 5, 7)$ I варианта.

В таблице 2 приведены значения углов φ_n, отвечающих собственным числам K_n для I и IУ вариантов.

Таблица 2

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8
I	89.66	88.70	88.56	88.40	87.60	87.30	87.10	-
IV	88.94	88.69	88.21	87.72	87.52	87.24	86.61	86.32

Таким образом, нули функции f_0 в интервале $[85°, 90°]$ приходятся на углы φ_n при номерах $n = 1, 2, 4, 5, 7$. В точках φ_3 и φ_6 функция f_0 принимает максимальные значения. Эти точки φ_3 и φ_6 и в других отношениях выделяются среди 7 экстремальных точек I варианта. Ведь они отвечают собственным числам K_3 и K_6, для которых компоненты v_1 и v_3 вектора $V(x, K_n)$ тождественно равны нулю. А для всех остальных собственных чисел v_1 и v_3 отличны от нуля и лишь $v_2 = 0$.

На рис.6 приведено поведение функции $f_1(\varphi)$ для IУ варианта

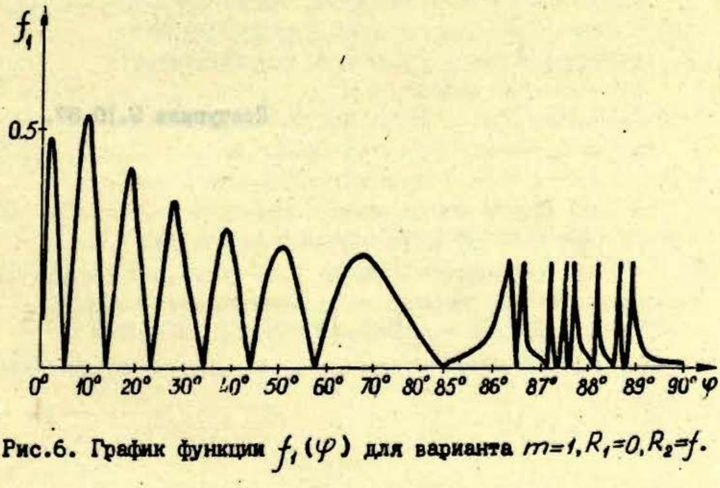

Рис.6. График функции $f_1(\varphi)$ для варианта $m=1, R_1=0, R_2=f$.

Нули функции $f_1(\varphi)$ до точки $\varphi=85^\circ$ включительно определяются нулями числителя в выражении для $f_1(\varphi)$. При $\varphi>85^\circ$ функция $f_1(\varphi)$ также имеет нули, но они не являются характерными точками поведения этой функции. Острые пики максимумов,-вот что характеризует функцию $f_1(\varphi)$ на интервале $[85^\circ, 90^\circ]$. Все 8 точек максимумов в этом интервале приходятся на точки φ_n , выписанные в таблице 2 для IУ варианта. Эти точки максимумов соответствуют собственным числам κ_n IУ варианта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тютекин В.В. Импедансный метод расчета характеристик упругих неоднородных радиально-слоистых цилиндрических тел //Акустический журн.-1983.-Т.29,№4.-С.529-536.
2. Тютекин В.В. Нормальные волны твердых слоисто-неоднородных волноводов //Акустический журн.-1984.-Т.30,-№3.-С.373-379.
3. Безруков А.В., Приходько В.Ю., Тютекин В.В. Рассеяние звуковых волн упругими радиально-слоистыми цилиндрическими телами //Акустический журн.-1986.-Т.32,№6. -С.762-766.

Поступила 9.10.87.

Заключение

Результаты, изложенные в статьях настоящего сборника, представляют определенный интерес для специалистов по математической физике, занимающихся как теоретическим исследованием, а так и исследованиями практических задач, сводящимся к аналогичным краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Кроме того, эти результаты могут быть использованы при чтении соответствующих спецкурсов для студентов и аспирантов специальности-прикладная математика.

ОГЛАВЛЕНИЕ

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ
Сборник научных трудов
(межвузовский)

Рецензенты: Н.И.Васильев, канд. физ.-мат.наук, ст.науч.сотр. ВЦ при ЛГУ им. П.Стучки;
Л.Э.Рейзинь, доктор физ.-мат.наук, профессор Института физики АН ЛатвССР;
Е.Ф.Царьков, доктор физ.-мат.наук, профессор РПИ им. А.Пельше

Редакторы: В.Гудков, Я.Вирабицкий
Технический редактор Л.Воликова
Корректор Н.Пульнова

Подписано к печати 29.07.1988. ЯТ 09315. Ф/б 60x84/16.
Бумага №1.10,5 физ.печ.л. 9,8 усл.печ.л. 7,8 уч.-изд.л.
Тираж 500 экз. Зак.№ 954 Цена 1 р. 60 к.

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
226098 Рига, б. Райниса, 19
Отпечатано на ротапринте, 226050 Рига, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

ДЛЯ ЗАМЕТОК

УДК 517.927

Колосов А.И. ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.4-14.

Рассматривается краевая задача:

$$x' = f(t, x, \lambda)$$

$$G(x) = 0, \quad x_p(\alpha) = x_p, \quad x_i(t_i) = a_i,$$

$$x_p'(t) > 0 \ (<0) \qquad (\alpha < t < \beta),$$

где $f, x \in R^h$; $\lambda \in R^k$; $G: C([\alpha,\beta]; R^h) \to R^{h-1}$,

$-\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$, $1 \leq k \leq n$, $i = \overline{i_1, i_k}$, $i_s, p \in \overline{\{1, h\}}$,

$s = \overline{1, k}$; $t_i \in \{\alpha, \beta\}$, $i_1 = p$, $t_p = \beta$.

Под решением задачи понимается пара $(x(t), \lambda)$.
Сохранение знака $x_p'(t)$ при $\alpha < t < \beta$ позволяет преобразовать рассматриваемую задачу к такой задаче на заданном конечном интервале, которую можно исследовать известными методами теории нелинейных уравнений.
Библиогр. 6 назв.

УДК 517.927

Звягинцев А.И. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ РЕАКЦИЮ ОКИСЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КАТАЛИЗАТОРА // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.15-22.

Исследуется следующая краевая задача:

$$d_1((1-u_2)u_1'' + u_1 u_2'') = -a_1(1-u_1-u_2) + a_3 u_1 + u_1 u_2,$$

$$d_2(u_2 u_1'' + (1-u_1)u_2'') = -a_2(1-u_1-u_2)^{\gamma} + a_4 a_2^{\gamma} + u_1 u_2,$$

$$u_1'(-1) = u_2'(-1) = u_1'(1) = u_2'(1) = 0$$

с дополнительными условиями $0 \leq u_1, u_2$, $u_1 + u_2 \leq 1$.
Библиогр. 1 назв.

УДК 517.927

Виржбицкий Я.В. О ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ФИКСИРОВАННЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.23-34.

Изучается обобщенная разрешимость краевой задачи:

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x, x'), \\ Gx = g, \quad Hx = h, \\ \alpha \leq x \leq \beta, \end{cases}$$

где $f \in Car(I \times R^2, R)$, $Gx = G(x(a), x(b), x'(a), x'(b))$, $Hx = H(x(a), x(b), x'(a), x'(b)$ G и H непрерывны, α и β - обобщенные нижняя и верхняя функции уравнения , функция G фиксирована. Приведены условия разрешимости краевой задачи. Рассмотрены случаи $<\alpha(a)=\beta(a), \alpha(b)=\beta(b), \alpha'(a)=\beta'(a)>$, $<\alpha(a)=\beta(a), \alpha'(a)=\beta'(a), \alpha'(b)<\beta'(b)>$, $<\alpha(a)=\beta(a), \alpha'(a)=\beta'(a), \alpha'(b)=\beta'(b)>$ и симметричные им.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.927.4 : 956.4

Адьютов М.М. ОБ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.35-52.

Статья посвящена краевой задаче

$$y'' = -ps^{-1}y' + \beta(y^{\frac{1}{\beta}} - y),$$

$$\lim_{s \to 0} s^p y'(s) = 0, \quad \lim_{s \to s_f} s^p y'(s) = 0, \quad \lim_{s \to s_f} y(s) = 0,$$

$$s_f \leq +\infty, \qquad s \in (0, s_f),$$

возникающей при построении автомодельных решений уравнения

$$Ar^{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k_0}{r^{\nu}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{\nu} T^{\sigma} \frac{\partial T}{\partial r}\right) + q_0 Ar^{\kappa} T^{\beta}.$$

Доказано существование спектра различных решений в зависимости от параметров задачи. Установлены различные свойства решений.
Библиогр. 14 назв.

УДК 517.927.4 : 956.4

Лепин Л.А. О ЕДИНСТВЕННОСТИ МОНОТОННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО АВТОМОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.53-58.

Для $p>-1$, $\beta>1$ доказана единственность монотонного решения уравнение

$$y''=-ps^{-1}y'+\beta(y^{\frac{1}{\beta}}-y),$$

удовлетворяющего условиям $\lim\limits_{s\to 0} s^p y'(s)=0$, $y(s_f)=0$. $y'(s_f)=0$ при $s\in[0,s_f)$.

Библиогр. 6 назв.

УДК 517.927

Цепитис Я.В. О СУЩЕСТВОВАНИИ ОГРАНИЧЕННОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕСУММИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ / Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.59-68.

Для уравнения

$$x''=f(t,x,x')$$

при предположении, что $T\in(0,+\infty)$, либо $T=+\infty$, для любых $\delta\in(0,T)$, $\tau\in(\delta,T)$, $f\in Car([\delta,\tau]\times R^2,R)$ сформулированы в терминах обобщенных нижних и верхних функций условия существования ограниченного вместе с производной решения $x:[0,T)\to R$, удовлетворяющего условию $x(0)=0$.

Библиогр. 4 назв.

УДК 517.927

Лепин А.Я. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.69-78.

Доказано 16 теорем о разрешимости краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\leq x\leq\beta.$$

Библиогр. 3 назв.

УДК 548.732 : 519.6

Степанов А.А. ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РЕНТГЕНОВСКОЙ ДИАГНОСТИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.79-90

Рассматривается обратная краевая задача неразрушающей и бесконтактной диагностики кристаллов с постоянным градиентом деформаций. Приведены результаты обработки реальных экспериментальных данных, сравнение с разрушающими методами контроля.
Илл.4. Библиогр. 13 назв.

УДК 517.926

Мазаник С.А. ПРИВОДИМОСТЬ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНЫХ // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.91-98.

Получены достаточные условия приводимости периодических систем линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производных.
Библиогр. 5 назв.

УДК. 517.927

Беспалова С.А., Клоков Ю.А. ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФОЛКНЕРА-СКЕНА. I // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.99-108.

Исследуется существование решения краевой задачи:

$$x''' = P_2(x, x', x'')$$
$$x(0) = x_0,\ x'(0) = a,\ x'(\infty) = b,$$

где P_2 - полином второй степени вида $P_2(x, x', x'') = x''(a_0 + a_1 x + a_2 x' + a_3 x'') + b_0 + b_1 x + b_2 x' + b_{11} x^2 + b_{12} x x' + b_{22} x'^2$ $x_0, a, b, a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{22} \in R$.
Библиогр. 15 назв.

У

УДК 519.31

Садыбаев Ф.Ж. О МНОЖЕСТВАХ ТОНЕЛЛИ В ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.109-114.

Под множеством Тонелли понимается множество (замкнутое и имеющее меру нуль) точек интервала $[a,b]$, в которых принимает бесконечное значение производная абсолютно непрерывной функции $x(t)$, являющейся решением экстремальной задачи

$$J(x)=\int_a^b F(t,x,x')dt \to \min, \quad x(a)=\alpha, \ x(b)=\beta .$$

В терминах функции F приводятся условия пустоты множества Тонелли.

Указывается на связь вопроса о множествах Тонелли с вопросом об ограниченности производных ограниченных решений в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.927

Гризан Г.П. ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМ ОДУ ВТОРОГО ПОРЯДКА // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.115-121.

Изучается разрешимость сингулярной краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),$$

$$x(0)=0, \ x(\tau)=-Bx'(\tau)+b,$$

где $f\in Car((0,\tau]\times R^{2n})$, $b\in R^n$, $Bz\cdot z\geq 0 \ \forall z\in R^n, \tau>0$.
Библиогр. 4 назв.

УДК 517.929+519.67

Румянцев А.Н. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПРИМЕНЕНИЕМ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.122-130.

Описывается конструктивная схема исследования разрешимости двухточечной краевой задачи для уравнения с запаз-

дывающим аргументом, реализуемая с применением систем аналитических вычислений ЭВМ. Приводится иллюстрирующий пример.
Библиогр. 5 назв.

УДК 517.927

Лепина Э.И. О МАКСИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки.- 1988.- С.131-139.

Для краевой задачи

$$x''=f(t,x,x'),\ H_1x=h_1,\ H_2x=h_2,\ \alpha\leq x\leq\beta,$$

где α - нижняя, а β - верхняя функции, в терминах классов монотонности найдены теоремы о существовании максимального решения.
Библиогр. 10 назв.

УДК 517.927.4

Гудков В.В., Клиедере И.Р. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН В УПРУГИХ ТЕЛАХ // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988.- С.140-152.

Рассматривается краевая задача, возникающая при изучении распространения акустических волн в упругих телах. Представлена математическая модель изучаемого процесса, которая включает в себя три взаимосвязанные математические задачи: задачу на собственные числа для комплексной системы 9-го порядка обыкновенных дифференциальных уравнений с двухточечными краевыми условиями, задачу Коши для комплексной системы 3-го порядка и задачу на вычисление функционалов от решений предыдущих задач. Описана методика вычислений и приведены результаты расчетов.
Библиогр. 3 назв.